М. И. БАТЬ, Г. Ю. ДЖАНЕЛИДЗЕ, А. С. КЕЛЬЗОН

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Под редакцией Д. Р. МЕРКИНА

ТОМ II

ДИНАМИКА

ИЗДАНИЕ СЕДЬМОЕ, ПЕРЕРАБОТАННОЕ

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования в качестве учебного пособия для студентов высших технических учебных заведений

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1985

531
Б 28
УДК 531.1/3 (076)

Бать М. И., Джанелидзе Г. Ю., Кельзон А. С. **Теоретическая механика в примерах и задачах.**/Под ред. Д. Р. Меркина. Т. II. Динамика.— 7-е изд., перераб. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985. — 560 с.

Рассматриваются следующие разделы динамики: дифференциальные уравнения динамики материальной точки (две основные задачи динамики, искусственные спутники Земли, невесомость, колебания материальной точки, электромеханические аналогии, динамика относительного движения), моменты инерции твердых тел, общие теоремы динамики, динамика плоского движения твердого тела, приближенная теория гироскопов, динамика несвободной материальной системы (метод кинетостатики, давление вращающегося твердого тела на ось вращения, принцип возможных перемещений, общее уравнение динамики, уравнения Лагранжа второго рода, электромеханические системы), удар. Глава XI посвящена краткому обзору методов решения задач динамики. Этот обзор рассчитан на оказание помощи читателю при выборе законов и теорем, применение которых наиболее целесообразно в ходе решения конкретных задач.

Для студентов втузов очной и заочной систем обучения, а также для самостоятельного изучения основ теоретической механики.

Табл. 4, илл. 280.

Рецензент:
Кафедра теоретической механики Московского высшего технического училища им. Н. Э. Баумана

Б $\frac{1703020000-011}{053(02)-85}$ 77—84

© Издательство «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, 1975; с изменениями, 1985

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к седьмому изданию 6

РАЗДЕЛ ТРЕТИЙ

ДИНАМИКА

Законы динамики 9

Глава VIII. Дифференциальные уравнения динамики материальной точки 12

§ 1. Основные формы дифференциальных уравнений динамики материальной точки 12

§ 2. Определение сил по заданному движению (прямая задача динамики материальной точки) 13

§ 3. Определение движения по заданным силам (обратная задача динамики материальной точки) 26

§ 4. Колебательное движение 64

1. Линейная восстанавливающая сила (64). 2. Свободные колебания материальной точки (65). 3. Влияние силы сопротивления на свободные колебания материальной точки (67). 4. Вынужденные колебания материальной точки. Влияние силы сопротивления, пропорциональной скорости, на вынужденные колебания материальной точки (95). 5. Электромеханические аналогии (125).

§ 5. Относительное движение 127

Глава IX. Общие теоремы динамики 155

§ 1. Геометрия масс 155

1. Центр масс материальной системы (155). 2. Моменты инерции твердых тел (157).

§ 2. Внешние и внутренние силы. Дифференциальные уравнения движения материальной системы 173

§ 3. Теорема о движении центра масс материальной системы. Случай сохранения скорости центра масс 175

1. Теорема о движении центра масс материальной системы (175). 2. Случай сохранения скорости центра масс материальной системы (188).

§ 4. Теорема об изменении главного вектора количеств движения материальной системы 192

1. Импульс силы. Количество движения материальной точки. Главный вектор количеств движения материальной системы (192). 2. Теорема об изменении количества движения материальной точки (в интегральной форме) (196). 3. Теорема об изменении главного вектора количеств движения мате-

риальной системы (в интегральной форме) (199). 4. Теорема об изменении главного вектора количеств движения материальной системы в приложении к сплошным средам (теорема Эйлера) (203).

§ 5. Теорема об изменении главного момента количеств движения материальной системы 207

1. Момент количества движения материальной точки. Главный момент количеств движения материальной системы (207). 2. Теорема об изменении момента количества движения материальной точки (212). 3. Случай сохранения момента количества движения материальной точки (217). 4. Теорема об изменении главного момента количеств движения материальной системы (219). 5. Случай сохранения главного момента количеств движения материальной системы (221). 6. Теорема об изменении главного момента количеств движения материальной системы в относительном движении по отношению к центру масс (227). 7. Случай сохранения главного момента количеств движения материальной системы в относительном движении по отношению к центру масс системы (231). 8. Дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси (232).

§ 6. Динамика плоского движения твердого тела 258

§ 7. Теорема об изменении кинетической энергии материальной системы 280

1. Работа силы (280). 2. Кинетическая энергия материальной точки и материальной системы (290). 3. Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки в интегральной форме (305). 4. Теорема об изменении кинетической энергии материальной системы в интегральной форме (310). 5. Теорема об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме (340). 6. Потенциальная энергия (344). 7. Закон сохранения механической энергии (347).

Глава X. Динамика несвободной материальной системы 351

§ 1. Классификация связей. Число степеней свободы. Классификация сил 351

§ 2. Метод кинетостатики 355

1. Силы инерции. Приведение сил инерции к простейшему виду (355). 2. Метод кинетостатики (359).

§ 3. Давление вращающегося твердого тела на ось вращения 373

§ 4. Принцип возможных перемещений 384

1. Возможные перемещения. Идеальные связи (384). 2. Принцип возможных перемещений (388).

§ 5. Общее уравнение динамики материальной системы 407

§ 6. Уравнения Лагранжа второго рода 423

1. Обобщенные координаты. Обобщенные силы (423). 2. Общее уравнение динамики в обобщенных координатах. Уравнения Лагранжа второго рода (439). 3. Электромеханические аналогии (480).

§ 7. Приближенная теория гироскопов 487

1. Гироскоп с тремя степенями свободы (487). 2. Гироскопический момент (496).

Глава XI. Краткий обзор методов решения задач динамики 502

§ 1. Вводные замечания 502

§ 2. Задачи динамики материальной точки 502

§ 3. Задачи динамики материальной системы 507

§ 4. Задачи динамики твердого тела 524

1. Поступательное движение твердого тела (524). 2. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси (525). 3. Плоское движение твердого тела (527). 4. Вращение твердого тела вокруг неподвижной точки и движение свободного твердого тела (530).

§ 5. Общие замечания по решению задач динамики 530

Глава XII. **Удар** 532

§ 1. Удар двух тел. Удар тела о неподвижную преграду 532

§ 2. Теорема об изменении главного момента количества движения материальной системы в приложении к мгновенным силам 542

§ 3. Потеря кинетической энергии при ударе двух тел 546

§ 4. Удар по телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси 547

Предметный указатель 556

Приложение. Международная система единиц (СИ) 559

ПРЕДИСЛОВИЕ К СЕДЬМОМУ ИЗДАНИЮ

Немногочисленные законы и теоремы, лежащие в основе теоретической механики, находят весьма разнообразные и обширные применения. Поэтому у лиц, изучающих или использующих в своей деятельности теоретическую механику, наибольшие затруднения вызывает приложение общих положений теории к решению конкретных задач.

В обширной литературе, посвященной теоретической механике, имеется мало книг, ставящих своей целью научить читателя методам решения задач. Между тем потребность в этих руководствах ощущается как студентами в процессе обучения (в особенности студентами заочных и вечерних факультетов), так и инженерами и техниками в их практической деятельности.

Авторы настоящей книги, опираясь на многолетний опыт преподавания теоретической механики в Ленинградском политехническом институте им. М. И. Калинина и Ленинградском Высшем инженерном морском училище им. адмирала С. О. Макарова, поставили своей целью создание руководства по решению задач.

В соответствии с этим замыслом в книге даны в конспективной форме лишь краткие сведения из теории — предполагается, что для ее изучения читатель пользуется одним из курсов теоретической механики.

Из большого числа учебников по этому предмету, опубликованных в СССР, отметим, прежде всего, курс: Лойцянский Л. Г., Лурье А. И. Теоретическая механика, т. I, изд. 8-е. — М.: Наука, 1983; т. II, изд. 6-е. — М.: Наука, 1983 (книга, определившая современные традиции преподавания теоретической механики во втузах и предназначенная для лиц, изучающих этот предмет по полной программе), а также рекомендуем учебники: Бутенин Н. В., Лунц Я. Л., Меркин Д. Р. Курс теоретической механики, т. I, изд. 3-е. — М.: Наука, 1979; т. II, изд. 2-е. — М.: Наука, 1979; Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики. — М.: Физматгиз, изд. 3-е, 1963 и последующих лет; Яблонский А. А., Никифорова В. М. Курс теоретической механики, т. I. — М.: Высшая школа, изд. 2-е, 1964 и последующих лет; Яблонский А. А. Курс теоретической механики, т. II. — М.: Высшая школа, изд. 2-е, 1964 и последующих лет.

Наиболее эффективным путем обучения искусству приложения методов теоретической механики является не облегчение формального

заучивания правил и приемов (чему часто способствуют обширные методические указания), а показ их в действии. Ввиду этого в руководстве основное внимание уделено решению конкретных задач, специально составленных для того, чтобы, с одной стороны, избежать разбора задач, входящих в сборник И. В. Мещерского и иные распространенные в СССР задачники, а с другой — дать возможность после изучения книги (или ее разделов) самостоятельно решать различные задачи.

Для облегчения активного изучения материала (а только такое изучение и имеет смысл) в каждом разделе книги даны краткие рекомендации о последовательности решения тех или иных типов задач и лишь после этого приведено подробное рассмотрение подобных задач, причем зачастую сравнены и оценены различные методы решения. Решения многих задач являются одновременно примерами инженерных расчетов.

Предполагается, что параллельно с разбором материала по руководству читатель на основе изученного самостоятельно решает соответствующие задачи и тем самым научается применять полученные знания.

В руководстве приведены списки рекомендованных к самостоятельному решению задач из книги: М е щ е р с к и й И. В. Сборник задач по теоретической механике, изд. 35-е. — М.: Наука, 1981.

Сравнительно большой объем руководства объясняется тем, что оно составлено в расчёте как на последовательное изучение, так и на выборочное использование. Последний способ и является главной формой применения ввиду различия объема материала и порядка его прохождения в различных высших учебных заведениях.

Первое издание этого учебного пособия вышло в свет в двух томах в 1961 году. Первый том был посвящен статике и кинематике, а второй — динамике. В 1-м издании второй том был написан М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе и А. С. Кельзоном.

В 1964 г. авторский коллектив понес невосполнимую утрату в лице безвременно скончавшегося профессора Г. Ю. Джанелидзе, заведующего кафедрой теоретической механики Ленинградского политехнического института им. М. И. Калинина, соавтора и первого редактора книги.

Вплоть до пятого издания первого тома и четвертого издания второго тома книга переиздавалась без существенных изменений.

За прошедшие годы выявилась необходимость внести в книгу ряд изменений и дополнений. Поэтому пятое издание первого тома и четвертое издание второго тома подверглись переработке. Прежде всего, был пересмотрен весь текст и внесены необходимые исправления. Некоторые задачи заменены новыми. Во многих случаях даны более подробные решения.

Идя навстречу многочисленным пожеланиям, авторы внесли новые главы, освещающие дополнительные разделы курса теоретической механики. Это потребовало увеличения объема книги, в связи

с чем книга стала выходить в трех томах. Первые два тома охватывают материал, отвечающий основному курсу теоретической механики, а третий содержит дополнительные главы. В первый том включены новые параграфы: кинематика колебательных движений и общий случай движения твердого тела. Из второго в третий том были перенесены главы: динамика твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки, и теория малых движений системы с конечным числом степеней свободы. В шестое издание второго тома добавлены примеры в § 2 главы IX, в § 1 главы X и в пункт 1 § 4 главы X, поясняющие классификации сил и связей.

При подготовке седьмого издания был пересмотрен весь текст и внесены необходимые исправления. Менее удачные задачи заменены новыми. Расширена глава XI «Краткий обзор методов решения задач динамики». Исключен пункт 3 § 4 главы X «Рычаг Жуковского».

В книге применена следующая нумерация задач и рисунков — первое число означает номер главы, второе — номер задачи (рисунка) в этой главе.

Все величины, приводимые в книге, даются в системе единиц СИ—Международной системе единиц, введенной в СССР с 1 января 1982 года в соответствии с ГОСТ 8.417—81 (СТ СЭВ 1052—78) «Государственная система обеспечения единства измерений. Единицы физических единиц». В конце книги приведена таблица основных, дополнительных и производных единиц геометрических, кинематических, статических и динамических величин этой системы.

Авторы считают своим приятным долгом принести благодарность К. С. Колесникову, прочитавшему рукопись и сделавшему ценные замечания, редактору книги Д. Р. Меркину, а также всем лицам, приславшим ценные указания и критические замечания.

Хочется надеяться, что и впредь читатели будут помогать совершенствованию книги своими предложениями, которые будут с благодарностью рассмотрены.

М. И. Бать, *А. С. Кельзон*

РАЗДЕЛ ТРЕТИЙ

ДИНАМИКА

ЗАКОНЫ ДИНАМИКИ

Динамикой называется раздел теоретической механики, в котором изучаются движения материальных тел в зависимости от сил, их вызывающих.

В статике изучались задачи о приведении систем сил к простейшему виду и относительном покое материальных тел, в кинематике рассматривались задачи о геометрических характеристиках механического движения. В динамике — главном разделе курса — на основе сведений из статики и кинематики, а также законов динамики решаются задачи о связи сил и движений.

Остановимся на важнейших понятиях динамики.

Материальной точкой называется материальное тело, вращательными движениями которого, по сравнению с поступательными, можно пренебречь. Таким образом, не обязательно понимать под материальной точкой тело очень малых размеров. Твердое тело, движущееся поступательно, рассматривается как материальная точка.

Материальная точка называется *свободной*, если на ее движение не наложено никаких ограничений.

Несвободной называется материальная точка, на которую наложены связи, ограничивающие ее движение.

Законы динамики описывают механическое движение материальных тел по отношению к так называемым «неподвижным» или «абсолютным» осям координат и по отношению к осям, которые движутся поступательно, равномерно и прямолинейно по отношению к неподвижным (инерциальные оси). Начало абсолютной системы координат принимается в центре Солнца, а оси направляются на отдаленные звезды. Конечно, в природе, где материальные тела находятся во взаимодействии и движении, нет неподвижных осей координат. Однако в зависимости от требований, предъявляемых к результатам подсчетов, можно и другие координатные системы приближенно считать «неподвижными». Так, при решении многих технических задач координатные оси, связанные с Землей, можно считать «неподвижными».

Применение законов динамики к изучению механических движений материальных тел по отношению к движущейся системе отсчета рассмотрено ниже, в главе VIII, § 5.

В основе динамики, как и других наук, лежат физические законы, подтвержденные многовековой практической деятельностью человека. Их установление явилось результатом длительного пути раз-

вития механики. Важнейшее значение имели исследования Галилея (1564—1642) и Ньютона (1643—1727).

Закон первый (*закон инерции*). Изолированная материальная точка сохраняет свою скорость неизменной по величине и по направлению. Этот закон фактически утверждает существование инерциальных систем.

Материальные тела движутся с течением времени в пространстве, взаимодействуя друг с другом. Количественные меры этих механических взаимодействий называются *силами*. Материальная точка называется изолированной в том случае, когда действиями на нее всех прочих материальных тел можно пренебречь (это понятие является, конечно, абстракцией). Таким образом, в реальных условиях движение материальной точки в тех случаях, когда действием на нее сил можно пренебречь, происходит без ускорения, т. е. равномерно и прямолинейно, либо материальная точка находится в покое.

Инерцией называется свойство материальной точки оказывать сопротивление изменению ее скорости.

Закон второй (*основной закон динамики*). Ускорение, сообщаемое свободной материальной точке приложенной к ней силой, имеет направление силы и по величине пропорционально силе:

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{w}.$$

Силы характеризуются не скоростями точек, а изменениями скоростей, т. е. ускорениями. Из основного закона динамики $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{w}$ следует, что при $\boldsymbol{F} = 0$ ускорение $\boldsymbol{w} = 0$.

Величина m, стоящая множителем при ускорении в основном законе динамики, называется *массой*. Эта физическая величина характеризует степень сопротивляемости материальной точки изменению ее скорости, т. е. является мерой инертности материальной точки. Следовательно, масса оказывается одной из характеристик движущейся материи (из других характеристик можно назвать: протяженность, непроницаемость, упругость и т. д.).

В классической механике изучаются движения материальных тел, происходящие со скоростями, малыми по сравнению со скоростью света. При этом масса считается величиной постоянной (в механике теории относительности масса является величиной переменной, зависящей от скорости движения материальной точки).

В системе единиц СИ единицей длины является метр, единицей массы — килограмм, единицей времени — секунда. Сила является производной единицей, измеряемой в ньютонах (Н).

Закон третий (*закон равенства действия и противодействия*). Силы, с которыми два тела действуют друг на друга, равны по модулю и направлены в противоположные стороны по одной прямой.

Следует иметь в виду, что силы, именуемые действием и противодействием, приложены к разным материальным точкам. Так, в случае несвободной материальной точки к точке приложено «действие»,

а к связи, наложенной на материальную точку, приложено «противодействие».

Закон четвертый (*закон независимости действия сил*). При одновременном действии нескольких сил ускорение материальной точки равно векторной сумме ускорений, которые имела бы эта точка при действии каждой из сил в отдельности:

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 + \cdots + \boldsymbol{w}_n,$$

где $\boldsymbol{w}_1 = \frac{\boldsymbol{F}_1}{m}$, $\boldsymbol{w}_2 = \frac{\boldsymbol{F}_2}{m}$, $\ldots$, $\boldsymbol{w}_n = \frac{\boldsymbol{F}_n}{m}$.

Это значит, что при определении ускорения материальной точки можно пользоваться методом суперпозиции (наложения). Следует иметь в виду, что при определении скорости материальной точки аналогичная суперпозиция не имеет места, т. е. скорость материальной точки не равна векторной сумме скоростей, которые имела бы эта точка при действии каждой из сил в отдельности.

ГЛАВА VIII

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

§ 1. Основные формы дифференциальных уравнений динамики материальной точки

Ускорение $\boldsymbol{w}$ материальной точки массы m, движущейся под действием приложенных к ней сил $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, ..., $\boldsymbol{F}_n$, определяется с помощью основного закона динамики в сочетании с законом независимости действия сил:

$$m\boldsymbol{w} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \cdots + \boldsymbol{F}_n.$$

Дифференциальные уравнения движения материальной точки в проекциях на оси неподвижных декартовых координат имеют вид

$$m\ddot{x} = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}, \quad m\ddot{y} = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}, \quad m\ddot{z} = \sum_{k=1}^{n} F_{kz}; \tag{1*}$$

здесь $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$ — проекции ускорения $\boldsymbol{w}$, а F_{kx}, F_{ky} и F_{kz} — проекции силы $\boldsymbol{F}_k$ на соответствующие оси декартовых координат.

Дифференциальные уравнения движения материальной точки в проекциях на оси натурального триэдра записываются в форме

$$m\frac{dv_\tau}{dt} = \sum F_{k\tau}, \quad m\frac{v^2}{\rho} = \sum F_{kn}, \quad 0 = \sum F_{kb}; \tag{2*}$$

здесь v_τ — проекция скорости на направление касательной к траектории, v — модуль скорости, ρ — радиус кривизны траектории в данной точке, $\boldsymbol{F}_{k\tau}$, F_{kn}, F_{kb} — проекции силы $\boldsymbol{F}_k$ на оси натурального триэдра ($\boldsymbol{\tau}$ — касательная, $\boldsymbol{n}$ — главная нормаль, $\boldsymbol{b}$ — бинормаль).

Как следует из последнего уравнения, проекция равнодействующей сил, приложенных к материальной точке, на бинормаль равна нулю, т. е. траектория располагается так, что равнодействующая сила оказывается лежащей в соприкасающейся плоскости, проведенной в данной точке траектории.

Дифференциальные уравнения плоского движения материальной точки в полярных координатах имеют вид

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = \sum_{k=1}^{n} F_{kr}, \quad \frac{m}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = \sum_{k=1}^{n} F_{k\varphi}; \tag{3*}$$

здесь r — радиус-вектор точки, φ — полярный угол (рис. 8.1).

Дифференциальные уравнения движения материальной точки записываются соответственно выбранной системе координат. Так,

дифференциальные уравнения можно составить в цилиндрических, сферических и других криволинейных координатах. Ниже, в главе X, § 6, приводятся дифференциальные уравнения движения материальной точки, отнесенные к любой системе координат.

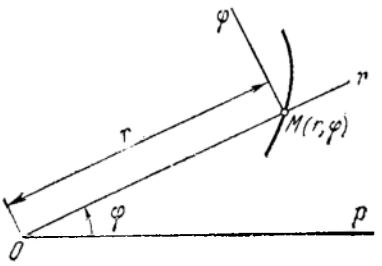


Рис. 8.1.

С помощью дифференциальных уравнений движения материальной точки можно решать две основные задачи динамики: прямую и обратную. *Прямой* называется задача, в которой по заданным движению и массе материальной точки определяется равнодействующая сил, приложенных к этой точке. *Обратной* называется задача, в которой по заданным силам и массе материальной точки определяется ее движение.

Следующий параграф посвящен решению прямых задач динамики материальной точки.

§ 2. Определение сил по заданному движению (прямая задача динамики материальной точки)

Если даны уравнения движения материальной точки массы m в декартовых координатах: $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$, то проекции F_x, F_y и F_z силы

$$\boldsymbol{F} = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} + F_z\boldsymbol{k},$$

вызывающей это движение, определяются по формулам:

$$F_x = m\ddot{x}, \quad F_y = m\ddot{y}, \quad F_z = m\ddot{z}, \tag{1*}$$

откуда

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2},$$

$$\cos(\widehat{x, F}) = \frac{F_x}{F}, \quad \cos(\widehat{y, F}) = \frac{F_y}{F}, \quad \cos(\widehat{z, F}) = \frac{F_z}{F}.$$

Таким образом, прямая задача динамики материальной точки легко решается посредством дифференцирования заданных уравнений движения точки.

Если дано уравнение движения материальной точки массы m по траектории, т. е. $\sigma = f(t)$, то проекции F_τ, F_n и F_b силы

$$\boldsymbol{F} = F_\tau\boldsymbol{\tau} + F_n\boldsymbol{n} + F_b\boldsymbol{b},$$

вызывающей это движение, определяются по формулам:

$$F_\tau = m\frac{dv_\tau}{dt}, \quad F_n = m\frac{v^2}{\rho}, \quad F_b = 0, \tag{2*}$$

откуда

$$F = \sqrt{F_\tau^2 + F_n^2}, \quad \cos(\widehat{\tau, F}) = \frac{F_\tau}{F}, \quad \cos(\widehat{n, F}) = \frac{F_n}{F}, \quad \cos(\widehat{b, F}) = 0.$$

В формулах (2*) $v_\tau = d\sigma/dt$.

Если даны уравнения плоского движения материальной точки массы m в полярных координатах $r = f_1(t)$, $\varphi = f_2(t)$, то проекции F_r и F_φ силы $\boldsymbol{F}$, вызывающей это движение, определяются по формулам:

$$F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2), \qquad F_\varphi = \frac{m}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}), \tag{3*}$$

откуда

$$F = \sqrt{F_r^2 + F_\varphi^2}, \quad \cos(\widehat{r, F}) = \frac{F_r}{F}, \quad \cos(\widehat{\varphi, F}) = \frac{F_\varphi}{F}.$$

Сила, приложенная к материальной точке, называется *центральной*, если линия ее действия проходит во время движения через неподвижную точку, называемую *центром*. Сила, направленная к неподвижному центру, называется силой *притяжения*. Сила, направленная от неподвижного центра, называется силой *отталкивания*.

Движение материальной точки под действием центральной силы происходит в плоскости, проходящей через радиус-вектор и начальную скорость точки. Для его исследования удобно ввести полярные координаты и использовать формулу Бине

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = -\frac{r^2}{4mC^2}F_r, \tag{4*}$$

где C — секториальная скорость точки, которая при наличии центральной силы постоянна: $C = \dot{S} = r^2\dot{\varphi}/2$. (Секториальной скоростью называется производная по времени от площади S, описываемой радиусом-вектором $\boldsymbol{r}$ движущейся точки.)

Применение формулы Бине позволяет определить центральную силу по данному уравнению орбиты (прямая задача). Если проекция F_r оказывается положительной, то центральная сила является силой отталкивания, если — отрицательной, то — силой притяжения.

У к а з а н и е. Прямые задачи динамики несвободной материальной точки, в которых требуется определить активную силу или реакцию связи, рекомендуется решать в следующем порядке:

1) изобразить на рисунке материальную точку в текущем положении и приложенные к ней активные силы;

2) применив закон освобождаемости от связей, изобразить соответствующие реакции связей;

3) выбрать систему отсчета, если она не указана в условии задачи;

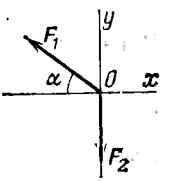
4) определить по заданному закону движения ускорение материальной точки и найти его проекции на выбранные оси координат;

5) составить дифференциальные уравнения движения материальной точки, соответствующие принятой системе отсчета;

6) из системы составленных уравнений определить искомые величины.

Если при решении прямой задачи динамики материальной точки требуется определить равнодействующую сил, приложенных к этой точке, то решение задачи сводится к дифференцированию заданных уравнений движения точки с последующим использованием формул (1*), (2*) или для плоского движения формул (3*).

Задача 8.1. Материальная точка, находящаяся под действием двух сил $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$, движется вдоль оси x (см. рисунок).



К задаче 8.1.

Какому условию должен удовлетворить модуль силы $\boldsymbol{F}_2$ для того, чтобы точка двигалась по прямой?

Р е ш е н и е. Для прямолинейного движения материальной точки, необходимо и достаточно, чтобы ее начальная скорость и равнодействующая сил во все время движения лежали на этой прямой. Поэтому сумма проекций сил на перпендикулярную к этой прямой ось y должна быть равна нулю: $\sum F_{ky} = 0$. В данном случае имеем $F_1 \sin\alpha - F_2 = 0$, откуда $F_2 = F_1 \sin\alpha$.

Задача 8.2. Материальная точка массы m движется согласно уравнениям $x = at$, $y = bt$, где a и b — постоянные.

Определить силу, вызывающую это движение.

Р е ш е н и е. Проекции искомой силы на оси декартовых координат определяем по формулам $F_x = m\ddot{x}$ и $F_y = m\ddot{y}$. Воспользовавшись заданными уравнениями движения, находим $\ddot{x} = \ddot{y} = 0$. Следовательно, $F_x = F_y = 0$, т. е. точка движется по инерции.

Эту задачу можно решить и иначе, определив траекторию и скорость точки. Точка движется по прямой $y = bx/a$ с постоянной скоростью $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Следовательно, согласно закону инерции, $\boldsymbol{F} = 0$.

Задача 8.3. Материальная точка массы m движется согласно уравнениям $x = a\cos kt$, $y = b\sin kt$.

Определить силу $\boldsymbol{F}$, вызывающую это движение, если известно, что сила зависит только от положения точки.

Р е ш е н и е. Проекции силы $\boldsymbol{F}$, приложенной к материальной точке, определяются по формулам $F_x = m\ddot{x}$, $F_y = m\ddot{y}$. В данном случае

$$\ddot{x} = -ak^2\cos kt, \quad \ddot{y} = -bk^2\sin kt.$$

Следовательно,

$$F_x = -mak^2\cos kt, \quad F_y = -mbk^2\sin kt.$$

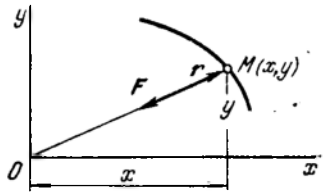
Воспользовавшись уравнениями движения точки, получим

$$F_x = -mk^2x, \quad F_y = -mk^2y.$$

Модуль силы $\boldsymbol{F}$ равен

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = mk^2\sqrt{x^2 + y^2} = mk^2 r,$$

где r — модуль радиуса-вектора материальной точки $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM}$.



К задаче 8.3.

Направление силы $\boldsymbol{F}$ определяем с помощью направляющих косинусов:

$$\cos(\widehat{x, F}) = \frac{F_x}{F} = -\frac{x}{r},$$

$$\cos(\widehat{y, F}) = \frac{F_y}{F} = -\frac{y}{r}.$$

Так как x/r и y/r определяют углы, образуемые соответственно осями x и y с радиусом-вектором r, то сила $\boldsymbol{F}$ направлена от M к O. Следовательно, данная материальная точка движется под действием силы притяжения к центру O, равной по модулю $F = k^2 mr$. Эта сила называется центральной.

Задача 8.4. Материальная точка массы m движется по окружности радиуса a согласно уравнению $\sigma = bt$.

Определить силу, вызывающую это движение (σ — дуговая координата, b — постоянная величина).

Р е ш е н и е. Воспользуемся осями натурального триэдра τ, n и b. Проекции искомой силы на эти оси определяются по формулам

$$F_\tau = m\frac{dv_\tau}{dt}, \qquad F_n = m\frac{v^2}{\rho}, \qquad F_b = 0.$$

Учитывая, что проекция скорости точки на касательную τ равна $v_\tau = d\sigma/dt$, находим, что $v_\tau = b$. Следовательно,

$$w_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} = 0, \qquad w_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{b^2}{a}.$$



К задаче 8.5.

Итак, $F_\tau = 0$, $F_n = mb^2/a$, $F_b = 0$, т. е. сила $\boldsymbol{F}$, вызывающая заданное движение материальной точки, направлена по радиусу окружности к ее центру и по модулю равна mb^2/a.

Задача 8.5. Человек массы m находится в кабине пассажирского лифта, движущегося вниз с ускорением $w = \alpha g$, где $0 < \alpha < 1$, g — ускорение силы тяжести.

Найти давление человека на дно кабины. Определить также ускорение лифта, при котором человек будет находиться в состоянии невесомости.

Р е ш е н и е. К человеку приложена активная сила — его сила тяжести $\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{g}$. Применив закон освобождаемости от связей, мысленно отбросим дно кабины, заменив его действие на человека реакцией $\boldsymbol{N}$, направленной вертикально вверх. Направим ось x по вертикали вниз (см. рисунок).

Запишем дифференциальное уравнение движения материальной точки (человек схематизирован в виде точки) в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = P - N. \qquad (1)$$

Так как $\ddot{x} = w = \alpha g$, то из уравнения (1) получим

$$N = P - m\ddot{x} = mg\,(1 - \alpha). \qquad (2)$$

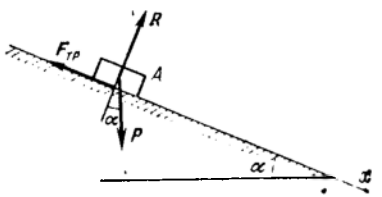
Учитывая, что $0 < \alpha < 1$, имеем $N < mg$. Искомая сила давления равна по модулю силе N и направлена в противоположную сторону. Если ускорение w лифта направлено вверх, т. е. $\ddot{x} = -w = -\alpha g$, то формула (2) принимает вид $N = mg\,(1 + \alpha)$, т. е. $N > mg$.

Рассмотрим случай, когда сила давления, а значит, и сила реакции N равны нулю. Из формулы (2) при $N = 0$ имеем $\alpha = 1$, т. е. $w = g$. Итак, при свободном падении лифта с ускорением силы тяжести g, давление человека на дно кабины отсутствует. Это состояние называется *невесомостью*. При невесомости отсутствуют взаимные давления отдельных частей тела человека. Это и вызывает у него необычные ощущения. Если бы при этом человек стоял на пружинных весах, то стрелка весов находилась бы на нулевой отметке. Показание весов не изменится, если на плечи человека положить дополнительный груз.

При состоянии невесомости все точки тела имеют равные ускорения.

В заключение отметим, что состояние невесомости имеет место не только при свободном падении (см. задачу 8.12).

Задача 8.6. Груз A спускается вниз по негладкой наклонной плоскости, расположенной под углом α к горизонту, двигаясь согласно уравнению $x = bgt^2$, где g — ускорение силы тяжести, а b — постоянный положительный коэффициент. Определить модуль силы трения скольжения груза о плоскость.



К задаче 8.6.

Р е ш е н и е. Силу тяжести груза обозначим через P. К грузу приложены три силы: сила тяжести груза P и две составляющие R и $F_{тр}$ реакции наклонной плоскости. Нормальная реакция R направлена перпендикулярно к наклонной плоскости, а сила трения скольжения $F_{тр}$ — в сторону, противоположную скорости груза, т. е. вдоль наклонной плоскости вверх; $P = mg$.

Составим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = P \sin\alpha - F_{тр}. \qquad (1)$$

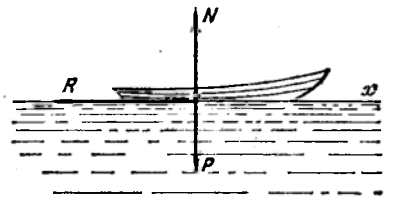
Так как $x = bgt^2$, то $\ddot{x} = 2bg$. Теперь уравнение (1) принимает вид

$$2bP = P \sin\alpha - F_{тр},$$

откуда определяем искомую величину силы трения скольжения $F_{тр}$ груза о наклонную плоскость:

$$F_{тр} = mg\,(\sin\alpha - 2b).$$

Задача 8.7. Определить силу сопротивления воды движению лодки массы m, если ее движение происходит согласно уравнению $x = \frac{m}{a} v_0 \left(1 - e^{-\frac{a}{m}t}\right)$, где v_0 — начальная скорость движения, a — постоянный коэффициент. Сила сопротивления движению является функцией только скорости лодки.



К задаче 8.7.

Р е ш е н и е. К лодке приложены силы: mg — сила тяжести лодки, N — нормальная реакция воды, R — сила сопротивления воды движению лодки, направленная в сторону, противоположную ее движению.

Проекция скорости лодки на ось x равна

$$v_x = \dot{x} = v_0 e^{-\frac{a}{m}t}. \tag{1}$$

Проекция ускорения лодки на ось x имеет вид

$$w_x = \ddot{x} = -\frac{a}{m} v_0 e^{-\frac{a}{m}t}. \tag{2}$$

Запишем дифференциальное уравнение движения лодки в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = R_x.$$

Воспользовавшись формулой (2), находим

$$R_x = -av_0 e^{-\frac{a}{m}t}.$$

Так как, по условию, сила сопротивления R является функцией скорости лодки, то, учитывая формулу (1), получим $R_x = -av_x$.

Задача 8.8. Возможно ли равномерное движение свободной материальной точки по криволинейной траектории под действием двух сил F_1 и F_2, изображенных на рисунке?

Р е ш е н и е. Запишем дифференциальное уравнение движения в проекции на касательную т:

$$m\frac{dv_\tau}{dt} = \sum_{k=1}^{n} F_{k\tau}.$$

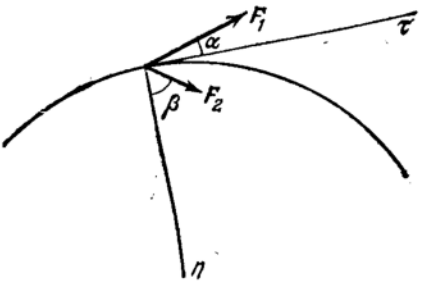
При равномерном движении проекция v_τ ее скорости v на касательную τ постоянна: $v_\tau = \text{const}$. Поэтому $dv_\tau/dt = 0$ и из уравнения следует:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{k\tau} = 0,$$

т. е. для того, чтобы точка двигалась равномерно по криволинейной траектории, сумма проекций на касательную τ приложенных к ней сил должна быть равна нулю. В данном случае имеем

$$\sum F_{k\tau} = F_1 \cos\alpha + F_2 \sin\beta \neq 0.$$

Значит, под действием сил $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$ равномерное движение точки по кривой невозможно. Точка будет двигаться неравномерно.



К задаче 8.8.

Задача 8.9. Использовав решение предыдущей задачи, выяснить, при любых ли значениях модуля силы $\boldsymbol{F}_2$ возможно движение свободной материальной точки по изображенной траектории?

Р е ш е н и е. Запишем дифференциальное уравнение движения материальной точки в проекции на главную нормаль n:

$$\frac{mv^2}{\rho} = \sum F_{kn}.$$

Так как $mv^2/\rho > 0$, то должно выполняться условие $\sum F_{kn} > 0$. Значит, точка может двигаться по изображенной на рисунке траектории лишь при $\sum F_{kn} > 0$. Для данных сил $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$ имеем

$$\sum F_{kn} = -F_1 \sin\alpha + F_2 \cos\beta > 0,$$

т. е. должно быть удовлетворено неравенство: $F_2 > \dfrac{F_1 \sin\alpha}{\cos\beta}$. При $F_2 = \dfrac{F_1 \sin\alpha}{\cos\beta}$ траекторией является прямая, а при $F_2 < \dfrac{F_1 \sin\alpha}{\cos\beta}$ вогнутость траектории обращена в противоположную сторону.

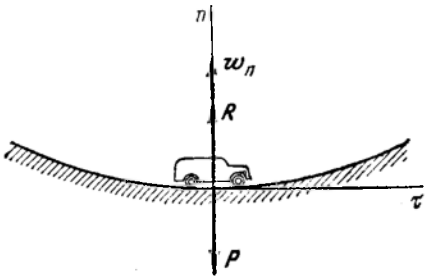
Задача 8.10. Автомобиль массы 1210 кг движется по дну оврага с постоянной по модулю скоростью $v = 36$ км/ч.

Определить давление автомобиля на дно оврага в наинизшей точке. Радиус кривизны траектории ρ в этой точке равен 50 м. Автомобиль считать точечной массой. Силой сопротивления движению пренебречь.

Р е ш е н и е. Воспользуемся осями натурального триэдра, направив ось τ по горизонтали направо и ось n по вертикали вверх. К автомобилю, принимаемому за точечную массу, приложены две силы: сила тяжести $\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{g}$ и нормальная реакция $\boldsymbol{R}$ грунта, направленная вдоль главной нормали по вертикали вверх.

Применим дифференциальное уравнение движения материальной точки в проекции на главную нормаль n:

$$m\frac{v^2}{\rho}=\sum F_{kn}.$$



К задаче 8.10.

В данном случае

$$m\frac{v^2}{\rho}=R-P,$$

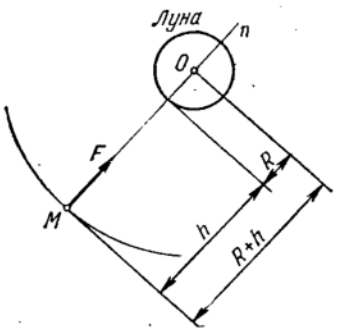
откуда

$$R=mg+m\frac{v^2}{\rho}.$$

Подставив численные значения, получим, что $R = 14{,}45$ кН.

Искомое давление автомобиля на дно оврага направлено противоположно нормальной реакции $\boldsymbol{R}$ и равно ей по модулю. Заметим, что оно больше веса автомобиля.

Задача 8.11. В программу освоения человеком Луны входит создание промежуточных станций — искусственных спутников Луны. Найти зависимость скорости v искусственного спутника от его высоты h над поверхностью Луны. Вычислить также первую космическую скорость у поверхности Луны и скорость движения Луны вокруг Земли.



К задаче 8.11.

Считать, что спутник движется вокруг Луны по окружности. Сила притяжения спутника Луной обратно пропорциональна квадрату расстояния до центра Луны. Ускорение силы тяжести a на поверхности Луны равно $a = 1{,}64$ м/с^2. Радиус R Луны равен 1760 км. Расстояние от Земли до Луны равно 384 000 км. Радиус Земли равен 6370 км. Притяжением спутника Землей пренебречь.

Р е ш е н и е. На рисунке искусственный спутник изображен точкой M.

Движение спутника происходит под действием силы притяжения Луны, которая направлена от точки M к O — центру Луны. Модуль силы притяжения $\boldsymbol{F}$ обратно пропорционален квадрату расстояния $R + h$ до центра O Луны, т. е.

$$F=\frac{km}{(R+h)^2}, \qquad (1)$$

где m — масса спутника, k — постоянный коэффициент, подлежащий последующему определению. На поверхности Луны, т. е. при

$h = 0$, сила притяжения равна $F = ma$. Подставив эти значения в формулу (1), находим $k = aR^2$. Теперь формула (1) принимает вид

$$F = \frac{maR^2}{(R+h)^2}. \tag{2}$$

Воспользуемся дифференциальным уравнением движения материальной точки в проекции на главную нормаль: $\frac{mv^2}{\rho} = \sum_{k=1}^{n} F_{kn}$. В данном случае при $\rho = R + h$ и $\sum_{k=1}^{n} F_{kn} = F$ имеем (так как, по условию, спутник движется по окружности, то сила $\boldsymbol{F}$ направлена по главной нормали к траектории движения)

$$\frac{mv^2}{R+h} = F. \tag{3}$$

Подставив в уравнение (3) значение силы F из формулы (2) и решив уравнение относительно v, получим искомую зависимость скорости v спутника от его высоты h над поверхностью Луны:

$$v = R\sqrt{\frac{a}{R+h}}. \tag{4}$$

Первой космической скоростью у поверхности Луны называется скорость, которую нужно сообщить спутнику у поверхности Луны для того, чтобы он двигался вокруг Луны по окружности, не падая на ее поверхность. Подставив в формулу (4) численные данные: $R = 1760$ км, $a = 1{,}64$ м/с^2, $h = 0$, мы получим величину первой космической скорости у поверхности Луны, равную 1,7 км/с (напомним, что первая космическая скорость у поверхности Земли равна 7,9 км/с).

Формулой (4) можно пользоваться при определении скорости искусственного спутника любой планеты, в частности Земли. При движении спутника по круговой орбите вокруг Земли надо в формулу (4) вместо ускорения силы тяжести a Луны подставить ускорение силы тяжести g Земли, причем $g = 9{,}81$ м/с^2. Формула (4) принимает вид

$$v = R\sqrt{\frac{g}{R+h}}, \tag{5}$$

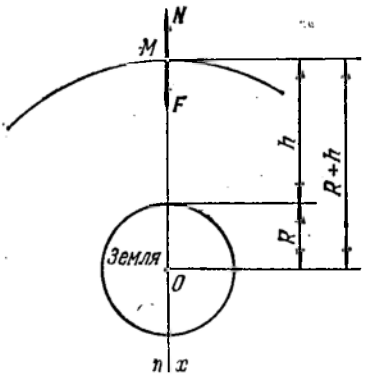
где R — радиус Земли, h — высота спутника над поверхностью Земли, g — ускорение силы тяжести Земли.

Так как Луна является спутником Земли, то, воспользовавшись формулой (5), мы можем вычислить скорость v движения Луны вокруг Земли. Подставив в формулу (5) численные данные: $R = 6370$ км, $R + h = 384\,000$ км, $g = 9{,}81$ м/с^2, получим $v = 1$ км/с. Итак, приближенная постоянная скорость движения Луны по круговой орбите вокруг Земли равна 1 км/с. (Напомним, что аналогичная скорость движения Земли вокруг Солнца равна 30 км/с.)

Задача 8.12. С какой постоянной по модулю скоростью должен двигаться искусственный спутник Земли для того, чтобы человек находился в кабине в состоянии невесомости? Спутник движется по круговой орбите радиуса $R + h$, где R — радиус Земли, а h — высота спутника над поверхностью Земли.

Р е ш е н и е. В ходе решения задачи 8.5 мы выяснили, что в состоянии невесомости давление человека на дно кабины и, следовательно, реакция N дна кабины равны нулю

$$N = 0. \qquad (1)$$



К задаче 8.12.

Воспользуемся рисунком задачи 8.11, направив ось x вдоль главной нормали n круговой траектории спутника. При этом $\ddot{x} = w_n = \frac{v^2}{R+h}$. Подставив это значение $\ddot{x}$ в формулу (1) задачи 8.5, получим

$$\frac{mv^2}{R+h} = P - N. \qquad (2)$$

В данном случае сила $\boldsymbol{P}$ равна силе $\boldsymbol{F}$ притяжения к Земле, которая по аналогии с формулой (2) задачи 8.5 имеет вид

$$P = F = \frac{mgR^2}{(R+h)^2}, \qquad (3)$$

где g — ускорение силы тяжести на поверхности Земли.

Подставив формулы (1) и (3) в уравнение (2) и решив его относительно искомой скорости v, получим

$$v = R\sqrt{\frac{g}{R+h}}. \qquad (4)$$

Результат (4) тождествен с формулой (5) задачи 8.11, с помощью которой определялась скорость искусственного спутника Земли. Значит, человек, находящийся в кабине искусственного спутника Земли, пребывает в состоянии невесомости.

Задача 8.13. На какую высоту надо запустить искусственный спутник Земли для того, чтобы для наблюдателя, находящегося на Земле, он казался неподвижным? Орбиту спутника Земли приближенно считать окружностью, концентричной с экватором. Радиус Земли $R = 6370$ км. Ускорение силы тяжести на поверхности Земли $g = 9{,}81$ м/с^2. Модуль угловой скорости вращения Земли вокруг своей оси $\omega = 0{,}00007$ рад/с.

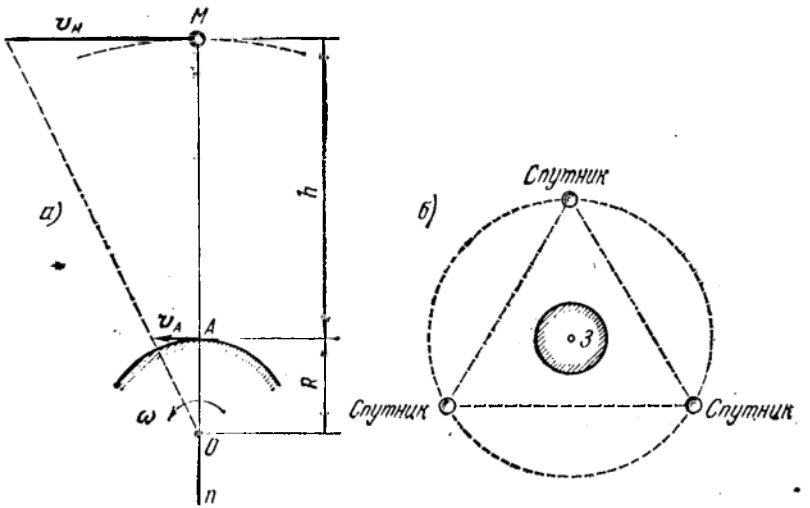
Сила притяжения спутника Землей обратно пропорциональна квадрату расстояния от спутника до центра Земли. Спутник считать точечной массой.

Р е ш е н и е. Для того чтобы искусственный спутник, движущийся по орбите, концентричной с экватором, казался с Земли

неподвижным, должно быть выполнено условие равенства угловых скоростей Земли и радиуса-вектора спутника. При соблюдении этого условия скорости спутника M и точки A, расположенной на экваторе на поверхности Земли на оси n, проходящей через спутник M и центр Земли O, должны удовлетворять соотношению (на рис. *а* дан вид Земли в плане с Северного полюса)

$$\frac{v_M}{v_A} = \frac{OM}{OA}.$$

Так как $v_A = R\omega$, где ω — модуль угловой скорости суточного вращения Земли вокруг своей оси, $OM = R + h$, $OA = R$, то



К задаче 8.13.

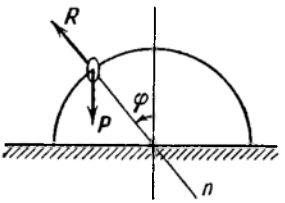
$v_M = (R + h)\,\omega$. Подставив это значение v_M в формулу (5) задачи 8.11, находим искомую высоту:

$$h = \sqrt[3]{\frac{gR^2}{\omega^2}} - R.$$

Подставив численные значения, найдем, что эта высота равна 36 800 км.

Существует проект запуска трех искусственных спутников на эту высоту так, чтобы они образовали равносторонний треугольник, в вершинах которого находились бы спутники. Учитывая неподвижность этих спутников по отношению к Земле, их предполагают использовать в качестве мировой ретрансляционной станции телевидения. Действительно, с высоты $h = 36\,800$ км волны, распространяясь прямолинейно, могут попасть в любую точку земной поверхности (см. рис. *б*).

Задача 8.14. Кольцо M массы m движется по гладкой проволоке, изогнутой в виде полуокружности радиусом r и расположенной в вертикальной плоскости (см. рисунок). Положение кольца определяется углом φ, отсчитываемым от вертикали.



К задаче 8.14.

Найти модуль давления кольца на проволоку в виде функции угла φ. Модуль скорости v кольца равен

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gr(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)},$$

где φ_0 и v_0 определяют начальное положение и начальную скорость кольца.

Р е ш е н и е. Изобразим кольцо в промежуточном положении, определяемом углом φ. К кольцу приложены: $\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{g}$ — его сила тяжести, $\boldsymbol{R}$ — нормальная реакция проволоки. Так как траектория кольца — окружность — известна, то применим дифференциальное уравнение движения в проекции на главную нормаль n:

$$\frac{mv^2}{\rho} = \sum_{k=1}^{n} F_{kn}.$$

В данном случае при $\rho = r$ имеем

$$\frac{mv^2}{r} = mg\cos\varphi - R.$$

Отсюда следует

$$R = mg\cos\varphi - \frac{mv^2}{r}. \qquad (1)$$

Внеся в уравнение (1) заданное значение скорости

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gr(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)},$$

найдем

$$R = 3mg\cos\varphi - 2mg\cos\varphi_0 - \frac{mv_0^2}{r}.$$

Модули искомого давления $\boldsymbol{N}$ и реакции $\boldsymbol{R}$ равны, причем $\boldsymbol{N} = -\boldsymbol{R}$.

Задача 8.15. Человек массы m качается на качелях, которые колеблются вокруг оси z, перпендикулярной плоскости рисунка, по закону $\varphi = \varphi_1 \sin kt + \varphi_3 \sin 3kt$, где φ_1 и φ_3 — положительные постоянные.

Определить давление человека на качели в момент прохождения среднего положения. Человека схематизировать в виде точечной массы, отстоящей от оси z на расстояние l.

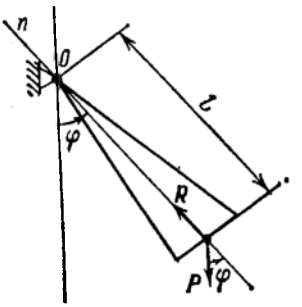
Р е ш е н и е. При колебаниях качелей человек движется по дуге окружности радиуса l. Проведем на рисунке главную нормаль $\boldsymbol{n}$

и воспользуемся дифференциальным уравнением движения материальной точки в проекции на главную нормаль n:

$$mw_n = \sum_{k=1}^{n} F_{kn}. \qquad (1)$$

К человеку приложена активная сила тяжести $\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{g}$ и нормальная реакция качелей $\boldsymbol{R}$. Вычислим сумму проекций этих сил на ось n:

$$\sum F_{kn} = R - mg\cos\varphi. \qquad (2)$$



К задаче 8.15.

При движении по дуге окружности

$$w_n = l\omega^2 = l\dot{\varphi}^2. \qquad (3)$$

Возьмем производную угла поворота φ по времени:

$$\dot{\varphi} = k\,(\varphi_1 \cos kt + 3\varphi_3 \cos 3kt). \qquad (4)$$

Подставив результат (4) в формулу (3), получим

$$w_n = lk^2\,(\varphi_1 \cos kt + 3\varphi_3 \cos 3kt)^2. \qquad (5)$$

Воспользовавшись выражениями (2) и (5), представим уравнение (1) в виде

$$mlk^2\,(\varphi_1 \cos kt + 3\varphi_3 \cos 3kt)^2 = R - mg\cos\varphi. \qquad (6)$$

Решив уравнение (6) относительно R, найдем

$$R = mg\cos\varphi + mlk^2\,(\varphi_1 \cos kt + 3\varphi_3 \cos 3kt)^2. \qquad (7)$$

В момент прохождения среднего положения угол поворота φ равен нулю. Этому значению φ соответствует ряд значений моментов времени, наименьшее из которых равно нулю (действительно, при $t = 0$ из уравнения $\varphi = \varphi_1 \sin kt + \varphi_3 \sin 3kt$ следует, что $\varphi_0 = 0$). Поэтому, подставив в формулу (7) $t = 0$, и $\varphi = 0$, получим

$$R_0 = mg + mlk^2\,(\varphi_1 + 3\varphi_3)^2, \qquad (8)$$

причем в среднем положении качелей нормальная реакция направлена по вертикали вверх. Искомая сила давления равна по модулю реакции и направлена противоположно, т. е. по вертикали вниз.

Если человек и качели находились в покое, то в среднем положении сила давления равнялась бы силе тяжести $P = mg$ человека. За счет колебаний качелей, сила давления оказывается больше на величину $mlk^2\,(\varphi_1 + 3\varphi_3)^2$ (см. формулу (8)).

Задача 8.16. Материальная точка массы m движется под действием центральной силы по логарифмической спирали, уравнение которой имеет вид $r = ae^{-\lambda\varphi}$, где a и λ — постоянные величины. Определить закон изменения центральной силы.

Р е ш е н и е. Воспользуемся формулой Бине [(4*) § 2]

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}=-\frac{r^2}{4mC^2}F_r.$$

Уравнение логарифмической спирали запишем в виде

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{a}e^{\lambda\varphi}.$$

Взяв вторую производную по φ, находим

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{\lambda^2}{a}e^{\lambda\varphi}=\frac{\lambda^2}{r}.$$

Подставив это значение в формулу Бине и решив уравнение относительно F_r, получим

$$F_r=-\frac{A}{r^3},$$

где $A = 4mC^2(1+\lambda^2)$. Знак минус указывает, что центральная сила, вызывающая движение материальной точки по логарифмической спирали, является силой притяжения. Эта сила обратно пропорциональна кубу расстояния от неподвижного центра.

У к а з а н и е. Рекомендуем решить следующие задачи из «Сборника задач по теоретической механике» И. В. Мещерского: 26.9, 26.12, 26.15, 26.17, 26.22, 26.29, 26.30, 26.32.

§ 3. Определение движения по заданным силам (обратная задача динамики материальной точки)

Даны силы $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_n$, приложенные к материальной точке массы m; требуется определить закон движения точки. Для этого следует проинтегрировать систему дифференциальных уравнений движения, соответствующих избранной системе отсчета.

Так, если задача решается в проекциях на оси инерциальной системы декартовых координат, то интегрированию подлежит система дифференциальных уравнений движения:

$$m\ddot{x}=\sum_{k=1}^{n}F_{kx},\quad m\ddot{y}=\sum_{k=1}^{n}F_{ky},\quad m\ddot{z}=\sum_{k=1}^{n}F_{kz}. \tag{1*}$$

В результате интегрирования этой системы определяют закон движения точки в декартовых координатах, т. е.

$$x=f_1(t),\quad y=f_2(t),\quad z=f_3(t).$$

Решение обратных задач, связанное с интегрированием системы дифференциальных уравнений (1*), представляет иногда значительные трудности и часто не может быть выполнено в квадратурах. В этих случаях приходится систему (1*) решать приближенными методами, в частности, для этих целей можно использовать вычислительные машины.

Так как система (1*) состоит из трех дифференциальных уравнений второго порядка, то при ее интегрировании появляются шесть произвольных постоянных: C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 и C_6. Для их определения в условие задачи должны быть включены дополнительные данные, называемые *начальными условиями движения*.

Начальные условия движения материальной точки определяют положение точки и ее скорость в некоторый фиксированный момент времени. Положение точки определяется тремя координатами x, y, z, а скорость точки — тремя проекциями скорости $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$; таким образом, начальные условия имеют вид

при $t = t_0$

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0 \text{ (положение точки)},$$

$$\dot{x} = \dot{x}_0, \quad \dot{y} = \dot{y}_0, \quad \dot{z} = \dot{z}_0 \text{ (скорость точки)}.$$

(Часто эти условия задаются для начального момента времени $t = 0$.) В результате подстановки начальных условий движения в первые и вторые интегралы системы (1*) образуется система шести уравнений для определения шести неизвестных C_1, C_2, ..., C_6.

Если движение материальной точки происходит в плоскости xy, то число дифференциальных уравнений движения равно двум, а число начальных условий — четырем:

при $t = t_0$

$$x = x_0, \quad y = y_0 \text{ (положение точки)},$$

$$\dot{x} = \dot{x}_0, \quad \dot{y} = \dot{y}_0 \text{ (скорость точки)}$$

(в данном случае $z_0 = \dot{z}_0 = 0$).

Если материальная точка движется прямолинейно, то при направлении оси x вдоль траектории получим одно дифференциальное уравнение движения и два начальных условия:

при $t = t_0$

$$x = x_0 \text{ (положение точки)},$$

$$\dot{x} = \dot{x}_0 \text{ (скорость точки)}.$$

Силы, приложенные к материальной точке, могут быть:

1) постоянными силами (например, сила тяжести при движении материальной точки вблизи земной поверхности);

2) силами, зависящими от времени (например, периодически изменяющиеся силы, вызывающие колебания материальной точки);

3) силами, зависящими от положения точки (например, силы притяжения и отталкивания, силы упругости пружин, упругих нитей и т. д.);

4) силами, зависящими от скорости точки (например, силы сопротивления движению точки).

В более общем случае силы являются функциями времени, положения, скорости и ускорения точки. Тогда система уравнений (1*) имеет вид

$$m\ddot{x} = F_x(t;\ x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z},\ \ddot{x},\ \ddot{y},\ \ddot{z}),$$
$$m\ddot{y} = F_y(t;\ x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z},\ \ddot{x},\ \ddot{y},\ \ddot{z}),$$
$$m\ddot{z} = F_z(t;\ x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z},\ \ddot{x},\ \ddot{y},\ \ddot{z}).$$

Указание. Обратные задачи динамики материальной точки рекомендуется решать в следующем порядке:

1) выбрать систему координат;

2) записать начальные условия движения точки;

3) изобразить на рисунке активные силы и реакции связей, приложенные к материальной точке;

4) составить дифференциальные уравнения движения материальной точки;

5) проинтегрировать систему дифференциальных уравнений движения. Использовав начальные условия движения, определить постоянные интегрирования;

6) воспользовавшись уравнениями движения материальной точки, полученными в предыдущем пункте, определить искомые величины.

При составлении дифференциальных уравнений движения надо рассматривать материальную точку в текущем положении.

В случае движения свободной материальной точки удобно пользоваться системой осей декартовых координат. При криволинейном движении несвободной материальной точки часто проще решать задачу в проекциях на оси натурального триэдра.

При движении материальной точки под действием центральной силы $\boldsymbol{F}$ удобно пользоваться дифференциальными уравнениями движения в полярных координатах или формулой Бине

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = -\frac{r^2}{4mC^2}F_r$$

(см. § 2).

Для осуществления прямолинейного движения материальной точки, необходимо и достаточно, чтобы начальная скорость точки и равнодействующая сил, приложенных к этой точке, лежали на одной прямой.

Для осуществления движения материальной точки в плоскости необходимо и достаточно, чтобы начальная скорость точки и равнодействующая сил, приложенных к точке, лежали в этой плоскости.

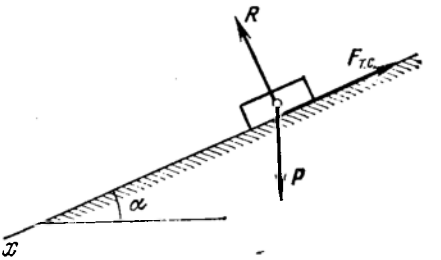
Задача 8.17. В результате полученного толчка кирпич начал скользить вниз с начальной скоростью $v_0 = 2$ м/с по неподвижной ленте конвейера, расположенной под углом $\alpha = 30°$ к горизонту.

Определить путь s, пройденный кирпичом за промежуток времени $\tau = 2$ с, если коэффициент трения скольжения кирпича о ленту конвейера равен $f = 0{,}4$. Кирпич считать точечной массой.

Р е ш е н и е. Направим ось x вдоль наклонной ленты конвейера вниз. Возьмем начало отсчета на оси x в начальном положении кирпича, рассматриваемого как материальная точка.

Начальная скорость v_0 направлена вдоль оси x вниз. Следовательно, начальные условия движения имеют вид

при $t = 0$ $x = 0$, $\dot{x} = v_0$.



К задаче 8.17.

К кирпичу, являющемуся несвободной материальной точкой, приложена одна активная сила — его сила тяжести $\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{g}$. Применив закон освобождаемости от связей, отбросим мысленно наклонную ленту конвейера, заменив ее действие на кирпич соответствующей реакцией. Эта реакция имеет две составляющие: нормальную составляющую $\boldsymbol{R}$, перпендикулярную к плоскости ленты, и силу трения скольжения $\boldsymbol{F}_{т.с}$ кирпича о ленту конвейера, направленную в сторону, противоположную движению, т. е. вдоль ленты конвейера вверх.

Запишем дифференциальное уравнение движения материальной точки в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}.$$

В данном случае получим

$$m\ddot{x} = mg \sin \alpha - F_{т.с}.$$

Так как по закону сухого трения $F_{т.с} = fN = fmg \cos \alpha$, то после сокращения на m находим

$$\ddot{x} = g (\sin \alpha - f \cos \alpha). \qquad (1)$$

Для интегрирования дифференциального уравнения движения заменим $\ddot{x}$ на $d\dot{x}/dt$. После отделения переменных получим

$$d\dot{x} = g (\sin \alpha - f \cos \alpha)\, dt.$$

Проинтегрировав, имеем

$$\dot{x} = g (\sin \alpha - f \cos \alpha)\, t + C_1. \qquad (2)$$

Соотношение (2) является первым интегралом дифференциального уравнения движения (1). Для определения постоянной интегрирования C_1 подставим в уравнение (2) начальное условие движения (при $t = 0$ $\dot{x} = v_0$), откуда следует, что $C_1 = v_0$. Полученное значение C_1 внесем в уравнение (2):

$$\dot{x} = v_0 + g (\sin \alpha - f \cos \alpha)\, t. \qquad (3)$$

Для определения закона движения кирпича заменим в уравнении (3) $\dot{x}$ на dx/dt. После отделения переменных находим

$$dx = v_0\,dt + g\,(\sin\alpha - f\cos\alpha)\,t\,dt.$$

Проинтегрировав, получим

$$x = v_0 t + \frac{1}{2}\,g\,(\sin\alpha - f\cos\alpha)\,t^2 + C_2. \qquad (4)$$

Постоянная интегрирования C_2 определяется после подстановки в (4) начальных условий движения (при $t = 0$ $x = 0$), откуда имеем, что $C_2 = 0$. Внося это значение C_2 в (4), получаем уравнение движения кирпича

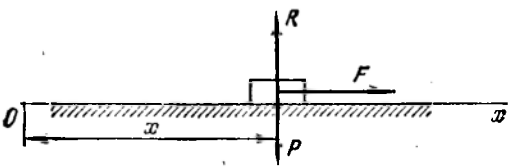
$$x = v_0 t + \frac{1}{2}\,g\,(\sin\alpha - f\cos\alpha)\,t^2. \qquad (5)$$

Для определения искомого пути s, пройденного за τ секунд, следует в уравнении (5) положить $t = \tau$. Тогда

$$s = v_0\tau + \frac{1}{2}\,g\,(\sin\alpha - f\cos\alpha)\,\tau^2.$$

После подстановки численных значений получим $s = 7{,}02$ м.

Задача 8.18. Груз массы m, находившийся в покое на гладкой горизонтальной плоскости, начинает двигаться под действием горизонтальной силы, проекция которой на направленную по горизонтали направо ось x равна $F_x = H\sin kt$, где H и k—постоянные положительные величины.



К задаче 8.18.

Найти закон движения груза.

Решение. Возьмем начало отсчета на оси x в начальном положении груза. Учитывая, что в начальный момент груз находился в покое, запишем начальные условия движения:

$$\text{при } t = 0 \quad x = 0, \quad \dot{x} = 0.$$

К грузу приложены следующие силы: $\boldsymbol{P}$ — сила тяжести груза, $\boldsymbol{F}$ — движущая сила, $\boldsymbol{R}$ — нормальная реакция горизонтальной плоскости, $P = mg$.

Дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось x имеет вид

$$m\ddot{x} = F_x \quad \text{или} \quad \ddot{x} = \frac{Hg}{P}\sin kt.$$

Так как $\ddot{x} = d\dot{x}/dt$, то, отделив переменные, имеем

$$d\dot{x} = \frac{H}{m}\sin kt\,dt,$$

откуда

$$\dot{x} = -\frac{H}{mk}\cos kt + C_1. \qquad (1)$$

Подставив в (1) начальное условие (при $t = 0$ $\dot{x} = 0$), находим, что $C_1 = Hg/(Pk)$. Уравнение (1) после внесения в него значения C_1 принимает вид

$$\dot{x} = \frac{H}{mk} - \frac{H}{mk}\cos kt. \qquad (2)$$

Учитывая, что $\dot{x} = dx/dt$, отделяем в уравнении (2) переменные

$$dx = \frac{H}{mk}\,dt - \frac{H}{Mk}\cos kt\,dt.$$

Интегрирование приводит к результату:

$$x = \frac{H}{mk}\,t - \frac{H}{mk^2}\sin kt + C_2. \qquad (3)$$

Для определения C_2 подставляем в (3) начальное условие движения (при $t = 0$ $x = 0$), откуда следует, что $C_2 = 0$. Следовательно, искомое уравнение движения груза имеет вид

$$x = \frac{H}{mk}\left(t - \frac{1}{k}\sin kt\right). \qquad (4)$$

Как видно из уравнения (4), на равномерное движение груза, происходящее по горизонтали направо со скоростью $H/(mk)$, накладывается колебание с амплитудой $a = H/(mk^2)$ и периодом $T = 2\pi/k$.

Просмотрев внимательно решение этой задачи, можно обнаружить, что равномерное прямолинейное движение груза является следствием соответствующих начальных условий движения. Нетрудно подобрать начальные условия движения, при которых груз совершал бы только колебательное движение. Для этого постоянная интегрирования C_1 должна в уравнении (1) обратиться в нуль. Из уравнения (1) при $t = 0$ и $C_1 = 0$ получим $\dot{x}_0 = -H/(mk)$.

Следовательно, если бы в условии задачи было указано, что в начальный момент грузу сообщили налево скорость, равную по модулю $H/(mk)$, то уравнение (2) приняло бы вид

$$\dot{x} = -\frac{H}{mk}\cos kt,$$

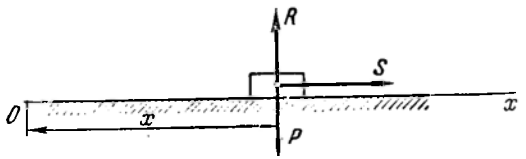
а уравнение движения груза — соответственно

$$x = -\frac{H}{mk^2}\sin kt.$$

Итак, от величины начальной скорости зависит характер движения груза. Так как в данной задаче начальное положение груза не было оговорено, то мы выбрали начало отсчета на оси x в начальном положении груза и, таким образом, получили $x_0 = 0$. При

выборе начала отсчета на оси x в другой точке мы получили бы $x_0 \neq 0$. Тогда на основании уравнения (3) $C_2 = x_0$, и в формулу (4) войдет дополнительное слагаемое x_0. Итак, в данной задаче от выбора начала отсчета зависит лишь величина постоянного слагаемого, которое на характер движения груза не влияет.

Задача 8.19. К твердому телу массы m, могущему двигаться вдоль оси x, приложена сила отталкивания, проекция которой на ось x, направленную по горизонтали направо, равна $S_x = k^2mx$, где k^2 — постоянный коэффициент, x — абсцисса, определяющая положение твердого тела. (Сила отталкивания направлена вдоль оси x.) В начальный момент твердое тело находилось в покое на расстоянии a от начала отсчета.



К задаче 8.19.

Найти закон движения твердого тела, считая его точечной массой. Затем решить эту задачу с учетом силы трения скольжения, если коэффициент трения скольжения равен f.

Р е ш е н и е. Изобразим твердое тело на расстоянии x от начала отсчета O. По условию задачи начальные условия движения имеют вид

$$\text{при } t = 0 \quad x = a, \quad \dot{x} = 0. \tag{1}$$

К твердому телу приложены следующие силы: $\boldsymbol{P}$ — сила тяжести груза, $\boldsymbol{R}$ — нормальная реакция гладкой горизонтальной плоскости, $\boldsymbol{S}$ — сила отталкивания, направленная от точки O направо.

Дифференциальное уравнение движения твердого тела в проекции на ось x имеет вид

$$m\ddot{x} = S_x.$$

Так как $S_x = k^2mx$, то

$$\ddot{x} - k^2x = 0. \tag{2}$$

Для решения дифференциального уравнения (2), являющегося линейным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами без правой части, составим соответствующее характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - k^2 = 0,$$

откуда

$$\lambda_{1,2} = \pm k.$$

Учитывая, что корни характеристического уравнения оказались вещественными, запишем решение уравнения (1) в виде

$$x = C_1e^{kt} + C_2e^{-kt}. \tag{3}$$

Для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 надо иметь два уравнения. Дифференцируя x по t, получим

$$\dot{x} = C_1 k e^{kt} - C_2 k e^{-kt}. \tag{4}$$

Подставив начальные условия (1) в выражения (3) и (4), а затем решив полученную систему уравнений, находим, что $C_1 = C_2 = a/2$. После подстановки значений C_1 и C_2 в (3) приходим к искомому закону движения твердого тела:

$$x = \frac{a}{2}(e^{kt} + e^{-kt}), \tag{5}$$

который с помощью гиперболического косинуса угла kt можно записать в виде

$$x = a \operatorname{ch} kt.$$

Предположим теперь, что горизонтальная плоскость является негладкой. Рассмотрим влияние силы трения скольжения на движение твердого тела, если коэффициент трения скольжения равен f.

К силам $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{S}$ и $\boldsymbol{R}$, приложенным к твердому телу, добавляется сила трения скольжения $F_{т.с} = fP$, направленная в сторону, противоположную движению, т. е. по горизонтали налево. При этом $F_{т.с}$ войдет в правую часть дифференциального уравнения движения со знаком минус. Дифференциальное уравнение (2) примет вид

$$\ddot{x} - k^2 x = -fg. \tag{6}$$

Общее решение x этого неоднородного линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами равно сумме общего решения x_1 соответствующего однородного уравнения и частного решения x_2 уравнения с правой частью, т. е.

$$x = x_1 + x_2. \tag{7}$$

Общее решение x_1 дается выражением (3). Учитывая, что правая часть уравнения (6) является постоянной, ищем частное решение в виде постоянного, т. е. $x_2 = A$. Подставив это значение в уравнение (6), находим, что $x_2 = A = fg/k^2$. Итак, в соответствии с формулой (7), общее решение имеет вид

$$x = C_1 e^{kt} + C_2 e^{-kt} + \frac{fg}{k^2}. \tag{8}$$

Для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 вычислим:

$$\dot{x} = C_1 k e^{kt} - C_2 k e^{-kt}. \tag{9}$$

Подставив в (8) и (9) начальные условия (1) и решив полученную систему уравнений, находим $C_1 = C_2 = {}^1/_2 (a - fg/k^2)$. Внося значения C_1 и C_2 в уравнение (8), получим искомое уравнение движения твердого тела

$$x = \frac{1}{2}\left(a - \frac{fg}{k^2}\right)(e^{kt} + e^{-kt}) + \frac{fg}{k^2}. \tag{10}$$

Сопоставление формул (10) и (5) приводит к выводу, что при наличии силы трения скольжения движение твердого тела будет совершаться медленнее. Действительно, скорость тела в первом случае (без трения) равна $\dot{x} = ak \operatorname{sh} kt$, а во втором (с трением) $\dot{x} = (a - fg/k^2) \operatorname{sh} kt$. Так как коэффициент $(a - fg/k^2)$ меньше a, то движение во втором случае происходит медленнее, чем в первом.

Интересно отметить, что при $a - fg/k^2 = 0$, т. е. при значении коэффициента трения скольжения

$$f = \frac{ak^2}{g}, \tag{11}$$

уравнение движения (10) принимает вид

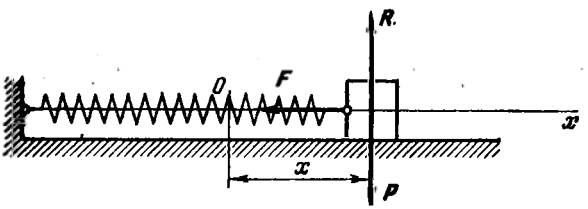
$$x = \frac{fg}{k^2}.$$

Значит, твердое тело находится в покое. Это легко объяснить. Действительно, при $fg \geqslant ak^2$ имеем

$$fP \geqslant k^2 ma. \tag{12}$$

Так как $fP = F_{\text{с.т}}$, а k^2ma равно модулю силы отталкивания $\boldsymbol{F}$ в начальном положении твердого тела при $x = a$, то неравенство (12) показывает, что модуль силы отталкивания меньше модуля силы трения скольжения. Следовательно, сила отталкивания не может нарушить покой твердого тела. (Предполагаем, что коэффициент трения скольжения при движении равен коэффициенту трения скольжения при покое.)

Задача 8.20. Груз массы m прикреплен к правому концу пружины, левый конец которой закреплен в стене. В начальный момент



К задаче 8.20.

пружина не была деформирована, а грузу, лежащему на горизонтальной плоскости, посредством толчка сообщили начальную скорость v_0, направленную по горизонтали направо. Ось x направлена вдоль оси пружины, причем начало отсчета находится в правом конце недеформированной пружины.

Найти наибольшее смещение груза, если проекция силы упругости пружины равна $F_x = -\alpha x - \beta x^3$, где x — удлинение пружины, а α и β — постоянные положительные коэффициенты. Силой трения скольжения груза о горизонтальную плоскость и массой пружины пренебречь.

Р е ш е н и е. Запишем начальные условия движения груза:

$$\text{при } t = 0 \quad x = 0, \quad \dot{x} = v_0.$$

Изобразим груз во время движения смещенным по оси x направо. При этом пружина растянется на x. Сила упругости пружины $\boldsymbol{F}$ направлена по горизонтали налево. Ее проекция на ось x равна $F_x = -(\alpha x + \beta x^3)$.

К грузу приложены следующие силы: $\boldsymbol{P}$ — сила тяжести груза, $\boldsymbol{R}$ — нормальная реакция горизонтальной плоскости, $\boldsymbol{F}$ — сила упругости пружины; $P = mg$.

Составим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = -\alpha x - \beta x^3. \qquad (1)$$

Это нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка. Интегрирование уравнения (1) для определения уравнения движения груза $x = f(t)$ связано с вычислительными трудностями. Вместе с тем вычисление наибольшего смещения можно легко осуществить, так как для этого достаточно найти зависимость между $\dot{x}$ и x и, приравняв затем в крайнем положении груза $\dot{x}$ нулю, определить искомую величину. Умножим левую и правую части дифференциального уравнения (1) на dx и, учитывая, что $\ddot{x}\,dx = \frac{d\dot{x}}{dt}\,dx = \dot{x}\,d\dot{x}$, запишем:

$$m\dot{x}\,d\dot{x} = -(\alpha x + \beta x^3)\,dx.$$

Проинтегрировав это уравнение, находим:

$$m\frac{\dot{x}^2}{2} = -\frac{\alpha x^2}{2} - \frac{\beta x^4}{4} + C. \qquad (2)$$

В начальный момент времени $x = 0$ и $\dot{x} = v_0$. Следовательно, $C = m\frac{v_0^2}{2}$. Теперь уравнение (2) принимает вид

$$m\frac{\dot{x}^2}{2} - m\frac{v_0^2}{2} = -\frac{\alpha x^2}{2} - \frac{\beta x^4}{4}. \qquad (3)$$

(К уравнению (3) можно непосредственно прийти с помощью теоремы об изменении кинетической энергии материальной точки; см. ниже, главу IX, § 7.)

В момент, соответствующий наибольшему смещению a, скорость груза равна нулю. Поэтому подставим в уравнение (3): $x = a$, $\dot{x} = 0$. Получим биквадратное уравнение относительно искомого смещения a:

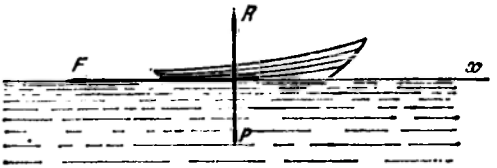
$$a^4 + 2\frac{\alpha}{\beta}a^2 - 2\frac{m}{\beta}v_0^2 = 0.$$

Решив это уравнение, находим

$$a = \frac{1}{\beta}\sqrt{\beta\left(\sqrt{\alpha^2 + 2m\beta v_0^2} - \alpha\right)}.$$

Задача 8.21. В момент выключения двигателя моторная лодка массы m имела скорость v_0.

Через какой промежуток времени скорость лодки станет в три раза меньше начальной, если проекция на ось x силы сопротивления воды движению лодки равна $F_x = -\alpha\dot{x} - \beta\dot{x}^2$, где $\dot{x}$ — проекция скорости лодки, α и β — постоянные положительные величины. Ось x направлена по горизонтали направо в сторону движения лодки. Вычислить также путь, пройденный лодкой за этот промежуток времени. Лодку считать точечной массой.



К задаче 8.21.

Р е ш е н и е. Возьмем начало отсчета на оси x в начальном положении лодки. Начальные условия движения лодки имеют вид

$$\text{при } t = 0 \quad x = 0, \quad \dot{x} = v_0.$$

Изобразим силы, приложенные к лодке: $\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{g}$ — сила тяжести лодки, $\boldsymbol{R}$ — суммарная нормальная реакция воды, $\boldsymbol{F}$ — суммарная сила сопротивления движению, направленная в сторону, противоположную движению лодки, т. е. по горизонтали налево.

Составим дифференциальное уравнение движения лодки в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = F_x;$$

так как по условию $F_x = -\alpha\dot{x} - \beta\dot{x}^2$, то

$$m\ddot{x} = -\alpha\dot{x} - \beta\dot{x}^2. \tag{1}$$

Заменив в уравнении (1) $\ddot{x}$ на $d\dot{x}/dt$ и отделив переменные, получим

$$m\frac{d\dot{x}}{\dot{x}(\alpha + \beta\dot{x})} = -dt. \tag{2}$$

Интегрируя дифференциальное уравнение (2) и учитывая, что

$$\frac{1}{\dot{x}(\alpha + \beta\dot{x})} = \frac{1}{\alpha\dot{x}} - \frac{\beta}{\alpha(\alpha + \beta\dot{x})},$$

будем иметь:

$$\frac{m}{\alpha}\ln\frac{\dot{x}}{\alpha + \beta\dot{x}} = -t + C. \tag{3}$$

Использовав в уравнении (3) начальное условие движения (при $t = 0$ $\dot{x} = v_0$), находим, что

$$C = \frac{m}{\alpha}\ln\frac{v_0}{\alpha + \beta v_0}.$$

Следовательно, уравнение (3) принимает вид

$$t = \frac{m}{\alpha}\ln\frac{v_0(\alpha + \beta\dot{x})}{(\alpha + \beta v_0)\dot{x}}. \tag{4}$$

Уравнение (4) определяет зависимость между проекцией скорости лодки $\dot{x}$ и временем t. После подстановки в (4) $t = T$, $\dot{x} = v_0/3$ определим искомый промежуток времени T, по истечении которого скорость лодки стала в три раза меньше начальной:

$$T = \frac{m}{\alpha} \ln \frac{3\alpha + \beta v_0}{\alpha + \beta v_0}.$$

Для определения пути s, пройденного лодкой за промежуток времени T, вернемся к дифференциальному уравнению (1). Умножим его на dx. Учитывая, что $\ddot{x}\,dx = \frac{d\dot{x}}{dt}\,dx = \dot{x}\,d\dot{x}$, после отделения переменных получим

$$m \frac{d\dot{x}}{\alpha + \beta \dot{x}} = -dx.$$

Проинтегрировав это уравнение, будем иметь

$$\frac{m}{\beta} \ln (\alpha + \beta \dot{x}) = -x + C. \tag{5}$$

Так как в начальный момент $x = 0$ и $\dot{x} = v_0$, то $C = \frac{m}{\beta} \ln (\alpha + \beta v_0)$. После подстановки значения C в уравнение (5) получим

$$x = \frac{m}{\beta} \ln \frac{\alpha + \beta v_0}{\alpha + \beta \dot{x}}. \tag{6}$$

Для определения искомого пути s, пройденного лодкой от начального момента времени до момента, соответствующего уменьшению начальной скорости v_0 в три раза, надо в уравнение (6) подставить: $x = s$, $\dot{x} = v_0/3$. Тогда

$$s = \frac{m}{\beta} \ln \frac{3(\alpha + \beta v_0)}{3\alpha + \beta v_0}.$$

Интересно отметить, что при заданной силе сопротивления движению лодка никогда не остановится. Действительно, подставив в уравнение (4) $\dot{x} = 0$ и $t = \tau$, получим $\tau = \infty$.

Предел соответствующего пути, пройденного лодкой, можно определить из уравнения (6). Учитывая, что пройденный путь $s = \lim\limits_{t \to \infty} x$ и $\lim\limits_{t \to \infty} \dot{x} = 0$, находим

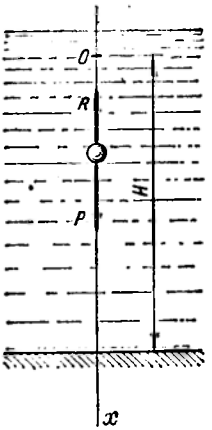
$$s = \frac{m}{\beta} \ln \left(1 + \frac{\beta}{\alpha} v_0\right).$$

Задача 8.22. Измерение глубины реки производится с помощью груза, опускаемого на тросе в воду до дна реки. При опускании груза со скоростью v_0 трос оборвался и груз достиг дна через T секунд после момента обрыва троса.

Определить путь H, пройденный грузом до дна реки, если проекция на ось x силы сопротивления воды движению груза равна $R_x = -km\dot{x}$, где m — масса груза, $\dot{x}$ — проекция его скорости на ось x, k — постоянный положительный коэффициент. Ось x

направлена по вертикали вниз. Силой выталкивания груза из воды пренебречь.

Р е ш е н и е. Возьмем начало отсчета O в положении груза, соответствующем моменту обрыва троса. К грузу приложены следующие силы: $\boldsymbol{P}$ — сила тяжести груза, $\boldsymbol{R}$ — сила сопротивления воды движению груза, направленная в сторону, противоположную движению, т. е. по вертикали вверх.



К задаче 8.22.

Составим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = P + R_x. \tag{1}$$

Так как $R_x = -km\dot{x}$, то

$$\ddot{x} = g - k\dot{x}. \tag{2}$$

Таково дифференциальное уравнение движения груза, которое следует дважды проинтегрировать для определения пути, пройденного грузом. Заменив в уравнении (2) $\ddot{x}$ на $d\dot{x}/dt$ и отделив переменные, имеем: $\frac{d\dot{x}}{g - k\dot{x}} = dt$. После интегрирования находим

$$-\frac{1}{k}\ln(g - k\dot{x}) = t + C_1. \tag{3}$$

Для определения постоянной интегрирования C_1, подставив в уравнение (3) $t = 0$ и $\dot{x} = v_0$, получим, что $C_1 = -\frac{1}{k}\ln(g - kv_0)$. Внеся это значение C_1 в уравнение (3), найдем

$$\frac{1}{k}\ln\frac{g - kv_0}{g - k\dot{x}} = t,$$

откуда

$$\dot{x} = \frac{g}{k} - \frac{g - kv_0}{k}e^{-kt}. \tag{4}$$

Уравнение (3) устанавливает зависимость проекции скорости груза от времени. Заменив в уравнении (4) $\dot{x}$ на dx/dt и отделив переменные, получим

$$dx = \frac{g}{k}dt - \frac{g - kv_0}{k}e^{-kt}dt.$$

После интегрирования имеем

$$x = \frac{g}{k}t + \frac{g - kv_0}{k^2}e^{-kt} + C_2. \tag{5}$$

Подставив в это равенство $t = 0$ и $x = 0$, найдем, что $C_2 = -\frac{g - kv_0}{k^2}$. Внеся это значение C_2 в выражение (5), получим закон движения груза:

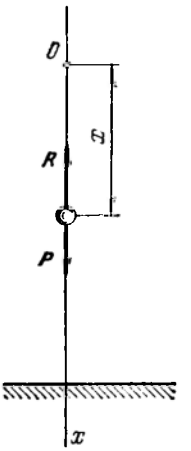
$$x = \frac{g}{k}t + \frac{g - kv_0}{k^2}(e^{-kt} - 1). \tag{6}$$

Для определения пути H, пройденного грузом до дна реки за промежуток времени T, надо в уравнение (6) подставить $t = T$, $x = H$. В результате получим, что

$$H = \frac{g}{k}T - \frac{g - kv_0}{k^2}(1 - e^{-kT}).$$

Задача 8.23. Парашютист в момент раскрытия парашюта имел скорость v_0, направленную вертикально вниз. Найти уравнение движения парашютиста, если проекция на ось x силы сопротивления движению равна $R_x = -k^2 m\dot{x}^2$, где m — масса парашютиста, $\dot{x}$ — проекция на ось x его скорости, k — постоянный коэффициент. Ось x направлена по вертикали вниз.

Движение парашютиста рассматривать как движение материальной точки.



К задаче 8.23.

Р е ш е н и е. Возьмем начало отсчета на оси x в месте раскрытия парашюта. Запишем начальные условия движения:

$$\text{при } t = 0 \quad x = 0, \quad \dot{x} = v_0.$$

Изобразим материальную точку во время движения на расстоянии x от начального положения. Силу тяжести парашютиста обозначим через $\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{g}$. К парашютисту приложены следующие силы: $\boldsymbol{P}$ — сила тяжести, $\boldsymbol{R}$ — суммарная сила сопротивления движению, направленная в сторону, противоположную движению, т. е. по вертикали вверх.

Составим дифференциальное уравнение движения в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = P + R_x.$$

Так как $R_x = -k^2 m\dot{x}^2$, то

$$\ddot{x} = g - k^2\dot{x}^2. \tag{1}$$

Таково дифференциальное уравнение движения.

Записав $\ddot{x} = d\dot{x}/dt$ и отделив в уравнении (1) переменные, находим

$$\frac{d\dot{x}}{g - k^2\dot{x}^2} = dt. \tag{2}$$

Интегрируя уравнение (2) и учитывая, что

$$\frac{1}{g - k^2\dot{x}^2} = \frac{1}{2\sqrt{g}}\left(\frac{1}{\sqrt{g} + k\dot{x}} + \frac{1}{\sqrt{g} - k\dot{x}}\right),$$

получим

$$\ln\frac{\sqrt{g} + k\dot{x}}{\sqrt{g} - k\dot{x}} = 2k\sqrt{g}t + C_1. \tag{3}$$

Подставив в уравнение (3) начальное условие (при $t = 0$ $\dot{x} = v_0$), получим, что $C_1 = \ln \frac{\sqrt{g} + kv_0}{\sqrt{g} - kv_0}$. Теперь уравнение (3) принимает вид

$$\ln \frac{(\sqrt{g} - kv_0)(\sqrt{g} + k\dot{x})}{(\sqrt{g} + kv_0)(\sqrt{g} - k\dot{x})} = 2k\sqrt{g}\,t.$$

Решив это уравнение относительно $\dot{x}$, получим

$$\dot{x} = \frac{\sqrt{g}}{k} \frac{(\sqrt{g} + kv_0)\, e^{2k\sqrt{g}\,t} - (\sqrt{g} - kv_0)}{(\sqrt{g} + kv_0)\, e^{2k\sqrt{g}\,t} + (\sqrt{g} - kv_0)},$$

или

$$\dot{x} = \frac{\sqrt{g}}{k} \frac{\sqrt{g}\,(e^{2k\sqrt{g}\,t} - 1) + kv_0\,(e^{2k\sqrt{g}\,t} + 1)}{\sqrt{g}\,(e^{2k\sqrt{g}\,t} + 1) + kv_0\,(e^{2k\sqrt{g}\,t} - 1)}. \tag{4}$$

Для интегрирования уравнения (4) следует заменить $\dot{x}$ на dx/dt и отделить переменные.

Ввиду того, что правая часть уравнения (4) имеет громоздкий вид, затрудняющий интегрирование, запишем уравнение (4) в гиперболических функциях, воспользовавшись формулами

$$e^{2z} + 1 = 2e^z \operatorname{ch} z, \qquad e^{2z} - 1 = 2e^z \operatorname{sh} z.$$

Теперь уравнение (4) принимает вид

$$\dot{x} = \frac{\sqrt{g}}{k} \frac{\sqrt{g} \operatorname{sh}(k\sqrt{g}\,t) + kv_0 \operatorname{ch}(k\sqrt{g}\,t)}{\sqrt{g} \operatorname{ch}(k\sqrt{g}\,t) + kv_0 \operatorname{sh}(k\sqrt{g}\,t)}, \tag{5}$$

откуда

$$dx = \frac{\sqrt{g}}{k} \frac{\sqrt{g} \operatorname{sh}(k\sqrt{g}\,t) + kv_0 \operatorname{ch}(k\sqrt{g}\,t)}{\sqrt{g} \operatorname{ch}(k\sqrt{g}\,t) + kv_0 \operatorname{sh}(k\sqrt{g}\,t)}\, dt. \tag{6}$$

Нетрудно видеть, что числитель дроби, стоящей в правой части уравнения (6), является производной от знаменателя, деленной на $k\sqrt{g}$. Поэтому получим

$$x = \frac{1}{k^2} \ln\left[\sqrt{g} \operatorname{ch}(k\sqrt{g}\,t) + kv_0 \operatorname{sh}(k\sqrt{g}\,t)\right] + C_2. \tag{7}$$

Подставив в уравнение (7) начальное условие (при $t = 0$ $x = 0$), видим, что $C_2 = -\frac{1}{k^2} \ln \sqrt{g}$. После подстановки найденного значения C_2 в уравнение (7) получим искомое уравнение движения парашютиста:

$$x = \frac{1}{k^2} \ln\left[\operatorname{ch}(k\sqrt{g}\,t) + \frac{kv_0}{\sqrt{g}} \operatorname{sh}(k\sqrt{g}\,t)\right]. \tag{8}$$

Определим величину, к которой стремится скорость парашютиста, совершающего длительный спуск с большой высоты, т. е. вычислим предел $\dot{x}$ при $t \to \infty$. Для этого воспользуемся формулой (5). Разделив

почленно числитель и знаменатель правой части на $\operatorname{ch}(k\sqrt{g}\,t)$, находим

$$\dot{x} = \frac{\sqrt{g}}{k}\,\frac{\sqrt{g}\cdot\operatorname{th}(k\sqrt{g}\,t) + kv_0}{\sqrt{g} + kv_0\cdot\operatorname{th}(k\sqrt{g}\,t)}.$$

Учитывая, что $\lim\limits_{t\to\infty}\operatorname{th}(k\sqrt{g}\,t) = 1$, получим, что

$$\lim_{t\to\infty}\dot{x} = \frac{\sqrt{g}}{k},$$

т. е. при длительном спуске движение парашютиста приближается к равномерному со скоростью, не зависящей от начальных условий движения. Предельное значение проекции скорости $\dot{x}_{\text{пр}} = \lim\limits_{t\to\infty}\dot{x}$ можно найти из следующих простых соображений. При спуске парашютиста сила сопротивления будет возрастать по модулю и в пределе она уравновесит его силу тяжести, т. е.

$$mk^2\dot{x}_{\text{пр}}^2 = mg.$$

Отсюда

$$\dot{x}_{\text{пр}} = \frac{\sqrt{g}}{k}.$$

Задача 8.24. Вертикальный спуск парашютиста происходит без начальной скорости с высоты H при наличии силы сопротивления, указанной в условии предыдущей задачи.

Определить скорость парашютиста в момент приземления.

Р е ш е н и е. Для определения скорости парашютиста в момент приземления нецелесообразно повторить решение предыдущей задачи, так как при интегрировании по времени мы находим проекцию скорости $\dot{x}$ и координату x в виде функций времени. Пришлось бы из уравнения движения определить момент времени T, соответствующий спуску на высоту H, затем полученное значение T подставить в $\dot{x}$ для определения искомой скорости.

В данной задаче удобнее получить $\dot{x}$ в зависимости от x, т. е. выразить проекцию скорости парашютиста в зависимости от его положения x и затем, подставив $x = H$, определить искомую скорость v.

Для определения зависимости $\dot{x} = f(x)$ следует применить прием, заключающийся в умножении левой и правой частей дифференциального уравнения движения на dx. Этот прием эффективен, так как при этом нужно интегрировать дифференциальное уравнение движения только один раз (в предыдущей задаче для определения закона движения $x = f(t)$ мы осуществляли интегрирование дважды).

Для применения указанного выше приема запишем дифференциальное уравнение (1), полученное при решении предыдущей задачи, в виде

$$\ddot{x}\,dx = (g - k^2\dot{x}^2)\,dx. \qquad (1)$$

Учитывая, что $\ddot{x}\,dx = \frac{d\dot{x}}{dt}\,dx = \dot{x}\,d\dot{x}$, и отделив переменные в уравнении (1), получим

$$\frac{\dot{x}\,d\dot{x}}{g - k^2\dot{x}^2} = dx.$$

Проинтегрировав это уравнение, находим

$$-\frac{1}{2k^2}\ln(g - k^2\dot{x}^2) = x + C. \tag{2}$$

В начальном положении парашютиста, т. е. при $x = 0$, скорость его, по условию задачи, равнялась нулю, т. е. $\dot{x} = 0$. Внося эти значения в уравнение (2), находим, что

$$C = -\frac{1}{2k^2}\ln g.$$

После подстановки полученного значения C уравнение (2) принимает вид

$$\frac{1}{2k^2}\ln\frac{g}{g - k^2\dot{x}^2} = x,$$

откуда

$$\dot{x} = \frac{1}{k}\sqrt{g(1 - e^{-2k^2x})}. \tag{3}$$

Уравнение (3) определяет проекцию скорости парашютиста в зависимости от его положения.

Для нахождения скорости парашютиста в момент приземления надо в уравнение (3) подставить $x = H$, $\dot{x} = v$. Тогда

$$v = \frac{1}{k}\sqrt{g(1 - e^{-2k^2H})}.$$

Как было указано, тот же результат, но более громоздким способом можно получить с помощью формул, выведенных при решении предыдущей задачи. Действительно, запишем формулы (5) и (8), полученные в предыдущей задаче, положив в них $v_0 = 0$. Тогда

$$\dot{x} = \frac{\sqrt{g}}{k}\cdot\operatorname{th}(k\sqrt{g}\,t), \tag{4}$$

$$x = \frac{1}{k^2}\ln\operatorname{ch}(k\sqrt{g}\,t). \tag{5}$$

Обозначив через T продолжительность спуска парашютиста с высоты H, из формулы (5) имеем

$$\operatorname{ch}(k\sqrt{g}\,T) = e^{k^2H}.$$

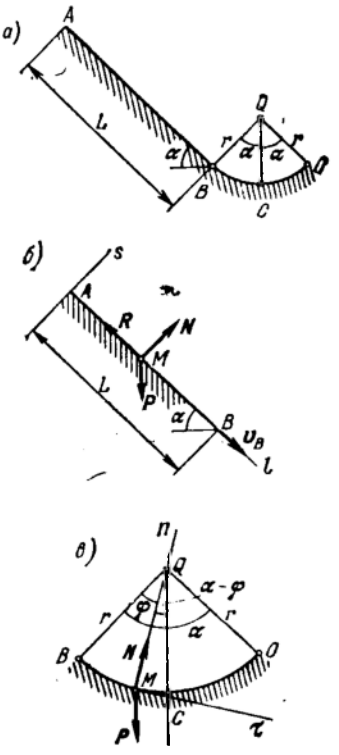
Так как $\operatorname{th}(k\sqrt{g}\,T) = \frac{\sqrt{\operatorname{ch}^2(k\sqrt{g}\,T) - 1}}{\operatorname{ch}(k\sqrt{g}\,T)}$, то

$$\operatorname{th}(k\sqrt{g}\,T) = \sqrt{1 - e^{-2k^2H}}. \tag{6}$$

Искомую скорость определим из формулы (4), положив в ней $l = T$, $\dot{x} = v$. Воспользовавшись формулой (6), находим

$$v = \frac{1}{k}\sqrt{g\,(1 - e^{-2k^2 H})}.$$

Задача 8.25. Лыжник массы m совершает из состояния покоя спуск с горы, двигаясь по прямолинейному участку длиной $AB = L$, расположенному под углом α к горизонту. Затем движение происходит по дуге окружности BCO радиуса r с центральным углом, равным 2α (см. рис. *а*). Прямолинейный участок AB является касательной к дуге окружности в точке B.



К задаче 8.25.

Р е ш е н и е. Для изучения движения лыжника по дуге окружности BCO надо знать его начальную скорость v_B в точке B. Эта начальная скорость одновременно является конечной при движении по прямолинейному участку AB, поэтому предварительно рассмотрим движение лыжника на участке AB и определим скорость v_B.

К лыжнику приложены силы: $\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{g}$ — сила тяжести, $\boldsymbol{N}$ — нормальная реакция наклонной плоскости, $\boldsymbol{R}$ — сила сопротивления движению. Направим на рис. *б* ось l вдоль AB и ось s перпендикулярно к AB.

Дифференциальные уравнения движения в проекциях на оси l и s имеют вид

$$m\ddot{l} = mg\sin\alpha + R_l, \quad m\ddot{s} = N - mg\cos\alpha.$$

Учтя, что $R_l = -k^2 m l^2$, а при движении вдоль AB $s = 0$ и, значит, $\ddot{s} = 0$, получим

$$\ddot{l} = g\sin\alpha - k^2 l^2, \quad N = mg\cos\alpha. \qquad (1)$$

Итак, при движении лыжника на прямолинейном участке AB реакция N постоянна.

Для интегрирования первого дифференциального уравнения (1) запишем начальные условия движения лыжника. Так как движение начинается из состояния покоя из начала отсчета A оси l, то

$$\text{при } t = 0 \quad l = 0, \quad \dot{l} = 0. \tag{2}$$

Умножив это дифференциальное уравнение на dl и учтя, что $\dot{l}\,dl = \frac{dl}{dt}\,dl = l\,dl$, запишем

$$l\,dl = (g \sin\alpha - k^2 l^2)\,dl. \tag{3}$$

Отделив переменные, получим

$$\frac{l\,dl}{g \sin\alpha - k^2 l^2} = dl. \tag{4}$$

Интеграл уравнения (4) имеет вид

$$-\frac{1}{2k^2} \ln (g \sin\alpha - k^2 l^2) = l + C_1. \tag{5}$$

Подстановка начальных условий движения (2) дает $C_1 = -\frac{1}{2k^2} \ln(g \sin\alpha)$. Внеся это значение C_1 в уравнение (5), получим зависимость между проекцией скорости l и положением лыжника при движении на участке AB:

$$l^2 = \frac{g \sin\alpha}{k^2}(1 - e^{-2k^2 l}). \tag{6}$$

Для определения скорости в точке B остается подставить в уравнение (6): $l = L$, $l = v_B$ и решить его относительно v_B. Получим

$$v_B = \frac{1}{k}\sqrt{g \sin\alpha\,(1 - e^{-2k^2 L})}. \tag{7}$$

Переходим к изучению движения лыжника по дуге BCO. Здесь удобно воспользоваться дифференциальными уравнениями движения в проекциях на оси натурального триэдра.

Изобразим на рис. *в* лыжника в положении M и построим оси τ и n. Угол φ будем отсчитывать от радиуса $BQ = r$, фиксирующего начальное положение B лыжника. Дуговая координата σ равна $\sigma = \smile BM = r\varphi$. Значит, проекция скорости на касательную τ равна

$$v_\tau = \dot{\sigma} = r\dot{\varphi}. \tag{8}$$

К лыжнику приложены силы: $\boldsymbol{P}$ — его сила тяжести и нормальная реакция $\boldsymbol{N}$.

Дифференциальные уравнения движения в проекциях на оси натурального триэдра (2*) главы VIII, § 1 в данном случае имеют вид

$$m\frac{dv_\tau}{dt} = mg \sin(\alpha - \varphi), \qquad m\frac{v^2}{r} = N - mg\cos(\alpha - \varphi).$$

Использовав формулу (8), запишем

$$r\ddot{\varphi} = g \sin(\alpha - \varphi), \qquad m\frac{v^2}{r} = N - mg\cos(\alpha - \varphi). \tag{9}$$

Умножим первое уравнение (9) на $d\varphi$ и учтем, что $\ddot{\varphi}\,d\varphi = \frac{d\dot{\varphi}}{dt}\,d\varphi = \dot{\varphi}\,d\dot{\varphi}$. После интегрирования получим

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{2} = \frac{g}{r}\cos(\alpha - \varphi) + C_2. \tag{10}$$

В начальном положении B лыжника: $\varphi = 0$, а $\dot{\varphi} = v_B/r$, где v_B дано формулой (7), т. е.

$$\varphi = 0, \qquad \dot{\varphi} = \frac{1}{kr}\sqrt{g\sin\alpha\,(1 - e^{-2k^2L})}. \tag{11}$$

Подставив начальные условия (11) в уравнение (10), получим $C_2 = \frac{g\sin\alpha}{2k^2r^2}(1 - e^{-2k^2L}) - \frac{g}{r}\cos\alpha$. Внеся это значение C_2 в уравнение (10), находим

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{2} = \frac{g}{r}\cos(\alpha - \varphi) + \frac{g\sin\alpha}{2k^2r^2}(1 - e^{-2k^2L}) - \frac{g}{r}\cos\alpha.$$

Учтя формулу (8), запишем зависимость скорости v лыжника при движении по дуге BCO от угла φ:

$$v = \sqrt{2gr\,[\cos(\alpha - \varphi) - \cos\alpha] + \frac{g\sin\alpha}{k^2}(1 - e^{-2k^2L})}. \tag{12}$$

Для определения скорости лыжника в точках C и O надо соответственно считать $\varphi = \alpha$ и $\varphi = 2\alpha$. Получим

$$\begin{aligned} v_C &= \sqrt{2gr\,(1 - \cos\alpha) + \frac{g\sin\alpha}{k^2}(1 - e^{-2k^2L})}, \\ v_0 &= \frac{1}{k}\sqrt{g\sin\alpha\,(1 - e^{-2k^2L})}. \end{aligned} \tag{13}$$

Сопоставив вторую формулу (13) с формулой (7), видим, что $v_0 = v_B$ (конечно, решая эту задачу с учетом силы сопротивления, мы получили бы $v_0 < v_B$).

Переходим к определению модуля реакции N. Решив второе уравнение (9) относительно N, получим

$$N = mg\cos(\alpha - \varphi) + m\frac{v^2}{r}. \tag{14}$$

Для определения N_B, N_C и N_O надо в формулу (14) подставить соответствующие значения скорости v и угла φ. Находим

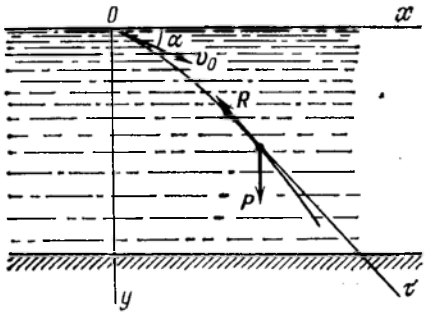
$$\begin{aligned} N_B &= N_O = mg\left(\cos\alpha + \frac{1 - e^{-2k^2L}}{rk^2}\sin\alpha\right), \\ N_C &= mg\left(3 - 2\cos\alpha + \frac{1 - e^{-2k^2L}}{rk^2}\sin\alpha\right). \end{aligned} \tag{15}$$

Сопоставив вторую формулу (1) с первой формулой (15), видим, что в точке B при переходе лыжника с прямолинейного на криволинейный участок траектории модуль реакции N_B меняется скачкообразно

от $N_B = mg\cos\alpha$ до $N_B = mg\left(\cos\alpha + \frac{1 - e^{-2k^2L}}{rk^2}\sin\alpha\right)$. Это происходит за счет появления в точке B нормального ускорения.

Искомые давления лыжника на снег равны по модулю соответствующим реакциям (15) и направлены противоположно им.

Задача 8.26. Камень, брошенный с берега в воду, коснулся поверхности воды со скоростью v_0 под углом α к поверхности (см. рисунок).



К задаче 8.26.

Найти уравнение движения камня в воде, если сила сопротивления воды $\boldsymbol{R} = -km\boldsymbol{v}$, где m — масса камня, k — постоянный положительный коэффициент. Оси x, y изображены на рисунке.

Р е ш е н и е. К камню, опускающемуся на дно, приложены две силы: $\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{g}$ — его сила тяжести, $\boldsymbol{R}$ — сила сопротивления воды, направленная по касательной к траектории камня, противоположно его скорости.

Запишем начальные условия движения камня:

$$\text{при } t = 0 \quad x = 0, \quad y = 0, \quad \dot{x} = v_0\cos\alpha, \quad \dot{y} = v_0\sin\alpha. \tag{1}$$

Составим векторное уравнение его движения:

$$m\boldsymbol{w} = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{R}.$$

Учтя, что $\boldsymbol{w} = \ddot{\boldsymbol{r}}$, $\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{R} = -km\boldsymbol{v}$, после сокращения на m найдем

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{g} - k\boldsymbol{v}. \tag{2}$$

Спроектировав векторное уравнение (2) на оси x и y, получим дифференциальные уравнения движения камня в проекциях на эти оси

$$\ddot{x} = -k\dot{x}, \quad \ddot{y} = g - k\dot{y}. \tag{3}$$

Проинтегрируем первое дифференциальное уравнение (3), записав его в виде $d\dot{x}/dt = -k\dot{x}$; разделим переменные:

$$\frac{d\dot{x}}{\dot{x}} = -k\,dt. \tag{4}$$

Первый интеграл уравнения (4) имеет вид

$$\ln\dot{x} = -kt + C_1. \tag{5}$$

Подставив в уравнение (5) начальное условие (1): при $t = 0$ $\dot{x} = v_0\cos\alpha$, будем иметь $C_1 = \ln v_0\cos\alpha$. Заменив в уравнении (5) C_1 его значением, получим

$$\ln\frac{\dot{x}}{v_0\cos\alpha} = -kt.$$

Решим это уравнение относительно $\dot{x}$:

$$\dot{x} = v_0 \cos\alpha \cdot e^{-kt}. \tag{6}$$

Если в это уравнение вместо $\dot{x}$ подставить dx/dt, разделить переменные и проинтегрировать, то найдем

$$x = -\frac{v_0}{k}\cos\alpha \cdot e^{-kt} + C_2. \tag{7}$$

Для определения C_2 подставим начальное условие (1): при $t = 0$ $x = 0$. Найдем $C_2 = v_0 \cos\alpha/k$. Поэтому уравнение движения (7) окончательно примет вид

$$x = \frac{v_0}{k}\cos\alpha\,(1 - e^{-kt}). \tag{8}$$

Перейдем к интегрированию второго дифференциального уравнения (3). Приняв во внимание, что $\ddot{y} = d\dot{y}/dt$, разделим переменные:

$$\frac{d\dot{y}}{g - k\dot{y}} = dt. \tag{9}$$

Первый интеграл этого уравнения имеет вид

$$-\frac{1}{k}\ln(g - k\dot{y}) = t + C_3. \tag{10}$$

Подстановка в уравнение (10) начального условия (1): при $t = 0$ $\dot{y} = v_0 \sin\alpha$, дает

$$C_3 = -\frac{1}{k}\ln(g - kv_0 \sin\alpha).$$

После замены в уравнении (10) C_3 его значением и объединения логарифмов запишем:

$$\frac{1}{k}\ln\frac{g - kv_0\sin\alpha}{g - k\dot{y}} = t.$$

Решим это уравнение относительно $\dot{y}$:

$$\dot{y} = \frac{g}{k} - \frac{g - kv_0\sin\alpha}{k}e^{-kt}. \tag{11}$$

Заменив $\dot{y}$ в уравнении (11) на dy/dt, разделив переменные и проинтегрировав, получим

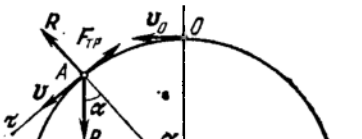
$$y = \frac{g}{k}t + \frac{g - kv_0\sin\alpha}{k^2}e^{-kt} + C_4. \tag{12}$$

Подставив в уравнение (12) начальное условие (1): при $t = 0$ $y = 0$, найдем $C_4 = -(g - kv_0\sin\alpha)/k^2$. Окончательно уравнение движения (12) примет вид

$$y = \frac{g}{k}t - \frac{g - kv_0\sin\alpha}{k^2}(1 - e^{-kt}). \tag{13}$$

Искомые уравнения движения камня даются формулами (8) и (13).

Задача 8.27. Кольцо A массы m надето на проволоку, изогнутую по дуге полуокружности радиуса ρ и расположенную в вертикальной плоскости. В начальный момент кольцу, находившемуся в верхнем положении O, была сообщена по горизонтали влево начальная скорость v_0.



К задаче 8.27.

Определить реакцию проволоки и скорость кольца, скользящего по проволоке, при наличии силы сухого трения с коэффициентом, равным f. Определить также скорость кольца в момент, когда оно достигнет положения B.

Р е ш е н и е. Задачи, в которых учитываются силы сухого трения, обычно представляют немалые вычислительные трудности. В данном случае, при заданной траектории кольца — полуокружности, воспользуемся дифференциальными уравнениями движения в проекциях на оси натурального триэдра.

Изобразим кольцо A в промежуточном положении на проволоке. Оси τ и n (см. рисунок к задаче) расположены в плоскости проволоки. Ось n образует с вертикалью угол α.

Начальные условия движения кольца имеют вид

$$\text{при } t=0 \qquad \alpha=0, \quad \dot{\alpha}=\frac{v_0}{\rho}, \tag{1}$$

ибо, по условию, в начальный момент кольцо находилось в точке O и имело скорость $\boldsymbol{v}_0$.

К кольцу приложены силы: $\boldsymbol{P}=m\boldsymbol{g}$ — сила тяжести кольца, $\boldsymbol{R}$ — нормальная реакция проволоки, $\boldsymbol{F}_{тр}$ — сила трения скольжения, направленная по касательной τ в сторону, противоположную скорости $\boldsymbol{v}$ кольца (см. рисунок к задаче).

Применив основной закон динамики совместно с законом независимости действия сил, имеем

$$m\boldsymbol{w}=m\boldsymbol{g}+\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{F}_{тр}.$$

Спроектировав это векторное равенство на оси τ и n, запишем

$$mw_\tau=mg_\tau+R_\tau+F_{тр\tau}, \qquad mw_n=mg_n+R_n+F_{трn}. \tag{2}$$

Так как $w_\tau=\frac{dv_\tau}{dt}=\rho\ddot{\alpha}$, $mg_\tau=mg\sin\alpha$, $R_\tau=0$, $F_{тр\tau}=-F_{тр}=-fR$, $w_n=\frac{v^2}{\rho}=\rho\dot{\alpha}^2$, $mg_n=mg\cos\alpha$, $R_n=-R$, $F_{трn}=0$, то уравнения (2) принимают вид

$$m\rho\ddot{\alpha}=mg\sin\alpha-fR, \quad m\rho\dot{\alpha}^2=mg\cos\alpha-R. \tag{3}$$

Исключив R из системы (3), после сокращения на массу m получим

$$\ddot{\alpha}-f\dot{\alpha}^2=\frac{g}{\rho}(\sin\alpha-f\cos\alpha). \tag{4}$$

Введя обозначение $f = \operatorname{tg}\varphi$, где φ — угол трения, запишем уравнение (4) в виде

$$\ddot{\alpha} - f\dot{\alpha}^2 = \frac{g}{\rho}\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\cos\varphi}. \tag{5}$$

Для интегрирования этого нелинейного уравнения воспользуемся подстановкой:

$$\dot{\alpha}^2 = \beta, \tag{6}$$

где β является функцией угла α. Вычислив производную по времени $2\dot{\alpha}\ddot{\alpha} = \frac{d\beta}{d\alpha}\dot{\alpha}$, получим

$$\ddot{\alpha} = \frac{1}{2}\frac{d\beta}{d\alpha}. \tag{7}$$

Использовав выражение (7) в уравнении (5), имеем

$$\frac{d\beta}{d\alpha} - 2f\beta = 2\frac{g}{\rho}\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\cos\varphi}. \tag{8}$$

Это — линейное дифференциальное уравнение первого порядка относительно β при аргументе α.

Умножив уравнение (8) на $e^{-2f\alpha}$:

$$\frac{d\beta}{d\alpha}e^{-2f\alpha} - 2f\beta e^{-2f\alpha} = 2\frac{g}{\rho}\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\cos\varphi}e^{-2f\alpha}, \tag{9}$$

и заметив, что

$$\frac{d\beta}{d\alpha}e^{-2f\alpha} - 2f\beta e^{-2f\alpha} = \frac{d}{d\alpha}(\beta e^{-2f\alpha}),$$

запишем уравнение (9) в виде

$$d(\beta e^{-2f\alpha}) = \frac{2g}{\rho\cos\varphi}e^{-2f\alpha}\sin(\alpha-\varphi)\,d\alpha. \tag{10}$$

Приняв во внимание, что

$$\int e^{-2f\alpha}\sin(\alpha-\varphi)\,d\alpha = -\frac{e^{-2f\alpha}}{1+4f^2}[2f\sin(\alpha-\varphi)+\cos(\alpha-\varphi)] + C$$

(этот результат нетрудно получить интегрированием по частям), проинтегрировав уравнение (10), имеем

$$\rho e^{-2f\alpha} = -\frac{2ge^{-2f\alpha}}{\rho(1+4f^2)\cos\varphi}[2f\sin(\alpha-\varphi)+\cos(\alpha-\varphi)] + C. \tag{11}$$

Использовав (6) в уравнении (11), запишем

$$\dot{\alpha}^2 = -\frac{2g}{\rho(1+4f^2)\cos\varphi}[2f\sin(\alpha-\varphi)+\cos(\alpha-\varphi)] + Ce^{2f\alpha}. \tag{12}$$

Подстановка в уравнение (12) начального условия (1) дает

$$C = \frac{v_0^2}{\rho^2} + \frac{2g}{\rho(1+4f^2)}(1-2f\operatorname{tg}\varphi).$$

Внеся это значение C в уравнение (12), найдем

$$\dot{\alpha}^2 = -\frac{2g}{\rho(1+4f^2)\cos\varphi}[2f\sin(\alpha-\varphi)+\cos(\alpha-\varphi)]+$$
$$+\left[\frac{v_0^2}{\rho^2}+\frac{2g}{\rho(1+4f^2)}(1-2f\operatorname{tg}\varphi)\right]e^{2f\alpha}. \quad (13)$$

Так как $\operatorname{tg}\varphi = f$, то $\sin\varphi = \frac{f}{\sqrt{1+f^2}}$, $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+f^2}}$. Подставив эти значения $\operatorname{tg}\varphi$, $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ в уравнение (13) и заменив $\dot{\alpha}^2$ на v^2/ρ^2, получим искомое значение скорости кольца

$$v = \sqrt{\left(v_0^2+2g\rho\frac{1-2f^2}{1+4f^2}\right)e^{2f\alpha}-\frac{2g\rho}{1+4f^2}[3f\sin\alpha+(1-2f^2)\cos\alpha]}. \quad (14)$$

Здесь скорость v кольца выражена в зависимости от угла α, определяющего положение кольца на проволочной полуокружности.

При достижении кольцом наинизшей точки B, т. е. при $\alpha = \pi/2$, формула (14) принимает вид

$$v_B = \sqrt{\left(v_0^2+2g\rho\frac{1-2f^2}{1+4f^2}\right)e^{f\pi}-\frac{6fg\rho}{1+4f^2}}.$$

Искомый модуль реакции $\boldsymbol{R}$ проволоки найдем из второго уравнения (3)

$$R = mg\cos\alpha - m\rho\dot{\alpha}^2. \quad (15)$$

Учтя, что $\rho\dot{\alpha}^2 = v^2/\rho$, где v определено формулой (14), запишем уравнение (15) в виде

$$R = mg\cos\alpha+\frac{2P}{1+4f^2}[3f\sin\alpha+(1-2f^2)\cos\alpha]-$$
$$-m\left(\frac{v_0^2}{\rho}+2g\frac{1-2f^2}{1+4f^2}\right)e^{2f\alpha}.$$

Задача 8.28. Материальная точка M движется в вертикальной плоскости под действием центральной силы притяжения, пропорциональной ее расстоянию до неподвижного центра: $\boldsymbol{F} = -k^2m\boldsymbol{r}$, где $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор точки, m — ее масса, k — постоянный положительный коэффициент.

Найти уравнение траектории точки, если в начальный момент она занимала положение $M_0(a, -g/k^2)$ и имела скорость $\boldsymbol{v}_0$, направленную по вертикали вверх (см. рисунок).

Р е ш е н и е. Начало осей декартовых координат возьмем в неподвижном центре O, к которому притягивается точка M. Ось x направим по горизонтали направо, ось y — по вертикали вверх. Запишем начальные условия движения точки:

$$\text{при } t=0 \quad x=a, \quad y=-g/k^2, \quad \dot{x}=0, \quad \dot{y}=v_0.$$

К материальной точке M приложены следующие силы: $\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{g}$ — сила тяжести, $\boldsymbol{F}$ — сила притяжения, направленная к неподвижному центру O.

Составим векторное дифференциальное уравнение движения материальной точки

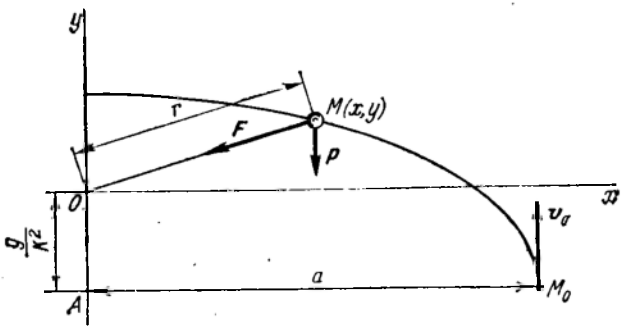
$$m\boldsymbol{w} = m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{F}, \quad \text{или} \quad \ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{g} - k^2\boldsymbol{r}.$$

Проектируя на оси x и y, получим

$$\ddot{x} + k^2x = 0, \tag{1}$$

$$\ddot{y} + k^2y = -g. \tag{2}$$

Уравнение (1) является однородным линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Для



К задаче 8.28.

его интегрирования составим характеристическое уравнение $\lambda^2 + k^2 = 0$, откуда $\lambda_{1,2} = \pm ki$. Следовательно, общее решение дифференциального уравнения (1) запишется в виде

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \tag{3}$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования. Для определения C_1 и C_2 вычислим

$$\dot{x} = -C_1k \sin kt + C_2k \cos kt \tag{4}$$

и затем подставим в уравнение (3) $t = 0$, $x = a$, а в уравнение (4) $t = 0$; $\dot{x} = 0$. Находим $C_1 = a$, $C_2 = 0$. Внеся эти значения C_1 и C_2 в уравнение (3), имеем

$$x = a \cos kt. \tag{5}$$

Дифференциальное уравнение (2), в отличие от дифференциального уравнения (1), является неоднородным. Следовательно, его общее решение имеет вид

$$y = y_1 + y_2, \tag{6}$$

где y_2 — частное решение неоднородного уравнения, а y_1 — общее решение соответствующего однородного уравнения

$$\ddot{y} + k^2y = 0. \tag{7}$$

Заметив, что дифференциальное уравнение (7) аналогично дифференциальному уравнению (1), запишем

$$y_1 = C_3 \cos kt + C_4 \sin kt. \tag{8}$$

Правая часть дифференциального уравнения (2) постоянна. Поэтому ищем частное решение в виде $y_2 = A$, где A — постоянная. Положив в уравнении (2) $y = A$, находим

$$y_2 = -\frac{g}{k^2}. \tag{9}$$

Воспользовавшись формулами (8) и (9), запишем общее решение по формуле (6):

$$y = C_3 \cos kt + C_4 \sin kt - \frac{g}{k^2}. \tag{10}$$

Для определения постоянных интегрирования C_3 и C_4 вычислим

$$\dot{y} = -C_3 k \sin kt + C_4 k \cos kt. \tag{11}$$

Затем подставим в уравнение (10) $t = 0$, $y = -g/k^2$, а в уравнение (11) $t = 0$, $\dot{y} = v_0$. Тогда $C_3 = 0$, $C_4 = v_0/k$. Внеся эти значения C_3 и C_4 в уравнение (10), получим

$$y = \frac{v_0}{k} \sin kt - \frac{g}{k^2}. \tag{12}$$

Итак, уравнения движения материальной точки имеют вид

$$x = a \cos kt, \quad y = \frac{v_0}{k} \sin kt - \frac{g}{k^2}.$$

Для определения уравнения траектории следует из уравнений движения исключить время. Замечая, что

$$\cos kt = \frac{x}{a}, \quad \sin kt = \frac{k}{v_0}\left(y + \frac{g}{k^2}\right),$$

получим искомое уравнение траектории

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y + g/k^2)^2}{(v_0/k)^2} = 1.$$

Это — уравнение эллипса с центром в точке A $(0, -g/k^2)$. Одна полуось эллипса равна a, а другая полуось равна v_0/k.

Задача 8.29. Материальная точка движется в вертикальной плоскости под действием центральной силы отталкивания, пропорциональной расстоянию до неподвижного центра: $\boldsymbol{F} = k^2 m \boldsymbol{r}$, где $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор точки M, m — ее масса, k — постоянный коэффициент.

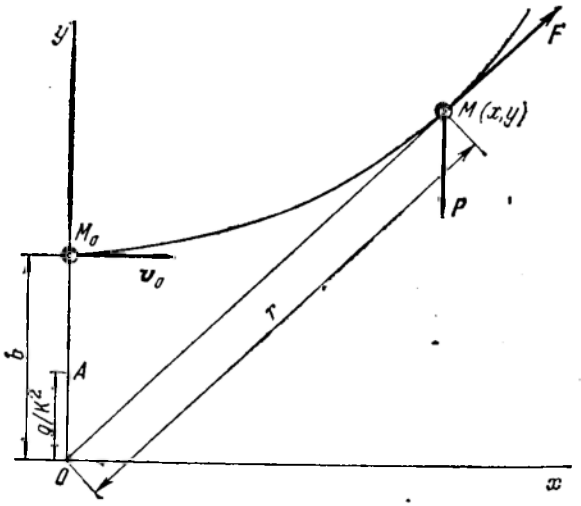
Найти уравнение траектории точки, если в начальный момент она занимала положение M_0 $(OM_0 = b)$ и имела скорость $\boldsymbol{v}_0$, направленную по горизонтали направо (см. рисунок).

Р е ш е н и е. Начало декартовых осей координат возьмем в неподвижном центре O, от которого отталкивается точка M. Ось x направим по горизонтали направо, ось y — через начальное положение

точки по вертикали вверх. Запишем начальные условия движения точки в виде

$$\text{при } t = 0 \quad x = 0, \quad y = b, \quad \dot{x} = v_0, \quad \dot{y} = 0.$$

К материальной точке M приложены следующие силы: $\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{g}$ — ее сила тяжести, $\boldsymbol{F}$ — сила отталкивания, направленная вдоль OM от центра O.



К задаче 8.29.

Составим векторное дифференциальное уравнение движения материальной точки:

$$m\boldsymbol{w} = m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{F}, \quad \text{или} \quad \ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{g} + k^2\boldsymbol{r}.$$

Проектируя на оси x и y, получим

$$\ddot{x} - k^2x = 0, \tag{1}$$

$$\ddot{y} - k^2y = -g. \tag{2}$$

Уравнение (1) является однородным линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Для его интегрирования составим характеристическое уравнение: $\lambda^2 - k^2 = 0$, откуда $\lambda_{1,2} = \pm k$. Следовательно, решение дифференциального уравнения (1) запишется в виде

$$x = C_1e^{kt} + C_2e^{-kt}. \tag{3}$$

Для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 вычислим

$$\dot{x} = C_1ke^{kt} - C_2ke^{-kt} \tag{4}$$

и затем подставим в уравнение (3) $t = 0$, $x = 0$, а в уравнение (4) $t = 0$, $\dot{x} = v_0$. Тогда получим систему уравнений

$$0 = C_1 + C_2, \quad v_0 = C_1 k - C_2 k.$$

Отсюда $C_1 = v_0/(2k)$ и $C_2 = -v_0/(2k)$. Следовательно, окончательно получим

$$x = \frac{v_0}{2k}(e^{kt} - e^{-kt}) = \frac{v_0}{k}\operatorname{sh} kt. \tag{5}$$

Так как дифференциальное уравнение (2) является неоднородным, то его общее решение y имеет вид

$$y = y_1 + y_2, \tag{6}$$

где y_1 — общее решение соответствующего однородного уравнения

$$\ddot{y} - k^2 y = 0, \tag{7}$$

а y_2 — частное решение уравнения (2).

Дифференциальные уравнения (1) и (7) аналогичны, поэтому

$$y_1 = C_3 e^{kt} + C_4 e^{-kt}. \tag{8}$$

Правая часть дифференциального уравнения (2) постоянна. Поэтому частное решение y_2 ищем в виде постоянного: $y_2 = A$. Положив в уравнении (2) $y_2 = A$, находим

$$y_2 = g/k^2. \tag{9}$$

Воспользовавшись формулами (8) и (9), запишем общее решение по формуле (6):

$$y = C_3 e^{kt} + C_4 e^{-kt} + \frac{g}{k^2}. \tag{10}$$

Для определения постоянных интегрирования C_3 и C_4 вычислим

$$\dot{y} = C_3 k e^{kt} - C_4 k e^{-kt}. \tag{11}$$

Затем подставим в уравнение (10) $t = 0$, $y = b$, а в уравнение (11) $t = 0$, $\dot{y} = 0$. Тогда получим систему уравнений

$$b = C_3 + C_4 + \frac{g}{k^2}, \quad 0 = C_3 k - C_4 k,$$

откуда

$$C_3 = C_4 = \frac{1}{2}\left(b - \frac{g}{k^2}\right).$$

Окончательно,

$$y = \frac{1}{2}\left(b - \frac{g}{k^2}\right)(e^{kt} + e^{-kt}) + \frac{g}{k^2},$$

т. е.

$$y = \left(b - \frac{g}{k^2}\right)\operatorname{ch} kt + \frac{g}{k^2}. \tag{12}$$

Итак, уравнения движения материальной точки имеют вид (5) и (12)

$$x = \frac{v_0}{k}\operatorname{sh} kt, \quad y = \left(b - \frac{g}{k^2}\right)\operatorname{ch} kt + \frac{g}{k^2}.$$

Для определения уравнения траектории точки следует из уравнений движения исключить время. Из (5) и (12) находим

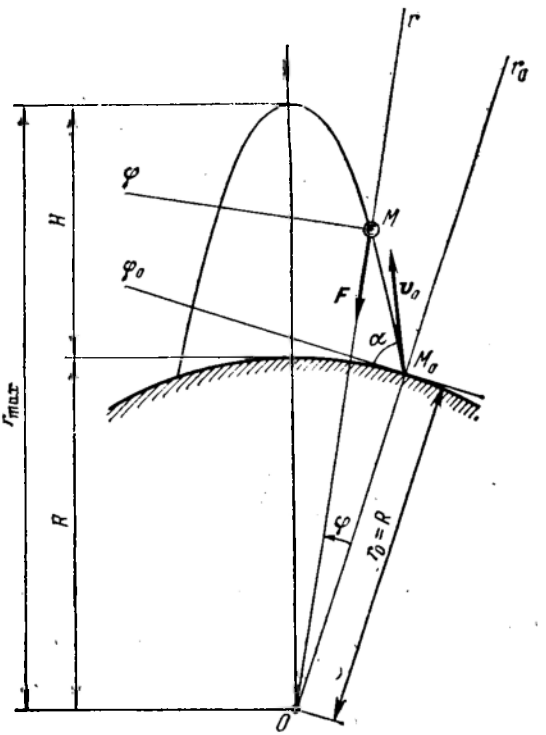
$$\operatorname{sh} kt = \frac{kx}{v_0}, \qquad \operatorname{ch} kt = \frac{y - g/k^2}{b - g/k^2}.$$

Учитывая, что $\operatorname{ch}^2 kt - \operatorname{sh}^2 kt = 1$, получаем искомое уравнение траектории точки M:

$$\frac{(y - g/k^2)^2}{(b - g/k^2)^2} - \frac{x^2}{(v_0/k)^2} = 1.$$

Это — уравнение гиперболы с центром в точке A $(0;\ g/k^2)$. Действительная полуось равна $b - g/k^2$, а мнимая v_0/k.

Задача 8.30. Найти наибольшую высоту подъема над поверхностью Земли снаряда, вылетевшего с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту и упавшего на Землю, считая силу притяжения Земли обратно пропорциональной квадрату расстояния до центра Земли. Силой сопротивления движению пренебречь. Снаряд считать точечной массой. На поверхности Земли ускорение силы тяжести равно g. Радиус Земли равен R.



К задаче 8.30.

Р е ш е н и е. Предположим, что снаряд в рассматриваемый произвольный момент времени находится в точке M (см. рисунок), а в начальный момент времени находился в точке M_0.

Учитывая, что к снаряду приложена только центральная сила F, решаем задачу в полярных координатах. Полюс O выбираем в центре Земли, оси r даем направление радиуса-вектора OM от O к M. Ось φ проводим через точку M перпендикулярно к оси r. Оси r_0 и φ_0 соответствуют начальному положению снаряда M_0.

Запишем начальные условия движения снаряда в виде

$$\text{при } t = 0 \quad r = r_0 = R, \quad \varphi = 0,$$

$$\dot{r} = v_{0r} = v_0 \sin\alpha, \quad \dot{\varphi}_0 = \frac{v_0}{R}\cos\alpha.$$

Действительно, если обозначить начальное значение $\dot{\varphi}$ через $\dot{\varphi}_0$, то пр. $_{\varphi_0}\boldsymbol{v}_0 = r_0\dot{\varphi}_0$, а вследствие соотношения пр. $_{\varphi_0}\boldsymbol{v}_0 = v_0\cos\alpha$ находим

$$R\dot{\varphi}_0 = v_0\cos\alpha; \tag{1}$$

отсюда следует записанное выше начальное значение $\dot{\varphi}_0$.

К снаряду приложена только сила притяжения $\boldsymbol{F}$, обратно пропорциональная квадрату расстояния до центра Земли, т. е. $F = km/r^2$. Учитывая, что на поверхности Земли, т. е. при $r = R$, $F = P = mg$, находим, что $k = gR^2$. Следовательно,

$$F = \frac{mgR^2}{r^2}. \tag{2}$$

Сила притяжения $\boldsymbol{F}$ направлена к центру O.

Дифференциальные уравнения движения материальной точки в проекциях на оси полярных координат имеют вид

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F_r, \quad \frac{m}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = F_\varphi.$$

В данном случае

$$F_r = -F = -\frac{mgR^2}{r^2}, \quad F_\varphi = 0.$$

Следовательно,

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{gR^2}{r^2}, \tag{3}$$

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = 0. \tag{4}$$

Из дифференциального уравнения (4) следует интеграл площадей: $r^2\dot{\varphi} = C$, т. е.

$$r^2\dot{\varphi} = r_0^2\dot{\varphi}_0. \tag{5}$$

Учитывая, что $r_0 = R$, а также формулу (1), запишем равенство (5) в виде $r^2\dot{\varphi} = Rv_0\cos\alpha$, откуда

$$\dot{\varphi} = \frac{Rv_0\cos\alpha}{r^2} \tag{6}$$

($r^2\dot{\varphi}$ является удвоенной секториальной скоростью снаряда, т. е. производной по времени от площади, описываемой радиусом-вектором $\boldsymbol{r}$ снаряда. Итак, при центральном движении материальной точки ее секториальная скорость постоянна).

Обратимся к интегрированию дифференциального уравнения (3). Воспользовавшись формулой (6), запишем это уравнение в виде

$$\ddot{r} - \frac{R^2 v_0^2 \cos^2 \alpha}{r^3} = -\frac{gR^2}{r^2}.$$

Умножим почленно на dr, проинтегрируем его, учитывая, что

$$\ddot{r}\, dr = \frac{d\dot{r}}{dt}\, dr = \dot{r}\, d\dot{r}.$$

Получим

$$\frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{R^2 v_0^2 \cos^2 \alpha}{2r^2} = \frac{gR^2}{r} + C.$$

Так как в начальном положении снаряда $r = r_0 = R$, $\dot{r} = \text{пр.}_{r_0} \boldsymbol{v}_0 = v_0 \sin \alpha$, то постоянная интегрирования имеет вид

$$C = -\frac{2gR - v_0^2}{2}.$$

Следовательно,

$$\frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{R^2 v_0^2 \cos^2 \alpha}{2r^2} = \frac{gR^2}{r} - \frac{2gR - v_0^2}{2}. \tag{7}$$

Уравнение (7) устанавливает зависимость между проекцией скорости снаряда $\dot{r}$ на ось r и радиусом-вектором r.

В наивысшей точке траектории проекция скорости снаряда на ось r равна нулю, т. е. при $r = r_{\max}$ $\dot{r} = 0$. Подставив эти значения в уравнение (7), получим квадратное уравнение относительно $r_{\max}$:

$$(2gR - v_0^2) r_{\max}^2 - 2gR^2 r_{\max} + R^2 v_0^2 \cos^2 \alpha = 0,$$

откуда

$$r_{\max} = \frac{gR \pm \sqrt{g^2R^2 - (2gR - v_0^2)\, v_0^2 \cos^2 \alpha}}{2gR - v_0^2} R. \tag{8}$$

Из уравнения (8) следует, что при $v_0^2 = 2gR$ величина $r_{\max}$ обращается в бесконечность, т. е. снаряд на Землю не возвратится ($v_0 = \sqrt{2gR} = 11{,}2$ км/с называется *второй космической скоростью*). Поэтому снаряду надо сообщить начальную скорость, удовлетворяющую условию $2gR - v_0^2 > 0$, т. е. $v_0 < \sqrt{2gR}$.

Наибольшая высота подъема снаряда над поверхностью Земли $H = r_{\max} - R$.

Использовав формулу (8), получим

$$H_{1,2} = \frac{-gR + v_0^2 \pm \sqrt{g^2R^2 - (2gR - v_0^2)\, v_0^2 \cos^2 \alpha}}{2gR - v_0^2} R. \tag{9}$$

Отбрасывая отрицательное значение H_2, окончательно находим

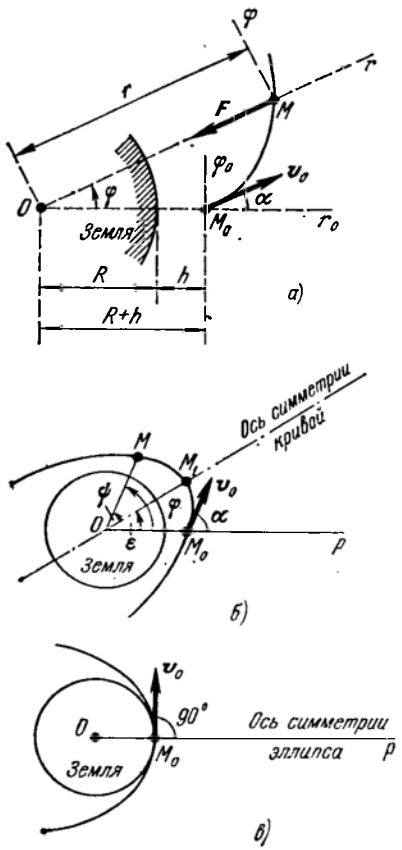
$$H = \frac{-gR + v_0^2 + \sqrt{g^2R^2 - (2gR - v_0^2)\, v_0^2 \cos^2 \alpha}}{2gR - v_0^2} R.$$

Для случая, когда начальная скорость v_0 направлена по вертикали вверх, т. е. при $\alpha = \pi/2$, имеем

$$H = \frac{Rv_0^2}{2gR - v_0^2}.$$

Задача 8.31. 4 октября 1957 г. в Советском Союзе был запущен первый в мире искусственный спутник Земли. В момент выведения на орбиту в положении M_0 на высоте h спутник имел скорость v_0, расположенную под углом α к вертикали, проходящей через центр Земли.

Требуется показать, что спутник движется по эллипсу. Сила земного притяжения обратно пропорциональна квадрату расстояния спутника от центра Земли. Ускорение силы тяжести на поверхности Земли равно g. Радиус Земли R. Силой сопротивления движению пренебречь.



К задаче 8.31.

Р е ш е н и е. Так как начальная скорость v_0 и сила земного притяжения F лежат в одной плоскости, то траектория спутника является плоской кривой. Поэтому выберем систему полярных координат с полюсом O в центре Земли (рис. *а*). Радиус-вектор OM соединяет полюс O с промежуточным положением M движущегося спутника. Вдоль OM проводим ось r, а перпендикулярно к ней через точку M — ось φ. M_0 — начальное положение спутника на орбите.

Из условия задачи видно, что начальные условия движения спутника имеют вид

при $t = 0$ $\quad r = r_0 = R + h, \quad \varphi = 0,$

$$\dot{r} = \dot{r}_0 = \text{пр.}_{r_0} v_0 = v_0 \cos\alpha,$$

$$\dot{\varphi}_0 = \frac{v_0}{r_0} \sin\alpha,$$

ибо если обозначить начальное значение $\dot{\varphi}$ через $\dot{\varphi}_0$, то $\text{пр.}_{\varphi_0} v_0 = r_0\dot{\varphi}_0$, и вследствие соотношения $\text{пр.}_{\varphi_0} v_0 = v_0 \sin\alpha$ находим

$$r_0\dot{\varphi}_0 = v_0 \sin\alpha, \qquad (1)$$

т. е. $\dot{\varphi}_0$ является заданной величиной.

Движение спутника M происходит под действием центральной силы $\boldsymbol{F}$ земного притяжения, направленной к центру Земли. Сила земного притяжения обратно пропорциональна квадрату расстояния до центра Земли, т. е.

$$F = \frac{mk}{r^2}. \tag{2}$$

На поверхности Земли, т. е. при $r = R$, $F = P = mg$. Подставив эти значения в формулу (2), находим, что $k = gR^2$. Следовательно, формула (2) принимает вид

$$F = \frac{mgR^2}{r^2}. \tag{3}$$

Составим дифференциальные уравнения движения спутника в полярных координатах. Учитывая, что дифференциальные уравнения движения материальной точки в полярных координатах имеют вид

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F_r, \quad \frac{m}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = F_\varphi,$$

в данном случае получим

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = -F, \quad \frac{m}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = 0$$

или, принимая во внимание формулу (3),

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{gR^2}{r^2}, \tag{4}$$

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = 0. \tag{5}$$

Из дифференциального уравнения (5) находим

$$r^2\dot{\varphi} = C. \tag{6}$$

Так как секториальная скорость точки, т. е. производная по времени от площади S, описываемой радиусом-вектором $\boldsymbol{r}$, равна $\dot{S} = {}^1/_2\, r^2\dot{\varphi}$, то $C = 2\dot{S}$. Итак, секториальная скорость спутника постоянна, т. е. $r^2\dot{\varphi} = r_0^2\dot{\varphi}_0$. Воспользовавшись формулой (1), запишем формулу (6) в виде

$$C = r^2\dot{\varphi} = r_0^2\dot{\varphi}_0 = r_0 v_0 \sin\alpha,$$

откуда

$$\dot{\varphi} = \frac{r_0 v_0 \sin\alpha}{r^2}. \tag{7}$$

Переходим к исследованию дифференциального уравнения (4):

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{gR^2}{r^2}.$$

Вычислим производную от r по времени: $\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi}\dot{\varphi}$. Учитывая формулу (7), находим

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi}\frac{r_0 v_0 \sin\alpha}{r^2} = -r_0 v_0 \sin\alpha \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right). \tag{8}$$

Так как $\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{d\varphi}\dot{\varphi}$, то, воспользовавшись формулами (7) и (8), имеем

$$\ddot{r} = -\frac{r_0^2 v_0^2 \sin^2\alpha}{r^2}\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right). \tag{9}$$

Запишем дифференциальное уравнение (4) с учетом формул (7) и (9). Тогда

$$-\frac{r_0^2 v_0^2 \sin^2\alpha}{r^2}\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{r_0^2 v_0^2 \sin^2\alpha}{r^3} = -\frac{gR^2}{r^2},$$

т. е.

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = A, \tag{10}$$

где

$$A = \frac{gR^2}{r_0^2 v_0^2 \sin^2\alpha}.$$

Проинтегрировав дифференциальное уравнение (10), мы определим искомое уравнение траектории спутника в полярных координатах. (Дифференциальное уравнение (10) можно было непосредственно получить, воспользовавшись формулой Бине:

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = -\frac{r^2 F_r}{mC^2},$$

где C — удвоенная секториальная скорость: $C = 2\dot{S} = r_0 v_0 \sin\gamma$, а $F_r = -F = -mgR^2/r^2$.)

Уравнение (10) является неоднородным линейным дифференциальным уравнением относительно $1/r$ с постоянными коэффициентами. Его общее решение $1/r$ равно сумме общего решения $(1/r)_1$ соответствующего однородного уравнения

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = 0 \tag{11}$$

и частного решения $(1/r)_2$ неоднородного уравнения, т. е.

$$\frac{1}{r} = \left(\frac{1}{r}\right)_1 + \left(\frac{1}{r}\right)_2. \tag{12}$$

Для решения дифференциального уравнения (11) составляем характеристическое уравнение $\lambda^2 + 1 = 0$, откуда $\lambda = \pm i$. Следовательно,

$$\left(\frac{1}{r}\right)_1 = B\cos(\varphi - \varepsilon), \tag{13}$$

где B и ε — постоянные интегрирования, подлежащие последующему определению.

Нетрудно видеть, что частное решение дифференциального уравнения (10) равно его постоянной правой части, т. е.

$$\left(\frac{1}{r}\right)_2 = A. \tag{14}$$

Воспользовавшись формулами (13) и (14), запишем общее решение по формуле (12) в виде

$$\frac{1}{r} = B\cos(\varphi - \varepsilon) + A. \tag{15}$$

Это уравнение является уравнением траектории спутника.

Для определения постоянных интегрирования B и ε вычислим производную от $1/r$ по времени:

$$-\frac{1}{r^2}\dot{r} = -B\dot{\varphi}\sin(\varphi - \varepsilon). \tag{16}$$

Подставив в уравнение (15) $r = r_0 = R + h$, $\varphi = 0$, а в уравнение (16)

$$r = r_0 = R + h, \quad \varphi = 0, \quad \dot{r} = \dot{r}_0 = v_0\cos\alpha, \quad \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 = \frac{v_0\sin\alpha}{r_0} = \frac{v_0\sin\alpha}{R+h},$$

получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{1}{R+h} &= B\cos\varepsilon + A, \\ \frac{v_0\cos\alpha}{(R+h)^2} &= -\frac{Bv_0\sin\alpha}{R+h}\sin\varepsilon. \end{aligned} \tag{17}$$

Для определения постоянных интегрирования B и ε из уравнений (17) запишем эту систему в виде

$$B\cos\varepsilon = \frac{1}{R+h} - A, \tag{18}$$

$$B\sin\varepsilon = -\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{R+h}. \tag{19}$$

Из системы (18) и (19) находим

$$B = \sqrt{\left(\frac{1}{R+h} - A\right)^2 + \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha}{(R+h)^2}}$$

или, подставляя значение A, после несложных преобразований:

$$B = \frac{gR^2}{(R+h)^2 v_0^2\sin^2\alpha}\sqrt{1 - \frac{(R+h)v_0^2\sin^2\alpha}{g^2R^4}\left[2gR^2 - (R+h)v_0^2\right]}. \tag{20}$$

Разделив (19) на (18), находим $\operatorname{tg}\varepsilon$ и, следовательно,

$$\varepsilon = \operatorname{arctg}\frac{(R+h)v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{gR^2 - (R+h)v_0^2\sin^2\alpha}. \tag{21}$$

Вернемся к уравнению траектории спутника, записанному в виде (15). Решив это уравнение относительно r, находим

$$r = \frac{1}{A + B\cos(\varphi - \varepsilon)}$$

или

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\psi}, \tag{22}$$

где

$$p = \frac{1}{A} = \frac{(R+h)^2 v_0^2 \sin^2\alpha}{gR^2}, \tag{23}$$

$$e = \frac{B}{A} = \sqrt{1 - \frac{(R+h)v_0^2\sin^2\alpha}{g^2R^4}\,[2gR^2 - (R+h)v_0^2]} \tag{24}$$

и

$$\psi = \varphi - \varepsilon. \tag{25}$$

Здесь ε определяется по формуле (21).

Как известно из курса аналитической геометрии, уравнение (22) является уравнением кривых второго порядка в полярных координатах. В нем p — параметр кривой, а e — эксцентриситет.

Кривая является: а) окружностью при $e = 0$; б) эллипсом при $e < 1$; в) параболой при $e = 1$; г) гиперболой при $e > 1$.

Угол ψ отсчитывается от оси симметрии кривой до радиуса-вектора, определяющего положение точки M на кривой (см. рис. *б*), причем ось симметрии направлена от полюса O (в данном случае центра Земли), находящегося в одном из фокусов кривой, в сторону ближайшей к фокусу вершины. Угол ε определяет положение оси симметрии кривой.

Выясним характер начальных условий запуска спутника для того, чтобы он мог двигаться по каждой из этих кривых.

а) Для того чтобы спутник двигался по окружности, должно быть выполнено условие $e = 0$, т. е., согласно формуле (24),

$$\sqrt{1 - \frac{(R+h)v_0^2\sin^2\alpha}{g^2R^4}\,[2gR^2 - (R+h)v_0^2]} = 0,$$

откуда получаем биквадратное уравнение относительно начальной скорости v_0 спутника на орбите:

$$(R+h)^2 v_0^4 \sin^2\alpha - 2gR^2(R+h)v_0^2\sin^2\alpha + g^2R^4 = 0,$$

т. е.

$$v_0^2 = \frac{gR^2}{R+h}(1 \pm i\operatorname{ctg}\alpha).$$

Комплексное значение v_0^2 указывает, что движение спутника по круговой орбите возможно только в частном случае, когда $\alpha = \pi/2$, т. е. при горизонтальном направлении начальной скорости v_0. Тогда

$$v_0 = R\sqrt{\frac{g}{R+h}}. \tag{26}$$

б) Для того чтобы спутник двигался по эллипсу, должно быть выполнено условие $e < 1$, т. е., согласно формуле (24),

$$\sqrt{1 - \frac{(R+h)v_0^2\sin^2\alpha}{g^2R^4}\,[2gR^2 - (R+h)v_0^2]} < 1.$$

Для выполнения этого неравенства необходимо, чтобы

$$2gR^2 - (R+h)\,v_0^2 > 0,$$

т. е.

$$v_0 < \sqrt{\frac{2g}{R+h}}\,R.$$

Итак, для того чтобы движение спутника происходило по эллипсу, его начальная скорость v_0 на орбите должна удовлетворять условию

$$v_0 < \sqrt{\frac{2g}{R+h}}\,R. \tag{27}$$

Однако этого условия недостаточно, так как эллиптическая траектория спутника не должна проходить внутри Земли. Значит, наименьшее расстояние r должно быть больше или равно радиусу Земли R, т. е.

$$r_{\min} \geqslant R. \tag{28}$$

Расстояние от фокуса O, совмещенного с центром Земли, до точки на эллипсе является кратчайшим в момент прохождения спутником положения M_1 (см. рис. *б*), т. е. при $\psi = 0$. Поэтому, подставив в неравенство (28) значение r из уравнения (22) и считая при этом $\psi = 0$, получим

$$\frac{p}{1+e} \geqslant R. \tag{29}$$

Подставив в неравенство (29) значение величин p и e, из формул (23) и (24) найдем после ряда преобразований

$$v_0 \geqslant \sqrt{2gR}\,\frac{R}{R+h}\sqrt{\frac{h}{(R+h)\left[\sin^2\alpha - \left(\frac{R}{R+h}\right)^2\right]}}. \tag{30}$$

Сопоставив неравенства (27) и (30), видим, что условие, при выполнении которого спутник будет двигаться вокруг Земли по эллиптической орбите, можно записать в форме

$$\sqrt{2gR}\,\frac{R}{R+h}\sqrt{\frac{h}{(R+h)\left[\sin^2\alpha - \left(\frac{R}{R+h}\right)^2\right]}} \leqslant v_0 < \sqrt{\frac{2g}{R+h}}\,R, \tag{31}$$

где v_0 — начальная скорость спутника на орбите; h — начальная высота спутника над поверхностью Земли; g — ускорение силы тяжести у поверхности Земли; α — угол, образуемый начальной скоростью с вертикалью.

Для вещественности левой части неравенства (31) необходимо, чтобы

$$|\sin\alpha| \geqslant \frac{R}{R+h}.$$

При запуске спутника с поверхности Земли, т. е. при $h = 0$, получаем, что $|\sin\alpha| = 1$, т. е. $\alpha = \pi/2$ или $\alpha = 3\pi/2$ (см. рис. *в*).

Однако в этом случае левая часть неравенства (31) принимает неопределенный вид 0/0. Полагая в левой части (31) $|\sin\alpha| = 1$ и затем устремляя h к нулю, приходим к неравенству

$$\sqrt{gR} \leqslant v_0 < \sqrt{2gR}. \tag{32}$$

Полагая $g = 9{,}81$ м/с^2 и $R = 6370$ км, имеем

$$7{,}9 \text{ км/с} \leqslant v_0 < 11{,}2 \text{ км/с}. \tag{33}$$

Итак, при запуске с поверхности Земли для движения спутника по эллиптической орбите модуль его начальной скорости должен удовлетворять неравенству (33), причем начальная скорость должна быть направлена горизонтально. Значение $v = 7{,}9$ км/с называется *первой космической скоростью*, а значение $v = 11{,}2$ км/с называется *второй космической скоростью*.

В случае $v_0 < 7{,}9$ км/с тело падает на Землю.

в) Для того чтобы тело двигалось по параболе, должно быть выполнено условие $e = 1$. Из формулы (24) следует, что при $e = 1$ $2gR^2 - (R + h)\, v_0^2 = 0$, откуда

$$v_0 = \sqrt{\frac{2g}{R+h}}\, R. \tag{34}$$

г) Для того чтобы тело двигалось по гиперболе, должно быть выполнено условие $e > 1$, откуда следует, что

$$v_0 > \sqrt{\frac{2g}{R+h}}\, R. \tag{35}$$

Из формул (34) и (35) следует, что при

$$v_0 \geqslant \sqrt{\frac{2g}{R+h}}\, R \tag{36}$$

тело будет двигаться по параболе или гиперболе, т. е. не окажется спутником Земли и будет от нее бесконечно удаляться. Если, кроме того, в начальный момент тело находится на поверхности Земли, т. е. $h = 0$, то из формулы (36) получим

$$v_0 \geqslant \sqrt{2gR},$$

т. е.

$$v_0 \geqslant 11{,}2 \text{ км/с}.$$

Указание. Рекомендуем решить следующие задачи из «Сборника задач по теоретической механике» И. В. Мещерского: 27.4, 27.7, 27.9, 27.15, 27.16, 27.18, 27.41, 27.53—27.55.

§ 4. Колебательное движение

1. Линейная восстанавливающая сила. Теория колебаний является одним из важнейших разделов теоретической механики. Ее роль в современной технике все время возрастает. При проектиро-

вании двигателей, машин и механизмов, мостов и других сооружений всегда производятся расчеты на колебания.

В данном параграфе рассматривается простейшая задача о линейных колебаниях материальной точки (крутильные колебания рассмотрены ниже, в главе IX, малые колебания материальных систем — в третьем томе). *Линейными* называются колебания, описываемые линейными дифференциальными уравнениями.

При движении материальной точки может действовать сила упругости, стремящаяся вернуть точку к некоторому положению. Эта сила упругости называется восстанавливающей. В большинстве задач рассматривается *восстанавливающая сила* F, изменяющаяся по линейному закону (по закону Гука) (рис. 8.2). При растяжении пружины эта сила прямо пропорциональна удлинению $F = -c\Delta$, где Δ — смещение конца пружины из ненапряженного состояния, c —

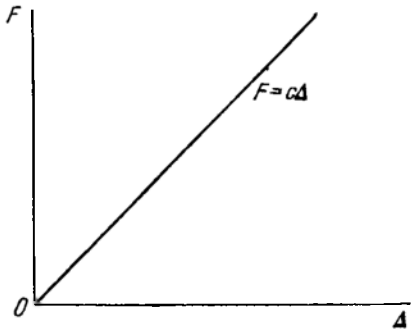


Рис. 8.2.

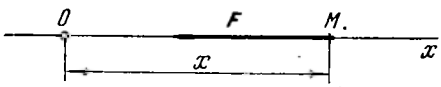


Рис. 8.3.

коэффициент упругости (*коэффициент жесткости*), численно равный силе, которую надо приложить к пружине для того, чтобы изменить ее длину на единицу. В технических задачах коэффициент упругости измеряется в кгс/см, кгс/мм, а в системе СИ в Н/м. В связи с неудобством измерения деформации в метрах, считают в Н/см.

Вообще линейной восстанавливающей называется сила, стремящаяся вернуть точку в положение равновесия и пропорциональная отклонению этой точки от положения равновесия.

В третьем томе рассмотрены нелинейные колебания, которые происходят под действием восстанавливающей силы, изменяющейся по нелинейному закону.

2. Свободные колебания материальной точки. *Свободными* называются колебания материальной точки, которые происходят под действием восстанавливающей силы. При движении материальной точки M массы m по горизонтальной оси x (рис. 8.3) под действием восстанавливающей силы F, равной по модулю $F = c\,|\,x\,|$ (O — положение равновесия точки M), имеет место дифференциальное уравнение движения

$$\ddot{x} + k^2 x = 0,$$

где $k^2 = c/m$.

Рассмотрим колебания материальной точки M массы m, подвешенной к нижнему концу пружины, верхний конец которой прикреплен

к потолку; сила $\boldsymbol{F}$ при движении точки M вниз направлена вверх (рис. 8.4).

На рис. 8.5, *а* изображена недеформированная пружина, не нагруженная материальной точкой M.

На рис. 8.5, *б* ось x направлена вдоль оси пружины в сторону ее растяжения, т. е. вниз. Начало отсчета O взято в положении статического равновесия материальной точки M, подвешенной к пружине. В этом положении нижний конец пружины растянут под действием силы тяжести $\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{g}$ на $\Delta_{ст} = P/c$, где c — коэффициент упругости пружины.

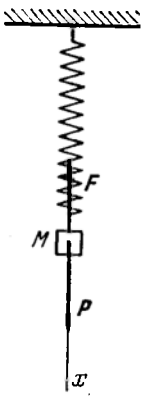


Рис. 8.4.

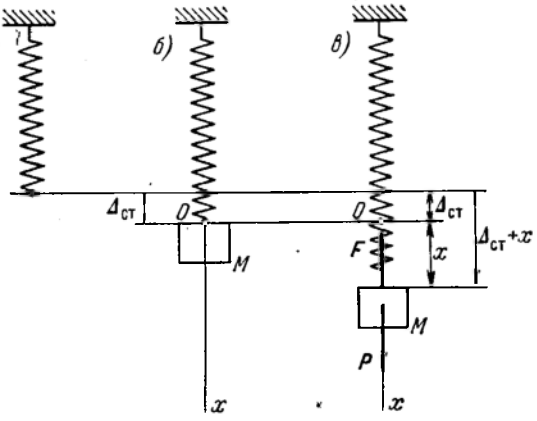


Рис. 8.5.

На рис. 8.5, *в* материальная точка M изображена во время движения в текущем положении, смещенном относительно нуля на x вниз. При этом нижний конец пружины удлинен на $\Delta = \Delta_{ст} + x$. Поэтому проекция силы упругости $\boldsymbol{F}$ на ось x равна $F_x = -c\Delta = -c(\Delta_{ст} + x)$. Дифференциальное уравнение свободных колебаний материальной точки M имеет вид

$$\ddot{x} + k^2 x = 0, \qquad (1^*)$$

где $k^2 = c/m$.

При начальных условиях движения материальной точки, записанных в виде

$$\text{при } t = 0 \quad x = x_0, \quad \dot{x} = \dot{x}_0,$$

закон ее свободных колебаний имеет вид

$$x = a \sin(kt + \alpha), \qquad (2^*)$$

т. е. материальная точка совершает гармоническое колебательное движение; здесь a — *амплитуда колебаний* — абсолютная величина

наибольшего отклонения колеблющейся точки от положения равновесия

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{k^2}}; \qquad (3^*)$$

$kt + \alpha$ — *фаза колебаний*, α — *начальная фаза колебаний*, определяемая по начальным данным:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{kx_0}{\dot{x}_0}; \qquad (4^*)$$

k — *круговая частота колебаний* — число колебаний материальной точки за 2π секунд:

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{ст}}}. \qquad (5^*)$$

Круговая частота колебаний от начальных условий движения (x_0 и $\dot{x}_0$) не зависит. Это свойство называется *изохронностью*, а колебания — *изохронными* (амплитуда колебаний a и начальная фаза α зависят от начальных условий движения).

Периодом колебаний T материальной точки называется наименьший промежуток времени, по истечении которого точка имеет ту же координату и ту же проекцию скорости

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}} = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta_{ст}}{g}}. \qquad (6^*)$$

3. Влияние силы сопротивления на свободные колебания материальной точки. При движении материальной точки в среде, препятствующей движению (воздух, жидкость), возникает сила сопротивления движению. Эта сила при малых скоростях движения точки может приближенно считаться прямо пропорциональной первой степени скорости точки: $R = \beta v$, где β — постоянный коэффициент; при больших скоростях — квадрату скорости точки: $R = \beta_1 v^2$, где β_1 — постоянный коэффициент.

Ниже рассмотрены свободные колебания материальной точки при наличии силы, пропорциональной первой степени скорости точки: $R = \beta v$. В этом случае дифференциальное уравнение движения материальной точки имеет вид

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0,$$

где

$$k^2 = c/m, \quad 2n = \beta/m.$$

Различаются три вида движения: $n < k$ — случай малого сопротивления, б) $n > k$ — случай большого сопротивления, в) $n = k$ — предельный случай.

а) $n < k$ — случай малого сопротивления. Материальная точка совершает затухающие колебания по закону:

$$x = Ae^{-nt}\sin\left(\sqrt{k^2 - n^2}\,t + \alpha\right) \qquad (\text{при } t \to \infty \quad x \to 0). \qquad (7^*)$$

При заданных начальных условиях движения (при $t = 0$ $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$) A и α имеют вид

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{(\dot{x}_0 + nx_0)^2}{k^2 - n^2}}, \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{x_0\sqrt{k^2 - n^2}}{\dot{x} + nx_0}. \tag{8*}$$

Это движение не является периодическим, так как величина Ae^{-nt} переменна и убывает по экспоненциальному закону. Однако по аналогии со свободными колебаниями и здесь вводят круговую частоту, период и амплитуду колебаний.

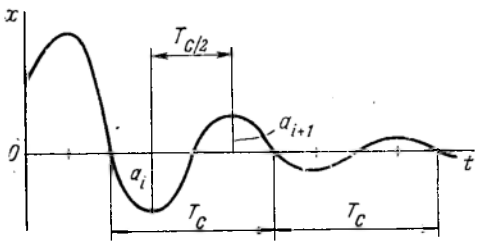


Рис. 8.6.

Круговая частота колебаний k_c материальной точки при наличии силы сопротивления равна

$$k_c = \sqrt{k^2 - n^2}, \tag{9*}$$

т. е. $k_c < k$. Итак, сила сопротивления движению, пропорциональная скорости, уменьшает круговую частоту колебаний.

Период колебаний T_c материальной точки при наличии силы сопротивления, пропорциональной скорости, равен

$$T_c = \frac{2\pi}{k_c} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}}. \tag{10*}$$

Так как при отсутствии силы сопротивления $T = 2\pi/k$, то

$$T_c = \frac{1}{\sqrt{1 - (n/k)^2}}\,T,$$

т. е. $T_c > T$. Итак, сила сопротивления, пропорциональная скорости, увеличивает период колебаний.

Амплитуды колебаний a_0, a_1, a_2, ... убывают с каждым полупериодом (рис. 8.6) по закону геометрической прогрессии, знаменатель которой равен

$$q = \frac{a_{i+1}}{a_i} = e^{-nT_c/2}.$$

Логарифмическим декрементом колебаний называется логарифм отношения двух смежных амплитуд, отличающихся во времени на $T_c/2$, т. е.

$$\ln\frac{a_i}{a_{i+1}} = \frac{nT_c}{2}.$$

б) $n > k$ — случай большого сопротивления. Материальная точка совершает затухающее апериодическое (непериодическое) движение согласно уравнению

$$x = e^{-nt}\left(C_1 e^{\sqrt{n^2-k^2}\,t} + C_2 e^{-\sqrt{n^2-k^2}\,t}\right). \tag{11*}$$

При $t \to \infty$ $x \to 0$. Вследствие изменения по показательному закону движение быстро затухает. Характер движения зависит от начальных условий. При $x = x_0 \geqslant 0$ $\dot{x} = \dot{x}_0 > 0$, т. е. когда в начальный момент материальная точка смещена из положения статического равновесия на x_0 и ей сообщена начальная скорость в том же направлении, материальная точка вначале отклоняется в указанном направлении до точки A (рис. 8.7, кривая I), а затем асимптотически приближается к положению равновесия (не переходя через него).

При $x = x_0 > 0$ $\dot{x} = \dot{x}_0 < 0$ (причем $|\dot{x}_0| > x_0 (n + \sqrt{n^2 - k^2})$), т. е. когда в начальный момент материальная точка смещена из положения статического равновесия на x_0 и ей сообщена в противоположном направлении скорость, модуль которой удовлетворяет указанному выше неравенству, материальная точка приближается к положению равновесия, проходит его (рис. 8.7, кривая II), отклоняется в противоположную сторону до точки B и затем асимптотически приближается к положению равновесия (больше не переходя через него).

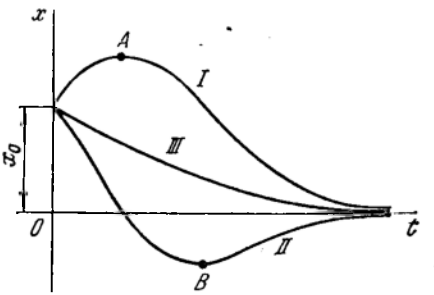


Рис. 8.7.

При $x = x_0 > 0$ $\dot{x} = \dot{x}_0 < 0$ (причем $|\dot{x}_0| < x_0 (n + \sqrt{n^2 - k^2})$), т. е. когда в начальный момент материальная точка смещена из положения равновесия на x_0 и отпущена без начальной скорости, либо ей сообщена в противоположном направлении начальная скорость, модуль которой удовлетворяет указанному неравенству, материальная точка асимптотически приближается к положению равновесия, не переходя через него (кривая III).

Во всех трех случаях движение быстро затухает.

в) $n = k$ — предельный случай. Материальная точка совершает затухающее апериодическое движение: $x = e^{-nt}(C_1 + C_2 t)$. При $t \to \infty$ x становится неопределенностью типа $0 \cdot \infty$. Раскрытие неопределенности по правилу Лопиталя дает $\lim\limits_{t \to \infty} x = 0$, что указывает на затухание движения.

При заданных начальных условиях движения $t = 0$ $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$ уравнение движения имеет вид

$$x = e^{-nt}[x_0 + (\dot{x}_0 + nx_0)t]. \qquad (12^*)$$

Характер затухания зависит от начальных условий движения. При $x = x_0 \geqslant 0$ $\dot{x} = \dot{x}_0 > 0$ движение материальной точки соответствует кривой I. При $x = x_0 > 0$, $\dot{x} = \dot{x}_0 < 0$ (причем $|\dot{x}_0| > nx_0$) движение материальной точки соответствует кривой II. При $x = x_0 > 0$, $\dot{x}_0 < 0$ (причем $|\dot{x}_0| < nx_0$) движение материальной точки соответствует кривой III.

Во всех трех случаях движение быстро затухает.

У к а з а н и е. Решение задач на свободные колебания материальной точки рекомендуется выполнять в следующем порядке:

1) выбрать систему отсчета, взяв начало координат в положении статического равновесия материальной точки;

2) записать начальные условия движения материальной точки;

3) изобразить на рисунке активные силы, приложенные к материальной точке. Применив закон освобождаемости от связей, добавить реакции связей;

4) составить дифференциальное уравнение движения материальной точки в проекции на соответствующую ось;

5) проинтегрировать дифференциальное уравнение движения, использовав начальные условия движения для определения постоянных интегрирования.

Для определения круговой частоты k и k_c и периода колебаний T и T_c нет необходимости в интегрировании дифференциального уравнения движения. Достаточно, составив дифференциальное уравнение движения, определить коэффициент k^2 при координате, коэффициент $2n$ при проекции скорости $\dot{x}$ точки и вычислить круговую частоту и период колебаний по указанным выше формулам.

При составлении дифференциального уравнения надо изобразить материальную точку в промежуточном положении, соответствующем ее положительной координате, предположив при этом, что точка перемещается в сторону возрастания этой координаты.

После составления дифференциального уравнения движения (пункт 4) следует рассмотреть условие статического равновесия материальной точки, совершающей колебания. Использовав это условие, часто удается уничтожить ряд постоянных слагаемых в правой части дифференциального уравнения.

Рассматривая задачу о свободных колебаниях материальной точки при отсутствии силы сопротивления, можно довести решение до результата в общем виде и затем подставить в него численные данные. Решая же задачу о свободных колебаниях материальной точки при наличии силы сопротивления, пропорциональной скорости, надо подставить численные данные в составленное дифференциальное уравнение и определить n и k, так как в зависимости от соотношения коэффициентов n и k приходится записывать решение уравнения в тригонометрических либо в гиперболических функциях (случаи малого, большого сопротивлений и предельный случай).

В заключение этого пункта в задаче 8.42 рассмотрены свободные колебания материальной точки при наличии силы сухого трения.

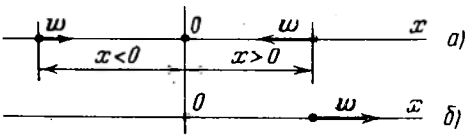
Задача 8.32. Движение материальной точки вдоль оси x описывается дифференциальными уравнениями: а) $2\ddot{x} + 5x = 0$, б) $2\ddot{x} - 5x = 0$.

Не интегрируя эти дифференциальные уравнения, выяснить, движется ли точка в одном направлении либо совершает колебания вдоль оси x.

Р е ш е н и е. а) Из дифференциального уравнения

$$2\ddot{x} + 5x = 0$$

следует, что абсцисса x точки и проекция $w_x = \ddot{x}$ ее ускорения $\boldsymbol{w}$ имеют все время разные знаки. Так, при $x > 0$ $\ddot{x} < 0$, т. е. ускорение $\boldsymbol{w}$ направлено налево (см. рис. *а*), если же $x < 0$, то $\ddot{x} > 0$ — ускорение $\boldsymbol{w}$ направлено направо. При $x = 0$ из уравнения следует $\ddot{x} = 0$. Значит, при движении материальной точки ее ускорение $\boldsymbol{w}$ постоянно направлено к началу отсчета (см. рис. *а*), в котором оно обращается в нуль. Отсюда следует, что точка совершает колебания вдоль оси x. Действительно, если в силу начальных условий движения точка, имея $x > 0$, движется направо, т. е. $v_x = \dot{x} > 0$, то при ускорении $\boldsymbol{w}$, направленном налево, движение оказывается замедленным вплоть до обращения скорости в нуль (в этом положении ускорение не равно нулю). После этого точка при наличии ускорения $\boldsymbol{w}$, по-прежнему направленному налево, начнет ускоренно двигаться налево. После перехода нуля, где $\boldsymbol{w} = 0$, и попадания в зону отрицательных значений x ускорение $\boldsymbol{w}$ будет уже направлено направо. Так как точка после прохождения нуля продолжает двигаться налево, то движение вновь оказывается замедленным, и т. д.



К задаче 8.32.

Итак, материальная точка, движение которой описывается дифференциальным уравнением

$$2\ddot{x} + 5x = 0,$$

совершает колебания вдоль оси x.

б) Из дифференциального уравнения

$$2\ddot{x} - 5x = 0$$

следует, что абсцисса x точки и проекция $w_x = \ddot{x}$ ее ускорения $\boldsymbol{w}$ имеют все время одинаковые знаки: при $x > 0$ $\ddot{x} > 0$, а при $x < 0$ $\ddot{x} < 0$.

Если в силу начальных условий движения точка, находясь в зоне $x > 0$, движется направо ($v_x = \dot{x} > 0$), то и $w_x = \ddot{x} > 0$, т. е. ускорение $\boldsymbol{w}$ направлено направо. Следовательно, в данном случае движение точки является ускоренным при любых значениях $x > 0$. Это значит, что точка совершает апериодическое движение вдоль оси x в сторону ее возрастания.

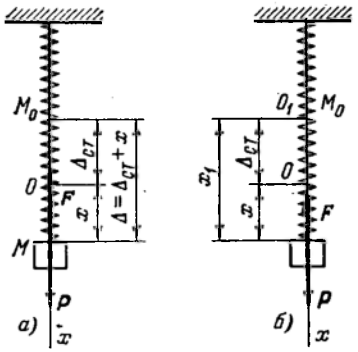
Если же при $x > 0$ и $\ddot{x} > 0$ начальная скорость направлена налево ($v_x = \dot{x} < 0$), то точка движется замедленно налево до положения, в котором ее скорость обратится в нуль, а затем начинает двигаться ускоренно направо.

Итак, материальная точка, движение которой описывается дифференциальным уравнением

$$2\ddot{x} - 5x = 0,$$

совершает апериодическое движение вдоль оси x.

Задача 8.33. Груз массы $m = 10$ кг подвешен к концу пружины, находившейся в начальный момент в покое в недеформированном состоянии, и отпущен без толчка.



К задаче 8.33.

Найти уравнение колебаний груза, если известно, что для деформации пружины на 1 см надо приложить к ней силу, модуль которой равен 14,4Н.

Р е ш е н и е. Направим ось x по вертикали вниз, взяв начало отсчета O в положении статического равновесия груза.

В начальный момент груз подвешивался к концу M_0 недеформированной пружины, следовательно, он находился выше положения статического равновесия на величину статической деформации пружины $\Delta_{ст} = P/c$, где c — коэффициент упругости пружины. Отсутствие в начальный момент толчка указывает на движение без начальной скорости. Итак, начальные условия движения груза имеют вид

$$\text{при } t = 0 \quad x = x_0 = -\frac{P}{c}, \quad \dot{x} = \dot{x}_0 = 0$$

(x_0 имеет знак минус, так как ось x направлена по вертикали вниз, а груз в начальный момент находился над положением статического равновесия).

Изобразим груз в положении, смещенном относительно нуля на x вниз (см. рис. *а*), и предположим, что он движется в сторону возрастания x, т. е. вниз. При этом пружина растягивается и ее сила упругости $\boldsymbol{F}$ (восстанавливающая сила) равна $\boldsymbol{F} = -c\Delta$, где Δ — смещение конца пружины из ненапряженного состояния, т. е. $\Delta_x = M_0M = \Delta_{ст} + x$. Следовательно,

$$F_x = -c(\Delta_{ст} + x). \tag{1}$$

Кроме силы $\boldsymbol{F}$, к грузу приложена его сила тяжести.

Составим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = P + F_x. \tag{2}$$

Применив формулу (1), имеем

$$m\ddot{x} = P - c\Delta_{ст} - cx. \tag{3}$$

Рассмотрим груз в положении статического равновесия. К грузу приложена его сила тяжести $\boldsymbol{P}$, направленная по вертикали вниз, и статическая сила упругости $\boldsymbol{F}_{ст}$, которая появилась при растяжении пружины на $\Delta_{ст}$ под действием силы тяжести груза, т. е. $F_{ст} = c\Delta_{ст}$. Сила упругости $\boldsymbol{F}_{ст}$ направлена по вертикали вверх. Из условия равновесия груза следует:

$$P - F_{ст} = 0,$$

т. е.

$$P - c \cdot \Delta_{ст} = 0. \tag{4}$$

Воспользовавшись этим результатом, запишем дифференциальное уравнение (3) в виде

$$\ddot{x} + k^2 x = 0, \tag{5}$$

где

$$k^2 = c/m.$$

Дифференциальное уравнение (5) свободных колебаний груза является линейным однородным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Его характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 + k^2 = 0.$$

Корни характеристического уравнения мнимые: $\lambda_{1,2} = \pm ki$. Следовательно, решение уравнения записывается в виде

$$= C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \tag{6}$$

Для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 вычислим

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt. \tag{7}$$

Подставив в (6) начальное условие движения

$$t = 0 \quad x = x_0 = -\frac{mg}{c}, \quad \text{а в (7)} \quad t = 0 \quad \dot{x} = \dot{x}_0 = 0,$$

находим

$$C_1 = x_0 = -\frac{mg}{c}, \quad C_2 = 0.$$

Уравнение (6) движения груза после подстановки значений C_1 и C_2 принимает вид

$$x = -\frac{mg}{c} \cos kt, \tag{8}$$

где

$$k = \sqrt{c/m}.$$

Воспользовавшись численными данными, получаем

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = 121 \text{ рад/с}, \quad \frac{mg}{c} = 6{,}8 \text{ см}.$$

Итак,

$$x = -6{,}8 \cos 12t \text{ см},$$

или, делая множитель при тригонометрической функции положительным, находим

$$x = 6{,}8 \sin (12t - \pi/2) \text{ см}.$$

Сопоставляя этот результат с уравнением свободных колебаний, записанным в общем виде: $x = a \sin (kt + \alpha)$, видим, что амплитуда колебаний $a = 6{,}8$ см, начальная фаза колебаний $\alpha = -\pi/2$ и круговая частота колебаний $k = 12$ рад/с.

Колебания происходят около положения статического равновесия, т. е. около начала отсчета.

Период колебаний груза определяется по формуле

$$T = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{12} = 0{,}52 \text{ с}.$$

Эти результаты можно непосредственно получить с помощью формул

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{k^2}} = \frac{mg}{c} = 6{,}8 \text{ см}, \quad \alpha = \operatorname{arctg} \frac{kx_0}{\dot{x}_0} = \operatorname{arctg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}.$$

В обзоре теории была отмечена целесообразность выбора начала отсчета в положении статического равновесия материальной точки. Проиллюстрируем это, выбрав начало отсчета O_1 в другом положении груза, например в его начальном положении, т. е. в нижнем конце недеформированной пружины.

В связи с этим изменяются начальные условия движения груза. Они примут вид

$$\text{при } t = 0 \quad x_1 = 0, \quad \dot{x}_1 = 0. \tag{9}$$

Теперь новая координата x_1 (см. рис. *б*) равна сумме старой координаты и статического удлинения: $x_1 = x + \Delta_{ст}$, а проекция силы упругости $\boldsymbol{F}$ равна $F_x = -cx_1$. Дифференциальное уравнение движения в проекции на ось x имеет вид

$$m\ddot{x}_1 = F_x + P_x.$$

Так как $P_x = P = mg$, то $m\ddot{x}_1 = -cx_1 + mg$, отсюда

$$\ddot{x}_1 + k^2 x_1 = g, \tag{10}$$

где обозначено $c/m = k^2$.

Из сопоставления уравнений (10) и (6) следует, что вместо однородного дифференциального уравнения (5), при новом положении отсчета O_1, составлено неоднородное уравнение (10). Его общее решение имеет вид

$$x_1 = x_1^{(1)} + x_1^{(2)}, \tag{11}$$

где $x_1^{(1)}$ — общее решение соответствующего однородного уравнения, приведенное в формуле (6), а $x_1^{(2)}$ — частное решение уравнения (10).

Приняв во внимание, что правая часть уравнения (10) постоянна, ищем частное решение $x_1^{(2)}$ в виде постоянного A, т. е. $x_1^{(2)} = A$.

Так как при этом $\ddot{x}_1^{(2)} = 0$, то из уравнения (10) непосредственно следует

$$x_1^{(2)} = A = g/k^2. \tag{12}$$

После внесения результатов (6) и (12) в формулу (11), найдем

$$x_1 = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + g/k^2. \tag{13}$$

Вычислим производную x_1 по времени t:

$$\dot{x}_1 = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt. \tag{14}$$

Использовав начальные условия (9) в уравнениях (13) и (14), найдем $C_1 = -g/k^2$, $C_2 = 0$. Теперь искомый закон движения (13) окончательно примет вид

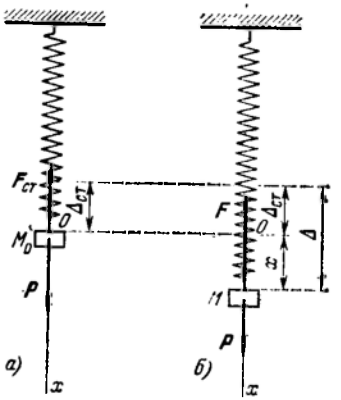
$$x_1 = (g/k^2)(1 - \cos kt).$$

Так как $g/k = P/c$, то

$$x_1 = \frac{P}{c}(1 - \cos kt). \tag{15}$$

Нетрудно видеть, что уравнение (8), в котором координата отсчитывается от точки O — положения статического равновесия, соответствует уравнению (15), где отсчет координаты принят в начальном положении груза O_1, причем $x_1 = P/c + x = \Delta_{ст} + x$. Это значит, что выполнен перенос координат из начала O в O_1, причем $OO_1 = \Delta_{ст}$.

В первом варианте решения задачи было составлено однородное дифференциальное уравнение (5), решение которого несколько проще и короче, чем решение неоднородного уравнения (10), составленного во втором варианте. Поэтому следует отдать предпочтение выбору начала отсчета в положении статического равновесия материальной точки.



К задаче 8.34.

Задача 8.34. Под действием груза, подвешенного к концу пружины, пружина получила статическое удлинение $\Delta_{ст} = 5$ см.

Найти закон колебаний этого груза на пружине, если в начальный момент грузу, находившемуся в положении статического равновесия, была сообщена вверх начальная скорость $v_0 = 28$ см/с.

Р е ш е н и е. Направим ось x по вертикали вниз, взяв начало отсчета в положении статического равновесия груза. В этом положении пружина под действием силы тяжести груза растянута на $\Delta_{ст}$.

До сообщения начальной скорости груз находится в равновесии под действием двух сил: силы тяжести $\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{g}$ и силы упругости

пружины $\boldsymbol{F}_{ст}$, направленной по вертикали вверх (рис. *а*). По модулю $F_{ст} = c\Delta_{ст}$, где c — коэффициент упругости пружины. Запишем условие равновесия груза:

$$P - F_{ст} = 0 \text{ или } P - c\Delta_{ст} = 0. \tag{1}$$

Начальные условия движения груза имеют вид

$$\text{при } t = 0 \quad x = x_0 = 0,$$
$$\dot{x} = \dot{x}_0 = -28 \text{ см/с}$$

($\dot{x}_0$ отрицательно, так как начальная скорость v_0, сообщенная грузу, направлена вверх).

Изобразим груз в промежуточном положении M, соответствующем его положительной абсциссе x (рис. *б*). При этом пружина оказывается растянутой на $\Delta = \Delta_{ст} + x$, а сила упругости $\boldsymbol{F}$ (восстанавливающая сила) — направленной по вертикали вверх. Тогда

$$F_x = -c\Delta_x = -c\,(\Delta_{ст} + x). \tag{2}$$

К грузу, помимо силы упругости $\boldsymbol{F}$, приложена его сила тяжести $\boldsymbol{P}$. Составим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = P + F_x.$$

Воспользовавшись формулами (2) и (1), получим

$$\ddot{x} + k^2x = 0, \tag{3}$$

где

$$k = \sqrt{c/m}.$$

Вычисление k^2 непосредственно провести невозможно, так как неизвестен коэффициент упругости c пружины. Подставив в формулу (1) $P = mg$, представим ее в виде $c/m = g/\Delta_{ст}$. Следовательно,

$$k = \sqrt{c/m} = \sqrt{g/\Delta_{ст}} \tag{4}$$

($\Delta_{ст}$ в условии задачи задано).

Интегрирование дифференциального уравнения (3) не представляет затруднений. Составим соответствующее характеристическое уравнение $\lambda^2 + k^2 = 0$, откуда $\lambda_{1,2} = \pm ki$. Так как корни характеристического уравнения мнимые, то решение уравнения имеет вид

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \tag{5}$$

Для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 найдем

$$\dot{x} = -C_1k \sin kt + C_2k \cos kt. \tag{6}$$

Подставим в уравнение (5): $t = 0$, $x = x_0 = 0$, а в уравнение (6): $t = 0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$. Тогда $C_1 = 0$, $C_2 = \dot{x}_0/k$, и уравнение (5) принимает вид

$$x = \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt. \tag{7}$$

Использовав численные данные, получим

$$k = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{ст}}} = \sqrt{\frac{980}{5}} = 14 \text{ рад/с}, \quad \frac{\dot{x}_0}{k} = -\frac{28}{14} = -2 \text{ см}.$$

Итак, груз совершает на пружине гармонические колебания, согласно уравнению $x = -2 \sin 14t$ см. Делая множитель при тригонометрической функции положительным, имеем

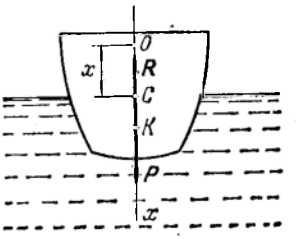
$$x = 2 \sin (14t + \pi) \text{ см}.$$

Амплитуда колебаний груза $a = 2$ см, начальная фаза колебаний $\alpha = \pi$, круговая частота колебаний $k = 14$ рад/с.

Период колебаний T можно вычислить по формуле

$$T = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{14} = 0{,}45 \text{ с}.$$

Задача 8.35. Найти уравнение свободных вертикальных колебаний судна весом P в спокойной воде. Площадь его сечения на уровне свободной поверхности воды считать не зависящей от колебаний и равной S. В начальный момент центру тяжести C, находившемуся в положении статического равновесия, была сообщена вертикально вниз скорость v_0. Вязкостью воды пренебречь. Удельный вес воды равен γ.



К задаче 8.35.

Р е ш е н и е. Направим ось x по вертикали вниз, взяв начало отсчета O в положении статического равновесия центра тяжести C судна. При этом высота подводной части судна равна $\Delta_{ст}$.

Запишем условие статического равновесия судна. К нему приложены: сила тяжести $\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{g}$ в центре тяжести C судна и нормальная статическая реакция $\boldsymbol{R}_{ст}$ воды в центре тяжести K объема воды, вытесненной судном. Модуль $\boldsymbol{R}_{ст}$ равен весу объема v воды, вытесненной судном, т. е. $R_{ст} = \gamma v = \gamma S \Delta_{ст}$. Имеем $R_{ст} = \gamma S \Delta_{ст}$. Поэтому условие статического равновесия имеет вид

$$mg - \gamma S \Delta_{ст} = 0. \tag{1}$$

Так как центр тяжести находился в начальный момент в положении статического равновесия и имел скорость $\boldsymbol{v}_0$, направленную по вертикали вниз, то начальные условия движения центра тяжести C будут:

$$\text{при } t = 0 \quad x = 0, \quad \dot{x} = v_0. \tag{2}$$

Из-за наличия начальной скорости $\boldsymbol{v}_0$ судно начинает двигаться в вертикальном направлении вниз. На рисунке оно изображено в момент, когда его центр тяжести C переместился из положения статического равновесия вниз на x. При этом под водой оказалась часть

судна высотой $\Delta_{ст} + x$. Объем v воды, вытесненной судном, равен $S(\Delta_{ст} + x)$. Значит, проекция на ось x нормальной реакции $\boldsymbol{R}$ равна

$$R_x = -\gamma S(\Delta_{ст} + x). \tag{3}$$

Составим дифференциальное уравнение движения центра тяжести C в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = P_x + R_x.$$

Приняв во внимание, что $P_x = mg$, и воспользовавшись формулами (1) и (3), получим

$$m\ddot{x} = -\gamma S x,$$

т. е.

$$\ddot{x} + k^2 x = 0, \tag{4}$$

где обозначено

$$\frac{\gamma S}{m} = k^2. \tag{5}$$

Использовав формулы, данные в обзоре теории, запишем искомое уравнение движения в виде

$$x = a \sin(kt + \alpha), \tag{6}$$

где круговая частота колебаний k в соответствии с формулой (5) равна

$$k = \sqrt{\frac{\gamma S}{m}}. \tag{7}$$

Амплитуду колебаний a определим по формуле

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{k^2}}.$$

Использовав начальные условия движения (2), находим

$$a = \frac{v_0}{k} = v_0\sqrt{\frac{m}{\gamma S}}. \tag{8}$$

Начальная фаза α равна

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{kx_0}{\dot{x}_0}.$$

Подставив $x_0 = 0$ и $\dot{x}_0 = v_0$, получим

$$\alpha = 0. \tag{9}$$

Внеся результаты (7), (8) и (9) в уравнение (6), окончательно получим его в виде

$$x = v_0\sqrt{\frac{m}{\gamma S}} \sin\sqrt{\frac{\gamma S}{m}}\, t. \tag{10}$$

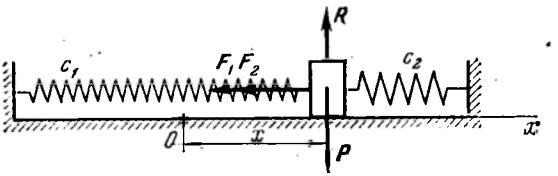
Уравнение (10) описывает свободные вертикальные колебания центра тяжести C судна.

Период колебаний равен

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\gamma S}}.$$

Задача 8.36. Груз массы $m = 1$ кг лежит на гладкой горизонтальной плоскости. Слева и справа он соединен с концами двух горизонтально расположенных пружин (см. рисунок) с коэффициентами упругости $c_1 = 4$ Н/см, $c_2 = 5$ Н/см. В положении равновесия груза обе пружины недеформированы.

Найти уравнение движения и период колебаний груза, если в начальный момент он был смещен из положения равновесия направо на 4 см и ему была сообщена направо начальная скорость 90 см/с.



К задаче 8.36.

Р е ш е н и е. Направим ось x по горизонтали направо, взяв начало отсчета в положении равновесия груза.

Запишем начальные условия движения груза:

$$\text{при } t = 0 \quad x_0 = 4 \text{ см}, \quad \dot{x}_0 = 90 \text{ см/с}.$$

Изобразим груз в промежуточном положении смещенным по отношению к началу отсчета направо на x и представим, что он движется в сторону возрастания x. При этом правая пружина сжимается на x и ее сила упругости $\boldsymbol{F}_2$ направлена налево. Одновременно левая пружина растягивается на x и, следовательно, ее сила упругости $\boldsymbol{F}_1$ также направлена налево, т. е.

$$F_{1x} = -c_1 x, \quad F_{2x} = -c_2 x.$$

Кроме двух восстанавливающих сил $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$, к грузу приложены его сила тяжести $\boldsymbol{P}$ и нормальная реакция $\boldsymbol{R}$ гладкой плоскости.

Запишем дифференциальное уравнение движения материальной точки в проекции на ось x. В данном случае получим

$$m\ddot{x} = F_{1x} + F_{2x}, \quad \text{или} \quad m\ddot{x} = -(c_1 + c_2)\, x. \tag{1}$$

Как следует из дифференциального уравнения (1), обе пружины можно заменить одной эквивалентной пружиной, коэффициент упругости которой равен сумме коэффициентов упругости двух данных пружин, т. е. $c = c_1 + c_2$. Запишем дифференциальное уравнение (1) в виде

$$\ddot{x} + k^2 x = 0, \tag{2}$$

где

$$k^2 = \frac{c_1 + c_2}{m}.$$

Использовав формулы (2*)—(6*), данные в обзоре теории, имеем: круговая частота колебаний равна

$$k = \sqrt{\frac{c_1 + c_2}{m}} = \sqrt{\frac{400 + 500}{1}} = 30 \text{ рад/с},$$

амплитуда колебаний

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{k^2}} = \sqrt{4^2 + \frac{90^2}{30^2}} = 5 \text{ см},$$

начальная фаза колебаний

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{kx_0}{\dot{x}_0} = \operatorname{arctg} \frac{30 \cdot 4}{90} = \operatorname{arctg} \frac{4}{3} = 0{,}92 \text{ рад}.$$

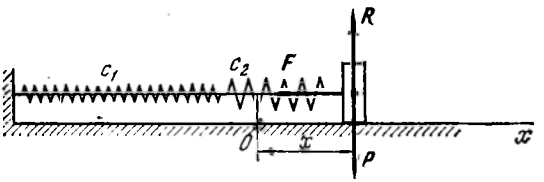
Итак, закон колебаний груза дается формулой

$$x = 5 \sin (30t + 0{,}92) \text{ см},$$

причем период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{30} = 0{,}21 \text{ с}.$$

Задача 8.37. Решить предыдущую задачу в предположении, что обе пружины соединены последовательно (см. рисунок).



К задаче 8.37.

Р е ш е н и е. Начало отсчета на оси x принимаем в положении равновесия груза при недеформированных пружинах. Ось x направляем по горизонтали направо. Начальные условия движения остаются прежними:

$$\text{при } t = 0 \quad x = x_0 = 4 \text{ см}, \ \dot{x} = \dot{x}_0 = 90 \text{ см/с}.$$

Изобразим груз в промежуточном положении смещенным направо на x. При этом в пружинах возникает восстанавливающая сила F, направленная налево.

Вычислим коэффициент упругости c пружины, эквивалентной двум данным пружинам. Суммарное удлинение пружин равно смещению груза, т. е. $|x|$; поэтому

$$|x| = \frac{F}{c}. \qquad (1)$$

При смещении груза направо на x каждая из пружин получила удлинение. Сумма этих удлинений равна $|x|$, т. е.

$$|x| = |x_1| + |x_2|. \qquad (2)$$

Так как каждая из пружин растягивается под действием силы F, то

$$|x_1| = \frac{F}{c_1}, \qquad |x_2| = \frac{F}{c_2}. \tag{3}$$

Подставив значения (1) и (3) в формулу (2), находим

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}. \tag{4}$$

Величины, обратные коэффициентам упругости (жесткости), называются *коэффициентами податливости*. Итак, при последовательном соединении пружин податливость эквивалентной пружины равна сумме податливостей данных пружин. Из формулы (4) находим коэффициент упругости c эквивалентной пружины:

$$c = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}. \tag{5}$$

В дальнейшем вместо двух данных последовательно соединенных пружин будем рассматривать одну эквивалентную пружину с коэффициентом упругости c.

При смещении груза направо на x проекция восстанавливающей силы F, направленной налево, равна

$$F_x = -cx = -\frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} x. \tag{6}$$

Кроме силы F, к грузу приложены следующие силы: P — его сила тяжести, R — нормальная реакция гладкой горизонтальной плоскости.

Составим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = F_x \quad \text{или} \quad m\ddot{x} = -\frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} x.$$

Полученное уравнение перепишем так:

$$\ddot{x} + k^2 x = 0, \tag{7}$$

где

$$k = \sqrt{\frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} \frac{1}{m}} = 14{,}9 \text{ рад/с}. \tag{8}$$

Нетрудно обнаружить тождественность дифференциального уравнения (7) и дифференциального уравнения (2), полученного в предыдущей задаче. Поэтому можно, минуя промежуточные выкладки, написать ответ с учетом вышеупомянутых формул (2*)—(6*)

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{k^2}} = \sqrt{4^2 + \left(\frac{90}{14{,}9}\right)^2} = 7{,}25 \text{ см},$$

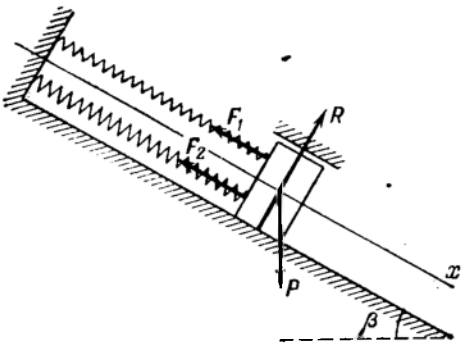
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{kx_0}{\dot{x}_0} = \frac{14{,}9 \cdot 4}{90} = 0{,}66, \quad \alpha = \operatorname{arctg} 0{,}66 = 0{,}58 \text{ рад},$$

$$x = 7{,}25 \sin (14{,}9t + 0{,}58) \text{ см}.$$

Период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{14{,}9} = 0{,}42 \text{ с}.$$

Задача 8.38. Груз массы $m = 1$ кг колеблется вдоль гладкой наклонной плоскости. Груз присоединен к концам двух параллельных пружин (см. рисунок) с коэффициентами упругости $c_1 = 4$ Н/см, $c_2 = 5$ Н/см.



К задаче 8.38.

Найти уравнение движения и период колебаний груза, если в начальный момент он был смещен из положения статического равновесия на 4 см направо вниз и ему в этом направлении была сообщена начальная скорость 90 см/с.

Р е ш е н и е. Направим ось x параллельно наклонной плоскости направо вниз, взяв ее начало отсчета в положении статического равновесия груза. При этом обе пружины получили статическое удлинение $\Delta_{ст}$. Обозначим буквой β угол, образуемый наклонной плоскостью с горизонталью.

К грузу приложены: $\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{g}$ — сила тяжести, $\boldsymbol{R}$ — нормальная реакция наклонной плоскости, $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ — силы упругости пружин.

Изобразим груз в промежуточном положении с координатой $x > 0$. При этом обе пружины получат смещения $\Delta_{ст} + x$, а проекции их сил упругости на ось x равны

$$F_{1x} = -c_1(\Delta_{ст} + x), \qquad F_{2x} = -c_2(\Delta_{ст} + x). \tag{1}$$

Запишем дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = P_x + R_x + F_{1x} + F_{2x}. \tag{2}$$

Приняв во внимание формулы (1), а также $P_x = mg\cos\beta$, $R_x = 0$, получим уравнение (2) в виде

$$m\ddot{x} = mg\cos\beta - (c_1 + c_2)\,\Delta_{ст} - (c_1 + c_2)\,x. \tag{3}$$

Для упрощения уравнения (3) рассмотрим условие статического равновесия груза. В этом положении обе пружины растянуты на $\Delta_{ст}$ и потому $F_{1стx} = -c_1\Delta_{ст}$, $F_{2стx} = -c_2\Delta_{ст}$. Внеся эти значения в уравнение равновесия: $mg\cos\beta + F_{1стx} + F_{2стx} = 0$, найдем

$$mg\cos\beta - (c_1 + c_2)\,\Delta_{ст} = 0. \tag{4}$$

Использовав условие (4) в уравнении (3), получим $m\ddot{x} = -(c_1 + c_2)\,x$, или

$$m\ddot{x} = -cx, \tag{5}$$

где c обозначает коэффициент упругости эквивалентной пружины

$$c = c_1 + c_2. \tag{6}$$

Таким образом, при параллельном соединении пружин коэффициент упругости эквивалентной пружины равен сумме коэффициентов упругости данных пружин.

Дифференциальное уравнение (5) представим в виде

$$\ddot{x} + k^2 x = 0, \tag{7}$$

где $k^2 = c/m = (c_1 + c_2)/m$.

Заметив, что начальные условия движения имеют вид: при $t = 0$ $x_0 = 4$ см, $\dot{x}_0 = 90$ см/с, используем формулы (2*)—(6*), приведенные в обзоре теории.

Круговая частота колебаний k равна

$$k = \sqrt{\frac{c_1 + c_2}{m}} = \sqrt{\frac{400 + 500}{1}} = 30 \text{ рад/с},$$

амплитуда колебаний

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{k^2}} = \sqrt{4^2 + \frac{90^2}{30^2}} = 5 \text{ см},$$

начальная фаза колебаний

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{kx_0}{\dot{x}_0} = \operatorname{arctg} \frac{30 \cdot 4}{90} = \operatorname{arctg} \frac{4}{3} = 0{,}92 \text{ рад},$$

период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{30} = 0{,}21 \text{ с}.$$

Итак, искомое уравнение колебаний груза имеет вид

$$x = a \sin (kt + \alpha) = 5 \sin (30t + 0{,}92) \text{ см}.$$

В заключение заметим, что при выполнении данной конструкции для каждой из пружин, учитывая их силу тяжести, должна быть предусмотрена отдельная направляющая, не изображенная на рисунке.

Задача 8.39. Груз массы $m = 10$ кг, подвешенный к концу пружины, движется в жидкости. Коэффициент жесткости пружины $c = 10$ Н/см. Сила сопротивления движению пропорциональна первой степени скорости груза: $R = \beta v$, где $\beta = 1{,}6$ Н·с/см.

Найти уравнение движения груза, если в начальный момент груз был смещен из положения статического равновесия вниз на 4 см и ему была сообщена вниз начальная скорость $v_0 = 4$ см/с.

Р е ш е н и е. Направим ось x вдоль пружины по вертикали вниз, взяв начало отсчета в положении статического равновесия груза. Запишем начальные условия движения груза:

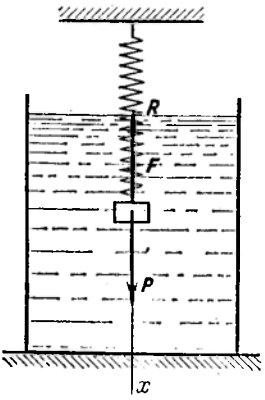
при $t = 0$ $x = x_0 = 4$ см, $\dot{x} = \dot{x}_0 = 4$ см/с.

Изобразим груз в положении, при котором его абсцисса x положительна. Так как пружина при этом получит удлинение $\Delta = \Delta_{ст} + x$, то проекция на ось x силы упругости $\boldsymbol{F}$ пружины, направленной по вертикали вверх, равна

$$F_x = -c(\Delta_{ст} + x). \qquad (1)$$

Предположим, что груз движется в сторону возрастания абсциссы x. Сила сопротивления $\boldsymbol{R}$ движению груза направлена противоположно скорости, т. е. по вертикали вверх. Кроме сил $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{R}$, к грузу приложена его сила тяжести $\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{g}$. Составим дифференциальное уравнение движения груза:

$$m\ddot{x} = mg + F_x + R_x.$$



К задаче 8.39.

Подставив в это уравнение $R_x = -\beta v_x$ и значение F_x из формулы (1), находим

$$m\ddot{x} = mg - c\Delta_{ст} - cx - \beta v_x. \qquad (2)$$

Нетрудно видеть, что

$$mg - c\Delta_{ст} = 0. \qquad (3)$$

Действительно, в положении статического равновесия к грузу приложены следующие силы: $\boldsymbol{P}$ — его сила тяжести, направленная по вертикали вниз, и статическая сила упругости пружины $F_{ст} = c\Delta_{ст}$, направленная по вертикали вверх. Так как груз находится в равновесии, то $mg - F_{ст} = 0$, откуда и следует формула (3).

Первые два слагаемых в правой части дифференциального уравнения (2), на основании формулы (3), уничтожаются. Заменив в последнем слагаемом v_x на $\dot{x}$, имеем

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = 0, \qquad (4)$$

где

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}}, \qquad n = \frac{\beta}{2m}.$$

Подставив численные значения, находим, что $k = 10$ рад/с, $n = 8$ рад/с; таким образом, $n < k$ (случай малого сопротивления).

Запишем характеристическое уравнение дифференциального уравнения (4): $\lambda^2 + 2n\lambda + k^2 = 0$, откуда

$$\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2} = -n \pm i\sqrt{k^2 - n^2}.$$

Следовательно, уравнение движения груза имеет вид

$$x = e^{-nt}(C_1 \cos\sqrt{k^2 - n^2}\,t + C_2 \sin\sqrt{k^2 - n^2}\,t). \qquad (5)$$

Для определения постоянных интегрирования вычислим

$$\dot{x} = e^{-nt}\left(-C_1\sqrt{k^2-n^2}\sin\sqrt{k^2-n^2}\,t + C_2\sqrt{k^2-n^2}\cos\sqrt{k^2-n^2}\,t\right) - \\ - ne^{-nt}\left(C_1\cos\sqrt{k^2-n^2}\,t + C_2\sin\sqrt{k^2-n^2}\,t\right). \quad (6)$$

Подставив в уравнение (5) $t = 0$, $x = x_0$, а в уравнение (6) $t = 0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$, получаем $C_1 = x_0$, $C_2 = \dfrac{\dot{x}_0 + nx_0}{\sqrt{k^2-n^2}}$. Внеся значения C_1 и C_2 в уравнение (5), найдем

$$x = e^{-nt}\left(x_0\cos\sqrt{k^2-n^2}\,t + \frac{\dot{x}_0 + nx_0}{\sqrt{k^2-n^2}}\sin\sqrt{k^2-n^2}\,t\right). \quad (7)$$

Преобразуем полученное уравнение. Для этого положим

$$x_0 = A\sin\alpha, \quad \frac{\dot{x}_0 + nx_0}{\sqrt{k^2-n^2}} = A\cos\alpha, \quad (8)$$

где A и α — постоянные. Из (8) легко найти, что

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{(\dot{x}_0 + nx_0)^2}{k^2-n^2}}, \quad (9)$$

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{x_0\sqrt{k^2-n^2}}{\dot{x}_0 + nx_0}. \quad (10)$$

Теперь уравнение (7) принимает вид

$$x = Ae^{-nt}\sin\left(\sqrt{k^2-n^2}\,t + \alpha\right). \quad (11)$$

Движение груза является затухающим (так как при $t \to \infty$ $x \to 0$) с круговой частотой

$$k_c = \sqrt{k^2-n^2}. \quad (12)$$

Выше было найдено, что $k = 10$ рад/с, $n = 8$ рад/с. Из условия задачи следует, что $x_0 = 4$ см, $\dot{x}_0 = 4$ см/с. Подставив эти численные значения в формулы (9), (10), (12), находим: $A = 7{,}2$ см, $\alpha = 0{,}59$ рад, $k_c = 6$ рад/с.

Итак, груз совершает затухающие колебания по закону

$$x = 7{,}2e^{-8t}\sin(6t + 0{,}59)\ \text{см}. \quad (13)$$

Период колебаний T_c груза равен $T_c = 2\pi/k_c = 2\pi/6 = 1{,}05$ с. Если бы груз совершал колебания при отсутствии силы сопротивления, то период его колебаний был бы меньше. Действительно, по формуле $T = 2\pi/k$ получим $T = 0{,}63$ с.

Амплитуда колебаний груза убывает по экспоненциальному закону. Допустим, что моменту времени t_i соответствует i-я амплитуда a_i. Следующая амплитуда a_{i+1} имеет место через полпериода, т. е. при $t_{i+1} = t_i + T_c/2$. Следовательно,

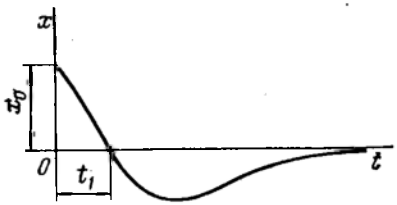
$$a_i = 7{,}2e^{-8t_i}, \quad a_{i+1} = 7{,}2e^{-8t_{i+1}} = 7{,}2e^{-8\,(t_i + T_c/2)}.$$

Разделив a_{i+1} на a_i, находим

$$\frac{a_{i+1}}{a_i} = e^{-4T_c};$$

так как $T_c = 1{,}05$ с, то $\frac{a_{i+1}}{a_i} = e^{-4{,}2} \approx 0{,}02$.

Таким образом, последовательность амплитуд образует бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $q \approx 0{,}02$.



К задаче 8.40.

Задача 8.40. Решить предыдущую задачу в предположении, что сила сопротивления движению равна $R = \beta v$, где $\beta = 5{,}2$ Н·с/см. В начальный момент груз был смещен из положения статического равновесия на 4 см и ему была сообщена вверх начальная скорость $v_0 = 240$ см/с.

Р е ш е н и е. Начало отсчета на оси x по-прежнему расположим в положении статического равновесия груза и ось x направим по вертикали вниз. В данном случае начальные условия движения груза имеют вид:

$$\text{при } t = 0 \quad x = x_0 = 4 \text{ см}, \quad \dot{x} = \dot{x}_0 = -240 \text{ см/с}$$

($\dot{x}_0$ отрицательно, так как начальная скорость направлена вверх).

Следуя решению предыдущей задачи, получим дифференциальное уравнение движения груза (см. формулу (4) предыдущей задачи)

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = 0,$$

где

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}}, \quad n = \frac{\beta}{2m}.$$

Подставив численные значения, получим, что $k = 10$ рад/с, $n = 26$ рад/с; таким образом, $n > k$ (случай большого сопротивления). Составим характеристическое уравнение: $\lambda^2 + 2n\lambda + k^2 = 0$, откуда

$$\lambda_1 = -n - \sqrt{n^2 - k^2}, \quad \lambda_2 = -n + \sqrt{n^2 - k^2}.$$

Так как $n > k$, то корни λ_1 и λ_2 являются вещественными и отрицательными. Уравнение движения груза имеет вид

$$x = C_1e^{\lambda_1 t} + C_2e^{\lambda_2 t}. \tag{1}$$

Для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 вычислим

$$\dot{x} = C_1\lambda_1e^{\lambda_1 t} + C_2\lambda_2e^{\lambda_2 t}. \tag{2}$$

Подставив в уравнение (1) $t = 0$, $x = x_0$, а в уравнение (2) $t = 0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$, получим систему уравнений

$$x_0 = C_1 + C_2; \quad \dot{x}_0 = C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2,$$

откуда

$$C_1 = -\frac{\lambda_2 x_0 - \dot{x}_0}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad C_2 = \frac{\lambda_1 x_0 - \dot{x}_0}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Заменив в уравнении (1) C_1 и C_2 вычисленными значениями, находим уравнение движения груза

$$x = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}[(\lambda_1 x_0 - \dot{x}_0) e^{\lambda_2 t} - (\lambda_2 x_0 - \dot{x}_0) e^{\lambda_1 t}]. \quad (3)$$

Воспользовавшись значениями λ_1 и λ_2 и гиперболическими функциями, запишем уравнение движения (3) в виде

$$x = \frac{e^{-nt}}{\sqrt{n^2 - k^2}}[(\dot{x}_0 + nx_0) \operatorname{sh} \sqrt{n^2 - k^2}\, t + x_0 \sqrt{n^2 - k^2} \operatorname{ch} \sqrt{n^2 - k^2}\, t]. \quad (4)$$

Движение груза является апериодическим и притом затухающим, так как при $t \to \infty$ $x \to 0$.

После подстановки в уравнения (3) и (4) численных значений: $n = 26$ рад/с, $k = 10$ рад/с, $x_0 = 4$ см, $\dot{x}_0 = -240$ см/с, получим

$$x = \frac{1}{6} e^{-26t}(29e^{-24t} - 5e^{24t}) \quad (5)$$

или

$$x = \frac{1}{3} e^{-26t}(12 \operatorname{ch} 24t - 17 \operatorname{sh} 24t). \quad (6)$$

Выясним теперь, переходит ли груз положение статического равновесия. Для этого приравняем x в уравнении (5) нулю:

$$\frac{1}{6} e^{-26t}(29e^{-24t} - 5e^{24t}) = 0.$$

Моменты времени, в которые груз находится в положении статического равновесия, определяются из уравнений

$$29e^{-24t_1} - 5e^{24t_1} = 0, \quad e^{-26t_2} = 0.$$

Произведя вычисления, найдем, что $t_1 = 0{,}037$ с, $t_2 \to \infty$.

Значение $t_1 = 0{,}037$ с соответствует переходу груза через положение статического равновесия. Значение $t_2 \to \infty$ соответствует затуханию движения (см. рисунок).

(Если бы при решении задачи значение t_1 оказалось отрицательным, то это указывало бы на отсутствие перехода груза через положение статического равновесия.)

Итак, в данной задаче груз переходит один раз через положение статического равновесия и затем асимптотически к нему приближается с другой стороны (больше одного раза груз через положение статического равновесия перейти не может, так как при $x = 0$ получается только одно значение t, отличное от бесконечности).

Задача 8.41. Решить задачу 8.39 в предположении, что сила сопротивления движению равна $R = \beta v$, где $\beta = 2$ Н·с/см. В начальный момент груз был смещен из положения статического равновесия вниз на 4 см и отпущен без начальной скорости.

Р е ш е н и е. Как и в двух предыдущих задачах, начало отсчета расположим в положении статического равновесия и ось x направим по вертикали вниз. Запишем начальные условия движения груза:

$$\text{при } t = 0 \quad x = x_0 = 4 \text{ см}, \quad \dot{x} = \dot{x}_0 = 0.$$

Аналогично тому, как делалось в двух предыдущих задачах, получим дифференциальное уравнение движения груза:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = 0,$$

где

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}}, \quad n = \frac{\beta}{2m}.$$

Подставив сюда численные значения, получим, что $k = 10$ рад/с, $n = 10$ рад/с; таким образом, $n = k$ (предельный случай).

Составим характеристическое уравнение $\lambda^2 + 2n\lambda + k^2 = 0$, откуда

$$\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}.$$

Так как $n = k$, то $\lambda_1 = \lambda_2 = -n$, т. е. корни характеристического уравнения являются вещественными и равными. Уравнение движения груза имеет вид

$$x = C_1e^{-nt} + C_2te^{-nt}. \tag{1}$$

Для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 вычислим

$$\dot{x} = -nC_1e^{-nt} + C_2e^{-nt} - nC_2te^{-nt}. \tag{2}$$

Подставив в уравнение (1) $x = x_0$ при $t = 0$, а в уравнение (2) $\dot{x} = 0$ при $t = 0$, имеем $C_1 = x_0$, $C_2 = nx_0$.

Заменив в уравнении (1) C_1 и C_2 вычисленными значениями, получим уравнение движения груза в виде

$$x = x_0e^{-nt}(1 + nt). \tag{3}$$

Движение груза является апериодическим. При $t \to \infty$ выражение (3) оказывается неопределенностью типа $0 \cdot \infty$. Для раскрытия неопределенности применяем правило Лопиталя, предварительно представив (3) в виде

$$x = \frac{x_0(1 + nt)}{e^{nt}}.$$

Тогда

$$\lim_{t\to\infty} x = \lim_{t\to\infty} \frac{x_0(1 + nt)}{e^{nt}} = \lim_{t\to\infty} \frac{\frac{d}{dt}[x_0(1 + nt)]}{\frac{d}{dt}(e^{nt})} = \lim_{t\to\infty} \frac{nx_0}{ne^{nt}} = 0;$$

таким образом, при $t \to \infty$ $x \to 0$. Итак, груз, согласно уравнению (3), совершает апериодическое затухающее движение. Подставив численные значения: $n = 10$ рад/с, $x_0 = 4$ см, получим уравнение движения груза

$$x = 4e^{-10t}(1 + 10t) \text{ см}. \tag{4}$$

Выясним теперь, переходит ли груз через положение статического равновесия. Для этого приравняем x в уравнении (4) нулю и определим соответствующие значения времени, т. е.

$$4e^{-10t}(1 + 10t) = 0, \text{ откуда } 1 + 10t_1 = 0,\ e^{-10t_2} = 0.$$

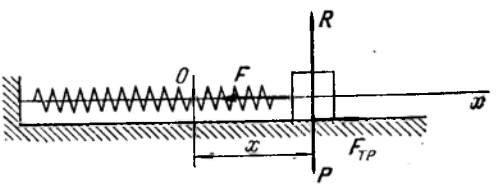
Находим: $t_1 = -0{,}1$ с, $t_2 \to \infty$.

Отрицательное значение t_1 указывает на то, что груз не переходит через положение статического равновесия при значениях $t > 0$. Значение $t_2 \to \infty$ соответствует затуханию движения.

Таким образом, картина движения существенно отличается от рассмотренной в предыдущей задаче — при данных начальных условиях движения груз асимптотически приближается к положению статического равновесия, ни разу не переходя через него. Кроме того, благодаря равенству нулю скорости груза в начальный момент времени, касательная к кривой $x = x(t)$ в точке $t = 0$ параллельна оси t.

В задачах 8.39—8.41 мы рассмотрели свободные колебания материальной точки при наличии силы сопротивления, пропорциональной скорости. В следующей задаче рассматриваются свободные колебания материальной точки при наличии силы сухого трения. Ее решение представляет бо́льшие трудности по сравнению с решениями предыдущих задач.

Задача 8.42. Груз массы m, прикрепленный к концу пружины, движется по негладкой горизонтальной плоскости под действием силы упругости $\boldsymbol{F}$, проекция которой на ось x (рис. а) равна $F_x = -cx$, где c — постоянный коэффициент упругости. Коэффициент трения скольжения груза о плоскость как при покое, так и при движении равен f. В начальный момент груз был отклонен от положения статического равновесия вправо на a_0 и отпущен без начальной скорости.



К задаче 8.42а.

Написать уравнение движения груза и определить закон убывания его наибольших отклонений.

Р е ш е н и е. Движение груза невозможно описать одним дифференциальным уравнением. Действительно, при движении груза налево сила трения $\boldsymbol{F}_{тр}$ направлена направо (рис. а), т. е. $F_{трx} = F_{тр} = fmg$. При движении же груза направо сила трения направлена налево и, значит, $F_{трx} = -F_{тр} = -fmg$. Поэтому в правую часть дифференциального уравнения движения груза попеременно будет входить слагаемое fmg либо $-fmg$.

Последовательно составим и проинтегрируем дифференциальные уравнения движения груза: 1) справа налево и затем 2) слева направо. При этом конечные значения x и $\dot{x}$ при движении груза

справа налево одновременно являются начальными условиями последующего движения слева направо.

На рис. а груз изображен в текущем положении, отклоненном от нуля, т. е. от его положения статического равновесия, направо на x. К грузу приложены активные силы: $\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{g}$ — сила тяжести груза, $\boldsymbol{F}$ — сила упругости пружины, а также две составляющие реакции негладкой горизонтальной плоскости: $\boldsymbol{R}$ — нормальная составляющая, $\boldsymbol{F}_{\text{тр}}$ — касательная составляющая, т. е. сила трения скольжения.

Запишем дифференциальные уравнения движения груза в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = P_x + R_x + F_x + F_{\text{трх}}. \tag{1}$$

Силы $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{R}$ перпендикулярны к оси x. Поэтому $P_x = R_x = 0$. Проекция силы упругости $\boldsymbol{F}$ равна $F_x = -cx$. При движении налево сила трения направлена направо, значит, $F_{\text{трх}} = F_{\text{тр}} = fmg$. Приняв во внимание эти значения проекций сил, запишем уравнение (1) в виде

$$m\ddot{x} = -cx + fmg, \tag{2}$$

или

$$\ddot{x} + k^2x = fg, \tag{3}$$

где обозначено $k^2 = c/m$ (напомним, что k — круговая частота свободных колебаний груза при отсутствии силы трения).

Общее решение x неоднородного дифференциального уравнения (3) равно сумме общего решения x_1 соответствующего однородного уравнения и частного решения x_2 данного уравнения (3), т. е.

$$x = x_1 + x_2. \tag{4}$$

Правая часть уравнения (3) постоянна. Поэтому ищем частное решение x_2 в виде постоянного: $x_2 = A$. Подставив это значение x_2, а также $\ddot{x}_2 = 0$ в уравнение (3) и решив его относительно A, получим $A = fg/k^2$, т. е.

$$x_2 = \frac{fg}{k^2}. \tag{5}$$

Характеристическое уравнение однородного дифференциального уравнения $\ddot{x} + k^2x = 0$ имеет вид $r^2 + k^2 = 0$. Его корни равны $r_{1,2} = \pm ki$, значит, x_1 равно

$$x_1 = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \tag{6}$$

Использовав результаты (5) и (6) в формуле (4), мы получим общее решение неоднородного дифференциального уравнения (3):

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{fg}{k^2}. \tag{7}$$

Для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 вычислим производную x по t:

$$\dot{x} = -C_1k \sin kt + C_2k \cos kt. \tag{8}$$

По условию, груз в начальный момент находился в покое, в положении, отклоненном от нуля направо на a_0. Значит, начальные условия движения имеют вид

$$\text{при } t = 0 \quad x = a_0, \quad \dot{x} = 0. \tag{9}$$

Подставим начальные условия (9): $t = 0$, $x = a_0$ — в уравнение (7) и $t = 0$, $\dot{x} = 0$ — в уравнение (8). Получим систему

$$a_0 = C_1 + \frac{fg}{k^2}, \qquad 0 = C_2 k,$$

откуда $C_1 = a_0 - fg/k^2$, $C_2 = 0$. Теперь уравнения (7) и (8) принимают вид

$$x = \left(a_0 - \frac{fg}{k^2}\right)\cos kt + \frac{fg}{k^2}, \qquad \dot{x} = -k\left(a_0 - \frac{fg}{k^2}\right)\sin kt. \tag{10}$$

Первое уравнение (10) описывает движение груза справа налево. В крайнем левом положении его скорость обращается в нуль. Подставив во второе уравнение (10): $\dot{x} = 0$, $t = \tau_1$, мы найдем продолжительность τ_1 движения груза из крайнего правого в крайнее левое положение:

$$\tau_1 = \frac{\pi}{k}. \tag{11}$$

Определим наибольшее отклонение x_1 груза налево, подставив в первое уравнение (10) $\tau_1 = \pi/k$, $x = x_1$. Получим

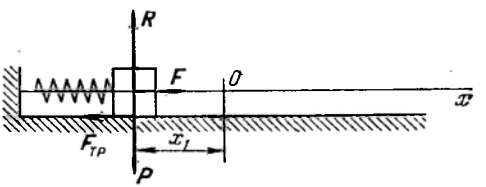
$$x_1 = -a_0 + \frac{2fg}{k^2}. \tag{12}$$

Абсолютная величина x_1 равна

$$a_1 = |x_1| = a_0 - \frac{2fg}{k^2}. \tag{13}$$

Из формулы (13) вычислим разность $\Delta a_{0,1}$ абсолютных величин наибольших отклонений a_0 и a_1. Получим

$$\Delta a_{0,1} = a_0 - a_1 = \frac{2fg}{k^2}. \tag{14}$$



К задаче 8.426.

В крайнем левом положении M_1 к грузу приложены силы: $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{F}_{тр}$. Сила упругости $\boldsymbol{F}$, направленная слева направо, по модулю равна

$$F = c\,|x_1|. \tag{15}$$

Сила трения $\boldsymbol{F}_{тр}$ теперь направлена налево (рис. б). Если в этом положении модуль наибольшей силы трения больше или равен модулю силы упругости (15), т. е.

$$fmg \geqslant c\,|x_1|, \tag{16}$$

то груз останется в покое и его движение прекратится. Допустим, что условие (16) не выполнено, т. е. $fmg < c|x_1|$. Тогда начнется движение груза направо. При этом $F_{\text{трх}} = -F_{\text{тр}} = -fmg$ и, значит, дифференциальное уравнение (2) примет вид $m\ddot{x} = -cx - fmg$, откуда

$$\ddot{x} + k^2x = -fg, \tag{17}$$

где $k^2 = c/m$.

Дифференциальные уравнения (3) и (17) отличаются только знаком правой части. Поэтому частное решение x_2 уравнения (17) можно сразу записать, изменив в формуле (5) знак, т. е. $x_2 = -fg/k^2$. Общее решение (7) запишется в виде

$$x = C_3 \cos kt + C_4 \sin kt - \frac{fg}{k^2}, \tag{18}$$

откуда имеем

$$\dot{x} = -C_3k \sin kt + C_4k \cos kt. \tag{19}$$

Для упрощения вычислений будем теперь отсчитывать время с момента выхода груза из крайнего левого положения. Начальные условия движения груза слева направо одновременно являются конечными условиями его движения справа налево, поэтому имеем

$$\text{при } t = 0 \quad x = x_1, \ \dot{x} = 0. \tag{20}$$

Подставим начальные условия (20): $t = 0$, $x = x_1$ — в уравнение (18), а $t = 0$, $\dot{x} = 0$ — в уравнение (19). Получим систему: $x_1 = C_3 - fg/k^2$, $0 = C_4k$, откуда $C_3 = x_1 + fg/k^2$, $C_4 = 0$. Теперь уравнения (18) и (19) примут вид

$$x = \left(x_1 + \frac{fg}{k^2}\right)\cos kt - \frac{fg}{k^2}, \quad \dot{x} = -k\left(x_1 + \frac{fg}{k^2}\right)\sin kt. \tag{21}$$

Первое уравнение (21) является уравнением движения груза слева направо. Движение закончится в момент $t = \tau_2$, когда скорость груза обратится в нуль. Поэтому, подставив во второе уравнение (21): $t = \tau_2$, $\dot{x} = 0$, получим

$$\tau_2 = \frac{\pi}{k}. \tag{22}$$

Сопоставив формулы (22) и (11), мы видим, что продолжительность движения груза из одного крайнего положения в другое постоянна $\left(\tau_1 = \tau_2 = \frac{\pi}{k}\right)$. Она не зависит от направления движения и начальных условий движения груза. Груз вернется в крайнее правое положение через промежуток времени

$$T = \tau_1 + \tau_2 = \frac{2\pi}{k}. \tag{23}$$

Как известно, по формуле (23) определяется период свободных колебаний груза при отсутствии силы трения. Значит, сила трения скольжения на период свободных колебаний не влияет (конечно, при

наличии силы трения периодичность движения отсутствует и величина T названа периодом колебаний условно).

Для определения наибольшего отклонения a_2 груза направо, подставим в первое уравнение (21): $t = \tau_2$, $x = a_2$.

При этом получим

$$a_2 = -x_1 - \frac{2fg}{k^2}. \tag{24}$$

Использовав в выражении (24) формулу (12), находим

$$a_2 = a_1 - \frac{2fg}{k^2} = a_0 - \frac{4fg}{k^2}. \tag{25}$$

Воспользовавшись формулами (25) и (13), вычислим разность $\Delta a_{1,2}$ абсолютных величин наибольших отклонений a_1 и a_2:

$$\Delta a_{1,2} = \frac{2fg}{k^2}. \tag{26}$$

Сопоставив формулы (14) и (26), мы видим, что разности абсолютных величин наибольших отклонений равны между собой: $\Delta a_{0,1} = \Delta a_{1,2} = 2fg/k^2$. Значит, абсолютные величины наибольших последовательных отклонений убывают по закону арифметической прогрессии с разностью, равной $2fg/k^2$ (напомним, что при наличии силы сопротивления, пропорциональной скорости, абсолютные величины последовательных наибольших отклонений убывают по закону геометрической прогрессии со знаменателем $q = e^{-nT_c/2}$, т. е. колебания затухают значительно быстрее).

Груз останется в крайнем правом положении в покое, если, по аналогии с формулой (16), будет удовлетворено неравенство

$$fmg \geqslant ca_2. \tag{27}$$

Если же $fmg < ca_2$, то груз вновь начнет двигаться налево. Затухающие колебания груза будут продолжаться до некоторого i-го наибольшего отклонения x_i, при котором будет выполнено неравенство

$$fmg \geqslant c|x_i|, \tag{28}$$

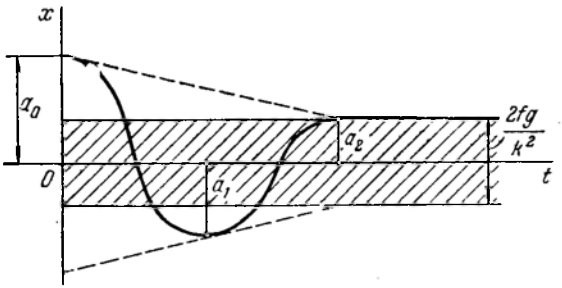
т. е. модуль наибольшей силы трения окажется больше или равным модулю силы упругости пружины.

Как следует из формулы (28), абсолютная величина i-го последнего наибольшего отклонения определится неравенством $|x_i| \leqslant fmg/c$, т. е.

$$|x_i| \leqslant \frac{fg}{k^2}. \tag{29}$$

На рис. в построен график движения точки. Проведем прямые, соответствующие уравнениям: $x = fg/k^2$ и $x = -fg/k^2$. Область, заключенная между этими прямыми — горизонтальная полоса шириной $2fg/k^2$, называется *зоной застоя*. Если наибольшее отклонение точки окажется внутри или на границе зоны застоя, то, в соответствии с формулой (29), движение прекратится.

В заключение приведем численный пример. Даны: масса груза $m = 10{,}2$ кг, коэффициент упругости пружины $c = 10$ Н/см, коэффициент трения скольжения $f = 0{,}1$. В начальный момент груз был отклонен из положения равновесия на 7 см направо и отпущен без начальной скорости. Определить период колебаний, а также величины наибольших отклонений груза до момента остановки.



К задаче 8.42в.

Круговая частота колебаний равна

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{1000}{10{,}2}} = 9{,}9 \text{ рад/с}.$$

Период колебаний равен

$$T = \frac{2\pi}{k} = 0{,}64 \text{ с}.$$

Согласно формуле (29) движение прекратится при $|x_i| \leqslant \frac{fg}{k^2}$, т. е. при $|x_i| \leqslant \frac{0{,}1 \cdot 980}{98}$ см. Итак, условие остановки груза определяется неравенством

$$|x_i| \leqslant 1 \text{ см}.$$

Абсолютные величины наибольших отклонений убывают по закону арифметической прогрессии с разностью:

$$r = \frac{2fg}{k^2} = \frac{2 \cdot 0{,}1 \cdot 980}{98} = 2 \text{ см}.$$

В начальный момент, по условию, $a_0 = 7$ см. Через полпериода, т. е. в момент $t = 0{,}32$ с, груз получит наибольшее отклонение влево, равное по абсолютной величине $a_1 = a_0 - r = 5$ см. Так как $a_1 > 1$ см, то движение будет продолжаться. Через полпериода, т. е. в момент $t = 0{,}64$ с груз окажется в крайнем правом положении, причем $a_2 = a_1 - r = 3$ см. В данном случае также $a_2 > 1$ см и груз начнет двигаться влево, через 0,32 с, т. е. в момент $t = 0{,}96$ с груз будет занимать крайнее левое положение с абсолютной величиной наибольшего отклонения $a_3 = a_2 - r = 1$ см. При этом a_3 удовлет-

воряет неравенству $a_3 \leqslant 1$ см. Значит, груз оказывается на границе зоны застоя и его движение прекратится.

У к а з а н и е. Рекомендуем решить следующие задачи из «Сборника задач по теоретической механике» И. В. Мещерского: 32.1, 32.4, 32.6, 32.7, 32.10, 32.11, 32.24, 32.26, 32.28, 32.53, 32.54, 32.57, 32.64, 32.67, 32.68.

4. Вынужденные колебания материальной точки. Влияние силы сопротивления, пропорциональной скорости, на вынужденные колебания материальной точки. В теории колебаний *возмущающей* называется сила, приложенная к материальной точке и заданная как функция времени. Эта сила большей частью является непрерывной функцией времени. В машинных агрегатах и механизмах возмущающая сила возникает в результате неточной балансировки вращающихся частей машин (турбинных дисков, роторов электромоторов, маховиков) либо при наличии периодически изменяющейся силы давления воды, газа или пара в цилиндрах двигателей и т. д.

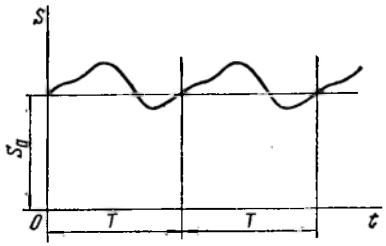


Рис. 8.8.

Простейшей является возмущающая сила S, изменяющаяся по гармоническому закону: $S = H \sin(pt + \delta)$, где H — наибольшая величина возмущающей силы (амплитуда силы), p — круговая частота изменения возмущающей силы, δ — начальная фаза.

Если возмущающая сила $S(t)$ является периодической функцией времени (рис. 8.8) с периодом $T = 2\pi/p$, т. е. $S(t + T) = S(t)$, и удовлетворяет условиям Дирихле (наличие на протяжении одного периода конечного числа максимумов и минимумов и конечного числа точек разрыва первого рода), то эту функцию можно разложить в ряд Фурье:

$$S(t) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (A_i \cos ipt + B_i \sin ipt),$$

где

$$p = \frac{2\pi}{T} \quad A_i = \frac{2}{T} \int_0^T S(t) \cos ipt\, dt, \quad B_i = \frac{2}{T} \int_0^T S(t) \sin ipt\, dt;$$

здесь $i = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Вынужденные колебания материальной точки вызываются действием системы сил, в составе которой имеются восстанавливающая сила $\boldsymbol{F}$ и возмущающая сила $\boldsymbol{S}$. На рис. 8.9 ось x направлена вдоль линии действия сил $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{S}$. Начало отсчета взято в положении статического равновесия материальной точки. Сила $\boldsymbol{S}$ условно

направлена вниз, однако, как следует из закона ее изменения, ее направление является переменным.

Если возмущающая сила изменяется по гармоническому закону $S = H \sin(pt + \delta)$, то дифференциальное уравнение вынужденных колебаний материальной точки имеет вид

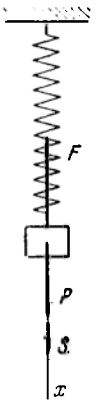


Рис. 8.9.

$$\ddot{x} + k^2 x = h \sin(pt + \delta), \qquad (13^*)$$

где

$$k^2 = c/m, \quad h = H/m.$$

Закон движения материальной точки в случае $p \neq k$ дается формулой $x = x_1 + x_2$ (x_1 — общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения, x_2 — частное решение неоднородного уравнения), где

$$x_1 = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \qquad x_2 = \frac{h}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta),$$

значит,

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta).$$

При начальных условиях движения материальной точки, т. е. при $t = 0$ $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$, постоянные интегрирования выражаются формулами:

$$C_1 = x_0 - \frac{h}{k^2 - p^2} \sin\delta, \qquad C_2 = \frac{\dot{x}_0}{k} - \frac{ph}{k(k^2 - p^2)} \cos\delta.$$

Окончательное уравнение движения материальной точки имеет вид

$$x = x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt - \frac{h}{k^2 - p^2} \left(\sin\delta \cos kt + \frac{p}{k} \cos\delta \sin kt \right) + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta). \qquad (14^*)$$

Последний член правой части уравнения движения $\frac{h}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta)$ определяет вынужденные колебания, первые два слагаемых, $x_0 \cos kt$ и $\frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt$, определяют свободные колебания, которые совершала бы материальная точка при отсутствии возмущающей силы, а слагаемое

$$- \frac{h}{k^2 - p^2} \left(\sin\delta \cos kt + \frac{p}{k} \cos\delta \sin kt \right)$$

— колебания материальной точки, имеющие частоту свободных и вызванные возмущающей силой S.

Вынужденные колебания материальной точки: $x_2 = \frac{h}{k^2 - p^2} \times \sin(pt + \delta)$ имеют круговую частоту p, равную круговой частоте p

изменения возмущающей силы (т. е. период вынужденных колебаний x_2, вызванных возмущающей силой S, равен периоду этой силы).

Амплитуда вынужденных колебаний a, т. е. величина наибольшего динамического смещения материальной точки, равна $a = h/|k^2 - p^2|$.

Статическое смещение материальной точки под действием постоянной силы H равно $\Delta_H = H/c$.

Коэффициентом динамичности λ называется отношение амплитуды a вынужденных колебаний к статическому смещению Δ_H, т. е. $\lambda = a/\Delta_H$. Коэффициент динамичности λ определяет, во сколько раз наибольшее динамическое смещение материальной точки, вызываемое переменной возмущающей силой $S = H \sin(pt + \delta)$, больше статического смещения Δ_H, происходящего под действием постоянной силы, равной по величине амплитуде возмущающей силы.

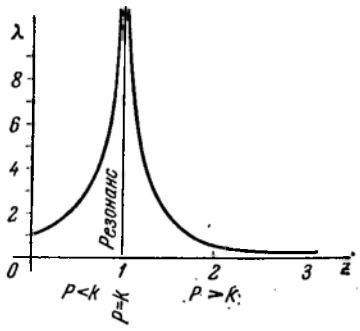


Рис. 8.10.

Коэффициентом расстройки z называется отношение круговой частоты p вынужденных колебаний материальной точки к круговой частоте k ее собственных колебаний, т. е. $z = p/k$.

Коэффициент динамичности λ связан с коэффициентом расстройки z зависимостью $\lambda = 1/|1 - z^2|$. График этой функции изображен на рис. 8.10. Рассмотрим его подробнее:

1) В случае $0 < z < 1$, т. е. при $p < k$, происходят вынужденные колебания малой частоты. При этом коэффициент динамичности λ растет от единицы до бесконечности.

2) При $z \to 1$, т. е. при $p \to k$, $\lambda \to \infty$. При $p = k$, т. е. при равенстве круговых частот свободных и вынужденных колебаний, имеет место явление, называемое *резонансом*. При резонансе переменная амплитуда вынужденных колебаний неограниченно возрастает (в реальных условиях при учете сил сопротивления движению амплитуда является конечной).

3) В случае $z > 1$, т. е. при $p > k$, происходят вынужденные колебания большой частоты. При $z \to \infty$ коэффициент динамичности λ убывает до нуля.

В случае *резонанса* (при $p = k$) частное решение x_2 неоднородного уравнения $\ddot{x} + k^2 x = h \sin(pt + \delta)$ имеет вид $-\frac{h}{2k} t \cos(kt + \delta)$. При резонансе переменная амплитуда вынужденных колебаний $a = \frac{h}{2k} t$ растет прямо пропорционально времени (рис. 8.11).

Уравнение движения материальной точки в случае резонанса, т. е. при $p = k$, имеет вид

$$x = x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt + \frac{h}{2k^2} \cos \delta \sin kt - \frac{h}{2k} t \cos (kt + \delta). \quad (15^*)$$

Последнее слагаемое справа $-\frac{h}{2k} t \cos(kt + \delta)$ определяет вынужденные колебания, первые два слагаемых, $x_0 \cos kt$ и $\frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt$, соответствуют свободным колебаниям, которые имели бы место при

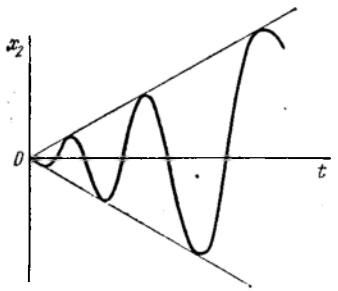


Рис. 8.11.

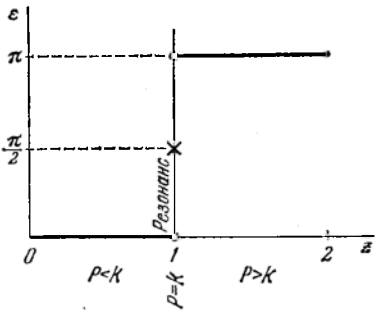


Рис. 8.12.

отсутствии возмущающей силы, слагаемое $\frac{h}{2k^2} \cos \delta \sin kt$ определяет колебания, вызванные возмущающей силой, имеющие круговую частоту свободных колебаний.

Сдвиг между фазами возмущающей силы и вынужденных колебаний материальной точки (рис. 8.12).

1) В случае вынужденных колебаний малой частоты, т. е. при $p < k$ сдвиг ε между фазами возмущающей силы S и вызванными ею вынужденными колебаниями x_2 равен нулю. (Возмущающая сила и вынужденные колебания одновременно достигают наибольших, наименьших значений и обращаются в нуль.)

2) В случае резонанса, т. е. при $p = k$, сдвиг ε между фазами возмущающей силы S и вынужденных колебаний x_2 равен $\pi/2$ (вынужденные колебания, вызванные возмущающей силой, отстают по фазе от этой силы на $\pi/2$).

3) В случае вынужденных колебаний большой частоты, т. е. при $p > k$, сдвиг ε между фазами возмущающей силы S и вынужденных колебаний x_2 равен π (вынужденные колебания отстают по фазе от соответствующей возмущающей силы на π).

Рассмотрим случай, когда возмущающая сила $S(t)$ является периодической функцией времени периода T. Разложим ее в ряд Фурье:

$$S(t) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (A_i \cos ipt + B_i \sin ipt),$$

где

$$p = \frac{2\pi}{T}, \quad A_i = \frac{2}{T}\int_0^T S(t)\cos ipt\,dt, \quad B_i = \frac{2}{T}\int_0^T S(t)\sin ipt\,dt;$$

здесь $i = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Тогда дифференциальное уравнение вынужденных колебаний материальной точки имеет вид

$$\ddot{x} + k^2 x = \frac{1}{2}\frac{A_0}{m} + \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{\infty}(A_i \cos ipt + B_i \sin ipt).$$

Уравнение движения материальной точки при $p \neq k$ будет $x = x_1 + x_2$, где x_1 — общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения, x_2 — частное решение неоднородного уравнения:

$$x_1 = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt,$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\frac{A_0}{c} + \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{A_i}{k^2 - i^2p^2}\cos ipt + \frac{B_i}{k^2 - i^2p^2}\sin ipt\right).$$

При начальных условиях вида: $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$ при $t = 0$ постоянные интегрирования имеют значения:

$$C_1 = x_0 - \left(\frac{1}{2}\frac{A_0}{c} + \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{A_i}{k^2 - i^2p^2}\right), \quad C_2 = \frac{\dot{x}_0}{k} - \frac{1}{m}\frac{p}{k}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{iB_i}{k^2 - i^2p^2}.$$

Окончательно уравнение движения материальной точки запишется в форме

$$x = x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k}\sin kt -$$

$$- \left(\frac{1}{2}\frac{A_0}{c} + \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{A_i}{k^2 - i^2p^2}\right)\cos kt - \left(\frac{1}{m}\frac{p}{k}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{iB_i}{k^2 - i^2p^2}\right)\sin kt +$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{A_0}{c} + \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{A_i}{k^2 - i^2p^2}\cos ipt + \frac{B_i}{k^2 - i^2p^2}\sin ipt\right).$$

Здесь $\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{A_i}{k^2 - i^2p^2}\cos ipt + \frac{B_i}{k^2 - i^2p^2}\sin ipt\right)$ — вынужденные колебания материальной точки; $x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k}\sin kt$ — свободные колебания материальной точки, которые имели бы место в случае отсутствия возмущающей силы;

$$- \left(\frac{1}{2}\frac{A_0}{c} + \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{A_i}{k^2 - i^2p^2}\right)\cos kt - \left(\frac{1}{m}\frac{p}{k}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{iB_i}{k^2 - i^2p^2}\right)\sin kt$$

— колебания материальной точки, вызванные возмущающей силой и имеющие круговую частоту свободных колебаний.

При $k = ip$, где $i = 1, 2, 3, \ldots$, наступают резонансные колебания i-го порядка, т. е.

при $k = p$ — резонансные колебания первого порядка,

при $k = 2p$ — резонансные колебания второго порядка и т. д.

При одинаковом порядке коэффициентов A_i и B_i по мере повышения порядка резонансных колебаний амплитуды их убывают. Поэтому в таких случаях наиболее опасными являются резонансные колебания низших порядков.

Если возмущающая сила задана тригонометрическим полиномом, т. е. рядом Фурье, у которого все члены, начиная с $(n + 1)$-го, равны нулю, то число резонансных колебаний равно n.

В заключение заметим, что если возмущающая сила изменяется по произвольному закону $S = f(t)$, где $f(t)$ — однозначная, непрерывная, дифференцируемая функция, то, применив метод вариации произвольных постоянных, можно найти закон движения в виде

$$x = x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt + \frac{1}{km} \int_0^t f(\tau) \sin k(t - \tau)\, d\tau, \qquad (16^*)$$

где x_0 и $\dot{x}_0$ — начальные условия движения, m — масса, k — круговая частота свободных колебаний. Первые два слагаемых формулы (16*) $x_0 \cos kt$ и $\frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt$ определяют свободные колебания груза, которые он совершал бы при отсутствии возмущающей силы $S = f(t)$. Последнее слагаемое уравнения (16*)

$$\frac{1}{km} \int_0^t f(\tau) \sin k(t - \tau)\, d\tau$$

описывает движение груза, вызванное возмущающей силой $S = f(t)$.

Уравнением (16*) можно широко пользоваться при решении задач динамики на вынужденные колебания материальной точки при произвольном законе изменения возмущающей силы $S = f(t)$. Этим уравнением весьма целесообразно пользоваться в тех случаях, когда трудно подобрать частное решение дифференциального уравнения

$$\ddot{x} + k^2 x = \frac{1}{m} f(t).$$

Полезно отметить, что последнее слагаемое формулы (16*) определяет решение, удовлетворяющее нулевым начальным условиям:

$$x = \frac{1}{km} \int_0^t f(\tau) \sin k(t - \tau)\, d\tau. \qquad (17^*)$$

Влияние силы сопротивления, пропорциональной скорости, на вынужденные колебания материальной точки.

Пусть материальная точка массы m совершает колебания под действием восстанавливающей силы $\boldsymbol{F}$, возмущающей силы $\boldsymbol{S}$ и силы сопротивления движению, пропорциональной скорости точки, $\boldsymbol{R} = -\beta\boldsymbol{v}$, где β — постоянный коэффициент. Ось x направлена вдоль линии действия сил $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{S}$ (рис. 8.13). Начало отсчета взято в положении статического равновесия материальной точки. Возмущающая сила изменяется по гармоническому закону $S = H \sin(pt + \delta)$.

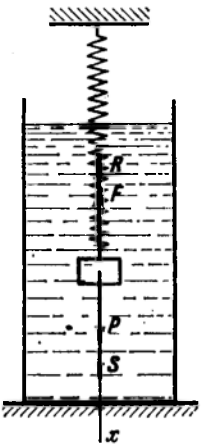


Рис. 8.13.

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний материальной точки при наличии силы сопротивления, пропорциональной скорости, имеет вид

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = h \sin(pt + \delta),$$

где

$$2n = \frac{\beta}{m}, \quad k^2 = \frac{c}{m}, \quad h = \frac{H}{m}.$$

Тогда уравнение движения материальной точки будет: $x = x_1 + x_2$, где x_1 — общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения; x_2 — частное решение неоднородного дифференциального уравнения.

Решение x_1 в зависимости от соотношений $n < k$, $n > k$, $n = k$ получается в одном из рассмотренных выше видов (см. стр. 67—69).

Частное решение x_2, определяющее вынужденные колебания, равно

$$x_2 = a \sin(pt + \delta - \varepsilon), \tag{18*}$$

где

$$a = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}}, \quad \varepsilon = \operatorname{arctg} \frac{2np}{k^2 - p^2}. \tag{19*}$$

Введя для сокращения записи обозначение

$$A(t) = a \sin(pt + \delta - \varepsilon), \tag{20*}$$

получим уравнение движения материальной точки в следующем окончательном виде:

$$x = \begin{cases} e^{-nt}\left(C_1 \sin\sqrt{k^2 - n^2}\,t + C_2 \cos\sqrt{k^2 - n^2}\,t\right) + A(t) & \text{при } n < k; \\ e^{-nt}(C_1 + C_2 t) + A(t) & \text{при } n = k; \\ e^{-nt}\left(C_1 e^{\sqrt{n^2 - k^2}\,t} + C_2 e^{-\sqrt{n^2 - k^2}\,t}\right) + A(t) & \text{при } n > k. \end{cases} \tag{21*}$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 определяются по заданным начальным условиям движения: при $t = 0$ $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$.

Так как во всех трех случаях ($n < k$, $n = k$ и $n > k$) в выражение x_1 входит e^{-nt}, то движения x_1 быстро затухают, в то время как амплитуда вынужденных колебаний $a = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}}$, круговая частота вынужденных колебаний p и сдвиг между фазами $\varepsilon = \operatorname{arctg} \frac{2np}{k^2 - p^2}$ от времени не зависят. Круговая частота p вынужденных колебаний x_2 равна круговой частоте p возмущающей силы S. Это означает, что сила сопротивления движению, пропорциональная первой степени скорости, не влияет на величину круговой частоты вынужденных колебаний материальной точки.

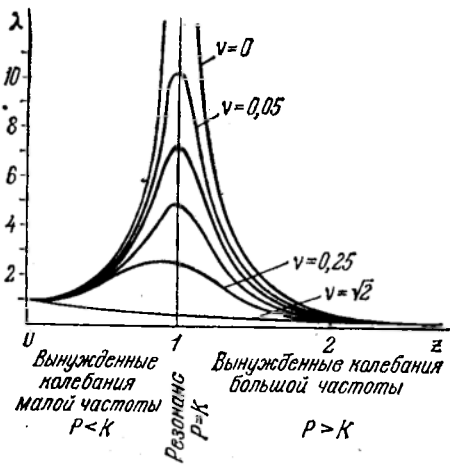


Рис. 8.14.

При резонансе ($p = k$) переменная амплитуда a вынужденных колебаний в случае отсутствия силы сопротивления неограниченно возрастала по закону: $a = \frac{h}{2k} t$. При наличии силы сопротивления, пропорциональной скорости, амплитуда a постоянна и равна

$$a_{\text{рез}} = \frac{h}{2nk}.$$

Зависимость коэффициента динамичности λ от коэффициента расстройки z имеет вид (рис. 8.14)

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{(1 - z^2)^2 + 4\nu^2 z^2}}, \quad \text{где} \quad \nu = \frac{n}{k}.$$

Каждая из кривых, изображенных на рис. 8.14, соответствует определенному значению ν. С увеличением ν, т. е. с увеличением силы сопротивления, коэффициент динамичности λ и, следовательно, амплитуда вынужденных колебаний уменьшаются. В зоне вынужденных колебаний большой частоты, далеко за резонансом (например, при $z > 3$), все кривые, независимо от величины ν, почти сливаются. Следовательно, в этой зоне при вычислении амплитуды вынужденных колебаний силой сопротивления можно пренебречь.

Максимум коэффициента динамичности λ имеет место не при резонансе; он несколько смещен в зону $z < 1$:

$$z_{\max} = \sqrt{1 - 2\nu^2}.$$

При этом

$$\lambda_{\max} = \frac{1}{2\nu\sqrt{1-\nu^2}}.$$

При $\nu \geqslant \sqrt{2}/2$ функция $\lambda = f(z)$ монотонно убывает.

Сдвиг между фазами $\varepsilon = \operatorname{arctg}\frac{2\nu z}{1-z^2}$ возмущающей силы и вызванных ею вынужденных колебаний остается при резонансе неизменным: $\varepsilon = \pi/2$. Сдвиг между фазами с возрастанием ν, т. е. силы сопротивления, увеличивается в зоне вынужденных колебаний малой частоты и убывает в зоне вынужденных колебаний большой частоты (рис. 8.15).

Рассмотрим случай, когда возмущающая сила $S(t)$ является периодической функцией времени периода T. Разложим ее в ряд Фурье:

$$S(t) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{i=1}^{\infty}(A_i \cos ipt + B_i \sin ipt),$$

где

$$p = \frac{2\pi}{T},$$

$$A_i = \frac{2}{T}\int_0^T S(t)\cos ipt\,dt,$$

$$B_i = \frac{2}{T}\int_0^T S(t)\sin ipt\,dt;$$

здесь $i = 0, 1, 2, 3, \ldots$

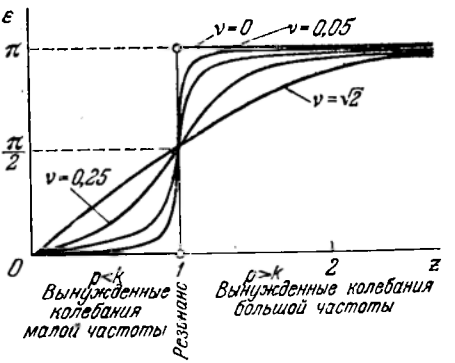


Рис. 8.15.

В этом случае дифференциальное уравнение вынужденных колебаний материальной точки при наличии силы сопротивления, пропорциональной скорости, имеет вид

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = \frac{1}{2}\frac{A_0}{m} + \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{\infty}(A_i \cos ipt + B_i \sin ipt).$$

Тогда уравнение движения материальной точки будет $x = x_1 + x_2$, где x_1 — общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения, x_2 — частное решение неоднородного дифференциального уравнения.

Колебания x_1 во всех трех случаях: $n < k$, $n = k$, $n > k$ затухают (см. стр. 67—69).

Вынужденные колебания, определяемые частным решением x_2, происходят по закону

$$x_2 = \frac{1}{2}\frac{A_0}{c} + \sum_{i=1}^{\infty}(a_i \cos ipt + b_i \sin ipt),$$

где

$$a_i = \frac{1}{m}\frac{A_i(k^2 - i^2p^2) - 2nipB_i}{(k^2 - i^2p^2)^2 + 4n^2i^2p^2}, \qquad b_i = \frac{1}{m}\frac{B_i(k^2 - i^2p^2) + 2nipA_i}{(k^2 - i^2p^2)^2 + 4n^2i^2p^2}.$$

При $k = ip$ наступают резонансные колебания i-го порядка. При этом

$$a_i = -\frac{1}{m}\frac{B_i}{2inp}, \qquad b_i = \frac{1}{m}\frac{A_i}{2inp}.$$

У к а з а н и е. Решение задач на вынужденные колебания материальной точки рекомендуется проводить в следующем порядке:

1) выбрать систему отсчета, взяв начало отсчета в положении статического равновесия материальной точки;

2) записать начальные условия движения материальной точки;

3) изобразить на рисунке силы, приложенные к материальной точке;

4) составить дифференциальное уравнение движения в проекции на соответствующую ось;

5) проинтегрировать дифференциальное уравнение движения, использовав начальные условия для определения постоянных интегрирования.

Материальную точку следует всегда изображать в промежуточном положении, соответствующем ее положительной координате, и предположить, что точка движется в сторону возрастания координаты.

При составлении дифференциального уравнения движения следует воспользоваться условием статического равновесия материальной точки. Это часто приводит к уничтожению ряда постоянных слагаемых в правой части дифференциального уравнения движения. Если составленное дифференциальное уравнение движения тождественно одному из выше записанных уравнений, то, не интегрируя это уравнение, можно сразу получить результат по указанным формулам.

Проводя решение задачи в общем виде, следует определить численные значения коэффициентов дифференциального уравнения, так как вид частного решения уравнения зависит от соотношения между круговыми частотами вынужденных и свободных колебаний, т. е. между p и k.

Так, интегрируя дифференциальное уравнение движения $\ddot{x} + k^2x = h\sin(pt + \delta)$, надо:

а) при отсутствии резонанса, т. е. при $p \neq k$, записать частное решение x_2 в виде $x_2 = A\sin(pt + \delta) + B\cos(pt + \delta)$ (очевидно, что $B = 0$);

б) при наличии резонанса, т. е. при $p = k$, искать частное решение x_2 в виде $x_2 = At\sin(pt + \delta) + Bt\cos(pt + \delta)$.

Интегрируя дифференциальное уравнение движения $\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = h \sin(pt + \delta)$, независимо от соотношения между p и k, надо искать частное решение x_2 в виде

$$x_2 = A \sin(pt + \delta) + B \cos(pt + \delta).$$

При решении задач, в которых требуется определить условие, обеспечивающее попадание материальной точки в резонанс, не следует интегрировать дифференциальное уравнение движения. Для этого достаточно, воспользовавшись составленным дифференциальным уравнением движения, определить круговые частоты свободных и вынужденных колебаний и приравнять их друг другу.

Задача 8.43. Вынужденные колебания материальной точки описываются дифференциальным уравнением:

$$\text{а) } \ddot{x} + 64x = 2 \sin 7t, \quad \text{б) } \ddot{x} + 100x = 14 \sin 12t,$$

$$\text{в) } \ddot{x} + 36x = 10 \sin 6t.$$

Не интегрируя уравнения, выяснить, происходят ли колебания в зоне до резонанса ($p < k$), за резонансом ($p > k$) или в режиме резонанса ($p = k$).

Р е ш е н и е. Напомним, что дифференциальное уравнение вынужденных колебаний имеет вид

$$\ddot{x} + k^2x = h \sin pt,$$

где k — круговая частота свободных, а p — вынужденных колебаний.

а) Из уравнения $\ddot{x} + 64x = 2 \sin 7t$ следует: $k^2 = 64$ рад^2/с^2, т. е. $k = 8$ рад/с, а $p = 7$ рад/с. В данном случае при $p < k$ (коэффициент расстройки $z = p/k = 7/8$) происходят вынужденные колебания малой частоты (до резонанса).

б) Из уравнения $\ddot{x} + 100x = 14 \sin 12t$ имеем: $k^2 = 100$ рад^2/с^2, т. е. $k = 10$ рад/с, а $p = 12$ рад/с. В этом случае при $p > k$ (коэффициент расстройки $z = p/k = 6/5$) имеют место вынужденные колебания большой частоты (за резонансом).

в) Из уравнения $\ddot{x} + 36x = 10 \sin 6t$ найдем $k^2 = 36$ рад^2/с^2, т. е. $k = 6$ рад/с и $p = 6$ рад/с. Здесь происходят вынужденные колебания в режиме резонанса $p = k = 6$ рад/с (коэффициент расстройки $z = p/k = 1$).

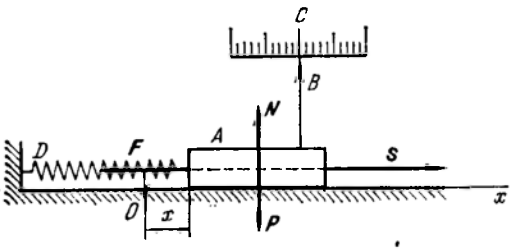
Рекомендуем читателю вновь посмотреть на рис. 8.14 на стр. 102, где показаны все зоны вынужденных колебаний.

Задача 8.44. На рисунке изображена схема прибора для измерения давлений. К ползуну A массы $m = 20$ кг прикреплена стрелка B, отмечающая показания на неподвижной шкале C. Ползун A, прикрепленный к концу пружины D, перемещается по горизонтальной идеально гладкой плоскости. К ползуну приложена горизонтальная сила $S = H \sin pt$, где $H = 1{,}6$ кН, $p = 60$ рад/с. Коэффициент упругости пружины равен $c = 2$ кН/см. В начальный

момент ползун находился в покое в положении статического равновесия.

Определить: уравнение движения стрелки B в случае отсутствия силы сопротивления, коэффициент динамичности и коэффициент расстройки; уравнение движения стрелки B при наличии силы сопротивления, пропорциональной первой степени скорости ползуна: $R = \beta v$, где $\beta = 25{,}6$ Н·с/см.

Р е ш е н и е. Направим ось x параллельно оси пружины по горизонтали направо, взяв начало отсчета в положении ползуна, соответствующем недеформированной пружине.



К задаче 8.44.

Начальные условия движения ползуна имеют вид

при $t = 0 \quad x = 0, \quad \dot{x} = 0.$

Изобразим ползун смещенным из положения равновесия вправо на x. При этом пружина растянется на $\Delta = x$.

К ползуну приложены следующие силы: $\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{g}$ — сила тяжести ползуна, $\boldsymbol{N}$ — нормальная реакция горизонтальной плоскости, сила $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{F}$ — сила упругости растянутой пружины, проекция которой на ось x равна $F_x = -cx$.

Составим дифференциальное уравнение движения ползуна в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = S_x + F_x,$$

или

$$\ddot{x} = \frac{H}{m} \sin pt - \frac{c}{m} x,$$

откуда

$$\ddot{x} + k^2 x = h \sin pt, \tag{1}$$

где $k = \sqrt{c/m}$, $h = H/m$. В данном случае $k = 100$ рад/с, $h = 8000$ см/с^2.

Уравнение (1) является линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Общее решение уравнения равно сумме x_1 — общего решения соответствующего однородного уравнения

$$\ddot{x}_1 + k^2 x_1 = 0 \tag{2}$$

и x_2 — частного решения уравнения (1), т. е.

$$x = x_1 + x_2. \tag{3}$$

Составим характеристическое уравнение: $r^2 + k^2 = 0$, откуда $r_{1,2} = \pm ki$. Следовательно,

$$x_1 = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \tag{4}$$

Для определения вынужденных колебаний, т. е. частного решения x_2, следует предварительно выяснить соотношение между круговыми частотами свободных и вынужденных колебаний. Так как $k = 100$ рад/с, а $p = 60$ рад/с, то $p < k$, т. е. имеют место вынужденные колебания малой частоты. При этом частное решение x_2 надо искать в виде

$$x_2 = A \sin pt + B \cos pt, \tag{5}$$

где A и B — коэффициенты, подлежащие определению. Подставив x_2 в дифференциальное уравнение (1) и приравняв коэффициенты, стоящие в левой и правой частях уравнения при соответствующих тригонометрических функциях, находим

$$A = \frac{h}{k^2 - p^2}, \quad B = 0.$$

Следовательно, частное решение, записанное в формуле (5), принимает вид

$$x_2 = \frac{h}{k^2 - p^2} \sin pt. \tag{6}$$

Воспользовавшись формулами (4) и (6), запишем общее решение по формуле (3):

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin pt. \tag{7}$$

Для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 вычислим

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt + \frac{hp}{k^2 - p^2} \cos pt. \tag{8}$$

Подставив в уравнение (7) $t = 0$, $x = 0$, а в уравнение (8) — $t = 0$, $\dot{x} = 0$, находим $C_1 = 0$, $C_2 = -\frac{p}{k} \frac{h}{k^2 - p^2}$.

Следует обратить внимание на ошибку, которую часто совершают при вычислении постоянных интегрирования C_1 и C_2, подставляя начальные условия движения в общее решение (4) однородного уравнения вместо того, чтобы подставить их в общее решение (7).

Итак, уравнение движения ползуна и, следовательно, стрелки B имеет вид

$$x = -\frac{p}{k} \frac{h}{k^2 - p^2} \sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin pt. \tag{9}$$

Подставив численные значения $p = 60$ рад/с, $k = 100$ рад/с, $h = 8000$ см/с^2, получаем

$$x = (-0{,}75 \sin 100t + 1{,}25 \sin 60t) \text{ см}. \tag{10}$$

Первое слагаемое соответствует колебаниям ползуна со стрелкой с частотой свободных колебаний, вызванным действием возмущающей силы S, второе слагаемое определяет вынужденные колебания.

Определив по формуле (10) отклонение стрелки, а следовательно, ползуна A и конца пружины D, можно найти величину силы упругости F, умножив смещение x на коэффициент упругости пружины c.

При наличии силы сопротивления движению, пропорциональной скорости ползуна, колебания с частотой свободных колебаний затухают и стрелка прибора регистрирует чисто вынужденные колебания $x_2 = \frac{h}{k^2 - p^2} \sin pt$. Данный прибор предназначен для определения величины силы $S = H \sin pt$. Получив показание стрелки x_2 на шкале, т. е. величину смещения конца пружины, можно вычислить величину силы S_1, указываемую прибором, умножив x_2 на коэффициент упругости c пружины

$$S_1 = cx_2 = \frac{hc}{k^2 - p^2} \sin pt.$$

Измеренная сила S_1 отличается от приложенной силы $S = H \sin pt$ только масштабом η, равным отношению их амплитуд

$$\eta = \frac{hc}{H(k^2 - p^2)}$$

или, учитывая, что $hc = \frac{H}{m} c = Hk^2$,

$$\eta = \frac{k^2}{k^2 - p^2}.$$

Масштаб η будет близок к единице при условии, что круговая частота k собственных колебаний будет значительно больше круговой частоты p возмущающей силы. Это имеет место, если $k \gg p$. Учитывая, что $k = \sqrt{c/m}$, приходим к выводу о необходимости установки пружины с большим коэффициентом жесткости c.

Для нахождения значения коэффициента динамичности λ воспользуемся формулой $\lambda = a/\Delta_H$. Так как $a = 1{,}25$ см и $\Delta_H = H/c = 1{,}6/2 = 0{,}8$ см, то $\lambda = 1{,}56$. Это означает, что амплитуда вынужденных колебаний более чем в полтора раза превышает статическое смещение. Соответствующее значение коэффициента расстройки z будет $z = p/k = 60/100 = 0{,}6$.

Решим эту задачу с учетом силы сопротивления движению $R = \beta v$, где $\beta = 25{,}6$ Н·с/см, v — скорость ползуна A. К силам, ранее приложенным к ползуну, добавляется сила сопротивления движению $\boldsymbol{R}$, направленная в сторону, противоположную скорости движения. Считая, что ползун A движется в сторону возрастания абсциссы x, направляем силу $\boldsymbol{R}$ по горизонтали налево. Следовательно,

$$m\ddot{x} = S_x + F_x + R_x$$

или

$$\ddot{x} = \frac{H}{m} \sin pt - \frac{c}{m} x - \frac{\beta}{m} \dot{x},$$

откуда

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = h \sin pt, \qquad (11)$$

где

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = 100 \text{ рад/с}, \quad n = \frac{\beta}{2m} = 64 \text{ рад/с}, \quad h = H = 8000 \text{ см/с}^2$$

$$p = 60 \text{ рад/с}.$$

Итак, $n < k$ и $p < k$.

Воспользовавшись формулами (9*), (18*)—(20*), данными в обзоре теории на стр. 68, 101, имеем

$$\sqrt{k^2 - n^2} = 76{,}8 \text{ рад/с}, \quad a = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}} = 0{,}8 \text{ см},$$

$$\varepsilon = \operatorname{arctg} \frac{2np}{k^2 - p^2} = 0{,}87 \text{ рад}.$$

Поэтому

$$x = e^{-64t} (C_1 \cos 76{,}8t + C_2 \sin 76{,}8t) + 0{,}8 \sin (60t - 0{,}87). \quad (12)$$

Для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 вычислим производную x по времени:

$$\dot{x} = -64e^{-64t} (C_1 \cos 76{,}8t + C_2 \sin 76{,}8t) +$$

$$+ 76{,}8e^{-64t} (-C_1 \sin 76{,}8t + C_2 \cos 76{,}8t) + 48 \cos (60t - 0{,}87). \quad (13)$$

Подставив в уравнение (12) $t = 0$, $x = 0$, а в уравнение (13) $t = 0$, $\dot{x} = 0$, получим систему уравнений

$$0 = C_1 - 0{,}8 \sin 0{,}87; \quad 0 = -64C_1 + 76{,}8C_2 + 48 \cos 0{,}87.$$

Решив эту систему, получим

$$C_1 = 0{,}8 \sin 0{,}87 = 0{,}62; \quad C_2 = 0{,}67 \sin 0{,}87 - 0{,}63 \cos 0{,}87 = 0{,}12.$$

Внеся эти значения в формулу (12), найдем

$$x = e^{-64t} (0{,}62 \cos 76{,}8t + 0{,}12 \sin 76{,}8t) + 0{,}8 \sin (60t - 0{,}87). \quad (14)$$

Обозначив $0{,}62 = b \sin \alpha$; $0{,}12 = b \cos \alpha$, получим $b = 0{,}63$, $\alpha = 1{,}74$.

Следовательно, уравнение (14) движения ползуна A и стрелки B имеет вид

$$x = [0{,}63e^{-64t} \sin (76{,}8t + 1{,}74) + 0{,}8 \sin (60t - 0{,}87)] \text{ см}. \quad (15)$$

Первое слагаемое уравнения (15) определяет колебания стрелки с частотой свободных колебаний, которые быстро затухают благодаря наличию множителя e^{-64t}. Второе слагаемое уравнения (15) определяет вынужденные колебания стрелки B.

Вторые слагаемые уравнений (10) и (15) соответственно определяют вынужденные колебания стрелки B при отсутствии и при наличии силы сопротивления движению. Из сопоставления полученных результатов следует, что сила сопротивления движению на круговую частоту вынужденных колебаний не влияет. Как в формуле

(10), так и в формуле (15) $p = 60$ рад/с, амплитуда вынужденных колебаний при наличии силы сопротивления стала меньше. Она уменьшилась от 1,25 до 0,8 см; сила сопротивления движению создала сдвиг между фазами возмущающей силы и вынужденных колебаний: вынужденные колебания отстают по фазе от возмущающей силы на $\varepsilon = 0{,}87$ рад.

Задача 8.45. Определить уравнение вынужденных колебаний стрелки прибора, описанного в предыдущей задаче, если возмущающая сила S изменяется согласно уравнению $S = H \sin pt$, где $H = 1{,}6$ кН, $p = 100$ рад/с. Решить задачу в двух вариантах: при отсутствии силы сопротивления движению; при наличии силы сопротивления движению $R = \beta v$, где $\beta = 25{,}6$ Н·с/см, v — скорость ползуна A со стрелкой B.

Р е ш е н и е. Воспользуемся дифференциальным уравнением (1) предыдущей задачи:

$$\ddot{x} + k^2 x = h \sin pt, \tag{1}$$

где

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{200\,000}{20}} = 100 \text{ рад/с}, \quad p = 100 \text{ рад/с},$$

$$h = \frac{H}{m} = \frac{160\,000}{20} = 8000 \text{ см/с}^2.$$

Так как $p = k = 100$ рад/с, то имеет место явление резонанса. В случае резонанса, когда $p = k$, частное решение дифференциального уравнения (1) надо искать в виде

$$x_2 = At \sin pt + Bt \cos pt. \tag{2}$$

Для определения коэффициентов A и B подставим x_2 в уравнение (1). Для этого вычислим:

$$\dot{x}_2 = A \sin pt + Apt \cos pt + B \cos pt - Bpt \sin pt,$$

$$\ddot{x}_2 = 2Ap \cos pt - Ap^2 \sin pt - 2Bp \sin pt - Bp^2 t \cos pt.$$

Приравняв коэффициенты в левой и правой частях уравнения (1) при синусе и косинусе и использовав равенство $p = k$, получим: $-2Bp = h$, $2Ap = 0$. Решив эту систему уравнений, имеем

$$A = 0, \quad B = -\frac{h}{2p}.$$

Теперь уравнение (2), определяющее вынужденные колебания стрелки B, принимает вид

$$x_2 = -\frac{h}{2p} t \cos pt.$$

Подсчитав численные значения и введя сдвиг между фазами, находим

$$x_2 = 40t \sin\left(100t - \frac{\pi}{2}\right) \text{ см}. \tag{3}$$

Переменная амплитуда вынужденных колебаний при резонансе $a = 40t$ см растет прямо пропорционально времени, что представляет угрозу сохранности прибора (так как в действительности имеется, хотя бы небольшая, сила сопротивления движению, то уравнение вынужденных колебаний оказывается иным — см. ниже, второй вариант решения задачи).

Круговая частота вынужденных колебаний равна круговой частоте возмущающей силы: $p = 100$ рад/с. Вынужденные колебания отстают по фазе от возмущающей силы на $\pi/2$.

Рассмотрим эту задачу в случае учета силы сопротивления движению $R = \beta v$, где $\beta = 25{,}6$ Н·с/см.

При этом можно воспользоваться дифференциальным уравнением (10) предыдущей задачи:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = h \sin pt, \tag{4}$$

где

$$p = k = 100 \text{ рад/с}, \quad n = \frac{\beta}{2m} = 64 \text{ рад/с}, \quad h = 8000 \text{ см/с}^2.$$

Для нахождения вынужденных колебаний стрелки прибора воспользуемся формулами (18*)—(20*), данными в обзоре теории на стр. 101. При резонансе, т. е. при $p = k$, имеем

$$a = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}} = \frac{h}{2np} = 0{,}625 \text{ см},$$

$$\varepsilon = \operatorname{arctg} \frac{2np}{k^2 - p^2} = \operatorname{arctg} \infty = \frac{\pi}{2},$$

поэтому искомое уравнение вынужденных колебаний имеет вид

$$x_2 = 0{,}625 \sin \left(100t - \frac{\pi}{2}\right) \text{ см}. \tag{5}$$

Из сопоставления формул (3) и (5) следует, что, в то время как при отсутствии силы сопротивления переменная амплитуда вынужденных колебаний стрелки B при резонансе росла прямо пропорционально времени: $a = 40t$ см, при наличии силы сопротивления движению $R = 25{,}6v$ Н, амплитуда оказывается величиной постоянной, равной 0,625 см. На величины круговой частоты вынужденных колебаний и сдвига фаз сила сопротивления при резонансе не влияет.

Задача 8.46. Определить уравнение движения материальной точки M массы $m = 20$ кг движущейся вдоль оси x под действием силы упругости $\boldsymbol{F}$ и возмущающей силы $\boldsymbol{S}$. Проекции этих сил на ось x равны: $F_x = -cx$, $S_x = H \sin pt$, где $c = 2$ кН/см, $H = 1{,}6$ кН, $p = 101$ рад/с. В начальный момент точка находилась в покое в начале отсчета на оси x. Силой сопротивления движению пренебречь.

Р е ш е н и е. Запишем дифференциальное уравнение движения материальной точки M в проекции на ось x (рис. a):

$$m\ddot{x} = F_x + S_x.$$

Подставив данные значения F_x и S_x, получим

$$m\ddot{x} = -cx + H \sin pt,$$

т. е.

$$\ddot{x} + k^2 x = h \sin pt, \tag{1}$$

где

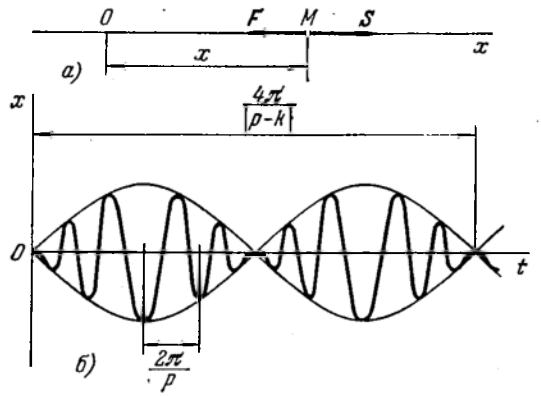
$$k^2 = \frac{c}{m} = \frac{200\,000}{20} = 10\,000 \text{ рад}^2/\text{с}^2, \quad p = 101 \text{ рад/с},$$

$$h = \frac{H}{m} = \frac{160\,000}{20} = 8000 \text{ см/с}^2.$$

Итак,

$$k = 100 \text{ рад/с}, \quad p = 101 \text{ рад/с}, \quad h = 8000 \text{ см/с}^2. \tag{2}$$

В рассматриваемом случае колебания происходят вблизи резонанса (резонанс имеет место при $p = k$) в зоне вынужденных колебаний большой частоты ($p \gg k$).



К задаче 8.46.

Минуя интегрирование, воспользуемся уравнением (9) задачи 8.44:

$$x = -\frac{p}{k}\frac{h}{k^2 - p^2}\sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2}\sin pt. \tag{3}$$

Как следует из уравнения (3), искомое движение является результатом наложения двух гармонических колебаний, происходящих с почти равными круговыми частотами свободных k и вынужденных p колебаний. Так как $p \approx k$, то будем считать

$$\frac{p}{k} \approx 1, \quad p + k \approx 2k \approx 2p. \tag{4}$$

Использовав первое соотношение (4) в уравнении (3), запишем

$$x \approx \frac{h}{(k-p)(k+p)}(\sin pt - \sin kt).$$

Приняв во внимание второе соотношение (4), находим

$$x = \frac{h}{2k(k-p)}(\sin pt - \sin kt). \tag{5}$$

Преобразовав выражение, стоящее в скобках:

$$\sin pt - \sin kt = 2\sin\frac{p-k}{2}t\cos\frac{p+k}{2}t \approx 2\sin\frac{p-k}{2}t\cos pt,$$

получим уравнение (5) в виде

$$x = a(t)\cos pt, \tag{6}$$

где

$$a(t) = \frac{h}{k(k-p)}\sin\frac{p-k}{2}t. \tag{7}$$

При $p \approx k$ $a(t)$ является медленно изменяющейся периодической функцией очень малой частоты $(p-k)/2$. Ее период равен

$$T_a = \frac{4\pi}{|p-k|}. \tag{8}$$

Как следует из уравнения (6), движение происходит с круговой частотой p. Поэтому период колебаний равен

$$T = \frac{2\pi}{p}. \tag{9}$$

Так как $p \approx k$, то $T_a \gg T$, причем

$$\frac{T_a}{T} = \frac{2p}{|p-k|}. \tag{10}$$

В этой задаче при численных данных (2) имеем

$$x = a(t)\cos 101t, \quad \text{где } a(t) = -80\sin\frac{t}{2}\text{ см},$$

$$T_a = \frac{4\pi}{|101-100|} = 12{,}56\text{ с}, \quad T = \frac{2\pi}{101} = 0{,}063\text{ с}, \quad \frac{T_a}{T} = 202.$$

На рис. *б* изображен график движения, описываемого уравнением (6). Такое движение называется *биением*.

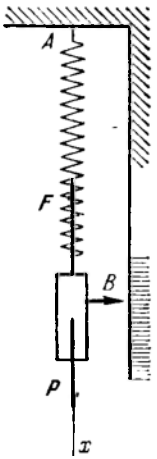
Биение можно рассматривать как гармонические колебания периода $2\pi/p$, амплитуда которых изменяется по закону синуса с малой круговой частотой $(p-k)/2$. Напомним, что при резонансе, т. е. при $p = k$, переменная амплитуда неограниченно возрастает прямо пропорционально времени (см. рис. 8.10 на стр. 97).

Явление биений легко обнаружить при звуковых колебаниях, воспринимаемых нашим слухом. Высота звучания определяется частотой звуковых колебаний, а сила звука — амплитудой колебаний. Так как при биениях амплитуда изменяется по гармоническому закону (7), то сила звука периодически усиливается и ослабевает.

Задача 8.47. Для регистрации вибраций железнодорожного вагона к потолку вагона подвешена пружина, коэффициент жестко-

сти которой равен $c = 1$ кН/м. К концу пружины подвешен груз массы $m = 10$ кг со стрелкой (см. рисунок). При вертикальных колебаниях вагона, т. е. точки A, начинаются колебания груза по отношению к вагону, которые регистрируются движением стрелки вдоль шкалы, изображенной на стене вагона.

Написать уравнение движения стрелки B, определить коэффициент динамичности и коэффициент расстройки, если вагон совершает колебания согласно уравнению $\xi = a \sin pt$, где $a = 0{,}5$ см, $p = 16\pi$ рад/с. В начальный момент груз находился в покое в положении статического равновесия. Силой сопротивления движению груза пренебречь.



К задаче 8.47.

Р е ш е н и е. Введем ось x, связанную с неподвижной средой. Начало отсчета выберем в положении статического равновесия груза. Ось x направим по вертикали вниз. Запишем начальные условия движения груза, отнесенные к неподвижной оси x:

$$\text{при } t = 0 \quad x = x_0 = 0, \quad \dot{x} = \dot{x}_0 = 0.$$

Изобразим груз в промежуточном положении, смещенном из начала отсчета на x вниз. Если вагон неподвижен, то в этом положении груза пружина была бы растянута на $\Delta_{ст} + x$. Однако при этом имеет место смещение вагона и, следовательно, точки A на ξ вниз, поэтому удлинение Δ пружины оказывается меньше на величину ξ, т. е. $\Delta_x = \Delta_{ст} + x - \xi$.

К грузу приложены две силы: его сила тяжести $\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{g}$ и сила упругости $\boldsymbol{F}$ пружины, направленная, в связи с растяжением пружины, по вертикали вверх, причем

$$F_x = -c\Delta_x = -c(\Delta_{ст} + x - \xi). \qquad (1)$$

Составим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось x: $m\ddot{x} = mg + F_x$. С учетом формулы (1) запишем

$$m\ddot{x} = mg - c\Delta_{ст} - cx + c\xi.$$

Так как в положении статического равновесия $x = \ddot{x} = \xi = 0$, то $mg - c\Delta_{ст} = 0$ и дифференциальное уравнение движения принимает вид

$$m\ddot{x} = -cx + c\xi.$$

По условию $\xi = a \sin pt$. Поэтому

$$m\ddot{x} + cx = ca \sin pt. \qquad (2)$$

Мы получили дифференциальное уравнение вынужденных колебаний груза при наличии возмущающей силы $ca \sin pt = c\xi$. Таким образом, колебания вагона и, следовательно, точки A подвеса пру-

жины оказались источником возмущающей силы, приложенной к грузу. Перепишем дифференциальное уравнение (2) в виде

$$\ddot{x} + k^2 x = h \sin pt, \qquad (3)$$

где

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = 10 \text{ рад/с}, \quad p = 16\pi \text{ рад/с}, \quad h = \frac{ca}{m} = 50 \text{ см/с}^2.$$

Нетрудно видеть, что дифференциальное уравнение (3) тождественно уравнению (13*), данному в обзоре теории на стр. 96, при условии: $\delta = 0$, поэтому, воспользовавшись общим решением (14*) при $\delta = 0$, запишем:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin pt. \qquad (4)$$

Для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 вычислим

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt + \frac{hp}{k^2 - p^2} \cos pt. \qquad (5)$$

Подставив в уравнение (4) $t = 0$, $x = x_0 = 0$, а в уравнение (5) $t = 0$, $\dot{x} = \dot{x}_0 = 0$, определим:

$$C_1 = 0, \quad C_2 = -\frac{p}{k} \frac{h}{k^2 - p^2}.$$

Теперь уравнение движения стрелки принимает вид

$$x = -\frac{p}{k} \frac{h}{k^2 - p^2} \sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin pt. \qquad (6)$$

Использовав численные данные, получим

$$x = (0{,}1 \sin 10t - 0{,}02 \sin \pi t) \text{ см}. \qquad (7)$$

Первые слагаемые в уравнениях (6) и (7) определяют колебания груза со стрелкой, имеющие частоту свободных, а вторые слагаемые — вынужденные колебания.

При наличии силы сопротивления, пропорциональной скорости груза, колебания, имеющие частоту свободных, быстро затухают. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать только вынужденные колебания груза со стрелкой:

$$x_2 = \frac{h}{k^2 - p^2} \sin pt. \qquad (8)$$

Так как шкала, по которой регистрируются колебания стрелки, прибита к стене вагона и, следовательно, совершает колебания вместе с вагоном, то стрелка отмечает колебания груза по отношению к вагону, равные разности x_2 и ξ, т. е. $x_r = x_2 - \xi$. Получим

$$x_r = x_2 - \xi = \frac{h}{k^2 - p^2} \sin pt - a \sin pt = \frac{h - ak^2 + ap^2}{k^2 - p^2} \sin pt.$$

Учитывая, что $h = ca/m = ak^2$, находим

$$x_r = \frac{ap^2}{k^2 - p^2} \sin pt = \frac{p^2}{k^2 - p^2} \xi. \qquad (9)$$

(Этот результат можно получить с помощью уравнения динамики относительного движения материальной точки. См. в следующем параграфе задачу 8.56.)

Данный прибор предназначен для регистрации колебаний вагона, т. е. ξ. Стрелка же отмечает x_r. Для того чтобы колебания стрелки возможно точнее воспроизводили колебания вагона, необходимо, чтобы дробь $\frac{p^2}{k^2-p^2}$ была близка к единице. Это имеет место при $p \gg k$. Учитывая, что $k = \sqrt{c/m}$, следует для данного прибора подбирать весьма слабую пружину с малым коэффициентом упругости c. (Чем слабее пружина, тем меньше реагирует груз на колебания точки подвеса пружины, оставаясь как бы неподвижным в пространстве по отношению к колеблющемуся вагону.)

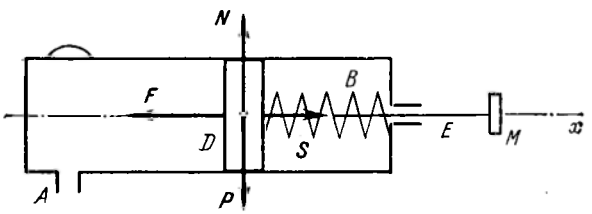
В рассматриваемой задаче $\frac{p^2}{k^2-p^2} = -1{,}04$.

Аналогично данному прибору конструируются вертикальные сейсмографы — приборы для регистрации землетрясений.

Для нахождения значения коэффициента динамичности λ воспользуемся формулой $\lambda = a/\Delta_H$. Так как $a = 0{,}02$ см и $\Delta_H = 0{,}5$ см, то $\lambda = 0{,}04$. Это означает, что амплитуда вынужденных колебаний в 25 раз меньше статического смещения. Соответствующее значение коэффициента расстройки z будет:

$$z = \frac{p}{k} = \frac{16\pi}{10} = 5{,}03.$$

Задача 8.48. Пневматический отбойный молоток приводится в движение сжатым воздухом, поступающим в корпус молотка через



К задаче 8.48.

шланг A. Давление воздуха, приложенное к поршню D молотка, изменяется, согласно уравнению

$$S = H_0 + H_1 \cos pt + H_3 \cos 3pt,$$

где p, H_0, H_1 и H_3 — постоянные величины. В корпус молотка вмонтирована пружина B с коэффициентом жесткости c. Пружина упирается левым концом в поршень, а правым — в корпус молотка. Поршень D соединен штоком E с бойком M.

Написать уравнение вынужденных колебаний поршня при работе молотка вхолостую. Массой штока E, бойка M и пружины B, а также силой сопротивления движению пренебречь.

Р е ш е н и е. Направим ось x по горизонтали направо, взяв начало отсчета в положении статического равновесия поршня под действием силы H_0 и силы упругости пружины $F_{ст}$. В этом положении пружина сжата на $\Delta_{ст}$ силой H_0. При этом возникает сила упругости пружины $F_{ст} = c\Delta_{ст}$. Обе силы направлены по горизонтали: $\boldsymbol{H}_0$ — направо, $\boldsymbol{F}_{ст}$ — налево. Запишем условие равновесия поршня в проекции на ось x:

$$H_0 - c\Delta_{ст} = 0. \tag{1}$$

Изобразим поршень смещенным из нуля направо на x. При этом пружина сжата на $\Delta_x = \Delta_{ст} + x$ и возникшая в ней сила упругости $\boldsymbol{F}$ направлена по горизонтали налево. Ее проекция на ось x равна

$$F_x = -c\Delta_x = -c(\Delta_{ст} + x). \tag{2}$$

Кроме того, к поршню приложены следующие силы: $\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{g}$ — его сила тяжести, $\boldsymbol{N}$ — нормальная реакция корпуса, $\boldsymbol{S}$ — сила давления сжатого воздуха.

Составим дифференциальное уравнение движения поршня D в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = S_x + F_x.$$

Учитывая формулу (2) и заданный закон изменения силы S, находим

$$m\ddot{x} = H_0 + H_1 \cos pt + H_3 \cos 3pt - c\Delta_{ст} - cx.$$

Принимая во внимание формулу (1), запишем дифференциальное уравнение вынужденных колебаний поршня в виде

$$\ddot{x} + k^2x = h_1 \cos pt + h_3 \cos 3pt, \tag{3}$$

где

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}}, \quad h_1 = \frac{H_1}{m}, \quad h_3 = \frac{H_3}{m}.$$

Для определения закона вынужденных колебаний поршня следует найти частное решение уравнения (3). Принимая во внимание правую часть этого уравнения, ищем частное решение x_2 в виде

$$x_2 = A_1 \sin pt + B_1 \cos pt + A_3 \sin 3pt + B_3 \cos 3pt, \tag{4}$$

где A_1, B_1, A_3 и B_3 — постоянные коэффициенты, подлежащие определению. Для отыскания A_1, B_1, A_3 и B_3 вычислим

$$\dot{x}_2 = A_1p \cos pt - B_1p \sin pt + 3pA_3 \cos 3pt - 3pB_3 \sin 3pt,$$

$$\ddot{x}_2 = -A_1p^2 \sin pt - B_1p^2 \cos pt - 9A_3p^2 \sin 3pt - 9B_3p^2 \cos 3pt.$$

Подставив x_2, $\dot{x}_2$, $\ddot{x}_2$ в дифференциальное уравнение (3) и приравняв коэффициенты, стоящие в левой и правой частях уравнения при синусе и косинусе, находим

$$A_1(k^2 - p^2) = 0, \quad B_1(k^2 - p^2) = h_1, \quad A_3(k^2 - 9p^2) = 0,$$
$$B_3(k^2 - 9p^2) = h_3.$$

Решив эту систему уравнений, имеем

$$A_1 = 0, \quad B_1 = \frac{h_1}{k^2 - p^2}, \quad A_3 = 0, \quad B_3 = \frac{h_3}{k^2 - 9p^2}.$$

Подставив значения A_1, B_1, A_3 и B_3 в уравнение (4), находим искомое уравнение вынужденных колебаний поршня:

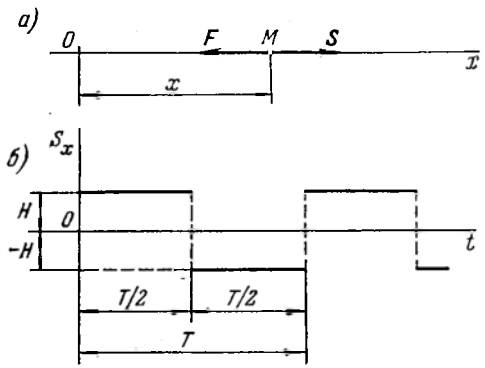
$$x_2 = \frac{h_1}{k^2 - p^2} \cos pt + \frac{h_3}{k^2 - 9p^2} \cos 3pt.$$

В случае $k = p$ наступают резонансные колебания первого порядка.

В случае $k = 3p$ наступают резонансные колебания третьего порядка.

Так как $k = \sqrt{c/m}$, то подбор коэффициента упругости пружины c следует производить так, чтобы обеспечить выполнение неравенств $k \neq p$ и $k \neq 3p$. При этом поршень не будет попадать в резонанс.

Задача 8.49. Чувствительный элемент индикатора массы m движется вдоль оси x под действием силы упругости $\boldsymbol{F}$ и возмущающей силы $\boldsymbol{S}$ (рис. *а*). Проекция силы $\boldsymbol{F}$ на ось x равна $F_x = -cx$, где c — коэффициент упругости. Проекция возмущающей силы $\boldsymbol{S}$ задана графиком на рис. *б*. Как видно из графика, возмущающая сила имеет период T и претерпевает разрыв через каждые полпериода. За исключением точек разрыва, модуль возмущающей силы постоянен и равен H.



К задаче 8.49.

Найти уравнение движения материальной точки (чувствительного элемента), если в начальный момент она находилась в покое в начале отсчета на оси x. Силами сопротивления пренебречь.

Р е ш е н и е. В этой задаче возмущающая сила задана графиком, причем

$$\text{при } 0 < t < T/2 \quad S_x = H, \quad \text{при } T/2 < t < T \quad S_x = -H. \tag{1}$$

Разложим S_x в ряд Фурье:

$$S_x = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (A_i \cos ipt + B_i \sin ipt), \tag{2}$$

где

$$p = \frac{2\pi}{T}, \quad A_i = \frac{2}{T} \int_0^T S_x(t) \cos ipt \, dt, \quad B_i = \frac{2}{T} \int_0^T S_x(t) \sin ipt \, dt, \tag{3}$$

причем $i = 0, 1, 2, \ldots$

В данном случае, приняв во внимание (1) и рис. *б*, имеем

$$A_i = \frac{2}{T}\int_0^T S_x(t)\cos ipt\,dt = \frac{p}{\pi}\left(\int_0^{\pi/p} H\cos ipt\,dt - \int_{\pi/p}^{2\pi/p} H\cos ipt\,dt\right),$$

т. е.

$$A_i = \frac{H}{i\pi}\left(\sin ipt\Big|_0^{\pi/p} - \sin ipt\Big|_{\pi/p}^{2\pi/p}\right) = \frac{H}{i\pi}(2\sin i\pi - \sin 0 - \sin 2i\pi) = 0.$$

Итак,

$$A_i = 0, \text{ где } i = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \qquad (4)$$

Переходим к вычислению коэффициентов B_i по формуле (3):

$$B_i = \frac{2}{T}\int_0^T S_x(t)\sin ipt\,dt = \frac{p}{\pi}\left(\int_0^{\pi/p} H\sin ipt\,dt - \int_{\pi/p}^{2\pi/p} H\sin ipt\,dt\right),$$

т. е.

$$B_i = \frac{H}{i\pi}\left(-\cos ipt\Big|_0^{\pi/p} + \cos ipt\Big|_{\pi/p}^{2\pi/p}\right) = \frac{H}{i\pi}(-2\cos i\pi + \cos 0 + \cos 2i\pi). \qquad (5)$$

Нетрудно видеть, что при $i = 0,\ 2,\ 4,\ 6,\ \ldots$ скобка в формуле (5) обращается в нуль, а при $i = 1,\ 3,\ 5,\ \ldots$ скобка равна четырем. Итак,

$$B_i = 0 \text{ при } i = 0,\ 2,\ 4,\ 6,\ldots, \quad B_i = \frac{4H}{i\pi} \text{ при } i = 1,\ 3,\ 5,\ldots \qquad (6)$$

Использовав результаты (4) и (6) в формуле (2), запишем искомое разложение возмущающей силы в ряд Фурье:

$$S_x = \frac{4H}{\pi}\sum_i \frac{1}{i}\sin ipt, \quad \text{где } i = 1,\ 3,\ 5,\ldots \qquad (7)$$

Будем в дальнейшем решать задачу приближенно, ограничившись первыми четырьмя членами разложения, т. е. считая

$$S_x = \frac{4H}{\pi}\left(\sin pt + \frac{1}{3}\sin 3pt + \frac{1}{5}\sin 5pt + \frac{1}{7}\sin 7pt\right). \qquad (8)$$

К материальной точке приложены: сила $\boldsymbol{F}$ упругости и возмущающая сила $\boldsymbol{S}$ (см. рис. *а*). Поэтому дифференциальное уравнение движения в проекции на ось x имеет вид

$$m\ddot{x} = F_x + S_x.$$

Приняв во внимание формулу (8) и учтя, что по условию $F_x = -cx$, запишем:

$$\ddot{x} + k^2x = h\left(\sin pt + \frac{1}{3}\sin 3pt + \frac{1}{5}\sin 5pt + \frac{1}{7}\sin 7pt\right), \qquad (9)$$

где обозначено

$$k^2 = \frac{c}{m}, \quad h = \frac{4H}{\pi m}. \qquad (10)$$

Общее решение x неоднородного дифференциального уравнения (9) имеет вид

$$x = x_1 + x_2, \tag{11}$$

где x_2 — его частное решение, а x_1 — общее решение соответствующего однородного уравнения $\ddot{x} + k^2x = 0$. Так как корни характеристического уравнения $r^2 + k^2 = 0$ являются мнимыми: $r_{1,2} = \pm ki$, то x_1 равно

$$x_1 = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \tag{12}$$

В соответствии с правой частью уравнения (9), ищем частное решение x_2 в виде

$$x_2 = D_1 \sin pt + D_3 \sin 3pt + D_5 \sin 5pt + D_7 \sin 7pt, \tag{13}$$

где D_1, D_3, D_5 и D_7 — постоянные, подлежащие последующему определению.

Вычислив вторую производную x_2 по времени

$$\ddot{x}_2 = -D_1p^2 \sin pt - 9D_3p^2 \sin 3pt - 25D_5p^2 \sin 5pt - 49D_7 p^2 \sin 7pt,$$

подставим ее, а также x_2 из формулы (13), в уравнение (9). Приравняв затем коэффициенты при соответствующих синусах и косинусах, найдем

$$D_1 = \frac{h}{k^2 - p^2}, \quad D_3 = \frac{h}{3(k^2 - 9p^2)}, \quad D_5 = \frac{h}{5(k^2 - 25p^2)}, \quad D_7 = \frac{h}{7(k^2 - 49p^2)}.$$

Внеся эти значения в частное решение (13), получим

$$x_2 = \frac{h}{k^2 - p^2} \sin pt + \frac{h}{3(k^2 - 9p^2)} \sin 3pt + \frac{h}{5(k^2 - 25p^2)} \sin 5pt + \\ + \frac{h}{7(k^2 - 49p^2)} \sin 7pt. \tag{14}$$

Использовав результаты (12) и (14) в формуле (11), найдем общее решение дифференциального уравнения (9):

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin pt + \frac{h}{3(k^2 - 9p^2)} \sin 3pt + \\ + \frac{h}{5(k^2 - 25p^2)} \sin 5pt + \frac{h}{7(k^2 - 49p^2)} \sin 7pt. \tag{15}$$

Для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 вычислим производную x по времени:

$$\dot{x} = -C_1k \sin kt + C_2k \cos kt + \frac{hp}{k^2 - p^2} \cos pt + \\ + \frac{hp}{k^2 - 9p^2} \cos 3pt + \frac{hp}{k^2 - 25p^2} \cos 5pt + \frac{hp}{k^2 - 49p^2} \cos 7pt. \tag{16}$$

В соответствии с условием задачи начальные условия движения имеют вид

$$\text{при } t = 0 \quad x = 0, \quad \dot{x} = 0.$$

Подставив начальные условия: $t = 0$, $x = 0$ — в уравнение (15), а $t = 0$, $\dot{x} = 0$ в уравнение (16) и решив систему уравнений, найдем

$$C_1 = 0, \quad C_2 = -\frac{hp}{k}\left(\frac{1}{k^2 - p^2} + \frac{1}{k^2 - 9p^2} + \frac{1}{k^2 - 25p^2} + \frac{1}{k^2 - 49p^2}\right).$$

Итак,

$$C_1 = 0, \quad C_2 = -\frac{hp}{k}\sum_i \frac{1}{k^2 - i^2p^2}, \quad \text{где} \quad i = 1, 3, 5, 7. \qquad (17)$$

Внеся значения (17) в уравнение (15), окончательно получим

$$x = -\frac{hp}{k}\left(\sum_i \frac{1}{k^2 - i^2p^2}\right)\sin kt + h\sum_i \frac{1}{i\,(k^2 - i^2p^2)}\sin ipt, \qquad (18)$$

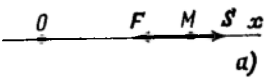
где $i = 1, 3, 5, 7$; $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$, $p = \frac{2\pi}{T}$, $h = \frac{4H}{\pi m}$.

В уравнении (18): $-\frac{hp}{k}\left(\sum_i \frac{1}{k^2 - i^2p^2}\right)\sin kt$ — свободные колебания материальной точки, вызванные возмущающей силой и имеющие круговую частоту k свободных колебаний, а $h\sum_i \frac{1}{i\,(k^2 - i^2p^2)}\sin ipt$ — вынужденные колебания материальной точки.

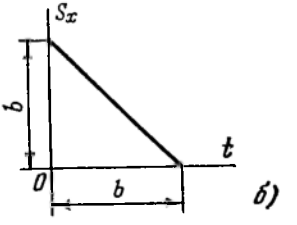
При выполнении условия: $k^2 - i^2p^2 = 0$ — наступают резонансные колебания i-го порядка, при которых отклонения материальной точки неограниченно возрастают. Так как в рассматриваемом случае $i = 1, 3, 5, 7$, то имеют место:

при $k = p$ резонансные колебания 1-го порядка,
» $k = 3p$ » » 3-го »
» $k = 5p$ » » 5-го »
» $k = 7p$ » » 7-го »

Конечно, в реальных условиях, при наличии силы сопротивления движению, отклонения материальной точки ограничены.



а)



б)

К задаче 8.50.

Задача 8.50. Точка M массы m движется вдоль оси x (рис. *а*) под действием силы упругости $\boldsymbol{F}$ и возмущающей силы $\boldsymbol{S}$. Проекция силы упругости на ось x равна $F_x = -cx$, где c — коэффициент упругости. Возмущающая сила $\boldsymbol{S}$ действует в течение промежутка времени b, т. е. при $0 \leqslant t \leqslant b$, причем $S_x = f(t) = b - t$ (рис. *б*), где b — положительная постоянная. По окончании промежутка времени b, т. е. при $t \geqslant b$, возмущающая сила обращается в нуль: $S_x = 0$ и точка совершает свободные колебания.

Найти уравнение вынужденных колебаний материальной точки при $0 \leqslant t \leqslant b$ и ее свободных колебаний при $t \geqslant b$. В начальный

момент точка находилась в покое в начале отсчета на оси x. Силой сопротивления пренебречь.

Р е ш е н и е. Составим дифференциальное уравнение движения материальной точки в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = F_x + S_x.$$

Использовав заданные значения F_x и S_x, запишем

$$m\ddot{x} = -Cx + b - t \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant b,$$
$$m\ddot{x} = -Cx \text{ при } t \geqslant b.$$

Для решения задачи применим формулу (17*), приведенную в обзоре теории:

$$x = \frac{1}{km}\int_0^t f(\tau)\sin k(t-\tau)\,d\tau. \tag{1}$$

В данном случае $f(\tau) = b - \tau$, поэтому

$$x = \frac{1}{km}\int_0^t (b-\tau)\sin k(t-\tau)\,d\tau \tag{2}$$

при $0 \leqslant t \leqslant b$. Применив интегрирование по частям, получим

$$x = \frac{1}{k^2m}\left|(b-\tau)\cos k(t-\tau) - \frac{1}{k}\sin k(t-\tau)\right|_0^t. \tag{3}$$

Подстановка верхнего и нижнего пределов дает

$$x = \frac{1}{k^2m}(b-t) - \frac{b}{k^2m}\cos kt + \frac{1}{k^3m}\sin kt. \tag{4}$$

Уравнение (4) описывает закон движения материальной точки в промежутке времени $0 \leqslant t \leqslant b$.

В момент $t = b$ оканчивается действие возмущающей силы (см. рис. 6) и при $t > b$ происходят свободные колебания точки. Так как формула (1) справедлива для любых значений t, то используем ее вновь, разбив промежуток времени $[0, t]$ на два промежутка $[0, b]$ и $[b, t]$. Тогда формула (1) примет вид

$$x = \frac{1}{km}\int_0^b f(\tau)\sin k(t-\tau)\,d\tau + \frac{1}{km}\int_b^t f(\tau)\sin k(t-\tau)\,d\tau.$$

Заметим, что в промежутке времени $t > b$ $f(t) = 0$ и второй интеграл обращается в нуль. Значит,

$$x = \frac{1}{km}\int_0^b f(\tau)\sin k(t-\tau)\,d\tau = \frac{1}{km}\int_0^b (b-\tau)\sin k(t-\tau)\,d\tau. \tag{5}$$

Сопоставив формулы (5) и (2), видим, что они отличаются только верхними пределами интеграла. Поэтому можно воспользоваться

результатом интегрирования (3), заменив в нем верхний предел t на b. Получим

$$x = \frac{1}{k^2 m}\left|(b-\tau)\cos k(t-\tau) - \frac{1}{k}\sin k(t-\tau)\right|_0^b,$$

т. е.

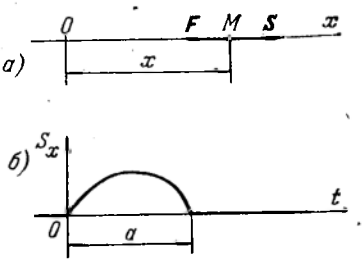
$$x = \frac{1}{k^2 m}\left[-b\cos kt - \frac{1}{k}\sin k(t-b) + \frac{1}{k}\sin kt\right].$$

Вычислив синус разности $k(t-b)$ и собрав члены, содержащие $\sin kt$ и $\cos kt$, окончательно найдем

$$x = \frac{1}{k^3 m}[(\sin kb - kb)\cos kt + (1-\cos kb)\sin kt]. \qquad (6)$$

Итак, движение материальной точки M под действием возмущающей силы $S_x = b - t$ в промежутке времени $0 \leqslant t \leqslant b$ описывается уравнением (4), а свободные колебания точки при $t > b$ — уравнением (6).

Задача 8.51. Точка M массы m совершает вынужденные колебания вдоль оси x (рис. *а*) под действием силы упругости $\boldsymbol{F}$ и возмущающей силы $\boldsymbol{S}$ в течение интервала времени $0 \leqslant t \leqslant a$. Затем при $t \geqslant a$, по окончании действия возмущающей силы, точка совершает свободные колебания при наличии силы упругости $\boldsymbol{F}$. Проекции сил $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{S}$ на ось x равны $F_x = -cx$, где c — коэффициент упругости, $S_x = at - t^2$ (см. рис. *б*), где a — постоянная. Возмущающая сила действует в промежутке от 0 до a.



К задаче 8.51.

Найти уравнение вынужденных колебаний при $0 \leqslant t \leqslant a$, а также свободных колебаний при $t \geqslant a$. В начальный момент точка M находилась в покое в начале отсчета на оси x. Силами сопротивления пренебречь.

Р е ш е н и е. Запишем дифференциальное уравнение вынужденных колебаний в проекции на ось x в течение промежутка $0 \leqslant t \leqslant a$:

$$m\ddot{x} = F_x + S_x.$$

Использовав выражения для F_x и S_x, имеем

$$\ddot{x} + k^2 x = \frac{1}{m} f(t), \qquad (1)$$

где обозначено:

$$k^2 = \frac{c}{m}, \quad f(t) = \begin{cases} at - t^2 & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant a, \\ 0 & \text{при } t \geqslant a. \end{cases} \qquad (2)$$

При $t > a$ возмущающая сила отсутствует.

Запишем начальные условия движения точки M:

$$\text{при } t = 0 \quad x = 0, \quad \dot{x} = 0. \tag{3}$$

Для интегрирования дифференциального уравнения (1) в интервале $0 \leqslant t \leqslant a$ воспользуемся методом вариации произвольных постоянных, изложенным в ходе решения предыдущей задачи. Подставив начальные условия движения (3) в формулу (17*), приведенную в обзоре теории на стр. 100, получим общее решение дифференциального уравнения (1) в виде

$$x = \frac{1}{km} \int_0^t f(\tau) \sin k(t - \tau)\, d\tau. \tag{4}$$

Приняв во внимание (2), имеем

$$x = \frac{1}{km} \int_0^t (a\tau - \tau^2) \sin k(t - \tau)\, d\tau. \tag{5}$$

Воспользовавшись интегрированием по частям, получим

$$x = \frac{1}{k^2 m} \left| (a\tau - \tau^2) \cos k(t-\tau) + \frac{a - 2\tau}{k} \sin k(t-\tau) + \frac{2}{k^2} \cos k(t-\tau) \right|_0^t, \tag{6}$$

т. е.

$$x = \frac{1}{k^2 m} \left[\frac{2}{k^2} (1 - \cos kt) - \frac{a}{k} \sin kt + at - t^2 \right]. \tag{7}$$

Уравнение (7) описывает вынужденные колебания материальной точки в интервале времени $0 \leqslant t \leqslant a$.

Формула (5) справедлива для всех значений $t > 0$, поэтому уравнение свободных колебаний материальной точки по окончании действия возмущающей силы $\boldsymbol{S}$ можно непосредственно найти из формулы (5). Для этого разобьем промежуток интегрирования $[0, t]$ на два промежутка: $[0, a]$ и $[a, t]$. Имеем

$$x = \frac{1}{km} \int_0^t (a\tau - \tau^2) \sin k(t - \tau)\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{km} \int_0^a (a\tau - \tau^2) \sin k(t - \tau)\, d\tau + \frac{1}{km} \int_a^t (a\tau - \tau^2) \sin k(t - \tau)\, d\tau. \tag{8}$$

На основании выражения (2) при $t > a$ функция $a\tau - \tau^2 = 0$. Поэтому второй интеграл обращается в нуль и формула (8) принимает вид

$$x = \frac{1}{km} \int_0^a (a\tau - \tau^2) \sin k(t - \tau)\, d\tau. \tag{9}$$

Нетрудно видеть, что выражения (5) и (9) тождественны и отличаются только верхними пределами интегрирования. Поэтому, заменив в формуле (6) верхний предел интегрирования t на a, получим

$$x = \frac{1}{k^3 m}\left[-a\sin k(t-a) + \frac{2}{k}\cos k(t-a) - \sin kt - \frac{2}{k}\cos kt\right].$$

Вычислив синусы и косинусы разностей $k(t-a)$ и собрав члены, содержащие $\sin kt$ и $\cos kt$, запишем искомое уравнение свободных колебаний материальной точки по окончании действия возмущающей силы, т. е. при $t \geqslant a$, в виде

$$x = \frac{1}{k^3 m}\left\{\left[\frac{2}{k}\sin ka - a(1+\cos ka)\right]\sin kt - \right.$$
$$\left. - \left[\frac{2}{k}(1-\cos ka) - a\sin ka\right]\cos kt\right\}. \qquad (10)$$

Итак, вынужденные колебания материальной точки при $0 \leqslant t \leqslant a$ описываются уравнением (7), а свободные колебания точки при $t \geqslant a$ — уравнением (10).

Указание. Рекомендуем решить следующие задачи из «Сборника задач по теоретической механике» И. В. Мещерского: 32.81—32.84, 32.87, 32.89, 32.90.

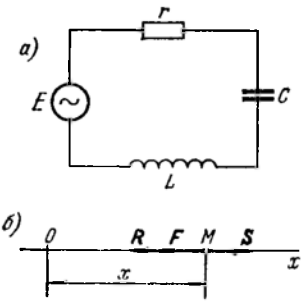
5. Электромеханические аналогии. В 1873 г. Максвелл рассмотрел соответствие электрической цепи механической колебательной системе. В основу электромеханической аналогии было положено соответствие между током и скоростью материальной точки.

Ниже приведена таблица аналогичных механических и электрических величин.

Механические параметры	Электрические параметры
t — время,	t — время,
x — координата,	q — заряд (измеряется в кулонах),
$v_x = \dot{x}$ — проекция скорости,	$i = \dot{q}$ — ток (измеряется в амперах),
m — масса,	L — индуктивность (измеряется в генри),
F_x — проекция силы,	E — электродвижущая сила, напряжение (измеряется в вольтах),
β — коэффициент жидкостного сопротивления,	r — омическое сопротивление (измеряется в омах),
c — коэффициент упругости,	$\frac{1}{C}$ — где C — емкость (измеряется в фарадах),
$S_x = S_x(t)$ — возмущающая сила	$E = E(t)$ — электродвижущая сила (измеряется в вольтах)

Существуют и другие системы электромеханических аналогий. Они дают возможность описывать колебательные системы и электрические цепи аналогичными дифференциальными уравнениями. Поэтому все результаты, полученные в этом параграфе, могут быть использованы при изучении электрических цепей.

Задача 8.52. На рис. *а* изображена электрическая цепь, в состав которой входит внешний источник электродвижущей силы $E = E_0 \sin \omega t$. С ним последовательно соединены: катушка с индуктивностью L, омическое сопротивление r и конденсатор емкостью C. Написать дифференциальное уравнение, описывающее движение зарядов в этой электрической цепи.



К задаче 8.52.

Р е ш е н и е. Запишем падение напряжений на каждом из участков цепи. Имеем:

для катушки с индуктивностью L

$$u_1 = L\frac{di}{dt}, \tag{1}$$

для омического сопротивления r

$$u_2 = ri, \tag{2}$$

для конденсатора емкостью C

$$u_3 = \frac{q}{C}. \tag{3}$$

При последовательном включении всех элементов цепи напряжение E внешнего источника электродвижущей силы равно сумме падений напряжений на всех участках цепи (второй закон Кирхгофа), т. е.

$$u_1 + u_2 + u_3 = E. \tag{4}$$

Использовав в уравнении (4) формулы (1), (2), (3) и приняв во внимание, что $E = E_0 \sin \omega t$, получим

$$L\frac{di}{dt} + ri + \frac{q}{C} = E_0 \sin \omega t. \tag{5}$$

Учтя, что $i = dq/dt$, находим искомое дифференциальное уравнение в виде

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + r\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E_0 \sin \omega t,$$

т. е.

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2 q = h \sin pt, \tag{6}$$

где обозначено:

$$\frac{r}{L} = 2n, \quad \frac{1}{CL} = k^2, \quad \frac{E_0}{L} = h, \quad \omega = p.$$

Дифференциальное уравнение (6), полученное для данной электрической цепи, тождественно уравнению, описывающему движение материальной точки массы m, которая движется вдоль оси x (рис. *б*) под действием силы упругости $\boldsymbol{F}$, силы сопротивления движению $\boldsymbol{R}$ и возмущающей силы $\boldsymbol{S}$. Проекции этих сил на ось x равны: $F_x =$

$= -cx$, $R_x = -\beta\dot{x}$, $S_x = H \sin pt$. Действительно, дифференциальное уравнение движения материальной точки имеет вид

$$m\ddot{x} = F_x + R_x + S_x.$$

Подставив значения F_x, R_x и S_x, получим

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = h \sin pt, \tag{7}$$

где обозначено:

$$\frac{\beta}{m} = 2n, \quad \frac{c}{m} = k^2, \quad \frac{H}{m} = h.$$

Нетрудно видеть, что движение материальной точки и изменение заряда в электрической цепи описываются аналогичными дифференциальными уравнениями (6) и (7). Это соответствие лежит в основе электронных моделирующих машин.

§ 5. Относительное движение

Законы динамики описывают движение материальной точки относительно так называемых «неподвижных» осей. Так, уравнение динамики движения материальной точки, отнесенное к «неподвижной» системе отсчета, имеет вид

$$m\boldsymbol{w} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F}_k, \tag{1*}$$

где m — масса точки, $\boldsymbol{w}$ — ее ускорение, $\boldsymbol{F}_k$ — силы, приложенные к точке.

Вместе с тем часто приходится изучать относительное движение материальной точки, происходящее в системе отсчета, которая в свою очередь движется с ускорением по отношению к «неподвижным» осям. Для этого в правую часть уравнения (1*) надо ввести дополнительные силы. Эти силы называются *силами инерции*.

Уравнение динамики относительного движения материальной точки имеет вид

$$m\boldsymbol{w}_r = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F}_k + \boldsymbol{J}_e + \boldsymbol{J}_c, \tag{2*}$$

где $\boldsymbol{w}_r$ — ускорение точки относительно подвижных осей, $\boldsymbol{J}_e = -m\boldsymbol{w}_e$ — сила инерции в переносном движении, $\boldsymbol{J}_c = -m\boldsymbol{w}_c = -2m\boldsymbol{\omega}_e \times \boldsymbol{v}_r$ — кориолисова сила инерции.

Напомним, что $\boldsymbol{w}_e$ — ускорение в переносном движении, т. е. ускорение той точки подвижной среды, через которую в данный момент проходит изучаемая точка, $\boldsymbol{\omega}_e$ — угловая скорость вращения подвижных осей относительно «неподвижных», $\boldsymbol{v}_r$ — относительная скорость, $\boldsymbol{w}_c$ — ускорение Кориолиса данной точки. Силы инерции направлены в стороны, противоположные соответствующим ускорениям.

Сопоставление формул (2*) и (1*) приводит к следующему результату: относительное движение материальной точки происходит по таким же законам, как движение абсолютное, под действием всех сил F_k, приложенных к точке в ее абсолютном движении, а также силы инерции в переносном движении J_e и кориолисовой силы инерции J_c. С помощью уравнения (2*) производится определение относительного движения материальной точки по заданному переносному движению, массе точки и силам, приложенным к материальной точке в ее абсолютном движении.

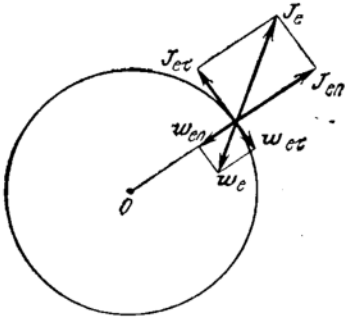


Рис. 8.16.

Если переносное движение представляет собой вращение вокруг неподвижной оси (рис. 8.16), то сила инерции в переносном движении J_e является суммой центробежной J_{en} и вращательной $J_{e\tau}$ сил инерции:

$$J_e = J_{en} + J_{e\tau},$$

причем

$$J_{en} = -mw_{en}, \quad J_{e\tau} = -mw_{e\tau}.$$

По модулю

$$J_{en} = mh\omega^2, \quad J_{e\tau} = mh\varepsilon,$$

где h — расстояние материальной точки до неподвижной оси, ω и ε — угловая скорость и угловое ускорение подвижной среды, вращающейся вокруг неподвижной оси.

В этом случае относительное движение материальной точки изучается с помощью уравнения

$$mw_r = \sum_{k=1}^{n} F_k + J_{en} + J_{e\tau} + J_c. \tag{3*}$$

Если переносное движение подвижной среды является поступательным, то кориолисова сила инерции J_c равна нулю. Тогда относительное движение материальной точки изучается с помощью уравнения

$$mw_r = \sum_{k=1}^{n} F_k + J_e. \tag{4*}$$

Если переносное поступательное движение подвижной среды является равномерным и прямолинейным, то сила инерции в переносном движении J_e и кориолисова сила инерции J_c равны нулю. В этом случае относительное движение материальной точки изучается с помощью уравнения, тождественного ее уравнению абсолютного движения

$$mw_r = \sum_{k=1}^{n} F_k. \tag{5*}$$

Отсюда следует, что никакие механические явления, происходящие в подвижной среде, не могут обнаружить ее прямолинейного и равномерного движения (*принцип относительности классической механики*).

Таким образом, «абсолютное» движение материальной точки может рассматриваться не только по отношению к «неподвижным» осям координат, но и по отношению к любой системе отсчета, движущейся поступательно и притом равномерно и прямолинейно по отношению к «неподвижным» осям координат. Эти системы отсчета называются *инерциальными* (галилеевыми осями).

Механические движения по отношению к инерциальным системам отсчета являются динамически равноценными.

В случае относительного покоя материальной точки по отношению к подвижной среде, совершающей переносное движение, относительное ускорение $\boldsymbol{w}_r$, ускорение Кориолиса $\boldsymbol{w}_c$ и кориолисова сила инерции $\boldsymbol{J}_c$ равны нулю.

Уравнение относительного покоя материальной точки имеет вид

$$\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F}_k + \boldsymbol{J}_e = 0. \tag{6*}$$

В некоторых случаях приходится определять переносное движение среды, связанной с подвижными осями, по заданному относительному движению материальной точки, ее массе и силам, приложенным к точке в ее абсолютном движении. При этом следует пользоваться уравнением

$$m\boldsymbol{w}_e = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F}_k + \boldsymbol{J}_r + \boldsymbol{J}_c, \tag{7*}$$

где $\boldsymbol{w}_e$ — ускорение в переносном движении, $\boldsymbol{J}_r$ — сила инерции в относительном движении, $\boldsymbol{J}_c$ — кориолисова сила инерции, причем $\boldsymbol{J}_r = -m\boldsymbol{w}_r$, $\boldsymbol{J}_c = -m\boldsymbol{w}_c$ (по модулю $J_r = mw_r$, $J_c = 2m\omega_e v_r \sin(\widehat{\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{v}_r})$.

Если переносное движение подвижной среды является поступательным, то кориолисова сила инерции равна нулю.

При этом переносное движение изучается с помощью уравнения

$$m\boldsymbol{w}_e = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F}_k + \boldsymbol{J}_r. \tag{8*}$$

Указание. Задачи динамики относительного движения материальной точки рекомендуется решать в следующем порядке:

1) разложить «абсолютное» движение материальной точки на относительное и переносное; выбрать неподвижную систему отсчета и подвижную систему отсчета, связанную с подвижной средой, совершающей переносное движение;

2) записать начальные условия относительного движения материальной точки;

3) изобразить на рисунке силы F_k, приложенные к материальной точке;

4) определить ускорение материальной точки в переносном движении w_e, ускорение Кориолиса w_c, найти силу инерции в переносном движении J_e, кориолисову силу инерции J_c. Добавить эти силы инерции к силам F_k, приложенным к материальной точке;

5) составить дифференциальные уравнения (2*)—(5*) относительного движения материальной точки в проекциях на подвижные оси координат;

6) проинтегрировать составленные дифференциальные уравнения, определив постоянные интегрирования с помощью начальных условий движения;

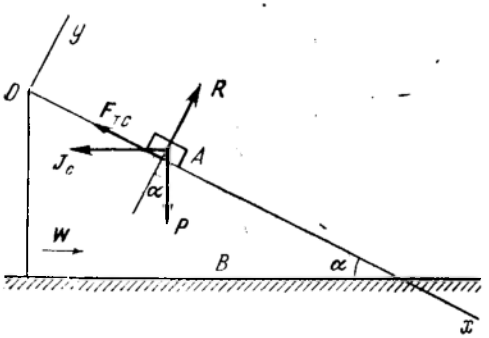
7) определить искомые величины.

При решении прямой задачи, т. е. при определении сил по заданному движению, пункты 2) и 6) надо опустить.

Материальную точку следует изображать в промежуточном положении, соответствующем положительным координатам этой точки, и предположить, что точка движется в сторону возрастания этих координат.

При относительном криволинейном движении материальной точки удобно пользоваться дифференциальными уравнениями движения в проекциях на оси натурального триэдра.

Задача 8.53. Груз A массы m спускается вниз по боковой грани призмы B, расположенной под углом α к горизонту. Призма движется по горизонтальной плоскости направо с ускорением w.



К задаче 8.53.

Определить ускорение груза по отношению к призме и давление груза на боковую грань призмы, если коэффициент трения скольжения груза о боковую грань призмы равен f.

Р е ш е н и е. Направим ось x вдоль боковой грани призмы вниз. Движение груза A является сложным. Разложим его на относительное движение по отношению к боковой грани призмы и на переносное движение вместе с призмой. К грузу A приложены следующие силы: $\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{g}$ — сила тяжести груза, $\boldsymbol{R}$ — нормальная реакция боковой грани призмы, $\boldsymbol{F}_{т.\,с}$ — сила трения скольжения, направленная в сторону, противоположную движению груза, т. е. по боковой грани вверх.

Для решения задачи методом динамики относительного движения материальной точки надо ко всем силам, приложенным к матери-

альной точке, добавить силу инерции J_e в переносном движении и кориолисову силу инерции J_c.

Так как переносное движение является поступательным, то ускорение Кориолиса равно нулю и, следовательно, кориолисова сила инерции J_c равна также нулю. Сила инерции J_e в переносном движении направлена в сторону, противоположную переносному ускорению w, т. е. по горизонтали налево и равна по модулю

$$J_e = mw.$$

Для определения ускорения груза w_r относительно боковой грани призмы составим дифференциальное уравнение относительного движения груза в проекции на ось x:

$$m\ddot{x}_r = mg \sin \alpha - F_{т.с} - J_e \cos \alpha.$$

Учитывая, что $F_{т.с} = fR$, а $J_e = mw$, находим

$$\ddot{x}_r = g \sin \alpha - \frac{fR}{m} - w \cos \alpha. \qquad (1)$$

Для определения нормальной реакции R боковой грани призмы составим дифференциальное уравнение относительного движения груза в проекции на ось y:

$$m\ddot{y}_r = R - mg \cos \alpha - J_e \sin \alpha.$$

Так как ускорение груза в относительном движении w_r направлено перпендикулярно к оси y, то $\ddot{y}_r = 0$. Заметив, что $J_e = mw$, находим

$$R = mg\left(\cos \alpha + \frac{w}{g} \sin \alpha\right). \qquad (2)$$

Искомое давление груза на боковую грань призмы направлено противоположно нормальной реакции R и равно ей по модулю. Подставив в уравнение (1) значение R из формулы (2), получим искомое относительное ускорение

$$\ddot{x}_r = g (\sin \alpha - f \cos \alpha) - w (\cos \alpha + f \sin \alpha). \qquad (3)$$

Воспользовавшись уравнением (3), можно найти предельное значение угла α, при котором груз будет находиться в относительном покое. Считая, что $\ddot{x}_r = 0$, имеем

$$g (\sin \alpha - f \cos \alpha) - w (\cos \alpha + f \sin \alpha) = 0,$$

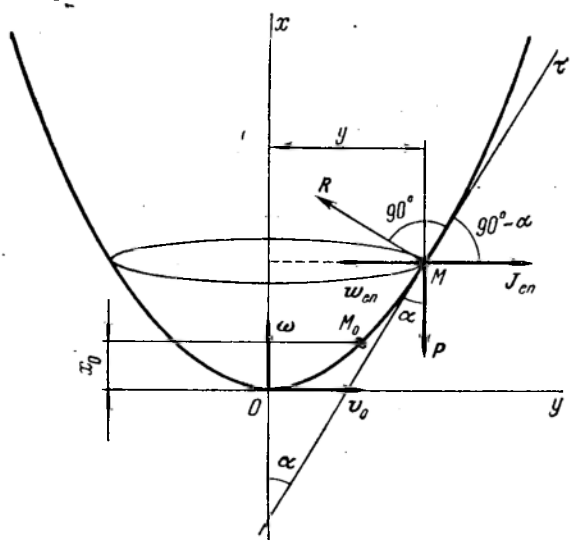
откуда

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{(f + w/g)}{1 - fw/g} = \varphi + \operatorname{arctg} \frac{w}{g},$$

где φ — угол трения.

Задача 8.54. Проволока, изогнутая в виде параболы, уравнение которой $y^2 = 2px$, вращается вокруг вертикальной оси x с постоянной угловой скоростью ω. На проволоку надето кольцо, которое может двигаться вдоль проволоки.

Определить: 1) скорость кольца по отношению к проволоке, если в начальный момент оно находилось в покое в положении M_0 с абсциссой x_0, 2) в какую точку поднимется кольцо, если в начальный момент оно находилось в начале координат и ему была сообщена по горизонтали направо скорость v_0. Трением скольжения кольца о проволоку пренебречь.



К задаче 8.54.

Р е ш е н и е. Оси xy вращаются вместе с проволокой. Кольцо совершает сложное движение, которое можно разложить на относительное по отношению к проволоке и переносное вращательное вместе с проволокой вокруг вертикальной оси x.

Изобразим кольцо в промежуточном положении $M(x, y)$ в предположении, что оно движется вдоль проволоки вверх.

К кольцу приложены следующие силы: $\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{g}$ — сила тяжести кольца, $\boldsymbol{R}$ — нормальная реакция проволоки. Добавим силы инерции в переносном движении $\boldsymbol{J}_e$ и кориолисову силу инерции $\boldsymbol{J}_c$.

При равномерном вращении проволоки с угловой скоростью ω ее угловое ускорение ε равно нулю. Следовательно, переносное вращательное ускорение кольца $\boldsymbol{w}_{e\tau}$ и вращательная сила инерции в переносном движении $\boldsymbol{J}_{e\tau}$ равны нулю. Переносное центростремительное ускорение $\boldsymbol{w}_{en}$ кольца направлено по горизонтали налево, причем

$$w_{en} = y\omega^2.$$

Поэтому центробежная сила инерции в переносном движении $\boldsymbol{J}_{en}$ направлена по горизонтали направо и по модулю равна

$$J_{en} = my\omega^2.$$

Ускорение Кориолиса $\boldsymbol{w}_c = 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_r$ направлено перпендикулярно к плоскости рисунка от нас ($\boldsymbol{v}_r$, согласно сделанному предположению, направлено по касательной к проволоке в точке M вверх). Следовательно, кориолисова сила инерции $\boldsymbol{J}_c$ направлена перпендикулярно к плоскости рисунка на нас и по модулю равна

$$J_c = 2m\omega v_r \sin\alpha$$

(угол α образован положительными направлениями осей x и τ).

Составим дифференциальное уравнение относительного движения кольца в проекции на касательную τ к проволоке в данной точке M:

$$mw_{r\tau} = J_{en}\sin\alpha - mg\cos\alpha$$

(проекции сил $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{J}_c$ равны нулю). Учитывая, что $J_{en} = my\omega^2$, а $w_{r\tau} = dv_r/dt$, находим

$$\frac{dv_r}{dt} = \omega^2 y\sin\alpha - g\cos\alpha. \qquad (1)$$

Так как $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha$, то нетрудно видеть, что $\sin\alpha = dy/d\sigma$, а $\cos\alpha = dx/d\sigma$. Кроме того,

$$\frac{dv_r}{dt} = \frac{dv_r}{d\sigma}\frac{d\sigma}{dt} = v_r\frac{dv_r}{d\sigma}.$$

Теперь уравнение (1) принимает вид

$$v_r\,dv_r = \omega^2 y\,dy - g\,dx.$$

Проинтегрировав это уравнение, находим

$$v_r^2 = \omega^2 y^2 - 2gx + C.$$

Так как, согласно условию, $y^2 = 2px$, то

$$v_r^2 = 2(p\omega^2 - g)x + C. \qquad (2)$$

Определим скорость кольца v_r в относительном движении, зная, что в начальный момент кольцо находилось в покое в положении M_0 с абсциссой x_0.

Подставив в уравнение (2) $x = x_0$, $v_r = 0$, получаем, что $C = -2(p\omega^2 - g)x_0$. Следовательно, уравнение (2) принимает вид

$$v_r^2 = 2(p\omega^2 - g)(x - x_0),$$

откуда

$$v_r = \sqrt{2(p\omega^2 - g)(x - x_0)}. \qquad (3)$$

Исследовав формулу (3), можно определить направление движения кольца.

Прежде всего заметим, что подкоренное выражение неотрицательно. Поэтому если $p\omega^2 > g$, то $x > x_0$; это означает, что кольцо движется вверх. Если же $p\omega^2 < g$, то и $x < x_0$, т. е. кольцо движется вниз. Наконец, при $p\omega^2 = g$ $v_r = 0$, т. е. кольцо неподвижно относительно вращающейся проволоки.

Определим, в какую точку проволоки должно подняться кольцо, если в начальный момент оно находилось в начале координат и ему была сообщена по горизонтали направо скорость v_0.

Подставив в уравнение (2) $x = 0$, $v_r = v_0$, получим, что $C = v_0^2$. Следовательно, уравнение (2) принимает вид

$$v_r^2 = v_0^2 + 2(p\omega^2 - g)x,$$

откуда

$$v_r = \sqrt{v_0^2 + 2(p\omega^2 - g)x}. \tag{4}$$

В наивысшей точке подъема кольца по проволоке $v_r = 0$; поэтому

$$x_{\max} = \frac{v_0^2}{2(g - p\omega^2)}. \tag{5}$$

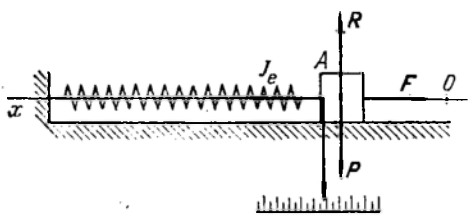
Учитывая, что $y^2 = 2px$, находим

$$y_{\max} = \sqrt{2px_{\max}} = \sqrt{\frac{pv_0^2}{g - p\omega^2}}.$$

Так как $x_{\max} > 0$, то из формулы (5) имеем $g - p\omega^2 > 0$, т. е. $\omega^2 < g/P$. Если же $\omega^2 \geqslant g/P$, то v_r в нуль не обратится и кольцо будет неограниченно подниматься по проволоке вверх.

В случае $\omega^2 = g/P$ из формулы (4) следует, что $v_r = v_0$, т. е. кольцо будет двигаться по проволоке с постоянной по модулю скоростью v_0.

Задача 8.55. При отходе от станции электровоз имеет постоянное ускорение w. Для экспериментального определения этого ускорения на электровозе установлен прибор, состоящий из груза A массы m, прикрепленного к концу пружины. Груз A совершает колебания по гладкой горизонтальной станине, связанной с электровозом. К грузу прикреплена стрелка, которая перемещается вдоль шкалы, градуированной на станине. В момент включения прибора груз находился в относительном покое в конце недеформированной пружины жесткости c. Экспериментально определив размахи колебаний стрелки, можно вычислить искомое постоянное ускорение электровоза.



К задаче 8.55.

Найти зависимость между постоянным ускорением w электровоза и величиной размаха колебаний стрелки.

Р е ш е н и е. Движение груза является сложным. Разложим его на переносное поступательное вместе со станиной (т. е. вместе с электровозом) и относительное по отношению к станине.

К грузу приложены силы: $\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{g}$ — сила тяжести груза, $\boldsymbol{R}$ — нормальная реакция, $\boldsymbol{F}$ — сила упругости пружины. В отно-

сительном движении к грузу надо приложить переносную силу инерции $\boldsymbol{J}_e = -m\boldsymbol{w}_e$ (кориолисова сила инерции равна нулю, ибо переносное движение — поступательное).

Определим условие относительного покоя груза. Применив уравнение $0 = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F}_k + \boldsymbol{J}_e$ в проекции на ось x, запишем $0 = -F_{ст} + J_e$, где статическая сила упругости по модулю равна $F_{ст} = c\Delta_{ст}$, а $J_e = mw$, причем w — искомое ускорение электровоза. Значит, уравнение относительного покоя принимает вид

$$0 = -c\Delta_{ст} + mw. \tag{1}$$

Перейдем к изучению относительного движения груза (чувствительного элемента прибора). По условию, в начальный момент груз находился в конце недеформированной пружины, т. е. был отклонен от нуля на $\Delta_{ст}$ вправо. Приняв во внимание направление оси x, имеем $x_r = -\Delta_{ст}$, $\dot{x}_r = 0$ (груз находился в относительном покое). Итак,

$$\text{при } t = 0 \quad x_r = -\Delta_{ст}, \quad \dot{x}_r = 0. \tag{2}$$

Запишем дифференциальное уравнение относительного движения груза в проекции на ось x:

$$m\ddot{x}_r = P_x + R_x + F_x + J_{ex}. \tag{3}$$

Силы $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{R}$ перпендикулярны к оси x, поэтому $P_x = R_x = 0$. Проекция силы упругости равна $F_x = -c\,(\Delta_{ст} + x_r)$ (на рисунке груз изображен в текущем положении, смещенном из нуля на x_r. При этом пружина сжата на $\Delta = \Delta_{ст} + x_r$). Проекция J_{ex} переносной силы инерции $\boldsymbol{J}_e$ равна $J_{ex} = mw$. Подставив эти значения проекций силы в уравнение (3), получим

$$m\ddot{x}_r = -c\Delta_{ст} - cx_r + mw. \tag{4}$$

Приняв во внимание условие (1) относительного покоя, запишем дифференциальное уравнение (4) относительного движения груза в виде

$$\ddot{x}_r + k^2 x_r = 0, \tag{5}$$

где обозначено $k^2 = c/m$.

Составим характеристическое уравнение дифференциального уравнения (5): $r^2 + k^2 = 0$, откуда $r_{1,2} = \pm ki$. Запишем соответствующее общее решение однородного дифференциального уравнения (5):

$$x_r = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \tag{6}$$

Для определения постоянных интегрирования вычислим производную x по t:

$$\dot{x}_r = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt. \tag{7}$$

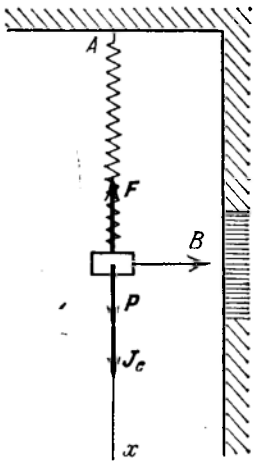
Подставим начальные условия (2): $t = 0$, $x_r = -\Delta_{ст}$ — в уравнение (6), а $t = 0$, $\dot{x}_r = 0$ — в уравнение (7). Получим систему:

$-\Delta_{ст} = C_1$, $0 = C_2 k$, т. е. $C_1 = -\Delta_{ст}$, $C_2 = 0$. Теперь уравнение движения (6) принимает вид $x_r = -\Delta_{ст} \cos kt$. Из условия (1) следует, что $\Delta_{ст} = mw/c$, поэтому окончательно получим

$$x_r = -\frac{mw}{c} \cos kt, \tag{8}$$

где $k = \sqrt{c/m}$.

Итак, чувствительный элемент совершает свободные колебания с круговой частотой $k = \sqrt{c/m}$ и амплитудой $a = mw/c$ около положения относительного равновесия. При колебаниях стрелки вдоль шкалы определим размах ее колебаний d, т. е. расстояние между крайними положениями стрелки. Итак, $d = 2a = 2mw/c$, откуда находим искомое постоянное ускорение электровоза, равное $w = cd/(2m)$.



К задаче 8.56.

Задача 8.56. Определить движение по отношению к шкале стрелки B прибора для регистрации колебаний железнодорожного вагона, рассмотренного в задаче 8.47. Использовать данные этой задачи.

Р е ш е н и е. Направим по вертикали вниз ось x, связанную с железнодорожным вагоном. Начало отсчета возьмем в положении статического равновесия груза (чувствительного элемента), т. е. при растяжении пружины на $\Delta_{ст} = P/c$.

Груз совершает сложное движение, которое можно разложить на относительное движение по отношению к вагону и переносное движение вместе с вагоном, согласно уравнению $x_e = \xi = a \sin pt$.

Запишем начальные условия относительного движения груза:

$$\text{при } t = 0 \quad x_r = x_{r0} = 0, \quad \dot{x}_r = \dot{x}_{r0} = 0.$$

Для определения уравнения относительного движения груза используем уравнение (2*) динамики относительного движения материальной точки:

$$m\boldsymbol{w}_r = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F}_k + \boldsymbol{J}_e + \boldsymbol{J}_c. \tag{1}$$

Изобразим груз смещенным из начала отсчета на x_r вниз. При этом пружина оказывается растянутой на $\Delta_x = \Delta_{ст} + x_r$ и сила упругости пружины $\boldsymbol{F}$ направлена по вертикали вверх. Ее проекция на ось x равна

$$F_x = -c\Delta_x = -c(\Delta_{ст} + x_r). \tag{2}$$

Кроме силы тяжести груза $P = mg$ и силы упругости пружины F, надо к грузу, в соответствии с уравнением (1), приложить силы инерции J_e и J_c.

Зная уравнение переносного движения вагона $x_e = \xi = a \sin pt$, вычислим $\ddot{x}_e = -ap^2 \sin pt$. Сила инерции в переносном движении имеет вид $J_e = -m\boldsymbol{w}_e$. Ее проекция на ось x равна

$$J_{ex} = map^2 \sin pt. \tag{3}$$

Так как переносное движение вагона является поступательным, то ускорение Кориолиса $\boldsymbol{w}_c$ и, следовательно, кориолисова сила инерции J_c равны нулю.

Запишем уравнение (1) в проекции на ось x:

$$m\ddot{x}_r = P + F_x + J_{ex}.$$

Использовав формулы (2) и (3), находим

$$m\ddot{x}_r = P - c\Delta_{ст} - cx_r + map^2 \sin pt, \tag{4}$$

причем

$$P - c\Delta_{ст} = 0. \tag{5}$$

На основании формулы (5) дифференциальное уравнение (4) относительного движения груза можно записать в виде

$$\ddot{x}_r + k^2 x_r = ap^2 \sin pt, \tag{6}$$

где $k = \sqrt{c/m}$.

Общее решение x_r этого дифференциального уравнения имеет вид

$$x_r = x_{r1} + x_{r2}, \tag{7}$$

где x_{r1} — общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения

$$\ddot{x}_r + k^2 x_r = 0,$$

т. е.

$$x_{r1} = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \tag{8}$$

а x_{r2} — частное решение уравнения (6). Так как

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{1000}{10}} = 10 \frac{\text{рад}}{\text{с}}, \quad \text{а} \quad p = 16\pi \frac{\text{рад}}{\text{с}}, \quad \text{то} \quad p \neq k,$$

и, следовательно, резонанса нет.

Ввиду отсутствия резонанса ищем частное решение x_{r2} в виде

$$x_{r2} = A \sin pt + B \cos pt. \tag{9}$$

Для определения A и B вычислим

$$\ddot{x}_{r2} = -Ap^2 \sin pt - Bp^2 \cos pt.$$

Подставив x_{r2} и $\ddot{x}_{r2}$ в дифференциальное уравнение относительного движения груза (6), приравняв соответствующие коэффициенты

в левой и правой частях этого уравнения при синусе и косинусе, получим

$$A = \frac{ap^2}{k^2 - p^2}, \quad B = 0.$$

Следовательно, частное решение (9), соответствующее вынужденным колебаниям груза в относительном движении, имеет вид

$$x_{r2} = \frac{ap^2}{k^2 - p^2} \sin pt. \tag{10}$$

Это уравнение вынужденных колебаний груза в относительном движении было нами найдено в задаче 8.47 (формула (9)) более длинным путем. Применяя уравнение динамики относительного движения материальной точки, мы непосредственно получили уравнение относительного движения x_{r2}, минуя определение его абсолютного движения. В решении же задачи 8.47 было предварительно определено абсолютное движение x_2 груза в формуле (8) и затем вычислены координаты точки в относительном движении по формуле: $x_r = x_2 - \xi$. Если требуется определить уравнение абсолютного движения груза, то более целесообразным является метод решения задачи 8.47. Если же требуется найти уравнение относительного движения точки, то предпочтительнее пользоваться уравнением динамики относительного движения, примененным в этой задаче.

Находим общее решение дифференциального уравнения (6) по формуле (7), использовав уравнения (8) и (10):

$$x_r = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{ap^2}{k^2 - p^2} \sin pt. \tag{11}$$

Для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 вычислим

$$\dot{x}_r = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt + \frac{ap^3}{k^2 - p^2} \cos pt. \tag{12}$$

Внеся в (11) $t = 0$, $x_r = 0$, а в (12) $t = 0$, $\dot{x}_r = 0$, получим

$$C_1 = 0, \quad C_2 = -\frac{p}{k} \frac{ap^2}{k^2 - p^2};$$

Подставив эти значения C_1 и C_2 в формулу (11), найдем уравнение относительного движения чувствительного элемента

$$x_r = -\frac{p}{k} \frac{ap^2}{k^2 - p^2} \sin kt + \frac{ap^2}{k^2 - p^2} \sin pt. \tag{13}$$

Использовав численные данные: $k = 10$ рад/с, $p = 16\pi$ рад/с, $a = 0{,}5$ см, находим

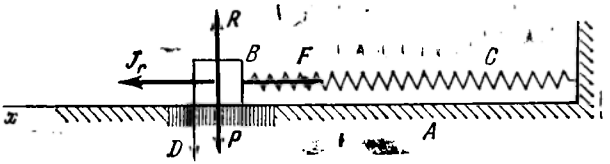
$$x_r = (-2{,}64 \sin 10t + 0{,}52 \sin 16\pi t) \text{ см}. \tag{14}$$

Первые слагаемые в уравнениях (13) и (14) определяют колебания в относительном движении груза с круговой частотой свободных

колебаний, а вторые слагаемые — их вынужденные колебания в относительном движении.

Задача 8.57. Для регистрации колебаний станка на горизонтальной идеально гладкой плоскости его станины A установлен груз B массы m, соединенный со станиной пружиной C (см. рисунок). Коэффициент жесткости пружины равен c. При колебаниях станины A груз приходит в движение относительно станины. Стрелка D, прикрепленная к грузу B, регистрирует горизонтальные колебания станины на шкале, изображенной на станине.

Определить амплитуду колебаний станины, если стрелка D движется относительно станины, согласно уравнению $\xi = a \cos pt$,



К задаче 8.57.

где ξ отсчитывается по горизонтали налево от положения конца недеформированной пружины. В начальный момент станина и груз находились в покое.

Р е ш е н и е. Направим неподвижную ось x по горизонтали налево, взяв начало отсчета в положении груза при недеформированной пружине. Движение груза B по отношению к неподвижной оси x является сложным. Разложим его на относительное по отношению к станине A и переносное (в данном случае поступательное) вместе со станиной.

Задача сводится к определению переносного движения по заданному относительному движению груза.

Изобразим груз в положении, смещенном относительно станины на $x_r = \xi$.

Начальные условия переносного движения груза имеют вид

$$\text{при } t = 0 \quad x_e = 0, \quad \dot{x}_e = 0.$$

К грузу приложены следующие силы: $\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{g}$ — вес груза, $\boldsymbol{R}$ — нормальная реакция горизонтальной плоскости, $\boldsymbol{F}$ — сила упругости пружины, растянутой на $\Delta_x = x_r = \xi$, направленная по горизонтали направо. Ее проекция на ось x равна

$$F_x = -c\xi = -ca \cos pt. \tag{1}$$

Для определения переносного движения груза надо ко всем силам, приложенным к грузу, добавить силу инерции в относительном движении $\boldsymbol{J}_r$ и кориолисову силу инерции $\boldsymbol{J}_c$. Так как ξ определяет закон относительного движения груза, т. е. $x_r = \xi = a \cos pt$,

то $\ddot{x}_r = -ap^2 \cos pt$. Сила инерции в относительном движении $J_r = -m\boldsymbol{w}_r$. Ее проекция на ось x равна

$$J_{rx} = -m\ddot{x}_r = map^2 \cos pt. \qquad (2)$$

Так как переносное движение станины является поступательным, то ускорение Кориолиса и, следовательно, кориолисова сила инерции $\boldsymbol{J}_c$ равны нулю.

Составим дифференциальное уравнение переносного движения груза в проекции на ось x:

$$m\ddot{x}_e = F_x + J_{rx}.$$

Учитывая формулы (1) и (2), представим это уравнение так:

$$m\ddot{x}_e = -ca \cos pt + map^2 \cos pt,$$

или

$$\ddot{x}_e = a\,(p^2 - k^2) \cos pt, \qquad (3)$$

где $k^2 = c/m$.

Интегрирование дифференциального уравнения (3) не представляет затруднений:

$$\dot{x}_e = \frac{a\,(p^2 - k^2)}{p} \sin pt + C_1.$$

Так как при $t = 0$ $\dot{x}_e = 0$, то $C_1 = 0$, следовательно,

$$\dot{x}_e = \frac{a\,(k^2 - p^2)}{p^2} \sin pt.$$

Проинтегрировав это дифференциальное уравнение, находим

$$x_e = \frac{a\,(k^2 - p^2)}{p^2} \cos pt + C_2.$$

Использовав, что при $t = 0$ $x_e = 0$, найдем, что $C_2 = -\frac{a\,(k^2 - p^2)}{p^2}$.

Следовательно, переносное движение станины происходит согласно уравнению

$$x_e = \frac{a\,(p^2 - k^2)}{p^2}\,(1 - \cos pt),$$

т. е. станина совершает гармонические колебания круговой частоты p. Искомая амплитуда колебаний станины равна $a\,(p^2 - k^2)/p^2$.

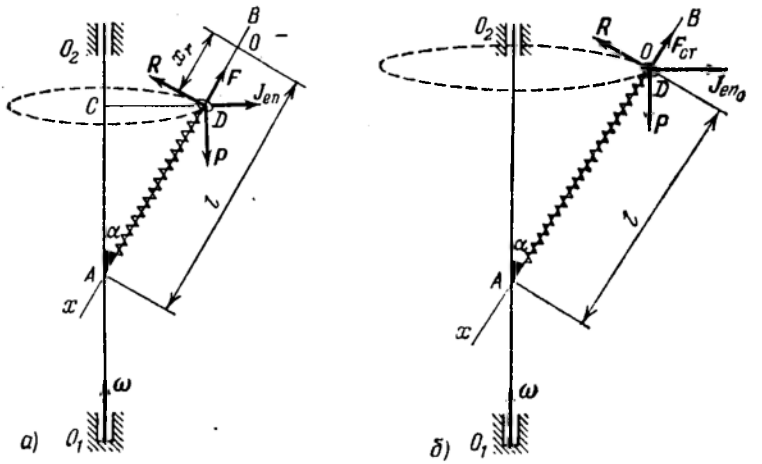
Для того чтобы регистрация колебаний станины совершалась возможно точнее, надо, чтобы амплитуда колебаний ξ груза по отношению к станине и амплитуда колебаний x_e станины по отношению к неподвижной оси x были примерно равны, т. е. $a \approx a\,(p^2 - k^2)/p^2$, или $(p^2 - k^2)/p^2 \approx 1$. Для выполнения этого условия надо принять $k \ll p$. Учитывая, что $k = \sqrt{c/m}$, замечаем, что следует выбирать пружину с малым коэффициентом жесткости c.

Задача 8.58. Стержень AB, жестко соединенный с вертикальной осью O_1O_2 под углом α (см. рис. *а*), вращается вокруг этой оси с по-

стоянной угловой скоростью ω. На стержень AB навита пружина с коэффициентом упругости c, закрепленная в точке A. К концу пружины присоединено гладкое кольцо D массы m, которое может перемещаться вдоль гладкого стержня. В начальный момент кольцо находилось по отношению к стержню в покое и ему была сообщена вдоль стержня направо вверх начальная относительная скорость $\boldsymbol{v}_0$.

Найти уравнение движения кольца вдоль стержня.

Р е ш е н и е. Кольцо D совершает сложное движение: относительное — вдоль стержня AB, переносное — вместе со стержнем



К задаче 8.58.

при его вращении вокруг вертикальной оси O_1O_2. Для определения уравнения относительного движения кольца вдоль стержня применим формулу (2*):

$$m\boldsymbol{w}_r = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F}_k + \boldsymbol{J}_e + \boldsymbol{J}_c. \qquad (1)$$

К кольцу D приложены силы: $\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{g}$ — сила тяжести, $\boldsymbol{R}$ — нормальная реакция стержня AB, $\boldsymbol{F}$ — сила упругости пружины (см. рис. *а*).

Направим ось x вдоль стержня AB налево вниз, взяв начало отсчета O в положении относительного покоя кольца D на стержне AB. При этом пружина сжата на $\Delta_{ст}$. Длину пружины, сжатой на $\Delta_{ст}$, обозначим l. На рис. *а* кольцо изображено в промежуточном положении, смещенном относительно нуля на x_r в сторону возрастания координаты. При этом пружина сжата на $\Delta_{ст} + x_r$, а сила упругости $\boldsymbol{F}$ направлена вдоль оси x направо вверх. Ее проекция на ось x равна

$$F_x = -c\,(\Delta_{ст} + x_r). \qquad (2)$$

Для определения закона относительного движения кольца надо к силам $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{F}$ добавить переносную $\boldsymbol{J}_e$ и кориолисову $\boldsymbol{J}_c$ силы инерции.

В переносном вращательном движении вокруг оси O_1O_2 кольцо описывает окружность радиуса $h = CD = (l - x_r)\sin\alpha$ (см. рис. *а*). Угловая скорость ω по условию постоянна. Поэтому $\varepsilon = 0$ и $w_{e\tau} = h\varepsilon = 0$. В переносном движении остается ускорение

$$w_{en} = h\omega^2 = (l - x_r)\,\omega^2 \sin\alpha, \tag{3}$$

направленное вдоль радиуса окружности от D к C.

Переносная сила инерции равна: $\boldsymbol{J}_e = \boldsymbol{J}_{en} + \boldsymbol{J}_{e\tau}$, где $\boldsymbol{J}_{en} = -m\boldsymbol{w}_{en}$, $\boldsymbol{J}_{e\tau} = -m\boldsymbol{w}_{e\tau}$. Так как $\boldsymbol{w}_{e\tau} = 0$, то $\boldsymbol{J}_{e\tau} = 0$ и, следовательно $\boldsymbol{J}_e = \boldsymbol{J}_{en}$. Переносная центробежная сила инерции $\boldsymbol{J}_{en}$ направлена противоположно ускорению $\boldsymbol{w}_{en}$, т. е. по горизонтали направо. По модулю сила $\boldsymbol{J}_{en}$ равна $J_{en} = mw_{en}$. Приняв во внимание формулу (3), запишем

$$J_{en} = m\,(l - x_r)\,\omega^2 \sin\alpha. \tag{4}$$

Воспользовавшись результатом (4), определим проекцию силы $\boldsymbol{J}_{en}$ на ось x:

$$J_{enx} = -J_{en}\sin\alpha = -m\,(l - x_r)\,\omega^2 \sin^2\alpha. \tag{5}$$

Кориолисова сила инерции равна $\boldsymbol{J}_c = -m\boldsymbol{w}_c = -2m\boldsymbol{\omega}_e \times \boldsymbol{v}_r$. Определить модуль и направление этой силы пока невозможно, ибо неизвестна относительная скорость $\boldsymbol{v}_r$ движения кольца вдоль стержня. Во всяком случае, скорость $\boldsymbol{v}_r$ направлена вдоль стержня AB. Поэтому ускорение Кориолиса $\boldsymbol{w}_c = 2\boldsymbol{\omega}_e \times \boldsymbol{v}_r$ перпендикулярно к $\boldsymbol{v}_r$ и, следовательно, к оси x. Значит, кориолисова сила инерции $\boldsymbol{J}_c = -m\boldsymbol{w}_c$ также перпендикулярна оси x, т. е.

$$J_{cx} = 0. \tag{6}$$

Для решения задачи воспользуемся проекцией векторного уравнения (1) на ось x:

$$m\ddot{x}_r = \sum_{k=1}^{n} F_{kx} + J_{ex} + J_{cx}. \tag{7}$$

В данном случае уравнение (7) имеет вид

$$m\ddot{x}_r = P_x + R_x + F_x + J_{enx} + J_{cx}. \tag{8}$$

Использовав формулы (2), (5) и (6) и учтя, что $P_x = mg\cos\alpha$, а $R_x = 0$, из уравнения (8) получим

$$m\ddot{x}_r = mg\cos\alpha - c\,(\Delta_{ст} + x_r) - m\,(l - x_r)\,\omega^2 \sin^2\alpha. \tag{9}$$

Для упрощения уравнения (9) запишем условие относительного покоя кольца на стержне. В этом положении к кольцу, находящемуся

в точке O, приложены силы $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{F}_{ст}$ и $\boldsymbol{J}_{en0}$ (см. рис. *б*). Сумма проекций этих сил на ось x равна нулю:

$$P\cos\alpha - F_{ст} - J_{en0}\sin\alpha = 0. \tag{10}$$

Модуль статической силы упругости равен

$$F_{ст} = c\Delta_{ст}. \tag{11}$$

Модуль переносной центробежной силы инерции равен

$$J_{en0} = ml_0\omega^2 = ml\omega^2\sin^2\alpha. \tag{12}$$

Используем формулы (11) и (12) в уравнении (10):

$$P\cos\alpha - c\Delta_{ст} - ml\omega^2\sin^2\alpha = 0. \tag{13}$$

Таково уравнение относительного покоя кольца на стержне.

Благодаря уравнению (13) в правой части дифференциального уравнения (9) уничтожаются три слагаемых; получим

$$m\ddot{x}_r = -cx_r + m\omega^2 x_r\sin^2\alpha. \tag{14}$$

Окончательно представим дифференциальное уравнение (14) относительного движения кольца вдоль стержня в виде

$$\ddot{x}_r + (k^2 - \omega^2\sin^2\alpha)\,x_r = 0, \tag{15}$$

где обозначено: $c/m = k^2$.

В соответствии с условием задачи начальные условия движения имеют вид

$$\text{при } t = 0 \quad x_r = 0, \quad \dot{x}_r = -v_0. \tag{16}$$

Для решения уравнения (15) составим характеристическое уравнение: $r^2 + (k^2 - \omega^2\sin^2\alpha) = 0$. Корни его равны

$$r_{1,2} = \pm\sqrt{\omega^2\sin^2\alpha - k^2}. \tag{17}$$

Здесь возможны три случая: а) $\omega\sin\alpha < k$, б) $\omega\sin\alpha > k$, в) $\omega\sin\alpha = k$. Последовательно рассмотрим их.

а) Если $\omega\sin\alpha < k$, то корни (17) характеристического уравнения являются мнимыми: $r_{1,2} = \pm i\sqrt{k^2 - \omega^2\sin^2\alpha}$. При этом общее решение уравнения (15) имеет вид

$$x_r = C_1\cos\sqrt{k^2 - \omega^2\sin^2\alpha}\;t + C_2\sin\sqrt{k^2 - \omega^2\sin^2\alpha}\;t. \tag{18}$$

Для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 вычислим $\dot{x}_r$. Затем, подставив в x_r и $\dot{x}_r$ начальные условия (16), найдем $C_1 = 0$, $C_2 = -v_0/\sqrt{k^2 - \omega^2\sin^2\alpha}$. Теперь уравнение (18) примет вид

$$x_r = -\frac{v_0}{\sqrt{k^2 - \omega^2\sin^2\alpha}}\sin\sqrt{k^2 - \omega^2\sin^2\alpha}\;t. \tag{19}$$

Это значит, что в случае $\omega\sin\alpha < k$ кольцо совершает вдоль стержня гармонические колебания амплитуды $a = v_0/\sqrt{k^2 - \omega^2\sin^2\alpha}$ с круговой частотой $\sqrt{k^2 - \omega^2\sin^2\alpha}$.

б) Если $\omega \sin \alpha > k$, то корни (17) характеристического уравнения являются вещественными и разными: $r_{1,2} = \pm\sqrt{\omega^2 \sin^2 \alpha - k^2}$. При этом общее решение однородного дифференциального уравнения (15) имеет вид

$$x_r = C_1 e^{\sqrt{\omega^2 \sin^2 \alpha - k^2}\, t} + C_2 e^{-\sqrt{\omega^2 \sin^2 \alpha - k^2}\, t}. \qquad (20)$$

Для определения C_1 и C_2 вычислим $\dot{x}_r$. Затем, подставив в x_r и $\dot{x}_r$ начальные условия (16), найдем

$$x_r = -\frac{v_0}{2\sqrt{\omega^2 \sin^2 \alpha - k^2}} \left(e^{\sqrt{\omega^2 \sin^2 \alpha - k^2}\, t} - e^{-\sqrt{\omega^2 \sin^2 \alpha - k^2}\, t}\right). \qquad (21)$$

Заметим, что при $t \to \infty$ $x_r \to -\infty$. Это значит, что в случае $\omega \sin \alpha > k$ кольцо совершает вдоль стержня апериодическое движение направо вверх (пока это движение допускается пружиной).

в) Если $\omega \sin \alpha = k$, то корни (17) характеристического уравнения равны нулю: $r_1 = r_2 = 0$. При этом общее решение однородного дифференциального уравнения (15) имеет вид

$$x_r = C_1 t + C_2. \qquad (22)$$

Для определения C_1 и C_2 вычислим $\dot{x}_r$. Затем внесем в x_r и $\dot{x}_r$ начальные условия (16). Найдем $C_1 = -v_0$, $C_2 = 0$. Теперь уравнение (22) примет вид

$$x_r = -v_0 t. \qquad (23)$$

Заметим, что при $t \to \infty$ $x_r \to -\infty$. Отсюда следует, что кольцо движется равномерно вдоль стержня направо вверх (пока это движение допускается пружиной).

Итак, движение кольца вдоль стержня зависит от величин ω и k (напомним, что $k^2 = c/m$). Если $\omega \sin \alpha < k$ (случай а)), то происходят колебания по закону (19), если $\omega \sin \alpha > k$ (случай б)), то — апериодическое движение (21), если же $\omega \sin \alpha = k$ (случай в)), то — равномерное движение (23).

Задача 8.59. На рис. *а* изображен диск, который вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω. На верхней плоскости диска вдоль диаметра имеется прорезь прямоугольного сечения, в которую вложен кубик A (см. рис. *б*) массы m. При вращении диска кубик скользит вдоль прорези. В начальный момент он находился в покое и отстоял от оси вращения на расстоянии a.

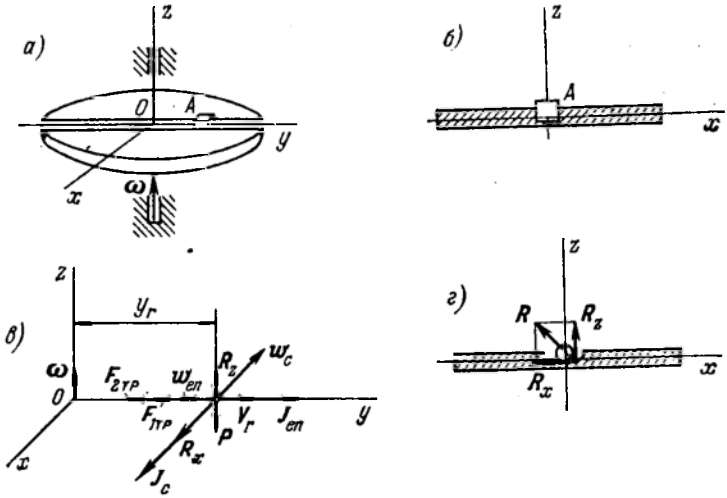
Найти уравнение движения кубика вдоль прорези, а также его давление на дно и боковые грани прорези при трении кубика о дно и боковые грани прорези.

Коэффициент трения скольжения равен f. Декартовы оси координат, связанные с диском, изображены на рисунках.

Р е ш е н и е. В ходе решения задачи мы определим составляющие реакции дна и боковых плоскостей прорези. Искомые давления

равны по модулю соответствующим реакциям и направлены противоположно.

Разложим движение кубика на переносное вращательное вместе с диском и относительное вдоль прорези диска. Для изучения относительного движения кубика воспользуемся уравнением (3*), данным в обзоре теории (стр. 128).



К задаче 8.59.

Начальные условия относительного движения имеют вид

$$\text{при } t = 0 \quad y_r = a, \quad \dot{y}_r = 0. \tag{1}$$

Рассмотрим относительное движение кубика вдоль прорези. Изобразим кубик в текущем положении, определяемом координатой y_r. К кубику, помимо сил трения, приложены: $\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{g}$ — сила тяжести кубика, $\boldsymbol{R}$ — реакция прорези, которую мы разложим на две составляющие $\boldsymbol{R}_x$ и $\boldsymbol{R}_z$ параллельно соответствующим осям (см. рис. *в*), силы инерции переносного движения: центробежная $\boldsymbol{J}_{en}$ и вращательная $\boldsymbol{J}_{e\tau}$, а также кориолисова сила инерции $\boldsymbol{J}_c$.

При равномерном вращении диска $\varepsilon = \dot{\omega} = 0$. Поэтому переносное вращательное ускорение равно нулю: $w_{e\tau} = y_r \varepsilon = 0$, и, значит, $J_{e\tau} = 0$. Переносное центростремительное ускорение $\boldsymbol{w}_{en}$ направлено вдоль оси y к оси вращения. Его проекция на ось y равна $w_{eny} = -y_r\omega^2$. Поэтому переносная центробежная сила инерции $\boldsymbol{J}_{en} = -m\boldsymbol{w}_{en}$ направлена вдоль оси y от оси вращения к ободу диска (см. рис. *в*), причем

$$J_{eny} = my_r\omega^2, \tag{2}$$

где m — масса кубика.

Для определения направления ускорения Кориолиса $\boldsymbol{w}_c$ предварительно предположим, что относительная скорость $\boldsymbol{v}_r$ кубика направлена вдоль оси y направо (см. рис. *в*). Тогда ускорение Кориолиса $\boldsymbol{w}_c = 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_r$ оказывается направленным параллельно оси x в сторону убывания координаты. Его проекция на ось x равна $w_{cx} = -2\omega v_r \sin(\widehat{\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}_r}) = -2\omega\dot{y}_r$. Значит, кориолисова сила инерции $\boldsymbol{J}_c = -m\boldsymbol{w}_c$ направлена параллельно оси x в сторону возрастания x (см. рис. *в*). Ее проекция на ось x равна

$$J_{cx} = 2m\omega\dot{y}_r. \tag{3}$$

Рассмотрим силы трения кубика о дно и боковые грани прорези. При движении кубика в прорези в сторону возрастания y появляется сила трения $\boldsymbol{F}_{1\text{тр}}$ между нижним основанием кубика и дном прорези. Эта сила трения направлена в сторону, противоположную относительной скорости, т. е. вдоль оси y налево. По модулю сила $\boldsymbol{F}_{1\text{тр}}$ равна

$$F_{1\text{тр}} = f\,|\,R_z|\,. \tag{4}$$

Под действием кориолисовой силы инерции $\boldsymbol{J}_c$, направленной параллельно оси x в сторону ее возрастания, кубик давит правой боковой гранью на правую боковую грань прорези (считая по ходу движения кубика). Здесь возникает сила трения $\boldsymbol{F}_{2\text{тр}}$, равная по модулю

$$F_{2\text{тр}} = f\,|\,R_x\,| \tag{5}$$

и направленная в сторону, противоположную относительной скорости, т. е. по оси y налево. Таким образом, обе силы трения $\boldsymbol{F}_{1\text{тр}}$ и $\boldsymbol{F}_{2\text{тр}}$ совпадают по направлению. Воспользовавшись формулами (4) и (5), запишем

$$F_{1\text{тр}\,y} = -f\,|\,R_z\,|, \quad F_{2\text{тр}\,y} = -f\,|\,R_x\,|. \tag{6}$$

Применим векторное уравнение (3*) относительного движения материальной точки (см. стр. 128):

$$m\boldsymbol{w}_r = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F}_k + \boldsymbol{J}_{en} + \boldsymbol{J}_{e\tau} + \boldsymbol{J}_c.$$

В данном случае при $\boldsymbol{J}_{e\tau} = 0$ оно принимает вид

$$m\boldsymbol{w}_r = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{F}_{1\text{тр}} + \boldsymbol{F}_{2\text{тр}} + \boldsymbol{J}_{en} + \boldsymbol{J}_c + \boldsymbol{R}_x + \boldsymbol{R}_z. \tag{7}$$

Спроектировав векторное уравнение (7) на оси x, y, z, получим

$$m\ddot{x}_r = J_{cx} + R_x, \quad m\ddot{y}_r = J_{eny} + F_{1\text{тр}\,y} + F_{2\text{тр}\,y}, \quad m\ddot{z}_r = -mg + R_z. \tag{8}$$

Относительное движение кубика происходит вдоль оси y. Поэтому $x_r = z_r = 0$. Следовательно, $\ddot{x}_r = \ddot{z}_r = 0$ и уравнения (8) принимают вид

$$0 = 2m\omega\dot{y}_r + R_x, \quad \ddot{y}_r - \omega^2 y_r = -\frac{f\,|R_z|}{m} - \frac{f\,|R_x|}{m}, \quad 0 = -mg + R_z. \tag{9}$$

Из первого и третьего уравнений (9) находим

$$R_x = -2m\omega\dot{y}_r, \quad R_z = mg \tag{10}$$

Подставив значения (10) во второе уравнение (9), получим

$$\ddot{y}_r + 2f\omega\dot{y}_r - \omega^2 y_r = -fg. \tag{11}$$

Общее решение y линейного неоднородного дифференциального уравнения (11) имеет вид

$$y_r = y_{r_1} + y_{r_2}, \tag{12}$$

где y_{r_2} — частное решение уравнения (11), а y_{r_1} — общее решение соответствующего однородного уравнения

$$\ddot{y}_r + 2f\omega\dot{y}_r - \omega^2 y_r = 0. \tag{13}$$

Запишем соответствующее характеристическое уравнение $\lambda^2 + 2f\omega\lambda - \omega^2 = 0$. Корни его вещественны и различны:

$$\lambda_1 = (-f + \sqrt{1+f^2})\,\omega > 0, \quad \lambda_2 = (-f - \sqrt{1+f^2})\,\omega < 0, \tag{14}$$

поэтому общее решение однородного уравнения (13) имеет вид

$$y_{r_1} = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}. \tag{15}$$

Правая часть уравнения (11) постоянна. Поэтому частное решение ищем в виде постоянного: $y_{r_2} = A$. Подставим это значение y_{r_2} в уравнение (11), приняв во внимание, что $\dot{y}_{r_2} = \ddot{y}_{r_2} = 0$. Имеем

$$y_{r_2} = \frac{fg}{\omega^2}. \tag{16}$$

Использовав результаты (15) и (16) в формуле (12), запишем

$$y_r = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \frac{fg}{\omega^2}, \tag{17}$$

где λ_1 и λ_2 даны формулами (14).

Для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 вычислим производную y_r по времени t:

$$\dot{y}_r = C_1\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\lambda_2 e^{\lambda_2 t}. \tag{18}$$

Подставим начальные условия движения: $t = 0$, $y_r = a$ — в уравнение (17), $t = 0$, $\dot{y}_r = 0$ — в уравнение (18). Решив систему, получим

$$C_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(a - \frac{fg}{\omega^2}\right), \quad C_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(a - \frac{fg}{\omega^2}\right).$$

Внеся эти значения C_1 и C_2 в уравнения (17) и (18), имеем

$$y_r = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(a - \frac{fg}{\omega^2}\right)(\lambda_1 e^{\lambda_2 t} - \lambda_2 e^{\lambda_1 t}) + \frac{fg}{\omega^2}, \tag{19}$$

$$\dot{y}_r = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(a - \frac{fg}{\omega^2}\right)(e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t}). \tag{20}$$

Так как $\lambda_1 > 0$, а $\lambda_2 < 0$, то с течением времени y_r и $\dot{y}_r$ возрастают при условии: $a - \frac{fg}{\omega^2} > 0$. Если же $a - \frac{fg}{\omega^2} \leqslant 0$, т. е. $f \geqslant \frac{a\omega^2}{g}$, то кубик находится в относительном покое.

Для определения R_x остается полученное в (20) значение подставить в первое уравнение (10):

$$R_x = -2m\omega \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(a - \frac{fg}{\omega^2}\right)(e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t}), \tag{21}$$

где λ_1 и λ_2 даны формулами (14).

Значение R_z определено вторым уравнением (10):

$$R_z = mg.$$

Искомые давления $\boldsymbol{N}_x$ и $\boldsymbol{N}_z$ определяются формулами

$$\boldsymbol{N}_x = -\boldsymbol{R}_x, \quad \boldsymbol{N}_z = -\boldsymbol{R}_z.$$

В заключение заметим, что эту задачу удалось решить в квадратурах потому, что движущейся точкой оказался кубик — тело, ограниченное гранями. При этом силы трения возникли между гранями кубика и прорези, а каждая из сил трения $\boldsymbol{F}_{1\text{тр}}$ и $\boldsymbol{F}_{2\text{тр}}$ соответственно зависела от $\boldsymbol{R}_z$ и $\boldsymbol{R}_x$ (см. формулы (4) и (5)).

Если кубик заменить цилиндром, движущимся в прорези круглого профиля (см. рис. *г*), то соприкосновение цилиндра с прорезью происходит по образующей. При этом вместо двух сил трения $\boldsymbol{F}_{1\text{тр}}$ и $\boldsymbol{F}_{2\text{тр}}$ имеет место лишь одна сила трения, равная по модулю $F_{\text{тр}} = fR$. Так как $R = \sqrt{R_x^2 + R_z^2}$, то $F_{\text{тр}} = f\sqrt{R_x^2 + R_z^2}$, а проекция силы трения на ось y равна

$$F_{\text{тр}\,y} = -f\sqrt{R_x^2 + R_z^2}. \tag{22}$$

При замене кубика цилиндром первое и третье уравнения (8) остаются без изменения, а второе уравнение примет вид

$$m\ddot{y}_r = J_{eny} + F_{\text{тр}\,y}. \tag{23}$$

Использовав в уравнении (23) формулы (2) и (22), запишем

$$\ddot{y}_r - \omega^2 y_r = -\frac{f}{m}\sqrt{R_x^2 + R_z^2}. \tag{24}$$

Внеся в уравнение (24) значения (10) R_x и R_z, получим

$$\ddot{y}_r - \omega^2 y_r = -f\sqrt{4\omega^2\dot{y}_r^2 + g^2}. \tag{25}$$

Нелинейное дифференциальное уравнение (25) не интегрируется в квадратурах. Для его решения следует применить приближенные методы.

Задача 8.60. Исследовать свободное падение материальной точки вблизи земной поверхности в безвоздушном пространстве.

Р е ш е н и е. Начало неподвижной системы координатных осей $\xi\eta\zeta$ возьмем в центре Земли, направив оси на отдаленные «неподвижные» звезды. Начало подвижной системы осей координат, связанных

с Землей, выберем в начальном положении материальной точки M_0. Направление подвижных осей x, y и z уточним в последующем изложении.

Свободное падение материальной точки вблизи земной поверхности можно разложить на простейшие движения: относительное движение по отношению к Земле и переносное суточное вращательное движение Земли вокруг своей оси с угловой скоростью

$$\omega = 0{,}00007 \text{ рад/с}.$$

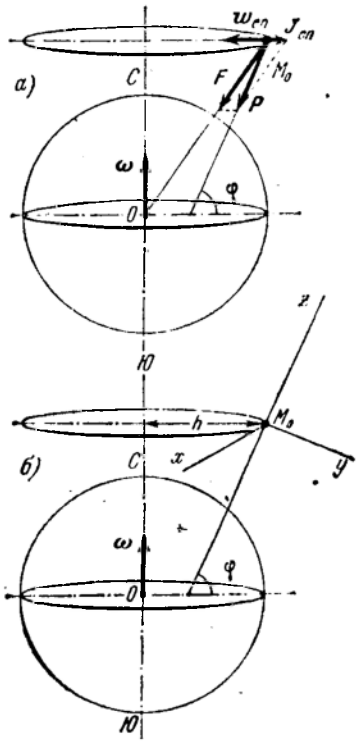
Свободным называется падение материальной точки на Землю из состояния относительного покоя, т. е. при следующих начальных условиях:

$$\text{при } t = 0 \quad \dot{x} = \dot{x}_0 = 0,$$
$$\dot{y} = \dot{y}_0 = 0, \quad \dot{z} = \dot{z}_0 = 0.$$

К материальной точке приложена сила $\boldsymbol{F}$ притяжения к Земле, направленная к центру Земли: $F = kmM/r^2$, где m — масса материальной точки, M — масса Земли, r — расстояние материальной точки до центра Земли, k — гравитационная постоянная.

Нам предстоит исследовать свободное падение материальной точки на Землю, т. е. ее относительное движение. Запишем уравнение динамики относительного движения материальной точки:

$$m\boldsymbol{w}_r = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F}_k + \boldsymbol{J}_e + \boldsymbol{J}_c.$$



К задаче 8.60.

В данной задаче $\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F}_k$ является силой притяжения $\boldsymbol{F}$ к Земле, поэтому

$$m\boldsymbol{w}_r = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{J}_e + \boldsymbol{J}_c. \tag{1}$$

Определим силу инерции материальной точки в переносном вращательном движении $\boldsymbol{J}_e$ и кориолисову силу инерции $\boldsymbol{J}_c$. При вращении вокруг неподвижной оси сила инерции материальной точки в переносном движении $\boldsymbol{J}_e$ равна сумме переносной центробежной $\boldsymbol{J}_{en}$ и переносной вращательной силы инерции $\boldsymbol{J}_{e\tau}$, т. е.

$$\boldsymbol{J}_e = \boldsymbol{J}_{en} + \boldsymbol{J}_{e\tau}. \tag{2}$$

Так как вращение Земли происходит с постоянной угловой скоростью, то угловое ускорение ε Земли равно нулю. Следовательно, $w_{e\tau} = h\varepsilon = 0$ и переносная вращательная сила инерции также равна нулю

$$J_{e\tau} = 0. \tag{3}$$

Центростремительное ускорение материальной точки $\boldsymbol{w}_{en}$ направлено по перпендикуляру, опущенному на ось вращения, а его модуль $w_{en} = h\omega^2$. Следовательно, переносная центробежная сила инерции $\boldsymbol{J}_{en}$, направленная противоположно $\boldsymbol{w}_{en}$, т. е. от оси вращения Земли (см. рис. *а*), равна по модулю

$$J_{en} = mh\omega^2.$$

Модуль J_{en} составляет примерно лишь 1/290 величины силы притяжения $\boldsymbol{F}$. Сумма сил $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{J}_{en}$ называется силой тяжести $\boldsymbol{P}$; таким образом,

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{J}_{en}. \tag{4}$$

Отношение модуля силы тяжести $\boldsymbol{P}$ к массе материальной точки называется ускорением силы тяжести: $g = P/m$, т. е.

$$\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{g}. \tag{5}$$

Направление линии действия силы тяжести $\boldsymbol{P}$ называется вертикальным направлением в данной точке земной поверхности. Угол φ, образуемый вертикальным направлением с экваториальной плоскостью, называется географической широтой в данной точке земной поверхности (см. рис. *а*). Горизонтальной называется плоскость, перпендикулярная к вертикальному направлению в данной точке.

Ускорение Кориолиса $\boldsymbol{w}_c$ определяется по формуле $\boldsymbol{w}_c = 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_r$. Следовательно, кориолисова сила инерции будет:

$$\boldsymbol{J}_c = -m\boldsymbol{w}_c = -2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_r. \tag{6}$$

Выше было указано, что начало подвижных осей координат xyz, связанных с Землей, выбрано в начальном положении материальной точки M_0. Направим ось z по вертикали вверх (см. рис. *б*), ось x — по касательной к окружности радиуса h, т. е. перпендикулярно к плоскости рисунка на нас; ось y расположена в плоскости меридиана, т. е. в плоскости рисунка.

Так как свободное падение материальной точки рассматривается вблизи земной поверхности, то считаем ускорение силы тяжести $\boldsymbol{g}$ и широту φ постоянными. Воспользовавшись формулами (2), (3), (4), запишем уравнение (1) в виде

$$m\boldsymbol{w}_r = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{J}_c. \tag{7}$$

Заметим, что мы не можем сейчас указать направление кориолисовой силы инерции, так как $\boldsymbol{J}_c = -2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_r$, а направление скорости материальной точки в относительном движении $\boldsymbol{v}_r$ нам пока неизвестно.

Подставив в уравнение (7) значения $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{J}_c$ из формул (5) и (6) и сократив на массу точки m, имеем

$$\boldsymbol{w}_r = \boldsymbol{g} - 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_r. \tag{8}$$

Проектируя (8) на подвижные оси x, y, z, получаем

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -2(\omega_y v_{rz} - \omega_z v_{ry}), \\ \ddot{y} &= -2(\omega_z v_{rx} - \omega_x v_{rz}), \\ \ddot{z} &= -g - 2(\omega_x v_{ry} - \omega_y v_{rx}). \end{aligned} \tag{9}$$

В нашем случае

$$\begin{aligned} &\omega_x = 0, \quad \omega_y = -\omega \cos\varphi, \quad \omega_z = \omega \sin\varphi, \\ &v_{rx} = \dot{x}, \quad v_{ry} = \dot{y}, \quad v_{rz} = \dot{z}, \end{aligned} \tag{10}$$

т. е. (9) принимает вид

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 2\omega(\dot{z}\cos\varphi + \dot{y}\sin\varphi), \\ \ddot{y} &= -2\omega\dot{x}\sin\varphi, \\ \ddot{z} &= -g - 2\omega\dot{x}\cos\varphi. \end{aligned} \tag{11}$$

Будем искать решения уравнений (11) в виде рядов по степеням безразмерной переменной ωt (так, к концу свободного падения, происходящего в течение $t = 14{,}3$ с, получим $\omega t = 0{,}001$). В силу начальных условий

$$\text{при } t = 0 \quad x = y = z = 0, \quad \dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$$

искомые разложения начинаются с членов, содержащих $(\omega t)^2$, т. е.

$$\begin{aligned} x &= a_2(\omega t)^2 + a_3(\omega t)^3 + \ldots, \\ y &= b_2(\omega t)^2 + b_3(\omega t)^3 + \ldots, \\ z &= c_2(\omega t)^2 + c_3(\omega t)^3 + \ldots, \end{aligned} \tag{12}$$

где a_2, a_3, b_2, b_3, c_2 и c_3 подлежат последующему определению.

Взяв первые и вторые производные функций (12) по времени, имеем

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2a_2\omega^2 t + 3a_3\omega^3 t^2 + \ldots, \quad \dot{y} = 2b_2\omega^2 t + 3b_3\omega^3 t^2 + \ldots, \\ \dot{z} &= 2c_2\omega^2 t + 3c_3\omega^3 t^2 + \ldots, \\ \ddot{x} &= 2a_2\omega^2 + 6a_3\omega^3 t + \ldots, \quad \ddot{y} = 2b_2\omega^2 + 6b_3\omega^3 t + \ldots, \\ \ddot{z} &= 2c_2\omega^2 + 6c_3\omega^3 t + \ldots \end{aligned} \tag{13}$$

Подставив выражения (13) в уравнения (11), получим

$$\begin{aligned} 2a_2\omega^2 + 6a_3\omega^3 t + \ldots &= 4c_2\omega^3 t\cos\varphi + 6c_3\omega^4 t^2\cos\varphi + \ldots + \\ &+ 4b_2\omega^3 t\sin\varphi + 6b_3\omega^4 t^2\sin\varphi + \ldots, \\ 2b_2\omega^2 + 6b_3\omega^3 t + \ldots &= -4a_2\omega^3 t\sin\varphi - 6a_3\omega^4 t^2\sin\varphi + \ldots, \\ 2c_2\omega^2 + 6c_3\omega^3 t + \ldots &= -g - 4a_2\omega^3 t\cos\varphi - 6a_3\omega^4 t^2\cos\varphi + \ldots \end{aligned} \tag{14}$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t в правых и левых частях уравнений (14), запишем

$$2a_2\omega^2 = 0, \quad 6a_3\omega^3 = 4c_2\omega^3 \cos\varphi + 4b_2\omega^3 \sin\varphi, \quad 2b_2\omega^2 = 0,$$
$$6b_3\omega^3 = -4a_2\omega^3 \sin\varphi, \quad 2c_2\omega^2 = -g, \quad 6c_3\omega^3 = -4a_2\omega^3 \cos\varphi. \tag{15}$$

Решив систему (15), получим

$$a_2 = 0, \quad a_3 = -\frac{1}{3}\frac{g}{\omega^2}\cos\varphi, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = 0, \quad c_2 = -\frac{g}{2\omega^2}, \quad c_3 = 0.$$

Внося эти значения в (12), приближенно находим искомые уравнения движения

$$x = -\frac{1}{3}\omega g t^3 \cos\varphi, \quad y = 0, \quad z = -\frac{1}{2}gt^2. \tag{16}$$

Так как $y = 0$, то траектория материальной точки, совершающей свободное падение, лежит в плоскости, перпендикулярной к меридиану. Если бы x равнялось нулю, то z определило бы свободное падение материальной точки по вертикали. Уравнение $x = -\frac{1}{3}\omega g t^3 \cos\varphi$ указывает на отклонение материальной точки от вертикали в сторону, противоположную положительному направлению оси x, т. е. с запада на восток. Это восточное отклонение материальной точки, совершающей свободное падение вблизи земной поверхности, обусловлено наличием кориолисовой силы инерции: $\boldsymbol{J}_c = -2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_r$.

Вычислим восточное отклонение материальной точки при свободном падении с высоты h. Из уравнения движения $z = -gt^2/2$ определим продолжительность падения τ на Землю. Так как при $t = \tau$ $z = -h$, то $\tau = \sqrt{2h/g}$.

Теперь из уравнения движения $x = -{}^1/_3\omega g t^3 \cos\varphi$ определим восточное отклонение материальной точки Δ, подставив в это уравнение $t = \tau = \sqrt{2h/g}$. Отклонение равно

$$\Delta = \frac{1}{3}\omega g \left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2}\cos\varphi.$$

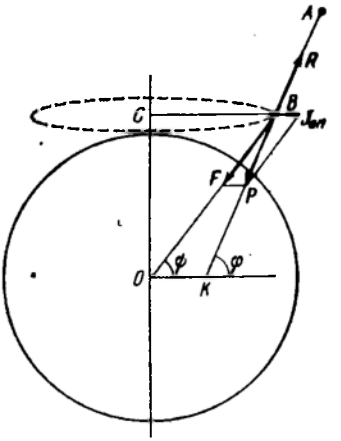
При свободном падении с высоты $h = 100$ м на широте Ленинграда, т. е. при $\varphi = 60°$, $g = 9{,}81$ м/с^2 ($\omega = 0{,}00007$ рад/с) материальная точка отклонится в восточном направлении на 1,1 см, а при $h = 200$ м — на 3,1 см.

Задача 8.61. С вертолета A, находящегося в покое по отношению к Земле, сброшена веревочная лестница. За нижний конец лестницы ухватился снимаемый с льдины человек массы m.

Определить реакцию $\boldsymbol{R}$ лестницы, если сила тяготения Земли $\boldsymbol{F}$ по модулю равна $F = mg^*$ и направлена к центру Земли. Радиус Земли, приближенно принимаемый за шар, равен R. Массой лестницы пренебречь.

Р е ш е н и е. Проведем на рисунке ось через точку B, схематизирующую человека, и центр O Земли. Эта ось образует угол ψ с экваториальной плоскостью Земли (угол ψ — геоцентрическая широта местности).

Человек находится в состоянии относительного покоя по отношению к Земле. Земля совершает равномерное переносное вращение вокруг своей оси с угловой скоростью $\omega = 0{,}00007$ рад/с.



К задаче 8.61.

Применим уравнение (6*) динамики относительного покоя материальной точки:

$$0 = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F}_k + \boldsymbol{J}_e. \qquad (1)$$

К человеку приложены: $\boldsymbol{F}$ — сила тяготения, $\boldsymbol{R}$ — реакция лестницы, $\boldsymbol{J}_e$ — переносная сила инерции, Сила $\boldsymbol{F}$ направлена вдоль оси BO от B к O, реакция $\boldsymbol{R}$ — вдоль лестницы от B к A. Переносная сила инерции равна сумме: $\boldsymbol{J}_e = \boldsymbol{J}_{en} + \boldsymbol{J}_{e\tau}$, где $\boldsymbol{J}_{en} = -m\boldsymbol{w}_{en}$, $\boldsymbol{J}_{e\tau} = -m\boldsymbol{w}_{e\tau}$. Так как угловая скорость ω вращения Земли вокруг своей оси постоянна, то угловое ускорение ε равно нулю. Значит, ускорение $w_{e\tau}$, а также сила инерции $\boldsymbol{J}_{e\tau}$ равны нулю. Поэтому $\boldsymbol{J}_e = \boldsymbol{J}_{en}$. В переносном вращении вокруг земной оси точка B описывает окружность радиуса $h = CB = R\cos\psi$. Ускорение $\boldsymbol{w}_{en}$ направлено вдоль радиуса от B к C и по модулю равно

$$w_{en} = l\omega^2 = R\omega^2\cos\psi. \qquad (2)$$

Центробежная сила инерции $\boldsymbol{J}_{en}$ направлена противоположно ускорению $\boldsymbol{w}_{en}$ (см. рисунок) причем $J_{en} = mw_{en}$. Использовав результат (2), получим

$$J_{en} = mR\omega^2\cos\psi. \qquad (3)$$

В соответствии с уравнением (1) векторная сумма сил $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{J}_{en}$ равна нулю. Значит, сумма сил $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{J}_{en}$ уравновешивается реакцией $\boldsymbol{R}$ лестницы. Сумма сил $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{J}_e$ равна силе тяжести $\boldsymbol{P}$ материальной точки:

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{J}_{en}. \qquad (4)$$

Таким образом, измеряя модуль силы тяжести $\boldsymbol{P}$ материальной точки, учитывают влияние центробежной силы инерции $\boldsymbol{J}_{en}$ на силу тяготения $\boldsymbol{F}$.

Сила $\boldsymbol{P}$ по модулю равна $P = mg$. Напомним, что модуль силы $\boldsymbol{F}$ тяготения равен $F = mg^*$. Значит, ускорение силы тяжести g,

величину которого легко найти в справочных таблицах, отлично от g^*, ибо в нем учтено влияние центробежной силы инерции $\boldsymbol{J}_{en}$.

Искомая реакция $\boldsymbol{R}$ лестницы уравновешивается силой тяжести $\boldsymbol{P}$, т. е. $\boldsymbol{R} = -\boldsymbol{P}$. Использовав формулу (4), найдем $\boldsymbol{R} = -(\boldsymbol{F} + \boldsymbol{J}_{en})$.

Направление линии действия сил $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{R}$ называется *вертикалью* в данной точке земной поверхности. Угол φ (см. рисунок), образованный вертикалью BK и экваториальной плоскостью Земли, предопределяет собой географическую широту местности.

Определим отношение модулей сил $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{J}_{en}$. Учтя, что $P = mg$ и использовав формулу (3), получим

$$\frac{J_{en}}{P} = \frac{R\omega^2}{g}\cos\psi.$$

При численных данных: $R = 6370$ км, $\omega = 0{,}00007$ рад/с, $g = 9{,}82$ м/с^2 имеем $R\omega^2/g \approx 1/290$. Поэтому влияние центробежной силы инерции $\boldsymbol{J}_{en}$ незначительно. В технических расчетах, пренебрегая силой $\boldsymbol{J}_{en}$, считают $\boldsymbol{P} \approx \boldsymbol{F}$. Полагая $\varphi \approx \psi$, можно приближенно направить силу тяжести $\boldsymbol{P}$ вдоль оси BO, проходящей через данную материальную точку и центр O Земли.

Указание. Рекомендуем решить следующие задачи из «Сборника задач по теоретической механике» И. В. Мещерского: 33.1, 33.2, 33.13, 33.14.

ГЛАВА IX

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ

§ 1. Геометрия масс

1. Центр масс материальной системы. *Центром масс* (центром инерции) материальной системы называется точка, положение которой определяется радиусом-вектором $\boldsymbol{r}_C$ по формуле

$$\boldsymbol{r}_C = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} m_k \boldsymbol{r}_k,$$

где $M = \sum_{k=1}^{n} m_k$ — масса материальной системы (рис. 9.1).

Декартовы координаты центра масс материальной системы даются формулами:

$$x_C = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} m_k x_k, \quad y_C = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} m_k y_k, \quad z_C = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} m_k z_k. \qquad (1^*)$$

Понятие центра масс является обобщением понятия центра тяжести твердого тела $\left(\boldsymbol{r}_C = \frac{1}{P}\sum_{k=1}^{n} p_k \boldsymbol{r}_k\right)$ для случая системы материальных точек. Заметим, что положение центра тяжести твердого тела неизменно по отношению к точкам тела, в то время как положение центра масс системы, вообще говоря, меняется относительно отдельных материальных точек системы.

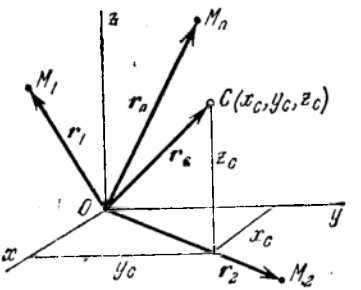


Рис. 9.1.

У к а з а н и е. Решение задач, в которых требуется определить уравнение траектории центра масс, следует проводить в следующем порядке:

1) выбрать систему координат;

2) записать координаты центров тяжести каждой из масс системы, выразив их в виде функций времени:

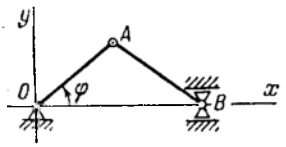
$$x_k = \varphi_k(t), \quad y_k = \psi_k(t), \quad z_k = \chi_k(t), \quad \text{где} \quad k = 1, 2, \ldots, n;$$

3) определить координаты искомого центра масс материальной системы по формулам (1*); при этом x_C, y_C, z_C окажутся функциями

времени, т. е. полученные формулы будут параметрическими уравнениями движения центра масс;

4) для нахождения явных уравнений траектории центра масс системы материальных точек надо из последних уравнений исключить время.

Задача 9.1. Найти уравнения движения и уравнение траектории в явном виде центра масс C кривошипно-ползунного механизма OAB с равными массами и длинами кривошипа и шатуна $OA = AB = l$. Масса ползуна B в два раза меньше массы кривошипа, который вращается с постоянной угловой скоростью ω. Кривошип и шатун считать тонкими однородными стержнями. Оси x и y изображены на рисунке.



К задаче 9.1.

Р е ш е н и е. В состав материальной системы входят три твердых тела: кривошип OA, шатун AB и ползун B.

Обозначим на рисунке положение центров тяжести: $C_1(x_1, y_1)$ — кривошипа, $C_2(x_2, y_2)$ — шатуна и $B(x_3, y_3)$ — ползуна. Заметим, что $OC_1 = C_1A = AC_2 = C_2B = l/2$. Положение кривошипа, вращающегося с постоянной угловой скоростью ω, определим углом поворота $\varphi = \omega t$, отсчитываемого от оси x против хода часовой стрелки.

Запишем координаты точек C_1, C_2 и B, выразив их в зависимости от угла поворота $\varphi = \omega t$:

$$x_1 = \frac{1}{2} l \cos \omega t, \quad y_1 = \frac{1}{2} l \sin \omega t, \quad x_2 = \frac{3}{2} l \cos \omega t,$$
$$y_2 = \frac{1}{2} l \sin \omega t, \quad x_3 = 2l \cos \omega t, \quad y_3 = 0. \qquad (1)$$

Формулы координат x_C и y_C центра масс

$$x_C = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{n} m_k x_k, \quad y_C = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{n} m_k y_k$$

в данном случае примут вид

$$x_C = \frac{1}{M} (m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3), \quad y_C = \frac{1}{M} (m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3), \qquad (2)$$

где m_1, m_2, m_3 — соответственно массы кривошипа, шатуна и ползуна, а $M = m_1 + m_2 + m_3$ — масса всей системы.

Внеся значения (1) в формулы (2) и приняв во внимание, что по условию $m_1 = m_2 = m_3/2$, найдем искомые уравнения движения центра масс:

$$x_C = \frac{6}{5} l \cos \omega t, \quad y_C = \frac{2}{5} l \sin \omega t. \qquad (3)$$

Это — уравнения движения центра масс системы; исключив из них параметр ωt, получим уравнение траектории центра масс в координатах:

$$\frac{x_C^2}{(^6/_5 l)^2} + \frac{y_C^2}{(^2/_5 l)^2} = 1. \qquad (4)$$

Как следует из формулы (4), траекторией центра масс является эллипс с полуосями: $a = {}^6/_5 l$, $b = {}^2/_5 l$.

Указание. Рекомендуем решить задачи 34.1—34.3, 34.5, 34.6 из сборника задач по теоретической механике И. В. Мещерского.

2. Моменты инерции твердых тел. *Моментом инерции* I_z твердого тела относительно оси z называется сумма произведений масс материальных точек, из которых состоит тело, на квадраты их расстояний до оси, т. е.

$$I_z = \sum_{k=1}^{n} m_k r_k^2.$$

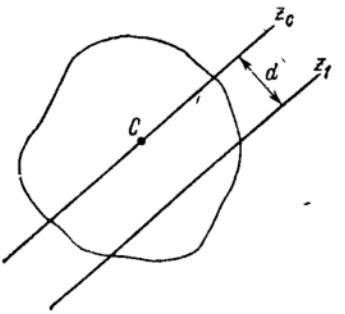


Рис. 9.2.

Момент инерции относительно оси характеризует распределение масс материальных точек относительно этой оси. Момент инерции всегда положителен.

В технической системе единиц момент инерции измеряется в кгс·м·с^2, а в системе СИ — в кг·м^2.

При непрерывном распределении масс материальных точек в твердом теле момент инерции определяется формулой

$$I_z = \int_{(M)} r^2\, dm.$$

В случае однородного твердого тела имеем

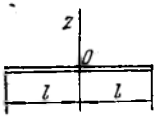
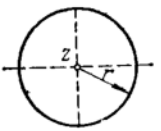
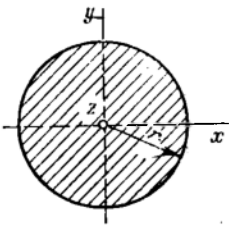
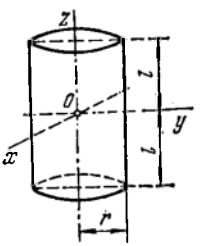
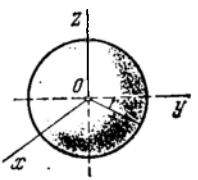
$$I_z = \frac{M}{V} \int_{(V)} r^2\, dV,$$

где M — масса твердого тела, V — объем твердого тела, dV — элемент объема.

Теорема Штейнера о зависимости между моментами инерции твердого тела относительно параллельных осей формулируется так: момент инерции твердого тела относительно оси равен сумме его момента инерции относительно параллельной оси, проходящей через центр тяжести тела C, и произведения массы твердого тела на квадрат расстояния между параллельными осями (рис. 9.2), т. е.

$$I_{z_1} = I_{z_C} + Md^2. \qquad (2^*)$$

Моменты инерции некоторых однородных твердых тел

№	Наименование	Схема тела	Момент инерции
1	Тонкий прямолинейный стержень		$I_z = \frac{Ml^2}{3}$
2	Кольцо (материальная окружность)		$I_z = Mr^2$
3	Тонкий круглый диск		$I_x = I_y = \frac{Mr^2}{4}$, $I_z = \frac{Mr^2}{2}$
4	Круглый цилиндр		$I_x = I_y = M\left(\frac{r^2}{4} + \frac{l^2}{3}\right)$, $I_z = \frac{Mr^2}{2}$
5	Шар		$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5}Mr^2$

Радиусом инерции ρ твердого тела относительно оси называется величина, произведение квадрата которой на массу твердого тела равно моменту инерции твердого тела относительно этой оси, т. е.

$$I_z = M\rho^2.$$

Так, для шара $I_z = {}^2/_5 Mr^2 = M\rho^2$, откуда $\rho \approx 0{,}63\ r$.

Если в ходе решения задачи требуется вычислить момент инерции твердого тела относительно оси, не проходящей через центр тяжести, то проводят параллельную ось через центр тяжести твердого тела и применяют теорему Штейнера (при этом момент инерции твердого тела относительно оси, проходящей через центр тяжести, масса твердого тела и расстояние между параллельными осями должны быть известны).

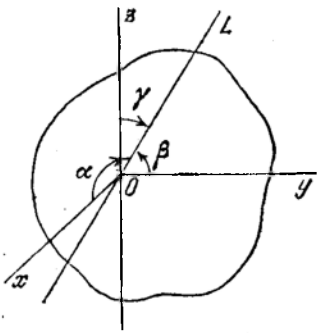


Рис. 9.3.

Если надо вычислить момент инерции материальной системы, состоящей из нескольких твердых тел, причем момент инерции каждого из порознь взятых тел известен, то определяют момент инерции системы относительно некоторой оси как сумму моментов инерции всех твердых тел, входящих в систему, относительно той же оси.

При вычислении момента инерции однородной плоской фигуры (трехмерного твердого тела) относительно некоторой оси выделяют в плоской фигуре такую элементарную площадь (объем), момент инерции которой относительно соответствующей оси известен либо легко может быть подсчитан. Затем определяется искомый момент инерции однородной плоской фигуры (твердого тела) путем суммирования моментов инерции всех элементарных площадей (объемов).

Момент инерции твердого тела относительно оси L, *проходящей через данную точку*, определяется формулой

$$I_L = I_x \cos^2\alpha + I_y \cos^2\beta + I_z \cos^2\gamma - 2I_{yz}\cos\beta\cos\gamma - \\ - 2I_{zx}\cos\gamma\cos\alpha - 2I_{xy}\cos\alpha\cos\beta,$$

где α, β и γ — соответственно углы между координатными осями x, y, z и осью L, относительно которой вычислен момент инерции твердого тела (рис. 9.3), I_x, I_y, I_z — осевые моменты инерции твердого тела, I_{xy}, I_{yz}, I_{zx} — *центробежные моменты инерции* твердого тела, определяемые формулами

$$I_{xy} = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k y_k, \quad I_{yz} = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k z_k, \quad I_{zx} = \sum_{k=1}^{n} m_k z_k x_k.$$

В отличие от осевых моментов инерции твердого тела I_x, I_y, I_z, которые всегда положительны, центробежные моменты инерции

могут быть также отрицательными и в частных случаях могут оказаться равными нулю.

В случае непрерывного распределения масс в однородном твердом теле центробежные моменты инерции вычисляются по формулам

$$I_{xy} = \frac{M}{V}\iiint\limits_{(V)} xy\,dV, \quad I_{yz} = \frac{M}{V}\iiint\limits_{(V)} yz\,dV, \quad I_{zx} = \frac{M}{V}\iiint\limits_{(V)} zx\,dV,$$

где M — масса твердого тела, V — его объем, dV — элементарный объем. Интегрирование распространено по всему объему твердого тела.

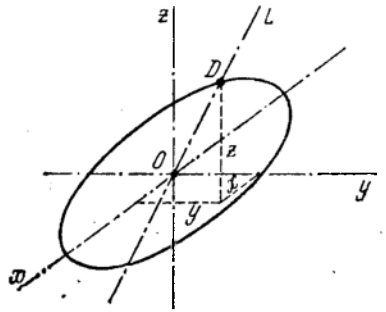


Рис. 9.4.

В случае непрерывного распределения масс в однородной пластинке

$$I_{xy} = \frac{M}{S}\iint\limits_{(S)} xy\,dS, \quad I_{xz} = \frac{M}{S}\iint\limits_{(S)} xz\,dS,$$

$$I_{yz} = \frac{M}{S}\iint\limits_{(S)} yz\,dS,$$

где M — масса пластинки, S — площадь пластинки, dS — элементарная площадка. Интегрирование распространено по всей площади пластинки.

Проведем через точку O ось L и построим на ней точку D, отстоящую от выбранной точки O на расстоянии, равном

$$OD = \frac{1}{\sqrt{I_L}}.$$

Геометрическое место построенных таким образом точек D для всевозможных направлений оси L образует поверхность эллипсоида, называемого *эллипсоидом инерции в данной точке O* твердого тела (рис. 9.4).

Уравнение эллипсоида инерции в данной точке твердого тела имеет вид

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2I_{yz}yz - 2I_{zx}zx - 2I_{xy}xy = 1,$$

где x, y и z — текущие координаты точек, лежащих на поверхности эллипсоида.

Через любую точку твердого тела можно провести пучок осей L и построить соответствующий эллипсоид инерции.

Если координатные оси x, y и z направить по осям эллипсоида инерции, то уравнение эллипсоида принимает каноническую форму:

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 = 1,$$

т. е. центробежные моменты инерции обращаются в нуль:

$$I_{yz} = I_{zx} = I_{xy} = 0.$$

Оси эллипсоида инерции в данной точке твердого тела называются *главными осями инерции*. Следовательно, в каждой точке твердого тела имеются три главные оси инерции, являющиеся осями соответствующего эллипсоида инерции.

Если координатные оси совпадают с главными осями инерции, то все центробежные моменты инерции I_{xy}, I_{xz}, I_{yz} равны нулю. В этом случае получим следующую формулу для момента инерции твердого тела относительно оси L:

$$I_L = I_x \cos^2\alpha + I_y \cos^2\beta + I_z \cos^2\gamma,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$ — направляющие косинусы оси L.

Пусть ось z является главной осью инерции для данной точки O. Если эта точка не является центром тяжести тела, то для любых других точек, лежащих на оси z, например O_1 и O_2, ось z не будет главной осью инерции твердого тела (рис. 9.5).

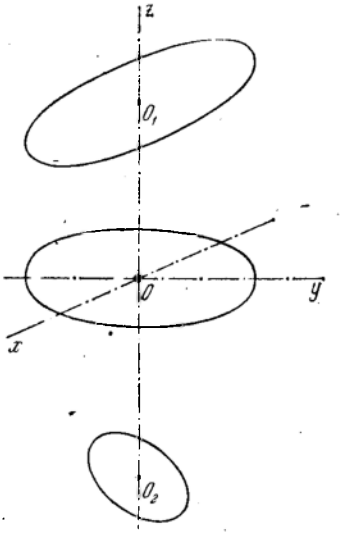


Рис. 9.5.

Если ось z является главной осью инерции твердого тела для точки O, а оси x и y не совпадают с осями эллипсоида для этой точки, то

$$I_{xz} = I_{yz} = 0, \quad I_{xy} \neq 0.$$

Следует помнить, что оси x и y проходят через точку O и образуют совместно с осью z ортогональную систему осей координат.

Главная ось инерции, проходящая через центр тяжести твердого тела, называется *главной центральной осью инерции* и является главной в любой своей точке.

Если в твердом теле имеется плоскость материальной симметрии, то любая ось, перпендикулярная к этой плоскости, будет главной в точке пересечения с плоскостью.

Если в твердом теле имеется ось материальной симметрии, то она является главной осью инерции твердого тела.

При решении задач часто приходится пользоваться формулами, содержащими центробежные моменты инерции твердых тел (например; в задачах на определение давлений вращающегося твердого тела на ось вращения (глава X, § 3), в задачах об ударе по телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси (глава XII), в задачах динамики твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки (том третий); для упрощения решения задач следует специально выбрать направление осей декартовых координат. Для этого требуется выяснить, нет ли в твердом теле оси материальной симметрии либо плоскости материальной симметрии. При наличии в твердом теле оси материальной симметрии целесообразно одну из координатных осей

направить по этой оси, которая и явится главной осью инерции. При наличии в твердом теле плоскости материальной симметрии надо одну из координатных осей направить перпендикулярно к плоскости материальной симметрии. Эта координатная ось является главной осью инерции твердого тела в точке пересечения с плоскостью материальной симметрии. При наличии главной оси инерции в данной точке твердого тела два центробежных момента инерции относительно осей, одной из которых является главная ось инерции, обращаются в нуль, и остается вычислить только третий центробежный момент инерции, не равный нулю. Так, если вдоль главной оси инерции направлена ось z, то $I_{zx} = I_{zy} = 0$ и остается вычислить только I_{xy}.

Иногда при вычислении центробежного момента инерции, например I_{xy}, бывает удобно осуществить поворот координатных осей x и y. Этим приемом целесообразно пользоваться в тех случаях, когда повернутые оси x_1 и y_1 оказываются главными и осевые моменты инерции твердого тела относительно них, т. е. I_{x_1} и I_{y_1}, известны, так как тогда искомый центробежный момент инерции оказывается функцией величин I_{x_1} и I_{y_1}.

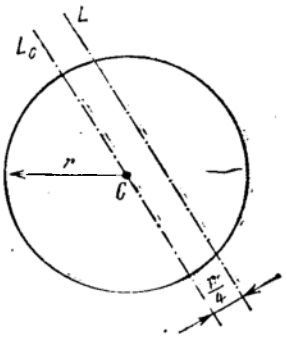
Указание. Для определения уравнения эллипсоида инерции в данной точке твердого тела следует:

1) выбрать координатные оси, взяв начало координат в данной точке; если положение главных осей инерции можно легко определить благодаря наличию в твердом теле плоскости либо оси материальной симметрии, то координатные оси следует направлять вдоль главных осей инерции;

2) вычислить моменты инерции I_x, I_y, I_z и центробежные моменты инерции твердого тела I_{xy}, I_{xz}, I_{yz};

3) определить уравнение эллипсоида инерции, воспользовавшись формулой

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2I_{yz} yz - 2I_{zx} zx - 2I_{xy} xy = 1.$$



К задаче 9.2.

Задача 9.2. Вычислить момент инерции и радиус инерции однородного круглого диска массы m и радиуса r относительно оси L, лежащей в его плоскости и отстоящей от центра тяжести C диска на расстоянии, равном четверти радиуса.

Решение. Проводим ось L_C через центр тяжести C диска параллельно оси L.

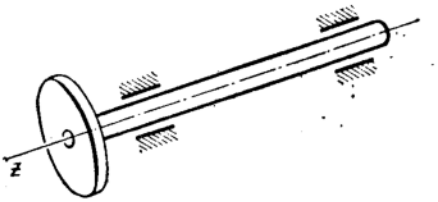
Как известно, момент инерции однородного круглого диска относительно оси, проходящей вдоль одного из его диаметров, $I_{L_C} = mr^2/4$. Применив теорему Штейнера, находим

$$I_L = I_{LC} + m\left(\frac{r}{4}\right)^2 = \frac{mr^2}{4} + \frac{mr^2}{16} = \frac{5mr^2}{16}.$$

Воспользовавшись формулой $I_L = m\rho_L^2$, определяем радиус инерции ρ_L диска относительно оси L. Имеем

$$m\rho_L^2 = \frac{5mr^2}{16}, \quad \text{откуда} \quad \rho_L = \frac{r\sqrt{5}}{4}.$$

Задача 9.3. Вычислить момент инерции относительно оси вращения z вала массы 100 кг и радиуса 10 см с насаженным на него маховиком массы 1000 кг и радиуса 1 м. Вал считать однородным сплошным цилиндром, маховик — однородным кольцом.



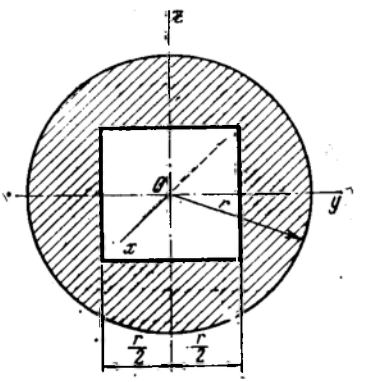
К задаче 9.3.

Р е ш е н и е. Момент инерции системы, состоящей из вала и маховика, равен сумме их моментов инерции, т. е.

$$I_z = I_{z\text{в}} + I_{z\text{м}} = 100\,\frac{0{,}1^2}{2} + 1000 \cdot 1^2 = 0{,}5 + 1000 = 1000{,}5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Так как момент инерции вала составляет всего лишь 0,05 % от момента инерции маховика, то им можно пренебречь.

Задача 9.4. Вычислить моменты инерции относительно осей координат x, y, z тонкой однородной круглой пластинки радиуса r, внутри которой вырезан квадрат с длиной стороны, равной a. Центры квадрата и круга совпадают; M — масса пластинки с вырезом.



К задаче 9.4.

Р е ш е н и е. Момент инерции пластинки с вырезом относительно некоторой оси равен разности моментов инерции круга $I^{(1)}$ и квадрата $I^{(2)}$ относительно той же оси, т. е.

$$\begin{aligned} I_x &= I_x^{(1)} - I_x^{(2)}, \\ I_y &= I_y^{(1)} - I_y^{(2)}, \\ I_z &= I_z^{(1)} - I_z^{(2)}. \end{aligned} \qquad (1)$$

Из соображений симметрии следует, что $I_y = I_z$. Воспользуемся формулами

$$\begin{aligned} I_x^{(1)} &= \frac{M^{(1)}r^2}{2}, \quad I_y^{(1)} = I_z^{(1)} = \frac{M^{(1)}r^2}{4}, \\ I_x^{(2)} &= \frac{M^{(2)}a^2}{6}, \quad I_y^{(2)} = I_z^{(2)} = \frac{M^{(2)}a^2}{12}, \end{aligned} \qquad (2)$$

где обозначено: $M^{(1)}$ — масса пластинки без выреза и $M^{(2)}$ — масса вырезанного квадрата. Выразим $M^{(1)}$ и $M^{(2)}$ в зависимости от массы M пластинки с вырезом:

$$M = M^{(1)} - M^{(2)} = M^{(1)} - \frac{M^{(1)}}{\pi r^2} a^2 = \frac{\pi r^2 - a^2}{\pi r^2} M^{(1)},$$

откуда

$$M^{(1)} = \frac{\pi r^2}{\pi r^2 - a^2} M. \qquad (3)$$

Использовав формулу (3), получим

$$M^{(2)} = \frac{M^{(1)}}{\pi r^2} a^2 = \frac{a^2}{\pi r^2 - a^2} M. \qquad (4)$$

Внеся значения (3) и (4) в формулы (2), запишем

$$I_x^{(1)} = \frac{\pi M r^4}{2(\pi r^2 - a^2)}, \quad I_y^{(1)} = I_z^{(1)} = \frac{\pi M r^4}{4(\pi r^2 - a^2)}, \quad I_x^{(2)} = \frac{M a^4}{6(\pi r^2 - a^2)},$$

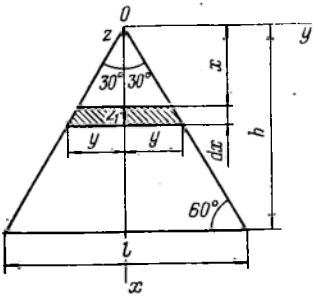
$$I_y^{(2)} = I_z^{(2)} = \frac{M a^4}{12(\pi r^2 - a^2)}. \qquad (5)$$

Подставив значения (5) в формулы (1), окончательно находим

$$I_x = \frac{\pi M r^4}{2(\pi r^2 - a^2)} - \frac{M a^4}{6(\pi r^2 - a^2)} = \frac{3\pi r^4 - a^4}{6(\pi r^2 - a^2)} M,$$

$$I_y = I_z = \frac{\pi M r^4}{4(\pi r^2 - a^2)} - \frac{M a^4}{12(\pi r^2 - a^2)} = \frac{3\pi r^4 - a^4}{12(\pi r^2 - a^2)} M.$$

Задача 9.5. Однородная равносторонняя треугольная пластинка массой M со сторонами длиной l расположена в плоскости рисунка.



К задаче 9.5.

Определить момент инерции I_z этой пластинки относительно оси z, проходящей через вершину O и перпендикулярной плоскости пластинки. Оси x и y изображены на рисунке.

Р е ш е н и е. Выделим на пластинке на расстоянии x от вершины O узкую горизонтальную полоску шириной dx и массой dm. Ее длина равна $2y$. Проведем через центр тяжести полоски ось z_1, параллельную оси z, т. е. перпендикулярную плоскости рисунка. Полоска представляет собой тонкий однородный стержень. Поэтому ее момент инерции относительно оси z_1 (см. таблицу на стр. 158) равен

$$dI_{z_1} = \frac{dm \cdot y^2}{3}. \qquad (4)$$

Масса dm полоски равна произведению единичной массы M/S, где S — ее площадь, на элементарную площадь dS пластинки, т. е.

$$dm = \frac{M}{S} dS. \qquad (2)$$

Так как площадь треугольной пластинки $S = lh/2$, где высота $h = \frac{\sqrt{3}}{2} l$, т. е. $S = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2$, а $dS = 2y\,dx$, где $y = \frac{\sqrt{3}}{3} x$, т. е. $dS = \frac{2}{3}\sqrt{3}x\,dx$, то формула (2) примет вид

$$dm = \frac{8}{3}\frac{M}{l^2} x\,dx. \tag{3}$$

Внеся в формулу (1) значение dm из выражения (3), а также $y = \frac{\sqrt{3}}{3} x$, найдем

$$dI_{z_1} = \frac{8}{27}\frac{M}{l^2} x^3\,dx. \tag{4}$$

Теперь можно применить теорему Штейнера и вычислить момент инерции dI_z полоски относительно оси z, параллельной оси z_1 и отстоящей от нее на расстояние x:

$$dI_z = dI_{z_1} + dm \cdot x^2.$$

Использовав здесь результаты (4) и (3), получим

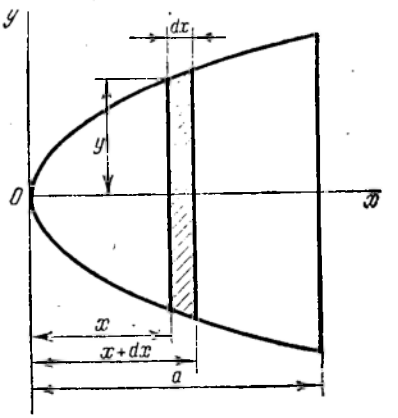
$$dI_z = \frac{80}{27}\frac{M}{l^2} x^3\,dx. \tag{5}$$

Для вычисления искомого момента инерции остается взять определенный интеграл по всей площади пластинки, т. е. при значениях x, изменяющихся от нуля до $h = l\sqrt{3}/2$. Найдем

$$I_z = \int\limits_{(S)} dI_z = \int\limits_0^{l\sqrt{3}/2} \frac{80}{27}\frac{M}{l^2} x^3\,dx = \frac{5}{12} Ml^2.$$

Итак, момент инерции пластинки относительно оси z равен

$$I_z = \frac{5}{12} Ml^2. \tag{6}$$



К задаче 9.6.

Задача 9.6. Вычислить момент инерции тонкой однородной параболической пластинки массы M относительно оси y. Основание пластинки параллельно оси y и отстоит от нее на расстоянии a. Уравнение параболы, ограничивающей пластинку, имеет вид $y^2 = 4x$.

Р е ш е н и е. Проведем на пластинке две прямые, параллельные оси y и отстоящие от нее на расстояниях x и $x + dx$.

Вычислим момент инерции относительно оси y массы площадки, заштрихованной на рисунке, ограниченной этими прямыми и параболическим контуром пластинки: $dI_y = x^2\,dm$, где элементарная

масса заштрихованной площади пластинки равна $dm = \gamma\, ds$. Здесь γ — плотность пластинки, ds — площадь заштрихованной площадки, причем $ds = 2y\, dx$.

Следовательно, $dm = 2\gamma y\, dx$ и $dI_y = 2\gamma x^2 y\, dx$. Так как по условию $y^2 = 4x$, т. е. $y = 2\sqrt{x}$, то $dI_y = 4\gamma x^2 \sqrt{x}\, dx$. Момент инерции пластинки относительно оси y

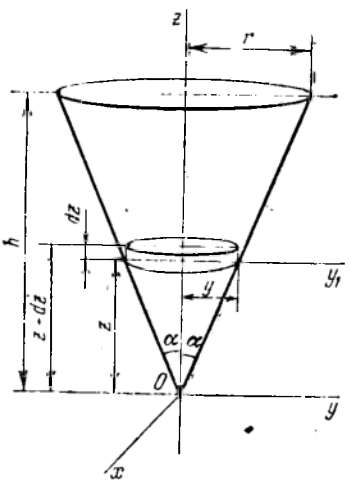
$$I_y = \int\limits_{(S)} dI_y = \int\limits_0^a 4\gamma x^2 \sqrt{x}\, dx = \frac{8}{7}\gamma a^3 \sqrt{a}.$$

Масса пластинки равна $M = \gamma S$, где площадь пластинки

$$S = \int\limits_0^a 2y\, dx = 4\int\limits_0^a \sqrt{x}\, dx = \frac{8}{3} a\sqrt{a}, \text{ поэтому } M = \frac{8}{3}\gamma a \sqrt{a}.$$

Учитывая выражение для массы пластинки M, запишем искомый момент инерции в форме $I_y = {}^3/_7\, Ma^2$.

Задача 9.7. Вычислить моменты инерции относительно осей x, y, z однородного круглого конуса массы M, с высотой h и радиусом основания r (см. рисунок).



К задаче 9.7.

Решение. Рассекаем конус двумя плоскостями, параллельными плоскости xy и отстоящими от нее на расстояниях z и $z + dz$.

Вычислим момент инерции массы элементарного объема, ограниченного этими плоскостями и боковой поверхностью конуса.

Дифференциал объема тела определяем как объем кругового цилиндра с радиусом основания y и высотой dz, т. е. $dv = \pi y^2\, dz$. Следовательно, масса выделенного элемента объема равна $dm = \gamma\, dv = \gamma\pi y^2\, dz$, где γ — плотность конуса. Момент инерции выделенного элементарного объема относительно оси z вычисляем по формуле момента инерции цилиндра:

$$dI_z = \frac{dm \cdot y^2}{2} = \frac{\gamma\pi}{2} y^4 dz.$$

Обозначив через α половину угла при вершине конуса, получим $y = z \operatorname{tg}\alpha$ и, следовательно, $dI_z = \frac{\gamma\pi \operatorname{tg}^4\alpha}{2} z^4\, dz$. Тогда момент инерции конуса относительно оси z равен

$$I_z = \int\limits_{(v)} dI_z = \int\limits_0^h \frac{\gamma\pi \operatorname{tg}^4\alpha}{2} z^4 dz = \frac{\gamma\pi}{10} h^5 \operatorname{tg}^4\alpha.$$

Учитывая, что объем конуса $v = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^3 \operatorname{ctg}\alpha$ и, следовательно, масса конуса $M = \gamma \cdot v = \frac{1}{3}\pi\gamma r^3 \operatorname{ctg}\alpha$, окончательно получим

$$I_z = \frac{3}{10} Mr^2.$$

Нетрудно видеть из соображений симметрии, что $I_x = I_y$.

Для вычисления I_y определим момент инерции выделенного элементарного объема относительно оси y. Для этого через его центр тяжести проведем ось y_1, параллельную оси y. Воспользовавшись формулой момента инерции диска относительно экваториальной оси y_1, имеем: $dI_{y_1} = \frac{dm \cdot y^2}{4}$.

Применив теорему Штейнера, находим

$$dI_y = dI_{y_1} + dm\, z^2 = dm\left(\frac{y^2}{4} + z^2\right).$$

Воспользовавшись ранее вычисленным значением $dm = \gamma\pi y^2\, dz$, получим $dI_y = \gamma\pi y^2\left(\frac{y^2}{4} + z^2\right) dz = \gamma\pi \operatorname{tg}^2\alpha\left(1 + \frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{4}\right) z^4\, dz$ (так как $y = z \operatorname{tg}\alpha$).

Вычисление момента инерции конуса относительно оси y дает:

$$I_y = \int\limits_{(v)} dI_y = \int\limits_0^h \gamma\pi \operatorname{tg}^2\alpha\left(1 + \frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{4}\right) z^4\, dz = \frac{\gamma\pi h^5}{5}\left(1 + \frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{4}\right)\operatorname{tg}^2\alpha.$$

Учитывая, что масса конуса равна $M = \frac{1}{3}\gamma\pi r^2 h$ и $\frac{r}{h} = \operatorname{tg}\alpha$, находим

$$I_y = \frac{3}{5} M\left(h^2 + \frac{r^2}{4}\right).$$

Так как $I_x = I_y$, то окончательно имеем

$$I_x = I_y = \frac{3}{5} M\left(h^2 + \frac{r^2}{4}\right).$$

Задача 9.8. На рисунке изображена схема коленчатого вала четырехцилиндрового двигателя внутреннего сгорания. Колена A и E расположены в горизонтальной плоскости yz. Колена B и D расположены в вертикальной плоскости xz. Вычислить центробежные моменты инерции коленчатого вала I_{xy}, I_{xz}, I_{yz}, приближенно считая его массу сосредоточенной в точках A, B, E и D, причем $m_A = m_B = m_E = m_D = m$. Размеры указаны на рисунке.

Р е ш е н и е. По определению центробежных моментов инерции твердого тела получаем

$$I_{xy} = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k y_k, \quad I_{xz} = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k z_k, \quad I_{yz} = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k z_k.$$

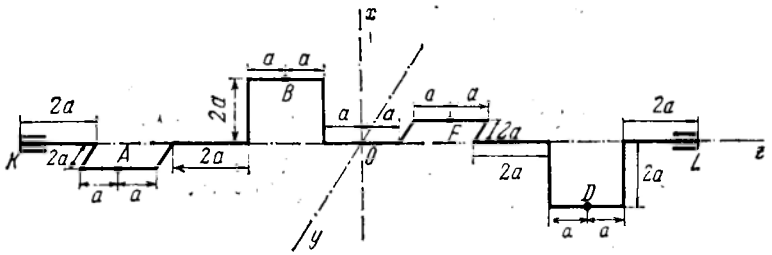
Распространив суммирование на четыре точечные массы m_A, m_B, m_E и m_D, имеем

$$I_{yz} = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k z_k = m_A y_A z_A + m_B y_B z_B + m_E y_E z_E + m_D y_D z_D =$$
$$+ m_M \cdot 2a\,(-6a) + m_E\,(-2a)\,2a = -12m_A a^2 - 4m_E a^2 = -16ma^2,$$

$$I_{xy} = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k y_k = m_A x_A y_A + m_B x_B y_B + m_E x_E y_E + m_D x_D y_D = 0,$$

$$I_{xz} = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k z_k = m_A x_A z_A + m_B x_B z_B + m_E x_E z_E + m_D x_D z_D =$$
$$= m_B\,(-2a)\,2a + m_D 6a\,(-2a) = -4m_B a^2 - 12m_D a^2 = -16ma^2$$

(напомним, что $y_B = y_D = x_A = x_E = 0$, а $m_A = m_B = m_E = m_D = m$). Итак, $I_{yz} = I_{xz} = -16ma^2$ и $I_{xy} = 0$.



К задаче 9.8.

Интересно отметить, что при двух центробежных моментах инерции I_{xz} и I_{yz}, отличных от нуля, центр тяжести коленчатого вала лежит на оси вращения z.

Задача 9.9. Вычислить центробежные моменты инерции I_{xy}, I_{xz} и I_{yz} однородной пластинки OAB массы m. Катет прямоугольного равнобедренного треугольника OAB равен a. Оси координат изображены на рисунке.

Р е ш е н и е. Ось x, перпендикулярная к плоскости материальной симметрии пластинки, является главной осью инерции в точке O. Известно, что центробежные моменты инерции относительно осей, одна из которых является главной осью инерции, равны нулю, т. е.

$$I_{xy} = I_{xz} = 0.$$

Переходим к вычислению центробежного момента инерции I_{yz}:

$$I_{yz} = \int\limits_{(M)} yz\,dm,$$

где $dm = \gamma\,dy\,dz$, а γ — плотность пластинки.

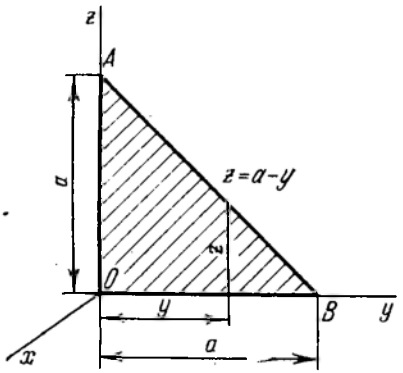
Следовательно,

$$I_{yz} = \gamma \int\int yz\,dy\,dz = \gamma \int_0^a y\,dy \int_0^{a-y} z\,dz = \gamma \int_0^a y\,\frac{(a-y)^2}{2}\,dy =$$

$$= \frac{\gamma}{2} \int_0^a (a^2 y - 2ay^2 + y^3)\,dy = \frac{\gamma a^4}{24};$$

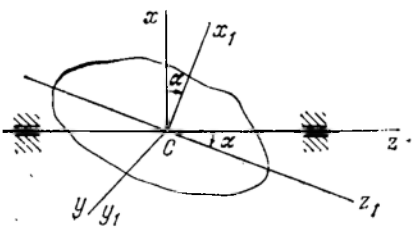
так как $\gamma a^2/2 = M$, то окончательно получим

$$I_{yz} = \frac{Ma^2}{12}.$$



К задаче 9.9.

Задача 9.10. Твердое тело имеет плоскость материальной



К задаче 9.10.

симметрии xz, совмещенную с плоскостью рисунка. Даны осевые моменты инерции I_{z_1} и I_{x_1} твердого тела относительно осей z_1 и x_1, проходящих через центр тяжести C тела и лежащих в плоскости материальной симметрии xz, а также центробежный момент инерции $I_{x_1z_1}$.

Определить центробежные моменты инерции твердого тела I_{xz}, I_{yz}, I_{xy}, если оси z_1 и x_1 повернуты относительно осей z и x на угол α (см. рисунок).

Р е ш е н и е. Ось y перпендикулярна к плоскости материальной симметрии xz и потому является главной осью инерции в точке C. Следовательно, в нуль обращаются два центробежных момента инерции относительно осей, одной из которых является ось y, т. е.

$$I_{yz} = I_{yx} = 0. \tag{1}$$

Остается вычислить центробежный момент инерции I_{xz}, который, по определению, равен

$$I_{xz} = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k z_k. \tag{2}$$

Выразим координаты x_k и z_k в зависимости от x_{1k} и z_{1k}. Для этого воспользуемся формулами аналитической геометрии преобразования координат при повороте осей на угол α:

$$z = z_1 \cos\alpha - x_1 \sin\alpha, \quad x = z_1 \sin\alpha + x_1 \cos\alpha. \tag{3}$$

Эти формулы выведены в предположении, что поворот осей произведен против хода часовой стрелки. Учтя, что в данном случае поворот совершается по ходу часовой стрелки, заменим в формулах (3) угол α на $-\alpha$. Тогда для k-й точки имеем

$$z_k = z_{1k}\cos\alpha + x_{1k}\sin\alpha, \quad x_k = -z_{1k}\sin\alpha + x_{1k}\cos\alpha. \tag{4}$$

Подставив значения (4) в формулу (2), запишем

$$I_{xz} = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k z_k = \sum_{k=1}^{n} m_k (-z_{1k}\sin\alpha + x_{1k}\cos\alpha)(z_{1k}\cos\alpha + x_{1k}\sin\alpha).$$

Перемножив скобки, находим

$$I_{xz} = -\sin\alpha\cos\alpha \sum_{k=1}^{n} m_k z_{1k}^2 - \sin^2\alpha \sum_{k=1}^{n} m_k z_{1k}x_{1k} + \\ + \cos^2\alpha \sum_{k=1}^{n} m_k z_{1k}x_{1k} + \sin\alpha\cos\alpha \sum_{k=1}^{n} m_k x_{1k}^2,$$

т. е.

$$I_{xz} = \frac{\sin 2\alpha}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} m_k x_{1k}^2 - \sum_{k=1}^{n} m_k z_{1k}^2\right) + \cos 2\alpha \sum_{k=1}^{n} m_k z_{1k}x_{1k}. \tag{5}$$

Добавим и отнимем в круглых скобках формулы (5) $\sum_{k=1}^{n} m_k y_{1k}^2$. Тогда

$$I_{xz} = \frac{\sin 2\alpha}{2}\left[\sum_{k=1}^{n} m_k (x_{1k}^2 + y_{1k}^2) - \sum_{k=1}^{n} m_k (z_{1k}^2 + y_{1k}^2)\right] + \\ + \cos 2\alpha \sum_{k=1}^{n} m_k z_{1k}x_{1k}.$$

Заметив, что $x_{1k}^2 + y_{1k}^2 = d_{kz_1}^2$ — квадрат расстояния k-й точки до оси z_1, а $z_{1k}^2 + y_{1k}^2 = d_{kx_1}^2$ — до оси x_1, получим

$$I_{xz} = \frac{\sin 2\alpha}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} m_k d_{kz_1}^2 - \sum_{k=1}^{n} m_k d_{kx_1}^2\right) + \cos 2\alpha \sum_{k=1}^{n} m_k z_{1k}x_{1k}. \tag{6}$$

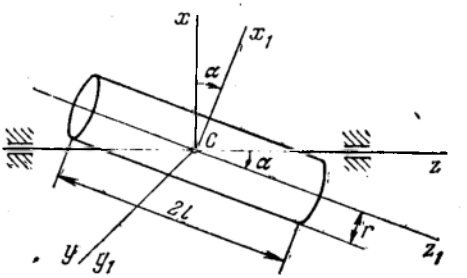
Так как, по определению, $\sum_{k=1}^{n} m_k d_{kz_1}^2 = I_{z_1}$, $\sum_{k=1}^{n} m_k d_{kx_1}^2 = I_{x_1}$, $\sum_{k=1}^{n} m_k z_{1k} x_{1k} = I_{z_1x_1}$, то формула (6) окончательно принимает вид

$$I_{xz} = (I_{z_1} - I_{x_1}) \frac{\sin 2\alpha}{2} + I_{x_1z_1} \cos 2\alpha. \qquad (7)$$

Итак, искомые центробежные моменты инерции твердого тела (см. (1) и (7)) равны

$$I_{yz} = I_{yx} = 0, \quad I_{xz} = (I_{z_1} - I_{x_1}) \frac{\sin 2\alpha}{2} + I_{x_1z_1} \cos 2\alpha.$$

Задача 9.11. Сохранив условие предыдущей задачи, дополнительно считать, что z_1 является осью материальной симметрии твердого тела. Вычислить также центробежные моменты инерции однородного круглого цилиндра массы M, радиуса r и длиной $2l$. Оси x, y, z изображены на рисунке.



К задаче 9.11.

Р е ш е н и е. Ось z_1, будучи осью материальной симметрии, является главной осью инерции. Поэтому $I_{z_1x_1} = I_{z_1y_1} = 0$. Значит, формула (7) предыдущей задачи принимает вид

$$I_{xz} = (I_{z_1} - I_{x_1}) \frac{\sin 2\alpha}{2}. \qquad (1)$$

Осевые моменты инерции однородного круглого цилиндра равны $I_{z_1} = Mr^2/2$, $I_{x_1} = M(r^2/4 + l^2/3)$. Подставив эти значения в формулу (1), получим

$$I_{xz} = M\left(\frac{r^2}{4} - \frac{l^2}{3}\right) \frac{\sin 2\alpha}{2}. \qquad (2)$$

Итак, искомые центробежные моменты инерции (см. формулу (1) предыдущей задачи) однородного круглого цилиндра, изображенного на рисунке, равны

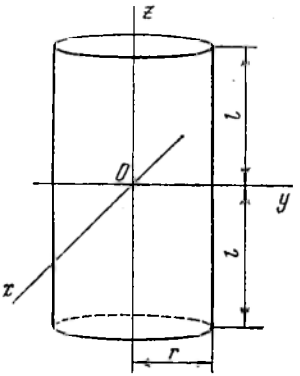
$$I_{yz} = I_{yx} = 0, \quad I_{xz} = M\left(\frac{r^2}{4} - \frac{l^2}{3}\right) \frac{\sin 2\alpha}{2}.$$

Задача 9.12. Написать уравнение эллипсоида инерции, построенного в центре тяжести однородного круглого цилиндра массы m, высоты $2l$ с радиусом основания, равным r. Координатные оси изображены на рисунке. Начало координат O совпадает с положением центра тяжести цилиндра.

Р е ш е н и е. Уравнение эллипсоида инерции в данной точке твердого тела имеет вид

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2I_{yz} yz - 2I_{zx} zx - 2I_{xy} xy = 1.$$

Как известно, для круглого цилиндра $I_x = I_y = M(r^2/4 + l^2/3)$ и $I_z = Mr^2/2$. Так как оси x, y и z являются главными осями инерции цилиндра, то $I_{yz} = I_{xz} = I_{xy} = 0$. Теперь уравнение эллипсоида инерции для центра тяжести цилиндра будет



К задаче 9.12.

$$M\left(\frac{r^2}{4} + \frac{l^2}{3}\right) x^2 + M\left(\frac{r^2}{4} + \frac{l^2}{3}\right) y^2 + \frac{Mr^2}{2} z^2 = 1.$$

Полуоси эллипсоида инерции равны

$$a = b = \frac{1}{\sqrt{M(r^2/4 + l^2/3)}}$$

и $c = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{2}{M}}$.

Задача 9.13. При каком соотношении между радиусом основания r однородного круглого конуса и его высотой h эллипсоид инерции, построенный для вершины конуса O, обратится в сферу? Координатные оси изображены на рисунке (см. рисунок к задаче 9.7).

Р е ш е н и е. Запишем уравнение эллипсоида инерции однородного круглого конуса для его вершины O. Для этого в уравнение эллипсоида инерции

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2I_{yz} yz - 2I_{zx} zx - 2I_{xy} xy = 1$$

следует подставить $I_x = I_y = \frac{3}{5} M\left(h^2 + \frac{r^2}{4}\right)$ и $I_z = \frac{3}{10} Mr^2$ (см. решение задачи 9.7), $I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$ (оси x, y, z являются главными осями инерции конуса в точке O).

Получим:

$$\frac{3}{5} M\left(h^2 + \frac{r^2}{4}\right) x^2 + \frac{3}{5} M\left(h^2 + \frac{r^2}{4}\right) y^2 + \frac{3}{10} Mr^2 z^2 = 1.$$

Следовательно, полуоси эллипсоида инерции конуса в точке O равны

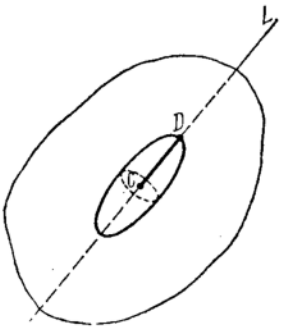
$$a = b = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{5} M\left(h^2 + \frac{r^2}{4}\right)}} \quad \text{и} \quad c = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{10}{3M}}.$$

Эллипсоид обращается в сферу при условии: $a = b = c$, т. е

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{5} M\left(h^2 + \frac{r^2}{4}\right)}} = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{10}{3M}}, \quad \text{откуда} \quad \frac{r}{h} = 2.$$

Задача 9.14. Определить положение точки в твердом теле и направление оси, проходящей через эту точку, если известно, что момент инерции твердого тела относительно этой оси является наименьшим.

Р е ш е н и е. Применение теоремы Штейнера показывает, что при наличии системы параллельных осей момент инерции твердого тела является наименьшим относительно оси, проходящей через центр инерции C твердого тела. Остается выбрать направление оси, проходящей через эту точку. Построим эллипсоид инерции с центром в точке C. По определению эллипсоида инерции, расстояние от центра эллипсоида до точки, лежащей на его поверхности, равно $CD = 1/\sqrt{I_L}$, где I_L — момент инерции твердого тела относительно оси, проходящей через центр эллипсоида и точку, лежащую на его поверхности. Для того чтобы момент инерции I_L был наименьшим, расстояние CD должно быть наибольшим. Следовательно, искомая ось L проходит через центр инерции C твердого тела вдоль наибольшей оси CD эллипсоида инерции, построенного в этой точке.



К задаче 9.14.

У к а з а н и е. Рекомендуем решить следующие задачи из «Сборника задач по теоретической механике» И. В. Мещерского: 34.7, 34.9, 34.11, 34.12, 34.18—34.20, 34.24—34.26.

§ 2. Внешние и внутренние силы. Дифференциальные уравнения движения материальной системы

При решении задач с помощью общих теорем динамики материальной системы силы разделяют на внутренние ($\boldsymbol{F}^i$) и внешние ($\boldsymbol{F}^e$). Напомним, что *внутренними* называются силы взаимодействия между материальными точками, входящими в состав рассматриваемой системы. В соответствии с законом равенства действия и противодействия, внутренние силы существуют попарно. При этом главный вектор $\boldsymbol{V}^i$ и главный момент $\boldsymbol{m}_0^i$ внутренних сил системы равны нулю, т. е.

$$\boldsymbol{V}^i = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F}_k^i = 0, \quad \boldsymbol{m}_0^i = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{m}_0(\boldsymbol{F}_k^i) = 0.$$

Следует иметь в виду, что, несмотря на выполнение этих условий, система внутренних сил, вообще говоря, не является уравновешивающейся, так как внутренние силы приложены к разным материальным точкам.

Внешними называются силы, приложенные к материальным точкам рассматриваемой системы со стороны точек и тел, не входящих в состав этой системы. Внешние силы могут переходить в разряд

сил внутренних и, наоборот, внутренние силы могут переходить в разряд внешних при изменении состава системы. Так, если рассматривать систему, состоящую из двух соприкасающихся шаров, то давления первого шара на второй и второго шара на первый являются внутренними силами. Если же рассматривать систему, состоящую из одного первого шара, то давление второго шара на первый является внешней силой.

Рассмотрим пример. На рис. 9.6 изображена материальная система, состоящая из масс A и B весом P_A и P_B, соединенных невесомым жестким стержнем AB. Под действием силы F система движется направо по негладкой горизонтальной плоскости.

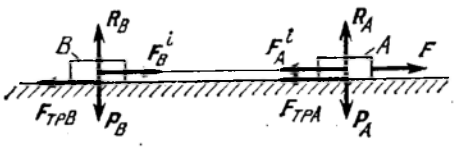


Рис. 9.6.

Изобразить все внешние и внутренние силы, действующие на материальную систему. Массы A и B считать точечными.

Изучаемая система состоит из двух масс A и B и невесомого жесткого стержня AB. Земля и горизонтальная плоскость — тела, не входящие в состав данной системы. Поэтому, кроме силы F, внешними силами являются: силы тяжести P_A и P_B, приложенные к массам A и B со стороны Земли, нормальные составляющие реакций R_A и R_B горизонтальной плоскости, а также касательные составляющие реакций этой плоскости, т. е. силы трения скольжения $F_{трA}$ и $F_{трB}$.

К массе A приложена реакция F_A^i стержня AB, а к массе B — реакция F_B^i стержня AB. Силы F_A^i и F_B^i — это силы взаимодействия между материальными точками A и B данной системы, т. е. внутренние силы.

Итак, к данной материальной системе приложены внешние силы: F, P_A, P_B, R_A, R_B, $F_{трA}$, $F_{трB}$, причем силы F, P_A и P_B являются активными, а R_A, R_B, $F_{трA}$, $F_{трB}$ — реакциями связей. Внутренние силы системы представляют собой реакции стержня F_A^i и F_B^i.

Если жесткий стержень AB заменить пружиной, то вместо реакций стержня F_A^i и F_B^i получим активные силы упругости пружины F_A^i и F_B^i (пружина не является связью), которые, как это имело место и при наличии стержня, будут являться внутренними силами системы.

Следовательно, активные силы и реакции связей могут быть и внешними и внутренними. Решая задачи, рекомендуем строго придерживаться принятой классификации сил. Это значит, что все силы, действующие на систему, необходимо разделять: 1) на активные силы и реакции связей либо 2) на внешние и внутренние силы. В этой главе при рассмотрении общих теорем динамики силы делятся на внешние и внутренние (преимущества подобного деления сил будут показаны ниже).

Уравнение динамики для k-й точки материальной системы имеет вид

$$m_k \boldsymbol{w}_k = \boldsymbol{F}_k^e + \boldsymbol{F}_k^i,$$

где $\boldsymbol{F}_k^e$ — равнодействующая всех внешних сил, а $\boldsymbol{F}_k^i$ — равнодействующая всех внутренних сил, приложенных к k-й материальной точке.

Ниже рассматриваются как системы, состоящие из конечного числа материальных точек, так и системы тел с непрерывным распределением масс.

Все теоремы формулируются для материальных систем, но без труда могут быть распространены на системы тел.

Дифференциальные уравнения движения k-й материальной точки в проекциях на оси декартовых координат имеют вид

$$m_k \ddot{x}_k = F_{kx}^e + F_{kx}^i, \quad m_k \ddot{y}_k = F_{ky}^e + F_{ky}^i, \quad m_k \ddot{z}_k = F_{kz}^e + F_{kz}^i$$

(система трех уравнений).

Дифференциальные уравнения движения системы n материальных точек в проекциях на оси декартовых координат записываются в форме

$$m_k \ddot{x}_k = F_{kx}^e + F_{kx}^i, \quad m_k \ddot{y}_k = F_{ky}^e + F_{ky}^i, \quad m_k \ddot{z}_k = F_{kz}^e + F_{kz}^i$$

(система $3n$ уравнений), где $k = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Итак, для определения движения системы n материальных точек, входящих в состав системы, следует решить систему $3n$ обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с $3n$ неизвестными функциями одной независимой переменной t. Для нахождения $6n$ постоянных интегрирования должны быть заданы $6n$ начальных условий движения. При этом следует иметь в виду, что внешние и внутренние силы могут зависеть как от времени, так и от положений, скоростей и ускорений точек системы. Решение подобных задач оказывается трудным и громоздким.

В некоторых задачах динамики материальной точки и системы материальных точек можно значительно упростить решение путем применения так называемых общих теорем динамики.

§ 3. Теорема о движении центра масс материальной системы. Случай сохранения скорости центра масс

1. Теорема о движении центра масс материальной системы. Зависимость между скоростью центра масс и скоростями точек материальной системы имеет вид

$$\boldsymbol{v}_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k \boldsymbol{v}_k}{M},$$

т. е.

$$\dot{x}_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k \dot{x}_k}{M}, \quad \dot{y}_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k \dot{y}_k}{M}, \quad \dot{z}_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k \dot{z}_k}{M}. \tag{1*}$$

Здесь

$$\boldsymbol{v}_C = \dot{x}_C \boldsymbol{i} + \dot{y}_C \boldsymbol{j} + \dot{z}_C \boldsymbol{k}.$$

Зависимость между ускорением центра масс и ускорениями точек материальной системы выражается соотношением

$$\boldsymbol{w}_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k \boldsymbol{w}_k}{M},$$

т. е.

$$\ddot{x}_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k \ddot{x}_k}{M}, \quad \ddot{y}_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k \ddot{y}_k}{M}, \quad \ddot{z}_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k \ddot{z}_k}{M}. \tag{2*}$$

Здесь

$$\boldsymbol{w}_C = \ddot{x}_C \boldsymbol{i} + \ddot{y}_C \boldsymbol{j} + \ddot{z}_C \boldsymbol{k}.$$

Напомним формулировку теоремы о движении центра масс: центр масс материальной системы движется как материальная точка, масса которой равна массе материальной системы и к которой приложены все внешние силы, действующие на систему:

$$M\boldsymbol{w}_C = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F}_k^e.$$

Та же теорема, записанная в проекциях на оси декартовых координат, имеет вид

$$M\ddot{x}_C = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}^e, \quad M\ddot{y}_C = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}^e, \quad M\ddot{z}_C = \sum_{k=1}^{n} F_{kz}^e. \tag{3*}$$

Движение центра масс материальной системы зависит от внешних сил, приложенных к данной системе. Внутренние силы, которые отсутствуют в формулировке теоремы, непосредственно на движение центра инерции системы не влияют. Это обстоятельство значительно облегчает решение задач, так как внутренние силы системы большей частью бывают неизвестны.

Задачи динамики поступательного движения твердого тела решаются посредством теоремы о движении центра масс материальной системы. Действительно, применив эту теорему, мы определим уравнение траектории, скорость и ускорение центра тяжести твердого тела. При поступательном же движении твердого тела траектории всех точек одинаковы, а скорости и ускорения их соответственно равны.

Указание. С помощью теоремы о движении центра масс можно решать как прямые, так и обратные задачи динамики. Рекомендуем такую последовательность решения задач:

1) изобразить на рисунке все внешние силы системы;

2) выбрать систему осей координат;

3) записать теорему о движении центра масс (3*) в проекциях на декартовы оси координат;

4) вычислить суммы проекций всех внешних сил системы на оси декартовых координат и подставить их в уравнение (3*);

5) в зависимости от условия решать прямую, либо обратную задачи динамики.

В некоторых прямых задачах бывают заданы все внешние силы, кроме одной, массы всех материальных точек системы и законы их движения. Тогда, после выполнения первых четырех пунктов, для вычисления левых частей уравнений (3*) надо воспользоваться вспомогательными формулами

$$M\ddot{x}_C = \sum_{k=1}^{n} m_k \ddot{x}_k, \quad M\ddot{y}_C = \sum_{k=1}^{n} m_k \ddot{y}_k, \quad M\ddot{z}_C = \sum_{k=1}^{n} m_k \ddot{z}_k, \qquad (4^*)$$

где m_k — масса k-й точки, а x_k, y_k, z_k — уравнения ее движения, ввести эти результаты в уравнения (3*) и определить неизвестную силу (см. задачу 9.20).

В некоторых обратных задачах бывают заданы все внешние силы, массы всех точек системы и законы движения всех точек, кроме одной (либо законы движения некоторых точек выражены в зависимости от неизвестного закона движения этой точки), и требуется определить движение этой точки. Тогда, после выполнения первых четырех пунктов, также следует воспользоваться формулами (4*), полученные результаты ввести в левые части уравнений (3*) и затем найти искомый закон движения точки (см. задачи 9.20, 9.22).

Если в состав системы входят тела с непрерывным распределением масс, то следует записать координаты x_k, y_k, z_k центров тяжести этих тел и затем воспользоваться формулами (4*).

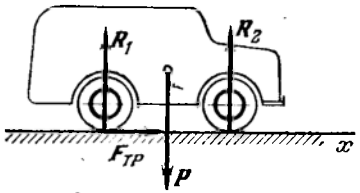
Задача 9.15. При полете снаряда в безвоздушном пространстве центр масс снаряда описывает параболу. Изменится ли траектория центра масс, если снаряд во время полета разорвется на несколько осколков?

Решение. Разрыв снаряда происходит под действием внутренних сил, которые непосредственно не влияют на движение центра масс системы. Следовательно, осколки снаряда должны перемещаться так, чтобы центр масс разорвавшегося снаряда двигался по той же траектории, т. е. по параболе.

Задача 9.16. Какая сила приводит в движение центр масс автомашины, движущейся по негладкой горизонтальной дороге?

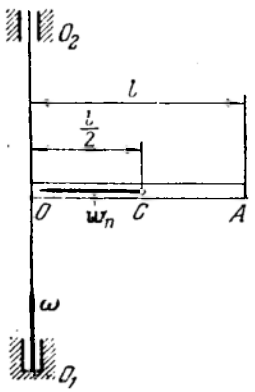
Решение. Часто ошибочно полагают, что центр масс автомашины непосредственно приводится в движение силой давления

газов в цилиндрах двигателя. Эта сила, являясь внутренней, на движение центра масс автомашины прямо не влияет. Под действием этой силы возникают вращающие моменты, приложенные к ведущим колесам. В результате появляются силы трения $F_{тр}$ между покрышками ведущих колес автомашины и землей, направленные по горизонтали в сторону движения автомашины (силами трения между покрышками ведомых колес и землей пренебрегаем).



К задаче 9.16.

Сила трения, являясь внешней по отношению к автомашине, приводит в движение его центр масс C. Действительно, записав теорему о движении центра масс системы в проекции на ось x (см. рисунок), получим $M\ddot{x}_C = F_{тр}$ (внешние силы $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{R}_1$ и $\boldsymbol{R}_2$ перпендикулярны к оси x, и их проекции на эту ось равны нулю), т. е. $\ddot{x}_C > 0$; если в начальный момент центр масс C был в покое, то он будет перемещаться ускоренно по горизонтали направо.



К задаче 9.17.

Задача 9.17. Тонкий однородный стержень OA длиной l и массы m вращается вокруг вертикальной оси O_1O_2 с постоянной угловой скоростью ω.

Определить главный вектор внешних сил. Массой оси O_1O_2 пренебречь.

Р е ш е н и е. В соответствии с теоремой о движении центра масс системы материальных точек $m\boldsymbol{w}_C = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F}_k^e$, для определения главного вектора внешних сил системы $\boldsymbol{V}^e = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F}_k^e$ достаточно найти $m\boldsymbol{w}_C$. Так как центр масс стержня находится в точке C на расстоянии $l/2$ от оси вращения и имеет, в силу постоянства вектора ω, только центростремительное ускорение $w_n = OC\omega^2 = \frac{l}{2}\omega^2$, которое направлено вдоль стержня от C к O, то главный вектор внешних сил системы $\boldsymbol{V}^e$ имеет то же направление и равен по модулю

$$V^e = mw_C = m\frac{l}{2}\omega^2.$$

В данном случае главный вектор внешних сил является векторной суммой силы тяжести стержня и реакций опор O_1 и O_2.

Задача 9.18. Твердое тело массы m колеблется около неподвижной горизонтальной оси z. Расстояние от точки привеса O до центра тяжести C равно a. Оси x и y изображены на рис. a.

Найти вертикальную и горизонтальную составляющие реакции оси в зависимости от угла поворота φ и его производных по времени.

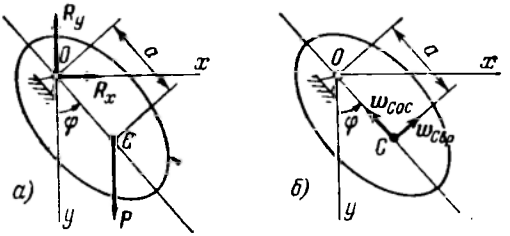
Р е ш е н и е. Для решения этой прямой задачи применим теорему (3*) о движении центра масс материальной системы в проекциях на оси x и y:

$$M\ddot{x}_C = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}^e, \quad M\ddot{y}_C = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}^e. \tag{1}$$

К твердому телу приложены внешние силы: $\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{g}$ — сила тяжести, $\boldsymbol{R}_x$ и $\boldsymbol{R}_y$ — составляющие реакции неподвижной оси. Поэтому

$$\sum F_{kx}^e = R_x, \quad \sum F_{ky}^e = P - R_y. \tag{2}$$

Для вычисления $\ddot{x}_C$ и $\ddot{y}_C$ — проекций ускорения $\boldsymbol{w}_C$ центра масс C из рисунка заметим, что $x_C = a \sin\varphi$, $y_C = a\cos\varphi$, где $\varphi = \varphi(t)$.



К задаче 9.18.

Вычислим производную по времени: $\dot{x}_C = a\dot{\varphi}\cos\varphi$, $\dot{y}_C = -a\dot{\varphi}\sin\varphi$. Далее найдем

$$\ddot{x}_C = a\ddot{\varphi}\cos\varphi - a\dot{\varphi}^2\sin\varphi, \quad \ddot{y}_C = -a\ddot{\varphi}\sin\varphi - a\dot{\varphi}^2\cos\varphi. \tag{3}$$

Для получения искомых составляющих $\boldsymbol{R}_x$ и $\boldsymbol{R}_y$ реакции неподвижной оси остается подставить результаты (2) и (3) в уравнения (1). Найдем

$$R_x = ma\ddot{\varphi}\cos\varphi - ma\dot{\varphi}^2\sin\varphi, \quad R_y = mg + ma\ddot{\varphi}\sin\varphi + ma\dot{\varphi}^2\cos\varphi. \tag{4}$$

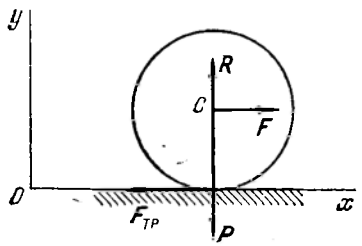
Как следует из формул (4), R_x и R_y меняются в зависимости от угла поворота φ, который в свою очередь является функцией времени.

В заключение заметим, что в данной задаче можно было найти $\ddot{x}_C$ и $\ddot{y}_C$ (формулы (3)) другим способом. Для этого достаточно построить осестремительную $\boldsymbol{w}_{C_{\text{ос}}}$ и вращательную $\boldsymbol{w}_{C_{\text{вр}}}$ составляющие ускорения $\boldsymbol{w}_C$ центра тяжести C (см. рис. *б*), где $w_{Cос} = a\dot{\varphi}^2$, $w_{Cвр} = a\,|\,\ddot{\varphi}\,|$, а затем векторное равенство $\boldsymbol{w}_C = \boldsymbol{w}_{Cвр} + \boldsymbol{w}_{Cос}$ спроектировать на оси x и y. Предоставляем читателю самостоятельно выполнить эти выкладки и получить формулы (3).

Задача 9.19. Колесо массы m катится со скольжением по прямолинейному горизонтальному рельсу под действием постоянной силы $\boldsymbol{F}$, приложенной к его центру тяжести C (см. рисунок).

Найти скорость центра масс C колеса, если в начальный момент оно находилось в покое. Коэффициент трения скольжения равен f. Оси x, y изображены на рисунке.

Р е ш е н и е. К колесу приложены внешние силы: $\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{g}$ — сила тяжести, $\boldsymbol{F}$ — движущая сила, $\boldsymbol{R}$ — нормальная реакция рельса, $\boldsymbol{F}_{\text{тр}}$ — сила трения скольжения, направленная вдоль рельса в сторону, противоположную силе $\boldsymbol{F}$.



К задаче 9.19.

Применим теорему о движении центра масс (3*) в проекциях на оси x и y:

$$m\ddot{x}_C = F - F_{\text{тр}}, \quad m\ddot{y}_C = R - P. \qquad (1)$$

При движении колеса $y_C = r = \text{const}$. Поэтому $\ddot{y}_C = 0$ и из второго уравнения (1) следует

$$R = P. \qquad (2)$$

Так как при качении колеса со скольжением сила трения достигает своего наибольшего значения, то $F_{\text{тр}} = fR$. Использовав равенство (2), запишем

$$F_{\text{тр}} = fP. \qquad (3)$$

Использовав значение (3) для $F_{\text{тр}}$ в первом уравнении (1), имеем

$$\ddot{x}_C = \frac{F - fmg}{m}. \qquad (4)$$

Первый интеграл дифференциального уравнения (4) имеет вид

$$\dot{x}_C = \frac{F - fmg}{m}\, t + C_1. \qquad (5)$$

Подстановка начального условия $t = 0$, $\dot{x}_C = 0$ (колесо в начальный момент находилось в покое) в уравнение (5) дает $C_1 = 0$. Внеся это значение C_1 в (5), получим искомый закон изменения проекции скорости центра масс C колеса:

$$\dot{x}_C = \frac{F - fmg}{m}\, t.$$

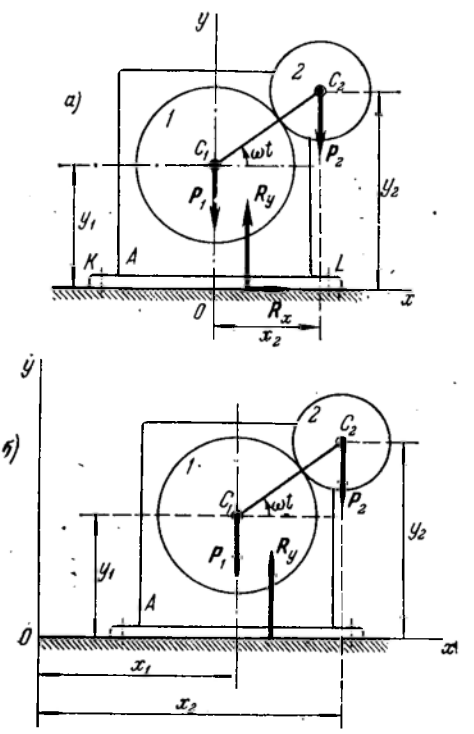
Движение колеса возможно при наличии неравенства $F > fmg$.

Задача 9.20. Эпициклический механизм, расположенный в вертикальной плоскости, установлен на горизонтальной идеально гладкой плоскости и прикреплен к ней болтами K и L.

Зубчатое колесо *1* радиуса r_1 неподвижно. C_2 — центр тяжести зубчатого колеса *2* массы M_2 и радиуса r_2. C_1 — центр тяжести станины A и колеса *1*, общая масса которых равна M_1. Массой кривошипа C_1C_2, вращающегося с постоянной угловой скоростью ω, пре-

небречь. В начальный момент кривошип занимал правое горизонтальное положение.

Определить: 1) нормальное давление механизма на плоскость, 2) угловую скорость ω вращения кривошипа, при которой механизм в условиях отсутствия болтов начнет подпрыгивать над горизонтальной плоскостью, 3) наибольшее горизонтальное усилие, действующее на болты.



К задаче 9.20.

Р е ш е н и е. Материальная система состоит из двух масс: неподвижного колеса *1* со станиной и подвижного колеса *2*. Изобразим внешние силы этой системы: $\boldsymbol{P}_1 = M_1\boldsymbol{g}$ — сила тяжести станины и неподвижного колеса *1*, $\boldsymbol{P}_2 = M_2\boldsymbol{g}$ — сила тяжести подвижного колеса *2*, $\boldsymbol{R}_y$ — суммарная нормальная реакция плоскости, $\boldsymbol{R}_x$ — суммарная тангенциальная реакция болтов K и L.

Направим ось y по вертикали через точку C_1, а ось x — вдоль горизонтальной плоскости направо.

Запишем теорему о движении центра масс системы в проекциях на оси x и y:

$$M\ddot{x}_C = \sum_{k=1}^{n} F^e_{kx}, \quad M\ddot{y}_C = \sum_{k=1}^{n} F^e_{ky}.$$

В данной задаче

$$\sum_{k=1}^{n} F^e_{kx} = R_x, \quad \sum_{k=1}^{n} F^e_{ky} = R_y - P_1 - P_2.$$

Следовательно,

$$M\ddot{x}_C = R_x, \quad M\ddot{y}_C = R_y - P_1 - P_2,$$

т. е.

$$R_x = M\ddot{x}_C, \tag{1}$$

$$R_y = M\ddot{y}_C + P_1 + P_2. \tag{2}$$

Для определения сил $\boldsymbol{R}_x$ и $\boldsymbol{R}_y$ остается подсчитать $M\ddot{x}_C$ и $M\ddot{y}_C$. Вычисление $M\ddot{x}_C$ и $M\ddot{y}_C$ ведется по формулам

$$M\ddot{x}_C = \sum_{k=1}^{n} m_k \ddot{x}_k \quad \text{и} \quad M\ddot{y}_C = \sum_{k=1}^{n} m_k \ddot{y}_k.$$

В данном случае

$$M\ddot{x}_C = M_1\ddot{x}_1 + M_2\ddot{x}_2 \quad \text{и} \quad M\ddot{y}_C = M_1\ddot{y}_1 + M_2\ddot{y}_2, \tag{3}$$

где x_1 и y_1 — координаты центра тяжести C_1 станины механизма и неподвижного колеса *1*, а x_2 и y_2 — координаты центра тяжести C_2 подвижного колеса *2*.

Как видно из рисунка, $x_1 = 0$, $y_1 = OC_1$ — постоянная, $x_2 = C_1C_2 \cos \omega t = (r_1 + r_2) \cos \omega t$ (угол поворота кривошипа C_1C_2 равен $\varphi = \omega t$, так как, по условию, ω постоянна), $y_2 = OC_1 + C_1C_2 \sin \omega t = OC_1 + (r_1 + r_2) \sin \omega t$.

Вычислив вторые производные x_1, y_1, x_2, y_2 по времени t, находим $\ddot{x}_1 = 0$, $\ddot{y}_1 = 0$,

$$\ddot{x}_2 = -(r_1 + r_2)\,\omega^2 \cos \omega t, \quad \ddot{y}_2 = -(r_1 + r_2)\,\omega^2 \sin \omega t.$$

Внеся эти значения в формулы (3), получим

$$M\ddot{x}_C = -M_2 (r_1 + r_2)\,\omega^2 \cos \omega t, \tag{4}$$

$$M\ddot{y}_C = -M_2 (r_1 + r_2)\,\omega^2 \sin \omega t. \tag{5}$$

После подстановки (4) в (1) и (5) в (2) находим

$$R_x = -M_2 (r_1 + r_2)\,\omega^2 \cos \omega t, \tag{6}$$

$$R_y = M_1 g + M_2 g - M_2 (r_1 + r_2)\,\omega^2 \sin \omega t. \tag{7}$$

Давление механизма на горизонтальную плоскость направлено противоположно реакции $\boldsymbol{R}_y$ и по модулю равно ей:

$$N_y = (M_1 + M_2)\,g - M_2 (r_1 + r_2)\,\omega^2 \sin \omega t.$$

Наибольшее давление: $N_{y\max} = (M_1 + M_2)\,g + M_2 (r_1 + r_2)\,\omega^2$.
Наименьшее давление: $N_{y\min} = (M_1 + M_2)\,g - M_2 (r_1 + r_2)\,\omega^2$.

В условиях отсутствия болтов механизм может начать подпрыгивать над горизонтальной плоскостью. Это будет иметь место при $R_{y\min} < 0$, т. е. при $(M_1 + M_2)\,g - M_2 (r_1 + r_2)\,\omega^2 < 0$, откуда следует, что угловая скорость ω вращения кривошипа C_1C_2, при которой происходит подпрыгивание механизма, должна удовлетворять неравенству

$$\omega > \sqrt{g \frac{M_1 + M_2}{M_2 (r_1 + r_2)}}.$$

Горизонтальное давление, действующее на болты, направлено противоположно $\boldsymbol{R}_x$ (см. формулу (6)), причем

$$N_x = M_2 (r_1 + r_2)\,\omega^2 \cos \omega t. \tag{8}$$

Наибольшее давление равно

$$N_{x\,max} = M_2 (r_1 + r_2) \omega^2.$$

Задача 9.21. Сохранив условие предыдущей задачи, определить закон движения центра тяжести C_1 станины механизма после среза болтов K и L.

Р е ш е н и е. Допустим, что под действием горизонтальной силы N_x, действующей на болты K и L (см. формулу (8) предыдущей задачи), произошел срез болтов. Тогда весь механизм начнет двигаться по идеально гладкой горизонтальной плоскости.

На рис. *б* к задаче 9.20 изображен механизм в положении, когда точка C_1 сместилась с оси y направо на x_1. Так как станина механизма находится в движении относительно оси x, то x_1 является функцией времени t.

Из рисунка видно, что в данном случае

$$x_2 = x_1 + C_1C_2 \cos \omega t = x_1 + (r_1 + r_2) \cos \omega t.$$

Следовательно,

$$M\ddot{x}_C = M_1\ddot{x}_1 + M_2\ddot{x}_2 = (M_1 + M_2)\ddot{x}_1 - M_2 (r_1 + r_2) \omega^2 \cos \omega t. \qquad (1)$$

Теорема о движении центра масс материальной системы в проекции на ось x имеет вид

$$M\ddot{x}_C = \sum_{k=1}^{n} F^e_{kx}.$$

Так как после среза болтов реакция $\boldsymbol{R}_x$ отсутствует, а внешние силы $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$ и $\boldsymbol{R}_y$ перпендикулярны к оси x, то $\sum_{k=1}^{n} F^e_{kx} = 0$ и $M\ddot{x}_C = 0$. Подставив в это уравнение значение $M\ddot{x}_C$ из формулы (1), получим

$$(M_1 + M_2)\ddot{x}_1 - M_2 (r_1 + r_2) \omega^2 \cos \omega t = 0,$$

т. е.

$$\ddot{x}_1 = \frac{M_2}{M_1 + M_2} (r_1 + r_2) \omega^2 \cos \omega t. \qquad (2)$$

Это — дифференциальное уравнение движения центра тяжести C_1 станины механизма по идеально гладкой горизонтальной плоскости при отсутствии болтов. Для интегрирования уравнения (2) должны быть известны начальные условия движения точки C_1. Так как в момент среза болтов точка C_1 находилась на оси y и была в покое, то начальные условия движения записываются в виде

$$\text{при } t = 0 \quad x_1 = 0 \text{ и } \dot{x}_1 = 0.$$

Проинтегрировав дифференциальное уравнение (9), получим

$$\dot{x}_1 = \frac{M_2}{M_1 + M_2} (r_1 + r_2) \omega \sin \omega t + D_1.$$

После подстановки начального условия движения $t = 0$ и $\dot{x}_1 = 0$ имеет $D_1 = 0$, т. е.

$$\dot{x}_1 = \frac{M_2}{M_1 + M_2}(r_1 + r_2)\,\omega \sin \omega t.$$

Вторично проинтегрировав, находим $x_1 = -\frac{M_2}{M_1 + M_2}(r_1 + r_2)\cos \omega t + D_2$. Использовав то, что при $t = 0$ $x_1 = 0$, имеем

$$D_2 = \frac{M_2}{M_1 + M_2}(r_1 + r_2),$$

т. е.

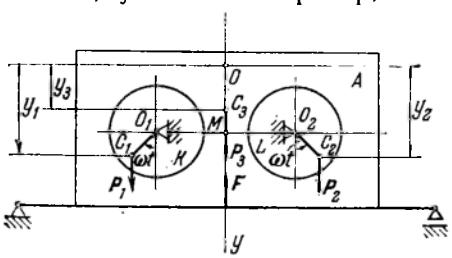
$$x_1 = \frac{M_2}{M_1 + M_2}(r_1 + r_2)(1 - \cos \omega t).$$

Итак, центр тяжести C_1 станины механизма в случае отсутствия болтов совершает гармонические колебания с амплитудой

$$\frac{M_2}{M_1 + M_2}(r_1 + r_2)$$

и круговой частотой, равной угловой скорости ω вращения кривошипа C_1C_2.

Задача 9.22. На упругой балке, коэффициент жесткости которой равен c, установлен прибор, называемый вибратором. Прибор состоит из корпуса A, в который вмонтированы два диска K и L. Эти диски вращаются с постоянной угловой скоростью ω вокруг горизонтальных осей O_1 и O_2, перпендикулярных плоскости рисунка. Массы $M_1 = M_2 = M$ дисков сосредоточены в точках C_1 и C_2. Диски вращаются в противоположные стороны, причем точки C_1 и C_2 в любой момент расположены симметрично относительно вертикальной оси, а в начальный момент занимают нижние положения. Задана также масса M_3 корпуса A.



К задаче 9.22.

Определить уравнение движения центра тяжести C_3 корпуса A, если в начальный момент точка C_3 находилась в положении статического равновесия, а скорость ее, равная по модулю v_0, была направлена по вертикали вниз. Прибор установлен в середине балки. Сопротивлением движению и массой балки пренебречь.

Р е ш е н и е. Изобразим внешние силы, приложенные к прибору: $\boldsymbol{P}_1 = M_1\boldsymbol{g}$ — сила тяжести диска K, $\boldsymbol{P}_2 = M_2\boldsymbol{g}$ — сила тяжести диска L, $\boldsymbol{P}_3 = M_3\boldsymbol{g}$ — сила тяжести корпуса A, $\boldsymbol{F}$ — суммарная сила упругости балки (считая размеры вибратора малыми по

сравнению с длиной балки, полагаем, что сила F приложена в середине балки).

Выберем начало отсчета O на оси y в положении статического равновесия центра тяжести C_3 корпуса A прибора. В этом положении середина балки имеет прогиб $\Delta_{ст}$, причем

$$\Delta_{ст} = \frac{P_1 + P_2 + P_3}{c}. \tag{1}$$

Запишем теорему о движении центра масс в проекции на ось y: $M\ddot{y}_C = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}$. В данном случае имеем

$$M\ddot{y}_C = P_1 + P_2 + P_3 + F_y, \tag{2}$$

где F_y — проекция силы упругости на ось y — равна

$$F_y = -c\,(\Delta_{ст} + y_3) \tag{3}$$

(на рисунке точка C_3 изображена в момент ее смещения из положения статического равновесия на y_3 вниз; при этом прогиб балки равен $\Delta_{ст} + y_3$).

Подставив (3) в (2) и приняв во внимание, что на основании (1) $P_1 + P_2 + P_3 - c\Delta_{ст} = 0$, получим

$$M\ddot{y}_C = -cy_3. \tag{4}$$

Для вычисления $M\ddot{y}_C$ воспользуемся формулой $M\ddot{y}_C = \sum_{k=1}^{n} M_k\ddot{y}_k$. В данную систему входят три массы. Поэтому

$$M\ddot{y}_C = M_1\ddot{y}_1 + M_2\ddot{y}_2 + M_3\ddot{y}_3. \tag{5}$$

Выразим y_1 и y_2 в зависимости от y_3. В связи с тем, что диски вращаются равномерно с постоянной угловой скоростью ω, угол поворота дисков равен $\varphi = \omega t$. Воспользовавшись рисунком, запишем

$$y_1 = y_2 = y_3 + C_3M + a\cos\omega t,$$

где C_3M — постоянная. Вычислив $\ddot{y}_1$ и $\ddot{y}_2$

$$\ddot{y}_1 = \ddot{y}_2 = \ddot{y}_3 - a\omega^2\cos\omega t$$

и подставив эти выражения в (5), получим

$$M\ddot{y}_C = (M_1 + M_2 + M_3)\,\ddot{y}_3 - (M_1 + M_2)\,a\omega^2\cos\omega t.$$

Теперь уравнение (4) примет вид

$$(M_1 + M_2 + M_3)\,\ddot{y}_3 - (M_1 + M_2)\,a\omega^2\cos\omega t = -cy_3,$$

или

$$\ddot{y}_3 + \frac{c}{M_1 + M_2 + M_3}\,y_3 = \frac{M_1 + M_2}{M_1 + M_2 + M_3}\,a\omega^2\cos\omega t.$$

По условию $M_1 = M_2 = M$, поэтому

$$\ddot{y}_3 + \frac{c}{2M + M_3}\,y_3 = \frac{2M}{2M + M_3}\,a\omega^2\cos\omega t.$$

Введя обозначения

$$\frac{c}{2M+M_3}=k^2, \quad \frac{2M}{2M+M_3}a\omega^2=h,$$

запишем окончательно дифференциальное уравнение движения точки C_3 в виде

$$\ddot{y}_3+k^2y_3=h\cos\omega t. \tag{6}$$

Проинтегрировав уравнение (6), мы найдем искомый закон движения точки C_3.

Общее решение y_3 этого неоднородного линейного уравнения равно

$$y_3=y_{3\,\text{одн}}+y_{3\,\text{частн}}, \tag{7}$$

где $y_{3\,\text{частн}}$ — частное решение уравнения (6), а $y_{3\,\text{одн}}$ — общее решение соответствующего однородного уравнения, т. е. $\ddot{y}_3+k^2y_3=0$. Характеристическое уравнение имеет вид $r^2+k^2=0$, откуда $r_{1,2}=\pm ki$. Поэтому

$$y_{3\,\text{одн}}=D_1\cos kt+D_2\sin kt, \tag{8}$$

где D_1 и D_2 — постоянные интегрирования, подлежащие последующему определению.

При отыскании частного решения $y_{3\,\text{частн}}$ следует рассмотреть колебания вне резонанса. При $\omega\neq k$ ищем частное решение в виде

$$y_{3\,\text{частн}}=A\cos\omega t+B\sin\omega t. \tag{9}$$

Для определения A и B вычислим: $\ddot{y}_{3\,\text{частн}}=-A\omega^2\cos^2\omega t-B\omega^2\sin\omega t$. Подставив эти выражения $y_{3\,\text{частн}}$ и $\ddot{y}_{3\,\text{частн}}$ в уравнение (6) и приравняв соответственно коэффициенты при $\cos\omega t$ и $\sin\omega t$, находим $A=\frac{h}{k^2-\omega^2}$, $B=0$. Внеся эти значения A и B в формулу (9), имеем частное решение в виде

$$y_{3\,\text{частн}}=\frac{h}{k^2-\omega^2}\cos\omega t. \tag{10}$$

Использовав (8) и (10) в уравнении (7), получим искомое уравнение движения точки C_3:

$$y_3=D_1\cos kt+D_2\sin kt+\frac{h}{k^2-\omega^2}\cos\omega t. \tag{11}$$

Остается определить постоянные интегрирования D_1 и D_2. Для этого вычислим

$$\dot{y}_3=-D_1k\sin kt+D_2k\cos kt-\frac{h\omega}{k^2-\omega^2}\sin\omega t. \tag{12}$$

Подставив в уравнение (11) $t=0$, $y_3=0$ (по условию, в начальный момент точка C_3 находилась в положении статического равновесия) и в уравнение (12) $t=0$, $\dot{y}_3=v_0$ (по условию, в начальный момент

точка C_3 имела скорость, равную по модулю v_0 и направленную вертикально вниз), находим

$$D_1 = -\frac{h}{k^2 - \omega^2}, \quad D_2 = \frac{v_0}{k}.$$

Внеся эти значения D_1 и D_2 в формулу (11), мы получим искомое уравнение движения точки C_3 вне режима резонанса:

$$y_3 = -\frac{h}{k^2 - \omega^2}\cos kt + \frac{v_0}{k}\sin kt + \frac{h}{k^2 - \omega^2}\cos \omega t,$$

где круговая частота свободных колебаний равна

$$k = \sqrt{\frac{c}{2M + M_3}}, \quad \text{а} \quad h = \frac{2M}{2M + M_3}a\omega^2.$$

Напомним, что полученный результат описывает движение вибратора вне резонанса.

Вибратор не должен работать в режиме резонанса, т. е. при $\omega = k$, ибо при этом амплитуды вынужденных колебаний будут неограниченно возрастать, что выводит вибратор из строя. В этом нетрудно убедиться, так как при резонансе ($\omega = k$) частное решение $y_{3\,\text{части}}$ надо искать в виде

$$y_{3\,\text{части}} = At\cos \omega t + Bt\sin \omega t. \tag{13}$$

Для определения A и B вычислим

$$\dot{y}_{3\,\text{части}} = A\cos \omega t - A\omega t\sin \omega t + B\sin \omega t + B\omega t\cos \omega t, \tag{14}$$

$$\ddot{y}_{3\,\text{части}} = -2A\omega\sin \omega t - A\omega^2 t\cos \omega t + 2B\omega\cos \omega t - B\omega^2 t\sin \omega t.$$

Подставив (13) и (14) в (6), приняв во внимание, что $\omega = k$, и приравняв коэффициенты при $\sin \omega t$ и $\cos \omega t$, находим $A = 0$, $B = h/(2\omega)$.

Подстановка этих значений A и B в (13) дает

$$y_{3\,\text{части}} = \frac{h}{2\omega}t\sin \omega t. \tag{15}$$

Теперь на основании (7), используя формулы (8) и (15), запишем искомое уравнение движения точки C_3 в случае резонанса:

$$y_3 = D_1\cos kt + D_2\sin kt + \frac{h}{2\omega}t\sin \omega t.$$

Так как $k = \omega$, то

$$y_3 = D_1\cos \omega t + D_2\sin \omega t + \frac{h}{2\omega}t\sin \omega t. \tag{16}$$

Для определения постоянных интегрирования D_1 и D_2 вычислим

$$\dot{y}_3 = -D_1\omega\sin \omega t + D_2\omega\cos \omega t + \frac{h}{2\omega}\sin \omega t + \frac{h}{2}t\cos \omega t. \tag{17}$$

Подставив начальные условия $t = 0$, $y_3 = 0$ в (16) и $t = 0$, $\dot{y}_3 = v_0$ в (17), находим $D_1 = 0$, $D_2 = v_0/\omega$. Итак, уравнение движения точки C_3 после подстановки значений D_1 и D_2 в формулу (16) в случае резонанса окончательно принимает вид

$$y_3 = \left(\frac{v_0}{\omega} + \frac{h}{2\omega} t\right) \sin \omega t, \tag{18}$$

где

$$\omega = k = \sqrt{\frac{c}{2M + M_3}}, \quad h = \frac{2M}{2M + M_3} a\omega^2.$$

В формуле (18) время t стоит множителем вне тригонометрической функции. Поэтому смещения y_3 с течением времени неограниченно возрастают, что приводит к поломке всей установки.

С помощью вибратора можно экспериментально определить круговую частоту k свободных колебаний балки. Для этого постепенно увеличивают угловую скорость ω вращения дисков и фиксируют то значение $\omega_{рез}$, при котором начинаются вынужденные колебания больших амплитуд, т. е. наступает резонанс. При резонансе $k = \omega_{рез}$, где k — искомая круговая частота свободных колебаний балки.

Указание. Рекомендуем решить следующие задачи из «Сборника задач по теоретической механике» И. В. Мещерского: 35.1—35.3, 35.6—35.15.

2. Случай сохранения скорости центра масс материальной системы. Если главный вектор внешних сил системы равен нулю $\left(\boldsymbol{V}^e = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F}_k^e = 0\right)$, то скорость центра масс системы неизменна по величине и направлению ($\boldsymbol{v}_C$ — постоянна), т. е. центр масс системы материальных точек движется равномерно и прямолинейно либо находится в покое.

Если в частном случае скорость центра масс равна нулю: $\boldsymbol{v}_C = 0$ (что, например, имеет место при покое системы в начальный момент), то, несмотря на состояние покоя центра масс, материальные точки системы могут перемещаться, и притом только так, что сумма произведений масс точек на их скорости равна нулю, т. е. $\sum_{k=1}^{n} m_k \boldsymbol{v}_k = 0$. При этом имеет место зависимость $\sum_{k=1}^{n} m_k \Delta \boldsymbol{r}_k = 0$, где $\Delta \boldsymbol{r}_k$ — перемещение k-й материальной точки.

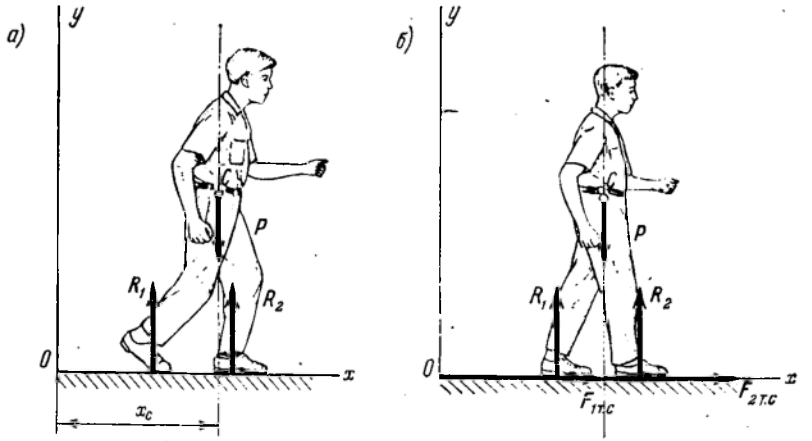
Аналогично в проекции на ось x: если $\sum_{k=1}^{n} F_{kx}^e = 0$, то $\dot{x}_C$ — постоянная. Если же в частном случае $\dot{x}_C = 0$, то $\sum_{k=1}^{n} m_k v_{kx} = 0$, причем

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k = 0, \tag{5*}$$

где Δx_k — проекция перемещения k-й материальной точки на ось x.

Задача 9.23. Может ли человек ходить по идеально гладкой горизонтальной плоскости?

Р е ш е н и е. Внешними силами, приложенными к человеку, являются его вес $P = Mg$ и суммарная нормальная реакция земли $\boldsymbol{R}$. Горизонтальная реакция отсутствует, ибо плоскость является идеально гладкой.



К задаче 9.23.

Направив ось x по горизонтали направо, запишем теорему о движении центра масс в проекции на ось x:

$$M\ddot{x}_C = \sum_{k=1}^{n} F^e_{kx}.$$

Так как силы $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{R}$ перпендикулярны к оси x, то $\sum_{k=1}^{n} F^e_{kx} = 0$ и, следовательно, $M\ddot{x}_C = 0$, откуда $M\dot{x}_C = C_1 = \text{const}$. Так как в начальный момент человек находился в покое, то $C_1 = 0$ и $M\dot{x}_C = 0$. Значит, $Mx_C = C_2 = \text{const}$, т. е. абсцисса центра масс C человека остается неизменной и человек по гладкой горизонтальной плоскости не может ходить. Если бы человек все же попытался пойти, подняв и выставив, например, левую ногу вперед, то правая нога его переместилась бы назад настолько, чтобы абсцисса центра масс x_C осталась бы неизменной. Человек мог бы переместиться по гладкой горизонтальной плоскости, бросив какой-нибудь предмет вперед (или назад); тогда бы он начал двигаться в противоположном направлении, т. е. назад (или вперед).

Если бы человек, стоящий на гладкой горизонтальной плоскости, хотел подпрыгнуть, то он мог бы это совершить. Действительно,

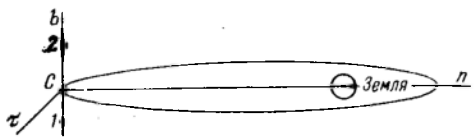
теорема о движении центра масс системы материальных точек в проекции на ось y дает

$$M\ddot{y}_C = R - Mg;$$

при отталкивании от земли за счет деформации мышц получим $R > Mg$, т. е. $\ddot{y}_C > 0$, следовательно, центр масс человека будет перемещаться по вертикали вверх.

Человек может ходить по негладкой горизонтальной плоскости, так как в этом случае к упомянутым внешним силам добавляется сила трения скольжения $\boldsymbol{F}_{\text{т. с}}$ подошв человека о землю, направленная в сторону движения (см. рис. *б*). В этом случае получим $M\ddot{x}_C = F_{\text{т. с}}$, т. е. $\ddot{x}_C > 0$, и центр масс человека C будет ускоренно перемещаться по горизонтали направо.

Задача 9.24. При выходе из ракеты в космическое пространство космонавт, оттолкнувшись от корпуса ракеты, переместился по бинормали к траектории (см. рисунок) на 10 м.



К задаче 9.24.

Определить соответствующее перемещение ракеты, если масса космонавта равна двум процентам массы ракеты. Массой троса, соединяющего космонавта с ракетой, пренебречь. Ракета движется по эллиптической траектории, в одном из фокусов которой находится Земля.

Р е ш е н и е. Ускорение центра масс, как ускорение любой точки, лежит в соприкасающейся плоскости траектории. Главный вектор всех внешних сил, в соответствии с уравнением $M\boldsymbol{w}_C = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F}_k^l = \boldsymbol{V}^l$, также лежит в этой плоскости. Поэтому их проекции на бинормаль b, которая перпендикулярна к соприкасающейся плоскости, равны нулю. Скорость центра масс направлена по касательной. Это значит, что и ее проекция на бинормаль также равна нулю. Значит, можно применять формулу (5*), приведенную в обзоре теории, применительно к бинормали b:

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \Delta b_k = 0, \qquad (1)$$

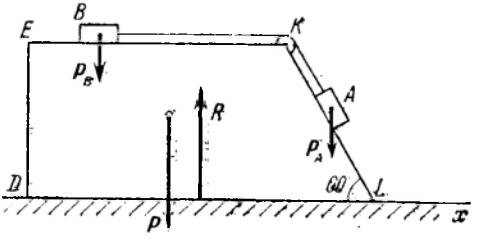
где Δb_k — проекция перемещения k-й материальной точки на бинормаль. Для данного случая двух масс формула (1) примет вид

$$m_1 \Delta b_1 + m_2 \Delta b_2 = 0, \qquad (2)$$

где индексом 1 обозначена ракета, а индексом 2—космонавт. Из формулы (2) найдем: $\Delta b_1 = -\frac{m_2}{m_1} \Delta b_2$. Подставив численные данные, получим $\Delta b_1 = -20$ см. Знак минус показывает, что ракета переместится в сторону, противоположную перемещению космонавта.

Задача 9.25. По наклонной плоскости KL усеченной четырехугольной призмы $DEKL$ опускается груз A массы $M_A = 10$ кг, приводя в движение посредством невесомой нерастяжимой нити груз B массы $M_B = 6$ кг.

Найти перемещение призмы $DEKL$ массы $M_{пр} = 20$ кг по идеально гладкой горизонтальной плоскости, если груз A переместился по наклонной плоскости KL вниз на 1 м. В начальный момент система находилась в покое.



К задаче 9.25.

Р е ш е н и е. Изобразим все внешние силы, приложенные к материальной системе, состоящей из призмы и двух грузов. Внешними силами являются: $\boldsymbol{P} = M_{пр}\boldsymbol{g}$ — сила тяжести призмы, $\boldsymbol{P}_A = M_A\boldsymbol{g}$ — сила тяжести груза A, $\boldsymbol{P}_B = M_B\boldsymbol{g}$ — сила тяжести груза B и $\boldsymbol{R}$ — суммарная нормальная реакция горизонтальной плоскости. Так как горизонтальная плоскость идеально гладкая, то сила трения скольжения между призмой $DEKL$ и горизонтальной плоскостью отсутствует. Направим ось x по горизонтали направо и запишем теорему о движении центра масс материальной системы в проекции на эту ось:

$$M\ddot{x}_C = \sum_{k=1}^{n} F^e_{kx}.$$

Так как все внешние силы перпендикулярны к оси x, то $\sum_{k=1}^{n} F^e_{kx} = 0$. Следовательно, $M\dot{x}_C = 0$. Тогда

$$M\dot{x}_C = C_1.$$

В начальный момент времени система находилась в покое; поэтому $C_1 = 0$ и $M\dot{x}_C = 0$. Отсюда следует, что

$$Mx_C = C_2,$$

т. е. абсцисса центра масс системы, независимо от перемещений отдельных масс, входящих в систему, остается постоянной. При этом можно применить формулу (5*):

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k = 0.$$

Применительно к данной задаче запишем

$$M_A \Delta x_A + M_B \Delta x_B + M_{пр} \Delta x = 0,$$

где Δx — искомое перемещение призмы по горизонтальной плоскости. Получим.

$$10(\Delta x + 1 \cdot \cos 60^\circ) + 6\,(\Delta x + 1) + 20\,\Delta x = 0.$$

(При решении подобных задач часто допускается грубая ошибка: проекции перемещений масс, входящих в систему, записываются не для абсолютного, а для относительного движения. Переносным является движение призмы по горизонтальной плоскости, а относительным — движения грузов A и B по отношению к призме.)

Решив уравнение относительно Δx, находим: $\Delta x = -11/36$ м. Знак минус указывает, что призма перемещается в сторону, противоположную положительному направлению оси x, т. е. налево.

Указание. Рекомендуем решить следующие задачи из «Сборника задач по теоретической механике» И. В. Мещерского: 35.16, 35.17, 35.19. 35.20.

§ 4. Теорема об изменении главного вектора количеств движения материальной системы

1. Импульс силы. Количество движения материальной точки. Главный вектор количеств движения материальной системы. *Импульс силы* $\boldsymbol{F}$, действующей в течение промежутка времени $t_2 - t_1$, определяется формулой

$$\boldsymbol{S} = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}\,dt. \qquad (1^*)$$

В частном случае постоянной по модулю и направлению силы импульс силы равен

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{F}\cdot(t_2 - t_1).$$

Проекции импульса силы на оси декартовых координат равны

$$S_x = \int_{t_1}^{t_2} F_x\,dt, \quad S_y = \int_{t_1}^{t_2} F_y\,dt, \quad S_z = \int_{t_1}^{t_2} F_z\,dt, \qquad (2^*)$$

где $\boldsymbol{S} = S_x\boldsymbol{i} + S_y\boldsymbol{j} + S_z\boldsymbol{k}$, а F_x, F_y, F_z — проекции силы $\boldsymbol{F}$. Модуль импульса силы

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2}.$$

Направляющие косинусы определяются по формулам

$$\cos(\widehat{x, S}) = \frac{S_x}{S}, \quad \cos(\widehat{y, S}) = \frac{S_y}{S}, \quad \cos(\widehat{z, S}) = \frac{S_z}{S}.$$

Импульс силы в системе СИ измеряется в кг·м/с.

Как следует из формул (2*), вычислить интегралы, а следовательно, проекции импульса силы, возможно только в тех случаях, когда сила постоянна либо зависит от времени. Если же сила зависит от положения, скорости или ускорения точки, то вычислить проекции

импульса и, значит, импульс невозможно (здесь имеется в виду, что закон движения точки неизвестен).

Теорема об импульсе равнодействующей силы. Импульс равнодействующей силы за некоторый промежуток времени равен векторной сумме импульсов сил системы за тот же промежуток времени

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R}) = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{S}(\boldsymbol{F}_k).$$

Та же теорема в проекциях на оси декартовых координат имеет вид

$$S_x(\boldsymbol{R}) = \sum_{k=1}^{n} S_x(\boldsymbol{F}_k), \quad S_y(\boldsymbol{R}) = \sum_{k=1}^{n} S_y(\boldsymbol{F}_k), \quad S_z(\boldsymbol{R}) = \sum_{k=1}^{n} S_z(\boldsymbol{F}_k).$$

Количество движения $\boldsymbol{q}$ *материальной точки массы* m, движущейся со скоростью $\boldsymbol{v}$, определяется формулой

$$\boldsymbol{q} = m\boldsymbol{v},$$

т. е. количество движения — вектор, пропорциональный скорости точки.

Количество движения является одной из мер движения материальной точки.

Проекции количества движения материальной точки на оси декартовых координат имеют вид

$$q_x = mv_x, \quad q_y = mv_y, \quad q_z = mv_z$$

или

$$q_x = m\dot{x}, \quad q_y = m\dot{y}, \quad q_z = m\dot{z}.$$

Модуль количества движения материальной точки

$$q = \sqrt{q_x^2 + q_y^2 + q_z^2}.$$

Направляющие косинусы:

$$\cos(\widehat{x, q}) = \frac{q_x}{q}, \quad \cos(\widehat{y, q}) = \frac{q_y}{q}, \quad \cos(\widehat{z, q}) = \frac{q_z}{q}.$$

Количество движения в системе СИ измеряется в кг·м/с.

Главный вектор количеств движения материальной системы

$$\boldsymbol{Q} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{q}_k = \sum_{k=1}^{n} m_k \boldsymbol{v}_k = M\boldsymbol{v}_C,$$

являющийся векторной суммой количеств движения точек материальной системы, равен произведению массы системы на скорость ее центра масс.

Проекции главного вектора количеств движения материальной системы на оси декартовых координат даются формулами

$$Q_x = \sum_{k=1}^{n} m_k \dot{x}_k = M\dot{x}_C, \quad Q_y = \sum_{k=1}^{n} m_k \dot{y}_k = M\dot{y}_C, \quad Q_z = \sum_{k=1}^{n} m_k \dot{z}_k = M\dot{z}_C,$$

где $\boldsymbol{Q} = Q_x\boldsymbol{i} + Q_y\boldsymbol{j} + Q_z\boldsymbol{k}$.

Модуль главного вектора количеств движения системы материальных точек

$$Q = \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2 + Q_z^2}.$$

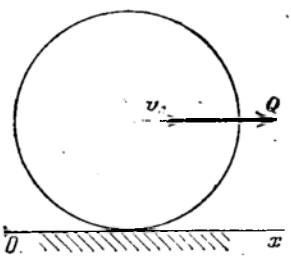
Направляющие косинусы:

$$\cos(\widehat{x, Q}) = \frac{Q_x}{Q}, \quad \cos(\widehat{y, Q}) = \frac{Q_y}{Q}, \quad \cos(\widehat{z, Q}) = \frac{Q_z}{Q}.$$

Задача 9.26. Диск вращается вокруг неподвижной оси. Центр тяжести диска лежит на оси вращения. Как изменится главный вектор количеств движения диска, если угловая скорость диска увеличится в два раза?

Р е ш е н и е. Так как центр тяжести диска лежит на оси вращения, то $v_C = 0$ и, следовательно, $Q = Mv_C = 0$. Поэтому главный вектор количеств движения в данном случае от угловой скорости не зависит и равен нулю.

Задача 9.27. Определить главный вектор количеств движения колеса массы M катящегося по прямолинейному рельсу, если центр тяжести колеса движется по закону $x_C = at$.



К задаче 9.27.

Р е ш е н и е. Главный вектор количеств движения колеса

$$Q = Mv_C,$$

где M — масса, а v_C — скорость центра тяжести колеса.

В рассматриваемом случае $v_C = \dot{x}_C = a$, т. е.

$$Q = Ma.$$

Вектор Q коллинеарен v_C, т. е. направлен по горизонтали направо (на рисунке он изображен приложенным в точке C).

Задача 9.28. Балка A массы M_1 перемещается по горизонтали направо посредством двух катушек B и D массы M_2 и радиуса r каждая, катящихся по земле без скольжения. Скорость центра тяжести каждой из катушек равна v

Определить главный вектор количеств движения системы. Балка находится от земли на расстоянии $r + a$ (см. рисунок).

Р е ш е н и е. Главный вектор количеств движения системы

$$Q = Q_A + Q_B + Q_D,$$

где Q_A — главный вектор количеств движения балки A, Q_B и Q_D — главные векторы количеств движения катушек B и D.

Имеем

$$Q_A = M_1 v_A, \quad Q_B = Q_D = M_2 v.$$

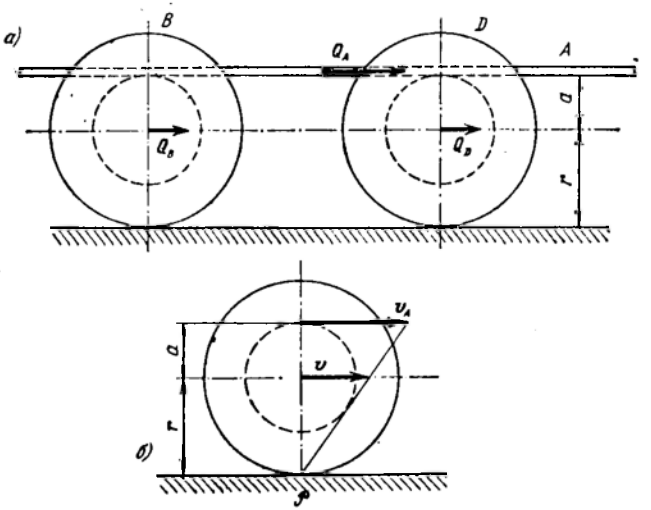
Учитывая, что мгновенный центр скоростей $\mathcal{P}$ каждой из катушек находится в точке касания катушки с землей (см. рис. *б*), находим

$$v_A = \frac{r+a}{r} v.$$

Итак,

$$Q = M_1 v_A + 2M_2 v = \left(\frac{r+a}{r} M_1 + 2M_2\right) v.$$

Таким образом, направление главного вектора количеств движения системы совпадает с направлением движения балки.



К задаче 9.28.

Задача 9.29. Определить главный вектор количеств движения кривошипно-ползунного механизма, рассмотренного в задаче 9.1, если массы кривошипа и шатуна равны m, а масса ползуна $m/2$.

Р е ш е н и е. Проекции главного вектора количеств движения механизма на оси x и y даются формулами

$$Q_x = M\dot{x}_C, \quad Q_y = M\dot{y}_C, \tag{1}$$

где масса механизма $M = m + m + {}^1/_2 m = {}^5/_2 m$.

Использовав формулы (3) задачи 9.1: $x_C = \frac{6}{5} l\cos\omega t$, $y_C = \frac{2}{5} l\sin\omega t$, вычислим производные по времени:

$$\dot{x}_C = -\frac{6}{5} l\omega \sin\omega t, \quad \dot{y}_C = \frac{2}{5} l\omega\cos\omega t. \tag{2}$$

Внеся значения (2) в формулы (1), найдем $Q_x = -3ml\omega \sin \omega t$, $Q_y = ml\omega \cos \omega t$. Теперь вычислим модуль искомого главного вектора количеств движения кривошипно-ползунного механизма:

$$Q = \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2} = ml\omega \sqrt{9 \sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t}.$$

Косинус угла, который образует вектор $\boldsymbol{Q}$ с осью x, равен

$$\cos (\widehat{x, \boldsymbol{Q}}) = \frac{Q_x}{Q} = -3 \frac{\sin \omega t}{\sqrt{9 \sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t}},$$

а осью y

$$\cos (\widehat{y, \boldsymbol{Q}}) = \frac{Q_y}{Q} = \frac{\cos \omega t}{\sqrt{9 \sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t}}.$$

Как и следовало ожидать, при движении механизма его главный вектор количеств движения $\boldsymbol{Q}$ является переменным, зависящим от времени.

Указание. Рекомендуем решить следующие задачи из «Сборника задач по теоретической механике» И. В. Мещерского: 36.1, 36.3, 36.4, 36.6.

2. Теорема об изменении количества движения материальной точки (в интегральной форме). Изменение количества движения материальной точки за конечный промежуток времени равно векторной сумме импульсов сил, приложенных к точке за тот же промежуток времени:

$$\boldsymbol{q}_2 - \boldsymbol{q}_1 = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{S}(\boldsymbol{F}_k),$$

где $\boldsymbol{q}_1$ соответствует начальному моменту времени t_1, а $\boldsymbol{q}_2$ — конечному моменту времени t_2. Та же теорема в проекциях на оси декартовых координат имеет вид

$$m\dot{x}_2 - m\dot{x}_1 = \sum_{k=1}^{n} S_x(\boldsymbol{F}_k), \quad m\dot{y}_2 - m\dot{y}_1 = \sum_{k=1}^{n} S_y(\boldsymbol{F}_k),$$

$$m\dot{z}_2 - m\dot{z}_1 = \sum_{k=1}^{n} S_z(\boldsymbol{F}_k).$$

С помощью теоремы об изменении количества движения материальной точки можно решать задачи, в которых в число данных и неизвестных входят: масса m материальной точки, скорость точки в начальный и конечный моменты времени ($\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$) силы, приложенные к материальной точке, и промежуток времени их действия.

Для вычисления импульса силы по формуле $\boldsymbol{S} = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}\, dt$ должна быть известна зависимость силы от времени, т. е. в случае сил, зависящих от координат и скоростей, надо знать закон движения точки.

Указание. Задачи на применение теоремы об изменении количества движения материальной точки следует решать в такой последовательности:

1) изобразить на рисунке все силы, приложенные к материальной точке, т. е. активные силы и реакции связей (применить закон освобождаемости от связей);

2) выбрать систему координат;

3) записать теорему об изменении количества движения материальной точки в проекциях на эти оси:

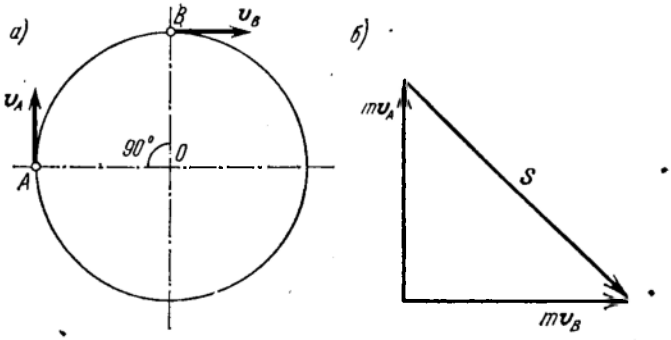
$$m\dot{x}_2 - m\dot{x}_1 = \sum_{k=1}^{n} S_x(F_k), \quad m\dot{y}_2 - m\dot{y}_1 = \sum_{k=1}^{n} S_y(F_k),$$

$$m\dot{z}_2 - m\dot{z}_1 = \sum_{k=1}^{n} S_z(F_k);$$

4) а) если в задаче требуется определить начальную или конечную скорости точки при заданном законе изменения сил и промежутке времени их действия, то, вычислив проекции импульсов сил по формулам

$$S_x = \int_{t_1}^{t_2} F_x\,dt, \quad S_y = \int_{t_1}^{t_2} F_y\,dt, \quad S_z = \int_{t_1}^{t_2} F_z\,dt$$

и подставив их значения в уравнения предыдущего пункта, определяют искомые проекции скорости точки;



К задаче 9.30.

б) если по условию задачи требуется определить одну из постоянных сил, приложенных к материальной точке, то ее можно легко получить из уравнений пункта 3), так как в этом случае

$$S_x = F_x(t_2 - t_1), \quad S_y = F_y(t_2 - t_1), \quad S_z = F_z(t_2 - t_1).$$

Задача 9.30. Материальная точка массы m движется равномерно по окружности со скоростью v под действием некоторой системы сил.

Определить импульс равнодействующей этой системы сил при перемещении материальной точки по дуге четверти окружности из точки A в точку B.

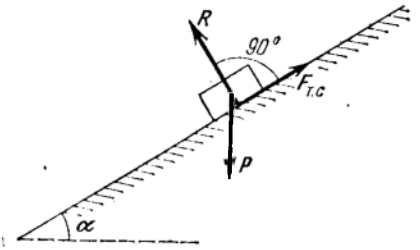
Р е ш е н и е. Применяем теорему об изменении количества движения материальной точки:

$$m\boldsymbol{v}_2 - m\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{S}.$$

Так как $m\boldsymbol{v}_2 = m\boldsymbol{v}_B$, а $m\boldsymbol{v}_1 = m\boldsymbol{v}_A$, то

$$\boldsymbol{S} = m\boldsymbol{v}_B - m\boldsymbol{v}_A.$$

Построив векторы количеств движения $m\boldsymbol{v}_B$ и $m\boldsymbol{v}_A$ из одной точки (см. рис. *б*), находим их разность, равную импульсу равнодействующей силы $\boldsymbol{S}$. Так как точка движется равномерно, т. е. $|\boldsymbol{v}_B| = |\boldsymbol{v}_A| = v$, то $|\boldsymbol{S}| = mv\sqrt{2}$.



К задаче 9.31.

Задача 9.31. Груз спускается вниз по шероховатой наклонной плоскости, расположенной под углом α к горизонту; f — коэффициент трения скольжения груза о наклонную плоскость. В начальный момент времени скорость груза равнялась v.

Через какой промежуток времени скорость груза удвоится?

Р е ш е н и е. Изобразим силы, приложенные к грузу: $\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{g}$ — сила тяжести груза, $\boldsymbol{R}$ — нормальная реакция плоскости, $\boldsymbol{F}_{т.с}$ — сила трения скольжения груза о плоскость, причем $F_{т.с} = fN = fP\cos\alpha$.

Направляем ось x вдоль наклонной плоскости вниз.

Запишем теорему об изменении количества движения материальной точки в проекции на ось x:

$$mv_{2x} - mv_{1x} = \sum_{k=1}^{n} S_x(\boldsymbol{F}_k).$$

Согласно условию задачи $v_{1x} = v$, $v_{2x} = 2v$. Так как все силы, приложенные к грузу, постоянны, то

$$\sum_{k=1}^{n} S_x(\boldsymbol{F}_k) = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}\,\Delta t = (mg\sin\alpha - F_{т.с})\,\Delta t = mg(\sin\alpha - f\cos\alpha)\,\Delta t,$$

где Δt — искомый промежуток времени. Следовательно,

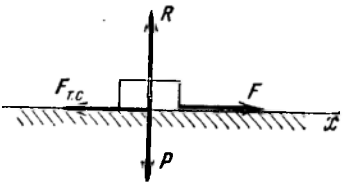
$$2mv - mv = mg(\sin\alpha - f\cos\alpha)\,\Delta t,$$

откуда

$$\Delta t = \frac{v}{g(\sin\alpha - f\cos\alpha)}.$$

Задача 9.32. Твердое тело массы m начинает двигаться из состояния покоя по шероховатой горизонтальной плоскости под действием силы F, пропорциональной времени: $F = at$, где a — постоянная.

Какую скорость приобретет тело через t секунд после начала движения, если коэффициент трения скольжения тела о горизонтальную плоскость равен f?



К задаче 9.32.

Р е ш е н и е. Изобразим силы, приложенные к телу: $\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{g}$ — сила тяжести, $\boldsymbol{F}$ — движущая сила, равная по модулю $F = at$, $\boldsymbol{R}$ — нормальная реакция горизонтальной плоскости, $\boldsymbol{F}_{т.с}$ — сила трения скольжения тела о горизонтальную плоскость, причем $F_{т.с} = fP$.

Направим ось x по горизонтали направо.

Запишем теорему об изменении количества движения материальной точки в проекции на ось x:

$$mv_{2x} - mv_{1x} = \sum_{k=1}^{n} S_x(F_k).$$

По условию $v_{1x} = 0$, так как в начальный момент тело находилось в покое; $v_{2x} = v_x$, где v_x — проекция искомой скорости на ось x. Сумма проекций импульсов всех сил на ось x равна

$$\sum_{k=1}^{n} S_x(F_k) = \int_0^t F\,dt - F_{т.с} \cdot t = \int_0^t at\,dt - fmgt = \frac{at^2}{2} - fmgt.$$

Следовательно,

$$mv_x = \frac{at^2}{2} - fmgt,$$

откуда

$$v_x = t\left(\frac{at}{2m} - fg\right).$$

У к а з а н и е. Рекомендуем решить следующие задачи из «Сборника задач по теоретической механике» И. В. Мещерского: 28.1—28.3, 28.6, 28.7, 28.9.

3. Теорема об изменении главного вектора количеств движения материальной системы (в интегральной форме). Изменение главного вектора количеств движения материальной системы за некоторый промежуток времени равно векторной сумме импульсов всех внешних сил системы за тот же промежуток времени:

$$\boldsymbol{Q}_2 - \boldsymbol{Q}_1 = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{S}(\boldsymbol{F}_k^e).$$

Та же теорема в проекциях на оси декартовых координат имеет вид

$$Q_{2x} - Q_{1x} = \sum_{k=1}^{n} S_x(\boldsymbol{F}_k^e), \quad Q_{2y} - Q_{1y} = \sum_{k=1}^{n} S_y(\boldsymbol{F}_k^e),$$

$$Q_{2z} - Q_{1z} = \sum_{k=1}^{n} S_z(\boldsymbol{F}_k^e),$$

т. е.

$$M\dot{x}_{C_2} - M\dot{x}_{C_1} = \sum_{k=1}^{n} S_x(\boldsymbol{F}_k^e), \quad M\dot{y}_{C_2} - M\dot{y}_{C_1} = \sum_{k=1}^{a} S_y(\boldsymbol{F}_k^e),$$

$$M\dot{z}_{C_2} - M\dot{z}_{C_1} = \sum_{k=1}^{n} S_z(\boldsymbol{F}_k^e).$$

Следует обратить внимание на то, что сумма импульсов внутренних сил системы всегда равна нулю: $\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{S}(\boldsymbol{F}_k^i) = 0$, т. е. внутренние силы непосредственно не влияют на изменение главного вектора количеств движения системы материальных точек.

Отсутствие внутренних сил в формулировке теоремы об изменении главного вектора количеств движения системы материальных точек значительно упрощает решение соответствующих задач.

Эта теорема обычно применяется в случае сплошных сред (см. ниже теорему Эйлера).

Случай сохранения главного вектора количеств движения системы материальных точек.

Если векторная сумма импульсов внешних сил системы равна нулю, то главный вектор количеств движения системы материальных точек постоянен, т. е. если $\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{S}(\boldsymbol{F}_k^e) = 0$, то $\boldsymbol{Q}_2 = \boldsymbol{Q}_1$.

Если сумма проекций импульсов внешних сил на некоторую ось равна нулю, то проекция на эту ось главного вектора количеств движения системы неизменна. Например, если

$$\sum_{k=1}^{n} S_x(\boldsymbol{F}_k^e) = 0, \quad \text{то} \quad Q_{2x} = Q_{1x}.$$

Закон сохранения главного вектора количеств движения материальной системы или сохранения его проекции чаще всего применяется при решении задач, в которых в число данных и искомых величин входят массы материальных точек и их скорости в начальный и конечный моменты времени.

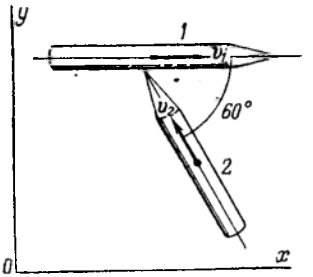
Указание. Решать задачи с помощью закона сохранения главного вектора количеств движения надо в такой последовательности:

1) изобразить на рисунке все внешние силы;
2) выбрать систему координат;

3) записать теорему об изменении главного вектора количеств движения материальной системы в проекциях на оси координат;

4) если сумма проекций импульсов внешних сил на ось оказывается равной нулю, например $\sum_{k=1}^{n} S_x(\boldsymbol{F}_k^e) = 0$, то следует приравнять между собой проекции на эту ось главного вектора количеств движения системы в начальный и конечный моменты времени, т. е. $Q_{2x} = Q_{1x}$, где $Q_{2x} = \sum_{k=1}^{n} m_k \dot{x}_{k2}$ и $Q_{1x} = \sum_{k=1}^{n} m_k \dot{x}_{k1}$, и из полученного уравнения определить искомую величину.

Задача 9.33. В открытом море лайнер *2* массой m_2, шедший со скоростью $v_2 = 37$ км/ч, врезался носом под углом 60° в правый борт лайнера *1* массой m_1, шедшего со скоростью $v_1 = 40$ км/ч (на рисунке дан вид в плане).



К задаче 9.33.

Приближенно считая лайнеры точечными массами, определить их общую скорость в конце столкновения. Машины при этом были выключены. Силой сопротивления воды пренебречь. Отношение масс лайнеров равно $m_1/m_2 = 1{,}2$; оси x и y изображены на рисунке.

Р е ш е н и е. Применим теорему об изменении главного вектора количеств движения материальной системы в проекциях на оси x и y:

$$Q_{2x} - Q_{1x} = \sum_{k=1}^{n} S_x(\boldsymbol{F}_k^e), \quad Q_{2y} - Q_{1y} = \sum_{k=1}^{n} S_y(\boldsymbol{F}_k^e). \qquad (1)$$

В состав рассматриваемой материальной системы входят оба лайнера. Поэтому силы их взаимного давления являются внутренними. Внешними являются силы тяжести лайнеров и нормальные реакции воды. Они перпендикулярны плоскости xy. Поэтому проекции импульсов внешних сил на оси x и y равны нулю:

$$\sum_{k=1}^{n} S_x(\boldsymbol{F}_k^e) = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} S_y(\boldsymbol{F}_k^e) = 0. \qquad (2)$$

Воспользовавшись результатом (2), из формул (1) получим $Q_{2x} - Q_{1x} = 0$, $Q_{2y} - Q_{1y} = 0$, т. е. имеет место случай сохранения проекций на оси x и y главного вектора количеств движения материальной системы:

$$Q_{2x} = Q_{1x}, \quad Q_{2y} = Q_{1y}. \qquad (3)$$

Здесь индексы 1 соответствуют моменту начала, а индексы 2 — конца столкновения.

Так как $Q_x = \sum_{k=1}^{n} m_k v_{kx}$, $Q_y = \sum_{k=1}^{n} m_k v_{ky}$, то для двух масс запишем:

$$Q_x = m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x}, \quad Q_y = m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y}. \tag{4}$$

В соответствии с направлением скоростей $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ перед столкновением (см. рисунок) имеем $v_{1x} = v_1$, $v_{1y} = 0$, $v_{2x} = -v_2 \cos 60°$, $v_{2y} = v_2 \cos 30°$. Поэтому из формул (4) следует:

$$Q_{1x} = m_1 v_1 - m_2 v_2 \cos 60°, \quad Q_{1y} = m_2 v_2 \cos 30°. \tag{5}$$

В конце столкновения лайнеры приобрели искомую общую скорость $\boldsymbol{v}$, проекции которой обозначим v_x и v_y. Значит,

$$Q_{2x} = (m_1 + m_2) v_x, \quad Q_{2y} = (m_1 + m_2) v_y. \tag{6}$$

Использовав результаты (5) и (6) в формулах (3), найдем

$$(m_1 + m_2) v_x = m_1 v_1 - m_2 v_2 \cos 60°,$$

$$(m_1 + m_2) v_y = m_2 v_2 \cos 30°,$$

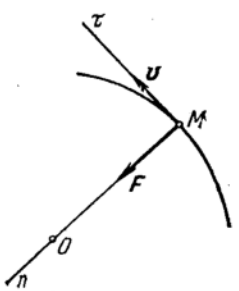
т. е.

$$v_x = \frac{\frac{m_1}{m_2} v_1 - v_2 \cos 60°}{m_1/m_2 + 1}, \quad v_y = \frac{v_2 \cos 30°}{m_1/m_2 + 1}.$$

Подставив в эти формулы численные данные, получим $v_x = 13{,}4$ км/ч, $v_y = 14{,}7$ км/ч. Модуль искомой скорости равен $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 19{,}9$ км/ч. Вычислим направляющие косинусы:

$$\cos(\widehat{x, \boldsymbol{v}}) = \frac{v_x}{v} = 0{,}67, \quad \cos(\widehat{y, \boldsymbol{v}}) = \frac{v_y}{v} = 0{,}74.$$

Отсюда следуют значения углов, которые образует искомая скорость $\boldsymbol{v}$ с осями x и y: $(\widehat{x, \boldsymbol{v}}) = 48°$, $(\widehat{y, \boldsymbol{v}}) = 42°$.



К задаче 9.34.

Задача 9.34. Ракета массы $m = 1200$ кг вышла со скоростью $v = 7{,}9$ км/с на круговую орбиту искусственного спутника Земли. Затем от ее головной части отделилась лаборатория массы $m_1 = 200$ кг. При этом скорость лаборатории возросла до величины $v_1 = 8$ км/с.

Определить, после разделения ракеты, скорость v_2 ее хвостовой части. Силами сопротивления движению пренебречь.

Р е ш е н и е. Движение ракеты происходит под действием силы $\boldsymbol{F}$ притяжения Земли, которая направлена по главной нормали траектории в данной точке, т. е. по радиусу окружности, описываемой ракетой. Поэтому проекция силы $\boldsymbol{F}$ на касательную τ равна нулю:

$$F_\tau = 0. \tag{1}$$

Применим теорему об изменении главного вектора количеств движения материальной системы: $\boldsymbol{Q}_2 - \boldsymbol{Q}_1 = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{S}(\boldsymbol{F}_k^e)$. В проекции на касательную τ имеем $Q_{2\tau} - Q_{1\tau} = \sum_{k=1}^{n} S_\tau(\boldsymbol{F}_k^e)$. Приняв во внимание формулу (1), получим $\sum_{k=1}^{n} S_\tau(\boldsymbol{F}_k^e) = 0$, т. е. $Q_{2\tau} - Q_{1\tau} = 0$. Итак,

$$Q_{2\tau} = Q_{1\tau}. \tag{2}$$

Значит, в данном случае имеет место случай сохранения главного вектора количеств движения материальной системы в проекции на касательную τ.

До отделения головной части проекция на ось τ главного вектора количеств движения всей ракеты была равна

$$Q_{1\tau} = mv_\tau. \tag{3}$$

После отделения головной части массы m_1 со скоростью v_1 осталась хвостовая часть ракеты массы m_2 со скоростью v_2. При этом имеем

$$Q_{2\tau} = m_1 v_{1\tau} + m_2 v_{2\tau}. \tag{4}$$

Использовав формулы (3) и (4) в равенстве (2), запишем: $mv_\tau = m_1 v_{1\tau} + m_2 v_{2\tau}$, откуда определим проекцию $v_{2\tau}$ на касательную τ:

$$v_{2\tau} = \frac{mv_\tau - m_1 v_{1\tau}}{m_2}. \tag{5}$$

Подставив в формулу (5) численные данные: $m = 1200$ кг, $m_1 = 200$ кг, $m_2 = 1000$ кг, $v_\tau = v = 7{,}9$ км/с, $v_{1\tau} = v_1 = 8$ км/с, получим $v_{2\tau} = v_2 = 7{,}88$ км/с.

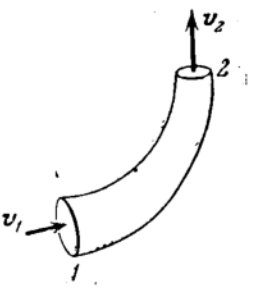


Рис. 9.7.

Указание. Рекомендуем решить следующие задачи из «Сборника задач по теоретической механике» И. В. Мещерского: 36.7—36.9.

4. Теорема об изменении главного вектора количеств движения материальной системы в приложении к сплошным средам (теорема Эйлера). Рассматривается объем жидкости (или газа), ограниченный боковой поверхностью трубы и двумя плоскими поперечными сечениями *1* и *2*, перпендикулярными к стенкам трубы (рис. 9.7).

Пусть σ_1 и σ_2 — площади плоских поперечных сечений *1* и *2*; ρ_1 и ρ_2 — плотности жидкости в сечениях *1* и *2*, соответственно v_1 и v_2 — скорости жидкости в сечениях *1* и *2*. При стационарном течении секундная масса M_c, т. е. масса жидкости (или газа), протекающая в единицу времени через любое сечение трубы, постоянна:

$$M_c = \rho_1 v_1 \sigma_1 = \rho_2 v_2 \sigma_2.$$

Векторы $M_c\boldsymbol{v}_1$ и $M_c\boldsymbol{v}_2$ — секундные количества движения жидкости в сечениях *1* и *2*.

Внешние силы, действующие на рассматриваемый объем жидкости, разделяются на объемные и поверхностные.

Объемными называются силы, которые действуют на все частицы жидкости, расположенные как внутри, так и на поверхности рассматриваемого объема (например, силы тяжести частиц жидкости).

Поверхностными называются силы, действующие на частицы жидкости, лежащие на внешней поверхности объема (например, реакции стенок трубы, приложенные к частицам жидкости, соприкасающимся со стенками трубы).

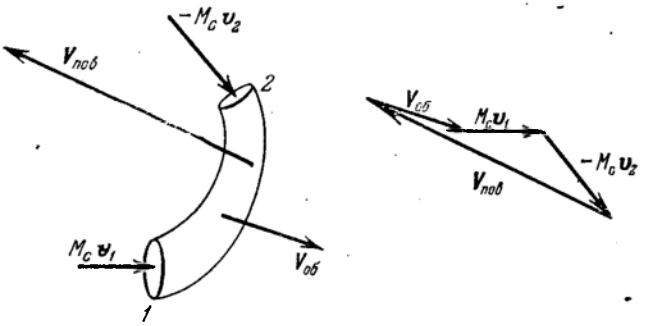


Рис. 9.8.

Теорема Эйлера. Сумма главных векторов объемных и поверхностных сил, а также векторов секундных количеств движения жидкости, протекающей через два сечения трубы, равна нулю, если векторы секундных количеств движения направить внутрь выделенного сечениями объема

$$\boldsymbol{V}_{об} + \boldsymbol{V}_{пов} + M_c\boldsymbol{v}_1 - M_c\boldsymbol{v}_2 = 0$$

(т. е. векторы $\boldsymbol{V}_{об}$, $\boldsymbol{V}_{пов}$, $M_c\boldsymbol{v}_1$ и $-M_c\boldsymbol{v}_2$ образуют замкнутый многоугольник (рис. 9.8)).

Теоремой Эйлера в приложении к сплошным средам (жидкостям и газам) удобно пользоваться при решении задач, в которых в число данных и искомых величин входят: площади плоских поперечных сечений, ограничивающих рассматриваемый объем (σ_1 и σ_2), плотности жидкости (газа) в этих сечениях (ρ_1 и ρ_2), скорости жидкости (газа) в этих сечениях ($\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$), объемные и поверхностные силы.

Указание. Задачи с помощью теоремы Эйлера рекомендуется решать в следующей последовательности:

1) изобразить на рисунке объемные и поверхностные силы;

2) изобразить на рисунке векторы секундных количеств движения жидкости (газа), протекающей через два сечения, ограничивающие рассматриваемый объем жидкости (газа); при этом векторы секундных количеств движения надо направлять внутрь этого объема;

3) выбрать систему координат;

4) записать теорему Эйлера в проекциях на оси декартовых координат:

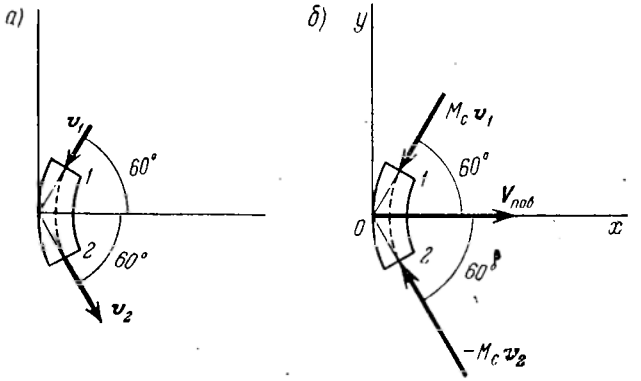
$$V_{об\,x} + V_{пов\,x} + M_c v_{1x} - M_c v_{2x} = 0,$$
$$V_{об\,y} + V_{пов\,y} + M_c v_{1y} - M_c v_{2y} = 0,$$
$$V_{об\,z} + V_{пов\,z} + M_c v_{1z} - M_c v_{2z} = 0,$$

где

$$M_c = \rho_1 \sigma_1 v_1 = \rho_2 \sigma_2 v_2;$$

5) из уравнений, составленных в предыдущем пункте, определить искомые величины.

Задача 9.35. Струя воды протекает по изогнутой трубе, прямолинейные участки которой образуют угол 120°, со скоростью 10 м/с. Ось трубы, изображенная на рис. *а*, расположена в горизонтальной плоскости. Сечение трубы — круг, диаметр которого 10 см.



К задаче 9.35.

Определить главный вектор сил добавочных динамических давлений воды на стенки трубы.

Р е ш е н и е. Используем теорему Эйлера в приложении к сплошным средам. На рис. *а* изображен вид трубы в плане.

Объемной является сила тяжести воды, которая перпендикулярна к плоскости рисунка. Поверхностными являются реакции стенок трубы, приложенные к частицам воды. Определив главный вектор реакций стенок трубы, найдем искомый главный вектор добавочных динамических давлений воды на стенки трубы по закону равенства действия и противодействия.

Изображаем векторы секундных количеств движения воды, протекающей через сечения трубы *1* и *2*, направив их внутрь рассматриваемого объема (см. рис. *б*). Секундная масса воды, т. е. масса воды, протекающей через сечение трубы в одну секунду,

$$M_c = \gamma \sigma v,$$

где γ — плотность воды, σ — площадь поперечного сечения трубы v — модуль скорости движения воды по трубе.

Направим ось x по горизонтали направо, а ось y по вертикали вверх.

Запишем теорему Эйлера в проекциях на оси x и y:

$$V_{\text{об } x} + V_{\text{пов } x} + M_c v_{1x} - M_c v_{2x} = 0,$$
$$V_{\text{об } y} + V_{\text{пов } y} + M_c v_{1y} - M_c v_{2y} = 0.$$

В данном случае, поскольку вектор $V_{\text{об}}$ перпендикулярен к осям x и y, получим

$$V_{\text{пов } x} - M_c v \cos 60^\circ - M_c v \cos 60^\circ = 0,$$
$$V_{\text{пов } y} - M_c v \cos 30^\circ + M_c v \cos 30^\circ = 0$$

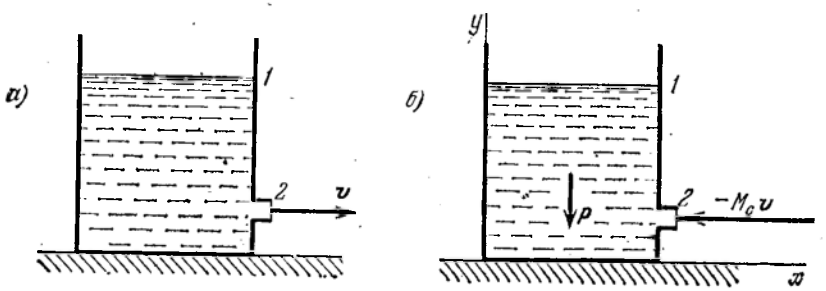
(индексы при скоростях отброшены, так как в нашем случае $|\boldsymbol{v}_1| = |\boldsymbol{v}_2| = v$), откуда

$$V_{\text{пов } x} = 2M_c v \cos 60^\circ, \quad V_{\text{пов } y} = 0.$$

Итак, главный вектор добавочных динамических реакций стенок трубы направлен параллельно оси x (см. рис. *б*). Так как $M_c = \gamma\sigma v$, то

$$V_{\text{пов}} = 2\gamma\sigma v^2 \cos 60^\circ.$$

По условию $\gamma = 1$ кг/дм^3, $\sigma = \frac{\pi \cdot 1^2}{4} = 0{,}79$ дм^2, $v = 100$ дм/с. Подставив эти значения, получим, что $V_{\text{пов}} = 822$ Н.



К задаче 9.36.

Главный вектор $\boldsymbol{N}$ сил добавочных динамических давлений воды на стенки трубы равен по модулю и направлен противоположно $\boldsymbol{V}_{\text{пов}}$, т. е. по горизонтали налево.

Задача 9.36. Из резервуара, наполненного водой, вытекает струя воды со скоростью $v = 12$ м/с. Диаметр выходного отверстия $d = 4$ см.

Определить суммарную добавочную горизонтальную реакцию стенок резервуара. Понижением уровня воды в резервуаре пренебречь.

Р е ш е н и е. Используем теорему Эйлера в приложении к сплошным средам. Объемными являются силы тяжести частиц воды. Поверхностными — реакции стенок резервуара.

Так как скоростью понижения уровня воды в резервуаре мы пренебрегаем, то секундное количество движения воды в сечении *1* равно нулю.

Вектор секундного количества движения воды, проходящей через сечение *2*, направляем внутрь рассматриваемого объема воды, т. е. по горизонтали налево.

Выбранные оси декартовых координат x, y изображены на рис. *б*.

Теорема Эйлера в проекции на ось x имеет вид

$$V_{\text{об}\,x} + V_{\text{пов}\,x} + M_c v_{1x} - M_c v_{2x} = 0.$$

В данном случае, так как $V_{\text{об}\,x}$ и $M_c v_{1x}$ равны нулю, получим

$$V_{\text{пов}\,x} - M_c v = 0, \text{ т. е. } V_{\text{пов}\,x} = M_c v.$$

Секундная масса воды равна $M_c = \gamma \sigma v$, где γ — плотность воды, σ — площадь поперечного сечения *2*, v — модуль скорости течения воды, т. е. $V_{\text{пов}\,x} = \gamma \sigma v^2$. В данной задаче

$$\gamma = 1 \text{ кг/дм}^3, \quad \sigma = \frac{\pi \cdot 0{,}4^2}{4} = 0{,}13 \text{ дм}^2, \quad v = 120 \text{ дм/с}.$$

Подставив численные значения, получим модуль искомой суммарной добавочной горизонтальной реакции стенок резервуара $R_x = V_{\text{пов}\,x} = 187$ Н.

У к а з а н и е. Рекомендуем решить следующие задачи из «Сборника задач по теоретической механике» И. В. Мещерского: 36.11—36.14.

§ 5. Теорема об изменении главного момента количеств движения материальной системы

1. Момент количества движения материальной точки. Главный момент количеств движения материальной системы. *Моментом l_O количества движения (кинетическим моментом) материальной точки относительно центра O* называется вектор, определяемый формулой

$$\boldsymbol{l}_O = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}.$$

Модуль этого вектора равен $|\boldsymbol{l}_O| = mvh$, где h — плечо (рис. 9.9).

Момент количества движения в системе СИ измеряется в кг·м²/с.

Момент количества движения l_z материальной точки относительно оси равен проекции на эту ось момента количества движения материальной точки относительно любого центра, лежащего на оси:

$$l_z = \text{пр}_z \boldsymbol{l}_O.$$

Разложение вектора $\boldsymbol{l}_O$ по ортам имеет вид

$$\boldsymbol{l}_O = l_x\boldsymbol{i} + l_y\boldsymbol{j} + l_z\boldsymbol{k}.$$

Его модуль дается формулой

$$|\boldsymbol{l}_O| = \sqrt{l_x^2 + l_y^2 + l_z^2},$$

а соответствующие направляющие косинусы будут:

$$\cos(\widehat{x, \boldsymbol{l}_O}) = \frac{l_x}{|\boldsymbol{l}_O|}, \quad \cos(\widehat{y, \boldsymbol{l}_O}) = \frac{l_y}{|\boldsymbol{l}_O|}, \quad \cos(\widehat{z, \boldsymbol{l}_O}) = \frac{l_z}{|\boldsymbol{l}_O|}.$$

Моменты количества движения материальной точки относительно осей декартовых координат даются формулами:

$$l_x = m(y\dot{z} - z\dot{y}), \quad l_y = m(z\dot{x} - x\dot{z}),$$
$$l_z = m(x\dot{y} - y\dot{x}),$$

где x, y, z — координаты материальной точки в системе осей, имеющей начало в центре O; $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ — проекции скорости точки на эти оси.

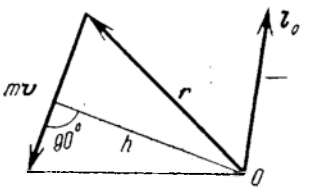


Рис. 9.9.

Главный момент $\boldsymbol{L}_O$ количества движения материальной системы (кинетический момент) относительно центра O равен векторной сумме моментов количеств движения относительно того же центра материальных точек системы, т. е.

$$\boldsymbol{L}_O = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{l}_{kO} = \sum_{k=1}^{n} (\boldsymbol{r}_k \times m_k\boldsymbol{v}_k) \qquad (1^*)$$

(было бы ошибочным считать, что $\boldsymbol{L}_O = \boldsymbol{r}_C \times M\boldsymbol{v}_C$, так как момент главного вектора количеств движения относительно центра, вообще говоря, не равен главному моменту количеств движения всех материальных точек системы относительно того же центра).

Главные моменты количеств движения материальной системы относительно осей декартовых координат определяются формулами:

$$L_x = \sum_{k=1}^{n} l_{kx}, \quad L_y = \sum_{k=1}^{n} l_{ky}, \quad L_z = \sum_{k=1}^{n} l_{kz}. \qquad (2^*)$$

Главный момент количеств движения L_z твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси z, относительно этой оси равен произведению момента инерции I_z твердого тела относительно этой же оси на проекцию угловой скорости ω_z:

$$L_z = I_z\omega_z. \qquad (3^*)$$

Разложим движение точек материальной системы на переносное вместе с осями, начало которых взято в центре масс C системы, и на их относительное движение по отношению к центру масс. Тогда

$$\boldsymbol{L}_O = \boldsymbol{L}_C + m_O(\boldsymbol{Q}_C), \qquad (4^*)$$

т. е. главный момент количеств движения системы $\boldsymbol{L}_O$ относительно неподвижного центра O равен векторной сумме главного момента $\boldsymbol{L}_C$ этой системы в движении по отношению к осям, движущимся поступательно вместе с центром масс C, и момента $\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{Q}_C)$ относительно неподвижного центра O главного вектора количеств движения $\boldsymbol{Q}_C$ системы, приложенного в центре масс C.

Зависимость (4*) в проекциях на оси x, y, z имеет вид

$$L_{Ox} = L_{Cx} + m_{Ox}(\boldsymbol{Q}_C), \quad L_{Oy} = L_{Cy} + m_{Oy}(\boldsymbol{Q}_C), \quad L_{Oz} = L_{Cz} + m_{Oz}(\boldsymbol{Q}_C). \quad (5^*)$$

Если в состав системы входит n твердых тел, то

$$\boldsymbol{L}_O = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{L}_{kO}, \quad (6^*)$$

т. е. главный момент количеств движения системы относительно неподвижного центра O равен векторной сумме главных моментов количеств движения относительно того же центра всех твердых тел, входящих в состав данной системы.

Зависимость (6*) в проекциях на оси x, y, z имеет вид

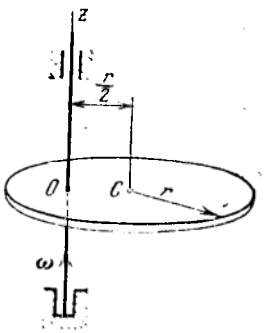
$$L_x = \sum_{k=1}^{n} L_{kx}, \quad L_y = \sum_{k=1}^{n} L_{ky}, \quad L_z = \sum_{k=1}^{n} L_{kz}. \quad (7^*)$$

Нетрудно проследить полную аналогию между понятием момента силы в статике и момента количества движения в динамике, вытекающую из сопоставления соответствующих формул:

$$\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}, \quad \boldsymbol{l}_O = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v} \quad \text{и т. д.}$$

Задача 9.37. Вычислить главный момент количеств движения относительно оси вращения диска массы M и радиуса r, эксцентрично насаженного на ось вращения и вращающегося с угловой скоростью ω.

Плоскость диска перпендикулярна к оси вращения. Эксцентриситет равен половине радиуса.



К задаче 9.37.

Р е ш е н и е. Направим вдоль оси вращения координатную ось z.

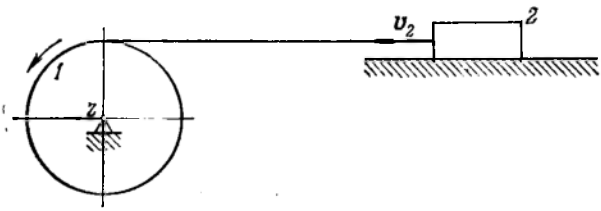
Главный момент количеств движения твердого тела относительно оси вращения $L_z = I_z\omega_z$, где I_z — момент инерции твердого тела относительно оси вращения. Для вычисления I_z применяем теорему Штейнера. Мысленно проведя через центр тяжести C диска ось, параллельную оси z, найдем

$$I_z = I_C + M\left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{Mr^2}{2} + \frac{Mr^2}{4} = \frac{3}{4}Mr^2.$$

Итак, искомый главный момент количеств движения рассматриваемого диска относительно оси вращения z дается формулой (3*)

$$L_z = I_z\omega_z = \frac{3}{4} Mr^2\omega_z.$$

Задача 9.38. При вращении барабана *1* массы M_1 и радиуса r_1 вокруг неподвижной оси z на его боковую поверхность наматывается нить, которая приводит в движение груз *2* массы M_2, скользящий по неподвижной горизонтальной плоскости (см. рисунок).



К задаче 9.38.

Вычислить главный момент количеств движения системы относительно оси z, выразив его в зависимости от угловой скорости. Барабан считать однородным круглым цилиндром. Массой нити пренебречь. Ось z направлена перпендикулярно к плоскости рисунка на нас.

Р е ш е н и е. В состав системы входят два твердых тела: барабан и груз. Поэтому

$$L_z = L_z^{(1)} + L_z^{(2)}, \qquad (1)$$

где $L_z^{(1)}$ — главный момент количеств движения барабана, а $L_z^{(2)}$ — груза относительно неподвижной оси z.

Вычислим $L_z^{(1)}$ по формуле (3*) (стр. 208), приняв во внимание, что $I_z = M_1r^2/2$. Имеем

$$L_z^{(1)} = \frac{M_1r^2}{2}\omega_z. \qquad (2)$$

Главный момент количеств движения груза, движущегося поступательно, определяется как момент количества движения материальной точки, т. е. $L_z^{(2)} = m_2v_2 \cdot r$. Так как $v_2 = r\omega_1$ то

$$L_z^{(2)} = M_2r^2\omega_z. \qquad (3)$$

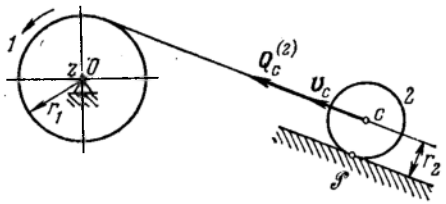
Подставив результаты (2) и (3) в формулу (1), получим искомый главный момент количеств движения

$$L_z = \frac{M_1 + 2M_2}{2} r^2\omega_z. \qquad (4)$$

Задача 9.39. При вращении барабана *1* массы M_1 и радиуса r_1 вокруг неподвижной оси z, перпендикулярной к плоскости рисунка,

на боковую поверхность барабана наматывается нить. Нить приводит в движение каток 2 массы M_2 и радиуса r_2, который катится без скольжения по наклонной плоскости вверх (см. рисунок).

Вычислить главный момент количеств движения системы относительно неподвижной оси z, выразив его в зависимости от угловой скорости барабана. Каток и барабан считать круглыми однородными цилиндрами. Массой нити пренебречь. Ось z направлена перпендикулярно к плоскости рисунка на нас.



К задаче 9.39.

Р е ш е н и е. В состав системы входят два твердых тела: барабан и каток. Поэтому

$$L_{Oz} = L_{Oz}^{(1)} + L_{Oz}^{(2)}, \qquad (1)$$

где $L_{Oz}^{(1)}$ и $L_{Oz}^{(2)}$ — главные моменты количеств движения барабана и катка соответственно относительно неподвижной оси z.

Для вычисления $L_{Oz}^{(1)}$ применим формулу (3*), приняв во внимание, что момент инерции барабана равен $I_z^{(1)} = M_1 r_1^2/2$. Имеем

$$L_{Oz}^{(1)} = I_z^{(1)}\omega_{1z} = \frac{M_1 r_1^2}{2}\,\omega_{1z}. \qquad (2)$$

Каток 2 совершает плоскопараллельное движение. Разложим его на переносное поступательное вместе с центром масс C и относительное вращательное вокруг оси C, перпендикулярной к плоскости рисунка. Здесь можно применить формулу (5*), т. е.

$$L_{Oz}^{(2)} = L_{Cz}^{(2)} + m_{Oz}[\boldsymbol{Q}_C^{(2)}]. \qquad (3)$$

Вычисляя главный момент количеств движения катка в относительном движении по формуле (3*), запишем

$$L_{Cz}^{(2)} = I_C^{(2)}\omega_{2z}, \qquad (4)$$

где ω_{2z} — проекция на ось z угловой скорости катка.

По условию, каток катится без скольжения. Значит, его мгновенный центр скоростей $\mathcal{P}$ находится в точке его касания с наклонной плоскостью. Поэтому $v_C = r_2\omega_2$. Приняв во внимание, что скорость центра тяжести C катка равна скорости точки на ободе барабана, запишем

$$v_C = r_2\omega_2 = r_1\omega_1. \qquad (5)$$

Использовав зависимость (5) и учтя, что $I_C^{(2)} = M_2 r_2^2/2$, получим формулу (4) в виде

$$L_{Cz}^{(2)} = \frac{M_2 r_1 r_2}{2}\,\omega_{1z}. \qquad (6)$$

Главный вектор количеств движения катка равен $\boldsymbol{Q}^{(2)} = M_2\boldsymbol{v}_C$. Приложив его в центре тяжести C катка (см. рисунок) и вычислив

момент относительно оси z, имеем $m_{Oz}[\boldsymbol{Q}_C^{(2)}] = Q_C^{(2)} \cdot r_1 = M_2 v_C r_1$. Использовав зависимость (5), запишем

$$m_{Oz}[\boldsymbol{Q}_C^{(2)}] = M_2 r_1^2 \omega_{1z}. \tag{7}$$

Подстановка (6) и (7) в формулу (3) дает

$$L_{Oz}^{(2)} = \frac{M_2 r_1}{2}(2r_1 + r_2)\,\omega_{1z}. \tag{8}$$

Для определения искомого главного момента количеств движения системы относительно оси z остается использовать результаты (2) и (8) в формуле (1). Окончательно получим

$$L_{Oz} = \frac{r_1}{2}[M_1 r_1 + M_2(2r_1 + r_2)]\,\omega_{1z}. \tag{9}$$

2. Теорема об изменении момента количества движения материальной точки. Производная по времени от вектора момента количества движения материальной точки относительно неподвижного центра равна векторной сумме моментов относительно того же центра всех сил, приложенных к материальной точке:

$$\frac{d\boldsymbol{l}_O}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}_k). \tag{8*}$$

Та же теорема, записанная относительно неподвижных осей декартовых координат, имеет вид

$$\frac{dl_x}{dt} = \sum_{k=1}^{n} m_x(\boldsymbol{F}_k), \quad \frac{dl_y}{dt} = \sum_{k=1}^{n} m_y(\boldsymbol{F}_k), \quad \frac{dl_z}{dt} = \sum_{k=1}^{n} m_z(\boldsymbol{F}_k). \tag{9*}$$

У к а з а н и е. Задачи с помощью теоремы об изменении момента количества движения материальной точки рекомендуется решать в следующей последовательности:

1) выбрать систему координат (при движении точки по дуге окружности следует одну из осей направить через центр окружности перпендикулярно к ее плоскости);

2) изобразить на рисунке силы, приложенные к материальной точке, т. е. активные силы и реакции связей (применив закон освобождаемости от связей);

3) вычислить суммы моментов сил, приложенных к материальной точке, относительно осей координат;

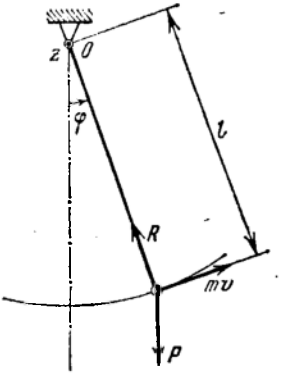
4) изобразить вектор количества движения материальной точки, записать выражение его моментов относительно неподвижных осей координат и взять от них производные по времени;

5) подставить результаты подсчетов двух предыдущих пунктов решения задачи в уравнения теоремы об изменении момента количества движения материальной точки;

6) решить, в соответствии с условием, прямую либо обратную задачу динамики точки.

Пункт 4) решения задачи можно, минуя 2) и 3), выполнять после 1).

Задача 9.40. Найти закон и период колебаний *математического маятника*, длина нити которого равна l. В начальный момент маятнику, нить которого занимала отвесное положение, была сообщена посредством толчка начальная угловая скорость $\dot{\varphi}_0$.



К задаче 9.40.

Р е ш е н и е. Математическим маятником называется материальная точка, подвешенная посредством невесомой нерастяжимой нити к неподвижной оси и движущаяся в вертикальной плоскости.

На рисунке маятник изображен в отклоненном положении от вертикали на угол φ. Направление положительного отсчета угла поворота φ указано на рисунке. Маятник совершает качания около оси z, перпендикулярной к плоскости рисунка и проходящей через точку привеса O. Траекторией материальной точки является дуга окружности, расположенная в вертикальной плоскости с центром в O и радиусом l.

Для решения задачи применяем теорему об изменении момента количества движения материальной точки относительно оси z:

$$\frac{dl_z}{dt} = \sum_{k=1}^{n} m_z(\boldsymbol{F}_k). \tag{1}$$

Изображаем вес материальной точки $\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{g}$ и реакцию нити $\boldsymbol{R}$. Момент реакции нити $\boldsymbol{R}$ относительно оси z равен нулю, а момент веса $\boldsymbol{P}$ равен $-Ph = -Mgl\sin\varphi$. Момент отрицателен, так как его направление противоположно направлению положительного отсчета угла поворота φ. Итак, сумма моментов всех сил, приложенных к маятнику, равна

$$\sum_{k=1}^{n} m_z(\boldsymbol{F}_k) = -Mgl\sin\varphi. \tag{2}$$

Рисунок сделан в предположении, что маятник движется в сторону увеличения угла поворота φ. Момент количества движения маятника относительно оси z равен $l_z = Mv_\tau l$; так как $v_\tau = l\dot{\varphi}$, то $l_z = Ml^2\dot{\varphi}$ и

$$\frac{dl_z}{dt} = Ml^2\ddot{\varphi}. \tag{3}$$

Подставив значения $\sum_{k=1}^{n} m_z(F_k)$ и dl_z/dt из формул (2) и (3) в уравнение (1), получим

$$Ml^2\ddot{\varphi} = -Mgl\sin\varphi,$$

или

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0. \tag{4}$$

Решение этого нелинейного дифференциального уравнения колебаний маятника представляет известные трудности. Поэтому решим задачу приближенно, считая колебания маятника малыми. Разложив $\sin\varphi$ в ряд

$$\sin\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \cdots$$

и пренебрегая членами разложения порядка выше первого, получим $\sin\varphi \approx \varphi$. Тогда дифференциальное уравнение колебаний маятника примет вид

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0.$$

Обозначив $g/l = k^2$, запишем окончательно:

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0.$$

Для решения этого линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами составим соответствующее характеристическое уравнение $\lambda^2 + k^2 = 0$. Корни характеристического уравнения равны $\lambda_{1,2} = \pm ki$, и решение уравнения запишется в виде

$$\varphi = C_1\cos kt + C_2\sin kt. \tag{5}$$

Для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 воспользуемся заданными начальными условиями движения. В условии задачи указано, что в начальный момент маятнику, нить которого занимала отвесное положение, была сообщена посредством толчка начальная угловая скорость $\dot{\varphi}_0$, т. е. при $t = 0$ $\varphi = 0$, $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$.

Дифференцируя φ, определенное уравнением (5), по времени, находим

$$\dot{\varphi} = -C_1k\sin kt + C_2k\cos kt. \tag{6}$$

Подставив в (5) $t = 0$, $\varphi = 0$, а в (6) $t = 0$, $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$, получим $C_1 = 0$, $C_2 = \dot{\varphi}_0/k$. Теперь уравнение (5) принимает вид

$$\varphi = \frac{\dot{\varphi}_0}{k}\sin kt,$$

где $k = \sqrt{g/l}$. Обозначим $\dot{\varphi}_0/k = \alpha$; тогда окончательно

$$\varphi = \alpha\sin kt.$$

Итак, маятник совершает гармонические колебания с угловой амплитудой α и с круговой частотой $k = \sqrt{g/l}$. При малых колебаниях маятника ($\sin\varphi \approx \varphi$) оказывается, что круговая частота колебаний не зависит от начальных условий движения, т. е. колебания маятника обладают свойством *изохронности*.

Период колебаний маятника равен

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{7}$$

Масса материальной точки не входит в выражение периода колебаний T. Следовательно, материальные точки с различными массами имеют при одинаковой длине нити маятника l один и тот же период колебаний. (В «секундном маятнике» $T/2 = 1$ с, т. е. $\pi\sqrt{l/g} = 1$, откуда длина нити «секундного маятника» равна $l = g/\pi^2 \approx 1$ м.)

Переходим к определению периода колебаний T из точного дифференциального уравнения колебаний математического маятника (4)

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0.$$

Обозначив $g/l = k^2$, умножив почленно уравнение на $d\varphi$ и учитывая, что $\ddot{\varphi}\,d\varphi = \frac{d\dot{\varphi}}{dt}d\varphi = \dot{\varphi}\,d\dot{\varphi}$, получим

$$\dot{\varphi}\,d\dot{\varphi} = -k^2\sin\varphi\,d\varphi.$$

Проинтегрировав, находим

$$\dot{\varphi}^2 = 2k^2\cos\varphi + C;$$

так как при $\varphi = \alpha$ $\dot{\varphi} = 0$, то $C = -2k^2\cos\alpha$ и, следовательно,

$$\dot{\varphi} = k\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\alpha)},$$

или, учитывая, что $\dot{\varphi} = d\varphi/dt$,

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\alpha)}} = k\,dt.$$

Воспользовавшись тождеством $\cos\varphi - \cos\alpha = 2\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}\right)$, получим

$$\frac{d(\varphi/2)}{\sqrt{\sin^2(\alpha/2) - \sin^2(\varphi/2)}} = k\,dt. \tag{8}$$

Сделаем подстановку

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}\sin u, \tag{9}$$

откуда

$$d\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{\sin(\alpha/2)\cos u\,du}{\cos(\varphi/2)}.$$

Теперь уравнение (8) принимает вид

$$\frac{du}{\cos(\varphi/2)} = k\,dt,$$

или

$$\frac{du}{\sqrt{1-\sin^2(\alpha/2)\sin^2 u}} = k\,dt.$$

В силу начального условия: при $t = 0$ $\varphi = 0$, из формулы (9) вытекает, что в начальный момент $u = 0$, а из условия: при $t = T/4$ $\varphi = \alpha$ следует, что $u = \pi/2$. Поэтому

$$\int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1-\sin^2(\alpha/2)\sin^2 u}} = \frac{kT}{4},$$

где $k = \sqrt{g/l}$.

Итак, период колебаний маятника равен

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot K, \tag{10}$$

где

$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1-\sin^2(\alpha/2)\sin^2 u}}$$

является эллиптическим интегралом первого рода. Разлагая

$$\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\alpha/2)\sin^2 u}}$$

в ряд и почленно интегрируя, получим

$$K = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{\sin^2(\alpha/2)}{4} + \frac{9\sin^4(\alpha/2)}{64} + \cdots\right).$$

После подстановки полученного значения K в формулу (10) приходим к искомому выражению периода колебаний маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha}{2} + \frac{9}{64}\sin^4\frac{\alpha}{2} + \cdots\right), \tag{11}$$

т. е. колебания маятника при конечной угловой амплитуде α свойством изохронности не обладают — его период зависит от угловой амплитуды колебаний α.

Считая α малой величиной и пренебрегая в формуле (11) членами разложения, содержащими α во второй и более высоких степенях, получим приближенную формулу (7):

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{12}$$

При угловой амплитуде колебаний $\alpha = 20°$ период колебаний, подсчитанный по формуле (11) или по более точной формуле (10), больше периода колебаний маятника, определенного по приближенной формуле (12), всего лишь на 0,8 %, но при $\alpha = 60°$ — соответственно уже на 3,5 %.

Указание. Рекомендуем решить задачу 28.13 из «Сборника задач по теоретической механике» И. В. Мещерского.

3. Случай сохранения момента количества движения материальной точки. Если векторная сумма моментов относительно неподвижного центра всех сил, приложенных к материальной точке, равна нулю, то момент количества движения материальной точки относительно того же центра постоянен, т. е. если $\sum_{k=1}^{n} m_O(\boldsymbol{F}_k) = 0$, то $\boldsymbol{l}_O$ постоянен.

Аналогично, если сумма моментов сил, приложенных к материальной точке, относительно оси равна нулю, то момент количества движения этой точки относительно той же оси постоянен. Например, если $\sum_{k=1}^{n} m_x(\boldsymbol{F}_k) = 0$, то $\boldsymbol{l}_x$ — постоянная величина.

Этими частными случаями теоремы об изменении момента количества движения материальной точки удобно пользоваться при изучении движения материальной точки под действием центральной силы.

Указание. При сохранении момента количества движения материальной точки задачи можно решать в такой последовательности:

1) выбрать центр, относительно которого следует применить теорему об изменении момента количества движения материальной точки (при движении точки под действием центральной силы следует брать центр силы);

2) изобразить на рисунке все активные силы и реакции связей, приложенные к материальной точке;

3) определить вектор количества движения материальной точки и найти момент количества движения этой точки относительно центра;

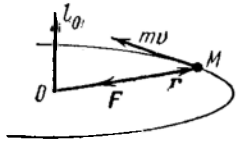
4) применить теорему об изменении момента количества движения материальной точки относительно центра и, проверив, что сумма моментов всех сил относительно центра равна нулю, приравнять моменты количеств движения материальной точки в ее начальном и конечном положениях: $\boldsymbol{l}_{20} = \boldsymbol{l}_{10}$. Из этого уравнения определить искомую величину.

В некоторых задачах приходится пользоваться этой теоремой относительно одной из осей координат.

Задача 9.41. Показать, что планеты, находящиеся под действием центральных сил, имеют плоскую траекторию. Силой сопротивления движению пренебречь.

Решение. Рассмотрим планету, схематизированную на рисунке в виде точечной массы M.

К точке M приложена только одна сила — центральная сила $\boldsymbol{F}$, линия действия которой при движении планет проходит через центр O.



К задаче 9.41

Применим теорему об изменении главного момента количеств движения материальной точки

$$\frac{d\boldsymbol{l}_0}{dt} = \sum_{k=1}^{n} m_O(\boldsymbol{F}_k). \qquad (1)$$

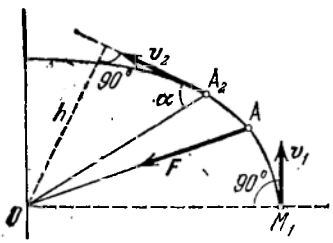
Так как линия действия силы $\boldsymbol{F}$ проходит через точку O, то

$$\sum_{k=1}^{n} m_O(\boldsymbol{F}_k) = 0. \qquad (2)$$

Подставив результат (2) в формулу (1), получим $d\boldsymbol{l}_0/dt = 0$, откуда

$$\boldsymbol{l}_0 = \boldsymbol{C}. \qquad (3)$$

По определению момент количества движения материальной точки равен $\boldsymbol{l}_0 = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}$. В соответствии с формулой (3) он векторно неизменен. Значит, векторы $\boldsymbol{r}$ и $m\boldsymbol{v}$ постоянно лежат в плоскости, перпендикулярной к вектору $\boldsymbol{l}_0$, т. е. точка M имеет плоскую траекторию.



К задаче 9.42.

Задача 9.42. Материальная точка движется под действием центральной силы $\boldsymbol{F}$, линия действия которой неизменно проходит через точку O.

Найти скорость точки в положении A_2, если в положении A_1 ее скорость v_1 равнялась 4 м/с, причем $\frac{OA_1}{OA_2} = \frac{3}{2}$ и угол, образуемый скоростью $\boldsymbol{v}_2$ с линией действия силы, $\alpha = 60°$ (см. рисунок).

Р е ш е н и е. Применяем теорему об изменении момента количества движения материальной точки относительно оси z, проходящей через точку O перпендикулярно к плоскости рисунка (на рисунке эта ось не показана):

$$\frac{dl_z}{dt} = \sum_{k=1}^{n} m_z(\boldsymbol{F}_k).$$

Так как к материальной точке приложена только сила $\boldsymbol{F}$, момент которой относительно оси равен нулю, то $\sum_{k=1}^{n} m_z(\boldsymbol{F}_k) = 0$ и, следовательно, l_z — постоянная величина, т. е. $l_{1z} = l_{2z}$. Момент количества движения материальной точки в положении A_1 относительно оси z

$$l_{1z} = Mv_1 \cdot OA_1.$$

Момент количества движения материальной точки в положении A_2 относительно оси z

$$l_{2z} = Mv_2h = Mv_2 \cdot OA_2 \cdot \sin\alpha.$$

Так как $l_{1z} = l_{2z}$, то $Mv_1 \cdot OA_1 = Mv_2 \cdot OA_2 \sin\alpha$, откуда $v_2 = v_1 \dfrac{OA_1}{OA_2 \sin\alpha}$. После подстановки численных значений получим, что $v_2 = 6{,}92$ м/с.

Указание. Рекомендуем решить следующие задачи из «Сборника задач по теоретической механике» И. В. Мещерского: 28.4, 28.8, 28.10.

4. Теорема об изменении главного момента количеств движения материальной системы. Производная по времени главного момента количеств движения материальной системы относительно неподвижного центра равна векторной сумме моментов всех внешних сил системы относительно того же центра, т. е.

$$\frac{dL_O}{dt} = \sum_{k=1}^{n} m_O(F_k^e). \qquad (10^*)$$

Следует обратить внимание на то, что, подобно теоремам о движении центра масс, об изменении главного вектора количеств движения материальной системы в формулировку данной теоремы также не входят внутренние силы системы, определение которых обычно связано со значительными трудностями.

Та же теорема, записанная относительно осей декартовых координат, имеет вид

$$\frac{dL_x}{dt} = \sum_{k=1}^{n} m_x(F^e), \quad \frac{dL_y}{dt} = \sum_{k=1}^{n} m_y(F_k^e), \quad \frac{dL_z}{dt} = \sum_{k=1}^{n} m_z(F^e). \qquad (11^*)$$

Применяя эту теорему, можно решать как прямые, так и обратные задачи динамики.

Теорему об изменении главного момента количеств движения материальной системы относительно неподвижной оси удобно применять при рассмотрении движения материальной системы, в состав которой входят тела, вращающиеся вокруг этой оси.

Указание. Задачи с помощью теоремы об изменении главного момента количеств движения материальной системы относительно неподвижной оси рекомендуется решать в следующем порядке:

1) направить одну из осей координат вдоль неподвижной оси вращения;

2) записать теорему об изменении главного момента количеств движения системы (11*) относительно соответствующей оси;

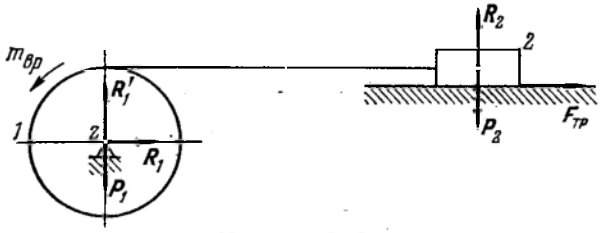
3) изобразить на рисунке все внешние силы системы;

4) вычислить главный момент внешних сил относительно неподвижной оси;

5) вычислить главный момент количеств движения системы относительно неподвижной оси и взять его производную по времени;

6) подставить результаты пунктов 4) и 5) в 2) и затем, в зависимости от условия, решить прямую либо обратную задачу динамики.

Задача 9.43. Использовав условие и решение задачи 9.38, определить угловое ускорение барабана, если к нему приложен вращающий момент $m_{вр}$, а коэффициент трения скольжения груза о плоскость равен f. Высотой груза пренебречь.



К задаче 9.43.

Решение. Применим теорему (11*) об изменении главного момента количеств движения системы материальных точек относительно оси z, т. е.

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum_{k=1}^{n} m_z(\boldsymbol{F}_k^e).$$

Изобразим внешние силы и моменты системы: $m_{вр}$ — вращающий момент, $\boldsymbol{P}_1 = M_1\boldsymbol{g}$ — сила тяжести барабана, $\boldsymbol{P}_2 = M_2\boldsymbol{g}$ — сила тяжести груза, $\boldsymbol{R}_1$ и $\boldsymbol{R}_1'$ — составляющие реакции оси барабана, $\boldsymbol{R}_2$ — нормальная реакция плоскости, $F_{тр}$ — сила трения при скольжении груза о плоскость. Учтя, что $\boldsymbol{R}_2 = -\boldsymbol{P}_2$, $F_{тр} = fM_2g$, а силы $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{R}_1$ и $\boldsymbol{R}_1'$ приложены в точке, лежащей на оси z, запишем

$$\sum m_z(\boldsymbol{F}_k^e) = m_{вр} - fM_2gr. \tag{1}$$

Главный момент количеств движения L_z данной системы относительно неподвижной оси z представлен формулой (4) задачи 9.37. Взяв производную L_z по времени и учтя, что $\omega_z = \dot{\varphi}$, имеем

$$\frac{dL_z}{dt} = \frac{M_1 + 2M_2}{2} r^2\ddot{\varphi}. \tag{2}$$

Подставив результаты (1) и (2) в уравнение (11*) и решив его относительно $\ddot{\varphi}$, получим искомый результат:

$$\ddot{\varphi} = \frac{2}{(M_1 + 2M_2)\, r^2}(m_{вр} - fM_2gr). \tag{3}$$

Указание. Рекомендуем решить задачу 37.44 из «Сборника задач по теоретической механике» И. В. Мещерского.

5. Случай сохранения главного момента количеств движения материальной системы. Если векторная сумма моментов всех внешних сил системы относительно неподвижного центра равна нулю, то главный момент количеств движения системы относительно того же центра постоянен, т. е. если

$$\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}_k^e) = 0,$$

то вектор $\boldsymbol{L}_O$ постоянен.

Аналогично, если сумма моментов всех внешних сил системы относительно неподвижной оси равна нулю, то главный момент количеств движения системы относительно той же оси постоянен. Например, если $\sum_{k=1}^{n} m_x(\boldsymbol{F}_k^e) = 0$, то L_x — постоянная величина.

Теорему о сохранении главного момента количеств движения материальной системы относительно неподвижной оси рекомендуется применять при рассмотрении движения материальной системы, в состав которой входит твердое тело, вращающееся вокруг этой оси. Если сумма моментов всех внешних сил системы относительно оси равна нулю, то можно получить соотношение между массами материальных точек, их скоростями, а также моментом инерции и угловой скоростью вращения твердого тела.

У к а з а н и е. Задачи с помощью теоремы о сохранении главного момента количеств движения рекомендуется решать в такой последовательности:

1) выбрать координатные оси, направив одну из них вдоль неподвижной оси вращения;

2) записать теорему об изменении главного момента количеств движения материальной системы относительно выбранной оси, например:

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum_{k=1}^{n} m_z(\boldsymbol{F}_k^e);$$

3) изобразить на рисунке все внешние силы системы;

4) показать, что сумма моментов всех внешних сил системы относительно оси равна нулю;

5) вычислить и приравнять главные моменты количеств движения материальной системы относительно оси в начальный и конечный моменты времени: $L_{1z} = L_{2z}$, где

$$L_{1z} = \sum_{k=1}^{n} l_{1kz} \text{ и } L_{2z} = \sum_{k=1}^{n} l_{2kz};$$

6) решив уравнение $L_{1z} = L_{2z}$, определить искомую величину.

Задача 9.44. Может ли повернуться человек, стоящий на идеально гладкой горизонтальной плоскости, если он начнет вращать руку над головой?

Р е ш е н и е. Направим через центр тяжести C человека ось z перпендикулярно к неподвижной плоскости, изобразим внешние силы, приложенные к человеку: $\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{g}$ — сила тяжести человека и $\boldsymbol{R}$ — нормальная реакция плоскости (так как плоскоеть идеально гладкая, то сила трения отсутствует).



К задаче 9.44.

Применяем теорему об изменении главного момента количеств движения материальной системы относительно оси z:

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum_{k=1}^{n} m_z\left(\boldsymbol{F}_k^e\right).$$

Так как внешние силы $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{R}$ лежат на оси z, то $\sum\limits_{k=1}^{n} m_z\left(\boldsymbol{F}_k^e\right) = 0$, т. е. $dL_z/dt = 0$ и L_z — постоянная; следовательно,

$$L_{1z} = L_{2z}.$$

Итак, имеет место случай сохранения главного момента количеств движения материальной системы относительно оси z.

Человек находился в начальный момент в покое; поэтому $L_{1z} = 0$. Затем человек поднял руку над головой и начал ею вращать вокруг оси z с относительной угловой скоростью $\omega_z^{(1)*}$. Допустим, что при этом туловище человека начинает вращаться в ту же сторону с угловой скоростью $\omega_z^{(2)}$. Теперь главный момент количеств движения системы относительно оси z будет $L_{2z} = L_z^{(1)} + L_z^{(2)}$, причем

$$L_z^{(1)} = I_z^{(1)}\omega_z^{(1)}, \quad L_z^{(2)} = I_z^{(2)}\omega_z^{(2)},$$

где $I_z^{(1)}$ — момент инерции руки относительно оси вращения z, $I_z^{(2)}$ — момент инерции туловища относительно оси вращения z, $\omega_z^{(1)}$ — абсолютная угловая скорость руки.

Учитывая, что рука человека совершает сложное движение (относительное по отношению к туловищу и переносное вместе с туловищем), получим $\omega_z^{(1)} = \omega_z^{(1)*} + \omega_z^{(2)}$, и следовательно,

$$L_z^{(1)} = I_z^{(1)}\left(\omega_z^{(1)*} + \omega_z^{(2)}\right).$$

Тогда

$$L_{2z} = L_z^{(1)} + L_z^{(2)} = I_z^{(1)}\left(\omega_z^{(1)*} + \omega_z^{(2)}\right) + I_z^{(2)}\omega_z^{(2)}.$$

Учитывая, что $L_{1z} = L_{2z}$ и $L_{1z} = 0$, получим

$$I_z^{(1)}\left(\omega_z^{(1)*} + \omega_z^{(2)}\right) + I_z^{(2)}\omega_z^{(2)} = 0,$$

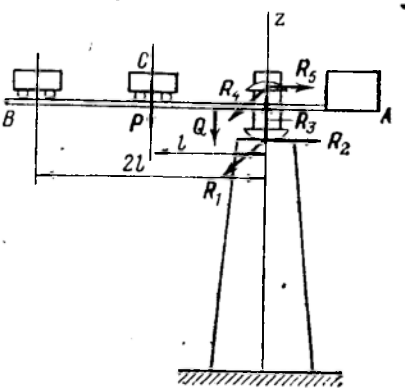
откуда

$$\omega_z^{(2)} = -\frac{I_z^{(1)}}{I_z^{(1)} + I_z^{(2)}}\,\omega_z^{(1)*}.$$

Знак минус указывает, что человек будет вращаться вокруг оси z в сторону, противоположную вращению руки.

Итак, человек, стоящий на идеально гладкой горизонтальной плоскости, может повернуться вокруг оси, проходящей через его центр тяжести перпендикулярно к этой плоскости.

Задача 9.45. На рисунке изображен поворотный кран, стрела которого AB может вращаться вокруг неподвижной вертикальной оси z. Вдоль стрелы AB перемещается тележка C. В момент выключения двигателя, вращающего стрелу AB, ее угловая скорость была равна ω_1, а тележка C отстояла от оси z на расстоянии l.



К задаче 9.45.

Найти угловую скорость ω_2 стрелы AB в момент, когда тележка, переместившись по горизонтали, будет отстоять от оси на расстоянии $2l$. Момент инерции стрелы относительно оси z равен I_z. Тележку массы M считать точечной массой. Силами сопротивления движению пренебречь. Скорость тележки относительно стрелы AB в крайних положениях равна нулю.

Р е ш е н и е. Применим теорему об изменении главного момента количеств движения материальной системы относительно неподвижной оси z:

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum_{k=1}^{n} m_z\left(F_k^e\right). \qquad (1)$$

Изобразим на рисунке внешние силы, действующие на данную систему: $\boldsymbol{P} = M_1\boldsymbol{g}$ — сила тяжести тележки C, $\boldsymbol{Q} = M_2\boldsymbol{g}$ — сила тяжести стрелы AB, $\boldsymbol{R}_1$, $\boldsymbol{R}_2$, $\boldsymbol{R}_3$, $\boldsymbol{R}_4$, $\boldsymbol{R}_5$ — составляющие реакций подпятника и подшипника.

Вычислим сумму моментов всех внешних сил относительно неподвижной оси. Так как силы $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{Q}$ параллельны оси z, а силы $\boldsymbol{R}_1$, $\boldsymbol{R}_2$, $\boldsymbol{R}_3$, $\boldsymbol{R}_4$, $\boldsymbol{R}_5$ пересекают эту ось, то сумма моментов внешних сил относительно от z равна нулю:

$$\sum_{k=1}^{n} m_z\left(F_k\right) = 0. \qquad (2)$$

Использовав результат (2), запишем формулу (1) в виде $dL_z/dt = 0$, откуда $L_z = \text{const}$, т. е.

$$L_{1z} = L_{2z}, \tag{3}$$

где L_{1z} — главный момент количеств движения материальной системы относительно оси z в начальный момент, а L_{2z} — в конечный момент времени.

Для определения L_{1z} и L_{2z} дважды применим формулу (3*), приведенную в обзоре теории:

$$L_{1z} = I_{1z}\omega_{1z}, \quad L_{2z} = I_{2z}\omega_{2z}. \tag{4}$$

Материальная система состоит из стрелы AB и тележки C. Поэтому момент инерции системы относительно оси z равен сумме их моментов инерции относительно этой оси. Учитывая, что в начальный момент тележка отстояла от оси на расстоянии l, а в конечный момент — на расстоянии $2l$, запишем

$$I_{1z} = I_z + M_1 l^2, \quad I_{2z} = I_z + M_2 (2l)^2. \tag{5}$$

Подставив результаты (5) в формулы (4), получим

$$L_{1z} = (I_z + M_1 l^2)\,\omega_{1z}, \quad L_{2z} = (I_z + 4M_2 l^2)\,\omega_{2z}. \tag{6}$$

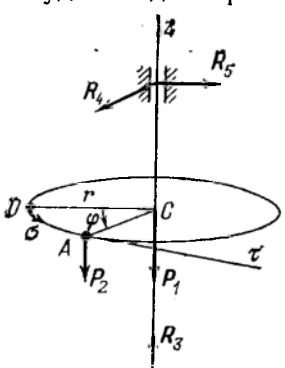
Теперь используем результаты (6) в формуле (3):

$$(I_z + M_1 l^2)\,\omega_{1z} = (I_z + 4M_1 l^2)\,\omega_{2z},$$

откуда найдем проекцию искомой конечной угловой скорости

$$\omega_{2z} = \frac{I_z + M_1 l^2}{I_z + 4M_1 l^2}\,\omega_{1z}.$$

Следовательно, при удалении тележки от оси вращения угловая скорость стрелы AB уменьшается.



К задаче 9.46.

Задача 9.46. По ободу диска массы M_1 и радиуса r, вращающегося вокруг вертикальной неподвижной оси z, совершает колебания (см. рисунок) точечная масса A массы M_2. Дуговая координата σ точки A, определяющая положение этой точки на ободе диска, изменяется по закону $\sigma = \smile OA = \varphi_0 r \sin kt$. В моменты времени, когда точка A находится в крайних положениях (т. е. когда радиус CA образует с CO углы $+\varphi_0$ и $-\varphi_0$), угловая скорость диска равна ω. Определить зависимость угловой скорости диска от положения точки A на ободе диска. Силами сопротивления движению пренебречь. На рисунке точка A изображена в промежуточном положении, определяемым углом OCA, равным φ.

Р е ш е н и е. Применим теорему об изменении главного момента количеств движения материальной системы относительно оси вращения z:

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum_{k=1}^{n} m_z(\boldsymbol{F}_k). \tag{1}$$

Изобразим на рисунке внешние силы: $\boldsymbol{P}_1$ — сила тяжести диска, $\boldsymbol{P}_2$ — сила тяжести точки A, $\boldsymbol{R}_1$, $\boldsymbol{R}_2$, $\boldsymbol{R}_3$, $\boldsymbol{R}_4$, $\boldsymbol{R}_5$ — составляющие реакций подпятника и подшипника.

Вычислим сумму моментов внешних сил относительно оси вращения z. Все силы параллельны либо пересекают ось z. Поэтому сумма моментов внешних сил относительно оси z равна нулю:

$$\sum_{k=1}^{n} m_z(\boldsymbol{F}_k^e) = 0. \tag{2}$$

Использовав результат (2), запишем формулу (1) в виде $dL_z/dt = 0$, откуда $L_z = \text{const}$, т. е.

$$L_{1z} = L_{2z}, \tag{3}$$

где L_{1z} — главный момент количеств движения системы в момент, соответствующий пребыванию точки A в крайнем положении, а L_{2z} — в любой промежуточный момент времени. Итак, имеет место случай сохранения главного момента количеств движения материальной системы относительно оси z.

В моменты времени, когда точка A находится в крайнем положении, ее относительная скорость по отношению к диску равна нулю. Значит, L_{1z} можно вычислить по формуле

$$L_{1z} = I_{1z}\omega, \tag{4}$$

где I_{1z} — момент инерции системы относительно оси z, равный сумме моментов инерции диска $I_{z\text{д}}$ и точечной массы I_{zA} относительно оси z, т. е. $I_{1z} = I_{z\text{д}} + I_{zA}$. Заметив, что $I_{z\text{д}} = \frac{1}{2} M_1 r^2$, а $I_{zA} = M_2 r^2$, найдем

$$I_{1z} = \frac{1}{2}(M_1 + 2M_2) r^2. \tag{5}$$

Подстановка значения (5) в формулу (4) дает

$$L_{1z} = \frac{1}{2}(M_1 + 2M_2) r^2\omega. \tag{6}$$

Перейдем к вычислению L_{2z}. Так как в произвольный момент времени точка A движется по отношению к диску, то

$$L_{2z} = L_{2z\text{д}} + L_{2zA}, \tag{7}$$

где $L_{2z\text{д}}$ — главный момент количеств движения диска, равный

$$L_{2z\text{д}} = I_{z\text{д}}\omega_z = \frac{1}{2} M_1 r^2 \omega_z, \tag{8}$$

где ω_z — проекция на ось z искомой угловой скорости диска, а l_{2zA} — момент количества движения точки A: $l_{2zA} = m_A v_{A\tau} r$, т. е.

$$l_{2zA} = M_2 v_{A\tau} r, \tag{9}$$

где $v_{A\tau}$ — проекция на касательную τ абсолютной скорости $\boldsymbol{v}_A$ точки A.

Движение точки A является сложным: относительным по отношению к диску и переносным вместе с вращающимся диском. Применим теорему о сложении скоростей точки: $\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r$ в проекции на касательную τ:

$$v_{a\tau} = v_{e\tau} + v_{r\tau}. \tag{10}$$

Вычислим $v_{e\tau}$:

$$v_{e\tau} = r\omega_z, \quad v_{r\tau} = \dot{\sigma} = \varphi_0 kr \cos kt. \tag{11}$$

Подставив значения (11) в формулу (10), найдем

$$v_{a\tau} = r\omega_z + \varphi_0 kr \cos kt. \tag{12}$$

Выражение (9) после подстановки в него результата (12) примет вид

$$l_{2zA} = \frac{P_2}{g} (r\omega_z + \varphi_0 kr \cos kt) r. \tag{13}$$

Обращаем внимание читателя на часто встречающуюся ошибку: в формулу (9) вместо $v_{a\tau}$ — проекции абсолютной скорости подставляют $v_{r\tau}$ — проекцию относительной скорости, тем самым забывая, что движение точки A является сложным. При этой ошибке в формуле (9) теряется слагаемое $v_{e\tau} = M_2 r^2 \omega_z$.

Теперь, подставив результаты (8) и (13) в форму (7), получим L_{2z} — главный момент количеств движения системы относительно оси z в произвольный момент времени t:

$$L_{2z} = \frac{M_1 + 2M_2}{g} r^2 \omega_z + M_2 \varphi_0 kr^2 \cos kt. \tag{14}$$

Приравняем, в соответствии с равенством (9), выражения (6) и (14):

$$\frac{M_1 + 2M_2}{2} r^2 \omega = \frac{M_1 + 2M_2}{2} r^2 \omega_z + M_2 \varphi_0 kr^2 \cos kt;$$

отсюда найдем ω_z — проекцию искомой угловой скорости вращения диска:

$$\omega_z = \omega - \frac{2M_2}{M_1 + 2M_2} \varphi_0 k \cos kt. \tag{15}$$

Как следует из формулы (15), ω_z является переменной, зависящей от времени t. Это получается вследствие постоянства L_z — глав-

ного момента количеств движения материальной системы при переменном моменте количества движения материальной точки A, входящей в состав системы.

Если точка A проходит среднее положение O в сторону вращения диска, например при $t = 0$, то из формулы (15) следует:

$$\omega_{z0} = \omega - \frac{2M_2}{M_1 + 2M_2}\varphi_0 k,$$

если же в сторону, противоположную вращению диска, например при $t = \pi/k$, то

$$\omega_{z\,\frac{\pi}{k}} = \omega + \frac{2M_2}{M_1 + 2M_2}\varphi_0 k.$$

В крайних положениях точки A, например в момент $t = \pi/(2k)$, получим $\omega_z = \omega$, что соответствует условию задачи. Поэтому для любого момента времени имеет место соотношение

$$\omega - \frac{2M_2}{M_1 + 2M_2}\varphi_0 k \leqslant \omega_z \leqslant \omega + \frac{2M_2}{M_1 + 2M_2}\varphi_0 k.$$

Указание. Рекомендуем решить следующие задачи из «Сборника задач по теоретической механике» И. В. Мещерского: 37.52—37.54, 37.57.

6. Теорема об изменении главного момента количеств движения материальной системы в относительном движении по отношению к центру масс. Разложим движение материальных точек системы на переносное поступательное вместе с осями декартовых координат, начало которых совмещено с центром масс системы, и относительное движение по отношению к центру масс. При этом теорема об изменении главного момента количеств движения материальной системы в относительном движении по отношению к центру масс имеет вид, тождественный аналогичной теореме (6*) в абсолютном движении:

$$\frac{dL_C}{dt} = \sum_{k=1}^{n} m_C(\boldsymbol{F}_k^e), \qquad (12^*)$$

т. е. производная по времени главного момента количеств движения материальной системы относительно центра масс системы в ее относительном движении в системе координат, движущихся поступательно вместе с центром масс, равна векторной сумме моментов внешних сил системы относительно центра масс.

Та же теорема в проекциях на оси декартовых координат, начало которых совмещено с центром масс системы и движущихся поступательно вместе с центром масс, имеет вид

$$\frac{dL_{Cx}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} m_{Cx}(\boldsymbol{F}_k^e), \quad \frac{dL_{Cy}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} m_{Cy}(\boldsymbol{F}_k^e), \quad \frac{dL_{Cz}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} m_{Cz}(\boldsymbol{F}_k^e). \qquad (13^*)$$

С помощью этой теоремы можно решать как прямые, так и обратные задачи динамики. Теорема широко применяется в задачах динамики плоскопараллельного движения твердого тела (см. § 6) и движения свободного твердого тела, т. е. в тех случаях, когда движение твердого тела можно разложить на переносное вместе с осями координат, движущимися поступательно с центром масс, и относительное движение по отношению к этим осям.

Указание. Задачи с помощью теоремы об изменении главного момента количеств движения системы в относительном движении по отношению к центру масс рекомендуется решать в следующем порядке:

1) направить одну из подвижных осей координат через центр масс системы;

2) записать теорему об изменении главного момента количеств движения системы в относительном движении относительно соответствующей подвижной оси;

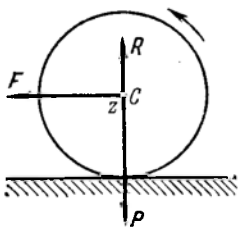
3) изобразить на рисунке все внешние силы системы;

4) вычислить главный момент внешних сил относительно соответствующей подвижной оси, проходящей через центр масс;

5) вычислить главный момент количеств движения системы относительно той же подвижной оси и затем взять его производную по времени;

6) подставить результаты пунктов 4) и 5) в 2) и затем, в зависимости от условия, решить прямую либо обратную задачу динамики.

Задача 9.47. К центру тяжести C колеса радиуса r приложена горизонтальная сила F. В начальный момент колесо находилось в покое.



К задаче 9.47.

Показать, что при отсутствии силы трения между колесом и горизонтальным рельсом качение колеса по рельсу невозможно.

Ось z_C направлена через центр масс C колеса перпендикулярно к плоскости рисунка на нас. Момент инерции колеса относительно этой оси равен I_{z_C}.

Решение. Колесо совершает плоскопараллельное движение. Разложим его на переносное поступательное вместе с центром масс C и относительное вокруг подвижной оси z_C, проходящей через центр масс перпендикулярно к неподвижной плоскости (т. е. плоскости рисунка).

Для описания вращательного движения колеса применим теорему об изменении главного момента количеств движения (13*) в относительном движении по отношению к оси z_C, проходящей через центр масс:

$$\frac{dL_{z_C}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} m_{z_C}(F_k^e). \qquad (1)$$

В соответствии с формулой (3*), $L_{z_C} = I_{z_C}\omega_z$. Поэтому

$$\frac{dL_{z_C}}{dt} = I_{z_C}\dot{\omega}_z = I_{z_C}\ddot{\varphi}. \qquad (2)$$

К колесу приложены внешние силы: $\boldsymbol{P}$ — сила тяжести, $\boldsymbol{F}$ — движущая сила, $\boldsymbol{R}$ — нормальная реакция рельса.

Вычислив сумму моментов внешних сил относительно оси z_C, находим:

$$\sum m_{z_C}(\boldsymbol{F}_k^e) = 0. \qquad (3)$$

Подставив результаты (2) и (3) в уравнение (1) и решив его относительно $\ddot{\varphi}$, получим

$$\ddot{\varphi} = 0. \qquad (4)$$

Первый интеграл дифференциального уравнения (4) будет

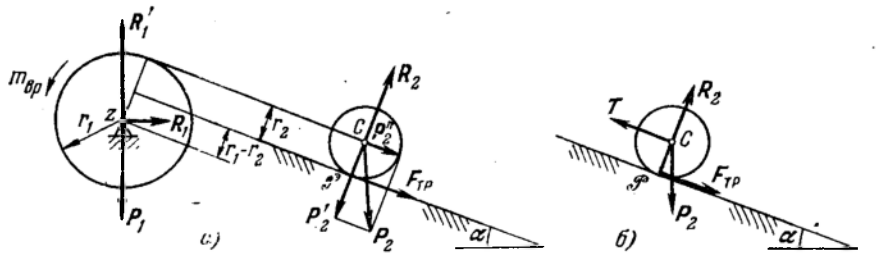
$$\dot{\varphi} = C_1. \qquad (5)$$

В начальный момент колесо находилось в покое, т. е. при $t = 0$ $\dot{\varphi} = 0$. Подставив это начальное условие в уравнение (5), найдем $C_1 = 0$. Поэтому угловая скорость колеса равна нулю:

$$\dot{\varphi} = 0, \qquad (6)$$

т. е. качение колеса отсутствует. Таким образом показано, что при отсутствии силы трения колесо, находившееся в начальный момент в покое, катиться не может и будет только скользить.

Задача 9.48. Сохранив условие и решение задачи 9.39, определить угловое ускорение барабана, считая, что к нему приложен вращающий момент $m_{вр}$, а наклонная плоскость образует с горизонтом угол α.



К задаче 9.48.

Р е ш е н и е. В данной задаче придется применить теорему об изменении главного момента количеств движения системы относительно неподвижной оси z, а также, применительно к катку, — эту же теорему в относительном движении по отношению к параллельной подвижной оси z_C, проходящей через центр масс C колеса.

Теорема (11*) относительно неподвижной оси z имеет вид

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum_{k=1}^{n} m_z(\boldsymbol{F}_k^{(e)}). \tag{1}$$

Главный момент количеств движения системы относительно оси z дан формулой (9) задачи 9.39. Вычислив его производную по времени и учтя, что $\dot{\omega}_{1z} = \ddot{\varphi}_1$, имеем

$$\frac{dL_z}{dt} = \frac{r_1}{2}[M_1 r_1 + M_2(2r_1 + r_2)]\ddot{\varphi}_1. \tag{2}$$

Изобразим на рис. *а* все внешние силы и моменты данной системы: $\boldsymbol{P}_1 = M_1\boldsymbol{g}$ — сила тяжести барабана, $\boldsymbol{P}_2 = M_2\boldsymbol{g}$ — сила тяжести катка, $m_{вр}$ — вращающий момент, $\boldsymbol{R}_1$ и $\boldsymbol{R}_1'$ — две составляющие реакции оси z, $\boldsymbol{R}_2$ — нормальная реакция наклонной плоскости, $\boldsymbol{F}_{тр}$ — сила трения катка о наклонную плоскость. Разложим силу $\boldsymbol{P}_2$ на две составляющие $\boldsymbol{P}_2'$ и $\boldsymbol{P}_2''$ (см. рис. *а*). Нетрудно видеть, что $\boldsymbol{R}_2 = -\boldsymbol{P}_2'$.

Вычислим сумму моментов всех внешних сил системы относительно неподвижной оси z, приняв во внимание, что $\boldsymbol{R}_2 = -\boldsymbol{P}_2'$, а $\boldsymbol{P}_2''$ по модулю равно $P_2'' = P_2 \sin\alpha$. Имеем

$$\sum_{k=1}^{n} m_z(\boldsymbol{F}_k^{(e)}) = m_{вр} - P_2 r_1 \sin\alpha - F_{тр}(r_1 - r_2). \tag{3}$$

Подстановка результатов (2) и (3) в уравнение (1) дает

$$\frac{r_1}{2}[M_1 r_1 + M_2(2r_1 + r_2)]\ddot{\varphi}_1 = m_{вр} - M_2 g r_1 \sin\alpha - F_{тр}(r_1 - r_2). \tag{4}$$

Мы не можем определить $\ddot{\varphi}_1$ из уравнения (4), ибо неизвестен модуль силы трения $\boldsymbol{F}_{тр}$. Для исключения из этого уравнения $F_{тр}$ применим к катку теорему об изменении главного момента количеств движения системы (13*) относительно подвижной оси z_C, проходящей через центр масс C катка параллельно неподвижной оси z (т. е. перпендикулярно к плоскости рисунка):

$$\frac{dL_{z_C}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} m_{z_C}(\boldsymbol{F}_k^{(e)}). \tag{5}$$

В соответствии с формулой (3*), $L_{z_C} = I_{z_C}\omega_{2z}$. Учтя соотношение (5) задачи 9.39 и приняв во внимание, что $I_{z_C} = M_2 r_2^2/2$, имеем

$$L_{z_C} = \frac{M_2 r_1 r_2}{2}\omega_{1z}. \tag{6}$$

Вычислим производную (6) по времени:

$$\frac{dL_{z_C}}{dt} = \frac{M_2 r_1 r_2}{2}\ddot{\varphi}_1. \tag{7}$$

Изобразим на рис. *б* все внешние силы катка: $\boldsymbol{P}_2$ — вес катка, $\boldsymbol{R}_2$ — нормальная реакция наклонной плоскости, $\boldsymbol{T}$ — реакция нити, $\boldsymbol{F}_{тр}$ — сила трения.

Найдем сумму моментов всех внешних сил катка относительно оси z_C, направленной перпендикулярно плоскости рисунка от нас:

$$\sum_{k=1}^{n} m_{z_C}(\boldsymbol{F}_k^e) = F_{тр} r_2. \tag{8}$$

Подстановка результатов (7) и (8) в уравнение (5) дает

$$\frac{M_2 r_1 r_2}{2} \ddot{\varphi}_1 = F_{тр} r_2. \tag{9}$$

Уравнение (9) описывает зависимость между угловым ускорением барабана и модулем силы трения катка о наклонную плоскость.

Исключив из системы уравнений (4) и (9) силу трения $F_{тр}$, после несложных преобразований найдем искомое угловое ускорение барабана:

$$\ddot{\varphi}_1 = 2 \frac{m_{пр} - M_2 g r_1 \sin\alpha}{(M_1 + 3M_2) r_1^2}. \tag{10}$$

Ниже (см. задачу 9.106) эта задача решена с помощью теоремы об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме. Там же дана сравнительная оценка трудности обоих методов решения.

7. Случай сохранения главного момента количеств движения материальной системы в относительном движении по отношению к центру масс системы. Если векторная сумма моментов внешних сил относительно центра масс равна нулю, то главный момент количеств движения материальной системы относительно центра масс в системе осей координат, движущихся поступательно вместе с центром масс, сохраняется неизменным, т. е. если $\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{m}_c(\boldsymbol{F}_k^e) = 0$, то $\boldsymbol{L}_c$ постоянно.

Та же теорема в проекциях на оси декартовых координат, начало которых совмещено с центром масс системы и движущихся поступательно вместе с центром масс, имеет вид: если $\sum_{k=1}^{n} m_{cx}(\boldsymbol{F}_k^e) = 0$, то L_{cx} постоянно, и т. д.

Область применения теорем об изменении и о сохранении главного момента количеств движения материальной системы в относительном движении по отношению к центру масс системы является общей (см. стр. 227). Общими являются и три первых пункта решения задач (см. стр. 228).

Если окажется (это необходимо доказать), что сумма моментов всех внешних сил относительно подвижной оси, проходящей через центр масс, равна нулю, то нужно вычислить и приравнять главные моменты количеств движения системы относительно данной оси в

начальный и конечный моменты времени. Затем из составленного уравнения определить искомую величину.

Задача 9.49. Акробат, совершая сальто, отталкиваясь ногами от земли, сообщает себе в начальный момент угловую скорость $\omega_1 = 1$ об/с вокруг горизонтальной оси, проходящей через его центр масс. При этом момент инерции акробата относительно оси равен $I_1 = 1{,}5$ кг·м^2. Для того чтобы в полете увеличить угловую скорость, акробат поджимает ноги и руки к туловищу, тем самым уменьшая момент инерции до величины $I_2 = 0{,}5$ кг·м^2.

Определить угловую скорость вращения ω_2 акробата вокруг горизонтальной оси в полете. Силами сопротивления движению пренебречь.

Р е ш е н и е. Единственной внешней силой, действующей на акробата в полете, является его сила тяжести.

Движение акробата в процессе выполнения сальто является сложным. Разложив его на переносное поступательное движение вместе с центром масс и относительное вращательное вокруг горизонтальной оси x, проходящей через центр масс, можно воспользоваться теоремой об изменении главного момента количеств движения материальной системы в относительном движении по отношению к этой оси:

$$\frac{dL_{cx}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} m_{cx}(\boldsymbol{F}_k^e).$$

Так как горизонтальная ось x проходит через центр тяжести акробата, то момент силы тяжести относительно этой оси равен нулю. Следовательно, $dL_{cx}/dt = 0$ и L_{cx} постоянно, т. е. $L_{1cx} = L_{2cx}$. Итак, имеет место случай сохранения главного момента количеств движения материальной системы в относительном движении.

Так как $L_{1cx} = I_1\omega_1$ и $L_{2cx} = I_2\omega_2$, то $I_1\omega_1 = I_2\omega_2$, откуда $\omega_2 = \frac{I_1}{I_2}\omega_1$. Подставив численные значения, получим $\omega_2 = 3$ об/с.

8. Дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси. Дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси имеет вид

$$I_z\ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^{n} m_z(\boldsymbol{F}_k^e),$$

где φ — угол поворота твердого тела, I_z — момент инерции твердого тела относительно оси вращения, $m_z(\boldsymbol{F}_k^e)$ — момент k-й внешней силы относительно оси z.

Из сопоставления этого дифференциального уравнения с теоремой о движении центра масс материальной системы

$$M\boldsymbol{w}_C = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F}_k^e,$$

применяемой при решении задач о поступательном движении твердого тела, следует, что масса M твердого тела, движущегося поступательно, и момент инерции I_z твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси z, имеют аналогичный смысл: масса M — *мера инертности твердого тела, движущегося поступательно; момент инерции I_z — мера инертности твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.*

С помощью дифференциального уравнения вращения твердого тела вокруг неподвижной оси можно решить как прямые, так и обратные задачи динамики.

В прямых задачах по заданному моменту инерции твердого тела I_z относительно оси вращения и закону вращения твердого тела $\varphi = f(t)$ определяется главный момент относительно этой оси внешних сил, приложенных к твердому телу.

В обратных задачах по заданным моменту инерции твердого тела I_z относительно оси вращения и моментам внешних сил относительно этой оси определяется уравнение вращения твердого тела $\varphi = f(t)$. При этом должны быть заданы начальные условия движения: положение и угловая скорость твердого тела в начальный момент времени, т. е.

$$\text{при } t = 0 \quad \varphi = \varphi_0, \ \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0.$$

Решение обратных задач часто представляет значительные трудности, так как при этом приходится интегрировать дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси. Моменты внешних сил относительно оси вращения могут зависеть не только от времени, но также от угла поворота φ, угловой скорости $\dot{\varphi}$ и углового ускорения $\ddot{\varphi}$ твердого тела, т. е.

$$\sum_{k=1}^{n} m_z(F_k^e) = f(\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}, t).$$

Легко решаются задачи в случаях, когда моменты внешних сил постоянны.

Указание. Задачи динамики о вращении твердого тела вокруг неподвижной оси надо решать в такой последовательности:

1) направить одну из декартовых осей координат (ось z) по оси вращения твердого тела;

2) изобразить на рисунке все внешние силы, приложенные к твердому телу;

3) вычислить сумму моментов всех внешних сил относительно оси вращения

$$\sum_{k=1}^{n} m_z(F_k);$$

4) записав дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси

$$I_z\ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^{n} m_z(\vec{F}_k^e),$$

подставить в него выражение суммы моментов всех внешних сил, значение момента инерции I_z твердого тела относительно оси вращения и решать, в зависимости от условия, прямую либо обратную задачи.

Задача 9.50. Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси под действием приложенной к нему системы сил.

Чему должен быть равен главный момент внешних сил относительно оси вращения для того, чтобы твердое тело вращалось: а) равномерно, б) равнопеременно?

Р е ш е н и е. Направив ось z по оси вращения твердого тела, запишем дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси:

$$I_z\ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^{n} m_z(\vec{F}_k^e);$$

а) в случае равномерного вращения угловая скорость φ твердого тела постоянна, следовательно, $\ddot{\varphi} = 0$ и

$$\sum_{k=1}^{n} m_z(\vec{F}_k) = 0,$$

т. е. главный момент внешних сил относительно оси вращения равен нулю.

б) в случае равнопеременного вращения угловое ускорение твердого тела $\ddot{\varphi}$ постоянно, следовательно,

$$\sum_{k=1}^{n} m_z(\vec{F}_k^e) = \text{const},$$

т. е. главный момент внешних сил относительно оси вращения постоянен.

Задача 9.51. Определить величину вращающего момента m_z, под действием которого диск массы 20 кг и радиуса 10 см вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = 4t^2$. Центр тяжести диска лежит на его оси вращения.

Р е ш е н и е. Направляем ось z по оси вращения диска.

Дифференциальное уравнение вращения диска вокруг неподвижной оси z имеет вид

$$I_z\ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^{n} m_z(\vec{F}_k^e).$$

К диску и его оси приложены внешние силы и моменты: сила тяжести диска, реакции опор и искомый момент.

Так как моменты опорных реакций и силы тяжести диска относительно его оси вращения z равны нулю, то сумма моментов всех внешних сил равна искомому вращающему моменту относительно оси вращения z. Следовательно,

$$m_z = I_z\ddot{\varphi}.$$

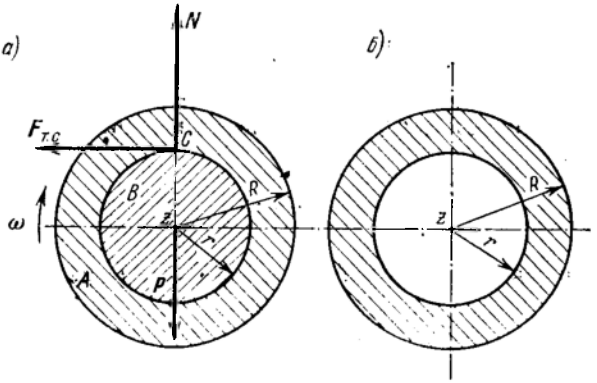
Момент инерции диска относительно оси вращения равен

$$I_z = \frac{mr^2}{2} = \frac{20 \cdot 0{,}1^2}{2} = 0{,}1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \quad \text{а} \quad \ddot{\varphi} = 8 \text{ рад/с}^2,$$

тогда искомый вращающий момент

$$m_z = 0{,}8 \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}^2 = 0{,}8 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Задача 9.52. Кольцу A радиуса R, насаженному на неподвижный горизонтальный вал B радиуса r, в начальный момент была сообщена угловая скорость ω_0.



К задаче 9.52.

Сколько оборотов сделает кольцо до остановки, если коэффициент трения скольжения кольца о вал равен f?

Р е ш е н и е. Допустим, что кольцо A при вращении соприкасается с осью B в точке C. К кольцу приложены внешние силы: $\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{g}$ — сила тяжести кольца, N — нормальная реакция вала, $F_{т.с}$ — сила трения скольжения кольца о вал: $F_{т.с} = fN = fP$, направленная перпендикулярно к нормальной реакции N в сторону, противоположную движению, т. е. по горизонтали налево.

Выберем направление отсчета угла поворота φ в сторону вращения кольца, т. е. по ходу часовой стрелки (ось z направлена от нас за плоскость рисунка).

Запишем дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси:

$$I_z\ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^{n} m_z\left(F_k^e\right). \tag{1}$$

Для определения числа оборотов, которое сделало кольцо до остановки, требуется проинтегрировать это уравнение, предварительно определив I_z — момент инерции кольца относительно оси вращения z и $\sum_{k=1}^{n} m_z(\boldsymbol{F}_k^e)$ — главный момент внешних сил относительно оси z. Так как моменты сил $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{N}$ относительно оси z равны нулю, то

$$\sum_{k=1}^{n} m_z(\boldsymbol{F}_k^e) = m_z(\boldsymbol{F}_{\text{т. с}}) = -F_{\text{т. с}} r = -fPr = -fMgr. \qquad (2)$$

Момент силы трения скольжения $\boldsymbol{F}_{\text{т. с}}$ отрицателен, так как его направление противоположно направлению положительного отсчета угла поворота φ.

Момент инерции кольца вычислим как разность моментов инерции большого диска радиуса R и малого диска радиуса r (см. рис. *б*):

$$I_z = \frac{M_R R^2}{2} - \frac{M_r r^2}{2},$$

где M_R — масса диска радиуса R, а M_r — масса диска радиуса r.

Обозначив γ плотность кольца, получим $M_R = \gamma\pi R^2$ и $M_r = \gamma\pi r^2$. Тогда

$$I_z = \frac{\gamma\pi R^4}{2} - \frac{\gamma\pi r^4}{2} = \frac{\gamma\pi}{2}(R^4 - r^4).$$

Учитывая, что масса кольца $M = \gamma\pi(R^2 - r^2)$, имеем

$$I_z = \frac{M}{2}(R^2 + r^2). \qquad (3)$$

Подставив значения $\sum_{k=1}^{n} m_z(\boldsymbol{F}_k^e)$ и I_z из формул (2) и (3) в уравнение (1), находим

$$\frac{M}{2}(R^2 + r^2)\ddot{\varphi} = -fMgr,$$

откуда

$$\ddot{\varphi} = -\frac{2fgr}{R^2 + r^2}. \qquad (4)$$

Начальные условия движения имеют вид

$$\text{при } t = 0 \quad \varphi = 0, \quad \dot{\varphi} = \omega_0.$$

Проинтегрировав дифференциальное уравнение (4), получим

$$\dot{\varphi} = -\frac{2fgr}{R^2 + r^2} t + C_1;$$

подставив $t = 0$, $\dot{\varphi} = \omega_0$, найдем, что $C_1 = \omega_0$; следовательно,

$$\dot{\varphi} = \omega_0 - \frac{2fgr}{R^2 + r^2} t. \qquad (5)$$

Решив дифференциальное уравнение (5), имеем

$$\varphi = \omega_0 t - \frac{fgr}{R^2 + r^2} t^2 + C_2.$$

Подставляя $t = 0$, $\varphi = 0$, имеем $C_2 = 0$; итак,

$$\varphi = \omega_0 t - \frac{fgr}{R^2 + r^2} t^2. \qquad (6)$$

Для того чтобы определить угол поворота φ, на который повернулось кольцо до остановки, следует предварительно вычислить соответствующий момент времени. В момент остановки $t = \tau$ угловая скорость кольца $\dot{\varphi} = 0$. Подставив эти значения в уравнение (5), получаем: $\tau = \frac{\omega_0 (R^2 + r^2)}{2fgr}$. Для определения φ_τ — угла поворота кольца в момент остановки, остается подставить полученное значение τ в уравнение (6). Находим:

$$\varphi_\tau = \frac{\omega_0^2 (R^2 + r^2)}{4fgr}.$$

Число оборотов, которое сделало кольцо до остановки, равно

$$n_\tau = \frac{\varphi_\tau}{2\pi} = \frac{\omega_0^2 (R^2 + r^2)}{8\pi fgr}.$$

Эту задачу можно решить также и с помощью теоремы об изменении кинетической энергии материальной системы (см. решение задачи 9.97. Там же приведена сравнительная оценка обоих методов решения).

Задача 9.53. Твердое тело начинает вращаться из состояния покоя под действием момента, зависящего от угловой скорости $\dot{\varphi}$ вращения тела: $m_z = m_0 - a\dot{\varphi}^2$, где m_0 и a — положительные постоянные. Здесь m_0 — вращающий момент, а $a\dot{\varphi}^2$ — тормозящий момент.

Определить угловую скорость вращения твердого тела, если его момент инерции относительно оси вращения z равен I_z. Центр тяжести твердого тела расположен на оси вращения.

Р е ш е н и е. Дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси имеет вид

$$I_z \ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^{n} m_z (\boldsymbol{F}_k^e).$$

К твердому телу приложены внешние силы и моменты: сила тяжести тела, опорные реакции и момент m_z. Так как моменты силы тяжести тела и опорных реакций относительно оси вращения z

равны нулю, то сумма моментов внешних сил относительно оси вращения z равна моменту m_z, т. е.

$$\sum_{k=1}^{n} m_z(F_k^e) = m_0 - a\dot{\varphi}^2.$$

Итак, дифференциальное уравнение вращения принимает вид

$$I_z\ddot{\varphi} = m_0 - a\dot{\varphi}^2$$

или

$$\ddot{\varphi} = \frac{a}{I_z}\left(\frac{m_0}{a} - \dot{\varphi}^2\right);$$

заменив $\ddot{\varphi}$ на $d\dot{\varphi}/dt$ и отделив переменные, получим

$$\frac{d\dot{\varphi}}{m_0/a - \dot{\varphi}^2} = \frac{a}{I_z}dt.$$

Проинтегрировав это уравнение, найдем

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{m_0}}\ln\frac{\sqrt{m_0/a}+\dot{\varphi}}{\sqrt{m_0/a}-\dot{\varphi}} = \frac{a}{I_z}t + C.$$

При $t = 0$ $\dot{\varphi} = 0$; следовательно, $C = 0$, т. е.

$$\ln\frac{\sqrt{m_0/a}+\dot{\varphi}}{\sqrt{m_0/a}-\dot{\varphi}} = \frac{2}{I_z}\sqrt{am_0}t.$$

Решив это уравнение относительно $\dot{\varphi}$, получим искомую угловую скорость вращения твердого тела

$$\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{m_0}{a}}\,\frac{1 - e^{-\frac{2}{I_z}\sqrt{am_0}t}}{1 + e^{-\frac{2}{I_z}\sqrt{am_0}t}}.$$

Допустим, что твердое тело вращается длительное время под действием вращающего момента m_z. Вычислим его угловую скорость при $t \to \infty$; получим

$$\lim_{t\to\infty}\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{m_0}{a}},$$

т. е. вращение твердого тела стремится к равномерному с постоянной угловой скоростью $\omega = \sqrt{m_0/a}$.

Задача 9.54. Твердое тело начинает вращаться вокруг неподвижной оси z из состояния покоя под действием момента, зависящего от угла поворота φ вращающегося тела: $m_z = a\varphi - b\varphi^3$, где a и b — положительные постоянные. При $t = 0$ $\varphi = \varphi_0$.

Определить угловую скорость твердого тела в зависимости от угла поворота φ, если его момент инерции относительно оси вращения z равен I_z. Центр тяжести твердого тела расположен на оси вращения.

Р е ш е н и е. Решая задачу аналогично предыдущей, получим дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси

$$I_z\ddot{\varphi} = a\varphi - b\varphi^3;$$

умножив уравнение почленно на $d\varphi$ и заметив, что $\ddot{\varphi}\,d\varphi = \frac{d\dot{\varphi}}{dt}\,d\varphi = \dot{\varphi}\,d\dot{\varphi}$, находим

$$I_z\dot{\varphi}\,d\dot{\varphi} = (a\varphi - b\varphi^3)\,d\varphi.$$

Проинтегрировав это уравнение, имеем

$$\frac{I_z\dot{\varphi}^2}{2} = \frac{a\varphi^2}{2} - \frac{b\varphi^4}{4} + C.$$

При $t = 0$ $\varphi = \varphi_0$, $\dot{\varphi} = 0$; следовательно,

$$C = -\frac{a\varphi_0^2}{2} + \frac{b\varphi_0^4}{4}.$$

Тогда

$$\frac{I_z\dot{\varphi}^2}{2} = \frac{a}{2}(\varphi^2 - \varphi_0^2) - \frac{b}{4}(\varphi^4 - \varphi_0^4).$$

Решив уравнение относительно $\dot{\varphi}$, получим искомую угловую скорость вращения твердого тела

$$\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{1}{I_z}(\varphi^2 - \varphi_0^2)\left[a - \frac{a}{2}(\varphi^2 + \varphi_0^2)\right]}.$$

Нетрудно видеть, что в момент, когда $\varphi = \pm\varphi_0$, угловая скорость $\dot{\varphi} = 0$, т. е. в этот момент тело меняет направление своего вращения на обратное.

Задача 9.55. К твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси z, приложен момент $m_z = A\sin kt$, где A и k — постоянные. Момент силы сопротивления движению пропорционален угловой скорости вращения твердого тела $m_z^* = -\alpha\dot{\varphi}$, где α — постоянная ($\alpha > 0$).

Найти уравнение вращения твердого тела, если его момент инерции относительно оси вращения z равен I_z. Центр тяжести твердого тела лежит на оси вращения. В начальный момент твердое тело находилось в покое.

Р е ш е н и е. После записи дифференциального уравнения вращения твердого тела вокруг неподвижной оси z:

$$I_z\ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^{n} m_z(\boldsymbol{F}_k^e),$$

вычисляем главный момент внешних сил относительно оси z. Так как моменты опорных реакций и силы тяжести твердого тела равны нулю, то

$$\sum_{k=1}^{n} m_z(\overline{F}_k) = m_z + m_z^* = A \sin kt - \alpha\dot{\varphi}.$$

Следовательно,

$$I_z\ddot{\varphi} = A \sin kt - \alpha\dot{\varphi};$$

запишем это уравнение так:

$$\ddot{\varphi} + \beta\dot{\varphi} = \gamma \sin kt, \tag{1}$$

где $\beta = \alpha/I_z$ и $\gamma = A/I_z$. Общее решение этого дифференциального уравнения равно сумме общего решения φ_1 соответствующего однородного уравнения $\ddot{\varphi} + \beta\dot{\varphi} = 0$ и частного решения φ_2 уравнения (1), т. е. $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$.

Для решения уравнения $\ddot{\varphi} + \beta\dot{\varphi} = 0$ запишем его характеристическое уравнение $\lambda^2 + \beta\lambda = 0$, откуда $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = -\beta$; следовательно,

$$\varphi_1 = C_1 + C_2 e^{-\beta t}. \tag{2}$$

Ищем частное решение уравнения (1) в виде $\varphi_2 = M \sin kt + N \cos kt$. Для определения M и N подставляем φ_2 в дифференциальное уравнение (1):

$$-Mk^2 \sin kt - Nk^2 \cos kt + \beta Mk \cos kt - \beta Nk \sin kt = \gamma \sin kt.$$

Приравняв коэффициенты при $\sin kt$ и $\cos kt$ в левой и правой частях уравнения, получим систему уравнений

$$-Mk^2 - \beta Nk = \gamma, \quad -Nk^2 + \beta Mk = 0.$$

Решив эти уравнения, найдем

$$M = -\frac{\gamma}{k^2 + \beta^2}, \quad N = -\frac{\gamma\beta}{k(k^2 + \beta^2)}.$$

Следовательно, частное решение имеет вид

$$\varphi_2 = M \sin kt + N \cos kt = -\frac{\gamma}{k^2 + \beta^2} \sin kt - \frac{\gamma\beta}{k(k^2 + \beta^2)} \cos kt. \tag{3}$$

Запишем теперь, воспользовавшись формулами (2) и (3), общее решение дифференциального уравнения (1):

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = C_1 + C_2 e^{-\beta t} - \frac{\gamma}{k^2 + \beta^2} \sin kt - \frac{\gamma\beta}{k(k^2 + \beta^2)} \cos kt. \tag{4}$$

Остается определить постоянные интегрирования C_1 и C_2. Для этого продифференцируем соотношение (4) по времени:

$$\dot{\varphi} = -C_2\beta e^{-\beta t} - \frac{\gamma k}{k^2 + \beta^2} \cos kt + \frac{\gamma\beta}{k^2 + \beta^2} \sin kt. \tag{5}$$

После подстановки начальных условий движения: $t = 0$, $\varphi = 0$ в (4) и $t = 0$, $\dot{\varphi} = 0$ в (5), получим систему уравнений

$$0 = C_1 + C_2 - \frac{\gamma\beta}{k(k^2+\beta^2)}, \quad 0 = -C_2\beta - \frac{\gamma k}{k^2+\beta^2}.$$

Решив эту систему уравнений, найдем

$$C_1 = \frac{\gamma}{\beta k} \quad \text{и} \quad C_2 = -\frac{\gamma k}{\beta(k^2+\beta^2)}.$$

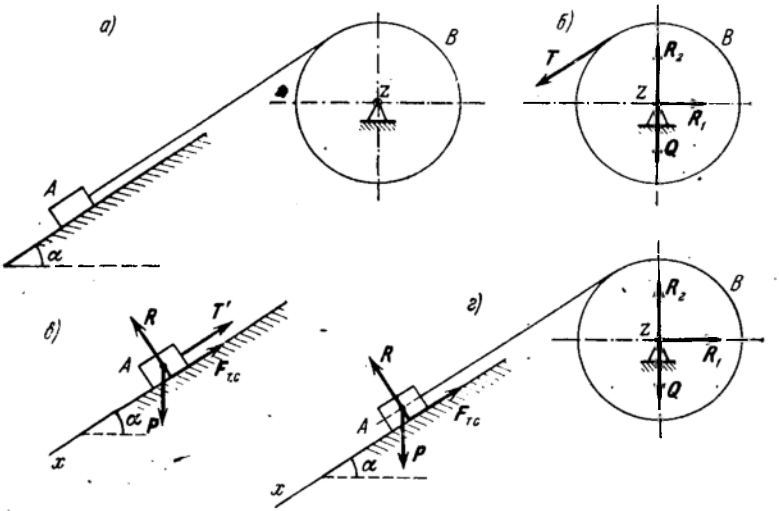
Внеся значения C_1 и C_2 в уравнение (4), получаем уравнение вращения рассматриваемого твердого тела вокруг неподвижной оси:

$$\varphi = \frac{\gamma}{\beta k} - \frac{\gamma k}{\beta(k^2+\beta^2)} e^{-\beta t} - \frac{\gamma}{k^2+\beta^2}\left(\sin kt + \frac{\beta}{k}\cos kt\right),$$

где

$$\beta = \frac{\alpha}{I_z} \quad \text{и} \quad \gamma = \frac{A}{I_z}.$$

Задача 9.56. Груз A массы M, спускаясь по наклонной плоскости вниз, приводит во вращение барабан B посредством намотанной на него нити; r — радиус барабана; f — коэффициент трения скольжения груза о наклонную плоскость, расположенную под углом α



К задаче 9.56.

к горизонту; I_z — момент инерции барабана относительно его оси вращения z, перпендикулярной к плоскости рисунка.

Определить угловую скорость вращения барабана. Массой нити и высотой груза пренебречь.

Р е ш е н и е. Задачу можно решать с помощью дифференциального уравнения вращения барабана B вокруг неподвижной оси z:

$$I_z\ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^{n} m_z(\boldsymbol{F}_k^e).$$

К барабану приложены внешние силы (см. рис. *б*): $\boldsymbol{Q}$ — сила тяжести барабана, $\boldsymbol{R}_1$ и $\boldsymbol{R}_2$ — составляющие реакции оси барабана, $\boldsymbol{T}$ — реакция нити.

Иногда ошибочно включают в число внешних сил силу тяжести груза. В действительности же барабан приводится во вращение реакцией нити $\boldsymbol{T}$, являющейся по отношению к барабану внешней силой. Величина реакции нити $\boldsymbol{T}$, естественно, зависит от силы тяжести $\boldsymbol{P}$, но по модулю, вообще говоря, не равна P.

Моменты сил $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{R}_1$ и $\boldsymbol{R}_2$ относительно оси z равны нулю. Следовательно, главный момент внешних сил относительно оси z равен моменту силы $\boldsymbol{T}$, и дифференциальное уравнение вращения барабана относительно оси вращения z имеет вид

$$I_z\ddot{\varphi} = Tr, \tag{1}$$

где T — реакция нити, пока нам неизвестна. Для исключения T следует составить дифференциальное уравнение движения груза по наклонной плоскости.

Направляем вдоль наклонной плоскости ось x (см. рис. *в*).

К грузу A приложена одна активная сила — сила тяжести $\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{g}$ и реакции связей: $\boldsymbol{R}$ — нормальная реакция наклонной плоскости, $\boldsymbol{F}_{т.с}$ — сила трения скольжения груза о наклонную плоскость и $\boldsymbol{T}'$ — реакция нити. На основании закона равенства действия и противодействия $\boldsymbol{T}' = -\boldsymbol{T}$.

Составим дифференциальное уравнение движения груза A в проекции на ось x:

$$M\ddot{x} = Mg\sin\alpha - T' - F_{т.с};$$

так как

$$F_{т.с} = fN = fMg\cos\alpha,$$

то

$$M\ddot{x} = Mg(\sin\alpha - f\cos\alpha) - T'. \tag{2}$$

Учитывая, что скорость нити при сходе с обода барабана равна скорости груза, имеем $r\dot{\varphi} = \dot{x}$. Следовательно,

$$\ddot{x} = r\ddot{\varphi}. \tag{3}$$

Рассмотрим систему уравнений (1), (2), (3), учитывая при этом, что $|\boldsymbol{T}'| = |\boldsymbol{T}| = T' = T$:

$$I_z\ddot{\varphi} = Tr,$$
$$M\ddot{x} = Mg(\sin\alpha - f\cos\alpha) - T',$$
$$\ddot{x} = r\ddot{\varphi};$$

исключив T, T' и $\ddot{x}$, имеем

$$\frac{1}{r}(I_z + Mr^2)\ddot{\varphi} = Mg(\sin\alpha - f\cos\alpha),$$

откуда получаем дифференциальное уравнение вращения барабана вокруг неподвижной оси z:

$$\ddot{\varphi} = \frac{rMg(\sin\alpha - f\cos\alpha)}{I_z + Mr^2}; \tag{4}$$

из этого уравнения видно, что барабан вращается равноускоренно.

Проинтегрировав, находим

$$\dot{\varphi} = \frac{rMg(\sin\alpha - f\cos\alpha)}{I_z + Mr^2}t + C;$$

при $t = 0$ $\dot{\varphi} = 0$, следовательно, $C = 0$. Итак, искомая угловая скорость вращения барабана равна

$$\dot{\varphi} = \frac{rMg(\sin\alpha - f\cos\alpha)}{I_z + Mr^2}t.$$

Эту задачу можно решить и другим способом, применив теорему об изменении главного момента количеств движения материальной системы относительно оси z:

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum_{k=1}^{n} m_z(\boldsymbol{F}_k^e). \tag{5}$$

Так как данная материальная система состоит из барабана B и груза A, то реакция нити $\boldsymbol{T}$, будучи силой внутренней, в уравнение (5) не входит. Это упрощает решение задачи, ибо не приходится использовать систему уравнений (1), (2), (3) для исключения T и $\ddot{x}$.

Изобразив все внешние силы системы: $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{F}_{т.с}$, $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{R}_1$ и $\boldsymbol{R}_2$ (см. рис. *г*), составим сумму моментов внешних сил относительно оси z:

$$\sum_{k=1}^{n} m_z(\boldsymbol{F}_k') = Mgr\sin\alpha - F_{т.с}r = Mgr(\sin\alpha - f\cos\alpha). \tag{6}$$

Теперь в уравнение (6) вошел момент направленной вдоль нити составляющей $P\sin\alpha$ силы тяжести; составляющая же $P\cos\alpha$ силы тяжести, перпендикулярная к направлению нити, и нормальная реакция наклонной плоскости $R = P\cos\alpha$ в уравнение (6) не вошли, так как они по модулю равны и противоположно направлены.

Главный момент количеств движения системы, состоящей из барабана и груза, относительно оси z дается формулой

$$L_z = L_z^{(1)} + L_z^{(2)}.$$

Здесь $L_z^{(1)}$ — момент количеств движения барабана, а $L_z^{(2)}$ — момент количества движения груза относительно оси z. Имеем

$$L_z^{(2)} = Mvr = Mr^2\dot{\varphi} \quad (\text{так как } v = v_x = r\dot{\varphi}).$$

Кроме того, $L_z^{(1)} = I_z\dot{\varphi}$. Следовательно,

$$L_z = (I_z + Mr^2)\,\dot{\varphi}. \tag{7}$$

Подставив значения $\sum_{k=1}^{n} m_z(\boldsymbol{F}_k^e)$ и L_z из формул (6) и (7) в уравнение (5), получим

$$(I_z + Mr^2)\,\ddot{\varphi} = Mgr(\sin\alpha - f\cos\alpha), \tag{8}$$

откуда следует уравнение (4). Повторив далее решение задачи, как и в первом варианте, находим

$$\dot{\varphi} = \frac{Mgr(\sin\alpha - f\cos\alpha)}{I_z + Mr^2}\,t. \tag{9}$$

Сопоставление двух методов решения этой задачи оказывается в пользу второго способа, ибо в дифференциальное уравнение (8) не входит неизвестная сила $\boldsymbol{T}$.

Если на ось z рядом с барабаном насадить последовательно твердое тело, момент инерции которого неизвестен, то, замерив путь s, пройденный грузом по наклонной плоскости, и соответствующий промежуток времени τ, можно определить неизвестный момент инерции. Это — один из экспериментальных методов определения моментов инерции твердых тел.

Действительно, умножив уравнение (9) на r и учтя, что $r\dot{\varphi} = \dot{x}$, найдем проекцию скорости груза на ось x:

$$\dot{x} = \frac{Mgr^2(\sin\alpha - f\cos\alpha)}{I_z + Mr^2}\,t.$$

Проинтегрировав это дифференциальное уравнение, получим

$$x = \frac{Mgr^2(\sin\alpha - f\cos\alpha)}{2(I_z + Mr^2)}\,t^2 + C.$$

Так как при $t = 0$ $x = 0$, то имеем $C = 0$, и следовательно, уравнение движения груза запишется в виде

$$x = \frac{Mgr^2(\sin\alpha - f\cos\alpha)}{2(I_z + Mr^2)}\,t^2.$$

Подставив в это уравнение $x = s$ и $t = \tau$ и решив уравнение относительно I_z, находим

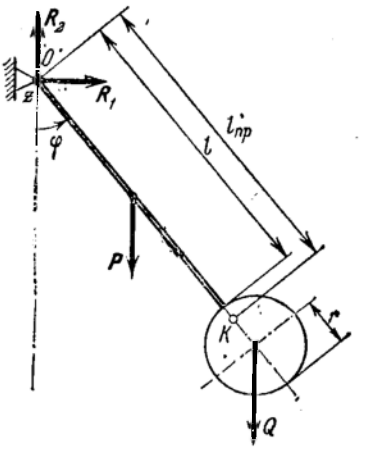
$$I_z = Mr^2\left[\frac{g\tau^2(\sin\alpha - f\cos\alpha)}{2s} - 1\right].$$

Полученное значение I_z равно сумме момента инерции барабана и искомого момента инерции твердого тела, насаженного на одну

ось с барабаном. Следовательно, из полученного значения I_z надо вычесть момент инерции барабана относительно оси z.

Задача 9.57. Физический маятник состоит из однородного стержня длиной l, к концу которого прикреплен круглый однородный диск радиуса $r = l/8$.

Определить закон колебаний маятника и положение его центра качаний, если он подвешен за свободный конец стержня. В начальный момент маятник был отклонен от вертикального положения на угол φ_0 и ему была сообщена начальная угловая скорость $\dot{\varphi}_0$. Масса диска в два раза больше массы стержня.



К задаче 9.57.

Р е ш е н и е. Физическим маятником называется твердое тело, подвешенное к неподвижной горизонтальной оси.

Изобразим физический маятник в отклоненном от вертикали положении. Выберем направление положительного отсчета угла поворота φ от вертикали против часовой стрелки, направим ось z вдоль оси привеса маятника в точке O перпендикулярно к плоскости рисунка на нас.

Внешними силами, приложенными к маятнику, являются: $\boldsymbol{P} = M_1\boldsymbol{g}$ — сила тяжести стержня, $\boldsymbol{Q} = M_2\boldsymbol{g}$ — сила тяжести диска, $\boldsymbol{R}_1$ и $\boldsymbol{R}_2$ — составляющие реакции оси подвеса маятника.

Применяем дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси:

$$I_z\ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^{n} m_z(\boldsymbol{F}_k^e). \tag{1}$$

Моменты сил $\boldsymbol{R}_1$ и $\boldsymbol{R}_2$ относительно оси привеса z равны нулю, следовательно,

$$\sum_{k=1}^{n} m_z(\boldsymbol{F}_k^e) = m_z(\boldsymbol{P}) + m_z(\boldsymbol{Q}) = -M_1 g\frac{l}{2}\sin\varphi - M_2 g(l+r)\sin\varphi$$

(знаки минус указывают, что направления моментов сил $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{Q}$ противоположны направлению положительного отсчета угла поворота φ). Учитывая, что $M_2 = 2M_1$ и $r = l/8$, получим, что сумма моментов внешних сил относительно оси z будет

$$\sum_{k=1}^{n} m_z(\boldsymbol{F}_k^e) = -\frac{11}{4}M_1 gl\sin\varphi. \tag{2}$$

Вычисляем момент инерции маятника относительно оси привеса z как сумму моментов инерции стержня $I_z^{(1)}$ и диска $I_z^{(2)}$ относительно той же оси: $I_z = I_z^{(1)} + I_z^{(2)}$.

Применив теорему Штейнера и учитывая, что $M_2 = 2M_1$ и $r = l/8$, находим

$$I_z^{(1)} = M_1 \frac{l^2}{12} + M_1 \left(\frac{l}{2}\right)^2 = M_1 \frac{l^2}{3}, \quad I_z^{(2)} = M_2 \frac{r^2}{2} + M_2 (l + r)^2 = \frac{163}{64} M_1 l^2;$$

следовательно, момент инерции маятника относительно оси привеса z равен

$$I_z = I_z^{(1)} + I_z^{(2)} = \frac{553}{192} M_1 l^2. \tag{3}$$

Подставив $\sum_{k=1}^{n} m_z (F_k^e)$ и I_z из формул (2) и (3) в уравнение (1), получим

$$\frac{553}{192} M_1 l^2 \ddot{\varphi} = -\frac{11}{4} M_1 g l \sin \varphi,$$

или

$$\ddot{\varphi} + \frac{528}{553} \frac{g}{l} \sin \varphi = 0.$$

Рассмотрим малые колебания маятника, предположив, что $\sin \varphi \approx \varphi$. Тогда дифференциальное уравнение качаний маятника принимает вид

$$\ddot{\varphi} + \frac{528}{553} \frac{g}{l} \varphi = 0. \tag{4}$$

Обозначив

$$\frac{528}{553} \frac{g}{l} = k^2, \tag{5}$$

перепишем полученное уравнение так:

$$\ddot{\varphi} + k^2 \varphi = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^2 + k^2 = 0$. Его корни: $\lambda_{1,2} = \pm ki$. Следовательно,

$$\varphi = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt \tag{6}$$

и

$$\dot{\varphi} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt. \tag{7}$$

Запишем начальные условия движения маятника: при $t = 0$ $\varphi = \varphi_0$, $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$. Подставив $t = 0$, $\varphi = \varphi_0$ в (6) и $t = 0$, $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$ в (7), имеем $C_1 = \varphi_0$, $C_2 = \dot{\varphi}_0/k$. Внеся эти значения в уравнения (6), находим

$$\varphi = \varphi_0 \cos kt + \frac{\dot{\varphi}_0}{k} \sin kt.$$

Введем обозначения:

$$\varphi_0 = a \sin \alpha, \quad \frac{\dot{\varphi}_0}{k} = a \cos \alpha; \tag{8}$$

тогда

$$\varphi = a \sin (kt + \alpha),$$

т. е. физический маятник совершает гармонические колебания.

Угловая амплитуда колебаний a и начальная фаза α, определенные из системы уравнений (8), равны

$$a = \sqrt{\varphi_0^2 + \frac{\dot{\varphi}_0^2}{k^2}}, \quad \alpha = \operatorname{arctg} \frac{k\varphi_0}{\dot{\varphi}_0}.$$

Они зависят от начальных условий движения и круговой частоты колебаний.

Круговая частота колебаний $k = \sqrt{\frac{528}{553} \frac{g}{l}}$ (см. формулу (5)) от начальных условий движения не зависит, т. е. в случае малых колебаний ($\sin \varphi \approx \varphi$) физический маятник обладает свойством изохронности. При рассмотрении задачи 9.40 о колебаниях математического маятника была получена формула для круговой частоты колебаний маятника с конечной угловой амплитудой. В этом случае маятник свойством изохронности не обладает и его период зависит от угловой амплитуды колебаний.

Для определения положения центра качаний данного физического маятника следует учесть, что центр качаний отстоит от точки привеса O на расстоянии приведенной длины физического маятника (напомним, что приведенной длиной физического маятника называется длина нити математического маятника, круговая частота качаний которого равна круговой частоте качаний данного физического маятника).

В ходе решения задачи о колебаниях математического маятника (см. задачу 9.40) была определена его круговая частота колебаний $k = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Для рассматриваемого физического маятника $k = \sqrt{\frac{528}{553} \frac{g}{l}}$.

Приравняв квадраты круговых частот, находим приведенную длину физического маятника $l_{\text{пр}} = \frac{553}{528} l$.

Следовательно, центр качаний K данного физического маятника отстоит от точки привеса O на расстоянии $\frac{553}{528} l$ (см. рисунок).

Задача 9.58. Определить момент инерции твердого тела массы M относительно оси, проходящей через центр тяжести, зная период малых качаний этого тела при подвесе его в точке O; $OC = a$.

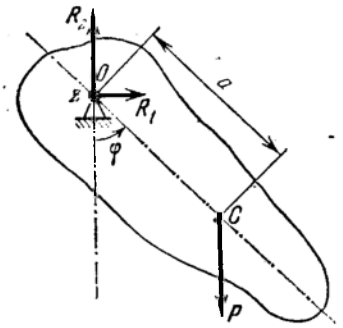
Р е ш е н и е. Метод качаний является одним из наиболее распространенных экспериментальных приемов определения моментов

инерции твердых тел. Повторив рассуждения предыдущей задачи, запишем дифференциальное уравнение колебаний маятника:

$$I_z\ddot{\varphi} = -Mga\sin\varphi;$$

считая колебания малыми ($\sin\varphi \approx \varphi$), получим

$$\ddot{\varphi} + \frac{Mga}{I_z}\varphi = 0.$$



К задаче 9.58.

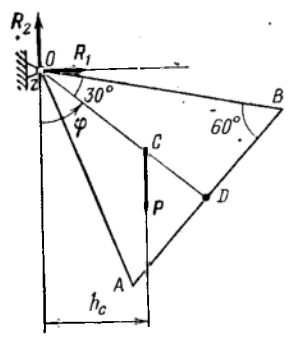
Так как коэффициент, стоящий при угле поворота φ, является квадратом круговой частоты колебаний, то $k = \sqrt{\frac{Mga}{I_z}}$. Как известно, круговая частота колебаний k и период колебаний T связаны зависимостью $k = \frac{2\pi}{T}$. Следовательно, $\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{Mga}{I_z}}$, т. е. $I_z = \frac{MgaT^2}{4\pi^2}$. В соответствии с теоремой Штейнера, $I_z = I_C + Ma^2$ (оси z и C перпендикулярны к плоскости рисунка), откуда

$$I_C = I_z - Ma^2 = \frac{MgaT^2}{4\pi^2} - Ma^2.$$

Итак, искомый момент инерции твердого тела вычисляется по формуле

$$I_C = Mga\left(\frac{T^2}{4\pi^2} - \frac{a}{g}\right),$$

где M, a и T определяются экспериментально.



К задаче 9.59.

Задача 9.59. Однородная треугольная равносторонняя пластинка с длиной стороны, равной l, качается в плоскости рисунка около неподвижной оси O, проходящей через ее вершину и перпендикулярной плоскости пластинки.

Составить дифференциальное уравнение качаний пластинки.

Р е ш е н и е. Изобразим пластинку OAB — физический маятник — в промежуточном положении, отклоненной от вертикали на угол φ. Применим дифференциальное уравнение вращения твердого тела относительно неподвижной оси z:

$$I_z\ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^{n} m_z\left(\boldsymbol{F}_k^e\right). \qquad (1)$$

К пластинке приложены внешние силы: $\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{g}$ — сила тяжести, а также $\boldsymbol{R}_1$ и $\boldsymbol{R}_2$ — составляющие реакции неподвижной оси O. Моменты сил $\boldsymbol{R}_1$ и $\boldsymbol{R}_2$ равны нулю, а момент силы тяжести $\boldsymbol{P}$ отрицателен (направление момента силы $\boldsymbol{P}$ противоположно направлению положительного отсчета угла φ) и равен $-Ph_C = -Mg \cdot OC \sin\varphi$ (C — центр масс пластинки), т. е.

$$\sum_{k=1}^{n} m_z(\boldsymbol{F}_k^e) = -Mg \cdot OC \sin\varphi. \qquad (2)$$

В равностороннем треугольнике высота OD является одновременно биссектрисой и медианой, причем $OC = \frac{2}{3} OD$, где $OD = OB \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} l$. Значит, $OC = \frac{\sqrt{3}}{3} l$. Внеся это значение OC в формулу (2), найдем сумму моментов внешних сил относительно оси привеса z:

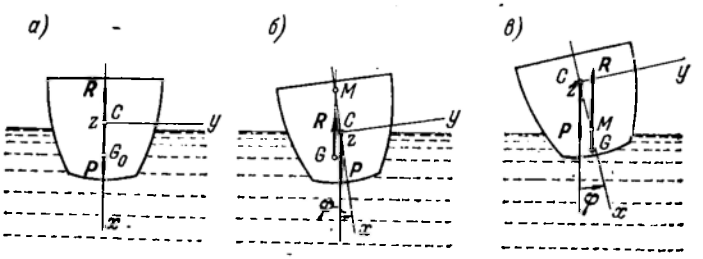
$$\sum_{k=1}^{n} m_z(\boldsymbol{F}_k^e) = -\frac{\sqrt{3}}{3} Mgl \sin\varphi. \qquad (3)$$

Момент инерции I_z был вычислен в ходе решения задачи 9.5. (см. формулу (6)), причем $I_z = \frac{5}{12} Ml^2$. Использовав это значение I_z, а также результат (3) в уравнении (1), получим

$$\frac{5}{12} Ml^2\ddot{\varphi} = -\frac{\sqrt{3}}{3} Mgl \sin\varphi, \quad \text{т. е.} \quad \ddot{\varphi} + \frac{4}{5}\sqrt{3}\frac{g}{l}\sin\varphi = 0.$$

Таково искомое дифференциальное уравнение качаний пластинки.

Задача 9.60. Определить период малых свободных боковых колебаний судна на тихой воде. Подвижные оси x, y, z, связанные с судном, изображены на рисунках. Даны: $\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{g}$ — сила тяжести



К задаче 9.60.

судна, I_z — его момент инерции относительно горизонтальной оси z, перпендикулярной к плоскости рисунков, $CM = a$ — метацентрическая высота. При боковых колебаниях судна считать ось z неподвижной. Силой сопротивления воды пренебречь.

Р е ш е н и е. На рис. *а* — в положении равновесия — к судну приложены силы: сила тяжести $\boldsymbol{P}$, приложенная в его центре тяжести C, и выталкивающая сила $\boldsymbol{R}$, приложенная в центре тяжести G_0 объема воды, вытесненной корпусом судна. Из условия равновесия имеем

$$R = P. \tag{1}$$

На рис. *б* судно изображено в промежуточном положении, отклоненном от вертикали на угол φ. При этом центр тяжести объема воды, вытесненной корпусом судна, находится в точке G. При малых колебаниях приближенно будем считать этот объем постоянным. Тогда выталкивающая сила также оказывается постоянной, не зависящей от положения судна. Проведем через точку G вертикаль до ее пересечения с осью x в точке M, называемой *метацентром*.

Составим дифференциальное уравнение вращения судна вокруг горизонтальной оси z, перпендикулярной к плоскости рисунка (напомним, что, по условию, при колебаниях судна ось z остается неподвижной):

$$I_z\ddot{\varphi} = -R \cdot CM \cdot \sin\varphi, \tag{2}$$

где I_z — момент инерции судна относительно его продольной оси z проходящей через центр тяжести C, а $CM = a$ — метацентрическая высота. (Момент силы $\boldsymbol{R}$ отрицателен, ибо видно, что сила $\boldsymbol{R}$ стремится повернуть судно вокруг оси z в сторону, противоположную положительному направлению отсчета угла φ.)

Использовав равенство (1) и заменив при малых колебаниях $\sin\varphi$ на φ, запишем

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0, \tag{3}$$

где обозначено:

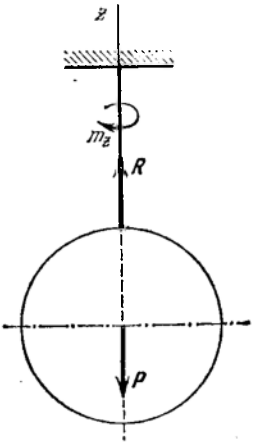
$$k^2 = \frac{Mga}{I_z}. \tag{4}$$

Нетрудно видеть, что дифференциальное уравнение (3) тождественно уравнению (1*) свободных колебаний материальной точки (см. стр. 66). Значит, судно совершает свободные колебания вокруг оси z. Приняв во внимание формулу (4), определим искомый период свободных колебаний:

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{I_z}{Mga}}.$$

В заключение заметим, что колебания судна происходят при условии, если метацентр M расположен выше центра тяжести C (см. рис. *б*). Если же метацентр M находится ниже точки C (см. рис. *в*), то сила $\boldsymbol{R}$ дает вокруг оси z момент в сторону возрастания угла поворота φ. При этом угол φ с течением времени увеличивается, и происходит опрокидывание судна.

Задача 9.61. Однородный круглый диск массы M и радиуса r подвешен к тонкой упругой проволоке в одной из точек, лежащих на его ободе (см. рисунок). При повороте диска на угол φ вокруг оси z, проходящей вдоль проволоки и вертикального диаметра диска, в проволоке возникает момент сил упругости, пропорциональный углу закручивания φ: $m_z = -c\varphi$, где c — момент, необходимый для закручивания проволоки на один радиан.



К задаче 9.61.

Определить движение диска, если в начальный момент, при ненапряженном состоянии проволоки, диску была сообщена начальная угловая скорость ω_0. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Р е ш е н и е. Применяем дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси z:

$$I_z\ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^{n} m_z(\boldsymbol{F}_k^e). \qquad (1)$$

К диску приложены внешние силы: $\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{g}$ — сила тяжести диска, $\boldsymbol{R}$ — реакция проволоки, m_z — момент сил упругости проволоки, направление которого противоположно направлению угла закручивания проволоки φ. Поэтому главный момент внешних сил относительно оси z имеет вид

$$\sum_{k=1}^{n} m_z(\boldsymbol{F}_k^e) = m_z = -c\varphi. \qquad (2)$$

Момент инерции диска относительно оси z равен

$$I_z = \frac{Mr^2}{4}. \qquad (3)$$

Подставив значения $\sum_{k=1}^{n} m_z(\boldsymbol{F}_k^e)$ и I_z из формул (2) и (3) в уравнение (1), находим

$$\frac{Mr^2}{4}\ddot{\varphi} = -c\varphi, \quad \text{т. е.} \quad \ddot{\varphi} + \frac{4c}{Mr^2}\varphi = 0. \qquad (4)$$

Это — дифференциальное уравнение свободных крутильных колебаний диска на проволоке, которое после обозначения $\frac{4c}{Mr^2} = k^2$ принимает вид

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0.$$

Аналогичные уравнения неоднократно решались в пункте 2 § 4 главы VIII. Использовав начальные условия движения: при $t = 0$ $\varphi = 0$, $\dot{\varphi} = \omega_0$, найдем

$$\varphi = \frac{\omega_0}{k} \sin kt,$$

где $k = \frac{2}{r}\sqrt{\frac{c}{M}}$ — круговая частота колебаний, а $\frac{\omega_0}{k}$ — угловая амплитуда колебаний диска.

Если вместо диска к проволоке подвешено твердое тело, момент инерции которого неизвестен, то этот момент инерции можно экспериментально определять методом крутильных колебаний. Для этого надо знать коэффициент упругости проволоки c и измерить период колебаний T подвешенного твердого тела.

Действительно, в этом случае уравнение (4) примет вид

$$I_z\ddot{\varphi} = -c\varphi,$$

где I_z — искомый момент инерции твердого тела. Это уравнение можно записать так:

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0,$$

где $k^2 = c/I_z$. Так как круговая частота колебаний k и период колебаний T связаны формулой $k = \frac{2\pi}{T}$, то получим $\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{c}{I_z}$, откуда находим искомый момент инерции твердого тела:

$$I_z = \frac{cT^2}{4\pi^2}.$$

Задача 9.62. Решить предыдущую задачу в предположении, что диск совершает колебания в вязкой жидкости, причем момент силы сопротивления движению пропорционален угловой скорости диска:

$m_z^* = -\beta\dot{\varphi}$, где β — положительная постоянная.

Определить закон колебаний диска.

Р е ш е н и е. По сравнению с предыдущей задачей добавляется момент силы сопротивления m_z^*, знак которого противоположен знаку угловой скорости $\dot{\varphi}$. Следовательно, в правую часть дифференциального уравнения (4) предыдущей задачи входит слагаемое $m_z^* = -\beta\dot{\varphi}$, и уравнение принимает вид

$$\frac{Mr^2}{4}\ddot{\varphi} = -c\varphi - \beta\dot{\varphi}, \quad \text{т. е.} \quad \ddot{\varphi} + \frac{4\beta}{Mr^2}\dot{\varphi} + \frac{4c}{Mr^2}\varphi = 0. \qquad (1)$$

Обозначив $\frac{4c}{Mr^2} = k^2$ и $\frac{4\beta}{Mr^2} = 2n$, получим дифференциальное уравнение свободных крутильных колебаний диска при наличии момента сопротивления движению, пропорционального угловой скорости диска:

$$\ddot{\varphi} + 2n\dot{\varphi} + k^2\varphi = 0. \qquad (2)$$

Нетрудно видеть, что дифференциальное уравнение (2) аналогично дифференциальному уравнению колебаний материальной точки при наличии силы сопротивления, пропорциональной скорости: $\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = 0$ (см. стр. 67). Поэтому, минуя интегрирование уравнения (2), можно воспользоваться формулами (7*)—(12*), данными в обзоре теории колебаний материальной точки на стр. 67—69.

В соответствии с условием предыдущей задачи, запишем начальные условия движения диска:

$$\text{при } t = 0 \quad \varphi = 0, \quad \dot{\varphi} = \omega_0. \tag{3}$$

При интегрировании дифференциального уравнения (2) возможны три случая: а) $n < k$, б) $n > k$, в) $n = k$.

а) $n < k$ (случай малого сопротивления).

Закон движения (7*) имеет вид

$$\varphi = A^{-nt} \sin\left(\sqrt{k^2 - n^2}\,t + \alpha\right),$$

где по формулам (8*)

$$A = \sqrt{\varphi_0^2 + \frac{(\dot{\varphi}_0^2 + n\varphi_0)^2}{k^2 - n^2}}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\varphi_0\sqrt{k^2 - n^2}}{\dot{\varphi}_0 + n\varphi_0}.$$

При начальных условиях движения (3) имеем

$$A = \frac{\omega_0}{\sqrt{k^2 - n^2}}, \quad \alpha = 0,$$

поэтому затухающие крутильные колебания диска происходят по закону

$$\varphi = \frac{\omega_0}{\sqrt{k^2 - n^2}}\, e^{-nt} \sin\sqrt{k^2 - n^2}\,t, \tag{4}$$

где

$$k^2 = \frac{4c}{Mr^2}, \quad n = \frac{2\beta}{Mr^2}.$$

Период колебаний (10*) равен

$$T_c = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}}.$$

Наибольшие отклонения диска убывают по закону геометрической прогрессии со знаменателем:

$$q = e^{-nT_c/2}.$$

б) $n > k$ (случай большого сопротивления).

Закон движения (11*) имеет вид

$$\varphi = e^{-nt}\left(C_1 e^{\sqrt{n^2 - k^2}\,t} + C_2 e^{-\sqrt{n^2 - k^2}\,t}\right). \tag{5}$$

Зная начальные условия движения: при $t = 0$ $\varphi = 0$, $\dot{\varphi} = \omega_0$, найдем $C_1 = -C_2 = \frac{\omega_0}{2\sqrt{n^2 - k^2}}$. Теперь формула (5) примет вид

$$\varphi = \frac{\omega_0}{2\sqrt{n^2 - k^2}} e^{-nt}\left(e^{\sqrt{n^2-k^2}\,t} - e^{-\sqrt{n^2-k^2}\,t}\right). \qquad (6)$$

в) $n = k$ (предельный случай).

Закон движения (12*) имеет вид

$$\varphi = e^{-nt}\left[\varphi_0 + (\dot{\varphi}_0 + n\varphi_0)\,t\right]. \qquad (7)$$

Использовав в уравнении (7) начальные условия движения (3) получим:

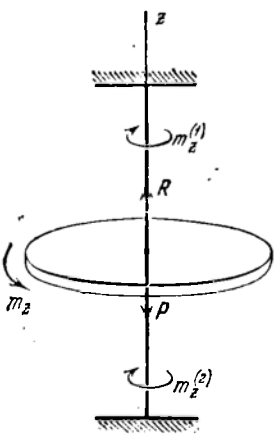
$$\varphi = \omega_0 t e^{-nt}. \qquad (8)$$

Так как при $t \to \infty$ выражение (8) становится неопределенностью вида $\infty \cdot 0$, то для раскрытия неопределенности применим правило Лопиталя

$$\lim_{t\to\infty} \varphi = \lim_{t\to\infty} \omega_0 t e^{-nt} = \lim_{t\to\infty} \frac{\omega_0 t}{e^{nt}} = \lim_{t\to\infty} \frac{(\omega_0 t)'}{(e^{nt})'} = \lim_{t\to\infty} \frac{\omega_0}{n e^{nt}} = 0,$$

т. е. в предельном случае ($n = k$) диск совершает затухающее апериодическое движение.

Итак, в случае малого сопротивления ($n < k$) диск совершает затухающие колебания (4), в случае большого сопротивления ($n > k$) и в предельном случае ($n = k$) происходит апериодическое движение соответственно по законам (6) и (7).



К задаче 9.63.

Задача 9.63. Однородный круглый диск массы M и радиуса r, прикрепленный к потолку и полу посредством двух упругих проволок, расположенных на одной вертикали (см. рисунок), совершает крутильные колебания. При повороте диска в проволоках возникают моменты сил упругости, пропорциональные углу закручивания; c_1 — коэффициент упругости верхней проволоки, c_2 — нижней проволоки. К диску приложен вращающий момент $m_z = m_0 \sin \omega t$, где m_0 и ω — постоянные.

Определить закон движения диска, если в начальный момент он находился в покое при ненапряженном состоянии проволок. Силой сопротивления движению пренебречь. Ось z направлена вдоль проволок.

Р е ш е н и е. К диску приложены: $\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{g}$ — сила тяжести диска, $\boldsymbol{R}$ — суммарная реакция двух проволок, $m_z^{(1)}$ и $m_z^{(2)}$ — мо-

менты сил упругости проволок, направленные в сторону, противоположную их закручиванию, m_z — вращающий момент.

Применяем дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси z:

$$I_z\ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^{n} m_z(F_k^e).$$

Так как момент инерции диска I_z относительно оси z равен $r^2/2$, а главный момент внешних сил относительно оси z равен

$$\sum_{k=1}^{n} m_z(F_k^e) = m_z^{(1)} + m_z^{(2)} + m_z = -c_1\varphi - c_2\varphi + m_0 \sin \omega t,$$

то дифференциальное уравнение вращения принимает вид

$$\frac{Mr^2}{2}\ddot{\varphi} = -(c_1 + c_2)\varphi + m_0 \sin \omega t$$

или

$$\ddot{\varphi} + \frac{2(c_1 + c_2)}{Mr^2}\varphi = \frac{2m_0}{Mr^2} \sin \omega t.$$

Обозначив $\frac{2(c_1 + c_2)}{Mr^2} = k^2$ и $\frac{2m_0}{Mr^2} = h$, запишем полученное уравнение в виде

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = h \sin \omega t. \tag{1}$$

Нетрудно видеть, что дифференциальное уравнение (1) аналогично дифференциальному уравнению (13*) вынужденных колебаний материальной точки при $p = \omega$ и $\delta = 0$ (см. обзор теории колебаний материальной точки на стр. 96). Поэтому, минуя интегрирование дифференциального уравнения (1), воспользуемся формулами (14*) и (15*) на стр. 96 и 98.

Запишем, в соответствии с условием задачи, начальные условия движения диска:

$$\text{при } t = 0 \quad \varphi = 0, \quad \dot{\varphi} = 0. \tag{2}$$

В случае отсутствия резонанса ($\omega \neq k$) движение диска происходит по закону (14*)

$$\varphi = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{h}{k^2 - \omega^2} \sin \omega t. \tag{3}$$

Для определения постоянных C_1 и C_2 вычислим производную φ по t:

$$\dot{\varphi} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt + \frac{h\omega}{k^2 - \omega^2} \cos \omega t. \tag{4}$$

После подстановки начальных условий: $t = 0$, $\varphi = 0$ в (3) и $t = 0$ $\dot{\varphi} = 0$ в (4), найдем, что $C_1 = 0$ и $C_2 = -\frac{h\omega}{k(k^2 - \omega^2)}$.

Следовательно, уравнение движения диска (3) имеет вид

$$\varphi = -\frac{h\omega}{k(k^2-\omega^2)}\sin kt + \frac{h}{k^2-\omega^2}\sin \omega t.$$

В случае резонанса ($\omega = k$) движение диска происходит по закону (15*) при $\delta = 0$:

$$\varphi = \varphi_0 \cos kt + \frac{\dot\varphi_0}{k}\sin kt + \frac{h}{2k^2}\sin kt - \frac{h}{2k}t\cos \omega t. \qquad (5)$$

Подставив в уравнение (5) $t = 0$, $\varphi_0 = 0, \dot\varphi_0 = 0$, получим

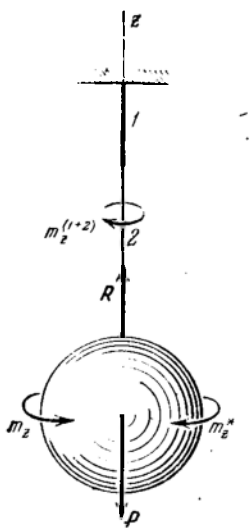
$$\varphi = \frac{h}{2\omega^2}\sin \omega t - \frac{h}{2\omega}t\cos \omega t,$$

где

$$\omega = k = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{2(c_1+c_2)}{M}} \text{ и } h = \frac{2m_0}{Mr^2}.$$

Переменная амплитуда вынужденных колебаний, равная $\frac{h}{2\omega}t$, неограниченно возрастает пропорционально времени.

Задача 9.64. Шар массы M и радиуса r совершает крутильные колебания на двух последовательно соединенных упругих проволоках (см. рис. к задаче), c_1 — коэффициент упругости верхней проволоки, c_2 — нижней проволоки. К шару приложен вращающий момент $m_z = m_0 \sin \omega t$, где m_0 и ω постоянны. Момент силы сопротивления движению пропорционален угловой скорости шара: $m_z^* = -\beta\dot\varphi$, где β — постоянная ($\beta > 0$).



К задаче 9.64.

Определить закон вынужденных колебаний шара. Ось z направлена вдоль упругих проволок.

Решение. К шару приложены: $\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{g}$ — сила тяжести шара, $\boldsymbol{R}$ — суммарная реакция двух проволок, m_z — вращающий момент, m_z^* — момент сил сопротивления и $m_z^{(1+2)}$ — суммарный момент сил упругости двух проволок. Для определения суммарного момента сил упругости $m_z^{(1+2)}$ двух проволок найдем коэффициент упругости c проволоки, эквивалентной двум данным последовательно соединенным проволокам с коэффициентами упругости c_1 и c_2, т. е. приведем данную задачу к обычной схеме крутильных колебаний твердого тела на упругой проволоке.

Допустим, что к шару приложен момент m, под действием которого проволока повернулась на угол φ; тогда $\varphi = m/c$, где c — иско-

мый эквивалентный коэффициент упругости. В рассматриваемом случае угол поворота φ шара равен сумме углов поворота φ_1 и φ_2 — нижних сечений соответственно верхней и нижней проволок, т. е. $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$.

Так как $\varphi_1 = \frac{m}{c_1}$ и $\varphi_2 = \frac{m}{c_2}$, то $\frac{m}{c} = \frac{m}{c_1} + \frac{m}{c_2}$, т. е. $\frac{1}{c} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}$, откуда коэффициент упругости эквивалентной проволоки $c = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}$. Итак, суммарный момент сил упругости двух последовательно соединенных проволок

$$m_z^{(1+2)} = -c\varphi = -\frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}\varphi.$$

Запишем дифференциальное уравнение вращения шара вокруг оси z:

$$I_z \ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^{n} m_z(\boldsymbol{F}_k^e).$$

После подстановки $I_z = \frac{2}{5}Mr^2$ и $\sum_{k=1}^{n} m_z(\boldsymbol{F}_k^e) = m_z^{(1+2)} + m_z^* + m_z = -\frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}\varphi - \beta\dot{\varphi} + m_0 \sin \omega t$ это уравнение примет вид

$$\frac{2Mr^2}{5}\ddot{\varphi} = -\frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}\varphi - \beta\dot{\varphi} + m_0 \sin \omega t,$$

или

$$\ddot{\varphi} + 2n\dot{\varphi} + k^2\varphi = h \sin \omega t, \tag{1}$$

где

$$\frac{5}{2Mr^2}\frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} = k^2, \quad \frac{5\beta}{2Mr^2} = 2n \quad \text{и} \quad \frac{5m_0}{2Mr^2} = h. \tag{2}$$

Уравнение (1) — дифференциальное уравнение вынужденных крутильных колебаний шара на проволоке при наличии момента силы сопротивления движению, пропорционального угловой скорости.

Нетрудно видеть, что дифференциальное уравнение (1) аналогично дифференциальному уравнению вынужденных колебаний материальной точки при наличии силы сопротивления, пропорциональной скорости: $\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = h \sin(pt + \delta)$ при $p = \omega$ и $\delta \neq 0$, данному в обзоре теории колебаний материальной точки на стр. 101. Поэтому, минуя интегрирование дифференциального уравнения (1), воспользуемся формулами (18*) и (19*) на стр. 101.

Итак, вынужденные крутильные колебания шара происходят по закону

$$\varphi_2 = a \sin(\omega t - \varepsilon),$$

где

$$a = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}}, \quad \varepsilon = \operatorname{arctg}\frac{2n\omega}{k^2 - \omega^2},$$

причем k^2, n и h даны формулами (2).

В случае резонанса, т. е. при $\omega = k$, угловая амплитуда вынужденных крутильных колебаний шара равна $a_{\text{рез}} = \frac{h}{2n\omega}$.

Указание. Рекомендуем решить следующие задачи из «Сборника задач по теоретической механике» И. В. Мещерского: 37.4—37.9, 37.11—37.15, 37.17, 37.25, 37.33—37.35, 37.37, 37.39—37.41, 37.46.

§ 6. Динамика плоского движения твердого тела

Как известно из кинематики, уравнения плоского движения твердого тела имеют вид

$$x_C = f_1(t), \quad y_C = f_2(t), \quad \varphi = f_3(t).$$

Разложив это движение на переносное поступательное вместе с поступательно движущимися осями координат, начало которых расположено в центре масс твердого тела, и на относительное вращательное движение вокруг оси, проходящей через центр масс C перпендикулярно к неподвижной плоскости (рис. 9.10), запишем дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела в форме:

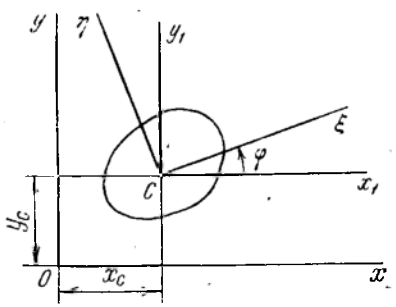


Рис. 9.10.

$$M\ddot{x}_C = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}^e, \quad M\ddot{y}_C = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}^e, \quad J_C\ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^{n} m_C(F_k^e). \quad (1^*)$$

Первые два уравнения определяют закон движения центра масс твердого тела, а третье — его вращение вокруг оси, проходящей через центр масс, перпендикулярно к плоскости движения.

В то время как в кинематике за полюс можно принять любую точку плоской фигуры, в динамике за полюс следует брать центр масс C. Иной выбор полюса приводит к усложнению уравнений.

С помощью дифференциальных уравнений плоского движения твердого тела можно решать как прямые, так и обратные задачи динамики.

При решении обратных задач динамики (определение движения по заданным силам) приходится интегрировать систему дифференциальных уравнений плоского движения твердого тела. Для опре-

деления шести постоянных интегрирования должны быть заданы шесть начальных условий движения, имеющих вид:

при $t = 0$

$$x_C = x_{C_0},\ y_C = y_{C_0},\ \dot{x}_C = \dot{x}_{C_0},\ \dot{y}_C = \dot{y}_{C_0},\ \varphi = \varphi_0,\ \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0.$$

Указание. Решение задач динамики плоского движения твердого тела рекомендуется выполнять в такой последовательности:

1) изобразить на рисунке все внешние силы, приложенные к твердому телу;

2) выбрать систему координат и тем самым определить направление положительного отсчета угла поворота φ;

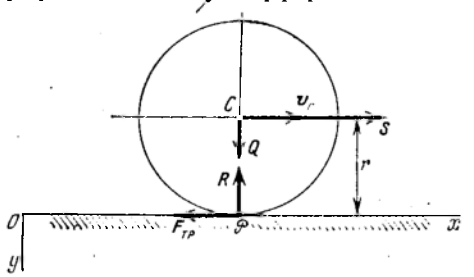
3) составить дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела (не следует забывать, что в третьем уравнении $I_C\ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^{n} m_C(\boldsymbol{F}_k^e)$ момент инерции твердого тела I_C и сумма моментов всех внешних сил $\sum_{k=1}^{n} m_C(\boldsymbol{F}_k^e)$ вычисляются относительно оси, проходящей через центр масс C твердого тела, перпендикулярно к неподвижной плоскости);

4) а) в случае решения прямой задачи искомые внешние силы и их моменты определяются из составленной в предыдущем пункте системы дифференциальных уравнений;

б) в случае решения обратной задачи интегрированием системы дифференциальных уравнений движения определяют уравнения движения твердого тела:

$$x_C = f_1(t),\quad y_C = f_2(t),\quad \varphi = f_3(t).$$

Если по условию задачи известна зависимость двух координат от третьей (например, $x_C = F_1(\varphi)$, $y_C = F_2(\varphi)$) либо некоторые координаты заданы, то, проинтегрировав систему дифференциальных уравнений плоского движения твердого тела, можно определить искомую координату (например φ) и, кроме того, найти величины двух неизвестных внешних сил (или силы и момента).



К задаче 9.65.

Задача 9.65. Колесо массы M и радиуса r катится прямолинейно без скольжения по горизонтальной плоскости под действием горизонтально направленной силы $\boldsymbol{S}$, приложенной к колесу в центре тяжести C. Дан закон движения центра тяжести C: $x_C = at^2/2$, где $a > 0$ — постоянная (ось x направлена по горизонтали в сторону движения).

Определить модуль силы S, модуль нормальной реакции R, а также модуль силы трения $F_{тр}$ колеса о горизонтальную плоскость. Колесо считать сплошным однородным диском.

Р е ш е н и е. Направление оси x задано. Направляем ось y по вертикали вниз. Угол поворота колеса φ отсчитываем в направлении по ходу часовой стрелки.

К колесу приложены внешние силы: $Q = Mg$ — сила тяжести колеса, S — движущая сила, R — нормальная реакция плоскости, $F_{тр}$ — сила трения колеса о горизонтальную плоскость, направленная в сторону, противоположную движению колеса.

Дифференциальные уравнения плоского движения (1*) в данном случае имеют вид

$$M\ddot{x}_C = S - F_{тр}, \quad M\ddot{y}_C = Q - R, \quad \frac{Mr^2}{2}\ddot{\varphi} = F_{тр}r. \tag{1}$$

При движении колеса $y_C = -r$ постоянно, т. е. $\ddot{y}_C = 0$. Из второго уравнения системы (1) находим $R = Mg$.

При качении колеса без скольжения мгновенный центр скоростей расположен в точке $\mathcal{P}$ касания колеса с горизонтальной плоскостью, следовательно, $v_C = r\omega$. Так как скорость центра параллельна оси x, то

$$\dot{x}_C = r\dot{\varphi}. \tag{2}$$

Формула (2) определяет условие качения колеса без скольжения. Воспользовавшись формулой (2), вычислим

$$\ddot{x}_C = r\ddot{\varphi}. \tag{3}$$

Так как движение центра тяжести C колеса задано: $x_C = at^2/2$, то

$$\ddot{x}_C = a. \tag{4}$$

Из формул (3) и (4) находим

$$\ddot{\varphi} = \frac{\ddot{x}_C}{r} = \frac{a}{r}. \tag{5}$$

Использовав формулу (5), из третьего уравнения системы (1) определим искомый модуль силы трения

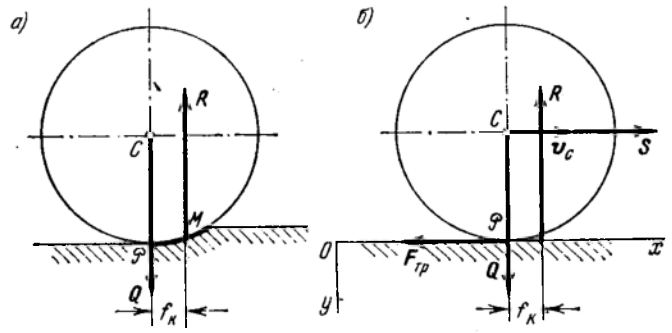
$$F_{тр} = \frac{Ma}{2}. \tag{6}$$

Остается из первого уравнения системы (1) найти S. Принимая во внимание формулы (4) и (6), получаем

$$S = \frac{3a}{2}M.$$

Задача 9.66. Решить предыдущую задачу, учитывая трение качения колеса о горизонтальную плоскость; коэффициент трения качения равен $f_к$.

Р е ш е н и е. При качении колеса по плоскости, в результате деформации колеса и плоскости, соприкосновение их происходит не в одной точке $\mathcal{P}$, а по небольшой дуге $\mathcal{P}M$. Суммарная реакция $\boldsymbol{R}$, подсчитанная по дуге соприкосновения $\mathcal{P}M$, разлагается на нормальную и касательную составляющие. Касательная составляющая является силой трения $F_{\text{тр}}$. Нормальная составляющая реакции оказывается смещенной относительно центра тяжести колеса C в сторону движения на величину $f_{\text{к}}$, называемую коэффициентом трения качения (см. рис. *а*). Следовательно, в отличие от коэффициента



К задаче 9.66.

трения скольжения f, который является безразмерной величиной, коэффициент трения качения $f_{\text{к}}$ измеряется в сантиметрах (при качении колеса железнодорожного вагона по рельсу коэффициент трения качения $f_{\text{к}}$ имеет порядок сотых долей сантиметра).

При учете трения качения первое и второе уравнения системы (1) предыдущей задачи остаются без изменения. В правую часть третьего уравнения добавляется отрицательный момент смещенной реакции $\boldsymbol{R}$, т. е. $m_C(\boldsymbol{R}) = -R \cdot f_{\text{к}} = -Mgf_{\text{к}}$. Следовательно, система дифференциальных уравнений движения колеса принимает вид

$$M\ddot{x}_C = S - F_{\text{тр}}, \quad M\ddot{y}_C = Mg - R, \quad \frac{Mr^2}{2}\ddot{\varphi} = F_{\text{тр}} \cdot r - Mgf_{\text{к}}.$$

Из второго уравнения системы находим величину нормальной реакции: $R = Mg$; таким образом, на нее наличие трения качения не влияет. Из третьего уравнения системы, после пользования формулы (5) предыдущей задачи, находим:

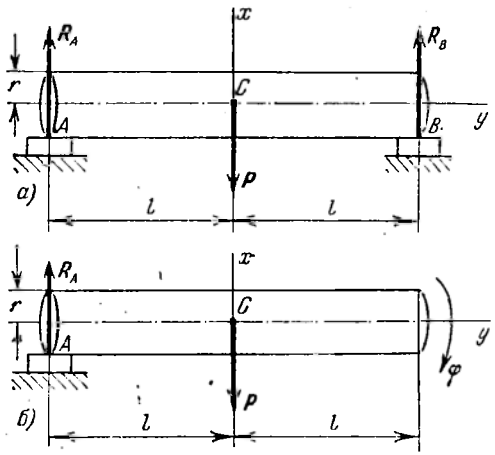
$$F_{\text{тр}} = \left(\frac{a}{2g} + \frac{f_{\text{к}}}{r}\right) Mg.$$

После подстановки полученного значения $F_{\text{тр}}$ и значения $\ddot{x}_C$ из формулы (4) предыдущей задачи в первое уравнение системы получим:

$$S = \left(\frac{3a}{2g} + \frac{f_{\text{к}}}{r}\right) Mg.$$

Как и следовало ожидать, для получения того же самого закона движения центра тяжести C колеса при наличии трения качения следует прикладывать большую по модулю силу S.

Задача 9.67. Бревно массы M длиной $2l$, с радиусом основания r опиралось своими концами на два кирпича. Внезапно правый кирпич был выбит из-под бревна.



К задаче 9.67.

Определить реакцию левого кирпича в начальный момент падения, считая бревно однородным круглым цилиндром.

Р е ш е н и е. При наличии двух опор (см. рис. *а*) реакция каждой из них равна $Mg/2$. На рис. *б* изображено бревно в начальный момент своего падения после внезапного удаления правого кирпича. Падая, бревно совершает плоское движение. К бревну приложены внешние силы: сила тяжести бревна $\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{g}$ и реакция левого кирпича $\boldsymbol{R}_A$.

Начало осей координат выбираем в центре тяжести C бревна. Оси x и y располагаем в вертикальной плоскости материальной симметрии бревна, направив ось x по вертикали вверх.

Составим дифференциальные уравнения плоского движения бревна, справедливые для малых углов поворота балки:

$$M\ddot{x}_C = -Mg + R_A, \quad M\ddot{y}_C = 0, \quad M\left(\frac{r^2}{4} + \frac{l^2}{3}\right)\ddot{\varphi} = R_A l. \qquad (1)$$

При составлении третьего уравнения (1) использовано, что момент инерции бревна относительно горизонтальной оси, проходящей через его центр тяжести, равен

$$M\left(\frac{r^2}{4} + \frac{l^2}{3}\right).$$

Искомая реакция R_A входит в правые части первого и третьего уравнений системы (1), в левых частях которых стоят $\ddot{x}_C$ и $\ddot{\varphi}$. Для исключения $\ddot{x}_C$ и $\ddot{\varphi}$ следует найти зависимость между ними. Так как $v_C = l\omega$, т. е. $\dot{x}_C = -l\dot{\varphi}$ (мы пренебрегаем толщиной бревна и считаем опору точечной), то

$$\ddot{x}_C = -l\ddot{\varphi}. \qquad (2)$$

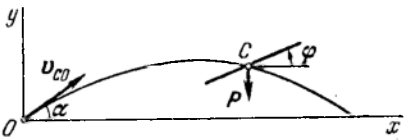
Разделив первое уравнение системы (1) на третье и использовав формулу (2), получим

$$\frac{l}{l^2/3 + r^2/4} = \frac{Mg - R_A}{R_A l},$$

откуда определим искомую реакцию левого кирпича:

$$R_A = Mg\,\frac{4l^2 + 3r^2}{16l^2 + 3r^2}.$$

Задача 9.68. Однородный стержень движется в плоскости рисунка. Найти уравнения движения стержня, если в начальный момент скорость v_{C0} его центра тяжести C составляла угол α с горизонтом и ему была сообщена угловая скорость ω_0 вокруг оси, проходящей через C перпендикулярно к плоскости движения стержня. При этом стержень был расположен горизонтально.



К задаче 9.68.

Оси x и y изображены на рисунке. Угол φ отсчитывается от оси x против хода часовой стрелки. Силами сопротивления движению пренебречь.

Р е ш е н и е. Изобразим стержень в текущем положении. К нему приложена сила тяжести $\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{g}$. Дифференциальные уравнения плоского движения в данном случае имеют вид

$$M\ddot{x}_C = 0, \quad M\ddot{y}_C = -Mg, \quad I_C\ddot{\varphi} = 0,$$

или, после сокращения,

$$\ddot{x}_C = 0, \quad \ddot{y}_C = -g, \quad \ddot{\varphi} = 0, \tag{1}$$

Запишем начальные условия движения стержня:
при

$$t = 0 \quad x_C = y_C = \varphi = 0, \quad \dot{x}_C = v_{C0}\cos\alpha, \quad \dot{y}_C = v_{C0}\sin\alpha, \quad \dot{\varphi} = \omega_0. \tag{2}$$

Предоставляем читателю проинтегрировать систему дифференциальных уравнений (1) и, использовав начальные условия (2), получить искомые уравнения движения:

$$x_C = v_{C0}t\cos\alpha, \quad y_C = v_{C0}t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2}, \quad \varphi = \omega_0 t. \tag{3}$$

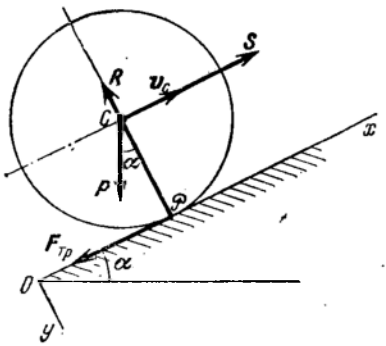
Исключив время из первых двух уравнений (3), находим:

$$y_C = x_C\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{g}{2v_{C0}^2\cos^2\alpha}\,x_C^2. \tag{4}$$

Итак, центр тяжести C стержня движется по параболе, описанной уравнением (4). При этом стержень вращается вокруг подвижной

оси, проходящей через C перпендикулярно к плоскости рисунка, с постоянной угловой скоростью ω_0 (см. третье уравнение (3)).

Задача 9.69. Определить закон движения центра тяжести C ведомого колеса автомашины массы M и радиуса r, поднимающейся в гору, склон которой расположен под углом α к горизонту. К оси ведомого колеса приложена постоянная сила $\boldsymbol{S}$. В начальный момент автомашина находилась в покое. Колесо катится без скольжения. Сопротивлением качению пренебречь.



К задаче 9.69.

Радиус инерции колеса относительно оси, проходящей через его центр тяжести перпендикулярно к плоскости движения, равен ρ.

Р е ш е н и е. При движении автомашины за счет работы двигателя создается вращающий момент, приложенный к ведущей паре колес (обычно задней). Сила трения, возникающая при соприкосновении ведущих колес с дорожным покрытием, направлена в сторону движения и является той внешней силой, которая движет автомашину. При отдельном рассмотрении движения ведомого колеса надо считать, что к его оси приложена сила $\boldsymbol{S}$, о которой говорится в условии задачи. На ведомое колесо действует также сила трения, возникающая в точках его соприкосновения с дорогой. Эта сила направлена в сторону, противоположную силе $\boldsymbol{S}$, и тем самым в сторону, противоположную силе трения ведущего колеса.

Итак, к ведомому колесу приложены внешние силы: $\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{g}$ — сила тяжести колеса, $\boldsymbol{S}$ — движущая сила, $\boldsymbol{R}$ — нормальная реакция наклонной поверхности дороги, $\boldsymbol{F}_{тр}$ — сила трения колеса о дорожное покрытие. В случае ведомого колеса сила трения направлена в сторону, противоположную движению колеса. Координатные оси изображены на рисунке. В соответствии с направлением осей считаем положительным направление отсчета угла поворота φ по ходу часовой стрелки.

Запишем дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела:

$$M\ddot{x}_C = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}^e, \quad M\ddot{y}_C = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}^e, \quad I_C\ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^{n} m_C\left(F_k^e\right),$$

которые для рассматриваемой задачи имеют вид

$$M\ddot{x}_C = S - Mg\sin\alpha - F_{тр}, \quad M\ddot{y}_C = Mg\cos\alpha - R, \quad M\rho^2\ddot{\varphi} = F_{тр}r. \quad (1)$$

Момент силы трения в последнем уравнении системы (1) положителен, так как его направление совпадает с направлением положительного отсчета угла поворота φ.

Так как при движении колеса $y_C = -r$ постоянно, т. е. $\ddot{y}_C = 0$, то из второго уравнения системы (1) находим $R = Mg\cos\alpha$ (тот же результат получается и при покое колеса).

Для определения уравнения движения центра тяжести C колеса следует проинтегрировать первое уравнение системы (1). Однако в правую часть этого уравнения входит неизвестная по модулю сила трения $F_{тр}$. Для исключения $F_{тр}$ следует обратиться к третьему уравнению системы (1), одновременно использовав условие качения колеса без скольжения:

$$\dot{x}_C = r\dot{\varphi} \tag{2}$$

(мгновенный центр скоростей колеса находится в точке $\mathscr{P}$ соприкосновения колеса с дорогой). Вычислив производную по времени от $\dot{x}_C$, получим

$$\ddot{x}_C = r\ddot{\varphi}. \tag{3}$$

Подставив (3) в первое уравнение системы (1) и разделив первое уравнение на третье, находим

$$\frac{S - Mg\sin\alpha - F_{тр}}{F_{тр}r} = \frac{r}{\rho^2},$$

откуда

$$F_{тр} = \frac{\rho^2}{r^2+\rho^2}(S - Mg\sin\alpha). \tag{4}$$

Теперь первое уравнение системы (1) после подстановки в него значения $F_{тр}$ из формулы (4) принимает вид

$$\ddot{x}_C = \frac{1}{M}\frac{r^2}{r^2+\rho^2}(S - Mg\sin\alpha).$$

Интегрируя это дифференциальное уравнение для начальных условий движения: при $t = 0$ $x_C = 0$, $\dot{x}_C = 0$ (по условию задачи в начальный момент колесо находилось в покое), получим искомый закон движения центра тяжести C ведомого колеса:

$$x_C = \frac{1}{2M}\frac{r^2}{r^2+\rho^2}(S - Mg\sin\alpha)\,t^2.$$

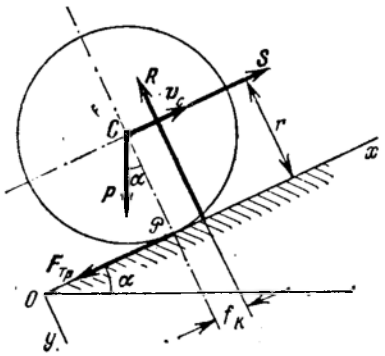
Нетрудно установить, что колесо будет катиться вверх при выполнении условия: $S - Mg\sin\alpha > 0$, т. е. $S > Mg\sin\alpha$.

Часто, решая подобные задачи, ошибочно полагают, что может происходить качение колеса без скольжения при отсутствии силы трения $F_{тр}$. Нетрудно видеть, что при этом предположении третье уравнение системы (1) принимает вид $Mr^2\ddot{\varphi} = 0$, т. е. $\ddot{\varphi} = 0$. Учитывая, что при $t = 0$ $\varphi = 0$ и $\dot{\varphi} = 0$, получим $\varphi = 0$. Это означает, что при отсутствии силы трения качение колеса невозможно.

Задача 9.70. Решить предыдущую задачу с учетом трения качения колеса о дорогу; коэффициент трения качения равен $f_к$. Радиус колеса r.

Р е ш е н и е. В схему расположения внешних сил вносится только одно изменение: нормальная реакция $\boldsymbol{R}$ оказывается смещенной относительно центра тяжести C колеса в сторону его движения на $f_к$.

На первых двух дифференциальных уравнениях движения системы (1) предыдущей задачи это изменение не отражается, а в правой части третьего уравнения добавляется момент смещенной реакции $\boldsymbol{R}$, т. е. $m_C(\boldsymbol{R}) = -Rf_к$.



К задаче 9.70.

Итак, система дифференциальных уравнений плоского движения ведомого колеса принимает вид

$$M\ddot{x}_C = S - Mg\sin\alpha - F_{тр},$$
$$M\ddot{y}_C = -R + Mg\cos\alpha, \qquad (1)$$
$$M\rho^2\ddot{\varphi} = F_{тр}r - Rf_к.$$

Приняв во внимание, что $y_C = r$ и, значит, $\ddot{y}_C = 0$, из второго уравнения (1) находим $R = Mg\cos\alpha$.

Воспользуемся формулой (3) предыдущей задачи в первом уравнении (1), заменим в третьем уравнении (1) R на $Mg\cos\alpha$, затем разделим первое уравнение на третье и определим силу трения:

$$F_{тр} = \frac{\rho^2}{r^2+\rho^2}\left[S - Mg\left(\sin\alpha - \frac{f_к}{r}\cos\alpha\right)\right]. \qquad (2)$$

Первое уравнение системы (1) после подстановки в него значения $F_{тр}$ из формулы (2) принимает вид

$$\ddot{x}_C = M\frac{r^2}{r^2+\rho^2}\left[S - Mg\left(\sin\alpha + \frac{f_к}{r}\cos\alpha\right)\right].$$

Интегрируя последнее дифференциальное уравнение при начальных условиях движения: $t = 0$, $x_C = 0$, $\dot{x}_C = 0$, находим искомый закон движения центра тяжести C ведомого колеса

$$x_C = \frac{1}{2M}\frac{r^2}{r^2+\rho^2}\left[S - Mg\left(\sin\alpha + \frac{f_к}{r}\cos\alpha\right)\right]t^2. \qquad (3)$$

Из формулы (3) следует, что движение колеса вверх может происходить при выполнении условия

$$S - Mg\left(\sin\alpha + \frac{f_к}{r}\cos\alpha\right) > 0, \text{ т. е. } S > Mg\left(\sin\alpha + \frac{f_к}{r}\cos\alpha\right). \qquad (4)$$

Однако качение колеса без скольжения может иметь место при значениях силы S, не превосходящих определенного предела, соответствующего предельному значению силы трения fN. Последнее условие приводит к неравенству $F_{тр} \leqslant fN$. Так как нормальная ре-

акция $N = Mg\cos\alpha$, то $F_{тр} \leqslant fMg\cos\alpha$. Подставив в левую часть этого неравенства значение $F_{тр}$ из формулы (2), получим

$$\frac{\rho^2}{r^2+\rho^2}\left[S - Mg\left(\sin\alpha - \frac{f_к}{r}\cos\alpha\right)\right] \leqslant fMg\cos\alpha,$$

откуда

$$S \leqslant Mg\left\{\sin\alpha + \left[\left(1+\frac{r^2}{\rho^2}\right)f - \frac{f_к}{r}\right]\cos\alpha\right\}. \qquad (5)$$

Сопоставив неравенства (4) и (5), запишем

$$Mg\left(\sin\alpha + \frac{f_к}{r}\cos\alpha\right) < S \leqslant Mg\left\{\sin\alpha + \left[\left(1+\frac{r^2}{\rho^2}\right)f - \frac{f_к}{r}\right]\cos\alpha\right\}. \qquad (6)$$

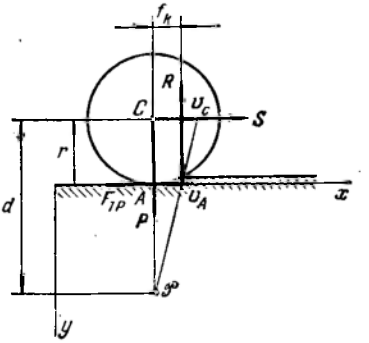
Значение S, удовлетворяющее двойному неравенству (6), обеспечивает качение вверх ведомого колеса без скольжения. При

$$S > Mg\left\{\sin\alpha + \left[\left(1+\frac{r^2}{\rho^2}\right)f - \frac{f_к}{r}\right]\cos\alpha\right\} \qquad (7)$$

колесо начинает скользить.

Задача 9.71. Воспользовавшись условием и решением предыдущей задачи, рассмотреть движение колеса по горизонтальной дороге.

Определить скорость скольжения в точке A касания колеса с дорогой, если модуль силы S равен $S = 0{,}08Mg$. Даны: $f_к = 0{,}6$ см — коэффициент трения качения, $f = 0{,}04$ — коэффициент трения скольжения, $r = 30$ см — радиус колеса, $\rho = 27$ см — радиус инерции колеса относительно оси, проходящей через его центр тяжести перпендикулярно к плоскости движения.



К задаче 9.71.

Р е ш е н и е. Воспользовавшись формулой (7) предыдущей задачи при $\alpha = 0$, подставив численные данные, получим условие, обеспечивающее качение колеса со скольжением по горизонтальной дороге:

$$S > 0{,}07Mg.$$

Так как $S = 0{,}08Mg$, то в данном случае колесо катится со скольжением.

Дифференциальные уравнения (1) предыдущей задачи при $\alpha = 0$ и численных данных принимают вид

$$M\ddot{x}_C = 0{,}08Mg - F_{тр}, \quad M\ddot{y}_C = -R + Mg, \quad 730M\ddot{\varphi} = 30F_{тр} - 0{,}6R. \qquad (1)$$

Приняв во внимание, что $y_C = -r$ и, значит, $\ddot{y}_C = 0$, из второго уравнения (1) имеем $R = Mg$.

При качении колеса со скольжением сила трения $F_{тр}$ достигает наибольшего значения: $F_{тр} = fR = 0{,}04\,Mg$, поэтому первое и третье уравнения (1) запишем в виде

$$M\ddot{x}_C = 0{,}04Mg, \quad 730\,M\ddot{\varphi} = 0{,}6Mg,$$

т. е.

$$\ddot{x}_C = 0{,}04g, \quad \ddot{\varphi} = 0{,}0008g. \qquad (2)$$

При качении колеса со скольжением мгновенный центр скоростей не совмещен с точкой A касания колеса с дорогой. Он лежит на перпендикуляре, восставленном к v_C (см. рисунок) на некотором, пока неизвестном, расстоянии d. Так как $v_C = d\omega$, т. е. $\dot{x}_C = d\dot{\varphi}$, то

$$\ddot{x}_C = d\ddot{\varphi}. \qquad (3)$$

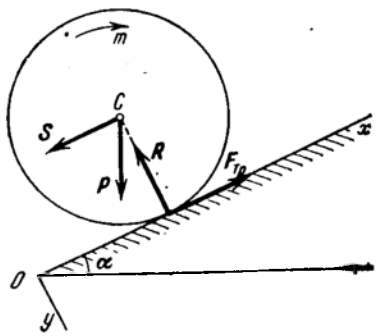
Воспользовавшись формулой (3), разделим первое уравнение (2) на второе и определим d. Имеем

$$d = 50 \text{ см}. \qquad (4)$$

Из пропорции $\frac{v_A}{v_C} = \frac{d-r}{d}$, приняв во внимание (4), найдем

$$v_A = 0{,}4v_C. \qquad (5)$$

Проинтегрировав первое уравнение (2) при начальном условии: $t = 0$, $\dot{x}_C = 0$, получим $\dot{x}_C = 0{,}04\,gt = 39t$ см/с.



К задаче 9.72.

Теперь с помощью формулы (5) находим искомую скорость скольжения в точке A касания колеса с дорогой:

$$v_A = 15{,}6t \text{ см/с}.$$

Задача 9.72. При движении автомашины в гору, склон которой расположен под углом α к горизонту, к ведущему колесу массы M и радиуса r приложен постоянный вращающий момент m. К оси C ведущего колеса приложена со стороны ведомых частей автомашины постоянная сила S.

Определить закон движения центра тяжести C колеса. Колесо считать однородным кольцом массы M и радиуса r. В начальный момент автомашина находилась в покое. Колесо катится без скольжения. Трением качения пренебречь. Радиус инерции колеса относительно оси, проходящей через его центр тяжести перпендикулярно к плоскости движения, равен ρ.

Р е ш е н и е. На колесо действуют внешние силы: $\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{g}$ — сила тяжести колеса, $\boldsymbol{S}$ — сила, приложенная со стороны ведомых частей автомашины, $\boldsymbol{R}$ — нормальная реакция поверхности Земли, вращающий момент m, $\boldsymbol{F}_{\text{тр}}$ — сила трения ведущего колеса о поверхность Земли — направлена в сторону движения и является движущей силой (у ведомого колеса, рассмотренного в двух предыдущих задачах, сила трения $\boldsymbol{F}_{\text{тр}}$ направлена в сторону, противоположную движению).

Оси координат изображены на рисунке. В соответствии с направлением осей считаем положительным направление отсчета угла поворота φ по ходу часовой стрелки.

Запишем дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела:

$$M\ddot{x}_C = \sum_{k=1}^{n} F^e_{kx}, \quad M\ddot{y}_C = \sum_{k=1}^{n} F^e_{ky}, \quad I_C\ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^{n} m_C(\boldsymbol{F}^e_k),$$

принимающие для рассматриваемой задачи вид

$$M\ddot{x}_C = F_{\text{тр}} - Mg\sin\alpha - S, \quad M\ddot{y}_C = -R + Mg\cos\alpha,$$

$$M\rho^2\ddot{\varphi} = m - F_{\text{тр}}r. \tag{1}$$

Так как $y_C = -r$ постоянно, то $\ddot{y}_C = 0$ и из второго уравнения системы следует, что $R = Mg\cos\alpha$.

Разделив первое уравнение системы (1) на третье и использовав при этом вытекающее из условия качения колеса без скольжения $\dot{x}_C = r\dot{\varphi}$ соотношение $\ddot{x}_C = r\ddot{\varphi}$, получим

$$\frac{F_{\text{тр}} - Mg\sin\alpha - S}{\frac{m}{r} - F_{\text{тр}}} = \frac{r}{\rho^2},$$

откуда

$$F_{\text{тр}} = \frac{mr + (Mg\sin\alpha + S)\rho^2}{r^2 + \rho^2}. \tag{2}$$

После подстановки значения $F_{\text{тр}}$ из формулы (2) в правую часть первого уравнения системы (1) найдем

$$\ddot{x}_C = \frac{r}{M}\,\frac{m - (Mg\sin\alpha + S)r}{r^2 + \rho^2}.$$

Интегрирование этого дифференциального уравнения при начальных условиях движения: $t = 0$, $x_C = 0$, $\dot{x}_C = 0$, приводит к выражению

$$x_C = \frac{r}{2M}\,\frac{m - (Mg\sin\alpha + S)r}{r^2 + \rho^2}\,t^2.$$

Как следует из полученного результата, движение колеса вверх из состояния покоя может происходить только при выполнении условия

$$m > (Mg\sin\alpha + S)r. \tag{3}$$

Однако качение ведущего колеса без скольжения может происходить лишь при значениях вращающего момента m, не превосходящих определенного предела. Действительно, так как сила трения должна удовлетворять неравенству $F_{тр} \leqslant fR$, т. е. $F_{тр} \leqslant fMg\cos\alpha$, то, подставив в левую часть этого неравенства значение $F_{тр}$ из формулы (2), находим

$$\frac{mr + (Mg\sin\alpha + S)\rho^2}{r^2 + \rho^2} \leqslant fMg\cos\alpha,$$

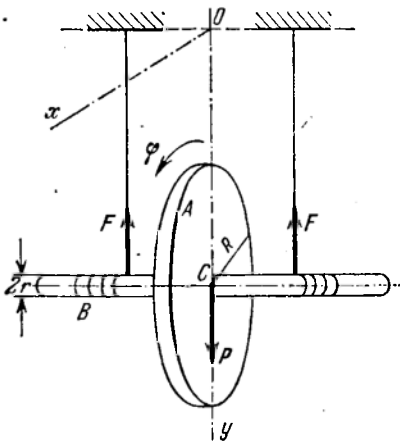
откуда

$$m \leqslant \frac{1}{r}[fMg(r^2 + \rho^2)\cos\alpha - (Mg\sin\alpha + S)\rho^2]. \qquad (4)$$

Сопоставив неравенства (3) и (4), запишем

$$(Mg\sin\alpha + S)r < m \leqslant \frac{1}{r}[fMg(r^2 + \rho^2)\cos\alpha - (Mg\sin\alpha + S)\rho^2].$$

Если величина вращающего момента удовлетворяет этому двойному неравенству, то качение ведущего колеса осуществляется без скольжения.



К задаче 9.73.

При

$$m > \frac{1}{r}[fMg(r^2 + \rho^2)\cos\alpha - (Mg\sin\alpha + S)\rho^2]$$

колесо начинает скользить.

Задача 9.73. Однородный круглый диск A массы M и радиуса R подвешен на двух нерастяжимых нитях, намотанных на его горизонтальную ось B радиуса r. Под действием силы тяжести диск опускается вниз. При этом нити разматываются до полной длины. При дальнейшем вращении диска в том же направлении нити наматываются на ось B, а сам диск поднимается вверх. После окончания подъема диска снова начинается разматывание нитей и опускание диска вниз и т. д. Этот прибор называется маятником Максвелла.

Определить реакции нитей и скорость центра тяжести C диска. В верхнем крайнем положении скорость центра тяжести C равна нулю. Массой оси B и нитей пренебречь; силы трения не учитывать.

Р е ш е н и е. К диску приложены внешние силы: $\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{g}$ — сила тяжести диска и две реакции нитей $\boldsymbol{F}$. Координатные оси x и y и направление положительного отсчета угла поворота φ указаны на рисунке.

Составим дифференциальные уравнения плоского движения диска A:

$$M\ddot{x}_C = 0, \quad M\ddot{y}_C = Mg - 2F, \quad \frac{MR^2}{2}\ddot{\varphi} = 2Fr.$$

Из первого уравнения системы при нулевых начальных условиях находим $x_C = 0$. Это указывает на движение центра тяжести C диска по вертикали.

Использовав зависимость между угловой скоростью диска и скоростью его центра тяжести $v_C = r\omega$, т. е. $\dot{y}_C = r\dot{\varphi}$, вычислив затем $\ddot{y}_C = r\ddot{\varphi}$ и разделив второе уравнение системы на третье, находим $\frac{2r}{R^2} = \frac{Mg - 2F}{2Fr}$. Из этого соотношения определяем реакцию нити

$$F = \frac{MgR^2}{2(R^2 + 2r^2)}.$$

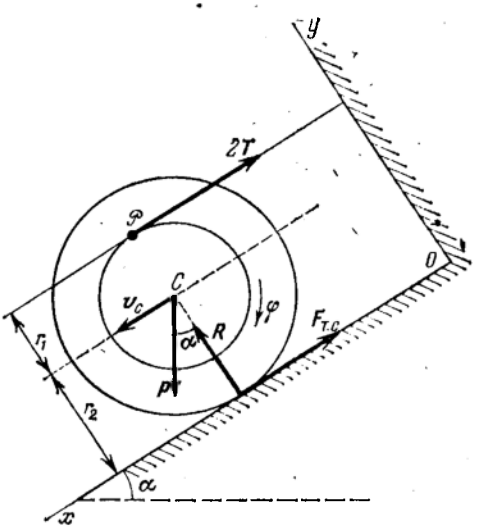
Второе уравнение системы после подстановки в него полученного значения F принимает вид

$$\ddot{y}_C = 2g\frac{r^2}{R^2 + 2r^2}.$$

Так как в крайнем верхнем положении диска при $t = 0$ $\dot{y}_C = 0$, то

$$\dot{y}_C = 2g\frac{r^2}{R^2 + 2r^2}t.$$

Это уравнение соответствует опусканию диска вниз.



К задаче 9.74.

Интересно отметить, что независимо от направления движения центра тяжести C диска его ускорение y_C остается неизменным. В крайних нижних положениях диска происходит удар, скорость центра тяжести C обращается в нуль и затем меняет свое направление.

Задача 9.74. Катушка массы M и радиуса r_2 скатывается, скользя под действием силы тяжести, с наклонной плоскости, расположенной под углом α к горизонту. При этом разматываются две нити, намотанные на ось катушки радиуса r_1 симметрично ее вертикальной плоскости материальной симметрии (на рисунке прямолинейные участки нитей изображены одной прямой). При движении катушки ее ось остается горизонтальной.

Определить реакции нитей и скорость центра тяжести C катушки; ρ — радиус инерции катушки относительно оси, проходящей через

ее центр тяжести C перпендикулярно к неподвижной плоскости. В начальный момент катушка находилась в покое. Коэффициент трения скольжения катушки о наклонную плоскость равен f.

Р е ш е н и е. К катушке приложены внешние силы: $\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{g}$ — ее сила тяжести, $2\boldsymbol{T}$ — суммарная реакция нитей, $\boldsymbol{R}$ — нормальная реакция наклонной плоскости, $\boldsymbol{F}_{\text{тр}}$ — сила трения скольжения катушки о наклонную плоскость. Так как катушка, скатываясь, поворачивается по ходу часовой стрелки, то $\boldsymbol{F}_{\text{тр}}$ направлена вдоль наклонной плоскости вверх.

Выбираем оси координат xy так, как это показано на рисунке. Положительным считаем направление отсчета угла φ по часовой стрелке.

Составим дифференциальные уравнения плоского движения катушки

$$M\ddot{x}_C = Mg\sin\alpha - 2T - F_{\text{тр}}, \quad M\ddot{y}_C = R - Mg\cos\alpha, \qquad (1)$$

$$M\rho^2\ddot{\varphi} = 2Tr_1 - F_{\text{тр}}r_2.$$

При движении катушки $y_C = r_2$ постоянно, т. е. $\ddot{y}_C = 0$. Из второго уравнения системы (1) находим модуль нормальной реакции плоскости:

$$R = Mg\cos\alpha. \qquad (2)$$

Для определения реакции нити T надо из первого и третьего уравнений системы (1) исключить $\ddot{x}_C$ и $\ddot{\varphi}$. Для этого следует установить зависимость между ними. Заметив, что мгновенный центр скоростей $\mathcal{P}$ расположен в точке схода нити к оси катушки (см. рисунок), запишем $v_C = r_1\omega$, т. е. $\dot{x}_C = r_1\dot{\varphi}$ и, следовательно,

$$\ddot{x}_C = r_1\ddot{\varphi}. \qquad (3)$$

Разделив первое уравнение системы (1) на третье и использовав зависимость (3), находим

$$\frac{r_1}{\rho^2} = \frac{Mg\sin\alpha - 2T - F_{\text{тр}}}{2Tr_1 - F_{\text{тр}}r_2},$$

откуда

$$T = \frac{1}{2}\,\frac{Mg\rho^2\sin\alpha + F_{\text{тр}}(r_1r_2 - \rho^2)}{\rho^2 + r_1^2}. \qquad (4)$$

Так как сила трения равна $F_{\text{тр}} = fR$, то $F_{\text{тр}} = f\,Mg\cos\alpha$, и, в соответствии с формулой (2), выражение (4) принимает вид

$$T = \frac{Mg}{2}\,\frac{\rho^2\sin\alpha + f(r_1r_2 - \rho^2)\cos\alpha}{\rho^2 + r_1^2}.$$

Таково значение модуля реакции каждой нити.

Остается определить скорость центра тяжести C катушки. Для этого, подставив в первое уравнение системы (1) значения $F_{тр}$ и T, находим

$$\ddot{x}_C = gr_1 \frac{r_1 \sin\alpha - f(r_1 + r_2)\cos\alpha}{\rho^2 + r_1^2}.$$

Так как при $t = 0$ $\dot{x}_C = 0$, то

$$\dot{x}_C = gr_1 \frac{r_1 \sin\alpha - f(r_1 + r_2)\cos\alpha}{\rho^2 + r_1^2} t.$$

Для того чтобы катушка скатывалась по наклонной плоскости, необходимо выполнение условия $\dot{x}_C > 0$, т. е.

$$r_1 \sin\alpha - f(r_1 + r_2)\cos\alpha > 0.$$

Следовательно,

$$\operatorname{tg}\alpha > f\frac{r_1 + r_2}{r_1}.$$

Если $\operatorname{tg}\alpha \leqslant f\frac{r_1 + r_2}{r_1}$, то катушка остается в покое.

Задача 9.75. По горизонтальному гладкому дну резервуара, наполненного жидкостью, движется однородный прямолинейный стержень массы M и длиной $2l$. На рис. *а* в плане изображено начальное положение стержня. Его центр масс C при $t = 0$ находится в начале координат, начальная скорость $\boldsymbol{v}_0$ образует угол α с осью x, а мгновенная угловая скорость равна ω_0. К каждому элементу стержня единичной длины приложена сила сопротивления жидкости, пропорциональная первой степени скорости этого элемента: $\boldsymbol{R} = -\beta\boldsymbol{v}$, где β — положительный постоянный коэффициент.

Найти уравнения плоскопараллельного движения стержня.

Р е ш е н и е. Изобразим на рис. *б* стержень в промежуточном положении и направим ось s вдоль стержня, взяв ее начало в центре масс C. Для определения искомых уравнений движения стержня используем дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения твердого тела:

$$M\ddot{x}_C = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}^e, \quad M\ddot{y}_C = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}^e, \quad I_{zC}\ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^{n} m_{zC}(F_k^e). \qquad (1)$$

К стержню приложены внешние силы: сила тяжести $\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{g}$, распределенные нормальные реакции дна резервуара. Эти силы перпендикулярны плоскости xy. Кроме того, ко всем элементам стержня единичной длины приложены силы сопротивления $\boldsymbol{R} = -\beta\boldsymbol{v}$, пропорциональные скоростям этих элементов и лежащие в плоскости xy. Для определения этих сил возьмем на стержне две симметричные частицы K и K_1 длиной ds каждая на расстоянии $|s|$ от центра масс C. Приняв за полюс точку C, запишем формулу скоростей точек K и K_1, учитывая, что стержень совершает плоскопараллельное

движение: $\boldsymbol{v}_K = \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{v}_{KC}$, $\boldsymbol{v}_{K_1} = \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{v}_{K_1C}$, причем $\boldsymbol{v}_{K_1C} = -\boldsymbol{v}_{KC}$. Эти скорости построены на рис. *б*.

Соответствующие силы сопротивления жидкости $d\boldsymbol{R}_K$ и $d\boldsymbol{R}_{K_1}$ направлены противоположно скоростям $\boldsymbol{v}_K$ и $\boldsymbol{v}_{K_1}$ (см. рис. *в*):

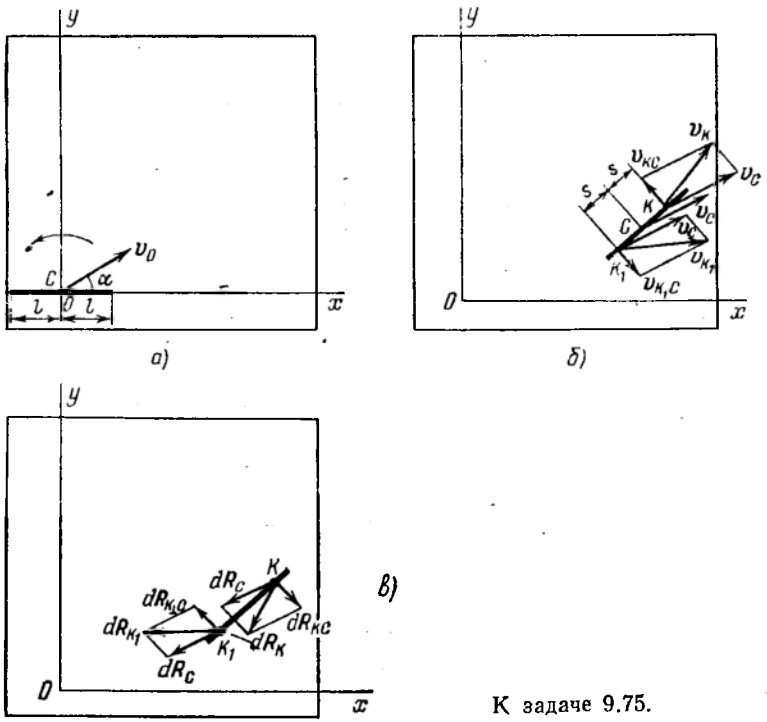
$$d\boldsymbol{R}_K = d\boldsymbol{R}_C + d\boldsymbol{R}_{KC}, \quad d\boldsymbol{R}_{K_1} = d\boldsymbol{R}_C + d\boldsymbol{R}_{K_1C}. \tag{2}$$

К элементу единичной длины приложена сила сопротивления $\boldsymbol{R} = -\beta\boldsymbol{v}$. Поэтому для частиц длиной ds имеем

$$d\boldsymbol{R}_C = -\beta\boldsymbol{v}_C\,ds, \quad d\boldsymbol{R}_{KC} = -\beta\boldsymbol{v}_{KC}\,ds, \quad d\boldsymbol{R}_{K_1C} = -\beta\boldsymbol{v}_{K_1C}\,ds. \tag{3}$$

Так как $\boldsymbol{v}_{K_1C} = -\boldsymbol{v}_{KC}$, то $d\boldsymbol{R}_{K_1C} = -\beta\boldsymbol{v}_{K_1C}\,ds$, т. е. силы $d\boldsymbol{R}_{KC}$ и $d\boldsymbol{R}_{K_1C}$ образуют пару сил с плечом $2\,|s|$.

Итак, к двум симметричным частицам K и K_1 приложены две векторно равные силы $d\boldsymbol{R}_C$ (см. рис. *в*) и пара сил с моментом $dm_R = -dR_{KC}\cdot 2s$. Приняв во внимание вторую формулу (3), запишем



К задаче 9.75.

$dm_R = -2\beta v_{KC} s\,ds$. Как известно из кинематики: $v_{KC} = |s\dot{\varphi}|$, где $\dot{\varphi}$ — угловая скорость вращения стержня. Поэтому момент dm_R пары, приложенной к двум симметричным частицам длиной ds, равен

$$dm_R = -2\beta\dot{\varphi}s^2\,ds. \tag{4}$$

Силы сопротивления $d\boldsymbol{R}_K$ и $d\boldsymbol{R}_{K_1}$ двух симметричных элементов заменены (см. формулы (2) и рис. *в*) совокупностью двух векторно-равных сил $d\boldsymbol{R}_C$ и парой сил $d\boldsymbol{R}_{KC}$ и $d\boldsymbol{R}_{K_1C}$ с моментом dm_R.

Приведем силы сопротивления всех элементов стержня к силе и паре сил, приняв за точку приведения центр масс C стержня.

Главный вектор сил сопротивления равен $\boldsymbol{V}_R = \int_{-l}^{+l} d\boldsymbol{R}_K$. Использовав первую формулу (3) и вычислив интеграл, найдем

$$\boldsymbol{V}_R = -2\beta l \boldsymbol{v}_C. \tag{5}$$

Главный момент сил сопротивления $m_R = \int_0^l dm_R$. Использовав формулу (4) и вычислив интеграл, получим

$$m_R = -\frac{2}{3}\beta l^{(3)}\dot{\varphi}. \tag{6}$$

Итак, силы сопротивления приведены к силе $\boldsymbol{V}_R$ (см. формулу (5)), приложенной в центре масс C стержня и к паре сил с моментом m_R (см. формулу (6)).

Составим дифференциальные уравнения (1) плоскопараллельного движения стержня. Сила тяжести $\boldsymbol{P}$ и распределенные нормальные реакции перпендикулярны к плоскости движения xy. Поэтому в правые части уравнений (1) войдут только $\boldsymbol{V}_R$ и m_R. Получим

$$M\ddot{x}_C = V_{Rx}, \quad M\ddot{y}_C = V_{Ry}, \quad I_{zC}\ddot{\varphi} = m_R. \tag{7}$$

Приняв во внимание формулу (5), найдем

$$V_{Rx} = -2\beta l v_{Cx} = -2\beta\dot{x}_C, \quad V_{Ry} = -2\beta l v_{Cy} = -2\beta l\dot{y}_C. \tag{8}$$

Момент инерции стержня длиной $2l$ равен $I_{zC} = Ml^2/3$. Внеся это значение I_{zC}, а также результаты (8) и (6) в уравнения (7), получим: $M\ddot{x}_C = -2\beta l\dot{x}_C$, $M\ddot{y}_C = -2\beta l\dot{y}_C$, $M\frac{l^2}{3}\ddot{\varphi} = -\frac{2}{3}\beta l^3\dot{\varphi}$, т. е.

$$\ddot{x}_C = -\gamma\dot{x}_C, \quad \ddot{y}_C = -\gamma\dot{y}_C, \quad \ddot{\varphi} = -\gamma\dot{\varphi}, \tag{9}$$

где обозначено $\gamma = 2\beta l/M$.

Как следует из условия задачи, начальные условия движения имеют вид: при $t = 0$

$$\dot{x}_C = v_0\cos\alpha, \quad \dot{y}_C = v_0\sin\alpha, \quad \dot{\varphi} = \omega_0, \quad x_C = 0, \quad y_C = 0, \quad \varphi = 0. \tag{10}$$

Проинтегрировав дифференциальные уравнения (9) методом разделения переменных, получим первые интегралы

$$\ln\dot{x}_C = -\gamma t + C_1, \quad \ln\dot{y}_C = -\gamma t + C_2, \quad \ln\dot{\varphi} = -\gamma t + C_3. \tag{11}$$

Использовав три первых начальных условия (10), найдем $C_1 = \ln v_0\cos\alpha$, $C_2 = \ln v_0\sin\alpha$, $C_3 = \ln\omega_0$. Внеся эти значения

C_1, C_2, C_3 в уравнения (11), выполним простые преобразования, Тогда

$$\dot{x}_C = v_0 \cos\alpha\, e^{-\gamma t}, \quad \dot{y}_C = v_0 \sin\alpha\, e^{-\gamma t}, \quad \dot{\varphi} = \omega_0 e^{-\gamma t}. \tag{12}$$

Как следует из формул (12), с увеличением времени t уменьшается скорость центра масс C стержня, а также его угловая скорость. Это происходит под действием сил сопротивления жидкости.

Проинтегрировав дифференциальные уравнения (12) методом разделения переменных, получим

$$x_C = -\frac{v_0 \cos\alpha}{\gamma} e^{-\gamma t} + C_4, \quad y_C = -\frac{v_0 \sin\alpha}{\gamma} e^{-\gamma t} + C_5,$$
$$\varphi = -\frac{\omega_0}{\gamma} e^{-\gamma t} + C_6. \tag{13}$$

Внеся в уравнения (13) три начальных условия движения (10), найдем $C_4 = \frac{v_0 \cos\alpha}{\gamma}$, $C_5 = \frac{v_0 \sin\alpha}{\gamma}$, $C_6 = \frac{\omega_0}{\gamma}$. Подставив эти значения C_4, C_5, C_6 в формулы (13), получим искомые уравнения плоскопараллельного движеняя стержня:

$$x_C = \frac{v_0 \cos\alpha}{\gamma}(1 - e^{-\gamma t}), \quad y_C = \frac{v_0 \sin\alpha}{\gamma}(1 - e^{-\gamma t}),$$
$$\varphi = \frac{\omega_0}{\gamma}(1 - e^{-\gamma t}), \tag{14}$$

где $\gamma = 2\beta l/M$.

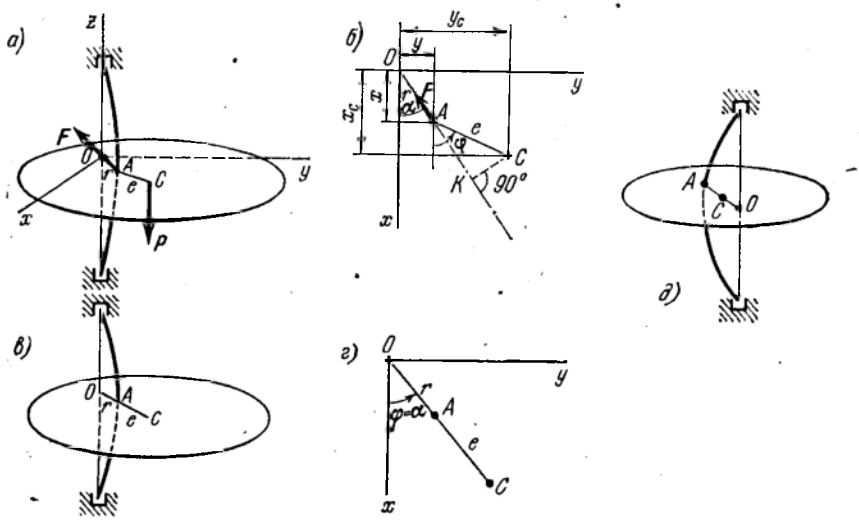
Разделив второе уравнение (14) на первое, найдем уравнение траектории точки C: $y_C = x_C \operatorname{tg}\alpha$. Это значит, что центр масс C стержня движется по полупрямой, выходящей из начала координат, вдоль которой направлена его начальная скорость v_0. При этом стержень вращается вокруг оси, проходящей через точку C перпендикулярно плоскости дна резервуара xy по закону $\varphi = \frac{\omega_0}{\gamma}(1 - e^{-\gamma t})$, где $\gamma = \frac{2\beta l}{M}$. Движение точки C стержня и его вращение происходят замедленно.

Задача 9.76. Определить закон движения турбинного диска массы M, эксцентрично насаженного в середине вертикального упругого вала.

Сила упругости вала пропорциональна его прогибу. Коэффициент упругости равен c, e — эксцентриситет турбинного диска. В начальный момент диску была сообщена угловая скорость ω. Силами сопротивления движению пренебречь.

Р е ш е н и е. При вращении турбинного диска вал изгибается. Будем считать, что диск посажен в середине вала без перекоса; тогда его движение будет происходить в горизонтальной плоскости, и поэтому следует применить дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела.

Проведем вертикальную ось z через опоры упругого вала, т. е. совместим ее с геометрической осью вращения диска. Выберем начало координат в точке пересечения оси z с горизонтальной плоскостью диска. Оси x и y расположены в плоскости диска. Пусть, далее, $A(x, y)$ — точка пересечения изогнутой оси вала с плоскостью диска, $C(x_C, y_C)$ — центр инерции диска, $OA = r$ — прогиб вала, $AC = e$ — эксцентриситет.



К задаче 9.76.

Обозначим: α — угол между осью x и направлением OA, φ — угол между осью x и прямой, проходящей через точку A крепления диска к оси и его центр тяжести (рис. *б*).

На турбинный диск действуют две внешние силы: $\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{g}$ — сила тяжести диска и сила упругости вала $\boldsymbol{F}$, приложенная в точке A и направленная от A к O, причем $F = cr$.

Составим дифференциальные уравнения плоского движения диска:

$$M\ddot{x}_C = -F\cos\alpha, \quad M\ddot{y}_C = -F\sin\alpha, \quad I_C\ddot{\varphi} = -F\cdot|KC|, \qquad (1)$$

причем

$$F = cr, \; r\cos\alpha = x, \; r\sin\alpha = y, \; |KC| = |AC|\sin\psi = e\sin(\varphi-\alpha), \qquad (2)$$

где $\psi = \angle CAK = \varphi - \alpha$.

Воспользовавшись формулами (2), запишем систему уравнений (1) в виде

$$M\ddot{x}_C = -cx, \quad M\ddot{y}_C = -cy, \quad I_C\ddot{\varphi} = -cre\sin(\varphi-\alpha), \qquad (3)$$

Как следует из рис. 6, имеет место следующая зависимость между координатами точек C и A:

$$x_C = x + e\cos\varphi, \quad y_C = y + e\sin\varphi.$$

Следовательно,

$$\ddot{x}_C = \ddot{x} - e\ddot{\varphi}\sin\varphi - e\dot{\varphi}^2\cos\varphi, \quad \ddot{y}_C = \ddot{y} + e\ddot{\varphi}\cos\varphi - e\dot{\varphi}^2\sin\varphi.$$

Подставив эти значения $\ddot{x}_C$ и $\ddot{y}_C$ в уравнения (3), находим

$$M\ddot{x} - Me\ddot{\varphi}\sin\varphi - Me\dot{\varphi}^2\cos\varphi = -cx,$$

$$M\ddot{y} + Me\ddot{\varphi}\cos\varphi - Me\dot{\varphi}^2\sin\varphi = -cy,$$

$$I_C\ddot{\varphi} = -cre\sin(\varphi - \alpha),$$

откуда

$$\ddot{x} + \frac{c}{M}x = e\ddot{\varphi}\sin\varphi + e\dot{\varphi}^2\cos\varphi,$$

$$\ddot{y} + \frac{c}{M}y = -e\ddot{\varphi}\cos\varphi + e\dot{\varphi}^2\sin\varphi, \qquad (4)$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{ce}{I_C}r\sin(\varphi - \alpha).$$

Интегрирование системы дифференциальных уравнений (4) весьма затруднительно. Поэтому мы будем решать ее приближенно. В правой части третьего уравнения стоит произведение эксцентриситета e на $\sin(\varphi - \alpha)$. Считая это произведение малым, приближенно приравняем его нулю (ниже будет показано, что совершаемая при этом ошибка невелика). Теперь третье уравнение системы (4) приближенно принимает вид $\ddot{\varphi} = 0$, откуда, учитывая начальные условия движения: при $t = 0$ $\varphi = 0$, $\dot{\varphi} = \omega$, находим $\dot{\varphi} = \omega$ и

$$\varphi = \omega t, \qquad (5)$$

т. е. вращение диска совершается равномерно.

Использовав формулу (5), запишем первые два уравнения системы (4) в форме

$$\ddot{x} + k^2x = h\cos\omega t, \quad \ddot{y} + k^2y = h\sin\omega t, \qquad (6)$$

где $c/M = k^2$ и $e\omega^2 = h$.

Интегрирование дифференциальных уравнений (6) проводим независимо друг от друга. Общие решения этих уравнений имеют вид

$$x = C_1\cos kt + C_2\sin kt + \frac{h}{k^2 - \omega^2}\cos\omega t,$$

$$y = C_3\cos kt + C_4\sin kt + \frac{h}{k^2 - \omega^2}\sin\omega t, \qquad (7)$$

где $k = \sqrt{c/M}$ и $h = e\omega^2$.

Как известно, первые два слагаемых описывают колебания, затухающие при наличии сил сопротивления, а третье слагаемое —

установившиеся вынужденные колебания. Поэтому в дальнейшем первые два слагаемых отбросим.

Тогда

$$x = \frac{e\omega^2}{k^2 - \omega^2}\cos\omega t, \quad y = \frac{e\omega^2}{k^2 - \omega^2}\sin\omega t, \tag{8}$$

т. е. точка A совершает гармонические колебания круговой частоты ω и амплитуды $\frac{e\omega^2}{k^2 - \omega^2}$. После возведения каждого из уравнений (8) в квадрат и суммирования находим

$$x^2 + y^2 = \frac{e^2\omega^4}{(k^2 - \omega^2)^2}.$$

Так как $x^2 + y^2 = r^2$, то прогиб вала будет

$$r = \frac{e\omega^2}{k^2 - \omega^2}. \tag{9}$$

Как следует из рис. *б*, координаты точки A равны $x = r\cos\alpha$, $y = r\sin\alpha$. Подставив вместо x и y их значения из формул (8) и значение r из формулы (9), имеем $\alpha = \omega t$. Сопоставив этот результат с формулой (5), получим

$$\alpha = \varphi. \tag{10}$$

При выполнении условия $\alpha = \varphi$ точки O, A и C лежат на одной прямой.

При $\alpha = \varphi$ правая часть третьего уравнения системы (4) оказывается *точно* равной нулю. Поэтому ошибка, которую мы совершаем, приближенно считая правую часть третьего уравнения системы (4) равной нулю, получается за счет пренебрежения первыми двумя слагаемыми в каждом из уравнений системы (7). Учитывая затухание свободных колебаний под действием сил сопротивления движению, подобное приближение следует считать вполне допустимым. При точном решении системы дифференциальных уравнений (4) угловая скорость диска $\dot{\varphi}$ не оказалась бы постоянной и не равнялась бы ω.

Теперь рис. *а* и *б* принимают более простой вид, так как точки O, A и C лежат на одной прямой (см. соответственно рис. *в* и *г*).

Вычислим смещение центра тяжести C диска от точки O: $OC = r + e$. Подставив значение r из формулы (9), находим

$$OC = \frac{e\omega^2}{k^2 - \omega^2} + e = \frac{ek^2}{k^2 - \omega^2}. \tag{11}$$

В случае вынужденных колебаний малой частоты, т. е. при $\omega < k$, на основании формул (9) и (11) получим $|OC| > r > 0$ (см. рис. *в* и *г*). В случае вынужденных колебаний большой частоты, т. е. при $\omega > k$, $r > |OC| > 0$, что соответствует изображению на рис. *д*.

По мере увеличения угловой скорости вращения ω диска расстояние OC (см. формулу (11)) по модулю уменьшается, т. е. диск, наса-

женный на упругий вал, *самостоятельно центрируется* (при $\omega \to \infty$ $|OC| \to 0$), и его центр тяжести C приближается к геометрической оси вращения.

Перепишем формулу (11) в виде $\frac{|OC|}{e} = \frac{k^2}{|k^2 - \omega^2|}$. Если угловая скорость вращения турбинного диска значительно больше его круговой частоты собственных колебаний, т. е. $\omega \gg k$, то $|OC|/e$ оказывается весьма малой величиной. Например, при $\omega = 6k$ получим $|OC|/e = 0{,}029$. (При этом следует иметь в виду, что при насадке турбинных дисков на вал эксцентриситет e измеряется микронами.)

Явление самостоятельного центрирования диска на упругом валу было впервые обнаружено в конце XIX века Лавалем и использовано им в конструкции паровой турбины, диск которой совершал до 30 000 об/мин.

В случае $\omega = k$ имеет место явление резонанса и расстояние OC неограниченно возрастает. Конечно, в действительности OC так не растет, ввиду наличия сил сопротивления движению. Однако величина OC становится значительной, что угрожает надежности работы конструкции. Разонансная угловая скорость вращения турбинного диска, при которой прогиб вала достигает больших значений, называется *критической угловой скоростью* гибкого вала, а соответствующее число оборотов вала в минуту — *критическим числом оборотов*. Так как при резонансе $\omega_{кр} = k$, а $k = \sqrt{c/M}$, то $\omega_{кр} = \sqrt{c/M}$. Следовательно,

$$n_{кр} = \frac{30}{\pi}\omega_{кр} = \frac{30}{\pi}\sqrt{\frac{c}{M}}.$$

Указание. Рекомендуем решить следующие задачи из «Сборника задач по теоретической механике» И. В. Мещерского: 39.1—39.7, 39.11, 39.13—39.21.

§ 7. Теорема об изменении кинетической энергии материальной системы

1. Работа силы. *Работой постоянной силы на прямолинейном перемещении* называется скалярное произведение векторов силы и перемещения, т. е. работа равна произведению модуля силы на модуль перемещения и на косинус угла между ними:

$$A = \boldsymbol{F} \cdot \Delta \boldsymbol{r} = F \Delta r \cos (\widehat{\boldsymbol{F}, \Delta \boldsymbol{r}})$$

(M_1 и M_2 — соответственно начальное и конечное положения точки M, $\Delta \boldsymbol{r}$ — вектор перемещения точки (рис. 9.11, 9.12) при переходе из M_1 в M_2).

Единица измерения работы в системе СИ — джоуль (Дж).

Элементарная работа переменной силы равна скалярному произведению векторов силы и элементарного перемещения $\delta A = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$.

Элементарное перемещение $d\boldsymbol{r}$ направляется по касательной к траектории в данной точке (рис. 9.13). Элементарная работа обозначается δA, а не dA, так как только в частных случаях элементарная работа силы является полным дифференциалом некоторой функции координат (см. ниже случай потенциального поля).

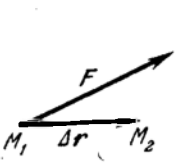


Рис. 9.11.

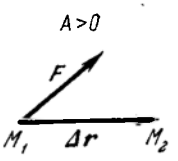


Рис. 9.12.

Выражение элементарной работы переменной силы через проекции силы на оси декартовых координат имеет вид

$$\delta A = \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz,$$

где

$$\boldsymbol{F} = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} + F_z\boldsymbol{k} \text{ и } d\boldsymbol{r} = dx\,\boldsymbol{i} + dy\,\boldsymbol{j} + dz\,\boldsymbol{k}.$$

Работа переменной силы на конечном перемещении по произвольной траектории равна криволинейному интегралу, взятому вдоль дуги кривой от M_1 до M_2, от элементарной работы:

$$A = \int\limits_{(M_1)}^{(M_2)} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \int\limits_{(M_1)}^{(M_2)} F\cdot dr\cos(\widehat{F,\,dr}). \qquad (1^*)$$

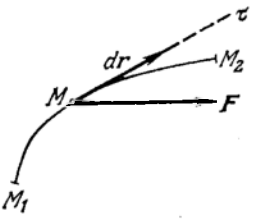


Рис. 9.13.

Интеграл называется криволинейным, так как осуществляется суммирование вдоль криволинейной траектории, в разных точках которой касательные элементарные перемещения $d\boldsymbol{r}$ различны по направлению.

Выражение работы переменной силы на конечном перемещении по криволинейной траектории через проекции силы на оси декартовых координат имеет вид

$$A = \int\limits_{(M_1)}^{(M_2)} F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz. \qquad (2^*)$$

Как следует из формулы (2*), непосредственное вычисление интеграла и, следовательно, работы возможно лишь в тех случаях, когда сила постоянна либо зависит от положения точки приложения силы (т. е. ее координат x, y, z). Если же сила зависит от скорости или ускорения точки, либо от времени, то непосредственно вычислить работу силы нельзя (при этом имеется в виду, что закон движения точки приложения силы неизвестен).

При приложении системы сил к точкам материальной системы работа равна сумме элементарных работ всех сил, т. е.

$$\delta A = \sum_{k=1}^{n} \delta A_k = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}\,dx_k + F_{ky}\,dy_k + F_{kz}\,dz_k$$

и

$$A = \sum_{k=1}^{n} \int_{(M_{1k})}^{(M_{2k})} F_{kx}\,dx_k + F_{ky}\,dy_k + F_{kz}\,dz_k,$$

где F_{kx}, F_{ky}, F_{kz} — проекции главного вектора сил, действующих на k-ю точку системы.

Теорема о работе равнодействующей силы: работа равнодействующей сил, приложенных к точке, на конечном перемещении равна сумме работ сил системы на том же перемещении

$$A(\boldsymbol{R}) = \sum_{k=1}^{n} A(\boldsymbol{F}_k), \quad \text{где } \boldsymbol{R} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F}_k.$$

Элементарная работа сил, приложенных к твердому телу, вычисляется по следующим формулам:

а) при поступательном движении: $\delta A = \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{r}$, где $\boldsymbol{V}$ — главный вектор системы сил, $d\boldsymbol{r}$ — элементарное перемещение любой из точек твердого тела;

б) при вращении вокруг неподвижной оси: $\delta A = m_z\,d\varphi$, где m_z — главный момент системы сил относительно оси вращения z, $d\varphi$ — элементарное угловое перемещение твердого тела;

в) при плоском движении: $\delta A = \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{r}_O + m_{zO}\,d\varphi$, где $\boldsymbol{V}$ — главный вектор системы сил, $d\boldsymbol{r}_O$ — элементарное перемещение полюса O, m_{zO} — главный момент системы сил относительно оси z, проходящей через полюс O перпендикулярно к плоскости движения, $d\varphi$ — элементарное угловое перемещение вокруг этой оси. (Полюс O выбирается произвольно.)

Элементарная работа внешних сил, приложенных к неизменяемой системе, вычисляется по приведенным выше формулам.

Элементарная работа внутренних сил неизменяемой системы материальных точек (например, абсолютно твердого тела) *равна нулю:* $\sum_{k=1}^{n} \delta A\,(\boldsymbol{F}_k^i) = 0$. Подчеркнем, что работа внутренних сил в общем случае, в частности в упругом теле (изменяемой системе), не равна нулю.

В ряде случаев для вычисления работы сил удобнее использовать готовые формулы. Некоторые из них приводятся ниже.

Работа силы тяжести материальной точки равна произведению силы тяжести на разность высот начального и конечного положений точки (Δh), т. е. $A = P \cdot \Delta h$ (рис. 9.14). Если материальная точка

приближается к земной поверхности, то $A(P) > 0$. Если материальная точка отдаляется от земной поверхности, то $A(P) < 0$. Если высоты начального и конечного положений материальной точки равны (в частности, при движении точки по замкнутому контуру), то $A(P) = 0$.

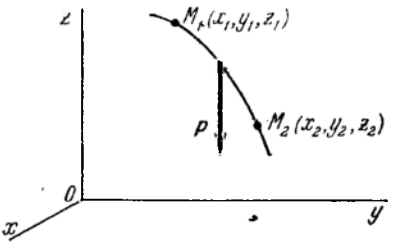


Рис. 9.14.

Следовательно, работа силы тяжести материальной точки зависит от высот ее начального и конечного положений и не зависит от формы кривой, по которой перемещается материальная точка (см. ниже пункт 5).

В случае системы материальных точек работа сил тяжести равна произведению силы тяжести всей системы на разность высот конечного и начального положений центра масс системы:

$$A = -P(z_{2C} - z_{1C}),$$

где $P = \sum_{k=1}^{n} P_k$, а ось z направлена вертикально вверх.

Работа силы упругости определяется формулой (рис. 9.15)

$$A = -\frac{c}{2}(x_2^2 - x_1^2), \qquad (3^*)$$

где x_1 и x_2 — начальное и конечное удлинения пружины, а c — ее коэффициент жесткости.

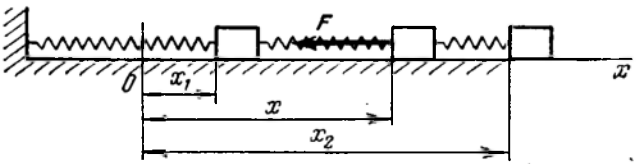


Рис. 9.15.

Работа силы упругости отрицательна, если точка движется в сторону возрастания модуля силы; работа силы упругости положительна, если точка движется в сторону убывания модуля силы.

Работа момента сил упругости $m_z = -c\varphi$ равна

$$A = -\frac{c}{2}(\varphi_2^2 - \varphi_1^2).$$

Мощность N характеризует быстроту совершения работы с течением времени и определяется формулой

$$N = \frac{dA}{dt}.$$

В случае силы $\boldsymbol{P}$, приложенной к некоторой точке, мощность равна $N = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{v}$, где $\boldsymbol{v}$ — скорость точки. В случае момента m, приложенного к твердому телу, вращающемуся с угловой скоростью ω вокруг неподвижной оси, мощность будет $N = m\omega$.

Единица измерения мощности в системе СИ — ватт (Вт); 1 Вт = 1 Дж/с.

Вычисление суммы работ сил, приложенных к материальной точке либо к материальной системе является одним из этапов решения задач, в которых применяется теорема об изменении кинетической энергии либо составляются уравнения Лагранжа второго рода (см. ниже, главу X, § 6).

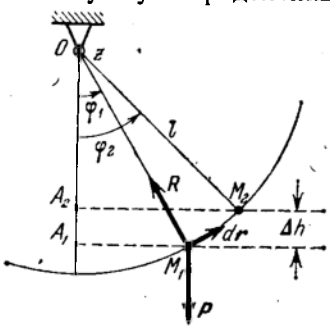
Указание. Вычисление суммы работ сил надо выполнять в такой последовательности:

1) изобразить на рисунке силы, приложенные к материальной точке либо к материальной системе;

2) изобразить элементарные перемещения точек системы;

3) вычислить элементарную работу сил, т. е. сумму работ всех сил на элементарных перемещениях точек системы;

4) вычислить искомую сумму работ сил на конечных перемещениях как сумму определенных интегралов, взятых в соответствующих пределах от элементарных работ, вычисленных в предыдущем пункте.



К задаче 9.77.

При наличии сил тяжести и сил упругости можно, минуя три последних пункта, выбрав систему координат, вычислить работу этих сил на конечных перемещениях по вышеприведенным формулам.

Задача 9.77. При движении математического маятника нить его в начальном положении составляла с вертикалью угол φ_1, а в конечном положении — угол φ_2 (причем $\varphi_2 > \varphi_1$).

Вычислить сумму работ сил, приложенных к маятнику на этом угловом перемещении, если M — его масса и l — длина нити. Направление положительного отсчета угла поворота φ указано на рисунке.

Решение. К маятнику приложены две силы: $\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{g}$ — сила тяжести и реакция нити $\boldsymbol{R}$. Следовательно, искомая сумма работ сил имеет вид

$$\sum_{k=1}^{n} A_k = A(\boldsymbol{P}) + A(\boldsymbol{R}). \tag{1}$$

Так как реакция нити $\boldsymbol{R}$ направлена вдоль нити и во время движения маятника перпендикулярна к элементарному перемещению $d\boldsymbol{r}$, направленному по касательной к траектории в данной точке, то работа реакции нити равна нулю:

$$A(\boldsymbol{R}) = 0. \tag{2}$$

Работа силы тяжести $\boldsymbol{P}$ отрицательна, так как точечная масса маятника поднимается вверх $A(\boldsymbol{P}) = -P\,\Delta h$. Разность высот конечного и начального положений точечной массы маятника:

$$\Delta h = A_1A_2 = OA_1 - OA_2 = l(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2),$$

следовательно,

$$A(\boldsymbol{P}) = -Pl(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2). \qquad (3)$$

Подставив значения $A(\boldsymbol{R})$ и $A(\boldsymbol{P})$ из формул (2) и (3) в формулу (1), находим искомую сумму работ сил:

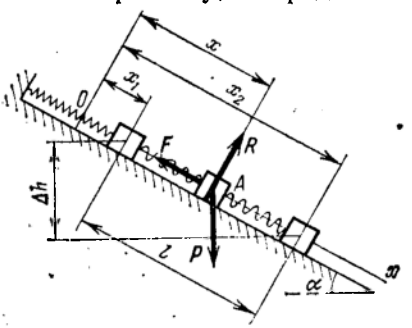
$$\sum A_k = -Pl(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2) = -Mgl(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2).$$

Эту задачу можно было также решить, вычисляя сумму работ сил при вращении маятника вокруг оси z, проходящей через точку привеса O перпендикулярно к плоскости рисунка. В этом случае элементарная работа сил равна $\delta A = m_z \cdot d\varphi$, где m_z — главный момент относительно оси вращения z сил, приложенных к точечной массе. Учитывая, что момент реакции нити $\boldsymbol{R}$ относительно оси z равен нулю, а момент силы $\boldsymbol{P}$ относительно оси z равен $-Pl\sin\varphi$ (момент отрицателен, так как его направление противоположно направлению положительного отсчета угла поворота φ), получим $m_z = -Pl\sin\varphi$ и, следовательно, $\delta A = m_z d\varphi = -Pl\sin\varphi\,d\varphi$.

Для вычисления искомой работы следует взять определенный интеграл по φ в пределах от φ_1 до φ_2:

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} m_z\,d\varphi = -Pl\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sin\varphi\,d\varphi = -Pl(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2).$$

Задача 9.78. Груз A удерживается в равновесии на наклонной плоскости, расположенной под углом α к горизонту, посредством пружины, ось которой параллельна линии наибольшего ската наклонной плоскости (см. рисунок). Вследствие полученного толчка груз переместился вниз вдоль наклонной плоскости на l.



К задаче 9.78.

Вычислить сумму работ сил, приложенных к грузу A на этом перемещении, если коэффициент упругости (жесткости) пружины равен c. Силой трения скольжения груза A о наклонную плоскость пренебречь.

Р е ш е н и е. К грузу приложены следующие силы: $\boldsymbol{P}$ — его сила тяжести, $\boldsymbol{F}$ — сила упругости пружины, $\boldsymbol{R}$ — нормальная реакция наклонной плоскости.

Направим параллельно линии наибольшего ската наклонной плоскости ось x, выбрав начало отсчета O в конце недеформированной пружины.

В положении равновесия груза пружина растянута на $\Delta_{ст}$. Записав сумму проекций всех сил, приложенных к грузу, на ось x, находим $P \sin \alpha - F_{ст} = 0$. Так как модуль силы упругости при растяжении пружины на $\Delta_{ст}$ равен $F_{ст} = c\Delta_{ст}$, то $P \sin \alpha - c\Delta_{ст} = 0$, т. е.

$$\Delta_{ст} = \frac{P \sin \alpha}{c}. \tag{1}$$

Искомая сумма работ сил имеет вид

$$\sum A_k = A(\boldsymbol{P}) + A(\boldsymbol{F}) + A(\boldsymbol{R}). \tag{2}$$

Работа силы тяжести положительна, так как груз A приближается к земной поверхности: $A(\boldsymbol{P}) = P\Delta h$; учитывая, что $\Delta h = l \sin \alpha$, находим

$$A(\boldsymbol{P}) = Pl \sin \alpha. \tag{3}$$

Работа силы упругости пружины определяется формулой

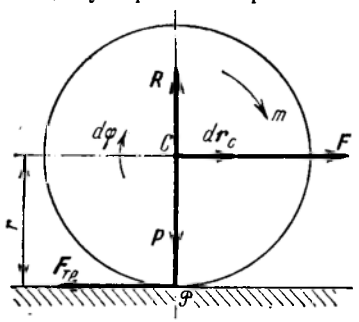
$$A(\boldsymbol{F}) = -\frac{c}{2}(x_2^2 - x_1^2). \tag{3*}$$

Учитывая, что $x_1 = \Delta_{ст}$, а $x_2 = x_1 + l = \Delta_{ст} + l$, находим

$$A(\boldsymbol{F}) = -\frac{cl}{2}(2\Delta_{ст} + l). \tag{4}$$

Работа нормальной реакции $\boldsymbol{R}$ равна нулю, так как эта сила перпендикулярна к перемещению груза, направленному вдоль наклонной плоскости

$$A(\boldsymbol{R}) = 0. \tag{5}$$



К задаче 9.79.

Подставляя выражения (3), (4) и (5) в формулу (2) и учитывая зависимость (1), находим искомую сумму работ сил, приложенных к грузу:

$$\sum A_k = -\frac{cl^2}{2}.$$

Задача 9.79. Колесо радиуса r катится без скольжения по прямолинейному горизонтальному рельсу под действием приложенной в центре тяжести C колеса постоянной силы $\boldsymbol{F}$, параллельной рельсу, и постоянно вращающего момента m.

Вычислить сумму работ всех внешних сил, если ось колеса C переместилась на s. Трением качения пренебречь.

Решение. К колесу приложены внешние силы и моменты: $\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{g}$ — сила тяжести колеса, $\boldsymbol{F}$ — движущая сила, m — вращающий момент; $\boldsymbol{R}$ — нормальная реакция колеса, $\boldsymbol{F}_{тр}$ — сила трения.

Работа реакции $\boldsymbol{R}$ и силы трения $\boldsymbol{F}_{\text{тр}}$ равна нулю, ибо эти силы приложены в точке $\mathcal{P}$, элементарное перемещение которой равно нулю: $d\boldsymbol{r}_{\mathcal{P}} = \boldsymbol{v}_{\mathcal{P}}\, dt = 0$. Работа силы $\boldsymbol{P}$ равна нулю, так как элементарное перемещение $d\boldsymbol{r}_C$ точки C приложения силы $\boldsymbol{P}$ перпендикулярно к этой силе. Таким образом, осталось вычислить работу движущей силы $\boldsymbol{F}$ и момента m. Имеем

$$\delta A = F\, dr_C + m\, d\varphi. \tag{1}$$

Согласно условию задачи, колесо катится без скольжения. Поэтому

$$dr_C = r\, d\varphi.$$

Соответственно формула (1) запишется так:

$$\delta A = \left(F + \frac{m}{r}\right) dr_C. \tag{2}$$

Для вычисления искомой суммы работ всех внешних сил остается взять от δA определенный интеграл в пределах от 0 до s:

$$A = \int_0^s \left(F + \frac{m}{r}\right) dr_C = \left(F + \frac{m}{r}\right) s. \tag{3}$$

В обзоре теории было отмечено, что элементарную работу сил, приложенных к твердому телу, совершающему плоскопараллельное движение, можно вычислить по формуле

$$\delta A = \boldsymbol{V}^e \cdot d\boldsymbol{r}_O + m^e_{z_O}\, d\varphi,$$

где O — полюс, причем за полюс может быть принята произвольная точка твердого тела, совершающего плоское движение. Для иллюстрации этого положения возьмем за полюс мгновенный центр скоростей $\mathcal{P}$. Тогда элементарную работу всех внешних сил следует вычислять по формуле

$$\delta A = \boldsymbol{V}^e \cdot d\boldsymbol{r}_{\mathcal{P}} + m^e_{z_{\mathcal{P}}}\, d\varphi. \tag{4}$$

Так как скорость точки $\mathcal{P}$ колеса равна нулю: $\boldsymbol{v}_{\mathcal{P}} = 0$, а $\boldsymbol{v}_{\mathcal{P}} = d\boldsymbol{r}_{\mathcal{P}}/dt$, то $d\boldsymbol{r}_{\mathcal{P}} = \boldsymbol{v}_{\mathcal{P}}\, dt = 0$, и формула (4) примет вид

$$\delta A = m^e_{z_{\mathcal{P}}} d\varphi. \tag{5}$$

Главный момент внешних сил $m^e_{z_{\mathcal{P}}}$ относительно оси z, проходящей через мгновенный центр скоростей перпендикулярно к неподвижной плоскости, равен

$$m^e_{z_{\mathcal{P}}} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{r} + m.$$

Поэтому формулу (5) можно записать в виде

$$\delta A = (\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{r} + m)\, d\varphi.$$

Приняв во внимание, что $dr_C = r\,d\varphi$, находим

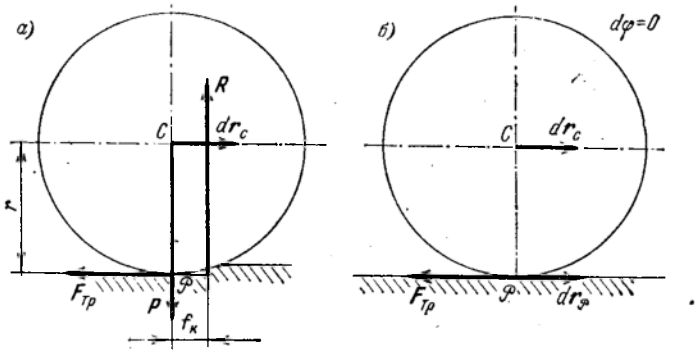
$$\delta A = \left(F + \frac{m}{r}\right) dr_C.$$

Это же выражение элементарной работы было получено выше (см. формулу (2)).

Сопоставление обоих вариантов вычисления δA показывает, что целесообразнее принимать за полюс точку $\mathscr{P}$ колеса, так как при этом отпадает необходимость в определении главного вектора $\boldsymbol{V}^e$ внешних сил системы.

Задача 9.80. Ведомое колесо массы M и радиуса r катится без скольжения по прямолинейному горизонтальному рельсу направо.

Вычислить работу силы трения при качении, если центр тяжести C колеса переместился на s; $f_к$ — коэффициент трения качения.



К задаче 9.80.

Р е ш е н и е. Сила трения приложена в точке касания колеса с рельсом и направлена вдоль рельса в сторону, противоположную движению. Нормальная реакция рельса $\boldsymbol{R}$ при наличии трения качения смещается в сторону движения на расстояние, равное коэффициенту трения качения $f_к$ (см. рис. *а*).

Дадим центру тяжести C перемещение dr_C. При этом колесо повернется на $d\varphi$. При качении без скольжения мгновенный центр скоростей находится в точке $\mathscr{P}$ касания колеса с рельсом. Поэтому $dr_C = r\,d\varphi$, откуда

$$d\varphi = \frac{dr_C}{r}. \tag{1}$$

Приняв за полюс точку $\mathscr{P}$, вычислим элементарную работу сил по формуле

$$\delta A = \boldsymbol{V}^e \cdot d\boldsymbol{r}_{\mathscr{P}} + m^e_{z\mathscr{P}}\, d\varphi. \tag{2}$$

Так как $d\boldsymbol{r}_{\mathscr{P}} = \boldsymbol{v}_{\mathscr{P}}\,dt = 0$, то формула (2) примет вид

$$\delta A = m^e_{z\mathscr{P}} d\varphi, \tag{3}$$

где $m^e_{z\mathscr{P}}$ — главный момент внешних сил относительно оси $z_{\mathscr{P}}$, проходящей через точку $\mathscr{P}$ перпендикулярно к плоскости движения колеса (т. е. плоскости рисунка). Имеем

$$m^e_{z\mathscr{P}} = m_{z\mathscr{P}}(\boldsymbol{P}) + m_{z\mathscr{P}}(\boldsymbol{R}) + m_{z\mathscr{P}}(\boldsymbol{F}_{\text{тр}}). \tag{4}$$

Линии действия сил $\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{g}$ и $\boldsymbol{F}_{\text{тр}}$ пересекают ось $z_{\mathscr{P}}$. Поэтому $m_{z\mathscr{P}}(\boldsymbol{P}) = m_{z\mathscr{P}}(\boldsymbol{F}_{\text{тр}}) = 0$. Далее, $m_{z\mathscr{P}}(\boldsymbol{R}) = -R \cdot f_{\text{к}} = -Pf_{\text{к}}$. Использовав эти значения моментов в (4), запишем

$$m^e_{z\mathscr{P}} = -Pf_{\text{к}}. \tag{5}$$

Внеся $d\varphi$ и $m^e_{z\mathscr{P}}$ из формул (1) и (5) в выражение (3), имеем

$$\delta A = -\frac{f_{\text{к}}}{r} P\, dr_C. \tag{6}$$

Для определения искомой работы остается взять определенный интеграл от (6) в пределах от 0 до s. Получим

$$A = -\frac{f_{\text{к}}}{r} Ps.$$

Если бы колесо скользило по рельсу без качения, то оно совершало бы поступательное движение. При этом $d\varphi = 0$, $d\boldsymbol{r}_{\mathscr{P}} = d\boldsymbol{r}_O$ (см. рис. *б*) и формула (2) приняла бы вид

$$\delta A = \boldsymbol{V}^e \cdot d\boldsymbol{r}_C, \tag{7}$$

где $\boldsymbol{V}^e$ — главный вектор внешних сил.

Учтя, что $\boldsymbol{R} = -\boldsymbol{P}$, имеем

$$\boldsymbol{V}^e = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{R} + \boldsymbol{F}_{\text{тр}} = \boldsymbol{F}_{\text{тр}}. \tag{8}$$

Внеся значение (8) в формулу (7), получим

$$\delta A = \boldsymbol{F}_{\text{тр}}\, d\boldsymbol{r}_C = -F_{\text{тр}}\, dr_C. \tag{9}$$

При скольжении колеса сила трения равна $F_{\text{тр}} = fR = fP$. Подставив это значение $F_{\text{тр}}$ в (9) и взяв определенный интеграл в пределах от 0 до s, находим

$$A = -fPs = -fMgs,$$

где f — коэффициент трения скольжения.

Задача 9.81. Определить мощность заряженной частицы, летящей со скоростью $v = 60\,000$ км/с под действием силы электромагнитного поля $F = 5 \cdot 10^{-10}$ Н.

Р е ш е н и е. Мощность частицы вычисляем по формуле $N = Fv$. Выражая скорость частицы в м/с и силу в кН, имеем

$$v = 6 \cdot 10^7 \text{ м/с}, \quad F = 5 \cdot 10^{-13} \text{ кН},$$

т. е.

$$N = 6 \cdot 10^7 \cdot 5 \cdot 10^{-13} = 2{,}94 \cdot 10^{-3} \text{ Вт}.$$

У к а з а н и е. Рекомендуем решить следующие задачи из «Сборника задач по теоретической механике» И. В. Мещерского: 29.4, 29.10, 29.11, 29.16.

2. Кинетическая энергия материальной точки и материальной системы. *Кинетическая энергия материальной точки* равна половине произведения массы точки на квадрат ее скорости: $T = \frac{1}{2} mv^2$.

Кинетическая энергия в системе СИ измеряется в джоулях (Дж).

Кинетическая энергия материальной системы равна сумме кинетических энергий всех материальных точек системы:

$$T = \sum_{k=1}^{n} T_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} m_k v_k^2.$$

Кинетическая энергия положительна, за исключением случая, когда скорости всех точек одновременно равны нулю.

По теореме Кенига кинетическая энергия материальной системы равна сумме кинетической энергии всей ее массы, движущейся со скоростью центра масс, и кинетической энергии системы в ее относительном движении по отношению к поступательно движущимся осям координат с началом в центре масс

$$T = \frac{1}{2} Mv_C^2 + T_r, \quad \text{где } T_r = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} m_k v_{kC}^2$$

($\boldsymbol{v}_{kC}$ — относительная скорость k-й материальной точки по отношению к центру масс).

Кинетическая энергия твердого тела вычисляется по формулам:

а) *При поступательном движении:* $T = \frac{1}{2} Mv^2$, где M — масса твердого тала, а v — скорость любой его точки.

б) *При вращении вокруг неподвижной оси:* $T = \frac{1}{2} I_z \omega^2$, где I_z — момент инерции твердого тела относительно оси вращения z, а ω — угловая скорость вращения.

в) *При плоском движении:* $T = \frac{1}{2} Mv_C^2 + \frac{1}{2} I_{zC} \omega^2$, где M — масса твердого тела, v_C — модуль скорости его центра масс, I_{zC} — момент инерции твердого тела относительно оси z, проходящей через центр масс перпендикулярно к плоскости движения, ω — величина мгновенной угловой скорости твердого тела.

В случае плоского движения кинетическую энергию можно также вычислять по формуле $T = \frac{1}{2} I_{\mathcal{P}} \omega^2$, где $I_{\mathcal{P}}$ — момент инерции твердого тела относительно оси $\mathcal{P}$, проходящей через мгновенный центр скоростей перпендикулярно к плоскости движения.

Поэтому при движении твердого тела момент инерции $I_{\mathcal{P}}$, вообще говоря, является переменным.

г) *При вращении вокруг неподвижной точки:* $T = \frac{1}{2} I\omega^2$, где I — момент инерции твердого тела относительно мгновенной оси, ω — модуль мгновенной угловой скорости (так как мгновенная ось меняет свое положение при вращении твердого тела вокруг неподвижной точки, то I является величиной переменной).

Если выбрать начало подвижных координатных осей x, y, z, связанных с твердым телом, в неподвижной точке O, то

$$T = \frac{1}{2}(I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2 - 2I_{yz}\omega_y\omega_z - 2I_{zx}\omega_z\omega_x - 2I_{xy}\omega_x\omega_y).$$

где ω_x, ω_y и ω_z — проекции мгновенной угловой скорости на соответствующие оси координат.

Если оси x, y, z являются главными осями инерции твердого тела в неподвижной точке O, то $I_{yz} = I_{zx} = I_{xy} = 0$, и, следовательно,

$$T = \frac{1}{2}(I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2).$$

д) *В общем случае движения твердого тела:* $T = \frac{1}{2} Mv_C^2 + \frac{1}{2} I_C\omega^2$, где M — масса твердого тела, v_C—модуль скорости его центра масс, I_C — его момент инерции относительно мгновенной оси, проходящей через центр масс, ω — модуль мгновенной угловой скорости.

Если выбрать начало подвижных координатных осей x, y, z в центре инерции C, то

$$T = \frac{1}{2} Mv_C^2 + \frac{1}{2}(I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2 - 2I_{yz}\omega_y\omega_z - 2I_{zx}\omega_z\omega_x - 2I_{xy}\omega_x\omega_y),$$

где ω_x, ω_y, ω_z — проекции мгновенной угловой скорости на соответствующие координатные оси.

Если оси x, y, z являются главными центральными осями инерции, то $I_{yz} = I_{zx} = I_{xy} = 0$ и, следовательно,

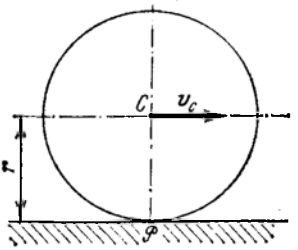
$$T = \frac{1}{2} Mv_C^2 + \frac{1}{2}(I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2).$$

Вычисление кинетической энергии материальной системы является одним из этапов решения задач при использовании теоремы об изменении кинетической энергии материальной системы либо при составлении уравнений Лагранжа второго рода (см. ниже, главу X, § 6), либо при вычислении потери кинетической энергии при ударе (см. ниже, главу XII).

При вычислении кинетической энергии материальной системы следует суммировать кинетические энергии всех масс, входящих в систему, вычисляя кинетическую энергию каждой из масс по

формуле, соответствующей движению данной массы (поступательное движение, вращение вокруг неподвижной оси, плоское движение и т. д.). Следует помнить, что кинетическая энергия является величиной положительной независимо от направлений движений масс, входящих в систему.

Задача 9.82. Вычислить кинетическую энергию колеса, катящегося без скольжения по прямолинейному рельсу, если M — масса колеса и v_C — скорость его центра тяжести. Колесо считать сплошным однородным диском.



К задаче 9.82.

Р е ш е н и е. Так как колесо совершает плоское движение, то его кинетическую энергию можно вычислить двумя способами по формулам:

$$\text{а)}\ T = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} I_{zC} \omega^2,$$

$$\text{б)}\ T = \frac{1}{2} I_{\mathscr{P}} \omega^2,$$

где $I_{\mathscr{P}}$ — момент инерции твердого тела относительно оси, проходящей через мгновенный центр скоростей $\mathscr{P}$ перпендикулярно к плоскости движения.

При беглой оценке степени сложности подсчета можно отдать предпочтение варианту б). Однако, как показывают последующие вычисления, объем вычислений по обоим вариантам примерно одинаков.

Вариант а):

$$T = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} I_{zC} \omega^2.$$

Момент инерции диска относительно оси z, проходящей через центр тяжести C перпендикулярно к его плоскости, равен $I_{zC} = \frac{Mr^2}{2}$, где радиус колеса обозначен r. Следовательно,

$$T = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} \frac{Mr^2}{2} \omega^2.$$

При качении колеса без скольжения мгновенный центр скоростей расположен в точке касания $\mathscr{P}$ колеса и рельса, поэтому $v_C = r\omega$ и формула кинетической энергии принимает вид

$$T = \frac{3}{4} M v_C^2.$$

Вариант б):

$$T = \frac{1}{2} I_{\mathscr{P}} \omega^2.$$

$I_{\mathscr{P}}$ — момент инерции колеса относительно оси, проходящей через мгновенный центр скоростей $\mathscr{P}$ перпендикулярно к плоскости колеса.

Так как оси z_C и $\mathscr{P}$ параллельны, то, применив теорему Штейнера, получим

$$I_{\mathscr{P}} = I_{zC} + Mr^2 = \frac{Mr^2}{2} + Mr^2 = \frac{3}{2} Mr^2.$$

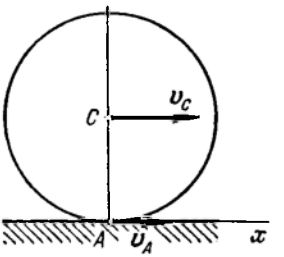
Теперь находим

$$T = \frac{1}{2} I_{\mathscr{P}} \omega^2 = \frac{1}{2} \frac{3}{2} Mr^2\omega^2.$$

Учитывая, что $r\omega = v_C$, окончательно имеем

$$T = \frac{3}{4} Mv_C^2.$$

Задача 9.83. Решить предыдущую задачу в предположении, что колесо катится со скольжением, причем скорость в точке A касания колеса с рельсом равна половине скорости его центра масс C.



К задаче 9.83.

Р е ш е н и е. Для вычисления кинетической энергии колеса по формуле

$$T = \frac{1}{2} Mv_C^2 + \frac{1}{2} I_{zC}\omega^2 \qquad (1)$$

необходимо предварительно определить угловую скорость ω колеса. Для этого, приняв за полюс точку A, запишем скорость точки C: $\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{v}_{CA}$. В проекции на ось x, направленную вдоль рельса направо (см. рис. к задаче), имеем $v_{Cx} = v_{Ax} + v_{CAx}$, т. е.

$$v_C = \frac{v_C}{2} + r\omega, \qquad (2)$$

где r — радиус колеса. Из уравнения (2) находим

$$\omega = \frac{v_C}{2r}.$$

Подставив это значение ω в формулу (1) и учтя, что $I_{zC} = Mr^2/2$, получим искомое значение кинетической энергии колеса:

$$T = \frac{1}{2} Mv_C^2 + \frac{1}{2} \frac{Mr^2}{2} \frac{v_C^2}{4r^2} = \frac{9}{16} Mv_C^2.$$

Задача 9.84. Груз A массы M_1, опускаясь по наклонной плоскости вниз со скоростью v, приводит во вращение барабан B массы M_2 посредством намотанного на него троса. Барабан считать однородным круглым цилиндром. Массой троса пренебречь.

Вычислить кинетическую энергию системы, выразив ее через скорость груза A.

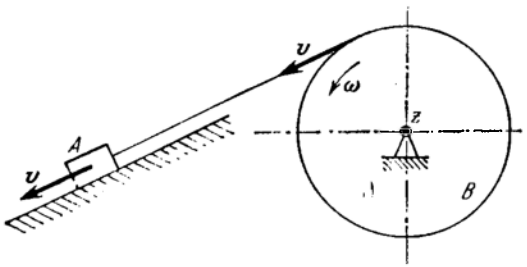
Р е ш е н и е. Система состоит из двух масс: груза A и барабана B. Следовательно, кинетическая энергия системы равна сумме кинетических энергий груза $T^{(1)}$ и барабана $T^{(2)}$:

$$T = T^{(1)} + T^{(2)}. \quad (1)$$

Кинетическая энергия груза, движущегося поступательно, вычисляется по формуле

$$T^{(1)} = \frac{1}{2} M_1 v^2. \quad (2)$$

Кинетическая энергия барабана, вращающегося вокруг неподвижной оси z, перпендикулярной к плоскости рисунка, находится по формуле



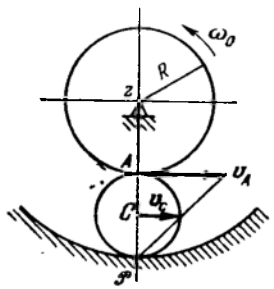
К задаче 9.84.

$$T^{(2)} = \frac{1}{2} I_z \omega^2, \quad (3)$$

где I_z — момент инерции барабана относительно оси вращения z, а ω — угловая скорость вращения барабана. Барабан считаем сплошным однородным круглым цилиндром, поэтому

$$I_z = M_2 \frac{r^2}{2},$$

где радиус барабана обозначен r. Подставив это значение I_z в формулу (3), имеем $T^{(2)} = \frac{1}{4} M_2 r^2 \omega^2$. Учитывая, что скорость точки на ободе барабана равна скорости груза, получим $v = r\omega$ и, следовательно,



К задаче 9.85.

$$T^{(2)} = \frac{1}{4} M_2 v^2. \quad (4)$$

После подстановки значений $T^{(1)}$ и $T^{(2)}$ из формул (2) и (4) в (1) находим искомую кинетическую энергию системы:

$$T = \frac{2M_1 + M_2}{4} v^2.$$

Задача 9.85. Горизонтальный вал массы M и радиуса R лежит в двух роликовых подшипниках. При вращении вала с угловой скоростью ω_0 приводятся в движение ролики, которые катятся без скольжения по внутренней боковой поверхности неподвижной обоймы. В состав каждого роликового подшипника входят n роликов массы m каждый (на рисунке изображен только один из n роликов). Ролики считать однородными круглыми цилиндрами.

Вычислить кинетическую энергию данной системы, выразив ее в зависимости от угловой скорости ω_0 вала.

Р е ш е н и е. При качении ролика без скольжения его мгновенный центр скоростей $\mathcal{P}$ находится в точке касания ролика с внутренней поверхностью неподвижной обоймы (см. рис. к задаче). Скорость точки A, принадлежащей как валу, так и ролику равна $v_A = R\omega_0$. Запишем скорость центра тяжести C ролика (см. рисунок):

$$v_C = \frac{v_A}{2} = \frac{R\omega_0}{2}. \tag{1}$$

Кинетическая энергия системы равна

$$T = T^{(в)} + 2T^{(п)}, \tag{2}$$

где $T^{(в)}$ — кинетическая энергия вала, а $T^{(п)}$ — кинетическая энергия n роликов, находящихся в каждом из двух подшипников.

Вал вращается вокруг неподвижной оси. Поэтому $T^{(в)} = {}^1/_2 I_z \omega_0^2$. Учтя, что $I_z = MR^2/2$, имеем

$$T^{(в)} = \frac{1}{2} I_z \omega_0^2 = \frac{1}{4} MR^2 \omega_0^2. \tag{3}$$

Каждый из роликов совершает плоское движение. Значит, кинетическая энергия n роликов равна

$$T^{(п)} = \frac{1}{2} nmv_C^2 + \frac{1}{2} nI_C \omega^2,$$

где I_C — момент инерции ролика относительно оси, проходящей через его центр тяжести C перпендикулярно к плоскости рисунка, а ω — угловая скорость ролика. Приняв во внимание, что $I_C = mr^2/2$, где радиус ролика обозначен r, а $r\omega = v_C$, получим $T^{(п)} = \frac{3}{4} nmv_C^2$. Использовав формулу (1), запишем

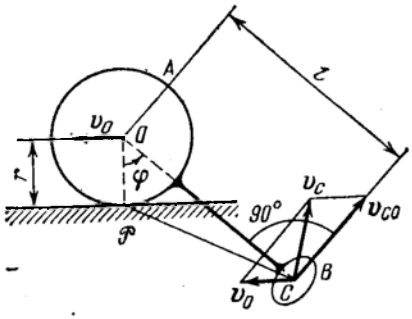
$$T^{(п)} = \frac{3}{16} nmR^2 \omega_0^2. \tag{4}$$

Внеся значения $T^{(в)}$ и $T^{(п)}$ из (3) и (4) в формулу (2), найдем искомое выражение кинетической энергии системы:

$$T = \frac{2M + 3nm}{8} R^2 \omega_0^2. \tag{5}$$

Сопоставив выражения кинетической энергии вала (3) и всей системы (5), замечаем их внешнее подобие (как $T^{(в)}$, так и T выражены в зависимости от ω_0): моменту инерции вала $I_z = MR^2/2$ формулы (3) соответствует выражение $\frac{2M + 3nm}{4} R^2$, которое, по аналогии, называется *приведенным моментом инерции системы.*

Задача 9.86. К однородному колесу A массы M и радиуса r жестко прикреплено плоское твердое тело B массы m с радиусом инерции ρ_C относительно горизонтальной оси C, проходящей через центр масс твердого тела. Колесо и твердое тело жестко соединены невесомым стержнем, причем $OC = l$. При колебаниях системы колесо A катится без скольжения по горизонтальной плоскости.



К задаче 9.86.

Вычислить кинетическую энергию материальной системы.

Р е ш е н и е. Кинетическая энергия материальной системы равна

$$T = T^{(A)} + T^{(B)}, \qquad (1)$$

где $T^{(A)}$ — кинетическая энергия колеса A, а $T^{(B)}$ — твердого тела B.

Колесо A совершает плоскопараллельное движение, поэтому

$$T^{(A)} = \frac{1}{2} M v_0^2 + \frac{1}{2} I_{z_0} \omega^2. \qquad (2)$$

При качении колеса без скольжения его мгновенный центр скоростей $\mathcal{P}$ расположен в точке касания с горизонтальной плоскостью, и, значит, $v_0 = C\mathcal{P}\ \omega = r\omega$. Внеся это значение v_0 в формулу (2), а также $I_{zC} = Mr^2/2$, найдем

$$T^{(A)} = \frac{3}{4} M r^2 \omega^2. \qquad (3)$$

Твердое тело B также совершает вместе с колесом A плоскопараллельное движение. Значит,

$$T^{(B)} = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} I_{zC} \omega^2. \qquad (4)$$

Приняв точку O за полюс, запишем $\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}_{CO}$, где $\boldsymbol{v}_{CO}$ — скорость точки C относительно полюса O. На рисунке изображен соответствующий параллелограмм скоростей. Модуль v_C равен

$$v_C^2 = v_0^2 + v_{CO}^2 + 2 v_0 v_{CO} \cos(\widehat{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_{CO}}). \qquad (5)$$

Заметив, что $v_{CO} = l\omega$, $v_0 = r\omega$, а $(\widehat{v_0, v_{CO}}) = 180° - \varphi$, из формулы (5) найдем $v_C^2 = r^2\omega^2 + l^2\omega^2 - 2rl\omega^2 \cos\varphi$, т. е.

$$v_C^2 = (r^2 + l^2 - 2rl\cos\varphi)\,\omega^2. \qquad (6)$$

При подстановке результата (6) в формулу (4) заметим, что момент инерции $I_{zC} = m\rho_C^2$, где ρ_C — радиус инерции твердого тела относительно горизонтальной оси C, перпендикулярной плоскости движения. Получим

$$T^{(B)} = \frac{1}{2} m (r^2 + l^2 + \rho_C^2 - 2rl\cos\varphi)\,\omega^2. \qquad (7)$$

Искомое выражение кинетической энергии всей системы после внесения значений (3) и (7) в формулу (1) окончательно примет вид

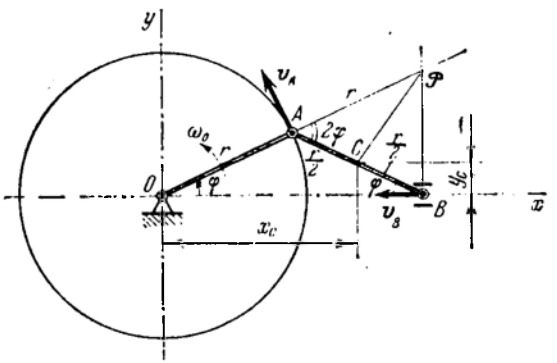
$$T = \frac{1}{4}\left[3Mr^2 + 2m\left(r^2 + l^2 + \rho_C^2 - 2rl\cos\varphi\right)\right]\omega^2. \qquad (8)$$

В заключение заметим, что скорость точки C можно было найти короче, приняв за полюс мгновенный центр скоростей $\mathcal{P}$. Скорость v_0 перпендикулярна мгновенному радиусу $C\mathcal{P}$ (см. рисунок) и равна $v_C = C\mathcal{P}\cdot\omega$, т. е.

$$v_C^2 = (C\mathcal{P})^2\omega^2. \qquad (9)$$

Из треугольника $OC\mathcal{P}$ по теореме косинусов имеем $(C\mathcal{P})^2 = (O\mathcal{P})^2 + (OC)^2 - 2\cdot O\mathcal{P}\cdot OC\cos\varphi$, т. е. $(C\mathcal{P})^2 = r^2 + l^2 - 2rl\cos\varphi$. Внесение этого значения $(C\mathcal{P})^2$ в формулу (9) приводит к результату (6).

Задача 9.87. Вычислить кинетическую энергию кривошипно-ползунного механизма, у которого масса и длина кривошипа OA соответственно равны массе и длине шатуна AB. Кривошип OA массы M_1 и длины r вращается с угловой скоростью ω_0. Масса ползуна B равна M_2. Кривошип и шатун считать тонкими прямолинейными однородными стержнями.



К задаче 9.87.

Р е ш е н и е. Взяв начало координат на оси кривошипа O, проведем ось x вдоль направляющей ползуна B. Будем отсчитывать угол поворота φ кривошипа OA от оси x против хода часовой стрелки.

Кинетическая энергия системы равна сумме кинетических энергий: $T^{(1)}$ — кривошипа OA, $T^{(2)}$ — шатуна AB и $T^{(3)}$ — ползуна B:

$$T = T^{(1)} + T^{(2)} + T^{(3)}. \qquad (1)$$

Кривошип OA вращается вокруг неподвижной оси O, перпендикулярной к плоскости рисунка, следовательно,

$$T^{(1)} = \frac{1}{2} I_O \omega_0^2;$$

так как $I_O = M_1 \frac{r^2}{3}$, то

$$T^{(1)} = \frac{1}{6} M_1 r^2 \omega_0^2. \tag{2}$$

Шатун AB совершает плоское движение. Вычисляем его кинетическую энергию по формуле

$$T^{(2)} = \frac{1}{2} I_{\mathcal{P}} \omega_{\text{мг}}^2, \tag{3}$$

где $I_{\mathcal{P}}$ — момент инерции шатуна относительно оси $\mathcal{P}$, проходящей через мгновенный центр скоростей перпендикулярно к плоскости движения. Мгновенный центр скоростей $\mathcal{P}$ лежит в точке пересечения перпендикуляров, восставленных к скоростям из точек A и B.

Нетрудно видеть, что $A\mathcal{P} = OA = r$. Скорость точки A как конца кривошипа дается формулой

$$v_A = OA \cdot \omega_0 = r\omega_0. \tag{4}$$

Скорость точки A как точки, лежащей на шатуне AB, совершающем плоское движение, равна

$$v_A = A\mathcal{P} \cdot \omega_{\text{мг}} = r\omega_{\text{мг}}. \tag{5}$$

Сравнив формулы (4) и (5), находим мгновенную угловую скорость шатуна

$$\omega_{\text{мг}} = \omega_0. \tag{6}$$

Для вычисления момента инерции $I_{\mathcal{P}}$ применим теорему Штейнера:

$$I_{\mathcal{P}} = I_C + M_1 (C\mathcal{P})^2, \tag{7}$$

где I_C — момент инерции шатуна AB относительно оси, проходящей через центр тяжести C шатуна перпендикулярно к шатуну:

$$I_C = \frac{M_1 r^2}{12}. \tag{8}$$

Расстояние $C\mathcal{P}$ между параллельными осями вычисляем из треугольника $AC\mathcal{P}$; имеем $(C\mathcal{P})^2 = r^2 + \frac{r^2}{4} - 2r\frac{r}{2}\cos 2\varphi$, т. е.

$$(C\mathcal{P})^2 = \frac{r^2}{4}(5 - 4\cos 2\varphi). \tag{9}$$

Подставив выражения (8) и (9) в формулу (7), находим

$$I_{\mathcal{P}} = \frac{1}{3} M_1 r^2 (4 - 3\cos 2\varphi). \tag{10}$$

Внося значения (6) и (10) в формулу (3), получаем выражение кинетической энергии шатуна AB:

$$T^{(2)} = \frac{1}{6} M_1 r^2 (4 - 3\cos 2\varphi)\, \omega_0^2,$$

которое после несложных преобразований можно представить в виде

$$T^{(2)} = \frac{1}{6} M_1 r^2 (1 + 6 \sin^2 \varphi) \omega_0^2. \qquad (11)$$

Вычисление кинетической энергии шатуна AB, совершающего плоское движение, можно также произвести по формуле

$$T^{(2)} = \frac{1}{2} M_1 v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega_{мг}^2. \qquad (12)$$

Мгновенная угловая скорость шатуна $\omega_{мг}$ определяется, как и в первом варианте подсчета ($\omega_{мг} = \omega_0$).

Для вычисления скорости центра тяжести C шатуна AB запишем координаты точки C. Нетрудно видеть из рисунка, что $x_C = \frac{3r}{2} \cos \varphi$, $y_C = \frac{r}{2} \sin \varphi$. Взяв производные по времени от x_C и y_C, получим проекции скорости точки C:

$$v_{Cx} = \dot{x}_C = -\frac{3}{2} r \dot{\varphi} \sin \varphi = -\frac{3}{2} r \omega_0 \sin \varphi,$$

$$v_{Cy} = \dot{y}_C = \frac{r}{2} \dot{\varphi} \cos \varphi = \frac{r}{2} \omega_0 \cos \varphi.$$

Следовательно,

$$v_C^2 = v_{Cx}^2 + v_{Cy}^2 = \frac{9}{4} r^2 \omega_0^2 \sin^2 \varphi + \frac{r^2}{4} \omega_0^2 \cos^2 \varphi = \frac{r^2}{4} \omega_0^2 + 2 r^2 \omega_0^2 \sin^2 \varphi. \qquad (13)$$

Подставив выражения (6), (8) и (13) в формулу (12), найдем

$$T^{(2)} = \frac{1}{6} M_1 r^2 (1 + 6 \sin^2 \varphi) \omega_0^2.$$

Объем вычислений, необходимых для подсчетов кинетической энергии шатуна в каждом из вариантов, примерно одинаков.

Переходим к вычислению кинетической энергии ползуна B. Так как ползун движется поступательно, то

$$T^{(3)} = \frac{1}{2} M_2 v_B^2. \qquad (14)$$

Зная положение мгновенного центра скоростей $\mathcal{P}$ шатуна AB, легко находим скорость ползуна B:

$$v_B = v_A \frac{B\mathcal{P}}{A\mathcal{P}};$$

так как $v_A = r\omega_0$, $A\mathcal{P} = r$, а $B\mathcal{P} = 2r\,|\sin \varphi|$, то

$$v_B = 2r\omega_0 |\sin \varphi| \qquad (15)$$

(v_B можно было определить и иначе: записать абсциссу точки B: $x_B = 2r\cos\varphi$ и, взяв производную от x_B по времени, найти проекцию скорости точки B на ось x; $v_{Bx} = \dot{x}_B = -2r\dot{\varphi}\sin\varphi = -2r\omega_0\sin\varphi$).

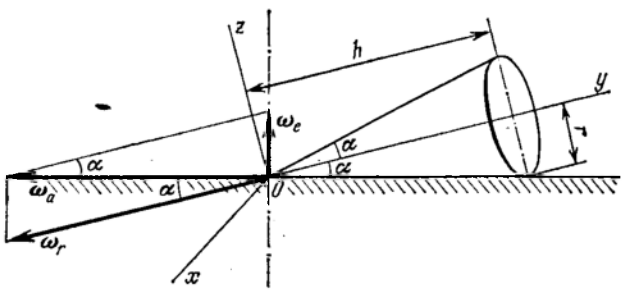
Внося значение v_B (15) в формулу (14), находим кинетическую энергию ползуна B:

$$T^{(3)} = 2M_2r^2\omega_0^2\sin^2\varphi. \tag{16}$$

После подстановки выражений (2), (11) и (16) в формулу (1) получим искомую кинетическую энергию кривошипно-ползунного механизма:

$$T = \frac{r^2\omega_0^2}{3}[M_1 + 3(M_1 + 2M_2)\sin^2\varphi]. \tag{17}$$

Задача 9.88. Однородный круговой конус массы M высотой h, с радиусом основания $r = h/2$ катится без скольжения по неподвижной горизонтальной плоскости, имея неподвижную точку в своей вершине O. Вычислить кинетическую энергию конуса, если он делает вокруг вертикальной оси один оборот в секунду.



К задаче 9.88.

Р е ш е н и е. Выберем начало осей координат x, y, z в неподвижной точке O. Ось y направим по оси симметрии конуса. Ось z расположим в вертикальной плоскости. Горизонтальная ось x тогда перпендикулярна к плоскости рисунка.

Так как конус вращается вокруг неподвижной точки O, а оси x, y, z являются главными осями инерции конуса в точке O, то $I_{yz} = I_{zx} = I_{xy} = 0$; кинетическая энергия конуса вычисляется по формуле

$$T = \frac{1}{2}(I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2), \tag{1}$$

где I_x, I_y, I_z — моменты инерции конуса относительно соответствующих координатных осей, а ω_x, ω_y, ω_z — проекции мгновенной (абсолютной) угловой скорости конуса на соответствующие оси координат.

Моменты инерции конуса I_x, I_y, I_z были найдены в задаче 9.7:

$$I_y = \frac{3}{10} Mr^2, \quad I_x = I_z = \frac{3}{5} M\left(h^2 + \frac{r^2}{4}\right). \tag{2}$$

Так как конус, вращаясь вокруг неподвижной точки O, участвует в двух вращениях вокруг пересекающихся осей (переносное вращение совершается вокруг вертикальной оси, а относительное — вокруг оси симметрии конуса y), то, применив теорему о сложении вращений твердого тела вокруг пересекающихся осей: $\boldsymbol{\omega}_a = \boldsymbol{\omega}_e + \boldsymbol{\omega}_r$, построим параллелограмм угловых скоростей. Вектор мгновенной (абсолютной) угловой скорости конуса лежит на мгновенной оси, направленной горизонтально вдоль линии касания боковой поверхности конуса с неподвижной плоскостью.

Если угол при вершине конуса обозначить 2α, то нетрудно видеть, что

$$\omega_a = \omega_e \operatorname{ctg} \alpha. \tag{3}$$

Вычислим проекции ω_a на оси x, y, z:

$$\omega_y = -\omega_a \cos\alpha, \quad \omega_z = \omega_a \sin\alpha, \quad \text{а} \quad \omega_x = 0 \tag{4}$$

(параллелограмм угловых скоростей лежит в плоскости yz).

Использовав выражения (2), (3) и (4), запишем формулу (1) в виде

$$T = \frac{3}{20} M\omega_e^2 \left(3h^2 + \frac{r^2}{2}\right) \cos^2\alpha.$$

Так как $\cos\alpha = \frac{h}{\sqrt{h^2 + r^2}}$, а согласно условию задачи, $r = h/2$ и $\omega_e = 2\pi$ рад/с, то окончательно получим

$$T = \frac{3}{2} \pi^2 M h^2.$$

Задача 9.89. Диск D массы M и радиуса r, свободно сидящий на оси BC, приводится в движение посредством ломаного рычага ABC. Диск катится без скольжения по неподвижной горизонтальной плоскости. Кривошип ABC вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ω_0.

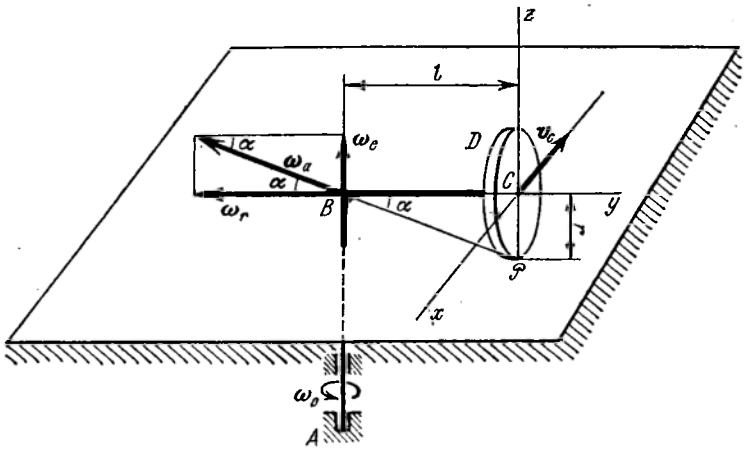
Вычислить кинетическую энергию диска.

Р е ш е н и е. В общем случае движения твердого тела кинетическая энергия вычисляется по формуле

$$T = \frac{1}{2} Mv_C^2 +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2 - 2I_{yz}\omega_y\omega_z - 2I_{zx}\omega_z\omega_x - 2I_{xy}\omega_x\omega_y\right), \tag{1}$$

где M — масса твердого тела, v_C — скорость его центра тяжести C; I_x, I_y, I_z — осевые моменты инерции, I_{xy}, I_{yz}, I_{xz} — центробежные моменты инерции твердого тела относительно осей, связанных с диском, начало которых совмещено с центром тяжести C твердого тела, ω_x, ω_y, ω_z — проекции мгновенной (абсолютной) угловой скорости твердого тела на соответствующие оси декартовых координат.



К задаче 9.89.

Направляем ось y вдоль BC, ось z — перпендикулярно к неподвижной плоскости. Так как оси x, y, z являются главными центральными осями инерции диска D, то

$$I_{yz} = I_{zx} = I_{xy} = 0. \tag{2}$$

Кроме того,

$$I_y = \frac{Mr^2}{2}, \quad I_x = I_z = \frac{Mr^2}{4}. \tag{3}$$

Диск D участвует в двух вращениях вокруг пересекающихся в точке B осей (переносное вращение совершается вокруг оси AB с угловой скоростью ω_0, а относительное вращение — вокруг оси BC).

Мгновенная ось скоростей проходит через точку B пересечения осей переносного и относительного вращений и через точку $\mathcal{P}$ касания диска с неподвижной плоскостью. Применив теорему о сложении вращений твердого тела вокруг пересекающихся осей ($\omega_a = \omega_e + \omega_r$), построим параллелограмм угловых скоростей, являющийся в рассматриваемой задаче прямоугольником. Обозначив угол $CB\mathcal{P}$ через α, нетрудно найти, что

$$\omega_a = \frac{\omega_e}{\sin\alpha} = \frac{\omega_0}{\sin\alpha}.$$

Так как из треугольника BCP

$$\sin\alpha = \frac{r}{\sqrt{r^2+l^2}},$$

то

$$\omega_a = \frac{\omega_0\sqrt{r^2+l^2}}{r}.$$

Определяя проекции ω_a на оси x, y, z, т. е. ω_x, ω_y, ω_z, имеем

$$\omega_y = -\omega_a\cos\alpha = -\frac{\omega_0\sqrt{r^2+l^2}}{r}\cdot\frac{l}{\sqrt{r^2+l^2}} = -\omega_0\frac{l}{r},$$

$$\omega_z = \omega_e = \omega_0, \quad \omega_x = 0 \tag{4}$$

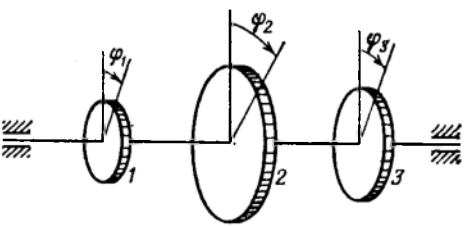
(прямоугольник угловых скоростей лежит в плоскости yz).

Скорость точки C определяется по формуле

$$v_C = BC\omega_0 = l\omega_0. \tag{5}$$

Использовав выражения (2)—(5) и формулу (1), получим искомое выражение кинетической энергии диска:

$$T = \frac{1}{8}M(6l^2+r^2)\omega_0^2.$$



К задаче 9.90.

Задача 9.90. На упругий горизонтальный вал насажены три диска *1*, *2* и *3*, моменты инерции которых относительно оси вала соответственно равны I_1, I_2 и I_3. Вследствие упругости вала и в результате его вращения диски поворачиваются на разные углы.

Зная зависимость углов поворота дисков φ_1, φ_2 и φ_3 от времени, вычислить кинетическую энергию системы. Массой вала пренебречь.

Р е ш е н и е. Кинетическая энергия T системы равна сумме кинетических энергий трех дисков, т. е.

$$T = T^{(1)} + T^{(2)} + T^{(3)}.$$

Так как диски вращаются вокруг неподвижной оси, то

$$T^{(1)} = \frac{1}{2}I_1\dot{\varphi}_1^2, \quad T^{(2)} = \frac{1}{2}I_2\dot{\varphi}_2^2, \quad T^{(3)} = \frac{1}{2}I_3\dot{\varphi}_3^2.$$

Следовательно, искомая кинетическая энергия равна

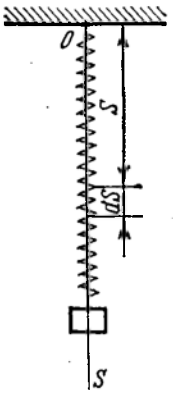
$$T = \frac{1}{2}I_1\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}I_2\dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2}I_3\dot{\varphi}_3^2.$$

Задача 9.91. Груз массы M, подвешенный на однородной пружине массы m, совершает свободные колебания.

Вычислить кинетическую энергию системы, состоящей из груза и пружины. При подсчете кинетической энергии пружины предположить, что смещения точек пружины пропорциональны их расстояниям от точки привеса O.

Р е ш е н и е. Направим вдоль оси пружины ось s, взяв начало отсчета в точке O привеса пружины. Так как рассматриваемая система состоит из груза и пружины, то ее кинетическая энергия равна

$$T = T^{(1)} + T^{(2)}, \tag{1}$$



К задаче 9.91.

где $T^{(1)}$ — кинетическая энергия груза, $T^{(2)}$ — кинетическая энергия пружины.

Обозначив через x смещение груза, запишем его кинетическую энергию.

$$T^{(1)} = \frac{1}{2} M\dot{x}^2. \tag{2}$$

Остается вычислить кинетическую энергию пружины. Введем обозначения: l — длина недеформированной пружины, γ — плотность пружины.

Выделим на расстоянии s элемент пружины длины ds. При свободных колебаниях системы все точки пружины и груз получают смещения. Обозначим через ξ — смещение элемента пружины ds, отстоящего от точки привеса O на расстоянии s. В соответствии с условием задачи, смещения точек пружины пропорциональны их расстояниям от точки привеса O, т. е. $\frac{\xi}{x} = \frac{s}{l}$, откуда $\xi = \frac{s}{l} x$. Взяв производные по времени, найдем $\dot{\xi} = \frac{s}{l} \dot{x}$.

Кинетическая энергия элемента пружины длины dx равна $dT^{(2)} = \frac{1}{2} dm\dot{\xi}^2$, где масса элемента пружины $dm = \gamma\, ds$, т. е.

$$dT^{(2)} = \frac{1}{2} \frac{\gamma\dot{x}^2}{l^2} s^2\, ds. \tag{3}$$

Кинетическую энергию всей пружины получим, взяв определенный интеграл в пределах от 0 до l:

$$T^{(2)} = \frac{1}{2} \frac{\gamma\dot{x}^2}{l^2} \int_0^l s^2\, ds = \frac{1}{6} \gamma l\dot{x}^2,$$

так как масса пружины $m = \gamma l$, то

$$T^{(2)} = \frac{1}{6} m\dot{x}^2. \tag{4}$$

После подстановки значений $T^{(1)}$ и $T^{(2)}$ из формул (2) и (4) в (1) получим искомое выражение кинетической энергии системы:

$$T = \frac{1}{2} \left(M + \frac{1}{3} m\right) \dot{x}^2.$$

Итак, при приближенном учете массы пружины следует к массе груза добавлять одну треть массы пружины (приближение Рэлея).

Выражение $M + \frac{1}{3} m$ называется *приведенной массой*.

У к а з а н и е. Рекомендуем решить следующие задачи из «Сборника задач по теоретической механике» И. В. Мещерского: 38.1—38.5, 38.7—38.11.

3. Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки в интегральной форме. Изменение кинетической энергии материальной точки при ее перемещении равно сумме работ, совершенных силами, приложенными к точке, на этом перемещении:

$$T_2 - T_1 = \sum_{k=1}^{n} A(\boldsymbol{F}_k),$$

или

$$\frac{1}{2} M v_2^2 - \frac{1}{2} M v_1^2 = \sum_{k=1}^{n} A(\boldsymbol{F}_k).$$

С помощью этой теоремы следует решать задачи в тех случаях, когда в число данных и искомых величин входят: масса M (или сила тяжести $\boldsymbol{P}$), скорости точки $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ — соответственно в начальный и конечный моменты времени, силы, приложенные к точке, и перемещение точки.

Для вычисления суммы работ сил эти силы должны быть постоянными, либо зависящими от положения точки. Если же силы зависят от скорости или ускорения точки, либо от времени, то нельзя вычислить интегралы для определения работы (при этом предполагается, что закон движения точки неизвестен).

У к а з а н и е. Решение задач с помощью теоремы об изменении кинетической энергии материальной точки в интегральной форме рекомендуется проводить в такой последовательности:

1) изобразить на рисунке силы, приложенные к материальной точке, т. е. активные силы и реакции связей;

2) вычислить сумму работ всех сил, приложенных к материальной точке, на ее перемещении;

3) вычислить кинетическую энергию материальной точки в ее начальном и конечном положениях;

4) использовав результаты вычислений двух предыдущих пунктов, применить теорему об изменении кинетической энергии материальной точки и определить искомую величину.

Задача 9.92. Воспользовавшись условием задачи 8.42, определить закон убывания наибольших отклонений груза.

Р е ш е н и е. В ходе решения задачи 8.42 были использованы дифференциальные уравнения поэтапного движения груза. В результате их интегрирования были получены уравнения движения и закон убывания наибольших отклонений груза. С помощью же теоремы об

изменении кинетической энергии можно значительно короче и проще определить закон убывания наибольших отклонений.

Для определения этого закона применим теорему об изменении кинетической энергии при перемещении груза из крайнего правого в крайнее левое положение. Так как в крайних положениях скорость груза равна нулю, то и кинетическая энергия его также равна нулю: $T_1 = T_2 = 0$ и уравнение $T_2 - T_1 = \sum_{k=1}^{n} A(\boldsymbol{F}_k)$ примет вид

$$\sum_{k=1}^{n} A(\boldsymbol{F}_k) = 0. \tag{1}$$

На рис. к задаче 8.42а груз изображен в промежуточном положении при $x > 0$. К грузу приложены: $\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{g}$ — сила тяжести, $\boldsymbol{F}$ — сила упругости пружины, а также две составляющие реакции негладкой плоскости: $\boldsymbol{R}$ — нормальная и $\boldsymbol{F}_{\text{тр}}$ — касательная — сила трения.

Дадим грузу элементарное перемещение dx. Сумма элементарных работ этих сил равна

$$\sum \delta A(\boldsymbol{F}_k) = (P_x + R_x + F_x + F_{\text{тр}\,x})\,dx. \tag{2}$$

Так как силы $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{R}$ перпендикулярны оси x, то $P_x = R_x = 0$. При движении груза налево сила трения $\boldsymbol{F}_{\text{тр}}$ направлена направо (см. рис. к задаче 8.42а) и по модулю равна: $F_{\text{тр}} = fMg$. Сила упругости пружины направлена налево, причем ее проекция на ось x равна: $F = -cx$. Использовав значения проекций всех сил в формуле (2), получим

$$\sum \delta A(\boldsymbol{F}_k) = (-cx + fMg)\,dx. \tag{3}$$

Взяв интеграл в пределах от a_0 до x_1, где x_1 — абсцисса наибольшего отклонения груза влево, имеем

$$\sum A(\boldsymbol{F}_k) = -\frac{c}{2}(x_1^2 - a_0^2) + fMg(x_1 - a_0). \tag{4}$$

Сумма работ (4) на основании условия (1) равна нулю:

$$-\frac{c}{2}(x_1^2 - a_0^2) + fMg(x_1 - a_0) = 0. \tag{5}$$

Решив уравнение (5) относительно x_1, получим абсциссу наибольшего отклонения груза налево:

$$x_1 = -\left(a_0 - \frac{2fg}{k^2}\right), \tag{6}$$

где обозначено: $k^2 = c/M$ (заметим, что k — круговая частота свободных колебаний, которые совершал бы груз при отсутствии силы

трения). Абсолютная величина a_1 наибольшего отклонения налево равна

$$a_1 = |x_1| = a_0 - \frac{2fg}{k^2}. \tag{7}$$

Использовав формулу (7), вычислим разность $\Delta a_{0,1}$ абсолютных величин наибольших отклонений a_0 и a_1:

$$\Delta a_{0,1} = a_0 - a_1 = \frac{2fg}{k^2}. \tag{8}$$

Из крайнего левого положения груз перемещается направо и получает некоторое наибольшее отклонение, равное по абсолютной величине a_2. Теперь применим теорему об изменении кинетической энергии на перемещении груза из крайнего левого в крайнее правое положение. При этом надо иметь в виду, что сила трения $\boldsymbol{F}_{\text{тр}}$ будет направлена налево и, значит, сумма элементарных работ сил, по аналогии с формулой (3), будет равна: $\sum \delta A\,(\boldsymbol{F}_k) = -(cx + fMg)\,dx$. Взяв интеграл в пределах от a_1 до a_2, использовав условие (1) и решив уравнение относительно a_2, получим $a_2 = a_1 - 2fg/k^2$, т. е.

$$\Delta a_{1,2} = a_1 - a_2 = \frac{2fg}{k^2}. \tag{9}$$

Сопоставив формулы (8) и (9), видим, что разности абсолютных величин наибольших отклонений равны между собой. Следовательно, при наличии постоянной по модулю силы трения груз совершает затухающие колебания, причем абсолютные величины последовательных наибольших отклонений убывают по закону арифметической прогрессии, разность которой равна $2fg/k^2$.

Применение теоремы об изменении кинетической энергии для определения этого закона оказалось эффективнее по сравнению с использованием дифференциальных уравнений движения.

Задача 9.93. Груз массы M совершает свободные колебания на подвешенной к потолку пружине, коэффициент упругости (жесткости) которой равен c. Грузу, находившемуся в положении статического равновесия, сообщена посредством толчка скорость v_0.

Определить скорость груза v в зависимости от его смещения из положения статического равновесия и амплитуду колебаний груза.

Р е ш е н и е. Применяем теорему об изменении кинетической энергии материальной точки в интегральной форме:

$$\frac{1}{2}Mv_2^2 - \frac{1}{2}Mv_1^2 = \sum_{k=1}^{n} A\,(\boldsymbol{F}_k). \tag{1}$$

Ось x направляем вдоль оси пружины вниз, выбрав начало отсчета в положении статического равновесия груза, т. е. когда пружина имеет статическое удлинение:

$$\Delta_{\text{ст}} = \frac{Mg}{c}. \tag{2}$$

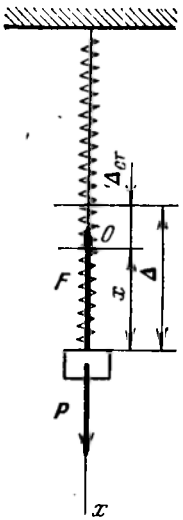
Изображаем груз в положении, смещенном из начала отсчета на x. К грузу приложены: $\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{g}$ — сила тяжести груза, $\boldsymbol{F}$ — сила упругости пружины. $F = c\,|\,\Delta\,|$. Так как удлинение пружины при данном положении груза равно

$$\Delta = \Delta_{ст} + x, \tag{3}$$

то

$$F_x = -c\,(\Delta_{ст} + x).$$

Вычислим сумму работ сил, приложенных к грузу на его перемещении, равном x:



К задаче 9.93.

$$\sum A(\boldsymbol{F}_k) = A(\boldsymbol{P}) + A(\boldsymbol{F}). \tag{4}$$

Работа силы тяжести при перемещении груза от нуля вниз на x равна

$$A(\boldsymbol{P}) = Px. \tag{5}$$

Работа силы упругости $\boldsymbol{F}$ отрицательна, так как при перемещении груза из начала отсчета вниз на x пружина удлиняется. В начальном положении груза пружина деформирована на $\Delta_{ст}$, а в конечном положении груза, смещенном из начала отсчета на x вниз: $\Delta = \Delta_{ст} + x$, следовательно, работа силы упругости равна $A(\boldsymbol{F}) = -\frac{c}{2}(\Delta^2 - \Delta_{ст}^2)$. Использовав формулу (3), получим

$$A(\boldsymbol{F}) = -\frac{c}{2}(2\Delta_{ст}x + x^2). \tag{6}$$

Подставив значения $A(\boldsymbol{P})$ и $A(\boldsymbol{F})$ из формул (5) и (6) в (4), находим сумму работ сил, приложенных к грузу, на его перемещении от нуля на x вниз:

$$\sum A(\boldsymbol{F}_k) = Px - \frac{c}{2}(2\Delta_{ст}x + x^2).$$

Учитывая выражение (2), получим

$$\sum A(\boldsymbol{F}_k) = -\frac{cx^2}{2}. \tag{7}$$

Переходим к вычислению изменения кинетической энергии груза. В начальном положении грузу была сообщена скорость v_0, т. е.

$$T_1 = \frac{1}{2}Mv_0^2.$$

В конечном положении груз приобрел скорость v, поэтому

$$T_2 = \frac{1}{2} Mv^2.$$

Следовательно, изменение кинетической энергии груза равно

$$T_2 - T_1 = \frac{1}{2} M (v^2 - v_0^2). \tag{8}$$

После подстановки значений $\sum A(F_k)$ и $T_2 - T_1$ из формул (7) и (8) в уравнение (1) определяем скорость груза в зависимости от его смещения x:

$$v = \sqrt{v_0^2 - \frac{c}{M} x^2}.$$

Как известно из теории колебаний материальной точки, $c/M = k^2$, где k — круговая частота колебаний груза. Итак, окончательно

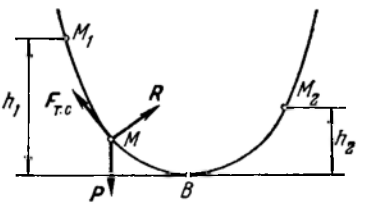
$$v = \sqrt{v_0^2 - k^2 x^2}. \tag{9}$$

Амплитуда a свободных колебаний груза легко определяется из формулы (9), так как при отклонении груза в крайние положения $x = \pm a$ его скорость обращается в нуль.

Подставляя эти значения в формулу (9), находим амплитуду свободных колебаний груза

$$a = \frac{v_0}{k} = v_0 \sqrt{M/c}.$$

Задача 9.94. Кольцо массы m, надетое на проволоку, начинает скользить из состояния покоя с высоты h_1. Пройдя низшую точку B (см. рисунок), кольцо поднимается по проволоке вверх на высоту h_2, причем $h_2 < h_1$.



К задаче 9.94.

Вычислить работу силы трения скольжения при перемещении кольца из положения M_1 в M_2.

Р е ш е н и е. Непосредственное вычисление искомой работы силы трения скольжения невозможно, ибо сила трения пропорциональна нормальной реакции проволоки, которая в свою очередь зависит от переменной скорости кольца. Для определения скорости кольца пришлось бы составить и проинтегрировать дифференциальное уравнение движения в проекциях на оси натурального триэдра. Вместе с тем данная задача решается чрезвычайно просто с помощью теоремы об изменении кинетической энергии материальной точки:

$$\frac{1}{2} mv_2^2 - \frac{1}{2} mv_1^2 = \sum_{k=1}^{n} A(F_k). \tag{1}$$

В данном случае начальная и конечная скорости кольца равны нулю, т. е.

$$v_1 = v_2 = 0. \tag{2}$$

К кольцу приложены три силы: $\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{g}$ — сила тяжести кольца, $\boldsymbol{R}$ — нормальная реакция, $\boldsymbol{F}_{\text{т.с}}$ — сила трения скольжения. Поэтому

$$\sum A(\boldsymbol{F}_k) = A(\boldsymbol{P}) + A(\boldsymbol{R}) + A(\boldsymbol{F}_{\text{т. с}}) = P(h_1 - h_2) + A(\boldsymbol{F}_{\text{т. с}}). \tag{3}$$

Подставив значения (2) и (3) в уравнение (1), найдем искомую работу силы трения

$$A(\boldsymbol{F}_{\text{т. с}}) = -mg(h_1 - h_2).$$

У к а з а н и е. Рекомендуем решить следующие задачи из «Сборника задач по теоретической механике» И. В. Мещерского: 30.7, 30.14, 30.16—30.18, 30.23, 30.25.

4. Теорема об изменении кинетической энергии материальной системы в интегральной форме. Изменение кинетической энергии материальной системы при ее перемещении равно сумме работ всех внешних и внутренних сил системы на этом перемещении:

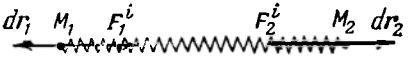


Рис. 9.16.

$$T_2 - T_1 = \sum_{k=1}^{n} A(\boldsymbol{F}_k^e) + \sum_{k=1}^{n} A(\boldsymbol{F}_k^i). \tag{4*}$$

Это — единственная из четырех общих теорем динамики, в формулировку которой входят не только внешние, но и внутренние силы. Необходимость учитывать работу внутренних сил несколько усложняет решение задачи. Если, однако, требуется определить внутреннюю силу, то решение задачи с помощью общих теорем динамики возможно только при применении теоремы об изменении кинетической энергии материальной системы.

Покажем на примере, что в случае изменяемой материальной системы сумма работ внутренних сил не равна нулю. Для этого рассмотрим две материальные точки M_1 и M_2, связанные пружиной (рис. 9.16). Пружина может деформироваться вдоль своей оси, т. е. сжиматься или растягиваться. Допустим, что под действием внешних сил точки M_1 и M_2 получили элементарные перемещения $d\boldsymbol{r}_1$ и $d\boldsymbol{r}_2$, при наличии которых пружина растягивается. Тогда внутренние силы упругости $\boldsymbol{F}_1^i$ и $\boldsymbol{F}_2^i$ будут направлены друг к другу, причем $\boldsymbol{F}_2^i = -\boldsymbol{F}_1^i$. Если учесть, что соответствующие силы и элементарные перемещения образуют углы, равные 180°, то получим сумму элементарных работ в виде

$$\sum \delta A(\boldsymbol{F}_k^i) = \boldsymbol{F}_1^i \cdot d\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{F}_2^i \cdot d\boldsymbol{r}_2 = -F_1^i\, dr_1 - F_2^i\, dr_2,$$

т. е. элементарная работа двух данных внутренних сил (а внутренние силы существуют попарно) отрицательна, а не равна нулю.

В случае неизменяемой материальной системы, например абсолютно твердого тела, сумма работ внутренних сил равна нулю.

Сумма работ внутренних сил абсолютно гибкой и нерастяжимой нити также равна нулю. В этих случаях теорема об изменении кинетической энергии системы материальных точек принимает вид

$$T_2 - T_1 = \sum_{k=1}^{n} A(F_k^e). \qquad (5^*)$$

Теорему об изменении кинетической энергии материальной системы следует применять в тех случаях, когда в число данных и искомых величин входят инерционные характеристики системы (массы и моменты инерции), скорости (линейные и угловые), силы и моменты сил, перемещения (линейные и угловые).

Если законы движения точек приложения сил неизвестны, то для вычисления работы силы должны быть постоянными либо зависящими от положений точек приложения сил.

У к а з а н и е. Решение задач с помощью теоремы об изменении кинетической энергии в интегральной форме рекомендуется проводить в такой последовательности:

1) изобразить на рисунке все внешние и внутренние силы системы (в случае неизменяемой материальной системы — только внешние силы);

2) вычислить сумму работ всех внешних и внутренних сил на перемещениях точек системы (в случае неизменяемой материальной системы — только сумму работ внешних сил);

3) вычислить кинетическую энергию системы материальных точек в начальном и конечном положениях системы;

4) воспользовавшись результатами вычислений пунктов 2) и 3), записать теорему об изменении кинетической энергии системы материальных точек [(4*), стр. 310 или в случае неизменяемой системы — по формуле (5*)] и определить искомую величину.

Задача 9.95. Машинный агрегат работает под действием системы приложенных к нему сил. Определить знак суммы работ этих сил при: а) пуске в ход, б) остановке, в) установившемся режиме работы.

Р е ш е н и е. Запишем теорему об изменении кинетической энергии материальной системы в интегральной форме:

$$T_2 - T_1 = \sum_{k=1}^{n} A(F_k). \qquad (1)$$

Все силы, приложенные к системе, разделим на силы движущие (например, момент, создаваемый электроприводом), работа которых положительна $\left(\sum_{k=1}^{n} A(F_{k\,\text{дв}}) > 0\right)$, и силы сопротивления (силы полезного сопротивления: например, сила резания при снятии резцом стружки с болванки, сила давления штампа и т. п., и силы вредного сопротивления: например, силы трения скольжения валов о вкладыши

подшипников, силы трения в зацеплениях зубчатых передач и т. д.), работа которых отрицательна $\left(\sum_{k=1}^{n} A(\boldsymbol{F}_{k\,\text{сопр}}) \leqslant 0\right)$. Запишем уравнение (1), учитывая эту классификацию сил:

$$T_2 - T_1 = \sum_{k=1}^{n} A(\boldsymbol{F}_{k\,\text{дв}}) + \sum_{k=1}^{n} A(\boldsymbol{F}_{k\,\text{сопр}}). \qquad (2)$$

а) При пуске машинного агрегата в ход скорости его материальных точек, которые в начальных положениях были равны нулю, возрастают. Следовательно, $T_1 = 0$, $T_2 \neq 0$, но кинетическая энергия положительна, т. е. $T_2 > 0$. Поэтому изменение кинетической энергии системы $T_2 - T_1 > 0$, и из уравнения (2) находим

$$\sum_{k=1}^{n} A(\boldsymbol{F}_{k\,\text{дв}}) + \sum_{k=1}^{n} A(\boldsymbol{F}_{k\,\text{сопр}}) > 0.$$

Так как первая сумма положительна, а вторая отрицательна, то при пуске в ход модуль суммы работ движущих сил больше модуля суммы работ сил сопротивления.

б) При торможении машинного агрегата скорости его материальных точек, которые в начальных положениях (в момент выключения двигателя) не были равны нулю, уменьшаются и в конечных положениях (в момент остановки) обращаются в нуль. Следовательно, $T_1 > 0$, $T_2 = 0$. В период торможения $\boldsymbol{F}_{k\,\text{дв}} = 0$ и $\sum_{k=1}^{n} A(\boldsymbol{F}_{k\,\text{дв}}) = 0$, поэтому изменение кинетической энергии системы $T_2 - T_1 < 0$, и из уравнения (2) находим

$$\sum_{k=1}^{n} A(\boldsymbol{F}_{k\,\text{сопр}}) < 0,$$

что соответствует замечанию о знаке работы сил сопротивления.

в) При установившемся режиме работы скорости точек являются периодическими функциями. Периодом может, например, оказаться промежуток времени, в течение которого вал двигателя делает один оборот, два оборота и т. д., т. е. $T(\varphi) = T(\varphi + 2k\pi)$, где $k = 1, 2, \ldots, n$. Взяв начальные положения материальных точек системы соответственно углу поворота φ вала двигателя, а конечные — углу поворота $\varphi + 2k\pi$, где $k = 1, 2, \ldots, n$, находим $T_1(\varphi) = T_2(\varphi + 2k\pi)$. Поэтому изменение кинетической энергии системы равно нулю: $T_2 - T_1 = 0$, и из уравнения (2) получим

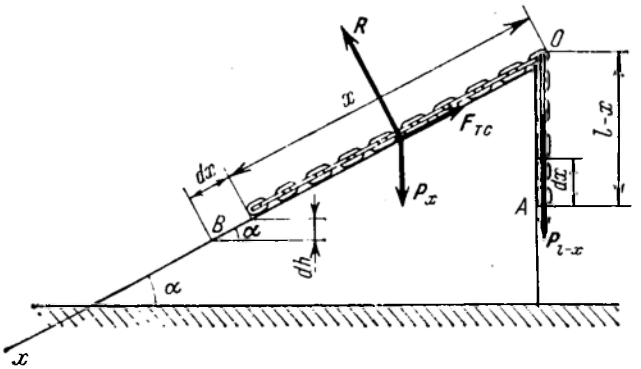
$$\sum_{k=1}^{n} A(\boldsymbol{F}_{k\,\text{дв}}) + \sum_{k=1}^{n} A(\boldsymbol{F}_{k\,\text{сопр}}) = 0.$$

Так как первая сумма положительна, а вторая отрицательна, то при установившемся режиме работы машинного агрегата модуль суммы работ движущих сил равен модулю суммы работ сил сопротив-

ления на том же угловом перемещении вала (при подсчете этих величин за промежуток времени, равный периоду процесса).

Задача 9.96. Две трети однородной цепи AB длиной l лежат на наклонной плоскости призмы, расположенной под углом α к горизонту, а одна треть цепи свисает вдоль вертикальной грани призмы (см. рисунок). Под действием силы тяжести цепь, находившаяся в начальный момент в покое, начинает соскальзывать по наклонной плоскости вниз (трение в точке O отсутствует).

Определить скорость цепи в тот момент, когда конец A ее свисавшей части поднимется на наклонную плоскость в точку O; f — коэффициент трения скольжения цепи о наклонную плоскость.



К задаче 9.96.

Р е ш е н и е. Направим ось x из точки O вдоль наклонной плоскости вниз. Изобразим цепь во время движения; обозначим OB через x, тогда $OA = l - x$. Запишем теорему об изменении кинетической энергии материальной системы

$$T_2 - T_1 = \sum_{k=1}^{n} A(F_k^e) + \sum_{k=1}^{n} A(F_k^i). \qquad (1)$$

Так как цепь можно считать нерастяжимой, то сумма работ внутренних сил равна нулю, и уравнение (1) принимает вид

$$T_2 - T_1 = \sum_{k=1}^{n} A(F_k^e). \qquad (2)$$

Обозначим силу тяжести всей цепи через $\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{g}$. Изобразим внешние силы системы: $\boldsymbol{P}_x$ — сила тяжести части цепи OB, лежащей на наклонной плоскости, $\boldsymbol{P}_{l-x}$ — сила тяжести свисающей части цепи OA, $\boldsymbol{R}$ — суммарная нормальная реакция части цепи OB, $\boldsymbol{F}_{т.с}$ — сила трения скольжения части цепи OB о наклонную плоскость.

Дадим концу цепи B элементарное перемещение dx вдоль наклонной плоскости вниз. При этом конец цепи A поднимается на dx вверх.

Вычисляем элементарную работу внешних сил на перемещении dx:

$$\delta A = \sum \delta A\left(F_k^e\right) = \delta A\left(P_x\right) + \delta A\left(P_{l-x}\right) + \delta A\left(R\right) + \delta A\left(F_{т.\,с}\right). \quad (3)$$

Так как

$$P_x = \frac{P}{l}x, \quad F_{т.\,с} = fN = fP_x\cos\alpha = f\frac{P}{l}x\cos\alpha, \quad P_{l-x} = \frac{P}{l}(l-x),$$

то

$$\delta A\left(P_x\right) = P_x\,dh = P_x\,dx\sin\alpha = \frac{P}{l}x\,dx\sin\alpha, \quad (4)$$

$$\delta A\left(P_{l-x}\right) = -P_{l-x}\,dx = -\frac{P}{l}(l-x)\,dx, \quad (5)$$

$$\delta A\left(R\right) = R\,dx\cos\frac{\pi}{2} = 0, \quad (6)$$

$$\delta A\left(F_{т.\,с}\right) = -F_{т.\,с}\,dx = -f\frac{P}{l}x\,dx\cos\alpha. \quad (7)$$

Подставив значения $\delta A\ (P_x)$, $\delta A\ (P_{l-x})$, $\delta A\ (R)$, $\delta A\ (F_{т.\,с})$ из (4), (5), (6) и (7) в формулу (3), находим

$$\delta A = \sum \delta A\left(F_k^e\right) = \frac{P}{l}(1 - \sin\alpha - f\cos\alpha)\,x\,dx - P\,dx. \quad (8)$$

Для вычисления суммы работ внешних сил на перемещении цепи при подъеме ее конца A в положение O следует взять определенный интеграл от выражения δA, записанного в формуле (8), в пределах от $\frac{2}{3}l$ до l (в начальный момент на наклонной плоскости была расположена часть цепи $OB = \frac{2}{3}l$, в конечный момент на наклонной плоскости должна находиться вся цепь, т. е. при совмещении точек A и O должно выполняться равенство $OB = l$). Вычислив определенный интеграл, находим сумму работ всех внешних сил на заданном конечном перемещении цепи:

$$\sum A\left(F_k^e\right) = \frac{Pl}{18}\left|5\left(\sin\alpha - f\cos\alpha\right) - 1\right|. \quad (9)$$

Переходим к вычислению кинетической энергии цепи. В начальный момент цепь находилась в покое, т. е.

$$T_1 = 0. \quad (10)$$

В конечный момент все материальные точки цепи (учитывая ее нерастяжимость) имели искомую скорость v, следовательно,

$$T_2 = \frac{1}{2}\frac{P}{g}v^2 = \frac{1}{2}Mv^2. \quad (11)$$

Подставив значения $\sum A(F_k^e)$, T_1 и T_2 из формул (9), (10) и (11) в уравнение (2) и решив его относительно v, получим

$$v = \frac{1}{3}\sqrt{gl\,[5(\sin\alpha - f\cos\alpha) - 1]}.$$

Движение цепи по наклонной плоскости вниз возможно только при условии, что $v > 0$, т. е. при выполнении неравенства $5(\sin\alpha - f\cos\alpha) - 1 > 0$ или

$$f < \operatorname{tg}\alpha - \frac{1}{5\cos\alpha}.$$

Задача 9.97. Решить задачу 9.52 с помощью теоремы об изменении кинетической энергии в интегральной форме.

Р е ш е н и е. Эта задача была решена с помощью дифференциального уравнения вращения твердого тела вокруг неподвижной оси. При этом пришлось дважды интегрировать дифференциальное уравнение вращения кольца, определять две постоянные интегрирования и вычислять промежуток времени, в течение которого кольцо вращалось до остановки.

Применением теоремы об изменении кинетической энергии

$$T_2 - T_1 = \sum_{k=1}^{n} A(F_k^e) + \sum_{k=1}^{n} A(F_k^i) \qquad (1)$$

можно объем вычислений сократить в несколько раз.

Изобразив все внешние силы, вычислив момент инерции кольца относительно оси вращения z: $I_z = \frac{M}{2}(R^2 + r^2)$ и главный момент внешних сил относительно этой же оси: $m_z^e = -fMgr$, как это было выполнено при решении задачи 9.52, переходим к вычислению суммы работ всех внешних сил системы $\sum_{k=1}^{n} A(F_k^e) = m_z^e \Delta\varphi$, где $\Delta\varphi$ — искомое угловое перемещение кольца до момента остановки. Таким образом,

$$\sum_{k=1}^{n} A(F_k^e) = -fMgr\,\Delta\varphi. \qquad (2)$$

Кольцо является абсолютно твердым телом, следовательно,

$$\sum_{k=1}^{n} A(F_k^i) = 0. \qquad (3)$$

Кинетическая энергия в начальном положении кольца дается формулой

$$T_1 = \frac{1}{2} I_z \omega_0^2. \qquad (4)$$

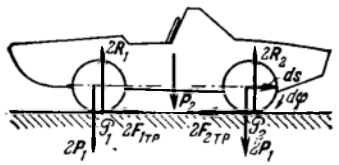
Кинетическая энергия в конечном положении, т. е. в момент остановки, равна

$$T_2 = 0. \tag{5}$$

Подставив значения $\sum_{k=1}^{n} A(F_k^e)$, $\sum_{k=1}^{n} A(F_k^i)$, T_1 и T_2 из формул (2), (3), (4), (5) в уравнение (1) и решив это уравнение относительно $\Delta\varphi$, получим $\Delta\varphi = \frac{\omega_0^2 (R^2 + r^2)}{4fgr}$ или $n = \frac{\omega_0^2 (R^2 + r^2)}{8\pi fgr}$ об.

Следует отметить, что задача оказалась столь просто решенной с помощью теоремы об изменении кинетической энергии потому, что требовалось получить зависимость между угловой скоростью (равной в момент остановки нулю) и углом поворота кольца. Если бы по условию задачи требовалось определить $\omega = f(t)$ либо $\varphi = \varphi(t)$, то пришлось бы решить дифференциальное уравнение. (См. задачу 9.52).

Задача 9.98. При включенном двигателе автомашина движется равномерно по прямолинейному горизонтальному шоссе.



К задаче 9.98.

Вычислить работу движущих сил мотора на перемещении, равном s, если: M_1 — масса колеса, M_2 — масса кузова, r — радиус колеса, $f_к$ — коэффициент трения качения покрышек колес о шоссе. Считать, что колеса катятся без скольжения, сопротивлением воздуха пренебрегаем.

Р е ш е н и е. Применив в этой задаче теорему об изменении кинетической энергии в интегральной форме:

$$T_2 - T_1 = \sum_{k=1}^{n} A(F_k^e) + \sum_{k=1}^{n} A(F_k^i), \tag{1}$$

можно весьма эффективно определить работу внутренних движущих сил мотора, несмотря на то, что закон изменения этих сил неизвестен.

При равномерном движении автомашины ее кинетическая энергия постоянна, т. е. $T_1 = T_2$ и формула (1) принимает вид

$$\sum_{k=1}^{n} A(F_k^e) + \sum_{k=1}^{n} A(F_k^i) = 0. \tag{2}$$

К автомашине приложены внешние силы: $4\boldsymbol{P}_1 = 4M_1\boldsymbol{g}$ — сила тяжести четырех колес, $\boldsymbol{P}_2 = M_2\boldsymbol{g}$ — сила тяжести кузова, $2\boldsymbol{R}_1$ и $2\boldsymbol{R}_2$ — нормальные реакции шоссе, соответственно приложенные к задним ведущим и передним ведомым колесам (реакции смещены относительно центров тяжести колес в сторону движения на $f_к$), $2\boldsymbol{F}_{1тр}$ и $2\boldsymbol{F}_{2тр}$ — силы трения покрышек задних и передних колес о шоссе.

Помимо многих взаимно уравновешивающихся внутренних сил, имеется внутренняя движущая сила мотора, работу которой $A_{дв}$ требуется определить. Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{n} A(F_k^i) = A_{дв}. \tag{3}$$

При перемещении центров тяжести колес на ds колеса повернутся на

$$d\varphi = \frac{ds}{r}, \tag{4}$$

ибо при качении без скольжения мгновенные центры скоростей $\mathscr{P}_1$ и $\mathscr{P}_2$ находятся в точках касания колес с шоссе. При этом работа сил трения $2\boldsymbol{F}_{1тр}$ и $2\boldsymbol{F}_{2тр}$ равна нулю (см. решение задачи 9.79). Работа сил тяжести при перемещении по горизонтали также равна нулю. Значит, из числа внешних сил, приложенных к автомашине, работу дают только смещенные реакции шоссе $2\boldsymbol{R}_1$ и $2\boldsymbol{R}_2$. Имеем

$$\sum \delta A(\boldsymbol{F}_k^e) = -m_{\mathscr{P}_1}(2\boldsymbol{R}_1)\,d\varphi - m_{\mathscr{P}_2}(2\boldsymbol{R}_2)\,d\varphi,$$

т. е.

$$\sum \delta A(\boldsymbol{F}_k^e) = -2R_1 f_к\,d\varphi - 2R_2 f_к\,d\varphi.$$

Использовав зависимость (4), запишем

$$\sum \delta A(\boldsymbol{F}_k^e) = -\frac{f_к}{r}(2R_1 + 2R_2)\,ds. \tag{5}$$

Взяв от (5) интеграл в пределах от 0 до s и приняв во внимание, что сумма реакций равна сумме давлений, т. е. $2R_1 + 2R_2 = (4M_1 + M_2)\,g$, получим

$$\sum A(\boldsymbol{F}_k^e) = -\frac{f_к}{r}(4M_1 + M_2)\,gs. \tag{6}$$

Подставив результаты (3) и (6) в уравнение (2), найдем искомую работу внутренних движущих сил на перемещении s:

$$A_{дв} = \frac{f_к}{r}(4M_1 + M_2)\,gs.$$

Как следует из полученного результата, при равномерном движении автомашины работа внутренних движущих сил равна работе трения качения.

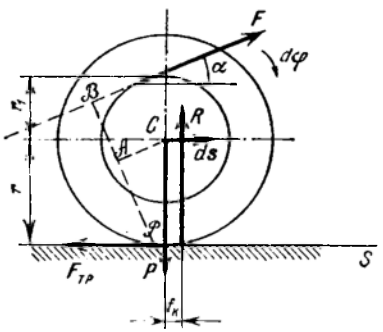
Задача 9.99. Катушка массы M и радиуса r приводится в движение посредством сматываемой с нее нити, расположенной под углом α к горизонту. К нити приложена постоянная сила F.

Определить скорость центра масс C катушки в момент, когда он переместится на расстояние s. Радиус инерции катушки относительно оси, проходящей через ее центр масс C перпендикулярно к плоскости

движения, равен ρ, $f_к$ — коэффициент трения качения катушки о горизонтальную плоскость.

Катушка катится без скольжения. Массой нити пренебречь. r_1 — радиус оси катушки, на которую намотана нить. В начальный момент система находилась в покое.

Р е ш е н и е. Катушка совершает плоское движение. Так как качение происходит без скольжения, то мгновенный центр скоростей $\mathcal{P}$ расположен в точке касания обода катушки с горизонтальной плоскостью. Направим ось s по горизонтали направо. В соответствии с направлением движения, принимаем положительное направление угла поворота φ по ходу часовой стрелки.



К задаче 9.99.

Запишем теорему об изменении кинетической энергии материальной системы

$$T_2 - T_1 = \sum_{k=1}^{n} A(F_k^e) + \sum_{k=1}^{n} A(F_k^i).$$

Так как катушка является неизменяемой материальной системой, то сумма работ внутренних сил равна нулю, и поэтому

$$T_2 - T_1 = \sum_{k=1}^{n} A(F_k^e). \qquad (1)$$

Изобразим внешние силы, приложенные к катушке (см. рисунок): $\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{R}$ — нормальная реакция плоскости, смещенная относительно центра масс C катушки на величину коэффициента трения качения $f_к$ в сторону движения, $\boldsymbol{F}$ — реакция нити, равная по модулю силе, приложенной к нити, $\boldsymbol{F}_{тр}$ — сила трения катушки о горизонтальную плоскость.

Дадим центру масс C катушки элементарное перемещение ds, направленное по горизонтали направо. Учитывая положение мгновенного центра скоростей $\mathcal{P}$, имеем

$$ds = r\,d\varphi. \qquad (2)$$

Вычислим работу внешних сил на элементарном перемещении ds:

$$\delta A = \delta A(\boldsymbol{P}) + \delta A(\boldsymbol{R}) + \delta A(\boldsymbol{F}) + \delta A(\boldsymbol{F}_{тр}). \qquad (3)$$

Так как перемещение центра масс C происходит по горизонтали, то

$$\delta A(\boldsymbol{P}) = 0. \qquad (4)$$

Элементарная работа реакции $\boldsymbol{R}$ равна $\delta A(\boldsymbol{R}) = -R\,f_к\,d\varphi$. Работа отрицательна, ибо видно, что сила $\boldsymbol{R}$ стремится повернуть

катушку вокруг $\mathscr{P}$ в сторону, противоположную $d\varphi$. Так как $R = P - F\sin\alpha$, то, принимая во внимание формулу (2), находим

$$\delta A(\boldsymbol{R}) = -(P - F\sin\alpha) f_к \frac{ds}{r}. \tag{5}$$

Сила трения $\boldsymbol{F}_{тр}$, как и в предыдущей задаче, не совершает работы. Действительно,

$$\delta A(\boldsymbol{F}_{тр}) = \boldsymbol{F}_{тр}\cdot \boldsymbol{v}_{\mathscr{P}}\, dt = 0 \tag{6}$$

(при качении без скольжения $\boldsymbol{v}_{\mathscr{P}} = 0$).

Остается вычислить элементарную работу силы $\boldsymbol{F}$. Выбрав за полюс точку C, запишем $\delta A(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s} + m_C\, d\varphi$, где $d\boldsymbol{s}$ — вектор элементарного перемещения центра масс C, а m_C — момент силы $\boldsymbol{F}$ относительно оси, проходящей через точку C перпендикулярно к неподвижной плоскости, т. е. $m_C = Fr_1$. Следовательно,

$$\delta A(\boldsymbol{F}) = F\, ds\cos\alpha + Fr_1\, d\varphi.$$

Учитывая формулу (2), получим

$$\delta A(\boldsymbol{F}) = \frac{F}{r}(r_1 + r\cos\alpha)\, ds. \tag{7}$$

После подстановки формул (4)—(7) в (2) получим элементарную работу внешних сил, приложенных к катушке, на элементарном перемещении ds:

$$\delta A = [F(r_1 + r\cos\alpha) - f_к(P - F\sin\alpha)]\frac{ds}{r}. \tag{8}$$

Заметим, что при плоском движении твердого тела, в частности при качении без скольжения твердых тел, при вычислении работы удобно за полюс принимать мгновенный центр скоростей $\mathscr{P}$. Тогда формула для подсчета элементарной работы внешних сил $\delta A = \boldsymbol{V}^e\cdot d\boldsymbol{r}_{\mathscr{P}} + m^e_{z_{\mathscr{P}}}\, d\varphi$ принимает вид (так как $d\boldsymbol{r}_{\mathscr{P}} = \boldsymbol{v}_{\mathscr{P}}\, dt = 0$)

$$\delta A = m^e_{z_{\mathscr{P}}}\, d\varphi \tag{9}$$

и отпадает необходимость в определении главного вектора $\boldsymbol{V}^e$ внешних сил. Здесь $m^e_{z_{\mathscr{P}}}$ — главный момент внешних сил относительно оси $z_{\mathscr{P}}$, проходящей через мгновенный центр скоростей $\mathscr{P}$ перпендикулярно к плоскости движения твердого тела, $d\varphi$ — элементарное угловое перемещение, не зависящее от выбора полюса. Однако надо иметь в виду, что формулой (9) неудобно пользоваться в случаях, когда определение моментов внешних сил затруднено вычислением соответствующих плеч.

Воспользовавшись в данной задаче формулой (9), запишем

$$\delta A = [m_{z_{\mathscr{P}}}(\boldsymbol{P}) + m_{z_{\mathscr{P}}}(\boldsymbol{F}_{тр}) + m_{z_{\mathscr{P}}}(\boldsymbol{R}) + m_{z_{\mathscr{P}}}(\boldsymbol{F})]\, d\varphi. \tag{10}$$

Далее имеем

$$m_{z_{\mathscr{P}}}(\boldsymbol{P}) = m_{z_{\mathscr{P}}}(\boldsymbol{F}_{\text{тр}}) = 0, \quad m_{z_{\mathscr{P}}}(\boldsymbol{R}) = -R \cdot f_{\text{к}} = -(P - F\sin\alpha) \cdot f_{\text{к}},$$

$$m_{z_{\mathscr{P}}}(\boldsymbol{F}) = F \cdot \mathscr{P}B.$$

Так как $\mathscr{P}B = \mathscr{P}A + AB = r\cos\alpha + r_1$, то $m_{z_{\mathscr{P}}}(\boldsymbol{F}) = F(r_1 + r\cos\alpha)$. Подставив эти значения в формулу (10) и учтя зависимость (2), получим выражение (8) (в этой задаче ось $z_{\mathscr{P}}$ направлена перпендикулярно к плоскости рисунка от нас).

Для определения суммы работ внешних сил на перемещении центра масс s следует, воспользовавшись формулой (8), взять определенный интеграл в пределах от 0 до s. Сделав это, получим

$$\sum A(\boldsymbol{F}_k^e) = [F(r_1 + r\cos\alpha) - f_{\text{к}}(P - F\sin\alpha)]\frac{s}{r}. \qquad (11)$$

Вычислим кинетическую энергию катушки. В начальном положении катушка была в покое, т. е.

$$T_1 = 0. \qquad (12)$$

Кинетическая энергия в конечном положении катушки равна

$$T_2 = \frac{1}{2}Mv_C^2 + \frac{1}{2}I_C\omega^2,$$

где

$$I_C = M\rho^2, \quad \omega = \frac{v_C}{r}.$$

Следовательно,

$$T_2 = \frac{1}{2}Mv_C^2\left(1 + \frac{\rho^2}{r^2}\right). \qquad (13)$$

Подставив (11)—(13) в уравнение (1) и решив это уравнение относительно v_C, находим искомую скорость центра масс катушки C:

$$v_C = \sqrt{\frac{2grs}{r^2 + \rho^2}[F(r_1 + r\cos\alpha) - (Mg - F\sin\alpha)f_{\text{к}}]}. \qquad (14)$$

Из формулы (14) видно, что катушка находится в движении, если модуль силы $\boldsymbol{F}$ удовлетворяет условию

$$F > \frac{Mgf_{\text{к}}}{r_1 + r\cos\alpha + f_{\text{к}}\sin\alpha}.$$

Задача 9.100. Выразить угловую скорость кривошипа OA механизма, рассмотренного в задаче 9.87, в зависимости от угла поворота φ, если в начальный момент при $\varphi = 0$ механизм находился в покое.

К кривошипу, вращающемуся вокруг неподвижной оси z, перпендикулярной к плоскости рисунка, приложен вращающий момент $m_{\text{вр}}$.

При движении возникают в цилиндрических шарнирах O и A моменты сил сопротивления m_1 и m_2, а также сила трения F между ползуном B и его направляющими, параллельными оси x. Механизм расположен в горизонтальной плоскости. Моменты $m_{вр}$, m_1 и m_2, а также модуль силы F постоянны.

Р е ш е н и е. Воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии материальной системы:

$$T_2 - T_1 = \sum_{k=1}^{n} A(F_k). \tag{1}$$

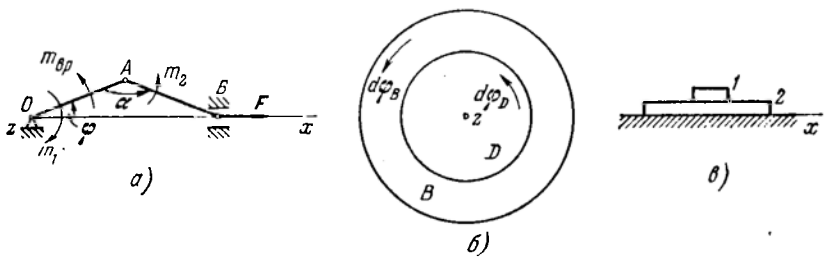
В начальный момент механизм находился в покое, поэтому

$$T_1 = 0. \tag{2}$$

В момент, когда кривошип OA образует с осью x угол φ, кинетическая энергия T_2 выражается формулой (17) задачи 9.87, т. е.

$$T_2 = \frac{r^2\omega^2}{3}\left|M_1 + 3(M_1 + 2M_2)\sin^2\varphi\right|. \tag{3}$$

К механизму приложены внешние силы и моменты: силы тяжести кривошипа, шатуна и ползуна, реакции неподвижной оси O и направляющих ползуна (на рис. *а* не показаны), вращающий момент



К задаче 9.100.

$m_{вр}$, момент сил сопротивления m_1, сила трения F (см. рис. *а*). Помимо внешних сил и моментов, необходимо учесть момент внутренних сил сопротивления m_2, возникающий в подвижном цилиндрическом шарнире A.

Поясним это подробнее на следующем примере. На рис. *б* изображен подвижный цилиндрический шарнир, состоящий из вала D и кольца B, вращающихся вокруг оси z с разными угловыми скоростями. Допустим, что за промежуток времени dt вал D и кольцо B получили угловые перемещения $d\varphi_D$ и $d\varphi_B$, причем $|d\varphi_B| > |d\varphi_D|$.

При соприкосновении боковой поверхности вала D с внутренней боковой поверхностью кольца B возникает момент сил сопротивления m_c. Так как кольцо B вращается быстрее, чем вал D, то оно увлекает за собой вал D с помощью момента сил сопротивления m_c, направленного в сторону вращения вала D. Поэтому элементарная

работа момента m_c, приложенного к валу D, положительна и равна $\delta A_D = m_c\, d\varphi_D$.

На основании закона равенства действия и противодействия к внутренней боковой поверхности кольца B приложен со стороны вала D момент сил сопротивления m_c, тормозящий движение кольца B и направленный в сторону, противоположную вращению кольца. Поэтому элементарная работа момента m_c, приложенного к кольцу B, отрицательна и равна $\delta A_B = -m_c\, d\varphi_B$.

Сумма элементарных работ δA_D и δA_B моментов внутренних сил сопротивления равна $\delta A = \delta A_D + \delta A_B = m_c\,(d\varphi_D - d\varphi_B)$. Учтя, что разность $d\varphi_D - d\varphi_B$ является относительным угловым перемещением $d\varphi_r$ вала D относительно кольца B, имеем $\delta A = m_c\, \delta\varphi_r$. Элементарная работа отрицательна, ибо, по условию, $d\varphi_D - d\varphi_B < 0$.

Итак, при наличии сил трения между телами, входящими в систему, при вычислении суммы работ всех сил необходимо учитывать работу внутренних сил, пользуясь формулой

$$\delta A = m_c\, d\varphi_r, \tag{4}$$

где $d\varphi_r$ — относительное угловое перемещение.

Аналогично при перемещении тела *1* (см. рис. *в*) относительно движущегося тела *2* элементарная работа сил трения $F_{тр}$ вычисляется по формуле

$$\delta A = F_{тр}\, dx_r, \tag{5}$$

где dx_r — относительное перемещение, равное $dx_r = dx_1 - dx_2$. В обоих случаях $d\varphi_r$ и dx_r меньше нуля.

В данной задаче цилиндрический шарнир A соединяет шатун AB с кривошипом OA. Положение шатуна AB относительно кривошипа OA определим с помощью угла α (см. рис. *а*). Из треугольника OAB имеем ($OA = AB$):

$$\alpha = \pi - 2\varphi. \tag{6}$$

Продифференцировав равенство (6) получим

$$d\alpha = -2\, d\varphi, \tag{7}$$

где $d\alpha$ — элементарное угловое перемещение шатуна AB относительно кривошипа OA.

Воспользовавшись формулой (4), запишем элементарную работу моментов внутренних сил сопротивления в подвижном шарнире A:

$$\delta A\ (m_2) = m_2\, d\alpha = -2m_2\, d\varphi. \tag{8}$$

Элементарная работа силы трения F ползуна о его направляющие вычисляется по формуле

$$\delta A\,(F) = F_x\, dx_B. \tag{9}$$

Для определения dx_B запишем зависимость x_B от угла поворота φ. Из треугольника OAB имеем

$$x_B = 2r\cos\varphi. \tag{10}$$

Продифференцировав равенство (10), получим

$$dx_B = -2r \sin \varphi \, d\varphi. \tag{11}$$

Внеся значение (11) dx_B в формулу (9) и учтя, что $F_x = F$, имеем:

$$\delta A(F) = -2Fr \sin \varphi \, d\varphi. \tag{12}$$

Элементарная работа моментов $m_{\text{вр}}$ и m_1, приложенных к кривошипу OA, вычисляется по формулам

$$\delta A(m_{\text{вр}}) = m_{\text{вр}} \, d\varphi, \quad \delta A(m_1) = -m_1 \, d\varphi. \tag{13}$$

Механизм расположен в горизонтальной плоскости. Поэтому работа сил тяжести всех звеньев равна нулю.

Точка приложения реакции оси O неподвижна, а нормальная реакция направляющих ползуна B перпендикулярна к его перемещению. Поэтому элементарная работа этих сил равна нулю.

Для вычисления элементарной работы всех сил, приложенных к механизму, просуммируем результаты, полученные в (8), (12) и (13):

$$\sum \delta A_k = (m_{\text{вр}} - m_1 - 2m_2 - 2Fr \sin \varphi) \, d\varphi. \tag{14}$$

Для определения работы сил на угловом перемещении φ вычислим определенный интеграл от (14) в пределах от нуля до φ. Учтя, что $m_{\text{вр}}$, m_1, m_2 и F постоянны, имеем

$$\sum A_k = (m_{\text{вр}} - m_1 - 2m_2) \varphi + 2Fr (\cos \varphi - 1). \tag{15}$$

Для определения искомой угловой скорости ω кривошипа OA остается внести результаты (2), (3) и (15) в уравнение (1) и решить его относительно ω. Окончательно находим

$$\omega = \frac{1}{r} \sqrt{3 \frac{(m_{\text{вр}} - m_1 - 2m_2) \varphi + 2Fr (\cos \varphi - 1)}{M_1 + 3(M_1 + 2M_2) \sin^2 \varphi}}.$$

Задача 9.101. На наклонной плоскости, расположенной под углом α к горизонту, лежит груз A массы M_1, прикрепленный к концу нити. Нить переброшена через блок B массы M_2 и навернута на ось радиуса r катушки D (см. рисунок). При движении груза по наклонной плоскости вниз, катушка D массы M_3 и радиуса R катится без скольжения по горизонтальной плоскости направо. Радиус инерции катушки D относительно оси, проходящей через ее центр масс перпендикулярно плоскости движения, равен ρ_C. Блок считать сплошным цилиндром. Массой нити пренебречь.

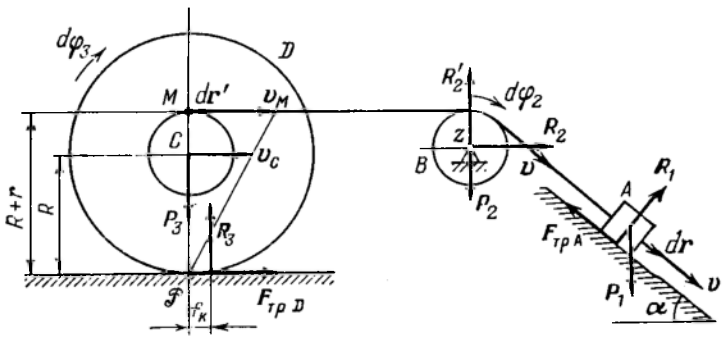
Определить скорость груза A в момент, когда он переместится на s. В начальный момент система находилась в покое. Коэффициент трения качения катушки D о горизонтальную плоскость равен $f_к$. Коэффициент трения скольжения груза A о наклонную плоскость равен f.

Р е ш е н и е. В состав системы входят твердые тела: груз A, блок B и катушка D, а нить при движении натянута. Поэтому сумма

работ внутренних сил равна нулю и можно применить теорему об изменении кинетической энергии неизменяемой материальной системы:

$$T_2 - T_1 = \sum_{k=1}^{n} A(F_k^e). \qquad (1)$$

Изобразим на рисунке внешние силы системы: P_1 — сила тяжести груза A, R_1 — нормальная реакция наклонной плоскости, $F_{тр\,A}$ — сила трения скольжения груза A о наклонную плоскость, P_2 — сила тяжести блока B, R_2 и R_2' — составляющие реакции оси блока,



К задаче 9.101.

P_3 — сила тяжести катушки D, $F_{тр\,D}$ — сила трения при качении катушки по горизонтальной плоскости, R_3 — нормальная реакция горизонтальной плоскости, смещенная в сторону движения катушки D, т. е. направо, на расстояние $f_к$ от ее центра тяжести C.

Дадим элементарное перемещение dr грузу A вдоль наклонной плоскости вниз. При этом блок B повернется по ходу часовой стрелки на $d\varphi_2$, а катушка D — вокруг мгновенного центра скоростей $\mathcal{P}$ на $d\varphi_3$. Элементарное перемещение точки M схода нити с катушки равно dr', причем в связи с нерастяжимостью нити $|dr'| = |dr|$. Рассматривая перемещение dr по отношению к мгновенному центру скоростей $\mathcal{P}$, запишем $dr' = dr = (R + r)\,d\varphi_3$, отсюда

$$d\varphi_3 = \frac{dr}{R + r}. \qquad (2)$$

Вычислим сумму элементарных работ всех внешних сил системы:

$$\sum \delta A(F_k^e) = \delta A^{(A)} + \delta A^{(B)} + \delta A^{(D)}, \qquad (3)$$

где $\delta A^{(A)}$, $\delta A^{(B)}$ и $\delta A^{(D)}$ обозначают соответственно суммы элементарных работ внешних сил, приложенных к грузу A, блоку B и катушке D. Найдем

$$\delta A^{(A)} = \delta A(P_1) + \delta A(R_1) + \delta A(F_{тр\,A}). \qquad (4)$$

Вычислим

$$\delta A(\boldsymbol{P}_1) = M_1 g\, dr_1 \sin\alpha, \quad \delta A(\boldsymbol{R}_1) = \boldsymbol{R}_1 \cdot d\boldsymbol{r}_1 = 0,$$
$$\delta A(\boldsymbol{F}_{\text{тр}\,A}) = -F_{\text{тр}\,A}\, dr = -fM_1 gr\cos\alpha. \tag{5}$$

Приняв во внимание результаты (5), запишем формулу (4) в виде

$$\delta A^{(A)} = M_1 g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\, dr. \tag{6}$$

Блок B вращается вокруг неподвижной оси. Поэтому $\delta A^{(B)}$ следует вычислить по формуле

$$\delta A^{(B)} = m_z\, d\varphi, \tag{7}$$

где главный момент

$$m_z = m_z(\boldsymbol{P}_2) + m_z(\boldsymbol{R}_2) + m_z(\boldsymbol{R}_2') = 0, \tag{8}$$

ибо линии действия сил $\boldsymbol{P}_2$, $\boldsymbol{R}_2$ и $\boldsymbol{R}_2'$ пересекают ось z. На основании результата (8) формула (7) примет вид

$$\delta A^{(B)} = 0. \tag{9}$$

Катушка D совершает плоскопараллельное движение. Поэтому $\delta A^{(D)}$ следует вычислить по формуле: $\delta A = \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{r}_O + m_{zO}\, d\varphi$. Целесообразно принять за полюс мгновенный центр скоростей $\mathscr{P}$. Тогда

$$\delta A^{(D)} = \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{r}_{\mathscr{P}} + m_{z\mathscr{P}}\, d\varphi_3, \tag{10}$$

где $z_{\mathscr{P}}$ — ось, проходящая через точку $\mathscr{P}$ перпендикулярно плоскости рисунка от нас.

Так как $\boldsymbol{v}_{\mathscr{P}} = d\boldsymbol{r}_{\mathscr{P}}/dt$, то $d\boldsymbol{r}_{\mathscr{P}} = \boldsymbol{v}_{\mathscr{P}}\, dt = 0$, ибо $\boldsymbol{v}_{\mathscr{P}} = 0$. Поэтому формула (10) примет вид

$$\delta A^{(D)} = m_{z\mathscr{P}}\, d\varphi_3, \tag{11}$$

где главный момент

$$m_{z\mathscr{P}} = m_{z\mathscr{P}}(\boldsymbol{P}_3) + m_{z\mathscr{P}}(\boldsymbol{F}_{\text{тр}\,D}) + m_{z\mathscr{P}}(\boldsymbol{R}_3). \tag{12}$$

Линии действия сил $\boldsymbol{P}_3$ и $\boldsymbol{F}_{\text{тр}\,D}$ пересекают ось $z_{\mathscr{P}}$, поэтому

$$m_{z\mathscr{P}}(\boldsymbol{P}_3) + m_{z\mathscr{P}}(\boldsymbol{F}_{\text{тр}\,D}) = 0. \tag{13}$$

Далее,

$$m_{z\mathscr{P}}(\boldsymbol{R}_3) = -R_3 f_{\text{к}} = -M_3 g f_{\text{к}}. \tag{14}$$

Внеся результаты (13) и (14) в формулу (12), а затем (12) в выражение (11) и приняв во внимание соотношение (2), получим

$$\delta A^{(D)} = -\frac{f_{\text{к}}}{R+r} M_3 g\, dr. \tag{15}$$

Теперь для получения суммы элементарных работ внешних сил используем выражения (6), (9) и (15) в формуле (3):

$$\sum \delta A(F_k^e) = \left[M_1(\sin\alpha - f\cos\alpha) - \frac{f_к}{R+r} M_3 \right] g\, dr. \qquad (16)$$

Вычислив интеграл от (16) в пределах от O до s, получим сумму работ внешних сил системы на конечном перемещении s:

$$\sum A(F_k^e) = \left[M_1(\sin\alpha - , \cos\alpha) - \frac{f_к}{R+r} M_3 \right] gs. \qquad (17)$$

Перейдем к вычислению кинетической энергии материальной системы. В начальный момент система находилась в покое, поэтому

$$T_1 = 0. \qquad (18)$$

Данная материальная система состоит из трех тел: груза A, блока B и катушки D. Поэтому кинетическая энергия T_2 в конечный момент равна сумме кинетических энергий:

$$T_2 = T^{(A)} + T^{(B)} + T^{(D)}. \qquad (19)$$

Груз A движется поступательно; поэтому

$$T^{(A)} = \frac{1}{2} M_1 v^2, \qquad (20)$$

где v — модуль скорости груза.

Кинетическая энергия блока B, вращающегося вокруг неподвижной оси, вычисляется по формуле $T = {}^1/_2 I_z \omega^2$. Так как по условию блок рассматривается как сплошной однородный цилиндр, то $I_z = {}^1/_2 M_2 r_2^2$, где r_2 обозначает радиус блока. Поэтому $T^{(B)} = {}^1/_4 M_2 r_2^2 \omega_2^2$. Приняв во внимание, что скорость точки на ободе блока равна скорости груза, запишем: $r_2\omega_2 = v$. Поэтому окончательно

$$T^{(B)} = \frac{1}{4} M_2 v^2. \qquad (21)$$

Кинетическая энергия катушки D, совершающей плоскопараллельное движение, вычисляется по формуле

$$T = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} I_{zC} \omega^2.$$

В данном случае

$$T^{(D)} = \frac{1}{2} M_3 v_C^2 + \frac{1}{2} I_{zC} \omega_3^2. \qquad (22)$$

При качении катушки без скольжения мгновенный центр скоростей $\mathscr{P}$ расположен в точке касания катушки с горизонтальной плоскостью. Из подобия треугольников (см. рисунок) имеем $v_C/v_M =$

$= R/(R + r)$. Заметив, что модули скоростей точки M схода нити с катушки D и груза A равны между собой, т. е. $v_M = v$, из пропорции найдем

$$v_G = \frac{R}{R+r} v. \tag{23}$$

Для определения ω_3 — угловой скорости катушки D рассмотрим скорость $\boldsymbol{v}_M$ точки M при мгновенном вращении катушки вокруг точки $\mathcal{P}$. Имеем: $v_M = v = M\mathcal{P} \cdot \omega_3 = (R + r)\,\omega_3$, откуда

$$\omega_3 = \frac{v}{R+r}. \tag{24}$$

Внеся в формулу (22) результаты (23), (24) и учтя, что $I_{zC} = M_3\rho_C^2$, найдем

$$T^{(D)} = \frac{M_3}{2} \frac{R^2 + \rho_C^2}{(R+r)^2} v^2. \tag{25}$$

Подставив значения (20), (21) и (25) в формулу (19), найдем кинетическую энергию материальной системы T_2 в конечный момент времени:

$$T_2 = \frac{v^2}{4}\left[2M_1 + M_2 + 2M_3 \frac{R^2 + \rho_C^2}{(R+r)^2}\right]. \tag{26}$$

Для определения модуля искомой скорости груза A надо выражения (18), (26) и (17) внести в формулу (1). Решив это уравнение относительно v, получим

$$v = 2\sqrt{\frac{s\,(R+r)\,[M_1(\sin\alpha - f\cos\alpha)\,(R+r) - f_к M_3]}{(2M_1 + M_2)\,(R+r)^2 + 2M_3\left(R^2 + \rho_C^2\right)}}. \tag{27}$$

Движение груза A по наклонной плоскости вниз и, значит, катушки D направо имеет место при условии, если выражение в квадратных скобках в формуле (27) положительно, т. е. $M_1(\sin\alpha - f\cos\alpha)(R + r) > f_к M_3$. Если же $M_1(\sin\alpha - f\cos\alpha)(R + r) = f_к M_3$, то $v = 0$, т. е. система находится в покое.

Задача 9.102. Грузы A и B приводятся в движение посредством двух блоков: подвижного K и неподвижного L (см. рис. *а*). В результате толчка, сообщенного грузу A, он начал опускаться со скоростью v_0.

На какое расстояние должен опуститься груз A для того, чтобы его скорость увеличилась в два раза? Грузы A и B одинаковой массы M_1. Блоки K и L считать однородными круглыми дисками одинаковой массы M_2. Коэффициент трения скольжения груза B о горизонтальную плоскость равен f. Массой нити пренебречь.

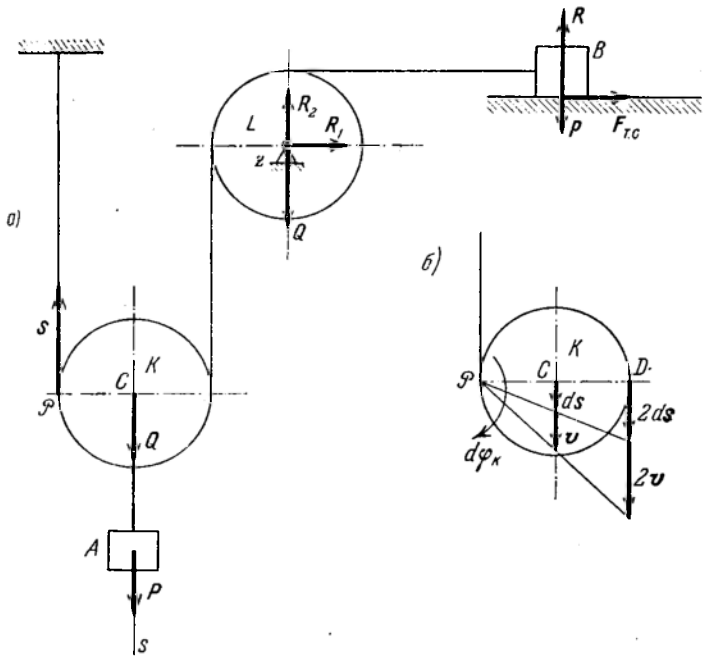
Р е ш е н и е. Направим ось s через центр масс C подвижного блока K по вертикали вниз. Соответственно с направлением движения считаем положительным направление угла поворота блока K по ходу

часовой стрелки, а блока L — против хода часовой стрелки. Радиусы блоков обозначим r.

Запишем теорему об изменении кинетической энергии в интегральной форме:

$$T_2 - T_1 = \sum_{k=1}^{n} A(F_k^e) + \sum_{k=1}^{n} A(F_k^i). \qquad (1)$$

Так как нить, охватывающая блоки K и L и приводящая в движение груз B, не растягивается и при движении системы находится



К задаче 9.102.

в натянутом состоянии, то сумма работ внутренних сил системы равна нулю. Поэтому уравнение (1) принимает вид

$$T_2 - T_1 = \sum_{k=1}^{n} A(F_k^e). \qquad (2)$$

Изобразим внешние силы системы: силы тяжести грузов A и B ($\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_A = \boldsymbol{P}_B = M_1\boldsymbol{g}$) и блоков K и L ($\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}_K = \boldsymbol{Q}_L = M_2\boldsymbol{g}$), $\boldsymbol{R}$ — нормальную реакцию горизонтальной плоскости, $\boldsymbol{F}_{т.с}$ — силу трения скольжения груза B о горизонтальную плоскость, $\boldsymbol{R}_1$ и $\boldsymbol{R}_2$ — составляющие реакции оси блока L, $\boldsymbol{S}$ — реакцию нити.

Дадим элементарное перемещение ds центру масс C блока K по вертикали вниз. При этом блок K получит угловое перемещение по

ходу часовой стрелки. Учитывая, что блок K, осуществляющий плоское движение, имеет мгновенный центр скоростей $\mathscr{P}$ в точке касания обода блока с левой ветвью нити, находим перемещение точки обода D, равное $2ds$ (см. рис. *б*). Следовательно, элементарное перемещение груза B направлено по горизонтали налево и равно $2ds$, а угловое перемещение блока L направлено против хода часовой стрелки.

Вычислим элементарную работу всех внешних сил системы:

$$\delta A = \sum \delta A(\boldsymbol{F}_k^e) = \delta A(\boldsymbol{P}_A) + \delta A(\boldsymbol{Q}_K) + \delta A(\boldsymbol{Q}_L) + \delta_A(\boldsymbol{P}_B) + \\ + \delta A(\boldsymbol{R}) + \delta A(\boldsymbol{S}) + \delta A(\boldsymbol{R}_1) + \delta A(\boldsymbol{R}_2) + \delta A(\boldsymbol{F}_{\text{т. с}}). \quad (3)$$

Находим:

$$\delta A(\boldsymbol{P}_A) = M_1 g\, ds, \quad (4)$$

$$\delta A(\boldsymbol{Q}_K) = M_2 g\, ds, \quad (5)$$

$$\delta A(\boldsymbol{Q}_L) = 0 \quad (6)$$

(точка приложения силы $\boldsymbol{Q}_L$ неподвижна),

$$\delta A(\boldsymbol{P}_B) = 0 \quad (7)$$

(груз B перемещается по горизонтали),

$$\delta A(\boldsymbol{S}) = 0 \quad (8)$$

(реакция нити $\boldsymbol{S}$ всегда приложена в мгновенном центре скоростей $\mathscr{P}$),

$$\delta A(\boldsymbol{R}) = 0 \quad (9)$$

(нормальная реакция $\boldsymbol{R}$ перпендикулярна к элементарному перемещению груза B),

$$\delta A(\boldsymbol{R}_1) = \delta A(\boldsymbol{R}_2) = 0 \quad (10)$$

(точка приложения сил $\boldsymbol{R}_1$ и $\boldsymbol{R}_2$ неподвижна),

$$\delta A(\boldsymbol{F}_{\text{т. с}}) = -F_{\text{т. с}}\, dr_B.$$

Так как перемещение груза dr_B, направленное налево, равно $2ds$, а $F_{\text{т. с}} = fM_1 g$, то

$$\delta A(\boldsymbol{F}_{\text{т. с}}) = -2fM_1 g\, ds. \quad (11)$$

После подстановки выражений (4)—(11) в формулу (3) находим

$$\delta A = \sum \delta A(\boldsymbol{F}_k^e) = g[M_2 + M_1(1 - 2f)]\, ds. \quad (12)$$

Для вычисления суммы работ на искомом перемещении груза A, равном s, следует, воспользовавшись формулой (12), взять определенный интеграл в пределах от 0 до s. Тогда будем иметь

$$\sum A(\boldsymbol{F}_k^e) = [M_2 + M_1(1 - 2f)]\, gs. \quad (13)$$

Переходим к вычислению кинетической энергии системы, в состав которой входят массы двух грузов и двух блоков. Запишем

$$T = T_A + T_B + T_K + T_L. \tag{14}$$

Обозначим через v скорость груза A. Тогда $v_C = v$. Учитывая, что мгновенный центр скоростей блока K находится в точке $\mathcal{P}$, получим $v_D = 2v$ (см. рис. *б*). Так как нить нерастяжима, то скорость груза B равна скорости точки D, т. е. $v_B = 2v$. Мгновенная угловая скорость блока K: $\omega_K = v_C/r = v/r$, угловая скорость блока L: $\omega_L = v_B/r = 2v/r$ (скорость точки на ободе блока L равна скорости груза B).

Грузы A и B движутся поступательно, поэтому

$$T_A = \frac{1}{2} M_1 v^2, \tag{15}$$

$$T_B = \frac{1}{2} M_1 v_B^2 = 2M_1 v^2. \tag{16}$$

Блок K совершает плоское движение, т. е.

$$T_K = \frac{1}{2} M_2 v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega_K^2,$$

где $I_C = M_2 r^2/2$, $\omega_K = v/r$. Поэтому

$$T_K = \frac{3}{4} M_2 v^2. \tag{17}$$

Блок L вращается вокруг неподвижной оси, т. е.

$$T_L = \frac{1}{2} I_z \omega_L^2,$$

где $I_z = M_2 r^2/2$, $\omega_L = 2v/r$. Следовательно,

$$T_L = M_2 v^2. \tag{18}$$

Подставив выражения (15)—(18) в формулу (14), находим кинетическую энергию системы:

$$T = \frac{v^2}{4}(10M_1 + 7M_2). \tag{19}$$

Согласно условию задачи скорость груза A в начальном положении системы равнялась v_0, т. е.

$$T_1 = \frac{v_0^2}{4}(10M_1 + 7M_2). \tag{20}$$

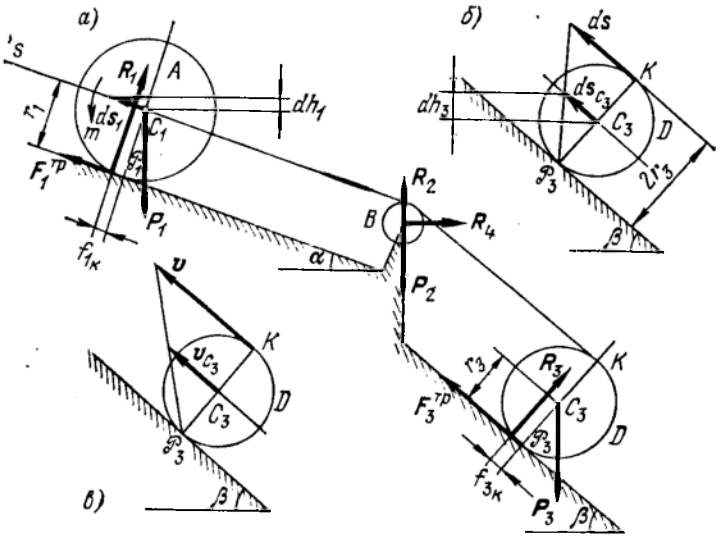
В конечном положении системы скорость груза A удвоилась, следовательно,

$$T_2 = v_0^2(10M_1 + 7M_2). \tag{21}$$

Подставив формулы (13), (20) и (21) в уравнение (2), решив это уравнение относительно s, определим искомое перемещение груза A:

$$s = \frac{3v_0^2 (10M_1 + 7M_2)}{4 [M_2 + M_1 (1 - 2f)]}.$$

Задача 9.103. К оси C_1 катка A массы M_1 и радиуса r_1 привязан конец однородной нерастяжимой нити, переброшенной через блок B массы M_2 и намотанной на цилиндр D массы M_3 и радиуса r_3 (см.



К задаче 9.103.

рис. *а*). Под действием вращающего момента, пропорционального углу поворота катка, $m = a\varphi$, где a — постоянная, каток A, катясь без скольжения, поднимается по наклонной плоскости, расположенной под углом α к горизонту, и посредством нити приводит в движение цилиндр D, который, катясь без скольжения, поднимается вверх по наклонной плоскости, расположенной под углом β к горизонту. Коэффициент трения качения катка A о наклонную плоскость равен $f_{1к}$, коэффициент трения качения цилиндра D с намотанной на него нитью о наклонную плоскость равен $f_{3к}$.

Определить скорость оси C_1 катка A в положении системы, при котором ось C_1 переместится параллельно линии наибольшего ската наклонной плоскости на расстояние s. В начальном положении система находилась в покое. Каток A, блок B и цилиндр D считать сплошными однородными цилиндрами. Массой нити пренебречь.

Р е ш е н и е. Направим ось s через центр масс C_1 катка A параллельно линии наибольшего ската верхней наклонной плоскости.

В соответствии с положительным направлением оси s, углы поворота катка A, блока B и цилиндра D, соответственно равные φ_1, φ_2, φ_3, имеют положительное направление отсчета против хода часовой стрелки.

Задачу решаем с помощью теоремы об изменении кинетической энергии неизменяемой материальной системы (нить при движении системы натягивается):

$$T_2 - T_1 = \sum_{k=1}^{n} A(F_k^e). \tag{1}$$

Изобразим внешние силы системы: $P_1 = M_1 g$ — сила тяжести катка A, $P_2 = M_2 g$ — сила тяжести блока; $P_3 = M_3 g$ — сила тяжести цилиндра D; m — вращающий момент, приложенный к катку A; R_1 и R_3 — нормальные реакции наклонных плоскостей, смещенные в сторону движения относительно центров масс C_1 и C_3 соответственно катка A и цилиндра D; R_2 и R_4 — составляющие реакции оси блока B; $F_1^{тр}$ — сила трения катка A о наклонную плоскость, направленная в сторону движения; $F_3^{тр}$ — сила трения скольжения нити, намотанной на цилиндр, о наклонную плоскость, направленная в сторону движения.

Дадим элементарное перемещение ds центру масс C_1 катка A параллельно наклонной плоскости вверх. Ввиду нерастяжимости нити точка обода блока B и точка K нити, намотанной на обод цилиндра D, также получают перемещение ds. Следовательно, $ds = r_1 d\varphi_1 = r_2 d\varphi_2 = 2r_3 d\varphi_3$, где $d\varphi_1$, $d\varphi_2$ и $d\varphi_3$ — элементарные угловые перемещения соответственно катка A, блока B и цилиндра D.

Перемещение ds точки K цилиндра D следует рассматривать по отношению к мгновенному центру $\mathscr{P}_3$ цилиндра. Как видно из рис. *б*, перемещение центра масс C_3 цилиндра D в два раза меньше перемещения точки K, т. е. $ds_{C_3} = ds/2$. Поэтому

$$ds = r_1 d\varphi_1 = r_2 d\varphi_2 = 2r_3 d\varphi_3 = 2 ds_{C_3}. \tag{2}$$

Вычислим элементарную работу всех внешних сил системы:

$$\delta A = \delta A(P_1) + \delta A(P_2) + \delta A(P_3) + \delta A(R_1) + \delta A(R_3) + \\ + \delta A(R_2) + \delta A(R_4) + \delta A(m) + \delta A(F_1^{тр}) + \delta A(F_3^{тр}). \tag{3}$$

Имеем

$$\delta A(P_1) = -P_1 dh_1 = -P_1 ds \sin\alpha, \tag{4}$$

$$\delta A(P_2) = 0 \tag{5}$$

(точка приложения силы тяжести P_2 неподвижна),

$$\delta A(P_3) = -P_3 dh_3 = -P_3 ds_{C_3} \sin\beta.$$

Поэтому на основании формулы (2) получаем

$$\delta A(P_3) = -\frac{P_3 ds \sin\beta}{2}. \tag{6}$$

Далее,

$$\delta A(\boldsymbol{R}_1) = -R_1 f_{1к}\, d\varphi_1.$$

Так как $R_1 = P_1 \cos\alpha$, то, воспользовавшись формулой (2), находим

$$\delta A(\boldsymbol{R}_1) = -P_1 \frac{f_{1к}}{r_1} \cos\alpha\, ds. \tag{7}$$

Затем

$$\delta A(\boldsymbol{R}_3) = -R_3 f_{3к} \delta\varphi_3.$$

Заметив, что $R_3 = P_3 \cos\beta$ и использовав формулу (2), получаем

$$\delta A(\boldsymbol{R}_3) = -P_3 \frac{f_{3к}}{2r_3} \cos\beta\, ds. \tag{8}$$

Далее,

$$\delta A(\boldsymbol{R}_2) = \delta A(\boldsymbol{R}_4) = 0 \tag{9}$$

(точка приложения сил $\boldsymbol{R}_2$ и $\boldsymbol{R}_4$ неподвижна).

Наконец, имеем

$$\delta A\ (m) = m\, d\varphi.$$

Так как $m = a\varphi_1$, то, вновь воспользовавшись формулой (2), запишем

$$\delta A(m) = \frac{a\varphi_1}{r_1}\, ds. \tag{10}$$

Затем

$$\delta A(\boldsymbol{F}_1^{тр}) = \delta A(\boldsymbol{F}_3^{тр}) = 0. \tag{11}$$

(Каток A и цилиндр D катятся без скольжения.)

Подставив (4)—(11) в формулу (3), находим выражение элементарной работы внешних сил системы:

$$\delta A = \left[\frac{a}{r_1}\varphi_1 - P_1\left(\sin\alpha + \frac{f_{1к}}{r_1}\cos\alpha\right) - \frac{P_3}{2}\left(\sin\beta + \frac{f_{3к}}{r_3}\cos\beta\right)\right] ds. \tag{12}$$

Для вычисления суммы работ внешних сил системы на конечном перемещении s остается, воспользовавшись формулой (12), взять определенный интеграл от выражения (12) в пределах от 0 до s. При этом $r_1\varphi_1 = s$. Произведя интегрирование, получим

$$A = \frac{1}{2}\left[\frac{as}{r_1^2} - 2M_1 g\left(\sin\alpha + \frac{f_{1к}}{r_1}\cos\alpha\right) - M_3 g\left(\sin\beta + \frac{f_{3к}}{r_3}\cos\beta\right)\right] s. \tag{13}$$

Переходим к вычислению кинетической энергии данной системы, состоящей из трех масс (катка A, блока B и цилиндра D):

$$T = T_A + T_B + T_D.$$

В начальном положении система находилась в покое, т. е.

$$T_1 = 0. \tag{14}$$

Кинетическая энергия в конечном положении

$$T_2 = T_{2A} + T_{2B} + T_{2D}. \tag{15}$$

Обозначим через v искомую скорость точки C_1. Так как нить не растягивается, то скорость оси C_1 равна скорости точки на ободе блока B и скорости точки K на ободе цилиндра D, т. е.

$$v = r_1\omega_1 = r_2\omega_2 = 2r_3\omega_3 = 2v_{C_3}, \tag{16}$$

где ω_1, ω_2 и ω_3 — угловые скорости соответственно катка A, блока B и цилиндра D. (Скорость $\boldsymbol{v}$ точки K цилиндра D следует рассматривать по отношению к мгновенному центру $\mathcal{P}_3$ цилиндра. Как видно из рис. *в*, скорость центра масс C_3 цилиндра D в два раза меньше скорости точки K.)

Кинетическая энергия катка A, совершающего плоское движение, вычисляется по формуле

$$T_{2A} = \frac{1}{2} M_1 v_{C_1}^2 + \frac{1}{2} I_{C_1}\omega_1^2.$$

Учитывая, что $v_{C_1} = v$, $I_{C_1} = M_1 r_1^2/2$, $\omega_1 = v/r_1$, находим

$$T_{2A} = \frac{3}{4} M_1 v^2. \tag{17}$$

Кинетическая энергия блока B, вращающегося вокруг неподвижной оси, будет

$$T_{2B} = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2,$$

где $I_2 = M_2 r_2^2/2$, $\omega_2 = v/r_2$ (см. формулу (16)). Следовательно,

$$T_{2B} = \frac{1}{4} M_2 v^2. \tag{18}$$

Кинетическая энергия цилиндра D, совершающего плоское движение, вычисляется по формуле

$$T_{2D} = \frac{1}{2} M_3 v_{C_3}^2 + \frac{1}{2} I_{C_3}\omega_3^2,$$

где $v_{C_3} = v/2$, $I_{C_3} = M_3 r_3^2/2$, $\omega_3 = v/(2r_3)$ (см. формулу (16)). Следовательно,

$$T_{2D} = \frac{3}{16} M_3 v^2. \tag{19}$$

Внося (17), (18) и (19) в формулу (15), находим выражение кинетической энергии системы в ее конечном положении:

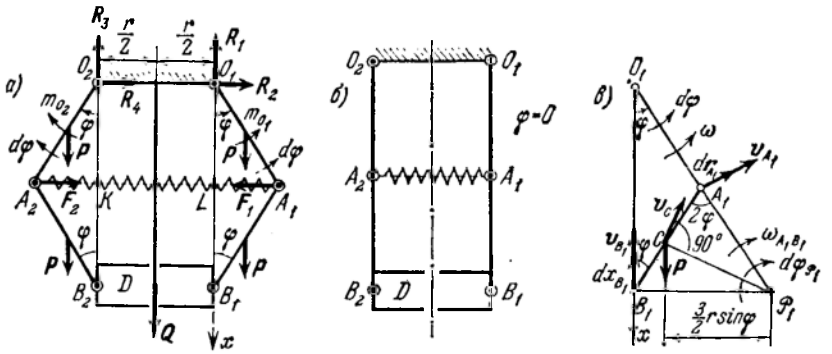
$$T_2 = \frac{v^2}{16}(12M_1 + 4M_2 + 3M_3). \tag{20}$$

Остается подставить (13), (14) и (20) в уравнение (1) и определить искомую скорость v центра масс C_1 катка A:

$$v = 2\sqrt{2s\,\frac{\frac{as}{r_1^2} - 2M_1 g\left(\sin\alpha + \frac{f_{1к}}{r_1}\cos\alpha\right) - M_3 g\left(\sin\beta + \frac{f_{3к}}{r_3}\cos\beta\right)}{12M_1 + 4M_2 + 3M_3}}.$$

Движение возможно, если подкоренное выражение положительно.

Задача 9.104. На рис. *а* изображен узел автоматического устройства, состоящий из двух спаренных кривошипно-шатунных механизмов $O_1A_1B_1$ и $O_2A_2B_2$, имеющих общий ползун D массы M_1, который



К задаче 9.104.

движется в вертикальных направляющих. Кривошипы O_1A_1 и O_2A_2 и шатуны A_1B_1 и A_2B_2 одинаковой массы M_2 и длины r. Оси кривошипов O_1 и O_2, перпендикулярные к плоскости рисунка, отстоят от вертикальной оси симметрии механизма на расстоянии $r/2$. Для придания механизму упругости концы кривошипов A_1 и A_2 соединены между собой пружиной, коэффициент жесткости которой равен c. В начальном положении механизма кривошипы и шатуны были расположены вертикально, а пружина не деформирована (см. рис. *б*). Под действием постоянных вращающих моментов m кривошипы отклоняются от своих вертикальных положений, поднимая ползун D.

Определить угловую скорость вращения кривошипов O_1A_1 и O_2A_2 в положении механизма, когда кривошипы отклонены от вертикали на угол φ. В начальном положении механизм находился в покое. Кривошипы и шатуны считать однородными тонкими стержнями. Массой пружины пренебречь.

Р е ш е н и е. Направим ось x из точки O_1 по вертикали вниз. Положительное направление отсчета угла φ: для правого кривошипа — против часовой стрелки, для левого кривошипа — по часовой стрелке.

Запишем теорему об изменении кинетической энергии в интегральной форме:

$$T_2 - T_1 = \sum_{k=1}^{n} A(F_k^e) + \sum_{k=1}^{n} A(F_k^i). \tag{1}$$

При вычислении суммы работ сил надо учесть не только внешние силы (силы тяжести двух кривошипов и двух шатунов ($P = M_2 g$) и ползуна D ($Q = M_1 g$) составляющие реакций осей кривошипов R_1, R_2, R_3, R_4, вращающие моменты m_{O_1} и m_{O_2}, которые приложены к кривошипам), но и внутренние силы упругости F_1 и F_2 пружины (прочие внутренние силы можно не учитывать, так как кривошипы и шатуны являются абсолютно твердыми телами, и, следовательно, сумма работ соответствующих внутренних сил равна нулю). Все указанные выше силы изображены на рис. *а*.

Дадим элементарные угловые перемещения $d\varphi$ кривошипам O_1A_1 и O_2A_2 в положительных направлениях отсчета углов φ и вычислим сумму элементарных работ внешних и внутренних сил системы на этих перемещениях:

$$\delta A = \sum \delta A(F_k^e) + \sum \delta A(F_k^i) =$$
$$= \delta A(P_{O_1A_1}) + \delta A(P_{O_2A_2}) + \delta A(P_{A_1B_1}) + \delta A(P_{A_2B_2}) + \delta A(Q) +$$
$$+ \delta A(R_1) + \delta A(R_2) + \delta A(R_3) + \delta A(R_4) + \delta A(m_{O_1}) +$$
$$+ \delta A(m_{O_2}) + \delta A(F_1) + \delta A(F_2).$$

При учете симметрии механизма и системы приложенных сил относительно вертикальной оси выражение элементарной работы упрощается:

$$\delta A = \sum \delta A(F_k^e) + \sum \delta A(F_k^i) = 2\delta A(P_{O_1A_1}) + 2\delta A(P_{A_1B_1}) +$$
$$+ \delta A(Q) + 2\delta A(R_1) + 2\delta A(R_2) + 2\delta A(m) + 2\delta A(F). \tag{2}$$

Кривошип O_1A_1 вращается вокруг неподвижной оси O_1, перпендикулярной к плоскости рисунка. Поэтому

$$\delta A(P_{O_1A_1}) = -m_{O_1}(P_{O_1A_1})\, d\varphi.$$

Работа отрицательна, так как направления момента силы и углового перемещения $d\varphi$ противоположны. Учитывая, что $m_{O_1}(P_{O_1A_1}) = P\frac{r}{2}\sin\varphi$, находим

$$\delta A(P_{O_1A_1}) = -P\frac{r}{2}\sin\varphi\, d\varphi. \tag{3}$$

Шатун A_1B_1 совершает плоское движение. Мгновенный центр скоростей $\mathscr{P}_1$ находится в точке пересечения перпендикуляров, восставленных из точек A_1 и B_1 к скоростям v_A, и v_B, (см. рис. *в*). Так как $O_1A_1 = A\mathscr{P}_1 = r$, то $dr_{A_1} = O_1A_1 d\varphi = A_1\mathscr{P}_1 d\varphi_{\mathscr{P}_1}$ и, следо-

вательно, $d\varphi_{\mathscr{P}_1} = d\varphi$, причем $d\varphi_{\mathscr{P}_1}$ направлено по ходу часовой стрелки. Далее,

$$\delta A(\boldsymbol{P}_{A_1B_1}) = -m_{\mathscr{P}_1}(\boldsymbol{P}_{A_1B_1})\, d\varphi_{\mathscr{P}_1}.$$

Работа отрицательна, так как направления момента силы $\boldsymbol{P}_{A_1B_1}$ и углового перемещения $d\varphi_{\mathscr{P}_1}$ противоположны. Учитывая, что $m_{\mathscr{P}_1}(\boldsymbol{P}_{A_1B_1}) = P\frac{3}{2}r\sin\varphi$, находим

$$\delta A(\boldsymbol{P}_{A_1B_1}) = -\frac{3}{2}Pr\sin\varphi\, d\varphi. \tag{4}$$

Вычислим элементарную работу силы тяжести $\boldsymbol{Q}$ ползуна D:

$$\delta A(\boldsymbol{Q}) = Q\, dx_{B_1}.$$

Определим dx_{B_1} из пропорции

$$\frac{|dx_{B_1}|}{|dr_{A_1}|} = \frac{B_1\mathscr{P}_1}{A_1\mathscr{P}_1}, \quad \text{т. е.} \quad |dx_{B_1}| = |dr_{A_1}|\,\frac{B_1\mathscr{P}_1}{A_1\mathscr{P}_1}.$$

Учитывая, что $dr_{A_1} = O_1A_1\, d\varphi = r\, d\varphi$, $B_1\mathscr{P}_1 = 2r\sin\varphi$, $A_1\mathscr{P}_1 = r$, находим: $dx_{B_1} = -2r\sin\varphi\, d\varphi$, так как элементарное перемещение dx_{B_1} при $\sin\varphi\, d\varphi > 0$ направлено вверх. Теперь получим

$$\delta A(\boldsymbol{Q}) = Q\, dx_{B_1} = -2Qr\sin\varphi\, d\varphi. \tag{5}$$

Мы определили dx_{B_1}, воспользовавшись мгновенным центром скоростей $\mathscr{P}_1$, который ввели выше. Если бы в условии данной задачи было указано, что массой шатунов можно пренебречь, то нам не пришлось бы вычислять работу силы $\boldsymbol{P}_{A_1B_1}$ и, следовательно, определять положение мгновенного центра скоростей $\mathscr{P}_1$ шатуна. В этом случае элементарное перемещение точки B_1 и, следовательно, ползуна D можно было бы определить так: 1) записать зависимость между координатами x_{B_1} и φ и 2) продифференцировать этот результат. Действительно, из треугольника $O_1A_1B_1$ находим: $x_{B_1} = O_1B_1 = 2r\cos\varphi$, откуда $dx_{B_1} = -2r\sin\varphi\, d\varphi$, где знак минус указывает, что элементарное перемещение точки B направлено вверх (при $\sin\varphi\, d\varphi > 0$). В данной задаче второй вариант определения dx_{B_1} оказался проще благодаря тому, что удалось легко записать аналитическую зависимость между x_{B_1} и φ.

Точки приложения опорных реакций $\boldsymbol{R}_1$ и $\boldsymbol{R}_2$ при угловом перемещении $d\varphi$ неподвижны, следовательно,

$$\delta A(\boldsymbol{R}_1) = \delta A(\boldsymbol{R}_2) = 0. \tag{6}$$

Вращающий момент m приложен к кривошипу O_1A_1, получившему элементарное угловое перемещение $d\varphi$, поэтому

$$\delta A(m) = m\, d\varphi. \tag{7}$$

Так как внутренняя сила упругости пружины $\boldsymbol{F}_1$ приложена к концу A_1 кривошипа O_1A_1, то

$$\delta A\ (\boldsymbol{F}_1) = -m_{O_1}\ (\boldsymbol{F}_1)\ d\varphi. \tag{8}$$

Работа отрицательна, так как направления момента силы и углового перемещения $d\varphi$ противоположны.

В положении механизма (см. рис. *а*, когда его кривошипы отклонены от вертикали на угол φ, пружина растянута на

$$\Delta = A_2K + LA_1 = 2LA_1 = 2r \sin \varphi.$$

Так как сила упругости пропорциональна деформации пружины, то

$$F_1 = c\Delta = 2rc \sin \varphi.$$

Момент силы упругости $\boldsymbol{F}$ относительно точки O_1 равен $m_{O_1}\ (\boldsymbol{F}_1) = F_1 \cdot O_1L$, где $O_1L = r \cos \varphi$, т. е.

$$m_{O_1}\ (\boldsymbol{F}_1) = F_1 r \cos \varphi = 2cr^2 \sin \varphi \cos \varphi. \tag{9}$$

Внося (9) в формулу (8), находим

$$\delta A\ (\boldsymbol{F}_1) = -cr^2 \sin 2\varphi\ d\varphi. \tag{10}$$

После подстановки выражений (3)—(7) и (10) в формулу (2) получим (с учетом равенств $Q = M_1g$, $P = M_2g$)

$$\delta A = \sum \delta A\ (\boldsymbol{F}_k^e) + \sum \delta A\ (\boldsymbol{F}_k^i) = -M_2gr \sin \varphi\ d\varphi - 3M_2gr \sin \varphi\ d\varphi - M_1gr \sin \varphi\ d\varphi + 2m\ d\varphi - 2cr^2 \sin 2\varphi\ d\varphi =$$
$$= 2\ [m - (M_1g + 2M_2g)\ r \sin \varphi - cr^2 \sin 2\varphi]\ d\varphi. \tag{11}$$

По условию задачи в начальном положении механизма $\varphi = 0$. Следовательно, для вычисления суммы работ внешних и внутренних сил системы на конечном угловом перемещении кривошипов надо взять определенный интеграл от значения δA из формулы (11) в пределах от 0 до φ

$$\sum A\ (\boldsymbol{F}_k^e) + \sum A\ (\boldsymbol{F}_k^i) = 2 \int_0^{\varphi} [m - (M_1 + 2M_2)\ gr \sin \varphi - cr^2 \sin 2\varphi]\ d\varphi =$$
$$= 2 \left[m\varphi - 2\ (M_1 + 2M_2)\ gr \sin^2 \frac{\varphi}{2} - cr^2 \sin^2 \varphi \right]. \tag{12}$$

Переходим к вычислению кинетической энергии механизма, в состав которого входят пять масс (два кривошипа, два шатуна и ползун). Учитывая симметричность расположения масс механизма относительно вертикальной оси, имеем:

$$T = 2T_{O_1A_1} + 2T_{A_1B_1} + T_D.$$

В начальном положении механизм находился в покое, т. е.

$$T_1 = 0. \tag{13}$$

В конечном положении механизма, когда кривошипы отклонены от вертикалей на угол φ, кинетическая энергия равна

$$T_2 = 2T_{2O_1A_1} + 2T_{2A_1B_1} + T_{2D}. \tag{14}$$

Кинетическая энергия кривошипа, вращающегося вокруг неподвижной оси, определяется формулой

$$T_{2O_1A_1} = \frac{1}{2} I_{O_1}\omega^2,$$

где $I_{O_1} = M_2r^2/3$, а ω — искомая угловая скорость. Следовательно,

$$T_{2O_1A_1} = \frac{M_2r^2}{6}\omega^2. \tag{15}$$

Кинетическая энергия шатуна A_1B_1, совершающего плоское движение, равна

$$T_{2A_1B_1} = \frac{1}{2} M_2v_C^2 + \frac{1}{2} I_C\omega_{A_1B_1}^2. \tag{16}$$

Здесь

$$I_C = \frac{M_2r^2}{12}. \tag{17}$$

Скорость центра масс C шатуна A_1B_1 находим с помощью мгновенного центра скоростей $\mathscr{P}_1$ (см. рис. *в*):

$$v_C = v_{A_1}\frac{C\mathscr{P}_1}{A_1\mathscr{P}_1}. \tag{18}$$

В треугольнике $A_1\mathscr{P}_1C$: $A_1C = \frac{r}{2}$, $A_1\mathscr{P}_1 = A_1O_1 = r$. Следовательно,

$$C\mathscr{P}_1 = \sqrt{r^2 + \frac{r^2}{4} - 2r\frac{r}{2}\cos 2\varphi} = \frac{r}{2}\sqrt{5 - 4\cos 2\varphi} =$$

$$= \frac{r}{2}\sqrt{1 + 8\sin^2\varphi}.$$

Подставив значения $A_1\mathscr{P}$ и $C\mathscr{P}_1$ в формулу(18) и учитывая при этом, что $v_{A_1} = O_1A_1\omega = r\omega$, находим

$$v_C = \frac{r\omega}{2}\sqrt{1 + 8\sin^2\varphi}. \tag{19}$$

Угловая скорость шатуна A_1B_1 определяется легко:

$$v_{A_1} = O_1A_1\omega = A_1\mathscr{P}_1\omega_{A_1B_1},$$

т. е.

$$\omega_{A_1B_1} = \omega. \tag{20}$$

Направления $\omega_{A_1B_1}$ и ω противоположны (см. рис. *в*).

Подставив (17), (19) и (20) в формулу (16), получаем выражение кинетической энергии шатуна A_1B_1:

$$T_{2A_1B_1} = \frac{1}{2} M_2 \frac{r^2\omega^2}{4} (1 + 8\sin^2\varphi) + \frac{1}{2} \frac{M_2 r^2}{12} \omega^2 = \frac{M_2 r^2 \omega^2}{6} (1 + 6\sin^2\varphi). \tag{21}$$

Кинетическая энергия ползуна D, движущегося поступательно, вычисляется по формуле

$$T_{2D} = \frac{1}{2} M_1 v_D^2. \tag{22}$$

При поступательном движении $v_D = v_{B_1}$. Скорость точки B_1 находим с помощью мгновенного центра скоростей $\mathscr{P}_1$ (см. рис. *в*):

$$v_{B_1} = v_{A_1} \frac{B_1\mathscr{P}_1}{A_1\mathscr{P}_1}.$$

Так как $v_{A_1} = O_1A_1\omega = r\omega$, $A_1\mathscr{P}_1 = O_1A_1 = r$, $B_1\mathscr{P}_1 = O_1\mathscr{P}_1 \sin\varphi = 2r\sin\varphi$, то

$$v_D = v_{B_1} = 2r\omega\sin\varphi. \tag{23}$$

Подставив формулу (23) в (22), имеем

$$T_{2D} = 2M_1 r^2 \omega^2 \sin^2\varphi. \tag{24}$$

Скорость точки B_1 можно было определить, не пользуясь мгновенным центром скоростей $\mathscr{P}_1$. Для этого следовало записать уравнение движения точки B_1: $x_{B_1} = 2r\cos\varphi$ и затем взять производную по времени:

$$\dot{x}_{B_1} = v_{Bx} = -2r\dot{\varphi}\sin\varphi = -2r\omega\sin\varphi.$$

Подставив выражения (15), (21) и (24) в формулу (14), находим кинетическую энергию механизма в его конечном положении:

$$T_2 = \frac{2}{3} r^2\omega^2 [M_2 + 3(M_2 + M_3)\sin^2\varphi]. \tag{25}$$

Остается подставить формулы (12), (13) и (25) в уравнение (1) и затем определить искомую угловую скорость вращения кривошипа. Получим

$$\omega = \frac{1}{r} \sqrt{3 \frac{m\varphi - 2(M_1 + 2M_2) gr \sin^2(\varphi/2) - cr^2\sin^2\varphi}{M_2 + 3(M_2 + M_1)\sin^2\varphi}}.$$

У к а з а н и е. Рекомендуем решить следующие задачи из «Сборника задач по теоретической механике» И. В. Мещерского: 38.13—38.15, 38.18—38.20, 38.24—38.30, 38.33, 38.35—38.46.

5. **Теорема об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме.** Эта теорема

$$dT = \sum_{k=1}^{n} \delta A_k$$

часто применяется для составления дифференциальных уравнений движения, а также в задачах, где в число данных и неизвестных входят не скорости (здесь используется интегральная форма теоремы), а ускорения точек системы.

У к а з а н и е. Задачи рекомендуется решать в такой последовательности:

1) вычислить кинетическую энергию, выразив ее в зависимости от скорости $\dot{s}$ одной из точек системы или от угловой скорости $\dot{\varphi}$ одного из твердых тел системы, т. е. $T = \frac{1}{2} a\dot{s}^2$ или $T = \frac{1}{2} b\dot{\varphi}^2$, где a — приведенная масса, а b — приведенный момент инерции;

2) вычислить дифференциал кинетической энергии $dT = a\dot{s}\,d\dot{s}$ или $dT = b\dot{\varphi}\,d\dot{\varphi}$ и, использовав зависимость $\dot{s}\,d\dot{s} = \frac{ds}{dt} d\dot{s} = \ddot{s}\,ds$ или $\dot{\varphi}\,d\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} d\dot{\varphi} = \ddot{\varphi}\,d\varphi$, записать его в виде $dT = a\ddot{s}\,ds$ или $dT = b\ddot{\varphi}\,d\varphi$;

3) изобразить на рисунке все внешние и внутренние силы (в случае неизменяемой материальной системы — только внешние силы);

4) вычислить элементарную работу всех сил, выразив ее с помощью элементарного перемещения ds или $d\varphi$, т. е. $\delta A = \alpha\,ds$ или $\delta A = \beta\,d\varphi$;

5) использовать результаты, полученные в пунктах 2) и 4), в уравнении $dT = \sum_{k=1}^{n} \delta A_k$ и после сокращения на ds или $d\varphi$ получить дифференциальное уравнение $a\ddot{s} = \alpha$ или $b\ddot{\varphi} = \beta$;

6) определить искомую величину.

Задача 9.105. Применив теорему об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме, вывести дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси.

Р е ш е н и е. Обычно в курсах теоретической механики дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси выводится с помощью теоремы об изменении главного момента количеств движения. Вместе с тем можно, минуя эту теорему, получить искомое уравнение с помощью теоремы об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме:

$$dT = \sum_{k=1}^{n} \delta A_k. \tag{1}$$

В данном случае кинетическая энергия равна

$$T = \frac{1}{2} I_z \dot{\varphi}^2, \tag{2}$$

где I_z — момент инерции твердого тела относительно его оси вращения z, а $\dot{\varphi} = \omega_z$, где ω — угловая скорость твердого тела.

Как известно (см. обзор теории), элементарная работа внешних сил, приложенных к твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси z, вычисляется по формуле

$$\delta A = m_z^e\, d\varphi = \left[\sum_{k=1}^{n} m_z\left(\boldsymbol{F}_k^e\right)\right] d\varphi, \tag{3}$$

где $d\varphi$ — элементарное угловое перемещение твердого тела (напомним, что сумма работ внутренних сил в твердом теле равна нулю).

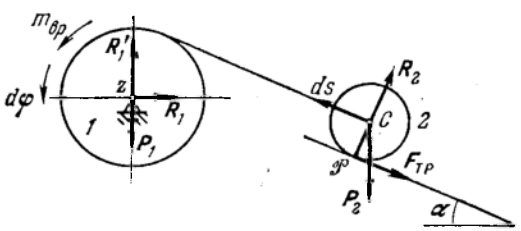
Внося формулы (2) и (3) в уравнение (1), найдем

$$I_z \ddot{\varphi}\, d\dot{\varphi} = \left[\sum_{k=1}^{n} m_z\left(\boldsymbol{F}_k^e\right)\right] d\varphi. \tag{4}$$

Заметив, что $\dot{\varphi}\, d\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}\, d\dot{\varphi} = \ddot{\varphi}\, d\varphi$, после сокращения уравнения (4) на $d\varphi$ получим искомое дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси:

$$I_z \ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^{n} m_z\left(\boldsymbol{F}_k^e\right).$$

Задача 9.106. Вращающий момент $m_{вр}$ приводит в движение барабан *1* массы M_1 и радиуса r_1 вокруг неподвижной оси z, перпендикулярной к плоскости рисунка. На боковую поверхность барабана наматывается нить, которая приводит в движение каток *2* массы M_2. Каток катится без скольжения вверх по наклонной плоскости, расположенной под углом α к горизонту.



К задаче 9.106

Применив теорему об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме, определить угловое ускорение барабана. Каток и барабан считать однородными круглыми цилиндрами. Трением качения и массой нити пренебречь.

Р е ш е н и е. Для применения теоремы об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме

$$dT = \sum_{k=1}^{n} \delta A_k \tag{1}$$

вычислим кинетическую энергию T данной системы, выразив ее в зависимости от угловой скорости барабана $\dot{\varphi}_1$. Имеем

$$T = T^{(1)} + T^{(2)}, \tag{2}$$

где $T^{(1)}$ и $T^{(2)}$ — соответственно кинетическая энергия барабана *1* и катка *2*.

Барабан *1* вращается вокруг неподвижной оси z, поэтому $T^{(1)} = \frac{1}{2} I_{1z}\dot{\varphi}_1^2$. Приняв во внимание, что $I_{1z} = \frac{M_1 r_1^2}{2}$, запишем:

$$T^{(1)} = \frac{M_1 r_1^2}{4}\dot{\varphi}_1^2. \tag{3}$$

Колесо *2* совершает плоское движение, поэтому $T^{(2)} = \frac{1}{2} M_2 v_C^2 + \frac{1}{2} J_{2z}\omega_2^2$. Учтя, что $v_C = r_1|\dot{\varphi}_1|$, $\omega_2 = \frac{v_C}{r_2} = \frac{r_1}{r_2}|\dot{\varphi}_1|$, $I_{2z} = \frac{M_2 r_2^2}{2}$, где радиус катка обозначен r_2, имеем

$$T^{(2)} = \frac{3}{4} M_2 r_1^2 \dot{\varphi}_1^2. \tag{4}$$

Подставив значения (3) и (4) в формулу (2), получим

$$T = \frac{M_1 + 3M_2}{4} r_1^2 \dot{\varphi}_1^2. \tag{5}$$

Формуле (5) можно придать вид $T = \frac{1}{2} a\dot{\varphi}_1^2$, где коэффициент $a = \frac{M_1 + 3M_2}{2} r_1^2$ называется *приведенным моментом инерции системы.*

Переходим к вычислению суммы элементарных работ $\sum_{k=1}^{n} \delta A_k$ внешних сил данной системы.

Изобразим внешние силы и моменты: $m_{вр}$ — вращающий момент, $\boldsymbol{P}_1$ — сила тяжести барабана, $\boldsymbol{P}_2$ — сила тяжести катка, $\boldsymbol{R}_1$ и $\boldsymbol{R}_1'$ — составляющие реакции неподвижной оси z, $\boldsymbol{R}_2$ — реакция наклонной плоскости, $\boldsymbol{F}_{тр}$ — сила трения катка о наклонную плоскость.

Дадим барабану элементарное угловое перемещение $d\varphi_1$. При этом центр тяжести C катка переместится на $ds = r_1\, d\varphi_1$. Элементарная работа внешних сил равна $\sum \delta A_k = m_{вр}\, d\varphi_1 - P_2\, ds \cdot \sin\alpha$, т. е.

$$\sum \delta A_k = (m_{вр} - P_2 r_1 \sin\alpha)\, d\varphi_1. \tag{6}$$

Напомним, что при качении без скольжения элементарная работа силы трения $\boldsymbol{F}_{тр}$ равна нулю.

Подставив T и $\sum \delta A_k$ из формул (5) и (6) в уравнение (1), найдем

$$\frac{M_1 + 3M_2}{2} r_1^2 \dot{\varphi}_1\, d\dot{\varphi}_1 = (m_{вр} - M_2 g r_1 \sin\alpha)\, d\varphi_1. \tag{7}$$

Приняв во внимание, что $\dot{\varphi}_1 \cdot d\dot{\varphi}_1 = \frac{d\varphi_1}{dt} d\dot{\varphi}_1 = \ddot{\varphi}_1\, d\varphi_1$, после сокращения уравнения (7) на $d\varphi_1$ получим искомое угловое ускорение барабана

$$\ddot{\varphi}_1 = 2\,\frac{m_{вр} - M_2 g r_1 \sin\alpha}{(M_1 + 3M_2)\, r_1^2}.$$

Эта задача выше была решена с помощью теоремы об изменении главного момента количеств движения (см. задачи 9.39 и 9.48). Нетрудно видеть, что данное решение, с помощью теоремы об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме, проще и короче.

6. Потенциальная энергия. Если на материальную систему действуют силы, однозначно определяемые положениями точек, то система движется в *силовом поле*.

Силовое поле называется *потенциальным* (*консервативным*), если работа сил поля определяется начальными и конечными положениями точек системы и не зависит от вида траекторий этих точек.

Потенциальная энергия материальной точки определяется работой, которую совершает сила поля при перемещении этой точки из данного положения в нулевое.

Потенциальная энергия зависит от положения точки в поле:

$$\Pi = \Pi(x, y, z). \qquad (4^*)$$

Эквипотенциальной поверхностью (поверхностью уровня) называется геометрическое место точек поля, в которых потенциальная энергия имеет одинаковое значение:

$$\Pi(x, y, z) = C. \qquad (5^*)$$

Потенциальная энергия определяется с точностью до аддитивной (слагаемой) постоянной, зависящей от выбора нулевой поверхности уровня.

Потенциальная энергия силы упругости пружины равна половине произведения коэффициента жесткости c пружины на квадрат ее деформации Δ:

$$\Pi = \frac{1}{2} c\Delta^2. \qquad (6^*)$$

Эта формула справедлива для тел, работающих на линейные деформации, и для упругих тел, работающих на угловые перемещения.

Потенциальная энергия системы материальных точек является функцией от координат всех n точек системы, т. е.

$$\Pi = \Pi(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_k, y_k, z_k, \ldots, x_n, y_n, z_n).$$

Работы силы поля при перемещении материальной точки в потенциальном поле равна разности потенциальных энергий начального и конечного положений точки:

$$A = \Pi_1 - \Pi_2.$$

Сила, действующая в потенциальном поле, направлена по нормали к эквипотенциальной поверхности в данной точке в сторону убывания потенциальной энергии.

Проекция на ось этой силы равна частной производной потенциальной энергии по соответствующей координате, взятой с обратным знаком:

$$F_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}.$$

Здесь $\boldsymbol{F} = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} + F_z\boldsymbol{k}$, т. е. $\boldsymbol{F} = -\text{grad}\ \Pi$.

В случае системы n материальных точек

$$F_{kx} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_k}, \quad F_{ky} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y_k}, \quad F_{kz} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z_k}, \quad \text{где } k = 1, 2, \ldots, n.$$

Если даны проекции силы F_x, F_y и F_z на оси декартовых координат и надо определить, является ли сила $\boldsymbol{F} = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} + F_z\boldsymbol{k}$ силой, действующей в потенциальном поле (потенциальной силой), то следует проверить, имеют ли место равенства

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}.$$

Если эти равенства тождественно удовлетворены, то сила $\boldsymbol{F}$ потенциальна. В противном случае сила не потенциальна. Элементарная работа потенциальной силы равна полному дифференциалу потенциальной энергии, взятому с обратным знаком:

$$\delta A = -d\Pi.$$

Итак, в случае потенциальных сил элементарная работа силы δA может быть обозначена dA.

Вычисление потенциальной энергии системы материальных точек является одним из этапов решения задач при использовании теоремы об изменении кинетической энергии, уравнений Лагранжа второго рода и т. д.

Задача 9.107. Груз массы M, лежащий посередине упругой балки, совершает свободные колебания. Сила упругости балки пропорциональна ее прогибу и направлена по вертикали. Проекция этой силы на вертикальную ось x равна: $F_x = -c\Delta_x$, где Δ — прогиб балки в ее середине, а c — коэффициент упругости, численно равный силе, которую надо приложить в середине балки для того, чтобы прогнуть ее на единицу длины.

Вычислить потенциальную энергию системы, пренебрегая массой балки.

Р е ш е н и е. Возьмем начало отсчета оси x в середине недеформированной балки.

Изобразим силы, приложенные к грузу: $\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{g}$ — сила тяжести груза, $\boldsymbol{F}$ — сила упругости балки. Обе силы потенциальны. Для вычисления потенциальной энергии груза надо сложить потенциальные энергии силы тяжести $\Pi^{(1)}$ и силы упругости $\Pi^{(2)}$:

$$\Pi = \Pi^{(1)} + \Pi^{(2)}. \qquad (2)$$

Так как потенциальной энергией называется работа потенциальной силы при перемещении материальной точки из данного положения в нулевое, то

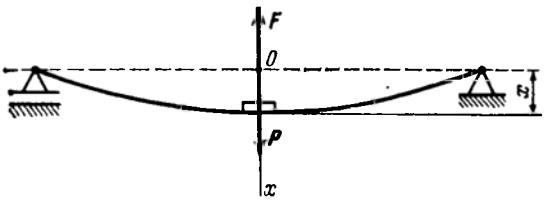
$$\Pi^{(1)} = -Px. \tag{2}$$

Потенциальная энергия силы тяжести $\boldsymbol{P}$ отрицательна при $x > 0$, так как груз для перемещения из данного положения в нулевое должен подняться вверх.

Затем, воспользовавшись формулой (6*), данной на стр. 344, находим

$$\Pi^{(2)} = \frac{cx^2}{2}. \tag{3}$$

Потенциальная энергия упругой балки положительна.



К задаче 9.107.

Подставив формулы (2) и (3) в (1), находим искомое выражение потенциальной энергии системы:

$$\Pi = \frac{cx^2}{2} - Px = \frac{cx^2}{2} - Mgx.$$

Задача 9.108. Использовав условие задачи 9.104, вычислить потенциальную энергию автоматического устройства, не нагруженного вращающими моментами m:

Р е ш е н и е. Силы тяжести отдельных звеньев и сила упругости пружины потенциальны. Приняв во внимание симметрию системы относительно вертикальной оси, запишем потенциальную энергию в виде

$$\Pi = 2\Pi^{(O_1A_1)} + 2\Pi^{(A_1B_1)} + \Pi^{(D)} + 2\Pi^{(A_1A_2)}. \tag{1}$$

Нулевыми будем считать положение системы при $\varphi = 0$, т. е. при вертикальных положениях кривошипов и шатунов и при недеформированной пружине.

При переходе системы из промежуточного положения (см. рис. *а*) в нулевое точки приложения сил тяжести кривошипов O_1A_1 и O_2A_2 опускаются на $h_1 = \frac{r}{2}(1 - \cos\varphi)$, шатунов A_1B_1 и A_2B_2 — на $h_2 = \frac{3r}{2}(1 - \cos\varphi)$, ползуна D — на $h_3 = 2r(1 - \cos\varphi)$. При этом

пружина возвращается в недеформированное состояние и укорачивается на $\Delta = A_2K + LA_1 = 2r \sin \varphi$. Итак,

$$h_1 = \frac{r}{2}(1 - \cos\varphi), \quad h_2 = \frac{3r}{2}(1 - \cos\varphi), \quad h_3 = 2r(1 - \cos\varphi),$$

$$\Delta = 2r \sin \varphi. \quad (2)$$

Потенциальной энергией системы называется сумма работ потенциальных сил при перемещении системы из данного положения в нулевое. Заметим, что работа сил тяжести при опускании вниз и работа силы упругости при восстановлении недеформированного состояния положительны. Поэтому в данном случае имеем

$$\Pi^{(O_1A_1)} = Ph_1, \quad \Pi^{(A_1B_1)} = Ph_2, \quad \Pi^{(D)} = Qh_3, \quad \Pi^{(A_1A_2)} = \frac{c\Delta^2}{2}. \quad (3)$$

Подставив в формулу (1) значения (3) и учтя при этом выражения (2), получим

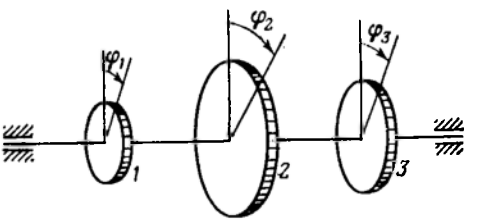
$$\Pi = 2r(Q + 2P)(1 - \cos\varphi) + 2cr^2 \sin^2\varphi,$$

т. е.

$$\Pi = 2r\left[2g(M_1 + 2M_2)\sin^2\frac{\varphi}{2} + cr\sin^2\varphi\right].$$

Задача 9.109. На горизонтальный упругий вал, коэффициент упругости которого на кручение равен c, насажены три диска. Вследствие упругости вала во время вращения системы около оси вала диски оказываются повернутыми на разные углы φ_1, φ_2, φ_3.

Вычислить потенциальную энергию системы. Центры тяжести дисков лежат на оси вращения.



К задаче 9.109.

Р е ш е н и е. Вычислим углы закручивания вала. На участке между дисками *1* и *2* угол закручивания вала равен $\varphi_2 - \varphi_1$, а на участке между дисками *2* и *3* — соответственно $\varphi_3 - \varphi_2$. Поэтому потенциальная энергия системы, слагающаяся из энергий отдельных участков, будет

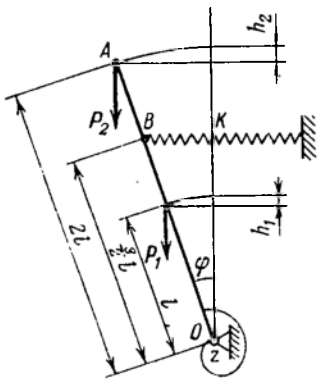
$$\Pi = \frac{c}{2}(\varphi_2 - \varphi_1)^2 + \frac{c}{2}(\varphi_3 - \varphi_2)^2.$$

7. Закон сохранения механической энергии. Если все силы, приложенные к системе материальных точек, потенциальны, то сумма кинетической и потенциальной энергии системы постоянна:

$$T_1 + \Pi_1 = T_2 + \Pi_2.$$

Так как в механизмах и машинах действуют силы сопротивления, которые не потенциальны, то происходит уменьшение механической энергии. Эта энергия расходуется на работу непотенциальных сил и переходит в другие виды энергии (например, в тепловую). Следовательно, закон сохранения механической энергии в этих случаях неприменим и для поддержания установившегося режима работы машины или механизма необходим приток механической энергии извне.

Задача 9.110. На рисунке изображен виброграф — прибор для измерения колебаний. Виброграф состоит из тонкого однородного стержня OA длиной $2l$ и массы M_1, к верхнему концу которого прикреплен груз A (точечная масса) массы M_2. Стержень OA может колебаться около горизонтальной оси z, перпендикулярной плоскости рисунка, под действием двух пружин: винтовой с коэффициентом упругости c_1 и спиральной с коэффициентом упругости c_2. В вертикальном положении равновесия стержня обе пружины не деформированы; $OB = {}^3/_2 l$.



К задаче 9.110.

Вычислить потенциальную энергию материальной системы.

Р е ш е н и е. Примем в качестве нулевого верхнее вертикальное положение стержня. Потенциальная энергия системы имеет вид

$$\Pi = \Pi^{(P_1)} + \Pi^{(P_2)} + \Pi^{(c_1)} + \Pi^{(c_2)}, \qquad (1)$$

где $\Pi^{(P_1)}$ и $\Pi^{(P_2)}$ — потенциальные энергии сил тяжести $P_1 = M_1 g$ и $P_2 = M_2 g$, а $\Pi^{(c_1)}$ и $\Pi^{(c_2)}$ — потенциальные энергии сил упругости пружин. Заметим, что $\Pi^{(P_1)} = -P_1 h_1$, $\Pi^{(P_2)} = -P_2 h_2$ (h_1 и h_2 изображены на рисунке), $\Pi^{(c_1)} = \frac{1}{2} c_1 \Delta_1^2$, $\Pi^{(c_2)} = \frac{1}{2} c_2 \Delta_2^2$, где Δ_1 — линейная деформация винтовой пружины, а Δ_2 — угловая деформация спиральной пружины. Приняв во внимание, что $h_1 = l\,(1 - \cos\varphi)$, $h_2 = 2l\,(1 - \cos\varphi)$, $\Delta_1 = BK = {}^3/_2 l \sin\varphi$, $\Delta_2 = \varphi$ (в вертикальном положении стержня пружины не деформированы), получим $\Pi^{(P_1)} = -M_1 g l\,(1 - \cos\varphi)$, $\Pi^{(P_2)} = -2M_2 g l\,(1 - \cos\varphi)$, $\Pi^{(c_1)} = \frac{9}{8} c_1 l^2 \sin^2\varphi$, $\Pi^{(c_2)} = \frac{1}{2} c_2 \varphi^2$. Внеся эти значения в формулу (1), найдем искомое выражение потенциальной энергии

$$\Pi = -(M_1 + 2M_2) g l + (M_1 + 2M_2) g l \cos\varphi + \frac{9}{8} c_1 l^2 \sin^2\varphi + \frac{1}{2} c_2 \varphi^2.$$

Задача 9.111. Вычислить полную механическую энергию физического маятника массы M в зависимости от угла отклонения φ (см.

рисунок), если центр тяжести C маятника отстоит от оси привеса на расстоянии a; I_C — момент инерции маятника относительно горизонтальной оси, проходящей через центр тяжести C.

Р е ш е н и е. Направим ось y из точки привеса O по вертикали вниз. Положительное направление отсчета угла φ указано на рисунке.

Механическая энергия маятника равна сумме его кинетической и потенциальной энергий:

$$E = T + \Pi. \tag{1}$$

Потенциальной силой является сила тяжести маятника $P = Mg$. Следовательно, потенциальная энергия маятника определяется формулой

$$\Pi = -Ph = -Mga\cos\varphi. \tag{2}$$

Кинетическая энергия маятника, качающегося вокруг неподвижной оси O, перпендикулярной к плоскости рисунка, равна

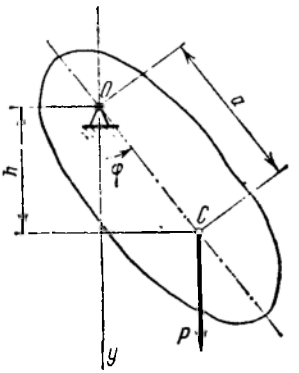
$$T = \frac{1}{2} I_O \dot{\varphi}^2.$$

Так как по теореме Штейнера

$$I_O = I_C + Ma^2,$$

то

$$T = \frac{1}{2}(I_C + Ma^2)\dot{\varphi}^2. \tag{3}$$



К задаче 9.111.

Подставив (2) и (3) в формулу (1), получим искомое выражение полной механической энергии физического маятника

$$E = \frac{1}{2}(I_C + Ma^2)\dot{\varphi}^2 - Mga\cos\varphi. \tag{4}$$

Задача 9.112. Использовав условие и решение предыдущей задачи и применив закон сохранения полной механической энергии, определить зависимость угловой скорости $\dot{\varphi}$ маятника от его угла поворота φ.

В начальный момент маятнику, занимавшему вертикальное положение, была сообщена начальная угловая скорость $\dot{\varphi}_0$. Силами сопротивления пренебречь.

Р е ш е н и е. Так как силы, приложенные к маятнику, потенциальны, то можно применить закон сохранения полной механической энергии. Использовав формулу (4) предыдущей задачи, вычислим полную механическую энергию маятника в начальный момент, когда $\varphi = 0$, а $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$. Имеем

$$E_0 = \frac{1}{2}(I_C + Ma^2)\dot{\varphi}_0^2 - Mga. \tag{1}$$

На основании закона сохранения полной механической энергии запишем

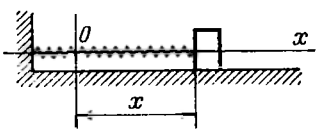
$$E = E_0. \tag{2}$$

Внеся в уравнение (2) значение E из формулы (4) предыдущей задачи, а E_0 — из формулы (2) и решив уравнение относительно $\dot{\varphi}$, получим

$$\dot{\varphi} = \sqrt{\dot{\varphi}_0^2 - \frac{2Mga\,(1 - \cos\varphi)}{I_C + Ma^2}}.$$

Этот результат можно также получить, применив теорему об изменении кинетической энергии в интегральной форме.

Задача 9.113. Груз массы m, прикрепленный к концу пружины, совершает свободные колебания по гладкой горизонтальной плоскости согласно закону $x = a \sin kt$ (см. рисунок).



К задаче 9.113.

Воспользовавшись законом сохранения механической энергии, определить коэффициент упругости c пружины. Начало отсчета по оси x взято в правом конце недеформированной пружины.

Р е ш е н и е. Рассмотрим два положения груза: среднее, имеющее индекс 1, и крайнее — с индексом 2. В соответствии с законом сохранения механической энергии запишем

$$T_1 + \Pi_1 = T_2 + \Pi_2. \tag{1}$$

В среднем, т. е. в нулевом положении груза, его потенциальная энергия $\Pi_1 = 0$. В крайнем положении груза, когда он отклонен от нуля на $x = a$, где a — амплитуда колебаний, потенциальная энергия равна $\Pi_2 = {}^1/_2 ca^2$. Итак,

$$\Pi_1 = 0, \quad \Pi_2 = {}^1/_2 ca^2. \tag{2}$$

Для вычисления кинетической энергии груза по формуле $T = {}^1/_2 m\dot{x}^2$ вычислим производную $\dot{x} = a \sin kt$ по времени. Имеем $\dot{x} = ak \cos kt$. Поэтому кинетическая энергия равна $T = {}^1/_2 ma^2k^2 \times \cos^2 kt$. В крайнем положении груза кинетическая энергия T_2 равна нулю. В среднем, т. е. в нулевом положении, например при $t = 0$, кинетическая энергия T_1 достигает наибольшего значения, равного ${}^1/_2 ma^2k^2$, т. е.

$$T_1 = {}^1/_2 ma^2k^2, \quad T_2 = 0. \tag{3}$$

Подставив результаты (2) и (3) в уравнение (1) и решив его относительно c, вычислим искомый коэффициент упругости пружины: $c = mk^2$.

У к а з а н и е. Рекомендуем решить следующие задачи из «Сборника задач по теоретической механике» И. В. Мещерского: 29.12 и 29.14.

ГЛАВА X

ДИНАМИКА НЕСВОБОДНОЙ МАТЕРИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

§ 1. Классификация связей. Число степеней свободы. Классификация сил

Несвободной называется материальная система, на движение точек которой (координаты и скорости) наложены некоторые ограничения (связи).

Всякий механизм является примером несвободной материальной системы.

Связями называются физические тела, налагающие ограничения на координаты, скорости и ускорения точек материальной системы. Связи делятся на *двухсторонние* и *односторонние*.

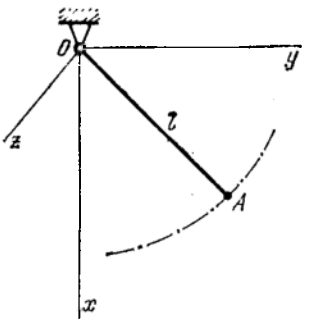


Рис. 10.1.

Связи называются двухсторонними (удерживающими), если они препятствуют перемещениям материальных точек в некоторых направлениях, а также в направлениях прямо противоположных. Примером двухсторонней связи служит идеальный (невесомый, недеформируемый) стержень, по концам которого размещены две материальные точки. Эти материальные точки не могут ни приблизиться друг к другу, ни отдалиться. Если одну из материальных точек, например точку O (рис. 10.1), закрепить, то вторая точка A может перемещаться по кривой, лежащей на сфере радиуса, равного длине l идеального стержня, т. е. координаты точки A оказываются связанными зависимостью: $x_A^2 + y_A^2 + z_A^2 - l^2 = 0$. Таким образом, двухсторонняя геометрическая связь выражается соотношением между координатами точек материальной системы:

$$f(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_k, y_k, z_k, \ldots, x_n, y_n, z_n) = 0.$$

Связи называются односторонними (неудерживающими), если они препятствуют перемещениям материальных точек в некоторых направлениях, но допускают перемещения в прямо противоположных направлениях. Такую связь можно получить, если в предыдущем примере идеальный стержень OA заменить нитью. Тогда точки O и A отдалиться друг от друга не могут, но приблизиться имеют возможность, так как при этом произойдет смятие нити (рис. 10.2).

Уравнение односторонней связи имеет вид

$$x_A^2 + y_A^2 + z_A^2 - l^2 \leqslant 0.$$

(Знак равенства соответствует натянутой нити.) Таким образом, односторонняя связь выражается неравенством вида

$$f(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_k, y_k, z_k, \ldots, x_n, y_n, z_n) \leqslant 0.$$

Связи делятся также на *нестационарные* (зависящие от времени) и *стационарные* (не зависящие от времени).

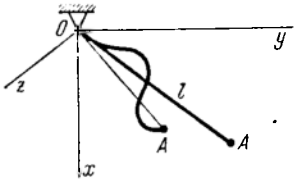


Рис. 10.2.

Связь называется нестационарной, если в уравнение связи в явном виде входит время, т. е.

$$f(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_k, y_k, z_k, \ldots, x_n, y_n, z_n, t) = 0.$$

(В неявном виде время входит в большинство уравнений связей, так как координаты точек при движении системы, вообще говоря, являются функциями времени.) В случае подъемного крана, поднимающего груз A (материальную точку), связь, зависящая от времени, создается тросом (рис. 10.3). При равномерном наматывании

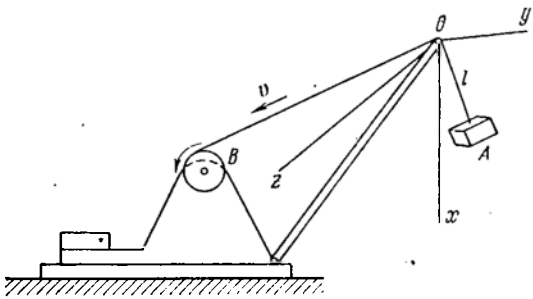


Рис. 10.3.

троса на барабан со скоростью v длина свисающей части троса изменяется по закону

$$l = l_0 - vt,$$

где l_0 — длина свисающей части троса в начальный момент. Так как груз может раскачиваться, то уравнение этой связи имеет вид $x_A^2 + y_A^2 + z_A^2 - (l_0 - vt)^2 \leqslant 0$, т. е. содержит время в явном виде.

Связь называется стационарной, если время в явном виде в уравнение связи не входит (во всех рассмотренных выше примерах, кроме последнего, связи не зависят от времени).

Связи делятся также на *голономные* и *неголономные*. Голономными (интегрируемыми) называются связи, которые накладывают ограничения на положения точек материальной системы.

Неголономными (неинтегрируемыми) называются связи, которые накладывают ограничения на скорости точек системы. Они выра-

жают зависимость между координатами и скоростями точек системы. Независимо от дифференциальных уравнений движения системы уравнения этих связей не могут быть проинтегрированы.

В качестве примера неголономной связи рассмотрим движение конька по поверхности льда. При отсутствии соскальзывания скорость центра тяжести C конька должна быть направлена вдоль его оси (рис. 10.4) по касательной к траектории точки C. Имеем $\dot{x}_C = v_{Cx} = v_C \cos\varphi$, $\dot{y}_C = v_{Cy} = v_C \sin\varphi$, где φ — угол, образованный осью x и касательной к траектории точки C. Разделив второе соотношение на первое, получим $\dot{y}_C/\dot{x}_C = \operatorname{tg}\varphi$, откуда $\dot{y}_C - \dot{x}_C \operatorname{tg}\varphi = 0$. Это уравнение неголономной связи, ибо наложены ограничения на производные по времени координат точки C. Оно является дифференциальным уравнением, которое самостоятельно не может быть проинтегрировано (напомним, что угол φ переменный).

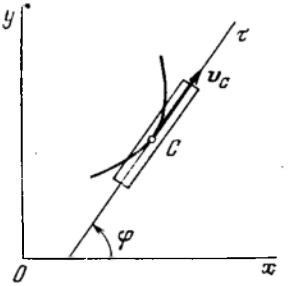


Рис. 10.4.

Примером неголономной системы является шар, катящийся по шероховатой плоскости. (Скорость точки касания шара с плоскостью равна нулю.)

Числом степеней свободы материальной системы, подчиненной голономным связям, называется число независимых параметров, однозначно определяющих положения точек системы.

Так, твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси, имеет одну степень свободы, так как положение этого твердого тела вполне определяется углом поворота φ вокруг оси вращения.

Твердое тело, совершающее плоское движение, имеет три степени свободы, так как положение любого его сечения, проведенного параллельно неподвижной плоскости, определяется двумя координатами центра тяжести сечения x_C и y_C и углом поворота φ.

Системой с тремя степенями свободы является твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной точки. Его положение определяется тремя независимыми координатами, например тремя углами Эйлера φ, ψ и θ.

Системой с шестью степенями свободы является свободное твердое тело, так как его положение определяется шестью независимыми параметрами: тремя координатами центра тяжести x_C, y_C, z_C и тремя углами Эйлера φ, ψ и θ.

Упругое тело имеет бесчисленное множество степеней свободы.

Подавляющее большинство механизмов является системами с одной степенью свободы. Так, положение любой точки кривошипно-шатунного механизма определяется углом поворота φ кривошипа (рис. 10.5).

Диск K, вращающийся вокруг оси AB, которая в свою очередь вращается вокруг оси CD (рис. 10.6), является системой с двумя

степенями свободы. Для определения положения диска K следует задать два независимых параметра: угол поворота диска вокруг оси AB и угол поворота вилки ADB вокруг оси CD.

Связи, ограничивая перемещения материальных точек системы, действуют на эти точки посредством сил, называемых *реакциями связей*.

В динамике несвободной материальной системы, как правило, силы удобно разделять на активные силы и реакции связей.

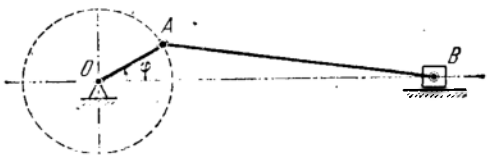


Рис. 10.5.

Следует иметь в виду, что к активным относятся все силы, не являющиеся реакциями связей. Таким образом, активной может быть какая-либо неизвестная — искомая сила, не входящая в число реакций связей.

Закон освобождаемости от связей. В задачах динамики несвободной материальной системы пользуются законом освобождаемости от связей, который нами уже применялся. Отбрасывая мысленно связи, наложенные на систему, компенсируют их реакциями связей. При этом несвободная материальная система рассматривается как система свободная, движущаяся под действием активных сил и реакций связей.

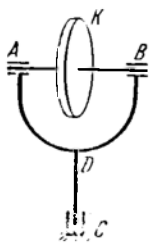


Рис. 10.6.

При движении системы реакции связей являются, вообще говоря, переменными. Они зависят от положений точек, их скоростей, ускорений и времени. Это значительно усложняет решение обратных задач, в которых движения точек системы определяются в зависимости от приложенных сил, т. е., в частности, от реакций связей. В подобных задачах приходится из системы дифференциальных уравнений движения исключать реакции связей. После нахождения движения точек системы и, следовательно, их скоростей и ускорений, можно найти величины реакций связей.

Задача 10.1. Связь описывается дифференциальным уравнением $x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} = 0$.

Является ли связь неголономной?

Р е ш е н и е. В уравнение связи входят не только координаты точек, но и их производные по времени. Поэтому некоторым читателям может показаться, что связь является неголономной. Однако подобное суждение ошибочно.

Запишем данное дифференциальное уравнение в виде $x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0$. Проинтегрировав его, найдем $x^2 + y^2 + z^2 = C$ — уравнение голономной связи. Напомним, что связь является неголономной, если она содержит производные координат точек системы и может быть проинтегрирована лишь в совокупности

с дифференциальными уравнениями движения материальной системы. В данном же случае дифференциальное уравнение связи было проинтегрировано в отрыве от дифференциальных уравнений движения системы и потому описывает голономную связь.

Заметим, что можно продифференцировать уравнение любой голономной связи $f(x, y, z) = 0$, при этом в уравнении появятся производные $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, но связь, однако, не перестанет быть голономной.

§ 2. Метод кинетостатики

1. Силы инерции. Приведение сил инерции к простейшему виду. При взаимодействии двух свободных материальных точек к одной из них приложена сила F_1, называемая действием, а к другой — сила F_2, называемая противодействием. Материальная точка A (рис. 10.7), к которой приложено действие со стороны материальной точки B, приобретает ускорение w и впредь именуется «*ускоряемой*».

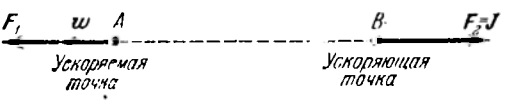


Рис. 10.7.

Материальная точка B, сообщившая ускорение материальной точке A, называется «*ускоряющей*». К «ускоряющей» точке B приложено противодействие со стороны «ускоряемой» точки A.

На основании закона равенства действия и противодействия

$$F_2 = -F_1.$$

В соответствии с основным законом динамики, действие равно $F_1 = mw$, следовательно, противодействие равно $F_2 = -mw$. Противодействие именуется *силой инерции* и обозначается J. Итак, в случае свободной материальной точки сила инерции равна по модулю произведению массы «ускоряемой» точки A на модуль ее ускорения, направлена в сторону, противоположную ускорению точки A и приложена к «ускоряющей» точке B.

Если при движении несвободной материальной точки ее траектория предопределена связью, наложенной на эту точку, то к материальной точке, являющейся «ускоряемой», приложено действие со стороны наложенной связи, которая в данном случае заменяет «ускоряющую» точку.

На основании закона равенства действия и противодействия к связи приложено со стороны материальной точки противодействие, именуемое силой инерции J. Так как $F_1 = mw$, а $F_2 = -F_1$, то $J = F_2 = -mw$. Так, при равномерном движении кольца A по проволоке B траектория кольца A, являющегося «ускоряемой» точкой, предопределена проволокой, являющейся связью. Кольцо A приобретает центростремительное ускорение под действием силы $Д$, приложенной к нему со стороны проволоки — связи. На основании

закона равенства действия и противодействия к соответствующей точке проволоки приложено противодействие Π, именуемое силой инерции J (рис. 10.8).

Если на *несвободную* — ускоряемую материальную точку наложены связи, а также действуют ускоряющие точки, то *силы инерции* частично приложены к связям и частично к «*ускоряющим*» точкам.

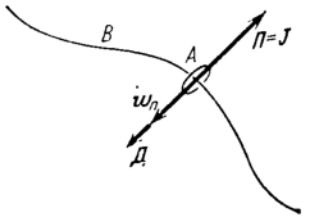


Рис. 10.8.

Как известно из статики, систему сил можно привести к силе, векторно равной главному вектору, и к паре сил с моментом, векторно равным главному моменту. *Приведение сил инерции дает следующие результаты* (ниже в пункте 2 при изложении метода кинетостатики поясняется, что силы инерции условно прилагаются «к ускоряемому» твердому телу):

а) *при поступательном движении твердого тела* силы инерции приводятся к равнодействующей, приложенной к центру тяжести C твердого тела. Равнодействующая $\boldsymbol{R}^{(J)}$ равна по модулю произведению массы твердого тела на ускорение любой его точки и направлена противоположно этому ускорению:

$$\boldsymbol{R}^{(J)} = -M\boldsymbol{w}$$

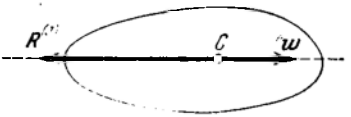


Рис. 10.9.

(рис. 10.9).

б) *При вращении плоской фигуры вокруг перпендикулярной к ней неподвижной оси*, силы инерции приводятся к равнодействующей (рис. 10.10), приложенной в центре качаний соответствующего физического маятника, ось привеса которого совмещена с неподвижной осью данного твердого тела (центр качаний K отстоит от оси привеса на расстоянии, равном приведенной длине физического маятника: $l_{\text{пр}} = \frac{I_z}{Ma}$, где I_z — момент инерции твердого тела относительно оси привеса, M — масса твердого тела, a — расстояние от оси привеса до центра тяжести). Равнодействующая сил инерции $\boldsymbol{R}^{(J)}$ равна по модулю произведению массы твердого тела на ускорение его центра тяжести и направлена в сторону, противоположную этому ускорению

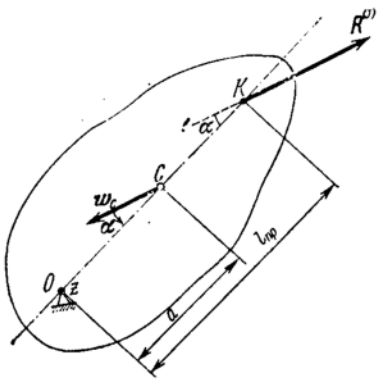


Рис. 10.10.

$$\boldsymbol{R}^{(J)} = -M\boldsymbol{w}_C,$$

так как $w_C = a\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$, то $R^{(J)} = Ma\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$; направление $R^{(J)}$ определяется углом α, находимым из уравнения

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\varepsilon_z}{\omega^2}.$$

Если за центр приведения выбрать центр тяжести C твердого тела, то силы инерции приводятся к силе, векторно равной главному вектору $V^{(J)}$, и к паре сил с моментом, равным главному моменту $m_C^{(J)}$ (рис. 10.11).

Главный вектор сил инерции $V^{(J)}$ равен по модулю произведению массы твердого тела на ускорение его центра тяжести и направлен в сторону, противоположную этому ускорению:

$$V^{(J)} = -M\boldsymbol{w}_C,$$

причем

$$V^{(J)} = Ma\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4},$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\varepsilon_z}{\omega^2}.$$

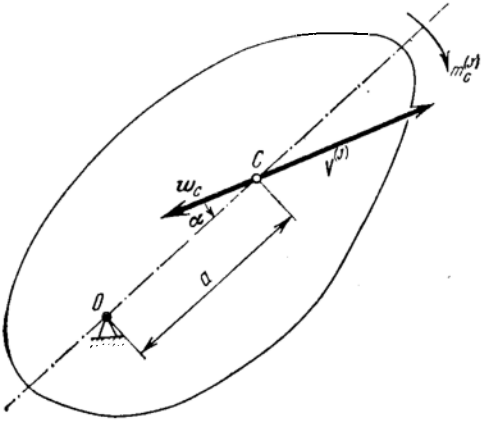


Рис. 10.11.

Главный момент сил инерции $m_C^{(J)}$ относительно оси, проходящей через центр тяжести C параллельно оси вращения, равен по модулю произведению момента инерции твердого тела относительно оси C на модуль углового ускорения твердого тела ε. Знак главного момента сил инерции противоположен знаку проекции углового ускорения: $m_C^{(J)} = -I_C\varepsilon_z$ (ε_z — проекция углового ускорения ε на ось вращения z).

Если за центр приведения выбрать точку O, лежащую на неподвижной оси, то силы инерции приводятся к силе, равной главному вектору $V^{(J)}$, и паре сил, момент которой равен главному моменту $m_O^{(J)}$. По-прежнему $V^{(J)} = -M\boldsymbol{w}_C$, а в выражение главного момента сил инерции вместо I_C входит I_O, т. е. $m_O^{(J)} = -I_O\varepsilon_z$, где $I_O = I_C + Ma^2$.

В случае, когда центр тяжести C лежит на оси вращения плоской фигуры, главный вектор сил инерции $V^{(J)}$ обращается в нуль, и, следовательно, система сил инерции приводится к паре сил с моментом $m_O^{(J)} = -I_O\varepsilon_z$.

в) *При движении плоской фигуры* силы инерции приводятся к силе, равной главному вектору $V^{(J)}$, приложенной в центре приведения (рис. 10.12), и к паре сил, момент которой равен главному моменту относительно оси, проходящей через центр приведения перпендику-

лярно к неподвижной плоскости. Так, если за центр приведения сил инерции выбрать центр тяжести C плоской фигуры, то

$$\boldsymbol{V}^{(J)} = -M\boldsymbol{w}_C, \quad m_C^{(J)} = -I_C\varepsilon_z.$$

Приведение сил инерции к силе, равной главному вектору, и паре сил, момент которой равен главному моменту, является одним из важных этапов решения задач динамики несвободной материальной системы в случае применения метода кинетостатики либо общего уравнения динамики (см. ниже § 5), а также при определении динамических давлений на ось вращающегося твердого тела (см. ниже § 3).

Отметим, что с силами инерции связаны *формальные* методы решения задач. Все упомянутые далее задачи могут быть решены без применения метода кинетостатики. В этой книге излагаются методы решения задач с использованием сил инерции лишь потому, что эти методы, в силу сложившихся исторических традиций, еще довольно распространены в инженерной практике. В динамике нет таких задач, которые не могли бы быть решены без применения метода кинетостатики. В дальнейшем неоднократно дается сравнение методов решения задач с использованием и без использования сил инерции.

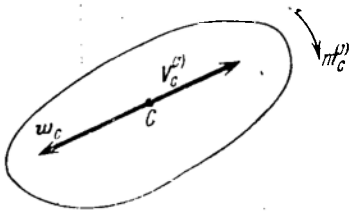


Рис. 10.12.

Главный вектор и главный момент сил инерции, условно приложенных к ускоряемому твердому телу, следует определять по приведенным выше формулам, в соответствии с видом движения твердого тела (поступательное движение, вращение вокруг неподвижной оси, плоское движение). Если с помощью готовых формул нельзя определить главный вектор и главный момент, то в случае непрерывного распределения масс надо найти силы инерции для выделенного элемента и затем распространить суммирование по всему твердому телу, вычислив определенный интеграл в соответствующих пределах.

В следующем параграфе будут рассмотрены методы приведения сил инерции материальных точек твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.

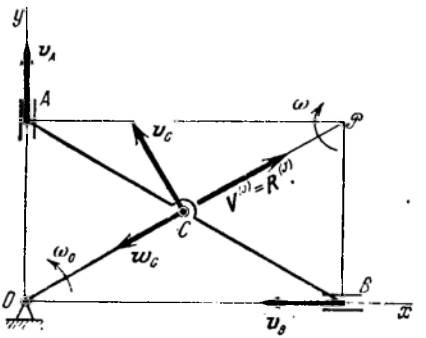
Задача 10.2. Линейка эллипсографа AB приводится в движение посредством кривошипа OC, вращающегося с постоянной угловой скоростью ω_0.

Определить главный вектор и главный момент сил инерции линейки AB массы M и длины l, считая ее однородным прямолинейным стержнем; $OC = AC = CB = l/2$.

Р е ш е н и е. Линейка AB совершает плоское движение. Поэтому ее силы инерции приводятся к силе, равной главному вектору $\boldsymbol{V}^{(J)}$, и паре сил, момент которой равен главному моменту $m_C^{(J)}$.

Сила, равная главному вектору сил инерции $V^{(J)}$, приложена в центре тяжести линейки и направлена в сторону, противоположную ускорению w_C центра тяжести C: $V^{(J)} = -Mw_C$. Так как центр тяжести C линейки AB одновременно является концом кривошипа OC, то $w_C = w_{Cn} + w_{C\tau}$. При постоянной угловой скорости вращения кривошипа $w_{C\tau} = 0$; итак, $w_C = w_{Cn}$. Ускорение w_C, будучи центростремительным, направлено от C к O. Следовательно, главный вектор сил инерции $V^{(J)}$ направлен вдоль кривошипа OC от оси вращения O. По модулю он равен $V^{(J)} = Mw_C$. Учитывая, что $w_C = w_{Cn} = |OC|\,\omega_0^2 = \frac{l}{2}\,\omega_0^2$, находим

$$V^{(J)} = M\frac{l}{2}\,\omega_0^2.$$



К задаче 10.2.

Главный момент сил инерции линейки AB определяется по формуле $m_C^{(J)} = -I_C\varepsilon_z$, где $I_C = \frac{Ml^2}{12}$ — момент инерции линейки AB относительно оси, проходящей через ее центр тяжести C перпендикулярно к неподвижной плоскости, а ε_z — проекция углового ускорения линейки AB на ось z, перпендикулярную к плоскости рисунка.

Определив положение мгновенного центра скоростей $\mathscr{P}$ линейки, как точку пересечения перпендикуляров, восставленных из точек A и B к соответствующим скоростям, находим угловую скорость линейки AB. Точка C как конец кривошипа OC имеет скорость $v_C = |OC|\,\omega_0$; с другой стороны, скорость точки C, лежащей также на линейке AB, дается формулой $v_C = |C\mathscr{P}|\,\omega$, поэтому $|C\mathscr{P}|\,\omega = |OC|\,\omega_0$, т. е. $\omega = \frac{|OC|}{|C\mathscr{P}|}\,\omega_0$. Так как $OC = C\mathscr{P} = \frac{l}{2}$, то угловая скорость линейки AB равна $\omega = \omega_0$. Значит, угловое ускорение линейки равно нулю: $\varepsilon = \frac{d\omega_0}{dt} = 0$ и, следовательно, $\varepsilon_z = 0$. Итак, главный момент сил инерции линейки равен нулю:

$$m_C^{(J)} = -I_C\varepsilon_z = 0.$$

Таким образом, силы инерции точек линейки приводятся к равнодействующей силе, приложенной в центре тяжести C линейки и равной главному вектору сил инерции.

2. Метод кинетостатики. Методом кинетостатики называется *формальный* прием, дающий возможность записать уравнения движения в виде уравнений равновесия.

Применяя метод кинетостатики к движущейся материальной точке, следует записать условие равновесия активных сил и реакций

связей, приложенных к материальной точке, а также сил инерции:

$$\boldsymbol{F} + \boldsymbol{R} + \boldsymbol{J} = 0,$$

где $\boldsymbol{F}$ — равнодействующая активных сил, приложенных к материальной точке, $\boldsymbol{R}$ — равнодействующая реакций связей, наложенных на материальную точку, $\boldsymbol{J}$ — сила инерции материальной точки, равная по модулю произведению массы точки на модуль ее ускорения и направленная противоположно ускорению: $\boldsymbol{J} = -m\boldsymbol{w}$.

При этом следует помнить, что сила инерции к данной материальной точке не приложена. В действительности эта сила инерции приложена к «ускоряющим» материальным точкам и к связям, наложенным на данную точку. Добавление к силам $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{R}$ силы инерции $\boldsymbol{J}$, не приложенной к данной точке, приводит к тому, что уравнения движения принимают вид уравнений равновесия.

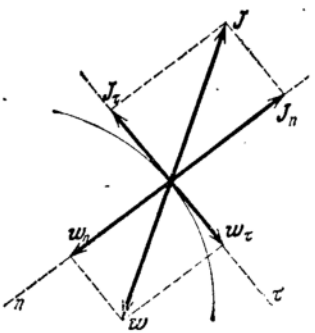


Рис. 10.13.

При движении материальной точки по кривой силу инерции можно разложить на две составляющие, соответствующие касательному и нормальному ускорениям точки: касательную силу инерции $\boldsymbol{J}_\tau$ и нормальную силу инерции $\boldsymbol{J}_n$ (рис. 10.13), причем

$$\boldsymbol{J}_\tau = -m\boldsymbol{w}_\tau, \quad \boldsymbol{J}_n = -m\boldsymbol{w}_n,$$

$$\boldsymbol{J} = -m\boldsymbol{w} = \boldsymbol{J}_\tau + \boldsymbol{J}_n.$$

По модулю

$$J = m\sqrt{w_\tau^2 + w_n^2}.$$

Метод кинетостатики в приложении к несвободной системе материальных точек приводит к системе уравнений:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{R}_1 + \boldsymbol{J}_1 &= 0, \\ \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{R}_2 + \boldsymbol{J}_2 &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots & \\ \boldsymbol{F}_n + \boldsymbol{R}_n + \boldsymbol{J}_n &= 0. \end{aligned}$$

Число векторных уравнений равно числу материальных точек системы.

Если изучаемым объектом является твердое тело, то, применяя метод кинетостатики, надо составить уравнения равновесия системы сил, включив в них активные силы, реакции связей и силы инерции.

Методом кинетостатики можно пользоваться при решении прямых задач динамики несвободной материальной системы, т. е. при решении задач, в которых по заданному движению определяются неизвестные силы. Однако все эти задачи (как правило, несколько менее

громоздко) могут быть решены обычным путем — посредством применения основного уравнения динамики к каждой из материальных точек системы, т. е.

$$m_k \boldsymbol{w}_k = \boldsymbol{F}_k + \boldsymbol{R}_k, \quad \text{где } k = 1, 2, \ldots, n.$$

При решении же обратных задач, т. е. таких, в которых по заданным силам определяется движение, применение метода кинетостатики нецелесообразно.

Мы излагаем в этой книге метод кинетостатики, как уже упоминалось выше, лишь потому, что им, в силу установившихся традиций, еще довольно часто пользуются в различных инженерных дисциплинах.

Методом кинетостатики можно пользоваться в случаях, когда в число заданных и неизвестных величин входят: массы материальных точек, моменты инерции твердых тел, скорости и ускорения точек, угловые скорости и угловые ускорения твердых тел, силы и моменты сил.

У к а з а н и е. Решение задач с помощью метода кинетостатики рекомендуется выполнять в такой последовательности:

1) изобразить на рисунке активные силы, приложенные к каждой из материальных точек;

2) применив закон освобождаемости от связей, изобразить реакции связей, наложенных на каждую из материальных точек системы;

3) добавить к активным силам и реакциям связей силы инерции материальных точек системы;

4) выбрать систему координат;

5) составить уравнения равновесия для каждой из материальных точек системы;

6) решив составленную систему уравнений, определить искомые величины.

Задача 10.3. Груз массы M совершает колебания на пружине, подвешенной верхним концом к потолку, по закону $x = a \sin \omega t$. Определить силу упругости пружины. Массой пружины пренебречь. Начало оси x, направленной по вертикали вниз, находится в положении равновесия груза.

Р е ш е н и е. К грузу приложены две силы: сила тяжести $\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{g}$ и сила упругости пружины, проекция которой на ось x равна F_x.

Для решения задачи методом кинетостатики прикладываем к грузу еще силу инерции $\boldsymbol{J} = -M\boldsymbol{w}$. (Сила инерции приложена к ускоряющим материальным точкам и к связям.)

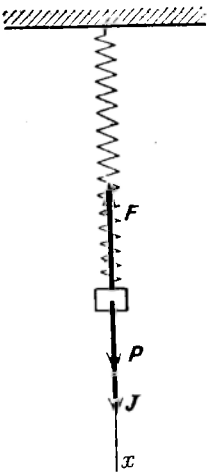
Зная закон движения груза $x = a \sin \omega t$, определяем проекцию его ускорения на ось x:

$$w_x = \ddot{x} = -a\omega^2 \sin \omega t.$$

Следовательно, проекция на ось x силы инерции J имеет вид

$$J_x = -Mw_x = Ma\omega^2 \sin \omega t.$$

Запишем уравнение кинетостатики груза в проекции на ось x. Мы можем уравнению движения формально придать вид уравнения равновесия, потому что силу инерции J приложили к грузу, в то время как в действительности она на груз не действует:



К задаче 10.3.

$$Mg + J_x + F_x = 0.$$

Из этого уравнения находим

$$F_x = -(Mg + J_x).$$

Учитывая, что $J_x = Ma\omega^2 \sin \omega t$, получим

$$F_x = -(Mg + Ma\omega^2 \sin \omega t).$$

Нетрудно определить максимальное и минимальное значения силы F:

$$F_{max} = Mg + Ma\omega^2, \quad F_{min} = Mg - Ma\omega^2.$$

Итак,

$$Mg - Ma\omega^2 \leqslant F \leqslant Mg + Ma\omega^2.$$

Не прибегая к методу кинетостатики, эту прямую задачу можно было решить с помощью дифференциального уравнения движения груза в проекции на ось x:

$$M\ddot{x} = Mg + F_x.$$

Из последнего уравнения при учете соотношения $\ddot{x} = -a\omega^2 \sin \omega t$ легко находится

$$F_x = -(Mg + Ma\omega^2 \sin \omega t).$$

Таким образом, применение в этой задаче метода кинетостатики несколько более громоздко (приходится дополнительно определить и изобразить силу инерции) и никаких преимуществ перед использованием дифференциального уравнения движения материальной точки не имеет.

Задача 10.4. При исполнении циркового аттракциона мотоциклист движется с постоянной по величине скоростью v по внутренней поверхности полусферы радиуса r. Он описывает в горизонтальной плоскости окружность радиуса $AB = \rho$. Схематизируя мотоциклиста с мотоциклом в виде точечной массы M, вычислить давление на полусферу и максимальную скорость движения. Коэффициент трения резиновых покрышек о внутреннюю поверхность полусферы равен f.

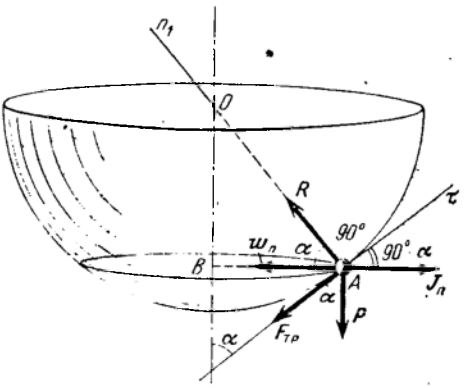
Р е ш е н и е. Проведем вертикальную плоскость через центр O и точку A, изображающую произвольное положение точечной массы. Оси τ_1 и n_1 обозначены на рисунке. Обозначим α — угол, образуемый касательной τ_1 с вертикалью. К точке A приложена активная

сила $\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{g}$. Реакциями связей являются: нормальная реакция поверхности полусферы $\boldsymbol{R}$ и сила трения $\boldsymbol{F}_{\text{тр}}$. При равномерном движении точки A ее вращательное ускорение равно нулю. Поэтому и вращательная сила инерции равна нулю:

$$J_\tau = -m\boldsymbol{w}_\tau = 0.$$

Центробежная сила инерции точечной массы A направлена противоположно ее центростремительному ускорению $\boldsymbol{w}_n$, т. е. по горизонтали направо. По модулю

$$J_n = Mw_n = M\frac{v^2}{\rho}.$$



К задаче 10.4.

Сила трения $F_{\text{тр}}$ направлена вдоль оси τ_1 вниз (см. рисунок).

Применяя метод кинетостатики, запишем уравнения предельного равновесия сил в проекциях на оси τ_1 и n_1:

$$\sum F_{k\tau_1} = -F_{\text{тр}}^{\max} - Mg\cos\alpha + J_n\sin\alpha = 0,$$

$$\sum F_{kn_1} = R - Mg\sin\alpha - J_n\cos\alpha = 0.$$

Учитывая, что в предельном случае $F_{\text{тр}}^{\max} = fR$, а $J_n = M\frac{v_{\max}^2}{\rho}$, запишем эту систему уравнений в виде

$$-fR - Mg\cos\alpha + M\frac{v_{\max}^2}{\rho}\sin\alpha = 0,$$

$$R - Mg\sin\alpha - M\frac{v_{\max}^2}{\rho}\cos\alpha = 0.$$

Отсюда

$$R = \frac{Mg}{\sin\alpha - f\cos\alpha}, \quad v_{\max} = \sqrt{g\rho\frac{1 + f\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha - f}}.$$

Из треугольника OAB имеем $\cos\alpha = \rho/r$, т. е.

$$\sin\alpha = \frac{1}{r}\sqrt{r^2 - \rho^2} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{r^2 - \rho^2}}{\rho}.$$

После подстановки этих значений окончательно получим

$$v_{\max} = \sqrt{gr\frac{\rho + f\sqrt{r^2 - \rho^2}}{\sqrt{r^2 - \rho^2} - f\rho}}, \quad R = \frac{Mgr}{\sqrt{r^2 - \rho^2} - f\rho}.$$

Искомое нормальное давление на внутреннюю поверхность полусферы равно по модулю нормальной реакции $\boldsymbol{R}$ и направлено противоположно.

Центробежная сила инерции $\boldsymbol{J}_n$, которой мы пользовались при решении задачи методом кинетостатики, в действительности не при-

ложена к точке A. Поэтому при решении данной задачи с помощью основного закона динамики следует, естественно, учитывать только те силы, которые *действительно* приложены к материальной точке, т. е. $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{F}_{\text{тр}}$:

$$M\boldsymbol{w}_n = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{R} + \boldsymbol{F}_{\text{тр}}^{\max}.$$

В проекциях на оси n_1 и τ_1 находим

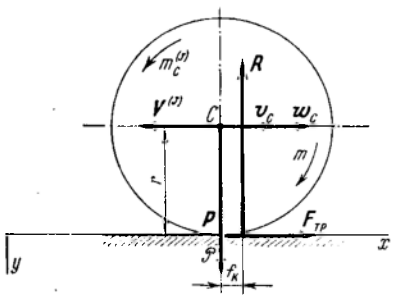
$$Mw_n \cos\alpha = R - Mg\sin\alpha, \quad -Mw_n \sin\alpha = -F_{\text{тр}}^{\max} - Mg\cos\alpha.$$

Учитывая, что $w_n = v^2_{\max}/\rho$, $F_{\text{тр}}^{\max} = fR$, получим после решения этой системы уравнений искомые величины R и $v_{\max}$.

Решение задачи методом кинетостатики несколько более громоздко, так как приходится дополнительно определять и изображать силу инерции $\boldsymbol{J}_n$. Следовательно, целесообразнее решать задачу с помощью основного закона динамики.

Задача 10.5. Однородное круглое колесо массы M и радиуса r катится без скольжения по горизонтальному рельсу.

Определить модуль вращающего момента, который нужно приложить к колесу для того, чтобы центр тяжести C колеса двигался со скоростью $v_C = at$, где a — постоянная. Найти также модуль нормальной реакции $\boldsymbol{R}$ рельса и модуль силы трения $\boldsymbol{F}_{\text{тр}}$ колеса о рельс, если коэффициент трения качения равен $f_{\text{к}}$.



К задаче 10.5.

Р е ш е н и е. К колесу приложены активные силы и моменты: сила тяжести $\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{g}$ и искомый вращающий момент m. Реакциями связей являются: нормальная реакция $\boldsymbol{R}$ рельса, вынесенная в сторону движения на расстояние $f_{\text{к}}$ от центра тяжести C колеса, и сила трения $\boldsymbol{F}_{\text{тр}}$, направленная вдоль рельса в сторону движения. Добавляем силы инерции колеса, совершающего плоское движение, приняв за полюс точку C. Силы инерции приводятся к силе, равной главному вектору $\boldsymbol{V}^{(J)}$, и паре сил, момент которой равен главному моменту $m_C^{(J)}$.

Сила инерции $\boldsymbol{V}^{(J)}$ приложена в центре тяжести C колеса, направлена в сторону, противоположную его ускорению $\boldsymbol{w}_C$, т. е. налево, и равна взятому с обратным знаком произведению массы колеса на ускорение его центра тяжести C, т. е. $\boldsymbol{V}^{(J)} = -M\boldsymbol{w}_C$.

Выберем систему неподвижных осей координат xy, изображенных на рисунке. По условию, $v_{Cx} = at$, тогда $w_{Cx} = \frac{dv_{Cx}}{dt} = a$. Следовательно,

$$V_x^{(J)} = -Ma. \qquad (1)$$

Знак главного момента сил инерции колеса $m_C^{(J)}$ противоположен знаку проекции углового ускорения ε на ось z, причем

$$m_C^{(J)} = -I_C\varepsilon_z.$$

Так как

$$I_C = \frac{Mr^2}{2}, \quad \text{а} \quad \varepsilon_z = \frac{w_{Cx}}{r} = \frac{a}{r},$$

то

$$m_C^{(J)} = -\frac{Mra}{2}. \tag{2}$$

Решаем задачу методом кинетостатики. Учитывая, что все активные силы, реакции связей и силы инерции лежат в одной плоскости, составим три уравнения

$$\sum F_{kx} = F_{\text{тр}} + V_x^{(J)} = 0,$$

$$\sum F_{ky} = P - R = 0, \tag{3}$$

$$\sum m_C(\boldsymbol{F}_k) = m + m_C^{(J)} - F_{\text{тр}}r - Rf_{\text{к}} = 0.$$

Воспользовавшись формулами (1) и (2), запишем систему (3) в виде

$$F_{\text{тр}} - Ma = 0,$$

$$Mg - R = 0, \tag{4}$$

$$m - \frac{Mgra}{2} - F_{\text{тр}}r - Rf_{\text{к}} = 0.$$

Решив систему уравнений (4), получим

$$R = Mg, \quad F_{\text{тр}} = \frac{Mg^2}{a}, \quad m = Mg\left(\frac{a^2}{2g} + f_{\text{к}} + \frac{gr}{a}\right).$$

Эту задачу проще решить с помощью дифференциальных уравнений плоского движения твердого тела:

$$M\ddot{x}_C = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}^e, \quad M\ddot{y}_C = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}^e, \quad I_C\ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^{n} m_C(\boldsymbol{F}_k^e).$$

Действительно, изобразив на рисунке все силы и моменты, кроме главного вектора и главного момента сил инерции колеса, запишем:

$$M\ddot{x}_C = F_{\text{тр}}, \quad M\ddot{y}_C = Mg - R, \quad I_C\ddot{\varphi} = m - F_{\text{тр}}r - Rf_{\text{к}}.$$

Учитывая, что

$$\ddot{x}_C = w_{Cx} = a, \quad \ddot{y}_C = 0, \quad \ddot{\varphi} = \varepsilon_z = \frac{w_{Cx}}{r} = \frac{a}{r} \quad \text{и} \quad I_C = \frac{Mr^2}{2},$$

получим

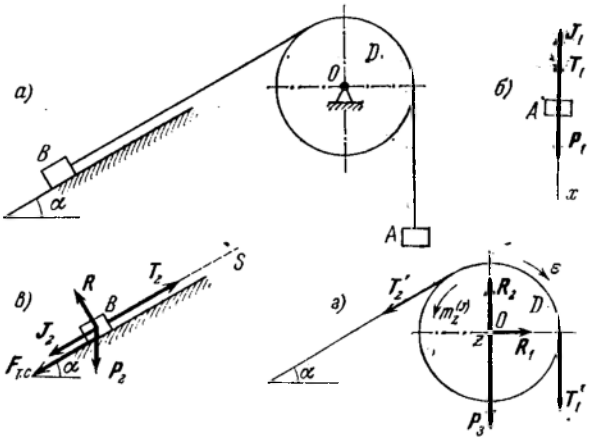
$$M\ddot{x}_C = F_{тр},$$

$$0 = Mg - R,$$

$$\frac{Mra}{2} = m - F_{тр}r - Rf_к.$$

Эта система уравнений тождественна системе уравнений (4).

Задача 10.6. Грузы A и B соединены тонкой нерастяжимой нитью, переброшенной через блок D. При опускании вниз груза A массы M_1 блок D массы M_3 вращается вокруг своей неподвижной



К задаче 10.6.

оси, а груз B массы M_2 поднимается вверх по наклонной плоскости, расположенной под углом α к горизонту.

Определить ускорение грузов A и B и реакции левой и правой ветвей нити. Коэффициент трения скольжения груза B о наклонную плоскость равен f. Блок D считать однородным круглым диском. Массой нити пренебречь.

Р е ш е н и е. Система состоит из трех масс: груза A, груза B и блока D. Решаем задачу методом кинетостатики. Применив закон освобождаемости от связей, рассмотрим каждую из масс в отдельности.

Груз A, опускаясь ускоренно вниз, движется поступательно с искомым ускорением $\boldsymbol{w}$.

К грузу A приложены (рис. *б*): одна активная сила — его сила тяжести $\boldsymbol{P}_1 = M_1\boldsymbol{g}$ и реакция правой ветви нити $\boldsymbol{T}_1$. Ускорение груза направлено вниз, поэтому равнодействующая его сил инерции $\boldsymbol{J}_1$ направлена вверх: $\boldsymbol{J}_1 = -M_1\boldsymbol{w}$, или в проекции на ось x:

$$J_{1x} = -M_1 w_x.$$

Запишем уравнение равновесия сил в проекции на вертикальную ось x:

$$P_1 - T_1 + J_{1x} = 0,$$

т. е.

$$M_1 g - T_1 - M_1 w_x = 0. \qquad (1)$$

Груз B, поднимаясь по наклонной плоскости вверх, движется поступательно с тем же по модулю ускорением w.

К грузу B приложены: одна активная сила — его сила тяжести $\boldsymbol{P}_2 = M_2\boldsymbol{g}$, нормальная реакция $\boldsymbol{R}$ наклонной плоскости, сила трения скольжения $\boldsymbol{F}_{т.с}$ груза B о наклонную плоскость, реакция левой ветви нити $\boldsymbol{T}_2$ (рис. *в*).

Ускорение $\boldsymbol{w}$ груза B направлено вдоль наклонной плоскости вверх. Поэтому равнодействующая сил инерции $\boldsymbol{J}_2$ груза B направлена параллельно линии наибольшего ската наклонной плоскости вниз: $\boldsymbol{J}_2 = -M_2\boldsymbol{w}$. Ее проекция $J_{2s} = -M_2 w_s$ (направление оси s указано на рис. *в*).

Составим уравнение равновесия сил в проекции на ось s:

$$T_2 - M_2 g \sin\alpha - F_{т.с} + J_{2s} = 0.$$

Учитывая, что $J_{2s} = -M_2 w_s$, $F_{т.с} = fN = fM_2 g\cos\alpha$, запишем это уравнение в виде

$$T_2 - M_2 g \sin\alpha - fM_2 g\cos\alpha - M_2 w_s = 0. \qquad (2)$$

Переходим к рассмотрению блока D, вращающегося вокруг неподвижной оси z. К блоку D приложены: одна активная сила — его сила тяжести $\boldsymbol{P}_3 = M_3\boldsymbol{g}$, реакция правой ветви нити $\boldsymbol{T}'_1$, реакция левой ветви нити $\boldsymbol{T}'_2$, составляющие реакции неподвижной оси $\boldsymbol{R}_1$ и $\boldsymbol{R}_2$ (рис. *г*).

Силы инерции блока приводятся к паре с моментом $m_z^{(J)}$, обратным по знаку проекции углового ускорения ε_z и равным произведению момента инерции блока I_z относительно оси z вращения блока, направленной за плоскость рисунка, на проекцию его углового ускорения, т. е. $m_z^{(J)} = -I_z\varepsilon_z$. Обозначив радиус блока r, запишем $I_z = \frac{M_3 r^2}{2}$. Следовательно,

$$m_z^{(J)} = -\frac{M_3 r^2}{2}\varepsilon_z.$$

Рассматривая равновесие сил, запишем уравнение моментов относительно оси вращения z:

$$-T'_2 r + m_z^{(J)} + T'_1 r = 0$$

(так как ось z направлена за плоскость рисунка, то положительным для читателя является направление по ходу часовой стрелки, а отрицательным — против хода часовой стрелки).

На основании закона равенства действия и противодействия $\boldsymbol{T}_1' = -\boldsymbol{T}_1$, $\boldsymbol{T}_2' = -\boldsymbol{T}_2$, т. е. по модулю $T_1' = T_1$ и $T_2' = T_2$. После подстановки в уравнение моментов значения $m_z^{(J)}$ и сокращения на r находим

$$T_2 + \frac{M_3 r\varepsilon_z}{2} - T_1 = 0. \tag{3}$$

Проекция ускорения точки нити, лежащей на ободе блока, равна

$$w_x = w_s = r\varepsilon_z \tag{4}$$

(проскальзыванием нити по ободу блока мы пренебрегаем).

Остается решить систему уравнений (1)—(4):

$$M_1 g - T_1 - M_1 w_x = 0,$$

$$T_2 - M_2 g \sin\alpha - fM_2 g \cos\alpha - M_2 w_s = 0,$$

$$T_2 + \frac{M_3 r\varepsilon_z}{2} - T_1 = 0,$$

$$r\varepsilon_z = w_x = w_s.$$

Определяя из этих уравнений неизвестные w_x, T_1 и T_2, получим

$$w_x = 2g\frac{M_1 - M_2(\sin\alpha + f\cos\alpha)}{2M_1 + 2M_2 + M_3},$$

$$T_1 = \frac{2gM_1M_2(1 + \sin\alpha + f\cos\alpha)}{2M_1 + 2M_2 + M_3}, \tag{5}$$

$$T_2 = \frac{2gM_1M_2(1 + \sin\alpha + f\cos\alpha) - gM_3[M_1 - M_2(\sin\alpha + f\cos\alpha)]}{2M_1 + 2M_2 + M_3}.$$

При $M_1 > M_2(\sin\alpha + f\cos\alpha)$ имеем $w_x > 0$, т. е. ускорение груза A направлено вниз.

Если решать эту задачу, пренебрегая массой блока D по сравнению с массами грузов A и B, то, считая $P_3 = 0$, находим

$$w_x = g\frac{M_1 - M_2(\sin\alpha + f\cos\alpha)}{M_1 + M_2}, \quad T_1 = T_2 = g\frac{M_1M_2(1 + \sin\alpha + f\cos\alpha)}{M_1 + M_2}.$$

Итак, модули реакций левой и правой ветвей нити, переброшенной через блок, различны при учете массы блока и одинаковы, если массой блока пренебречь.

Если в данной задаче требовалось бы определить давление блока D на его ось, то при рассмотрении равновесия блока (см. рис. *г*) следовало бы, кроме уравнения моментов относительно оси z, составить также уравнения проекций всех сил на горизонтальную и вертикальную оси:

$$R_1 - T_2'\cos\alpha = 0,$$

$$R_2 - M_3 g - T_1' - T_2'\sin\alpha = 0,$$

откуда

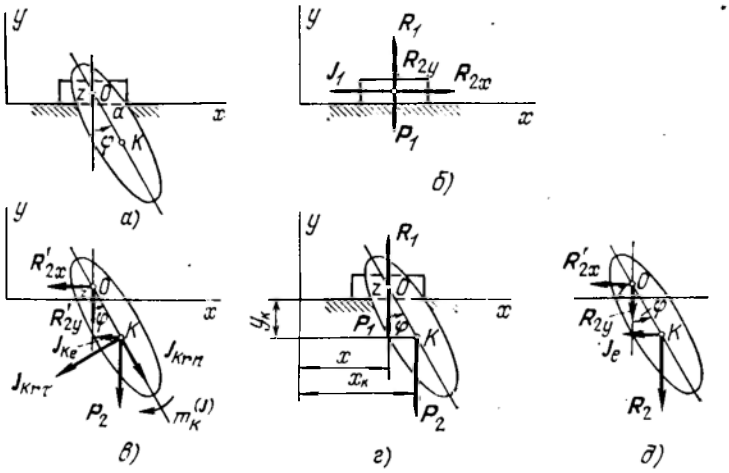
$$R_1 = T_2' \cos\alpha = T_2 \cos\alpha,$$

$$R_2 = M_3 g + T_1' + T_2' \sin\alpha = M_3 g + T_1 + T_2 \sin\alpha.$$

После подстановки значений T_1 и T_2 из формул (5) мы получим модули составляющих реакций оси блока $\boldsymbol{R}_1$ и $\boldsymbol{R}_2$. Искомые составляющие давлений блока D на ось противоположны по направлению соответствующим составляющим реакций оси $\boldsymbol{R}_1$ и $\boldsymbol{R}_2$ и равны им по модулю.

Если в данной задаче требовалось бы определить только ускорение w груза A, то значительно проще получить результат, применив общее уравнение динамики (см. задачу 10.23) или уравнение Лагранжа второго рода.

Задача 10.7. Физический маятник массы M_2 колеблется около горизонтальной оси z, проходящей перпендикулярно к плоскости



К задаче 10.7.

рисунка через центр тяжести O ползуна. При этом ползун массы M_1 движется по гладкой горизонтальной неподвижной плоскости (рис. *а*). Момент инерции маятника относительно оси привеса z равен I_z, центр тяжести K маятника отстоит от оси z на расстоянии $OK = a$. Оси x, y и направление положительного отсчета угла поворота φ указаны на рис. *а*.

Составить дифференциальные уравнения движения системы, а также определить давление ползуна на горизонтальную плоскость.

Р е ш е н и е. Данная система имеет две степени свободы, ибо для определения положения всех ее точек надо задать два независимых параметра, например x и φ, соответственно определяющих

положение ползуна на плоскости и маятника по отношению к ползуну.

Расчленим систему и рассмотрим каждую из масс в отдельности.

Мысленно освободив ось z ползуна от маятника, заменим его действие на ползун двумя взаимно перпендикулярными реакциями $\boldsymbol{R}_{2x}$ и $\boldsymbol{R}_{2y}$. К ползуну приложены также: активная сила — его сила тяжести $\boldsymbol{P}_1 = M_1\boldsymbol{g}$ и реакция $\boldsymbol{R}_1$ горизонтальной плоскости (рис. *б*). Так как ползун движется поступательно, то силы инерции приводятся к равнодействующей $\boldsymbol{J}_1 = -M_1\boldsymbol{w}_1$, приложенной в центре тяжести O ползуна. Проекции $\boldsymbol{J}_1$ на оси x и y равны

$$J_{1x} = -M_1\ddot{x}, \quad J_{1y} = 0. \tag{1}$$

Применив метод кинетостатики к ползуну, получим уравнения

$$R_{2x} + J_{1x} = 0, \quad R_1 + R_{2y} + J_{1y} - M_1g = 0, \tag{2}$$

Учтя формулы (1), запишем уравнения (2) в виде

$$R_{2x} - M_1\ddot{x} = 0, \quad R_1 + R_{2y} - M_1g = 0. \tag{3}$$

Затем, мысленно отбросив ползун, компенсируем его действие на ось z маятника двумя взаимно перпендикулярными реакциями $\boldsymbol{R}'_{2x}$ и $\boldsymbol{R}'_{2y}$ (рис. *в*). На основании закона равенства действия и противодействия запишем

$$\boldsymbol{R}'_{2x} = -\boldsymbol{R}_{2x}, \quad \boldsymbol{R}'_{2y} = -\boldsymbol{R}_{2y}. \tag{4}$$

Кроме сил $\boldsymbol{R}_{2x}$ и $\boldsymbol{R}'_{2y}$ к маятнику приложена активная сила — его сила тяжести $\boldsymbol{P}_2 = M_2\boldsymbol{g}$.

Маятник совершает плоское движение. Поэтому, приняв за центр приведения центр тяжести K маятника, приведем силы инерции к силе $\boldsymbol{J}_2$, приложенной в точке K, и паре с моментом $m_K^{(J)}$:

$$\boldsymbol{J}_2 = -M_2\boldsymbol{w}_K, \tag{5}$$

$$m_K^{(J)} = -I_K\ddot{\varphi}, \tag{6}$$

где I_K — момент инерции маятника относительно горизонтальной оси, проходящей через центр тяжести K перпендикулярно к плоскости рисунка.

Для определения ускорения $\boldsymbol{w}_K$ точки K заметим, что маятник совершает сложное движение: переносное поступательное вместе с ползуном и относительное вращательное вокруг оси z, поэтому

$$\boldsymbol{w}_K = \boldsymbol{w}_{Ke} + \boldsymbol{w}_{Kr\tau} + \boldsymbol{w}_{Krn}. \tag{7}$$

Напомним, что при переносном поступательном движении ускорение Кориолиса равно нулю.

Использовав выражение (7) в формуле (5), запишем:

$$\boldsymbol{J}_2 = \boldsymbol{J}_{Ke} + \boldsymbol{J}_{Kr\tau} + \boldsymbol{J}_{Krn}, \tag{8}$$

где обозначено:

$$J_{Ke} = -M_2 w_{Ke}, \quad J_{K\tau} = -M_2 w_{K\tau}, \quad J_{Kn} = -M_2 w_{Kn}. \tag{9}$$

Силы инерции J_{Ke}, $J_{K\tau}$, J_{Kn} изображены на рис. *в*. Их модули равны

$$|J_{Ke}| = M_2 |\ddot{x}|, \quad |J_{K\tau}| = M_2 a |\ddot{\varphi}|, \quad |J_{Kn}| = M_2 a \dot{\varphi}^2. \tag{10}$$

Применив к маятнику метод кинетостатики, запишем уравнения проекций сил на оси x и y и моментов сил относительно оси, проходящей через точку O перпендикулярно к плоскости рисунка:

$$-R'_{2x} - J_{Ke} - J_{K\tau} \cos\varphi + J_{Kn} \sin\varphi = 0, \tag{11}$$

$$-R'_{2y} - M_2 g - J_{K\tau} \sin\varphi - J_{Kn} \cos\varphi = 0, \tag{12}$$

$$m_K^{(J)} - J_e a \cos\varphi - J_{K\tau} a - M_2 g a \sin\varphi = 0. \tag{13}$$

Приняв во внимание формулы (6) и (10), получим уравнения (11), (12) и (13) в виде

$$-R'_{2x} - M_2 \ddot{x} - M_2 a \ddot{\varphi} \cos\varphi + M_2 a \dot{\varphi}^2 \sin\varphi = 0, \tag{14}$$

$$-R'_{2y} - M_2 g - M_2 a \ddot{\varphi} \sin\varphi - M_2 a \dot{\varphi}^2 \cos\varphi = 0, \tag{15}$$

$$-I_K \ddot{\varphi} - M_2 \ddot{x} a \cos\varphi - M_2 a^2 \ddot{\varphi} - M_2 g a \sin\varphi = 0. \tag{16}$$

Собрав в уравнении (16) подобные первый и третий члены и учтя, что по теореме Штейнера $I_K + M_2 a^2 = I_z$, запишем уравнение (16):

$$I_z \ddot{\varphi} + M_2 a \ddot{x} \cos\varphi + M_2 g a \sin\varphi = 0. \tag{17}$$

Итак, мы составили пять уравнений кинетостатики: два уравнения (3); (14), (15) и (17). В эти уравнения входят три неизвестные реакции R_1, R_{2x}, R_{2y}. Приняв во внимание (4) и сложив первое уравнение (3) и (14), а также второе уравнение (3) и (15), получим

$$(M_1 + M_2)\ddot{x} + M_2 a \ddot{\varphi} \cos\varphi - M_2 a \dot{\varphi}^2 \sin\varphi = 0, \tag{18}$$

$$R_1 = M_1 g + M_2 g + M_2 a \ddot{\varphi} \sin\varphi + M_2 a \dot{\varphi}^2 \cos\varphi. \tag{19}$$

Дифференциальные уравнения (17) и (18) описывают движение данной системы (уравнений — два, ибо данная система имеет две степени свободы). Искомое давление N ползуна на горизонтальную плоскость равно по модулю реакции R_1 (см. формулу (19)) и направлено противоположно ей. Заметим, что предварительно надо проинтегрировать систему уравнений (17) и (18) и найти зависимость $\ddot{\varphi}$ и $\dot{\varphi}$ от φ.

Минуя метод кинетостатики, эту задачу можно решить с помощью теоремы о движении центра масс системы

$$M\ddot{x}_C = \sum_{k=1}^{n} F^e_{kx}, \quad M\ddot{y}_C = \sum_{k=1}^{n} F^e_{ky} \tag{20}$$

и уравнения динамики относительного движения маятника

$$I_z\ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^{n} m_z(\boldsymbol{F}_k^e) + m_z(\boldsymbol{J}_e), \tag{21}$$

Для системы, состоящей из ползуна и маятника, внешними силами являются: $\boldsymbol{P}_1 = M_1\boldsymbol{g}$ — сила тяжести ползуна, $\boldsymbol{P}_2 = M_2\boldsymbol{g}$ — сила тяжести маятника, R_1 — реакция горизонтальной плоскости (рис. *г*).

Приняв во внимание, что

$$x_K = x + a\sin\varphi, \quad y_K = -a\cos\varphi, \tag{22}$$

и вычислив вторые производные (22) по времени, получим

$$\ddot{x}_K = \ddot{x} + a\ddot{\varphi}\cos\varphi - a\dot{\varphi}^2\sin\varphi, \quad \ddot{y}_K = a\ddot{\varphi}\sin\varphi + a\dot{\varphi}^2\cos\varphi. \tag{23}$$

Подставив выражения (23) в формулы

$$M\ddot{x}_C = M_1\ddot{x} + M_2\ddot{x}_K, \quad M\ddot{y}_C = M_1\ddot{y} + M_2\ddot{y}_K$$

и учтя, что y постоянно и, значит, $\ddot{y} = 0$, находим

$$M\ddot{x}_C = (M_1 + M_2)\ddot{x} + M_2a\ddot{\varphi}\cos\varphi - M_2a\dot{\varphi}^2\sin\varphi, \tag{24}$$

$$M\ddot{y}_C = M_2a\ddot{\varphi}\sin\varphi + M_2a\dot{\varphi}^2\cos\varphi.$$

Суммы проекций внешних сил равны

$$\sum F_{kx}^e = 0, \quad \sum F_{ky}^e = R_1 - P_1 - P_2. \tag{25}$$

Подстановка результатов (24) и (25) в уравнения (20) приводит к полученным выше методом кинетостатики уравнениям (18) и (19).

Для применения уравнения (21) заметим, что к маятнику приложены внешние силы (рис. *д*): $\boldsymbol{P}_2 = M_2\boldsymbol{g}$ — сила тяжести маятника, $\boldsymbol{R}_{2x}'$, $\boldsymbol{R}_{2y}'$ — составляющие реакции оси z. Добавим силу инерции $\boldsymbol{J}_e$ в переносном поступательном движении: $\boldsymbol{J}_e = -M_2\boldsymbol{w}_e$, т. е.

$$|\boldsymbol{J}_e| = M_2|\ddot{x}|. \tag{26}$$

Правая часть уравнения (21) имеет вид $\sum m_z(\boldsymbol{F}_k^e) + m_z(\boldsymbol{J}_e) = -M_2ga\sin\varphi - J_e a\cos\varphi$. Приняв во внимание выражение (26), запишем:

$$\sum m_z(\boldsymbol{F}_k^e) + m_z(\boldsymbol{J}_e) = -M_2ga\sin\varphi - M_2a\ddot{x}\cos\varphi. \tag{27}$$

Подстановка результата (27) в уравнение (21) приводит к полученному методом кинетостатики уравнению (17).

Сопоставление степени сложности решения этой задачи двумя методами показывает, что второй метод является менее громоздким. (Вместо пяти уравнений с последующим исключением R_{2x} и R_{2y} удалось непосредственно составить три искомых уравнения. При этом составление пяти уравнений кинетостатики усложнено введением сил инерции.)

Ниже эта задача решена с помощью общего уравнения динамики (см. задачу 10.26) и уравнениями Лагранжа (см. задачу 10.42), а также приведена оценка сравнительной сложности ее решения разными методами.

В настоящее время в инженерной практике происходит постепенное вытеснение метода кинетостатики общими теоремами динамики и уравнениями Лагранжа.

У к а з а н и е. Рекомендуем решить следующие задачи из «Сборника задач по теоретической механике» И. В. Мещерского: 41.1—41.4, 41.8, 41.10, 41.11, 41.13, 41.16, 41.17, 41.20—41.23.

§ 3. Давление вращающегося твердого тела на ось вращения

При вращении твердого тела вокруг неподвижной оси возникают динамические давления на опоры твердого тела. Пусть подвижные оси xyz связаны с твердым телом (рис. 10.14); O — произвольная точка на оси вращения, ось z направлена вдоль оси вращения. Оси x и y выбраны так, чтобы вместе с осью z образовать правую систему осей координат. M — масса твердого тела, ω — угловая скорость твердого тела, ε — угловое ускорение твердого тела, C (x_C, y_C, z_C) — центр тяжести твердого тела, I_{xz}, I_{yz} — центробежные моменты инерции твердого тела, a, b — расстояние от опор A, B до начала координат O; N'_{Ax}, N'_{Ay}, N'_{Az}, N'_{Bx}, N'_{By}, N'_{Bz} — составляющие динамических давлений на опоры; N_{Ax}, N_{Ay}, N_{Az}, N_{Bx}, N_{By}, N_{Bz} — составляющие давлений на опоры, равные суммам соответствующих статических и динамических давлений.

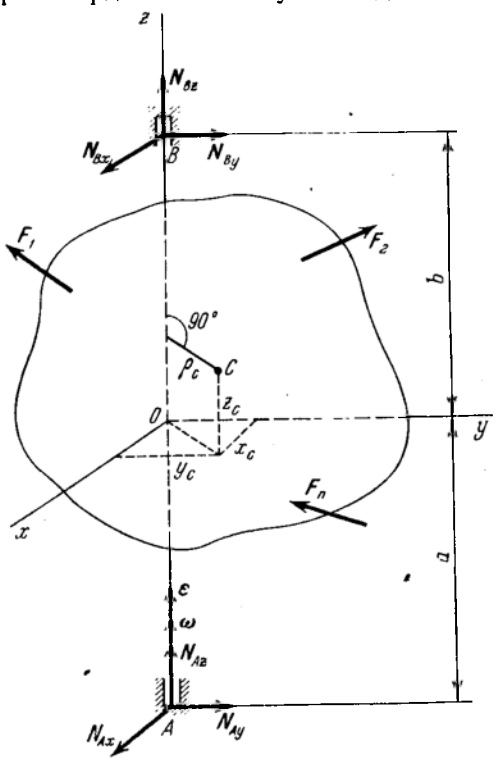


Рис. 10.14.

Эту задачу можно решить методом кинетостатики. В результате приведения сил инерции твердого тела к центру O получается сила, равная главному вектору $\boldsymbol{V}^{(J)}$, и пара сил, момент которой равен главному моменту $\boldsymbol{m}_O^{(J)}$ сил инерции.

Проекции главного вектора $V_x^{(J)}$, $V_y^{(J)}$, $V_z^{(J)}$ сил инерции твердого тела на подвижные оси координат x, y, z, связанные с твердым телом, имеют вид

$$V_x^{(J)} = Mx_C\omega^2 + My_C\varepsilon_z, \quad V_y^{(J)} = My_C\omega^2 - Mx_C\varepsilon_z, \quad V_z^{(J)} = 0.$$

Модуль главного вектора сил инерции равен

$$V^{(J)} = M\rho_C\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4},$$

где $\rho_C = \sqrt{x_C^2 + y_C^2}$ — эксцентриситет, т. е. расстояние от центра тяжести C твердого тела до оси вращения.

Главный вектор сил инерции обращается в нуль, когда $\rho_C = 0$, т. е. центр тяжести C твердого тела лежит на оси вращения z.

Главные моменты сил инерции твердого тела относительно подвижных осей координат x, y, z, связанных с твердым телом, записываются в форме

$$m_x^{(J)} = -I_{yz}\omega^2 + I_{xz}\varepsilon_z, \quad m_y^{(J)} = I_{xz}\omega^2 + I_{yz}\varepsilon_z, \quad m_z^{(J)} = -I_z\varepsilon_z.$$

Введем вспомогательный момент $m_O^{(J)*}$, отличающийся от главного момента сил инерции относительно центра O отсутствием составляющей главного момента сил инерции относительно оси вращения z. Модуль этого момента равен

$$m_O^{(J)*} = \sqrt{I_{xz}^2 + I_{yz}^2}\cdot\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Момент $m_O^{(J)*}$ обращается в нуль, если $I_{xz} = I_{yz} = 0$, т. е. когда ось вращения z является главной осью инерции в точке O.

Для того чтобы *силы инерции* твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, *были уравновешены* в смысле $V^{(J)} = 0$, $m_O^{(J)*} = 0$, необходимо и достаточно, чтобы *ось вращения z была главной центральной осью инерции твердого тека* ($\rho_C = 0$, $I_{xz} = I_{yz} = 0$).

При выполнении этих условий боковые динамические давления на опоры равны нулю: $N'_{Ax} = N'_{Ay} = N'_{Bx} = N'_{By} = 0$. (Сумма составляющих полных давлений, направленных вдоль оси вращения z, всегда равна нулю: $N'_{Az} + N'_{Bz} = 0$.) При этом полные давления на опоры равны соответствующим статическим давлениям.

Если силы инерции вращающегося твердого тела не уравновешены, то величины составляющих динамических боковых давлений N'_{Ax}, N'_{Ay}, N'_{Bx}, N'_{By} находятся из системы уравнений

$$\begin{aligned} N'_{Ax} + N'_{Bx} &= Mx_C\omega^2 + My_C\varepsilon_z, \\ N'_{Ay} + N'_{By} &= My_C\omega^2 - Mx_C\varepsilon_z, \\ N'_{Ay}a - N'_{By}b &= -I_{yz}\omega^2 + I_{xz}\varepsilon_z, \\ -N'_{Ax}a + N'_{Bx}b &= I_{xz}\omega^2 + I_{yz}\varepsilon_z. \end{aligned} \tag{1*}$$

Величины составляющих полных давлений N_{Ax}, N_{Ay}, N_{Az}, N_{Bx}, N_{By}, N_{Bz}, равные суммам соответствующих статических и динамических давлений, определяются из системы уравнений

$$N_{Ax} + N_{Bx} = Mx_C\omega^2 + My_C\varepsilon_z + \sum_{k=1}^{n} F_{kx},$$

$$N_{Ay} + N_{By} = My_C\omega^2 - Mx_C\varepsilon_z + \sum_{k=1}^{n} F_{ky},$$

$$N_{Az} + N_{Bz} = \sum_{k=1}^{n} F_{kz}, \qquad (2^*)$$

$$N_{Ay}a - N_{By}b = -I_{yz}\omega^2 + I_{xz}\varepsilon_z + \sum_{k=1}^{n} m_x(\boldsymbol{F}_k),$$

$$-N_{Ax}a + N_{Bx}b = I_{xz}\omega^2 + I_{yz}\varepsilon_z + \sum_{k=1}^{n} m_y(\boldsymbol{F}_k),$$

где $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, ..., $\boldsymbol{F}_n$ — активные силы.

Из третьего уравнения системы (2*), аналогичного соответствующему уравнению статики, может быть определена сумма величин составляющих давлений N_{Az} и N_{Bz}. Каждая из них в отдельности не может быть вычислена. Если опора B выполнена в виде цилиндрического подшипника, то $N_{Bz} = 0$ и, следовательно, $N_{Az} = \sum_{k=1}^{n} F_{kz}$.

Задачи, в которых требуется определить боковые динамические давления на опоры, решаются с помощью системы уравнений (1*).

Задачи, в которых требуется определить полные давления на опоры, решаются посредством системы уравнений (2*).

Указание. Задачи на определение полных давлений вращающегося твердого тела на ось вращения рекомендуется решать в следующем порядке:

1) выбрать подвижные оси x, y, z, связанные с вращающимся твердым телом, направив ось z вдоль оси вращения (если центр тяжести C лежит на оси вращения, то удобно начало координат O совмещать с центром тяжести C; если центр тяжести C не лежит на оси вращения, то начало координат следует брать в основании перпендикуляра, опущенного из центра тяжести C на ось вращения z, либо в одной из опор твердого тела);

2) изобразить на рисунке систему активных сил;

3) вычислить координаты центра тяжести C твердого тела x_C и y_C;

4) вычислить центробежные моменты инерции твердого тела I_{xz} и I_{yz};

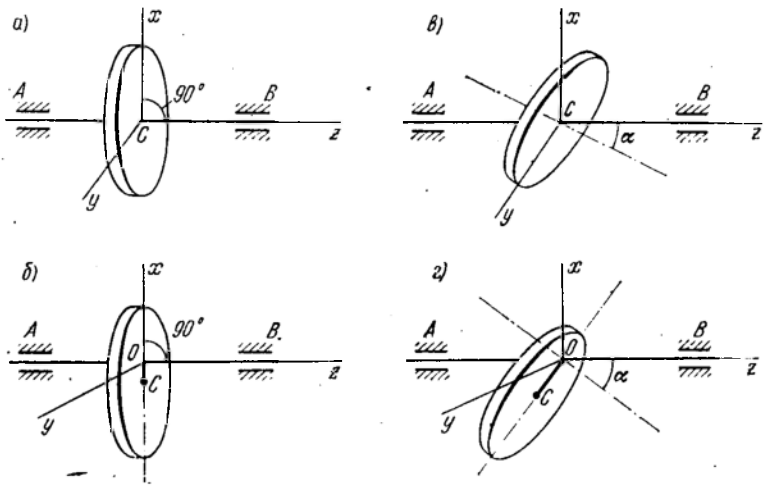
5) а) если неизвестными величинами являются боковые динамические давления на опоры, то составить систему уравнений (1*);

б) если неизвестными величинами являются полные давления на опоры, то составить систему уравнений (2*);

6) решив систему уравнений (1*) или (2*), определить искомые величины.

При решении задач, в которых определяются боковые динамические давления на опоры, второй пункт решения задачи следует опустить.

Задача 10.8. Однородный круглый диск вращается вокруг неподвижной оси. Как следует расположить ось вращения диска по



К задаче 10.8.

отношению к его оси симметрии для того, чтобы динамические давления на опоры были равны нулю?

Р е ш е н и е. Для того чтобы отсутствовали динамические давления на опоры, главный вектор $\boldsymbol{V}^{(J)}$ и вспомогательный момент сил инерции $\boldsymbol{m}_O^{(J)*}$ должны быть равны нулю: $\boldsymbol{V}^{(J)} = 0$, $\boldsymbol{m}_O^{(J)*} = 0$. Так как

$$V^{(J)} = M\rho_C \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \quad \text{и} \quad m_O^{(J)*} = \sqrt{I_{xz}^2 + I_{yz}^2}\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4},$$

то

$$M\rho_C \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = 0; \quad \sqrt{I_{xz}^2 + I_{yz}^2}\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = 0.$$

Величины M, ω и ε не равны нулю, поэтому $\rho_C = 0$, $I_{xz} = I_{yz} = 0$, т. е. ось вращения z должна быть главной центральной осью инерции диска.

Для выполнения полученных условий ось вращения диска следует совместить с его осью симметрии. Действительно, ось симметрии

однородного круглого диска проходит через его центр тяжести, т. е. $\rho_C = 0$, и, следовательно, главный вектор сил инерции $\boldsymbol{V}^{(J)}$ равен нулю. Кроме того, ось симметрии диска перпендикулярна к плоскости его материальной симметрии, т. е. является его главной осью инерции в точке пересечения с этой плоскостью, т. е. $I_{xz} = I_{yz} = 0$. Следовательно, вспомогательный момент сил инерции равен нулю. Итак, для того чтобы динамические давления на опоры были равны нулю, ось вращения диска должна совместиться с его осью симметрии, т. е. должна проходить через центр тяжести диска перпендикулярно к плоскости его материальной симметрии (рис. *а*).

Если ось вращения диска z перпендикулярна к его плоскости материальной симметрии xy, но не проходит через центр тяжести C диска (рис. *б*), то эксцентриситет ρ_C не равен нулю. Следовательно, главный вектор сил инерции $\boldsymbol{V}^{(J)}$ не равен нулю. При этом возникают динамические боковые давления на опоры A и B, которые даже при малом значении эксцентриситета ρ_C, но большой угловой скорости ω во много раз превосходят соответствующие статические давления. Подобная неуравновешенность называется *статической*, так как может быть обнаружена при отсутствии вращения диска.

Если ось вращения диска проходит через его центр тяжести C, но не перпендикулярна к плоскости материальной симметрии (рис. *в*), т. е. $\alpha \neq 0$, то ось z не является главной ($I_{xz} \neq 0$ и $I_{yz} \neq 0$). Следовательно, вспомогательный момент сил инерции $m_O^{(J)*}$ не равен нулю и возникают динамические боковые давления на опоры A и B, которые даже при малых углах α, но большой угловой скорости ω достигают больших значений. Такая неуравновешенность называется *динамической*, так как она обнаруживается только при вращении диска.

Практически невозможно насадить диск на ось вращения так, чтобы она совместилась с его осью симметрии, т. е. чтобы ρ_C и α равнялись нулю (рис. *г*). Следовательно, главный вектор и вспомогательный момент сил инерции не равны нулю и возникают динамические боковые давления на опоры A и B, которые значительно больше соответствующих статических давлений.

Проблема устранения динамических давлений играет большую роль в современной технике, так как в конструкциях машин-двигателей и производственных машин обычно имеется деталь (либо узел деталей), которая с большой угловой скоростью вращается вокруг неподвижной оси (турбинный диск, ротор электрического мотора или генератора, шпиндель токарного или расточного станков и т. д.).

Задача 10.9. Определить динамические давления на подшипники K и L коленчатого вала конструкции, описанной в задаче 9.8. Вал вращается с постоянной угловой скоростью ω.

Р е ш е н и е. Координаты центра тяжести вала определяются по формулам (см. рисунок к задаче 9.8):

$$x_C = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k} = \frac{m_A x_A + m_B x_B + m_E x_E + m_D x_D}{m_A + m_B + m_E + m_D} =$$

$$= \frac{m_B \cdot 2a + m_D(-2a)}{m_A + m_B + m_E + m_D} = 0,$$

$$y_C = \frac{\sum m_k y_k}{\sum m_k} = \frac{m_A y_A + m_B y_B + m_E y_E + m_D y_D}{m_A + m_B + m_E + m_D} =$$

$$= \frac{m_A \cdot 2a + m_E(-2a)}{m_A + m_B + m_E + m_D} = 0.$$

(напомним, что $x_A = x_E = y_B = y_D = 0$). Итак, центр тяжести C коленчатого вала лежит на оси z.

Воспользовавшись этим результатом, а также значениями центробежных моментов инерции, подсчитанными в задаче 9.8: $I_{yz} = I_{xz} = -16ma^2$, составим систему уравнений (1*) для определения проекций динамических боковых давлений N'_{Kx}, N'_{Ky}, N'_{Lx}, N'_{Ly}:

$$N'_{Kx} + N'_{Lx} = 0,$$

$$N'_{Ky} + N'_{Ly} = 0,$$

$$N'_{Ky} \cdot 9a - N'_{Ly} \cdot 9a = 16ma^2\omega^2,$$

$$-N'_{Kx} \cdot 9a + N'_{Lx} \cdot 9a = -16ma^2\omega^2.$$

Решив эту систему уравнений, получим $N'_{Kx} = -N'_{Lx} = \frac{8}{9} ma\omega^2$, $N'_{Ky} = -N'_{Ly} = \frac{8}{9} ma\omega^2$. Следовательно,

$$N'_K = \sqrt{N'^2_{Kx} + N'^2_{Ky}} = \frac{8}{9}\sqrt{2}ma\omega^2,$$

$$N'_L = \sqrt{N'^2_{Lx} + N'^2_{Ly}} = \frac{8}{9}\sqrt{2}ma\omega^2.$$

Динамические боковые силы давлений поворачиваются вместе с твердым телом. Они образуют пару сил с плечом $KL = 18a$.

Задача 10.10. Маятник массы M, совершающий качания около горизонтальной оси, имеет плоскость материальной симметрии, перпендикулярную к этой оси.

Определить полные давления на опоры A и B, отстоящие от плоскости материальной симметрии соответственно на расстояниях a и b; l — расстояние от центра тяжести маятника до оси привеса, I_z — момент инерции маятника относительно оси привеса. В начальный

момент маятник был отклонен от вертикали на угол φ_0 и отпущен без начальной скорости.

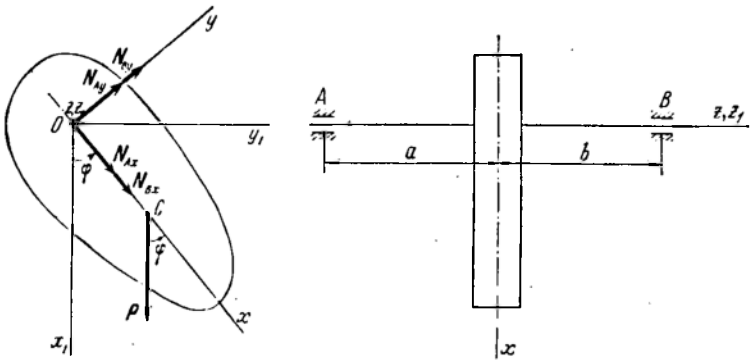
Р е ш е н и е. Направления выбранных неподвижных осей $x_1y_1z_1$ и подвижных осей xyz, связанных с маятником, указаны на рисунке. Координаты центра тяжести C маятника равны

$$x_C = l, \quad y_C = 0. \tag{1}$$

Так как ось привеса z перпендикулярна к плоскости материальной симметрии маятника, то она является главной осью инерции в точке O пересечения с этой плоскостью. Следовательно,

$$I_{xz} = I_{yz} = 0. \tag{2}$$

Единственной активной силой является сила тяжести $\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{g}$ маятника. Опорами служат подшипники A и B. Поэтому составляющие давлений вдоль оси привеса z отсутствуют: $N_{Az} = N_{Bz} = 0$.



К задаче 10.10.

Учитывая формулы (1) и (2), составляем систему уравнений (2*) для определения величин составляющих полных давлений:

$$N_{Ax} + N_{Bx} = Ml\dot{\varphi}^2 + Mg\cos\varphi, \tag{3}$$

$$N_{Ay} + N_{By} = -Ml\ddot{\varphi} - Mg\sin\varphi, \tag{4}$$

$$N_{Ay}a - N_{By}b = 0, \tag{5}$$

$$-N_{Ax}a + N_{Bx}b = 0. \tag{6}$$

Из уравнения (5) находим

$$N_{Ay} = \frac{b}{a} N_{By}, \tag{7}$$

и из (6) имеем

$$N_{Ax} = \frac{b}{a} N_{Bx}. \tag{8}$$

После подстановки значения N_{Ax} из формулы (8) в уравнение (3) и значения N_{Ay} из формулы (7) в уравнение (4) получаем

$$N_{Bx} = \frac{a}{a+b} M (l\dot{\varphi}^2 + g\cos\varphi), \tag{9}$$

$$N_{By} = -\frac{a}{a+b} M (l\ddot{\varphi} + g\sin\varphi). \tag{10}$$

Остается в формулы (9) и (10) подставить выражения $\dot{\varphi}$ и $\ddot{\varphi}$ через угол поворота φ. Для этого составим дифференциальное уравнение качаний маятника:

$$I_z\ddot{\varphi} = -Mgl\sin\varphi,$$

или

$$\ddot{\varphi} = -\frac{Mgl}{I_z}\sin\varphi. \tag{11}$$

Умножив левую и правую части уравнения (11) на $d\varphi$ и проинтегрировав его, получим:

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{2} = \frac{Mgl}{I_z}\cos\varphi + C.$$

Воспользовавшись начальными условиями движения: при $t = 0$ $\varphi = \varphi_0$, $\dot{\varphi} = 0$, находим, что

$$C = -\frac{Mgl}{I_z}\cos\varphi_0.$$

Итак,

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{Mgl}{I_z}(\cos\varphi - \cos\varphi_0). \tag{12}$$

Подставив значение $\dot{\varphi}^2$ из формулы (12) в формулу (9) и значение $\ddot{\varphi}$ из (11) в (10), получим величины N_{Bx} и N_{By}. Затем с помощью формул (7) и (8) находим N_{Ax} и N_{Ay}.

Окончательно,

$$N_{Bx} = \frac{a}{a+b}\frac{Mg}{I_z}[(2Ml^2 + I_z)\cos\varphi - 2Ml^2\cos\varphi_0],$$

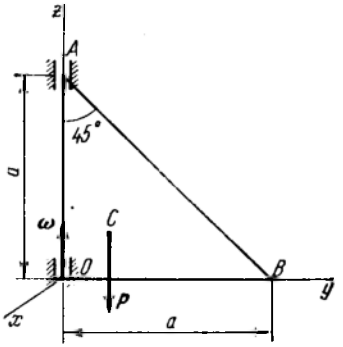
$$N_{Ax} = \frac{b}{a+b}\frac{Mg}{I_z}[(2Ml^2 + I_z)\cos\varphi - 2Ml^2\cos\varphi_0],$$

$$N_{By} = \frac{a}{a+b}\frac{Mg}{I_z}(Ml^2 - I_z)\sin\varphi,$$

$$N_{Ay} = \frac{a}{a+b}\frac{Mg}{I_z}(Ml^2 - I_z)\sin\varphi.$$

Задача 10.11. Определить полные давления однородной треугольной пластинки OAB массы M на подпятник O и подшипник A. Пластинка вращается с постоянной угловой скоростью ω. Размеры пластинки указаны на рисунке.

Р е ш е н и е. Начало подвижных осей координат, связанных с пластинкой, выбираем в подпятнике O, ось z направляем по оси вращения пластинки, ось y — вдоль горизонтального катета пластинки, а ось x обозначаем так, чтобы вместе с осями y и z она образовала правую систему координат.



К задаче 10.11.

Активной силой является сила тяжести $\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{g}$ пластинки. Центр тяжести треугольной пластинки расположен в точке пересечения ее медиан. Следовательно,

$$x_C = 0, \quad y_C = \frac{1}{3}a.$$

Центробежные моменты инерции пластинки OAB были вычислены при решении задачи 9.10:

$$I_{xz} = 0, \quad I_{yz} = \frac{Ma^2}{12}.$$

Угловое ускорение пластинки равно нулю, так как угловая скорость ω постоянна.

Составим систему уравнений (2*) для определения составляющих полных давлений на опоры:

$$N_{Ox} + N_{Ax} = 0,$$

$$N_{Oy} + N_{Ay} = \frac{1}{3}Ma\omega^2,$$

$$N_{Oz} = -Mg,$$

$$-N_{Ay}a = -\frac{Ma^2}{12}\omega^2 - Mg\frac{a}{3},$$

$$N_{Ax}a = 0.$$

$N_{Az} = 0$, так как опора A является подшипником.

Решив систему уравнений, определим искомые составляющие полных давлений пластинки на подпятник O и подшипник A:

$$N_{Ox} = N_{Ax} = 0, \quad N_{Oz} = -Mg,$$

$$N_{Ay} = \frac{M}{12}a\omega^2 + \frac{Mg}{3}, \quad N_{Oy} = \frac{M}{4}a\omega^2 - \frac{Mg}{3}.$$

При вращении пластинки AOB вокруг оси z с постоянной угловой скоростью ω появляются динамические давления на опоры:

$$N'_{Ay} = \frac{M}{12}a\omega^2, \quad N'_{Oy} = \frac{M}{4}a\omega^2. \qquad (1)$$

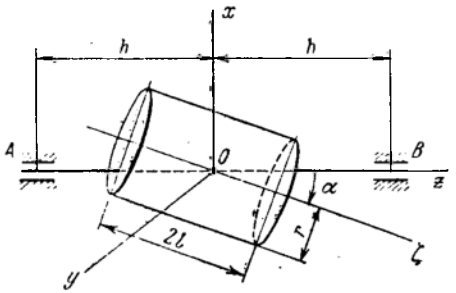
Статические давления пластинки на опоры равны

$$N_{Oz}^{ст} = -Mg, \quad N_{Ay}^{ст} = \frac{Mg}{3}, \quad N_{Oy}^{ст} = -\frac{Mg}{3}. \tag{2}$$

Динамические давления на опоры могут, при большой угловой скорости вращения твердого тела, значительно превосходить соответствующие статические давления. Так, в данной задаче при $\omega = 100$ рад/с и $a = 9{,}8$ см, воспользовавшись формулами (1) и (2), получим

$$\frac{N'_{Ay}}{N_{Ay}^{ст}} = \frac{a\omega^2}{4g} = 25, \quad \frac{N'_{Oy}}{N_{Oy}^{ст}} = \frac{3a\omega^2}{4g} = 75.$$

Задача 10.12. Прямой однородный круглый цилиндр массы M радиуса r и длиной $2l$ вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси z, проходящей через его центр тяжести C. Ось вращения z цилиндра образует с его осью симметрии ζ угол α.



К задаче 10.12.

Определить динамические боковые давления на опоры A и B, если $OA = OB = h$.

Р е ш е н и е. Подвижные оси x, y, z, связанные с цилиндром, изображены на рисунке. Центробежные моменты инерции цилиндра были подсчитаны в задаче 9.11:

$$I_{yz} = 0,$$

$$I_{xz} = \frac{M}{2}\left(\frac{r^2}{4} - \frac{l^2}{3}\right)\sin 2\alpha. \tag{1}$$

Центр тяжести C цилиндра лежит на оси z, следовательно,

$$x_C = y_C = 0. \tag{2}$$

Так как цилиндр вращается равномерно, то

$$\varepsilon = 0. \tag{3}$$

Воспользовавшись формулами (1), (2) и (3), составим систему уравнений для определения составляющих динамических боковых давлений N'_{Ax}, N'_{Ay}, N'_{Bx}, N'_{By}:

$$N'_{Ax} + N'_{Bx} = 0,$$

$$N'_{Ay} + N'_{By} = 0,$$

$$N'_{Ay}h - N'_{By}h = 0,$$

$$-N'_{Ax}h + N'_{Bx}h = \frac{M}{2}\left(\frac{r^2}{4} - \frac{l^2}{3}\right)\omega^2 \sin 2\alpha.$$

Решив эту систему уравнений, получим

$$N'_{Ay} = N'_{By} = 0, \quad N'_{Bx} = -N'_{Ax} = \frac{M}{4h}\left(\frac{r^2}{4} - \frac{l^2}{3}\right)\omega^2 \sin 2\alpha.$$

Итак, при вращении цилиндра создаются динамические боковые давления на опоры A и B, образующие пару сил с плечом $AB = 2h$.

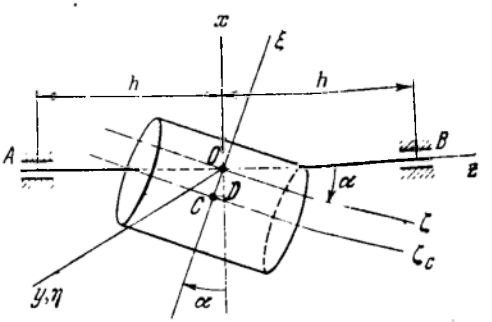
Боковые динамические реакции опор A и B равны по модулю соответствующим давлениям и направлены противоположно.

Задача 10.13. Решить предыдущую задачу, предполагая, что цилиндр насажен на ось z с эксцентриситетом $OC = \rho_C$.

Р е ш е н и е. Подвижные оси x, y, z расположены как и в предыдущей задаче. На рисунке введены также вспомогательные координатные оси ξ, η, ζ так, что ось η совмещается с осью y, а оси ξ и ζ оказываются повернутыми относительно осей x и z на угол α по ходу часовой стрелки.

Центр тяжести C цилиндра лежит на оси ξ и отстоит от начала координат O на расстоянии $OC = \rho_C$. Координаты центра тяжести C цилиндра:

$$x_C = OD = -|OC|\cos\alpha = -\rho_C\cos\alpha, \quad y_C = 0. \quad (1)$$



К задаче 10.13.

Центробежные моменты инерции цилиндра были подсчитаны в задаче 9.11 для случая, когда начало координат помещено в центре тяжести цилиндра, а оси ζ и ξ соответственно обозначены z_1 и x_1

$$I_{y_1z_1} = 0, \quad I_{x_1z_1} = (I_\zeta - I_\xi)\frac{\sin 2\alpha}{2}$$

(см. формулу (1) задачи 9.11), где $I_\xi = M\left(\frac{r^2}{4} + \frac{l^2}{3}\right)$.

Вычислим момент инерции цилиндра относительно оси ζ. Для этого проведем через центр тяжести C ось ζ_C, параллельную оси ζ, и применим теорему Штейнера: $I_\zeta = I_{\zeta C} + M\rho_C^2$. Так как $I_{\zeta C} = Mr^2/2$, то

$$I_\zeta = \frac{Mr^2}{2} + M\rho_C^2.$$

Следовательно,

$$I_{xz} = (I_\zeta - I_\xi)\frac{\sin 2\alpha}{2} = \left(\frac{Mr^2}{2} + M\rho_C^2 - M\frac{r^2}{4} - M\frac{l^2}{3}\right)\frac{\sin 2\alpha}{2} =$$

$$= M\left(\frac{r^2}{4} + \rho_C^2 - \frac{l^2}{3}\right)\frac{\sin 2\alpha}{2}.$$

Итак,

$$I_{yz} = 0, \quad I_{xz} = \frac{M}{2}\left(\frac{r^2}{4} + \rho_C^2 - \frac{l^2}{3}\right)\sin 2\alpha. \quad (2)$$

Цилиндр вращается равномерно, поэтому

$$\varepsilon = 0. \tag{3}$$

Воспользовавшись формулами (1), (2) и (3), составим систему уравнений (1*) для определения составляющих динамических боковых давлений N'_{Ax}, N'_{Ay}, N'_{Bx}, N'_{By}:

$$N'_{Ax} + N'_{Bx} = -M\rho_C\omega^2\cos\alpha,$$

$$N'_{Ay} + N'_{By} = 0,$$

$$N'_{Ay}h - N'_{By}h = 0,$$

$$-N'_{Ax}h + N'_{Bx}h = \frac{M}{2}\left(\frac{r^2}{4} + \rho_C^2 - \frac{l^2}{3}\right)\omega^2\sin 2\alpha.$$

Решив эту систему уравнений, получим

$$N'_{Ay} = N'_{By} = 0, \quad N'_{Ax} = -\frac{M}{2}\left[\left(\frac{r^2}{4} + \rho_C^2 - \frac{l^2}{3}\right)\frac{\sin 2\alpha}{2h} + \rho_C\cos\alpha\right]\omega^2,$$

$$N'_{Bx} = \frac{M}{2}\left[\left(\frac{r^2}{4} + \rho_C^2 - \frac{l^2}{3}\right)\frac{\sin 2\alpha}{2h} - \rho_C\cos\alpha\right]\omega^2.$$

Боковые динамические реакции опор A и B равны по модулю соответствующим давлениям и направлены противоположно им.

Указание. Рекомендуем решить следующие задачи из «Сборника задач по теоретической механике» И. В. Мещерского: 42.1, 42.2, 42.4—42.9, 42.12, 42.13, 42.16, 42.17.

§ 4. Принцип возможных перемещений

1. Возможные перемещения. Идеальные связи. *Вариацией функции* δy называется приращение функции, обусловленное изменением вида функции, при фиксированном значении аргумента. Так, при переходе от функции $y_1 = f_1(x)$ к функции $y_2 = f_2(x)$ вариация функции δy будет:

$$\delta y = y_2 - y_1 = f_2(x) - f_1(x).$$

В отличие от вариации функции δy, дифференциал функции dy является главной частью приращения функции, образуемого за счет приращения аргумента dx.

На рис. 10.15 изображен отрезок MM_1, численно равный вариации функции δy, которая соответствует фиксированному значению аргумента x. На том же рисунке показано, что отрезок, численно равный дифференциалу функции dy, соответствует приращенному значению аргумента $x + dx$.

Правила варьирования функций внешне подобны соответствующим правилам дифференцирования функций. Так, $\delta(cy) = c\delta y$,

где c — постоянная, $\delta(y_1 + y_2) = \delta y_1 + \delta y_2$, $\delta(y_1 \cdot y_2) = y_1 \delta y_2 + y_2 \delta y_1$ и т. д.

Если рассматривать варьирование сложной функции $z = \varphi(y)$, где $y = f(x)$, то ее вариация определяется по формуле $\delta z = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \delta y$. Пусть, например, $z = a \sin by$, где y — функция от x. Вариация функции z равна $\delta z = ab \cos by \, \delta y$. Таким образом, установлена связь между вариациями функций z и y.

Возможным называется перемещение точки из данного ее положения, допускаемое связями, наложенными на эту точку. Так, если материальная точка находится на неподвижной горизонтальной плоскости, то возможным является любое воображаемое перемещение точки из данного положения по плоскости.

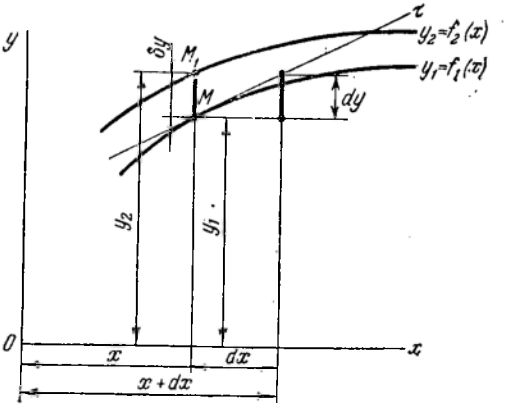


Рис. 10.15.

Возможное перемещение является воображаемым перемещением в данный момент (т. е. при фиксированном значении аргумента — времени t). В отличие от этого действительное перемещение точки происходит в определенном направлении под действием системы приложенных сил при непрерывном изменении аргумента — времени. Поэтому возможное перемещение точки является вариацией, а действительное перемещение — дифференциалом.

Если $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор точки, то $\delta \boldsymbol{r}$ — возможное перемещение точки, а $d\boldsymbol{r}$ — действительное перемещение точки. В разложении по ортам осей декартовых координат возможное перемещение имеет вид

$$\delta \boldsymbol{r} = \delta x \, \boldsymbol{i} + \delta y \, \boldsymbol{j} + \delta z \, \boldsymbol{k}.$$

где δx, δy, δz — проекции возможного перемещения $\delta \boldsymbol{r}$ точки на соответствующие оси декартовых координат. Действительное перемещение дается формулой $d\boldsymbol{r} = dx \, \boldsymbol{i} + dy \, \boldsymbol{j} + dz \, \boldsymbol{k}$, где dx, dy, dz — проекции действительного перемещения $d\boldsymbol{r}$ точки на эти оси, причем $dx = \dot{x} \, dt$, $dy = \dot{y} \, dt$, $dz = \dot{z} \, dt$.

Действительное перемещение точки является одним из числа возможных перемещений этой точки (для стационарных связей).

Для нестационарных связей (связей, явно зависящих от времени) возможное перемещение точки рассматривается при мгновенно остановленных связях (т. е. при фиксированном значении момента времени). В этом случае действительное перемещение уже не является частным случаем возможного.

Рассмотрим материальную точку, которая находится на некоторой поверхности (рис. 10.16). Возможным является перемещение в касательной плоскости к поверхности в данной точке (направление возможного перемещения точки в этой плоскости, конечно, может быть любым).

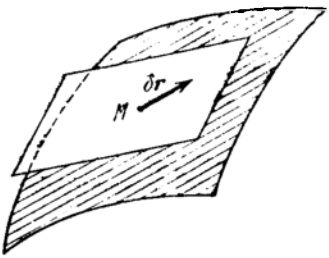


Рис. 10.16.

Аналогично, если материальная точка находится на кривой, которая является связью, наложенной на точку (рис. 10.17), то возможное перемещение направлено по касательной к кривой в данной точке.

Идеальные связи. Идеальными называются связи, сумма работ реакций которых на любых возможных перемещениях точек системы равна нулю, т. е.

$$\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{R}_k \, \delta \boldsymbol{r}_k = 0,$$

где $\boldsymbol{R}_k$ — равнодействующая реакций связи, действующих на k-ю точку, $\delta \boldsymbol{r}_k$ — возможное перемещение k-й материальной точки системы.

Примеры идеальных связей: идеально гладкие плоскости и поверхности, абсолютно жесткий стержень, абсолютно твердое тело и т. д. Для жесткого стержня (абсолютно твердого тела) нулю равны суммы работ реакций, с которыми одни точки стержня (тела) действуют на другие.

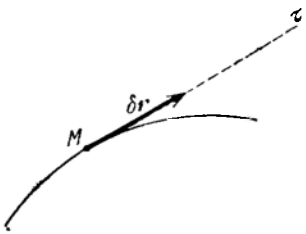


Рис. 10.17.

Негладкая плоскость не является идеальной связью. Действительно (рис. 10.18), реакция $\boldsymbol{R}$ плоскости является суммой двух ее составляющих: нормальной $\boldsymbol{R}_n$, перпендикулярной к плоскости в данной точке, и касательной, являющейся силой трения скольжения $\boldsymbol{F}_{т.с}$ точки о плоскость. Оставляя в стороне случай отрыва материальной точки от плоскости, надо возможное перемещение $\delta \boldsymbol{r}$ точки направить вдоль плоскости. При вычислении суммы работ составляющих реакций связей $\boldsymbol{R}_n$ и $\boldsymbol{F}_{т.с}$ на возможном перемещении $\delta \boldsymbol{r}$ работа силы $\boldsymbol{R}_n$ оказывается равной нулю, в то время как работа силы трения скольжения $\boldsymbol{F}_{т.с}$ не равна нулю. Следовательно, условие, определяющее идеальность связи, не выполняется.

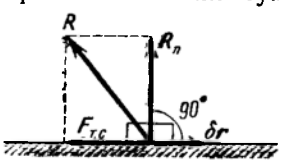


Рис. 10.18.

Рассмотрим пример. По горизонтальной негладкой плоскости направо движется материальная система, состоящая из колеса A и груза B, соединенных жестким невесомым стержнем CD. Колесо A катится без скольжения, а груз B скользит по негладкой плоскости (рис. 10.19). Трением качения пренебречь.

Определить, являются ли идеальными связи, наложенные на эту материальную систему.

На материальную систему наложены две связи: жесткий (недеформируемый) стержень CD и негладкая горизонтальная плоскость.

Реакции стержня $\boldsymbol{R}_1$ и $\boldsymbol{R}_2$, приложенные к грузу и колесу, направлены вдоль стержня. На основании закона равенства действия и противодействия имеем $\boldsymbol{R}_2 = -\boldsymbol{R}_1$. Реакцию негладкой плоскости, приложенную к колесу, разложим на две составляющие: нормальную реакцию $\boldsymbol{R}_A$ и силу трения $\boldsymbol{F}_{\text{тр}\,A}$. Обе силы приложены к колесу в точке P касания колеса с плоскостью совмещенной с мгновенным центром. Так как скорость $\boldsymbol{v}_P$ равна нулю, а $\boldsymbol{v}_P = \frac{d\boldsymbol{r}_P}{dt}$, то

$$d\boldsymbol{r}_P = \boldsymbol{v}_P\,dt = 0. \qquad (1)$$

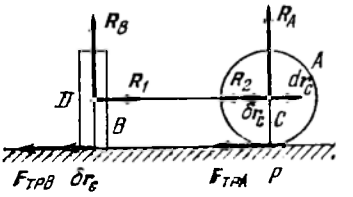


Рис. 10.19.

Разложим реакцию негладкой плоскости, приложенной к грузу B, на две составляющие: нормальную реакцию $\boldsymbol{R}_B$ и силу трения скольжение $\boldsymbol{F}_{\text{тр}B}$.

Дадим возможное перемещение $\delta\boldsymbol{r}_C$ центру тяжести C колеса по горизонтали налево; при движении всей системы направо элементарное, действительное, перемещение $d\boldsymbol{r}_C$ направлено направо. Однако возможным является воображаемое перемещение, допускаемое связями. Поэтому можно направить возможное перемещение $\delta\boldsymbol{r}_C$ как в сторону элементарного перемещения $d\boldsymbol{r}_C$ — направо, так и противоположно — налево.

Вычислим сумму работ реакций $\boldsymbol{R}_1$ и $\boldsymbol{R}_2$ стержня, приложенных к грузу B и колесу A:

$$\delta A(\boldsymbol{R}_1) + \delta A(\boldsymbol{R}_2) = \boldsymbol{R}_1 \cdot \delta\boldsymbol{r}_C + \boldsymbol{R}_2 \cdot \delta\boldsymbol{r}_C.$$

Так как $\boldsymbol{R}_2 = -\boldsymbol{R}_1$, то сумма работ реакций жесткого стержня на возможных перемещениях их точек приложения равна нулю:

$$\delta A(\boldsymbol{R}_1) + \delta A(\boldsymbol{R}_2) = 0. \qquad (2)$$

Поэтому на основании определения жесткий стержень CD является идеальной связью.

Вычислим сумму работ реакций плоскости $\boldsymbol{R}_B$ и $\boldsymbol{F}_{\text{тр}\,B}$, приложенных к грузу B на возможных перемещениях точек приложения этих сил. (Груз B движется поступательно, поэтому возможные перемещения всех его точек векторно равны между собой. В данном случае они равны $\delta\boldsymbol{r}_C$.) Сумма работ: $\delta A(\boldsymbol{R}_B) + \delta A(\boldsymbol{F}_{\text{тр}}) = \boldsymbol{R}_B \cdot \delta\boldsymbol{r}_C + \boldsymbol{F}_{\text{тр}\,B} \cdot \delta\boldsymbol{r}_C = R_B \delta r_C \cos 90^\circ + F_{\text{тр}\,B}\,\delta r_C \cos 0^\circ = F_{\text{тр}\,B}\delta r_C$, т. е.

$$\delta A(\boldsymbol{R}_B) + \delta A(\boldsymbol{F}_{\text{тр}B}) = F_{\text{тр}B}\delta r_C \neq 0. \qquad (3)$$

Так как сумма работ (3) оказалась не равной нулю, то негладкая горизонтальная плоскость служит для скользящего по ней груза B неидеальной связью.

Дадим центру тяжести C колеса A элементарное (действительное) перемещение $d\boldsymbol{r}_C$ (оно по условию направлено по горизонтали направо). Это допустимо, ибо неподвижная горизонтальная плоскость является стационарной связью, а при стационарных связях действительные перемещения входят в число возможных.

Вычислим сумму работ реакций $\boldsymbol{R}_A$ и $\boldsymbol{F}_{\text{тр}A}$, приложенных к колесу A в точке P, на элементарном перемещении точки, равном $d\boldsymbol{r}_P$, т. е.

$$\delta A(\boldsymbol{R}_A) + \delta A(\boldsymbol{F}_{\text{тр}A}) = \boldsymbol{R}_A \cdot d\boldsymbol{r}_P + \boldsymbol{F}_{\text{тр}A} \cdot d\boldsymbol{r}_P.$$

Приняв во внимание формулу (1), видим, что сумма работ равна нулю:

$$\delta A(\boldsymbol{R}_A) + \delta A(\boldsymbol{F}_{\text{тр}A}) = 0. \tag{4}$$

Следовательно, несмотря на то, что плоскость негладкая, для колеса, катящегося без скольжения, при отсутствии трения качения она является идеальной связью.

Если бы не пренебрегалось трением качения, то реакция R_A не была бы приложена к точке P и сумма работ не оказалась бы равной нулю и эта негладкая плоскость была бы неидеальной связью.

Итак, жесткий стержень и негладкая плоскость для колеса, катящегося по ней без скольжения, при отсутствии трения качения являются идеальными связями. Эта же негладкая плоскость для скользящего по ней груза представляет собой неидеальную связь.

2. Принцип возможных перемещений. Для равновесия материальной системы, подчиненной идеальным стационарным связям, необходимо и достаточно, чтобы сумма работ активных сил на любых возможных перемещениях точек системы равнялась нулю:

$$\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F}_k \cdot \delta\boldsymbol{r}_k = 0.$$

Аналогично в проекциях на оси декартовых координат имеем

$$\sum_{k=1}^{n} (F_{kx}\delta x_k + F_{ky}\delta y_k + F_{kz}\delta z_k) = 0.$$

Достоинством принципа возможных перемещений является отсутствие в его формулировке реакций идеальных связей.

Принцип возможных перемещений широко применяется в механике. С его помощью достаточно просто решать задачи о равновесии твердого тела и систем твердых тел, а также определять зависимости между модулями активных сил. Особенно эффективно применение принципа возможных перемещений при решении задач о равновесии систем твердых тел.

Исходя из принципа возможных перемещений, можно вывести уравнения равновесия твердого тела при наличии как плоской, так и пространственной системы сил.

Если не все связи, наложенные на систему, являются идеальными, например, имеются негладкие опорные плоскости и поверхности, то к активным силам следует добавлять силы трения и, следовательно, приравнивать нулю сумму работ не только активных сил, но и сил трения на любых возможных перемещениях точек системы. Составленное уравнение определяет зависимость между активными силами и силами трения.

Если требуется определить какую-либо реакцию идеальной связи, для которой $\boldsymbol{R}\,\delta\boldsymbol{r} = 0$, то следует, применяя закон освобождаемости от связей, отбросить соответствующую связь и заменить ее искомой реакцией. При составлении уравнения равновесия надо к активным силам добавить эту реакцию связи. Такой метод решения задач о равновесии систем твердых тел является чрезвычайно эффективным, так как искомая реакция связи непосредственно определяется из составленного уравнения равновесия. Применяя же обычные приемы статики, приходится составлять систему уравнений равновесия и определять искомую реакцию связи в результате решения этой системы уравнений.

У к а з а н и е. Задачи на равновесие твердых тел и систем твердых тел с помощью принципа возможных перемещений рекомендуется решать в следующем порядке:

1) изобразить на рисунке активные силы;

2) при наличии неидеальных связей добавить соответствующие реакции связей (например, силы трения);

3) в случае необходимости определить реакцию связи, мысленно отбросить соответствующую связь и заменить ее искомой реакцией (если $\boldsymbol{R}\,\delta\boldsymbol{r} = 0$).

Дальнейшие действия следует осуществлять в зависимости от того, имеет материальная система одну степень свободы или же несколько.

а) *В случае системы с одной степенью свободы:*

4) дать возможное перемещение одной из точек системы и выразить возможные перемещения точек приложения сил в зависимости от заданного возможного перемещения;

5) вычислить сумму работ всех сил, указанных в пунктах 1), 2) и 3), на соответствующих возможных перемещениях их точек приложения, и приравнять эту сумму нулю;

6) решив составленное уравнение равновесия, определить искомую величину.

б) *В случае системы с несколькими степенями свободы:*

4) выбрать независимые возможные перемещения точек системы в числе, равном числу степеней свободы этой системы;

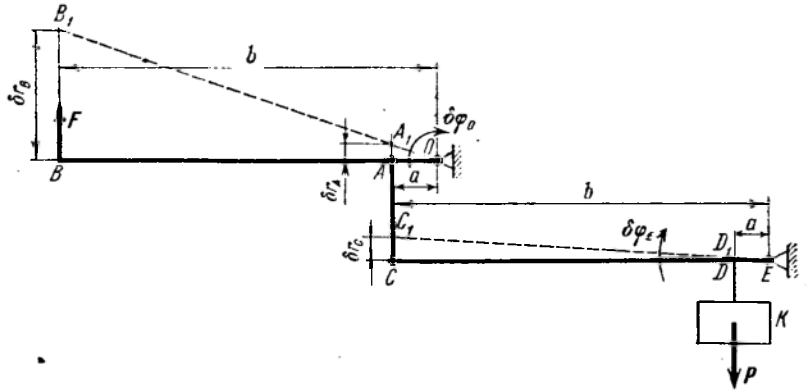
5) дать возможное перемещение, соответствующее одной из степеней свободы системы, считая при этом возможные перемещения, соответствующие остальным степеням свободы, равными нулю. Выразить возможные перемещения точек приложения сил через это возможное перемещение;

6) вычислить сумму работ всех сил, указанных в пунктах 1), 2) и 3), на соответствующих возможных перемещениях их точек приложения, и эту сумму приравнять нулю;

7) последовательно произведя выкладки пунктов 5) и 6) для каждого из независимых возможных перемещений, составить систему уравнений равновесия в числе, равном числу независимых возможных перемещений, т. е. числу степеней свободы системы;

8) решив системы составленных уравнений равновесия, определить искомые величины.

Задача 10.14. На рисунке изображена система рычагов, применяемая для подъема груза K, подвешенного к нижнему рычагу



К задаче 10.14.

в точке D. Подъем совершается посредством силы F, направленной по вертикали вверх и приложенной в точке B верхнего рычага.

Определить массу M поднимаемого груза K, если $F = 10$ кН, а $b/a = 10$ (см. рисунок).

Р е ш е н и е. При решении этой задачи методами статики надо, применив закон освобождаемости от связей, мысленно рассечь тягу AC, заменить ее действие на рычаги соответствующими реакциями связей и рассмотреть отдельно равновесие верхнего и нижнего рычагов. После исключения из составленных уравнений равновесия реакции тяги AC можно определить силу тяжести $\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{g}$ поднимаемого груза K.

Значительно проще можно решить эту задачу с помощью принципа возможных перемещений. Изобразим на рисунке активные силы $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{F}$. Дадим точке B верхнего рычага возможное перемещение $\delta r_B = BB_1$, направленное по вертикали вверх. При этом верхний рычаг повернется вокруг точки O по ходу часовой стрелки и повернет в том же направлении нижний рычаг. Выразим возможное перемещение $\delta r_D = DD_1$ точки D нижнего рычага в зависимости от δr_B (на рисунке новые положения рычагов изображены штриховыми линиями). Воспользовавшись подобием треугольников, построенных

на верхнем рычаге, можно записать $\delta r_A = \frac{a}{b}\delta r_B$. Так как тяга AC является абсолютно жестким стержнем, то $\delta r_C = \delta r_A$, т. е.

$$\delta r_C = \frac{a}{b}\delta r_B. \tag{1}$$

На основании подобия треугольников, построенных на нижнем рычаге, получим: $\delta r_D = \frac{a}{b}\delta r_C$. Подставив значение δr_C из формулы (1), находим

$$\delta r_D = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \delta r_B. \tag{2}$$

Применим принцип возможных перемещений к системе рычагов, т. е. сумму работ активных сил $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{P}$ на возможных перемещениях $\delta \boldsymbol{r}_B$ и $\delta \boldsymbol{r}_D$ их точек приложения B и D приравняем нулю:

$$F\,\delta r_B - P\,\delta r_D = 0. \tag{3}$$

Воспользовавшись формулой (2), после сокращения уравнения (3) на δr_B получим

$$P = \left(\frac{b}{a}\right)^2 F. \tag{4}$$

Подстановка численных значений дает результат: $P = 1000$ кН.

Если бы, решая эту задачу, мы дали возможное перемещение $\delta \boldsymbol{r}_B$ точке B не вверх, а вниз, то в уравнении (3) знаки изменились бы на обратные.

Можно было вместо возможного линейного перемещения $\delta \boldsymbol{r}_B$ точки B дать возможное угловое перемещение $\delta\varphi_O$ и вычислить в зависимости от него возможное угловое перемещение $\delta\varphi_E$ нижнего рычага. Для этого следует воспользоваться возможными перемещениями точек A и C абсолютно жесткого стержня AC:

$$\delta r_A = a\,\delta\varphi_O, \quad \delta r_C = b\,\delta\varphi_E.$$

Так как $\delta r_A = \delta r_C$, то $a\,\delta\varphi_0 = b\,\delta\varphi_E$, т. е.

$$\delta\varphi_E = \frac{a}{b}\delta\varphi_O. \tag{5}$$

Применив принцип возможных перемещений, находим

$$m_O(\boldsymbol{F})\,\delta\varphi_O + m_E(\boldsymbol{P})\,\delta\varphi_E = 0,$$

следовательно,

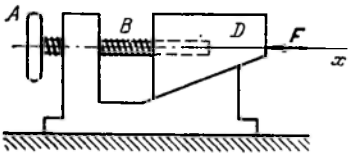
$$Fb\,\delta\varphi_O - Pa\,\delta\varphi_E = 0,$$

откуда $P = \frac{b}{a} F \frac{\delta\varphi_O}{\delta\varphi_E}$. Воспользовавшись формулой (5), получим результат, записанный в формуле (4).

Задача 10.15. На рисунке изображен горизонтальный домкрат. При вращении рукоятки A винт B сообщает поступательное перемещение клину D.

Определить зависимость между вращающим моментом m, приложенным к рукоятке A, и модулем силы $\boldsymbol{F}$, действующей на клин D. Шаг винта равен h. Это значит, что при одном обороте винт перемещается в горизонтальном направлении на h. Весом клина и силами сопротивления пренебречь.

Р е ш е н и е. Механизм домкрата, подчиненный идеальным связям, находится под действием активной силы $\boldsymbol{F}$ и активного вращающего момента m.



К задаче 10.15.

Направим ось x вдоль геометрической оси винта по горизонтали направо.

Для решения задачи применим принцип возможных перемещений

$$\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F}_k \cdot \delta \boldsymbol{r}_k = 0. \qquad (1)$$

Дадим возможное угловое перемещение $\delta\varphi$ рукоятке A и, следовательно, винту B. При этом винт и, значит, клин D получат поступательное перемещение δx. В данном случае уравнение (1) имеет вид

$$m\,\delta\varphi + F_x \delta x = 0. \qquad (2)$$

Для определения зависимости δx от $\delta\varphi$ выразим x через φ. При одном обороте винта он перемещается на h, а при повороте на φ винт переместится на x, которое определяется из пропорции $\frac{2\pi}{h} = \frac{\varphi}{x}$. Получим

$$x = \frac{h}{2\pi}\varphi. \qquad (3)$$

Вычислив вариацию функции (3), мы получим зависимость между возможными перемещениями δx и $\delta\varphi$:

$$\delta x = \frac{h}{2\pi}\delta\varphi. \qquad (4)$$

Подставив результат (4) в уравнение (2) и учтя, что $F_x = -F$, после сокращения на $\delta\varphi$ получим

$$m = \frac{h}{2\pi}F. \qquad (5)$$

Формула (5) выражает искомую зависимость между вращающим моментом m и модулем силы $\boldsymbol{F}$.

Задача 10.16. Пользуясь принципом возможных перемещений, вывести уравнения равновесия свободного твердого тела, находящегося под действием произвольной плоской системы сил.

Р е ш е н и е. Изобразим координатные оси xy в плоскости действия сил. Обозначим активные силы: $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_n$.

Выбрав за полюс произвольную точку A в плоскости действия активных сил, разложим возможное перемещение твердого тела на переносное поступательное $\delta \boldsymbol{r}_A$ вместе с полюсом A и относительное вращательное $\delta\varphi$ вокруг оси, проходящей через точку A перпендикулярно к плоскости действия сил.

Применив принцип возможных перемещений, имеем

$$\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F}_k \cdot \delta \boldsymbol{r}_k + \sum_{k=1}^{n} m_A(\boldsymbol{F}_k)\,\delta\varphi = 0. \tag{1}$$

Записав силы $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_n$ и возможное перемещение $\delta \boldsymbol{r}_k$ в разложениях по ортам осей координат x и y:

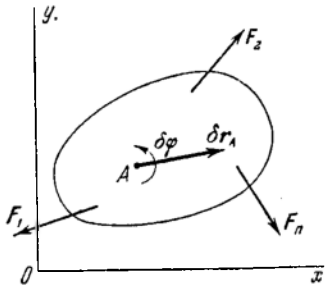
$$\boldsymbol{F}_k = F_{kx}\boldsymbol{i} + F_{ky}\boldsymbol{j}, \quad \delta \boldsymbol{r}_k = \delta x_k \boldsymbol{i} + \delta y_k \boldsymbol{j},$$

где $k = 1, 2, \ldots, n$, получим уравнение (1) в виде

$$\sum_{k=1}^{n} (F_{kx}\delta x_k + F_{ky}\delta y_k) + \sum_{k=1}^{n} m_A(\boldsymbol{F}_k)\,\delta\varphi = 0,$$

т. е.

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx}\delta x_k + \sum_{k=1}^{n} F_{ky}\delta y_k + \sum_{k=1}^{n} m_A(\boldsymbol{F}_k)\,\delta\varphi = 0.$$



К задаче 10.16.

Так как переносное движение поступательное, то имеем

$$\delta \boldsymbol{r}_k = \delta \boldsymbol{r}_A, \quad \delta x_k = \delta x_A, \quad \delta y_k = \delta y_A$$

и, следовательно, после подстановки, множители δx_A, δy_A и $\delta\varphi$, не зависящие от индекса суммирования, можно вынести за знаки соответствующих сумм:

$$\delta x_A \sum_{k=1}^{n} F_k + \delta y_A \sum_{k=1}^{n} F_{ky} + \delta\varphi \sum_{k=1}^{n} m_A(\boldsymbol{F}_k) = 0. \tag{2}$$

Учитывая, что δx_A, δy_A и $\delta\varphi$ — независимые и произвольные возможные перемещения, получим, что левая часть уравнения (2) тождественно обращается в нуль лишь при равенстве нулю коэффициентов $\sum_{k=1}^{n} F_{kx}$, $\sum_{k=1}^{n} F_{ky}$, $\sum_{k=1}^{n} m_A(\boldsymbol{F}_k)$, стоящих при этих возможных перемещениях, т. е.

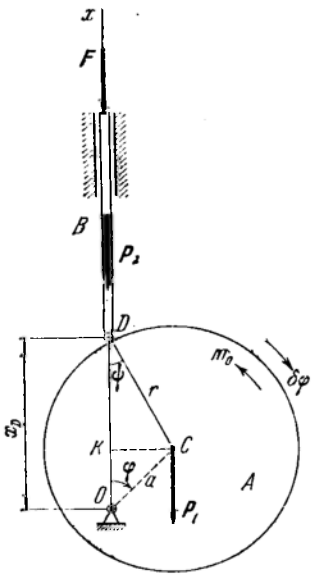
$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} m_A(\boldsymbol{F}_k) = 0. \tag{3}$$

Как известно из статики, уравнения (3) являются уравнениями равновесия свободного твердого тела, находящегося под действием произвольной плоской системы сил.

Аналогично можно вывести шесть уравнений равновесия свободного твердого тела при наличии произвольной пространственной системы сил.

Полученные выше результаты убедительно подчеркивают степень общности принципа возможных перемещений, являющегося мощным средством для решения любых задач статики.

Задача 10.17. При вращении круглого эксцентрика A массы M_1 и радиуса r вокруг неподвижной горизонтальной оси O, перпендикулярной к плоскости рисунка, стержень B массы M_2 совершает в вертикальных направляющих возвратно-поступательное движение. К эксцентрику приложен момент m_O, направленный против хода часовой стрелки. Механизм находится в равновесии при наличии вертикальной силы F, действующей на стержень B.



К задаче 10.17.

Определить величину силы F в положении эксцентрика, указанном на рисунке. Эксцентриситет OC равен a.

Р е ш е н и е. Направим ось x по вертикали вверх, взяв начало отсчета в точке O. Угол поворота φ эксцентрика A отсчитываем от оси x в направлении по ходу часовой стрелки.

Изобразим активные силы и моменты: $\boldsymbol{P}_1 = M_1\boldsymbol{g}$ — сила тяжести эксцентрика A, $\boldsymbol{P}_2 = M_2\boldsymbol{g}$ — сила тяжести стержня B, $\boldsymbol{F}$ — вертикальная сила, приложенная к стержню B, момент m_O.

Дадим возможное угловое перемещение $\delta\varphi$ эксцентрику A в направлении возрастания угла φ, т. е. по ходу часовой стрелки. При этом точка D стержня B получит вертикальное возможное перемещение δx_D. Для определения δx_D в зависимости от $\delta\varphi$ выразим абсциссу x_D точки D в функции от угла поворота φ эксцентрика A:

$$x_D = OD = OK + KD = a\cos\varphi + r\cos\psi, \qquad (1)$$

где угол CDO обозначен через ψ. Установим теперь связь между углами ψ и φ. Из треугольника OCD получим $\frac{\sin\psi}{\sin\varphi} = \frac{a}{r}$, откуда $\sin\psi = \lambda\sin\varphi$, где $\lambda = a/r$. Следовательно, $\cos\psi = \sqrt{1-\sin^2\psi} = \sqrt{1-\lambda^2\sin^2\varphi}$. Вычисляя $\cos\psi$ с точностью до слагае-

мых, содержащих λ в квадрате (λ — правильная дробь), находим

$$\cos\psi = (1 - \lambda^2 \sin^2\varphi)^{1/2} \approx 1 - \frac{1}{2}\lambda^2 \sin^2\varphi = 1 - \frac{1}{2}\lambda^2 \frac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi) =$$

$$= 1 - \frac{1}{4}\lambda^2 + \frac{1}{4}\lambda^2 \cos 2\varphi.$$

Подставив полученное значение $\cos\psi$ в формулу (1), получим

$$x_D = r\left(1 - \frac{1}{4}\lambda^2\right) + a\cos\varphi + \frac{1}{4}r\lambda^2 \cos 2\varphi. \qquad (2)$$

Учитывая, что возможное перемещение точки является вариацией соответствующей координаты, вычислим вариацию функции (2):

$$\delta x_D = -a\sin\varphi\,\delta\varphi - \frac{1}{2}r\lambda^2 \sin 2\varphi\,\delta\varphi,$$

т. е.

$$\delta x_D = -a\sin\varphi\,(1 + \lambda\cos\varphi)\,\delta\varphi. \qquad (3)$$

Формула (3) устанавливает зависимость между возможными перемещениями δx_D и $\delta\varphi$.

Применим к рассматриваемому механизму принцип возможных перемещений, т. е. сумму работ всех активных сил на возможных перемещениях точек системы приравняем нулю:

$$P_1 a\sin\varphi\,\delta\varphi - m_0\delta\varphi + P_{2x}\delta x_D + F_x\delta x_D = 0. \qquad (4)$$

Подставив в уравнение (4) значение δx_D из формулы (3), почленно сократив на $\delta\varphi$ и приняв во внимание, что $P_{2x} = -P_2$ и $F_x = -F_2$, определяем искомый модуль силы $\boldsymbol{F}$:

$$F = \frac{m_0 - [M_1 + M_2(1 + \lambda\cos\varphi)]ag\sin\varphi}{a(1 + \lambda\cos\varphi)\sin\varphi},$$

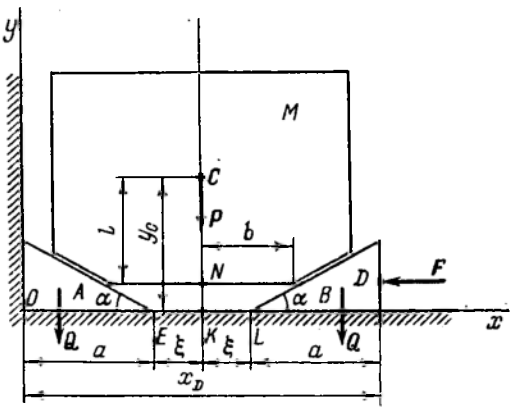
где $\lambda = a/r$.

Задача 10.18. На рисунке изображена система, состоящая из трех гладких призм A, B и M, находящихся в покое. Две одинаковые призмы A и B лежат на горизонтальной негладкой плоскости, образуя с ней угол α. Неподвижная призма A упирается в вертикальную стену. На призмы A и B давит призма M массы M_1. Система поддерживается в покое под действием горизонтальной силы $\boldsymbol{F}$, приложенной к призме B массы M_2.

Какие значения при покое материальной системы может принимать модуль силы $\boldsymbol{F}$, если коэффициент трения скольжения призмы B о горизонтальную плоскость равен f. Оси x и y изображены на рисунке.

Р е ш е н и е. В связи с наличием силы трения скольжения призмы B о горизонтальную плоскость, покой системы имеет место не при фиксированном значении модуля силы F, а при некоторой области, в которой эти значения могут меняться.

Действительно, если сила F принимает свое наименьшее возможное при покое значение F_{min}, то призма M стремится сместить призму B направо, и для того, чтобы удержать призму B в покое, сила трения $F_{тр}$ должна быть направлена по горизонтали налево. Если же сила F принимает свое наибольшее возможное при покое значение F_{max}, то призма B стремится переместиться налево и потому сила трения $F_{тр}$ должна быть направлена направо. В обоих случаях сила трения принимает свое предельное значение. Таким образом, за счет изменения направления силы трения создается область значений F, при которых система остается в покое.



К задаче 10.18.

К данной системе приложены активные силы тяжести P, Q и Q, где $P = M_1 g$, $Q = M_2 g$. К ним надо добавить силу трения $F_{тр}$ (эта сила на рисунке не изображена), ибо связь между призмой B и горизонтальной плоскостью не является идеальной.

Если дать возможное горизонтальное перемещение δx_D точке D приложения силы F к призме B, то центр масс C призмы M получит при этом перемещение δy_C по вертикали. Для установления зависимости между ними введем параметр $\xi = EK = KL$ (через центр масс C призмы M проходит вертикальная ось симметрии данной системы). Выразим координаты x_D и y_D в зависимости от параметра ξ. Найдем

$$x_D = 2a + 2\xi, \quad y_C = CN + NK = l + (b - \xi)\operatorname{tg}\alpha \qquad (1)$$

(размеры a, b и l указаны на рисунке). Проварьировав эти соотношения, найдем зависимость возможных перемещений δx_D и δy_C от $\delta\xi$:

$$\delta x_C = 2\delta\xi, \quad \delta y_C = -\delta\xi \operatorname{tg}\alpha. \qquad (2)$$

Рассмотрим случай, когда сила F достигает при покое своего максимального значения F_{max}. При этом, как было указано выше, сила трения $F_{тр}$, равная по модулю своему предельному значению

$$F_{тр} = f\left(Q + \frac{P}{2}\right) = fg\left(M_2 + \frac{M_1}{2}\right),$$

направлена направо, поэтому ее проекция на ось x равна

$$F_{\text{тр}\,x} = f\left(Q + \frac{P}{2}\right) = fg\left(M_2 + \frac{M_1}{2}\right). \tag{3}$$

Работа сил тяжести призм A и B равна нулю, так как призма A неподвижна, а центр масс призмы B перемещается по горизонтали. Поэтому в уравнении работ найдут отражение только три силы: $\boldsymbol{F}_{\max}$, $\boldsymbol{F}_{\text{тр}}$ и $\boldsymbol{P}$:

$$F_{x\,\max}\delta x_D + F_{\text{тр}\,x}\delta x_D + P_y \delta y_C = 0 \tag{4}$$

(возможные перемещения всех точек призмы B векторно равны).

Использовав в уравнении (4) зависимости (2) и (3) и заметив, что $P_y = -P = -M_1 g$ и $F_{x\,\max} = -F_{\max}$, после сокращения на $\delta\xi$ получим

$$-2F_{\max} + 2f\left(Q + \frac{P}{2}\right) + P\operatorname{tg}\alpha = 0,$$

т. е.

$$F_{\max} = \frac{1}{2} M_1 g \operatorname{tg}\alpha + fg\left(M_2 + \frac{1}{2} M_1\right). \tag{5}$$

Перейдем к рассмотрению случая, когда сила достигает при покое своего наименьшего значения $F_{\min}$. При этом, как было показано выше, предельная сила трения $\boldsymbol{F}_{\text{тр}}$ направлена налево, т. е. ее проекция на ось x равна

$$F_{\text{тр}} = -f\left(Q + \frac{P}{2}\right) = -fg\left(M_2 + \frac{M_1}{2}\right). \tag{6}$$

По аналогии с формулой (4) запишем уравнение работ

$$F_{x\,\min}\delta x_D + F_{\text{тр}}\delta x_D + P_y \delta y_C = 0. \tag{7}$$

Внеся в уравнение (7) результаты (2) и (6), а также $P_y = -P$, $F_{x\,\min} = -F_{\min}$, найдем

$$F_{\min} = \frac{P}{2}\operatorname{tg}\alpha - \left(Q + \frac{P}{2}\right) = \frac{M_1 g}{2}\operatorname{tg}\alpha - fg\left(M_2 + \frac{M_1}{2}\right). \tag{8}$$

Так как при разных модулях силы $\boldsymbol{F}$ значения модуля силы трения $\boldsymbol{F}_{\text{тр}}$ могут быть меньше предельных, то покой системы возможен при выполнении условий: $F_{\min} \leqslant F \leqslant F_{\max}$. Использовав результаты (5) и (8), найдем искомую область значений модуля силы $\boldsymbol{F}$, при котором система призм остается в покое:

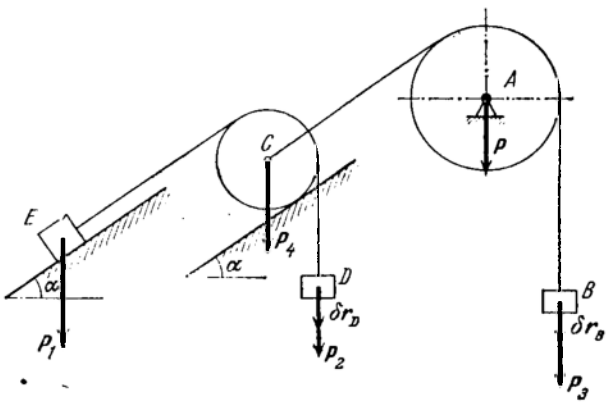
$$\frac{P}{2}\operatorname{tg}\alpha - f\left(Q + \frac{P}{2}\right) \leqslant F \leqslant \frac{P}{2}\operatorname{tg}\alpha + f\left(Q + \frac{P}{2}\right),$$

т. е.

$$\frac{M_1 g}{2}\operatorname{tg}\alpha - fg\left(M_2 + \frac{M_1}{2}\right) \leqslant F \leqslant \frac{M_1 g}{r}\operatorname{tg}\alpha + fg\left(M_2 + \frac{M_1}{2}\right).$$

В заключение заметим, что решение этой задачи методами статики оказалось бы более длинным и громоздким, так как пришлось бы в отдельности рассмотреть равновесие каждой из призм. В систему уравнений равновесия вошли бы взаимные реакции плоскостей этих призм. Для получения искомых результатов эти реакции пришлось бы из системы уравнений исключить.

Задача 10.19. Через блок A массы M переброшена нить, к концам которой привязаны груз B и каток C массы M_4, лежащий на наклонной плоскости. Через каток C в свою очередь переброшена



К задаче 10.19.

нить, к концам которой привязаны груз D массы M_2 и груз E массы M_1, лежащий на параллельной идеально гладкой плоскости (см. рисунок).

Определить массу M_3 груза B и угол α, образуемый наклонными плоскостями с горизонтом, если система находится в равновесии. Массой нити пренебречь.

Р е ш е н и е. Рассматриваемая система имеет две степени свободы, так как для определения положения всех ее точек надо задать два независимых параметра. Один параметр должен определять положение груза B, а второй — положение грузов D и E по отношению к катку C.

Изобразим активные силы: $\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{g}$ — сила тяжести блока, $\boldsymbol{P}_1 = M_1\boldsymbol{g}$ — сила тяжести груза E, $\boldsymbol{P}_2 = M_2\boldsymbol{g}$ — сила тяжести груза D, $\boldsymbol{P}_3 = M_3\boldsymbol{g}$ — сила тяжести груза B и $\boldsymbol{P}_4 = M_4\boldsymbol{g}$ — сила тяжести катка C. Реакции связей изображать не следует, так как все связи, наложенные на систему, являются идеальными (нити натянуты и нерастяжимы, наклонные плоскости идеально гладкие).

Дадим системе два независимых возможных перемещения (число независимых возможных перемещений равно числу степеней свободы системы): $\delta\boldsymbol{r}_B$ — возможное перемещение груза B, направленное по

вертикали вниз, и δr_D — возможное перемещение груза D, также направленное по вертикали вниз.

Применим принцип возможных перемещений для составления уравнений равновесия системы. Число уравнений должно быть равно числу ее степеней свободы. Поэтому для данной системы составим два уравнения равновесия.

Для составления уравнения равновесия системы, соответствующего возможному перемещению δr_D, будем считать возможное перемещение δr_B равным нулю, т. е. $\delta r_D \neq 0$, $\delta r_B = 0$ (это допустимо, так как возможные перемещения δr_B и δr_D являются независимыми). При этом груз B и каток C останутся в покое, груз D переместится на δr_D по вертикали вниз, а груз E переместится на δr_D параллельно наклонной плоскости вверх.

Применив принцип возможных перемещений, получим

$$P_2\delta r_D - P_1\delta r_D \sin\alpha = 0, \text{ или } M_2\delta r_D - M_1\delta r_D \sin\alpha = 0,$$

откуда

$$\sin\alpha = M_2/M_1. \tag{1}$$

Для составления уравнения равновесия системы, соответствующего возможному перемещению δr_B, будем считать возможное перемещение δr_D равным нулю, т. е. $\delta r_B \neq 0$, $\delta r_D = 0$. При этом, в связи с отсутствием трения, каток переместится поступательно, грузы D и E по отношению к катку C останутся в покое, груз B переместится на δr_B по вертикали вниз, а каток C с грузами D и E переместится на δr_B параллельно наклонной плоскости вверх. Применив принцип возможных перемещений, имеем

$$P_3\delta r_B - P_1\delta r_B \sin\alpha - P_2\delta r_B \sin\alpha - P_4\delta r_B \sin\alpha = 0,$$

откуда

$$P_3 = (P_1 + P_2 + P_4)\sin\alpha. \tag{2}$$

Подставив в (2) значение $\sin\alpha$ из формулы (1), найдем искомую массу груза B:

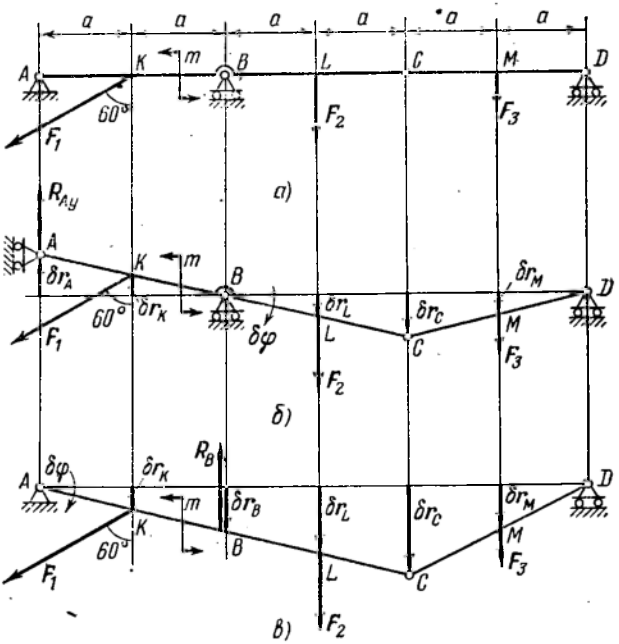
$$M_3 = \frac{M_2}{M_1}(M_1 + M_2 + M_4).$$

Задача 10.20. Две горизонтальные балки ABC и CD, соединенные шарниром C, находятся в покое. Шарнирные опоры B и D расположены на катках, а опора A неподвижна. К балкам приложены сосредоточенные силы F_1, F_2, F_3 и пара сил с моментом m, причем: $F_1 = 8$ кН, $F_2 = 4$ кН, $F_3 = 2$ кН, $m = 40$ кН·м, где a — размер, указанный на рис. a. Массой балок пренебречь.

Определить реакции в шарнирах A и B.

Р е ш е н и е. Задача может быть решена методами статики. Для этого надо расчленить балки в соединительном шарнире C, записать уравнения равновесия для каждой из балок и затем решить систему шести уравнений с шестью алгебраическими неизвестными (R_{Ax},

R_{Ay}, R_B, R_C, R_{Cy}, R_D). Однако в тех случаях, когда надо определить одно неизвестное или только некоторые из них, целесообразно пользоваться принципом возможных перемещений. При этом каждое неизвестное определяется из одного уравнения независимо от прочих неизвестных. Для определения неизвестной реакции надо мысленно отбросить соответствующую ей опору, заменить опору искомой реакцией и затем в уравнении работ учесть не только активные силы и моменты, но и искомую реакцию.



К задаче 10.20.

Так, для определения вертикальной составляющей R_{Ay} мысленно заменим неподвижную опору A подвижной опорой на катках, которые могут перемещаться по вертикали (см. рис. *б*). Дадим точке A возможное перемещение δr_A по вертикали вверх. Тогда точки K, L, C и M получат возможные перемещения δr_K, δr_L, δr_C, δr_M, а балка ABC — возможное угловое перемещение $\delta\varphi$. Из подобия треугольников получим зависимость между возможными перемещениями:

$$\delta r_A = 2\delta r_K = 2\delta r_L = \delta r_C = 2\delta r_M = 2a\,\delta\varphi. \qquad (1)$$

Применим принцип возможных перемещений. В уравнение работ войдут активные силы F_1, F_2, F_3, активный момент m, а также искомая составляющая реакции R_{Ay}:

$$R_{Ay}\delta r_A - F_1\cos 60^\circ\cdot\delta r_K - m\,\delta\varphi + F_2\delta r_L + F_3\delta r_M = 0. \qquad (2)$$

Использовав зависимости (1), запишем уравнение (2) в виде

$$R_{Ay}\delta r_A - F_1 \cos 60^\circ \cdot \frac{\delta r_A}{2} - m\frac{\delta r_A}{2a} + F_2\frac{\delta r_A}{2} + F_3\frac{\delta r_A}{2} = 0.$$

После сокращения на δr_A и подстановки численных значений F_1, F_2, F_3 и m найдем $R_{Ay} = 1$ кН (заметим, что если бы возможное перемещение $\delta \boldsymbol{r}_A$ было направлено не вверх, а вниз, то все знаки в уравнении (2) изменились бы на противоположные).

Для определения горизонтальной составляющей реакции $\boldsymbol{R}_{Ax}$ мысленно заменим неподвижную опору A подвижной опорой на катках, которые могут перемещаться по горизонтали. При этом введем горизонтальную реакцию $\boldsymbol{R}_{Ax}$ и дадим точке A возможное перемещение $\delta \boldsymbol{r}_A$ по горизонтали. Допустим, что $\boldsymbol{R}_{Ax}$ и $\delta \boldsymbol{r}_A$ направлены направо. При этом система балок переместится поступательно по горизонтали и все ее точки получат возможные перемещения $\delta \boldsymbol{r}_A$ (предполагаем читателям представить это без рисунка). В данном случае принцип возможных перемещений получит вид

$$R_{Ax}\delta r_A - F_1 \cos 30^\circ \cdot \delta r_A = 0, \qquad (3)$$

откуда следует $R_{Ax} = 4\sqrt{3}$ кН.

В заключение определим реакцию $\boldsymbol{R}_B$ шарнира B. Для этого мысленно отбросим опору B, а вместо нее введем реакцию $\boldsymbol{R}_B$ (см. рис. *в*). Дадим точке B возможное перемещение $\delta \boldsymbol{r}_B$ вниз. При этом точки K, L, C и M получат возможные перемещения $\delta \boldsymbol{r}_K$, $\delta \boldsymbol{r}_L$, $\delta \boldsymbol{r}_C$, $\delta \boldsymbol{r}_M$, а балка ABC — возможное угловое перемещение $\delta\varphi$. Из подобия треугольников имеем

$$\delta r_C = \frac{4}{3}\delta r_L = 2\delta r_B = 4\delta r_K = 2\delta r_M = 4a\,\delta\varphi. \qquad (4)$$

В уравнение работ, помимо активных сил $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{F}_3$ и активного момента m, войдет искомая реакция $\boldsymbol{R}_B$:

$$-R_B\delta r_B + F_1 \cos 60^\circ \cdot \delta r_K - m\,\delta\varphi + F_2\delta r_L + F_3\delta r_M = 0. \qquad (5)$$

Использовав зависимости (4), получим уравнение (5) в виде

$$-R_B\frac{\delta r_C}{2} + F_1 \cos 60^\circ \cdot \frac{\delta r_C}{2} - m\frac{\delta r_C}{4a} + F_2\frac{3}{4}\delta r_C + F_3\frac{\delta r_C}{2} = 0.$$

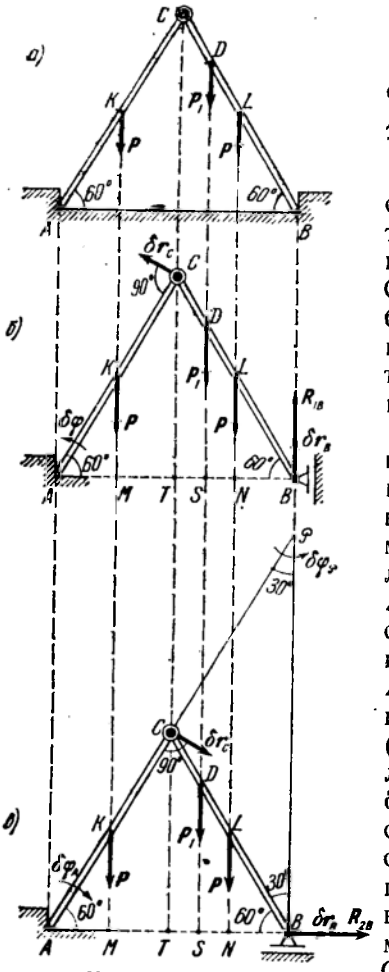
После сокращения на δr_C и подстановки числовых значений, найдем: $R_B = 8$ кН.

Обращаем внимание читателя на то, что каждое из неизвестных: R_{Ay}, R_{Ax} и R_B было вычислено независимо: R_{Ay} было получено из уравнения (2), R_{Ax} — из (3), R_B — из (5). Поэтому применение принципа возможных перемещений особенно эффективно в случаях, когда надо определить одно или только часть неизвестных.

Задача 10.21. На рис. *а* изображена стремянка ACB. Две одинаковые стороны AC и CB стремянки шарнирно соединены в точке C,

а концы A и B упираются в выступы пола. Масса каждой стороны стремянки равна M. В точке D стоит человек массы M_1.

Определить опорную реакцию в точке B, если $AC = CB = 4CD$, а $\angle CAB = \angle CBA = 60°$.



К задаче 10.21

Р е ш е н и е. Активными силами являются: $\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{g}$ — сила тяжести каждой стороны стремянки, $\boldsymbol{P}_1 = M_1\boldsymbol{g}$ — сила тяжести человека. Обозначим длину каждой стороны стремянки $2l$. Тогда $AK = KC = CL = LB = 2CD = l$.

Для определения вертикальной составляющей $\boldsymbol{R}_{1B}$ опорной реакции в точке B дадим опоре B возможность двигаться в вертикальном направлении. С этой целью, применив закон освобождаемости от связей, заменим выступ пола в точке B опорой на катках, которая может перемещаться в вертикальном направлении (рис. *б*).

Приложим в точке B соответствующую реакцию $\boldsymbol{R}_{1B}$. Дадим возможное перемещение $\delta\boldsymbol{r}_B$ точке B по вертикали вверх. При этом правая половина стремянки совершит плоское движение, а левая половина повернется вокруг оси A, перпендикулярной к плоскости рисунка. Направив возможное перемещение $\delta\boldsymbol{r}_C$ точки C перпендикулярно к AC, найдем положение мгновенного центра вращения стороны CB в точке A (в точке A пересекаются перпендикуляры, восставленные из точек C и B к $\delta\boldsymbol{r}_C$ и $\delta\boldsymbol{r}_B$). Итак, в точке A совмещаются: центр вращения левой стороны AC стремянки, вращающейся вокруг неподвижной оси, и мгновенный центр вращения правой стороны CB стремянки, совершающей плоское движение. Следовательно, вся стремянка получает возможное угловое перемещение $\delta\varphi$ вокруг точки A в плоскости рисунка против хода часовой стрелки.

Применим принцип возможных перемещений, т. е. сумму работ активных сил и вертикальной составляющей реакции $\boldsymbol{R}_{1B}$ на возможных перемещениях их точек приложения приравняем нулю:

$$-P\,|AM|\,\delta\varphi - P_1\,|AS|\,\delta\varphi - P\,|AN|\,\delta\varphi + R_{1B}\,|AB|\,\delta\varphi = 0. \qquad (1)$$

Учитывая, что

$$AM = AK\cos 60^\circ = \frac{l}{2},$$

$$AS = AT + TS = AS\cos 60^\circ + CD\cos 60^\circ = \frac{5}{4}l,$$

$$AN = AT + TN = AC\cos 60^\circ + CL\cos 60^\circ = \frac{3}{2}l,\ AB = 2l,$$

после сокращения уравнения (1) на $\delta\varphi$ находим

$$R_{1B} = \left(M + \frac{5}{8}M_1\right)g.$$

Для определения горизонтальной составляющей R_{2B} опорной реакции в точке B дадим опоре B подвижность в горизонтальном направлении. С этой целью, применив закон освобождаемости от связей, заменим выступ пола в точке B опорой на катках, которая может перемещаться в горизонтальном направлении (рис. *в*). Приложим в точке B соответствующую реакцию R_{2B}.

Дадим возможное перемещение δr_B точке B по горизонтали направо. При этом правая половина стремянки совершит плоское движение, а левая половина стремянки повернется вокруг точки A. Направив в точке C возможное перемещение δr_C перпендикулярно к AC, определим положение мгновенного центра вращения стороны CB в точке $\mathcal{P}$ пересечения перпендикуляров, восставленных из точек C и B к соответствующим возможным перемещениям δr_C и δr_B. Итак, левая половина AC стремянки поворачивается вокруг A на угол $\delta\varphi_A$ по ходу часовой стрелки, а правая половина CB стремянки — вокруг $\mathcal{P}$ на угол $\delta\varphi_{\mathcal{P}}$ против хода часовой стрелки.

Определим зависимость между возможными угловыми перемещениями $\delta\varphi_A$ и $\delta\varphi_{\mathcal{P}}$. Для этого заметим, что шарнир C принадлежит обеим сторонам стремянки, и поэтому

$$\delta r_C = AC\,\delta\varphi_A,\quad \delta r_C = C\mathcal{P}\,\delta\varphi_{\mathcal{P}}.$$

Следовательно,

$$C\mathcal{P}\,\delta\varphi_{\mathcal{P}} = AC\,\delta\varphi_A,\ \text{т. е.}\ \delta\varphi_{\mathcal{P}} = \frac{AC}{C\mathcal{P}}\delta\varphi_A.$$

Нетрудно видеть, что так как $C\mathcal{P} = AC$ (треугольник $BC\mathcal{P}$ является равнобедренным), то

$$\delta\varphi_{\mathcal{P}} = \delta\varphi_A. \tag{2}$$

Применив принцип возможных перемещений, запишем:

$$P\,|AM|\,\delta\varphi_A + P_1\,|SB|\,\delta\varphi_{\mathcal{P}} + P\,|NB|\,\delta\varphi_{\mathcal{P}} + R_{2B}\,|\mathcal{P}B|\,\delta\varphi_{\mathcal{P}} = 0. \tag{3}$$

Учитывая формулу (2), представим уравнение (3) после сокращения на $\delta\varphi_A$ в виде

$$P|AM| + P_1|SB| + P|NB| + R_{2B}|\mathscr{P}B| = 0. \qquad (4)$$

Так как

$$AM = AK\cos 60^\circ = \frac{l}{2}, \quad SB = BD\cos 60^\circ = \frac{3}{4}l,$$

$$NB = LB\cos 60^\circ = \frac{l}{2}, \quad \mathscr{P}B = \mathscr{P}C\cos 30^\circ + CB\cos 30^\circ = l\sqrt{3},$$

то после подстановки этих значений в уравнение (4), решив его относительно R_{2B}, находим

$$R_{2B} = -\frac{\sqrt{3}}{12}(4P + 3P_1) = -\frac{\sqrt{3}}{12}(4M + 3M_1)g.$$

В ходе решения задачи с помощью принципа возможных перемещений мы определяли каждую искомую составляющую реакции в точке B из одного уравнения независимо друг от друга. Так, вертикальная составляющая $\boldsymbol{R}_{1B}$ реакции в точке B была найдена из уравнения (1), а горизонтальная составляющая $\boldsymbol{R}_{2B}$ — из уравнения (3).

Задача 10.22. Две балки AB и BC соединены шарниром в точке B. Балка BC шарнирно прикреплена концом C к вертикальной стойке CD, защемленной в сечении D. Балка AB шарниром A прикреплена к земле.

Определить горизонтальную составляющую реакции $\boldsymbol{R}_L$ и реактивный момент m в защемленном сечении D. Силы $\boldsymbol{P}_1$ и $\boldsymbol{P}_2$ показаны на рис. *а*. Массой балок пренебречь; $BC = CD = 2a$, $BK = KC$, $CL = LD$.

Р е ш е н и е. Для определения горизонтальной составляющей реакции в защемленном сечении D применим закон освобождаемости от связей. Сообщим стойке CD в сечении D подвижность в горизонтальном направлении, мысленно заменив опору в точке D на опору, расположенную на катках (рис. *б*). Приложим в точке D горизонтальную составляющую реакции $\boldsymbol{R}_{1D}$, соответствующую отброшенной связи.

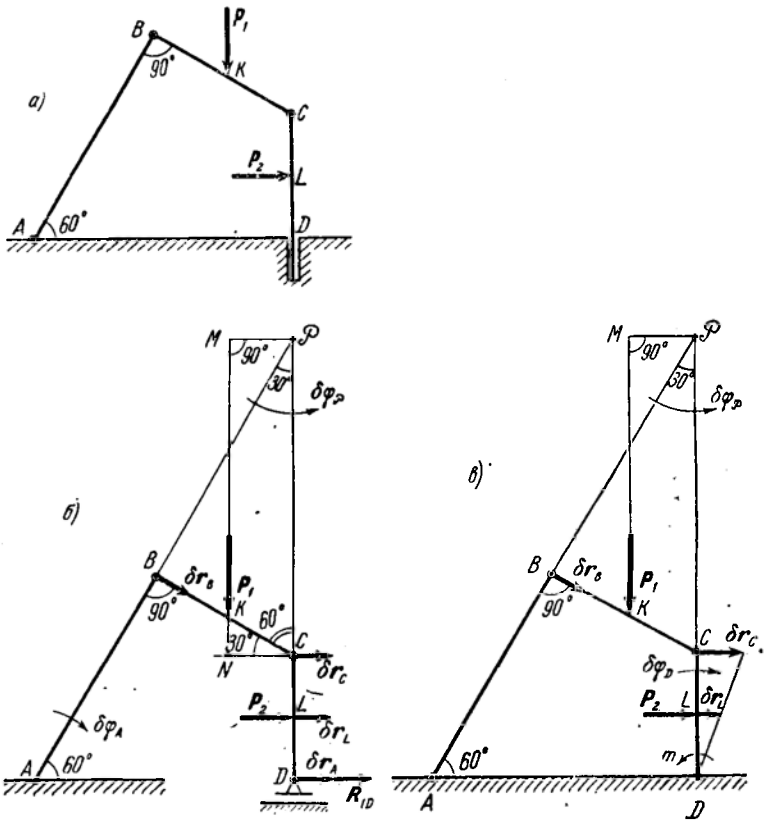
Дадим возможное перемещение $\delta\boldsymbol{r}_D$ точке D по горизонтали направо. При этом стойка CD получит поступательное возможное перемещение, т. е.

$$\delta\boldsymbol{r}_C = \delta\boldsymbol{r}_L = \delta\boldsymbol{r}_D. \qquad (1)$$

Балка AB получит возможное угловое перемещение $\delta\varphi_A$, а $\delta\boldsymbol{r}_B$ будет направлено перпендикулярно к AB, т. е. вдоль BC. Балка BC при наличии возможных перемещений $\delta\boldsymbol{r}_B$ и $\delta\boldsymbol{r}_C$ совершает плоское движение. Мгновенный центр вращения $\mathscr{P}$ балки BC находится в точке пересечения перпендикуляров, восставленных из точек B и C к $\delta\boldsymbol{r}_B$ и $\delta\boldsymbol{r}_C$. Итак, балка BC совершает поворот на угол $\delta\varphi_{\mathscr{P}}$

в направлении против хода часовой стрелки вокруг мгновенного центра вращения $\mathscr{P}$.

Применяя принцип возможных перемещений, вычислим сумму работ активных сил $\boldsymbol{P}_1$ и $\boldsymbol{P}_2$ и горизонтальной составляющей



К задаче 10.22.

реакции $\boldsymbol{R}_{1D}$ на возможных перемещениях их точек приложения и приравняем ее нулю:

$$P_1 |M\mathscr{P}| \delta\varphi_{\mathscr{P}} + P_2 \delta r_L + R_{1D} \delta r_D = 0. \tag{2}$$

Из треугольника $\mathscr{P}BC$ находим

$$\mathscr{P}C = \frac{BC}{\sin 30^\circ} = 4a.$$

Тогда

$$\delta\varphi_{\mathscr{P}} = \frac{\delta r_C}{\mathscr{P}C} = \frac{\delta r_C}{4a}. \tag{3}$$

Учитывая формулы (1) и (3), после почленного сокращения уравнения (2) на δr_D, получаем

$$P_1 \frac{|M\mathcal{P}|}{4a} + P_2 + R_{1D} = 0. \tag{4}$$

Заметив, что

$$M\mathcal{P} = NC = KC\cos 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \tag{5}$$

и решив уравнение (4) относительно R_{1D}, найдем

$$R_{1D} = -\left(\frac{\sqrt{3}}{8} P_1 + P_2\right).$$

Знак минус указывает, что горизонтальная составляющая реакции $\boldsymbol{R}_{1D}$ направлена по горизонтали налево.

Переходим к определению величины реактивного момента m в защемленном сечении D. Для этого заменим защемление в сечении D неподвижным цилиндрическим шарниром, приложив к нему реактивный момент m в направлении против часовой стрелки (рис. *в*).

Дадим возможное угловое перемещение $\delta\varphi_D$ стойке CD вокруг шарнира D по часовой стрелке. Обозначив возможные перемещения в точках B и C соответственно $\delta \boldsymbol{r}_B$ и $\delta \boldsymbol{r}_C$, определяем, как и ранее, положение мгновенного центра вращения $\mathcal{P}$ балки BC. При заданном возможном угловом перемещении $\delta\varphi_D$ стойки CD вокруг точки D балка BC совершает поворот на угол $\delta\varphi_{\mathcal{P}}$ вокруг мгновенного центра вращения $\mathcal{P}$ в направлении против часовой стрелки.

Применив принцип возможных перемещений, получаем

$$P_1 |M\mathcal{P}| \delta\varphi_{\mathcal{P}} + P_2 |LD| \delta\varphi_D - m\,\delta\varphi_D = 0. \tag{6}$$

Для установления зависимости между $\delta\varphi_D$ и $\delta\varphi_{\mathcal{P}}$ рассмотрим возможное перемещение $\delta \boldsymbol{r}_C$ точки C, одновременно принадлежащей балке BC и стойке CD:

$$\delta r_C = \mathcal{P}C\,\delta\varphi_{\mathcal{P}}, \quad \delta r_C = CD\,\delta\varphi_D.$$

Следовательно, $\mathcal{P}C\,\delta\varphi_{\mathcal{P}} = CD\,\delta\varphi_D$, откуда $\delta\varphi_{\mathcal{P}} = \frac{CD}{\mathcal{P}C}\,\delta\varphi_D$. Так как $\mathcal{P}C = 4a$, то $\delta\varphi_{\mathcal{P}} = \frac{2a}{4a}\,\delta\varphi_D = \frac{1}{2}\,\delta\varphi_D$. Теперь уравнение (6) после почленного сокращения на $\delta\varphi_D$ принимает вид

$$\frac{1}{2} P_1 |M\mathcal{P}| + P_2 a - m = 0.$$

Учитывая формулу (5), получим

$$m = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} P_1 + P_2\right) a.$$

У к а з а н и е. Рекомендуем решить следующие задачи из «Сборника задач по теоретической механике» И. В. Мещерского: 46.1—46.4, 46.8, 46.10, 46.14—46.16, 46.20—46.24, 46.26, 46.29—46.32.

§ 5. Общее уравнение динамики материальной системы

При движении материальной системы, подчиненной идеальным связям, сумма работ активных сил и сил инерции на любых возможных перемещениях точек системы равна нулю:

$$\sum_{k=1}^{n} (\boldsymbol{F}_k - m_k \boldsymbol{w}_k) \cdot \delta \boldsymbol{r}_k = 0.$$

Если

$$\boldsymbol{F}_k = F_{kx}\boldsymbol{i} + F_{ky}\boldsymbol{j} + F_{kz}\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{w}_k = \ddot{x}_k \boldsymbol{i} + \ddot{y}_k \boldsymbol{j} + \ddot{z}_k \boldsymbol{k}, \quad \delta \boldsymbol{r}_k = \delta x_k \boldsymbol{i} + \delta y_k \boldsymbol{j} + \delta z_k \boldsymbol{k},$$

то общее уравнение динамики имеет вид

$$\sum_{k=1}^{n} [(F_{kx} - m_k \ddot{x}_k)\,\delta x_k + (F_{ky} - m_k \ddot{y}_k)\,\delta y_k + (F_{kz} - m_k \ddot{z}_k)\,\delta z_k] = 0.$$

Общее уравнение динамики является аналогом принципа возможных перемещений для случая *движения* материальной системы.

При движении системы реакции связей, вообще говоря, переменны. Они могут быть функциями времени, координат материальных точек, их скоростей и их ускорений. Поэтому при решении обратных задач динамики, в которых движение определяется по заданным силам, приходится исключать реакции связей из составленных уравнений движения.

Большое преимущество общего уравнения динамики по сравнению с другими теоремами динамики заключается в том, что в его формулировке отсутствуют реакции идеальных связей. Если не все связи являются идеальными, например имеются связи с трением, то, применяя общее уравнение динамики, следует к активным силам добавлять реакции, соответствующие неидеальным связям.

Вычисление суммы работ сил инерции на возможных перемещениях точек твердого тела производится по формулам:

а) *При поступательном движении*:

$$\delta A = \boldsymbol{R}^{(J)} \cdot \delta \boldsymbol{r},$$

где $\boldsymbol{R}^{(J)}$ — равнодействующая сил инерции ($\boldsymbol{R}^{(J)} = -M\boldsymbol{w}$; $\boldsymbol{w}$ — ускорение любой точки твердого тела), $\delta \boldsymbol{r}$ — возможное перемещение любой точки твердого тела.

б) *При вращении вокруг неподвижной оси*:

$$\delta A = m_z^{(J)} \delta \varphi,$$

где $m_z^{(J)}$ — главный момент сил инерции относительно оси вращения z ($m_z^{(J)} = -I_z \varepsilon_z$), $\delta\varphi$ — возможное угловое перемещение твердого тела.

в) *При плоском движении*

$$\delta A = \boldsymbol{V}_C^{(J)} \cdot \delta \boldsymbol{r}_C + m_C^{(J)} \delta\varphi,$$

где $\boldsymbol{V}_C^{(J)}$ — главный вектор сил инерции $(\boldsymbol{V}_C^{(J)} = -M\boldsymbol{w}_C$, $\boldsymbol{w}_C$ — ускорение центра тяжести твердого тела), $m_C^{(J)}$ — главный момент сил инерции относительно оси, проходящей через центр тяжести C твердого тела перпендикулярно к плоскости движения $(m_C^{(J)} = -I_C\varepsilon_z)$, $\delta\boldsymbol{r}_C$ — возможное перемещение центра тяжести C твердого тела, $\delta\varphi$ — возможное угловое перемещение твердого тела.

С помощью общего уравнения динамики можно решать задачи динамики материальной системы в случаях, когда в число задаваемых и искомых величин входят: инерционные характеристики (массы и моменты инерции), ускорения точек системы (линейные и угловые), активные силы и моменты, коэффициенты трения (скольжения и качения), коэффициенты упругости пружин.

Из общего уравнения динамики вытекают дифференциальные уравнения движения материальной системы, в которые не входят реакции идеальных связей. Возможно решение как прямых (определение сил по заданному движению), так и обратных задач (определение движения по заданным силам) динамики. При решении обратных задач приходится интегрировать составленную систему дифференциальных уравнений движения. Заметим, что использование общего уравнения динамики является *формальным* методом составления дифференциальных уравнений движения системы. Этот метод является менее удобным и менее эффективным по сравнению с применением уравнений Лагранжа второго рода (читатель сможет в этом убедиться, ознакомившись с содержанием следующего параграфа).

У к а з а н и е 1. Задачи с помощью общего уравнения динамики рекомендуется решать в такой последовательности:

1) изобразить на рисунке активные силы и реакции, соответствующие неидеальным связям (например, силы трения);

2) определить главные векторы и главные моменты сил инерции масс системы.

Дальнейшие действия следует осуществлять в зависимости от того имеет система одну степень свободы или же несколько.

а) *Для системы с одной степенью свободы*:

3) дать возможное перемещение одной из точек системы и выразить возможные перемещения точек приложения всех сил, указанных в первых двух пунктах, через это возможное перемещение;

4) вычислить сумму работ всех сил, указанных в первых двух пунктах, на возможных перемещениях точек системы; составить общее уравнение динамики, приравняв вычисленную сумму работ сил нулю;

5) после сокращения полученного уравнения на заданное возможное перемещение определить искомую величину либо провести интегрирование дифференциального уравнения движения.

б) *Для системы с несколькими степенями свободы:*

3) выбрать независимые возможные перемещения точек системы в числе, равном числу степеней свободы этой системы;

4) дать возможное перемещение, соответствующее одной из степеней свободы системы, считая при этом возможные перемещения, соответствующие остальным степеням свободы, равными нулю. Выразить возможные перемещения точек приложения сил через это возможное перемещение;

5) вычислить сумму работ всех сил, указанных в пунктах 1) и 2), на соответствующих возможных перемещениях их точек приложения и приравнять эту сумму нулю;

6) последовательно произведя выкладки пунктов 4) и 5) для каждого из независимых возможных перемещений, составить систему уравнений «равновесия» в числе, равном числу независимых возможных перемещений, т. е. числу степеней свободы системы;

7) после сокращения каждого из составленных уравнений на соответствующее независимое возможное перемещение надо определить из полученной системы уравнений искомые величины.

Указание 2. При применении общего уравнения динамики к системам с двумя и бо́льшим числом степеней свободы, в связи с громоздкостью выкладок, удобнее пользоваться следующими правилами:

а) сделать предположение о направлении ускорений точек системы;

б) направить на рисунке силы инерции в стороны, противоположные выбранным направлениям соответствующих ускорений;

в) записать алгебраические величины главных векторов и главных моментов сил инерции;

г) определить знаки работ сил инерции и моментов сил инерции в соответствии с их направлениями на рисунке и избранными направлениями возможных перемещений точек системы;

д) если искомые ускорения оказываются положительными, то сделанные предположения о направлениях ускорений подтверждаются, если — отрицательными, то соответствующие ускорения направлены в другую сторону (см. решение задач 10.25, 10.26).

Конечно, этот прием может быть использован и при решении задач о движении системы с одной степенью свободы.

Задача 10.23. Определить ускорение w грузов A и B, рассмотренных в задаче 10.6.

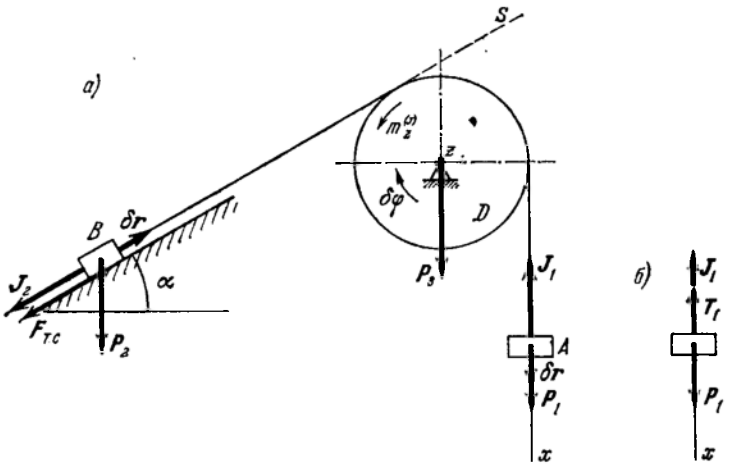
Решение. При решении задачи 10.6 методом кинетостатики пришлось для определения ускорения w грузов рассмотреть каждую из трех масс системы (груз A, груз B и блок D) в отдельности, составить уравнения равновесия сил и решить систему трех уравнений с тремя неизвестными.

Значительно проще решается эта задача применением общего уравнения динамики. Вместо системы уравнений приходится решать лишь одно уравнение (данная система имеет одну степень свободы).

Направим ось z вдоль оси вращения блока D за рисунок. Радиус блока обозначим r.

Изобразим активные силы, приложенные к данной системе: $\boldsymbol{P}_1 = M_1\boldsymbol{g}$ — сила тяжести груза A, $\boldsymbol{P}_2 = M_2\boldsymbol{g}$ — сила тяжести груза B, $\boldsymbol{P}_3 = M_3\boldsymbol{g}$ — сила тяжести блока D. При наличии идеальных связей, наложенных на систему, реакции связей в общее уравнение динамики не входят.

Добавив силу трения скольжения $\boldsymbol{F}_{т.с}$ груза B о наклонную плоскость, мы считаем, что на данную систему наложены только



К задаче 10.23.

идеальные связи (нить при движении системы считается натянутой и нерастяжимой).

Остается прибавить силы инерции. Пусть груз A опускается с искомым ускорением w.

К грузам A и B, совершающим поступательное движение, приложим равнодействующие сил инерции, направив их противоположно ускорениям соответствующих грузов, т. е. $\boldsymbol{J}_1$ — вверх, а $\boldsymbol{J}_2$ — параллельно наклонной плоскости вниз, причем

$$J_{1x} = -M_1 w_x, \quad J_{2s} = -M_2 w_s = -M_2 w_x. \tag{1}$$

К блоку D, вращающемуся вокруг неподвижной оси, приложим главный момент сил инерции $m_z^{(J)}$, знак которого противоположен знаку проекции углового ускорения ε_z:

$$m_z^{(J)} = -I_z \varepsilon_z.$$

Так как $I_z = \frac{M_3 r^2}{2}$, а $\varepsilon_z = \frac{w_x}{r}$, то

$$m_z^{(J)} = -\frac{M_3 r w_x}{2}. \tag{2}$$

(Главный вектор сил инерции блока $V^{(J)} = -M\boldsymbol{w}_C$ равен нулю, ибо центр тяжести блока расположен на оси вращения.)

Мысленно остановив систему, дадим одной из ее материальных точек возможное перемещение. Можно сообщить линейное возможное перемещение грузу A вверх или вниз, либо грузу B — по наклонной плоскости вверх или вниз, либо блоку D — угловое возможное перемещение по или против хода часовой стрелки.

Дадим грузу A возможное перемещение δr по вертикали вниз. Не следует считать, что направления движения какой-либо материальной точки и ее возможного перемещения должны обязательно совпадать. Направление движения точки зависит от системы сил, которые к ней приложены, возможное же перемещение точки, рассматриваемое из данного положения, зависит только от связей, наложенных на эту точку, в остальном оно произвольно. При этом, в силу нерастяжимости нити, груз B получит равное по модулю возможное перемещение, направленное вдоль наклонной плоскости вверх, а блок D получит угловое возможное перемещение $\delta\varphi$. Взяв точку нити на ободе блока, получим зависимость между линейным и угловым возможными перемещениями

$$\delta r = r\,\delta\varphi, \tag{3}$$

где r — радиус блока.

Применим к данной материальной системе общее уравнение динамики, т. е. приравняем нулю сумму работ активных сил (включая реакции неидеальных связей) и сил инерции на возможных перемещениях точек системы

$$P_1\delta r + J_{1x}\delta r + m_z^{(J)}\delta\varphi - P_2\delta r\sin\alpha - F_{\text{т. с}}\delta r + J_{2s}\delta r = 0. \tag{4}$$

Подставив в уравнение (4) значение силы трения $F_{\text{т. с}} = fN = fP_2\cos\alpha$ и воспользовавшись формулами (1), (2) и (3), после сокращения на δr получим:

$$P_1 - \frac{P_1}{g}w_x - \frac{P_2}{g}w_x - P_2\sin\alpha - fP_2\cos\alpha - \frac{P_2}{g}w_x = 0,$$

откуда находим проекцию искомого ускорения грузов A и B:

$$w_x = 2g\frac{M_1 - M_2(\sin\alpha + f\cos\alpha)}{2M_1 + 2M_2 + M_3}. \tag{5}$$

При $w_x > 0$, т. е. при $M_1 > M_2(\sin\alpha + f\cos\alpha)$, ускорение груза направлено вниз.

Если бы по условию задачи требовалось также определить какие-либо реакции связей либо давления на связи, то пришлось бы применить закон освобождаемости к связи, реакцию которой требуется найти, и к соответствующей массе системы применить основной закон динамики или метод кинетостатики. При наличии вычисленных ускорений это не представляет затруднений.

Так, если требуется определить реакцию правой ветви нити, мы мысленно рассекаем нить вблизи груза A, прикладываем к грузу три силы (рис. *б*): $\boldsymbol{P}_1 = M_1\boldsymbol{g}$ — силу тяжести груза, $\boldsymbol{T}_1$ — реакцию нити, $\boldsymbol{J}_1$ — силу инерции груза A.

Записываем уравнение равновесия сил в проекции на вертикальную ось x:

$$P_1 - T_1 + J_{1x} = 0.$$

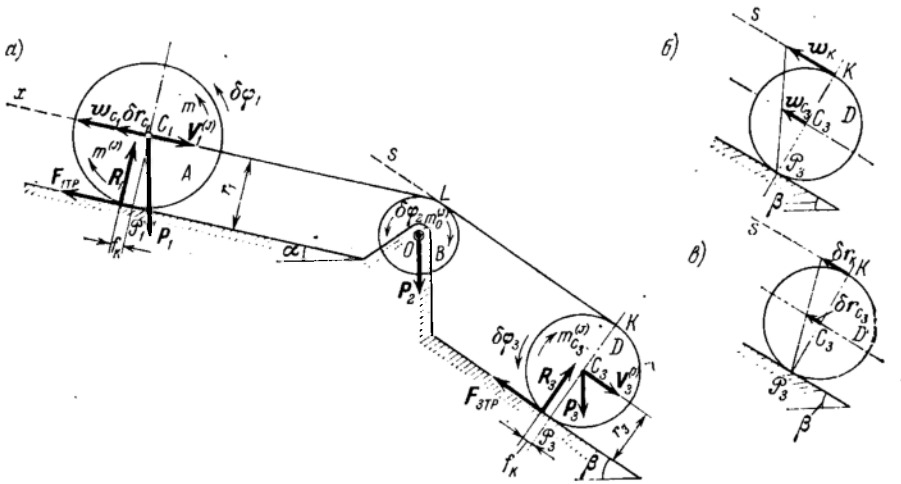
Так как $J_{1x} = -M_2 w_x$, то

$$T_1 = M_1 g - M_1 w_x,$$

где w_x — ускорение груза, определенное по формуле (5). После подстановки значения w_x получим

$$T_1 = \frac{M_1 g\,[M_3 + 2M_2\,(1 + \sin\alpha + f\cos\alpha)]}{2M_1 + 2M_2 + M_3}.$$

Задача 10.24. Каток A и барабан D связаны тонкой нерастяжимой нитью. Нить, привязанная своим концом к оси C_1 катка A,



К задаче 10.24.

переброшена через блок B и намотана на барабан D. К катку A массы M_1 и радиуса r_1 приложен вращающий момент m, заставляющий каток A катиться вверх без скольжения по наклонной плоскости, расположенной под углом α к горизонту. При этом блок B массы M_2 вращается вокруг неподвижной оси O, а барабан D массы M_3 и радиуса r_3 катится без скольжения вверх по наклонной плоскости, расположенной под углом β к горизонту.

Определить ускорение $\boldsymbol{w}_{C_1}$ центра тяжести C_1 катка A, если коэффициент трения качения катка и нитей, намотанных на барабан,

о наклонные плоскости равен $f_к$. Каток, блок и барабан считать однородными круглыми цилиндрами. Массой нити и ее проскальзыванием по ободу блока пренебречь.

Р е ш е н и е. Ось z направим перпендикулярно к плоскости рисунка на нас.

Рассматриваемая система имеет одну степень свободы, так как положение катка A на наклонной плоскости определяет положение блока и барабана. Обозначим через r_2 радиус блока B.

К системе приложены активные силы и моменты: $\boldsymbol{P}_1 = M_1\boldsymbol{g}$ — сила тяжести катка, $\boldsymbol{P}_2 = M_2\boldsymbol{g}$ — сила тяжести блока, $\boldsymbol{P}_3 = M_3\boldsymbol{g}$ — сила тяжести барабана и вращающий момент m.

Наклонные плоскости не являются идеальными связями, поэтому необходимо учесть силы трения. При наличии вращающего момента m каток A является ведущим и сила трения $\boldsymbol{F}_{1тр}$ катка A о наклонную плоскость направлена вдоль наклонной плоскости в сторону движения. Сила трения $\boldsymbol{F}_{3тр}$ нити, намотанной на барабан, о наклонную плоскость также направлена вдоль наклонной плоскости в сторону движения, т. е. вверх.

Ввиду наличия трения качения нормальные реакции наклонных плоскостей $\boldsymbol{R}_1$ и $\boldsymbol{R}_3$ смещены вперед в сторону движения на величину коэффициента трения качения $f_к$.

Для определения модулей сил инерции и моментов пар сил инерции масс системы найдем зависимость между ускорениями центров тяжести катка A и барабана D и угловыми ускорениями катка, блока и барабана. (Оси x и s изображены на рис. *а*.)

Направим $\boldsymbol{w}_C$, параллельно линии наибольшего ската наклонной плоскости в сторону движения катка, т. е. по оси x. Ввиду нерастяжимости нити $w_{C_1x} = w_{L\tau} = w_{Ks}$, причем $w_{L\tau} = r_2\varepsilon_{2z}$. Учитывая, что мгновенные центры скоростей катка и барабана соответственно расположены в точках $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_3$, получим

$$w_{C_1x} = r_1\varepsilon_{1z}, \quad w_{Ks} = 2r_3\varepsilon_{3z}, \quad w_{C_3s} = w_{Ks}/2$$

(рис. *б*). Следовательно,

$$w_{C_1x} = r_1\varepsilon_{1z} = r_2\varepsilon_{2z} = 2r_3\varepsilon_{3z} = 2w_{C_3s}, \tag{1}$$

где ε_{1z}, ε_{2z} и ε_{3z} — соответственно проекции на ось z угловых ускорений катка, блока и барабана.

Переходим к приведению сил инерции материальных точек системы. Силы инерции катка A, совершающего плоское движение, приводятся к силе, равной главному вектору $\boldsymbol{V}_1^{(J)}$ и паре сил, момент которой равен главному моменту $m_{C_1}^{(J)}$. Сила приложена в центре тяжести C_1 катка и направлена противоположно ускорению его центра тяжести, т. е. параллельно наклонной плоскости вниз ($V_1^{(J)} = -M_1w_{C_1}$), поэтому

$$V_{1x}^{(J)} = -M_1w_{C_1x}. \tag{2}$$

Главный момент сил инерции катка $m_{C_1}^{(J)}$ относительно оси, проходящей через его центр тяжести C_1 перпендикулярно к плоскости материальной симметрии, имеет знак, противоположный знаку проекции углового ускорения ε_{1z}, т. е.

$$m_{C_1}^{(J)} = -I_{C_1}\varepsilon_{1z} = -\frac{M_1 r_1^2}{2}\varepsilon_{1z}. \tag{3}$$

Силы инерции блока B, вращающегося вокруг неподвижной оси, приводятся к паре сил, момент которой равен главному моменту относительно оси вращения O. Знак момента противоположен знаку проекции его углового ускорения:

$$m_O^{(J)} = -I_O\varepsilon_{2z} = -\frac{M_2 r_2^2}{2}\varepsilon_{2z}. \tag{4}$$

Силы инерции барабана D, совершающего плоское движение, приводятся к силе, равной главному вектору $\boldsymbol{V}_3^{(J)}$, и паре сил, момент которой равен главному моменту $m_{C_3}^{(J)}$. Сила $\boldsymbol{V}_3^{(J)}$ приложена в его центре тяжести C_3 и направлена противоположно ускорению $\boldsymbol{w}_{C_3}$, т. е. параллельно линии наибольшего ската наклонной плоскости вниз; проекция этой силы на ось s равна

$$V_{3s}^{(J)} = -M_3 w_{C_3 s}. \tag{5}$$

Главный момент сил инерции $m_{C_3}^{(J)}$ барабана D относительно оси, проходящей через его центр тяжести C_3 перпендикулярно к плоскости материальной симметрии, имеет знак, противоположный знаку проекции углового ускорения ε_{3z}:

$$m_{C_3}^{(J)} = -I_{C_3}\varepsilon_{3z} = -\frac{M_3 r_3^2}{2}\varepsilon_{3z}. \tag{6}$$

Итак, силы инерции материальных точек рассматриваемой системы оказались приведенными к силе $\boldsymbol{V}_1^{(J)}$ и паре сил с моментом $m_{C_1}^{(J)}$ (каток A), к паре сил с моментом $m_O^{(J)}$ (блок B), к силе $\boldsymbol{V}_3^{(J)}$ и паре сил с моментом $m_{C_3}^{(J)}$ (барабан D).

Дадим возможное перемещение $\delta\boldsymbol{r}_{C_1}$ центру тяжести C_1 катка A параллельно наклонной плоскости вверх. Учитывая нерастяжимость нити, имеем: $\delta r_{C_1} = \delta r_L = \delta r_K$. Кроме того, $\delta r_L = r_2\delta\varphi_2$, где $\delta\varphi_2$ — возможное угловое перемещение блока B. Принимая во внимание, что мгновенные центры скоростей катка A и барабана D соответственно расположены в точках $\mathscr{P}_1$ и $\mathscr{P}_3$, получим $\delta r_{C_1} = r_1\delta\varphi_1$, $\delta r_K = 2r_3\delta\varphi_3 = 2\delta r_{C_3}$ (см. рис. *в*), где $\delta\varphi_1$ и $\delta\varphi_3$ — соответственно возможные угловые перемещения катка и барабана. Следовательно,

$$\delta r_{C_1} = r_1\delta\varphi_1 = r_2\delta\varphi_2 = 2r_3\delta\varphi_3 = 2\delta r_{C_3}. \tag{7}$$

Составим общее уравнение динамики:

$$m\delta\varphi_1 - P_1\delta r_{C_1}\sin\alpha + V_{1x}^{(J)}\delta r_{C_1} + m_{C_1}^{(J)}\varepsilon\delta\varphi_1 - R_1 f_к\delta\varphi_1 + \\ + m_O^{(J)}\delta\varphi_2 - P_3\delta r_{C_3}\sin\beta + V_{3s}^{(J)}\delta r_{C_3} + m_{C_3}^{(J)}\delta\varphi_3 - \\ - R_3 f_к\delta\varphi_3 + \delta A(\boldsymbol{P}_2) + \delta A(\boldsymbol{F}_{1\,тр}) + \delta A(\boldsymbol{F}_{3\,тр}) = 0. \qquad (8)$$

Работа силы тяжести $\boldsymbol{P}_2$ блока B равна нулю, так как точка приложения этой силы неподвижна.

Выберем теперь в качестве возможного перемещения действительное перемещение $d\boldsymbol{r}_{C_1}$ (это допустимо, ибо в данном случае связи стационарны). Тогда работа сил трения $\delta A(\boldsymbol{F}_{1тр})$ и $\delta A(\boldsymbol{F}_{3тр})$ будет равна нулю, так как при действительных перемещениях точки приложения сил трения $\boldsymbol{F}_{1тр}$ и $\boldsymbol{F}_{3тр}$ всегда совпадают с соответствующими мгновенными центрами скоростей.

Учитывая, что $R_1 = P_1\cos\alpha$, $R_3 = P_3\cos\beta$, $\delta r_{C_1 x} = \delta r_{C_1}$, $\delta r_{C_3 s} = \delta r_{C_3}$, и воспользовавшись формулами (2), (3), (4), (5) и (6), запишем уравнение (8) в виде

$$m\delta\varphi_1 - P_1\delta r_{C_1}\sin\alpha - \frac{P_1}{g}w_{C_1 x}\delta r_{C_1} - \frac{P_1 r_1^2}{2g}\varepsilon_{1z}\delta\varphi_1 - \\ - f_к P_1\cos\alpha\,\delta\varphi_1 - \frac{P_2 r_2^2}{2g}\varepsilon_{2z}\delta\varphi_2 - P_3\delta r_{C_3}\sin\beta - \frac{P_3}{g}w_{C_3 s}\delta r_{C_3} - \\ - \frac{P_3 r_3^2}{2g}\varepsilon_{3z}\delta\varphi_3 - f_к P_3\cos\beta\,\delta\varphi_3 = 0. \qquad (9)$$

Выразив с помощью формулы (1) ε_{1z}, ε_{2z}, ε_{3z} и $w_{C_3 s}$ через $w_{C_1 x}$, а $\delta\varphi_1$, $\delta\varphi_2$, $\delta\varphi_3$ и δr_{C_3} с помощью формулы (7) — в зависимости от δr_{C_1}, представим уравнение (9) после почленного сокращения на δr_{C_1} в виде

$$\frac{m}{r_1} - P_1\sin\alpha - \frac{3}{2}\frac{P_1}{g}w_{C_1 x} - \frac{f_м}{r_1}P_1\cos\alpha - \frac{P_2}{2g}w_{C_1 x} - \\ - \frac{P_3}{2}\sin\beta - \frac{3P_3}{8g}w_{C_1 x} - \frac{f_к}{2r_3}P_3\cos\beta = 0. \qquad (10)$$

Из уравнения (10) определяем проекцию искомого ускорения центра тяжести катка A (при этом $P_1 = M_1 g$, $P_2 = M_2 g$, $P_3 = M_3 g$):

$$w_{C_1 x} = 8\,\frac{\dfrac{m}{r_1} - M_1 g\left(\sin\alpha + \dfrac{f_м}{r_1}\cos\alpha\right) - \dfrac{M_3 g}{2}\left(\sin\beta + \dfrac{f_м}{r_3}\cos\beta\right)}{12M_1 + 4M_2 + 3M_3}.$$

Если

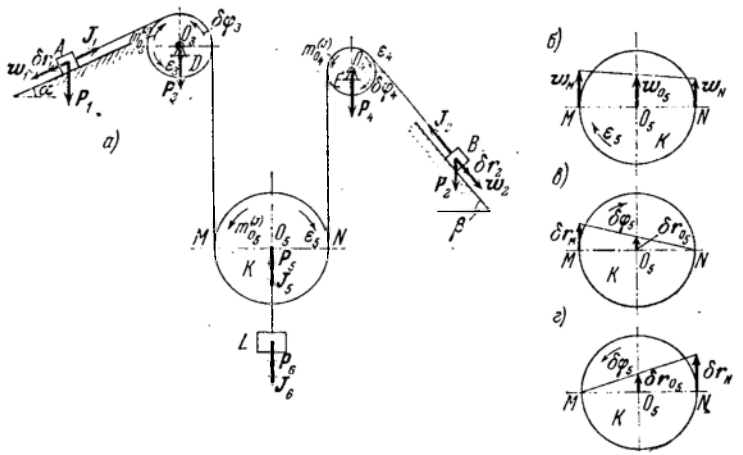
$$\frac{m}{r_1} > M_1 g\left(\sin\alpha + \frac{f_к}{r_1}\cos\alpha\right) + \frac{M_3 g}{2}\left(\sin\beta + \frac{f_к}{r_3}\cos\beta\right),$$

то $w_{C_1 x} > 0$, т. е. ускорение центра тяжести C_1 катка A направлено параллельно линии наибольшего ската наклонной плоскости вверх.

Задача 10.25. К концам тонкой нерастяжимой нити привязаны груз A массы M_1 и груз B массы M_2. Нить переброшена через блоки D и E и охватывает снизу подвижной блок K. К оси O_5 подвижного

блока K прикреплен груз L массы M_6; M_3 — масса блока D, M_4 — масса блока E, M_5 — масса блока K. Грузы A и B движутся по наклонным плоскостям, соответственно расположенным под углами α и β к горизонту.

Определить ускорения грузов A, B и L. Блоки считать однородными круглыми дисками. Силами трения скольжения грузов о наклонные плоскости и массой нити пренебречь.



К задаче 10.25.

Р е ш е н и е. Данная материальная система имеет две степени свободы. Действительно, задав положения грузов A и B на наклонных плоскостях, мы определим положение всех остальных масс системы: блоков D, E и K и груза L.

Изобразим на рис. *а* все активные силы: $\boldsymbol{P}_1 = M_1\boldsymbol{g}$ — сила тяжести груза A, $\boldsymbol{P}_2 = M_2\boldsymbol{g}$ — сила тяжести груза B, $\boldsymbol{P}_3 = M_3\boldsymbol{g}$ — сила тяжести блока D, $\boldsymbol{P}_4 = M_4\boldsymbol{g}$ — сила тяжести блока E, $\boldsymbol{P}_5 = M_5\boldsymbol{g}$ — сила тяжести блока K, $\boldsymbol{P}_6 = M_6\boldsymbol{g}$ — сила тяжести груза L.

Все связи, наложенные на систему, являются идеальными (наклонные плоскости — идеально гладкие, нить нерастяжима и при движении системы натянута). Поэтому при составлении общего уравнения динамики реакции связей рассмотрению не подлежат.

Обозначим через r_3, r_4 и r_5 радиусы блоков D, E и K соответственно, через $\boldsymbol{w}_1$ и $\boldsymbol{w}_2$ — ускорения грузов A и B. Предположим, что оба ускорения направлены параллельно линиям наибольшего ската соответствующих наклонных плоскостей вниз. Так как нить нерастяжима, то модуль ускорения точки M нити равен модулю ускорения груза A, а модуль ускорения точки N нити — модулю ускорения груза B ($w_M = w_1$, $w_N = w_2$).

Из рис. *б* можно найти ускорение центра тяжести O_5 блока K:

$$w_{O_5} = \frac{w_M + w_N}{2} = \frac{w_1 + w_2}{2}. \qquad (1)$$

Для определения углового ускорения ε_5 блока K примем точку N за полюс и воспользуемся тем, что проекция ускорения точки M на вертикальную ось равна

$$w_M = w_N + w_{MN}^{вр}.$$

Так как $w_{MN}^{вр} = MN\varepsilon_5 = 2r_5\varepsilon_5$, то

$$\varepsilon_5 = \frac{w_M - w_N}{2r_5} = \frac{w_1 - w_2}{2r_5}. \tag{2}$$

При $w_1 > w_2$ блок K вращается ускоренно по ходу часовой стрелки.

Ускорение точки нити на ободе блока D равно w_1; следовательно, угловое ускорение ε_3 блока D будет

$$\varepsilon_3 = \frac{w_1}{r_3}. \tag{3}$$

(Блок D вращается ускоренно против хода часовой стрелки.)

Аналогично блок E вращается ускоренно по ходу часовой стрелки, причем

$$\varepsilon_4 = \frac{w_2}{r_4}. \tag{4}$$

Переходим к приведению сил инерции материальных точек данной системы. Силы инерции грузов A и B, движущихся поступательно, приводятся к равнодействующим $\boldsymbol{J}_1$ и $\boldsymbol{J}_2$, направленным соответственно противоположно ускорениям $\boldsymbol{w}_1$ и $\boldsymbol{w}_2$, т. е. параллельно линиям наибольшего ската наклонных плоскостей вверх:

$$\boldsymbol{J}_1 = -M_1\boldsymbol{w}_1, \quad \boldsymbol{J}_2 = -M_2\boldsymbol{w}_2,$$

причем

$$J_1 = M_1w_1, \; J_2 = M_2w_2. \tag{5}$$

Силы инерции блоков D и E, вращающихся вокруг неподвижных осей, приводятся к парам сил с моментами $m_{O_3}^{(J)}$ и $m_{O_4}^{(J)}$, причем по модулю

$$m_{O_3}^{(J)} = I_3\varepsilon_3, \quad m_{O_4}^{(J)} = I_4\varepsilon_4.$$

Блоки D и E являются однородными круглыми дисками, поэтому

$$I_{O_3} = \frac{M_3r_3^2}{2}, \quad I_{O_4} = \frac{M_4r_4^2}{2}.$$

Принимая во внимание формулы (3) и (4), получим модули главных моментов сил инерции:

$$m_{O_3}^{(J)} = \frac{M_3r_3w_1}{2}, \; m_{O_4}^{(J)} = \frac{M_4r_4w_2}{2}. \tag{6}$$

Силы инерции блока K, совершающего плоское движение, приводятся к силе, равной главному вектору $\boldsymbol{J}_5$ и паре сил, момент кото-

рой равен главному моменту $m_{O_5}^{(J)}$ относительно оси, проходящей через его центр тяжести O_5 перпендикулярно к плоскости материальной симметрии. Сила $\boldsymbol{J}_5$ приложена в центре тяжести O_5 блока K и направлена противоположно его ускорению $\boldsymbol{w}_{O_5}$, т. е. по вертикали вниз:

$$\boldsymbol{J}_5 = -M_5\boldsymbol{w}_{O_5}.$$

Учитывая формулу (1), получим

$$J_5 = M_5\frac{w_1 + w_2}{2}. \tag{7}$$

Модуль главного момента $m_{O_5}^{(J)}$ сил инерции блока K имеет вид

$$m_{O_5}^{(J)} = I_{O_5}\varepsilon_5 = \frac{M_5 r_5 (w_1 - w_2)}{4}. \tag{8}$$

Силы инерции груза L, движущегося поступательно, приводятся к равнодействующей $\boldsymbol{J}_6$, направленной противоположно его ускорению $\boldsymbol{w}_{O_6}$, т. е. по вертикали вниз: $\boldsymbol{J}_6 = -M_6\boldsymbol{w}_{O_6}$. С учетом формулы (1) получаем

$$J_6 = \frac{M_6}{2}(w_1 + w_2). \tag{9}$$

Итак, силы инерции рассматриваемой системы оказались приведенными к силам $\boldsymbol{J}_1$, $\boldsymbol{J}_2$, $\boldsymbol{J}_5$ и $\boldsymbol{J}_6$ и парам сил с моментами $m_{O_1}^{(J)}$, $m_{O_2}^{(J)}$, $m_{O_5}^{(J)}$.

Дадим данной материальной системе, имеющей две степени свободы, два независимых возможных перемещения $\delta\boldsymbol{r}_1$ и $\delta\boldsymbol{r}_2$ (соответственно грузам A и B), направив их параллельно наклонным плоскостям вниз. Учитывая независимость этих возможных перемещений, будем при составлении каждого из дифференциальных уравнений движения давать одно возможное перемещение, считая при этом другое возможное перемещение равным нулю.

а) Дадим грузу A возможное перемещение $\delta\boldsymbol{r}_1$, считая при этом $\delta\boldsymbol{r}_2$ равным нулю, т. е. $\delta\boldsymbol{r}_1 \neq 0$, $\delta\boldsymbol{r}_2 = 0$.

Это значит, что груз A переместится вдоль наклонной плоскости вниз на δr_1. Учитывая нерастяжимость нити, отметим, что равное возможное перемещение получит точка M нити, расположенная на ободе блока K, т. е. $\delta r_M = \delta r_1$. Блок D повернется против хода часовой стрелки на угол

$$\delta\varphi_3 = \frac{\delta r_1}{r_3}. \tag{10}$$

Так как $\delta\boldsymbol{r}_2 = 0$, то груз B, блок E и правая ветвь нити до точки N останутся в покое.

Пользуясь рис. *в*, нетрудно найти возможное перемещение центра тяжести O_5 блока K:

$$\delta r_{O_5} = \frac{\delta r_M}{2} = \frac{\delta r_1}{2}. \tag{11}$$

Рассматривая возможное перемещение $\delta \boldsymbol{r}_M$ по отношению к неподвижной точке N, имеем $\delta r_M = 2r_5\delta\varphi_5$, откуда

$$\delta\varphi_5 = \frac{\delta r_M}{2r_5} = \frac{\delta r_1}{2r_5}. \tag{12}$$

Возможное угловое перемещение $\delta\varphi_5$ блока K направлено по ходу часовой стрелки.

Составим общее уравнение динамики, т. е. вычислим сумму работ всех активных сил и сил инерции материальной системы на возможных перемещениях, соответствующих $\delta \boldsymbol{r}_1$, и приравняем ее нулю:

$$P_1\delta r_1 \sin\alpha - J_1\delta r_1 - m_{O_3}^{(J)}\delta\varphi_3 - m_{O_5}^{(J)}\delta\varphi_5 - P_5\delta r_{O_5} - \\ - J_5\delta r_{O_5} - P_6\delta r_{O_5} - J_6\delta r_{O_5} = 0. \tag{13}$$

Работа сил $\boldsymbol{P}_2$, $\boldsymbol{J}_2$ и пары сил инерции с моментом $m_{O_4}^{(J)}$ равна нулю, так как груз B, блок E и правая ветвь нити до точки N при $\delta \boldsymbol{r}_2 = 0$ являются неподвижными. Работа сил $\boldsymbol{P}_3$ и $\boldsymbol{P}_4$ равна нулю, так как их точки приложения неподвижны.

Воспользовавшись формулами (5)—(12) и сокращая уравнение (13) на δr_1, находим

$$P_1 \sin\alpha - \frac{P_1}{g}w_1 - \frac{P_3 w_1}{2g} - \frac{P_5(w_1 - w_2)}{8g} - \frac{P_5}{2} - \\ - \frac{P_5}{4g}(w_1 + w_2) - \frac{P_6}{2} - \frac{P_6}{4g}(w_1 + w_2) = 0$$

или

$$-\frac{w_1}{8g}(8M_1 + 4M_3 + 3M_5 + 2M_6) - \frac{w_2}{8g}(M_5 + 2M_6) + \\ + M_1 \sin\alpha - \frac{M_5 + M_6}{2} = 0. \tag{14}$$

б) Дадим грузу B возможное перемещение $\delta \boldsymbol{r}_2$, считая при этом $\delta \boldsymbol{r}_1$ равным нулю, т. е. $\delta \boldsymbol{r}_1 = 0$, $\delta \boldsymbol{r}_2 \neq 0$.

Это значит, что груз B переместится вдоль наклонной плоскости вниз на $\delta \boldsymbol{r}_2$. В связи с нерастяжимостью нити возможное перемещение точки N нити, лежащей на ободе блока K, равно возможному перемещению груза B, т. е. $\delta \boldsymbol{r}_N = \delta \boldsymbol{r}_2$. Блок E повернется по ходу часовой стрелки на угол

$$\delta\varphi_4 = \frac{\delta r_2}{r_4}. \tag{15}$$

Так как $\delta \boldsymbol{r}_1 = 0$, то груз A, блок D и левая ветвь нити до точки M находятся в покое. При этом

$$\delta r_{O_5} = \frac{\delta r_N}{2} = \frac{\delta r_2}{2} \tag{16}$$

(рис. *г*).

Рассматривая возможное перемещение $\delta \boldsymbol{r}_N$ по отношению к неподвижной точке M, запишем: $\delta r_N = 2r_5\delta\varphi_5$, откуда

$$\delta\varphi_5 = \frac{\delta r_N}{2r_5} = \frac{\delta r_2}{2r_2}. \tag{17}$$

Возможное угловое перемещение $\delta\varphi_5$ блока K направлено против хода часовой стрелки.

Составим общее уравнение динамики, т. е. вычислим сумму работ всех активных сил и сил инерции материальной системы на возможных перемещениях, соответствующих $\delta \boldsymbol{r}_2$, и приравняем ее нулю:

$$P_2\delta r_2 \sin\beta - J_2\delta r_2 - m_{O_4}^{(J)}\delta\varphi_4 + m_{O_5}^{(J)}\delta\varphi_5 - P_5\delta r_{O_5} - \\ - J_5\delta r_{O_5} - P_6\delta r_{O_5} - J_6\delta r_{O_5} = 0. \tag{18}$$

Работа сил $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{J}_1$ и пары сил инерции с моментом $m_{O_3}^{(J)}$ равна нулю, так как груз A, блок D и левая ветвь нити до точки M неподвижны ($\delta \boldsymbol{r}_1 = 0$). Работа сил $\boldsymbol{P}_3$ и $\boldsymbol{P}_4$ равна нулю, так как точки приложения этих сил неподвижны.

Воспользовавшись формулами (5)—(9), (15), (16), (17) и сокращая уравнение (18) на δr_2, получим

$$P_2 \sin\beta - \frac{P_2}{g}w_2 - \frac{P_4 w_2}{2g} + \frac{P_5(w_1 - w_2)}{8g} - \frac{P_5}{2} - \frac{P_5}{4g}(w_1 + w_2) - \\ - \frac{P_6}{2} - \frac{P_6}{4g}(w_1 + w_2) = 0$$

или

$$-\frac{w_2}{8g}(8M_2 + 4M_4 + 3M_5 + 2M_6) - \frac{w_1}{8g}(M_5 + 2M_6) + \\ + M_2 \sin\beta - \frac{M_5 + M_6}{2} = 0. \tag{19}$$

Уравнения (14) и (19) образуют систему дифференциальных уравнений движения системы. Решив эту систему уравнений, находим модули искомых ускорений грузов A и B:

$$w_1 = 8g\frac{D(C - B) - C\cdot M_2 \sin\beta + B\cdot M_1 \sin\alpha}{AB - C^2}, \\ w_2 = 8g\frac{D(C - A) + A\cdot M_2 \sin\beta - C\cdot M_1 \sin\alpha}{AB - C^2}, \tag{20}$$

где

$$8M_1 + 4M_3 + 3M_5 + 2M_6 = A, \quad 8M_2 + 4M_4 + 3M_5 + 2M_6 = B, \\ M_5 + 2M_6 = C, \\ \frac{M_5 + M_6}{2} = D.$$

При решении задачи мы предположили, что грузы A и B движутся ускоренно вниз вдоль наклонных плоскостей с ускорениями $\boldsymbol{w}_1$ и $\boldsymbol{w}_2$. Если значения w_1 и w_2, подсчитанные по формулам (20), окажутся положительными, то сделанное предположение подтверждается. Если же эти значения окажутся отрицательными, то это означает, что ускорения грузов направлены вдоль наклонных плоскостей вверх.

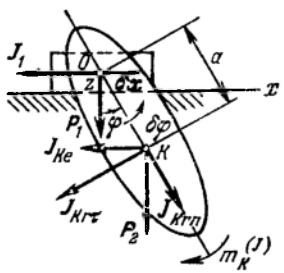
Для определения ускорения груза L, т. е. w_{O_6}, надо в (1) подставить значения w_1 и w_2 из формул (20). Находим

$$w_{O_6} = 4g\frac{D(2C - A - B) + (A - C)M_2 \sin\beta + (B - C)M_1 \sin\alpha}{AB - C^2}.$$

Если значение w_{O_6}, подсчитанное по этой формуле, положительно, то ускорение груза L направлено вверх, если же отрицательно, то ускорение груза L направлено вниз.

Данную задачу, подобно всем предыдущим задачам этого параграфа, можно решить с помощью уравнений Лагранжа второго рода. Это решение приведено в задаче 10.43. Там же дана сравнительная оценка обоих методов решения задачи.

Задача 10.26. Сохранив данные и ознакомившись с решением задачи 10.7, составить дифференциальные уравнения движения системы. Затем, считая колебания маятника малыми, определить круговую частоту его колебаний.



К задаче 10.26.

Р е ш е н и е. В ходе решения задачи 10.7 методом кинетостатики мы ввели силы инерции и, рассмотрев отдельно ползун и маятник, составили пять уравнений равновесия, из которых затем получили требуемые два уравнения. С помощью общего уравнения динамики, при тех же введенных силах инерции, мы можем непосредственно составить эти два уравнения (число уравнений равно числу степеней свободы рассматриваемой системы) и тем самым значительно упростить решение задачи.

На рисунке изображены активные силы: $\boldsymbol{P}_1$ — сила тяжести ползуна, $\boldsymbol{P}_2$ — сила тяжести маятника и силы инерции: $\boldsymbol{J}_1$ (см. рис. *б* задачи 10.7), $\boldsymbol{J}_{Ke}$, $\boldsymbol{J}_{K\tau}$, $\boldsymbol{J}_{Kn}$ и момент сил инерции $m_K^{(J)}$ (см. рис. *в* задачи 10.7). Реакции изображать не следует, ибо все связи идеальны.

Дадим данной системе, имеющей две степени свободы, два независимых возможных перемещения: $\delta\boldsymbol{x}$ — ползуну и $\delta\varphi$ — маятнику (см. рисунок).

Для составления общего уравнения динамики, соответствующего возможному перемещению $\delta\boldsymbol{x}$, будем считать $\delta\boldsymbol{x} \neq 0$, $\delta\varphi = 0$ (это значит, что вся система поступательно переместилась на $\delta\boldsymbol{x}$). Вычислим сумму работ активных сил $\boldsymbol{P}_1$ и $\boldsymbol{P}_2$, сил инерции $\boldsymbol{J}_1$, $\boldsymbol{J}_{Ke}$, $\boldsymbol{J}_{K\tau}$

и $\boldsymbol{J}_{Krn}$, момента сил инерции $m_K^{(J)}$ на возможном перемещении $\delta\boldsymbol{x}$ и приравняем ее нулю:

$$-J_1\delta x - J_{Ke}\delta x - J_{Kr\tau}\cos\varphi\,\delta x + J_{Krn}\sin\varphi\,\delta x = 0. \qquad (1)$$

Заметим, что работа момента сил инерции $m_K^{(J)}$ отлична от нуля только на угловом возможном перемещении, а работа сил тяжести $\boldsymbol{P}_1$ и $\boldsymbol{P}_2$ равна нулю, ибо точки приложения этих сил перемещаются по горизонтали. Приняв во внимание, что $|\boldsymbol{J}_1| = M_1|\ddot{\boldsymbol{x}}|$, и учтя формулы (10) задачи 10.7, после сокращения на $-\delta x/g$ запишем уравнение (1) в виде

$$(M_1 + M_2)\,\ddot{x} + M_2 a\ddot{\varphi}\cos\varphi - M_2 a\dot{\varphi}^2\sin\varphi = 0. \qquad (2)$$

Для составления общего уравнения динамики, соответствующего возможному перемещению $\delta\varphi$, будем считать $\delta\boldsymbol{x} = 0$, $\delta\varphi \neq 0$ (это значит, что при неподвижном ползуне маятник поворачивается против часовой стрелки на $\delta\varphi$). Вычислим сумму работ активных сил $\boldsymbol{P}_1$ и $\boldsymbol{P}_2$, сил инерции $\boldsymbol{J}_1$, $\boldsymbol{J}_{Ke}$, $\boldsymbol{J}_{Kr\tau}$ и $\boldsymbol{J}_{Krn}$, момента сил инерции $m_K^{(J)}$ на возможном перемещении $\delta\varphi$ и приравняем ее нулю:

$$m_K^{(J)}\delta\varphi - J_{Ke}a\cos\varphi\,\delta\varphi - J_{Kr\tau}a\delta\varphi - M_2 ga\sin\varphi\,\delta\varphi = 0. \qquad (3)$$

Силы $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{J}_1$, $\boldsymbol{J}_{Krn}$ в уравнение (3) не вошли, ибо точка приложения сил $\boldsymbol{P}_1$ и $\boldsymbol{J}_1$ неподвижна, а момент силы $\boldsymbol{J}_{Krn}$ относительно оси z равен нулю. Приняв во внимание формулы (6) и (10) задачи 10.7, после сокращения уравнения (3) на $-\delta\varphi$ получим

$$I_K\ddot{\varphi} + M_2\ddot{x}a\cos\varphi + M_2a^2\ddot{\varphi} + M_2 ga\sin\varphi = 0. \qquad (4)$$

Так как по теореме Штейнера $I_K + M_2a^2 = I_z$, то уравнение (4) примет вид

$$I_z\ddot{\varphi} + M_2a\ddot{x}\cos\varphi + M_2 ga\sin\varphi = 0. \qquad (5)$$

Нетрудно видеть, что искомые дифференциальные уравнения движения системы (2) и (5) соответственно тождественны уравнениям (18) и (17) задачи 10.7.

Даже беглое сопоставление степени трудности и объема вычислений при составлении дифференциальных уравнений движения методом кинетостатики (см. задачу 10.7) и с помощью общего уравнения динамики показывает значительное преимущество последнего.

Переходим к определению круговой частоты малых колебаний маятника. Система дифференциальных уравнений (2) и (5) является нелинейной, и ее интегрирование связано со значительными трудностями. В связи с этим будем решать задачу приближенно, считая колебания маятника малыми. Это значит, что, полагая φ и $\dot{\varphi}$ величинами первого порядка малости, мы запишем дифференциальные уравнения (2) и (5) с точностью до членов первого порядка малости включительно. Нетрудно видеть, что сразу следует отбросить член уравнения (2): $-M_2a\dot{\varphi}^2\sin\varphi$. Затем, разложив $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ в ряды:

$\sin\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \ldots$, $\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2} + \ldots$, мы с указанной степенью точности примем $\sin\varphi \approx \varphi$, $\cos\varphi \approx 1$. Тогда уравнения (2) и (5) приближенно примут вид

$$(M_1 + M_2)\ddot{x} + M_2 a\ddot{\varphi} = 0, \tag{6}$$

$$I_z\ddot{\varphi} + M_2 a\ddot{x} + M_2 g a\varphi = 0. \tag{7}$$

Сопоставив системы уравнений (2) и (5), а также (6) и (7), видим, что вместо нелинейных нами получены приближенные линейные уравнения, интегрирование которых не составляет большого труда. Этот переход от точных нелинейных к приближенным линейным уравнениям называется *процессом линеаризации уравнений*.

Исключив $\ddot{x}$ из системы (6), (7), после несложных преобразований получим:

$$\ddot{\varphi} + \frac{M_2 (M_1 + M_2) ag}{I_z (M_1 + M_2) - M_2^2 a^2}\varphi = 0. \tag{8}$$

Уравнение (8) является дифференциальным уравнением свободных колебаний маятника. Коэффициент, стоящий при φ, обычно обозначается k^2. Значит, искомая круговая частота k малых колебаний маятника равна

$$k = \sqrt{\frac{M_2 (M_1 + M_2) ag}{I_z (M_1 + M_2) - M_2^2 a^2}}.$$

Указание. Рекомендуем решить следующие задачи из «Сборника задач по теоретической механике» И. В. Мещерского: 47.1—47.7, 47.11—47.17, 48.28—48.32, 48.36—48.39.

§ 6. Уравнения Лагранжа второго рода

1. Обобщенные координаты. Обобщенные силы. Рассматривается материальная система, подчиненная идеальным голономным связям.

Обобщенными координатами называются независимые параметры, однозначно определяющие положения точек материальной системы.

Число независимых обобщенных координат материальной системы, подчиненной идеальным и голономным связям, равно числу степеней свободы.

Так, кривошипно-ползунный механизм является системой с одной степенью свободы. В качестве обобщенной координаты может быть взят угол поворота кривошипа, значением которого однозначно определяются положения всех точек системы.

Механизм конического дифференциала (рис. 10.20) является системой с двумя степенями свободы. В качестве независимых обобщенных координат можно избрать угол поворота φ_1 ведущего колеса *1* и угол поворота φ_0 водила ABC, вращающегося вокруг вертикальной

оси. Значения углов поворота φ_1 и φ_0 однозначно определяют положение ведомого колеса *3*.

Радиус-вектор $\boldsymbol{r}_k$, определяющий положение k-й материальной точки системы с s степенями свободы, является в случае нестационарных связей функцией обобщенных координат и времени:

$$\boldsymbol{r}_k = \boldsymbol{r}_k(q_1, q_2, \ldots, q_s, t),$$

где q_1, q_2, ..., q_s — обобщенные координаты, а $k = 1, 2, \ldots, n$ (n — число точек материальной системы).

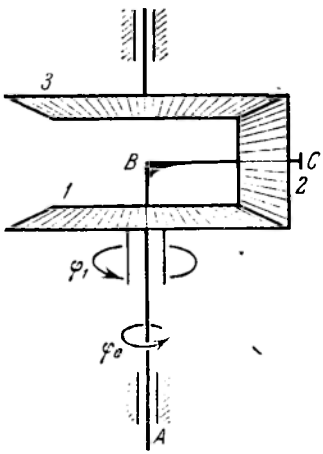


Рис. 10.20.

Скорость этой точки равна

$$\boldsymbol{v}_k = \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \ldots + \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial t}.$$

Возможное перемещение этой точки, выражаемое вариацией радиуса-вектора $\boldsymbol{r}_k$, имеет вид

$$\delta\boldsymbol{r}_k = \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_s}\delta q_s,$$

где δq_1, δq_2, ..., δq_s — обобщенные возможные перемещения, т. е. вариации обобщенных координат.

Обращаем внимание читателя на то, что в формуле, определяющей возможное перемещение $\delta\boldsymbol{r}_k$, на одно слагаемое меньше по сравнению с формулой, дающей скорость точки $\boldsymbol{v}_k$. Это получается потому, что возможное перемещение является вариацией функции, т. е. определяется при фиксированном значении аргумента t.

Обобщенными силами Q_i, где $i = 1, 2, \ldots, s$, называются коэффициенты, стоящие в выражении суммы работ активных сил при соответствующих обобщенных возможных перемещениях. Число обобщенных сил равно числу обобщенных координат, т. е. числу степеней свободы системы (связи, наложенные на систему, предполагаются идеальными и голономными). Размерность обобщенной силы

$$[Q] = \frac{[A]}{[q]},$$

т. е. она может быть различной в зависимости от выбора обобщенной координаты, например если обобщенная координата — объем, то обобщенная сила имеет размерность напряжения.

Обобщенная сила Q_i вычисляется по формуле

$$Q_i = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F}_k \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, s),$$

где n — число материальных точек, s — число степеней свободы, $\boldsymbol{F}_k$ — равнодействующая активных сил, приложенных к k-й точке системы. Обобщенная сила является алгебраической величиной.

Выражение обобщенной силы Q_i через проекции активных сил на оси декартовых координат имеет вид

$$Q_i = \sum_{k=1}^{n} \left(F_{kx} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + F_{ky} \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + F_{kz} \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \right),$$

где

$$\boldsymbol{F}_k = F_{kx}\boldsymbol{i} + F_{ky}\boldsymbol{j} + F_{kz}\boldsymbol{k}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i} = \frac{\partial x_k}{\partial q_i}\boldsymbol{i} + \frac{\partial y_k}{\partial q_i}\boldsymbol{j} + \frac{\partial z_k}{\partial q_i}\boldsymbol{k}.$$

Если не все связи, наложенные на материальную систему, являются идеальными, например, имеются негладкие опорные поверхности, то при вычислении обобщенной силы по формуле

$$Q_i = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F}_k \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i}$$

надо под $\boldsymbol{F}_k$ понимать не только активные силы, но и силы трения.

Если силы, действующие на систему, потенциальны, то обобщенные силы равны взятым с обратным знаком частным производным потенциальной энергии системы по соответствующим обобщенным координатам, т. е.

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i},$$

где $i = 1, 2, \ldots, s$.

Вычисление обобщенных сил материальной системы является одним из существенных этапов решения задач с помощью уравнений Лагранжа второго рода.

У к а з а н и е. Определение обобщенных сил можно проводить двумя способами:

а) Наиболее распространенным приемом является вычисление обобщенных сил как коэффициентов в выражении суммы элементарных работ активных сил при соответствующих обобщенных возможных перемещениях. В этом случае вычисление обобщенных сил следует проводить в следующем порядке:

1) выяснить число степеней свободы рассматриваемой системы материальных точек и выбрать соответствующие обобщенные координаты;

2) изобразить все активные силы системы;

3) если не все связи, наложенные на материальную систему, являются идеальными, то добавить к активным силам соответствующие реакции связей (например, силы трения);

4) дать независимые обобщенные возможные перемещения системе в числе, равном числу обобщенных координат, т. е. числу степеней свободы материальной системы;

5) для определения обобщенной силы Q_i, соответствующей i-й обобщенной координате q_i, надо вычислить сумму работ всех активных сил, включая реакции неидеальных связей, на обобщенном возможном перемещении δq_i. При этом все остальные обобщенные возможные перемещения δq_1, δq_2, ..., δq_{i-1}, δq_{i+1}, ..., δq_s надо считать равными нулю, т. е. $\delta q_i \neq 0$, $\delta q_1 = \delta q_2 = \ldots = \delta q_{i-1} = \delta q_{i+1} = \ldots = \delta q_s = 0$. Тогда обобщенная сила Q_i будет равна коэффициенту при δq_i. Аналогично определить все остальные обобщенные силы.

б) Если все силы, действующие на материальную систему, потенциальны, то после выбора обобщенных координат надо вычислить потенциальную энергию П системы, выразив ее в зависимости от обобщенных координат. Обобщенная сила определяется как взятая с обратным знаком частная производная потенциальной энергии по соответствующей обобщенной координате, т. е.

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i},$$

где $i = 1, 2, \ldots, s$.

Этот способ определения обобщенных сил в случае системы с несколькими степенями свободы эффективнее предыдущего способа. Однако он пригоден лишь, когда все активные силы потенциальны.

При вычислении потенциальной энергии П положение начала отсчета выбирается произвольно. При перемене его положения потенциальная энергия меняется на постоянную величину: $\Pi_1 = \Pi + C$. Это не отражается на результате вычисления обобщенной силы. Действительно: $Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi_1}{\partial q_i}$.

Принцип возможных перемещений в обобщенных координатах формулируется так: для равновесия материальной системы, подчиненной идеальным и стационарным связям, необходимо и достаточно, чтобы сумма работ обобщенных сил на соответствующих обобщенных возможных перемещениях системы равнялась нулю:

$$Q_1\delta q_1 + Q_2\delta q_2 + \cdots + Q_i\delta q_i + \cdots + Q_s\delta q_s = 0,$$

где Q_i — обобщенная сила, соответствующая i-й обобщенной координате.

Так как δq_1, δq_2, ..., δq_s являются независимыми обобщенными возможными перемещениями, то равенство оказывается справедливым лишь при условии:

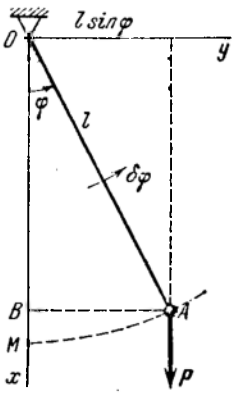
$$Q_1 = Q_2 = \ldots = Q_i = \ldots = Q_s = 0.$$

Итак, в случае равновесия материальной системы все обобщенные силы равны нулю.

Задача 10.27. Определить обобщенную силу математического маятника массы M, если длина нити равна l. За обобщенную координату взять угол отклонения φ.

Р е ш е н и е. Математический маятник является системой с одной степенью свободы, так как для определения положения маятника достаточно задать один параметр. В соответствии с условием, в качестве обобщенной координаты выбираем угол поворота φ, образуемый нитью маятника с вертикалью.

Единственной активной силой является сила тяжести маятника $\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{g}$. Так как нить нерастяжима и при движении маятника натянута, то она является идеальной связью.



К задаче 10.27.

Дадим маятнику обобщенное возможное перемещение $\delta\varphi$ в сторону возрастания угла φ, т. е. против часовой стрелки. Для определения обобщенной силы Q_φ вычисляем работу веса $\boldsymbol{P}$ маятника на обобщенном возможном перемещении $\delta\varphi$:

$$\delta A = -Pl \sin\varphi\, \delta\varphi = -Mgl \sin\varphi\, \delta\varphi.$$

Работа отрицательна, так как направления момента силы $\boldsymbol{P}$ относительно оси привеса z, перпендикулярной к плоскости рисунка, и возможного перемещения $\delta\varphi$ противоположны. Обобщенной силой Q_φ является коэффициент, стоящий в формуле (1) при $\delta\varphi$, т. е.

$$Q_\varphi = -Pl \sin\varphi = -Mgl \sin\varphi \qquad (1)$$

(индекс φ при обобщенной силе Q указывает, что эта сила соответствует обобщенной координате φ).

Рассмотрим теперь второй способ вычисления обобщенной силы. Сила тяжести $\boldsymbol{P}$ потенциальная. Для вычисления потенциальной энергии маятника направим ось x по вертикали вниз, взяв начало отсчета в точке O привеса маятника. Потенциальная энергия маятника равна работе силы тяжести $\boldsymbol{P}$ при перемещении маятника из данного положения в нулевое, т. е. $\Pi = -Px$. Учитывая, что $x = l\cos\varphi$, получим

$$\Pi = -Pl\cos\varphi = -Mgl\cos\varphi. \qquad (2)$$

Для определения обобщенной силы надо взять с обратным знаком производную потенциальной энергии по обобщенной координате φ; при этом получится результат (1):

$$Q_\varphi = -\frac{d\Pi}{d\varphi} = -Mgl\sin\varphi.$$

В обзоре теории было указано, что произвол в выборе начала отсчета при вычислении потенциальной энергии Π не влияет на результат вычисления обобщенной силы Q_i. Для пояснения этого

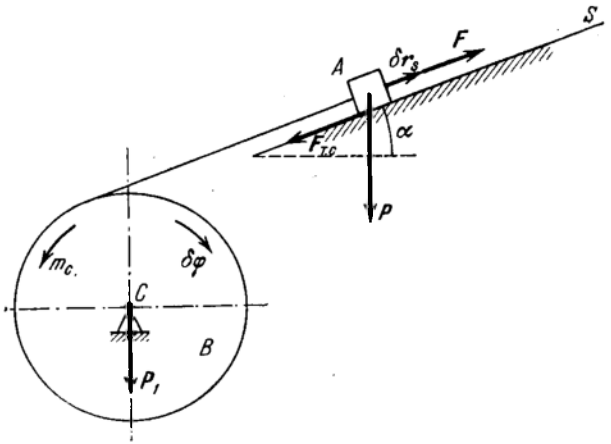
положения возьмем новое начало отсчета в нижнем положении M маятника. Теперь потенциальная энергия Π_1 равна работе силы тяжести при перемещении маятника из A в M, т. е.

$$\Pi_1 = P \cdot BM = Mg\,(1 - \cos\varphi). \qquad (3)$$

Из сопоставления потенциальных энергий (2) и (3) следует, что Π и Π_1 отличаются на постоянную величину Pl. При вычислении производной Π_1 по φ получим для обобщенной силы Q_φ результат (1):

$$Q_\varphi = -\frac{d\Pi_1}{d\varphi} = -Mgl\sin\varphi.$$

Задача 10.28. Груз A массы M движется под действием силы F вверх по негладкой наклонной плоскости, расположенной под углом



К задаче 10.28.

α к горизонту. К грузу A привязан конец нити, намотанной на барабан B радиуса r. Барабан вращается вокруг неподвижной оси C, перпендикулярной к плоскости рисунка. К барабану приложен момент сопротивления m_c, направленный в сторону, противоположную вращению барабана.

Выбрать обобщенную координату и определить соответствующую ей обобщенную силу. Нить считать нерастяжимой и массой ее пренебречь. Коэффициент трения скольжения груза о наклонную плоскость равен f.

Р е ш е н и е. Рассматриваемая система имеет одну степень свободы, так как положение на наклонной плоскости груза A определяет положение барабана B. Выберем координату s груза A в качестве обобщенной координаты, направив ось s вдоль наклонной плоскости вверх. К системе приложены активные силы и моменты: $\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{g}$ — сила тяжести груза A, $\boldsymbol{P}_1 = M_1\boldsymbol{g}$ — сила тяжести бара-

барана B, $\boldsymbol{F}$ — сила, приложенная к грузу, m_c — момент сил сопротивления.

Негладкая наклонная плоскость не является идеальной связью. Поэтому к активным силам следует добавить силу трения скольжения $\boldsymbol{F}_{т.с}$ груза о наклонную плоскость, направленную в сторону, противоположную движению, т. е. вдоль наклонной плоскости вниз, и равную по модулю $F_{т.с} = fN = fP\cos\alpha$.

Дадим грузу A обобщенное возможное перемещение $\delta\boldsymbol{r}_s$ в сторону возрастания s, т. е. параллельно наклонной плоскости вверх. При этом барабан B получит возможное угловое перемещение $\delta\varphi$, связанное с $\delta\boldsymbol{r}_s$ зависимостью

$$\delta r_s = r\delta\varphi. \tag{1}$$

Вычислим сумму работ активных сил и силы трения скольжения $\boldsymbol{F}_{т.с}$ на возможных перемещениях точек системы, соответствующих обобщенному возможному перемещению $\delta\boldsymbol{r}_s$:

$$\delta A = \delta A(\boldsymbol{P}) + \delta A(\boldsymbol{F}) + \delta A(\boldsymbol{F}_{т.с}) + \delta A(\boldsymbol{P}_1) + \delta A(m_c). \tag{2}$$

Находим

$$\delta A(\boldsymbol{P}) = -P\,\delta r_s \sin\alpha, \tag{3}$$

$$\delta A(\boldsymbol{F}) = F\delta r_s, \tag{4}$$

$$\delta A(\boldsymbol{F}_{т.с}) = -F_{т.с}\delta r_s = -fP\cos\alpha\,\delta r_s, \tag{5}$$

$$\delta A(\boldsymbol{P}_1) = 0, \tag{6}$$

так как точка приложения силы $\boldsymbol{P}_1$ неподвижна,

$$\delta A(m_c) = -m_c\delta\varphi. \tag{7}$$

Воспользовавшись формулами (1), (3)—(7), представим (2) в виде

$$\delta A = \left[F - Mg(\sin\alpha + f\cos\alpha) - \frac{m_c}{r}\right]\delta r_s. \tag{8}$$

Обобщенной силой Q_s является коэффициент, стоящий в формуле (8) при обобщенном возможном перемещении δr_s, т. е.

$$Q_s = F - Mg(\sin\alpha + f\cos\alpha) - \frac{m_c}{r}. \tag{9}$$

Если бы в качестве обобщенной координаты мы выбрали угол поворота барабана φ, считая его положительным в направлении хода часовой стрелки, то мы дали бы обобщенное возможное угловое перемещение $\delta\varphi$ в том же направлении. При этом формулы (3)—(7) приняли бы соответственно вид

$$\delta A(\boldsymbol{P}) = -Pr\,\delta\varphi\sin\alpha, \quad \delta A(\boldsymbol{F}) = Fr\,\delta\varphi, \quad \delta A(\boldsymbol{F}_{т.с}) = -fPr\,\delta\varphi\cos\alpha,$$

$$\delta A(\boldsymbol{P}_1) = 0, \quad \delta A(m_c) = -m_c\delta\varphi.$$

После подстановки этих значений в формулу (2) мы получили бы

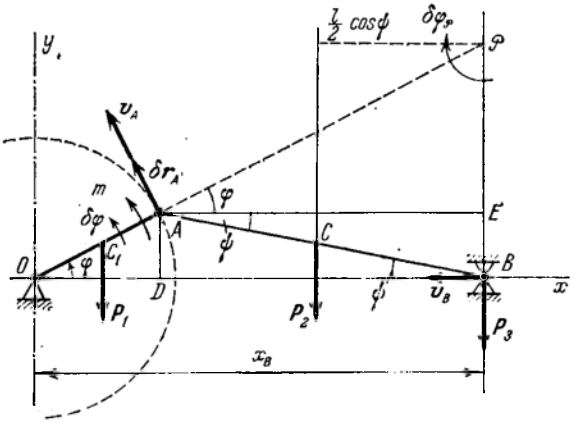
$$\delta A = [Fr - Pr(\sin\alpha + f\cos\alpha) - m_c]\,\delta\varphi.$$

Обобщенной силой Q_φ явился бы коэффициент, стоящий при $\delta\varphi$, т. е.

$$Q_\varphi = Fr - Mgr\,(\sin\alpha + f\cos\alpha) - m_c. \qquad (10)$$

Сопоставив формулы (9) и (10), видим, что разным обобщенным координатам соответствуют различные обобщенные силы.

Задача 10.29. Кривошипно-ползунный механизм, расположенный в вертикальной плоскости, приводится в движение посредством вращающего момента m, приложенного к кривошипу OA массы M_1 и длиной r, M_2 — масса шатуна AB, l — длина шатуна.



К задаче 10.29.

Выбрать обобщенную координату и определить соответствующую ей обобщенную силу. Кривошип и шатун считать тонкими однородными стержнями. Силами сопротивления пренебречь.

Р е ш е н и е. Оси декартовых координат xy изображены на рисунке.

Кривошипно-ползунный механизм является системой с одной степенью свободы. В качестве обобщенной координаты выбираем угол поворота φ кривошипа OA, отсчитываемый от оси x против хода часовой стрелки. Силу тяжести ползуна B обозначим через $\boldsymbol{P}_3$.

Изобразим активные силы и моменты: $\boldsymbol{P}_1 = M_1\boldsymbol{g}$ — сила тяжести кривошипа, $\boldsymbol{P}_2 = M_2\boldsymbol{g}$ — сила тяжести шатуна, $\boldsymbol{P}_3 = M_3\boldsymbol{g}$ — сила тяжести ползуна, m — вращающий момент.

Все связи, наложенные на систему, являются идеальными. Дадим механизму обобщенное возможное перемещение $\delta\varphi$ в направлении возрастания угла φ, т. е. против хода часовой стрелки.

Вычислим сумму работ активных сил на возможных перемещениях, соответствующих обобщенному возможному перемещению $\delta\varphi$:

$$\delta A = \delta A\,(\boldsymbol{m}) + \delta A\,(\boldsymbol{P}_1) + \delta A\,(\boldsymbol{P}_2) + \delta A\,(\boldsymbol{P}_3). \qquad (1)$$

Элементарная работа вращающего момента m равна

$$\delta A\ (m) = m\delta\varphi. \tag{2}$$

Элементарная работа силы тяжести $\boldsymbol{P}_1$ кривошипа равна

$$\delta A\,(\boldsymbol{P}_1) = -P_1\frac{r}{2}\cos\varphi\,\delta\varphi = -M_1 g\frac{r}{2}\cos\varphi\,d\varphi. \tag{3}$$

Элементарная работа силы тяжести $\boldsymbol{P}_3$ ползуна B равна нулю, так как ползун B получает возможное перемещение по горизонтали, а сила $\boldsymbol{P}_3$ вертикальна:

$$\delta A\ (\boldsymbol{P}_3) = 0. \tag{4}$$

Для вычисления элементарной работы силы тяжести $\boldsymbol{P}_2$ шатуна AB, совершающего плоское движение, определяем положение его мгновенного центра скоростей $\mathcal{P}$ как точки пересечения перпендикуляров, восставленных к скоростям точек A и B. Имеем

$$\delta A\,(\boldsymbol{P}_2) = -m_{\mathcal{P}}\,(\boldsymbol{P}_2)\,\delta\varphi_{\mathcal{P}}. \tag{5}$$

Работа отрицательна, так как направления момента силы $\boldsymbol{P}_2$ относительно оси $\mathcal{P}$ и возможного перемещения $\delta\varphi_{\mathcal{P}}$ противоположны. Находим

$$m_{\mathcal{P}}\,(\boldsymbol{P}_2) = P_2\frac{l}{2}\cos\psi, \tag{6}$$

где угол ABO обозначен ψ (см. рисунок).

Для вычисления $\delta\varphi_{\mathcal{P}}$ воспользуемся возможным перемещением δr_A точки A, принадлежащей одновременно кривошипу OA и шатуну AB. Для точки A кривошипа имеем $\delta r_A = r\,\delta\varphi$. Для точки A шатуна получаем $\delta r_A = A\mathcal{P}\,\delta\varphi_{\mathcal{P}}$. Следовательно, $r\,\delta\varphi = A\mathcal{P}\,\delta\varphi_{\mathcal{P}}$, откуда

$$\delta\varphi_{\mathcal{P}} = \frac{r}{A\mathcal{P}}\,\delta\varphi. \tag{7}$$

Воспользовавшись формулами (6) и (7), запишем (5) в виде

$$\delta A\,(\boldsymbol{P}_2) = -P_2\frac{l}{2}\frac{r}{A\mathcal{P}}\cos\psi\,\delta\varphi. \tag{8}$$

Проведем вспомогательную горизонталь через точку A. Из треугольника $A\mathcal{P}E$ получим $A\mathcal{P} = \dfrac{AE}{\cos\varphi}$. Так как $AE = AB\cos\psi = l\cos\psi$ (из $\triangle ABE$), то

$$A\mathcal{P} = \frac{l\cos\psi}{\cos\varphi}. \tag{9}$$

Подставив это значение $A\mathcal{P}$ в формулу (8), имеем

$$\delta A\,(\boldsymbol{P}_2) = -P_2\frac{r}{2}\cos\varphi\,\delta\varphi = -M_2 g\frac{r}{2}\cos\varphi\,\delta\varphi. \tag{10}$$

Этот результат можно было получить более коротким путем, вычисляя элементарную работу силы тяжести $\boldsymbol{P}_2$ по формуле $\delta A(\boldsymbol{P}_2) = P_{2y}\delta y_C$, где δy_C — вариация ординаты точки C приложения силы $\boldsymbol{P}_2$. Так как точка C расположена посередине шатуна AB, то $y_C = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}r\sin\varphi$. Вычислив вариацию y_C, находим

$$\delta y_C = \frac{1}{2}r\cos\varphi\,\delta\varphi.$$

Следовательно, приняв во внимание, что $P_{2y} = -P_2$, получим

$$\delta A(\boldsymbol{P}_2) = P_{2y}\delta y_C = -P_2\frac{r}{2}\cos\varphi\,\delta\varphi.$$

Подставляя выражения элементарных работ вращающего момента m и сил $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$, $\boldsymbol{P}_3$ из формул (2), (3), (4) и (10) в (1), имеем

$$\delta A = m\,\delta\varphi - P_1\frac{r}{2}\cos\varphi\,\delta\varphi - P_2\frac{r}{2}\cos\varphi\,\delta\varphi,$$

т. е.

$$\delta A = \left[m - \frac{1}{2}gr(M_1 + M_2)\cos\varphi\right]\delta\varphi. \qquad (11)$$

Искомой обобщенной силой Q_φ является коэффициент, стоящий в формуле (11) при обобщенном возможном перемещении $\delta\varphi$, т. е.

$$Q_\varphi = m - \frac{1}{2}gr(M_1 + M_2)\cos\varphi.$$

Применение в этой задаче формулы $Q_i = -\partial\Pi/\partial q_i$ невозможно, так как при переменном моменте m, зависящем от угловой скорости $\dot{\varphi}$ или времени t, не все активные силы потенциальны. В этом случае можно воспользоваться указанной формулой для определения обобщенной силы, соответствующей потенциальным силам $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$ и $\boldsymbol{P}_3$. Вторую часть обобщенной силы, соответствующую вращающему моменту m, пришлось бы подсчитать так, как это было сделано выше. Затем для определения искомой обобщённой силы надо было бы сложить вычисленные в отдельности выражения.

В задачах динамики курса «Теория механизмов и машин» обобщенная сила механизма носит название «приведенной силы».

Задача 10.30. На боковую поверхность цилиндрического катка массы M намотана нить. К концу нити приложена сила $\boldsymbol{F}$, направленная под углом α к горизонту. Под действием силы $\boldsymbol{F}$ каток катится без скольжения по негладкой горизонтальной плоскости (см. рисунок); коэффициент трения качения равен $f_к$.

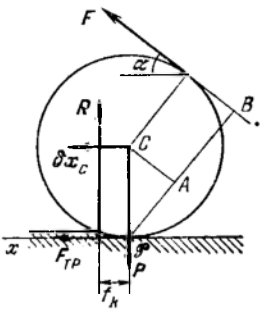
Определить обобщенную силу, приняв за обобщенную координату абсциссу центра тяжести C катка.

Р е ш е н и е. Каток является системой с одной степенью свободы, ибо положение всех его точек однозначно определяется положением центра тяжести C по отношению к оси x.

К катку приложены активные силы: $\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{F}$ — движущая сила. Негладкая горизонтальная плоскость при наличии трения качения не является идеальной связью. Поэтому изобразим две составляющие реакции плоскости: $\boldsymbol{R}$ — нормальную составляющую, смещенную относительно центра тяжести C на величину коэффициента трения качения $f_к$, и $\boldsymbol{F}_{тр}$ — касательную составляющую — силу трения.

Приняв x за обобщенную координату, дадим центру тяжести C катка возможное перемещение $\delta\boldsymbol{x}_C$ по горизонтали налево. При этом каток повернется вокруг оси, проходящей через мгновенный центр $\mathscr{P}$ перпендикулярно к плоскости рисунка. При качении без скольжения мгновенный центр $\mathscr{P}$ совпадает с основанием перпендикуляра, опущенного из центра катка на плоскость. Поэтому $\delta x_C = r\delta\varphi$, т. е.

$$\delta\varphi = \frac{\delta x_C}{r}. \qquad (1)$$



К задаче 10.30.

Так как каток совершает плоское движение, то сумма работ всех сил на возможных перемещениях их точек приложения может быть вычислена по формуле

$$\delta A = \boldsymbol{V}\cdot\delta\boldsymbol{r}_O + m_{z_O}\delta\varphi, \qquad (2)$$

где O — произвольная точка колеса, выбранная за полюс, $\boldsymbol{V}$ — главный вектор активных сил, а m_{z_O} — главный момент этих сил относительно оси, проходящей через точку O перпендикулярно к рисунку.

Примем за полюс точку $\mathscr{P}$. Тогда формула (2) запишется в виде

$$\delta A = \boldsymbol{V}\cdot\delta\boldsymbol{r}_{\mathscr{P}} + m_{z_{\mathscr{P}}}\delta\varphi. \qquad (3)$$

При перемещении центра тяжести C на δx_C каток поворачивается вокруг оси z, проходящей через точку $\mathscr{P}$ перпендикулярно к плоскости рисунка. Поэтому $\delta\boldsymbol{r}_{\mathscr{P}} = 0$. Это упрощает формулу (3):

$$\delta A = m_{z_{\mathscr{P}}}\delta\varphi, \qquad (4)$$

где $m_{z_{\mathscr{P}}}$ — главный момент всех активных сил и реакций неидеальных связей относительно оси $z_{\mathscr{P}}$, т. е.

$$m_{z_{\mathscr{P}}} = m_{z_{\mathscr{P}}}(\boldsymbol{P}) + m_{z_{\mathscr{P}}}(\boldsymbol{F}) + m_{z_{\mathscr{P}}}(\boldsymbol{F}_{тр}) + m_{z_{\mathscr{P}}}(\boldsymbol{R}). \qquad (5)$$

Линии действия сил $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{F}_{тр}$ пересекают ось $z_{\mathscr{P}}$. Поэтому $m_{z_{\mathscr{P}}}(\boldsymbol{P}) = m_{z_{\mathscr{P}}}(\boldsymbol{F}_{тр}) = 0$. Далее, $m_{z_{\mathscr{P}}}(\boldsymbol{F}) = F\cdot B\mathscr{P} = F(BA + A\mathscr{P}) = Fr(1 + \cos\alpha)$, $m_{z_{\mathscr{P}}}(\boldsymbol{R}) = -R\cdot f_к = -(P - F\sin\alpha)f_к$. Подстановка этих значений моментов в формулу (5) дает

$$m_{z_{\mathscr{P}}} = Fr(1 + \cos\alpha) - (Mg - F\sin\alpha)f_к. \qquad (6)$$

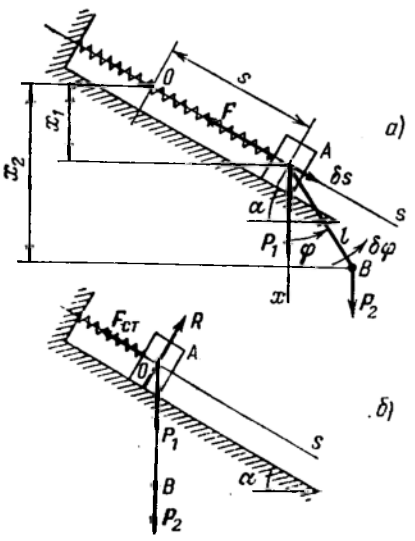
Использовав результаты (1) и (6) в формуле (4), находим

$$\delta A = \left[F(1+\cos\alpha) - \frac{J_к}{r}(Mg - F\sin\alpha)\right]\delta x_C. \qquad (7)$$

Искомой обобщенной силой Q_x является коэффициент, стоящий при δx_C в формуле (7), т. е.

$$Q_x = F(1+\cos\alpha) - \frac{J_к}{r}(Mg - F\sin\alpha).$$

Задача 10.31. Груз A массы M_1, прикреплен к концу пружины с коэффициентом упругости c, совершает колебания по гладкой плоскости, расположенной под углом α к горизонту (см. рис. *а*). К грузу A присоединен математический маятник B массы M_2 с длиной нити, равной l.



К задаче 10.31.

Выбрать обобщенные координаты и вычислить соответствующие им обобщенные силы.

Р е ш е н и е. Нетрудно видеть, что данная материальная система имеет две степени свободы. Действительно, для определения положений груза A и маятника B надо задать два независимых параметра.

Направим ось s параллельно наклонной плоскости вниз. Начало O оси s возьмем в положении статического равновесия системы, т. е. в положении, когда под действием сил тяжести $\boldsymbol{P}_1$ и $\boldsymbol{P}_2$ пружина получила статическое удлинение $\Delta_{ст}$, а нить занимает вертикальное положение (см. рис. *б*). Координата s определяет положение груза A. Угол φ, образуемый вертикалью и нитью маятника, отсчитываемый против хода часовой стрелки, определяет положение маятника B. Выберем для данной материальной системы обобщенные координаты s и φ и вычислим соответствующие им обобщенные силы Q_s и Q_φ.

Изобразим на рис. *а* активные силы: силы тяжести $\boldsymbol{P}_1$ и $\boldsymbol{P}_2$ и силу упругости $\boldsymbol{F}$ пружины. Гладкая наклонная плоскость является идеальной связью. Поэтому нормальную реакцию плоскости изображать не следует.

Дадим материальной системе два независимых обобщенных возможных перемещения δs и $\delta\varphi$ в сторону возрастания соответствующих обобщенных координат s и φ, т. е. вдоль наклонной плоскости вниз и против хода часовой стрелки. Ввиду независимости δs и $\delta\varphi$

будем при вычислении обобщенной силы считать соответствующее возможное перемещение отличным от нуля, а другое — равным нулю.

Для определения обобщенной силы Q_s примем

$$\delta s \neq 0, \quad \delta\varphi = 0.$$

Это значит, что при неизменном угле φ вся система поступательно перемещается на δs. Вычислим сумму работ активных сил $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$ и $\boldsymbol{F}$, предварительно заметив, что проекция силы упругости $\boldsymbol{F}$ на ось s равна $F_s = -c\,(\Delta_{ст} + s)$. Запишем $\delta A = P_1\delta s \cdot \sin\alpha + P_2\delta s \cdot \sin\alpha - c\,(\Delta_{ст} + s)\,\delta s$, т. е.

$$\delta A = g\,(M_1 + M_2)\,[\sin\alpha - c\cdot\Delta_{ст}]\,\delta s - cs\,\delta s. \qquad (1)$$

Покажем, что выражение в квадратных скобках равно нулю. Для этого рассмотрим условие статического равновесия данной материальной системы. На рис. *б* система изображена в покое: груз A находится в начале O отсчета оси s, а нить маятника B вертикальна. При этом пружина имеет статическое удлинение $\Delta_{ст}$ и, значит, статическая сила упругости равна: $F_{ст} = c\Delta_{ст}$. Запишем уравнение равновесия сил в проекции на ось s: $P_1 \sin\alpha + P_2 \sin\alpha - F_{ст} = 0$, т. е.

$$g\,(M_1 + M_2)\sin\alpha - c\Delta_{ст} = 0. \qquad (2)$$

Таково условие статического равновесия данной материальной системы.

Использовав результат (2) в выражении (1), получим

$$\delta A = -cs\,\delta s. \qquad (3)$$

Обобщенной силой Q_s является коэффициент пропорциональности, стоящий в формуле (3) при δs, т. е.

$$Q_s = -cs. \qquad (4)$$

Для определения обобщенной силы Q_φ будем считать

$$\delta s = 0, \quad \delta\varphi \neq 0.$$

Это значит, что при неизменном значении координаты s маятник получает угловое перемещение $\delta\varphi$ против хода часовой стрелки. При этом работа сил $\boldsymbol{P}_1$ и $\boldsymbol{F}$ равна нулю. Поэтому

$$\delta A = m_A\,(\boldsymbol{P}_2)\,\delta\varphi = -M_2 gl \sin\varphi\,\delta\varphi. \qquad (5)$$

Обобщенной силой Q_φ является коэффициент пропорциональности, стоящий в выражении (5) при $\delta\varphi$, т. е.

$$Q_\varphi = -M_2 gl \sin\varphi. \qquad (6)$$

Заметим, что обобщенные силы Q_s и Q_φ (см. формулы (4) и (6)) измеряются в разных единицах: Q_s имеет размерность обычной силы, а Q_φ — работы.

Искомые обобщенные силы можно найти и другим методом. В обзоре теории было указано, что при наличии активных потенциальных сил следует вычислить потенциальную энергию $\Pi = \Pi(q_i)$, где $i = 1, 2, \ldots, s$ и затем вычислить обобщенные силы по формулам $Q_i = -\partial\Pi/\partial q_i$, где $i = 1, 2, \ldots, s$. В данном случае $\Pi = \Pi(s, \varphi)$, а $Q_s = -\partial\Pi/\partial s$, $Q_\varphi = -\partial\Pi/\partial\varphi$. Применим этот метод.

Потенциальная энергия Π данной материальной системы равна

$$\Pi = \Pi^{(1)} + \Pi^{(2)} + \Pi^{(F)}, \tag{7}$$

где $\Pi^{(1)}$ — потенциальная энергия, соответствующая силе тяжести $\boldsymbol{P}_1$, $\Pi^{(2)}$ — силе тяжести $\boldsymbol{P}_2$, $\Pi^{(F)}$ — силе упругости $\boldsymbol{F}$.

Направим на рис. *а* ось x из начала отсчета O оси s по вертикали вниз. Потенциальная энергия $\Pi^{(1)}$ равна работе силы тяжести $\boldsymbol{P}_1$ при перемещении груза A из данного положения в нулевое, т. е. вверх на $x_1 = s\cdot\sin\alpha$. Значит, $\Pi^{(1)} = -P_1x_1$, т. е.

$$\Pi^{(1)} = -M_1gs\sin\alpha. \tag{8}$$

Аналогично $\Pi^{(2)} = -M_2gx_2$, где $x_2 = s\sin\alpha + l\cos\varphi$, т. е.

$$\Pi^{(2)} = -M_2g(s\sin\alpha + l\cos\varphi). \tag{9}$$

Потенциальная энергия $\Pi^{(F)}$, соответствующая силе упругости $\boldsymbol{F}$, равна работе этой силы при перемещении груза из данного положения, при котором пружина растянута на $\Delta_{ст} + s$, а сила упругости равна $c(\Delta_{ст} + s)$, в нулевое положение при удлинении $\Delta_{ст}$ и силе $c\Delta_{ст}$, т. е. $\Pi^{(F)} = \frac{1}{2}c(\Delta_{ст} + s)^2 - \frac{1}{2}c\Delta_{ст}^2$ или

$$\Pi^{(F)} = \frac{1}{2}cs^2 + c\Delta_{ст}\cdot s. \tag{10}$$

Внесем результаты (8), (9) и (10) в формулу (7):

$$\Pi = -P_1s\sin\alpha - P_2(s\sin\alpha + l\cos\varphi) + \frac{1}{2}cs^2 + c\Delta_{ст}\cdot s,$$

т. е.

$$\Pi = [c\Delta_{ст} - (P_1 + P_2)\sin\alpha]s - P_2l\cos\varphi + \frac{1}{2}cs^2.$$

Приняв во внимание условие (2), получим выражение потенциальной энергии в виде

$$\Pi = -M_2gl\cos\varphi + \frac{1}{2}cs^2. \tag{11}$$

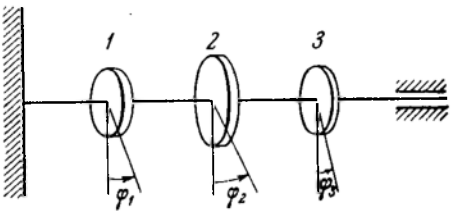
Теперь нетрудно найти искомые обобщенные силы по формулам: $Q_s = -\partial\Pi/\partial s$, $Q_\varphi = -\partial\Pi/\partial\varphi$. Использовав (11), найдем $Q_s = -cs$, $Q_\varphi = -M_2gl\sin\varphi$, т. е. полученные выше результаты (4) и (6).

В данной задаче использование двух методов (элементарной работы и потенциальной энергии) при определении обобщенных сил оказались примерно равноценными.

Задача 10.32. Горизонтальный упругий вал жестко заделан левым концом в стену. Его правый конец лежит в подшипнике. На вал положены три диска, совершающие крутильные колебания.

Выбрать обобщенные координаты и определить им соответствующие обобщенные силы, если центры тяжести дисков расположены на геометрической оси вращения. Коэффициент упругости вала равен c.

Р е ш е н и е. Данная система имеет три степени свободы. Обозначим углы поворота дисков соответственно φ_1, φ_2 и φ_3. Возьмем эти углы поворота за обобщенные координаты.



К задаче 10.32.

Вычислим углы закручивания вала. На левом участке вала (от стены до диска *1*) его угол закручивания равен φ_1, на следующем участке угол закручивания равен $\varphi_2 - \varphi_1$, участок между дисками *2* и *3* закручен на угол $\varphi_3 - \varphi_2$. На правом крайнем участке вала угол закручивания равен нулю.

Тогда потенциальная энергия системы имеет вид

$$\Pi = \frac{1}{2} c\varphi_1^2 + \frac{1}{2} c(\varphi_2 - \varphi_1)^2 + \frac{1}{2} c(\varphi_3 - \varphi_2)^2.$$

Зная выражение потенциальной энергии системы, легко определяем искомые обобщенные силы Q_{φ_1}, Q_{φ_2} и Q_{φ_3}:

$$Q_{\varphi_1} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1} = -c(2\varphi_1 - \varphi_2),$$

$$Q_{\varphi_2} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_2} = -c(2\varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_3),$$

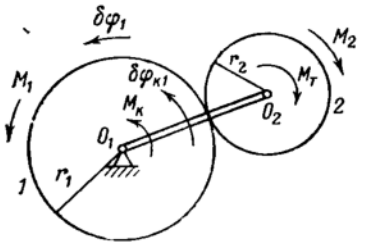
$$Q_{\varphi_3} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_3} = -c(\varphi_3 - \varphi_2).$$

Задача 10.33. На рисунке изображен узел металлорежущего станка. Зубчатое колесо *1* радиуса r_1 и кривошип O_1O_2 насажены независимо друг от друга на неподвижную ось O_1. Конец O_1 кривошипа O_1O_2 совмещен с подвижной осью O_2 зубчатого колеса *2* радиуса r_2. При независимых вращениях колеса *1* и кривошипа O_1O_2 колесо *2* катится по ободу колеса *1*.

К колесу *1* приложен вращающий момент M_1, к кривошипу O_1O_2 — вращающий момент M_k, к колесу *2* — момент сопротивления M_2. Момент сил трения на подвижной оси O_2 равен $M_т$. Ось O_1 считать гладкой. Механизм расположен в горизонтальной плоскости.

Вычислить обобщенные силы Q_{φ_1} и $Q_{\varphi_{k,1}}$, приняв за обобщенные координаты угол поворота φ_1 колеса *1* и угол поворота $\varphi_{k,1}$ кривошипа O_1O_2 относительно колеса *1*.

Р е ш е н и е. Соответственно заданным обобщенным координатам φ_1 и $\varphi_{k,1}$ введем независимые обобщенные угловые возможные перемещения $\delta\varphi_1$ и $\delta\varphi_{k,1}$. Для определения обобщенных сил Q_{φ_1} и $Q_{\varphi_{k,1}}$ вычислим элементарную работу активных сил и моментов на возможных перемещениях точек системы. При наличии трения на подвижной оси O_2 эта связь не является идеальной. Поэтому надо учесть $M_т$ — момент трения на оси O_2. Механизм расположен в горизонтальной плоскости, и, значит, работа сил тяжести его звеньев равна нулю. Поэтому элементарная работа имеет вид



К задаче 10.33.

$$\delta A = M_1\delta\varphi_1 + M_k\delta\varphi_k - M_т\delta\varphi_{2,k} - M_2\delta\varphi_2, \tag{1}$$

где $\delta\varphi_k$ — угловое возможное перемещение кривошипа O_1O_2, $\delta\varphi_{2,k}$ — колеса *2* относительно кривошипа O_1O_2, $\delta\varphi_2$ — колеса *2*.

Для определения зависимостей между угловыми возможными перемещениями $\delta\varphi_1$, $\delta\varphi_k$, $\delta\varphi_{2,k}$ и $\delta\varphi_2$ применим метод Виллиса: мысленно остановим кривошип O_1O_2 и запишем зависимость между угловыми возможными перемещениями колес *1* и *2* относительно кривошипа:

$$\frac{\delta\varphi_{1,k}}{\delta\varphi_{2,k}} = -\frac{r_2}{r_1}$$

(знак минус поставлен ввиду внешнего зацепления колес *1* и *2*), т. е. $\delta\varphi_{2,k} = -\frac{r_1}{r_2}\delta\varphi_{1,k}$. Так как $\delta\varphi_{1,k}$ и $\delta\varphi_{k,1}$ равны по абсолютной величине и противоположны по направлениям, т. е. $\delta\varphi_{k,1} = -\delta\varphi_{1,k}$, то

$$\delta\varphi_{2,k} = \frac{r_1}{r_2}\delta\varphi_{k,1}. \tag{2}$$

Для вычисления обобщенной силы Q_{φ_1} дадим возможное перемещение $\delta\varphi_1$, а $\delta\varphi_{k,1}$ будем считать равным нулю: $\delta\varphi_1 \neq 0$, $\delta\varphi_{k,1} = 0$. Заметив, что $\delta\varphi_{k,1} = \delta\varphi_k - \delta\varphi_1$, получим

$$\delta\varphi_k = \delta\varphi_1. \tag{3}$$

При $\delta\varphi_{k,1} = 0$ из соотношения (2) имеем

$$\delta\varphi_{2,k} = 0. \tag{4}$$

Так как $\delta\varphi_{2,k} = \delta\varphi_2 - \delta\varphi_k$, то с учетом результатов (3) и (4) запишем

$$\delta\varphi_2 = \delta\varphi_1. \tag{5}$$

Использовав зависимости (3), (4) и (5) в формуле (1), найдем $\delta A = M_1\delta\varphi_1 + M_k\delta\varphi_1 - M_2\delta\varphi_1 = (M_1 + M_k - M_2)\,\delta\varphi_1$. Выражение в скобках является обобщенной силой Q_{φ_1}, т. е.

$$Q_{\varphi_1} = M_1 + M_k - M_2. \tag{6}$$

Перейдем к вычислению обобщенной силы $Q_{\varphi_{k,1}}$. Для этого дадим обобщенное возможное перемещение $\delta\varphi_{k,1}$, а $\delta\varphi_1$ будем считать равным нулю, т. е. $\delta\varphi_{k,1} \neq 0$, $\delta\varphi_1 = 0$. Так как $\delta\varphi_{k,1} = \delta\varphi_k - \delta\varphi_1$, то при $\delta\varphi_1 = 0$

$$\delta\varphi_k = \delta\varphi_{k,1}. \tag{7}$$

Для вычисления $\delta\varphi_2$ примем в формуле (2) во внимание, что $\delta\varphi_{2,k} = \delta\varphi_2 - \delta\varphi_k$, т. е. $\delta\varphi_2 - \delta\varphi_k = \frac{r_1}{r_2}\,\delta\varphi_{k,1}$. Использовав здесь результат (7), получим $\delta\varphi_2 = \frac{r_1}{r_2}\,\delta\varphi_{k,1} + \delta\varphi_{k,1}$, т. е.

$$\delta\varphi_2 = \frac{r_1 + r_2}{r_2}\,\delta\varphi_{k,1}. \tag{8}$$

Теперь внесем результаты (2), (7) и (8) в формулу (1), помня при этом, что $\delta\varphi_1 = 0$:

$$\delta A = M_k\delta\varphi_{k,1} - M_\text{т}\frac{r_1}{r_2}\,\delta\varphi_{k,1} - M_2\frac{r_1 + r_2}{r_2}\,\delta\varphi_{k,1},$$

т. е.

$$\delta A = \left(M_k - \frac{r_1}{r_2}M_\text{т} - \frac{r_1 + r_2}{r_2}M_2\right)\delta\varphi_{k,1}.$$

Выражение в скобках является обобщенной силой $Q_{\varphi_{k,1}}$, т. е.

$$Q_{\varphi_{k,1}} = M_k - \frac{r_1}{r_2}M_\text{т} - \frac{r_1 + r_2}{r_2}M_2. \tag{9}$$

Итак, искомые обобщенные силы приведены в формулах (6) и (9).

2. **Общее уравнение динамики в обобщенных координатах. Уравнения Лагранжа второго рода.** Общее уравнение динамики материальной системы

$$\sum_{k=1}^{n}(\boldsymbol{F}_k - m_k\boldsymbol{w}_k)\cdot\delta\boldsymbol{r}_k = 0$$

в обобщенных координатах имеет вид

$$\delta q_1\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot q_1} - \frac{\partial T}{\partial q_1} - Q_1\right) + \delta q_2\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot q_2} - \frac{\partial T}{\partial q_2} - Q_2\right) + \ldots +$$
$$+ \delta q_s\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot q_s} - \frac{\partial T}{\partial p_s} - Q_s\right) = 0,$$

где q_1, q_2, ..., q_s — обобщенные координаты, $\dot q_1$, $\dot q_2$, ..., $\dot q_s$ — обобщенные скорости, δq_1, δq_2, ..., δq_s — обобщенные возможные пере-

мещения системы, являющиеся вариациями соответствующих обобщенных координат, Q_1, Q_2, ..., Q_s — обобщенные силы системы, T — кинетическая энергия системы.

Так как δq_1, δq_2, ..., δq_s в случае системы, подчиненной голономным связям, являются независимыми обобщенными возможными перемещениями, то общее уравнение динамики удовлетворяется лишь при условии, что коэффициенты, стоящие при возможных перемещениях, равны нулю, т. е.

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1,\\
&\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial T}{\partial q_2} = Q_2,\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s.
\end{aligned} \tag{1*}$$

Уравнения (1*) называются уравнениями Лагранжа второго рода *).

При наличии голономных связей, наложенных на систему, число уравнений Лагранжа равно числу независимых обобщенных координат, т. е. числу степеней свободы. Система (1*) состоит из s обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка для обобщенных координат.

Если активные силы системы потенциальны, то уравнения Лагранжа можно записать в виде:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial T}{\partial q_1} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_1},\\
&\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial T}{\partial q_2} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_2},\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_s}.
\end{aligned} \tag{2*}$$

Если ввести функцию Лагранжа L, равную разности кинетической и потенциальной энергий, т. е. $L = T - \Pi$, то уравнения (2*) примут вид

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0,\\
&\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial L}{\partial q_2} = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = 0.
\end{aligned} \tag{3*}$$

*) Уравнения Лагранжа первого рода в этом томе не рассматриваются. Они приведены в третьем томе. Поэтому ниже уравнения Лагранжа второго рода просто называются уравнениями Лагранжа.

Трудность решения задач динамики материальных систем с одной степенью свободы заключается, между прочим, и в удачном выборе соответствующей общей теоремы динамики. В случаях систем с несколькими степенями свободы решение задач значительно усложняется, так как при этом требуется совместное применение некоторых общих теорем и других соотношений динамики, выбор которых обычно представляет значительные трудности. В подобных случаях наиболее удобно использование уравнений Лагранжа, являющееся универсальным методом составления систем дифференциальных уравнений движения материальных систем.

Большое достоинство уравнений Лагранжа заключается в том, что при наличии идеальных и голономных связей в них не входят реакции связей. (При применении других методов решения задач приходится в ходе решения исключать реакции связей из системы составленных уравнений.)

Полученные выше при решении подавляющего большинства задач динамики системы уравнения могут быть непосредственно выведены с помощью уравнений Лагранжа. Если по условию задачи требуется найти реакции связей, то, определив с помощью уравнений Лагранжа ускорения точек системы, применяют закон освобождаемости от связей к соответствующей массе системы с последующим использованием одной из общих теорем динамики либо метода кинетостатики. Если при решении задачи динамики отсутствует ясный план применения тех или иных теорем, то следует остановиться на применении уравнений Лагранжа.

Все сказанное выше не умаляет значения общих теорем, которыми целесообразно пользоваться при решении ряда простых задач динамики (см. ниже главу XI).

Указание. Составление уравнений Лагранжа надо проводить в такой последовательности:

1) определить число степеней свободы материальной системы;

2) выбрать систему координат и ввести независимые обобщенные координаты в числе, равном числу степеней свободы;

3) определить обобщенные силы системы Q_1, Q_2, ..., Q_s, соответствующие избранным обобщенным координатам (последовательность вычисления обобщенных сил детально разобрана в пункте 1 этого параграфа);

4) вычислить кинетическую энергию T рассматриваемой материальной системы, выразив энергию в зависимости от обобщенных координат и обобщенных скоростей;

5) найти частные производные кинетической энергии по обобщенным скоростям $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$, ..., $\dot{q}_s$, т. е. $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}$, $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}$, ..., $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}$, а затем вычислить их производные по времени:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right), \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\right), \ldots, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\right);$$

6) определить частные производные кинетической энергии T по обобщенным координатам: q_1, q_2, ..., q_s, т. е.

$$\frac{\partial T}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial T}{\partial q_2}, \ldots, \quad \frac{\partial T}{\partial q_s};$$

7) полученные в пунктах 3), 5) и 6) результаты подставить в уравнения Лагранжа.

Задача 10.34. Вывести дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси, воспользовавшись уравнениями Лагранжа.

Р е ш е н и е. Твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси, имеет одну степень свободы. Действительно, для определения положения всех его точек достаточно задать один параметр, например его угол поворота φ. Выберем φ в качестве обобщенной координаты.

Направим ось z вдоль оси вращения твердого тела. Обозначим: I_z — момент инерции твердого тела относительно оси вращения, $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, ..., $\boldsymbol{F}_n$ — активные силы.

Так как число уравнений Лагранжа при наличии идеальных и голономных связей равно числу степеней свободы системы, т. е. числу обобщенных координат, то в данном случае следует записать одно уравнение Лагранжа для обобщенной координаты φ:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi. \tag{1}$$

Дадим твердому телу обобщенное возможное перемещение $\delta\varphi$ и вычислим сумму работ активных сил на этом возможном перемещении:

$$\delta A = \sum_{k=1}^{n} m_z(\boldsymbol{F}_k)\,\delta\varphi = \left[\sum_{k=1}^{n} m_z(\boldsymbol{F}_k)\right]\delta\varphi. \tag{2}$$

Обобщенной силой Q_φ является коэффициент, стоящий при $\delta\varphi$ в уравнении (2), т. е.

$$Q_\varphi = \sum_{k=1}^{n} m_z(\boldsymbol{F}_k). \tag{3}$$

Кинетическая энергия твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, имеет вид

$$T = \frac{1}{2} I_z \dot{\varphi}^2.$$

Вычислим частную производную кинетической энергии по обобщенной скорости $\dot{\varphi}$:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = I_z \dot{\varphi},$$

а затем возьмем производную от полученного результата по времени:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = I_z \ddot{\varphi}. \tag{4}$$

Учитывая, что в выражение кинетической энергии T не входит обобщенная координата φ, имеем:

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0. \tag{5}$$

После подстановки формул (3), (4) и (5) в уравнение Лагранжа второго рода (1) находим дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси:

$$I_z \ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^{n} m_z(\boldsymbol{F}_k). \tag{6}$$

Нетрудно видеть, что в правую часть уравнения (6) вместо суммы моментов всех активных сил $\boldsymbol{F}_k$ относительно оси вращения z можно подставить сумму моментов всех внешних сил $\boldsymbol{F}_k^e$ относительно той же оси. Действительно, активные силы могут быть как внешними, так и внутренними. Как известно, главный момент внутренних сил равен нулю. В число внешних, кроме активных сил, входят только опорные реакции, моменты которых относительно оси вращения z равны нулю (опорные реакции приложены к оси вращения z). Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{n} m_z(\boldsymbol{F}_k) = \sum_{k=1}^{n} m_z(\boldsymbol{F}_k^e),$$

и уравнение (6) примет вид

$$I_z \ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^{n} m_z(\boldsymbol{F}_k^e).$$

Задача 10.35. Доказать изохронность колебаний циклоидального маятника.

Р е ш е н и е. Циклоидальным называется маятник, который может быть схематизирован в виде материальной точки, движущейся по дуге циклоиды.

В решении задачи 9.40 был рассмотрен математический маятник, у которого траекторией была дуга окружности. Дифференциальное уравнение колебаний математического маятника, представленное формулой (4) задачи 9.40, имело вид

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0,$$

где φ — угол отклонения нити маятника от вертикали, а l — длина нити.

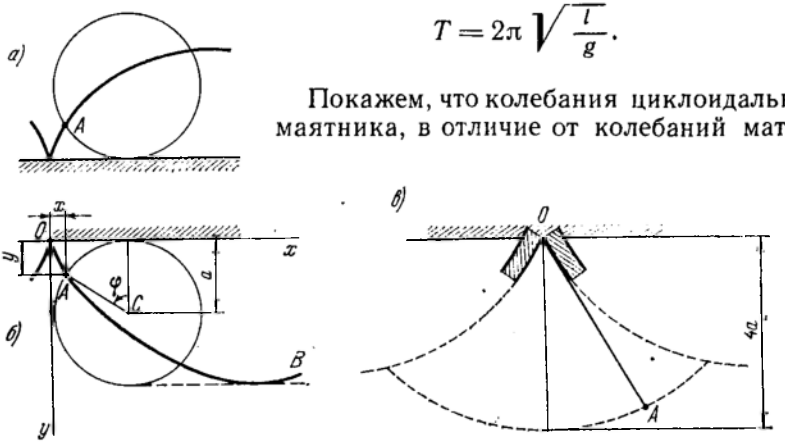
В формуле (11) той же задачи было показано, что период колебаний математического маятника равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{9}{64} \sin^4 \frac{\alpha}{2} + \ldots\right),$$

где α — угловая амплитуда колебаний. Таким образом, колебания математического маятника свойством изохронности не обладают, так как его период колебаний зависит от начальных условий движения — от угловой амплитуды α. Лишь в случае малых колебаний маятника при замене в его дифференциальном уравнении движения $\sin\varphi$ на φ мы получали свойство изохронности колебаний маятника. При этом период колебаний математического маятника был приближенно равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Покажем, что колебания циклоидального маятника, в отличие от колебаний математического, обладают свойством изохронности, т. е. его период колебаний не зависит от начальных условий движения.



К задаче 10.35.

Обычное представление о циклоиде связано с траекторией точки A, лежащей на ободе колеса, которое катится без скольжения по прямолинейному рельсу (рис. *а*).

На рис. *б* изображено колесо, массой которого по сравнению с массой точки A, укрепленной на его ободе, можно пренебречь. Колесо катится по рельсу, расположенному над ним. Покажем, что движение точки A является колебательным около нижней точки B циклоиды. Период этих колебаний не зависит от начальных условий движения.

Выберем в качестве обобщенной координаты угол φ, образуемый радиусом AC точки A с вертикалью. Как известно, уравнения циклоиды в параметрической форме имеют вид

$$x = a\varphi - a\sin\varphi, \quad y = a(1 - \cos\varphi), \tag{1}$$

где a — радиус колеса.

Запишем соответствующее уравнение Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi. \tag{2}$$

Единственной активной силой является сила тяжести материальной точки, которую мы обозначим P.

Потенциальная энергия Π материальной точки выражается формулой

$$\Pi = -Py = -Pa\,(1 - \cos\varphi). \tag{3}$$

Обобщенная сила Q_φ имеет вид $Q_\varphi = -\partial\Pi/\partial\varphi$. Внося в эту формулу выражение Π из (3), имеем

$$Q_\varphi = Pa\sin\varphi. \tag{4}$$

Вычислим кинетическую энергию T материальной точки:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right). \tag{5}$$

Использовав формулу (1), находим

$$\dot{x} = a\dot{\varphi} - a\dot{\varphi}\cos\varphi, \quad \dot{y} = a\dot{\varphi}\sin\varphi.$$

Теперь формула (5) принимает вид

$$T = ma^2(1 - \cos\varphi)\,\dot{\varphi}^2. \tag{6}$$

Вычислим частную производную кинетической энергии T по обобщенной скорости $\dot{\varphi}$:

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}} = 2ma^2(1 - \cos\varphi)\,\dot{\varphi}.$$

Возьмем производную полученного результата по времени:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}} = 2ma^2(1 - \cos\varphi)\,\ddot{\varphi} + 2ma^2\dot{\varphi}^2\sin\varphi. \tag{7}$$

Найдем теперь частную производную выражения (6) кинетической энергии T по обобщенной координате φ:

$$\frac{\partial T}{\partial\varphi} = ma^2\dot{\varphi}^2\sin\varphi. \tag{8}$$

Подставив формулы (4), (7) и (8) в уравнение Лагранжа (2), получим

$$\ddot{\varphi}(1 - \cos\varphi) + \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2\sin\varphi = \frac{g}{2a}\sin\varphi. \tag{9}$$

Вводя тригонометрические функции половинных углов и сокращая на $\sin\frac{\varphi}{2}$, имеем

$$\ddot{\varphi}\sin\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2\cos\frac{\varphi}{2} = \frac{g}{2a}\cos\frac{\varphi}{2}. \tag{10}$$

Нетрудно видеть, что

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\cos\frac{\varphi}{2}\right) = -\frac{1}{2}\left(\ddot{\varphi}\sin\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2\cos\frac{\varphi}{2}\right).$$

Следовательно, дифференциальное уравнение (10) можно записать так:

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\cos\frac{\varphi}{2}\right)+\frac{g}{4a}\cos\frac{\varphi}{2}=0.$$

Обозначив $\cos\frac{\varphi}{2}=z$, находим

$$\ddot{z}+k^2z=0, \tag{11}$$

где

$$\frac{g}{4a}=k^2. \tag{12}$$

Таким образом, точное дифференциальное уравнение (11) колебаний циклоидального маятника тождественно приближенному дифференциальному уравнению колебаний математического маятника:

$$\ddot{\varphi}+k^2\varphi=0.$$

Это значит, что колебания циклоидального маятника обладают свойством полной изохронности, т. е. период его колебаний не зависит от начальных условий движения.

Воспользовавшись формулой (12), можно записать период колебаний в виде

$$T=\frac{2\pi}{k}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

где $l=4a$.

Уравнение (11) определяет колебания с центром $z=0$. Учитывая, что $z=\cos(\varphi/2)$, найдем $\varphi/2=\pi/2$, т. е. $\varphi=\pi$. Таким образом, показано, что центр колебаний расположен в нижней точке B циклоиды (рис. *б*).

Эволюта циклоиды также является циклоидой, тождественной исходной. Поэтому для осуществления рассматриваемого маятника следует вырезать шаблон, изображающий два участка дуг циклоиды, примыкающие к ее точке возврата O (рис. *в*). Нить длины $l=4a$ при колебаниях частично накладывается то на левую, то на правую части шаблона, а материальная точка, находящаяся на конце нити, при этом движется по циклоиде.

Дифференциальное уравнение (9) можно также получить, воспользовавшись уравнением Лагранжа в форме (3*), т. е.

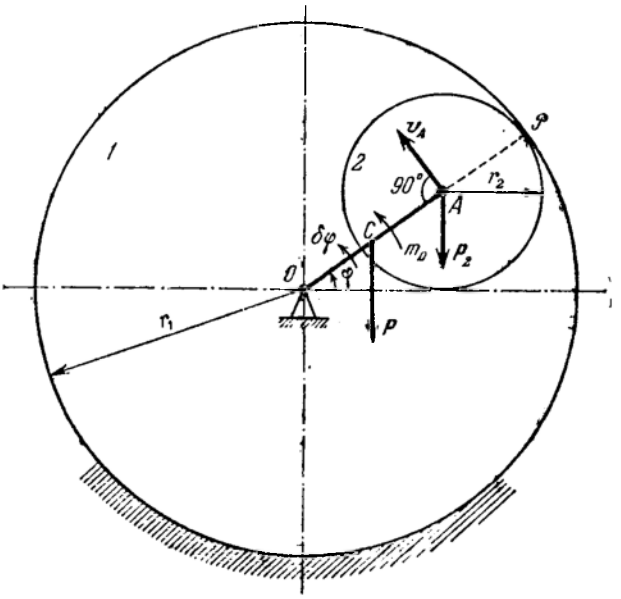
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}-\frac{\partial L}{\partial\varphi}=0. \tag{13}$$

В данном случае функция Лагранжа L, в соответствии с формулами (6) и (3), имеет вид

$$L=T-\Pi=ma^2(1-\cos\varphi)\dot{\varphi}^2+mga(1-\cos\varphi).$$

Предоставляем читателю подставить функцию Лагранжа L в уравнение (13) и получить дифференциальное уравнение (9).

Задача 10.36. Определить угловое ускорение кривошипа OA планетарной передачи, расположенной в вертикальной плоскости. Зубчатое колесо *2* находится во внутреннем зацеплении с неподвижным зубчатым колесом *1*. Колесо *2* приводится в движение посредством кривошипа OA, к которому приложен вращающий момент m_0. Заданы масса M кривошипа OA, масса M_2 колеса *2*, радиус r_2 колеса *2*, радиус r_1 неподвижного колеса *1*.



К задаче 10.36.

Колесо *2* считать однородным круглым диском, а кривошип OA — тонким однородным стержнем. Силами сопротивления движению пренебречь.

Р е ш е н и е. Планетарная передача имеет одну степень свободы, так как угол поворота φ кривошипа OA определяет положение всех точек механизма. В качестве обобщенной координаты выбираем угол φ, отсчитываемый от горизонтальной оси против хода часовой стрелки.

Уравнение Лагранжа для обобщенной координаты φ имеет вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi.$$

Активными силами являются: $\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{g}$ — сила тяжести кривошипа, $\boldsymbol{P}_2 = M_2\boldsymbol{g}$ — сила тяжести колеса *2*, m_0 — вращающий

момент, приложенный к кривошипу OA. Все связи, наложенные на систему, идеальны.

Дадим кривошипу OA возможное угловое перемещение $\delta\varphi$ в направлении возрастания угла φ, т. е. против хода часовой стрелки.

Для определения обобщенной силы Q_φ вычислим сумму работ активных сил на возможном перемещении $\delta\varphi$:

$$\delta A = m_0\,\delta\varphi - P\,|OC|\cos\varphi\,\delta\varphi - P_2\,|OA|\cos\varphi\,\delta\varphi.$$

Так как $OA = O\mathscr{P} - A\mathscr{P} = r_1 - r_2$, а $OC = \frac{OA}{2} = \frac{r_1 - r_2}{2}$, то

$$\delta A = \frac{1}{2}[2m_0 - (P + 2P_2)(r_1 - r_2)\cos\varphi]\,\delta\varphi. \tag{1}$$

Учитывая, что $\delta A = Q_\varphi\delta\varphi$, находим обобщенную силу, соответствующую обобщенной координате φ:

$$Q_\varphi = \frac{1}{2}[2m_0 - g(M + 2M_2)(r_1 - r_2)\cos\varphi]. \tag{2}$$

Переходим к вычислению кинетической энергии T механизма, в состав которого входят массы кривошипа OA и зубчатого колеса *2* (зубчатое колесо *1* неподвижно), т. е.

$$T = T^{(1)} + T^{(2)}. \tag{3}$$

Кинетическая энергия кривошипа OA, вращающегося вокруг неподвижной оси O, перпендикулярной к плоскости рисунка, определяется формулой $T^{(1)} = \frac{1}{2} I_O\dot{\varphi}^2$, где

$$I_O = \frac{1}{3} M\cdot OA^2 = \frac{1}{3} M(r_1 - r_2)^2$$

— момент инерции кривошипа. Следовательно,

$$T^{(1)} = \frac{1}{6} M(r_1 - r_2)^2\dot{\varphi}^2. \tag{4}$$

Кинетическая энергия зубчатого колеса *2*, совершающего плоское движение, равна

$$T^{(2)} = \frac{1}{2} M_2 v_A^2 + \frac{1}{2} I_A\omega_2^2. \tag{5}$$

Найдем скорость точки A, являющейся концом кривошипа OA:

$$v_A = OA\,|\dot{\varphi}| = (r_1 - r_2)\,|\dot{\varphi}|. \tag{6}$$

Рассмотрим скорость той же точки A, принадлежащей зубчатому колесу *2*, по отношению к мгновенному центру скоростей $\mathscr{P}$ колеса:

$$v_A = A\mathscr{P}\cdot\omega_2 = r_2\omega_2. \tag{7}$$

Сопоставляя формулы (6) и (7), находим

$$\omega_2 = \frac{r_1 - r_2}{r_2}|\dot{\varphi}|. \tag{8}$$

Момент инерции зубчатого колеса *2* вычисляется по формуле

$$I_A = \frac{M_2 r_2^2}{2}. \tag{9}$$

После подстановки значений v_A, ω_2 и I_A соответственно из формул (6), (8) и (9) выражение (5) принимает вид

$$T^{(2)} = \frac{3}{4} M_2 (r_1 - r_2)^2 \dot{\varphi}^2. \tag{10}$$

Воспользовавшись формулами (3), (4) и (10), запишем выражение кинетический энергии планетарного механизма:

$$T = \frac{2M + 9M_2}{12} (r_1 - r_2)^2 \dot{\varphi}^2. \tag{11}$$

Вычислим частную производную кинетической энергии T по обобщенной скорости $\dot{\varphi}$:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{2M + 9M_2}{6} (r_1 - r_2)^2 \dot{\varphi},$$

и возьмем производную полученного результата по времени:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{2M + 9M_2}{6} (r_1 - r_2)^2 \ddot{\varphi}. \tag{12}$$

Заметив, что кинетическая энергия T системы, определенная формулой (11), не зависит от обобщенной координаты φ, находим

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0. \tag{13}$$

После подстановки выражений (2), (12), (13) в уравнение Лагранжа получим дифференциальное уравнение движения механизма для обобщенной координаты φ:

$$\frac{2M + 9M_2}{6} (r_1 - r_2)^2 \ddot{\varphi} = \frac{1}{2}[2m_0 - g(M + 2M_2)(r_1 - r_2)\cos\varphi],$$

откуда определяем искомое угловое ускорение $\ddot{\varphi}$ кривошипа OA:

$$\ddot{\varphi} = 3\frac{2m_0 - g(M + 2M_2)(r_1 - r_2)\cos\varphi}{2M + 9M_2}. \tag{14}$$

Равномерное вращение кривошипа осуществляется при выполнении условия

$$m_0 = \frac{1}{2} g(M + 2M_2)(r_1 - r_2)\cos\varphi.$$

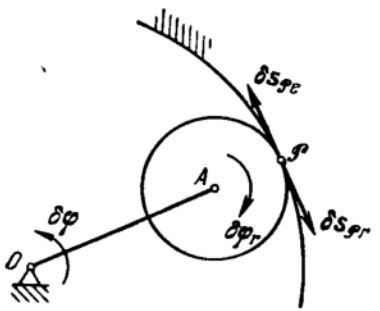
Задача 10.37. Решить предыдущую задачу с учетом момента сил сопротивления m_c в подвижном цилиндрическом шарнире A, соединяющем конец кривошипа OA с центром колеса 2.

Р е ш е н и е. Воспользовавшись формулой (4) задачи 9.100, запишем элементарную работу момента m_c:

$$\delta A(m_c) = m_c \delta\varphi_r, \tag{1}$$

где $\delta\varphi_r$ — относительное угловое возможное перемещение колеса 2 по отношению к кривошипу OA.

Для определения $\delta\varphi_r$ разложим движение колеса 2 на переносное вращательное вместе с кривошипом OA и относительное по отношению к кривошипу. При этом возможное перемещение любой точки колеса 2 можно записать в виде



К задаче 10.37.

$$\delta \boldsymbol{s}_a = \delta \boldsymbol{s}_e + \delta \boldsymbol{s}_r. \tag{2}$$

Возможное перемещение точки $\mathscr{P}$, совмещенной с мгновенным центром скоростей, равно нулю. Поэтому формула (2) принимает вид $0 = \delta \boldsymbol{s}_{\mathscr{P}_e} + \delta \boldsymbol{s}_{\mathscr{P}_r}$ (см. рисунок), т. е.

$$\delta \boldsymbol{s}_{\mathscr{P}_r} = -\delta \boldsymbol{s}_{\mathscr{P}_e}. \tag{3}$$

Так как $\delta s_{\mathscr{P}_r} = A\mathscr{P} \,|\, \delta\varphi_r \,| = r_2 \,|\, \delta\varphi_r \,|$, а $\delta s_{\mathscr{P}_e} = O\mathscr{P} \,|\, \delta\varphi_e \,| = r_1 \,|\, \delta\varphi \,|$, то, в соответствии с формулой (3), имеем $r_2\delta\varphi_r = -r_1\delta\varphi$. Отсюда

$$\delta\varphi_r = -\frac{r_1}{r_2}\delta\varphi. \tag{4}$$

Внеся значение (4) $\delta\varphi_r$ в формулу (1), получим

$$\delta A(m_c) = -\frac{r_1}{r_2} m_c \delta\varphi. \tag{5}$$

С учетом работы (5) момента сил сопротивления m_c, формула (1) предыдущей задачи примет вид

$$\delta A = \frac{1}{2}\left[2m_0 - g(M + 2M_2)(r_1 - r_2)\cos\varphi - \frac{2r_1}{r_2} m_c\right]\delta\varphi. \tag{6}$$

Учитывая, что $\delta A = Q_\varphi \delta\varphi$, находим обобщенную силу, соответствующую обобщенной координате φ:

$$Q_\varphi = \frac{1}{2}\left[2m_0 - g(M + 2M_2)(r_1 - r_2)\cos\varphi - \frac{2r_1}{r_2} m_c\right]. \tag{7}$$

После подстановки выражения (7), а также результатов (12) и (13) предыдущей задачи в уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi$$

и решения его относительно $\ddot{\varphi}$, получим искомое угловое ускорение кривошипа OA:

$$\ddot{\varphi} = 3\frac{2m_0 - g(M+2M_2)(r_1-r_2)\cos\varphi - \frac{2r_1}{r_2}m_c}{2M+9M_2}. \qquad (8)$$

Сопоставив числители формулы (8) и выражения (14) предыдущей задачи, видим, что момент сил сопротивления m_c уменьшает угловое ускорение $\ddot{\varphi}$ кривошипа.

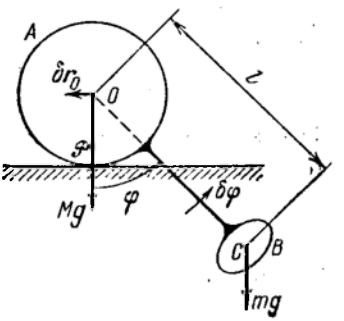
Равномерное вращение кривошипа происходит при выполнении условия $\ddot{\varphi} = 0$. При этом из формулы (8) находим

$$m_0 = \frac{1}{2}g(M+2M_2)(r_1-r_2)\cos\varphi - \frac{r_1}{r_2}m_c.$$

Задача 10.38. Воспользовавшись условием и решением задачи 9.86, составить дифференциальное уравнение движения материальной системы, а также вычислить период ее малых колебаний.

Р е ш е н и е. Данная материальная система имеет одну степень свободы. В качестве обобщенной координаты выберем угол φ отклонения стержня от вертикали (см. рисунок). Запишем соответствующее уравнение Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi. \qquad (1)$$



К задаче 10.38.

Для вычисления обобщенной силы Q_φ изобразим активные силы тяжести $M\boldsymbol{g}$ и $m\boldsymbol{g}$. При качении без скольжения колеса A по горизонтальной плоскости имеется сила трения $\boldsymbol{F}_{тр}$, приложенная в мгновенном центре $\boldsymbol{P}$ и направленная по горизонтали (на рисунке сила $\boldsymbol{F}_{тр}$ не изображена).

Дадим стержню возможное угловое перемещение $\delta\varphi$ в сторону возрастания угла φ. При этом центр O колеса A получит горизонтальное возможное перемещение $\delta\boldsymbol{r}_O$. При вычислении суммы работ сил $M\boldsymbol{g}$, $m\boldsymbol{g}$ и $\boldsymbol{F}_{тр}$ на возможных перемещениях их точек приложения заметим, что работа сил $M\boldsymbol{g}$ и $\boldsymbol{F}_{тр}$ равна нулю. Действительно, точка O перемещается по горизонтали, т. е. $\delta h = 0$ и, значит, $\delta A\,(M\boldsymbol{g}) = M\boldsymbol{g}\cdot\delta h = 0$, а неподвижная плоскость является стационарной связью, и, следовательно, действительное перемещение входит в число возможных: $d\boldsymbol{r}_k = \delta\boldsymbol{r}_k$, отсюда $\delta A\,(\boldsymbol{F}_{тр}) = \boldsymbol{F}_{тр}\cdot d\boldsymbol{r}_P = \boldsymbol{F}_{тр}\cdot\boldsymbol{v}_P\,dt = 0$, ибо $\boldsymbol{v}_P = 0$. Поэтому $\delta A = \delta A\,(m\boldsymbol{g})$, т. е.

$$\delta A = -mgl\sin\varphi\,\delta\varphi. \qquad (2)$$

Коэффициент, стоящий при $\delta\varphi$ в выражении (2), является обобщенной силой Q_φ:

$$Q_\varphi = -mgl \sin \varphi. \tag{3}$$

Воспользуемся выражением кинетической энергии (8), вычисленной в ходе решения задачи 9.86. Заметив, что $\omega^2 = \dot{\varphi}^2$, запишем

$$T = \frac{1}{4}[3Mr^2 + 2m(r^2 + l^2 + \rho_C^2 - 2rl\cos\varphi)]\dot{\varphi}^2. \tag{4}$$

Как следует из формулы (4), $T = T(\varphi, \dot{\varphi})$, т. е. кинетическая энергия зависит не только от обобщенной скорости $\dot{\varphi}$, но и от обобщенной координаты φ. Поэтому

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = mrl\dot{\varphi}^2 \sin\varphi. \tag{5}$$

Вычислив

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{1}{2}[3Mr^2 + 2m(r^2 + l^2 + \rho_C^2 - 2rl\cos\varphi)]\dot{\varphi},$$

возьмем от этой функции производную по времени:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{1}{2}[3Mr^2 + 2m(r^2 + l^2 + \rho_C^2 - 2rl\cos\varphi)]\ddot{\varphi} + 2mrl\dot{\varphi}^2 \sin\varphi. \tag{6}$$

Для получения искомого дифференциального уравнения движения остается подставить результаты (3), (5) и (6) в уравнение Лагранжа (1). Найдем

$$3Mr^2 + 2m(r^2 + l^2 + \rho_C^2 - 2rl\cos\varphi)]\ddot{\varphi} + mrl\dot{\varphi}^2 \sin\varphi = -mgl\sin\varphi. \tag{7}$$

Это — нелинейное дифференциальное уравнение колебаний данной материальной системы.

Приближенно рассмотрим малые колебания системы. Для этого следует считать φ и $\dot{\varphi}$ бесконечно малыми первого порядка малости, а всеми величинами более высокого порядка малости надо пренебречь. Поэтому вместо

$$\sin\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} + \ldots \text{ и } \cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2} + \frac{\varphi^4}{4!} + \ldots,$$

возьмем $\sin\varphi \approx \varphi$, $\cos\varphi \approx 1$. Заметив, что слагаемое $mrl\dot{\varphi}^2 \sin\varphi \approx mrl\dot{\varphi}^2\varphi$ имеет третий порядок малости и потому должно быть отброшено, получим уравнение (7) в виде

$$[3Mr^2 + 2m(r^2 + l^2 + \rho_C^2 - 2rl)]\ddot{\varphi} = -mgl\varphi,$$

т. е.

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0, \tag{8}$$

где

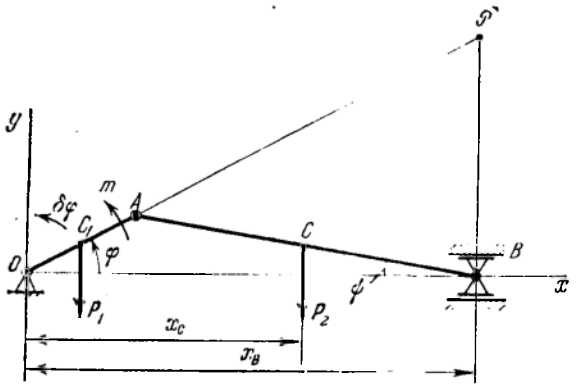
$$k^2 = \frac{mgl}{3Mr^2 + 2m[(l-r)^2 + \rho_C^2]}.$$

Таково дифференциальное уравнение (8) малых колебаний материальной системы. Здесь k^2 — квадрат круговой частоты этих колебаний. Поэтому искомый период колебаний $T = 2\pi/k$ имеет вид

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3Mr^2 + 2m[(l-r)^2 + \rho_C^2]}{mgl}}.$$

Задача 10.39. Кривошипно-ползунный механизм OAB, расположенный в вертикальной плоскости, приводится в движение посредством кривошипа OA, к которому приложен вращающий момент m.

Найти закон изменения момента m, при котором осуществляется равномерное вращение кривошипа; M_1 — масса кривошипа OA,



К задаче 10.39.

r — длина кривошипа, M_2 — масса шатуна AB, l — длина шатуна, M_3 — масса ползуна. Кривошип OA и шатун AB считать тонкими однородными стержнями, а ползун — точечной массой. Силами сопротивления движению пренебречь.

Р е ш е н и е. В решении задачи 10.29 в качестве обобщенной координаты был введен угол поворота φ кривошипа и была определена обобщенная сила Q_φ:

$$Q_\varphi = m - \frac{1}{2} rg(M_1 + M_2)\cos\varphi. \qquad (1)$$

Уравнение Лагранжа для обобщенной координаты φ имеет вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi. \qquad (2)$$

Вычислим кинетическую энергию T механизма, в состав которого входят массы кривошипа, шатуна и ползуна, по формуле

$$T = T^{(1)} + T^{(2)} + T^{(3)}. \tag{3}$$

Кинетическая энергия $T^{(1)}$ кривошипа OA, вращающегося вокруг неподвижной оси O, перпендикулярной к плоскости рисунка, равна $T^{(1)} = \frac{1}{2} I_O \dot{\varphi}^2$. Так как кривошип считается однородным тонким стержнем, то $I_O = \frac{1}{3} M_1 r^2$, и, следовательно,

$$T^{(1)} = \frac{1}{6} M_1 r^2 \dot{\varphi}^2. \tag{4}$$

Кинетическая энергия $T^{(2)}$ шатуна AB, совершающего плоское движение, имеет вид

$$T^{(2)} = \frac{1}{2} M_2 v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega_2^2. \tag{5}$$

Выразим теперь v_C и ω_2 через обобщенную координату φ и обобщенную скорость $\dot{\varphi}$.

В решении задачи 10.29 было определено положение мгновенного центра скоростей $\mathcal{P}$ шатуна AB и был вычислен мгновенный радиус точки A, равный $A\mathcal{P} = \frac{l \cos\psi}{\cos\varphi}$. Учитывая, что точка A одновременно принадлежит кривошипу OA и шатуну AB, получим $v_A = r|\dot{\varphi}| = |A\mathcal{P}|\,\omega_2$, откуда

$$\omega_2 = \frac{r}{A\mathcal{P}} |\dot{\varphi}| = \lambda \frac{\cos\varphi}{\cos\psi} |\dot{\varphi}|, \tag{6}$$

где $\lambda = r/l$.

Установим связь между $\cos\psi$ и углом φ. Из треугольника OAB находим, что $\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{l}{r}$, откуда

$$\sin\psi = \lambda \sin\varphi, \tag{7}$$

где $\lambda = r/l$, следовательно,

$$\cos\psi = \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2\varphi} = (1 - \lambda^2 \sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{1}{2}\lambda^2 \sin^2\varphi \approx$$

$$\approx 1 - \frac{1}{2}\lambda^2 \cdot \frac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi) \approx 1 - \frac{1}{4}\lambda^2 + \frac{1}{4}\lambda^2 \cos 2\varphi.$$

Итак,

$$\cos\psi \approx 1 - \frac{1}{4}\lambda^2 + \frac{1}{4}\lambda^2 \cos 2\varphi. \tag{8}$$

Подставив значение $\cos\psi$ из формулы (8) в (6), получаем

$$\omega_2 = \frac{\lambda \cos\varphi}{1 - \frac{1}{4}\lambda^2 + \frac{1}{4}\lambda^2 \cos 2\varphi} |\dot{\varphi}|. \tag{9}$$

В первое слагаемое формулы (5) входит квадрат скорости центра тяжести C шатуна, который можно вычислить по формуле

$$v_C^2 = \dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2. \tag{10}$$

Нетрудно видеть, что $x_C = |OA| \cos\varphi + |AC| \cos\psi = r\cos\varphi + \frac{l}{2}\cos\psi$. Подставляя значение $\cos\psi$ из формулы (8), имеем

$$x_C = r\cos\varphi + \frac{l}{2}\left(1 - \frac{1}{4}\lambda^2 + \frac{1}{4}\lambda^2\cos 2\varphi\right),$$

т. е.

$$x_C = \frac{l}{2} - \frac{1}{8}\lambda^2 l + r\cos\varphi + \frac{1}{8}\lambda^2 l\cos 2\varphi,$$

откуда

$$\dot{x}_C = -r\left(\sin\varphi + \frac{1}{4}\lambda\sin 2\varphi\right)\dot{\varphi}. \tag{11}$$

Центры тяжести кривошипа OA и шатуна AB расположены в их серединах и по конструкции имеют равные ординаты

$$y_C = y_{C_1} = \frac{r}{2}\sin\varphi,$$

откуда

$$\dot{y}_C = \frac{r}{2}\cos\varphi\cdot\dot{\varphi}. \tag{12}$$

Внося в формулу (10) значения $\dot{x}_C$ и $\dot{y}_C$ соответственно из формул (11) и (12), находим

$$v_C^2 = r^2\left[\left(\sin\varphi + \frac{1}{4}\lambda\sin 2\varphi\right)^2 + \frac{1}{4}\cos^2\varphi\right]\dot{\varphi}^2. \tag{13}$$

Подставляем в формулу (5) выражения ω_2 и v_C^2 из формул (9) и (13) и, принимая во внимание, что $I_C = \frac{M_2 l^2}{12}$, получаем

$$T^{(2)} = \frac{M_2 r^2}{24}\left\{3\left[4\left(\sin\varphi + \frac{1}{4}\lambda\sin 2\varphi\right)^2 + \cos^2\varphi\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{\cos^2\varphi}{\left(1 - \frac{1}{4}\lambda^2 + \frac{1}{4}\lambda^2\cos 2\varphi\right)^2}\right\}\dot{\varphi}^2. \tag{14}$$

Кинетическая энергия $T^{(3)}$ ползуна B, движущегося поступательно, находится по формуле

$$T^{(3)} = \frac{1}{2}M_3 v_B^2. \tag{15}$$

Для определения v_B вычислим абсциссу x_B ползуна:

$$x_B = r\cos\varphi + l\cos\psi.$$

Использовав формулу (8), запишем

$$x_B = r\cos\varphi + l\left(1 - \tfrac{1}{4}\lambda^2 + \tfrac{1}{4}\lambda^2\cos 2\varphi\right),$$

откуда

$$v_{Bx} = \dot{x}_B = -r\left(\sin\varphi + \tfrac{1}{2}\lambda\sin 2\varphi\right)\dot{\varphi}.$$

Теперь формула (15) принимает вид

$$T^{(3)} = \frac{M_3 r^2}{2}\left(\sin\varphi + \tfrac{1}{2}\lambda\sin 2\varphi\right)^2\dot{\varphi}^2. \qquad (16)$$

Кинетическая энергия кривошипно-ползунного механизма вычисляется по формуле (3) после подстановки в нее значений $T^{(1)}$, $T^{(2)}$ и $T^{(3)}$ соответственно из (4), (14) и (16):

$$T = \frac{r^2}{24}\left\{4M_1 + M_2\left[12\left(\sin\varphi + \tfrac{1}{4}\lambda\sin 2\varphi\right)^2 + 3\cos^2\varphi + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\cos^2\varphi}{\left(1 - \frac{1}{4}\lambda^2 + \frac{1}{4}\lambda^2\cos 2\varphi\right)^2}\right] + 12M_3\left(\sin\varphi + \tfrac{1}{2}\lambda\sin 2\varphi\right)^2\right\}\dot{\varphi}^2. \qquad (17)$$

Если ввести обозначение

$$I_{\text{пр}} = \frac{r^2}{12}\left\{4M_1 + M_2\left[12\left(\sin\varphi + \tfrac{1}{4}\lambda\sin 2\varphi\right)^2 + 3\cos^2\varphi + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\cos^2\varphi}{\left(1 - \frac{1}{4}\lambda^2 + \frac{1}{4}\lambda^2\cos 2\varphi\right)^2}\right] + 12M_3\left(\sin\varphi + \tfrac{1}{2}\lambda\sin 2\varphi\right)^2\right\}, \qquad (18)$$

то кинетическая энергия кривошипно-ползунного механизма записывается в форме

$$T = \tfrac{1}{2} I_{\text{пр}}\dot{\varphi}^2, \qquad (19)$$

т. е. получает вид кинетической энергии твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси с угловой скоростью, равной обобщенной скорости $\dot{\varphi}$ системы. Таким образом, все массы системы оказываются приведенными к обобщенной координате φ. Коэффициент $I_{\text{пр}}$ носит в курсе теории механизмов и машин название *приведенного момента инерции системы* (если бы в качестве обобщенной координаты была избрана какая-либо линейная координата s, то кинетическая энергия системы получила бы вид $T = {}^1/_2 M_{\text{пр}}\dot{s}^2$, где $M_{\text{пр}}$ — приведенная масса системы).

Громоздкость выражения приведенного момента инерции $I_{\text{пр}}$, определенного формулой (18), наглядно иллюстрирует вычислительные трудности, с которыми приходится сталкиваться при определении выражения кинетической энергии механизма аналитическим путем (не менее громоздким, как показывает решение задачи 10.29, получается и выражение обобщенной силы Q_φ, именуемое в курсе теории механизмов и машин приведенной силой). При этом следует иметь в виду, что в этой задаче рассматривается сравнительно несложный механизм.

Возвращаясь к составлению уравнения Лагранжа для рассматриваемого кривошипно-ползунного механизма, вычислим частную производную кинетической энергии T, определенной формулой (19), по обобщенной скорости $\dot{\varphi}$,

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = I_{\text{пр}}\dot{\varphi}. \tag{20}$$

Затем возьмем производную по времени от частной производной (20), приняв во внимание, что приведенный момент инерции зависит от обобщенной координаты φ, т. е. $I_{\text{пр}} = I_{\text{пр}}(\varphi)$. Получим:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{dI_{\text{пр}}}{d\varphi}\dot{\varphi}^2 + I_{\text{пр}}\ddot{\varphi}. \tag{21}$$

Далее вычислим частную производную кинетической энергии (19) по обобщенной координате φ:

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{1}{2}\frac{dI_{\text{пр}}}{d\varphi}\dot{\varphi}^2. \tag{22}$$

После подстановки значений Q_φ, $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}$ и $\frac{\partial T}{\partial \varphi}$ соответственно из формул (1), (21) и (22) в уравнение Лагранжа (2) получим

$$I_{\text{пр}}\ddot{\varphi} + \frac{1}{2}\frac{dI_{\text{пр}}}{d\varphi}\dot{\varphi}^2 = m - \frac{1}{2}rg(M_1 + M_2)\cos\varphi, \tag{23}$$

где $I_{\text{пр}}$ определено формулой (18). Уравнение (23) является дифференциальным уравнением движения кривошипно-ползунного механизма.

По условию задачи требуется определить закон изменения вращающего момента m, обеспечивающий равномерное вращение кривошипа, т. е. постоянство $\dot{\varphi}$. При этом $\ddot{\varphi} = 0$ и решение уравнения (23) относительно m приводит к результату

$$m = \frac{1}{2}\left[\frac{dI_{\text{пр}}}{d\varphi}\dot{\varphi}^2 + rg(M_1 + M_2)\cos\varphi\right],$$

где

$$\frac{dI_{\text{пр}}}{d\varphi} = \frac{r^2}{12}\left\{M_2\left[24\left(\sin\varphi+\frac{1}{4}\lambda\sin 2\varphi\right)\left(\cos\varphi+\frac{1}{2}\lambda\cos 2\varphi\right)-\right.\right.$$

$$\left.-\sin 2\varphi\,\frac{3\left(1-\frac{1}{4}\lambda^2+\frac{1}{2}\lambda^2\cos 2\varphi\right)^3+1-\frac{3}{4}\lambda^2-\frac{1}{4}\lambda^2\cos 2\varphi}{\left(1-\frac{1}{4}\lambda^2+\frac{1}{4}\lambda^2\cos 2\varphi\right)^3}\right]+$$

$$\left.+24M_3\left(\sin\varphi+\frac{1}{2}\lambda\sin 2\varphi\right)(\cos\varphi+\lambda\cos 2\varphi)\right\};$$

здесь $\lambda = r/l$.

Задача 10.40. Использовав условие и рисунок к задаче 10.18, определить ускорение призмы B, если система движется под действием силы $\boldsymbol{F}$. Трением пренебречь.

Р е ш е н и е. Данная материальная система имеет одну степень свободы. Действительно, задание какого-либо одного параметра однозначно определяет положение всех ее точек. В качестве обобщенной координаты выберем параметр ξ. Для определения искомого ускорения применим уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} - \frac{\partial T}{\partial \xi} = Q_\xi. \tag{1}$$

Изобразим активные силы: силы тяжести $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{Q}$ призм M и B, а также силу $\boldsymbol{F}$. Реакции изображать не следует, так как все связи по условию идеальны. Для вычисления обобщенной силы Q_ξ запишем сумму работ активных сил на возможных перемещениях их точек приложения: $\delta A = P_y\delta y_C + F_x\delta x_D$. Использовав в этой формуле результаты (2) задачи 10.18, а также $P_y = -P = -M_1g$ и $F_x = -F$, найдем $\delta A = M_1g\delta\xi\ \mathrm{tg}\,\alpha - F\,2\delta\xi$, т. е. $\delta A = (M_1g\ \mathrm{tg}\,\alpha - 2F)\,\delta\xi$. Обобщенной силой Q_ξ является коэффициент пропорциональности, стоящий при $\delta\xi$, т. е.

$$Q_\xi = M_1g\ \mathrm{tg}\,\alpha - 2F. \tag{2}$$

Кинетическая энергия материальной системы равна

$$T = T^{(B)} + T^{(M)}. \tag{3}$$

Призмы B и M движутся поступательно. Поэтому

$$T^{(B)} = \frac{1}{2}M_2v_D^2, \quad T^{(M)} = \frac{1}{2}M_1v_C^2, \tag{4}$$

где

$$v_D^2 = \dot{x}_D^2 + \dot{y}_D^2, \quad v_C^2 = \dot{x}_B^2 + \dot{y}_C^2. \tag{5}$$

Используем соотношения (1) задачи 10.18, взяв производные по времени:

$$\dot{x}_D = 2\dot{\xi}, \quad \dot{y}_C = -\dot{\xi}\operatorname{tg}\alpha. \tag{6}$$

Как видно из рисунка к задаче 10.18, $x_C = a + \xi$, $y_D = \text{const}$. Значит,

$$\dot{x}_C = \dot{\xi}, \quad \dot{y}_D = 0. \tag{7}$$

Используем выражения (6) и (7) в формулах (5):

$$v_D^2 = 4\dot{\xi}^2, \quad v_C^2 = \frac{\dot{\xi}^2}{\cos^2\alpha}. \tag{8}$$

Теперь последовательно подставим значения (8) в формулы (4) и затем в выражение кинетической энергии (3):

$$T = 2M_2\dot{\xi}^2 + \frac{1}{2}M_1\frac{\dot{\xi}^2}{\cos^2\alpha},$$

т. е.

$$T = \frac{M_1 + 4M_2\cos^2\alpha}{2\cos^2\alpha}\dot{\xi}^2. \tag{9}$$

Применив результат (9), вычислим

$$\frac{\partial T}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} = \frac{M_1 + 4M_2\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}\ddot{\xi}. \tag{10}$$

Внесем выражения (2) и (10) в уравнение Лагранжа (1):

$$\frac{M_1 + 4M_2\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}\ddot{\xi} = M_1 g\operatorname{tg}\alpha - 2F,$$

т. е.

$$\ddot{\xi} = \frac{M_1\operatorname{tg}\alpha - 2F}{M_1 + 4M_2\cos^2\alpha}\cos^2\alpha. \tag{11}$$

Для определения искомого ускорения призмы заметим, что оно направлено горизонтально, т. е. $w_D = |w_{Dx}| = |\ddot{x}_D|$. Использовав первую формулу (6), вычислим $\ddot{x}_D = w_{Dx} = 2\ddot{\xi}$. Подстановка результатов (11) дает

$$w_{Dx} = 2\frac{M_1 g\operatorname{tg}\alpha - 2F}{M_1 + 4M_2\cos^2\alpha}\cos^2\alpha.$$

Если в начальный момент система находилась в покое, а сила F была столь мала, что $F < {}^1/_2 M_1 g\operatorname{tg}\alpha$, то $w_{Dx} > 0$, т. е. призма B движется направо, а призма M — направо вниз. Если же сила F по модулю столь велика, что $F > {}^1/_2 M_1 g\operatorname{tg}\alpha$, то $w_{Dx} < 0$, т. е. призма B движется налево, а призма M — налево вверх. При выполнении условия $F = {}^1/_2\, M_1 g\operatorname{tg}\alpha$ система остается в покое (этот результат следует также из формулы (9) задачи 10.18 при $f = 0$).

Задача 10.41. Воспользовавшись условием и решением задачи 10.31, составить дифференциальные уравнения движения материальной системы.

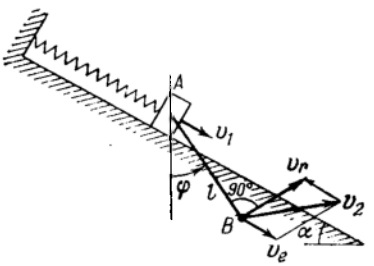
Решение. В ходе решения задачи 10.31 были определены обобщенные силы Q_s и Q_φ для выбранных обобщенных координат s и φ. Соответствующие уравнения Лагранжа имеют вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{s}} - \frac{\partial T}{\partial s} = Q_s, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi. \tag{1}$$

Вычислим кинетическую энергию материальной системы:

$$T = T^{(1)} + T^{(2)}, \tag{2}$$

где $T^{(1)}$ — кинетическая энергия груза A, $T^{(2)}$ — маятника B.



К задаче 10.41.

Груз A совершает поступательное движение, поэтому

$$T^{(1)} = \frac{1}{2} M_1 v_1^2 = \frac{1}{2} M_1 \dot{s}^2. \tag{3}$$

Кинетическая энергия математического маятника равна

$$T^{(2)} = \frac{1}{2} M_2 v_2^2. \tag{4}$$

Заметив, что маятник совершает сложное движение (переносное поступательное вместе с грузом A и относительное по отношению к грузу), применим теорему о сложении скоростей точки: $\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r$. В данном случае (см. рисунок) $\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_e = \boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_r = \boldsymbol{v}_{BA}$. Поэтому $\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_{BA}$. Угол между $\boldsymbol{v}_e$ и $\boldsymbol{v}_r$ равен $\varphi + \alpha$. Значит, $v_2^2 = v_1^2 + v_{BA}^2 + 2v_1 v_{BA} \cos(\varphi + \alpha)$. Внеся это значение v_2^2 в формулу (4), найдем кинетическую энергию маятника

$$T^{(2)} = \frac{1}{2} M_2 [\dot{s}_2 + l^2 \dot{\varphi}^2 + 2l\dot{\varphi}\dot{s} \cos(\varphi + \alpha)]. \tag{5}$$

С учетом результатов (3) и (5) кинетическая энергия (2) примет вид

$$T = \frac{M_1 + M_2}{2} \dot{s}^2 + \frac{1}{2} M_2 l^2 \dot{\varphi}^2 + M_2 l \dot{\varphi}\dot{s} \cos(\varphi + \alpha). \tag{6}$$

Воспользовавшись формулой (6) и обратив внимание на то, что $T = T(\varphi, \dot{\varphi}, \dot{s})$, вычислим

$$\frac{\partial T}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = -M_2 l \dot{\varphi}\dot{s} \sin(\varphi + \alpha). \tag{7}$$

Далее найдем

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{s}} = (M_1 + M_2)\dot{s} + M_2 l\dot{\varphi}\cos(\varphi + \alpha),$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = M_2 l^2\dot{\varphi} + M_2 l\dot{s}\cos(\varphi + \alpha).$$

Теперь вычислим производные по времени:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{s}} = (M_1 + M_2)\ddot{s} + M_2 l\ddot{\varphi}\cos(\varphi + \alpha) - M_2 l\dot{\varphi}^2\sin(\varphi + \alpha), \quad (8)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = M_2 l^2\ddot{\varphi} + M_2 l\ddot{s}\cos(\varphi + \alpha) - M_1 l\dot{\varphi}\dot{s}\sin(\varphi + \alpha). \quad (9)$$

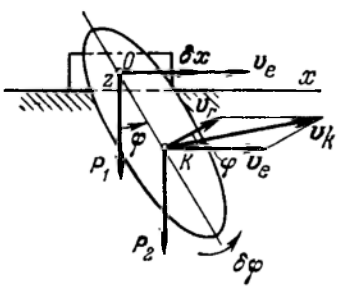
Для получения искомых дифференциальных уравнений движения материальной системы остается выражения (8) и (9), а также результаты (4) и (6) задачи 10.31 внести в уравнения Лагранжа (1). Окончательно найдем

$$(M_1 + M_2)\ddot{s} + M_2 l\ddot{\varphi}\cos(\varphi + \alpha) - M_2 l\dot{\varphi}^2\sin(\varphi + \alpha) = -cs,$$

$$l\ddot{\varphi} + \ddot{s}\cos(\varphi + \alpha) = -g\sin\varphi.$$

Интегрирование этой нелинейной системы дифференциальных уравнений сопряжено со значительными трудностями и в замкнутой форме неосуществимо. Но ее можно решить приближенно, в частности, пользуясь ЭВМ.

Задача 10.42. Сохранив данные задачи 10.7 и применив уравнения Лагранжа, написать дифференциальные уравнения движения системы. Неподвижная ось x, связанная с горизонтальной плоскостью, и направление отсчета угла поворота φ указаны на рисунке.



К задаче 10.42.

Р е ш е н и е. Данная система имеет две степени свободы, ибо для определения положения всех ее точек надо задать два независимых параметра, например, координату x, определяющую положение ползуна на плоскости, и угол поворота φ, фиксирующий положение маятника по отношению к ползуну. Выберем x и φ в качестве обобщенных координат, т. е. $q_1 = x$, $q_2 = \varphi$. Соответствующие уравнения Лагранжа имеют вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi. \quad (1)$$

Для определения обобщенных сил изобразим на рисунке активные силы: $\boldsymbol{P}_1 = M_1\boldsymbol{g}$ — сила тяжести ползуна, $\boldsymbol{P}_2 = M_2\boldsymbol{g}$ — сила тяжести маятника. Реакции изображать не надо, так как на систему наложены идеальные связи.

Дадим системе два независимых обобщенных возможных перемещения δx и $\delta\varphi$.

Для определения обобщенной силы Q_x надо дать возможное перемещение δx, а $\delta\varphi$ считать равным нулю, т. е. $\delta x \neq 0$, $\delta\varphi = 0$. Это значит, что вся система поступательно перемещается на δx. При этом точки приложения сил $\boldsymbol{P}_1$ и $\boldsymbol{P}_2$ перемещаются по горизонтали и, значит, сумма работ этих сил на перемещении δx равна нулю: $\delta A = 0$. Сопоставив этот результат с формулой $\delta A = Q_x \delta x$, видим, что обобщенная сила Q_x равна нулю:

$$Q_x = 0. \tag{2}$$

Для определения обобщенной силы Q_φ дадим системе возможное перемещение $\delta\varphi$, а δx будем считать равным нулю, т. е. $\delta\varphi \neq 0$, $\delta x = 0$. Это значит, что при неподвижном ползуне маятник поворачивается вокруг оси z против часовой стрелки (см. рисунок) на $\delta\varphi$. Вычислим сумму работ активных сил на этом перемещении. Точка приложения $\boldsymbol{P}_1$ неподвижна и, значит, работа силы $\boldsymbol{P}_1$ равна нулю, поэтому $\delta A = m_z(P_2)\,\delta\varphi$, где $m_z(P_2) = -P_2 a \sin\varphi$, т. е.

$$\delta A = -M_2 g a \sin\varphi\,\delta\varphi. \tag{3}$$

Обобщенной силой Q_φ является коэффициент, стоящий при $\delta\varphi$ в выражении (3):

$$Q_\varphi = -M_2 g a \sin\varphi. \tag{4}$$

Переходим к вычислению кинетической энергии системы:

$$T = T^{(1)} + T^{(2)}, \tag{5}$$

где $T^{(1)}$ — кинетическая энергия ползуна, $T^{(2)}$ — кинетическая энергия маятника.

Ползун движется поступательно. Поэтому

$$T^{(1)} = \frac{1}{2} M_1 \dot{x}^2. \tag{6}$$

Маятник совершает плоское движение. Значит,

$$T^{(2)} = \frac{1}{2} M_2 v_K^2 + \frac{1}{2} I_K \omega^2, \tag{7}$$

где v_K — абсолютная скорость центра тяжести K маятника, I_K — его момент инерции относительно горизонтальной оси, проходящей через точку K перпендикулярно к плоскости материальной симметрии (т. е. плоскости рисунка), ω — угловая скорость маятника.

При определении скорости $\boldsymbol{v}_K$ заметим, что точка K совершает сложное движение, которое можно разложить на переносное поступательное вместе с ползуном и относительное вращательное вокруг оси z. Применим теорему о сложении скоростей точки: $\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r$. В данном случае $\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_K$. На рисунке изображен параллелограмм скоростей. Угол между скоростями $\boldsymbol{v}_e$ и $\boldsymbol{v}_r$ равен φ, поэтому имеем

$$v_K^2 = v_e^2 + v_r^2 + 2 v_e v_r \cos\varphi. \tag{8}$$

Учтя, что $|\boldsymbol{v}_e| = |\dot{x}|$, а $|\boldsymbol{v}_r| = a|\dot{\varphi}|$, запишем формулу (8) в виде

$$v_K^2 = \dot{x}^2 + a^2\dot{\varphi}^2 + 2a\dot{\varphi}\dot{x}\cos\varphi. \tag{9}$$

Внеся в формулу (7) значение (9) и учтя, что $\omega^2 = \dot{\varphi}^2$, запишем

$$T^{(2)} = \frac{1}{2}M_2\dot{x}_2 + \frac{1}{2}M_2a^2\dot{\varphi}^2 + M_2a\dot{\varphi}\dot{x}\cos\varphi + \frac{1}{2}I_K\dot{\varphi}^2. \tag{10}$$

Использовав теорему Штейнера, имеем $I_K + M_2a^2 = I_z$. Поэтому формула (10) окончательно примет вид

$$T^{(2)} = \frac{1}{2}M_2\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I_z\dot{\varphi}^2 + M_2a\dot{\varphi}\dot{x}\cos\varphi. \tag{11}$$

Подставив результаты (6) и (11) в формулу (5), получим выражение кинетической энергии данной системы

$$T = \frac{M_1 + M_2}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 + M_2a\dot{\varphi}\dot{x}\cos\varphi. \tag{12}$$

Для составления искомых уравнений Лагранжа (1) вычислим производные кинетической энергии (12) по обобщенным скоростям $\dot{x}$ и $\dot{\varphi}$:

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{x}} = (M_1 + M_2)\dot{x} + M_2a\dot{\varphi}\cos\varphi, \quad \frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}} = I_z\dot{\varphi} + M_2a\dot{x}\cos\varphi. \tag{13}$$

Затем возьмем производные по времени от частных производных (13), учтя при этом, что $\frac{d}{dt}(\cos\varphi) = -\dot{\varphi}\sin\varphi$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{x}} &= (M_1 + M_2)\ddot{x} + M_2a\ddot{\varphi}\cos\varphi - M_2a\dot{\varphi}^2\sin\varphi,\\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}} &= I_z\ddot{\varphi} + M_2a\ddot{x}\cos\varphi - M_2a\dot{\varphi}\dot{x}\sin\varphi.\end{aligned} \tag{14}$$

Далее вычислим частные производные кинетической энергии (12) по обобщенным координатам x и φ:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial\varphi} = -M_2a\dot{\varphi}\dot{x}\sin\varphi. \tag{15}$$

Внеся результаты (2), (4), (14) и (15) в уравнения Лагранжа (1), получим искомые дифференциальные уравнения движения системы:

$$(M_1 + M_2)\ddot{x} + M_2a\ddot{\varphi}\cos\varphi - M_2a\dot{\varphi}^2\sin\varphi = 0, \tag{16}$$

$$I_z\ddot{\varphi} + M_2a\ddot{x}\cos\varphi = -M_2ga\sin\varphi. \tag{17}$$

Нетрудно видеть, что уравнения (16) и (17) соответственно тождественны уравнениям (18) и (17), полученным методом кинетостатики в задаче 10.7, и уравнениям (2) и (5), составленным с помощью общего уравнения динамики в задаче 10.26.

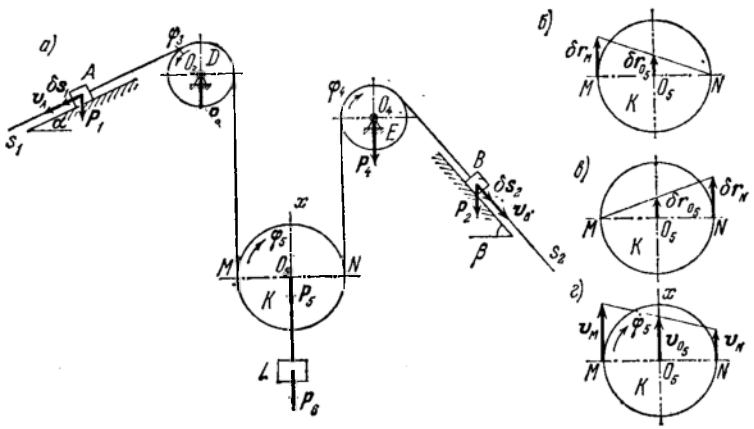
При сопоставлении этих методов надо учесть, что применение метода кинетостатики и общего уравнения динамики связано с фор-

мальным введением сил инерции и приведением их к простейшему виду. При этом приходится оперировать с ускорениями точек системы. Заметим, что общее уравнение динамики быстрее приводит к искомым дифференциальным уравнениям, ибо вместо пяти уравнений удается сразу составить два искомых уравнения.

Применение же уравнений Лагранжа, в которых отсутствуют силы инерции, требует от читателя умения оперировать не с ускорениями, а со скоростями точек системы, что естественно, значительно проще. Поэтому по сравнению с применением общего уравнения динамики и, особенно, метода кинетостатики использование уравнений Лагранжа оказывается наиболее эффективным.

Что касается применения теоремы о движении центра масс в совокупности с уравнением динамики относительного движения (см. второй вариант решения задачи 10.7), то оно вполне целесообразно, но требует от читателя значительных навыков в решении задач. Действительно, нелегко при недостаточном опыте среди множества теорем и соотношений динамики выбрать те из них, которые ведут к составлению искомых дифференциальных уравнений. Подобные решения обычно сопровождаются рядом неудачных проб и попыток. Применение же уравнений Лагранжа исключает эти неудачные попытки и непосредственно приводит к искомым уравнениям.

Задача 10.43. Решить задачу 10.25 с помощью уравнений Лагранжа.



К задаче 10.43.

Р е ш е н и е. При решении задачи 10.25 было показано, что рассматриваемая система имеет две степени свободы.

В качестве обобщенных координат выберем линейные координаты s_1 и s_2, направленные вдоль наклонных плоскостей вниз.

Запишем уравнения Лагранжа для обобщенных координат s_1 и s_2:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{s}_1} - \frac{\partial T}{\partial s_1} = Q_{s_1}, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{s}_2} - \frac{\partial T}{\partial s_2} = Q_{s_2}. \tag{1}$$

Активными силами являются: $\boldsymbol{P}_1$ — сила тяжести груза A, $\boldsymbol{P}_2$ — сила тяжести груза B, $\boldsymbol{P}_3$ — сила тяжести блока D, $\boldsymbol{P}_4$ — сила тяжести блока E, $\boldsymbol{P}_5$ — сила тяжести блока K, $\boldsymbol{P}_6$ — сила тяжести груза L. Реакции связей учитывать не следует, так как все связи, наложенные на систему, идеальны (наклонные плоскости идеально гладкие, трение в осях блоков отсутствует, нити предполагаются нерастяжимыми и натянутыми).

Для определения обобщенных сил Q_{s_1} и Q_{s_2} дадим грузам A и B соответственно возможные перемещения $\delta\boldsymbol{s}_1$ и $\delta\boldsymbol{s}_2$, направленные параллельно линиям наибольшего ската наклонных плоскостей в сторону возрастания координат s_1 и s_2.

Для вычисления обобщенной силы Q_{s_1} дадим системе обобщенное возможное перемещение $\delta\boldsymbol{s}_1$, считая при этом $\delta\boldsymbol{s}_2$ равным нулю, т. е. $\delta\boldsymbol{s}_1 \neq 0$, $\delta\boldsymbol{s}_2 = 0$. (Это осуществимо, так как s_1 и s_2 являются независимыми обобщенными координатами.)

Таким образом, груз B, блок E и правая ветвь нити от груза B до точки N находятся в покое. При возможном перемещении груза A вниз на $\delta\boldsymbol{s}_1$, ввиду нерастяжимости нити, точка M нити получит возможное перемещение $\delta\boldsymbol{r}_M$ по вертикали вверх, равное по модулю δs_1. Учитывая, что точка N нити остается при этом в покое, определим возможное перемещение оси блока $\delta\boldsymbol{r}_{O_5}$ (рис. *б*), равное по модулю половине модуля возможного перемещения $\delta\boldsymbol{r}_M$, т. е.

$$\delta r_{O_5} = \frac{\delta r_M}{2} = \frac{\delta s_1}{2}. \tag{2}$$

Вычислим сумму работ активных сил на возможных перемещениях точек системы, соответствующих обобщенному возможному перемещению $\delta\boldsymbol{s}_1$ груза A:

$$\delta A = P_1 \sin\alpha\, \delta s_1 - (P_5 + P_6)\, \delta r_{O_5}.$$

Принимая во внимание формулу (2), находим

$$\delta A = [M_1 g \sin\alpha - \tfrac{1}{2} g (M_5 + M_6)]\, \delta s_1. \tag{3}$$

Работа силы тяжести $\boldsymbol{P}_2$ равна нулю, так как $\delta\boldsymbol{s}_2 = 0$, работа сил тяжести $\boldsymbol{P}_3$ и $\boldsymbol{P}_4$ равна нулю, так как точки приложения этих сил неподвижны. Обобщенной силой Q_{s_1} является коэффициент, стоящий при обобщенном возможном перемещении в уравнении (3), т. е.

$$Q_{s_1} = M_1 g \sin\alpha - \tfrac{1}{2} g (M_5 + M_6). \tag{4}$$

Для вычисления обобщенной силы Q_{s_2} дадим системе обобщенное возможное перемещение δs_2, считая при этом δs_1 равным нулю: $\delta s_2 \neq 0$, $\delta s_1 = 0$.

Это значит, что груз A, блок D и левая ветвь нити от груза A до точки M нити находятся в покое. При возможном перемещении груза B на δs_2 вниз, ввиду нерастяжимости нити, точка N нити получит возможное перемещение δr_N по вертикали вверх, равное по величине модулю возможного перемещения δs_2. Учитывая, что точка M нити остается при этом в покое, находим (рис. *в*)

$$\delta r_{O_5} = \frac{\delta r_N}{2} = \frac{\delta s_2}{2}. \tag{5}$$

Вычислим сумму работ активных сил на возможных перемещениях точек системы, соответствующих обобщенному возможному перемещению δs_2:

$$\delta A = P_2 \delta s_2 \sin\beta - (P_5 + P_6)\,\delta r_{O_5}.$$

Учитывая формулу (5), имеем

$$\delta A = \left[P_2 \sin\beta - \frac{1}{2}(P_5 + P_6)\right]\delta s_2. \tag{6}$$

Работа силы тяжести P_1 равна нулю, так как $\delta s_1 = 0$. Работа сил тяжести P_3 и P_4 равна нулю, так как их точки приложения неподвижны.

Обобщенной силой Q_{s_2} является коэффициент, стоящий при δs_2 в формуле (6), т. е.

$$Q_{s2} = M_2 g \sin\beta - \frac{1}{2} g (M_5 + M_6). \tag{7}$$

Переходим к вычислению кинетической энергии T материальной системы, состоящей из шести масс: грузов A, B и L блоков D, E и K:

$$T = T^{(1)} + T^{(2)} + T^{(3)} + T^{(4)} + T^{(5)} + T^{(6)}. \tag{8}$$

Грузы A и B имеют скорости v_A и v_B, направленные параллельно линиям наибольшего ската наклонных плоскостей. Проекции этих скоростей на оси s_1 и s_2 соответственно равны $\dot{s}_1$ и $\dot{s}_2$. Обозначим радиусы блоков D, E и K через r_3, r_4 и r_5. При этом угловые скорости блоков D и E выразятся так:

$$\dot{\varphi}_3 = \frac{\dot{s}_1}{r_3}, \quad \dot{\varphi}_4 = \frac{\dot{s}_2}{r_4}. \tag{9}$$

Ввиду нерастяжимости нити, скорость v_M точки M нити равна по величине скорости v_A груза A, т. е. $v_{Mx} = \dot{s}_1$. Аналогично: $v_{Nx} = \dot{s}_2$. Нетрудно, воспользовавшись рис. *г*, найти скорость оси O_5 блока K, совершающего плоское движение:

$$v_{O_5 x} = \frac{v_{Mx} + v_{Nx}}{2} = \frac{\dot{s}_1 + \dot{s}_2}{2}. \tag{10}$$

Для определения угловой скорости $\dot{\varphi}_5$ блока K найдем скорость точки M, приняв за полюс точку N:

$$v_{Mx} = v_{Nx} + (v_{MN})_x,$$

т. е.

$$(v_{MN})_x = v_{Mx} - v_{Nx} = \dot{s}_1 - \dot{s}_2.$$

Так как $(v_{MN})_x = |MN|\,\dot{\varphi}_5 = 2r_5\dot{\varphi}_5$, то $2r_5\dot{\varphi}_5 = \dot{s}_1 - \dot{s}_2$, откуда угловая скорость блока K

$$\dot{\varphi}_5 = \frac{\dot{s}_1 - \dot{s}_2}{2r_5}. \tag{11}$$

Кинетические энергии грузов A и B, совершающих поступательное движение, имеют вид

$$T^{(1)} = \frac{1}{2} M_1 \dot{s}_1^2, \quad T^{(2)} = \frac{1}{2} M_2 \dot{s}_2^2. \tag{12}$$

Вычислим кинетическую энергию блоков D и E, вращающихся вокруг неподвижных осей:

$$T^{(3)} = \frac{1}{2} I_{O_3} \dot{\varphi}_3^2, \quad T^{(4)} = \frac{1}{2} I_{O_4} \dot{\varphi}_4^2.$$

Подставив значения моментов инерции блоков $\left(I_{O_3} = \frac{M_3 r_3^2}{2},\ I_{O_4} = \frac{M_4 r_4^2}{2}\right)$ и воспользовавшись формулами (9), находим

$$T^{(3)} = \frac{M_3 \dot{s}_1^2}{4}, \quad T^{(4)} = \frac{M_4 \dot{s}_2^2}{4}. \tag{13}$$

Кинетическую энергию блока K, совершающего плоское движение, определим по формуле

$$T^{(5)} = \frac{1}{2} M_5 v_{O_5}^2 + \frac{1}{2} I_{O_5} \dot{\varphi}_5^2.$$

Подставив значение момента инерции блока $K\left(I_{O_5} = \frac{M_5 r_5^2}{2}\right)$ и воспользовавшись формулами (10) и (11), получим

$$T^{(5)} = \frac{3}{16} M_5 (\dot{s}_1^2 + \dot{s}_2^2) + \frac{1}{8} M_5 \dot{s}_1 \dot{s}_2. \tag{14}$$

Кинетическая энергия груза L, движущегося поступательно, имеет вид

$$T^{(6)} = \frac{1}{2} M_6 v_{O_6}^2.$$

Применив формулу (10), определяем

$$T^{(6)} = \frac{1}{8} M_6 (\dot{s}_1 + \dot{s}_2)^2. \tag{15}$$

Для вычисления кинетической энергии T материальной системы подставляем в формулу (8) выражения кинетической энергии из формул (12)—(15). В итоге получаем

$$T = \frac{1}{2} M_1 \dot{s}_1^2 + \frac{1}{2} M_2 \dot{s}_2^2 + \frac{1}{4} M_3 \dot{s}_1^2 + \frac{1}{4} M_4 \dot{s}_2^2 + \frac{3}{16} M_5 (\dot{s}_1^2 + \dot{s}_2^2) + \\ + \frac{1}{8} M_5 \dot{s}_1 \dot{s}_2 + \frac{1}{8} M_6 (\dot{s}_1 + \dot{s}_2)^2,$$

т. е.

$$T = \frac{8M_1 + 4M_3 + 3M_5 + 2M_6}{16} \dot{s}_1^2 + \frac{8M_2 + 4M_4 + 3M_5 + 2M_6}{16} \dot{s}_2^2 + \\ + \frac{M_5 + 2M_6}{8} \dot{s}_1 \dot{s}_2. \quad (16)$$

Для составления системы уравнений Лагранжа второго рода следует вычислить частные производные кинетической энергии T по обобщенным скоростям $\dot{s}_1$ и $\dot{s}_2$:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{s}_1} = \frac{8M_1 + 4M_3 + 3M_5 + 2M_6}{8} \dot{s}_1 + \frac{M_5 + 2M_6}{8} \dot{s}_2,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{s}_2} = \frac{8M_2 + 4M_4 + 3M_5 + 2M_6}{8} \dot{s}_2 + \frac{M_5 + 2M_6}{8} \dot{s}_1$$

и взять производные полученных результатов по времени:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{s}_1} = \frac{8M_1 + 4M_3 + 3M_5 + 2M_6}{8} \ddot{s}_1 + \frac{M_5 + 2M_6}{8} \ddot{s}_2,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{s}_2} = \frac{8M_2 + 4M_4 + 3M_5 + 2M_6}{8} \ddot{s}_2 + \frac{M_5 + 2M_6}{8} \ddot{s}_1. \quad (17)$$

Учитывая, что кинетическая энергия T, определенная формулой (16), не зависит от обобщенных координат s_1 и s_2, имеем

$$\frac{\partial T}{\partial s_1} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial s_2} = 0. \quad (18)$$

После подстановки формул (4), (7), (17) и (18) в уравнение (1) получим уравнения Лагранжа второго рода для обобщенных координат s_1 и s_2:

$$\frac{8M_1 + 4M_3 + 3M_5 + 2M_6}{8} \ddot{s}_1 + \frac{M_5 + 2M_6}{8} \ddot{s}_2 = M_1 g \sin \alpha - \frac{1}{2} g (M_5 + M_6), \quad (19)$$

$$\frac{8M_2 + 4M_4 + 3M_5 + 2M_6}{8} \ddot{s}_2 + \frac{M_5 + 2M_6}{8} \ddot{s}_1 = M_2 g \sin \beta - \frac{1}{2} g (M_5 + M_6). \quad (20)$$

Нетрудно видеть, что дифференциальные уравнения (19) и (20) тождественны дифференциальным уравнениям (14) и (19) задачи 10.25.

Определение из этой системы уравнений $\bar{s}_1$, $\bar{s}_2$ и $w_{O_5x} = (\bar{s}_1 + \bar{s}_2)/2$ приводит к результатам, полученным при решении задачи 10.25. Итак, уравнения движения рассматриваемой системы были составлены двумя способами: с помощью общего уравнения динамики в задаче 10.25 и уравнений Лагранжа в данной задаче.

Сопоставление двух указанных методов показывает преимущества использования уравнений Лагранжа. Вместо формального введения сил инерции материальной системы, приведения их к простейшему виду, вычисления работ сил инерции и пар сил инерции на возможных перемещениях точек системы мы при решении задачи с помощью уравнений Лагранжа должны лишь составить выражение кинетической энергии материальной системы с последующим вычислением ее производных и найти обобщенные силы.

Задача 10.44. К валу O_1O_2, вращающемуся вокруг неподвижной вертикальной оси z, жестко прикреплен гладкий горизонтальный стержень OD. Ползун A массы m_1 скользит вдоль стержня OD. В ползуне A имеется цилиндрический подшипник, горизонтальная ось которого перпендикулярна плоскости O_1OD. Вокруг оси может поворачиваться невесомый стержень AB длиной l с точечной массой m_2 в точке B. Момент инерции вала со стержнем относительно оси z равен I_z. К валу приложен вращающий момент m_z. Всеми силами сопротивления пренебречь. Ползун считать точечной массой.

Написать дифференциальные уравнения движения материальной системы.

Р е ш е н и е. Направим ось x вдоль стержня OD, а ось y — перпендикулярно плоскости рисунка от нас. Соответствующие орты равны $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$. Подвижная система осей xyz вращается вместе с валом.

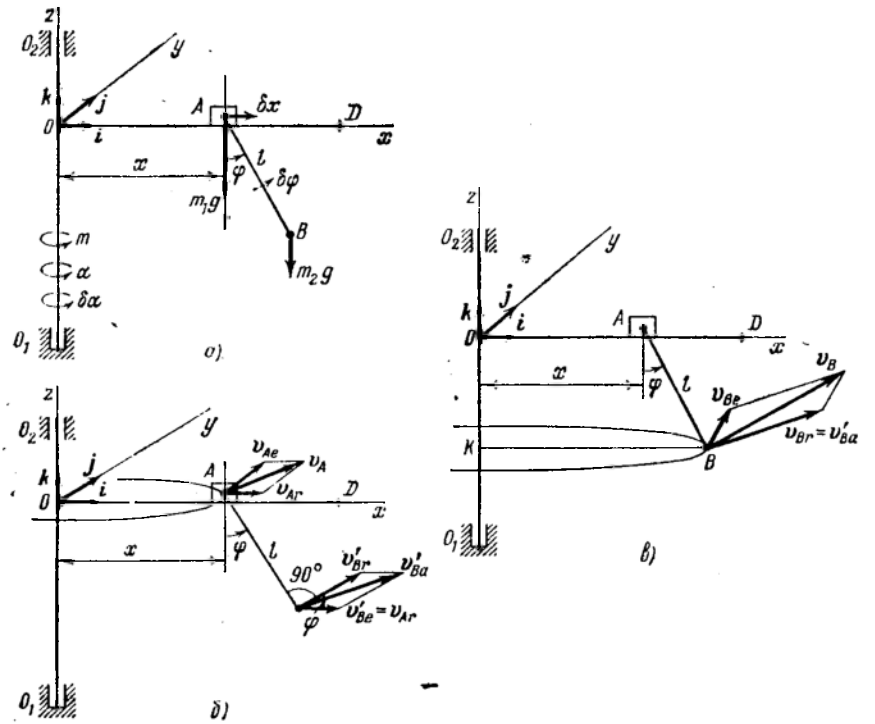
Данная материальная система имеет три степени свободы: для определения положений вала O_1O_2 со стержнем, ползуна A на стержне и массы B относительно ползуна надо задать три независимых параметра. Выберем обобщенные координаты: $q_1 = \alpha$ — угол поворота вала O_1O_2 со стержнем, $q_2 = x$ — координата ползуна A, $q_3 = \varphi$ — угол поворота стержня AB (см. рис. *а*). Запишем соответствующие уравнения Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial T}{\partial \alpha} = Q_\alpha, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi. \qquad (1)$$

К материальной системе приложены активные силы и моменты: сила тяжести $\boldsymbol{P}$ вала со стержнем (сила $\boldsymbol{P}$ не задана и на рисунке не изображена), сила тяжести $m_1\boldsymbol{g}$ ползуна, сила тяжести $m_2\boldsymbol{g}$ — массы B, вращающий момент m_z.

Для определения обобщенной силы Q_α дадим системе обобщенное возможное перемещение $\delta\alpha$, а два других, т. е. $\delta\boldsymbol{x}$ и $\delta\varphi$, примем равными нулю: $\delta\alpha \neq 0$, $\delta\boldsymbol{x} = 0$, $\delta\varphi = 0$. Это значит, что при неизмен-

ных значениях x и φ вал со стержнем повернется на $\delta\alpha$. При этом точки приложения всех сил тяжести переместятся по дугам горизонтальных окружностей с центрами, лежащими на оси z. Значит, работа этих сил равна нулю. Отличной от нуля является лишь работа



К задаче 10.44.

вращающего момента m_z, т. е. $\sum \delta A_k = m_z \delta\alpha$. Отсюда следует значение обобщенной силы Q_α. Имеем

$$Q_\alpha = m_z. \qquad (2)$$

Для вычисления обобщенной силы Q_x дадим обобщенное возможное перемещение δx, а два других, т. е. $\delta\alpha$ и $\delta\varphi$, примем равными нулю: $\delta x \neq 0$, $\delta\alpha = 0$, $\delta\varphi = 0$. Это значит, что при неизменных значениях α и φ ползун переместится вдоль оси x на δx. При этом стержень AB передвинется поступательно и траекториями точек приложения сил тяжести $m_1 g$ и $m_2 g$ окажутся горизонтальные прямые. Следовательно, работа сил тяжести ползуна A и массы B равна нулю (при неизменном положении вала работа вращающего момента и его силы тяжести также равны нулю): $\sum \delta A_k = 0$. Так как $\sum \delta A_k = Q_x \delta x$, а $\delta x \neq 0$, то

$$Q_x = 0. \qquad (3)$$

Для определения обобщенной силы Q_φ дадим обобщенное возможное перемещение $\delta\varphi$, а два других, т. е. $\delta\alpha$ и δx, примем равными нулю: $\delta\varphi \neq 0$, $\delta\alpha = 0$, $\delta x = 0$. Это значит, что при неизменных значениях α и x маятник повернется на $\delta\varphi$ в сторону возрастания угла φ, т. е. против хода часовой стрелки. Использовав формулу (1) задачи 10.27, запишем

$$Q_\varphi = -m_2 g l \sin\varphi. \tag{4}$$

Перейдем к вычислению кинетической энергии материальной системы:

$$T = T^{(в)} + T^{(п)} + T^{(в)}, \tag{5}$$

где $T^{(в)}$ — кинетическая энергия вала, $T^{(п)}$ — ползуна A, $T^{(в)}$ — массы B.

Вал O_1O_2 со стержнем OD вращается вокруг неподвижной оси z. Поэтому

$$T^{(в)} = \frac{1}{2} I_z \dot{\alpha}^2. \tag{6}$$

Кинетическая энергия ползуна A, считаемого точечной массой, равна

$$T^{(п)} = \frac{1}{2} m_1 v_A^2, \tag{7}$$

где v_A — модуль абсолютной скорости ползуна, который совершает сложное движение: переносное вращательное вместе с валом и стержнем и относительное — вдоль стержня. Применим теорему о сложении скоростей к точке A: $\boldsymbol{v}_{Aa} = \boldsymbol{v}_{Ae} + \boldsymbol{v}_{Ar}$. В данном случае $\boldsymbol{v}_{Aa} = \boldsymbol{v}_A$, $\boldsymbol{v}_{Ae} = x\dot{\alpha}\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{v}_{Ar} = \dot{x}\boldsymbol{i}$ (см. рис. *б*). Поэтому

$$\boldsymbol{v}_A = x\dot{\alpha}\boldsymbol{j} + \dot{x}\boldsymbol{i}. \tag{8}$$

Следовательно, $v_A^2 = x^2\dot{\alpha}^2 + \dot{x}^2$. Внеся это значение в формулу (7), найдем кинетическую энергию ползуна A:

$$T^{(п)} = \frac{1}{2} m_1 x^2 \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2. \tag{9}$$

Кинетическая энергия массы B имеет вид

$$T^{(в)} = \frac{1}{2} m_2 v_B^2, \tag{10}$$

где v_B — модуль ее абсолютной скорости.

Перейдем к определению скорости $\boldsymbol{v}_B$ точки B. Заметим, что она совершает относительное движение по отношению к ползуну A, скользящему вдоль стержня. Стержень же в свою очередь вместе с валом вращается вокруг неподвижной оси z. Найдем скорость $\boldsymbol{v}_B$ в два этапа.

На первом этапе отвлечемся от вращения стержня с валом вокруг неподвижной оси z. Тогда относительным окажется движение массы B по отношению к подвижной среде, движущейся поступательно вместе с ползуном A, скользящим вдоль стержня. Найдем абсолютную скорость $\boldsymbol{v}'_B$ на этом этапе (все скорости на первом этапе будем обозначать штрихами).

На втором этапе рассмотрим относительное движение массы B по отношению к подвижной среде, совершающей переносное вращение вокруг неподвижной оси z. Теперь скорость $\boldsymbol{v}'_{Ba}$, которая на первом этапе была абсолютной, является относительной. Выполним подробно эти расчеты.

1) Применим теорему о сложении скоростей точки к массе B:

$$\boldsymbol{v}'_{Ba} = \boldsymbol{v}'_{Be} + \boldsymbol{v}'_{Br}. \tag{11}$$

В данном случае при мысленно остановленном стержне переносное движение является поступательным вместе с ползуном A. Поэтому переносная скорость $\boldsymbol{v}'_{Be}$ массы B векторно равна относительной скорости $\boldsymbol{v}_{Ar}$ движения ползуна A по стержню (см. рис. *б*):

$$\boldsymbol{v}'_{Be} = \boldsymbol{v}_{Ar} = \dot{x}\boldsymbol{i}. \tag{12}$$

Относительная скорость — это скорость массы B по отношению ползуна A, т. е.

$$\boldsymbol{v}'_{Br} = \boldsymbol{v}_{BA}. \tag{13}$$

Вектор $\boldsymbol{v}_{BA}$ перпендикулярен AB (см. рис. *б*), т. е. образует с осью x угол φ и по модулю равен

$$v_{BA} = l|\dot{\varphi}|. \tag{14}$$

Использовав результаты (12) и (13) в формуле (11), имеем $\boldsymbol{v}'_{Ba} = \dot{x}\boldsymbol{i} + \boldsymbol{v}_{BA}$. Построив на рис. *б* параллелограмм скоростей, лежащий в плоскости xz, и приняв во внимание выражение (14), найдем

$$v'^2_{Ba} = \dot{x}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{\varphi}\dot{x}\cos\varphi. \tag{15}$$

2) Вновь применим теорему о сложении скоростей точки B, но теперь уже при переносном вращении стержня с валом вокруг неподвижной оси z и относительном движении массы B по отношению к ним:

$$\boldsymbol{v}_{Ba} = \boldsymbol{v}_{Be} + \boldsymbol{v}_{Br}. \tag{16}$$

Теперь абсолютная скорость является искомой скоростью точки B:

$$\boldsymbol{v}_{Ba} = \boldsymbol{v}_B. \tag{17}$$

При переносном вращении вокруг оси z скорость $\boldsymbol{v}_{Be}$ направлена перпендикулярно плоскости рисунка от нее (см. рис. *в*) и по модулю равна: $v_{Be} = BK\,|\dot{\alpha}| = (x + l\sin\varphi)\,|\dot{\alpha}|$, т. е.

$$\boldsymbol{v}_{Be} = (x + l\sin\varphi)\,\dot{\alpha}\boldsymbol{j}. \tag{18}$$

Относительной скоростью $\boldsymbol{v}_{Br}$ является скорость $\boldsymbol{v}'_{Ba}$, которая на первом этапе при остановленном вале со стержнем была абсолютной, т. е.

$$\boldsymbol{v}_{Br} = \boldsymbol{v}_{Ba}. \tag{19}$$

Внеся результаты (17), (18) и (19) в формулу (16), найдем

$$\boldsymbol{v}_B = (x + l\sin\varphi)\,\dot{\alpha}\boldsymbol{j} + \boldsymbol{v}'_{Ba}. \tag{20}$$

В правой части выражения (20) стоят две взаимно перпендикулярные скорости (вектор $(x + l\sin\varphi)\,\dot{\alpha}\boldsymbol{j}$ перпендикулярен плоскости xz, а вектор $\boldsymbol{v}_{Ba}$ лежит в этой плоскости). Поэтому, приняв во внимание формулу (15), найдем

$$v_B^2 = (x + l\sin\varphi)^2\dot{\alpha}^2 + \dot{x}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{\varphi}\dot{x}\cos\varphi. \tag{21}$$

Подставив результат (21) в формулу (10), получим кинетическую энергию массы B:

$$T^{(B)} = \frac{1}{2}m_2(x + l\sin\varphi)^2\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2l^2\dot{\varphi}^2 + m_2l\dot{\varphi}\dot{x}\cos\varphi. \tag{22}$$

После внесения в формулу (5) значений (6), (9) и (22) и простых преобразований найдем кинетическую энергию данной материальной системы:

$$T = \frac{1}{2}[I_z + m_1x^2 + m_2(x + l\sin\varphi)^2]\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + \\ + \frac{1}{2}m_2l^2\dot{\varphi}^2 + m_1l\dot{\varphi}\dot{x}\cos\varphi. \tag{23}$$

Заметим, что $T = T(x, \varphi, \dot{\alpha}, \dot{x}, \dot{\varphi})$.

Последующая часть решения задачи представляет лишь незначительные вычислительные трудности. Найдем, во-первых, частные производные кинетической энергии (23) по обобщенным скоростям $\dot{\alpha}$, $\dot{x}$, $\dot{\varphi}$:

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\alpha}} = [I_z + m_1x^2 + m_2(x + l\sin\varphi)^2]\,\dot{\alpha},$$

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{x}} = (m_1 + m_2)\dot{x} + m_2l\dot{\varphi}\cos\varphi, \quad \frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}} = m_2l^2\dot{\varphi} + m_2l\dot{x}\cos\varphi.$$

Затем возьмем производные от этих частных производных по времени, имея в виду, что x, φ, $\dot{\alpha}$, $\dot{x}$, $\dot{\varphi}$ являются функциями времени:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\alpha}} = [I_z + m_1x^2 + m_2(x + l\sin\varphi)^2]\,\ddot{\alpha} + \\ + 2\dot{\alpha}[m_1x\dot{x} + m_2(x + l\sin\varphi)(\dot{x} + l\dot{\varphi}\cos\varphi)], \tag{24}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{x}} = (m_1 + m_2)\ddot{x} + m_2l\ddot{\varphi}\cos\varphi - m_2l\dot{\varphi}^2\sin\varphi, \tag{25}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}} = m_2l^2\ddot{\varphi} + m_2l\ddot{x}\cos\varphi - m_2l\dot{\varphi}\dot{x}\sin\varphi. \tag{26}$$

Теперь вычислим частные производные кинетической энергии (23) по обобщенным координатам α, x и φ:

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha} = 0, \tag{27}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = [m_1 x + m_2 (x + l \sin \varphi)]\, \dot{\alpha}^2, \tag{28}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = m_2 l (x + l \sin \varphi)\, \dot{\alpha}^2 \cos \varphi. \tag{29}$$

Для составления искомых дифференциальных уравнений движения материальной системы подставим результаты (24), (27) и (2) в первое уравнение Лагранжа (1), затем (25), (28) и (3) — во второе уравнение (1) и, наконец, (26), (29) и (4) — в третье уравнение (1). Найдем

$$[I_z + m_1 x^2 + m_2 (x + l \sin \varphi)^2]\, \ddot{\alpha} + 2\dot{\alpha}\, [m_1 x \dot{x} + m^2 (x + l \sin \varphi)\, (\dot{x} + l\dot{\varphi} \cos \varphi)] = m_z, \tag{30}$$

$$(m_1 + m_2)\, \ddot{x} + m_2 l \ddot{\varphi} \cos \varphi - m_2 l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi - [m_1 x + m_2 (x + l \sin \varphi)] \dot{\alpha}^2 = 0, \tag{31}$$

$$l \ddot{\varphi} + \ddot{x} \cos \varphi - \dot{\varphi} \dot{x} \sin \varphi - (x + l \sin \varphi)\, \dot{\alpha}^2 \cos \varphi = -g \sin \varphi. \tag{32}$$

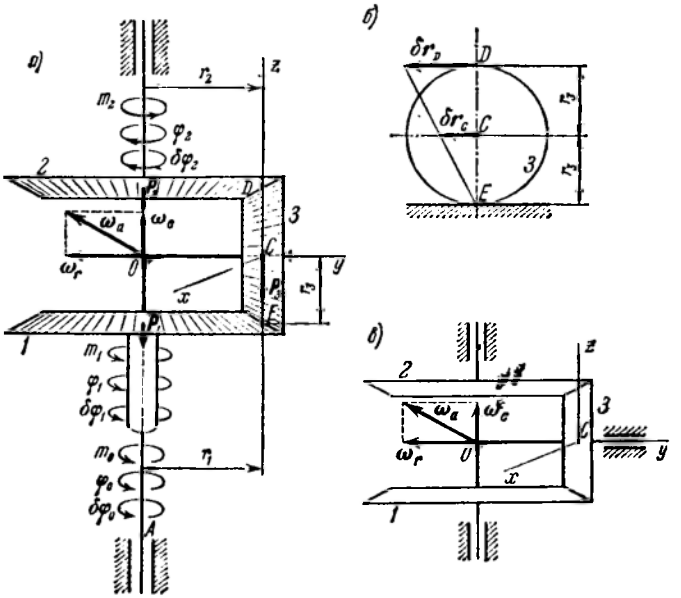
Бегло просмотрев решение этой задачи с помощью уравнений Лагранжа, видим, что в нем отсутствовали какие-либо искусственные приемы. Задача решалась по стандартным образцам. Громоздкие уравнения появились только в конце решения при вычислении производных кинетической энергии (23). Однако это не связано с какими-либо принципиальными трудностями. Центральным звеном решения задачи было определение скоростей точек A и B, необходимых при составлении выражения кинетической энергии (23). Легко представить, во сколько раз затруднилось бы решение этой задачи в случае применения общего уравнения динамики. Действительно, при этом вместо отыскания скоростей точек пришлось бы для модулей сил инерции находить их ускорения. Это усложнило бы решение в несколько раз.

Задача 10.45. На рис. *а* изображен механизм станочного дифференциала. Ведущее коническое зубчатое колесо *1* и ведомое коническое зубчатое колесо *2* вращаются вокруг неподвижных осей. Коническое зубчатое колесо *3*, называемое сателлитом, передает вращение от колеса *1* к колесу *2*. Колесо *3* свободно посажено на ось OC, являющуюся частью изогнутого кривошипа AOC, который вращается вокруг неподвижной вертикальной оси. Сообщая разные угловые скорости кривошипу AOC и колесу *1*, можно получить любую необходимую угловую скорость колеса *2*. К кривошипу AOC приложен вращающий момент m_0, к валу колеса *1* — вращающий момент m_1

и к валу колеса *2* — момент полезного сопротивления m_2 (рис. *а*). Колеса *1*, *2* и *3* считать круглыми однородными дисками соответственно массы M_1, M_2 и M_3 и радиусов r_1, r_2 и r_3 (в рассматриваемой конструкции r_1 равно r_2).

Определить угловые ускорения кривошипа AOC и конических зубчатых колес *1* и *2*. Массой кривошипа AOC и силами сопротивления движению пренебречь.

Р е ш е н и е. Из условия задачи следует, что станочный дифференциал является системой с двумя степенями свободы.



К задаче 10.45.

В качестве независимых обобщенных координат выберем угол поворота φ_0 кривошипа AOC вокруг вертикальной оси AO и угол поворота φ_1 колеса *1* вокруг соответствующей неподвижной оси. Угол поворота ведомого колеса *2* обозначим через φ_2.

Уравнения Лагранжа в обобщенных координатах φ_0 и φ_1 имеют вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_0} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_0} = Q_{\varphi 0}, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = Q_{\varphi 1}. \tag{1}$$

Изобразим на рис. *а* активные силы и моменты: $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$, $\boldsymbol{P}_3$ — силы тяжести конических колес *1*, *2*, *3* и моменты m_0, m_1 и m_2. Реакции связей изображать не следует, так как все связи, наложенные на дифференциал, являются идеальными; $P_1 = M_1 g$, $P_2 = M_2 g$, $P_3 = M_3 g$.

Дадим дифференциалу независимые обобщенные возможные перемещения $\delta\varphi_0$ и $\delta\varphi_1$ в направлении возрастания углов φ_0 и φ_1. Для вычисления обобщенной силы $Q_{\varphi 0}$ сообщим дифференциалу возможное перемещение $\delta\varphi_0$, считая при этом $\delta\varphi_1$ равным нулю: $\delta\varphi_0 \neq 0$, $\delta\varphi_1 = 0$.

Это значит, что при неподвижном колесе *1* кривошип получил возможное угловое перемещение $\delta\varphi_0$ вокруг оси AO. При этом возможное перемещение точки C кривошипа равно $\delta r_C = OC\delta\varphi_0 = r_1\delta\varphi_0$. Так как точка C одновременно принадлежит колесу *3*, имеющему при $\delta\varphi_1 = 0$ неподвижную точку E, то нетрудно видеть (рис. *б*), что возможное перемещение точки D третьего колеса $\delta r_D = 2\delta r_C = 2r_1\delta\varphi_0$. Учитывая, что точка D одновременно принадлежит колесу *2*, выразим δr_D через $\delta\varphi_2$; тогда имеем: $\delta r_D = r_2\delta\varphi_2$. Следовательно, $r_2\delta\varphi_2 = 2r_1\delta\varphi_0$, откуда

$$\delta\varphi_2 = 2\delta\varphi_0 \tag{2}$$

(по условию $r_2 = r_1$).

Вычислим сумму работ активных сил на возможных перемещениях точек системы, соответствующих обобщенному возможному перемещению $\delta\varphi_0$. Имеем $\delta A = m_0\delta\varphi_0 - m_2\delta\varphi_2$.

Работа момента m_2 отрицательна, так как направления m_2 и $\delta\varphi_2$ противоположны. Учитывая формулу (2), получим

$$\delta A = (m_0 - 2m_2)\,\delta\varphi_0. \tag{3}$$

Работа момента m_1 равна нулю, так как колесо *1* неподвижно. Работа сил $\boldsymbol{P}_1$ и $\boldsymbol{P}_2$ равна нулю, ибо их точки приложения неподвижны. Работа силы $\boldsymbol{P}_3$ равна нулю, так как ее точка приложения перемещается в горизонтальной плоскости, а сила $\boldsymbol{P}_3$ вертикальна. Обобщенной силой $Q_{\varphi 0}$ является коэффициент, стоящий при $\delta\varphi_0$ в формуле (3), т. е.

$$Q_{\varphi 0} = m_0 - 2m_2. \tag{4}$$

Для вычисления обобщенной силы $Q_{\varphi 1}$ дадим обобщенное возможное перемещение $\delta\varphi_1$, считая при этом $\delta\varphi_0$ равным нулю: $\delta\varphi_1 \neq 0$, $\delta\varphi_0 = 0$. Это значит, что при неподвижном кривошипе AOC колесо *1* получило возможное перемещение $\delta\varphi_1$. При этом колесо *2* через посредство колеса *3* получим равное по величине возможное перемещение $\delta\varphi_2$, направленное в противоположную сторону: $\delta\varphi_2 = \delta\varphi_1$. Следовательно, направления m_2 и $\delta\varphi_2$ совпадают.

Вычислим сумму работ активных сил на обобщенном возможном перемещении $\delta\varphi_1$:

$$\delta A = m_1\delta\varphi_1 + m_2\delta\varphi_2 = (m_1 + m_2)\,\delta\varphi_1.$$

Учитывая, что $\delta A = Q_{\varphi 1}\delta\varphi_1$, находим

$$Q_{\varphi 1} = m_1 + m_2. \tag{5}$$

Переходим к вычислению кинетической энергии T станочного дифференциала, в состав которого входят три конических зубчатых

колеса *1*, *2* и *3* (массой кривошипа *AOC*, по условию, мы пренебрегаем):

$$T = T^{(1)} + T^{(2)} + T^{(3)}. \tag{6}$$

Кинетическая энергия колеса *1*, вращающегося вокруг неподвижной вертикальной оси, дается формулой

$$T^{(1)} = \frac{1}{2} I_1 \dot{\varphi}_1^2, \tag{7}$$

где I_1 — момент инерции колеса *1* относительно его оси вращения.

Кинетическая энергия колеса *2*, вращающегося вокруг неподвижной вертикальной оси, равна

$$T^{(2)} = \frac{1}{2} I_2 \dot{\varphi}_2^2, \tag{8}$$

где I_2 — момент инерции колеса *2* относительно его оси вращения.

Для вычисления кинетической энергии колеса *3* применяем формулу

$$T^{(3)} = \frac{1}{2} M_3 v_C^2 +$$

$$+ \frac{1}{2}(I_{3x}\omega_x^2 + I_{3y}\omega_y^2 + I_{3z}\omega_z^2 - 2I_{3yz}\omega_y\omega_z - 2I_{3zx}\omega_z\omega_x - 2I_{3xy}\omega_x\omega_y),$$

где v_C — скорость центра тяжести C колеса *3*, ω_x, ω_y, ω_z — проекции абсолютной угловой скорости ω_a колеса *3* на подвижные координатные оси x, y, z, с ним жестко связанные, I_{3x}, I_{3y}, I_{3z} — осевые моменты инерции, I_{3yz}, I_{3zx}, I_{3xy} — центробежные моменты инерции колеса *3* относительно соответствующих осей координат.

Выберем начало осей координат в центре тяжести C колеса *3*. Направим по вертикали ось z, по горизонтали направо вдоль оси относительного вращения колеса *3* направим ось y и, следовательно, перпендикулярно к плоскости рисунка ось x. Нетрудно видеть, что при подобном расположении осей координат они являются главными осями инерции колеса *3* (колесо *3*, подобно колесам *1* и *2*, мы считаем однородным круглым диском). Следовательно, $I_{3yz} = I_{3zx} = I_{3xy} = 0$, и формула для подсчета кинетической энергии $T^{(3)}$ колеса *3* упрощается:

$$T^{(3)} = \frac{1}{2} M_3 v_C^2 + \frac{1}{2}(I_{3x}\omega_x^2 + I_{3y}\omega_y^2 + I_{3z}\omega_z^2). \tag{9}$$

Для вычисления ω_x, ω_y и ω_z надо определить абсолютную угловую скорость ω_a колеса *3*. Колесо участвует в переносном вращательном движении с угловой скоростью $\omega_e = |\dot{\varphi}_0|$ вокруг вертикальной оси и в относительном вращательном движении с угловой скоростью ω_r вокруг оси симметрии колеса *3*.

Для определения ω_r представим себе наблюдателя, расположенного на кривошипе AOC. Этому наблюдателю кривошип кажется неподвижным. Следовательно, глазам наблюдателя представится относительная картина движений. Ему будет казаться, что колеса *1*, *2* и *3* вращаются вокруг неподвижных осей (рис. *в*). Запишем зависимости между относительными угловыми скоростями колес и их радиусами:

$$\frac{\omega_1^{(r)}}{\omega_3^{(r)}} = \frac{r_3}{r_1}, \quad \frac{\omega_3^{(r)}}{\omega_2^{(r)}} = -\frac{r_2}{r_3},$$

где $\omega_1^{(r)}$, $\omega_2^{(r)}$, $\omega_3^{(r)}$ обозначают угловые скорости колес *1*, *2* и *3* по отношению к кривошипу AOC, вращающемуся с угловой скоростью ω_0. Во второй пропорции стоит знак минус, который при совместном рассмотрении пропорций должен указывать на различные направления относительных угловых скоростей колес *1* и *2*. Действительно, перемножив пропорции, получим

$$\frac{\omega_1^{(r)}}{\omega_2^{(r)}} = -\frac{r_2}{r_1}.$$

Учитывая, что по условию $r_2 = r_1$, находим $\omega_2^{(r)} = -\omega_1^{(r)}$. Так как $\omega_2^{(r)} = \omega_2 - \omega_0$, а $\omega_1^{(r)} = \omega_1 - \omega_0$, то $\omega_2 = 2\omega_0 - \omega_1$, т. е.

$$\dot{\varphi}_2 = 2\dot{\varphi}_0 - \dot{\varphi}_1. \tag{10}$$

Из первой пропорции определим относительную угловую скорость $\omega_3^{(r)}$ колеса *3*:

$$\omega_3^{(r)} = \frac{r_1}{r_3}\omega_2^{(r)} = \frac{r_1}{r_3}(\omega_2 - \omega_0),$$

откуда

$$\omega_3^{(r)} = \frac{r_1}{r_3}(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_0). \tag{11}$$

Направление ω_r указано на рис. *в*.

Применим к колесу *3* теорему о сложении вращений твердого тела вокруг пересекающихся в точке *O* осей: $\omega_a = \omega_e + \omega_r$ (рис. *в*). Теперь нетрудно вычислить проекции абсолютной угловой скорости ω_a колеса *3* на оси *x*, *y*, *z*, с ним жестко связанные:

$$\omega_x = 0, \quad \omega_y = -\omega_3^{(r)}, \quad \omega_z = \omega^{(e)}.$$

Учитывая формулу (11) и замечая, что $\omega_e = \dot{\varphi}_0$, имеем

$$\omega_x = 0, \quad \omega_y = -\frac{r_1}{r_3}(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_0), \quad \omega_z = \dot{\varphi}_0.$$

Внося эти значения ω_x, ω_y, ω_z в формулу (9) и принимая во внимание, что $v_C = |OC|\,\omega_0 = r_1\dot{\varphi}_0$, получим

$$T^{(3)} = \frac{1}{2}M_3 r_1^2\dot{\varphi}_0^2 + \frac{1}{2}I_{3y}\frac{r_1^2}{r_3^2}(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_0)^2 + \frac{1}{2}I_{3z}\dot{\varphi}_0^2,$$

т. е.

$$T^{(3)} = \frac{1}{2}\left(I_{3z} + M_3 r_1^2 + I_{3y}\frac{r_1^2}{r_3^2}\right)\dot{\varphi}_0^2 + \frac{1}{2} I_{3y}\frac{r_1^2}{r_3^2}\dot{\varphi}_1^2 - I_{3y}\frac{r_1^2}{r_3^2}\dot{\varphi}_0\dot{\varphi}_1. \tag{12}$$

Кинетическая энергия станочного дифференциала (6) после подстановки значений $T^{(1)}$, $T^{(2)}$ и $T^{(3)}$ из формул (7), (8) и (12) при одновременном учете соотношения (10) принимает вид

$$T = \frac{1}{2}\left(4I_2 + I_{3z} + M_3 r_1^2 + I_{3y}\frac{r_1^2}{r_3^2}\right)\dot{\varphi}_0^2 + \frac{1}{2}\left(I_1 + I_2 + I_{3y}\frac{r_1^2}{r_3^2}\right)\dot{\varphi}_1^2 - \left(2I_2 + I_{3y}\frac{r_1^2}{r_3^2}\right)\dot{\varphi}_0\dot{\varphi}_1. \tag{13}$$

Для составления уравнений Лагранжа вычислим частные производные кинетической энергии T по обобщенным скоростям $\dot{\varphi}_0$ и $\dot{\varphi}_1$, а затем возьмем производные полученных результатов по времени. Находим:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_0} = \left(4I_2 + I_{3z} + M_3 r_1^2 + I_{3y}\frac{r_1^2}{r_3^2}\right)\ddot{\varphi}_0 - \left(2I_2 + I_{3y}\frac{r_1^2}{r_3^2}\right)\ddot{\varphi}_1, \tag{14}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} = \left(I_1 + I_2 + I_{3y}\frac{r_1^2}{r_3^2}\right)\ddot{\varphi}_1 - \left(2I_2 + I_{3y}\frac{r_1^2}{r_3^2}\right)\ddot{\varphi}. \tag{15}$$

Учитывая, что выражение кинетической энергии T станочного дифференциала не зависит от обобщенных координат φ_0 и φ_1, имеем:

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi_0} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = 0. \tag{16}$$

После подстановки формул (4), (5), (14), (15) и (16) в уравнения (1) получим уравнения Лагранжа для обобщенных координат φ_0 и φ_1:

$$\begin{gathered}\left(4I_2 + I_{3z} + M_3 r_1^2 + I_{3y}\frac{r_1^2}{r_3^2}\right)\ddot{\varphi}_0 - \left(2I_2 + I_{3y}\frac{r_1^2}{r_3^2}\right)\ddot{\varphi}_1 = m_0 - 2m_2, \\ \left(I_1 + I_2 + I_{3y}\frac{r_1^2}{r_3^2}\right)\ddot{\varphi}_1 - \left(2I_2 + I_{3y}\frac{r_1^2}{r_3^2}\right)\ddot{\varphi}_0 = m_1 + m_2.\end{gathered} \tag{17}$$

По условию задачи, колеса *1*, *2* и *3* считаются однородными круглыми дисками; поэтому

$$I_1 = \frac{M_1 r_1^2}{2}, \quad I_2 = \frac{M_2 r_2^2}{3}, \quad I_{3y} = \frac{M_3 r_3^2}{4}, \quad I_{3z} = \frac{M_3 r_3^2}{4}.$$

Теперь уравнения движения (17) дифференциала принимают вид

$$\begin{gathered}\frac{1}{4}\left[8M_2 r_1^2 + M_3\left(6r_1^2 + r_3^2\right)\right]\ddot{\varphi}_0 - \frac{2M_2 + M_3}{2} r_1^2 \ddot{\varphi}_1 = m_0 - 2m_2, \\ \frac{M_1 + M_2 + M_3}{2} r_1^2 \ddot{\varphi}_1 - \frac{2M_2 + M_3}{2} r_1^2 \ddot{\varphi}_0 = m_1 + m_2.\end{gathered} \tag{18}$$

Решив систему уравнений (18) относительно $\ddot{\varphi}_0$ и $\ddot{\varphi}_1$, определим искомые угловые ускорения кривошипа AOC и колеса *1*:

$$\ddot{\varphi}_0 = \frac{LN + MS}{KL - M^2}, \quad \ddot{\varphi}_1 = \frac{KS + MN}{KL - M^2};$$

здесь

$$K = \frac{1}{4}\left[8M_2r_1^2 + M_3\left(6r_1^2 + r_3^2\right)\right],$$

$$L = \frac{M_1 + M_2 + M_3}{2} r_1^2,$$

$$M = \frac{2M_2 + M_3}{2} r_1^2,$$

$$N = m_0 - 2m_2, \quad S = m_1 + m_2.$$

Воспользовавшись формулой (10), найдем

$$\ddot{\varphi}_2 = 2\ddot{\varphi}_0 - \ddot{\varphi}_1.$$

После подстановкив эту формулу выражений $\ddot{\varphi}_0$ и $\ddot{\varphi}_1$ получаем искомое угловое ускорение колеса *2*:

$$\ddot{\varphi}_2 = \frac{N(2L - M) + S(2M - K)}{KL - M^2},$$

где K, L, M, N и S имеют значения, указанные выше.

Решение этой задачи посредством использования общих теорем динамики представило бы значительные трудности. Применение уравнений Лагранжа дает возможность сравнительно просто получить уравнения движения дифференциала и вновь демонстрирует удобство применения уравнений Лагранжа при решении сложных задач динамики систем с несколькими степенями свободы.

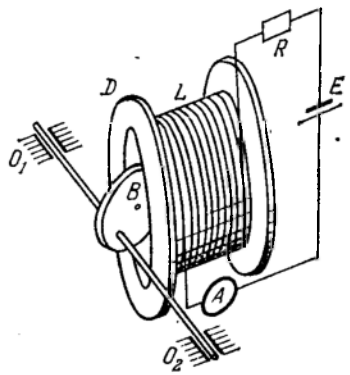
Указание. Рекомендуем решить следующие задачи из «Сборника задач по теоретической механике» И. В. Мещерского: 47.9, 47.11—47.15, 48.28—48.30, 48.31, 48.36, 48.39, 48.43.

3. Электромеханические аналогии. В 1873 г. английский ученый Максвелл (1831—1879) в «Трактате по электричеству и магнетизму» предложил применить уравнения Лагранжа к электрическим и электромеханическим системам. В основе электромеханической аналогии лежит соответствие тока и скорости движения. Использование электромеханической аналогии в уравнениях Лагранжа дает возможность описывать «движения» электромеханических систем, основанных на взаимодействиях между механическими движениями точек и твердых тел, а также электрическими и электромагнитными явлениями в электрических цепях.

Ниже дается таблица аналогичных механических и электрических параметров (существуют также другие системы электромеханических аналогий).

Механические величины	Электрические величины
t — время,	t — время,
q — обобщенная координата,	$q_{зар}$ — электрический заряд,
$\dot{q}$ — обобщенная скорость,	$\dot{q}_{зар} = i$ — ток,
m — масса, I — момент инерции,	L — индуктивность, M — взаимная индуктивность,
$T = \frac{1}{2} m\dot{q}^2$ или $T = \frac{1}{2} I\dot{q}^2$ — кинетическая энергия,	$T = \frac{1}{2} L\dot{q}_{зар}^2$ — электрокинетическая энергия,
c — коэффициент упругости,	$\frac{1}{C}$ — где C — емкость,
β — коэффициент сопротивления,	R — омическое сопротивление,
Q — обобщенная сила,	E — электродвижущая сила,
$\delta A = Q\,\delta q$ — элементарная работа	$\delta A = E\,\delta q_{зар}$—элементарная работа

Задача 10.46. На рисунке изображена схема электромагнитного механизма для регистрации крутильных колебаний *). Диск B эксцентрично насажен на вал O_1O_2, который концом O_1 крепится к торцу колеблющегося вала (вал на рисунке не изображен). Часть эксцентрика B входит в прорезь неподвижной катушки D.



К задаче 10.46.

Катушка D с индуктивностью L включена в электрическую цепь постоянного тока. Питание цепи осуществляется от источника тока с электродвижущей силой, равной E. Омическое сопротивление электрической цепи равно R. При крутильных колебаниях вала изменяется площадь эксцентрика B, заключенная в прорези катушки D. Это в свою очередь вызывает изменение индуктивности L катушки, т. е. $L = L(\varphi)$, где φ — угол поворота вала. При изменении индуктивности меняется величина тока i цепи, которая измеряется амперметром A. Амперметр градуирован в углах поворота φ вала и непосредственно определяет значения этих углов.

Момент инерции вала относительно его геометрической оси z равен I_z. Центр тяжести вала лежит на оси z. Момент сил упругости вала $m_{z\,упр} = -c\varphi$, где c — постоянный коэффициент упругости. Вал колеблется под действием возмущающего момента m.

Составить дифференциальные уравнения «движения» электромеханической системы, состоящей из вала и электромагнитного механизма. Весом и моментом инерции подвижных частей электромагнитного механизма и силами сопротивления вала пренебречь.

Р е ш е н и е. Электромеханическая система, состоящая из вала, совершающего крутильные колебания, и электромагнитного механизма, имеет две степени свободы. Выберем две обобщенные коорди-

*) Описание прибора взято из книги: А р у т ю н о в В. О. Электрические измерительные приборы и измерения. — М.: Госэнергоиздат, 1958.

наты. Одна из них — угол поворота φ вала — определяет положение точек механической части системы, т. е. $q_1 = \varphi$, а вторая обобщенная координата $q_2 = q_{зар}$ фиксирует состояние электрической цепи.

Этим обобщенным координатам соответствуют два уравнения Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{зар}} - \frac{\partial T}{\partial q_{зар}} = Q_{qзар}. \tag{i}$$

К механической системе приложены следующие активные силы и моменты: сила тяжести вала, опорные реакции вала, возмущающий момент m_z, а также момент сил упругости вала $m_{z\,упр} = -c\varphi$.

Электродвижущая сила E источника тока уменьшена благодаря наличию омического сопротивления. На основании закона Ома потеря напряжения в цепи равна $e = iR$. Поэтому электродвижущая сила E^* электрической цепи равна

$$E^* = E - iR, \tag{2}$$

где $i = dq_{зар}/dt$ — ток цепи.

Переходим к вычислению обобщенных сил Q_φ и $Q_{q\,зар}$.

Для определения обобщенной силы Q_φ дадим обобщенное возможное перемещение $\delta\varphi$ валу, считая при этом электрический заряд $q_{зар}$ неизменным, т. е. $\delta\varphi \neq 0$, $\delta q_{зар} = 0$. При этом сумма работ активных сил и моментов равна

$$\sum \delta A_k = (m_z + m_{z\,упр})\,\delta\varphi. \tag{3}$$

(Моменты относительно оси z силы тяжести вала и опорных реакций равны нулю, ибо линии действия этих сил пересекают ось z). По условию, момент сил упругости вала равен $m_{z\,упр} = -c\varphi$, поэтому формула (3) примет вид

$$\sum \delta A_k = (m_z - c\varphi)\,\delta\varphi. \tag{4}$$

Обобщенной силой Q_φ является коэффициент, стоящий при $\delta\varphi$ в выражении (4), т. е.

$$Q_\varphi = m_z - c\varphi. \tag{5}$$

При вычислении обобщенной силы $Q_{q\,зар}$ будем считать, что электрический заряд изменяется, а механическая часть системы остается неподвижной, т. е. $\delta q_{зар} \neq 0$, $\delta\varphi = 0$. Работа электродвижущей силы в электрической цепи равна

$$\delta A = E^* \delta q_{зар}. \tag{6}$$

Приняв во внимание формулу (2), запишем выражение (6) в виде

$$\delta A = (E - iR)\,\delta q_{зар}. \tag{7}$$

Обобщенной силой $Q_{q\,зар}$ является коэффициент, стоящий при $\delta q_{зар}$ в формуле (7), т. е.

$$Q_{q\,зар} = E - iR = E - \dot{q}_{зар} \cdot R. \tag{8}$$

Займемся вычислением кинетической энергии T данной электромеханической системы. Она равна сумме кинетической энергии T_1 механической части системы и электрокинетической энергии T_2 электрической цепи, т. е.

$$T = T_1 + T_2. \tag{9}$$

Вал совершает крутильные колебания вокруг оси z. Поэтому его кинетическая энергия равна

$$T_1 = \frac{1}{2} I_z \dot{\varphi}^2. \tag{10}$$

Электрокинетическая энергия равна

$$T_2 = \frac{1}{2} L(\varphi) \cdot \dot{q}_{\text{зар}}^2. \tag{11}$$

(Напоминаем, что индуктивность L катушки D зависит от угла поворота φ колеблющегося вала.)

Подставив значения (10) и (11) в формулу (9), имеем

$$T = \frac{1}{2} I_z \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} L(\varphi) \cdot \dot{q}_{\text{зар}}^2. \tag{12}$$

Для составления уравнений Лагранжа (1) вычислим частные производные кинетической энергии (12) по обобщенным скоростям $\dot{\varphi}$ и $\dot{q}_{\text{зар}}$:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = I_z \dot{\varphi}, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\text{зар}}} = L(\varphi) \dot{q}_{\text{зар}}. \tag{13}$$

Затем возьмем производные по времени функций (13):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = I_z \ddot{\varphi}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\text{зар}}} = L(\varphi) \ddot{q}_{\text{зар}} + \frac{dL(\varphi)}{d\varphi} \dot{\varphi} \dot{q}_{\text{зар}}. \tag{14}$$

Далее вычислим частные производные кинетической энергии (12) по обобщенным координатам:

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{1}{2} \frac{dL(\varphi)}{d\varphi} \dot{q}_{\text{зар}}^2, \quad \frac{\partial T}{\partial q_{\text{зар}}} = 0. \tag{15}$$

Подставив результаты (5), (8), (14) и (15) в уравнения Лагранжа (1), получим искомые дифференциальные уравнения «движения» электромеханической системы:

$$I_z \ddot{\varphi} - \frac{1}{2} \frac{dL(\varphi)}{d\varphi} \dot{q}_{\text{зар}}^2 = m_z - c\varphi, \quad L(\varphi) \ddot{q}_{\text{зар}} + \left[\frac{dL(\varphi)}{d\varphi} \dot{\varphi} + R \right] \dot{q}_{\text{зар}} = E. \tag{16}$$

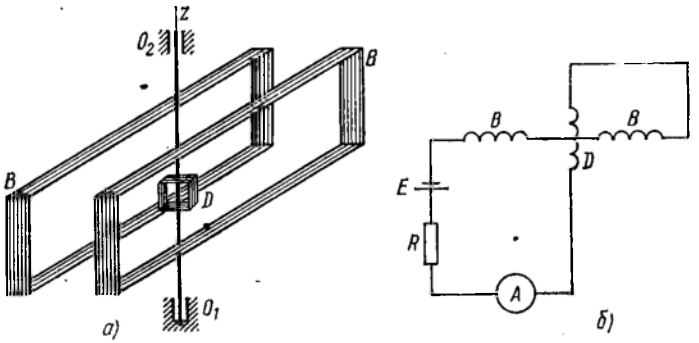
Внеся в первое из уравнений (16) значение возмущающего момента m_z (в условии зависимость момента m_z от времени не задана) и проинтегрировав систему дифференциальных уравнений (16), мы получим уравнения движения:

$$\varphi = f_1(t), \quad q_{\text{зар}} = f_2(t).$$

Взяв производную $q_{зар}$ по времени, найдем зависимость тока i от времени t, т. е. $i = \frac{dq_{зар}}{dt} = \Phi(t)$. Затем, исключив из системы уравнений $\varphi = f_1(t)$, $i = \Phi(t)$ время t, мы определим зависимость тока i от угла поворота φ вала, т. е. $i = F(\varphi)$.

Значения тока i измеряются амперметром A, который градуирован в зависимости от φ. Таким образом, показания амперметра непосредственно фиксируют углы поворота φ колеблющегося вала.

Задача 10.47. Вал совершает крутильные колебания под действием возмущающего момента m_z, где z — геометрическая ось



К задаче 10.47.

вала. Момент сил упругости вала относительно этой оси $m_{z\,упр} = -c\varphi$, где c — постоянный коэффициент упругости вала на кручение, а φ — угол поворота вала. Момент инерции вала относительно оси z равен I_z.

Для измерения крутильных колебаний вала применяется электродинамический датчик *) (см. рис. *а*). Датчик состоит из двух катушек: неподвижной B и подвижной D, насаженной на ось O_1O_2. Ось датчика крепится к торцу вала, совершающего крутильные колебания (вал на рисунке не изображен). Неподвижная катушка B конструктивно выполнена в виде двух половин, между которыми проходит ось O_1O_2 подвижной катушки D.

Обе катушки последовательно соединены и питаются от одного источника постоянного тока с электродвижущей силой E (электрическая схема изображена на рис. *б*).

При колебаниях вала и, следовательно, оси O_1O_2 датчика катушка D поворачивается по отношению к неподвижной катушке B. Это вызывает изменение взаимной индуктивности M катушек, которая зависит от угла поворота φ вала: $M = M(\varphi)$. С изменением взаимной индуктивности меняется ток в электрической цепи, изме-

*) Схема прибора взята из книги: Арутюнов В. О. Электрические измерительные приборы и измерения. — М.: Госэнергоиздат, 1958.

ряемый амперметром A. Амперметр, градуированный в единицах угла поворота, непосредственно измеряет крутильные колебания вала.

Индуктивности катушек B и D постоянны и соответственно равны L_B и L_D. Омическое сопротивление электрической цепи постоянно и равно R. Силой тяжести и моментом инерции подвижных частей датчика пренебречь.

Составить дифференциальные уравнения «движения» электромеханической системы, состоящей из колеблющегося вала и электродинамического датчика.

Р е ш е н и е. Данная электромеханическая система имеет две степени свободы, ибо надо задать один параметр для определения положения точек механической системы и второй — для электрической цепи. В качестве обобщенных координат выберем угол поворота вала $q_1 = \varphi$ и электрический заряд $q_2 = q_{\text{зар}}$.

Запишем соответствующие уравнения Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\text{зар}}} - \frac{\partial T}{\partial q_{\text{зар}}} = Q_{q_{\text{зар}}}. \tag{1}$$

К механической системе приложены активные силы и моменты: сила тяжести вала, опорные реакции вала, возмущающий момент m_z и момент силы упругости вала $m_{z\,\text{упр}} = -c\varphi$.

Электродвижущая сила E источника тока электрической цепи уменьшена за счет омического сопротивления на величину $u = iR$ (по закону Ома) и, следовательно, равна

$$E_1 = E - iR, \tag{2}$$

где ток $i = dq_{\text{зар}}/dt$.

Для вычисления обобщенной силы Q_φ дадим обобщенное возможное перемещение $\delta\varphi$ валу, а изменение электрического заряда будем считать равным нулю. Сумма работ активных сил и моментов на обобщенном возможном перемещении равна

$$\sum \delta A_k = (m_z + m_{z\,\text{упр}})\,\delta\varphi. \tag{3}$$

(Моменты силы тяжести вала и опорных реакций вала относительно оси z равны нулю.) Подставив в формулу (3) значение момента силы упругости $m_{z\,\text{упр}} = -c\varphi$, получим

$$\sum \delta A_k = (m_z - c\varphi)\,\delta\varphi. \tag{4}$$

Обобщенной силой Q_φ является коэффициент, стоящий при $\delta\varphi$ в выражении (4):

$$Q_\varphi = m_z - c\varphi. \tag{5}$$

Для определения обобщенной силы $Q_{q_{\text{зар}}}$ будем считать $\delta q_{\text{зар}} \neq 0$, а $\delta\varphi = 0$. При этом работа электродвижущей силы E_1 в электрической цепи равна

$$\delta A = E_1 \delta q_{\text{зар}}. \tag{6}$$

Использовав формулу (2), запишем работу (6) в виде

$$\delta A = (E - iR)\,\delta q_{\text{зар}}. \tag{7}$$

Обобщенной силой $Q_{q_{\text{зар}}}$ является коэффициент, стоящий при $\delta q_{\text{зар}}$ в выражении (7):

$$Q_{q\,\text{зар}} = E - iR. \tag{8}$$

Перейдем к вычислению кинетической энергии данной электромеханической системы:

$$T = T^{(1)} + T^{(2)}, \tag{9}$$

где $T^{(1)}$ — кинетическая энергия механической части системы, а $T^{(2)}$ — электрокинетическая энергия электрической цепи.

Кинетическая энергия вала, совершающего крутильные колебания вокруг оси z, равна

$$T^{(1)} = \frac{1}{2} I_z \dot{\varphi}^2. \tag{10}$$

Электрокинетическая энергия имеет вид

$$T^{(2)} = \frac{1}{2} [L_B + L_D + M(\varphi)]\, i^2, \tag{11}$$

где L_B и L_D — постоянные индуктивности катушек B и D, а $M = M(\varphi)$ — взаимная переменная индуктивность этих катушек.

Подставив результаты (10) и (11) в выражение (9), запишем кинетическую энергию электромеханической системы:

$$T = \frac{1}{2} I_z \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} [L_B + L_D + M(\varphi)]\, i^2. \tag{12}$$

Для составления уравнений Лагранжа (1) вычислим частные производные кинетической энергии (12) по обобщенным скоростям $\dot{\varphi}$ и i (напомним, что ток $i = dq_{\text{зар}}/dt$):

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = I_z \dot{\varphi}, \quad \frac{\partial T}{\partial i} = [L_B + L_D + M(\varphi)]\, i. \tag{13}$$

Затем возьмем производные функций (13) по времени:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = I_z \ddot{\varphi}, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial i} = [L_B + L_D + M(\varphi)]\, \frac{di}{dt} + \frac{dM(\varphi)}{d\varphi}\dot{\varphi} i. \tag{14}$$

Далее вычислим частные производные кинетической энергии (12) по обобщенным координатам φ и $q_{\text{зар}}$.

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{1}{2}\frac{dM}{d\varphi} i^2, \quad \frac{\partial T}{\partial q_{\text{зар}}} = 0. \tag{15}$$

Использовав результаты (5), (8), (14) и (15) в формулах (1), получим искомые уравнения Лагранжа

$$\begin{gathered} I_z\ddot{\varphi} - \frac{1}{2}\frac{dM}{d\varphi}\dot{q}^2 + c\varphi = m_z, \\ [L_B + L_D + M(\varphi)]\ddot{q}_{\text{зар}} + \left(\frac{dM}{d\varphi}\dot{\varphi} + R\right)\dot{q}_{\text{зар}} = E. \end{gathered} \tag{16}$$

Дифференциальные уравнения (16) описывают «движение» данной электромеханической системы. Заметим, что в каждое из этих уравнений входят как механические, так и электрические параметры системы.

Зная зависимость возмущающего момента m_z от времени, можно проинтегрировать систему дифференциальных уравнений (16) и получить уравнения «движения»

$$\varphi = f_1(t) \text{ и } i = \frac{dq_{\text{зар}}}{dt} = f_2(t).$$

Исключив из этих уравнений время, определим зависимость тока от угла поворота вала: $i = F(\varphi)$.

Значения тока измеряются амперметром A, который градуирован в единицах угла поворота φ и, значит, непосредственно фиксирует углы поворота вала, совершающего крутильные колебания.

Указание. Рекомендуем решить следующие задачи из «Сборника задач по теоретической механике» И. В. Мещерского: 48.52 — 48.58.

§ 7. Приближенная теория гироскопов

1. Гироскоп с тремя степенями свободы. *Гироскопом* называется симметричное твердое тело, угловая скорость ω вращения которого вокруг оси симметрии значительно превосходит по модулю угловую скорость ω_1 вращения самой оси симметрии:

$$\omega \gg \omega_1.$$

Так, в современных гироскопических приборах угловая скорость ω собственного вращения достигает иногда 40 000—50 000 об/мин, а угловая скорость ω_1 вращения оси гироскопа равна одному обороту за 2—3 мин и даже за 20 мин (для гирокомпасов). Рассмотрим сначала случай, когда гироскоп движется около неподвижной точки. Если выбрать начало координат в этой точке O и направить ось z по оси симметрии гироскопа, то оси x, y, z оказываются главными осями инерции гироскопа в неподвижной точке (рис. 10.21). Момент инерции I_z является полярным моментом инерции гироскопа, а I_x и I_y — экваториальными моментами инерции. В связи с наличием в твердом теле оси симметрии имеем $I_x = I_y$.

Пусть гироскоп вращается с угловой скоростью ω вокруг оси симметрии, которая в свою очередь вращается вокруг неподвижной

точки с угловой скоростью ω_1 (см. рис. 10.22). В соответствии с теоремой о сложении вращений твердого тела вокруг пересекающихся осей, абсолютная угловая скорость ω_a равна векторной сумме угловых скоростей переносного и относительного вращений:

$$\omega_a = \omega_e + \omega_r = \omega_1 + \omega.$$

Предположим для простоты, что $\omega_1 \perp \omega$. Направим ось z вдоль ω, а ось x — вдоль ω_1 (рис. 10.22). Разложим главный момент количеств движения $\boldsymbol{L}_O$ гироскопа на две составляющие $\boldsymbol{L}_z$ и $\boldsymbol{L}_x$. Модули этих составляющих равны: $L_z = I_z\omega$, $L_x = I_x\omega_1$. Угол θ между главным моментом количеств движения $\boldsymbol{L}_O$ и осью z симметрии гироскопа определится равенством $\operatorname{tg}\theta = I_x\omega_1/(I_z\omega)$.

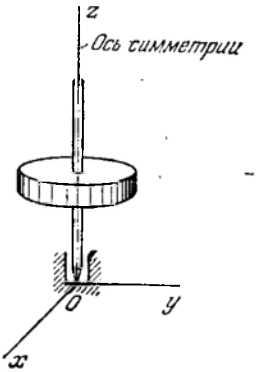


Рис. 10.21.

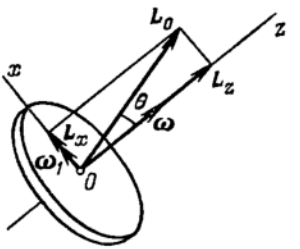


Рис. 10.22.

Так как $\omega_1 \ll \omega$, то угол θ очень мал, в современных приборах он составляет доли секунды, и с достаточной для практики точностью можно считать, что вектор $\boldsymbol{L}_O$ совпадает с осью гироскопа, т. е.

$$\boldsymbol{L}_O = \boldsymbol{L}_z = I_z\omega.$$

На этом опущении основана приближенная (элементарная) теория гироскопов.

При решении задач с помощью приближенной теории гироскопа удобно пользоваться теоремой об изменении главного момента количеств движения материальной системы в ее кинематической интерпретации — *теоремой Резаля* (рис. 10.23): скорость $\boldsymbol{u}$*) конца главного момента количеств движения материальной системы $\boldsymbol{L}_O$, определенного относительно неподвижной точки, векторно равна главному моменту внешних сил системы $\boldsymbol{m}_O^e$ относительно той же точки:

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{m}_O^e$$

(скорость $\boldsymbol{u}$ конца $\boldsymbol{L}_O$ направлена по касательной к годографу $\boldsymbol{L}_O$ в соответствующей точке).

*) Вектор $\boldsymbol{u}$ называется скоростью условно, так как размерности скорости не имеет.

Основное свойство гироскопа с тремя степенями свободы в случае, когда главный момент $\boldsymbol{m}_O^e$ внешних сил относительно неподвижной точки равен нулю, заключается в сохранении неизменного направления оси гироскопа по отношению к инерциальным осям (см. задачу 10.48).

Если же на гироскоп действуют внешние силы, главный момент которых относительно неподвижной точки O равен $\boldsymbol{m}_O^e$, то ось гироскопа перемещается (прецессирует) в пространстве. Угловая скорость прецессии ω_1 определяется с помощью теоремы Резаля по формуле

$$\omega_1 = \frac{m_O^e}{I_z \omega \sin \alpha}, \qquad (1^*)$$

где α — угол между осью гироскопа и вектором угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_1$ прецессии.

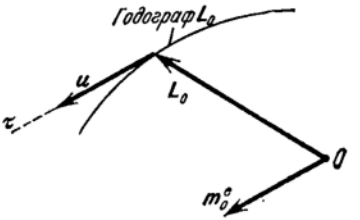


Рис. 10.23.

Равенство (1*) в совокупности с теоремой Резаля определяет закон прецессии оси гироскопа.

Указание. Задачи на определение движения оси гироскопа с помощью приближенной теории рекомендуется решать в такой последовательности:

1) проверить, имеет ли гироскоп или гироскопическая система три степени свободы;

2) выбрать систему координат;

3) изобразить на рисунке внешние силы, приложенные к гироскопу;

4) определить главный момент внешних сил $\boldsymbol{m}_O^e$ относительно неподвижной точки;

5) найти главный момент количеств движения гироскопа относительно неподвижной точки $\boldsymbol{L}_O$;

6) применив теорему Резаля $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{m}_O^e$, определить движение оси гироскопа.

Задача 10.48. На рисунке изображен гироскоп в карданном подвесе. Гироскоп A выполнен в виде уравновешенного массивного круглого цилиндра, вращающегося вокруг оси KL. Ось KL укреплена во внутреннем кольце B, вращающемся вокруг подвижной оси MN. Ось MN в свою очередь имеет опоры во внешнем кольце C, вращающемся вокруг неподвижной оси SQ. Ось SQ закреплена в стойке прибора. Оси KL, MN и SQ пересекаются в центре тяжести O гироскопа. Гироскопу A сообщена большая угловая скорость вокруг оси KL.

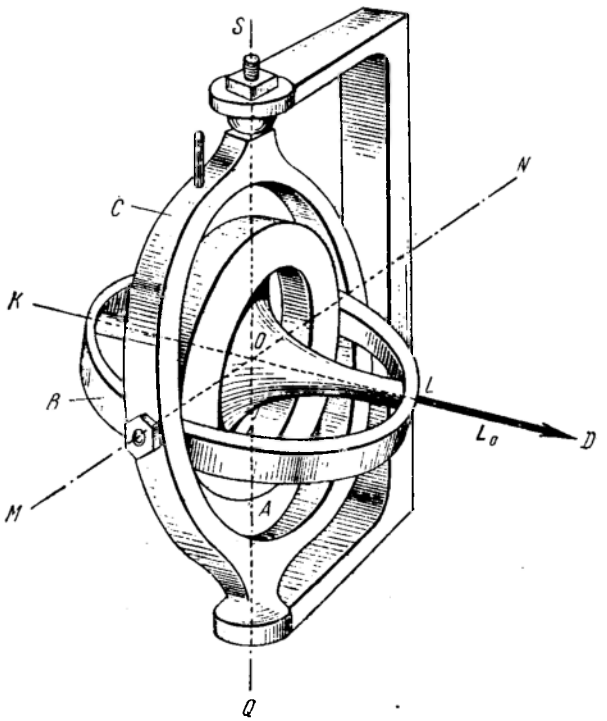
Определить изменение положения оси KL, пренебрегая трением в опорах осей KL, MN и SQ и массами колец B и C.

Решение. Гироскоп A в карданном подвесе имеет три степени свободы, так как его положение определяется тремя независи-

мыми углами поворота вокруг осей KL, MN и SQ, пересекающихся в центре тяжести O. Таким образом, гироскоп вращается вокруг неподвижной точки O, совмещенной с центром тяжести. При этих условиях главный момент внешних сил относительно центра тяжести O гироскопа равен нулю:

$$\boldsymbol{m}_O^e = 0. \tag{1}$$

Главный момент количеств движения гироскопа $\boldsymbol{L}_O$ приближенно направлен вдоль оси KL. Конец вектора $\boldsymbol{L}_O$ обозначим D.



К задаче 10.48.

Применив теорему Резаля $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{m}_O^e$, в соответствии с формулой (1), находим $\boldsymbol{u} = 0$, т. е. скорость точки D равна нулю. Значит, при вращении гироскопа ось KL сохраняет неизменное направление в пространстве. Этим свойством можно пользоваться для доказательства вращения Земли (опыт Фуко). Действительно, наблюдатель, находящийся на Земле, меняет свою ориентировку по отношению к звездам за счет вращения Земли. При этом ему кажется, что меняется направление оси KL, которая неизменно направлена на отдаленную звезду.

Задача 10.49. Использовать условие и решение предыдущей задачи. Дополнительно считать, что к внутреннему кольцу B (см. рис. к задаче 10.48) слева от внешнего кольца C в точке, лежащей на оси KL, приложена вертикальная сила F, направленная сверху вниз. Определить происходящее при этом изменение положения оси KL гироскопа.

Р е ш е н и е. В предыдущей задаче главный момент внешних сил относительно точки O был равен нулю. Теперь при наличии добавочной силы F главный момент m_O^e равен моменту силы F относительно точки O, т. е. $m_O^e = m_O(F)$.

Напомним, что момент силы относительно точки направлен перпендикулярно плоскости, содержащей силу и точку (в данном случае перпендикулярно вертикальной плоскости, проходящей через ось KL) так, что с конца его к началу (в данном случае от N к M) видно, будто сила стремится повернуть тело против хода часовой стрелки. Итак момент $m_O(F) = m_O^e$ направлен вдоль оси NM от N к M.

Применив теорему Резаля $u = m_O^e$, выясним, что скорость u точки D конца вектора L_O направлена параллельно оси NM от N к M. При этом ось гироскопа KL вместе с внешним кольцом C начнет поворачиваться вокруг вертикальной оси SQ так, что сверху вниз этот поворот будет виден против хода часовой стрелки.

В данном случае гироскопический эффект проявился в том, что положение внутреннего кольца B, несмотря на действие на него силы F, остается неизменным, но зато начинает поворачиваться внешнее кольцо C. При этом ось KL гироскопа движется в горизонтальной плоскости.

Задача 10.50. Использовать условие и решение задачи 10.48. Дополнительно предположить, что к внешнему кольцу C (см. рис. к задаче 10.48) в точке, совмещенной с изображением гайки, расположенной на оси MN, приложена горизонтальная сила F, направленная слева направо.

Определить происходящее при этом изменение положения оси KL гироскопа.

Р е ш е н и е. В задаче 10.48 главный момент внешних сил относительно точки O был равен нулю. Теперь при наличии добавочной силы F главный момент m_O^e равен моменту силы F относительно точки O, т. е. $m_O^e = m_O(F)$.

Момент силы F относительно точки подвеса O направлен перпендикулярно горизонтальной плоскости, содержащей силу F и точку O, т. е. плоскости осей KL и NM, по вертикали вверх. Действительно, сверху (т. е. от S к Q) видно, что сила F стремится повернуть внешнее кольцо против хода часовой стрелки.

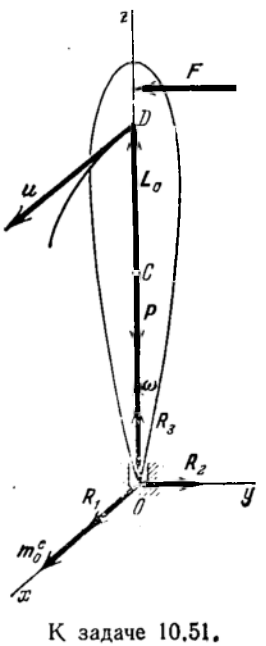
Применив теорему Резаля $u = m_O^e$, выясним, что скорость u конца D вектора L_O параллельна найденному моменту, т. е. также

направлена по вертикали вверх. При наличии этой скорости точки D, лежащей на оси KL гироскопа, эта ось вместе с внутренним кольцом B начнет поворачиваться вокруг горизонтальной оси NM так, что от M к N этот поворот виден против хода часовой стрелки.

В данном случае гироскопический эффект проявляется в том, что положение внешнего кольца C, несмотря на действие на него силы F, остается неизменным, но зато начинает поворачиваться внутреннее кольцо B. При этом ось KL гироскопа движется в вертикальной плоскости.

Это свойство гироскопа в кардановом подвесе было использовано в приборе Обри, предназначенном для сохранения неизменного курса торпеды в заданной вертикальной плоскости. Как было выше указано, положение внешнего кольца C остается фиксированным в пространстве. При изменении намеченного курса торпеды ее корпус поворачивается относительно внешнего кольца. При этом стержень, установленный на внешнем кольце (см. рис. к задаче 10.48), приходит в соприкосновение с регулирующим устройством, укрепленным на внутренней поверхности корпуса торпеды. Это устройство связано с рулевым управлением, которое выправляет курс движущейся торпеды.

Задача 10.51. Гироскоп совершает быстрое вращение вокруг своей вертикально направленной оси симметрии, имея неподвижную точку O.



К задаче 10.51.

Выяснить направление движения оси гироскопа, если к ней приложена горизонтальная сила F.

Р е ш е н и е. Если бы гироскоп не участвовал в быстром собственном вращении, то верхнее вертикальное положение было бы неустойчивым и под действием силы F гироскоп упал бы.

Быстрое вращение делает его устойчивым и его ось будет перемещаться в направлении, перпендикулярном к силе F. Действительно, данный гироскоп имеет три степени свободы. Его положение определяется тремя углами Эйлера.

Начало осей координат расположим в неподвижной точке O, ось z направим по оси симметрии гироскопа, плоскость yz совмещаем с плоскостью рисунка.

К гироскопу приложены внешние силы: $\boldsymbol{P}$ — сила тяжести гироскопа, $\boldsymbol{R}_1$, $\boldsymbol{R}_2$, $\boldsymbol{R}_3$ — составляющие опорной реакции, $\boldsymbol{F}$ — параллельная оси y горизонтальная сила, действующая на ось гироскопа.

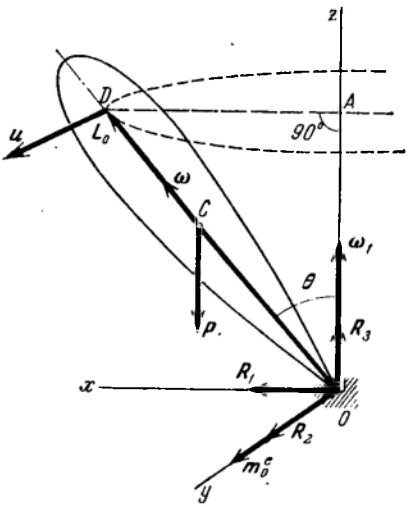
Определим главный момент внешних сил относительно точки O. Так как моменты сил $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{R}_1$, $\boldsymbol{R}_2$ и $\boldsymbol{R}_3$ относительно неподвижной точки O равны нулю, то главный момент внешних сил относительно этой точки векторно

равен только моменту силы F, направленному вдоль оси x (напомним, что момент силы относительно точки направляется перпендикулярно к плоскости, проходящей через силу и точку так, что с его конца видно, что сила стремится повернуть тело вокруг точки против хода часовой стрелки.

Главный момент количеств движения гироскопа $\boldsymbol{L}_O$ относительно точки O приближенно направлен по оси симметрии в сторону вектора угловой скорости вращения. Конец вектора $\boldsymbol{L}_O$ обозначим буквой D.

Применив теорему Резаля $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{m}_O^e$, направляем скорость $\boldsymbol{u}$ точки D параллельно $\boldsymbol{m}_O^e$. Следовательно, ось симметрии гироскопа будет отклоняться в плоскости xz, т. е. в плоскости, перпендикулярной к направлению силы F.

Задача 10.52. Определить движение тяжелого гироскопа массы M, ось которого составляет угол θ с вертикалью, если: ω — угловая скорость его вращения вокруг оси симметрии, I — момент инерции гироскопа относительно оси симметрии, a — расстояние от центра тяжести C до точки опоры O. Оси x, y, z изображены на рисунке.



К задаче 10.52.

Р е ш е н и е. Если бы отсутствовало собственное вращение, то гироскоп под действием силы тяжести упал бы. Быстрое вращение создает гироскопу устойчивость и он начинает прецессировать.

К гироскопу приложены внешние силы: $\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{g}$ — сила тяжести гироскопа, $\boldsymbol{R}_1$, $\boldsymbol{R}_2$, $\boldsymbol{R}_3$ — составляющие опорной реакции.

Так как моменты сил $\boldsymbol{R}_1$, $\boldsymbol{R}_2$ и $\boldsymbol{R}_3$ относительно неподвижной точки равны нулю, то главный момент внешних сил $\boldsymbol{m}_O^e$ векторно равен моменту силы $\boldsymbol{P}$ относительно точки опоры O.

Обозначив через θ угол между осью симметрии гироскопа и осью z, находим

$$|\boldsymbol{m}_O^e| = Mga \sin\theta, \tag{1}$$

причем вектор $\boldsymbol{m}_O^e$ направлен по оси y.

Главный момент количеств движения $\boldsymbol{L}_O$ гироскопа относительно точки O направлен по оси симметрии в сторону вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ и равен по модулю

$$|\boldsymbol{L}_O| = I\omega. \tag{2}$$

Обозначим через D конец вектора $\boldsymbol{L}_O$. Согласно теореме Резаля $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{m}_O^e$; поэтому $\boldsymbol{u}$ — скорость точки D — направлена перпендикулярно к оси симметрии (параллельно оси y), причем, как это следует из формулы (1),

$$u = Mga \sin \theta. \tag{3}$$

Сила тяжести $\boldsymbol{P}$ в любом положении гироскопа создает момент $\boldsymbol{m}_O^e$ относительно точки O. Следовательно, точка D имеет постоянную по модулю скорость $\boldsymbol{u}$, направленную перпендикулярно к вертикальной плоскости, содержащей ось симметрии гироскопа. При этом ось гироскопа описывает боковую поверхность кругового конуса, поворачиваясь вокруг вертикальной оси с некоторой угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_1$. Это движение называется *регулярной прецессией* оси гироскопа.

Вычислим угловую скорость ω_1 регулярной прецессии:

$$u = AD \cdot \omega_1.$$

Из треугольника OAD имеем $AD = OD \sin \theta = L_O \sin \theta$. Подставив значение $|\boldsymbol{L}_O|$ из формулы (2), получим

$$u = I\omega\omega_1 \sin \theta. \tag{4}$$

Внося выражение u из формулы (4) в (3), находим угловую скорость регулярной прецессии оси гироскопа:

$$\omega_1 = \frac{Mga}{I\omega}. \tag{5}$$

Чем меньше угловая скорость ω вращения гироскопа вокруг его оси симметрии, тем больше угловая скорость прецессии ω_1 (от значения угла θ угловая скорость прецессии не зависит).

Скорость $\boldsymbol{u}$ можно записать в виде векторного произведения двух векторов, воспользовавшись формулой $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$. В данном случае радиусом-вектором $\boldsymbol{r}$ служит главный момент количеств движения гироскопа $\boldsymbol{L}_O$ относительно неподвижной точки O, а вектором угловой скорости является вектор угловой скорости прецессии $\boldsymbol{\omega}_1$. Следовательно,

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{L}_O.$$

Так как $L_O = I\omega$, то $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\omega}_1 \times I\boldsymbol{\omega}$. По теореме Резаля имеем $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{m}_O^e$. Поэтому главный момент внешних сил $\boldsymbol{m}_O^e$ относительно неподвижной точки O запишется в виде

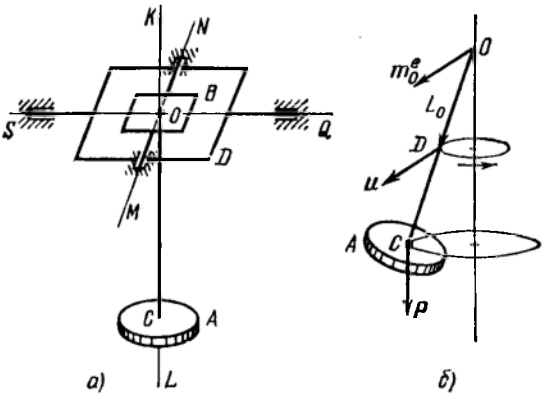
$$\boldsymbol{m}_O^e = I\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}.$$

Задача 10.53. На рис. *а* изображен гироскопический маятник — прибор для фиксирования отвесного направления в движущемся объекте, например корабле, самолете, ракете и т. д. В основе прибора лежит гироскоп A, прикрепленный с помощью проволоки CO к внутренней рамке B подвеса и быстро вращающийся вокруг оси симметрии KL. Рамка B может поворачиваться вокруг оси MN.

Опоры M и N связаны с внешней рамкой D. Рамка D может в свою очередь поворачиваться вокруг оси SQ. Опоры S и Q связаны с внутренней поверхностью движущегося объекта. Таким образом, гироскоп A, одновременно участвуя в трех вращениях вокруг осей KL, MN и SQ, пересекающихся в неподвижной точке O, имеет три степени свободы. Центр тяжести гироскопа находится в точке C. Массой проволоки OC пренебречь.

Определить положение отвесного направления в движущемся объекте.

Р е ш е н и е. Предварительно заметим, что определение отвесного направления в покоящемся объекте не составляет труда. Для



К задаче 10.53.

этого достаточно прикрепить к потолку конец нити, на другом конце которой находится груз. Положение нити фиксирует отвесное направление.

Значительно труднее это сделать, если верхний конец нити прикреплен к потолку движущегося объекта O кабины корабля, самолета и т. д. В этом случае отвесное направление нити не является достаточно устойчивым. В связи с этим вместо груза, используют гироскоп.

На рис. *б* изображен гироскопический маятник, выведенный толчком из отвесного положения.

В соответствии с направлением вращения гироскопа, указанного дуговой стрелкой, приближенно изобразим главный момент количеств движения $\boldsymbol{L}_O$ относительно точки O вдоль OC от O к C (с конца вектора $\boldsymbol{L}_O$ к его началу, т. е. от D к O, вращение должно быть видно против хода часовой стрелки).

К гироскопическому маятнику приложены внешние силы: $\boldsymbol{P}$ — его сила тяжести и $\boldsymbol{R}_O$ — реакция в неподвижной точке O, не изображенная на рис. *б*. Так как момент $\boldsymbol{R}_O$ относительно точки O равен нулю, то главный момент внешних сил $\boldsymbol{m}_O^e$ равен моменту силы

тяжести $\boldsymbol{P}$ относительно точки O, т. е. $\boldsymbol{m}_O^e = \boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{P})$. Он направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через силу $\boldsymbol{P}$ и точку O так, что с конца его к началу видно, будто сила $\boldsymbol{P}$ стремится повернуть гироскоп вокруг точки O против хода часовой стрелки (см. рис. *б*).

В соответствии с теоремой Резаля, $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{m}_O^e$, построим в конце D вектора $\boldsymbol{L}_O$ скорость $\boldsymbol{u}$ точки D, векторно равную $\boldsymbol{m}_O^e$. При данном угле отклонения проволоки от вертикали сила тяжести $\boldsymbol{P}$ при любом положении гироскопа создает постоянный по модулю момент $\boldsymbol{m}_O^e$. Поэтому и скорость $\boldsymbol{u}$ точки D постоянна по величине. При этом ось гироскопа, совмещенная с проволокой OC, будет описывать боковую поверхность кругового конуса (см. рис. *б*), т. е. будет совершать прецессионное движение вокруг вертикальной оси. Ось симметрии упомянутого кругового конуса фиксирует положение отвесного направления.

Предоставляем читателю численно применить теорему Резаля, т. е. вычислить, приравнять модули векторов $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{m}_O^e$, как это было выполнено в ходе решения задачи 10.52, и получить формулу (5) задачи 10.52:

$$\omega_1 = \frac{Pa}{I\omega},$$

где ω_1 — угловая скорость регулярной прецессии оси гироскопа, P — его сила тяжести, I — его момент инерции относительно оси KL, ω — угловая скорость собственного вращения гироскопа, $a = OC$. Как следует из этой формулы, чем больше угловая скорость ω вращения гироскопа, тем меньше угловая скорость ω_1 прецессии его оси. При больших значениях ω отвесное положение является достаточно устойчивым.

Указание. Рекомендуем решить следующие задачи из «Сборника задач по теоретической механике» И. В. Мещерского: 40.1, 40.2.

2. **Гироскопический момент.** При изменении направления оси симметрии гироскопа возникает гироскопический момент, создающий гироскопические (динамические) давления на опоры. Гироскопический момент определяется равенством

$$\boldsymbol{m}_O^{\text{гир}} = I_z\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}_1, \qquad (2^*)$$

где I_z — момент инерции гироскопа относительно его оси симметрии; $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость собственного вращения, $\boldsymbol{\omega}_1$ — угловая скорость прецессии оси гироскопа. По модулю гироскопический момент равен

$$m_O^{\text{гир}} = I_z\omega\omega_1 \sin\alpha, \qquad (3^*)$$

где α — угол между векторами $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\omega}_1$.

Гироскопический момент $\boldsymbol{m}_O^{\text{гир}}$ стремится совместить ось гироскопа (вектор $\boldsymbol{\omega}$) с осью прецессии (вектор $\boldsymbol{\omega}_1$) посредством поворота $\boldsymbol{\omega}$ к $\boldsymbol{\omega}_1$ (см. рисунок 10.24).

Если расстояние между опорами равно h, то модули гироскопических давлений $N^{\text{гир}}$ на опоры можно определить по формуле

$$N^{\text{гир}} = \frac{m_O^{\text{гир}}}{h} = \frac{I_z \omega \omega_1 \sin\alpha}{h}. \qquad (4^*)$$

Главный момент внешних сил $\boldsymbol{m}_O^e$ относительно неподвижной точки O определяется формулой

$$\boldsymbol{m}_O^e = -\boldsymbol{m}_O^{\text{гир}} = \boldsymbol{\omega}_1 \times I_z\boldsymbol{\omega}. \qquad (5^*)$$

Модули главного момента внешних сил и гироскопического момента равны. Они вычисляются по формуле (3*).

Главный момент внешних сил $\boldsymbol{m}_O^e$ создает гироскопические (динамические) реакции опор $\boldsymbol{R}^{\text{гир}}$, причем

$$\boldsymbol{R}^{\text{гир}} = -\boldsymbol{N}^{\text{гир}}, \qquad (6^*)$$

поэтому по модулю

$$R^{\text{гир}} = \frac{I_z \omega \omega_1 \sin\alpha}{h}. \qquad (7^*)$$

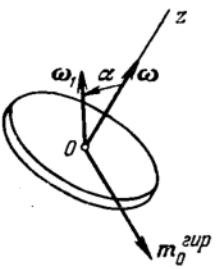


Рис. 10.24.

Указание. Задачи на определение гироскопических давлений (гироскопических реакций опор) рекомендуется решать в такой последовательности:

1) изобразить на рисунке вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ собственного вращения гироскопа и главный момент количеств движения $\boldsymbol{L}_O = I_z\boldsymbol{\omega}$;

2) определить и изобразить на рисунке вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_1$ прецессии оси гироскопа;

3) найти гироскопический момент $\boldsymbol{m}_O^{\text{гир}}$ (главный момент внешних сил $\boldsymbol{m}_O^e$) по формуле (2*) (по формуле (5*));

4) определить направления и модули гироскопических давлений на опоры (гироскопических реакций опор) по формуле (4*) (по формуле (7*)).

Задача 10.54. Ротор электродвигателя корабельной компрессорной установки имеет горизонтальную ось вращения AB. Ось AB расположена перпендикулярно к продольной оси корабля O_1O_2. Оси AB и O_1O_2 пересекаются в центре тяжести O ротора. Момент инерции ротора относительно оси AB равен I, ω — угловая скорость вращения ротора.

Определить наибольшее значение динамических давлений на опоры A и B при установившейся бортовой качке корабля, происходящей вокруг оси O_1O_2 по гармоническому закону $\varphi_1 = \varphi_0 \sin\frac{2\pi}{T}t$ с угловой амплитудой φ_0. Расстояние между опорами $AB = h$.

Р е ш е н и е. При бортовой качке корабля ось AB ротора двигателя изменяет свое направление. Следовательно, имеют место гироскопические явления. Ротор двигателя является гироскопом с осью симметрии AB. Изобразим вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ вдоль оси AB и главный момент количеств движения $\boldsymbol{L}_O = I\boldsymbol{\omega}$.

При бортовой качке, происходящей в данный момент в направлении, указанном на рисунке дуговой стрелкой, вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_1$ направлен вдоль оси O_1O_2 от O_1 к O_2.

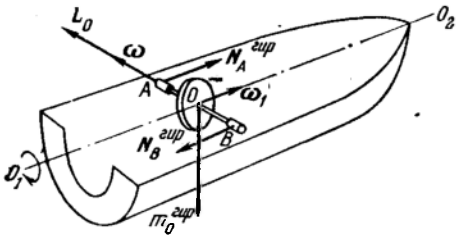
Для определения угловой скорости ω_1 бортовой качки корабля вокруг оси O_1O_2 воспользуемся соответствующим уравнением движения $\varphi_1 = \varphi_0 \sin \frac{2\pi}{T} t$. Тогда

$$\omega_1 = \frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{2\pi\varphi_0}{T} \cos \frac{2\pi}{T} t$$

и

$$\omega_{1\,\max} = \frac{2\pi\varphi_0}{T}. \qquad (1)$$

Угловая скорость $\boldsymbol{\omega}_1$ бортовой качки корабля одновременно является угловой скоростью прецессии оси AB ротора — гироскопа.



К задаче 10.54.

Поэтому возникает гироскопический момент $\boldsymbol{m}_O^{гир}$, для определения направления которого воспользуемся формулой (2*):

$$\boldsymbol{m}_O^{гир} = I\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}_1.$$

Напомним, что векторное произведение $(\boldsymbol{m}_O^{гир})$ направлено перпендикулярно к плоскости векторов сомножителей ($I\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\omega}_1$) так, что с конца его $(\boldsymbol{m}_O^{гир})$ к началу поворот первого вектора ($I\boldsymbol{\omega}$) ко второму ($\boldsymbol{\omega}_1$) виден против часовой стрелки на угол, меньший π. В данном случае гироскопический момент $\boldsymbol{m}_O^{гир}$ направлен по вертикали вниз.

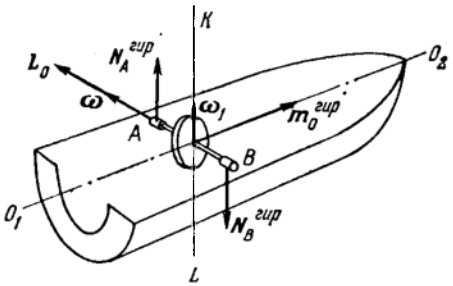
Гироскопический момент создает гироскопические давления $N_A^{гир}$ и $N_B^{гир}$ на опоры A и B. Эти давления лежат в плоскости, перпендикулярной к $\boldsymbol{m}_O^{гир}$, и направлены так, что с конца $\boldsymbol{m}_O^{гир}$ к началу вращение пары этих давлений видно против часовой стрелки (см. рисунок к задаче). Так как через половину периода поворот корабля будет происходить в противоположном направлении, то гироскопические давления $N_A^{гир}$ и $N_B^{гир}$ получат противоположные направления. Таким образом, при бортовой качке корабля, за счет изменения направления оси AB ротора двигателя, появляются гироскопические (динамические) давления на опоры, переменные по ве-

личине и направлению. Наибольшие значения модулей этих сил, соответствующие горизонтальному положению оси AB, можно вычислить по формуле (4*). Приняв во внимание выражение (1) и взаимную перпендикулярность векторов ω и ω_1, при которой $\alpha = \pi/2$, получим

$$N_A^{гир} = N_B^{гир} = \frac{I\omega\omega_1}{h} = \frac{2\pi\varphi_0 I\omega}{Th}.$$

В моменты перемены направления вращения корабля вокруг оси O_1O_2, т. е. при $\omega_1 = 0$, эти давления обращаются в нуль.

Задача 10.55. Определить гироскопические давления на опоры A и B оси ротора электродвигателя, рассмотренного в задаче 10.54, если при отсутствии бортовой качки корабль совершает циркуляцию вокруг вертикальной оси KL с угловой скоростью ω_1.



К задаче 10.55.

Р е ш е н и е. Изобразим векторы ω и $\boldsymbol{L}_0 = I\boldsymbol{\omega}$ так, как это было сделано в предыдущей задаче, т. е. вдоль оси AB от B к A.

Угловая скорость ω_1 циркуляции корабля является угловой скоростью прецессии оси AB ротора — гироскопа. При этом прецессионном движении возникает гироскопический момент

$$\boldsymbol{m}_O^{гир} = I\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}_1. \qquad (1)$$

В данном случае гироскопический момент $\boldsymbol{m}_O^{гир}$ направлен вдоль оси O_1O_2 от O_1 к O_2. Этот момент создает гироскопические давления $\boldsymbol{N}_A^{гир}$, $\boldsymbol{N}_B^{гир}$ на опоры A и B. Давления $\boldsymbol{N}_A^{гир}$ и $\boldsymbol{N}_B^{гир}$ лежат в вертикальной плоскости и образуют пару сил. С конца вектора $\boldsymbol{m}_O^{гир}$ пара давлений видна направленной против хода часовой стрелки (см. рисунок), значит, $\boldsymbol{m}_O^{гир} = N^{гир} \cdot h$, откуда

$$N_A^{гир} = N_B^{гир} = \frac{m_O^{гир}}{h}. \qquad (2)$$

При взаимной перпендикулярности векторов ω и ω_1 модуль векторного произведения (1) равен

$$m_O^{гир} = I\omega\omega_1. \qquad (3)$$

Внеся значение (3) в формулу (2), окончательно получим

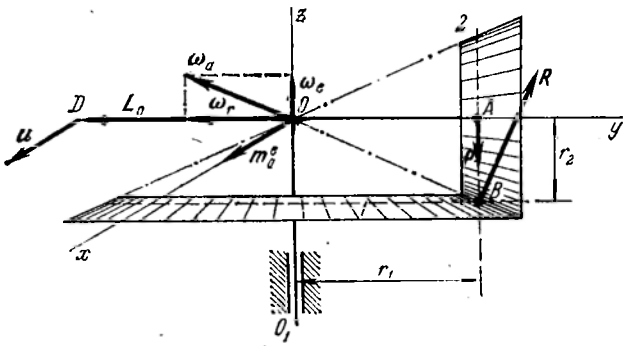
$$N_A^{гир} = N_B^{гир} = \frac{I\omega\omega_1}{h}.$$

Этот результат можно было непосредственно получить из формулы (4*) при $\alpha = \pi/2$.

Задача 10.56. Коническое зубчатое колесо *2* радиуса $r_2 = 20$ см свободно насажено на стержень OA, жестко соединенный в точке O с вертикальным валом OO_1. При вращении вала OO_1 с угловой скоростью $\omega = 4\pi$ рад/с коническое колесо *2* катится по неподвижной конической шестерне *1* радиуса $r_1 = 1{,}2$ м.

Определить отношение динамической реакции шестерни *1* к ее статической реакции, если радиус инерции колеса *2* равен $\rho = 18$ см. Массой стержня OA пренебречь.

Р е ш е н и е. Зубчатое колесо *2*, участвуя во вращении вокруг двух пересекающихся осей OA и OO_1, совершает вращение вокруг



К задаче 10.56.

неподвижной точки O. Направление осей координат xyz указано на рисунке.

К колесу *2* приложены внешние силы: $\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{g}$ (где M — масса колеса), $\boldsymbol{R}_1$, $\boldsymbol{R}_2$, $\boldsymbol{R}_3$ — составляющие реакции шарнира O (эти силы не показаны на рисунке) и нормальная реакция $\boldsymbol{R}$, направленная перпендикулярно к OB.

Определим статическую опорную реакцию $\boldsymbol{R}_{ст}$. С этой целью рассмотрим равновесие шестерни *2* и составим уравнение моментов относительно точки O:

$$R_{ст} \cdot OB - P \cdot OA = 0,$$

откуда находим

$$R_{ст} = Mg\frac{OA}{OB} = Mg\frac{r_1}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}. \qquad (1)$$

Гироскопическая опорная реакция $\boldsymbol{R}$ появляется при изменении направления оси OA колеса *2*.

Предварительно определим угловую скорость вращения колеса *2* вокруг оси OA. Колесо *2* совершает переносное вращение вокруг вертикальной оси с заданной угловой скоростью $\omega_e = \omega = 4\pi$ рад/с. Ось симметрии OA колеса *2* является осью относительного вращения. Мгновенная ось проходит через точки O и B. Применив теорему о

сложении вращений твердого тела вокруг пересекающихся осей: $\omega_a = \omega_e + \omega_r$, строим параллелограмм угловых скоростей, который в данном случае оказывается прямоугольником. Из пропорции $\frac{\omega_r}{\omega_e} = \frac{r_1}{r_2}$ определим $\omega_r = \frac{r_1}{r_2}\omega_e$.

Пользуясь при решении задачи приближенной теорией гироскопов, направляем главный момент количеств движения $\boldsymbol{L}_O$ колеса 2 относительно неподвижной точки O в сторону ω_r, т. е. по оси симметрии OA колеса 2 налево. Конец вектора $\boldsymbol{L}_O$ обозначим буквой D. При качении колеса 2 по колесу 1 точка D описывает окружность радиуса L_O с угловой скоростью ω_e, т. е. $u = L_O\omega_e$. Так как $L_O = I\omega_r$, где $I = M\rho^2$ и $\omega_r = \frac{r_1}{r_2}\omega_e$, то

$$u = M\rho^2\frac{r_1}{r_2}\omega_e^2. \qquad (2)$$

Скорость $\boldsymbol{u}$ точки D направлена параллельно оси x.

В соответствии с теоремой Резаля $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{m}_O^e$, изображаем момент $\boldsymbol{m}_O^e$ на оси x. Приняв во внимание формулу (2), запишем

$$m_O^e = M\rho^2\frac{r_1}{r_2}\omega_e^2. \qquad (3)$$

Гироскопическая опорная реакция $\boldsymbol{R}^{\text{гир}}$ колеса 1, моментом которой относительно неподвижной точки O является вектор $\boldsymbol{m}_O^e$, определяется из формулы $m_O^e = R^{\text{гир}}OB$, т. е.

$$R^{\text{гир}} = \frac{m_O^e}{OB} = M\rho^2\frac{r_1}{r_2\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}\omega_e^2.$$

Воспользовавшись формулой (1), определим отношение гироскопической реакции колеса 1 к статической:

$$\frac{R^{\text{гир}}}{R_{\text{ст}}} = \frac{\rho^2\omega_r^2}{gr_2}.$$

После подстановки численных значений: $\omega_e = \omega = 4\pi$ рад/с, $\rho = 18$ см, $r_2 = 20$ см, получим $R^{\text{гир}}/R_{\text{ст}} \approx 2{,}6$. Следовательно, полная реакция колеса 1 при движении колеса 2 в 3,6 раза больше соответствующей реакции при покое.

Указание. Рекомендуем решить следующие задачи из «Сборника задач по теоретической механике» И. В. Мещерского: 40.3, 40.4, 40.7—40.11.

ГЛАВА XI

КРАТКИЙ ОБЗОР МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ

§ 1. Вводные замечания

При решении задач динамики часто возникают затруднения, связанные с выбором соответствующих теорем и уравнений. Эти затруднения можно успешно преодолеть лишь при наличии достаточных навыков в решении задач динамики. Для приобретения подобных навыков мало практики в решении задач, нужно еще продумать и сопоставить различные методы и приемы. Для облегчения этого сопоставления ниже сделана попытка систематизации методов решения задач динамики.

Задачи динамики можно разбить на три группы: задачи динамики материальной точки, задачи динамики материальной системы, задачи динамики твердого тела.

Задачи всех трех групп делятся на *прямые* (определение сил по заданному движению) и *обратные* (определение движения по заданным силам). При сравнительной простоте прямых задач решение обратных задач подчас связано с большими трудностями.

§ 2. Задачи динамики материальной точки

Наиболее общим приемом решения задач динамики материальной точки является применение *дифференциальных уравнений движения* точки в проекциях на орты различных систем координат.

Чаще других применяются дифференциальные уравнения движения в проекциях на оси декартовых координат.

При сложном движении материальной точки пользуются уравнениями динамики относительного движения (либо переносного движения) в проекциях на орты различных систем координат.

При движении несвободной материальной точки по заданной кривой часто удобно пользоваться дифференциальными уравнениями в проекциях на оси натурального триэдра.

При движении несвободной материальной точки по заданной поверхности целесообразно применять дифференциальные уравнения движения в проекциях на орты цилиндрических, сферических или иных криволинейных координат.

Если равнодействующая сил, приложенных к материальной точке, расположена при движении точки в одной плоскости с ее начальной скоростью, то движение точки происходит в этой плоскости. При этом можно ограничиться применением двух дифференциальных урав-

кений движения в проекциях на две оси декартовых координат или на оси полярных координат, расположенных в этой плоскости, или на иные оси.

Для определения траектории материальной точки, движущейся под действием центральной силы, удобно пользоваться формулой Бине.

Если равнодействующая сил, приложенных к материальной точке, расположена при движении точки на одной оси с ее начальной скоростью, то движение точки происходит прямолинейно вдоль этой оси. При этом следует ограничиться применением одного дифференциального уравнения движения в проекции на эту ось.

Дифференциальные уравнения движения материальной точки поддаются сравнительно просто интегрированию в задачах, где равнодействующая сил, приложенных к точке, постоянна либо зависит *только* от: 1) времени, 2) положения точки, 3) скорости точки, 4) ускорения точки. Труднее решать обратные задачи, если равнодействующая сила одновременно зависит от времени, положения, скорости и ускорения материальной точки. В этих случаях легко решаются задачи, которые приводятся к линейным дифференциальным уравнениям.

Иногда, используя общие теоремы динамики, можно сразу получить первые интегралы дифференциальных уравнений движения и тем самым упростить решение задачи.

Теорему об изменении количества движения материальной точки в интегральной форме применяют в задачах, где силы постоянны либо являются известными функциями времени (при этом возможно вычисление интеграла, определяющего импульс силы), а в число данных и неизвестных величин входят: масса (вес) материальной точки, силы, приложенные к точке, промежуток времени действия сил, скорости материальной точки в начале и в конце этого промежутка времени.

Теорему об изменении момента количества движения материальной точки преимущественно применяют при движении точки под действием центральной силы, когда в число данных и искомых величин входят: масса (вес) точки, положения точки в некоторые фиксированные моменты времени, скорости точки в эти моменты времени.

Теорему об изменении кинетической энергии материальной точки в интегральной форме применяют в задачах, где силы, приложенные к точке, постоянны либо зависят от положения точки (при этом возможно вычисление интеграла, определяющего работу силы), а в число данных и неизвестных величин входят: масса точки, силы, приложенные к точке, перемещение точки и ее скорости в начале и в конце этого перемещения. Подчеркнем, что эту теорему удобно использовать и тогда, когда на систему действуют постоянные силы трения.

Приведем для пояснения некоторые примеры.

Задача 11.1. На рисунке изображен груз массы M, который движется вверх по негладкой наклонной плоскости, расположенной под углом α к горизонту. В начальный момент грузу сообщили скорость v_0 параллельно наклонной плоскости вверх. Коэффициент трения скольжения груза о наклонную плоскость равен f.

Определить путь s, пройденный грузом до остановки, и соответствующий промежуток времени τ.

Р е ш е н и е. Для определения пути s можно применить теорему об изменении кинетической энергии в интегральной форме:

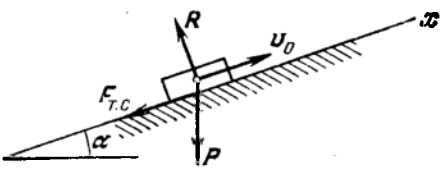
$$\frac{1}{2}Mv_2^2 - \frac{1}{2}Mv_1^2 = \sum_{k=1}^{n} A(\boldsymbol{F}_k), \quad \text{ибо} \quad v_1 = v_0, \quad v_2 = 0, \quad \sum A(\boldsymbol{F}_k) =$$

$$= -\int_0^s (Mg\sin\alpha + F_{\text{тр}})\,dx. \text{ Так как } F_{\text{т. с}} = fMg\cos\alpha, \text{ то } \sum A(\boldsymbol{F}_k) =$$

$$= -Mg(\sin\alpha + f\cos\alpha)\,s.$$

Мы смогли использовать эту теорему для определения s потому, что силы, приложенные к грузу, не зависят от его скорости либо ускорения, а также от времени. Если бы, по условию, надо было учесть силу сопротивления движению, зависящую от скорости груза, например $F_x = -\beta\dot{x}^2$, то невозможно было бы вычислить работу этой силы $A(\boldsymbol{F}) = -\int_0^s \beta\dot{x}^2 dx =$

$= -\beta\int_0^{\cdot} \dot{x}^2\,dx$, так как неизвестна зависимость $\dot{x}$ от x.



К задаче 11.1.

Для определения времени движения τ можно использовать теорему об изменении количества движения материальной точки в проекции на ось x: $m\dot{x}_2 - m\dot{x}_1 = \sum_{k=1}^{n} S_x(\boldsymbol{F}_k)$, ибо $\dot{x}_1 = v_0$, $\dot{x}_2 = 0$,

$\sum S_x(F_k) = -\int_0^{\tau} (Mg\sin\alpha + F_{\text{т. с}})\,dt$. Так как $F_{\text{т. с}} = fMg\cos\alpha$,

то $\sum S_x(\boldsymbol{F}_k) = -Mg(\sin\alpha + f\cos\alpha)\,\tau$.

Мы смогли применить эту теорему для определения τ потому, что силы, приложенные к грузу, не зависели от его положения, скорости и ускорения. Действительно, при учете силы сопротивления движению, зависящей от скорости, например $F_x = -\beta\dot{x}^2$, нельзя было бы вычислить проекцию импульса

$$S_x(\boldsymbol{F}) = -\int_0^{\tau} \beta\dot{x}^2\,dt = -\beta\int_0^{\tau} \dot{x}^2\,dt,$$

так как неизвестна зависимость $\dot{x}$ от t.

Теперь применим для решения этой задачи дифференциальное уравнение движения материальной точки в проекции на ось x: $M\ddot{x} = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}$. Проинтегрировав соответствующее дифференциальное уравнение, мы можем найти как s, так и τ, независимо от того, действует на груз сила трения $F_{т.с} = fMg\cos\alpha$ или сила сопротивления движению $F_x = -\beta\dot{x}^2$. Действительно, при наличии силы трения

$$M\ddot{x} = -Mg\sin\alpha - F_{т.с}, \quad \text{т. е.} \quad \ddot{x} = -g(\sin\alpha + f\cos\alpha).$$

Правая часть этого уравнения постоянна, и оно элементарно интегрируется. Проинтегрировав, найдем $\dot{x} = f_1(t)$ и $x = f_2(t)$. Подставив $\dot{x} = 0$ в $\dot{x} = f_1(t)$, найдем $t = \tau$. Затем, внеся $t = \tau$ в $x = f_2(t)$, получим $x = s$. Если сила трения заменена силой сопротивления, то $M\ddot{x} = -Mg\sin\alpha - \beta\dot{x}^2$. Это дифференциальное уравнение нетрудно проинтегрировать, разделив переменные: $\frac{M\,d\dot{x}}{Mg\sin\alpha + \beta\dot{x}^2} = -dt$ и т. д. Затем, внеся $\dot{x} = 0$ в $\dot{x} = f_1(t)$, найдем $t = \tau$, а подставив $t = \tau$ в $x = f_2(t)$, получим $x = s$.

Этот пример демонстрирует ограниченные возможности применения общих теорем динамики: нам пришлось использовать две теоремы для определения двух неизвестных s и τ, притом это удалось выполнить только при наличии постоянной силы трения. Решение же задачи с помощью общих теорем при замене постоянной силы $F_{т.с}$ переменной силой $F_x = -\beta\dot{x}^2$ невозможно. Вместе с тем решение с помощью дифференциального уравнения движения в проекции на ось x, хотя и оказалось более длинным, но дало возможность решить задачу как при постоянной силе трения $F_{т.с} = fMg\cos\alpha$, так и при переменной силе сопротивления движению $F_x = -\beta\dot{x}^2$.

Задача 11.2. На рисунке изображена гладкая проволочная окружность радиуса r, расположенная в вертикальной плоскости. По проволоке скользит кольцо A.

Написать дифференциальное уравнение движения кольца, считая его материальной точкой массы M.

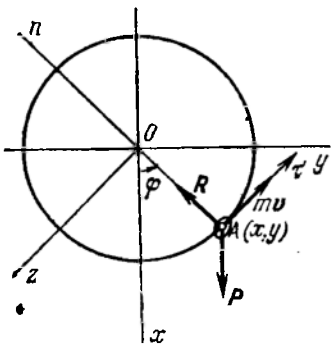
Р е ш е н и е. Степень трудности составления и интегрирования дифференциального уравнения движения точки во многом определяется удачным выбором системы отсчета. Для иллюстрации этого положения решим данную задачу двумя способами: используем систему декартовых координат xyz и затем оси натурального триэдра τ, n, b.

К кольцу приложены две силы: сила тяжести $\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{g}$ и нормальная реакция $\boldsymbol{R}$.

1) Применив дифференциальное уравнение движения материальной точки в проекциях на декартовы оси координат, запишем: $M\ddot{x} = Mg - R\cos\varphi$; $M\ddot{y} = -R\sin\varphi$, где φ — угол между осью x и движущимся радиусом OA, определяющим положение кольца A. В эти дифференциальные уравнения вошла нормальная реакция $\boldsymbol{R}$. При движении кольца она изменяется, причем закон ее изменения можно

определить только после отыскания уравнения движения кольца. Поэтому из составленных уравнений надо исключить R. Выполнив это, получим $M\ddot{x} = Mg + M\ddot{y}\operatorname{ctg}\varphi$. Это дифференциальное уравнение уже не содержит неизвестную реакцию R, однако проинтегрировать его мы не можем, пока не установлена зависимость между x, y и φ. Как видно из рисунка, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Вычислив вторые производные по времени: $\ddot{x} = -r\ddot{\varphi}\sin\varphi - r\dot{\varphi}^2\cos\varphi$, $\ddot{y} = r\ddot{\varphi}\cos\varphi - r\dot{\varphi}^2\sin\varphi$ — и подставив их значения в уравнение $M\ddot{x} = Mg + M\ddot{y}\operatorname{ctg}\varphi$, после преобразований получим $\ddot{\varphi} + \frac{g}{r}\sin\varphi = 0$. Это — искомое дифференциальное уравнение движения кольца.

2) Однако это дифференциальное уравнение можно получить во много раз быстрее и проще, если воспользоваться осями натурального триэдра. Для этого достаточно составить лишь одно уравнение в проекции на касательную τ, на которую неизвестная сила $\boldsymbol{R}$ проектируется в нуль: $Mw_\tau = -Mg\sin\varphi$. Заменив w_τ на $r\ddot{\varphi}$, получим искомое дифференциальное уравнение $\ddot{\varphi} + \frac{g}{r}\sin\varphi = 0$.



К задаче 11.2.

(Если бы по условию требовалось также определить реакцию R, то, проинтегрировав полученное выше уравнение и найдя $\dot{\varphi} = f(\varphi)$, надо было бы составит дифференциальное уравнение движения в проекции на главную нормаль n: $M\frac{v^2}{r} = R - Mg\cos\varphi$ и вычислить R, заменив в нем v^2 на $r^2\dot{\varphi}^2$.)

Сопоставление двух методов составления уравнения $\ddot{\varphi} + \frac{g}{r}\sin\varphi = 0$ убедительно подтверждает правильность рекомендации, данной выше: если траектория движущейся материальной точки заранее известна (в данном случае — окружность радиуса r), то целесообразнее пользоваться дифференциальными уравнениями движения материальной точки в проекциях на оси натурального триэдра траектории.

3) Для получения искомого дифференциального уравнения можно было бы также применить теорему об изменении главного момента количества движения материальной точки относительно оси z: $\frac{dl_z}{dt} = \sum_{k=1}^{n} m_z(\boldsymbol{F}_k)$. В данном случае

$$l_z = Mv_\tau r = Mr^2\dot{\varphi}, \quad \sum m_z(\boldsymbol{F}_k) = -Mgr\sin\varphi.$$

Подставив эти значения, находим искомое дифференциальное уравнение движения кольца. Данный способ несколько длиннее второго

способа, но значительно короче первого, ибо момент силы $\boldsymbol{R}$ относительно оси z равен нулю и, значит, в составленное уравнение эта сила не входит. (Однако, если бы требовалось также определить R, то, применив теорему и проинтегрировав уравнение, пришлось бы дополнительно составить какое-либо уравнение, содержащее R, например дифференциальное уравнение движения в проекции на главную нормаль.)

Если бы условие этой задачи было усложнено поступательным движением проволочной окружности с ускорением w, то для описания относительного движения кольца по окружности (переносным является движение проволочной окружности) следовало бы применить уравнение динамики относительного движения материальной точки: к силам $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{R}$ добавить силу инерции переносного движения $\boldsymbol{J}_e = -m\boldsymbol{w}_e = -m\boldsymbol{w}$ и затем составить дифференциальное уравнение относительного движения в проекции на касательную τ.

§ 3. Задачи динамики материальной системы

Наиболее общим приемом составления дифференциальных уравнений движения материальной системы является применение уравнений Лагранжа. При наличии идеальных связей в эти уравнения не входят реакции связей. Если на материальную систему наложены голономные связи, то число уравнений Лагранжа равно числу степеней свободы. Применение этих уравнений особенно целесообразно при рассмотрении систем с несколькими степенями свободы. Так, в случае системы с двумя степенями свободы надо составить два дифференциальных уравнения движения. Если решать задачу, минуя уравнения Лагранжа, то необходимо из многих общих теорем и иных уравнений динамики найти два уравнения, применение которых наиболее целесообразно. Удачно выбрать уравнения и общие теоремы можно лишь на основе значительных навыков в решении задач или путем ряда неудачных проб и ошибок. Вместе с тем применение уравнений Лагранжа дает возможность быстро и безошибочно получить необходимые дифференциальные уравнения движения. Вообще говоря, при отсутствии ясного плана решения задачи лучше всего использовать уравнения Лагранжа. При этом существенную роль играет удачный выбор обобщенных координат.

Вместе с тем уравнениями Лагранжа нецелесообразно пользоваться при наличии сил трения, зависящих от переменного давления. Кроме того, в случаях систем с односторонними связями одних уравнений Лагранжа для решения задач может оказаться недостаточно.

Если по условию требуется определить какую-либо реакцию связи, то надо с помощью уравнений Лагранжа определить обобщенные ускорения системы (т. е. вторые производные по времени обобщенных координат), затем, применив закон освобождаемости, составить дифференциальное уравнение движения соответствующей материальной точки или применить метод кинетостатики и из составленного

уравнения, решая прямую задачу динамики, найти искомую реакцию.

В последнее время применение уравнений Лагранжа вытеснило использование общего уравнения динамики в качестве общего метода составления дифференциальных уравнений движения материальной системы. Это вполне закономерно: для уравнений Лагранжа вычисляется кинетическая энергия, а для общего уравнения динамики определяются силы инерции. В выражение кинетической энергии входят скорости точек системы, а в формулы сил инерции — ускорения этих точек. Определение же скоростей точек системы значительно проще вычисления их ускорений.

Во многих более простых задачах могут быть успешно применены общие теоремы динамики. Заметим, что для этих задач использование уравнений Лагранжа является более громоздким и потому нецелесообразным. Так как выбор соответствующей общей теоремы связан с известными трудностями, то полезно иметь в виду следующие соображения:

а) Если в число данных и неизвестных величин входят: массы материальных точек, внешние силы и уравнение движения центра масс либо уравнения движения точек системы, то можно, применив *теорему о движении центра масс материальной системы* в проекциях на оси координат, составить дифференциальные уравнения движения, в которые войдут те реакции связей, которые для рассматриваемой системы являются внешними силами. Эти дифференциальные уравнения движения дают возможность, помимо решения обратных задач, определять искомые реакции связей непосредственно из составленных уравнений.

б) *Если внешние силы постоянны либо зависят от времени*, а в число данных и неизвестных величин входят: массы материальных точек, внешние силы, промежуток времени действия внешних сил и скорости точек системы в начале и конце этого промежутка, то следует применить *теорему об изменении главного вектора количеств движения материальной системы в интегральной форме.*

в) Если в состав материальной системы входит *твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси*, а в число данных и искомых величин — инерционные характеристики системы (массы, моменты инерции), уравнения движения точек системы и уравнение вращения твердого тела (либо скорости точек системы и угловая скорость твердого тела), а также внешние силы системы, то можно применить *теорему об изменении главного момента количеств движения материальной системы.*

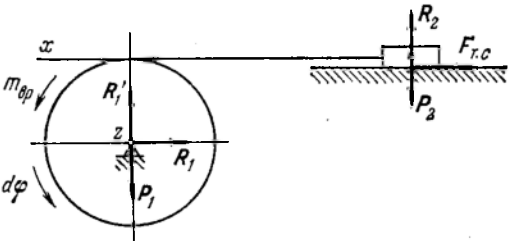
г) *Если внешние силы постоянны либо зависят от положений точек системы*, а в число данных и искомых величин входят: инерционные коэффициенты системы (массы, моменты инерции), внешние и внутренние силы системы (в случае неизменяемой материальной системы — только внешние силы), перемещения точек системы и скорости этих точек в начале и в конце этих перемещений, то сле-

дует применять *теорему об изменении кинетической энергии материальной системы в интегральной форме.*

д) Если рассматриваемая система материальных точек является *сплошной средой* — жидкостью (газом), а в число данных и неизвестных величин входят: секундные массы жидкости (газа), скорости капель жидкости (газа), проходящих через крайние поперечные сечения рассматриваемого объема жидкости (газа), объемные и поверхностные силы, то следует применять *уравнение Эйлера, т. е. теорему об изменении главного вектора количеств движения материальной системы в приложении к сплошным средам.*

Приведем для пояснения несколько примеров.

Задача 11.3. На рисунке изображена система, состоящая из барабана массы M_1 и радиуса r и груза массы M_2. На боковую поверхность барабана намотана невесомая нить, другой конец которой прикреплен к грузу. При вращении барабана против хода часовой стрелки груз скользит по негладкой горизонтальной плоскости налево.



К задаче 11.3.

Найти угловую скорость барабана, если к нему приложен вращающий момент $m_{вр\,z}$. Рассмотреть два варианта:

1) $m_{вр\,z} = \alpha\varphi$, где α — постоянная, а φ — угол поворота барабана,

2) $m_{вр\,z} = \beta\dot{\varphi}$, где β — постоянная, а $\dot{\varphi}$ — угловая скорость барабана.

Барабан считать однородным кольцом. Коэффициент трения скольжения груза о плоскость равен f. В начальный момент система находилась в покое. Высотой груза пренебречь.

Р е ш е н и е. За исключением вращающего момента, все силы, приложенные к этой системе, постоянны.

В первом варианте вращающий момент зависит от угла поворота φ барабана. Поэтому можно применить теорему об изменении кинетической энергии в интегральной форме.

Здесь

$$T_2 = \frac{M_1 + M_2}{2} r^2\dot{\varphi}^2, \quad T_1 = 0, \quad \sum A\left(F_k^e\right) = \int_0^{\varphi} (m_{вр\,z} - F_{т.\,с}\cdot r)\, d\varphi.$$

Так как $m_{вр\,z} = \alpha\varphi$, а $F_{т.\,с} = fM_2g$, то $\sum A\left(F_k^e\right) = \frac{\alpha\varphi^2}{2} - fM_2gr\varphi$.

После подстановки в $T_2 - T_1 = \sum A\left(F_k^e\right)$ найдем зависимость $\dot{\varphi}$ от φ.

Во втором варианте вращающий момент зависит от угловой скорости $\dot{\varphi}$, и мы не можем вычислить сумму работ $\sum A\left(F_k^e\right) =$

$= \int_0^{\varphi} (m_{\text{вр}\,z} - F_{\text{тр}} \cdot r)\, d\varphi = \beta \int_0^{\varphi} \dot{\varphi}\, d\varphi - fM_2 gr\varphi$, ибо неизвестна зависимость $\dot{\varphi}$ от φ. В этом варианте можно применить теорему об изменении главного момента количеств движения. В данном случае

$$L_z = I_z\dot{\varphi} + M_2 vr = (M_1 + M_2)\, r^2\dot{\varphi};$$

$$\sum m_z(F_k^e) = m_{\text{вр}\,z} - F_{\text{тр}} r = \beta\dot{\varphi} - fM_2 gr.$$

Подстановка в $\frac{dL_z}{dt} = \sum_{k=1}^{n} m_z(F_k^e)$ дает $(M_1 + M_2)\, r^2\ddot{\varphi} = \beta\dot{\varphi} - fM_2 gr$.

Разделив переменные и проинтегрировав это дифференциальное уравнение, найдем зависимость $\dot{\varphi}$ от t.

Применение теоремы об изменении главного момента количеств движения не составило большого труда лишь потому, что в системе отсутствуют твердые тела, совершающие сложные движения (см. задачу 11.4). Заметим, что эту теорему можно было использовать и в первом варианте данной задачи. Тогда составленное дифференциальное уравнение имело бы вид $(M_1 + M_2)\, r^2\ddot{\varphi} = \alpha\varphi - fM_2 gr$. Умножив его на $d\varphi$, заменив $\ddot{\varphi}\, d\varphi$ на $\dot{\varphi}\, d\dot{\varphi}$ и затем проинтегрировав, мы получили бы зависимость $\dot{\varphi}$ от φ.

Это дифференциальное уравнение, описывающее движение системы в обоих вариантах, можно было получить с помощью уравнений Лагранжа или общего уравнения динамики.

Так, подставив в уравнение Лагранжа $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi$ значения $T = \frac{M_1 + M_2}{2}\, r^2\dot{\varphi}^2$ и $Q_\varphi = m_{\text{вр}\,z} - fM_2 gr$, получим $(M_1 + M_2) \times r^2\ddot{\varphi} = m_{\text{вр}\,z} - fM_2 gr$.

К этому же результату можно прийти с помощью общего уравнения динамики. В данном случае оно имеет вид

$$m_{\text{вр}\,z}\delta\varphi + m_{1z}^{(J)}\delta\varphi - fM_2 gr\,\delta\varphi + V_{2x}^{(J)} r\,\delta\varphi = 0,$$

где

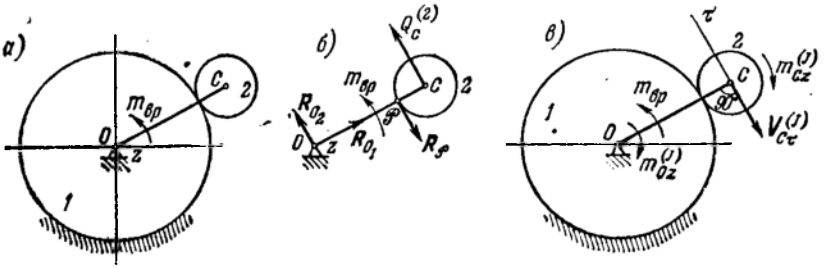
$$m_{1z}^{(J)} = -I_z\ddot{\varphi} = -M_1 r^2\ddot{\varphi}, \quad \text{а} \quad V_{2x}^{(J)} = M_2 r\ddot{\varphi}.$$

Решение этой простой задачи иллюстрирует ограниченные возможности применения теоремы об изменении кинетической энергии в интегральной форме.

Задача 11.4. Планетарный механизм, расположенный в горизонтальной плоскости, приводится во вращение с помощью кривошипа OC, к которому приложен вращающий момент $m_{\text{вр}\,z}$, где z — ось вращения.

Найти угловое ускорение кривошипа, если I_z — его момент инерции, r_1 — радиус неподвижного колеса, r_2 — радиус подвижного колеса массы M_2. Колесо *2* считать однородным кольцом. Силами сопротивления пренебречь.

Р е ш е н и е. Найдем угловое ускорение четырьмя способами, применив: 1) теорему об изменении главного момента количеств движения; 2) теорему об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме; 3) уравнения Лагранжа; 4) общее уравнение динамики.



К задаче 11.4.

1) Для применения теоремы об изменении главного момента количеств движения относительно неподвижной оси z:

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum_{k=1}^{n} m_z\left(\boldsymbol{F}_k^e\right), \tag{1}$$

вычислим L_z по формуле

$$L_z = L_z^{(OC)} + L_z^{(2)}. \tag{2}$$

Имеем

$$L_z^{(OC)} = I_z\dot{\varphi}, \tag{3}$$

где $\dot{\varphi}$ — угловая скорость кривошипа.

Так как колесо 2 совершает плоское движение, то применим формулу

$$L_{zO}^{(2)} = L_{zC}^{(2)} + m_{zO}\left(\boldsymbol{Q}_C^{(2)}\right). \tag{4}$$

Имеем $L_{zC}^{(2)} = I_C^{(2)}\omega_{2z}$. Учтя, что $I_C^{(2)} = m_2 r_2^2$, а $\omega_{2z} = \dfrac{r_1 + r_2}{r_2}\dot{\varphi}$, получим

$$L_{zC}^{(2)} = m_2 r_2 (r_1 + r_2)\dot{\varphi}. \tag{5}$$

Далее, $m_{zO}\left(\boldsymbol{Q}_C^{(2)}\right) = m_{zO}(m_2\boldsymbol{v}_C)$, так как $v_C = (r_1 + r_2)\,|\dot{\varphi}|$, то (рис. *б*)

$$m_{zO}\left(\boldsymbol{Q}_C^{(2)}\right) = m_2 (r_1 + r_2)^2\dot{\varphi}. \tag{6}$$

Подставив (5) и (6) в формулу (4), находим

$$L_{zO}^{(2)} = m_2 (r_1 + r_2)(r_1 + 2r_2)\dot{\varphi}. \tag{7}$$

Внеся значения (3) и (7) в формулу (2), получим главный момент количеств движения системы относительно оси z:

$$L_z = [I_z + m_2 (r_1 + r_2)(r_1 + 2r_2)]\,\dot{\varphi}. \tag{8}$$

К механизму приложены внешние силы: $\boldsymbol{P}_1 = M_1\boldsymbol{g}$ — сила тяжести кривошипа, $\boldsymbol{P}_2 = M_2\boldsymbol{g}$ — сила тяжести колеса *2* (они перпендикулярны к плоскости рис. *б*), вращающий момент $\boldsymbol{m}_{вр}$, $\boldsymbol{R}_{O_1}$ и $\boldsymbol{R}_{O_2}$ — составляющие реакции неподвижной оси z_O, $\boldsymbol{R}_{\mathscr{P}}$ — реакция неподвижного колеса *1*.

Имеем

$$\sum m_{zO}(\boldsymbol{F}_k^e) = m_{вр\,z} - R_{\mathscr{P}} \cdot r_1. \tag{9}$$

Подстановка (8) и (9) в уравнение (1) дает

$$[I_z + M_2(r_1 + r_2)(r_1 + 2r_2)]\ddot{\varphi} = m_{вр\,z} - R_{\mathscr{P}} \cdot r_1. \tag{10}$$

Мы не можем из уравнения (10) определить искомое угловое ускорение $\ddot{\varphi}$ кривошипа, ибо неизвестен модуль реакции $\boldsymbol{R}_{\mathscr{P}}$. Поэтому для исключения $R_{\mathscr{P}}$ из уравнения (10) надо дополнительно применить к колесу *2* одну из общих теорем, например теорему об изменении главного момента количеств движения в относительном движении по отношению к центру масс:

$$\frac{dL_{zC}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} m_{zC}(\boldsymbol{F}_k^e). \tag{11}$$

Учтя, что $\sum m_{zC}(\boldsymbol{F}_k^e) = R_{\mathscr{P}} \cdot r_2$, и использовав формулу (5), получим после сокращения на r_2:

$$M_2 \cdot (r_1 + r_2)\ddot{\varphi} = R_{\mathscr{P}}. \tag{12}$$

Лишь теперь, исключив $R_{\mathscr{P}}$ из системы уравнений (10) и (12), находим искомое угловое ускорение:

$$\ddot{\varphi} = \frac{m_{вр\,z}}{I_z + 2M_2(r_1 + r_2)^2}. \tag{13}$$

2) Решим эту задачу с помощью теоремы об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме:

$$dT = \sum_{k=1}^{n} \delta A_k. \tag{14}$$

Кинетическая энергия системы равна

$$T = T^{(OC)} + T^{(2)} \tag{15}$$

Имеем

$$T^{(OC)} = \frac{1}{2} I_z \dot{\varphi}^2. \tag{16}$$

Далее, $T^{(2)} = \frac{1}{2} M_2 v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega_2^2$, так как $I_C = M_2 r_2^2$, $v_C = (r_1 + r_2)|\dot{\varphi}|$, а $\omega_2 = \frac{r_1 + r_2}{r_2}|\dot{\varphi}|$, то

$$T^{(2)} = M_2(r_1 + r_2)^2 \dot{\varphi}^2. \tag{17}$$

Внеся (16) и (17) в формулу (15), получим

$$T = \frac{1}{2}[I_z + 2M_2 (r_1 + r_2)^2]\,\dot{\varphi}^2. \tag{18}$$

Элементарная работа внешних сил на угловом перемещении $d\varphi$ кривошипа равна

$$\sum \delta A_k = m_{\text{вр}\,z}\, d\varphi. \tag{19}$$

В выражение (19) реакция $\boldsymbol{R}_{\mathcal{P}}$ не вошла, ибо $\delta A\,(\boldsymbol{R}_{\mathcal{P}}) = \boldsymbol{R}_{\mathcal{P}} \cdot d\boldsymbol{r}_{\mathcal{P}} = \boldsymbol{R}_{\mathcal{P}} \cdot \boldsymbol{v}_{\mathcal{P}}\, dt = 0$. Отсутствие в (19) силы $\boldsymbol{R}_{\mathcal{P}}$ значительно упрощает решение задачи.

Внеся значения (18) и (19) в уравнение (14), имеем

$$[I_z + 2M_2 (r_1 + r_2)^2]\,\dot{\varphi}\, d\dot{\varphi} = m_{\text{вр}\,z}\, d\varphi. \tag{20}$$

Приняв во внимание, что $\dot{\varphi}\, d\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}\, d\dot{\varphi} = \ddot{\varphi}\, d\varphi$, после сокращения уравнения (20) на $d\varphi$ получим искомое угловое ускорение $\ddot{\varphi}$ кривошипа (см. формулу (13)).

3) Решим эту задачу с помощью уравнений Лагранжа. При наличии одной обобщенной координаты φ уравнение Лагранжа имеет вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_{\varphi}. \tag{21}$$

Так как все связи идеальны, то реакции (в том числе и $\boldsymbol{R}_{\mathcal{P}}$) не войдут в выражение обобщенной силы Q_{φ}. Имеем

$$Q_{\varphi} = m_{\text{вр}\,z}. \tag{22}$$

Воспользовавшись в уравнении (21) формулами (18) и (22), получим искомое угловое ускорение $\ddot{\varphi}$ кривошипа (см. формулу (13)).

4) Применим общее уравнение динамики: $\sum_{k=1}^{n} (\boldsymbol{F}_k^a - M_k \boldsymbol{w}_k) \cdot \delta \boldsymbol{r}_k = 0$.

Силы инерции кривошипа приводятся к паре с главным моментом

$$m_{Oz}^{(J)} = -I_z \ddot{\varphi}. \tag{23}$$

Силы инерции колеса 2, совершающего плоское движение, приводятся к главному вектору $\boldsymbol{V}_C^{(J)}$ (рис. *в*) и главному моменту $m_{Cz}^{(J)}$, причем

$$V_{C\tau}^{(J)} = -M_2 (r_1 + r_2)\,\ddot{\varphi}, \quad m_{Cz}^{(J)} = -I_C \ddot{\varphi}_2 = -M_2 r_2 (r_1 + r_2)\,\ddot{\varphi}. \tag{24}$$

Напомним, что $I_C = M_2 r_2^2$, а $\ddot{\varphi}_2 = \frac{r_1 + r_2}{r_2}\ddot{\varphi}$.

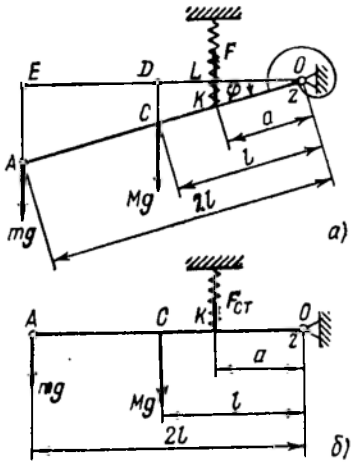
Общее уравнение динамики в данной задаче имеет вид

$$m_{\text{вр}\,z}\delta\varphi + m_{Oz}^{(J)}\delta\varphi + m_{Cz}^{(J)}\delta\varphi_2 + V_{C\tau}^{(J)} (r_1 + r_2)\,\delta\varphi = 0. \tag{25}$$

Внеся (23) и (24) в уравнение (25) и заметив, что $\delta\varphi_2 = \frac{r_1 + r_2}{r_2}\delta\varphi$,

после сокращения на $\delta\varphi$ получим искомое угловое ускорение $\ddot{\varphi}$ кривошипа (см. формулу (13)).

Сопоставление четырех методов решения этой задачи свидетельствует о нецелесообразности применения теоремы об изменении главного момента количеств движения к системам, в состав которых входят твердые тела, совершающие сложные движения (громоздкость вычисления $L_z^{(2)}$ и необходимость в составлении дополнительного уравнения (11) для исключения неизвестной реакции $R_{\mathscr{P}}$).



К задаче 11.5.

Решение задачи с помощью общего уравнения динамики, связанное с введением сил инерции, является более громоздким по сравнению с использованием уравнений Лагранжа.

Задача 11.5. На рис. *а* изображен виброграф — прибор для регистрации колебаний. В положении покоя (см. рис. *б*) стержень OA массы M горизонтален, винтовая пружина с коэффициентом упругости c_1 растянута на $\Delta_{ст}$, а спиральная пружина с коэффициентом упругости c_2 не деформирована. На конец A стержня OA насажен груз массой m. Момент инерции стержня относительно оси привеса z равен I_z. Размеры указаны на рисунках. Груз считать точечной массой. Силами сопротивления пренебречь.

Составить дифференциальное уравнение малых колебаний вибрографа и найти их круговую частоту.

Р е ш е н и е. Используем три способа: а) уравнения Лагранжа, б) теорему об изменении кинетической энергии материальной системы в дифференциальной форме, в) дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси.

а) Магериальная система имеет одну степень свободы. В качестве обобщенной координаты примем угол поворота φ стержня. Все активные силы: Mg, mg, F — сила упругости винтовой пружины, $m^{(c_2)}$ — момент сил упругости спиральной пружины — потенциальны. Поэтому применим уравнение Лагранжа в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = -\frac{d\Pi}{d\varphi}. \qquad (1)$$

Вычислим кинетическую энергию вибрографа: $T = T_{ст} + T_{гр}$, где кинетическая энергия стержня $T_{ст} = {}^1/_2 I_z \dot{\varphi}^2$, а кинетическая энергия груза A $T_{гр} = {}^1/_2 m v_{гр}^2$. Так как $v_{гр} = 2l|\dot{\varphi}|$, то $T_{гр} = 2ml^2\dot{\varphi}^2$. Теперь кинетическая энергия вибрографа примет вид

$$T = \frac{1}{2}(I_z + 4ml^2)\dot{\varphi}^2. \qquad (2)$$

Вычислим потенциальную энергию системы:

$$\Pi = \Pi^{(Mg)} + \Pi^{(mg)} + \Pi^{(F)} + \Pi^{(c_2)}. \tag{3}$$

В качестве нулевого примем горизонтальное положение стержня. Найдем: потенциальная энергия силы тяжести стержня:

$$\Pi^{(Mg)} = -Mg \cdot CD = -Mgl \sin\varphi, \tag{4}$$

потенциальная энергия силы тяжести груза A:

$$\Pi^{(mg)} = -mg \cdot AE = -2mgl \sin\varphi, \tag{5}$$

потенциальная энергия силы упругости винтовой пружины:

$$\Pi^{(F)} = \frac{1}{2} c_1 \Delta_1^2 - \frac{1}{2} c_1 \Delta_0^2.$$

При горизонтальном — нулевом положении стержня удлинение пружины $\Delta_0 = \Delta_{ст}$, при промежуточном положении φ $\Delta_1 = \Delta_{ст} + KL = \Delta_{ст} + a \sin\varphi$. Поэтому

$$\Pi^{(F)} = \frac{1}{2} c_1 (\Delta_{ст} + a \sin\varphi)^2 - \frac{1}{2} c_1 \Delta_{ст}^2,$$

т. е.

$$\Pi^{(F)} = c_1 a \Delta_{ст} \sin\varphi + \frac{1}{2} c_1 a \sin^2\varphi \tag{6}$$

Аналогично получим для спиральной пружины

$$\Pi^{(c_2)} = \frac{1}{2} c_2 \varphi^2 \tag{7}$$

(при горизонтальном — нулевом положении стержня спиральная пружина не деформирована).

Внеся значения (4)—(7) в формулу (3), найдем потенциальную энергию материальной системы:

$$\Pi = (-Mgl - 2mgl + c_1 a \Delta_{ст}) \sin\varphi + \frac{1}{2} c_1 a^2 \sin^2\varphi + \frac{1}{2} c_2 \varphi^2 \tag{8}$$

Выражение (8) можно упростить. Для этого, использовав рис. *б*, запишем условие горизонтально-равновесного положения вибрографа, при котором винтовая пружина растянута на $\Delta_{ст}$, т. е. $F = c_1 \Delta_{ст}$, а спиральная не деформирована: $m_z(Mg) + m_z(mg) + m_z(F_т) + m_z^{(c_2)} = 0$. Так как $m_z(Mg) = Mgl$, $m_z(mg) = 2mgl$, $m_z(F_т) = -F_{ст} a = -c_1 \Delta_{ст} a$, $m_z^{(c_2)} = 0$, то условие статического равновесия примет вид

$$Mgl + 2mgl - c_1 \Delta_{ст} a = 0. \tag{9}$$

С учетом формулы (9) потенциальная энергия (8) упростится:

$$\Pi = \frac{1}{2} (c_1 a^2 \sin^2\varphi + c_2 \varphi^2).$$

Считаем колебания малыми, т. е. $\sin\varphi \approx \varphi$. Тогда

$$\Pi = \frac{1}{2}(c_1a^2 + c_2)\varphi^2. \tag{10}$$

Использовав (2) и (10) в уравнении Лагранжа (1), найдем искомое дифференциальное уравнение малых колебаний вибрографа:

$$(I_z + 4ml^2)\ddot{\varphi} = -(c_1a^2 + c_2)\varphi, \tag{11}$$

т. е. $\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0$, где обозначено

$$k^2 = \frac{c_1a^2 + c_2}{I_z + 4ml^2}.$$

Значит, искомая круговая частота колебаний равна

$$k = \sqrt{\frac{c_1a^2 + c_2}{I_z + 4ml^2}}.$$

Можно было прийти к этому результату, применив уравнение Лагранжа в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi. \tag{12}$$

Для определения обобщенной силы Q_φ дадим вибрографу обобщенное угловое возможное перемещение $\delta\varphi$ в сторону возрастания угла φ. Вычислим сумму работ активных сил на возможном перемещении $\delta\varphi$ (см. рис. *а*):

$$\sum \delta A(\boldsymbol{F}_k) = [\sum m_z(\boldsymbol{F}_k)]\,\delta\varphi. \tag{13}$$

Найдем сумму моментов активных сил относительно оси z:

$$\sum m_z(\boldsymbol{F}_k) = m_z(M\boldsymbol{g}) + m_z(m\boldsymbol{g}) + m_z(\boldsymbol{F}) + m_z^{(c_2)}. \tag{14}$$

Так как

$$m_z(M\boldsymbol{g}) = Mgl\cos\varphi, \quad m_z(m\boldsymbol{g}) = 2mgl\cos\varphi,$$

$$m_z(\boldsymbol{F}) = -Fa\cos\varphi = -c_1(\Delta_{ст} + a\sin\varphi)\,a\cos\varphi, \quad m_z^{(c_2)} = -c_2\varphi,$$

то формула (14) примет вид

$$\sum m_z(\boldsymbol{F}_k) = (Mgl + 2mgl - c_1\Delta_{ст}a)\cos\varphi - (c_1a^2\sin\varphi\cdot\cos\varphi + c_2\varphi).$$

С учетом условия (9) найдем сумму моментов активных сил

$$\sum m_z(\boldsymbol{F}_k) = -(c_1a^2\sin\varphi\cos\varphi + c_2\varphi). \tag{15}$$

Теперь сумма элементарных работ (13) примет вид

$$\sum \delta A(\boldsymbol{F}_k) = -(c_1a^2\sin\varphi\cos\varphi + c_2\varphi)\,\delta\varphi. \tag{16}$$

Обобщенной силой Q_φ является коэффициент пропорциональности, стоящий в формуле (16) при $\delta\varphi$, т. е. $Q_\varphi = -(c_1a^2\sin\varphi\cos\varphi +$

$+ c_2\varphi$). Считая колебания вибрографа малыми, примем $\sin\varphi \approx \varphi$, $\cos\varphi \approx 1$. Поэтому

$$Q_\varphi = -(c_1a^2 + c_2)\,\varphi. \tag{17}$$

После подстановки выражений (2) и (17) в уравнение Лагранжа (12) получим дифференциальное уравнение (11) малых колебаний вибрографа.

Объем вычислений в обоих вариантах примерно одинаков.

б) Применим для решения задачи теорему об изменении кинетической энергии материальной системы в дифференциальной форме:

$$dT = \sum \delta A(\boldsymbol{F}_k^e). \tag{18}$$

Заметим, что внешними являются все рассмотренные выше активные силы, а также составляющие реакции оси, моменты которых относительно оси z равны нулю.

Определив, как было показано в пункте а), кинетическую энергию (2), вычислим ее дифференциал: $dT = (I_z + ml^2)\,\dot\varphi\,d\dot\varphi$. Так как $\dot\varphi\,d\dot\varphi = \frac{d\varphi}{dt}\,d\dot\varphi = \ddot\varphi\,d\varphi$, то

$$dT = (I_A + 4ml^2)\,\ddot\varphi\,d\varphi. \tag{19}$$

Для вычисления элементарной работы внешних сил дадим стержню действительное угловое перемещение $d\varphi$ в сторону возрастания координаты φ. Используем все расчеты и результаты, полученные в формулах (13)—(16), заменив в них $\delta\varphi$ на $d\varphi$. Тогда, в соответствии с выражением (16), сумма элементарных работ внешних сил и моментов равна

$$\sum \delta A(\boldsymbol{F}_k^e) = -(c_1a^2 \sin\varphi\cos\varphi + c_2\varphi). \tag{20}$$

Внеся результаты (19) и (20) в уравнение (18), сократив на $d\varphi$, найдем

$$(I_z + 4ml^2)\,\ddot\varphi = -(c_1a^2 \sin\varphi\cos\varphi + c_2\varphi). \tag{21}$$

Считая колебания малыми, примем $\sin\varphi \approx \varphi$, $\cos\varphi \approx 1$. Тогда выражение (21) получит окончательно вид дифференциального уравнения (11).

в) В заключение применим дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси (виброграф, состоящий из стержня и груза можно рассматривать как одно твердое тело):

$$I\ddot\varphi = \sum m_z(\boldsymbol{F}_k^e). \tag{22}$$

Момент инерции I вибрографа относительно оси z равен $I = I_{z\,\text{ст}} + I_{z\,\text{гр}}$. По условию момент инерции стержня $I_{z\,\text{ст}} = I_z$. Груз A считается точечной массой. Поэтому $I_{z\,\text{гр}} = m \cdot AO^2 = 4ml^2$. Значит,

$$I = I_z + 4ml^2. \tag{23}$$

В ходе решения варианта а) этой задачи была вычислена сумма моментов активных сил (см. формулу (15)), которые одновременно являются и внешними. Поэтому, не повторяя соответствующих расчетов, запишем $\sum m_z(\boldsymbol{F}_k^e) = -(c_1a^2\sin\alpha\cos\varphi + c_2\varphi)$. Считая колебания вибрографа малыми, примем $\sin\varphi \approx \varphi$, $\cos\varphi \approx 1$. Значит,

$$\sum m_z(\boldsymbol{F}_k^e) = -(c_1a^2 + c_2)\varphi. \qquad (24)$$

Внеся результаты (23) и (24) в уравнение (22), вновь найдем дифференциальное уравнение (11).

Таким образом, дифференциальное уравнение (11) было получено применением: а) уравнения Лагранжа, б) теоремы об изменении кинетической энергии материальной системы в дифференциальной форме и в) дифференциального уравнения вращения твердого тела вокруг неподвижной оси.

Наиболее эффективным и коротким является решение с помощью дифференциального уравнения вращения вокруг неподвижной оси. Решение задачи с помощью уравнений Лагранжа в обоих вариантах оказалось более длинным. Это вполне подтверждает соображения, высказанные выше в обзоре теории: если задача является сравнительно нетрудной (данная материальная система имеет только одну степень свободы) и план ее решения ясен, то целесообразнее применять соответствующие общие теоремы и уравнения динамики.

Решение последующих более сложных задач подтверждает эффективность применения уравнений Лагранжа.

Задача 11.6. Однородный стержень массы M и длины $2l$ колеблется вокруг горизонтальной оси z, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости рисунка на нас. На стержень надето кольцо A массы m, которое под действием своего веса скользит вдоль стержня.

Составить дифференциальные уравнения движения материальной системы. Всеми силами сопротивления пренебречь. Кольцо считать точечной массой.

Р е ш е н и е. Материальная система имеет две степени свободы. Движение системы описывается двумя дифференциальными уравнениями движения. Читателю, недостаточно искушенному в решении задач, трудно из значительного числа общих теорем и уравнений выбрать нужные две теоремы. Поэтому рекомендуется применить уравнения Лагранжа.

В качестве обобщенных координат возьмем: $q_1 = x$, $q_2 = \varphi$ (см. рис. *а*). Активные силы $M\boldsymbol{g}$ и $m\boldsymbol{g}$ потенциальны. Поэтому применим уравнения Лагранжа в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}. \qquad (1)$$

Кинетическая энергия материальной системы равна $T = T_{ст} + T_к$. Кинетическая энергия стержня равна

$$T_{ст} = \frac{1}{2} I_{z\,ст} \dot{\varphi}^2.$$

Так как

$$I_{z\,ст} = I_{z_C ст} + Ml^2 = \frac{Ml^2}{3} + Ml^2 = \frac{4}{3} Ml^2,$$

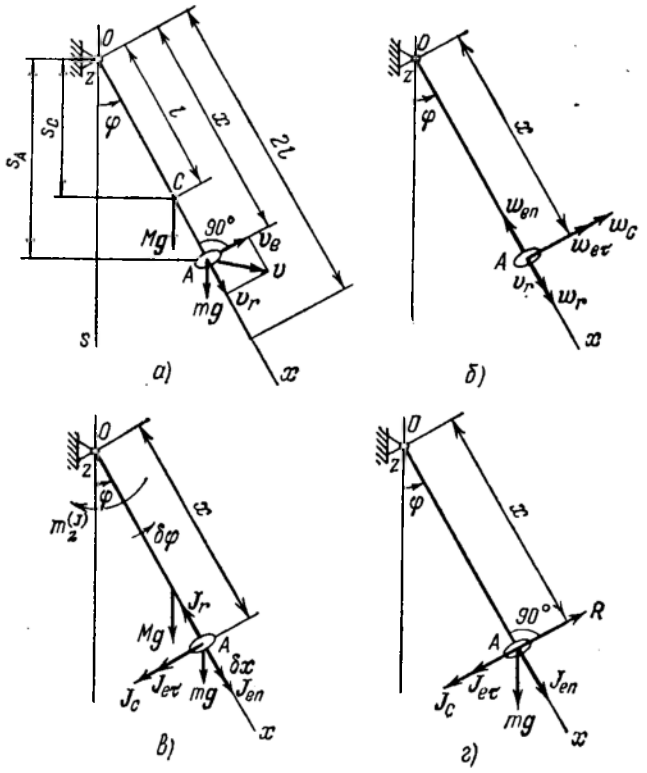
то

$$T_{ст} = \frac{2}{3} Ml^2 \dot{\varphi}^2.$$

Кинетическая энергия кольца — точечной массы равна

$$T_к = \frac{1}{2} m v_A^2.$$

Кольцо совершает сложное движение: переносное вместе со стержнем и относительное вдоль стержня. Применим теорему о сложении



К задаче 11.6.

скоростей: $\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r$. В данном случае $\boldsymbol{v}_e$ перпендикулярно $\boldsymbol{v}_r$ (см. рис. *а*), причем $v_e = x|\dot{\varphi}|$, $v_r = |\dot{x}|$. Поэтому $v_A^2 = x^2\dot{\varphi}^2 + \dot{x}^2$ и, значит,

$$T_к = \frac{1}{2} m (x^2\dot{\varphi}^2 + \dot{x}^2).$$

Теперь запишем выражение кинетической энергии системы:

$$T = T_{ст} + T_к = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{4Ml^2 + 3mx^2}{6}\dot{\varphi}^2. \qquad (2)$$

Заметим, что $T = T(x, \dot{x}, \dot{\varphi})$. С помощью формулы (2) найдем

$$\frac{\partial T}{\partial x} = mx\dot{\varphi}^2, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x},$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = 2mx\dot{x}\dot{\varphi} + \frac{4Ml^2 + 3mx^2}{3}\ddot{\varphi}. \qquad (3)$$

Вычислим потенциальную энергию материальной системы: $\Pi = \Pi^{(Mg)} + \Pi^{(mg)}$. Нулевое положение примем в точке O. Тогда

$$\Pi^{(Mg)} = -Mgs_C = -Mgl\cos\varphi, \quad \Pi^{(mg)} = -mgs_A = -mgx\cos\varphi.$$

Значит, потенциальная энергия равна: $\Pi = -g(Ml + mx)\cos\varphi$. Вычислим обобщенные силы:

$$Q_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} = mg\cos\varphi, \quad Q_\varphi = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = -g(Ml + mx)\sin\varphi. \qquad (4)$$

Внеся результаты (3) и (4) в уравнения Лагранжа (1), найдем искомые дифференциальные уравнения движения материальной системы:

$$\ddot{x} - x\dot{\varphi}^2 = g\cos\varphi, \qquad (5)$$

$$\frac{4Ml^2 + 3mx^2}{3}\ddot{\varphi} + 2mx\dot{x}\dot{\varphi} = -g(Ml + mx)\sin\varphi. \qquad (6)$$

Приведем решение данной задачи с помощью общего уравнения динамики. Для применения этого формального метода надо к активным силам $M\boldsymbol{g}$ и $m\boldsymbol{g}$ присоединить силы инерции. Стержень вращается вокруг неподвижной оси z. Поэтому силы инерции его точек приводятся к паре сил с моментом: $m_{z\,ст}^{(J)} = -I_{z\,ст}\ddot{\varphi}$. Так как $I_{z\,ст} = {}^4/_3 Ml^2$ (см. выше решение задачи с уравнениями Лагранжа), то

$$m_{z\,ст}^{(J)} = -\frac{4}{3} Ml^2\ddot{\varphi}. \qquad (7)$$

Кольцо A совершает сложное движение. Поэтому его ускорение $\boldsymbol{w}_A = \boldsymbol{w}_{en} + \boldsymbol{w}_{e\tau} + \boldsymbol{w}_r + \boldsymbol{w}_c$. Все составляющие ускорения $\boldsymbol{w}_A$ изображены на рис. *б*. По модулю $w_{en} = x\dot{\varphi}^2$, $w_{e\tau} = x|\ddot{\varphi}|$, $w_r = |\ddot{x}|$, $w_c = 2|\dot{x}||\dot{\varphi}|$ — ускорение Кориолиса. Соответственно сила инерции кольца $\boldsymbol{J}_A = -m\boldsymbol{w}_A$, т. е. $\boldsymbol{J}_A = \boldsymbol{J}_{en} + \boldsymbol{J}_{e\tau} + \boldsymbol{J}_r + \boldsymbol{J}_c$ или $\boldsymbol{J}_A = -m\boldsymbol{w}_{en} - m\boldsymbol{w}_{e\tau} - m\boldsymbol{w}_r - m\boldsymbol{w}_c$, по модулю:

$$J_{en} = mx\dot{\varphi}^2, \quad J_{e\tau} = mx|\ddot{\varphi}|, \quad J_r = m|\ddot{x}|, \quad J_c = 2m|\dot{x}||\dot{\varphi}|. \qquad (8)$$

Дадим системе два независимых обобщенных возможных перемещения δx и $\delta\varphi$ (см. рис. *в*).

Будем считать: $\delta x \neq 0$, $\delta\varphi = 0$. Это значит, что при неизменном положении стержня кольцо получило возможное перемещение δx. Тогда уравнение работ активных сил и сил инерции имеет вид $mg_x\delta x + J_{enx}\delta x + J_{e\tau x}\delta x + J_{rx}\delta x + J_{cx}\delta x = 0$. Так как $g_x = g\cos\varphi$, $J_{enx} = mx\dot{\varphi}^2$, $J_{e\tau x} = J_{cx} = 0$, $J_{rx} = -J_r = -m\ddot{x}$, то $mg\cos\varphi + mx\dot{\varphi}^2 - m\ddot{x} = 0$, откуда следует дифференциальное уравнение (5).

Далее примем: $\delta\varphi \neq 0$, $\delta x = 0$. Это значит, что при неизменном положении кольца на стержне стержень получил угловое возможное перемещение $\delta\varphi$ (см. рис. *в*). Теперь уравнение работ активных сил и сил инерции примет вид $M^{(J)}_{z\,\text{ст}}\delta\varphi - Mgl\sin\varphi\,\delta\varphi - mgx\sin\varphi\,\delta x + m_z(\boldsymbol{J}_{en})\,\delta\varphi + m_z(\boldsymbol{J}_{e\tau})\,\delta\varphi + m_z(\boldsymbol{J}_r)\,\delta\varphi + m_z(\boldsymbol{J}_c)\,\delta\varphi = 0$. Так как $m_z(\boldsymbol{J}_{en}) = m_z(\boldsymbol{J}_r) = 0$, то, учтя результаты (7) и (8), получим

$$-\frac{4}{3}Ml^2\ddot{\varphi} - Mgl\sin\varphi - mgx\sin\varphi - 2m\dot{x}\dot{\varphi} - mx^2\ddot{\varphi} = 0,$$

откуда следует дифференциальное уравнение (6).

Из сравнения решений данной задачи с уравнениями Лагранжа и с общим уравнением динамики следует, что метод Лагранжа проще. В ходе его применения определялись скорости точек системы (для кинетической энергии (2)). В случае же общего уравнения динамики пришлось находить ускорения этих точек (для сил инерции), что значительно усложнило решение задачи. Заметим, что составление системы дифференциальных уравнений (5) и (6) с помощью уравнений Лагранжа не потребовало каких-либо догадок или искусственных приемов решения.

Эта задача, подобно другим, может быть решена с помощью удачно найденной комбинации общих теорем и уравнений. Применим теорему об изменении главного момента количеств движения материальной системы относительно оси z и уравнения динамики относительного движения в проекции на ось x.

Упомянутая теорема имеет вид

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum m_z(\boldsymbol{F}^e_k). \tag{9}$$

К системе приложены внешние силы: силы тяжести $M\boldsymbol{g}$ и $m\boldsymbol{g}$ и составляющие реакции неподвижной оси. Сумма моментов этих сил относительно оси z равна

$$\sum m_z(\boldsymbol{F}^e_k) = -g(Ml + mx)\sin\varphi. \tag{10}$$

Вычислим главный момент L_z количеств движения материальной системы относительно оси z: $L_z = L_{z\,\text{ст}} + L_{z\,\text{к}}$. Для стержня имеем $L_{z\,\text{ст}} = I_{z\,\text{ст}}\dot{\varphi} = \frac{4}{3}Ml^2\dot{\varphi}$. Для кольца A запишем $l_{z\,\text{к}} = m_z(m\boldsymbol{v}_A)$. Так как $\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r$ (см. рис. *а*), то $l_{z\text{к}} = m_z(m\boldsymbol{v}_e) +$

$+ m_z (m\boldsymbol{v}_z)$. Момент количества движения $m\boldsymbol{v}_r$ относительно оси z равен нулю. Поэтому $l_{z\,к} = m_z (m\boldsymbol{v}_e) = mx\dot{\varphi} \cdot x = mx^2\dot{\varphi}$. Итак,

$$L_z = L_{z\,ст} + l_{z\,к} = \frac{4Ml^2 + 3mx^2}{3}\dot{\varphi}.$$

Взяв производную по времени

$$\frac{dL_z}{dt} = \frac{4}{3}Ml^2\ddot{\varphi} + 2mx\dot{x}\dot{\varphi} + mx^2\ddot{\varphi},$$

внесем это выражение, а также результат (10) в формулу (9):

$$\frac{4}{3}Ml^2\ddot{\varphi} + 2mx\dot{x}\dot{\varphi} + mx^2\ddot{\varphi} = -g(Ml + mx)\sin\varphi.$$

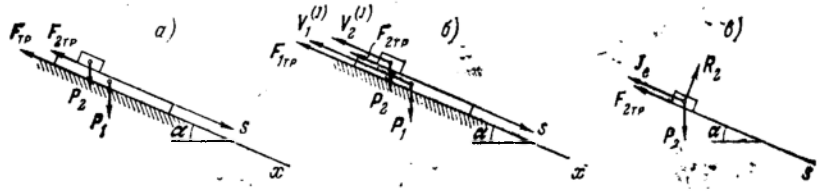
Отсюда следует дифференциальное уравнение (6).

Для составления дифференциального уравнения (5) применим к кольцу A уравнение динамики относительного движения в проекции на ось x.

К кольцу приложены: сила тяжести $m\boldsymbol{g}$ и нормальная реакция $\boldsymbol{R}$ гладкого стержня. Эти силы, а также силы инерции $\boldsymbol{J}_{en}$, $\boldsymbol{J}_{e\tau}$ и $\boldsymbol{J}_c$ изображены на рис. *г*. Приняв во внимание, что $w_{rx} = \ddot{x}$, $R_x = J_{e\tau x} = J_{cx} = 0$, а $J_{enx} = J_{en} = mx\dot{\varphi}^2$, получим $m\ddot{x} = mg\cos\varphi + mx\dot{\varphi}^2$, откуда следует дифференциальное уравнение (5).

Последнее решение эффективно, но найти необходимую совокупность теорем довольно трудно и потому целесообразно при решении этой задачи применить уравнения Лагранжа.

Задача 11.7. По негладкой наклонной плоскости, расположенной под углом α к горизонту, соскальзывает доска массы M_1, а по доске движется груз массы M_2 (рис. *а*).



К задаче 11.7.

Составить дифференциальные уравнения движения этой системы, если f_1 — коэффициент трения скольжения доски о наклонную плоскость, а f_2 — груза о доску.

Р е ш е н и е. Сопоставим три способа решения задачи и применим: 1) уравнения Лагранжа, 2) общее уравнение динамики, 3) теорему о движении центра масс совместно с уравнением динамики относительного движения.

1) Данная система имеет две степени свободы. Выберем обобщенные координаты: $q_1 = x$, $q_2 = s$ (неподвижная ось x связана

с наклонной плоскостью, а подвижная ось s — с доской). Уравнения Лагранжа запишутся в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{s}} - \frac{\partial T}{\partial s} = Q_s. \tag{1}$$

Вычисление обобщенных сил дает

$$Q_x = (M_1 + M_2)\, g \sin\alpha - F_{1\text{тр}} \cos\alpha,$$
$$Q_s = M_2 g \sin\alpha - F_{2\text{тр}} \cos\alpha.$$

Заметим, что когда при определении Q_x всей системе дается возможное перемещение δx, то работа силы трения $F_{2\text{тр}}$ равна нулю, ибо отсутствует перемещение груза относительно доски.

Так как $F_{1\text{тр}} = f_1 (M_1 + M_2)\, g \cos\alpha$, $F_{2\text{тр}} = f_2 M_2 g \cos\alpha$, то обобщенные силы равны

$$Q_x = (M_1 + M_2)\, g\, (\sin\alpha - f_1 \cos\alpha), \tag{2}$$
$$Q_s = M_2 g\, (\sin\alpha - f_2 \cos\alpha).$$

Кинетическая энергия системы равна $T = T^{(1)} + T^{(2)}$, где $T^{(1)}$ — кинетическая энергия доски, $T^{(1)} = \frac{1}{2} M_1 \dot{x}^2$, а $T^{(2)}$ — кинетическая энергия груза, $T^{(2)} = \frac{1}{2} M_2 v_2^2 = \frac{1}{2} M_2 (\dot{x} + \dot{s})^2$. Поэтому

$$T = \frac{M_1 + M_2}{2}\, \dot{x}^2 + \frac{M_2}{2}\, \dot{s}^2 + M_2 \dot{x}\dot{s}. \tag{3}$$

Внеся значения (2) и (3) в уравнения (1), получим

$$(M_1 + M_2)\, \ddot{x} + M_2 \ddot{s} = (M_1 + M_2)\, g\, (\sin\alpha - f_1 \cos\alpha), \tag{4}$$
$$\ddot{x} + \ddot{s} = g\, (\sin\alpha - f_2 \cos\alpha).$$

2) При решении задачи с помощью общего уравнения динамики надо к силам, изображенным на рис. *а*, добавить главные векторы сил инерции доски и груза, проекции которых соответственно равны

$$V_{1x}^{(J)} = -M_1 \ddot{x}, \quad V_{2x}^{(J)} = -M_2 (\ddot{x} + \ddot{s}). \tag{5}$$

В данном случае применение общего уравнения динамики дает

$$(M_1 + M_2)\, g \sin\alpha\, \delta x - F_{1\text{тр}} \delta x + V_{1x}^{(J)} \delta x + V_{2x}^{(J)} \delta x = 0,$$
$$M_2 g \sin\alpha\, \delta s - F_{2\text{тр}} \delta s + V_{2x}^{(J)} \delta s = 0, \tag{6}$$

Использовав формулы (5), внеся значения $F_{1\text{тр}} = f_1 (M_1 + M_2)\, g \cos\alpha$, $F_{2\text{тр}} = f_2 M_2 g \cos\alpha$ и затем сократив уравнения (6) на δx и δs, получим уравнения (4).

3) Эту задачу можно решить с помощью теоремы о движении центра масс системы и уравнения динамики относительного движения груза.

На рис. *б* изображены внешние силы системы. Заметим, что сила трения $F_{2\text{тр}}$ является внутренней силой.

Имеем

$$M\ddot{x}_C = \sum_{k=1}^{n} F^e_{kx}, \quad M_2\ddot{s} = \sum_{k=1}^{n} F_{kx} + J_{ex}. \tag{7}$$

В данном случае

$$M\ddot{x}_C = M_1\ddot{x} + M_2(\ddot{x} + \ddot{s}), \quad \sum F^e_{kx} = (M_1 + M_2)\, g \sin\alpha - F_{1\text{тр}}. \tag{8}$$

Подставив (8) в первое уравнение (7) и приняв во внимание, что $F_{1\text{тр}} = f_1 (M_1 + M_2)\, g \cos\alpha$, получим первое уравнение (4).

Использовав рис. *в*, запишем уравнение динамики относительного движения груза:

$$M_2\ddot{s} = M_2 g \sin\alpha - F_{2\text{тр}} + J_{ex}. \tag{9}$$

Внеся в уравнение (9) $J_{ex} = -M_2\ddot{x}$, $F_{2\text{тр}} = f_2 M_2 g \cos\alpha$, находим второе уравнение (4).

В данном примере наиболее эффективным оказался третий метод, но читателю, не имеющему большого опыта в решении задач, трудно среди множества теорем и уравнений динамики остановить свой выбор на совокупности теорем о движении центра масс и уравнения динамики относительного движения. Решение подобных задач обычно сопровождается рядом неудачных попыток. Применение же уравнений Лагранжа обеспечивает эффективное составление дифференциальных уравнений движения системы.

§ 4. Задачи динамики твердого тела

1. Поступательное движение твердого тела. Наиболее общим приемом составления уравнений динамики поступательного движения твердого тела является применение *теоремы о движении центра масс материальной системы*. Теорема преимущественно используется в проекциях на оси декартовых координат. В число данных и искомых величин должны входить: масса твердого тела, уравнение движения одной из его точек, внешние силы системы. Решение обратных задач упрощается в случаях, когда главный вектор внешних сил, приложенных к твердому телу, постоянен либо зависит *только* от 1) времени, 2) положений точек системы, 3) скоростей точек системы, 4) ускорений точек системы. Труднее решать обратные задачи, в которых главный вектор внешних сил одновременно зависит от времени, положения, скоростей и ускорений точек системы.

В некоторых случаях, используя общие теоремы динамики, можно сразу получить первые интегралы дифференциальных уравнений движения и тем самым упростить решение задачи.

Теорему об изменении количеств движения в интегральной форме применяют в задачах, где *силы или их проекции постоянны либо зависят от времени*, а в число данных и искомых величин входят: масса (вес) твердого тела, внешние силы, приложенные к твердому

телу, промежуток времени действия сил, скорости центра масс (либо любой другой точки) в начале и в конце этого промежутка времени.

Теорему об изменении кинетической энергии в интегральной форме применяют в задачах, где *силы постоянны либо зависят от положений точек твердого тела*, а в число данных и неизвестных величин входят: масса (вес) твердого тела, внешние силы, приложенные к твердому телу, перемещение центра масс (либо любой другой точки), скорости центра масс (либо любой другой точки) в начале и в конце этого перемещения.

2. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Наиболее удобно при решении задач пользоваться *дифференциальным уравнением вращения твердого тела вокруг неподвижной оси*. В число данных и неизвестных должны входить: момент инерции твердого тела относительно оси вращения, уравнение вращения твердого тела, внешние силы, приложенные к твердому телу.

Решение обратных задач упрощается в случаях, когда главный момент внешних сил относительно оси вращения постоянен либо зависит *только* от: 1) времени, 2) угла поворота, 3) угловой скорости, 4) углового ускорения твердого тела. Труднее решать задачи, в которых главный момент внешних сил одновременно зависит от времени, угла поворота, угловой скорости и углового ускорения твердого тела. В этих случаях легко решаются задачи, которые приводятся к линейным дифференциальным уравнениям.

Можно получить первые интегралы дифференциального уравнения вращения твердого тела вокруг неподвижной оси, используя *теорему об изменении кинетической энергии материальной системы в интегральной форме*. Это осуществимо в задачах, где *главный момент внешних сил постоянен либо зависит от угла поворота твердого тела*, а в число данных и неизвестных величин входят: момент инерции твердого тела относительно оси вращения, внешние силы, приложенные к твердому телу, угловое перемещение, угловые скорости твердого тела в начале и в конце этого углового перемещения.

При определении *динамических давлений на ось твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси*, целесообразно применять теоремы о движении центра масс и об изменении главного момента количеств движения материальной системы либо пользоваться методом кинетостатики (в случае плоской фигуры, перпендикулярной к оси вращения, достаточно применить теорему о движении центра масс).

Задача 11.8. Стержень длиной $2l$ и массы M вращается в горизонтальной плоскости вокруг перпендикулярной оси z, проходящей через его конец (рис. *а*).

Какую угловую скорость ω_0 надо сообщить стержню для того, чтобы он сделал n оборотов? Решить задачу в двух вариантах, считая, что момент сопротивления: 1) постоянен и равен $m_z = -\alpha$; 2) пропорционален угловой скорости стержня $m_z = -\beta\dot{\varphi}$.

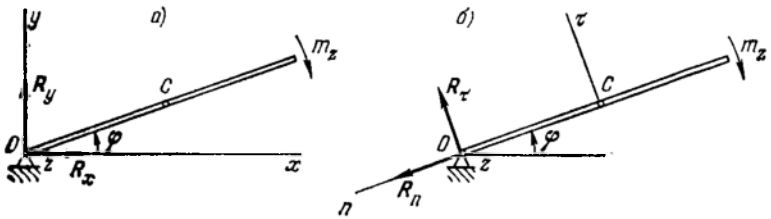
Р е ш е н и е. В первом варианте при $m_z = -\alpha$ можно применить теорему об изменении кинетической энергии в интегральной форме. В данном случае

$$T_1 = \frac{1}{2} I_z \omega_0^2 = \frac{2}{3} M l^2 \omega_0^2, \quad T_2 = 0,$$

$$\sum A(F_k^e) = -\int_0^{2\pi n} m_z \, d\varphi = -2\pi n\alpha.$$

Подставив эти значения в $T_2 - T_1 = \sum_{k=1}^{n} A(F_k^e)$, определим ω_0.

Во втором варианте мы не можем воспользоваться этой теоремой, ибо при моменте, зависящем от угловой скорости, нельзя определить его работу: $A(m_z) = -\beta \int_0^{2\pi n} \dot{\varphi} \, d\varphi$. Мы не можем вычислить



К задаче 11.8.

этот интеграл, ибо неизвестна зависимость $\dot{\varphi}$ от φ. В этом случае надо применить дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси:

$$I_z \ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^{n} m_z(F_k^e).$$

Имеем $\frac{4}{3} M l^2 \ddot{\varphi} = -\beta\dot{\varphi}$. Умножив уравнение на $d\varphi$, заменив $\ddot{\varphi}\, d\varphi$ на $\dot{\varphi}\, d\dot{\varphi}$ и проинтегрировав его, найдем зависимость $\dot{\varphi}$ от φ и определим ω_0 (конечно, дифференциальным уравнением вращения вокруг неподвижной оси можно было воспользоваться и в первом варианте, но при этом решение задачи было бы более длинным).

Допустим, что по условию требуется также найти давление стержня на ось вращения z. Здесь можно воспользоваться теоремой о движении центра масс в проекциях на неподвижные оси x и y. Заметив, что $x_C = l\cos\varphi$, $y_C = l\sin\varphi$, вычислим: $\ddot{x}_C = -l\dot{\varphi}^2\cos\varphi - l\ddot{\varphi}\sin\varphi$, $\ddot{y}_C = -l\dot{\varphi}^2\sin\varphi + l\ddot{\varphi}\cos\varphi$. Кроме того, $\sum F_{kx}^e = R_x$,

$\sum F^e_{ky} = R_y$. Подставив значения $\ddot{x}_C$, $\ddot{y}_C$, $\sum F^e_{kx}$ и $\sum F^e_{ky}$ в уравнения $M\ddot{x}_C = \sum_{k=1}^{n} F^e_{kx}$, $M\ddot{y}_C = \sum_{k=1}^{n} F^e_{ky}$, найдем R_x и R_y. Проекции искомого давления N равны $N_x = -R_x$, $N_y = -R_y$, т. е.

$$N_x = Ml(\dot{\varphi}^2 \cos\varphi + \ddot{\varphi}\sin\varphi), \qquad N_y = Ml(\dot{\varphi}^2 \sin\varphi - \ddot{\varphi}\cos\varphi).$$

Нетрудно видеть, что N_x и N_y переменны. Для определения их значений надо предварительно с помощью дифференциального уравнения вращения найти зависимости $\ddot{\varphi}$ и $\dot{\varphi}$ от угла поворота φ. Модуль N равен

$$N = \sqrt{N_x^2 + N_y^2} = Ml\sqrt{\ddot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^4}.$$

Заметим, что для определения давления целесообразнее воспользоваться теоремой о движении центра масс в проекциях на подвижные оси натурального триэдра траектории точки C (рис. *б*): $Mw_{C_\tau} = \sum_{k=1}^{n} F^e_{k\tau}$, $Mw_{C_n} = \sum_{k=1}^{n} F^e_{kn}$. Учтя, что $w_{C_\tau} = l\ddot{\varphi}$, $w_{C_n} = l\dot{\varphi}^2$, а $\sum F^e_{k\tau} = R_\tau$, $\sum F^e_{kn} = R_n$, получим $R_\tau = Ml\ddot{\varphi}$, $R_n = Ml\dot{\varphi}^2$. Значит, $N_\tau = -R_\tau = -Ml\ddot{\varphi}$, $N_n = -R_n = -Ml\dot{\varphi}^2$. Модуль искомого давления N равен $N = \sqrt{N_\tau^2 + N_n^2} = Ml\sqrt{\ddot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^4}$.

Определение давления на неподвижную ось с помощью неподвижных осей xy и подвижных осей натурального триэдра вновь подчеркивает важность удачного выбора системы отсчета.

3. Плоское движение твердого тела. Наиболее общим приемом составления уравнений в задачах, где определяются реакции связей либо закон движения, является применение *дифференциальных уравнений плоского движения твердого тела.* В число данных и неизвестных величин должны входить: масса и момент инерции твердого тела относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно к неподвижной плоскости, уравнения движения центра масс, уравнение вращения твердого тела вокруг оси, проходящей через центр масс перпендикулярно к неподвижной плоскости, внешние силы, приложенные к твердому телу.

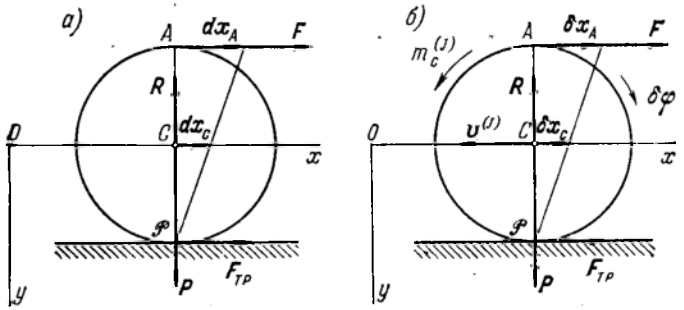
Решение обратных задач упрощается в случаях, когда главный вектор и главный момент внешних сил относительно оси, проходящей через центр масс твердого тела перпендикулярно к неподвижной плоскости, являются постоянными либо зависят только: 1) от времени, 2) от положения точек, 3) от скоростей точек, 4) от ускорений точек. Труднее решать задачи, в которых главный вектор и главный момент внешних сил одновременно зависят от времени, положения, скоростей и ускорений точек.

Если требуется определить только закон плоского движения твердого тела, то для составления дифференциальных уравнений движения, не содержащих реакций связей, можно при наличии

идеальных связей, наложенных на твердое тело, применять уравнения Лагранжа или общее уравнение динамики.

Можно упростить интегрирование дифференциальных уравнений движения, используя *теорему об изменении кинетической энергии материальной системы в интегральной форме*, в задачах, где *главный вектор и главный момент сил, приложенных к твердому телу, постоянны либо зависят от положений точек (угла поворота) твердого тела*, а в число данных и неизвестных величин входят масса и момент инерции твердого тела относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно к неподвижной плоскости, силы, приложенные к твердому телу, перемещения точек твердого тела (угловые перемещения), скорости точек твердого тела (угловые скорости) в начале и в конце этих перемещений.

Задача 11.9. На обод колеса массы M намотана невесомая нить, к концу которой приложена горизонтальная сила F (рис. *а*).



К задаче 11.9.

Определить ускорение центра тяжести C колеса при качении его без скольжения по горизонтальной дороге. В начальный момент колесо находилось в покое. Считать его однородным круглым диском. Трением качения пренебречь.

Р е ш е н и е. Для определения скорости v_C можно воспользоваться рядом теорем и уравнений динамики. Применим: 1) теорему об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме, 2) уравнения Лагранжа, 3) общее уравнение динамики, 4) метод кинетостатики, 5) дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела.

1) Кинетическая энергия колеса равна $T = \frac{1}{2} Mv_C^2 + \frac{1}{2} I_C\omega^2 = \frac{3}{4} M\dot{x}_C^2$. Элементарная работа сил, приложенных к колесу, на перемещении dx_C (рис. *а*) равна $\delta A = F\,dx_A = 2F\,dx_C$. (Напомним, что при качении без скольжения работа силы трения $F_{тр}$ равна нулю.) Подставив T и δA в теорему об изменении кинетиче-

ской энергии в дифференциальной форме $dT = \sum_{k=1}^{n} \delta A_n$, получим $\frac{3}{2} M \dot{x}_C d\dot{x}_C = 2F\, dx_C$. Так как

$$\dot{x}_C d\dot{x}_C = \frac{dx_C}{dt} d\dot{x}_C = \ddot{x}_C dx_C,$$

то получим $\ddot{x}_C = \frac{4}{3}\frac{F}{M}$.

2) Вычислим обобщенную силу Q_x. Так как $\delta A = F\delta x_A = 2F\delta x_C$, то $Q_x = 2F$. Подставив Q_x и $T = \frac{3}{4} M \dot{x}_C^2$ в уравнение Лагранжа $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x$, получим $\ddot{x}_C = \frac{4}{3}\frac{F}{M}$.

3) Общее уравнение динамики в данном случае (рис. *б*) имеет вид $F\delta x_A + V_k^{(J)}\delta x_C + m_C^{(J)}\delta\varphi = 0$.

Приняв во внимание, что

$$\delta x_A = 2\delta x_C, \quad V_x^{(J)} = -M\ddot{x}_C,$$

$$m_C^{(J)} = -I_C\ddot{\varphi} = -\frac{Mr^2}{2}\frac{\ddot{x}_C}{r} = -\frac{Mr}{2}\ddot{x}_C, \quad \delta\varphi = \frac{\delta x_C}{r},$$

получим $\ddot{x}_C = \frac{4}{3}\frac{F}{M}$.

4) Применив метод кинетостатики (см. рис. *б*), составим уравнения «равновесия»: $\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0$, $\sum_{k=1}^{n} m_C(\boldsymbol{F}_k) = 0$. Имеем $F + F_{\text{тр}} + V_x^{(J)} = 0$, $Fr - F_{\text{тр}}r + m_C^{(J)} = 0$. Так как по-прежнему $V_x^{(J)} = -M\ddot{x}_C$, $m_C^{(J)} = -\frac{Mr}{2}\ddot{x}_C$, то уравнения примут вид $F + F_{\text{тр}} - M\ddot{x}_C = 0$, $F - F_{\text{тр}} - \frac{M}{2}\ddot{x}_C = 0$. Исключив из этой системы $F_{\text{тр}}$, находим $\ddot{x}_C = \frac{4}{3}\frac{F}{M}$.

5) Запишем дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела: $M\ddot{x}_C = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}^e$, $M\ddot{y}_C = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}^e$, $I_C\ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^{n} m_C(\boldsymbol{F}_k^e)$. В данном случае (см. рис. *а*) они имеют вид

$$M\ddot{x}_C = F + F_{\text{тр}}, \quad M\ddot{y}_C = Mg - R, \quad \frac{Mr^2}{2}\ddot{\varphi} = Fr - F_{\text{тр}}r.$$

Учтя, что при качении колеса без скольжения $\ddot{x}_C = r\ddot{\varphi}$, после исключения $F_{\text{тр}}$ из первого и третьего уравнений получим $\ddot{x}_C = \frac{4}{3}\frac{F}{M}$.

Сопоставление пяти методов решения этой задачи показывает, что наиболее эффективными являются первые два (теорема об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме и уравнения Лагранжа). С помощью общего уравнения динамики также (но

несколько сложнее) составляется лишь одно уравнение. Однако при этом приходится использовать формальный прием введения сил инерции. Применение метода кинетостатики и дифференциальных уравнений плоского движения приводит к составлению не одного, а двух уравнений и поэтому является более громоздким. При этом метод кинетостатики более сложен, ибо дополнительно связан с введением сил инерции.

Вместе с тем, если бы требовалось, кроме ускорения центра тяжести колеса, также определить силу трения $F_{\text{тр}}$, то, пользуясь первыми тремя методами, нам пришлось бы дополнительно составить дифференциальное уравнение плоского движения $M\ddot{x}_C = F + F_{\text{тр}}$ либо тождественное ему уравнение кинетостатики: $F + F_{\text{тр}} + V_x^{(J)} = 0$, где $V_x^{(J)} = -M\ddot{x}_C$, и, подставив значение $\ddot{x}_C = \frac{4}{3}\frac{F}{M}$, найти $F_{\text{тр}} = \frac{1}{3}F$.

Итак, если по условию задачи требуется определить лишь уравнения движения, то следует пользоваться одним из первых трех методов. Если же, помимо уравнений движения, необходимо также определить какие-либо силы, то следует пользоваться двумя последними методами (отдавая предпочтение дифференциальным уравнениям плоского движения твердого тела).

4. Вращение твердого тела вокруг неподвижной точки и движение свободного твердого тела рассмотрены в третьем томе. В этом томе дана только приближенная теория гироскопов.

В случае симметричного твердого тела (гироскопа), угловая скорость вращения которого вокруг оси симметрии значительно больше угловой скорости вращения вокруг других осей, можно при приближенном решении задач применять *теорему Резаля*. С помощью приближенной теории гироскопов возможно определение угловых скоростей вращения либо динамических давлений на связи.

§ 5. Общие замечания по решению задач динамики

1. Эффективность решения задач динамики в значительной мере зависит от удачного выбора системы координат.

2. Основными и вместе с тем наиболее трудными являются обратные задачи динамики, в которых по заданным силам определяется движение. При этом приходится интегрировать систему дифференциальных уравнений движения. Эти задачи редко удается решить в квадратурах. Иногда приходится применять различные приближенные методы интегрирования.

3. Удобство применения общих теорем динамики заключается в возможности упростить интегрирование дифференциальных уравнений движения системы. В формулировки общих теорем динамики не входят внутренние силы, определение которых обычно связано со значительными трудностями (это замечание о внутренних силах в равной мере относится к дифференциальному уравнению вращения

твердого тела вокруг неподвижной оси и дифференциальным уравнениям плоского движения твердого тела). Лишь в формулировку теоремы об изменении кинетической энергии материальной системы входят не только внешние, но и внутренние силы (в частном случае неизменяемой материальной системы, например абсолютно твердого тела, и в этой теореме фигурируют только внешние силы). Однако, как показано выше, общие теоремы не всегда эффективны.

4. Наиболее общим приемом составления дифференциальных уравнений движения материальной системы является применение уравнений Лагранжа. (Применение общего уравнения динамики является более трудным и длинным методом в связи с использованием сил инерции.)

Вместо сочетания некоторых общих теорем и уравнений динамики, выбор которых представляет значительные трудности, применение уравнений Лагранжа является общим приемом, который приводит к составлению дифференциальных уравнений движения. Удачный выбор обобщенных координат обеспечивает относительную простоту составления этих уравнений. Удобно и то, что в составленные дифференциальные уравнения движения не входят реакции идеальных связей, определение которых обычно связано с большими трудностями (реакции связей при движении системы являются функциями от времени, положения, скоростей и ускорений точек системы).

Однако применение уравнений Лагранжа приводит к относительно меньшей наглядности, а также к необходимости интегрирования дифференциальных уравнений движения в тех случаях, когда первые интегралы могут быть получены из общих теорем. Кроме того, уравнениями Лагранжа нецелесообразно пользоваться при наличии сил трения, зависящих от переменного нормального давления.

5. Применяя общие теоремы динамики в абсолютном движении, дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси, дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела, уравнения Лагранжа, часто в число рассматриваемых сил ошибочно включают силы инерции. Следует помнить, что силами инерции следует пользоваться только в случае применения: а) метода кинетостатики, б) общего уравнения динамики, в) уравнений и общих теорем в относительном (либо переносном) движении материальной точки или материальной системы.

6. При решении задач с помощью общих теорем динамики, а также при применении дифференциального уравнения вращения твердого тела вокруг неподвижной оси и дифференциальных уравнений плоского движения твердого тела силы разделяются на внешние и внутренние.

При решении задач с помощью уравнений Лагранжа, общего уравнения динамики и метода кинетостатики силы разделяются на активные и реакции связей.

ГЛАВА XII

УДАР

§ 1. Удар двух тел. Удар тела о неподвижную преграду

Ударом называется действие силы, достигающей по модулю очень больших значений в течение весьма малого промежутка времени. Промежуток времени часто равен тысячным и даже десятитысячным долям секунды.

Модуль мгновенной силы, т. е. силы, приложенной к телу во время удара, может быть в тысячи и даже в десятки тысяч раз превосходить силу тяжести тела.

В теории удара классической механики вводится следующая идеализация этого процесса — совершается предельный переход к бесконечно большим силам, действующим бесконечно малое время (мгновенные силы) и имеющим конечный импульс $\boldsymbol{S}$.

Напомним, что если немгновенная сила $\boldsymbol{F}$ действует в течение времени τ, начиная свое действие в момент времени t, то ее импульс имеет вид

$$\int_t^{t+\tau} \boldsymbol{F}\,dt.$$

Для определения ударного импульса $\boldsymbol{S}$, соответственно со сказанным выше, совершаем предельный переход, устремляя $\boldsymbol{F} \to \infty$, а $\tau \to 0$, т. е.

$$\boldsymbol{S} = \lim_{\substack{\tau \to 0 \\ \boldsymbol{F} \to \infty}} \int_{\tau}^{t+\tau} \boldsymbol{F}\,dt.$$

Здесь предполагается, что бесконечно большая мгновенная сила действует бесконечно малый промежуток времени; при этом считается, что ударный импульс $\boldsymbol{S}$ имеет конечную величину.

Применяя теорему об изменении количества движения в интегральной форме при ударе, следует учитывать только импульсы мгновенных сил.

При действии мгновенной силы перемещение точки приложения силы равно нулю, а скорость точки скачкообразно меняется:

$$\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_1 + \frac{\boldsymbol{S}}{m}.$$

В действительности скачок скорости происходит в течение очень малого промежутка времени.

Линией центров называется ось, проходящая через центры тяжести соударяющихся тел.

Удар называется центральным, если точка K соприкосновения соударяющихся тел лежит на линии центров C_1C_2, а касательная плоскость, проведенная в точке соприкосновения к поверхностям этих тел, перпендикулярна к линии центров (рис. 12.1).

Удар называется прямым, если скорости центров тяжести соударяющихся тел в начале удара лежат на линии центров (рис. 12.2).

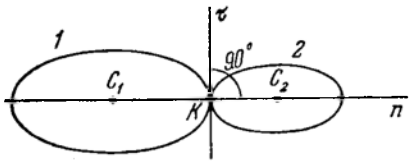


Рис. 12.1.

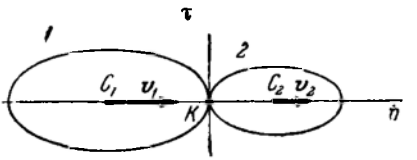


Рис. 12.2.

Если хотя бы одна из скоростей центров тяжести соударяющихся тел в начале удара не лежит на линии центров, то удар называется косым (рис. 12.3).

Рассмотрение процесса удара по существу требует выхода за рамки классической механики — отказа от схемы абсолютно твердого тела и перехода к схеме деформируемого тела. В зависимости от степени восстановления недеформированного состояния удары разделяются на абсолютно неупругие, упругие и абсолютно упругие.

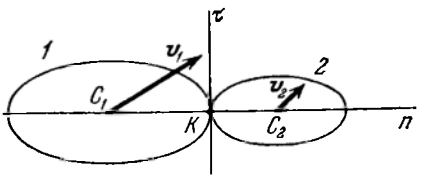


Рис. 12.3.

Удар называется *абсолютно неупругим*, если недеформированное состояние соударяющихся тел не восстанавливается. В конце удара центры тяжести тел движутся с одинаковыми скоростями (это — абстракция).

Удар называется *упругим*, если недеформированное состояние не полностью восстанавливается. В конце удара центры тяжести тел движутся с разными скоростями.

Удар называется *абсолютно упругим*, если недеформированное состояние полностью восстанавливается (это — абстракция).

Для рассмотрения прямого центрального абсолютно неупругого удара двух тел введем обозначения:

Номер тела	Масса тела	Скорость	
		в начале удара	в конце удара
1	m_1	v_1	u
2	m_2	v_2	u

Тогда проекция на ось n (рис. 12.4) общей скорости соударяющихся тел в конце удара равна

$$u_n = \frac{m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n}}{m_1 + m_2} \qquad (1^*)$$

(ось n проведена вдоль линии центров).

Проекция на ось n импульса мгновенной силы определяется формулой

$$S_n = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(v_{1n} - v_{2n}).$$

Для рассмотрения прямого центрального упругого удара двух тел разделим процесс удара на два этапа.

В течение первого этапа совершается деформация соударяющихся тел. В течение второго этапа — частичное восстановление недеформированного состояния. В момент окончания первого этапа и начала второго центры тяжести тел обладают одинаковыми скоростями, которые они имели бы в конце соответствующего абсолютно неупругого удара. В конце второго этапа центры тяжести тел имеют уже различные скорости u_1 и u_2. *Коэффициентом восстановления* недеформированного состояния k называется отношение импульса мгновенной силы второго этапа к импульсу мгновенной силы первого этапа:

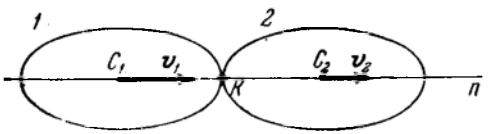


Рис. 12.4.

$$k = \frac{S_{II}}{S_I}.$$

Введение в это определение мгновенных сил возвращает нас в теорию удара классической механики.

Коэффициент восстановления, являющийся безразмерной величиной, изменяется в пределах от 0 до 1 ($0 \leqslant k \leqslant 1$): при абсолютно неупругом ударе $k = 0$, при упругом ударе $k < 1$, при абсолютно упругом ударе $k = 1$.

Введем обозначения

Номер тела	Масса тела	Скорость		
		в начале удара	в конце 1 этапа	в конце удара
1	m_1	v_1	u	u_1
2	m_2	v_2		u_2
		I этап		II этап

Тогда проекции на ось n скоростей соударяющихся тел в конце удара равны

$$u_{1n} = u_n + k(u_n - v_{1n}), \quad u_{2n} = u_n + k(u_n - v_{2n}), \tag{2*}$$

где

$$u_n = \frac{m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n}}{m_1 + m_2}$$

(ось n проведена вдоль линии центров C_1C_2). Из этих формул можно получить выражение коэффициента восстановления

$$k = \frac{u_{1n} - u_n}{v_n - v_{1n}},$$

которое иногда используется в качестве определения этого понятия.

В случае абсолютно упругого удара, т.е. при $k = 1$:

$$u_{1n} = 2u_n - v_{1n},$$
$$u_{2n} = 2u_n - v_{2n}.$$

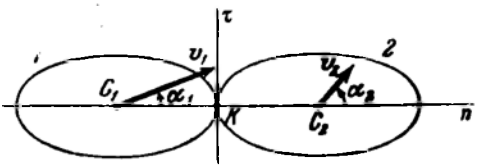


Рис. 12.5.

При рассмотрении косого центрального упругого удара двух поступательно движущихся тел поверхности соударяющихся тел будем считать абсолютно гладкими. Ось n проводится вдоль линии центров C_1C_2 (рис. 12.5). Ось τ перпендикулярна к оси n. Проекции скоростей центров тяжести соударяющихся тел в начале удара имеют вид

$$v_{1n} = v_1 \cos\alpha_1, \quad v_{2n} = v_2 \cos\alpha_2,$$
$$v_{1\tau} = v_1 \sin\alpha_1, \quad v_{2\tau} = v_2 \sin\alpha_2.$$

Проекции скоростей центров тяжести соударяющихся тел в конце удара (рис. 12.6) равны

$$u_{1\tau} = v_{1\tau}, \quad u_{2\tau} = v_{2\tau}, \quad u_{1n} = u_n + k(u_n - v_{1n}), \quad u_{2n} = u_n + k(u_n - v_{2n}), \tag{3*}$$

где

$$u_n = \frac{m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n}}{m_1 + m_2}$$

и

$$\operatorname{tg}\beta_1 = \frac{u_{1\tau}}{u_{1n}} = \frac{v_{1\tau}}{u_n + k(u_n - v_{1n})}, \quad \operatorname{tg}\beta_2 = \frac{u_{2\tau}}{u_{2n}} = \frac{v_{2\tau}}{u_n + k(u_n - v_{2n})}. \tag{4*}$$

Модули скоростей центров тяжести соударяющихся тел в конце удара равны

$$u_1 = \sqrt{u_{1\tau}^2 + u_{1n}^2}, \quad u_2 = \sqrt{u_{2\tau}^2 + u_{2n}^2}. \tag{5*}$$

Указание. Задачи на определение скоростей соударяющихся тел в конце центрального косого упругого удара рекомендуется решать в такой последовательности:

1) выбрать тело или тела, которые нужно рассмотреть для определения неизвестных величин;

2) направить ось n вдоль линии центров, ось τ — перпендикулярно к ней;

3) вычислить проекции v_{1n}, v_{2n}, $v_{1\tau}$, $v_{2\tau}$ на оси n и τ скоростей соударяющихся тел в начале удара;

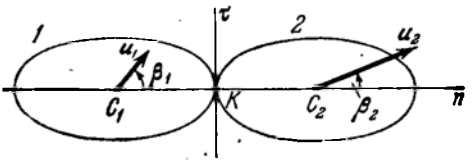


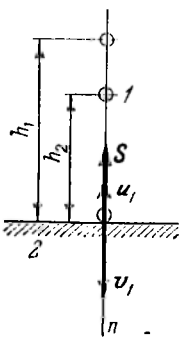
Рис. 12.6.

4) вычислить проекцию общей скорости u_n соударяющихся тел на ось n в конце абсолютно неупругого удара по формуле (1*);

5) вычислить проекции скоростей u_{1n}, u_{2n}, $u_{1\tau}$, $u_{2\tau}$ соударяющихся тел на оси n и τ в конце удара по формулам (3*);

6) определить модули скоростей обоих тел в конце удара по формулам (5*). Направления скоростей определяются формулами (4*).

При ударе тела о неподвижную плоскость следует считать массу неподвижной плоскости бесконечно большой, а скорость до удара равной нулю ($m_2 = \infty$, $v_2 = 0$).



К задаче 12.1.

В случае центральных прямых ударов двух тел вычисления упрощаются, так как проекции скоростей на ось τ обращаются в нуль.

Задача 12.1. С какой высоты h_1 падает шарик на неподвижную горизонтальную плиту, если после упругого удара он поднимается на высоту $h_2 = 81$ см? Коэффициент восстановления равен 0,9.

Решение. Ось n направим по вертикали вниз. Обозначим: $\boldsymbol{v}_1$ — скорость центра тяжести шарика в начале удара, $\boldsymbol{u}_1$ — в конце удара, m_1 — масса шарика.

Заметим, что если бы удар был абсолютно неупругим, то шарик в конце удара остался бы неподвижным, т. е.

$$\boldsymbol{u} = 0. \qquad (1)$$

Запишем теорему об изменении количества движения материальной точки в интегральной форме в приложении к мгновенным силам:

$$m\boldsymbol{v}_2 - m\boldsymbol{v}_1 = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{S}(\boldsymbol{F}_k). \qquad (2)$$

В правой части уравнения (2) стоит векторная сумма импульсов мгновенных сил.

Единственной мгновенной силой является реакция плиты. Ударный импульс $\boldsymbol{S}$ этой реакции направлен перпендикулярно к неподвижной плите (см. рисунок к задаче). Поэтому уравнение (2) в приложении к шарику принимает вид

$$m_1\boldsymbol{u}_1 - m_1\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{S}. \tag{3}$$

Спроектировав векторное равенство (3) на ось n, имеем

$$m_1u_{1n} - m_1v_{1n} = -S. \tag{4}$$

Разделим процесс удара на два этапа. В течение этапа I совершается деформация шарика. В течение этапа II происходит частичное восстановление недеформированного состояния. В конце этапа I и в начале этапа II центр тяжести шарика приобретает скорость $\boldsymbol{u}$, которую он имел бы в случае абсолютно неупругого удара. Поэтому уравнение (4) для этапов I и II получит вид

I $$m_1u_n - m_1v_{1n} = -S_{\text{I}},$$

II $$m_1u_{1n} - m_1u_n = -S_{\text{II}}.$$

Разделив второе уравнение на первое и приняв во внимание, что отношение импульсов $S_{\text{II}}/S_{\text{I}}$ является коэффициентом восстановления k, получим

$$\frac{u_{1n} - u_n}{u_n - v_{1n}} = k. \tag{5}$$

Из формулы (5), учитывая (1), находим

$$u_{1n} = -kv_{1n}. \tag{6}$$

Знак минус указывает, что скорость центра тяжести шарика в конце удара направлена вверх. Зависимость между модулями скоростей центра тяжести шарика в начале и в конце удара имеет вид

$$u_1 = kv_1. \tag{7}$$

Так как шарик совершал свободное падение, то

$$v_1 = \sqrt{2gh_1}. \tag{8}$$

После упругого удара шарик начинает подъем вверх со скоростью u_1. В наивысшей точке подъема h_2 скорость шарика равна нулю. Следовательно,

$$u_1 = \sqrt{2gh_2}. \tag{9}$$

После подстановки значений v_1 и u_1 из формул (8) и (9) в формулу (7) находим

$$\sqrt{h_2} = k\sqrt{h_1}, \tag{10}$$

откуда

$$h_1 = \frac{h_2}{k^2} = \frac{81}{0{,}9^2} = 1 \text{ м}.$$

Формула (10), записанная в виде

$$k = \sqrt{h_2/h_1}, \tag{11}$$

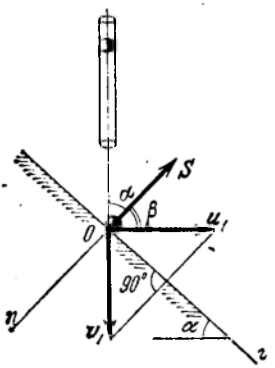
дает возможность экспериментально определить коэффициент восстановления при упругом ударе.

В случае абсолютно неупругого удара шарик от плоскости не отскакивает, т. е. $h_2 = 0$. Из формулы (11) получим $k = 0$.

В случае абсолютно упругого удара шарик должен отскочить в исходное положение, т. е. $h_2 = h_1$. Из формулы (11) находим $k = 1$.

При упругом ударе $h_2 < h_1$ и, следовательно, $0 < k < 1$. Так, при ударе деревянного шарика о стальную плиту $k = 0{,}55$, при ударе шарика из слоновой кости о плиту из того же материала $k = 0{,}90$, при ударе стеклянного шарика о стеклянную плиту $k = 0{,}94$ и т. д.

Задача 12.2. Свободно падающий шарик ударяется о неподвижную наклонную плоскость, расположенную под углом α к горизонту. Определить направление скорости шарика в конце упругого удара, если коэффициент восстановления равен k. Шарик и плоскость считать идеально гладкими.



К задаче 12.2.

Р е ш е н и е. Направим ось τ вдоль наклонной плоскости, а ось n к ней перпендикулярно в точке падения шарика на наклонную плоскость.

Углы α и β, обозначенные при вершине O, соответственно называются углом падения и углом отражения.

Определим проекции скорости центра тяжести шарика $\boldsymbol{v}_1$ в начале удара на оси n и τ:

$$v_{1n} = v_1 \cos\alpha, \quad v_{1\tau} = v_1 \sin\alpha. \tag{1}$$

Единственной мгновенной силой является реакция наклонной плоскости. Ударный импульс $\boldsymbol{S}$ этой реакции при отсутствии силы трения направлен перпендикулярно к плоскости (см. рисунок).

Воспользуемся уравнением (3) предыдущей задачи:

$$m_1\boldsymbol{u}_1 - m_1\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{S}. \tag{2}$$

Здесь $\boldsymbol{u}_1$ — скорость центра тяжести шарика в конце удара, m_1 — масса шарика.

Спроектируем уравнение (2) на ось τ. Учтя, что ударный импульс $\boldsymbol{S}$ при отсутствии сил трения перпендикулярен к τ, находим $m_1u_{1\tau} - m_1v_{1\tau} = 0$, откуда

$$u_{1\tau} = v_{1\tau}.$$

Приняв во внимание вторую формулу (1), имеем

$$u_{1\tau} = v_1 \sin\alpha. \tag{3}$$

Воспользовавшись формулой (6) предыдущей задачи, запишем

$$u_{1n} = -kv_{1n}.$$

Учтя первую формулу (1), находим

$$u_{1n} = -kv_1 \cos \alpha. \tag{4}$$

Искомый тангенс угла отражения β дается формулой

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{|u_{1\tau}|}{|u_{1n}|}.$$

Внеся значения (3) и (4), получим

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{k}. \tag{5}$$

Формула (5) указывает удобный способ экспериментального определения коэффициента восстановления k при упругом ударе. Схема прибора основана на идее рассмотренной задачи. Наклонная плоскость может устанавливаться под разными углами α к горизонту, поворачиваясь вокруг оси O, перпендикулярной к плоскости рисунка. Свободное падение шарика обеспечивается вертикальными направляющими (см. рисунок). Угол падения α и угол отражения β измеряются с помощью угломера, установленного на приборе.

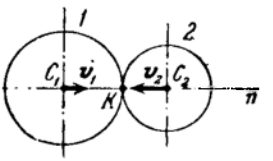
Из формулы (5) получим

$$k = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta}.$$

В случае абсолютно упругого удара угол падения α равен углу отражения β, откуда $k = 1$.

Задача 12.3. Скорости центров тяжести двух шаров, двигавшихся навстречу друг другу, равны $v_1 = 6$ м/с, $v_2 = 10$ м/с. Масса первого шара равна $m_1 = 10$ кг.

Определить массу второго шара и величину ударного импульса S, если после абсолютно неупругого удара шары остановились.



К задаче 12.3.

Р е ш е н и е. Направляем ось n вдоль линии центров C_1C_2.

Проекции скоростей центров тяжести шаров на ось n в начале удара будут

$$v_{1n} = 6 \text{ м/с}, \quad v_{2n} = -10 \text{ м/с}.$$

Так как, по условию, проекция общей скорости на ось n после неупругого удара равна нулю, то

$$\frac{m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n}}{m_1 + m_2} = 0,$$

т. е.

$$m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n} = 0,$$

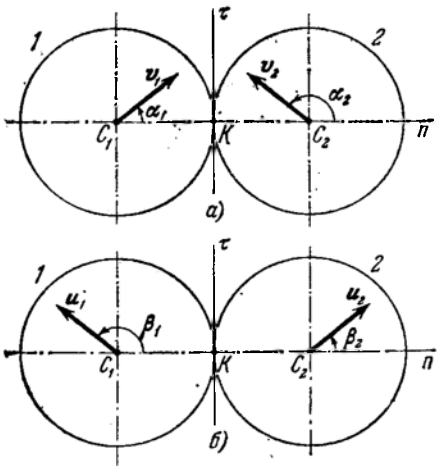
откуда

$$m_2 = -\frac{m_1 v_{1n}}{v_{2n}} = 6 \text{ кг}.$$

Проекция на ось n ударного импульса равна

$$S_n = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(v_{1n} - v_{2n}) = \frac{10 \cdot 6}{10 + 6}(6 + 10) = 60 \text{ кг} \cdot \text{м/с}.$$

Задача 12.4. В момент столкновения двух одинаковых поступательно движущихся шаров скорости их центров тяжести были равны по модулю $|\boldsymbol{v}_1| = |\boldsymbol{v}_2| = v$. Шары были расположены симметрично относительно оси τ, причем $\alpha_2 = 180° - \alpha_1$ (рис. *а*).



К задаче 12.4.

Определить скорости центров тяжести шаров в конце удара, считая удар абсолютно упругим. Оси n и τ обозначены на рис. *а*.

Р е ш е н и е. Вычислим проекции $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ на оси n и τ:

$$v_{1n} = v\cos\alpha_1, \quad v_{1\tau} = v\sin\alpha_1,$$
$$v_{2n} = -v\cos\alpha_1, \quad v_{2\tau} = v\sin\alpha_1$$

(при вычислении этих проекций скоростей учитываем, что $|\boldsymbol{v}_1| = |\boldsymbol{v}_2| = v$ и $\alpha_2 = 180° - \alpha_1$).

Проекцию общей скорости шаров на ось n в случае их абсолютно неупругого удара вычисляем по формуле (1*). После подстановки $m_1 = m_2 = m$, $v_{1n} = v\cos\alpha_1$, $v_{2n} = -v\cos\alpha_1$ находим

$$u_n = 0. \qquad (1)$$

Проекции скоростей центров тяжести шаров на касательную τ в начале и в конце удара:

$$u_{1\tau} = v_{1\tau} = v\sin\alpha_1, \quad u_{2\tau} = v_{2\tau} = v\sin\alpha_1,$$

т. е.

$$u_{1\tau} = u_{2\tau} = v\sin\alpha_1. \qquad (2)$$

Проекции скоростей центров тяжести на нормаль n в конце удара вычисляются по формулам (2*). Воспользовавшись значением u_n из формулы (1), для случая абсолютно упругого удара, т. е. при $k = 1$, находим

$$u_{1n} = -v\cos\alpha_1, \quad u_{2n} = v\cos\alpha_1. \qquad (3)$$

Модули скоростей центров тяжести шаров в конце удара вычисляются по формулам (5*).

Использовав результаты (2) и (3), получим

$$u_1 = u_2 = v.$$

Направления этих скоростей определяются с помощью углов β_1 и β_2 (рис. *б*):

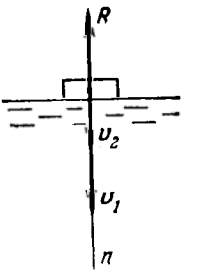
$$\operatorname{tg}\beta_1 = \frac{u_{1\tau}}{u_{1n}} = -\operatorname{tg}\alpha_1, \quad \operatorname{tg}\beta_2 = \frac{u_{2\tau}}{u_{2n}} = \operatorname{tg}\alpha_1,$$

т. е.

$$\beta_1 = 180^\circ - \alpha_1 = \alpha_2, \quad \beta_2 = \alpha_1.$$

Итак, рассматриваемый косой удар не изменяет модулей скоростей центров тяжести шаров, а углы, которые векторные скорости образуют с осью n, меняются местами.

В заключение рассмотрим две задачи, в которых не требуется определять скорости соударяющихся тел.



К задаче 12.5.

Задача 12.5. При неудачном прыжке с вышки в воду спортсмен массы $m = 60$ кг плашмя вошел в соприкосновение с водой со скоростью 20 м/с. При ударе о поверхность воды эта скорость в течение 0,5 с уменьшилась в 10 раз.

Определить среднее значение реакции воды (см. рисунок), считая человека точечной массой. Применить теорему о среднем.

Р е ш е н и е. Направим ось n по вертикали вниз. Воспользуемся теоремой об изменении количества движения материальной точки в проекции на ось n в приложении к мгновенным силам:

$$mv_{2n} - mv_{1n} = \sum_{k=1}^{n} S_n(\boldsymbol{F}_k), \tag{1}$$

где $\boldsymbol{F}_k$ — k-я мгновенная сила.

В данном случае

$$v_{1n} = 20 \text{ м/с}, \quad v_{2n} = \frac{v_{1n}}{10} = 2 \text{ м/с}. \tag{2}$$

Единственной мгновенной силой является реакция $\boldsymbol{R}$ воды. Поэтому

$$\sum S_n(\boldsymbol{F}_k) = \int_t^{t+\tau} R_n\,dt, \tag{3}$$

где t — момент начала удара, а τ — его продолжительность.

Применив теорему о среднем, запишем $\int_t^{t+\tau} R_n\,dt = R_{n_{\text{ср}}} \int_t^{t+\tau} dt$,

т. е.

$$\int_t^{t+\tau} R_n\,dt = R_{n_{\text{ср}}}\tau. \tag{4}$$

Внеся значение (4) в формулу (3) и приняв во внимание, что $\tau = 0{,}5$ с, имеем

$$\sum S_n(F_k) = 0{,}5R_{n_{ср}}. \qquad (5)$$

Использовав результаты (2) и (5) в уравнении (1) и учтя, что $m = 60$ кг, получим проекцию на ось n искомого среднего значения реакции воды:

$$R_{n_{ср}} = -2{,}16 \text{ кН}.$$

Задача 12.6. Использовав данные и решение задачи 10.48, выяснить, изменится ли положение оси KL гироскопа в карданове подвесе, если к оси приложена мгновенная сила.

Р е ш е н и е. В ходе решения задачи 10.48 было показано, что ось гироскопа сохраняет неизменное положение в пространстве. Мгновенная сила даст момент $\boldsymbol{m}_O^e$ относительно неподвижной точки O и, значит, по теореме Резаля $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{m}_O^e$, конец D главного момента количеств движения $\boldsymbol{L}_O$ получит скорость $\boldsymbol{u}$. Так как, однако, мгновенная сила действует очень малый промежуток времени, то перемещение точки D будет весьма мало. В момент окончания удара исчезнет скорость $\boldsymbol{u}$ и закончится перемещение точки D. Значит, под действием мгновенной силы ось гироскопа KL лишь незначительно изменит свое положение в пространстве. Этим перемещением можно пренебречь.

У к а з а н и е. Рекомендуем решить следующие задачи из «Сборника задач по теоретической механике» И. В. Мещерского: 44.2, 44.4, 44.8, 44.11, 44.13, 44.15, 44.17, 44.18.

§ 2. Теорема об изменении главного момента количества движения материальной системы в приложении к мгновенным силам

Приращение главного момента количества движения материальной системы относительно неподвижного центра при ударе равно векторной сумме моментов относительно того же центра импульсов внешних мгновенных сил:

$$(\boldsymbol{L}_O)_2 - (\boldsymbol{L}_O)_1 = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{m}_O[\boldsymbol{S}(\boldsymbol{F}_k^e)],$$

или в проекциях на оси декартовых координат:

$$(L_x)_2 - (L_x)_1 = \sum_{k=1}^{n} m_x[\boldsymbol{S}(\boldsymbol{F}_k^e)], \quad (L_y)_2 - (L_y)_1 = \sum_{k=1}^{n} m_y[\boldsymbol{S}(\boldsymbol{F}_k^e)],$$

$$(L_z)_2 - (L_z)_1 = \sum_{k=1}^{n} m_z[\boldsymbol{S}(\boldsymbol{F}_k^e)].$$

Та же теорема для тела, вращающегося вокруг неподвижной оси z, выражается формулой

$$I_z(\omega_{2z} - \omega_{1z}) = \sum_{k=1}^{n} m_z[S(F_k^e)].$$

Итак, действие ударного импульса на тело, вращающееся вокруг неподвижной оси, проявляется в скачкообразном изменении его угловой скорости.

Этой теоремой следует пользоваться в задачах на удар по телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси, когда в число данных и искомых величин входят: ударные импульсы, момент инерции тела относительно оси вращения, угловая скорость тела в начале и конце удара.

Указание. Задачи с помощью теоремы об изменении главного момента количества движения в приложении к мгновенным силам рекомендуется решать в следующей последовательности:

1) выбрать тело или тела, которые нужно рассмотреть для определения неизвестных величин;

2) изобразить на рисунке внешние ударные импульсы;

3) вычислить сумму моментов ударных импульсов (т. е. импульсов всех внешних мгновенных сил) относительно оси z вращения тела;

4) подставив результат, полученный в предыдущем пункте, в уравнение

$$I_z(\omega_{2z} - \omega_{1z}) = \sum_{k=1}^{n} m_z[S(F_k^e)],$$

определить искомую величину.

Задача 12.7. Груз массы M_1, движущийся направо по горизонтальной плоскости, в момент столкновения с висящим вертикальным стержнем OA имеет скорость v. Определить модуль ударного импульса S и наибольший угол отклонения α от вертикали стержня OA, который подвешен к неподвижной горизонтальной оси O, перпендикулярной к плоскости рисунка. Масса стержня M_2, длина стержня l. Удар груза о стержень считать абсолютно неупругим.

Решение. Направим ось x по горизонтали направо. Данная материальная система состоит из двух тел: груза и стержня. Рассмотрим движение каждого из тел в отдельности.

При ударе к грузу со стороны стержня приложен ударный импульс S, направленный справа налево (рис. *б*). Применим к движению груза теорему об изменении количества движения материальной точки в приложении к мгновенным силам в проекции на ось x:

$$q_{2x} - q_{1x} = \sum_{k=1}^{n} S_x(F_k).$$

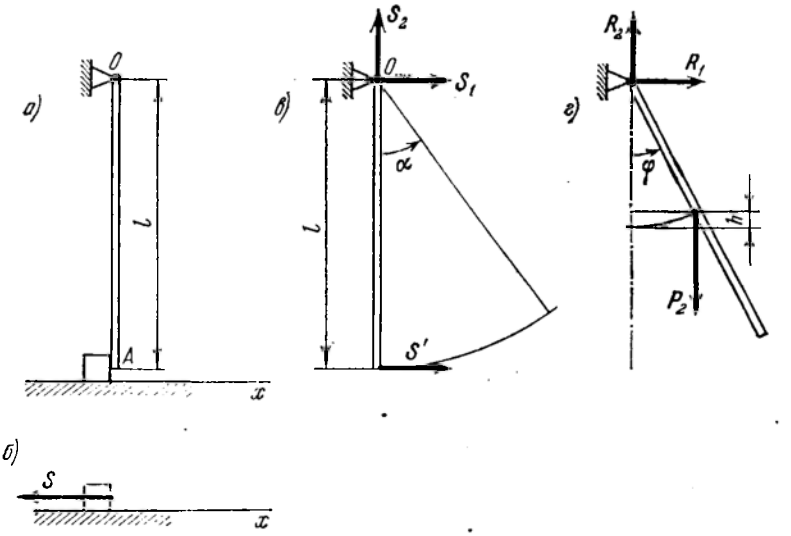
В данном случае

$$M_1 v_1 - M_1 v = -S, \qquad (1)$$

где v_1 — скорость груза в конце абсолютно неупругого удара.

Рассмотрим стержень OA. При ударе к стержню OA в точке A со стороны груза приложен ударный импульс $\boldsymbol{S}'$, причем на основании закона равенства действия и противодействия $\boldsymbol{S}' = -\boldsymbol{S}$. При ударе в опоре O возникает реактивный ударный импульс, составляющие которого $\boldsymbol{S}_1$ и $\boldsymbol{S}_2$ изображены на рис. *в*.

Применим к движению стержня теорему об изменении главного момента количества движения материальной системы в приложении



К задаче 12.7.

к мгновенным силам относительно оси вращения O, перпендикулярной к плоскости рисунка:

$$I_O(\omega_{1z} - \omega_{0z}) = \sum_{k=1}^{n} m_O[\boldsymbol{S}(\boldsymbol{F}_k^e)].$$

В данном случае

$$\omega_{0z} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} m_O[\boldsymbol{S}(\boldsymbol{F}_k^e)] = S'l,$$

следовательно,

$$I_O\omega_{1z} = S'l. \qquad (2)$$

Учитывая, что $v_1 = l\omega_1$ и $|\boldsymbol{S}| = |\boldsymbol{S}'|$, исключаем v, S и S' из системы уравнений (1) и (2) и определяем проекцию на ось z угловой скорости ω_1 стержня OA в конце удара:

$$\omega_{1z} = \frac{M_1 v l}{I_O + M_1 l^2}.$$

Момент инерции стержня $I_O = M_2 l^2/3$, поэтому

$$\omega_{1z} = \frac{3M_1 v}{(3M_1 + M_2)\, l}. \qquad (3)$$

Ударный импульс $\boldsymbol{S}$ определяется в результате подстановки значения ω_{1z} из (3) в (1) либо в (2). Находим

$$S = \frac{M_1 M_2}{(3M_1 + M_2)}\, v.$$

Для вычисления наибольшего угла отклонения α стержня от вертикального положения применяем теорему об изменении кинетической энергии системы материальных точек:

$$T_2 - T_1 = \sum_{k=1}^{n} A\,(\boldsymbol{F}_k^e).$$

Угловая скорость стержня $\boldsymbol{\omega}_1$ в конце удара является в данном случае для последующего движения начальной, а угловая скорость при наибольшем отклонении равна нулю.

Работа составляющих опорных реакций $\boldsymbol{R}_1$ и $\boldsymbol{R}_2$ равна нулю, работа силы тяжести $\boldsymbol{P}_2$ дается формулой $A\,(\boldsymbol{P}_2) = -M_2 g h$, где

$$h = \frac{l}{2}(1 - \cos\alpha)$$

(рис. *г*); следовательно,

$$-\frac{I_0 \omega_1^2}{2} = -\frac{M_2 g l}{2}(1 - \cos\alpha). \qquad (4)$$

Воспользовавшись формулой (3) и решив уравнение (4) относительно α, получим

$$\cos\alpha = 1 - \frac{3M_1 v^2}{gl\,(3M_1 + M_2)^2}.$$

Если бы в данной задаче не требовалось вычислить модуль ударного импульса $\boldsymbol{S}$, то угловую скорость ω_1 стержня в конце неупругого удара можно было бы определить проще. Для этого, вместо применения теорем динамики к движениям груза и стержня в отдельности, можно было бы использовать теорему об изменении главного момента количеств движения в применении к системе, состоящей из груза и стержня:

$$L_{z_2} - L_{z_1} = \sum_{k=1}^{n} m_z\,[\boldsymbol{S}\,(\boldsymbol{F}_k^e)].$$

В этом случае ударные импульсы $\boldsymbol{S}$ и $\boldsymbol{S}'$ оказываются внутренними и в уравнение не входят, т. е. $\sum_{k=1}^{n} m_z\,[\boldsymbol{S}\,(\boldsymbol{F}_k^e)] = 0$, где z — ось, проходящая через точку O перпендикулярно к неподвижной плоскости. Следовательно, $L_{z2} - L_{z1} = 0$, откуда $L_{z2} = L_{z1}$. Значит, имеет место случай сохранения главного момента количества

движения системы относительно оси z. Главный момент количества движения системы в начале удара $L_{z1} = M_1 vl$, а в конце удара равен $L_{z2} = \left(\frac{M_2 l^2}{3} + M_1 l^2\right) \omega_{1z}$. Приравняв эти значения L_{z1} и L_{z2}, получим определенное выше формулой (3) значение ω_{1z}.

Указание. Рекомендуем решить следующие задачи из «Сборника задач по теоретической механике» И. В. Мещерского: 44.24 — 44.27.

§ 3. Потеря кинетической энергии при ударе двух тел

При абсолютно неупругом ударе двух тел происходит потеря кинетической энергии, которая расходуется на остаточную деформацию и нагревание тел.

При упругом ударе двух тел на первом этапе при возрастании деформации кинетическая энергия переходит в другие формы энергии. На втором этапе в процессе восстановления недеформированного состояния снова приобретается кинетическая энергия. При упругом ударе потеря кинетической энергии меньше, чем при соответствующем абсолютно неупругом ударе.

При абсолютно упругом ударе происходит полное восстановление недеформированного состояния и, следовательно, потеря кинетической энергии равна нулю.

Пусть T_1 — кинетическая энергия системы в начале удара, T_2 — кинетическая энергия системы в конце удара, m_1 и m_2 — массы соударяющихся тел, v_1 и v_2 — скорости тел в начале удара, k — коэффициент восстановления недеформированного состояния при ударе. Тогда потеря кинетической энергии при прямом центральном упругом ударе двух поступательно движущихся тел вычисляется по формуле

$$T_1 - T_2 = (1 - k^2) \frac{m_1 m_2}{2 (m_1 + m_2)} (v_{1n} - v_{2n})^2.$$

При абсолютно неупругом ударе $k = 0$ и, следовательно,

$$T_1 - T_2 = \frac{m_1 m_2}{2 (m_1 + m_2)} (v_{1n} - v_{2n})^2.$$

При абсолютно упругом ударе $k = 1$ и, следовательно, $T_1 - T_2 = 0$.

Если до удара второе тело было в покое, т. е. $v_2 = 0$, то кинетическая энергия системы в начале удара равна $T_1 = {}^1/_2 m_1 v_1^2$, а потеря кинетической энергии при ударе дается выражением

$$T_1 - T_2 = (1 - k^2) \frac{m_2}{m_1 + m_2} T_1.$$

Решение задач на вычисление потери кинетической энергии при ударе двух тел следует выполнять по приведенным выше формулам.

Задача 12.8. а) К какому соотношению масс молота и наковальни следует стремиться при ковке металла?

б) К какому соотношению масс копра и сваи следует стремиться при забивке свай?

Р е ш е н и е. а) Обозначим: m_1 — масса молота, m_2 — масса наковальни и поковки, v_1 — скорость молота в начале удара, скорость наковальни в начале удара равна нулю.

Потерю кинетической энергии вычисляем по формуле

$$T_1 - T_2 = (1 - k^2)\frac{m_2}{m_1 + m_2} T_1. \qquad (1)$$

Так как при ковке целесообразно получить большую остаточную деформацию отковываемого металла, то необходимо иметь большую потерю кинетической энергии. Для этого значение дроби $\frac{m_2}{m_1 + m_2}$ должно быть близко к единице, т. е. масса наковальни и поковки должна быть значительно больше массы молота: $m_2 \gg m_1$.

Коэффициентом полезного действия η молота называется отношение полезной работы, затрачиваемой на деформацию металла, к работе, затрачиваемой на поднятие молота, т. е. отношение потери кинетической энергии при ударе к кинетической энергии системы в начале удара:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Воспользовавшись формулой (1), находим

$$\eta = (1 - k^2)\frac{m_2}{m_1 + m_2}.$$

Так, если масса молота равна 2 т, масса наковальни с поковкой равна 40 т, коэффициент восстановления равен $k = 0{,}6$, то коэффициент полезного действия $\eta = 0{,}61$.

б) Обозначим: m_1 — масса копра, m_2 — масса забиваемой сваи. Скорость v_2 сваи в начале удара равна нулю. Следовательно, можно воспользоваться формулой (1).

Так как при забивке сваи следует стремиться к меньшей деформации сваи, то необходимо иметь малую потерю кинетической энергии. Для этого значение дроби $\frac{m_2}{m_1 + m_2}$ должно быть близко к нулю, т. е. масса сваи должна быть значительно меньше массы копра: $m_2 \ll m_1$.

Коэффициент полезного действия при забивке свай равен $\eta = T_2/T_1$, так как полезным является запас кинетической энергии, которая остается в системе в конце удара.

У к а з а н и е. Рекомендуем решить задачу 44.6 из «Сборника задач по теоретической механике» И. В. Мещерского.

§ 4. Удар по телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси

При ударе по телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси, в опорах возникают реактивные ударные импульсы $\boldsymbol{S}_A$ и $\boldsymbol{S}_B$. Пусть ось z подвижной системы координат, связанной с телом, направлена

вдоль оси вращения. Плоскость xz проведена через ось вращения и центр тяжести C тела. Ось y образует вместе с осями x и z правую систему осей координат (рис. 12.7). Предположим, что ударный импульс $\boldsymbol{S}$ приложен в точке D, лежащей на оси x. Пусть, далее: $OD = d$, $OA = a$, $OB = b$, $\boldsymbol{S} = S_x\boldsymbol{i} + S_y\boldsymbol{j} + S_z\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{S}_A = S_{Ax}\boldsymbol{i} + S_{Ay}\boldsymbol{j} + S_{Az}\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{S}_B = S_{Bx}\boldsymbol{i} + S_{By}\boldsymbol{j} + S_{Bz}\boldsymbol{k}$, ω_1 — угловая скорость тела в конце удара.

Для определения проекций реактивных ударных импульсов S_{Ax}, S_{Ay}, S_{Az}, S_{Bx}, S_{Bz} на подвижной оси декартовых координат, связанные с телом, вращающимся вокруг неподвижной оси z, следует решить систему уравнений:

$$S_{Ax} + S_{Bx} = -S_x,$$

$$S_{Ay} + S_{By} = Mx_C(\omega_{2z} - \omega_{1z}) - S_y,$$

$$S_{Az} + S_{Bz} = -S_z,$$

$$S_{Ay}a - S_{By}b = -I_{xz}(\omega_{2z} - \omega_{1z}),$$

$$-S_{Ax}a + S_{Bx}b = S_z d - I_{yz}(\omega_{2z} - \omega_{1z}). \quad (1^*)$$

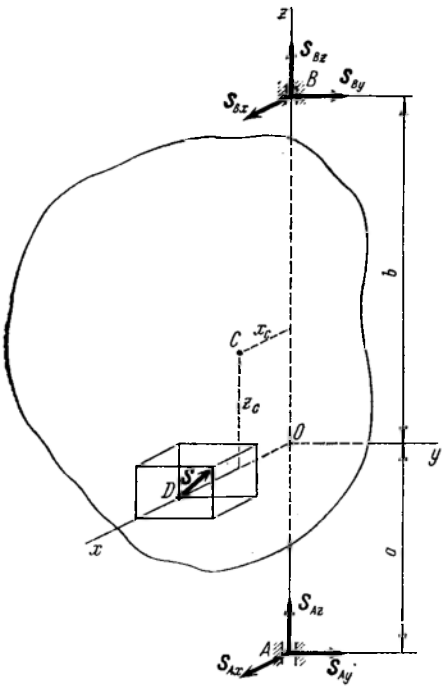


Рис. 12.7.

(Эта система уравнений является результатом применения теорем об изменении главного вектора количества движения в интегральной форме и об изменении главного момента количества движения в приложении к мгновенным силам в проекциях на подвижные оси декартовых координат.)

Проекции реактивных ударных импульсов на ось вращения S_{Az} и S_{Bz} входят только в третье уравнение системы. Поэтому может быть вычислена только их сумма, а каждая из этих величин в отдельности не определяется. Если же верхняя опора B выполнена в виде подшипника, то $S_{Bz} = 0$, и из третьего уравнения системы вычисляется S_{Az}.

Чтобы при ударе по телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси, реактивные ударные импульсы $\boldsymbol{S}_A$ и $\boldsymbol{S}_B$ обращались в нуль (что является существенным при выполнении конструкций, работающих на удар), должны быть удовлетворены следующие условия:

1) ударный импульс $\boldsymbol{S}$ должен быть направлен перпендикулярно к плоскости xz, проходящей через ось вращения и центр тяжести тела, т. е. $S_x = S_z = 0$ и $\boldsymbol{S} = S_y\boldsymbol{j}$;

2) ось вращения тела z должна быть главной осью инерции в точке пересечения с перпендикулярной плоскостью xy, содержащей ударный импульс $\boldsymbol{S}$, т. е. $I_{xz} = I_{yz} = 0$;

3) точка приложения D ударного импульса $\boldsymbol{S}$ должна отстоять от оси вращения z на расстоянии приведенной длины физического маятника, ось привеса которого совпадает с осью вращения данного тела, т. е. $d = \frac{I_z}{Mx_C}$.

При отсутствии реактивных ударных импульсов $\boldsymbol{S}_A$ и $\boldsymbol{S}_B$ точка D приложения ударного импульса $\boldsymbol{S}$ называется *центром удара*.

Решение задач на определение положения центра удара сводится к выполнению трех указанных выше условий.

Указание. Задачи, в которых по заданным скоростям соударяющихся тел в начале удара, силам тяжести, моментам инерции этих тел и положениям их центров тяжести требуется определить реактивные ударные импульсы, рекомендуется решать в следующем порядке:

1) выбрать тело или тела, которые нужно рассмотреть для определения неизвестных величин;

2) направить подвижные координатные оси, связанные с телом: ось z выбрать вдоль оси вращения, плоскость xz провести через ось вращения и центр тяжести C тела, ось x направить через точку D пересечения линии действия ударного импульса $\boldsymbol{S}$ с плоскостью xz. Ось y выбрать так, чтобы вместе с осями x и z она образовала правую систему осей координат;

3) рассмотрев каждое из соударяющихся тел в отдельности, изобразить импульсы внешних мгновенных сил и применить теорему об изменении главного момента количества движения в приложении к мгновенным силам к движению тела, вращающегося вокруг неподвижной оси; в случае поступательного движения одного из соударяющихся тел применить к этому телу теорему об изменении главного вектора количества движения в приложении к мгновенным силам;

4) решив систему уравнений, составленных в предыдущем пункте, определить величину ударного импульса $\boldsymbol{S}$ в конце удара;

5) составить систему уравнений (1*) применительно к телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси;

6) решив систему уравнений (1*), определить проекции искомых реактивных ударных импульсов.

Если в условии задачи заданы ударный импульс $\boldsymbol{S}$ и угловая скорость ω_2 тела в конце удара, то второй и третий пункты решения задачи следует опустить.

Задача 12.9. По телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси, нанесен удар, создающий реактивные ударные импульсы в опорах. Как известно, при вращении неуравновешенного тела создаются динамические реакции в опорах.

Можно ли найти условия, при выполнении которых ударные импульсы в опорах и динамические реакции в опорах обратятся в нуль?

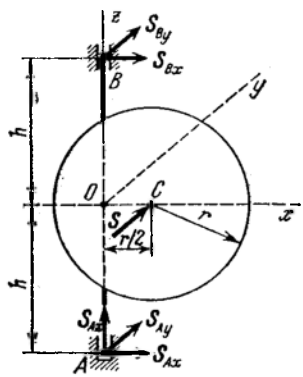
Р е ш е н и е. При вращении неуравновешенного твердого тела вокруг неподвижной оси возникают динамические реакции опор. В § 3 главы X (см. стр. 374) было указано, что эти реакции обращаются в нуль при условии, если ось вращения твердого тела является главной центральной осью инерции. При этом центр тяжести C лежит на оси вращения, т. е. эксцентриситет равен нулю:

$$\rho_C = 0. \tag{1}$$

Для того чтобы ударные импульсы в опорах были равны нулю, должны быть выполнены три условия, изложенные в обзоре теории. Согласно третьему условию, точка приложения ударного импульса, называемая центром удара, должна отстоять от оси вращения на расстоянии d, равном приведенной длине физического маятника, ось привеса которого совмещена с осью вращения тела, т. е. $d = \frac{I_z}{Mx_C}$, где x_C — расстояние от центра тяжести C тела до оси вращения, т. е. эксцентриситет ρ_C. Следовательно,

$$d = \frac{I_z}{M\rho_C}. \tag{2}$$

Нетрудно видеть, что условия (1) и (2) несовместимы, так как при $\rho_C = 0$ получим $d = \infty$, т. е. точка приложения ударного импульса должна быть бесконечно удалена от оси вращения, что практически неосуществимо.



К задаче 12.10.

Итак, избавиться одновременно от реактивных ударных импульсов и от динамических реакций в опорах невозможно.

Задача 12.10. Пуля массы M_1 попадает в центр тяжести C неподвижной круглой мишени массы M_2 и радиуса r со скоростью v_1, направленной перпендикулярно к плоскости мишени. Мишень может вращаться вокруг неподвижной вертикальной оси, лежащей в ее плоскости и отстоящей от центра тяжести C мишени на расстоянии, равном половине радиуса.

Определить модули реактивных ударных импульсов в подпятнике A и подшипнике B, считая удар абсолютно неупругим: $AC = BC = h$. Мишень считать однородным круглым диском.

Р е ш е н и е. Выбираем подвижные оси координат, связанные с вращающейся мишенью; ось z совмещаем с осью вращения. Плоскость xz проводим через ось вращения z и центр тяжести C мишени. Ось x направляем через центр тяжести C, в котором приложен ударный импульс $\boldsymbol{S}$. Ось y выбираем так, чтобы вместе с осями x и z она образовала правую систему координат.

Изображаем ударные импульсы внешних сил: $\boldsymbol{S}$ — ударный импульс, приложенный в центре тяжести C мишени, $\boldsymbol{S}_{Ax}, \boldsymbol{S}_{Ay}, \boldsymbol{S}_{Az}, \boldsymbol{S}_{Bx}, \boldsymbol{S}_{By}$ — составляющие реактивных ударных импульсов.

Так как модуль ударного импульса $\boldsymbol{S}$ и угловая скорость ω_2 мишени в конце абсолютно неупругого удара неизвестны, то для определения их рассмотрим в отдельности движение пули и мишени.

К пуле приложен ударный импульс $\boldsymbol{S}'$ со стороны мишени. Применим к движению пули теорему об изменении количества движения в интегральной форме в приложении к мгновенным силам:

$$M_1 v_2 - M_1 v_1 = -S', \tag{1}$$

где v_1 — заданная скорость пули в начале удара, v_2 — неизвестная скорость пули в конце удара.

Запишем для движения мишени теорему об изменении главного момента количества движения в приложении к мгновенным силам относительно оси z:

$$I_z(\omega_{2z} - \omega_{1z}) = S\frac{r}{2}.$$

В начале удара мишень была в покое, т. е. $\omega_{1z} = 0$. Момент инерции мишени относительно оси z равен

$$I_z = \frac{M_2 r^2}{4} + M_2\left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{M_2 r^2}{2},$$

следовательно,

$$\frac{M_2 r^2}{2}\omega_{2z} = S\frac{r}{2}.$$

Учитывая, что $r\omega_{2z}/2 = v_2$, находим

$$M_2 v_2 = \frac{S}{2}. \tag{2}$$

Решив систему уравнений (1) и (2) ($|\boldsymbol{S}| = |\boldsymbol{S}'|$), определим S и v_2:

$$S = \frac{2M_1 M_2}{M_1 + 2M_2} v_1, \quad v_2 = \frac{M_1 v_1}{M_1 + 2M_2}. \tag{3}$$

Так как $v_2 = \frac{r}{2}\omega_2$, то

$$\omega_2 = \frac{2M_1 v_1}{r(M_1 + 2M_2)}. \tag{4}$$

Для определения составляющих реактивных ударных импульсов применим к мишени систему уравнений (1*):

$$\begin{aligned}
S_{Ax} + S_{Bx} &= -S_x,\\
S_{Ay} + S_{By} &= Mx_C(\omega_{2z} - \omega_{1z}) - S_y,\\
S_{Az} + S_{Bz} &= -S_z,\\
S_{Ay}a - S_{By}b &= -I_{xz}(\omega_{2z} - \omega_{1z}),\\
-S_{Ax}a + S_{Bx}b &= S_z d - I_{yz}(\omega_{2z} - \omega_{1z}).
\end{aligned} \tag{I}$$

Ударный импульс S параллелен оси y. Следовательно,

$$S_x = 0, \quad S_y = S, \quad S_z = 0. \tag{5}$$

Координаты центра тяжести C, лежащего на оси x, равны

$$x_C = r/2, \quad y_C = 0. \tag{6}$$

Опора B является подшипником, т. е.

$$S_{Bz} = 0. \tag{7}$$

Ось y перпендикулярна к плоскости материальной симметрии xz мишени. Следовательно,

$$I_{yz} = 0. \tag{8}$$

Ось x является осью симметрии мишени. Следовательно,

$$I_{xz} = 0. \tag{9}$$

Угловая скорость мишени в начале удара равна нулю:

$$\omega_1 = 0. \tag{10}$$

Воспользовавшись формулами (3)—(10) и учитывая, что $a = b = h$, представим систему уравнений (I) в виде

$$\begin{aligned} S_{Ax} + S_{Bx} &= 0, \\ S_{Ay} + S_{By} &= -\frac{M_1 M_2 v_1}{M_1 + 2M_2}, \\ S_{Az} &= 0, \\ S_{Ay}h - S_{By}h &= 0, \\ -S_{Ax}h + S_{Bx}h &= 0. \end{aligned} \tag{II}$$

Решив эту систему уравнений, находим искомые составляющие реактивных ударных импульсов в подпятнике A и подшипнике B:

$$S_{Ax} = 0, \quad S_{Ay} = -\frac{M_1 M_2 v_1}{2(M_1 + 2M_2)}, \quad S_{Az} = 0,$$

$$S_{Bx} = 0, \quad S_{By} = -\frac{M_1 M_2 v_1}{2(M_1 + 2M_2)}.$$

Задача 12.11. В какой точке мишени, рассмотренной в предыдущей задаче, должен быть приложен ударный импульс $\boldsymbol{S}$, для того чтобы он не передавался на опоры?

Р е ш е н и е. Для того чтобы ударный импульс $\boldsymbol{S}$ не передавался на опоры, должны быть выполнены три условия:

1) ударный импульс $\boldsymbol{S}$ должен быть направлен перпендикулярно к плоскости, проходящей через ось вращения z и центр тяжести тела. Это условие удовлетворяется;

2) ось вращения z должна быть главной осью инерции в точке пересечения с перпендикулярной плоскостью, в которой лежит

ударный импульс $\boldsymbol{S}$. Это условие также удовлетворяется, так как $I_{xz} = I_{yz} = 0$;

3) точка приложения ударного импульса $\boldsymbol{S}$, называемая центром удара, должна отстоять от оси вращения z на расстоянии d, равном приведенной длине физического маятника, ось привеса которого совпадает с осью вращения тела: $d = I_z/(Mx_C)$.

Так как $I_z = M_2r^2/2$ и $x_C = r/2$, то $d = r$. Итак, ударный импульс $\boldsymbol{S}$ должен быть приложен в точке, отстоящей от оси вращения z на расстоянии r.

Этот результат можно непосредственно получить из решения предыдущей задачи. Действительно, если расстояние от точки приложения ударного импульса $\boldsymbol{S}$ до оси вращения z вместо $r/2$ обозначить d, то $v_2 = d\omega_2$ и формулы (3) и (4) предыдущей задачи принимают вид

$$S = \frac{M_1M_2r^2v_1}{2M_1d^2 + M_2r^2} \qquad (1)$$

и

$$\omega_2 = \frac{2dM_1v_1}{2M_1d^2 + M_2r^2}. \qquad (2)$$

Эти значения S и ω_2 следует подставить в правую часть второго уравнения системы (I) и потребовать, чтобы она обратилась в нуль (при этом правые части всех уравнений системы (II) обратятся в нуль и, следовательно, реактивные ударные импульсы будут равны нулю):

$$M_2x_C(\omega_{2z} - \omega_{1z}) - S_y = 0. \qquad (3)$$

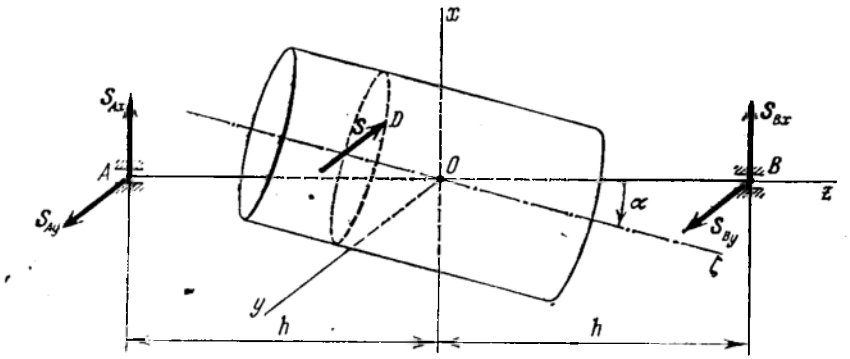
После подстановки в уравнение (3) значений S и ω_2 из формул (1) и (2) и решения уравнения (3) относительно d (при этом следует иметь в виду, что $x_C = r/2$, $\omega_1 = 0$), находим определенное выше значение: $d = r$.

Задача 12.12. Прямой однородный круглый цилиндр массы M длины $2l$ и с радиусом основания, равным r, может вращаться вокруг горизонтальной оси z, проходящей через его центр тяжести O. Ось z образует с осью симметрии цилиндра ζ угол α. Плоскость xz совмещена с плоскостью материальной симметрии цилиндра. По боковой поверхности цилиндра, находившегося в покое, наносится удар, причем ударный импульс $\boldsymbol{S} = -S\boldsymbol{j}$. Точка D приложения ударного импульса S лежит на боковой поверхности цилиндра в плоскости xy, причем $x_D = 0{,}5r$.

Определить реактивные ударные импульсы в подшипниках A и B, считая удар абсолютно неупругим; $AO = OB = h$. Подвижные оси координат xyz связаны с цилиндром.

Р е ш е н и е. Изобразим импульсы внешних мгновенных сил: $\boldsymbol{S}$ — ударный импульс, приложенный к боковой поверхности цилиндра, $\boldsymbol{S}_{Ax}$, $\boldsymbol{S}_{Ay}$, $\boldsymbol{S}_{Bx}$, $\boldsymbol{S}_{By}$ — составляющие реактивных ударных импульсов в подшипниках A и B.

Так как угловая скорость ω_2 цилиндра в конце удара не задана, то для ее определения применим к движению цилиндра теорему



К задаче 12.12.

об изменении главного момента количества движения в приложении к мгновенным силам относительно оси вращения z:

$$I_z(\omega_{2z} - \omega_{1z}) = \sum_{k=1}^{n} m_z[S(F_k^e)]. \tag{1}$$

В данном случае

$$I_z = \frac{Mr^2}{2}, \quad \omega_{1z} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} m_z[S(F_k^e)] = Sx_D = \frac{Sr}{2},$$

поэтому уравнение (1) принимает вид $\frac{Mr^2}{2}\omega_{2z} = \frac{Sr}{2}$, откуда

$$\omega_{2z} = \frac{S}{Mr}. \tag{2}$$

Для определения величин составляющих реактивных ударных импульсов составим для цилиндра систему уравнений (I*):

$$\begin{aligned} S_{Ax} + S_{Bx} &= -S_x, \quad S_{Ay} + S_{By} = Mx_C(\omega_{2z} - \omega_{1z}) - S_y, \\ S_{Az} + S_{Bz} &= -S_z, \quad S_{Ay}a - S_{By}b = -I_{xz}(\omega_{2z} - \omega_{1z}), \\ -S_{Ax}a + S_{Bx}b &= S_z b - I_{yz}(\omega_{2z} - \omega_{1z}). \end{aligned} \tag{I}$$

По условию $\boldsymbol{S} = -S\boldsymbol{j}$, следовательно,

$$S_x = 0, \quad S_y = -S, \quad S_z = 0. \tag{3}$$

Центр тяжести C цилиндра расположен в начале координат O, т. е.

$$x_C = 0. \tag{4}$$

Ось y перпендикулярна к плоскости материальной симметрии xz в точке O, т. е.

$$I_{yz} = 0. \tag{5}$$

Центробежный момент инерции цилиндра I_{xz} был вычислен в решении задачи 9.11

$$I_{xz} = \frac{M}{2}\left(\frac{r^2}{4} - \frac{l^2}{3}\right)\sin 2\alpha. \tag{6}$$

В начале удара цилиндр находился в покое, т. е.

$$\omega_1 = 0. \tag{7}$$

Опоры A и B являются подшипниками, поэтому

$$S_{Az} = S_{Bz} = 0. \tag{8}$$

Воспользовавшись формулами (2)—(8) и учитывая, что $a = b = h$ и $d = x_D = r/2$, запишем систему уравнений (I) в виде

$$S_{Ax} + S_{Bx} = 0, \quad S_{Ay} + S_{By} = -S,$$

$$S_{Ay}h - S_{By}h = -\frac{S}{2r}\left(\frac{r^2}{4} - \frac{l^2}{3}\right)\sin 2\alpha, \quad -S_{Ax}h + S_{Bx}h = 0.$$

Решив эту систему уравнений, находим искомые проекции составляющих реактивных ударных импульсов в подшипниках A и B:

$$S_{Ax} = 0, \quad S_{Ay} = -\frac{S}{2}\left[\frac{1}{2rh}\left(\frac{r^2}{4} - \frac{l^2}{3}\right)\sin 2\alpha + 1\right],$$

$$S_{Bx} = 0, \quad S_{By} = \frac{S}{2}\left[\frac{1}{2rh}\left(\frac{r^2}{4} - \frac{l^2}{3}\right)\sin 2\alpha - 1\right].$$

Указание. Рекомендуем решить следующие задачи из «Сборника задач по теоретической механике» И. В. Мещерского: 44.21, 44.22, 44.25.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Амплитуда колебаний 66, 83
— — вынужденных 97, 102
Аналогии электромеханические 125, 480, 481

Биения 113
Бине формула 14, 26, 28
Бинормаль 12

Вариация функции 384
Ватт 284
Вектор главный сил инерции 357, 374
— перемещения 280
— силы 280
Вертикаль в данной точке земной поверхности 154
Виброграф 348

Гироскоп 487
— с тремя степенями свободы 487—489
Главный вектор количеств движения материальной системы 192, 193
— момент количеств движения материальной системы 207, 208
— — — — — — относительно неподвижного центра 209
— — — — твердого тела относительно неподвижной оси 208
— — сил инерции 357, 374
Гука закон 65

Движение апериодическое 68
— колебательное 64—127
— относительное 127—154
— плоское твердого тела 258—279
Декремент колебаний логарифмический 68
Джоуль 280, 290
Динамика 9
Дирихле условие 95
Дифференциал функции 384

Емкость электрическая 125

Задача динамики обратная 26—64, 258, 502
— — прямая 13, 14, 502
Закон динамики основной 10, 48
— инерции 10
— независимости действия сил 11, 48
— освобождаемости от связей 14, 354
— равенства действия и противодействия 355
— сохранения главного вектора количеств движения материальной системы 200
— — механической энергии 347
— сухого трения 29

Импульс силы 192
— ударный 532
Индуктивность 125
Инерция 10
Интеграл криволинейный 281
— первый уравнения движения 29
— площадей 56
Искусственный спутник Земли 20, 22, 23

Касательная 12
Кенига теорема 290
Килограмм 10
Колебания вынужденные материальной точки 95, 96
— изохронные 67
— линейные 65
— свободные материальной точки 65
Количество движения материальной точки 192
Координаты обобщенные 423, 424
— полярные 12, 14
Кориолиса ускорение 127, 133, 150
Косинусы направляющие 13, 16
Коэффициент восстановления 534, 535
— динамичности 97, 102, 116
— жидкостного сопротивления 125
— податливости 81
— расстройки 97
— трения качения 261, 265
— — скольжения 28, 34, 261
— упругости (жесткости) 65, 66

Лагранжа уравнение второго рода 423, 439—441
— функция 440
Линеаризация уравнений 423

Масса 10, 233
Маятник гироскопический 494—496
— Максвелла 270
— математический 213—284
— физический 245, 348, 349, 369
— циклоидальный 443, 444
Метацентр 250
Метод кинетостатики 355, 358, 359—361
— суперпозиции 11
Метр 10
Механика теории относительности 10
Модуль угловой скорости вращения Земли вокруг своей оси 22
Момент гироскопический 496, 497
— импульса силы 192
— инерции материальной системы приведенный 295, 343
— — твердого тела относительно оси 157, 158, 233
— — — — центробежный 159, 160, 162, 373

Момент количества движения материальной точки 207, 208
— сил инерции главный 357, 374
Мощность 283, 284

Начальные условия движения 27
Невесомость 17, 22
Неуравновешенность ротора динамическая 377
— — статическая 377
Нормаль главная 12
Ньютона закон второй 10
— — первый 10
— — третий 10, 355

Обри прибор 492
Оси координат абсолютные 9
Ось инерции главная 161
— — — центральная 162

Перемещение возможное 385
— действительное 385
— элементарное 280, 281
Период колебаний 67, 68
— — маятника 215
Поверхность уровня 344
— эквипотенциальная 344
Поле силовое 344
— — потенциальное 344
Прецессия регулярная 494
Приведение сил инерции к главному вектору и главному моменту 356—358
Принцип возможных перемещений 384, 388, 383
— — — в обобщенных координатах 426
Принцип относительности классической механики 129

Работа переменной силы на конечном перемещении по произвольной траектории 281
— постоянной силы на прямолинейном перемещении 280
— сил поля 344
— силы 280
— — тяжести 282, 283
— — — в случае системы материальных точек 283
— — упругости 283, 286
— элементарная внутренних сил 282
— — переменной силы 280, 281
— — потенциальных сил 345
— — сил, приложенных к твердому телу 282
Радиус-вектор точки 12, 14
Радиус Земли 20, 22
— инерции 159
— кривизны траектории 12
— Луны 20
Реакция связи 14, 354
Резаля теорема 488, 530
Резонанс 97, 98—100, 121

Свободное падение материальной точки 148—154
Связи 9, 351
— голономные 352
— двусторонние 351
— идеальные 386—388
Связи неголономные 352, 353
— нестационарные 352
— односторонние 351
— стационарные 352
Сдвиг фаз 98, 103
Сейсмограф 116
Секунда 10
Сила возмущающая 95, 98
— восстанавливающая линейная 65
— инерции в относительном движении 129
— — — переносном движении 127, 128
— — кориолисова 124, 129
— отталкивания 14, 32
— потенциальная 344, 345
— притяжения 14, 26
— равнодействующая 12
— сопротивления движению 67, 68
— —, пропорциональная скорости 101, 105
— трения скольжения 17, 30
— тяжести 150
— центральная 14, 16, 25, 26, 50
— электродвижущая 125
Силы 10, 27
— активные 354
— внешние материальной системы 173
— внутренние материальной системы 173
— инерции 355, 356
— обобщенные 423—425
— объемные 204
— поверхностные 204
Система координат абсолютная 9
— материальная несвободная 351
— неголономная 353
Скорость движения Земли вокруг Солнца 21
— — Луны вокруг Земли 21
— космическая вторая 57, 64
— — первая 64
— — — у поверхности Земли 21
— — — — — Луны 21
— — — — — Солнца 21
— относительная 127
— секториальная 14, 56
— угловая 128
— — Земли 149
— — критическая 280
Сопротивление омическое 125
Статика 9
Суперпозиции метод 11

Теорема Кенига 290
— о движении центра масс материальной системы 175, 176, 232, 508, 524
— — работе равнодействующей силы 282
— — сложении вращений твердого тела 302
— об изменении главного момента количеств движения материальной системы 207, 219, 221, 488, 508
— — — — — — — — — — в относительном движении 227, 231
— — — кинетической энергии материальной системы в дифференциальной форме 340, 341
— — — — — — — — — интегральной форме 310, 311, 509, 525
— — — — — — точки в интегральной форме 305, 503
— — — количества движения материальной точки 196, 503, 524
— — — момента количества движения материальной точки 212, 217, 503
— — импульсе равнодействующей силы 193

Точка материальная 9
— — изолированная 10
— — несвободная 9
— — свободная 9
Триэдр натуральный 12, 16

Угол трения 49
Удар 532
— абсолютно упругий 533
— косой 533
— прямой 533
— упругий 533
— центральный 533
Уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси 232
— вынужденных колебаний материальной точки 96, 99, 101
— гиперболы 55
— движения материальной точки в случае резонанса 98
— — — — под действием центральной силы 14
— — системы материальных точек 175
— динамики общее 407
— — — в обобщенных координатах 439
— — относительного движения материальной точки 127, 128
— кривых второго порядка в полярных координатах 62
— логарифмической спирали 25, 26
— относительного покоя 129
— плоского движения материальной точки в полярных координатах 12, 14, 59
— — — твердого тела 258, 264, 269
— свободных крутильных колебаний 251
— связи двусторонней 351
— — односторонней 351
— эллипса 52
Уравнения движения материальной точки в проекциях на оси натурального триэдра 12, 44
— — — — — — — — неподвижных декартовых координат 12
Уравнения Лагранжа второго рода 423, 439, 507
Ускорение в переносном движении 129
— Кориолиса 127, 133, 150
— материальной точки 12
— силы тяжести 150
Условие статического равновесия 77

Фаза колебаний 67, 83
Фуко опыт 490
Фурье ряд 95

Центр 14
— масс материальной системы 155
— мгновенный скоростей 260
— приведения 357
— тяжести твердого тела 155
— удара 549
Центрирование самостоятельное диска, насаженного на упругий вал 280

Частота круговая 67, 78
— — вынужденных колебаний 102
Число оборотов критическое 280
— степеней свободы материальной системы 353

Широта географическая 150
— геоцентрическая 153
Штейнера теорема 157, 165, 248

Эйлера теорема 204
— углы 353, 492
Эллипсоид инерции 160
Энергия кинетическая материальной точки 290, 344
— — твердого тела 290, 291
— потенциальная 344
— — силы упругости 344
— — системы 344, 347

ПРИЛОЖЕНИЕ

МЕЖДУНАРОДНАЯ СИСТЕМА ЕДИНИЦ (СИ)

Наименование величины	Размерность	Наименование единицы	Русское обозначение
		Основные механические единицы	
Длина	L	метр	м
Масса	M	килограмм	кг
Время	T	секунда	с
		Дополнительные единицы	
Плоский угол	—	радиан	рад
Телесный угол	—	стерадиан	ср
		Производные единицы	
Площадь	L^2	квадратный метр	$м^2$
Объем	L^3	кубический метр	$м^3$
Скорость	LT^{-1}	метр в секунду	м/с
Ускорение	LT^{-2}	метр на секунду в квадрате	$м/с^2$
Угловая скорость	T^{-1}	радиан в секунду	рад/с
Угловое ускорение	T^{-2}	радиан на секунду в квадрате	$рад/с^2$
Плотность	$L^{-3}M$	килограмм на кубический метр	$кг/м^3$
Сила	LMT^{-2}	ньютон	Н ($кг \cdot м/с^2$)
Давление	$L^{-1}MT^{-2}$	паскаль	Па ($Н/м^2$)
Импульс силы	LMT^{-1}	ньютон-секунда	Н·с
Количество движения	LMT^{-1}	килограмм-метр в секунду	кг·м/с
Момент силы	L^2MT^{-2}	ньютон-метр	Н·м
Момент инерции	L^2M	килограмм-метр в квадрате	$кг \cdot м^2$
Кинетический момент	L^2MT^{-1}	килограмм-метр в квадрате в секунду	$кг \cdot м^2/с$
Работа, энергия	L^2MT^{-2}	джоуль	Дж (Н·м)
Мощность	L^2MT^{-3}	ватт	Вт (Дж/с)
Частота колебаний	T^{-1}	герц	Гц

Примечание. Приведены только единицы геометрических, кинематических, статических и динамических величин.

Моисей Иосифович Бать
Георгий Юстинович Джанелидзе
Анатолий Саулович Кельзон

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

том II

Редактор *Н. П. Рябенькая*
Технический редактор *В. Н. Кондакова*
Корректоры: *О. А. Сигал, Т. С. Вайсберг*

ИБ № 11201

Сдано в набор 07.03.84. Подписано к печати 19.11.84. Формат $60\times90^1/_{16}$. Бумага книжно-журнальная. Литературная гарнитура. Высокая печать. Усл печ. л. 35. Усл. кр.-отт. 35,125. Уч.-изд. л. 35,27. Тираж 80 000 экз. Заказ № 118. Цена 1 р. 40 к.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ленинградская типография № 6 ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
193144, Ленинград, ул. Моисеенко, 10.