

531
Т-19
С.М. Тарг

КРАТКИЙ КУРС ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ



*учебник
для вузов*

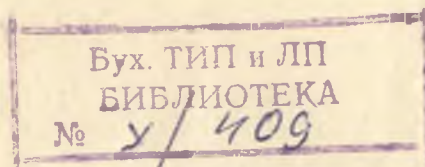


С. М. Тарг

КРАТКИЙ КУРС ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

ИЗДАНИЕ 10-е, ПЕРЕРАБОТАННОЕ
И ДОПОЛНЕННОЕ

Допущено Министерством
высшего и среднего
специального образования
в качестве учебника
для высших технических учебных
заведений



МОСКВА «ВЫСШАЯ ШКОЛА» 1986

ББК 22.21
Т 19
УДК 531.8

Рецензент: кафедра теоретической механики
Университета Дружбы народов им. П. Лумумбы
(зав. кафедрой д-р техн. наук, проф. А. С. Галиуллин)

Тарг С. М.

Т 19 Краткий курс теоретической механики: Учеб. для вузов. — 10-е изд., перераб. и доп. — М.: Высш. шк., 1986. — 416 с., ил.

В книге изложены основы механики материальной точки, системы материальных точек и твердого тела в объеме, соответствующем программам технических вузов. Приведено много примеров и задач, решения которых сопровождаются соответствующими методическими указаниями. В 10-м издании (9-е — 1974 г.) значительно изменены и более компактно изложены вопросы статики; в разделе «Динамика» дополнительно рассмотрены приложения общих теорем к изучению движения жидкости, малые колебания системы и некоторые другие вопросы.

Для студентов очных и заочных технических вузов.

Т 1703020000—423
001 (01)—86 77—86

ББК 22.21
531

© Издательство «Наука», 1974

© Издательство «Высшая школа», 1986, с изменениями

ПРЕДИСЛОВИЕ К ДЕСЯТОМУ ИЗДАНИЮ

Десятое издание «Краткого курса теоретической механики» при сохранении общей его направленности отличается от предыдущих изданий целым рядом изменений и дополнений, внесенных во все разделы курса.

В статике существенно изменены последовательность, а вместе с тем и само изложение ряда вопросов; особенно это коснулось содержания глав III, IV и частично V, VII. В кинематике изменены лишь некоторые доказательства (§ 43, 66). Рассмотрение графических методов исключено и в статике, и в кинематике.

Выделение динамики точки в самостоятельный раздел сохранено ввиду важности этого раздела, а также потому, что совместное изложение общих теорем динамики для точки и системы экономии во времени по существу не дает, но создает у изучающих курс дополнительные трудности, связанные с необходимостью усваивать одновременно большое число важнейших понятий механики.

В изложение динамики также внесено много изменений и дополнений. В частности, дополнительно рассмотрены некоторые приложения общих теорем к движению жидкости или газа (§ 113, 119), элементы теории устойчивости равновесия и малые колебания системы (гл. XXX), а также вопросы, изложенные в § 76, 105, 120, 125, 137 и др.

Как и в предыдущих изданиях, большое место в курсе отведено примерам и методам решения задач; этот материал занимает около трети всей книги. Число рассмотренных задач увеличено до 189, а их решения сопровождаются рядом указаний, которые должны помочь студентам при их самостоятельной работе. В этой части книга будет полезна студентам всех специальностей и особенно студентам заочных вузов.

Материал книги изложен так, что ею можно пользоваться при изучении курса и по кратким, и по более полным программам. Та часть материала, которую можно опустить без ущерба

для понимания остального текста, выделена в главы или параграфы (пункты), помеченные звездочкой или набранные петитом. Хотя в книге, чтобы примерно сохранить ее объем, помимо дополнений сделан и ряд сокращений, в ней сохранено изложение некоторых вопросов, отнесенных в программах к дополнительным (движение в поле земного тяготения и движение тела переменной массы — ракеты). Эти вопросы в наши дни столь актуальны, что ознакомиться с ними должны иметь возможность студенты всех специальностей.

В книге используется общепринятое векторное изложение материала и предполагается, что читатель знаком с основами векторной алгебры; однако в примечаниях даются и некоторые необходимые справки. Нумерация формул в каждом из разделов книги сплошная и при ссылках на формулы данного раздела обычно указывается только их номер; в ссылках на формулы из других разделов указывается еще и номер параграфа.

Автор выражает глубокую благодарность профессорам А. С. Галиуллину и Г. Ю. Степанову за целый ряд полезных замечаний и предложений, позволивших улучшить содержание курса. Автор благодарит также всех читателей, высказавших замечания и пожелания, которые по возможности были учтены при подготовке данного издания.

С. Тара

ВВЕДЕНИЕ

Современная техника ставит перед инженерами множество задач, решение которых связано с исследованием так называемого механического движения и механического взаимодействия материальных тел.

Механическим движением называют происходящее с течением времени изменение взаимного положения материальных тел в пространстве. Под механическим взаимодействием понимают те действия материальных тел друг на друга, в результате которых происходит изменение движения этих тел или изменение их формы (деформация). За основную меру этих действий принимают величину, называемую *силой*. Примерами механического движения в природе являются движение небесных тел, колебания земной коры, воздушные и морские течения, тепловое движение молекул и т. п., а в технике — движение различных наземных или водных транспортных средств и летательных аппаратов, движение частей всевозможных машин, механизмов и двигателей, деформация элементов тех или иных конструкций и сооружений, течение жидкости и газов и многое другое. Примерами же механических взаимодействий являются взаимные притяжения материальных тел по закону всемирного тяготения, взаимные давления соприкасающихся (или соударяющихся) тел, воздействия частиц жидкости и газа друг на друга и на движущиеся или покоящиеся в них тела и т. д.

Наука о механическом движении и взаимодействии материальных тел и называется *механикой*. Круг проблем, рассматриваемых в механике, очень велик и с развитием этой науки в ней появился целый ряд самостоятельных областей, связанных с изучением механики твердых деформируемых тел, жидкостей и газов. К этим областям относятся теория упругости, теория пластичности, гидромеханика, аэромеханика, газовая динамика и ряд разделов так называемой прикладной механики, в частности: сопротивление материалов, статика сооружений, теория механизмов и машин, гидравлика, а также многие специальные инженерные дисциплины. Однако во всех этих областях наряду со специфическими для каждой из них закономерностями и методами исследования опираются на ряд основных законов или принципов и используют многие понятия и методы, общие для всех областей механики. Рассмотрение этих общих понятий, законов и методов и составляет предмет так называемой *теоретической* (или *общей*) механики.

В основе механики лежат законы, называемые законами классической механики (или законами Ньютона), которые установлены пу-

тем обобщения результатов многочисленных опытов и наблюдений и нашли подтверждение в процессе всей общественно-производственной практики человечества. Это позволяет рассматривать знания, основанные на законах механики, как достоверные знания, на которые инженер может смело опираться в своей практической деятельности *.

Общий метод научных исследований состоит в том, что при рассмотрении того или иного явления в нем выделяют главное, определяющее, а от всего остального, сопутствующего данному явлению, абстрагируются. В результате вместо реального явления или объекта рассматривают некоторую его модель и вводят ряд абстрактных понятий, отражающих соответствующие свойства этого явления (объекта). Такие научные абстракции, как указывал В. И. Ленин, «отражают природу глубже, вернее, полнее» и играют при построении науки исключительно важную роль.

В классической механике научными абстракциями или моделями являются по существу все вводимые исходные положения и понятия. Они учитывают то основное, определяющее, что существенно для рассматриваемого механического движения и позволяет его строго охарактеризовать и изучить. Так, например, вместо реальных материальных тел в механике рассматривают такие их абстрактные модели, как материальная точка, абсолютно твердое тело или сплошная изменяемая среда, абстрагируясь от учета в первом случае формы и размеров тела, во втором — его деформаций, в третьем — молекулярной структуры среды. Но только построив механику такого рода моделей, можно разработать методы, позволяющие изучать с пригодной для практики точностью равновесие и движение реальных объектов, проверяя в свою очередь эту пригодность опытом, практикой.

Роль и значение теоретической механики в инженерном образовании определяется тем, что она является научной базой очень многих областей современной техники. Одновременно законы и методы механики как естественной науки, т. е. науки о природе, позволяют изучить и объяснить целый ряд важных явлений в окружающем нас мире и способствуют дальнейшему росту и развитию естествознания в целом, а также выработке правильного материального мировоззрения.

По характеру рассматриваемых задач механику принято разделять на статику, кинематику и динамику. В статике излагается учение о силах и об условиях равновесия материальных тел под действием сил. В кинематике рассматриваются общие

* Последующее развитие науки показало, что при скоростях, близких к скорости света, движение тел подчиняется законам механики теории относительности, а движение микрочастиц (электроны, позитроны и др.) описывается законами квантовой механики. Однако эти открытия только уточнили область приложений классической механики и подтвердили достоверность ее законов для движений всех тел, отличных от микрочастиц, при скоростях, не близких к скорости света, т. е. для тех движений, которые имеют и имеют огромное практическое значение в технике, небесной механике и ряде других областей естествознания.

геометрические свойства движения тел. Наконец, в динамике изучается движение материальных тел под действием сил.

Возникновение и развитие механики * как науки неразрывно связано с историей развития производительных сил общества, с уровнем производства и техники на каждом этапе этого развития.

В древние времена, когда запросы производства сводились главным образом к удовлетворению нужд строительной техники, начинает развиваться учение о так называемых простейших машинах (блок, ворот, рычаг, наклонная плоскость) и общее учение о равновесии тел (статики). Обоснование начал статики содержится уже в сочинениях одного из великих ученых древности Архимеда (287—212 г. до н. э.).

Развитие динамики начинается значительно позже. В XV—XVI столетиях возникновение и рост в странах Западной и Центральной Европы буржуазных отношений послужили толчком к значительному подъему ремесел, торговли, мореплавания и военного дела (появление огнестрельного оружия), а также к важным астрономическим открытиям. Все это способствовало накоплению большого опытного материала, систематизация и обобщение которого привели в XVII столетии к открытию законов динамики. Главные заслуги в создании основ динамики принадлежат гениальным исследователям Галилео Галилею (1564—1642) и Исааку Ньютону (1643—1727). В сочинении Ньютона «Математические начала натуральной философии», изданном в 1687 г., и были изложены в систематическом виде основные законы классической механики (законы Ньютона).

В XVIII в. начинается интенсивное развитие в механике аналитических методов, т. е. методов, основанных на применении дифференциального и интегрального исчисления. Методы решения задач динамики точки и твердого тела путем составления и интегрирования соответствующих дифференциальных уравнений были разработаны великим математиком и механиком Л. Эйлером (1707—1783). Из других исследований в этой области наибольшее значение для развития механики имели труды выдающихся французских ученых Ж. Даламбера (1717—1783), предложившего свой известный принцип решения задач динамики, и Ж. Лагранжа (1736—1813), разработавшего общий аналитический метод решения задач динамики на основе принципа Даламбера и принципа возможных перемещений. В настоящее время аналитические методы решения задач являются в динамике основными.

Кинематика, как отдельный раздел механики, выделилась лишь в XIX в. под влиянием запросов развивающегося машиностроения. В настоящее время кинематика имеет и большое самостоятельное значение для изучения движения механизмов и машин.

В России на развитие первых исследований по механике большое влияние оказали труды гениального ученого и мыслителя

* Термин «механика» впервые появляется в сочинениях одного из выдающихся философов древности Аристотеля (384—322 г. до н. э.) и происходит от греческого *mēchanē*, означавшего по современным понятиям «сооружение», «машина».

М. В. Ломоносова (1711—1765), а также творчество Л. Эйлера, долгое время жившего в России и работавшего в Петербургской академии наук. Из многочисленных отечественных ученых, внесших значительный вклад в развитие различных областей механики, прежде всего должны быть названы: М. В. Остроградский (1801—1861), которому принадлежит ряд важных исследований по аналитическим методам решения задач механики; П. Л. Чебышев (1821—1894), создавший новое направление в исследовании движения механизмов; С. В. Ковалевская (1850—1891), решившая одну из труднейших задач динамики твердого тела; А. М. Ляпунов (1857—1918), который дал строгую постановку одной из фундаментальных задач механики и всего естествознания — задачи об устойчивости равновесия и движения и разработал наиболее общие методы ее решения; И. В. Мещерский (1859—1935), внесший большой вклад в решение задач механики тел переменной массы; К. Э. Циолковский (1857—1935), автор ряда фундаментальных исследований по теории реактивного движения; А. Н. Крылов (1863—1945), разработавший теорию корабля и много внесший в развитие теории гироскопа и гироскопических приборов.

Выдающееся значение для дальнейшего развития механики имеют труды «отца русской авиации» Н. Е. Жуковского (1847—1921) и его ближайшего ученика основоположника газовой динамики С. А. Чаплыгина (1869—1942). Характерной чертой творчества Н. Е. Жуковского было приложение методов механики к решению актуальных технических задач, примером чему служат многие его труды по динамике самолета, разработанная им теория гидравлического удара в трубах и др. Большое влияние идеи Н. Е. Жуковского оказали и на преподавание механики в высших технических учебных заведениях нашей страны.

В наши дни перед отечественной наукой и техникой стоят важные задачи по ускорению научно-технического прогресса и дальнейшему развитию и совершенствованию социалистического производства. В числе этих задач такие актуальные проблемы, как автоматизация производственных процессов и их оптимизация, создание и внедрение промышленных роботов, эффективное использование всех конструкционных материалов и многие другие. Для решения этих задач важное значение имеет дальнейшее повышение качества подготовки инженерных кадров, расширение теоретической базы их знаний, в том числе и знаний в области одной из фундаментальных общенаучных дисциплин — теоретической механики.

Раздел первый

СТАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Глава I

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ИСХОДНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ СТАТИКИ

§ 1. АБСОЛЮТНО ТВЕРДОЕ ТЕЛО; СИЛА. ЗАДАЧИ СТАТИКИ

Статикой называется раздел механики, в котором излагается общее учение о силах и изучаются условия равновесия материальных тел, находящихся под действием сил.

Под равновесием будем понимать состояние покоя тела по отношению к другим телам, например по отношению к Земле. Условия равновесия тела существенно зависят от того, является ли это тело твердым, жидким или газообразным. Равновесие жидких и газообразных тел изучается в курсах гидростатики или аэростатики. В общем курсе механики рассматриваются обычно только задачи о равновесии твердых тел.

Все встречающиеся в природе твердые тела под влиянием внешних воздействий в той или иной мере изменяют свою форму (деформируются). Величины этих деформаций зависят от материала тел, их геометрической формы и размеров и от действующих нагрузок. Для обеспечения прочности различных инженерных сооружений и конструкций материал и размеры их частей подбирают так, чтобы деформации при действующих нагрузках были достаточно малы*. Вследствие этого при изучении условий равновесия вполне допустимо пренебрегать малыми деформациями соответствующих твердых тел и рассматривать их как недеформируемые или абсолютно твердые. *Абсолютно твердым телом* называют такое тело, расстояние между любыми двумя точками которого всегда остается постоянным. В дальнейшем при решении задач статики все тела рассматриваются как абсолютно твердые, хотя часто для краткости их называют просто твердыми телами.

* Например, материал и размеры стержней, входящих в те или иные конструкции, выбирают такими, что при действующих нагрузках стержни удлиняются (или укорачиваются) менее чем на одну тысячную долю их первоначальной длины. Таков же порядок допускаемых деформаций при изгибе, кручении и т. п.

Состояние равновесия или движения данного тела зависит от характера его механических взаимодействий с другими телами, т. е. от тех давлений, притяжений или отталкиваний, которые тело испытывает в результате этих взаимодействий. Величина, являющаяся основной мерой механического взаимодействия материальных тел, называется в механике *силой*.

Рассматриваемые в механике величины можно разделить на *скалярные*, т. е. такие, которые полностью характеризуются их числовым значением, и *векторные*, т. е. такие, которые помимо числового значения характеризуются еще и направлением в пространстве.

Сила — величина векторная. Ее действие на тело определяется: 1) *числовым значением* или *модулем* силы, 2) *направлением* силы, 3) *точкой приложения* силы.

Модуль силы находят путем ее сравнения с силой, принятой за единицу. Основной единицей измерения силы в Международной системе единиц (СИ), которой мы будем пользоваться (подробнее см. § 75), является 1 ньютон (1 Н); применяется и более крупная единица 1 килоньютон (1 кН = 1000 Н). Для статического измерения силы служат известные из физики приборы, называемые *динамометрами*.

Силу, как и все другие векторные величины, будем обозначать буквой с чертой над ней (например, $\vec{F}$), а модуль силы — символом $|\vec{F}|$ или той же буквой, но без черты над ней (F). Графически сила, как и другие векторы, изображается направленным отрезком (рис. 1). Длина этого отрезка выражает в выбранном масштабе модуль силы, направление отрезка соответствует направлению силы, точка A на рис. 1 является точкой приложения силы (силу можно изобразить и так, что точкой приложения будет конец силы, как на рис. 4, в). Прямая DE , вдоль которой направлена сила, называется *линией действия силы*. Условимся еще о следующих определениях.

1. *Системой сил* будем называть совокупность сил, действующих на рассматриваемое тело (или тела). Если линии действия всех сил лежат в одной плоскости, система сил называется *плоской*, а если эти линии действия не лежат в одной плоскости, — *пространственной*. Кроме того, силы, линии действия которых пересекаются в одной точке, называются *сходящимися*, а силы, линии действия которых параллельны друг другу, — *параллельными*.

2. Тело, которому из данного положения можно сообщить любое перемещение в пространстве, называется *свободным*.

3. Если одну систему сил, действующих на свободное твердое тело, можно заменить другой системой, не изменяя при этом состояния покоя или движения, в котором находится тело, то такие две системы сил называются *эквивалентными*.

4. Система сил, под действием которой свободное твердое тело

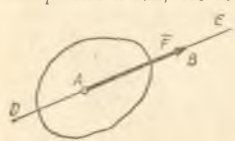


Рис. 1

может находиться в покое, называется *уравновешенной* или *эквивалентной нулю*.

5. Если данная система сил эквивалентна одной силе, то эта сила называется *равнодействующей* данной системы сил.

Сила, равная равнодействующей по модулю, прямо противоположная ей по направлению и действующая вдоль той же прямой, называется *уравновешивающей* силой.

6. Силы, действующие на данное тело (или систему тел), можно разделить на *внешние* и *внутренние*. *Внешними* называются силы, которые действуют на это тело (или на тела системы) со стороны других тел, а *внутренними* — силы, с которыми части данного тела (или тела данной системы) действуют друг на друга.

7. Сила, приложенная к телу в какой-нибудь одной его точке, называется *сосредоточенной*. Силы, действующие на все точки данного объема или данной части поверхности тела, называются *распределенными*.

Понятие о сосредоточенной силе является условным, так как практически приложить силу к телу в одной точке нельзя. Силы, которые в механике рассматривают как сосредоточенные, представляют собой по существу равнодействующие некоторых систем распределенных сил.

В частности, рассматриваемая в механике сила тяжести, действующая на данное твердое тело, представляет собой равнодействующую сил тяжести, действующих на его частицы. Линия действия этой равнодействующей проходит через точку, называемую *центром тяжести тела* *.

Задачами статики являются: 1) преобразование систем сил, действующих на твердое тело, в системы им эквивалентные, в частности приведение данной системы сил к простейшему виду; 2) определение условий равновесия систем сил, действующих на твердое тело.

Решать задачи статики можно или путем соответствующих геометрических построений (геометрический и графический методы), или с помощью численных расчетов (аналитический метод). В курсе будет главным образом применяться аналитический метод, однако следует иметь в виду, что наглядные геометрические построения играют при решении задач механики чрезвычайно важную роль.

§ 2. ИСХОДНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ СТАТИКИ

При изложении статики можно идти двумя путями: 1) исходить из уравнений, которые получаются в динамике как следствия основных законов механики (см. § 120); 2) излагать статику независимо от динамики исходя из некоторых общих законов механики и положе-

* Вопрос об определении центров тяжести тел будет рассмотрен в гл. VIII. Предварительно заметим, что если однородное тело имеет центр симметрии (прямоугольный брус, цилиндр, шар и т. п.), то центр тяжести такого тела находится в его центре симметрии.

ний, называемых аксиомами или принципами статики, хотя по существу они являются не независимыми аксиомами, а следствиями тех же основных законов механики (см. § 120). В учебных курсах, как и в данном, обычно идут вторым путем, так как по ряду причин оказывается необходимым начинать изучение механики со статики, т. е. до того, как будет изложена динамика. Положения (или аксиомы), из которых при этом исходят, можно сформулировать следующим образом.

1. Если на свободное абсолютно твердое тело действуют две силы, то тело может находиться в равновесии тогда и только тогда, когда эти силы равны по модулю ($F_1 = F_2$) и направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны (рис. 2).

2. Действие данной системы сил на абсолютно твердое тело не изменяется, если к ней прибавить или от нее отнять уравновешенную систему сил.

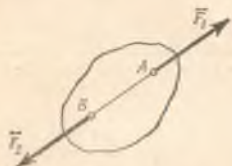


Рис. 2



Рис. 3

Иными словами это означает, что две системы сил, отличающиеся на уравновешенную систему, эквивалентны друг другу.

С л е д с т в и е: действие силы на абсолютно твердое тело не изменится, если перенести точку приложения силы вдоль ее линии действия в любую другую точку тела.

В самом деле, пусть на твердое тело действует приложенная в точке A сила $\vec{F}$ (рис. 3). Возьмем на линии действия этой силы произвольную точку B и приложим в ней две уравновешенные силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, такие, что $\vec{F}_1 = \vec{F}$ и $\vec{F}_2 = -\vec{F}$. От этого действие силы $\vec{F}$ на тело не изменится. Но силы $\vec{F}$ и $\vec{F}_2$ также образуют уравновешенную систему, которая может быть отброшена*. В результате на тело будет действовать только одна сила $\vec{F}_1$, равная $\vec{F}$, но приложенная в точке B .

Таким образом, вектор, изображающий силу $\vec{F}$, можно считать приложенным в любой точке на линии действия силы (такой вектор называется *скользящим*).

Полученный результат справедлив только для сил, действующих на абсолютно твердое тело. При инженерных расчетах им можно пользоваться лишь тогда, когда определяются условия равновесия той или иной конструкции и не рассматриваются возникшие в ее частях внутренние усилия.

* Отброшенные или перенесенные силы будем на рисунках перечеркивать.

Например, изображенный на рис. 4, а стержень AB будет находиться в равновесии, если $F_1 = F_2$. При переносе точек приложения обеих сил в какую-нибудь точку C стержня (рис. 4, б) или при переносе точки приложения силы F_1 в точку B , а силы F_2 в точку A (рис. 4, в) равновесие не нарушается. Однако внутренние усилия будут в каждом из рассматриваемых случаев разными. В первом случае стержень под действием приложенных сил растягивается, во втором случае он не напряжен, а в третьем стержень будет сжиматься.

Следовательно, при определении внутренних усилий переносить точку приложения силы вдоль линии действия нельзя.

Еще два исходных положения относятся к общим законам механики.

З а к о н параллелограмма сил: две силы, приложенные к телу в одной точке, имеют равнодействующую, приложенную в той же точке и изображаемую диагональю параллелограмма, построенного на этих силах, как на сторонах.

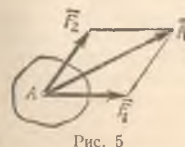


Рис. 5

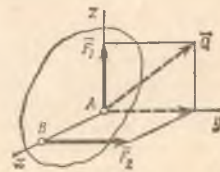


Рис. 6

Вектор $\vec{R}$, равный диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ (рис. 5), называется *геометрической суммой векторов* $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

Следовательно, закон параллелограмма сил можно еще сформулировать так: две силы, приложенные к телу в одной точке, имеют равнодействующую, равную геометрической (векторной) сумме этих сил и приложенную в той же точке.

В дальнейшем следует различать понятия суммы сил и их равнодействующей. Поясним это примером. Рассмотрим две силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ (рис. 6), приложенные к телу в точках A и B . Показанная на рис. 6 сила $\vec{Q}$ равна геометрической сумме сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ ($\vec{Q} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$), как диагональ соответствующего параллелограмма. Но сила $\vec{Q}$ не является равнодействующей этих сил, так как нетрудно понять, что одна

сила $\vec{Q}$ не может заменить действие сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ на данное тело, где бы она ни была приложена. В дальнейшем будет еще строго доказано (§ 29, задача 38), что эти две силы не имеют равнодействующей.

Закон равенства действия и противодействия: при всяком действии одного материального тела на другое имеет место такое же численно, но противоположное по направлению противодействие.

Этот закон является одним из основных законов механики. Из него следует, что если тело A действует на тело B с некоторой силой $\vec{F}$, то одновременно тело B действует на тело A с такой же по модулю и направленной вдоль той же прямой, но в противоположную сторону силой $\vec{F}' = -\vec{F}$ (рис. 7). Заметим, что силы $\vec{F}$ и $\vec{F}'$, как приложенные к разным телам, не образуют уравновешенную систему сил.

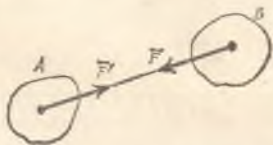


Рис. 7

Свойство внутренних сил. Согласно данному закону при взаимодействии две любые части тела (или конструкции) действуют друг на друга с равными по модулю и противоположно направленными силами. Так как при изучении условий равновесия тело рассматривается как абсолютно твердое, то все внутренние силы образуют при этом уравновешенную систему сил, которую можно отбросить. Следовательно, при изучении условий равновесия тела (конструкции) необходимо учитывать только *внешние* силы, действующие на это тело (конструкцию). В дальнейшем, говоря о действующих силах, мы будем подразумевать, если не сделано специальной оговорки, что речь идет только о *внешних* силах.

Еще одним исходным положением является принцип отвердевания: равновесие изменяемого (деформируемого) тела, находящегося под действием данной системы сил, не нарушится, если тело считать отвердевшим (абсолютно твердым).

Высказанное утверждение очевидно. Например, ясно, что равновесие цепи не нарушится, если ее звенья считать сваренными друг с другом. Так как на покоящееся тело до и после отвердевания действует одна и та же система сил, то данный принцип можно еще высказать в такой форме: при равновесии силы, действующие на любое изменяемое (деформируемое) тело или изменяемую конструкцию, удовлетворяют тем же условиям, что и для тела абсолютно твердого; однако для изменяемого тела эти условия, будучи необходимыми, могут не быть достаточными (см. § 120).

Например, для равновесия гибкой нити под действием двух сил, приложенных к ее концам, необходимы те же условия, что и для

жесткого стержня (силы должны быть равны по модулю и направлены вдоль нити в разные стороны). Но эти условия не будут достаточными. Для равновесия нити требуется еще, чтобы приложенные силы были растягивающими, т. е. направленными так, как на рис. 4, а.

Принцип отвердевания широко используется в инженерных расчетах. Он позволяет при составлении условий равновесия рассматривать любое изменяемое тело (ремень, трос, цепь и т. п.) или любую изменяемую конструкцию как абсолютно жесткие и применять к ним методы статики твердого тела. Если полученных таким путем уравнений для решения задачи оказывается недостаточно, то дополнительно составляют уравнения, учитывающие или условия равновесия отдельных частей конструкции, или их деформации (задачи, требующие учета деформаций, решаются в курсе сопротивления материалов).

§ 3. СВЯЗИ И ИХ РЕАКЦИИ

По определению, тело, которое может совершать из данного положения любые перемещения в пространстве, называется *свободным* (например, воздушный шар в воздухе). Тело, перемещения которого в пространстве препятствуют какие-нибудь другие, скрепленные или соприкасающиеся с ним, тела, называется *несвободным*. Все то, что ограничивает перемещения данного тела в пространстве, называют *связью*. В дальнейшем будем рассматривать связи, реализуемые какими-нибудь телами, и называть связями сами эти тела.

Примерами несвободных тел являются груз, лежащий на столе, дверь, подвешенная на петлях, и т. п. Связями в этих случаях будут: для груза — плоскость стола, не дающая грузу перемещаться по вертикали вниз; для двери — петли, не дающие двери отойти от косяка.

Тело, стремясь под действием приложенных сил осуществить перемещение, которому препятствует связь, будет действовать на нее с некоторой силой, называемой *силой давления на связь*. Одновременно по закону о равенстве действия и противодействия связь будет действовать на тело с такой же по модулю, но противоположно направленной силой. Сила, с которой данная связь действует на тело, препятствуя тем или иным его перемещениям, называется *силой реакции (противодействия) связи* или просто *реакцией связи*.

Значение реакции связи зависит от других действующих сил и наперед неизвестно (если никакие другие силы на тело не действуют, реакции равны нулю); для ее определения надо решить соответствующую задачу механики. Направлена реакция связи в сторону, противоположную той, куда связь не дает перемещаться телу. Когда связь может препятствовать перемещениям тела по нескольким направлениям, направление реакции такой связи тоже наперед неизвестно и должно определяться в результате решения рассматриваемой задачи.

Правильное определение направлений реакций связей играет при решении задач механики очень важную роль. Рассмотрим по-

этому подробнее, как направлены реакции некоторых основных видов связей (дополнительные примеры приведены в § 17).

1. Гладкая плоскость (поверхность) или опора. Гладкой будем называть поверхность, трением о которую данного тела можно в первом приближении пренебречь. Такая

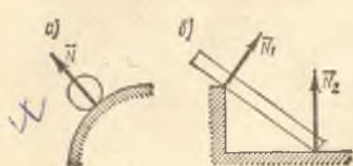


Рис. 8

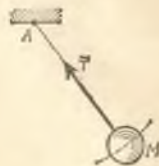


Рис. 9

поверхность не даёт телу перемещаться только по направлению общего перпендикуляра (нормали) к поверхностям соприкасающихся тел в точке их касания (рис. 8, а) *. Поэтому реакция N гладкой поверхности или опоры направлена по общей нормали к поверхностям соприкасающихся тел в точке их касания и приложена в этой точке. Когда одна из соприкасающихся поверхностей является точкой (рис. 8, б), то реакция направлена по нормали к другой поверхности.

2. Нить. Связь, осуществлённая в виде гибкой нерастяжимой нити (рис. 9), не даёт телу M удаляться от точки подвеса нити по направлению AM . Поэтому реакция T натянутой нити направлена вдоль нити к точке ее подвеса.

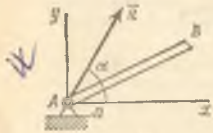


Рис. 10

3. Цилиндрический шарнир (подшипник). Цилиндрический шарнир (или просто шарнир) осуществляет такое соединение двух тел, при котором одно тело может вращаться по отношению к другому вокруг общей оси, называемой осью шарнира (например, как две половины ножниц). Если тело AB прикреплено с помощью такого шарнира к неподвижной опоре D (рис. 10), то точка A тела не может при этом переместиться ни по какому направлению, перпендикулярному оси шарнира. Следовательно, реакция R цилиндрического шарнира может иметь любое направление в плоскости, перпендикулярной оси шарнира, т. е. в плоскости Axy . Для силы R в этом случае наперед неизвестны ни ее модуль R , ни направление (угол α).

4. Сферический шарнир и подпятник. Тела, соединённые сферическим шарниром, могут как угодно поворачи-

ваться одно относительно другого вокруг центра шарнира. Примером служит прикрепление фотоаппарата к штативу с помощью шаровой пяты. Если тело прикреплено с помощью такого шарнира к неподвижной опоре (рис. 11, а), то точка A тела, совпадающая с центром шарнира, не может при этом совершить никакого перемещения в пространстве. Следовательно, реакция R сферического шарнира может иметь любое направление в пространстве. Для нее наперед неизвестны ни ее модуль R , ни углы с осями $Axyz$.

Произвольное направление в пространстве может иметь и реакция R подпятника (подшипника с упором), изображённого на рис. 11, б.

5. Невесомый стержень. Невесомым называют стержень, весом которого по сравнению с воспринимаемой им нагрузкой можно пренебречь. Пусть для какого-нибудь находящегося в равновесии тела (конструкции) такой стержень, прикрепленный в точках A и B шарнирами, является связью (рис. 12, а). Тогда на стержень будут действовать только две силы, приложенные в точках A и B ; при равновесии эти силы должны быть направлены вдоль одной прямой, т. е. вдоль AB (см. рис. 4, а, в). Но тогда согласно закону о действии и противодействии стержень будет действовать на тело с силой, тоже направленной вдоль AB . Следовательно, реакция N невесомого шарнирно прикрепленного прямолинейного стержня направлена вдоль оси стержня.

Если связью является криволинейный невесомый стержень (рис. 12, б), то аналогичные рассуждения приведут к выводу, что его реакция тоже направлена вдоль прямой AB , соединяющей шарниры A и B (на рис. 12, а направление реакции соответствует случаю, когда стержень сжат, а на рис. 12, б — когда растянут).

При решении задач реакции связей обычно являются подлежащими определению неизвестными. Нахождение реакций имеет то практическое значение, что определив их, а тем самым определив по закону о действии и противодействии и силы давления на связи, получают исходные данные, необходимые для расчета прочности соответствующих частей конструкции.

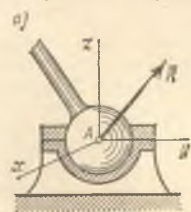


Рис. 11

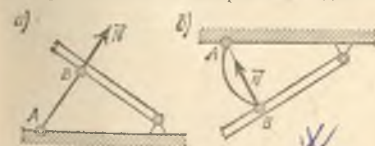


Рис. 12

* На рис. 8—12 действующие на тела заданные силы не показаны.

СЛОЖЕНИЕ СИЛ. СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

§ 4. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СПОСОБ СЛОЖЕНИЯ СИЛ.
РАВНОДЕЙСТВУЮЩАЯ СХОДЯЩИХСЯ СИЛ;
РАЗЛОЖЕНИЕ СИЛ

Решение многих задач механики связано с известной из векторной алгебры операцией сложения векторов и, в частности, сил. Величину, равную геометрической сумме сил какой-нибудь системы, будем в дальнейшем называть *главным вектором* этой системы сил. Как отмечалось в § 3 (см. рис. 6), понятие о геометрической сумме сил не следует смешивать с понятием о равнодействующей; для многих систем сил, как мы увидим в дальнейшем, равнодействующей вообще не существует, геометрическую же сумму (главный вектор) можно вычислить для любой системы сил.

1. Сложение двух сил. Геометрическая сумма $\vec{R}$ двух сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ находится по правилу параллелограмма (рис. 13, а) или построением силового треугольника (рис. 13, б), изображающего одну из половин этого параллелограмма. Если угол между силами равен α , то модуль R и углы β , γ , которые сила $\vec{R}$ образует со слагаемыми силами, определяются по формулам:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha}, \quad (1)$$

$$F_1/\sin\gamma = F_2/\sin\beta = R/\sin\alpha. \quad (2)$$

2. Сложение трех сил, не лежащих в одной плоскости. Геометрическая сумма $\vec{R}$ трех сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, не лежащих в одной плоскости, изображается диагональю параллелепипеда, построенного на этих силах (правило параллелепипеда). В справедливости этого убеждаемся, применяя последовательно правило параллелограмма (рис. 14).

3. Сложение системы сил. Геометрическая сумма (главный вектор) любой системы сил определяется или последовательным сложением сил системы по правилу параллелограмма, или построением силового многоугольника. Второй способ является более простым и удобным. Для нахождения этим способом суммы сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, ..., $\vec{F}_n$ (рис. 15, а) откладываем от произвольной точки O (рис. 15, б) вектор $\vec{Oa}$, изображающий в выбранном масштабе силу $\vec{F}_1$, от точки a — вектор $\vec{ab}$, изображающий силу $\vec{F}_2$, от точки b — вектор $\vec{bc}$, изображающий силу $\vec{F}_3$, и т. д.; от конца t предпоследнего вектора откладываем вектор $\vec{tp}$, изображающий

силу $\vec{F}_n$. Соединяя начало первого вектора с концом последнего, получаем вектор $\vec{Op} = \vec{R}$, изображающий геометрическую сумму или главный вектор слагаемых сил:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n \quad \text{или} \quad \vec{R} = \sum \vec{F}_k. \quad (3)$$

4. Равнодействующая сходящихся сил. Рассмотрим систему сходящихся сил, т. е. сил, линии действия которых пересекаются в одной точке (рис. 15, а). Так как сила, действующая

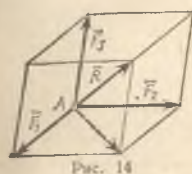


Рис. 14



Рис. 15

на абсолютно твердое тело, является вектором скользящим, то система сходящихся сил эквивалентна системе сил, приложенных в одной точке (на рис. 15, а в точке A).

Последовательно применяя закон параллелограмма сил, приходим к выводу, что система сходящихся сил имеет равнодействующую, равную геометрической сумме (главному вектору) этих сил и приложенную в точке пересечения их линий действия. Следовательно, система сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, ..., $\vec{F}_n$, изображенных на рис. 15, а, имеет равнодействующую, равную их главному вектору $\vec{R}$ и приложенную в точке A (или в любой другой точке, лежащей на линии действия силы $\vec{R}$, проведенной через точку A).

5. Разложение сил. Разложить данную силу на несколько составляющих — значит найти такую систему нескольких сил, для которой данная сила является равнодействующей. Эта задача является неопределенной и имеет однозначное решение лишь при задании дополнительных условий. Рассмотрим два частных случая:

а) разложение силы по двум заданным направлениям. Задача сводится к построению такого параллелограмма, у которого разлагаемая сила является диагональю, а стороны параллельны заданным направлениям. Например, на рис. 13 показано, как сила $\vec{R}$ разлагается по направлениям AB и AD на силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ — составляющие силы $\vec{R}$ (сила $\vec{R}$ и прямые AB , AD лежат, конечно, в одной плоскости);

б) разложение силы по трем заданным направлениям. Если заданные направления не лежат в одной плоскости, то задача является определенной и сводится к построению такого параллелепипеда, у которого диагональ изображает

заданную силу $\vec{R}$, а ребра параллельны заданным направлениям (см. рис. 14).

Способом разложения можно в простейших случаях пользоваться для определения сил давления на связи. Для этого действующую на тело (конструкцию) заданную силу надо разложить по направлениям реакции связей, так как согласно закону о действии и противодействии сила давления на связь и реакция связи направлены вдоль одной и той же прямой.

Задача 1. Кронштейн состоит из стержней AC и BC , соединенных со стеной и друг с другом шарнирами, причем $\angle BAC = 90^\circ$, $\angle ABC = \alpha$ (рис. 16). В точке C подвешен груз весом P . Определить усилия в стержнях, пренебрегая их весом.

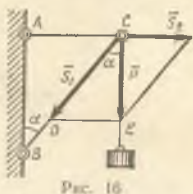


Рис. 16

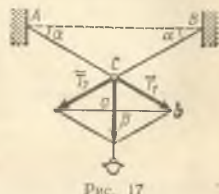


Рис. 17

Решение. Под усилиями в стержнях понимают значения сил, растягивающих или сжимающих эти стержни. Так как стержни считаются невесомыми, то их реакции (они действуют на шарнир C) направлены вдоль стержней. Тогда для определения искомых усилий приложим силу $\vec{P}$ в точке C и разложим ее по направлениям AC и CB . Составляющие S_1 и S_2 и будут искомыми силами. Из треугольника CDE находим:

$$S_1 = P/\cos \alpha, \quad S_2 = P \operatorname{tg} \alpha.$$

Таким образом, стержень BC сжимается силой S_1 , а стержень AC растягивается силой S_2 . С увеличением угла α усилия в стержнях растут и при α , близком к 90° , могут достигать очень больших размеров.

Задача 2. Фонарь весом $P = 200$ Н (рис. 17) подвешен на двух тросах AC и BC , образующих с горизонтальной прямой одинаковые углы $\alpha = 5^\circ$. Определить, с какой силой натянуты тросы.

Решение. Приложим силу $\vec{P}$ в точке C и разложим ее по направлениям тросов. Параллелограмм сил в данном случае будет ромбом; диагонали его взаимно перпендикулярны и делятся в точке пересечения пополам. Из треугольника aCb находим, что $P/2 = T_1 \sin \alpha$. Тогда

$$T_1 = T_2 = P/2 \sin \alpha \approx 1150 \text{ Н}.$$

Из полученной формулы видно, что с уменьшением угла α натяжение тросов значительно увеличивается (например, при $\alpha = 1^\circ$ $T = 5730$ Н). Натянуть трос так, чтобы он стал горизонтальным, практически нельзя, так как при $\alpha \rightarrow 0$ $T \rightarrow \infty$.

§5 ПРОЕКЦИЯ СИЛЫ НА ОСЬ И НА ПЛОСКОСТЬ. АНАЛИТИЧЕСКИЙ СПОСОБ ЗАДАНИЯ И СЛОЖЕНИЯ СИЛ

Аналитический метод решения задач статики основывается на понятии о проекции силы на ось. **Проекция силы** (как и любого другого вектора) **на ось есть алгебраическая величина, равная произве-**

дению модуля силы на косинус угла между силой и положительным направлением оси. Если этот угол острый, — проекция положительна, если тупой, — отрицательна, а если сила перпендикулярна оси, — ее проекция на ось равна нулю. Так, для сил, изображенных на рис. 18,

$$F_x = F \cos \alpha = ab, \quad Q_x = Q \cos \alpha_1 = -Q \cos \varphi = -de, \quad P_x = 0. \quad (4)$$

Проекцией силы $\vec{F}$ на плоскость Oxy называется вектор $\vec{F}_{xy} = \vec{OB}_1$, заключенный между проекциями начала и конца силы $\vec{F}$ на эту плоскость (рис. 19). Таким образом, в отличие от проекции силы на ось, проекция силы на плоскость есть величина векторная, так как она характеризуется не только своими числовыми значениями, но и направлением в плоскости Oxy . По модулю $F_{xy} = F \cos \theta$, где θ — угол между направлением силы $\vec{F}$ и ее проекции $\vec{F}_{xy}$.

В некоторых случаях для нахождения проекции силы на ось удобнее найти сначала ее проекцию на плоскость, в которой эта ось лежит, а затем найденную проекцию на плоскость спроектировать на данную ось. Например, в случае, изображенном на рис. 19, найдем таким способом, что

$$F_x = F_{xy} \cos \varphi = F \cos \theta \cos \varphi, \quad F_y = F_{xy} \sin \varphi = F \cos \theta \sin \varphi. \quad (5)$$

Аналитический способ задания сил. Для аналитического задания силы необходимо выбрать систему координатных осей $Oxyz$, по отношению к которой будет определяться на-

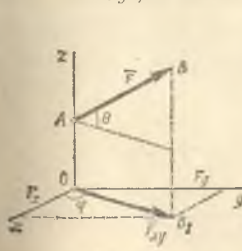


Рис. 19

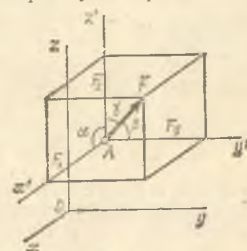


Рис. 20

правление силы в пространстве. В механике мы будем пользоваться правой системой координат, т. е. такой системой, в которой кратчайшее совмещение оси Ox с осью Oy происходит, если смотреть с положительного конца оси Oz , против хода часовой стрелки (рис. 20).

Равенства (11) выражают условия равновесия в аналитической форме: для равновесия пространственной системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций этих сил на каждую из трех координатных осей были равны нулю.

Если все действующие на тело сходящиеся силы лежат в одной плоскости, то они образуют плоскую систему сходящихся сил. В случае плоской системы сходящихся сил получим, очевидно, только два условия равновесия:

$$\Sigma F_{ix} = 0, \Sigma F_{iy} = 0. \quad (12)$$

3. Теорема о трех силах. При решении задач статики иногда удобно пользоваться следующей теоремой: если твердое тело находится в равновесии под действием трех непараллельных сил, лежащих в одной плоскости, то линии действия этих сил пересекаются в одной точке.

Для доказательства теоремы рассмотрим сначала какие-нибудь две из действующих на тело сил, например $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$. Так как по условиям теоремы эти силы лежат в одной плоскости и не параллельны, то их линии действия пересекаются в некоторой точке A (рис. 22). Приложим силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ в этой точке и заменим их равнодействующей $\vec{R}$. Тогда на тело будут действовать две силы: сила $\vec{R}$ и сила $\vec{F}_3$, приложенная в какой-то точке B тела. Если тело при этом находится в равновесии, то силы $\vec{R}$ и $\vec{F}_3$ должны быть направлены по одной прямой, т. е. вдоль AB . Следовательно, линия действия силы $\vec{F}_3$ тоже проходит через точку A , что и требовалось доказать.

Обратная теорема места не имеет, т. е. если линии действия трех сил пересекаются в одной точке, то тело под действием этих сил может и не находиться в равновесии; следовательно, теорема выражает только необходимое условие равновесия тела под действием трех сил.

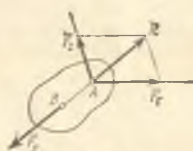


Рис. 22

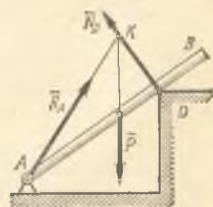


Рис. 23

Пример. Рассмотрим брус AB , закрепленный в точке A шарниром и опирающийся на выступ D (рис. 23). На этот брус действуют три силы: сила тяжести $\vec{P}$, реакция $\vec{N}_D$ выступа и реакция $\vec{R}_A$ шарнира. Так как брус находится в равновесии, то линии действия этих сил должны пересекаться в одной точке. Линии действия сил $\vec{P}$ и $\vec{N}_D$ известны и они пересекаются в точке K . Следовательно, линия действия приложенной в точке A реакции $\vec{R}_A$ тоже должна пройти через точку K , т. е. должна быть направлена вдоль прямой AK . Теорема о трех силах позволила в этом случае определить заранее неизвестное направление реакции шарнира A .

§ 7. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ СТАТИКИ

Решаемые методами статики задачи могут быть одного из следующих двух типов: 1) задачи, в которых известны (полностью или частично) действующие на тело силы и требуется найти, в каком положении или при каких соотношениях между действующими силами тело будет находиться в равновесии (задачи 4, 5); 2) задачи, в которых известно, что тело заведомо находится в равновесии и требуется найти, чему равны при этом все или некоторые из действующих на тело сил (задачи 6, 7, 8 и др.). Реакции связей являются величинами, наперед неизвестными во всех задачах статики.

Приступая к решению любой задачи, следует прежде всего установить, равновесие какого тела (или каких тел) надо рассмотреть, чтобы найти искомые величины. Процесс решения сводится к следующим операциям.

1. Выбор тела (или тел), равновесие которого должно быть рассмотрено. Для решения задачи надо рассмотреть равновесие тела, к которому приложены заданные и искомые силы или силы, равные искомым (например, если надо найти давление на опору, то можно рассмотреть равновесие тела, к которому приложена численно равная этой силе реакция опоры и т. п.).

Когда заданные силы действуют на одно тело, а искомые на другое или когда те и другие силы действуют одновременно на несколько тел, может оказаться необходимым рассмотреть равновесие системы этих тел или последовательно равновесие каждого тела в отдельности.

2. Изображение действующих сил. Установив, равновесие какого тела или тел рассматривается (и только после этого), следует на чертеже изобразить все действующие на это тело (или тела) внешние силы, включая как заданные, так и искомые силы, в том числе реакции всех связей. При изображении реакций учесть все сказанное о них в § 3.

3. Составление условий равновесия. Условия равновесия составляют для сил, действующих на тело (или тела), равновесие которых рассматривается. Об особенностях составления условий равновесия для различных систем сил будет сказано в соответствующих местах курса.

4. Определение искомых величин, проверка правильности решения и исследование полученных результатов. Важное значение в процессе решения имеет аккуратный чертеж (он помогает быстрее найти правильный путь решения и избежать ошибок при составлении условий равновесия) и последовательное проведение всех выкладок.

Все расчеты при решении задач рекомендуется, как правило, производить в общем виде (алгебраически). Тогда для искомых величин будут получаться формулы, дающие возможность проанализировать найденные результаты. Кроме того, решение в общем виде позволяет иногда обнаружить сделанные ошибки путем проверки

размерностей (размерности каждого из слагаемых в обеих частях равенства должны быть одинаковыми). Числа, если решение производится в общем виде, подставляются только в окончательные результаты.

В этом параграфе рассмотрим задачи на равновесие тела под действием сходящихся сил. Для их решения можно пользоваться геометрическим или аналитическим методом.

Геометрический метод. Им удобно пользоваться, когда общее число действующих на тело сил (и заданных, и искомых) равно трем. При равновесии треугольник, построенный из этих сил, должен быть замкнутым (построение следует начинать с заданной силы). Решая этот треугольник, найдем искомые величины.

Аналитический метод. Им можно пользоваться при любом числе приложенных сил. Для составления условий равновесия, которых в случае плоской системы сходящихся сил будет два [формулы (12)], а в случае пространственной системы три [формулы (11)], надо сначала выбрать координатные оси. Этот выбор можно производить произвольно, но полученные уравнения будут решаться проще, если одну из осей направить перпендикулярно какой-либо неизвестной силе.

Для составления условий равновесия полезно на первых порах предварительно вычислить проекции всех сил на выбранные оси, внося их в отдельную таблицу (см. задачу 4).

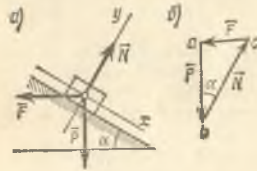
Ряд дополнительных указаний дается в ходе решения рассматриваемых ниже задач.

Задача 4. Груз весом P лежит на гладкой наклонной плоскости с углом наклона α (рис. 24, а). Определить значение горизонтальной силы $\bar{F}$, которую надо приложить к грузу, чтобы удержать его в равновесии, и найти, чему при этом равна сила давления $\bar{Q}$ груза на плоскость.

Решение. Искомые силы действуют на разные тела: сила $\bar{F}$ на груз, сила $\bar{Q}$ — на плоскость. Для решения задачи вместо силы $\bar{Q}$ будем искать равную ей по модулю, но противоположно направленную реакцию плоскости $\bar{N}$. Тогда заданная сила $\bar{P}$ и искомые силы $\bar{F}$ и $\bar{N}$ будут действовать на груз, т. е. на одно и то же тело. Рассмотрим равновесие груза и изобразим действующие на этот груз силы $\bar{P}$ и $\bar{F}$ и реакцию связи $\bar{N}$. Для определения искомых сил можно воспользоваться или геометрическим, или аналитическим условиями равновесия. Рассмотрим оба способа решения.

Геометрический способ. При равновесии треугольник, построенный из сил $\bar{P}$, $\bar{F}$ и $\bar{N}$, должен быть замкнутым. Построение треугольника начинаем с заданной силы. От произвольной точки a в выбранном масштабе откладываем силу $\bar{P}$ (рис. 24, б). Через начало и конец этой силы проводим прямые, параллельные направлениям сил $\bar{F}$ и $\bar{N}$. Точка пересечения этих прямых дает третью вершину c замкнутого силового треугольника abc , в котором стороны bc и ca равны в выбранном масштабе искомым силам. Направление сил определяется правилом стрелок: так как здесь равнодействующая равна нулю, то при обходе треугольника острия стрелок нигде не должны встречаться в одной точке.

Рис. 24



Модули искомых сил можно из треугольника abc найти и путем численного расчета (в этом случае соблюдать масштаб при изображении сил не надо). Замечая, что $\angle bac = 90^\circ$, а $\angle abc = \alpha$, получим:

$$F = P \operatorname{tg} \alpha, \quad N = P / \cos \alpha.$$

Аналитический способ. Так как система действующих сходящихся сил является плоской, для нее надо составить два условия равновесия (12). Сначала проводим координатные оси; при этом для получения более простых уравнений ось x направим перпендикулярно неизвестной силе $\bar{N}$. Далее вычисляем проекции сил $\bar{P}$, $\bar{F}$, $\bar{N}$ на оси x и y , внося их в таблицу *:

$\bar{F}_k$	$\bar{P}$	$\bar{F}$	$\bar{N}$
F_{kx}	$P \sin \alpha$	$-F \cos \alpha$	0
F_{ky}	$-P \cos \alpha$	$-F \sin \alpha$	N

Теперь составляем уравнения $\sum F_{kx} = 0$, $\sum F_{ky} = 0$. Получим:

$$P \sin \alpha - F \cos \alpha = 0; \quad -P \cos \alpha - F \sin \alpha + N = 0,$$

Решая эти уравнения, найдем:

$$F = P \operatorname{tg} \alpha, \quad N = P \cos \alpha + P \sin^2 \alpha / \cos \alpha = P / \cos \alpha.$$

Геометрическое решение в подобных простых задачах (когда действующих сил три) оказывается более компактным, чем аналитическое. Как видно, при $\alpha < 45^\circ$ $F < P$, а при $\alpha > 45^\circ$ $F > P$; $N > P$ при любом $\alpha > 0$.

Искомая сила давления груза на плоскость численно равна N , но направлена в противоположную сторону ($\bar{Q} = -\bar{N}$).

Задача 5. Стержень AB прикреплен к неподвижной опоре шарниром A (рис. 25, а). К концу B стержня подвешен груз весом P и прикреплена нить. Нить перекинута через блок C и к ней подвешен груз весом Q . Оси блока C и шарнира A расположены на одной вертикали, причем $AC = AB$. Найти, при каком угле α система будет в равновесии и чему при этом равно усилие в стержне AB ; весом стержня и размером блока пренебречь.

Решение. Рассмотрим равновесие стержня AB , к которому приложены все данные и искомые силы. Изобразим для наглядности стержень отдельно (рис. 25, б) и покажем действующие на него силы: силу $\bar{P}$, численно равную весу груза, натяжение $\bar{T}$ нити и реакцию $\bar{R}_A$, направленную вдоль стержня, так как стержень считается невесомым. Если трением в оси блока пренебречь, то натяжение нити, перекинутой через блок, при равновесии всюду одинаково; следовательно, $T = Q$.

Применяя геометрический способ решения, строим из сил $\bar{P}$, $\bar{T}$ и $\bar{R}_A$ замкнутый силовой треугольник cab (рис. 25, в), начиная с силы $\bar{P}$. Из подобия треугольников abc и ABC находим, что $ca = ab$ и $\angle cab = \alpha$. Следовательно,

$$R_A = P, \quad \sin(\alpha/2) = Q/2P,$$

так как $T = Q = 2P \sin(\alpha/2)$.

Из полученных результатов следует, что при $\alpha < 180^\circ$ равновесие возможно только, если $Q < 2P$. Стержень при этом будет сжат с силой, равной P , независимо от значений груза Q и угла α .

* Таблицу целесообразно заполнять по столбцам, т. е. сначала вычислить проекции на обе оси силы $\bar{P}$, затем силы $\bar{F}$ и т. д. Предварительное составление таких таблиц уменьшает вероятность ошибок в уравнениях и особенно полезно на первых порах, пока не будет приобретен достаточный навык в проектировании сил, а затем и в вычислении их моментов. Примеры таких таблиц для других систем сил даются далее в задачах 10, 19 (§ 17) и 40 (§ 30).

Случай, когда $\alpha=180^\circ$, должен быть рассмотрен отдельно. Легко видеть, что в этом случае равновесие возможно при любых значениях P и Q . При этом, если $P>Q$, то стержень растягивается с силой, равной $P-Q$; если же $Q>P$, то стержень сжимается с силой, равной $Q-P$.

Обращаем внимание на то, что сила тяжести $\bar{Q}$ непосредственно в условие равновесия (в силовой треугольник) не вошла, так как эта сила приложена к грузу, а не к стержню AB , равновесие которого рассматривалось.

Задача 6. Кран, закрепленный подшипником A и подпятником B , несет нагрузку P (рис. 26). Определить реакции $\bar{R}_A$ и $\bar{R}_B$ опор, вызванные действием данной нагрузки, если вылет крана равен l и $AB=h$.

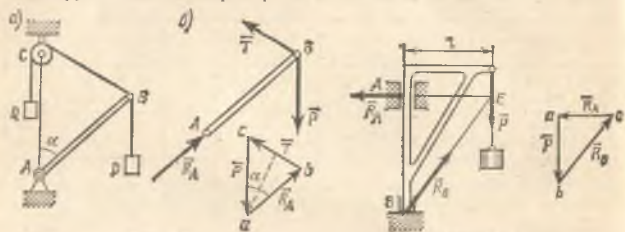


Рис. 25

Рис. 26

Решение. Рассмотрим равновесие крана, к которому приложены заданная и искомые силы. Изображаем действующие на кран силу $\bar{P}$ и реакцию подшипника $\bar{R}_A$, направленную перпендикулярно оси AB . Реакция подпятника $\bar{R}_B$ может иметь любое направление в плоскости чертежа. Но кран находится в равновесии под действием трех сил; следовательно, их линии действия должны пересекаться в одной точке. Такой точкой является точка E , где пересекаются линии действия сил $\bar{P}$ и $\bar{R}_A$. Таким образом, реакция $\bar{R}_B$ будет направлена вдоль BE .

Применяя геометрический способ решения, строим из сил $\bar{P}$, $\bar{R}_A$ и $\bar{R}_B$ замкнутый треугольник abc , начиная с заданной силы $\bar{P}$. Из подобия треугольников abc и ABE находим:

$$R_A/P = l/h, \quad R_B/P = \sqrt{l^2 + h^2}/h,$$

откуда

$$R_A = Pl/h, \quad R_B = P\sqrt{1 + l^2/h^2}.$$

Из треугольника abc видно, что направления реакций $\bar{R}_A$ и $\bar{R}_B$ показаны на чертеже правильно. Силы давления на подшипник A и подпятник B численно равны R_A и R_B , но направлены противоположно реакциям. Значения этих давлений будут тем больше, чем больше отношение l/h .

Рассмотренная задача дает пример использования теоремы о трех силах.

Задача 7. К шарниру A коленчатого пресса приложена горизонтальная сила $\bar{P}$ (рис. 27, а). Пренебрегая весом стержней и поршня, определить силу давления поршня на тело M при данных углах α и β .

Решение. Рассмотрим сначала равновесие шарнира A , к которому приложена единственная заданная сила $\bar{P}$. На ось шарнира кроме силы $\bar{P}$ действуют реакции стержней $\bar{R}_1$ и $\bar{R}_2$, направленные вдоль стержней. Строим силовой треугольник (рис. 27, б). Углы в нем равны: $\varphi=90^\circ-\alpha$, $\psi=90^\circ-\beta$, $\gamma=\alpha+\beta$. Пользуясь теоремой синусов, получим:

$$R_1/\sin \varphi = P/\sin \gamma \quad \text{и} \quad R_2 = P \cos \alpha / \sin (\alpha + \beta).$$

Теперь рассмотрим равновесие поршня. На поршень действуют тоже три силы: сила давления $\bar{R}_1 = -\bar{R}_1$ стержня AB , реакция $\bar{N}$ стенки и реакция $\bar{Q}$ прессыемого тела. Так как сил три, то они при равновесии должны быть сходящимися.

Строя из этих сил силовой треугольник (рис. 27, в), находим из него

$$Q = R_1 \cos \beta.$$

Подставляя вместо R_1 равную ей R_1 , получаем окончательно

$$Q = \frac{P \cos \alpha \cos \beta}{\sin (\alpha + \beta)} = \frac{P}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}.$$

Сила давления поршня на тело M по модулю Q и направлена в противоположную сторону. Из последней формулы видно, что при одной и той же силе P сила Q возрастает с уменьшением углов α и β .

Если длины стержней OA и AB одинаковы, то $\alpha=\beta$ и $Q=0,5 P \operatorname{ctg} \alpha$.

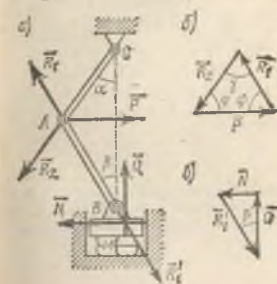


Рис. 27

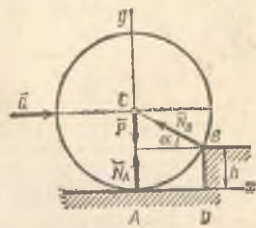


Рис. 28

Задача 8. На цилиндр весом P , лежащий на гладкой горизонтальной плоскости, действует горизонтальная сила $\bar{Q}$, прижимающая его к выступу B (рис. 28). Определить реакции в точках A и B , если $BD=h=R/2$ (R — радиус цилиндра).

Решение. Рассмотрим равновесие цилиндра, на который действуют заданные силы $\bar{P}$, $\bar{Q}$ и реакции связей $\bar{N}_A$ и $\bar{N}_B$ (реакция $\bar{N}_B$ направлена по нормали к поверхности цилиндра, т. е. вдоль радиуса BC). Все силы лежат в одной плоскости и сходятся в точке C . Так как сил четыре, то удобнее воспользоваться аналитическими условиями равновесия $\sum F_{kx}=0$, $\sum F_{ky}=0$. Проведя координатные оси так, как показано на рис. 28, получим:

$$Q - N_B \cos \alpha = 0, \quad N_A - P + N_B \sin \alpha = 0.$$

При $h=0,5 R$ получим $\sin \alpha = (R-h)/R = 0,5$ и $\alpha=30^\circ$. Тогда из первого уравнения находим

$$N_B = Q / \cos \alpha = 2Q\sqrt{3}/3.$$

Подставляя это значение N_B во второе уравнение, получим

$$N_A = P - Q \operatorname{tg} \alpha = P - Q\sqrt{3}/3.$$

При $Q = P\sqrt{3}$ реакция N_A обращается в нуль, а если $Q > P\sqrt{3}$, то цилиндр оторвется от плоскости и под действием силы Q начнет поворачиваться вокруг выступа B .

Задача 9. На кронштейне, состоящем из стержней AB и BC , скрепленных друг с другом и со стеной шарнирами, укреплен в точке B блок (рис. 29, а). Через блок перекинута нить, один конец которой привязан к стене, а на другом подвешен груз весом Q . Определить реакции стержней, пренебрегая их весом и размерами блока. Углы α и β заданы.

Решение. Рассмотрим равновесие блока с прилегающим к нему отрезком DE нити *. Для наглядности изобразим блок отдельно (рис. 29, б). На блок с отрезком нити действуют четыре внешние силы: натяжение правой ветви нити, равное Q , натяжение левой ветви нити T , по числовой величине тоже равное Q ($T=Q$), и реакции стержней R_1 и R_2 , направленные вдоль стержней. Силы, пренебрегая размерами блока, считаем сходящимися. Так как число их больше трех, воспользуемся условиями равновесия $\Sigma F_{kx}=0$, $\Sigma F_{ky}=0$. Проведем координатные оси так, как показано на рис. 29, б, получим:

$$\begin{aligned} -T \cos \beta + R_1 \sin \alpha - R_2 &= 0, \\ -Q + T \sin \beta + R_1 \cos \alpha &= 0. \end{aligned}$$

Из второго уравнения, учитывая, что $T=Q$, находим

$$R_1 = Q(1 - \sin \beta) / \cos \alpha.$$

Подставляя это значение R_1 в первое уравнение, после преобразования получаем

$$R_2 = Q \frac{\sin \alpha - \cos(\alpha - \beta)}{\cos \alpha}.$$

Из выражения для R_1 следует, что при любых острых углах α и β $R_1 > 0$. Это означает, что реакция направлена всегда так, как показано на чертеже. Сила же давления блока на стержень направлена в противоположную сторону (стержень BC сжат). Для R_2 получаем другой результат. Будем считать углы α и β всегда острыми. Так как

$$\sin \alpha - \cos(\alpha - \beta) = \sin \alpha - \sin(90^\circ - \alpha + \beta),$$

то эта разность положительна, если $\alpha > (90^\circ - \alpha + \beta)$ или когда $2\alpha > (90^\circ + \beta)$. Отсюда следует, что при $\alpha > (45^\circ + \beta/2)$ значение $R_2 > 0$, т. е. реакция R_2 имеет направление, изображенное на чертеже; если же $\alpha < (45^\circ + \beta/2)$, то $R_2 < 0$, т. е. реакция R_2 имеет противоположное направление (от A к B). При этом стержень AB в первом случае растянут, а во втором сжат. Когда $\alpha = 45^\circ + \beta/2$, получаем $R_2 = 0$.

Обращаем внимание на следующие выводы: 1) если в систему входят блоки с перекинутыми через них нитями, то при составлении условий равновесия блок целесообразно рассматривать вместе с прилегающим к нему отрезком нити как одно тело. При этом, если трением нити о блок или трением в оси блока пренебречь, то натяжения на обоих концах нити будут по модулю равны и направлены от блока (иначе нить скользила бы в сторону большего натяжения или блок вращался бы); 2) если при изображении реакций связей какая-нибудь из них будет направлена не в ту сторону, куда она фактически действует, то при геометрическом решении это непосредственно обнаружится из силового многоугольника (правило стрелок), а при аналитическом решении числовая величина соответствующей реакции получится отрицательной.

Однако во всех случаях, когда это можно наперед сделать, следует реакции связей сразу направлять верно. Например, в задаче 6 направление реакции под-

* В подобных случаях целесообразно рассматривать блок вместе с прилегающим к нему отрезком нити как одно тело. Тогда заранее неизвестные силы взаимного давления нити и блока друг на друга будут силами внутренними и в условия равновесия не войдут.

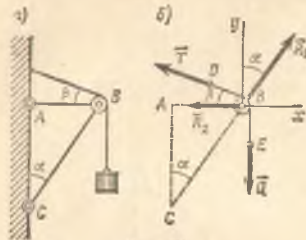


Рис. 29

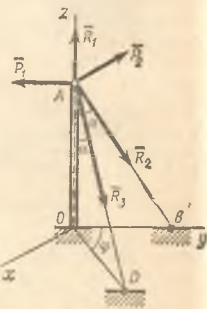


Рис. 30

шипика A устанавливается следующими рассуждениями: если убрать подшипник, то кран под действием силы P начнет падать вправо; следовательно, сила R_A , чтобы удержать кран в равновесии, должна быть направлена влево.

Задача 10. Стоящий на земле вертикальный столб OA удерживается растяжками AB и AD , образующими со столбом равные углы α ; угол между плоскостями AOB и AOD равен φ (рис. 30). К столбу подвешены два горизонтальных проволочных олина, параллельных оси Oy , натянут с силой P_1 , а другой, параллельный оси Ox , — с силой P_2 . Найти силу вертикального давления на столб и усилия в тросах, пренебрегая их весами.

Решение. Рассмотрим равновесие узла A , к которому прикреплены провода и тросы. На него действуют силы натяжения проводов P_1 и P_2 , реакции растяжек R_2 и R_3 и реакция столба R_1 . Система сил оказалась пространственной. В этом случае будем пользоваться только аналитическим способом решения. Для составления условий равновесия (11) проводим координатные оси (см. рис. 30); и вычисляем предварительно проекции всех сил на эти оси, внося их в таблицу:

F_k	P_1	P_2	R_1	R_2	R_3
F_{kx}	0	$-P_2$	0	0	$R_3 \sin \alpha \sin \varphi$
F_{ky}	$-P_1$	0	0	$R_2 \sin \alpha$	$R_3 \sin \alpha \cos \varphi$
F_{kz}	0	0	R_1	$-R_2 \cos \alpha$	$-R_3 \cos \alpha$

Проекции силы R_3 на оси x и y определяем так, как это было указано в начале § 5 (см. рис. 19).

Теперь, составляя уравнения $\Sigma F_{kx}=0$, $\Sigma F_{ky}=0$, $\Sigma F_{kz}=0$, получим:

$$\begin{aligned} -P_2 + R_3 \sin \alpha \sin \varphi &= 0, \\ -P_1 + R_2 \sin \alpha + R_3 \sin \alpha \cos \varphi &= 0, \\ R_1 - R_2 \cos \alpha - R_3 \cos \alpha &= 0. \end{aligned}$$

Решая эти уравнения, найдем:

$$\begin{aligned} R_3 &= P_2 / \sin \alpha \sin \varphi, \quad R_2 = (P_1 - P_2 \cotg \varphi) / \sin \alpha, \\ R_1 &= (P_1 + P_2 \tg \varphi/2) \cotg \alpha. \end{aligned}$$

Из полученных результатов видно, что при $P_2 \cotg \varphi > P_1$ или $\tg \varphi < P_2/P_1$ получается $R_2 < 0$ и реакция R_2 должна иметь направление, противоположное показанному на рисунке, что невозможно, так как трос не может работать на сжатие. Следовательно, растяжку AD надо располагать так, чтобы угол φ удовлетворял неравенству $\tg \varphi > P_2/P_1$.

Глава III

МОМЕНТ СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА. ПАРА СИЛ

§ 8. МОМЕНТ СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА (ИЛИ ТОЧКИ)

Введем важное понятие о моменте силы относительно точки. Точку, относительно которой берется момент, называют *центром момента*, а момент силы относительно этой точки — *моментом относительно центра*. Если под действием приложенной силы тело

может совершать вращение вокруг некоторой точки, то момент силы относительно этой точки будет характеризовать вращательный эффект силы.

Рассмотрим силу $\vec{F}$, приложенную к телу в точке A (рис. 31). Из некоторого центра O опустим перпендикуляр на линию действия силы $\vec{F}$; длину h этого перпендикуляра называют *плечом силы F относительно центра O* . Момент силы относительно центра O определяется: 1) модулем момента, равным произведению Fh ; 2) положением в пространстве плоскости OAB («плоскости поворота»), проходящей через центр O и силу $\vec{F}$; 3) направлением поворота в этой плоскости.

Из геометрии известно, что положение плоскости в пространстве определяется направлением нормали (перпендикуляра) к этой плоскости. Таким образом, момент силы относительно центра характеризуется не только его числовым значением, но и направлением в пространстве, т. е. является величиной векторной.

Введем следующее определение: *моментом силы $\vec{F}$ относительно центра O называется приложенный в центре O вектор $\vec{m}_O(\vec{F})$, модуль которого равен произведению модуля F силы на ее плечо h и который направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через центр O и силу, в ту сторону, откуда сила видна стреляющей повернуть тело вокруг центра O против хода часовой стрелки (рис. 31).* Согласно этому определению

$$|\vec{m}_O(\vec{F})| = Fh = 2 \text{ пл. } \triangle OAB. \quad (13)$$

Последний результат следует из того, что $\text{пл. } \triangle OAB = AB \cdot h/2 = Fh/2$. Измеряется момент силы в ньютон-метрах (Н·м).

Найдем формулу, выражающую вектор $\vec{m}_O(\vec{F})$. Для этого рассмотрим векторное произведение $\vec{OA} \times \vec{F}$ векторов $\vec{OA}$ и $\vec{F}$. По определению*,

$$|\vec{OA} \times \vec{F}| = 2 \text{ пл. } \triangle OAB = |\vec{m}_O(\vec{F})|.$$

Направлен вектор $\vec{OA} \times \vec{F}$ перпендикулярно плоскости OAB в ту сторону, откуда кратчайшее совмещение $\vec{OA}$ с $\vec{F}$ (если их отложить от одной точки) видно происходящим против хода часовой стрелки, т. е. так же, как вектор $\vec{m}_O(\vec{F})$. Следовательно, векторы $\vec{OA} \times \vec{F}$ и $\vec{m}_O(\vec{F})$ совпадают и по модулю, и по направлению, и, как

* Векторным произведением $\vec{a} \times \vec{b}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, равный по модулю площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, и направленный перпендикулярно плоскости этих векторов в ту сторону, откуда кратчайшее совмещение $\vec{a}$ с $\vec{b}$ видно происходящим против хода часовой стрелки. Модуль c определяется еще равенством $c = ab \sin \alpha$, где α — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ параллельны, то $\vec{a} \times \vec{b} = 0$.

легко видеть, по размерности, т. е. выражают одну и ту же величину. Отсюда

$$\vec{m}_O(\vec{F}) = \vec{OA} \times \vec{F} \text{ или } \vec{m}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}, \quad (14)$$

где $\vec{r} = \vec{OA}$ — радиус-вектор точки A , проведенный из центра O .

Таким образом, *момент силы $\vec{F}$ относительно центра O равен векторному произведению радиуса-вектора $\vec{r} = \vec{OA}$, проведенного из центра O в точку A , где приложена сила, на саму силу*. Этот результат может служить другим определением понятия о моменте силы относительно центра.

Отметим следующие свойства момента силы: 1) момент силы относительно центра не изменяется при переносе точки приложения силы вдоль ее линии действия; 2) момент силы относительно центра O равен нулю или когда сила равна нулю, или когда линия действия силы проходит через центр O (плечо равно нулю).

§ 9. ПАРА СИЛ. МОМЕНТ ПАРЫ

*Парой сил** называется система двух равных по модулю, параллельных и направленных в противоположные стороны сил, действующих на абсолютно твердое тело (рис. 32, а). Система сил $\vec{F}$, $\vec{F}'$, образующих пару, очевидно, не находится в равновесии (эти силы не направлены вдоль одной прямой). В то же время пара сил не имеет равнодействующей, поскольку, как будет доказано, равнодействующая любой системы сил равна ее главному вектору $\vec{R}$, т. е. сумме этих сил, а для пары $\vec{R} = \vec{F} + \vec{F}' = 0$. Поэтому свойства пары сил, как особой меры механического взаимодействия тел, должны быть рассмотрены отдельно.

Плоскость, проходящая через линии действия пары сил, называется *плоскостью действия пары*. Расстояние d между линиями действия сил пары называется *плечом пары*. Действие пары сил на твердое тело сводится к некоторому вращательному эффекту, который характеризуется величиной, называемой *моментом пары*. Этот момент определяется: 1) его модулем, равным произведению Fd ; 2) положением в пространстве плоскости действия пары; 3) направлением поворота пары в этой плоскости. Таким образом, как и момент силы относительно центра, это величина векторная.

Введем следующее определение: *моментом пары сил называется вектор $\vec{m}$ (или $\vec{M}$), модуль которого равен произведению модуля одной из сил пары на ее плечо и который направлен перпендикулярно плоскости действия пары в ту сторону, откуда пара видна стреляющей повернуть тело против хода часовой стрелки (рис. 32, б).*

Заметим еще, что так как плечо силы $\vec{F}$ относительно точки A равно d , а плоскость, проходящая через точку A и силу $\vec{F}$, совпадает

* Теорию пар разработал известный французский ученый — механик и геомер Ж. Пуансо (1777—1859).

с плоскостью действия пары, то одновременно $\vec{m} = \vec{m}_A(\vec{F}) = \vec{AB} \times \vec{F}$. Но в отличие от момента силы вектор $\vec{m}$, как будет показано ниже, может быть приложен в любой точке (такой вектор называется *свободным*). Измеряется момент пары, как и момент силы, в ньютонах.

Покажем, что моменту пары можно дать другое выражение: *момент пары равен сумме моментов относительно любого центра O сил, образующих пару*, т. е.

$$\vec{m} = \vec{m}_O(\vec{F}) + \vec{m}_O(\vec{F}'). \quad (15)$$

Для доказательства проведем из произвольной точки O (рис. 33) радиусы-векторы $\vec{r}_A = \vec{OA}$ и $\vec{r}_B = \vec{OB}$. Тогда согласно формуле (14),

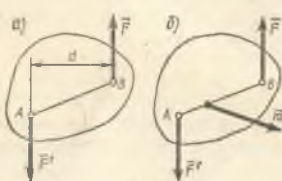


Рис. 32

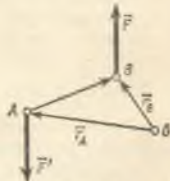


Рис. 33

учтя еще, что $\vec{F}' = -\vec{F}$, получим $\vec{m}_O(\vec{F}) = \vec{r}_B \times \vec{F}$, $\vec{m}_O(\vec{F}') = \vec{r}_A \times \vec{F}' = -\vec{r}_A \times \vec{F}$ и, следовательно,

$$\vec{m}_O(\vec{F}) + \vec{m}_O(\vec{F}') = (\vec{r}_B - \vec{r}_A) \times \vec{F} = \vec{AB} \times \vec{F}.$$

Так как $\vec{AB} \times \vec{F} = \vec{m}$, то справедливость равенства (15) доказана. Отсюда, в частности, следует уже отмеченный выше результат:

$$\vec{m} = \vec{AB} \times \vec{F} = \vec{m}_A(\vec{F}) \quad \text{или} \quad \vec{m} = \vec{m}_B(\vec{F}'), \quad (15')$$

т. е. что *момент пары равен моменту одной из ее сил относительно точки приложения другой силы*. Отметим еще, что модуль момента пары

$$m = Fd. \quad (15'')$$

Если принять, что действие пары сил на твердое тело (ее вращательный эффект) полностью определяется значением суммы моментов сил пары относительно любого центра O, то из формулы (15) следует, что *две пары сил, имеющие одинаковые моменты, эквивалентны*, т. е. оказывают на тело одинаковое механическое действие. Иначе это означает, что две пары сил, независимо от того, где каждая из них расположена в данной плоскости (или в параллельных плоскостях) и чему равны в отдельности модули их сил и их плечи, если их моменты имеют одно и то же значение $\vec{m}$, будут эквивалентны. Так как выбор центра O произволен, то вектор $\vec{m}$ можно считать приложенным в любой точке, т. е. это вектор свободный.

В дальнейшем будем обычно на чертеже вместо пары изображать полностью ее характеризующий вектор $\vec{m}$. При этом модуль m определяет модуль момента пары [формула (15'')], а направление $\vec{m}$ определяет плоскость действия пары и направление поворота в этой плоскости.

Из формулы (15) следует еще, что если на тело действует несколько пар с моментами $\vec{m}_1, \vec{m}_2, \dots, \vec{m}_n$, то сумма моментов всех сил, образующих эти пары, относительно любого центра будет равна $\vec{m}_1 + \vec{m}_2 + \dots + \vec{m}_n$, а следовательно, вся совокупность этих пар эквивалентна одной паре с моментом $\vec{M} = \sum \vec{m}_i$. Этот результат выражает теорему о сложении пар.

§ 10*. ТЕОРЕМЫ ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ И О СЛОЖЕНИИ ПАР

Справедливость выводов, сделанных в конце § 9, можно доказать непосредственно.

Рассмотрим действующую на твердое тело пару сил $\vec{F}, \vec{F}'$. Проведем в плоскости действия этой пары через произвольные точки D и E две параллельные прямые до пересечения их с линиями действия сил $\vec{F}, \vec{F}'$ в точках A и B (рис. 34)

и приложим силы $\vec{F}, \vec{F}'$ в этих точках (первоначально $\vec{F}$ и $\vec{F}'$ могли быть приложены в любых других точках на их линиях действия). Разложим теперь силу $\vec{F}$ по направлениям AB и EB на силы $\vec{Q}$ и $\vec{P}$, а силу $\vec{F}'$ — по направлениям BA и AD на силы $\vec{Q}'$ и $\vec{P}'$. Очевидно при этом, что $\vec{P}' = -\vec{P}$, а $\vec{Q}' = -\vec{Q}$. Силы $\vec{Q}$ и $\vec{Q}'$, как уравновешенные, можно отбросить. В результате пара сил $\vec{F}, \vec{F}'$ будет заменена парой $\vec{P}, \vec{P}'$ с другим плечом

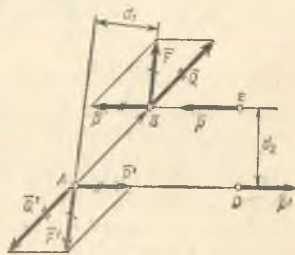


Рис. 34

и другими силами, которые можно, очевидно, приложить в точках D, E на их линиях действия. При этом в силу произвольности в выборе точек D, E и направлений прямых AD и BE пара $\vec{P}, \vec{P}'$ может оказаться расположенной в плоскости ее действия где угодно (в положении, при котором силы $\vec{P}$ и $\vec{P}'$ параллельны $\vec{F}$, пару можно привести, проделав указанное преобразование дважды).

Покажем в заключение, что пары $\vec{F}, \vec{F}'$ и $\vec{P}, \vec{P}'$ имеют одинаковые моменты. Обозначим эти моменты соответственно через $\vec{m}_1$ и $\vec{m}_2$, где согласно формуле (15') $\vec{m}_1 = \vec{AB} \times \vec{F}$, а $\vec{m}_2 = \vec{AB} \times \vec{P}$. Так как $\vec{F} = \vec{P} + \vec{Q}$, то $\vec{AB} \times \vec{F} = \vec{AB} \times \vec{P} + \vec{AB} \times \vec{Q}$, но $\vec{AB} \times \vec{Q} = 0$ (см. подстрочное примечание на с. 32) и, следовательно, $\vec{m}_1 = \vec{m}_2$.

Из доказанного вытекают следующие свойства пары сил:

1) пару, не изменяя оказываемого ею на твердое тело действия, можно перенести куда угодно в плоскости действия пары;

2) у данной пары, не изменяя оказываемого ею на твердое тело действия, можно произвольно менять модули сил или длину плеча, сохраняя неизменным ее момент.

Можно доказать, что пара сил обладает еще одним достаточно очевидным свойством (доказательство опускаем):

3) пару, не изменяя оказываемого ею на твердое тело действия, можно перенести из данной плоскости в любую другую плоскость, параллельную данной.

Отсюда следует, что две пары сил, имеющие одинаковые моменты, эквивалентны друг другу (теорема об эквивалентности пар). Это следует из того, что указанными операциями, т. е. путем изменения

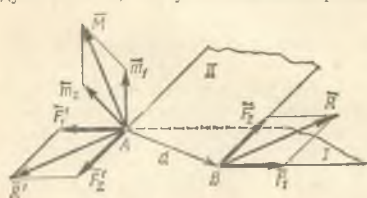


Рис. 35

плеча и перемещения пары в плоскости действия или переноса в параллельную плоскость, пары с одинаковыми моментами могут быть преобразованы одна в другую.

Теперь докажем теорему о сложении пар: система пар, действующих на абсолютно твер-

дое тело, эквивалентна одной паре с моментом, равным геометрической сумме моментов слагаемых пар.

Рассмотрим сначала две пары с моментами $\bar{m}_1$ и $\bar{m}_2$, лежащие в плоскостях I и II (рис. 35). Возьмем на линии пересечения плоскостей отрезок $AB=d$ и изобразим пару с моментом $\bar{m}_1$ силами $\bar{F}_1, \bar{F}_1'$, а пару с моментом $\bar{m}_2$ — силами $\bar{F}_2, \bar{F}_2'$ (при этом, конечно, $F_1 d = m_1, F_2 d = m_2$).

Сложив силы, приложенные в точках A и B, убеждаемся, что пары $\bar{F}_1, \bar{F}_1'$ и $\bar{F}_2, \bar{F}_2'$ действительно эквивалентны одной паре $\bar{R}, \bar{R}'$; найдем момент $\bar{M}$ этой пары. Так как $\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2$, то $\bar{AB} \times \bar{R} = \bar{AB} \times \bar{F}_1 + \bar{AB} \times \bar{F}_2$ или согласно формуле (15') $\bar{M} = \bar{m}_1 + \bar{m}_2$.

Для двух пар теорема доказана; при этом очевидно, что доказательство сохранится и в случае, когда плоскости I и II сливаются (слагаемые пары лежат в одной плоскости).

Если на тело действует система n пар с моментами $\bar{m}_1, \bar{m}_2, \dots, \bar{m}_n$, то последовательно применяя результат, полученный для двух пар, найдем, что данная система пар будет действительно эквивалентна одной паре с моментом

$$\bar{M} = \bar{m}_1 + \bar{m}_2 + \dots + \bar{m}_n = \sum \bar{m}_k. \quad (16)$$

Из полученного результата легко найти условие равновесия системы пар, действующих на твердое тело: при равновесии должно

быть $\bar{M} = 0$ или

$$\sum m_k = 0. \quad (17)$$

Задача 11. На твердое тело действуют две пары сил $\bar{F}_1, \bar{F}_1'$ и $\bar{F}_2, \bar{F}_2'$, лежащие во взаимно перпендикулярных плоскостях (рис. 36). Модуль момента каждой из пар равен 30 Н·м. Найти результирующую пару.

Решение. Изобразим векторы $\bar{m}_1$ и $\bar{m}_2$ моментов слагаемых пар, приложив их в некоторой точке A; тогда момент результирующей пары изобразится вектором $\bar{m}$. Следовательно, результирующая пара расположена в плоскости ABCD, перпендикулярной вектору $\bar{m}$, а модуль ее момента равен $30\sqrt{2}$ Н·м.

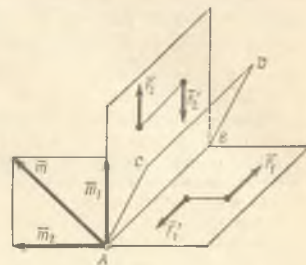


Рис. 36

Глава IV

ПРИВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ СИЛ К ЦЕНТРУ. УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ

§ 11. ТЕОРЕМА О ПАРАЛЛЕЛЬНОМ ПЕРЕНОСЕ СИЛЫ

Равнодействующая системы сходящихся сил непосредственно находится с помощью закона параллелограмма сил. Очевидно, что аналогичную задачу можно будет решить и для произвольной системы сил, если найти для них метод, позволяющий перенести все силы в одну точку. Такой метод дает следующая теорема: силу, приложенную к абсолютно твердому телу, можно, не изменяя оказываемого ею действия, переносить из данной точки в любую другую точку тела, прибавляя при этом пару с моментом, равным моменту переносимой силы относительно точки, куда сила переносится.

Пусть на твердое тело действует сила $\bar{F}$, приложенная в точке A (рис. 37, а). Действие этой силы не изменяется, если в любой точке B тела приложить две уравновешенные силы $\bar{F}'$ и $\bar{F}''$, такие, что $\bar{F}' + \bar{F}'' = \bar{F}$. Полученная система трех сил и представляет собой силу $\bar{F}'$, равную $\bar{F}$, но приложенную в точке B, и пару $\bar{F}, \bar{F}''$ с моментом

$$\bar{m} = \bar{m}_B(\bar{F}). \quad (18)$$

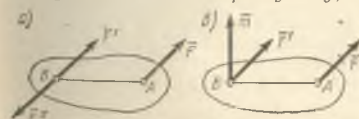


Рис. 37

Последнее равенство следует из формулы (15'). Таким образом, теорема доказана. Результат, даваемый теоремой, можно еще изобразить так, как это показано на рис. 37, б (силу $\vec{F}$ на этом рисунке надо считать отброшенной). Рассмотрим примеры, иллюстрирующие теорему.

Пример 1. Чтобы удержать в равновесии однородный брус AB длиной $2a$ и весом P , надо приложить в его середине C направленную вверх силу $\vec{Q}$, по модулю равную P (рис. 38, а). Согласно доказанной теореме силу $\vec{Q}$ можно заменить силой $\vec{Q}'$, приложенной к концу A бруса, и парой с моментом, модуль которого $m=Qa$.

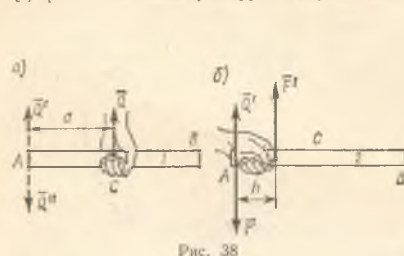


Рис. 38

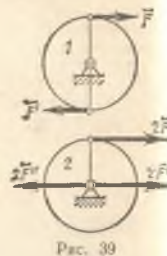


Рис. 39

Если плечо этой пары уменьшить до величины h (рис. 38, б), то образующие ее силы $\vec{F}, \vec{F}'$ надо увеличить так, чтобы было $Fh=Qa$. Следовательно, чтобы удержать брус за его конец A , надо кроме силы $\vec{Q}'$ приложить еще пару $\vec{F}, \vec{F}'$. Этот результат, вытекающий из доказанной теоремы, непосредственно «ощущает» рука человека, удерживающая брус за его середину (рис. 38, а) или за конец (рис. 38, б).

Пример 2. На барабан 1 радиуса r намотаны в противоположных направлениях две нити, к концам которых прикладывают силы $\vec{F}$ и $\vec{F}'=-\vec{F}$ (рис. 39); на барабан 2 того же радиуса намотана одна нить, к которой прикладывают силу, равную $2\vec{F}$. Рассмотрим, чем будут отличаться действия этих сил.

На барабан 1 действует только пара сил $\vec{F}, \vec{F}'$ с моментом, численно равным $2Fr$, вращающая барабан. Силу, действующую на барабан 2, можно заменить силой $2\vec{F}'=2\vec{F}$, приложенной к оси барабана, и парой $2\vec{F}, 2\vec{F}'$. В результате находим, что на этот барабан действуют: 1) пара с численно таким же, как и в первом случае, моментом $2Fr$, вращающая барабан, и 2) сила $2\vec{F}'$, оказывающая давление на ось барабана.

Итак, оба барабана будут вращаться одинаково. Но при этом ось второго барабана испытывает давление, равное $2F$, а ось первого барабана никакого давления не испытывает.

§ 12. ПРИВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ СИЛ К ДАННОМУ ЦЕНТРУ

Решим теперь задачу о приведении произвольной системы сил к данному центру, т. е. о замене данной системы сил другой, ей эквивалентной, но значительно более простой, а именно состоящей, как мы увидим, только из одной силы и пары.

Пусть на твердое тело действует произвольная система сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ (рис. 40, а). Выберем какую-нибудь точку O за центр

приведения и, пользуясь теоремой, доказанной в § 11, перенесем все силы в центр O , присоединяя при этом соответствующие пары (см. рис. 37, б). Тогда на тело будет действовать система сил

$$\vec{F}_1'=\vec{F}_1, \vec{F}_2'=\vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n'=\vec{F}_n, \quad (19)$$

приложенных в центре O , и система пар, моменты которых согласно формуле (18) равны:

$$\vec{m}_1=\vec{m}_O(\vec{F}_1), \vec{m}_2=\vec{m}_O(\vec{F}_2), \dots, \vec{m}_n=\vec{m}_O(\vec{F}_n). \quad (20)$$

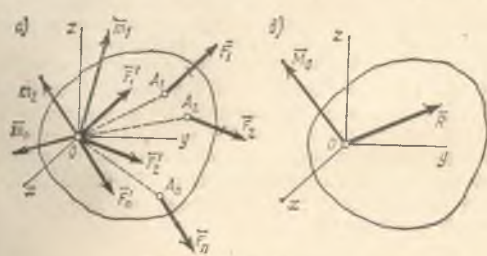


Рис. 40

Сходящиеся силы, приложенные в точке O , заменяются одной силой $\vec{R}$, приложенной в точке O . При этом $\vec{R}=\Sigma \vec{F}_k'$ или, согласно равенствам (19),

$$\vec{R}=\Sigma \vec{F}_k. \quad (21)$$

Чтобы сложить все полученные пары, надо сложить векторы моментов этих пар. В результате система пар заменится одной парой, момент которой $\vec{M}_O=\Sigma \vec{m}_k$ или, согласно равенствам (20),

$$\vec{M}_O=\Sigma \vec{m}_O(\vec{F}_k). \quad (22)$$

Как известно, величина $\vec{R}$, равная геометрической сумме всех сил, называется *главным вектором системы сил*; величина $\vec{M}_O$, равная геометрической сумме моментов всех сил относительно центра O , называется *главным моментом системы сил* относительно этого центра.

Таким образом, мы доказали следующую теорему о приведении системы сил: *любая система сил, действующих на абсолютно твердое тело, при приведении к произвольно выбранному центру O заменяется одной силой $\vec{R}$, равной главному вектору системы сил и приложенной в центре приведения O , и одной парой с моментом $\vec{M}_O$, равным главному моменту системы сил относительно центра O (рис. 40, б).*

Заметим, что сила $\bar{R}$ не является здесь равнодействующей данной системы сил, так как заменяет систему сил не одна, а вместе с парой.

Из доказанной теоремы следует, что две системы сил, имеющие одинаковые главные векторы и главные моменты относительно одного и того же центра, эквивалентны (условия эквивалентности систем сил).

Отметим еще, что значение $\bar{R}$ от выбора центра O , очевидно, не зависит. Значение же $\bar{M}_O$ при изменении положения центра O может в общем случае изменяться вследствие изменения значений моментов отдельных сил. Поэтому всегда необходимо указывать, относительно какого центра определяется главный момент.

Рассмотрим в заключение два частных случая: 1) если для данной системы сил $\bar{R}=0$, а $\bar{M}_O \neq 0$, то она приводится к одной паре сил с моментом $\bar{M}_O$. В этом случае значение $\bar{M}_O$ не зависит от выбора центра O , так как иначе получилось бы, что одна и та же система сил заменяется разными, не эквивалентными друг другу парами, что невозможно; 2) если для данной системы сил $\bar{R} \neq 0$, а $\bar{M}_O = 0$, то она приводится к одной силе, т. е. к равнодействующей, равной $\bar{R}$ и приложенной в центре O .

§ 13. УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ СИСТЕМЫ СИЛ. ТЕОРЕМА О МОМЕНТЕ РАВНОДЕЙСТВУЮЩЕЙ

Покажем, что для равновесия любой системы сил необходимо и достаточно, чтобы главный вектор этой системы сил и ее главный момент относительно любого центра были равны нулю, т. е. чтобы выполнялись условия

$$\bar{R}=0, \bar{M}_O=0, \quad (23)$$

где O — любой центр, так как в конце § 12 показано, что при $\bar{R}=0$ значение $\bar{M}_O$ от выбора центра O не зависит.

Условия (23) являются необходимыми, так как если какое-нибудь из них не выполняется, то система действующих на тело сил приводится или к равнодействующей (когда $\bar{R} \neq 0$), или к паре сил (когда $\bar{M}_O \neq 0$) и, следовательно, не является уравновешенной. Одновременно условия (23) являются и достаточными, потому что при $\bar{R}=0$ система сил может приводиться только к паре с моментом $\bar{M}_O$, а так как $\bar{M}_O=0$, то имеет место равновесие.

Пользуясь полученным результатом, докажем следующую теорему Вариньона* о моменте равнодействующей: если данная система сил имеет равнодействующую, то момент равнодействующей относительно любого центра O равен сумме моментов сил системы относительно того же центра.

* П. Вариньон (1654—1722) — выдающийся французский ученый, математик и механик. Изложил основы статики в книге «Проект новой механики» (1687).

Пусть система сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$ приводится к равнодействующей $\bar{R}$, линия действия которой проходит через некоторую точку C (рис. 41). Приложим в этой точке силу $\bar{R}' = -\bar{R}$. Тогда система сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n, \bar{R}'$ будет находиться в равновесии и для нее должно выполняться условие $M_O=0$, т. е. согласно формуле (22) для данных сил (включая силу $\bar{R}'$) должно быть $\sum m_O(\bar{F}_k) + m_O(\bar{R}') = 0$. Но так как $\bar{R}' = -\bar{R}$ и обе силы направлены вдоль одной и той же прямой, то $m_O(\bar{R}') = -m_O(\bar{R})$. Подставляя это значение $m_O(\bar{R}')$ в предыдущее равенство, найдем из него, что

$$\bar{m}_O(\bar{R}) = \sum \bar{m}_O(\bar{F}_k). \quad (24)$$

Тем самым теорема доказана. Ею часто бывает удобно пользоваться при вычислении моментов сил.

Глава V ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СИЛ

§ 14. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ МОМЕНТЫ СИЛЫ И ПАРЫ

Переходя к рассмотрению плоской системы сил (системы сил, как угодно расположенных в одной плоскости), начнем с введения некоторых понятий.

1. Алгебраический момент силы относительно центра. Когда все силы системы лежат в одной плоскости, их моменты относительно любого центра O , находящегося в той же плоскости, перпендикулярны этой плоскости, т. е. направлены вдоль одной и той же прямой. Тогда, не прибегая к векторной символике, можно направления этих моментов отличить одно от другого знаком и рассматривать момент силы $\bar{F}$ относительно центра O как алгебраическую величину. Условимся для краткости такой момент называть алгебраическим и обозначать символом $m_O(\bar{F})$. Алгебраический момент силы $\bar{F}$ относительно центра O равен взятому с соответствующим знаком произведению модуля силы на ее плечо, т. е.*

$$m_O(\bar{F}) = \pm Fh. \quad (25)$$

При этом в правой системе координат, принятой в механике, момент считается положительным, когда сила стремится повернуть

* В подобных равенствах символ « $\pm$ » будет означать, что данная величина имеет или знак плюс, или знак минус.

тело вокруг центра O против хода часовой стрелки, и отрицательным — когда по ходу часовой стрелки. Так, для сил, изображенных на рис. 42: $m_O(\vec{P}) = Ph_1$, $m_O(\vec{Q}) = -Qh_2$.

Заметим, что полученные выше формулы (22) и (24), содержащие суммы моментов-векторов, сохраняют свой вид и для алгебраических моментов, но суммы при этом будут не векторные, а алгебраические.



Рис. 42

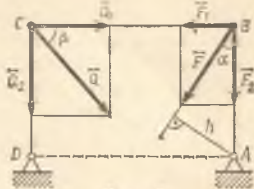


Рис. 43

Пример. Найти моменты сил $\vec{F}$ и $\vec{Q}$ относительно точки A (рис. 43), если $AB=a$, $AD=b$ и углы α , β известны.

Решение. Опустив из точки A перпендикуляр на линию действия силы $\vec{F}$, найдем плечо $h=a \sin \alpha$; тогда с учетом знака $m_A(\vec{F}) = Fa \sin \alpha$.

Для силы $\vec{Q}$ проще не находить плечо, а разложить $\vec{Q}$ на составляющие $\vec{Q}_1$ и $\vec{Q}_2$, для которых плечи будут соответственно равны $AB=a$ и $AD=b$, а затем воспользоваться формулой (24), т. е. теоремой Вариньона. Тогда с учетом знаков: $m_A(\vec{Q}) = m_A(\vec{Q}_1) + m_A(\vec{Q}_2) = -Q_1 a + Q_2 b$. Но $Q_1 = Q \cos \beta$, $Q_2 = Q \sin \beta$ и окончательно

$$m_A(\vec{Q}) = Q(b \sin \beta - a \cos \beta).$$

Выражение в скобках и является плечом силы $\vec{Q}$, что не сразу видно.

Заметим, что $m_A(\vec{F})$ можно тоже найти, разложив силу $\vec{F}$ на составляющие $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$. Тогда $m_A(\vec{F}) = m_A(\vec{F}_1) = (F \sin \alpha)a$, так как $m_A(\vec{F}_2) = 0$.

2. Алгебраический момент пары. Поскольку момент пары сил равен моменту одной из ее сил относительно точки приложения другой силы [формула (15')], то для пар, лежащих в одной плоскости, момент пары мож-

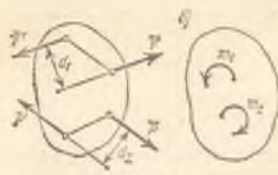


Рис. 44

но тоже рассматривать как алгебраическую величину, называть алгебраическим и условиться обозначать символом m (или M). При этом алгебраический момент пары равен взятому с соответствующим знаком произведению модуля одной из сил пары на плечо пары:

$$m = \pm Fd. \quad (26)$$

Правило знаков здесь такое же, как для момента силы. Так, для изображенной на рис. 44, а пары $\vec{F}$, $\vec{F}'$ момент $m_1 = Fd_1$, а для пары $\vec{P}$, $\vec{P}'$ момент $m_2 = -Pd_2$. Поскольку пара сил характеризуется только ее моментом, то на рисунках пару изображают часто просто

дуговой стрелкой, показывающей направление поворота пары (как на рис. 44, б).

Полученные выше формулы (16) и (17), содержащие суммы моментов-векторов, тоже сохраняют вид для алгебраических моментов, причем суммы будут алгебраическими.

Задача 12. Криволинейный рычаг $ABCD$ (рис. 45) находится в равновесии под действием двух параллельных сил $\vec{P}$ и $\vec{P}'$, образующих пару. Определить силы давления на опоры, если $AB=a=15$ см, $BC=b=30$ см, $CD=c=20$ см, $P=P'=300$ Н.

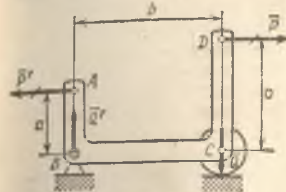


Рис. 45



Рис. 46

Решение. Заменяем пару $\vec{P}$, $\vec{P}'$ эквивалентной ей парой $\vec{Q}$, $\vec{Q}'$, силы которой направлены по направлениям реакций опор. При этом моменты пар должны быть одинаковы, т. е. $P(c-a) = Qb$.

Следовательно, силы давления на опоры численно равны

$$Q = Q' = P(c-a)/b = 50 \text{ Н}$$

и направлены так, как показано на чертеже.

Задача 13. На шестерню 1 радиуса r_1 действует пара сил с моментом m_1 (рис. 46, а). Определить момент m_2 пары, которую надо приложить к шестерне 2 радиуса r_2 , чтобы сохранить равновесие.

Решение. Рассмотрим сначала условия равновесия шестерни 1. На нее действует пара с моментом m_1 , которая может быть уравновешена только действием другой пары, в данном случае пары $\vec{Q}_1$, $\vec{R}_1$. Здесь $\vec{Q}_1$ — перпендикулярная радиусу составляющая силы давления на зуб со стороны шестерни 2, а $\vec{R}_1$ — тоже перпендикулярная радиусу составляющая реакции оси A (сила давления на зуб и реакция оси A имеют еще составляющие вдоль радиуса, которые взаимно уравновешиваются и в условии равновесия не войдут). При этом, согласно условию равновесия (17), $m_1 + (-Q_1 r_1) = 0$ и $Q_1 = m_1/r_1$.

Теперь рассмотрим условия равновесия шестерни 2 (рис. 46, б). По закону равенства действия и противодействия на нее со стороны шестерни 1 будет действовать сила $\vec{Q}_2 = -\vec{Q}_1$, которая с перпендикулярной радиусу составляющей реакции оси B образует пару $\vec{Q}_2$, $\vec{R}_2$ с моментом, равным $-Q_2 r_2$. Эта пара и должна уравновеситься приложенной к шестерне 2 парой с моментом m_2 ; следовательно, по условию равновесия (17), $m_2 + (-Q_2 r_2) = 0$. Отсюда, так как $Q_2 = Q_1$, находим $m_2 = m_1 r_2/r_1$.

Естественно, что пары с моментами m_1 и m_2 не удовлетворяют условию равновесия (17), так как они приложены к разным телам.

Полученная в процессе решения задачи величина Q_1 (или Q_2) называется **окружным усилием**, действующим на шестерню. Как видим, окружное усилие равно моменту вращающей пары, деленному на радиус шестерни: $Q_1 = m_1/r_1 = m_2/r_2$.

§ 15. ПРИВЕДЕНИЕ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ СИЛ К ПРОСТЕЙШЕМУ ВИДУ

Результат, полученный в § 12, справедлив, конечно, и в частном случае плоской системы сил. Следовательно, плоская система сил тоже приводится к силе, равной $\vec{R}$ и приложенной в произвольно выбранном центре O , и паре с моментом M_O , но сила и пара лежат в данном случае в одной плоскости — в плоскости действия сил (рис. 47, а, где пара изображена дуговой стрелкой). Значения главного вектора $\vec{R}$ и главного момента M_O даются формулами (21) и (22); при этом вектор $\vec{R}$ можно определить или геометрически построением силового многоугольника (§ 4), или аналитически по формулам (10) из § 5. Таким образом, для плоской системы сил

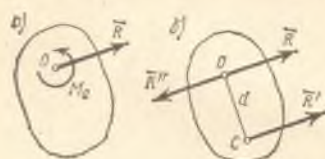


Рис. 47

$$\begin{aligned} R_x &= \sum F_{kx}, \quad R_y = \sum F_{ky}, \\ M_O &= \sum m_O(F_k), \end{aligned} \quad (27)$$

где все моменты в последнем равенстве алгебраические и сумма тоже алгебраическая.

Найдем, к какому простейшему виду может приводиться данная плоская система сил, не находящаяся в равновесии. Результат зависит от значений $\vec{R}$ и M_O .

1. Если для данной системы сил $\vec{R} = 0$, а $M_O \neq 0$, то она приводится к одной паре с моментом M_O . Как показано в конце § 12, значение M_O в этом случае не зависит от выбора центра O .

2. Если для данной системы сил $\vec{R} \neq 0$, то она приводится к одной силе, т. е. к равнодействующей. При этом возможны два случая:

а) $\vec{R} \neq 0$, $M_O = 0$. В этом случае система, что сразу видно, приводится к равнодействующей $\vec{R}$, проходящей через центр O ;

б) $\vec{R} \neq 0$, $M_O \neq 0$. В этом случае пару с моментом M_O можно изобразить двумя силами $\vec{R}'$ и $\vec{R}''$, беря $\vec{R}' = \vec{R}$, а $\vec{R}'' = -\vec{R}$ (рис. 47, б). При этом, если $d = OC$ — плечо пары, то должно быть

$$Rd = |M_O|. \quad (28)$$

Отбросив теперь силы $\vec{R}$ и $\vec{R}''$, как уравновешенные, найдем, что вся система сил заменяется равнодействующей $\vec{R}' = \vec{R}$, проходящей через точку C . Положение точки C определяется двумя условиями: 1) расстояние $OC = d$ ($OC \perp \vec{R}$) должно удовлетворять равенству (28); 2) знак момента относительно центра O силы $\vec{R}'$, приложенной в точке C , т. е. знак $m_O(\vec{R}')$, должен совпадать со знаком M_O .

Пример подобного расчета дан в задаче 17.

Таким образом, плоская система сил, не находящаяся в равновесии, может быть окончательно приведена или к одной силе, т. е. к равнодействующей (когда $\vec{R} \neq 0$), или к паре сил (когда $\vec{R} = 0$).

Задача 14. Привести к центру O систему сил P , $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, изображенных на рис. 48, если $P = 30$ Н, $F_1 = F_2 = F_3 = 20$ Н, $a = 0,3$ м, $b = 0,5$ м, $\alpha = 60^\circ$.

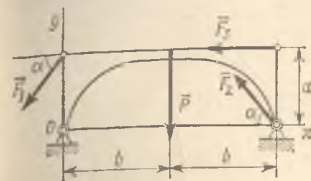


Рис. 48

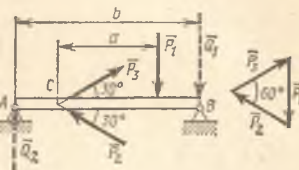


Рис. 49

Решение. Задача сводится к нахождению главного вектора $\vec{R}$ заданной системы сил, который будем определять по его проекциям R_x , R_y , и главного момента M_O этих сил относительно центра O . Проводя оси Oxy так, как показано на рисунке, и пользуясь формулами (27), получим (см. пример вычисления моментов сил в § 14):

$$R_x = \sum F_{kx} = -F_1 \cos \alpha - F_2 \cos \alpha - F_3,$$

$$R_y = \sum F_{ky} = -P - F_1 \sin \alpha + F_2 \sin \alpha,$$

$$M_O = \sum m_O(F_k) = -bP + aF_1 \cos \alpha + 2bF_2 \sin \alpha + aF_3.$$

Подставляя сюда числовые значения сил, найдем, что $R_x = -40$ Н, $R_y = -30$ Н, $M_O = 11,3$ Н·м. Таким образом, заданная система сил приводится к приложенной в центре приведения O силе $\vec{R}$ с проекциями $R_x = -40$ Н, $R_y = -30$ Н ($R = 50$ Н) и паре сил с моментом $M_O = 11,3$ Н·м.

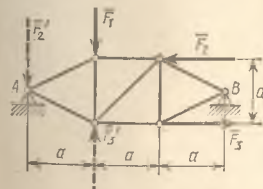


Рис. 50

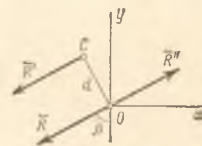


Рис. 51

Задача 15. Привести к простейшему виду систему сил $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$, действующих на балку AB (рис. 49), и найти силы давления на опоры A и B , если $P_1 = P_2 = P_3 = P$.

Решение. Многоугольник, построенный из сил $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$, замкнут; следовательно, $\vec{R} = 0$. Сумма моментов всех сил относительно любой точки (например, точки C) равна $-Pa$. Следовательно, данная система сил приводится к паре с моментом $m = -Pa$. Располагая эту пару так, как показано на чертеже пунктиром, заключаем, что силы $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$ оказывают на опоры давления $\vec{Q}_1$ и $\vec{Q}_2$, численно равные Pa/b .

Задача 16. Привести к простейшему виду систему сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$, действующих на ферму AB (рис. 50), и найти силы давления на опоры A и B , если $F_1 = F_2 = F_3 = F$.

Решение. Замечая, что силы $\vec{F}_2$ и $\vec{F}_3$ образуют пару, перемещаем ее в положение, показанное на чертеже пунктиром. Тогда силы $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ взаимно уравновешиваются и вся система сил приводится к равнодействующей $\vec{R} = \vec{F}_3$ (численно $R = F$).

Отсюда заключаем, что действие сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ сводится к вертикальному давлению на опору A ; опора B при этом не нагружена.

Задача 17. Привести к простейшему виду систему сил, рассмотренную в задаче 14 (см. рис. 48).

Решение. Из результатов, полученных в задаче 14, следует, что данная система сил приводится к приложенной в точке O силе $\vec{R}$, направленной так, как показано на рис. 51, и паре с моментом $M_O = 11,3$ Н·м. При этом численно $R = 50$ Н и $\cos \beta = |R_y|/R = 0,6$ ($\beta \approx 53^\circ$). Представим пару силами $\vec{R}' = \vec{R}$ и $\vec{R}'' = -\vec{R}$, приложив силу $\vec{R}'$ в точке O , а $\vec{R}''$ в точке C , причем, согласно формуле (28), $d = OC = M_O/R \approx 0,23$ м. Отбрасывая силы $\vec{R}$ и $\vec{R}''$, найдем, что рассматриваемая система сил приводится к равнодействующей, равной R , линия действия которой проходит на расстоянии $0,23$ м от точки O (через точку C с координатами $x = -d \cos \beta = -0,14$ м, $y = d \sin \beta \approx 0,18$ м).

§ 16. РАВНОВЕСИЕ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ СИЛ. СЛУЧАЙ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ

Необходимые и достаточные условия равновесия любой системы сил даются равенствами $\vec{R} = 0$ и $M_O = 0$, выражаемыми формулами (23). Найдем вытекающие отсюда аналитические условия равновесия плоской системы сил. Их можно получить в трех различных формах.

1. Основная форма условий равновесия. Так как вектор $\vec{R}$ равен нулю, когда равны нулю его проекции R_x и R_y , то для равновесия должны выполняться равенства $R_x = 0$, $R_y = 0$ и $M_O = 0$, где в данном случае M_O — алгебраический момент, а O — любая точка в плоскости действия сил. Но из формул (27) следует, что предыдущие равенства будут выполнены, когда действующие силы удовлетворяют условиям:

$$\Sigma F_{kx} = 0, \Sigma F_{ky} = 0, \Sigma m_O(\vec{F}_k) = 0. \quad (29)$$

Формулы (29) выражают следующие аналитические условия равновесия: для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из двух координатных осей и сумма их моментов относительно любого центра, лежащего в плоскости действия сил, были равны нулю. Одновременно равенства (29) выражают условия равновесия твердого тела, находящегося под действием плоской системы сил.

2*. Вторая форма условий равновесия: для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы моментов всех этих сил относительно каких-нибудь двух центров A и B и сумма их проекций на ось Ox , не перпендикулярную прямой AB , были равны нулю:

$$\Sigma m_A(\vec{F}_k) = 0, \Sigma m_B(\vec{F}_k) = 0, \Sigma F_{kx} = 0. \quad (30)$$

Необходимость этих условий очевидна, так как если любое из них не выполняется, то или $\vec{R} \neq 0$, или $M_A \neq 0$ ($M_B \neq 0$) и равновесия не будет. Докажем их достаточность. Если для данной системы сил выполняются только первые два из условий (30), то для нее $M_A = 0$ и $M_B = 0$. Такая система сил, согласно результатам, полученным в § 15, может не находиться в равновесии, а иметь равнодействующую $\vec{R}$, одновременно проходящую через точки A и B (рис. 52). Но по третьему условию должно быть $R_x = \Sigma F_{kx} = 0$. Так как ось Ox проведена не перпендикулярно к AB , то последнее условие может быть выполнено, только когда $\vec{R} = 0$, т. е. когда имеет место равновесие.

3*. Третья форма условий равновесия (уравнения трех моментов): для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы моментов всех этих сил относительно любых трех центров A, B и C , не лежащих на одной прямой, были равны нулю:

$$\Sigma m_A(\vec{F}_k) = 0, \Sigma m_B(\vec{F}_k) = 0, \Sigma m_C(\vec{F}_k) = 0. \quad (31)$$

Необходимость этих условий, как и в предыдущем случае, очевидна. Достаточность условий (31) следует из того, что если при одновременном выполнении этих условий данная система сил не находилась бы в равновесии, то она должна была бы приводиться к равнодействующей, одновременно проходящей через точки A, B и C , что невозможно, так как эти точки не лежат на одной прямой. Следовательно, при выполнении условий (31) имеет место равновесие.

Во всех рассмотренных случаях для плоской системы сил получаются три условия равновесия. Условия (29) считаются основными, так как при пользовании ими никаких ограничений на выбор координатных осей и центра моментов не налагается.

Если на тело наряду с плоской системой сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ действует система лежащих в той же плоскости пар с моментами $m_1, m_2, \dots, m_n$, то при составлении условий равновесия в уравнения проекций пары не войдут, так как сумма проекций сил пары на любую ось равна нулю. В уравнениях же моментов к моментам сил алгебраически прибавятся моменты пар, так как сумма моментов сил пары относительно любого центра равна моменту пары [§ 9, формула (15)]. Таким образом, например, условия равновесия (29) при действии на тело системы сил и пар примут вид:

$$\Sigma F_{kx} = 0, \Sigma F_{ky} = 0, \Sigma m_O(\vec{F}_k) + \Sigma m_l = 0. \quad (32)$$

Аналогично преобразуются в этом случае условия (30) и (31).

Равновесие плоской системы параллельных сил. В случае, когда все действующие на тело силы параллельны друг другу, можно направить ось Ox перпендикулярно си-

* При $M_A = 0$ система сил может иметь равнодействующую, проходящую через точку A , а при $M_B = 0$ — проходящую через точку B .

лам, а ось Oy параллельно им (рис. 53). Тогда проекция каждой из сил на ось Ox будет равна нулю и первое из равенств (29) обратится в тождество вида $0=0$. В результате для параллельных сил останутся два условия равновесия:

$$\sum F_{ky} = 0, \quad \sum m_O(\vec{F}_k) = 0, \quad (33)$$

где ось Oy параллельна силам.

Другая форма условий равновесия для параллельных сил, получающаяся из равенств (30), имеет вид:

$$\sum m_A(\vec{F}_k) = 0, \quad \sum m_B(\vec{F}_k) = 0. \quad (34)$$

При этом точки A и B не должны лежать на прямой, параллельной силам.

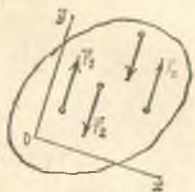


Рис. 53

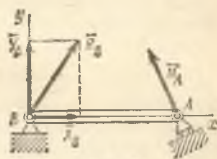


Рис. 54

§ 17. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

При решении задач этого раздела следует иметь в виду все те общие указания, которые были сделаны в § 7.

Для получения более простых уравнений следует (если это только не усложняет ход расчета): а) составлять уравнения проекций, проводя координатную ось перпендикулярно какой-нибудь неизвестной силе; б) составляя уравнения моментов, брать центр моментов в точке, где пересекаются большие неизвестных сил.

При вычислении моментов иногда бывает удобно разлагать данную силу на две составляющие и, пользуясь теоремой Вариньона, находить момент силы как сумму моментов этих составляющих (см. пример вычисления моментов сил в § 14).

Решение многих задач статики сводится к определению реакций опор, с помощью которых закрепляются балки, мостовые фермы и т. п. В технике обычно встречаются следующие три типа опорных закреплений (кроме рассмотренных в § 3):

1. Подвижная шарнирная опора (рис. 54, опора A).

Реакция $\vec{N}_A$ такой опоры направлена по нормали к поверхности, на которую опираются катки подвижной опоры.

2. Неподвижная шарнирная опора (рис. 54, опора B).

Реакция $\vec{R}_B$ такой опоры проходит через ось шарнира и может иметь любое направление в плоскости чертежа. При решении задач будем реакцию $\vec{R}_B$ изображать ее составляющими $\vec{X}_B$ и $\vec{Y}_B$ по

направлениям координатных осей. Если мы, решив задачу, найдем X_B и Y_B , то тем самым будет определена и реакция $\vec{R}_B$, по модулю $R_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2}$.

Способ закрепления, показанный на рис. 54, употребляется для того, чтобы в балке AB не возникало дополнительных напряжений при изменении ее длины от изменения температуры или от изгиба.

3. Жесткая заделка (или неподвижная защемляющая опора; рис. 55, а). Рассматривая заделанный конец балки и стену как одно целое, жесткую заделку изображают так, как показано на рис. 55, б. В этом случае на балку в ее поперечном сечении действует со стороны заделанного конца система распределенных сил (реакций). Считая эти силы приведенными к центру A сечения, можно их заменить одной наперед неизвестной силой $\vec{R}_A$, приложенной в этом центре, и парой с наперед неизвестным моментом m_A (рис. 55, а). Силу $\vec{R}_A$ можно в свою очередь изобразить ее составляющими X_A и Y_A (рис. 55, б). Таким образом, для нахождения реакции жесткой заделки надо определить три неизвестные наперед величины X_A , Y_A , m_A .

Реакции других видов связей были рассмотрены в § 3.

Задача 18. Определить силы, с которыми давят на рельсы колеса A и B крана, схематически изображенного на рис. 56. Вес крана $P=40$ кН, центр тяжести его лежит на линии DE . Вес поднимаемого груза $Q=10$ кН, вылет крана $b=3,5$ м, расстояние $AB=2a=2,5$ м.

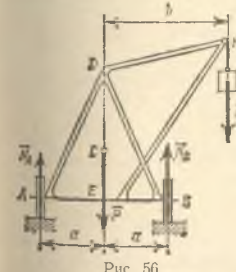


Рис. 56

Решение. Рассмотрим равновесие всего крана. На кран действуют заданные силы $\vec{P}$ и $\vec{Q}$ и реакции связей $\vec{N}_A$ и $\vec{N}_B$. Для этой системы параллельных сил составим условия равновесия (33), принимая за центр моментов точку A и проектируя силы на вертикальную ось. Получим:

$$-Pa + N_B \cdot 2a - Q(a+b) = 0, \\ N_A + N_B - P - Q = 0.$$

Решая эти уравнения найдем:

$$N_A = 0,5 P - 0,5 Q(b-a) = 11 \text{ кН}, \\ N_B = 0,5 P + 0,5 Q(b+a) = 39 \text{ кН}.$$

Для проверки составим уравнение моментов относительно центра B

$$-N_A \cdot 2a + Pa - Q(b-a) = 0.$$

Подставляя сюда найденное значение N_A , убеждаемся, что уравнение удовлетворяется. Искомые силы давления колес на рельсы равны численно N_A и N_B , но направлены вниз.

Из найденного решения видно, что при $Q=aP/(b-a)=22,2$ кН реакция N_A обращается в нуль и левое колесо перестает давить на рельс. При дальнейшем увеличении нагрузки Q кран начинает опрокидываться. Наибольшая нагрузка Q , при которой сохраняется равновесие крана, определяется из условия $\sum m_B(\vec{F}_k) = 0$, где $\vec{F}_k$ — действующие на кран заданные силы (в данной задаче — силы тяжести).

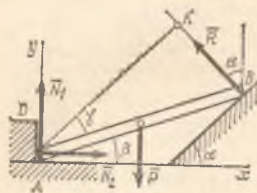


Рис. 57

Задача 19. Однородный брус AB весом P опирается концом A на гладкую горизонтальную плоскость и выступ D , а концом B — на наклонную плоскость, образующую с горизонтальной плоскостью угол α (рис. 57). Сам брус наклонен под углом β . Определить силы давления бруса на обе плоскости и выступ D .

Решение. Рассмотрим равновесие бруса AB . На брус действуют: заданная сила P , приложенная в середине бруса, и реакции связей $\bar{R}$, $\bar{N}_1$, $\bar{N}_2$, направленные перпендикулярно соответствующим плоскостям. Проводим координатные оси (рис. 57) и составляем условия равновесия (29), беря моменты относительно центра A , где пересекаются две неизвестные силы. Предварительно вычисляем проекции каждой из сил на координатные оси и ее момент относительно центра A , заносим эти величины в таблицу; при этом вводим обозначения: $AB=2a$, $\angle KAB=\gamma$ (AK — плечо силы $\bar{R}$ относительно центра A).

$\bar{F}_k$	$\bar{N}_1$	$\bar{N}_2$	$\bar{P}$	$\bar{R}$
F_{kx}	0	N_2	0	$-R \sin \alpha$
F_{ky}	N_1	0	$-P$	$R \cos \alpha$
$m_A(\bar{F}_k)$	0	0	$-Pa \cos \beta$	$R2a \cos \gamma$

Теперь составляем условия равновесия:

$$N_2 - R \sin \alpha = 0, \quad N_1 - P + R \cos \alpha = 0, \\ -Pa \cos \beta + 2Ra \cos \gamma = 0.$$

Из последнего уравнения находим

$$R = (P \cos \beta) / 2 \cos \gamma.$$

Так как прямая AK параллельна наклонной плоскости, то $\angle KAx = \alpha$; отсюда $\gamma = \alpha - \beta$. Окончательно

$$R = (P \cos \beta) / 2 \cos (\alpha - \beta).$$

Решая первые два уравнения, получим:

$$N_1 = P \left[1 - \frac{\cos \alpha \cos \beta}{2 \cos (\alpha - \beta)} \right], \quad N_2 = P \frac{\sin \alpha \cos \beta}{2 \cos (\alpha - \beta)}.$$

Силы давления на плоскости равны по модулю соответствующим реакциям и направлены противоположно этим реакциям.

Для проверки правильности вычисления величин N_1 и N_2 можно составить уравнения моментов относительно точек, где пересекаются линии действия сил $\bar{R}$ и $\bar{N}_1$.

Задача 20. Симметричная арка (рис. 58) нагружена системой сил, приводящейся к силе $Q=40$ кН, приложенной в точке D , и паре с моментом $m_D=120$ кН·м.

Вес арки $P=80$ кН. Дано:

$$AB=a=10 \text{ м}, \quad b=2 \text{ м}, \quad h=3 \text{ м}, \quad \alpha=60^\circ.$$

Определить реакции неподвижной шарнирной опоры B и подвижной опоры A . Решение. Рассмотрим равновесие всей арки. На нее действуют заданные силы $\bar{P}$ и $\bar{Q}$, пара с моментом m_D и реакции опор $\bar{N}_A$, $\bar{X}_B$, $\bar{Y}_B$ (реакцию неподвижной шарнирной опоры B изображаем двумя ее составляющими, как на рис. 54). В этой задаче удобнее воспользоваться условиями равновесия (30), беря моменты относительно точек A и B и проекции на ось Ax . Тогда в каждое уравнение войдет по одной неизвестной силе. Для определения моментов силы $\bar{Q}$ разложим ее на составляющие $\bar{Q}_1$ и $\bar{Q}_2$, модули которых $Q_1=Q \cos \alpha$, $Q_2=Q \sin \alpha$, и воспользуемся теоремой Вариньона. Тогда получим:

$$\Sigma F_{kx} = X_B + Q \cos \alpha = 0, \quad (a)$$

$$\Sigma m_A(\bar{F}_k) = Y_B a - Pa/2 - hQ \cos \alpha - bQ \sin \alpha + m_D = 0, \quad (b)$$

$$\Sigma m_B(\bar{F}_k) = Pa/2 - N_A a - hQ \cos \alpha + (a-b)Q \sin \alpha + m_D = 0. \quad (в)$$

Решая эти уравнения, найдем:

$$X_B = -Q \cos \alpha = -20 \text{ кН}, \\ Y_B = P/2 + Q(b \sin \alpha + h \cos \alpha)/a - m_D/a = 40,9 \text{ кН}, \\ N_A = P/2 + Q[(a-b) \sin \alpha - h \cos \alpha]/a + m_D/a \approx 73,7 \text{ кН}.$$

Величина X_B оказалась отрицательной. Следовательно, составляющая $\bar{X}_B$ имеет направление, противоположное показанному на чертеже, что можно было предвидеть заранее. Полная реакция опоры B найдется как геометрическая сумма сил $\bar{X}_B$ и $\bar{Y}_B$. По модулю,

$$R_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2} \approx 45,5 \text{ кН}.$$

Для проверки можно составить уравнение проекций на ось Ay :

$$\Sigma F_{ky} = N_A + Y_B - P - Q \sin \alpha = 0. \quad (г)$$

Подставляя сюда найденные величины N_A и Y_B , убеждаемся, что они этому уравнению удовлетворяют (подстановку следует делать и в общем виде, чтобы проверить формулы, и в числах, чтобы проверить численные расчеты).

Следует иметь в виду, что при такой проверке можно не обнаружить ошибок, связанных с неправильным определением проекций или моментов сил, перпендикулярных оси Ay . Поэтому надо или дополнительно проверить эту часть расчетов, или составить для проверки еще одно уравнение, например уравнение моментов относительно центра D .

Отметим еще следующее. Как известно, при составлении условий (30) ось проекций надо направлять не перпендикулярно линии AB , т. е. в нашем случае не вдоль Ay . Если, тем не менее, мы составили бы третье уравнение в проекциях на ось Ay , то получили бы систему уравнений (б), (в), (г), содержащую только два неизвестных N_A и Y_B (в этой системе одно уравнение было бы следствием двух других). В результате мы не могли бы определить реакцию X_B .

Задача 21. Однородный брус AB жестко заделан в стену, образуя с ней угол $\alpha=60^\circ$ (рис. 59, а). Выступающая из стены часть бруса имеет длину $b=0,8$ м и вес $P=100$ Н. Внутри угла DAB лежит цилиндр весом $Q=180$ Н, касающийся бруса в точке E , причем $AE=a=0,3$ м. Определить реакцию заделки.

Решение. Рассмотрим равновесие бруса. На брус действуют: сила $\bar{P}$, приложенная в середине бруса, сила давления $\bar{F}$ цилиндра, приложенная в точке E перпендикулярно брусу (но ни в коем случае не сила $\bar{Q}$, которая приложена к

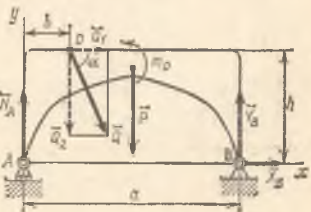


Рис. 58

цилиндру, а не к брусу!) и реакция заделки, которую представим составляющими X_A , Y_A и парой с моментом m_A (см. рис. 55, б).

Для определения силы давления F разложим силу Q , приложенную в центре цилиндра, на составляющие F и N , перпендикулярные брусу и стене (рис. 59, б). Из полученного параллелограмма находим, что $F=Q/\sin \alpha$.

Теперь, составив условия равновесия (29), или точнее (32), получим:

$$\Sigma F_{KX} = X_A + F \cos \alpha = 0, \quad \Sigma F_{KY} = Y_A - F \sin \alpha - P = 0,$$

$$\Sigma m_A (F_K) = -Fa - P(b/2) \sin \alpha + m_A = 0.$$

После замены силы F ее значением эти уравнения примут вид:

$$X_A + Q \operatorname{ctg} \alpha = 0, \quad Y_A - Q - P = 0,$$

$$m_A - Qa/\sin \alpha - P(b/2) \sin \alpha = 0.$$

Из составленных уравнений окончательно находим:

$$X_A = -Q \operatorname{ctg} \alpha = -103,8 \text{ Н}, \quad Y_A = P + Q = 280 \text{ Н},$$

$$m_A = Qa/\sin \alpha + P(b/2) \sin \alpha = 96,9 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Реакция заделки складывается из сил X_A , Y_A и пары с моментом m_A .

В заключение еще раз подчеркиваем вытекающий из хода решения задач основной вывод: в условия равновесия входят только силы непосредственно приложенные к телу, равновесие которого рассматривается,

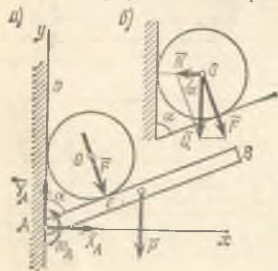


Рис. 59

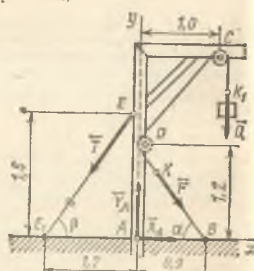


Рис. 60

Задача 22. К столбу с перекладиной (рис. 60) прикреплены два блока C и D , через которые перекинута веревка, удерживающая груз весом $Q=240$ Н. Нижний конец веревки закреплен в точке B . Столб удерживается в равновесии растяжкой EE_1 . Пренебрегая весом столба с перекладиной и трением в блоках, определить натяжение растяжки и реакцию заделки A , рассматривая ее как шарнирную (т. е. как жесткую, позволяющую столбу поворачиваться вокруг точки A). Все размеры указаны на чертеже (в метрах). Размерами блоков пренебрегаем.

Решение. Рассмотрим равновесие всей конструкции, т. е. столба с перекладиной, блоками и частью веревки $KDCCK_1$, охватывающей блоки (см. задачу 9). На конструкцию действуют следующие внешние силы: приложенная в точке K_1 сила Q , приложенная в точке K сила натяжения F веревки и реакции связей T , X_A , Y_A . Внутренние силы, как не входящие в уравнения равновесия, не изображаем. Так как при отсутствии трения в блоках натяжение веревки всюду одинаково, то $F=Q$. Составим для действующих сил следующие условия равновесия (29):

$$\Sigma F_{KX} = F \cos \alpha - T \cos \beta - X_A = 0,$$

$$\Sigma F_{KY} = -Q - F \sin \alpha - T \sin \beta + Y_A = 0,$$

$$\Sigma m_A (F_K) = -Q \cdot 1,0 - F \cdot 0,9 \sin \alpha + T \cdot 1,2 \sin \beta = 0.$$

Из прямоугольных треугольников AEE_1 и ADB находим, что $EE_1=2,0$ м, $DB=1,5$ м. Отсюда $\sin \alpha = \sin \beta = 0,8$, $\cos \alpha = \cos \beta = 0,6$. Следовательно, в данном случае $\alpha = \beta$. Подставляя в составленные уравнения найденные значения тригонометрических функций и полагая одновременно $F=Q$, получим

$$0,6 Q - 0,6 T + X_A = 0, \quad -Q - 0,8 Q - 0,8 T + Y_A = 0,$$

$$-1,0 Q - 0,72 Q + 0,96 T = 0.$$

Решая эти уравнения, найдем окончательно: $T=430$ Н, $X_A=114$ Н, $Y_A=776$ Н.

§ 18. РАВНОВЕСИЕ СИСТЕМ ТЕЛ

Статический расчет инженерных сооружений во многих случаях сводится к рассмотрению условий равновесия конструкции из системы тел, соединенных какими-нибудь связями. Связи, соединяющие части данной конструкции, будем называть *внутренними* в отличие от *внешних* связей, скрепляющих конструкцию с телами, в нее не входящими (например, с опорами).

Если после отбрасывания внешних связей (опор) конструкция остается жесткой, то для нее задачи статики решаются как для абсолютно твердого тела. Подобные примеры были рассмотрены в задачах 20 и 22 (см. рис. 58 и 60).

Однако могут встречаться такие инженерные конструкции, которые после отбрасывания внешних связей не остаются жесткими. Примером такой конструкции является трехшарнирная арка (рис. 61). Если отбросить опоры A и B , то арка не будет жесткой: ее части могут поворачиваться вокруг шарнира C .

На основании принципа отвердевания система сил, действующих на такую конструкцию, должна при равновесии удовлетворять условиям равновесия твердого тела. Но эти условия, как указывалось, будучи необходимыми, не будут являться достаточными; поэтому из них нельзя определить все неизвестные величины. Для решения задачи необходимо дополнительно рассмотреть равновесие какой-нибудь одной или нескольких частей конструкции.

Например, составляя условия равновесия для сил, действующих на трехшарнирную арку (рис. 61), мы получим три уравнения с четырьмя неизвестными X_A , Y_A , X_B , Y_B . Рассмотрев дополнительно условия равновесия левой (или правой) ее половины, получим еще три уравнения, содержащие два новых неизвестных X_C , Y_C , на рис. 61 не показанных. Решая полученную систему шести уравнений, найдем все шесть неизвестных (см. задачу 23).

Другой способ решения подобных задач состоит в том, что конструкцию сразу расчленяют на отдельные тела и составляют условия равновесия каждого из тел в отдельности (см. задачу 24). При этом реакции внутренних связей будут попарно равны по модулю и противоположны по направлению. Для конструкции из n тел, на каждое из которых действует произвольная плоская система сил, полу-



Рис. 61

чится таким путем 3л уравнений, позволяющих найти 3л неизвестных (при других системах сил число уравнений соответственно изменится). Если для данной конструкции число всех реакций связей будет больше числа уравнений, в которые эти реакции входят, то конструкция будет статически неопределимой (см. § 19).

Задача 23. Кронштейн состоит из горизонтального бруса AD (рис. 62, а) весом $P_1=150$ Н, прикрепленного к стене шарниром, и подкоса CB весом $P_2=120$ Н, который с брусом AD и со стеной также соединен шарнирами (все размеры показаны на чертеже). К концу D бруса подвешен груз весом $Q=300$ Н. Определить реакции шарниров A и C , считая брус и подкос однородными.

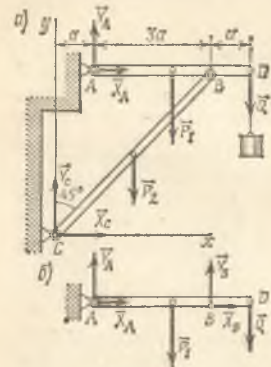


Рис. 62

Решение. Рассмотрим сначала равновесие всего кронштейна. На него действуют следующие внешние силы: заданные силы P_1 , P_2 , Q и реакции связей X_A , Y_A , X_C , Y_C . Кронштейн, освобожденный от внешних связей, не образует жесткой конструкции (брус может поворачиваться вокруг шарнира B), но по принципу отвердения действующие на него силы при равновесии должны удовлетворять условиям равновесия статики. Составляя эти условия, найдем:

$$\begin{aligned}\Sigma F_{kx} &= X_A + X_C = 0, \\ \Sigma F_{ky} &= Y_A + Y_C - P_1 - P_2 - Q = 0, \\ \Sigma m_A(\vec{F}_k) &= X_C \cdot 4a - Y_C a - P_1 \cdot 2a - P_2 a - Q \cdot 4a = 0.\end{aligned}$$

Полученные три уравнения содержат, как видим, четыре неизвестных X_A , Y_A , X_C , Y_C . Для решения задачи рассмотрим дополнительно равновесие бруса AD (рис. 62, б). На него действуют силы P_1 , Q , реакции X_A , Y_A и реакции X_B , Y_B , которые для бруса AD (когда рассматривается его равновесие) будут силами внешними. Недостающее четвертое уравнение составим, беря моменты действующих на брус AD сил относительно центра B (тогда в уравнение не войдут новые неизвестные X_B , Y_B):

$$\Sigma m_B(\vec{F}_k) = -Y_A \cdot 3a + P_1 a - Qa = 0.$$

Решая теперь систему четырех составленных уравнений (начиная с последнего), найдем:

$$\begin{aligned}Y_A &= (P_1 - Q)/3 = -50 \text{ Н}, \quad Y_C = 2P_1/3 + P_2 + 4Q/3 = 620 \text{ Н}, \\ X_C &= 2P_1/3 + P_2/2 + 4Q/3 = 560 \text{ Н}, \quad X_A = -X_C = -560 \text{ Н}.\end{aligned}$$

Из полученных результатов видно, что силы X_A и Y_A имеют направления, противоположные показанным на чертеже. Реакции шарнира B , если их надо определить, найдутся из уравнений проекций на оси x и y сил, действующих на брус AD , и будут равны: $X_B = -X_A$, $Y_B = P_1 + Q - Y_A = 500$ Н.

Как видим, при решении задач статики не всегда надо составлять все условия равновесия для рассматриваемого тела. Если в задаче не требуется определять реакции некоторых связей, то надо пытаться сразу составить такие уравнения, в которые эти неизвестные реакции не будут входить. Так мы и поступили в данной задаче при рассмотрении равновесия бруса AD , составляя только одно уравнение моментов относительно центра B .

Задача 24. Горизонтальная балка AB весом $Q=200$ Н прикреплена к стене шарниром A и опирается на опору C (рис. 63, а). К ее концу B шарнирно прикреп-

лен брус BK весом $P=400$ Н, опирающийся на выступ D . При этом $CB=AB/3$, $DK=AK/3$, угол $\alpha=45^\circ$. Определить реакции опор, считая балку и брус однородными.

Решение. Расчленим систему на две части, рассматриваем равновесие бруса BK и балки AB в отдельности. На брус BK (рис. 63, б) действуют сила P и реакции связей N_D , X_B , Y_B . Вводя обозначение $AB=a$ и составляя для этих сил условия равновесия (29), получим:

$$\begin{aligned}\Sigma F_{kx} &= X_B - N_D \sin \alpha = 0, \\ \Sigma F_{ky} &= Y_B - P + N_D \times \\ &\quad \times \cos \alpha = 0, \\ \Sigma m_B(\vec{F}_k) &= N_D \cdot 2a/3 - \\ &\quad - P(a/2) \cos \alpha = 0.\end{aligned}$$

Решая эти уравнения, найдем:

$$\begin{aligned}N_D &= (3P/4) \cos \alpha = 212 \text{ Н}, \\ X_B &= (3P/8) \sin 2\alpha = 150 \text{ Н}, \\ Y_B &= P - (3P/4) \cos^2 \alpha = 250 \text{ Н}.\end{aligned}$$

На балку AB , если ее рассматривать отдельно, действуют сила Q , реакции внешних связей N_C , X_A , Y_A и силы давления X_B и Y_B бруса BK , передаваемые через шарнир B (рис. 63, в). При этом по закону о действии и противодействии силы X_B и Y_B должны быть направлены противоположно X_B и Y_B ; по модулю же $X_B=X_B$, $Y_B=Y_B$.

Вводя обозначение $AB=b$ и составляя для сил, действующих на балку, условия равновесия (30), получим:

$$\begin{aligned}\Sigma F_{kx} &= X_A - X'_B = 0, \quad \Sigma m_A(\vec{F}_k) = -Y'_B b + N_C \cdot 2b/3 - Q \cdot b/2 = 0, \\ \Sigma m_C(\vec{F}_k) &= -Y_A \cdot 2b/3 + Q \cdot b/6 - Y'_B \cdot b/3 = 0.\end{aligned}$$

Полагая в этих уравнениях $X_B=X_B$ и $Y_B=Y_B$ и решая их, найдем:

$$X_A = X_B = 150 \text{ Н}, \quad Y_A = Q/4 - Y'_B/2 = -75 \text{ Н}, \quad N_C = 3Q/4 + 3Y'_B/2 = 525 \text{ Н}.$$

Из полученных результатов видно, что все реакции, кроме Y_A , имеют направления, показанные на рис. 63, реакция же Y_A фактически направлена вниз.

При решении задач этим путем важно иметь в виду, что если давление какого-нибудь одного тела на другое изображено силой $\vec{R}$ или составляющими X и Y , то на основании закона о действии и противодействии давление второго тела на первое должно изображаться силой $\vec{R}'$, направленной противоположно $\vec{R}$ (причем по модулю $R'=R$) или составляющими X' , Y' , направленными противоположно X и Y (причем по модулю $X'=X$, $Y'=Y$).

Задача 25. На трехшарнирную арку (рис. 64, а) действует горизонтальная сила F . Показать, что при определении реакций опор A и B нельзя переносить точку приложения силы F вдоль ее линии действия в точку E .

Решение. Освобождая арку от внешних связей (опоры A и B), мы получаем изменяемую конструкцию, которую нельзя считать абсолютно твердым телом. Поэтому при определении реакций опор A и B переносить точку приложения силы F в точку E , принадлежащую другой части конструкции, нельзя.

Убедимся в этом путем непосредственного решения задачи, пренебрегая весом арки. Рассмотрим сначала правую половину арки. На нее действуют только две силы: реакции $\vec{R}_B$ и $\vec{R}_C$ шарниров B и C (сила $\vec{R}_C$ на чертеже не показана). При

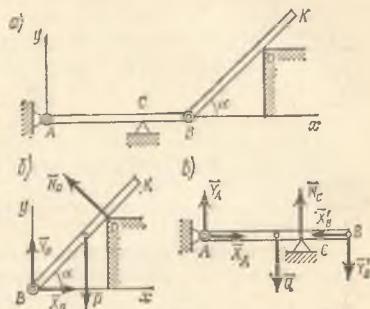


Рис. 63

равновесии эти силы должны быть направлены вдоль одной прямой, т. е. по линии BC . Следовательно, реакция R_B направлена вдоль BC .

Рассматривая теперь равновесие всей арки в целом, найдем, что на нее действуют три силы: заданная сила F и реакции опор R_A (направление которой мы нашли) и R_B . По теореме о трех силах (§ 6) линии действия этих сил должны при равновесии пересекаться в одной точке; отсюда найдем направление реакции R_A . Модули реакций R_A и R_B можно определить из соотношения силового треугольника.

Если же приложить силу F в точке E н, рассуждая аналогичным образом, проделав необходимые построения (рис. 64, б), то убедимся, что в этом случае реакции опор R_A и R_B окажутся другими и по модулю, и по направлению.

§ 19*. СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ И СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ ТЕЛ (КОНСТРУКЦИИ)

При решении задач статики реакции связей всегда являются величинами заранее неизвестными; число их зависит от числа и вида наложенных связей. Условия равновесия, в которые входят реакции связей и которые служат для их определения, называют обычно *уравнениями равновесия*. Чтобы соответствующая задача статики была разрешимой, надо, очевидно, чтобы число уравнений равновесия равнялось числу неизвестных реакций, входящих в эти уравнения.

Задачи, в которых число неизвестных реакций связей равно числу уравнений равновесия, содержащих эти реакции, называются *статически определенными*, а системы тел (конструкции), для которых это имеет место — *статически определенными*.

Задачи же, в которых число неизвестных реакций связей больше числа уравнений равновесия, содержащих эти реакции, называются *статически неопределенными*, а системы тел (конструкции) для которых это имеет место — *статически неопределенными*.

Например, подвеска, состоящая из двух тросов (рис. 65, а), будет статически определенной, так как здесь две неизвестные реакции T_1 и T_2 войдут в два уравнения равновесия (12) плоской системы сходящихся сил. Подвеска же, состоящая из трех лежащих в одной плоскости тросов (рис. 65, б), будет статически неопределимой, так как в ней число неизвестных реакций равно трем (T_1, T_2, T_3), а уравнений равновесия по-прежнему только два.

Аналогично, горизонтальная балка, лежащая на двух опорах (рис. 66, а), будет статически определенной, так как и здесь две неизвестные реакции N_1 и N_2 входят в два уравнения равновесия (33) плоской системы параллельных сил. Такая же балка на трех опорах (рис. 66, б) будет статически неопределимой.

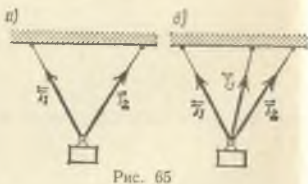


Рис. 65

Рассмотрим еще арку, изображенную на рис. 67, а, где связями являются неподвижная шарнирная опора в точке A и шарнирная опора на катках в точке B . Такая арка будет статически определенной, поскольку здесь три неизвестные реакции X_A, Y_A, N_B войдут в три уравнения равновесия (29) произвольной плоской

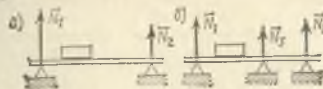


Рис. 66

системы сил. Если же в точке B будет тоже неподвижная шарнирная опора (рис. 67, б), то неизвестных реакций окажется четыре (X_A, Y_A, X_B, Y_B), а уравнений равновесия останется три и арка станет статически неопределимой.

Однако трехшарнирная арка, изображенная на рис. 61, будет статически определенной, так как, расчленив ее в шарнире C на две части, мы введем еще две реакции X_C, Y_C шарнира и неизвестных реакций станет шесть, но и уравнений равновесия тоже шесть (по три для каждой части). С аркой, изображенной на рис. 67, б,

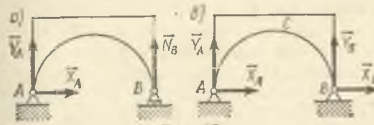


Рис. 67

так поступить нельзя, поскольку разделив ее на две части, например, сечением, проведенным через точку C , мы получим в этом сечении систему распределенных сил, которую можно привести к двум неизвестным силам X_C, Y_C и паре с неизвестным моментом m_C (см. § 20, задачу 26). Следовательно, неизвестных реакций станет семь ($X_A, Y_A, X_B, Y_B, X_C, Y_C, m_C$) и их из шести уравнений равновесия определить нельзя.

Статическая неопределимость объясняется наложением лишних связей. Например, для обеспечения равновесия балки, изображенной на рис. 66, достаточно двух опор и третья опора не нужна (балка считается абсолютно жесткой и не прогибающейся). Статически неопределимые конструкции можно рассчитывать, если учесть их деформации; это делается в курсе сопротивления материалов.

§ 20*. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВНУТРЕННИХ УСИЛИЙ

Внутренними усилиями в каком-нибудь сечении тела или конструкции (балки, арки и др.) называют силы, с которыми части тела, разделенные этим сечением, действуют друг на друга. Метод определения внутренних усилий аналогичен методу, применяемому при изучении равновесия систем тел. Сначала рассматривают равновесие всего тела (конструкции) в целом и определяют реакции внешних связей. Затем сечением, в котором требуется найти внутренние усилия, разделяют тело на две части и рассматривают равновесие одной из них. При этом, если система действующих на тело внешних сил плоская, то действие отброшенной части заменится в общем случае плоской системой распределенных по сечению сил; эти силы, как и в случае жесткой заделки (см. рис. 55), представляют собой приложенной в центре сечения силой с двумя наперед неизвестными

составляющими X , Y и парой с наперед неизвестным моментом m . Пример расчета дан в задаче 26.

Задача 26. Считая длину балки AB равной 1 м (задача 24, рис. 63), найти усилия в поперечном сечении балки, отстоящем от конца A на расстоянии $AE = 0,6$ м (точка E левее опоры C на рис. 63).

Решение. Внешними связями для балки являются опора C и шарниры A и B . Реакции этих связей найдены в ходе решения задачи 24. Рассечем балку сечением ab и рассмотрим равновесие ее левой части (рис. 68). Действие отброшенной части, согласно сказанному выше, заменяем двумя силами X_E , Y_E , приложенными в центре E сечения, и парой с моментом m_E . Составляя для действующих на рассматриваемую часть балки сил X_A , Y_A , Q , X_E , Y_E и пары с моментом m_E условия равновесия (32), получим:

$$\begin{aligned}\Sigma F_{kx} &= X_A + X_E = 0, \quad \Sigma F_{ky} = Y_A + Y_E - Q = 0, \\ \Sigma m_A(F_k) &= m_E + 0,6Y_E - 0,5Q = 0.\end{aligned}$$

По данным задачи 24 $Q = 200$ Н, $X_A = 150$ Н, $Y_A = -75$ Н. Пользуясь этими значениями, найдем из составленных уравнений:

$$X_E = -150 \text{ Н}, \quad Y_E = 275 \text{ Н}, \quad m_E = -65 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Таким образом, на левую часть балки в сечении ab действуют: 1) продольная сила X_E , вызывающая в данном случае сжатие балки; 2) поперечная сила Y_E , стремящаяся сдвинуть примыкающую к сечению часть балки вдоль линии ab ; 3) пара с моментом m_E , называемым *изгибающим моментом*, которая в данном случае вызывает растяжение верхних волокон балки и сжатие нижних.

§ 21*. РАСПРЕДЕЛЕННЫЕ СИЛЫ

В инженерных расчетах часто приходится встречаться с нагрузками, распределенными вдоль данной поверхности по тому или иному закону. Рассмотрим некоторые простейшие примеры распределенных сил, лежащих в одной плоскости.

Плоская система распределенных сил характеризуется ее *интенсивностью* q , т. е. значением силы, приходящейся на единицу длины нагруженного отрезка. Измеряется интенсивность в ньютонах, деленных на метры (Н/м).

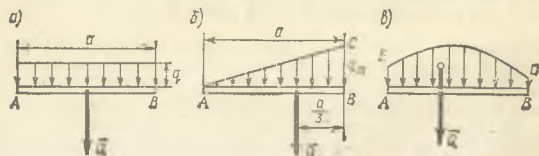


Рис. 69

1) Силы, равномерно распределенные вдоль отрезка прямой (рис. 69, а). Для такой системы сил интенсивность q имеет постоянное значение. При статических расчетах эту систему сил можно заменить равнодействующей Q .

По модулю,

$$Q = aq. \quad (35)$$

Приложена сила Q в середине отрезка AB .

2) Силы, распределенные вдоль отрезка прямой по линейному закону (рис. 69, б). Примером такой нагрузки могут служить силы давления воды на плотину, имеющие наибольшее значение у дна и падающие до нуля у поверхности воды. Для этих сил интенсивность q является величиной переменной, растущей от нуля до максимального значения q_m . Равнодействующая Q таких сил определяется аналогично равнодействующей сил тяжести, действующих на однородную треугольную пластину ABC . Так как вес однородной пластины пропорционален ее площади, то, по модулю,

$$Q = 0,5aq_m. \quad (36)$$

Приложена сила Q на расстоянии $a/3$ от стороны BC треугольника ABC (см. § 35, п. 2).

3) Силы, распределенные вдоль отрезка прямой по произвольному закону (рис. 69, в). Равнодействующая Q таких сил, по аналогии с силой тяжести, по модулю равна площади фигуры $ABDE$, измеренной в соответствующем масштабе, и проходит через центр тяжести этой площади (вопрос об определении центров тяжести площадей будет рассмотрен в § 33).

4) Силы, равномерно распределенные по дуге окружности (рис. 70). Примером таких сил могут служить силы гидростатического давления на боковые стенки цилиндрического сосуда.

Пусть радиус дуги равен R , а $\angle BOD = \angle AOD = \alpha$, где OD — ось симметрии, вдоль которой напомним ось Ox . Действующая на дугу система сходящихся сил имеет равнодействующую Q , направленную в силу симметрии вдоль оси Ox ; при этом численно $Q = Q_x$.

Для определения величины Q выделим на дуге элемент, положение которого определяется углом φ , а длина $ds = R d\varphi$. Действующая на этот элемент сила численно равна $dQ = q ds = qR d\varphi$, а проекция этой силы на ось Ox будет $dQ_x = dQ \cdot \cos \varphi = qR \cos \varphi \cdot d\varphi$. Тогда

$$Q_x = \int_{-\alpha}^{\alpha} dQ_x = qR \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \varphi \cdot d\varphi = 2qR \sin \alpha.$$

Но из рис. 70 видно, что $R \sin \alpha = AB/2$. Следовательно, так как $Q_x = Q$, то

$$Q = qh, \quad (37)$$



Рис. 70

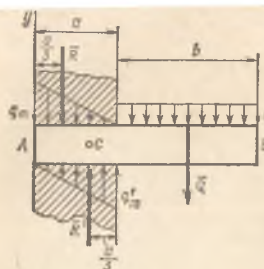


Рис. 71

где $h=AB$ — длина хорды, стягивающей дугу $\widehat{AB}$; q — интенсивность.

Задача 27. На консольную балку AB , размеры которой указаны на чертеже (рис. 71), действует равномерно распределенная нагрузка интенсивностью q_0 Н/м. Пренебрегая весом балки и считая, что силы давления на заделанный конец распределены по линейному закону, определить значения наибольших интенсивностей q_m и q'_m этих сил, если $b=na$.

Решение. Заменяем распределенные силы их равнодействующими $\bar{Q}$, $\bar{R}$ и $\bar{R}'$, где согласно формулам (35) и (36)

$$Q = q_0 b, \quad R = 0,5 q_0 a, \quad R' = 0,5 q'_m a,$$

и составляем условия равновесия (33) для действующих на балку параллельных сил:

$$\Sigma F_{ky} = Q + R - R' = 0, \quad \Sigma m_C(\bar{F}_k) = Ra/3 - Q(b/2 + a/3) = 0.$$

Подставляя сюда вместо Q , R и R' их значения и решая полученные уравнения, найдем окончательно

$$q_m = (3n^2 + 2n) q_0, \quad q'_m = (3n^2 + 4n) q_0.$$

Например, при $n=2$ получим $q_m = 16 q_0$, $q'_m = 20 q_0$, а при $n=4$ $q_m = 56 q_0$, $q'_m = 64 q_0$.

Задача 28. Цилиндрический баллон, высота которого равна H , а внутренний диаметр d , наполнен газом под давлением p Н/м². Толщина цилиндрических стенок баллона a . Определить испытываемые этими стенками растягивающие напряжения в направлениях: 1) продольном и 2) поперечном (напряжения равно отношению растягивающей силы к площади поперечного сечения), считая a/d малым.

Решение. 1) Разсечем цилиндр плоскостью, перпендикулярной его оси, на две части и рассмотрим равновесие одной из них (рис. 72, а). На нее в направлении оси цилиндра действуют: сила давления на дно $F = (\pi d^2/4) p$ и распределенные по площади сечения силы (действие отброшенной половины), равнодействующую которых обозначим $\bar{Q}$. При равновесии $Q = F = \pi d^2 p/4$. Считая приближенно площадь поперечного сечения равной πda , получим для растягивающего напряжения σ_1 значение

$$\sigma_1 = Q/\pi da = (d/4a)p.$$

2) Разсечем теперь цилиндрическую поверхность плоскостью, проходящей через ось цилиндра, на две другие половины и рассмотрим равновесие одной из них, считая, что все силы приложены к ней в плоскости среднего сечения (рис. 72, б). На эту половину цилиндра действуют: а) равномерно распределенные

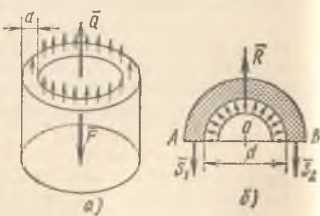
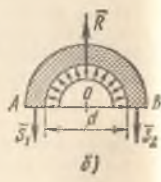


Рис. 72



по дуге полуокружности силы давления с интенсивностью $q = p/H$; согласно формуле (37) равнодействующая этих сил $R = qd = p Hd/2$; б) распределенные по сечениям цилиндра силы (действие отброшенной половины), равнодействующие которых обозначим $\bar{S}_1$ и $\bar{S}_2$, причем ввиду симметрии $S_1 = S_2 = S$.

Из условий равновесия $S_1 + S_2 = R$, откуда $S = p Hd/2$. Так как площадь сечения, по которому распределена сила S , равна aH (площадь сечения дна цилиндра пренебрегаем), то отсюда для растягивающего напряжения σ_2 находим

$$\sigma_2 = S/aH = (d/2a)p.$$

Как видим, растягивающее напряжение в поперечном направлении вдвое больше, чем в продольном.

§ 22*. РАСЧЕТ ПЛОСКИХ ФЕРМ

Пример решения задач на равновесие системы тел (см. § 18) дает расчет ферм. Фермой называется жесткая конструкция из прямолинейных стержней, соединенных на концах шарнирами. Если все стержни фермы лежат в одной плоскости, ферму называют плоской. Места соединения стержней фермы называют узлами. Все внешние нагрузки к ферме прикладываются только в узлах. При расчете фермы трением в узлах и весом стержней (по сравнению с внешними нагрузками) пренебрегают или распределяют веса стержней по узлам. Тогда на каждый из стержней фермы будут действовать две силы, приложенные к его концам, которые при равновесии могут быть направлены только вдоль стержня. Следовательно, можно считать, что стержни фермы работают только на растяжение или на сжатие. Ограничимся рассмотрением жестких плоских ферм без лишних стержней, образованных из треугольников. В таких фермах число стержней k и число узлов n связаны соотношением

$$k = 2n - 3. \quad (38)$$

В самом деле, в жестком треугольнике, образованном из трех стержней, будет три узла (см., например, ниже на рис. 74 треугольник ABD , образованный стержнями 1, 2, 3). Присоединение каждого следующего узла требует два стержня (например, на рис. 74 узел C присоединен стержнями 4, 5, узел E — стержнями 6, 7, и т. д.); следовательно, для всех остальных $(n-3)$ узлов потребуется $2(n-3)$ стержней. В результате число стержней в ферме $k = 3 + 2(n-3) = 2n - 3$. При меньшем числе стержней ферма не будет жесткой, а при большем числе она будет статически неопределимой.

Расчет фермы сводится к определению опорных реакций и усилий в ее стержнях.

Опорные реакции можно найти обычными методами статики (см. § 17), рассматривая ферму в целом как твердое тело. Перейдем к определению усилий в стержнях.

Метод вырезания узлов. Этим методом удобно пользоваться, когда надо найти усилия во всех стержнях фермы. Он сводится к последовательному рассмотрению условий равновесия

сил, сходящихся в каждом из узлов. Ход расчетов поясним на конкретном примере.

Рассмотрим изображенную на рис. 73, а ферму, образованную из одинаковых равнобедренных прямоугольных треугольников; действующие на ферму силы параллельны оси x и численно равны: $F_1=F_2=F_3=F=20$ кН.

В этой ферме число узлов $n=6$, а число стержней $k=9$. Следовательно, соотношение (38) выполняется и ферма является жесткой без лишних стержней.

Составляя уравнения равновесия (29) для фермы в целом, найдем, что реакции опор направлены, как показано на рисунке, и численно равны:

$$X_A=3F=60 \text{ кН}, \\ Y_A=N=3F/2=30 \text{ кН}.$$

Переходим к определению усилий в стержнях. Пронумеруем узлы фермы римскими цифрами, а стержни — арабскими. Искомые усилия обозначим S_1 (в стержне 1), S_2 (в стержне 2) и т. д. Отрежем мысленно все узлы вместе со сходящимися в них стержнями от остальной фермы. Действие отброшенных стержней заменим силами, которые будут направлены вдоль соответствующих стержней и численно равны искомым усилиям $S_1, S_2, \dots$. Изображаем сразу все эти силы на рисунке, направляя их от узлов, т. е. считая все стержни растянутыми (рис. 73, а; изображенную картину надо представить себе для каждого узла так, как это показано на рис. 73, б для узла III). Если в результате расчета значение усилия в каком-нибудь стержне получится отрицательным, это будет означать, что данный стержень не растянут, а сжат *.

Буквенных обозначений для сил, действующих вдоль стержней, на рис. 73 не вводим, поскольку ясно, что силы, действующие вдоль стержня 1, равны численно S_1 , вдоль стержня 2 — равны S_2 и т. д.

Теперь для сил, сходящихся в каждом узле, составляем последовательно уравнения равновесия (12):

$$\Sigma F_{kx} = 0, \quad \Sigma F_{ky} = 0.$$

Начинаем с узла I, где сходятся два стержня, так как из двух уравнений равновесия можно определить только два неизвестных усилия.

Составляя уравнения равновесия для узла I, получим:

$$F_1 + S_2 \cos 45^\circ = 0, \quad N_1 + S_1 + S_2 \sin 45^\circ = 0.$$

Отсюда находим:

$$S_2 = -F\sqrt{2} = -28,2 \text{ кН}, \quad S_1 = -N - S_2\sqrt{2}/2 = -F/2 = -10 \text{ кН}.$$

Теперь, зная S_1 , переходим к узлу II. Для него уравнения равновесия дают $S_3 + F_2 = 0$, $S_4 - S_1 = 0$, откуда

$$S_3 = -F = -20 \text{ кН}, \quad S_4 = S_1 = -10 \text{ кН}.$$

Определив S_4 , составляем аналогичным путем уравнения равновесия сначала для узла III, а затем для узла IV. Из этих уравнений находим:

$$S_5 = -S_4\sqrt{2} = 14,1 \text{ кН}, \quad S_6 = S_5 = -30 \text{ кН}, \quad S_7 = 0.$$

* По этой причине принято, независимо от применяемого метода расчета, приписывать растягивающим усилиям знак «+», а сжимающим — знак «-».

Наконец, для вычисления S_9 составляем уравнение равновесия сил, сходящихся в узле V, проектируя их на ось Bu . Получим $Y_A + S_9 \cos 45^\circ = 0$, откуда $S_9 = -30\sqrt{2} = -42,3$ кН.

Второе уравнение равновесия для узла V и два уравнения для узла VI можно составить как проверочные. Для нахождения усилий в стержнях эти уравнения не понадобились, так как вместо них были использованы три уравнения равновесия всей фермы в целом при определении N , X_A и Y_A (см. § 18).

Окончательные результаты расчета можно свести в таблицу:

№ стержня	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Усилие, кН	-10	-28,2	-20	-10	14,1	-30	0	-30	-42,3

Как показывают знаки усилий, стержень 5 растянут, остальные стержни сжаты; стержень 7 не нагружен (нулевой стержень).

Наличие в ферме нулевых стержней, подобных стержню 7, обнаруживается сразу, так как если в узле, не нагруженном внешними силами, сходятся три стержня, из которых два направлены вдоль одной прямой, то усилие в третьем стержне равно нулю. Этот результат получается из уравнения равновесия в проекции на ось, перпендикулярную упомянутым двум стержням. Например, в ферме, изображенной на рис. 74, при отсутствии силы $\bar{P}_2$ нулевым будет стержень 15, а следовательно, и 13. При наличии же силы $\bar{P}_4$ ни один из этих стержней нулевым не является.

Если в ходе расчета встретится узел, для которого число неизвестных больше двух, то можно воспользоваться методом сечений.

Метод сечений (метод Риттера). Этим методом удобно пользоваться для определения усилий в отдельных стержнях фермы, в частности для проверочных расчетов. Идея метода состоит в том, что ферму разделяют на две части сечением, проходящим через три стержня, в которых (или в одном из которых) требуется определить усилия, и рассматривают равновесие одной из этих частей. Действие отброшенной части заменяют соответствующими силами, направляя их вдоль разрезанных стержней от узлов, т. е. считая стержни растянутыми (как и в методе вырезания узлов). Затем составляют уравнения равновесия в форме (31) или (30), беря центры моментов (или ось проекций) так, чтобы в каждое уравнение вошло только одно неизвестное усилие.

Пример. Пусть требуется определить усилие в стержне 6 фермы, изображенной на рис. 74. Действующие вертикальные силы $P_1=P_2=P_3=P_4=20$ кН, реакции опор $N_1=N_2=40$ кН. Проводим сечение ab через стержни 4, 5, 6 и рассматриваем равновесие левой части фермы, заменяя действие на нее правой части силами, направленными вдоль стержней 4, 5, 6. Чтобы найти S_6 , составляем уравнение моментов относительно точки C, где пересекаются стержни 4 и 5. Получим, считая $AD=DC=a$ и $BC \perp BE$,

$$-N_1 \cdot 2a + P_1 a + S_6 \cdot CB = 0.$$

Отсюда находим S_6 . Плечо CB вычисляем по данным, определяющим направление и размеры стержней фермы.

В данном примере $\angle ABC = 90^\circ$ и $CB = a\sqrt{2}$. Следовательно, $S_6 = 30\sqrt{2} = 42,3$ кН; стержень растянут.

Усилия в стержнях 4 и 5 можно найти, составив уравнения моментов относительно центров В (точка пересечения стержней 5, 6) и А (точка пересечения стержней 4, 6).

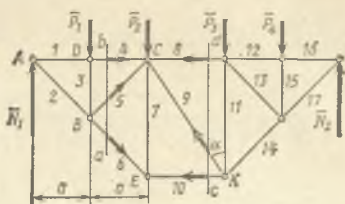


Рис. 74

Чтобы определить усилие в стержне 9 той же фермы, проводим сечение dc через стержни 8, 9, 10 и, рассматривая равновесие правой части, составляем уравнение проекций на ось, перпендикулярную стержням 8 и 10. Получим

$$S_9 \cos \alpha - P_3 - P_4 + N_2 = 0,$$

откуда находим S_9 . Усилия в стержнях 8 и 10 можно в этом случае найти, составив уравнения моментов относительно центров К и С.

Глава VI

ТРЕНИЕ

§ 23. ЗАКОНЫ ТРЕНИЯ СКОЛЬЖЕНИЯ

Опыт показывает, что при стремлении двигать одно тело по поверхности другого в плоскости соприкосновения тел возникает сила сопротивления их относительному скольжению, называемая *силой трения скольжения*.

Возникновение трения обусловлено прежде всего шероховатостью поверхностей, создающей сопротивление перемещению, и наличием сцепления у прижатых друг к другу тел. Изучение всех особенностей явления трения представляет собой довольно сложную физико-механическую проблему, рассмотрение которой выходит за рамки курса теоретической механики.

В инженерных расчетах обычно исходят из ряда установленных опытным путем закономерностей, которые с достаточной для практики точностью отражают основные особенности явления трения. Эти закономерности, называемые законами трения скольжения при покое, можно сформулировать следующим образом.

1. При стремлении сдвинуть одно тело по поверхности другого в плоскости соприкосновения тел возникает сила трения (или сила сцепления), которая может принимать любые значения от нуля до значения $F_{\text{пр}}$, называемого *предельной силой трения*.

Приложенная к телу сила трения направлена в сторону, противоположную той, куда действующие на тело силы стремятся его сдвинуть.

2. Предельная сила трения численно равна произведению статического коэффициента трения на нормальное давление или нормальную реакцию:

$$F_{\text{пр}} = f_0 N. \quad (39)$$

Статический коэффициент трения f_0 — величина безразмерная; он определяется опытным путем и зависит от материала соприкасающихся тел и состояния поверхностей (характер обработки, температура, влажность и т. п.).

3. Значение предельной силы трения в довольно широких пределах не зависит от размеров соприкасающихся при трении поверхностей.

Из первых двух законов следует, что при равновесии $F \leq F_{\text{пр}}$ или

$$F \leq f_0 N. \quad (40)$$

Следует подчеркнуть, что значение силы трения при покое определяется неравенством (40) и что, следовательно, это значение может быть любым, но не большим, чем $F_{\text{пр}}$. Чему конкретно равна сила трения, можно установить, только решив соответствующую задачу (см. § 25). Величине $F_{\text{пр}}$ сила трения будет равна лишь тогда, когда действующая на тело сдвигающая сила достигает такого значения, что при малейшем ее увеличении тело начинает двигаться (скользить). Равновесие, имеющее место, когда сила трения равна $F_{\text{пр}}$, будем называть *предельным равновесием*.

В заключение приведем значения коэффициента трения f_0 для некоторых материалов: дерево по дереву 0,4—0,7; металл по металлу 0,15—0,25; сталь по льду 0,027.

Более подробные сведения даются в соответствующих справочниках.

Все изложенное выше относилось к трению скольжения при покое. При движении сила трения направлена в сторону, противоположную движению, и равна произведению динамического коэффициента трения на нормальное давление *:

$$F = f N.$$

Динамический коэффициент трения скольжения f также является величиной безразмерной и определяется опытным путем. Значение коэффициента f зависит не только от материала и состояния поверхностей, но и в некоторой степени от скорости движущихся тел. В большинстве случаев с увеличением скорости коэффициент f сначала несколько убывает, а затем сохраняет почти постоянное значение.

* Это справедливо, как и формулы (39), (40), для сухого трения. Случай, когда между телами имеется слой жидкой смазки, требует специального изучения и рассматривается в гидродинамической теории смазки.

§ 24. РЕАКЦИИ ШЕРОХОВАТЫХ СВЯЗЕЙ. УГОЛ ТРЕНИЯ

Реакция реальной (шероховатой) связи складывается из двух составляющих: из нормальной реакции $\bar{N}$ и перпендикулярной ей силы трения $\bar{F}$. Следовательно, полная реакция $\bar{R}$ будет отклонена от



Рис. 75

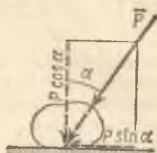


Рис. 76

нормали к поверхности на некоторый угол. При изменении силы трения от нуля до $F_{\text{пр}}$ сила $\bar{R}$ изменяется от $\bar{N}$ до $\bar{R}_{\text{пр}}$, а ее угол с нормалью растет от нуля до некоторого предельного значения ϕ_0 (рис. 75). Наибольший угол ϕ_0 , который полная реакция шероховатой связи образует с нормалью к поверхности, называется *углом трения*. Из чертежа видно, что

$$\operatorname{tg} \phi_0 = F_{\text{пр}}/N.$$

Так как $F_{\text{пр}} = f_0 N$, то отсюда находим следующую связь между углом трения и коэффициентом трения:

$$\operatorname{tg} \phi_0 = f_0. \quad (41)$$

При равновесии полная реакция $\bar{R}$ в зависимости от сдвигающих сил может проходить где угодно внутри угла трения. Когда равновесие становится предельным, реакция будет отклонена от нормали на угол ϕ_0 .

Если к телу, лежащему на шероховатой поверхности, приложить силу P , образующую угол α с нормалью (рис. 76), то тело сдвинется только тогда, когда сдвигающее усилие $P \sin \alpha$ будет больше $F_{\text{пр}} = f_0 P \cos \alpha$ (мы считаем $N = P \cos \alpha$, пренебрегая весом тела). Но неравенство $P \sin \alpha > f_0 P \cos \alpha$, в котором $f_0 = \operatorname{tg} \phi_0$, выполняется только при $\operatorname{tg} \alpha > \operatorname{tg} \phi_0$, т. е. при $\alpha > \phi_0$. Следовательно, никакая силой, образующей с нормалью угол α , меньший угла трения ϕ_0 , тело вдоль данной поверхности сдвинуть нельзя. Этим объясняются известные явления заклинивания или самоторможения тел.

§ 25. РАВНОВЕСИЕ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕНИЯ

Изучение равновесия тел с учетом трения скольжения можно свести к рассмотрению предельного равновесия, которое имеет место, когда сила трения равна $F_{\text{пр}}$.

При аналитическом решении реакцию шероховатой связи изображают двумя ее составляющими $\bar{N}$ и $\bar{F}_{\text{пр}}$. Затем составляют обычные

уравнения равновесия и присоединяют к ним равенство $F_{\text{пр}} = f_0 N$. Из полученной таким путем системы уравнений и определяют искомые величины.

Если в задаче требуется определить условия равновесия при всех значениях, которые может иметь сила трения, т. е. при $F \leq F_{\text{пр}}$, то ее тоже можно решить, рассмотрев предельное равновесие и уменьшая затем в полученном результате коэффициент трения f_0 до нуля*.

Отметим еще, что если в задаче надо определить значение силы трения F , когда равновесие не является предельным и $F \neq F_{\text{пр}}$, то, как уже отмечалось в § 23, эту силу F следует считать неизвестной величиной и находить из соответствующих уравнений (см. вторую часть задачи 29, а также задачи 151, 152, § 130).

При геометрическом решении реакцию шероховатой связи удобнее изображать одной силой $\bar{R}$, которая в предельном положении равновесия отклонена от нормали к поверхности на угол ϕ_0 .

Задача 29. Груз весом $P = 10$ Н лежит на горизонтальной плоскости (рис. 77). Определить, какую силу $\bar{Q}$, направленную под углом $\alpha = 30^\circ$ к этой плоскости, надо приложить к грузу, чтобы сдвинуть его с места, если статический коэффициент трения груза о плоскость $f_0 = 0.6$.

Решение. Рассмотрим предельное равновесие груза. Тогда на него действуют силы $\bar{P}$, $\bar{Q}$, $\bar{N}$ и $\bar{F}_{\text{пр}}$. Составляя условия равновесия в проекциях на оси x и y , получим:

$$Q \cos \alpha - F_{\text{пр}} = 0, \quad N + Q \sin \alpha - P = 0.$$

Из последнего уравнения $N = P - Q \sin \alpha$. Тогда

$$F_{\text{пр}} = f_0 N = f_0 (P - Q \sin \alpha).$$

Подставляя это значение $F_{\text{пр}}$ в первое уравнение и решая его, найдем окончательно

$$Q = \frac{f_0 P}{\cos \alpha + f_0 \sin \alpha} \approx 5,2 \text{ Н.}$$

Если к грузу приложить меньшую силу, например $Q' = 4$ Н, то тогда сдвигающее усилие будет равно $Q' \cos 30^\circ = 2\sqrt{3} = 3,46$ Н; максимальная же сила трения, которая может в этом случае развиваться, будет $F_{\text{пр}} = f_0 (P - Q' \sin 30^\circ) = 4,8$ Н. Следовательно, груз останется в покое. При этом удерживающая его в равновесии сила трения F' определится из уравнения равновесия в проекции на ось Ox и будет равна сдвигающей силе ($F' = Q' \cos 30^\circ = 3,46$ Н), а не силе $F_{\text{пр}}$.

Обращаем внимание на то, что при всех расчетах следует определять $F_{\text{пр}}$ по формуле $F_{\text{пр}} = f_0 N$, находя N из условий равновесия. Ошибка, которую часто допускают в задачах, аналогичных решенной, состоит в том, что при подсчетах считают $F_{\text{пр}} = f_0 P$, в то время как сила давления на плоскость здесь не равна весу груза P .

Задача 30. Определить, при каких значениях угла наклона α груз, лежащий на наклонной плоскости, остается в равновесии, если его коэффициент трения о плоскость равен f_0 .

* В самом деле, когда равновесие является предельным, сила трения $F = F_{\text{пр}} = f_0 N$. В остальных положениях равновесия $F < f_0 N$. Следовательно, в каждом из этих положений можно считать $F = kN$, где $k < f_0$. При $k = 0$ (или $f_0 = 0$) получим идеальное равновесие, соответствующее случаю, когда связь является гладкой (идеальной).

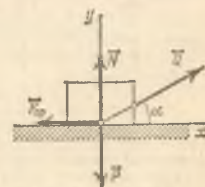


Рис. 77

точке, где $\theta=\alpha$, равно P). Получим:

$$\int_0^P \frac{dP}{P} = f_0 \int_0^\alpha d\theta \text{ и } \ln \frac{P}{Q} = f_0 \alpha.$$

Отсюда следует, что $P/Q = e^{f_0 \alpha}$ или

$$Q = P e^{-f_0 \alpha}. \quad (42)$$

Как видим, потребная сила Q зависит только от коэффициента трения f_0 и угла α ; от радиуса вала сила Q не зависит. При отсутствии трения ($f_0=0$) получаем, как и следовало ожидать, $Q=P$. Практически очень важен тот факт, что, увеличивая угол α (навивая нить), можно значительно уменьшить силу Q , необходимую для уравновешивания силы P , что видно из табл. 1. Например (см. табл. 1), натяжение в 1000 Н можно уравновесить силой всего в 2 Н, дважды обернув пеньковый канат вокруг деревянного столба,

Таблица 1. Значения Q/P при $f_0=0,5$ (пеньковый канат по дереву)

Обороты	α	$Q/P = e^{-f_0 \alpha}$
$\frac{1}{2}$ оборота	π	0,208
1 оборот	2π	0,043
$1\frac{1}{2}$ оборота	3π	0,009
2 оборота	4π	0,002

Формула (42) определяет также отношение натяжений P (ведущей) и Q (ведомой) частей ремня, равномерно вращающего шкив, если проскальзывание ремня по шкиву отсутствует. Считая, например, при этом $\alpha=\pi$ и принимая для кожаного ремня и чугунного шкива $f_0=0,3$, получим, что отношение натяжений $Q/P = e^{-0,3\pi} \approx 0,4$.

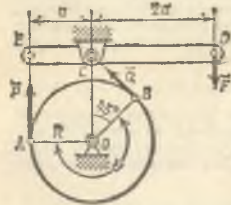


Рис. 82

Задача 33. К рычагу DE ленточного тормоза (рис. 82) приложена сила F . Определить тормозный момент M_t , действующий на шкив радиуса R , если $CD=2CE$ и коэффициент трения ленты о шкив $f_0=0,5$.

Решение. На шкив вместе с прилегающей к нему лентой AB действуют приложенная в точке A сила P , причем $P=2F$, и приложенная в точке B сила Q , определяемая формулой (42). В нашем случае $f_0=0,5$ и $\alpha=5\pi/4=3,93$ рад. Следовательно,

$$Q = 2Fe^{-f_0 \alpha} = 2Fe^{-5\pi/4} \approx 0,28F.$$

Искомый момент

$$M_t = (P-Q)R = 1,72FR.$$

Момент будет тем больше, чем меньше Q , т. е. чем больше коэффициент трения f_0 и угол α .

§ 27*. ТРЕНИЕ КАЧЕНИЯ

Трением качения называется сопротивление, возникающее при качении одного тела по поверхности другого.

Рассмотрим круглый цилиндрический каток радиуса R и веса P , лежащий на горизонтальной шероховатой плоскости. Приложим к оси катка силу Q (рис. 83, а), меньшую F_{np} . Тогда в точке A возникает сила трения F , численно равная Q , которая будет препятствовать скольжению цилиндра по плоскости. Если считать нормальную реакцию N тоже приложенной в точке A , то она уравновесит силу P , а силы Q и F образуют пару, вызывающую качение цилиндра. При такой схеме качение должно начаться, как видим, под действием любой, сколь угодно малой силы Q .

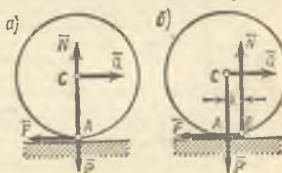


Рис. 83

Истинная же картина, как показывает опыт, выглядит иначе. Объясняется это тем, что фактически вследствие деформаций тел касание их происходит вдоль некоторой площадки AB (рис. 83, б). При действии силы Q интенсивность давления у края A убывает, а у края B возрастает. В результате реакция N оказывается смещенной в сторону действия силы Q . С увеличением Q это смещение растет до некоторой предельной величины k . Таким образом, в предельном положении на каток будут действовать пара Q_{np} , F с моментом $Q_{np}R$ и уравновешивающая ее пара N , P с моментом Nk . Из равенства моментов находим $Q_{np}R = Nk$ или

$$Q_{np} = (k/R)N. \quad (43)$$

Пока $Q < Q_{np}$, каток находится в покое; при $Q > Q_{np}$ начинается качение.

Входящая в формулу (43) линейная величина k называется коэффициентом трения качения. Измеряют величину k обычно в сантиметрах. Значение коэффициента k зависит от материала тел и определяется опытным путем. Приведем приближенные значения этого коэффициента (в см) для некоторых материалов:

Дерево по дереву	0,05 ÷ 0,08
Сталь мягкая по стали (колесо по рельсу)	0,005
Сталь закаленная по стали (шариковый подшипник)	0,001

Отношение k/R для большинства материалов значительно меньше статического коэффициента трения f_0 . Этим объясняется то, что в технике, когда это возможно, стремятся заменить скольжение качением (колеса, катки, шариковые подшипники и т. п.).

Задача 34. Определить, при каких значениях угла α (рис. 84) цилиндр радиуса R , лежащий на наклонной плоскости, остается в покое, если коэффициент трения качения равен k .

Решение. Рассмотрим предельное положение равновесия, когда $\alpha = \alpha_1$. Разлагая силу $\vec{P}$ на составляющие $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_2$ (рис. 84), находим, что в этом случае сдвигающая сила $Q_{\text{сдв}} = P_1 = P \sin \alpha_1$, а нормальная реакция $N = P_2 = P \cos \alpha_1$. Тогда по формуле (43)

$$P \sin \alpha_1 = (k/R) P \cos \alpha_1 \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} \alpha_1 = k/R.$$

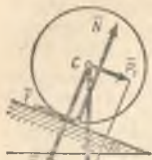


Рис. 84

окажется, что $f_0 < k/R$, то при $\alpha = \alpha_1$ цилиндр не будет в покое и начнет скользить вдоль плоскости.

При уменьшении k до нуля угол α_1 также убывает до нуля. Отсюда заключаем, что равновесие сохранится при любом угле $\alpha < \alpha_1$. Полученным результатом можно воспользоваться для экспериментального определения коэффициента k , находя угол α_1 из опыта.

Примечание. Цилиндр при $\alpha = \alpha_1$ будет в покое, если одновременно коэффициент трения скольжения f_0 цилиндра о плоскость будет таков, что $f_0 \geq \operatorname{tg} \alpha_1$ (см. задачу 30 в § 25), т. е. если $f_0 > k/R$, что обычно имеет место. Но если

Глава VII

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СИСТЕМА СИЛ

§ 28. МОМЕНТ СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ. ВЫЧИСЛЕНИЕ ГЛАВНОГО ВЕКТОРА И ГЛАВНОГО МОМЕНТА СИСТЕМЫ СИЛ

В § 8 было введено понятие о моменте силы относительно центра O . Это вектор $\vec{m}_O(\vec{F})$, направленный перпендикулярно плоскости OAB (рис. 85), модуль которого согласно формуле (13) имеет значение

$$|\vec{m}_O(\vec{F})| = 2 \text{ пл. } \triangle OAB.$$

Как это было и для силы, в дальнейшем окажется необходимым рассматривать проекции вектора $\vec{m}_O(\vec{F})$ на разные оси. Проекция вектора $\vec{m}_O(\vec{F})$, т. е. момента силы $\vec{F}$ относительно центра O , на какую-нибудь ось z , проходящую через этот центр, называется моментом силы $\vec{F}$ относительно оси z , т. е.

$$m_z(\vec{F}) = [\vec{m}_O(\vec{F})]_z \quad \text{или} \quad m_z(\vec{F}) = |\vec{m}_O(\vec{F})| \cos \gamma, \quad (44)$$

где $m_z(\vec{F})$ — момент силы $\vec{F}$ относительно оси z ; γ — угол между вектором $\vec{m}_O(\vec{F})$ и осью z . Из определения следует, что $m_z(\vec{F})$, как про-

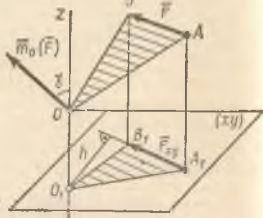


Рис. 85

екция вектора на ось, является величиной алгебраической (знак $m_z(\vec{F})$ определяется так же, как знак проекции любого вектора; например, на рис. 85 $m_z(\vec{F}) > 0$).

Найдем другое выражение для $m_z(\vec{F})$, позволяющее непосредственно вычислять эту величину. Для этого проведем через произвольную точку O_1 оси z (рис. 85) плоскость xy , перпендикулярную этой оси, и спроектируем $\triangle OAB$ на эту плоскость. Так как вектор $\vec{m}_O(\vec{F})$ перпендикулярен плоскости OAB , а ось z перпендикулярна плоскости $O_1A_1B_1$, то угол γ , как угол между нормальными к названным плоскостям, является углом между этими плоскостями. Следовательно, если одновременно учесть равенство (44), то

$$2 \text{ пл. } \triangle O_1A_1B_1 = 2 \text{ пл. } \triangle OAB \cos \gamma = |\vec{m}_O(\vec{F})| \cos \gamma = m_z(\vec{F}).$$

Но, как видно из рис. 85, в треугольнике $O_1A_1B_1$ сторона A_1B_1 представляет собой одновременно проекцию $\vec{F}_{xy}$ силы $\vec{F}$ на плоскость xy (см. § 5). Тогда $2 \text{ пл. } \triangle O_1A_1B_1 = F_{xy} h = |\vec{m}_{O_1}(\vec{F}_{xy})|$, где $\vec{m}_{O_1}(\vec{F}_{xy})$ — алгебраический момент силы $\vec{F}_{xy}$ относительно центра O_1 . Из этого и предыдущего равенств следует (с учетом знаков), что

$$m_z(\vec{F}) = m_{O_1}(\vec{F}_{xy}) \quad \text{или} \quad m_z(\vec{F}) = \pm F_{xy} h. \quad (45)$$

Таким образом, момент силы $\vec{F}$ относительно оси z равен алгебраическому моменту проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную оси z , взятому относительно точки O_1 пересечения оси с этой плоскостью. Этот результат может служить другим определением понятия момента силы относительно оси.

Замечая как направлен поворот, который стремится совершить сила $\vec{F}_{xy}$, когда $m_z(\vec{F}) > 0$ (см. рис. 85; случай, когда $m_z(\vec{F}) < 0$ получится, если изменить направление силы $\vec{F}$ на прямо противоположное), приходим к следующему выводу: момент силы относительно оси будет иметь знак плюс, когда $\vec{F}_{xy}$ производит поворот, который стремится совершить сила $\vec{F}_{xy}$, виден происходящим против хода часовой стрелки, и знак минус — когда по ходу часовой стрелки.

Из рис. 85 видно еще, что если менять положение точки O на оси z , то и модуль и направление вектора $\vec{m}_O(\vec{F})$ будут при этом изменяться, но $\triangle O_1A_1B_1$, а с ним и значение $m_z(\vec{F})$ изменяться не будут.

Механический смысл величины $m_z(\vec{F})$ состоит в том, что она характеризует вращательный эффект силы $\vec{F}$, когда эта сила стремится повернуть тело вокруг оси z . В самом деле, если разложить силу $\vec{F}$ на составляющие $\vec{F}_{xy}$ и $\vec{F}_z$, где $\vec{F}_z \parallel Oz$ (рис. 86), то поворот вокруг оси z будет совершать только составляющая $\vec{F}_{xy}$ и вращательный эффект всей силы $\vec{F}$ будет, согласно формуле (45), определяться величиной $m_z(\vec{F})$. Составляющая же $\vec{F}_z$ повернуть тело вокруг оси z не может (она лишь может сдвинуть тело вдоль оси z).

В заключение рассмотрим подробнее, как вычисляется момент силы относительно оси z по формуле (45). Для этого надо (рис. 87):
1) провести плоскость xy , перпендикулярную оси z (в любом месте);
2) спроектировать силу $\vec{F}$ на эту плоскость и найти величину F_{xy} ;

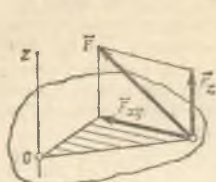


Рис. 86

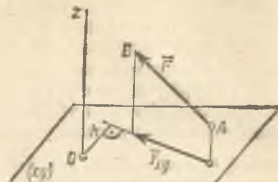


Рис. 87

3) опустить из точки пересечения оси с плоскостью (на рис. 87 это точка O) перпендикуляр на линию действия F_{xy} и найти его длину h ;
4) вычислить произведение $F_{xy}h$; 5) определить знак момента.

При вычислении моментов надо иметь в виду следующие частные случаи:

- 1) если сила параллельна оси, то ее момент относительно оси равен нулю (так как $F_{xy}=0$);
- 2) если линия действия силы пересекает ось, то ее момент относительно оси также равен нулю (так как $h=0$).

Объединяя оба случая вместе, заключаем, что момент силы относительно оси равен нулю, если сила и ось лежат в одной плоскости;

3) если сила перпендикулярна оси (лежит в плоскости, перпендикулярной этой оси), то ее момент относительно оси равен взятому с соответствующим знаком произведению модуля силы на расстояние между линией действия силы и осью, т. е. вычисляется по формуле (45), в которую вместо F_{xy} войдет модуль силы F .

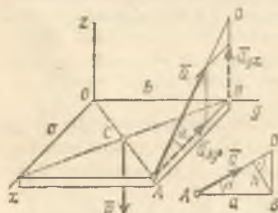


Рис. 88

Задача 35. Найти моменты относительно осей x , y и z сил $\vec{P}$ и $\vec{Q}$, которые действуют на горизонтальную плиту, изображенную на рис. 88.

Решение. 1. Сила $\vec{P}$ параллельна оси z ; она перпендикулярна осям x и y и проходит от них на расстояниях $b/2$ и $a/2$. Следовательно, с учетом знаков:

$$m_x(\vec{P}) = -Pb/2, \quad m_y(\vec{P}) = Pa/2, \quad m_z(\vec{P}) = 0.$$

2. Для вычисления $m_x(\vec{Q})$ проектируем силу $\vec{Q}$ на плоскость yz ; получаем $Q_{yz} = Q \sin \alpha$.

Плечо силы $\vec{Q}_{yz}$ относительно точки O равно b , а поворот ее с конца оси x виден происходящим против хода часовой стрелки; следовательно,

$$m_x(\vec{Q}) = bQ \sin \alpha.$$

Теперь вычисляем $m_y(\vec{Q})$. Сила $\vec{Q}$ лежит в плоскости ABD , перпендикулярной оси y и пересекающейся с ней в точке B . Следовательно, $Q_{xz} = Q$. Опуская из точки B перпендикуляр на линию действия силы $\vec{Q}$ (см. вспомогательный чертеж справа), находим, что его длина $h = a \sin \alpha$. Окончательно, учитывая направление поворота, получаем

$$m_y(\vec{Q}) = -Qa \sin \alpha.$$

Наконец, для вычисления $m_z(\vec{Q})$ проектируем силу $\vec{Q}$ на плоскость xy и найдем, что $Q_{xy} = Q \cos \alpha$, а плечо этой проекции относительно точки O равно b . Поэтому с учетом знака

$$m_z(\vec{Q}) = bQ \cos \alpha.$$

Теорема Вариньона для моментов силы относительно оси. Если обе части векторного равенства (24) из § 13 спроектировать на какую-нибудь ось z , проходящую через центр O , то согласно формулам (44) получим

$$m_z(\vec{R}) = \sum m_z(\vec{F}_k). \quad (46)$$

Следовательно, теорема Вариньона о моменте равнодействующей справедлива и для моментов относительно любой оси. Теоремой особенно удобно пользоваться для нахождения моментов силы относительно координатных осей, разлагая силу на составляющие, параллельные осям или их пересекающиеся.

Задача 36. Найти моменты относительно осей x , y , z силы $\vec{Q}$, приложенной к плите в точке D (рис. 89), если $OA = a$, $OB = b$ и толщина плиты h ; угол α задан.

Решение. Разлагая силу $\vec{Q}$ на составляющие $\vec{Q}_1$ и $\vec{Q}_2$, параллельные соответственно осям x и z , где по модулю $Q_1 = Q \cos \alpha$, $Q_2 = Q \sin \alpha$, и применяя теорему Вариньона, получим:

$$\begin{aligned} m_x(\vec{Q}) &= m_x(\vec{Q}_1) + m_x(\vec{Q}_2) = Q_2b = Qb \sin \alpha, \\ m_y(\vec{Q}) &= m_y(\vec{Q}_1) + m_y(\vec{Q}_2) = Q_1h - Q_2a = Q(h \cos \alpha - a \sin \alpha), \\ m_z(\vec{Q}) &= m_z(\vec{Q}_1) + m_z(\vec{Q}_2) = Q_1b = Qb \cos \alpha, \end{aligned}$$

так как $m_x(\vec{Q}_1) = 0$ ($\vec{Q}_1 \parallel Ox$) и $m_z(\vec{Q}_2) = 0$ ($\vec{Q}_2 \parallel Oz$).

Как видим, с помощью теоремы Вариньона моменты силы вычисляются довольно просто (с ее помощью легко найти моменты силы $\vec{Q}$ и в задаче 35). Поэтому рекомендуется во всех подобных случаях пользоваться данной теоремой. При некотором навыке все подсчеты легко проделать, опуская промежуточные выкладки; например, сразу видно, что $m_x(\vec{Q}) = (Q \sin \alpha) b$ и т. д.

Аналитические формулы для моментов силы относительно координатных осей. Разложим силу $\vec{F}$, приложенную в точке A с координатами x , y , z , на составляющие $\vec{F}_x$, $\vec{F}_y$, $\vec{F}_z$, параллельные координатным осям (рис. 90, а). Тогда по теореме Вариньона

$$m_x(\vec{F}) = m_x(\vec{F}_x) + m_x(\vec{F}_y) + m_x(\vec{F}_z).$$

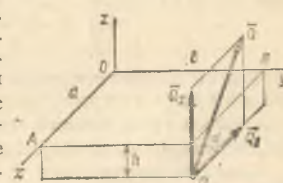


Рис. 89

Но так как составляющая F_x параллельна оси x , а составляющие F_y и F_z ей перпендикулярны, то с учетом знаков будет: $m_x(\bar{F}_x)=0$, $m_x(\bar{F}_y)=-zF_y$, $m_x(\bar{F}_z)=yF_z$ и в результате $m_x(\bar{F})=yF_z-zF_y$. Аналогично находятся моменты относительно осей y и z . Окончательно получим:

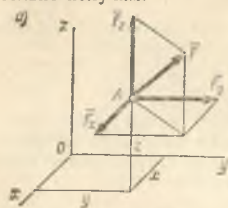


Рис. 90

$$\left. \begin{aligned} m_x(\bar{F}) &= yF_z - zF_y, \\ m_y(\bar{F}) &= zF_x - xF_z, \\ m_z(\bar{F}) &= xF_y - yF_x. \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Формулы (47) дают аналитические выражения для моментов силы относительно координатных осей. С их помощью моменты можно вычислять, зная проекции силы и координаты точки ее приложения. Заметим, что каждая следующая формула в

равенствах (47) получается из предыдущей так называемой круговой перестановки букв и индексов, т. е. последовательной заменой x на y , y на z и z на x (рис. 90, б).

Отметим еще один результат: поскольку левые части равенств (47) являются одновременно проекциями вектора $\bar{m}_O(\bar{F})$ на координатные оси (где O — начало координат), то с помощью этих равенств можно найти модуль момента $\bar{m}_O(\bar{F})$ по формуле

$$|\bar{m}_O(\bar{F})| = \sqrt{[m_x(\bar{F})]^2 + [m_y(\bar{F})]^2 + [m_z(\bar{F})]^2}. \quad (48)$$

Задача 37. Вычислить по аналитическим формулам моменты силы $\bar{Q}$, изображенной на рис. 89, относительно осей x , y , z и центра O .

Решение. Сила $\bar{Q}$ приложена в точке D с координатами $x=a$, $y=b$, $z=-h$. Ее проекции на координатные оси:

$$Q_x = -Q \cos \alpha, \quad Q_y = 0, \quad Q_z = Q \sin \alpha.$$

Подставляя эти значения в формулы (47), получим тот же результат, что и в задаче 36. Для $|\bar{m}_O(\bar{Q})|$ по формуле (48) найдем

$$|\bar{m}_O(\bar{Q})| = Q \sqrt{b^2 + (h \cos \alpha - a \sin \alpha)^2}.$$

Вычисление главного вектора и главного момента системы сил. Согласно формулам (21) и (22), полученным в § 12, значения главного вектора $\bar{R}$ и главного момента $\bar{M}_O$ системы сил определяются равенствами: $\bar{R} = \Sigma \bar{F}_k$, $\bar{M}_O = \Sigma \bar{m}_O(\bar{F}_k)$.

Покажем, как значения $\bar{R}$ и $\bar{M}_O$ вычисляются аналитически, т. е. по их проекциям на координатные оси, что нам в дальнейшем понадобится.

Выражения для R_x , R_y , R_z уже известны (§ 5). Проекции вектора $\bar{M}_O$ на координатные оси будем обозначать M_x , M_y , M_z . По теореме о проекциях суммы векторов на ось $M_x = \Sigma [\bar{m}_O(\bar{F}_k)]_x$ или, согласно равенству (44), $M_x = \Sigma m_x(\bar{F}_k)$. Аналогично находятся M_y и M_z .

Окончательно для определения проекций главного вектора $\bar{R}$ и главного момента $\bar{M}_O$ получим формулы:

$$R_x = \Sigma F_{kx}, \quad R_y = \Sigma F_{ky}, \quad R_z = \Sigma F_{kz}; \quad (49)$$

$$M_x = \Sigma m_x(\bar{F}_k), \quad M_y = \Sigma m_y(\bar{F}_k), \quad M_z = \Sigma m_z(\bar{F}_k). \quad (50)$$

В § 12 было отмечено, что две системы сил, у которых величины $\bar{R}$ и $\bar{M}_O$ совпадают, эквивалентны. Отсюда следует, что для задания (или определения) любой системы сил, действующих на твердое тело, достаточно задать (определить) ее главный вектор и главный момент относительно некоторого центра, т. е. шесть величин, входящих в левые части равенств (49) и (50) [в случае рассмотренной в § 15 плоской системы сил — три величины, входящие в равенства (27)]. Этим нередко пользуются на практике, например, при задании (определении) аэродинамических сил, действующих на самолет, ракету, автомобиль, или при определении внутренних усилий в частях конструкции (см. задачу 26 в § 20).

§ 29*. ПРИВЕДЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ СИЛ К ПРОСТЕЙШЕМУ ВИДУ

Как показано в § 12, любая система сил приводится в общем случае к силе, равной главному вектору $\bar{R}$ и приложенной в произвольном центре O , и к паре с моментом, равным главному моменту $\bar{M}_O$ (см. рис. 40, б). Найдем, к какому простейшему виду может приводиться пространственная система сил, не находящаяся в равновесии. Результат зависит от значений, которые у этой системы имеют величины $\bar{R}$ и $\bar{M}_O$.

1. Если для данной системы сил $\bar{R} = 0$, а $\bar{M}_O \neq 0$, то она приводится к паре сил, момент которой равен $\bar{M}_O$ и может быть вычислен по формулам (50). В этом случае, как было показано в § 12, значение $\bar{M}_O$ от выбора центра O не зависит.

2. Если для данной системы сил $\bar{R} \neq 0$, а $\bar{M}_O = 0$, то она приводится к равнодействующей, равной $\bar{R}$, линия действия которой проходит через центр O . Значение $\bar{R}$ можно найти по формулам (49).

3. Если для данной системы сил $\bar{R} \neq 0$, $\bar{M}_O \neq 0$, но $\bar{M}_O \perp \bar{R}$, то эта система также приводится к равнодействующей, равной $\bar{R}$, но не проходящей через центр O .

Действительно, при $\bar{M}_O \perp \bar{R}$ пара, изображаемая вектором $\bar{M}_O$, и сила $\bar{R}$ лежат в одной плоскости (рис. 91). Тогда, выбрав силы пары

$\vec{R}'$ и $\vec{R}''$ равными по модулю R и располагая их так, как показано на рис. 91, получим, что силы $\vec{R}$ и $\vec{R}'$ взаимно уравновесятся, и система заменится одной равнодействующей $\vec{R}' = \vec{R}$, линия действия которой проходит через точку O' (см. § 15, п. 2, б). Расстояние OO' ($OO' \perp \vec{R}$) определяется при этом по формуле (28), где $d = OO'$.

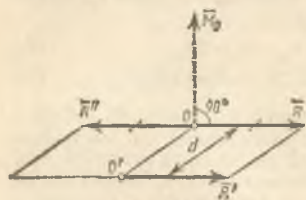


Рис. 91

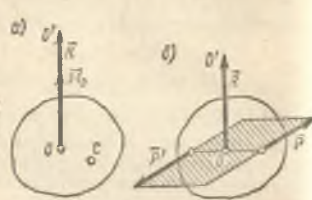


Рис. 92

Легко убедиться, что рассмотренный случай будет, в частности, всегда иметь место для любой системы параллельных сил или сил, лежащих в одной плоскости, если главный вектор этой системы $\vec{R} \neq 0$.

4. Если для данной системы сил $\vec{R} \neq 0$, $\vec{M}_O \neq 0$ и при этом вектор $\vec{M}_O$ параллелен $\vec{R}$ (рис. 92, а), то это означает, что система сил приводится к совокупности силы $\vec{R}$ и пары $\vec{P}$, $\vec{P}'$, лежащей в плоскости, перпендикулярной силе (рис. 92, б). Такая совокупность силы и пары называется *динамическим винтом*, а прямая, вдоль которой направлен вектор $\vec{R}$, *осью винта*. Дальнейшее упрощение этой системы сил невозможно. В самом деле, если за центр приведения принять любую другую точку C (рис. 92, а), то вектор $\vec{M}_O$ можно перенести в

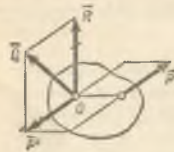


Рис. 93

точку C как свободный, а при переносе силы $\vec{R}$ в точку C (см. § 11) добавится еще одна пара с моментом $\vec{M}_C = \vec{m}_C(\vec{R})$, перпендикулярным вектору $\vec{R}$, а следовательно, и $\vec{M}_O$. В итоге момент результирующей пары $\vec{M}_C = \vec{M}_O + \vec{M}_C'$ численно будет больше M_O ; таким образом, момент результирующей пары имеет в данном случае при приведении к центру O наименьшее значение. К одной силе (равнодействующей) или к одной паре данную систему сил привести нельзя.

Если одну из сил пары, например $\vec{P}'$, сложить с силой $\vec{R}$, то рассматриваемую систему сил можно еще заменить двумя скрещивающимися, т. е. не лежащими в одной плоскости силами $\vec{Q}$ и $\vec{P}$ (рис. 93). Так как полученная система сил эквивалентна динамическому винту, то она также не имеет равнодействующей.

5. Если для данной системы сил $\vec{R} \neq 0$, $\vec{M}_O \neq 0$ и при этом векторы $\vec{M}_O$ и $\vec{R}$ не перпендикулярны друг другу и не параллельны, то та-

кая система сил тоже приводится к динамическому винту, но ось винта не будет проходить через центр O .

Чтобы доказать это, разложим вектор $\vec{M}_O$ на составляющие: $\vec{M}_1$, направленную вдоль $\vec{R}$, и $\vec{M}_2$, перпендикулярную $\vec{R}$ (рис. 94). При этом $M_1 = M_O \cos \alpha$, $M_2 = M_O \sin \alpha$, где α — угол между векторами $\vec{M}_O$ и $\vec{R}$. Пару, изображаемую вектором $\vec{M}_2$ ($\vec{M}_2 \perp \vec{R}$), и силу $\vec{R}$ можно, как в случае, показанном на рис. 91, заменить одной силой $\vec{R}'$, приложенной в точке O' . Тогда данная система сил заменится силой $\vec{R}' = \vec{R}$ и парой с моментом $\vec{M}_1$, параллельным $\vec{R}'$, причем вектор $\vec{M}_1$, как свободный, можно тоже приложить в точке O' . В результате действительно получится динамический винт, но с осью, проходящей через точку O' .

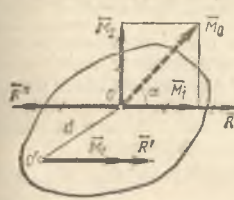


Рис. 94



Рис. 95

Задача 38. Найти, к чему приводится система сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, изображенных на рис. 6 (см. § 2), считая $F_1 = F_2 = F$, $AB = 2a$.

Решение. Приведем силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ к центру O , лежащему на середине отрезка AB (рис. 95). Главный вектор системы $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ и направлен по биссектрисе угла $y'Oz'$; численно он равен $R = F\sqrt{2}$. Главный момент системы $\vec{M}_O = \vec{m}_O(\vec{F}_1) + \vec{m}_O(\vec{F}_2)$. Вектор $\vec{m}_O(\vec{F}_1)$ направлен вдоль оси y' , а вектор $\vec{m}_O(\vec{F}_2)$ — вдоль оси z' ; численно оба вектора равны Fa . Следовательно, по модулю $M_O = Fa\sqrt{2}$, а направлен вектор $\vec{M}_O$ тоже по биссектрисе угла $y'Oz'$. Таким образом, система сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ приводится к динамическому винту и, как было указано в § 2, равнодействующей не имеет.

§ 30. РАВНОВЕСИЕ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ СИЛ. СЛУЧАЙ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ

Необходимые и достаточные условия равновесия любой системы сил выражаются равенствами $\vec{R} = 0$, $\vec{M}_O = 0$ (см. § 13). Но векторы $\vec{R}$ и $\vec{M}_O$ равны нулю только тогда, когда $R_x = R_y = R_z = 0$ и $M_x = M_y = M_z = 0$, т. е. когда действующие силы, согласно формулам (49) и (50), будут удовлетворять условиям:

$$\left. \begin{aligned} \sum F_{kx} &= 0, \quad \sum F_{ky} = 0, \quad \sum F_{kz} = 0; \\ \sum m_x(\vec{F}_k) &= 0, \quad \sum m_y(\vec{F}_k) = 0, \quad \sum m_z(\vec{F}_k) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

Таким образом, для равновесия произвольной пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех

сил на каждую из трех координатных осей и суммы их моментов относительно этих осей были равны нулю*.

Равенства (51) выражают одновременно условия равновесия твердого тела, находящегося под действием любой пространственной системы сил.

Если на тело кроме сил действует еще пара, заданная ее моментом $\vec{m}$, то при этом вид первых трех из условий (51) не изменится (сумма проекций сил пары на любую ось равна нулю), а последние три условия примут вид:

$$\sum m_x(\vec{F}_k) + m_x = 0, \quad \sum m_y(\vec{F}_k) + m_y = 0, \quad \sum m_z(\vec{F}_k) + m_z = 0. \quad (52)$$

Случай параллельных сил. В случае, когда все действующие на тело силы параллельны друг другу, можно выбрать координатные оси так, что ось z будет параллельна силам (рис. 96). Тогда проекции каждой из сил на оси x и y и их моменты относительно оси z будут равны нулю и система (51) даст три условия равновесия:

$$\sum F_{kz} = 0, \quad \sum m_x(\vec{F}_k) = 0, \quad \sum m_y(\vec{F}_k) = 0. \quad (53)$$

Остальные равенства обратятся при этом в тождества вида $0=0$.

Следовательно, для равновесия пространственной системы параллельных сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил на ось, параллельную силам, и суммы их моментов относительно двух других координатных осей были равны нулю.

Решение задачи. Порядок решения задач здесь остается тем же, что и в случае плоской системы сил. Установив, равновесие какого тела (объекта) рассматривается, надо изобразить все действующие на него внешние силы (и заданные, и реакции связей) и составить условия равновесия этих сил. Из полученных уравнений и определяются искомые величины.

Для получения более простых систем уравнений рекомендуется оси проводить так, чтобы они пересекали больше неизвестных сил или были им перпендикулярны (если это только излишне не усложняет вычисления проекций и моментов других сил).

Новым элементом в составлении уравнений является вычисление моментов сил относительно координатных осей.

В случаях, когда из общего чертежа трудно усмотреть, чему равен момент данной силы относительно какой-нибудь оси, рекомендуется изобразить на вспомогательном чертеже проекцию рассматриваемого тела (вместе с силой) на плоскость, перпендикулярную этой оси.

* При составлении условий (51) можно, если это целесообразно, брать для вычисления проекций одну систему координатных осей, а для вычисления моментов — другую.

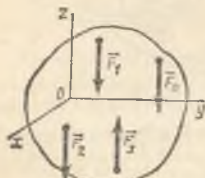


Рис. 96

В тех случаях, когда при вычислении момента возникают затруднения в определении проекции силы на соответствующую плоскость или плеча этой проекции, рекомендуется разложить силу на две взаимно перпендикулярные составляющие (из которых одна параллельна какой-нибудь координатной оси), а затем воспользоваться теоремой Вариньона (см. задачу 36). Кроме того, можно вычислять моменты аналитически по формулам (47), как, например, в задаче 37.

Задача 39. На прямоугольной плите со сторонами a и b лежит груз. Центр тяжести плиты вместе с грузом находится в точке D с координатами x_D, y_D (рис. 97). Один из рабочих удерживает плиту за угол A . В каких точках B и E должны поддерживать плиту двое других рабочих, чтобы силы, прикладываемые каждым из удерживающих плиту, были одинаковы.

Решение. Рассматриваем равновесие плиты, которая является свободным телом, находящимся в равновесии под действием четырех параллельных сил $\vec{Q}_1, \vec{Q}_2, \vec{Q}_3, \vec{P}$, где $\vec{P}$ — сила тяжести. Составляем для этих сил условия равновесия (53), считая плиту горизонтальной и проводя оси так, как показано на рис. 97. Получим:

$$Q_1 b + Q_2 y - P y_D = 0, \quad -Q_3 a - Q_2 x + P x_D = 0, \\ Q_1 + Q_2 + Q_3 - P = 0.$$

По условиям задачи должно быть $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q$. Тогда из последнего уравнения $P = 3Q$. Подставляя это значение P в первые два уравнения, найдем окончательно $x = 3x_D - a, y = 3y_D - b$.

Решение возможно, когда $a/3 \leq x_D \leq 2a/3, b/3 \leq y_D \leq 2b/3$. При $x_D = a/3, y_D = b/3$ получим $x = y = 0$, а при $x_D = 2a/3, y_D = 2b/3$ будет $x = a, y = b$. Когда точка D в центре плиты, $x = a/2, y = b/2$.

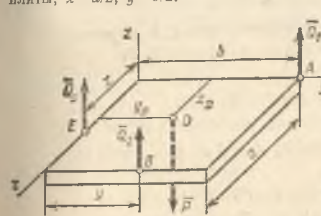


Рис. 97

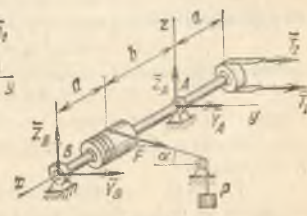


Рис. 98

Задача 40. На горизонтальный вал, лежащий в подшипниках A и B (рис. 98) насажены перпендикулярно оси вала шкив радиусом $r_1 = 20$ см и барабан радиусом $r_2 = 15$ см. Вал приводится во вращение ремнем, накинутым на шкив; при этом равномерно поднимается груз весом $P = 540$ Н, привязанный к веревке, которая наматывается на барабан. Пренебрегая весом вала, барабана и шкива, определить реакции подшипников A и B и натяжение T_1 ведущей ветви ремня, если известно, что оно вдвое больше натяжения T_2 ведомой ветви. Дано: $a = 40$ см, $b = 60$ см, $\alpha = 30^\circ$.

Решение. В рассматриваемой задаче при равномерном вращении вала действующие на него силы удовлетворяют условиям равновесия (51) (это будет доказано в § 136). Проведем координатные оси (рис. 98) и изобразим действующие на вал силы: натяжение $\vec{F}$ веревки, по модулю равное P , натяжения ремня $\vec{T}_1, \vec{T}_2$ и составляющие $\vec{Y}_A, \vec{Z}_A, \vec{Y}_B, \vec{Z}_B$ реакций подшипников.

Для составления условий равновесия (51) вычисляем предварительно и вносим в таблицу значения проекций всех сил на координатные оси и их моментов относительно этих осей *.

$\vec{F}_k$	$\vec{F}$	$\vec{T}_1$	$\vec{T}_2$	$\vec{R}_A$	$\vec{R}_B$
F_{kx}	0	0	0	0	0
F_{ky}	$F \cos \alpha$	T_1	T_2	Y_A	Y_B
F_{kz}	$-F \sin \alpha$	0	0	Z_A	Z_B
$m_x(\vec{F}_k)$	$-F r_2$	$T_1 r_1$	$-T_2 r_1$	0	0
$m_y(\vec{F}_k)$	$F \sin \alpha \cdot b$	0	0	0	$-Z_B(a+b)$
$m_z(\vec{F}_k)$	$F \cos \alpha \cdot b$	$-T_1 a$	$-T_2 a$	0	$Y_B(a+b)$

Теперь составляем условия равновесия (51); так как $F=P$, получим:

$$P \cos \alpha + T_1 + T_2 + Y_A + Y_B = 0, \quad (I)$$

$$-P \sin \alpha + Z_A + Z_B = 0, \quad (II)$$

$$-r_2 P + r_1 T_1 - r_1 T_2 = 0, \quad (III)$$

$$b P \sin \alpha - (a+b) Z_B = 0, \quad (IV)$$

$$b P \cos \alpha - a T_1 - a T_2 + (a+b) Y_B = 0. \quad (V)$$

Из уравнений (III) и (IV) находим сразу, учитывая, что $T_1 = 2T_2$:

$$T_2 = r_2 P / r_1 = 405 \text{ Н}, \quad Z_B = (b P \sin \alpha) / (a+b) = 162 \text{ Н}.$$

Далее, из уравнения (V) получаем:

$$Y_B = (3aT_2 - bP \cos \alpha) / (a+b) \approx 205 \text{ Н}.$$

Подставляя найденные значения в остальные уравнения, найдем:

$$Y_A = -P \cos \alpha - 3T_2 - Y_B \approx -1890 \text{ Н}, \quad Z_A = P \sin \alpha - Z_B = 108 \text{ Н},$$

и окончательно

$$T_1 = 810 \text{ Н}, \quad Y_A \approx -1890 \text{ Н}, \quad Z_A = 108 \text{ Н}, \quad Y_B \approx 205 \text{ Н}, \quad Z_B = 162 \text{ Н}.$$

Задача 41. Прямоугольная крышка весом $P=120 \text{ Н}$, образующая с вертикалью угол $\alpha=60^\circ$, закреплена на горизонтальной оси AB в точке B цилиндрическим подшипником, а в точке A — подшипником с упором (рис. 99). Крышка удерживается в равновесии веревкой DE и оттягивается перекинутой через блок O нитью с грузом весом $Q=200 \text{ Н}$ на конце (линия KO параллельна AB). Дано: $BD=BE$, $AK=a=0,4 \text{ м}$, $AB=b=1 \text{ м}$. Определить натяжение веревки DE и реакции подшипников A и B .

Решение. Рассмотрим равновесие крышки. Проведем координатные оси, беря начало в точке B (при этом сила $\vec{T}$ пересечет оси y и z , что упростит вид урав-

* Предварительное составление таблиц при решении задач этого раздела особенно полезно. Таблица заполняется по столбцам, т. е. сначала вычисляются все проекции и моменты силы $\vec{F}$, а затем силы $\vec{T}_1$ и т. д. Таким образом, сначала все внимание сосредоточивается на первой силе, затем — на второй и т. д. Если же сразу составлять уравнения (51), то к рассмотрению каждой силы придется возвращаться шесть раз; при этом вероятнее появление ошибок, а особенно пропусков отдельных сил в том или ином уравнении.

нений моментов). Затем изобразим все действующие на крышку заданные силы и реакции связей: силу тяжести $\vec{P}$, приложенную в центре тяжести S крышки, силу $\vec{Q}$, равную по модулю Q , реакцию $\vec{T}$ веревки и реакции $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A$ и $\vec{Y}_B, \vec{Z}_B$ подшипников A и B (рис. 99; показанный пунктиром вектор $\vec{M}$ к данной задаче не относится). Для составления условий равновесия введем угол β и обозначим $BD=BE=d$. Подсчет моментов некоторых сил пояснен на вспомогательных рис. 100, а, б.

На рис. 100, а показан вид в проекции на плоскость Bxz с положительного конца оси x . Этот чертеж помогает вычислять моменты сил $\vec{P}$ и $\vec{T}$ относительно осей x . Из него видно, что проекции этих сил на плоскость yz (плоскость, перпендикулярную оси x) равны самим силам, а плечо силы $\vec{P}$ относительно точки B равно $BC_1 \sin \alpha = (d/2) \sin \alpha$; плечо же силы $\vec{T}$ относительно этой точки равно $BD \sin \beta = d \sin \beta$.

На рис. 100, б показан вид в проекции на плоскость Bxz с положительного конца оси y . Этот чертеж (вместе с рис. 100, а) помогает вычислять моменты сил $\vec{P}$ и $\vec{Q}$ относительно осей y . Из него видно, что проекции этих сил на плоскость xz равны самим силам, а плечо силы $\vec{P}$ относительно точки B равно $AB/2 = b/2$; плечо же силы $\vec{Q}$ относительно этой точки равно AK_1 , т. е. $AK \cos \alpha$ или $a \cos \alpha$, что видно из рис. 100, а.

Составляя с учетом сделанных пояснений условия равновесия (51) и полагая одновременно $Q'=Q$, получим:

$$\Sigma F_{kx} = -Q + X_A = 0, \quad (I)$$

$$\Sigma F_{ky} = -T \sin \beta + Y_A + Y_B = 0, \quad (II)$$

$$\Sigma F_{kz} = -P + T \cos \beta + Z_A + Z_B = 0, \quad (III)$$

$$\Sigma m_x(\vec{F}_k) = -(Pd/2) \sin \alpha + Td \sin \beta = 0, \quad (IV)$$

$$\Sigma m_y(\vec{F}_k) = -Pb/2 + Qa \cos \alpha + Z_A b = 0, \quad (V)$$

$$\Sigma m_z(\vec{F}_k) = Qa \sin \alpha - Y_A b = 0. \quad (VI)$$

Учитывая, что $\beta = \alpha/2 = 30^\circ$, найдем из уравнений (I), (IV), (V), (VI):

$$X_A = Q = 200 \text{ Н}, \quad T = (P \sin \alpha) / 2 \sin \beta \approx 104 \text{ Н},$$

$$Z_A = P/2 - (Qa \cos \alpha) / b = 20 \text{ Н}, \quad Y_A = (Qa \sin \alpha) / b \approx 69 \text{ Н}.$$

Подставляя эти значения в уравнения (II) и (III), получим:

$$Y_B = T \sin \beta - Y_A = -17 \text{ Н}, \quad Z_B = P - T \cos \beta - Z_A = 10 \text{ Н}.$$

Окончательно,

$$T \approx 104 \text{ Н}, \quad X_A = 200 \text{ Н}, \quad Y_A \approx 69 \text{ Н}, \quad Z_A = 20 \text{ Н}, \quad Y_B = -17 \text{ Н}, \quad Z_B = 10 \text{ Н}.$$

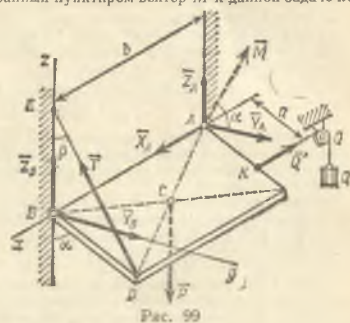


Рис. 99

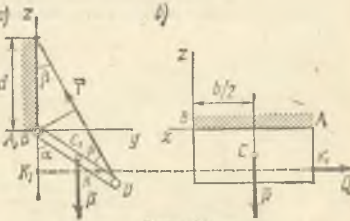


Рис. 100

Задача 42. Решить задачу 41 для случая, когда на крышку дополнительно действует расположенная в ее плоскости пара с моментом $M=120$ Н·м; поворот пары направлен (если смотреть на крышку сверху) против хода часовой стрелки.

Решение. В дополнение к действующим на крышку силам (см. рис. 99) изображаем момент $\vec{M}$ пары в виде вектора, перпендикулярного к крышке и приложенного в любой точке, например в точке A . Его проекции на координатные оси: $M_x=0$, $M_y=M \cos \alpha$, $M_z=M \sin \alpha$. Тогда, составляя условия равновесия (52), найдем, что уравнения (I) — (IV) останутся такими же, как в предыдущей задаче, а последние два уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned} -Pb/2 + Z_A b + Qa \cos \alpha + M \cos \alpha &= 0, \\ -Y_B b + Qa \sin \alpha + M \sin \alpha &= 0. \end{aligned} \quad \begin{aligned} (V') \\ (VI') \end{aligned}$$

Заметим, что этот же результат можно получить, не составляя уравнения в виде (52), а изобразив пару двумя силами, направленными, например, вдоль линий AB и KO (при этом модули сил будут равны M/a), и пользуясь затем обычными условиями равновесия.

Решая уравнения (I) — (IV), (V'), (VI'), найдем результаты, аналогичные полученным в задаче 41, с той лишь разницей, что во все формулы вместо величины Qa войдет $Qa + M$. Окончательно получим:

$$T \approx 104 \text{ Н}, X_A = 200 \text{ Н}, Y_A \approx 173 \text{ Н}, Z_A = -40 \text{ Н}, Y_B = -121 \text{ Н}, Z_B = 70 \text{ Н}.$$

Задача 43. Горизонтальный стержень AB прикреплен к стене сферическим шарниром A и удерживается в положении, перпендикулярном стене, растяжками KE и CD , показанными на рис. 101, а. К концу B стержня подвешен груз весом $P=36$ Н. Определить реакцию шарнира A и натяжения растяжек, если $AB=a=0,8$ м, $AC=AD=b=0,6$ м, $AK=a/2$, $\alpha=30^\circ$, $\beta=60^\circ$. Весом стержня пренебречь.

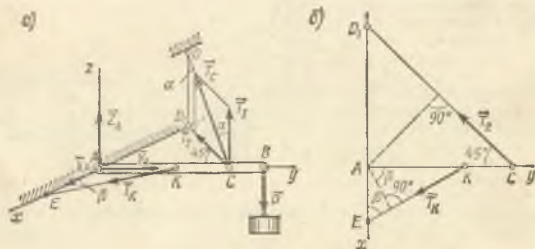


Рис. 101

Решение. Рассмотрим равновесие стержня. На него действуют сила $\vec{P}$ и реакции $\vec{T}_K$, $\vec{T}_C$, $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, $\vec{Z}_A$. Проведем координатные оси и составим условия равновесия (51). Для нахождения проекций и моментов силы $\vec{T}_C$ разложим ее на составляющие $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ ($T_1=T_C \cos \alpha$, $T_2=T_C \sin \alpha$). Тогда по теореме Вариньона * $m_x(\vec{T}_C)=m_x(\vec{T}_1)$, так как $m_x(\vec{T}_2)=0$, а $m_z(\vec{T}_C)=m_z(\vec{T}_2)$, так как

* Заметим, что угол между силой $\vec{T}_C$ и плоскостью Ayz не равен 45° , как иногда в аналогичных случаях ошибочно полагают. Поэтому, например, при нахождении $m_x(\vec{T}_C)$ по формуле (45) надо сначала определить этот угол или найти другим путем проекцию $\vec{T}_C$ на плоскость Ayz , что усложнит расчет (составляющая $\vec{T}_1$ проекцией силы $\vec{T}_C$ на плоскость Ayz не является). С помощью же теоремы Вариньона значение $m_x(\vec{T}_C)$ легко находится.

$m_z(\vec{T}_1)=0$. Вычисление моментов сил относительно оси z пояснено вспомогательным чертежом (рис. 101, б), на котором дан вид в проекции на плоскость Axy .

Теперь составляем уравнения (51). Предварительно заметим, что так как все силы пересекают ось y , то их моменты относительно этой оси равны нулю; поэтому уравнений равновесия останется только пять:

$$\begin{aligned} \Sigma F_{Kx} &= T_K \cos \beta - T_2 \sin 45^\circ + X_A = 0, \\ \Sigma F_{Ky} &= -T_K \sin \beta - T_2 \cos 45^\circ + Y_A = 0, \\ \Sigma F_{Kz} &= T_1 + Z_A - P = 0, \quad \Sigma m_x(\vec{F}_K) = T_1 b - Pa = 0, \\ \Sigma m_z(\vec{F}_K) &= -(T_K a/2) \cos \beta + T_2 b \sin 45^\circ = 0, \end{aligned}$$

или, заменяя T_1 и T_2 их значениями:

$$\begin{aligned} T_K \cos \beta - T_C \sin \alpha \sin 45^\circ + X_A &= 0, \\ -T_K \sin \beta - T_C \sin \alpha \cos 45^\circ + Y_A &= 0, \\ -P + T_C \cos \alpha + Z_A &= 0, \quad -Pa + T_C b \cos \alpha = 0, \\ -(T_K a/2) \cos \beta + T_C b \sin \alpha \sin 45^\circ &= 0. \end{aligned}$$

Решая эту систему уравнений, найдем окончательно $T_C \approx 55,4$ Н, $T_K \approx 58,8$ Н, $X_A \approx -9,8$ Н, $Y_A \approx 70,5$ Н, $Z_A \approx -12$ Н. Составляющие X_A и Z_A имеют, таким образом, направления, противоположные показанным на чертеже.

Задача 44. Горизонтальная плита ABC , имеющая форму равностороннего треугольника со стороной a , закреплена с помощью шести стержней так, как показано на рис. 102; при этом каждый из наклонных стержней образует с горизонтальной плоскостью угол $\alpha=30^\circ$. В плоскости плиты действует пара с моментом M . Пренебрегая весом плиты, определить усилия в стержнях.

Решение. Рассматривая равновесие плиты, изображаем вектор $\vec{M}$ момента действующей на нее пары сил и реакции $\vec{N}_1, \vec{N}_2, \dots, \vec{N}_6$ стержней; реакции направляем так, как если бы все стержни были растянуты (считаем, что плита отрывается от стержней). При равновесии сумма моментов всех действующих на тело сил и пар [см. равенства (52)] относительно любой оси должна быть равна нулю.

Направляя ось z вдоль стержня 1 и составляя уравнение моментов относительно этой оси, получим при $M_z=M$

$$(N_6 \cos \alpha) h + M = 0,$$

где $h=a\sqrt{3}/2$ — высота треугольника. Отсюда находим

$$N_6 = -2M/(a\sqrt{3} \cos \alpha).$$

Составляя уравнения моментов относительно осей, которые направляем вдоль стержней 2 и 3, получим такие же результаты для сил N_4 и N_5 .

Теперь составим уравнение моментов относительно оси x , направленной вдоль стороны AB треугольника. Получим, учитывая, что $M_x=0$,

$$N_3 h + (N_4 \sin \alpha) h = 0.$$

Отсюда, так как $N_4=N_5$, находим

$$N_3 = -N_4 \sin \alpha = (2M/a\sqrt{3}) \operatorname{tg} \alpha.$$

Такие же значения получим для величин N_1 и N_2 , составляя уравнения моментов относительно осей AC и CB .

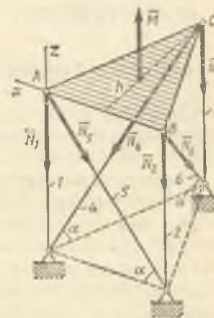


Рис. 102

Окончательно при $\alpha=30^\circ$ будет:

$$N_1=N_2=N_3=2M/3a, \quad N_4=N_5=N_6=-4M/3a.$$

Полученные результаты показывают, что действием заданной пары вертикальные стержни растягиваются, а наклонные сжимаются.

Из рассмотренного примера видно, что при решении задач не всегда обязательно пользоваться условиями равновесия (51). Для пространственной системы сил, как и для плоской, существует несколько форм условий равновесия, из которых форма (51) является основной.

В частности, можно доказать, что для равновесия пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы были равны нулю суммы моментов всех сил относительно шести осей, направленных или по ребрам какой-нибудь треугольной пирамиды, или по боковым ребрам и ребрам основания треугольной призмы.

Последние условия и были использованы при решении задачи 44.

Глава VIII

ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ

§ 31. ЦЕНТР ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ

Понятие о центре параллельных сил используется при решении некоторых задач механики, в частности при определении положений центров тяжести тел.

Рассмотрим сначала две параллельные силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, приложенные к телу в точках A_1 и A_2 (рис. 103). Очевидно, что эта плоская система сил имеет равнодействующую $\vec{R}=\vec{F}_1+\vec{F}_2$, линия действия которой параллельна слагаемым силам и проходит через некоторую точку C , лежащую на прямой A_1A_2 . Положение точки C найдем с помощью теоремы Вариньона. Согласно этой теореме $m_C(\vec{R})=m_C(\vec{F}_1)+m_C(\vec{F}_2)$ или $0=F_1h_1-F_2h_2=F_1 \cdot A_1C \cdot \cos \alpha - F_2 \cdot A_2C \cdot \cos \alpha$, откуда

$$F_1 \cdot A_1C = F_2 \cdot A_2C. \quad (54)$$

В равенство (54) входят модули F_1 и F_2 рассматриваемых сил. Поэтому, если силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ повернуть около точек A_1 и A_2 в одну и ту же сторону на один и тот же угол, то образуются две новые параллельные силы $\vec{F}_1'$ и $\vec{F}_2'$, имеющие те же модули F_1 , F_2 ; следовательно, для сил $\vec{F}_1'$, $\vec{F}_2'$ равенство (54) сохранится и линия действия их равнодействующей $\vec{R}'$ тоже пройдет через точку C . Такая точка называется *центром параллельных сил* $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$.

Теперь рассмотрим систему параллельных и одинаково направленных сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, ..., $\vec{F}_n$, приложенных к твердому телу в точках

A_1 , A_2 , ..., A_n (рис. 104). Эта система сил имеет равнодействующую $\vec{R}=\Sigma \vec{F}_k$, модуль которой

$$R=\Sigma F_k. \quad (55)$$

Если каждую из сил системы поворачивать около точки ее приложения в одну и ту же сторону на один и тот же угол, то будут получаться новые системы одинаково направленных параллельных сил с теми же модулями и точками приложения (см. например, показанные пунктиром силы на рис. 104). Равнодействующая каждой из таких систем сил будет иметь тот же модуль R , но всякий раз дру-

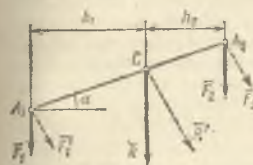


Рис. 103

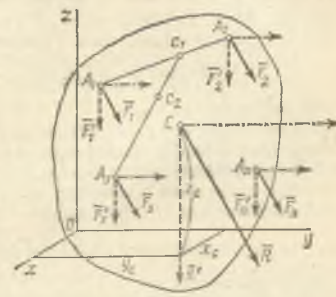


Рис. 104

гое направление. Покажем, что при всех таких поворотах линия действия равнодействующей проходит через одну и ту же точку C . В самом деле, сложив сначала силы F_1 и F_2 , найдем по формуле (54), что их равнодействующая $\vec{R}_1$ (на рис. 104 не показана) будет всегда проходить через точку c_1 , положение которой определяется равенством $F_1 \cdot A_1c_1 = F_2 \cdot A_2c_1$. Сложив затем силы $\vec{R}_1$ и $\vec{F}_3$, найдем, что их равнодействующая, являющаяся одновременно равнодействующей сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, всегда проходит через аналогично определяемую точку c_2 , лежащую на прямой c_1A_3 , и т. д. Доведя этот процесс последовательного сложения сил до конца, убедимся, что равнодействующая $\vec{R}$ всех сил действительно проходит всегда через одну и ту же точку C , положение которой по отношению к точкам A_1 , A_2 , ..., A_n , т. е. к телу, будет неизменным.

Точка C , через которую проходит линия действия равнодействующей системы параллельных сил при любых поворотах этих сил около их точек приложения в одну и ту же сторону и на один и тот же угол, называется *центром параллельных сил*.

Найдем координаты центра параллельных сил. Положение точки C по отношению к телу является неизменным и от выбора системы координат зависеть не будет. Возьмем поэтому произвольные координатные оси $Oxyz$ и обозначим в этих осях координаты точек: $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, ..., $C(x_C, y_C, z_C)$. Пользуясь тем, что от направления сил положение точки C не зависит, повернем сначала

силы около их точек приложения так, чтобы они стали параллельны оси Oz , и применим к повернутым силам $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ теорему Вариньона. Так как $\vec{R}'$ является равнодействующей этих сил, то по формуле (46), беря моменты относительно оси Oy , найдем, что

$$m_y(\vec{R}') = \sum m_y(\vec{F}_k). \quad (56)$$

Но из чертежа [или из равенств (47)] видно, что $m_y(\vec{R}') = Rx_c$, так как $R' = R$; аналогично $m_y(\vec{F}_1) = F_1x_1$, так как $F'_1 = F_1$, и т. д. Подставляя все эти величины в равенство (56), получим

$$Rx_c = F_1x_1 + F_2x_2 + \dots + F_nx_n = \sum F_kx_k.$$

Отсюда определим x_c .

Для координаты y_c аналогичную формулу найдем, беря моменты относительно оси Ox . Чтобы определить z_c , повернем опять все силы, сделав их параллельными оси Oy , и применим к этим силам (изображенным пунктиром с точками) теорему Вариньона, беря моменты относительно оси Ox . Это даст:

$$-Rz_c = -F_1z_1 + (-F_2z_2) + \dots + (-F_nz_n),$$

откуда определим z_c .

Окончательно получим следующие формулы для координат центра параллельных сил:

$$x_c = \frac{1}{R} \sum F_kx_k, \quad y_c = \frac{1}{R} \sum F_ky_k, \quad z_c = \frac{1}{R} \sum F_kz_k, \quad (57)$$

где R определяется равенством (55).

Заметим, что формулы (55) и (57) будут справедливы и для параллельных сил, направленных в разные стороны, если считать F_k величинами алгебраическими (для одного направления со знаком плюс, а для другого — минус) и если при этом $R \neq 0$.

§ 32. СИЛОВОЕ ПОЛЕ. ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Область, в каждой точке которой на помещенную туда материальную частицу действует сила, зависящая от положения (координат) этой точки, называется *силовым полем* *. Примером силового поля является поле тяготения (поле сил притяжения к Земле или к любому другому небесному телу).

На каждую частицу тела, находящегося вблизи земной поверхности, действует направленная вертикально вниз сила, которую называют *силой тяжести* (вопрос о том, что собой представляет сила

* Такое силовое поле называют *стационарным*. Если же значения сил могут еще изменяться с течением времени, поле называется *нестационарным*. Понятие о поле может быть введено и для других векторов, которые такое векторное поле образуют, например для скоростей или ускорений точек тела (см. § 48, 51).

тяжести, будет рассмотрен в § 92). Эти силы образуют поле сил тяжести.

Для тел, размеры которых очень малы по сравнению с земным радиусом, силы тяжести, действующие на частицы тела, можно считать параллельными друг другу и сохраняющимися для каждой частицы постоянное значение при любых поворотах тела. Поле тяжести, в котором выполняются эти два условия, называют *однородным полем тяжести*.

Равнодействующую сил тяжести $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n$, действующих на частицы данного тела, обозначим $\vec{P}$ (рис. 105). Модуль этой силы называется *весом тела* и определяется равенством

$$P = \sum p_k. \quad (58)$$

При любом повороте тела силы $\vec{p}_k$ остаются приложенными в одних и тех же точках тела и параллельными друг другу, изменяется только их направление по отношению к телу. Следовательно, по доказанному в § 31, равнодействующая $\vec{P}$ сил $\vec{p}_k$ будет при любых положениях тела проходить через одну и ту же неизменно связанную с телом точку C , являющуюся центром параллельных сил тяжести $\vec{p}_k$. Эта точка и называется *центром тяжести тела*. Таким образом, *центром тяжести твердого тела называется неизменно связанная с этим телом точка, через которую проходит линия действия равнодействующей сил тяжести, действующих на частицы данного тела, при любом положении тела в пространстве*. Что такая точка существует, следует из доказанного в § 31.

Координаты центра тяжести, как центра параллельных сил, определяются формулами (57); следовательно,

$$x_c = \frac{1}{P} \sum p_kx_k, \quad y_c = \frac{1}{P} \sum p_ky_k, \quad z_c = \frac{1}{P} \sum p_kz_k, \quad (59)$$

где x_k, y_k, z_k — координаты точек приложения сил тяжести $\vec{p}_k$, действующих на частицы тела.

Отметим в заключение, что согласно определению центр тяжести — это точка геометрическая; она может лежать и вне пределов данного тела (например, для кольца).

§ 33. КООРДИНАТЫ ЦЕНТРОВ ТЯЖЕСТИ ОДНОРОДНЫХ ТЕЛ

Для однородного тела вес p_k любой его части пропорционален объему v_k этой части: $p_k = \gamma v_k$, а вес P всего тела пропорционален объему V этого тела, т. е. $P = \gamma V$, где γ — вес единицы объема.

Подставив эти значения P и p_k в формулы (59), заметим, что во всех суммах γ как общий множитель выносится за скобки и сокраща-

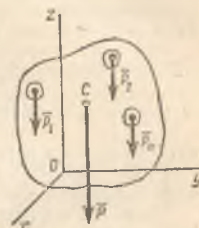


Рис. 105

ется с γ в знаменателе. В результате из формул (59) получим:

$$x_C = \frac{1}{V} \sum v_k x_k, \quad y_C = \frac{1}{V} \sum v_k y_k, \quad z_C = \frac{1}{V} \sum v_k z_k. \quad (60)$$

Как видно, положение центра тяжести однородного тела зависит только от его геометрической формы, а от величины γ не зависит. По этой причине точку C , координаты которой определяются формулами (60), называют *центром тяжести объема* V .

Путем аналогичных рассуждений легко найти, что если тело представляет собой однородную плоскую и тонкую пластину, то для нее

$$x_C = \frac{1}{S} \sum s_k x_k, \quad y_C = \frac{1}{S} \sum s_k y_k, \quad (61)$$

где S — площадь всей пластины; s_k — площади ее частей.

Точку, координаты которой определяются формулами (61), называют *центром тяжести площади* S .

Точно так же получаются формулы для координат центра тяжести линии:

$$x_C = \frac{1}{L} \sum l_k x_k, \quad y_C = \frac{1}{L} \sum l_k y_k, \quad z_C = \frac{1}{L} \sum l_k z_k, \quad (62)$$

где L — длина всей линии; l_k — длины ее частей.

По формулам (62) можно находить центры тяжести изделий из тонкой проволоки постоянного сечения.

Таким образом, центр тяжести однородного тела определяется, как центр тяжести соответствующего объема, площади или линии.

§ 34. СПОСОБЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КООРДИНАТ ЦЕНТРОВ ТЯЖЕСТИ ТЕЛ

Исходя из полученных выше общих формул, можно указать конкретные способы определения координат центров тяжести тел.

1. **С и м м е т р и я.** Если однородное тело имеет плоскость, ось или центр симметрии, то его центр тяжести лежит соответственно или в плоскости симметрии, или на оси симметрии, или в центре симметрии.

Допустим, например, что однородное тело имеет плоскость симметрии. Тогда этой плоскостью оно разбивается на две такие части, веса которых p_1 и p_2 равны друг другу, а центры тяжести находятся на одинаковых расстояниях от плоскости симметрии. Следовательно, центр тяжести тела как точка, через которую проходит равнодействующая двух равных и параллельных сил p_1 и p_2 , будет действительно лежать в плоскости симметрии. Аналогичный результат получается и в случаях, когда тело имеет ось или центр симметрии.

Из свойств симметрии следует, что центр тяжести однородного круглого кольца, круглой или прямоугольной пластины, прямоугольного параллелепипеда, шара и других однородных тел, имеющих

центр симметрии, лежит в геометрическом центре (центре симметрии) этих тел.

2. **Р а з б и е н и е.** Если тело можно разбить на конечное число таких частей, для каждой из которых положение центра тяжести известно, то координаты центра тяжести всего тела можно непосредственно вычислить по формулам (59) — (62). При этом число слагаемых в каждой из сумм будет равно числу частей, на которые разбито тело.

Задача 45. Определить координаты центра тяжести однородной пластины, изображенной на рис. 106. Все размеры даны в сантиметрах.

Р е ш е н и е. Проводим оси x , y и разбиваем пластину на три прямоугольника (линии разреза показаны на рис. 106). Вычисляем координаты центров тяжести каждого из прямоугольников и их площади (см. таблицу).

№	1	2	3
x_k	-1	1	5
y_k	1	5	9
s_k	4	20	12

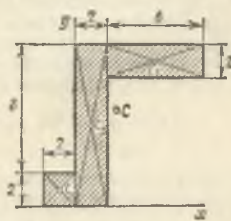


Рис. 106

Площадь всей пластины $S = s_1 + s_2 + s_3 = 36 \text{ см}^2$.

Подставляя вычисленные величины в формулы (61), получаем:

$$x_C = \frac{x_1 s_1 + x_2 s_2 + x_3 s_3}{S} = \frac{-4 + 20 + 60}{36} = 2 \frac{1}{9} \text{ см},$$

$$y_C = \frac{y_1 s_1 + y_2 s_2 + y_3 s_3}{S} = \frac{4 + 100 + 108}{36} = 5 \frac{8}{9} \text{ см}.$$

Найденное положение центра тяжести C показано на чертеже; точка C оказалась вне пластины.

3. **Д о п о л н е н и е.** Этот способ является частным случаем способа разбиения. Он применяется к телам, имеющим вырезы, если центры тяжести тела без выреза и вырезанной части известны.

Задача 46. Определить положение центра тяжести круглой пластины радиуса R с вырезом радиуса r (рис. 107). Расстояние $C_1 C_2 = a$.

Р е ш е н и е. Центр тяжести пластины лежит на линии $C_1 C_2$, так как эта линия является осью симметрии. Проводим координатные оси. Для нахождения координаты x_C дополняем площадь пластины до полного круга (часть 1), а затем вычитаем из полученной площади площадь вырезанного круга (часть 2). При этом площадь части 2, как вычитаемая, должна браться со знаком минус. Тогда $s_1 = \pi R^2$, $s_2 = -\pi r^2$, $x_1 = 0$, $x_2 = a$, $S = s_1 + s_2 = \pi (R^2 - r^2)$.



Рис. 107

Подставляя найденные значения в формулы (61), получаем:

$$x_C = \frac{x_1 s_1 + x_2 s_2}{S} = -\frac{a^2}{R^2 - r^2}; \quad y_C = 0.$$

Найденный центр тяжести C , как видим, лежит левее точки C_1 .

4. Интегрирование. Если тело нельзя разбить на несколько конечных частей, положения центров тяжести которых известны, то тело разбивают сначала на произвольные малые объемы Δv_k , для которых формулы (60) принимают вид

$$x_C = \frac{1}{V} \sum x_k \Delta v_k \text{ и т. д.}, \quad (63)$$

где x_k, y_k, z_k — координаты некоторой точки, лежащей внутри объема Δv_k . Затем в равенствах (63) переходят к пределу, устремляя все Δv_k к нулю, т. е. стягивая эти объемы в точки. Тогда стоящие в равенствах суммы обращаются в интегралы, распространенные на весь объем тела, и формулы (63) дают в пределе:

$$x_C = \frac{1}{V} \int_V x dv, \quad y_C = \frac{1}{V} \int_V y dv, \quad z_C = \frac{1}{V} \int_V z dv. \quad (64)$$

Аналогично для координат центров тяжести площадей и линий получаем в пределе из формул (61) и (62):

$$x_C = \frac{1}{S} \int_S x ds, \quad y_C = \frac{1}{S} \int_S y ds \quad (65)$$

$$x_C = \frac{1}{L} \int_L x dl, \quad y_C = \frac{1}{L} \int_L y dl, \quad z_C = \frac{1}{L} \int_L z dl. \quad (66)$$

Пример применения этих формул к определению координат центра тяжести рассмотрен в следующем параграфе.

5. Экспериментальный способ. Центры тяжести неоднородных тел сложной конфигурации (самолет, паровоз и т. п.) можно определять экспериментально. Один из возможных экспериментальных методов (метод подвешивания) состоит в том, что тело подвешивают на нити или тросе за различные его точки. Направление нити, на которой подвешено тело, будет каждый раз давать направление силы тяжести. Точка пересечения этих направлений определяет центр тяжести тела.

Другим возможным способом экспериментального определения центра тяжести является метод взвешивания. Идея этого метода ясна из рассмотренного ниже примера.

Пример. Покажем, как можно экспериментально определить одну из координат центра тяжести самолета (расстояние a), если расстояние $AB=l$ (рис. 108)

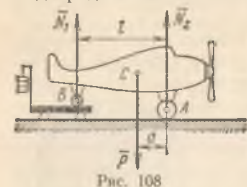


Рис. 108

известно. Поставив колесо B на платформу весов, найдем взвешиванием силу давления колеса на платформу; тем самым будет найдена численно равная этой силе реакция N_1 . Точно так же взвешиванием находим реакцию N_2 . Приравнявая затем нулю сумму моментов всех сил относительно центра тяжести C самолета, получаем $N_2 a - N_1 (l - a) = 0$, откуда находим $a = l N_1 / (N_1 + N_2)$.

Очевидно, $N_1 + N_2 = P$, где P — вес самолета. Если значение величины P наперед известно, то для определения a можно обойтись только однократным взвешиванием.

§ 35. ЦЕНТРЫ ТЯЖЕСТИ НЕКОТОРЫХ ОДНОРОДНЫХ ТЕЛ

1. Центр тяжести дуги окружности. Рассмотрим дугу AB радиуса R с центральным углом $AOB = 2\alpha$. В силу симметрии центр тяжести этой дуги лежит на оси Ox (рис. 109). Найдем координату x_C по формулам (66). Для этого выделим на дуге AB элемент MM' длиной $dl = R d\varphi$, положение которого определяется углом φ . Координата x элемента MM' будет $x = R \cos \varphi$. Подставляя эти значения x и dl в первую из формул (66) и имея в виду, что интеграл должен быть распространен на всю длину дуги, получим:

$$x_C = \frac{1}{L} \int_A^B x dl = \frac{R^2}{L} \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \varphi d\varphi = 2 \frac{R^2}{L} \sin \alpha,$$

где L — длина дуги AB , равная $R \cdot 2\alpha$. Отсюда окончательно находим, что центр тяжести дуги окружности лежит на ее оси симметрии на расстоянии от центра O , равном

$$x_C = (R \sin \alpha) / \alpha, \quad (67)$$

где угол α измеряется в радианах.

2. Центр тяжести площади треугольника. Разобьем площадь треугольника ABD (рис. 110) прямыми, парал-

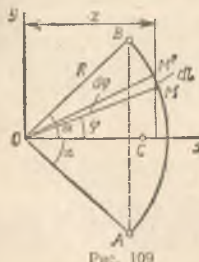


Рис. 109



Рис. 110

лельными стороне AD , на n узких полосок; центры тяжести этих полосок будут лежать на медиане BE треугольника. Следовательно, и центр тяжести всего треугольника лежит на этой медиане. Аналогичный результат получается для двух других медиан. Отсюда за-

ключаем, что центр тяжести площади треугольника лежит в точке пересечения его медиан. При этом, как известно,

$$CE = BE/3. \quad (68)$$

3. Центр тяжести площади кругового сектора. Рассмотрим круговой сектор OAB радиуса R с центральным углом 2α (рис. 111). Разобьем мысленно площадь сектора OAB радиусами, проведенными из центра O , на n секторов. В пределе,

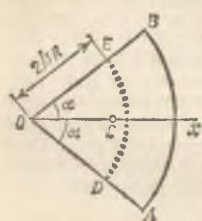


Рис. 111

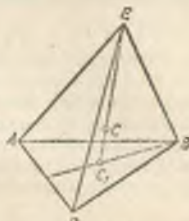


Рис. 112

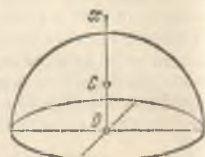


Рис. 113

при неограниченном увеличении числа n , эти секторы можно рассматривать как плоские треугольники, центры тяжести которых лежат на дуге DE радиуса $2R/3$. Следовательно, центр тяжести сектора OAB совпадает с центром тяжести дуги DE , положение которого найдется по формуле (67). Окончательно получим, что центр тяжести площади кругового сектора лежит на его оси симметрии на расстоянии от центра O , равном

$$x_c = \frac{2}{3} \frac{R \sin \alpha}{\alpha}. \quad (69)$$

Приведем без доказательств еще два результата.

4. Центр тяжести объема пирамиды (или конуса). Этот центр C лежит на прямой C_1E (рис. 112), где E — вершина, а C_1 — центр тяжести площади основания пирамиды; при этом

$$CC_1 = EC_1/4. \quad (70)$$

Результат справедлив для любой многоугольной пирамиды и для конуса.

5. Центр тяжести объема полушара. Этот центр C лежит на оси Ox (оси симметрии, рис. 113), а его координата

$$x_c = OC = 3R/8, \quad (71)$$

где R — радиус полушара.

Формулы, определяющие координаты центров тяжести других однородных тел, можно найти в различных технических справочниках.

Раздел второй

КИНЕМАТИКА ТОЧКИ И ТВЕРДОГО ТЕЛА

Глава IX

КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

§ 36. ВВЕДЕНИЕ В КИНЕМАТИКУ

Кинематикой называется раздел механики, в котором изучаются геометрические свойства движения тел без учета их инертности (массы) и действующих на них сил.

Кинематика представляет собой, с одной стороны, введение в динамику, так как установление основных кинематических понятий и зависимостей необходимо для изучения движения тел с учетом действия сил. С другой стороны, методы кинематики имеют и самостоятельное практическое значение, например, при изучении передач движения в механизмах.

Под движением мы понимаем в механике изменение с течением времени положения данного тела в пространстве по отношению к другим телам.

Для определения положения движущегося тела (или точки) в разные моменты времени с телом, по отношению к которому изучается движение, жестко связывают какую-нибудь систему координат, образующую вместе с этим телом систему отсчета. В дальнейшем будем говорить о движении тела (или точки) по отношению к данной системе отсчета, подразумевая под этим движение по отношению к тому телу, с которым эта система отсчета связана. Изображать систему отсчета будем в виде трех координатных осей (не показывая тело, с которым они связаны). Выбор системы отсчета в кинематике произволен (определяется целью исследования), и в отличие от динамики (см. § 74) все кинематические зависимости, полученные при изучении движения в какой-нибудь одной системе отсчета, будут справедливы и в любой другой системе отсчета.

Движение тел совершается в пространстве с течением времени. Пространство в механике мы рассматриваем как трехмерное евклидово пространство. Все измерения в нем производятся на основании методов евклидовой геометрии. За единицу длины при измерении расстояний принимается 1 м. Время в механике считается универсальным, т. е. протекающим одинаково во всех рассматриваемых

системах отсчета. За единицу времени принимается 1 с. Размерность длины обозначается символом L , а времени — символом T .

Евклидово пространство и универсальное время отражают реальные свойства пространства и времени лишь приближенно. Однако, как показывает опыт, для движений, которые изучаются в механике (движения со скоростями, далекими от скорости света), это приближение дает вполне достаточную для практики точность.

Время является скалярной, непрерывно изменяющейся величиной. В задачах кинематики время t принимают за независимое переменное (аргумент). Все другие переменные величины (расстояния, скорости и т. д.) рассматриваются как изменяющиеся с течением времени, т. е. как функции времени t . Отсчет времени ведется от некоего начального момента ($t=0$), о выборе которого в каждом случае условливаются. Всякий данный момент времени t определяется числом секунд, прошедших от начального момента до данного; разность между какими-нибудь двумя последовательными моментами времени называется промежутком времени.

Почерпнутые из опыта и подтвержденные практикой основы, на которых строится кинематика, дают аксиомы геометрии. Никаких дополнительных законов или аксиом для кинематического изучения движения не требуется.

Для решения задач кинематики надо, чтобы изучаемое движение было как-то задано (описано).

Кинематически задать движение или закон движения тела (точки) — значит задать положение этого тела (точки) относительно данной системы отсчета в любой момент времени. Установление математических способов задания движения точек или тел является одной из важных задач кинематики. Поэтому изучение движения любого объекта будем начинать с установления способов задания этого движения.

Основная задача кинематики точки и твердого тела состоит в том, чтобы, зная закон движения точки (тела), установить методы определения всех кинематических величин, характеризующих данное движение.

Изучение кинематики начнем с изучения движения простейшего объекта — точки (кинематика точки), а затем перейдем к изучению кинематики твердого тела.

Непрерывная линия, которую описывает движущаяся точка относительно данной системы отсчета, называется траекторией точки. Если траекторией является прямая линия, движение точки называется прямолинейным, а если кривая — криволинейным.

§ 37. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

Для задания движения точки можно применять один из следующих трех способов: 1) векторный, 2) координатный, 3) естественный.

1. Векторный способ задания движения точки. Пусть точка M движется по отношению к некоторой системе отсчета $Oxyz$. Положение этой точки в любой момент времени

можно определить, задав ее радиус-вектор $\vec{r}$, проведенный из начала координат O в точку M (рис. 114).

При движении точки M вектор $\vec{r}$ будет с течением времени изменяться и по модулю, и по направлению. Следовательно, $\vec{r}$ является переменным вектором (вектором-функцией), зависящим от аргумента t :

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (1)$$

Равенство (1) и определяет закон движения точки в векторной форме, так как оно позволяет в любой момент времени построить соответствующий вектор $\vec{r}$ и найти положение движущейся точки.

Геометрическое место концов вектора $\vec{r}$, т. е. дограф этого вектора, определяет траекторию движущейся точки.

Аналитически, как известно, вектор задается его проекциями на координатные оси. В прямоугольных декартовых координатах для вектора $\vec{r}$ будет: $r_x = x$, $r_y = y$, $r_z = z$ (см. рис. 114), где x , y , z — декартовы координаты точки. Тогда, если ввести единичные векторы (орты) $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ координатных осей, получим для $\vec{r}$ выражение

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \quad (2)$$

Следовательно, зависимость (1) $\vec{r}$ от t будет известна, если будут заданы координаты x , y , z точки как функции времени. Такой способ задания движения точки (координатный) рассмотрим ниже. Вектор $\vec{r}$ может быть задан, как известно, и иными способами, например его модулем и углами с осями или проекциями на оси других систем координат. Для получения общих формул, не зависящих от того, как конкретно задан вектор $\vec{r}$, будем исходить из векторного закона движения, представленного равенством (1).

2. Координатный способ задания движения точки. Положение точки можно непосредственно определять ее декартовыми координатами x , y , z , которые при движении точки будут с течением времени изменяться. Чтобы знать закон движения точки, т. е. ее положение в пространстве в любой момент времени, надо знать значения координат точки для каждого момента времени, т. е. знать зависимости

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t). \quad (3)$$

Уравнения (3) представляют собой уравнения движения точки в прямоугольных декартовых координатах. Они определяют закон движения точки при координатном способе задания движения*.

* Задать движение точки можно, пользуясь и другими системами координат, например полярными (см. § 47), сферическими и т. д.

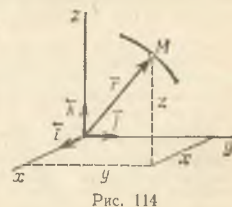


Рис. 114

Если движение точки происходит все время в одной и той же плоскости, то, приняв эту плоскость за плоскость Oxy , получим в этом случае два уравнения движения:

$$x=f_1(t), \quad y=f_2(t). \quad (4)$$

Наконец, при прямолинейном движении точки, если вдоль ее траектории направить координатную ось Ox , движение будет определяться одним уравнением (законом прямолинейного движения точки)

$$x=f(t). \quad (5)$$

Уравнения (3) и (4) представляют собой одновременно уравнения траектории точки в параметрической форме, где роль параметра играет время t . Исключив из уравнений движения время t , можно найти уравнение траектории в обычной форме, т. е. в виде, дающем зависимость между координатами точки.

Пример. Пусть движение точки в плоскости Oxy дано уравнениями:

$$x=2t, \quad y=12t^2, \quad (a)$$

где x, y выражены в сантиметрах; t — в секундах.

По этим уравнениям можно найти, что в момент времени $t=0$ точка находится в положении $M_0(0, 0)$, т. е. в начале координат, в момент $t_1=1$ с — в положении $M_1(2, 12)$ и т. д. Таким образом, уравнения (a) действительно определяют положение точки в любой момент времени. Давая t разные значения и изображая соответствующие положения точки на рисунке, можем построить ее траекторию.

Другим путем траекторию можно найти, исключив t из уравнений (a). Из первого уравнения находим $t=x/2$ и, подставляя это значение t во второе уравнение, получаем $y=3x^2$. Следовательно, траекторией точки является парабола с вершиной в начале координат и осью, параллельной оси Oy . Другие примеры определения траектории точки см. в § 41.

3. Естественный способ задания движения точки. Естественным (или траекторным) способом задания движения удобно пользоваться в тех случаях, когда траектория движущейся точки известна заранее. Пусть кривая AB является траекторией точки M при ее движении относительно системы отсчета $Oxyz$ (рис. 115). Выберем на этой траектории какую-нибудь неподвижную точку O' , которую примем за начало отсчета, и установим на траектории положительное и отрицательное направления отсчета (как на координатной оси). Тогда положение точки M на траектории будет однозначно определяться криволинейной координатой s , которая равна расстоянию от точки O' до точки M , измеренному вдоль дуги траектории и взятому с соответствующим знаком. При движении точка M перемещается в положения $M_1, M_2, \dots$ следовательно, расстояние s будет с течением времени изменяться. Чтобы знать положение точки M на траектории в любой момент времени, надо знать зависимость

$$s=f(t). \quad (6)$$

Уравнение (6) и выражает закон движения точки M вдоль траектории.

Таким образом, чтобы задать движение точки естественным способом, надо задать: 1) траекторию точки; 2) начало отсчета на траектории с указанием положительного и отрицательного направлений отсчета; 3) закон движения точки вдоль траектории в виде $s=f(t)$.

Заметим, что величина s в уравнении (6) определяет положение движущейся точки, а не пройденный ею путь. Например, если точка, двигаясь из начала O' , доходит до положения M_1 (рис. 115), а затем, перемещаясь в обратном направлении, приходит в положение M , то в этот момент ее координата $s=O'M$, а пройденный за время движения путь будет равен $O'M_1+M_1M$, т. е. не равен s .

§ 38. ВЕКТОР СКОРОСТИ ТОЧКИ

Одной из основных кинематических характеристик движения точки является векторная величина, называемая *скоростью точки*. Введем сначала понятие о средней скорости точки за какой-нибудь промежуток времени. Пусть движущаяся точка находится

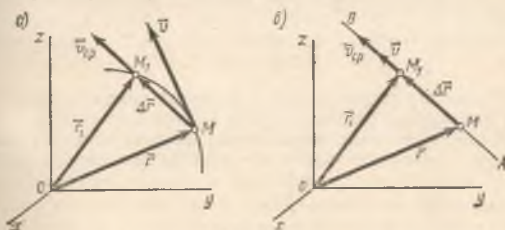


Рис. 116

в момент времени t в положении M , определяемом радиусом-вектором $\vec{r}$, а в момент t_1 приходит в положение M_1 , определяемое вектором $\vec{r}_1$ (рис. 116). Тогда перемещение точки за промежуток времени $\Delta t=t_1-t$ определяется вектором $\vec{MM}_1$, который будем называть *вектором перемещения точки*. Этот вектор направлен по хорде, если точка движется криволинейно (рис. 116, a), и вдоль самой траектории AB , когда движение является прямолинейным (рис. 116, б).

Из треугольника OMM_1 видно, что $\vec{r}+\vec{MM}_1=\vec{r}_1$; следовательно,

$$\vec{MM}_1=\vec{r}_1-\vec{r}=\Delta\vec{r}.$$

Отношение вектора перемещения точки к соответствующему промежутку времени даст векторную величину, называемую *средней по модулю и направлению скоростью точки* за промежуток времени Δt :

$$\vec{v}_{cp}=\vec{MM}_1/\Delta t=\Delta\vec{r}/\Delta t \quad (7)$$

Направлен вектор $\bar{v}_{cp}$ так же, как и вектор $\overline{MM}_1$, т. е. при криволинейном движении вдоль хорды MM_1 , в сторону движения точки, а при прямолинейном движении — вдоль самой траектории (от деления на Δt направление вектора не изменяется).

Очевидно, что чем меньше будет промежуток времени Δt , для которого вычислена средняя скорость, тем величина $\bar{v}_{cp}$ будет точнее характеризовать движение точки. Чтобы получить точную характеристику движения, вводят понятие о скорости точки в данный момент времени.

Скоростью точки в данный момент времени t называется векторная величина $\bar{v}$, к которой стремится средняя скорость $\bar{v}_{cp}$ при стремлении промежутка времени Δt к нулю:

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\bar{v}_{cp}) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t}.$$

Предел отношения $\Delta \bar{r}/\Delta t$ при $\Delta t \rightarrow 0$ представляет собой первую производную от вектора $\bar{r}$ по аргументу t и обозначается, как и производная от скалярной функции, символом $d\bar{r}/dt$. Окончательно получаем

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}. \quad (8)$$

Итак, вектор скорости точки в данный момент времени равен первой производной от радиуса-вектора точки по времени.

Так как предельным направлением секущей MM_1 является касательная, то вектор скорости точки в данный момент времени направлен по касательной к траектории точки в сторону движения.

Формула (8) показывает также, что вектор скорости $\bar{v}$ равен отношению элементарного перемещения точки $d\bar{r}$, направленного по касательной к траектории, к соответствующему промежутку времени dt .

При прямолинейном движении вектор скорости $\bar{v}$ все время направлен вдоль прямой, по которой движется точка, и может изменяться лишь численно; при криволинейном движении кроме числового значения все время изменяется и направление вектора скорости точки. Размерность скорости L/T , т. е. длина/время; в качестве единиц измерения применяют обычно м/с или км/ч. Вопрос об определении модуля скорости будет рассмотрен в § 40 и 42.

§ 39. ВЕКТОР УСКОРЕНИЯ ТОЧКИ

Ускорением точки называется векторная величина, характеризующая изменение с течением времени модуля и направления скорости точки.

Пусть в некоторый момент времени t движущаяся точка находится в положении M и имеет скорость $\bar{v}$, а в момент t_1 приходит в

положение M_1 и имеет скорость $\bar{v}_1$ (рис. 117). Тогда за промежуток времени $\Delta t = t_1 - t$ скорость точки получает приращение $\Delta \bar{v} = \bar{v}_1 - \bar{v}$. Для построения вектора $\Delta \bar{v}$ отложим от точки M вектор, равный $\bar{v}_1$, и построим параллелограмм, в котором диагональю будет $\bar{v}_1$, а одной из сторон $\bar{v}$. Тогда, очевидно, вторая сторона и будет изображать вектор $\Delta \bar{v}$. Заметим, что вектор $\Delta \bar{v}$ всегда направлен в сторону вогнутости траектории.

Отношение приращения вектора скорости $\Delta \bar{v}$ к соответствующему промежутку времени Δt определяет вектор среднего ускорения точки за этот промежуток времени:

$$\bar{a}_{cp} = \Delta \bar{v} / \Delta t. \quad (9)$$

Вектор среднего ускорения имеет то же направление, что и вектор $\Delta \bar{v}$, т. е. направлен в сторону вогнутости траектории.

Ускорением точки в данный момент времени t называется векторная величина $\bar{a}$, к которой стремится среднее ускорение $\bar{a}_{cp}$ при стремлении промежутка времени Δt к нулю:

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \frac{d\bar{v}}{dt}$$

или, с учетом равенства (8),

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2}. \quad (10)$$

Следовательно, вектор ускорения точки в данный момент времени равен первой производной от вектора скорости или второй производной от радиуса-вектора точки по времени.

Размерность ускорения L/T^2 , т. е. длина/(время)²; в качестве единицы измерения применяется обычно м/с².

Из формулы (10) следует также, что вектор ускорения точки $\bar{a}$ равен отношению элементарного приращения вектора скорости $d\bar{v}$ к соответствующему промежутку времени dt .

Найдем, как располагается вектор $\bar{a}$ по отношению к траектории точки. При прямолинейном движении вектор $\bar{a}$ направлен вдоль прямой, по которой движется точка. Если траекторией точки является плоская кривая, то вектор ускорения $\bar{a}$, так же как и вектор $\bar{a}_{cp}$, лежит в плоскости этой кривой и направлен в сторону ее вогнутости. Если траектория не является плоской кривой, то вектор $\bar{a}_{cp}$ направлен в сторону вогнутости траектории и лежит в плоскости, проходящей через касательную к траектории в точке M и прямую, параллельную касательной в соседней точке M_1 (рис. 117). В пределе,

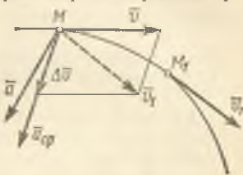


Рис. 117

когда точка M_1 стремится к M , эта плоскость занимает положение так называемой *соприкасающейся плоскости*, т. е. плоскости, в которой происходит бесконечно малый поворот касательной к траектории при элементарном перемещении движущейся точки *. Следовательно, в общем случае вектор ускорения $\vec{a}$ лежит в соприкасающейся плоскости и направлен в сторону вогнутости кривой. Вопрос об определении модуля ускорения будет рассмотрен в § 40 и 43.

§ 40. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ И УСКОРЕНИЯ ТОЧКИ ПРИ КООРДИНАТНОМ СПОСОБЕ ЗАДАНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Найдем, как вычисляются скорость и ускорение точки, если ее движение задано уравнениями (3) или (4). Вопрос об определении траектории в этом случае был уже рассмотрен в § 37.

Формулы (8) и (10), определяющие значения $\vec{v}$ и $\vec{a}$, содержат производные по времени от векторов $\vec{r}$ и $\vec{v}$. В равенствах, содержащих производные от векторов, переход к зависимостям между их проекциями осуществляется с помощью следующей теоремы: *проекция производной от вектора на ось, неподвижную в данной системе отсчета, равна производной от проекции дифференцируемого вектора на ту же ось*, т. е.

$$\text{если } \vec{q} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \text{ то } q_x = \frac{dp_x}{dt}, q_y = \frac{dp_y}{dt}, q_z = \frac{dp_z}{dt}. \quad (11)$$

1. Определение скорости точки. Вектор скорости точки $\vec{v} = d\vec{r}/dt$. Отсюда на основании формул (11), учитывая, что $r_x = x$, $r_y = y$, $r_z = z$, найдем:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, v_y = \frac{dy}{dt}, v_z = \frac{dz}{dt} \quad (12)$$

или

$$v_x = \dot{x}, v_y = \dot{y}, v_z = \dot{z}, \quad (12')$$

где точка над буквой есть символ дифференцирования по времени. Таким образом, *проекция скорости точки на координатные оси равны первым производным от соответствующих координат точки по времени*.

Зная проекции скорости, найдем ее модуль и направление (т. е. углы α , β , γ , которые вектор $\vec{v}$ образует с координатными осями) по формулам

$$\left. \begin{aligned} v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}, \\ \cos \alpha &= v_x/v, \cos \beta = v_y/v, \cos \gamma = v_z/v. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

* Для пространственной кривой (например, для винтовой линии) в каждой точке кривой будет своя соприкасающаяся плоскость. Для плоской кривой соприкасающаяся плоскость совпадает с плоскостью этой кривой и является общей для всех ее точек.

2. Определение ускорения точки. Вектор ускорения точки $\vec{a} = d\vec{v}/dt$. Отсюда на основании формул (11) получаем:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} \quad (14)$$

или

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}, a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}, a_z = \dot{v}_z = \ddot{z}, \quad (14')$$

т. е. *проекции ускорения точки на координатные оси равны первым производным от проекций скорости или вторым производным от соответствующих координат точки по времени*. Модуль и направление ускорения найдутся из формул

$$\left. \begin{aligned} a &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \\ \cos \alpha &= a_x/a, \cos \beta = a_y/a, \cos \gamma = a_z/a, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

где α , β , γ — углы, образуемые вектором ускорения с координатными осями.

Итак, если движение точки задано в декартовых прямоугольных координатах уравнениями (3) или (4), то скорость точки определяется по формулам (12) и (13), а ускорение — по формулам (14) и (15). При этом в случае движения, происходящего в одной плоскости, во всех формулах должна быть отброшена проекция на ось z .

В случае же прямолинейного движения, которое задается одним уравнением $x=f(t)$, будет

$$v_x = \frac{dx}{dt}, a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}. \quad (16)$$

Равенства (16) и определяют значения скорости и ускорения точки в этом случае.

§ 41. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ КИНЕМАТИКИ ТОЧКИ

Задачи, решаемые методами кинематики точки, могут состоять в определении траектории, скорости или ускорения точки, в отыскании времени, в течение которого точка проходит тот или иной путь, или пути, проходимого за тот или иной промежуток времени, и т. п.

Прежде чем решать любую из такого рода задач, надо установить, по какому закону движется точка. Этот закон может быть непосредственно задан в условиях задачи (задачи 47, 48) или же из условий задачи определен (задачи 49, 50).

Задача 47. Движение точки задано уравнениями (x , y — в метрах, t — в секундах):

$$x = 8t - 4t^2, y = 6t - 3t^2.$$

Определить траекторию, скорость и ускорение точки.

Решение. Для определения траектории исключаем из уравнений движения время t . Умножив обе части первого уравнения на 3, а обе части второго — на 4 и почленно вычитая из первого равенства второе, получим: $3x - 4y = 0$ или $y = 3x/4$.

Следовательно, траектория — прямая линия, наклоненная к оси Ox под углом α , где $\operatorname{tg} \alpha = 3/4$ (рис. 118).

Определяем скорость точки. По формулам (12) и (13) получаем:

$$v_x = \dot{x} = 8(1-t), \quad v_y = \dot{y} = 6(1-t);$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 10(1-t).$$

Теперь находим ускорение точки. Формулы (14) и (15) дают:

$$a_x = \dot{v}_x = -8, \quad a_y = \dot{v}_y = -6, \quad a = 10 \text{ м/с}^2.$$

Направлены векторы $\vec{v}$ и $\vec{a}$ вдоль траектории, т. е. вдоль прямой AB . Проекции ускорения на координатные оси все время отрицательны, следовательно, ускорение имеет постоянное направление от B к A . Проекции скорости при $0 < t < 1$ положительны, следовательно, в течение этого промежутка времени скорость точки направлена от O к B . При этом в момент времени $t=0$ $v=10$ м/с; в момент $t=1$ с $v=0$. В последующие моменты времени ($t > 1$ с) обе проекции скорости отрицательны и, следовательно, скорость направлена от B к A , т. е. так же, как и ускорение.

Заметим, наконец, что при $t=0$ $x=0$ и $y=0$; при $t=1$ с $x=4$, $y=3$ (точка B); при $t=2$ с $x=0$, $y=0$; при $t > 2$ с значения x и y растут по модулю, оставаясь отрицательными.

Итак, заданные в условиях задачи уравнения движения рассказывают нам всю историю движения точки. Движение начинается из точки O с начальной скоростью $v_0=10$ м/с и происходит вдоль прямой AB , наклоненной к оси Ox под углом α , для которого $\operatorname{tg} \alpha = 3/4$. На участке OB точка движется замедленно (модуль ее скорости убывает) и через одну секунду приходит в положение $B(4, 3)$, где скорость ее обращается в нуль. Отсюда начинается ускоренное движение в обратную сторону. В момент $t=2$ с точка вновь оказывается в начале координат и дальше продолжает свое движение вдоль OA . Ускорение точки все время равно 10 м/с^2 .

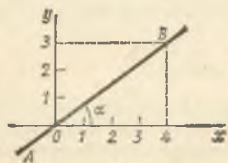


Рис. 118

Задача 48. Движение точки задано уравнениями:

$$x = R \sin \omega t, \quad y = R \cos \omega t, \quad z = ut,$$

где R , ω и u — постоянные величины. Определить траекторию, скорость и ускорение точки.

Решение. Возводя первые два уравнения почленно в квадрат и складывая, получаем

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Следовательно, траектория лежит на круглом цилиндре радиуса R , ось которого направлена вдоль оси Oz (рис. 119). Определяя из последнего уравнения t и подставляя в первое, находим

$$x = R \sin(\omega z/u).$$

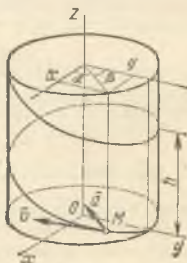


Рис. 119

Таким образом, траекторией точки будет линия пересечения синусоидальной поверхности, образующие которой параллельны оси Oy (синусоидальный гофр) с цилиндрической поверхностью радиуса R . Эта кривая называется *винтовой линией*. Из уравнений движения видно, что один виток винтовой линии точка проходит за время t_1 , определяемое из равенства $\omega t_1 = 2\pi$. При этом вдоль оси z точка за это время перемещается на величину $h = ut_1 = 2\pi u/\omega$, называемую *шагом* винтовой линии.

Найдем скорость и ускорение точки. Дифференцируя уравнения движения по времени, получаем:

$$v_x = \dot{x} = R\omega \cos \omega t, \quad v_y = \dot{y} = -R\omega \sin \omega t,$$

$$v_z = \dot{z} = u,$$

откуда

$$v = \sqrt{R^2\omega^2(\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t) + u^2} = \sqrt{R^2\omega^2 + u^2}.$$

Стоящие под знаком радикала величины постоянны. Следовательно, движение происходит с постоянной по модулю скоростью, направленной по касательной к траектории. Теперь по формулам (14) вычисляем проекции ускорения:

$$a_x = \dot{v}_x = -R\omega^2 \sin \omega t,$$

$$a_y = \dot{v}_y = -R\omega^2 \cos \omega t,$$

$$a_z = \dot{v}_z = 0,$$

откуда

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = R\omega^2.$$

Итак, движение происходит с постоянным по модулю ускорением. Для определения направления ускорения имеем формулы:

$$\cos \alpha_1 = a_x/a = -\sin \omega t = -x/R,$$

$$\cos \beta_1 = a_y/a = -\cos \omega t = -y/R, \quad \cos \gamma_1 = a_z/a = 0.$$

Но, очевидно,

$$x/R = \cos \alpha, \quad y/R = \cos \beta,$$

где α и β — углы, образуемые с осями Ox и Oy радиусом R , проведенным от оси цилиндра к движущейся точке. Так как косинусы углов α_1 и β_1 отличаются от косинусов α и β только знаками, то отсюда заключаем, что ускорение точки все время направлено по радиусу цилиндра к его оси.

Заметим, что хотя в данном случае движение и происходит со скоростью, постоянной по модулю, ускорение точки не равно нулю, так как направление скорости изменяется.

Задача 49. Человек ростом h удаляется от фонаря, висящего на высоте H , двигаясь прямолинейно со скоростью u . С какой скоростью движется конец тени человека?

Решение. Для решения задачи найдем сначала закон, по которому движется конец тени. Выбираем начало отсчета в точке O , находящейся на одной вертикали с фонарем, и направляем вдоль прямой, по которой движется конец тени, координатную ось Ox (рис. 120). Изображаем человека в произвольном положении на расстоянии x_1 от точки O . Тогда конец его тени будет находиться от начала O на расстоянии x_2 .

Из подобия треугольников OAM и DAB находим:

$$x_2 = \frac{H}{H-h} x_1.$$

Это уравнение выражает закон движения конца тени M , если закон движения человека, т. е. $x_1 = f(t)$, известен.

Взяв производную по времени от обеих частей равенства и замечая, что по формуле (16) $\dot{x}_1 = u_x = u$, $\dot{x}_2 = v_x = v$, где v — искомая скорость, получим

$$v = \frac{H}{H-h} u.$$

Если человек движется с постоянной скоростью ($u = \text{const}$), то скорость конца тента M будет тоже постоянной, но в $H/(H-h)$ раз больше, чем скорость человека. Обращаем внимание на то, что при составлении уравнений движения надо изображать движущееся тело или механизм (см. задачу 50) в произвольном положении. Только тогда мы получим уравнения, определяющие положение движущейся точки (или тела) в любой момент времени.

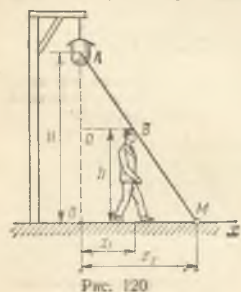


Рис. 120

Задача 50. Определить траекторию, скорость и ускорение середины M шатуна кривошипно-ползунного механизма (рис. 121), если $OA = AB = 2b$, а угол φ при вращении кривошипа растет пропорционально времени: $\varphi = \omega t$.

Решение. Начнем с определения уравнений движения точки M . Проводя оси x и y обозначая координаты точки M в произвольном положении через x и y найдем

$$x = 2b \cos \varphi + b \cos \varphi, \quad y = b \sin \varphi.$$

Заменяя φ его значением, получаем уравнения движения точки M :

$$x = 3b \cos \omega t, \quad y = b \sin \omega t.$$

Для определения траектории точки M представим уравнения движения в виде

$$\frac{x}{3b} = \cos \omega t, \quad \frac{y}{b} = \sin \omega t.$$

Возводя эти равенства почленно в квадрат и складывая, получим

$$\frac{x^2}{9b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Итак, траектория точки M — эллипс с полуосями $3b$ и b .

Теперь по формулам (12) и (13) находим скорость точки M :

$$v_x = \dot{x} = -3b\omega \sin \omega t, \quad v_y = \dot{y} = b\omega \cos \omega t;$$

$$v = b\omega \sqrt{9 \sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t}.$$

Скорость оказывается величиной переменной, меняющейся с течением времени в пределах от $v_{\min} = b\omega$ до $v_{\max} = 3b\omega$.

Далее по формулам (14) определяем проекции ускорения точки M :

$$a_x = -3b\omega^2 \cos \omega t = -\omega^2 x, \quad a_y = -b\omega^2 \sin \omega t = -\omega^2 y;$$

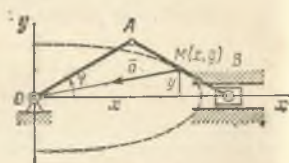


Рис. 121

отсюда

$$a = \sqrt{\omega^4 (x^2 + y^2)} = \omega^2 r,$$

где r — длина радиуса-вектора, проведенного из центра O до точки M . Следовательно, модуль ускорения точки меняется пропорционально ее расстоянию от центра эллипса.

Для определения направления $\vec{a}$ имеем по формулам (15):

$$\cos \alpha_1 = a_x/a = -x/r, \quad \cos \beta_1 = a_y/a = -y/r.$$

Отсюда, так же как и в задаче 48, находим, что ускорение точки M все время направлено вдоль MO к центру эллипса.

§ 42. ОСИ ЕСТЕСТВЕННОГО ТРЕХГРАННИКА. ЧИСЛОВОЕ ЗНАЧЕНИЕ СКОРОСТИ

Рассмотрим, как вычисляются скорость и ускорение точки при естественном способе задания движения (см. § 37), т. е. когда заданы траектория точки и закон движения точки вдоль этой траектории в виде $s = f(t)$.

В этом случае значения векторов $\vec{v}$ и $\vec{a}$ определяют по их проекциям не на оси системы отсчета $Oxyz$ (как в § 40), а на подвижные оси $M\tau lb$, имеющие начало в точке M и движущиеся вместе с нею (рис. 122). Эти оси, называемые осями естественного трехгранника (или скоростными осями), направлены следующим образом: ось $M\tau$ — по касательной к траектории в сторону положительного отсчета расстояния s ; ось Mn — по нормали к траектории, лежащей в соприкасающейся плоскости и направленной в сторону вогнутости траектории; ось Mb — перпендикулярно к первым двум так, чтобы она образовала с ними правую систему осей. Нормаль Mn , лежащая в соприкасающейся плоскости (в плоскости самой кривой, если кривая плоская), называется *главной нормалью*, а перпендикулярная ей нормаль Mb — *би-нормалью*.

Скорость точки, направленная по касательной к траектории (рис. 122), определяется в осях $M\tau lb$ только одной проекцией v_τ на ось $M\tau$. При этом $v_\tau = v$ или $v_\tau = -v$. Следовательно, v_τ или совпадает с модулем скорости v , или отличается от v только знаком. Условимся поэтому в дальнейшем обозначать v_τ тоже символом v , опуская индекс τ , и называть v *числовым* (или *алгебраическим*) *значением скорости*. Модуль скорости во всех случаях, когда это не может вызвать недоразумений, будем тоже обозначать символом v , а когда надо подчеркнуть, что речь идет о модуле скорости, — применять символ $|v|$.

Найдем значение v . Если за промежуток времени Δt точка совершит вдоль дуги траектории перемещение $MM_1 = \Delta s$ (см. рис. 115), где одновременно Δs — приращение координаты s , то численно средней скоростью точки за этот промежуток времени

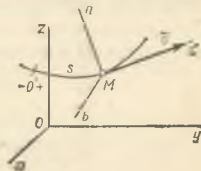


Рис. 122

будет $v_{cp} = \Delta s / \Delta t$ и в пределе найдем, что

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \text{ или } v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}. \quad (17)$$

Таким образом, числовое значение скорости точки в данный момент времени равно первой производной от расстояния (криволинейной координаты) s этой точки по времени.

Значение v можно также находить как отношение элементарного перемещения ds точки к соответствующему промежутку времени dt . Так как всегда $dt > 0$, то знак v совпадает со знаком ds . Следовательно, когда $v > 0$, скорость направлена в сторону положительного отсчета расстояния s , а когда $v < 0$, — в противоположную сторону. Таким образом, величина v одновременно определяет и модуль скорости, и сторону, куда она направлена.

§ 43. КАСАТЕЛЬНОЕ И НОРМАЛЬНОЕ УСКОРЕНИЯ ТОЧКИ

В § 39 было установлено, что ускорение $\vec{a}$ точки лежит в соприкасающейся плоскости, т. е. в плоскости $M\tau l$. Следовательно, проекция вектора $\vec{a}$ на бинормаль Mb равна нулю ($a_b = 0$). Найдем проекции $\vec{a}$ на две другие оси. Проектируя обе части равенства (10) на оси $M\tau$ и Ml и обозначая символами $(d\vec{v})_\tau$ и $(d\vec{v})_n$ проекции вектора $d\vec{v}$ на эти оси, получим:

$$a_\tau = (d\vec{v})_\tau / dt, \quad a_n = (d\vec{v})_n / dt. \quad (18)$$

Вектор $d\vec{v}$ представляет собой разность между скоростями в двух соседних точках M и M' (рис. 123, а), т. е. $d\vec{v} = \vec{v}' - \vec{v}$. Отложим векторы $\vec{v} = \vec{MA}$ и $\vec{v}' = \vec{MB}$ от общего начала (рис. 123, б); тогда $d\vec{v} =$

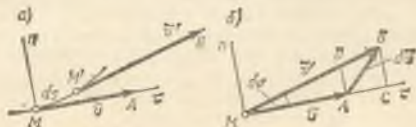


Рис. 123

$= \vec{AB}$, а фигуру $ACBD$ при бесконечно малом угле $d\varphi$ можно рассматривать как прямоугольник. Отсюда $(d\vec{v})_\tau = AC = DB = MB - MA = v' - v = dv$, где dv — элементарное приращение числового значения скорости. Далее, поскольку предел отношения дуги к хорде равен единице, можно AD рассматривать как элементарную дугу радиуса MA , размер которой определяется произведением радиуса на центральный угол. Тогда $(d\vec{v})_n = AD = MA \cdot d\varphi = v d\varphi$. Подставляя найденные значения $(d\vec{v})_\tau$ и $(d\vec{v})_n$ в равенства (18), получим:

$$a_\tau = dv/dt, \quad a_n = v d\varphi/dt \quad (19)$$

Угол между касательными к кривой в двух ее точках называется *углом смежности*; тогда $d\varphi$ — элементарный угол смежности. Напомним, что отношение $d\varphi$ к $ds = MM'$, определяет кривизну кривой в точке M , а кривизна k является величиной, обратной радиусу кривизны ρ в этой точке, т. е.

$$d\varphi/ds = k = 1/\rho. \quad (20)$$

Введем эту величину во второе из равенств (19) и преобразуем его, учтя еще равенство (17), к виду

$$a_n = v \frac{d\varphi}{ds} \frac{ds}{dt} = v \cdot \frac{1}{\rho} \cdot v = \frac{v^2}{\rho}.$$

В результате окончательно получим:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}, \quad a_n = \frac{v^2}{\rho}, \quad a_b = 0. \quad (21)$$

Таким образом, мы доказали, что проекция ускорения точки на касательную равна первой производной от числового значения скорости или второй производной от расстояния (криволинейной координаты) s по времени, а проекция ускорения на главную нормаль равна квадрату скорости, деленному на радиус кривизны траектории в данной точке кривой; проекция ускорения на бинормаль равна нулю. Это одна из важных теорем кинематики. Величины a_τ и a_n называют касательным и нормальным ускорениями точки.

При движении точки M в одной плоскости касательная $M\tau$ поворачивается вокруг бинормали Mb с угловой скоростью $\omega = d\varphi/dt$. Тогда второе из равенств (19) дает еще одну, часто используемую в инженерной практике формулу для вычисления a_n :

$$a_n = v\omega. \quad (21')$$

Из нее следует, что нормальное ускорение равно произведению скорости точки на угловую скорость поворота касательной к траектории.

Отложим вдоль касательной $M\tau$ и главной нормали Mn векторы $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}_n$, т. е. касательную и нормальную составляющие ускорения (рис. 124). При этом составляющая a_n будет всегда направлена в сторону вогнутости кривой, так как всегда $a_n > 0$, а составляющая a_τ может быть направлена или в положительном, или в отрицательном направлении оси $M\tau$ в зависимости от знака проекции a_τ (см. рис. 124, а, б).

Вектор ускорения точки $\vec{a}$ изображается диагональю параллелограмма, построенного на составляющих $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}_n$. Так как эти составляющие взаимно перпендикулярны, то модуль вектора $\vec{a}$

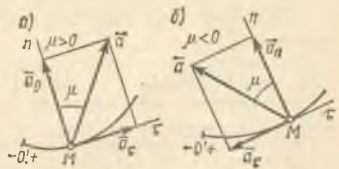


Рис. 124

и угол μ его отклонения от нормали Mn определяются формулами:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2},$$

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{a_t}{a_n}, \quad (22)$$

где $-\pi/2 \leq \mu \leq \pi/2$; при $\mu > 0$ вектор $\vec{a}$ отклонен от нормали Mn в сторону оси $M\tau$ (рис. 124, а), а при $\mu < 0$ — в противоположную сторону (рис. 124, б).

Таким образом, если движение точки задано естественным способом, то, зная траекторию (а следовательно, и ее радиус кривизны ρ в любой точке) и закон движения, т. е. зависимость $s=f(t)$, можно по формулам (17) и (21), (22) определить модуль и направление векторов скорости и ускорения точки в любой момент времени.

§ 44. НЕКОТОРЫЕ ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

Пользуясь полученными результатами, рассмотрим некоторые частные случаи движения точки.

1. **Прямолинейное движение.** Если траекторией точки является прямая линия, то $\rho = \infty$. Тогда $a_n = v^2/\rho = 0$ и все ускорение точки равно одному только касательному ускорению:

$$a = a_t = dv/dt. \quad (23)$$

Так как в данном случае скорость изменяется только численно, то отсюда заключаем, что *касательное ускорение характеризует изменение числового значения скорости.*

2. **Равномерное криволинейное движение.** Равномерным называется такое криволинейное движение точки, в котором числовое значение скорости все время остается постоянным: $v = \text{const}$. Тогда $a_t = dv/dt = 0$ и все ускорение точки равно одному только нормальному ускорению:

$$a = a_n = v^2/\rho. \quad (24)$$

Вектор ускорения $\vec{a}$ направлен при этом все время по нормали к траектории точки.

Так как в данном случае ускорение появляется только за счет изменения направления скорости, то отсюда заключаем, что *нормальное ускорение характеризует изменение скорости по направлению.*

Найдем закон равномерного криволинейного движения. Из формулы (17) имеем $ds = v dt$. Пусть в начальный момент времени ($t=0$) точка находится от начала отсчета на расстоянии s_0 . Тогда, беря от левой и правой частей равенства определенные интегралы в соответствующих пределах, получим

$$\int_{s_0}^s ds = \int_0^t v dt \quad \text{или} \quad s - s_0 = vt,$$

так как $v = \text{const}$. Окончательно находим закон равномерного криволинейного движения точки в виде

$$s = s_0 + vt. \quad (25)$$

Если в равенстве (25) положить $s_0 = 0$, то s даст путь, пройденный точкой за время t . Следовательно, при равномерном движении путь, пройденный точкой, растет пропорционально времени, а скорость точки равна отношению пути ко времени:

$$s = vt, \quad v = s/t. \quad (25')$$

3. **Равномерное прямолинейное движение.** В этом случае $a_n = a_t = 0$, а значит, и $a = 0$. Заметим, что *единственным движением, в котором ускорение точки все время равно нулю, является равномерное прямолинейное движение.*

4. **Равнопеременное криволинейное движение.** Равнопеременным называется такое криволинейное движение точки, при котором касательное ускорение остается все время постоянным: $a_t = \text{const}$. Найдем закон этого движения, считая, что при $t=0$ $s=s_0$, а $v=v_0$, где v_0 — начальная скорость точки. Согласно первой из формул (21) $dv = a_t dt$. Так как $a_t = \text{const}$, то, беря от обеих частей последнего равенства интегралы в соответствующих пределах, получим

$$v = v_0 + a_t t. \quad (26)$$

Формулу (26) представим в виде

$$ds/dt = v_0 + a_t t \quad \text{или} \quad ds = v_0 dt + a_t t dt.$$

Вторично интегрируя, найдем закон равнопеременного криволинейного движения точки

$$s = s_0 + v_0 t + a_t t^2/2. \quad (27)$$

При этом скорость точки определяется формулой (26).

Если при криволинейном движении точки модуль скорости возрастает, то движение называется *ускоренным*, а если убывает, — *замедленным*. Так как изменение модуля скорости характеризуется

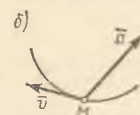
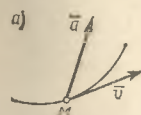


Рис. 125

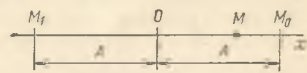


Рис. 126

касательным ускорением, то движение будет ускоренным, если величины v и a_t имеют одинаковые знаки (угол между векторами v и $\vec{a}$ острый, рис. 125, а), и замедленным, если разные (угол между v и $\vec{a}$ тупой, рис. 125, б).

В частности, при равнопеременном движении, если в равенстве

(26) v и a_t имеют одинаковые знаки, движение будет *равноускоренным*, а если разные знаки, — *равнозамедленным*.

Формулы (25) — (27) определяют также законы равномерного или равнопеременного прямолинейного движения точки, если считать $s=x$. При этом в равенствах (26) и (27) $a_t=a$, где a — числовое значение ускорения данной точки [см. формулу (23)].

5. Гармонические колебания. Рассмотрим прямолинейное движение точки, при котором ее расстояние x от начала координат O изменяется со временем по закону

$$x=A \cos kt, \quad (28)$$

где A и k — постоянные величины.

Точка M (рис. 126) совершает при этом движении колебания между положениями $M_0(+A)$ и $M_1(-A)$. Колебания, происходящие по закону (28), играют большую роль в технике. Они называются простыми *гармоническими колебаниями*. Величина A , равная наибольшему отклонению точки от центра колебаний O , называется *амплитудой* колебаний.

Легко видеть, что, начиная движение в момент $t=0$ из положения M_0 , точка вновь придет в это положение в момент времени t_1 , для которого $\cos kt_1=1$, т. е. $kt_1=2\pi$.

Промежуток времени $T=t_1=2\pi/k$, в течение которого точка совершает одно полное колебание, называется *периодом* колебаний.

Беря производные от x по t , найдем значения скорости и ускорения точки:

$$v=v_x=-Aks \sin kt, \quad a=a_x=-Ak^2 \cos kt. \quad (29)$$

Следовательно, в этом движении и скорость, и ускорение точки изменяются с течением времени по гармоническому закону. По знакам v и a легко проверить, что когда точка движется к центру колебаний, ее движение является ускоренным, а когда от центра колебаний, — замедленным.

Аналогичные колебания происходят и при законе $x=As \sin kt$, только движение в этом случае начинается из центра O .

Гармонические колебания по закону $s=A \cos kt$ (или $s=A \sin kt$) точка может совершать, двигаясь вдоль любой кривой (см., например, в § 46 задачу 51). Все сказанное о характере движения при этом сохранится с той лишь разницей, что последняя из формул (29) будет определять касательное ускорение точки; кроме него точка будет еще иметь нормальное ускорение $a_n=v^2/\rho$.

§ 45. ГРАФИКИ ДВИЖЕНИЯ, СКОРОСТИ И УСКОРЕНИЯ ТОЧКИ

Если в соответствующих масштабах откладывать вдоль оси абсцисс время t , а вдоль оси ординат — расстояние s , то построенная в этих осях кривая $s=f(t)$ будет изображать *график расстояний*, или *график движения* точки. По этому графику наглядно видно, как изменяется положение точки (ее координата s) с течением времени.

Аналогично, в соответствующих масштабах могут быть построены кривые, дающие зависимость $v(t)$ — *график скорости* и $a_t(t)$, $a_n(t)$, $a(t)$ — *графики касательного, нормального и полного ускорений*.

На рис. 127, а, б, в сверху показаны графики движений, определяемых соответственно уравнениями (25), (27) и (28). Ниже на тех же рисунках изображены для этих движений графики скоростей и графики касательных ускорений.

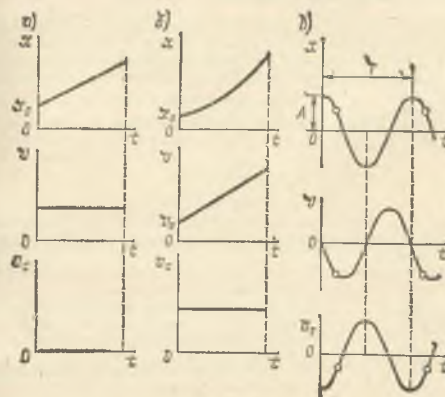


Рис. 127

График равномерного движения изображается, как мы видим, прямой линией, направленной под углом к оси абсцисс, график скорости в этом случае — прямой, параллельной оси абсцисс ($v=\text{const}$), а график касательного ускорения — прямой, совпадающей с осью абсцисс ($a_t=0$). Для равнопеременного движения (в изображенном на рис. 127, б случае — ускоренного) график движения изображается ветвью параболы, график скорости — прямой, направленной под углом к оси абсцисс, а график касательного ускорения — прямой, параллельной оси абсцисс ($a_t=\text{const}$). Наконец, для гармонических колебаний (рис. 127, в) соответствующие графики изображаются косинусоидами или синусоидами.

График движения не следует смешивать с траекторией, которая во всех рассмотренных случаях должна быть задана дополнительно.

Графики нормального и полного ускорений на рис. 127 не показаны, так как a_n и a кроме закона движения зависят еще от ρ , т. е. от вида траектории, и при одном и том же законе $s=f(t)$ будут для разных траекторий разными.

§ 46. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

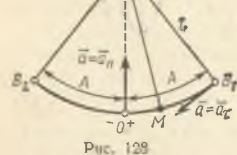
Как уже указывалось, для решения задач кинематики надо знать закон движения точки. Если движение задано естественным способом (дана траектория и закон движения вдоль траектории), то все характеристики движения (скорость, касательное, нормальное и полное ускорение) определяются по формулам, полученным в § 42–44. Этими формулами можно, конечно, пользоваться и когда движение задано другим способом.

Покажем, как можно найти касательное и нормальное ускорения точки, когда движение задано координатным способом, например, уравнениями (4). Для этого по формулам (12) — (15) находим v и a . Беря производную по времени от найденной скорости v , можно определить $a_t = dv/dt$. Но обычно это проще делать иначе. Возьмем равенство $v^2 = v_x^2 + v_y^2$ и продифференцируем обе его части по t ; получим $2v\dot{v} = 2v_x\dot{v}_x + 2v_y\dot{v}_y$. Отсюда, учитывая равенства (14') и то, что $\dot{v} = a_t$, находим окончательно

$$a_t = \frac{(v_x a_x + v_y a_y)}{v} \quad (30)$$

Теперь, зная a и a_t , определяем a_n из равенства $a^2 = a_t^2 + a_n^2$. Одновременно можно найти радиус кривизны траектории ρ из формулы $a_n = v^2/\rho$. Пример таких расчетов дан в задаче 53.

Задача 51. При небольших углах отклонения груз маятника (рис. 128) движется по окружности радиуса l по закону $s = A \sin kt$ (начало отсчета в точке O , A и k — постоянные величины). Найти скорость, касательное и нормальное ускорения груза и те положения, в которых эти величины обращаются в нуль.



Решение. Пользуясь соответствующими формулами, находим:

$$v = \dot{s} = Ak \cos kt; \quad a_t = \dot{v} = -Ak \sin kt; \\ a_n = v^2/l = (A^2 k^2 / l) \cos^2 kt.$$

Из закона движения следует, что груз совершает вдоль траектории гармонические колебания с дуговой амплитудой A . В крайних положениях (в точках B_1 и B_2) $\sin kt = \pm 1$, а следовательно, $\cos kt = 0$. Поэтому в точках B_1 и B_2 скорость и нормальное ускорение обращаются в нуль; касательное же ускорение имеет здесь наибольшее по модулю значение $a_{t \max} = Ak$.

Когда груз приходит в начало отсчета O , то $s = 0$ и, следовательно, $\sin kt = 0$, а $\cos kt = 1$. В этом положении $a_t = 0$, а v и a_n имеют максимальные значения: $v_{\max} = Ak$, $a_{n \max} = A^2 k^2 / l$.

Из данного примера видно, что при криволинейном неравномерном движении в отдельных точках траектории a_t или a_n могут обращаться в нуль. При этом $a_t = 0$ в тех точках, где $dv/dt = 0$, т. е. там, например, где v имеет максимум или минимум, а $a_n = 0$ в тех точках, где $v = 0$ (как в нашем случае) или где $\rho = \infty$ (точка перегиба траектории).

Задача 52. Переход от координатного способа задания движения к естественному. Движение точки M задано в декартовых координатах уравнениями:

$$x = R \cos(e t^2 / 2), \quad y = R \sin(e t^2 / 2), \quad (a)$$

где R и e — постоянные положительные величины, имеющие размерности: R — длины, e — углового ускорения (см. § 49).

Перейти к естественному способу задания движения, т. е. определить траекторию и закон движения точки вдоль траектории в виде $s = f(t)$. Найти также скорость и ускорение точки.

Решение. Возведя каждое из уравнений (a) почленно в квадрат и затем сложив их, получим $x^2 + y^2 = R^2$. Следовательно, траекторией точки является окружность радиуса R с центром в начале координат. Из уравнений (a) видно, что при $t = 0$ $x = R$, $y = 0$, т. е. точка M находится на оси Ox . Примем это положение M_0 за начало отсчета O' расстояния s ; тогда при $t = 0$ $s = 0$. Когда $t > 0$ y начинает возрастать, а x — убывать, т. е. точка начинает двигаться по направлению к оси Oy ; примем это направление за положительное направление отсчета расстояния s .

Для определения зависимости $s = f(t)$ найдем выражение ds . Как известно, $ds^2 = dx^2 + dy^2$, а $dx = x' dt$, $dy = y' dt$. Тогда $ds = \sqrt{x'^2 + y'^2} dt$, и поскольку при $t = 0$ $s = 0$,

$$s = \int_0^t \sqrt{x'^2 + y'^2} dt. \quad (б)$$

Из уравнений (a) находим $x' = -R e t \sin(e t^2 / 2)$, $y' = R e t \cos(e t^2 / 2)$ и $x'^2 + y'^2 = R^2 e^2 t^2$. Подставляя это выражение в равенство (б) и вынося постоянный множитель за знак интеграла, получим

$$s = R e \int_0^t t dt \quad \text{или} \quad s = R e t^2 / 2. \quad (в)$$

Таким образом, точка движется по окружности радиуса R по закону $s = R e t^2 / 2$. Скорость точки

$$v = \dot{s} = R e t \quad (г)$$

и растет пропорционально времени. Далее находим

$$a_t = \dot{v} = R e, \quad a_n = v^2 / R = R e^2 t^2. \quad (д)$$

Так как $a_t = \text{const}$ и знаки v и a_t совпадают ($v > 0$ и $a_t > 0$), то движение точки является равноускоренным (см. § 44, п. 4).

Наконец, по формулам (22) находим

$$a = R e \sqrt{1 + e^2 t^4}, \quad \text{tg } \mu = 1 / e t^2. \quad (е)$$

Как видим, при $t = 0$ $a = a_t = R e$ ($a_n = 0$) и $\mu = \pi/2$. Затем со временем величина a растет, а угол μ между вектором a и радиусом окружности убывает, стремясь к нулю.

Задача 53. Точка, получив направленную горизонтально скорость, движется по закону, определяемому уравнениями:

$$x = v_0 t, \quad y = g t^2 / 2,$$

где v_0 и g — некоторые постоянные.

Найти траекторию, скорость и ускорение точки, а также ее касательное и нормальное ускорения и радиус кривизны траектории в любом положении, выразив их через скорость в этом положении.

Решение. Определяя из первого уравнения t и подставляя во второе, получим

$$y = \frac{g}{2 v_0^2} x^2.$$

Траектория точки — парабола (рис. 129).

Дифференцируя уравнения движения по времени, найдем

$$v_x = \dot{x} = v_0, \quad v_y = \dot{y} = g t, \quad (a)$$

откуда

$$v = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}, \quad (б)$$

Таким образом, в начальный момент времени ($t=0$) скорость точки $v=v_0$, а затем с течением времени скорость непрерывно возрастает.

Найдем ускорение точки. По соответствующим формулам имеем:

$$a_x = \ddot{x} = 0, \quad a_y = \ddot{y} = g. \quad (в)$$

Следовательно, ускорение точки

$$a = g. \quad (г)$$

В данном случае точка движется с постоянным по модулю и направлению ускорением, параллельным оси Oy (это ускорение силы тяжести). Обращаем внимание на то, что хотя здесь $a = \text{const}$, движение точки не является равнопеременным, так как условием равнопеременного движения является не $a = \text{const}$, а $a_\tau = \text{const}$.

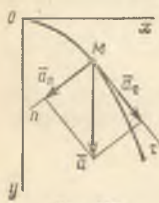


Рис. 129

В этом же движении, как мы сейчас увидим, a_τ не постоянно.

Для определения a_τ воспользуемся формулой (30). Подставляя в нее значения соответствующих величин из равенств (а) и (в), получим

$$a_\tau = g^2 t / v.$$

Но из равенства (б) $v^2 = v_0^2 + g^2 t^2$ и, следовательно,

$$t = (1/g) \sqrt{v^2 - v_0^2}.$$

Подставляя это значение t , выразим a_τ через скорость v :

$$a_\tau = g \sqrt{1 - v_0^2/v^2}. \quad (д)$$

Отсюда следует, что в начальный момент времени, когда $v=v_0$, $a_\tau=0$. Затем, с увеличением v значение a_τ растет и при $v \rightarrow \infty$ $a_\tau \rightarrow g$; следовательно, в пределе величина касательного ускорения стремится к полному ускорению g .

Для нахождения a_n обратимся к зависимости $a^2 = a_\tau^2 + a_n^2$. Отсюда

$$a_n^2 = a^2 - a_\tau^2 = g^2 - g^2 (1 - v_0^2/v^2) = g^2 v_0^2/v^2$$

и

$$a_n = v_0 g / v. \quad (е)$$

Таким образом, в начальный момент времени ($v=v_0$) $a_n=g$, а затем с увеличением v значение a_n убывает, стремясь в пределе к нулю.

Для нахождения радиуса кривизны траектории воспользуемся формулой $a_n = v^2/\rho$, откуда

$$\rho = v^3/a_n = v^3/v_0 g.$$

В начальный момент времени радиус кривизны имеет наименьшее значение $\rho_{\min} = v_0^3/g$, а затем с увеличением v радиус кривизны растет и, следовательно, кривизна траектории уменьшается. При $v \rightarrow \infty$ $\rho \rightarrow \infty$, а кривизна стремится к нулю.

§ 47*. СКОРОСТЬ И УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

Когда точка движется все время в одной и той же плоскости, ее положение можно определять полярными координатами r и φ (рис. 130). При движении точки эти координаты с течением времени изменяются. Следовательно, закон движения точки в полярных координатах будет задаваться уравнениями:

$$r = f_1(t), \quad \varphi = f_2(t). \quad (31)$$

Скорость точки численно равна ds/dt , т. е. отношению элементарного перемещения ds к промежутку времени dt . В данном случае перемещение ds геометрически складывается из радиального перемещения, численно равного dr , и поперечного перемещения, перпендикулярного радиусу OM и численно равного $r \cdot d\varphi$. Следовательно, сама скорость v будет геометрически складываться из радиальной скорости v_r и поперечной скорости v_φ , численно равных

$$v_r = \frac{dr}{dt} = \dot{r}, \quad v_\varphi = r \frac{d\varphi}{dt} = r \dot{\varphi}. \quad (32)$$

Так как $\dot{r}$ и $\dot{\varphi}$ взаимно перпендикулярны, то по модулю

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2}. \quad (33)$$

Формулы (32) и (33) определяют скорость точки в полярных координатах при плоском движении.

Равенство (33) можно еще получить, выразив через r и φ декартовы координаты точки в виде (рис. 130):

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

Тогда $\dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi$, $\dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi$ и по формуле (13)

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2}.$$

Таким же путем, вычислив $\ddot{x}$ и $\ddot{y}$, можно по формуле (15) найти выражение для ускорения точки в полярных координатах

$$a = \sqrt{(\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2)^2 + (r \ddot{\varphi} + 2 \dot{r} \dot{\varphi})^2}. \quad (34)$$

При этом величина, стоящая под знаком радикала в первых скобках, равна a_r , а во вторых скобках равна a_φ .

Глава X

ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ И ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 48. ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

В кинематике, как и в статике, будем рассматривать все твердые тела как абсолютно твердые. Задачи кинематики твердого тела распадутся на две части:

1) задание движения и определение кинематических характеристик движения тела в целом; 2) определение кинематических характеристик движения отдельных точек тела.

Начнем с рассмотрения поступательного движения твердого тела. Поступательным называется такое движение твердого тела,

при котором любая прямая, проведенная в этом теле, перемещается, оставаясь параллельной своему начальному направлению.

Поступательное движение не следует смешивать с прямолинейным. При поступательном движении тела траектории его точек могут быть любыми кривыми линиями. Приведем примеры.

1. Кузов автомобиля на прямом горизонтальном участке дороги движется поступательно. При этом траектории его точек будут прямыми линиями.

2. Спарник AB (рис. 131) при вращении кривошипов O_1A и O_2B ($O_1A = O_2B$) также движется поступательно (любая проведенная в нем прямая остается параллельной ее начальному направлению). Точки спарника движутся при этом по окружностям.

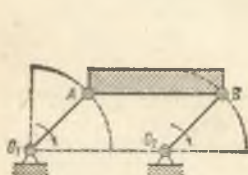


Рис. 131

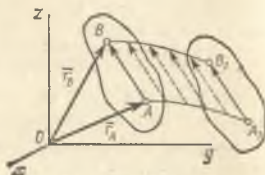


Рис. 132

Свойства поступательного движения определяются следующей теоремой: при поступательном движении все точки тела описывают одинаковые (при наложении совпадающие) траектории и имеют в каждый момент времени одинаковые по модулю и направлению скорости и ускорения.

Для доказательства рассмотрим твердое тело, совершающее поступательное движение относительно системы отсчета $Oxyz$. Возьмем в теле две произвольные точки A и B , положения которых в момент времени t определяются радиусами-векторами $\vec{r}_A$ и $\vec{r}_B$ (рис. 132); проведем вектор $\vec{AB}$, соединяющий эти точки. Тогда

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{AB}. \quad (35)$$

При этом длина AB постоянна, как расстояние между точками твердого тела, а направление $\vec{AB}$ остается неизменным, так как тело движется поступательно. Таким образом, вектор $\vec{AB}$ во все время движения тела остается постоянным ($\vec{AB} = \text{const}$). Вследствие этого, как видно из равенства (35) (и непосредственно из чертежа), траектория точки B получается из траектории точки A параллельным смещением всех ее точек на постоянный вектор $\vec{AB}$. Следовательно, траектории точек A и B будут действительно одинаковыми (при наложении совпадающими) кривыми.

Для нахождения скоростей точек A и B продифференцируем обе части равенства (35) по времени. Получим

$$d\vec{r}_B/dt = d\vec{r}_A/dt + d(\vec{AB})/dt.$$

Но производная от постоянного вектора $\vec{AB}$ равна нулю. Производные же от векторов $\vec{r}_A$ и $\vec{r}_B$ по времени дают скорости точек A и B . В результате находим, что

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B,$$

т. е. что скорости точек A и B тела в любой момент времени одинаковы и по модулю, и по направлению. Беря от обеих частей полученного равенства производные по времени, найдем:

$$d\vec{v}_A/dt = d\vec{v}_B/dt \quad \text{или} \quad \vec{a}_A = \vec{a}_B.$$

Следовательно, ускорения точек A и B тела в любой момент времени тоже одинаковы по модулю и направлению.

Так как точки A и B были выбраны произвольно, то из найденных результатов следует, что у всех точек тела их траектории, а также скорости и ускорения в любой момент времени будут одинаковы. Таким образом, теорема доказана.

Скорости и ускорения точек движущегося тела образуют векторные поля — поле скоростей и поле ускорений точек тела.

Из доказанного следует, что поля скоростей и ускорений точек тела, движущегося поступательно, будут однородными (рис. 133), но вообще не стационарными, т. е. изменяющимися во времени (см. § 32).

Из теоремы следует также, что поступательное движение твердого тела вполне определяется движением какой-нибудь одной его точки. Следовательно, изучение поступательного движения тела сводится к задаче кинематики точки, нами уже рассмотренной.

При поступательном движении общую для всех точек тела скорость $\vec{v}$ называют скоростью поступательного движения тела, а ускорение $\vec{a}$ — ускорением поступательного движения тела. Векторы $\vec{v}$ и $\vec{a}$ можно изображать приложенными к любой точке тела.

Заметим, что понятия о скорости и ускорении тела имеют смысл только при поступательном движении. Во всех остальных случаях точки тела, как мы увидим, движутся с разными скоростями и ускорениями, и термины «скорость тела» или «ускорение тела» для этих движений теряют смысл.

§ 49. ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ ОСИ. УГЛОВАЯ СКОРОСТЬ И УГЛОВОЕ УСКОРЕНИЕ

Вращательным движением твердого тела вокруг неподвижной оси называется такое его движение, при котором какие-нибудь две точки, принадлежащие телу (или неизменно с ним связанные), остаются во

все время движения неподвижными (рис. 134). Проходящая через неподвижные точки A и B прямая AB называется *осью вращения*.

Так как расстояния между точками твердого тела должны оставаться неизменными, то очевидно, что при вращательном движении все точки, принадлежащие оси вращения, будут неподвижны, а все остальные точки тела будут описывать окружности, плоскости которых перпендикулярны оси вращения, а центры лежат на этой оси.

Для определения положения вращающегося тела проведем через ось вращения, вдоль которой направим ось Az , полуплоскость I — неподвижную и полуплоскость II , врезанную в само тело и вращающуюся вместе с ним (см. рис. 134). Тогда положение тела в любой момент времени однозначно определится взятым с соответствующим знаком углом φ между этими полуплоскостями, который назовем *углом поворота тела*. Будем считать угол φ положительным, если он отложен от неподвижной плоскости в направлении против хода часовой стрелки (для наблюдателя, смотрящего с положительного конца оси Az), и отрицательным, если по ходу часовой стрелки. Измерять угол φ будем всегда в *радианах*. Чтобы знать положение тела в любой момент времени, надо знать зависимость угла φ от времени t , т. е.

$$\varphi = f(t). \quad (36)$$

Уравнение (36) выражает закон вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси.

Основными кинематическими характеристиками вращательного движения твердого тела являются его угловая скорость ω и угловое ускорение ϵ .

Если за промежуток времени $\Delta t = t_1 - t$ тело совершает поворот на угол $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi$, то численно средней угловой скоростью тела за этот промежуток времени будет $\omega_{cp} = \Delta\varphi / \Delta t$. В пределе при $\Delta t \rightarrow 0$ найдем, что

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad \text{или} \quad \omega = \dot{\varphi}. \quad (37)$$

Таким образом, числовое значение угловой скорости тела в данный момент времени равно первой производной от угла поворота по времени. Равенство (37) показывает также, что величина ω равна отношению элементарного угла поворота $d\varphi$ к соответствующему промежутку времени dt . Знак ω определяет направление вращения

* Подобно тому, как в § 42 мы условились обозначать символом v числовое значение скорости и одновременно ее модуль, здесь ω и ϵ будут обозначать числовые (алгебраические) значения угловой скорости и углового ускорения и одновременно их модули, когда это не может вызвать недоразумений.

тела. Легко видеть, что когда вращение происходит против хода часовой стрелки, $\omega > 0$, а когда по ходу часовой стрелки, то $\omega < 0$.

Размерность угловой скорости $1/T$ (т. е. 1/время); в качестве единицы измерения обычно применяют рад/с или, что то же, $1/c$ (c^{-1}), так как радиан — величина безразмерная.

Угловую скорость тела можно изобразить в виде вектора $\vec{\omega}$, модуль которого равен $|\omega|$ и который направлен вдоль оси вращения тела в ту сторону, откуда вращение видно происходящим против хода часовой стрелки (рис. 135). Такой вектор определяет сразу и модуль угловой скорости, и ось вращения, и направление вращения вокруг этой оси.

Угловое ускорение характеризует изменение с течением времени угловой скорости тела. Если за промежуток времени $\Delta t = t_1 - t$ угловая скорость тела изменяется на величину $\Delta\omega = \omega_1 - \omega$, то числовое значение среднего углового ускорения тела за этот промежуток времени будет $\epsilon_{cp} = \Delta\omega / \Delta t$. В пределе при $\Delta t \rightarrow 0$ найдем, учитывая одновременно равенство (37), что

$$\epsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad \text{или} \quad \epsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}. \quad (38)$$

Таким образом, числовое значение углового ускорения тела в данный момент времени равно первой производной от угловой скорости или второй производной от угла поворота тела по времени.

Размерность углового ускорения $1/T^2$ ($1/\text{время}^2$); в качестве единицы измерения обычно применяется рад/с² или, что то же, $1/c^2$ (c^{-2}).

Если модуль угловой скорости со временем возрастает, вращение тела называется *ускоренным*, а если убывает, — *замедленным*. Легко видеть, что вращение будет ускоренным, когда величины ω и ϵ имеют одинаковые знаки, и замедленным, — когда разные.

Угловое ускорение тела (по аналогии с угловой скоростью) можно также изобразить в виде вектора $\vec{\epsilon}$, направленного вдоль оси вращения. При этом

$$\vec{\epsilon} = d\vec{\omega}/dt. \quad (38')$$

Направление $\vec{\epsilon}$ совпадает с направлением $\vec{\omega}$, когда тело вращается ускоренно (рис. 135, а), и противоположно $\vec{\omega}$ при замедленном вращении (рис. 135, б).

§ 50. РАВНОМЕРНОЕ И РАВНОПЕРЕМЕННОЕ ВРАЩЕНИЯ

Если угловая скорость тела остается во все время движения постоянной ($\omega = \text{const}$), то вращение тела называется *равномерным*. Найдем закон равномерного вращения. Из формулы (37) имеем

$d\varphi = \omega dt$. Отсюда, считая, что в начальный момент времени $t=0$ угол $\varphi = \varphi_0$, и беря интегралы слева от φ_0 до φ , а справа от 0 до t , получим окончательно

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t. \quad (39)$$

Из равенства (39) следует, что при равномерном вращении, когда $\varphi_0 = 0$,

$$\varphi = \omega t \text{ и } \omega = \varphi/t. \quad (40)$$

В технике скорость равномерного вращения часто определяют числом оборотов в минуту, обозначая эту величину через n об/мин*. Найдем зависимость между n об/мин и ω 1/с. При одном обороте тело повернется на угол 2π , а при n оборотах на $2\pi n$; этот поворот делается за время $t = 1 \text{ мин} = 60 \text{ с}$. Из равенства (40) следует тогда, что

$$\omega = \pi n / 30 \approx 0,1n. \quad (41)$$

Если угловое ускорение тела во все время движения остается постоянным ($\varepsilon = \text{const}$), то вращение называется *равнопеременным*. Найдем закон равнопеременного вращения, считая, что в начальный момент времени $t=0$ угол $\varphi = \varphi_0$, а угловая скорость $\omega = \omega_0$ (ω_0 — начальная угловая скорость).

Из формулы (38) имеем $d\omega = \varepsilon dt$. Интегрируя левую часть в пределах от ω_0 до ω , а правую — в пределах от 0 до t , найдем

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t. \quad (42)$$

Представим выражение (42) в виде

$$d\varphi/dt = \omega_0 + \varepsilon t \text{ или } d\varphi = \omega_0 dt + \varepsilon t dt.$$

Вторично интегрируя, найдем отсюда закон равнопеременного вращения

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \varepsilon t^2/2. \quad (43)$$

Угловая скорость ω этого вращения определяется формулой (42). Если величины ω и ε имеют одинаковые знаки, вращение будет равноускоренным, а если разные — равнозамедленным.

§ 51. СКОРОСТИ И УСКОРЕНИЯ ТОЧЕК ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ТЕЛА

Установив в предыдущих параграфах характеристики движения всего тела в целом, перейдем к изучению движения отдельных его точек.

1. Скорости точек тела. Рассмотрим какую-нибудь точку M твердого тела, находящуюся на расстоянии h от оси вращения (см. рис. 134). При вращении тела точка M будет описывать

* Следует особо подчеркнуть, что n по размерности не угол, а угловая скорость.

окружность радиуса h , плоскость которой перпендикулярна оси вращения, а центр C лежит на самой оси. Если за время dt происходит элементарный поворот тела на угол $d\varphi$, то точка M при этом совершает вдоль своей траектории элементарное перемещение $ds = h d\varphi$. Тогда числовое значение скорости точки будет равно отношению ds к dt , т. е.

$$v = \frac{ds}{dt} = h \frac{d\varphi}{dt}$$

или

$$v = h\omega. \quad (44)$$

Скорость v в отличие от угловой скорости тела называют иногда еще *линейной* или *окружной* скоростью точки M .

Таким образом, числовое значение скорости точки вращающегося твердого тела равно произведению угловой скорости тела на расстояние от этой точки до оси вращения.

Направлена скорость по касательной к описываемой точкой окружности или перпендикулярно плоскости, проходящей через ось вращения и точку M .

Так как для всех точек тела ω имеет в данный момент времени одно и то же значение, то из формулы (44) следует, что скорости точек вращающегося тела пропорциональны их расстояниям от оси вращения. Поле скоростей точек вращающегося твердого тела имеет вид, показанный на рис. 136.

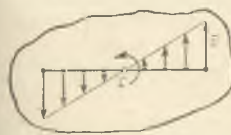


Рис. 136

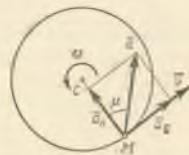


Рис. 137

2. Ускорения точек тела. Для нахождения ускорения точки M воспользуемся формулами $a_t = dv/dt$, $a_n = v^2/\rho$.

В нашем случае $\rho = h$. Подставляя значение v из равенства (44) в выражения a_t и a_n , получим:

$$a_t = h \frac{d\omega}{dt}, \quad a_n = \frac{h^2 \omega^2}{h}$$

или окончательно:

$$a_t = h\varepsilon, \quad a_n = h\omega^2. \quad (45)$$

Касательная составляющая ускорения a_t направлена по касательной к траектории (в сторону движения при ускоренном вращении тела и в обратную сторону при замедленном); нормальная составляющая a_n всегда направлена по радиусу MC к оси вращения (рис. 137).

Полное ускорение точки M будет $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$ или

$$a = h \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (46)$$

Отклонение вектора полного ускорения от радиуса описываемой точкой окружности определяется углом μ , который вычисляется по формуле $\operatorname{tg} \mu = a_t/a_n$ [вторая из формул (22)]. Подставляя сюда значения a_t и a_n из равенств (45), получаем

$$\operatorname{tg} \mu = \varepsilon/\omega^2. \quad (47)$$

Так как ω и ε имеют в данный момент времени для всех точек тела одно и то же значение, то из формул (46) и (47) следует, что ускорения всех точек вращающегося твердого тела пропорциональны их расстояниям от оси вращения и образуют в данный момент времени один и тот же угол μ с радиусами описываемых ими окружностей. Поле ускорений точек вращающегося твердого тела имеет вид, показанный на рис. 138.

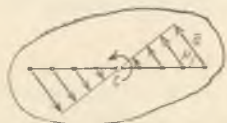


Рис. 138



Рис. 139

Формулы (44) — (47) позволяют определить скорость и ускорение любой точки тела, если известен закон вращения тела и расстояние данной точки от оси вращения. По этим же формулам можно, зная движение одной точки тела, найти движение любой другой его точки, а также характеристики движения всего тела в целом.

3. Векторы скорости и ускорения точек тела. Чтобы найти выражения непосредственно для векторов $\vec{v}$ и $\vec{a}$, проведем из произвольной точки O оси AB радиус-вектор $\vec{r}$ точки M (рис. 139). Тогда $h = r \sin \alpha$ и по формуле (44)

$$|\vec{v}| = |\omega| h = |\omega| r \sin \alpha \quad \text{или} \quad |\vec{v}| = |\vec{\omega} \times \vec{r}|.$$

Таким образом, модуль векторного произведения $\vec{\omega} \times \vec{r}$ равен модулю скорости точки M . Направления векторов $\vec{\omega} \times \vec{r}$ и $\vec{v}$ тоже совпадают (оба они перпендикулярны плоскости OMB) и размерности их одинаковы. Следовательно,

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad (48)$$

т. е. вектор скорости любой точки вращающегося тела равен векторному произведению угловой скорости тела на радиус-вектор этой точки. Формулу (48) называют формулой Эйлера.

Беря от обеих частей равенства (48) производные по времени, получим

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} \right) + \left(\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right)$$

или

$$\vec{a} = (\varepsilon \times \vec{r}) + (\vec{\omega} \times \vec{v}). \quad (49)$$

Формула (49) определяет вектор ускорения любой точки вращающегося тела.

Вектор $\varepsilon \times \vec{r}$ направлен, как и вектор $\vec{\omega} \times \vec{r}$, т. е. по касательной к траектории точки M , а $|\varepsilon \times \vec{r}| = \varepsilon r \sin \alpha = \varepsilon h$. Вектор же $\vec{\omega} \times \vec{v}$ направлен вдоль MC , т. е. по нормали к траектории точки M , а $|\vec{\omega} \times \vec{v}| = \omega v \sin 90^\circ = \omega^2 h$, так как $v = \omega h$. Учитывая все эти результаты, а также формулы (45), заключаем, что $\vec{\varepsilon} \times \vec{r} = \vec{a}_t$ и $\vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{a}_n$.

Задача 54. Вал, делающий $n=90$ об/мин, после выключения двигателя начинает вращаться равнозамедленно и останавливается через $t_1=40$ с. Определить, сколько оборотов сделал вал за это время.

Решение. Так как вал вращается равнозамедленно, то для него, считая $\varphi_0=0$, будет

$$\varphi = \omega_0 t + \varepsilon t^2/2, \quad \omega = \omega_0 + \varepsilon t. \quad (а)$$

Начальной угловой скоростью при замедленном вращении является та, которую вал имел до выключения двигателя. Следовательно,

$$\omega_0 = \pi n/30.$$

В момент остановки при $t=t_1$ угловая скорость вала $\omega_1=0$. Подставляя эти значения во второе из уравнений (а), получаем:

$$0 = \pi n/30 + \varepsilon t_1 \quad \text{и} \quad \varepsilon = -\pi n/30 t_1.$$

Если обозначить число сделанных валом за время t_1 оборотов через N (не смешивать с n ; n — угловая скорость), то угол поворота за то же время будет равен $\varphi_1 = 2\pi N$. Подставляя найденные значения ε и ω_0 в первое из уравнений (а), получим

$$2\pi N = (\pi n/30) t_1 - (\pi n/60) t_1 = (\pi n/60) t_1,$$

откуда

$$N = n t_1 / 120 = 30 \text{ об.}$$

Задача 55. Маховик радиусом $R=0.6$ м вращается равномерно, делая $n=90$ об/мин. Определить скорость и ускорение точки, лежащей на ободе маховика.

Решение. Скорость точки обода $v=R\omega$, где угловая скорость ω должна быть выражена в радианах в секунду. Тогда $\omega = \pi n/30 = 3\pi$ и $v = R \cdot 3\pi \approx 5.7$ м/с. Далее, так как $\omega = \text{const}$, то $\varepsilon=0$, и, следовательно,

$$a = a_n = R \omega^2 = R \cdot 9\pi^2 \approx 53.3 \text{ м/с}^2.$$

Ускорение точки направлено в данном случае к оси вращения.

Задача 56. Полагая, что при разгоне маховик вращается по закону

$$\varphi = c_0 + c_1 t + c_2 e^{-kt}, \quad (а)$$

определить значения постоянных коэффициентов c_0 , c_1 , c_2 и k из условий, что при $t=0$ должно быть $\varphi_0=0$ и $\omega_0=0$ и что предельная угловая скорость, до которой

разгоняется маховик $\omega_{np} = 50 \text{ с}^{-1}$, а его угловое ускорение при разгоне не должно превышать значения $\varepsilon_n = 10 \text{ с}^{-2}$. Найти также, какое ускорение будет при этом у точек обода маховика в момент времени $t_1 = 1 \text{ с}$, если радиус маховика $R = 0,4 \text{ м}$.
Решение. Из уравнения (а) видно, что при $t=0$ $\varphi=0$, если $c_0+c_2=0$, т. е.

Далее из уравнения (а) находим, что $\omega = \dot{\varphi} = c_1 - kc_2 e^{-kt}$. Следовательно, при $t=0$ $\omega=0$, если $c_1 - kc_2 = 0$, т. е. $c_1 = kc_2$.

При этих значениях c_0 и c_1 уравнение (а) примет вид

$$\varphi = c_2 (kt + e^{-kt} - 1). \quad (б)$$

Отсюда находим

$$\omega = \dot{\varphi} = c_2 k (1 - e^{-kt}), \quad \varepsilon = \dot{\omega} = c_2 k^2 e^{-kt}. \quad (в)$$

Первое из равенств (в) показывает, что ω со временем растет и при $t \rightarrow \infty$ стремится к предельному значению $c_2 k$; следовательно, $\omega_{np} = c_2 k$. Из второго же равенства видно, что ε со временем убывает, стремясь к нулю, а наибольшее значение $c_2 k^2$ имеет при $t=0$; следовательно,

$$\varepsilon_n = c_2 k^2.$$

Но по условиям задачи $\omega_{np} = 50 \text{ с}^{-1}$ и $\varepsilon_n = 10 \text{ с}^{-2}$. Тогда должно быть $c_2 k = 50$, а $c_2 k^2 = 10$, откуда $k = 0,2$ и $c_2 = 250$. При этих значениях k и c_2 равенство (б) дает окончательно следующий закон вращения маховика:

$$\varphi = 250 (0,2t + e^{-0,2t} - 1). \quad (г)$$

Тогда, что видно и из равенств (в), будет *

$$\omega = 50 (1 - e^{-0,2t}), \quad \varepsilon = 10 e^{-0,2t}. \quad (д)$$

Для момента времени $t_1 = 1 \text{ с}$, учитывая, что $e^{-0,2} \approx 0,82$, получим $\omega_1 \approx 9,0 \text{ с}^{-1}$,

$\varepsilon_1 \approx 8,2 \text{ с}^{-2}$. Следовательно, в этот момент времени $a_c = R\omega_1 \approx 3,6 \text{ м/с}^2$, $a_n = R\omega_1^2 \approx 32,4 \text{ м/с}^2$. Следовательно, $a = \sqrt{a_c^2 + a_n^2} \approx 32,6 \text{ м/с}^2$.

Задача 57. Груз В (рис. 140) приводит во вращение вал радиусом r и сидящую на одной оси с валом шестерню 1 радиусом r_1 . Движение груза начинается из состояния покоя и происходит с постоянным ускорением a . Определить, по какому закону будет при этом вращаться находящаяся в зацеплении с шестерней 1 шестерня 2 радиусом r_2 .

Решение. Так как груз В начинает двигаться без начальной скорости, то его скорость в любой момент времени t равна at ($v_B = at$). Эту скорость будут иметь и точки обода вала. Но, с другой стороны, скорости этих точек равны $\omega_1 r$, где ω_1 — общая для вала и шестерни 1 угловая скорость. Следовательно,

$$\omega_1 r = at, \quad \omega_1 = at/r.$$

Теперь найдем ω_2 . Так как скорость точки сцепления С должна быть одной и той же для обеих шестерен, то $v_C = \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$, откуда

$$\omega_2 = (r_1/r_2) \omega_1 = (r_1 a/r_2 r) t.$$

Итак, угловая скорость шестерни 2 растет пропорционально времени. Учитывая, что $\omega_2 = d\varphi_2/dt$, где φ_2 — угол поворота шестерни 2, получим

$$d\varphi_2 = (r_1 a/r_2 r) t dt.$$

Отсюда, беря от обеих частей интегралы и считая, что при $t=0$ угол $\varphi_2=0$, найдем окончательно закон равноускоренного вращения шестерни 2 в виде

$$\varphi_2 = (r_1 a/2r_2 r) t^2.$$

* Значение ω может изменяться по закону (д), когда на маховик действуют постоянный вращающий момент и момент сил сопротивления, пропорциональный ω (задача 150 в § 128).

Глава XI

ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 52. УРАВНЕНИЯ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ (ДВИЖЕНИЯ ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ).

РАЗЛОЖЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ НА ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ И ВРАЩАТЕЛЬНОЕ

Плоскопараллельным (или плоским) называется такое движение твердого тела, при котором все его точки перемещаются параллельно некоторой фиксированной плоскости Π (рис. 141). Плоское движение совершают многие части механизмов и машин, например катящееся колесо на прямолинейном участке пути, шатун в кривошипно-ползунном механизме и др. Частным случаем плоскопараллельного движения является вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси.

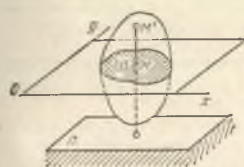


Рис. 141

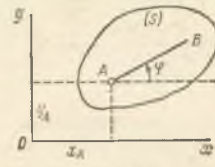


Рис. 142

Рассмотрим сечение S тела какой-нибудь плоскостью Oxy , параллельной плоскости Π (рис. 141). При плоскопараллельном движении все точки тела, лежащие на прямой MM' , перпендикулярной сечению S , т. е. плоскости Π , движутся тождественно.

Отсюда заключаем, что для изучения движения всего тела достаточно изучить, как движется в плоскости Oxy сечение S этого тела или некоторая плоская фигура S . Поэтому в дальнейшем вместо плоского движения тела будем рассматривать движение плоской фигуры S в ее плоскости, т. е. в плоскости Oxy . При этом все результаты, которые будут получены в § 53—59 для точек плоской фигуры, справедливы, конечно, и для точек сечения S твердого тела, движущегося плоскопараллельно.

Положение фигуры S в плоскости Oxy определяется положением какого-нибудь проведенного на этой фигуре отрезка AB (рис. 142). В свою очередь положение отрезка AB можно определить, зная координаты x_A, y_A точки A и угол φ , который отрезок AB образует с осью x . Точку A , выбранную для определения положения фигуры S , будем в дальнейшем называть полюсом.

При движении фигуры величины x_A, y_A и φ будут изменяться. Чтобы знать закон движения, т. е. положение фигуры в плоскости

Оху в любой момент времени, надо знать зависимости

$$x_A = f_1(t), y_A = f_2(t), \varphi = f_3(t). \quad (50)$$

Уравнения (50), определяющие закон происходящего движения, называются *уравнениями движения плоской фигуры* в ее плоскости. Они же являются *уравнениями плоскопараллельного движения твердого тела*.

Первые два из уравнений (50) определяют то движение, которое фигура совершала бы при $\varphi = \text{const}$; это, очевидно, будет поступательное движение, при котором все точки фигуры движутся так же, как полюс А. Третье уравнение определяет движение, которое фигура совершала бы при $x_A = \text{const}$ и $y_A = \text{const}$, т. е. когда полюс А неподвижен; это будет вращение фигуры вокруг полюса А. Отсюда можно заключить, что в общем случае движение плоской фигуры в ее плоскости может рассматриваться как *слагающееся из поступательного движения, при котором все точки фигуры движутся так же, как полюс А, и из вращательного движения вокруг этого полюса* *.

Основными кинематическими характеристиками рассматриваемого движения являются скорость и ускорение поступательного движения, равные скорости и ускорению полюса ($v_{\text{пост}} = v_A$, $a_{\text{пост}} = a_A$), а также угловая скорость ω и угловое ускорение ϵ вращательного движения вокруг полюса. Значения этих характеристик в любой момент времени t можно найти, воспользовавшись уравнениями (50).

При изучении движения можно в качестве полюса выбирать любую точку фигуры. Рассмотрим, что получится, если вместо А выбрать в качестве полюса какую-нибудь другую точку С и определять положение фигуры отрезком CD , образующим с осью Ох угол φ_1 (рис. 143). Характеристики поступательной части движения при этом изменятся, так как в общем случае $v_C \neq v_A$ и $a_C \neq a_A$ (иначе движение фигуры было бы поступательным). Характеристики же вращательной части движения, т. е. ω и ϵ , останутся неизменными. В самом деле, проведя из С прямую CB_1 , параллельную AB , мы видим, что в любой момент времени угол $\varphi_1 = \varphi - \alpha$, где $\alpha = \text{const}$. Отсюда $\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}$, $\ddot{\varphi}_1 = \ddot{\varphi}$ или $\omega_1 = \omega$, $\epsilon_1 = \epsilon$.

Следовательно, *вращательная часть движения от выбора полюса не зависит*.

* Соответственно плоскопараллельное движение твердого тела можно рассматривать как слагающееся из поступательного движения вместе с полюсом А и вращательного вокруг оси, перпендикулярной плоскости П (см. рис. 141) и проходящей через полюс А.

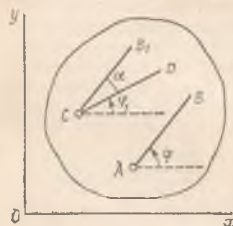


Рис. 143

§ 53*. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТРАЕКТОРИЙ ТОЧЕК ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ

Перейдем теперь к изучению движения отдельных точек плоской фигуры, т. е. к отысканию траекторий, скоростей и ускорений этих точек. Начнем с определения траекторий.

Рассмотрим точку М плоской фигуры, положение которой определяется расстоянием $b = AM$ от полюса А и углом $BAM = \alpha$ (рис. 144). Если движение задано уравнениями (50), то координаты x и y точки М в осях Оху будут:

$$x = x_A + b \cos(\varphi + \alpha), y = y_A + b \sin(\varphi + \alpha), \quad (51)$$

где x_A , y_A , φ — известные по уравнениям (50) функции времени t .

Равенства (51), определяющие закон движения точки М в плоскости Оху, дают одновременно уравнение траектории этой точки в параметрическом виде. Обычное уравнение траектории получим, исключив из системы (51) время t .

Если рассматривается движение звена какого-нибудь механизма, то для определения траектории любой точки этого звена достаточно выразить ее координаты через какой-нибудь параметр, определяющий положение механизма, а затем исключить этот параметр. Уравнения движения (50) при этом знать не обязательно.

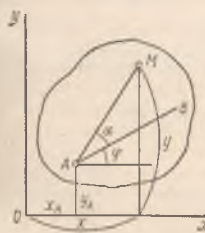


Рис. 144

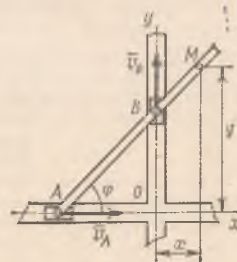


Рис. 145

Задача 58. Ползуны А и В, к которым прикрепляется линейка эллипсографа, перемещаются по взаимно перпендикулярным направляющим (рис. 145). Расстояние $AB = l$. Определить траекторию точки М линейки.

Решение. Взяв за полюс точку А, будем определять положение точки М на линейке отрезком $AM = b$. Положение самой линейки задается углом φ . Тогда для координат x и y точки М получим: $x = (b - l) \cos \varphi$, $y = b \sin \varphi$. Исключая параметр φ , находим, что траекторией точки (независимо от закона движения линейки) будет эллипс

$$x^2/(b-l)^2 + y^2/b^2 = 1$$

с полуосями $a = |b - l|$ и b и с центром в точке О.

Меняя с помощью соответствующих винтов расстояния l и b , можно вычертить карандашом М эллипс с любыми заданными полуосями, не превосходящими размеров линейки. Отсюда и название механизма — *эллипсограф*.

§ 54. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ ТОЧЕК ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ

В § 52 было отмечено, что движение плоской фигуры можно рассматривать как складывающееся из поступательного движения, при котором все точки фигуры движутся со скоростью $\vec{v}_A$ полюса A , и из вращательного движения вокруг этого полюса. Покажем, что скорость любой точки M фигуры складывается геометрически из скоростей, которые точка получает в каждом из этих движений.

В самом деле, положение любой точки M фигуры определяется по отношению к осям Oxy радиусом-вектором $\vec{r} = \vec{r}_A + \vec{r}'$ (рис. 146), где $\vec{r}_A$ — радиус-вектор полюса A , $\vec{r}' = \vec{AM}$ — вектор, определяющий положение точки M относительно осей $Ax'y'$, перемещающихся вместе с полюсом A поступательно (движение фигуры по отношению к этим осям представляет собой вращение вокруг полюса A). Тогда

$$\vec{v}_M = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt}.$$

В полученном равенстве величина $d\vec{r}_A/dt = \vec{v}_A$ есть скорость полюса A ; величина же $d\vec{r}'/dt$ равна скорости $\vec{v}_{MA}$, которую точка M получает при $\vec{r}_A = \text{const}$, т. е. относительно осей $Ax'y'$, или, иначе говоря, при вращении фигуры вокруг полюса A . Таким образом, из предыдущего равенства действительно следует, что

$$\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{v}_{MA}. \quad (52)$$

При этом скорость $\vec{v}_{MA}$, которую точка M получает при вращении фигуры вокруг полюса A , будет (см. § 51):

$$v_{MA} = \omega \cdot MA \quad (\vec{v}_{MA} \perp \vec{MA}), \quad (53)$$

где ω — угловая скорость фигуры.

Таким образом, скорость любой точки M плоской фигуры геометрически складывается из скорости какой-нибудь другой точки A ,

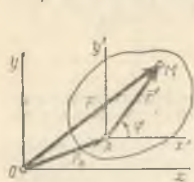


Рис. 146

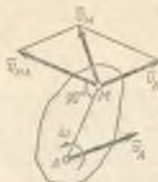


Рис. 147

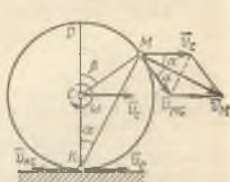


Рис. 148

принятой за полюс, и скорости, которую точка M получает при вращении фигуры вокруг этого полюса. Модуль и направление скорости v_M находятся построением соответствующего параллелограмма (рис. 147).

Задача 59. Найти скорость точки M обода колеса, катящегося по прямолинейному рельсу без скольжения (рис. 148), если скорость центра C колеса равна v_C , а угол $DKM = \alpha$.

Решение. Приняв точку C , скорость которой известна, за полюс, найдем, что $v_M = v_C + v_{MC}$, где $v_{MC} \perp CM$ и по модулю $v_{MC} = \omega \cdot MC = \omega R$ (R — радиус колеса). Значение угловой скорости ω найдем из условия того, что точка K колеса не скользит по рельсу и, следовательно, в данный момент времени $v_K = 0$. С другой стороны, так же как и для точки M , $v_K = v_C + v_{KC}$, где $v_{KC} = \omega \cdot KC = \omega R$. Так как для точки K скорости v_{KC} и v_C направлены вдоль одной прямой, то при $v_K = 0$ $v_{KC} = v_C$, откуда $\omega = v_C / R$. В результате находим, что $v_{MC} = \omega R = v_C$.

Параллелограмм, построенный на векторах v_{MC} и v_C , будет при этом ромбом. Угол между v_C и v_{MC} равен β , так как стороны, образующие этот угол и угол β , взаимно перпендикулярны. В свою очередь угол $\beta = 2\alpha$, как центральный угол, опирающийся на ту же дугу, что и вписанный угол α . Тогда по свойствам ромба углы между v_C и v_M и между v_{MC} и v_M тоже равны α . Окончательно, так как диагонали ромба взаимно перпендикулярны, получим

$$v_M = 2v_C \cos \alpha \text{ и } \vec{v}_M \perp \vec{KM}.$$

Расчет, как видим, оказывается достаточно громоздким. В дальнейшем мы познакомимся с методами, позволяющими решать аналогичные задачи гораздо проще (см. задачу 61 в § 57).

§ 55. ТЕОРЕМА О ПРОЕКЦИЯХ СКОРОСТЕЙ ДВУХ ТОЧЕК ТЕЛА

Определение скоростей точек плоской фигуры (или тела, движущегося плоскопараллельно) с помощью формулы (52) связано обычно с довольно сложными расчетами (см. задачу 59). Однако исходя из этого основного результата, можно получить ряд других, практически более удобных и простых методов определения скоростей точек фигуры (или тела).

Один из таких методов дает теорема: проекции скоростей двух точек твердого тела на ось, проходящую через эти точки, равны друг другу.

Рассмотрим какие-нибудь две точки A и B плоской фигуры (или тела). Принимая точку A за полюс (рис. 149), получаем по формуле (52), что $v_B = v_A + v_{BA}$. Отсюда, проектируя обе части равенства на ось, направленную по AB , и учитывая, что вектор v_{BA} перпендикулярен AB , находим

$$v_B \cos \beta = v_A \cos \alpha, \quad (54)$$

и теорема доказана. Заметим, что этот результат ясен и из чисто физических соображений: если равенство (54) не будет выполняться, то при движении расстояние между точками A и B должно изменяться, что невозможно, так как тело считается абсолютно твердым. Поэтому равенство (54) выполняется не только при плоскопараллельном, но и при любом движении твердого тела.

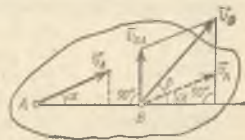


Рис. 149

Доказанная теорема позволяет легко находить скорость данной точки тела, если известны направление скорости этой точки и скорость какой-нибудь другой точки того же тела.

Задача 60. Найти зависимость между скоростями точек A и B линейки эллипсографа (см. рис. 145) при данном угле φ .

Решение. Направления скоростей точек A и B известны. Тогда, проектируя векторы $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$ на ось, направленную по AB , получим согласно доказанной теореме

$$v_A \cos \varphi = v_B \cos (90^\circ - \varphi),$$

откуда $v_A = v_B \operatorname{tg} \varphi$.

§ 56. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ ТОЧЕК ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ С ПОМОЩЬЮ МГНОВЕННОГО ЦЕНТРА СКОРОСТЕЙ. ПОНЯТИЕ О ЦЕНТРОИДАХ

Другой простой и наглядный метод определения скоростей точек плоской фигуры (или тела при плоском движении) основан на понятии о мгновенном центре скоростей.

Мгновенным центром скоростей называется точка плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю.

Легко убедиться, что если фигура движется непоступательно, то такая точка в каждый момент времени t существует и притом единственная. Пусть в момент времени t точки A и B плоской фигуры имеют скорости $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$, не параллельные друг другу (рис. 150). Тогда точка P , лежащая на пересечении перпендикуляров Aa к вектору $\vec{v}_A$ и Bb к вектору $\vec{v}_B$, и будет мгновенным центром скоростей, так как $\vec{v}_P = 0$ *. В самом деле, если допустить, что $\vec{v}_P \neq 0$, то по теореме о проекциях скоростей вектор $\vec{v}_P$ должен быть одновременно

перпендикулярен и AP , (так как $\vec{v}_A \perp AP$) и BP (так как $\vec{v}_B \perp BP$), что невозможно. Из той же теоремы видно, что никакая другая точка фигуры в этот момент времени не может иметь скорость, равную нулю (например, для точки a проекция $\vec{v}_a$ на линию Ba не равна нулю и, следовательно, $v_a \neq 0$ и т. д.).

Если теперь в момент времени t взять точку P за полюс, то по формуле (52) скорость точки A будет

$$\vec{v}_A = \vec{v}_P + \vec{v}_{PA} = \vec{v}_{PA},$$

так как $\vec{v}_P = 0$. Аналогичный результат получается для любой другой точки фигуры. Следовательно, скорости точек плоской фигуры определяются в данный момент времени так, как если бы движение фигуры было вращением вокруг мгновенного центра скоростей. При

* Размеры фигуры всегда можно представить себе такими, что точка P будет принадлежать этой фигуре (см. ниже пример и рис. 151).

этом согласно соотношениям (53):

$$\begin{aligned} v_A &= \omega \cdot PA \quad (\vec{v}_A \perp PA); \\ v_B &= \omega \cdot PB \quad (\vec{v}_B \perp PB) \text{ и т. д.} \end{aligned} \quad (55)$$

Из равенств (55) следует еще, что

$$\frac{v_A}{PA} = \frac{v_B}{PB}, \quad (56)$$

т. е. что скорости точек плоской фигуры пропорциональны их расстояниям от мгновенного центра скоростей.

Полученные результаты приводят к следующим выводам.

1. Для определения мгновенного центра скоростей надо знать только направления скоростей $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$ каких-нибудь двух точек A и B плоской фигуры (или траектории этих точек); мгновенный центр скоростей находится в точке пересечения перпендикуляров, восстановленных из точек A и B к скоростям этих точек (или к касательным к траекториям).

2. Для определения скорости любой точки плоской фигуры надо знать модуль и направление скорости какой-нибудь одной точки A фигуры и направление скорости другой ее точки B . Тогда, восстановив из точек A и B перпендикуляры к $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$, построим мгновенный центр скоростей P и по направлению $\vec{v}_A$ определим направление поворота фигуры. После этого, зная v_A , найдем по формуле (56) скорость v_M любой точки M плоской фигуры. Направлен вектор $\vec{v}_M$ перпендикулярно PM в сторону поворота фигуры.

3. Угловая скорость ω плоской фигуры равна в каждый данный момент времени отношению скорости какой-нибудь точки фигуры к ее расстоянию от мгновенного центра скоростей P :

$$\omega = \frac{v_B}{PB}, \quad (57)$$

что видно из формул (55).

Найдем еще другое выражение для ω . Из равенств (52) и (53) следует, что $v_{BA} = |\vec{v}_B - \vec{v}_A|$ и $v_{BA} = \omega \cdot AB$, откуда

$$\omega = \frac{|\vec{v}_B - \vec{v}_A|}{AB} = \frac{|\vec{v}_B + (-\vec{v}_A)|}{AB}. \quad (58)$$

Когда $v_A = 0$ (точка A — мгновенный центр скоростей), формула (58) переходит в (57).

Равенства (57) и (58) определяют одну и ту же величину, так как по доказанному (см. § 52) поворот плоской фигуры вокруг точки A или точки P происходит с одной и той же угловой скоростью ω .

Пример. Для линейки AD эллипсографа (рис. 151) направления скоростей точек A и B известны. Восставляя к ним перпендикуляры, найдем мгновенный центр скоростей P линейки (эллипсограф можно представить себе в виде листа фанеры).

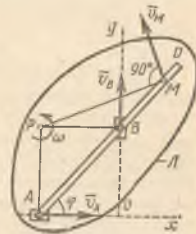


Рис. 151

неры J , прикрепленного шарнирно к ползунам A и B , а линейку AD — нарисованной на этом листе; точка P , принадлежащая листу, имеет скорость $v_P=0$. Зная P , из пропорции $v_A/PA=v_B/PB$ получим $v_A=v_B(PA/PB)=v_B \operatorname{tg} \varphi$, т. е. тот же результат, что и в задаче 60. Для точки M аналогично найдем, что $v_M=v_B(PM/PB)$. Длину PM можно вычислить, зная AB , AM и угол φ . Направление вектора $\vec{v}_M$ показано на чертеже ($\vec{v}_M \perp PM$).

Для угловой скорости линейки по формулам (57) или (58) находим

$$\omega = \frac{v_B}{PB} \quad \text{или} \quad \omega = \frac{|\vec{v}_B - \vec{v}_A|}{AB}.$$

Легко проверить, что обе формулы дают один и тот же результат.

Рассмотрим некоторые частные случаи определения мгновенного центра скоростей.

а) Если плоскопараллельное движение осуществляется путем качения без скольжения одного цилиндрического тела по поверхности другого неподвижного, то точка P катящегося тела, касающаяся неподвижной поверхности (рис. 152), имеет в данный момент времени вследствие отсутствия скольжения скорость, равную нулю ($v_P=0$), и, следовательно, является мгновенным центром скоростей. Примером служит качение колеса по рельсу.



Рис. 152

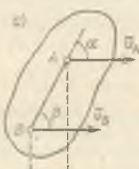


Рис. 153

б) Если скорости точек A и B плоской фигуры параллельны друг другу, причем линия AB не перпендикулярна $\vec{v}_A$ (рис. 153, а), то мгновенный центр скоростей лежит в бесконечности и скорости всех точек параллельны $\vec{v}_A$. При этом из теоремы о проекциях скоростей следует, что $v_A \cos \alpha = v_B \cos \beta$, т. е. $v_B = v_A$; аналогичный результат получается для всех других точек. Следовательно, в рассматриваемом случае скорости всех точек фигуры в данный момент времени равны друг другу и по модулю, и по направлению, т. е. фигура имеет *мгновенное поступательное распределение скоростей* (такое состояние движения тела называют еще *мгновенно поступательным*). Угловая скорость ω тела в этот момент времени, как видно из формулы (58), равна нулю.

в) Если скорости точек A и B плоской фигуры параллельны друг другу и при этом линия AB перпендикулярна $\vec{v}_A$, то мгновенный центр скоростей P определяется построением, показанным на рис. 153, б. Справедливость построений следует из пропорции (56). В этом случае, в отличие от предыдущих, для нахождения цент-

ра P надо кроме направлений знать еще и модули скоростей v_A и v_B .

г) Если известны вектор скорости $\vec{v}_B$ какой-нибудь точки B фигуры и ее угловая скорость ω , то положение мгновенного центра скоростей P , лежащего на перпендикуляре к $\vec{v}_B$ (см. рис. 150), можно найти из равенства (57), которое дает $BP = v_B / \omega$.

Мгновенный центр вращения и центроиды. Выше было показано, что скорости точек плоской фигуры распределены в каждый момент времени так, как если бы движение этой фигуры представляло собой вращение вокруг центра P . По этой причине точку неподвижной плоскости, совпадающую с мгновенным центром скоростей, которую мы также будем обозначать буквой P , называют *мгновенным центром вращения*, а ось Pz , перпендикулярную сечению S тела (см. рис. 141) и проходящую через точку P , — *мгновенной осью вращения* тела, совершающего плоскопараллельное движение. От неподвижной оси (или центра) вращения мгновенная ось (или центр) отличаются тем, что они все время меняют свое положение. В § 52 было установлено, что плоскопараллельное движение можно рассматривать как сложение из поступательного движения вместе с каким-то фиксированным полюсом и вращательного движения вокруг этого полюса. Полученный результат позволяет дать другую геометрическую картину плоского движения, а именно: *плоскопараллельное движение складывается из серии последовательных элементарных поворотов вокруг непрерывно меняющих свое положение мгновенных осей (или центров) вращения*.

Например, качение колеса, изображенного ниже на рис. 156, можно представить себе или как совокупность поступательного движения вместе с полюсом C и вращения вокруг этого полюса, или же как серию элементарных поворотов вокруг непрерывно изменяющей свое положение точки касания P обода с рельсом.

При движении плоской фигуры мгновенный центр P непрерывно изменяет свое положение как на неподвижной плоскости Oxy , так и на плоскости, связанной с дви-



Рис. 154

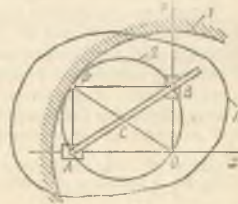


Рис. 155

жушей фигурой. Геометрическое место мгновенных центров вращения, т. е. положений точки P на неподвижной плоскости, называют *неподвижной центроидой*, а геометрическое место мгновенных центров скоростей, т. е. положений точки P в плоскости, связанной с фигурой и движущейся вместе с ней, — *подвижной центроидой* (рис. 154). В данный момент времени обе центроиды касаются друг друга в точке P , являющейся для этого момента мгновенным центром вращения (или скоростей); пересекаться центроиды не могут, так как тогда в данный момент времени существовало бы больше одного мгновенного центра, что невозможно. В следующий момент времени будут соприкасаться точки P_1 подвижной и P_1 неподвижной центроид, и эта точка будет для следующего момента мгновенным центром вращения и т. д. Отсюда, поскольку положение мгновенного центра P изменяется непрерывно и в каждый данный момент времени $v_P=0$, можно заключить, что при плоскопараллельном движении происходит качение без скольжения подвижной центроиды по неподвижной. Наоборот, если материально осуществить обе центроиды, то геометрическую картину плоского движения твердого тела можно получить, скрепив тело с подвижной центроидой и катя эту центроиду без скольжения по неподвижной.

Легко видеть, что для колеса, изображенного на рис. 156, ось Ox является неподвижной центроидой, а окружность $PEDK$ — подвижной. Качением без скольжения подвижной центроиды по неподвижной и осуществляется движение колеса.

Пример. Для линейки AB эллипсографа (рис. 155) мгновенный центр вращения находится в точке P (см. рис. 151). Так как расстояние $PO=AB=l$ в любой момент времени, то геометрическим местом точек P в плоскости Oxy , т. е. неподвижной центроидой, будет окружность радиуса l с центром в O . Но одновременно, если линейку AB представить нарисованной на листе фанеры L , то расстояние $PC=l/2$ центра P от точки C линейки будет тоже все время постоянным. Следовательно, геометрическим местом точек P на листе фанеры L , т. е. подвижной центроидой, будет окружность радиуса $l/2$ с центром в точке C . При движении эллипсографа окружность 2 катится без скольжения по окружности 1 и точка их касания в каждый момент времени будет мгновенным центром вращения. Наоборот, если окружности 1 и 2 осуществить материально (в виде шестерен) и катить одну по другой (неподвижной) без скольжения, то при этом диаметр AB окружности 2 воспроизведет движение линейки эллипсографа.

§ 57. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

Для определения искомых кинематических характеристик (угловой скорости тела или скоростей его точек) надо знать модуль и направление скорости какой-нибудь одной точки и направление скорости другой точки сечения этого тела (кроме случаев а) и в), рассмотренных в конце § 56). С определения этих характеристик по данным задачи и следует начинать решение.

Механизм, движение которого исследуется, надо изображать на чертеже в том положении, для которого требуется определить соответствующие характеристики. При расчете следует помнить, что понятие о мгновенном центре скоростей имеет место для данного твердого тела. В механизме, состоящем из нескольких тел, каждое непоступательно движущееся тело имеет в данный момент времени свой мгновенный центр скоростей и свою угловую скорость.

Задача 61. Определить скорость точки M обода катящегося колеса (см. задачу 59) с помощью мгновенного центра скоростей.

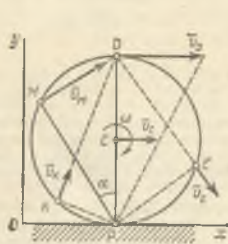


Рис. 156

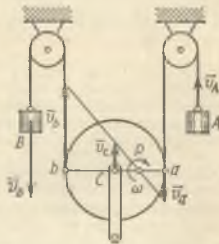


Рис. 157

Решение. Точка касания колеса P (рис. 156) является мгновенным центром скоростей, поскольку $v_P=0$. Следовательно, $\vec{v}_M \perp PM$. Так как прямой угол PMD опирается на диаметр, то направление вектора скорости $\vec{v}_M$ любой точки

обода проходит через точку D . Составляя пропорцию $v_M/PM=v_C/PC$ и замечая, что $PC=R$, а $PM=2R \cos \alpha$, находим $v_M=2v_C \cos \alpha$. Чем точка M дальше от P , тем ее скорость больше; наибольшую скорость $v_D=2v_C$ имеет верхний конец D вертикального диаметра. Угловая скорость колеса согласно формуле (57) имеет значение

$$\omega = v_C/PC = v_C/R.$$

Аналогичная картина распределения скоростей имеет место при качении колеса или шестерни по любой цилиндрической поверхности (см. рис. 152).

Задача 62. Определить скорость центра C подвижного блока радиуса r и его угловую скорость ω (рис. 157), если груз A поднимается со скоростью v_A , а груз B опускается со скоростью v_B . Нить при своем движении по подвижному блоку не проскальзывает, а ее ветви вертикальны.

Решение. Так как нить по подвижному блоку не проскальзывает, то скорости точек a и b блока равны по модулю скоростям грузов, т. е. $v_a=v_A$ и $v_b=v_B$. Зная скорости точек a и b и полагая для определенности, что $v_B > v_A$, находим положение мгновенного центра скоростей P подвижного блока таким же приемом, как и в случае, показанном на рис. 153, б. Скорость центра C блока изображается вектором $\vec{v}_C$. Для определения модуля v_C и угловой скорости ω подвижного блока составляем, пользуясь формулой (58), равенства:

$$\omega = \frac{|\vec{v}_b + (-\vec{v}_a)|}{ab}, \quad \omega = \frac{|\vec{v}_b - \vec{v}_a|}{bC}.$$

Отсюда, так как $ab=2r$, $bC=r$, находим:

$$\omega = (v_B + v_A)/2r, \quad v_C = (v_B - v_A)/2.$$

При $v_B > v_A$ центр C блока поднимается; если $v_B < v_A$, он будет опускаться. При $v_B = v_A$ получим $v_C=0$.

Для случая, когда оба груза A и B опускаются, значения ω и v_C найдем, заменив в полученных формулах v_A на $-v_A$.

Задача 63. В кривошипно-ползунном механизме (рис. 158) кривошип OA длиной r вращается с угловой скоростью ω_{OA} . Длина шатуна $AB=l$. При данном угле φ определить: 1) скорость ползуна B ; 2) положение точки M шатуна AB , имеющей наименьшую скорость; 3) угловую скорость ω_{AB} шатуна. Рассмотреть дополнительно положения механизма при $\varphi=0$ и $\varphi=90^\circ$.

Решение. Из данных задач следует, что точка A имеет скорость, численно равную $v_A = \omega_{OA} r$ и направленную перпендикулярно OA , а скорость точки B направлена вдоль BO . Этих данных достаточно для определения всех кинематических характеристик шатуна AB .

1. По теореме о проекциях скоростей $v_A \cos \alpha = v_B \cos \beta$. Но поскольку угол OAB , как внешний угол треугольника OAB , равен $\varphi + \beta$, то $\alpha = 90^\circ - (\varphi + \beta)$ и, следовательно,

$$v_B = \omega_{OA} r \frac{\sin(\varphi + \beta)}{\cos \beta} = \omega_{OA} r (\sin \varphi + \cos \varphi \operatorname{tg} \beta).$$

Исключим из этого равенства угол β . Из треугольника OAB $\sin \beta/r = \sin \varphi/l$; кроме того,

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \beta}{\sqrt{1 - \sin^2 \beta}}.$$

В результате находим

$$v_B = \omega_{OA} r \left(1 + \frac{r \cos \varphi}{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi}} \right) \sin \varphi.$$

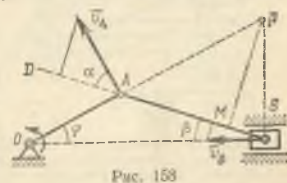


Рис. 158

2. Восставляя из точек A и B перпендикуляры к скоростям этих точек, определяем мгновенный центр скоростей P для шатуна AB (линия AP является продолжением OA). Наименьшую скорость имеет точка M , ближе всего расположенная к центру P , т. е. лежащая на перпендикуляре PM к AB . Скорость этой точки

$$v_M = v_A \cos \alpha = \omega_{OA} r \sin(\varphi - \beta).$$

3. Угловая скорость шатуна AB согласно формуле (57)

$$\omega_{AB} = v_A / PA \text{ или } \omega_{AB} = v_B / PB.$$

Длина PB (или PA) вычисляется по данным задачи.

4. При угле $\varphi = 0$ (рис. 159, а) перпендикуляр AB к скорости $\vec{v}_A$ и перпендикуляр Bb к направлению $\vec{v}_B$ пересекаются в точке B . Следовательно, точка B является в этом положении мгновенным центром скоростей и $v_B = 0$ («мертвое» положение механизма). Для этого положения

$$\omega_{AB} = v_A / AB = \omega_{OA} / l.$$

Распределение скоростей точек шатуна AB показано на чертеже.

5. При угле $\varphi = 90^\circ$ (рис. 159, б) скорости $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$ направлены параллельно и перпендикуляры к ним пересекаются в бесконечности. Следовательно, в этот момент времени все точки шатуна имеют одинаковые скорости, равные v_A ; $\omega_{AB} = 0$.

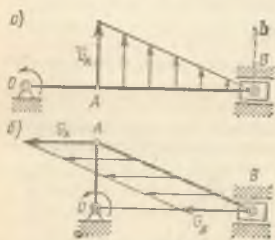


Рис. 159

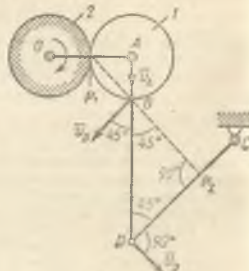


Рис. 161

Задача 64. Кривошип OA (рис. 160), вращающийся вокруг оси O с угловой скоростью ω_{OA} , несет на себе ось подвижной шестерни 1, катящейся по неподвижной шестерне 2. Радиусы шестерен одинаковы и равны r . К шестерне 1 шарнирно прикреплен шатун BD длиной l , соединенный с коромыслом DC . Определить угловую скорость ω_{BD} шатуна в момент, когда он перпендикулярен кривошипу OA , если в этот момент $\angle BDC = 45^\circ$.

Решение. Для определения ω_{BD} надо знать скорость какой-нибудь точки шатуна BD и положение его мгновенного центра скоростей. Найдем скорость точки B , пользуясь тем, что она одновременно принадлежит шестерне 1. Для шестерни 1 известны скорость $v_A = \omega_{OA} \cdot 2r$ ($v_A \perp OA$) и мгновенный центр скоростей P_1 . Следовательно, $\vec{v}_B \perp P_1B$ и по теореме о проекциях скоростей $v_B \cos 45^\circ = v_A$, откуда $v_B = v_A \sqrt{2} = 2r\omega_{OA} \sqrt{2}$.

Теперь для шатуна BD известны скорость $\vec{v}_B$ и направление скорости $\vec{v}_D$ ($\vec{v}_D \perp DC$). Восставляя перпендикуляры к $\vec{v}_B$ и $\vec{v}_D$, найдем мгновенный центр скоростей P_2 шатуна. При этом, как легко видеть, отрезок $BP_2 = l\sqrt{2}/2$. Тогда $\omega_{BD} = v_B / BP_2 = 4(r/l)\omega_{OA}$.

Заметим, что нельзя пытаться искать какой-нибудь мгновенный центр скоростей, восставляя перпендикуляры к векторам $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_D$. Точки A и D принадлежат

разным телам, и пересечение указанных перпендикуляров никакого центра скоростей не дает (сравн. с задачей 65).

Задача 65. На ось O (рис. 161) независимо друг от друга посажены шестерни 1 и кривошип OA , вращающийся с угловой скоростью ω_{OA} . Кривошип несет ось A шестерни 2, наглухо скрепленной с шатуном AB , проходящим через качающуюся муфту C . Радиусы шестерен 1 и 2 одинаковы ($r_1 = r_2 = r$). Определить угловую скорость ω шестерни 1 в тот момент времени, когда $OA \perp OC$, если при этом $\angle ACO = 30^\circ$.

Решение. Для определения угловой скорости ω шестерни 1 надо найти скорость ее точки E . Эту скорость найдем, пользуясь тем, что такую же скорость имеет точка E шестерни 2. Для шестерни 2 известны направление и модуль скорости точки A :

$$\vec{v}_A \perp OA, v_A = \omega_{OA} \cdot 2r.$$

Кроме того, мы знаем направление скорости $\vec{v}_E$, но в данном случае этого недостаточно, так как $\vec{v}_E \parallel \vec{v}_A$. По теореме проекций значение v_E также не найдется, так как $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_E$ перпендикулярны AE . Поэтому для дальнейшего решения воспользуемся тем, что шестерня 2 и шатун AB образуют одно тело (они склепаны). Для этого тела знаем направление скорости точки C : вектор $\vec{v}_C$ направлен вдоль CA , так как в точке C шатун может только проскальзывать вдоль муфты. Восставляя перпендикуляры к $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_C$, находим мгновенный центр скоростей P тела BAE .

По данным задачи $\angle ACO = 30^\circ$, откуда и $\angle CPA = 30^\circ$. Поэтому

$$AC = 2 \cdot AO = 4r, PA = 2 \cdot AC = 8r, PE = 7r.$$

Тогда из пропорции $v_E / PE = v_A / PA$ находим, что $v_E = (7/8) v_A = (7/4) r \omega_{OA}$. Отсюда $\omega_1 = v_E / OE = (7/4) \omega_{OA}$.



Рис. 161

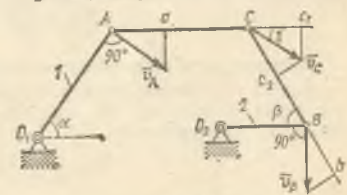


Рис. 162

Задача 66. В механизме, изображенном на рис. 162, кривошипы 1 и 2 длиной l_1 и l_2 соответственно могут вращаться независимо друг от друга вокруг осей O_1 и O_2 . При данных углах α и β ($O_2B \parallel AC$) найти: 1) чему должны равняться угловые скорости ω_1 и ω_2 кривошипов, чтобы шарнир C механизма имел в данный момент времени заданную скорость v_C , направленную под углом γ к звену AC ; 2) чему будет равна скорость v_B , если кривошипы имеют заданные угловые скорости ω_1 и ω_2 .

* Механизм имеет две степени свободы: его положение определяется двумя углами α и β , не зависящими друг от друга (угол α можно изменять, не изменяя угол β , и наоборот). Механизмы, рассматривавшиеся в предыдущих задачах, имеют одну степень свободы и положение каждого определяется одним углом, например у механизма, изображенного на рис. 158, углом φ . Подробнее вопрос о степенях свободы рассматривается в § 138.

Решение. Так как точка C принадлежит одновременно звеньям AC и BC , то по теореме о проекциях скоростей должно быть:

$$v_A \sin \alpha = v_C \cos \gamma, \quad v_B \sin \beta = v_C \cos (\beta - \gamma). \quad (a)$$

1. Из равенств (a), поскольку $v_A = \omega_1 l_1$, $v_B = \omega_2 l_2$, найдем, что v_C и γ будут иметь заданные значения, когда

$$\omega_1 = v_C \cos \gamma / l_1 \sin \alpha, \quad \omega_2 = v_C \cos (\beta - \gamma) / l_2 \sin \beta.$$

Как видим, рассматриваемый механизм действительно позволяет сообщить точке C перемещение в плоскости механизма по любому вперед заданному направлению с заданной скоростью. Подобные свойства механизмов используются в различных манипуляторах.

2. Если заданы ω_1 и ω_2 , то одновременно будут известны v_A и v_B . Тогда из уравнений (a) можно определить искомые значения v_C и γ , но расчет при этом будет обычно достаточно громоздким.

Однако задача легко и изящно решается графически. Для этого следует отложить вдоль продолжения AC отрезок $Cc_1 = Aa$, а вдоль CB — отрезок $Cc_2 = Bb$ и восставить из точки c_1 перпендикуляр к Cc_1 , а из точки c_2 — перпендикуляр к Cc_2 . Точка пересечения этих перпендикуляров и определяет конец искомого вектора v_C , так как Cc_1 является проекцией v_C на AC , а Cc_2 — проекцией v_C на CB .

§ 58*. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСКОРЕНИЙ ТОЧЕК ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ

Покажем, что ускорение любой точки M плоской фигуры (так же, как и скорость) складывается из ускорений, которые точка получает при поступательном и вращательном движениях этой фигуры. Положение точки M по отношению к осям Oxy (см. рис. 146) определяется радиусом-вектором $\vec{r} = \vec{r}_A + \vec{r}'$, где $\vec{r}' = \vec{AM}$. Тогда

$$\vec{a}_M = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2 \vec{r}_A}{dt^2} + \frac{d^2 \vec{r}'}{dt^2}.$$

В правой части этого равенства первое слагаемое есть ускорение $\vec{a}_A$ полюса A , а второе слагаемое определяет ускорение $\vec{a}_{MA}$, которое точка M получает при вращении фигуры вокруг полюса A (см. § 54). Следовательно,

$$\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}_{MA}. \quad (59)$$

Значение $\vec{a}_{MA}$, как ускорения точки вращающегося твердого тела, определяется по формулам (46) и (47) из § 51:

$$\vec{a}_{MA} = MA \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \quad \operatorname{tg} \mu = \varepsilon / \omega^2, \quad (60)$$

где ω и ε — угловая скорость и угловое ускорение фигуры*, а μ — угол между вектором $\vec{a}_{MA}$ и отрезком MA (рис. 163).

Таким образом, ускорение любой точки M плоской фигуры геометрически складывается из ускорения какой-нибудь другой точки A , принятой за полюс, и ускорения, которое точка M получает при вращении фигуры вокруг этого полюса. Модуль и направление ускоре-

* На чертеже сплошная дуговая стрелка показывает направление ω (направление вращения), а пунктирная — направление (знак) ε . При ускоренном вращении обе стрелки будут направлены в одну сторону, а при замедленном — в разные.

ния $\vec{a}_M$ находятся построением соответствующего параллелограмма (рис. 163).

Однако вычисление $\vec{a}_M$ с помощью параллелограмма, изображенного на рис. 163, усложняет расчет, так как предварительно надо будет находить значение угла μ , а затем — угла между векторами $\vec{a}_{MA}$ и $\vec{a}_A$. Поэтому при решении задач удобнее вектор $\vec{a}_{MA}$ заменять его касательной ($\vec{a}_{MA}^t$) и нормальной ($\vec{a}_{MA}^n$) составляющими и представить равенство (59) в виде

$$\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}_{MA}^t + \vec{a}_{MA}^n. \quad (61)$$

При этом вектор $\vec{a}_{MA}^n$ направлен перпендикулярно AM в сторону вращения, если оно ускоренное, и против вращения, если оно замедленное; вектор $\vec{a}_{MA}^t$ всегда направлен от точки M к полюсу A (рис. 164). Численно же

$$a_{MA}^t = AM \cdot \varepsilon, \quad a_{MA}^n = AM \cdot \omega^2. \quad (62)$$

Если полюс A движется не прямолинейно, то его ускорение можно тоже представить как сумму касательной $\vec{a}_A^t$ и нормальной $\vec{a}_A^n$ составляющих, тогда

$$\vec{a}_M = \vec{a}_A^t + \vec{a}_A^n + \vec{a}_{MA}^t + \vec{a}_{MA}^n. \quad (63)$$

Наконец, когда точка M движется криволинейно и ее траектория известна, то $\vec{a}_M$ в левых частях равенств (61) и (63) можно заменить суммой $\vec{a}_M^t + \vec{a}_M^n$. Формулами (61) — (63) и пользуются обычно при решении задач.

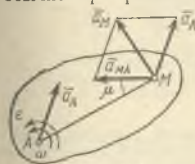


Рис. 163

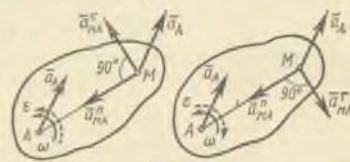


Рис. 164

Решение задач. Ускорение любой точки плоской фигуры в данный момент времени можно найти, если известны: 1) векторы скорости $\vec{v}_A$ и ускорения $\vec{a}_A$ какой-нибудь точки A этой фигуры в данный момент; 2) траектория какой-нибудь другой точки B фигуры. В ряде случаев вместо траектории второй точки фигуры достаточно знать положение мгновенного центра скоростей.

Тело (или механизм) при решении задач надо изображать в том положении, для которого требуется определить ускорение соответствующей точки. Расчет начинается с определения по данным задачи скорости и ускорения точки, принимаемой за полюс. Дальнейшие особенности расчета подробно рассматриваются в решенных ниже задачах. Там же даются необходимые дополнительные указания.

Задача 67. Центр O колеса, катящегося по прямолинейному рельсу (рис. 165), имеет в данный момент времени скорость $v_O = 1$ м/с и ускорение $a_O = 2$ м/с². Радиус колеса $R = 0,2$ м. Определить ускорение точки B — конца перпендикулярного OP диаметра AB и ускорение точки P , совпадающей с мгновенным центром скоростей.

Решение. 1) Так как $\vec{v}_O$ и $\vec{a}_O$ известны, принимаем точку O за полюс. 2) Определение ω . Точка касания P является мгновенным центром скоростей; следовательно, угловая скорость колеса

$$\omega = v_O / PO = v_O / R. \quad (a)$$

Направление ω определяется направлением $\vec{v}_O$ и показано на чертеже сплошной стрелкой.

3) Определение ϵ . Так как в равенстве (a) величина $PO = R$ остается постоянной при любом положении колеса, то, дифференцируя это равенство по времени, получим

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{R} \frac{dv_O}{dt} \quad \text{или} \quad \epsilon = \frac{a_O}{R}. \quad (б)$$

Знаки ω и ϵ совпадают, следовательно, вращение колеса ускоренное. Важно помнить, что величина ϵ определяется равенством (б) только в том случае, когда расстояние PO в формуле (a) постоянно.

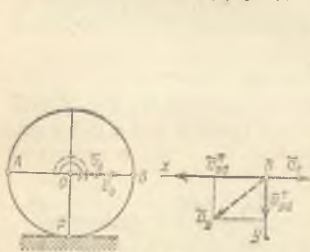


Рис. 165

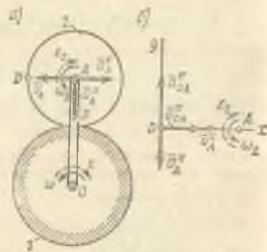


Рис. 166

Примечания: а) не следует думать, что если по условиям задачи $v_O = 1$ м/с, то $v_O = \text{const}$. Значение v_O в задаче указано для данного момента времени; с течением же времени v_O изменится, так как $a_O \neq 0$;

б) в данном случае $dv_O/dt = a_O$, так как движение точки O является прямолинейным. В общем случае $dv_O/dt = a_O^x$.

4) Определение $\vec{a}_{BO}$ и $\vec{a}_{BO}$. Так как за полюс взята точка O , то по формуле (61)

$$\vec{a}_B = \vec{a}_O + \vec{a}_{BO} + \vec{a}_{BO}. \quad (в)$$

Используя равенства (a) и (б) и учитывая, что в нашем случае $BO = R$, находим:

$$\vec{a}_{BO} = BO \cdot \epsilon = a_O = 2 \text{ м/с}^2, \quad \vec{a}_{BO} = BO \cdot \omega^2 = v_O^2 / R = 5 \text{ м/с}^2. \quad (г)$$

Показав на чертеже то $\vec{v}_B$ отдельно, изображаем (без соблюдения масштаба) векторы, из которых складывается ускорение $\vec{a}_B$, а именно: вектор $\vec{a}_O$ (переносим из точки O), вектор $\vec{a}_{BO}$ (в сторону вращения, так как оно ускоренное) и вектор $\vec{a}_{BO}$ (всегда от B к полюсу O).

5) Вычисление a_B . Проведя оси Dx и Dy , находим, что

$$a_{Bx} = a_{BO} = a_O = 3 \text{ м/с}^2, \quad a_{By} = a_{BO} = 2 \text{ м/с}^2,$$

откуда

$$a_B = \sqrt{a_{Bx}^2 + a_{By}^2} = \sqrt{13} = 3,6 \text{ м/с}^2.$$

Аналогичным путем легко найти и ускорение точки P : $a_P = a_{PO} = 5 \text{ м/с}^2$ и направлено вдоль PO . Таким образом, ускорение точки P , скорость которой в данный момент времени равна нулю, нулю не равно.

Задача 68. По неподвижной шестерне 1 радиуса $r_1 = 0,3$ м обкатывается шестерня 2 радиуса $r_2 = 0,2$ м, насаженная на кривошип OA (рис. 166, а). Кривошип, вращающийся вокруг оси O , имеет в данный момент времени угловую скорость $\omega = 1 \text{ с}^{-1}$ и угловое ускорение $\epsilon = -4 \text{ с}^{-2}$. Определить в этот момент времени ускорение точки D , лежащей на ободу подвижной шестерни (радиус AD перпендикулярен кривошипу).

Решение. 1) Для решения задачи надо рассмотреть движение шестерни 2. По данным задачи легко найти скорость v_A и ускорение a_A точки A этой шестерни, которую и выбираем за полюс.

2) Определение v_A и a_A . Зная ω и ϵ кривошипа, находим:

$$v_A = OA \cdot \omega = 0,5 \text{ м/с}; \quad a_A^x = OA \cdot \epsilon = -2 \text{ м/с}^2;$$

$$a_A^y = OA \cdot \omega^2 = 0,5 \text{ м/с}^2. \quad (a)$$

Так как знаки у v_A и a_A разные, то движение точки из данного положения является замедленным. Векторы $\vec{a}_A$ и $\vec{a}_A$ имеют направления, показанные на чертеже.

3) Определение ω_2 . Точка касания P является мгновенным центром скоростей для шестерни 2; следовательно, угловая скорость ω_2 шестерни 2

$$\omega_2 = v_A / AP = v_A / r_2; \quad \omega_2 = 2,5 \text{ с}^{-1}. \quad (б)$$

Направление ω_2 (направление вращения шестерни) определяется направлением v_A и показано сплошной стрелкой.

4) Определение ϵ_2 . Как и в предыдущей задаче, величина $AP = r_2$ во все время движения постоянна. Поэтому

$$\epsilon_2 = \frac{dv_A}{dt} = \frac{1}{r_2} \frac{dv_A}{dt} = \frac{a_A^x}{r_2}; \quad \epsilon_2 = -10 \text{ с}^{-2}. \quad (в)$$

Так как знаки ω_2 и ϵ_2 разные, то вращение шестерни 2 является замедленным.

5) Определение $\vec{a}_{DA}$ и $\vec{a}_{DA}$. Ускорение точки D найдем по формуле (63):

$$\vec{a}_D = \vec{a}_A + \vec{a}_{DA} + \vec{a}_{DA} + \vec{a}_{DA}.$$

В нашем случае $DA = r_2$ и

$$\vec{a}_{DA} = DA \cdot \epsilon_2 = -2 \text{ м/с}^2; \quad \vec{a}_{DA} = DA \cdot \omega_2^2 = 1,25 \text{ м/с}^2.$$

Изображаем на чертеже (рис. 166, б) векторы, из которых складывается ускорение $\vec{a}_D$, именно: $\vec{a}_A$, $\vec{a}_{DA}$ (переносим из точки A); $\vec{a}_{DA}$ (против вращения, так как оно замедленное); $\vec{a}_{DA}$ (от D к полюсу A).

6) Вычисление a_D . Проводя оси Dx и Dy , находим, что

$$a_{Dx} = |a_A^x| + a_{DA}^x = 3,25 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{Dy} = |a_A^y| - a_{DA}^y = 1,5 \text{ м/с}^2,$$

откуда

$$a_D = \sqrt{a_{Dx}^2 + a_{Dy}^2} \approx 3,58 \text{ м/с}^2.$$

Задача 69. К кривошипу OA , равномерно вращающемуся вокруг оси O с угловой скоростью $\omega_{OA} = 4 \text{ с}^{-1}$ (рис. 167), прикреплен шатун AB , соединенный с коромыслом BC . Даны размеры: $OA = r = 0,5$ м, $AB = 2r$, $BC = r\sqrt{2}$. В положении, изображенном на чертеже, $\angle OAB = 90^\circ$, а $\angle ABC = 45^\circ$. Определить для этого положения ускорение точки B шатуна, а также угловую скорость и угловое ускорение коромысла BC и шатуна AB .

Решение. 1) Рассмотрим движение шатуна AB ; выберем в качестве полюса точку A . Для нее, так как $\omega_{OA} = \text{const}$:

$$v_A = r\omega_{OA} = 2 \text{ м/с}; a_A = a_A^n = r\omega_{OA}^2 = 8 \text{ м/с}^2. \quad (\text{а})$$

Изображаем векторы $\vec{v}_A$ и $\vec{a}_A$ на чертеже.

2) Определение ω_{AB} . Нам известна траектория точки B шатуна (окружность радиуса BC). Зная поэтому направление $\vec{v}_B \perp BC$, строим мгновенный центр скоростей P шатуна AB . Легко видеть, что $AP = AB = 2r$. Тогда

$$\omega_{AB} = v_A/AP \text{ или } \omega_{AB} = \omega_{OA}/2 = 2 \text{ с}^{-1}. \quad (\text{б})$$

Направление поворота показано на чертеже.

В этом случае расстояние AP при движении механизма не остается постоянным и для определения ϵ_{AB} нельзя воспользоваться приемом, примененным в двух предыдущих задачах. Рассмотрим поэтому другой метод решения.

3) Анализ векторного уравнения (61). Учитывая, что $\vec{a}_B = \vec{a}_B^n + \vec{a}_B^t$, представим уравнение (61) в виде

$$\vec{a}_B + \vec{a}_B^t = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^t. \quad (\text{в})$$

Изобразим все векторы на рис. 167 ($\vec{a}_B$ и $\vec{a}_{BA}^n$ направим так, как если бы соответствующие вращения были ускоренными). Рассмотрим, какие из входящих в уравнение (в) величин известны численно или могут быть по данным задачи вычислены. Мы знаем ускорение $\vec{a}_A$ полюса A . Кроме того, зная ω_{AB} , можно найти $\vec{a}_{BA}^n$, а зная v_A , можно определить v_B и вычислить $\vec{a}_{BA}^t = v_B/BC$. Таким образом, в векторном уравнении (в) неизвестны только числовые значения двух подчеркнутых величин: $\vec{a}_B$ и $\vec{a}_{BA}^t$. Но в проекциях на оси равенство (в) дает два скалярных уравнения, из которых эти неизвестные и определяются.

Произведем предварительно подсчет $\vec{a}_{BA}^n$ и $\vec{a}_B$.

4) Определение $\vec{a}_{BA}^n$. Зная ω_{AB} , по формуле (62) находим

$$\vec{a}_{BA}^n = AB \cdot \omega_{AB}^2 = 4 \text{ м/с}^2. \quad (\text{г})$$

5) Определение $\vec{a}_B$. Зная траекторию точки B , можно определить нормальное ускорение $\vec{a}_B^n$ этой точки. Для этого найдем сначала по теореме проекций (или с помощью мгновенного центра P) скорость v_B . Получим $v_B \cos 45^\circ = v_A$, откуда $v_B = v_A/\sqrt{2}$. Тогда

$$\vec{a}_B^n = v_B^2/BC = 2v_A^2/r\sqrt{2} = 8\sqrt{2} \text{ м/с}^2. \quad (\text{д})$$

6) Определение $\vec{a}_B$ и $\vec{a}_B^t$. Для определения $\vec{a}_B$ спроектируем обе части равенства (в) на ось BA , перпендикулярную другому неизвестному вектору $\vec{a}_{BA}^t$. Получим

$$\vec{a}_B^n \cos 45^\circ + \vec{a}_B^t \cos 45^\circ = \vec{a}_{BA}^n.$$

Подставляя сюда вычисленные значения $\vec{a}_B^n$ и $\vec{a}_{BA}^n$, найдем

$$\vec{a}_B = \vec{a}_{BA}^n \sqrt{2} - \vec{a}_B^t = -4\sqrt{2} \text{ м/с}^2. \quad (\text{е})$$

Знак минус показывает, что вектор $\vec{a}_B$ имеет направление, противоположное $\vec{v}_B$ (вращение коромысла CB из данного положения замедленное).

Теперь определяем $\vec{a}_B^t$:

$$a_B = \sqrt{(\vec{a}_B^n)^2 + (\vec{a}_B^t)^2} = 4\sqrt{10} = 12,65 \text{ м/с}^2.$$

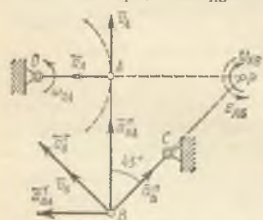


Рис. 167

7) Определение ω_{BC} и ϵ_{BC} . Зная $v_B = v_A/\sqrt{2}$ и $\vec{a}_B^n$, находим

$$\omega_{BC} = v_B/BC = 4 \text{ с}^{-1}, \quad \epsilon_{BC} = \vec{a}_B^n/BC = -8 \text{ с}^{-2}.$$

8) Определение ϵ_{AB} . Чтобы найти ϵ_{AB} , надо вычислить $\vec{a}_{BA}^t$. Для этого спроектируем обе части равенства (в) на ось BP , перпендикулярную $\vec{a}_B$. Получим

$$\vec{a}_B^t = -\vec{a}_A \cos 45^\circ - \vec{a}_{BA}^n \cos 45^\circ + \vec{a}_{BA}^t \cos 45^\circ.$$

Отсюда

$$\vec{a}_{BA}^t = -\vec{a}_A \sqrt{2} - \vec{a}_{BA}^n = -20 \text{ м/с}^2$$

и по первой из формул (62)

$$\epsilon_{AB} = \vec{a}_{BA}^t/AB = -20 \text{ с}^{-2}.$$

Знак минус в обоих случаях указывает, что вращение шатуна AB из рассматриваемого положения является замедленным.

§ 59*. МГНОВЕННЫЙ ЦЕНТР УСКОРЕНИЙ

При непоступательном движении плоской фигуры у нее в каждый момент времени имеется точка Q , ускорение которой равно нулю. Эта точка называется *мгновенным центром ускорений*. Определяется положение центра Q , если известны ускорение $\vec{a}_A$ какой-нибудь точки A фигуры и величины ω и ϵ , следующим путем:

1) находим значение угла μ из формулы $\text{tg } \mu = \epsilon/\omega^2$;
2) от точки A под углом μ к вектору $\vec{a}_A$ проводим прямую AQ (рис. 168); при этом прямая AQ должна быть отклонена от $\vec{a}_A$ в сторону вращения фигуры, если вращение является ускоренным, и против вращения, если оно является замедленным, т. е. в сторону направления углового ускорения ϵ ;

3) откладываем вдоль линии AQ отрезок AQ , равный

$$AQ = a_A/\sqrt{\epsilon^2 + \omega^4}. \quad (64)$$

Построенная таким путем точка Q и будет мгновенным центром ускорений. В самом деле, по формулам (59) и (60)

$$\vec{a}_Q = \vec{a}_A + \vec{a}_{QA},$$

где численно $a_{QA} = AQ\sqrt{\epsilon^2 + \omega^4}$. Подставляя сюда значение AQ из равенства (64), находим, что $a_{QA} = a_A$. Кроме того, вектор $\vec{a}_{QA}$ должен образовывать с линией AQ угол μ , следовательно, вектор $\vec{a}_{QA}$ параллелен $\vec{a}_A$, но направлен в противоположную сторону. Поэтому $\vec{a}_{QA} = -\vec{a}_A$ и $\vec{a}_Q = 0$.

Если точку Q выбрать за полюс, то так как $\vec{a}_Q = 0$, ускорение любой точки M тела, согласно формуле (59) будет

$$\vec{a}_M = \vec{a}_Q + \vec{a}_{MQ} = \vec{a}_{MQ}. \quad (65)$$

При этом из равенств (60) следует, что численно

$$a_M = MQ\sqrt{\epsilon^2 + \omega^4}. \quad (66)$$

Следовательно, ускорения точек плоской фигуры определяются в данный момент времени так, как если бы движение фигуры было вращением вокруг мгновенного центра ускорений Q . При этом, как следует из (66),

$$a_M/MQ = a_A/AQ = \dots = \sqrt{\epsilon^2 + \omega^4}. \quad (67)$$

т. е. ускорения точек плоской фигуры пропорциональны их расстояниям от мгновенного центра ускорений. Картина распределения ускорений (т. е. поле ускорений) точек плоской фигуры в данный момент времени показана на рис. 169.



Рис. 168

Следует иметь в виду, что положения мгновенного центра скоростей P и мгновенного центра ускорений Q в данный момент времени не совпадают. Например, если колесо катится по прямолинейному рельсу (см. рис. 170), причем скорость его центра C постоянна ($v_C = \text{const}$), то мгновенный центр скоростей находится в точке P ($v_P = 0$), но при этом, как было показано в задаче 67, $a_P \neq 0$; следовательно, точка P не является одновременно мгновенным центром ускорений. Мгновенный

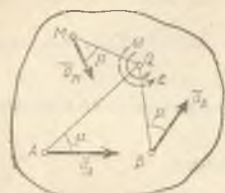


Рис. 169



Рис. 170

центр ускорений в этом случае находится, очевидно, в точке C , так как она движется равномерно и прямолинейно и $a_C = 0$. Центры скоростей и ускорений совпадают тогда, когда фигура (тело) вращается вокруг неподвижной оси.

Понятием о мгновенном центре ускорений удобно пользоваться при решении некоторых задач.

Задача 70. Колесо катится по прямолинейному рельсу так, что скорость v_C его центра C постоянна. Определить ускорение точки M обода колеса (рис. 170).

Решение. Так как по условиям задачи $v_C = \text{const}$, то $a_C = 0$ и точка C является мгновенным центром ускорений. Мгновенный центр скоростей находится в точке P . Следовательно, для колеса

$$\omega = v_C / PC = v_C / R = \text{const}, \quad \varepsilon = d\omega / dt = 0, \quad \text{tg } \mu = \varepsilon / \omega^2 = 0, \quad \mu = 0,$$

В результате по формуле (66) находим

$$a_M = MC \cdot \omega^2 = v_C^2 / R.$$

Таким образом, ускорение любой точки M обода (в том числе и точки P) равно v_C^2 / R и направлено к центру C колеса, так как угол $\mu = 0$. Заместим, что это ускорение для точки M не будет нормальным ускорением. В самом деле, скорость точки M направлена перпендикулярно PM (см. задачу 61). Следовательно, касательная Mt к траектории точки M направлена вдоль линии MD , а главная нормаль Mn — вдоль MP . Поэтому $a_M = a_M \cos \alpha$, $a_M = a_M \sin \alpha$.

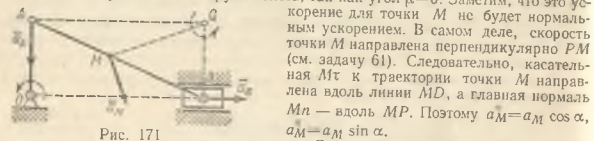


Рис. 171

Задача 71. Кривошип OA вращается с постоянной угловой скоростью ω_0 (рис. 171). Найти ускорение ползуна B и угловое ускорение шатуна AB в тот момент времени, когда $\angle BOA = 90^\circ$, если $OA = r$, $AB = l$.

Решение. В рассматриваемый момент времени скорости всех точек шатуна AB равны v_A (см. задачу 63, рис. 159, б), мгновенный центр скоростей находится в бесконечности и $\omega_{AB} = 0$. Тогда $\text{tg } \mu = \varepsilon_{AB} / \omega_{AB} = \infty$ и $\mu = 90^\circ$ ($\varepsilon_{AB} \neq 0$, так как в противном случае по формулам (60) и (59) $a_{BA} = 0$ и $a_B = a_A$, что невозможно, поскольку эти два вектора взаимно перпендикулярны).

Ускорение точки A $a_A = a_A = r\omega_0^2$ и направлено вдоль AO . Ускорение точки B , так как она движется прямолинейно, направлено вдоль OB . Из рис. 169 видно,

что ускорение любой точки M тела направлено под углом μ к линии MQ . В данном случае $\mu = 90^\circ$; следовательно, линии AQ и BQ должны быть перпендикулярны a_A и a_B . Восстанавливая эти перпендикуляры, находим положение точки Q . Составляя теперь пропорцию (67) $a_B / BQ = a_A / AQ$, где $BQ = r$, $AQ = \sqrt{l^2 - r^2}$, получаем

$$a_B = \frac{r^2}{\sqrt{l^2 - r^2}} \omega_0^2.$$

Ускорение a_M любой другой точки M шатуна AB будет перпендикулярно MQ ($\mu = 90^\circ$); модуль a_M находится из пропорции (67).

Угловое ускорение ε_{AB} шатуна найдем из равенства $a_B = BQ \cdot \varepsilon_{AB}$, которое дает формула (66) при $\omega_{AB} = 0$. Следовательно,

$$\varepsilon_{AB} = \frac{a_B}{BQ} = \frac{r}{\sqrt{l^2 - r^2}} \omega_0^2.$$

Глава XII*

ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ И ДВИЖЕНИЕ СВОБОДНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 60. ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА, ИМЕЮЩЕГО ОДНУ НЕПОДВИЖНУЮ ТОЧКУ

Рассмотрим движение по отношению к системе отсчета $Ox_1y_1z_1$ твердого тела, закрепленного так, что одна его точка O остается во все время движения неподвижной. Такое движение совершает, например, волчок, у которого неподвижна точка его опоры о плоскость, или любое другое тело, закрепленное в точке O шаровым шарниром.

1. **У р а в н е н и я д в и ж е н и я.** Найдем, какими параметрами определяется положение тела, имеющего неподвижную точку. Для этого свяжем жестко с телом трехгранник $Oxyz$, по положению которого можно судить о положении тела (рис. 172). Линия OK , вдоль которой пересекаются плоскости Oxy и Ox_1y_1 , называется **линией узлов**. Тогда положение по отношению к осям $Ox_1y_1z_1$ трехгранника $Oxyz$, а с ним и самого тела можно определить углами:

$$\varphi = \angle KOx, \quad \psi = \angle x_1OK, \quad \theta = \angle z_1Oz.$$

Эти углы, называемые **углами Эйлера**, имеют следующие, взятые из небесной механики наименования: φ — **угол собственного вращения**, ψ — **угол прецессии**, θ — **угол нутации**. Положительные направления отсчета углов показаны на рис. 172 стрелками.

Чтобы знать движение тела, надо знать его положение по отношению к осям $Ox_1y_1z_1$ в любой момент времени, т. е. знать зависимости:

$$\varphi = f_1(t), \quad \psi = f_2(t), \quad \theta = f_3(t). \quad (68)$$

Уравнения (68), определяющие закон происходящего движения, называются *уравнениями движения твердого тела вокруг неподвижной точки*.

2. Угловая скорость тела. При изменении угла φ тело совершает вращение вокруг оси Oz (собственное вращение) с угловой скоростью $\omega_1 = \dot{\varphi}$, при изменении угла ψ — вращение вокруг оси Oz_1 (прецессия) с угловой скоростью $\omega_2 = \dot{\psi}$ и при изменении

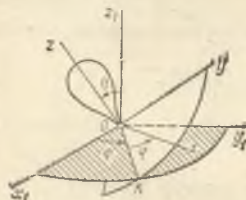


Рис. 172

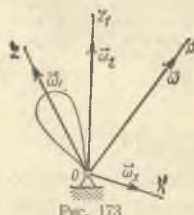


Рис. 173

угла θ — вращение вокруг линии узлов OK (нута́ция) с угловой скоростью $\omega_3 = \dot{\theta}$. Векторы $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ этих угловых скоростей направлены соответственно по осям Oz, Oz_1 и OK (рис. 173). Поскольку при движении тела изменяются вообще все три угла, движение тела представляет собой вращение с угловой скоростью $\bar{\omega}$, равной геометрической сумме названных угловых скоростей (справедливость этого вывода будет подтверждена в § 71). Таким образом, $\bar{\omega} = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$.

Поскольку значения $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ со временем изменяются, вектор $\bar{\omega}$ будет при движении тела тоже изменяться и численно, и по направлению. По этой причине $\bar{\omega}$ называют еще *мгновенной угловой скоростью тела*.

3. Геометрическая картина движения тела. Если тело имеет в данный момент времени угловую скорость $\bar{\omega}$, то его элементарное перемещение за промежуток времени dt представляет собой элементарный поворот на угол $d\theta = \bar{\omega} dt$ вокруг оси OP , вдоль которой направлен вектор $\bar{\omega}$ (см. рис. 173). Эта ось OP называется *мгновенной осью вращения*. Иначе, мгновенная ось вращения — это ось, элементарным поворотом вокруг которой тело перемещается из данного положения в положение бесконечно близкое к данному. От неподвижной оси мгновенная ось вращения отличается тем, что ее направления и в пространстве, и в самом теле непрерывно меняются.

Переместившись элементарным поворотом вокруг оси OP в соседнее положение, тело из этого положения в последующее перемещается поворотом вокруг новой мгновенной оси вращения OP_1 и т. д. Таким образом, движение твердого тела вокруг неподвижной точки

слагается из серии последовательных элементарных поворотов вокруг мгновенных осей вращения, проходящих через эту неподвижную точку (рис. 174).

4. Угловое ускорение тела. Векторная величина $\bar{\epsilon} = d\bar{\omega}/dt$, (69)

характеризующая изменение с течением времени угловой скорости и по модулю, и по направлению, называется *угловым ускорением тела в данный момент времени* или *мгновенным угловым ускорением*.

При изменении вектора $\bar{\omega}$ его конец A будет описывать в пространстве некоторую кривую AD , являющуюся годографом вектора $\bar{\omega}$ (см. рис. 174). Тогда, сравнивая выражение (69) с равенством $\bar{v} = d\bar{r}/dt$, приходим к выводу, что угловое ускорение $\bar{\epsilon}$ можно вычислять как скорость, с которой конец вектора $\bar{\omega}$ перемещается вдоль кривой AD . В частности, направление $\bar{\epsilon}$ совпадает с направлением касательной к кривой AD в соответствующей точке. Следовательно, в данном случае, в отличие от случая вращения вокруг неподвижной оси, направление вектора $\bar{\epsilon}$ не совпадает с направлением вектора $\bar{\omega}$.

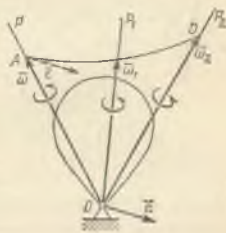


Рис. 174

Векторы $\bar{\omega}$ и $\bar{\epsilon}$ являются основными кинематическими характеристиками движения тела, имеющего неподвижную точку. Их можно определить аналитически, зная уравнения движения (68), как это показано в § 61. Значение $\bar{\omega}$ можно найти и геометрически (см. § 62).

§ 61. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА

Для определения вектора $\bar{\omega}$ найдем его проекции на подвижные оси $Ox_1y_1z_1$ (рис. 175). Как было отмечено в § 60, этот вектор можно представить в виде

$$\bar{\omega} = \omega_1 \bar{e}_1 + \omega_2 \bar{e}_2 + \omega_3 \bar{e}_3, \quad (70)$$

где численно

$$\omega_1 = \dot{\varphi}, \quad \omega_2 = \dot{\psi}, \quad \omega_3 = \dot{\theta}. \quad (71)$$

Проектируя обе части равенства (70) на оси x, y, z , получим:

$$\omega_x = \omega_{1x} + \omega_{2x} + \omega_{3x}, \quad \omega_y = \omega_{1y} + \omega_{2y} + \omega_{3y}, \quad \omega_z = \omega_{1z} + \omega_{2z} + \omega_{3z}. \quad (72)$$

Проекции векторов $\bar{\omega}_1$ и $\bar{\omega}_3$ находим сразу [см. рис. 175 и обозначения (71)]:

$$\omega_{1x} = \omega_{1y} = 0, \quad \omega_{1z} = \dot{\varphi}; \quad \omega_{3x} = \dot{\theta} \cos \varphi, \quad \omega_{3y} = -\dot{\theta} \sin \varphi, \quad \omega_{3z} = 0.$$

Для определения проекций вектора $\bar{\omega}_2$ проведем через оси Ox_1 и Oz плоскость, которая пересечется с плоскостью Oxy вдоль линии OL . Так как линия OK перпендикулярна плоскости xOz_1 , то она перпендикулярна и линии OL ($\angle KOL = 90^\circ$, а $\angle LOy = \varphi$). Тогда, проектируя вектор $\bar{\omega}_2$ на линию OL , а эту проекцию в свою

очередь на оси Ox и Oy , получим:

$$\omega_{2x} = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi, \quad \omega_{2y} = \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi, \quad \omega_{2z} = \dot{\psi} \cos \theta.$$

Подставляя все вычисленные проекции в правые части равенств (72), найдем окончательно

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \\ \omega_y &= \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, \\ \omega_z &= \dot{\psi} + \dot{\theta} \cos \theta. \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

Уравнения (73) называются *кинематическими уравнениями Эйлера*. Они определяют проекции вектора угловой скорости тела ω на подвижные оси Ox, Oy, Oz через углы Эйлера; тем самым определяется и вектор ω .

Аналогично можно найти проекции вектора ω на неподвижные оси Ox_1, Oy_1, Oz_1 . Соответствующие формулы имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \omega_{x_1} &= \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi, \\ \omega_{y_1} &= -\dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi + \dot{\theta} \sin \psi, \\ \omega_{z_1} &= \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}. \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

Используя равенства (74), можно определить проекции на неподвижные оси Ox_1, Oy_1, Oz_1 вектора ε . Так как значение ε дается формулой (69), то *

$$\varepsilon_{x_1} = \dot{\omega}_{x_1}, \quad \varepsilon_{y_1} = \dot{\omega}_{y_1}, \quad \varepsilon_{z_1} = \dot{\omega}_{z_1}. \quad (75)$$

Эти проекции и определяют вектор ε . Таким образом, зная уравнения движения (68), можно по полученным формулам найти ω и ε .

§ 62. СКОРОСТИ И УСКОРЕНИЯ ТОЧЕК ТЕЛА

Так как тело, движущееся вокруг неподвижной точки, имеет в каждый момент времени мгновенную ось вращения OP , вокруг которой происходит элементарный поворот с угловой скоростью ω (рис. 176), то вектор скорости какой-нибудь точки M тела будет определяться в этот момент равенством (48) из § 51, т. е.

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad (76)$$

где $\vec{r}$ — радиус-вектор, проведенный в точку M из неподвижной точки O . Направлен вектор $\vec{v}$ перпендикулярно плоскости MOP , проходящей через точку M и ось OP , в сторону поворота тела. Численно же

$$v = \omega h, \quad (76')$$

где $h = MC$ — расстояние точки M от мгновенной оси.

Геометрически скорость любой точки M тела в данный момент времени можно найти, зная в этот момент скорость v_A

* Заметим, что, дифференцируя равенства (73), нельзя найти проекции вектора ε на оси x, y, z , так как соотношения (11) из § 40 справедливы только для проекций на неподвижные оси.

какой-нибудь точки A тела и направление скорости $\vec{v}_B$ другой точки B этого тела (сравни с § 56). Пусть $\vec{v}_A$ и направление $\vec{v}_B$ известны. Проведем тогда через точку A плоскость I , перпендикулярную вектору $\vec{v}_A$ (рис. 177). Как показано выше (см. рис. 176), мгновенно ось OP должна лежать в этой плоскости. Но одновременно ось

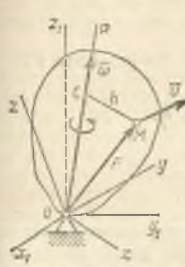


Рис. 176



Рис. 177

OP должна лежать и в плоскости 2, проведенной через точку B перпендикулярно вектору $\vec{v}_B$. Следовательно, прямая, по которой пересекутся эти плоскости, и будет мгновенной осью вращения OP . Теперь, определив расстояние h точки A от оси OP , по формуле (76') найдем угловую скорость ω тела в данный момент времени: $\omega = v_A/h$. После этого значение скорости v_M любой точки M тела находится по формуле (76'), а вектор $\vec{v}_M$ будет направлен перпендикулярно плоскости OMP .

В частном случае, когда известно, что скорость какой-то точки тела равна в данный момент времени нулю, прямая, проходящая через эту точку и неподвижную точку O тела, будет мгновенной осью вращения и расчет существенно упростится (см. задачу 72).

Аналитически скорость $\vec{v}$ определяют по ее проекциям на какие-нибудь координатные оси. Найдем проекции вектора $\vec{v}$ на оси Ox, Oy, Oz , жестко связанные с телом и движущиеся с ним (см. рис. 176); эти оси имеют то преимущество, что в них координаты x, y, z точки M будут величинами постоянными. Так как $r_x = x, r_y = y, r_z = z$, то по известной формуле векторной алгебры

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix}.$$

Отсюда, разлагая определитель по элементам первой строки и учитывая, что $\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$ и что, следовательно, коэффициенты при $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ в этом разложении должны равняться v_x, v_y, v_z соответственно, получим

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \omega_y z - \omega_z y, \\ v_y &= \omega_z x - \omega_x z, \\ v_z &= \omega_x y - \omega_y x. \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

Эти формулы, как и формулу (76), называют *формулами Эйлера*. Каждую из них можно тоже получить из предыдущей круговой перестановкой букв x, y, z (см. формулы (47) и рис. 90, б в § 28).

В частном случае формулы (77), конечно, справедливы и при вращении тела вокруг неподвижной оси z . Так как при этом $\omega_x = \omega_y = 0$ и $\omega_z = \omega$, то для такого случая

$$v_x = -\omega y, \quad v_y = \omega x, \quad v_z = 0. \quad (77')$$

Определим теперь ускорение точки M . Из равенства (76), дифференцируя его по времени, найдем

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = (\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}) + (\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}).$$

Так как $\dot{\vec{\omega}} = \vec{\epsilon}$, а $\dot{\vec{r}} = \vec{v}$, то окончательно

$$\vec{a} = (\vec{\epsilon} \times \vec{r}) + (\vec{\omega} \times \vec{v}). \quad (78)$$

Ускорение $\vec{a}_1 = \vec{\epsilon} \times \vec{r}$ называют еще *вращательным*, а ускорение $\vec{a}_2 = \vec{\omega} \times \vec{v}$ — *осесрежимительным* ускорением точки M . Вектор $\vec{a}_1$ направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через точку M и вектор $\vec{\epsilon}$ (рис. 178), а по модулю $a_1 = \epsilon r \sin \beta = \epsilon h_1$, где h_1 — расстояние от точки M до вектора $\vec{\epsilon}$. Вектор же $\vec{a}_2$, перпендикулярный одновременно $\vec{v}$ и $\vec{\omega}$, будет направлен вдоль MC (см. рис. 176), причем по модулю $a_2 = \omega v \sin 90^\circ = \omega^2 h$, так как $v = \omega h$.

Заметим, что в отличие от результатов, полученных в § 51, здесь $\vec{a}_1 = \vec{\epsilon} \times \vec{r}$ не будет вообще вектором касательного ускорения точки M (по касательной направлен вектор $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, а направление вектора $\vec{\epsilon} \times \vec{r}$ будет вообще другим); следовательно, и вектор $\vec{\omega} \times \vec{v}$ не будет вектором нормального ускорения точки M .

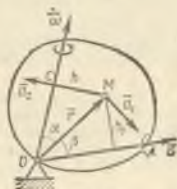


Рис. 178

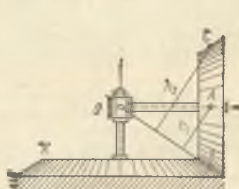


Рис. 179

Задача 72. Найти скорости точек B и C конического катка (бегуна), если скорость v_A центра A катка, движущегося по окружности радиуса OA , известна (рис. 179). Каток при движении катится без скольжения по неподвижной конической поверхности K .

Решение. Каток движется вокруг неподвижной точки O . Так как его качение по поверхности K происходит без скольжения, то скорости точек катка, лежащие в данный момент времени на линии OB , равны нулю и, следовательно, OB является мгновенной осью вращения. Тогда $v_A = \omega h_1$, где ω — угловая ско-

рость катка при его повороте вокруг оси OB , а h_1 — расстояние точки A от этой оси. Отсюда $\omega = v_A / h_1$.

Скорость v_C точки C будет равна ωh_2 , где h_2 — расстояние точки C от оси OB . Так как в данном случае $h_2 = 2h_1$, то $v_C = 2v_A$. Для точки B , лежащей на мгновенной оси вращения, $v_B = 0$.

§ 63. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ ДВИЖЕНИЯ СВОБОДНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Рассмотрим наиболее общий случай движения твердого тела, когда оно является свободным и может перемещаться как угодно по отношению к системе отсчета $Ox_1y_1z_1$ (рис. 180). Установим вид уравнений, определяющих закон рассматриваемого движения. Выберем произвольную точку A тела в качестве полюса и проведем через нее оси $Ax_2y_2z_2$, которые при движении тела будут перемещаться вместе с полюсом поступательно. Тогда положение тела в системе отсчета $Ox_1y_1z_1$ будет известно, если будем знать положение полюса A , т. е. его координаты x_{1A}, y_{1A}, z_{1A} , и положение тела по отношению к осям $Ax_2y_2z_2$, определяемое, как и в случае, рассмотренном в § 60, углами Эйлера φ, ψ, θ (см. рис. 172; на рис. 180 углы Эйлера не показаны, чтобы не затемнять чертеж). Следовательно, уравнения движения свободного твердого тела, позволяющие найти его положение по отношению к системе отсчета $Ox_1y_1z_1$ в любой момент времени, имеют вид

$$\left. \begin{aligned} x_{1A} &= f_1(t), & y_{1A} &= f_2(t), & z_{1A} &= f_3(t); \\ \varphi &= f_4(t), & \psi &= f_5(t), & \theta &= f_6(t). \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

Установим теперь геометрическую картину рассматриваемого движения. Нетрудно видеть, что первые три из уравнений (79) определяют то движение, которое тело совершало бы при постоянных



Рис. 180

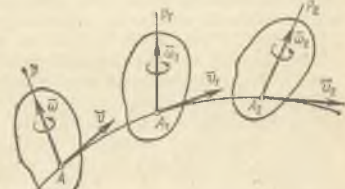


Рис. 181

углах φ, ψ, θ , т. е. при поступательном движении тела вместе с полюсом A . Последние же три уравнения определяют движение, которое происходило бы при постоянных значениях координат x_{1A}, y_{1A}, z_{1A} , т. е. когда точка A неподвижна. Но движение тела вокруг неподвижной точки, как установлено в § 60, складывается из элементарных поворотов вокруг мгновенных осей вращения. От-

сюда заключаем, что в общем случае движение свободного твердого тела можно рассматривать как складывающееся из поступательного движения, при котором все точки тела движутся как произвольно выбранный полюс A со скоростью $\vec{v}_A$, и из серии элементарных поворотов с угловой скоростью $\vec{\omega}$ вокруг мгновенных осей вращения, проходящих через полюс A (рис. 181). Такой будет, например, картина движения любого непоступательного перемещающегося в воздухе тела: брошенного камня, самолета, проделывающего фигуры высшего пилотажа, артиллерийского снаряда и т. д. Наконец, аналогичной может быть картина движения и несвободного твердого тела при наличии соответствующих связей (см., например, в § 72 рис. 207; в том же параграфе показано, как можно еще иначе представить геометрическую картину движения свободного твердого тела).

Основными кинематическими характеристиками движения являются скорость $\vec{v}_A$ и ускорение $\vec{a}_A$ полюса, определяющие скорость и ускорение поступательной части движения, а также угловая скорость $\vec{\omega}$ и угловое ускорение $\vec{\epsilon}$ вращения вокруг полюса. Значения этих величин в любой момент времени можно найти по уравнениям (79). Заметим, что если за полюс принять другую точку тела, например точку B (см. рис. 180), то значения $\vec{v}_B$ и $\vec{a}_B$ окажутся отличными от $\vec{v}_A$ и $\vec{a}_A$ (предполагается, что тело движется не поступательно). Но если связанные с телом оси, проведенные из точки B (на рис. 180 не показаны), направить так же, как и в точке A , что можно сделать, то значения углов φ, ψ, θ , а следовательно, и последние из уравнений (79) не изменятся. Поэтому и здесь, как и в случае плоского движения, вращательная часть движения тела, в частности значения $\vec{\omega}$ и $\vec{\epsilon}$, от выбора полюса не зависят.

Движение свободного твердого тела может быть в частном случае плоскопараллельным; при этом векторы $\vec{\omega}$ и $\vec{\epsilon}$ будут все время перпендикулярны плоскости, параллельно которой движется тело.

Скорости и ускорения точек тела. Скорость $\vec{v}_M$ любой точки M тела в рассматриваемом движении складывается, как и в случае плоскопараллельного движения (см. § 54 и рис. 147), из скорости $\vec{v}_A$ полюса A и скорости $\vec{v}_{MA}$, которую точка M получает при движении вместе с телом вокруг полюса A . При этом, так как движение тела вокруг полюса A происходит как движение вокруг неподвижной точки, то значение $\vec{v}_{MA}$ определяется формулой (76), где $\vec{r} = \vec{AM}$, т. е.

$$\vec{v}_{MA} = \vec{\omega} \times \vec{AM}. \quad (80)$$

Таким образом,

$$\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{v}_{MA} \quad \text{или} \quad \vec{v}_M = \vec{v}_A + (\vec{\omega} \times \vec{AM}). \quad (81)$$

Справедливость этого результата доказывается так же, как в § 54. Аналогично для ускорения любой точки M тела найдем (см. § 58)

$$\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}_{MA}, \quad (82)$$

где величина $\vec{a}_{MA}$, т. е. ускорение, которое точка M получает при движении вместе с телом вокруг полюса A , определяется равенством (78), в котором только надо считать $\vec{r} = \vec{AM}$, а $\vec{v} = \vec{v}_{MA} = \vec{\omega} \times \vec{AM}$.

Глава XIII

СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

§ 84. ОТНОСИТЕЛЬНОЕ, ПЕРЕНОСНОЕ И АБСОЛЮТНОЕ ДВИЖЕНИЯ

До сих пор мы изучали движение точки или тела по отношению к одной заданной системе отсчета. Однако в ряде случаев при решении задач механики оказывается целесообразным (а иногда и необходимым) рассматривать движение точки (или тела) одновременно по отношению к двум системам отсчета, из которых одна считается основной или условно неподвижной, а другая определенным образом движется по отношению к первой. Движение, совершаемое при этом точкой (или телом), называют *составным* или *сложным*. Например, шар, катящийся по палубе движущегося парохода, можно считать совершающим по отношению к берегу сложное движение, состоящее из качения по отношению к палубе (подвижная система отсчета), и движения вместе с палубой парохода по отношению к берегу (неподвижная система отсчета). Таким путем сложное движение шара разлагается на два более простых и более легко исследуемых. Возможность разложить путем введения дополнительной (подвижной) системы отсчета более сложное движение точки или тела на более простые широко используется при кинематических расчетах и определяет практическую ценность теории сложного движения, рассматриваемой в этой и следующей главах. Кроме того, результаты этой теории используются в динамике для изучения относительного равновесия и относительного движения тел под действием сил.

Рассмотрим точку M , движущуюся по отношению к подвижной системе отсчета $Oxyz$, которая в свою очередь как-то движется относительно другой системы отсчета $O_1x_1y_1z_1$, которую называем основной или условно неподвижной (рис. 182). Каждая из этих систем отсчета связана, конечно, с определенным телом, на чертеже не показанным. Введем следующие определения.

1. Движение, совершаемое точкой M по отношению к подвижной системе отсчета (к осям $Oxyz$), называется *относительным движением* (такое движение будет видеть наблюдатель, связанный

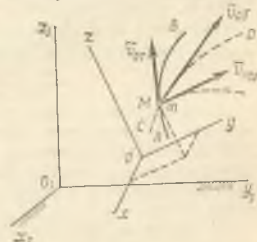


Рис. 182

с этими осями и перемещающийся вместе с ними). Траектория AB , описываемая точкой в относительном движении, называется *относительной траекторией*. Скорость точки M по отношению к осям $Oxyz$ называется *относительной скоростью* (обозначается $\vec{v}_{от}$), а ускорение — *относительным ускорением* (обозначается $\vec{a}_{от}$). Из определения следует, что при вычислении $\vec{v}_{от}$ и $\vec{a}_{от}$ можно движение осей $Oxyz$ во внимание не принимать (рассматривать их как неподвижные).

2. Движение, совершаемое подвижной системой отсчета $Oxyz$ (и всеми неизменно связанными с нею точками пространства) по отношению к неподвижной системе $O_1x_1y_1z_1$, является для точки M *переносным движением*.

Скорость той неизменно связанной с подвижными осями $Oxyz$ точки m , с которой в данный момент времени совпадает движущаяся точка M , называется *переносной скоростью* точки M в этот момент (обозначается $\vec{v}_{пер}$), а ускорение этой точки m — *переносным ускорением* точки M (обозначается $\vec{a}_{пер}$). Таким образом,

$$\vec{v}_{пер} = \vec{v}_m, \quad \vec{a}_{пер} = \vec{a}_m. \quad (83)$$

Если представить себе, что относительное движение точки происходит по поверхности (или внутри) твердого тела, с которым жестко связаны подвижные оси $Oxyz$, то переносной скоростью (или ускорением) точки M в данный момент времени будет скорость (или ускорение) той точки m тела, с которой в этот момент совпадает точка M .

3. Движение, совершаемое точкой по отношению к неподвижной системе отсчета $O_1x_1y_1z_1$, называется *абсолютным* или *сложным*. Траектория CD этого движения называется *абсолютной траекторией*, скорость — *абсолютной скоростью* (обозначается $\vec{v}_{аб}$) и ускорение — *абсолютным ускорением* (обозначается $\vec{a}_{аб}$).

В приведенном выше примере движение шара относительно палубы парохода будет относительным, а скорость — относительной скоростью шара; движение парохода по отношению к берегу будет для шара переносным движением, а скорость той точки палубы, которой в данный момент времени касается шар, будет в этот момент его переносной скоростью; наконец, движение шара по отношению к берегу будет его абсолютным движением, а скорость — абсолютной скоростью шара.

Для решения соответствующих задач кинематики необходимо установить зависимости между относительными, переносными и абсолютными скоростями и ускорениями точки, к чему мы и перейдем.

§ 65. ТЕОРЕМА О СЛОЖЕНИИ СКОРОСТЕЙ

Рассмотрим сложное движение точки M . Пусть эта точка совершает за промежуток времени $\Delta t = t_1 - t$ вдоль траектории AB относительное перемещение, определяемое вектором $\vec{MM}'$ (рис. 183, а).

Сама кривая AB , двигаясь вместе с подвижными осями $Oxyz$ (на рисунке не показаны), перейдет за тот же промежуток времени в какое-то новое положение A_1B_1 . Одновременно та точка m кривой AB , с которой в момент времени t совпадает точка M , совершит переносное перемещение $\vec{mm}_1 = \vec{Mm}_1$. В результате точка M придет в положение M_1 и совершит за время Δt абсолютное перемещение $\vec{MM}_1$. Из векторного треугольника $\vec{MM}_1M_1$ имеем

$$\vec{MM}_1 = \vec{Mm}_1 + \vec{m}_1M_1.$$

Деля обе части этого равенства на Δt и переходя к пределу, получим

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\vec{MM}_1/\Delta t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\vec{Mm}_1/\Delta t) + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\vec{m}_1M_1/\Delta t).$$

Но, по определению,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\vec{MM}_1/\Delta t) = \vec{v}_{аб}, \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\vec{Mm}_1/\Delta t) = \vec{v}_{пер}.$$

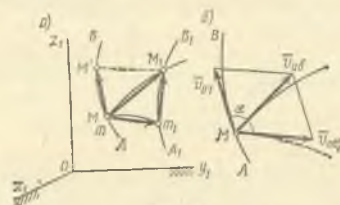


Рис. 183

Что касается последнего слагаемого, то, так как при $\Delta t \rightarrow 0$ кривая A_1B_1 стремится к совпадению с кривой AB , в пределе

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\vec{m}_1M_1/\Delta t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\vec{MM}'/\Delta t) = \vec{v}_{от}.$$

В результате находим, что

$$\vec{v}_{аб} = \vec{v}_{от} + \vec{v}_{пер}. \quad (84)$$

Направлены векторы $\vec{v}_{аб}$, $\vec{v}_{от}$, $\vec{v}_{пер}$ по касательным к соответствующим траекториям (рис. 183, б).

Таким образом, мы доказали следующую теорему о сложении скоростей: *при сложном движении абсолютная скорость точки равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей*. Построенная на рис. 183, б фигура называется *параллелограммом скоростей*.

Если угол между векторами $\vec{v}_{от}$ и $\vec{v}_{пер}$ равен α , то по модулю

$$v_{аб} = \sqrt{v_{от}^2 + v_{пер}^2 + 2v_{от}v_{пер} \cos \alpha}. \quad (84')$$

Рассмотрим примеры решения задач.

Задача 73. Точка M движется вдоль прямой OA со скоростью $\vec{u}$ (рис. 184), а сама прямая вращается в плоскости Ox_1y_1 вокруг центра O с угловой скоростью ω . Определить скорость точки M относительно осей Ox_1y_1 в зависимости от расстояния $OM=r$.

Решение. Рассмотрим движение точки M как сложное, состоящее из относительного движения вдоль прямой OA и движения вместе с этой прямой. Тогда скорость $\vec{u}$, направленная вдоль OA , будет относительной скоростью точки. Вращательное движение прямой OA вокруг центра O является для точки M пере-

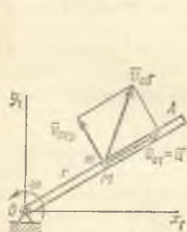


Рис. 184

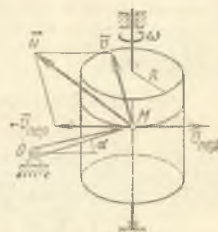


Рис. 185

носным движением, а скорость той точки m прямой OA , с которой в данный момент времени совпадает точка M , будет ее переносной скоростью $\vec{v}_{пер}$. Так как эта точка прямой движется по окружности радиуса $Om=r$, то по модулю скорость $v_{пер} = \omega r$ и направлена перпендикулярно Om . Строя на векторах $\vec{u}$ и $\vec{v}_{пер}$ параллелограмм, найдем абсолютную скорость $\vec{v}_{аб}$ точки M по отношению к осям Ox_1y_1 . Так как $\vec{u}$ и $\vec{v}_{пер}$ взаимно перпендикулярны, то по модулю

$$v_{аб} = \sqrt{u^2 + \omega^2 r^2}.$$

Задача 74. Рычажок OM самопишущего прибора образует в данный момент времени угол α с горизонтальной плоскостью, а перо M имеет скорость $\vec{v}$, направленную перпендикулярно OM (рис. 185). Барабан с бумагой вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ω . Определить скорость $\vec{u}$ перемещения пера по бумаге, если радиус барабана R .

Решение. Нам известна абсолютная скорость пера $\vec{v}_{аб} = \vec{v}$. Скорость $\vec{v}$ можно рассматривать как геометрическую сумму скорости пера относительно бумаги (это искомая скорость $\vec{u}$) и переносной скорости $\vec{v}_{пер}$, равной скорости той точки бумаги, которой в данный момент времени касается перо; по модулю $v_{пер} = \omega R$.

На основании теоремы о сложении скоростей $\vec{v} = \vec{u} + \vec{v}_{пер}$, откуда $\vec{u} = \vec{v} - (-\vec{v}_{пер})$. Строя на векторах $\vec{v}$ и $(-\vec{v}_{пер})$ параллелограмм, найдем искомую скорость $\vec{u}$. Так как угол между $\vec{v}$ и $(-\vec{v}_{пер})$ равен $90^\circ - \alpha$, то по модулю

$$u = \sqrt{v^2 + \omega^2 R^2 + 2\omega R v \sin \alpha}.$$

Угол, который скорость $\vec{u}$ образует с направлением $\vec{v}_{пер}$, можно теперь найти по теореме синусов.

Задача 75. В кривошипно-ползунном механизме (рис. 186) кривошип OA длиной r вращается с угловой скоростью ω . Длина шатуна AB равна l . При данном угле φ определить скорость ползуна относительно кривошипа OA . Найти также абсолютную скорость ползуна.

Решение. Ползун движется поступательно и его скорость равна скорости точки B , принадлежащей одновременно шатуну AB . Следовательно, решение задачи сводится к определению скорости точки B шатуна.

Относительное движение шатуна AB по отношению к кривошипу OA представляет собой вращение вокруг шарнира A . Точка B при этом вращении описывает окружность радиуса AB ; следовательно, относительная скорость $\vec{v}_{от}$ точки B по отношению к кривошипу направлена перпендикулярно AB . Заметим еще, что абсолютная скорость $\vec{v}_{аб}$ точки B направлена вдоль BO .

Переносным для точки B является движение кривошипа OA . Представим себе, что с кривошипом жестко связан треугольник OAB , вращающийся вместе с кривошипом вокруг оси O с угловой скоростью ω (как на рис. 151 со стержнем AD был связан лист фанеры AD). Тогда скорость точки B треугольника OAB , совпадающая в данный момент времени с точкой B шатуна AB , будет переносной скоростью $\vec{v}_{пер}$ точки B шатуна. Эта точка треугольника движется по окружности радиуса OB . Следовательно, скорость $\vec{v}_{пер}$ направлена перпендикулярно OB и численно равна $v_{пер} = \omega \cdot OB$. Так как $AB = l \cos \beta + r \cos \varphi$, то $v_{пер} = \omega (l \cos \beta + r \cos \varphi)$.

Сстроим из векторов $\vec{v}_{от}$, $\vec{v}_{пер}$ и $\vec{v}_{аб}$ соответствующий параллелограмм. Из него видно, что

$$v_{от} = v_{пер} / \cos \beta \text{ или } v_{от} = \omega (l + r \cos \varphi / \cos \beta).$$

Исключим отсюда угол β . Из треугольника OAB находим, что $l \sin \beta = r \sin \varphi$. Тогда $\cos \beta = \sqrt{1 - (r^2/l^2) \sin^2 \varphi}$ и окончательно значение искомой относительной скорости

$$v_{от} = \omega l \left(1 + \frac{r \cos \varphi}{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi}} \right). \quad (a)$$

Для определения абсолютной скорости $v_{аб}$ точки B обратимся опять к параллелограмму скоростей. Из него $v_{аб} = v_{от} \sin \beta$. Учитывая, что $\sin \beta = (r \sin \varphi)/l$, получим из равенства (a) для $v_{аб}$ то же значение, которое другим путем было найдено в задаче 63 (см. § 57) и обозначено там v_B .

В частном случае, когда $r=l$, получается $v_{от} = 2\omega l$, $v_{аб} = 2\omega l \sin \varphi$.

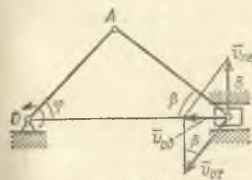


Рис. 186

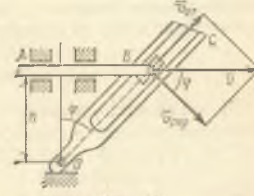


Рис. 187

Задача 76. Концы B горизонтального стержня AB шарнирно соединен с ползуном, скользящим вдоль прорези кулисы OC и заставляющим последнюю вращаться вокруг оси O (рис. 187). Расстояние оси O от стержня AB равно h . Определить угловую скорость кулисы в зависимости от скорости v стержня и угла φ .

Решение. Нам известна абсолютная скорость ползуна, равная скорости $\vec{v}$ стержня. Эту скорость ползуна можно рассматривать как складывающуюся из отно-

сительной скорости $\vec{v}_{от}$ скольжения ползуна вдоль прорези кулисы и переносной скорости $\vec{v}_{пер}$, равной скорости той точки кулисы, с которой в данный момент времени совпадает ползун. Направления этих скоростей известны: скорость $\vec{v}_{от}$ направлена вдоль OB , скорость $\vec{v}_{пер}$ — перпендикулярно OB . Тогда, разлагая заданную скорость $\vec{v}$ по направлениям $\vec{v}_{от}$ и $\vec{v}_{пер}$, найдем эти скорости. Из параллелограмма видно, что по модулю $v_{пер} = v \cos \varphi$.

Но, с другой стороны, переносная скорость $v_{пер} = \omega \cdot OB = \omega h / \cos \varphi$, где ω — угловая скорость кулисы. Сравнивая эти два значения $v_{пер}$, найдем угловую скорость кулисы $\omega = (v/h) \cos^2 \varphi$.

§ 66. ТЕОРЕМА О СЛОЖЕНИИ УСКОРЕНИЙ (ТЕОРЕМА КОРИОЛИСА)

Найдем зависимость между относительным, переносным и абсолютным ускорениями точки. Из равенства (84) получим

$$\vec{a}_{аб} = \frac{d\vec{v}_{аб}}{dt} = \frac{d\vec{v}_{от}}{dt} + \frac{d\vec{v}_{пер}}{dt}. \quad (85)$$

Производные здесь определяют изменение каждого из векторов при абсолютном движении. Эти изменения складываются в общем случае из изменений при относительном и при переносном движениях, что ниже будет непосредственно показано. Следовательно, если условиться изменения, которые векторы $\vec{v}_{от}$ и $\vec{v}_{пер}$ получают при относительном движении, отмечать индексом «1», а при переносном движении — индексом «2», то равенство (85) примет вид

$$\vec{a}_{аб} = \frac{(d\vec{v}_{от})_1}{dt} + \frac{(d\vec{v}_{от})_2}{dt} + \frac{(d\vec{v}_{пер})_1}{dt} + \frac{(d\vec{v}_{пер})_2}{dt}. \quad (86)$$

Но по определению (см. § 64, п. 1) относительное ускорение характеризует изменение относительной скорости только при относительном движении; движение осей $Oxyz$, т. е. переносное движение при этом во внимание не принимается. Поэтому

$$\vec{a}_{от} = \frac{(d\vec{v}_{от})_1}{dt}. \quad (87)$$

В свою очередь, переносное ускорение характеризует изменение переносной скорости только при переносном движении, так как $\vec{a}_{пер} = \vec{a}_m$ (см. § 64, п. 2), где m — точка, неизменно связанная с осями $Oxyz$ и, следовательно, получающая ускорение только при движении вместе с этими осями, т. е. при переносном движении. Поэтому

$$\vec{a}_{пер} = \frac{(d\vec{v}_{пер})_2}{dt}. \quad (88)$$

В результате из равенства (86) получим

$$\vec{a}_{аб} = \vec{a}_{от} + \vec{a}_{пер} + \frac{(d\vec{v}_{от})_2}{dt} + \frac{(d\vec{v}_{пер})_1}{dt}. \quad (89)$$

Введем обозначение

$$\vec{a}_{кор} = \frac{(d\vec{v}_{от})_2}{dt} + \frac{(d\vec{v}_{пер})_1}{dt}. \quad (90)$$

Величина $\vec{a}_{кор}$, характеризующая изменение относительной скорости точки при переносном движении и переносной скорости точки при ее относительном движении, называется поворотным, или кориолисовым, ускорением точки. В результате равенство (89) примет вид

$$\vec{a}_{аб} = \vec{a}_{от} + \vec{a}_{пер} + \vec{a}_{кор}. \quad (91)$$

Формула (91) выражает следующую теорему Кориолиса о сложении ускорений*: при сложном движении ускорение точки равно геометрической сумме трех ускорений: относительного, переносного и поворотного, или кориолисова.

Найдем для вычисления $\vec{a}_{кор}$ формулу, вытекающую из равенства (90). При этом, рассматривая общий случай, будем считать переносное движение, т. е. движение подвижных осей $Oxyz$, а с ними и кривой AB (см. рис. 182), складывающимся из поступательного движения вместе с некоторым полюсом и вращения вокруг этого полюса с угловой скоростью ω , называемой переносной угловой скоростью. Величина ω , как показано в § 63, от выбора полюса не зависит и на изображенных рис. 188, где полюс точка m , и рис. 189, где полюс O , имеет одно и то же значение.

Начнем с определения $(d\vec{v}_{от})_2/dt$. При рассматриваемом переносном движении вектор $\vec{v}_{от}$, направленный по касательной к кривой AB , переместится вместе с этой кривой поступательно (придет в положение $\vec{m}_1\vec{b}$, рис. 188) и одновременно повернется вокруг точки m_1 до положения $\vec{m}_1\vec{b}_1$. В результате вектор $\vec{v}_{от}$ получит в переносном движении приращение $(d\vec{v}_{от})_2 = \vec{b}\vec{b}_1 = \vec{v}_b \cdot dt$, где $\vec{v}_b$ — скорость, с которой перемещается точка b при повороте вектора $\vec{m}_1\vec{b} = \vec{v}_{от}$ вокруг точки m_1 . Так как этот поворот происходит с угловой скоростью ω , то по формуле (76) $\vec{v}_b = \omega \times \vec{m}_1\vec{b} = \omega \times \vec{v}_{от}$. В результате получаем $(d\vec{v}_{от})_2 = \vec{v}_b \cdot dt = \omega \times \vec{v}_{от} dt$ и

$$\frac{(d\vec{v}_{от})_2}{dt} = \omega \times \vec{v}_{от}. \quad (92)$$

* Гюстав Кориолис (1792—1843) — французский ученый, известный своими трудами по теоретической и прикладной механике. Кориолисово ускорение называют еще поворотным, так как оно появляется при наличии у подвижных осей вращения (поворота).

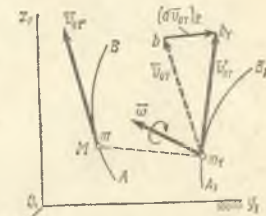


Рис. 188

1) когда $\omega=0$, т. е. когда переносное движение является поступательным [формула (95)] или если переносная угловая скорость в данный момент времени обращается в нуль;

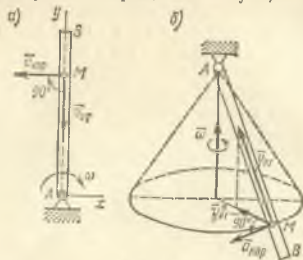


Рис. 191

2) когда $v_{отн}=0$, т. е. когда относительная скорость в данный момент времени обращается в нуль;

3) когда $\alpha=0$, или $\alpha=180^\circ$, т. е. когда относительное движение происходит по направлению, параллельному оси переносного вращения, или если в данный момент времени вектор $v_{от}$ параллелен этой оси.

§ 67. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

А. Переносное движение поступательное. В случае, когда переносное движение является поступательным, характер задач и методы их решения аналогичны задачам на сложение скоростей (см. § 65).

Задача 77. Клинь, движущийся прямолинейно по горизонтальной плоскости с ускорением a_1 , перемещает вдоль вертикальных направляющих стержень DE (рис. 192). Определить ускорение стержня, если угол клина равен α .

Решение. Абсолютное ускорение a_D точки D стержня направлено по вертикали вверх. Его можно рассматривать как складывающееся из относительного ускорения $a_{от}$, направленного вдоль щеки клина, и переносного ускорения $a_{пер}$, равного ускорению клина a_1 (так как переносное движение, т. е. движение клина, является поступательным). Строя на основании равенства (95) соответствующий параллелограмм и учитывая, что $a_{пер}=a_1$, найдем

$$a_D = a_1 \operatorname{tg} \alpha.$$

Величина a_D и определяет ускорение стержня.

Б. Переносное движение вращательное. Покажем, как вычисляется $a_{аб}$, когда переносное движение является вращением вокруг неподвижной оси.

Рассмотрим точку M, движущуюся по поверхности некоторого тела (например, шара) вдоль заданной кривой AMB по закону $s=f_1(t)$, где $s=AM$ (рис. 193). При этом само тело вращается вокруг оси BA по закону $\varphi=f_2(t)$, где φ — угол поворота тела. Первое из названных движений считаем относительным, а второе — переносным для точки M. Пусть требуется найти значение $a_{аб}$ в некоторый момент времени $t=t_1$. Расчет сводится к следующему.

1. *Определение положения точки.* Полагая в уравнении $s=f_1(t)$ время $t=t_1$, определяем положение точки M на кривой AB при $t=t_1$ и изображаем точку на чертеже в этом положении.

2. *Определение $v_{от}$ и $a_{от}$.* По формулам кинематики точки (см. § 42, 43) находим:

$$v_{от} = \dot{s}, \quad a_{от} = \ddot{s}, \quad a_{от} = v_{от} / \rho_{от},$$

где $\rho_{от}$ — радиус кривизны кривой AB в точке M. Определяем числовые значения этих величин при $t=t_1$ и изображаем затем векторы $v_{от}$, $a_{от}$ и $a_{от}^*$ на чертеже (с учетом знаков $v_{от}$ и $a_{от}^*$; на рис. 193 векторы $v_{от}$ и $a_{от}^*$ показаны для случая, когда $v_{от}>0$ и $a_{от}^*>0$).

3. *Определение $a_{пер}$.* Сначала находим $\omega=\dot{\varphi}$ и $\epsilon=\ddot{\varphi}$ и вычисляем их значения ω_1 и ϵ_1 при $t=t_1$. Затем определяем h — расстояние точки M от оси BA в момент времени t_1 . После этого находим $a_{пер}$ и $a_{пер}^*$ как ускорения той точки тела, с которой в данный момент времени совпадает точка M, т. е. по формулам (см. § 51)

$$a_{пер} = h\epsilon_1, \quad a_{пер}^* = h\omega_1^2.$$

Изображаем векторы $a_{пер}$ и $a_{пер}^*$ на чертеже (с учетом знака $a_{пер}^*$; на рис. 193 вектор $a_{пер}^*$ показан для случая, когда $\epsilon_1<0$ и, следовательно, $a_{пер}^*<0$).

4. *Определение $a_{кор}$.* Модуль и направление $a_{кор}$ определяются так, как это показано в конце § 66. Вектор $a_{кор}$ также изображаем на чертеже.

5. *Определение $a_{аб}$.* По теореме Корнолиса находим

$$a_{аб} = a_{от} + a_{от}^* + a_{пер} + a_{пер}^* + a_{кор}.$$

Если сумму стоящих справа векторов трудно найти геометрически, то, проводя какие-нибудь координатные оси Mxyz (рис. 193), вычисляем проекции всех слагаемых векторов на эти оси. Тогда по теореме о проекции суммы векторов на ось

$$a_{аб} x = \Sigma a_{ix}, \quad a_{аб} y = \Sigma a_{iy}, \quad a_{аб} z = \Sigma a_{iz}.$$

После этого находим

$$a_{аб} = \sqrt{a_{аб}^2 x + a_{аб}^2 y + a_{аб}^2 z}.$$

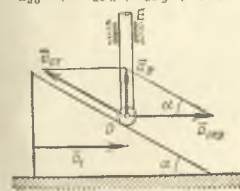


Рис. 192

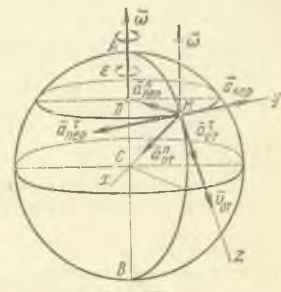


Рис. 193

Конкретный пример такого расчета см. в задаче 81.

Задача 78. Кулиса OA вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси O (рис. 194). По прорези кулисы скользит ползун B с постоянной относительной скоростью u . Определить абсолютное ускорение ползуна в зависимости от его расстояния x до оси O.

Решение. По условиям задачи относительное движение ползуна по прорези кулисы является равномерным и прямолинейным; следовательно, $a_{от}=0$.

Движение кулисы OA будет для ползуна B переносным. Следовательно, переносное ускорение $a_{пер}$ ползуна равно ускорению той точки кулисы, с которой в данный момент времени совпадает ползун. Так как эта точка кулисы движется

по окружности радиуса $OB=x$ и $\omega=\text{const}$, то вектор $\vec{a}_{\text{пер}}=\vec{a}_{\text{пер}}^n$ и направлен вдоль BO , а по модулю $a_{\text{пер}}=a_{\text{пер}}^n=\omega^2 x$.

Кориолисово ускорение $a_{\text{кор}}=2\omega u$, так как движение плоское. Повернув вектор относительной скорости u вокруг точки B на 90° в сторону переносного вращения (т. е. по ходу часовой стрелки), находим направление $a_{\text{кор}}$. По теореме Кориолиса

$$\vec{a}_{ab} = \vec{a}_{ot} + \vec{a}_{\text{пер}} + \vec{a}_{\text{кор}}.$$

В данном случае $\vec{a}_{ot}=0$, а $\vec{a}_{\text{кор}}$ перпендикулярно $\vec{a}_{\text{пер}}$. Следовательно,

$$a_{ab} = \sqrt{a_{\text{пер}}^2 + a_{\text{кор}}^2} = \omega \sqrt{\omega^2 x^2 + 4u^2}.$$

Задача 79. Эксцентрик, представляющий собой круглый диск радиуса R , вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси O , проходящей через край диска (рис. 195). По ободу диска с постоянной относительной скоростью u

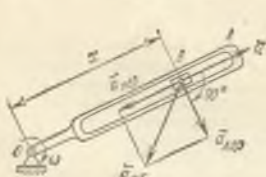


Рис. 194



Рис. 195

скользит штифт M , начиная свое движение из точки A . Определить абсолютное ускорение штифта в произвольный момент времени t . Направления движений показаны на чертеже.

Решение. В момент времени t штифт находится от точки A на расстоянии $s=AM=ut$. Следовательно, в этот момент времени $\angle AOM=\alpha$, где

$$\alpha = s/(2R) = (u/2R)t, \quad (a)$$

так как угол α равен половине центрального угла ACM .

Считаем движение штифта M по ободу диска относительным движением. Оно происходит по окружности радиуса R . Так как $v_{ot}=u=\text{const}$, то

$$a_{ot}^e = \dot{u} = 0, \quad a_{ot}^n = u^2/R. \quad (б)$$

Направлен вектор $\vec{a}_{ot}=\vec{a}_{ot}^n$ по радиусу MC .

Движение диска будет для штифта M переносным движением. Следовательно, переносное ускорение $\vec{a}_{\text{пер}}$ штифта равно ускорению той точки диска, с которой в данный момент совпадает штифт. Эта точка диска движется по окружности радиуса $OM=2R \cos \alpha$. Так как для диска $\omega=\text{const}$, то $\epsilon=0$ и

$$a_{\text{пер}}^e = OM \cdot \epsilon = 0, \quad a_{\text{пер}}^n = OM \cdot \omega^2 = 2R\omega^2 \cos \alpha. \quad (в)$$

Направлен вектор $\vec{a}_{\text{пер}}=\vec{a}_{\text{пер}}^n$ вдоль линии MO .

Поскольку движение происходит в одной плоскости, и в данном случае

$$a_{\text{кор}} = 2\omega u. \quad (г)$$

Направление $\vec{a}_{\text{кор}}$ получаем, повернув вектор $\vec{v}_{ot}=u$ вокруг точки M на 90° в сторону переносного движения (т. е. против хода часовой стрелки).

Абсолютное ускорение штифта M определяется равенством

$$\vec{a}_{ab} = \vec{a}_{ot} + \vec{a}_{\text{пер}} + \vec{a}_{\text{кор}}. \quad (д)$$

Для определения модуля $\vec{a}_{ab}$ проведем оси Mx (см. рис. 195) и спроектируем обе части равенства (д) на эти оси. Получим:

$$a_{abx} = a_{ot} + a_{\text{пер}} \cos \alpha - a_{\text{кор}} \sin \alpha, \quad a_{aby} = a_{\text{пер}} \sin \alpha.$$

Тогда

$$a_{ab} = \sqrt{(a_{ot} + a_{\text{пер}} \cos \alpha - a_{\text{кор}} \sin \alpha)^2 + a_{\text{пер}}^2 \sin^2 \alpha},$$

где значения α , a_{ot} , $a_{\text{пер}}$, $a_{\text{кор}}$ определены равенствами (а), (б), (в), (г).

Задача 80. Тело движется в северном полушарии вдоль меридиана с севера на юг поступательно (рис. 196) со скоростью $v_{ot}=u$. Найти модуль и направление кориолисова ускорения тела, когда оно находится на широте λ .

Решение. Пренебрегая размерами тела, рассматриваем его как точку. Относительная скорость u тела образует с земной осью угол λ . Следовательно,

$$a_{\text{кор}} = 2\omega u \sin \lambda,$$

где ω — угловая скорость Земли.

Таким образом, наибольшее кориолисово ускорение тело имеет на полюсе при $\lambda=90^\circ$. По мере приближения к экватору значение $a_{\text{кор}}$ убывает и на экваторе при $\lambda=0$ обращается в нуль (на экваторе вектор $v_{ot}=u$ параллелен оси вращения Земли).

Направление $\vec{a}_{\text{кор}}$ находим как направление векторного произведения. Так как $\vec{a}_{\text{кор}}=2\omega \times u$, получаем, что вектор $\vec{a}_{\text{кор}}$ направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через векторы u , ω , т. е. перпендикулярно плоскости меридионального сечения, на восток, откуда кратчайшее совмещение вектора ω с вектором u видно против хода часовой стрелки.

Вопрос о том, как изменяется движение тел по земной поверхности вследствие наличия кориолисова ускорения, рассматривается в динамике. Однако из полученной формулы видно, что величина $a_{\text{кор}}$ обычно мала, так как мала угловая скорость Земли.

Задача 81. Прямоугольный треугольник ABC , гипотенуза которого $AB=2b=20$ см, а $\angle CBA=\alpha=60^\circ$, вращается вокруг оси Cz_1 (рис. 197) по закону $\varphi=10t-2t^2$. Вдоль гипотенузы AB около ее середины O колеблется точка M по закону $\xi=b \cos(\pi t/3)$ (ось $O\xi$ направлена вдоль OA). Найти абсолютное ускорение точки M в момент времени $t_1=2$ с.

Решение. 1. Считая движение точки M вдоль гипотенузы AB относительным, определяем положение этой точки на гипотенузе в момент времени t_1 . Из уравнения движения находим

$$\xi_1 = b \cos(2\pi/3) = -b/2.$$

Следовательно, точка M находится в момент времени t_1 на середине отрезка OB . Изображаем это положение на чертеже.

2. **Определение $\vec{v}_{ot}$.** Так как относительное движение является прямолинейным, то

$$v_{ot} = \dot{\xi} = -(\pi b/3) \sin(\pi t/3).$$

В момент времени $t_1=2$ с

$$v_{ot1} = -\pi b \sqrt{3}/6, \quad |v_{ot1}| = 5\pi \sqrt{3}/3 \text{ см/с}.$$

Знак минус указывает, что вектор $\vec{v}_{ot}$ направлен в момент времени t_1 от M к точке B .

3. **Определение ω и ϵ .** Беря производные, находим

$$\omega = \dot{\varphi} = 10 - 4t, \quad \omega_1 = 2 \text{ с}^{-1},$$

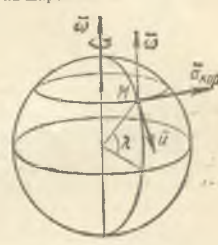


Рис. 196

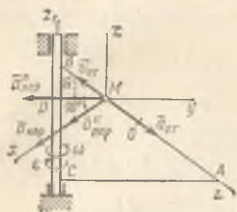


Рис. 197

где ω_1 — значение ω в момент времени $t_1 = 2\text{с}$;

$$\varepsilon = \dot{\omega} = -4 \text{ с}^{-2}.$$

Знаки указывают, что с момента t_1 вращение направлено против хода часовой стрелки (если смотреть с конца оси Cz_1) и является замедленным.

4. Определение $\vec{a}_{от}$. Так как относительное движение является прямолинейным, то

$$a_{от} = v_{от} = -(\pi^2/9) b \cos(\pi t/3).$$

В момент времени $t_1 = 2\text{с}$

$$a_{от1} = \pi^2 b / 18 = 5\pi^2/9 \text{ см/с}^2.$$

5. Определение $\vec{a}_{пер}$. Движение треугольника будет для точки M переносным движением. Следовательно, переносное ускорение $\vec{a}_{пер}$ точки M равно ускорению той точки треугольника, с которой в данный момент времени совпадает точка M . Эта точка треугольника движется по окружности радиуса $MD = h$, причем в момент времени $t_1 = 2\text{с}$

$$h = (b/2) \sin \alpha = 5 \sqrt{3}/2 \text{ см}.$$

Таким образом, в этот момент времени

$$a_{пер} = \varepsilon h = -10 \sqrt{3} \text{ см/с}^2, \quad a_{пер}^n = \omega_1^2 h = 10 \sqrt{3} \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\vec{a}_{пер}$ направлен перпендикулярно плоскости ABC в сторону, противоположную направлению вращения треугольника. Вектор $\vec{a}_{пер}^n$ направлен вдоль линии MD к оси вращения Cz_1 .

6. Определение $\vec{a}_{кор}$. По модулю в момент времени $t_1 = 2\text{с}$

$$a_{кор} = 2 |\omega| \cdot |v_{от}| \sin \alpha = 10\pi \text{ см/с}^2,$$

так как угол между $\vec{v}_{от}$ и осью Cz_1 равен в данном случае α .

Проектируя вектор $\vec{v}_{от}$ на плоскость, перпендикулярную оси Cz_1 (проекция направлена вдоль линии MD), и повернув эту проекцию на 90° в сторону переносного вращения, т. е. против хода часовой стрелки, найдем направление $\vec{a}_{кор}$ (оно в данном случае совпадает с направлением $\vec{a}_{пер}$).

7. Определение $\vec{a}_{аб}$. Абсолютное ускорение точки M в момент времени t_1 в данном случае будет

$$\vec{a}_{аб} = \vec{a}_{от} + \vec{a}_{пер} + \vec{a}_{пер}^n + \vec{a}_{кор}.$$

Для нахождения модуля $a_{аб}$ проводим оси $Mxyz$ (рис. 197) и вычисляем проекции всех векторов на эти оси. Получаем:

$$a_{абx} = a_{кор} + |a_{пер}| = 10\pi + 10 \sqrt{3} \approx 48,7 \text{ см/с}^2,$$

$$a_{aby} = a_{от} \sin \alpha - a_{пер}^n = 5\pi^2 \sqrt{3}/18 - 10 \sqrt{3} \approx -12,6 \text{ см/с}^2,$$

$$a_{абz} = -a_{от} \cos \alpha = -5\pi^2/18 \approx 2,7 \text{ см/с}^2.$$

После этого находим

$$a_{аб} = \sqrt{a_{абx}^2 + a_{aby}^2 + a_{абz}^2} \approx 50,4 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\vec{a}_{аб}$ можно построить по его составляющим вдоль осей $Oxyz$.

Глава XIV *

СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 68. СЛОЖЕНИЕ ПОСТУПАТЕЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ

Если тело движется относительно подвижных осей $Oxyz$ (см. рис. 182), а эти оси совершают одновременно переносное движение по отношению к неподвижным осям $O_1x_1y_1z_1$, то результирующее (абсолютное) движение тела называют сложным (см. § 64).

Задачей кинематики в этом случае является нахождение зависимости между характеристиками относительного, переносного и абсолютного движений. Основными кинематическими характеристиками движения тела, как мы знаем, являются его поступательные и угловые скорости и ускорения. Мы ограничимся в дальнейшем определением зависимостей только между поступательными и угловыми скоростями тела (кроме одного случая, рассмотренного в § 71).

Рассмотрим сначала случай, когда относительное движение тела является поступательным со скоростью $\vec{v}_1$, а переносное движение — тоже поступательное со скоростью $\vec{v}_2$. Тогда все точки тела в относительном движении будут иметь скорость $\vec{v}_1$, а в переносном — скорость $\vec{v}_2$. Следовательно, по теореме сложения скоростей все точки тела в абсолютном движении имеют одну и ту же скорость $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, т. е. абсолютное движение тела будет тоже поступательным.

Итак, при сложении двух поступательных движений со скоростями $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ результирующее движение тела также будет поступательным со скоростью $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$.

Задача сложения скоростей в этом случае сводится к задаче кинематики точки (см. § 65).

§ 69. СЛОЖЕНИЕ ВРАЩЕНИЙ ВОКРУГ ДВУХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ОСЕЙ

Рассмотрим случай, когда относительное движение тела является вращением с угловой скоростью ω_1 вокруг оси aa' , укрепленной на кривошипе ba (рис. 198, а), а переносное — вращением кривошипа ba вокруг оси bb' , параллельной aa' , с угловой скоростью ω_2 . Тогда движение тела будет плоскопараллельным по отношению к плоскости, перпендикулярной осям. Здесь возможны три частных случая.

1. Вращения направлены в одну сторону. Изобразим сечение S тела плоскостью, перпендикулярной осям (рис. 198, б). Следы осей в сечении S обозначим буквами A и B . Легко видеть, что точка A , как лежащая на оси Aa' , получает скорость только от вращения вокруг оси Bb' , следовательно, $v_A = \omega_2 \cdot AB$. Точно так же $v_B = \omega_1 \cdot AB$. При этом векторы v_A и v_B параллель-

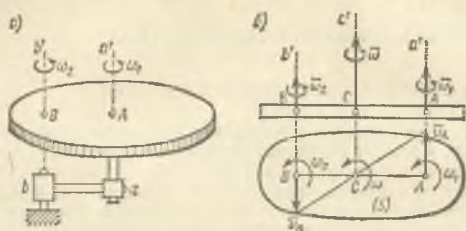


Рис. 198

ны друг другу (оба перпендикулярны AB) и направлены в разные стороны. Тогда точка C (см. § 56, рис. 153, б) является мгновенным центром скоростей ($v_C = 0$), а следовательно, ось Cc' , параллельная осям Aa' и Bb' , является *мгновенной осью вращения тела*.

Для определения угловой скорости ω абсолютного вращения тела вокруг оси Cc' и положения самой оси, т. е. точки C , воспользуемся равенством [см. § 56, формула (57)]

$$\omega = v_B/BC = v_A/AC, \text{ откуда } \omega = (v_A + v_B)/AB.$$

Последний результат получается из свойств пропорции.

Подставляя в эти равенства $v_A = \omega_2 \cdot AB$, $v_B = \omega_1 \cdot AB$, найдем окончательно:

$$\omega = \omega_1 + \omega_2, \quad (97)$$

$$\omega_1/BC = \omega_2/AC = \omega/AB. \quad (98)$$

Итак, если тело участвует одновременно в двух направленных в одну сторону вращениях вокруг параллельных осей, то его результирующее движение будет мгновенным вращением с абсолютной угловой скоростью $\omega = \omega_1 + \omega_2$ вокруг мгновенной оси, параллельной данным; положение этой оси определяется пропорциями (98).

С течением времени мгновенная ось вращения Cc' меняет свое положение, описывая цилиндрическую поверхность.

2. Вращения направлены в разные стороны. Изобразим опять сечение S тела (рис. 199) и допустим для определенности, что $\omega_1 > \omega_2$. Тогда, рассуждая, как в предыдущем случае, найдем, что скорости точек A и B будут численно равны: $v_A = \omega_2 \cdot AB$, $v_B = \omega_1 \cdot AB$; при этом v_A и v_B параллельны друг другу и направлены в одну сторону. Тогда мгновенная ось вращения про-

ходит через точку C (рис. 199), причем

$$\omega = v_B/BC = v_A/AC \text{ и } \omega = (v_B - v_A)/AB.$$

Последний результат тоже получается из свойств пропорции. Подставляя в эти равенства значения v_A и v_B , найдем окончательно:

$$\omega = \omega_1 - \omega_2, \quad (99)$$

$$\omega_1/BC = \omega_2/AC = \omega/AB. \quad (100)$$

Итак, в этом случае результирующее движение также является мгновенным вращением с абсолютной угловой скоростью $\omega = \omega_1 - \omega_2$ вокруг оси Cc' , положение которой определяется пропорциями (100).

3. Пара вращений. Рассмотрим частный случай, когда вращения вокруг параллельных осей направлены в разные стороны

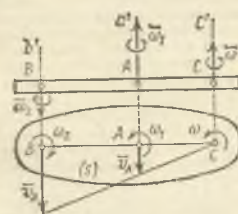


Рис. 199

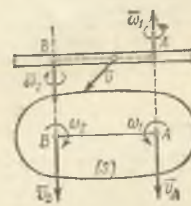


Рис. 200

(рис. 200), но по модулю $\omega_1 = \omega_2$. Такая совокупность вращений называется *парой вращений*, а векторы ω_1 и ω_2 образуют *пару угловых скоростей*. В этом случае получаем, что $v_A = \omega_2 \cdot AB$ и $v_B = \omega_1 \cdot AB$, т. е. $v_A = v_B$. Тогда (см. § 56, рис. 153, а) мгновенный центр скоростей находится в бесконечности и все точки тела в данный момент времени имеют одинаковые скорости $v = \omega_1 \cdot AB$.

Следовательно, результирующее движение тела будет *поступательным* (или *мгновенно поступательным*) движением со скоростью, численно равной $\omega_1 \cdot AB$ и направленной перпендикулярно плоскости, проходящей через векторы ω_1 и ω_2 ; направление вектора v определяется так же, как в статике определялось направление момента m пары сил (см. § 9). Иначе говоря, *пара вращений эквивалентна поступательному* (или *мгновенно поступательному*) движению со скоростью v , равной моменту пары угловых скоростей этих вращений.

Примером такого движения является поступательное движение велосипедной педали DE относительно рамы велосипеда (рис. 201),



Рис. 201

являющемся результатом относительного вращения педали вокруг оси A , укрепленной на кривошипе BA , и переносного вращения кривошипа BA вокруг оси B . Угловые скорости ω_1 и ω_2 этих вращений направлены в разные стороны, а по модулю равны друг другу, так как в любой момент времени угол поворота φ_1 педали относительно кривошипа BA равен углу поворота φ_2 кривошипа. Скорость поступательного движения педали $v = \omega_2 \cdot BA$.

Из того, что пара вращений эквивалентна поступательному движению, следует и обратный вывод: поступательное движение твердого тела эквивалентно паре вращений, у которой момент угловых скоростей этих вращений равен поступательной скорости тела.

§ 70. ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ЗУБЧАТЫЕ ПЕРЕДАЧИ

Полученные в предыдущем параграфе результаты могут быть использованы для кинематического расчета зубчатых передач, образованных цилиндрическими зубчатыми колесами (шестернями). Рассмотрим основные виды этих передач.

Рядовой назовем передачу, в которой все оси колес, находящихся в последовательном зацеплении, неподвижны. При этом одно из колес (например, колесо 1 на рис. 202) является ведущим, а остальные ведомыми. В случае внешнего

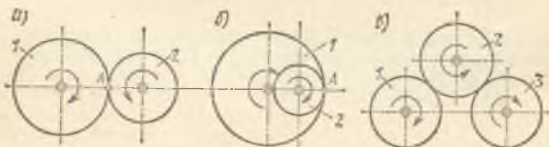


Рис. 202

(рис. 202, а) или внутреннего (рис. 202, б) зацепления двух колес имеем $|\omega_1| \cdot r_1 = |\omega_2| \cdot r_2$, так как скорость точки сцепления A у обоих колес одинакова. Учитывая, что число z зубцов сцепленных колес пропорционально их радиусам, а вращения колес происходят при внутреннем зацеплении, в одну сторону, а при внешнем в разные, получаем *

$$(\omega_1/\omega_2)_{\text{внеш}} = -r_2/r_1 = -z_2/z_1; (\omega_1/\omega_2)_{\text{внут}} = r_2/r_1 = z_2/z_1.$$

При внешнем зацеплении трех колес (рис. 202, в) найдем, что

$$\omega_1/\omega_2 = -r_2/r_1, \omega_2/\omega_3 = -r_3/r_2 \text{ и } \omega_1/\omega_3 = r_3/r_1 = z_3/z_1.$$

Следовательно, отношение угловых скоростей крайних шестерен в этой передаче обратно пропорционально их радиусам (числу зубцов) и не зависит от радиусов промежуточных (паразитных) шестерен.

Из полученных результатов следует, что при рядовом сцеплении шестерен

$$\omega_k/\omega_n = (-1)^k r_n/r_1 = (-1)^k z_n/z_1, \quad (101)$$

где k — число внешних зацеплений (в случае, изображенном на рис. 202, а, имеется одно внешнее зацепление; на рис. 202, в — два внешних зацепления, на рис. 202, б внешних зацеплений нет).

Передачным числом данной зубчатой передачи называется величина i_{1n} , дающая отношение угловой скорости ведущего колеса к угловой скорости ведомого.

* Во всех формулах надо учитывать знак ω ($\omega > 0$ при вращении против хода и $\omega < 0$ при вращении по ходу часовой стрелки).

мого:

$$i_{1n} = \omega_1/\omega_n. \quad (102)$$

Для рядовой передачи значение i_{1n} дает правая часть формулы (101).

Планетарной называется передача (рис. 203), в которой шестерня 1 неподвижна, а оси остальных шестерен, находящихся в последовательном зацеплении, укреплены на кривошипе AB , вращающемся вокруг оси неподвижной шестерни.

Дифференциальной называется передача, изображенная на рис. 203, если в ней шестерня 1 не является неподвижной и может вращаться вокруг своей оси A независимо от кривошипа AB .

Расчет планетарных и дифференциальных передач можно производить, сообщив мысленно всей неподвижной плоскости Ax_1y_1 вращение с угловой скоростью $-\omega_{AB}$, равной по модулю и противоположной по направлению угловой скорости кривошипа AB (метод остановки или метода Виллиса).

Тогда, на основании результатов § 69, кривошип в этом сложном движении будет неподвижен, а любая шестерня радиуса r_k будет иметь угловую скорость

$$\bar{\omega}_k = \omega_k - \omega_{AB},$$

где ω_k — абсолютная угловая скорость этой шестерни по отношению к осям Ax_1y_1 (рис. 203). При этом оси всех шестерен будут неподвижны и зависимость между $\bar{\omega}_k$ можно будет определить или приравняв скорости точек сцепления, или непосредственно по формуле (101).

Расчет планетарных и дифференциальных передач можно также производить с помощью мгновенных центров скоростей (см. § 56).

Задача 82. В планетарном механизме (рис. 203) шестерня 1 радиуса r_1 неподвижна, а кривошип AB вращается с угловой скоростью ω_{AB} . Найти угловую скорость шестерни 3 радиуса r_3 .

Решение. Абсолютные угловые скорости шестерен по отношению к осям Ax_1y_1 обозначим через ω_1 ($\omega_1 = 0$), ω_2 и ω_3 . Сообщив всей плоскости Ax_1y_1 вращение с угловой скоростью $-\omega_{AB}$, получим в этом движении:

$$\bar{\omega}_1 = 0 - \omega_{AB}, \quad \bar{\omega}_2 = \omega_2 - \omega_{AB}, \\ \bar{\omega}_3 = \omega_3 - \omega_{AB}, \quad \bar{\omega}_{AB} = 0.$$

В получившейся передаче оси колес неподвижны, а число внешних зацеплений $k=2$. Тогда по формуле (101)

$$\bar{\omega}_1/\bar{\omega}_3 = r_3/r_1 \text{ или } -\omega_{AB}/(\omega_3 - \omega_{AB}) = r_3/r_1.$$

Отсюда находим абсолютную угловую скорость шестерни 3

$$\omega_3 = (1 - r_1/r_3) \omega_{AB}.$$

Если $r_3 > r_1$, то направление вращения шестерни 3 совпадает с направлением вращения кривошипа, при $r_3 < r_1$ — не совпадает. В случае, когда $r_3 = r_1$, получаем $\omega_3 = 0$. Шестерня 3 в этом случае движется поступательно.

Относительную (по отношению к кривошипу AB) угловую скорость шестерни 3 найдем по формуле (97). Так как абсолютная скорость $\omega_3 = \omega_{3от} + \omega_{AB}$ (угловая скорость кривошипа является для шестерни 3 переносной), то

$$\omega_{3от} = \omega_3 - \omega_{AB} = -(r_1/r_3) \omega_{AB}.$$

При $r_3 = r_1$ получаем $\omega_{3от} = -\omega_{AB}$. Относительная $\omega_{3от}$ и переносная ω_{AB} угловые скорости образуют при этом пару, и мы другим путем приходим к выводу, что результирующее движение шестерни 3 является в этом случае поступательным со скоростью $v = \omega_{AB} \cdot AB$.

Задача 83. Редуктор скоростей (рис. 204) состоит из: а) неподвижной шестерни 1; б) двух спаренных шестерен 2 и 3, насаженных на кривошип, скрепленный с

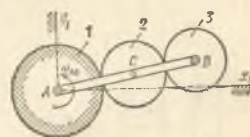


Рис. 203

ведущим валом AC (зацепление шестерен 2 и 1 внутреннее); в) шестерни 4, сидящий на ведомом валу DB . Числа зубьев шестерен: $z_1=120$, $z_2=40$, $z_3=30$, $z_4=50$. Ведущий вал делает $n_A=1500$ об/мин. Найти число оборотов в минуту ведомого вала B .

Решение. Обозначим абсолютные угловые скорости: вала AC вместе с кривошипом через ω_A , шестерни 4 вместе с валом DB через ω_B , шестерен 2 и 3 через ω_{23} (эти шестерни вращаются как одно тело). Шестерня 1 имеет угловую скорость $\omega_1=0$. Сообщив плоскости x_1y_1 , параллельно которой движется механизм, вращение с угловой скоростью $-\omega_A$, получим, что кривошип в этом движении будет неподвижен ($\bar{\omega}_A=0$), а шестерни будут иметь скорости:

$$\bar{\omega}_1=0-\omega_A, \quad \bar{\omega}_{23}=\omega_{23}-\omega_A, \quad \bar{\omega}_4=\omega_B-\omega_A.$$

Составляя теперь для шестерен 1 и 2 и шестерен 3 и 4 зависимости (101), получим:

$$\bar{\omega}_1/\bar{\omega}_{23}=z_2/z_1; \quad \bar{\omega}_{23}/\bar{\omega}_4=-z_4/z_3.$$

Перемножая эти равенства, найдем, что

$$\bar{\omega}_1/\bar{\omega}_4=-z_2z_4/z_1z_3 \quad \text{или} \quad \omega_A/(\omega_B-\omega_A)=z_2z_4/z_1z_3.$$

Отсюда, учитывая, что величина n об/мин, пропорциональна ω , находим

$$n_B=(1+z_1z_3/z_2z_4)n_A=4200 \text{ об/мин.}$$

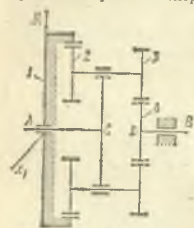


Рис. 204

Задача 84. Решить предыдущую задачу при условии, что шестерня 1 вращается в ту же сторону, что и ведущий вал AC , делая $n_1=1100$ об/мин (редуктор с дифференциальной передачей).

Решение. Ход решения остается таким же, как и в задаче 83, с той лишь разницей, что теперь $\omega_1 \neq 0$ (причем по условиям задачи знаки ω_1 и ω_A совпадают); следовательно, $\bar{\omega}_1=\omega_1-\omega_A$. В результате полученная в задаче 83 пропорция $\bar{\omega}_1/\bar{\omega}_4=-z_2z_4/z_1z_3$ даст

$$(\omega_1-\omega_A)/(\omega_B-\omega_A)=-z_2z_4/z_1z_3.$$

Отсюда, переходя к оборотам в минуту, находим

$$n_B=n_A+(z_1z_3/z_2z_4)(n_A-n_1)=2220 \text{ об/мин.}$$

Если шестерня 1 вращается в противоположном направлении, то в полученном результате надо изменить знак при n_1 .

§ 71. СЛОЖЕНИЕ ВРАЩЕНИЙ ВОКРУГ ПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ ОСЕЙ

1. Сложение угловых скоростей. Пусть относительное движение тела представляет собой вращение с угловой скоростью $\bar{\omega}_1$ вокруг оси a_1a_1 , укрепленной на кривошипе 2 (рис. 205, а), а переносным является вращение кривошипа с угловой скоростью $\bar{\omega}_2$ вокруг оси b_1b_1 , которая с осью a_1a_1 пересекается в точке O . Схематически такой случай сложения вращений вокруг пересекающихся осей показан на рис. 205, б.

Очевидно, что в этом случае скорость точки O , как лежащей одновременно на обеих осях, будет равна нулю и результирующее движение тела является движением вокруг неподвижной точки O . Тогда тело имеет в данный момент времени угловую скорость $\bar{\omega}$, направленную по мгновенной оси вращения, проходящей через точку O (см. § 60).

Чтобы определить значение $\bar{\omega}$, найдем скорость какой-нибудь точки M тела, радиус-вектор которой $\vec{r}=\vec{OM}$. В относительном движении (вращение вокруг оси Oa_1) точка M , согласно формуле (76), получит скорость $\vec{v}_{от}=\bar{\omega}_1 \times \vec{r}$; в переносном же движении (вращение вокруг оси Ob_1) точка получит скорость $\vec{v}_{пер}=\bar{\omega}_2 \times \vec{r}$. Тогда абсолютная скорость точки M

$$\begin{aligned} \vec{v}_{аб} &= \vec{v}_{от} + \vec{v}_{пер} = \\ &= (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2) \times \vec{r}. \end{aligned}$$

Но так как результирующее движение тела является мгновенным вращением с некоторой угловой скоростью $\bar{\omega}$, то должно быть

$$\vec{v}_{аб} = \bar{\omega} \times \vec{r}.$$

Поскольку точка M — любая точка тела, полученные равенства должны выполняться при любом $\vec{r}$, что возможно лишь тогда, когда

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2. \quad (103)$$

Следовательно, при сложении вращений вокруг двух осей, пересекающихся в точке O , результирующее движение тела будет мгновенным вращением вокруг оси Os , проходящей через точку O , и угловая скорость этого вращения будет равна геометрической сумме относительной и переносной угловых скоростей. Мгновенная ось Os направлена вдоль вектора $\bar{\omega}$, т. е. по диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\bar{\omega}_1$ и $\bar{\omega}_2$.

С течением времени ось Os меняет свое положение, описывая коническую поверхность, вершина которой находится в точке O .

Если тело участвует в мгновенных вращениях вокруг нескольких осей, пересекающихся в точке O , то, последовательно применяя формулу (103), найдем, что результирующее движение будет мгновенным вращением вокруг оси, проходящей через точку O , с угловой скоростью

$$\bar{\omega} = \sum \bar{\omega}_k. \quad (104)$$

Задача 85. Определить абсолютную угловую скорость $\bar{\omega}$ конического катка (см. задачу 72 в § 62), если радиус AC катка R , расстояние $OA=l$ и скорость v_A точки A известны (рис. 206).

Решение. Абсолютное движение катка является результатом его относительного вращения вокруг оси OA с угловой скоростью $\bar{\omega}_1$ и переносного вращения кривошипа OA вокруг оси OB с угловой скоростью $\bar{\omega}_2$; при этом численно $\omega_2 = v_A/l$.

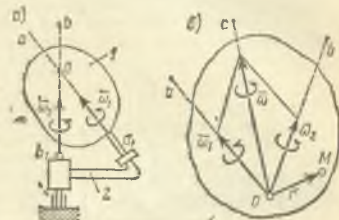


Рис. 205

Мгновенная ось вращения, а следовательно, и вектор абсолютной угловой скорости $\vec{\omega}$ направлены по линии OC , так как скорость точки C равна нулю (см. задачу 72). Строя соответствующий параллелограмм, находим, что $\vec{\omega} = \vec{\omega}_2 / \sin \alpha$.

Так как $\sin \alpha = R / \sqrt{l^2 + R^2}$, то окончательно $\vec{\omega} = (v_A / R) \sqrt{1 + R^2 / l^2}$.

Другим путем этот результат можно получить (учитывая, что OC — мгновенная ось вращения) из равенства $v_A = \omega l$, где $h = l \sin \alpha$.

Движение катка представляет собой серию элементарных поворотов с угловой скоростью $\vec{\omega}$ вокруг оси OC , которая непрерывно меняет свое положение, описывает круглый конус с вершиной в точке O .

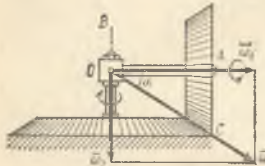


Рис. 206

2. Сложение угловых ускорений. Рассмотрим случай, когда вращение тела вокруг двух пересекающихся осей происходит с угловыми ускорениями: $\vec{\varepsilon}_1$ — относительным и $\vec{\varepsilon}_2$ — переносным. Найдем, каким будет тогда абсолютное угловое ускорение $\vec{\varepsilon}$ тела. Из равенства (103) получим

$$\vec{\varepsilon} = d\vec{\omega} / dt = d\vec{\omega}_1 / dt + d\vec{\omega}_2 / dt,$$

где $\vec{\omega}_1$ — относительная, а $\vec{\omega}_2$ — переносная угловые скорости.

Рассуждая так же, как в § 66, и сохраняя ту же символику, представим предыдущий результат в виде

$$\vec{\varepsilon} = (d\vec{\omega}_1)_1 / dt + (d\vec{\omega}_1)_2 / dt + (d\vec{\omega}_2)_1 / dt + (d\vec{\omega}_2)_2 / dt. \quad (105)$$

Здесь $(d\vec{\omega}_1)_1 / dt = \vec{\varepsilon}_1$, а $(d\vec{\omega}_2)_2 / dt = \vec{\varepsilon}_2$. Значение $(d\vec{\omega}_1)_2 / dt$ определяется так же, как значение $(d\vec{v}_{от})_2 / dt$ в § 66 и дается формулой (92) с заменой в ней $\vec{v}_{от}$ на $\vec{\omega}_1$, а $\vec{\omega}$ на $\vec{\omega}_2$. Следовательно, $(d\vec{\omega}_1)_2 / dt = \vec{\omega}_2 \times \vec{\omega}_1$. Наконец, так как $\vec{\omega}_2$ при относительном движении (на рис. 205 при вращении тела вокруг оси $a_1 a$) не изменяется, то $(d\vec{\omega}_2)_1 / dt = 0$. В результате равенство (105) дает окончательно

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_2 + (\vec{\omega}_2 \times \vec{\omega}_1). \quad (106)$$

Формула (106) и определяет в случае сложения вращений вокруг пересекающихся осей абсолютное угловое ускорение тела.

§ 72. СЛОЖЕНИЕ ПОСТУПАТЕЛЬНОГО И ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЙ. ВИНТОВОЕ ДВИЖЕНИЕ

Рассмотрим сложное движение твердого тела, состоящее из поступательного и вращательного движений. Соответствующий пример показан на рис. 207. Здесь относительным движением тела 1 является вращение с угловой скоростью $\vec{\omega}$ вокруг оси Aa , укрепленной на платформе 2, а переносным — поступательное движение платформы со скоростью $\vec{v}$. Одновременно в двух таких движениях участвует и колесо 3, для которого относительным движением является вращение вокруг его оси, а переносным — движение той же платформы. В зависимости от значения угла α между векторами $\vec{\omega}$ и $\vec{v}$ (для колеса этот угол равен 90°) здесь возможны три случая.

1. Скорость поступательного движения перпендикулярна оси вращения ($\vec{v} \perp \vec{\omega}$). Пусть сложное движение тела складывается из вращательного движения вокруг оси Aa с угловой скоростью $\vec{\omega}$ и поступательного движения со скоростью $\vec{v}$, перпендикулярной $\vec{\omega}$ (рис. 208). Легко видеть, что это

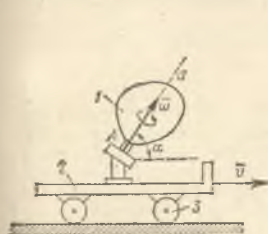


Рис. 207

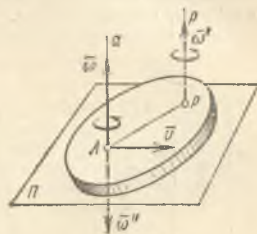


Рис. 208

движение представляет собой (по отношению к плоскости Π , перпендикулярной оси Aa) плоскопараллельное движение, подробно изученное в гл. XI. Если считать точку A полюсом, то рассматриваемое движение, как и всякое плоскопараллельное, будет действительно складываться из поступательного со скоростью $\vec{v}_A = \vec{v}$, т. е. со скоростью полюса, и из вращательного вокруг оси Aa , проходящей через полюс.

Вектор $\vec{v}$ можно заменить парой угловых скоростей $\vec{\omega}'$, $\vec{\omega}''$ (см. § 69), беря $\vec{\omega}' = \vec{\omega}$, а $\vec{\omega}'' = -\vec{\omega}$. При этом расстояние AP определится из равенства $v = \omega' \cdot AP$, откуда (учитывая, что $\omega' = \omega$)

$$AP = v / \omega. \quad (107)$$

Векторы $\vec{\omega}$ и $\vec{\omega}''$ дают при сложении нуль, и мы получаем, что движение тела в этом случае можно рассматривать как мгновенное вращение вокруг оси Pp с угловой скоростью $\vec{\omega}' = \vec{\omega}$. Этот результат был раньше получен другим путем (см. § 56). Сравнивая равенства (55) и (107), видим, что точка P для сечения S тела является мгновенным центром скоростей ($v_P = 0$). Здесь еще раз убеждаемся, что поворот тела вокруг осей Aa и Pp происходит с одной и той же угловой скоростью $\vec{\omega}$, т. е. что вращательная часть движения не зависит от выбора полюса (см. § 52).

2. Винтовое движение ($\vec{\omega} \parallel \vec{v}$). Если сложное движение тела складывается из вращательного вокруг оси Aa с угловой скоростью $\vec{\omega}$ и поступательного со скоростью $\vec{v}$, направленной параллельно оси Aa (рис. 209), то такое движение тела называется винтовым. Ось Aa называют осью винта. Когда векторы $\vec{v}$ и $\vec{\omega}$ направлены в

одну сторону, то при принятом нами правиле изображения $\vec{\omega}$ винт будет *правым*; если в разные стороны, — *левым*.

Расстояние, проходимое за время одного оборота любой точкой тела, лежащей на оси винта, называется *шагом* h винта. Если величины v и ω постоянны, то шаг винта также будет постоянным. Обозначая время одного оборота через T , получаем в этом случае $vT = h$ и $\omega T = 2\pi$, откуда $h = 2\pi v / \omega$.

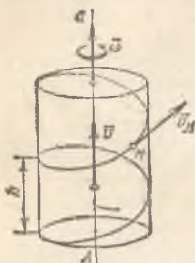
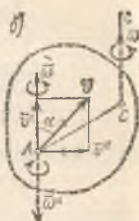


Рис. 209



Рис. 210



При постоянном шаге любая точка M тела, не лежащая на оси винта, описывает *винтовую линию*. Скорость точки M , находящейся от оси винта на расстоянии r , складывается из поступательной скорости v и перпендикулярной ей скорости, получаемой во вращательном движении, которая численно равна ωr . Следовательно,

$$v_M = \sqrt{v^2 + \omega^2 r^2}.$$

Направлена скорость $\vec{v}_M$ по касательной к винтовой линии. Если цилиндрическую поверхность, по которой движется точка M , разрезать вдоль образующей и развернуть, то винтовые линии обратятся в прямые, наклоненные к основанию цилиндра под углом α ($\operatorname{tg} \alpha = h / 2\pi r$).

3. Скорость поступательного движения образует произвольный угол с осью вращения. Сложное движение, совершаемое телом в этом случае (рис. 210, а), представляет собой движение, рассмотренное в § 63 (общий случай движения свободного твердого тела).

Разложим вектор $\vec{v}$ (рис. 210, б) на составляющие: $\vec{v}'$, направленную вдоль $\vec{\omega}$ ($v' = v \cos \alpha$), и $\vec{v}''$, перпендикулярную $\vec{\omega}$ ($v'' = v \sin \alpha$). Скорость $\vec{v}''$ можно заменить парой угловых скоростей $\vec{\omega}' = \vec{\omega}$ и $\vec{\omega}'' = -\vec{\omega}$ (как на рис. 208), после чего векторы $\vec{\omega}$ и $\vec{\omega}''$ можно отбросить. Расстояние AC найдем по формуле (107):

$$AC = v'' / \omega = (v \sin \alpha) / \omega.$$

Тогда у тела остается вращение с угловой скоростью $\vec{\omega}'$ и поступательное движение со скоростью $\vec{v}'$. Следовательно, распределение скоростей точек тела в данный момент времени будет таким же, как при винтовом движении вокруг оси Cc с угловой скоростью $\vec{\omega}' = \vec{\omega}$ и поступательной скоростью $\vec{v}' = v \cos \alpha$.

Проделанными операциями (рис. 210, б) мы перешли от полюса A к полюсу C . Результат подтверждает (см. § 63), что в общем случае движения твердого тела угловая скорость при перемене полюса не изменяется ($\vec{\omega}' = \vec{\omega}$), а меняется только поступательная скорость ($\vec{v}' \neq \vec{v}$).

Так как при движении свободного твердого тела величины $\vec{v}$, $\vec{\omega}$, α будут вообще все время изменяться, то будет непрерывно меняться и положение оси Cc , которую поэтому называют *мгновенной винтовой осью*. Таким образом, движение свободного твердого тела можно еще рассматривать как складывающееся из серии мгновенных винтовых движений вокруг непрерывно изменяющихся винтовых осей.

Раздел третий ДИНАМИКА ТОЧКИ

Глава XV

ВВЕДЕНИЕ В ДИНАМИКУ. ЗАКОНЫ ДИНАМИКИ

§ 73. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Динамикой называется раздел механики, в котором изучается движение материальных тел под действием сил.

Движение тел с чисто геометрической точки зрения рассматривалось в кинематике. В динамике, в отличие от кинематики, при изучении движения тел принимают во внимание как действующие на них силы, так и инертность самих материальных тел.

Понятие о силе, как об основной мере механического действия, оказываемого на материальное тело, было введено в статике. Но в статике мы не касались вопроса о возможных изменениях действующих сил с течением времени, а при решении задач считали все силы постоянными. Между тем на движущееся тело наряду с постоянными силами действуют обычно силы переменные, модули и направления которых при движении тела изменяются. При этом переменными могут быть и заданные (активные) силы *, и реакции связей.

Как показывает опыт, переменные силы могут определенным образом зависеть от времени, положения тела и его скорости. В частности, от времени зависит сила тяги электровоза при постепенном выключении или включении реостата или сила, вызывающая колебания фундамента при работе мотора с плохо центрированным валом; от положения тела зависит ньютонова сила тяготения или сила упругости пружины; от скорости зависит сила сопротивления среды (подробнее см. § 76). В заключение отметим, что все введенные в статике понятия и полученные там результаты относятся в равной мере и к переменным силам, так как условие постоянства сил нигде в статике не использовалось.

Инертность тела проявляется в том, что оно сохраняет свое движение при отсутствии действующих сил, а когда на него начинает действовать сила, то скорости точек тела изменяются не мгновенно,

* *Активной* обычно называют силу, которая, начав действовать на покоящееся тело, может привести его в движение.

временно, а постепенно и тем медленнее, чем больше инертность этого тела. Количественной мерой инертности материального тела является физическая величина, называемая *массой* тела *. В классической механике масса m рассматривается как величина скалярная, положительная и постоянная для каждого данного тела.

Кроме суммарной массы движение тела зависит еще в общем случае от формы тела, точнее от взаимного расположения образующих его частиц, т. е. от распределения масс в теле.

Чтобы при первоначальном изучении динамики отвлечься от учета формы тела (распределения масс), вводят абстрактное понятие о *материальной точке*, как о точке, обладающей массой, и начинают изучение динамики с динамики материальной точки.

Из кинематики известно, что движение тела складывается в общем случае из поступательного и вращательного. При решении конкретных задач материальное тело можно рассматривать как материальную точку в тех случаях, когда по условиям задачи допустимо не принимать во внимание вращательную часть движения тела. Например, материальной точкой можно считать планету при изучении ее движения вокруг Солнца или артиллерийский снаряд при определении дальности его полета и т. п. Соответственно поступательно движущееся тело можно всегда рассматривать как материальную точку с массой, равной массе всего тела. Справедливость этих утверждений будет обоснована в § 107.

Изучать динамику мы начнем с динамики материальной точки, так как естественно, что изучение движения одной точки должно предшествовать изучению движения системы точек и, в частности, твердого тела.

§ 74. ЗАКОНЫ ДИНАМИКИ. ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

В основе динамики лежат законы, установленные путем обобщения результатов целого ряда опытов и наблюдений, посвященных изучению движения тел, и проверенные обширной общественно-производственной практикой человечества. Систематически законы динамики были впервые изложены И. Ньютоном в его классическом сочинении «Математические начала натуральной философии», изданном в 1687 г.**. Сформулировать эти законы можно следующим образом.

Первый закон (закон инерции): *изолированная от внешних воздействий материальная точка сохраняет свое состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока приложенные силы не заставят ее изменить это состояние*. Движение, совершаемое точкой при отсутствии сил, называется движением *по инерции*.

* Масса является еще мерой гравитационных свойств тела (см. § 76).

** Есть прекрасный русский перевод, сделанный А. Н. Крыловым. См.: Собрание трудов акад. А. Н. Крылова, т. VII. М.— Л., 1936.

Закон инерции отражает одно из основных свойств материи — пребывать неизменно в движении. Важно отметить, что развитие динамики как науки стало возможным лишь после того, как Галилеем был открыт этот закон (1638 г.) и тем самым опровергнута господствовавшая со времен Аристотеля точка зрения о том, что движение тела может происходить только под действием силы.

Существенным является вопрос о том, по отношению к какой системе отсчета справедлив закон инерции. Ньютон предполагал, что существует некое неподвижное (абсолютное) пространство, по отношению к которому этот закон выполняется. Но по современным воззрениям пространство — это форма существования материи, и какого-то абсолютного пространства, свойства которого не зависят от движущейся в нем материи, не существует. Между тем, поскольку закон имеет опытное происхождение (еще Галилей указал, что к этому закону можно прийти, рассматривая движение шарика по наклонной плоскости со все убывающим углом наклона), должны существовать системы отсчета, в которых с той или иной степенью приближения данный закон будет выполняться. В связи с этим в механике, переходя, как обычно, к научной абстракции, вводят понятие о системе отсчета, в которой справедлив закон инерции, постулируют ее существование и называют *инерциальной системой отсчета*.

Можно ли данную реальную систему отсчета при решении тех или иных задач механики рассматривать как инерциальную, устанавливается путем проверки того, в какой мере результаты, полученные в предположении, что эта система является инерциальной, подтверждаются опытом. По данным опыта для нашей Солнечной системы инерциальной с высокой степенью точности можно считать систему отсчета, начало которой находится в центре Солнца, а оси направлены на так называемые неподвижные звезды. При решении большинства технических задач инерциальной, с достаточной для практики точностью, можно считать систему отсчета, жестко связанную с Землей. Справедливость этого утверждения будет обоснована в § 92.

Второй закон (основной закон динамики) устанавливает, как изменяется скорость точки при действии на нее какой-нибудь силы, а именно: *произведение массы материальной точки на ускорение, которое она получает под действием данной силы, равно по модулю этой силе, а направление ускорения совпадает с направлением силы*.

Математически этот закон выражается векторным равенством

$$m\vec{a} = \vec{F}. \quad (1)$$

При этом между модулями ускорения и силы имеет место зависимость

$$ma = F. \quad (1')$$

Второй закон динамики, как и первый, имеет место только по отношению к инерциальной системе отсчета. Из этого закона непосредственно видно, что мерой инертности материальной точки явля-

ется ее масса, поскольку при действии данной силы точка, масса которой больше, т. е. более инертная, получит меньшее ускорение и наоборот.

Если на точку действует одновременно несколько сил, то они, как это следует из закона параллелограмма сил, будут эквивалентны одной силе, т. е. равнодействующей $\vec{R}$, равной геометрической сумме данных сил. Уравнение, выражающее основной закон динамики, принимает в этом случае вид

$$m\vec{a} = \vec{R} \quad \text{или} \quad m\vec{a} = \sum \vec{F}_k. \quad (2)$$

Этот же результат можно получить, используя вместо закона параллелограмма закон независимости действия сил, согласно которому при одновременном действии на точку нескольких сил каждая из них сообщает точке такое же ускорение, какое она сообщила бы, действуя одна.

Третий закон (закон равенства действия и противодействия) устанавливает характер механического взаимодействия между материальными телами. Для двух материальных точек он гласит: *две материальные точки действуют друг на друга с силами, равными по модулю и направленными вдоль прямой, соединяющей эти точки, в противоположные стороны*.

Этим законом мы уже пользовались в статике. Он играет большую роль в динамике системы материальных точек, как устанавливающий зависимость между действующими на эти точки внутренними силами.

При взаимодействии двух свободных материальных точек, они, согласно третьему и второму законам динамики, будут двигаться с ускорениями, обратно пропорциональными их массам.

Задачи динамики. Для свободной материальной точки задачами динамики являются следующие: 1) зная закон движения точки, определить действующую на нее силу (*первая задача динамики*); 2) зная действующие на точку силы, определить закон движения точки (*вторая, или основная, задача динамики*).

Для несвободной материальной точки, т. е. точки, на которую наложена связь, вынуждающая ее двигаться по заданной поверхности или кривой, первая задача динамики обычно состоит в том, чтобы, зная движение точки и действующие на нее активные силы, определить реакцию связи. Вторая (основная) задача динамики при несвободном движении распадается на две и состоит в том, чтобы, зная действующие на точку активные силы, определить: а) закон движения точки, б) реакцию наложенной связи.

§ 75. СИСТЕМЫ ЕДИНИЦ

Для измерения всех механических величин оказывается достаточно ввести независимые друг от друга единицы измерения каких-нибудь трех величин. Двумя из них принято считать единицы длины и времени. В качестве третьей оказывается наиболее удобным выбрать единицу измерения или массы, или силы. Так как

эти величины связаны равенством (1), то произвольно единицу измерения каждой из них выбрать нельзя. Отсюда вытекает возможность введения в механике двух принципиально отличных друг от друга систем единиц.

Первый тип систем единиц. В этих системах за основные принимаются единицы длины, времени и массы, а сила измеряется производной единицей.

К таким системам относится Международная система единиц измерения физических величин (СИ), в которой основными единицами измерения механических величин являются метр (м), килограмм массы (кг) и секунда (с). Единицей же измерения силы является производная единица — 1 ньютон (Н); 1 Н — это сила, сообщающая массе в 1 кг ускорение 1 м/с² (1 Н = 1 кг · м/с²). О том, что собой представляют 1 м, 1 кг и 1 с, известно из курса физики. Международная система единиц (СИ) введена в СССР как предпочтительная с 1961 г. и в данном курсе мы пользуемся ею.

Второй тип систем единиц. В этих системах за основные принимаются единицы длины, времени и силы, а масса измеряется производной единицей.

К таким системам относится имевшая большое распространение в технике система МКГСС, в которой основными единицами являются метр (м), килограмм силы (кГ) и секунда (с). Единицей измерения массы в этой системе будет 1 кГ · с²/м, т. е. масса, которой сила в 1 кГ сообщает ускорение 1 м/с².

Соотношение между единицами силы в системах СИ и МКГСС таково: 1 кГ = 9,81 Н или 1 Н = 0,102 кГ.

В заключение отметим, что необходимо различать понятия *размерности* величины и *единицы ее измерения*. Размерность определяется только видом уравнения, выражающего значение данной величины, а единица измерения зависит еще от выбора основных единиц. Например, если, как это принято, обозначать размерность длины, времени и массы соответственно символами L , T и M , то размерность скорости L/T , а единицей измерения может быть 1 м/с, 1 км/ч и т. д.

§ 76. ОСНОВНЫЕ ВИДЫ СИЛ

При решении задач динамики мы будем в основном рассматривать следующие постоянные или переменные силы (законы изменения переменных сил, как правило, устанавливаются опытным путем).

Сила тяжести. Это постоянная сила $\vec{P}$, действующая на любое тело, находящееся вблизи земной поверхности (подробнее см. § 92). Модуль силы тяжести равен весу тела.

Опытом установлено, что под действием силы $\vec{P}$ любое тело при свободном падении на Землю (с небольшой высоты и в безвоздушном пространстве) имеет одно и то же ускорение $\vec{g}$, называемое *ускорением свободного падения*, а иногда *ускорением силы тяжести* *.

Тогда из уравнения (1') следует, что

$$P = mg \text{ или } m = P/g. \quad (3)$$

Эти равенства позволяют, зная массу тела, определить его вес (модуль действующей на него силы тяжести) или, зная вес тела, определить его массу. Вес тела или сила тяжести, как и величина g , изменяются с изменением широты и высоты над уровнем моря; масса же является для данного тела величиной неизменной.

Сила трения. Так будем кратко называть силу трения скольжения, действующую (при отсутствии жидкой смазки) на движущееся тело. Ее модуль определяется равенством (см. § 23)

$$F = fN, \quad (4)$$

где f — коэффициент трения, который будем считать постоянным; N — нормальная реакция.

Сила тяготения. Это сила, с которой два материальных тела притягиваются друг к другу по закону всемирного тяготения, открытому Ньютоном. Сила тяготения зависит от расстояния и для двух материальных точек с массами m_1 и m_2 , находящихся на расстоянии r друг от друга, выражается равенством

$$F = f m_1 m_2 / r^2, \quad (5)$$

где f — гравитационная постоянная (в СИ $f = 6,673 \cdot 10^{-11}$ м³/кг · с²).

Сила упругости. Эта сила тоже зависит от расстояния. Ее значение можно определить исходя из закона Гука, согласно которому напряжение (сила, отнесенная к единице площади) пропорционально деформации. В частности, для силы упругости пружины получается значение

$$F = c\lambda, \quad (6)$$

где λ — удлинение (или сжатие) пружины; c — так называемый коэффициент жесткости пружины (в СИ измеряется в Н/м).

Сила вязкого трения. Такая сила, зависящая от скорости, действует на тело при его медленном движении в очень вязкой среде (или при наличии жидкой смазки) и может быть выражена равенством

$$R = \mu v, \quad (7)$$

где v — скорость тела; μ — коэффициент сопротивления. Зависимость вида (7) можно получить исходя из закона вязкого трения, открытого Ньютоном.

Сила аэродинамического (гидродинамического) сопротивления. Эта сила тоже зависит от

* Закон свободного падения тел был открыт Галилеем. Значение g в разных местах земной поверхности различно; оно зависит от географической широты места и высоты его над уровнем моря. На широте Москвы (на уровне моря) $g = 9,8156$ м/с².

скорости и действует на тело, движущееся в такой, например, среде, как воздух или вода. Обычно ее величину выражают равенством

$$R=0,5c_x\rho Sv^2, \quad (8)$$

где ρ — плотность среды; S — площадь проекции тела на плоскость, перпендикулярную направлению движения (площадь миделя); c_x — безразмерный коэффициент сопротивления, определяемый обычно экспериментально и зависящий от формы тела и от того, как оно ориентировано при движении.

Инертная и гравитационная массы. Для экспериментального определения массы данного тела можно исходить из закона (1), куда масса входит как мера инертности и называется поэтому инертной массой. Но можно исходить и из закона (5), куда масса входит как мера гравитационных свойств тела и называется соответственно гравитационной (или тяжелой) массой. В принципе ни откуда не следует, что инертная и гравитационная массы представляют собой одну и ту же величину. Однако целым рядом экспериментов установлено, что значения обеих масс совпадают с очень высокой степенью точности (по опытам, проделанным советскими физиками (1971 г.), — с точностью до 10^{-12}). Этот экспериментально установленный факт называют принципом эквивалентности. Эйнштейн * положил его в основу своей общей теории относительности (теории тяготения).

Исходя из изложенного, в механике пользуются единым термином «масса», определяя массу как меру инертности тела и его гравитационных свойств.

Глава XVI

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ ТОЧКИ

§ 77. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Для решения задач динамики точки будем пользоваться одной из следующих двух систем уравнений.

Уравнения в декартовых координатах. Из кинематики известно, что движение точки в прямоугольных декартовых координатах задается уравнениями (см. § 37):

$$x=f_1(t), \quad y=f_2(t), \quad z=f_3(t). \quad (9)$$

Задачи динамики точки состоят в том, чтобы, зная движение точки, т. е. уравнения (9), определить действующую на точку силу

* Альберт Эйнштейн (1879—1955) — выдающийся ученый-физик, создатель специальной теории относительности (релятивистская механика) и общей теории относительности.

или, наоборот, зная действующие на точку силы, определить закон ее движения, т. е. уравнения (9). Следовательно, для решения задач динамики точки надо иметь уравнения, связывающие координаты x, y, z этой точки и действующую на нее силу (или силы). Эти уравнения и дает второй закон динамики.

Рассмотрим материальную точку, движущуюся под действием сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ по отношению к инерциальной системе отсчета $Oxyz$. Проектируя обе части равенства (2), т. е. равенства $m\vec{a}=\Sigma\vec{F}_k$, на оси x, y, z и учитывая, что $a_x=d^2x/dt^2$ и т. д., получим:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma F_{kx}, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = \Sigma F_{ky}, \quad m \frac{d^2z}{dt^2} = \Sigma F_{kz}, \quad (10)$$

или, обозначая вторые производные по времени двумя точками,

$$m\ddot{x} = \Sigma F_{kx}, \quad m\ddot{y} = \Sigma F_{ky}, \quad m\ddot{z} = \Sigma F_{kz}. \quad (10')$$

Это и будут искомые уравнения, т. е. дифференциальные уравнения движения точки в прямоугольных декартовых координатах. Так как действующие силы могут зависеть от времени t , от положения точки, т. е. от ее координат x, y, z , и от скорости, т. е. от $v_x=\dot{x}$, $v_y=\dot{y}$, $v_z=\dot{z}$, то в общем случае правая часть каждого из уравнений (10) может быть функцией всех этих переменных, т. е. $t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ одновременно.

Уравнения в проекциях на оси естественного трехгранника. Для получения этих уравнений спроектируем обе части равенства $m\vec{a}=\Sigma\vec{F}_k$ на оси $M\tau nb$, т. е. на касательную $M\tau$ к траектории точки, главную нормаль Mn , направленную в сторону вогнутости траектории, и бинормаль Mb (см. в § 42 рис. 122; на нем $Oxyz$ — оси, по отношению к которым движется точка). Тогда, учитывая, что (см. § 43) $a_\tau=dv/dt$, $a_n=v^2/\rho$, $a_b=0$, получим

$$m \frac{dv}{dt} = \Sigma F_{k\tau}, \quad m \frac{v^2}{\rho} = \Sigma F_{kn}, \quad 0 = \Sigma F_{kb}. \quad (11)$$

Уравнения (11), где $v=ds/dt$, представляют собой дифференциальные уравнения движения точки в проекциях на оси естественного трехгранника.

§ 78. РЕШЕНИЕ ПЕРВОЙ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ (ОПРЕДЕЛЕНИЕ СИЛ ПО ЗАДАННОМУ ДВИЖЕНИЮ)

Если ускорение движущейся точки задано, то действующая сила или реакция связи сразу находится по уравнениям (1) или (2). При этом для вычисления реакции надо дополнительно знать активные силы. Когда ускорение непосредственно не задано, но известен закон движения точки, то для определения силы можно воспользоваться уравнениями (10) или (11).

Задача 86. Воздушный шар весом P опускается с ускорением a . Какой груз Q (балласт) надо сбросить, чтобы шар стал подниматься с таким же ускорением.

Решение. На падающий шар действуют сила тяжести P и подъемная сила F (рис. 211, а). Составляя уравнение (2) в проекции на вертикаль, найдем, что

$$(P/g) a = P - F.$$

Когда будет сброшен балласт (рис. 211, б), вес шара станет равен $P - Q$, а подъемная сила останется той же. Тогда, учитывая что шар при этом движется вверх, получим

$$(P - Q)/g = F - (P - Q).$$

Исключая из этих уравнений неизвестную силу F , найдем

$$Q = 2P/(1 + g/a).$$

Задача 87. Лифт весом P (рис. 212) начинает подниматься с ускорением a . Определить натяжение троса.

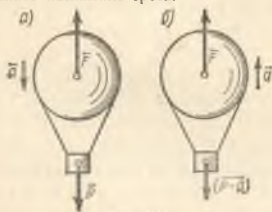


Рис. 211

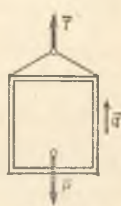


Рис. 212

Решение. На лифт действуют сила тяжести P и реакция троса T . Составляя уравнение (2) в проекции на вертикаль, получим $(P/g)a = T - P$, откуда $T = P(1 + a/g)$.

Если лифт опускается с таким же ускорением, то натяжение троса будет равно $T_1 = P(1 - a/g)$.

Задача 88. Радиус закругления в точке A моста равен R (рис. 213). Найти, какое давление на мост в точке A окажет автомобиль массы m , движущийся со скоростью v .



Рис. 213



Рис. 214

Решение. В точке A автомобиль имеет нормальное ускорение $a_n = v^2/R$. При этом на него действуют сила тяжести $P = mg$ и реакция N . Тогда по уравнению (2), составленному в проекции на нормаль, или непосредственно по второму

из уравнений (11) будет

$$mv^2/R = mg - N, \text{ откуда } N = m(g - v^2/R).$$

Сила давления на мост равна по модулю N , но направлена вниз.

Задача 89. Кривошип OA длины l , вращаясь равномерно с угловой скоростью ω , перемещает кулису K , движущуюся поступательно вдоль направляющих I, I (рис. 214). Найти, пренебрегая трением, чему при этом равна сила давления Q ползуна A на кулису, если вес кулисы P .

Решение. Проведем координатную ось Ox . Тогда положение кулисы определится координатой $x = l \cos \varphi$ и, поскольку $\varphi = \omega t$, закон движения кулисы будет $x = l \cos \omega t$. Зная этот закон, воспользуемся вторым из уравнений (10'). Вычисляя производную от x , получим

$$\dot{x} = -\omega^2 l \cos \omega t = -\omega^2 x.$$

Кроме того, $Q_x = -Q$. В результате находим

$$-(P/g)\omega^2 x = -Q \text{ и } Q = (P/g)\omega^2 x.$$

Следовательно, сила давления ползуна на кулису изменяется пропорционально расстоянию x кулисы от оси O .

§ 79. РЕШЕНИЕ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ПРИ ПРЯМОЛИНЕЙНОМ ДВИЖЕНИИ ТОЧКИ

Движение материальной точки будет прямолинейным, когда действующая на нее сила (или равнодействующая приложенных сил) имеет постоянное направление, а скорость точки в начальный момент времени равна нулю или направлена вдоль силы.

Если при прямолинейном движении направить вдоль траектории координатную ось Ox , то движение точки будет определяться первым из уравнений (10), т. е. уравнением

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma F_{kx} \text{ или } m \ddot{x} = \Sigma F_{kx}. \quad (12)$$

Уравнение (12) называют дифференциальным уравнением прямолинейного движения точки. Иногда его удобнее заменить двумя уравнениями, содержащими первые производные:

$$m \frac{dv_x}{dt} = \Sigma F_{kx}, \quad \frac{dx}{dt} = v_x. \quad (13)$$

В случаях, когда при решении задачи надо искать зависимость скорости от координаты x , а не от времени t (или когда сами силы зависят от x), уравнение (13) преобразуют к переменному x . Так как $dv_x/dt = dv_x/dx \cdot dx/dt = dv_x/dx \cdot v_x$, то вместо (13) получим:

$$mv_x \frac{dv_x}{dx} = \Sigma F_{kx}, \quad \frac{dx}{dt} = v_x. \quad (14)$$

Решение основной задачи динамики сводится к тому, чтобы из данных уравнений, зная силы, найти закон движения точки, т. е. $x = f(t)$. Для этого надо проинтегрировать соответствующее дифференциальное уравнение. Чтобы яснее было, к чему сводится эта математическая задача, напомним, что входящие в правую часть уравнения (12) силы могут зависеть от времени t , от положения

точки, т. е. от x , и от ее скорости, т. е. от $v_x = \dot{x}$. Следовательно, в общем случае уравнение (12) с математической точки зрения представляет собой дифференциальное уравнение 2-го порядка, имеющее вид $m\ddot{x} = F(t, x, \dot{x})$.

Если для данной конкретной задачи дифференциальное уравнение (12) будет проинтегрировано, то в полученное решение войдут две постоянные интегрирования C_1 и C_2 и общее решение уравнения (12) будет иметь вид

$$x = f(t, C_1, C_2). \quad (15)$$

Чтобы довести решение каждой конкретной задачи до конца, надо определить значения постоянных C_1 и C_2 . Для этого используют обычно так называемые *начальные условия*.

Изучение всякого движения будем начинать с некоторого определенного момента времени, называемого *начальным моментом*. От этого момента будем отсчитывать время движения, считая, что в начальный момент $t=0$. Обычно за начальный принимают момент начала движения под действием заданных сил. Положение, которое точка занимает в начальный момент, называется *начальным положением*, а ее скорость в этот момент — *начальной скоростью* (начальную скорость точка может иметь или потому, что до момента $t=0$ она двигалась по инерции, или в результате действия на нее до момента $t=0$ каких-то других сил). Чтобы решить основную задачу динамики, надо кроме действующих сил знать еще *начальные условия*, т. е. положение и скорость точки в начальный момент времени*.

В случае прямолинейного движения начальные условия задаются в виде

$$\text{при } t=0 \quad x=x_0, \quad v_x=v_0. \quad (16)$$

По начальным условиям можно определить конкретные значения постоянных C_1 и C_2 и найти *частное решение* уравнения (12), дающее закон движения точки, в виде

$$x = f(t, x_0, v_0). \quad (17)$$

Поясним все сказанное на примере следующей простейшей задачи.

Задача 90. Материальная точка с массой m движется под действием постоянной по модулю и направлению силы $\vec{Q}$ (рис. 215). Найти закон движения точки при начальных условиях (16).

Решение. Составляя дифференциальное уравнение движения в виде (13) и учитывая, что $Q_x = Q$, получим

$$m \frac{dv_x}{dt} = Q.$$

* Могут встречаться задачи, в которых для определения постоянных интегрирования вместо начальных задаются так называемые *крайние условия*, например могут быть заданы условия на «краях» интервала времени $[t_0, t_1]$ в виде: при $t=t_0$ $x=x_0$, а при $t=t_1$ $x=x_1$. Пример, показывающий, какие особенности могут иметь решения таких задач, называемых *крайними задачами*, будет рассмотрен в § 94.

Так как $Q = \text{const}$, то умножив обе части уравнения на dt и беря от них интегралы, найдем, что

$$v_x = (Q/m)t + C_1. \quad (a)$$

Замена в этом равенстве v_x на dx/dt дает

$$\frac{dx}{dt} = (Q/m)t + C_1.$$

Умножая обе части полученного уравнения на dt и снова интегрируя, найдем

$$x = (Q/2m)t^2 + C_1t + C_2. \quad (б)$$

Этот результат и представляет собой для данной задачи общее решение уравнения (12) в виде, соответствующем равенству (15).

Теперь определим постоянные интегрирования C_1 и C_2 по заданным начальным условиям (16). Решения (a) и (б) должны быть справедливы в любой момент времени, в том числе и в момент $t=0$. Поэтому, подставляя в (a) и (б) вместо t нуль, мы вместо v_x и x должны получить v_0 и x_0 , т. е. должно быть

$$v_0 = C_1, \quad x_0 = C_2.$$

Полученными равенствами определяются значения постоянных C_1 и C_2 , удовлетворяющие начальным условиям задачи. Подставляя эти значения в уравнение (б), найдем окончательно закон происходящего движения в виде, соответствующем равенству (17):

$$x = x_0 + v_0t + (Q/2m)t^2, \quad (в)$$

Как видно из уравнения (в), точка под действием постоянной силы совершает равнопеременное движение, что можно было предсказать заранее, так как если $Q = \text{const}$, то и $a = Q/m = \text{const}$. В частности, таким является движение точки под действием силы тяжести. При этом в уравнении (в) будет $Q/m = g$, а ось Ox должна быть направлена по вертикали вниз.

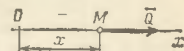


Рис. 215

§ 80. ПРимеры решения задач

Решение задач динамики точки путем интегрирования соответствующих дифференциальных уравнений движения сводится к следующим операциям.

1. Составление дифференциального уравнения движения. Для его составления в случае прямолинейного движения надо:

а) выбрать начало отсчета (как правило, совмещая его с начальным положением точки) и провести координатную ось, направляя ее вдоль траектории и, как правило, в сторону движения; если под действием приложенных сил точка может находиться в каком-нибудь положении в равновесии, то начало отсчета удобно помещать в положении статического равновесия;

б) изобразить двужущую точку в произвольном положении (но так, чтобы было $x > 0$ и $v_x > 0$; последнее существенно, когда среди сил есть силы, зависящие от скорости) и показать все действующие на точку силы;

в) подсчитать сумму проекций всех сил на координатную ось и подставить эту сумму в правую часть дифференциального уравнения движения; при этом *надо обязательно все переменные силы выразить через те величины (t , x или v), от которых эти силы зависят.*

2. Интегрирование дифференциального уравнения движения. Интегрирование производится

методами, известными из курса высшей математики и зависящими от вида полученного уравнения, т. е. от вида его правой части. В тех случаях, когда на точку кроме постоянных сил действует одна переменная сила, зависящая *только* от времени t или *только* от расстояния x , или же *только* от скорости v , уравнение прямолинейного движения можно проинтегрировать методом разделения переменных (см. задачи 91—93). Если при этом в задаче требуется определить только скорость, то часто можно при решении ограничиться интегрированием одного из уравнений (13) или (14).

3. **Определение постоянных интегрирования.** Для определения постоянных интегрирования надо по данным задачи установить начальные условия в виде (16). Значения постоянных по начальным условиям находятся так, как это было показано в задаче 90. При этом постоянные можно определять непосредственно после каждого интегрирования.

Если дифференциальное уравнение движения является уравнением с разделяющимися переменными, то вместо введения постоянных интегрирования можно брать сразу от обеих частей равенства определенные интегралы в соответствующих пределах; пример такого расчета дан в задаче 93.

4. **Нахождение искомых в задаче величин и исследование полученных результатов.** Чтобы иметь возможность исследовать решение, а также произвести косвенную проверку результата подсчетом размерностей, надо все решение проводить до конца в общем виде (в буквах), подставляя числовые данные только в окончательные результаты.

Сделанные здесь указания относятся и к случаю криволинейного движения.

Рассмотрим три конкретные задачи, в которых сила зависит от времени, от расстояния и от скорости точки.

1. Сила зависит от времени

Задача 91. Груз весом P начинает двигаться из состояния покоя вдоль гладкой горизонтальной плоскости под действием силы F , значение которой растет пропорционально времени по закону $F=kt$. Найти закон движения груза.

Решение. Выберем начало отсчета O в начальном положении груза и направим ось Ox в сторону движения (рис. 216). Тогда начальные условия будут: при $t=0$ $x=0$, $v_x=0$. Изображаем в произвольном положении груз и действующие на него силы $\vec{F}$, $\vec{P}$ (сила тяжести) и $\vec{N}$ (реакция плоскости). Проекция этих сил на ось Ox имеют значения $F_x=F=kt$, $P_x=0$, $N_x=0$ и уравнение (13) примет вид

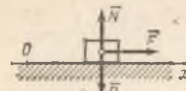


Рис. 216

$$\frac{P}{g} \frac{dv_x}{dt} = kt.$$

Умножив обе части этого равенства на dt , мы сразу разделим переменные и, интегрируя, получим

$$(P/g)v_x = kt^2/2 + C_1.$$

Подставляя сюда начальные данные, найдем, что $C_1=0$. Тогда, заменяя в полученном результате v_x на dx/dt , представим его в виде

$$\frac{dx}{dt} = (kg/2P)t^2.$$

Умножая обе части этого равенства на dt , опять разделим переменные и, интегрируя, найдем

$$x = (kg/2P)t^3/3 + C_2.$$

Подстановка начальных данных дает $C_2=0$, и окончательно получаем закон движения груза в виде

$$x = (kg/6P)t^3.$$

Таким образом, проходимый грузом путь будет расти пропорционально кубу времени.

2. Сила зависит от расстояния

Задача 92. Пренебрегая трением и сопротивлением воздуха, определить, в течение какого промежутка времени тело пройдет по прорытому сквазь Землю вдоль хорды AB каналу от его начала A до конца B (рис. 217). При подсчете считать радиус Земли $R=6370$ км.

Указание. В теории притяжения доказывается, что тело, находящееся внутри Земли, притягивается к ее центру с силой F , прямо пропорциональной расстоянию r до этого центра. Принимая во внимание, что при $r=R$ (т. е. на поверхности Земли) сила F равна силе тяжести ($F=mg$), получим, что внутри Земли

$$F = (mg/R)r,$$

Рис. 217

где $r=MC$ — расстояние от точки M до центра Земли.

Решение. Поместим начало отсчета O в середине хорды AB (в этой точке тело, находящееся в канале, было бы в равновесии) и направим ось Ox вдоль линии OA . Если обозначить длину хорды AB через $2a$, то начальные условия задачи будут: при $t=0$ $x=a$, $v_x=0$.

В произвольном положении на тело действуют силы $\vec{F}$ и $\vec{N}$. Следовательно,

$$\Sigma F_{kx} = -F \cos \alpha = -(mg/R)r \cos \alpha = -(mg/R)x,$$

так как из чертежа видно, что $r \cos \alpha = x$, $N_x=0$.

Действующая сила оказалась зависящей от координаты x точки M . Чтобы в этом случае в дифференциальном уравнении движения разделились переменные, составим его в виде (14). Тогда сокращая на m и вводя обозначение

$$g/R = k^2,$$

получим

$$v_x \frac{dv_x}{dx} = -k^2 x.$$

Умножая обе части этого равенства на dx , сразу разделим переменные и, интегрируя, находим

$$v_x^2/2 = -k^2 x^2/2 + C_1.$$

По начальным условиям при $x=a$ $v_x=0$. Следовательно, $C_1=k^2 a^2/2$. Подставляя это значение C_1 , получаем

$$v_x = \pm k \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Считая, что в рассматриваемом положении скорость направлена от M к O , т. е. что $v_x < 0$, берем перед корнем знак минус (легко, однако, проверить, что тот же окончательный результат получится и при знаке плюс). Тогда, заменяя v_x на dx/dt , найдем, что

$$\frac{dx}{dt} = -k \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Разделяя переменные, приведем это уравнение к виду

$$k dt = -\frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

и, интегрируя, получим

$$kt = \arccos(x/a) + C_2,$$

Подставляя сюда начальные данные (при $t=0$ $x=a$), находим, что $C_2=0$. Окончательно закон движения тела в канале будет иметь вид

$$x = a \cos kt.$$

Следовательно, тело будет совершать в канале AB гармонические колебания с амплитудой a .

Найдем теперь время t_1 движения тела до конца B канала. В точке B координата $x=-a$. Подставляя это значение в уравнение движения, получим $\cos kt_1 = -1$, откуда $kt_1 = \pi$ и $t_1 = \pi/k$. Но по введеному обозначению $k = \sqrt{g/R}$. Отсюда, произведя подсчет, находим, что время движения по каналу AB при условиях задачи не зависит от его длины и всегда равно

$$t_1 = \pi \sqrt{R/g} \approx 42 \text{ мин } 11 \text{ с.}$$

Этот очень интересный результат породил ряд (пока еще фантастических) проектов прорытия такого канала.

Найдем дополнительно, чему будет равна при движении максимальная скорость тела. Из выражения для v_x видно, что $v = v_{\max}$ при $x=0$, т. е. в точке O . Следовательно,

$$v_{\max} = ka = a \sqrt{g/R}.$$

Если, например, $2a=0,1R=637$ км (приблизительно расстояние от Москвы до Ленинграда), то $v_{\max} \approx 395$ м/с ≈ 1422 км/ч.

Колебания, совершаемые материальной точкой под действием силы, пропорциональной расстоянию, будут подробнее изучены в гл. XIX. Там будет рассмотрен другой метод интегрирования получающихся в этом случае дифференциальных уравнений движения.

3. Сила зависит от скорости

Задача 93. Лодку, масса которой $m=40$ кг, толкают, сообщая ей начальную скорость $v_0=0,5$ м/с. Считая силу сопротивления воды при малых скоростях изменяющейся по закону (7), т. е. считая $R=\mu v$, где коэффициент $\mu=9,1$ кг/с, определить, через сколько времени скорость лодки уменьшится вдвое и какой она за это время пройдет путь. Найти также, какой путь пройдет лодка до полной остановки.



Рис. 218

Решение. Совместим начало отсчета O с начальным положением лодки и направим ось Ox в сторону движения (рис. 218). Тогда начальные условия будут: при $t=0$ $x=0$, $v_x=v_0$. Изображаем в произвольном положении лодку и действующие на нее силы $\vec{P}$, $\vec{N}$ и $\vec{R}$.

Примечание. Никакие другие силы на лодку не действуют. Сила, сообщившая лодке толчок, действовала на лодку до момента $t=0$. Результат этого действия учитывается заданной начальной скоростью v_0 , которую сила за время толчка сообщила лодке (см. § 79.) Чтобы правильно определить, какие силы действительно действуют на тело при его движении, надо помнить, что *сила есть результат взаимодействия данного тела с другими телами*. В данном случае сила тяжести $\vec{P}$ является результатом действия на лодку Земли, а силы $\vec{N}$ и $\vec{R}$ — результат действия на лодку воды. Никакие другие материальные тела с лодкой при ее движении не взаимодействуют, значит, никаких других действующих сил нет. Обращаем внимание на этот вопрос, так как он часто является источником ошибок при решении задач.

Вычисляя проекции действующих сил, находим, что

$$\Sigma F_{Rx} = -R = -\mu v_x.$$

Для определения времени движения составляем дифференциальное уравнение (13). Замечая, что в данном случае $v_x=v$, получим

$$m \frac{dv}{dt} = -\mu v.$$

Пронтегрируем это уравнение, беря от обеих его частей после разделения переменных соответствующие определенные интегралы. При этом нижним пределом каждого из интегралов будет значение переменного интегрирования в начальный момент, а верхним — значение того же переменного в произвольный момент времени.

По условиям данной задачи при $t=0$ $v=v_0$ и, следовательно,

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = -\frac{\mu}{m} \int_0^t dt \quad \text{или} \quad \ln v - \ln v_0 = -\frac{\mu}{m} t.$$

Отсюда окончательно

$$t = (m/\mu) \ln(v_0/v). \quad (a)$$

Искомое время t_1 определим, полагая $v=0,5 v_0$. Это время, как видим, не зависит в данном случае от величины v_0 . Так как $\ln 2=0,69$, то

$$t_1 = (m/\mu) \ln 2 \approx 3 \text{ с.}$$

Для определения пройденного пути целесообразно вновь составить дифференциальное уравнение движения в виде (14), так как это уравнение позволяет сразу установить зависимость между x и v . Тогда получим

$$m v \frac{dx}{dv} = -\mu v.$$

Отсюда, сокращая на v , разделяя переменные и учитывая, что при $x=0$ $v=v_0$, получим

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = -\frac{\mu}{m} \int_0^x dx \quad \text{или} \quad v - v_0 = -\frac{\mu}{m} x.$$

Следовательно,

$$x = (m/\mu)(v_0 - v). \quad (b)$$

Полагая $v=0,5 v_0$, найдем искомый путь: $x_1 = mv_0/2\mu \approx 1,1$ м.

Чтобы найти путь, пройденный лодкой до остановки, следует в равенстве (b) положить $v=0$. Тогда получим, что $x_2 = mv_0/\mu = 2,2$ м.

Определяя время движения до остановки, мы из равенства (a) найдем, что при $v=0$ время $t_2=\infty$. Это означает, что при принятом законе сопротивления ($R=\mu v$) лодка будет к своему конечному положению (определяемому координатой x_2) приближаться асимптотически. Фактически же время движения лодки до остановки будет конечным, так как с уменьшением скорости закон сопротивления становится другим и соответственно изменяется вид зависимости v от t (см., например, задачу 105 в § 90).

Другой интересный пример движения под действием силы, зависящей от скорости, рассмотрен в следующем параграфе.

* Пройденный путь можно еще найти, определяя из равенства (a) зависимость v от t в виде $v = v_0 e^{-\mu t/m}$, а затем заменяя v на dx/dt и интегрируя полученное уравнение, но такой путь решения будет несколько длиннее.

§ 81*. ПАДЕНИЕ ТЕЛА В СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ (В ВОЗДУХЕ)

Рассмотрим задачу о падении тела в воздухе с малой по сравнению с радиусом Земли высотой. Тогда действующую на тело силу тяжести $\vec{P}$ и плотность воздуха ρ можно считать величинами постоянными. Полагая одновременно, что при падении тело движется поступательно, будем его рассматривать как материальную точку. Действующую на тело силу сопротивления воздуха определяем по формуле (8) из § 76; ее модуль

$$R = 0,5c_x \rho S v^2, \quad (18)$$

где полагаем $c_x = \text{const}$ * (величины ρ и S тоже постоянны).

Направив координатную ось Ox вертикально вниз (рис. 219), найдем, как будет изменяться скорость падения в зависимости от пройденного пути x , считая, что движение начинается из точки O и $v_0 = 0$.

На падающее тело действуют силы $\vec{P}$ и $\vec{R}$; тогда

$$\Sigma F_{Rx} = P - R = P - 0,5c_x \rho S v^2.$$

Чтобы сразу получить зависимость v от x , составим дифференциальное уравнение движения в виде (14). Учитывая, что $v_x = v$, получим

$$\frac{P}{g} v \frac{dv}{dx} = P - \frac{1}{2} c_x \rho S v^2.$$

Если ввести обозначение

$$2P/c_x \rho S = a^2, \quad (19)$$

то предыдущее уравнение примет вид

$$v \frac{dv}{dx} = g \left(1 - \frac{v^2}{a^2} \right)$$

или после разделения переменных

$$\frac{v dv}{a^2 - v^2} = -\frac{g}{a^2} dx.$$

Беря от обеих частей равенства интегралы, находим

$$\ln(a^2 - v^2) = -2(g/a^2)x - C_1.$$

По начальным данным при $x=0$ скорость $v=0$, следовательно, $C_1 = \ln a^2$. Подставляя это значение C_1 , получим

$$\ln \frac{a^2 - v^2}{a^2} = -2 \frac{g}{a^2} x \quad \text{или} \quad \frac{a^2 - v^2}{a^2} = e^{-2(g/a^2)x}.$$

Отсюда окончательно находим

$$v = a \sqrt{1 - e^{-2(g/a^2)x}}. \quad (20)$$

Формула (20) дает закон изменения скорости падающего в воздухе тела в зависимости от пройденного пути.

С возрастанием x величина $e^{-2(g/a^2)x}$ убывает, стремясь при $x \rightarrow \infty$ к нулю. Отсюда следует, что скорость падения v с возрастанием x возрастает, стремясь в пределе к постоянной величине a . Эта величина называется *предельной скоростью падения* $v_{пр}$. Из равенства (19) находим, так как $v_{пр} = a$,

$$v_{пр} = \sqrt{2P/c_x \rho S}. \quad (21)$$

Следовательно, при $v_0 = 0$ падающее в воздухе тело не может получить скорости, большей, чем $v_{пр}$. Предельная скорость падения возрастает с увеличением веса тела и с уменьшением величин c_x , ρ и S .

* В рассматриваемой задаче это допустимо, если скорость падения не превышает примерно 300 м/с.

Найдем, как быстро скорость падающего тела приближается к предельной. Для этого обратимся к табл. 2, в которой дана зависимость величины $v/v_{пр}$ от $(g/v_{пр}^2)x$, вычисленная по формуле (20). Из таблицы следует, что

Т а б л и ц а 2

$\frac{g}{v_{пр}^2} x$	$\frac{v}{v_{пр}}$	$\frac{g}{v_{пр}^2} x$	$\frac{v}{v_{пр}}$
0	0	1,2	0,95
0,5	0,80	1,5	0,97
1,0	0,93	2,0	0,99

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } (g/v_{пр}^2)x = 1,2 \\ \quad \quad \quad v = 0,95v_{пр}, \\ \text{при } (g/v_{пр}^2)x = 2,0 \\ \quad \quad \quad v = 0,99v_{пр}. \end{array} \right\} \quad (22)$$

Следовательно, скорость падения приближается к предельной довольно быстро, если только величины c_x и S не очень малы (см. задачу 94).

Наличие предельной скорости падения можно установить следующими простыми рассуждениями. При падении тела его скорость v растет; следовательно, растет и сила сопротивления R . Если считать очевидным, что сила R не может стать больше, чем сила тяжести P (рис. 219), то $R_{пр} = P$. Подставляя сюда значение $R_{пр}$ из формулы (18), получаем $0,5c_x \rho S v_{пр}^2 = P$, откуда и находим даваемое формулой (21) значение $v_{пр}$. Однако приведенные рассуждения не позволяют определить, как быстро скорость падения v стремится к $v_{пр}$. Этот практически важный результат можно получить только с помощью формулы (20).

Задача 94. Определить предельную скорость падения парашютиста, вес которого вместе с парашютом $P = 800$ Н: а) при затыжном прыжке, считая в этом случае $S = 0,4$ м², $c_x = 1,0$; б) при прыжке с открытым парашютом, принимая в этом случае $S = 36$ м², $c_x = 1,4$.

Найти в обоих случаях расстояние H_1 , пролетев которое, парашютист приобретает скорость $v_1 = 0,95 v_{пр}$ (т. е. отличающуюся от предельной на 5%), и расстояние H_2 , при котором скорость падения $v_2 = 0,99 v_{пр}$.

Р е ш е н и е. Предельную скорость падения определяем по формуле (21), считая для воздуха $\rho = 1,29$ кг/м³. Расстояния H_1 и H_2 находим из равенств (22). Так как $v = 0,95 v_{пр}$ при $(g/v_{пр}^2)x = 1,2$, то искомое расстояние $H_1 = 1,2 v_{пр}^2/g$. Аналогично находим, что $H_2 = 2 v_{пр}^2/g$.

В результате подсчетов получаем:

а) при затыжном прыжке $v_{пр} = 56$ м/с; $H_1 \approx 380$ м, $H_2 \approx 630$ м;

б) при прыжке с открытым парашютом $v_{пр} \approx 5$ м/с; $H_1 \approx 3$ м, $H_2 \approx 5$ м.

Как видим, при больших сопротивлениях предельная скорость достигается очень быстро.

§ 82. РЕШЕНИЕ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ПРИ КРИВОЛИНЕЙНОМ ДВИЖЕНИИ ТОЧКИ

В случае криволинейного движения точки основная задача динамики решается с помощью дифференциальных уравнений движения, полученных в § 77. Если задача решается в прямоугольных декартовых координатах, т. е. с помощью уравнений (10), то начальные условия, определяющие положение и скорость точки в начальный момент времени $t=0$, задаются в виде:

$$\begin{array}{l} \text{при } t=0 \quad x=x_0, \quad y=y_0, \quad z=z_0; \\ \quad \quad \quad v_x=v_{x0}, \quad v_y=v_{y0}, \quad v_z=v_{z0}. \end{array} \quad (23)$$

Принтегрировав уравнения (10), находят координаты x, y, z движущейся точки, как функции времени t , т. е. определяют закон движения точки. При этом полученные решения будут содержать шесть постоянных интегрирования $C_1, C_2, \dots, C_6$, значения которых должны определяться по начальным условиям (23).

Конкретный ход решения показан в рассматриваемой ниже задаче.

Движение точки, брошенной под углом к горизонтальной плоскости в однородном поле тяжести. Изучим движение тела, брошенного с начальной скоростью v_0 , направленной под углом α к горизонтальной плоскости, рассматривая его как материальную точку с массой m . При этом сопротивлением воздуха пренебрегаем, а поле тяжести будем считать однородным ($P = \text{const}$), полагая, что дальность полета и высота траектории малы по сравнению с радиусом Земли.

Поместим начало координат O в начальном положении точки. Направим ось Oy вертикально вверх; горизонтальную ось Ox расположим в плоскости, проходящей через Oy и вектор v_0 , а ось Oz проведем перпендикулярно первым двум осям (рис. 220). Тогда угол между вектором v_0 и осью Ox будет α .

Изобразим движущуюся точку M в произвольном положении. На нее действует только одна сила тяжести P (см. примечание к задаче 93 в § 80), проекции которой на координатные оси равны:

$$P_x = 0, P_y = -P = -mg, P_z = 0.$$

Подставляя эти величины в уравнения (10) и замечая, что $d^2x/dt^2 = dv_x/dt$ и т. д., после сокращения на m получим:

$$\frac{dv_x}{dt} = 0, \quad \frac{dv_y}{dt} = -g, \quad \frac{dv_z}{dt} = 0.$$

Умножая обе части этих уравнений на dt и интегрируя, находим

$$v_x = C_1, \quad v_y = -gt + C_2, \quad v_z = C_3.$$

Начальные условия (23) в нашей задаче имеют вид:

$$\begin{aligned} \text{при } t=0 \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0; \\ v_x = v_0 \cos \alpha, \quad v_y = v_0 \sin \alpha, \quad v_z = 0. \end{aligned}$$

Удовлетворяя начальным условиям, получим

$$C_1 = v_0 \cos \alpha, \quad C_2 = v_0 \sin \alpha, \quad C_3 = 0.$$

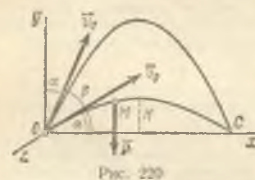


Рис. 220

Подставляя эти значения C_1, C_2 и C_3 в найденные выше решения и заменяя v_x на dx/dt и т. д., приходим к уравнениям:

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos \alpha, \quad \frac{dy}{dt} = v_0 \sin \alpha - gt, \quad \frac{dz}{dt} = 0.$$

Интегрируя эти уравнения, получим:

$$x = v_0 t \cos \alpha + C_4, \quad y = v_0 t \sin \alpha - gt^2/2 + C_5, \quad z = C_6.$$

Подстановка начальных данных дает $C_4 = C_5 = C_6 = 0$, и окончательно находим уравнения движения точки M в виде:

$$x = v_0 t \cos \alpha, \quad y = v_0 t \sin \alpha - gt^2/2, \quad z = 0. \quad (24)$$

Из последнего уравнения следует, что движение происходит в плоскости Oxy .

Имея уравнения движения точки, можно методами кинематики определить все характеристики данного движения.

1. Траектория точки. Исключая из первых двух уравнений (24) время t , получим уравнение траектории точки:

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2. \quad (25)$$

Это уравнение параболы с осью, параллельной оси Oy . Таким образом, брошенная под углом к горизонтальной плоскости тяжелая точка движется в безвоздушном пространстве по параболе (Галилей).

2. Горизонтальная дальность. Определим горизонтальную дальность, т. е. измеренное вдоль оси Ox расстояние $OC = X$. Полагая в равенстве (25) $y = 0$, найдем точки пересечения траектории с осью Ox . Из уравнения $x [\operatorname{tg} \alpha - gx / (2v_0^2 \cos^2 \alpha)] = 0$ получаем

$$x_1 = 0, \quad x_2 = (2v_0^2 \cos^2 \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha) / g.$$

Первое решение дает точку O , второе — точку C . Следовательно, $X = x_2$ и окончательно

$$X = (v_0^2 / g) \sin 2\alpha. \quad (26)$$

Из формулы (26) видно, что такая же горизонтальная дальность X будет получена при угле β , для которого $2\beta = 180^\circ - 2\alpha$, т. е. если угол $\beta = 90^\circ - \alpha$. Следовательно, при данной начальной скорости v_0 в одну и ту же точку C можно попасть двумя траекториями: настильной ($\alpha < 45^\circ$) и навесной ($\alpha > 45^\circ$).

При заданной начальной скорости v_0 наибольшая горизонтальная дальность в безвоздушном пространстве получается, когда $\sin 2\alpha = 1$, т. е. при угле $\alpha = 45^\circ$.

3. Высота траектории. Если положить в уравнении (25) $x = X/2 = (v_0^2 / g) \sin \alpha \cos \alpha$, то определится высота траектории H :

$$H = (v_0^2 / 2g) \sin^2 \alpha. \quad (26')$$

4. Время полета. Из первого уравнения системы (24) следует, что полное время полета T определяется равенством $X =$

$=v_0 T \cos \alpha$. Заменяя здесь X его значением, получим

$$T = (2v_0/g) \sin \alpha. \quad (26'')$$

При угле наибольшей дальности $\alpha^* = 45^\circ$ все найденные величины имеют значения:

$$X^* = v_0^2/g, \quad H^* = v_0^2/4g = X^*/4, \quad T^* = (v_0/g)\sqrt{2}. \quad (27)$$

Полученные результаты могут находить некоторые приложения, например, во внешней баллистике для оценки того, как изменяется дальность полета при изменении угла α или скорости v_0 на очень малую величину, или же для ориентировочных оценок в случаях, аналогичных рассмотренному в приводимом примере.

Пример. Известно *, что немецкий снаряд ФАУ-2 после вертикального запуска имел на высоте 20 км скорость $v_0 \approx 1700$ м/с и угол $\alpha \approx 45^\circ$ (поворот снаряда производился с помощью специальных приборов и рулей). Дальнейший полет снаряда практически происходил как полет брошенного тела в безвоздушном пространстве и на высотах, для которых можно еще грубо считать $F = \text{const}$. Тогда по формулам (27) должно быть:

$$X^* \approx 300 \text{ км}, \quad H^* \approx 75 \text{ км}, \quad T^* \approx 245 \text{ с}.$$

Эти результаты очень близки к тем, которые имели место для данных снарядов фактически.

Первая космическая скорость. Рассмотрим еще одну задачу о движении брошенного тела. Найдем, какую начальную скорость надо сообщить телу, находящемуся на расстоянии R от центра Земли, чтобы оно двигалось вокруг Земли по круговой орбите радиуса R (рис. 221); сопротивление воздуха считаем отсутствующим, а тело рассматриваем как материальную точку.

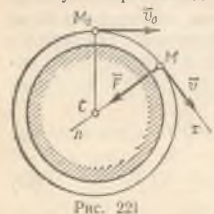


Рис. 221

Прежде всего замечаем, что так как скорость точки в любой момент времени должна быть направлена по касательной к траектории, то скорость v_0 следует направить перпендикулярно радиусу CM_0 , где M_0 — начальное положение точки.

Для дальнейшего решения воспользуемся уравнениями (11). Рассматривая точку в произвольном положении M , проводим оси Mt и Mn и изображаем действующую на точку силу тяготения $\vec{F}$; численно $F = mg_0$, где m — масса точки, g_0 — ускорение силы тяготения в пункте M . Так как $F_t = 0$, а $F_n = F$, уравнения (11) примут вид:

$$\frac{dv}{dt} = 0, \quad \frac{mv^2}{R} = F \quad \text{или} \quad \frac{mv^2}{R} = mg_0.$$

Из первого уравнения находим, что $v = \text{const}$ и, следовательно, $v = v_0$. После этого второе уравнение дает (если считать, что $R = R_0 =$

* См.: Коой И., Ютенбогарт И. Динамика ракет. Оборонгиз, 1950.

$= 6378$ км — радиус земного экватора, а $g_0 = 9,82$ м/с²)

$$v_0 = \sqrt{g_0 R_0} = 7914 \text{ м/с} \approx 7,9 \text{ км/с}. \quad (28)$$

Эта наименьшая скорость, которую нужно сообщить брошенному телу, чтобы оно не упало обратно на Землю, называется *круговой* или *первой космической скоростью* (см. § 97, 98).

Глава XVII

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ ТОЧКИ

Для решения многих задач динамики, особенно в динамике системы, вместо непосредственного интегрирования дифференциальных уравнений движения оказывается более эффективным пользоваться так называемыми общими теоремами, являющимися следствиями основного закона динамики.

Значение общих теорем состоит в том, что они устанавливают наглядные зависимости между соответствующими динамическими характеристиками движения материальных тел и открывают тем самым новые возможности исследования движения механических систем, широко применяемые в инженерной практике. Кроме того, применение общих теорем избавляет от необходимости проделывать для каждой задачи те операции интегрирования, которые раз и навсегда производятся при выводе этих теорем; тем самым упрощается процесс решения.

Перейдем к рассмотрению общих теорем динамики точки.

§ 83. КОЛИЧЕСТВО ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ. ИМПУЛЬС СИЛЫ

Одной из основных динамических характеристик движения точки является количество движения *.

Количеством движения материальной точки называется векторная величина $m\vec{v}$, равная произведению массы точки на ее скорость. Направлен вектор $m\vec{v}$ так же, как и скорость точки, т. е. по касательной к ее траектории.

Единицей измерения количества движения является в СИ — 1 кг·м/с = 1 Н·с, а в системе МКГСС — 1 кг·с.

И м п у л ь с с и л ы. Для характеристики действия, оказываемого на тело силой за некоторый промежуток времени, вводится понятие об импульсе силы. Сначала введем понятие об элементарном импульсе, т. е. об импульсе за элементарный промежуток времени $d\vec{S}$. *Элементарным импульсом силы называется векторная величина $d\vec{S}$, равная произведению силы $\vec{F}$ на элементарный промежуток вре-*

* Другая основная динамическая характеристика — кинетическая энергия — будет рассмотрена в § 89.

мени dt :

$$d\bar{S} = \bar{F} dt. \quad (29)$$

Направлен элементарный импульс вдоль линии действия силы.

Импульс $\bar{S}$ любой силы $\bar{F}$ за конечный промежуток времени t_1 вычисляется как предел интегральной суммы соответствующих элементарных импульсов, т. е.

$$\bar{S} = \int_0^{t_1} \bar{F} dt. \quad (30)$$

Следовательно, импульс силы за некоторый промежуток времени t_1 равен определенному интегралу от элементарного импульса, взятому в пределах от нуля до t_1 .

В частном случае, если сила $\bar{F}$ постоянна и по модулю, и по направлению ($\bar{F} = \text{const}$), то $\bar{S} = \bar{F}t_1$. Причем в этом случае и модуль $S = Ft_1$. В общем случае модуль импульса может быть вычислен по его проекциям на координатные оси:

$$S_x = \int_0^{t_1} F_x dt, \quad S_y = \int_0^{t_1} F_y dt, \quad S_z = \int_0^{t_1} F_z dt. \quad (31)$$

Единицей измерения импульса силы, как и количества движения, является в СИ — 1 кг·м/с, а в системе МКГСС — 1 кГ·с.

§ 84. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

Так как масса точки постоянна, а ее ускорение $\bar{a} = d\bar{v}/dt$, то уравнение (2), выражающее основной закон динамики, можно представить в виде

$$\frac{d(m\bar{v})}{dt} = \sum \bar{F}_i. \quad (32)$$

Уравнение (32) выражает одновременно теорему об изменении количества движения точки в дифференциальной форме: производная по времени от количества движения точки равна сумме действующих на точку сил*.

Пусть движущаяся точка имеет в момент времени $t=0$ скорость v_0 , а в момент t_1 — скорость v_1 . Умножим тогда обе части равенства (32) на dt и возьмем от них определенные интегралы. При этом справа, где интегрирование идет по времени, пределами интеграла будут 0 и t_1 , а слева, где интегрируется скорость, пределами интеграла будут соответствующие значения скорости v_0 и v_1 . Так как интеграл

* По существу это другая формулировка 2-го закона динамики, близкая к той, которую дал сам Ньютон.

от $d(m\bar{v})$ равен $m\bar{v}$, то в результате получим

$$m\bar{v}_1 - m\bar{v}_0 = \sum \int_0^{t_1} \bar{F}_i dt.$$

Стоящие справа интегралы, как следует из формулы (30), представляют собой импульсы действующих сил. Поэтому окончательно будет

$$m\bar{v}_1 - m\bar{v}_0 = \sum \bar{S}_i. \quad (33)$$

Уравнение (33) выражает теорему об изменении количества движения точки в конечном виде: изменение количества движения точки за некоторый промежуток времени равно сумме импульсов всех действующих на точку сил за тот же промежуток времени.

При решении задач вместо векторного уравнения (33) часто пользуются уравнениями в проекциях. Проектируя обе части равенства (33) на координатные оси, получим

$$\left. \begin{aligned} mv_{1x} - mv_{0x} &= \sum S_{ix}, \\ mv_{1y} - mv_{0y} &= \sum S_{iy}, \\ mv_{1z} - mv_{0z} &= \sum S_{iz}. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

В случае прямолинейного движения, происходящего вдоль оси Ox , теорема выражается первым из этих уравнений.

Решение задач. Уравнения (33) или (34) позволяют, зная как при движении точки изменяется ее скорость, определить импульсы действующих сил (первая задача динамики) или, зная импульсы действующих сил, определить, как изменяется при движении скорость точки (вторая задача динамики). При решении второй задачи, когда заданы силы, надо вычислить их импульсы. Как видно из равенств (30) или (31), это можно сделать лишь тогда, когда силы постоянны или зависят только от времени.

Таким образом, уравнения (33), (34) можно непосредственно использовать для решения второй задачи динамики, когда в задаче в число данных и искомым величинам входят: действующие силы, время движения точки и ее начальная и конечная скорости (т. е. величины F , t , v_0 , v_1), причем силы должны быть постоянными или зависящими только от времени.

Задача 95. Точка, масса которой $m = 2$ кг, движется по окружности с численно постоянной скоростью $v = 4$ м/с. Определить импульс действующей на точку силы за время, в течение которого точка проходит четверть окружности.

Решение. По теореме об изменении количества движения $\bar{S} = m\bar{v}_1 - m\bar{v}_0$. Строя геометрически разность этих количеств движения (рис. 222), находим из полученного прямоугольного треугольника

$$S = m \sqrt{v_1^2 + v_0^2}.$$

Но по условиям задачи $v_0 = v_1 = v$; следовательно,

$$S = mv \sqrt{2} = 11,3 \text{ кг·м/с.}$$

Для аналитического подсчета можно, используя первые два из уравнений (34), найти

$$S_x = mv_0, \quad S_y = -mv_1, \quad \text{откуда} \quad S = m\sqrt{v_0^2 + v_1^2}.$$

Задача 96. Грузу, имеющему массу m и лежащему на горизонтальной плоскости, сообщают (толчком) начальную скорость v_0 . Последующее движение груза тормозится постоянной силой F . Определить, через сколько времени груз остановится.

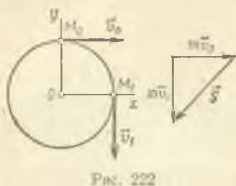


Рис. 222

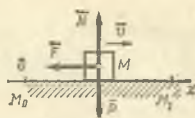


Рис. 223

Решение. По данным задачи видно, что для определения времени движения можно воспользоваться доказанной теоремой. Изображаем груз в произвольном положении (рис. 223). На него действуют: сила тяжести P , реакция плоскости N и тормозящая сила F . Направляя ось Ox в сторону движения, составляем первое из уравнений (34)

$$mv_{1x} - mv_{0x} = \Sigma S_{kx}. \quad (a)$$

В данном случае $v_{1x} = 0$ (v_1 — скорость в момент остановки), а $v_{0x} = v_0$. Из сил проекцию на ось Ox дает только сила F . Так как она постоянна, то $S_x = Fx_1 = -Ft_1$, где t_1 — время торможения. Подставляя все эти данные в уравнение (a), получаем $-mv_0 = -Ft_1$, откуда искомое время

$$t_1 = mv_0/F. \quad (б)$$

Таким образом, время торможения растёт пропорционально начальной скорости.

Решим эту же задачу, считая, что тормозящая сила равна Q и не постоянна, а с момента начала торможения растёт пропорционально времени, т. е. $Q = kt$, где k — некоторый постоянный коэффициент, и становится равной F в момент остановки груза. Так как сила зависит от времени, то опять можно воспользоваться уравнением (a), определяя S_x по первой из формул (31). Учтя, что $Q_x = -Q = -kt$, получим

$$S_x = - \int_0^{t_1} kt \, dt = -kt_1^2/2.$$

Тогда уравнение (a) даёт $mv_0 = kt_1^2/2$. Значение k найдем из условия, что при $t = t_1$ $Q = F$, т. е. $kt_1 = F$, откуда $k = F/t_1$ и окончательно будет

$$t_1 = 2mv_0/F. \quad (в)$$

Следовательно, в этом случае время торможения удваивается.

§ 65. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ МОМЕНТА КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ (ТЕОРЕМА МОМЕНТОВ)

В некоторых задачах в качестве динамической характеристики движения точки вместо самого вектора количества движения $m\vec{v}$ рассматривают его момент относительно некоторого центра или оси.

Эти моменты определяются так же, как и моменты силы (см. § 8, 14 и 28).

Таким образом, моментом количества движения точки относительно некоторого центра O называется векторная величина $\vec{m}_O(m\vec{v})$, определяемая равенством

$$\vec{m}_O(m\vec{v}) = \vec{r} \times m\vec{v}, \quad (35)$$

где $\vec{r}$ — радиус-вектор движущейся точки, проведенный из центра O .

При этом вектор $\vec{m}_O(m\vec{v})$ направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через $m\vec{v}$ и центр O , а $|\vec{m}_O(m\vec{v})| = mv \cdot h$ (рис. 224; для сравнения на нем показан и вектор $\vec{m}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}$).

Момент количества движения точки относительно какой-нибудь оси Oz , проходящей через центр O , будет равен проекции вектора $\vec{m}_O(m\vec{v})$ на эту ось:

$$m_z(m\vec{v}) = [\vec{m}_O(m\vec{v})]_z = |\vec{m}_O(m\vec{v})| \cos \gamma, \quad (36)$$

где γ — угол между вектором $\vec{m}_O(m\vec{v})$ и осью Oz .

Теорема моментов устанавливает, как изменяется со временем вектор $\vec{m}_O(m\vec{v})$. Чтобы доказать ее, продифференцируем по времени выражение (35). Получим

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}) = \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} \right) + \left(\vec{r} \times m \frac{d\vec{v}}{dt} \right) = (\vec{v} \times m\vec{v}) + (\vec{r} \times m\vec{a}).$$

Но $\vec{v} \times m\vec{v} = 0$ как векторное произведение двух параллельных векторов, а $m\vec{a} = \vec{F}$, где при действии нескольких сил $\vec{F} = \Sigma \vec{F}_k$. Следовательно,

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}) = \vec{r} \times \vec{F} \quad \text{или} \quad \frac{d}{dt}[\vec{m}_O(m\vec{v})] = \vec{m}_O(\vec{F}). \quad (37)$$

В результате мы доказали следующую теорему моментов относительно центра: производная по времени от момента количества движения точки, взятого относительно какого-нибудь неподвижного центра, равна моменту действующей на точку силы относительно того же центра.

Сравнивая уравнения (37) и (32), видим, что моменты векторов $m\vec{v}$ и $\vec{F}$ связаны такой же зависимостью, какой связаны сами векторы $m\vec{v}$ и $\vec{F}$.

Если спроектировать обе части равенства (37) на какую-нибудь ось Oz , проходящую через центр O , то, учтя соотношение (36), получим

$$\frac{d}{dt}[m_z(m\vec{v})] = m_z(\vec{F}). \quad (38)$$

Это равенство выражает теорему моментов относительно оси. Из уравнения (37) следует, что если $\vec{m}_O(\vec{F}) = 0$, то $\vec{m}_O(m\vec{v}) = \text{const}$,

т. е. если момент действующей силы относительно некоторого центра равен нулю, то момент количества движения точки относительно этого центра есть величина постоянная. Такой результат имеет место в практически важном случае движения под действием центральной силы (см. § 86).

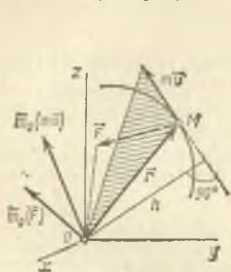


Рис. 224

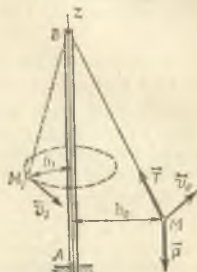


Рис. 225

Задача 97. Шарик M привязан к нити MBA , часть BA которой продета сквозь вертикальную трубку (рис. 225). В момент, когда шарик находится на расстоянии h_0 от оси z трубки, ему сообщают начальную скорость v_0 , перпендикулярную плоскости MBA . Одновременно нить начинают медленно втягивать в трубку. Найти, какую скорость v_1 будет иметь шарик, когда его расстояние от оси z станет равно h_1 .

Решение. На шарик действуют сила тяжести $\vec{P}$ и реакция нити $\vec{T}$. Моменты этих сил относительно оси z равны нулю, так как сила P параллельна оси z , а сила T эту ось пересекает. Тогда по уравнению (38)

$$\frac{d}{dt} [m_z(\vec{mv})] = 0,$$

откуда $m_z(\vec{mv}) = mvh = \text{const}$. Так как масса m постоянна, то отсюда следует, что при движении шарика $v_0 h_0 = v_1 h_1$.

Следовательно,

$$v_1 = h_0 v_0 / h_1.$$

По мере приближения шарика к оси его скорость растет.

§ 86*. ДВИЖЕНИЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ЦЕНТРАЛЬНОЙ СИЛЫ. ЗАКОН ПЛОЩАДЕЙ

Центральной называется сила, линия действия которой проходит все время через данный центр O . Примером такой силы является сила притяжения планеты к Солнцу или спутника к Земле.

Рассмотрим, пользуясь уравнением (37), как будет двигаться точка M (рис. 226) под действием центральной силы $\vec{F}$. Так как в данном случае $\vec{m}_O(\vec{F}) = 0$, то $\vec{m}_O(\vec{mv}) = \vec{r} \times \vec{mv} = \text{const}$ или, поскольку масса m постоянна, $\vec{m}_O(\vec{v}) = \vec{r} \times \vec{v} = \text{const}$, т. е. вектор $\vec{m}_O(\vec{v})$ постоянен и по модулю, и по направлению. Напомним, что вектор $\vec{m}_O(\vec{v}) =$

$= \vec{r} \times \vec{v}$ направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через векторы $\vec{r}$ и $\vec{v}$. Следовательно, если вектор $\vec{r} \times \vec{v}$ имеет все время постоянное направление, то радиус-вектор $\vec{r} = \vec{OM}$ точки M и вектор ее скорости $\vec{v}$ должны все время лежать в одной и той же плоскости. Отсюда заключаем, что траектория точки M будет плоской кривой. Кроме того, одновременно $|\vec{m}_O(\vec{v})| = mvh = \text{const}$.

Таким образом, при движении под действием центральной силы точка движется по плоской кривой, а ее скорость $\vec{v}$ изменяется так, что момент вектора $\vec{v}$ относительно центра O остается постоянным ($vh = \text{const}$).

Последний результат имеет наглядное геометрическое истолкование. Так как $vh = h \cdot ds/dt$, а $h \cdot ds = 2d\sigma$, где $d\sigma$ — площадь элементарного треугольника OMM' , то, следовательно, $vh = 2d\sigma/dt$.

Величина $d\sigma/dt$ определяет скорость, с которой растет площадь, ометаемая радиусом-вектором OM при движении точки M , и называется **секторной скоростью** точки. В рассматриваемом случае эта скорость постоянна:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{2} |\vec{m}_O(\vec{mv})| = \text{const}. \quad (39)$$

Таким образом, при движении под действием центральной силы точка движется по плоской кривой с постоянной секторной скоростью, т. е. так, что радиус-вектор точки в любые равные промежутки времени ометает равные площади (закон площадей). Этот закон имеет место при движении планет или спутников и выражает собой один из законов Кеплера.

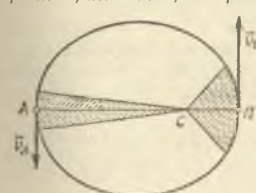


Рис. 227

Пример. Орбитой планеты, движущейся под действием силы притяжения Солнца, является эллипс, причем Солнце находится в одном из фокусов C эллипса (рис. 227). Так как сила притяжения является центральной, то при движении имеет место закон площадей. Поэтому в ближайшей к Солнцу точке орбиты P (перигелий) скорость планеты v_P будет наибольшей, а в наиболее удаленной от Солнца точке A (афелий) скорость v_A будет наименьшей. Этот результат следует из уравнения (39), которое для точек A и P дает $v_A \cdot AC = v_P \cdot PC$. К такому же выводу можно прийти, если учесть, что площади пунктирно заштрихованных на рис. 227 секторов, ометаемых за одинаковые промежутки времени, должны быть равны; следовательно, за одно и то же время планета вблизи точки P должна пройти больший путь, чем вблизи A .

Аналогичный результат имеет место при движении спутника.

§ 87. РАБОТА СИЛЫ. МОЩНОСТЬ

Для характеристики действия, оказываемого силой на тело при некотором его перемещении, вводится понятие о работе силы, широко используемое не только в механике. Сначала введем понятие об элементарной работе.

Элементарной работой силы $\vec{F}$, приложенной в точке M (рис. 228), называется скалярная величина*

$$dA = F_\tau ds, \quad (40)$$

где F_τ — проекция силы $\vec{F}$ на касательную $M\tau$ к траектории точки M , направленную в сторону перемещения этой точки (или проекция $\vec{F}$ на направление скорости $\vec{v}$ точки M); ds — модуль элементарного перемещения точки M .

Такое определение соответствует представлению о работе как о мере того действия силы, которое приводит к изменению модуля скорости точки. Если разложить силу $\vec{F}$ на составляющие $\vec{F}_\tau$ и $\vec{F}_n$, то изменять модуль скорости будет $\vec{F}_\tau$, так как $F_\tau = m a_\tau = m \cdot dv/dt$ (составляющая $\vec{F}_n$ изменяет или направление вектора $\vec{v}$, или при несвободном движении — силу давления на связь).

Замечая, что $F_\tau = F \cos \alpha$, где α — угол между $\vec{F}$ и $M\tau$, получим из (40) другое выражение для dA :

$$dA = F ds \cos \alpha. \quad (41)$$

Если угол α острый, то работа положительна. В частности, при $\alpha = 0$ элементарная работа $dA = F ds$.

Если угол α тупой, то работа отрицательна. В частности, при $\alpha = 180^\circ$ элементарная работа $dA = -F ds$.

Если угол $\alpha = 90^\circ$, т. е. если сила направлена перпендикулярно перемещению, то элементарная работа силы равна нулю.

Знак работы имеет следующий смысл: работа положительна, когда составляющая $\vec{F}_\tau$ направлена в сторону движения (сила ускоряет движение); работа отрицательна, когда составляющая $\vec{F}_\tau$ направлена противоположно направлению движения (сила замедляет движение).

Если учесть, что $ds = |d\vec{r}|$, где $d\vec{r}$ — вектор элементарного перемещения точки, и воспользоваться известным из векторной алгебры понятием о скалярном произведении двух векторов, то равенство (41) можно представить в виде**

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (42)$$

* Здесь dA (как и $d\vec{S}$ в § 83) — символ элементарной величины, но не дифференциала. Дифференциалом какой-нибудь функции величина dA вообще может не быть (см. § 126).

** Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется скалярная величина, определяемая равенством $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \alpha$, где α — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Выражение скалярного произведения через проекции векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на координатные оси имеет вид $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

Следовательно, элементарная работа силы равна скалярному произведению силы на вектор элементарного перемещения точки ее приложения.

Если в формуле (42) выразить скалярное произведение через проекции векторов $\vec{F}$ и $d\vec{r}$ на координатные оси и учесть, что $r_x = x$, $r_y = y$, $r_z = z$, то получим аналитическое выражение элементарной работы

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz, \quad (43)$$

в котором x , y , z — координаты точки приложения силы $\vec{F}$.

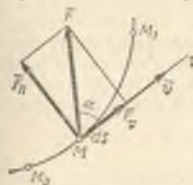


Рис. 228

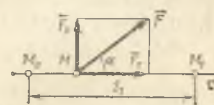


Рис. 229

Работа силы на любом конечном перемещении M_0M_1 (рис. 228) вычисляется как предел интегральной суммы соответствующих элементарных работ

$$A_{(M_0M_1)} = \int_{(M_0)}^{(M_1)} F_\tau ds, \quad (44)$$

или

$$A_{(M_0M_1)} = \int_{(M_0)}^{(M_1)} (F_x dx + F_y dy + F_z dz). \quad (44')$$

Следовательно, работа силы на любом перемещении M_0M_1 равна взятому вдоль этого перемещения интегралу от элементарной работы. Пределы интеграла соответствуют значениям переменных интегрирования в точках M_0 и M_1 (точнее говоря, интеграл берется вдоль кривой M_0M_1 , т. е. является криволинейным).

Если величина F_τ постоянна ($F_\tau = \text{const}$), то из (44), обозначая перемещение M_0M_1 через s_1 , получим

$$A_{(M_0M_1)} = F_\tau s_1. \quad (45)$$

В частности, такой случай может иметь место, когда действующая сила постоянна по модулю и направлению ($\vec{F} = \text{const}$), а точка, к которой приложена сила, движется прямолинейно (рис. 229). В этом случае $F_\tau = F \cos \alpha = \text{const}$ и

$$A_{(M_0M_1)} = F s_1 \cos \alpha. \quad (45')$$

Единицей измерения работы является в СИ — 1 джоуль (1 Дж = 1 Н·м = 1 кг·м²/с²), а в системе МКГСС — 1 кг·м.

Графический способ вычисления работы. Если сила зависит от расстояния s и известен график зависимости F_x от s (рис. 230), то работу силы можно вычислить графически. Пусть в положении M_0 точка находится от начала отсчета на расстоянии s_0 , а в положении M_1 — на расстоянии s_1 . Тогда по формуле (44), учитывая геометрический смысл интеграла, получим

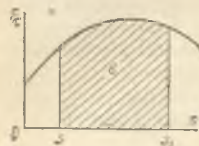


Рис. 230

$$A_{(M_0 M_1)} = \int_{s_0}^{s_1} F_x ds = \sigma,$$

где σ — величина заштрихованной на рис. 230 площади, умноженной на масштабный коэффициент.

Мощность. Мощностью называется величина, определяющая работу, совершаемую силой в единицу времени. Если работа совершается равномерно, то мощность $N = A/t_1$, где t_1 — время, в течение которого произведена работа A . В общем случае

$$N = dA/dt = F_x ds/dt = F_x v. \quad (46)$$

Следовательно, мощность равна произведению касательной составляющей силы на скорость.

Единицей измерения мощности в СИ является *ватт* (1 Вт = 1 Дж/с), а в системе МКГСС — 1 кГ·м/с. В технике за единицу мощности часто принимается 1 л. с., равная 736 Вт (или 75 кГ·м/с).

Работу, произведенную машиной, можно измерять произведением ее мощности на время работы. Отсюда возникла употребительная в технике единица измерения работы киловатт-час (1 кВт·ч = 3,6 × 10⁶ Дж ≈ 367100 кГ·м).

Из равенства $N = F_x v$ видно, что у двигателя, имеющего данную мощность N , сила тяги F_x будет тем больше, чем меньше скорость v . Поэтому, например, на подъеме или на плохом участке дороги у автомобиля включают низшие передачи, позволяющие при полной мощности двигаться с меньшей скоростью и развивать большую силу тяги.

§ 88. ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ РАБОТЫ

Рассмотренные ниже примеры дают результаты, которыми можно непосредственно пользоваться при решении задач.

1. Работа силы тяжести. Пусть точка M , на которую действует сила тяжести $\vec{P}$, перемещается из положения $M_0(x_0, y_0, z_0)$ в положение $M_1(x_1, y_1, z_1)$. Выберем координатные оси так, чтобы ось Oz была направлена вертикально вверх (рис. 231). Тогда $P_x = 0$, $P_y = 0$, $P_z = -P$. Подставляя эти значения в формулу (44'), получим, учитывая, что переменным интегрирования является z :

$$A_{(M_0 M_1)} = \int_{z_0}^{z_1} (-P) dz = P(z_0 - z_1).$$

Если точка M_0 выше M_1 , то $z_0 - z_1 = h$, где h — вертикальное перемещение точки; если же точка M_0 ниже точки M_1 , то $z_0 - z_1 = -(z_1 - z_0) = -h$.

Окончательно получаем

$$A_{(M_0 M_1)} = \pm Ph. \quad (47)$$

Следовательно, работа силы тяжести равна взятому со знаком плюс или минус произведению модуля силы на вертикальное перемещение точки ее приложения. Работа положительна, если начальная точка выше конечной, и отрицательна, если начальная точка ниже конечной.

Из полученного результата следует, что работа силы тяжести не зависит от вида той траектории, по которой перемещается точка ее приложения. Силы, обладающие таким свойством, называются потенциальными (см. § 126).

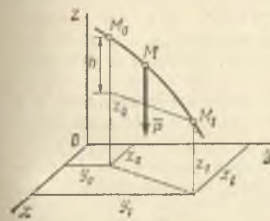


Рис. 231

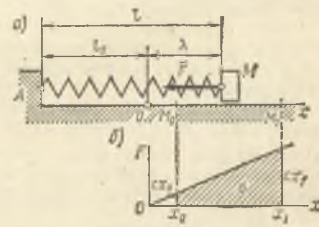


Рис. 232

2. Работа силы упругости. Рассмотрим груз M , лежащий на горизонтальной плоскости и прикрепленный к свободному концу некоторой пружины (рис. 232, а). На плоскости отметим точкой O положение, занимаемое концом пружины, когда она не напряжена ($AO = l_0$ — длина ненапряженной пружины), и примем эту точку за начало координат. Если теперь оттянуть груз от равновесного положения O , растянув пружину до величины l , то пружина получит удлинение $\lambda = l - l_0$ и на груз будет действовать сила упругости $\vec{F}$, направленная к точке O . Так как в нашем случае $\lambda = x$, то по формуле (6) из § 76

$$F = c\lambda = c|x| \text{ и } F_x = -cx.$$

Последнее равенство справедливо и при $x < 0$ (груз левее точки O); тогда сила $\vec{F}$ направлена вправо и получится, как и должно быть, $F_x > 0$.

Найдем работу, совершаемую силой упругости при перемещении груза из положения $M_0(x_0)$ в положение $M_1(x_1)$. Так как в данном случае $F_x = -cx$, $F_y = F_z = 0$, то, подставляя эти значения в

формулу (44'), найдем

$$A_{(M_0 M_1)} = \int_{x_0}^{x_1} (-cx) dx = -\frac{c}{2} (x_0^2 - x_1^2).$$

(Этот же результат можно получить по графику зависимости F от x (рис. 232, б), вычисляя площадь σ заштрихованной на чертеже трапеции и учитывая знак работы.) В полученной формуле x_0 представляет собой начальное удлинение пружины λ_0 , а x_1 — конечное удлинение пружины λ_1 . Следовательно,

$$A_{(M_0 M_1)} = \frac{c}{2} (\lambda_0^2 - \lambda_1^2), \quad (48)$$

т. е. работа силы упругости равна половине произведения коэффициента жесткости на разность квадратов начального и конечного удлинений (или сжатий) пружины.

Работа будет положительной, когда $\lambda_0 > \lambda_1$, т. е. когда конец пружины перемещается к равновесному положению, и отрицательной, когда $\lambda_0 < \lambda_1$, т. е. когда конец пружины удаляется от равновесного положения.

Можно доказать, что формула (48) остается справедливой и в случае, когда перемещение точки M не является прямолинейным. Таким образом, оказывается, что работа силы $\vec{F}$ зависит только от значений λ_0 и λ_1 и не зависит от вида траектории точки M . Следовательно, сила упругости также является потенциальной.

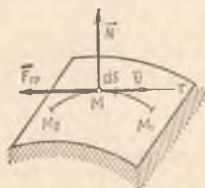


Рис. 233



Рис. 234

3. Работа силы трения. Рассмотрим точку, движущуюся по какой-нибудь шероховатой поверхности (рис. 233) или кривой. Действующая на точку сила трения равна по модулю fN , где f — коэффициент трения, а N — нормальная реакция поверхности. Направлена сила трения противоположно перемещению точки. Следовательно, $F_{тр} = -F_{тр} = -fN$ и по формуле (44)

$$A_{(M_0 M_1)} = - \int_{(M_0)}^{(M_1)} F_{тр} ds = - \int_{(M_0)}^{(M_1)} fN ds.$$

Если численно сила трения постоянна, то $A_{(M_0 M_1)} = -F_{тр}s$, где s — длина дуги кривой $M_0 M_1$, по которой перемещается точка.

Таким образом, работа силы трения при скольжении всегда отрицательна. Так как эта работа зависит от длины дуги $M_0 M_1$, то, следовательно, сила трения является силой непотенциальной.

4. Работа силы тяготения. Если Землю (планету) рассматривать как однородный шар (или шар, состоящий из однородных концентрических слоев), то на точку M с массой m , находящуюся вне шара на расстоянии r от его центра O (или находящуюся на поверхности шара), будет действовать сила тяготения F , направленная к центру O (рис. 234), значение которой определяется формулой (5) из § 76. Представим эту формулу в виде

$$F = km/r^2$$

и определим коэффициент k из того условия, что, когда точка находится на поверхности Земли ($r=R$, где R — радиус Земли), сила притяжения равна mg , где g — ускорение силы тяжести (точнее силы тяготения) на земной поверхности. Тогда должно быть

$$mg = km/R^2 \text{ и } k = gR^2.$$

Подсчитаем сначала элементарную работу силы $\vec{F}$. Как видно из рисунка, элементарное перемещение $\vec{MM'}$ точки M можно разложить на перемещение $\vec{Ma}$, численно равное приращению dr расстояния $OM=r$ и направленное вдоль OM , и на перемещение $\vec{Mb}$, перпендикулярное OM , а следовательно, и силе $\vec{F}$. Поскольку на этом втором перемещении работа силы $\vec{F}$ равна нулю, а перемещение $\vec{Ma}$ направлено противоположно силе, то

$$dA = -F dr = -km \frac{dr}{r^2} = -mgR^2 \frac{dr}{r^2}. \quad (49)$$

Допустим теперь, что точка перемещается из положения M_0 , где $r=r_0$, в положение M_1 , где $r=r_1$. Тогда

$$A_{(M_0 M_1)} = \int_{(M_0)}^{(M_1)} dA = -mgR^2 \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{r^2} = mgR^2 \int_{r_1}^{r_0} d\left(\frac{1}{r}\right)$$

или окончательно

$$A_{(M_0 M_1)} = mgR^2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0} \right). \quad (50)$$

Работа будет положительной, если $r_0 > r_1$, т. е. когда конечное положение точки ближе к земной поверхности, чем начальное, и отрицательной, если $r_0 < r_1$. От вида траектории точки M работа силы тяготения, как видно из формулы (50), не зависит. Следовательно, сила тяготения является потенциальной.

§ 89. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ ТОЧКИ

Введем понятие еще об одной основной динамической характеристике движения — о кинетической энергии. Кинетической энергией материальной точки называется скалярная величина $mv^2/2$, равная половине произведения массы точки на квадрат ее скорости.

Единица измерения кинетической энергии та же, что и работы (в СИ — 1 Дж). Найдем зависимость, которой связаны эти две величины.

Рассмотрим материальную точку с массой m , перемещающуюся из положения M_0 , где она имеет скорость v_0 , в положение M_1 , где ее скорость v_1 .

Для получения искомой зависимости обратимся к выражающему основной закон динамики уравнению $m\vec{a} = \Sigma \vec{F}_k$. Проектируя обе его части на касательную $M\tau$ к траектории точки M , направленную в сторону движения, получим

$$ma_\tau = \Sigma F_{k\tau}.$$

Входящее сюда касательное ускорение точки представим в виде

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = v \frac{dv}{ds}.$$

В результате найдем, что

$$mv \frac{dv}{ds} = \Sigma F_{k\tau}.$$

Умножим обе части этого равенства на ds и внесем m под знак дифференциала. Тогда, замечая, что $F_{k\tau} ds = dA_k$, где dA_k — элементарная работа силы $\vec{F}_k$, получим выражение теоремы об изменении кинетической энергии точки в дифференциальной форме:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \Sigma dA_k. \quad (51)$$

Проинтегрировав теперь обе части этого равенства в пределах, соответствующих значениям переменных в точках M_0 и M_1 , найдем окончательно

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \Sigma A_{(M_0 M_1)}. \quad (52)$$

Уравнение (52) выражает теорему об изменении кинетической энергии точки в конечном виде: изменение кинетической энергии точки при некотором ее перемещении равно алгебраической сумме работ всех действующих на точку сил на том же перемещении.

Случай несвободного движения. При несвободном движении точки в правую часть равенства (52) войдет работа заданных (активных) сил $\vec{F}_k$ и работа реакции связи. Ограничимся рассмотрением движения точки по неподвижной гладкой (лишенной трения) поверхности или кривой. В этом случае реакция $\vec{N}$ (см. рис. 233) будет направлена по нормали к траектории точки и $N_\tau = 0$. Тогда, согласно формуле (44), работа реакции неподвижной гладкой поверхности (или кривой) при любом перемещении точки будет равна нулю, и из уравнения (52) получим

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \Sigma A_{(M_0 M_1)}. \quad (52')$$

Следовательно, при перемещении по неподвижной гладкой поверхности (или кривой) изменение кинетической энергии точки равно сумме работ на этом перемещении приложенных к точке активных сил.

Если поверхность (кривая) не является гладкой, то к работе активных сил прибавится работа силы трения (см. § 88). Если же поверхность (кривая) движется, то абсолютное перемещение точки M может не быть перпендикулярно $\vec{N}$ и тогда работа реакции $\vec{N}$ не будет равна нулю (например, работа реакции платформы лифта).

Решение задач. Теорема об изменении кинетической энергии [формула (52)] позволяет, зная как при движении точки изменяется ее скорость, определить работу действующих сил (первая задача динамики) или, зная работу действующих сил, определить, как изменяется при движении скорость точки (вторая задача динамики). При решении второй задачи, когда заданы силы, надо вычислить их работу. Как видно из формул (44), (44'), это можно сделать лишь тогда, когда силы постоянны или зависят только от положения (координат) движущейся точки, как, например, силы упругости или тяготения (см. § 88).

Таким образом, формулу (52) можно непосредственно использовать для решения второй задачи динамики, когда в задаче в число данных и искомых величин входят: действующие силы, перемещение точки и ее начальная и конечная скорости (т. е. величины $\vec{F}$, s , v_0 , v_1), причем силы должны быть постоянными или зависящими только от положения (координат) точки.

Теорему в дифференциальной форме [формула (51)] можно, конечно, применять при любых действующих силах.

Задача 98. Груз массой $m=2$ кг, брошенный со скоростью $v_0=20$ м/с из пункта A , находящегося на высоте $h=5$ м (рис. 235), имеет в точке падения C скорость $v_1=16$ м/с. Определить, чему равна работа действующей на груз при его движении силы сопротивления воздуха $\vec{R}$.

Решение. На груз при его движении действуют сила тяжести $\vec{P}$ и сила сопротивления воздуха $\vec{R}$. По теореме об изменении кинетической энергии, считая груз материальной точкой, имеем

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A(\vec{P}) + A(\vec{R}).$$

Из этого равенства, так как согласно формуле (47) $A(\vec{P}) = Ph$, находим

$$A(\vec{R}) = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} - mgh = -242 \text{ Дж.}$$

Задача 99. При условиях задачи 96 (см. § 84) определить, какой путь пройдет груз до остановки (см. рис. 223, где M_0 — начальное положение груза, а M_1 — конечное).

Решение. На груз, как и в задаче 96, действуют силы $\vec{P}$, $\vec{N}$, $\vec{F}$. Для определения тормозного пути $s_1 = M_0 M_1$, учитывая, что в условия данной задачи входят s_1 , v_0 , v_1 и постоянная сила $\vec{F}$, воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \Sigma A_{(M_0 M_1)}.$$

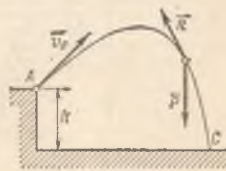


Рис. 235

В рассматриваемом случае $v_1=0$ (v_1 — скорость груза в момент остановки). Кроме того, $A(P)=0$ и $A(N)=0$, так как силы P и N перпендикулярны перемещению, $A(P)=-Fs_1$, поскольку $\vec{F}=\text{const}$. В итоге получаем $-mv_0^2/2=-Fs_1$, откуда находим

$$s_1 = mv_0^2/2F.$$

По результатам задачи 96 время торможения растёт пропорционально начальной скорости, а тормозной путь, как мы нашли, — пропорционально квадрату начальной скорости. Применительно к наземному транспорту это показывает, как возрастает опасность с увеличением скорости движения.

Задача 100. Груз весом P подвешен на нити длиной l . Нить вместе с грузом отклоняют от вертикали на угол φ_0 (рис. 236, а) и отпускают без начальной скорости. При движении на груз действует сила сопротивления R , которую приближенно заменяем ее средним значением $\bar{R}$ ($R^*=\text{const}$). Найти скорость груза в тот момент времени, когда нить образует с вертикалью угол φ .

Решение. Учитывая условия задачи, воспользуемся опять теоремой (52):

$$mv^2/2 - mv_0^2/2 = \Sigma A_{(M_0M)} \quad (a)$$

На груз действуют сила тяжести $\vec{P}$, реакция нити $\vec{N}$ и сила сопротивления, представленная ее средним значением $\bar{R}$. Для силы P по формуле (47) $A(P)=Ph$, для силы N , так как $N_t=0$, получим $A(N)=0$, наконец, для силы $\bar{R}$, так как $R^*=\text{const}$ и $R_t^*=-R^*$, по формуле (45) будет $A(R^*)=-R^*s=-R^*l(\varphi_0-\varphi)$ (длина s дуги M_0M равна произведению радиуса l на центральный угол $\varphi_0-\varphi$). Кроме того, по условиям задачи $v_0=0$, а $m=P/g$. В результате равенство (а) дает:

$$Pv^2/2g = Ph - R^*l(\varphi_0 - \varphi) \text{ и } v = \sqrt{2gh - 2gl(\varphi_0 - \varphi) R^*/P}.$$

При отсутствии сопротивления получаем отсюда известную формулу Галилея $v = \sqrt{2gh}$, справедливую, очевидно, и для скорости свободно падающего груза (рис. 236, б).

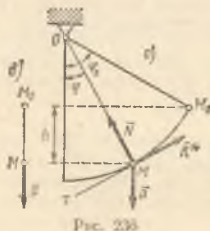


Рис. 236



Рис. 237

В рассматриваемой задаче $h=l\cos\varphi_0-l\cos\varphi$. Тогда, введя еще обозначение $R^*/P=k^*$ (k^* — средняя сила сопротивления, приходящаяся на единицу веса груза), получаем окончательно

$$v = \sqrt{2gl[\cos\varphi - \cos\varphi_0 - k^*(\varphi_0 - \varphi)]}.$$

Задача 101. Пружина клапана имеет в недеформированном состоянии длину $l_0=6$ см. При полностью открытом клапане ее длина $l=4$ см, а высота подъема клапана $s=0.6$ см (рис. 237). Жесткость пружины $c=150$ Н/м, масса клапана $m=0.4$ кг. Пренебрегая действием силы тяжести и сил сопротивления, определить скорость клапана в момент его закрытия.

Решение. Воспользуемся уравнением

$$mv_1^2/2 - mv_0^2/2 = A_{(M_0M_1)} \quad (a)$$

По условиям задачи работу совершает только сила упругости пружины. Тогда по формуле (48) будет

$$A_{(M_0M_1)} = c(\lambda_0^2 - \lambda_1^2)/2.$$

В данном случае

$$\lambda_0 = l_0 - l = 2 \text{ см}, \quad \lambda_1 = l_0 - l - s = 1.4 \text{ см}.$$

Кроме того, $v_0=0$. Подставляя все эти значения в уравнение (а), получим окончательно

$$v_1 = \sqrt{\frac{c}{m}(\lambda_0^2 - \lambda_1^2)} = 0.28 \text{ м/с}. \quad (б)$$

Задача 102. Груз, лежащий на середине упругой балки (рис. 238), прогибает ее на величину $\lambda_{ст}$ (статистический прогиб балки). Пренебрегая весом балки, определить, чему будет равен ее максимальный прогиб λ_m , если груз упадет на балку с высоты H .

Решение. Как и в предыдущей задаче, воспользуемся для решения уравнением (52). В данном случае начальная скорость груза v_0 и конечная его скорость v_1 (в момент максимального прогиба балки) равны нулю и уравнение (52) принимает вид

$$\Sigma A_R = 0. \quad (a)$$

Работу здесь совершают сила тяжести $\vec{P}$ на перемещении M_0M_1 и сила упругости балки $\vec{F}$ на перемещении $M'M_1$. При этом $A(P)=P(H+\lambda_m)$, $A(F)=-0.5c\lambda_m^2$, так как для балки $\lambda_0=0$, $\lambda_1=\lambda_m$. Подставляя эти величины в равенство (а), получим

$$P(H+\lambda_m) - 0.5c\lambda_m^2 = 0.$$

Но при равновесии груза на балке сила тяжести уравновешивается силой упругости, следовательно, $P=c\lambda_{ст}$ и предыдущее равенство можно представить в виде

$$\lambda_m^2 - 2\lambda_{ст}\lambda_m - 2\lambda_{ст}H = 0.$$

Решая это квадратное уравнение и учитывая, что по условиям задачи должно быть $\lambda_m > 0$, находим

$$\lambda_m = \lambda_{ст} + \sqrt{\lambda_{ст}^2 + 2H\lambda_{ст}}.$$

Интересно отметить, что при $H=0$ получается $\lambda_m=2\lambda_{ст}$. Следовательно, если груз положить на середину горизонтальной балки, то ее максимальный прогиб при опускании груза будет равен удвоенному статическому. В дальнейшем груз начнет вместе с балкой совершать колебания около равновесного положения. Под влиянием сопротивлений эти колебания затухнут и система уравновесится в положении, при котором прогиб балки равен $\lambda_{ст}$.



Рис. 238

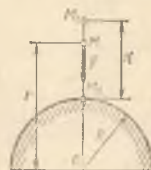


Рис. 239

Задача 103. Определить, какую наименьшую направленную вертикально вверх начальную скорость v_0 надо сообщить телу, чтобы оно поднялось с поверхности Земли на заданную высоту H (рис. 239). Силу притяжения считать изменяющейся обратно пропорционально квадрату расстояния от центра Земли. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение. Рассматривая тело как материальную точку с массой m , воспользуемся уравнением

$$mv_1^2/2 - mv_0^2/2 = A_{(M, M_1)} \quad (a)$$

Работу здесь совершает сила тяготения F . Тогда по формуле (50), учитывая, что в данном случае $r_0=R$, $r_1=R+H$, где R — радиус Земли, получим

$$A_{(M, M_1)} = -\frac{GMm}{R} [1/(R+H) - 1/R].$$

Так как в наивысшей точке $v_1=0$, то при найденном значении работы уравнение (a) дает

$$v_0 = \sqrt{\frac{2gRH}{R+H}}.$$

Рассмотрим частные случаи:

а) пусть H очень мало по сравнению с R . Тогда H/R — величина, близкая к нулю. Деля числитель и знаменатель на R , получим

$$v_0 = \sqrt{\frac{2gH}{1+H/R}} \approx \sqrt{2gH}.$$

Таким образом, при малых H приходим к формуле Галилея;

б) найдем, при какой начальной скорости брошенное тело уйдет в бесконечность. Деля числитель и знаменатель на H , получим

$$v_0 = \sqrt{\frac{2gR}{1+R/H}}.$$

При $H=\infty$, считая средний радиус Земли $R=6370$ км, находим

$$v_0 = \sqrt{2gR} \approx 11,2 \text{ км/с}. \quad (б)$$

Следовательно, тело, брошенное с поверхности Земли со скоростью 11,2 км/с, навсегда покинет поле земного тяготения. Скорость, определяемая равенством (б), называется *второй космической скоростью*.

Можно доказать (см. гл. XX), что при начальных скоростях, лежащих приблизительно в пределах $8 \text{ км/с} \leq v_0 \leq 11 \text{ км/с}$, тело, брошенное по направлению касательной к земной поверхности, не упадет обратно на Землю, а превратится в земного спутника. При начальных скоростях, меньших 8 км/с , или при негоризонтальном бросании тело, описав эллиптическую траекторию, упадет обратно на Землю. Все эти результаты относятся к движению в безвоздушном пространстве.

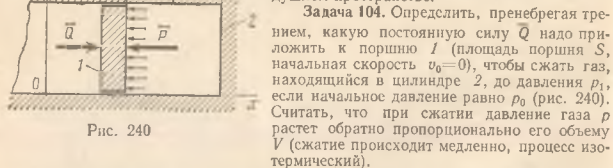


Рис. 240

Решение. На поршень действуют сила Q и сила давления газа P . Так как у поршня $v_0=0$ и $v_1=0$, то по теореме об изменении кинетической энергии

$$A(P) + A(Q) = 0. \quad (a)$$

Направим ось Ox в сторону движения поршня, считая, что при $x=0$ давление $p=p_0$. Обозначим через l_0 начальное расстояние поршня от дна цилиндра, а через x_1 — перемещение поршня до положения, при котором $v_1=0$ и давление $p=p_1$. Так

как численно $P=pS$ и $P_x=-P=-pS$, то по формуле (44')

$$A(P) = - \int_0^{x_1} pS dx. \quad (б)$$

Зависимость p от x найдем из условия, что давление обратно пропорционально объему, т. е. $p/p_0 = V_0/V$, где начальный объем $V_0 = Sl_0$, а объем в произвольном положении $V = S(l_0 - x)$. Тогда для p , а также для координаты x_1 , при которой $p=p_1$, получим выражения:

$$p = \frac{p_0 l_0}{l_0 - x} \quad \text{и} \quad x_1 = l_0 \left(1 - \frac{p_0}{p_1}\right). \quad (в)$$

Учтя эти зависимости, найдем из равенства (б)

$$A(P) = -p_0 l_0 S \int_0^{x_1} \frac{dx}{l_0 - x} = -p_0 l_0 S \ln \frac{l_0}{l_0 - x_1} = -p_0 l_0 S \ln \frac{p_1}{p_0}.$$

Далее, так как $Q = \text{const}$, получим с учетом соотношений (в)

$$A(Q) = Qx_1 = Ql_0 \left(1 - \frac{p_0}{p_1}\right) = Ql_0 \frac{p_1 - p_0}{p_1}.$$

При найденных значениях работ равенство (a) даст окончательно

$$Q = \frac{p_0 p_1}{p_1 - p_0} S \ln \frac{p_1}{p_0}.$$

Если $p_1 \gg p_0$, то, полагая приближенно $p_1 - p_0 \approx p_1$, получим

$$Q \approx p_0 S \ln(p_1/p_0).$$

Сила Q с увеличением p_1 растет по логарифмическому закону, т. е. довольно медленно. Например, при $p_1 = 20p_0$ $Q \approx 3p_0 S$, а при $p_1 = 50p_0$ $Q \approx 3,9p_0 S$.

Глава XVIII

НЕСВОБОДНОЕ И ОТНОСИТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

§ 90. НЕСВОБОДНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

Движение материальной точки будет несвободным, когда в силу наложенных связей она вынуждена двигаться по заданной поверхности или кривой. Ограничимся рассмотрением второго случая.

Движение точки по заданной неподвижной кривой. Рассмотрим материальную точку, движущуюся по заданной гладкой неподвижной кривой под действием активных сил $F_1, F_2, \dots, F_n$ и реакции связи $\bar{N}$ (рис. 241). Выберем на кривой начало отсчета O' и будем определять положение точки M криволинейной координатой $s = O'M$ (см. § 37). Проведем из точки M оси $M\tau$ и Mn (см. § 42), т. е. касательную $M\tau$ (в сторону положительного отсчета координаты s), главную нормаль Mn (в сторону вогнутости кривой) и бинормаль Mb и воспользуемся уравнениями (11) из § 77. Так как кривая гладкая, то реакция $\bar{N}$ перпендикулярна кривой,

т. е. лежит в плоскости Mbn , потому $N_\tau = 0$. В результате получим следующие дифференциальные уравнения движения точки по заданной кривой:

$$m \frac{dv}{dt} = \sum F_{k\tau} \text{ или } m \frac{d^2s}{dt^2} = \sum F_{k\tau}; \quad (53)$$

$$mv^2/\rho = \sum F_{kn} + N_n, \quad 0 = \sum F_{kb} + N_b. \quad (54)$$

Уравнение (53) не содержит неизвестной реакции N и позволяет непосредственно определить закон движения точки вдоль кривой, т. е. зависимость $s=f(t)$. Этим уравнением можно пользоваться и в случае, когда кривая не является гладкой, присоединив к силам $\vec{F}_k$ силу трения $\vec{F}_{тр}$. Но так как $F_{тр}=fN$, то в этом случае в уравнение (53) через силу трения войдет еще и реакция N .

Уравнения (54) служат для определения реакции связи N . Из уравнений видно, что при криволинейном движении динамическая реакция в отличие от статической кроме действующих активных сил и вида связи зависит еще от скорости. Эту скорость (если она не задана) можно найти или проинтегрировав уравнение (53), или же, что обычно проще, с помощью теоремы об изменении кинетической энергии точки; в уравнение (52'), выражающее эту теорему для случая связей без трения, реакция N тоже не входит.

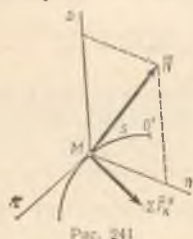


Рис. 241

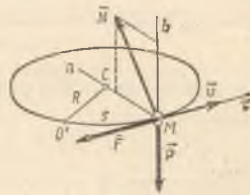


Рис. 242

Задача 105. Тяжелому кольцу M , нанизанному на горизонтально расположенную гладкую проволочную окружность, сообщают начальную скорость v_0 , направленную по касательной к окружности. При движении на кольцо действует сила сопротивления $F=km\sqrt{v}$, где m — масса кольца; v — его скорость; k — постоянный коэффициент. Найти, через сколько секунд кольцо остановится.

Решение. Помещаем начало отсчета O' в начальном положении кольца (рис. 242). Изображаем кольцо в произвольном положении и проводим оси $M\tau$, Mn и Mb . На кольцо действуют сила тяжести $\vec{P}$, реакция $\vec{N}$ и сила сопротивления $\vec{F}$. Составим уравнение (53), учитывая, что $P_\tau = N_\tau = 0$, а $F_\tau = -F = -km\sqrt{v}$; уравнение примет вид

$$m \frac{dv}{dt} = -km\sqrt{v}.$$

Отсюда, разделяя переменные и учитывая, что при $t=0$ $v=v_0$, получим

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{\sqrt{v}} = -k \int_0^t dt \text{ или } 2(\sqrt{v_0} - \sqrt{v}) = kt.$$

В момент $t=t_1$, когда груз останавливается, $v=0$. Следовательно, полагая в полученном уравнении $v=0$, найдем

$$t_1 = 2\sqrt{v_0}/k.$$

Время движения до остановки при данном законе сопротивления является конечным (см. задачу 93 в § 80).

Задача 106. В предыдущей задаче найти, какой путь s_1 пройдет кольцо вдоль окружности до остановки, считая, что на него действует не сила сопротивления, зависящая от скорости, а сила трения $F=fN$. Дано: радиус кольца $R=0,3$ м, начальная скорость $v_0=2$ м/с, коэффициент трения кольца об окружность $f=0,3$.

Решение. Выбираем начало отсчета O' и проводим оси $M\tau$, Mn и Mb так же, как и в предыдущей задаче (рис. 242). Действующими на кольцо силами будут: $\vec{P}$, $\vec{N}$ и $\vec{F}$, где $\vec{F}$ — теперь сила трения. Составляя уравнения (53) и (54), получим:

$$m \frac{dv}{dt} = -F, \quad \frac{mv^2}{R} = N_n, \quad N_b - P = 0.$$

По модулю $F=fN=f\sqrt{N_b^2+N_n^2}$ (было бы ошибкой вычислить силу трения как арифметическую сумму сил fN_b и fN_n). Замечая, что $N_b=P=mg$, находим

$$F=fm\sqrt{g^2+v^4/R^2}.$$

Как видим, сила трения зависит через реакцию N от скорости кольца. Чтобы сразу найти зависимость s от v , заметим, что $dv/dt = dv/ds \cdot ds/dt = v \cdot dv/ds$. Тогда, после сокращения на m , уравнение движения кольца примет вид

$$v \frac{dv}{ds} = -\frac{f}{R} \sqrt{g^2 R^2 + v^4}.$$

Разделяя переменные и беря от обеих частей равенства соответствующие определенные интегралы, получим

$$\int_{v_0}^v \frac{d(v^2)}{\sqrt{g^2 R^2 + v^4}} = -2 \frac{f}{R} \int_0^{s_1} ds,$$

откуда

$$-2fs/R = \ln(v^2 + \sqrt{g^2 R^2 + v^4}) - \ln(v_0^2 + \sqrt{g^2 R^2 + v_0^4})$$

и окончательно

$$s = \frac{R}{2f} \ln \frac{v_0^2 + \sqrt{g^2 R^2 + v_0^4}}{v^2 + \sqrt{g^2 R^2 + v^4}}.$$

В момент остановки $v=0$. Поэтому искомый путь, если считать приблизительно $g=10$ м/с², будет

$$s_1 = \frac{R}{2f} \ln \frac{v_0^2 + \sqrt{v_0^4 + g^2 R^2}}{gR} \approx 0,5 \ln 3 \approx 0,55 \text{ м.}$$

Задача 107. Груз весом P , подвешенный на нити длиной l , отклоняют от вертикали на угол α в положение M_0 и отпускают без начальной скорости. Определить натяжение нити в момент, когда груз дойдет до наинизшего положения M_1 .

Решение. Изображаем груз в том положении, для которого надо найти натяжение нити, т. е. в положении M_1 (рис. 243). На груз действуют сила тяжести $\vec{P}$ и реакция нити $\vec{T}$. Проводим нормаль M_1n в сторону вогнутости траектории и составляем уравнение (54), учитывая, что в нашем случае $\rho=l$. Получим

$$mv_1^2/l = T - P \text{ или } T = P + mv_1^2/l,$$

где v_1 — скорость груза в положении M_1 . Для определения v_1 воспользуемся уравнением (52')

$$mv_1^2/2 - mv_0^2/2 = A_{M_0 M_1}^{\vec{P}}, \quad (a)$$

Работу на участке M_0M_1 совершает только сила $\vec{P}$. Поэтому $A^a = Ph = P(1 - \cos \alpha)$.

Так как $v_0 = 0$, то, подставляя найденное значение работы в равенство (а), получим $mv_1^2/2 = 2Pl(1 - \cos \alpha)$ и окончательно найдем

$$T = P(3 - 2 \cos \alpha).$$

В частном случае, если угол начального отклонения $\alpha = 90^\circ$, натяжение нити при прохождении через вертикаль будет равно $3P$, т. е. утроенному весу груза.

Полученное решение показывает, что динамические реакции действительно могут значительно отличаться от статических.

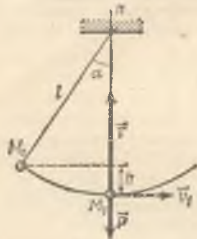


Рис. 243

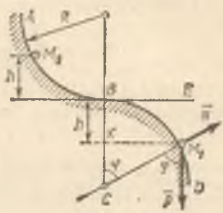


Рис. 244

Задача 108. Желоб состоит из двух дуг AB и BD окружностей радиуса R , расположенных в вертикальной плоскости так, что касательная BE в точке сопряжения горизонтальна (рис. 244). Пренебрегая трением, определить, на какой высоте h над линией BE надо положить в желоб тяжелый шарик, чтобы он соскочил с желоба в точке M_1 , лежащей на таком же расстоянии h ниже линии BE .

Решение. Шарик оторвется от желоба в той точке M_1 , где его давление на желоб (или реакция N желоба) обратится в нуль. Следовательно, задача сводится к определению N . Изображаем шарик в точке M_1 . На него действуют сила тяжести P и реакция желоба N . Составляя уравнение (54) в проекции на внутреннюю нормаль M_1C , найдем, что

$$mv_1^2/R = P \cos \varphi - N.$$

Так как в точке отрыва $N = 0$, то, учитывая, что $R \cos \varphi = KC = R - h$, получим для определения h уравнение

$$mv_1^2 = P(R - h). \quad (a)$$

Величину mv_1^2 найдем из теоремы об изменении кинетической энергии. Так как $v_0 = 0$, то уравнение (52') дает

$$mv_1^2/2 = A_{(M_0M_1)}^a.$$

Работу здесь совершает только сила $\vec{P}$, причем $A(\vec{P}) = 2Ph$. Следовательно, $mv_1^2 = 4Ph$. Подставляя это значение mv_1^2 в уравнение (а), получим $4h = R - h$, откуда $h = 0,2R$.

Задача 109. Груз M подвешен на нити длиной l (рис. 245). Какую наименьшую начальную скорость v_0 , перпендикулярную нити, надо сообщить грузу, чтобы он описал полную окружность?

Решение. Груз опишет полную окружность, если на всем пути натяжение нити нигде (кроме, может быть, точки M') не обратится в нуль, т. е. нить нигде не будет смята. Если же в какой-нибудь точке M_1 , где $v_1 \neq 0$, натяжение нити обратится в нуль, то нить перестанет удерживать груз и он будет продолжать движение как свободная точка (по параболе).

Для решения задачи найдем натяжение T нити в произвольном положении M , определяемом углом φ , а затем потребуем, чтобы при любом угле $\varphi \neq 180^\circ$ было $T > 0$.

В положении M на груз действуют сила $\vec{P}$ и натяжение нити $\vec{T}$. Составив уравнение (54) в проекции на внутреннюю нормаль Ml , получим

$$mv^2/l = T - P \cos \varphi, \quad (a)$$

где v — скорость груза в положении M . Для определения v применим теорему об изменении кинетической энергии:

$$mv^2/2 - mv_0^2/2 = A^a.$$

В данном случае $A^a = -Ph = -Pl(1 - \cos \varphi)$ и, следовательно,

$$mv^2 = mv_0^2 - 2Pl(1 - \cos \varphi).$$

Подставив это значение mv^2 в уравнение (а) и вычислив T , получим

$$T = P(v_0^2/gl - 2 + 3 \cos \varphi).$$

Наименьшее значение T будет иметь при $\varphi = 180^\circ$:

$$T_{\min} = P(v_0^2/gl - 5).$$

Чтобы T нигде (кроме, может быть, точки M') не обратилось в нуль, необходимо, чтобы было $T_{\min} \geq 0$. Отсюда

$$v_0^2/gl \geq 5 \Rightarrow v_0 \geq \sqrt{5gl}.$$

Следовательно, наименьшая начальная скорость, при которой груз будет описывать полную окружность, определяется равенством

$$v_{0\min} = \sqrt{5gl}.$$

Допустим, что вместо нити груз будет подвешен на жестком легком (невесомом) стержне длины l . В этом случае (так как стержень в отличие от нити может работать и на растяжение, и на сжатие) груз опишет полную окружность, если при движении его скорость нигде (кроме, может быть, точки M') не обратится в нуль. Применяя уравнение (52') для перемещения M_0M' и считая в точке M' скорость $v = 0$, получим $-mv_0^2/2 = -mg \cdot 2l$. Отсюда следует, что в данном случае $v_{0\min} = \sqrt{4gl}$.

§ 91. ОТНОСИТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

Второй закон динамики и полученные из него выше уравнения и теоремы верны только для так называемого абсолютного движения точки, т. е. движения по отношению к инерциальной («неподвижной») системе отсчета.

Обратимся теперь к изучению относительного движения точки, т. е. движения по отношению к неинерциальным, произвольно движущимся по отношению к инерциальной системе отсчета.

Рассмотрим материальную точку M , движущуюся под действием приложенных к ней сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$, являющихся результатом взаимодействия точки с другими материальными телами. Будем изучать движение этой точки по отношению к осям $Oxyz$ (рис. 246), которые в свою очередь каким-то известным нам образом движутся относительно инерциальной системы отсчета (неподвижных осей) $O_1x_1y_1z_1$.



Рис. 245

Найдем зависимость между относительным ускорением точки $\bar{a}_{от}$ и действующими на нее силами. Для абсолютного движения основной закон динамики имеет вид

$$m\bar{a}_{аб} = \sum \bar{F}_k. \quad (55)$$

Но из кинематики известно (см. § 66), что $\bar{a}_{аб} = \bar{a}_{от} + \bar{a}_{пер} + \bar{a}_{кор}$, где $\bar{a}_{от}$, $\bar{a}_{пер}$, $\bar{a}_{кор}$ — относительное, переносное и кориолисово ускорения точки. Подставляя это значение $\bar{a}_{аб}$ в равенство (55) и считая в дальнейшем $\bar{a}_{от} = \bar{a}$, так как эта величина представляет собой ускорение изучаемого нами относительного движения, получим

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_k + (-m\bar{a}_{пер}) + (-m\bar{a}_{кор}).$$

Введем обозначения:

$$\bar{F}_{пер} = -m\bar{a}_{пер}, \quad \bar{F}_{кор} = -m\bar{a}_{кор}.$$

Величины $\bar{F}_{пер}$ и $\bar{F}_{кор}$ имеют размерность силы. Назовем их соответственно *переносной* и *кориолисовой силами инерции*. Тогда предыдущее уравнение примет вид

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_k + \bar{F}_{пер} + \bar{F}_{кор}. \quad (56)$$

Уравнение (56) выражает основной закон динамики для относительного движения точки. Сравнивая равенства (55) и (56), приходим к выводу: *все уравнения и теоремы механики для относительного движения точки составляются так же, как уравнения абсолютного движения, если при этом к действующим на точку силам взаимодействия с другими телами прибавить переносную и кориолисову силы инерции*. Прибавление сил $\bar{F}_{пер}$ и $\bar{F}_{кор}$ учитывает влияние на относительное движение точки перемещения подвижных осей.

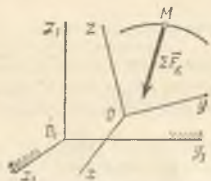


Рис. 246

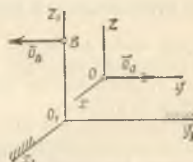


Рис. 247

Чтобы уяснить характер этого влияния, рассмотрим, например, точку B, неподвижную в инерциальной системе отсчета $O_1x_1y_1z_1$ (рис. 247), и допустим, что подвижные оси $Oxyz$ перемещаются относительно осей $O_1x_1y_1z_1$ поступательно с ускорением $\bar{a}_0$. Тогда по отношению к осям $Oxyz$ точка B будет иметь ускорение $\bar{a}_B = -\bar{a}_0$ и причина появления этого ускорения будет *кинематическая* — движение подвижной системы отсчета.

Таким образом, если в инерциальной системе отсчета материальная точка, как это видно из уравнения (55), может получить ускорение только за счет действия на нее сил $\bar{F}_k$, то в неинерциальной системе отсчета точка получает ускорение еще и в результате ускоренного движения самой системы отсчета.

В общем случае, если из равенства (55) определить $\bar{a}_{аб} = \sum \bar{F}_k / m$ и учесть зависимость $\bar{a}_{аб} = \bar{a}_{от} + \bar{a}_{пер} + \bar{a}_{кор}$, то, полагая, как это сделано выше, $\bar{a}_{от} = \bar{a}$, получим

$$\bar{a} = \frac{\sum \bar{F}_k}{m} + (-\bar{a}_{пер}) + (-\bar{a}_{кор}). \quad (56')$$

Это другое выражение закона относительного движения точки, которым можно непосредственно пользоваться при решении задач. В его правой части первое слагаемое выражает ускорение, которое точке сообщают действующие силы $\bar{F}_k$, а два других слагаемых являются ускорениями, которые точка получает вследствие движения подвижной системы отсчета.

Из уравнения (56') видно также, что данные силы $\bar{F}_k$ сообщают точке ускорение, равное $\sum \bar{F}_k / m$ в любой системе отсчета, но в инерциальной системе отсчета это будет все ускорение точки, а в неинерциальной — только его часть.

Математически уравнения (56') и (56) эквивалентны. Но для приложений уравнение (56) более удобно, так как по виду совпадает с уравнением (55), что позволяет использовать при изучении относительного движения все результаты, полученные ранее для движения в инерциальной системе отсчета (например, общие теоремы).

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. Если подвижные оси движутся поступательно, то $\bar{F}_{кор} = 0$, так как в этом случае $\bar{\omega} = 0$ ($\bar{\omega}$ — угловая скорость вращения подвижных осей $Oxyz$), и закон относительного движения принимает вид

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_k + \bar{F}_{пер}.$$

2. Если подвижные оси перемещаются поступательно, равномерно и прямолинейно, то $\bar{F}_{пер} = \bar{F}_{кор} = 0$ и закон относительного движения будет иметь такой же вид, как и закон движения по отношению к неподвижным осям. Следовательно, такая система отсчета также будет *инерциальной*.

Из полученного результата вытекает, что никаким механическим экспериментом нельзя обнаружить, находится ли данная система отсчета в покое или совершает поступательное, равномерное и прямолинейное движение. В этом состоит открытый еще Галилеем принцип относительности классической механики.

3. Если точка по отношению к подвижным осям находится в покое, то для нее $\bar{a} = 0$ и $\bar{v}_{от} = \bar{v} = 0$, а следовательно, и $\bar{F}_{кор} = 0$, так как кориолисово ускорение $\bar{a}_{кор} = 2(\bar{\omega} \times \bar{v}_{от})$. Тогда равенство (56) принимает вид

$$\sum \bar{F}_k + \bar{F}_{пер} = 0. \quad (57)$$

Уравнение (57) представляет собой *уравнение относительного равновесия (покоя) точки*. Из него следует, что *уравнения относительного равновесия составляются так же, как уравнения равновесия в неподвижных осях, если при этом к действующим на точку силам взаимодействия с другими телами добавить переносную силу инерции*.

4. При составлении уравнений относительного движения в случаях, когда $\vec{F}_{\text{кор}} \neq 0$, надо иметь в виду, что

$$\vec{F}_{\text{кор}} = -m\vec{a}_{\text{кор}} = -2m(\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{от}}).$$

Следовательно, сила $\vec{F}_{\text{кор}}$ перпендикулярна $\vec{v}_{\text{от}} = \vec{v}$, а значит, и касательной к относительной траектории точки. Поэтому:

а) проекция кориолисовой силы инерции на касательную Mt к относительной траектории точки всегда равна нулю ($F_{\text{кор} \tau}^n = 0$), и первое из уравнений (11) в относительном движении будет иметь вид

$$m \frac{dv}{dt} = \Sigma F_{k\tau} + F_{\text{пер} \tau}^n \quad (58)$$

б) работа кориолисовой силы инерции на любом относительном перемещении равна нулю (см. § 87, формула (44)), и теорема об изменении кинетической энергии точки в относительном движении будет иметь вид (v_1 и v_0 — значения относительных скоростей, A — работа на относительном перемещении)

$$mv_1^2/2 - mv_0^2/2 = \Sigma A_k + A(\vec{F}_{\text{пер}}^n). \quad (59)$$

Последние слагаемые в правых частях равенств (58) и (59) учитывают влияние движения подвижных осей на изменение величины v .

Во все остальные уравнения относительного движения будут в общем случае входить и переносная, и кориолисова силы инерции.

Задача 110. Пренебрегая массой всех вращающихся частей центробежного регулятора (рис. 248) по сравнению с массой шаров B и D , найти угол α , определяющий положение относительного равновесия стержня AB , если регулятор вращается с постоянной угловой скоростью ω , а длина $AB = l$.

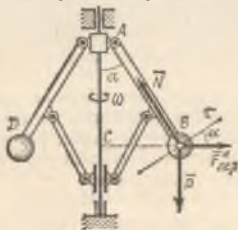


Рис. 248

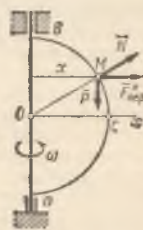


Рис. 249

Решение. Для определения положения относительного равновесия (по отношению к вращающимся вместе с регулятором осям) прибавляем, согласно равенству (57), к действующим на шар B силе тяжести P и реакции N переносную силу инерции $\vec{F}_{\text{пер}}^n$. Так как $\omega = \text{const}$, то $a_{\text{пер}} = a_{\text{пер}}^n = BC \cdot \omega^2 = l \omega^2 \sin \alpha$. Тогда $F_{\text{пер}}^n = m l \omega^2 \sin \alpha$. Направлена сила $\vec{F}_{\text{пер}}^n$ противоположно ускорению $\vec{a}_{\text{пер}}$, т. е. от оси вращения (вдоль линии CB); эту силу называют еще *центробежной силой инерции*. Составляя уравнение равновесия в проекции на ось Bt , перпендикулярную AB , найдем, что

$$-P \sin \alpha + F_{\text{пер}}^n \cos \alpha = 0.$$

Отсюда, заменяя силу $F_{\text{пер}}^n$ ее значением и сокращая на $\sin \alpha$ (решение $\alpha = 0$ не рассматриваем), получим $-g + l \omega^2 \cos \alpha = 0$. Тогда

$$\cos \alpha = g / l \omega^2.$$

Так как $\cos \alpha \leq 1$, то равновесие при $\alpha \neq 0$ возможно только, когда $\omega^2 > g/l$.

Задача 111. Полуокружность BCD радиуса R (рис. 249) вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω . По ней из точки B , чуть смещенной от оси вращения, начинает скользить без трения кольцо M . Найти относительную скорость кольца M в точке C , если его начальная скорость $v_0 = 0$.

Решение. Для определения скорости v_1 воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии. Чтобы составить уравнение (59), выражающее эту теорему, вычленим работу сил $\vec{P}$ и $\vec{F}_{\text{пер}}^n$, где $F_{\text{пер}}^n = m \omega^2 x$ (работа реакции N равна нулю). Считая приближенно $x_B = 0$, находим

$$A_{BC}(\vec{F}_{\text{пер}}^n) = \int_{(B)}^{(C)} F_{\text{пер}}^n dx = m \omega^2 \int_0^R x dx = m \omega^2 R^2 / 2.$$

Кроме того, $A_{(P,C)}(\vec{P}) = PR = mgR$. Подставляя эти значения в уравнение (59) и учитывая, что $v_0 = 0$, получим

$$mv_1^2/2 = mR(g + \omega^2 R/2).$$

Отсюда находим

$$v_1 = \sqrt{2gR(1 + \omega^2 R/2g)}.$$

Задачу можно также решить, используя уравнение (58).

Пример интегрирования уравнений относительного движения дан в § 93.

§ 92. ВЛИЯНИЕ ВРАЩЕНИЯ ЗЕМЛИ НА РАВНОВЕСИЕ И ДВИЖЕНИЕ ТЕЛ

При решении большинства технических задач систему отсчета, связанную с Землей, считают инерциальной (неподвижной). Тем самым не учитывается суточное вращение Земли по отношению к звездам (о влиянии движения Земли по ее орбите вокруг Солнца см. § 99). Это вращение (один оборот в сутки) происходит с угловой скоростью

$$\omega = 2\pi / (24 \cdot 60 \cdot 60) \approx 0,000073 \text{ с}^{-1}.$$

Рассмотрим, как сказывается такое довольно медленное вращение на равновесии и движении тел вблизи земной поверхности.

1. Сила тяжести P . Суточным вращением Земли связано понятие о силе тяжести, являющейся частью силы тяготения (притяжения к Земле). На материальную точку, находящуюся вблизи земной поверхности, действует сила тяготения $\vec{F}_t$, разлагающаяся на силы $\vec{F}_n$ и $\vec{P}$ (рис. 250). Сила $\vec{F}_n$, направленная к земной оси, сообщает точке то нормальное ускорение a_n , которое точка должна

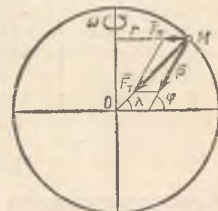


Рис. 250

и морских течений, а также воздушных масс в циклоне и антициклоне, где вместо движения к центру циклона (область пониженного давления) или от центра антициклона (область повышенного давления) возникает циркуляционное движение воздуха вокруг центра циклона (антициклона).

Вертикальное падение. Чтобы определить направление кориолисовой силы инерции $\vec{F}_{\text{кор}}^H$ в случае свободно падающей точки, надо знать направление относительной скорости $\vec{v}$ точки. Так как сила $\vec{F}_{\text{кор}}^H$ очень мала по сравнению с силой тяжести, то в первом приближении можно считать вектор $\vec{v}$, направленный по вертикали, т. е. вдоль линии MO (рис. 251). Тогда вектор $\vec{a}_{\text{кор}}$ будет, как легко видеть, направлен на запад, а сила $\vec{F}_{\text{кор}}^H$ — на восток (т. е. так, как на рис. 251 направлен вектор $\vec{v}$). Следовательно, в первом приближении свободно падающая точка (тело) отклоняется вследствие вращения Земли от вертикали к востоку. Тело, брошенное вертикально вверх, будет, очевидно, при подъеме отклоняться к западу. Величины этих отклонений очень малы и заметны только при достаточно большой высоте падения или подъема, что видно из расчетов, приведенных в § 93.

§ 93*. ОТКЛОНЕНИЕ ПАДАЮЩЕЙ ТОЧКИ ОТ ВЕРТИКАЛИ ВСЛЕДСТВИЕ ВРАЩЕНИЯ ЗЕМЛИ

Рассмотрим материальную точку, падающую с не очень большой (по сравнению с радиусом Земли) высоты H на поверхность Земли. Силу тяжести P при падении будем считать постоянной; сопротивлением воздуха пренебрегаем. Направим ось Oy вертикально вверх, а ось Ox — на восток (рис. 252, а)*. Чтобы учесть вращение Земли, к точке кроме силы P надо приложить силу $\vec{F}_{\text{кор}}^H$, направленную, как было установлено в первом приближении, на восток. Тогда дифференциальные уравнения движения точки примут вид:

$$m\ddot{x} = F_{\text{кор}}^H, \quad m\ddot{y} = -P = -mg, \quad (60)$$

а начальные условия будут: при $t=0$ $x=0$, $y=H$, $v_x=0$, $v_y=0$.

Интегрируя второе из уравнений (60) и определяя постоянные интегрирования по начальным условиям, найдем:

$$v_y = \dot{y} = -gt, \quad y = H - gt^2/2.$$

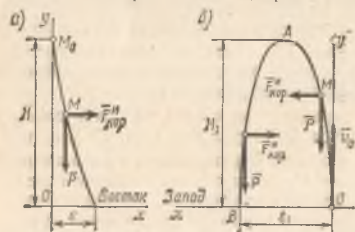


Рис. 252

При вычислении модуля $F_{\text{кор}}^H$ пренебрежем, как мы уже делали, определяя направление $\vec{F}_{\text{кор}}^H$, составляющей скорости $\vec{v}_x$ по сравнению с $\vec{v}_y$ (так как сила $F_{\text{кор}}^H$ много меньше P) и, отыскивая приближенное решение, будем считать $v = |v_y| = gt$. При этом скорость $\vec{v}$ будет направлена по вертикали вниз (по линии MO на рис. 251) и образует с осью вращения Земли угол $\alpha = 90^\circ - \lambda$, где λ — широта. Следова-

* Масштаб изображения в направлении оси Ox на рис. 252 сильно увеличен.

тельно, $F_{\text{кор}}^H = 2m\omega gt \cos \lambda$ и первое из уравнений (60) примет вид

$$\ddot{x} = 2(\omega g \cos \lambda) t.$$

Так как величина, стоящая в скобках, постоянная, то, интегрируя это уравнение, получим:

$$\dot{x} = (\omega g \cos \lambda) t^2 + C_1, \quad x = (\omega g \cos \lambda) t^3/3 + C_1 t + C_2.$$

Подстановка начальных данных дает $C_1 = C_2 = 0$. Таким образом, уравнения, приближенно определяющие закон относительного движения точки, будут:

$$x = (\omega g \cos \lambda) t^3/3, \quad y = H - gt^2/2.$$

Движение оказывается непрямолинейным и падающая точка действительно отклоняется к востоку. Исключив из предыдущих равенств время t , получим в первом приближении уравнение траектории точки (полукубическая парабола):

$$x^2 = \frac{8\omega^2}{9g} \cos^2 \lambda (H - y)^3.$$

Полагая здесь $y=0$, найдем восточное отклонение ϵ , которое точка будет иметь в момент падения на Землю*:

$$\epsilon = \frac{2}{3} \omega \cos \lambda \sqrt{\frac{2H^3}{g}}. \quad (61)$$

Как видим, отклонение ϵ пропорционально угловой скорости Земли ω и является величиной малой. Например, на широте Москвы ($\lambda = 55^\circ 47'$, $g = 9,816 \text{ м/с}^2$) при падении с высоты $H = 100 \text{ м}$ величина $\epsilon = 1,2 \text{ см}$.

Ряд опытов, проведенных во многих пунктах Земли разными исследователями, подтверждает правильность результата, который дает формула (61).

Рассмотрим движение точки, брошенной из пункта O вертикально вверх с начальной скоростью v_0 . Сила $\vec{F}_{\text{кор}}^H$ при подъеме будет в первом приближении направлена на запад. Тогда, если направить ось Ox также на запад (рис. 252, б), то дифференциальные уравнения движения сохраняют вид (60), а начальные условия будут: при $t=0$ $x=0$, $y=0$, $v_x=0$, $v_y=v_0$.

При этих условиях второе из уравнений (60) дает:

$$v_y = v_0 - gt, \quad y = v_0 t - gt^2/2. \quad (62)$$

Тогда, считая, как и в предыдущей задаче, приближенно $v = v_y$, получим $F_{\text{кор}}^H = 2m\omega(v_0 - gt)\cos \lambda$, и первое из уравнений (60) примет вид

$$\ddot{x} = 2(\omega \cos \lambda)(v_0 - gt).$$

Это уравнение будет описывать движение точки и при ее падении вниз, так как происходящее при этом изменение направления вектора $\vec{F}_{\text{кор}}^H$ учтется изменением знака множителя $(v_0 - gt) = v_y$.

Интегрируя полученное уравнение при начальных условиях задачи, найдем окончательно

$$x = \omega \cos \lambda (v_0 t^2 - gt^3/3). \quad (63)$$

Полагая в равенстве (62) $y=0$, найдем время движения точки до момента ее падения на Землю: $t_1 = 2v_0/g$. Учитывая одновременно, что $v_0 = \sqrt{2gH_1}$, где H_1 — высота подъема, определим из уравнения (63) западное отклонение точки в момент

* При определении модуля и направления силы $\vec{F}_{\text{кор}}^H$ мы в первом приближении пренебрегали составляющей скорости $\vec{v}_x$, направленной на восток. Вследствие наличия этой скорости сила $\vec{F}_{\text{кор}}^H$ будет иметь дополнительную составляющую, вызывающую отклонение точки к югу. Так как $x = (\omega g \cos \lambda) t^3/3$, то скорость $v_x = \dot{x}$ пропорциональна ω и отклонение к югу пропорционально ω^2 , т. е. является малой величиной второго порядка.

$$OB = e_1 = \omega \cos \lambda \sqrt{\frac{4H_1^2}{g}} \quad \text{или} \quad e_1 = \frac{g}{\omega} \cos \lambda \sqrt{\frac{2H_1^2}{g}}. \quad (64)$$

Из формул (61) и (64) видно, что при $H_1 = H$ отклонение $e_1 = 4e$.

Если движение точки может продолжаться дальше (точка бросания O не на поверхности Земли), то траектория точки, начиная от пункта B , будет все время отклоняться на восток.

Все эти расчеты относятся, как было указано, к движению в безвоздушном пространстве и учитывают влияние вращения Земли только в первом приближении.

Глава XIX

ПРЯМОЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТОЧКИ

§ 94. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ БЕЗ УЧЕТА СИЛ СОПРОТИВЛЕНИЯ

Учение о колебаниях составляет основу ряда областей физики и техники. Хотя колебания, рассматриваемые в различных областях, например в механике, радиотехнике, акустике и др., отличаются друг от друга по своей физической природе, основные законы этих колебаний во всех случаях остаются одними и теми же. Поэтому изучение механических колебаний является важным не только по той причине, что такие колебания очень часто имеют место

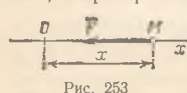


Рис. 253

в технике, но и вследствие того, что результаты, полученные при изучении механических колебаний, могут быть использованы для изучения и выяснения колебательных явлений в других областях.

Начнем с изучения свободных колебаний точки без учета сил сопротивления. Рассмотрим точку M , движущуюся прямолинейно под действием одной только *восстанавливающей силы* $\vec{F}$, направленной к неподвижному центру O и пропорциональной расстоянию от этого центра. Проекция силы $\vec{F}$ на ось Ox (рис. 253) будет

$$F_x = -cx. \quad (65)$$

Сила F , как видим, стремится вернуть точку в равновесное положение O , где $F=0$; отсюда и наименование «восстанавливающая» сила. Примером такой силы является сила упругости (см. § 88, рис. 232) или сила притяжения, рассмотренная в задаче 92 (см. § 80).

Найдем закон движения точки M . Составляя дифференциальное уравнение движения в проекции на ось x (уравнение 12 из § 79), получим:

$$m\ddot{x} = F_x \quad \text{или} \quad m\ddot{x} = -cx.$$

Деля обе части равенства на m и вводя обозначение

$$c/m = k^2, \quad (66)$$

приведем уравнение к виду

$$\ddot{x} + k^2x = 0. \quad (67)$$

Уравнение (67) представляет собой *дифференциальное уравнение свободных колебаний при отсутствии сопротивления*. Решение этого линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка ищут в виде $x = e^{nt}$. Полагая в уравнении (67) $x = e^{nt}$, получим для определения n характеристическое уравнение $n^2 + k^2 = 0$. Поскольку корни этого уравнения являются чисто мнимыми ($n_{1,2} = \pm ik$), то, как известно из теории дифференциальных уравнений, общее решение уравнения (67) имеет вид

$$x = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt, \quad (68)$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования. Если вместо постоянных C_1 и C_2 ввести постоянные A и α , такие, что $C_1 = A \cos \alpha$, $C_2 = A \sin \alpha$, то получим $x = A (\sin kt \cos \alpha + \cos kt \sin \alpha)$ или

$$x = A \sin(kt + \alpha). \quad (69)$$

Это другой вид решения уравнения (67), в котором постоянными интегрирования являются A и α . Им удобнее пользоваться для общих исследований.

Скорость точки в рассматриваемом движении

$$v_x = \dot{x} = Ak \cos(kt + \alpha). \quad (70)$$

Колебания, совершаемые точкой по закону (69), называются *гармоническими колебаниями*. График их при $\alpha = \pi/2$ показан на рис. 127, а (см. § 45).

Всем характеристикам этого движения можно дать наглядную кинематическую интерпретацию. Рассмотрим точку B , движущуюся равномерно по окружности радиуса A из положения B_0 , определяемого углом $\angle DOB_0 = \alpha$ (рис. 254). Пусть постоянная угловая скорость вращения радиуса OB равна k . Тогда в произвольный момент времени t угол $\varphi = \angle DOB = \alpha + kt$ и легко видеть, что проекция M точки B на диаметр, перпендикулярный DE , движется по закону $x = A \sin(kt + \alpha)$, где $x = OM$, т. е. совершает гармонические колебания.

Величина A , равная наибольшему отклонению точки M от центра колебаний O , называется *амплитудой колебаний*. Величина $\varphi = kt + \alpha$ называется *фазой колебаний*. Фаза φ в отличие от координаты x определяет не только положение точки в данный момент времени, но и направление ее последующего движения; например, из положения M при фазе, равной φ , точка движется вправо, а при фазе, равной $(\pi - \varphi)$, — влево. Фазы, отличающиеся на 2π , считаются одинаковыми (на рис. 127, а светлыми точками отмечены две одинаковые фазы).

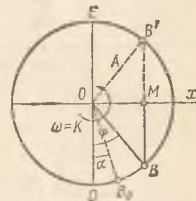


Рис. 254

наковые фазы). Величина α определяет фазу начала колебаний (начальная фаза). Например, при $\alpha=0$ колебания происходят по закону синуса (начинаются от центра O со скоростью, направленной вправо), при $\alpha=\pi/2$ — по закону косинуса (начинаются из положения $x=A$ со скоростью $v_0=0$). Величина k , совпадающая с угловой скоростью вращения радиуса OB , показанного на рис. 254, называется *круговой частотой колебаний*.

Промежуток времени T (или τ), в течение которого точка совершает одно полное колебание, называется *периодом колебаний*. По истечении периода фаза изменяется на 2π . Следовательно, должно быть $kT=2\pi$, откуда период

$$T=2\pi/k. \quad (71)$$

Величина ν , обратная периоду и определяющая число колебаний, совершаемых за 1 с, называется *частотой колебаний*:

$$\nu=1/T=k/2\pi. \quad (72)$$

Отсюда видно, что величина k отличается от ν только постоянным множителем 2π . В дальнейшем мы обычно для краткости частоту колебаний будем называть и величиной k .

Найдем теперь значения постоянных интегрирования A и α .

Определение A и α по начальным условиям. Считая, как всегда, при $t=0$ $x=x_0$ и $v_x=v_0$, получим из (69) и (70) $x_0=A \sin \alpha$, $v_0/k=A \cos \alpha$. Отсюда, складывая сначала почленно квадраты этих равенств, а затем деля их почленно одно на другое, найдем:

$$A=\sqrt{x_0^2+v_0^2/k^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha=kx_0/v_0. \quad (73)$$

Определение A и α по крайним условиям (см. § 79). Пусть вместо начальных заданы *крайние условия* вида: при $t=0$ $x=0$, а при $t=t_1$ $x=l$. Тогда из (69) получим $0=\sin \alpha$, $l=A \sin (kt_1+\alpha)$, откуда $\alpha=0$, $A=l/\sin kt_1$, и решением уравнения (67) будет $x=(l/\sin kt_1) \sin kt$, если только $t_1 \neq \pi/k= T/2$. Если же $t_1=\pi/k$ (или $2\pi/k$ и т. д.), то для определения A получится уравнение $l=A \sin \pi$, которому при $l \neq 0$ удовлетворить нельзя, и задача решения не имеет. А если $l=0$ и $t_1=\pi/k$, то для определения A получится уравнение $0=A \sin \pi$, которое удовлетворяется при любом A , и, следовательно, уравнение (67) имеет неоднозначное решение $x=A \sin kt$, где A — любое число.

Таким образом, в отличие от задач с начальными условиями, крайние задачи могут иметь неоднозначные решения или вовсе не иметь решения. В рассмотренных случаях это объясняется тем, что если по условиям при $t=0$ $x=0$, то и через полпериода, т. е. при $t_1=\pi/k$, должно быть тоже $x=0$. Поэтому здесь удовлетворить условию при $t_1=\pi/k$ $x=l \neq 0$ нельзя, а условие при $t_1=\pi/k$ $x=l=0$ удовлетворяется всегда, т. е. при колебаниях с любой амплитудой A .

Свойства свободных колебаний. В заключение отметим следующие важные свойства свободных колебаний: 1) амплитуда и начальная фаза колебаний *зависят* от начальных (или крайних) условий; 2) частота k , а следовательно, и период T колебаний от начальных (или крайних) условий *не зависят* [определяются равенствами (66) и (71)] и являются неизменными характеристиками данной колеблющейся системы.

Отсюда, в частности, следует, что если в задаче требуется определить только период (или частоту) колебаний, то надо составить дифференциальное уравнение движения и привести его к виду (67). После этого T найдется сразу по формуле (71) без интегрирования.

Рассмотренные колебания, как и те, что будут рассмотрены в § 95, 96, называют *линейными*, так как они описываются линейными дифференциальными уравнениями. То, что период этих колебаний не зависит от начальных (или крайних) условий, а следовательно, и от амплитуды, является одним из основных свойств линейных колебаний. Колебания, которые описываются нелинейными дифференциальными уравнениями, называют *нелинейными*; они упомянутыми свойствами не обладают (см. задачу 115).

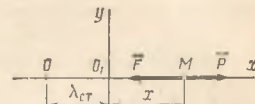


Рис. 255

Влияние постоянной силы на свободные колебания точки. Пусть на точку M кроме восстанавливающей силы $\bar{F}$, направленной к центру O (численно $F=c \cdot OM$), действует еще постоянная по модулю и направлению сила $\bar{P}$ (рис. 255). В этом случае положением равновесия точки M , где сила $\bar{P}$ уравновешивается силой $\bar{F}$, будет точка O_1 , отстоящая от O на расстоянии $OO_1=\lambda_{ct}$, которое определяется равенством $c\lambda_{ct}=P$ или

$$\lambda_{ct}=P/c. \quad (74)$$

Величину λ_{ct} назовем *статическим отклонением*.

Примем O_1 за начало координат и направим ось O_1x в сторону действия силы $\bar{P}$. Тогда $F_x=-c(x+\lambda_{ct})$ и $P_x=P$. В результате, составляя уравнение (12) и учитывая, что согласно равенству (74) $c\lambda_{ct}=P$, получим $m\ddot{x}=-cx$ или $\ddot{x}+k^2x=0$.

Это уравнение, где k определяется равенством (66), совпадает с уравнением (67). Отсюда заключаем, что *постоянная сила $\bar{P}$, не изменяя характера колебаний, смещает центр колебаний в сторону действия силы на величину статического отклонения λ_{ct}* .

Выразим период колебаний через λ_{ct} . Из (74) и (66) находим, что $k^2=P/m\lambda_{ct}$. Тогда равенство (71) дает

$$T=2\pi\sqrt{m\lambda_{ct}/P}. \quad (75)$$

Таким образом, период колебаний пропорционален корню квадратному из статического отклонения λ_{ct} .

В частности, если силой $\bar{P}$ является сила тяжести (как, например, в задаче 112), то $P=mg$ и формула (75) принимает вид

$$T=2\pi\sqrt{\lambda_{ct}/g}. \quad (75')$$

Задача 112. Груз подвешивают к концу B вертикальной пружины AB и отпускают без начальной скорости. Определить закон колебаний груза, если в равновесном положении он растягивает пружину на величину λ_{ct} (статическое удлинение пружины).

Решение. Поместим начало координат O в положение статического равновесия груза и направим ось Ox по вертикали вниз (рис. 256). Сила упругости $F = c\lambda$. В нашем случае $\lambda = \lambda_{ст} + x$. Следовательно, $F_x = -c(\lambda_{ст} + x)$. Составляя дифференциальное уравнение движения, получим

$$m\ddot{x} = -c(\lambda_{ст} + x) + P.$$

Но по условиям задачи сила тяжести $P = mg = c\lambda_{ст}$ (в равновесном положении сила P уравновешивается силой упругости $c\lambda_{ст}$). В результате, введя обозначение $c/m = g/\lambda_{ст} = k^2$, приведем уравнение к виду

$$\ddot{x} + k^2 x = 0.$$

Отсюда сразу находим период колебаний груза в виде (75')

$$T = 2\pi/k = 2\pi \sqrt{\lambda_{ст}/g}.$$

Решением полученного дифференциального уравнения будет

$$x = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt.$$

По начальным условиям при $t=0$ $x = -\lambda_{ст}$, $v_x = 0$. Так как

$$v_x = \dot{x} = kC_1 \cos kt - kC_2 \sin kt,$$

то, подставляя начальные данные, получим $C_2 = -\lambda_{ст}$, $C_1 = 0$. Следовательно, колебания происходят с амплитудой $\lambda_{ст}$ по закону

$$x = -\lambda_{ст} \cos kt.$$

Отсюда видно, что наибольшее удлинение пружины при колебаниях груза равно $2\lambda_{ст}$. Этот результат был получен другим путем в задаче 102, где роль пружины играла балка.

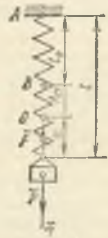


Рис. 256

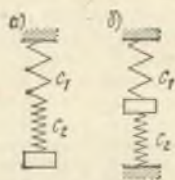


Рис. 257

Задача 113. Определить период колебаний груза весом P , подвешенного на двух пружинах с коэффициентами жесткости c_1 и c_2 , так, как показано на рис. 257, а.

Решение. Каждая из пружин в статическом положении растягивается силой P . Следовательно, статические удлинения пружин будут: $\lambda_{1ст} = P/c_1$, $\lambda_{2ст} = P/c_2$. Тогда общее удлинение пружин

$$\lambda_{ст} = \lambda_{1ст} + \lambda_{2ст} = P \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \right) = P \frac{c_1 + c_2}{c_1 c_2}.$$

Полагая $P = c_{экв} \lambda_{ст}$, найдем, что

$$c_{экв} = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2},$$

где $c_{экв}$ — коэффициент жесткости эквивалентной пружины, заменяющей две данные пружины. В частности, при $c_1 = c_2 = c$ получим $c_{экв} = c/2$.

Период колебаний по формуле (75') будет

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\lambda_{ст}}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{P}{g} \frac{c_1 + c_2}{c_1 c_2}}.$$

Задача 114. Решить предыдущую задачу, считая, что груз подвешен на пружинах так, как показано на рис. 257, б.

Решение. В этом случае очевидно, что статические удлинения (сжатия) обеих пружин одинаковы. При этом сила P уравновешивается силами упругости $c_1 \lambda_{ст}$ и $c_2 \lambda_{ст}$ пружин, т. е. $P = (c_1 + c_2) \lambda_{ст}$. Отсюда $c_{экв} = c_1 + c_2$, а период колебаний

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\lambda_{ст}}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{P}{g(c_1 + c_2)}}.$$

Задача 115. Определить период колебаний материальной точки с массой m , если действующая на нее восстанавливающая сила $\bar{F}$ пропорциональна кубу отклонения точки от центра O (см. рис. 253) и $F_x = -c_1 x^3$, где c_1 — заданный постоянный коэффициент. В начальный момент времени $t=0$ координата $x = x_0$, а $v_0 = 0$.

Решение. Дифференциальное уравнение движения точки составим в виде (14) (см. § 79); получим следующее нелинейное уравнение:

$$m v_x \frac{dv_x}{dx} = -c_1 x^3 \quad \text{или} \quad \frac{d(v_x^2/2)}{dx} = -c_1 x^3 \quad \left(v_x^2 = \frac{v_x^2}{n} \right).$$

Умножим обе части этого уравнения на dx и возьмем (в соответствии с начальными условиями) интегралы слева от 0 до v_x , а справа от x_0 до x ; получим

$$v_x^2/2 = n^2 (x_0^4 - x^4)/4. \quad (a)$$

Так как в момент времени $t=0$ $v_x=0$, то под действием силы $\bar{F}$ (см. рис. 253) точка начнет двигаться влево и $v_x < 0$. При $x = -x_0$, как видно из равенства (a), $v_x = 0$ и дальше под действием силы $\bar{F}$ (при $x < 0$ и $c_1 x^3 < 0$, а следовательно, $F_x > 0$) точка будет двигаться вправо до положения $x = x_0$, где опять $v_x = 0$, и т. д. Таким образом, точка совершает колебания с амплитудой x_0 .

Для дальнейшего решения находим из (a) $dx/dt = v_x$; учитывая, что $v_x < 0$, получим:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{n}{\sqrt{2}} \sqrt{x_0^4 - x^4} \quad \text{и} \quad dt = -\frac{\sqrt{2}}{n} \frac{dx}{\sqrt{x_0^4 - x^4}}.$$

Из предыдущих рассуждений следует, что время движения от положения $x = -x_0$ до $x = 0$ (до точки O) равно четверти периода. Следовательно,

$$\frac{T}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{n} \int_{x_0}^0 \frac{dx}{\sqrt{x_0^4 - x^4}}.$$

Полагая здесь $x = x_0 z$, где z — новое переменное, и учитывая, что при $x = 0$ и $z = 0$, а при $x = x_0$ будет $z = 1$, получим

$$T = \frac{4\sqrt{2}}{nx_0} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1 - z^4}}.$$

Значение стоящего справа определенного интеграла (это частный вид так называемого эллиптического интеграла) можно найти из соответствующих таблиц; приближенно он равен 1,31 и тогда окончательно

$$T \approx 7,4/nx_0.$$

Мы видим, что при этих нелинейных колебаниях (в отличие от колебаний линейных) период зависит от x_0 и с увеличением x_0 в данном случае убывает.

§ 95. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРИ ВЯЗКОМ СОПРОТИВЛЕНИИ (ЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ)

Рассмотрим, как влияет на свободные колебания сопротивление, создаваемое силой вязкого трения [см. § 76, формула (7)], т. е. силой, пропорциональной первой степени скорости: $\bar{R} = -\mu \dot{x}$ (знак минус указывает, что сила $\bar{R}$ направлена противоположно $\dot{x}$). Пусть на точку при ее движении действуют восстанавливающая сила $\bar{F}$ и сила сопротивления $\bar{R}$ (рис. 258). Тогда $F_x = -cx$, $R_x = -\mu \dot{x} = -\mu \dot{x}$, и дифференциальное уравнение движения будет

$$m\ddot{x} = -cx - \mu\dot{x}.$$

Деля обе части уравнения на m , получим

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2x = 0, \quad (76)$$

где обозначено

$$c/m = k^2, \quad \mu/m = 2b. \quad (77)$$

Легко проверить, что величины k и b имеют одинаковые размерности (1/время); это позволяет сравнивать их с друг с другом.

Уравнение (76) представляет собой дифференциальное уравнение свободных колебаний при сопротивлении, пропорциональном скорости. Его решение, как и решение уравнения (67), ищут в виде $x = e^{at}$. Подставляя это значение x в уравнение (76), получим характеристическое уравнение $n^2 + 2bn + k^2 = 0$, корни которого будут

$$n_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - k^2}. \quad (78)$$

1. Рассмотрим случай, когда $k > b$, т. е. когда сопротивление по сравнению с восстанавливающей силой мало. Введя обозначение

$$k_1 = \sqrt{k^2 - b^2}, \quad (79)$$

получим из (78), что $n_{1,2} = -b \pm ik_1$, т. е. что корни характеристического уравнения являются комплексными. Тогда общее решение уравнения (76) будет, очевидно, отличаться от решения уравнения (67) только множителем e^{-bt} , т. е.

$$x = e^{-bt} (C_1 \sin k_1 t + C_2 \cos k_1 t) \quad (80)$$

или, по аналогии с равенством (69),

$$x = Ae^{-bt} \sin(k_1 t + \alpha). \quad (81)$$

Входящие в (81) величины A и α являются постоянными интегрирования и определяются по начальным условиям.

Колебания, происходящие по закону (81), называются *затухающими*, так как благодаря наличию множителя e^{-bt} величина $x = OM$



Рис. 258

(рис. 258) с течением времени убывает, стремясь к нулю. График этих колебаний показан на рис. 259 (график заключен между пунктирными кривыми $x = Ae^{-bt}$ и $x = -Ae^{-bt}$, так как $\sin(k_1 t + \alpha)$ по модулю не может стать больше единицы).

Промежуток времени T_1 , равный периоду $\sin(k_1 t + \alpha)$, т. е. величину

$$T_1 = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - b^2}}, \quad (82)$$

принято называть *периодом затухающих колебаний*. За период точка совершает одно полное колебание, т. е., например, начав двигаться из положения $x=0$ вправо (см. рис. 258), приходит в то же положение, двигаясь также вправо. Формулу (82), если учесть равенство (71), можно еще представить в виде

$$T_1 = \frac{2\pi}{k \sqrt{1 - b^2/k^2}} = \frac{T}{\sqrt{1 - b^2/k^2}} \approx T \left(1 + \frac{1}{2} \frac{b^2}{k^2} \right). \quad (82')$$

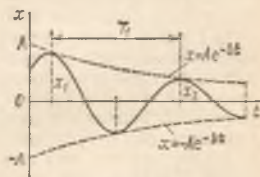


Рис. 259

Из полученных формул видно, что $T_1 > T$, т. е. что при наличии сопротивления период колебаний несколько увеличивается. Однако когда сопротивление мало ($b \ll k$), то величиной b^2/k^2 по сравнению с единицей можно пренебречь и считать $T_1 \approx T$. Следовательно, малое сопротивление на период колебаний практически не влияет.

Промежуток времени между двумя последовательными максимальными отклонениями колеблющейся точки вправо (или влево) также оказывается равным T_1 . Следовательно, если первое максимальное отклонение вправо x_1 происходит в момент t_1 , то второе отклонение x_2 наступит в момент $t_2 = t_1 + T_1$ и т. д. Тогда по формуле (81), учитывая, что $k_1 T_1 = 2\pi$, получим:

$$x_1 = Ae^{-bt_1} \sin(k_1 t_1 + \alpha), \\ x_2 = Ae^{-b(t_1 + T_1)} \sin(k_1 t_1 + k_1 T_1 + \alpha) = x_1 e^{-bT_1}.$$

Аналогично для любого отклонения x_{n+1} будет $x_{n+1} = x_n e^{-bT_1}$. Таким образом, оказывается, что размахи колебаний будут убывать по закону геометрической прогрессии. Знаменатель этой прогрессии e^{-bT_1} называется *декрементом* рассматриваемых колебаний, а модуль его логарифма, т. е. величина bT_1 , — *логарифмическим декрементом*.

Из всех полученных результатов следует, что малое сопротивление почти не влияет на период колебаний, но вызывает постепен-

* Моменты, когда x имеет максимум или минимум, находятся из уравнения $dx/dt = Ae^{-bt} [k_1 \cos(k_1 t + \alpha) - b \sin(k_1 t + \alpha)] = 0$. Если квадратная скобка обращается в нуль при некотором $t = t_1$, то она, очевидно, обратится в нуль и в моменты времени $t_1 + T_1$, $t_1 + 2T_1$ и т. д., поскольку $k_1 T_1 = 2\pi$.

ное их затухание вследствие убывания размахов колебаний по закону геометрической прогрессии.

2. Рассмотрим теперь случай, когда $b > k$, т. е. когда сопротивление по сравнению с восстанавливающей силой велико. Вводя обозначение $b^2 - k^2 = r^2$, найдем, что в этом случае корни характеристического уравнения (78) равны $n_{1,2} = -b \pm r$, т. е. оба действительны и отрицательны (так как $r < b$). Следовательно, решение уравнения (76), описывающее закон движения точки, имеет при $b > k$ вид

$$x = C_1 e^{-(b+r)t} + C_2 e^{-(b-r)t}.$$

Так как функция e^{-at} , где $a > 0$, со временем монотонно убывает, стремясь к нулю, то движение точки в этом случае не будет колебательным и она под действием восстанавливающей силы будет постепенно (асимптотически) приближаться к равносному положению $x=0$. График такого движения, если при $t=0$ $x=x_0 > 0$ и $v_x=v_{x0}$, имеет в зависимости от значения v_{x0} вид одной из кривых, показанных на рис. 260 (1 — при $v_{x0} > 0$; 2 — при $v_{x0} < 0$, когда $|v_{x0}|$ невелик; 3 — при $v_{x0} < 0$, когда $|v_{x0}|$ велик; все эти результаты качественно ясны из физических соображений). При $x_0 < 0$ вид графиков не изменится (они будут лишь зеркально отображенными относительно оси Ox); наконец, при $x_0 > 0$ и $v_{x0} = 0$ график (кривая 1) имеет максимум B в начальный момент времени $t=0$.

3. В заключение рассмотрим случай, когда $b=k$. Корни характеристического уравнения (78) будут при этом тоже действительными, но кратными ($n_{1,2} = \pm b$) и общее решение уравнения (76) примет вид (что можно проверить подстановкой x в уравнение)

$$x = e^{-bt} (C_1 + C_2 t).$$

Движение точки в данном случае тоже не будет колебательным и она со временем стремится асимптотически к равносному положению $x=0$ [по правилу Лопиталю $\lim_{t \rightarrow \infty} (t/e^{bt}) = \lim_{t \rightarrow \infty} (1/be^{bt}) = 0$]. График движения в зависимости от начальных условий имеет тоже вид кривых, показанных на рис. 260.

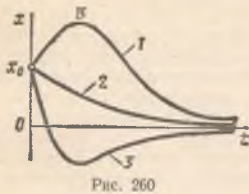


Рис. 260

Задача 116. Цилиндр (его масса m , а площадь дна S), частично погруженный в вязкую жидкость с удельным весом γ (рис. 261), выводят из равносного положения. Определить период последующих затухающих колебаний цилиндра, считая, что на него действует сила вязкого трения $\bar{R} = -\mu \dot{x}$.

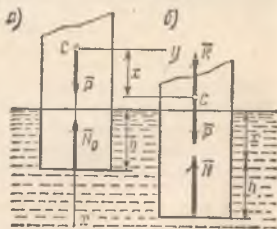


Рис. 261

Решение. В равносном положении (рис. 261, а) на цилиндр действуют сила тяжести P и архимедова сила N_0 , равная численно весу вытесненной жидкости, т. е. $N_0 = \gamma S h$ (h — высота погруженной части цилиндра при равносии).

Проведем из начального положения точки C вертикально вниз ось Sx и изобразим цилиндр в произвольном положении, при котором точка C смещена вниз на величину x (рис. 261, б). На цилиндр в этом положении действуют: сила тяжести $\bar{P}$, архимедова сила $\bar{N}$ и сила сопротивления $\bar{R}$ (при движении цилиндра вниз, т. е. когда $v_x > 0$, она направлена вверх); изобразим силы $\bar{P}$ и $\bar{R}$ приложенными в точке C . Поскольку дополнительное погружение цилиндра равно x , то $N = \gamma S (h+x) = N_0 + \gamma S x$ (мы видим, что N здесь является восстанавливающей силой, пропорциональной смещению x). Составляя дифференциальное уравнение поступательного движения цилиндра в проекции на ось Sx , получим:

$$m\ddot{x} = P_x + N_x + R_x \quad \text{или} \quad m\ddot{x} = P - (N_0 + \gamma S x) - \mu \dot{x}.$$

Учтя, что при равносии $P = N_0$ и введя обозначения

$$\gamma S/m = k^2, \quad \mu/m = 2b, \quad (a)$$

приведем составленное уравнение к виду

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2 x = 0,$$

такому же, как у уравнения (76). Тогда по формуле (82), учтя обозначения (а), найдем для искомого периода колебаний значение

$$T_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{\gamma S/m - \mu^2/4m^2}}.$$

§ 96. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ. РЕЗОНАНС

Рассмотрим важный случай колебаний, возникающих когда на точку кроме восстанавливающей силы $\bar{F}$ действует еще периодически изменяющаяся со временем сила $\bar{Q}$, проекция которой на ось Ox равна

$$Q_x = Q_0 \sin pt. \quad (83)$$

Эта сила называется *возмущающей силой*, а колебания, происходящие при действии такой силы, называются *вынужденными*. Величина p в равенстве (83) является *частотой возмущающей силы*.

Возмущающей силой может быть сила, изменяющаяся со временем и по другому закону. Мы ограничимся рассмотрением случая, когда Q_x определяется равенством (83). Такая возмущающая сила называется *гармонической*. Конкретный пример ее дан ниже в задаче 117.

1. Вынужденные колебания при отсутствии сопротивления*. Рассмотрим движение точки, на которую кроме восстанавливающей силы $\bar{F}$ (см. рис. 253) действует только возмущающая сила $\bar{Q}$. Дифференциальное уравнение движения в этом случае будет

$$m\ddot{x} = -cx + Q_0 \sin pt.$$

* Получаемые в этом пункте результаты могут быть найдены как частный случай из п. 2.

Разделим обе части этого уравнения на m и положим

$$c/m = k^2, Q_0/m = P_0, \quad (84)$$

где P_0 имеет размерность ускорения. Тогда дифференциальное уравнение движения примет вид

$$\ddot{x} + k^2 x = P_0 \sin pt. \quad (85)$$

Уравнение (85) является дифференциальным уравнением вынужденных колебаний точки при отсутствии сопротивления. Его решение, как известно из теории дифференциальных уравнений, будет $x = x_1 + x_2$, где x_1 — общее решение уравнения без правой части, т. е. решение уравнения (67), даваемое равенством (69), а x_2 — какое-нибудь частное решение полного уравнения (85).

Полагая, что $p \neq k$, будем искать решение x_2 в виде

$$x_2 = B \sin pt,$$

где B — постоянная величина, которую надо подобрать так, чтобы равенство (85) обратилось в тождество. Подставляя значение x_2 и его второй производной в уравнение (85), получим

$$-p^2 B \sin pt + k^2 B \sin pt = P_0 \sin pt.$$

Это равенство будет выполняться при любом t , если $B(k^2 - p^2) = P_0$ или

$$B = P_0 / (k^2 - p^2).$$

Таким образом, искомое частное решение будет

$$x_2 = \frac{P_0}{k^2 - p^2} \sin pt. \quad (86)$$

Так как $x = x_1 + x_2$, а значение x_1 дается равенством (69), то общее решение уравнения (85) имеет окончательно вид

$$x = A \sin(kt + \alpha) + \frac{P_0}{k^2 - p^2} \sin pt, \quad (87)$$

где A и α — постоянные интегрирования, определяемые по начальным данным. Решение (87) показывает, что колебания точки состоят в этом случае из: 1) колебаний с амплитудой A (зависящей от начальных условий) и частотой k , называемых *собственными колебаниями*; 2) колебаний с амплитудой B (не зависящей от начальных условий) и частотой p , которые называются *вынужденными колебаниями*.

Практически, благодаря неизбежному наличию тех или иных сопротивлений, собственные колебания будут довольно быстро затухать. Поэтому основное значение в рассматриваемом движении имеют вынужденные колебания, закон которых дается уравнением (86).

Частота p вынужденных колебаний, как видно, равна частоте возмущающей силы. Амплитуду этих колебаний, если разделить числитель и знаменатель на k^2 , можно представить в виде

$$B = \frac{P_0}{|k^2 - p^2|} = \frac{\lambda_0}{|1 - p^2/k^2|}, \quad (88)$$

где согласно равенствам (84) $\lambda_0 = P_0/k^2 = Q_0/c$, т. е. λ_0 есть величина статического отклонения точки под действием силы Q_0 . Как видим, B зависит от отношения частоты p возмущающей силы к частоте k собственных колебаний. Введем обозначения

$$z = p/k, \quad \eta = B/\lambda_0. \quad (88')$$

Безразмерный коэффициент η называют *коэффициентом динамичности*. Он показывает, во сколько раз амплитуда вынужденных колебаний B (т. е. максимальное отклонение точки от центра колебаний) больше статического отклонения λ_0 , и зависит от отношения частот z . График этой зависимости, определяемой равенством (88'), показан ниже на рис. 264 кривой, помеченной знаком $h=0$ (другие кривые на рис. 264 дают зависимость η от z при наличии сопротивления).

Из графика [или из формулы (88')] видно, что, подбирая различные соотношения между p и k , можно получить вынужденные колебания с разными амплитудами. При $p=0$ (или $p \ll k$) амплитуда равна λ_0 (или близка к этой величине). Если величина p близка к k , амплитуда B становится очень большой. Наконец, когда $p \gg k$, амплитуда B становится очень малой (практически близка к нулю).

Отметим еще, что при $p < k$, как видно из сравнения формул (83) и (86), фазы вынужденных колебаний и возмущающей силы все время совпадают (обе равны pt). Если же $p > k$, то, внося минус под знак синуса, можно представить уравнение (86) в виде

$$x_2 = \frac{P_0}{p^2 - k^2} \sin(pt - \pi).$$

Следовательно, при $p > k$ сдвиг между фазами вынужденных колебаний и возмущающей силы равен π (когда сила Q имеет максимальное значение и направлена вправо, колеблющаяся точка максимально смещена влево и т. д.).

Резонанс. В случае, когда $p=k$, т. е. когда частота возмущающей силы равна частоте собственных колебаний, имеет место так называемое явление *резонанса*. Формулами (86), (88) этот случай не описывается, но можно доказать, что размах вынужденных колебаний при резонансе будет со временем неограниченно возрастать так, как это показано на рис. 262. Подробнее общие свойства вынужденных колебаний (и, в частности, резонанса) рассмотрены в конце этого параграфа (п. 3).

При $p=k$ уравнение (85) частного решения $x_2 = B \sin pt$ не имеет, и это решение будем искать в виде

$$x_2 = Ct \cos pt.$$

Тогда $\ddot{x}_2 = -2Cp \sin pt - p^2 Ct \cos pt$, и подстановка в уравнение (85), если учесть, что $p=k$, дает $-2Cp \sin pt = P_0 \sin pt$, откуда $C = -P_0/2p$. В результате находим закон вынужденных колебаний при резонансе в случае отсутствия сопротивления:

$$x_2 = -(P_0/2p)t \cos pt \text{ или } x_2 = (P_0/2p)t \sin(pt - \pi/2). \quad (89)$$

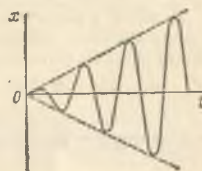


Рис. 262

Как видим, размахи вынужденных колебаний при резонансе действительно возрастают пропорционально времени, и закон этих колебаний имеет вид, показанный на рис. 262. Сдвиг фаз при резонансе равен $\pi/2$.

2. *. Вынужденные колебания при вязком сопротивлении. Рассмотрим движение точки, на которую действуют восстанавливающая сила $\bar{F}$, сила сопротивления $\bar{R}$, пропорциональная скорости (см. § 95), и возмущающая сила $\bar{Q}$, определяемая формулой (83). Дифференциальное уравнение этого движения имеет вид

$$m\ddot{x} = -cx - \mu\dot{x} + Q_0 \sin pt. \quad (90)$$

Деля обе части уравнения на m и учитывая обозначения (77) и (84), получим

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2x = P_0 \sin pt. \quad (91)$$

Уравнение (91) является дифференциальным уравнением вынужденных колебаний точки при наличии вязкого сопротивления. Его общее решение, как известно, имеет вид $x = x_1 + x_2$, где x_1 — общее решение уравнения без правой части, т. е. уравнения (76) [при $k > b$ это решение дается равенством (81)], а x_2 — какое-нибудь частное решение полного уравнения (91). Будем искать решение x_2 в виде

$$x_2 = B \sin(pt - \beta),$$

где B и β — постоянные, которые надо подобрать так, чтобы равенство (91) обратилось в тождество. Вычисляя производные, получим:

$$\dot{x}_2 = Bp \cos(pt - \beta), \quad \ddot{x}_2 = -Bp^2 \sin(pt - \beta).$$

Подставляя эти значения производных и величины x_2 в левую часть уравнения (91) и обозначая для краткости $pt - \beta = \psi$ (или $pt = \psi + \beta$), найдем, что

$$B(-p^2 + k^2) \sin \psi + 2bpB \cos \psi = P_0(\cos \beta \sin \psi + \sin \beta \cos \psi).$$

Чтобы это равенство выполнялось при любом ψ , т. е. в любой момент времени, коэффициенты при $\sin \psi$ и $\cos \psi$ в левой и правой частях должны быть порознь равны друг другу; следовательно,

$$B(k^2 - p^2) = P_0 \cos \beta, \quad 2bpB = P_0 \sin \beta.$$

Из полученных уравнений (ими также пользуются для однозначного определения величины β) находим, возводя их сначала почленно в квадрат и складывая, а затем деля почленно друг на друга:

$$B = \frac{P_0}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4b^2p^2}}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{2bp}{k^2 - p^2}. \quad (92)$$

Так как $x = x_1 + x_2$, а значение x_1 (при $k > b$) дается равенством (81), то окончательно найдем решение уравнения (91) в виде

$$x = Ae^{-bt} \sin(k_1 t + \alpha) + B \sin(pt - \beta), \quad (93)$$

где A и α — постоянные интегрирования, определяемые по начальным условиям, а значения B и β даются формулами (92) и от начальных условий не зависят. При $b=0$ найденные решения дают формулы (86) и (87), полученные выше для случая отсутствия сопротивления.

Рассматриваемые колебания являются сложными и состоят из собственных (первое слагаемое в равенстве (93), рис. 263, а) и вынужденных (второе слагаемое в равенстве (93), рис. 263, б). Собственные колебания точки для рассматриваемого случая были изучены в § 95. Как было установлено, эти колебания довольно быстро затухают и по истечении некоторого промежутка времени t_y , называемого временем установления, ими практически можно пренебречь.

Если, например, считать, что собственными колебаниями можно пренебречь, начиная с момента, когда их размахи будут меньше $0,01 B$, то величина t_y будет определяться из равенства $Ae^{-bt} = 0,01 B$, откуда

$$t_y = \frac{1}{b} \ln \frac{100A}{B}. \quad (94)$$

Как видим, чем меньше сопротивление (т. е. чем меньше b), тем время установления больше.

Одна из возможных картин установления колебаний, происходящих по закону (93) и начинающихся из состояния покоя, показана на рис. 263, в. При других начальных условиях и соотношениях между частотами p и k_1 характер колебаний в интервале времени $0 < t < t_y$ может оказаться совершенно другим. Однако во всех случаях по истечении времени установления собственные колебания практически затухают и точка будет совершать колебания по закону

$$x = B \sin(pt - \beta). \quad (95)$$

Эти колебания и называются вынужденными. Они представляют собой незатухающие гармонические колебания с амплитудой B , определяемой равенством (92), и частотой p , равной частоте возмущающей силы. Величина β характеризует сдвиг фазы вынужденных колебаний по отношению к фазе возмущающей силы.

Исследуем полученные результаты. Введем обозначения:

$$z = p/k, \quad h = b/k, \quad \lambda_0 = P_0/k^2 = Q_0/c, \quad (96)$$

где z — отношение частот; h — величина, характеризующая сопротивление; λ_0 — величина статического отклонения точки под дей-

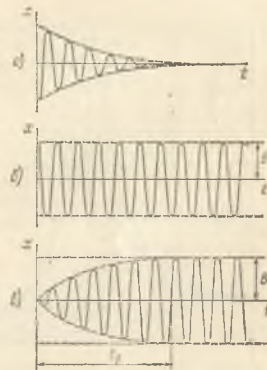


Рис. 263

вию силы Q_0 (например, при колебаниях груза на пружине λ_0 равно статическому удлинению пружины, вызываемому силой Q_0).

Тогда, деля числитель и знаменатель равенств (92) на k^2 , получим:

$$B = \frac{\lambda_0}{\sqrt{(1-z^2)^2 + 4h^2z^2}}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{2hz}{1-z^2}. \quad (97)$$

Из формул (97) видно, что B и β зависят от двух безразмерных параметров z и h . Для большей наглядности вид этой зависимости

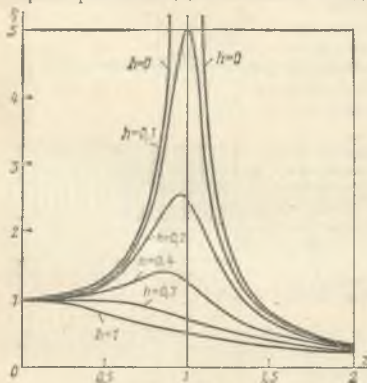


Рис. 264

при некоторых значениях h показан на графиках. На первом графике (рис. 264) даны зависимости коэффициента динамичности $\eta = B/\lambda_0$ (показывающего, во сколько раз амплитуда B больше λ_0) от отношения частот z , а на втором (рис. 265) — зависимости сдвига фаз β тоже от z . В каждой конкретной задаче по ее данным можно вычислить величины λ_0 , z , h и найти значения B и β , пользуясь соответствующими графиками или формулами (97). Из этих графиков (или формул)

видно также, что, меняя соотношение между p и k , можно получить вынужденные колебания с разными амплитудами.

Когда сопротивление очень мало, а величина z не близка к единице, в формулах (97) можно приближенно считать $h \approx 0$.

Тогда будем иметь результаты, полученные в п. 1, а именно:

$$\left. \begin{aligned} B &= \frac{\lambda_0}{|1-z^2|}, \\ \beta &\approx 0 \quad (\text{при } z < 1), \\ \beta &\approx 180^\circ \quad (\text{при } z > 1). \end{aligned} \right\} (98)$$

Рассмотрим еще следующие частные случаи.

1. Если отношение частот z очень мало ($p \ll k$), то, полагая приближенно $z \approx 0$, получим из формулы (97) $B \approx \lambda_0$. Колебания в этом

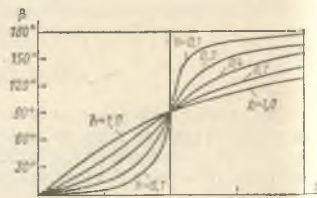


Рис. 265

случае происходят с амплитудой, равной статическому отклонению λ_0 , и сдвигом фаз $\beta \approx 0$.

2. Если отношение частот z очень велико ($p \gg k$), величина B становится малой. Этот случай представляет особый интерес для проблем виброзащиты различных сооружений, приборов и др. При этом, считая сопротивление малым и пренебрегая в (97) $2hz$ и единицей по сравнению с z^2 , можно получить для подсчета B приближенную формулу

$$B = \lambda_0/z^2 = P_0/p^2. \quad (99)$$

3. Во всех практически интересных случаях величина h много меньше единицы. Тогда, как видно из (97), если величина z близка к единице, амплитуда вынужденных колебаний достигает максимума. Явление, которое при этом имеет место, называется *резонансом*.

Из формулы (97) видно, что $B = B_p = B_{\max}$, когда стоящая в знаменателе величина $f(\xi) = (1-\xi)^2 + 4h^2\xi^2$ (где $\xi = z^2$) имеет минимум. Решая уравнение $f'(\xi) = -2(1-\xi-2h^2\xi) = 0$, найдем, что B имеет максимум при $\xi = 1-2h^2$, т. е. при $z_p = \sqrt{1-2h^2}$. Следовательно, резонанс имеет место, когда z немного меньше единицы. Но практически, пренебрегая величиной h^2 по сравнению с единицей, можно считать, что $z_p = 1$. При малых h резонанс выражен слабо (амплитуда B_p невелика, см. рис. 264), а при $h > \sqrt{2}/2 \approx 0,7$ резонанс, как видно из выражения для z_p и из рис. 264, вообще не возникает.

При резонансе амплитуду вынужденных колебаний и сдвиг фаз можно практически вычислять по приближенным формулам, которые получаются из равенств (97), если в них положить $z = 1$:

$$B_p = \lambda_0/2h, \quad \beta_p = \pi/2. \quad (100)$$

Отсюда видно, что при малых h величина B_p может достигать довольно больших значений.

Колебания с амплитудой B_p , как и вообще вынужденные колебания, устанавливаются при резонансе не сразу. Процесс установления колебаний будет аналогичен показанному на рис. 263,в. Чем меньше сопротивление, т. е. чем меньше b или h , тем больше величина B_p ; но одновременно будет больше и время t_y установления этих колебаний [см. формулу (94)].

Когда сопротивление отсутствует, т. е. $b = h = 0$, то, как было установлено, закон вынужденных колебаний при резонансе дается уравнением (89), а график колебаний имеет вид, показанный на рис. 262. Таким образом, в случае отсутствия сопротивления процесс «раскачки» системы при резонансе длится неограниченно долго, а размахи колебаний со временем непрерывно возрастают. Аналогичной будет картина резонансных колебаний при очень малых сопротивлениях.

3. Общие свойства вынужденных колебаний и й. Из полученных выше результатов вытекает, что вынужденные колебания обладают следующими важными свойствами, отличающими их от собственных колебаний точки: 1) амплитуда вынужденных колебаний от начальных условий не зависит; 2) вынужденные колебания при наличии сопротивления не затухают; 3) частота вы-

нужденных колебаний равна частоте возмущающей силы и от характеристик колеблющейся системы не зависит (возмущающая сила «навязывает» системе свою частоту колебаний); 4) даже при малой возмущающей силе (Q_0 мало) можно получить интенсивные вынужденные колебания, если сопротивление мало, а частота p близка к k (резонанс); 5) даже при больших значениях возмущающей силы вынужденные колебания можно сделать сколь угодно малыми, если частота p будет много больше k .

Вынужденные колебания и, в частности, резонанс играют большую роль во многих областях физики и техники. Например, при работе машин и двигателей обычно возникают периодические силы, которые могут вызвать вынужденные колебания частей машины или фундамента.

Процесс изменения амплитуды этих колебаний можно проследить, заставляя работать на разных оборотах двигатель, для которого $p = \omega$, где ω — угловая скорость (см. задачу 117). С увеличением ω амплитуда B колебаний вибрирующей части (или фундамента) будет возрастать. Когда $\omega = k$, наступает резонанс и размах вынужденных колебаний достигает максимума. При дальнейшем увеличении ω амплитуда B убывает, а когда станет $\omega \gg k$, значение B будет практически равно нулю. Во многих инженерных сооружениях явление резонанса крайне нежелательно и его следует избегать, подбирая соотношение между частотами p и k так, чтобы амплитуды вынужденных колебаний были практически равны нулю ($p \gg k$).

Противоположный пример мы имеем в радиотехнике, где резонанс оказывается очень полезным и используется для отделения сигналов одной радиостанции от сигналов всех остальных (настройка приемника).

На теории вынужденных колебаний основывается также конструирование ряда приборов, например вибрографов — приборов для измерения смещений колеблющихся тел (фундаментов, частей машин и др.) и, в частности, сейсмографов, записывающих колебания земной коры, и т. п.

Задача 117. Балка, на которой установлен мотор, прогибается от его веса на $\lambda_{ст} = 1$ см. При каком числе оборотов вала мотора в минуту наступит резонанс? **Решение.** Из формулы (75') следует, что период собственных колебаний балки

$$T = 2\pi \sqrt{\lambda_{ст}/g}.$$

Если центр тяжести C вала мотора смещен от оси O , то на мотор будет действовать передаваемая через подшипники вала сила Q , направленная вдоль OC (рис. 266; такие силы рассматриваются в § 136). Проекция силы Q на ось Ox , равная $Q_x = Q \sin \omega t$ (ω — угловая скорость вала), и будет возмущающей силой, действующей на мотор; частота этой силы $p = \omega$. Следовательно, период вынужденных колебаний $T_p = 2\pi/\omega$.

Резонанс наступит, когда $T_p = T$, т. е. при

$$\omega_{кр} = \sqrt{g/\lambda_{ст}} = 31,3 \text{ с}^{-1}.$$

Отсюда критическое число оборотов

$$n_{кр} = 30\omega_{кр}/\pi \approx 300 \text{ об/мин.}$$

Рабочее число оборотов вала мотора должно быть значительно больше $n_{кр}$.

Задача 118. Исследовать вынужденные колебания груза I массы m , подвешенного на пружине с коэффициентом жесткости c , если верхний конец D пружины совершает вертикальные колебания по закону $\xi = a_0 \sin pt$.

Решение. Поместим начало координат O в положение статического равновесия груза и направим ось Ox по вертикали вниз (рис. 267). Если обозначить длину недеформированной пружины через l_0 , то ее длина в произвольный момент времени будет $l = l_0 - \xi + \lambda_{ст} + x$, а удлинение $\lambda = l - l_0 = \lambda_{ст} + x - \xi$. Тогда действующая на груз сила упругости $F = c\lambda = c(\lambda_{ст} + x - \xi)$, и составляя дифференциальное уравнение движения груза, будем иметь (так как $c\lambda_{ст} = mg$):

$$m\ddot{x} = -c(\lambda_{ст} + x - \xi) + mg \text{ или } m\ddot{x} = -cx + c\xi.$$

Отсюда, вводя обозначение $c/m = k^2$, получим

$$\ddot{x} + k^2 x = k^2 a_0 \sin pt.$$

Следовательно, груз будет совершать вынужденные колебания, так как полученное уравнение совпадает с уравнением (85) или уравнением (91), если в нем считать $b = 0$ и $P_0 = k^2 a_0$. Из равенств (96) видно, что в данном случае $\lambda_0 = a_0$ и $h = 0$. Амплитуда вынужденных колебаний и сдвиг фаз определяются формулами (98).

Если $p \ll k$ (верхний конец пружины колеблется очень медленно), то $\lambda \approx 0$ и $B \approx a_0$, а сдвиг фаз $\beta = 0$. Груз будет при этом колебаться так, как если бы

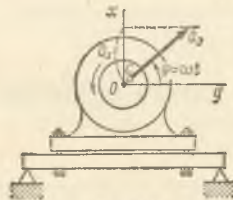


Рис. 266

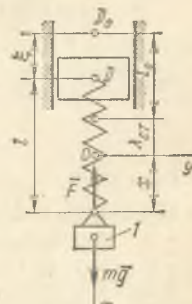


Рис. 267

пружина была жестким стержнем, что физически и соответствует условию $k \gg p$. При $p = k$ наступает резонанс, и размах колебаний начнет сильно возрастать. Если частота p станет больше k ($p \gg k$), то груз будет колебаться так, что когда конец D пружины идет вверх, груз будет опускаться вниз и наоборот (сдвиг фаз $\beta = 180^\circ$); амплитуда же колебаний будет тем меньше, чем больше p . Наконец, когда p будет много больше k ($p \gg k$), амплитуда $B \approx 0$. Груз при этом будет оставаться в положении статического равновесия (в точке O), хотя верхний конец пружины и совершает колебания с амплитудой a_0 (частота этих колебаний столь велика, что груз как бы не успевает за ними следовать).

4.* Электродинамические аналогии. Схожесть законов ряда колебательных процессов, рассматриваемых в разных областях физики, отмеченная в начале § 94, объясняется тем, что колебания в этих случаях описываются одинаковыми дифференциальными уравнениями. Рассмотрим в качестве примера электрический контур, состоящий из последовательно соединенных катушки с индуктивностью L , омического сопротивления R , конденсатора с емкостью C и источника переменной электродвижущей силы (э. д. с.) $E(t)$ (рис. 268),

Тогда, исходя из второго закона Кирхгофа, можно установить, что заряд q конденсатора удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + (1/C)q = E(t). \quad (101)$$

Сравним это уравнение с уравнением (90), в котором для общности будем считать, что вместо $Q_0 \sin pt$ стоит $Q(t)$; видим, что тогда оба уравнения совпадают с точностью до обозначений. Следовательно, закон изменения заряда конденсатора аналогичен. При этом, сравнивая уравнения (90) и (101), найдем, что аналогами являются: 1) для смещения (координаты) x — заряд q ; 2) для массы m — индуктивность L ; 3) для коэффициента вязкого сопротивления μ — омическое сопротивление R ; 4) для коэффициента жесткости c — величина $1/C$, обратная емкости; 5) для возмущающей силы Q — э. д. с. E .

Эта аналогия, естественно, относится не только к вынужденным, но и к свободным (затухающим и незатухающим) колебаниям. Например, для периода собственных затухающих электрических колебаний в рассматриваемой цепи по формулам (77) и (82) из § 95 получим:

$$k^2 = 1/CL, \quad b = R/2L, \quad T_1 = 2\pi/\sqrt{1/CL - R^2/4L^2}.$$

Когда омическое сопротивление отсутствует, $T = 2\pi\sqrt{CL}$.

Электродинамические аналогии используются для моделирования соответствующих механических колебаний, в частности и в электронных аналоговых машинах.

Глава XX *

ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА В ПОЛЕ ЗЕМНОГО ТЯГОТЕНИЯ

§ 97. ДВИЖЕНИЕ БРОШЕННОГО ТЕЛА В ПОЛЕ ТЯГОТЕНИЯ ЗЕМЛИ

Задача о движении тела в поле земного тяготения возникает при изучении движения баллистических ракет и искусственных спутников Земли, а также при рассмотрении проблем космических полетов.

Будем рассматривать движущееся тело как материальную точку массы m , а Землю считать неподвижной. Пусть в начальный момент времени эта точка находится у поверхности Земли в положении M_0 (рис. 269) и имеет начальную скорость v_0 , направленную под углом α к горизонтальной плоскости. Если пренебречь сопротивлением воздуха (что для рассматриваемых высот полета в первом приближении допустимо), то на точку при ее движении будет действовать только сила тяготения $\vec{F}$, направленная к центру Земли. Как показано в § 88, п. 4, модуль этой силы можно представить в виде

$$F = mgR^2/r^2, \quad (102)$$

где $r = OM$ — расстояние точки от центра Земли; $R = OM_0$ — значение r для точки вылета M_0 ; g — ускорение силы земного тяготения в точке M_0 *.

Так как сила $\vec{F}$ — центральная (см. § 86), то траектория точки будет плоской кривой. Поэтому для изучения движения можно воспользоваться полярными координатами $r = OM$ и φ , поместив их начало (полюс) O в центре Земли и направляя полярную ось Ox вдоль линии OM_0 . Составим дифференциальные уравнения движения точки M .

По закону площадей (см. § 86) при движении под действием центральной силы момент вектора скорости $\vec{v}$ относительно центра O (или удвоенная секторная скорость точки) будет величиной постоянной. Следовательно, $m_O(\vec{v}) = c$. Но из чертежа видно, что если разложить вектор $\vec{v}$ на радиальную v_r и поперечную v_φ составляющие (см. § 47), то

$$m_O(\vec{v}) = m_O(\vec{v}_\varphi) = rv_\varphi, \quad \text{где } v_\varphi = r \cdot d\varphi/dt.$$

Отсюда получаем первое уравнение

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = c. \quad (103)$$

Значение постоянной c найдем из условий в точке вылета M_0 , где, как легко видеть, $m_O(\vec{v}_0) = Rv_0 \cos \alpha$. Следовательно,

$$c = Rv_0 \cos \alpha. \quad (104)$$

Второе уравнение получим из теоремы об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме [см. § 89, формула (51)]

$$d(mv^2/2) = dA.$$

Но по формуле (49) из § 88

$$dA = -Fdr = -mgR^2 dr/r^2.$$

В результате найдем второе уравнение в виде

$$d\left(\frac{v^2}{2}\right) = gR^2 d\left(\frac{1}{r}\right) \quad \text{или} \quad \frac{d(v^2/2)}{d\varphi} = gR^2 \frac{d(1/r)}{d\varphi}, \quad (105)$$

* В формуле (102) R может иметь любое значение, большее земного радиуса. Когда точка M_0 берется на поверхности Земли, будем обычно считать R равным радиусу земного экватора $R_0 = 6378$ км и $g = 9,82$ м/с² (g всюду — ускорение силы земного тяготения, а не силы тяжести, см. § 92). Но, конечно, все получаемые далее формулы справедливы для движения в поле тяготения любого другого небесного тела.

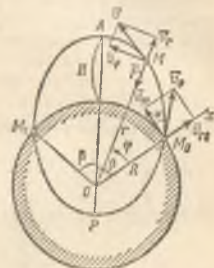


Рис. 269

где (см. § 47)

$$v^2 = v_r^2 + v_\phi^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2. \quad (106)$$

Интегрируя дифференциальные уравнения (103) и (105), можно определить r и ϕ как функции времени t , т. е. найти закон движения точки. Вместо этого найдем сразу ее траекторию. Чтобы упростить расчет, введем новое переменное u , полагая

$$u = \frac{1}{r}, \quad \frac{du}{d\phi} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\phi}. \quad (107)$$

Тогда с учетом равенств (107) и (103) получим

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\phi} \frac{d\phi}{dt} = -r^2 \frac{du}{d\phi} \frac{c}{r^2} = -c \frac{du}{d\phi}; \quad r \frac{d\phi}{dt} = \frac{c}{r} = cu.$$

Подставляя эти значения в формулу (106), находим

$$v^2 = c^2 [u^2 + (du/d\phi)^2].$$

Найденное выражение v^2 подставим в левую часть уравнения (105). Получим

$$c^2 \left[u \frac{du}{d\phi} + \frac{du}{d\phi} \frac{d^2 u}{d\phi^2} \right] = gR^2 \frac{du}{d\phi}.$$

Заменяя здесь c его значением из (104) и сокращая на $du/d\phi$, найдем окончательно дифференциальное уравнение траектории:

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} \quad \text{или} \quad \frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = \frac{1}{p}, \quad (108)$$

где обозначено

$$p = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g}. \quad (109)$$

Решение этого уравнения складывается из общего решения уравнения без правой части, которое совпадает с решением уравнения (67) при $k=1$ и частного решения уравнения с правой частью. Следовательно, $u = u_1 + u_2$, где u_1 имеет вид (68) или (69) при $k=1$, а $u_2 = 1/p$, в чем можно убедиться непосредственной подстановкой. В результате решением уравнения (108) будет

$$u = c_1 \sin(\phi + c_2) + \frac{1}{p} \quad \text{или} \quad u = \frac{1}{p} \left[1 + c_1 p \sin(\phi + c_2) \right],$$

где c_1 и c_2 — постоянные интегрирования. Полагая здесь $c_1 p = -e$, $c_2 = \pi/2 - \beta$, где e и β — новые постоянные, и переходя от u к r , найдем окончательно уравнение траектории в виде

$$r = \frac{p}{1 - e \cos(\phi - \beta)}. \quad (110)$$

Из аналитической геометрии известно, что (110) представляет собой уравнение конического сечения (эллипса, параболы или ги-

перболы) с фокальным параметром p и эксцентриситетом e , выраженное в полярных координатах, для которых полюс O находится в одном из фокусов. При этом геометрический смысл постоянной β виден из того, что при $\phi = \beta$ знаменатель в равенстве (110) имеет минимум, а следовательно, величина $r = OM$ — максимум. Таким образом, угол β определяет положение оси симметрии траектории (ось AP на рис. 269) по отношению к линии OM_0 или к точке вылета M_0 .

Чтобы определить значения постоянных интегрирования e и β , надо для начального положения $\phi = 0$, т. е. в точке M_0 , знать кроме r (или u) еще и производную от r (или от u) по ϕ . Формулы (32), полученные в § 47, и последнее из равенств (107) дают:

$$\frac{v_r}{v_\phi} = \frac{1}{r} \frac{dr}{d\phi} \quad \text{или} \quad -\frac{1}{r} \frac{v_r}{v_\phi} = \frac{du}{d\phi}.$$

Но в точке M_0 , как видно из рис. 269, $r=R$ и $v_r/v_\phi = \tan \alpha$. Следовательно, начальные условия для u имеют вид:

$$\text{при } \phi = 0 \quad u = \frac{1}{R}, \quad \frac{du}{d\phi} = -\frac{1}{R} \tan \alpha.$$

Из уравнения (110), переходя опять от r к u , найдем

$$u = \frac{1}{p} [1 - e \cos(\phi - \beta)], \quad \frac{du}{d\phi} = \frac{e}{p} \sin(\phi - \beta).$$

Подставляя сюда начальные значения u и $du/d\phi$, получим

$$p/R = 1 - e \cos \beta, \quad -(p/R) \tan \alpha = -e \sin \beta$$

или, заменяя p его значением (109),

$$e \cos \beta = 1 - \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{gR}, \quad e \sin \beta = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2gR}. \quad (111)$$

Из этих равенств, деля их сначала почленно друг на друга, а затем возводя в квадрат и складывая, найдем окончательно:

$$\tan \beta = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2(gR - v_0^2 \cos^2 \alpha)}, \quad (112)$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g^2 R^2} (v_0^2 - 2gR)}. \quad (113)$$

Равенство (112) определяет угол β , т. е. положение оси симметрии траектории по отношению к точке вылета M_0 . Формула же (113) дает значение эксцентриситета траектории. Из нее видно, что траекторией точки будет:

- а) эллипс ($e < 1$), если $v_0 < \sqrt{2gR}$;
- б) парабола ($e = 1$), если $v_0 = \sqrt{2gR}$;
- в) гипербола ($e > 1$), если $v_0 > \sqrt{2gR}$.

Скорость $v_2 = \sqrt{2gR}$ называется *параболической* или *второй космической скоростью*. Если считать $R = R_0 = 6378$ км и $g = g_0 = 9,82$ м/с², то получим $v_2 \approx 11,2$ км/с. Таким образом, при начальной скорости $v_0 \geq 11,2$ км/с тело, брошенное с поверхности Земли под любым углом α к горизонтальной плоскости, будет двигаться по параболе или гиперболе (при $\alpha = 90^\circ$ — по прямой), неограниченно удаляясь от Земли. Достижение скоростей такого порядка необходимо для межпланетных сообщений*. При скорости, меньшей второй космической, тело или упадет обратно на Землю, или станет искусственным спутником Земли.

Закон движения точки вдоль траектории, т. е. ее положение на траектории в любой момент времени, можно найти, заменяя в равенстве (103) r его значением из (110), а затем, интегрируя полученное уравнение.

§ 98. ИСКУССТВЕННЫЕ СПУТНИКИ ЗЕМЛИ. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ТРАЕКТОРИИ

При $v_0 < \sqrt{2gR}$ и $\alpha \neq \pi/2$ траектория тела, брошенного с земной поверхности, есть эллипс, у которого ось PA , образующая с Ox угол β , является осью симметрии (см. рис. 269). Если начальные условия в пункте M_0 будут таковы, что угол $\beta \neq \pi$, то траектория пересечет поверхность Земли в симметричной относительно оси PA точке M_1 , т. е. тело упадет на Землю. Следовательно, брошенное тело может стать спутником Земли лишь при тех начальных условиях, которые дают $\beta = \pi$. Но, как показывают равенства (111), $\beta = \pi$ только при $\alpha = 0$ (или $\alpha = \pi$) и $v_0^2 \geq gR$, так как при $\beta = \pi$ и $v_0^2 < gR$ первое из равенств (111) дает $e < 0$, что невозможно, поскольку e — величина положительная. Следовательно, чтобы тело, брошенное с земной поверхности, превратилось в спутника Земли, необходимо выполнение двух условий:

$$\alpha = 0, \sqrt{2g_0 R_0} > v_0 \geq \sqrt{g_0 R_0}. \quad (114)$$

Эксцентриситет орбиты спутника при $\alpha = 0$ и $\beta = \pi$, как видно из равенств (111) или (113), будет

$$e = v_0^2 / gR - 1. \quad (115)$$

Скорость $v_1 = \sqrt{gR}$, при которой $e = 0$ и спутник движется по круговой орбите радиуса R , называется *круговой* или *первой космической скоростью* [см. § 82, формула (28)]. При бросании с поверхности Земли, если считать $R = R_0 = 6378$ км и $g = g_0 = 9,82$ м/с², первая космическая скорость $v_1 \approx 7,9$ км/с. При $v_0 > v_1$ орбитой спутника будет эллипс, эксцентриситет которого тем больше, чем больше v_0 (рис. 270).

* Скорость, необходимая для освобождения межпланетного корабля от совместных притяжений Земли и Солнца, будет больше $\sqrt{2g_0 R_0}$ и при определенном направлении v_0 равна около 16,7 км/с; эту скорость называют *третьей космической скоростью*.

Когда угол бросания $\alpha \neq 0$, то ни при какой начальной скорости v_0 тело, бросаемое с земной поверхности (если даже не учитывать сопротивление воздуха), спутником Земли стать не может. Поэтому, например, создать искусственный спутник Земли выстрелом из орудия практически невозможно; для этой цели пригодна управляемая ракета, которая с помощью соответствующих приборов может поднять спутник на заданную высоту и сообщить ему в пункте M_0 (рис. 270) нужную скорость v_0 под углом $\alpha \approx 0$ к горизонтальной плоскости. Таким путем и был осуществлен запуск первых в мире советских искусственных спутников Земли и космических кораблей с человеком на борту.

Отметим в заключение, что с увеличением высоты H пункта M_0 над поверхностью Земли сопротивление воздуха будет убывать и спутник будет долговечнее. Одновременно станет, очевидно, возможным получение спутникового движения и при $\alpha \neq 0$. Однако нетрудно подсчитать, что при увеличении H (хотя v_1 , например, при этом уменьшается) полная энергия, затрачиваемая на запуск спутника данной массы, возрастает.

Эллиптические траектории. При $\alpha > 0$ и $v_0 < \sqrt{2g_0 R_0}$ тело, брошенное с земной поверхности, описав дугу эллипса, упадет обратно на Землю. Такие эллиптические траектории описывают баллистические ракеты, в частности межконтинентальные. Найдем основные характеристики этих траекторий.

Так как ось PA является осью симметрии траектории, то точкой падения будет M_1 и дальность S будет равна длине дуги $M_0 M_1$ (см. рис. 269); следовательно,

$$S = 2R_0 \beta, \quad (116)$$

где β определяется формулой (112). При этом, как обычно принято, в равенстве (116) R_0 — средний радиус Земли.

Наибольшая высота H траектории равна $(r)_{\varphi=\beta} - R_0$ или, согласно равенствам (109) и (110),

$$H = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{(1-e)g_0} - R_0, \quad (117)$$

где e определяется формулой (113).

Время полета T найдем из уравнения (103), которое вместе с (104) дает

$$dt = (r^2/c) d\varphi = (r^2/R_0 v_0 \cos \alpha) d\varphi.$$

Заменяя здесь r его значением, получаемым из равенств (109) и (110), и интегрируя, найдем, что

$$T = \frac{v_0^3 \cos^3 \alpha}{R_0 g_0^2} \int_{-\beta}^{\beta} \frac{d\varphi}{(1-e \cos \varphi)^{3/2}}.$$



где $\psi = \varphi - \beta$. Вычисляя интеграл, найдем окончательно после ряда преобразований

$$T = \frac{2e^2 \cos^2 \alpha}{R_0 g_0^2 (1 - e^2)^{3/2}} (z + e \sin z), \quad (118)$$

где обозначено

$$z = 2 \arctg \left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \right). \quad (119)$$

По полученным формулам, зная v_0 и угол бросания α , можно определить дальность полета S , наибольшую высоту траектории H и время полета T .

С практической точки зрения важно найти минимальную скорость $v_0^{\min}$ и наимыгоднейший угол бросания α_n , при которых может быть получена заданная дальность $S = 2R_0 \beta$.

Для этого определим из равенства (112) величину v_0 . Получим

$$v_0 = \sqrt{\frac{2R_0 g_0 \operatorname{tg} \beta}{\sin 2\alpha + 2 \cos^2 \alpha \operatorname{tg} \beta}}. \quad (120)$$

При данной дальности (при данном угле β) потребная скорость v_0 зависит от угла α . Так как угол α входит в равенстве (120) только в знаменатель, то v_0 имеет минимум, когда этот знаменатель достигает максимума. Приравнявая производную от знаменателя по α нулю, найдем

$$\cos 2\alpha - \sin 2\alpha \operatorname{tg} \beta = 0,$$

откуда $\operatorname{ctg} 2\alpha_n = \operatorname{tg} \beta$ и наимыгоднейший угол бросания

$$\alpha_n = 45^\circ - \beta/2. \quad (121)$$

Что данная величина α_n дает $v_0^{\min}$, легко проверяется по знаку второй производной. Подставляя значение α_n в равенство (120) и учитывая, что $2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha$, получим

$$v_0^{\min} = \sqrt{2R_0 g_0 \sin \beta / (1 + \sin \beta)}. \quad (122)$$

Формулы (122) и (121) определяют наименьшую начальную скорость и наимыгоднейший угол бросания, обеспечивающие заданную дальность. Высота траектории и время полета при этом подсчитываются по формулам (117) и (118), в которых v_0 и α заменяются их значениями из (122) и (121). Для наглядности элементы нескольких наимыгоднейших эллиптических траекторий, подсчитанные по этим формулам при $R_0 = R_{cp} = 6370$ км, приведены в табл. 3 (все величины даны в таблице с точностью до 5 единиц последнего знака).

Напоминаем, что все эти расчеты относятся к движению в безвоздушном пространстве и не учитывают влияние вращения Земли. В заключение отметим, что при малых дальностях (угол β мал) дуга эллипса, описываемого брошенным телом, близка к дуге параболы. Если при этом считать $\sin \beta \approx \beta$ и $2R_0 \beta = X$, а величиной β в других равенствах по сравнению с единицей пренебречь, то в пределе все

Таблица 3

Угол β , град	Дальность S , км	Необходимая начальная скорость $v_0^{\min}$, м/с	Наимыгоднейший угол бросания α_n , град	Высота траектории H , км	Время полета T
10	2 220	4300	40	500	12 мин 30 с
20	4 450	5650	35	900	19 » 10 »
30	6 670	6460	30	1170	24 » 50 »
40	8 900	7000	25	1300	30 » 00 »
70	15 570	7780	10	900	40 » 10 »
90	20 020	7910	0	0	42 » 10 »

полученные формулы перейдут в соответствующие формулы для параболических траекторий (см. § 82). В частности, из (121) и (122) получаем сразу

$$\alpha_n = \alpha^* = 45^\circ, \quad v_0^{\min} = \sqrt{g_0 X^*}.$$

§ 99. ПОНЯТИЕ О НЕВЕСОМОСТИ. МЕСТНЫЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА

При движении тел в поле тяготения может иметь место интересное явление, называемое *невесомостью*. Начнем с частного примера.

Рассмотрим груз массой m , покоящийся в лифте, который движется по отношению к неподвижным осям Oxy вертикально вниз с ускорением a (рис. 271, а). На груз действуют сила тяжести $P = mg$ и реакция N . Так как груз, двигаясь вместе с лифтом, тоже имеет ускорение a , то, составляя уравнение его движения в проекции на ось x , получим

$$ma = mg - N \quad \text{и} \quad N = m(g - a).$$

Отсюда находим, что когда $a = g$,

т. е. когда лифт свободно падает, $N = 0$ и груз никакого давления на пол AB кабины не оказывает (пол не служит ему опорой). Поэтому груз по отношению к лифту будет оставаться в покое («висеть») в любом месте кабины, если его туда поместить. На чашу весов, находящихся в кабине, груз тоже не окажет давления и они покажут, что «вес» груза равен нулю. Аналогичное состояние будет и у груза, помещенного в кабину поступательно движущегося космического летательного аппарата. Такое состояние груза (тела) и называют *невесомостью*.

Объясняется полученный результат просто: под действием силы тяжести и лифт, и находящийся в нем груз движется по отношению к осям Oxy с одним и тем же ускорением g (рис. 271, б); поэтому от-

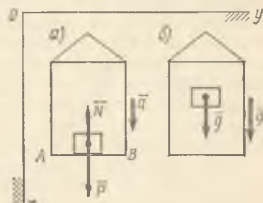


Рис. 271

груз не перемещается (находится в любом месте в покое) и не будет давить на дно кабины. Но одновременно ясно, что состояние падающего груза никак не зависит от наличия лифта и останется таким же, когда груз падает один. Следовательно, в состоянии невесомости находится любое тело, свободно движущееся (падающее) в поле сил тяготения (тяготения).

Однако из изложенного не видно, чем же физически состояние тела при невесомости отличается от состояния, которое будет у тела, когда оно просто покоится на поверхности Земли или движется под действием каких-нибудь других сил, например силы тяги. Между тем, что в этих состояниях есть существенное различие, показывает эксперимент. Например, если в кабину падающего лифта (или космического летательного аппарата) поместить сосуд с водой, то при невесомости вода не заполнит сосуд, а примет в нем форму шара и сохранит ее, если этот шар вытолкнуть из сосуда. Объясняется это, очевидно, тем, что при невесомости изменяется характер внутренних усилий в теле (в данном случае в жидкости). Следовательно, чтобы выяснить, в чем состоит отличительная особенность состояния невесомости, надо обратиться к рассмотрению возникающих в теле внутренних усилий.

Будем различать две категории внутренних усилий в теле: *усилия, не связанные с внешними воздействиями на тело* (например, молекулярные силы, температурные напряжения или усилия в двух стянутых болтами и образующих одно тело полосах железа) и *усилия, вызванные внешними воздействиями на тело*, т. е. действием на тело внешних сил.

Остановимся на рассмотрении второй категории внутренних усилий (см. § 20). При этом будем различать так называемые массовые (или объемные) и поверхностные силы. *Массовыми* называют силы, действующие на каждую из частиц данного тела и численно пропорциональные массам этих частиц; примером массовых сил являются силы тяготения. *Поверхностными* называют силы, приложенные к точкам поверхности данного тела; примером таких сил являются реакции всевозможных опор, сила тяги, силы сопротивления среды и т. п. При определении закона движения (или условий равновесия) физическая природа приложенных к телу сил роли не играет. Важно лишь, чему равны модуль и направление каждой из сил. Однако на значениях возникающих в теле внутренних усилий это различие, как мы увидим, сказывается весьма существенно. Объясняется такой результат тем, что массовые силы действуют на каждую из частиц тела непосредственно; действие же поверхностных сил передается частицам тела за счет давления на них соседних частиц.

Рассмотрим тело массой m , движущееся в поле тяготения Земли поступательно, но не обязательно прямолинейно. Размеры тела по сравнению с земным радиусом будем считать настолько малыми, что различием в расстояниях частиц тела от центра Земли можно пренебречь и считать, что силы тяготения сообщают всем частицам

тела одно и то же ускорение $\bar{g}$. Тогда равнодействующая приложенных к телу сил тяготения будет

$$\bar{F}_\tau = m\bar{g}. \quad (123)$$

Допустим, что кроме сил тяготения на тело действуют еще поверхностные силы, приложенные вдоль какой-то площадки AB и имеющие равнодействующую $\bar{Q}$ (рис. 272, а). Сила $\bar{Q}$ может быть реакцией дна кабины лифта (или кабины самолета, космического летательного аппарата), в которой покоится тело, или же силой тяги, силой сопротивления среды и т. п.

Согласно сказанному в § 73, тело, движущееся поступательно, можно рассматривать как материальную точку. Составим уравнение движения этого тела в векторной форме, получим

$$m\bar{a} = \bar{F}_\tau + \bar{Q}. \quad (124)$$

Отсюда, учитывая равенство (123), найдем ускорение тела

$$\bar{a} = \bar{g} + \bar{Q}/m. \quad (125)$$

Определим теперь внутренние усилия, возникающие под действием сил $\bar{F}_\tau$ и $\bar{Q}$ в каком-нибудь сечении bb_1 тела, перпендикулярном направлению вектора $\bar{Q}$, т. е. те силы, с которыми частицы тела, разделенные этим сечением, действуют друг на друга. Для этого рассмотрим движение одной из частей тела, например верхней, массу которой обозначим m_1 . На эту часть тела действуют силы тяготения, равнодействующая которых согласно формуле (123) будет $\bar{F}_{\tau 1} = m_1\bar{g}$, и силы давления отброшенной части тела, равнодействующую которых назовем $\bar{S}_1$ (рис. 272, б). Поскольку тело движется поступательно, то и рассматриваемая его часть тоже движется поступательно с тем же ускорением $\bar{a}$ и для нее $m_1\bar{a} = \bar{F}_{\tau 1} + \bar{S}_1$ или $m_1\bar{a} = m_1\bar{g} + \bar{S}_1$, откуда $\bar{S}_1 = m_1(\bar{a} - \bar{g})$. Заменяя здесь $\bar{a}$ его значением из формулы (125), найдем окончательно, что

$$\bar{S}_1 = (m_1/m)\bar{Q}. \quad (126)$$

Таким образом, значения возникающих в теле внутренних усилий зависят только от действующих на него поверхностных сил. При этом, поскольку в формулу (126) ускорение не входит, она будет справедлива и для покоящегося тела.

Рассмотрим тело, покоящееся на поверхности Земли. Действующей на него поверхностной силой будет реакция земной поверхности, численно равная весу P тела. Следовательно, при $Q = P$ формула (126) определяет внутренние усилия в теле, покоящемся на поверхности Земли. Состояние, в котором находится тело при наличии в

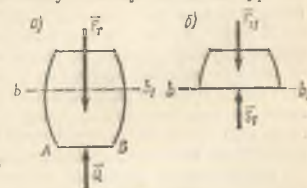


Рис. 272

нем таких внутренних усилий, называют состоянием *весомости*. Испытываемое человеком, находящимся на поверхности Земли, ощущение «весомости» и является следствием наличия в его теле таких внутренних усилий (давлений частей тела друг на друга).

Если на покоящееся или движущееся тело действует поверхностная сила $Q < P$, то внутренние усилия в любом сечении тела будут меньше, чем при его покое на земной поверхности (явление *недогрузки*); если же действующая поверхностная сила $Q > P$ (например, Q — сила тяги вертикально стартующей ракеты), то внутренние усилия в любом сечении тела будут больше, чем при его покое на земной поверхности (явление *перегрузки*). Наконец, когда $Q = 0$ и тело движется свободно под действием только массовых сил (сил тяготения), т. е. находится в состоянии невесомости, то под действием этих сил никаких внутренних усилий в теле не возникает.

В итоге приходим к следующим результатам: 1) *любое тело, размеры которого малы по сравнению с его расстоянием от центра Земли и которое движется в поле тяготения Земли свободно (т. е. под действием только сил тяготения) и поступательно, находится в состоянии невесомости*; 2) *состояние невесомости характеризуется тем, что при невесомости в теле не возникает внутренних усилий, вызываемых внешними воздействиями на это тело*.

Аналогичный результат имеет место при движении в поле тяготения любого другого небесного тела.

Таким образом, если сопротивление воздуха пренебрежимо мало, то любое падающее на Землю или брошенное с ее поверхности тело, движущееся поступательно, будет находиться в состоянии невесомости. В частности, в состоянии невесомости находятся движущиеся вне земной атмосферы искусственные спутники Земли или космические летательные аппараты и все находящиеся в них тела.

Учет невесомости приобретает важное значение при космических полетах, поскольку невесомость изменяет условия работы многих устройств и приборов, а те из них, в которых, например, используются физические маятники или свободная подача жидкости и т. п., вообще оказываются непригодными. Важную роль в условиях невесомости начинают играть не зависящие от внешних воздействий и сохраняющиеся при невесомости молекулярные силы (в земных условиях малые по сравнению с взаимными давлениями, обусловленными весомостью), что меняет характер ряда явлений. Например, в условиях невесомости смачивающая жидкость, заполняющая замкнутый сосуд, под действием молекулярных сил распределяется равномерно по его стенкам. Жидкость же, не смачивающая стенок, примет форму шара, на что уже указывалось*.

* Невесомость влияет и на работу ряда органов человеческого тела (например, на вестибулярный аппарат, обеспечивающий чувство равновесия); поэтому, чтобы приспособиться к условиям невесомости, требуется соответствующая тренировка. Чтобы в некоторой мере имитировать при полете в космосе состояние «весомости», на космонавтов надевают специальные костюмы, придающие телу соответствующую («вертикальные») нагрузки.

Местные системы отсчета. Рассмотрим тело A , движущееся в поле тяготения Земли (или другого небесного тела) свободно и поступательно с ускорением $\vec{g}$ (ускорение поля тяготения), т. е. находящееся в состоянии невесомости. Свяжем с телом A систему отсчета $Oxyz$, движущуюся вместе с ним тоже поступательно (рис. 273), и рассмотрим движение материальной точки M массой m по отношению к этой системе отсчета. При этом область, где происходит движение, будем считать по сравнению с расстояниями от тела A и точки M до центра Земли (небесного тела) настолько малой, что в этой области можно считать $\vec{g} = \text{const}$. На точку M , поскольку она, как и тело A , движется в поле тяготения Земли, будет действовать сила тяготения $\vec{F}_T = m\vec{g}$, а также могут действовать другие силы $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$.

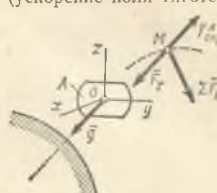


Рис. 273

Составим уравнение относительного движения точки по отношению к осям $Oxyz$, т. е. уравнение (56) из § 91. Так как оси $Oxyz$ движутся поступательно, то $F_{\text{юр}}^n = 0$ и уравнение примет вид

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_k + \vec{F}_T + \vec{F}_{\text{пер}}^n, \quad (127)$$

где $\sum \vec{F}_k$ — сумма других действующих сил, кроме $\vec{F}_T$.

Но так как оси $Oxyz$ перемещаются вместе с телом A поступательно с ускорением $\vec{g}$, то для движущейся точки $\vec{a}_{\text{пер}} = \vec{g}$ и $\vec{F}_{\text{пер}}^n = -m\vec{g}$. Учтя еще, что $\vec{F}_T = m\vec{g}$, получим из уравнения (127)

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_k. \quad (128)$$

Таким образом, хотя система отсчета $Oxyz$ не является инерциальной (см. § 91), так как движется с ускорением $\vec{g}$, уравнение движения точки по отношению к этой системе отсчета составляется так, как если бы она была инерциальной; но при этом в число действующих на точку сил не должна включаться сила тяготения $\vec{F}_T$, т. е. сила притяжения к Земле (небесному телу), в поле тяготения которого движется тело A и связанная с ним система отсчета. Такую систему назовем *местной системой отсчета*. Ее практически можно считать инерциальной с тем большей степенью точности, чем меньше область, в которой происходит движение.

Например, если местную систему отсчета связать с движущимся поступательно вокруг Земли космическим летательным аппаратом, то уравнение движения по отношению к летательному аппарату любого находящегося в нем тела будет составляться в виде (128), т. е. как в инерциальной системе отсчета, но при этом в число действующ-

щих на тело сил не должна включаться сила притяжения к Земле. Иначе говоря, все механические явления в летательном аппарате будут происходить так, как если бы он находился вне поля тяготения.

Другим примером местной системы является система отсчета, связанная с Землей, но имеющая оси, направленные на звезды, т. е. не участвующие в суточном вращении Земли и движущиеся вместе с Землей поступательно вокруг Солнца. Такая система отсчета для движений в области, малой по сравнению с расстоянием от Земли до Солнца, т. е. для движений в окрестностях Земли, будет практически инерциальной. Но при этом в число сил, действующих на тело, движение которого изучается, не должна включаться сила притяжения к Солнцу (к небесному телу, в поле тяготения которого движется эта местная система отсчета). Поэтому, когда систему отсчета, жестко связанную с Землей, рассматривают как инерциальную, то не учитывают только суточное вращение Земли, на что и было указано в § 92. Силой притяжения к Солнцу при этом, как иногда ошибочно полагают, не пренебрегают ввиду ее малости, а ее просто, согласно показанному выше, не следует учитывать.

Раздел четвертый

ДИНАМИКА СИСТЕМЫ И ТВЕРДОГО ТЕЛА

Глава XXI

ВВЕДЕНИЕ В ДИНАМИКУ СИСТЕМЫ. МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ

§ 100. МЕХАНИЧЕСКАЯ СИСТЕМА. СИЛЫ ВНЕШНИЕ И ВНУТРЕННИЕ

Систему материальных точек или тел, движение (или равновесие) которой рассматривается, будем называть *механической системой*. Если между точками (телами) механической системы действуют силы взаимодействия, то она обладает тем свойством, что в ней положение или движение каждой точки (тела) зависит от положения и движения всех остальных. Классическим примером такой системы является солнечная система, в которой все тела связаны силами взаимного притяжения.

Действующие на механическую систему активные силы F_k^a и реакции связей N_k разделяют на внешние F_k^e и внутренние F_k^i (индексы e и i от латинских *exterior* — внешний и *interior* — внутренний). *Внешними* называют силы, действующие на точки системы со стороны точек или тел, не входящих в состав данной системы. *Внутренними* называют силы, с которыми точки или тела данной системы действуют друг на друга. Это разделение является условным и зависит от того, какая механическая система рассматривается. Например, если рассматривается движение всей Солнечной системы, то сила притяжения Земли к Солнцу будет внутренней; если же рассматривается движение системы Земля — Луна, то для этой системы та же сила будет внешней.

Внутренние силы обладают следующими свойствами:

1. *Геометрическая сумма (главный вектор) всех внутренних сил системы равняется нулю.* В самом деле, по третьему закону динамики любые две точки системы (рис. 274) действуют друг на друга с равными по модулю и противоположно направленными силами F_{12} и F_{21} , сумма которых равна нулю. Так как аналогичный резуль-

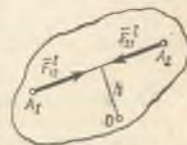


Рис. 274

тат имеет место для любой пары точек системы, то

$$\sum \vec{F}_k = 0.$$

2. Сумма моментов (главный момент) всех внутренних сил системы относительно любого центра или оси равняется нулю. Действительно, если взять произвольный центр O , то из рис. 274 видно, что $m_O(\vec{F}_{12}) + m_O(\vec{F}_{21}) = 0$. Аналогичный результат получится при вычислении моментов относительно оси. Следовательно, и для всей системы будет:

$$\sum m_O(\vec{F}_k) = 0 \text{ и } \sum m_x(\vec{F}_k) = 0.$$

Из доказанных свойств не следует, однако, что внутренние силы взаимно уравновешиваются и не влияют на движение системы, так как эти силы приложены к разным материальным точкам или телам и могут вызвать взаимные перемещения этих точек или тел. Уравновешенной вся совокупность внутренних сил будет у системы, представляющей собой абсолютно твердое тело.

§ 101. МАССА СИСТЕМЫ. ЦЕНТР МАСС

Движение системы кроме действующих сил зависит также от ее суммарной массы и распределения масс. Масса системы (обозначаем M или m) равна арифметической сумме масс всех точек или тел, образующих систему:

$$M = \sum m_k.$$

Распределение масс в системе определяется значениями масс m_k ее точек и их взаимными положениями, т. е. их координатами x_k, y_k, z_k . Однако оказывается, что при решении тех задач динамики, которые мы будем рассматривать, в частности динамики твердого тела, для учета распределения масс достаточно знать не все величины m_k, x_k, y_k, z_k , а некоторые, выражаемые через них суммарные характеристики. Ими являются: координаты центра масс (выражаются через суммы произведений масс точек системы на их координаты), осевые моменты инерции (выражаются через суммы произведений масс точек системы на квадраты их координат) и центробежные моменты инерции (выражаются через суммы произведений масс точек системы и двух из их координат). Эти характеристики мы в данной главе и рассмотрим.

Центр масс. В однородном поле тяжести, для которого $g = \text{const}$, вес любой частицы тела пропорционален ее массе. Поэтому о распределении масс в теле можно судить по положению его центра тяжести. Преобразуем формулы (59) из § 32, определяющие координаты центра тяжести тела, к виду, явно содержащему массу. Для этого положим в названных формулах $p_k = m_k g$ и $P = Mg$, после чего, сократив на g , найдем:

$$x_C = \frac{1}{M} \sum m_k x_k, \quad y_C = \frac{1}{M} \sum m_k y_k, \quad z_C = \frac{1}{M} \sum m_k z_k. \quad (1)$$

В полученные равенства входят теперь массы m_k материальных точек (частиц), образующих тело, и координаты x_k, y_k, z_k этих точек. Следовательно, положение точки $C(x_C, y_C, z_C)$ действительно характеризует распределение масс в теле или в любой механической системе, если под m_k, x_k, y_k, z_k понимать соответственно массы и координаты точек системы.

Геометрическая точка C , координаты которой определяются формулами (1), называется центром масс или центром инерции механической системы.

Если положение центра масс определять его радиусом-вектором $\vec{r}_C$, то из равенств (1) для $\vec{r}_C$ получается формула

$$\vec{r}_C = \frac{1}{M} \sum m_k \vec{r}_k, \quad (1')$$

где $\vec{r}_k$ — радиусы-векторы точек, образующих систему.

Из полученных результатов следует, что для твердого тела, находящегося в однородном поле тяжести, положения центра масс и центра тяжести совпадают. Но в отличие от центра тяжести понятие о центре масс сохраняет свой смысл для тела, находящегося в любом силовом поле (например, в центральном поле тяготения), и, кроме того, как характеристика распределения масс, имеет смысл не только для твердого тела, но и для любой механической системы.

§ 102. МОМЕНТ ИНЕРЦИИ ТЕЛА ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ. РАДИУС ИНЕРЦИИ

Моментом инерции тела (системы) относительно данной оси Oz (или осевым моментом инерции) называется скалярная величина, равная сумме произведений масс всех точек тела (системы) на квадраты их расстояний от этой оси:

$$J_z = \sum m_k h_k^2. \quad (2)$$

Из определения следует, что момент инерции тела (или системы) относительно любой оси является величиной положительной и не равной нулю.

В дальнейшем будет показано, что осевой момент инерции играет при вращательном движении тела такую же роль, какую масса при поступательном, т. е. что осевой момент инерции является мерой инертности тела при вращательном движении.

Согласно формуле (2) момент инерции тела равен сумме моментов инерции всех его частей относительно той же оси. Для одной материальной точки, находящейся на расстоянии h от оси, $J_z = mh^2$. Единицей измерения момента инерции в СИ будет $1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ (в системе МКГСС — $1 \text{ кгм} \cdot \text{с}^2$).

Для вычисления осевых моментов инерции можно расстояния точек от осей выражать через координаты x_k, y_k, z_k этих точек (например, квадрат расстояния от оси Ox будет $y_k^2 + z_k^2$ и т. д.). Тогда моменты инерции относительно осей $Oxyz$ будут определяться фор-

мулами:

$$J_x = \sum m_k (y_k^2 + z_k^2), \quad J_y = \sum m_k (z_k^2 + x_k^2), \quad J_z = \sum m_k (x_k^2 + y_k^2). \quad (3)$$

Часто в ходе расчетов пользуются понятием радиуса инерции. Радиусом инерции тела относительно оси Oz называется линейная величина ρ_z , определяемая равенством

$$J_z = M\rho_z^2, \quad (4)$$

где M — масса тела. Из определения следует, что радиус инерции геометрически равен расстоянию от оси Oz той точки, в которой надо сосредоточить массу всего тела, чтобы момент инерции одной этой точки был равен моменту инерции всего тела.

Зная радиус инерции, можно по формуле (4) найти момент инерции тела и наоборот.

Формулы (2) и (3) справедливы как для твердого тела, так и для любой системы материальных точек. В случае сплошного тела, разбивая его на элементарные части, найдем, что в пределе сумма, стоящая в равенстве (2), обратится в интеграл. В результате, учитывая, что $dm = \rho dV$, где ρ — плотность, а V — объем, получим

$$J_z = \int_V h^2 dm \quad \text{или} \quad J_z = \int_V \rho h^2 dV. \quad (5)$$

Интеграл здесь распространяется на весь объем V тела, а плотность ρ и расстояние h зависят от координат точек тела. Аналогично формулы (3) для сплошных тел примут вид

$$J_x = \int_V \rho (y^2 + z^2) dV \quad \text{и т. д.} \quad (5')$$

Формулами (5) и (5') удобно пользоваться при вычислении моментов инерции однородных тел правильной формы. При этом плотность ρ будет постоянной и выйдет из-под знака интеграла.

Найдем моменты инерции некоторых однородных тел.

1. Тонкий однородный стержень длиной l и массой M . Вычислим его момент инерции относительно оси Az , перпендикулярной стержню и проходящей через его конец A (рис. 275). Направим вдоль AB координатную ось Ax . Тогда для любого элементарного отрезка длины dx величина $h=x$, а масса $dm = \rho_1 dx$, где $\rho_1 = M/l$ — масса единицы длины стержня. В результате формула (5) дает *

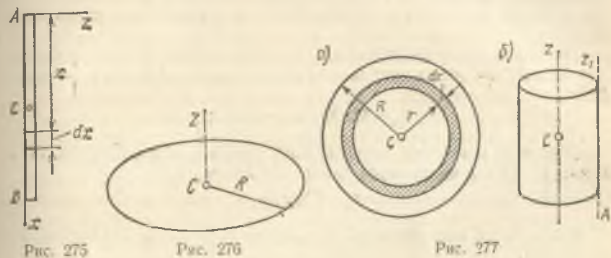
$$J_A = \int_0^l x^2 dm = \rho_1 \int_0^l x^2 dx = \rho_1 l^3/3.$$

* Здесь и везде далее J_A обозначает момент инерции относительно оси, проходящей через точку A и направленной перпендикулярно плоскости изображенного на чертеже сечения тела.

Заменяя здесь ρ_1 его значением, найдем окончательно

$$J_A = Ml^2/3. \quad (6)$$

2. Тонкое круглое однородное кольцо радиусом R и массой M . Найдем его момент инерции относительно



оси Cz , перпендикулярной плоскости кольца и проходящей через его центр C (рис. 276). Так как все точки кольца находятся от оси Cz на расстоянии $h_k = R$, то формула (2) дает

$$J_C = \sum m_k R^2 = (\sum m_k) R^2 = MR^2.$$

Следовательно, для кольца *

$$J_C = MR^2. \quad (7)$$

Очевидно, такой же результат получится для момента инерции тонкой цилиндрической оболочки массой M и радиусом R относительно ее оси.

3. Круглая однородная пластина или цилиндр радиусом R и массой M . Вычислим момент инерции круглой пластины относительно оси Cz , перпендикулярной пластине и проходящей через ее центр (см. рис. 276). Для этого выделим элементарное кольцо радиусом r и шириной dr (рис. 277, а). Площадь этого кольца $2\pi r \cdot dr$, а масса $dm = \rho_2 2\pi r \cdot dr$, где $\rho_2 = M/\pi R^2$ — масса единицы площади пластины. Тогда по формуле (7) для выделенного элементарного кольца будет $dJ_C = r^2 dm = 2\pi \rho_2 r^3 dr$, а для всей пластины

$$J_C = 2\pi \rho_2 \int_0^R r^3 dr = \pi \rho_2 R^4/2.$$

Заменяя здесь ρ_2 его значением, найдем окончательно

$$J_C = MR^2/2. \quad (8)$$

* Сравнивая формулы (4) и (7) можно еще заключить, что радиус инерции тела равен радиусу тонкого кольца с таким же осевым моментом инерции, как и у тела.

такая же формула получится, очевидно, и для момента инерции J_z однородного круглого цилиндра массой M и радиусом R относительно его оси (рис. 277, б).

4. Прямоугольная пластина, конус, шар. Опуская выкладки, приведем формулы, определяющие моменты инерции следующих тел (читатель может получить их самостоятельно, а также найти эти и другие формулы в различных справочниках):

а) сплошная прямоугольная пластина массой M со сторонами $AB=a$ и $BD=b$ (ось x направлена вдоль стороны AB , ось y — вдоль BD):

$$J_x = Mb^2/3, J_y = Ma^2/3;$$

б) прямой сплошной круглый конус массой M с радиусом основания R (ось z направлена вдоль оси конуса):

$$J_z = 0,3MR^2;$$

в) сплошной шар массой M и радиусом R (ось z направлена вдоль диаметра):

$$J_z = 0,4MR^2.$$

Моменты инерции неоднородных тел и тел сложной конфигурации можно определять экспериментально с помощью соответствующих приборов. Один из таких методов рассмотрен в § 129.

§ 103. МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ ТЕЛА ОТНОСИТЕЛЬНО ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ОСЕЙ. ТЕОРЕМА ГЮЙГЕНСА

Моменты инерции данного тела относительно разных осей будут, вообще говоря, разными. Покажем, как, зная момент инерции относительно какой-нибудь одной оси, проведенной в теле, найти момент инерции относительно любой другой оси, ей параллельной.

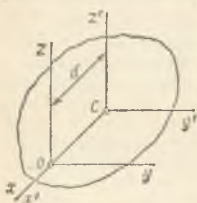


Рис. 278

Проведем через центр масс C тела произвольные оси $Cx'y'z'$, а через любую точку O на оси Cx' — оси $Oxyz$, такие, что $Oy \parallel Cy'$, $Oz \parallel Cz'$ (рис. 278). Расстояние между осями Cz' и Oz обозначим через d . Тогда по формулам (3) будет:

$$J_{Oz} = \sum m_k (x_k^2 + y_k^2), J_{Cz'} = \sum m_k (x_k'^2 + y_k'^2).$$

Но, как видно из рисунка, для любой точки тела $x_k = x_k' + d$ и $x_k^2 = x_k'^2 + d^2 + 2x_k'd$, а $y_k = y_k'$. Подставляя эти значения x_k , y_k в выражение для J_{Oz} и вынося общие множители d^2 и $2d$ за скобки, получим

$$J_{Oz} = \sum m_k (x_k'^2 + y_k'^2) + (\sum m_k) d^2 - (\sum m_k x_k') 2d.$$

В правой части равенства первая сумма равна $J_{Cz'}$, а вторая — массе тела M . Найдем значение третьей суммы. На основании фор-

мул (1) для координат центра масс $\sum m_k x_k' = Mx_C'$. Так как в нашем случае точка C является началом координат, то $x_C' = 0$ и, следовательно, $\sum m_k x_k' = 0$. Окончательно получаем

$$J_{Oz} = J_{Cz'} + Md^2. \quad (9)$$

Формула (9) выражает следующую теорему Гюйгенса*: момент инерции тела относительно данной оси равен моменту инерции относительно оси, ей параллельной, проходящей через центр масс тела, сложенному с произведением массы всего тела на квадрат расстояния между осями.

Из формулы (9) видно, что $J_{Oz} > J_{Cz'}$. Следовательно, из всех осей данного направления наименьший момент инерции будет относительно той оси, которая проходит через центр масс.

Теорема Гюйгенса позволяет найти момент инерции тела относительно данной оси Oz_1 и в том случае, когда известен его момент инерции относительно любой оси Az_2 , параллельной Oz_1 . При этом надо знать расстояния d_1 и d_2 каждой из этих осей от центра масс тела. Тогда, зная J_{Az_2} и d_2 , мы по формуле (9) определяем $J_{Cz'}$, а затем по той же формуле находим искомый момент инерции J_{Oz_1} .

Задача 119. Определить момент инерции тонкого стержня относительно оси Cz , перпендикулярной стержню и проходящей через его центр масс.

Решение. Проведем через конец A стержня ось Az (см. рис. 275; ось Cz на нем не показана). Тогда по формуле (9)

$$J_C = J_A - Md^2.$$

В данном случае $d = l/2$, где l — длина стержня, а величина J_A определяется формулой (6). Следовательно,

$$J_C = Ml^2/3 - Ml^2/4 = Ml^2/12.$$

Задача 120. Определить момент инерции цилиндра относительно оси Az_1 , проходящей через его образующую (см. рис. 277, б).

Решение. По теореме Гюйгенса $J_{Az_1} = J_{Cz} + Md^2$. В данном случае $d = R$, а по формуле (8) $J_{Cz} = MR^2/2$. Подставляя эти значения, получим

$$J_{Az_1} = MR^2/2 + MR^2 = (3/2) MR^2.$$

§ 104*. ЦЕНТРОБЕЖНЫЕ МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ. ПОНЯТИЯ О ГЛАВНЫХ ОСЯХ ИНЕРЦИИ ТЕЛА

Если через точку O провести координатные оси $Oxyz$, то по отношению к этим осям центробежными моментами инерции (или произведениями инерции) называют величины J_{xy} , J_{yz} , J_{zx} , определяемые равенствами:

$$J_{xy} = \sum m_k x_k y_k, J_{yz} = \sum m_k y_k z_k, J_{zx} = \sum m_k z_k x_k, \quad (10)$$

где m_k — массы точек; x_k , y_k , z_k — их координаты; при этом очевидно, что $J_{xy} = J_{yx}$ и т. д.

* Христиан Гюйгенс (1629—1695) — выдающийся голландский ученый, механик, физик и астроном. Изобрел первые маятниковые часы. В связи с этим изучал колебания физического маятника (см. § 129) и ввел понятие о моменте инерции тела (сам термин предложил позже Эйлер).

Для сплошных тел формулы (10) по аналогии с (5') принимают вид

$$J_{xy} = \int_V \rho xy dV \text{ и т. д.} \quad (10')$$

В отличие от осевых центробежные моменты инерции могут быть как положительными, так и отрицательными величинами и, в частности, при определенном образом выбранных осях $Oxyz$ могут обращаться в нули.

Главные оси инерции. Рассмотрим однородное тело, имеющее ось симметрии. Проведем координатные оси $Oxyz$ так, чтобы ось Oz была направлена вдоль оси симметрии (рис. 279). Тогда в силу симметрии каждой точке тела с массой m_k и координатами x_k, y_k, z_k будет соответствовать точка с другим индексом, но с такой же массой и с координатами, равными $-x_k, -y_k, z_k$. В результате получим, что $\sum m_k x_k z_k = 0$ и $\sum m_k y_k z_k = 0$, так как в этих суммах все слагаемые попарно одинаковы по модулю и противоположны по знаку; отсюда, учитывая равенства (10), находим:

$$J_{xz} = 0, \quad J_{yz} = 0. \quad (11)$$

Таким образом, симметрия в распределении масс относительно оси z характеризуется обращением в нуль двух центробежных моментов инерции J_{xz} и J_{yz} . Ось Oz , для которой центробежные моменты инерции J_{xz} , J_{yz} , содержащие в своих индексах наименование этой оси, равны нулю, называется **главной осью инерции тела** для точки O .

Из изложенного следует, что если тело имеет ось симметрии, то эта ось является главной осью инерции тела для любой своей точки.

Главная ось инерции не обязательно является осью симметрии. Рассмотрим однородное тело, имеющее плоскость симметрии (на рис. 279 плоскостью симметрии тела является плоскость $abcd$).

Проведем в этой плоскости какие-нибудь оси Ox, Oz и перпендикулярную им ось Oy . Тогда в силу симметрии каждой точке с массой m_k и координатами x_k, y_k, z_k будет соответствовать точка с такой же массой и координатами, равными $x_k, -y_k, z_k$. В результате, как и в предыдущем случае, найдем, что $\sum m_k x_k y_k = 0$ и $\sum m_k y_k z_k = 0$ или $J_{xy} = 0, J_{yz} = 0$, откуда следует, что ось Oy является главной осью инерции для точки O . Таким образом, если тело имеет плоскость симметрии, то любая ось, перпендикулярная этой плоскости, будет главной осью инерции тела для точки O , в которой ось пересекает плоскость.

Равенства (11) выражают условия того, что ось Oz является главной осью инерции тела для точки O (начала координат). Аналогично

но, если $J_{xy} = 0, J_{yz} = 0$, то ось Oy будет для точки O главной осью инерции. Следовательно, если все центробежные моменты инерции равны нулю, т. е.

$$J_{xy} = 0, \quad J_{yz} = 0, \quad J_{zx} = 0, \quad (11')$$

то каждая из координатных осей $Oxyz$ является главной осью инерции тела для точки O (начала координат).

Например, на рис. 279 все три оси $Oxyz$ являются для точки O главными осями инерции (ось Oz как ось симметрии, а оси Ox и Oy как перпендикулярные плоскостям симметрии).

Моменты инерции тела относительно главных осей инерции называются **главными моментами инерции тела**.

Главные оси инерции, построенные для центра масс тела, называют **главными центральными осями инерции тела**. Из доказанного выше следует, что если тело имеет ось симметрии, то эта ось является одной из главных центральных осей инерции тела, так как центр масс лежит на этой оси. Если же тело имеет плоскость симметрии, то ось, перпендикулярная этой плоскости и проходящая через центр масс тела, будет также одной из главных центральных осей инерции тела.

В приведенных примерах рассматривались симметричные тела, чего для решения задач, с которыми мы будем сталкиваться, достаточно. Однако можно доказать, что через любую точку какого угодно тела можно провести, по крайней мере, три такие взаимно перпендикулярные оси, для которых будут выполняться равенства (11'), т. е. которые будут главными осями инерции тела для этой точки.

Понятие о главных осях инерции играет важную роль в динамике твердого тела. Если по ним направить координатные оси $Oxyz$, то все центробежные моменты инерции обращаются в нули и соответствующие уравнения или формулы существенно упрощаются (см. § 105, 132). С этим понятием связано также решение задач о динамическом уравнении вращающихся тел (см. § 136), о центре удара (см. § 157) и др.

§ 105*. МОМЕНТ ИНЕРЦИИ ТЕЛА ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОЛЬНОЙ ОСИ

Проведем ось OI , образующую с осями $Oxyz$ углы α, β и γ соответственно (рис. 280). По определению, $J_I = \sum m_k r_k^2$, где, как видно из треугольника OB_kD_k , $h_k^2 = r_k^2 - (OD_k)^2$. Но OD_k , как проекция вектора $\vec{r}_k = x_k \vec{i} + y_k \vec{j} + z_k \vec{k}$ на ось OI , равна сумме проекций составляющих этого вектора на ту же ось, причем $(x_k)_I = x_k \cos \alpha$ и т. д.; кроме того, $r_k^2 = x_k^2 + y_k^2 + z_k^2$. Тогда

$$J_I = \sum m_k [x_k^2 + y_k^2 + z_k^2 - (x_k \cos \alpha + y_k \cos \beta + z_k \cos \gamma)^2].$$

Если сначала учесть, что $1 - \cos^2 \alpha = \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma$ и т. д., а затем вынести квадраты и произведения косинусов, как общие множители, за скобки и принять во внимание формулы (3) и (10), то окончательно получим

$$J_I = J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma - 2J_{xy} \cos \alpha \cos \beta - 2J_{yz} \cos \beta \cos \gamma - 2J_{zx} \cos \gamma \cos \alpha. \quad (12)$$

271



Рис. 279

Если же в качестве осей $Oxyz$ выбрать главные оси инерции тела для точки O то формула упрощается:

$$J_I = J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma. \quad (12')$$

Формулы (12) или (12') позволяют, зная входящие в их правые части моменты инерции относительно заданных осей $Oxyz$, определить момент инерции относительно любой оси, проходящей через точку O^* . Если же известно и положение центра масс тела, то, используя формулу (9), можно найти момент инерции относительно оси, проходящей через любую другую точку.

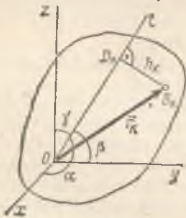


Рис. 280

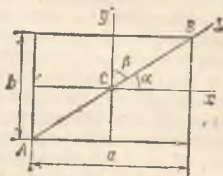


Рис. 281

Задача 121. Найти момент инерции однородной прямоугольной пластины с массой m и сторонами a и b относительно ее диагонали (рис. 281).

Решение. Проведем через центр C пластины ось Cx (ось Cz на рисунке не показана), которые, как оси симметрии, будут для точки C главными осями инерции. Тогда по формуле (12'), учитывая, что $\gamma = 90^\circ$, получим

$$J_I = J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta.$$

По аналогии с результатом, полученным в задаче 119, для пластины будет $J_x = mb^2/12$, $J_y = ma^2/12$; кроме того, $\cos \alpha = a/c$, $\cos \beta = b/c$, где $c = AB$. В результате окончательно найдем

$$J_I = ma^2b^2/6c^2 = ma^2b^2/6(a^2 + b^2).$$

В заключение рассмотрим, в чем проявляется влияние введенных характеристик распределения масс на частном примере вращения вокруг оси Oz стержня с напаянными на него одинаковыми шарами A и B (рис. 282).

Если $h_2 \neq h_1$, то центр масс системы не лежит на оси Oz и при вращении появятся давления на подшипники; если $h_2 = h_1$, центр масс лежит на оси и этих давлений не будет.

Если при $h_2 = h_1$ расстояния шаров от оси увеличить, то положение центра масс не изменится, но увеличится момент инерции J_z и при прочих равных условиях вращение будет происходить медленнее.

Если стержень DE повернуть в плоскости Oyz так, чтобы $\angle DCz$ не был прямым, а расстояния h_1 и $h_2 = h_1$ сохранить, сместив шары

* Шесть величин $J_x, J_y, J_z, -J_{xy}, -J_{yz}, -J_{zx}$ определяют так называемый тензор инерции и являются его компонентами.

к концам стержня, то ни положение центра масс, ни момент инерции J_z не изменятся, но станет не равным нулю центробежный момент инерции J_{yz} и ось Oz не будет главной; в результате при вращении возникнут дополнительные боковые давления на подшипники (ось будет «бить»).

Глава XXII

ТЕОРЕМА О ДВИЖЕНИИ ЦЕНТРА МАСС СИСТЕМЫ

§ 106. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ

Рассмотрим систему, состоящую из n материальных точек. Выделим какую-нибудь точку системы с массой m_k . Обозначим равнодействующую всех приложенных к точке внешних сил (и активных, и реакций связей) через $\vec{F}_k^i$, а равнодействующую всех внутренних сил — через $\vec{F}_k^e$. Если точка имеет при этом ускорение $\vec{a}_k$, то по основному закону динамики $m_k \vec{a}_k = \vec{F}_k^i + \vec{F}_k^e$.

Аналогичный результат получим для любой точки. Следовательно, для всей системы будет

$$\left. \begin{aligned} m_1 \vec{a}_1 &= \vec{F}_1^e + \vec{F}_1^i, \\ m_2 \vec{a}_2 &= \vec{F}_2^e + \vec{F}_2^i, \\ &\vdots \\ m_n \vec{a}_n &= \vec{F}_n^e + \vec{F}_n^i. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Уравнения (13) представляют собой дифференциальные уравнения движения системы в векторной форме (в них $\vec{a}_k = \ddot{\vec{r}}_k = \ddot{\vec{r}}_k$). Входящие в правые части уравнений силы могут в общем случае зависеть от времени, координат точек системы и их скоростей.

Проектируя равенства (13) на какие-нибудь координатные оси, получим дифференциальные уравнения движения системы в проекциях на эти оси.

Полное решение основной задачи динамики для системы будет состоять в том, чтобы, зная заданные силы и наложенные связи, проинтегрировать соответствующие дифференциальные уравнения и определить в результате закон движения каждой из точек системы и реакции связей. Сделать это аналитически удастся лишь в отдельных случаях, когда число точек системы невелико, или же интегрируя уравнения численно с помощью ЭВМ.

Однако при решении многих конкретных задач необходимость находить закон движения каждой из точек системы не возникает, а бывает достаточно найти какие-то характеристики, определяющие движение всей системы в целом. Например, чтобы установить, как движется под действием приложенных сил кривошипно-ползунный механизм (см. рис. 158 в § 57), достаточно определить закон враще-

или кривошипа, т. е. найти зависимость угла его поворота φ от времени t . Обычно для отыскания подобных решений уравнения (13) непосредственно не применяют, а применяют другие, разработанные в динамике методы. К их числу относятся методы, которые дают широко используемые в инженерной практике *общие теоремы динамики системы*, получаемые как следствия уравнений (13); эти теоремы и будут рассмотрены в данной и в трех последующих главах.

Но предварительно решим одну задачу, показывающую, что искомый результат можно иногда эффективно находить и непосредственно, используя дифференциальные уравнения движения системы.

Задача 122. Динамический гаситель колебаний. Укрепленный на пружине груз 1 совершает вынужденные колебания под действием возмущающей силы $\bar{Q}$, проекция которой $Q_x = Q_0 \sin pt$ (см. § 96).

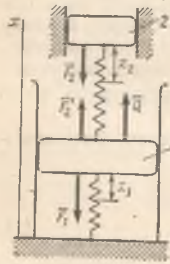


Рис. 283

Определить, при каких условиях можно погасить эти колебания, прикрепив к грузу 1 на пружине с коэффициентом жесткости c_2 груз 2 массой m_2 (рис. 283).

Решение. Будем определять положения грузов координатами x_1 и x_2 , отсчитываемыми от положений статического равновесия грузов, направив ось x по вертикали вверх. Тогда силы тяжести уравновесятся силами упругости $F_{1c1} = c_1 \lambda_{1c1}$ и $F_{2c2} = c_2 \lambda_{2c2}$ и из уравнений движения исключаются (см. в § 94 задачу 112), а учитываемые при движении силы упругости будут пропорциональны удлинениям, которые получат пружины при смещениях грузов от положений статического равновесия. Эти удлинения будут соответственно равны $\lambda_1 = x_1$ и $\lambda_2 = x_2 - x_1$ и на груз 2 будет действовать сила упругости F_2 ($F_{2x} = -c_2 \lambda_2$), а на груз 1 — силы $\bar{F}_2 = -F_2$, F_1 ($F_{1x} = -c_2 \lambda_1$) и $\bar{Q}$. В результате получим следующие дифференциальные уравнения движения грузов:

$$m_1 \ddot{x}_1 = -c_1 x_1 + c_2 (x_2 - x_1) + Q_0 \sin pt, \quad m_2 \ddot{x}_2 = -c_2 (x_2 - x_1).$$

Чтобы колебания груза 1 гасились, должно быть $x_1 = 0$. Тогда

$$c_2 x_2 + Q_0 \sin pt = 0 \quad \text{и} \quad m_2 \ddot{x}_2 = -c_2 x_2.$$

Из первого уравнения $x_2 = -(Q_0/c_2) \sin pt$ и $\ddot{x}_2 = p^2 (Q_0/c_2) \sin pt$. В результате подстановка во второе уравнение после сокращений даст

$$m_2 p^2 = c_2.$$

Это и будет искомым условием гашения, в котором одной из величин m_2 или c_2 можно задаваться произвольно. Конечно, желательно, чтобы масса m_2 была меньше, но при малой m_2 и заданном p будет мало и c_2 , а это приведет к нежелательному увеличению амплитуды Q_0/c_2 колебаний груза 2.

§ 107. ТЕОРЕМА О ДВИЖЕНИИ ЦЕНТРА МАСС

В ряде случаев для определения характера движения системы (особенно твердого тела) требуется знать закон движения ее центра масс. Чтобы найти этот закон, обратимся к уравнениям движения системы (13) и сложим почленно их левые и правые части. Тогда получим

$$\sum m_k \ddot{r}_k = \sum \bar{F}_k + \sum \bar{F}_k. \quad (14)$$

Преобразуем левую часть равенства. Из формулы (1') для радиуса-вектора центра масс имеем

$$\sum m_k \bar{r}_k = M \bar{r}_C.$$

Беря от обеих частей этого равенства вторую производную по времени и замечая, что производная от суммы равна сумме производных, найдем

$$\sum m_k \frac{d^2 \bar{r}_k}{dt^2} = M \frac{d^2 \bar{r}_C}{dt^2}$$

или

$$\sum m_k \ddot{a}_k = M \ddot{a}_C, \quad (15)$$

где $\ddot{a}_C$ — ускорение центра масс системы. Так как по свойству внутренних сил системы $\sum \bar{F}_k = 0$, получим окончательно из равенства (14), учтя (15),

$$M \ddot{a}_C = \sum \bar{F}_k. \quad (16)$$

Уравнение (16) и выражает теорему о движении центра масс системы: *произведение массы системы на ускорение ее центра масс равно геометрической сумме всех действующих на систему внешних сил*. Сравнивая уравнение (16) с уравнением движения материальной точки (§ 74, формула (2)), придем к другому выражению теоремы: *центр масс системы движется как материальная точка, масса которой равна массе всей системы и к которой приложены все внешние силы, действующие на систему*.

Проектируя обе части равенства (16) на координатные оси, получим:

$$M \ddot{x}_C = \sum F_{kx}, \quad M \ddot{y}_C = \sum F_{ky}, \quad M \ddot{z}_C = \sum F_{kz}. \quad (16')$$

Эти уравнения представляют собой дифференциальные уравнения движения центра масс в проекциях на оси декартовой системы координат.

Значение доказанной теоремы состоит в следующем.

1. Теорема дает обоснование методам динамики точки. Из уравнений (16') видно, что решения, которые мы получаем, рассматривая данное тело как материальную точку, определяют закон движения центра масс этого тела, т. е. имеют вполне конкретный смысл.

В частности, если тело движется поступательно, то его движение полностью определяется движением центра масс. Таким образом, поступательно движущееся тело можно всегда рассматривать как материальную точку с массой, равной массе тела. В остальных случаях тело можно рассматривать как материальную точку лишь тогда, когда практически для определения положения тела достаточно знать положение его центра масс и допустимо по условиям решаемой задачи не принимать во внимание вращательную часть движения тела.

на систему внешних сил. Первой задачей мы занимались в динамике точки. Примеры решения второй задачи рассмотрим ниже.

Теорема позволяет исключить из рассмотрения все внутренние силы. Поэтому рассматриваемую систему надо стараться выбирать так, чтобы ряд наперед неизвестных сил сделать внутренними.

В случаях, когда имеет место закон сохранения движения центра масс, теорема позволяет по перемещению одной части системы найти перемещение другой ее части.

Мы доказали, что когда $\Sigma F_{kx} = 0$ и в начальный момент времени $v_{Cx} = 0$, то при движении системы $x_C = \text{const}$. Пусть для определенности система состоит из трех тел с массами m_1, m_2, m_3 и начальными координатами их центров масс x_1, x_2, x_3 . Если под действием внутренних (или внешних) сил тела совершат абсолютные перемещения, проекции которых на ось Ox будут ξ_1, ξ_2, ξ_3 , то соответствующие координаты станут равны $x_1 + \xi_1, x_2 + \xi_2, x_3 + \xi_3$. Тогда по формулам (1) координата центра масс x_C всей системы в начальном и конечном положениях определяется равенствами:

$$Mx_{C_0} = m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3;$$

$$Mx_{C_1} = m_1(x_1 + \xi_1) + m_2(x_2 + \xi_2) + m_3(x_3 + \xi_3).$$

Так как $x_C = \text{const}$, то $x_{C_0} = x_{C_1}$ и, следовательно,

$$m_1\xi_1 + m_2\xi_2 + m_3\xi_3 = 0 \quad (17)$$

или

$$\rho_1\xi_1 + \rho_2\xi_2 + \rho_3\xi_3 = 0. \quad (17')$$

Таким образом, когда имеет место закон сохранения движения центра масс вдоль оси Ox , то алгебраическая сумма произведений масс (или весов) тел системы на проекции абсолютных перемещений их центров масс должна быть равна нулю, если только в начальный момент времени $v_{Cx} = 0$. При вычислении $\xi_1, \xi_2, \dots$ следует всегда учитывать их знаки.

Задача 123. На носу и корме лодки весом p сидят на расстоянии l друг от друга два человека весом p_A и p_B каждый (рис. 285). Пренебрегая сопротив-

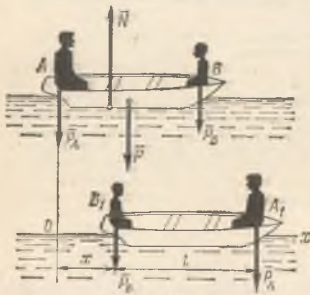


Рис. 285

лением воды, определить, куда и насколько переместится лодка, если люди поменяются местами.

Решение. Чтобы исключить из рассмотрения неизвестные нам силы трения подошв о дно лодки и мускульные усилия людей, будем рассматривать лодку и людей как одну систему (при этом названные силы станут внутренними). Внешними силами, действующими на систему, будут вертикальные силы p, p_A, p_B, N . Тогда $\Sigma F_{kx} = 0$, и так как в начальный момент времени $v_{Cx} = 0$, то $x_C = \text{const}$. Следовательно, абсолютные перемещения всех тел связаны зависимостью (17).

Изображая лодку и людей в начальном и конечном положениях, мы видим, что перемещение лодки $\xi_l = x^*$. Далее, для первого чело-

века абсолютное перемещение $\xi_A = x + l$; абсолютное перемещение второго человека равно ξ_B , а проекция этого перемещения на ось Ox будет $\xi_B = -(l - x)$. Тогда по уравнению (17')

$$px + p_A(x + l) + p_B[-(l - x)] = 0.$$

Отсюда находим, что перемещение лодки

$$x = (p_B - p_A)l/P, \text{ где } P = p + p_A + p_B.$$

Если $p_B > p_A$, то $x > 0$, т. е. лодка смещается вправо; при $p_B < p_A$ смещение лодки произойдет влево. Когда $p_B = p_A$, лодка остается на месте.

Подчеркиваем еще раз: систему, движение которой надо рассмотреть при решении подобных задач, следует выбирать так, чтобы наперед неизвестные силы сделали внутренними.

Задача 124. Центр масс вала мотора смещен от оси вращения на величину $AB = b$. Масса вала m_1 , а масса всех остальных частей мотора m_2 . Определить, по какому закону будет двигаться мотор, поставленный на гладкую горизонтальную плоскость, когда вал вращается с постоянной угловой скоростью ω . Найти дополнительно, какое максимальное усилие будет испытывать болт D , если с его помощью неподвижно закрепить мотор.

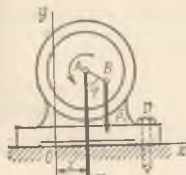


Рис. 286

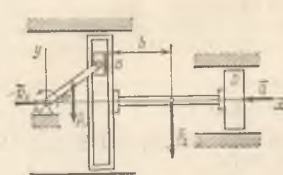


Рис. 287

Решение. Чтобы исключить силы, вращающие вал, сделав их внутренними, рассмотрим весь мотор с валом как одну систему.

1. При незакрепленном моторе все действующие на него силы ($\vec{p}_1 = m_1\vec{g}$, $\vec{p}_2 = m_2\vec{g}$ и реакция плоскости) будут вертикальными, и здесь, как и в предыдущей задаче, будет иметь место закон сохранения движения центра масс вдоль оси Ox . Изображаем мотор в произвольном положении (рис. 286), считая начальным то положение, когда точки B и A лежат на одной вертикали (на оси Oy). Тогда в произвольном положении $\xi_A = x$, $\xi_B = x + b \sin \varphi$. Отсюда, учитывая, что $\varphi = \omega t$, найдем по формуле (17)

$$m_2x + m_1(x + b \sin \omega t) = 0,$$

откуда

$$x = -\frac{m_1b}{M} \sin \omega t, \text{ где } M = m_1 + m_2.$$

Следовательно, мотор будет совершать гармонические колебания с круговой частотой ω .

2. Когда мотор закреплен, то по первому из уравнений (16') горизонтальная реакция R_x болта будет

$$R_x = M\ddot{x}_C, \text{ где } \ddot{x}_C = -\frac{1}{M}(m_1\ddot{x}_B + m_2\ddot{x}_A).$$

В этом случае точка A неподвижна и $x_A = l$ ($l = \text{const}$), а $x_B = l + b \sin \omega t$. В результате, дифференцируя выражение $\ddot{x}_C$ и умножая его на M (M здесь всюду — масса всей системы), находим

$$R_x = M\ddot{x}_C = m_1\ddot{x}_B = -m_1b\omega^2 \sin \omega t.$$

* Во избежание ошибок в знаках рекомендуется, независимо от того, куда фактически происходит смещение, изображать лодку (систему) в смещенном положении так, чтобы координата x была положительной (рис. 285). Если после подсчетов значение x получится отрицательным, то это будет означать, что при условиях задачи смещение происходит в другую сторону.

Сила давления на болт равна по модулю $|R_x|$ и направлена в противоположную сторону: ее максимальное значение будет $m_1 b \omega^2$. Во избежание ударов мотора по болтам при его работе, затяжка болтов Q должна быть такой, чтобы суммарная сила трения мотора о плоскость, на которой он установлен, т. е. fQ , была не меньше $m_1 b \omega^2$.

Задача 125. Кривошип AB длиной l и массой m_1 , вращающийся с постоянной угловой скоростью ω , приводит в движение кулису и связанный с нею поршень D , общая масса которых равна m_2 (рис. 287). На поршень при его движении действует постоянная сила Q . Пренебрегая трением о направляющие, найти наибольшее горизонтальное давление на ось A кривошипа.

Решение. Чтобы исключить силы, вращающие кривошип, и давление на него со стороны кулисы, рассмотрим движение всей системы. Тогда по первому из уравнений (16'), если обозначить горизонтальную реакцию оси A через R_x , будет

$$M\ddot{x}_C = R_x - Q,$$

где согласно формулам (1) $M\ddot{x}_C = m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2$.

В нашем случае $x_1 = 0,5r \cos \omega t$, $x_2 = b + r \cos \omega t$, так как $\varphi = \omega t$. В результате находим

$$R_x = Q + M\ddot{x}_C = Q - (0,5m_1 + m_2)r\omega^2 \cos \omega t.$$

Сила давления на ось равна по модулю $|R_x|$ и направлена в противоположную сторону. Давление будет максимальным, когда $\varphi = 180^\circ$, и будет равно $Q + (0,5m_1 + m_2)r\omega^2$.

Глава XXIII

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ

§ 110. КОЛИЧЕСТВО ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ

Количеством движения системы будем называть векторную величину $\bar{Q}$, равную геометрической сумме (главному вектору) количества движения всех точек системы (рис. 288):

$$\bar{Q} = \sum m_k \bar{v}_k. \quad (18)$$

Пользуясь этим определением, найдем формулу, с помощью которой значительно легче вычислять величину $\bar{Q}$, а также уяснить ее смысл. Из равенства (1') следует, что

$$\sum m_k \bar{r}_k = M \bar{r}_C.$$

Беря от обеих частей производную по времени, получим

$$\sum m_k \frac{d\bar{r}_k}{dt} = M \frac{d\bar{r}_C}{dt} \quad \text{или} \quad \sum m_k \bar{v}_k = M \bar{v}_C.$$

Отсюда находим, что

$$\bar{Q} = M \bar{v}_C, \quad (19)$$

т. е. количество движения системы равно произведению массы всей системы на скорость ее центра масс. Этим результатом особенно удобно пользоваться при вычислении количеств движения твердых тел.

Из формулы (19) видно, что если тело (или система) движется так, что центр масс остается неподвижным, то количество движения тела равно нулю. Например, количество движения тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, проходящей через его центр масс, будет равно нулю.

Если же движение тела является сложным, то величина $\bar{Q}$ не будет зависеть от его вращательного движения вокруг центра масс. Например, для катящегося колеса $\bar{Q} = M \bar{v}_C$, независимо от того, как вращается колесо вокруг его центра масс C .

Таким образом, количество движения можно рассматривать как характеристику поступательного движения системы (тела), а при сложном движении — как характеристику поступательной части движения вместе с центром масс.

§ 111. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

Рассмотрим систему, состоящую из n материальных точек. Составим для этой системы дифференциальные уравнения движения (13) и сложим их почленно. Тогда получим

$$\sum m_k \bar{a}_k = \sum \bar{F}_k^e + \sum \bar{F}_k^i.$$

Последняя сумма по свойству внутренних сил равна нулю. Кроме того,

$$\sum m_k \bar{a}_k = \frac{d}{dt} \sum m_k \bar{v}_k = \frac{d\bar{Q}}{dt}.$$

Окончательно находим

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \sum \bar{F}_k^e. \quad (20)$$

Уравнение (20) выражает теорему об изменении количества движения системы в дифференциальной форме: производная по времени от количества движения системы равна геометрической сумме всех действующих на систему внешних сил. В проекциях на координатные оси будет:

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum F_{kx}^e, \quad \frac{dQ_y}{dt} = \sum F_{ky}^e, \quad \frac{dQ_z}{dt} = \sum F_{kz}^e. \quad (20')$$

Найдем другое выражение теоремы. Пусть в момент времени $t=0$ количество движения системы равно $\bar{Q}_0$, а в момент t_1 становится равным $\bar{Q}_1$. Тогда, умножая обе части равенства (20) на dt и интегрируя, получим

$$\bar{Q}_1 - \bar{Q}_0 = \sum_0^{t_1} \bar{F}_k^e dt$$

или

$$\bar{Q}_1 - \bar{Q}_0 = \sum \bar{S}_k, \quad (21)$$

так как интегралы, стоящие справа, дают импульсы внешних сил. Уравнение (21) выражает теорему об изменении количества движения системы в интегральной форме: изменение количества движения системы за некоторый промежуток времени равно сумме импульсов, действующих на систему внешних сил за тот же промежуток времени.

В проекциях на координатные оси будет:

$$Q_{1x} - Q_{0x} = \sum S_{1x}, \quad Q_{1y} - Q_{0y} = \sum S_{1y}, \quad Q_{1z} - Q_{0z} = \sum S_{1z}. \quad (21')$$

Укажем на связь между доказанной теоремой и теоремой о движении центра масс. Так как $\bar{Q} = M\bar{v}_C$, то, подставляя это значение в равенство (20) и учитывая, что $d\bar{v}_C/dt = \bar{a}_C$, получим $M\bar{a}_C = \sum \bar{F}_k$, т. е. уравнение (16).

Следовательно, теорема о движении центра масс и теорема об изменении количества движения системы представляют собой, по существу, две разные формы одной и той же теоремы. В тех случаях, когда изучается движение твердого тела (или системы тел), можно в равной мере пользоваться любой из этих форм, причем уравнением (16) обычно пользоваться удобнее. Для непрерывной же среды (жидкость, газ) при решении задач обычно пользуются теоремой об изменении количества движения системы. Важные приложения эта теорема имеет также в теории удара (см. гл. XXXI) и при изучении реактивного движения (см. § 114).

Практическая ценность теоремы состоит в том, что она позволяет исключить из рассмотрения наперед неизвестные внутренние силы (например, силы давления друг на друга частиц жидкости).

§ 112. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

Из теоремы об изменении количества движения системы можно получить следующие важные следствия.

1. Пусть сумма всех внешних сил, действующих на систему, равна нулю:

$$\sum \bar{F}_k = 0.$$

Тогда из уравнения (20) следует, что при этом $\bar{Q} = \text{const}$. Таким образом, если сумма всех внешних сил, действующих на систему, равна нулю, то вектор количества движения системы будет постоянен по модулю и направлению.

2. Пусть внешние силы, действующие на систему, таковы, что сумма их проекций на какую-нибудь ось (например, Ox) равна нулю:

$$\sum F_{kx} = 0.$$

Тогда из уравнений (20) следует, что при этом $Q_x = \text{const}$. Таким образом, если сумма проекций всех действующих внешних сил на

какую-нибудь ось равна нулю, то проекция количества движения системы на эту ось есть величина постоянная.

Эти результаты и выражают закон сохранения количества движения системы. Из них следует, что внутренние силы изменить количество движения системы не могут. Рассмотрим некоторые примеры.

Явление отдачи или отката. Если рассматривать винтовку и пулю как одну систему, то давление пороховых газов при выстреле будет силой внутренней. Эта сила не может изменить количества движения системы, равное до выстрела нулю. Но так как пороховые газы, действуя на пулю, сообщают ей некоторое количество движения, направленное вперед, то они одновременно должны сообщить винтовке такое же количество движения в обратном направлении. Это вызовет движение винтовки назад, т. е. так называемую отдачу. Аналогичное явление получается при стрельбе из орудия (откат).

Работа гребного винта (пропеллера). Винт сообщает некоторой массе воздуха (или воды) движение вдоль оси винта, отбрасывая эту массу назад. Если рассматривать отбрасываемую массу и самолет (или судно) как одну систему, то силы взаимодействия винта и среды, как внутренние, не могут изменить суммарное количество движения этой системы. Поэтому при отбрасывании массы воздуха (воды) назад самолет (или судно) получает соответствующую скорость движения вперед, такую, что общее количество движения рассматриваемой системы остается равным нулю, так как оно было нулем до начала движения.

Аналогичный эффект достигается действием весел или гребных колес. Реактивное движение. В реактивном снаряде (ракете) газообразные продукты горения топлива с большой скоростью выбрасываются из отверстия в хвостовой части ракеты (из сопла ракетного двигателя). Действующие при этом силы давления будут силами внутренними и не могут изменить количество движения системы ракета — продукты горения топлива. Но так как выбрасываемые газы имеют известное количество движения, направленное назад, то ракета получает при этом соответствующую скорость, направленную вперед. Величина этой скорости будет определена в § 114.

Обращаем внимание на то, что винтовой двигатель (предыдущий пример) сообщает объекту, например самолету, движение за счет отбрасывания назад частиц той среды, в которой он движется. В безвоздушном пространстве такое движение невозможно. Реактивный же двигатель сообщает движение за счет отброса назад масс, вырабатываемых в самом двигателе (продукты горения). Движение это в равной мере возможно и в воздухе, и в безвоздушном пространстве.

При решении задач применение теоремы позволяет исключить из рассмотрения все внутренние силы. Поэтому рассматриваемую систему надо стараться выбирать так, чтобы все (или часть) заранее неизвестных сил сделать внутренними.

Закон сохранения количества движения удобно применять в тех случаях, когда по изменению поступательной скорости одной части системы надо определить скорость другой части. В частности, этот закон широко используется в теории удара.

Задача 126. Пуля массой m , летящая горизонтально со скоростью $\bar{u}$, падает в установленный на тележке ящик с песком (рис. 289). С какой скоростью начнет двигаться тележка после удара, если масса тележки вместе с ящиком равна M ?

Решение. Будем рассматривать пулю и тележку как одну систему. Это позволит при решении задачи исключить силы, которые возникают при ударе пули о ящик. Сумма проекций приложенных к системе внешних сил на горизонтальную ось Ox равна нулю. Следовательно, $Q_x = \text{const}$ или $Q_{1x} = Q_{0x}$, где Q_0 —

количество движения системы до удара; $\bar{Q}_1$ — после удара. Так как до удара тележка неподвижна, то $Q_{0x} = m\bar{u}$.

После удара тележка и пуля движутся с общей скоростью, которую обозначим через v . Тогда $Q_{1x} = (m + M)v$.

Приравняв правые части выражений Q_{1x} и Q_{0x} , найдем

$$v = \frac{m\bar{u}}{(m + M)}.$$

Задача 127. Определить скорость свободного отката орудия, если вес откатывающихся частей равен P , вес снаряда p , а скорость снаряда по отношению к каналу ствола равна в момент вылета u .

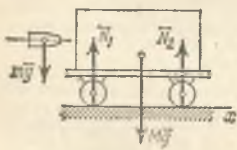


Рис. 289

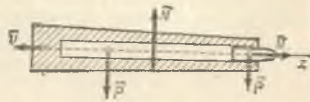


Рис. 290

Решение. Для исключения неизвестных сил давления пороховых газов рассмотрим снаряд и откатывающиеся части как одну систему.

Пренебрегая за время движения снаряда в канале ствола сопротивлением откату и силами $\bar{P}$, $\bar{p}$ и $\bar{N}$, которые очень малы по сравнению с силами давления пороховых газов, вызывающих откат, найдем, что сумма приложенных к системе внешних сил равна нулю (рис. 290; откатывающиеся вместе со стволом части на нем не показаны). Тогда $\bar{Q} = \text{const}$ и $Q_x = \text{const}$, а так как до выстрела система неподвижна ($Q_0 = 0$), то и в любой момент времени $Q_x = 0$.

Обозначим скорость откатывающихся частей в конечный момент через $\bar{v}$. Тогда абсолютная скорость снаряда в этот момент равна $\bar{u} + \bar{v}$. Следовательно,

$$Q_x = P\bar{v}_x/g + p(\bar{u}_x + \bar{v}_x)/g = 0. \quad (a)$$

Отсюда находим

$$\bar{v}_x = -\frac{p\bar{u}_x}{(P + p)}.$$

Если бы была известна абсолютная скорость вылета снаряда $u_{аб}$, то в равенство (a) вместо $\bar{u}_x + \bar{v}_x$ вошла бы сразу величина $u_{абx}$, откуда

$$\bar{v}_x = -\frac{p u_{абx}}{P}.$$

Знак минус в обоих случаях указывает, что направление $\bar{v}$ противоположно $\bar{u}$.

Подчеркиваем, что при вычислении полного количества движения системы надо учитывать абсолютные скорости движения ее частей.

§ 113*. ПРИЛОЖЕНИЕ ТЕОРЕМЫ К ДВИЖЕНИЮ ЖИДКОСТИ (ГАЗА)

Рассмотрим установившееся течение жидкости. Установившимся называется течение, при котором в каждой точке области, занятой жидкостью, скорости $\bar{v}$ ее частиц, давление p и плотность ρ не изменяются со временем. При таком течении траектории жидких частиц являются одновременно линиями тока, т. е. кривыми, в каждой точке которых касательные направлены так же, как скорости жидких частиц, находящихся в данный момент времени в этих точках.

Выделим в движущейся жидкости область, ограниченную линиями тока, называемую *трубкой тока* (рис. 291, a; в случае движения в трубе это область, ограниченная стенками трубы). При установившемся течении через любое поперечное сечение трубки с площадью S за 1 с будет протекать одно и то же количество массы жидкости

$$G_c = \rho S v, \quad (22)$$

где v — средняя скорость жидкости в данном сечении. Величину G_c называют *секундным массовым расходом жидкости*.

Выделим в трубке в момент времени t объем жидкости 1—2, ограниченный сечениями 1 и 2 (рис. 291) и обозначим его количество движения $\bar{Q}_{12}$. В момент времени $t + dt$ этот объем перейдет в положение 3—4, а его количество движения будет

$$\bar{Q}_{34} = \bar{Q}_{12} + \bar{Q}_{24} - \bar{Q}_{13} = \bar{Q}_{12} + G_c dt \cdot \bar{v}_2 - G_c dt \cdot \bar{v}_1,$$

так как в объем 1—3 за время dt войдет масса жидкости $G_c dt$ со скоростью $\bar{v}_1$, а в объем 2—4 — та же масса со скоростью $\bar{v}_2$. Тогда

$$d\bar{Q} = \bar{Q}_{34} - \bar{Q}_{12} = G_c (\bar{v}_2 - \bar{v}_1) dt \quad \text{и} \\ d\bar{Q}/dt = G_c (\bar{v}_2 - \bar{v}_1).$$

Подставляя это значение производной в уравнение (20), получим

$$G_c (\bar{v}_2 - \bar{v}_1) = \sum \bar{F}_k. \quad (23)$$

Равенство (23) выражает теорему об изменении количества движения для установившегося движения жидкости (или газа) в трубке тока (или в трубе). Величину $G_c \bar{v}$ называют *секундным количеством движения жидкости*. Тогда теорему можно сформулировать так: *разность секундных количеств движения жидкости, протекающей через два поперечных сечения трубки тока (трубы), равна сумме внешних сил, действующих на объем жидкости, ограниченный этими сечениями и поверхностью трубки тока (стенками трубы)*. Теорема позволяет при решении задач исключить из рассмотрения все внутренние силы (силы взаимных давлений частиц жидкости в объеме 1—2).

В случае движения в трубе разделим действующие внешние силы на главный вектор массовых сил (сил тяжести) $\bar{F}^m$, действующих на все частицы жидкости, и главные векторы поверхностных сил: $\bar{R}^n$ — сил давления на жидкость со стороны стенок трубы (реакций

трубы), P_1^n и P_2^n — сил давления в сечениях 1 и 2 со стороны жидкости, находящейся вне объема 1—2 (рис. 291, б); численно $P_1^n = p_1 S_1$, $P_2^n = p_2 S_2$. Тогда уравнение (23) можно представить в виде

$$G_c(\bar{v}_2 - \bar{v}_1) = \bar{F}^n + \bar{R}_1^n + \bar{P}_1^n + \bar{P}_2^n. \quad (23')$$

Равенство (23') выражает теорему, называемую *теоремой Эйлера*.

Задача 128. Давление струи. Струя воды вытекает из брандспойта со скоростью $v=10$ м/с и ударяет под прямым углом о твердую стенку (рис. 292). Диаметр вытекающей струи $d=4$ см. Определить силу динамического давления на стенку.

Решение. Рассмотрим часть струи, заключенную между сечениями 1 и 2, и применим к ней теорему, выражаемую равенством (23), проектируя обе ее части на ось Ox . Учтя, что внешней силой, дающей проекцию на ось Ox , является реакция $\bar{R}$ стенки и что $R_x = -R$, получим

$$G_c(v_{2x} - v_{1x}) = -R. \quad (a)$$

Откуда, так как $v_{1x}=v$, $v_{2x}=0$, а по формуле (22) $G_c = \rho \pi d^2 v / 4$, где плотность воды $\rho = 1000$ кг/м³, находим окончательно

$$R = \rho (\pi d^2 / 4) v^2 = 125,6 \text{ Н}.$$

Сила давления струи на стенку равна этой же величине.

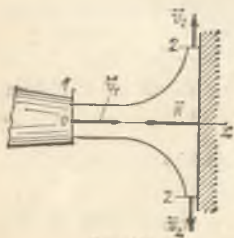


Рис. 292

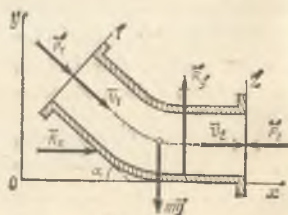


Рис. 293

Задача 129. По расположенному в вертикальной плоскости и изогнутому под углом α колену трубы длиной l и радиусом r течет вода со средней по сечению скоростью v (рис. 293). Определить полную силу давления воды на колено, если давления на входе и выходе из колена равны соответственно p_1 и p_2 .

Решение. Применим к объему 1—2 воды, заключенной в колене, уравнение (23') в проекциях на оси Ox и Oy . Внешними силами для этого объема будут массовая сила (сила тяжести) mg , силы давления $\bar{P}_1$ и $\bar{P}_2$ в сечениях 1 и 2 и суммарная реакция $\bar{R}$ стенок колена, имеющая составляющие $\bar{R}_x$ и $\bar{R}_y$. Тогда получим

$$\begin{cases} G_c(v_{2x} - v_{1x}) = R_x + P_1 \cos \alpha - P_2, \\ G_c(v_{2y} - v_{1y}) = R_y - P_1 \sin \alpha - mg. \end{cases} \quad (a)$$

Так как в данном случае $v_1 = v_2 = v$, то $v_{1x} = v \cos \alpha$, $v_{2x} = v$, $v_{1y} = -v \sin \alpha$, $v_{2y} = 0$. Кроме того, по формуле (22) $G_c = \rho \pi r^2 v$, где ρ — плотность воды; $P_1 = p_1 \pi r^2$; $P_2 = p_2 \pi r^2$, а масса воды в колене $m = \rho l \pi r^2$. Подставляя все эти величины в уравнения (a), найдем окончательно:

$$R_x = \pi r^2 [\rho v^2 (1 - \cos \alpha) + p_2 - p_1 \cos \alpha], \quad R_y = \pi r^2 [\rho v^2 \sin \alpha + p_1 \sin \alpha + \rho g l].$$

Силы давления воды на колено трубы численно равны R_x и R_y , но имеют противоположные направления.

§ 114.* ТЕЛО ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ. ДВИЖЕНИЕ РАКЕТЫ

В классической механике масса каждой точки или частицы системы считается при движении величиной постоянной. Однако в некоторых случаях состав частиц, образующих данную систему или тело, может с течением времени изменяться (отдельные частицы могут отделяться от тела или присоединяться к нему извне); вследствие этого будет изменяться и суммарная масса рассматриваемого тела. Задачи, в которых имеет место подобное присоединение или отделение единичных масс, нам уже встречались (см. выше задачи 126, 127 или задачу 86 в § 78). В этом параграфе будет рассмотрен другой практически важный случай, когда процесс отделения от тела или присоединения к нему частиц происходит непрерывно. Тело, масса M которого непрерывно изменяется с течением времени вследствие присоединения к нему или отделения от него материальных частиц, будем называть *телом переменной массы*. Для тела переменной массы

$$M = F(t),$$

где $F(t)$ — непрерывная функция времени.

Когда такое тело движется поступательно (или когда вращательная часть его движения не учитывается), это тело можно рассматривать как *точку переменной массы*.

Движение ракеты. Найдем уравнение движения тела, масса которого со временем непрерывно убывает, на практически важном примере движения ракеты, считая ее точкой переменной массы. Обозначим *относительную* (по отношению к корпусу ракеты) *скорость истечения продуктов горения* из ракеты через u . Чтобы исключить силы давления, выталкивающие продукты горения, сделав эти силы внутренними, рассмотрим в некоторый момент времени t систему, состоящую из самой ракеты и частицы, отделяющейся от нее в течение промежутка времени dt (рис. 294). Масса μ этой частицы численно равна величине dM , на которую за время dt изменяется масса ракеты. Так как M — величина убывающая, то $dM < 0$, и, следовательно, $\mu = |dM| = -dM$.

Уравнение (20) для рассматриваемой системы можно представить в виде

$$d\bar{Q} = \bar{F}^e dt, \quad (24)$$

где $\bar{F}^e$ — геометрическая сумма приложенных к ракете внешних сил.

Если скорость $\bar{v}$ ракеты за время dt изменяется на величину $d\bar{v}$, то количество движения рассматриваемой системы получает при этом приращение $M d\bar{v}$. У частицы в момент t количество движения равно $\mu \bar{v}$ (она еще является частью тела), а в момент $t+dt$ оно будет

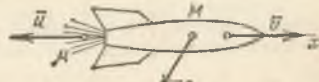


Рис. 294

$\mu(\bar{v} + \bar{u})$, так как частица получает дополнительную скорость $\bar{u}$. Следовательно, за время dt количество движения частицы изменится на величину $\bar{u}\mu = -\bar{u}dM$ (поскольку $\mu = -dM$), а для всей системы получится $d\bar{Q} = M d\bar{v} - \bar{u}dM$. Подставляя это значение $d\bar{Q}$ в равенство (24) и деля обе его части на dt , найдем окончательно

$$M \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F}^e + \bar{u} \frac{dM}{dt}. \quad (25)$$

Уравнение (25) представляет собой в векторной форме дифференциальное уравнение движения точки переменной массы, называемое уравнением Мещерского.

Учитывая, что последнее слагаемое в правой части (25) по размерности также является силой, и обозначая его через Φ , мы можем уравнение (25) представить еще в виде

$$M \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F}^e + \Phi. \quad (26)$$

Таким образом, реактивный эффект сводится к тому, что на ракету при ее движении дополнительно действует сила Φ , называемая реактивной силой.

Величина dM/dt численно равна массе топлива, расходуемого за единицу времени, т. е. секунднему расходу массы топлива G_c .

Таким образом, если учесть знак, то

$$\frac{dM}{dt} = -G_c.$$

Отсюда следует, что

$$\Phi = -\bar{u}G_c, \quad (27)$$

т. е. реактивная сила равна произведению секундного расхода массы топлива на относительную скорость истечения продуктов его сгорания и направлена противоположно этой скорости.

Некоторые другие случаи движения тела переменной массы. Если рассмотреть движение тела, масса M которого с течением времени вследствие непрерывного присоединения к нему частиц возрастает ($dM/dt > 0$), считая это тело тоже точкой переменной массы, а относительную скорость присоединяющихся частиц обозначить по-прежнему $\bar{u}$, то нетрудно проверить, что для такого тела уравнение движения сохранит вид (25) или (26), только в уравнении (26), поскольку теперь $dM/dt > 0$, будет

$$\Phi = \bar{u}G_c.$$

Наконец, для тела, у которого одновременно происходит непрерывное отделение и присоединение частиц, в уравнении (26) получится

$$\Phi = -\bar{u}_1 G_{1c} + \bar{u}_2 G_{2c},$$

где $\bar{u}_1$ и $\bar{u}_2$ — относительные скорости отделяющихся и присоединяющихся частиц соответственно; G_{1c} — отделяющаяся, а G_{2c} — присоединяющаяся за секунду масса,

Такой случай имеет, например, место для самолета, на котором установлен воздушно-реактивный двигатель, засасывающий воздух из атмосферы и выбрасывающий его вместе с продуктами горения топлива. Так как доля этих продуктов в отбрасываемом воздухе очень мала (не превышает 2—3%), то здесь практически можно считать $G_{1c} = G_{2c} = G_c$. Кроме того, очевидно, что относительная скорость присоединяемой массы воздуха $\bar{u}_2 = -\bar{v}$, где $\bar{v}$ — скорость самолета. Тогда, полагая $\bar{u}_1 = \bar{u}$, получим соответственно для вектора Φ и его модуля Φ значения:

$$\Phi = -G_c(\bar{u} + \bar{v}), \quad \Phi = G_c(u - v).$$

При определении модуля реактивной силы принято, что скорости $\bar{v}$ (самолета) и $\bar{u}$ (отбрасываемого воздуха) направлены в прямо противоположные стороны. Формула справедлива и для гидрореактивного двигателя, создающего тягу за счет засасывания и выброса воды.

Формула Циолковского. Найдем, как происходит движение ракеты под действием только одной реактивной силы, считая $F^e = 0$, а относительную скорость истечения $\bar{u}$ постоянной. Направим координатную ось x в сторону движения (см. рис. 294). Тогда $v_x = v$, $u_x = -u$ и уравнение (25) в проекции на ось x , если в нем положить $F^e = 0$, примет вид

$$M \frac{dv}{dt} = -u \frac{dM}{dt} \quad \text{или} \quad dv = -u \frac{dM}{M}.$$

Интегрируя это уравнение и считая, что в начальный момент масса $M = M_0$, а скорость $\bar{v} = v_0$ и направлена вдоль оси Ox , получим

$$v = v_0 + u \ln(M_0/M). \quad (28)$$

Обозначим массу корпуса ракеты со всем оборудованием через M_k , а всю массу топлива через M_T . Тогда, очевидно, $M_0 = M_k + M_T$, а масса ракеты, когда все топливо будет израсходовано, будет равна M_k . Подставляя эти значения в равенство (28), получим формулу Циолковского, определяющую скорость ракеты, когда все ее топливо будет израсходовано (скорость в конце так называемого активного участка):

$$v = v_0 + u \ln(1 + M_T/M_k). \quad (29)$$

Строго этот результат справедлив в безвоздушном пространстве и вне поля сил. Из формулы (29) видно, что предельная скорость ракеты зависит: 1) от ее начальной скорости v_0 ; 2) от относительной скорости истечения (вылета) продуктов горения u ; 3) от относительного запаса топлива M_T/M_k (число Циолковского). Очень интересен тот факт, что от режима работы ракетного двигателя, т. е. от того, насколько быстро или медленно сжигается все топливо, скорость ракеты в конце периода горения не зависит.

Важное практическое значение формулы Циолковского состоит в том, что она указывает возможные пути получения больших скоростей, необходимых для космических полетов. Этими путями являются увеличение M_T/M_k , u и v_0 , причем путь увеличения u и v_0 более эффективен. Увеличение u и M_T/M_k связано с видом топлива и конструкцией ракеты. Применяемые жидкие топлива позволяют

получить $u=3000\div 4500$ м/с. Но значения M_1/M_k у одноступенчатых ракет таковы, что они не дают скоростей, необходимых для космических полетов (см. § 98). Получить необходимую скорость можно путем использования составной (многоступенчатой) ракеты, части (ступени) которой по мере израсходования содержащегося в них топлива автоматически отделяются от последней ступени, получающей в результате дополнительную (начальную) скорость.

Подобная многоступенчатая ракета была применена для запуска первых в мире советских искусственных спутников Земли (4 октября и 3 ноября 1957 г.), а также при многочисленных пусках других космических объектов, в том числе кораблей, на которых совершают свои полеты космонавты.

Глава XXIV

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ МОМЕНТА КОЛИЧЕСТВ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ

§ 115. ГЛАВНЫЙ МОМЕНТ КОЛИЧЕСТВ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ

Понятие о моменте количества движения для одной материальной точки было введено в § 85. Главным моментом количества движения (или кинетическим моментом) системы относительно данного центра O называется величина $\bar{K}_O$, равная геометрической сумме моментов количества движения всех точек системы относительно этого центра*:

$$\bar{K}_O = \sum \bar{m}_k (\bar{r}_k \bar{v}_k). \quad (30)$$

Аналогично определяются моменты количества движения системы относительно координатных осей:

$$K_x = \sum m_k (\bar{r}_k \bar{v}_k)_x, \quad K_y = \sum m_k (\bar{r}_k \bar{v}_k)_y, \quad K_z = \sum m_k (\bar{r}_k \bar{v}_k)_z. \quad (31)$$

При этом K_x , K_y , K_z представляют собой одновременно проекции вектора $\bar{K}_O$ на координатные оси.

В § 110 было отмечено, что количество движения системы можно рассматривать как характеристику ее поступательного движения. Из последующего будет видно, что главный момент количества движения (кинетический момент) системы может рассматриваться как характеристика ее вращательного движения.

Кинетический момент вращающегося тела. В качестве важного конкретного примера найдем значения K_x , K_y и K_z для тела, вращающегося вокруг неподвижной оси z (рис. 295).

* Чаще для краткости величину $\bar{K}_O$ называют кинетическим моментом или просто моментом количества движения системы.

1. *Определение K_z .* У любой точки тела, отстоящей от оси вращения на расстоянии h_k , скорость $v_k = \omega h_k$ (ω — угловая скорость тела). Следовательно, для этой точки $m_k (\bar{r}_k \bar{v}_k) = m_k v_k h_k = m_k h_k^2 \omega$. Тогда для всего тела, вынося общий множитель ω за скобки, получим

$$K_z = \sum m_k (\bar{r}_k \bar{v}_k)_z = (\sum m_k h_k^2) \omega.$$

Величина, стоящая в скобках, представляет собой момент инерции тела относительно оси z (см. § 102). Окончательно находим

$$K_z = J_z \omega. \quad (32)$$

Таким образом, кинетический момент вращающегося тела относительно оси вращения равен произведению момента инерции тела относительно этой оси на угловую скорость тела.

Если система состоит из нескольких тел, вращающихся вокруг одной и той же оси, то

$$K_z = J_{1z} \omega_1 + J_{2z} \omega_2 + \dots + J_{nz} \omega_n. \quad (32')$$

Заметим еще, что формула (32) сохранит свой вид и в случае поворота тела вокруг мгновенной оси вращения OI с угловой скоростью ω , так как при этом поле скоростей точек тела будет в данный момент времени таким же, как при вращении вокруг неподвижной оси. Таким образом,

$$K_I = J_I \omega. \quad (33)$$

2*. *Определение K_x и K_y .* Для определения K_x вычислим величину $m_k (\bar{r}_k \bar{v}_k)_x$ так же, как вычисляется момент силы; при этом используем формулы (47) из § 28, заменив в них F на v . Тогда

$$m_k (\bar{r}_k \bar{v}_k)_x = y_k v_{kz} - z_k v_{ky}.$$

Но согласно формулам (77') из § 62 $v_{ky} = \omega x_k$, $v_{kz} = 0$ (последнее сразу видно из рис. 295); следовательно, $m_k (\bar{r}_k \bar{v}_k)_x = -x_k z_k \omega$. В результате, вынося общий множитель ω за скобки, найдем

$$K_x = \sum m_k (\bar{r}_k \bar{v}_k)_x = -(\sum m_k x_k z_k) \omega = -J_{xz} \omega,$$

так как сумма, стоящая в скобках, представляет собой центробежный момент инерции J_{xz} (см. § 104). Аналогичное выражение получится для K_y , где всюду вместо x_k войдет y_k . Окончательно

$$K_x = -J_{xz} \omega, \quad K_y = -J_{yz} \omega. \quad (34)$$

Таким образом, кинетический момент вращающегося тела относительно центра O , лежащего на оси вращения Oz , представляет собой вектор $\bar{K}_O$, проекции которого на оси Ox и Oy определяются формулами (32) и (34). В общем случае, как видим, вектор $\bar{K}_O$ не направлен по оси вращения Oz . Но если ось Oz будет для точки O главной осью инерции тела (в частности, осью симметрии), то $J_{xz} = J_{yz} = 0$. При этом $K_x = K_y = 0$ и $K_O = K_z$. Следовательно, если тело вращается вокруг оси, являющейся для точки O главной осью инерции тела (или вокруг оси симметрии тела), то вектор $\bar{K}_O$ направлен вдоль оси вращения и численно равен K_z , т. е. $J_z \omega$.

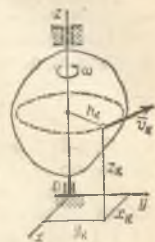


Рис. 295

§ 116. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ ГЛАВНОГО МОМЕНТА КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ (ТЕОРЕМА МОМЕНТОВ)

Теорема моментов, доказанная для одной материальной точки (см. § 85), будет справедлива для каждой из точек системы. Следовательно, если рассмотреть точку системы с массой m_k , имеющую скорость v_k , то для нее будет

$$\frac{d}{dt} [\bar{m}_O (m_k \bar{v}_k)] = \bar{m}_O (\bar{F}_k^e) + \bar{m}_O (\bar{F}_k^i),$$

где $\bar{F}_k^e$ и $\bar{F}_k^i$ — равнодействующие всех внешних и внутренних сил, действующих на данную точку.

Составляя такие уравнения для всех точек системы и складывая их почленно, получим

$$\frac{d}{dt} [\bar{m}_O (m_k \bar{v}_k)] = \bar{m}_O (\bar{F}_k^e) + \bar{m}_O (\bar{F}_k^i).$$

Но последняя сумма по свойству внутренних сил системы равна нулю. Тогда, учитывая равенство (30), найдем окончательно

$$\frac{d\bar{K}_O}{dt} = \bar{m}_O (\bar{F}_k^e). \quad (35)$$

Полученное уравнение выражает следующую теорему моментов для системы: производная по времени от главного момента количества движения системы относительно некоторого неподвижного центра равна сумме моментов всех внешних сил системы относительно того же центра.

Проектируя обе части равенства (35) на неподвижные оси $Oxyz$, получим:

$$\frac{dK_x}{dt} = \sum m_x (\bar{F}_k^e), \quad \frac{dK_y}{dt} = \sum m_y (\bar{F}_k^e), \quad \frac{dK_z}{dt} = \sum m_z (\bar{F}_k^e). \quad (36)$$

Уравнения (36) выражают теорему моментов относительно любой неподвижной оси.

Доказанной теоремой широко пользуются при изучении вращательного движения тела, а также в теории гироскопа и в теории удара. Но значение теоремы этим не ограничивается. В кинематике было показано, что движение твердого тела в общем случае складывается из поступательного движения вместе с некоторым полюсом и вращательного движения вокруг этого полюса. Если за полюс выбрать центр масс, то поступательная часть движения тела может быть изучена с помощью теоремы о движении центра масс, а вращательная — с помощью теоремы моментов. Это показывает важность теоремы для изучения движения свободного тела (летающий самолет, снаряд, ракета; см. § 132) и, в частности, для изучения плоскопараллельного движения (см. § 130).

Практическая ценность теоремы моментов состоит еще в том, что она, аналогично теореме об изменении количества движения, позво-

ляет при изучении вращательного движения системы исключать из рассмотрения все наперед неизвестные внутренние силы.

Теорема моментов относительно центра масс*. Чтобы применять теорему моментов к изучению плоскопараллельного движения или движения свободного твердого тела, надо найти выражение этой теоремы для движения системы относительно центра масс. Пусть $Oxyz$ — неподвижные оси, по отношению к которым движется рассматриваемая механическая система, а $Cx'y'z'$ — оси перемещающиеся поступательно вместе с центром масс C этой системы (рис. 296), при этом оси $Cx'y'z'$ имеют ускорение $\bar{a}_C$, равное ускорению центра масс. В § 91 было показано, что все уравнения динамики можно составлять в осях $Cx'y'z'$ так же, как в неподвижных, если к действующим на каждую из точек системы силам $\bar{F}_k^e$ и $\bar{F}_k^i$ прибавить переносную силу инерции $\bar{F}_k^{\text{пер}}$ (кориолисовы силы инерции в данном случае равны нулю, так как оси $Cx'y'z'$ движутся поступательно). Следовательно, уравнение (35) в осях $Cx'y'z'$ примет вид

$$\frac{d\bar{K}_C}{dt} = \bar{m}_C (\bar{F}_k^e) + \bar{m}_C (\bar{F}_k^{\text{пер}}), \quad (37)$$

поскольку сумма моментов внутренних сил относительно любого центра равна нулю. При этом величина $\bar{K}_C$ вычисляется по формуле

$$\bar{K}_C = \sum \bar{m}_C (m_k \bar{v}_k'), \quad (37')$$

где $\bar{v}_k'$ — скорости точек системы по отношению к осям $Cx'y'z'$.

Найдем значение последней суммы в равенстве (37). По определению, $\bar{F}_k^{\text{пер}} = -m_k \bar{a}_{k \text{ пер}}$. Так как оси $Cx'y'z'$ движутся поступательно, то для любой из точек B_k системы $\bar{a}_{k \text{ пер}} = \bar{a}_C$; следовательно, $\bar{F}_k^{\text{пер}} = -m_k \bar{a}_C$ и $\bar{m}_C (\bar{F}_k^{\text{пер}}) = \bar{r}_k \times (-m_k \bar{a}_C) = -m_k \bar{r}_k \times \bar{a}_C$. Тогда, вынося общий множитель $\bar{a}_C$ за скобки и учитывая, что по формуле (1') $\sum m_k \bar{r}_k = M \bar{r}_C$, получим

$$\sum \bar{m}_C (\bar{F}_k^{\text{пер}}) = -(\sum m_k \bar{r}_k) \times \bar{a}_C = -M \bar{r}_C \times \bar{a}_C = 0,$$

так как точка C является в системе осей $Cx'y'z'$ началом координат и $\bar{r}_C = 0$. В результате равенство (37) дает

$$\frac{d\bar{K}_C}{dt} = \bar{m}_C (\bar{F}_k^e). \quad (38)$$

Сравнивая этот результат с уравнением (35), приходим к выводу, что для осей, движущихся поступательно вместе с центром масс системы, теорема моментов относительно центра масс сохраняет тот же вид, что и относительно неподвижного центра. Точно так

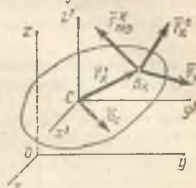


Рис. 296

же для моментов относительно осей $Cx'y'z'$ из (38) получаются уравнения, аналогичные уравнениям (36).

Заметим, что в любой другой подвижной системе отсчета будет или $\vec{r}_C \neq 0$, или не будут равны нулю кориолисовы силы инерции и уравнение моментов не будет иметь вид, совпадающий с (35).

§ 117. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ГЛАВНОГО МОМЕНТА КОЛИЧЕСТВ ДВИЖЕНИЯ

Из теоремы моментов можно получить такие следствия.

1. Пусть сумма моментов относительно центра O всех внешних сил, действующих на систему, равна нулю

$$\Sigma \vec{m}_O(\vec{F}_k) = 0.$$

Тогда из уравнения (35) следует, что при этом $\vec{K}_O = \text{const}$. Таким образом, если сумма моментов относительно данного центра всех приложенных к системе внешних сил равна нулю, то главный момент количества движения системы относительно этого центра будет численно и по направлению постоянен. Приложение этого результата к случаю движения планеты было рассмотрено в § 86.

2. Пусть внешние силы, действующие на систему, таковы, что сумма их моментов относительно некоторой неподвижной оси Oz равна нулю

$$\Sigma m_z(\vec{F}_k) = 0.$$

Тогда из уравнений (36) следует, что при этом $K_z = \text{const}$. Таким образом, если сумма моментов всех действующих на систему внешних сил относительно какой-нибудь оси равна нулю, то главный момент количества движения системы относительно этой оси будет величиной постоянной.

Эти результаты выражают собой закон сохранения главного момента количества движения системы. Из них следует, что внутренние силы изменить главный момент количества движения системы не могут.

Случай вращающейся системы. Рассмотрим систему, вращающуюся вокруг неподвижной (или проходящей через центр масс) оси z . Тогда по формуле (32) $K_z = J_z \omega$. Если в этом случае $\Sigma m_z(\vec{F}_k) = 0$, то

$$J_z \omega = \text{const}.$$

Отсюда приходим к следующим выводам:

а) если система неизменяема (абсолютно твердое тело), то $J_z = \text{const}$ и, следовательно, $\omega = \text{const}$, т. е. твердое тело, закрепленное на оси, вращается в этом случае с постоянной угловой скоростью;

б) если система изменяема, то под действием внутренних (или внешних) сил отдельные ее точки могут удаляться от оси, что вызывает увеличение J_z , или приближаться к оси, что приведет к уменьшению J_z . Но поскольку $J_z \omega = \text{const}$, то при увеличении мо-

мента инерции угловая скорость системы будет уменьшаться, а при уменьшении момента инерции — увеличиваться. Таким образом, действием внутренних сил можно изменить угловую скорость системы, так как постоянство K_z не означает вообще постоянства ω . Рассмотрим некоторые примеры.

а) Опыты с платформой Жуковского. Для демонстрации закона сохранения момента количества движения удобно пользоваться простым прибором, называемым «платформой Жуковского». Это круглая горизонтальная платформа на шариковых опорных подшипниках, которая может с малым трением вращаться вокруг вертикальной оси z . Для человека, стоящего на такой платформе, $\Sigma m_z(\vec{F}_k) = 0$ и, следовательно, $J_z \omega = \text{const}$. Если человек, разведя руки в стороны, сообщит себе толчком вращение вокруг вертикальной оси, а затем опустит руки, то величина J_z уменьшается и, следовательно, угловая скорость вращения возрастет. Таким способом увеличения угловой скорости широко пользуются в балете, при прыжках в воздухе (сальто) и т. п.

Далее, человек, стоящий на платформе неподвижно ($K_z = 0$), может повернуться в любую сторону, вращая вытянутую горизонтально руку в противоположном направлении. Угловая скорость человека при этом будет такой, чтобы в сумме величина K_z системы осталась равной нулю.

б) Раскачивание качелей. Давлением ног (сила внутренняя) человек, стоящий на качелях, раскачать их не может. Сделать это можно следующим образом. Когда качели находятся в левом верхнем положении A_0 , человек приседает. При прохождении через вертикаль он быстро выпрямляется. Тогда массы приближаются к оси вращения z , величина J_z уменьшается и угловая скорость ω скачком возрастает. Это увеличение ω приводит в конечном счете к тому, что качели поднимутся выше начального уровня A_0 . В правом верхнем положении, когда $\omega = 0$, человек опять приседает и J_z увеличивается, но ω остается равной нулю; при прохождении через вертикаль он снова выпрямляется и т. д. В результате размахи качелей будут возрастать.

Пронсходящие при этом вынужденные колебания качелей называются *параметрическими*, так как они совершаются не под действием периодически меняющейся силы (см. § 96), а вследствие периодического изменения параметров системы: ее момента инерции и положения центра тяжести.

в) Реактивный момент винта. Если рассматривать корпус вертолета (вместе с двигателем), его винт и отбрасываемую массу воздуха как одну систему, то силы взаимодействия между двигателем и винтом и между винтом и воздушной средой будут для этой системы внутренними и не могут изменить ее суммарный момент количества движения, равный до пуска двигателя нулю. Поэтому корпус вертолета должен начать вращаться в сторону, противоположную направлению вращения винта и воздушной среды. Действующий при этом на вертолет вращающий момент называют *реактивным* моментом. Чтобы предотвратить реактивное вращение корпуса одновинтового вертолета, на его хвостовой части устанавливают соответствующий рулевой винт. У многовинтового вертолета винты делают вращающимися в разные стороны.

Появление реактивного момента можно использовать для экспериментального определения вращающего момента авиационного двигателя, так как эти моменты равны друг другу по модулю, а реактивный момент можно измерить, установив двигатель с вращающимся винтом на соответствующих весах.

§ 118. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

Теоремой моментов пользуются для изучения вращательного движения тел (см. § 128, 131, 132).

Закон сохранения момента количества движения позволяет по величине или по скорости перемещения одной части системы определить изменение угловой скорости (или угол поворота) другой ее части. При этом из рассмотрения исключаются все наперед неизвест-

ные внутренние силы, а также внешние силы, пересекающие ось вращения или ей параллельные.

Задача 130. Два диска насажены на общий вал (рис. 297). В некоторый момент времени вал слегка закручивают и предоставляют самому себе. Пренебрегая массой вала, определить зависимость между угловыми скоростями и углами поворотов дисков при их крутильных колебаниях, если моменты инерции дисков J_1 и J_2 относительно оси x известны.



Рис. 297

Решение. Чтобы исключить неизвестные силы упругости, вызывающие колебания дисков, рассмотрим оба диска и вал как одну систему. Действующие на эту систему внешние силы (реакции подшипников и сила тяжести) пересекают ось x ; поэтому $\sum m_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = 0$ и $K_x = \text{const}$. Но так как в начальный момент времени $K_x = 0$, то и во все время колебаний должно быть $K_x = J_1 \omega_1 + J_2 \omega_2 = 0$ (кинетический момент системы относительно оси x равен сумме кинетических моментов каждого из дисков относительно той же оси). Отсюда

$$\omega_1 = -J_2 \omega_2 / J_1 \quad \text{и} \quad \varphi_1 = -J_2 \varphi_2 / J_1,$$

где φ_1 и φ_2 — углы закручивания дисков, отсчитываемые от начального положения (последний результат получается интегрированием первого равенства).

Таким образом, колебания будут происходить в противоположные стороны, а угловые амплитуды колебаний будут обратно пропорциональны моментам инерции дисков. Неподвижное сечение будет ближе к диску, момент инерции которого больше.

Задача 131. У вертолета с двумя соосными винтами, вращающимися в разные стороны, один винт в полете внезапно останавливается, а другой продолжает вращаться вокруг вертикальной оси z с угловой скоростью ω_0 . Момент инерции относительно оси z вращающегося винта равен J_1 , а вертолета вместе с остановившимся винтом — J_2 . Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить, с какой угловой скоростью ω_2 станет вращаться вертолет.

Решение. Силы взаимодействия между двигателем и валом винта неизвестны, но они станут внутренними, если рассмотреть в качестве механической системы вертолет вместе с винтами. Остановку винта вызвали тоже внутренние силы, которые не могут изменить кинетический момент K_z системы, равный до этого (когда оба винта вращались в разные стороны) нулю. Следовательно, и после остановки винта должно быть $K_z = J_1(\omega_1 + \omega_2) + J_2 \omega_2 = 0$, где $J_1(\omega_1 + \omega_2)$ — кинетический момент вращающегося винта (винт, вращаясь еще и вместе с вертолетом, будет иметь абсолютную угловую скорость $\omega_{аб} = \omega_1 + \omega_2$), а $J_2 \omega_2$ — кинетический момент вертолета вместе с остановившимся винтом. В результате находим

$$\omega_2 = -J_1 \omega_1 / (J_1 + J_2).$$

Знак указывает, что направление ω_2 противоположно ω_1 .

При решении задач необходимо обращать внимание на то, что в исходные выражения величины K_z (или K_O) входят абсолютные скорости точек и тел системы.

Задача 132. В регуляторе AB , имеющем вертикальную ось вращения Oz (величина J_z регулятора известна), помещены два симметрично расположенных груза массой m каждый, прикрепленных к пружинам (рис. 298). Когда грузы находятся в точках C , отстоящих от оси Oz на расстоянии l , регулятор вращается с заданной угловой скоростью ω_0 . В некоторый момент времени угловая скорость изменяется и грузы начинают совершать около центров C одинаковые затухающие колебания. Пренебрегая трением в оси, найти, как будет изменяться угловая скорость ω регулятора в зависимости от положений грузов, считая их материальными точками.

Решение. Чтобы исключить неизвестные нам силы упругости пружин и силы трения грузов о направляющие, рассмотрим регулятор и грузы как одну систему. Тогда, поскольку силы тяжести параллельны оси Oz , а реакции подшипников пересекают эту ось, $\sum m_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = 0$ и должно быть $K_z = K_z^{\text{рег}} + 2K_z^{\text{г}} = \text{const}$.

Найдем сначала $K_z^{\text{г}}$. Скорость груза $\vec{v} = \vec{v}_{от} + \vec{v}_{пер}$ и $K_z^{\text{г}} = m_2(m\vec{v}_{от}) + m_2(m\vec{v}_{пер})$. Но вектор $\vec{v}_{от}$ направлен по оси Cx , пересекающей ось Oz ; следовательно, $m_2(m\vec{v}_{от}) = 0$. Скорость $\vec{v}_{пер}$ перпендикулярна плоскости x, z , а ее модуль $v_{пер} = \omega(l+x)$. Тогда $K_z^{\text{г}} = m v_{пер}(l+x) = m\omega(l+x)^2$. Учтя еще, что $K_z^{\text{рег}} = J_z \omega$, получим

$$K_z = [J_z + 2m(l+x)^2] \omega.$$

При $x=0$ $\omega = \omega_0$ и $K_{z0} = (J_z + 2ml^2) \omega_0$. Так как $K_z = \text{const}$, то $K_z = K_{z0}$, что окончательно дает

$$\omega = \frac{J_z + 2ml^2}{J_z + 2m(l+x)^2} \omega_0.$$

Когда $x > 0$, то $\omega < \omega_0$, а когда $x < 0$, то $\omega > \omega_0$. При затухании колебаний грузов x стремится к нулю, а $\omega \rightarrow \omega_0$.

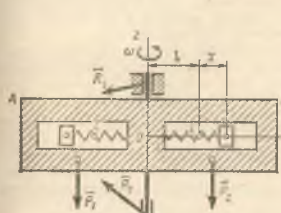


Рис. 298

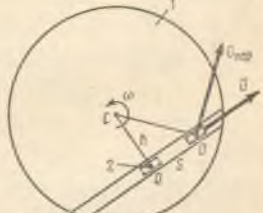


Рис. 299

Задача 133. Однородный диск I , имеющий массу m_1 и радиус R , насажен на перпендикулярную ему вертикальную ось Cz (рис. 299, где показан вид сверху). На диске сделан паз, в середине O которого находится ползун 2 массой m_2 ($OC = h$). В момент времени $t_0 = 0$ имеющийся на диске толкатель (на рис. 299 не показан) сообщает ползуну скорость u , с которой ползун продолжает двигаться. Определить зависимость угловой скорости, с которой начнет вращаться диск, от положения ползуна.

Решение. Рассмотрим диск и ползун как одну систему. Моменты действующих на нее внешних сил относительно оси Cz равны нулю (см. рис. 298); следовательно, $K_z = \text{const}$. Поскольку до момента времени $t_0 = 0$ система была в покое, а ее движение начинается под действием внутренних сил, которые значение K_z изменить не могут, то и в момент $t_0 = 0$ $K_z = 0$. Отсюда в любой момент времени тоже $K_z = K_z^{(д)} + K_z^{(п)} = 0$, так как $K_z = \text{const}$.

При движении системы $K_z^{(д)} = J_z \omega$ и $K_z^{(п)} = m_2(m_2 \vec{v}_{от}) + m_2(m_2 \vec{v}_{пер})$, где $\vec{v}_{от} = u$, $\vec{v}_{пер} = \omega \cdot CD$ (ползун в точке D и $\vec{v}_{пер} \perp CD$). Тогда $m_2(m_2 \vec{v}_{от}) = m_2 u h$, $m_2(m_2 \vec{v}_{пер}) = m_2 v_{пер} \cdot CD = m_2 \omega \cdot (CD)^2$. В итоге, так как $(CD)^2 = h^2 + s^2$, где $s = OD$ — перемещение ползуна, то получим

$$K_z = J_z \omega + m_2 u h + m_2 \omega (h^2 + s^2). \quad (a)$$

Полагая теперь $K_z = 0$ и считая для диска $J_z = 0,5 m_1 R^2$ [см. § 102, формула (8)], найдем окончательно

$$\omega = \frac{m_2 u h}{0,5 m_1 R^2 + m_2 (h^2 + s^2)}. \quad (б)$$

Вращение происходит в направлении, противоположном показанному на рис. 299.

Примечание. В данной задаче (и ей аналогичных) было бы ошибочно считать, что так как в момент $t_0=0$ ползунок получил скорость u , то у системы $K_{z0}=m_2 u h$ (а не $K_{z0}=0$). В действительности же внутренние силы изменить значение K_z не могут; поэтому, сообщив ползуну при $t_0=0$ скорость u , они одновременно сообщат диску угловую скорость ω_0 , такую, что у системы сохранится $K_{z0}=0$. Из решения (б) видно, что при $t_0=0$, когда $u=0$, диск получает сообщенную внутренними силами угловую скорость $\omega_0 = -m_2 u h / (0,5 m_1 R^2 + m_2 h^2)$, что и дает $K_{z0}=0$. Затем, при возрастании u , модуль ω убывает.

Если же принять $K_{z0}=m_2 u h$, то, полагая $K_z=K_{z0}$, где K_z дается равенством (а), получим $\omega=0$. Такой результат действительно имеет место, когда скорость u ползунок сообщают внешние силы и его трение о паз отсутствует.

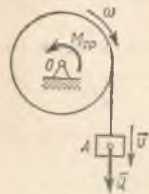


Рис. 300

Задача 134. На барабан весом P и радиусом r (рис. 300) намотана нить с грузом A весом Q на конце. Пренебрегая весом нити, определить угловое ускорение барабана при вертикальном движении груза, если радиус инерции барабана относительно его оси равен ρ и на барабан действует постоянный момент сил трения $M_{тр}$.

Решение. Рассмотрим систему барабан — груз; тогда неизвестные силы натяжения нити будут внутренними. Воспользуемся теоремой моментов относительно оси O :

$$\frac{dK_O}{dt} = \Sigma m_O (\vec{r}_k \times \vec{F}_k). \quad (а)$$

Для данной системы $K_O = K_O^P + K_O^{ар}$. Груз движется поступательно и его скорость $v = \omega r$. Барабан вращается вокруг неподвижной оси O и для него $J_O = (P/g)\rho^2$ [см. § 102, формула (4)]. Тогда

$$K_O^P = (Q/g)vr, \quad K_O^{ар} = (P/g)\rho^2 \omega \text{ и } K_O = (Qr^2 + P\rho^2)\omega/g.$$

Для моментов сил получим $\Sigma m_O (\vec{r}_k \times \vec{F}_k) = Qr - M_{тр}$.

Подставляя все эти величины в равенство (а), найдем

$$\frac{Qr^2 + P\rho^2}{g} \frac{d\omega}{dt} = Qr - M_{тр},$$

отсюда

$$\omega = \frac{(Qr - M_{тр})g}{Qr^2 + P\rho^2}.$$

§ 119*. ПРИЛОЖЕНИЕ ТЕОРЕМЫ МОМЕНТОВ К ДВИЖЕНИЮ ЖИДКОСТИ (ГАЗА)

Рассмотрим опять (см. § 113) установившееся течение жидкости (газа) в трубке тока (или в трубе). Выделим в трубке объем жидкости 1—2, ограниченный сечениями 1 и 2, который за промежуток времени dt переходит в положение 3—4 (рис. 301). Найдем, как за время dt изменится момент количества движения $\vec{K}_O$ этого объема жидкости относительно некоторого центра O . Рассуждая так же, как в § 113, придем к выводу, что это изменение определится равенством, аналогичным полученному при выводе формулы (23), т. е. что

$$d\vec{K}_O = \vec{K}_{34} - \vec{K}_{12} = \vec{K}_{24} - \vec{K}_{13},$$

где $\vec{K}_{13}$ и $\vec{K}_{24}$ — моменты количества движения жидкости в объемах 1—3 и 2—4 соответственно.

Для определения $\vec{K}_{13}$ разобьем площадь S_1 сечения 1 на элементы Δs_k . За промежуток времени dt через площадку Δs_k в объем 1—3 войдет масса жидкости $\Delta m_k = (G_c/S_1)\Delta s_k \cdot dt$ (G_c — секундный расход массы). Момент количества движения этой массы будет $\Delta \vec{K}_{13} = \vec{r}_k \times \Delta m_k \cdot \vec{v}_1 = \vec{r}_k \times v_1 (G_c/S_1)\Delta s_k \cdot dt$, где $\vec{r}_k$ — радиус-вектор элемента Δs_k ; $\vec{v}_1$ — средняя скорость жидкости в сечении 1. Тогда, вынося общие множители за скобки, получим

$$\vec{K}_{13} = G_c \left(\frac{1}{S_1} \Sigma \vec{r}_k \cdot \Delta s_k \right) \times \vec{v}_1 dt = G_c (\vec{r}_c \times \vec{v}_1) dt,$$

где $\vec{r}_c$ — радиус-вектор центра тяжести площади S_1 сечения 1.

Аналогично найдем, что $\vec{K}_{24} = G_c (\vec{r}_c \times \vec{v}_2) dt$, где обозначения очевидны. Тогда

$$d\vec{K}_O = \vec{K}_{24} - \vec{K}_{13} = G_c [(\vec{r}_c \times \vec{v}_2) - (\vec{r}_c \times \vec{v}_1)] dt.$$

Подставляя это значение $d\vec{K}_O$ в уравнение (35), получим

$$G_c [(\vec{r}_c \times \vec{v}_2) - (\vec{r}_c \times \vec{v}_1)] = \Sigma \vec{m}_O (\vec{F}_k^t). \quad (39)$$

Равенство (39) можно еще представить в виде

$$G_c [\vec{m}_O (\vec{v}_2) - \vec{m}_O (\vec{v}_1)] = \Sigma \vec{m}_O (\vec{F}_k^t). \quad (39')$$

При этом векторы $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ должны быть приложены в центрах тяжести площадей соответствующих сечений трубки тока (трубы).

Если величину $G_c \vec{m}_O (\vec{v})$ назвать секундным моментом количества движения жидкости относительно центра O , то теорему, выраженную равенством (39), можно сформулировать так (сравни с § 113): разность секундных моментов количества движения относительно центра O жидкости, протекающей через два поперечных сечения трубки тока (трубы), равна сумме моментов относительно того же центра всех внешних (массовых и поверхностных) сил, действующих на объем жидкости, ограниченный этими сечениями и поверхностью трубки тока (стенками трубы). При решении задач теорема позволяет исключить из рассмотрения все внутренние силы, т. е. силы взаимных давлений частиц жидкости в объеме 1—2.

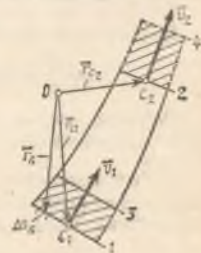


Рис. 301

Задача 135. В радиальной гидротурбине, у которой внешний радиус рабочего колеса r_1 , а внутренний r_2 , вода имеет на входе абсолютную скорость v_1 , а на выходе — абсолютную скорость v_2 , при этом векторы $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ образуют с касательными к обоим колесам углы α_1 и α_2 соответственно (рис. 302, где показан один канал между двумя лопатками турбины). Полный секундный расход массы воды через турбину G_c . Определить действующий на турбину момент относительно ее оси Oz сил давления воды (ось Oz направлена перпендикулярно плоскости чертежа).

используем уравнение (39') в проекции на ось Oz , считая движение воды плоским. Так как в силу симметрии центр тяжести воды, заполняющей все каналы, лежит на оси Oz , то момент массовых сил (сил тяжести) относительно этой оси равен нулю. Поверхностные внешние силы давления во входном и выходном сечениях направлены вдоль радиусов и их моменты относительно оси Oz тоже равны нулю. Таким образом, в правой части уравнения (39') сохранится только момент поверхностных сил давления на жидкость лопаток турбины. Поскольку искомый момент M_z сил давления воды на лопатки турбины имеет противоположное направление, то из (39') в проекции на ось Oz получим

$$M_z = G_c [m_z(\vec{v}_1) - m_z(\vec{v}_2)].$$

Здесь G_c полный расход воды через все каналы и поэтому M_z будет искомым полным моментом. Из рис. 302 видно, что $m_z(\vec{v}_1) = m_0(\vec{v}_1) = r_1 v_1 \cos \alpha_1$, аналогично $m_z(\vec{v}_2) = r_2 v_2 \cos \alpha_2$. Таким образом,

$$M_z = G_c (r_1 v_1 \cos \alpha_1 - r_2 v_2 \cos \alpha_2). \quad (a)$$

Примечание. По формуле (46) из § 87 мощность $N = F_c v$. Если сила $\vec{F}$ действует на тело, вращающееся вокруг оси Oz , то $v = \omega r$ и $N = F_c r \omega = M_z \omega$ (см. § 122). Тогда, умножив обе части равенства (a) на ω и учитывая, что $r_1 \omega = u_1$, $r_2 \omega = u_2$, где u_1 — окружная скорость на внешнем, а u_2 на внутреннем ободе колеса турбины, получим

$$N = G_c (u_1 v_1 \cos \alpha_1 - u_2 v_2 \cos \alpha_2).$$

Это уравнение, устанавливающее зависимость между основными динамическими характеристиками турбины, называют *турбинным уравнением Эйлера*.

§ 120. УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Представим уравнения (16) из § 107 и (35) или (38) в виде:

$$m \frac{d\vec{v}_C}{dt} = \vec{R}^e \text{ и } \frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{M}_O^e \text{ или } \frac{d\vec{K}_C}{dt} = \vec{M}_C^e. \quad (40)$$

Покажем, что из этих уравнений, являющихся следствиями законов, изложенных в § 74, получаются все исходные результаты статики.

1. Если механическая система находится в покое, то скорости всех ее точек равны нулю и, следовательно, $\vec{v}_C = 0$ и $\vec{K}_O = 0$, где O — любая точка. Тогда уравнения (40) дают:

$$\vec{R}^e = 0, \quad \vec{M}_O^e = 0. \quad (40')$$

Таким образом, условия (40') являются *необходимыми условиями равновесия любой механической системы*. Этот результат содержится в себе, в частности, сформулированный в § 2 принцип отвердевания.

Но для любой системы условия (40'), очевидно, достаточными условиями равновесия не являются. Например, если изображенные на рис. 274 точки A_1 и A_2 являются свободными, то под действием сил $\vec{F}_{12}$ и $\vec{F}_{21}$ они могут двигаться навстречу друг другу, хотя условия (40') для этих сил будут выполняться. Необходимые и достаточ-

ные условия равновесия механической системы будут изложены в § 139 и 144.

2. Докажем, что условия (40') являются не только необходимыми, но и достаточными условиями равновесия для сил, действующих на абсолютно твердое тело. Пусть на свободное твердое тело, находящееся в покое, начинает действовать система сил, удовлетворяющая условиям (40'), где O любая точка, т. е., в частности, и точка C . Тогда уравнения (40) дают $\vec{v}_C = \text{const}$ и $\vec{K}_C = \text{const}$, а так как тело вначале было в покое, то $\vec{v}_C = 0$ и $\vec{K}_C = 0$. При $\vec{v}_C = 0$ точка C неподвижна и тело может иметь только вращение с угловой скоростью ω вокруг некоторой мгновенной оси Cl (см. § 60). Тогда по формуле (33) у тела будет $K_l = J_l \omega$. Но K_l есть проекция вектора $\vec{K}_C$ на ось Cl , а так как $\vec{K}_C = 0$, то и $K_l = 0$, откуда следует, что и $\omega = 0$, т. е. что при выполнении условий (40') тело остается в покое.

3. Из предыдущих результатов вытекают, в частности, исходные положения 1 и 2, сформулированные в § 2, так как очевидно, что две силы, изображенные на рис. 2, удовлетворяют условиям (40') и являются уравновешенными и что если к действующим на тело силам прибавить (или от них отнять) уравновешенную систему сил, т. е. удовлетворяющую условиям (40'), то ни эти условия, ни уравнения (40), определяющие движение тела, не изменятся.

Глава XXV

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ СИСТЕМЫ

§ 121. КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ СИСТЕМЫ

Кинетической энергией системы называется скалярная величина T , равная сумме кинетических энергий всех точек системы:

$$T = \sum m_k v_k^2 / 2. \quad (41)$$

Кинетическая энергия является характеристикой и поступательного, и вращательного движений системы. Главное отличие величины T от введенных ранее характеристик $\vec{Q}$ и $\vec{K}_O$ состоит в том, что кинетическая энергия является величиной скалярной и притом существенно положительной. Поэтому она не зависит от направлений движения частей системы и не характеризует изменений этих направлений.

Отметим еще следующее важное обстоятельство. Внутренние силы действуют на части системы по взаимно противоположным направлениям. По этой причине они, как мы видели, не изменяют векторных характеристик $\vec{Q}$ и $\vec{K}_O$. Но если под действием внутренних сил будут изменяться модули скоростей точек системы, то при этом будет изменяться и величина T . Следовательно, кинетическая энер-

гия системы отличается от величин $\bar{Q}$ и $\bar{K}_O$ еще и тем, что на ее изменение влияет действие и внешних, и внутренних сил.

Если система состоит из нескольких тел, то ее кинетическая энергия равна сумме кинетических энергий этих тел.

Найдем формулы для вычисления кинетической энергии тела в разных случаях движения.

1. Поступательное движение. В этом случае все точки тела движутся с одинаковыми скоростями, равными скорости центра масс. Следовательно, для любой точки $v_k = v_C$ и формула (41) дает

$$T_{\text{пост}} = \sum m_k v_C^2 / 2 = (\sum m_k) v_C^2 / 2$$

или

$$T_{\text{пост}} = M v_C^2 / 2. \quad (42)$$

Таким образом, кинетическая энергия тела при поступательном движении равна половине произведения массы тела на квадрат скорости центра масс.

2. Вращательное движение. Если тело вращается вокруг какой-нибудь оси Oz (см. рис. 295), то скорость любой его точки $v_k = \omega h_k$, где h_k — расстояние точки от оси вращения, а ω — угловая скорость тела. Подставляя это значение в формулу (41) и вынося общие множители за скобки, получим

$$T_{\text{вр}} = \sum m_k \omega^2 h_k^2 / 2 = (\sum m_k h_k^2) \omega^2 / 2.$$

Величина, стоящая в скобках, представляет собой момент инерции тела относительно оси z . Таким образом, окончательно найдем

$$T_{\text{вр}} = J_z \omega^2 / 2, \quad (43)$$

т. е. кинетическая энергия тела при вращательном движении равна половине произведения момента инерции тела относительно оси вращения на квадрат его угловой скорости.

3. Плоскопараллельное движение *. При этом движении скорости всех точек тела в каждый момент времени распределены так, как если бы тело вращалось вокруг оси, перпендикулярной плоскости движения и проходящей через мгновенный центр скоростей P (рис. 303). Следовательно, по формуле (43)

$$T_{\text{плоск}} = J_P \omega^2 / 2, \quad (43')$$

где J_P — момент инерции тела относительно названной выше оси; ω — угловая скорость тела.

Величина J_P в формуле (43') будет переменной, так как положение центра P при движении тела все время меняется. Введем вместо J_P постоянный момент инерции J_C относительно оси, проходящей через центр масс C тела. По теореме Гюйгенса (см. § 103) $J_P = J_C + M d^2$, где $d = PC$. Подставим это выражение для J_P в (43'). Учти-

* Этот случай может быть получен как частный из рассмотренного в следующем пункте общего случая движения твердого тела.

вая, что точка P — мгновенный центр скоростей и, следовательно, $\omega d = \omega \cdot PC = v_C$, где v_C — скорость центра масс C , окончательно найдем

$$T_{\text{плоск}} = M v_C^2 / 2 + J_C \omega^2 / 2. \quad (44)$$

Следовательно, при плоскопараллельном движении кинетическая энергия тела равна энергии поступательного движения со скоростью центра масс, сложенной с кинетической энергией вращательного движения вокруг центра масс.



Рис. 303

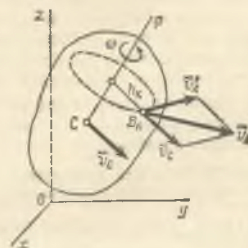


Рис. 304

4 *. Общий случай движения. Если выбрать центр масс C тела в качестве полюса (рис. 304), то движение тела в общем случае будет складываться из поступательного со скоростью $\bar{v}_C$ полюса и вращательного вокруг мгновенной оси CP , проходящей через этот полюс (см. § 63). При этом, как показано в § 63, скорость $\bar{v}_k$ любой точки тела B_k складывается из скорости $\bar{v}_C$ полюса и скорости, которую точка получает при вращении тела вокруг полюса (вокруг оси CP) и которую мы обозначим $\bar{v}'_k$, т. е. $\bar{v}_k = \bar{v}_C + \bar{v}'_k$. При этом по модулю $v'_k = \omega h_k$, где h_k — расстояние точки B_k от оси CP , а ω — угловая скорость тела, которая (см. § 63) не зависит от выбора полюса. Тогда *

$$\bar{v}_k^2 = v_k^2 = (\bar{v}_C + \bar{v}'_k)^2 = v_C^2 + v'_k{}^2 + 2 \bar{v}_C \cdot \bar{v}'_k.$$

Подставляя это значение v_k^2 в равенство (41) и учитывая, что $v'_k = \omega h_k$, найдем

$$T = (\sum m_k) v_C^2 / 2 + (\sum m_k h_k^2) \omega^2 / 2 + \bar{v}_C \sum m_k \bar{v}'_k,$$

где общие множители сразу вынесены за скобки.

В полученном равенстве первая скобка дает массу M тела, а вторая равна моменту инерции J_{CP} тела относительно мгновенной

* Из определения скалярного произведения двух векторов следует, что $\bar{v}^2 = \bar{v} \cdot \bar{v} = v \cos 0^\circ = v^2$, т. е. скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля. Этот результат здесь использован; мы будем пользоваться им без оговорок и в дальнейшем.

оси CP . Величина же $\Sigma m_k \vec{v}_k' = 0$, так как она представляет собой количество движения, получаемое телом при его вращении вокруг оси CP , проходящей через центр масс тела (см. § 110).

В результате окончательно получим

$$T = Mv_C^2/2 + J_{CP}\omega^2/2. \quad (45)$$

Таким образом, кинетическая энергия тела в общем случае движения (в частности, и при плоскопараллельном движении) равна кинетической энергии поступательного движения со скоростью центра масс, сложенной с кинетической энергией вращательного движения вокруг оси, проходящей через центр масс.

Если за полюс взять не центр масс C , а какую-нибудь другую точку A тела и мгновенная ось AP при этом не будет все время проходить через центр масс, то для этой оси $\Sigma m_k \vec{v}_k' \neq 0$ и формулы вида (45) мы не получим.

Рассмотрим примеры.

Задача 136. Вычислить кинетическую энергию катящегося без скольжения сплошного цилиндрического колеса массой M , если скорость его центра равна v_C (см. рис. 308, а).

Решение. Колесо совершает плоскопараллельное движение. По формуле (44) или (45)

$$T = Mv_C^2/2 + J_C\omega^2/2.$$

Считаем колесо сплошным однородным цилиндром; тогда (см. § 102) $J_C = MR^2/2$, где R — радиус колеса. С другой стороны, так как точка B является для колеса мгновенным центром скоростей, то $v_C = \omega \cdot BC = \omega R$, откуда $\omega = v_C/R$. Подставляя все эти значения, найдем

$$T = Mv_C^2/2 + MR^2 \cdot \frac{v_C^2}{4R^2} = (3/4) Mv_C^2.$$

Задача 137. В детали A , движущейся поступательно со скоростью $\vec{u}$, имеются направляющие, по которым со скоростью $\vec{v}$ перемещается тело B массой m . Зная угол α (рис. 305), определить кинетическую энергию тела B .

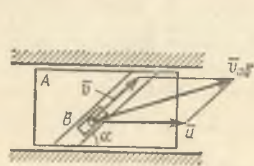


Рис. 305

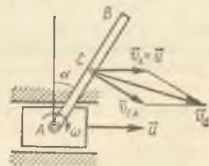


Рис. 306

Решение. Абсолютное движение тела B будет поступательным со скоростью $\vec{v}_{аб} = \vec{v} + \vec{u}$ (см. § 68). Тогда

$$T = mv_{аб}^2/2 = m(v^2 + u^2 + 2vu \cos \alpha)/2.$$

Заметим, что если тело совершает сложное движение, то его полная кинетическая энергия не равна в общем случае сумме кинетических энергий относительного и переносного движений. Так, в данном примере

$$T_{от} + T_{пер} = mv^2/2 + mu^2/2 \neq T.$$

Задача 138. Часть механизма состоит из движущейся со скоростью u детали (рис. 306) и прикрепленного к ней на оси A стержня длиной l и массой M . Стержень вращается вокруг оси A (в направлении дуговой стрелки) с угловой скоростью ω . Определить кинетическую энергию стержня при данном угле α .

Решение. Стержень совершает сложное (плоскопараллельное) движение. По формуле (44) или (45) $T = Mv_C^2/2 + J_C\omega^2/2$.

Скорость точки C складывается из скорости $\vec{v}_A = u$ и скорости $\vec{v}_{CA}$ (или $\vec{v}_{от}$), модуль которой $v_{CA} = \omega l/2$. Следовательно (рис. 306), $v_C^2 = u^2 + v_{CA}^2 + 2uv_{CA} \cos \alpha$. Угловая скорость вращения стержня вокруг центра C такая же, как и вокруг конца A , так как ω не зависит от выбора полюса. Кроме того, в задаче 119 (см. § 103) было показано, что $J_C = MR^2/12$.

Подставляя все эти данные, получим $T = M(u^2 + \omega^2 l^2/4 + u\omega l \cos \alpha)/2 + MR^2\omega^2/24 = Mu^2/2 + Ml^2\omega^2/6 + (Mlu\omega \cos \alpha)/2$. Заметим, что в данном случае нельзя считать

$$T = T_{пост} + T_{вр} = Mu^2/2 + J_A\omega^2/2 = Mu^2/2 + Ml^2\omega^2/6.$$

Результат этот неверен, так как по доказанной теореме формула $T = T_{пост} + T_{вр}$ справедлива только тогда, когда ось вращения проходит через центр масс тела, а ось A через центр масс не проходит.

§ 122. НЕКОТОРЫЕ СЛУЧАИ ВЫЧИСЛЕНИЯ РАБОТЫ

Работа сил вычисляется по формулам, полученным в § 87 и 88. Рассмотрим дополнительно следующие случаи.

1. Работа сил тяжести, действующих на систему. Работа силы тяжести, действующей на частицу весом P_k , будет равна $P_k(z_{k0} - z_{k1})$, где z_{k0} и z_{k1} — координаты, определяющие начальное и конечное положения частицы (см. § 88). Тогда, учтя, что $\Sigma P_k z_k = Pz_C$ (см. § 32), найдем для суммы работ всех сил тяжести, действующих на систему, значение

$$A = \Sigma P_k z_{k0} - \Sigma P_k z_{k1} = P(z_{C0} - z_{C1}).$$

Этот результат можно еще представить в виде

$$A = \pm Ph_C,$$

где P — вес системы, h_C — вертикальное перемещение центра масс (или центра тяжести). Следовательно, работа сил тяжести, действующих на систему, вычисляется как работа их главного вектора (в случае твердого тела — равнодействующей) $\vec{P}$ на перемещении центра масс системы (или центра тяжести тела).

2. Работа сил, приложенных к вращающемуся телу. Элементарная работа приложенной к телу силы $\vec{F}$ (рис. 307) будет равна (см. § 87)

$$dA = F_\tau ds = F_\tau h d\varphi,$$

так как $ds = h d\varphi$, где $d\varphi$ — элементарный угол поворота тела.

Но, как легко видеть*, $F_\tau h = m_z(F)$. Будем называть величину

* Если разложить $\vec{F}$ по направлениям $B\tau$, BC и Bz' (см. рис. 307), то $m_z(\vec{F}) = m_z(\vec{F}_\tau)$, так как моменты двух других составляющих равны нулю.

$M_z = m_z(\bar{F})$ вращающим моментом. Тогда получим

$$dA = M_z d\varphi. \quad (46)$$

Следовательно, в рассматриваемом случае элементарная работа равна произведению вращающего момента на элементарный угол поворота. Формула (46) справедлива и при действии нескольких сил, если считать $M_z = \Sigma m_z(\bar{F}_i)$.

При повороте на конечный угол φ_1 работа

$$A = \int M_z d\varphi, \quad (47)$$

а в случае постоянного момента

$$A = M_z \varphi_1. \quad (47')$$

Если на тело действует пара сил, лежащая в плоскости, перпендикулярной оси Oz , то M_z в формулах (46)–(47') будет, очевидно, означать момент этой пары.

Укажем еще, как в данном случае определяется мощность (см. § 87). Пользуясь равенством (46), находим

$$N = dA/dt = M_z \cdot d\varphi/dt = M_z \omega.$$

Следовательно, при действии сил на вращающееся тело мощность равна произведению вращающего момента на угловую скорость тела. При той же самой мощности вращающий момент будет тем больше, чем меньше угловая скорость.



Рис. 307

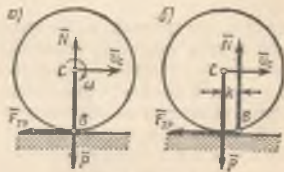


Рис. 308

3. Работа сил трения, действующих на катящееся тело. На колесо радиусом R (рис. 308), катящееся по некоторой плоскости (поверхности) без скольжения, действует приложенная в точке B сила трения $\bar{F}_{tr}$, препятствующая скольжению точки вдоль плоскости. Элементарная работа этой силы $dA = = F_{tr} ds_B$. Но точка B в данном случае совпадает с мгновенным цент-

ром скоростей (см. § 56) и $v_B = 0$. Так как $ds_B = v_B dt$, то $ds_B = 0$ и для каждого элементарного перемещения $dA = 0$.

Следовательно, при качении без скольжения работа силы трения, препятствующей скольжению, на любом перемещении тела равна нулю. По той же причине в этом случае равна нулю и работа нормальной реакции $\bar{N}$, если считать тела недеформируемыми в силу $\bar{N}$ приложенной в точке B (как на рис. 308, а).

Сопротивление качению создает возникающая вследствие деформации поверхностей (рис. 308, б) пара сил $\bar{N}$, $\bar{P}$, момент которой $M = kN$, где k — коэффициент трения качения (см. § 27). Тогда по формуле (46), учитывая, что при качении угол поворота колеса $d\varphi = ds_C/R$, получим

$$dA_{\text{кач}} = -kN d\varphi = -\frac{k}{R} N ds_C, \quad (48)$$

где ds_C — элементарное перемещение центра C колеса.

Если $N = \text{const}$, то полная работа сил сопротивления качению

$$A_{\text{кач}} = -kN \varphi_1 = -\frac{k}{R} N s_C. \quad (48')$$

Так как величина k/R мала, то при наличии других сопротивлений сопротивлением качению можно в первом приближении пренебрегать.

§ 123. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ СИСТЕМЫ

Доказанная в § 89 теорема справедлива для любой из точек системы. Следовательно, если рассмотреть какую-нибудь точку системы с массой m_k , имеющую скорость v_k , то для этой точки будет

$$d(m_k v_k^2/2) = dA_k^e + dA_k^i,$$

где dA_k^e и dA_k^i — элементарные работы действующих на точку внешних и внутренних сил. Составляя такие уравнения для каждой из точек системы и складывая их почленно, найдем, что

$$d(\Sigma m_k v_k^2/2) = \Sigma dA_k^e + \Sigma dA_k^i$$

или

$$dT = \Sigma dA_k^e + \Sigma dA_k^i. \quad (49)$$

Равенство (49) выражает теорему об изменении кинетической энергии системы в дифференциальной форме. Проинтегрировав обе части этого равенства в пределах, соответствующих перемещению системы из некоторого начального положения, где кинетическая энергия равна T_0 , в положение, где значение кинетической энергии становится равным T_1 , получим

$$T_1 - T_0 = \Sigma A_k^e + \Sigma A_k^i. \quad (50)$$

Это уравнение выражает теорему об изменении кинетической энергии в другой (интегральной) форме: изменение кинетической энергии системы при некотором ее перемещении равно сумме работ

на этом перемещении всех приложенных к системе внешних и внутренних сил.

В отличие от предыдущих теорем внутренние силы в уравнениях (49) или (50) не исключаются. В самом деле, если $\vec{F}_{12}^i$ и $\vec{F}_{21}^i$ — силы взаимодействия между точками B_1 и B_2 системы (рис. 309), то $\vec{F}_{12}^i + \vec{F}_{21}^i = 0$. Но при этом точка B_1 может перемещаться по направлению к B_2 , а точка B_2 — по направлению к B_1 . Работа каждой из сил будет тогда положительной и сумма работ нулем не будет. На-

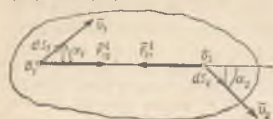


Рис. 309

пример, при выстреле (см. задачу 127 в § 112) силы давления пороховых газов, являющиеся для системы снаряд — откатывающиеся части внутренними, совершают работу и сообщают скорости телам системы.

Рассмотрим два важных частных случая.

1. *Неизменяемая система.* Неизменяемой будем называть механическую систему, в которой расстояние между какими двумя взаимодействующими точками остается во все время движения постоянным.

Рассмотрим две точки B_1 и B_2 неизменяемой системы ($B_1 B_2 = \text{const}$), действующие друг на друга с силами $\vec{F}_{12}^i$ и $\vec{F}_{21}^i = -\vec{F}_{12}^i$ (см. рис. 309). Тогда, поскольку при движении отрезка $B_1 B_2$ должно быть $v_1 \cos \alpha_1 = v_2 \cos \alpha_2$ (см. § 55), то и $ds_1 \cos \alpha_1 = ds_2 \cos \alpha_2$, так как $ds_1 = v_1 dt$, $ds_2 = v_2 dt$ (v_1 , v_2 и ds_1 , ds_2 — соответственно скорости и элементарные перемещения точек B_1 и B_2). Кроме того, $F_{12}^i = -F_{21}^i$. В результате для суммы элементарных работ этих сил получим

$$dA_1 + dA_2 = F_{12}^i ds_1 \cos \alpha_1 - F_{21}^i ds_2 \cos \alpha_2 = 0.$$

То же получится и для всех других взаимодействующих точек системы. В итоге приходим к выводу, что в случае неизменяемой системы сумма работ всех внутренних сил равна нулю и уравнения (49) или (50) принимают вид

$$dT = \Sigma dA_k^a \text{ и } T_1 - T_0 = \Sigma A_k^a. \quad (51)$$

2. Система с идеальными связями. Рассмотрим систему, на которую наложены связи, не изменяющиеся со временем. Разделим все действующие на точки системы внешние и внутренние силы на активные и реакции связей. Тогда уравнение (49) можно представить в виде

$$dT = \Sigma dA_k^a + \Sigma dA_k^r,$$

где dA_k^a — элементарная работа действующих на k -ую точку системы внешних и внутренних активных сил, а dA_k^r — элементарная работа реакций, наложенных на ту же точку внешних и внутренних связей.

Как видим, изменение кинетической энергии системы зависит от работы и активных сил и реакций связей. Однако можно ввести понятие о таких «идеальных» механических системах, у которых наличие связей не влияет на изменение кинетической энергии системы при ее движении. Для таких связей должно, очевидно, выполняться условие

$$\Sigma dA_k^r = 0. \quad (52)$$

Если для связей, не изменяющихся со временем, сумма работ всех реакций при элементарном перемещении системы равна нулю, то такие связи являются *идеальными* *. Укажем ряд известных нам видов идеальных связей.

В § 89 было установлено, что если связью является неподвижная поверхность (или кривая), трением о которую можно пренебречь, то при скольжении тел вдоль такой поверхности (кривой) работа реакции $\vec{N}$ равна нулю. Затем в § 122 показало, что если пренебречь деформациями, то при качении без скольжения тела по шероховатой поверхности работа нормальной реакции $\vec{N}$ и силы трения $\vec{F}^{\text{тр}}$ (т. е. касательной составляющей реакции) равна нулю. Далее, работа реакции $\vec{R}$ шарнира (см. рис. 10 и 11), если пренебречь трением, будет также равна нулю, поскольку точка приложения силы $\vec{R}$ при любом перемещении системы остается неподвижной. Наконец, если на рис. 309 материальные точки B_1 и B_2 рассматривать как связанные жестким (нерастяжимым) стержнем $B_1 B_2$, то силы $\vec{F}_{12}^i$ и $\vec{F}_{21}^i$ будут реакциями стержня; работа каждой из этих реакций при перемещении системы не равна нулю, но сумма этих работ по доказанному дает нуль. Таким образом, все перечисленные связи можно с учетом сделанных оговорок считать идеальными.

Для механической системы, на которую наложены только не изменяющиеся со временем идеальные связи, будет

$$dT = \Sigma dA_k^a \text{ и } T_1 - T_0 = \Sigma A_k^a. \quad (53)$$

Таким образом, изменение кинетической энергии системы с идеальными, не изменяющимися со временем связями при любом ее перемещении равно сумме работ на этом перемещении приложенных к системе внешних и внутренних *активных* сил.

Все предыдущие теоремы позволяли исключить из уравнений движения внутренние силы, но все внешние силы, в том числе и наперед неизвестные реакции внешних связей, в уравнениях сохранялись. Практическая ценность теоремы об изменении кинетической энергии состоит в том, что при не изменяющихся со временем идеальных связях она позволяет исключить из уравнений движения все наперед неизвестные реакции связей.

* Общее понятие об идеальных связях определено в § 139.

§ 124. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

Теорема об изменении кинетической энергии в случаях, когда движущаяся система является неизменяемой, позволяет исключить из рассмотрения все неизвестные внутренние силы, а при идеальных, не изменяющихся со временем связях — и наперед неизвестные реакции внешних связей.

В случае изменяемой системы теорема дает решение задачи только тогда, когда внутренние силы наперед известны. Если же эти силы не известны (задачи 123, 127 и им подобные), то получить решение с помощью одной только этой теоремы нельзя.

Уравнение (50) позволяет легко решать те задачи, в которых в число данных и искомых величин входят: 1) действующие силы; 2) перемещение системы; 3) скорости тел (линейные или угловые) в начале и в конце перемещения. При этом действующие силы должны быть постоянными или зависеть только от перемещений (растояний).

Важно также иметь в виду, что с помощью теоремы об изменении кинетической энергии можно (когда положение системы определяется одним параметром) составлять дифференциальные уравнения движения системы и, в частности, находить ускорения движущихся тел; при этом на систему могут вообще действовать и любые переменные силы (см. задачи 141—143 и задачу 154 в § 130).

Задача 139. Стержень AB длиной l подвешен на шарнире в точке A (рис. 310). Пренебрегая трением в шарнире, найти, какую наименьшую угловую скорость ω_0 надо сообщить стержню, чтобы он отклонился до горизонтального положения.

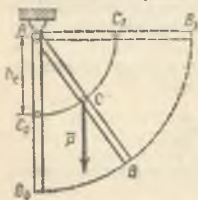


Рис. 310

Решение. В число данных и искомых в задаче величин входят ω_0 , $\omega_1=0$ и перемещение системы, определяемое углом B_0AB_1 . Следовательно, для решения задачи удобнее всего воспользоваться теоремой об изменении кинетической энергии. Учитывая, что система не изменяема, составим уравнение (51)

$$T_1 - T_0 = \Sigma A_k. \quad (a)$$

Обозначая массу стержня через M , вычислим все входящие в это уравнение величины. По формуле (43) и формуле (6) из § 102 находим

$$T_0 = J_A \omega_0^2 / 2 = M l^2 \omega_0^2 / 6.$$

Так как в конечном положении скорость стержня равна нулю, то $T_1=0$. Наложившая связь является идеальной (шарнир A); следовательно, работу совершает только активная сила $\vec{P} = M\vec{g}$ и $A^* = -Pl_C = -Mgl/2$. Подставляя все эти значения

310

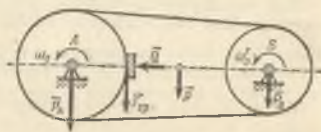


Рис. 311

чения в уравнение (a), найдем

$$-Ml^2 \omega_0^2 / 6 = -Mgl/2, \text{ откуда } \omega_0 = \sqrt{3gl/l}.$$

Задача 140. Шкивы A и B , соединенные ремнем (рис. 311), вращаются после выключения двигателя так, что шкив A имеет угловую скорость ω_0 . Общий вес шкивов P , а вес ремня p . Чтобы затормозить вращение, к шкиву A радиусом R прижимают с силой Q тормозную колодку; коэффициент трения колодки о шкив f . Пренебрегая трением в осях и считая шкивы сплошными дисками, найти, сколько оборотов сделает шкив A до остановки.

Решение. Для определения искомого числа оборотов N_{06} воспользуемся уравнением (51)

$$T_1 - T_0 = \Sigma A_k. \quad (a)$$

При вычислении кинетической энергии надо всегда иметь в виду, что кинетическая энергия системы равна сумме кинетических энергий всех входящих в нее тел. По условиям задачи $T_1=0$, а $T_0 = T_A + T_B + T_p$. Учитывая, что начальные скорости всех точек ремня $v_{p0} = \omega_0 R = \omega_0 r$, где ω_0 и r — начальная угловая скорость и радиус шкива B , найдем по формулам (43) и (8):

$$T_A = J_A \omega_0^2 / 2 = (P_A R^2 / 4g) \omega_0^2, \quad T_B = J_B \omega_0^2 / 2 = (P_B / 4g) r^2 \omega_0^2 = (P_B / 4g) R^2 \omega_0^2,$$

$$T_p = p v_{p0}^2 / 2g = p R^2 \omega_0^2 / 2g.$$

Последнее равенство следует из того, что все точки ремня движутся с одной и той же по модулю скоростью. Окончательно, так как $P_A + P_B = P$, получаем

$$T_0 = (P + 2p) R^2 \omega_0^2 / 4g.$$

Вычисляем работы сил. В данном случае работа сил тяжести равна нулю, так как центры тяжести колес и ремня при движении системы не перемещаются. Сила трения $F_{тр} = fQ$. Ее работу найдем по формуле (47')

$$A_{тр} = -(fQR) \cdot \varphi_1 = -fQR \cdot 2\pi N_{06}.$$

Подставляя все найденные значения в уравнение (a), получим окончательно

$$N_{06} = \frac{(P + p) R \omega_0^2}{8\pi f Q}.$$

Задача 141. Тележку тянут вверх по наклонной плоскости с углом наклона $\alpha=30^\circ$, приложив к ней постоянную силу $Q=160$ Н (рис. 312). Вес платформы тележки $P=180$ Н, вес каждого из четырех ее сплошных колес $p=20$ Н. Определить: 1) какую поступательную скорость v_1 будет иметь тележка, пройдя путь $l=4$ м; если $v_0=0$; 2) с каким ускорением движется тележка. Качение колес происходит без скольжения; сопротивлением качению пренебречь.

Решение. 1. Для определения v_1 воспользуемся уравнением (51)

$$T_1 - T_0 = \Sigma A_k. \quad (a)$$

В данном случае $T_0=0$, а $T_1 = T_{пл} + 4T_{кол}$. Тележка движется поступательно, а кинетическая энергия сплошного катящегося колеса была вычислена в задаче 136 (см. § 121); следовательно,

$$T_1 = P v_1^2 / 2g + 4 (3p v_1^2 / 4g) = (P + 6p) v_1^2 / 2g.$$

Работу совершают сила $\vec{Q}$ и сила тяжести $\vec{P}$, равная $\vec{P} - 4\vec{p}$. Работа силы трения, препятствующей скольжению, и нормальных реакций плоскости равна нулю (см. § 122). Вычисляя, находим

$$A(\vec{Q}) = Ql, \quad A = (\vec{P}) = -(P + 4p) h_C = -(P + 4p) l \sin \alpha.$$

Подставляя все эти данные в уравнение (a), получаем

$$(P + 6p) v_1^2 / 2g = [Q - (P + 4p) \sin \alpha] l, \quad (b)$$

311

$$v_1 = \sqrt{\frac{2gl [Q - (P + 4p) \sin \alpha]}{P + 6p}} = 2,8 \text{ м/с.}$$

2. Для определения ускорения a , поскольку нами уже получено равенство (6), поступим следующим образом: будем считать в равенстве (6) величины $v_1 = v$ и l (параметр, определяющий положение всей системы) переменными. Тогда, продифференцировав по времени обе части равенства, найдем

$$[(P + 6p)/g] v \frac{dv}{dt} = [Q - (P + 4p) \sin \alpha] \frac{dl}{dt}.$$

Но $dl/dt = v$, а $dv/dt = a$. Окончательно, сокращая на v , получим

$$a = \frac{Q - (P + 4p) \sin \alpha}{P + 6p} g = 0,98 \text{ м/с}^2.$$

Обращаем внимание на использованный в этой задаче прием определения ускорения с помощью теоремы об изменении кинетической энергии.

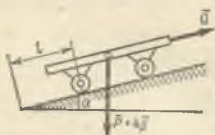


Рис. 312

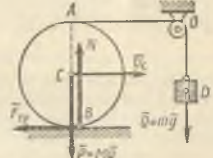


Рис. 313

Задача 142. На цилиндрический каток радиусом R и массой M намотана нить, перекинута через блок O (рис. 313) и несущая на конце груз D массой m . Определить, какую скорость v_C будет иметь центр C катка, пройдя путь s , если $v_{C0} = 0$. Найти, чему равно ускорение a_C этого центра. Коэффициент трения качения катка равен k , радиус инерции катка относительно его оси равен ρ_C . Массой нити и блока O пренебречь.

Решение. 1. Для определения скорости v_C воспользуемся уравнением

$$T - T_0 = \Sigma A_k^*. \quad (a)$$

В данном случае $T_0 = 0$, а $T = T_{кат} + T_D$, причем по формулам (42), (44) и (4)

$$T_D = mv_D^2/2, \quad T_{кат} = Mv_C^2/2 + M\rho_C^2\omega^2/2.$$

Так как точка B является мгновенным центром скоростей, то $\omega = v_C/R$ и $v_D = v_A = 2v_C$. Следовательно,

$$T = [4m + M(1 + \rho_C^2/R^2)] v_C^2/2.$$

Работу совершают сила $\vec{Q} = m\vec{g}$ и пара $\vec{N}, \vec{P}$ ($\vec{P} = M\vec{g}$). Поскольку $v_D = 2v_C$, то перемещению груза D будет $h = 2s$, где s — перемещение центра C катка, и $A(\vec{Q}) = mg \cdot 2s$. Работу сил сопротивления качению вычисляем по формуле (48'), так как $N = P = Mg = \text{const}$. Тогда

$$\Sigma A_k^* = 2mgs - (k/R) Mgs.$$

Подставляя найденные значения в уравнение (a), получим

$$[4m + M(1 + \rho_C^2/R^2)] v_C^2/2 = (2m - kM/R) gs, \quad (6)$$

откуда

$$v_C = \sqrt{\frac{2g(2mR - kM)Rs}{4mR^2 + M(R^2 + \rho_C^2)}}.$$

2. Для определения a_C , как и в предыдущей задаче, дифференцируем обе части равенства (6) по t . Окончательно, учитывая, что $ds/dt = v_C$, найдем

$$a_C = \frac{(2mR - kM) Rg}{4mR^2 + M(R^2 + \rho_C^2)}.$$

Задача 143. Шестерня 1 радиусом r и массой m_1 , насаженная на кривошип 2 длиной $OC = l$ и массой m_2 и связанная с ним спиральной пружиной, может кататься по неподвижной шестерне 3 радиусом $R = l - r$ (рис. 314). Момент, действующий со стороны пружины, $M_{пр} = c\alpha$, где α — угол поворота шестерни 1 относительно кривошипа. Пренебрегая трением в осях, найти период колебаний, которые будет совершать кривошип, если его вывести из положения равновесия. Механизм расположен в горизонтальной плоскости.

Решение. Будем определять положение кривошипа углом φ , отсчитываемым от положения равновесия. Чтобы исключить неизвестную реакцию оси C , рассмотрим шестерню 1 и кривошип как одну систему и составим дифференциальное уравнение ее движения с помощью уравнения (49).

Сначала вычисляем кинетическую энергию T системы, выражая ее через угловую скорость $\omega_{кр}$ кривошипа (так как мы ищем закон движения кривошипа). Получаем

$$T = T_{кр} + T_{ш} = J_{O_{кр}} \omega_{кр}^2/2 + m_1 v_C^2/2 + J_{C_{ш}} \omega_{ш}^2/2. \quad (a)$$

Считая кривошип однородным стержнем, а шестерню — диском и учитывая, что точка касания является для шестерни 1 мгновенным центром скоростей, найдем, что

$$J_{O_{кр}} = m_2 l^2/3, \quad J_{C_{ш}} = m_1 r^2/2, \\ v_C = \omega_{кр} l, \quad \omega_{ш} = v_C/r = \omega_{кр} l/r.$$

Подчеркиваем, что в формулу (44), по которой вычисляется $T_{ш}$, входит абсолютная угловая скорость шестерни, а не ее относительная скорость поворота по отношению к кривошипу. Подставляя все найденные значения в равенство (a), получим окончательно

$$T = (9m_1 + 2m_2) l^2 \omega_{кр}^2/12. \quad (6)$$

Теперь вычисляем элементарную работу. Внешние силы в данном случае работу не производят; следовательно, $dA^* = 0$. Элементарная работа силы упругости пружины (внутренняя сила), когда шестерня повернута вокруг кривошипа на угол α , равна $dA^* = -M_{пр} d\alpha = -c\alpha d\alpha$ (знак минус потому, что момент направлен в сторону, противоположную углу поворота шестерни). Поскольку мы ищем закон движения кривошипа, то выразим угол α через φ . Так как $a_2 b = a_1 b$, то $R\varphi = r\alpha$ или $(l-r)\varphi = r\alpha$, откуда

$$\alpha = [(l-r)/r] \varphi \text{ и } dA^* = -c [(l-r)^2/r^2] \varphi d\varphi.$$

Составляя теперь уравнение $dT = dA^*$, получим

$$[(9m_1 + 2m_2) l^2/6] \omega_{кр} d\omega_{кр} = -c [(l-r)^2/r^2] \varphi d\varphi.$$

Но так как

$$d\varphi = \frac{d\varphi}{dt} dt = \omega_{кр} dt, \quad \text{а } d\omega_{кр} = \frac{d\omega_{кр}}{dt} dt = \frac{d^2\varphi}{dt^2} dt,$$

то окончательно, после сокращения на dt , найдем следующее дифференциальное уравнение движения системы:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + k^2\varphi = 0, \quad \text{где } k^2 = \frac{6c(l-r)^2}{(9m_1 + 2m_2) l^2 r^4}.$$

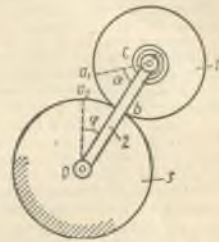


Рис. 314

Полученное уравнение является дифференциальным уравнением гармонических колебаний (см. § 94). Следовательно, кривошип, выведенный из положения равновесия, будет совершать гармонические колебания, период которых

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \frac{l}{l - r} \sqrt{\frac{5m_1 + 2m_2}{6c}}.$$

Решенная задача показывает, как может использоваться теорема об изменении кинетической энергии для составления дифференциального уравнения движения системы, положение которой определяется одной координатой (здесь углом φ).

Задача 144. Трос, имеющий длину l и массу m_1 , намотанный на барабан массой m_2 , несет на конце груз массой m_3 (см. рис. 300). Считая массу барабана равномерно распределенной по ободу и пренебрегая толщиной троса и трением в оси ($M_{тр} = 0$), определить зависимость скорости v груза от длины x свешивающейся части троса. В начальный момент времени $v = 0$ и приблизительно $x = 0$.

Решение. Для определения искомой зависимости воспользуемся уравнением

$$dT = \Sigma dA_k^*. \quad (a)$$

Поскольку груз, все части троса и все точки обода барабана движутся с одной и той же скоростью v , то $T = Mv^2/2$, где $M = m_1 + m_2 + m_3$. Кроме того, так как вес свешивающейся части троса равен $(m_1 g/l)x$, то $\Sigma dA_k^* = (m_1 g/l + m_3 g)dx$ и уравнение (a) примет вид

$$Mdv^2/2 = (m_1 x/l + m_3 g)gdx.$$

Отсюда, интегрируя и учитывая что при $x=0$ $v=0$, получим

$$v = \sqrt{(m_1 g/Ml) x^2 + 2(m_3 g/M) x}.$$

§ 125*. СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ

В ряде случаев получить решение задачи с помощью одной из общих теорем не удастся, но решение легко находится, если использовать одновременно, например, две общие теоремы. Несколько таких задач и рассматривается ниже.

Задача 145. Горизонтальная трубка AB , масса которой m_1 и радиус инерции p_z относительно вертикальной оси Az известны, вращается вокруг этой оси с угловой скоростью ω_0 (рис. 315). В некоторый момент времени находящийся в трубке шарик массой m_2 , чуть смещенный от точки A , начнет двигаться без начальной скорости вдоль трубки. Пренебрегая сопротивлениями, найти скорость v шарика относительно трубки как функцию его расстояния x от оси Az .

Решение. Рассмотрим систему трубка — шарик. Так как сопротивления (в том числе силами трения) здесь пренебрегают, то при движении системы работа действующих на нее сил тяжести и реакций связей равна нулю. Следовательно, из уравнения (50) получим $T = T_0$.

В момент $t=0$ шарик находится в точке A и его абсолютная скорость равна нулю. В произвольный момент времени угловая скорость трубки равна ω , а скорость шарика складывается из относительной, численно равной v , и ей перпендикулярной переносной, численно равной ωx . Поэтому

$$T_0 = m_1 p_z^2 \omega_0^2 / 2, \quad T = m_1 p_z^2 \omega^2 / 2 + m_2 (v^2 + \omega^2 x^2) / 2.$$

Подстановка этих величин в равенство $T = T_0$ дает

$$v^2 = n^2 \omega_0^2 - (n^2 + x^2) \omega^2, \quad \text{где } n^2 = m_1 p_z^2 / m_2. \quad (a)$$

Для определения неизвестной величины ω воспользуемся теоремой моментов относительно оси Az . Так как здесь $\Sigma m_2 (\vec{F}_k^* \cdot \vec{r}_k) = 0$, то $K_z = \text{const} = K_{z0}$ или

$$m_1 p_z^2 \omega + m_2 x^2 \omega = m_1 p_z^2 \omega_0,$$

откуда

$$\omega = n^2 \omega_0 / (n^2 + x^2). \quad (б)$$

Подставляя это значение ω в равенство (a), найдем окончательно

$$v = \frac{n \omega_0 x}{\sqrt{x^2 + n^2}} = \frac{n \omega_0}{\sqrt{1 + n^2/x^2}}. \quad (в)$$

Интересно отметить, что с увеличением x скорость стремится к предельному значению $v_{пр} = n \omega_0 = \sqrt{m_1/m_2} p_z \omega_0$.

Задача 146. Однородный сплошной круговой цилиндр массой m и радиусом r , находящийся в наивысшей точке цилиндрической поверхности радиусом R и чуть смещенный из этого положения, начинает катиться вниз без начальной скорости (рис. 316). Найти, при каком значении угла θ цилиндр оторвется от поверхности; обе поверхности абсолютно шероховаты (имеют насечку).

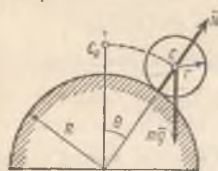


Рис. 316

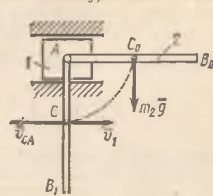


Рис. 317

Решение. Отрыв произойдет в точке, где реакция $\bar{N}$ поверхности обратится в нуль. Чтобы найти значение N , воспользуемся теоремой о движении центра масс, составив уравнение (16) в проекции на главную нормаль Cn к траектории центра масс C . Получим, учтя, что центр C движется по окружности радиуса $R+r$,

$$m a_{Cn} = \Sigma F_{kn}^* \quad \text{или} \quad m v_C^2 / (R+r) = mg \cos \theta - N. \quad (a)$$

Для определения v_C^2 воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии. Так как $T_0 = 0$, а значение T для катящегося цилиндра было найдено в задаче 136 (см. § 121) и равно $3mv_C^2/4$, то

$$3mv_C^2/4 = mg(R+r)(1 - \cos \theta). \quad (б)$$

Подставляя отсюда значение mv_C^2 в уравнение (a), найдем

$$N = mg(7 \cos \theta - 4)/3.$$

Следовательно, отрыв произойдет в точке, определяемой равенством $\cos \theta = 4/7$ ($\theta \approx 55^\circ$).

Положение точки отрыва, как и величина N , от значений R и r не зависят.

Задача 147. К ползуну 1 массой m_1 , который может перемещаться по гладким горизонтальным направляющим, шарнирно прикреплен стержень 2 длиной l и массой m_2 (рис. 317). В начальный момент времени стержень отклоняют до

горизонтального положения и отпускают без начальной скорости. Пренебрегая трением в оси шарнира, определить, какую скорость v_1 будет иметь ползун в момент прохождения стержня через вертикаль.

Решение. Рассматривая систему ползун — стержень, применим к ней теорему об изменении кинетической энергии на перемещении, при котором стержень приходит из положения AB_0 в положение AB_1 . Получим, учтя, что $T_0=0$

$$T_1 = m_2 g l / 2. \quad (a)$$

Здесь $T_1 = T_1^{\text{пол}} + T_1^{\text{ст}}$, где $T_1^{\text{пол}} = m_1 v_1^2 / 2$ и, согласно формулам (44) или (45), $T_1^{\text{ст}} = m_2 \omega^2 l^2 / 2 + J_C \omega^2 / 2$. В последнем равенстве ω — угловая скорость стержня, v_C — скорость его центра масс, причем $v_C = v_1 - v_{CA} = v_1 - \omega l / 2$; кроме того, как было найдено в задаче 119, $J_C = m_2 l^2 / 12$.

В результате уравнение (a), если поделить обе его части на $m_2 / 2$, примет вид

$$(m_1 / m_2) v_1^2 + (v_1 - \omega l / 2)^2 + l^2 \omega^2 / 12 = g l. \quad (6)$$

Для определения ω воспользуемся теоремой об изменении количества движения систем. Так как в данном случае $\Sigma F_{kx} = 0$, а в начальный момент система находилась в покое, получим $Q_x = 0$, т. е.

$$m_1 v_1 + m_2 (v_1 - \omega l / 2) = 0, \text{ откуда } \omega = 2(1 + m_1 / m_2) v_1.$$

Подставив это значение ω в равенство (6), найдем окончательно

$$v_1 = \sqrt{\frac{3gl}{(1 + m_1/m_2)(1 + 4m_1/m_2)}}.$$

Задача 148. По наклонной грани призмы 1 массой m_1 , стоящей на гладкой горизонтальной плоскости, начинает скользить (без трения) груз 2 массой m_2 (рис. 318). Угол наклона грани равен α . Найти, с каким ускорением будет при этом двигаться призма.

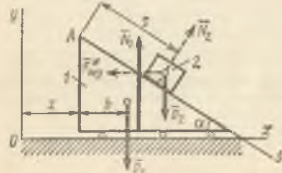


Рис. 318

Решение. Рассмотрим систему груз — призма и применим к ней теорему о движении центра масс. В проекции на горизонтальную ось Ox будет $\Sigma F_{kx} = 0$ и, следовательно, $Mx_C = 0$.

Обозначая координату призмы через x и определяя положение груза на призме координатой s , получим $Mx_C = m_1(x + b) + m_2(x + s \cos \alpha)$. Так как $Mx_C = 0$, то отсюда $(m_1 + m_2)x + m_2 s \cos \alpha = 0. \quad (a)$

Значение s можно было бы опять определить с помощью теоремы об изменении кинетической энергии, но в данном случае проще составить дифференциальное уравнение относительного движения груза [уравнение (56) из § 91] в проекции на ось As . Так как подвижная система отсчета вместе с призмой перемещается поступательно, то $F_{\text{кор}} = 0$, а $F_{\text{пер}} = -m_2 a_1$, где a_1 — ускорение призмы ($a_1 = |\ddot{x}|$). Тогда $F_{\text{пер}s} = -m_2 x \cos \alpha$, и в проекции на ось As получим

$$m_2 \ddot{s} = m_2 g \sin \alpha - m_2 x \cos \alpha.$$

Подставив это значение $m_2 \ddot{s}$ в равенство (a), найдем искомое ускорение призмы

$$a_{1x} = \ddot{x} = -\frac{m_2 g \sin 2\alpha}{2(m_1 + m_2 \sin^2 \alpha)}.$$

§ 126. ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ СИЛОВОЕ ПОЛЕ И СИЛОВАЯ ФУНКЦИЯ

Задачи, рассмотренные в предыдущих параграфах (и в § 89), удалось решить с помощью теоремы об изменении кинетической энергии по той причине, что во всех случаях работу действующих сил можно было подсчитать, не зная заранее закона происходящего движения. Важно установить, каков вообще класс сил, обладающих этим свойством.

Работа на перемещении $M_1 M_2$ силы $\vec{F}$, приложенной к телу в точке M , вычисляется по формуле (44') из § 87:

$$A_{(M_1 M_2)} = \int_{(M_1)}^{(M_2)} dA = \int_{(M_1)}^{(M_2)} (F_x dx + F_y dy + F_z dz). \quad (54)$$

Как уже было отмечено в § 89, вычислить стоящий справа интеграл, не зная закона происходящего движения (т. е. зависимостей x, y, z от времени t), можно лишь в случаях, когда сила постоянна или зависит только от положения точки, т. е. от ее координат x, y, z . Такие силы образуют силовое поле (см. § 32). Так как сила определяется ее проекциями на координатные оси, то силовое поле задается уравнениями:

$$F_x = \Phi_1(x, y, z), F_y = \Phi_2(x, y, z), F_z = \Phi_3(x, y, z). \quad (55)$$

Но в общем случае и для вычисления работы таких сил надо в формуле (54) перейти под знаком интеграла к одному переменному, т. е. например, зная зависимости $y = f_1(x)$ и $z = f_2(x)$. Эти равенства, как известно, определяют в пространстве уравнение кривой, являющейся траекторией точки M . Следовательно, в общем случае, работа сил, образующих силовое поле, зависит от вида траектории точки приложения силы.

Однако если окажется, что выражение, стоящее в формуле (54) под знаком интеграла и представляющее собой элементарную работу силы $\vec{F}$, будет полным дифференциалом некоторой функции $U(x, y, z)$, т. е.

$$dA = dU(x, y, z) \text{ или } F_x dx + F_y dy + F_z dz = dU(x, y, z), \quad (56)$$

то работу $A_{(M_1 M_2)}$ можно вычислить, не зная заранее траекторию точки M .

Функция U от координат x, y, z , дифференциал которой равен элементарной работе, называется *силовой функцией*. Силовое поле, для которого существует силовая функция, называется *потенциальным силовым полем*, а силы, действующие в этом поле, — *потенциальными силами*. В дальнейшем силовую функцию считаем однозначной функцией координат.

Если в формулу (54) подставить выражение dA из равенства (56), то получим

$$A_{(M_1 M_2)} = \int_{(M_1)}^{(M_2)} dU(x, y, z) = U_2 - U_1. \quad (57)$$

где $U_1 = U(x_1, y_1, z_1)$ и $U_2 = U(x_2, y_2, z_2)$ — значения силовой функции в точках M_1 и M_2 поля соответственно. Следовательно, работа потенциальной силы равна разности значений силовой функции в конечной и начальной точках пути и от вида траектории движущейся точки не зависит. При перемещении по замкнутой траектории $U_2 = U_1$ и работа потенциальной силы равна нулю.

Основным свойством потенциального силового поля и является то, что работа сил поля при движении в нем материальной точки зависит только от начального и конечного положений этой точки и ни от вида ее траектории, ни от закона движения не зависит.

Силы, работа которых зависит от вида траектории или от закона движения точки приложения силы, называются *непотенциальными*. К таким силам относятся силы трения и сопротивления среды.

Если установлено, что соотношение (56) имеет место, то силовая функция находится из равенства

$$U = \int dA + C \text{ или } U = \int (F_x dx + F_y dy + F_z dz) + C. \quad (58)$$

Постоянная C здесь может иметь любое значение (как видно из формулы (57), работа от C не зависит). Однако обычно условливаются считать в некоторой точке O , называемой «нулевой точкой», величину $U_0 = 0$ и определяют C исходя из этого условия.

Известными нам примерами потенциальных сил являются силы тяжести, упругости и тяготения (см. § 88). Покажем, что для полей этих сил действительно существуют силовые функции, и найдем их выражения. Поскольку под знаком интегралов, из которых в § 88 были получены формулы (47), (48) и (50), стоят элементарные работы соответствующих сил, то придем к следующим результатам, используя равенство (58):

1) для поля силы тяжести, если ось z направлена вертикально вверх, $dA = -P dz$, откуда, считая $U = 0$ при $z = 0$ (нулевая точка в начале координат), находим

$$U = -Pz; \quad (59)$$

2) для поля силы упругости, действующей вдоль оси Ox , $dA = -cx dx$, откуда, считая $U = 0$ при $x = 0$, находим

$$U = -cx^2/2; \quad (59')$$

3) для поля силы тяготения $dA = mgR^2 d(1/r)$, откуда, считая $U = 0$ при $r = \infty$ (нулевая точка в бесконечности), находим

$$U = mgR^2/r, \quad (59'')$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Пользуясь найденными значениями функций U , можно по формуле (57) получить те же выражения для работ соответствующих сил, которые даются равенствами (47), (48) и (50) в § 88.

* Такое поле можно назвать линейным; в нем область, в которой задано силовое поле, является прямой линией.

Покажем, что, зная силовую функцию, можно определить силу, действующую в любой точке поля. Из равенства (56), вычисляя дифференциал от функции $U(x, y, z)$, получим

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz.$$

Отсюда, приравняв коэффициенты при dx, dy, dz в обеих частях равенства, придем к такому результату:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}. \quad (60)$$

Следовательно, в потенциальном силовом поле проекции силы на координатные оси равны частным производным от силовой функции по соответствующим координатам. Вектор $\vec{F}$, проекции которого определяются равенствами вида (60), называют *градиентом* скалярной функции $U(x, y, z)$. Таким образом, $\vec{F} = \text{grad } U$. Из равенств (60) находим

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} \text{ и т. д.}$$

Отсюда следует, что если для данного поля существует силовая функция, то проекции силы удовлетворяют соотношениям:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}, \quad \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z}. \quad (61)$$

Можно доказать справедливость и обратного вывода, т. е. что если равенства (61) имеют место, то для поля существует силовая функция U . Следовательно, условия (61) являются необходимыми и достаточными условиями того, что силовое поле является потенциальным.

Таким образом, если силовое поле задано уравнениями (55), то по условиям (61) можно установить, является оно потенциальным или нет. Если поле потенциально, то уравнение (58) определяет его силовую функцию, а формула (57) — работу сил поля. Наоборот, если силовая функция известна, то по формулам (60) можно найти, какое силовое поле этой функции определяется.

Полагая $U(x, y, z) = C$, где C — некоторая постоянная, получим в пространстве уравнение поверхности, во всех точках которой функция U имеет одно и то же значение C . Такие поверхности называют *поверхностями уровня* или *поверхностями равного потенциала*. Если, как мы считаем, силовая функция является однозначной функцией координат, то поверхности уровня не могут пересекаться и через каждую точку поля проходит только одна поверхность уровня. При любом перемещении $M_1 M_2$ вдоль поверхности уровня $U_1 = U_2 = C$, и работа сил поля, как следует из уравнения (57), будет равна нулю. Поскольку сила при этом не равна нулю, то отсюда заключаем, что в любой точке потенциального силового поля сила направлена по нормали к поверхности уровня, проходящей через эту точку.

На рис. 319, а показаны две поверхности уровня $U(x, y, z) = C_1$, $U(x, y, z) = C_2$, а на рис. 319, б — их сечение плоскостью, проходящей через нормаль Bn . Если сила направлена в сторону, показанную на рисунке, то ее работа на перемещении BB' будет положительна. Но по формуле (57) эта работа равна $C_2 - C_1$. Следовательно, $C_2 > C_1$, т. е. сила в потенциальном поле направлена в сторону возрастания силовой функции. Далее, работы силы $\vec{F}_1$ на перемещении BB' и силы $\vec{F}_2$ на перемещении DD' одинаковы, так как равны $C_2 - C_1$. Но поскольку

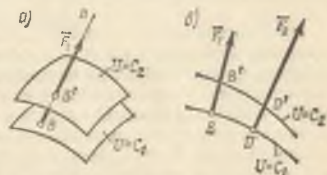


Рис. 319

$DD' < BB'$, то должно быть $F_2 > F_1$. Следовательно, численно сила в потенциальном поле больше там, где поверхности уровня проходят ближе. Отмеченные свойства позволяют наглядно представить картину распределения сил в потенциальном силовом поле с помощью поверхностей уровня. Кроме того, как видно из равенства (57), работа потенциальной силы зависит в конечном счете только от того, с какой поверхности уровня и на какую происходит перемещение точки.

Поясним сказанное примерами.

1. Для однородного поля сил тяжести (см. рис. 231), как видно из формулы (59), $U = \text{const}$, когда $z = \text{const}$. Следовательно, поверхностями уровня являются горизонтальные плоскости. Сила тяжести P направлена по нормали к этим плоскостям в сторону возрастания U и во всех точках поля постоянна.

2. Для поля сил тяготения, согласно формуле (59'), $U = \text{const}$, когда $r = \text{const}$. Следовательно, поверхностями уровня являются концентрические сферы, центр которых совпадает с притягивающим центром. Сила в каждой точке поля направлена по нормали к соответствующей сфере в сторону возрастания U (убывания r), т. е. к центру сферы.

Если в потенциальном силовом поле находится система материальных точек, то силовой функцией будет такая функция координат точек системы $U(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n)$, для которой

$$dU = \sum dA_k, \quad (62)$$

т. е. дифференциал которой равен сумме элементарных работ всех действующих на систему сил поля.

§ 127. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Для потенциального силового поля можно ввести понятие о потенциальной энергии как о величине, характеризующей «запас работы», которым обладает материальная точка в данном пункте силового поля. Чтобы сравнивать между собой эти «запасы работы», нужно условиться о выборе нулевой точки O , в которой будем условно считать «запас работы» равным нулю (выбор нулевой точки, как и всякого начала отсчета, производится произвольно). Потенциальной энергией материальной точки в данном положении M называется скалярная величина Π , равная той работе, которую произведут силы поля при перемещении точки из положения M в нулевое

$$\Pi = A_{(MO)}.$$

Из определения следует, что потенциальная энергия Π зависит от координат x, y, z точки M , т. е. что $\Pi = \Pi(x, y, z)$.

Будем в дальнейшем считать нулевые точки для функций $\Pi(x, y, z)$ и $U(x, y, z)$ совпадающими. Тогда $U_O = 0$ и по формуле (57) $A_{MO} = U_O - U = -U$, где U — значение силовой функции в точке M поля. Таким образом,

$$\Pi(x, y, z) = -U(x, y, z),$$

т. е. потенциальная энергия в любой точке силового поля равна значению силовой функции в этой точке, взятому с обратным знаком.

Отсюда видно, что при рассмотрении всех свойств потенциального силового поля вместо силовой функции можно пользоваться понятием потенциальной энергии. В частности, работу потенциальной силы вместо равенства (57) можно вычислять по формуле

$$A_{(M_1 M_2)} = \Pi_1 - \Pi_2. \quad (63)$$

Следовательно, работа потенциальной силы равна разности значений потенциальной энергии движущейся точки в начальном и конечном ее положениях.

Выражения потенциальной энергии для известных нам потенциальных силовых полей можно найти из равенств (59) — (59'), учитывая, что $\Pi = -U$. Таким образом, будет:

1) для поля силы тяжести (ось z вертикально вверх)

$$\Pi = Pz; \quad (64)$$

2) для поля силы упругости (линейного)

$$\Pi = cx^2/2; \quad (64')$$

3) для поля силы тяготения

$$\Pi = -mgR^2/r. \quad (64'')$$

Потенциальная энергия системы определяется так же, как и для одной точки, а именно: потенциальная энергия Π механической системы в данном ее положении равна работе, которую произведут силы поля при перемещении системы из данного положения в нулевое, т. е.

$$\Pi = \Sigma A_{(M_i O_i)}.$$

При наличии нескольких полей (например, полей сил тяжести и сил упругости) для каждого поля можно брать свое нулевое положение.

Зависимость между потенциальной энергией и силовой функцией будет такой же, как и для точки, т. е.

$$\Pi(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n) = -U(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n).$$

Закон сохранения механической энергии. Допустим, что все действующие на систему внешние и внутренние силы потенциальны. Тогда

$$\Sigma A_k = \Pi_0 - \Pi_1.$$

Подставляя это выражение работы в уравнение (50), получим для любого положения системы: $T - T_0 = \Pi_0 - \Pi$ или

$$T + \Pi = T_0 + \Pi_0 = \text{const}. \quad (65)$$

Следовательно, при движении под действием потенциальных сил сумма кинетической и потенциальной энергий системы в каждом ее положении остается величиной постоянной. В этом и состоит закон сохранения механической энергии, являющийся частным случаем общего физического закона сохранения энергии. Величина

$T+П$ называется *полной механической энергией системы*, а сама механическая система, для которой выполняется закон (65), — *консервативной системой*.

Пример. Рассмотрим маятник (рис. 320), отклоненный от вертикали на угол φ_0 и отпущенный без начальной скорости. Тогда в начальном его положении $П_0 = Pz_0$ и $T_0 = 0$, где P — вес маятника; z — координата его центра тяжести. Следовательно, если пренебречь всеми сопротивлениями, то в любом другом положении будет $П+T=П_0$ или $Pz + \frac{1}{2}J_A\omega^2 = Pz_0$.

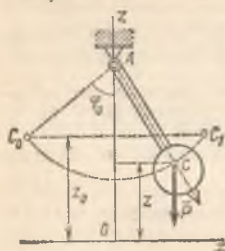


Рис. 320

Таким образом, выше положения z_0 центр тяжести маятника подняться не может. При опускании маятника его потенциальная энергия убывает, а кинетическая растет, при подъеме, наоборот, потенциальная энергия растет, а кинетическая убывает.

Из составленного уравнения следует, что $\omega^2 = 2P(z_0 - z)/J_A$.

Таким образом, угловая скорость маятника в любой момент времени зависит только от положения, занимаемого его центром тяжести, и в данном положении всегда принимает одно и то же значение. Такого рода зависимости имеют место только при движении под действием потенциальных сил.

Диссипативные системы. Рассмотрим механическую систему, на которую кроме потенциальных сил действуют неизбежные в земных условиях силы сопротивления (сопротивление среды, внешнее и внутреннее трение). Тогда из уравнения (50) получим: $T - T_0 = П_0 - П + A^A$ или

$$T + П = T_0 + П_0 + A^A, \quad (65')$$

где A^A — работа сил сопротивления. Так как силы сопротивления направлены против движения, то A^A величина всегда отрицательная ($A^A < 0$). Следовательно, при движении рассматриваемой механической системы происходит убывание или, как говорят, диссипация (рассеивание) механической энергии. Силы, вызывающие эту диссипацию, называют *диссипативными силами*, а механическую систему, в которой происходит диссипация энергии, — *диссипативной системой*.

Например, у рассмотренного выше маятника (рис. 320) благодаря трению в оси и сопротивлению воздуха механическая энергия будет со временем убывать, а его колебания будут затухать; это диссипативная система.

Полученные результаты не противоречат общему закону сохранения энергии, так как теряемая диссипативной системой механическая энергия переходит в другие формы энергии, например в теплоту.

Однако и при наличии сил сопротивления механическая система может не быть диссипативной, если теряемая энергия компенсируется притоком энергии извне. Например, отдельно взятый маятник, как мы видели, будет диссипативной системой. Но у маятника часов потеря энергии компенсируется периодическим притоком энергии

извне за счет опускающихся гирь или заводной пружины, и маятник будет совершать незатухающие колебания, называемые *автоколебаниями*. От вынужденных колебаний (см. § 96) автоколебания отличаются тем, что они происходят не под действием зависящей от времени возмущающей силы и что их амплитуда, частота и период определяются свойствами самой системы (у вынужденных колебаний амплитуда, частота и период зависят от возмущающей силы).

Глава XXVI

ПРИЛОЖЕНИЕ ОБЩИХ ТЕОРЕМ К ДИНАМИКЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 128. ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

Рассмотрим приложения общих теорем динамики к заданному движению абсолютно твердого тела. Так как изучение поступательного движения твердого тела сводится к задачам динамики точки, то начнем с рассмотрения вращательного движения вокруг неподвижной оси.

Пусть на твердое тело, имеющее неподвижную ось вращения z (рис. 321), действует система заданных сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$. Одновременно на тело действуют реакции подшипников $\vec{R}_A$ и $\vec{R}_B$. Чтобы исключить из уравнения движения эти наперед не известные силы, воспользуемся теоремой моментов относительно оси z (см. § 116). Так как моменты сил $\vec{R}_A$ и $\vec{R}_B$ относительно оси z равны нулю, то получим

$$\frac{dK_z}{dt} = M_z, \text{ где } M_z = \sum m_z(F_k).$$

Будем в дальнейшем величину M_z называть *вращающим моментом*.

Подставляя в предыдущее равенство значение $K_z = J_z\omega$, найдем

$$J_z \frac{d\omega}{dt} = M_z \text{ или } J_z \frac{d^2\varphi}{dt^2} = M_z, \quad (66)$$



Рис. 321

Уравнение (66) представляет собой *дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела*. Из него следует, что *произведение момента инерции тела относительно оси вращения на угловое ускорение равно вращающемуся моменту*:

$$J_z \epsilon = M_z. \quad (66')$$

Равенство (66') показывает, что при данном M_z чем больше момент инерции тела, тем меньше угловое ускорение, и наоборот. Сле-

довательно, момент инерции тела действительно играет при вращательном движении такую же роль, как масса при поступательном, т. е. является мерой инертности тела при вращательном движении (см. § 102).

Уравнение (66) позволяет: 1) зная закон вращения тела, т. е. $\varphi=f(t)$, найти вращающий момент M_z ; 2) зная вращающий момент M_z , найти $\varphi=f(t)$, т. е. закон вращения тела, или найти его угловую скорость ω . При решении второй задачи следует иметь в виду, что в общем случае величина M_z может быть переменной и зависеть от t , φ и ω .

Вместо уравнения (66) для изучения вращательного движения можно также пользоваться теоремой об изменении кинетической энергии: $T-T_0=A^e$, где T и A^e определяются по формулам (43) и (47).

Отметим следующие частные случаи:

- 1) если $M_z=0$, то $\omega=\text{const}$, т. е. тело вращается *равномерно*;
- 2) если $M_z=\text{const}$ то и $\varepsilon=\text{const}$, т. е. тело вращается *равноускоренно*.

Уравнение (66) по своему виду аналогично дифференциальному уравнению прямолинейного движения точки (см. § 77). Поэтому имеется аналогия и между самими названными движениями, и все результаты, получаемые для прямолинейного движения точки, будут справедливы и для вращательного движения твердого тела, если в них заменить соответственно силу F , массу m , координату x , скорость v и ускорение a точки на вращающий момент M_z , момент инерции J_z , угол поворота φ , угловую скорость ω и угловое ускорение ε вращающегося тела.

При решении задач уравнением (66) целесообразно пользоваться тогда, когда система состоит только из одного вращающегося тела. Если в системе кроме одного вращающегося тела есть еще другие движущиеся тела (см., например, задачи 134, 140 и т. д.), то уравнение движения лучше составлять с помощью общих теорем или методов, изложенных в § 141 и 145.

В задачах, аналогичных задаче 134, следует иметь в виду, что на барабан действует не сила $\bar{Q}$, а натяжение веревки $\bar{F}$, не равное $\bar{Q}$, и уравнение (66) для барабана имеет вид $J_O \varepsilon = Fr - M_{тр}$. Для его решения надо дополнительно определить силу F , составив уравнение движения груза A , что удлинит расчет.

Задача 149. Колесо массой m вращается вокруг оси O с угловой скоростью ω_0 (рис. 322). В некоторый момент времени к колесу прижимается тормозная колодка с силой Q . Коэффициент трения колодки о колесо f , радиус колеса r . Пренебрегая трением в оси и массой спиц, определить, через сколько секунд колесо остановится.

Решение. Составляя уравнение (66) и считая момент положительным, когда он направлен в сторону вращения колеса, получаем

$$J_O \frac{d\omega}{dt} = -fQr, \quad (a)$$

так как сила трения $F=fQ$. Отсюда, интегрируя, находим

$$J_O \omega = -fQrt + C_1.$$

По начальным данным, при $t=0$ $\omega=\omega_0$, следовательно, $C_1=J_O \omega_0$ и окончательно

$$\omega = \omega_0 - fQrt/J_O. \quad (б)$$

В момент остановки, когда $t=t_1$, $\omega=0$. Подставляя значение $\omega=0$ в уравнение (б) и учитывая, что для обода (кольца) $J_O=mr^2$, получим

$$t_1 = \frac{J_O \omega_0}{fQr} = \frac{m\omega_0}{fQ}.$$

Если понадобится найти число оборотов, сделанных колесом до остановки, то это проще сделать, не интегрируя еще раз уравнение (б), а применив теорему об изменении кинетической энергии.

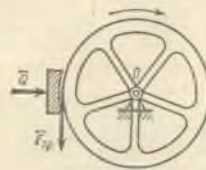


Рис. 322



Рис. 323

Задача 150. Вертикальный цилиндрический ротор, момент инерции которого относительно оси Oz равен J_z (рис. 323), приводится во вращение приложенным к нему моментом $M_{вр}$. Найти, как изменится при движении угловая скорость ротора ω , если $\omega_0=0$, а момент сил сопротивления воздуха пропорционален ω , т. е. $M_{сопр}=\mu\omega$.

Решение. Дифференциальное уравнение (66) для вращающегося ротора имеет вид (считаем положительными моменты, направленные в сторону вращения)

$$J_z \frac{d\omega}{dt} = M_{вр} - \mu\omega.$$

Разделяя переменные и полагая $\mu/J_z = n$, возьмем от обеих частей равенства соответствующие определенные интегралы, получим

$$\int_0^\omega \frac{-\mu d\omega}{M_{вр} - \mu\omega} = -n \int_0^t dt.$$

Отсюда

$$\ln \frac{M_{вр} - \mu\omega}{M_{вр}} = -nt \quad \text{или} \quad \frac{M_{вр} - \mu\omega}{M_{вр}} = e^{-nt}.$$

Окончательно найдем, что

$$\omega = \frac{M_{вр}}{\mu} (1 - e^{-nt}). \quad (a)$$

Угловая скорость ротора со временем возрастает, стремясь к предельному значению

$$\omega_{пр} = M_{вр}/\mu. \quad (б)$$

Согласно отмеченной выше аналогии эти результаты дают одновременно решение задачи о прямолинейном движении точки с массой m под действием

силы $\vec{F} = \text{const}$ и силы сопротивления $\vec{R} = -\mu \vec{v}$. При этом для скорости v точки по аналогии с равенствами (а) и (б) получится

$$v = (F/\mu)(1 - e^{-nt}), \text{ где } n = \mu/m, \text{ и } v_{\text{пр}} = F/\mu.$$

§ 129. ФИЗИЧЕСКИЙ МАЯТНИК. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ

Физическим маятником называется твердое тело, которое может совершать колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси под действием силы тяжести.

Изобразим сечение маятника плоскостью, перпендикулярной оси подвеса и проходящей через центр масс маятника C (рис. 324, а).

Введем обозначения: P — вес маятника, a — расстояние OC от центра масс до оси подвеса, J_O — момент инерции маятника относительно оси подвеса. Положение маятника будем определять углом φ отклонения линии OC от вертикали.

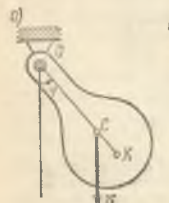


Рис. 324



Для определения закона колебаний маятника воспользуемся дифференциальным уравнением вращательного движения (66). В данном случае $M_z = M_O = -Pa \sin \varphi$ (знак минус взят потому, что при $\varphi > 0$ момент отрицателен, а при $\varphi < 0$ — положителен) и уравнение (66) принимает вид

$$J_O \ddot{\varphi} = -Pa \sin \varphi.$$

Деля обе части равенства на J_O и вводя обозначение

$$Pa/J_O = k^2, \quad (67)$$

найдем дифференциальное уравнение колебаний маятника в виде

$$\ddot{\varphi} + k^2 \sin \varphi = 0.$$

Полученное дифференциальное уравнение в обычных функциях не интегрируется. Ограничимся рассмотрением малых колебаний маятника, считая угол φ малым и полагая приближенно $\sin \varphi \approx \varphi$. Тогда предыдущее уравнение примет вид

$$\ddot{\varphi} + k^2 \varphi = 0.$$

Это дифференциальное уравнение совпадает по виду с дифференциальным уравнением свободных прямолинейных колебаний точки и его общим решением по аналогии с равенством (68) из § 94 будет

$$\varphi = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt.$$

Полагая, что в начальный момент $t=0$ маятник отклонен на малый угол $\varphi = \varphi_0$ и отпущен без начальной скорости ($\omega_0 = 0$), найдем для постоянных интегрирования значения $C_1 = 0$ и $C_2 = \varphi_0$. Тогда закон

малых колебаний маятника при данных начальных условиях будет

$$\varphi = \varphi_0 \cos kt.$$

Следовательно, малые колебания физического маятника являются гармоническими. Период колебаний физического маятника, если заменить k его значением (67), определяется формулой

$$T_\varphi = 2\pi/k = 2\pi\sqrt{J_O/Pa}. \quad (68)$$

Как видим, для малых колебаний период от угла начального отклонения φ_0 не зависит. Этот результат является приближенным. Если проинтегрировать составленное вначале дифференциальное уравнение колебаний маятника, не считая в нем угол φ малым (т. е. не полагая $\sin \varphi \approx \varphi$), то можно убедиться, что T_φ зависит от φ_0 . Приближенно эта зависимость имеет вид

$$T_\varphi \approx 2\pi\sqrt{J_O/Pa} (1 + \varphi_0^2/16).$$

Отсюда, например, следует, что при $\varphi_0 = 0,4$ рад (около 23°) формула (68) определяет период с точностью до 1%.

Полученные результаты охватывают и случай так называемого математического маятника, т. е. груза малых размеров (который будем рассматривать как материальную точку), подвешенного на нерастяжимой нити длиной l , массой которой по сравнению с массой груза можно пренебречь (рис. 324, б). Для математического маятника, так как он представляет собой систему, состоящую из одной материальной точки, очевидно, будет

$$J_O = ml^2 = (P/g)l^2, \quad a = OC = l.$$

Подставляя эти величины в равенство (68), найдем, что период малых колебаний математического маятника определяется формулой

$$T_m = 2\pi\sqrt{l/g}. \quad (68')$$

Из сравнения формул (68) и (68'), видно, что при длине

$$l_1 = J_O g / Pa = J_O / Ma \quad (69)$$

период колебаний математического маятника совпадает с периодом колебаний соответствующего физического маятника.

Длина l_1 такого математического маятника, период колебаний которого равен периоду колебаний данного физического маятника, называется *приведенной длиной физического маятника*. Точка K , отстоящая от оси подвеса на расстоянии $OK = l_1$, называется *центром качаний* физического маятника (см. рис. 324).

Замечая, что по теореме Гюйгенса $J_O = J_C + Ma^2$, мы можем привести формулу (69) к виду

$$l_1 = a + J_C / Ma. \quad (69')$$

Отсюда следует, что расстояние OK всегда больше, чем $OC = a$, т. е. что центр качаний маятника всегда расположен ниже его центра масс.

Из формулы (69') видно, что $KC = J_C / Ma$. Поэтому, если поместить ось подвеса в точке K , то приведенная длина l_2 полученного маятника согласно (69') будет

$$l_2 = KC + J_C / (M \cdot KC) = J_C / Ma + a = l_1.$$

Следовательно, точки K и O являются взаимными, т. е. если ось подвеса будет проходить через точку K , то центром качаний будет точка O (так как $l_2 = l_1$) и период колебаний маятника не изменится. Это свойство используется в так называемом обратном маятнике, который служит для определения ускорения силы тяжести.

Экспериментальное определение моментов инерции. Один из экспериментальных методов определения моментов инерции тел (метод маятниковых колебаний) основан на использовании формулы (68) периода малых колебаний маятника.

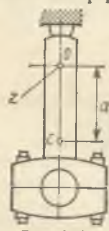


Рис. 325

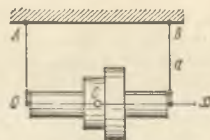


Рис. 326

Пусть требуется определить момент инерции относительно оси Oz изображенного на рис. 325 тела (шатуна), вес которого P известен. Подвесив тело так, чтобы ось Oz была горизонтальна, найдем с помощью секундомера период его малых колебаний T . Затем методом взвешивания (см. § 34, рис. 108) определим расстояние $OC = a$. Подставляя все эти значения в формулу (68), получим

$$J_{Oz} = PaT^2 / 4\pi^2.$$

Если требуется определить момент инерции тела относительно оси Ox , проходящей через его центр тяжести, то тело можно подвесить на двух жестко прикрепленных к телу штангах (стержнях) так, чтобы ось Ox была горизонтальна (рис. 326), и найти экспериментально момент инерции J_{AB} относительно оси AB (величина a в этом случае наперед известна). После этого искомый момент инерции вычисляется по теореме Гюйгенса: $J_{Ox} = J_{AB} - (P/g)a^2$.

§ 130. ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Положение тела, совершающего плоскопараллельное движение, определяется в любой момент времени положением полюса и углом поворота вокруг полюса (см. § 52). Задачи динамики будут решаться проще всего, если за полюс принять центр масс C тела (рис. 327) и определять положение тела координатами x_C, y_C и углом φ .

На рис. 327 изображено сечение тела плоскостью, параллельной плоскости движения и проходящей через центр масс C . Пусть на тело действуют внешние силы $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$, лежащие в плоскости этого сечения. Тогда уравнения движения точки C найдем по теореме о движении центра масс

$$M\vec{a}_C = \Sigma \vec{F}_k, \quad (70)$$

а вращательное движение вокруг центра C будет определяться уравнением (66), так как теорема, из которой получено это уравнение, справедлива и для движения системы вокруг центра масс. В результате, проектируя обе части равенства (70) на координатные оси, получим:

$$Ma_{Cx} = \Sigma F_{kx}, \quad Ma_{Cy} = \Sigma F_{ky}, \quad J_C \cdot \epsilon = \Sigma m_C (F_k^e). \quad (71)$$

или

$$M\ddot{x}_C = \Sigma F_{kx}, \quad M\ddot{y}_C = \Sigma F_{ky}, \quad J_C \ddot{\varphi} = \Sigma m_C (F_k^e). \quad (71')$$

Уравнения (71) представляют собой дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения твердого тела. С их помощью можно по заданным силам определить закон движения тела или, зная закон движения тела, найти главный вектор и главный момент действующих сил.

При несвободном движении, когда траектория центра масс известна, уравнения движения точки C удобнее составлять в проекциях на касательную τ и главную нормаль n к этой траектории. Тогда вместо системы (71) получим:

$$M \frac{dv_C}{dt} = \Sigma F_{k\tau}, \quad M \frac{v_C^2}{\rho_C} = \Sigma F_{kn}, \quad J_C \ddot{\varphi} = \Sigma m_C (F_k^e), \quad (72)$$

где ρ_C — радиус кривизны траектории центра масс.

Заметим, что если движение является несвободным, то в правые части уравнений (71) или (72) войдут еще неизвестные реакции связей. Для их определения надо будет составить дополнительные уравнения, отражающие те условия, которые налагаются на движение тела связями (см. задачу 151 и др.). Часто уравнения несвободного движения будут составляться проще с помощью теоремы об изменении кинетической энергии, которой можно воспользоваться вместо одного из уравнений (71) или (72).

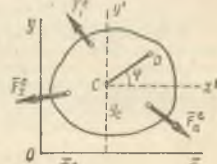


Рис. 327

Задача 151. Сплошной однородный круговой цилиндр скатывается по наклонной плоскости с углом наклона α (рис. 328). Определить ускорение центра цилиндра и наименьший коэффициент трения f цилиндра о плоскость, при котором возможно качение без скольжения, в двух случаях: 1) пренебрегая сопротивлением качению; 2*) учитывая сопротивление качению (коэффициент трения качения k и радиус цилиндра R известны).

Решение. 1. Изображаем действующие на цилиндр силы: силу тяжести $\vec{P} = mg$, наименьшую силу трения $\vec{F}$, при которой возможно качение без сколь-

жения, реакцию N плоскости, приложенную, когда сопротивление качению не учитывается, в точке касания. Направим ось Ox вдоль наклонной плоскости, а ось Oy — перпендикулярно ей.

Так как вдоль оси Oy центр масс цилиндра не перемещается, то $a_{Cy}=0$, и первое из уравнений (71) дает

$$N - P \cos \alpha = 0, \quad \text{откуда} \quad N = P \cos \alpha.$$

Составляя другие два уравнения системы (71), учтем, что $a_{Cx} = a_C$ и будем считать момент положительным, когда он направлен в сторону вращения цилиндра. Получим:

$$ma_C = P \sin \alpha - F, \quad J_C \cdot \varepsilon = FR. \quad (a)$$

Уравнения (a) содержат три неизвестные величины a_C , ε и F (здесь нельзя считать $F=fN$, так как это равенство имеет место, когда точка касания *скользит* вдоль плоскости, а при отсутствии скольжения может быть $F \leq fN$; см. § 23). Дополнительную зависимость между неизвестными величинами найдем, учитывая, что при чистом качении $v_C = \omega R$, откуда, дифференцируя, получим $a_C = \varepsilon R$. Тогда второе из равенств (a), если учесть, что для сплошного цилиндра $J_C = mR^2/2$, примет вид

$$ma_C/2 = F. \quad (б)$$

Подставляя это значение F в первое из равенств (a), получим

$$a_C = (2/3)g \sin \alpha. \quad (в)$$

Теперь находим из выражения (5)

$$F = (P/3) \sin \alpha. \quad (г)$$

Такая сила трения должна действовать на катящийся цилиндр, чтобы он катился без скольжения. Выше было указано, что $F \leq fN$. Следовательно, чистое качение будет происходить, когда

$$(P/3) \sin \alpha \leq P \cos \alpha \quad \text{или} \quad f \geq (\tan \alpha)/3.$$

Если коэффициент трения будет меньше этой величины, то сила F не может принять значения, определяемого равенством (г), и цилиндр будет катиться с проскальзыванием. В этом случае v_C и ω не связаны зависимостью $v_C = \omega R$ (точка касания не является мгновенным центром скоростей), но зато величина F имеет предельное значение, т. е. $F = fN = fP \cos \alpha$, и уравнения (a) принимают вид:

$$(P/3)a_C = P(\sin \alpha - f \cos \alpha), \quad PR^2\varepsilon/2 = fPR \cos \alpha,$$

откуда

$$a_C = g(\sin \alpha - f \cos \alpha); \quad \varepsilon = (2gf/R) \cos \alpha. \quad (д)$$

Центр цилиндра в этом случае движется с ускорением a_C , а сам цилиндр вращается с угловым ускорением ε , значения которых определяются равенствами (д).

2*. При учете сопротивления качению реакция N будет смещена в сторону движения на величину k (расположена так, как на рис. 308, б) и ее момент относительно центра C будет равен $-kN$. Тогда второе из уравнений (a) примет вид

$$J_C \cdot \varepsilon = FR - kN \quad \text{или} \quad mR^2\varepsilon/2 = FR - kN. \quad (e)$$

Остальные уравнения сохраняют свой вид, т. е. будет по-прежнему

$$N = P \cos \alpha, \quad ma_C = P \sin \alpha - F. \quad (ж)$$

Из уравнений (e) и (ж), учитывая, что и в данном случае $a_C = \varepsilon R$, найдем окончательно

$$a_C = \frac{2}{3}g \left(\sin \alpha - \frac{k}{R} \cos \alpha \right), \quad F = \frac{P}{3} \left(\sin \alpha + 2 \frac{k}{R} \cos \alpha \right).$$

После этого из неравенства $F \leq fN$ получим, что f должно иметь для обеспечения качения без скольжения значение $f \geq [(\tan \alpha)/3 + 2k/3R]$.

Задача 152. По шероховатой цилиндрической поверхности радиуса R (рис. 329) из положения, определяемого углом φ_0 , начинает катиться без скольжения сплошной однородный цилиндр радиусом r . Пренебрегая сопротивлением качению, определить закон движения центра цилиндра, когда угол φ_0 мал. Найти также, при каких значениях φ_0 возможно качение без скольжения, если коэффициент трения цилиндра о поверхность f .

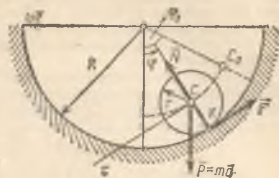


Рис. 329

Решение. Рассмотрим цилиндр при его качении вниз (движение происходит в вертикальной плоскости). В положении, определяемом углом φ , на цилиндр действуют сила тяжести $P = mg$, сила трения скольжения F и реакция N . Проведем касательную $Ст$ к траектории центра C (в сторону движения этого центра) и учтя, что для цилиндра $J_C = mr^2/2$, составим первое и третье из уравнений (72) в виде:

$$m \frac{dv_C}{dt} = mg \sin \varphi - F, \quad \frac{mr^2}{2} \frac{d\omega}{dt} = Fr, \quad (a)$$

где ω — угловая скорость цилиндра.

Выразим все скорости через φ . Одновременно учтем, что в точке K находится мгновенный центр скоростей. Тогда, поскольку при качении цилиндра вниз φ убывает и $\varphi < 0$, будет:

$$v_C = -(R-r)\dot{\varphi}, \quad \omega = v_C/r = -(R-r)\dot{\varphi}/r.$$

При этих значениях v_C и ω уравнения (a) примут вид:

$$m(R-r)\ddot{\varphi} = -mg \sin \varphi + F, \quad m(R-r)\ddot{\varphi} = -2F. \quad (б)$$

Исключая из равенств (б) силу F , найдем окончательно следующее дифференциальное уравнение, определяющее движение центра C :

$$\ddot{\varphi} + k^2 \sin \varphi = 0, \quad \text{где} \quad k^2 = 2g/3(R-r).$$

Поскольку очевидно, что при движении цилиндра $\varphi \leq \varphi_0$, то, когда угол φ_0 мал, можно приближенно принять $\sin \varphi \approx \varphi$. Тогда получим известное дифференциальное уравнение гармонических колебаний

$$\ddot{\varphi} + k^2 \varphi = 0. \quad (в)$$

В данной задаче при $t=0$ $\varphi = \varphi_0$, а $\dot{\varphi} = 0$. Интегрируя уравнения (в) при этих начальных условиях, найдем следующий закон малых колебаний цилиндра:

$$\varphi = \varphi_0 \cos kt. \quad (г)$$

Период этих колебаний

$$\tau = 2\pi/k = 2\pi \sqrt{3(R-r)/2g}.$$

В заключение найдем условие качения без скольжения, учитывая, что $F \leq fN$ (см. § 23). Значение F дает второе из равенств (б):

$$F = -m(R-r)\ddot{\varphi}/2.$$

Но согласно уравнению (в) $\ddot{\varphi} = -k^2\varphi$ и так как $k^2 = 2g/3(R-r)$, то окончательно

$$F = (mg/3)\varphi.$$

Теперь заметим, что при малом φ часть цилиндрической поверхности, по которой катится цилиндр, можно рассматривать как часть горизонтальной плоскости и считать приближенно $N = P = mg$. Тогда неравенство $F \leq fN$ дает $\varphi \leq 3f$. Так как наибольшее значение φ равно φ_0 , то при рассматриваемых малых колебаниях качение цилиндра будет происходить без скольжения, когда $\varphi_0 \leq 3f$.

Задача 153. Тело весом P опирается в точке B на пьезоэлектрический датчик прибора, измеряющего силу давления, а в точке A поддерживается нитью AD (рис. 330). При равновесии линия AC горизонтальна, а давление в точке B равно Q_0 . Вычислить, чему равен момент инерции J_C тела относительно оси, проходящей через его центр масс C , если в момент, когда нить пережигают, давление в точке B становится равным Q_1 . Расстояние l известно.

Решение. 1. В положении равновесия $Q_0 = P(l-b)$. Отсюда находим $b = (P - Q_0)l/P$.

2. Когда нить пережигают, тело начинает двигаться плоскопараллельно. Для начального элементарного промежутка времени изменением положения тела можно пренебречь. Тогда уравнения (71), справедливые только для этого промежутка времени, будут иметь вид:

$$Ma_{Cx} = P - Q_1, \quad a_{Cy} = 0, \quad J_C \cdot \epsilon = Q_1 b. \quad (a)$$

Так как $a_{Cy} = 0$, то точка C начинает перемещаться по вертикали вниз, а точка B скользит горизонтально (трение в опоре считаем малым). Восставляя перпендикуляры к направлениям этих перемещений, находим, что мгновенный центр скоростей будет в точке K . Следовательно, $v_C = b\omega$. Дифференцируя это равенство и считая в течение рассматриваемого элементарного промежутка времени $b = \text{const}$, получим $a_C = b\epsilon$. Тогда пересечение уравнений (a) дает

$$Pbe = (P - Q_1)g.$$

Определяя отсюда ϵ , найдем окончательно

$$J_C = Q_1 b^2 e = P Q_1 b^2 / (P - Q_1)g.$$

Полученный результат можно использовать для экспериментального определения моментов инерции.

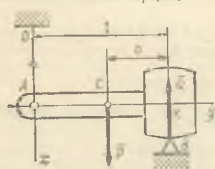


Рис. 330

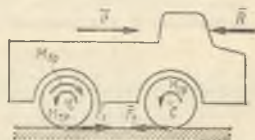


Рис. 331

Задача 154. Вес автомобиля с колесами равен P (рис. 331); вес каждого из четырех его колес равен p , радиус r , радиус инерции относительно оси $C - \rho_C$.

К задним (ведущим) колесам приложен вращающийся момент M_{np} . Автомобиль, начиная движение из состояния покоя, испытывает сопротивление воздуха, пропорциональное квадрату его поступательной скорости: $R = \mu v^2$. Момент трения в оси каждого колеса $M_{tp} = \text{const}$. Пренебрегая сопротивлением качению, определить: 1) предельную скорость автомобиля; 2) силу трения скольжения, действующую на ведущие и ведомые колеса при движении.

Решение. 1. Для определения предельной скорости составим дифференциальное уравнение движения автомобиля, пользуясь равенством (49)

$$dT = \sum dA_k^+ + \sum dA_k^-. \quad (a)$$

Кинетическая энергия автомобиля равна энергии кузова и колес. Учитывая, что P — вес всего автомобиля, а $v = \omega r$ (так как скорость v_C центра C колеса равна скорости v кузова), получим

$$T = P v^2 / 2g + 4 (J_C \omega^2 / 2) = (P + 4 p \rho_C^2 / r^2) v^2 / 2g,$$

где полагалось, что ω — угловая скорость колеса.

Из внешних сил работу совершает только сила сопротивления воздуха, так как сопротивлением качению мы пренебрегаем, а работа сил трения F_1 и F_2 колес

о грунт равна в этом случае нулю (см. § 122). Следовательно,

$$\sum dA_k^- = -R ds = -\mu v^2 ds,$$

где ds — элементарное перемещение кузова.

Работа внутренних сил (вращающего момента и сил трения в осях), если учесть, что $ds_C = ds = r d\varphi$, где φ — угол поворота колеса, будет

$$\sum dA_k^+ = (M_{np} - 4M_{tp}) d\varphi = (M_{np} - 4M_{tp}) ds/r.$$

Подставим все эти значения в равенство (a) и одновременно разделим обе его части на dt . Тогда, учитывая еще, что $ds/dt = v$, а $dv/dt = a$, получим

$$(P + 4 p \rho_C^2 / r^2) v \cdot a / g = (M_{np} / r - 4M_{tp} / r - \mu v^2) v.$$

Отсюда, сокращая на v , находим

$$(P + 4 p \rho_C^2 / r^2) a = (M_{np} / r - 4M_{tp} / r - \mu v^2) g / r. \quad (б)$$

Когда скорость автомобиля стремиться к ее предельному значению, его ускорение a стремится к нулю. Следовательно, v_{np} найдется из уравнения

$$M_{np} / r - 4M_{tp} / r - \mu v_{np}^2 = 0,$$

откуда

$$v_{np} = \sqrt{(M_{np} - 4M_{tp}) / \mu r}.$$

Этот результат можно получить сразу, приравняв нулю сумму работ всех сил. Цель предыдущих выкладок — показать, как составляется уравнение движения (б).

2. Для определения сил трения, действующих на каждое колесо, составим уравнения вращательного движения колес относительно их осей. Для двух ведущих колес, учитывая, что действующая на каждое из них сила трения F_1 направлена вперед (см. § 108, рис. 284), получим

$$2 p \rho_C^2 \epsilon / g = M_{np} - 2M_{tp} - 2F_1 r$$

Так как при качении $\epsilon r = a_C = a$, то окончательно найдем

$$F_1 = M_{np} / 2r - M_{tp} / r - p \rho_C^2 a / g r^2. \quad (в)$$

Действующая на каждое из ведомых колес сила трения F_2 направлена назад. Следовательно, для ведомого колеса будет

$$p \rho_C^2 \epsilon / g = F_2 r - M_{tp} r$$

откуда

$$F_2 = M_{tp} / r + p \rho_C^2 a / g r^2. \quad (г)$$

Из равенства (б) видно, что с увеличением скорости ускорение a убывает, стремясь к нулю, когда v стремится к v_{np} . Таким образом, сила трения, действующая на ведущие колеса, при разгоне несколько возрастает и достигает наибольшего значения, когда движение установится ($a=0$). Если подставить значение a из равенства (б), то легко видеть, что последнее слагаемое в формуле (в) будет много меньше первого, так как $P \gg p$. Поэтому практически величина F_1 изменяется незначительно.

На ведомых колесах сила трения имеет наибольшее значение в момент начала движения, а затем убывает и при равномерном движении ($a=0$) равна наименьшему значению M_{tp}/r .

Если коэффициент трения колес о грунт не будет достаточен для того, чтобы сила трения могла принять значение F_1 или F_2 , то соответствующие колеса будут буксовать. Так как M_{np} много больше M_{tp} , то в первую очередь буксование угрожает ведущим колесам.

При выключенном двигателе все колеса являются ведомыми и на них вначале будет действовать сила трения $F = M_{tp}/r$. Действие тормозных колодок эквивалентно увеличению момента M_{tp} в осях, а следовательно, и сил трения, действующей на каждое из колес, чем и ускоряется торможение автомобиля (см. § 108).

§ 131*. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ ГИРОСКОПА

Рассмотрим однородное твердое тело с неподвижной точкой O , имеющее ось симметрии Oz и вращающееся вокруг этой оси с угловой скоростью Ω , на много превышающей ту угловую скорость ω , которую может иметь сама ось Oz при ее поворотах вместе с телом

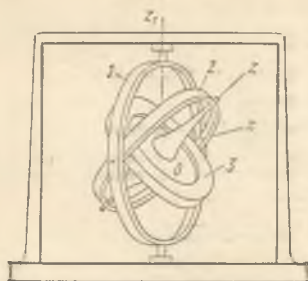


Рис. 332

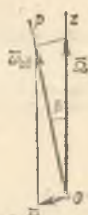


Рис. 333

вокруг точки O ; такое тело называют *гироскопом*. Ось Oz гироскопа, как ось симметрии, является одновременно его главной центральной осью инерции (см. § 104).

Простейшим примером гироскопа является детский волчок (см. ниже рис. 335). В гироскопических приборах ротор гироскопа обычно закрепляют в так называемом кардановом (кольцевом) подвесе, позволяющем ротору совершить любой поворот вокруг неподвижного центра подвеса O , совпадающего с центром тяжести ротора (рис. 332). Такой гироскоп, как и волчок, имеет три степени свободы*.

У гироскопов, применяемых в технике, Ω больше ω в десятки и сотни тысяч раз ($\Omega \gg \omega$), что позволяет построить весьма эффективную приближенную теорию гироскопа, называемую *элементарной*, или *прецессионной*. Исходят при этом из следующего.

В каждый момент времени абсолютная угловая скорость гироскопа $\omega_{аб} = \Omega + \omega$, а его движение, как движение тела, имеющего неподвижную точку O (см. § 60), складывается из серии элементарных поворотов с этой угловой скоростью $\omega_{аб}$ вокруг мгновенных осей вращения OP (рис. 333). Но когда $\Omega \gg \omega$, угол β между векторами $\omega_{аб}$ и Ω очень мал и практически можно принять, что $\omega_{аб} = \Omega$, а ось OP в любой момент времени совпадает с осью Oz гироскопа. Тогда кинетический момент $\bar{K}_O$ гироскопа относительно точки O можно

* Гироскоп на рис. 332 может совершать независимые друг от друга повороты вокруг оси Oz , оси Ox (вместе с кольцом 2) и оси Oy (вместе с кольцом 1). Подробнее вопрос о степенях свободы рассматривается в § 138.

тоже считать в любой момент времени направленным вдоль оси Oz и численно равным K_z , т. е. $J_z \Omega$ (см. конец § 115). В этом и состоит основное допущение элементарной теории гироскопа.

Таким образом, в дальнейшем будем считать

$$\bar{K}_O = J_z \Omega, \quad (73)$$

где J_z — момент инерции гироскопа относительно его оси Oz , а саму ось Oz и вектор $\bar{K}_O$ полагать все время направленными вдоль одной и той же прямой. Последнее позволяет находить, как изменяется со временем направление оси Oz гироскопа, определяя, как изменяется направление вектора $\bar{K}_O$. Установим, исходя из элементарной теории, каковы основные свойства гироскопа.

1. Свободный трехстепенный гироскоп. Рассмотрим гироскоп с тремя степенями свободы, закрепленный так, что его центр тяжести неподвижен, а ось может совершать любой поворот вокруг этого центра (см. рис. 332); такой гироскоп называют *свободным*. Для него, если пренебречь трением в осях подвеса, будет $\Sigma m_O(F_k) = 0$ и $\bar{K}_O = \text{const}$, т. е. модуль и направление кинетического момента гироскопа постоянны (см. § 117). Но так как направления вектора $\bar{K}_O$ и оси Oz гироскопа все время совпадают, то, следовательно, и ось свободного гироскопа сохраняет неизменное направление в пространстве по отношению к инерциальной (звездной) системе отсчета. Это одно из важных свойств гироскопа, используемое при конструировании гироскопических приборов.

Сохраняя неизменное направление в звездной системе отсчета, ось свободного гироскопа по отношению к Земле будет совершать вращение в сторону, противоположную направлению вращения Земли. Таким образом, свободный гироскоп можно использовать для экспериментального обнаружения факта вращения Земли*.

2. Действие силы (пары сил) на ось трехстепенного гироскопа. Устойчивость оси гироскопа. Пусть на ось гироскопа (рис. 334) начинает действовать сила $\bar{F}$, момент которой относительно центра O равен $\bar{M}_O$ (или пара сил $\bar{F}, \bar{F}'$ с моментом, равным $\bar{M}_O$). Тогда по теореме моментов (см. § 116)

$$\frac{d\bar{K}_O}{dt} = \bar{M}_O \quad \text{или} \quad \frac{d(\bar{K}_O)}{dt} = \bar{M}_O,$$

* Чтобы проделать подобный опыт, французский ученый Ж. Фуко (1819—1868) сконструировал в 1852 г. прибор, сходный с изображенным на рис. 332, который он и назвал «гироскоп» (от греческих *gυγίω* — вращаюсь и *σκοπεω* — смотрю, наблюдаю).

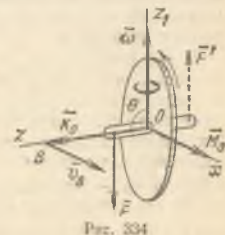


Рис. 334

где B — точка оси, совпадающая с концом вектора $\vec{K}_O$. Отсюда, учитывая, что производная от вектора $\vec{OB}$ по времени равна скорости $\vec{v}_B$ точки B , получаем

$$\vec{v}_B = \vec{M}_O \quad (\vec{v}_B = d\vec{K}_O/dt). \quad (74)$$

Равенство (74) выражает следующую теорему Резаля*: скорость конца вектора кинетического момента тела относительно центра O равняется по модулю и по направлению главному моменту внешних сил относительно того же центра. Следовательно, точка B , а с нею и ось гироскопа, будет перемещаться по направлению вектора $\vec{M}_O$. В результате находим, что если на ось быстро вращающегося гироскопа подействует сила, то ось начнет отклоняться не в сторону действия силы, а по направлению, которое имеет вектор $\vec{M}_O$ момента этой силы относительно неподвижной точки O гироскопа, т. е. перпендикулярно силе. Аналогичный результат имеет место и при действии на ось гироскопа пары сил.

Из равенства (74) следует, что когда действие силы прекращается, то $\vec{M}_O = 0$, а следовательно, и $\vec{v}_B$ обращается в нуль и ось гироскопа останавливается. Таким образом, гироскоп не сохраняет движения, сообщенного ему силой. Если действие силы является кратковременным (толчок), то ось гироскопа практически почти не изменяет своего направления**. В этом проявляется свойство устойчивости оси быстро вращающегося гироскопа, имеющего три степени свободы.

3. Прецессия трехстепенного гироскопа. Допустим, что сила $\vec{F}$ (или пара сил $\vec{F}, \vec{F}'$, см. рис. 334) действует на гироскоп во все рассматриваемое время его движения, оставаясь в плоскости zOz_1 (такой силой может, например, быть сила тяжести). Так как по установленному выше ось Oz в сторону действия силы не отклоняется, то угол $\theta = \angle z_1Oz$ остается все время постоянным, а скорость $\vec{v}_B$ — перпендикулярной плоскости z_1Oz . Следовательно, ось Oz гироскопа будет вращаться (прецессировать) вокруг оси Oz_1 с некоторой угловой скоростью $\vec{\omega}$, называемой угловой скоростью прецессии. Найдем уравнение, определяющее $\vec{\omega}$. Так как ось Oz вращается вокруг оси Oz_1 с угловой скоростью $\vec{\omega}$ (см. рис. 334), то по формуле (48), из § 51 $\vec{v}_B = \vec{\omega} \times \vec{OB} = \vec{\omega} \times \vec{K}_O$ и равенство (74) дает

$$\vec{\omega} \times \vec{K}_O = \vec{M}_O. \quad (75)$$

* Анри Резаль (1828—1896) известный французский ученый, автор первого учебника по кинематике (1862), где кинематика излагается как самостоятельный раздел механики.

«Скорость» $\vec{v}_B$ в формуле (74) имеет, конечно, размерность не длина / время, а кинетический момент/время.

** Точнее ось начнет совершать вблизи начального положения высокочастотные колебания малой амплитуды, которые при наличии сопротивлений затухнут, и ось придет в положение, близкое к начальному (тем ближе, чем больше $J_z \Omega$).

Это уравнение является исходным приближенным уравнением элементарной (прецессионной) теории гироскопа. Из него следует, что $\omega K_O \sin \theta = M_O$, откуда

$$\omega = \frac{M_O}{K_O \sin \theta} = \frac{M_O}{J_z \Omega \sin \theta}. \quad (76)$$

Чем больше $J_z \Omega$, тем меньше ω и тем большую точность дает элементарная теория*.

В качестве примера найдем угловую скорость прецессии волчка под действием силы тяжести $\vec{P}$ (рис. 335). Введя обозначение $OC = a$, получим, что $M_O = Pa \sin \theta$ и равенство (76) дает

$$\omega = \frac{Pa}{K_O} = \frac{Pa}{J_z \Omega}. \quad (76^*)$$

Аналогичную прецессию совершает земная ось, так как вследствие отклонения формы Земли от правильной шарообразной и наклона ее оси равнодействующие сил притяжения Солнца и Луны не проходят через центр масс Земли и создают относительно этого центра некоторые моменты. Период прецессии земной оси (время одного оборота) приблизительно 26 000 лет.



Рис. 335

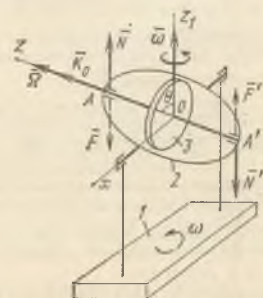


Рис. 336

4. Гироскоп с двумя степенями свободы. Гироскопический эффект. Рассмотрим гироскоп с ротором 3, закрепленным только в одном кольце 2, которое может вращаться по отношению к основанию 1 вокруг оси Ox (рис. 336). Такой гироскоп имеет по отношению к основанию две степени свободы (поворот вокруг оси Oz и вместе с кольцом 2 — вокруг оси Ox) и его свойства существенно отличаются от свойств гироскопа с тремя степенями свободы. Например, если толкнуть кольцо 2, то оно

* Прецессия сопровождается еще так называемой нутацией — происходящими с очень большой частотой малыми колебаниями оси Oz около ее среднего положения. В элементарной теории нутация не учитывается.

начнет свободно вращаться вместе с ротором вокруг оси Ox , в то время как трехстепенной гироскоп на такие толчки практически не реагирует (см. п. 2). Не реагирует трехстепенной гироскоп и на вращение основания, сохраняя неизменным направление своей оси Oz (см. п. 1). Рассмотрим, что в таком случае будет с двухстепенным гироскопом.

Допустим, что в некоторый момент времени основание 1 начинает вращаться вокруг оси Oz_1 (или любой другой ей параллельной) с угловой скоростью ω ($\omega \ll \Omega$). Тогда, вращаясь вместе с основанием, гироскоп начнет совершать вынужденную прецессию вокруг оси Oz_1 . При этом, согласно уравнению (75), на ротор 3 должен действовать момент $\vec{M}_O = \vec{\omega} \times \vec{K}_O$, который, очевидно, могут создать только силы F, F' давления подшипников A, A' на ось ротора, показанные на рис. 336 пунктиром (сравни с рис. 334). Так как центр масс O ротора 3 неподвижен, то по теореме о движении центра масс должно быть $\vec{F} + \vec{F}' = 0$, и, следовательно, силы F, F' образуют пару.

Но когда подшипники действуют на ось ротора с силами F, F' , то по третьему закону динамики и ось будет одновременно действовать на подшипники A, A' с такими же по модулю и противоположными по направлению силами $\vec{N}, \vec{N}'$. Пара сил $\vec{N}, \vec{N}'$ называется гироскопической парой, а ее момент $\vec{M}_{гр}$ — моментом гироскопической пары или гироскопическим моментом*. Поскольку момент $\vec{M}_{гр}$ противоположен $\vec{M}_O$, то

$$\vec{M}_{гр} = \vec{K}_O \times \vec{\omega} \quad \text{и} \quad M_{гр} = K_O \omega \sin \theta = J_z \Omega \omega \sin \theta. \quad (77)$$

Отсюда получаем следующее правило Н. Е. Жуковского: *если быстро вращающемуся гироскопу сообщить вынужденное прецессионное движение, то на подшипники, в которых закреплена ось ротора гироскопа, начнет действовать гироскопическая пара с моментом $\vec{M}_{гр}$, стремящаяся кратчайшим путем установить ось ротора параллельно оси прецессии так, чтобы направления векторов $\vec{\Omega}$ и $\vec{\omega}$ совпали.*

Под действием гироскопической пары кольцо 2 начнет вращаться вместе с ротором вокруг оси Ox ; при этом угол θ , а с ним момент $\vec{M}_{гр}$ будут убывать, и когда станет $\theta = 0$, вращение кольца прекратится.

Если кольцо 2 скрепить с основанием 1 жестко, т. е. так, чтобы оно не могло вращаться вокруг оси Ox , то у гироскопа останется одна степень свободы (поворот вокруг оси Oz). Но и в этом случае, если вращать основание вокруг оси Oz_1 , будет иметь место гироскопический эффект и ось начнет давить на подшипники с силами $\vec{N}, \vec{N}'$, значения которых, зная расстояние AA' , можно определить по формуле (77), если все величины, входящие в ее правую часть, будут тоже известны.

* Некоторые авторы применяют этот термин в другом смысле, называя гироскопическим моментом момент сил инерции частиц гироскопа.

5. Некоторые технические приложения гироскопа. Гироскопы используются как основной элемент в очень большом числе гироскопических приборов и устройств, имеющих самое разнообразное применение.

Трехстепенные гироскопы используют в целом ряде навигационных приборов (гироскоп, гироскопизатор, курсовой гироскоп и др.), а также в устройствах для автоматического управления движением (стабилизации) таких объектов, как самолет (автопилот), ракеты, морские суда и др.

Рассмотрим в качестве примера простейшее устройство, где трехстепенной гироскоп используется как стабилизатор (прибор Обри, стабилизирующий движение мины в горизонтальной плоскости). Прибор содержит свободный гироскоп (см. рис. 332), ось которого в момент выстрела совпадает с осью торпеды, направленной на цель. Если торпеда в некоторый момент времени отклонится от заданного направления на угол α (рис. 337), то ось гироскопа, сохраняя свое

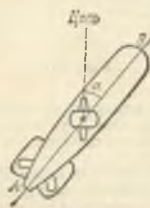


Рис. 337

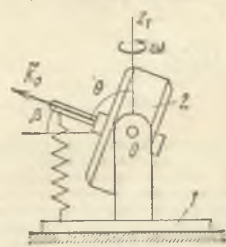


Рис. 338

направление на цель неизменным (по свойству свободного гироскопа), окажется повернутой по отношению к корпусу торпеды на такой же угол. Этот поворот с помощью специального устройства приводит в действие рулевую машину. В результате происходит поворот руля в соответствующую сторону, и торпеда выравнивается.

Прибор дает пример широко используемой индикаторной системы стабилизации (стабилизатор непрямого действия), где гироскоп играет роль чувствительного элемента, регистрирующего отклонение объекта от заданного положения и передающего соответствующий сигнал двигателю, который и осуществляет стабилизацию, возвращая объект в исходное положение (например, с помощью рулей).

Рассмотрим примеры использования двухстепенного гироскопа. Допустим, что ротор этого гироскопа (рис. 338) помещен в кожух 2, связанный с основанием 1 жесткой пружиной, удерживающей ротор в положении, для которого угол $\beta = \pi/2 - \theta = 0$, и сохраняющей в дальнейшем этот угол малым. При вращении основания начнется под действием гироскопической пары поворот ротора, что вызовет увеличение угла β и деформацию пружины. В результате начнет действовать момент $M\beta$ силы упругости пружины. При некотором β этот момент и момент гироскопической пары уравновесятся, т. е. будет $M\beta = J_z \Omega \omega$ или $\omega = M\beta / J_z \Omega$. Таким образом, прибор служит гироахтомером, т. е. позволяет по значению угла β определить угловую скорость объекта, на котором прибор установлен. Конкретным примером подобного прибора является авиационный указатель поворотов.

Примером использования двухстепенного гироскопа в качестве стабилизатора служит успокоитель качки. Он представляет собой вращающийся с угловой скоростью Ω ротор 1 (рис. 339). Ось AA_1 ротора закреплена в раме 2, которая имеет свою ось вращения DD_1 , скрепленную с корпусом судна. Когда на судно при волнении подействует момент M , он сообщит судну какую-то угловую скорость ω_1 (вектор $\vec{\omega}_1$ направлен перпендикулярно плоскости чертежа). Тогда, согласно правилу Жуковского, рама вместе с ротором начнет вращаться вокруг оси DD_1

с некоторой угловой скоростью ω_2 , вследствие чего на подшипники D и D_1 станет действовать гироскопическая пара $\vec{N}$, $\vec{N}'$ с моментом $M_{\text{гир}} = J_z \omega_2 \omega_1$, способствующая уменьшению крена. Для повышения эффективности стабилизатора используют снабженный специальным регулятором двигатель, увеличивающий угловую скорость ω_2 , а с нею и стабилизирующий момент $M_{\text{гир}}$, и возвращающий раму в исходное положение, когда крен прекратится.

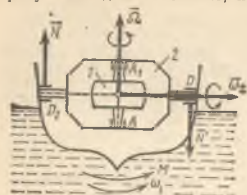


Рис. 339



Рис. 340

Успокоитель качки дает пример *силовой* гироскопической стабилизации (стабилизатор прямого действия), где массивный гироскоп и регистрирует отклонение объекта от заданного положения, и осуществляет стабилизацию, а двигатель играет лишь вспомогательную роль.

Рассмотрим в заключение пример определения гироскопических давлений на подшипники. Если судно, у которого ротор турбины вращается с угловой скоростью Ω (рис. 340), совершает поворот с угловой скоростью ω , то на подшипники A и B будут действовать силы $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$, направленные как показано на рисунке *. Если при этом $AB=l$, а момент инерции ротора J_z , то по формуле (77)

$$M_{\text{гир}} = Nl = J_z \Omega \omega \quad \text{и} \quad N = J_z \Omega \omega / l.$$

Величины этих сил могут достигать десятков килоньютонов и должны учитываться при расчете подшипников. Через подшипники гироскопические давления передаются корпусу судна и у очень легкого судна могли бы вызвать при повороте опускание килля или носа. Подобный эффект может наблюдаться и у винтовых самолетов при виражах (поворотах в горизонтальной плоскости).

§ 132*. ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ И ДВИЖЕНИЕ СВОБОДНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Для составления дифференциальных уравнений движения тела, имеющего неподвижную точку, необходимо найти выражение главного момента количества движения $\vec{K}_O$ (кинетического момента) и кинетической энергии T тела в этом случае движения.

1. Кинетический момент тела, движущегося вокруг неподвижной точки. Вектор $\vec{K}_O$ можно определить, найдя его проекции на какие-нибудь три координатные оси Ox, Oy, Oz . Чтобы получить соответствующие формулы в наиболее простом виде, возьмем в качестве осей $Oxyz$ (см. ниже рис. 341) жестко связанные с телом главные оси инерции этого тела для точки O (см. § 104).

Начнем с вычисления K_x . По аналогии с формулами (47) из § 28

$$m_k (m_k \vec{v}_k) = m_k (y_k v_{kz} - z_k v_{ky}),$$

Но по формулам Эйлера [§ 62, формулы (77)]

$$v_{ky} = \omega_z x_k - \omega_x z_k, \quad v_{kz} = \omega_x y_k - \omega_y x_k,$$

* Гироскопические давления на подшипники возникают и вследствие качки судна. Направления этих давлений будут, конечно, другими.

где $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ — проекции на оси $Oxyz$ мгновенной угловой скорости тела; x_k, y_k, z_k — координаты точек тела.

Подставим эти значения v_{ky} и v_{kz} в предыдущее равенство; при этом заметим, что члены с произведениями координат можно не подсчитывать, так как оси $Oxyz$ являются главными осями инерции и для них все центробежные моменты инерции равны нулю, т. е. $\sum m_k x_k y_k = \sum m_k x_k z_k = 0$. В результате, вынося общий множитель ω_x за скобки, найдем

$$K_x = \sum m_k (m_k \vec{v}_k) = [\sum m_k (y_k^2 + z_k^2)] \omega_x,$$

где величина в квадратных скобках представляет собой, согласно формулам (3) из § 102, главный момент инерции тела относительно оси Ox . Аналогичные выражения получим для K_y, K_z и окончательно будет:

$$K_x = J_x \omega_x, \quad K_y = J_y \omega_y, \quad K_z = J_z \omega_z. \quad (78)$$

Формулы (78) дают выражения проекций вектора $\vec{K}_O$ на главные оси инерции тела для точки O .

Если оси $Oxyz$ не будут главными, то, как нетрудно подсчитать, формулы (78) примут следующий более сложный вид:

$$\left. \begin{aligned} K_x &= J_x \omega_x - J_{xy} \omega_y - J_{xz} \omega_z, \\ K_y &= -J_{xy} \omega_x + J_y \omega_y - J_{yz} \omega_z, \\ K_z &= -J_{xz} \omega_x - J_{yz} \omega_y + J_z \omega_z. \end{aligned} \right\} \quad (78')$$

2. Кинетическая энергия тела, движущегося вокруг неподвижной точки. Так как любое элементарное перемещение твердого тела, имеющего неподвижную точку O , представляет собой элементарный поворот с угловой скоростью ω вокруг мгновенной оси вращения Ol , проходящей через эту точку (см. § 60), то кинетическую энергию тела можно определить по формуле

$$T = J_l \omega^2 / 2.$$

Подставим сюда значение J_l из формулы (12) (см. § 105, рис. 280) и одновременно учтем, что $\omega \cos \alpha = \omega_x$, $\omega \cos \beta = \omega_y$, $\omega \cos \gamma = \omega_z$, так как вектор ω направлен по оси Ol . Тогда получим

$$2T = J_x \omega_x^2 + J_y \omega_y^2 + J_z \omega_z^2 - 2J_{xy} \omega_x \omega_y - 2J_{yz} \omega_y \omega_z - 2J_{zx} \omega_z \omega_x. \quad (79)$$

Если в качестве координатных осей взять главные оси инерции тела для точки O , то все центробежные моменты инерции обратятся в нули и тогда

$$2T = J_x \omega_x^2 + J_y \omega_y^2 + J_z \omega_z^2. \quad (79')$$

3. Динамические уравнения Эйлера. Пусть на твердое тело, имеющее неподвижную точку O , действуют заданные силы $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ (рис. 341). Одновременно на тело будет действовать реакция $\vec{R}_O$ связи (на рисунке не показана). Чтобы исключить из уравнений движения эту неизвестную реакцию, воспользуемся теоремой моментов относительно центра O (§ 116), представив ее в виде (74), т. е. в виде теоремы Резаля. Тогда поскольку $\vec{m}_O(\vec{R}_O) = 0$, уравнение (74) даст

$$\vec{v}_B = \vec{M}_O, \quad (80)$$

где $\vec{M}_O = \sum \vec{m}_O(\vec{F}_k)$, а $\vec{v}_B$ — скорость по отношению к инерциальной системе отсчета $Ox_1 y_1 z_1$ точки B , совпадающей с концом вектора $\vec{K}_O$.

Движение тела изучается тоже по отношению к инерциальной системе отсчета $Ox_1 y_1 z_1$. Но чтобы получить уравнения этого движения в наиболее простой форме, спроектируем обе части предыдущего равенства на жестко связанные с телом и движущиеся вместе с ним оси $Oxyz$, являющиеся главными осями инерции тела для точки O . Тогда выражения проекций вектора $\vec{K}_O$ будут иметь простой вид, даваемый формулами (78), а входящие в них моменты инерции J_x, J_y, J_z будут величинами постоянными.

Для вычисления проекций абсолютной скорости $\vec{v}_B$ на подвижные оси представим $\vec{v}_B$ как сумму относительной (по отношению к осям $Oxyz$) скорости $\vec{v}^{OT}$ и переносной скорости $\vec{v}^{пер}$. Тогда из уравнения (80)

$$\vec{v}^{OT} + \vec{v}^{пер} = \vec{M}_0 \quad \text{и} \quad \vec{v}_x^{OT} + \vec{v}_x^{пер} = M_x. \quad (81)$$

Обозначим координаты точки B через x, y, z . При этом, так как радиусом-вектором точки B является вектор $\vec{K}_O$ (рис. 341), то $x=K_x, y=K_y, z=K_z$.

Как указано в § 64, при определении $\vec{v}^{OT}$ движение осей $Oxyz$ во внимание не принимается, следовательно, $\vec{v}_x^{OT} = dx/dt = dK_x/dt$, а при определении $\vec{v}^{пер}$ точку B можно рассматривать как принадлежащую телу, связанному с осями $Oxyz$. Но это тело движется вокруг неподвижной точки O ; следовательно, по первой из формул Эйлера [формулы (77) в § 62] $\vec{v}_x^{пер} = \omega_y z - \omega_z y = \omega_y K_z - \omega_z K_y$, где ω — угловая скорость тела. Заменяя в найденных выражениях $\vec{v}_x^{OT}$ и $\vec{v}_x^{пер}$ величины K_x, K_y, K_z их значениями (78) и подставляя эти значения $\vec{v}_x^{OT}, \vec{v}_x^{пер}$ во второе из равенств (81), получим

$$\frac{d(J_x \omega_x)}{dt} + J_z \omega_z \omega_y - J_y \omega_y \omega_z = M_x.$$

Аналогичные выражения получаются для проекций первого из равенств (81) на оси y и z (их можно найти круговой перестановкой индексов). Так как для связанных с телом осей $Oxyz$ величины J_x, J_y, J_z постоянны, то окончательно найдем следующие дифференциальные уравнения движения твердого тела вокруг неподвижной точки O в проекциях на главные оси инерции тела для этой точки:

$$\left. \begin{aligned} J_x \frac{d\omega_x}{dt} + (J_z - J_y) \omega_y \omega_z &= M_x, \\ J_y \frac{d\omega_y}{dt} + (J_x - J_z) \omega_x \omega_z &= M_y, \\ J_z \frac{d\omega_z}{dt} + (J_y - J_x) \omega_x \omega_y &= M_z. \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

Уравнения (82) называются динамическими уравнениями Эйлера. Если положение тела определять углами Эйлера φ, ψ, θ (см. § 60), то основная задача динамики

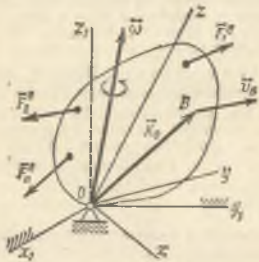


Рис. 341

будет состоять в том, чтобы, зная M_x, M_y, M_z , найти закон движения тела, т. е. найти φ, ψ, θ как функции времени. Для решения этой задачи надо к уравнениям (82) присоединить кинематические уравнения Эйлера (см. § 61), устанавливающие связь между $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ и углами φ, ψ, θ . Динамические и кинема-

тические уравнения Эйлера образуют систему шести нелинейных дифференциальных уравнений 1-го порядка; интегрирование этой системы представляет собой сложную математическую задачу. В § 131 была изложена приближенная теория гироскопических явлений. Точно движение гироскопа описывается уравнениями (82). Для интегрирования этих уравнений при решении соответствующих конкретных задач обычно используют те или иные приближенные математические методы.

В случаях, когда это целесообразно, одно из уравнений (82) можно заменить теоремой об изменении кинетической энергии. Формула (79') используется также при составлении уравнений методом, изложенным в § 145 (задача 181 в § 146).

4. П р и м е р. В качестве простейшего примера приложения полученных уравнений рассмотрим движение свободного гироскопа, закрепленного в центре тяжести, на который никакие силы, кроме силы тяжести, не действуют (см. § 131, п. 1). В этом случае $\vec{M}_0 = 0$ и теорема моментов (см. § 116) дает:

$$d\vec{K}_O/dt = 0 \quad \text{или} \quad \vec{K}_O = \text{const.} \quad (a)$$

Таким образом, вектор $\vec{K}_O$ имеет постоянное направление в инерциальной системе отсчета. Пользуясь этим, напомним для упрощения дальнейших расчетов неподвижную ось Oz , вдоль вектора $\vec{K}_O$ (рис. 342); две другие оси, на чертеже не показанные, можно провести произвольно. Подвижные оси, связанные с гироскопом, проведем так, чтобы ось Oz была направлена вдоль оси симметрии гироскопа. Тогда $J_x = J_y$ и последнее из уравнений (82), поскольку в нашем случае $M_z = 0$, дает $d\omega_z/dt = 0$, откуда

$$\omega_z = \text{const.} \quad (b)$$

По этой причине из формул (78) следует, что $K_z = J_z \omega_z = \text{const.}$ Но одновременно, как видно из рис. 342, $K_z = K_O \cos \theta$, где $\theta = \angle z, Oz$ — угол нутации (см. рис. 172 в § 60). Так как согласно равенству (a) $K_O = \text{const.}$, то отсюда заключаем, что и $\cos \theta = \text{const}$ или

$$\theta = \text{const} = \theta_0, \quad (b)$$

где θ_0 — начальное значение угла нутации.

Умножим теперь обе части первого из уравнений (82) на ω_x , второго — на ω_y и сложим эти равенства почленно, учитывая, что в нашем случае $M_x = M_y = 0$, а $J_x = J_y$. Тогда получим

$$J_x \left(\omega_x \frac{d\omega_x}{dt} + \omega_y \frac{d\omega_y}{dt} \right) = 0.$$

Отсюда, интегрируя и деля обе части на постоянный множитель, найдем

$$\omega_x^2 + \omega_y^2 = \text{const.}$$

Заменим здесь ω_x и ω_y их значениями из кинематических уравнений Эйлера (см. § 61). Учитывая, что $\dot{\theta} = \text{const}$ и $\dot{\theta} = 0$, получим:

$$\omega_x = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi, \quad \omega_y = \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi,$$

откуда

$$\omega_x^2 + \omega_y^2 = \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta.$$

Но по доказанному левая часть этого равенства и $\sin \theta$ постоянны. Следовательно, и

$$\dot{\psi} = \text{const} = \dot{\psi}_0. \quad (r)$$

Наконец, последнее из кинематических уравнений Эйлера дает $\omega_z = \dot{\psi} + \dot{\psi} \cos \theta$. Здесь, как мы нашли, ω_z и $\cos \theta$ постоянны. Следовательно, и

$$\dot{\varphi} = \text{const} = \dot{\varphi}_0. \quad (d)$$

Итак, при любых начальных условиях рассматриваемый гироскоп вращается вокруг своей оси симметрии с постоянной угловой скоростью $\dot{\varphi}_0$, а сама эта ось



Рис. 342

вращается, в свою очередь, вокруг неподвижной оси Oz_i с постоянной угловой скоростью $\dot{\varphi}_0$, описывая коническую поверхность с постоянным углом при вершине $2\theta_0$ (см. рис. 342). Такое движение гироскопа называется *регулярной прецессией*.

5. Движение свободного твердого тела. Как известно, движение свободного твердого тела складывается из поступательного движения вместе с полюсом, в качестве которого при решении задач динамики выбирают обычно центр масс C тела, и из движения вокруг центра масс, как вокруг неподвижной точки (см. § 63). Если на тело действуют внешние силы $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$, то движение полюса C описывается теоремой о движении центра масс $m\vec{a}_C = \Sigma \vec{F}_k$, где m — масса тела. В проекциях на неподвижные оси Ox_i, Oy_i, Oz_i это равенство дает:

$$m\ddot{x}_{1C} = \Sigma F_{kx}, \quad m\ddot{y}_{1C} = \Sigma F_{ky}, \quad m\ddot{z}_{1C} = \Sigma F_{kz}, \quad (83)$$

где x_{1C}, y_{1C}, z_{1C} — координаты центра масс тела.

Для движения же вокруг центра масс теорема моментов, выражаемая равенством (38), дает в проекциях на главные центральные оси инерции тела три уравнения, совпадающие по виду с уравнениями (82). Таким образом, система дифференциальных уравнений (83), (82) описывает движение свободного твердого тела (снаряда, самолета, ракеты и т. д.).

Глава XXVII

ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА

§ 133. ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА ДЛЯ ТОЧКИ И МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Методы решения задач механики, которые до сих пор рассматривались, основываются на уравнениях, вытекающих или непосредственно из законов Ньютона, или же из общих теорем, являющихся следствием этих законов. Однако этот путь не является единственным. Оказывается, что уравнения движения или условия равновесия механической системы можно получить, положив в основу вместо законов Ньютона другие общие положения, называемые *принципами механики*. В ряде случаев применение этих принципов позволяет, как мы увидим, найти более эффективные методы решения соответствующих задач. В этой главе будет рассмотрен один из общих принципов механики, называемый *принципом Даламбера*.

Найдем сначала выражение принципа для одной материальной точки. Пусть на материальную точку с массой m действует система активных сил, равнодействующую которых обозначим $\vec{F}^a$, и реакция связи $\vec{N}$ (если точка является несвободной). Под действием всех этих сил точка будет двигаться по отношению к инерциальной системе отсчета с некоторым ускорением $\vec{a}$.

Введем в рассмотрение величину

$$\vec{F}^n = -m\vec{a}, \quad (84)$$

имеющую размерность силы. Векторную величину, равную по модулю произведению массы точки на ее ускорение и направленную противоположно этому ускорению, называют *силой инерции* точки.

(в этой главе массу системы обозначаем буквой m), найдем, что

$$\vec{R}^n = -m\vec{a}_C, \quad (89)$$

т. е. *главный вектор сил инерции механической системы (в частности, твердого тела) равен произведению массы системы (тела) на ускорение центра масс и направлен противоположно этому ускорению*.

Если ускорение $\vec{a}_C$ разложить на касательное и нормальное, то вектор $\vec{R}^n$ разложится на составляющие *

$$\vec{R}_\tau^n = -m\vec{a}_{C\tau}, \quad \vec{R}_n^n = -m\vec{a}_{Cn}. \quad (89')$$

Сравнив теперь второе из равенств (88) с уравнением $d\vec{K}_O/dt = \Sigma \vec{M}_O(\vec{F}_k)$, выражающим теорему моментов (см. § 116), и учтя, что аналогичным будет соотношение для моментов относительно оси, получим:

$$\vec{M}_O^n = -\frac{d\vec{K}_O}{dt} \quad \text{и} \quad M_z^n = -\frac{dK_z}{dt}. \quad (90)$$

т. е. *главный момент сил инерции механической системы (твердого тела) относительно некоторого центра O или оси z равен взятой со знаком минус производной по времени от кинетического момента системы (тела) относительно того же центра или той же оси*.

Приведение сил инерции твердого тела. Согласно результатам § 12, справедливым для любых сил, систему сил инерции *твердого тела* можно заменить одной силой, равной $\vec{R}^n$ и приложенной в произвольно выбранном центре O , и парой с моментом, равным $\vec{M}_O^n$. Рассмотрим несколько частных случаев.

1. *Поступательное движение*. В этом случае ускорения всех точек тела одинаковы и равны ускорению $\vec{a}_C$ центра масс C тела ($\vec{a}_k = \vec{a}_C$). Тогда все силы инерции $\vec{F}_k^n = -m_k\vec{a}_C$ образуют систему параллельных сил, аналогичных силам тяжести $\vec{p}_k = m_k\vec{g}$, и поэтому, как и силы тяжести, имеют равнодействующую, проходящую через точку C .

Следовательно, при поступательном движении силы инерции *твердого тела* приводятся к равнодействующей, равной $\vec{R}^n$ и проходящей через центр масс тела.

2. *Вращательное движение*. Пусть твердое тело имеет плоскость материальной симметрии Oxy и вращается вокруг оси Oz , перпендикулярной этой плоскости ** (рис. 343, где показано сечение тела плоскостью Oxy). Если привести силы инерции к центру O , то вследствие симметрии результирующая сила и пара будут лежать в плоскости Oxy и момент пары будет равен M_{Oz}^n . Тогда, так как

* Нормальную составляющую силы инерции называют еще центробежной составляющей или центробежной силой инерции.

** Для тела произвольной формы, вращающегося вокруг неподвижной оси, пример приведения сил инерции дается в § 136.

$K_z = J_{Oz} \ddot{\phi}$, то по второй из формул (90)

$$M_{Oz}^n = -J_{Oz} \cdot \ddot{\phi} = -J_{Oz} \cdot \epsilon, \quad (91)$$

где ϵ — угловое ускорение тела.

Следовательно, система сил инерции такого вращающегося тела приводится к силе R^n , определяемой формулой (89) и приложенной в точке O (рис. 343), и к паре с моментом M_{Oz}^n , определяемым формулой (91), лежащей в плоскости симметрии тела.



Рис. 343

3. Вращение вокруг оси, проходящей через центр масс тела. Если тело, рассмотренное в п. 2, вращается вокруг оси Cz , проходящей через центр масс C тела, то $R^n = 0$, так как $a_C = 0$. Следовательно, в этом случае система сил инерции тела приводится к одной только паре с моментом M_{Oz}^n , лежащей в плоскости симметрии тела.

4. Плоскопараллельное движение. Если тело имеет плоскость симметрии и движется параллельно этой плоскости,

то, очевидно, система сил инерции тела приведет к лежащим в плоскости симметрии силе, равной R^n и приложенной в центре масс C тела, и паре с моментом $M_{Oz}^n = -J_{Cz} \cdot \epsilon$.

При решении задач по формулам вида (91) вычисляется модуль момента M_{Oz}^n , а его направление, противоположное ϵ , указывается на чертеже.

§ 135. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

Принцип Даламбера дает единый метод составления уравнений движения любой несвободной механической системы. Им особенно удобно пользоваться для нахождения реакций связей, когда движение системы известно или может быть определено с помощью уравнений, не содержащих реакций, например с помощью теоремы об изменении кинетической энергии или уравнений, которые будут получены в § 141, 145. При этом из рассмотрения исключаются все наперед неизвестные внутренние силы. В случаях, когда надо определить реакции внутренних связей, систему следует расчленить на такие части, по отношению к которым искомые силы будут внешними.

Для одной несвободной материальной точки применение принципа Даламбера приводит к уравнениям, аналогичным тем, которые рассматривались в § 90 (см. задачу 155).

Задача 155. Решить задачу 107 (см. § 90) с помощью принципа Даламбера. **Решение.** Изображаем груз в том положении, для которого надо найти натяжение нити (рис. 344). На груз действуют сила тяжести $\vec{P}$ и реакция нити $\vec{T}$. Присоединяем к этим силам нормальную и касательную силы инерции $\vec{F}_n^n$ и $\vec{F}_t^n$. Полученная система сил, согласно принципу Даламбера, будет находиться в равновесии. Приравнявая нулю сумму проекций всех этих сил на нормаль M_1O ,

получим

$$T - P - F_n^n = 0.$$

Так как $F_n^n = ma_n = mv_1^2/l$, где v_1 — скорость груза в положении M_1 , то

$$T = P + F_n^n = P + mv_1^2/l.$$

Таким образом, мы получили для T то же выражение, что и в задаче 107. Определяя теперь, как и в задаче 107, величину v_1 с помощью теоремы об изменении кинетической энергии, найдем искомый результат.

Уравнение в проекции на касательную дает $F_t^n = 0$. Этот результат получается потому, что в точке M_1 производная $dv/dt = 0$, так как в этой точке модуль скорости имеет максимальное значение.

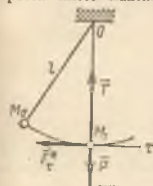


Рис. 344



Рис. 345

Задача 156. Два груза весом P_1 и P_2 каждый, связанные нитью, движутся по горизонтальной плоскости под действием силы Q , приложенной к первому грузу (рис. 345, а). Коэффициент трения грузов о плоскость f . Определить ускорение грузов и натяжение нити.

Решение. Изображаем все действующие на систему внешние силы. Прибавляем к этим силам силы инерции грузов. Так как оба груза движутся поступательно с одним и тем же ускорением, то по модулю

$$F_1^n = P_1 a/g, \quad F_2^n = P_2 a/g.$$

Направления сил показаны на чертеже. Силы трения равны:

$$F_1 = fP_1, \quad F_2 = fP_2.$$

Согласно принципу Даламбера полученная система сил должна находиться в равновесии. Составляя уравнение равновесия в проекции на горизонтальную ось, найдем

$$Q - f(P_1 + P_2) - (P_1 + P_2)a/g = 0.$$

Отсюда

$$a = [Q/(P_1 + P_2) - f]g.$$

Очевидно, грузы будут двигаться, если $f < Q/(P_1 + P_2)$.

Искомое натяжение нити является в рассматриваемой системе силой внутренней. Для ее определения расчленим систему и применим принцип Даламбера к одному из грузов, например ко второму (рис. 345, б). На этот груз действуют сила P_2 , нормальная реакция N_2 , сила трения F_2 и натяжение нити T . Присоединяя к ним силу инерции F_2^n и составляя уравнение равновесия в проекции на горизонтальную ось, находим

$$T - fP_2 - P_2 a/g = 0.$$

Подставляя сюда найденное ранее значение a , получим окончательно

$$T = QP_2/(P_1 + P_2).$$

Интересно, что натяжение нити в этом случае не зависит от силы трения и при одном и том же суммарном весе системы будет тем меньше, чем меньше

вес второго (заднего) груза. Поэтому, например, в железнодорожном составе выгоднее в голове помещать более тяжелые вагоны, а в хвосте — более легкие.

Рассмотрим численный пример. Пусть $Q=200$ Н, $P_1=400$ Н, $P_2=100$ Н. Тогда движение возможно, если $f < 0,4$. Натяжение нити при этом равно 40 Н. Если грузы поменять местами, то натяжение нити станет равным 160 Н.

Задача 157. Решить задачу 134 (см. § 118) с помощью принципа Даламбера и найти дополнительно натяжение нити.

Решение. 1. Рассмотрим барабан и груз как одну систему; присоединением к телам системы силы инерции (рис. 346). Груз A движется поступательно, и для него $R^n = Qa/g = Qre/g$. Силы инерции барабана приводятся к паре с моментом M_0^n , равным по модулю $J_0 \cdot \varepsilon = P\rho^2 \varepsilon/g$ и направленным противоположно вращению (см. § 134). Составляя для всех сил условие равновесия в виде $\sum m_0(\vec{F}_k) = 0$, получим

$$|M_0^n| + R^n r - Qr + M_{тр} = 0$$

$$P\rho^2 \varepsilon/g + Qr^2 \varepsilon/g - Qr + M_{тр} = 0.$$

Отсюда находим

$$\varepsilon = \frac{(Qr - M_{тр})g}{P\rho^2 + Qr^2}.$$

2. Рассматривая теперь груз A отдельно и присоединяя к действующим на него силам $\vec{Q}$ и $\vec{T}$ силу инерции $\vec{R}^n$, получим из условий равновесия, что натяжение нити

$$T = Q - R^n = Q \left(1 - \frac{re}{g} \right) = \frac{Q(P\rho^2 + M_{тр}r)}{P\rho^2 + Qr^2}.$$

Задача 158. Определить силу, стремящуюся разорвать равномерно вращающийся маховик массой m , считая его массу распределенной по ободу. Радиус маховика r , а угловая скорость ω .



Решение. Искомая сила является внутренней. Для ее определения разрежем обод на две части и применим принцип Даламбера к одной из половин (рис. 347). Действие отброшенной части заменим одинаковыми силами $\vec{F}$, численно равными искомой силе F . Для каждого элемента обода сила инерции (центростремительная сила инерции) направлена вдоль радиуса. Эти сходящиеся в точке O силы имеют равнодействующую, равную главному вектору сил инерции $\vec{R}^n$ и направленную вследствие симметрии вдоль оси Ox . По формуле (89) $R^n = 0,5m\omega^2 = 0,5m\omega^2$, где x_C — координата центра масс дуги полуокружности, равная $2r/\pi$ (см. § 35). Следовательно,

$$R^n = m\omega^2 r/\pi.$$

Условия равновесия дают $2F = R^n$ и окончательно

$$F = m\omega^2 r/2\pi.$$

С помощью этой формулы можно найти предельную угловую скорость, при превышении которой маховик из данного материала грозит разрыв.

Задача 159. Однородный стержень AB весом P , закрепленный в точке A шарниром, отклоняют до горизонтального положения и отпускают без начальной скорости (рис. 348). Определить реакцию шарнира A как функцию угла φ .

Решение. Рассматривая стержень в произвольном положении, проводим оси Axy (перпендикулярно стержню и вдоль стержня) и изображаем действующие на стержень силу тяжести $\vec{P}$ и реакции $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$. Пользуясь принципом Даламбера, присоединяем к этим силам силы инерции стержня, приведя их к центру A (см. § 134, п. 2). Тогда силы инерции будут представлены двумя составляющими $\vec{R}_\tau^n$ и $\vec{R}_n^n$ главного вектора $\vec{R}^n$ и парой с моментом M_A^n . При этом по формулам (89) и (91) модули этих составляющих и момента пары имеют значения:

$$R_\tau^n = \frac{P}{g} a_{C\tau} = \frac{P}{g} \frac{l}{2} \varepsilon, \quad R_n^n = \frac{P}{g} a_{Cn} = \frac{P}{g} \frac{l}{2} \omega^2, \quad M_A^n = J_A \cdot \varepsilon = \frac{Pl^2}{3g} \varepsilon, \quad (a)$$

где l — длина стержня; ω и ε — его угловая скорость и угловое ускорение. Составляя для этой плоской системы сил уравнения равновесия $\sum F_{Ax} = 0$, $\sum F_{Ay} = 0$, $\sum M_A(\vec{F}_k) = 0$, получим:

$$X_A - P \cos \varphi + R_\tau^n = 0, \quad Y_A - P \sin \varphi - R_n^n = 0, \quad M_A^n - P(l/2) \cos \varphi = 0. \quad (б)$$

Из последнего уравнения, заменив M_A^n его значением, найдем ε :

$$\varepsilon = (3g/2l) \cos \varphi. \quad (в)$$

Для определения величины ω , входящей в выражение R_n^n , можно или проинтегрировать уравнение (в), или воспользоваться теоремой об изменении кинетической энергии. Выбирая второй путь и учтя, что $T_0 = 0$, получим: $J_A \omega^2/2 = (Pl/2) \sin \varphi$ или $(Pl^2/3g)\omega^2 = Pl \sin \varphi$, откуда

$$\omega^2 = (3g/l) \sin \varphi.$$

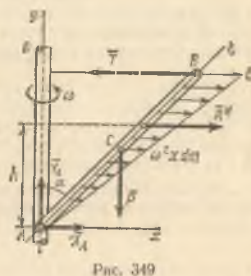
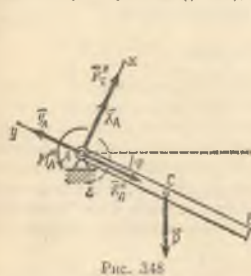
При найденных значениях ε и ω^2 равенства (а) дают:

$$R_\tau^n = (3P/4) \cos \varphi, \quad R_n^n = (3P/2) \sin \varphi.$$

Подставив эти величины в первые два из уравнений (б), найдем искомые реакции:

$$X_A = 0,25P \cos \varphi, \quad Y_A = 2,5P \sin \varphi.$$

В начальный момент времени ($\varphi = 0$) $X_A = 0,25P$, $Y_A = 0$. В момент, когда стержень проходит через вертикаль ($\varphi = 90^\circ$), $X_A = 0$, $Y_A = 2,5P$.



Задача 160. Однородный стержень AB длиной l и весом P прикреплен шарниром A к вертикальному валу, вращающемуся с угловой скоростью $\omega = \text{const}$ (рис. 349). Найти натяжение T горизонтальной нити, удерживающей стержень под углом α к валу.

Решение. Пользуясь принципом Даламбера, присоединяем к действующим на стержень внешним силам P, T, X_A, Y_A силы инерции. Для каждого элемента стержня с массой Δm центробежная сила инерции равна $\Delta m \omega^2 x$, где x — расстояние элемента от оси вращения Oy . Равнодействующая этих распределенных по линейному закону параллельных сил (см. § 21) проходит через центр тяжести треугольника ABE , т. е. на расстоянии $h = (2l/3) \cos \alpha$ от оси Ax . Так как эта равнодействующая равна главному вектору сил инерции*, то по формуле (89)

$$R^n = m a_C = m \omega^2 x_C = (P/g) \omega^2 (l/2) \sin \alpha$$

(здесь x_C — координата центра тяжести стержня).

Составляя теперь уравнение статики $\Sigma m_A(F_k) = 0$, получим

$$Tl \cos \alpha - R^n h - P (l/2) \sin \alpha = 0.$$

Подставляя сюда значения R^n и h , найдем окончательно

$$T = P \left(\frac{\cos \alpha}{3g} \sin \alpha + 0,5 \operatorname{tg} \alpha \right).$$

Другое решение. Задачу можно решить, не пользуясь результатами § 21, а вычисляя сумму моментов сил инерции относительно центра A непосредственно путем интегрирования. Проведем вдоль стержня AB ось $A\xi$. Для каждого элемента $d\xi$ стержня с координатой ξ сила инерции будет $\omega^2 x dm$. Ее момент относительно центра A равен $-y \omega^2 x dm$. Тогда уравнение моментов даст

$$\Sigma m_A(\bar{F}_k) = Tl \cos \alpha - P (l/2) \sin \alpha - \int_{(A)}^{(B)} \omega^2 xy \, dm = 0. \quad (a)$$

Выражая все величины, стоящие под знаком интеграла, через ξ , получим:

В результате будет

$$\int_{(A)}^{(B)} \omega^2 xy \, dm = (m/l) \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha \int_0^l \xi^2 d\xi = (P/3g) l^2 \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

Подставляя это значение в равенство (a), находим для T то же выражение, что и при предыдущем решении.

§ 136*. ДИНАМИЧЕСКИЕ РЕАКЦИИ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА ОСЬ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ТЕЛА. УРАВНОВЕШИВАНИЕ ВРАЩАЮЩИХСЯ ТЕЛ

Рассмотрим твердое тело, вращающееся равномерно с угловой скоростью ω вокруг оси, закрепленной в подшипниках A и B (рис. 350). Свяжем с телом вращающиеся вместе с ним оси $Axyz$; преимущество таких осей в том, что по отношению к ним координаты центра масс и моменты инерции тела будут величинами постоянными. Пусть на тело действуют заданные силы $\bar{F}_1^e, \bar{F}_2^e, \dots, \bar{F}_n^e$. Обозначим проекции главного вектора всех этих сил на оси $Axyz$ через R_x^e, R_y^e, R_z^e ($R_x = \Sigma F_{kx}^e$ и т. д.), а их главные моменты относительно тех

* Из статики известно, что для любой системы сил равнодействующая (если она существует) равна главному вектору этих сил. Следовательно, равнодействующая сил инерции, когда она существует, равна $\bar{R}^n$, но при непоступательном движении эта равнодействующая вообще не проходит через центр масс тела, что и имеет место в данном случае.

же осей — через M_x^e, M_y^e, M_z^e [$M_x^e = \Sigma m_k(\bar{F}_k^e)$ и т. д.]; при этом, так как $\omega = \text{const}$, то $M_z^e = 0$.

Для определения динамических реакций X_A, Y_A, Z_A, X_B, Y_B подшипников, т. е. реакций, возникающих при вращении тела, присоединим ко всем действующим на тело заданным силам и реакциям связи силы инерции $\bar{F}_k^n$ всех частиц тела, приведем их к центру A (см. § 134). Тогда силы инерции будут представлены одной силой, равной $\bar{R}^n$ и приложенной в точке A , и парой сил с моментом, равным $\bar{M}^n = \Sigma m_A(\bar{F}_k^n)$. Проекция этого момента на оси x и y будут: $M_x^n = \Sigma m_x(\bar{F}_k^n), M_y^n = \Sigma m_y(\bar{F}_k^n)$; здесь опять $M_z^n = 0$, так как $\omega = \text{const}$.

Теперь, составляя согласно принципу Даламбера уравнения (88) в проекциях на оси $Axyz$ (или соответствующие им уравнения равновесия из § 30) и полагая $AB = b$, получим

$$\left. \begin{aligned} X_A + X_B + R_x^e + R_x^n &= 0; \\ Y_A + Y_B + R_y^e + R_y^n &= 0; \\ Z_A + R_z^e + R_z^n &= 0; \\ -Y_B b + M_x^e + M_x^n &= 0; \quad X_B b + M_y^e + M_y^n = 0. \end{aligned} \right\} \quad (92)$$

Последнее уравнение $M_x^e + M_x^n = 0$ удовлетворяется тождественно, так как $M_z^e = 0$ и $M_z^n = 0$.

Главный вектор сил инерции $\bar{R}^n = -m \bar{a}_C$, где m — масса тела [см. формулу (89)]. При $\omega = \text{const}$ центр масс C имеет только нормальное ускорение $a_{Cn} = \omega^2 h_C$, где h_C — расстояние точки C от оси вращения. Следовательно, направление вектора $\bar{R}^n$ совпадает с направлением OC . Вычисляя проекции $\bar{R}^n$ на координатные оси и учитывая, что $h_C \cos \alpha = x_C, h_C \sin \alpha = y_C$, где x_C и y_C — координаты центра масс, найдем:

$$\begin{aligned} R_x^n &= m \omega^2 h_C \cos \alpha = m \omega^2 x_C; \\ R_y^n &= m \omega^2 h_C \sin \alpha = m \omega^2 y_C; \quad R_z^n = 0. \end{aligned}$$

Чтобы определить M_x^e и M_y^e , рассмотрим какую-нибудь частицу тела с массой m_k , отстоящую от оси на расстоянии h_k . Для нее при $\omega = \text{const}$ сила инерции тоже имеет только центробежную составляющую $\bar{F}_k^n = m_k \omega^2 h_k$, проекция которой, как и у вектора $\bar{R}^n$, равны:

$$F_{kx}^n = m_k \omega^2 x_k, \quad F_{ky}^n = m_k \omega^2 y_k, \quad F_{kz}^n = 0.$$

Тогда [см. § 28 формулы (47)]:

$$m_x(\bar{F}_k^n) = -F_{ky}^n z_k = -m_k \omega^2 y_k z_k; \quad m_y(\bar{F}_k^n) = F_{kx}^n z_k = m_k \omega^2 x_k z_k.$$



Рис. 350

Составляя такие выражения для всех точек системы, складывая их и вынося общий множитель за скобки, приходим к равенствам:

$$M_x'' = -(\sum m_k y_k z_k) \omega^2 = -J_{yz} \omega^2; \quad M_y'' = (\sum m_k x_k z_k) \omega^2 = J_{xz} \omega^2, \quad (93)$$

где J_{xz} и J_{yz} — соответствующие центробежные моменты инерции*. Подставляя все найденные значения в равенства (92), получим

$$\left. \begin{aligned} X_A + X_B &= -R_x'' - m x_C \omega^2; & Y_A + Y_B &= -R_y'' - m y_C \omega^2; \\ Z_A &= -R_z''; & X_B b &= -M_y'' - J_{xz} \omega^2; & Y_B b &= M_x'' - J_{yz} \omega^2. \end{aligned} \right\} \quad (94)$$

Уравнения (94) и определяют динамические реакции, действующие на ось равномерно вращающегося твердого тела, если ось вращения является осью z .

Назовем статическими реакциями те значения реакций, которые дают уравнения (94), если в них положить $\omega=0$. Как видно из уравнений (94), динамические реакции могут вообще быть значительно больше статических, причем это зависит не только от значения ω , но и от величин x_C, y_C, J_{xz}, J_{yz} , характеризующих распределение масс тела по отношению к оси вращения Oz .

Однако из уравнений (94) видно, что наличие вращения не будет влиять на значения реакций подшипников A и B , если

$$x_C=0, \quad y_C=0; \quad (95)$$

$$J_{xz}=0, \quad J_{yz}=0. \quad (96)$$

Равенства (95) и (96) выражают условия того, что динамические реакции, действующие на ось вращающегося тела, равны статическим реакциям или, как говорят, условия динамической уравновешенности вращающегося тела при его вращении вокруг оси z .

Условия (95) означают, что центр масс тела должен лежать на оси вращения, а условия (96) — что ось вращения должна быть главной осью инерции тела для начала координат A . При одновременном же выполнении условий (95) и (96) ось Az будет главной центральной осью инерции тела (см. § 104). Таким образом, динамические реакции, действующие на ось вращающегося тела, будут равны статическим, если ось вращения является одной из главных центральных осей инерции тела. Этот вывод остается справедливым и в случае, когда тело вращается неравномерно.

Рассмотренная задача позволяет одновременно уяснить механический смысл величин J_{xz} и J_{yz} , а именно: центробежные моменты инерции J_{xz} и J_{yz} характеризуют степень динамической неуравновешенности тела при его вращении вокруг оси z .

Динамическое уравновешивание вращающихся тел представляет собой важную техническую задачу, которая, как мы видим, сводится к определению главных центральных осей инерции тела. В § 104

* См. § 104, формулы (10). В равенствах (93) величины J_{xz}, J_{yz} входят в выражения моментов центробежных сил инерции; этим можно объяснить появление термина «центробежный момент инерции».

было указано, что любое тело имеет, по крайней мере, три взаимно перпендикулярные главные центральные оси инерции.

Докажем другое, практически не менее важное положение: любую ось, проведенную в теле, можно сделать главной центральной осью инерции прибавлением к телу двух точечных масс. Пусть для тела массой m величины x_C, y_C, J_{xz}, J_{yz} известны и не равны нулю. Прибавим к телу две массы m_1 и m_2 в точках с координатами (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) . Тогда из формул (1) и (10) следует, что если удовлетворить равенствам

$$\begin{aligned} m x_C + m_1 x_1 + m_2 x_2 &= 0, & m y_C + m_1 y_1 + m_2 y_2 &= 0, \\ J_{xz} + m_1 x_1 z_1 + m_2 x_2 z_2 &= 0, & J_{yz} + m_1 y_1 z_1 + m_2 y_2 z_2 &= 0, \end{aligned} \quad (97)$$

то для полученного тела будет $x_C' = y_C' = J_{xz}' = J_{yz}' = 0$, т. е. ось z станет главной центральной осью инерции. Подбирая массы m_1, m_2 и их положения так, чтобы удовлетворялись уравнения (97), мы и решим поставленную задачу. Частью величин при этом следует, конечно, задаться наперед. Например, можно задать значения m_1, m_2 и z_1, z_2 (но так, чтобы было $z_1 \neq z_2$), а x_1, y_1, x_2, y_2 найти из уравнений (97) и т. п.

Такой метод уравновешивания вращающихся тел широко используется в технике для уравновешивания коленчатых валов, кривошипов, спарников и т. п. При этом окончательная балансировка производится на специальных стендах.

Для определения сил давления на ось в отдельных конкретных задачах обычно не пользуются готовыми уравнениями (94), а каждый раз непосредственно применяют принцип Даламбера.

Задача 161. Ось вращения диска, перпендикулярная его плоскости (рис. 351), смещена от центра масс на расстояние $OC=b$. Вес диска P , угловая скорость постоянна и равна ω . Определить динамические реакции подшипников A и B , если $OA=OB=h$.

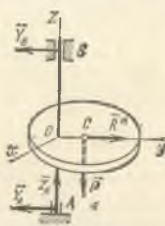


Рис. 351

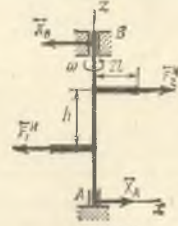


Рис. 352

Решение. Проведем вращающиеся вместе с диском оси $Oxyz$ так, чтобы ось Oy прошла через центр масс C диска (см. рис. 351). Ось Oz будет главной осью инерции диска для точки O , поскольку плоскость Oxy является плоскостью симметрии диска. Тогда $J_{xz} = J_{yz} = 0$ и из формул (93) и условия $\omega = \text{const}$ видно, что $M_C'' = 0$. Следовательно, силы инерции приводятся к одной равнодействующей, проходящей через точку O и направленной вдоль линии OC (вдоль оси Oy). По мо-

дулю $R'' = m a_{Cn} = (P/g)b\omega^2$. Так как силы $\bar{P}$ и $\bar{R}''$ лежат в плоскости Oyz , то реакции подшипников лежат в этой же плоскости, т. е. имеют составляющие $\bar{Y}_A, \bar{Z}_A$ в точке A и $\bar{Y}_B, \bar{Z}_B$ в точке B . Тогда, составив на основании принципа Даламбера для всех действующих сил и сил инерции уравнения равновесия в проекциях на оси y и z и уравнение моментов относительно центра A , получим:

$$\begin{aligned} R'' - Y_A - Y_B &= 0, & Z_A - P &= 0, \\ Y_B - 2h - Pb - R''h &= 0. \end{aligned}$$

Решая эти уравнения, найдем:

$$Y_B = Pb(\omega^2/2g + 1/2h), \quad Y_A = Pb(\omega^2/2g - 1/2h), \quad Z_A = P.$$

Реакции $\bar{Y}_A$ и $\bar{Y}_B$ все время располагаются в плоскости Oyz , вращающейся вместе с телом.

Задача 162. Под прямым углом к вертикальному валу AB длиной b приварены два одинаковых стержня, расположенных в одной плоскости на расстоянии h друг от друга (рис. 352); длина каждого из стержней $2l$, а масса m . Пренебрегая действием сил тяжести, найти динамические давления на вал, если он вращается с постоянной угловой скоростью ω .

Решение. По принципу Даламбера реакции подшипников и силы инерции образуют уравновешенную систему. В данном случае силы инерции каждого из стержней равны по модулю

$$F_i^* = F_j^* = m l \omega^2$$

и образуют пару, которая уравновешивается парой сил $\bar{X}_A, \bar{X}_B$. Моменты этих пар по модулю равны друг другу. Следовательно, $X_A b = F_i^* h$, откуда

$$X_A = X_B = F_i^* h/b = m l \omega^2 h/b.$$

Пара все время расположена в плоскости Axy , вращающейся вместе с валом.

Задача 163. Коленчатый вал одноцилиндрового двигателя несет на себе два одинаковых маховика A и B радиусом $r = 0,5$ м. Рассматривая шейки и шейку коленчатого вала как груз массой $m = 21$ кг, находящийся на расстоянии $h = 0,2$ м от оси, определить массы m_A и m_B грузов, которые надо расположить на ободах маховиков, чтобы сбалансировать систему, если $b = 0,6$ м, $l = 1,4$ м (рис. 353).

Решение. Проведем координатные оси, вращающиеся вместе с телом, так, чтобы колено вала лежало в плоскости Oxz (см. чертеж). Тогда эта плоскость будет плоскостью симметрии. Следовательно, $y_C = 0$, и так как при этом ось Oy будет для точки O главной осью инерции, то $J_{yz} = 0$. Кроме того, если обозначить массу всей системы через M , то для нее

$$x_C = mh/M, \quad J_{xz} = mhb.$$

Последний результат следует из того, что центробежный момент инерции системы равен сумме центробежных моментов инерции ее частей, а для маховиков и прилегающих к ним частей вала центробежные моменты J_{xz} равны нулю (ось Oz — ось симметрии).

Тогда, как видно из уравнений (97), для присоединяемых грузов, координаты которых $y_A = y_B = 0$, массы m_A и m_B должны удовлетворять равенствам:

$$Mx_C + m_A x_A + m_B x_B = 0, \quad J_{xz} + m_A x_A z_A + m_B x_B z_B = 0.$$

Так как грузы располагаются на ободах маховиков, то $z_A = 0$, $z_B = l$ и $x_A = x_B = -r$ (при знаке плюс уравнения не имеют решений, следовательно, грузы должны быть снизу). Решая уравнения, найдем:

$$m_A = (l-b)hm/(rl) = 4,8 \text{ кг}, \quad m_B = bhm/(rl) = 3,6 \text{ кг}.$$

Присоединение этих грузов делает систему уравновешенной, а ось Oz — главной центральной осью инерции (но не осью симметрии) тела.

Глава XXVIII

ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ И ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ

§ 137. КЛАССИФИКАЦИЯ СВЯЗЕЙ

Введенное в § 3 понятие о связях охватывает не все их виды. Поскольку рассматриваемые ниже методы решения задач механики применимы вообще к системам не с любыми связями, рассмотрим вопрос о связях и об их классификации несколько подробнее.

Связями называются любого вида ограничения, которые налагаются на положения и скорости точек механической системы и выполняются независимо от того, какие на систему действуют заданные силы. Рассмотрим, как классифицируются эти связи.

Связи, не изменяющиеся со временем, называются **стационарными**, а изменяющиеся со временем — **нестационарными**.

Связи, налагающие ограничения на положения (координаты) точек системы, называются **геометрическими**, а налагающие ограничения еще и на скорости (первые производные от координат по времени) точек системы — **кинематическими** или **дифференциальными**.

Если дифференциальную связь можно представить как геометрическую, т. е. устанавливаемую этой связью зависимость между скоростями вести к зависимости между координатами, то такая связь называется **интегрируемой**, а в противном случае — **неинтегрируемой**.

Геометрические и интегрируемые дифференциальные связи называются связями **голономными**, а неинтегрируемые дифференциальные связи — **неголономными**.

По виду связей механические системы тоже разделяют на **голономные** (с голономными связями) и **неголономные** (содержащие неголономные связи).

Наконец, различают связи **удерживающие** (налагаемые ими ограничения сохраняются при любом положении системы) и **неудерживающие**, которые этим свойством не обладают (от таких связей, как говорят, система может «освободиться»). Рассмотрим примеры.

1. Все связи, рассмотренные в § 3, являются геометрическими (голономными) и притом стационарными. Движущийся лифт, изображенный на рис. 271, а, будет для лежащего в нем груза, когда положение груза рассматривается по отношению к осям Oxy , нестационарной геометрической связью (пол кабины, реализующий связь, изменяет со временем свое положение в пространстве).

2. Положение катящегося без скольжения колеса (см. рис. 328) определяется координатой x_C центра C колеса и углом поворота φ . При качении выполняется условие $v_C = R\dot{\varphi}$ или $x_C = R\varphi$. Это дифференциальная связь, но полученное уравнение

* По существу геометрические связи являются одновременно и кинематическими, так как продифференцировав уравнения, которым при геометрических связях должны удовлетворять координаты системы, найдем, что скорости при этом тоже связаны определенными зависимостями (см. ниже в примерах п. 2).

ние интегрируется и дает $x_C = R\varphi$, т. е. сводится к зависимости между координатами. Следовательно, наложенная связь голономная.

Заметим, что эту связь можно сразу считать геометрической, подчиняющей координаты зависимости $x_C = R\varphi$. Но тогда отсюда найдем, что одновременно и $x_C = R\dot{\varphi}$, т. е. что связь является и кинематической.

3. В отличие от колеса для шара, катящегося без скольжения по шероховатой плоскости, условие того, что скорость точки шара, касающаяся плоскости, равна нулю, не может быть сведено (когда центр шара движется не прямолинейно) к каким-нибудь зависимостям между координатами, определяющими положение шара. Это пример неголономной связи. Другой пример дают связи, налагаемые на управляемое движение. Например, если на движение точки (ракеты) налагается условие (связь), что ее скорость в любой момент времени должна быть направлена в другую движущуюся точку (самолет), то это условие к какой-нибудь зависимости между координатами тоже не сводится и связь является неголономной.

4. В § 3 связи, показанные на рис. 10—12, являются удерживающими, а на рис. 8 и 9 — недерживающими (на рис. 8, а шарик может покинуть поверхность, а на рис. 9 — перемещаться в сторону точки А, сминая нить). С учетом особенностей недерживающих связей мы сталкивались в задачах 108, 109 (§ 90) и в задаче 146 (§ 125).

§ 138. ВОЗМОЖНЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ СИСТЕМЫ. ЧИСЛО СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

Эффект механических связей можно учитывать, не только вводя их реакции, как это до сих пор делалось, но и рассматривая те перемещения, которые точки механической системы могут иметь при наложенных на нее связях. Такой путь позволяет сразу получать уравнения равновесия или движения системы, не содержащие наперед неизвестных реакций связей, что существенно облегчает решение многих задач механики.

Перемещения, о которых сказано выше, называют *возможными* (или *виртуальными*) *перемещениями*. Они должны удовлетворять двум условиям: 1) быть элементарными, так как при конечном перемещении система может прийти в положение, где эффект наложенных связей будет другим; 2) быть такими, чтобы все наложенные в данный момент времени на систему связи сохранялись, иначе может измениться вид рассматриваемой механической системы.

Например, в кривошипно-ползунном механизме, изображенном ниже на рис. 35б (см. § 140), перемещение из показанного положения в положение, при котором $\varphi=0$, нельзя рассматривать как возможное, так как при $\varphi=0$ эффект наложенных связей будет другим, что, в частности, изменит условие равновесия механизма под действием силы P и пары с моментом M . Точно так же нельзя считать возможным даже элементарное перемещение точки В шатуна вдоль линии АВ; оно было бы возможным, если в точке В вместо ползуна была бы качающаяся муфта (рис. 161 в § 57, муфта С), т. е. когда механизм был бы другим.

Таким образом, *возможным перемещением механической системы будем называть любую совокупность элементарных перемещений точек этой системы из занимаемого в данный момент времени положения, которые допускаются всеми наложенными на систему связями*. При этом под допускаемыми в случае недерживающих связей будем понимать те возможные перемещения, при которых связи сохраняются (точки системы от связей не «освобождаются»).

В дальнейшем следует различать действительное перемещение $d\vec{r}$ движущейся точки, которое она совершает за элементарный промежуток времени dt , и возможное перемещение, которого точка *не совершает*, а только могла бы совершить, не нарушая наложенных на нее в данный момент времени связей.

Чтобы учесть это различие, будем возможное перемещение точки обозначать символом $\delta\vec{r}$ и изображать соответствующим элементарным вектором. При этом δs будет обозначать модуль $\delta\vec{r}$ ($\delta s = |\delta\vec{r}|$), а δx , δy , δz — проекции $\delta\vec{r}$ на координатные оси; эти проекции равны элементарным приращениям координат точки при ее возможном перемещении и формально вычисляются так же, как дифференциалы.

Отметим, что при стационарных связях действительное перемещение $d\vec{r}$ любой точки системы, которое тоже должно допускаться наложенными связями, совпадает с одним из возможных перемещений $\delta\vec{r}$. При нестационарных связях $d\vec{r}$ ни с одним из возможных перемещений не совпадает.

Поясним это на приведенном в § 137 примере нестационарной связи (груз в лифте, см. рис. 271, а). Здесь для груза $\delta\vec{r}$ направлено вдоль АВ, а $d\vec{r}$ складывается из перемещения вдоль АВ и перемещения вместе с лифтом, равного $v dt$ (v — скорость лифта) и направленного перпендикулярно АВ; следовательно, $d\vec{r}$ образует с АВ какой-то угол и ни с одним из $\delta\vec{r}$ совпасть не может.

В общем случае механическая система может иметь множество различных возможных перемещений. Однако для любой из систем, которые нами будут рассматриваться, можно указать некоторое число таких независимых между собой перемещений, что всякое другое возможное перемещение может быть через них выражено. Например, для точки, находящейся на какой-нибудь плоскости (поверхности), любое возможное перемещение $\delta\vec{r}$ вдоль этой плоскости можно выразить через два взаимно перпендикулярных перемещения $\delta\vec{r}_1$ и $\delta\vec{r}_2$ в виде $\delta\vec{r} = a\delta\vec{r}_1 + b\delta\vec{r}_2$, где a и b — любые положительные или отрицательные числа.

Число независимых между собой возможных перемещений механической системы называют *числом степеней свободы этой системы*.

Следовательно, точка, находящаяся на плоскости, имеет две степени свободы; одновременно ее положение на плоскости определяется двумя независимыми координатами (координатами, каждая из которых может изменяться независимо от другой), например координатами x и y . Свободная материальная точка имеет три степени свободы (независимыми будут три возможных перемещения вдоль трех взаимно перпендикулярных осей); одновременно положение точки определяется тремя независимыми координатами x , y , z и т. д.

Этот результат оказывается общим, т. е. у механической системы с геометрическими связями число независимых координат, опре-

* В математике символом « d » обозначается, как известно, дифференциал, а символом « δ » обозначают так называемую вариацию функции.

идеальным перемещением системы, совпадает с числом ее степеней свободы. Поэтому у такой системы число степеней свободы можно определить как по числу независимых возможных перемещений, так и по числу независимых координат. Так, у кривошипно-ползунного механизма (см. ниже рис. 356) одна степень свободы (у него одно независимое возможное перемещение, например поворот кривошипа OA , и одна независимая координата, например угол φ). У свободного твердого тела шесть степеней свободы (независимых перемещений — три поступательных вдоль координатных осей и три поворота вокруг этих осей, а независимых координат — три координаты полюса и три угла Эйлера).

§ 139. ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Перейдем к рассмотрению еще одного принципа механики, который устанавливает общее условие равновесия механической системы. Под равновесием (см. § 1) мы понимаем то состояние системы, при котором все ее точки под действием приложенных сил находятся в покое по отношению к инерциальной системе отсчета (рассматриваем так называемое «абсолютное» равновесие). Одновременно будем считать все наложенные на систему связи стационарными и специально это в дальнейшем каждый раз оговаривать не будем.

Введем понятие о возможной работе, как об элементарной работе, которую действующая на материальную точку сила могла бы совершить на перемещении, совпадающем с возможным перемещением этой точки. Будем возможную работу активной силы $\vec{F}^a$ обозначать символом δA^a ($\delta A^a = \vec{F}^a \cdot \delta \vec{r}$), а возможную работу реакции $\vec{N}$ связи — символом δA^r ($\delta A^r = \vec{N} \cdot \delta \vec{r}$).

Дадим теперь общее определение понятия об идеальных связях, которым мы уже пользовались (см. § 123): идеальными называются связи, для которых сумма элементарных работ их реакций на любом возможном перемещении системы равна нулю, т. е.

$$\sum \delta A_k^r = 0. \quad (98)$$

Приведенное в § 123 и выраженное равенством (52) условие идеальности связей, когда они одновременно являются стационарными, соответствует определению (98), так как при стационарных связях каждое действительное перемещение совпадает с одним из возможных. Поэтому примерами идеальных связей будут все примеры, приведенные в § 123.

Для определения необходимого условия равновесия докажем, что если механическая система с идеальными связями находится под действием приложенных сил в равновесии, то при любом возможном перемещении системы должно выполняться равенство

$$\sum \delta A_k^a = 0 \quad (99)$$

или

$$\sum \vec{F}_k \cdot \delta \vec{r}_k = \sum F_k \delta s_k \cos \alpha_k = 0, \quad (99')$$

где α_k — угол между силой и возможным перемещением.

Обозначим равнодействующие всех (и внешних, и внутренних) активных сил и реакций связей, действующих на какую-нибудь точку системы B_k , соответственно через $\vec{F}_k^a$ и $\vec{N}_k$. Тогда, поскольку каждая из точек системы находится в равновесии, $\vec{F}_k + \vec{N}_k = 0$, а следовательно, и сумма работ этих сил при любом перемещении точки B_k будет тоже равна нулю, т. е. $\delta A_k^a + \delta A_k^r = 0$. Составив такие равенства для всех точек системы и сложив их почленно, получим

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^r = 0.$$

Но так как связи идеальные, а $\delta \vec{r}_k$ представляют собой возможные перемещения точек системы, то вторая сумма по условию (98) будет равна нулю. Тогда равна нулю и первая сумма, т. е. выполняется равенство (99). Таким образом, доказано, что равенство (99) выражает необходимое условие равновесия системы.

Покажем, что это условие является и достаточным, т. е. что если к точкам механической системы, находящейся в покое, приложить активные силы $\vec{F}_k^a$, удовлетворяющие равенству (99), то система останется в покое. Предположим обратное, т. е. что система при этом придет в движение и некоторые ее точки совершат действительные перемещения $d\vec{r}_k$. Тогда силы $\vec{F}_k^a$ совершат на этих перемещениях работу и по теореме об изменении кинетической энергии будет:

$$dT = \sum dA_k^a \quad (dA_k^a = \vec{F}_k^a \cdot d\vec{r}_k),$$

где, очевидно, $dT > 0$, так как вначале система была в покое; следовательно, и $\sum dA_k^a > 0$. Но при стационарных связях действительные перемещения $d\vec{r}_k$ совпадают с какими-то из возможных перемещений $\delta \vec{r}_k$ и на этих перемещениях тоже должно быть $\sum \delta A_k^a > 0$, что противоречит условию (99). Таким образом, когда приложенные силы удовлетворяют условию (99), система из состояния покоя выйти не может и это условие является достаточным условием равновесия.

Из доказанного вытекает следующий принцип возможных перемещений*: для равновесия механической системы с идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех действующих на нее активных сил при любом возможном перемещении системы была равна нулю. Математически сформулированное условие равновесия выражается равенством (99), которое называют также уравнением возможных работ. Это равенство можно еще представить в аналитической форме (см. § 87):

$$\sum (F_{kx} \delta x_k + F_{ky} \delta y_k + F_{kz} \delta z_k) = 0. \quad (100)$$

* В форме, близкой к современной, но без доказательства этот принцип высказал знаменитый математик и механик (швейцарец по происхождению) Иоганн Бернулли (1667—1748). В общем виде принцип впервые сформулировал и доказал Ж. Лагранж (1788 г.) Обобщение принципа на случай неупругих связей было дано М.В. Остроградским в работах 1838—1842 гг.

Принцип возможных перемещений устанавливает общее условие равновесия механической системы, не требующее рассмотрения равновесия отдельных частей (тел) этой системы и позволяющее при идеальных связях исключить из рассмотрения все наперед неизвестные реакции связей.

§ 140. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

Приступая к решению задачи, следует вначале определить число степеней свободы рассматриваемой системы (в частности, механизма), по числу независимых возможных перемещений или координат системы.

В плоских механизмах число степеней свободы можно практически определять так. Представим себе, что механизм движется. Если, остановив поступательное или вращательное движение какого-нибудь одного звена, мы одновременно останавливаем весь механизм, то он имеет одну степень свободы. Если после этого часть механизма может продолжать движение, но, когда затем будет остановлено перемещение какого-нибудь другого звена, механизм остановится, то он имеет две степени свободы и т. д. Аналогично, если определить положение механизма какой-нибудь координатой и когда она постоянна, механизм не может двигаться — у него одна степень свободы. Если же после этого часть механизма может двигаться, то выбирается вторая координата и т. д.

Для решения задачи геометрическим методом, когда система имеет одну степень свободы, надо: 1) изобразить все действующие на систему активные силы; 2) сообщить системе возможное перемещение и показать на чертеже элементарные перемещения δs_k точек приложения сил или углы $\delta \varphi_k$ элементарных поворотов тел, на которые действуют силы (у элементарных перемещений будем на чертеже указывать их модули δs_k , которые непосредственно входят в условия равновесия); 3) подсчитать элементарные работы всех активных сил на данном перемещении по формулам:

$$\delta A_k^a = F_{k\tau} \delta s_k = F_k \delta s_k \cos \alpha_k \quad \text{или} \quad \delta A_k^a = m_O(\vec{F}_k) \delta \varphi_k \quad (101)$$

и составить условие (99); 4) установить зависимость между величинами δs_k и $\delta \varphi_k$, вошедшими в равенство (99), и выразить эти величины через какую-нибудь одну, что для системы с одной степенью свободы всегда можно сделать.

После замены в равенстве (99) всех величин δs_k , $\delta \varphi_k$ через одну получим уравнение, из которого и найдется искомая в задаче величина или зависимость.

Зависимости между δs_k и $\delta \varphi_k$ можно находить: а) из соответствующих геометрических соотношений (задачи 164, 169); б) из кинематических соотношений, считая, что система движется, и определяя при данном положении системы зависимости между линейными v_k или угловыми ω_k скоростями соответствующих точек или тел системы, а затем полагая $\delta s_k = v_k dt$, $\delta \varphi_k = \omega_k dt$, что справедливо, так как получаемые точками или телами за время dt действительные перемещения будут при стационарных связях одними из возможных (иначе, здесь можно сразу считать зависимости между

ду возможными перемещениями такими же, как между соответствующими скоростями, см. задачи 165, 166 и др.).

Для системы с несколькими степенями свободы задачу можно решать, составляя условие (99) для каждого из независимых возможных перемещений системы и преобразуя его тем же путем. В результате для системы получится столько условий равновесия, сколько она имеет степеней свободы. Другой метод решения, приводящий к тем же результатам, изложен в § 144.

При аналитическом методе расчета условие равновесия составляют в виде (100). Для этого выбирают координатные оси, связанные с телом, которое при возможных перемещениях системы остается неподвижным. Затем вычисляют проекции всех активных сил на выбранные оси и координаты x_k , y_k , z_k точек приложения этих сил, выражая все координаты через какой-нибудь параметр (например, угол). После этого величины δx_k , δy_k , δz_k находят дифференцированием координат x_k , y_k , z_k по этому параметру.

Если все координаты x_k , y_k , z_k выразить через один параметр сразу не удастся, то надо ввести несколько параметров, а затем установить зависимость между ними.

Отметим в заключение, что условиями (99) или (100) можно пользоваться для решения задач и при наличии трения, включая силу трения в число активных сил. Этим же путем можно находить реакции связей, если, отбросив связь, заменить ее соответствующей реакцией, включить последнюю в число активных сил и учесть, что после отбрасывания связи у системы появляется новая степень свободы.

Задача 164. В механизме, изображенном на рис. 354, найти зависимость между силами P и Q при равновесии.

Решение. У системы одна степень свободы. Если сообщить системе возможное перемещение, то все диагонали параллелограммов, образованных ребрами, удлиннятся на одну и ту же величину δs . Тогда $\delta s_A = \delta s$, $\delta s_B = 3\delta s$. Составляя уравнение (99), получим:

$$P \delta s_B - Q \delta s_A = 0 \quad \text{или} \quad (3P - Q) \delta s = 0,$$

откуда $Q = 3P$. Результат получается очень просто.

Задача 165. Вес бревна Q , вес каждого из двух цилиндрических катков, на которые оно положено, P . Определить, какую силу F надо приложить к бревну, чтобы удержать его в равновесии на наклонной плоскости при данном угле наклона α (рис. 355). Трение катков о плоскость и бревно обеспечивает отсутствие скольжения.

Решение. Если пренебречь сопротивлением качению, то плоскость для катков будет идеальной связью. При качении без скольжения у системы одна степень свободы. Сообщая системе возможное перемещение, получаем по условию (99)

$$F \delta s_B - Q \sin \alpha \cdot \delta s_B - 2P \sin \alpha \cdot \delta s_C = 0,$$

где δs_B — возможное перемещение бревна, совпадающее с перемещением точки B .

Точка касания K является мгновенным центром скоростей катка. Следовательно, $v_B = 2v_C$ и $\delta s_B = 2\delta s_C$, если считать $\delta s_B = v_B dt$, $\delta s_C = v_C dt$. Подставляя это значение δs_B в предыдущее уравнение, найдем окончательно

$$F = (Q + P) \sin \alpha,$$



Рис. 354

Задача 166. Найти зависимость между моментом M пары, действующей на кривошип кривошипно-ползунного механизма (рис. 356), и силой давления P на поршень при равновесии, если $OA=r$, $AB=l$, $\angle AOB=\varphi$.

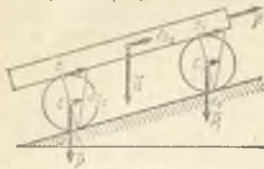


Рис. 355



Рис. 356

Решение. У механизма одна степень свободы. Из условия равновесия (99), если положить $\delta s_B = v_B dt$, $\delta \varphi = \omega_{OA} dt$, получим:

$$P \delta s_B - M \delta \varphi = 0 \text{ или } M \omega_{OA} = P v_B.$$

Решение сводится к нахождению зависимости между v_B и ω_{OA} . Эта кинематическая задача была решена ранее (см. § 57, задача 63). Пользуясь полученным результатом, находим

$$M = Pr \left(1 + \frac{r \cos \varphi}{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi}} \right) \sin \varphi.$$

Задача 167. Для редуктора, рассмотренного в задаче 83 (см. § 70), найти зависимость между вращающим моментом M_A , приложенным к ведущему валу A , и моментом сопротивлений M_B , приложенным к ведомому валу B , когда оба вала вращаются равномерно.

Решение. При равномерном вращении соотношение между M_A и M_B будет таким же, как при равновесии. Следовательно, по условию (99), если положить $\delta \varphi_A = \omega_A dt$, $\delta \varphi_B = \omega_B dt$, будет:

$$M_A \delta \varphi_A - M_B \delta \varphi_B = 0 \text{ или } M_A \omega_A = M_B \omega_B.$$

Отсюда, пользуясь результатом, полученным в задаче 83, находим

$$M_A = (\omega_B / \omega_A) M_B = (n_B / n_A) M_B = 2,8 M_B.$$

Задача 168. Найти зависимость между силами P и Q в подъемном механизме, детали которого скрыты в коробке K (рис. 357), если известно, что при каждом повороте рукоятки AB ($AB=l$) винт D выдвигается на величину h .

Решение. Составляя условие равновесия (99), получаем

$$P \delta \varphi_{AB} - Q \delta s_D = 0.$$

Предполагается, что при равномерном вращении рукоятки винт вывинчивается также равномерно, тогда

$$\frac{\delta \varphi_{AB}}{2\pi} = \frac{\delta s_D}{h} \text{ или } \delta \varphi_{AB} = \frac{2\pi}{h} \delta s_D.$$

Подставляя это значение $\delta \varphi_{AB}$ в предыдущее равенство, находим

$$Q = 2\pi P / h.$$

Заметим, что методами геометрической статики эту несложную задачу вообще нельзя было бы решить, так как детали механизма не известны.

Решения задачи показывает, каковы (принципиально) возможности примененного метода. Но при конкретном инженерном расчете подобного механизма необходимо будет, конечно, учесть трение между его деталями, для чего понадобится знать, каков механизм.

Задача 169. Балка, состоящая из двух брусьев, соединенных шарниром C , несет нагрузку P (рис. 358, а). Размеры балки и расположение опор показаны на чертеже. Определить силу давления на опору B , вызываемую заданной нагрузкой.

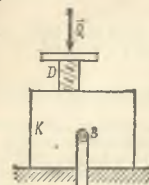


Рис. 357



Рис. 358

Решение. Отбрасываем опору B и заменяем ее реакцией N_B , численно равной искомой силе давления (рис. 358, б). Сообщив системе возможное перемещение (у нее теперь появилась одна степень свободы), составляем условие (99)

$$N_B \delta s_B - P \delta s_D = 0.$$

Связь между δs_B и δs_D находим из пропорций:

$$\frac{\delta s_B}{b_1} = \frac{\delta s_C}{l_1}, \quad \frac{\delta s_D}{b_2} = \frac{\delta s_C}{l_2}, \quad \text{откуда } \delta s_B = \frac{b_2 l_1}{b_1 l_2} \delta s_D.$$

Следовательно,

$$N_B = (b_2 l_1 / b_1 l_2) P.$$

При применении метода геометрической статики решение оказалось бы более длинным (пришлось бы рассмотреть равновесие частей балки и ввести дополнительные реакции других связей, а затем исключить эти реакции из полученной системы уравнений равновесия).

Задача 170. Горизонтальный брус 1 весом P_1 , закрепленный в точке A шарниром (рис. 359), соединен шарниром B с брусом 2 весом P_2 ; концом C брус опирается на горизонтальный пол, образуя с ним угол α . Определить, при каком значении силы трения бруса о пол система будет в равновесии.

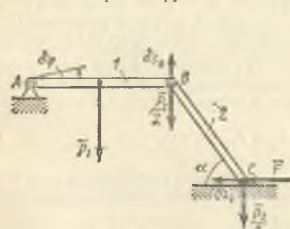


Рис. 359

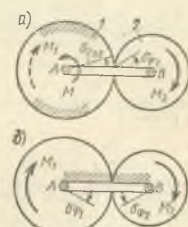


Рис. 360

Решение. Изображаем действующие на систему силы P_1 , P_2 и силу трения F , включая ее в число активных сил, при этом силу P_2 разлагаем на две составляющие, равные $P_2/2$ каждая и приложенные в точках B и C (образом

внимание на этот прием, существенно облегчающий вычисление возможной работы).

Составляя условие равновесия (99) и учитывая формулы (101), получим, обозначив $AB=l$,

$$-(P_1 l/2 + P_2 l/2) \delta\varphi + F \delta s_C = 0.$$

Но, по аналогии с теоремой о проекциях скоростей двух точек тела, $\delta s_C \cos \alpha = \delta s_B \sin \alpha$, где $\delta s_B = l \delta\varphi$. Тогда $\delta s_C = l \operatorname{tg} \alpha \cdot \delta\varphi$ и окончательно

$$F = 0,5(P_1 + P_2) \operatorname{ctg} \alpha.$$

Заметим, что методами геометрической статики в этой задаче составить только одно уравнение, из которого сразу найдется F , нельзя.

Задача 171. В планетарном механизме с дифференциальной передачей (см. § 70) на ось A независимо друг от друга насажены шестерни 1 радиусом r_1 и кривошип AB , несущий на себе ось B шестерни 2 радиусом r_2 (рис. 360). На кривошип действует вращающий момент M , а на шестерни 1 и 2 — моменты сопротивления M_1 и M_2 . Найти значения M_1 и M_2 при равновесии механизма.

Решение. Механизм имеет две степени свободы, так как в нем возможны два независимых перемещения: а) поворот кривошипа AB при неподвижной шестерне 1 и б) поворот шестерни 1 при неподвижном кривошипе AB . Сообщим сначала системе возможное перемещение, при котором шестерня 1 остается неподвижной (рис. 360, а). Для этого перемещения уравнение (99) дает

$$M \delta\varphi_{AB} - M_2 \delta\varphi_2 = 0.$$

Но когда шестерня 1 неподвижна, точка касания шестерен будет мгновенным центром скоростей для шестерни 2. Следовательно, $v_B = \omega_2 r_2$. В то же время $v_B = \omega_{AB}(r_1 + r_2)$. Отсюда $\omega_2 r_2 = \omega_{AB}(r_1 + r_2)$ или $r_2 \delta\varphi_2 = (r_1 + r_2) \delta\varphi_{AB}$ и мы получаем $M_2 = r_2 M / (r_1 + r_2)$.

Теперь сообщим системе другое, независимое от первого возможное перемещение, при котором кривошип AB неподвижен (рис. 360, б). Для этого перемещения по условию (99) будет $M_1 \delta\varphi_1 - M_2 \delta\varphi_2 = 0$. Но при неподвижном кривошипе

$$\delta\varphi_2 / \delta\varphi_1 = \omega_2 / \omega_1 = r_1 / r_2 \quad \text{и} \quad M_1 = (r_1 / r_2) M_2.$$

Окончательно находим:

$$M_1 = r_1 M / (r_1 + r_2), \quad M_2 = r_2 M / (r_1 + r_2).$$

Задача 172. В прессе, изображенном на рис. 361, найти зависимость между силами Q_1 , Q_2 и P_3 при равновесии ($Q_1 = Q_2 = Q$, $P_3 = P$). Углы α и β известны. Весом стержней пренебречь.

Решение. Чтобы дать пример аналитического расчета, воспользуемся

условием равновесия (100). Беря начало в неподвижной точке A и проводя оси x и y , получим

$$Q_{1x} \delta x_1 - Q_{2x} \delta x_2 + P_{3y} \delta y_3 = 0, \quad (a)$$

так как остальные проекции сил обращаются в нули.

Для нахождения δx_1 , δx_2 , δy_3 определим значения координат x_1 , x_2 , y_3 точек приложения сил, выразив их через углы α и β . Получим, обозначая длины стержней через a и b :

$$x_1 = a \cos \alpha, \quad x_2 = a \cos \alpha + 2b \cos \beta, \quad y_3 = b \sin \beta + a \sin \alpha.$$

Дифференцируя эти выражения, найдем:

$$\delta x_1 = -a \sin \alpha \cdot \delta \alpha, \quad \delta x_2 = -(a \sin \alpha \cdot \delta \alpha + 2b \sin \beta \cdot \delta \beta), \quad \delta y_3 = b \cos \beta \cdot \delta \beta + a \cos \alpha \cdot \delta \alpha.$$

Подстановка полученных величин в равенство (a) дает (с учетом того, что $Q_{1x} = Q$, $Q_{2x} = -Q$, $P_{3y} = -P$)

$$2Qb \sin \beta \cdot \delta \beta - P(b \cos \beta \cdot \delta \beta + a \cos \alpha \cdot \delta \alpha) = 0. \quad (б)$$

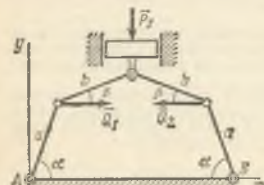


Рис. 361

Для нахождения зависимости между $\delta \alpha$ и $\delta \beta$ воспользуемся тем, что в данном случае расстояние $AB = \text{const}$. Следовательно, $2(a \cos \alpha + b \cos \beta) = \text{const}$. Дифференцируя это равенство, получим:

$$a \sin \alpha \cdot \delta \alpha + b \sin \beta \cdot \delta \beta = 0 \quad \text{и} \quad \delta \alpha = -\frac{b \sin \beta}{a \sin \alpha} \delta \beta.$$

Подставляя это значение $\delta \alpha$ в равенство (б) найдем

$$2Q \sin \beta - P(b \cos \beta - \operatorname{ctg} \alpha \sin \beta) = 0,$$

откуда

$$P = 2Q / (\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha).$$

При угле β , близком к α , сила давления P получается очень большой.

§ 141. ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ

Принцип возможных перемещений дает общий метод решения задач статики. С другой стороны, принцип Даламбера позволяет использовать методы статики для решения задач динамики. Следовательно, применяя эти два принципа одновременно, мы можем получить общий метод решения задач динамики.

Рассмотрим систему материальных точек, на которую наложены идеальные связи. Если ко всем точкам системы кроме действующих на них активных сил $\vec{F}_k^a$ и реакций связей $\vec{N}_k$ прибавить соответствующие силы инерции $\vec{F}_k^i = -m_k \vec{a}_k$, то согласно принципу Даламбера полученная система сил будет находиться в равновесии. Тогда, применяя к этим силам принцип возможных перемещений, получим

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^i + \sum \delta A_k^N = 0.$$

Но последняя сумма по условию (98) равна нулю и окончательно будет:

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^i = 0. \quad (102)$$

Из полученного результата вытекает следующий принцип Даламбера — Лагранжа: при движении механической системы с идеальными связями в каждый момент времени сумма элементарных работ всех приложенных активных сил и всех сил инерции на любом возможном перемещении системы будет равна нулю.

Уравнение (102), выражающее этот принцип, называют общим уравнением динамики. В аналитической форме уравнение (102) имеет вид

$$\sum [(F_{kx}^a + F_{kx}^i) \delta x_k + (F_{ky}^a + F_{ky}^i) \delta y_k + (F_{kz}^a + F_{kz}^i) \delta z_k] = 0. \quad (103)$$

Уравнения (102) или (103) позволяют составить дифференциальные уравнения движения механической системы.

Если при этом система представляет собой совокупность каких-нибудь твердых тел, то для составления уравнений нужно к действующим на каждое тело активным силам прибавить приложенную в любом центре силу, равную главному вектору сил инерции, и пару с моментом, равным главному моменту сил инерции относительно этого центра (или одну из этих величин, см. § 134), а затем применить принцип возможных перемещений.

Задача 173. В центробежном регуляторе, равномерно вращающемся вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ω (рис. 362), вес каждого из шаров M_1 и M_2 равен p , а вес муфты C_1C_2 равен Q . Пренебрегая весом стержней, определить угол α , если $OD_1=OD_2=l$, $OB_1=OB_2=B_1C_1=B_2C_2=b$.

Решение. Присоединяем к активным силам P_1 , P_2 и Q_3 центробежные силы инерции F_1^H и F_2^H (сила инерции муфты, очевидно, будет равна нулю) и составляем общее уравнение динамики в виде (103). Тогда, вычисляя проекции всех сил на координатные оси, получим

$$p_1 \delta x_1 + p_2 \delta x_2 - F_1^H \delta y_1 + F_2^H \delta y_2 + Q_3 \delta x_3 = 0. \quad (a)$$

При этом $Q_3=Q$, $p_1=p_2=p$, $F_1^H=F_2^H=(p/g)\omega^2 l \sin \alpha$. Координаты точек приложения сил равны:

$$x_1=x_2=l \cos \alpha, \quad y_2=-y_1=l \sin \alpha, \quad x_3=2b \cos \alpha.$$

Дифференцируя эти выражения, находим:

$$\delta x_1=\delta x_2=-l \sin \alpha \cdot \delta \alpha, \quad \delta y_2=-\delta y_1=l \cos \alpha \cdot \delta \alpha, \quad \delta x_3=-2b \sin \alpha \cdot \delta \alpha.$$

Подставляя все найденные значения в уравнение (a), получаем

$$[-2pl \sin \alpha + 2(p/g)l^2 \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha - 2Qb \sin \alpha] \delta \alpha = 0.$$

Отсюда окончательно

$$\cos \alpha = \frac{(pl + Qb)g}{p l^2 \omega^2}.$$

Так как $\cos \alpha \leq 1$, то шары будут отклоняться, когда $\omega^2 \geq (pl + Qb)g/p l^2$. С увеличением ω угол α растет, стремясь к 90° при $\omega \rightarrow \infty$.

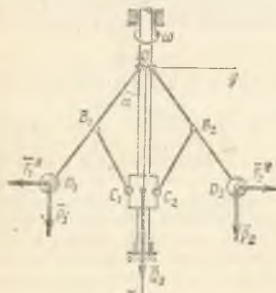


Рис. 362

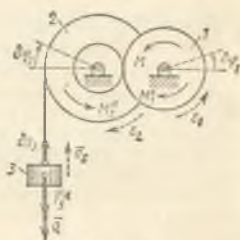


Рис. 363

Задача 174. В подъемнике, изображенном на рис. 363, к шестерне 1, имеющей вес P_1 и радиус инерции относительно ее оси r_1 , приложен вращающий момент M . Определить ускорение поднимаемого груза 3 весом Q , пренебрегая весом веревки и трением в осях. Барабан, на который наматывается веревка, жестко скреплен с другой шестерней; их общий вес равен P_2 , а радиус инерции относительно оси вращения r_2 . Радиусы шестерен равны соответственно r_1 и r_2 , а радиус барабана r .

Решение. Изображаем действующую на систему активную силу $\bar{Q}$ и вращающий момент M (силы F_1 и F_2 работы не совершают); присоединяем к ним силу инерции груза F_3^H и пары с моментами M_1^H и M_2^H , к которым приводятся силы инер-

ции вращающихся тел (см. § 134). Эти величины по модулю равны:

$$F_3^H = (Q/g) a_3, \quad |M_1^H| = (P_1/g) r_1^2 \epsilon_1, \quad |M_2^H| = (P_2/g) r_2^2 \epsilon_2.$$

Направления всех величин показаны на чертеже. Сообщая системе возможное перемещение и составляя уравнение (102), получим

$$-(Q + F_3^H) \delta s_3 + (M - M_1^H) \delta \varphi_1 - M_2^H \delta \varphi_2 = 0.$$

Выражая все перемещения через $\delta \varphi_2$, найдем, что

$$\delta s_3 = r \delta \varphi_2, \quad \frac{\delta \varphi_1}{\delta \varphi_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} \Rightarrow \delta \varphi_1 = \frac{r_2}{r_1} \delta \varphi_2.$$

Окончательно уравнение движения примет вид

$$Q \left(1 + \frac{a_3}{g} \right) r + \frac{P_2}{g} r_2^2 \epsilon_2 + \frac{P_1}{g} r_1^2 \epsilon_1 \frac{r_2}{r_1} - M \frac{r_2}{r_1} = 0.$$

Входящие сюда величины ϵ_1 и ϵ_2 выразим через искомое ускорение a_3 . Учтя, что ϵ_1 , ϵ_2 связаны между собой так же, как и ω_1 , ω_2 , получим:

$$\epsilon_2 = a_3/r, \quad \epsilon_1 = r_2 \epsilon_2/r_1 = r_2 a_3/r r_1.$$

В результате найдем окончательно

$$a_3 = \frac{(r r_2/r_1) M - r^2 Q}{r^2 Q + p_2 P_2 + (p_1^2 r_2^2/r_1^2) P_1} g.$$

Задачу можно было бы решить и с помощью теоремы об изменении кинетической энергии (см. § 124).

Глава XXIX

УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ И УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ В ОБОБЩЕННЫХ КООРДИНАТАХ

§ 142. ОБОБЩЕННЫЕ КООРДИНАТЫ И ОБОБЩЕННЫЕ СКОРОСТИ

Число координат (параметров), определяющих положение механической системы, зависит от количества точек (или тел), входящих в систему, и от числа и характера наложенных связей. Будем в дальнейшем рассматривать только системы с геометрическими связями (точнее только голономные системы). Как установлено в § 138, у такой системы число независимых координат, определяющих положение системы, совпадает с числом ее степеней свободы. В качестве этих координат можно выбирать параметры, имеющие любую размерность и любой геометрический (или физический) смысл, в частности отрезки прямых или дуг, углы, площади и т. п.

Независимые между собой параметры любой размерности, число которых равно числу степеней свободы системы и которые однозначно определяют ее положение, называют *обобщенными координатами* системы. Будем обозначать обобщенные координаты буквой q . Тогда положение системы, имеющей s степеней свободы, будет опре-

делиться с обобщенными координатами

$$q_1, q_2, \dots, q_s. \quad (104)$$

Поскольку обобщенные координаты между собой независимы, то элементарные приращения этих координат

$$\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_s \quad (105)$$

также между собой независимы. При этом каждая из величин (105) определяет соответствующее, независимое от других возможное перемещение системы.

Как при всяком переходе от одной системы координат к другой, декартовы координаты x_k, y_k, z_k любой точки рассматриваемой механической системы можно выразить через обобщенные координаты зависимостями вида: $x_k = x_k(q_1, q_2, \dots, q_s)$ и т. д. Следовательно, и для радиуса-вектора $\vec{r}_k$ этой точки, поскольку $\vec{r}_k = x_k \vec{i} + y_k \vec{j} + z_k \vec{k}$, тоже будет*

$$\vec{r}_k = \vec{r}_k(q_1, q_2, \dots, q_s). \quad (106)$$

Пример 1. Плоский математический маятник (рис. 364) имеет одну степень свободы ($s=1$); следовательно, его положение определяется одной обобщенной координатой q . В качестве этой координаты здесь можно выбрать или угол φ , или длину S дуги AM , или (так как движение происходит в одной плоскости) площадь σ сектора OAM , указав во всех случаях положительное и отрицательное направление отсчета каждой из этих координат. Выбор в качестве обобщенной координаты абсциссы x точки M будет неудачным, так как эта координата не определяет положение точки M однозначно (при данном значении x маятник может быть отклоненным от вертикали вправо или влево).

Если в качестве обобщенной координаты выбрать угол φ , то возможное перемещение маятника получим, сообщив углу приращение $\delta\varphi$. Декартовы координаты x и y точки M можно выразить через φ в виде $x=l \cos \varphi, y=l \sin \varphi$, где $l=OM$. Тогда, в соответствии с равенством (106), $\vec{r}=\vec{r}(\varphi)$.

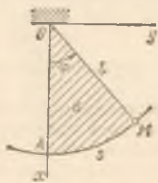


Рис. 364

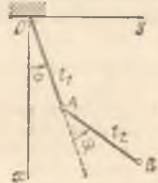


Рис. 365

Пример 2. Двойной плоский маятник (рис. 365) имеет две степени свободы и в качестве обобщенных координат можно выбрать углы φ и ψ ($q_1=\varphi, q_2=\psi$). Эти углы между собой независимы, так как можно изменять угол φ , сохраняя неизменными ψ , и наоборот. Величины $\delta\varphi$ и $\delta\psi$ определяют независимые между собой возможные перемещения системы. Выражения декартовых координат точек A и B через обоб-

* Считаем для сокращения записей наложенные связи стационарными (иначе $\vec{r}_k$ зависели бы еще от аргумента t). Вид окончательных уравнений (см. § 145) от этого допущения не зависит и они будут справедливы и для нестационарных связей.

щенные даются равенствами вида: $x_A=l_1 \cos \varphi, x_B=l_1 \cos \varphi + l_2 \cos (\varphi + \psi)$ и т. д., где $l_1=OA, l_2=AB$. Следовательно, в соответствии с равенством (106) $\vec{r}_A=\vec{r}_A(\varphi), \vec{r}_B=\vec{r}_B(\varphi, \psi)$.

При движении системы ее обобщенные координаты будут с течением времени непрерывно изменяться, и закон этого движения определится уравнениями:

$$\dot{q}_1=f_1(t), \dot{q}_2=f_2(t), \dots, \dot{q}_s=f_s(t). \quad (107)$$

Уравнения (107) представляют собой кинематические уравнения движения системы в обобщенных координатах.

Производные от обобщенных координат по времени называются обобщенными скоростями системы. Обозначим обобщенные скорости символами

$$\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s,$$

где $\dot{q}_1=dq_1/dt$ и т. д. Размерность обобщенной скорости зависит от размерности соответствующей обобщенной координаты. Если q — линейная величина, то $\dot{q}$ — линейная скорость; если q — угол, то $\dot{q}$ — угловая скорость; если q — площадь, то $\dot{q}$ — секторная скорость и т. д. Как видим, понятием об обобщенной скорости охватываются все встречавшиеся нам ранее в кинематике понятия о скоростях.

§ 143. ОБОБЩЕННЫЕ СИЛЫ

Рассмотрим механическую систему, состоящую из n материальных точек, на которые действуют силы $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$. Пусть система имеет s степеней свободы и ее положение определяется обобщенными координатами (104). Сообщим системе такое независимое возможное перемещение, при котором координата q_1 получает приращение δq_1 , а остальные координаты не изменяются. Тогда каждый из радиусов-векторов $\vec{r}_k$ точек системы получит элементарное приращение $(\delta \vec{r}_k)_1$ *. Поскольку, согласно равенству (106), $\vec{r}_k=\vec{r}_k(q_1, q_2, \dots, q_s)$, а при рассматриваемом перемещении изменяется только координата q_1 (остальные сохраняют постоянные значения), то $(\delta \vec{r}_k)_1$ вычисляется как частный дифференциал и, следовательно,

$$(\delta \vec{r}_k)_1 = \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1} \delta q_1.$$

Используя это равенство и формулу (42) из § 87, вычислим сумму элементарных работ всех действующих сил на рассматриваемом перемещении, которую обозначим δA_1 . Получим

$$\begin{aligned} \delta A_1 &= \vec{F}_1 \cdot (\delta \vec{r}_1)_1 + \vec{F}_2 \cdot (\delta \vec{r}_2)_1 + \dots + \vec{F}_n \cdot (\delta \vec{r}_n)_1 = \\ &= \vec{F}_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial q_1} \delta q_1 + \vec{F}_2 \cdot \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial q_1} \delta q_1 + \dots + \vec{F}_n \cdot \frac{\partial \vec{r}_n}{\partial q_1} \delta q_1. \end{aligned}$$

* Символ $(\delta \vec{r}_k)_1$ означает, что берется то элементарное приращение, которое радиус-вектор $\vec{r}_k$ получает при изменении только координаты q_1 на величину δq_1 .

Вынося общий множитель δq_1 за скобки, найдем окончательно

$$\delta A_1 = Q_1 \delta q_1, \quad (108)$$

где обозначено

$$Q_1 = \sum \vec{F}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1}. \quad (109)$$

По аналогии с равенством $\delta A = F_1 \delta s$, определяющим элементарную работу силы $\vec{F}$, величину Q_1 называют *обобщенной силой*, соответствующей координате q_1 .

Сообщая системе другое независимое возможное перемещение, при котором изменяется только координата q_2 , получим для элементарной работы всех действующих сил на этом перемещении выражение

$$\delta A_2 = Q_2 \delta q_2, \quad (110)$$

где

$$Q_2 = \sum \vec{F}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_2}. \quad (111)$$

Величина Q_2 представляет собой обобщенную силу, соответствующую координате q_2 , и т. д.

Очевидно, что если системе сообщить такое возможное перемещение, при котором одновременно изменяются все ее обобщенные координаты, то сумма элементарных работ приложенных сил на этом перемещении определится равенством

$$\sum \delta A_k = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_s \delta q_s. \quad (112)$$

Формула (112) дает выражение полной элементарной работы всех действующих на систему сил в обобщенных координатах. Из этого равенства видно, что обобщенные силы — это величины, равные коэффициентам при приращениях обобщенных координат в выражении полной элементарной работы действующих на систему сил.

Если все наложенные на систему связи являются идеальными, то работу при возможных перемещениях совершают только активные силы и величины $Q_1, Q_2, \dots, Q_s$ будут представлять собой *обобщенные активные силы* системы.

Размерность обобщенной силы зависит от размерности соответствующей обобщенной координаты. Так как произведение $Q \delta q$, а следовательно, и $Q q$ имеет размерность работы, то

$$[Q] = \frac{[A]}{[q]}. \quad (113)$$

т. е. *размерность обобщенной силы равна размерности работы, деленной на размерность соответствующей обобщенной координаты*. Отсюда видно, что если q — линейная величина, то Q имеет размерность обычной силы (в СИ измеряется в ньютонах), если q — угол (величина безмерная), то Q будет измеряться в Н·м и имеет размерность момента; если q — объем (например, положение поршня

в цилиндре можно определять объемом запоршнего пространства), то Q будет измеряться в Н/м³ и имеет размерность давления, и т. д. Как видим, по аналогии с обобщенной скоростью, понятием об обобщенной силе охватываются все величины, встречавшиеся ранее как меры механического взаимодействия материальных тел (сила, момент силы, давление).

Бы ч и с л е н и е обобщенных сил будем производить по формулам вида (108), (110) *, что сводится к вычислению возможной элементарной работы (см. § 140). Сначала следует установить, каково число степеней свободы системы, выбрать обобщенные координаты и изобразить на чертеже все приложенные к системе активные силы и силы трения (если они совершают работу). Затем для определения Q_1 надо сообщить системе такое возможное перемещение, при котором изменяется только координата q_1 , получая *положительное* приращение δq_1 , вычислить на этом перемещении сумму элементарных работ всех действующих сил по формулам (101) и представить полученное выражение в виде (108). Тогда коэффициент при δq_1 и дает искомую величину Q_1 . Аналогично вычисляются $Q_2, Q_3, \dots$.

Пример 1. Подсчитаем обобщенную силу для системы, изображенной на рис. 366, где груз A весом P_1 перемещается по гладкой наклонной плоскости, а груз B весом P_2 — по шероховатой горизонтальной плоскости, коэффициент трения μ

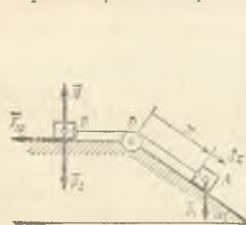


Рис. 366

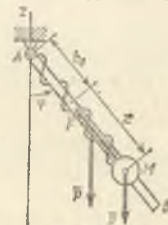


Рис. 367

которую равен f . Грузы связаны нитью, перекинутой через блок O . Массой нити и блока пренебрегаем. Система имеет одну степень свободы и ее положение определяется координатой $q_1 = x$ (положительное направление отсчета x показано стрелкой). Для определения Q_1 сообщаем системе возможное перемещение δx , при котором $\delta x > 0$, и вычисляем на этом перемещении элементарные работы сил $\vec{P}_1$ и $\vec{F}_{тр}$; остальные силы работы не совершают. Так как $F_{тр} = fN = fP_2$, то

$$\delta A = (P_1 \sin \alpha - f P_2) \delta x.$$

* Значения Q_i можно еще определить непосредственно по формулам вида (109), (111), учтя, что $\vec{F}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1} = F_{kx} \frac{\partial x_k}{\partial q_1} + F_{ky} \frac{\partial y_k}{\partial q_1} + F_{kz} \frac{\partial z_k}{\partial q_1}$ и т. д., и выразив координаты x_k, y_k, z_k точек приложения сил через $q_1, q_2, \dots, q_s$. Можно также, вычислив сразу элементарную работу всех сил и приведя ее к виду (112), найти Q_i как коэффициенты при δq_i . Но обычно расчет этими методами не дает преимуществ, а может оказаться и более сложным.

Следовательно,

$$Q_1 = P_1 \sin \alpha - f P_2.$$

Пример 2. Пренебрегая трением, найдем обобщенные силы для системы, изображенной на рис. 367. Однородный стержень AB имеет длину l и вес P и может вращаться вокруг оси A в вертикальной плоскости. Нанизанный на него шарик M имеет вес p . Длина пружины AM равна в ненапряженном состоянии b_0 , а жесткость — c .

Система имеет две степени свободы (независимыми являются перемещение шарика вдоль стержня и поворот стержня вокруг оси A). В качестве обобщенных координат выберем угол φ и расстояние x шарика от конца ненапряженной пружины ($q_1 = \varphi$, $q_2 = x$); положительные направления отсчета координат показаны стрелками.

Сообщаем сначала системе возможное перемещение, при котором угол φ получает приращение $\delta\varphi$ ($\delta\varphi > 0$), а $x = \text{const}$. На этом перемещении работу совершают силы $\bar{P}$ и $\bar{p}$. По второй из формул (101) находим (знак минус здесь потому, что направление момента противоположно направлению $\delta\varphi$)

$$\delta A_1 = [- (Pl/2) \sin \varphi - p(b_0 + x) \sin \varphi] \delta\varphi.$$

Следовательно,

$$Q_1 = - [Pl/2 + p(b_0 + x)] \sin \varphi.$$

Теперь сообщаем системе возможное перемещение, при котором изменится только координата x , получая приращение $\delta x > 0$, а угол $\varphi = \text{const}$. На этом перемещении работу совершают сила тяжести p и сила упругости, модуль которой $F = cx$. Тогда

$$\delta A_2 = (p \cos \varphi - cx) \delta x$$

и

$$Q_2 = p \cos \varphi - cx.$$

Обобщенная сила Q_1 имеет в этом случае размерность момента, так как $q_1 = \varphi$, а сила Q_2 — размерность обычной силы.

Случай потенциальных сил. Если все действующие на систему силы являются потенциальными, то для системы, как известно, существует такая *силовая функция* U , зависящая от координат x_k , y_k , z_k точек системы, что сумма элементарных работ действующих сил равна полному дифференциалу этой функции, т. е. $\sum \delta A_k = \delta U$ [см. § 126, формула (62)]. Но при переходе к обобщенным координатам $q_1, q_2, \dots, q_s$ все x_k, y_k, z_k могут быть выражены через эти координаты и тогда $U = U(q_1, q_2, \dots, q_s)$. Следовательно, вычисляя δU как полный дифференциал от функции $U(q_1, q_2, \dots, q_s)$, найдем, что

$$\sum \delta A_k = \delta U = \frac{\partial U}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial U}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial U}{\partial q_s} \delta q_s.$$

Сравнивая это выражение с равенством (112), заключаем, что в данном случае

$$Q_1 = \frac{\partial U}{\partial q_1}, \quad Q_2 = \frac{\partial U}{\partial q_2}, \quad \dots, \quad Q_s = \frac{\partial U}{\partial q_s}, \quad (114)$$

или, так как потенциальная энергия $\Pi = -U$, то

$$Q_1 = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_1}, \quad Q_2 = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_2}, \quad \dots, \quad Q_s = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_s}. \quad (115)$$

Следовательно, если все действующие на систему силы потенциальны, то обобщенные силы равны частным производным от силовой

функции (или взятым со знаком минус частным производным от потенциальной энергии) по соответствующим обобщенным координатам.

Пример 3. Все силы, действующие на систему, изображенную на рис. 367, потенциальны. Если при этом направить координатную ось Az вертикально вверх, то по формулам (64), (64') из § 127 найдем для всей системы

$$\Pi = - (Pl/2) \cos \varphi - p(b_0 + x) \cos \varphi + cx^2/2,$$

где обобщенные координаты $q_1 = \varphi$, $q_2 = x$. Тогда

$$Q_1 = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = - [Pl/2 + p(b_0 + x)] \sin \varphi, \quad Q_2 = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} = p \cos \varphi - cx,$$

что совпадает с результатами, полученными в примере 2.

§ 144. УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ СИСТЕМЫ В ОБОБЩЕННЫХ КООРДИНАТАХ

Согласно принципу возможных перемещений необходимым и достаточным условием равновесия механической системы является равенство нулю суммы элементарных работ всех активных сил (и сил трения если они совершают работу) на любом возможном перемещении системы, т. е. условие $\sum \delta A_k = 0$. В обобщенных координатах это условие, согласно равенству (112), дает

$$Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_s \delta q_s = 0. \quad (116)$$

Так как все величины $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_s$ между собой независимы, то равенство (116) может выполняться тогда и только тогда, когда каждый из коэффициентов при $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_s$ в отдельности равен нулю, т. е.

$$Q_1 = 0, \quad Q_2 = 0, \quad \dots, \quad Q_s = 0. \quad (117)$$

В самом деле, если допустить, что одна из этих величин, например Q_1 , не равна нулю, то всегда можно сообщить системе такое возможное перемещение, при котором $\delta q_1 \neq 0$, а $\delta q_2 = \delta q_3 = \dots = \delta q_s = 0$, и мы приходим к противоречию с условием (116).

Таким образом, для равновесия механической системы необходимо и достаточно, чтобы все обобщенные силы, соответствующие выбранным для системы обобщенным координатам, были равны нулю. Число условий равновесия (117) равно, как видим, числу обобщенных координат, т. е. числу степеней свободы системы.

Из сравнения метода вычисления обобщенных сил (см. § 143) и способа решения задач, которым пользовались в § 140, видно, что по существу при решении задач с помощью принципа возможных перемещений мы вычисляли соответствующие обобщенные силы, а затем приравнивали их нулю.

Рассмотрим еще два примера.

1. Условием равновесия системы, изображенной на рис. 366, будет $Q_1 = 0$ или $P_1 = f P_2 / \sin \alpha$. Поскольку при вычислении Q_1 было принято, что $F_{1p} = f N = F_{ap}$, то условие $Q_1 = 0$ дает наибольшее значение P_1 , при котором груз A не опускается, т. е. определяет предельное положение равновесия (см. § 25). Система будет в равновесии и при $P_1 < P_2 / \sin \alpha$.

2. Для системы, изображенной на рис. 367, из условий равновесия $Q_1=0$ и $Q_2=0$ получаем очевидный результат: при равновесии $\varphi=0$, $x=r/c=\lambda_{ст}$.

Случай потенциальных сил. В этом случае условия равновесия (117), если учесть равенства (114) и (115), дают:

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial q_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial U}{\partial q_s} = 0 \quad (118)$$

или

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q_s} = 0. \quad (118')$$

Отсюда следует, что при равновесии полный дифференциал функций U или Π равен нулю, т. е.

$$dU(q_1, q_2, \dots, q_s) = 0 \text{ или } d\Pi(q_1, q_2, \dots, q_s) = 0. \quad (119)$$

Равенства (118) или (119) выражают необходимые условия экстремума функции нескольких переменных. Следовательно, система, на которую действуют потенциальные силы, в тех положениях, для которых силовая функция или потенциальная энергия системы имеет экстремум (в частности, минимум или максимум), находится в равновесии. Вопрос об устойчивости этих положений равновесия будет рассмотрен в § 147.

§ 145. УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА

Чтобы найти уравнения движения механической системы в обобщенных координатах, обратимся к общему уравнению динамики (102), которое дает

$$\Sigma \delta A_k + \Sigma \delta A_k^* = 0. \quad (120)$$

Для общности не будем предполагать, что все наложенные на систему связи являются идеальными. Поэтому в первую сумму могут входить как работы активных сил, так и, например, работы сил трения.

Пусть система имеет s степеней свободы и ее положение определяется обобщенными координатами (104). Тогда по формуле (112)

$$\Sigma \delta A_k = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_s \delta q_s. \quad (121)$$

Очевидно, что совершенно так же, как это было сделано в § 143 для сил $\bar{F}_k$, можно преобразовать к обобщенным координатам элементарную работу сил инерции $\bar{F}_k^*$. При этом получим

$$\Sigma \delta A_k^* = Q_1^* \delta q_1 + Q_2^* \delta q_2 + \dots + Q_s^* \delta q_s, \quad (121')$$

где $Q_1^*, Q_2^*, \dots, Q_s^*$ — обобщенные силы инерции, которые согласно формулам (109), (111) будут:

$$Q_1^* = \Sigma \bar{F}_1 \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1}, \quad Q_2^* = \Sigma \bar{F}_2 \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_2}, \quad \dots \quad (122)$$

Подставляя величины (121) и (121') в уравнение (120), найдем

$$(Q_1 + Q_1^*) \delta q_1 + (Q_2 + Q_2^*) \delta q_2 + \dots + (Q_s + Q_s^*) \delta q_s = 0.$$

Так как все $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_s$ между собой независимы, то полученное равенство может выполняться тогда и только тогда, когда каждый из коэффициентов при $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_s$ в отдельности равен нулю, в чем убеждаемся, рассуждая так же, как при выводе уравнений (117). Следовательно, должно быть

$$Q_1 + Q_1^* = 0, \quad Q_2 + Q_2^* = 0, \quad \dots, \quad Q_s + Q_s^* = 0. \quad (123)$$

Полученными уравнениями можно непосредственно пользоваться для решения задач динамики. Однако процесс составления этих уравнений значительно упростится, если выразить все входящие сюда обобщенные силы инерции через кинетическую энергию системы. Преобразуем сначала соответствующим образом величину Q_k^* . Поскольку сила инерции любой из точек системы $\bar{F}_k^* = -m_k \bar{a}_k = -m_k d\bar{v}_k/dt$, то первая из формул (122) дает

$$-Q_k^* = \Sigma m_k \frac{d\bar{v}_k}{dt} \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1}. \quad (124)$$

Чтобы выразить Q_k^* через кинетическую энергию системы, надо преобразовать правую часть равенства (124) так, чтобы она содержала только скорости $\bar{v}_k$ точек системы. С этой целью заметим прежде всего, что

$$\frac{d\bar{r}_k}{dt} \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1} = \frac{d}{dt} \left(\bar{v}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1} \right) - \bar{v}_k \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1} \right). \quad (125)$$

В справедливости равенства (125) легко убедиться, продифференцировав произведение, стоящее справа в скобках. Дальнейшее преобразование осуществляется с помощью следующих двух равенств:

$$\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1} = \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial q_1} \quad \text{и} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1} \right) = \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial q_1}. \quad (126)$$

Докажем сначала справедливость первого из них. Так как согласно (106) $\bar{r}_k = \bar{r}_k(q_1, q_2, \dots, q_s)$, то

$$\bar{v}_k = \frac{d\bar{r}_k}{dt} = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_s} \dot{q}_s \quad \text{и} \quad \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial q_1} = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1}.$$

Справедливость второго из равенств (126) следует из того, что операции полного дифференцирования по t и частного по q_1 переместительны, т. е.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1} \right) = \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{d\bar{r}_k}{dt} \right) = \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial q_1}.$$

Подставив теперь величины (126) в равенство (125), получим

$$\frac{d\bar{v}_k}{dt} \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1} = \frac{d}{dt} \left(\bar{v}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1} \right) - \bar{v}_k \cdot \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial q_1} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{d\bar{r}_k^2}{dq_1} \right) - \frac{1}{2} \frac{d\bar{r}_k^2}{dq_1},$$

и формула (124), есть учесть, что сумма производных равна производной от суммы, а $\bar{v}_k^2 = v_k^2$, примет вид

$$-Q_1^* = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} \left(\sum \frac{m_k v_k^2}{2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} \left(\sum \frac{m_k v_k^2}{2} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1},$$

где $T = \sum m_k v_k^2 / 2$ — кинетическая энергия системы.

Аналогичные выражения получаются для всех остальных обобщенных сил инерции. В результате равенства (123) дадут окончательно

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} &= Q_1, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} &= Q_2, \\ \dots &\dots \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \right) - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} &= Q_s. \end{aligned} \right\} \quad (127)$$

Уравнения (127) и представляют собой дифференциальные уравнения движения системы в обобщенных координатах или уравнения Лагранжа *. Число этих уравнений, как видим, равно числу степеней свободы системы.

Уравнения Лагранжа дают единый и притом достаточно простой метод решения задач динамики. Важное преимущество этих уравнений состоит в том, что их вид и число не зависят ни от количества тел (или точек), входящих в рассматриваемую систему, ни от того, как эти тела движутся; определяется число уравнений Лагранжа только числом степеней свободы системы. Кроме того, при идеальных связях в правые части уравнений (127) входят обобщенные активные силы, и, следовательно, эти уравнения позволяют заранее исключить из рассмотрения все наперед неизвестные реакции связей.

Основная задача динамики в обобщенных координатах состоит в том, чтобы, зная обобщенные силы $Q_1, Q_2, \dots, Q_s$ и начальные условия, найти закон движения системы в виде (107), т. е. определить обобщенные координаты $q_1, q_2, \dots, q_s$ как функции времени. Так как кинетическая энергия T зависит от обобщенных скоростей $\dot{q}_i$, то при дифференцировании первых членов уравнений (127) по t в левых частях этих уравнений появятся вторые производные по времени $\ddot{q}_i$ от искомых координат. Следовательно, уравнения Лагранжа представляют собой обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка относительно обобщенных координат $q_1, q_2, \dots, q_s$.

Случай потенциальных сил. Если действующие на систему силы потенциальные, то, используя формулы (115), можно

* Уравнения Лагранжа могут применяться для изучения движения любых механических систем с геометрическими (гонее с голономными) связями. Для изучения движения неголономных систем (см. § 137) используются другие уравнения, которые в данном курсе не рассматриваются.

первое из уравнений (127) представить в виде

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} + \frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_1} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial (T - \Pi)}{\partial \dot{q}_1} \right] - \frac{\partial (T - \Pi)}{\partial \dot{q}_1} = 0.$$

Последнее равенство справедливо потому, что потенциальная энергия Π зависит только от координат $q_1, q_2, \dots, q_s$, а от обобщенных скоростей не зависит и $\partial \Pi / \partial \dot{q}_1 = 0$.

Аналогично преобразуются все остальные уравнения системы (127). Введем функцию

$$L = T - \Pi. \quad (128)$$

Функция L от обобщенных координат и обобщенных скоростей, равная разности между кинетической и потенциальной энергиями системы, называется функцией Лагранжа или кинетическим потенциалом. Тогда в случае потенциальных сил уравнения Лагранжа примут вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} &= 0, \\ \dots &\dots \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \right) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (129)$$

Из полученного результата следует, что состояние механической системы, на которую действуют потенциальные силы, определяется заданием одной только функции Лагранжа, так как, зная эту функцию, можно составить дифференциальные уравнения движения системы.

При соответствующем обобщении понятий, функции, аналогичные функции Лагранжа, описывают состояние других физических систем (непрерывной среды, гравитационного или электромагнитного поля и др.) Поэтому уравнения Лагранжа вида (129) играют важную роль в ряде областей физики.

§ 146. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

Уравнениями Лагранжа, как уже указывалось, можно пользоваться для изучения движения любой механической системы с геометрическими или сводящимися к геометрическим (голономными) связями, независимо от того, сколько тел (или точек) входит в систему, как движутся эти тела и какое движение (абсолютное или относительное) рассматривается.

Чтобы для данной механической системы составить уравнения Лагранжа, надо: 1) установить число степеней свободы системы и выбрать обобщенные координаты (см. § 142); 2) изобразить систему в произвольном положении и показать на рисунке все действующие силы (для систем с идеальными связями только активные);

3) вычислить обобщенные силы Q_i путем, указанным в § 143; при этом во избежание ошибок в знаках каждое сообщаемое системе возможное перемещение должно быть направлено так, чтобы приращение соответствующей координаты было *положительным*; 4) определить кинетическую энергию T системы в ее *абсолютном* движении и *выразить эту энергию через обобщенные координаты q_i и обобщенные скорости $\dot{q}_i$* ; 5) подсчитать соответствующие частные производные от T по $\dot{q}_i$ и q_i и подставить все значения в уравнения (127).

Указанным путем уравнения Лагранжа составляются независимо от того, рассматривается ли абсолютное (по отношению к инерциальной системе отсчета) или относительное движение механической системы. Но в последнем случае возможен и другой путь, а именно кинетическую энергию системы определять в ее относительном движении, но зато при нахождении обобщенных сил присоединить к силам, действующим на систему, переносные силы инерции (чего при использовании первого пути делать не надо).

Из полученных уравнений, если заданы действующие силы и начальные условия, можно, интегрируя эти уравнения, найти закон движения системы в виде (107). Если же задан закон движения, то составленные уравнения позволяют определить действующие силы.

Когда все приложенные к системе силы являются потенциальными, уравнения Лагранжа можно составлять в виде (129). При этом вместо вычисления обобщенных сил надо определить потенциальную энергию системы, выразив ее через обобщенные координаты, и затем, определив еще и кинетическую энергию, составить функцию Лагранжа (128).

Начнем с задачи, позволяющей легко уяснить порядок составления уравнений Лагранжа.

Задача 175. Составить, пользуясь методом Лагранжа, дифференциальное уравнение колебаний физического маятника (см. § 129).

Решение. Маятник имеет одну степень свободы и его положение определяется углом φ (см. рис. 324). Следовательно, $q_1 = \varphi$. Сообщая углу φ положительное приращение $\delta\varphi$, найдем, что на этом перемещении работу совершает только сила тяжести $\vec{P}$ и $\delta A_1 = (-Pa \sin \varphi) \delta\varphi$, где $a = OC$. Поэтому $Q_1 = -Pa \sin \varphi$. Кинетическая энергия маятника $T = J_O \omega^2/2$ или $T = J_O \dot{\varphi}^2/2$ (напоминаем, что величина T должна быть выражена через обобщенную скорость, а $\omega = \dot{\varphi}$). Уравнение Лагранжа, так как $q_1 = \varphi$, имеет вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_1. \quad (a)$$

В данном случае, поскольку T от угла φ не зависит,

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = J_O \dot{\varphi} \quad \text{и} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = J_O \ddot{\varphi}.$$

Подставляя найденные величины в уравнение (a), получим

$$J_O \ddot{\varphi} = -Pa \sin \varphi,$$

т. е. тот же результат, что и в § 129.

Поскольку сила тяжести $\vec{P}$ потенциальная, то уравнение Лагранжа можно составить в виде (129). Направляя ось Oz вертикально вниз, имеем в данном случае $\Pi = -Pz = -Pa \cos \varphi$. Тогда по формуле (128):

$$L = J_O \dot{\varphi}^2/2 + Pa \cos \varphi \quad \text{и} \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = J_O \dot{\varphi}, \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = -Pa \sin \varphi.$$

В результате уравнение (129) также дает $J_O \ddot{\varphi} + Pa \sin \varphi = 0$.

Задача 176. Решить с помощью уравнений Лагранжа задачу 143 (см. § 124). **Решение.** Механизм имеет одну степень свободы (см. рис. 314) и его положение определяется координатой φ ($q_1 = \varphi$). Сообщая углу φ приращение $\delta\varphi$, найдем, что на этом перемещении элементарная работа δA_1 будет иметь выражение, совпадающее с выражением dA_1 в задаче 143, если только заменить в нем $\delta\varphi$ на $\delta\varphi$. Следовательно,

$$Q_1 = -c\varphi(l-r)^2/r^2.$$

Величина T для механизма также была найдена (формула (б) в задаче 143). Учтя, что $\omega_p = \dot{\varphi}$, получим

$$T = (9P+2Q)l^2 \dot{\varphi}^2/12g,$$

откуда

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = (9P+2Q)l^2 \dot{\varphi} \dot{\varphi}.$$

Подстановка в уравнение Лагранжа дает окончательно

$$\frac{(9P+2Q)}{12g} l^2 \ddot{\varphi} = -c \frac{(l-r)^2}{r^2} \varphi \quad \text{или} \quad \ddot{\varphi} + k^2 \varphi = 0,$$

т. е. тот же результат, что и в задаче 143.

Обращаем внимание на то, что для системы с одной степенью свободы составление дифференциального уравнения движения методом Лагранжа сводится по существу к тем же расчетам, что и при использовании теоремы об изменении кинетической энергии.

Задача 177. Найти закон движения шарика B массой m вдоль трубки OA , вращающейся равномерно в горизонтальной плоскости с угловой скоростью ω (рис. 368). В начальный момент шарик находится от оси O на расстоянии x_0 и его скорость вдоль трубки равна нулю. Найти также, какой при этом действует на трубку вращающий момент $M_{вр}$.

Решение. Система имеет две степени свободы. В качестве обобщенных координат выберем координату x , определяющую относительное движение шарика, и угол поворота φ трубки. Тогда уравнения Лагранжа будут иметь вид:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_1, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_2. \quad (a)$$

Найдем сначала Q_1 и Q_2 . На перемещении, при котором координата x получает приращение δx , действующие силы работу не совершают (трубка вращается в горизонтальной плоскости); следовательно, $\delta A_1 = 0$. На перемещении, при котором угол φ получает приращение $\delta\varphi$, $\delta A_2 = M_{вр} \delta\varphi$. Таким образом:

$$Q_1 = 0, \quad Q_2 = M_{вр}. \quad (б)$$

Кинетическая энергия системы складывается из энергии T_1 шарика и энергии T_2 трубки. Энергию T_1 определяем для *абсолютного* движения шарика. Тогда $T_1 = m v_B^2/2$, где v_B — *абсолютная* скорость шарика, причем векторно $v_B = v_{от} + v_{пер}$. В данном случае численно $v_{от} = \dot{x}$, $v_{пер} = OB \cdot \omega = x\dot{\varphi}$ и так как $v_{от} \perp v_{пер}$, то

$$T_1 = m(\dot{x}^2 + x^2 \dot{\varphi}^2)/2.$$

Учтя еще, что $T_2 = J_O \omega^2/2 = J_O \dot{\varphi}^2/2$, где J_O — момент инерции трубки, получим окончательно

$$T = m(\dot{x}^2 + x^2 \dot{\varphi}^2)/2 + J_O \dot{\varphi}^2/2.$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = m\omega^2 x; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m\dot{x}^2\dot{\varphi} + J_0\dot{\varphi}, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0.$$

Подставляя эти величины и значения Q_1, Q_2 из равенств (б) в уравнения (а) и учитывая одновременно, что по условиям задачи $\dot{\varphi} = \omega = \text{const}$, получим:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad 2m\omega x \dot{\varphi} = M_{\text{вп}}. \quad (\text{в})$$

Интегрируя первое из уравнений (в) и определяя постоянные интегрирования по начальным условиям задачи (при $t=0$ $x=x_0, \dot{x}=0$), найдем окончательно следующий закон движения шарика вдоль трубки:

$$x = x_0 (\cos \omega t + e^{-\omega t})/2 \quad \text{или} \quad x = x_0 \operatorname{ch} \omega t. \quad (\text{г})$$

Второе из равенств (в) определяет искомый момент (нетрудно видеть, что он равен моменту кориолисовой силы инерции). Если с помощью уравнения (г) выразить $\dot{x}$ через x , то найдем следующую зависимость $M_{\text{вп}}$ от координаты x шарика:

$$M_{\text{вп}} = 2m\omega^2 x \sqrt{x^2 - x_0^2}. \quad (\text{д})$$

Заметим, что для шарика здесь решалась основная задача динамики (определение закона движения по заданным силам), причем изучалось его *относительное* движение, но так как значение T находилось для абсолютного движения системы, то вводить силы инерции не понадобилось; для трубки же, наоборот, по заданному движению определялся момент действующей силы (или пары сил).

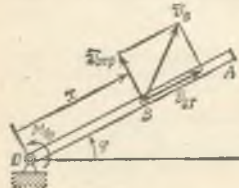


Рис. 368

Задача 178. Масса тележки I равна m_1 , а масса находящегося на ней сплошного цилиндрического катка 2 равна m_2 . Определить, с каким ускорением будет двигаться тележка вдоль горизонтальной плоскости под действием приложенной к ней силы F (рис. 369), если каток при этом катится по тележке без скольжения. Массой колес тележки пренебречь.

Решение. Система имеет две степени свободы (независимые перемещение катка относительно тележки и перемещение самой тележки). В качестве обобщенных координат выберем координату x тележки и координату s центра масс C катка относительно тележки. Тогда уравнения Лагранжа для системы будут:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_1, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}} \right) - \frac{\partial T}{\partial s} = Q_2. \quad (\text{а})$$

Кинетическая энергия тележки $T_1 = m_1 \dot{x}^2/2$, а катка $T_2 = m_2 v_C^2/2 + J_C \omega^2/2$, где v_C — абсолютная скорость центра C катка и численно $v_C = \dot{x} + \dot{s}$. Так как для сплошного цилиндра $J_C = m_2 r^2/2$, а при качении без скольжения $\omega = \dot{s}/r$, где s — относительная скорость центра C по отношению к тележке (считать здесь $\omega = v_C/r$ было бы ошибкой), то окончательно получим

$$T = T_1 + T_2 = m_1 \dot{x}^2/2 + m_2 (\dot{x} + \dot{s})^2/2 + m_2 \dot{s}^2/4. \quad (\text{б})$$



Рис. 369

Тогда

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m_1 \dot{x} + m_2 (\dot{x} + \dot{s}), \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{s}} = m_2 (\dot{x} + \dot{s}) + m_2 \frac{\dot{s}}{2}, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial s} = 0. \quad (\text{в})$$

Для определения обобщенных сил дадим сначала системе возможное перемещение, при котором координата x получает приращение $\delta x > 0$. На этом перемещении $\delta A_1 = F \delta x$. На перемещении же, при котором s получает приращение δs , очевидно, $\delta A_2 = 0$. Следовательно,

$$Q_1 = F, \quad Q_2 = 0.$$

Подставляя эти значения Q_1, Q_2 и значения производных, определяемые формулами (в), в равенства (а), найдем следующие дифференциальные уравнения движения системы:

$$(m_1 + m_2) \ddot{x} - m_2 \ddot{s} = F, \quad 3\ddot{s} - 2\ddot{x} = 0. \quad (\text{г})$$

Из последнего уравнения $\ddot{s} = 2\ddot{x}/3$, и тогда первое уравнение дает окончательно для ускорения a_1 тележки значение

$$a_1 = \ddot{x} = 3F/(3m_1 + m_2).$$

Если каток был бы на тележке закреплен неподвижно, то его ускорение, очевидно, равнялось бы $F/(m_1 + m_2)$.

Отметим еще один результат. Допустим, что трения катка о тележку нет. Тогда он по тележке будет скользить, двигаясь поступательно, и $T_2 = m_2 v_C^2/2 = m_2 (\dot{x} - \dot{s})^2/2$. В результате для системы

$$T = m_1 \dot{x}^2/2 + m_2 (\dot{x} - \dot{s})^2/2.$$

Легко видеть, что первое из уравнений (г) при этом не изменится, а второе, так как теперь $\partial T/\partial \dot{s} = m_2 (\dot{x} - \dot{s})$, примет вид $\ddot{s} - \dot{x} = 0$ и даст $\ddot{s} = \ddot{x}$. В результате из первого уравнения системы (г) находим для ускорения тележки значение $a_1 = F/m_1$.

Объясняется такой результат тем, что при отсутствии трения тележка не увлекается с собой катком и движется так, как если бы катка на ней вообще не было.

Задача 179. На барабан I , имеющий радиус R и массу m_1 , распределенную по его ободу, намотан тросик, к которому посредством пружины с коэффициентом жесткости c прикреплен груз 2 массой m_2 (рис. 370; включением такой пружины можно моделировать упругость тросика). К барабану приложена пара сил с моментом $M_{\text{вп}}$. Составить для системы уравнения Лагранжа и определить частоту колебаний, сопровождающих движение тел системы.

Решение. У системы две степени свободы. Выберем в качестве обобщенных координат угол φ поворота барабана и удлинение x пружины ($q_1 = \varphi, q_2 = x$). Тогда уравнения Лагранжа будут:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_1, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_2. \quad (\text{а})$$

Изобразив действующие силы ($\vec{F}$ и $\vec{F}'$ — силы упругости пружины; численно $F = F' = cx$), найдем сначала Q_1 и Q_2 . Сообщая системе возможное перемещение, при котором $\delta \varphi > 0$, а $x = \text{const}$, и учитывая, что на этом перемещении сумма работ сил $\vec{F}$ и $\vec{F}'$ равна нулю, получим $\delta A_1 = (M_{\text{вп}} - m_2 g R) \delta \varphi$. Для другого независимого возможного перемещения ($\delta x > 0, \varphi = \text{const}$) будет $\delta A_2 = (m_2 g - cx) \delta x$. Следовательно,

$$Q_1 = M_{\text{вп}} - m_2 g R, \quad Q_2 = m_2 g - cx. \quad (\text{б})$$

Кинетическая энергия системы $T = T_1 + T_2$, где $T_1 = J_0 \dot{\varphi}^2/2$, $T_2 = m_2 v_2^2/2$. В данном случае $J_0 = m_1 R^2$, а $v_2 = v_{0T} + v_{\text{пер}}$ и $v_2 = x - R\dot{\varphi}$. Тогда

$$T = m_1 R^2 \dot{\varphi}^2/2 + m_2 (\dot{x} - R\dot{\varphi})^2/2.$$



Рис. 370

Отсюда

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m_1 R^2 \dot{\varphi} - m_2 R (\dot{x} - R \dot{\varphi}), \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m_2 (\dot{x} - R \dot{\varphi}), \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{\partial T}{\partial x} = 0. \quad (v)$$

Подставляя величины (v) и (б) в равенства (a), получим:

$$(m_1 + m_2) R \ddot{\varphi} - m_2 \ddot{x} = M_{B\varphi} / R - m_2 g, \quad (r)$$

$$- m_2 R \ddot{\varphi} + m_2 \ddot{x} = m_2 g - c x. \quad (d)$$

Это будут искомые уравнения. Сложив их почленно, получим $m_1 R \ddot{\varphi} = M_{B\varphi} / R - c x$, а исключив из этого равенства и равенства (d) $R \ddot{\varphi}$, найдем следующее дифференциальное уравнение относительных колебаний груза, совершаемых с частотой k :

$$\ddot{x} + k^2 x = \frac{M_{B\varphi}}{m_1 R} + g, \quad \text{где} \quad k = \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}}.$$

Абсолютное движение груза происходит по закону $s = x - R \varphi$. Это движение тоже сопровождается колебаниями с частотой k . Колебаниями с такой же частотой сопровождается и вращение барабана.

Задача 180. К оси B однородного катка весом P , который может кататься без скольжения вдоль горизонтальной плоскости, прикреплен шарнирно однородный стержень BD длиной l и весом p (рис. 371). Составить дифференциальные уравнения движения системы и найти закон ее малых колебаний, если в начальном момент стержень отклоняют от равновесного положения на малый угол φ_0 и отпускают без начальной скорости.

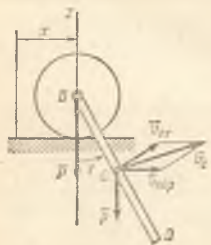


Рис. 371

Решение. Система имеет две степени свободы. Выберем в качестве обобщенных координат расстояние x центра цилиндра от его начального положения и угол φ отклонения стержня от вертикали ($q_1 = x$, $q_2 = \varphi$).

Так как действующие на систему силы потенциальные (силы тяжести), составим для нее уравнения Лагранжа в виде (129):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0, \quad (a)$$

где $L = T - \Pi$ — функция Лагранжа. Потенциальной энергией системы будет $\Pi = -p(l/2) \cos \varphi$.

Кинетическая энергия системы $T = T_{\text{цм}} + T_{\text{ст}}$. Значение $T_{\text{цм}}$ для рассматриваемого случая вычислено в задаче 136 (см. § 121). Учитывая полученный там результат и формулу (44), а также то, что для стержня $J_C = M l^2 / 12$, получаем:

$$T_{\text{цм}} = \frac{3}{4} \frac{P}{g} \dot{x}^2, \quad T_{\text{ст}} = \frac{1}{2} \frac{p}{g} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \frac{p l^2}{12 g} \dot{\varphi}^2.$$

Здесь $v_B = \dot{x}$, а $v_C = v_{\text{от}} + v_{\text{пер}}$, где численно $v_{\text{от}} = 0,5 l \dot{\varphi}$, $v_{\text{пер}} = v_B = \dot{x}$; следовательно (рис. 371),

$$v_C^2 = l^2 \dot{\varphi}^2 / 4 + \dot{x}^2 + l \dot{\varphi} \dot{x} \cos \varphi.$$

Окончательно найдем следующее выражение для функции Лагранжа:

$$L = \frac{3P}{4g} \dot{x}^2 + \frac{p}{2g} \left(\dot{x}^2 + l \dot{\varphi} \dot{x} \cos \varphi + \frac{l^2}{3} \dot{\varphi}^2 \right) + p \frac{l}{2} \cos \varphi,$$

откуда

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{3P+2p}{2g} \dot{x} + \frac{pl}{2g} \dot{\varphi} \cos \varphi, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{p}{g} \left(\frac{l}{2} \dot{x} \cos \varphi + \frac{l^2}{3} \dot{\varphi} \right), \quad \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{p}{2g} l \dot{\varphi} \sin \varphi - p \frac{l}{2} \sin \varphi.$$

Подставляя эти величины в равенства (a), получим после очевидных сокращений следующие дифференциальные уравнения движения системы:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} [(3P+2p) \dot{x} + pl \dot{\varphi} \cos \varphi] &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\dot{x} \cos \varphi + \frac{2}{3} l \dot{\varphi} \right) + \dot{x} \dot{\varphi} \sin \varphi + g \sin \varphi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (б)$$

Перейдем теперь к отысканию закона малых колебаний системы. При этом считаем угол φ и смещение x малыми величинами одного и того же порядка малости, т. е. полагаем, что $\varphi = \varepsilon f_1(t)$, $x = \varepsilon f_2(t)$, где ε — малая величина, а $f_1(t)$, $f_2(t)$ — некоторые функции от времени (ограниченные вместе с их производными), определяющие закон колебаний. Очевидно, что при этом и скорости $\dot{\varphi} = \varepsilon \dot{f}_1(t)$, $\dot{x} = \varepsilon \dot{f}_2(t)$ будут также малыми величинами порядка ε .

Чтобы составить дифференциальные уравнения малых колебаний системы, надо в уравнениях (б) сохранить только члены порядка ε , а малые более высокого порядка отбросить. Для этого в слагаемом $pl \dot{\varphi} \cos \varphi$, которое входит в первое из уравнений, надо положить $\cos \varphi = 1$, а во втором уравнении принять $\sin \varphi = \varphi$, $\cos \varphi = 1$ и член $\dot{x} \dot{\varphi} \sin \varphi$ отбросить целиком как имеющий порядок ε^2 . В результате уравнения (б) примут вид:

$$\frac{d}{dt} [(3P+2p) \dot{x} + pl \dot{\varphi}] = 0, \quad \frac{d}{dt} \left(\dot{x} + \frac{2}{3} l \dot{\varphi} \right) + g \varphi = 0.$$

Отсюда, вычисляя производные, найдем окончательно следующие дифференциальные уравнения малых колебаний рассматриваемой системы:

$$(3P+2p) \ddot{x} + pl \ddot{\varphi} = 0, \quad \ddot{x} + (2l/3) \ddot{\varphi} + g \varphi = 0. \quad (в)$$

Определив из первого уравнения $\ddot{x}$ и подставив его значение во второе уравнение, получим

$$\ddot{\varphi} + k^2 \varphi = 0, \quad (г)$$

где

$$k^2 = \frac{3(3P+2p)}{6P+4p} \cdot \frac{g}{l}. \quad (д)$$

Интегрируя уравнение (г) и определяя постоянные интегрирования по начальным условиям задачи (при $t=0$ $\varphi = \varphi_0$, $\dot{\varphi} = 0$), найдем окончательно

$$\varphi = \varphi_0 \cos kt. \quad (е)$$

Интегрируя теперь первое из уравнений (в) и учитывая, что при $t=0$ $x=0$, $\dot{x}=0$, $\varphi = \varphi_0$, $\dot{\varphi} = 0$, получим

$$(3P+2p)x + pl(\varphi - \varphi_0) = 0.$$

Замена здесь φ его значением из равенства (е) дает

$$x = \frac{p}{3P+2p} \varphi_0 (1 - \cos kt). \quad (ж)$$

Уравнения (е), (ж) и определяют закон малых колебаний системы. Частота k этих колебаний дается равенством (д).

Такой сравнительно простой результат получился в данной задаче потому, что здесь $Q_1 = 0$. Вообще же, колебания системы с двумя степенями свободы оказываются значительно более сложными и складываются из колебаний с двумя разными частотами k_1 и k_2 (см. § 150).

Задача 181. Составить уравнения движения симметричного гироскопа в форме Лагранжа. Рассмотреть случай медленной прецессии.

Решение. Гироскоп имеет три степени свободы. В качестве обобщенных координат выберем углы Эйлера φ , ψ , θ (см. рис. 172 в § 60). Тогда уравнения Лаг-

ранжа будут:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_{\varphi}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} - \frac{\partial T}{\partial \psi} = Q_{\psi}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = Q_{\theta}. \quad (a)$$

Кинетическая энергия гироскопа определяется формулой (79') из § 132. Считаем, как всегда, ось Oz направленной по оси симметрии гироскопа. Тогда $J_x = J_y$ и

$$T = \frac{1}{2} [J_x (\omega_x^2 + \omega_y^2) + J_z \omega_z^2]. \quad (b)$$

Чтобы выразить T в обобщенных координатах, воспользуемся кинематическими уравнениями Эйлера (см. § 61):

$$\omega_x = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \\ \omega_y = \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, \quad \omega_z = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta.$$

Из этих уравнений

$$\omega_x^2 + \omega_y^2 = \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2, \quad \omega_z^2 = (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2.$$

Подставляя обе эти величины в равенство (б), найдем

$$T = \frac{1}{2} [J_x (\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + J_z (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2].$$

Тогда учитывая, что $J_z (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta) = J_z \omega_z$, получим:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = J_z (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta) = J_z \omega_z, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0; \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = J_x \dot{\psi} \sin^2 \theta + J_z \omega_z \cos \theta, \quad \frac{\partial T}{\partial \psi} = 0; \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = J_x \dot{\theta}, \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = J_x \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta - J_z \omega_z \dot{\psi} \sin \theta.$$

Для подсчета обобщенных сил обратимся к рис. 172. Если координате φ сообщить приращение $\delta\varphi > 0$, то гироскоп совершит элементарный поворот вокруг оси Oz . Элементарная работа при таком повороте $\delta A_1 = M_z \delta\varphi$, где M_z — главный момент всех действующих сил относительно оси Oz . Следовательно, $Q_{\varphi} = M_z$. Аналогичным путем, учитывая, что при изменении угла ψ гироскоп совершает поворот вокруг оси Oz_1 , а при изменении угла θ — вокруг линии узлов OK , найдем, что $Q_{\psi} = M_{z_1}$, $Q_{\theta} = M_{OK}$.

Подставляя все вычисленные величины в равенства (а), получим окончательно следующие дифференциальные уравнения движения гироскопа в форме Лагранжа:

$$\left. \begin{aligned} J_x \frac{d\dot{\psi}}{dt} &= M_{z_1}, \\ \frac{d}{dt} (J_x \dot{\psi} \sin^2 \theta + J_z \omega_z \cos \theta) &= M_z, \\ J_x \ddot{\theta} - J_x \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta + J_z \omega_z \dot{\psi} \sin \theta &= M_{OK}, \end{aligned} \right\} \quad (в)$$

$$\omega_z = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta.$$

В отличие от уравнений Эйлера (см. § 132, п. 3) эти уравнения определяют движение только симметричного тела, для которого $J_x = J_y$, но зато они проще, чем совокупность динамических и кинематических уравнений Эйлера.

В частном случае, когда на гироскоп действует только сила тяжести $\vec{P}$, приложенная в какой-то точке C на оси Oz (см. рис. 172; точка C на нем не показана), и расстояние $OC = a$, а ось Oz_1 вертикальна, будет $M_z = 0$, $M_{z_1} = 0$, $M_{OK} = Pa \sin \theta$.

Случай медленной прецессии. Рассмотрим случай, когда $\dot{\varphi} = \Omega = \text{const}$, $\dot{\psi} = \omega = \text{const}$, $\dot{\theta} = \text{const}$ и $\Omega \gg \omega$. Тогда первые два из уравнений (в)

386

дают $M_z = 0$ и $M_{z_1} = 0$, а из третьего уравнения, пренебрегая малой величиной, содержащей $\dot{\psi}^2$, находим

$$M_{OK} = J_z \Omega \omega \sin \theta.$$

Результат совпадает с тем, который дает элементарная теория гироскопа [см. § 131, формула (76)].

Глава XXX *

МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ ОКОЛО ПОЛОЖЕНИЯ УСТОЙЧИВОГО РАВНОВЕСИЯ

§ 147. ПОНЯТИЕ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСИЯ

При определении условий равновесия механической системы возникает весьма важный вопрос о том, будет ли это равновесие практически реализуемым, т. е. устойчивым, или нет. Равновесие системы в данном положении называется *устойчивым*, если ее можно вывести из этого положения настолько малым возмущением (смещением, толчком), что во все последующее время отклонения системы от равновесного положения будут меньше любого сколь угодно малого заданного отклонения. В противном случае равновесие называют *неустойчивым*. Такое определение соответствует понятию об устойчивости равновесия и движения по А. М. Ляпунову. Исходя из него, можно, например, сразу установить, что равновесие маятника, изображенного на рис. 324, при $\varphi = 0$ будет устойчивым, а при $\varphi = 180^\circ$ — неустойчивым.

Один общий критерий, устанавливающий достаточное условие устойчивости равновесия консервативной (см. § 127) системы, дает следующая теорема Лагранжа — Дирихле: *если потенциальная энергия консервативной системы имеет в положении равновесия строгий минимум, то равновесие системы в этом положении является устойчивым*.

В качестве доказательства ограничимся следующими рассуждениями. Для консервативной системы имеет место закон сохранения механической энергии, т. е. $T + \Pi = \text{const}$, где T — кинетическая, а Π — потенциальная энергия системы. Поэтому, если в положении равновесия $\Pi = \Pi_{\min}$, то когда система после малого возмущения придет в движение и будет удаляться от положения равновесия, значение Π должно возрастать и, следовательно, T будет убывать. Однако при возрастании Π не может стать больше некоторой величины $\Pi_1 = \Pi_{\min} + \Delta\Pi$, которая получится, когда T обратится в нуль. Учтя это, можно начальные возмущения, а с ними и значение $\Delta\Pi$ сделать столь малыми, что когда у системы $\Pi = \Pi_{\min} + \Delta\Pi$ ее отклонение от равновесного положения будет меньше любого сколь угодно малого заданного. Отсюда и следует, что равновесное положение является устойчивым.

Даваемое теоремой условие устойчивости равновесия является лишь достаточным и не позволяет судить о том, что будет, если в положении равновесия потенциальная энергия не имеет минимума.

Рассмотрим отдельно случай равновесия консервативной системы, имеющей одну степень свободы. Пусть положение системы

13*

387

определяется обобщенной координатой q , выбранной так, что при равновесии $q=0$. Согласно формулам (118') из § 144 в положении равновесия $(\partial\Pi/\partial q)_0=0$. Кроме того, если $\Pi(q)$ имеет при $q=0$ минимум, то $(\partial^2\Pi/\partial q^2)_0>0$. Таким образом, при выполнении следующих условий (достаточных, но не необходимых):

$$\left(\frac{\partial\Pi}{\partial q}\right)_0=0, \quad \left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial q^2}\right)_0>0 \quad (130)$$

равновесие системы в данном положении ($q=0$) будет устойчивым.

При решении задач, считая q малым, достаточно определять $\Pi(q)$ с точностью до q^2 , так как члены с q^3 и выше в условия (130) не войдут (при $q=0$ обратятся в нули).

Задача 182. Определить, при каких условиях стержень AD (маятник), имеющий ось вращения в точке A , находится в устойчивом равновесии, когда он вертикален, если масса стержня равна m , а длина l (рис. 372, а). У прикрепленных к стержню в точке B ($AB=h$) горизонтальных пружин 1 и 2 коэффициенты жесткости равны c_1 и c_2 , а начальные поджатия — λ_{10} и λ_{20} соответственно.

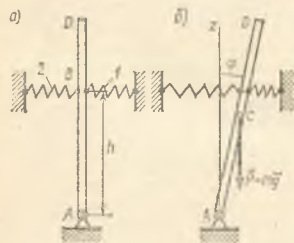


Рис. 372

Решение. Выберем в качестве обобщенной координаты угол отклонения стержня от вертикали, считая ϕ малым (рис. 372, б), и найдем значение $\Pi(\phi)$ с точностью до ϕ^2 . Согласно формулам (64) и (64') из § 127 будет:

$$\Pi_1 = P_{2C} = (mgl/2) \cos \phi, \quad \Pi_2 = -0,5[c_1(\lambda_{10} + h\phi)^2 + c_2(\lambda_{20} - h\phi)^2].$$

При определении Π_2 учтено, что в виду малости ϕ перемещение точки B можно считать горизонтальным и равным $h\phi$ и что при этом сжатие пружины 1 увеличится, а пружины 2 уменьшится на величину $h\phi$. Далее, используя разложение $\cos \phi$ в ряд и принимая $\cos \phi = 1 - \phi^2/2$, а также раскрывая скобки в выражении Π_2 , получим

$$\Pi = \Pi_0 - (mgl/4)\phi^2 + (c_1\lambda_{10} - c_2\lambda_{20})h\phi - 0,5(c_1 + c_2)h^2\phi^2,$$

где в $\Pi_0 = \Pi(0)$ включены все постоянные величины (без выяснения, чему равно Π_0). Отсюда находим

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\phi} = -(mgl/2)\phi + (c_1\lambda_{10} - c_2\lambda_{20})h + (c_1 + c_2)h^2\phi.$$

Чтобы при $\phi=0$ стержень был в равновесии, эта производная при $\phi=0$ должна равняться нулю. Следовательно, должно быть

$$c_1\lambda_{10} = c_2\lambda_{20}. \quad (a)$$

что, конечно, можно было предвидеть заранее. Далее получим

$$\frac{\partial^2\Pi}{\partial\phi^2} = -mgl/2 + (c_1 + c_2)h^2. \quad (б)$$

Тогда по условиям (130) равновесие будет устойчивым, если

$$(c_1 + c_2) > \frac{mgl}{2h^2}. \quad (в)$$

Совокупность условий (а) и (в) дает решение задачи.

Другой пример исследования устойчивости равновесия см. в задаче 184.

§ 148. МАЛЫЕ СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Допустим, что консервативная механическая система, состоящая из n материальных точек и имеющая одну степень свободы, находится в некотором положении в устойчивом равновесии. Исследуем, какое движение будет совершать эта система, если ее вывести из равновесия малым возмущением. Условимся опять определять положение системы обобщенной координатой q , выбранной так, что при равновесии $q=0$. Так как равновесие устойчиво, а возмущения малы, то координата q и обобщенная скорость $\dot{q}$ будут во все время движения тоже оставаться величинами малыми. Для составления дифференциального уравнения движения системы воспользуемся уравнением Лагранжа, которое, если выразить обобщенную силу Q через потенциальную энергию системы Π [см. § 143, формулы (115)], примет вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial \Pi}{\partial q} = 0. \quad (131)$$

Вообще это уравнение будет нелинейным, но его можно линеаризовать и тем самым существенно упростить, сохранив в уравнении малые величины q и $\dot{q}$ только в первой степени (первого порядка малости; см. задачу 180 в § 146). Для этого значения $T(q, \dot{q})$ и $\Pi(q)$ достаточно определить тоже приближенно. При этом, так как в уравнение (131) входят первые производные от Π и T по q и $\dot{q}$, то, чтобы сохранить в нем q и $\dot{q}$ в первой степени, надо T и Π определить с точностью до малых величин второго порядка малости, т. е. с точностью до q^2 или $\dot{q}^2$.

Найдем сначала приближенное выражение $T(q, \dot{q})$. Для любой точки системы при стационарных связях

$$\vec{r}_k = \vec{r}_k(q) \quad \text{и} \quad \vec{v}_k = \frac{d\vec{r}_k}{dt} = \frac{d\vec{r}_k}{dq} \dot{q}.$$

Тогда, вынося общий множитель $\dot{q}^2$ за скобки, получим

$$T = \frac{1}{2} \sum m_k \dot{v}_k^2 = \frac{1}{2} \left[\sum m_k \left(\frac{d\vec{r}_k}{dq} \right)^2 \right] \dot{q}^2 \quad \text{или} \quad T = \frac{1}{2} F(q) \dot{q}^2,$$

так как производные $d\vec{r}_k/dq$, как и сами $\vec{r}_k$, являются функциями только q . Разложив $F(q)$ в ряд Тейлора, получим

$$F(q) = F(0) + F'(0)q + \dots$$

Так как T надо определить с точностью до q^2 , то в этом разложении следует сохранить только первое постоянное слагаемое $F(0)$. Тогда для T получим выражение

$$T = \frac{1}{2} a \dot{q}^2, \quad \text{где} \quad a = F(0). \quad (132)$$

Поскольку T величина существенно положительная, то постоянный коэффициент $a > 0$; его называют *инерционным коэффициентом*. Размерность a зависит от размерности $\ddot{q}$; в частности, a может иметь размерность массы или момента инерции.

Далее, разлагая $\Pi(q)$ в ряд Тейлора и учитывая, что в положении равновесия $(\partial\Pi/\partial q)_0 = 0$, найдем (с точностью до q^2)

$$\Pi(q) = \Pi(0) + \frac{1}{2}cq^2, \quad \text{где } c = \left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial q^2}\right)_0. \quad (132)$$

При этом по условиям (130) $c > 0$. В частном случае, если q — удлинение пружины, равенство (133) выражает потенциальную энергию поля сил упругости; поэтому коэффициент c называют *квазиупругим коэффициентом* (или *обобщенным коэффициентом жесткости*). Из равенств (132) и (133) находим:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = a\dot{q}, \quad \frac{\partial T}{\partial q} = 0, \quad \frac{d\Pi}{dt} = c\dot{q}.$$

Подставляя эти величины в уравнение (131), получим следующее дифференциальное уравнение малых свободных колебаний системы с одной степенью свободы:

$$\ddot{q} + k^2q = 0, \quad \text{где } k^2 = c/a. \quad (134)$$

Это уравнение совпадает с известным уравнением свободных прямолинейных колебаний материальной точки (см. § 94) и его общее решение имеет вид

$$q = A \sin(kt + \alpha), \quad (135)$$

где A и α — постоянные интегрирования, определяемые по начальным условиям. Частота и период этих колебаний согласно (134) определяются равенствами:

$$k = \sqrt{c/a}, \quad \tau = 2\pi/k = 2\pi\sqrt{a/c}. \quad (136)$$

Установим, как при этом движутся точки системы. Разлагая радиус-вектор $\vec{r}_k(q)$ одной из точек системы в ряд Тейлора, получим $\vec{r}_k(q) = \vec{r}_k(0) + \vec{r}'_k(0)q + \dots$. Заменяя здесь q его значением (135), найдем, что с точностью до величин первого порядка малости

$$|\vec{r}_k(q) - \vec{r}_k(0)| = |\vec{r}'_k(0)|A \sin(kt + \alpha) \quad (k=1, 2, \dots, n). \quad (137)$$

Таким образом, точки системы тоже совершают малые колебания с частотой k и амплитудами $|\vec{r}'_k(0)|A$. Из найденных результатов вытекают следующие свойства малых колебаний системы:

1) свободные (собственные) колебания системы являются колебаниями гармоническими; частота и период этих колебаний не зависят от начальных условий и определяются равенствами (136);

2) так как постоянные A и α зависят от начальных условий, то амплитуды колебаний точек системы, равные $A|\vec{r}'_k(0)|$, и начальная фаза α тоже зависят от начальных условий;

3) отношения амплитуд колебаний разных точек системы от начальных условий не зависят, так как определяются только значениями $\vec{r}'_k(0)$, т. е. конфигурацией системы;

4) все точки системы в каждый момент времени, как видно из равенств (137), находятся в одной и той же фазе $(kt + \alpha)$ и, следовательно, одновременно проходят через положения равновесия и одновременно достигают максимальных отклонений от этого положения.

При решении задач наибольший интерес представляет определение частоты k и периода τ собственных колебаний системы, что существенно, например, для установления условий наличия или отсутствия резонанса (см. § 149). При этом достаточно определить из равенств (132) и (133) коэффициенты a и c и воспользоваться формулами (136).

Задача 183. Определить частоту и период малых колебаний механической системы, рассмотренной в задаче 182 (см. § 147).

Решение. В задаче 182 кинетическая энергия системы (стержня AD , см. рис. 372) будет $T = 0,5J_A\dot{\varphi}^2$. Следовательно, в этой задаче $F(q) = F(\varphi) = J_A = \text{const}$ и

$$a = J_A = ml^2/3. \quad (a)$$

Далее, согласно формуле (133) и соотношениям (б) и (в), полученным в задаче 182,

$$c = \left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial \varphi^2}\right)_0 = (c_1 + c_2)h^2 - mgl/2 \quad (c > 0). \quad (б)$$

Следовательно, по формулам (136)

$$k = \sqrt{\frac{(c_1 + c_2)h^2 - 3mgl/2}{ml^2}}, \quad \tau = \frac{2\pi}{k}.$$

Задача 184. Механическая система состоит из весовых стержней 1, 2 и диска 3, имеющих оси вращения в точках O_1, O_2, O_3 соответственно и связанных друг с другом невесомыми стержнями AB и DE (в точках A, B, D, E шарниры). В положении,

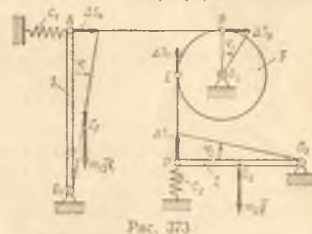


Рис. 373

показанном на рис. 373, система находится в равновесии; при этом стержень 1 вертикален (прикрепленная к его концу A горизонтальная пружина имеет удлинение λ_{CT}), а стержень 2 — горизонтален (прикрепленная к его концу D вертикальная пружина не деформирована). Длины стержней равны l_1 и l_2 , массы — m_1 и m_2 , масса диска — m_3 , коэффициенты жесткости пружин — c_1 и c_2 .

Определить: 1) значение λ_{CT} ;

2) условие устойчивости равновесия системы; 3) частоту и период ее собственных колебаний.

Решение. Выберем в качестве обобщенной координаты системы малый угол φ_1 отклонения стержня 1 от равновесного положения. При таком отклонении, очевидно, $\Delta\lambda_1 = \Delta s_F = \Delta s_D$. Следовательно, $l_2\varphi_2 = l_1\varphi_1$ и $l_3\varphi_3 = l_1\varphi_1$, где r_3 — радиус диска. Кроме того, удлинение горизонтальной пружины $\lambda_1 = \lambda_{CT} + \Delta s_A = \lambda_{CT} + l_1\varphi_1$, а удлинение вертикальной пружины $\lambda_2 = \Delta s_D = l_2\varphi_2 = l_1\varphi_1$. Тогда для потенциальной энергии системы, принимая во внимание формулы (64) и (64')

из § 127, получим значение

$$\Pi = m_1 g \frac{l_1}{2} \cos \varphi_1 + m_2 g \frac{l_2}{2} \sin \varphi_2 + \frac{c_1}{2} (\lambda_{CT} + l_1 \varphi_1)^2 + \frac{c_2}{2} l_2^2 \varphi_2^2$$

или, полагая $\cos \varphi_1 = 1 - \frac{\varphi_1^2}{2}$, $\sin \varphi_2 = \varphi_2$ и учитывая, что $l_2 \varphi_2 = l_1 \varphi_1$,

$$\Pi = \Pi_0 + (m_2 g + 2c_1 \lambda_{CT}) \frac{l_1}{2} \varphi_1 + [2(c_1 + c_2) l_1 - m_1 g] \frac{l_1}{2} \varphi_1^2$$

(все постоянные величины включены в Π_0). Отсюда находим

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1} = (m_2 g + 2c_1 \lambda_{CT}) \frac{l_1}{2} + [2(c_1 + c_2) l_1 - m_1 g] \frac{l_1}{2} \varphi_1.$$

В положении равновесия, т. е. при $\varphi_1 = 0$, эта производная должна равняться нулю. Следовательно, должно быть $m_2 g + 2c_1 \lambda_{CT} = 0$ или

$$\lambda_{CT} = -m_2 g / (2c_1). \quad (a)$$

Таким образом, в положении равновесия пружина сжата на эту величину. Далее получим

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi_1^2} = [2(c_1 + c_2) l_1 - m_1 g] \frac{l_1}{2}.$$

Тогда, согласно условиям (130), заключаем, что равновесие будет устойчивым, если

$$2(c_1 + c_2) l_1 > m_1 g. \quad (b)$$

Кроме того, из равенства (133) следует, что квазипружий коэффициент

$$c = [2(c_1 + c_2) l_1 - m_1 g] l_1 / 2. \quad (b')$$

Для кинетической энергии системы получим значение

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{m_1}{3} l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{3} l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + \frac{m_3}{2} l_3^2 \dot{\varphi}_3^2 \right),$$

где $m_1 l_1^2 / 3$, $m_2 l_2^2 / 3$, $m_3 l_3^2 / 2$ — моменты инерции тел 1, 2, 3 относительно их осей вращения; φ_1 , φ_2 , φ_3 — угловые скорости этих тел. Но из найденных выше зависимостей между φ_2 , φ_1 и φ_3 , φ_1 следует, что $l_2 \varphi_2 = l_1 \varphi_1$ и $l_3 \varphi_3 = l_1 \varphi_1$. Тогда, учитывая равенство (132), получим:

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{m_1}{3} + \frac{m_2}{3} + \frac{m_3}{2} \right) l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 \quad \text{и} \quad a = (2m_1 + 2m_2 + 3m_3) \frac{l_1^2}{6}. \quad (c)$$

При найденных значениях c и a формулы (136) дают:

$$k = \sqrt{\frac{6(c_1 + c_2) l_1 - 3m_1 g}{(2m_1 + 2m_2 + 3m_3) l_1}}, \quad \tau = \frac{2\pi}{k}. \quad (d)$$

§ 149. МАЛЫЕ ЗАТУХАЮЩИЕ И ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Как и в § 148, будем считать, что рассматриваемая механическая система при $q=0$ находится в положении устойчивого равновесия. Исследуем ее малые колебания около положения равновесия еще в двух случаях.

1. **З а т у х а ю щ и е к о л е б а н и я.** Пусть на точки системы, когда она выведена из равновесного положения, кроме потенциальных сил начинают действовать еще силы вязкого сопротивления

(диссипативные силы) $F_k = -\mu_k \dot{q}_k = -\mu_k (d\bar{r}_k/dq) \dot{q}$. Тогда обобщенную диссипативную силу Q_k можно найти по формуле (109) из § 143 и преобразовать окончательно [подобно тому, как это сделано в § 148 при получении равенства (132)] к виду

$$Q_k = -\mu \dot{q} \quad (\mu = \text{const}). \quad (138)$$

Теперь, составляя уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial \Pi}{\partial q} = Q_k \quad (139)$$

и заменяя в нем T , Π и Q_k их значениями (132), (133), (138), получим окончательно следующее дифференциальное уравнение затухающих колебаний системы:

$$\ddot{q} + 2b\dot{q} + k^2 q = 0, \quad (140)$$

где обозначено

$$\mu/a = 2b, \quad c/a = k^2. \quad (140')$$

Уравнение (140) совпадает с уравнением (76) из § 95. Следовательно, для малых колебаний системы с одной степенью свободы имеют место все результаты, полученные в § 95 для точки. Таким образом:

а) при $k > b$ система совершает затухающие колебания с частотой

$$k_1 = \sqrt{k^2 - b^2} \quad \text{и периодом } \tau = 2\pi/k_1;$$

б) при $k \leq b$ система совершает неколебательное движение.

Закон движения системы дают во всех случаях уравнения, полученные в § 95, если в них заменить x на q . Общие свойства этих движений аналогичны отмеченным в § 148.

2. **В ы н у ж д е н н ы е к о л е б а н и я.** Пусть на точки механической системы, рассмотренной в п. 1, действуют еще возмущающие силы, изменяющиеся со временем по закону $F_k = \bar{F}_{k0} \sin pt$. Тогда, по аналогии с тем путем, который указан в п. 1 для определения Q_k , можно найти обобщенную возмущающую силу

$$Q_k = Q_0 \sin pt. \quad (141)$$

В итоге в правой части уравнения Лагранжа (139) добавится еще сила Q_k и из него окончательно получится следующее дифференциальное уравнение вынужденных колебаний системы:

$$\ddot{q} + 2b\dot{q} + k^2 q = P_0 \sin pt, \quad \text{где } P_0 = Q_0/a; \quad (142)$$

остальные обозначения указаны в равенствах (140').

Уравнение (142) совпадает с уравнением (91) из § 96. Следовательно, все результаты, полученные в § 96 для точки, имеют место

* На условия устойчивости равновесия (130) эти силы не влияют, так как при равновесии $\dot{q}_k = 0$, а следовательно, и $\bar{F}_k = 0$.

и для малых колебаний системы с одной степенью свободы, а соответствующие уравнения будут определять закон движения системы, если в них заменить x на q . Это относится и к результатам, полученным в § 96 для случая отсутствия сопротивления ($b=0$), и ко всем рассмотренным в § 96 свойствам вынужденных колебаний. В частности, резонанс при малом сопротивлении будет тоже иметь место, когда $p \approx k$.

§ 150. МАЛЫЕ СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Колебания системы с несколькими степенями свободы, имеющие важные практические приложения, отличаются от колебаний системы с одной степенью свободы рядом существенных особенностей. Чтобы дать представление об этих особенностях, рассмотрим случай свободных колебаний системы с двумя степенями свободы.

Пусть положение системы определяется обобщенными координатами q_1, q_2 и при $q_1=q_2=0$ система находится в устойчивом равновесии. Тогда кинетическую и потенциальную энергии системы с точностью до квадратов малых величин можно найти так же, как были найдены равенства (132), (133), и представить в виде:

$$T = \frac{1}{2} (c_{11}\dot{q}_1^2 + 2c_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + c_{22}\dot{q}_2^2); \quad (143)$$

$$П = П_0 + \frac{1}{2} (c_{11}q_1^2 + 2c_{12}q_1q_2 + c_{22}q_2^2), \quad (144)$$

где инерционные коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{22} и квазиупругие коэффициенты c_{11}, c_{12}, c_{22} — величины постоянные. Если воспользоваться двумя уравнениями Лагранжа вида (131) и подставить в них эти значения T и $П$, то получим следующие дифференциальные уравнения малых колебаний системы с двумя степенями свободы

$$\left. \begin{aligned} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 &= 0, \\ a_{12}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + c_{12}q_1 + c_{22}q_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (145)$$

Будем искать решение уравнений (145) в виде:

$$q_1 = A \sin (kt + \alpha), \quad q_2 = B \sin (kt + \alpha), \quad (146)$$

где A, B, k, α — постоянные величины. Подставив эти значения q_1, q_2 в уравнения (145) и сократив на $\sin (kt + \alpha)$, получим

$$\left. \begin{aligned} (c_{11} - a_{11}k^2)A + (c_{12} - a_{12}k^2)B &= 0, \\ (c_{12} - a_{12}k^2)A + (c_{22} - a_{22}k^2)B &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (147)$$

Чтобы уравнения (147) давали для A и B решения, отличные от нуля, определитель этой системы должен быть равен нулю или, иначе, коэффициенты при A и B в уравнениях должны быть пропорциональны, т. е.

$$\frac{c_{11} - a_{11}k^2}{c_{12} - a_{12}k^2} = \frac{c_{12} - a_{12}k^2}{c_{22} - a_{22}k^2} = \frac{B}{A} = n. \quad (148)$$

Отсюда для определения k^2 получаем следующее уравнение, называемое *уравнением частот*:

$$(c_{11} - a_{11}k^2)(c_{22} - a_{22}k^2) - (c_{12} - a_{12}k^2)^2 = 0. \quad (149)$$

Корни k_1^2 и k_2^2 этого уравнения вещественны и положительны; это доказывается математически, но может быть обосновано и тем, что иначе $k_1 = \sqrt{k_1^2}$ и $k_2 = \sqrt{k_2^2}$ не будут вещественны и уравнения (145) не будут иметь решений вида (146), чего для системы, находящейся в устойчивом равновесии, быть не может (после возмущений она должна двигаться вблизи положения $q_1=q_2=0$).

Определив из (149) k_1 и k_2 , найдем две совокупности частных решений вида (146). Если учесть, что согласно (148) $B=nA$, эти решения будут:

$$q_1^{(1)} = A_1 \sin (k_1 t + \alpha_1), \quad q_2^{(1)} = n_1 A_1 \sin (k_1 t + \alpha_1); \quad (150)$$

$$q_1^{(2)} = A_2 \sin (k_2 t + \alpha_2), \quad q_2^{(2)} = n_2 A_2 \sin (k_2 t + \alpha_2), \quad (151)$$

где n_1 и n_2 — значения, которые n получает из (148) при $k=k_1$, и $k=k_2$ соответственно.

Колебания, определяемые уравнениями (150) и (151), называются *главными колебаниями*, а их частоты k_1 и k_2 — *собственными частотами системы*. При этом, колебание с частотой k_1 (всегда меньшей) называют *первым главным колебанием*, а с частотой k_2 — *вторым главным колебанием*. Числа n_1 и n_2 , определяющие отношения амплитуд (или самих координат, т. е. q_2/q_1) в каждом из этих колебаний, называют *коэффициентами формы*.

Так как уравнения (145) являются линейными, то суммы частных решений (150) и (151) тоже будут решениями этих уравнений:

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= A_1 \sin (k_1 t + \alpha_1) + A_2 \sin (k_2 t + \alpha_2), \\ q_2 &= n_1 A_1 \sin (k_1 t + \alpha_1) + n_2 A_2 \sin (k_2 t + \alpha_2). \end{aligned} \right\} \quad (152)$$

Равенства (152), содержащие четыре произвольных постоянных $A_1, A_2, \alpha_1, \alpha_2$, определяемых по начальным условиям, дают *общее решение уравнений (145)* и определяют *закон малых колебаний системы*. Эти колебания складываются из двух главных колебаний с частотами k_1 и k_2 и не являются гармоническими. В частных случаях, при соответствующих начальных условиях, система может совершать одно из главных колебаний (например, первое, если $A_2=0$) и колебание будет гармоническим.

Собственные частоты k_1, k_2 и коэффициенты формы n_1, n_2 не зависят от начальных условий и являются основными характеристиками малых колебаний системы; решение конкретных задач обычно сводится к определению этих характеристик.

Сопоставляя результаты этого и предыдущего параграфов, можно получить представление о том, к чему сводится исследование затухающих и вынужденных колебаний системы с двумя степенями свободы. Мы этого рассматривать не будем, отметим лишь, что при вынужденных колебаниях резонанс у такой системы может возникать дважды: при $p \approx k_1$ и при $p \approx k_2$ (p — частота возмущающей силы). Наконец, отметим, что колебания системы с s степенями свободы будут складываться из s колебаний с частотами $k_1, k_2, \dots, k_s$, которые должны определяться из уравнения степени s относительно k^2 . Это связано со значительными математическими трудностями, преодолеть которые можно с помощью электронных вычислительных (или аналоговых) машин.

Задача 185. Определить собственные частоты и коэффициенты формы малых колебаний двойного физического маятника, образованного стержнями 1 и 2 одинаковой массы m и длины l (рис. 374).

Решение. Выберем в качестве обобщенных координат малые углы φ_1 и φ_2 . Тогда $T=0,5(J_1\dot{\varphi}_1^2 + m\dot{c}\dot{\varphi}^2 + J_2\dot{\varphi}_2^2)$, где $J_1=ml^2/3$, $J_2=ml^2/12$ и, при требуемой точности подсчетов, $c_C=c_A+c_{CA}=l\varphi_1+l\varphi_2/2$. В итоге

$$T=0,5ml^2(4\dot{\varphi}_1^2/3 + \dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_2^2/3). \quad (a)$$

Далее $П=-0,5mgf \cos \varphi_1 - mgl(\cos \varphi_1 + 0,5 \cos \varphi_2)$ или, полагая $\cos \varphi = 1 - \varphi^2/2$,

$$П = П_0 + 0,5mgf(3\varphi_1^2/2 + \varphi_2^2/2). \quad (б)$$

Из равенств (а) и (б) видно, каковы здесь значения a_{11} , a_{12} , a_{22} , c_{11} и c_{22} ($c_{12}=0$). При этих значениях коэффициентов уравнение частот (149) примет вид

$$k^4 - 6 \frac{g}{l} k^2 + \frac{27}{7} \left(\frac{g}{l} \right)^2 = 0.$$

Его корнями будут: $k_{1,2}^2 = 3(1 \pm 2\sqrt{7})g/l$, откуда

$$k_1 = 0,86 \sqrt{g/l} \quad k_2 = 2,30 \sqrt{g/l}. \quad (в)$$

Подставляя теперь в любое из соотношений, стоящих в левой части равенства (148), сначала k_1 , а затем k_2 , получим

$$n_1 = 1,43, \quad n_2 = -2,10. \quad (г)$$

Таким образом, при первом главном колебании оба стержня будут в каждый момент времени отклонены от вертикали в одну и ту же сторону (рис. 374, а) и $\varphi_2/\varphi_1 = 1,43$, а при втором главном колебании — в разные стороны (рис. 374, б) и $|\varphi_2/\varphi_1| = 2,10$.

Глава XXXI

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ УДАРА

§ 151. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ ТЕОРИИ УДАРА

При движении тела под действием обычных сил, рассматривавшихся до сих пор, скорости точек тела изменяются непрерывно, т. е. каждому бесконечно малому промежутку времени соответствует бесконечно малое приращение скорости. Действительно, если импульс любой силы $\vec{F}_k$ за промежуток времени τ представить в виде $\vec{F}_k^{\text{cp}}\tau$, где $\vec{F}_k^{\text{cp}}$ — среднее значение этой силы за время τ , то теорема об изменении количества движения точки, на которую действуют силы $\vec{F}_k$, дает

$$m(\vec{v}_1 - \vec{v}_0) = \Sigma \vec{F}_k^{\text{cp}}\tau.$$

Отсюда видно, что когда время τ бесконечно мало (стремится к нулю), то при обычных силах и приращение скорости $\Delta\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_0$ будет тоже величиной бесконечно малой (стремящейся к нулю).

Однако если в числе действующих сил будут очень большие силы (порядка $1/\tau$), то приращение скорости за малый промежуток времени τ окажется величиной конечной.

Явление, при котором скорости точек тела за очень малый (близкий к нулю) промежуток времени τ изменяются на конечную величину, называется ударом. Силы, при действии которых происходит удар, будем называть ударными силами $\vec{F}_{\text{уд}}$. Промежуток времени τ , в течение которого происходит удар, назовем временем удара.

Так как ударные силы очень велики и за время удара изменяются в значительных пределах, то в теории удара в качестве меры взаимодействия тел рассматривают не сами ударные силы, а их импуль-

сы. Ударный импульс

$$\vec{S}_{\text{уд}} = \int_0^{\tau} \vec{F}_{\text{уд}} dt = \vec{F}_{\text{уд}}^{\text{cp}}\tau$$

является величиной конечной. Импульсы неударных сил за время τ будут величинами очень малыми и ими практически можно пренебречь.

Будем в дальнейшем обозначать скорость точки в начале удара $\vec{v}$, а скорость в конце удара $\vec{u}$. Тогда теорема об изменении количества движения точки при ударе примет вид *

$$m(\vec{u} - \vec{v}) = \Sigma \vec{S}_k, \quad (153)$$

т. е. изменение количества движения материальной точки за время удара равно сумме действующих на точку ударных импульсов. Уравнение (153) является основным уравнением теории удара и играет в теории удара такую же роль, как основной закон динамики $m\vec{a} = \vec{F}$ при изучении движений под действием неударных сил.

В заключение отметим, что перемещение точки за время удара будет равно $v^{\text{cp}}\tau$, т. е. величине очень малой, которой практически можно пренебречь.

Итак, из всех полученных результатов вытекает следующее: 1) действием неударных сил (таких, например, как сила тяжести) за время удара можно пренебречь;

2) перемещениями точек тела за время удара можно пренебречь и считать тело во время удара неподвижным;

3) изменения скоростей точек тела за время удара определяются основным уравнением теории удара (153).

§ 152. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ УДАРА

Рассмотрим, какой вид принимают общие теоремы динамики для системы материальных точек при ударе.

1. Теорема об изменении количества движения системы при ударе. Уравнение (21), полученное в § 111, сохраняет свой вид и для случая удара. Но так как импульсами обычных сил при ударе пренебрегают, то в правой части останутся только ударные импульсы. Следовательно, при ударе

$$\vec{Q}_1 - \vec{Q}_0 = \Sigma \vec{S}_k^{\text{уд}}, \quad (154)$$

т. е. изменение количества движения системы за время удара равно сумме всех внешних ударных импульсов, действующих на систему.

В проекциях на любую координатную ось x уравнение (154) дает

$$Q_{1x} - Q_{0x} = \Sigma S_{kx}^{\text{уд}}. \quad (154')$$

* В дальнейшем будем ударный импульс обозначать просто символом $\vec{S}$, так как импульсы неударных сил в теории удара не рассматриваются.

Если геометрическая сумма всех внешних ударных импульсов равна нулю, то, как видно из уравнения (154), количество движения системы за время удара не изменится. Следовательно, внутренние ударные импульсы не могут изменить количества движения всей системы.

2. Теорема об изменении главного момента количеств движения системы (теорема моментов) при ударе. Теорема моментов принимает для случая удара вид, несколько отличный от полученного в § 116; объясняется это тем, что точки системы за время удара не перемещаются. Рассмотрим систему, состоящую из n материальных точек. Обозначим равнодействующую внешних ударных импульсов, действующих на точку с массой m_k , через $\bar{S}_k$, а равнодействующую действующих на ту же точку внутренних ударных импульсов — через $\bar{S}_k^i$. Тогда по уравнению (153) будет $m_k(u_k - v_k) = \bar{S}_k^i + \bar{S}_k$ или

$$m_k \bar{u}_k = m_k \bar{v}_k + \bar{S}_k^i + \bar{S}_k.$$

Входящие в это равенство векторы приложены к точке, которая, как было указано, за время удара остается неподвижной. Тогда, беря моменты этих векторов относительно какого-нибудь центра O , по теореме Вариньона, справедливой для любых векторных величин, найдем, что

$$\bar{m}_O(m_k \bar{u}_k) = \bar{m}_O(m_k \bar{v}_k) + \bar{m}_O(\bar{S}_k^i) + \bar{m}_O(\bar{S}_k).$$

Составляя такие равенства для всех точек системы и складывая их почленно, получим

$$\Sigma \bar{m}_O(m_k \bar{u}_k) - \Sigma \bar{m}_O(m_k \bar{v}_k) = \Sigma \bar{m}_O(\bar{S}_k^i) + \Sigma \bar{m}_O(\bar{S}_k).$$

Суммы, стоящие слева, представляют собой главные моменты количеств движения системы относительно центра O в конце и в начале удара, которые обозначим $\bar{K}_1$ и $\bar{K}_0$. Стоящая справа сумма моментов внутренних ударных импульсов по свойству внутренних сил равна нулю. Окончательно находим

$$\bar{K}_1 - \bar{K}_0 = \Sigma \bar{m}_O(\bar{S}_k^i). \quad (155)$$

т. е. изменение за время удара главного момента количеств движения системы относительно какого-нибудь центра равно сумме моментов относительно того же центра всех действующих на систему внешних ударных импульсов.

В проекциях на любую ось x равенство (155) дает

$$K_{1x} - K_{0x} = \Sigma m_x(\bar{S}_k^i). \quad (155')$$

Из полученных уравнений следует, что если сумма моментов внешних ударных импульсов относительно какого-нибудь центра (или оси) равна нулю, то главный момент количеств движения системы относительно этого центра (или оси) за время удара не

изменяется. Следовательно, внутренние ударные импульсы не могут изменить главный момент количеств движения системы.

Вопрос о том, как изменяется за время удара кинетическая энергия соударяющихся тел, будет рассмотрен в § 156.

§ 153. КОЭФФИЦИЕНТ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПРИ УДАРЕ

Значение ударного импульса, появляющегося при соударении двух тел, зависит не только от их масс и скоростей до удара, но и от упругих свойств соударяющихся тел; эти свойства при ударе характеризуют величиной, называемой коэффициентом восстановления.

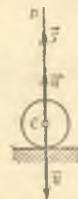


Рис. 375



Рис. 376

Рассмотрим шар, падающий вертикально на неподвижную горизонтальную жесткую плиту (рис. 375). Для прямого удара, который при этом произойдет, можно различать две стадии. В течение первой стадии скорости частиц шара, равные в момент начала удара v (движение шара считаем поступательным), убывают до нуля. Шар при этом деформируется и вся его начальная кинетическая энергия $mv^2/2$ переходит во внутреннюю потенциальную энергию деформированного тела. Во второй стадии удара шар под действием внутренних сил (сил упругости) начинает восстанавливать свою форму; при этом его внутренняя потенциальная энергия переходит в кинетическую энергию движения частиц шара. В конце удара скорости частиц будут равны u , а кинетическая энергия шара $mu^2/2$. Однако полностью механическая энергия шара при этом не восстанавливается, так как часть ее уходит на сообщение шару остаточных деформаций и его нагревание. Поэтому скорость u будет меньше v .

Величина k , равная при прямом ударе тела о неподвижную преграду отношению модуля скорости тела в конце удара к модулю скорости в начале удара, называется коэффициентом восстановления при ударе:

$$k = u/v. \quad (156)$$

Значение коэффициента восстановления для разных тел определяется опытным путем. По данным опыта при изменении скорости v не в очень больших пределах величину k можно считать зависящей только от материала соударяющихся тел.

В качестве предельных случаев рассматривают случай *абсолютно упругого удара* ($k=1$), при котором кинетическая энергия тела после удара полностью восстанавливается, и случай *абсолютно неупругого удара* ($k=0$), когда удар заканчивается в первой стадии и вся кинетическая энергия тела теряется на его деформацию и нагревание.

Экспериментально величину k можно найти, если рассмотреть шар, свободно падающий на плиту с предварительно измеренной высоты H , и определить с помощью стоящей рядом вертикальной рейки (рис. 376) высоту его подъема h после удара. Тогда по формуле Галилея

$$v = \sqrt{2gH}, \quad u = \sqrt{2gh} \quad \text{и} \\ k = u/v = \sqrt{h/H}.$$

Значение коэффициента восстановления для тел из различных материалов дается в соответствующих справочниках. В частности, можно считать при скоростях соударения порядка 3 м/с для удара дерева о дерево $k \approx 0,5$, стали о сталь $k \approx 0,56$, стекла о стекло $k \approx 0,94$.

§ 154. УДАР ТЕЛА О НЕПОДВИЖНУЮ ПРЕГРАДУ

Рассмотрим тело (шар) массой M , ударяющееся о неподвижную плиту. Действующей на тело ударной силой будет при этом реакция плиты; импульс этой силы за время удара назовем S . Пусть нормаль к поверхности тела в точке его касания с плитой проходит через центр масс тела (для шара это будет всегда). Такой удар тела называется *центральный*. Если скорость $\vec{v}$ центра масс тела в начале удара направлена по нормали n к плите, то удар будет *прямым*, в противном случае — *косым*.

1. Случай прямого удара. Составляя в этом случае уравнение (154) в проекции на нормаль n (см. рис. 375) и учитывая, что $\vec{Q}_0 = M\vec{v}$, а $\vec{Q}_1 = M\vec{u}$, получим

$$M(u_n - v_n) = S_n.$$

Но при прямом ударе $u_n = u$, $v_n = -v$, $S_n = S$. Следовательно,

$$M(u + v) = S.$$

Второе уравнение, необходимое для решения задачи, дает равенство (156)

$$u = kv.$$

Из полученных уравнений, зная M , v , k , найдем неизвестные величины u и S . При этом

$$S = M(1+k)v.$$

Как видим, ударный импульс будет тем больше, чем больше коэффициент восстановления k . На эту зависимость S от k и было указано в § 153.

Чтобы определить среднюю величину ударной силы (реакции), надо дополнительно знать время удара τ , которое можно найти экспериментально.

Пример. При падении стального шара массой $m=1$ кг с высоты $H=3$ м на стальную плиту ($k=0,56$) получим $v=\sqrt{2gH} \approx 7,7$ м/с и $u=kv=4,3$ м/с. Ударный импульс $S=mv(1+k) \approx 12$ Н·с.

Если время удара $\tau=0,0005$ с, то средняя величина ударной реакции $N_{\text{уд}}^{\text{ср}} = S/\tau = 24\,000$ Н.

2. Случай косого удара. Пусть в этом случае скорость $\vec{v}$ центра масс тела в начале удара образует с нормалью к плите угол α , а скорость $\vec{u}$ в конце удара — угол β (рис. 377). Тогда уравнение (154) в проекциях на касательную τ и нормаль n даст

$$M(u_\tau - v_\tau) = 0, \quad M(u_n - v_n) = S.$$

Коэффициент восстановления в данном случае равен отношению модулей $|u_n|$ и $|v_n|$, так как удар происходит только по направлению нормали к поверхности (влиянием трения пренебрегаем). Тогда с учетом знаков проекций получим $u_n = -kv_n$. В результате окончательно находим:

$$u_\tau = v_\tau, \quad u_n = -kv_n, \quad S = M|v_n|(1+k).$$

Из полученных уравнений можно найти модуль и направление скорости в конце удара и ударный импульс, если величины M , v , α и k известны. В частности, из первого равенства, замечая, что $v_\tau = |v_n| \operatorname{tg} \alpha$ и $u_\tau = |u_n| \operatorname{tg} \beta$, получаем

$$|u_n| \operatorname{tg} \beta = |v_n| \operatorname{tg} \alpha,$$

откуда

$$k = |u_n|/|v_n| = \operatorname{tg} \beta / \operatorname{tg} \alpha.$$

Следовательно, при косом ударе отношение тангенса угла падения к тангенсу угла отражения равно коэффициенту восстановления. Так как $k < 1$, то $\alpha < \beta$, т. е. угол падения всегда меньше угла отражения.

§ 155. ПРЯМОЙ ЦЕНТРАЛЬНЫЙ УДАР ДВУХ ТЕЛ (УДАР ШАРОВ)

При соударении двух тел удар называется *прямым и центральным*, когда общая нормаль к поверхностям тел в точке касания проходит через их центры масс и когда скорости центров масс в начале удара направлены по этой общей нормали. Таким, в частности, будет удар двух однородных шаров, центры которых до удара движутся вдоль одной и той же прямой.

Пусть массы соударяющихся тел равны M_1 и M_2 , скорости их центров масс в начале удара v_1 и v_2 , а в конце удара u_1 и u_2 . Проведем через центры масс C_1 , C_2 координатную ось C_1C_2 , направленную всегда от C_1 к C_2 (рис. 378). Тогда, чтобы произошел удар, должно быть $v_{1x} > v_{2x}$ (иначе первое тело не догонит второе); кроме того, $u_{1x} \leq u_{2x}$, так как ударившее тело не может опередить ударяемое.

Считая M_1 , M_2 , v_{1x} , v_{2x} и k известными, найдем u_{1x} и u_{2x} . Для этого применим теорему об изменении количества движения к соударяющимся телам, рассматривая их как одну систему. Тогда ударные силы, действующие между телами, будут внутренними и

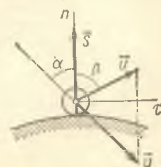


Рис. 377

$\Sigma S_k^* = 0$. В результате уравнение (154') дает $Q_{1x} = Q_{0x}$ или

$$M_1 u_{1x} + M_2 u_{2x} = M_1 v_{1x} + M_2 v_{2x}. \quad (157)$$

Второе уравнение найдем из выражения для коэффициента восстановления. При соударении двух тел интенсивность удара (ударный импульс) зависит не от абсолютного значения скорости каждого из тел, а от того, насколько скорость ударяющего тела превышает скорость ударяемого, т. е. от разности $v_{1x} - v_{2x}$. Поэтому при ударе двух тел, если учесть, что всегда $v_{1x} > v_{2x}$, и $u_{1x} \leq u_{2x}$, получим:

$$k = \frac{u_{1x} - u_{2x}}{v_{1x} - v_{2x}} = -\frac{u_{1x} - u_{2x}}{v_{1x} - v_{2x}} \quad (158)$$

$$u_{1x} - u_{2x} = -k(v_{1x} - v_{2x}). \quad (158')$$

Система уравнений (157), (158) и позволяет решить поставленную задачу.

Ударный импульс, действующий на соударяющиеся тела, найдем, составив уравнение (154') для какого-нибудь одного из тел, например для первого. Тогда

$$S_{1x} = M_1(u_{1x} - v_{1x}), \quad S_{2x} = -S_{1x}. \quad (159)$$

Рассмотрим два предельных случая.

1. Абсолютно неупругий удар ($k=0$). В этом случае из уравнений (158) и (157) находим

$$u_{1x} = u_{2x} = \frac{M_1 v_{1x} + M_2 v_{2x}}{M_1 + M_2}. \quad (160)$$

Оба тела после удара движутся с одной и той же скоростью. Действующий на тела ударный импульс при этом равен

$$S_{2x} = -S_{1x} = -\frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} (v_{1x} - v_{2x}).$$

2. Абсолютно упругий удар ($k=1$). В этом случае из уравнений (157) и (158) получаем

$$\left. \begin{aligned} u_{1x} &= v_{1x} - \frac{2M_2}{M_1 + M_2} (v_{1x} - v_{2x}), \\ u_{2x} &= v_{2x} + \frac{2M_1}{M_1 + M_2} (v_{1x} - v_{2x}). \end{aligned} \right\} \quad (161)$$

Действующий на тела ударный импульс при этом равен

$$S_{2x} = -S_{1x} = \frac{2M_1 M_2}{M_1 + M_2} (v_{1x} - v_{2x}).$$

Как видим, при абсолютно упругом ударе ударный импульс вдвое больше, чем при абсолютно неупругом.

В частном случае, когда $M_1 = M_2$, получаем из уравнений (161) $u_{1x} = v_{2x}$, $u_{2x} = v_{1x}$; таким образом, два тела одинаковой массы при абсолютно упругом ударе обмениваются скоростями.

Задача 186. Два шара массой M_1 и M_2 подвешены так, как показано на рис. 379. Первый шар отклоняют на угол α и отпускают без начальной скорости. После удара второй шар отклоняется на угол β . Найти коэффициент восстановления для шаров при ударе.

Решение. По данным задачи можно определить скорость v_1 центра первого шара в начале удара и скорость u_2 центра второго шара в конце удара. Из теоремы об изменении кинетической энергии на перемещении $B_0 B_1$ находим для первого шара

$$M_1 v_1^2 = 2P_1 h = 2M_1 g l (1 - \cos \alpha),$$

где l — расстояние центра шара от точки подвеса.

Отсюда $v_1 = 2\sqrt{gl} \sin(\alpha/2)$. Аналогично находим, что $u_2 = 2\sqrt{gl} \sin(\beta/2)$.

Так как в нашем случае $v_2 = 0$, уравнения (157) и (158) дают:

$$M_1 u_{1x} + M_2 u_{2x} = M_1 v_{1x}, \quad u_{2x} - u_{1x} = k v_{1x}.$$

Исключая из этих уравнений u_{1x} и замечая, что $v_{1x} = v_1$, а $u_{2x} = u_2$, получим

$$M_1 v_1 (1+k) = (M_1 + M_2) u_2.$$

Отсюда окончательно находим:

$$k = \frac{(M_1 + M_2) u_2}{M_1 v_1} - 1 = \frac{(M_1 + M_2) \sin(\beta/2)}{M_1 \sin(\alpha/2)} - 1.$$

§ 156. ПОТЕРЯ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ ПРИ НЕУПРУГОМ УДАРЕ ДВУХ ТЕЛ. ТЕОРЕМА КАРНО

Из рассуждений, приведенных в § 153, следует, что при неупругом ударе происходит потеря кинетической энергии соударяющихся тел. Наибольшей эта потеря будет при абсолютно неупругом ударе. Подсчитаем, какую кинетическую энергию теряет система при абсолютно неупругом ударе двух тел.

Считая, что соударяющиеся тела движутся поступательно, и обозначая их общую скорость после абсолютно неупругого удара через u , получим для кинетической энергии системы в начале и в конце удара значения:

$$2T_0 = M_1 v_{1x}^2 + M_2 v_{2x}^2, \quad 2T_1 = (M_1 + M_2) u^2. \quad (162)$$

Потерянная при ударе кинетическая энергия равна $T_0 - T_1$. Представим эту разность в виде

$$T_0 - T_1 = T_0 - 2T_1 + T_1. \quad (163)$$

Так как из формулы (160) следует, что

$$(M_1 + M_2) u_x = M_1 v_{1x} + M_2 v_{2x},$$

то отсюда

$$2T_1 = (M_1 + M_2) u_x^2 = (M_1 v_{1x} + M_2 v_{2x}) u_x. \quad (164)$$

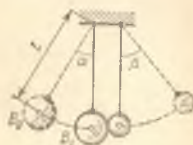


Рис. 379

Подставляя в правую часть равенства (163) вместо T_0 и T_1 их значения из формул (162), а вместо $2T_1$ — правую часть выражения (164), получим:

$$T_0 - T_1 = \frac{1}{2} (M_1 v_{1x}^2 + M_2 v_{2x}^2 - 2M_1 v_{1x} u_x - 2M_2 v_{2x} u_x + M_1 u_x^2 + M_2 u_x^2)$$

или

$$T_0 - T_1 = \frac{1}{2} M_1 (v_{1x} - u_x)^2 + \frac{1}{2} M_2 (v_{2x} - u_x)^2. \quad (165)$$

Разности $(v_{1x} - u_x)$ и $(v_{2x} - u_x)$ показывают, насколько уменьшилась при ударе скорость каждого из соударяющихся тел. Их можно назвать *потерянными при ударе скоростями*. Тогда из формулы (165) вытекает следующая теорема Карно*: *кинетическая энергия, потерянная системой тел при абсолютно неупругом ударе, равна той кинетической энергии, которую имела бы система, если бы ее тела двигались с потерянными скоростями*.

Если удар не является абсолютно неупругим ($k \neq 0$), то аналогичными преобразованиями можно найти, что кинетическая энергия, потерянная при ударе двух тел, определяется равенством

$$T_0 - T_1 = \frac{1-k}{1+k} \left[\frac{1}{2} M_1 (v_{1x} - u_x)^2 + \frac{1}{2} M_2 (v_{2x} - u_x)^2 \right]. \quad (165')$$

Рассмотрим частный случай абсолютно неупругого удара по первоначально неподвижному телу. В этом случае $v_2 = 0$ и

$$T_0 = \frac{1}{2} M_1 v_1^2, \quad u = \frac{M_1 v_1}{M_1 + M_2}.$$

Тогда

$$T_1 = \frac{1}{2} (M_1 + M_2) u^2 = \frac{1}{2} \frac{M_1^2 v_1^2}{M_1 + M_2} = \frac{M_1}{M_1 + M_2} \frac{M_1 v_1^2}{2}$$

или

$$T_1 = \frac{M_1}{M_1 + M_2} T_0. \quad (166)$$

Формула (166) показывает, какая энергия остается у системы после удара. Отметим два интересных предельных случая.

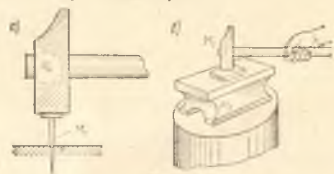


Рис. 380

1. Масса ударяющего тела много больше массы ударяемого ($M_1 \gg M_2$). В этом случае можно считать $M_1 + M_2 = M_1$, и формула

* Лазарь Карно (1753—1823) — выдающийся французский ученый (математик и механик) и видный деятель эпохи французской революции.

(166) дает $T_1 = T_0$. Следовательно, хотя удар и является абсолютно неупругим, потеря кинетической энергии при ударе почти не происходит, и система после удара начнет двигаться почти с той же кинетической энергией, которая у нее была в начале удара.

На практике такой результат нужно, очевидно, получать при забивании гвоздей, свай и т. п. Следовательно, в этом случае нужно, чтобы масса молотка была намного больше массы гвоздя (рис. 380, а).

2. Масса ударяемого тела много больше массы ударяющего ($M_2 \gg M_1$). В этом случае можно считать $M_1 / (M_1 + M_2) \approx 0$, и формула (166) дает $T_1 \approx 0$. Таким образом, здесь при ударе почти вся кинетическая энергия расходуется на деформацию соударяющихся тел; по окончании удара тела можно считать неподвижными.

Практически такой результат нужно, очевидно, получать при ковке, клепке и т. п. Следовательно, в этих случаях нужно, чтобы масса поковки вместе с наковальней (или масса заклепки вместе с поддержкой) была много больше массы молота (рис. 380, б).

§ 157*. УДАР ПО ВРАЩАЮЩЕМУСЯ ТЕЛУ. ЦЕНТР УДАРА

Рассмотрим тело, имеющее ось вращения z (рис. 381). Пусть в некоторый момент времени к телу будет приложен ударный импульс $\vec{S}$. Тогда по уравнению (155')

$$K_{1z} - K_{0z} = m_z(\vec{S}),$$

так как моменты относительно оси z импульсивных реакций $\vec{S}_A$ и $\vec{S}_B$, возникающих в подшипниках, будут равны нулю.



Рис. 381

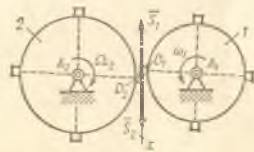


Рис. 382

Условимся обозначать угловую скорость тела в начале удара через ω , а в конце удара — через Ω . Тогда $K_{0z} = J_z \omega$, $K_{1z} = J_z \Omega$ и окончательно получим:

$$J_z (\Omega - \omega) = m_z(\vec{S}) \quad \text{или} \quad \Omega = \omega + \frac{m_z(\vec{S})}{J_z}. \quad (167)$$

Формула (167) определяет изменение угловой скорости тела при ударе. Из нее следует, что *угловая скорость тела за время удара изменяется на величину, равную отношению момента ударного импульса к моменту инерции тела относительно оси вращения*.

Задача 187. Колесо 1, вращающееся с угловой скоростью ω_1 , ударяет выступом D_1 о выступ D_2 первоначально неподвижного колеса 2 (рис. 382). Радиусы колеса и их моменты инерции относительно осей A_1 и A_2 соответственно равны r_1 ,

нородным стержнем длиной l , а ось вращения совпадающей с его концом, то тогда $a=l/2$, $J_z=ML^2/3$ и $h=J_z/Ma=2l/3$.

Следовательно, (рис. 384) удар надо производить тем местом стержня, которое находится на расстоянии $2l/3$ от руки или $l/3$ от другого конца стержня.

Задача 188. Мишень представляет собой тонкую однородную пластину, которая может вращаться вокруг оси Az (рис. 385). Форма мишени — прямоугольный треугольник ABD с катетами $AB=l_1$, $AD=l_2$. Определить, где у мишени находится центр удара, если известно, что для пластины ABD осевой момент инерции $J_z=ML^2/6$, а центробежный — $J_{yz}=Ml_1l_2/12$ (M — масса пластины, ось Ayz в плоскости пластины).

Решение. Так как у треугольной пластины ABD центр тяжести C находится на расстоянии $a=l_1/3$ от оси Az , то по формуле (169) расстояние центра удара K от той же оси будет $h=J_z/(Ma)=3J_z/(Ml_1)=l_1/2$.

Остается определить, на каком расстоянии b находится центр удара от оси Ay . Для этого надо найти на оси Az точку O , для которой эта ось будет главной. Если через точку O провести оси $Ox'y'z'$, параллельные осям $Axyz$, то точка O будет главной, когда $J_{x'z'}=\sum m_k x_k z_k=0$ и $J_{y'z'}=\sum m_k y_k z_k=0$.

Первое условие, очевидно, всегда выполняется, так как для пластины все $x_k=0$. Чтобы найти, когда выполняется второе условие, воспользуемся тем, что нам известно значение $J_{yz}=\sum m_k y_k z_k$ и что $y_k=z_k=b$. Тогда $J_{y'z'}=\sum m_k y_k z_k(z_k-b)=J_{yz}-(\sum m_k y_k)b=J_{yz}-M y_C b$, где $y_C=a=l_1/3$. Следовательно, $J_{y'z'}=0$, если $b=J_{yz}/(Ma)=l_2/4$.

Итак, центр удара находится в точке K с координатами $y=h=l_1/2$, $z=b=l_2/4$.

Задача 189. Вращающийся курок AD в момент начала удара по ударнику B (рис. 386) имеет угловую скорость ω . Определить скорость ударника в конце удара и импульсное давление на ось A . Массы M и m курка и ударника, момент инерции J_A курка относительно оси A , коэффициент восстановления k и расстояния a и b известны (точка C — центр масс курка).

Решение. Обозначим ударные импульсы, действующие на курок и ударник при ударе через S_1 и S_2 . Тогда для курка [по уравнению (167)] и для ударника [по уравнению (154)], учитывая, что $S_1=-S_2=S$, а $v_B=0$, получим:

$$J_A(\Omega-\omega)=-Sb, \quad m v_B=S. \quad (a)$$

У момента Sb взят знак минус, так как момент направлен противоположно направлению вращения курка. Кроме того, поскольку для точки D курка $v_D=\omega b$, а $u_D=\Omega b$ (v_D — скорость в начале удара, u_D — в конце), то формула (158'), определяющая коэффициент восстановления при прямом ударе двух тел, дает:

$$u_D-u_B=-k(v_D-v_B) \quad \text{или} \quad \Omega b-u_B=-k\omega b.$$

Подставляя сюда Ω и S из уравнений (a), найдем скорость ударника в конце удара:

$$u_B=\frac{J_A b(1+k)}{J_A+mb^2}\omega.$$

Для определения S_A — импульсивной реакции, действующей со стороны оси на курок, составляем для курка уравнение (154) в проекциях на оси Ax и Ay . Учтя, что $Q_{Ax}=Mv_{Cx}=M\omega a$, $Q_{Ay}=Mv_{Cy}=M\Omega a$, найдем:

$$Ma(\Omega-\omega)=-S+S_A, \quad S_A y=0. \quad (b)$$

Но из уравнений (a) $S=m v_B$, $\Omega-\omega=-mb u_B/J_A$. Подставляя эти величины в равенство (b) и заменяя u_B его значением, получим окончательно

$$S_A=\frac{J_A-Mab}{J_A+mb^2}mb(1+k)\omega.$$

При $b=J_A/(Ma)$ точка D является центром удара и $S_A=0$.

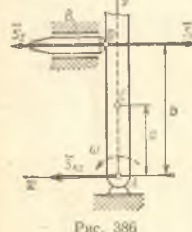


Рис. 386

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Автоколебания 323
Аксомы (принципы) статики 12
Амплитуда колебаний 112, 233
— вынужденных 249, 243, 245
Аналоги электродинамические 249, 250
Афелий 207
- Вектор 210
Вектор главных системы сил 18, 19, 39
— сил инерции 347
— свободный 34
— скользящий 12
Вес тела 89, 228
Взаимодействие механическое 5
Вит динамический 78
Вращение тела равномерное 121
— равнопеременное 122
— собственное 148
Время удара 396
— установления колебаний 245
- Гирокосп 334—338
Графики движения точки 112, 113
- Движение механическое 5
— переносное 156
— плоской фигуры 127, 128
— по инерции 181
— свободного твердого тела 153, 344
— твердого тела винтовое 177
— вокруг неподвижной точки 147, 148, 340—342
— — вращательное вокруг неподвижной оси 119, 120, 323
— — мгновенно поступательное 131
— — плоскопараллельное (плоское) 127, 128, 328, 329
— — поступательное 117, 118, 169
— — сложное 169
— точки абсолютное 156, 223
— — брошенной под углом к горизонтальной плоскости 198—200
— криволинейное 96, 110, 111, 197
— несобственное 183, 214, 219
— относительное 155, 223, 224
— прямолинейное 96, 110, 111, 189
— равномерное 110, 111
— равнопеременное 111
— сложное (составное) 155
Декремент колебаний 239
— логарифмический 239
Джоуль (единица измерения) 209
Динамика 6, 7, 180
Длина приведенная физического маятника 327
- Задача краевая 190, 234
— статически неопределенная 56
— определенная 56
Задачи динамики 183
Заданная жесткая 49
Закон динамики второй (основной) 182
— первый (закон инерции) 181
- Закон движения третий (о равенстве действия и противодействия) 14, 183
— независимости действия сил 183
— параллелограмма сил 13, 183
— площадей 207, 251
— сохранения главного момента количества движения 294
— — движения центра масс 276
— — количества движения 282, 283
— — механической энергии 321
Законы динамики 181—183
— Ньютона 5, 7, 181—183
— трения скольжения 64, 65
- Импульс силы 201, 202
— элементарный 201, 202
— ударный 397
Инертность 180, 181
Истинность 89
- Киловатт-час 210
Кинематика 6, 7, 95
Колебания точки вынужденные 241, 242, 244, 245, 247, 248
— гармонические 112, 233
— главные 395
— затухающие 238
— линейные 235
— нелинейные 235, 237
— параметрические 295
— свободные при отсутствии сопротивления 232, 233
— системы с двумя степенями свободы малые 394, 395
— — одной степенью свободы малые 389—394
— собственные 242, 245
Количество движения 201, 280, 281
— жидкости секундное 285
Координаты обобщенные 369
Коэффициент восстановления при ударе 399, 401, 402
— динамичности 243, 246
— жесткости обобщенный 390
— пружины 185, 212
— инерционный 390
— вязкоупругий 390
— трения качения 71
— скольжения 65
Коэффициенты формы 395
- Линия действия силы 10
— тока 284
— узлов 147
- Масса 181, 186, 264
— гравитационная 186
— инертная 186
Маятник математический 327
— оборотный 328
— физический 326
Метод вырезания узлов 61, 62
— останков (метод Вилланса) 173
— сечений (метод Риттера) 63
Механика 5, 7
— теоретическая (общая) 5

Многоугольник силовой 18
Момент вращающий 306, 323
— гироскопический 338
— главный системы сил 39, 40
— — сил инерции 347
— инерции осевой 264, 265
— относительно оси 265, 271
— центробежный 264, 269, 354
— кинетический 290, 291, 334, 340
— количества движения жидкости секунд-
ный 299
— — точки 205
— количества движения системы главный 290
пары сил 34, 42
— силы относительно оси 72, 73, 75
— — относительно точки (центра) 31—33
— — алгебраический 41
Моменты инерции главные 271
— — относительно параллельных осей 268
Мощность 210

Испесомость 257, 258, 260
Нормаль главная 107
Путания 148, 337
Ньютоны (единица измерения) 10, 184

Ось естественного трехгранника 107
— инерции главные 270
— — центральные 271, 354, 355
Ось винтовая мгновенная 179
— вращения 120
— — мгновенная 135, 148, 170
Отклонение статическое 235

Пара вращений 171
— гироскопическая 338
— сил 39, 35, 36
— угловых скоростей 171
Перемещение невозможное (виртуальное) 358
Период колебаний 112, 234, 390
— затухающих 239, 393
Платформа Жуковского 295
Плечо пары сил 33
— силы относительно центра 32
Плоскость соприкасающаяся 102
Поверхности равного потенциала 319
— уровни 319

Полые силовые 88, 317
— — потенциальные 317
— скоростей 88, 119
— ускорений 88, 119, 145
Полосы 127
Постоянная гравитационная 185
Потенциал кинетический 379
Правило Жуковского 338
Прецессия 148
— гироскопа 336, 337
— регулярная 344
Приведение сил инерции 347, 348
— системы сил к данному центру 38, 39
Прямая возможных перемещений 360, 361, 367
— Даламбера 344, 345, 355, 367
— Даламбера—Лагранжа 367
— отсрочки 14
— относительности классической механики 225
Принципы механики 344
Проекция силы на ось 20, 21
— — плоскость 21
Произведения инерции 269

Работа возможная 360
— потенциальной силы 318
— сил, приложенных к вращающемуся
телу 305, 306
— силы 209
— трения 212, 213
— — действующей на катящееся тело
306, 307

Работа силы тяготения 213
— — тяжести 210, 211
— — упругости 211, 212
— — элементарная 208, 209
Равновесие 9
— абсолютное 360
— механической системы 360, 361, 375
— относительное 225
— при наличии трения 66
— — предельное 65, 66
— плоской системы сил 46, 47
— пространственной системы сил 79, 80
— системы сходящихся сил 23
— — тел 53
Равнодействующая системы сил 11, 19
Радиус инерции 266, 267
Расход жидкости секундный 285
— топлива секундный 288
Реакции динамические, действующие на
ось вращающегося тела 354
— связей 15—17, 48, 49, 66
— статические, действующие на ось вра-
щающегося тела 354
Реакция динамическая 220, 222
Резонанс 243, 247, 248, 294, 295

Самоторможение 66
Связи 15—17, 48, 49, 357
— идеальные 309, 360
Сдвиг фаз 245, 246, 249
Сила 5, 10
— активная 180, 309
— внешняя 11, 14, 263
— внутренняя 11, 14, 263, 301
— возмущающая 241
— — гармоническая 241
— восстанавливающая 232, 238, 241, 244
— вязкого трения 185, 258
— диссипативная 322, 393
— инерции 344
— — кориолисова 224
— — обобщенная 375
— — переносная 224
— — центробежная 226, 347
— массовая 258, 285
— неспонтанная 213, 318
— обобщенная 372, 373
— активная 372
— объемная 258
— поверхностная 258, 259, 285
— потенциальная 211—213, 317, 374—376,
378, 379
— распределенная 11, 58—60
— реактивная 288
— сопротивлений аэродинамического (гид-
родинамического) 165, 186
— сосредоточенная 11
— сцепления 64
— трения предельная 64, 65
— — скольжения 64, 65, 185
— тяготения 185, 227, 250, 258
— тяжести 11, 88, 227, 228
— ударная 396
— упругости 185, 211, 232
— уравновешивающая 11
— центральная 206, 251
Силы внутренние, их свойства 263, 264
СИ — система единиц международной 10, 184
Система единиц МКГСС 184
— координат правая 21
— механическая 263
— голономная 357
— диссипативная 322
— — консервативная 322, 387, 389
— неголономная 357
— неизменяемая 308
— с идеальными связями 308, 309
— отсчета 85
— инерциальная 182, 223, 225
— местная 261
— неинерциальная 223

Система отсчета основная (неподвижная) 155
— — подвижная 155
— сил 10
— — уравновешенная 11
— — эквивалентная нулю 11
— тел статически неопределимая 54, 56, 61
— третья 234
Скорость космическая вторая 218, 254
— — первая 201, 254
— — третья 201, 254
— круговая 201, 254
— обобщенная 371
— надения предельная 196, 197
— параболическая 234
— — потернная при ударе 404
— прецессии угловая 336
— тела угловая 120, 138
— — мгновенная 148
— точки 109, 102, 108
— — абсолютная 156
— — в полярных координатах 117
— — ее числовое (алгебраическое) значе-
ние 107, 108
— — линейная (окружная) 123
— — относительная 156
— — переносная 156
— — поперечная 117
— — радиальная 117
— — секторная 207
— — средняя 99
Сложение вращений вокруг двух параллель-
ных осей 169—171
— — пересекающихся осей 174, 175
— пар сил 35, 36
— поступательного и вращательного дви-
жений 176—179
— поступательных движений 169
— сил 18, 19, 22
— скоростей точки 157
— угловых скоростей 170, 171, 174, 175
— — ускорений 176
— ускорений точки 161
Спутники Земли искусственные 254
Статика 6, 9

Тело абсолютно твердое 6, 9, 117
— несвободное 15
— переменной массы 287
— свободное 10, 15
Тензор инерции 272
Теорема Вариньона 40, 75
— Гюйонса 269
— Карно 404
— Корнолиса 161
— Лагранжа — Дирихле 387
— импульсов 204, 205, 292
— — относительно центра масс 293
— — при ударе 398
— об изменении главного момента количества
движения системы 222
— — — — — при ударе 398
— — — — — кинетического момента системы 292
— — — — — кинетической энергии системы 307,
308
— — — — — точки 214
— — — — — количества движения системы 281,
282
— — — — — при ударе 397
— — — — — точки 202, 203
— — — — — при ударе 397
— — — — — момента количества движения
точки 204, 205
— — о движении центра масс 275
— — параллельно переносу силы 37
— — трех силах 21
— Резаля 336, 341
— Эйлера 286
Теоремы динамики общие 201, 274
Течение жидкости установившееся 284
Точка материальная 6, 131
— переменной массы 287

Траектория 96, 147
— эллиптическая 255
Трение 64
— качения 71
— скольжения 64
Углы Эйлера 147
Угол путаницы 147
— прецессии 147
— смежности 109
— собственного вращения 147
— трения 66
Удар 396
— абсолютно неупругий 400, 402
— — упругий 400, 402
— косой 400, 401
— прямой 399, 400
— центральный 400
Уравнение динамики общее 367
— Мецковского 288
— теории удара основное 397
— частот 394
— Эйлера турбинное 300
Уравнения движения системы дифферен-
циальные 273
— — — — — в обобщенных координатах 378
— — — — — точки дифференциальные 187, 189
— Лагранжа 378, 379
— Эйлера динамические 341, 342
— — кинематические 150
Усилие внутреннее 57, 258
Ускорение свободного падения 184, 185
— — силы тяжести 185
— тела углового 121, 149
— точки 101, 103, 109, 110
— точки абсолютное 156
— — вращательное 152
— — касательное 109, 110
— — кориолисово 161—183, 224
— — нормальное 109, 110
— — остремительное 152
— — относительное 156, 163, 224
— — переносное 156, 163, 224
— — поворотное 161
— — поворотов 161
Устойчивость равновесия 387
— — — — — начальное 190, 197
— — равенства динамических реакций ста-
тистическим 354
— — равновесия системы в обобщенных ко-
ординатах 375
Устойчивость равновесия 387

Фаза колебаний 233
— — начальная 234
Формула Галилея 216, 218, 400
— Циолковского 289
Формулы Эйлера 125, 151, 152
Функции Лагранжа 379
— силовая 317, 318, 374
Центр вращения мгновенный 135
— инерции 265
— качений физического маятника 327
— масс 264, 265
— параллельных сил 86—89
— скоростей мгновенный 132, 134
— тяжести 11, 89, 90
— удара 407
— ускорений мгновенный 145
Центroids неподвижная 135
— подвижная 135
Частота возмущающей силы 241
— колебаний 234, 390
— собственная 305
Число степеней свободы 359, 360
— Циолковского 289
Энергия кинетическая 213, 301—304
— механическая полная 322
— — потенциальная 320, 321, 374
Эффект гироскопический 327, 328

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к десятому изданию	3
Введение	5
РАЗДЕЛ ПЕРВЫЙ	
СТАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА	
Глава I. Основные понятия и исходные положения статики	9
§ 1. Абсолютно твердое тело; сила. Задачи статики	9
§ 2. Исходные положения статики	11
§ 3. Связи и их реакции	15
Глава II. Сложение сил. Система сходящихся сил	18
§ 4. Геометрический способ сложения сил. Равнодействующая сходящихся сил; разложение сил	18
§ 5. Проекция силы на ось и на плоскость. Аналитический способ задания и сложения сил	20
§ 6. Равновесие системы сходящихся сил	23
§ 7. Решение задач статики	25
Глава III. Момент силы относительно центра. Пара сил	31
§ 8. Момент силы относительно центра (или точки)	31
§ 9. Пара сил. Момент пары	33
§ 10*. Теоремы об эквивалентности и о сложении пар	35
Глава IV. Приведение системы сил к центру. Условия равновесия	37
§ 11. Теорема о параллельном переносе силы	37
§ 12. Приведение системы сил к данному центру	38
§ 13. Условия равновесия системы сил. Теорема о моменте равнодействующей	40
Глава V. Плоская система сил	41
§ 14. Алгебраические моменты силы и пары	41
§ 15. Приведение плоской системы сил к простейшему виду	44
§ 16. Равновесие плоской системы сил. Случай параллельных сил	46
§ 17. Решение задач	48
§ 18. Равновесие систем тел	53
§ 19*. Статически определимые и статически неопределимые системы тел (конструкции)	56
§ 20*. Определение внутренних усилий	57
§ 21*. Распределенные силы	58
§ 22*. Расчет плоских ферм	61
Глава VI. Трение	64
§ 23. Законы трения скольжения	64
§ 24. Реакции шероховатых связей. Угол трения	66
§ 25. Равновесие при наличии трения	66
§ 26*. Трение нити о цилиндрическую поверхность	69
§ 27*. Трение качения	71

Глава VII. Пространственная система сил	72
§ 28. Момент силы относительно оси. Вычисление главного вектора и главного момента системы сил	72
§ 29*. Приведение пространственной системы сил к простейшему виду	77
§ 30. Равновесие произвольной пространственной системы сил. Случай параллельных сил	79
Глава VIII. Центр тяжести	86
§ 31. Центр параллельных сил	86
§ 32. Силовое поле. Центр тяжести твердого тела	88
§ 33. Координаты центров тяжести однородных тел	89
§ 34. Способы определения координат центров тяжести тел	90
§ 35. Центры тяжести некоторых однородных тел	93
РАЗДЕЛ ВТОРОЙ	
КИНЕМАТИКА ТОЧКИ И ТВЕРДОГО ТЕЛА	
Глава IX. Кинематика точки	95
§ 36. Введение в кинематику	95
§ 37. Способы задания движения точки	96
§ 38. Вектор скорости точки	99
§ 39. Вектор ускорения точки	100
§ 40. Определение скорости и ускорения точки при координатном способе задания движения	102
§ 41. Решение задач кинематики точки	103
§ 42. Оси естественного трехгранника. Числовое значение скорости	107
§ 43. Касательное и нормальное ускорения точки	108
§ 44. Некоторые частные случаи движения точки	110
§ 45. Графики движения, скорости и ускорения точки	112
§ 46. Решение задач	114
§ 47*. Скорость и ускорение точки в полярных координатах	116
Глава X. Поступательное и вращательное движения твердого тела	117
§ 48. Поступательное движение	117
§ 49. Вращательное движение твердого тела вокруг оси. Угловая скорость и угловое ускорение	119
§ 50. Равномерное и равнопеременное вращения	121
§ 51. Скорости и ускорения точек вращающегося тела	122
Глава XI. Плоскопараллельное движение твердого тела	127
§ 52. Уравнения плоскопараллельного движения (движения плоской фигуры). Разложение движения на поступательное и вращательное	127
§ 53*. Определение траекторий точек плоской фигуры	129
§ 54. Определение скоростей точек плоской фигуры	130
§ 55. Теорема о проекциях скоростей двух точек тела	131
§ 56. Определение скоростей точек плоской фигуры с помощью мгновенного центра скоростей. Понятие о центроидах	132
§ 57. Решение задач	136
§ 58*. Определение ускорений точек плоской фигуры	140
§ 59*. Мгновенный центр ускорений	145
Глава XII*. Движение твердого тела вокруг неподвижной точки и движение свободного твердого тела	147
§ 60. Движение твердого тела, имеющего одну неподвижную точку	147
§ 61. Кинематические уравнения Эйлера	149
§ 62. Скорости и ускорения точек тела	150
§ 63. Общий случай движения свободного твердого тела	153
Глава XIII. Сложное движение точки	155
§ 64. Относительное, переносное и абсолютное движения	155
§ 65. Теорема о сложении скоростей	156

§ 66. Теорема о сложении ускорений (теорема Кориолиса)	160
§ 67. Решение задач	164
Глава XIV*. Сложное движение твердого тела	169
§ 68. Сложение поступательных движений	169
§ 69. Сложение вращений вокруг двух параллельных осей	169
§ 70. Цилиндрические зубчатые передачи	172
§ 71. Сложение вращений вокруг пересекающихся осей	174
§ 72. Сложение поступательного и вращательного движений. Винтовое движение	176
РАЗДЕЛ ТРЕТИЙ	
ДИНАМИКА ТОЧКИ	
Глава XV. Введение в динамику. Законы динамики	180
§ 73. Основные понятия и определения	180
§ 74. Законы динамики. Задачи динамики материальной точки	181
§ 75. Системы единиц	183
§ 76. Основные виды сил	184
Глава XVI. Дифференциальные уравнения движения точки. Решение задач динамики точки	186
§ 77. Дифференциальные уравнения движения материальной точки	186
§ 78. Решение первой задачи динамики (определение сил по заданному движению)	187
§ 79. Решение основной задачи динамики при прямолинейном движении точки	189
§ 80. Примеры решения задач	191
§ 81*. Падение тела в сопротивляющейся среде (в воздухе)	196
§ 82. Решение основной задачи динамики при криволинейном движении точки	197
Глава XVII. Общие теоремы динамики точки	201
§ 83. Количество движения точки. Импульс силы	201
§ 84. Теорема об изменении количества движения точки	202
§ 85. Теорема об изменении момента количества движения точки (теорема моментов)	204
§ 86*. Движение под действием центральной силы. Закон площадей	206
§ 87. Работа силы. Мощность	208
§ 88. Примеры вычисления работы	210
§ 89. Теорема об изменении кинетической энергии точки	213
Глава XVIII. Несвободное и относительное движения точки	219
§ 90. Несвободное движение точки	219
§ 91. Относительное движение точки	223
§ 92. Влияние вращения Земли на равновесие и движение тел	227
§ 93*. Отклонение падающей точки от вертикали вследствие вращения Земли	230
Глава XIX. Прямолинейные колебания точки	232
§ 94. Свободные колебания без учета сил сопротивления	232
§ 95. Свободные колебания при вязком сопротивлении (затухающие колебания)	238
§ 96. Вынужденные колебания. Резонанс	241
Глава XX*. Движение тела в поле земного тяготения	250
§ 97. Движение брошенного тела в поле тяготения Земли	250
§ 98. Искусственные спутники Земли. Эллиптические траектории	254
§ 99. Понятие о невесомости. Местные системы отсчета	257

РАЗДЕЛ ЧЕТВЕРТЫЙ

ДИНАМИКА СИСТЕМЫ И ТВЕРДОГО ТЕЛА

Глава XXI. Введение в динамику системы. Моменты инерции	263
§ 100. Механическая система. Силы внешние и внутренние	263
§ 101. Масса системы. Центр масс	264
§ 102. Момент инерции тела относительно оси. Радиус инерции	265
§ 103. Моменты инерции тела относительно параллельных осей. Теорема Гюйгенса	268
§ 104*. Центробежные моменты инерции. Понятия о главных осях инерции тела	269
§ 105*. Момент инерции тела относительно произвольной оси	271
Глава XXII. Теорема о движении центра масс системы	273
§ 106. Дифференциальные уравнения движения системы	273
§ 107. Теорема о движении центра масс	274
§ 108. Закон сохранения движения центра масс	276
§ 109. Решение задач	277
Глава XXIII. Теорема об изменении количества движения системы	280
§ 110. Количество движения системы	280
§ 111. Теорема об изменении количества движения	281
§ 112. Закон сохранения количества движения	282
§ 113*. Приложение теоремы к движению жидкости (газа)	284
§ 114*. Тело переменной массы. Движение ракеты	287
Глава XXIV. Теорема об изменении момента количества движения системы	290
§ 115. Главный момент количества движения системы	290
§ 116. Теорема об изменении главного момента количества движения системы (теорема моментов)	292
§ 117. Закон сохранения главного момента количества движения	294
§ 118. Решение задач	295
§ 119*. Приложение теоремы моментов к движению жидкости (газа)	298
§ 120. Условия равновесия механической системы	300
Глава XXV. Теорема об изменении кинетической энергии системы	301
§ 121. Кинетическая энергия системы	301
§ 122. Некоторые случаи вычисления работы	305
§ 123. Теорема об изменении кинетической энергии системы	307
§ 124. Решение задач	310
§ 125*. Смешанные задачи	314
§ 126. Потенциальное силовое поле и силовая функция	317
§ 127. Потенциальная энергия. Закон сохранения механической энергии	320
Глава XXVI. Приложение общих теорем к динамике твердого тела	323
§ 128. Вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси	323
§ 129. Физический маятник. Экспериментальное определение моментов инерции	326
§ 130. Плоскопараллельное движение твердого тела	328
§ 131*. Элементарная теория гироскопа	334
§ 132*. Движение твердого тела вокруг неподвижной точки и движение свободного твердого тела	340
Глава XXVII. Принцип Даламбера	344
§ 133. Принцип Даламбера для точки и механической системы	344
§ 134. Главный вектор и главный момент сил инерции	346
§ 135. Решение задач	348
§ 136*. Динамические реакции, действующие на ось вращающегося тела. Уравновешивание вращающихся тел	352

Глава XXVIII. Принцип возможных перемещений и общее уравнение динамики	357
§ 137. Классификация связей	357
§ 138. Возможные перемещения системы. Число степеней свободы	358
§ 139. Принцип возможных перемещений	360
§ 140. Решение задач	362
§ 141. Общее уравнение динамики	367
Глава XXIX. Условия равновесия и уравнения движения системы в обобщенных координатах	369
§ 142. Обобщенные координаты и обобщенные скорости	369
§ 143. Обобщенные силы	371
§ 144. Условия равновесия системы в обобщенных координатах	375
§ 145. Уравнения Лагранжа	376
§ 146. Решение задач	379
Глава XXX*. Малые колебания системы около положения устойчивого равновесия	387
§ 147. Понятие об устойчивости равновесия	387
§ 148. Малые свободные колебания системы с одной степенью свободы	389
§ 149. Малые затухающие и вынужденные колебания системы с одной степенью свободы	392
§ 150. Малые свободные колебания системы с двумя степенями свободы	394
Глава XXXI. Элементарная теория удара	396
§ 151. Основное уравнение теории удара	396
§ 152. Общие теоремы теории удара	397
§ 153. Коэффициент восстановления при ударе	399
§ 154. Удар тела о неподвижную преграду	400
§ 155. Прямой центральный удар двух тел (удар шаров)	401
§ 156. Потеря кинетической энергии при неупругом ударе двух тел. Теорема Карно	403
§ 157*. Удар по вращающемуся телу. Центр удара	405
Предметный указатель	409

Учебное издание

Семен Михайлович Тарг

КРАТКИЙ КУРС
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ
МЕХАНИКИ

Зав. редакцией К. И. Аношина. Редактор М. Т. Самсонова. Младший редактор Н. М. Иванова. Художник В. Г. Пасичник. Художественный редактор Т. А. Дурасова. Технический редактор А. К. Нестерова. Корректор Р. К. Косинова

ИБ № 5855

Изд. № ОТ-585. Сдано в набор 27.01.86. Подп. в печать 22.07.86.
Формат 60×90^{1/16}. Бум. кн.-журн. № 2. Гарнитура литературная.
Печать высокая. Объем 26 усл. печ. л. 26 усл. кр.-отт. 27,60 уч.-изд. л.
Тираж 140 000 экз. Заказ № 2173. Цена 1 р. 10 к.
Издательство «Высшая школа», 101430, Москва, ГСП-4, Неглинная ул., д. 29/14.
Ордена Трудового Красного Знамени
МПО «Первая Государственная типография» имени А. А. Жданова
Союзполиграфпрома при Государственном комитете по делам издательств,
полиграфии и книжной торговли. 113054, Москва, Валовая, 28