А.М.Михайлов

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

А. М. Михайлов

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Допущено Государственным комитетом СССР по народному образованию в качестве учебника для учащихся строительных специальностей техникумов

Москва
Стройиздат
1989

ББК 30.121
М 69
УДК [539.3/.6+624.041] (075.32)

Рецензенты: канд. техн. наук **Г. И. Жиц** (начальник строит лаборатории треста «Спецжелезобетонстрой») и **В. П. Перетятько** (преподаватель технической механики Московского строительного техникума)

Редактор **З. С. Шестопалова**

Михайлов А. М.

М 69 Сопротивление материалов: Учеб. для техникумов. — М.: Стройиздат, 1989. — 352 с.: ил.

ISBN 5-274-00500-4

Рассматриваются теоретические основы и методика расчетов на прочность, жесткость и устойчивость элементов строительных конструкций по предельным состояниям, что отличает книгу от классических учебников по сопротивлению материалов. Обстоятельное изложение теоретического материала и подробное решение примеров дают возможность для самостоятельного изучения предмета без помощи преподавателя. Учебник доступен при дневной, вечерней и заочной формах обучения.

Для учащихся строительных специальностей техникумов.

М $\frac{3302000000-649}{047(01)-89}$ Св. пл. вып. для ср. спец. учеб. заведений 61—89 ББК 30.121

ISBN 5-274-00500-4

ПРЕДИСЛОВИЕ

Для реализации решений, которые предусмотрены Основными направлениями экономического и социального развития СССР на 1986—1990 годы и на период до 2000 года, утвержденными XXVII съездом КПСС, по снижению материалоемкости, трудоемкости и стоимости строительства, необходимо овладевать наиболее прогрессивными методами расчета строительных конструкций, их элементов и соединений. Современная наука о прочности предоставляет широкие возможности для проектирования и возведения экономичных сооружений при одновременном обеспечении их высокой надежности в условиях эксплуатации.

Цель настоящего учебника — оказать помощь учащимся в освоении теоретических основ и практических методов расчета элементов строительных конструкций и подготовить их к последующему, более глубокому изучению специальных дисциплин расчетного цикла.

Новизна конструктивных решений (увеличение мощности и габаритов сооружений), повышение параметров рабочих процессов (скоростей, давлений, температурного диапазона условий работы), характерные для многих направлений технического прогресса последних лет, существенно сказались на критериях механической прочности при проектировании, изготовлении и эксплуатации строительных конструкций. Поэтому в учебнике наряду с рассмотрением традиционных для сопротивления материалов методов анализа напряженного и деформированного состояний отражен подход к определению эксплуатационной способности с позиций теории надежности, допустимого развития пластических деформаций и предотвращения возможности хрупкого разрушения. Такой подход становится все более характерным для Строительных норм и правил (СНиП).

Учебник полностью включает основной и дополнительный материал соответствующего раздела программы по технической механике для строительных специальностей техникумов. Некоторым изменениям подвергнута лишь последовательность изложения. Так, рассмотрение статически неопределимых стержневых систем (гл. 2) предшествует расчетам на прочность с целью большей наглядности последних.

Вопросы, касающиеся напряженно-деформированного состояния в точке тела и прочности при сложном напряженном состоянии, объединены в гл. 3, помещенную в начале курса, сразу после изучения осевого растяжения (сжатия). Такой подход представляется более логичным. Здесь же, т. е. до изучения практических расчетов на срез и смятие (гл. 4), рассматривается деформация чистого сдвига, проявляющаяся в частном случае плоского напряженного состояния.

Кручение (гл. 6), будучи простейшей деформацией, рассматривается до изучения вопросов сложного сопротивления (гл. 9). Изложение теоретического материала учебника сопровождается разъяснением допущений и гипотез, положенных в основу вывода расчетных формул, анализом получаемых результатов и рекомендациями по их практическому использованию.

Все методы расчета иллюстрируются большим количеством подробно решенных примеров (всего их свыше восьмидесяти). Большинство примеров имеет непосредственное отношение к строительству, поэтому расчет элементов несущих конструкций выполняется согласно СТ СЭВ 384—76 [10] *по предельным состояниям.*

Учебник не содержит описания лабораторных работ: ограниченный объем книги позволял включить лишь краткие сведения, однако они все равно не смогли бы заменить специального руководства А. Г. Рубашкина и Д. В. Чернилевского [2], предназначенного для техникумов.

Буквенные обозначения физических величин и индексов приняты в соответствии с СТ СЭВ 1565—79 [12], исключающим использование букв русского алфавита. Поскольку большая часть индексов в отечественной технической литературе ранее имела русское происхождение, наиболее укоренившиеся символы указаны в скобках рядом с новыми. Приведен перечень основных буквенных обозначений с необходимой расшифровкой. В приложении помещен справочный материал, необходимый при разборе примеров и самостоятельном расчете стальных и деревянных элементов.

ОСНОВНЫЕ БУКВЕННЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

1. Латинские прописные буквы

A — площадь (от англ. *area*, фр. *aire*);
D — диаметр круга (от англ. *diameter*, фр. *diametre*, нем. *Durchmesser*); наружный диаметр кольца;
E — модуль продольной упругости (от англ. *elasticity*, фр. *elasticite*, нем. *Elastizitatsmodul*);
F — внешняя сила (от англ. и фр. *force*); сосредоточенная нагрузка;
G — вес (от нем. *Gewicht*); модуль сдвига (от нем. *Gleitmodul*);
H — горизонтальная составляющая опорной реакции (от англ. и фр. *horizontal*, нем. *Horizontalkraft*); высота колонны, фермы (см. п. 2, h);
J — момент инерции площади сечения (см. п. 2, I);
K — кинетическая энергия (от англ. *kinetic*, нем. *kinetische*); коэффициент запаса (от нем. *Koeffizient*);
L — пролет фермы (см. п. 2, l);
M — внутренний момент (от англ., фр. и нем. *moment*); изгибающий момент;
N — продольная (нормальная) сила (от англ. и фр. *normal*, нем. *Normalkraft*);
Q — поперечная сила (от нем. *Querkraft*);
R — расчетное сопротивление материала (от англ. и фр. *resistance*); опорная реакция (от англ. и фр. *reaction*);
S — статический момент площади сечения (от англ. *statical*, фр. *statique*, нем. *statisches*);
U — потенциальная энергия;
V — объем тела (от англ. и фр. *volume*, нем. *Volumen*); вертикальная составляющая опорной реакции (от англ. и фр. *vertical*, нем. *Verticalkomponente*);
W — момент сопротивления сечения (от нем. *Widerstands — moment*); работа (от англ. *work*);
X, Y, Z — проекции силы соответственно на оси x, y, z.

2. Латинские строчные буквы

a — ускорение (от англ. и фр. *acceleration*); сторона квадрата; расстояние;
b — ширина (от англ. *breadth*, нем. *Breite*);
d — диаметр отверстия, заклепки, болта и т. п. (см. п. 1, D); внутренний диаметр кольца; длина панели пояса фермы;
e — эксцентриситет (плечо) силы (от англ. *eccentricity*, фр. *excentricite*, нем. *Exzentrizitat*);
f — стрела прогиба (от фр. *fleche*);
g — ускорение свободного падения (от англ. *gravity*);
h — высота (от англ. *height*, фр. *hauteur*, нем. *Höhe*);
i — радиус инерции сечения (от англ. *inertia*, фр. *inertie*);
k — катет сварного шва (от нем. *Kathete*);
l — длина (от англ. *lenght*, фр. *longueur*, нем. *Länge*);
m — внешний момент (см. п. 1, M); масса тела (от англ. *mass*, фр. и нем. *masse*);
n — количество (от англ. *number*);

p — давление (от англ. *pressure*, фр. *pression*); интенсивность нагрузки, распределенной по площади;
q — интенсивность линейной распределенной нагрузки;
s — напряжение (от англ. *stress*, нем. *Spannung*); полное напряжение в точке тела; путь;
t — толщина (от англ. *thickness*); температура (от англ. и фр. *temperature*, нем. *Temperatur*);
u — удельная потенциальная энергия;
v — скорость (от англ. *velocity*, фр. *vitesse*);
x — горизонтальная ось поперечного сечения бруса;
y — вертикальная ось поперечного сечения бруса и перемещение (прогиб) вдоль нее;
z — продольная ось бруса; абсцисса сечения балки.

3. Греческие буквы

Δ — приращение величины; перемещение;
T — равнодействующая внутренних касательных сил;
α — угол; коэффициент линейного расширения; отношение диаметров кольца;
β — угол, коэффициент глубины провара углового сварного шва;
γ — удельный вес материала; угол сдвига; коэффициент надежности; угол наклона линии прогиба при косом изгибе;
δ — перемещение; длина непроваренного участка сварного шва;
ε — деформация;
θ — угловое перемещение;
λ — гибкость стержня;
μ — коэффициент приведения длины сжатого стержня; отношение предельных напряжений при осевом растяжении и сжатии;
ν — коэффициент поперечной деформации (коэффициент Пуассона);
ρ — радиус кривизны; радиус-вектор; плотность материала;
σ — нормальное напряжение;
τ — касательное напряжение;
φ — абсолютный угол закручивания; коэффициент продольного изгиба;
ω — площадь эпюры.

4. Индексы

b — бетон (от фр. и нем. *beton*); болт (от англ. *bolt*, фр. *boulon*, нем. *Bolzen*); балка (от англ. *beam*, нем. *Balken*);
C — центр тяжести (от англ. и фр. *centre*);
c — сжатие (от англ. и фр. *compression*); условия работы (от англ. и фр. *condition*);
d — изменение формы (от англ. *distortion*, фр. *distorsion*), динамический (от англ. *dynamic*, фр. *dynamiaue*, нем. *dynamische*);
f — нагрузка (см. п. 1, F); пояс (полка) балки (от англ. *flange*, нем. *Flansch*); угловой (валиковый) сварной шов (от англ. *fillet*);
g — клеевой шов (от англ. *glue*);

i — порядковый номер; инерционный (см. п. 2, *I*);
k — порядковый номер;
m — материал (от англ. *material*, фр. *matière*); среднее значение (от англ. *mean*, фр. *moyen*);
n — нормативное значение (от англ. *norm*, фр. *norme*, нем. *Normalien*);
p — полярный (от англ. *polar*); смятие (от англ. *pressure*, фр. *pression*);
r — заклепка (от англ. и фр. *rivet*); остаточный (от англ. *residual*, фр. *résiduelle*, нем. *Rest*);
s — сдвиг, срез, скалывание (от англ. *shearing*, нем. *Schub*, *Scherung*);
t — растяжение (от англ. *tension*, фр. *traction*);
u — предельное значение (от англ. *ultimate*);
v — объем (см. п. 1, *V*);
w — сварной шов (от англ. *weld*); стенка балки (от англ. *web*);
x — координатная ось;
y — координатная ось; текучесть (от англ. *yield*);
z — координатная ось; граница зоны сплавления при сварке (от англ. *zone*);
adm — допускаемое значение (от англ. и фр. *admissible*);
cf — сопротивление отрыву (от англ. *cleavage fracture*);
cr — критическое значение (от англ. *critical*, фр. *critique*);
des — расчетный (от англ. *design*);
ef — эффективное значение (от англ. *effective*);
lim — опасное значение (от англ. *limit*, фр. *limite*);
loc — местный (от англ. *local*, фр. *locale*);
max — максимальное значение (от англ., фр. и нем. *maximum*);
min — минимальное значение (от англ., фр. и нем. *minimum*);
net — нетто (от англ. *net*, фр. *nette*, нем. *netto*);
oct — октаэдрический (от англ. *octahedron*, фр. *octaèdre*);
pl — пластический (от англ. *plastic*, фр. *plastique*, нем. *plastische*);
pr — пропорциональность (от англ. *proportionality*, фр. *proportionalité*, нем. *Proportionalität*);
red — приведенное значение (от англ. *reduced*, нем. *reduziert*);
st — статический (см. п. 1, *S*).

Глава 1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

1.1. Содержание дисциплины «Сопротивление материалов»

Сопротивление материалов — это раздел технической механики, представляющий собой учебную дисциплину, в которой излагаются теоретико-экспериментальные основы и методика расчета наиболее распространенных элементов различных конструкций на прочность, жесткость и устойчивость.

Прочностью называется способность материала или конструкции воспринимать различные воздействия (нагрузки, температурные перепады, просадки грунтов и т. п.), не разрушаясь и не претерпевая беспрепятственного деформирования. Под разрушением подразумевается полное нарушение целостности тела (конструктивного элемента) вследствие накопления повреждений и развития трещин (рис. 1.1, *а*).

В первом разделе технической механики — теоретической механике — объектом изучения является абсолютно твердое тело, и постановка вопроса о расчете на прочность лишена смысла, поскольку в самой терминологии заложена идея неразрушимости и отсутствия каких бы то ни было деформаций. Так как все твердые тела в той или иной степени деформируемы, сопротивление материалов можно рассматривать как следующий шаг после теоретической механики на пути приближения к расчету реальных конструкций и сооружений.

Неизбежное деформирование нагруженной конструкции и ее элементов обусловливает перемещение их отдельных точек. Так, например, элемент, изображенный на рис. 1.1, *б*, получает вертикальные перемещения. При некотором значении нагрузки максимальное перемещение может воспрепятствовать нормальной эксплуатации элемента, хотя его прочность еще не нарушена. В таком случае говорят, что элемент (конструкция) имеет недо-

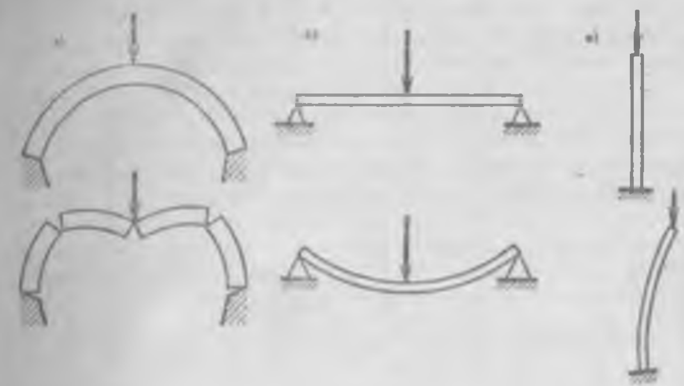


Рис. 1.1

статочную жесткость Следовательно, **жесткость** можно характеризовать как способность конструктивного элемента воспринимать воздействие без существенного изменения геометрических размеров.

В тех случаях, когда деформации тела несущественны и ими можно пренебречь, выводы теоретической механики оказываются точными и вполне достаточными. Например, опорные реакции статически определимых балок находят из уравнений статики так, как если бы эти балки были абсолютно жесткими. При расчете грузоподъемных механизмов обычно пренебрегают деформациями звеньев, которые изготовляют весьма жесткими. Поэтому скорости и ускорения, вычисленные по правилам кинематики, точно соответствуют действительным. В то же время существует обширный класс систем, которые принципиально не могут быть рассчитаны без рассмотрения их в деформированном состоянии.

Помимо прочности и жесткости конструкции и их элементы должны обладать **устойчивостью**, т. е. способностью сохранять под нагрузкой первоначальную форму равновесия. Если малое приращение нагрузки вызывает сильное нарастание отклонения тела (элемента) от положения равновесия (выпучивание, рис. 1.1, *в*), то говорят, что тело (элемент) потеряло устойчивость.

Вопрос обеспечения устойчивости возникает при расчете тонких сжатых элементов, и ему уделяется особое внимание, поскольку потеря устойчивости может происходить при нагрузках, безопасных с точки зрения прочности или жесткости.

Расчетный аппарат сопротивления материалов широко используется в статике сооружений (третий раздел технической механики) и специальных дисциплинах, связанных с изучением и проектированием надежных и экономичных строительных конструкций.

Надежной считается конструкция, которая сохраняет свою эксплуатационную способность (прочность, жесткость, устойчивость) в течение заранее предусмотренного промежутка времени. Надежность — это свойство, которое в зависимости от назначения конструкции и условий ее эксплуатации может включать безотказность, долговечность, сохраняемость и ремонтопригодность конструкции или ее отдельных элементов.

Надежность и экономичность являются, по существу, противоположными понятиями. Важнейшее требование строительной техники — обеспечение надежности сооружения при наименьшей затрате материала — содержит в себе противоречие, поскольку повышение надежности достигается чаще всего увеличением поперечных размеров конструктивных элементов, в то время как экономия материала заставляет стремиться к уменьшению тех же самых размеров. В этом проявляется один из законов марксистской диалектики — закон единства и борьбы противоположностей. Сопротивление материалов помогает разрешить указанное противоречие, позволяя установить в каждом конкретном случае оптимальные размеры, т. е. размеры, при которых надежность обеспечивается без лишних запасов, удовлетворяя экономическую сторону вопроса.

Таким образом, *основной задачей сопротивления материалов является разработка методов расчета элементов различных конструкций на прочность, жесткость и устойчивость при одновременном удовлетворении требований надежности и экономичности.*

Для решения этой задачи теоретическая часть дисциплины тесно увязывается с экспериментальной. Опыт позволяет изучить в сравнительно простых условиях механические свойства конструкционных материалов путем лабораторных испытаний специальных образцов. В дальнейшем в теории используют опытные данные для расчета конструтивных элементов из того же материала в любых, даже самых сложных условиях нагружения. Кроме того, теория указывает, в каком направлении необходимо вести экспериментальное исследование. Опыт, в свою очередь, позволяет проверить справедливость основных теоретических положений и расчетных формул. Это особенно важно, так как необходимость доведения каждого расчета до конечного числового результата заставляет прибегать к различным упрощающим предпосылкам и допущениям, которые требуют экспериментального подтверждения.

1.2. Основные допущения о свойствах материалов и характере деформирования

Расчет конструкций и их элементов с учетом всего многообразия физико-механических свойств реальных материалов является или теоретически невозможным, или практически неприемлемым по своей сложности. Поэтому, отказываясь от принятой в теоретической механике модели абсолютно твердого тела, в сопротивлении материалов приходится вводить свою модель — модель идеализированного деформируемого тела. Однако для решения поставленной задачи необходимо сделать ряд допущений.

1-е допущение. *Материал представляет собой однородную сплошную среду.* Предположение об однородности позволяет отвлечься от структурных особенностей материала и считать, что любой объем, выделенный из тела (конструкции), воспринимает часть общей нагрузки, приходящейся на все тело (конструкцию). Так, например, строительная сталь при нормальной температуре состоит из двух компонентов: феррита и цементита. Феррит — почти чистое железо, имеющее в небольшом количестве растворенный углерод и другие химические элементы, образует в стали хаотично ориентированные зерна *1* (рис. 1.2) площадью $(2—6)10^3$ мкм^2. Цементит — карбид железа Fe_3C — образует с ферритом смесь — перлит *2*, заполняющую главным образом участки между зернами феррита. Работа стали зависит от соотношения этих двух компонентов. Чем меньше зерно, тем равномернее перлит распределен по объему стали, тем более упорядочена в среднем взаимная ориентация зерен и тем больше оснований считать сталь однород-

Рис. 1.2

Рис. 1.3

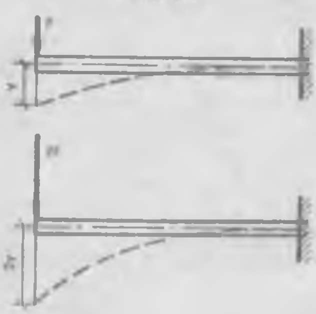


Рис. 1.4

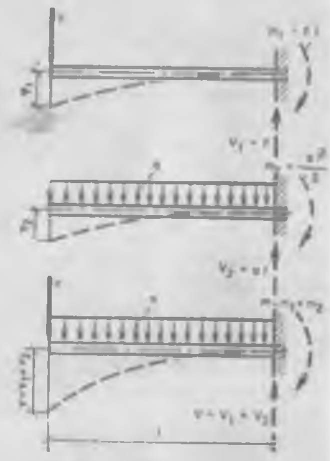


Рис. 1.5

ным материалом, несмотря на неоднородность ее микроструктуры [1].

[1] *Микроструктура* — кристаллическое строение материала, обнаруживаемое с помощью микроскопа. В отличие от нее, строение, видимое невооруженным глазом или при малом увеличении, называется *макроструктурой*.

Заведомо неоднороден такой материал, как бетон. Он состоит из бессистемно разбросанных зерен заполнителя (гравия, щебня, керамзита, шлака, песка и пр.) различной крупности и формы, которые скреплены цементной массой или другим вяжущим веществом. Но размеры бетонных элементов (как, впрочем, и стальных) велики по сравнению с размерами зерен, поэтому практически и бетон можно считать в среднем однородным (квазиоднородным)[1].

Предположение об однородности материала неотделимо от понятия сплошной среды, т. е. среды, непрерывно (без пустот) заполняющей отведенный ей объем. Свойство непрерывности позволяет использовать в расчетах методы анализа бесконечно малых величин (дифференциальное и интегральное исчисления). Обычно сплошную среду принимают *изотропной*, полагая, что физико-механические свойства любого выделенного из нее тела одинаковы по всем направлениям. Благодаря мелкозернистой структуре квазиизотропны макрообъемы стали, хотя отдельно взятые зерна феррита (микрообъемы) анизотропны.

В некоторых случаях предположение об изотропии неприемлемо. К анизотропным материалам относится древесина, прочность и деформативность которой зависят от направления усилия по отношению к расположению волокон. Анизотропны фанера и конструкционные пластические массы (стеклопластики, органическое стекло, винипласты, пенопласты, сотопласты, древесные пластики и др.), у которых изменчивость механических свойств обусловлена неоднородностью структуры и спецификой изготовления.

2-е допущение. *Материал до известного предела нагружения работает упруго.* Упругостью называется способность материальных тел восстанавливать первоначальную форму и размеры после снятия нагрузки. Деформации, полностью исчезающие после снятия нагрузки, называются *упругими* в отличие от *пластических*, или *остаточных*, которые не исчезают.

В большинстве задач сопротивления материалов среда условно считается абсолютно упругой. В действительности же реальные тела пусть в малой степени, но обнаруживают отступление от идеальной упругости. При

[1] *Квази* — приставка, означающая «якобы», «мнимый».

больших нагрузках отступление становится столь существенным, что сплошная среда должна наделяться свойствами упругопластического материала.

В последнее время возросла актуальность расчета строительных конструкций и их элементов с учетом развития пластических деформаций. Особенно это касается металлических конструкций и объясняется постоянным стремлением к снижению их материалоемкости и более рациональному использованию стального проката.

3-е допущение. *Перемещения точек элемента (или системы элементов), обусловленные его деформацией, весьма малы по сравнению с размерами самого элемента.* На основе этого допущения вводится принцип начальных размеров, согласно которому при составлении уравнений равновесия (уравнений статики) элемент или систему элементов рассматривают как недеформируемое тело, имеющее после нагружения те же геометрические размеры, что и до нагружения. Такой подход позволяет пренебречь изменениями в расположении внешних сил при деформировании реального тела. Он справедлив для жестких элементов и систем.

Пусть, например, к элементу, изображенному на рис. 1.3, подвешен груз F и требуется определить реактивный момент в заделке. По правилам теоретической механики, считающей тела недеформируемыми, $m=Fl$. В действительности же элемент деформируется (изгибается), точка приложения груза перемещается по вертикали и горизонтали, а момент в заделке $m=Fl_1$. Если элемент достаточно жесткий и, следовательно, деформируется мало, то можно пренебречь горизонтальным перемещением и определять момент по первой формуле, полагая $l=l_1$.

4-е допущение. *Перемещения точек элемента (системы элементов) в упругой стадии работы материала пропорциональны силам, вызывающим эти перемещения.* Системы, подчиняющиеся такой закономерности, называются *линейно-деформируемыми* (рис. 1.4). Для них справедлив принцип независимости действия сил (принцип суперпозиции), который может быть сформулирован следующим образом: *результат воздействия нескольких сил равен сумме результатов воздействия каждой силы, прикладываемой в отдельности, и не зависит от последовательности приложения.* Этот принцип, широко используемый в теоретической механике, к деформируемым телам применим только при соблюдении трех предыдущих допущений. Он позволяет расчленять сложные задачи на более простые, решение которых известно или легко осуществимо. Иллюстрацией может служить рис. 1.5.

Перечисленные допущения являются в сопротивлении материалов основополагающими, но они не исчерпывают всевозможных приемов идеализации свойств материалов и характера деформирования изучаемых объектов. В дальнейшем при рассмотрении конкретных расчетно-теоретических вопросов будут вводиться и другие упрощения. При этом следует всегда иметь в виду, что успешное решение любой практической задачи зависит в первую очередь от умения отделить в реальной конструкции существенные факторы от второстепенных.

1.3. Геометрическая схематизация элементов строительных конструкций

Расчет любого сооружения, конструкции или отдельного конструктивного элемента начинается с выбора **расчетной схемы**. Она представляет собой упрощенную, идеализированную схему, которая отражает наиболее существенные особенности реального объекта, определяющие его поведение под нагрузкой.

Выбор расчетной схемы в сопротивлении материалов начинается со схематизации свойств материала и характера деформирования твердого тела. Вторым шагом является схематизация геометрической формы реального объекта. Формы элементов строительных конструкций весьма разнообразны, однако с достаточной степенью точности их можно отнести к четырем основным категориям.

Брус — элемент, у которого один размер (длина l) значительно превышает два других. Геометрически его можно представить как тело, образованное путем перемещения плоской фигуры *2* вдоль некоторой линии *3*, называемой *продольной осью* бруса (рис. 1.6). Центр тяжести *1* фигуры находится на этой оси, а сама фигура ей перпендикулярна и называется *поперечным сечением* бруса. Продольная ось, таким образом, является геометрическим местом центров тяжести поперечных сечений, поэтому при переходе от конструктивной схемы к расчетной в большинстве случаев можно не вычерчивать брус полностью, а ограничиться изображением только оси.

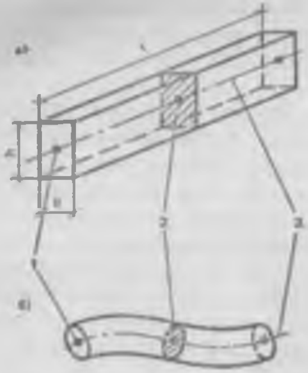


Рис. 1.6

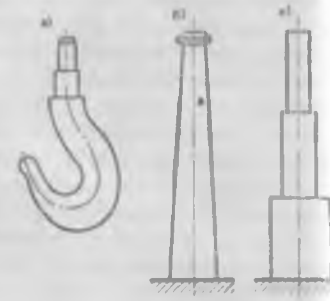


Рис. 1.7

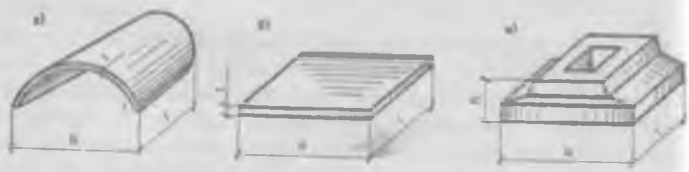


Рис. 1.8

В зависимости от ее формы различают брусья *прямые* (см. рис. 1.6, *а*) и *кривые* (см. рис. 1.6, *б*). В строительных конструкциях более распространены прямые брусья. Примером кривого бруса может служить грузоподъемный крюк (рис. 1.7, *а*).

Прямой брус постоянного сечения называется *призматическим* (см. рис. 1.6, *а*). Встречаются также брусья с непрерывно меняющимся сечением (например, промышленные трубы, рис. 1.7, *б*) и ступенчатые (например, мостовые опоры, рис. 1.7, *в*). В зависимости от конструктивного назначения среди брусьев различают стержни, балки (см. рис. 1.1, *б*; 1.3; 1.4; 1.5) и колонны (см. рис. 1.1, *в*). Подробная характеристика дается им в гл. 2 и 7.

Оболочка — тело, ограниченное двумя криволинейными поверхностями, у которого длина l и ширина b велики по сравнению с толщиной t (рис. 1.8, *а*). Если при тех же соотношениях размеров тело ограничено параллельными плоскостями (рис. 1.8, *б*), то оно называется пластиной. К оболочкам относятся стенки сосудов для хранения жидкостей, газов и сыпучих материалов (стенки резервуаров, газгольдеров, бункеров и т. п.), листовые конструкции доменных цехов (кожух доменной печи, воздухонагревателей, пылеуловителя), купола и своды зданий. К пластинам могут быть отнесены плоские днища сосудов, настил рабочих площадок цехов, обшивка каркасных кровельных и стеновых панелей. Толстые пластины принято называть *плитами*.

Тела, у которых все три размера одного порядка, называются массивами. К ним относятся фундаменты (рис. 1.8, *в*), подпорные стены и т. п.

Определение усилий и деформаций оболочек, пластин и массивов в большинстве случаев неосуществимо методами сопротивления материалов. Подобные задачи могут быть решены только с позиций теории упругости, основные предпосылки которой отличаются большей широтой и не ограничиваются такой формой тела, как брус.

1.4. Внешние воздействия на тело. Классификация нагрузок

Сооружения, конструкции и их элементы испытывают в процессе возведения и эксплуатации внешние воздействия. К ним относятся силовые воздействия от нагрузок, а также воздействия от изменения температуры, смещения опор, усадки и других подобных явлений, вызывающих реактивные силы.

Нагрузки классифицируют по разным признакам. **По способу приложения** они могут быть объемными или поверхностными. *Объемные* силы непрерывно распределены по всему объему, занимаемому элементом. К их числу относятся, например, сила тяжести и силы инерции. Нагрузка, приходящаяся на единицу объема, называется *интенсивностью* объемной нагрузки. Она выражается в единицах силы, отнесенных к единице объема (Н/м^3, кН/м^3 и т. д.).

Если внешние силы являются результатом непосредственного взаимодействия элемента с другими телами (твердыми, жидкими или газообразными), то они прикладываются только по площадкам контакта и называются *поверхностными*. Сюда относятся: давление жидкости или газа на стенки сосуда, снеговая нагрузка на

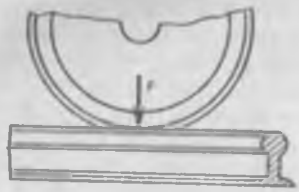
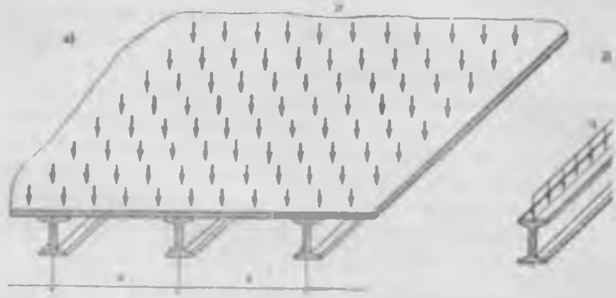


Рис. 1.9



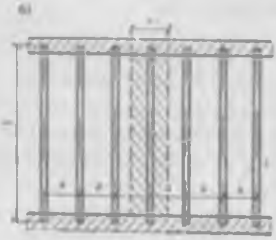


Рис. 1.10

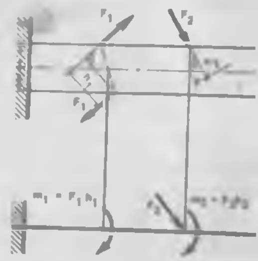


Рис. 1.11

Рис. 1.12

кровлю здания, ветровая нагрузка и др. Давление должно выражаться в единицах силы, отнесенных к единице площади (Н/м², кН/м² и т. д.). Однако в СИ вводится специальная производная единица — *паскаль:* 1 Па = = 1 Н/м², поэтому интенсивность поверхностной нагрузки p логично также выражать в паскалях и кратных ему единицах (кПа, МПа), но это не всегда удобно.

Поскольку соприкасание реальных, т. е. деформируемых тел, всегда происходит не в точке, а по некоторой, пусть даже очень малой, площадке, все поверхностные нагрузки являются *распределенными.* Однако в тех случаях, когда площадка контакта пренебрежимо мала по сравнению с размерами нагружаемого элемента, вводят понятие сосредоточенной силы F[1] как равнодействующей давления по указанной площадке (например, сила, обусловленная давлением обода колеса на рельс, рис. 1.9).

В практических расчетах часто встречается нагрузка, распределенная по длине элемента конструкции. Так, например, на каждую промежуточную балку перекрытия здания (рис. 1.10, *а*) приходится полоса поверхностной нагрузки p шириной a (рис. 1.10, *б*). Интенсивность нагрузки, распределенной по длине балки (рис. 1.10, *в*),

$$q = pa \qquad (1.1)$$

выражается в единицах силы, отнесенных к единице длины (Н/м, кН/м и т. д.).

В рассматриваемом случае интенсивность постоянна по длине, поэтому нагрузка называется *равномерно распределенной* и графически изображается в виде прямоугольника. Однако интенсивность может быть переменной и тогда нагрузка распределяется по более сложному закону: треугольному (например, при гидростатическом давлении — давлении покоящейся жидкости), трапецеидальному (нагрузка от собственного веса двускатных и односкатных балок), синусоидальному (нагрузка от ветрового напора на элементы типа оболочек) и т. п.

В процессе расчетной схематизации реальные нагрузки не всегда могут быть сведены лишь к сосредоточенным и распределенным силовым воздействиям. Возможны и *моментные* воздействия — в виде сосредоточенных моментов и моментов, распределенных по длине элемен-

---

[1] В теоретической механике понятие сосредоточенной силы является строгим, поскольку там рассматриваются недеформируемые тела.

2*

та или его поверхности. На рис. 1.11 показано, как появляются сосредоточенные моменты m_1, m_2, и m_3 в результате замены бруса его продольной осью и приведения к ней поверхностных сил F_1, F_2 и F_3, приложенных в плоскости чертежа. Сосредоточенные моменты выражаются в единицах силы, умноженных на единицу длины (Н·м, кН·м и т. д.).

По характеру изменения в процессе приложения нагрузки делятся на статические, динамические и повторно-переменные. К *статическим* относятся нагрузки, не меняющиеся со временем (например, нагрузка от собственного веса) или меняющиеся настолько медленно, что вызываемые ими ускорения и силы инерции элементов конструкции пренебрежимо малы (например, снеговая нагрузка).

Динамические нагрузки в отличие от статических меняют свое значение, положение или направление в короткие промежутки времени (движущиеся нагрузки, ударные, сейсмические и др.), вызывая большие ускорения и силы инерции, что приводит к колебаниям конструкции и сооружений.

Повторно-переменными называются нагрузки, многократно (до нескольких миллионов раз) изменяющие со временем значение или значение и знак. Разрушение материала под действием таких нагрузок называется *усталостным* (например, разрушение куска проволоки от многократного перегибания, рис. 1.12), а способность противостоять ему — сопротивлением усталости.

По продолжительности действия нагрузки делят на постоянные и временные. К *постоянным* относятся нагрузки, действующие в течение всего времени существования конструкции или сооружения (например, вес несущих и ограждающих конструкций, вес и давление грунта).

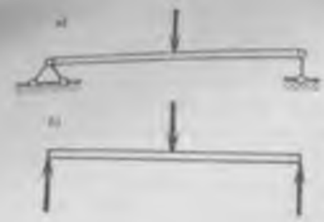
Временные нагрузки действуют на протяжении отдельных периодов эксплуатации или возведения объекта. К ним относятся нагрузки от веса людей, материалов и оборудования; давление жидкостей, газов и сыпучих материалов в сосудах и трубопроводах; атмосферные нагрузки (снеговая, ветровая, гололедная); температурные, монтажные, сейсмические, взрывные, аварийные и прочие воздействия ограниченной продолжительности.

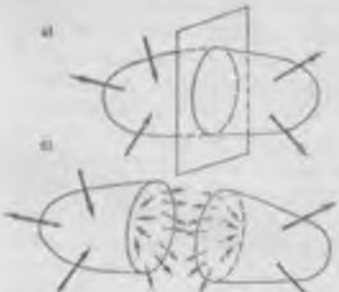
1.5. Внутренние силы в поперечном сечении бруса

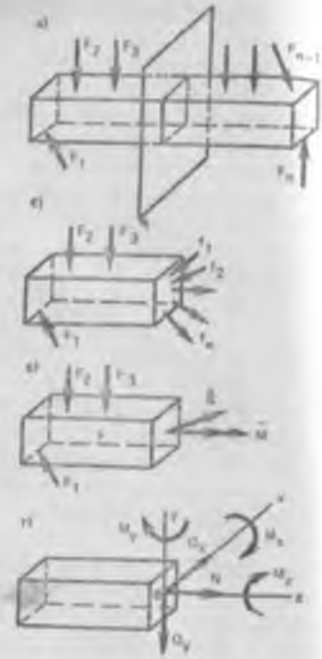
В недеформированном состоянии, т. е. при отсутствии внешних воздействий, связность тела обусловлена силами взаимодействия атомов. Эти силы стремятся сохранить тело как единое целое, препятствуя любой попытке изменить взаимное расположение атомов и таким образом деформировать тело. Внешние воздействия, наоборот, стремятся вызвать деформирование тела путем изменения межатомных расстояний, взаимного расположения атомов и сил их взаимодействия. Однако если бы механика деформируемого тела ставила перед собой задачу изучать силы, действующие на каждый атом в отдельности, пользоваться ее аппаратом было бы чрезвычайно трудно. Поэтому сопротивление материалов рассматривает, как указывалось в п. 1.2, поведение *макрообъемов* материала, т. е. объемов, состоящих из большого количества атомов и имеющих такие размеры, которые позволяют считать материал сплошным и однородным. Сплошное однородное тело не имеет в своем составе взаимодействующих частиц, и его целостность обеспечивают внутренние связи. Из теоретической механики известна так называемая аксиома связей, которая гласит: равновесие тела сохранится, если действие связей, закрепляющих тело в пространстве (рис. 1.13, *а*), заменить их реакциями (рис. 1.13, *б*).

Применяя эту аксиому к деформируемому телу, можно мысленно рассечь его произвольной плоскостью (рис. 1.14, *а*), отделить одну часть от другой и взамен нарушенных связей приложить к каждой части силы, равные усилиям связей (рис. 1.14, *б*). Такие силы называются *внутренними*. Они непрерывно распределяются по образовавшемуся сечению вследствие допущения о сплошности материала. Их находят посредством специального приема — метода сечений, сущность которого заключается в следующем.

Пусть на тело, имеющее форму бруса, действует система взаимно уравновешенных внешних сил F_1, F_2, ..., F_n (рис. 1.15, *а*). Для определения внутренних сил производят последовательно четыре операции: 1) *рассекают* брус в интересующем месте воображаемой плоскостью; 2) *отбрасывают* мысленно одну из образовавшихся частей (обычно ту, к которой приложено больше сил), в результате чего нарушается равновесие оставшейся части;







1.13 / 1.14 .15

Рис. 1.13
Рис. 1.14
Рис. 1.15

3) *заменяют* действие отброшенной части на оставшуюся внутренними силами $f_1, f_2, ..., f_k$ (рис. 1.15, *б*); 4) составляют *уравнения* равновесия всех сил, приложенных к оставшейся части. При этом имеют в виду, что внутренние силы согласно правилам теоретической механики могут быть приведены к центру тяжести сечения и, таким образом, заменены главным вектором $\bar{R}$ и главным моментом $\bar{M}$ (рис. 1.15, *в*). Каждый из этих двух статических эквивалентов внутренних сил можно представить в виде трех составляющих по осям выбранных координат x, y, z. Направляя ось z по нормали к сечению и располагая оси x и y в его плоскости[1] (рис. 1.15, *г*), получаем следующие шесть составляющих: N, Q_x, Q_y, M_z, M_x, M_y, где

[1] В п. 5.4 показано, что положение осей x и y зависит от геометрии сечения. У симметричных сечений эти оси совпадают с осями симметрии.

N — продольная (нормальная) сила; Q_x, Q_y — поперечные силы вдоль осей x и y; M_z — крутящий момент; M_x, M_y — изгибающие моменты относительно осей x и y.

Эти компоненты главного вектора и главного момента называются **внутренними силовыми факторами или усилиями**. Для их определения имеется шесть уравнений равновесия:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma X = 0; \quad \Sigma Y = 0; \quad \Sigma Z = 0; \\ \Sigma m_x = 0; \quad \Sigma m_y = 0; \quad \Sigma m_z = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (1.2)$$

Кроме проекций на соответствующую ось (или моментов относительно оси) всех внешних сил, приложенных к оставшейся части, в каждое уравнение входит только одно неизвестное усилие. Это обстоятельство подтверждает целесообразность раздельного определения составляющих главного вектора и главного момента внутренних сил, поскольку отпадает необходимость в совместном решении нескольких уравнений.

Независимо от закона распределения по сечению внутренние силы всегда приводятся к стандартной системе усилий N, Q_x, ..., M_y, алгебраические значения которых зависят только от абсциссы сечения z. Усилия связаны с конкретными видами деформации бруса, которые подробно рассматриваются в последующих главах. Если в поперечных сечениях возникает, например, только продольная сила N, а остальные усилия отсутствуют, то брус испытывает растяжение или сжатие (в зависимости от направления силы). При наличии только поперечной силы (или Q_x, или Q_y, или обеих вместе) возникает *сдвиг*. Если не равен нулю только момент M_z, то брус работает на *кручение*.

При возникновении только изгибающего момента M_x или M_y брус испытывает *чистый изгиб* соответственно в плоскости zQ_y или zQ_x. В более общем случае к изгибающему моменту добавляется поперечная сила (в первом случае Q_y, во втором — Q_x). Такой изгиб называется *поперечным*. Возможны и еще более сложные случаи деформирования бруса. Им посвящена гл. 9.

Из изложенного следует, что разложение главного вектора и главного момента внутренних сил на составляющие имеет не формальный, а четко выраженный физический смысл.

1.6. Напряжения в точке тела

Определение внутренних сил в сечениях элемента конструкции необходимо в первую очередь для оценки его несущей способности. Однако усилия, найденные методом сечений, являются лишь равнодействующими внутренних сил, которые распределены по рассматриваемому сечению. Чтобы судить о прочности, необходимо знать наибольшие силы, возникающие в отдельных точках сечения.

Выделим вокруг произвольной точки K (рис. 1.16, *а*) площадку ΔA, а равнодействующую внутренних сил на этой площадке обозначим ΔR. Отношение

$$s_m = \Delta R/\Delta A \qquad (1.3)$$

представляет собой *среднее напряжение* на указанной площадке. При уменьшении размеров площадки (стягивании ее в точку K) в пределе получается *истинное напряжение* в данной точке рассматриваемого сечения

$$s = \lim_{\Delta A \to 0} \Delta R/\Delta A. \qquad (1.4)$$

Эта векторная величина является мерой интенсивности внутренних сил. В Международной системе единиц измерений (СИ) она выражается, как и давление (см. п. 1.4), в паскалях. Однако эта единица мала и в технических расчетах используют кратную единицу мегапаскаль: 1 МПа $= 10^6$ Па.

Понятие «напряжение» играет важнейшую роль в расчетах на прочность. Однако оно непременно предполагает, что рассчитываемый элемент выполнен из сплошного материала (см. п. 1.2, 1-е допущение).

Через любую точку тела можно провести бесчисленное множество различно ориентированных в пространстве сечений (площадок). В общем случае возникающие по ним напряжения также различны. Таким образом, если для силы достаточно указать ее значение, направление и точку приложения, то для напряжения необходимо еще указать и положение площадки, на которой оно определяется.

Разложим вектор напряжения s на две составляющие: нормальную к площадке и лежащую в ее плоскости. Тогда получим нормальное напряжение σ и касательное τ (рис. 1.16, *б*). Нормальные напряжения препятствуют отрыву одной части тела (элемента) от

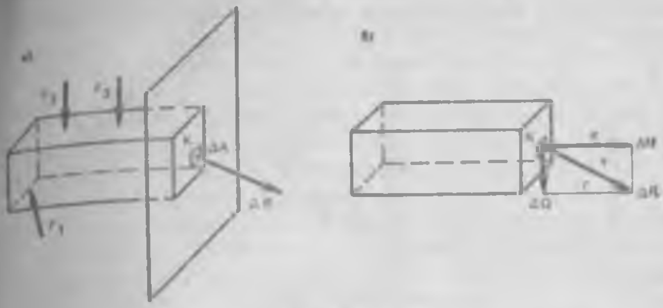


Рис. 1.16

другой или их взаимному прижатию. Касательные напряжения препятствуют взаимному сдвигу.

Если разложить на составляющие не напряжение, а саму силу ΔR, то получим следующие выражения:
для нормального напряжения

$$\sigma = \lim_{\Delta A \to 0} \Delta N / \Delta A, \qquad (1.5)$$

для касательного

$$\tau = \lim_{\Delta A \to 0} \Delta Q / \Delta A. \qquad (1.6)$$

Следовательно, напряжение s можно рассматривать как полное напряжение в точке

$$s = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}. \qquad (1.7)$$

Глава 2. ОСЕВОЕ РАСТЯЖЕНИЕ (СЖАТИЕ)

2.1. Продольная сила

Осевым (центральным) растяжением (сжатием) называется такой вид деформации бруса, при котором внутренние силы в его поперечных сечениях приводятся к одной равнодействующей силе N, направленной вдоль оси z (см. рис. 1.15, *г*). Эта сила, как указывалось в п. 1.5, называется **продольной** или **нормальной**, поскольку она перпендикулярна (нормальна) поперечному сечению.

Осевое растяжение и сжатие часто встречаются

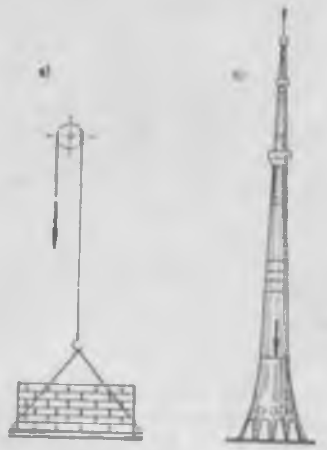


Рис. 2.1

Рис. 2.2

Рис. 2.3

в строительной практике. Растяжение, например, возникает в тросе любого подъемника (рис. 2.1, *а*), на сжатие под действием собственного веса при отсутствии ветровой нагрузки работают сооружения башенного типа (рис 2.1, *б*).

Тонкий и длинный прямой брус, работающий на растяжение или сжатие, обычно называют *стержнем*[1]. Вертикально стоящий брус, предназначенный для восприятия сжимающей нагрузки от вышележащих конструкций, называется *колонной* или *стойкой* (рис. 2.2).

Продольную силу определяют методом сечений. Брус рассекают воображаемой плоскостью, перпендикулярной его оси, мысленно отбрасывают одну из образовавшихся частей, а ее действие на оставшуюся часть заменяют не-

[1] Говоря здесь о сжатии бруса (стержня), полагаем, что отношение его длины к поперечному размеру не более того значения, при котором возможна потеря устойчивости прямолинейной формы (см рис 1.1, *в*). Вопросам устойчивости сжатых элементов посвящена гл. 10.

известной силой N (рис. 2.3). После этого составляют единственное уравнение равновесия оставшейся части $\Sigma Z = 0$, из которого и определяют значение N.

Правило знаков. *Силу N принято считать положительной при растяжении, т. е. когда она направлена от сечения* (см. рис. 2.3). При сжатии, наоборот, продольная сила отрицательна и направлена к сечению.

Если направление продольной силы неизвестно, то ее условно принимают положительной, полагая, что брус растянут. Знак «минус» при решении уравнения равновесия укажет на ошибочность выбранного направления, и в действительности брус окажется сжатым.

В тех случаях, когда значения продольной силы в различных сечениях бруса неодинаковы, строят эпюру продольных сил, которая представляет собой график изменения силы N по длине бруса. Эпюра необходима для расчета бруса на прочность. Она позволяет быстро находить *опасные* сечения, т. е. сечения, где продольная сила достигает наибольших абсолютных значений. Порядок построения эпюры N рассмотрен в примере 2.1.

Пример 2.1. Определить значения продольной силы на всех участках бруса, нагруженного силами $F_1 = 60$ кН, $F_2 = 40$ кН, $F_3 = 90$ кН (рис. 2.4, *а*), и построить эпюру продольных сил.

Решение. Брус имеет три участка. Их границами являются сечения, где приложены внешние силы. Расчет защемленного бруса целесообразно начинать со свободного конца, так как при этом отпадает необходимость в предварительном определении реакции заделки. Пользуясь методом сечений, мысленно разрезаем брус по сечению *I—I* верхнего участка и отбрасываем нижнюю часть, заменяя ее действие на оставшуюся верхнюю неизвестной продольной силой N_1 (рис 2.4, *б*).

Предполагая, что эта сила направлена от сечения (т. е. рассматриваемый участок растянут), и руководствуясь правилом знаков статики, составляем уравнение равновесия верхней части:

$$\Sigma Z = 0; \quad -F_1 - N_1 = 0,$$

откуда

$$N_1 = -F_1 = -60 \text{ кН}.$$

Продольная сила получилась отрицательной, следовательно, ее первоначальное направление выбрано неправильно, и участок работает не на растяжение, а на сжатие. Заметим, что полученное значение продольной силы справедливо на всем протяжении верхнего участка, поскольку в любом его поперечном сечении удовлетворяется записанное уравнение равновесия.

Путем аналогичных рассуждений в сечении *2—2* (рис. 2.4, *в*) получаем:

$$\Sigma Z = 0; \quad -F_1 + F_2 - N_2 = 0;$$

$$N_2 = -F_1 + F_2 = -60 + 40 \text{ кН} = -20 \text{ кН},$$

т. е. средний участок тоже сжат.

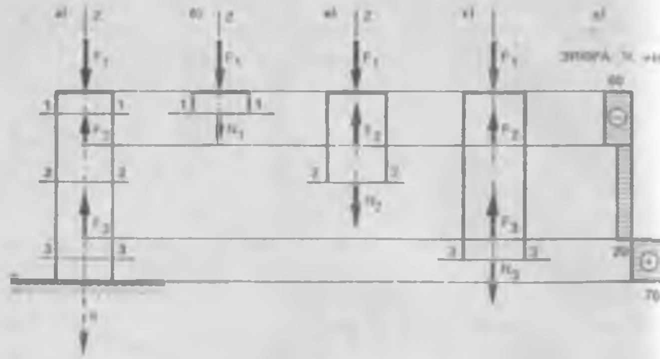


Рис. 2.4

Анализируя выражения усилий N_1 и N_2, замечаем, что *продольная сила в поперечном сечении прямого бруса численно равна алгебраической сумме проекций на его ось всех внешних сил, приложенных с одной стороны* (в данном случае — сверху) *от рассматриваемого сечения.*

Сформулированный вывод имеет большое практическое значение. Он позволяет определять продольную силу, не прибегая каждый раз к изображению отсеченной части бруса и составлению уравнений равновесия. При этом необходимо уже руководствоваться введенным выше правилом знаков силы N (знак «плюс» — при растяжении, знак «минус» — при сжатии).

С учетом сказанного в сечении *3—3* (рис. 2.4, *г*)

$$N_3 = -F_1 + F_2 + F_3 = N_2 + F_3 = -20 + 90 \text{ кН} = 70 \text{ кН}.$$

Сила положительна, поэтому нижний участок растянут.

Вычислив значения продольной силы на каждом участке, покажем ее графическое изменение по длине бруса. Для этого проводим параллельно оси бруса так называемую *базисную* линию (ось эпюры) и откладываем перпендикулярно ей в выбранном масштабе найденные значения N (рис. 2.4, *д*): положительные — вправо, отрицательные — влево (для горизонтально расположенного бруса — соответственно вверх и вниз). Соединяем полученные точки прямыми, параллельными базисной линии, и указываем алгебраические знаки. Построенную таким образом эпюру заштриховываем линиями, перпендикулярными оси. По этим линиям можно судить о значении продольной силы в соответствующих поперечных сечениях бруса.

Графическое оформление эпюры должно отвечать ГОСТ 2.319—81 (СТ СЭВ 2824—80) и ГОСТ 2.303—68 (СТ СЭВ 1178—78). Ось эпюры следует выполнять сплошной основной линией толщиной $s = 0{,}5$—1,4 мм, саму эпюру — сплошной линией толщиной $2s$. Линии штриховки и выносные должны быть тонкими, толщиной от $s/3$ до $s/2$.

Из рассмотрения построенной эпюры видно, что в сечениях, где приложены внешние силы (на границах участков) внутренняя сила меняется скачкообразно, причем размер скачка равен соответствую-

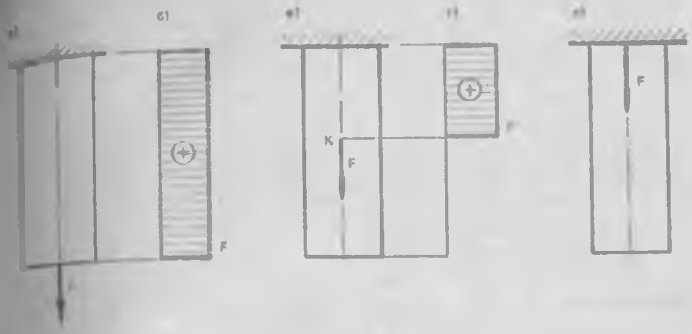


Рис. 2.5

внешней силе. Так, скачок на уровне заделки характеризует значение реакции ($R = 70$ кН). Знак на нижнем участке свидетельствует о том, что реакция направлена вниз (от опорного сечения).

Пример 2.2. Исследовать, как влияет на работу бруса перенос внешней силы по линии ее действия.

Р е ш е н и е. На рис. 2.5, *а* внешняя сила приложена к свободному концу и растягивает весь брус: в любом поперечном сечении возникает продольная сила $N = F$ (рис. 2.5, *б*). Если перенести силу F по оси в точку K (рис. 2.5, *в*), то равновесие бруса не нарушится, реакция заделки не изменится, но растянутой окажется только верхняя часть (рис. 2.5, *г*). И, наконец, если приложить внешнюю силу к закрепленному концу бруса, то она не вызовет растяжения вообще (рис. 2.5, *д*).

Таким образом, перенос силы по линии ее действия существенно меняет характер работы бруса. Следовательно, понятие точки приложения силы, которое не имеет конкретного смысла для абсолютно твердого тела (т. е. в статике), при определении внутренних сил в деформируемом теле приобретает первостепенное значение.

2.2. Напряжения, деформации и перемещения

При осевом растяжении (сжатии) в поперечных сечениях бруса возникают только нормальные напряжения σ. Поскольку продольная сила является равнодействующей внутренних сил σdA, возникающих на бесконечно малых площадках поперечного сечения (рис. 2.6, *а*), ее можно представить в виде

$$N = \int_A \sigma dA. \qquad (2.1)$$

Если исходить только из с т а т и ч е с к о й стороны задачи по определению напряжений, то формально одному и тому же значению силы N может соответствовать бесчисленное множество законов распределения (эпюр) напряжений по сечению. Во всех трех брусьях, изображенных на рис. 2.6, *б*, *в*, *г* продольная сила, отвечающая эпюре σ, одинакова: $N=F$. Таким образом, записанное интегральное уравнение не позволяет определить напряжения, пока не установлен закон их распределения, т. е. рассматриваемая задача статически неопределима. Из бесчисленного множества статически возможных эпюр σ действительна лишь та, которая соответствует характеру деформирования бруса, поэтому необходимо исследовать геометрическую сторону задачи.

Чтобы составить представление о деформированном состоянии бруса, в сопротивление материалов вводится упрощающая гипотеза плоских сечений (гипотеза Я. Бернулли [1]), которая гласит: *сечения бруса, плоские и перпендикулярные его продольной оси до деформирования, остаются плоскими и перпендикулярными оси в процессе деформирования.*

Подтверждением гипотезы может служить следующий простой эксперимент. Если на поверхность ненагруженного бруса нанести сетку из продольных и поперечных линий (рисок, рис. 2.7, *а*), то после нагружения нетрудно убедиться, что поперечные риски (т. е. линии пересечения плоскостей поперечных сечений с поверхностью бруса) остаются прямолинейными и перпендикулярными продольным рискам (продольной оси бруса, рис. 2.7, *б*). Изменяются лишь размеры клеток. При растяжении они несколько увеличиваются в продольном направлении и уменьшаются в поперечном (при сжатии — наоборот).

Полагая, что характер деформирования внутри бруса такой же, как на поверхности, представим брус условно состоящим из продольных материальных элементов бесконечно малого поперечного сечения. Эти элементы в дальнейшем будем называть волокнами. Согласно гипотезе плоских сечений все волокна в рассматриваемом случае получают одинаковую деформацию

$$\varepsilon = \Delta l / l = (l_1 - l)/l. \tag{2.2}$$

Здесь ε — *относительное удлинение* (при сжатии — укорочение) или *продольная деформация;* Δl — абсолютное удлинение (укорочение); l — первоначальная длина бруса; l_1 — длина после нагружения.

[1] Якоб Бернулли — старший (J. Bernoulli, 1654—1705) — швейцарский математик, принадлежащий к талантливой семье, которая дала науке несколько выдающихся ученых. Родоначальник семьи был выходцем из Голландии.

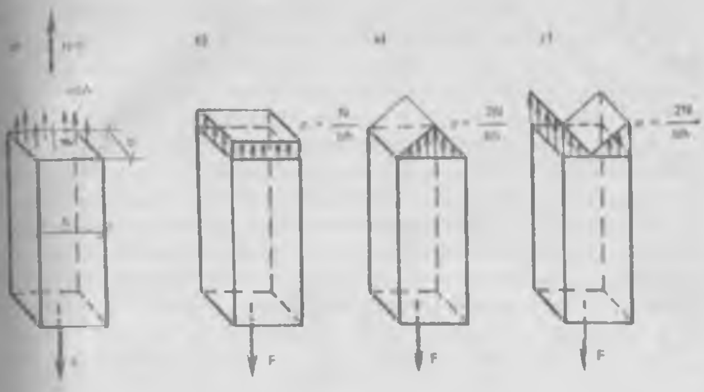


Рис. 2.6

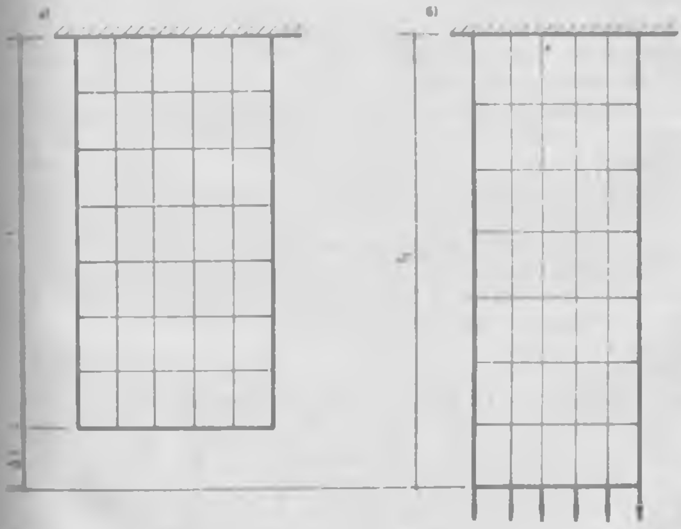


Рис. 2.7

Формула (2.2) выражает геометрическую сторону задачи о растяжении (сжатии). При растяжении $\Delta l>0$ и $\varepsilon>0$, при сжатии — наоборот. Чтобы перейти от деформаций к искомым напряжениям, необходимо рассмотреть физическую сторону задачи.

Связь между напряжениями и деформациями может быть любой, в том числе и нелинейной. Но если материал однороден (см. п. 1.2, 1-е допущение), то одинаковым деформациям будут соответствовать одинаковые напряжения. Следовательно, нормальные напряжения в поперечном сечении растянутого (сжатого) бруса распределяются равномерно (σ=const) и выражение (2.1) принимает вид:

$$N=\sigma\int_A dA=\sigma A.$$

Отсюда

$$\sigma=N/A, \qquad (2.3)$$

где N — продольная сила в поперечном сечении, Н; A — площадь поперечного сечения, м².

Таким образом, из трех приведенных эпюр действительна та, которая изображена на рис. 2.6, *б*.

В том случае, когда внешние силы приложены только к торцам призматического бруса и к тому же равномерно распределены по их площади, гипотеза плоских сечений выполняется строго. При неравномерном распределении внешних сил сечения перестают быть плоскими (депланируют). Однако многочисленные опыты и теоретические исследования показывают, что на сравнительно небольшом удалении от торца (порядка наибольшего поперечного размера бруса) сечения остаются плоскими. Это обстоятельство позволяет в дальнейшем руководствоваться принципом Сен-Венана[1]. Применительно к рассматриваемому случаю он гласит: *способ приложения внешних сил существенно влияет на распределение напряжений только вблизи мест нагружения.* Другими словами, нарушение равномерности распределения напряжений носит *местный* характер. По мере удаления от указанных мест неравномерность быстро затухает (рис. 2.8). Следовательно, если не принимать во внимание зоны местных напряжений, то можно не конкретизировать

[1] Барре де Сен-Венан (B. de Saint-Venant, 1797—1886) — известный французский ученый в области механики твердых и жидких тел.

способ приложения внешних сил и полагать, что распределение напряжений в поперечном сечении бруса зависит только от равнодействующей этих сил.

Местные напряжения возникают также вблизи отверстий, выточек, надрезов и прочих ослаблений, т. е. там, где резко меняются форма и размеры поперечного сечения. Это явление называется **концентрацией напряжений.** Более подробно оно рассматривается в п. 2.8. Здесь же ограничимся определением осредненных, номинальных напряжений по формуле (2.3) с учетом фактической площади сечения, занимаемой материалом (за вычетом площади ослаблений).

Рис. 2.8

В тех случаях, когда нормальные напряжения в различных сечениях бруса неодинаковы, строят эпюру нормальных напряжений, которая по аналогии с эпюрой N представляет собой график изменения напряжений σ по длине бруса. При этом следует иметь в виду, что у бруса постоянного сечения эпюры N и σ подобны (ординаты отличаются в A раз) и достаточно построить одну из них.

Знак нормальных напряжений устанавливается так же, как для продольной силы: при растяжении — «плюс», при сжатии — «минус».

В упругой стадии работы большинства конструкционных материалов напряжения и деформации связаны прямой пропорциональной зависимостью

$$\sigma=E\varepsilon. \qquad (2.4)$$

Коэффициент пропорциональности E называется *модулем продольной упругости* или *модулем упругости при растяжении.* Он имеет размерность напряжения (поскольку ε — безразмерная величина) и выражается в паскалях или гигапаскалях (1 ГПа = 10^9 Па). Модуль E — физическая константа, характеризующая жесткость материала. Чем больше E, тем меньше деформируется материал при одном и том же напряжении. Нормативные значения модуля продольной упругости для наиболее распространенных строительных материалов приведены в табл. 2.1. В отношении стали следует иметь в виду, что

Таблица 2.1. **Значения модуля упругости E и коэффициента поперечной деформации ν**

Материал	E, ГПа	ν
Сталь прокатная	206	0,3
Алюминиевые сплавы	70	0,3
Бетон	4—40	0,2
Кирпичная кладка	0,1—7,8	0,25
Древесина при растяжении (сжатии):		
вдоль волокон	10	0,5
поперек волокон	0,4	0,02
Резина	0,007	0,5
Стекло	50—60	0,24—0,27
СВАМ при соотношении продольных и поперечных слоев:		
1 : 1	35	0,13
10 : 1	58	—

ее модуль практически не зависит от химического состава и термической обработки. Поэтому жесткость стальных конструкций и элементов не может быть повышена за счет применения легированной стали высокой прочности.

Конкретные значения модуля упругости бетона зависят от вида бетона, способа твердения, класса прочности на сжатие и приводятся в главе СНиП [5]. Модуль упругости каменной кладки устанавливается в соответствии с указаниями главы СНиП [7].

Формула (2.4) представляет собой математическое выражение закона Гука[1] при растяжении (сжатии), ус-

[1] Роберт Гук (R. Hooke, 1635—1703) — английский естествоиспытатель, архитектор и инженер. Свое право на приоритет в области изучения упругих свойств материалов он оговорил в 1676 г. в виде криптограммы ceiiinosssttuv (прием публикации, весьма характерный для XVII в.), которую расшифровал лишь два года спустя латинской фразой «Ut tensio, sic vis» — «Каково удлинение, такова и сила». Независимо от Гука в 1680 г. к такому же заключению пришел французский физик Эдмон Мариотт (E. Mariotte, 1620—1684).

Идею о модуле упругости впервые высказал в 1800 г. английский ученый Томас Юнг (T Young, 1773—1829). Он изложил ее семью годами позже в специальной статье, однако физический смысл модуля остался для большинства невыясненным, тем более что сам Юнг дал этому понятию не совсем четкое определение.

Закон Гука в форме (2.4) и современное толкование модуля E дал в 1826 г. французский ученый и инженер Луи Навье (L. M. H. Navier, 1785—1836).

тановленного экспериментальным путем и описывающего свойства материала. Для практических расчетов более удобна формула, которая получается после подстановки выражений (2.3) и (2.2) в формулу (2.4) и преобразования последней относительно абсолютного удлинения (укорочения):

$$\Delta l = Nl/(EA). \tag{2.5}$$

Эта зависимость описывает свойства уже не материала, а бруса, и ее следует рассматривать как закон Гука для конструкции. Она позволяет определять изменение длины бруса (или его отдельного участка) постоянного сечения, если известны геометрические размеры (l, A) и материал, из которого выполнен брус (E), а продольная сила также постоянна. Произведение EA называют *жесткостью сечения* бруса при растяжении (сжатии).

В общем случае, когда значения N и A (или хотя бы одной из этих величин) на отдельных участках бруса различны, вычисление Δl ведут в пределах каждого участка, а затем полученные результаты алгебраически суммируют.

По аналогии с продольной деформацией отношение

$$\varepsilon' = \Delta h/h = \Delta b/b \tag{2.6}$$

представляет собой *поперечную деформацию*. Здесь разности

$$\Delta h = h_1 - h; \quad \Delta b = b_1 - b$$

характеризуют абсолютное изменение поперечных размеров бруса (рис. 2.9).

Поперечная деформация изотропного материала по всем направлениям одинакова. При растяжении она отрицательна (сужение), при сжатии — положительна (расширение). Отношение

$$\nu = |\,\varepsilon'/\varepsilon\,| \tag{2.7}$$

называется *коэффициентом поперечной деформации* или *коэффициентом Пуассона*[1].

Экспериментально установлено, что в упругой стадии работы любого материала значение ν постоянно. Оно ле-

[1] Симеон Дени Пуассон (S. D. Poisson, 1781—1840) — французский физик, механик и математик. Он теоретически получил для всех материалов $\nu = 0{,}25$. Однако последующие экспериментальные исследования не подтвердили это положение.

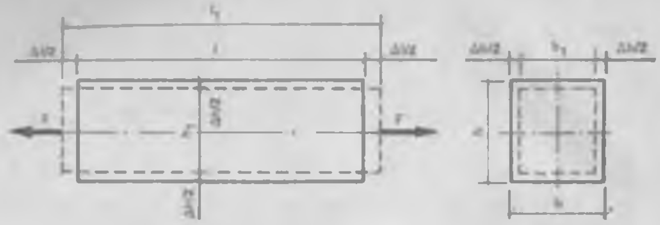


Рис. 2.9

жит в пределах 0—0,5. Для наиболее распространенных строительных материалов ν составляет 0,2—0,3 (см. табл. 2.1). Минимальное значение $\nu=0$ имеет пробка. Величины E и ν характеризуют упругие свойства материала.

При растяжении (сжатии) поперечные сечения бруса перемещаются в продольном направлении. *Перемещение* является следствием деформации, но эти два понятия необходимо четко разграничивать. Так, в случае, представленном на рис. 2.5, *в*, деформируется (растягивается) только верхняя часть бруса (см. рис. 2.5, *г*), а нижняя перемещается как абсолютно твердое тело вниз на размер удлинения верхней части. В случае, изображенном на рис. 2.5, *а*, *б*, деформируется весь брус и поэтому перемещение любой его части совпадает с соответствующим удлинением.

Пример 2.3. По оси трехступенчатого алюминиевого[1] бруса приложены силы $F_1=30$ кН, $F_2=80$ кН, $F_3=110$ кН (рис. 2.10, *а*). Ступени имеют длины: $l_1=25$ см, $l_2=35$ см, $l_3=40$ см. Соответствующие площади поперечных сечений: $A_1=2$ см², $A_2=3$ см², $A_3=3{,}5$ см².

Построить эпюры продольных сил, нормальных напряжений и перемещений.

Решение. *Построение эпюры N*. Разбиваем брус на три участка, границы которых совпадают с сечениями, где приложены внешние силы. По аналогии с примером 2.1 определяем значения продольной силы на каждом участке, начиная от свободного конца: $N_{OC}=F_1=30$ кН; $N_{CG}=N_{OC}-F_2=30-80$ кН$=-50$ кН; $N_{GH}=N_{CG}+F_3=-50+110$ кН$=60$ кН.

Эпюра продольных сил построена на рис. 2.10, *б*. Из нее видно, что реакция заделки равна 60 кН и направлена вверх.

Построение эпюры σ. Для вычисления напряжений по формуле

[1] Здесь и в дальнейшем под термином «алюминий» подразумеваются деформируемые алюминиевые сплавы, которые находят применение в строительных конструкциях.

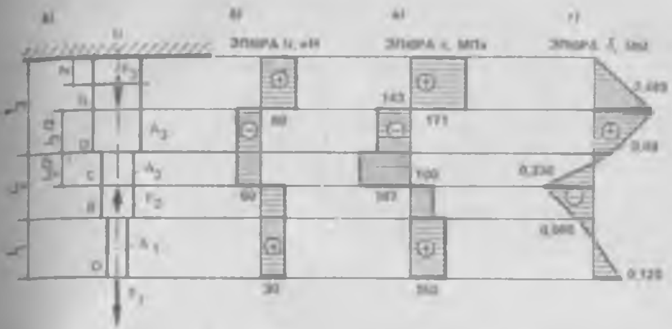


Рис. 2.10

(2.3) брус приходится разбивать на большее число участков (пять). Их границы определяются не только сечениями, где приложены внешние силы, но и сечениями, где меняются поперечные размеры бруса. Пользуясь эпюрой N, находим:

$$\sigma_{OB}=N_{OB}/A_1=30\cdot10^3/(2\cdot10^{-4})\text{ Па}=150\cdot10^6\text{ Па}=150\text{ МПа};$$

$$\sigma_{BC}=N_{BC}/A_2=30\cdot10^3/(3\cdot10^{-4})\text{ Па}=100\text{ МПа};$$

$$\sigma_{CD}=N_{CD}/A_2=-50\cdot10^3/(3\cdot10^{-4})\text{ Па}=-167\text{ МПа};$$

$$\sigma_{DG}=N_{DG}/A_3=-50\cdot10^3/(3{,}5\cdot10^{-4})\text{ Па}=-143\text{ МПа};$$

$$\sigma_{GH}=N_{GH}/A_3=60\cdot10^3/(3{,}5\cdot10^{-4})\text{ Па}=171\text{ МПа}.$$

Эпюра нормальных напряжений представлена на рис. 2.10, *в*. Она строится по такому же принципу, как эпюра продольных сил. Каждая ее ордината характеризует в принятом масштабе значение напряжений в соответствующем поперечном сечении бруса.

Построение эпюры δ. Определение перемещений необходимо начинать от неподвижного конца, т. е. от заделки. Перемещение произвольного сечения z верхнего участка (см. рис. 2.10, *а*) равно абсолютному удлинению той части бруса, которая заключена между этим сечением и заделкой. Таким образом, согласно зависимости (2.5)

$$\delta(z)=\Delta l(z)=N_{GH}z/(EA_3)=\sigma_{GH}z/E.$$

Получили уравнение *наклонной прямой* (переменная z входит в первой степени). При $z=l_3/2$ и $E=70$ ГПа (см. табл. 2.1) находим перемещение сечения G относительно заделки

$$\delta_{GH}=\Delta l_{GH}=\sigma_{GH}\,l_3/(2E)=171\cdot10^6\cdot0{,}4/(2\cdot70\cdot10^9)\text{ м}=$$
$$=0{,}489\cdot10^{-3}\text{ м}=0{,}489\text{ мм}.$$

Перемещение сечения D относительно заделки складывается из

Рис. 2.11

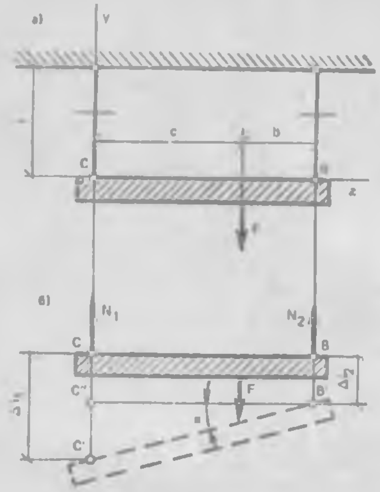
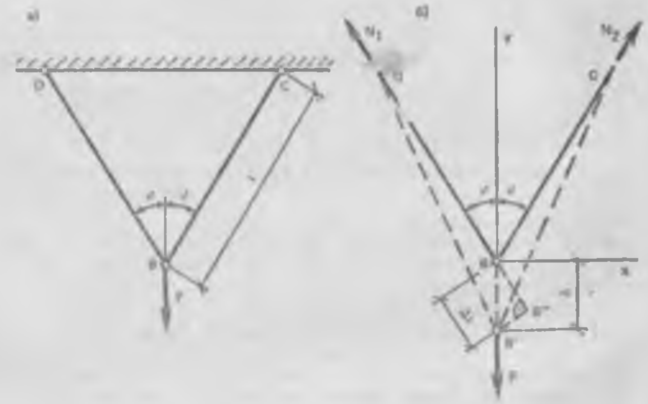


Рис. 2.12



перемещения этого сечения относительно сечения G (абсолютного укорочения участка DG)

$$\delta_{DG} = \Delta l_{DG} = \sigma_{DG}\, l_3/(2E) = -143\cdot 0,4/(2\cdot 70\cdot 10^3) \text{ м} =$$
$$= -0,409\cdot 10^{-3} \text{ м} = -0,409 \text{ мм}$$

и перемещения сечения G относительно заделки:

$$\delta_{DH} = \delta_{DG} + \delta_{GH} = -0,409 + 0,489 \text{ мм} = 0,08 \text{ мм}.$$

Перемещение сечения C относительно заделки

$$\delta_{CH} = \delta_{CD} + \delta_{DH} = \sigma_{CD}\, l_2/(2E) + \delta_{DH} =$$
$$= -167\cdot 0,35/(2\cdot 70) + 0,08 \text{ мм} = -0,338 \text{ мм}.$$

Аналогично определяются перемещения сечений B и O, в чем нетрудно убедиться самостоятельно. Контролем может служить эпюра δ, построенная на рис. 2.10, *г*. Знак «плюс» соответствует перемещению в положительном направлении оси z, т. е. вниз, знак «минус» — перемещению вверх. Линейность эпюры доказана раньше.

Пример 2.4. Жесткий брус CB, деформацией которого можно пренебречь, подвешен на двух тягах кругового сечения длиной $l = 1,5$ м (рис. 2.11, *а*). Левая тяга диаметром $d_1 = 2$ см выполнена из алюминия, правая диаметром $d_2 = 2,5$ см — из стали.

Определить усилия, напряжения и удлинения тяг, если к брусу на расстоянии $c = 2$ м от левой тяги и $b = 1$ м от правой подвешен груз $F = 150$ кН. Найти угол наклона бруса к горизонту после деформирования тяг.

Решение. *Определение усилий.* Мысленно рассекаем систему на две части, отбрасываем верхнюю часть и прикладываем усилия N_1 и N_2, уравновешивающие отсеченную нижнюю часть (рис. 2.11, *б*).

Для равновесия плоской системы параллельных сил необходимо удовлетворение двух условий:

$$\Sigma m_B = 0; \quad N_1(c+b) - Fb = 0;$$
$$N_1 = Fb/(c+b) = 150\cdot 1/(2+1) \text{ кН} = 50 \text{ кН};$$
$$\Sigma m_C = 0; \quad -N_2(c+b) + Fc = 0;$$
$$N_2 = Fc/(c+b) = 150\cdot 2/(2+1) \text{ кН} = 100 \text{ кН}.$$

Имеющееся третье уравнение используем для проверки:

$$\Sigma Y = N_1 - F + N_2 = 50 - 150 + 100 \text{ кН} = 0,$$

т. е. усилия найдены верно.

Определение напряжений. По формуле (2.3)

$$\sigma_1 = N_1/A_1 = 4N_1/(\pi d_1^2) = 4\cdot 50\cdot 10^3/(3,14\cdot 0,02^2) \text{ Па} =$$
$$= 159\cdot 10^6 \text{ Па} = 159 \text{ МПа};$$
$$\sigma_2 = 4N_2/(\pi d_2^2) = 4\cdot 100\cdot 10^3/(3,14\cdot 0,025^2) \text{ Па} = 204 \text{ МПа}.$$

Определение удлинений. Согласно выражению (2.5) и табл. 2.1

$$\Delta l_1 = N_1\, l/(E_1 A_1) = \sigma_1\, l/E_1 = 159\cdot 10^6\cdot 1,5/(70\cdot 10^9) \text{ м} =$$
$$= 3,41\cdot 10^{-3} \text{ м} = 3,41 \text{ мм};$$
$$\Delta l_2 = \sigma_2\, l/E_2 = 204\cdot 1,5/206 \text{ мм} = 1,49 \text{ мм}.$$

Угол наклона бруса к горизонту после деформирования тяг находим из треугольника $C'C''B'$:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{C'C''}{C''B'} = \frac{\Delta l_1 - \Delta l_2}{c+b} = \frac{(3,41-1,49)\,10^{-3}}{2+1} = 0,64\cdot 10^{-3}.$$

Отсюда $\alpha \approx 2'$.

Пример 2.5. Груз F подвешен на двух наклонных стержнях длиной l и площадью поперечного сечения A каждый (рис. 2.12, *а*). Определить перемещение δ узла B, если оба стержня изготовлены из одного материала с модулем упругости E.

Решение. *Определение усилий в стержнях.* Отбрасываем мысленно верхнее закрепление и заменяем его действие неизвестными усилиями N_1 и N_2, направленными вдоль стержней (рис. 2.12, *б*). Для плоской системы сходящихся сил статика дает два уравнения равновесия: $\Sigma X = 0$ и $\Sigma Y = 0$, из которых первое в силу симметрии обращается в тождество $N_1 = N_2 = N$, а второе принимает вид $2N\cos\varphi - F = 0$, откуда

$$N = F/(2\cos\varphi). \qquad (a)$$

При этом в соответствии с 3-м допущением (см. п. 1.2) считаем, что после приложения нагрузки угол φ не меняется.

Определение перемещения. Вследствие симметрии системы узел B сместится под действием силы F вертикально вниз в положение B'. Перемещение $BB' = \delta$ можно рассматривать как результат удлинения стержня DB на отрезок $BB'' = \Delta l$ и поворота по дуге окружности с центром в точке D из положения B'' в положение B' на оси y. Ввиду малости угла поворота считаем, что перемещение из точки B'' происходит по прямой $B'B''$ перпендикулярно DB. Тогда $BB' = BB''/\cos\varphi$ или

$$\delta = \Delta l/\cos\varphi.$$

Но согласно выражению (2.5) и равенству (а)

$$\Delta l = Nl/(EA) = Fl/(2EA\cos\varphi).$$

Следовательно,

$$\delta = Fl/(2EA\cos^2\varphi).$$

2.3. Особенности и расчет статически неопределимых систем

В предыдущем параграфе показана сущность так называемой *внутренней* статической неопределимости системы, когда для определения напряжений в поперечном сечении бруса понадобилось допущение о характере его деформирования (гипотеза плоских сечений). Однако система может оказаться и *внешне* статически неопределимой, т. е. неопределимой в отношении опорных реакций (реакций связей) и, следовательно, усилий.

Статически неопределимыми принято называть системы, усилия в которых нельзя определить с помощью только уравнений статики. Все статически неопределимые системы имеют «лишние» связи в виде дополнительных закреплений, стержней и других элементов. «Лишними» такие связи называют потому, что они не являются необходимыми с точки зрения обеспечения равновесия системы или ее геометрической неизменяемости[1], и их устройство преследует конструктивные или эксплуатационные цели.

Разность между количеством неизвестных и количеством независимых уравнений равновесия, которые можно составить для данной системы, характеризует число лишних неизвестных или *степень статической неопределимости.*

Расчет статически неопределимых систем производят по той же методологической схеме, что и в указанном параграфе.

1. Статическая сторона задачи. Пользуясь методом сечений, составляют уравнения равновесия отсеченных элементов системы, содержащие неизвестные усилия, и выявляют степень статической неопределимости.

2. Геометрическая сторона задачи. Рассматривая систему в деформированном состоянии, устанавливают связь между перемещениями точек ее элементов. Полученные зависимости называются *уравнениями совместности перемещений.* Их количество должно быть равно числу лишних неизвестных.

3. Физическая сторона задачи. На основании закона Гука по формуле (2.5) выражают удлинения (укорочения) элементов системы, входящие в уравнения перемещений, через усилия.

4. Синтез. Решая совместно статические и физические уравнения, находят неизвестные усилия.

Пример 2.6. Как изменится эпюра продольных сил в брусе, изображенном на рис. 2.5, *в*, если его нижний конец будет также защемлен (рис. 2.13, *а*)? Жесткость EA постоянна.

Решение. *Статическая сторона.* Так как сила F приложена вертикально вниз, опорные реакции R_B и R_C направлены вверх. Для системы сил, действующих по одной прямой, можно составить единственное уравнение равновесия:

$$\Sigma Z = 0; \qquad R_B - F + R_C = 0.$$

Оно содержит два неизвестных: R_B и R_C. Следовательно, система

[1] Геометрически *неизменяемыми* являются системы соединенных между собой твердых тел (элементов), допускающие относительные перемещения тел только вследствие деформирования материала (например, шарнирно-стержневой треугольник, см. рис. 2.12, *а*). *Изменяемые* системы, или механизмы, допускают конечные относительные перемещения тел без деформирования материала, т. е. без изменения размеров хотя бы одного тела (например, шарнирно-стержневой четырехугольник). Более подробно эти вопросы рассматриваются в статике сооружений.

Рис. 2.13

один раз статически неопределима и ее необходимо рассмотреть в деформированном состоянии.

Геометрическая сторона. Мысленно отбросим одну из заделок, например B, как лишнюю связь и заменим ее действие соответствующей реакцией R_B. Для того чтобы полученный таким путем статически определимый брус (рис. 2.13, *б*) был эквивалентен заданному статически неопределимому по характеру деформирования, необходимо выполнение условия $\delta_B = 0$, т. е. перемещение сечения второго бруса по направлению приложенной неизвестной реакции в месте удаления лишней связи должно отсутствовать, поскольку общая длина бруса не меняется.

Согласно принципу независимости действия сил (см. п. 1.2, 4-е допущение) записанное условие может быть представлено в развернутом виде:

$$\delta_B = \delta_{BF} + \delta_{BR} = \Delta l_{CK} + (\Delta l_{BK} + \Delta l_{KC}) = 0,$$

где $\delta_{BF} = \Delta l_{CK}$ — перемещение сечения B от силы F, равное удлинению участка CK; $\delta_{BR} = \Delta l_{BK} + \Delta l_{KC}$ — перемещение того же сечения от реакции R_B, равное сумме укорочений участков BK и KC.

Физическая сторона. Согласно формуле (2.5) при $N = F$

$$\Delta l_{CK} = Fc/(EA);$$

при $N = R_B$

$$\Delta l_{BK} + \Delta l_{KC} = -[R_B b/(EA) + R_B c/(EA)].$$

Подставляя эти выражения в геометрическое уравнение, получаем

$$Fc/(EA) - R_B[b/(EA) + c/(EA)] = 0,$$

или после сокращения на EA

$$Fc = R_B(b+c),$$

откуда $R_B = Fc/(b+c)$.

Синтез. Подставляя найденное значение реакции в уравнение равновесия, определяем другую реакцию:

$$R_C = F - R_B = F - Fc/(b+c) = Fb/(b+c).$$

Таким образом, реакции обратно пропорциональны расстояниям соответствующих опор до точки приложения силы F. Эпюра продольных сил представлена на рис. 2.13, *в*.

Пример 2.7. Груз $F = 100$ кН подвешен на трех алюминиевых стержнях одинакового поперечного сечения. Средний стержень длиной l расположен вертикально, крайние наклонены под углом $\varphi = 30°$ (рис 2.14, *а*). Определить усилия в стержнях.

Решение *Статическая сторона.* Следуя примеру 2.5, мысленно отбрасываем верхнее закрепление и заменяем его действие неизвестными усилиями в стержнях N_1, N_2 и N_3 (рис. 2.14, *б*).

По-прежнему имеем два условия равновесия: $\Sigma X = 0$ и $\Sigma Y = 0$, из которых первое в силу симметрии системы обращается в тождество $N_1 = N_3$, а второе дает единственное уравнение равновесия

$$2N_1 \cos\varphi + N_2 - F = 0. \tag{а}$$

Оно содержит два неизвестных, т. е. система один раз статически неопределима.

Геометрическая сторона. Под действием силы F средний стержень удлинится на отрезок Δl_2, в результате чего узел B переместится в положение B'. По аналогии с указанным примером $BB' = BB''/\cos\varphi$, или

$$\Delta l_2 = \Delta l_1/\cos\varphi. \tag{б}$$

Физическая сторона. Формула (2.5) позволяет связать удлинения стержней Δl_1 и Δl_2 с искомыми усилиями N_1 и N_2, после чего уравнение (б) принимает вид:

$$\frac{N_2 l_2}{EA} = \frac{N_1 l_1}{EA\cos\varphi}. \tag{в}$$

Учитывая, что $l_1 = l/\cos\varphi$ и $l_2 = l$, после сокращения на EA получаем

$$N_2 l = N_1 l/\cos^2\varphi,$$

откуда

$$N_2 = N_1/\cos^2\varphi. \tag{г}$$

Синтез. Решая совместно систему уравнений (а) и (г), определяем усилия в стержнях:

$$2N_1\cos\varphi + N_1/\cos^2\varphi = F;$$

$$N_1 = N_3 = F\cos^2 30°/(1 + 2\cos^3 30°) =$$

$$= 100 \cdot 0{,}866^2/(1 + 2 \cdot 0{,}866^3) \text{ кН} = 32{,}6 \text{ кН};$$

$$N_2 = N_1/\cos^2 30° = 32{,}6/0{,}866^2 \text{ кН} = 43{,}5 \text{ кН}.$$

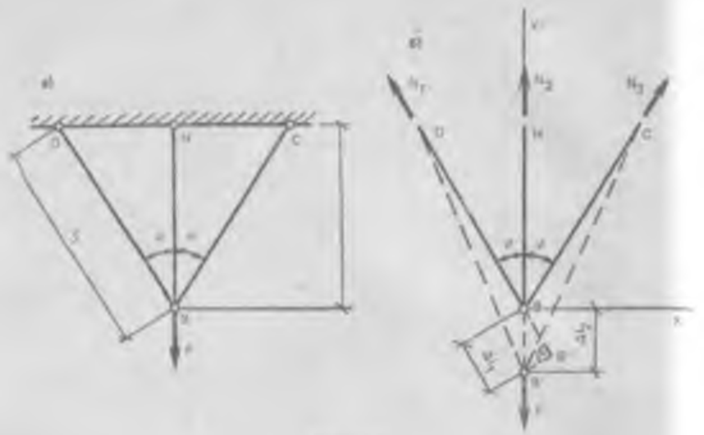


Рис. 2.14

Пример 2.8. Решить задачу, рассмотренную в предыдущем при мере, при условии, что средний стержень выполнен из стали, модул упругости которой в 3 раза больше модуля алюминия E.

Р е ш е н и е. При заданном соотношении модулей упругости урав нения (в) и (г) указанного примера принимают вид:

$$\frac{N_2 l_2}{3EA} = \frac{N_1 l_1}{EA \cos \varphi}; \qquad (в')$$

$$N_2 = 3N_1/\cos^2 \varphi. \qquad (г')$$

После решения системы уравнений (а) и (г′) получаем

$$N_1 = N_3 = F \cos^2 30^\circ/(3 + 2\cos^3 30^\circ) = 100 \cdot 0,866^2/(3 +$$
$$+ 2 \cdot 0,866^3) \text{ кН} = 17,4 \text{ кН};$$
$$N_2 = 3N_1/\cos^2 30^\circ = 3 \cdot 17,4/0,866^2 \text{ кН} = 69,6 \text{ кН}.$$

Сравнивая значения усилий, найденные в обоих случаях, замеч ем, что при увеличении жесткости среднего стержня он воспринимае большую часть силы F. В то же время значения усилий в крайни стержнях падают вследствие их меньшей жесткости по сравнению с средним.

Таким образом, из анализа выражений (а), (г) и (г′) следу п е р в а я о с о б е н н о с т ь статически неопределимых систем: че больше жесткость элемента, тем большую часть прилагаемой нагру ки он способен воспринять. Эта особенность позволяет регулирова усилия в статически неопределимых системах в зависимости от жес кости входящих в них стержней.

Пример 2.9. Определить напряжения в трехстержневой систем (см. рис. 2.14, *а*), возникающие от нагревания среднего стержня н $\Delta t = 40$ °С при отсутствии силы F. Крайние стержни выполнены и алюминия с модулем упругости E_1, средний из стали с модулем E_2 —

Рис. 2.15

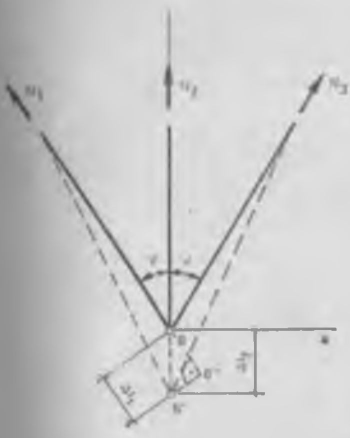
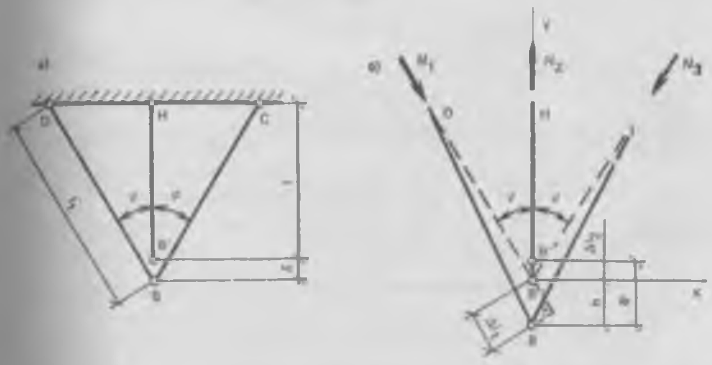


Рис. 2.16



$=3E_1$. Поперечное сечение всех стержней по-прежнему одинаковое, угол $\varphi=30°$.

Решение. *Статическая сторона.* До нагревания усилия в стержнях равны нулю, так как нагрузка отсутствует. Поскольку стержни связаны воедино в узле B, при нагревании они не смогут свободно удлиняться, и в них возникнут усилия $N_1=N_3$ и N_2 (рис. 2.15). Единственное уравнение равновесия опять содержит два неизвестных:

$$\Sigma Y=0; \quad 2N_1\cos\varphi+N_2=0, \tag{a}$$

т. е. и в этом случае система один раз статически неопределима.

Геометрическая сторона. Уравнение перемещений совпадает с зависимостью (б) примера 2.7, поскольку при нагревании среднего стержня узел B сместится вертикально вниз на расстояние $BB' = \Delta l_2$. Отсюда

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 \cos\varphi. \qquad (б)$$

Физическая сторона. Чтобы представить геометрическое уравнение в физической форме, следует учесть, что деформация среднего стержня зависит как от нагревания, так и от возникающего по этой причине усилия. Поэтому в данном случае необходимо отразить две физические закономерности: закон температурного удлинения, с одной стороны, и закон Гука — с другой, т. е.,

$$\Delta l_2 = \alpha l\,\Delta t + N_2\, l/(E_2 A). \qquad (в)$$

Здесь α — коэффициент линейного расширения, равный изменению единицы длины стержня при повышении температуры на 1 °С (для стали $\alpha = 12\cdot10^{-6}$ 1/°С).

Подставляем выражение (в) в уравнение (б):

$$\Delta l_1 = [\alpha l\,\Delta t + N_2\, l/(E_2 A)]\cos\varphi. \qquad (г)$$

Но согласно формуле (2.5) и зависимости $l_1 = l/\cos\varphi$

$$\Delta l_1 = N_1\, l_1/(E_1 A) = N_1\, l/(E_1 A\cos\varphi). \qquad (д)$$

Приравнивая правые части выражений (г) и (д), получаем

$$\frac{N_1 l}{E_1 A\cos\varphi} = \left(\alpha l\Delta t + \frac{N_2 l}{E_2 A}\right)\cos\varphi,$$

или после сокращения на l и небольших преобразований

$$N_1 = E_1 A\,[\alpha\Delta t + N_2/(E_2 A)]\cos^2\varphi. \qquad (е)$$

Определение усилий и напряжений. Решаем совместно уравнения (а) и (е):

$$N_1 = -N_2/(2\cos\varphi); \qquad -N_2/(2\cos\varphi) = E_1 A\,[\alpha\Delta t + N_2/(E_2 A)]\cos^2\varphi.$$

После раскрытия скобок и приведения подобных членов

$$-N_2\,[1/(2\cos\varphi)] + E_1 A\cos^2\varphi/(E_2 A)] = E_1 A\alpha\,\Delta t\cos^2\varphi,$$

или с учетом соотношения между модулями упругости стали и алюминия

$$N_2\,[(3E_1 A + 2E_1 A\cos^3\varphi)/(6E_1 A\cos\varphi)] = -E_1 A\alpha\Delta t\cos^2\varphi.$$

Сокращая обе части последнего равенства на A, окончательно находим

$$N_2 = -6E_1 A\alpha\Delta t\cos^3\varphi/(3 + 2\cos^3\varphi).$$

Знак «минус» указывает на то, что средний стержень сжат. Соответствующие напряжения по формуле (2.3) при $E_1 = 70$ ГПа (см. табл. 2.1)

$$\sigma_2 = N_2/A = -6E_1\,\alpha\Delta t\cos^3 30°/(3 + 2\cos^3 30°) =$$

$$= -6\cdot70\cdot10^9\cdot12\cdot10^{-6}\cdot40\cdot0{,}866^3/(3 + 2\cdot0{,}866^3)\ \text{Па} =$$

$$= -30{,}4\cdot10^6\ \text{Па} = -30{,}4\ \text{МПа}.$$

Напряжения в наклонных стержнях

$$\sigma_1 = \sigma_3 = N_1/A = -N_2/(2A\cos\varphi) = -\sigma_2/(2\cos 30°) =$$

$$= -(-30{,}4)/(2\cdot0{,}866)\ \text{МПа} = 17{,}6\ \text{МПа},$$

т. е. стержни растянуты.

Таким образом, **вторая особенность** статически неопределимых систем состоит в том, что усилия в их элементах зависят от температуры. Изменение температуры всей системы или отдельных стержней приводит к появлению так называемых *температурных напряжений*.

Пример 2.10. При сборке конструкции из трех стальных стержней одинакового поперечного сечения средний стержень оказался короче требуемой длины на $\delta = 1$ мм (рис. 2.16, *а*). Чтобы соединить концы стержней в узле B, образовавшийся зазор пришлось устранить за счет натяжения среднего стержня.

Определить возникшие по этой причине напряжения, если $\varphi = 30°$, $l = 1{,}5$ м.

Решение. *Статическая сторона.* Для натяжения среднего стержня необходимо приложить некоторую вертикальную силу. После сборки и освобождения от приложенной силы узел B под действием отпора среднего стержня переместится вверх в точку B'', занимающую промежуточное положение между B' и B (рис. 2.16, *б*). При этом средний стержень окажется удлиненным на Δl_2, а крайние укороченными на $\Delta l_1 = \Delta l_3$. Уравнение равновесия имеет вид

$$\Sigma Y = 0; \qquad -2N_1\cos\varphi + N_2 = 0 \qquad (а)$$

Геометрическая сторона характеризуется уравнением

$$\Delta l_1 = h\cos\varphi,$$

но $h = \delta - \Delta l_2$. Следовательно,

$$\Delta l_1 = (\delta - \Delta l_2)\cos\varphi. \qquad (б)$$

Физическая сторона. Используя формулу (2.5) и зависимость $l_1 = l/\cos\varphi$, на основании равенства (б) получаем второе уравнение, связывающее неизвестные усилия в стержнях:

$$N_1\, l/(EA\cos\varphi) = \delta\cos\varphi - [N_2\, l/(EA)]\cos\varphi. \qquad (в)$$

Определение усилий и напряжений. Решаем систему уравнений (а) и (в):

$$N_2 = 2N_1\cos\varphi; \qquad N_1\, l/(EA\cos\varphi) = \delta\cos\varphi - 2N_1\, l\cos^2\varphi/(EA).$$

Отсюда $N_1 = N_3 = \delta EA\cos^2\varphi/[l(1 + 2\cos^3\varphi)]$; $N_2 = 2\delta EA\cos^3\varphi/[l(1 + 2\cos^3\varphi)]$.

Таким образом, **третья особенность** статически неопределимых систем заключается в том, что в их элементах возникают усилия от неточности изготовления или сборки. Соответствующие напряжения называются *начальными напряжениями сборки* или *монтажными*. Учитывая, что крайние стержни сжаты, а средний растянут, находим:

$$\sigma_1 = \sigma_3 = N_1/A = -\delta E\cos^2 30°/[l(1 + 2\cos^3 30°)] =$$

$$= 1\cdot10^{-3}\cdot206\cdot10^9\cdot0{,}866^2/[1{,}5(1 + 2\cdot0{,}866^3)]\ \text{Па} =$$

$$= -44{,}8\cdot10^6\ \text{Па} = -44{,}8\ \text{МПа};$$

$$\sigma_2 = N_2/A = 2\,|\sigma_1|\cos 30° = 2\cdot44{,}8\cdot0{,}866\ \text{МПа} = 77{,}6\ \text{МПа}.$$

Итак, даже весьма малая неточность в изготовлении ($\delta = 1$ мм) вызывает значительные напряжения после сборки конструкции до приложения нагрузки. А поскольку отклонения от проектных размеров трудно предугадать заранее, необходимо стремиться к повышенной точности изготовления статически неопределимых конструкций.

Вместе с тем следует иметь в виду, что искусственное создание начальных напряжений, противоположных по знаку напряжениям от нагрузки, позволяет создавать экономичные конструкции. Этот прием, носящий название *предварительного напряжения*, широко используется в строительстве при возведении металлических и особенно железобетонных конструкций.

Идея предварительного напряжения становится понятной из анализа работы наклонных стержней. Если рассмотренную трехстержневую конструкцию нагрузить после сборки силой F, как в примере 2.7, то сжатые крайние стержни будут сначала разгружаться, а затем начнут работать на растяжение. В то же время средний стержень будет работать только на растяжение и напряжения в нем возрастут. Следовательно, можно сделать еще один важный вывод: начальные напряжения сборки вызывают разгрузку одних элементов и догрузку других.

2.4. Механические испытания материалов. Диаграмма растяжения низкоуглеродистой строительной стали

Механическими испытаниями называется экспериментальное исследование механических свойств материалов на специальных образцах, форма и размеры которых устанавливаются государственными стандартами (ГОСТами) или техническими условиями (ТУ). Механические испытания преследуют несколько целей.

1. В предыдущих параграфах, при изложении теории растяжения-сжатия прямого бруса, уже появлялась необходимость в некоторых исходных экспериментальных предпосылках. В первую очередь сюда относится закон Гука, устанавливающий зависимость между напряжениями и деформациями. Строго говоря, этот закон применим лишь в тех пределах, в которых он находит прямое экспериментальное подтверждение. Так, если сталь проявляет упругие свойства в сравнительно широком диапазоне напряжений и закон Гука для нее является весьма точным, мягкие металлы, например свинец, получают пластическую деформацию уже при очень малых нагрузках и вряд ли могут считаться упругими вообще. Следовательно, прежде чем распространять выводы сопротивления материалов на тот или иной материал, предварительно необходимо подвергнуть данный материал всестороннему механическому испытанию. Особенно это важно иметь в виду при использовании новых строительных материалов.

2. При рассмотрении простейших задач растяжения-сжатия пришлось также столкнуться с константами E и ν, характеризующими свойства материала. Как видно из табл. 2.1, эти величины далеко не одинаковы для различных материалов. Поэтому, чтобы использовать материал в сколько-нибудь ответственной конструкции, необходимо экспериментально установить *его механические характеристики* — совокупность числовых показателей, полученных в лабораторных условиях в результате деформирования образцов из данного материала. Знание поведения материала под нагрузкой вплоть до разрушения необходимо для выявления в первую очередь тех характеристик, которые позволяют решать одну из основных задач сопротивления материалов — обеспечение прочности элементов конструкций.

3. Некоторые основные гипотезы сопротивления материалов могут быть экспериментально проверены и подтверждены лишь в ограниченном количестве частных случаев, тогда как теория придает им универсальный характер. Поэтому одной из важнейших задач механических испытаний является выяснение опытным путем справедливости различных гипотез и установление границ их практической применимости.

Наиболее распространенным является испытание на растяжение цилиндрического образца статической нагрузкой. Опыт на растяжение прост методически и требует сравнительно несложного оборудования. Но основное его достоинство — возможность исследования однородного напряженного состояния (когда поведение материала во всех точках одинаково). Только при таком напряженном состоянии можно установить необходимые механические характеристики, не прибегая к упрощающим гипотезам.

Для того чтобы результаты испытания одного и того же материала в разных лабораториях были сравнимы, образцы должны иметь стандартные форму и размеры. Один из возможных вариантов представлен на рис. 2.17. Цилиндрические уширения (головки) служат для захвата образца зажимами испытательной машины. Конические участки необходимы для плавного перехода от утолщенных головок к средней цилиндрической части диаметром d_0, которая на участке между двумя рисками, отстоящими на расстоянии $0{,}5\ d_0$ от основания конуса, представляет собой рабочую часть образца. Согласно принципу Сен-Венана (см. п. 2.2) напряженное состояние на этом участке не зависит от способа приложения нагрузки к головкам и поэтому может считаться однородным.

Отношение длины рабочей части (расчетной длины) к диаметру нормируется. Для так называемых нормальных образцов $l_0/d_0=10$, для укороченных $l_0/d_0=5$. Это отношение можно выразить через площадь поперечного сечения образца A_0. Учитывая, что $A_0=\pi d_0^2/4$, получаем

$$d_0 = \sqrt{4A_0/\pi} = 1{,}13\sqrt{A_0}.$$

Тогда для нормальных образцов

$$l_0 = 10d_0 = 11{,}3\sqrt{A_0}; \qquad (2.8)$$

для укороченных

$$l_0 = 5d_0 = 5{,}65\sqrt{A_0}. \qquad (2.8а)$$

При изучении механических свойств листовых материалов приходится испытывать плоские образцы прямоугольного сечения. В этом случае ширину сечения назначают втрое больше толщины, а для определения расчетной длины зависимости (2.8) и (2.8а) особенно удобны.

Испытание на растяжение проводят на специальных разрывных или универсальных машинах. Образец, закрепленный в захватах машины, подвергается принудительному удлинению путем перемещения одного из захватов. Растягивающая сила создается с помощью механического или гидравлического устройства[1]. Перемещение захвата производится непрерывно и плавно со скоростью не более 20 мм/мин. При таких условиях ускорения частиц материала в процессе деформирования образца столь малы, что имеются все основания считать нагружение статическим.

Результаты испытания наиболее наглядно проявляются на графике зависимости между нагрузкой F, растягивающей образец, и соответствующим удлинением Δl. Этот график называется *диаграммой растяжения*. Он вычерчивается автоматически, с помощью специального диаграммного аппарата, представляющего собой барабан с намотанной миллиметровой бумагой, по которой

[1] Подробное описание устройства испытательных машин приводится в специальном руководстве по проведению лабораторных работ [2].

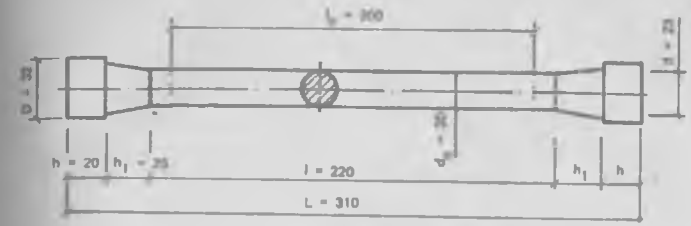


Рис. 2.17

перемещается самопишущее устройство (перо или карандаш). Поворот барабана пропорционален удлинению, поступательное движение самописца пропорционально силе F.

Будущее, однако, принадлежит универсальным машинам с управлением от микроЭВМ и выводом результатов испытания на дисплей или графопостроитель.

Для того чтобы исключить влияние абсолютных размеров образца и судить о механических свойствах непосредственно материала, диаграмму перестраивают в другом масштабе: все ординаты делят на первоначальную площадь поперечного сечения A_0, а все абсциссы — на первоначальную расчетную длину l_0. В результате получается график зависимости между нормальным напряжением

$$\sigma = N/A_0 = F/A_0 \qquad (2.9)$$

и деформацией

$$\varepsilon = (\Delta l/l_0)\,100. \qquad (2.10)$$

Для низкоуглеродистой строительной стали марки Ст3 (содержание углерода не более 0,22 %) он имеет вид, представленный на рис. 2.18. Под графиком, в соответствии с его очертанием, иллюстрируются характерные стадии деформирования образца с начала нагружения до разрыва.

В начальной стадии нагружения, на участке OB, зависимость носит линейный характер, что подтверждает справедливость закона Гука (2.4). Наибольшее напряжение, до которого соблюдается этот закон (точка B на диаграмме), называется **пределом пропорциональности** σ_{pr} ($\sigma_{пц}$). Для указанной стали он составляет приблизительно 195—200 МПа.

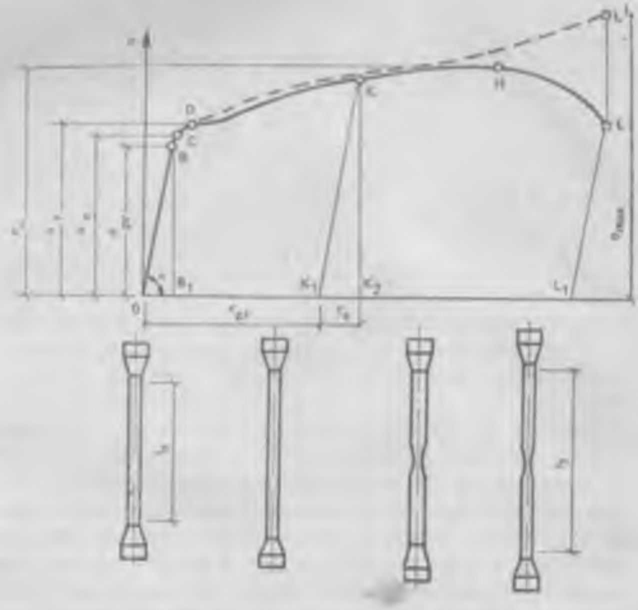


Рис. 2.18

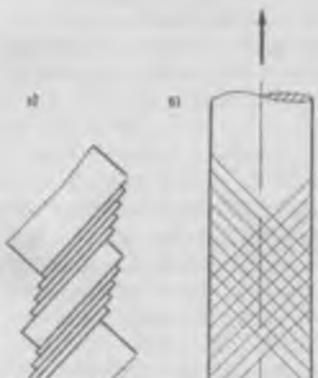


Рис. 2.19

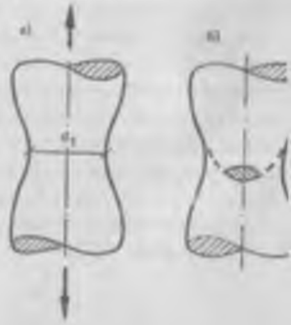


Рис. 2.20

Из рисунка нетрудно видеть, что $\operatorname{tg}\alpha=\sigma/\varepsilon=E$, т. е. модуль E графически представляет собой тангенс угла наклона прямолинейного участка диаграммы к оси абсцисс. Если по достижении точки B сбросить нагрузку до нуля, то график разгрузки совпадает с графиком нагружения. Это говорит о том, что при напряжениях $\sigma\leqslant\sigma_{pr}$ возникают только упругие деформации.

Однако граница области упругой работы материала лежит несколько выше точки B, там где деформации растут уже быстрее напряжений, закон Гука нарушается и диаграмма начинает искривляться. Напряжение, соответствующее наибольшей деформации, которая полностью исчезает после разгрузки (точка C на диаграмме), называется **пределом упругости** $\sigma_e(\sigma_y)$. Для стали марки Ст3 он составляет 205—210 МПа.

Точки B и C лежат столь близко друг к другу, что на практике их обычно считают совпадающими, полагая $\sigma_{pr}\approx\sigma_e$. К тому же следует иметь в виду, что выявление обоих пределов представляет немалые трудности. Даже при достаточно точных измерениях далеко не все точки ложатся на прямую OB вследствие неизбежной неоднородности материала и конструктивных несовершенств испытательной машины. Отчасти по этим же причинам и деформация при разгрузке полностью не исчезает. Поэтому опытным путем устанавливают лишь условные, технические значения указанных пределов. Так, технический предел упругости считается достигнутым, если впервые появляющаяся остаточная деформация становится равной некоторому допустимо малому значению, установленному ГОСТом или ТУ (например, 0,001, 0,003, 0,005 % и т. п.).

После точки C продолжается дальнейшее искривление диаграммы и в точке D она переходит в почти горизонтальный участок — площадку текучести. Здесь материал как бы уподобляется жидкости и течет. Стрелка силоизмерительного механизма испытательной машины на время останавливается, т. е. образец удлиняется при фактически постоянной нагрузке. Соответствующее напряжение называется **пределом текучести** $\sigma_y(\sigma_т)$. Он легко поддается определению и является одной из основных механических характеристик материала. Для стали указанной марки $\sigma_y=215$—255 МПа в зависимости от способа раскисления (кипящая, полуспокойная, спокойная), вида проката (листовой, фасонный) и его толщины.

Наличие площадки текучести положительно сказывается на работе материала в конструкции. По протяженности площадка у низкоуглеродистой стали находится в диапазоне относительных удлинений $\varepsilon = 0{,}2—2{,}5\ \%$.

Образование площадки текучести является следствием запаздывания пластических деформаций. При небольшом содержании углерода (0,2—0,25 %) перлитовые участки занимают всего около 25 % площади шлифа[1] (см. рис. 1.2) и расположены неравномерно. Основную массу составляют ферритовые зерна, соприкасающиеся друг с другом непосредственно или через тонкие цементитовые прослойки. Перлитовые скопления и на первых порах указанные прослойки способны задерживать развитие пластических деформаций. Но после достижения предела текучести хрупкая цементитовая сетка начинает разрушаться и воспринимаемые ею усилия передаются на зерна феррита. Последние деформируются, и в них появляются необратимые сдвиги по плоскостям, наклоненным приблизительно под углом 45° к оси образца (см. п. 3.1). Целостность материала не нарушается, но образец удлиняется. Механизм удлинения в упрощенном виде показан на рис. 2.19, *а*. Эта стадия деформирования может быть установлена визуально благодаря отскакиванию окалины или тонко нанесенной краски. Поверхность же предварительно отполированного образца становится матовой, а указанные сдвиги проявляются в виде сетки полос, называемых *линиями Людерса — Чернова*[2] (рис. 2.19, *б*).

Дальнейшее развитие деформации в материале сдерживается более прочными и жесткими включениями перлита. Поэтому для того чтобы в образце появились общие плоскости скольжения, сдвиги в отдельных зернах феррита должны обтекать перлитовые включения или раскалывать их слабые участки. Это возможно только при увеличении нагрузки. Следовательно, после прекращения текучести сталь снова способна противостоять деформированию — она как бы самоупрочняется.

---

[1] *Шлифом* называется образец металла или сплава, специально подготовленный для макро- или микроскопического исследования в отраженном свете.

[2] Эти линии впервые описаны в 1859 г. немецким металлургом В. Людерсом и независимо от него в 1884 г. русским металлургом Д. К. Черновым, который выдвинул идею о целесообразности конструктивного распределения материала в соответствии с направлениями наибольших деформаций.

В стадии самоупрочнения материал работает упруго-пластически. Зависимость между напряжениями и деформациями подчиняется, как на участке CD (см. рис. 2.18), криволинейному закону, но с бо́льшим нарастанием деформаций, т. е. диаграмма имеет более пологий характер.

Если из некоторой точки K, лежащей выше предела упругости, произвести разгрузку, то график пойдет по прямой KK_1, приблизительно параллельной прямой OB начального нагружения. Отрезок K_1K_2 представляет собой деформацию, которая исчезает после снятия нагрузки, т. е. упругую деформацию ε_e. Отрезок OK_1 отражает остаточную, пластическую деформацию ε_{pl}. Полная деформация ε_K, соответствующая напряжению σ_K, характеризуется суммарным отрезком $OK_2=OK_1+K_1K_2$, т. е. $\varepsilon_K=\varepsilon_{pl}+\varepsilon_e$.

В процессе испытания на растяжение продольное удлинение сопровождается поперечным сужением. И та, и другая деформации распределяются по расчетной длине образца равномерно. Однако скорость пластического деформирования слоев материала различна. В стадии самоупрочнения наружные слои получают большие скорости и смещения, чем внутренние, заторможенные. В результате на наиболее слабом участке (обычно около середины образца) образуется местное сужение — *шейка* (рис. 2.20, *а*). Соответствующее напряжение (наивысшая точка диаграммы H) называется **пределом прочности** материала σ_u ($\sigma_{пч}$). Оно представляет собой условную характеристику, которая численно равна отношению (2.9) наибольшей нагрузки, выдерживаемой образцом, к первоначальной площади его сечения. Для стали марки Ст3 $\sigma_u=345$—390 МПа в зависимости от тех же обстоятельств, что и предел текучести.

К моменту образования шейки пластические деформации достигают полного развития. Их усредненное по расчетной длине значение составляет 20—25 %. Резкое возрастание разности скоростей смещения смежных слоев приводит к возникновению собственных микронапряжений, которые могут превзойти сопротивление отрыву и вызвать появление микротрещин. В дальнейшем происходит процесс роста и слияния микротрещин в макротрещину, которая располагается перпендикулярно оси образца. После того как макротрещина достигает критического размера, наступает процесс быстрого разрушения материала с возникновением конического углубления, называемого чашечкой (рис. 2.20, *б*). На дне чашечки, которое образовано непосредственно трещиной, разрушение имеет характер отрыва в результате действия максимальных нормальных напряжений. Края же (кольцевая перемычка) разрушаются вследствие сдвига в направлении наибольших касательных напряжений (см. п. 3.1). Такое разрушение принято называть **вязким** (пластическим).

На диаграмме моменту разрушения соответствует точка L. Нисходящий характер участка HL объясняется тем, что площадь поперечного сечения шейки быстро уменьшается и для дальнейшего деформирования образца требуется все меньшая нагрузка. Таким образом, создается впечатление, что разрушение происходит при напряжении σ_L, которое меньше предела прочности σ_u. В действительности дело обстоит несколько иначе.

Формула (2.9) для данного эксперимента является условной и, по существу, не дает истинного значения напряжений материала, поскольку площадь поперечного сечения образца все время уменьшается. Отсюда следует и условный характер построенной диаграммы. Если же обратиться к диаграмме истинных напряжений $\sigma = N/A = F/A$, где A — переменная площадь сечения, то окажется, что и за точкой, характеризующей предел прочности, напряжение непрерывно возрастает вплоть до разрыва (штриховая линия, см. рис. 2.18).

Истинное напряжение разрушения выше предела прочности на 60—70 %. Было бы однако ошибкой ориентироваться на напряжение σ_{max} в вопросе определения наибольшей нагрузки, которую способен выдержать образец до разрыва. Повышение истинных напряжений между точками H и L' связано с резким уменьшением рабочей площади образца, что, как отмечалось выше, требует меньшей нагрузки для завершения процесса разрушения.

Таким образом, диаграмма напряжений (2.9), несмотря на свою условность, весьма показательна. Во-первых, она четко устанавливает упругие характеристики материала (E, σ_{pr}, σ_e) и дает ясное представление об областях его работоспособности (восходящие участки диаграммы). Кроме того, диаграмма дает достоверные значения прочностных характеристик (σ_y, σ_u), поскольку при малых деформациях в упругой стадии работы стали ошибки в определении площади сечения не существенны, а фактическое сечение в стадии самоупрочнения отличается от первоначального не более чем на 5—10 %. Наконец, основным преимуществом диаграммы является то, что она получается непосредственно из опыта. Истинная диаграмма после наступления текучести получается не как результат эксперимента, а на основе пересчета с учетом уменьшающейся площади. Она служит главным образом целям теоретических исследований в области металловедения.

После проведения испытания определяют еще две характеристики материала:

относительное остаточное удлинение при разрыве

$$\varepsilon_r = \frac{l_1 - l_0}{l_0} 100 \qquad (2.11)$$

и *относительное поперечное сужение при разрыве*

$$\psi_r = \frac{A_0 - A_1}{A_0} 100, \qquad (2.12)$$

где l_1 — расчетная длина образца (расстояние между рисками) после разрыва; A_1 — площадь его поперечного сечения в месте разрыва, равная для цилиндрического образца $\pi d_1^2/4$ (d_1 — минимальный диаметр шейки, см. рис. 2.20, *а*).

Параметры ε_r и ψ_r являются мерой пластичности материала. Их не следует смешивать с величинами ε и ε' [см. формулы (2.2), (2.6) и (2.10)], которые характеризуют деформативность материала только в упругой стадии его работы (или, что то же, в пределах справедливости закона Гука). Для рассматриваемой стали $\varepsilon_r = 23$—27 %, $\psi_r = 60$—70 %, причем вторая характеристика более показательна, поскольку величина ε_r позволяет судить только об условном, среднем (равномерном) относительном удлинении образца по всей его расчетной длине (отрезок OL_1 на диаграмме). На самом деле с началом образования шейки удлинение становится неравномерным и о деформативности материала можно судить по местному относительному удлинению в суженном сечении образца

$$\varepsilon_{loc} = \psi_r/(1 - \psi_r). \qquad (2.13)$$

2.5. Диаграммы растяжения пластичных материалов, не имеющих площадки текучести, и хрупких материалов

Ярко выраженная площадка текучести присуща только сталям, содержащим 0,1—0,3 % углерода, латуни и некоторым видам бронзы. Для большинства металлов и сплавов характерен постепенный переход в пластическую стадию. Так, например, при малом содержании углерода в стали (менее 0,1 %) ничтожно малые включения перлита и прослойки цементита не в силах оказать сдерживающее влияние на сдвиги в зернах феррита, и площадка текучести заменяется плавной кривой развития пластических деформаций.

В стали с повышенным содержанием углерода, например среднеуглеродистой (0,3—0,5 %), площадка текучести тоже не проявляется, но по другой причине. Перлитовые включения достигают столь значительных размеров, что полностью блокируют зерна феррита, препятствуя их деформированию. В легированных сталях подобную роль играют включения твердых карбидов (химические соединения легирующих добавок с углеродом) и нитридов (соединения с азотом).

После упругой работы диаграмма растяжения таких сталей получает закругление и затем сразу переходит в кривую, характеризующую стадию самоупрочнения (рис 2.21, *а*). Аналогично деформируются и алюминиевые сплавы благодаря наличию пластичных зерен алюминия и упрочняющих включений. Таким образом, и при отсутствии площадки текучести указанные материалы ведут себя как пластичные, т. е. разрушаются после развития больших остаточных деформаций.

Отсутствие площадки текучести затрудняет лишь выявление предела текучести — характеристики, которая чрезвычайно важна для таких материалов, как стали и алюминиевые сплавы, поскольку она ограничивает их несущую способность. При нагрузке, соответствующей пределу текучести, материал в большинстве случаев не может считаться работоспособным с эксплуатационной точки зрения.

Для пластичных материалов, не имеющих площадки текучести, вводят условное понятие *технического предела текучести* (в отличие от физического, охарактеризованного в предыдущем параграфе). За него принимают

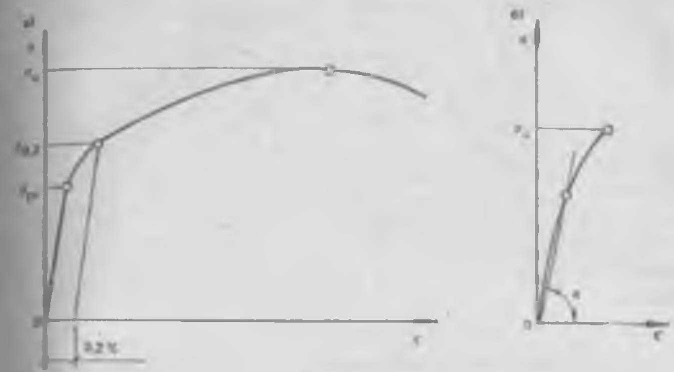


Рис. 2.21

напряжение, при котором относительное остаточное удлинение достигает примерно того же значения, что и при наличии площадки текучести. Обычно считают, что $\varepsilon_{pl} = 0{,}2$ %, поэтому условный предел текучести обозначают $\sigma_{0,2}$.

Из всего изложенного следует, что пластичность — это положительное свойство материала. Она играет большую роль в обеспечении безопасности и надежности строительных конструкций. Чем длительнее развитие пластических деформаций, тем больше предел несущей способности (начало пластического деформирования) отдален от предела прочности (фактического разрушения материала).

Вследствие больших значений пластических деформаций, в десятки и сотни раз превышающих упругие, их развитие в перенапряженных элементах сложных конструктивных комплексов приводит к перераспределению усилий за счет догрузки менее напряженных элементов. Тем самым повышается работоспособность конструктивного комплекса в целом по сравнению с расчетными пределами. Примером могут служить статически неопределимые системы (см. п. 2.11).

Таким образом, работа материала в пластической стадии представляет огромный резерв прочности, благодаря которому конструкция, как правило, не разрушается в прямом смысле (нарушение целостности), а теряет несущую способность из-за больших остаточных дефор-

Рис. 2.22

маций. Несущую способность, ограниченную деформациями, которые делают невозможной эксплуатацию конструкции или сооружения, принято называть *эксплуатационной способностью.* Разрушение же, как таковое, происходит лишь в случае перехода материала из пластического состояния в хрупкое вследствие концентрации напряжений, температурных изменений, характера нагружения, особенностей химического состава, технологической обработки (термической или механической) и других факторов.

Хрупкостью называется свойство материала, противоположное пластичности, т. е. склонность к разрушению при весьма малых остаточных деформациях, выражаемых в ряде случаев долями процента. К хрупким материалам относятся чугун[1], высокоуглеродистая (инструментальная) сталь (0,6—1,2 % углерода), стекло, каменные строительные материалы (кирпич, бетон и др.).

Хрупкое разрушение принципиально отличается от вязкого. Оно является следствием чрезмерного развития упругих деформаций при отсутствии или затрудненности пластических. На диаграмме растяжения хрупкого материала отклонение от закона Гука наблюдается уже в начальной стадии нагружения (рис. 2.21, *б*), и модуль E не является постоянной величиной. Однако в пределах тех невысоких напряжений, при которых такие материалы работают в конструкциях, криволинейность диаграммы незначительна и ей пренебрегают, заменяя кривую секущей и считая $E=\text{const}$.

Хрупкие материалы, как правило, плохо сопротивляются растяжению. Опасность хрупкого разрушения заключается в том, что оно происходит быстро, почти внезапно, без образования шейки (рис. 2.22), поэтому на диаграмме нет четкого разграничения между пределом несущей (эксплуатационной) способности и пределом прочности в виде области пластических деформаций.

---

[1] *Чугун* — это общее название железоуглеродистых сплавов, имеющих в своем составе 2,2—6,7 % углерода (обычно 3—4,5 %). Если содержание углерода не превышает 2 %, то сплавы объединяются общим названием *сталь*.

2.6. Потенциальная энергия деформации

Упругое тело является аккумулятором энергии, затраченной на его деформирование. Это свойство широко используется в различных амортизирующих устройствах (рессорах, пружинах и др.).

При нагружении тела внешние силы производят работу W, которая, с одной стороны, идет на сообщение скорости массе тела, т. е. переходит в кинетическую энергию K, с другой — накапливается в виде *потенциальной энергии деформации* U. Таким образом, уравнение энергетического баланса имеет вид

$$W = K + U. \qquad (2.14)$$

Если нагрузка прикладывается статически, т. е. возрастает от нуля до конечного значения настолько медленно, что можно пренебречь скоростью деформации и силами инерции, то $K=0$, и работа внешних сил полностью преобразуется в потенциальную энергию:

$$W = U. \qquad (2.14а)$$

На рис. 2.23, *а* изображен растянутый брус, удлинение которого для наглядности показано в увеличенном масштабе и соответствует отрезку Δl_{pr} на графике изменения внешней силы F (рис. 2.23, *в*).

В теоретической механике работа определяется произведением постоянной силы F на путь s, пройденный точкой ее приложения по направлению действия силы, т. е. работа $W=Fs$ выражается площадью прямоугольника, построенного в системе координат F и s (рис. 2.23, *б*). В рассматриваемом случае сила F не является постоянной. При соблюдении закона Гука она линейно

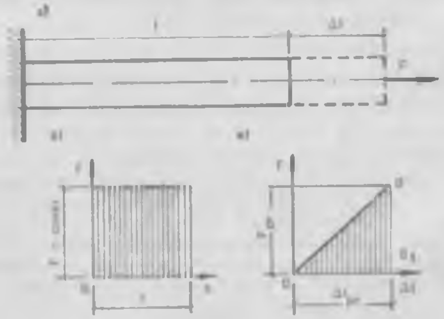


Рис. 2.23

возрастает от нуля до значения F_{pr}, отвечающего пределу пропорциональности. Поэтому работа (а значит, и потенциальная энергия) выражается площадью треугольника OB_1B:

$$U = W = F_{pr}\,\Delta l_{pr}/2. \tag{2.15}$$

Это выражение справедливо для любой линейно-деформируемой системы, причем не только при растяжении (сжатии), но и при других видах деформации. Оно известно под названием *теоремы Клапейрона*[1]. Опуская индексы и переходя от внешней силы $F \leqslant F_{pr}$ к равной ей внутренней силе N, с учетом зависимости (2.5) получаем

$$U = N^2 l/(2EA). \tag{2.16}$$

Эта формула применима только к брусьям (или отдельным участкам) постоянного сечения в случае постоянной продольной силы. При переменных по длине бруса значениях N и (или) A следует руководствоваться указаниями к формуле (2.5).

Для того чтобы исключить влияние размеров бруса (образца) и судить об энергоемкости самого материала, вводят понятие *удельной потенциальной энергии* деформации

$$u = \frac{U}{V} = \frac{N^2 l}{2EA}\,\frac{1}{Al} = \frac{N^2}{2EA^2},$$

где $V = Al$ — объем бруса

С учетом выражений (2.3) и (2.4)

$$u = \sigma^2/(2E) = \sigma\varepsilon/2. \tag{2.17}$$

В СИ за единицу работы (и энергии) принят джоуль (Дж) — работа, совершаемая силой в 1 Н на перемещении в 1 м. Таким образом, если объем измерять в м^3, то удельная энергия деформации должна выражаться в Дж/м^3, кДж/м^3 и т. д.

Из выражения (2.17) нетрудно видеть: 1) удельная потенциальная энергия упругой деформации характеризуется площадью треугольника OB_1B на диаграмме, по-

---

[1] Бенуа Поль-Эмиль Клапейрон (B. P. E. Clapeyron, 1799—1864) — выдающийся французский инженер, рекомендованный в свое время русскому правительству для оказания помощи Институту инженеров путем сообщения, основанному в Петербурге. На него было возложено преподавание прикладной математики и физики. Кроме того, Клапейрон принимал участие в проектировании ряда ответственных сооружений, в частности, Исаакиевского собора и нескольких висячих мостов (первых в Европе).

строенной в координатах σ—ε (см. рис. 2.18); 2) при одном и том же напряжении запас энергии тем больше, чем меньше модуль E. Поэтому, например, резина является одним из самых энергоемких материалов (см. табл. 2.1) и ее используют в амортизирующих устройствах (шайбы, прокладки, подушки и т. п.) для смягчения динамических воздействий.

Энергетические соотношения используют при определении перемещений в сложных упругих системах и при исследовании условий перехода материала в пластическое состояние. Общие положения, относящиеся к этим вопросам, рассматриваются в п. 3.5, 3.6 и 8.3.

Пример 2.11. Решить задачу, рассмотренную в примере 2.5, исходя из равенства работы внешней силы и потенциальной энергии деформации системы.

Решение. Работа внешней силы согласно формуле (2.15) составляет $W=F\delta/2$ (см. рис. 2.12). Энергия деформации каждого стержня по формуле (2.16) $U_1=N^2l/(2EA)$, или с учетом зависимости (а) указанного примера

$$U_1=\frac{F^2 l}{2EA\,(2\cos\varphi)^2}=\frac{F^2 l}{8EA\cos^2\varphi}.$$

Энергия деформации всей системы

$$U=2U_1=F^2 l/(4EA\cos^2\varphi).$$

Подставляем выражения W и U в уравнение энергетического баланса (2.14а):

$$\frac{F\delta}{2}=\frac{F^2 l}{4EA\cos^2\varphi}.$$

Отсюда $\delta=Fl/(2EA\cos^2\varphi)$ и, следовательно, получили то же значение вертикального перемещения узла B, что и в примере 2.5.

2.7. Диаграммы сжатия

Свойства материалов при сжатии изучают на образцах кубической, призматической или цилиндрической форм. Цилиндрическая форма характерна для металлов и сплавов, причем отношение высоты цилиндра к диаметру h_0/d_0 должно быть не более 3 (рис. 2.24). В противном случае образец может искривиться и потерять прямолинейную форму (см. рис. 1.1, *в*), т. е. деформация сжатия повлечет за собой продольный изгиб (см. гл. 10).

Испытание на сжатие пластичных материалов, несмотря на простоту, менее распространено, чем испытание на растяжение. Объясняется это прежде всего тем, что в упругой стадии и при малом развитии пластичес-

Рис. 2.24

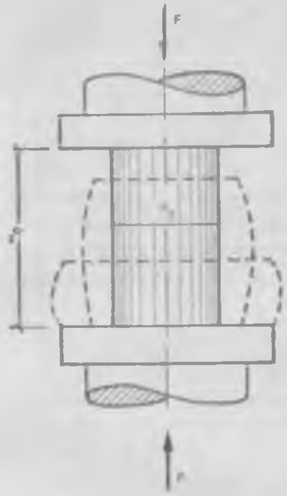


Рис. 2.25

ких деформаций диаграмма сжатия таких материалов, как, например, низкоуглеродистая сталь, почти полностью повторяет диаграмму растяжения (рис. 2.25) и не дает никаких новых механических характеристик. Пределы пропорциональности, упругости и текучести имеют те же значения. Углы наклона прямолинейных участков на обеих диаграммах одинаковы, следовательно, одинаковы и модули E.

Различия начинаются после наступления текучести, т. е. за пределом эксплуатационной способности большинства строительных конструкций. Площадка текучести при сжатии менее ярко выражена, чем в случае растяжения. При больших деформациях различие становится особенно ощутимым, в первую очередь из-за того, что сжатие сопровождается увеличением площади поперечного сечения образца, вследствие чего испытание требует постоянно возрастающей нагрузки. Следовательно, при сжатии пластичного материала получить такую характеристику, как предел прочности, не представляется возможным. Исследуемый образец (цилиндр) сначала принимает бочкообразную форму, а затем, не претерпевая разрушения, расплющивается (см. рис. 2.24), и дальнейшее испытание ограничивается возможностями машины (пресса). В расчетной практике предел прочно-

Рис. 2.26

Рис. 2.27

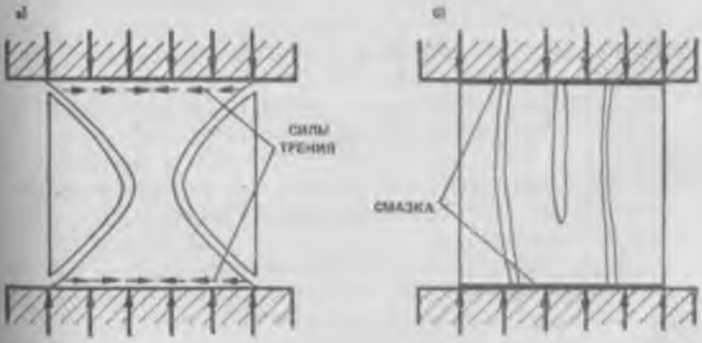


Рис. 2.28

сти на сжатие условно принимают таким же, как на растяжение:

$$\sigma_{uc}=\sigma_{ut}\ (\sigma_{пч,с}=\sigma_{пч,р}).$$

Для хрупких материалов, таких, как чугун, бетон и прочие каменные материалы, испытание на сжатие является основным. Их образцы доводят до разрушения, а предел прочности устанавливают, как при растяжении: $\sigma_{uc}=N_{max}/A_0=F_u/A_0$.

Диаграмма сжатия хрупкого материала по виду напоминает диаграмму растяжения, но сопротивление сжатию в несколько раз больше, чем растяжению ($\sigma_{uc} \gg \sigma_{ut}$, рис. 2.26). Разрушение при сжатии происходит обычно путем сдвига одной части образца относительно другой. Плоскость сдвига в чугунном цилиндре наклонена примерно под углом 45° к оси (рис. 2.27). Характер разрушения бетонного кубика представлен на рис. 2.28, *а*. Появление трещин по площадкам, наклоненным под тем же углом, приводит к выкалыванию бетона с боков, в результате чего кубический образец принимает вид двух усеченных пирамид, соприкасающихся меньшими основаниями.

Рис. 2.29

Однако такая форма разрушения возможна лишь при наличии сил трения между подушками пресса и опорными поверхностями образца. Если уменьшить влияние этих сил путем смазки (например, парафином), то возникнут продольные трещины и образец разрушится при меньшей нагрузке по площадкам, параллельным направлению сжатия (рис. 2.28, *б*).

Таким образом, состояние и качество торцов образца может сказываться на результатах, внося в них неопределенность. Для бетона стандартным является испытание без смазки.

Напряжение, при котором происходит разрушение каменного материала, в технической и нормативной литературе нередко называется *прочностью*. Она зависит от размеров испытываемых образцов: чем меньше длина ребра *a* несмазанного кубика, тем ощутимее влияние сил трения и тем больше прочность. Так, при $a=10$ см кубиковая прочность бетона приблизительно на 10 % выше, а при $a=20$ см на 7 % ниже, чем у стандартного образца ($a=15$ см).

По той же причине призматический образец (рис. 2.29) разрушается при меньшей нагрузке, чем образец в виде куба, имеющего те же поперечные размеры. Соответствующая прочность называется *призменной*. Влияние сил трения на торцах призмы уменьшается с увеличением ее высоты, и при отношении $h/a=4$ значение призменной прочности становится почти стабильным и равным примерно 75 % кубиковой прочности. Продольный изгиб при таком отношении проявляется еще мало. Он существенно сказывается лишь при $h/a \geqslant 8$.

Таким образом, прочность образца не позволяет непосредственно оценить прочность материала, работающего в конструкции, вследствие проявления масштабного фактора. Испытание образцов дает лишь возможность сопоставлять свойства материалов на основе механических характеристик, которые принимаются за эталон. Для этой цели и приходится изготовлять образцы стандартных размеров.

2.8. Сравнительная характеристика пластичных и хрупких материалов

Изучение диаграмм растяжения и сжатия, рассмотренных в предыдущих параграфах, позволяет провести сравнительный анализ механических свойств пластичных и хрупких материалов.

1. Основное различие состоит в том, что хрупкие материалы разрушаются в упругой стадии, при малозаметных деформациях, тогда как пластичные перед разрушением претерпевают значительное деформирование и формоизменение. В связи с этим протяженность диаграммы в направлении оси удлинений у пластичного материала значительно больше, чем у хрупкого.

2. Протяженность диаграммы в сочетании с ее формой и значением предела прочности определяет площадь диаграммы. В п. 2.6 показано, что площадь диаграммы $F-\Delta l$ в пределах упругих деформаций выражает работу внешней силы F в тех же пределах. Очевидно, площадь всей диаграммы характеризует полную работу, затрачиваемую на доведение образца до разрушения. Из сопоставления рис. 2.30, *а*, *б* хорошо видно, что для разрушения пластичного материала необходимо затратить значительно больше работы, чем для разрушения хрупкого. Следовательно, если конструкция предназначена для восприятия динамических нагрузок, которые, как правило, сопровождаются выделением большого количества кинетической энергии, предпочтение должно быть отдано пластичному материалу. Хрупкие материалы легко

5*

Таблица 2.2. **Механические характеристики некоторых строительных материалов**

Материал	Предел прочности, МПа		Предел текучести σ_y ($\sigma_{0,2}$), МПа	Относительное остаточное удлинение ε_r, %	Относительное поперечное сужение ψ_r, %
	при растяжении σ_{ut}	при сжатии σ_{uc}			
Сталь:					
низкоуглеродистая Ст3	315—390	—	215—255	23—27	60—70
низколегированная 09Г2С, 10Г2С1, 14Г2, 15ХСНД[1]	430—520	—	265—370	21	—
Чугун серый СЧ	120—380	50—140	—	1—1,4	—
Алюминиевые сплавы:					
дюралюминий Д16 (Al—Cu—Mg)	230—465	—	100—350	8—13	30—15
магналий АМг2 (Al—Mg)	170—240	—	80—210	16—18	61
силумин АД31 (Al—Mg—Si)	130—200	—	60—150	13—8	65
высокопрочный 1915 (Al—Mg—Zn)	350—380	—	220—250	10—8	11
Бетон	0,14—2,5	0,95—43	—	—	—
Кирпич	0,7—3	7,5—100	—	—	—
Древесина сосны и ели вдоль волокон	25—34	20—33	—	—	—
Стекло	30—90	500—2000	—	—	—
СВАМ:					
1 : 1	480	420	—	1,4—2	—
10 : 1	900	—	—	—	—

[1] В обозначениях марок низколегированной стали первые цифры указывают среднее содержание углерода в сотых долях процента. Буквы русского алфавита обозначают легирующие компоненты: Г — марганец; Д — медь; Н — никель; С — кремний; Х — хром. Цифра после буквы указывает примерное процентное содержание соответствующего компонента в целых единицах (отсутствие цифры означает, что содержание не превышает 1 %).

и быстро разрушаются от разного рода ударных воздействий вследствие своей недостаточной энергоемкости.

С другой стороны, при статическом нагружении те же хрупкие материалы вполне работоспособны и надежны благодаря незначительному деформированию и формоизменению даже при напряжениях, близких к пределу прочности.

Рис. 2.30

3. Характерным признаком пластичных материалов является то, что они практически одинаково хорошо работают и на растяжение, и на сжатие. Подавляющее же большинство хрупких материалов сопротивляется растяжению намного хуже, чем сжатию (табл. 2.2). Это обстоятельство в значительной мере ограничивает применение хрупких материалов или требует специальных мер по их усилению при работе на растяжение. Отсюда понятна идея создания композиционных материалов, к числу которых в первую очередь относится железобетон (сочетание бетона и стальной арматуры, предназначенной главным образом для восприятия усилий растяжения).

4. Хрупкие и пластичные материалы по-разному ведут себя в условиях концентрации напряжений. Это явление кратко охарактеризовано в п. 2.2. Если, например, в гладком плоском образце (рис. 2.31, *а*), сделать отверстие или надрезы с боков (рис. 2.31, *б*, *в*, *г*, *д*), то линии силового потока отклонятся и обтекут возникшее на их пути препятствие. Концентрация этих линий свидетельствует о местном повышении напряжений, которое может оказаться весьма существенным.

В подобных случаях, обычно в результате теоретического или экспериментального исследования, устанавливают *коэффициент концентрации* α — число, указывающее, во сколько раз надо увеличить номинальное напряжение $\sigma_0 = N/A$, чтобы получить максимальное местное напряжение в ослабленном сечении:

$$\sigma_{max} = \alpha\sigma_0. \qquad (2.18)$$

Для определения коэффициента α можно также пользоваться таблицами и графиками, приводимыми в справочной литературе.

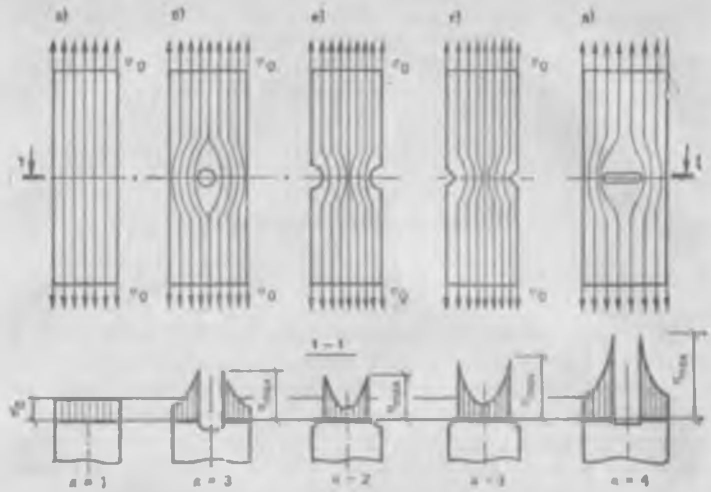


Рис. 2.31

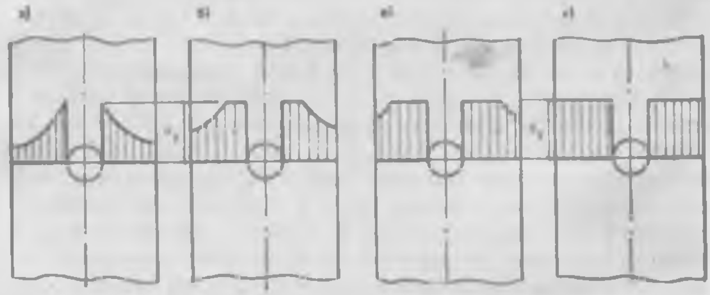


Рис. 2.32

Если образец изготовлен из пластичного материала с протяженной площадкой текучести и подвергается статическому нагружению, то при увеличении нагрузки рост максимальных местных напряжений прекращается, как только они достигнут значения предела текучести (рис. 2.32, *а*). Дальнейшее увеличение нагрузки сопровождается ростом напряжений в остальной части сечения, а также расширением пластической зоны, где напряжения постоянно равны σ_y (рис. 2.32, *б*, *в*). Таким образом,

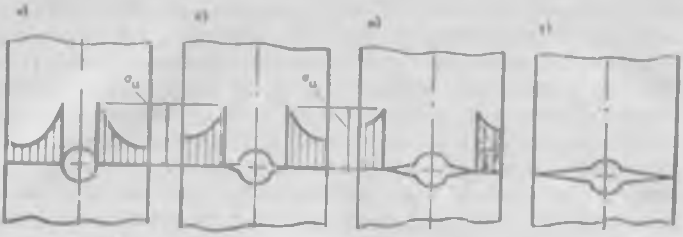


Рис. 2.33

Рис. 2.34

пластичность способствует выравниванию напряжений. На этом основании принято считать, что при статическом нагружении пластичные материалы мало чувствительны к концентрации напряжений. Предельной является нагрузка, соответствующая моменту, когда все сечение переходит в пластическое состояние (рис. 2.32, *г*):

$$F_y = \sigma_y A_0,$$

где A_0 — площадь ослабленного сечения.

При ударных и повторно-переменных нагрузках, когда напряжения и деформации быстро меняются во времени, выравнивание напряжений произойти не успевает и отрицательное влияние концентрации напряжений сказывается в полной мере.

У хрупких материалов вследствие ограниченной деформативности неравномерное распределение напряжений вблизи концентраторов сохраняется вплоть до самого разрушения. Очагами разрушения являются трещины, возникающие сразу после того, как максимальные местные напряжения достигают предела прочности (рис. 2.33, *а*). Площадь поперечного сечения при этом уменьшается (рис. 2.33, *б*) и без дальнейшего увеличения нагрузки напряжения в работоспособной еще части сечения возрастают. Трещины продолжают развиваться (рис. 2.33, *в*) до тех пор, пока образец не разрушится по всему ослабленному сечению (рис. 2.33, *г*). Процесс разрушения происходит почти мгновенно, причем номинальные напряжения оказываются значительно меньше, чем при отсутствии концентратора. Следовательно, концентрация напряжений резко снижает прочность хрупких материалов.

Здесь рассмотрена упрощенная схема работы образца при неравномерном распределении напряжений. На самом деле выравниванию эпюры σ препятствует не только недостаточная пластичность, но и изменение напряженного состояния в зоне концентрации.

Таким образом, у пластичных и хрупких материалов обнаруживаются резко отличающиеся свойства при работе как на растяжение, так и на сжатие. Тем не менее, деление материалов на пластичные и хрупкие является довольно относительным. В зависимости от условий испытания и работы пластичный материал может проявить склонность к хрупкому разрушению и, наоборот, хрупкий приобрести пластические свойства. Например, камень, являющийся при осевом сжатии типично хрупким материалом, в условиях всестороннего сжатия деформируется пластически и даже течет (мрамор, песчаник). Многие горные породы, находясь под давлением вышележащих слоев, претерпевают пластическое деформирование при сдвигах земной коры. С другой стороны, стальной образец с кольцевой выточкой (рис. 2.34) разрушается без образования шейки в связи с тем, что развитие пластических деформаций затруднено близостью более широкой части стержня.

Существенное влияние на проявление механических свойств материала оказывает продолжительность нагружения и температурное воздействие. При быстром нагружении более резко проявляется склонность к хрупкому разрушению, при длительном — пластичность. Хрупкое стекло, например, способно в условиях длительного нагружения при нормальной температуре (20 °С) давать остаточную деформацию.

Диапазон температур, в пределах которого могут реально работать конструкционные материалы, далеко выходит за рамки нормальных условий. Существуют строительные конструкции, материал которых работает при очень высоких температурах (например, конструкции комплекса доменной печи). Имеются конструкции, где, напротив, рабочие температуры оказываются низкими (элементы холодильных установок, резервуары для сжиженных газов).

Механические свойства такого материала, как низкоуглеродистая строительная сталь, при нагревании до температуры 200—250 °С меняются сравнительно мало, но уже при 300—330 °С проявляется склонность к хрупкому разрушению. Нагретую до такой температуры сталь не рекомендуется сильно деформировать или подвергать ударным воздействиям. При дальнейшем возрастании температуры это свойство, называемое *синеломкостью*, пропадает, но начинают быстро падать значения предела текучести и предела прочности. Так, например, у стали марки Ст3 при $t=500$ °С $\sigma_y=140$ МПа, $\sigma_u=250$ МПа; при $t\approx600$ °С $\sigma_y=40$ МПа, $\sigma_u=150$ МПа, т. е. предел текучести $\sigma_y\to0$. При $t=600—650$ °С наступает температурная пластичность и несущая способность стали практически исчерпывается.

Отрицательные температуры несколько повышают прочность стали, но увеличивают ее хрупкость. При температуре ниже —10 °С пластические свойства начинают заметно ухудшаться и при $t<-45$ °С сталь указанной марки становится хрупкой. Это свойство называется *хладноломкостью*. Его приходится иметь в виду при проектировании стальных конструкций, предназначенных для эксплуатации в северных и восточных районах страны, отличающихся суровым климатом.

Склонность к хладноломкости определяется строением кристаллической решетки материала и характерна для большинства черных металлов, а также цинковых сплавов. Цветные металлы не обнаруживают хладноломкости ни при каких отрицательных температурах. Подобным образом ведут себя и многие алюминиевые сплавы.

Немалый практический интерес представляет поведение пластичного материала при разгрузке и последующем нагружении. Если стальной образец подвергнуть растяжению до пластического состояния и затем разгрузить, то, как отмечалось в п. 2.4, появится остаточная деформация (рис. 2.35, *а*). При повторном нагружении после некоторого «отдыха» материала (перерыва) сталь опять начинает работать упруго, повторяя прямую раз-

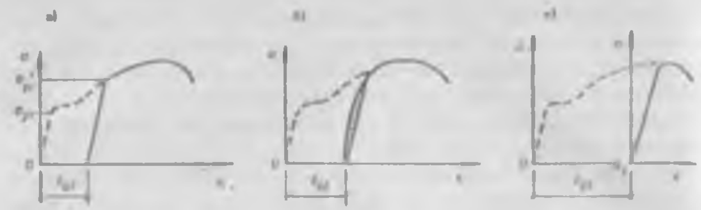


Рис. 2.35

грузки и следуя затем диаграмме однократного растяжения. При быстро меняющейся нагрузке, т. е. если материал не успевает «отдохнуть», диаграмма повторного нагружения образует так называемую *петлю гистерезиса* (от греч. hysteresis — запаздывание) вследствие необратимых энергетических потерь (рис. 2.35, *б*). Предел пропорциональности, как нетрудно видеть, повышается, но полное удлинение уменьшается в результате необратимой пластической деформации ε_{pl}, приобретенной во время первого нагружения. Площадка текучести, если она была преодолена в процессе предыдущего цикла, при повторном нагружении не возникает, т. е. материал становится как бы более жестким. Такое повышение упругих свойств называется **наклепом** (**нагартовкой**).

Наклеп при растяжении элементов строительных конструкций следует считать явлением отрицательным вследствие снижения пластических свойств стали. Это особенно хорошо видно из рис. 2.35, *в*: предварительно растянутый образец, получив большую остаточную деформацию, при вторичном нагружении разрушается почти в пределах упругой области, т. е. как типично хрупкий материал.

Наклеп при сжатии может быть полезным, как повышающий твердость[1] и сопротивляемость вибрационным воздействиям. Однако такое мероприятие оказывается достаточно дорогостоящим и в строительных конструкциях не используется.

[1] Под *твердостью* понимают способность материала сопротивляться механическому внедрению в него тела (шарика, наконечника) из другого, практически не получающего остаточных деформаций материала. Лабораторная проба на твердость позволяет судить о прочностных показателях материала, не прибегая к разрушению образца.

Наклеп может возникнуть при холодной обработке металла в процессе изготовления конструкций. Так, например, при продавливании отверстий под заклепки или болты материал у краев отверстия оказывается наклепанным и обладающим повышенной хрупкостью. В результате при действии динамических и повторно-переменных нагрузок в этих местах возможно появление трещин. По этой причине отверстия целесообразно пробивать на меньший диаметр, а затем рассверливать до проектного размера, удаляя наклепанный материал.

В некоторых случаях, когда уменьшение удлинения не имеет столь большого значения, наклеп используют для повышения прочностных характеристик. Таким способом упрочняют иногда стальную арматуру железобетонных конструкций (при отсутствии стали, требуемой по проекту). Но особенно широко он применяется для упрочнения алюминиевых сплавов, главным образом термически не обработанных магналиев (см. табл. 2.2).

К наклепу прибегают и в тех случаях, когда необходимо снизить деформативность элементов. Например, канаты и тросы грузоподъемных механизмов в процессе эксплуатации постепенно вытягиваются и могут не помещаться на барабанах и блоках. Во избежание этого, а также в целях повышения прочностных характеристик проволоку канатов и тросов подвергают предварительной вытяжке за предел текучести. Аналогично поступают с телеграфной и телефонной проволокой для предотвращения или уменьшения провисания под действием собственного веса или гололедной нагрузки.

Итак, рассмотренные в настоящем параграфе явления и многие другие факторы свидетельствуют о том, что один и тот же материал при различных обстоятельствах может проявлять диаметрально противоположные свойства. Следовательно, правильнее говорить не о пластичных и хрупких материалах, а о пластичном и хрупком состояниях (или разрушениях) материала в определенных условиях нагружения. В дальнейшем, для простоты изложения, будут по-прежнему применяться термины «пластичный» и «хрупкий» материалы, но понимать их следует с учетом сказанного выше.

2.9. Понятие о работе анизотропных материалов

До сих пор предполагалось, что механические свойства образца, выделенного из материала, не зависят от его ориентации. Такие материалы, как отмечалось в п. 1.2, называются изотропными. Если же материал обнаруживает различные свойства в разных направлениях, он называется *анизотропным*. Классическим примером может служить древесина. Расположение волокон, видимых невооруженным глазом, создает сравнительно высокую прочность в направлении ствола и малую — в поперечном направлении. Предел прочности при растяжении вдоль волокон стандартных образцов сосны и ели (наиболее распространенных в строительстве хвойных пород) составляет в среднем 100 МПа. Материал работает упруго почти до самого разрушения (диаграмма *1* на рис. 2.36), которое происходит хрупко в результате разрыва наиболее слабых волокон по пилообразной поверхности (рис. 2.37, *а*).

Однако наличие сучков и косослоя значительно снижает сопротивление растяжению (см. табл. 2.2). Опыты показывают, что при максимально допустимом действующими нормами размере сучков ($^1/_4$ ширины или диаметра растянутого элемента) предел прочности составляет всего около 25—30 % предела прочности стандартных образцов из чистой древесины.

При растяжении поперек волокон предел прочности в 20—25 раз ниже, чем вдоль волокон. В этом случае существенным оказывается влияние косослоя, при котором направление усилия не совпадает с направлением волокон. Чем протяженнее косослой, тем больше составляющая усилия, перпендикулярная волокнам, и тем меньше прочность элемента. По действующим нормам косослой в растянутых элементах не должен превышать 7 см на 1 м длины.

Испытания стандартных образцов на сжатие вдоль волокон дают значения предела прочности в 2—2,5 раза меньшие, чем на растяжение. При влажности 12 % предел прочности на сжатие сосны и ели в среднем составляет 44 МПа. Разрушение в этом случае происходит путем сдвига одной части кубического образца относительно другой (рис. 2.37, *б*) в результате упругопластической работы материала (диаграмма *2* на рис. 2.36). Однако влияние сучков при сжатии меньше, чем в случае растя-

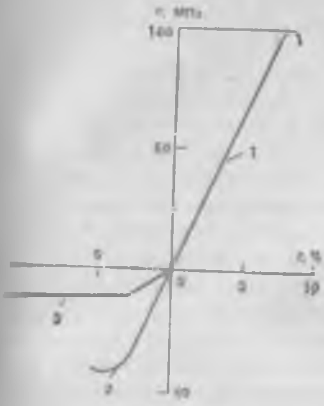


Рис. 2.36

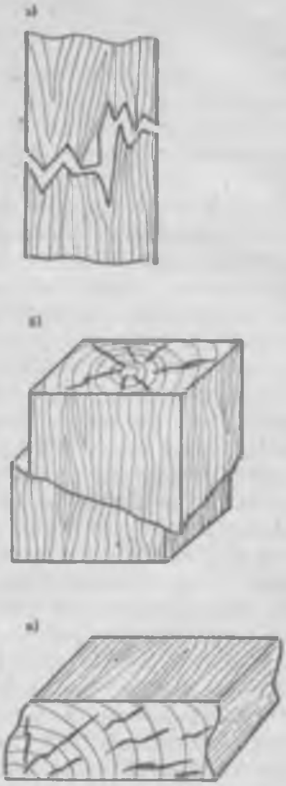


Рис. 2.37

жения. При их допускаемом размере в 1/3 ширины или диаметра сжатого элемента предел прочности составляет 70—75 % предела прочности стандартных образцов. Благодаря такой особенности работа сжатых элементов в деревянных конструкциях более надежна, чем растянутых. Этим объясняется широкое применение металлодеревянных конструкций, у которых основные растянутые элементы выполнены из стали, а сжатые и сжато-изогнутые — из дерева.

При сжатии поперек волокон древесина сильно прессуется (рис. 2.37, *в*) и определить момент начала разрушения затруднительно, о чем свидетельствует диаграмма 3 на рис. 2.36.

Природа, как видим, наилучшим образом распорядилась прочностью целлюлозы, из которой в основном состоит древесина. По такому же принципу в технике создают композиционные материалы, упоминавшиеся в предыдущем параграфе в связи с рассмотрением сущности железобетона. Среди наиболее эффективных современных конструкционных материалов следует отметить большую группу армированных пластиков, объединенных общим названием СВАМ (стекловолокнистый анизотропный материал). Их получают путем горячей пропитки эпоксидной смолой и прессованием тончайших стеклянных волокон. Высокая прочность стеклопластиков объясняется тем, что тонкие нити значительно прочнее массивных образцов, выполненных из того же материала (с уменьшением толщины волокна уменьшаются дефекты изготовления, являющиеся основной причиной снижения прочности любого материала).

Чередуя направление укладки слоев волокон, можно менять степень и характер анизотропии с тем, чтобы использовать прочность волокон наиболее рационально. Как видно из табл. 2.2, прочность СВАМ при соотношении продольных и поперечных слоев 10 : 1 почти в 2 раза выше, чем прочность при соотношении 1 : 1, причем последняя сама по себе уже достаточно велика и соизмерима с прочностью низколегированной стали. А так как плотность СВАМ ($\rho = 1{,}9$ т/м^3) меньше в 4 раза, чем у стали, и примерно в 1,5 раза, чем у алюминия, применение стеклопластиков может оказаться весьма выгодным в тех случаях, когда снижение массы конструкции имеет первостепенное значение.

К недостаткам стекловолокнистых материалов следует отнести низкие показатели пластичности ($\varepsilon_r \leqslant 2$ %) и, как следствие, хрупкий характер разрушения, а также малую жесткость (модуль E в 2 раза меньше, чем у алюминия). В последнее время промышленностью освоены высокопрочные волокна, значительно превосходящие по своим свойствам стеклянные и, что особенно важно, имеющие более высокий модуль упругости. Наибольшее распространение получили волокна бора и углерода, которыми армируют пластики и металлы.

2.10. Расчет на прочность. Метод допускаемых напряжений

Конечной целью расчета любой конструкции является использование полученных результатов для оценки пригодности этой конструкции к эксплуатации при минимальной затрате материала, что находит отражение в выборе общего метода расчета на прочность.

Долгое время, начиная еще с Галилея[1], когда возводились главным образом каменные и деревянные сооружения, господствовало представление о предельной несущей способности конструкции, исходившее из схемы ее вероятного разрушения и определения разрушающей нагрузки. Однако отсутствие экспериментальных данных о поведении конструкций при больших нагрузках заставляло прибегать к различным гипотезам о схеме разрушения и вносило в расчеты элемент условности и произвола.

Появление металлических строительных конструкций (XVIII в.), сначала из чугуна, а затем из железа, потребовало более внимательного отношения к расчетам, чем это было принято для камня и древесины. В 1826 г. Л. Навье высказал мысль об отказе от расчета конструкций по состоянию разрушения и выдвинул прогрессивную для своего времени идею рабочего состояния, под которым подразумевалось напряженно-деформированное состояние, вызванное рабочей, реальной нагрузкой.

При таком подходе к проблеме прочности отпадает необходимость задаваться схемой разрушения. Достаточно определить напряжения при фактической нагрузке и сопоставить их с опасным значением. В предположении, что экспериментально установленное для рассматриваемого материала предельное значение напряжения после деления на коэффициент запаса прочности дает так называемое допускаемое напряжение, расчет на прочность сводится к сравнению рабочих напряжений с допускаемыми. Поэтому расчет по рабочему состоянию обычно называют расчетом *по допускаемым напряжениям*. Соответствующее условие прочности бруса, работающего на осевое растяжение (сжатие), имеет вид

$$\sigma_{max} = N_n/A_{net} \leq [\sigma], \tag{2.19}$$

[1] Галилео Галилей (G. Galilei, 1564—1642) — знаменитый итальянский ученый, с именем которого связаны не только выдающиеся открытия в астрономии, но и исследования в области механики. Он первым в истории человечества поставил вопрос о прочности тел и первым попытался его разрешить.

где σ_{max} — наибольшее по абсолютному значению нормальное напряжение в рассчитываемом брусе, т. е. напряжение в опасном поперечном сечении, Па; N_n — продольная сила в указанном сечении от фактических, или нормативных, нагрузок (их устанавливают нормативные документы, см. п. 2.12), Н; A_{net} — площадь сечения нетто, т. е. за вычетом возможных ослаблений (отверстий, вырезов и т. п.), м²; $[\sigma] = \sigma_{lim}/K$ — допускаемое напряжение материала, из которого выполнен брус; σ_{lim} — предельное (опасное) напряжение: предел текучести σ_y ($\sigma_{0,2}$) пластичного материала (см. рис. 2.25, 2.21, *а*) или предел прочности σ_u хрупкого (см. рис. 2.26); K — коэффициент запаса по отношению соответственно к пределу текучести (K_y) или пределу прочности (K_u).

Значение коэффициента запаса, а следовательно, и допускаемого напряжения, зависит от многих факторов и в первую очередь от того, насколько точно в расчете можно учесть реальные нагрузки, какова степень совпадения свойств материала конструкций и отдельно испытанных образцов, в какой мере можно гарантировать постоянство условий работы конструкций при эксплуатации сооружения. Для бетона и железобетона $K_u = 2$—$3{,}5$, для древесины $K_u = 3{,}5$—6, для строительной стали марки Ст3 $K_y = 1{,}5$.

Записанное условие позволяет производить три вида расчета на прочность.

1. *Проверка прочности* (проверочный расчет). По известной нагрузке (а следовательно, продольной силе N_n в опасном сечении бруса) и поперечным размерам (т. е. площади сечения A_{net}) определяют наибольшее рабочее напряжение и сравнивают с допускаемым напряжением материала. Расчет выполняют непосредственно по формуле (2.19).

2. *Подбор сечения* (проектный расчет) — наиболее ответственная и распространенная задача при проектировании конструкций. По найденному усилию от заданной нагрузки и допускаемому напряжению применяемого материала определяют требуемую площадь поперечного сечения бруса

$$A \geq N_n/[\sigma], \tag{2.19а}$$

3. *Определение несущей способности.* По известным поперечным размерам бруса и допускаемому напряжению материала устанавливают значение допускаемой продольной силы

$$N_{adm} \leq [\sigma]\, A_{net}. \tag{2.19б}$$

К последнему виду расчета прибегают главным образом при реконструкции сооружений, когда необходимо

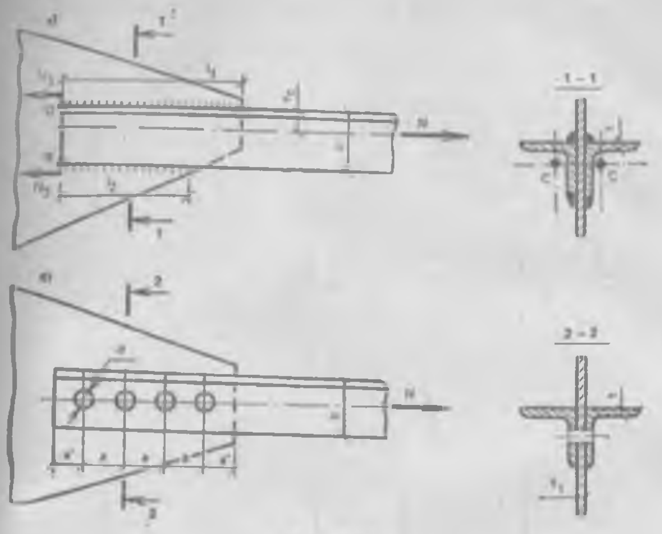


Рис. 2.38

выяснить, смогут ли ранее возведенные конструкции выдерживать без усиления возросшие нагрузки (например, от изменившегося режима технологического процесса в производственном здании).

Пример 2.12. Проверить прочность растянутого элемента из двух равнополочных прокатных уголков сечением $b \times t = 90 \times 8$ мм. Уголки прикрепляются к фасонке в одном случае с помощью сварки (рис. 2.38, *а*), в другом — посредством заклепок, которые поставлены в отверстия диаметром $d = 21$ мм (рис. 2.38, *б*). Усилие растяжения $N_н = 420$ кН Материал уголков — сталь марки Ст3 с пределом текучести $\sigma_y = 235$ МПа.

Решение. Допускаемое напряжение стали в соответствии с указанным выше значением коэффициента запаса:

$$[\sigma] = \sigma_y / K_y = 235/1{,}5 \text{ МПа} \approx 156{,}7 \text{ МПа}.$$

Округляя до ближайшего числа, кратного 5 МПа, получаем $[\sigma] = 155$ МПа. Площадь сечения рассчитываемого элемента принимаем по сортаменту[1] равнополочных уголков (см. табл. 3 приложе-

[1] *Сортамент* — каталог (таблицы) прокатных профилей (двутавров, швеллеров, уголков и т. д.), поставляемых металлургическими заводами в соответствии с требованиями ГОСТов.

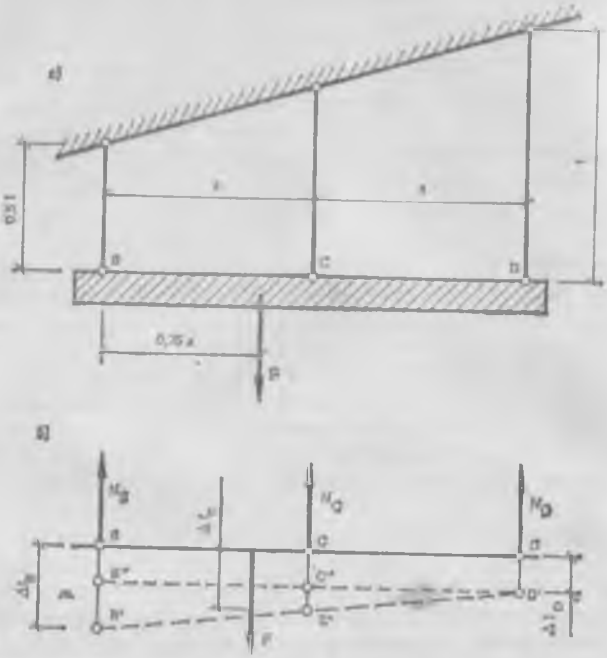


Рис. 2.39

ния): $A=2\cdot 13{,}9$ см² $=27{,}8$ см² $=27{,}8\cdot 10^{-4}$ м². При сварном варианте крепления она совпадает с расчетной площадью, так как все сечения элемента равноопасны. Согласно неравенству (2.19)

$$\sigma = N_n/A = 420\cdot 10^3/(27{,}8\cdot 10^{-4})\ \text{Па} = 151\cdot 10^6\ \text{Па} = 151\ \text{МПа} < [\sigma] = 155\ \text{МПа},$$

т. е. прочность обеспечена При клепаном варианте уголки ослаблены отверстиями. Площадь опасного сечения *2—2*

$$A_{net} = A - A_0 = A - 2td = 27{,}8 - 2\cdot 0{,}8\cdot 2{,}1\ \text{см}^2 = 27{,}8 - 3{,}36\ \text{см}^2 = 24{,}44\ \text{см}^2.$$

Напряжения

$$\sigma = N_n/A_{net} = 4200/24{,}44\ \text{МПа} = 172\ \text{МПа} > [\sigma],$$

т. е. прочность недостаточна. Необходимая площадь сечения нетто по формуле (2.19а)

$$A'_{net} \geq N_n/[\sigma] = 420\cdot 10^3/\left(155\cdot 10^6\right)\ \text{м}^2 = 27{,}1\cdot 10^{-4}\ \text{м}^2 = 27{,}1\ \text{см}^2.$$

Минимальная требуемая полная площадь сечения (площадь брутто)

$$A = A_{net} + A_0 = 27,1 + 3,36 \text{ см}^2 = 30,46 \text{ см}^2.$$

Принимаем два уголка 100×8 мм площадью $A = 2 \cdot 15,6$ см² = 31,2 см², наиболее близкой к требуемой.

Пример 2.13. Жесткий брус *BCD*, деформацией которого можно пренебречь, подвешен на трех стальных стержнях одинакового поперечного сечения $A = 5$ см² (рис. 2.39, *а*). Определить допускаемое значение нагрузки F, если допускаемое напряжение стали $[\sigma] = 155$ МПа.

Решение. *Определение усилий в стержнях.* Для плоской системы параллельных сил (рис. 2.39, *б*) можно составить два уравнения равновесия:

$$\Sigma Y = 0; \quad N_B + N_C + N_D - F = 0; \tag{а}$$

$$\Sigma m_D = 0; \quad N_B 2a + N_C a - F\, 1,25a = 0,$$

или после сокращения на a

$$2N_B + N_C - 1,25F = 0. \tag{б}$$

Они содержат три неизвестных усилия, следовательно, система один раз статически неопределима и необходимо дополнительно составить уравнение перемещений. Из подобия треугольников $D'B''B'$ и $D'C''C'$ имеем

$$\frac{B''B'}{C''C'} = \frac{D'B''}{D'C''}$$

или

$$\frac{\Delta l_B - \Delta l_D}{\Delta l_C - \Delta l_D} = \frac{2a}{a},$$

откуда $\Delta l_B - \Delta l_D = 2(\Delta l_C - \Delta l_D)$ и после приведения подобных членов

$$\Delta l_B + \Delta l_D - 2\Delta l_C = 0. \tag{в}$$

В соответствии с формулой (2.5) уравнение (в) принимает вид

$$\frac{0,5N_B l}{EA} + \frac{N_D l}{EA} - 2\frac{0,75N_C l}{EA} = 0.$$

После сокращения на l/EA

$$0,5N_B + N_D - 1,5N_C = 0. \tag{г}$$

Решая совместно уравнения (а), (б) и (г), найдем усилия в стержнях, выраженные в долях силы F. Вычитая из уравнения (а) уравнение (г), после приведения подобных членов получим

$$0,5N_B + 2,5N_C - F = 0.$$

Увеличим все члены полученного уравнения в 4 раза и вычтем из уравнения (б). После приведения подобных членов

$$-9N_C + 2,75F = 0,$$

откуда $N_C = 2,75F/9 = 0,306\,F$.

Найденное значение усилия N_C подставляем в уравнение (б):

$$2N_B + 0,306F - 1,25F = 0,$$

откуда $N_B = 0,944F/2 = 0,472F$.

Далее значения усилий N_B и N_C подставляем в уравнение (а):

$$0,472F + 0,306F + N_D - F = 0,$$

из которого получаем $N_D = 0,222F$.

Определение допускаемого значения нагрузки. Так как площадь поперечного сечения всех трех стержней одинакова, наиболее напряженным оказывается левый стержень, имеющий максимальное усилие $N_{max} = N_B = 0,472F$. Согласно условию прочности (2.19б)

$$N_B \leqslant [\sigma] A,$$

или $0,472F \leqslant 155 \cdot 10^6 \cdot 5 \cdot 10^{-4}$ Н $= 77,5 \cdot 10^3$ Н $= 77,5$ кН.

Отсюда $F_{adm} \leqslant 77,5/0,472$ кН $= 164$ кН.

Найденный предел установлен в предположении, что напряжение, равное допускаемому, возникает только в одном, наиболее нагруженном стержне, в то время как два других (средний и правый) работают с недогрузкой. В действительности же появление текучести в наиболее нагруженном элементе не означает еще исчерпания несущей способности системы в целом. Это обстоятельство учитывает другой метод расчета на прочность — *по разрушающим нагрузкам*.

2.11. Понятие о расчете по разрушающим нагрузкам

Данный метод предполагает определение расчетным путем не напряжений, а максимальной нагрузки, которую может выдержать конструкция, не разрушаясь и не претерпевая непрерывно нарастающих пластических деформаций. При этом в качестве условия прочности выдвигается требование, чтобы наибольшая нагрузка не превышала допускаемого значения, полученного делением предельной нагрузки на коэффициент запаса прочности, т. е.

$$F_{max} \leqslant [F] = F_{lim}/K. \tag{2.20}$$

Коэффициент запаса K назначается из тех же соображений, что и при расчете по допускаемым напряжениям.

Идею расчета по разрушающим нагрузкам высказал в 1904 г. А. Ф. Лолейт[1]. Она получила широкое развитие

[1] Артур Фердинандович Лолейт (1868—1933) — русский советский ученый и инженер, специалист в области железобетонных конструкций. Принимал участие в проектировании и возведении многих крупных сооружений: пешеходного арочного моста на Нижегородской выставке, сводов Музея изобразительных искусств и четырехэтажного склада с безбалочными перекрытиями в Москве и др.

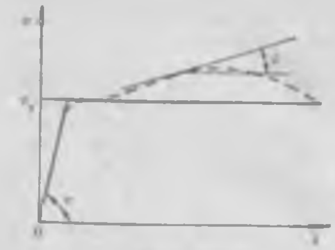


Рис. 2.40

в начале 30-х годов в связи с несовершенством классической теории железобетона и разработкой в нашей стране новых строительных норм. В основу положено условие *предельного равновесия*, предусматривающее одновременное достижение предела текучести стальной арматурой и предела прочности бетоном. Это позволило найти для железобетона единый критерий прочности, тогда как, согласно классической теории, арматуру и бетон рассчитывали порознь, исходя из соответствующих допускаемых напряжений.

При расчете по разрушающим нагрузкам конструкций из пластичного материала принимают упрощенную диаграмму растяжения. Для низкоуглеродистой строительной стали (см. рис. 2.18) близка диаграмма идеально упругопластичного материала (диаграмма Прандтля[1], рис. 2.40). Наклонная прямая характеризует упругую стадию работы материала ($\sigma = E\varepsilon$, где $E = \operatorname{tg}\alpha$), горизонтальная (безграничная площадка текучести) — пластическую ($\sigma = \sigma_y$).

В реальных условиях, когда относительное удлинение достигает определенного значения (для Ст3 $\varepsilon \approx 2,5$ %), сталь, как отмечалось в п. 2.4, прекращает течь и снова приобретает способность сопротивляться внешним воздействиям (стадия самоупрочнения). Однако модуль пластических деформаций $E_{pl} = \operatorname{tg}\beta$ настолько мал, что его можно считать равным нулю (в среднем $E_{pl} = 0,01\,E$). То же справедливо и для стали, не имеющей площадки текучести, поэтому диаграмма Прандтля в большинстве случаев может быть распространена на любую сталь.

Пример 2.14. Используя условие предыдущего примера, определить допускаемое значение силы F методом разрушающих нагрузок.

Решение. Поскольку материал стержней подчиняется идеализированной диаграмме (см. рис. 2.40), по достижении напряжениями левого стержня предела текучести усилие в этом стержне при даль-

[1] Людвиг Прандтль (L. Prandtl, 1875—1953) — основатель немецкой школы прикладной механики. Его ранние работы касались вопросов прочности материалов. Основные достижения относятся к области аэродинамики.

нейшем увеличении нагрузки расти не будет. Система, таким образом, из статически неопределимой превращается в статически определимую.

Приращение нагрузки будет восприниматься двумя другими, менее напряженными стержнями, до тех пор пока один из них не «потечет». После этого система станет изменяемой (превратится в механизм), поскольку перестанут удовлетворяться уравнения равновесия. Следовательно, критерием предельной нагрузки для системы, представленной на рис. 2.39, является наличие текучести в двух наиболее напряженных стержнях. Вторым таким стержнем, очевидно, окажется средний, так как согласно примеру 2.13 усилие в нем больше, чем в правом ($N_C > N_D$).

Приравняв напряжения в левом и среднем стержнях пределу текучести и подставив выражение соответствующих усилий $N_B = N_C = \sigma_y A$ в уравнение (б) указанного примера, получим уравнение предельного равновесия рассматриваемой системы

$$2\sigma_y A + \sigma_y A - 1{,}25 F_{lim} = 0,$$

или $3\sigma_y = 1{,}25 F_{lim}$, откуда $F_{lim} = 3\sigma_y / 1{,}25 = 2{,}4\sigma_y$.

Воспользовавшись условием прочности (2.20), находим

$$[F] = F_{lim}/K_y = 2{,}4\sigma_y A/K_y = 2{,}4\,[\sigma]\,A =$$
$$= 2{,}4 \cdot 155 \cdot 10^6 \cdot 5 \cdot 10^{-4}\ \text{Н} = 186 \cdot 10^3\ \text{Н} = 186\ \text{кН}.$$

Разница в значениях допускаемой нагрузки составляет:

$$\Delta F = \frac{F - F_{adm}}{F_{adm}} 100 = \frac{186 - 164}{164} 100\% \approx 13\%.$$

Таким образом, при расчете по разрушающим нагрузкам несущая способность оказалась значительно выше, чем при расчете по допускаемым напряжениям, т. е. расчет по разрушающим нагрузкам позволяет проектировать более экономичные конструкции, обеспечивая равнопрочность их элементов.

2.12. Расчет по предельным состояниям (метод частных коэффициентов)

Основным недостатком расчета по допускаемым напряжениям и разрушающим нагрузкам является обобщенный характер коэффициента запаса прочности. Единственный коэффициент не может правдоподобно отразить многообразие условий, от которых зависит безопасность конструкции или сооружения. Подробные исследования работы строительных конструкций показали, что аварии возникают в результате случайного совпадения нескольких факторов: отклонения нагрузки в худшую сторону, снижения механических свойств материала, неблагоприятных условий эксплуатации, неточности расчетной схемы и т. д. Статистический учет изменчивости обстоятельств, влияющих на работу конструкций, нашел отражение в методе расчета по предельным состояниям, разработанном советскими учеными под руководством Н. С. Стрелецкого [1]. Этот метод начал применяться в нашей стране с 1955 г., после утверждения основного руководящего документа по проектированию — Строительных норм и правил (СНиП). В настоящее время по предельным состояниям рассчитывают все конструкции промышленных и гражданских зданий (сооружений), мостов, а также монтажные приспособления, за исключением механических узлов и деталей, относящихся к области машиностроительных конструкций, которые попрежнему рассчитывают по допускаемым напряжениям.

С 1962 г. на новую расчетную методику начали переходить страны — члены Совета Экономической Взаимопомощи (СЭВ). Постоянной Комиссией СЭВ по строительству были утверждены «Основные положения по расчету строительных конструкций и оснований», разработанные на базе соответствующей главы СНиП. В 1973 г. этот документ принят в качестве стандарта СЭВ.

В 1976 г. в результате дальнейшего совершенствования метода предельных состояний утвержден и введен в действие новый стандарт СТ СЭВ 384—76 [10]. В нашей стране он утвержден Государственным строительным комитетом (Госстроем) СССР и введен в действие с 1978 г.

Под *предельным* понимается такое состояние конструкции, при котором она перестает удовлетворять заданным эксплуатационным требованиям или требованиям, предъявляемым в процессе возведения здания (сооружения).

Строго говоря, любой метод расчета имеет дело с тем или иным предельным состоянием. Но если при расчете по разрушающим нагрузкам и допускаемым напряжениям критерием предельного состояния является разрушение или потеря несущей способности, то при расчете рассматриваемым методом критерий принципиально иной — прекращение эксплуатации сооружения. Такой критерий более широк, поскольку прекращение эксплуатации сооружения может быть вызвано различными обстоятельствами, в том числе и потерей несущей способности.

---

[1] Николай Станиславович Стрелецкий (1885—1967) — Герой Социалистического Труда, член корреспондент АН СССР, заслуженный деятель науки и техники РСФСР, крупный ученый, инженер и педагог в области металлических строительных конструкций.

Кроме характеристик прочности и конструктивной формы сооружения, учитываемых обстоятельствами потери несущей способности, эксплуатационный критерий включает и такие характеристики, как назначение и ответственность сооружения, условия и продолжительность его эксплуатации, экономические соображения и пр. Следовательно, подобный критерий выглядит более гибким и разносторонним. Прекращение эксплуатации, связанное с необходимостью ремонта или замены части конструкции, еще не означает разрушения конструкции, а только нарушает функционирование сооружения или деятельность предприятия.

Поскольку причины прекращения эксплуатации разнообразны, сооружение может иметь несколько предельных состояний. Согласно стандарту СЭВ [10] различают две группы предельных состояний: 1) по потере несущей способности или непригодности к эксплуатации; 2) по непригодности к *нормальной* эксплуатации, под которой понимается процесс бесперебойной работы конструкции или сооружения, осуществляемый без ограничений в соответствии с предусмотренными в нормах или заданиях на проектирование функциональными (технологическими или бытовыми) условиями.

Остановимся подробнее на первой группе предельных состояний, которая включает состояние разрушения и поэтому связана с вопросами прочности. Здесь имеется два признака прекращения эксплуатации. Первый относится к конструкциям, обладающим большой жесткостью, для которых остаточные деформации несущественны или маловероятны по условиям работы. При высоком качестве изготовления эксплуатация таких конструкций может продолжаться вплоть до исчерпания несущей способности.

В деформативных конструкциях решающим является второй признак, когда чрезмерные остаточные деформации (вследствие текучести материала, ползучести [1], податливости соединений или образования трещин) делают невозможной дальнейшую эксплуатацию, и сооруже-

---

[1] *Ползучесть* характеризуется изменением во времени деформаций (так называемое *последействие* или собственно ползучесть) или напряжений (*релаксация*). Для стали ползучесть существенна лишь при температуре свыше 300 °С, для металлов с низкой температурой плавления (алюминий), а также для бетона, древесины и пластических масс — при комнатной температуре.

ние становится непригодным, хотя его несущая способность не исчерпана.

Сопоставление обоих признаков приводит к выводу, что *пределом несущей способности конструкции является наивысший предел ее эксплуатационной способности.*

Итак, прекращение эксплуатации — не катастрофа, а лишь предотвращение аварии. Поэтому для обеспечения эксплуатации не требуется тех чрезвычайных мер в виде общего коэффициента запаса на всякий непредвиденный случай, которые психологически неизбежны для обеспечения неразрушимости. Содержание коэффициента запаса при расчете по предельным состояниям приобретает четкий физический смысл.

Разработка метода предельных состояний явилась первым шагом на пути перехода к научно обоснованным методам обеспечения надежности строительных конструкций. Надежностью называется способность объекта сохранять в процессе эксплуатации качество, заложенное при проектировании. Следовательно, надежность конструкции — это устойчивость ее качества по отношению к всевозможным отклонениям, которые могут возникнуть при изготовлении, транспортировании, возведении и полезном функционировании.

Обеспечение надежности является одной из важнейших проблем современной техники. Ее актуальность в строительстве объясняется в первую очередь существенным усложнением конструктивной формы сооружений, разнообразием характера взаимодействия многочисленных конструктивных элементов, активным воздействием окружающей среды. В этих условиях сравнительно малые и локальные дефекты способны стать причиной нарушения и даже прекращения функционирования объекта.

Другая причина заключается в том, что многие объекты строительства имеют весьма важное значение национального и даже мирового масштаба. Сюда относятся уникальные сооружения, крупные тепловые, гидроэнергетические и атомные станции, доменные печи, ракетно-космические комплексы, оборонные сооружения и т. п. Нарушение функционирования таких объектов может привести к большому материальному, моральному и социальному ущербу. Наиболее ярким примером служит авария на Чернобыльской АЭС.

Изучением надежности и долговечности систем независимо от их характера, назначения и т. д. занимается общетехническая дисциплина, называемая *теорией надежности*. Одним из основных понятий этой теории является понятие о т к а з а, т. е. частичной или полной утраты качества системы. В строительной механике данному термину соответствует понятие предельного состояния конструкции.

Особенностью теории надежности является то, что наряду с обычными, детерминированными параметрами она оперирует случайными величинами. Специфика теории надежности строительных конструкций состоит в необходимости учета случайных значений нагрузок, воздействующих на системы со случайными прочностными показателями. Таким образом, надежность оказывается связанной с природой случайных величин, характеризующих работоспособность объекта, и количественно выявляется посредством аппарата теории вероятностей[1].

Высокий уровень надежности достигается, как правило, ценой увеличения стоимости строительства. В то же время значительно меньшие затраты часто обеспечивают надежность с практически неощутимым риском. Следовательно, задача расчета на надежность состоит либо в определении вероятности отказа конструкции в предполагаемых условиях работы, либо в определении требуемых размеров элементов конструкции, допустимых нагрузок или оптимального срока эксплуатации исходя из экономически целесообразной надежности.

Некоторое время назад считалось, что учет надежности сооружения при проектировании возможен только с позиций вероятностно-экономического метода расчета строительных конструкций, который противопоставлялся принятому методу предельных состояний. Оказалось, однако, что эта задача разрешима и в рамках последнего. Характерной особенностью метода предельных состояний в современной интерпретации является то, что все исходные величины, случайные по своей природе, представлены в нормах некоторыми детерминированными, н о р м а т и в н ы м и значениями, а влияние их изменчивости на надежность конструкций учитывается соответствующими коэффициентами. Каждый из коэффициентов надежности учитывает изменчивость только одной исходной ве-

[1] *Теория вероятностей* — математическая дисциплина, позволяющая по вероятности одних случайных событий находить вероятности других, связанных каким-либо образом с первыми.

личины, т. е. носит частный характер. Поэтому метод предельных состояний иногда называют *методом частных коэффициентов.*

Факторы, изменчивость которых влияет на уровень надежности конструкций и сооружений, могут быть отнесены к пяти основным категориям: нагрузки и прочие воздействия, механические свойства материала, геометрические размеры конструктивных элементов, условия работы, степень ответственности сооружения.

За нормативное значение нагрузок и воздействий принимают значения, близкие к нагрузкам и воздействиям при нормальной эксплуатации. Их устанавливают СТ СЭВ 1407—78 [11] и глава СНиП 2.01.07—85 [3].

Возможное отклонение нагрузок в неблагоприятную (большую или меньшую) сторону от их нормативных значений вследствие изменчивости или отступлений от условий нормальной эксплуатации учитывает **коэффициент надежности по нагрузке** $\gamma_f \geq 1$, принимаемый по тем же нормативным документам в зависимости от нагрузки.

Нагрузки и воздействия, получаемые путем умножения их нормативных значений на соответствующие коэффициенты надежности, называются **расчетными**:

$$\left.\begin{aligned} F &= F_n \gamma_f; \\ q &= q_n \gamma_f. \end{aligned}\right\} \qquad (2.21)$$

При расчете по первой группе предельных состояний, как правило, $\gamma_f > 1$. В этом случае расчетные нагрузки представляют собой наибольшие возможные нагрузки за время эксплуатации сооружения и их можно назвать предельными или крайними. Таким образом, коэффициент надежности по нагрузке корректирует неточно установленную нормативную нагрузку на основании полученной из опыта эксплуатации предельной нагрузки.

То, что каждая нагрузка имеет свой коэффициент надежности, позволяет проектировать конструкции более экономичные, чем при расчете по одинаковому для всех нагрузок коэффициенту запаса, или по допускаемым напряжениям. Так, при расчете железобетонных конструкций по разрушающим нагрузкам на одинаковый коэффициент запаса $K=2$ умножалась как постоянная, так и временная нагрузка, несмотря на невероятность возрастания постоянной нагрузки в два раза за время эксплуатации. Подобная нечеткость приводила к перерасходу материала.

Основным параметром сопротивления материала силовым воздействиям является *нормативное сопротивление* R_n, устанавливаемое нормами проектирования строительных конструкций с учетом условий контроля и статистической изменчивости механических свойств материала. За нормативное сопротивление прокатной стали принимают наименьшее контролируемое (браковочное) значение предела текучести σ_y (см. рис. 2.25), установленное ГОСТами или техническими условиями на металл. В соответствии с СТ СЭВ 1565—79 [12] его обозначают R_{yn}. При отсутствии ярко выраженной площадки текучести $R_{yn}=\sigma_{0,2}$ (см. рис. 2.21, *а*).

Если эксплуатация стальных конструкций, работающих на растяжение, возможна и после достижения металлом предела текучести (например, трубопроводы, цилиндрические сосуды и прочие конструкции, подвергающиеся внутреннему давлению), за нормативное сопротивление принимают наименьшее контролируемое значение предела прочности σ_u, установленное указанными документами. Его обозначают R_{un}. То же относится к высокопрочной стальной проволоке для канатов и тросов, применяемой в виде пучков или прядей.

В целях более полного использования прочностных свойств строительных сталей их нормативные сопротивления в главе СНиП II-23-81* [9] указаны дифференцированно для каждой марки с учетом группы прочности (гр. 1 или 2), вида проката (листовой или фасонный) и его толщины.

В качестве нормативного сопротивления алюминиевых сплавов используют одну из двух величин: $\sigma_{0,2}$ или σ_u.

За нормативное сопротивление бетона в зависимости от вида воздействия принимают одну из двух величин: R_{bn} — наименьшее контролируемое значение предела прочности на сжатие стандартных призм (призменная прочность) с отношением высоты к размеру квадратного основания $4 \leqslant h/a < 8$ (см. рис. 2.29); R_{btn} — наименьшее контролируемое значение предела прочности на растяжение, устанавливаемое косвенными методами (чаще всего испытанием образцов на раскалывание или изгиб).

Кроме того, различают так называемую кубиковую прочность бетона, которая упоминалась в п. 2.7 в связи с испытанием на сжатие хрупких материалов. Кубиковая прочность в МПа образцов указанного там размера, изготовленных из рабочего состава бетона и выдержанных в течение 28 сут при температуре воздуха 20 °C и влажности не ниже 90 %, характеризует класс бетона B по прочности на осевое сжатие.

Нормативным сопротивлением каменной кладки является предел ее прочности на сжатие в возрасте 28 дней, зависящий от прочности камня (кирпича) и раствора.

Нормативное сопротивление древесины устанавливают исходя из среднего значения предела прочности на растяжение (сжатие) вдоль волокон при влажности 12 %.

Возможное отклонение сопротивления материала в неблагоприятную сторону от нормативного значения учитывает **коэффициент надежности по материалу** $\gamma_m > 1$. Он отражает статистическую изменчивость свойств материала и их отличие от свойств отдельно испытанных образцов.

Характеристика, получаемая делением нормативного сопротивления на коэффициент γ_m, называется *расчетным сопротивлением материала*

$$R = R_n/\gamma_m. \qquad (2.22)$$

Она представляет собой наименьшее возможное сопротивление материала за время эксплуатации. Значения R для указанных материалов устанавливают главы СНиП [4—7, 9].

Возможное неблагоприятное отклонение геометрических характеристик (размеров конструктивных элементов, их взаимного расположения и т. д.) должен учитывать **коэффициент точности**. На него следовало бы умножать нормативное значение геометрической характеристики. Однако в большинстве случаев вместо коэффициента точности используют дополнительное слагаемое, которое прибавляется к нормативному значению и играет ту же роль, что и частный коэффициент. В некоторых случаях отклонение геометрических размеров учитывают коэффициентом надежности по материалу.

Значения коэффициента точности и дополнительных слагаемых устанавливают, исследуя условия изготовления и монтажа строительных конструкций с учетом правил нормирования допусков [1] и контроля качества, а так-

[1] *Допуски* — допускаемые отклонения числовой характеристики от номинального (расчетного) значения в соответствии с заданным классом точности.

же анализируя статистическую изменчивость соответствующей геометрической характеристики.

Особенности действительной работы материалов, элементов конструкций, их соединений, а также конструкций и сооружений в целом, имеющие систематический характер, но не отражаемые в расчете прямым путем или не имеющие приемлемого аналитического описания, учитывают **коэффициентом условий работы** γ_c. Он вводится в качестве множителя к значению расчетного сопротивления R и отражает неблагоприятное влияние температуры, агрессивности окружающей среды, длительности и многократной повторяемости воздействия, приближенности расчетных схем и предпосылок ($\gamma_c < 1$), а также перераспределение усилий при развитии пластических деформаций и прочие благоприятные факторы ($\gamma_c > 1$).

Числовые значения коэффициента γ_c устанавливают те же главы СНиП [4—7, 9] на основании экспериментальных и теоретических данных о действительной работе материалов и конструкций в условиях эксплуатации и строительства. В большинстве случаев, при нормальных условиях работы, коэффициент $\gamma_c = 1$ и может быть опущен.

Степень ответственности и капитальности зданий и других сооружений, а также значимость последствий тех или иных предельных состояний учитывают **коэффициентом надежности по назначению** $\gamma_n \leqslant 1$. Его вводят в качестве делителя к значению расчетного сопротивления или в качестве множителя к значению расчетных нагрузок, воздействий и усилий.

Значения коэффициента γ_n, строго говоря, должны устанавливаться из решения задачи по разумному сбалансированию затрат на возведение сооружения, увеличивающихся с повышением надежности, и последствий отказов, опасность которых уменьшается с повышением надежности. Задача эта чрезвычайно сложна даже в чисто экономической постановке, не говоря уже о том, что по мере снижения уровня надежности необходимо учитывать возрастающую угрозу для жизни людей, сохранности исторических и художественных ценностей, прочие факторы, не поддающиеся экономической оценке. Пока сделан первый шаг. В 1981—1982 гг. разработаны и утверждены Госстроем СССР «Правила учета степени ответственности зданий и сооружений при проектировации конструкций». Согласно этому документу, включенному в главу СНиП [3], все здания и другие сооружения разбиваются на три класса ответственности, для каждого из которых установлено свое значение коэффициента надежности по назначению.

К классу I относятся здания (сооружения) особо важного народнохозяйственного и (или) социального значения: главные корпуса тепловых электростанций, центральные узлы доменных цехов, промышленные трубы высотой более 200 м, телевизионные башни, крытые спортивные сооружения с трибунами для зрителей, здания театров, цирков, кинотеатров, музеев, детских садов, больниц и т. д. Для перечисленных объектов характерна или значительная стоимость, или большая концентрация людей, или и то, и другое. Поэтому они должны иметь высокий уровень надежности, т. е. $\gamma_n = 1$.

К классу III относятся сооружения ограниченного значения: склады для хранения сельскохозяйственных продуктов, удобрений, химикатов, угля, торфа и т. п. (без процессов сортировки и упаковки), теплицы, одноэтажные жилые здания, опоры проводной (телефонной и телеграфной) связи и освещения, ограды, временные сооружения и т. д. Эти объекты не представляют большой материальной ценности и не связаны с постоянным пребыванием людских масс, поэтому несущая способность их конструкций снижается на 10 %, т. е. $\gamma_n = 0{,}9$.

Класс II включает объекты, не охватываемые классами I и III. Сюда относятся сооружения наиболее массового характера. Они не играют первостепенной роли, но имеют важное народнохозяйственное и (или) социальное значение. В этом случае $\gamma_n = 0{,}95$.

Если для упрощения записи коэффициент γ_n ввести в правую часть формулы (2.22), то

$$R = R_n/(\gamma_m \gamma_n) \qquad (2.22а)$$

и условие прочности бруса, работающего на осевое растяжение (сжатие), принимает вид

$$\sigma_{max} = N/A_{net} \leqslant R\gamma_c, \qquad (2.23)$$

где N — продольная сила в опасном поперечном сечении от расчетных нагрузок, Н; R — расчетное сопротивление материала, Па (МПа); γ_c — коэффициент условий работы. Остальные обозначения те же, что в формуле (2.19).

Условие (2.23) позволяет решать те же три типа задач, что и при расчете по допускаемым напряжениям.

1. *Проверка прочности* (проверочный расчет) — непосредственно по формуле (2.23).

2. *Подбор сечения* (проектный расчет):

$$A \geq N_{max}/(R\gamma_c). \qquad (2.23а)$$

3. *Определение эксплуатационной способности* (предельного усилия):

$$N \leq R\gamma_c A_{net}. \qquad (2.23б)$$

Пример 2.15. Проверить прочность растянутого деревянного бруса сечением $b \times h = 18 \times 22$ см, ослабленного двумя врезками глубиной $b_1 = 5$ см и четырьмя отверстиями для болтов диаметром $d = 20$ мм (рис. 2.41).

Нормативная продольная сила $N_n = 80$ кН; коэффициент надежности по нагрузке $\gamma_f = 1{,}2$. Расчетное сопротивление древесины растяжению $R = 7$ МПа. Условия работы — нормальные.

Решение. Расчетное значение продольной силы согласно формулам (2.21) составляет

$$N = N_n \gamma_f = 80 \cdot 1{,}2 \text{ кН} = 96 \text{ кН} = 96 \cdot 10^3 \text{ Н}.$$

Площадь неослабленного сечения бруса (площадь брутто)

$$A = bh = 18 \cdot 22 \text{ см}^2 = 396 \text{ см}^2.$$

Площадь ослабления врезками

$$A_1 = 2b_1 h = 2 \cdot 5 \cdot 22 \text{ см}^2 = 220 \text{ см}^2.$$

Площадь ослабления отверстиями для болтов

$$A_2 = 2d(b - 2b_1) = 2 \cdot 2{,}0 (18 - 2 \cdot 5) \text{ см}^2 = 32 \text{ см}^2.$$

Площадь наиболее ослабленного сечения бруса (площадь нетто)

$$A_{net} = A - A_1 - A_2 = 396 - 220 - 32 \text{ см}^2 = 144 \text{ см}^2 = 144 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Расчетное напряжение по формуле (2.23) при $\gamma_c = 1$

$$\sigma_{max} = N/A_{net} = 96 \cdot 10^3/(144 \cdot 10^{-4}) \text{ Па} = 6{,}7 \cdot 10^6 \text{ Па} = 6{,}7 \text{ МПа} < R = 7 \text{ МПа},$$

т. е. прочность бруса обеспечена.

Пример 2.16. Исходя из расчета по предельному состоянию подобрать сечение растянутого стального элемента, рассмотренного в примере 2.12 (сварной вариант).

Суммарная нормативная продольная сила $N_n = 420$ кН складывается из усилия $N_{1n} = 270$ кН от постоянной нагрузки с коэффициентом $\gamma_{f1} = 1{,}05$ и усилия $N_{2n} = 150$ кН от временной нагрузки с коэффициентом $\gamma_{f2} = 1{,}4$. Остальные коэффициенты надежности: $\gamma_m = 1{,}025$, $\gamma_c = \gamma_n = 1$.

Решение. Расчетная продольная сила согласно формулам (2.21)

$$N = N_{1n}\gamma_{f1} + N_{2n}\gamma_{f2} = 270 \cdot 1{,}05 + 150 \cdot 1{,}4 \text{ кН} = 493{,}5 \text{ кН}.$$

Расчетное сопротивление стали по формуле (2.22) [или (2.22а), что в данном случае равносильно] при $R_n = \sigma_y$:

$$R = R_n/\gamma_m = 235/1{,}025 \text{ МПа} \approx 230 \text{ МПа}.$$

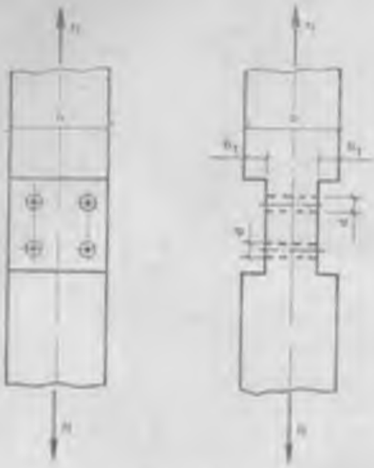


Рис. 2.41

Требуемая площадь сечения двух уголков из условия (2.23а)

$$A > N/R = 493{,}5\cdot10^3/(230\cdot10^6)\ \text{м}^2 = 21{,}5\cdot10^{-4}\ \text{м}^2 = 21{,}5\ \text{см}^2.$$

Принимаем два уголка 80×7 мм площадью $A_1 = 2\cdot10{,}8\ \text{см}^2 = 21{,}6\ \text{см}^2 > 21{,}5\ \text{см}^2$. Экономия металла составляет

$$\Delta A = \frac{A - A_1}{A}\,100 = \frac{27{,}8 - 21{,}6}{27{,}8}\,100\% = 22\%,$$

т. е. расчет по предельному состоянию в данном случае позволяет существенно снизить фактический расход материала по сравнению с расчетом по допускаемым напряжениям.

2.13. Учет влияния собственного веса бруса

Приведенные выше расчеты касались брусьев, вес которых невелик по сравнению с полезной нагрузкой, вследствие чего им можно было пренебречь. Однако в длинных вертикальных брусьях собственный вес играет существенную роль, вызывая напряжения и деформации, которые нельзя не учитывать. Так обстоит дело с колоннами (см. рис. 2.2), сооружениями башенного типа (см. рис. 1.7, *б*, *в*; 2.1, *б*), длинными кабелями, грузоподъемными цепями и т. п.

Вес материала G представляет собой нагрузку, рав-

Рис. 2.42

номерно распределенную по объему бруса (рис. 2.42, *а*). Пользуясь методом сечений, мысленно рассекаем брус на произвольном расстоянии z от свободного конца, отбрасываем верхнюю часть, заменяем ее действие на оставшуюся нижнюю неизвестным усилием от собственного веса N_G (рис. 2.42, *б*) и составляем уравнение равновесия:

$$\Sigma Z = 0; \quad N_G - \gamma A z = 0,$$

откуда $N_G = \gamma A z$, где γ — *удельный вес*, т. е. вес единицы объема материала в естественном состоянии (вместе с порами); A — площадь поперечного сечения бруса.

Соответствующие напряжения по формуле (2.3)

$$\sigma_G = N_G / A = \gamma A z / A = \gamma z \qquad (2.24)$$

Таким образом, *напряжения от собственного веса бруса постоянного сечения не зависят от площади сечения*. Эпюра σ_G построена на рис. 2.42, *в*. Она имеет линейный характер, поскольку переменная z входит в уравнение (2.24) в первой степени. Наибольшие напряжения возникают в верхнем, закрепленном сечении, где $z = z_{max} = l$:

$$\sigma_{G\max} = \gamma l. \qquad (2.24а)$$

Поскольку напряжения возрастают пропорционально расстоянию z, то и относительные удлинения бесконечно малых по длине элементов бруса dz согласно закону Гука (2.4) пропорциональны величине z:

$$\varepsilon = \sigma_G / E = \gamma z / E$$

Рис. 2.43

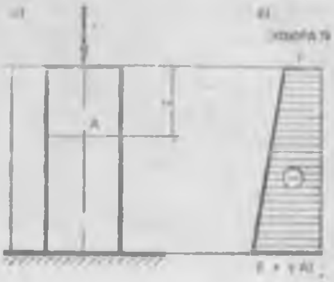
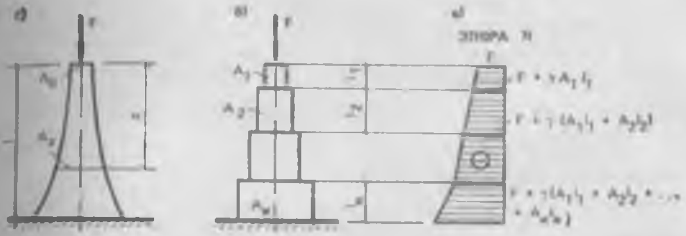


Рис. 2.44



Абсолютное удлинение элемента dz на основании выражения (2.2) составляет

$$\varepsilon dz = (\gamma z/E)\, dz.$$

Полное удлинение всего бруса складывается из удлинений отдельных элементов:

$$\Delta l = \int_0^l \varepsilon dz = \int_0^l (\gamma z/E)\, dz = \gamma/E \int_0^l z dz = \gamma l^2/(2E). \qquad (2.25)$$

Умножив числитель и знаменатель на площадь A, получим

$$\Delta l = \frac{\gamma l^2}{2E} \cdot \frac{A}{A} = Gl/(2EA), \qquad (2.25а)$$

где $G = \gamma Al$ — вес бруса.

Сравнивая формулы (2.25а) и (2.5), замечаем, что *абсолютное удлинение бруса постоянного сечения от собственного веса равно половине того удлинения, которое получит тот же брус от силы, равной его весу и приложенной к свободному концу.* Другими словами, абсолютное удлинение от собственного веса равно удлинению, которое получит брус, если его вес будет сосредоточен в центре тяжести.

Чтобы определить площадь поперечного сечения призматического бруса, находящегося под действием собственного веса и полезной нагрузки F (рис. 2.43, *а*), следует воспользоваться принципом независимости действия сил (см. п. 1.2, 4-е допущение). Тогда продольную силу в произвольном сечении бруса z можно представить в виде суммы усилий от силы F и собственного веса:

$$N(z) = N_F + N_G = F + \gamma Az.$$

Эпюра N изображена на рис. 2.43, *б*. Опасным является опорное сечение ($z=l$), где продольная сила достигает наибольшего значения $N_{max}=F+\gamma Al$. Тогда согласно условию прочности (2.23а) при $\gamma_c=1$

$$A \geqslant N_{max}/R = (F+\gamma Al)/R.$$

Отсюда минимальная требуемая площадь поперечного сечения бруса

$$A = F/(R - \gamma l). \quad (2.26)$$

Однако прочность материала окажется реализованной только в опасном сечении. Остальная часть бруса будет недонапряжена, причем разница между расчетным сопротивлением и напряжением $\sigma(z)$ тем больше, чем ближе рассматриваемое сечение к свободному концу, т. е. чем меньше влияние собственного веса. В связи с этим возникает вопрос: какую форму должен иметь брус, чтобы в любом его сечении напряжения были равны расчетному сопротивлению (так называемый *брус равного сопротивления*) и прочность материала использовалась в полной мере?

При подробном изучении вопроса оказывается, что закон изменения площади поперечного сечения такого бруса (рис. 2.44, *а*) описывается уравнением показательной кривой

$$A_z = A_0 e^{(\gamma/R)z},$$

где минимальная требуемая площадь верхнего сечения

$$A_0 = N_0/R = F/R.$$

Но криволинейный брус выгоден только теоретически, поскольку он трудоемок в изготовлении. На практике плавное изменение площади заменяют линейным (промышленные трубы) или ступенчатым (рис. 2.44, *б*) в соответствии с увеличением продольной силы сжатия (рис. 2.44, *в*). Так, в многоэтажных кирпичных зданиях стены верхних этажей делают тоньше, предусматривая их утолщение книзу ступенями через 2—3 этажа по мере возрастания веса вышележащих конструкций.

Площадь сечения каждой ступени подбирают из расчета, чтобы наибольшие напряжения в ней не превышали расчетного сопротивления материала. Площадь первой сверху ступени согласно формуле (2.26)

$$A_1 \geqslant F/(R-\gamma l_1); \tag{2.27}$$

второй ступени

$$A_2 \geqslant (F+\gamma A_1 l_1)/(R-\gamma l_2), \tag{2.28}$$

или с учетом предыдущей формулы

$$A_2 \geqslant \{F+\gamma[F/(R-\gamma l_1)]\,l_1\}/(R-\gamma l_2) = (FR - F\gamma l_1 + $$

$$+ F\gamma l_1)/[(R-\gamma l_1)(R-\gamma l_2)] = FR/[(R-\gamma l_1)(R-\gamma l_2)]. \tag{2.28а}$$

Аналогично площадь сечения произвольной k-й ступени

$$A_k \geqslant FR^{k-1}/[(R-\gamma l_1)(R-\gamma l_2)\ldots(R-\gamma l_k)]. \tag{2.29}$$

Пример 2.17. Определить перемещения δ сечений *1—1*, *2—2* и *3—3* ступенчатого бруса, изображенного на рис. 2.45, *а*, с учетом влияния собственного веса.

Решение. Перемещение сечения *1—1* равно удлинению верхней ступени бруса длиной l_3. По отношению к этой части сила F и вес нижележащих ступеней являются сосредоточенными нагрузками, а собственный вес — равномерно распределенной нагрузкой, равнодействующая которой приложена в центре тяжести рассматриваемой ступени (рис. 2.45, *б*). Пользуясь формулами (2.5) и (2.25), на основании принципа независимости действия сил находим

$$\delta_{1-1} = \Delta l_3 = \{[F+\gamma A(l_1+2l_2)]\,l_3/(3EA)\} +$$

$$+ \gamma l_3^2/(2E).$$

Перемещение сечения *2—2* равно сумме удлинений верхней и средней ступеней бруса:

$$\delta_{2-2} = \Delta l_3 + \Delta l_2.$$

Удлинение средней ступени складывается из удлинений, вызванных сосредоточенной силой $F+\gamma A l_1$ и равномерно распределенной нагрузкой от собственного веса этой степени (рис. 2.45, *в*):

$$\Delta l_2 = [(F+\gamma A l_1)\,l_2/(2EA)] + \gamma l_2^2/(2E).$$

Аналогично определяется перемещение сечения *3—3* (свободного конца). Оно равно удлинению всего бруса:

$$\delta_{3-3} = \Delta l_3 + \Delta l_2 + \Delta l_1,$$

где Δl_1 — удлинение нижней ступени от ее собственного веса, равное $\gamma l_1^2/(2E)$.

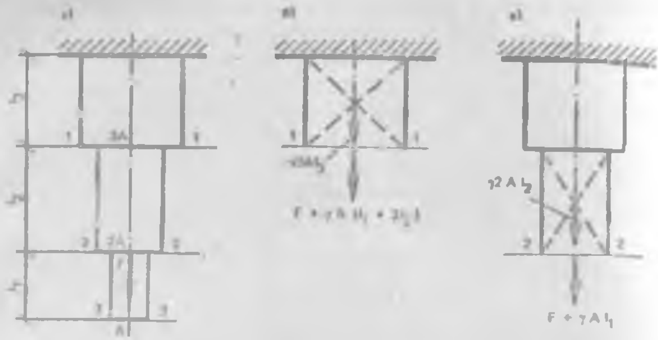


Рис. 2.45

Рис. 2.46

Пример 2.18. Трехступенчатая мостовая опора высотой $H = 18$ м нагружена сжимающей силой $F_n = 800$ кН (рис. 2.46) с коэффициентом надежности $\gamma_{f1} = 1{,}2$. Определить объем каменной кладки, если ее плотность составляет $\rho = 1800$ кг/м³, коэффициент надежности нагрузки от собственного веса $\gamma_{f2} = 1{,}1$, а расчетное сопротивление сжатию $R = 1{,}5$ МПа.

Сравнить объем опоры с объемом призматического столба постоянного сечения, запроектированного при тех же условиях.

Р е ш е н и е. Расчетная полезная нагрузка согласно зависимостям (2.21) составляет

$$F = F_n\,\gamma_{f1} = 800 \cdot 1{,}2 \text{ кН} = 960 \text{ кН} = 960 \cdot 10^3 \text{ Н}.$$

Расчетный удельный вес кладки

$$\gamma = \rho g \gamma_{f2} = 1800 \cdot 9{,}81 \cdot 1{,}1 \text{ Н/м}^3 = 19{,}4 \cdot 10^3 \text{ Н/м}^3,$$

где $g = 9{,}81$ м/с² — ускорение свободного падения.

Требуемая минимальная площадь сечения верхней ступени опоры по формуле (2.27)

$$A_1 = F/(R - \gamma h) = 960 \cdot 10^3/(1{,}5 \cdot 10^6 - 19{,}4 \cdot 10^3 \cdot 6) \text{ м}^2 =$$

$$= 960/(1500 - 116) \text{ м}^2 = 960/1384 \text{ м}^2 = 0{,}694 \text{ м}^2,$$

где $h = H/3 = 18/3$ м $= 6$ м.

Площадь сечения средней ступени согласно формуле (2.28а)

$$A_2 = FR/(R - \gamma h)^2 = 960 \cdot 1500/1384^2 \text{ м}^2 = 0{,}752 \text{ м}^2.$$

Площадь сечения нижней ступени согласно формуле (2.29)

$$A_3 = FR^2/(R - \gamma h)^3 = 960 \cdot 1500^2/1384^3 \text{ м}^2 = 0{,}815 \text{ м}^2.$$

Полный объем кладки опоры

$$V = (A_1 + A_2 + A_3)\,h = (0{,}691 + 0{,}752 + 0{,}815)\,6 \text{ м}^3 \approx 13{,}6 \text{ м}^3.$$

Для призматического столба постоянного сечения

$$A = F/(R - \gamma H) = 960/(1500 - 19{,}4 \cdot 18) \text{ м}^2 = 0{,}834 \text{ м}^2;$$

$$V' = AH = 0{,}834 \cdot 18 \text{ м}^3 \approx 15 \text{ м}^3.$$

Отсюда перерасход материала

$$\Delta V = \frac{V' - V}{V}\,100 = \frac{15 - 13{,}6}{13{,}6}\,100\% \approx 10\%.$$

Глава 3. НАПРЯЖЕННОЕ И ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЯ В ТОЧКЕ ТЕЛА

3.1. Напряженное состояние в точке тела. Линейное напряженное состояние

В п. 1.6 отмечалось, что напряжение в любой точке нагруженного тела зависит от ориентации сечения (площадки), к которому отнесена точка. Совокупность напряжений по всевозможным площадкам, проведенным через рассматриваемую точку, характеризует *напряженное состояние* в этой точке. Для его исследования в окрестности точки выделяют элемент в виде бесконечно малого параллелепипеда, к граням которого приложены внутренние силы, заменяющие действие отброшенных частей тела. Полные напряжения на гранях элемента представляют нормальными и касательными составляющими (рис. 3.1).

Нормальным напряжением присваивают индекс, указывающий ось, параллельно которой они направлены. Для обозначения касательных напряжений используют двойной индекс. Первый имеет ту же природу, что и у нормальных напряжений, второй указывает ось, параллельно которой направлена нормаль к площадке, где действует касательное напряжение.

При изменении ориентации граней параллелепипеда напряжения также меняются и может оказаться, что касательные напряжения равны нулю, а нормальные экстремальны. Такие площадки называются *главными*,

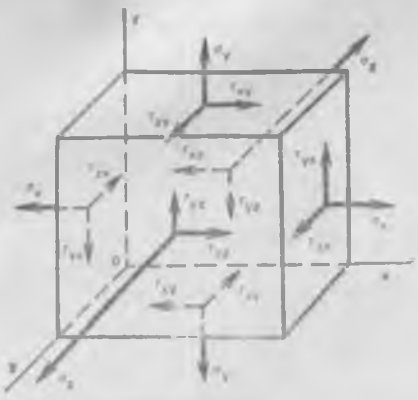


Рис. 3.1

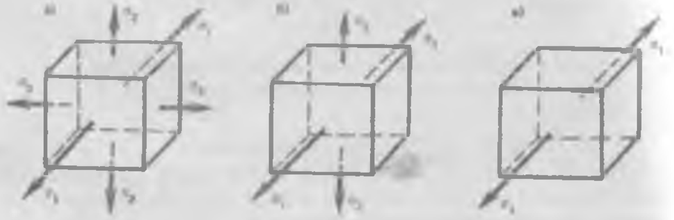


Рис. 3.2

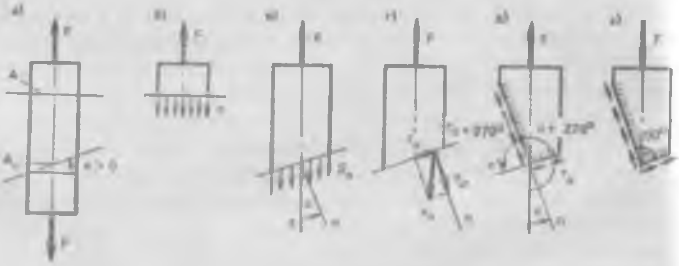


Рис. 3.3

а нормальные напряжения на них — *главными напряжениями.*

В общем случае нагружения через любую точку тела можно провести три взаимно перпендикулярные главные площадки. Обозначим напряжения на них σ_1, σ_2 и σ_3, причем $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3$, т. е. σ_1 — наибольшее в алгебраиче-

[большем в алгебраичес]ком смысле главное напряжение, σ_3 — наименьшее, σ_2 — промежуточное.

Если все три главных напряжения отличны от нуля, то напряженное состояние называется *объемным*, пространственным или трехосным (рис. 3.2, *а*). Если от нуля отличны два главных напряжения, то напряженное состояние является *плоским* или двухосным (рис. 3.2, *б*). И наконец, если только одно главное напряжение не равно нулю, то напряженное состояние называется *линейным* или одноосным (рис. 3.2, *в*). Оно встречается главным образом в элементах, работающих на осевое растяжение и сжатие.

Проанализируем напряженное состояние растянутого бруса, изображенного на рис. 3.3, *а*. Исследовать напряженное состояние в точке — значит получить зависимости для определения нормальных и касательных напряжений на любой площадке, проходящей через эту точку.

Осевое растяжение (сжатие) бруса является простейшей деформацией, при которой напряженное состояние всех точек одинаково (однородно). В этом случае размеры выделяемого элемента не играют роли вследствие равномерного распределения напряжений в пределах каждой площадки.

Мысленно рассечем брус на две части плоскостью, наклоненной под углом α к произвольному поперечному сечению, и отбросим одну из них, например нижнюю (рис. 3.3, *в*). Условимся считать угол положительным, если он отсчитывается против хода часовой стрелки по направлению от поперечного сечения к наклонному (или, что одно и то же, от оси бруса z до направления внешней нормали n к наклонному сечению).

По наклонному сечению, площадь которого $A_\alpha = A/\cos\alpha$, равномерно распределены полные напряжения s_α, параллельные продольной силе $N=F$. Их значение находим из уравнения равновесия

$$\Sigma Z = 0; \quad -s_\alpha A_\alpha + F = 0;$$

$$s_\alpha = F/A_\alpha = (F/A)\cos\alpha = \sigma\cos\alpha,$$

где $\sigma = F/A$ — нормальное напряжение в поперечном сечении бруса (рис. 3.3, *б*).

Раскладывая полное напряжение в произвольной точке на нормальное и касательное (рис. 3.3, *г*), получаем

$$\sigma_\alpha = s_\alpha \cos\alpha = \sigma \cos\alpha \cos\alpha = \sigma \cos^2\alpha; \quad (3.1)$$

$$\tau_\alpha = s_\alpha \sin\alpha = \sigma \cos\alpha \sin\alpha = (\sigma/2) \sin 2\alpha. \quad (3.2)$$

Нормальные напряжения, как указывалось в п. 1.6, препятствуют отрыву одной части бруса от другой или их прижатию, касательные напряжения препятствуют взаимному сдвигу. За положительные по-прежнему принимаем нормальные напряжения при растяжении, т. е. напряжения, совпадающие с направлением внешней нормали к сечению. Касательные напряжения считаем положительными, если внешнюю нормаль необходимо повернуть на 90° по ходу часовой стрелки для совмещения с их направлением. На рис. 3.3, *г*, следовательно, $\sigma_\alpha > 0$ и $\tau_\alpha > 0$.

Анализируя формулы (3.1) и (3.2), замечаем:

1. При $\alpha = 0 (\cos\alpha = 1;\ \sin 2\alpha = 0)$ $\sigma_0 = \sigma = \sigma_{max}$; $\tau_0 = 0$, т. е. *в поперечных сечениях растянутого (сжатого) бруса нормальные напряжения максимальны, а касательные — отсутствуют*. Таким образом, в предыдущей главе прочность по нормальным напряжениям справедливо проверялась именно в поперечных сечениях.

2. При $\alpha = 90° (\cos\alpha = 0;\ \sin 2\alpha = 0)$ $\sigma_{90°} = \tau_{90°} = 0$, т. е. в продольных сечениях отсутствуют любые напряжения.

Следовательно, при осевом растяжении (сжатии) главные площадки во всех точках бруса перпендикулярны и параллельны его продольной оси, а главные напряжения составляют:

при растяжении $\sigma_1 = \sigma = N/A$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$;

при сжатии $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -\sigma$.

3. *Касательные напряжения максимальны* при $\sin 2\alpha = 1$, т. е. *в сечениях, наклоненных под углом* $\alpha = 45°$ $(2\alpha = 90°)$ *к поперечному сечению*, и равны половине наибольших нормальных напряжений:

$$\tau_{max} = \tau_{45°} = \sigma/2 = 0{,}5\sigma_{max}. \quad (3.3)$$

Минимальное алгебраическое значение касательные напряжения принимают при $\sin 2\alpha = -1$, т. е. когда $\alpha = 135°$:

$$\tau_{min} = \tau_{135°} = -\sigma/2 = -0{,}5\sigma_{max}. \quad (3.3а)$$

Сравнивая выражения (3.3) и (3.3а), замечаем, что наибольшие и наименьшие касательные напряжения равны по абсолютному значению и противоположны по знаку. Это свойство справедливо для любой пары касатель-

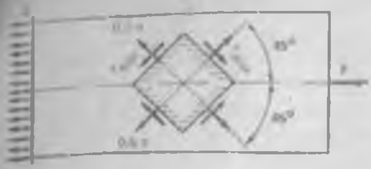


Рис. 3.4

ных напряжений, действующих по двум взаимно перпендикулярным сечениям:

$$\tau_{\alpha+270^\circ} = (\sigma/2)\sin 2(\alpha + 270^\circ) = -(\sigma/2)\sin 2\alpha = -\tau_\alpha . \qquad (3.4)$$

Оно называется **законом парности** касательных напряжений. Знак минус указывает на то, что напряжения в этих сечениях или сходятся к общему ребру (рис. 3.3, *д*), или расходятся от него (рис. 3.3, *е*), но ни в коем случае не обтекают образовавшийся контур последовательно.

4. Нормальные напряжения в двух взаимно перпендикулярных сечениях различны, но их сумма постоянна и равна нормальному напряжению в поперечном сечении:

$$\sigma_\alpha + \sigma_{\alpha+270^\circ} = \sigma\cos^2\alpha + \sigma\cos^2(\alpha + 270^\circ) = \sigma(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = \sigma .$$

Пример 3.1. В процессе испытания на растяжение стандартного стального цилиндрического образца диаметром $d_0 = 20$ мм (см. рис. 2.17) текучесть материала зафиксирована при нагрузке $F_y = 80$ кН. Определить предел текучести материала, а также нормальные и касательные напряжения по плоскостям наибольших сдвигов.

Решение. Предел текучести равен нормальному напряжению в поперечном сечении образца. По формуле (2.9)

$$\sigma_y = F_y/A_0 = 4F_y/\left(\pi d_0^2\right) = 4\cdot 80\cdot 10^3/\left(3{,}14\cdot 20\cdot 10^{-6}\right)\ \text{Па} =$$
$$= 255\cdot 10^6\ \text{Па} = 255\ \text{МПа}$$

Плоскости наибольших сдвигов совпадают с направлением площадок, по которым действуют экстремальные касательные напряжения (см. рис. 2.19). Согласно выражениям (3.3) и (3.3а)

$$\tau_{max/min} = \pm 0{,}5\sigma_y = \pm 0{,}5\cdot 255\ \text{МПа} = \pm 127{,}5\ \text{МПа}.$$

Нормальные напряжения на тех же площадках согласно зависимости (3.1)

$$\sigma_{\pm 45^\circ} = \sigma_y \cos^2 45^\circ = 255\cdot 0{,}5\ \text{МПа} = 127{,}5\ \text{МПа}.$$

Таким образом, прямоугольный элемент, повернутый на угол 45° по отношению к продольной оси растянутого бруса, находится под действием экстремальных касательных напряжений и численно равных им нормальных напряжений растяжения (рис. 3.4).

3.2. Плоское напряженное состояние

В строительных конструкциях часто встречаются элементы в виде пластин и оболочек, которые работают в условиях плоского напряженного состояния. Сюда относятся стеновые панели и перегородки, широко применяемые в сборном домостроении; стенки и днища сосудов для хранения жидкостей (резервуары), газов (газгольдеры) и сыпучих материалов (бункера, силосы); специальные листовые конструкции объектов металлургической, химической и других отраслей промышленности (доменные печи, воздухонагреватели, пылеуловители, крупные химические аппараты и т. д.); трубопроводы большого диаметра.

Растяжение-сжатие по двум взаимно перпендикулярным направлениям. Исследуем напряженное состояние пластины при двухосном нагружении (рис. 3.5). Поскольку по ее контуру отсутствуют касательные напряжения, нормальные напряжения σ_z и σ_y являются главными. Если предположить $|\sigma_z| > |\sigma_y|$, то при двухосном растяжении $\sigma_1 = \sigma_z$, $\sigma_2 = \sigma_y$, $\sigma_3 = 0$; при двухосном сжатии $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = \sigma_y$, $\sigma_3 = \sigma_z$. Следовательно, в каждой точке пластины главные площадки с ненулевыми нормальными напряжениями параллельны направлениям растяжения (сжатия).

Рассмотрим наклонную площадку, внешняя нормаль к которой составляет угол α с осью z и $270°+\alpha$ с осью y. Применяя формулу (3.1) предыдущего параграфа, находим, что растяжение вдоль оси z вызывает на этой площадке нормальные напряжения

$$\sigma_\alpha^{*} = \sigma_z \cos^2 \alpha,$$

а растяжение вдоль оси y — напряжения

$$\sigma_\alpha^{**} = \sigma_y \cos^2 (270° + \alpha) = \sigma_y \sin^2 \alpha.$$

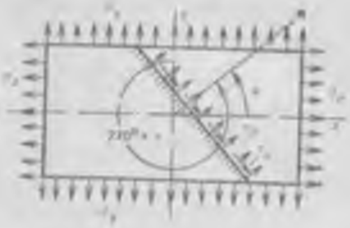
Суммарные нормальные напряжения составляют

$$\sigma_\alpha = \sigma_\alpha^{*} + \sigma_\alpha^{**} = \sigma_z \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha. \tag{3.5}$$

Аналогично в соответствии с формулой (3.2) получаем выражение касательных напряжений

$$\tau_\alpha = (\sigma_z/2)\sin 2\alpha + (\sigma_y/2)\sin 2(270° + \alpha) = (\sigma_z/2)\sin 2\alpha -$$
$$- (\sigma_y/2)\sin 2\alpha = [(\sigma_z - \sigma_y)/2]\sin 2\alpha. \tag{3.6}$$

Рис. 3.5



У рассматриваемого напряженного состояния могут быть выявлены те же свойства, что и при одноосном растяжении.

1. Из формулы (3.6) следует, что для исследуемого семейства площадок[1] касательные напряжения экстремальны при угле α, равном 45° и 135°:

$$\left.\begin{aligned} \tau_{max} &= \tau_{45^\circ} = (\sigma_z - \sigma_y)/2 = (\sigma_1 - \sigma_2)/2; \\ \tau_{min} &= \tau_{135^\circ} = -(\sigma_1 - \sigma_2)/2. \end{aligned}\right\} \qquad (3.7)$$

2. Пользуясь той же формулой, нетрудно получить подтверждение закона парности касательных напряжений. Действительно, $\sin 2\alpha = -\sin 2(\alpha + 270^\circ)$ и, следовательно, $\tau_\alpha = -\tau_{\alpha+270^\circ}$.

3. Сумма нормальных напряжений в двух взаимно перпендикулярных сечениях согласно зависимости (3.5) постоянна

$$\sigma_\alpha + \sigma_{\alpha+270^\circ} = \sigma_z + \sigma_y.$$

Интерес представляют частные случаи нагружения пластины:

1) растяжение одинаковой интенсивности в обоих направлениях;

2) растяжение в одном направлении и сжатие такой же интенсивности в другом.

В первом случае $\sigma_z = \sigma_y = \sigma$ и согласно формулам (3.5), (3.6):

$$\sigma_\alpha = \sigma\cos^2\alpha + \sigma\sin^2\alpha = \sigma; \tau_\alpha = 0,$$

т. е. нормальные напряжения постоянны, касательные отсутствуют и, следовательно, все площадки главные.

[1] *Семейством* называется совокупность площадок, перпендикулярных одной и той же плоскости. Исследуемые площадки перпендикулярны ненагруженным граням пластины, т. е. плоскости чертежа.

Во втором случае $\sigma_x=\sigma$, $\sigma_y=-\sigma$ и

$$\sigma_\alpha=\sigma\cos^2\alpha-\sigma\sin^2\alpha=\sigma\cos 2\alpha;$$

$$\tau_\alpha=\{[\sigma-(-\sigma)]/2\}\sin 2\alpha=\sigma\sin 2\alpha.$$

При $\alpha=45°$ (или $\alpha=135°$) обнаруживаем, что

$$\tau_{max/min}=\pm\sigma;\quad \sigma_{45°}=\sigma_{135°}=0,$$

т. е. по площадкам с экстремальными касательными напряжениями нормальные напряжения отсутствуют и, таким образом, имеет место *чистый сдвиг* (рис. 3.6).

Касательные напряжения свидетельствуют об искажении формы прямоугольного элемента, образованного указанными площадками. Для изучения характера его деформирования (рис. 3.7) примем одну из граней неподвижной (перемещение элемента как твердого тела в данном случае не представляет интереса).

Мерой перекоса, т. е. деформации сдвига, служит изменение прямого угла между первоначально перпендикулярными гранями элемента, называемое *относительным сдвигом* или *углом сдвига* γ (выражается в радианах).

В пределах упругости между углом сдвига и соответствующими касательными напряжениями существует прямая пропорциональная зависимость — закон Гука при сдвиге:

$$\tau=G\gamma, \tag{3.8}$$

где G — физическая константа, характеризующая жесткость материала при сдвиге и называемая *модулем сдвига*, Па (ГПа).

Таким образом, теперь располагаем тремя физическими константами (E, ν и G), определяющими упругие свойства изотропного материала. Их объединяет зависимость

$$G=E/[2(1+\nu)]. \tag{3.9}$$

Как отмечалось в п. 2.2, коэффициент Пуассона $0\leqslant\nu\leqslant0{,}5$. Отсюда $G=(0{,}33—0{,}5)E$. Для стали, например, согласно табл. 2.1

$$G=206/[2(1+0{,}3)]\ \text{ГПа}\approx 80\ \text{ГПа}.$$

Удельная потенциальная энергия деформации чистого сдвига определяется по формуле

$$u=\tau^2/(2G), \tag{3.10}$$

аналогичной выражению (2.17) при осевом растяжении.

Общий случай плоского напряженного состояния мо-

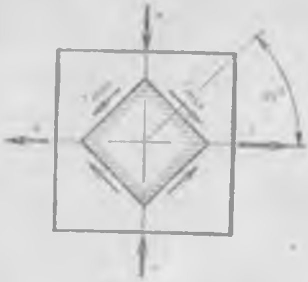


Рис. 3.6

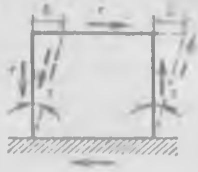


Рис. 3.7

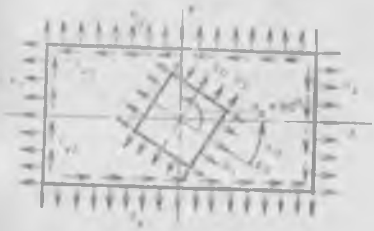


Рис. 3.8

жет быть сведен к двухосному растяжению-сжатию. Если напряженное состояние, представленное на рис. 3.8, является результатом растяжения с напряжениями σ_1 и σ_2 на площадках, перпендикулярных некоторым осям z_0 и y_0, то, отождествляя направление осей z и y с направлением внешних нормалей, по формулам (3.5) и (3.6) имеем:

$$\sigma_z = \sigma_1 \cos^2 \alpha_0 + \sigma_2 \sin^2 \alpha_0; \tag{а}$$

$$\sigma_y = \sigma_1 \cos^2 (\alpha_0 + 90^\circ) + \sigma_2 \sin^2 (\alpha_0 + 90^\circ) = \sigma_1 \sin^2 \alpha_0 + \sigma_2 \cos^2 \alpha_0; \tag{б}$$

$$\tau_{yz} = [(\sigma_1 - \sigma_2)/2] \sin 2\alpha_0 \tag{в}$$

Будем считать в этих уравнениях компоненты напряженного состояния σ_z, σ_y и τ_{yz} известными, а главные напряжения σ_1, σ_2 и угол α_0 — искомыми величинами. Доказательством рассматриваемой теоремы служит возможность решения системы записанных уравнений.

Складывая уравнения (а) и (б), получаем

$$\sigma_z + \sigma_y = \sigma_1 + \sigma_2, \tag{г}$$

вычитая —

$$\sigma_z - \sigma_y = (\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\alpha_0. \tag{д}$$

Во втором случае $\sigma_x = \sigma$, $\sigma_y = -\sigma$ и

$$\sigma_\alpha = \sigma \cos^2 \alpha - \sigma \sin^2 \alpha = \sigma \cos 2\alpha;$$

$$\tau_\alpha = \{[\sigma - (-\sigma)]/2\} \sin 2\alpha = \sigma \sin 2\alpha.$$

При $\alpha = 45°$ (или $\alpha = 135°$) обнаруживаем, что

$$\tau_{max/min} = \pm \sigma; \quad \sigma_{45°} = \sigma_{135°} = 0,$$

т. е. по площадкам с экстремальными касательными напряжениями нормальные напряжения отсутствуют и, таким образом, имеет место *чистый сдвиг* (рис. 3.6).

Касательные напряжения свидетельствуют об искажении формы прямоугольного элемента, образованного указанными площадками. Для изучения характера его деформирования (рис. 3.7) примем одну из граней неподвижной (перемещение элемента как твердого тела в данном случае не представляет интереса).

Мерой перекоса, т. е. деформации сдвига, служит изменение прямого угла между первоначально перпендикулярными гранями элемента, называемое *относительным сдвигом* или *углом сдвига* γ (выражается в радианах).

В пределах упругости между углом сдвига и соответствующими касательными напряжениями существует прямая пропорциональная зависимость — закон Гука при сдвиге:

$$\tau = G\gamma, \tag{3.8}$$

где G — физическая константа, характеризующая жесткость материала при сдвиге и называемая *модулем сдвига*, Па (ГПа).

Таким образом, теперь располагаем тремя физическими константами (E, ν и G), определяющими упругие свойства изотропного материала. Их объединяет зависимость

$$G = E/[2(1+\nu)]. \tag{3.9}$$

Как отмечалось в п. 2.2, коэффициент Пуассона $0 \leqslant \nu \leqslant 0{,}5$. Отсюда $G = (0{,}33\text{—}0{,}5)E$. Для стали, например, согласно табл. 2.1

$$G = 206/[2(1+0{,}3)] \text{ ГПа} \approx 80 \text{ ГПа}.$$

Удельная потенциальная энергия деформации чистого сдвига определяется по формуле

$$u = \tau^2/(2G), \tag{3.10}$$

аналогичной выражению (2.17) при осевом растяжении.

Общий случай плоского напряженного состояния мо-

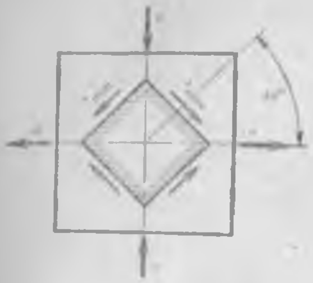


Рис. 3.6

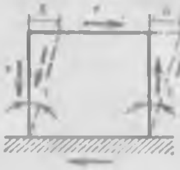


Рис. 3.7

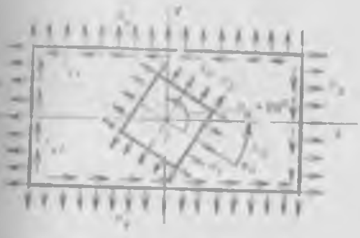


Рис. 3.8

жет быть сведен к двухосному растяжению-сжатию. Если напряженное состояние, представленное на рис. 3.8, является результатом растяжения с напряжениями σ_1 и σ_2 на площадках, перпендикулярных некоторым осям z_0 и y_0, то, отождествляя направление осей z и y с направлением внешних нормалей, по формулам (3.5) и (3.6) имеем:

$$\sigma_z = \sigma_1 \cos^2 \alpha_0 + \sigma_2 \sin^2 \alpha_0; \tag{а}$$

$$\sigma_y = \sigma_1 \cos^2 (\alpha_0 + 90^\circ) + \sigma_2 \sin^2 (\alpha_0 + 90^\circ) = \sigma_1 \sin^2 \alpha_0 + \sigma_2 \cos^2 \alpha_0; \tag{б}$$

$$\tau_{yz} = [(\sigma_1 - \sigma_2)/2] \sin 2\alpha_0 \tag{в}$$

Будем считать в этих уравнениях компоненты напряженного состояния σ_z, σ_y и τ_{yz} известными, а главные напряжения σ_1, σ_2 и угол α_0 — искомыми величинами. Доказательством рассматриваемой теоремы служит возможность решения системы записанных уравнений.

Складывая уравнения (а) и (б), получаем

$$\sigma_z + \sigma_y = \sigma_1 + \sigma_2, \tag{г}$$

вычитая —

$$\sigma_z - \sigma_y = (\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\alpha_0. \tag{д}$$

Возведем в квадрат уравнения (д), (в) и сложим полученные результаты:

$$\left(\sigma_z-\sigma_y\right)^2+4\tau_{yz}^2=\left(\sigma_1-\sigma_2\right)^2\left(\cos^2 2\alpha_0+\sin^2 2\alpha_0\right).$$

Отсюда

$$\sigma_1-\sigma_2=\pm\sqrt{\left(\sigma_z-\sigma_y\right)^2+4\tau_{yz}^2}. \qquad (е)$$

Для рассматриваемого семейства площадок $\sigma_1=\sigma_{max}$, $\sigma_2=\sigma_{min}$, поэтому $\sigma_1-\sigma_2>0$, т. е. перед радикалом надо удержать знак плюс. Тогда из выражений (г) и (е) следует

$$\sigma_1-\left(\sigma_z+\sigma_y-\sigma_1\right)=\sqrt{\left(\sigma_z-\sigma_y\right)^2+4\tau_{yz}^2},$$

или

$$\sigma_1=\left(\sigma_z+\sigma_y\right)/2+{}^1/_2\sqrt{\left(\sigma_z-\sigma_y\right)^2+4\tau_{yz}^2}.$$

Аналогично

$$\sigma_2=\left(\sigma_z+\sigma_y\right)/2-{}^1/_2\sqrt{\left(\sigma_z-\sigma_y\right)^2+4\tau_{yz}^2}.$$

Объединяя последние два выражения в одно, получаем окончательную формулу для определения главных напряжений:

$$\sigma_{max\,min}=\left(\sigma_z+\sigma_y\right)/2\pm{}^1/_2\sqrt{\left(\sigma_z-\sigma_y\right)^2+4\tau_{yz}^2}. \qquad (3.11)$$

Для отыскания положения главных площадок разделим уравнение (в) на равенство (д). Имея в виду, что при отсчете от оси z (т. е. в противоположном направлении) угол α_0 необходимо заменить на $(-\alpha_0)$, получаем

$$\frac{\tau_{yz}}{\sigma_z-\sigma_y}=\frac{\left(\sigma_1-\sigma_2\right)\sin\left(-2\alpha_0\right)}{2\left(\sigma_1-\sigma_2\right)\cos\left(-2\alpha_0\right)}.$$

Отсюда, учитывая, что $\sin(-2\alpha_0)/\cos(-2\alpha_0)=\operatorname{tg}(-2\alpha_0)=-\operatorname{tg}2\alpha_0$, находим

$$\operatorname{tg}2\alpha_0=-2\tau_{yz}/(\sigma_z-\sigma_y). \qquad (3.12)$$

Эта формула дает два взаимно перпендикулярных направления с углами α_0 и $\alpha_0+90°$, по которым действуют главные напряжения. Знак касательных напряжений принимают согласно правилу, введенному в п. 3.1. (в рассматриваемом случае $\tau_{yz}>0$).

Экстремальные касательные напряжения возникают по площадкам, наклоненным под углом 45° (135°) к глав-

ным, и согласно выражениям (3.7) равны полуразности главных напряжений

$$\tau_{max\,min}=\pm\left(\sigma_{max}-\sigma_{min}\right)/2=\pm{}^1/_2\sqrt{\left(\sigma_z-\sigma_y\right)^2+4\tau_{yz}^2}. \qquad (3.13)$$

Доказав существование главных площадок, мы тем самым показали, что компоненты σ_z, σ_y и τ_{yz} полностью определяют напряженное состояние в точке. Действительно, если известно направление главных площадок и вычислены главные напряжения, то по формулам двухосного растяжения-сжатия нетрудно найти напряжения на любой площадке, нормаль к которой составляет угол α с осью z.

На практике, однако, удобнее иметь готовые формулы, выражающие напряжения σ_α и τ_α через σ_z, σ_y и τ_{yz}. По значению тангенса (3.12) можно определить $\cos 2\alpha_0$, $\cos\alpha_0$, $\sin\alpha_0$, $\cos(\alpha-\alpha_0)$, $\sin(\alpha-\alpha_0)$ и $\sin 2(\alpha-\alpha_0)$. Подставив последние три функции в выражения (3.5) и (3.6) вместо соответствующих функций аргумента α и воспользовавшись значениями главных напряжений (3.11), после ряда преобразований получим

$$\sigma_\alpha=\sigma_z\cos^2\alpha+\sigma_y\sin^2\alpha-\tau_{yz}; \qquad (3.14)$$

$$\tau_\alpha=\left[\left(\sigma_z-\sigma_y\right)/2\right]\sin 2\alpha+\tau_{yz}\cos 2\alpha. \qquad (3.15)$$

Заметим, что напряженное состояние, изображенное на рис. 3.8, можно считать однородным только при условии, что все напряжения равномерно распределены по граням пластины и одинаковы на противоположных гранях. Тем не менее, полученные здесь результаты распространимы и на случай неоднородного напряженного состояния (когда напряжения меняются от точки к точке), если размеры пластины считать бесконечно малыми.

Пример 3.2. По контуру прямоугольной пластины равномерно распределены напряжения $\sigma_y=120$ МПа, $\sigma_z=160$ МПа и $|\tau|=60$ МПа (см. рис. 3.8). Определить положение главных площадок и значения напряжений: главных, экстремальных касательных и соответствующих им нормальных.

Решение. По формуле (3.12) $\operatorname{tg}2\alpha_0=-2\tau_{yz}/(\sigma_z-\sigma_y)=-2\cdot 60/(160-120)=-3$, и, следовательно, $2\alpha_0=-71°34'$; $\alpha_0'=-35°47'$; $\alpha_0''=-(35°47'+90°)=-125°47'$.

Отрицательное значение углов наклона главных площадок указывает на то, что поворот должен осуществляться *по ходу* часовой стрелки от направления оси z (рис. 3.9, *а*).

Для того чтобы установить, по каким площадкам возникают максимальные главные напряжения и по каким минимальные, можно сопоставить значения исходных нормальных напряжений. Поскольку

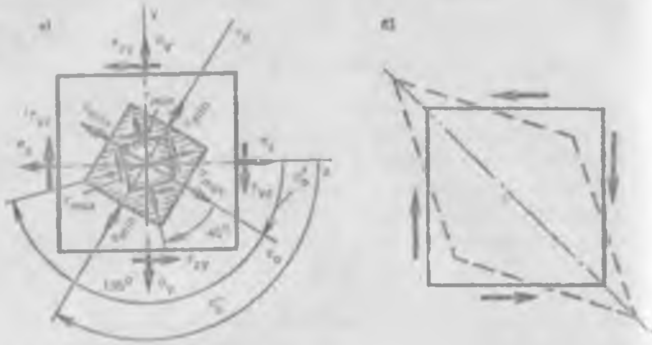


Рис. 3.9

$|\alpha_0| < 45°$ и $\sigma_z > \sigma_y$, логично предположить, что направление σ_{max} тяготеет к оси z.

Математически доказывается, что направление максимальных главных напряжений проходит через те квадранты, в которых касательные напряжения сходятся. Физически это правило становится понятным, если обратить внимание на то обстоятельство, что в указанном направлении происходит удлинение соответствующей диагонали (рис. 3.9, *б*).

Значения главных напряжений по формуле (3.11)

$$\sigma_{max,min} = [(\sigma_z + \sigma_y)/2] \pm {}^1/_2 \sqrt{(\sigma_z - \sigma_y)^2 + 4\tau_{yz}^2} =$$

$$= [(160 + 120)/2] \pm {}^1/_2 \sqrt{(160 - 120)^2 + 4 \cdot 60^2} \text{ МПа} = 140 \pm 63 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{max} = 140 + 63 \text{ МПа} = 203 \text{ МПа}; \quad \sigma_{min} = 140 - 63 \text{ МПа} = 77 \text{ МПа}.$$

Экстремальные касательные напряжения по формуле (3.13)

$$\tau_{max/min} = \pm (\sigma_{max} - \sigma_{min})/2 = \pm (203 - 77)/2 \text{ МПа} = \pm 63 \text{ МПа}.$$

Соответствующие нормальные напряжения согласно зависимости (3.5) равны полусумме главных напряжений:

$$\sigma_{45°} = \sigma_{135°} = \sigma_1 \cos^2 45° + \sigma_2 \sin^2 45° = (\sigma_{max} + \sigma_{min})/2 =$$

$$= (203 + 77)/2 \text{ МПа} = 140 \text{ МПа}.$$

3.3. Понятие об объемном напряженном состоянии

В практических задачах объемное напряженное состояние встречается реже, чем плоское. Поэтому коснемся лишь некоторых вопросов, необходимых для изложения последующего материала.

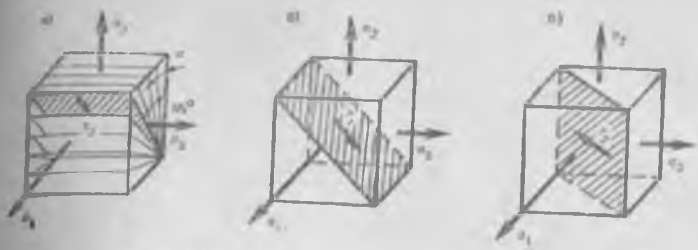


Рис. 3.10

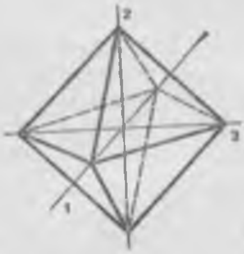


Рис. 3.11

Элемент, который находится в объемном напряженном состоянии и грани которого представляют собой главные площадки, изображен на рис. 3.2, *а*. Он называется *главным кубом*. Можно показать, что нормальные и касательные напряжения на площадках общего положения (т. е. не параллельных ни одному из главных напряжений) определяются по формулам:

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2 \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3 \cos^2 \alpha_3; \tag{3.16}$$

$$\tau_\alpha = \sqrt{\sigma_1^2 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2^2 \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3^2 \cos^2 \alpha_3 - \sigma_\alpha^2}, \tag{3.17}$$

где α_1, α_2, α_3 — углы, которые образует нормаль к рассматриваемой площадке с направлениями соответствующих главных напряжений.

Нетрудно видеть, что на главных площадках касательные напряжения обращаются в нуль. В этом случае один из косинусов равен единице, а два других — нулю.

Исследуем изменение касательных напряжений по площадкам, перпендикулярным главным. Рассмотрим семейство площадок, перпендикулярных, например, главной площадке с напряжением σ_3 (рис. 3.10, *а*). Для них $\cos \alpha_3 = 0$ (так как $\alpha_3 = 90°$), $\cos \alpha_1 = \cos \alpha$ ($\alpha_1 = \alpha$), $\cos \alpha_2 = \sin \alpha$ ($\alpha_2 = 90° - \alpha$) и потому согласно формуле (3.17)

$$\tau_{\alpha_3} = \sqrt{\sigma_1^2 \cos^2\alpha + \sigma_2^2 \sin^2\alpha - \left(\sigma_1 \cos^2\alpha + \sigma_2 \sin^2\alpha\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\sigma_1^2 \cos^2\alpha\left(1 - \cos^2\alpha\right) + \sigma_2^2 \sin^2\alpha\left(1 - \sin^2\alpha\right) - 2\sigma_1\sigma_2 \cos^2\alpha \sin^2\alpha} =$$

$$= \sqrt{\sigma_1^2 \cos^2\alpha \sin^2\alpha + \sigma_2^2 \sin^2\alpha \cos^2\alpha - 2\sigma_1\sigma_2 \cos^2\alpha \sin^2\alpha} =$$

$$= \pm\left[(\sigma_1 - \sigma_2)/2\right] \sin 2\alpha .$$

Получили выражение, знакомое по формулам плоского напряженного состояния. Как видим, касательные напряжения на площадках рассматриваемого семейства не зависят от главного напряжения в перпендикулярной главной площадке (в данном случае от σ_3). Напряжения τ_{α_3} достигают экстремального значения по площадкам, образующим углы 45° с двумя другими главными площадками, т. е. в диагональных плоскостях главного куба:

$$\tau_3 = \pm(\sigma_1 - \sigma_2)/2 .$$

Одна из таких диагональных площадок заштрихована на рис. 3.10, *а*, другая — ей перпендикулярна (во избежание усложнения рисунка она не показана). Индекс при экстремальных касательных напряжениях обозначает ту главную площадку, которой перпендикулярна рассматриваемая диагональная площадка.

Аналогично получаются еще два экстремальных значения:

$$\tau_1 = \pm(\sigma_2 - \sigma_3)/2; \qquad \tau_2 = \pm(\sigma_1 - \sigma_3)/2 .$$

Эти напряжения возникают в четырех других попарно перпендикулярных диагональных плоскостях куба, параллельных соответственно главным напряжениям σ_1 и σ_2. На рис. 3.10, *б*, *в* изображено по одной площадке каждой пары.

Если учесть принцип обозначения главных напряжений в п. 3.1, то из трех частных экстремумов касательных напряжений абсолютно экстремальным оказывается значение

$$\tau_2 = \pm(\sigma_{max} - \sigma_{min})/2 = \tau_{max\,min} . \qquad (3.1\ldots)$$

Значения τ на любых других площадках (не перпендикулярных ни одной из главных) заключены между экстремальными значениями τ_1, τ_2 и τ_3.

Практический интерес представляет напряженное состояние на площадках, равнонаклоненных ко всем трем главным направлениям *1*, *2*, *3*. В главном кубе такие площадки срезают все восемь вершин, образуя восьмигранник — октаэдр (рис. 3.11). Поэтому и сами площадки, и напряжения на них называются *октаэдрическими*.

Как известно из аналитической геометрии (направление вектора в пространстве),

$$\cos^2\alpha_1+\cos^2\alpha_2+\cos^2\alpha_3=1.$$

В рассматриваемом случае $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha$ и, следовательно, $\cos^2\alpha={}^1/_3$. Тогда из формул (3.16) и (3.17) находим

$$\sigma_{oct}=(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)/3; \qquad (3.19)$$

$$\tau_{oct}=\sqrt{{}^1/_3\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2\right)-{}^1/_9\left(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3\right)^2}=$$

$$={}^1/_3\sqrt{3\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2\right)-\sigma_1^2-\sigma_2^2-\sigma_3^2-2\left(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1\right)}=$$

$$={}^1/_3\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}, \qquad (3.20)$$

или с учетом выражений экстремальных касательных напряжений

$$\tau_{oct}={}^2/_3\sqrt{\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2}. \qquad (3.20а)$$

Таким образом, октаэдрические напряжения связаны со всеми тремя главными напряжениями и представляют собой обобщенные значения главных нормальных и экстремальных касательных напряжений. В этом заключается их особенность, которую используют при расчете конструкций в упругопластической стадии работы материала.

Рассмотрим два частных случая.

1. Если $\tau_{oct}=0$, то $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3$. Следовательно, нормальные напряжения на всех площадках одинаковы, а касательные отсутствуют. Подобное напряженное состояние испытывает тело в условиях гидростатического давления. Оно называется *всесторонним сжатием* или, при положительных нормальных напряжениях, *всесторонним растяжением*. Сюда примыкает и первый частный случай нагружения пластины, отмеченный в п. 3.2.

2. Если $\sigma_{oct}=0$, то на октаэдрических площадках возникает только сдвиг, который по аналогии с предыдущим случаем может быть назван *всесторонним сдвигом*. С таким напряженным состоянием имеет сходство чистый сдвиг, рассмотренный в том же параграфе.

В общем случае, когда $\sigma_{oct}\neq0$ и $\tau_{oct}\neq0$, напряженное состояние представляет собой сочетание всестороннего растяжения (сжатия) и всестороннего сдвига. Мерой интенсивности первого служит величина σ_{oct}, второго — τ_{oct}.

3.4. Деформированное состояние в точке тела. Обобщенный закон Гука

Совокупность деформаций, возникающих по различным направлениям и во всевозможных плоскостях, проходящих через рассматриваемую точку, характеризует *деформированное состояние* в этой точке.

Согласно выражению закона Гука при осевом растяжении-сжатии (2.4) продольная деформация

$$\varepsilon = \sigma/E, \tag{3.21}$$

а поперечная деформация, как следует из формулы (2.7)

$$\varepsilon' = -\nu\sigma/E. \tag{3.22}$$

Эти два равенства характеризуют зависимость между деформациями и напряжениями при линейном напряженном состоянии. В случае объемного напряженного состояния, когда по граням элементарного параллелепипеда действуют главные напряжения σ_1, σ_2 и σ_3 (см. рис. 3.2, *а*), на основании принципа суперпозиции (см. п. 1.2, 4-е допущение) можно записать

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} + \varepsilon_{13}.$$

Здесь ε_1 — полное относительное удлинение в направлении главного напряжения σ_1 (главное удлинение); ε_{11} — относительное удлинение в указанном направлении при действии одного лишь напряжения σ_1 ($\sigma_2 = \sigma_3 = 0$); ε_{12} и ε_{13} — то же, при действии соответственно только σ_2 и только σ_3.

Поскольку направление напряжения σ_1 для него самого является продольным, а для напряжений σ_2 и σ_3 — поперечным, то, применяя формулы (3.21) и (3.22), получаем

$$\varepsilon_{11} = \sigma_1/E; \quad \varepsilon_{12} = -\nu\sigma_2/E; \quad \varepsilon_{13} = -\nu\sigma_3/E.$$

Складывая эти величины, находим

$$\varepsilon_1 = \sigma_1/E - \nu\sigma_2/E - \nu\sigma_3/E.$$

Аналогично определяются и два других главных удлинения. Таким образом,

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1 &= (1/E)\,[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)]; \\ \varepsilon_2 &= (1/E)\,[\sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1)]; \\ \varepsilon_3 &= (1/E)\,[\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)]. \end{aligned}\right\} \tag{3.23}$$

Эти формулы являются математическим выражением *обобщенного закона Гука* для изотропного тела. В случае плоского напряженного состояния они упрощаются. Так, например, при $\sigma_3=0$ (см рис. 3.2, *б*)

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1 &= (1/E)(\sigma_1 - \nu\sigma_2); \\ \varepsilon_2 &= (1/E)(\sigma_2 - \nu\sigma_1); \\ \varepsilon_3 &= -(\nu/E)(\sigma_1 + \sigma_2). \end{aligned}\right\} \qquad (3.23а)$$

Рассмотренные деформации являются линейными. Их возникновение приводит к изменению объема тела и его формы (куб превращается в параллелепипед). Формулы (3.23) справедливы, однако, не только для главных, но и для произвольных линейных деформаций по любым трем взаимно перпендикулярным направлениям, т. е. при наличии всех компонентов напряженного состояния (см. рис. 3.1). В этом случае касательные напряжения свидетельствуют только об искажении формы параллелепипеда. Объем остается практически неизменным, поскольку удлинения ребер от перекосов (см. рис. 3.7) пренебрежимо малы по сравнению с деформациями сдвига.

Пример 3.3. Определить относительное изменение объема при деформировании изотропного тела.

Решение. Пусть первоначальные длины ребер элемента, изображенного на рис. 3.1, составляли dx, dy, dz. Абсолютные удлинения (укорочения) ребер согласно формуле (2.2)

$$\Delta(dx) = \varepsilon_x\,dx; \qquad \Delta(dy) = \varepsilon_y\,dy; \qquad \Delta(dz) = \varepsilon_z\,dz.$$

Объем элемента до деформирования $V = dxdydz$, после деформирования

$$V_1 = [dx + \Delta(dx)]\,[dy + \Delta(dy)]\,[dz + \Delta(dz)] =$$
$$= dx\,(1 + \varepsilon_x)\,dy\,(1 + \varepsilon_y)\,dz\,(1 + \varepsilon_z).$$

Относительное изменение объема (объемная деформация)

$$\theta = (V_1 - V)/V = [dx\,(1 + \varepsilon_x)\,dy\,(1 + \varepsilon_y)\,dz\,(1 + \varepsilon_z) -$$
$$- dx\,dy\,dz]/(dx\,dy\,dz) = (1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z) - 1 =$$
$$= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z + \varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y\varepsilon_z + \varepsilon_x\varepsilon_z + \varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z.$$

Пренебрегая произведениями деформаций как величинами более высокого порядка малости, получаем

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3.$$

Переход к главным деформациям возможен потому, что величина θ в окрестности точки не зависит от ориентации элемента и даже от его формы (будь то параллелепипед, куб, сфера и т. д.). Таким образом, объемная деформация равна сумме линейных деформаций в любых трех взаимно перпендикулярных направлениях.

Выражая главные деформации через главные напряжения с помощью зависимостей (3.23), находим

$$\theta = (1/E)\,[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] + (1/E)\,[\sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1)] +$$
$$+ (1/E)\,[\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)] = [(1 - 2\nu)/E]\,(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3),$$

или с учетом формулы (3.19)

$$\theta = [3(1 - 2\nu)/E]\,\sigma_{oct},$$

т. е. изменение объема тела пропорционально нормальному октаэдрическому напряжению. При всестороннем сдвиге, когда $\sigma_{oct} = 0$ (см. п. 3.3), объем тела не меняется, а имеет место лишь изменение формы.

Выражение объемной деформации позволяет установить предельное значение коэффициента Пуассона для любого изотропного материала. Так, например, если $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$, то при $\sigma > 0$ (всестороннее растяжение) величина $\theta = [3(1-2\nu)/E]\sigma$ также должна быть положительной. И наоборот, при $\sigma < 0$ изменение объема должно быть отрицательным. Подобное совпадение знаков возможно только при выполнении условия

$$1 - 2\nu > 0,$$

откуда $\nu \leqslant 1/2$.

Следовательно, коэффициент Пуассона изотропного материала не может превышать 0,5, что и отмечалось в п. 2.2. Этот вывод вытекает из частного случая напряженного состояния, но тем не менее он является общим, поскольку коэффициент ν представляет собой характеристику материала и в пределах упругости не зависит от напряженного состояния.

3.5. Потенциальная энергия деформации при сложном напряженном состоянии

Удельная потенциальная энергия при объемном напряженном состоянии характеризуется выражением

$$u = (\sigma_1 \varepsilon_1/2) + (\sigma_2 \varepsilon_2/2) + (\sigma_3 \varepsilon_3/2), \qquad (3.24)$$

составленным по аналогии с формулой (2.17) для одноосного растяжения (сжатия). Суммирование возможно благодаря тому, что главные напряжения производят работу только на перемещениях своего направления. Принцип суперпозиции в данном случае неприменим, поскольку, как видно из зависимостей (3.23), каждая линейная деформация является результатом совместного действия всех трех главных напряжений.

Подставим эти зависимости в формулу (3.24):

$$u = [1/(2E)]\,\{\sigma_1[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] + \sigma_2[\sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1)] +$$
$$+ \sigma_3[\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)]\}.$$

После раскрытия скобок и приведения подобных членов

$$u = \left[1/(2E)\right]\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu\left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1\right)\right]. \qquad (3.25)$$

Это выражение можно упростить. Как видно из вывода формулы (3.20),

$$2(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1)=(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)^2-\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2\right).$$

Но согласно равенству (3.19)

$$\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3=3\sigma_{oct}, \text{ а } \sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2=3\left(\sigma_{oct}^2+\tau_{oct}^2\right).$$

Поэтому $2(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1)=9\sigma_{oct}^2-3(\sigma_{oct}^2+\tau_{oct}^2)$.

Подставив последнее выражение в формулу (3.25), получим

$$u=[1/(2E)]\left[3\left(\sigma_{oct}^2+\tau_{oct}^2\right)-9\nu\sigma_{oct}^2+3\nu\left(\sigma_{oct}^2+\tau_{oct}^2\right)\right]=$$

$$=[3/(2E)]\left(\sigma_{oct}^2+\tau_{oct}^2-3\nu\sigma_{oct}^2+\nu\sigma_{oct}^2+\nu\tau_{oct}^2\right)=$$

$$=[3/(2E)]\left[(1-2\nu)\sigma_{oct}^2+(1+\nu)\tau_{oct}^2\right]. \quad (3.26)$$

В примере 3.3 установлено, что изменение объема тела пропорционально величине σ_{oct}. Следовательно, первое слагаемое формулы (3.26) характеризует *энергию изменения объема*

$$u_v=[3(1-2\nu)/(2E)]\,\sigma_{oct}^2, \quad (3.27)$$

второе — *энергию изменения формы* (формоизменения)

$$u_d=[3(1+\nu)/(2E)]\,\tau_{oct}^2. \quad (3.28)$$

Таким образом, удельную потенциальную энергию можно рассматривать как сумму энергии изменения объема и энергии формоизменения:

$$u=u_v+u_d. \quad (3.29)$$

При этом энергия изменения объема пропорциональна квадрату нормального октаэдрического напряжения, а энергия формоизменения — квадрату касательного октаэдрического напряжения.

Пример 3.4. Вычислить энергию изменения объема и энергию формоизменения изотропного тела при осевом растяжении и чистом сдвиге, если коэффициент Пуассона $\nu=0{,}3$.

Решение. *Осевое растяжение:* $\sigma_1=\sigma$; $\sigma_2=\sigma_3=0$. Согласно формулам (3.19) и (3.20)

$$\sigma_{oct}=\sigma/3; \qquad \tau_{oct}={}^1/_3\sqrt{2\sigma^2}=\left(\sqrt{2}/3\right)\sigma.$$

Следовательно,

$$u_v=[3(1-2\nu)/(2E)]\,\sigma_{oct}^2=[3(1-2\cdot0{,}3)/(2E)]\,\sigma^2/9=0{,}133\sigma^2/(2E);$$

$$u_d=[3(1+\nu)/2E]\,\tau_{oct}^2=[3(1+0{,}3)/(2E)]\,{}^2/_9\sigma^2=0{,}867\sigma^2/(2E),$$

т. е. 87 % потенциальной энергии расходуется на изменение формы и только 13 % — на изменение объема.

Чистый сдвиг. $\sigma_1 = \sigma$; $\sigma_2 = 0$; $\sigma_3 = -\sigma$ (см. п. 3.2). Отсюда

$$\sigma_{oct} = 0; \qquad \tau_{oct} = {}^1/_3 \sqrt{6\sigma^2} = \sqrt{{}^2/_3}\, \sigma$$

и

$$u_o = 0; \qquad u_d = [3(1 + 0{,}3)/(2E)]\, {}^2/_3 \sigma^2 = 2{,}6\sigma^2/(2E),$$

т. е., как и следовало ожидать после рассмотрения примера 3.3, потенциальная энергия полностью расходуется на изменение формы.

3.6. Прочность при сложном напряженном состоянии

В зависимости от условий нагружения материал конструкции может работать в различных стадиях. Для пластичных материалов характерна такая последовательность смены механических состояний: 1) при относительно небольших нагрузках, когда возникают только упругие деформации, материал находится в *упругой* стадии; 2) при увеличении нагрузок и развитии остаточных деформаций материал переходит в *пластическую* стадию; 3) при дальнейшем увеличении нагрузок происходит образование и накопление трещин, т. е. наступает стадия *разрушения.*

Наиболее просто эта последовательность прослеживается в процессе испытания образцов на осевое растяжение и сжатие, т. е. в условиях линейного напряженного состояния (см. пп. 2.4, 2.5, 2.7). В этом случае экспериментальным путем нетрудно определить значение предельных (опасных) напряжений, под которыми, как отмечалось в п. 2.10, понимают предел текучести пластичного материала или предел прочности хрупкого.

По опасным напряжениям устанавливают расчетное сопротивление материала растяжению R_t или сжатию R_c, обеспечивая известный запас против наступления предельного состояния [см. п. 2.12, зависимость (2.22)]. Таким образом, условие прочности при линейном напряженном состоянии имеет вид:

$$\sigma_1 \le R_t; \qquad |\sigma_3| \le R_c.$$

Материал, находящийся в сложном напряженном состоянии, тоже может быть переведен в пластическую стадию или стадию разрушения. Однако достижение предельного состояния происходит уже при наличии двух или всех трех главных напряжений σ_1, σ_2, σ_3, отличных от нуля.

Вследствие неисчерпаемости всевозможных видов напряженного состояния количество опытов, которые необходимо было бы провести для выявления опасных значений главных напряжений, также оказалось бы велико. К тому же экспериментальная техника располагает пока еще ограниченными возможностями исследования сложного напряженного состояния и позволяет проводить испытания лишь для некоторых частных соотношений между главными напряжениями.

Указанные обстоятельства заставляют искать иные пути оценки степени опасности того или иного напряженного состояния. Теоретическое обоснование этой проблемы относится к наиболее актуальным вопросам современной механики твердого деформируемого тела и выходит за рамки традиционных задач сопротивления материалов. Не вдаваясь, однако, в подробности, можно утверждать: напряженное состояние в точке тела является основной причиной перехода материала из одной стадии работы в другую, и задача состоит в том, чтобы установить меру, которая характеризовала бы изменение механического состояния, т. е. выработать критерий пластичности и критерий разрушения, базирующиеся на ограниченном количестве испытаний.

Современная наука о прочности подходит к обоим критериям дифференцированно, поскольку физические процессы, протекающие в пластической стадии и стадии разрушения, несмотря на взаимосвязь, существенно различны.

При разработке критерия пластичности сложилось два подхода. Первый, более старый, основан на принятии правдоподобных гипотез, подтверждаемых экспериментальным путем. Из множества предлагавшихся в свое время гипотез пластичности сохранили практическое значение лишь две.

Гипотеза наибольших касательных напряжений основана на предположении, что пластическая деформация обусловлена необратимыми сдвигами в кристаллической решетке материала. При накоплении определенного количества сдвигов («пачка» сдвигов, см. рис. 2.19) на испытываемом образце появляются линии Людерса—Чернова, которые, как отмечалось в п. 2.4, примерно совпадают с направлением наибольших касательных напряжений.

После того как сдвиги примут массовый характер, можно говорить о переходе материала в пластическое состояние. Естественно предположить, что мерой этого перехода является значение наибольших касательных напряжений. Согласно п. 3.3 они возникают на площадках, совпадающих с диагональными плоскостями главного куба, и равны полуразности максимальных и минимальных главных напряжений [см. формулу (3.18)]:

$$\tau_{max} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2.$$

Если величина τ_{max} достигает некоторого предельного значения, характерного для рассматриваемого материала, то независимо от вида напряженного состояния материал переходит в пластическую стадию.

Сформулированный критерий позволяет считать, что при равенстве наибольших касательных напряжений соответствующие напряженные состояния *равноопасны*. Следовательно, сравнение напряженных состояний можно производить по значению наибольших касательных напряжений какого-либо одного напряженного состояния, принимаемого за эталонное. Таким чаще всего выступает одноосное растяжение (сжатие), которое, как отмечалось выше, хорошо изучено экспериментально.

Напряжение σ_{red} одноосного растяжения (сжатия), равноопасного рассматриваемому сложному напряженному состоянию, называется **эквивалентным** или **приведенным** (рис. 3.12). Это то напряжение, которое должно быть сопоставлено с пределом текучести материала. В рассматриваемом случае

$$\tau_{max} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2 = \tau_y, \qquad (3.30)$$

где τ_y — предел текучести при сдвиге.

Применив формулу (3.30) к растяжению, когда $\sigma_1 = \sigma_y$, $\sigma_3 = 0$, получим

$$\sigma_y/2 = \tau_y. \qquad (3.31)$$

Тогда условие пластичности принимает вид

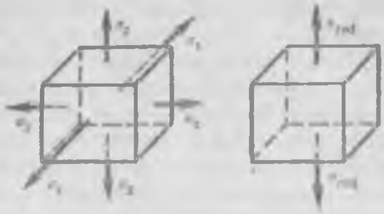
$$\sigma_{red,\tau} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_y, \qquad (3.32)$$

или при переходе от предела текучести к расчетному сопротивлению

$$\sigma_{des,\tau} = \sigma_1 - \sigma_3 \leqslant R. \qquad (3.33)$$

Таким образом, понятие эквивалентного напряжения

Рис. 3.12



позволяет свести расчет на прочность при сложном напряженном состоянии к расчету на обычное растяжение (сжатие).

Рассмотренная гипотеза в общем удовлетворительно характеризует переход к пластическому деформированию металлов, хотя и наблюдаются систематические отклонения.

Критерий наибольших касательных напряжений был предложен в 1773 г. Ш. Кулоном[1], хотя он и не занимался вопросами пластичности. Условие (3.30) как условие наступления пластического состояния было выдвинуто в 1868 г. французским инженером Г. Треска и математически сформулировано Б. Сен-Венаном, который положил его в основу созданной теории пластичности.

Энергетическая гипотеза (гипотеза наибольших октаэдрических касательных напряжений). При экспериментальной проверке условия пластичности (3.30) обнаруживаются отклонения, которые нельзя считать случайными. Наиболее простая проверка состоит в сравнении пределов текучести при растяжении и чистом сдвиге. Согласно условию Треска — Сен-Венана предел текучести при сдвиге должен подчиняться зависимости (3.31). Однако многочисленные опыты показывают, что отношение $\tau_y/\sigma_y > 0{,}5$ и колеблется в пределах 0,55—0,6.

Из условия Треска — Сен-Венана следует, что промежуточное главное напряжение σ_2 не оказывает влия-

[1] Шарль Огюстен Кулон (C. A. Coulomb, 1736—1806) — французский физик и военный инженер. В одной из ранних работ по механике упругого тела он указывал, что разрушение сжатой призмы происходит в результате скольжения одной ее части относительно другой по плоскости, наклоненной под углом 45° к направлению сжатия. Значение же предельного касательного напряжения Кулон ошибочно полагал равным σ_{lim} вместо $\sigma_{lim}/2$.

ния на достижение состояния текучести. В опытах такое влияние (хотя и небольшое) наблюдается. Кроме того, этому условию присущ недостаток чисто формального порядка: аналитическое выражение (3.32) содержит экстремальные главные напряжения. При известном положении главных площадок часто трудно заранее установить, какое напряжение максимально, а какое минимально. Еще более затруднителен случай, когда неизвестно направление главных напряжений и напряженное состояние представлено компонентами относительно произвольной системы координат.

В 1904 г. польский ученый М. Губер высказал предположение, что наступление предельного состояния связано с уровнем накопленной в единице объема потенциальной энергии деформации. Но принять в качестве критерия пластичности всю энергию (3.29) нельзя. Это противоречило бы экспериментально установленному факту, что при всестороннем сжатии ($\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=-\sigma$) пластические деформации не возникают ($\tau_{max}=0$), в то время как потенциальная энергия (3.25) неограниченно возрастает. Губер предложил исключить из рассмотрения энергию изменения объема u_v и в качестве критерия перехода в предельное состояние принять энергию формоизменения u_d^1.

Последняя, как видно из выражения (3.28), пропорциональна квадрату касательного октаэдрического напряжения. Это обстоятельство позволило немецкому ученому Р. Мизесу (1913 г.) принять в качестве критерия не энергию, а касательные напряжения на октаэдрической площадке. Действительно, согласно формуле (3.20)

$$\tau_{oct}=1/3\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}=\tau_y. \quad (3.33)$$

Но Р. Мизес был математиком и поэтому выражение октаэдрических напряжений представляло для него лишь простейшую функцию экстремальных касательных напряжений [см. формулу (3.20а)]. Более поздняя трактов-

[1] Впоследствии выяснилось [13], что идея энергетического критерия была высказана английским физиком Д. Максвеллом еще в 1856 г., т. е. почти за 30 лет до появления первого варианта одноименной теории предельного состояния материала, выдвинутого итальянским математиком Е. Бельтрами (1885 г.). Обращает на себя внимание то обстоятельство, что Максвелл имел в виду именно энергию формоизменения, а не полную энергию, как ошибочно полагал Бельтрами.

ка акад. В. В. Новожилова делает условие (3.33) понятным физически: если в каждом кристаллическом зерне наступление текучести обусловлено значением касательных напряжений в определенной плоскости и определенном направлении, то для поликристаллического агрегата (металл), зерна которого имеют всевозможные плоскости скольжения, наступление текучести логично связать с величиной, которая представляет собой среднее значение касательных напряжений на площадках различной ориентации.

При осевом растяжении (см. пример 3.4) в предельном состоянии ($\sigma_1=\sigma_y$; $\sigma_2=\sigma_3=0$)

$$\tau_{oct}=\left(\sqrt{2}/3\right)\sigma_y. \quad (3.34)$$

Таким образом, условие пластичности Губера — Мизеса можно представить в следующем виде:

$$\sigma_{red.u}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}=\sigma_y. \quad (3.35)$$

Отсюда расчетное напряжение

$$\sigma_{red.u}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}<R. \quad (3.35а)$$

Применяя условие (3.35) в случае чистого сдвига ($\sigma_1=\tau_y$; $\sigma_2=0$; $\sigma_3=-\tau_y$), получаем

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\tau_y^2+\tau_y^2+(-2\tau_y)^2}=\sigma_y,$$

или $\sqrt{3}\tau_y=\sigma_y$, откуда

$$\tau_y=\sigma_y/\sqrt{3}\approx 0{,}577\sigma_y. \quad (3.36)$$

Для большинства конструкционных металлов это соотношение согласуется с опытом несколько лучше, чем значение (3.31), следующее из условия Треска — Сен-Венана. Однако в процентном отношении разница между результатами, к которым приводят выражения (3.32) и (3.35), не столь существенна. Наибольшее расхождение имеет место при чистом сдвиге:

$$\Delta\sigma_{red}=\frac{0{,}577-0{,}5}{0{,}5}\,100\%\approx 15\%.$$

Более важным является то обстоятельство, что перестановка индексов главных напряжений в формулах (3.33), (3.35) и (3.35а) не меняет конечного результата. Следовательно, отпадает необходимость выяснять, какое главное напряжение максимально, а какое минимально.

Итак, рассмотрены два наиболее распространенных критерия пластичности, базирующиеся на правдоподобных гипотезах и согласующиеся в той или иной степени с экспериментом. Но к данному вопросу можно подойти по-другому — с позиций систематизированного описания опытных результатов при минимальных упрощающих предположениях.

Теория Мора. В гл. 1 отмечалось, что одни и те же материалы в различных условиях нагружения ведут себя неодинаково и деление материалов на хрупкие и пластичные имеет смысл только применительно к стандартным методам испытания образцов, воспроизводящих некоторые условия эксплуатации.

В настоящее время, как подчеркивалось в п. 2.8, утвердилась точка зрения, согласно которой каждый материал может разрушаться и хрупко, и пластично в зависимости от своей индивидуальной природы, характера напряженного состояния, определяемого соотношением главных напряжений, степени неоднородности напряженного состояния, скорости нагружения, температуры. Следовательно, идеальной выглядела бы такая теория, которая охватывала бы оба состояния (хрупкое и пластичное), конкретизируя при этом предельную стадию — разрушение или наступление текучести. Желательно также, чтобы одновременно учитывалось различие механических характеристик при растяжении и сжатии, если таковое наблюдается в эксперименте.

Первую попытку создать подобную теорию предпринял О. Мор[1]. Согласно выдвинутой им в 1900 г. гипотезе предельное состояние наступает в тот момент, когда на некоторой площадке возникает наиболее неблагоприятная комбинация касательных и нормальных напряжений. Условие достижения предельного состояния имеет вид

$$\sigma_{red.\mu} = \sigma_1 - \mu\sigma_3 = \sigma_{lim.t}. \qquad (3.37)$$

Вывод этой формулы базируется на предложенном Мором графическом представлении напряженного состояния в точке (круги Мора, построенные в координа-

[1] Отто Мор (O. Mohr, 1835—1918) — немецкий инженер и ученый в области теории сооружений.

тах $\sigma - \tau$). Коэффициент μ равен отношению предельных напряжений при осевом растяжении и сжатии:

$$\mu = \sigma_{lim,t}/\sigma_{lim,c}.$$

Если принять, что коэффициенты надежности по материалу при растяжении и сжатии одинаковы (см. п. 2.12), то величину μ можно определить из отношения соответствующих расчетных сопротивлений: $\mu = R_t/R_c$. Тогда

$$\sigma_{des,\mu} = \sigma_1 - \mu\sigma_3 < R_t. \quad (3.38)$$

Для пластичных материалов $\mu = 1$ и условие (3.37) совпадает с условием Треска — Сен-Венана (3.32). Однако выше показано, что переход в пластическое состояние лучше описывается условием Губера — Мизеса, содержащим все три главных напряжения. Развивая эту идею, логично предположить, что предельное состояние наступает в тот момент, когда возникает неблагоприятная комбинация октаэдрических касательных и октаэдрических нормальных напряжений. В этом направлении работали немецкие исследователи Ф. Шлейхер, А. Надаи и советские ученые Ю. И. Яги, П. П. Баландин, И. Н. Миролюбов и др.

Критерий Давиденкова — Фридмана. Критерий Мора и ему подобные не учитывают деформационных характеристик материала. Попытки устранить этот недостаток предпринимались неоднократно. Получившая известное развитие схема Давиденкова — Фридмана[1] исходит из предположения о наличии у любого материала двух предельных прочностных характеристик — сопротивления отрыву (т. е. хрупкому разрушению) σ_{cf} и сопротивления сдвигу (пластическому разрушению) τ_s. Напряженное состояние в рассматриваемой точке определяется коэффициентом

$$\alpha = \tau_{max}/\sigma_{red,e}, \quad (3.39)$$

где τ_{max} — максимальное касательное напряжение, выражаемое формулой (3.18); $\sigma_{red,e}$ — эквивалентное нормальное напряжение, определяемое по закону Гука исходя из наибольшего положительного удлинения (3.23):

$$\sigma_{red,e} = E\varepsilon_{max}. \quad (3.40)$$

[1] Николай Дмитриевич Давиденков (1879—1960) — советский ученый-механик, работавший в области изучения природы пластических деформаций и разрушения металлов. Яков Борисович Фридман (1911—1968) — советский ученый в области механики и материаловедения.

Рис. 3.13

Некоторые опыты показывают, что разрушение путем отрыва может происходить по сечениям, в которых отсутствуют напряжения, но имеются удлинения в направлениях, перпендикулярных сечениям. На рис. 2.28, *б* показана подобная картина разрушения сжатого бетонного образца. В связи с этим представляет интерес критерий *наибольших положительных удлинений*, введенный еще в XVII в. Э. Мариоттом.

Если $\alpha \gg 1$, т. е. возникают значительные касательные напряжения при малых удлинениях (например, осевое сжатие или гидростатическое давление), то нагружение является «мягким». Если $\alpha \ll 1$, т. е. при малых касательных напряжениях возникают значительные упругие удлинения (например, трехосное растяжение, близкое к равномерному), то нагружение является «жестким».

Такой подход содержит много ценных идей. Наибольшее значение имеет возможность конкретизации вида предельного состояния — появление текучести или разрушение, а в последнем случае — его типа (отрыв или сдвиг) и уровня предельных напряжений в зависимости от природы материала и характера напряженного состояния в точке.

Пример 3.5. Проверить прочность пластины, по граням которой действуют главные напряжения $\sigma_1 = 150$ МПа и $\sigma_3 = -60$ МПа (рис. 3.13). Пластина изготовлена из стали с расчетным сопротивлением $R = 220$ МПа. Расчет произвести исходя из гипотезы наибольших касательных напряжений и энергетического критерия.

Решение. Согласно условию прочности (3.32а)

$$\sigma_{des,\tau} = \sigma_1 - \sigma_3 = 150 - (-60)\ \text{МПа} = 210\ \text{МПа} < R = 220\ \text{МПа}.$$

Поскольку рассматриваемое напряженное состояние является плоским ($\sigma_2 = 0$), неравенство (3.35а) упрощается:

$$\sigma_{des,u} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_3} =$$

$$= \sqrt{150^2 + (-60)^2 - 150(-60)}\ \text{МПа} \approx 187\ \text{МПа} < R.$$

Таким образом, в обоих случаях прочность обеспечена. Разница в результатах составляет

$$\Delta\sigma_{des} = \frac{210 - 187}{187}\,100\% \approx 12\%.$$

Глава 4. РАСЧЕТ СОЕДИНЕНИЙ, РАБОТАЮЩИХ НА СДВИГ

4.1. Понятие о срезе и смятии

В предыдущей главе показано, что при любом напряженном состоянии возникают как нормальные, так и касательные напряжения, причем обычно они сопутствуют друг другу. Практика показывает, что во многих случаях расчета на прочность вполне достаточно определить и проверить наибольшие нормальные напряжения. Таковы, например, простейшие расчеты на растяжение (сжатие), изложенные в гл. 2.

Однако нередко весьма существенными оказываются касательные напряжения, в результате чего разрушение элемента (бруса) может произойти от взаимного сдвига его отдельных частей. В таких случаях прочность проверяют исходя из наибольших касательных напряжений. Сюда относятся в основном расчеты различных соединений (сварных, болтовых, заклепочных, клеевых, на врубках и т. д.), предназначенных для скрепления воедино элементов строительных конструкций и работающих преимущественно на срез.

Срезом называют такой вид деформации бруса, при котором в его поперечных сечениях возникает единственный внутренний силовой фактор — поперечная сила Q. С достаточной степенью приближения можно считать, что деформация среза возникает при действии двух равных, близко расположенных друг к другу сил, которые направлены в противоположные стороны перпендикулярно продольной оси бруса. Примером подобного приложения сил является резка ножницами прутьев, металлических полос и т. п. (рис. 4.1, *а*). Вообще же на практике срез не проявляется самостоятельно, поскольку наряду с поперечной силой возникает изгибающий момент (вследствие образующейся пары сил). Частным случаем среза является *скалывание* деревянных элементов вдоль или поперек волокон.

Поперечная сила представляет собой равнодействующую внутренних сил $\tau_s dA$ на бесконечно малых площадках срезаемого сечения:

$$Q = \int_A \tau_s \, dA. \qquad (4.1)$$

9*

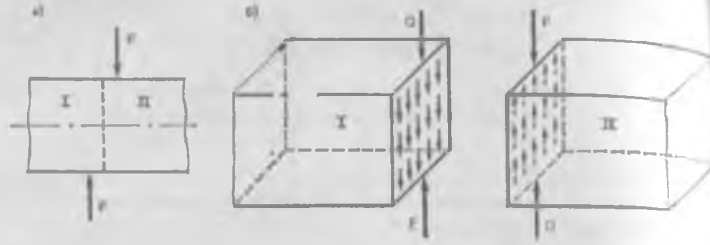


Рис. 4.1

Расчетная практика показывает, что касательные напряжения среза τ_s вполне допустимо считать равномерно распределенными по поперечному сечению (рис. 4.1, *б*). Тогда

$$Q = \tau_s \int_A dA = \tau_s A,$$

и условие прочности на срез принимает вид:

$$\tau_s = Q/A_s < R_s \gamma_c. \qquad (4.2)$$

Здесь Q — расчетная поперечная сила (полученная от расчетной нагрузки), Н; A_s — площадь среза, м^2; R_s — расчетное сопротивление срезу, Па (МПа). Для стали согласно главе СНиП [9] и на основании соотношения (3.36) $R_s = 0{,}58 R_y$, где R_y — расчетное сопротивление растяжению, установленное исходя из предела текучести; γ_c — коэффициент условий работы.

Расчет на срез во многих случаях сопровождается расчетом на смятие. Под *смятием* понимают пластическую деформацию в местах соприкасания сжатых элементов (т. е. на поверхностях контакта).

Напряжения смятия проверяют аналогично напряжениям сжатия:

$$\sigma_p = N/A_p < R_p \gamma_c, \qquad (4.3)$$

где N — расчетная сила смятия, Н; A_p — площадь смятия, м^2; R_p — расчетное сопротивление смятию, Па (МПа).

Смятие носит местный характер, так как возникающие напряжения быстро затухают по мере удаления от поверхности контакта. Поэтому нормы разрешают принимать соответствующее расчетное сопротивление значительно бо́льшим, чем при осевом сжатии. Для стали $R_p = R_u$, где R_u — расчетное сопротивление сжатию, установленное исходя из предела прочности (см. п. 2.12).

Следует иметь в виду, что понятие «напряжение смятия» является условным. Как указывалось в п. 1.6, термин «напряжение» применяется для обозначения интенсивности внутренних сил. Здесь же речь идет о давлении одного элемента на другой, которое возникает на поверхности контакта под нагрузкой, т. е. напряжением называется интенсивность внешних сил.

4.2. Заклепочные и болтовые соединения

В настоящее время клепаные строительные стальные конструкции почти полностью вытеснены сварными вследствие повышенного расхода металла и большей трудоемкости изготовления. Заклепочные соединения сохранили весьма ограниченное применение только в тяжелых большепролетных конструкциях, подвергающихся динамическим воздействиям, когда использование сварки нежелательно из-за возникновения значительных температурных напряжений. Применяют клепку и в конструкциях из разупрочняющихся при сварке низколегированных сталей и алюминиевых сплавов.

Заклепочные соединения осуществляют постановкой стержневых заготовок с закладной головкой *1* (рис. 4.2) в совмещенные отверстия соединяемых элементов и последующей расклепкой свободного конца до образования второй, замыкающей головки *2*. Заготовки штампуют из стали и алюминиевых сплавов с повышенными пластическими свойствами. В строительных конструкциях применяют заготовки диаметром $d=12-30$ мм, которые ставят в отверстия диаметром $d_0=d+1$ мм. При образовании замыкающей головки стержень заготовки осаживается, утолщается и плотно заполняет отверстие, поэтому *за расчетный диаметр принимают диаметр отверстия*, а не стержня заготовки.

Болтовые соединения широко используют на монтаже, особенно промышленных объектов. Обычный болт (рис. 4.3) представляет собой цилиндрический стержень *1* с винтовой нарезкой на одном конце и головкой *2* на другом. На нарезную часть надевают шайбу *3* и навинчивают гайку *4*. По точности изготовления, характеризуемой допуском на диаметр и размером зазора между стержнем и стенками отверстия, различают болты грубой, нормальной и повышенной точности. Они имеют диаметр $d=10-48$ мм.

В зависимости от ориентации соединения по отноше-

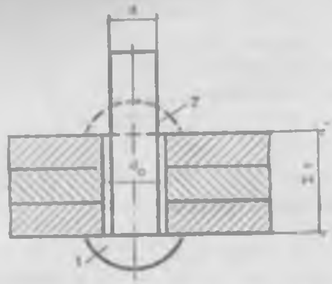


Рис. 4.2

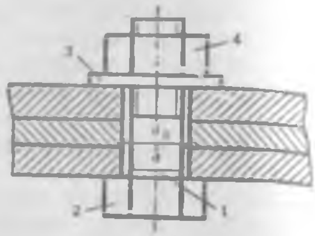


Рис. 4.3

нию к направлению усилия заклепки и обычные болты работают или на срез, или на растяжение (отрыв головок). Первый случай является более распространенным и рассматривается ниже.

Действительная работа заклепочных и болтовых соединений имеет сложный характер. Поэтому их расчет является условным и при растяжении (сжатии) соединяемых элементов базируется на допущениях, указанных в предыдущем параграфе, а также на предположении, что *несущая способность соединения пропорциональна количеству поставленных заклепок (болтов), а усилие, возникающее в соединении, распределяется между всеми заклепками (болтами) поровну.*

На самом деле при совместной работе нескольких заклепок в упругой стадии крайние заклепки нагружены значительно больше внутренних. Однако в пластической стадии усилия в заклепках выравниваются за счет текучести, что позволяет пользоваться сформулированным предположением. В болтовых соединениях также возникают пластические деформации, которые приводят к выравниванию усилий. Неравномерная работа отдельных болтов в многоболтовых соединениях стальных конструкций учитывается снижением расчетного сопротивления материала болтов. С учетом сказанного условие прочности на срез (4.2) при расчете заклепок и болтов принимает вид

$$\tau_s = Q/\Sigma A_s = \frac{N}{n n_s \pi d_{ef}^2/4} \le R_s \gamma \gamma_c, \qquad (4.4)$$

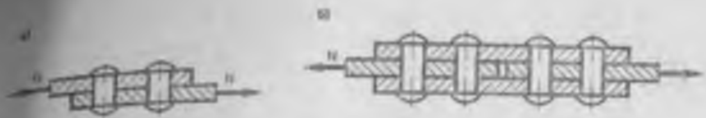


Рис. 4.4

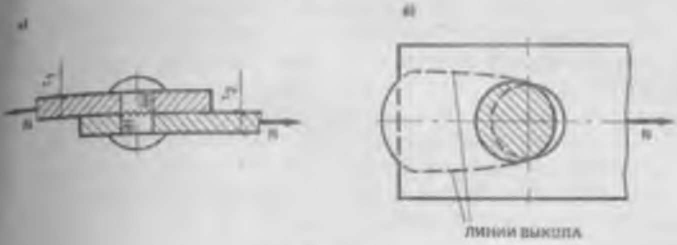


Рис. 4.5

где $Q = N/n$ — поперечная сила, приходящаяся на одну заклепку (болт), Н; $\Sigma A_s = n_s \pi d_{ef}^2/4$ — суммарная площадь сечений, по которым срезается одна заклепка (болт), м²; N — расчетная продольная сила в соединяемых элементах, которую следует рассматривать как эквивалент расчетной пагрузки на соединение, Н; n — полное число заклепок (болтов) в нахлесточных соединениях (рис. 4.4, *а*) или число заклепок (болтов), расположенных по одну сторону стыка с накладками (рис. 4.4, *б*); n_s — число плоскостей среза одной заклепки (болта); d_{ef} — расчетный диаметр (диаметр отверстия заклепки d_0 или ненарезной части болта d), м; R_s — расчетное сопротивление материала заклепок (R_{rs}) или болтов (R_{bs}) срезу, устанавливаемое нормами [4, 9], Па (МПа)[1]; γ — коэффициент условий работы заклепочного (γ_r) или болтового (γ_b) соединения, отличный от единицы только при использовании стальных болтов грубой и нормальной точности ($\gamma_b = 0{,}9$); γ_c — коэффициент условий работы соединяемых элементов, принимаемый по тем же нормам, что и расчетное сопротивление.

На практике обычно задаются диаметром заклепок (болтов) и расчетным путем определяют их необходимое количество, приводя неравенство (4.4) к виду

$$n \geq 4N/\left(n_s \pi d_{ef}^2 R_s \gamma\gamma_c\right). \qquad (4.4а)$$

Расчет на срез обеспечивает прочность заклепок и болтов, но не гарантирует безопасность соединения

[1] Поскольку действующая глава СНиП II-23-81* [9] не содержит указаний по расчету заклепочных соединений, необходимые данные заимствуются в дальнейшем из СНиП II-В.3-72.

в целом. Если толщина соединяемых элементов недостаточна, то давление, возникающее между заклепками (болтами) и стенками отверстий, вызывает смятие последних (рис. 4.5, *а*). При большом давлении и малом расстоянии между отверстиями или отверстием и краем элемента часть материала может выколоться, как схематически показано на рис. 4.5, *б*.

Фактическое распределение напряжений смятия по цилиндрической поверхности контакта заклепки (болта) и соединяемого элемента весьма неопределенно. Оно во многом зависит от неправильностей формы отверстия и заклепочного (болтового) стержня, образовавшихся при изготовлении конструкции. Поэтому расчет на смятие носит также условный характер и ведется в предположении *равномерного* распределения давления перпендикулярно поверхности контакта:

$$\sigma_p = N/\Sigma A_p = N/(n d_{ef}\, \Sigma t_{\min}) \leqslant R_p\, \gamma\gamma_c. \qquad (4.5)$$

Здесь $A_p = d_{ef}\Sigma t_{\min}$ — условная расчетная площадь смятия одной заклепкой или болтом (площадь проекции цилиндрической контактной поверхности на диаметральную плоскость), м²; $\Sigma t_{\min}$ — наименьшая суммарная толщина элементов, сминаемых с одной стороны стержня заклепки (болта), м; R_p — расчетное сопротивление материала соединяемых элементов смятию (R_{rp} или R_{bp}), устанавливаемое указаниями нормами, Па (МПа). Остальные обозначения те же, что в формуле (4.4).

Для определения количества заклепок (болтов), требуемого из условия прочности на смятие, неравенство (4.5) приводят к виду

$$n \geqslant N/(d_{ef}\, \Sigma t_{\min}\, R_p\, \gamma\gamma_c). \qquad (4.5a)$$

Расчет заклепочных и болтовых соединений на срез и смятие производят последовательно, окончательно принимая наибольшее требуемое количество заклепок (болтов), округленное до ближайшего целого числа в большую сторону.

Кроме расчета на срез и смятие необходима проверка прочности соединяемых элементов на осевое усилие в ослабленных отверстиями сечениях. По аналогии с примером 2.12 согласно формуле (2.23)

$$\sigma = N/A_{net} = N/[(b - kd_0)\, t] \leqslant R\gamma_c, \qquad (4.6)$$

где $A_{net} = A - kd_0 t$ — площадь опасного поперечного сечения элемента нетто (рис. 4.6), м²; $A = bt$ — площадь сечения брутто, м²; k — количество отверстий в рассматриваемом сечении; d_0 — диаметр отверстий, м; t — толщина элемента, м; b — его ширина, м; R — расчетное сопротивление материала соединяемых элементов растяжению (сжатию), Па (МПа).

Рис. 4.6

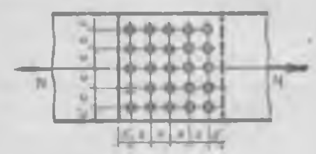
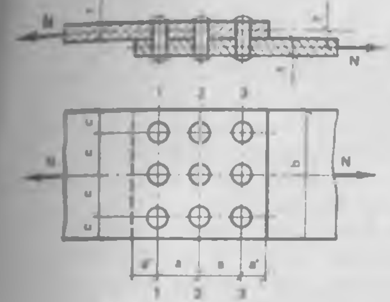


Рис. 4.7



← Рис. 4.8

В целях экономии стали главой СНиП [9] предусмотрен учет развития пластических деформаций при расчете на прочность элементов болтовых конструкций, ослабленных отверстиями. Строго говоря, расчет должен выполняться по двум сечениям (брутто и нетто) с использованием соответствующих расчетных сопротивлений, установленных по пределу прочности стали R_{un} и пределу текучести R_{yn} (см. п. 2.12). Однако в связи с тем, что значения отношения R_u/R_y у строительных сталей колеблются в широких пределах (1,3—1,7) и отличаются разбросом, реализация такой методики на практике потребовала бы достаточно сложных формул и громоздких таблиц. Учитывая это обстоятельство, для упрощения практических расчетов и сохранения их привычной формы в условие (4.6) дополнительно вводят повышающий коэффициент условий работы $\gamma_c' = 1{,}1$.

Подобный подход позволяет экономить до 10 % стали, что приближает болтовые конструкции по металлоемкости к сварным.

Размещение заклепок и болтов диктуется прочностью материала соединяемых элементов и рядом производственных факторов (продавливанием отверстий на прессах, обеспечением удобства клепки, завинчивания гаек и т. д.). В связи с этим необходимо соблюдать следующие требования (рис. 4.7):

1) минимальные расстояния a и c между центрами заклепок (болтов) в любом направлении должны быть не менее $3d_0$ (при алюминиевых болтах — не менее $3{,}5d_0$). Для болтовых соединений стальных элементов с пределом текучести $R_{yn} \leqslant 380$ МПа расстояние $a_{min} = c_{min} = 2{,}5d_0$;

2) расстояние a' от оси крайней заклепки (болта) до края элемента вдоль усилия должно быть не менее $2d_0$, поперек усилия c' — не менее $1{,}5d_0$ при обрезных кромках и не менее $1{,}2d_0$ — при прокатных. В алюминиевых конструкциях оба расстояния должны быть не менее $2{,}5d_0$, за исключением элементов с прокатными или прессованными кромками, для которых $c' = 2d_0$;

3) максимальные расстояния a и c не должны превышать: в крайних рядах $8d_0$ или $12t_{min}$ (в алюминиевых конструкциях $5d_0$ или $10t_{min}$) при растяжении и сжатии; в средних рядах $16d_0$ или $24t_{min}$ ($12d_0$ или $20t_{min}$) при растяжении и $12d_0$ или $18t_{min}$ ($10d_0$ или $14t_{min}$) при сжатии, где t_{min} — толщина наиболее тонкого наружного элемента пакета;

4) максимальные расстояния a' и c' не должны превышать $4d_0$ или $8t_{min}$ (в алюминиевых конструкциях $6d_0$).

Для многоболтовых соединений стальных элементов с пределом текучести $R_{yn} \leqslant 380$ МПа допускается уменьшение расстояния a' до $1{,}5d_0$ и расстояний a, c до $2d_0$. Однако в этом случае расчетное сопротивление смятию R_{bp} в формулах (4.5) и (4.5а) должно быть умножено на дополнительный понижающий коэффициент условий работы $\gamma_b' = 0{,}8$, если $R_{yn} \leqslant 285$ МПа, и $\gamma_b' = 0{,}75$, если $285 < R_{yn} < 380$ МПа. При промежуточных значениях указанных расстояний, т. е. когда $1{,}5d_0 < a' < 2d_0$ или $2d_0 < a < 2{,}5d_0$, коэффициент γ_b' следует устанавливать линейной интерполяцией.

Пример 4.2. Рассчитать заклепочное соединение растянутых полос сечением $b \times t = 160 \times 8$ мм (рис. 4.8). Расчетное усилие $N = 105$ кН. Материал полос — алюминиевый сплав с расчетным сопротивлением растяжению $R = 125$ МПа, смятию $R_{rp} = 200$ МПа. Заклепки выполнены из сплава с расчетным сопротивлением срезу $R_{rs} = 100$ МПа и поставлены в отверстия диаметром $d_0 = 13$ мм. Условия работы полос — нормальные.

Решение. При взаимном сдвиге соединяемых полос заклеп-

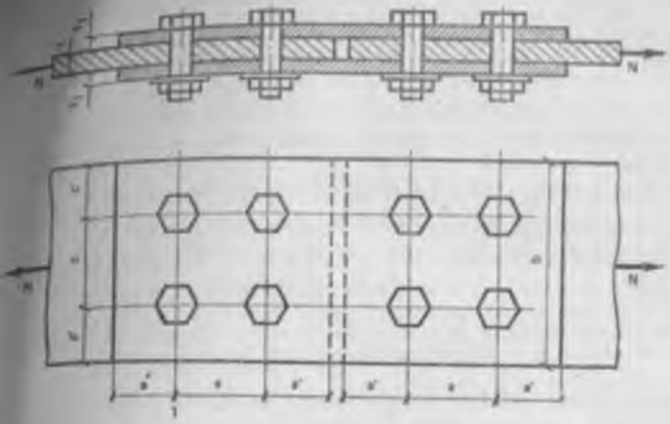


Рис. 4.9

ки могут срезаться по одной плоскости, т. е. они являются *односрезными*. Согласно условию прочности (4.4а)

$$n \geq 4N/\left(n_{ср}\pi d_0^2 R_r\right) = 4\cdot105\cdot10^3/(1\cdot3{,}14\cdot13^2\cdot10^{-6}\cdot100\cdot10^6) = 7{,}9.$$

Аналогично из условия прочности на смятие (4.5а) находим

$$n > N/(d_0 t R_{rp}) = 105\cdot10^3/(13\cdot8\cdot10^{-6}\cdot200\cdot10^6) = 5.$$

Решающее значение имеет расчет на срез. Поскольку полосы соединяются внахлестку, крепление оказывается асимметричным и в нем дополнительно возникает не учитываемый момент $M=Ne$. В подобных случаях нормы предписывают увеличивать количество заклепок (болтов) на 10 % сверх расчетного: $n=1{,}1\cdot7{,}9=8{,}7$. Округляя, принимаем $n=9$. Размещаем заклепки в три ряда, назначая $a=40$ мм $>3d_0=3\cdot13$ мм $=39$ мм; $a'=c'=35$ мм $>2{,}5d_0=2{,}5\cdot13$ мм $=32{,}5$ мм; $c=0{,}5\ (b-2c')=0{,}5(160-2\cdot35)$ мм $=45$ мм.

Проверяем прочность полос на разрыв по ослабленным сечениям. Так как количество заклепок во всех рядах одинаковое ($k=3$), каждый ряд на основании допущения о равномерной работе заклепок воспринимает треть нагрузки. Поэтому наиболее опасны сечения $1-1$ и $3-3$, где продольное усилие максимально. По формуле (4.6) получаем

$$\sigma = N/[(b-kd_0)t] = 105\cdot10^3/[(160-3\cdot13)8\cdot10^{-6}]\ Па =$$
$$= 108\cdot10^6\ Па = 108\ МПа < R = 125\ МПа,$$

т. е. прочность обеспечена.

Пример 4.3. Рассчитать болтовой стык растянутых полос сечением $b\times t=150\times10$ мм посредством двусторонних накладок (рис. 4.?). Расчетное усилие $N=250$ кН. Материал полос и накладок — сталь с расчетным сопротивлением растяжению $R=230$ МПа, смятию $R_{rp}=350$ МПа. Болты нормальной точности наружным диаметром $d=20$ мм выполнены из стали с расчетным сопротивлением срезу $R_{bs}=150$ МПа и поставлены в отверстия диаметром $d_0=$ $=23$ мм. Условия работы полос — нормальные.

Решение. Толщина каждой накладки должна быть не менее половины толщины полосы из условия равнопрочности на растяжение. Назначаем

$$t_1 = 6 \text{ мм} > {}^1/_2 t = {}^1/_2 \cdot 10 \text{ мм} = 5 \text{ мм}.$$

Необходимое количество *двухсрезных* болтов по формуле (4.4а) при $\gamma_c=1$, $\gamma_b=0{,}9$

$$n > 4N/(n_s \pi d^2 R_{bs} \gamma_b) = 4 \cdot 250 \cdot 10^3/(2 \cdot 3{,}14 \cdot 20^2 \cdot 10^{-6} \cdot 150 \cdot 10^6 \cdot 0{,}9) = 2{,}95.$$

Согласно условию прочности на смятие (4.5а)

$$n > N/(d \Sigma t_{\min} R_{bp} \gamma_b) = 250 \cdot 10^3/(20 \cdot 10 \cdot 10^{-6} \cdot 350 \cdot 10^6 \cdot 0{,}9) = 3{,}97,$$

где $\Sigma t_{\min} = t = 10$ мм $< 2t_1 = 2 \cdot 6$ мм $= 12$ мм. Округляя, принимаем с каждой стороны стыка $n=4$ (решающим является расчет на смятие). Размещаем болты в два ряда, как показано на рис. 4.9, назначая:

$$a = c = 60 \text{ мм} > 2{,}5 d_0 = 2{,}5 \cdot 23 \text{ мм} = 57{,}5 \text{ мм};$$

$$c' = {}^1/_2 (b - c) = {}^1/_2 (150 - 60) \text{ мм} = 45 \text{ мм} >$$

$$> 1{,}5 d_0 = 1{,}5 \cdot 23 \text{ мм} = 34{,}5 \text{ мм};$$

$$a' = 50 \text{ мм} > 2d_0 = 2 \cdot 23 \text{ мм} = 46 \text{ мм}.$$

Прочность стыка на разрыв проверяем в ослабленном сечении полосы $I—I$. С учетом развития пластических деформаций по формуле (4.6) находим

$$\sigma = N/[(b - kd_0)t] = 250 \cdot 10^3/[(150 - 2 \cdot 23) 10 \cdot 10^{-6}] \text{ Па} =$$

$$= 240 \cdot 10^6 \text{ Па} = 240 \text{ МПа} < R\gamma_c' = 230 \cdot 1{,}1 \text{ МПа} = 253 \text{ МПа}.$$

Пример 4.4. Проверить прочность прикрепления растянутого элемента из двух равнополочных уголков сечением $b \times t = 90 \times 8$ мм к фасонке толщиной $t_1=12$ мм (см. рис. 2.38, *б*). Материал уголков и фасонки — сталь с расчетным сопротивлением растяжению $R=$ $=230$ МПа, смятию $R_{rp}=420$ МПа. Заклепки изготовлены из стали с расчетным сопротивлением срезу $R_{rs}=180$ МПа и поставлены в отверстия диаметром $d_0=21$ мм. Расчет произвести из условия равнопрочности соединения с прикрепляемым элементом.

Решение. Заклепочные и болтовые соединения можно рассчитывать не только по фактическому, но и по предельному усилию, исходя из эксплуатационной способности прикрепляемого элемента.

Эксплуатационная способность уголков из условия прочности (4.6) на разрыв по ослабленному сечению при $\gamma_c=1$

$$N_0 = RA_{net} = R2(A - kd_0 t) = 230 \cdot 10^6 \cdot 2(13{,}9 - 1 \cdot 2{,}1 \cdot 0{,}8) \times$$

$$\times 10^{-4} \text{ Н} = 562 \cdot 10^3 \text{ Н} = 562 \text{ кН}.$$

Площадь сечения уголка $A=13{,}9$ см$^2 = 13{,}9 \cdot 10^{-4}$ м^2 принята по сортаменту (см. табл. 3 приложения).

Напряжения среза в заклепках согласно условию (4.4) при $\gamma_c=1$

$$\tau_s = 4N_0/(nn_s \pi d_0^2) = 4 \cdot 562 \cdot 10^3/(4 \cdot 2 \cdot 3{,}14 \cdot 21^2 \cdot 10^{-6}) \text{ Па} =$$

$$= 203 \cdot 10^6 \text{ Па} = 203 \text{ МПа} > R_{rs} = 180 \text{ МПа}.$$

Напряжения смятия в фасонке (поскольку она тоньше двух уголков) по формуле (4.5)

$$\sigma_p = N_0/(nd_0 t_1) = 562\cdot10^3/(4\cdot21\cdot12\cdot10^{-6})\ \text{Па} =$$
$$= 558\cdot10^6\ \text{Па} = 558\ \text{МПа} > R_{rp} = 420\ \text{МПа}.$$

Оба условия прочности не соблюдаются, причем на смятие — в большей степени. Следовательно, указанное на рисунке количество заклепок ($n=4$) недостаточно. Необходимо иметь

$$n' > n\sigma_p/R_{rp} = 4\cdot558/420 = 5{,}3.$$

Округляя, принимаем $n=6$ и назначаем:

$$a = 65\ \text{мм} > 3d_0 = 3\cdot21\ \text{мм} = 63\ \text{мм};$$
$$a' = 45\ \text{мм} > 2d_0 = 2\cdot21\ \text{мм} = 42\ \text{мм}.$$

4.3. Сварные соединения

Сварка — наиболее распространенный способ соединения стальных конструкций. Основным ее видом, применяемым в строительстве, является электродуговая сварка (ручная, автоматическая и полуавтоматическая) плавящимся электродом. Существует несколько видов сварных соединений, но чаще всего встречаются стыковые и нахлесточные.

Стыковое соединение осуществляют *стыковыми* швами путем заполнения расплавленным металлом пространства между соединяемыми элементами. Расчет на действие осевого (по отношению к элементам) усилия ведут в предположении, что напряжения распределяются по длине шва равномерно. В случае прямого шва (рис. 4.10, *а*) прочность проверяют по формуле (2.23), которая записывается в виде

$$\sigma_w = N/A_w = N/(t_{\min}\, l_w) < R_{wy}\,\gamma_c, \tag{4.7}$$

где σ_w — нормальное напряжение в рассчитываемом шве, Па (МПа); N — расчетная продольная сила в соединяемых элементах, Н; A_w — площадь продольного сечения шва, м²; $t_{\min}$ — толщина более тонкого элемента, м; l_w — расчетная длина шва, равная полной его длине b за вычетом величины $\delta = 2t_{\min}$ ($0{,}5\delta$ — для учета непровара в начале шва и $0{,}5\delta$ — для учета кратера в его конце), м; R_{wy} — расчетное сопротивление стыкового соединения растяжению или сжатию, Па (МПа), устанавливаемое главой СНиП [9] исходя из предела текучести стали; γ_c — коэффициент условий работы соединяемых элементов, значения которого приводятся в той же главе.

При расчете стыковых соединений растянутых элементов конструкций, эксплуатация которых возможна после достижения металлом предела текучести (см. п. 2.12), вместо величины R_{wy} следует принимать R_{wu}/γ_u

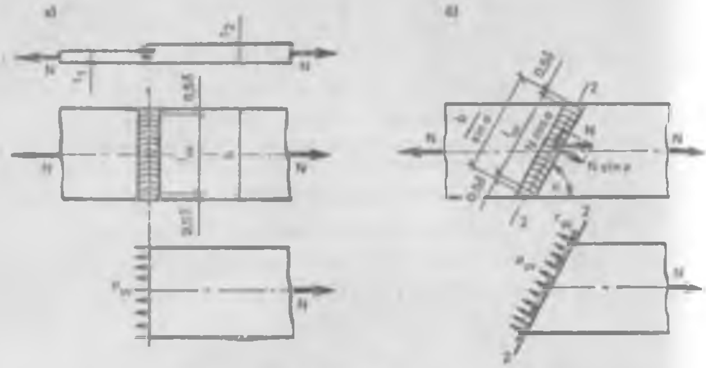


Рис. 4.10

(если $R_{wu}/\gamma_u > R_{wy}$). Здесь $\gamma_u = 1{,}3$ — коэффициент надежности элементов конструкций, рассчитываемых на прочность по пределу прочности.

При недостаточно высоком качестве сварки в шве могут возникнуть поры, газовые и шлаковые включения, которые являются источниками внутренней концентрации напряжений и ослабляют шов при растяжении. Поэтому металл стыкового шва, работающего на растяжение, считают равнопрочным основному металлу, соединяемых элементов ($R_{wy} = R_y$) только в тех случаях, когда предусмотрены физические способы контроля качества сварки (просвечивание рентгеновскими или гамма-лучами, ультразвуковая дефектоскопия и т. п.).

При визуальных способах контроля расчетное сопротивление металла шва растяжению ниже, чем у основного металла ($R_{wy} = 0{,}85R_y$), и для обеспечения равнопрочности стремятся к увеличению длины шва, устраивая *косой* стык (рис. 4.10, *б*). Проверка прочности в этом случае должна производиться как по нормальным, так и по касательным напряжениям:

$$\sigma_w = N \sin\alpha/(t_{\min} l_w) < R_{wy}\gamma_c; \qquad (4.8)$$

$$\tau_w = N \cos\alpha/(t_{\min} l_w) < R_{ws}\gamma_c, \qquad (4.9)$$

где α — угол наклона косого шва к линии действия усилия; l_w — расчетная длина шва, равная $b/\sin\alpha - \delta$; R_{ws} — расчетное сопротивление стыкового соединения сдвигу, принимаемое по той же главе СНиП равным $0{,}58R_y$ согласно соотношению (3.36).

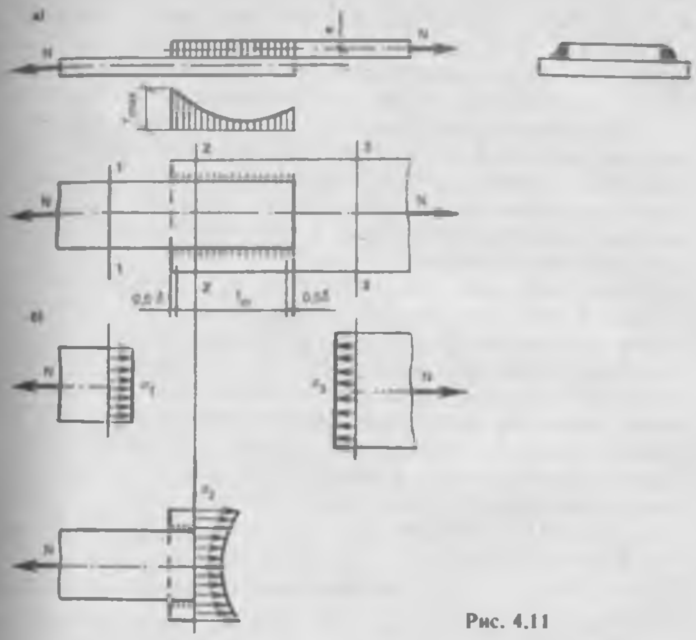


Рис. 4.11

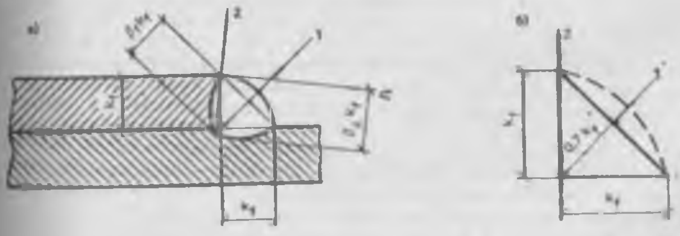


Рис. 4.12

Однако чаще всего проверка прочности не требуется вообще. Если $\alpha \leqslant 67°$, то косой стыковой шов не уступает по прочности основному металлу.

При сжатии и сдвиге стыковых швов отрицательное влияние внутренних дефектов сварки сказывается на прочности меньше, чем при растяжении, и поэтому применение физических способов контроля не является обязательным. Это дает основание принимать для таких швов расчетные сопротивления, равные соответствующему сопротивлению основного металла.

Нахлесточное соединение осуществляют *угловыми* швами, заполняя расплавленным металлом угол, образованный поверхностями соединяемых элементов. Швы, расположенные параллельно линии действия усилия, называются *фланговыми* (рис. 4.11), перпендикулярно линии действия — *лобовыми* (см. рис. 4.13).

При соединении фланговыми швами передачи усилия с одного элемента на другой происходит неравномерно как по длине шва (см. рис. 4.11, *а*), так и по поперечному сечению соединения (см. рис. 4.11, *б*). Однако при статической нагрузке перед разрушением шва напряжения выравниваются вследствие пластической работы его перенапряженных (концевых) участков. Это позволяет сделать допущение о равномерном распределении напряжений среза по расчетному сечению углового шва *1* (рис. 4.12, *а*) и производить проверку прочности соединения по формуле

$$\tau_{wf} = N/\Sigma A_{wf} = N/(\beta_f k_f \Sigma l_w) \leq R_{wf} \gamma_{wf} \gamma_c. \tag{4.10}$$

Здесь ΣA_{wf} — расчетная суммарная площадь среза угловых швов в соединении без учета наплывов металла, м²; β_f — коэффициент глубины провара шва, принимающий согласно главе СНиП [9] значения от 0,7 до 1,1 в зависимости от способа сварки (ручная или механизированная), диаметра сварочной проволоки, положения шва в пространстве и его толщины; k_f — толщина углового шва, м, равная катету вписанного равнобедренного прямоугольного треугольника (рис. 4.12, *б*); Σl_w — расчетная суммарная длина угловых швов в соединении, м, принимаемая так же, как для стыковых швов, но при $\delta = 10$ мм (см. рис. 4.11, *а*); R_{wf} — расчетное сопротивление соединения условному срезу, Па (МПа), устанавливаемое указанной главой СНиП в размере $0{,}55 R_{wun}/\gamma_{wm}$, где R_{wun} — нормативное сопротивление (предел прочности на растяжение) металла шва; γ_{wm} — коэффициент надежности по материалу шва, равный 1,25 при $R_{wun} \leq 490$ МПа и 1,35 в остальных случаях; γ_{wf} — коэффициент условий работы шва, равный единице во всех случаях, кроме конструкций, возводимых в климатических районах с расчетной наружной температурой ниже —40 °С, для которых при $R_{wun} < 410$ МПа $\gamma_{wf} = 0{,}85$.

Легирование электродов и сварочной проволоки с целью повышения прочности и уменьшения объема наплавленного металла иногда приводит к тому, что несущая способность соединения определяется менее прочным основным металлом. Поэтому согласно главе СНиП [9] соединения с угловыми швами следует рассчитывать не только по металлу шва, но и по металлу границы сплавления (сечение 2 на рис. 4.12, *а*). Дополнительный расчет производится по формуле

$$\tau_{wz} = N/(\beta_z k_f \Sigma l_w) < R_{wz} \gamma_{wz} \gamma_c. \qquad (4.10a)$$

Коэффициент β_z назначают в пределах 1—1,15 по такому же принципу, что и β_f. При ручной сварке и полуавтоматической сварке проволокой сплошного сечения диаметром $d<1{,}4$ мм или порошковой проволокой, а также при сварке элементов из высокопрочной стали с пределом текучести $R_{yn}>580$ МПа независимо от способа сварки принимают $\beta_z=0{,}7$ и $\beta_z=1$. Это равносильно предположению, что расчетное сечение *1* в указанных случаях является биссекторным ($\beta_f=\cos 45°$), а сечение *2* проходит через катет углового шва (см. рис. 4.12, *б*).

Коэффициент условий работы γ_{wz} назначают таким же, как γ_{wf}, но независимо от предела текучести стали. Расчетное сопротивление соединения $R_{wz} = 0{,}45 R_{un}$, где R_{un} — нормативное сопротивление (предел прочности на растяжение) основного металла.

Рассмотрение двух сечений практически не увеличивает объем вычислений, поскольку при любых сочетаниях геометрических и прочностных параметров, входящих в формулы (4.10) и (4.10а), одно из сечений всегда заведомо менее прочно и поэтому является расчетным. Для угловых швов в элементах из стали с пределом текучести $R_{yn} \leqslant 285$ МПа стремятся применять электроды или сварочную проволоку, при которых выполняется условие

$$1{,}1 R_{wz} < R_{wf} < R_{wz} \beta_z/\beta_f. \qquad (4.11)$$

Тогда излишним становится расчет по металлу границы сплавления.

Если $R_{yn}>285$ МПа, то допускается использование сварочных материалов, удовлетворяющих условию

$$P_{wz} < R_{wf} < R_{wz} \beta_z/\beta_f. \qquad (4.11a)$$

На практике обычно приходится определять требуемую длину швов, задаваясь их толщиной. Для этого неравенства (4.10) и (4.10а) приводят к виду

$$\Sigma l_{wf} > N/(\beta_f k_f R_{wf} \gamma_{wf} \gamma_c); \qquad (4.12)$$

$$\Sigma l_{wz} > N/(\beta_z k_f R_{wz} \gamma_{wz} \gamma_c). \qquad (4.12a)$$

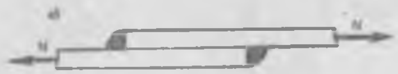


Рис. 4.13

Рис. 4.14

Фактическая (конструктивная) длина каждого шва должна превышать расчетную, как указывалось выше, на $\delta = 10$ мм вследствие возможного непровара в начале шва и кратера в его конце.

Лобовые швы (рис. 4.13, *а*) более равномерно, чем фланговые, работают по длине (ширине соединения), но крайне неравномерно — по толщине. Ввиду малых поперечных размеров лобового шва при переходе с одного элемента на другой происходит резкое изменение направления силовых линий (рис. 4.13, *б*), в корне шва концентрируются большие напряжения, и соединение хрупко разрушается.

Сложное напряженное состояние и неравномерное распределение напряжений снижают качество сварного соединения, поэтому лобовые швы независимо от их фактической работы условно рассчитывают на срез, поскольку в этом случае расчетное сопротивление имеет наименьшее значение. Таким образом, формулы (4.10), (4.10а) и (4.12), (4.12а) справедливы не только для фланговых, но и лобовых швов.

Пример 4.5. Рассчитать стык растянутых стальных листов сечением $b \times t = 180 \times 12$ мм, изображенный на рис. 4.14. Расчетное усилие $N = 450$ кН. Материал листов и накладок — сталь с расчетным сопротивлением растяжению $R_y = 220$ МПа и пределом прочности $R_{un} = 355$ МПа. Накладки приварены вручную, и угловые швы имеют расчетное сопротивление срезу $R_{wf} = 180$ МПа. Стык относится к конструкции, эксплуатируемой в нормальных условиях при температуре не ниже −40 °С.

Решение. Расчет стыка состоит в определении необходимого сечения накладок и их длины, которая зависит от требуемой протяженности фланговых швов. Для возможности их наложения накладки должны быть несколько уже соединяемых листов. Назначаем ширину накладки

$$b_1 = b - 2a = 180 - 2 \cdot 20 \text{ мм} = 140 \text{ мм} = 14 \text{ см}.$$

Требуемая площадь сечения одной накладки согласно формуле (2.23а)

$$A \geqslant N/(2R_y) = 450 \cdot 10^3/(2 \cdot 220 \cdot 10^6) \text{ м}^2 = 10{,}2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 10{,}2 \text{ см}^2.$$

Необходимая толщина накладки

$$t_1 = A/b_1 = 10{,}2/14 \text{ см} = 0{,}723 \text{ см} = 7{,}23 \text{ мм}.$$

Округляя, принимаем накладки толщиной $t_1 = 8$ мм и угловые швы толщиной $k_f = t_1$ (во избежание пережога свариваемых элементов, а также в целях снижения усадочных напряжений и деформаций максимальная толщина угловых швов не должна превышать $1{,}2t_{min}$, где t_{min} — толщина более тонкого элемента, в данном случае накладки).

Принимая во внимание неравенство (4.11), убеждаемся, что расчетное сопротивление металла угловых швов $R_{wf} = 180$ МПа больше $1{,}1R_{wz} = 1{,}1 \cdot 0{,}45R_{un} = 1{,}1 \cdot 0{,}45 \cdot 355$ МПа $= 1{,}1 \cdot 160$ МПа $= 176$ МПа и меньше $R_{wz}\beta_z/\beta_f = 160 \cdot 1/0{,}7$ МПа $= 229$ МПа. Эти соотношения позволяют ограничиться расчетом по металлу сварного шва.

Данное соединение представляет собой комбинацию фланговых и лобовых швов. В упругой стадии работы распределение усилия между отдельными швами происходит неодинаково. Лобовые швы, будучи более жесткими, чем фланговые, оказываются перенапряженными, фланговые — недонапряженными. Но при развитии пластических деформаций напряжения в швах выравниваются и поэтому в расчете можно использавать принцип независимости действия сил.

Исходя из формулы (4.10) или (4.12), находим ту часть усилия N, которая передается двумя лобовыми швами с каждой стороны стыка:

$$N_1 = \beta_f k_f \Sigma l_{w1} R_{wf} = 0{,}7 \cdot 8 \cdot 260 \cdot 10^{-6} \cdot 180 \cdot 10^6 \text{ Н} = 262 \cdot 10^3 \text{ Н} = 262 \text{ кН},$$

где $\Sigma l_{w1} = 2(b_1 - \delta) = 2(140 - 10)$ мм $= 260$ мм.

Тогда на долю фланговых швов приходится усилие

$$N_2 = N - N_1 = 450 - 262 \text{ кН} = 188 \text{ кН}.$$

Требуемая суммарная длина четырех фланговых швов с каждой стороны стыка по формуле (4.12)

$$\Sigma l_{w2} \geqslant N_2/(\beta_f k_f R_{wf}) = 188 \cdot 10^3/(0{,}7 \cdot 8 \cdot 10^{-3} \cdot 180 \cdot 10^6) \text{ м} = 0{,}187 \text{ м} = 187 \text{ мм}.$$

Расчетная длина одного шва

$$l_{w2} = \Sigma l_{w2}/4 = 187/4 \text{ мм} \approx 47 \text{ мм},$$

конструктивная длина

$$l_w = l_{w2} + \delta = 47 + 10 \text{ мм} = 57 \text{ мм}.$$

Для уменьшения концентрации напряжений фланговые швы должны обрываться на расстоянии $\Delta \geqslant 25$ мм от оси стыка. Следовательно, необходимая длина каждой накладки составляет

$$l = 2(l_w + \Delta) = 2(57 + 25) \text{ мм} \approx 165 \text{ мм}.$$

Пример 4.6. Рассчитать сварной вариант узла рассмотренного в примере 4.4. Уголки приварены к фасонке вручную фланговыми швами толщиной $k_f = 6$ мм (см. рис. 2.38, *а*) с расчетным сопротивлением срезу $R_{wf} = 180$ МПа. Нормативное сопротивление соединяемых элементов $R_{un} = 365$ МПа.

Решение. Сварные соединения, как и заклепочные (болтовые), можно рассчитывать исходя из эксплуатационной способности прикрепляемого элемента. Поскольку каждый уголок приваривается к фасонке самостоятельно, расчет производим относительно одного уголка:

$$N = RA = 230 \cdot 10^6 \cdot 13{,}9 \cdot 10^{-4} \text{ Н} = 320 \cdot 10^3 \text{ Н} = 320 \text{ кН}.$$

Проведя такой же анализ, как в предыдущем примере, нетрудно убедиться, что рассматриваемое соединение достаточно рассчитать по металлу шва.

В случае прикрепления фланговыми швами асимметричных профилей, какими являются прокатные уголки, во избежание возникновения дополнительного момента площадь каждого шва следует назначать так, чтобы равнодействующая передаваемых ими усилий совпадала с осью прикрепляемого элемента (линией центров тяжести сечений уголков). Из уравнений равновесия

$$\Sigma m_B = 0; \quad -N_1 b + N(b - y_C) = 0;$$

$$\Sigma m_D = 0; \quad N_2 b - N y_C = 0$$

находим

$$N_1 = N(b - y_C)/b; \quad N_2 = N y_C/b,$$

или, поскольку $N_1/R_{wf} = A_{w1}$ и $N_2/R_{wf} = A_{w2}$,

$$A_{w1} = \Sigma A_w (b - y_C)/b; \quad A_{w2} = \Sigma A_w y_C/b.$$

Здесь N_1 и N_2 — усилия, передаваемые швами у обушка и пера уголка[1]; A_{w1} и A_{w2} — соответствующие расчетные площади швов; b — ширина привариваемой полки уголка; y_C — расстояние от центра тяжести уголка до наружных граней полок, принимаемое по сортаменту (см. табл. 3 приложения).

Таким образом, усилие N или соответствующая ему суммарная площадь швов $\Sigma A_w = N/R_{wf}$ распределяются обратно пропорционально расстояниям швов до оси уголка (в рассматриваемом случае эти расстояния приняты с некоторым приближением).

---

[1] *Обушком* называется ребро пересечения наружных граней полок прокатного уголка, *пером* — противоположное ребро наружной грани.

Суммарная расчетная длина швов согласно формуле (4.12)

$$\Sigma l_{wf} \geqslant N/(\beta_f k_f R_{wf}) = 320 \cdot 10^3/(0{,}7 \cdot 6 \cdot 10^{-3} \cdot 180 \cdot 10^6) \text{ м} =$$

$$= 0{,}423 \text{ м} = 423 \text{ мм}.$$

Так как швы вдоль обушка и пера имеют по условию одинаковую толщину, их конструктивные длины составляют

$$l_1 = \Sigma l_{wf}(b - y_C)/b + \delta = 423(90 - 25{,}1)/90 + 10 \text{ мм} = 315 \text{ мм};$$

$$l_2 = \Sigma l_{wf} y_C/b + \delta = 423 \cdot 25{,}1/90 + 10 \text{ мм} \approx 130 \text{ мм}.$$

Обычно на практике отношения y_C/b и $(b - y_C)/b$ полагают приближенно равными соответственно 0,3 и 0,7 для равнополочных уголков; 0,25 и 0,75 — для неравнополочных уголков, прикрепляемых узкой полкой; 0,35 и 0,65 — для неравнополочных уголков, прикрепляемых широкой полкой.

Из сравнения рассматриваемого примера с примером 4.4 видно, что замена клепки сваркой позволяет увеличить эксплуатационную способность прикрепляемого элемента на

$$\Delta N = \frac{2N - N_0}{N_0} 100 = \frac{2 \cdot 320 - 562}{562} 100\,\% \approx 14\,\%$$

и уменьшить длину прикрепления (длину фасонки):

$$l_1 = 315 \text{ мм} < 5a + 2a' = 5 \cdot 65 + 2 \cdot 45 \text{ мм} = 415 \text{ мм}.$$

Оба эти обстоятельства наряду с меньшей трудоемкостью изготовления позволяют отдать предпочтение сварному варианту.

4.4. Соединения на врубках

Врубкой называется соединение элементов деревянных конструкций, в котором передача усилия от одного элемента к другому осуществляется непосредственно путем плотного соприкасания примыкающих плоскостей.

Соединения на врубках представляют собой наиболее старый и распространенный способ сопряжения элементов брусчатых и бревенчатых ферм. Из разнообразных конструктивных форм врубок в современном строительстве находят применение главным образом лобовые врубки. Пример такого соединения показан на рис. 4.15 (лобовая врубка с одним зубом). Верхний, сжатый элемент упирается в специально устроенное гнездо в нижнем, растянутом. По площадке *ас* происходит смятие древесины, по площадке *cd* — скалывание. При этом полагают, что соответствующие напряжения распределяются по указанным площадкам равномерно.

Условие прочности лобовой врубки на смятие имеет вид

$$\sigma_p = N_p/A_p = N_2 \cos\alpha/(h_0 b) \leqslant R_{p\alpha} \gamma_c, \tag{4.13}$$

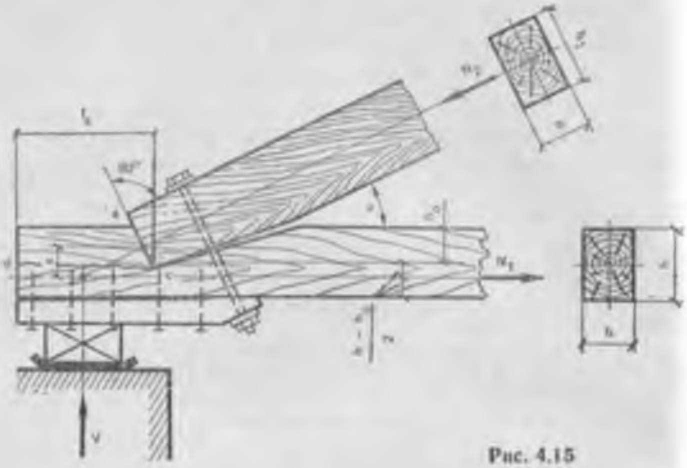


Рис. 4.15

где N_p — расчетное усилие смятия, равное усилию N_2 в сжатом элементе, Н; $A_p=(h_0/\cos\alpha)b$ — расчетная площадь смятия при соединении брусчатых элементов, м²; h_0 — глубина врубки, м; b — ширина брусьев, м; $R_{p\alpha}$ — расчетное сопротивление древесины смятию под углом α к направлению волокон, Па (МПа); γ_e — коэффициент условий работы соединяемых элементов, устанавливаемый главой СНиП II-25-80 [6].

При расчете элементов деревянных конструкций следует иметь в виду, что древесина, будучи материалом анизотропным (см. п. 2.9), по-разному сопротивляется одним и тем же силовым воздействиям в зависимости от их направления по отношению к волокнам. В случае совпадения направлений силового воздействия и волокон сопротивление древесины достигает максимального значения, но оно становится существенно меньше, если воздействие направлено под углом к волокнам. Поэтому расчетное сопротивление $R_{s\alpha}$ имеет промежуточное значение между сопротивлением смятию вдоль волокон ($R_p=8{,}5—16$ МПа в зависимости от сорта древесины и поперечных размеров бруса) и сопротивлением поперек волокон ($R_{p90}=3$ МПа независимо от сорта и размеров):

$$R_{p\alpha}=\frac{R_p}{1+(R_p/R_{p90}-1)\sin^3\alpha}\,. \qquad (4.14)$$

Обычно расчет врубки на смятие состоит в определении требуемой глубины врубки по заданной ширине брусьев:

$$h_0 \geq N_2 \cos\alpha/(bR_{p\alpha}\gamma_c). \qquad (4.15)$$

Глубина лобовой врубки должна быть не более $^1/_3$ высоты h ослабляемого бруса. В противном случае может сильно ухудшиться работа на скалывание из-за трещин от усушки древесины, которые возникают в средней части высоты бруса почти параллельно плоскости скалывания. Наименьшая глубина врубки в брусчатых элементах составляет 2 см (в бревенчатых элементах 3 см).

Прочность врубки на скалывание проверяют по формуле

$$\tau_s = Q_s/A_s = N_1/A_s = N_2\cos\alpha/(l_s b) < R_{sm}\gamma_c, \qquad (4.16)$$

где Q_s — расчетное усилие скалывания, равное усилию в растянутом элементе N_1 или проекции усилия в сжатом элементе $N_2\cos\alpha$, Н; $A_s = l_s b$ — площадь скалывания, м²; l_s — длина площадки скалывания, м; R_{sm} — среднее по площадке скалывания расчетное сопротивление древесины скалыванию, Па (МПа):

$$R_{sm} = \frac{R_s}{1 + \beta l_s/e}. \qquad (4.17)$$

Здесь R_s — расчетное сопротивление древесины скалыванию вдоль волокон, равное согласно главе СНиП [6] 2,4 МПа для древесины 1-го сорта и 2,1 МПа — 2-го и 3-го сортов; $\beta = 0,25$ — коэффициент, учитывающий концентрацию напряжений τ_s в начале площадки скалывания; e — плечо сил скалывания, принимаемое при расчете элементов с асимметричной врезкой (см. рис. 4.15) равным $0,5h$ (h — полная высота поперечного сечения скалываемого элемента).

Требуемая длина площадки скалывания

$$l_s > N_1/(bR_{sm}\gamma_c) = \frac{N_1}{bR_s\gamma_c - N_1\beta/e}. \qquad (4.18)$$

Следует иметь в виду, что чем длиннее площадка, тем неравномернее распределение по ней напряжений скалывания. В длинных площадках удаленная от места приложения нагрузки часть древесины или совсем не работает на скалывание, или работает слабо. С другой стороны, очень малая длина площадки скалывания может привести к разрушению врубки от образования трещин со стороны торца. Указанные обстоятельства дают основание для ограничения длины площадки скалывания следующими пределами:

$$1,5h < l_s < 10h_0. \qquad (4.19)$$

Пример 4.7. Рассчитать лобовую врубку опорного узла треугольной стропильной фермы пролетом $L = 18$ м и высотой $H = 3,6$ м (рис.

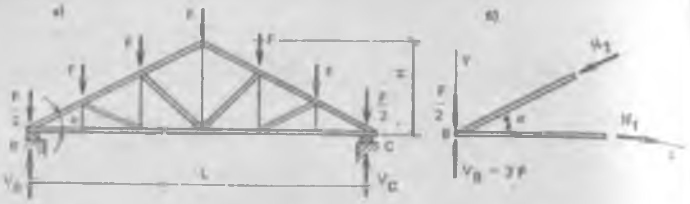


Рис. 4.16

4.16, *а*). Расчетная узловая нагрузка $F=13{,}5$ кН. Пояса выполнены из брусьев сечением $b\times h=18\times22$ см. Материал конструкции — древесина 1-го сорта с расчетным сопротивлением растяжению $R=10$ МПа, смятию $R_p=16$ МПа. Условия работы — нормальные.

Решение. *Определение усилий в опорных панелях пояса.* Вследствие симметрии нагрузки опорные реакции равны между собой:

$$V_Y=V_C=\frac{2F/2+5F}{2}=3F.$$

Из равновесия опорного узла (рис. 4.16, *б*) следует:

$$\Sigma Y=0;\quad V_B-F/2-N_2\sin\alpha=0.$$

Отсюда усилие в верхнем поясе

$$N_2=\frac{V_B-F/2}{\sin\alpha}=\frac{3F-F/2}{\sin 21^\circ48'}=\frac{2{,}5F}{0{,}371}=\frac{2{,}5\cdot13{,}5}{0{,}371}\ \text{кН}=91\ \text{кН},$$

где $\alpha=\operatorname{arctg}\dfrac{H}{L/2}=\operatorname{arctg}\dfrac{3{,}6}{18/2}=\operatorname{arctg}0{,}4=21^\circ48'$.

Усилие в нижнем поясе находим из второго уравнения равновесия

$$\Sigma Z=0;\quad -N_2\cos\alpha+N_1=0;$$

$$N_1=N_2\cos\alpha=91\cdot0{,}928\ \text{кН}=84{,}4\ \text{кН}.$$

Определение размеров врубки (см. рис. 4.15). Расчетное сопротивление древесины смятию по формуле (4.14)

$$R_{p\alpha}=\frac{R_p}{1+(R_p/R_{p90}-1)\sin^3 21^\circ48'}=$$

$$=\frac{16}{1+(16/3-1)\,0{,}371^3}\approx13\ \text{МПа}.$$

Требуемая глубина врубки по формуле (4.15)

$$h_0>N_2\cos\alpha/(bR_{p\alpha})=84{,}4\cdot10^3/(0{,}18\cdot13\cdot10^6)\ \text{м}=$$

$$=3{,}61\cdot10^{-2}\ \text{м}=3{,}61\ \text{см}.$$

Округляя, принимаем $h_0=4$ см, что больше 2 см и меньше $h/3=22/3$ см $=7{,}33$ см.

Требуемая длина площадки скалывания по формуле (4.18)

$$l_a > \frac{N_1}{bR_a - N_1\beta/e} = \frac{84,4\cdot10^3}{0,18\cdot2,4\cdot10^6 - 84,4\cdot10^3\cdot0,25/0,11}\ \text{м} =$$

$$= 35,1\cdot10^{-2}\ \text{м} = 35,1\ \text{см}.$$

Округляя, принимаем $l_a = 36$ см, что больше $1,5h = 1,5\cdot22$ см $=$ $= 33$ см и меньше $10h_0 = 10\cdot4$ см $= 40$ см [см. соотношения (4.19)].

Проверка прочности нижнего пояса по ослабленному сечению. Согласно формуле (2.23)

$$\sigma = N_1/A_{net} = N_1/[(h - h_0)b] = 84,4\cdot10^3/[(22 - 4)18\cdot10^{-4}]\ \text{Па} =$$

$$= 2,6\cdot10^6\ \text{Па} = 2,6\ \text{МПа} \ll R = 10\ \text{МПа},$$

е прочность обеспечена с большим запасом.

Стяжной болт, показанный на рис. 4.15 штриховыми линиями, расчет не принимается. Он обеспечивает плотность сопряжения и является аварийным.

4.5. Клеевые соединения

Клей представляет собой эффективное средство соединения древесины, пластических масс, алюминиевых сплавов, асбестоцемента и других материалов. Для древесины и пластических масс склеивание является основным способом соединения при заводском изготовлении конструкций. Наиболее распространены следующие виды соединения деревянных досок и брусков: стыковое соединение с торцовой склейкой сжатых элементов (рис. 4.17, *а*); соединение «на ус» растянутых элементов (рис. 4.17, *б*); соединение на «зубчатый шип» растянутых и сжатых элементов с уклоном склеиваемых поверхностей примерно 1 : 10 (рис. 4.17, *в*); стыковое соединение с накладками растянутых элементов (рис. 4.17, *г*).

Первые два вида соединения обычно не рассчитывают, принимая клеевой шов равнопрочным материалу соединяемых элементов. Зубчатое соединение является унифицированным. Оно не уступает по прочности соединению «на ус», экономичнее по затрате древесины (за счет уменьшения отходов) и более технологично в производстве.

При склеивании металлов, как и при сварке, не требуются отверстия, ослабляющие основной металл в клепаных и болтовых соединениях. По сравнению же со сваркой склеивание имеет то преимущество, что основной металл не подвергается влиянию высоких температур. Последнее обстоятельство наиболее существенно для алюминиевых сплавов и закаленной стали, которые

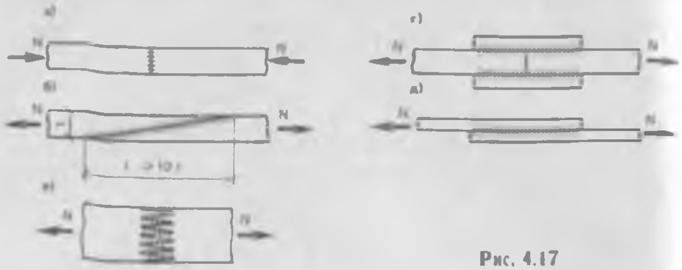


Рис. 4.17

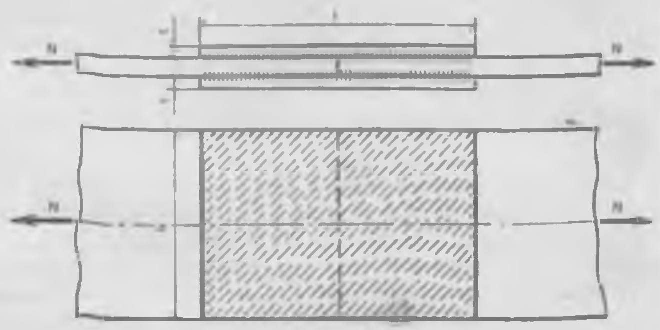


Рис. 4.18

испытывают структурное изменение и разупрочнение в околошовной зоне.

Для склеивания металлических листов применяют соединения «на ус», стыковое с накладками и нахлесточное (рис. 4.17, *д*). Достоинством склеивания является также способность соединять металлы с неметаллами, что используют при изготовлении легких ограждающих конструкций в виде трехслойных панелей.

Расчет клеевых соединений представляет известные трудности из-за неравномерного распределения напряжений скалывания τ_s. Получить соединение с равномерным распределением напряжений по плоскости склеивания практически не удается (это возможно только при переменной толщине клеевого шва). Проверку прочности стыков с накладками и нахлесточных приближенно производят по формуле

$$\tau_s = N/A_s = N/(l_g b_g) \leqslant R_{gs} \gamma_g \gamma_c, \qquad (4.20)$$

где N — расчетная продольная сила в соединяемых элементах, Н; $A_s = l_g b_g$ — площадь скалывания, м²; l_g — длина шва, м; b_g — его ширина, м; R_{gs} — расчетное сопротивление клеевого соединения скалыванию, Па (МПа), принимаемое для деревянных элементов согласно главе СНиП [6]; γ_g и γ_c — коэффициенты условий работы соответственно клеевого соединения и соединяемых элементов.

Пример 4.8. Доски шириной $b = 120$ мм соединены посредством двусторонних фанерных накладок, прикрепленных к доскам синтетическим клеем с расчетным сопротивлением скалыванию $R_{gs} = 2{,}1$ МПа (рис. 4.18).

Определить необходимую толщину и длину накладок, если расчетное усилие $N = 20$ кН, расчетное сопротивление фанеры растяжению $R = 14$ МПа. Коэффициент условий работы соединения на скалывание $\gamma_g = 0{,}8$ при $\gamma_c = 1$.

Решение. Толщину накладок устанавливаем из условия прочности на растяжение:

$$t > N/(2bR) = 20 \cdot 10^3/(2 \cdot 0{,}12 \cdot 14 \cdot 10^6) \text{ м} = 5{,}95 \cdot 10^{-3} \text{ м} \approx 6 \text{ мм}.$$

Длину накладок определяем из условия прочности клеевого соединения на скалывание. Требуемая суммарная длина швов с одной стороны стыка согласно неравенству (4.20)

$$\Sigma l_g > N/(bR_{gs}\gamma_g) = 20 \cdot 10^3/(0{,}12 \cdot 2{,}1 \cdot 10^6 \cdot 0{,}8) \text{ м} =$$
$$= 99{,}2 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 99{,}2 \text{ мм}.$$

Таким образом, при двух клеевых швах (сверху и снизу) длина каждой накладки должна быть не менее полученного значения. Округляя, принимаем $l = 100$ мм.

Глава 5. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

5.1. Статический момент площади и центр тяжести сечения

Из теоретической механики известно, что **статическим моментом** площади плоского сечения относительно произвольной оси, лежащей в той же плоскости, называется распространенная на всю площадь сумма произведений элементарных площадей на их расстояния до этой оси (рис. 5.1)

$$S_x = \int_A y\,dA; \quad S_y = \int_A x\,dA. \qquad (5.1)$$

При известных статических моментах и площади сечения координаты его центра тяжести определяют по формулам:

$$x_C = \frac{\int_A x\,dA}{A} = \frac{S_y}{A}; \quad y_C = \frac{\int_A y\,dA}{A} = \frac{S_x}{A}. \qquad (5.2)$$

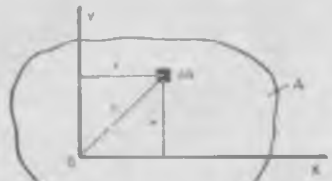


Рис. 5.1

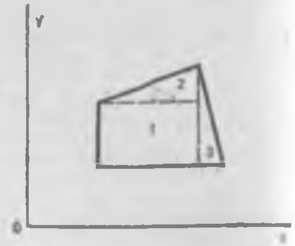


Рис. 5.2

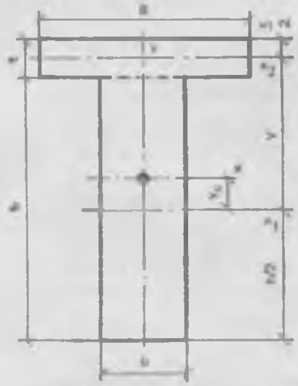


Рис. 5.3

Отсюда

$$S_x = Ay_C; \quad S_y = Ax_C. \tag{5.3}$$

Статический момент имеет размерность длины в третьей степени и выражается в м³ (см³). В зависимости от знака координат (положения оси) он может принимать положительные и отрицательные значения. В частном случае, если ось проходит через центр тяжести сечения ($x_C=0$ или $y_C=0$), статический момент равен нулю. Такие оси называются *центральными*.

Если сечение можно разбить на простейшие составные части (прямоугольники, треугольники и т. п.), площади и положение центров тяжести которых известны, то *статический момент площади всего сечения относительно любой оси* (например x, рис. 5.2) *равен алгебраической сумме статических моментов составляющих фигур относительно той же оси:*

$$S_x = S_{1x} + S_{2x} + S_{3x} + \ldots + S_{nx}.$$

Это правило вытекает из свойства определенного интеграла: интеграл суммы нескольких функций равен сумме интегралов данных функций. Тогда формулы (5.2) принимают вид

$$x_C = \Sigma S_y/\Sigma A; \quad y_C = \Sigma S_x/\Sigma A, \tag{5.4}$$

где ΣA — площадь составного сечения.

Для симметричных сечений определение положения центра тяжести значительно упрощается. При наличии двух или более осей симметрии (прямоугольник, двутавр, круг и т. д.) центром тяжести является точка пересечения этих осей. Если сечение имеет одну ось симметрии (равнополочный уголок, швеллер и т. д.), то для определения положения центра тяжести необходимо найти только одну координату — вдоль оси симметрии.

Пример 5.1. Определить положение центра тяжести таврового сечения (рис. 5.3), имеющего размеры: $h=60$ см, $b=20$ см, $B=50$ см, $t=8$см.

Решение. Сечение симметрично относительно оси y. Следовательно, центр тяжести лежит на этой оси, т. е. $x_C=0$, и остается найти координату y_C.

Разбиваем фигуру на два прямоугольника: вертикальной площадью

$$A_1 = bh = 20 \cdot 60 \text{ см}^2 = 1200 \text{ см}^2$$

и горизонтальной площадью

$$A_2 = Bt = 50 \cdot 8 \text{ см}^2 = 400 \text{ см}^2.$$

За начальную ось отсчета принимаем центральную ось вертикального прямоугольника x_1. Тогда статический момент его площади $S_{1x_1}=0$. Статический момент площади горизонтального прямоугольника согласно формулам (5.3) составляет

$$S_{2x_1} = A_2 y = Bt(h/2 + t/2) = 50 \cdot 8\,(60/2 + 8/2) \text{ см}^3 = 13\,600 \text{ см}^3.$$

Координата центра тяжести всего сечения согласно формулам (5.4):

$$y_C = \Sigma S_{x_1}/\Sigma A = (S_{1x_1} + S_{2x_1})/(A_1 + A_2) =$$
$$= (0 + 13600)/(1200 + 400) \text{ см} = 8{,}5 \text{ см}.$$

Положительное значение свидетельствует о том, что центр тяжести лежит *выше* оси x_1. Заметим, что отсчет можно было вести и от центральной оси горизонтального прямоугольника x_2. В этом случае $S_{2x_2}=0$ и координата центра тяжести получилась бы отрицательной. Принимать за начальную любую другую горизонтальную ось нерационально вследствие увеличения объема вычислений.

5.2. Моменты инерции площади сечения

Если элементарные площади dA умножить на квадраты расстояний до некоторой оси (см. рис. 5.1) и просуммировать эти произведения по всей площади сечения, то получится геометрическая характеристика, называемая **осевым моментом инерции**:

$$J_x = \int_A y^2\,dA; \quad J_y = \int_A x^2\,dA. \qquad (5.5)$$

Интеграл произведений элементарных площадей на квадраты расстояний до точки (полюса O) представляет собой **полярный момент инерции** площади сечения

$$J_\rho = \int_A \rho^2\,dA. \qquad (5.6)$$

Полярный момент инерции относительно точки пересечения двух взаимно перпендикулярных осей связан с соответствующими осевыми моментами инерции соотношением

$$J_\rho = J_x + J_y, \qquad (5.7)$$

справедливость которого вытекает из равенства $\rho^2 = x^2 + y^2$.

Осевые и полярный моменты инерции могут принимать только положительные значения, так как их подынтегральные выражения содержат квадраты координат.

Интеграл произведений элементарных площадей на их расстояния до двух взаимно перпендикулярных осей называется **центробежным моментом инерции**

$$J_{xy} = \int_A xy\,dA. \qquad (5.8)$$

В зависимости от знака координат он может принимать любые алгебраические значения, включая нулевое. Последний случай является особым и рассматривается в п. 5.4. Все моменты инерции, как следует из формул (5.5), (5.6), (5.8), имеют размерность длины в четвертой степени и поэтому выражаются в м^4 (см^4). Обратимся к вычислению моментов инерции простейших сечений.

Прямоугольник основанием b и высотой h (рис. 5.4). Практический интерес представляют прежде всего моменты инерции относительно осей симметрии. Разобьем

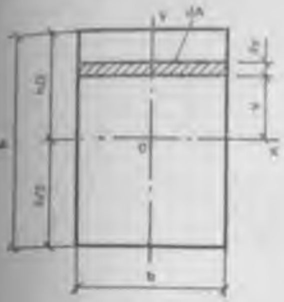


Рис. 5.4

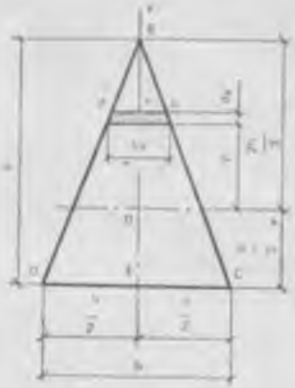


Рис. 5.5

сечение на элементарные прямоугольники (полосы) шириной b и высотой dy. Подставляя значение элементарной площади $dA=bdy$ в интегральное выражение (5.5) момента инерции J_x и переходя от интегрирования по площади к интегрированию по переменной y в пределах высоты сечения, получаем

$$J_x=\int_A y^2\,dA=\int_{-h/2}^{h/2} y^2\,bdy=2b\int_0^{h/2} y^2\,dy=$$

$$=2b\frac{y^3}{3}\Big|_0^{h/2}=2bh^3/24.$$

Окончательно

$$J_x=bh^3/12. \qquad (5.9)$$

Если сечение разбить на полосы, параллельные оси y, то после аналогичных операций получим

$$J_y=hb^3/12. \qquad (5.10)$$

Квадрат можно рассматривать как равносторонний прямоугольник. Полагая в формулах (5.9) и (5.10) $b=h=a$, находим

$$J_x=J_y=a^4/12, \qquad (5.11)$$

где a — сторона квадрата.

Треугольник основанием b и высотой h (рис. 5.5). Для определения моментов инерции относительно центральных осей x и y поступаем так же, как в случае прямоугольного сечения. Площадь произвольной элементарной полосы, отстоящей на расстояни y от оси x составляет $dA = b_y dy$. Из подобия треугольников dBc и DBC имеем

$$\frac{dc}{DC} = \frac{Be}{BE}, \text{ или } \frac{b_y}{b} = \frac{{}^2/_3h - y}{h}.$$

Отсюда $b_y = b\,\frac{{}^2/_3h - y}{h}$. Тогда $dA = b\,\frac{{}^2/_3h - y}{h}\,dy$ и момент инерции

$$J_x = \int_A y^2\,dA = \frac{b}{h}\int_{-h/3}^{2h/3} y^2\left({}^2/_3h - y\right)dy =$$

$$= \frac{b}{h}\left(\frac{2}{3}h\,\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_{-h/3}^{2h/3} = \frac{b}{h}\left[\frac{2h}{9}\left(\frac{2h}{3}\right)^3 -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{4}\left(\frac{2h}{3}\right)^4 - \frac{2h}{9}\left(-\frac{h}{3}\right)^3 + \frac{1}{4}\left(-\frac{h}{3}\right)^4\right] =$$

$$= \frac{b}{h}\left(\frac{16h^4}{9\cdot 27} - \frac{16h^4}{4\cdot 81} + \frac{2h^4}{9\cdot 27} + \frac{h^4}{4\cdot 81}\right) = \frac{27bh^4}{27\cdot 36h},$$

или окончательно

$$J_x = bh^3/36. \qquad (5.12)$$

Аналогично определяется момент инерции относительно оси y. Нетрудно убедиться, что для равнобедренного треугольника

$$J_y = hb^3/48. \qquad (5.13)$$

Круг диаметром D (рис. 5.6). Для него удобнее сначала определить полярный момент инерции. С этой целью разбиваем фигуру на бесконечно тонкие концентрические кольца. Площадь элементарного кольца радиусом ρ равна произведению длины его окружности на толщину $d\rho$: $dA = 2\pi\rho d\rho$. Подставляя это значение в интегральное выражение (5.6), получаем

$$J_p = \int_A \rho^2\,dA = \int_0^{D/2} \rho^2\,2\pi\rho d\rho = 2\pi\int_0^{D/2} \rho^3 d\rho =$$

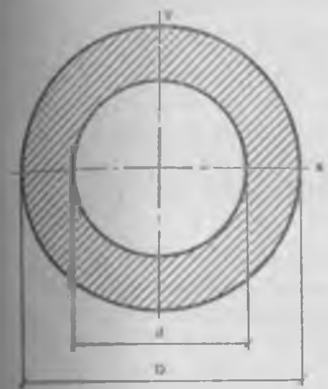
$$= 2\pi\,\frac{\rho^4}{4}\Bigg|_0^{D/2} = \frac{\pi D^4}{2\cdot 16},$$

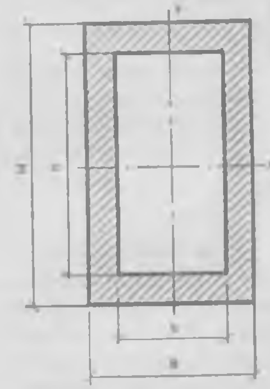
или окончательно

Рис. 5.6

Рис. 5.7

Рис. 5.8





$$J_p = \pi D^4/32 \approx 0{,}1D^4. \qquad (5.14)$$

Моменты инерции относительно всех центральных осей одинаковы вследствие симметрии круга. На основании соотношения (5.7)

$$J_x = J_y = J_p/2 = \pi D^4/64 \approx 0{,}05D^4. \qquad (5.15)$$

При вычислении моментов инерции сечения сложного очертания пользуются тем же принципом, что и при определении статических моментов. Сечение разбивают на простейшие составные части, для каждой из которых находят собственный момент инерции относительно заданной оси. Тогда *момент инерции площади всего сечения равен алгебраической сумме моментов инерции площадей составных частей:*

$$J = J_1 + J_2 + J_3 + \ldots + J_n. \qquad (5.16)$$

Кольцо (рис. 5.7). Полярный момент инерции может быть найден как разность одноименных моментов инер-

11—287

ции большого и малого кругов. В соответствии с формулой (5.14)

$$J_p = \frac{\pi D^4}{32} - \frac{\pi d^4}{32}\,\frac{D^4}{D^4} = \frac{\pi D^4}{32}\left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right),$$

или окончательно

$$J_p = (\pi D^4/32)(1 - \alpha^4) \approx 0{,}1D^4(1 - \alpha^4), \qquad (5.17)$$

где $\alpha = d/D$.

Моменты инерции площади кольца относительно центральных осей, как и у сплошного круга, одинаковы

$$J_x = J_y = J_p/2 = (\pi D^4/64)(1 - \alpha^4) \approx 0{,}05D^4(1 - \alpha^4). \qquad (5.18)$$

Коробчатое сечение (рис. 5.8) представляет собой прямоугольник со сторонами B и H, из которого изъята сердцевина такого же очертания, но меньших размеров b и h. На основании формул (5.9) и (5.10)

$$J_x = BH^3/12 - bh^3/12 = (BH^3 - bh^3)/12; \qquad (5.19)$$

$$J_y = (HB^3 - hb^3)/12. \qquad (5.20)$$

При решении задач необходимо иметь в виду, что моменты инерции составных частей сложных сечений можно брать только относительно одной и той же оси. Складывать (или вычитать) моменты инерции, взятые относительно разных осей, нельзя. Поэтому для определения указанных геометрических характеристик сложных сечений пользуются формулами перехода при параллельном переносе осей, рассматриваемыми в следующем параграфе.

5.3. Зависимости между моментами инерции относительно параллельных осей

Пусть оси x и y являются центральными для фигуры произвольного очертания, изображенной на рис. 5.9. Предположим, что ее площадь A и моменты инерции J_x, J_y, J_{xy} известны. Определим моменты инерции относительно новых осей x_1 и y_1, параллельных центральным. Из рисунка легко установить зависимости между новыми и старыми координатами элементарной площади dA:

$$x_1 = x + b; \quad y_1 = y + a.$$

Пользуясь общими выражениями осевых моментов инерции (5.5), находим

$$J_{x_1} = \int_A y_1^2\,dA = \int_A (y + a)^2\,dA = \int_A y^2\,dA + 2a\int_A y\,dA + a^2\int_A dA.$$

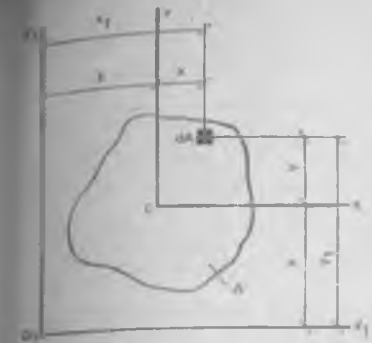


Рис. 5.9

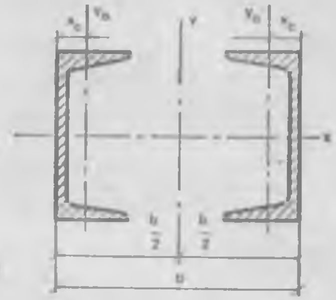


Рис. 5.10

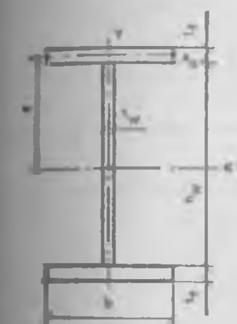


Рис. 5.11

Учитывая, что первый интеграл представляет собой момент инерции J_x площади фигуры относительно первоначальной оси, третий — саму площадь, а второй обращается в нуль как статический момент площади относительно центральной оси ($S_x = 0$, см. п. 5.1), окончательно получаем

$$J_{x_1} = J_x + Aa^2. \qquad (5.21)$$

Аналогично

$$J_{y_1} = J_y + Ab^2. \qquad (5.21a)$$

Таким образом, *момент инерции плоского сечения относительно произвольной оси, параллельной центральной, равен моменту инерции относительно этой центральной оси плюс произведение площади сечения на квадрат расстояния между указанными осями.*

Нетрудно убедиться, что похожая зависимость существует и между центробежными моментами инерции:

$$J_{x_1 y_1} = J_{xy} + Aab. \tag{5.22}$$

Пример 5.2. Определить расстояние b, на которое следует раздвинуть два швеллера № 24 (рис. 5.10), чтобы моменты инерции площади всего сечения относительно осей x и y были равны между собой.

Решение. Момент инерции площади всего сечения относительно оси x равен удвоенному моменту инерции одного швеллера относительно той же оси: $J_x = 2 \cdot 2900$ см$^4 = 5800$ см^4 (см. табл. 2 приложения).

По условию примера $J_x = J_y$. С другой стороны, согласно формуле (5.21а)

$$J_y = 2\,[J_{y_0} + A\,(b/2 - x_C)^2].$$

Подставляя табличные значения момента инерции одного швеллера J_{y_0}, площади A и расстояния x_C, получаем:

$$5800 = 2\,[208 + 30{,}6\,(b/2 - 2{,}42)^2];$$

$$7{,}65b^2 - 74{,}1b - 2513 = 0.$$

Решая это квадратное уравнение, находим, что швеллеры следует раздвинуть на расстояние $b = 23{,}6$ см.

Пример 5.3. Определить моменты инерции площади составного двутаврового сечения относительно его осей симметрии (рис. 5.11). Размеры двутавра: высота стенки $h_w = 1000$ мм, толщина стенки $t_w = 6$ мм, ширина полок $b = 280$ мм, толщина полок $t_f = 14$ мм.

Решение. Для прокатных профилей, как видно из предыдущего примера, нет необходимости подсчитывать моменты инерции относительно собственных центральных осей, поскольку их значения приводятся в таблицах сортамента. Однако возможности сортамента ограничены. Так, наибольший двутавр по ГОСТ 8239—72 имеет высоту сечения $h = 600$ мм (№ 60). Если же требуется запроектировать более мощное сечение, то конструируют составной (чаще всего сварной) двутавр. В этом случае моменты инерции приходится устанавливать расчетным путем.

Разбиваем сечение составного двутавра на три прямоугольника: два горизонтальных (полки) и один вертикальный (стенка). Тогда согласно формуле (5.16) момент инерции площади всего сечения относительно оси x

$$J_x = J_{xw} + 2J_{xf}, \tag{а}$$

где J_{xw} — момент инерции площади сечения стенки относительно указанной оси; J_{xf} — то же, полки.

Момент инерции площади сечения стенки по формуле (5.9)

$$J_{xw} = t_w h_w^3/12 = 0{,}6 \cdot 100^3/12 \text{ см}^4 = 50\,000 \text{ см}^4.$$

Момент инерции площади сечения полки согласно зависимости (5.21)

$$J_{xf} = J_{x_0} + A_f a^2 = bt_f^3/12 + bt_f(h_w/2 + t_f/2)^2 =$$

$$= 28 \cdot 1{,}4^3/12 + 28 \cdot 1{,}4\,(100/2 + 1{,}4/2)^2 \text{ см}^4 =$$

$$= 6 + 100\,000 \text{ см}^4 \approx 100\,000 \text{ см}^4.$$

Момент инерции площади всего сечения согласно выражению (а)

$$J_x = 50\,000 + 2 \cdot 100\,000 \text{ см}^4 = 250\,000 \text{ см}^4.$$

Определение момента инерции относительно другой оси симметрии проще, поскольку эта ось является центральной не только для сечения стенки (как в предыдущем случае), но и для сечения полки, вследствие чего отпадает необходимость использования формулы перехода при параллельном переносе осей:

$$J_y = J_{yw} + 2J_{yf} = h_w t_w^3/12 + 2t_f b^3/12 = 100 \cdot 0{,}6^3/12 +$$

$$+ 2 \cdot 1{,}4 \cdot 28^3/12 \text{ см}^4 = 2 + 5120 \text{ см}^4 \approx 5120 \text{ см}^4.$$

Как видно, момент инерции площади сечения стенки относительно оси y весьма мал ($J_{yw} = 2$ см^4), поэтому в практических расчетах им обычно пренебрегают. То же относится и к моменту инерции площади сечения полки относительно собственной центральной оси x_0 ($J_{x_0} \approx 6$ см^4).

5.4. Зависимости между моментами инерции при повороте координатных осей. Главные оси и главные моменты инерции

При повороте координатных осей моменты инерции площади сечения изменяются. Их значения относительно новых осей, наклоненных под углом α к исходным (рис. 5.12), можно найти, если новые координаты бесконечно малой площадки dA связать со старыми и подставить в интегральные выражения (5.5), (5.6) и (5.8). Из треугольников BCD и BEF соответственно имеем:

$$x_1 = (x + y\,\mathrm{tg}\,\alpha)\cos\alpha = y\sin\alpha + x\cos\alpha;$$

$$y_1 = (y - x\,\mathrm{tg}\,\alpha)\cos\alpha = y\cos\alpha - x\sin\alpha.$$

Тогда

$$J_{x_1} = \int_A y_1^2\,dA = \int_A (y\cos\alpha - x\sin\alpha)^2\,dA =$$

$$= \cos^2\alpha \int_A y^2\,dA - 2\cos\alpha\sin\alpha \int_A yx\,dA + \sin^2\alpha \int_A x^2\,dA.$$

Первый и третий интегралы представляют собой моменты инерции J_x и J_y относительно старых осей, второй интеграл — центробежный момент инерции J_{xy}. Тогда окончательно

$$J_{x_1} = J_x \cos^2\alpha + J_y \sin^2\alpha - J_{xy} \sin 2\alpha. \tag{5.23}$$

Аналогично

$$J_{y_1} = J_x \sin^2\alpha + J_y \cos^2\alpha + J_{xy} \sin 2\alpha. \tag{5.23а}$$

Для центробежного момента инерции получаем

$$J_{x_1y_1} = \int_A x_1 y_1 \, dA = \int_A (y \sin\alpha + x \cos\alpha)(y \cos\alpha - x \sin\alpha)\, dA =$$

$$= \sin\alpha\cos\alpha \int_A y^2\, dA - \sin^2\alpha \int_A yx dA + \cos^2\alpha \int_A xy dA -$$

$$- \cos\alpha \sin\alpha \int_A x^2\, dA,$$

или после приведения подобных членов и несложных тригонометрических преобразований

$$J_{x_1y_1} = [(J_x - J_y)/2] \sin 2\alpha + J_{xy} \cos 2\alpha. \qquad (5.24)$$

Практический интерес представляет поворот осей вокруг центра тяжести сечения. Пусть взаимно перпендикулярные оси x и y являются центральными для фигуры, изображенной на рис. 5.12. При повороте вокруг центра тяжести O (начала координат) значения осевых моментов инерции относительно этих осей изменяются, но их сумма, как легко видеть после сложения выражений (5.23) и (5.23а), остается постоянной и в силу соотношения (5.7) равной полярному моменту инерции относительно точки поворота:

$$J_{x_1} + J_{y_1} = J_x + J_y = J_p = \text{const}. \qquad (5.25)$$

Очевидно, можно найти такое положение центральных осей (угол α), при котором относительно одной из них момент инерции будет наибольшим (J_{max}), а относительно другой, ей перпендикулярной, — наименьшим (J_{min}). Такие оси называются *главными центральными*, а соответствующие им экстремальные осевые моменты инерции — *главными моментами инерции*.

Рис. 5.12

Из сравнения формул (5.23), (5.24) и (3.14), (3.15) (см. п. 3.2) видно, что задача по определению положения главных осей математически тождественна определению положения главных площадок при плоском напряженном состоянии. Как следует из зависимости (5.24), при повороте осей на 90° центробежный момент инерции меняет знак на противоположный, проходя че-

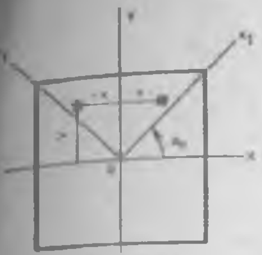


Рис. 5.13

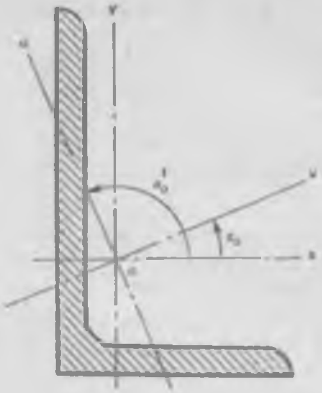


Рис. 5.14

рез нулевое значение при угле α, характеризующем положение главных осей. Таким образом, *главные центральные оси можно рассматривать как оси, центробежный момент инерции относительно которых равен нулю.* Следовательно, их положение, или, иначе говоря, угол поворота относительно исходной системы взаимно перпендикулярных осей x и y можно определить из указанной зависимости, если приравнять нулю ее правую часть. Тогда по аналогии с формулой (3.12)

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -2J_{xy}/(J_x - J_y). \tag{5.26}$$

Эта формула дает два значения угла: α_0 и $\alpha_0' = \alpha_0 + 90^\circ$, т. е. в общем случае существуют две взаимно перпендикулярные главные центральные оси. Для симметричных сечений задача по определению положения главных осей значительно упрощается, поскольку оси симметрии и являются главными. Любой элементарной площадке, находящейся с одной стороны от оси симметрии (рис. 5.13), соответствует элементарная площадка, которая отличается лишь знаком произведения координат:

$$J_{xy} = \int_A xydA = \int_{A/2} xydA + \left(-\int_{A/2} xydA\right) = 0.$$

Таким образом, для сечений, представленных на рис. 5.4—5.8, 5.10, 5.11, оси x и y являются главными. При этом следует иметь в виду, что у сечений, имеющих более двух осей симметрии, все центральные оси главные.

Для доказательства направим начальную ось отсчета x вдоль одной из осей симметрии, а центральную ось y — перпендикулярно ей. Если фигура имеет более двух осей симметрии (например, квадрат, см. рис. 5.13), то какая-либо из них составляет острый угол с осью x. Обозначим такую ось x_1, а ей перпендикулярную — y_1. Тогда центробежный момент инерции $J_{x_1y_1}=0$ и согласно зависимости (5.24)

$$[(J_x - J_y)/2] \sin 2\alpha_0 + J_{xy} \cos 2\alpha_0 = 0.$$

Но так как $J_{xy}=0$, то $J_x=J_y=J_{max}=J_{min}$, и указанная зависимость дает нулевое значение центробежного момента инерции относительно любой пары взаимно перпендикулярных центральных осей. Таким образом, все оси, полученные путем поворота начальной системы координат xOy, являются главными. Отсюда следует, что момент инерции площадей правильных фигур (круга, равностороннего треугольника, квадрата и других фигур, которые могут быть одновременно вписаны в круг и описаны около него) относительно любых центральных осей равны между собой и все эти оси — главные.

Вычисление главных моментов инерции производят по формуле

$$J_{max/min} = (J_x + J_y)/2 \pm {}^1/_2 \sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4J_{xy}^2}, \quad (5.27)$$

которая аналогична выражению главных напряжений (3.11).

Пример 5.4. Определить положение главных центральных осей и вычислить главные моменты инерции площади сечения неравнополочного уголка 125×80×10 мм (рис. 5.14), руководствуясь табличными данными относительно центральных осей, параллельных полкам.

Решение. Выписываем из сортамента (см. табл. 4 приложения 1) необходимые данные: $J_x=312$ см^4, $J_y=100$ см^4, $J_{xy}=-102$ см^4.

Согласно формуле (5.26)

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -2J_{xy}/(J_x - J_y) = -2(-102)/(312-100) = 0{,}962.$$

Отсюда $2\alpha_0 = \operatorname{arctg} 0{,}962 = 43°51'$ и $\alpha_0 = 21°57'$, $\alpha_0' = 21°57' + 90° = 111°57'$.

Положительное значение углов наклона главных осей свидетельствует о том, что поворот должен осуществляться *против хода* часовой стрелки от направления исходной центральной оси x.

Главные центральные моменты инерции по формуле (5.27):

$$J_{max/min} = (J_x + J_y)/2 \pm {}^1/_2 \sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4J_{xy}^2} =$$
$$= (312+100)/2 \pm {}^1/_2 \sqrt{(312-100)^2 + 4(-102)^2} \text{ см}^4 =$$
$$= 206 \pm 147 \text{ см}^4.$$

Для того чтобы установить, относительно какой главной оси момент инерции максимален и относительно какой минимален, руководствуемся правилом, изложенным в примере 3.2 при определении главных напряжений (см. п. 3.2). Поскольку $\alpha_0 < 45°$ и $J_x > J_y$,

$$J_v = J_{max} = 206 + 147 \text{ см}^4 = 353 \text{ см}^4;$$

$$J_u = J_{min} = 206 - 147 \text{ см}^4 = 59 \text{ см}^4.$$

Проверка. 1) Главные моменты инерции должны быть экстремальны:

$$J_v = 353 \text{ см}^4 > J_x = 312 \text{ см}^4;$$

$$J_u = 59 \text{ см}^4 < J_y = 100 \text{ см}^4.$$

Если эти неравенства не соблюдаются, то при определении главных моментов инерции допущена ошибка.

2) Сумма моментов инерции относительно любой пары взаимно перпендикулярных центральных осей согласно равенству (5.25) должна быть постоянной:

$$J_x + J_y = 312 + 100 \text{ см}^4 = 412 \text{ см}^4;$$

$$J_v + J_u = 353 + 59 \text{ см}^4 = 412 \text{ см}^4.$$

Эта проверка необходимая, но не достаточная. Постоянство суммы осевых моментов инерции возможно и при ошибке в вычислении главных моментов инерции.

3) Центробежный момент инерции площади сечения относительно главных центральных осей должен равняться нулю. По формуле (5.24)

$$J_{vu} = [(J_x - J_y)/2] \sin 43° 54' + J_{xy} \cos 43° 54' =$$

$$= [(312 - 100)/2]\, 0{,}693 - 102 \cdot 0{,}721 = 73{,}5 - 73{,}5 = 0.$$

Последняя проверка универсальная. Следовательно, вычисления выполнены правильно.

Глава 6. КРУЧЕНИЕ

6.1. Крутящий момент

Кручению подвергаются многие детали машин и сооружений: валы двигателей, станков и машин, оси локомотивов и моторных вагонов, элементы пространственных конструкций. Ограничимся рассмотрением вопросов, представляющих интерес с точки зрения расчета строительных машин, а также подъемно-транспортного и такелажного оборудования для монтажа строительных конструкций.

Брус испытывает кручение, если к нему прикладываются пары сил, лежащие в плоскостях, перпендикулярных его продольной оси. Моменты этих внешних пар

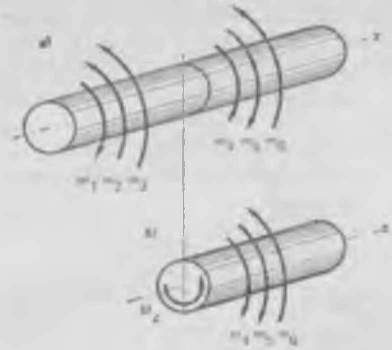


Рис. 6.1

Рис. 6.2

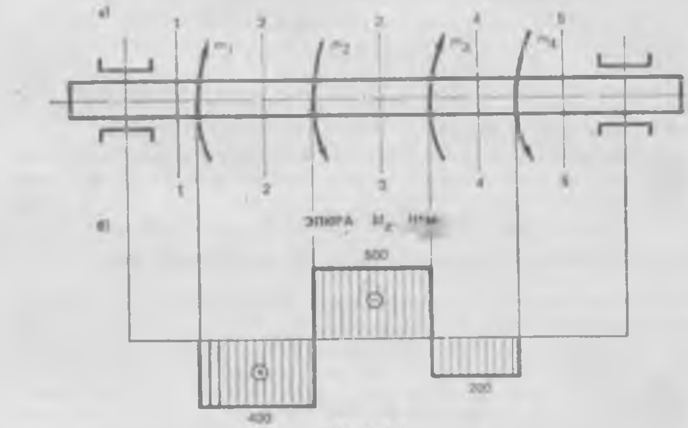


Рис. 6.3

обозначают m (рис. 6.1, a). Под действием внешних моментов в поперечных сечениях закручиваемого бруса возникает единственная составляющая главного момента, которая называется, как отмечалось в п. 1.5, **крутящим моментом** и обозначается M_z. Остальные составляющие главного момента, а также все составляющие главного вектора равны нулю.

Крутящий момент определяют методом сечений. Брус рассекают воображаемой плоскостью, перпендикулярной его продольной оси, мысленно отбрасывают одну из образовавшихся частей, а ее действие на оставшуюся часть заменяют неизвестным моментом M_z (рис.

6.1, *б*). После этого составляют единственное уравнение равновесия оставшейся части $\Sigma m_z = 0$, из которого и определяют значение M_z. Таким образом, *крутящий момент в поперечном сечении бруса численно равен алгебраической сумме внешних моментов, приложенных с одной стороны от рассматриваемого сечения.*

Правило знаков. Условимся считать *крутящий момент положительным, если внешний момент m направлен по ходу часовой стрелки при взгляде от сечения к любому концу бруса* (рис. 6.2).

Вопрос о нахождении опасных сечений бруса, нагруженного несколькими внешними моментами, решается так же, как при растяжении (сжатии), т.е. в результате построения эпюры усилий, которая в данном случае представляет собой график изменения крутящего момента по длине бруса.

Пример 6.1. Построить эпюру крутящих моментов для вала, изображенного на рис. 6.3, *а*, если внешние моменты составляют: $m_1 = 400$ Н·м, $m_2 = 900$ Н·м, $m_3 = 700$ Н·м, $m_4 = 200$ Н·м.

Решение. Пренебрегая трением в подшипниках, определяем крутящие моменты на всех пяти участках, рассматривая каждый раз равновесие той части вала, к которой приложено меньше внешних моментов. В сечении *1—1* равна нулю алгебраическая сумма левых моментов, а в сечении *5—5* — правых. Поэтому $M_{z1} = M_{z5} = 0$.

В сечении *2—2* (через левые моменты) $M_{z2} = m_1 = 400$ Н·м, в сечении *4—4* (через правые моменты) $M_{z4} = m_4 = 200$ Н·м. Крутящий момент в сечении *3—3* можно подсчитать как через левые, так и правые внешние моменты, поскольку на объеме вычислений это не сказывается. В обоих случаях, естественно, приходим к одному и тому же результату, что служит контролем правильности произведенных расчетов:

$$M_{z3}^{\text{лев}} = M_{z2} - m_2 = 400 - 900 \text{ Н·м} = -500 \text{ Н·м};$$

$$M_{z3}^{\text{пр}} = M_{z4} - m_3 = 200 - 700 \text{ Н·м} = -500 \text{ Н·м}.$$

По найденным значениям строим эпюру крутящих моментов (рис. 6.3, *б*), откладывая положительные ординаты вниз от оси (базисной линии), отрицательные — вверх. На эпюре видно, что в пределах каждого участка между сечениями, где приложены смежные внешние моменты, крутящий момент имеет постоянное значение. В указанных же сечениях ординаты эпюры M_z меняются скачкообразно на числовую величину соответствующего внешнего момента.

6.2. Напряжения и деформации круглого бруса

Исследования показывают, что характер деформирования закручиваемого бруса в значительной степени зависит от формы его поперечного сечения. В технике на-

Рис. 6.4

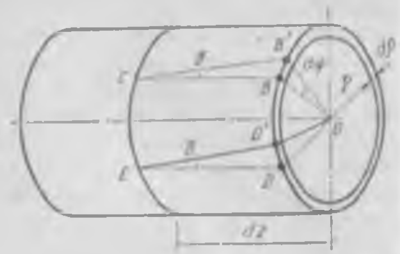


Рис. 6.5

ибольшее распространение получили брусья (стержни) кругового или кольцевого сечений.

В поперечных сечениях закручиваемого бруса возникают только касательные напряжения. Наличие внутренних нормальных сил противоречило бы условию равновесия отсекаемых частей. К тому же нормальные силы параллельны продольной оси z и не дают относительно нее момента. Таким образом, крутящий момент представляет собой результирующий момент внутренних касательных сил τdA, действующих на бесконечно малых площадках поперечного сечения (рис. 6.4), и может быть выражен в интегральном виде:

$$M_z = \int_A \tau \rho dA, \tag{6.1}$$

где ρ — плечо элементарной силы относительно продольной оси бруса (точки O).

Формула (6.1) отражает статическую сторону задачи о кручении круглого бруса, но она не позволяет определить значение касательных напряжений по известному крутящему моменту, пока не установлен закон их распределения по сечению.

В основу технической теории кручения положена гипотеза плоских сечений (см. п. 2.2) и следующие допущения: 1) расстояния между поперечными сечениями в процессе деформирования не меняются, т.е. длина бруса остается постоянной; 2) радиусы поперечных сечений при деформировании бруса не искривляются. Справедливость этих предположений подтверждается экспериментальным путем, а также точным решением задачи методами теории упругости без применения ка-

ких-либо гипотез, кроме допущения о непрерывности строения материала.

Выделим из бруса трубчатый стержень внутренним радиусом ρ и бесконечно малой толщиной $d\rho$ (рис. 6.5), что позволит считать напряжения равномерно распределенными по кольцевому сечению.

Мерой деформации кручения является угол закручивания

$$\theta = d\varphi/dz, \tag{6.2}$$

приходящийся на единицу длины и называемый *относительным углом закручивания*. Здесь $d\varphi$ — угол взаимного поворота двух бесконечно близких сечений; dz — расстояние между ними. Величина θ играет при кручении такую же роль, как относительное удлинение ε при растяжении.

Однако к деформации кручения можно подойти с другой стороны. При закручивании рассматриваемого цилиндрического стержня образующие CB и ED перемещаются в положения CB' и ED', а радиусы OB и OD — в положения OB' и OD', в результате чего бесконечно малый элемент боковой поверхности $CBDE$ претерпевает *чистый сдвиг*. Тогда угол сдвига, введенный в п. 3.2,

$$\gamma \approx \operatorname{tg}\gamma = BB'/CB = DD'/ED = \rho d\varphi/dz,$$

или с учетом обозначения (6.2)

$$\gamma = \rho\theta. \tag{6.3}$$

Эта зависимость выражает геометрическую сторону задачи о кручении. Осталось перейти от деформаций к искомым напряжениям, т.е. рассмотреть физическую сторону. На основании закона Гука при сдвиге (3.8)

$$\tau = G\gamma = G\theta\rho. \tag{6.4}$$

Согласно принятым допущениям величина θ является одинаковой для всех трубчатых стержней, из которых может быть составлен круглый брус. Это обстоятельство наряду с постоянством модуля G свидетельствует о *линейном* законе распределения касательных напряжений по поперечному сечению в зависимости от расстояния ρ до центра круга.

Подставляя зависимость (6.4) в уравнение (6.1) и вынося постоянные величины за знак интеграла, находим

Рис. 6.4

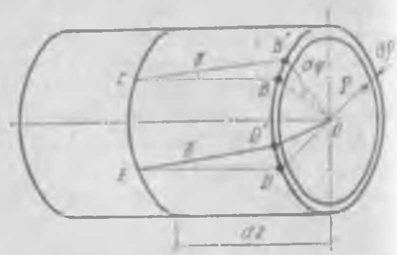


Рис. 6.5

ибольшее распространение получили брусья (стержни) кругового или кольцевого сечений.

В поперечных сечениях закручиваемого бруса возникают только касательные напряжения. Наличие внутренних нормальных сил противоречило бы условию равновесия отсекаемых частей. К тому же нормальные силы параллельны продольной оси z и не дают относительно нее момента. Таким образом, крутящий момент представляет собой результирующий момент внутренних касательных сил τdA, действующих на бесконечно малых площадках поперечного сечения (рис. 6.4), и может быть выражен в интегральном виде:

$$M_z = \int_A \tau\rho dA, \qquad (6.1)$$

где ρ — плечо элементарной силы относительно продольной оси бруса (точки O).

Формула (6.1) отражает статическую сторону задачи о кручении круглого бруса, но она не позволяет определить значение касательных напряжений по известному крутящему моменту, пока не установлен закон их распределения по сечению.

В основу технической теории кручения положена гипотеза плоских сечений (см. п. 2.2) и следующие допущения: 1) расстояния между поперечными сечениями в процессе деформирования не меняются, т.е. длина бруса остается постоянной; 2) радиусы поперечных сечений при деформировании бруса не искривляются. Справедливость этих предположений подтверждается экспериментальным путем, а также точным решением задачи методами теории упругости без применения ка-

ких-либо гипотез, кроме допущения о непрерывности строения материала.

Выделим из бруса трубчатый стержень внутренним радиусом ρ и бесконечно малой толщиной $d\rho$ (рис. 6.5), что позволит считать напряжения равномерно распределенными по кольцевому сечению.

Мерой деформации кручения является угол закручивания

$$\theta = d\varphi/dz, \qquad (6.2)$$

приходящийся на единицу длины и называемый *относительным углом закручивания*. Здесь $d\varphi$ — угол взаимного поворота двух бесконечно близких сечений; dz — расстояние между ними. Величина θ играет при кручении такую же роль, как относительное удлинение ε при растяжении.

Однако к деформации кручения можно подойти с другой стороны. При закручивании рассматриваемого цилиндрического стержня образующие CB и ED перемещаются в положения CB' и ED', а радиусы OB и OD — в положения OB' и OD', в результате чего бесконечно малый элемент боковой поверхности $CBDE$ претерпевает *чистый сдвиг*. Тогда угол сдвига, введенный в п. 3.2,

$$\gamma \approx \operatorname{tg}\gamma = BB'/CB = DD'/ED = \rho d\varphi/dz,$$

или с учетом обозначения (6.2)

$$\gamma = \rho\theta. \qquad (6.3)$$

Эта зависимость выражает геометрическую сторону задачи о кручении. Осталось перейти от деформаций к искомым напряжениям, т.е. рассмотреть физическую сторону. На основании закона Гука при сдвиге (3.8)

$$\tau = G\gamma = G\theta\rho. \qquad (6.4)$$

Согласно принятым допущениям величина θ является одинаковой для всех трубчатых стержней, из которых может быть составлен круглый брус. Это обстоятельство наряду с постоянством модуля G свидетельствует о *линейном* законе распределения касательных напряжений по поперечному сечению в зависимости от расстояния ρ до центра круга.

Подставляя зависимость (6.4) в уравнение (6.1) и вынося постоянные величины за знак интеграла, находим

$$M_z = G\theta \int_A \rho^2 \, dA.$$

С учетом формулы (5.6) $M_z = G\theta J_p$, откуда

$$\theta = M_z/(GJ_p). \qquad (6.5)$$

Вводя найденное значение угла закручивания в зависимость (6.4), получаем окончательное выражение касательного напряжения в произвольной точке поперечного сечения круглого бруса:

$$\tau = (M_z/J_p)\,\rho. \qquad (6.6)$$

Таким образом, касательные напряжения возрастают от нуля в центре круга ($\rho=0$) до наибольшего значения

$$\tau_{max} = (M_z/J_p)\,r \qquad (6.7)$$

в точках его внешнего контура (рис. 6.6).

По углу закручивания θ легко определить абсолютный угол поворота φ одного сечения относительно другого. Согласно выражениям (6.2) и (6.5)

$$d\varphi = M_z\,dz/(GJ_p),$$

откуда

$$\varphi = \int_0^l \frac{M_z\,dz}{GJ_p},$$

где l — расстояние между рассматриваемыми сечениями.

Если брус по всей длине имеет один и тот же диаметр ($J_p=\text{const}$) и крутящий момент постоянен, то после интегрирования получаем в радианах

$$\varphi = M_z\,l/(GJ_p). \qquad (6.8)$$

Эта формула построена по такому же принципу, как зависимость (2.5) при растяжении (сжатии): в числителе — внутренний силовой фактор и длина бруса, в знаменателе — модуль упругости и геометрический фактор. Поэтому по аналогии с EA произведение GJ_p называется *жесткостью сечения* бруса при кручении.

В общем случае, когда значения M_z и J_p (или хотя бы одной из этих величин) на отдельных участках бруса различны, вычисление угла φ ведут в пределах каждого участка, а затем полученные результаты суммируют.

Пример 6.2. Построить эпюры крутящих моментов и углов поворота поперечных сечений стального бруса диаметром $D=50$ мм, нагруженного внешними моментами $m_1=300$ Н·м, $m_2=950$ Н·м, $m_3=$

Рис. 6.6

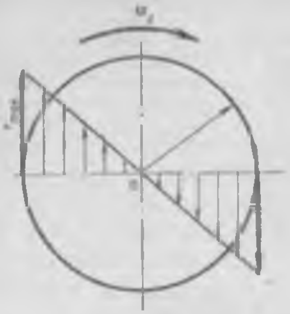
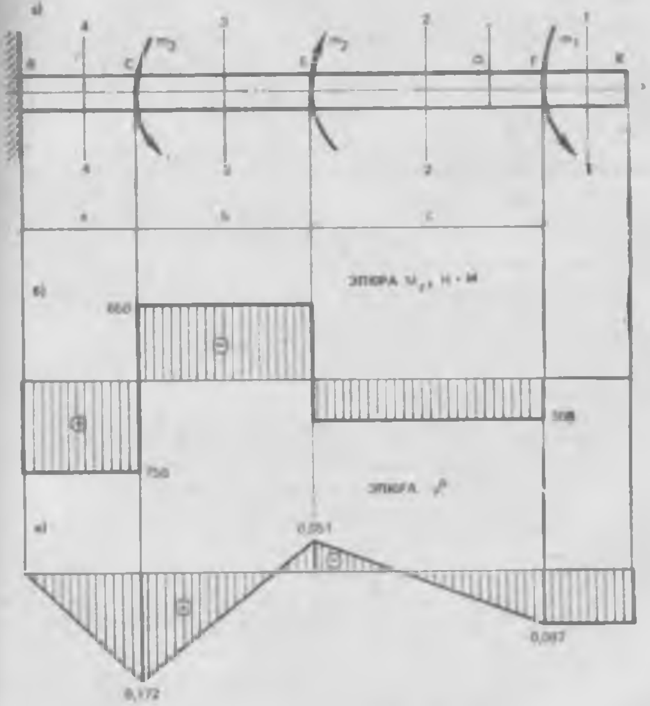


Рис. 6.7



$=1400$ Н·м (рис. 6.7, *а*). Брус имеет участки длиной $a=20$ см, $b=$ $=30$ см, $c=40$ см

Решение *Построение эпюры* M_z. Определение усилий защемленного бруса, как отмечалось в примере 2.1, удобнее начинать со свободного конца. Это избавит от необходимости предварительного вычисления реактивного момента в заделке, значение которого получится автоматически после построения эпюры крутящих моментов. Рассматривая равновесие правых отсекаемых частей, находим крутящие моменты на всех четырех участках:

$$M_{z1}=0;\quad M_{z2}=m_1=300\ \text{Н·м};$$

$$M_{z3}=m_1-m_2=300-950\ \text{Н·м}=-650\ \text{Н·м};$$

$$M_{z4}=M_{z3}+m_3=-650+1400\ \text{Н·м}=750\ \text{Н·м}.$$

Эпюра крутящих моментов, построенная по найденным значениям, представлена на рис. 6.7, *б*. Реактивный момент равен 750 Н·м и направлен по ходу часовой стрелки при взгляде от свободного конца бруса к заделке.

Построение эпюры φ (рис. 6.7, *в*) производится аналогично эпюре перемещений при растяжении и сжатии (см. пример 2.3). Расчет ведем относительно неподвижного конца *B*. В пределах каждого участка эпюра линейна, поэтому достаточно вычислить углы поворота граничных сечений.

Угол поворота сечения *C* равен абсолютному углу закручивания участка *CB*. По формуле (6.8), переходя к градусной мере, находим

$$\varphi_{CB}=\frac{M_{CB}\,a}{GJ_p}\,\frac{180^\circ}{\pi}=\frac{750\cdot0{,}2}{80\cdot10^9\cdot62{,}5\cdot10^{-8}}\,\frac{180^\circ}{\pi}=0{,}172^\circ,$$

где согласно выражению (5.14) полярный момент инерции

$$J_p=0{,}1D^4=0{,}1\cdot5^4\ \text{см}^4=62{,}5\ \text{см}^4=62{,}5\cdot10^{-8}\ \text{м}^4,$$

а модуль сдвига стали $G=80$ ГПа$=80\cdot10^9$ Па.

Угол поворота сечения *E* относительно заделки складывается из угла поворота этого сечения относительно сечения *C* (абсолютного угла закручивания участка *EC*)

$$\varphi_{EC}=\frac{M_{EC}\,b}{GJ_p}\,\frac{180^\circ}{\pi}=-\frac{650\cdot0{,}3}{800\cdot62{,}5}\,\frac{180^\circ}{\pi}=-0{,}223^\circ$$

и угла поворота сечения *C* относительно заделки:

$$\varphi_{EB}=\varphi_{EC}+\varphi_{CB}=-0{,}223+0{,}172=-0{,}051^\circ.$$

Аналогично

$$\varphi_{FE}=\frac{M_{FE}\,c}{GJ_p}\,\frac{180^\circ}{\pi}=\frac{300\cdot0{,}4}{800\cdot62{,}5}\,\frac{180^\circ}{\pi}=0{,}138^\circ$$

и

$$\varphi_{FB}=\varphi_{FE}+\varphi_{EB}=0{,}138-0{,}051=0{,}087^\circ.$$

На участке *KF* крутящий момент отсутствует, поэтому $\varphi_{KB}=$ $=\varphi_{FB}=0{,}087^\circ$.

6.3. Расчеты на прочность и жесткость

Теория кручения круглого бруса используется главным образом при расчете валов различных машин и механизмов. Вводя в формулу (6.7) обозначение

$$W_p = J_p/r \tag{6.9}$$

и имея в виду, что в соответствии с правилами Госгортехнадзора СССР механические узлы и детали грузоподъемных приспособлений должны рассчитываться по допускаемым напряжениям, приходим к следующему условию прочности:

$$\tau_{max} = M_{zn}/W_p < [\tau], \tag{6.10}$$

где τ_{max} — наибольшее касательное напряжение в опасном сечении бруса, Па (МПа); M_{zn} — нормативный (т. е. вычисленный без учета коэффициента надежности по нагрузке) крутящий момент в указанном сечении, Н·м; W_p — *полярный момент сопротивления* сечения — геометрическая характеристика прочности при кручении круглого бруса, м^3.

Для сплошного кругового сечения на основании выражения (5.14)

$$W_p = \frac{\pi D^4/32}{D/2} = \pi D^3/16 \approx 0,2D^3. \tag{6.11}$$

Для кольцевого сечения согласно формуле (5.17)

$$W_p = \frac{\pi D^4/32}{D/2}(1-\alpha^4) = (\pi D^3/16)(1-\alpha^4) \approx 0,2D^3(1-\alpha^4), \tag{6.11a}$$

т. е. в отличие от момента инерции момент сопротивления сложного сечения (кольца) не равен алгебраической сумме моментов сопротивления составных частей (большого и малого кругов).

Допускаемое напряжение стали на сдвиг $[\tau] = (0,55—0,6)[\sigma]$, где $[\sigma]$ — допускаемое напряжение на растяжение. Однако валы помимо кручения испытывают изгиб, который в ориентировочных расчетах учитывают введением пониженного допускаемого напряжения $[\tau] = 25—40$ МПа. Точный расчет вала на кручение с изгибом рассматривается в п. 9.4.

По формуле (6.10) проверяют прочность бруса (вала) на кручение. При *подборе сечения* неравенство выражают относительно требуемого момента сопротивления

$$W_p > M_{zn\,max}/[\tau], \tag{6.12}$$

или в соответствии с выражением (6.11)

$$\pi D^3/16 \geq M_{z n \max}/[\tau],$$

откуда требуемый диаметр сплошного сечения

$$D \geq \sqrt[3]{16 M_{z n \max}/(\pi [\tau])} \approx \sqrt[3]{M_{z n \max}/(0{,}2 [\tau])}. \quad (6.12а)$$

Аналогично наружный диаметр кольцевого сечения

$$D \geq \sqrt[3]{16 M_{z n \max}/\{\pi (1-\alpha^4) [\tau]\}} \approx \sqrt[3]{M_{z n \max}/\{0{,}2 (1-\alpha^4) [\tau]\}}. \quad (6.12б)$$

Для определения *допускаемого крутящего момента* условие (6.10) преобразуют к виду

$$[M_{zn}] \leq [\tau] W_p. \quad (6.13)$$

В ряде случаев вал должен удовлетворять не только условию прочности, но и жесткости. Согласно формуле (6.5)

$$\theta_{\max} = M_{zn}/(G J_p) \leq [\theta], \quad (6.14)$$

или

$$\theta^{\circ}_{\max} = \frac{M_{z n \max}}{G J_p} \frac{180^{\circ}}{\pi} \leq [\theta^{\circ}], \quad (6.14а)$$

где $\theta_{\max}$ — наибольший относительный угол закручивания, рад/м; $\theta^{\circ}_{\max}$ — то же, град/м; G — модуль сдвига материала, Па; J_p — полярный момент инерции площади сечения, м^4.

Допускаемый угол закручивания $[\theta]$ зависит от назначения вала и обычно лежит в пределах $(0{,}26—3{,}5) \times 10^{-2}$ рад/м, что соответствует $[\theta^{\circ}] = 0{,}15—2$ град/м.

Неравенства (6.14) и (6.14а) служат для непосредственной проверки жесткости вала. При подборе сечения их выражают относительно требуемого момента инерции. Так, в первом случае

$$J_p \geq M_{z n \max}/(G [\theta]). \quad (6.15)$$

На основании выражения (5.14)

$$\pi D^4/32 \geq M_{z n \max}/(G [\theta]),$$

откуда требуемый диаметр сплошного сечения

$$D \geq \sqrt[4]{32 M_{z n \max}/(\pi G [\theta])} \approx \sqrt[4]{M_{z n \max}/(0{,}1 G [\theta])}, \quad (6.15а)$$

или при переходе к градусной мере

$$D \geq \sqrt[4]{\frac{32 M_{z n \max}}{\pi G [\theta^{\circ}]} \frac{180^{\circ}}{\pi}} \approx \sqrt[4]{\frac{M_{z n \max}}{0{,}1 G [\theta^{\circ}]} \frac{180^{\circ}}{\pi}}. \quad (6.15б)$$

Аналогично получаются расчетные формулы и для кольцевого сечения, в чем нетрудно убедиться самостоятельно. При определении допускаемого крутящего момента условие жесткости преобразуется подобно условию прочности:

$$[M_{zn}] < [\theta]\, GJ_p. \qquad (6.16)$$

Пример 6.3. Рассчитать на прочность и жесткость сплошной вал, рассмотренный в примере 6.1, при условии, что он выполнен из стали с допускаемым напряжением $[\tau]=40$ МПа и модулем сдвига $G=80$ ГПа. Допускаемый угол закручивания $[\theta°]=1$ град/м.

Решение. Опасными являются сечения среднего участка вала (см. рис. 6.3), где крутящий момент имеет наибольшее абсолютное значение $M_{zn\max}=|M_{z}|=500$ Н·м. Требуемый диаметр вала из условия прочности (6.12а)

$$D \geqslant \sqrt[3]{16M_{zn\max}/(\pi[\tau])} = \sqrt[3]{16\cdot 500/(3{,}14\cdot 40\cdot 10^6)}\ \text{м} =$$
$$= 3{,}99\cdot 10^{-2}\ \text{м} \approx 40\ \text{мм},$$

из условия жесткости (6.15б)

$$D \geqslant \sqrt[4]{\frac{32M_{zn\max}}{\pi G[\theta°]}\,\frac{180°}{\pi}} = \sqrt[4]{\frac{32\cdot 500\cdot 180}{3{,}14^2\cdot 80\cdot 10^9\cdot 1}}\ \text{м} =$$
$$= 4{,}37\cdot 10^{-2}\ \text{м} = 43{,}7\ \text{мм}.$$

Решающим является расчет на жесткость. Округляя, принимаем $D=45$ мм.

Пример 6.4. Проверить прочность сплошного бруса, рассмотренного в примере 6.2, и подобрать для него кольцевое сечение при отношении диаметров $\alpha=d/D=0{,}8$. Допускаемое напряжение $[\tau]=30$ МПа. Сравнить оба варианта по расходу материала.

Решение. Опасными являются сечения крайнего левого участка бруса (см. рис. 6.7, *б*), где крутящий момент максимален:

$$M_{zn\max} = M_{CB} = 750\ \text{Н·м}.$$

Полярный момент сопротивления сплошного кругового сечения по формуле (6.11)

$$W_p = 0{,}2D^3 = 0{,}2\cdot 5^3\ \text{см}^3 = 25\ \text{см}^3 = 25\cdot 10^{-6}\ \text{м}^3.$$

Наибольшие касательные напряжения согласно условию (6.10)

$$\tau_{\max} = M_{zn\max}/W_p = 750/(25\cdot 10^{-6})\ \text{Па} = 30\cdot 10^6\ \text{Па} = 30\ \text{МПа} = [\tau],$$

т. е. прочность обеспечена без излишнего запаса.

Требуемый наружный диаметр кольцевого сечения по формуле (6.12б)

$$D_1 \geqslant \sqrt[3]{M_{zn\max}/[0{,}2(1-\alpha^4)[\tau]]} =$$
$$= \sqrt[3]{750/[0{,}2(1-0{,}8^4)30\cdot 10^6]} = 5{,}96\cdot 10^{-2}\ \text{м} \approx 60\ \text{мм}.$$

Отсюда внутренний диаметр кольцевого сечения

$$d = \alpha D_1 = 0{,}8\cdot 60\ \text{мм} = 48\ \text{мм}.$$

Расход материала пропорционален площади поперечного сечения. Для сплошного бруса

$$A = \pi D^2/4 = 3{,}14 \cdot 50^2/4 \text{ мм}^2 \approx 1960 \text{ мм}^2,$$

для полого

$$A_1 = \left(\pi D_1^2/4\right)\left(1 - \alpha^2\right) = \left(3{,}14 \cdot 60^2/4\right)\left(1 - 0{,}8^2\right) \text{ мм}^2 \approx 1020 \text{ мм}^2.$$

Таким образом, полый брус (вал) экономичнее равнопрочного сплошного. В рассматриваемом случае он позволяет уменьшить массу расходуемого материала почти в 2 раза. Объясняется это тем, что сердцевина сплошного бруса мало напряжена (см. эпюру касательных напряжений на рис. 6.6), и удаление материала из нее незначительно отражается на прочности бруса и его общих габаритах. Экономия будет тем больше, чем тоньше стенка образующейся трубы.

Глава 7. ПРЯМОЙ ИЗГИБ

7.1. Общие понятия

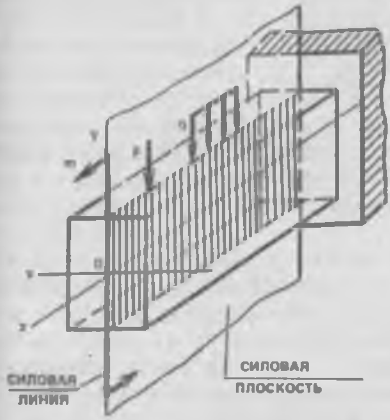
Изгиб является едва ли не самым распространенным видом деформации элементов строительных конструкций. Прямой брус, работающий на изгиб, называют *балкой*. Изгиб вызывают силы, перпендикулярные продольной оси балки, или пары сил, лежащие в плоскостях, проходящих через эту ось. Сама ось из прямолинейной превращается в криволинейную (рис. 7.1).

Если все нагрузки приложены в одной плоскости, называемой *силовой*, то изгиб является *плоским*, а если линия пересечения этой плоскости с плоскостью поперечного сечения (силовая линия) совпадает с одной из его главных центральных осей, то изгиб называется *прямым* (рис. 7.2).

Для того чтобы воспринять нагрузку и передать ее на нижележащие конструкции, балка должна иметь опорные закрепления. Как известно из статики, различают три основных типа опор плоских систем.

1. Неподвижная шарнирная опора (рис. 7.3, *а*) допускает свободный поворот опорного сечения балки, препятствуя смещению как в продольном, так и поперечном направлении. Поэтому в такой опоре воз-

Рис. 7.1



7.2

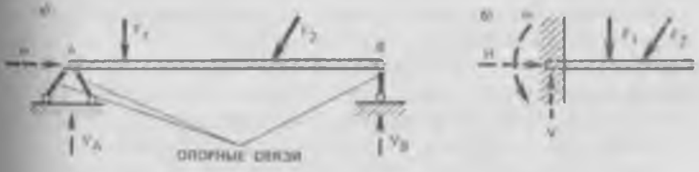
7.3

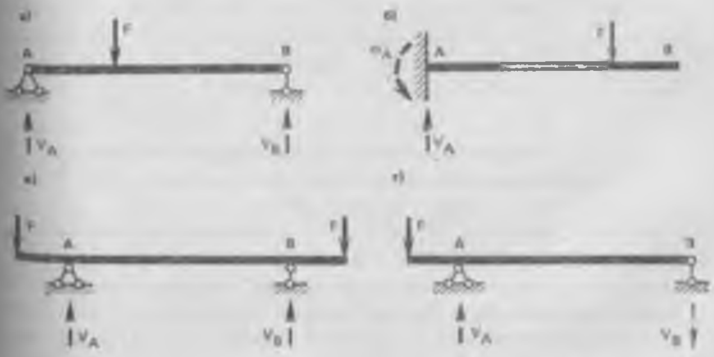
7.4

Рис. 7.2

Рис. 7.3

Рис. 7.4





никают две составляющие реакции R_A: вертикальная V_A и горизонтальная H.

2. Подвижная шарнирная опора (см. рис. 7.3, *а*) допускает не только поворот опорного сечения, но и продольное смещение балки, препятствуя лишь поперечному смещению. В этой опоре возникает только одна составляющая $V_B = R_B$, совпадающая по направлению с опорной связью.

3. Жесткая заделка, или защемление (рис. 7.3, б), не допускает ни поворота опорного сечения, ни продольного или поперечного смещения балки. В общем случае плоского нагружения в заделке возникают составляющие V, H опорной реакции R и реактивный момент m. В зависимости от опирания различают следующие разновидности простейших статически определимых балок.

Простая балка, свободно лежащая на двух опорах (рис. 7.4, *а*), имеет одну неподвижную и одну подвижную шарнирные опоры. Расстояние между опорами называется *пролетом*. При изгибе горизонтальная составляющая реакции неподвижной опоры $H = 0$, поскольку балка несет только вертикальную или моментную нагрузку. Если нагрузка имеет горизонтальную составляющую (сила F_2 на рис. 7.3), то балка работает на изгиб с растяжением (сжатием). Такой случай деформирования рассмотрен в п. 9.2.

Консоль (рис. 7.4, *б*) имеет один конец жестко заделанный, а другой — свободный. Длину такой балки называют *вылетом*. В заделке возникает вертикальная составляющая реакции V и реактивный момент m.

Консольная балка представляет собой свободно лежащую на двух опорах балку со свешивающимися концами, которые также называются консолями. В зависимости от их числа балка может быть *двухконсольной* (рис. 7.4, *в*) или *одноконсольной* (рис. 7.4, *г*).

7.2. Поперечная сила и изгибающий момент. Аналитический способ построения эпюр Q и M

Расчет двухопорных балок начинают с определения опорных реакций, процесс которого известен из статики. Во избежание вычислительных ошибок найденные значения реакций обязательно проверяют, составляя уравнения равновесия, не использованное при их определении. Обычно контролем служит равенство нулю алгебраической суммы проекций всех сил на вертикальную ось ($\Sigma Y = 0$).

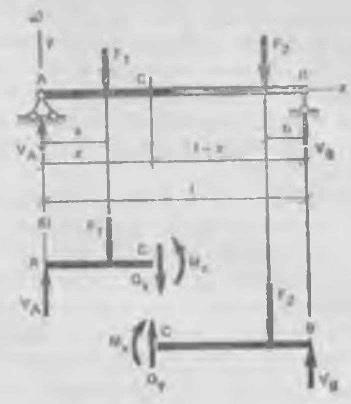


Рис. 7.5

После того как найдены и проверены опорные реакции, приступают к определению внутренних силовых факторов в поперечных сечениях балки. Используя метод сечений, мысленно рассекаем балку, ось которой показана на рис. 7.5, *а*, на произвольном расстоянии z от левой опоры. Отбрасываем одну из образовавшихся частей (например, правую) и заменяем ее действие на оставшуюся (левую) неизвестными усилиями.

Поскольку при прямом изгибе все нагрузки лежат в одной плоскости (плоскость zOy на рис. 7.2), они не дают проекций на ось x и моментов относительно осей y и z. Следовательно, главный вектор и главный момент внутренних сил (см. п. 1.5) имеют только по одной составляющей, отличной от нуля. Это поперечная сила Q_y и изгибающий момент M_x. Для их определения статика дает два уравнения равновесия:

$$\Sigma Y = 0; \quad V_A - F_1 - Q_y = 0,$$

откуда

$$Q_y = V_A - F_1$$

и

$$\Sigma m_C = 0; \quad V_A z - F_1 (z - a) - M_x = 0,$$

откуда

$$M_x = V_A z - F_1 (z - a).$$

Таким образом, *поперечная сила в произвольном сечении балки численно равна алгебраической сумме всех внешних сил, приложенных с одной стороны от этого сечения, а изгибающий момент — алгебраической сум-*

ме моментов всех внешних сил, приложенных с одной стороны от сечения, относительно его центра тяжести.

В частном случае нагружения поперечная сила может отсутствовать и тогда изгиб является *чистым*. Чаще всего, однако, и поперечная сила, и изгибающий момент не равны нулю. Такой изгиб называется *поперечным*.

Правило знаков обоих силовых факторов удобно устанавливать исходя из направления внешних сил. *Если внешняя сила стремится повернуть отсеченную часть балки по ходу часовой стрелки относительно рассматриваемого сечения, то она вызывает положительную поперечную силу.* Так, реакция V_A (рис. 7.5, *б*) стремится повернуть левую часть балки по ходу часовой стрелки относительно сечения C, что находит отражение в составленном выше аналитическом выражении Q_y. И, наоборот, сила F_1 стремится создать вращение против хода часовой стрелки, поэтому она дает отрицательное слагаемое в указанном выражении.

Аналогичная картина наблюдается при рассмотрении правой отсеченной части балки:

$$Q_y = -V_B + F_2,$$

причем согласно третьему закону Ньютона обе поперечные силы (через левые и правые внешние силы) равны и противоположны по направлению.

Знак изгибающего момента наиболее просто установить для консоли. *Внешняя сила (или внешний момент), изгибающая балку выпуклостью вниз* (рис. 7.6, *а*) *вызывает положительный изгибающий момент.* При этом нижние волокна балки растянуты, верхние — сжаты. Если выпуклость обращена вверх (рис. 7.6, *б*), то возникает отрицательный изгибающий момент.

В более сложном случае (см. рис. 7.5) следует мысленно освободить балку от опор и ввести защемление в рассматриваемое сечение. Тогда балка распадается на две консоли и искомый изгибающий момент определится как реактивный момент в воображаемой заделке. Так, из характера деформирования левой консоли (рис. 7.7, *а*) видно, что реакция V_A создает положительный изгибающий момент в сечении C (изгиб выпуклостью вниз), а сила F_1 — отрицательный (изгиб выпуклостью вверх). О том же свидетельствует и ранее составленное

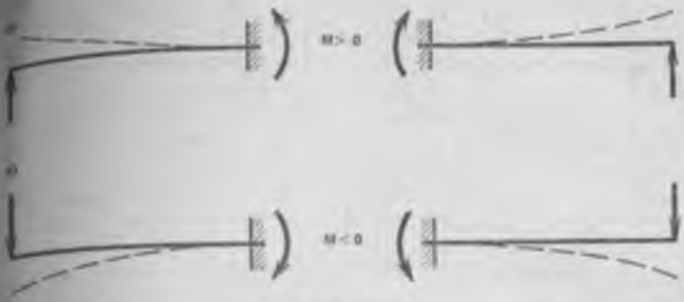


Рис. 7.8

выражение M_x. Из рассмотрения правой консоли (рис. 7.7, *б*) следует:

$$M_x = V_B(l - z) - F_2[(l - z) - b].$$

Оба момента также равны и противоположны по направлению.

Вопрос о нахождении опасных сечений произвольно нагруженной балки решается так же, как при растяжении (сжатии) и кручении, т. е. в результате построения и анализа эпюр внутренних силовых факторов (Q и M[1]). Для того чтобы установить закон изменения поперечной силы и изгибающего момента по длине балки, составляют их аналитические выражения в виде функций от положения сечения (абсциссы z). После того как составлены уравнения $Q(z)$ и $M(z)$, абсциссам дают последовательно конкретные значения (буквенные или числовые в зависимости от условия задачи), мысленно перемещая сечение балки по длине рассматриваемого участка. Вычисляя соответствующие значения (ординаты) Q и M, откладывают их в принятом масштабе от базисной линии, которая параллельна продольной оси балки (оси z). Таким образом, эпюры Q и M представляют собой графики функций $Q(z)$ и $M(z)$.

При расчете изгибаемых элементов строительных конструкций эпюру M принято строить со стороны *рас-*

[1] Здесь и далее в целях сокращения записи индексы осей x и y при буквенных обозначениях изгибающего момента и поперечной силы опущены.

Рис. 7.7

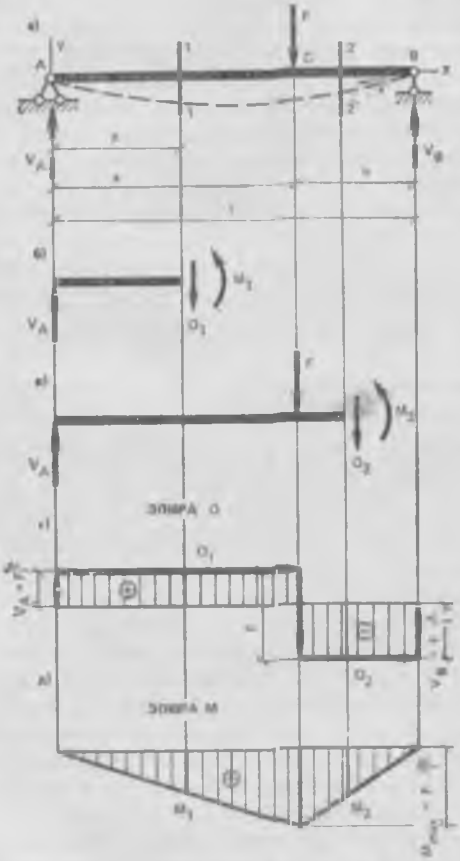


Рис. 7.8

тянутых волокон, т. е. положительные ординаты откладывают вниз, а отрицательные вверх от базисной линии. Положительные ординаты эпюры Q, наоборот, откладывают вверх, отрицательные вниз.

Все изложенное справедливо не только для двухопорных балок, но и для консолей, с той лишь разницей, что расчет последних следует начинать сразу с построения эпюр, перемещаясь от свободного конца к заделке. Опорные реакции определяются автоматически в процессе построения, т. е. точно так же, как при расчете растягиваемых (сжимаемых) или закручиваемых брусьев, один конец которых защемлен, а другой не закреплен.

Пример 7.1. Построить эпюры Q и M для свободно лежащей балки пролетом l, нагруженной сосредоточенной силой F (рис. 7.8, *а*).

Решение. *Определение опорных реакций.* Так как сила F действует вертикально вниз, обе реакции направлены вверх. Пользуясь условием равенства нулю алгебраической суммы моментов всех внешних сил относительно центра тяжести любого сечения балки, находим:

$$\Sigma m_A = 0; \quad Fa - V_B l = 0; \quad V_B = Fa/l;$$

$$\Sigma m_B = 0; \quad V_A l - Fb = 0; \quad V_A = Fb/l.$$

Проверка. $\Sigma Y = V_A - F + V_B = Fb/l - F + Fa/l = (F/l)(b - l + a) = 0$, т. е. реакции определены правильно.

Построение эпюры Q. Зная опорные реакции, нетрудно составить аналитическое выражение поперечной силы на любом участке. Помещая начало координат на левой опоре, мысленно разбиваем балку на два участка: AC и CB. Они характерны тем, что имеют различные выражения поперечной силы.

Участок AC. Рассмотрим сечение *1—1* на произвольном расстоянии z от начала координат. Алгебраическая сумма всех внешних сил, действующих слева от сечения (рис. 7.8, *б*),

$$Q_1(z) = V_A = Fb/l,$$

причем она постоянна на протяжении всего участка, поскольку не зависит от переменной z. Следовательно, на рассматриваемом участке эпюра Q представляет собой *прямую, параллельную оси абсцисс.*

Участок CB. Алгебраическая сумма всех внешних сил, приложенных слева от сечения *2—2* (рис. 7.8, *в*),

$$Q_2(z) = V_A - F = Fb/l - F = (F/l)(b - l) = -Fa/l = -V_B.$$

Она также постоянна, т. е. и на этом участке эпюра Q параллельна оси z. Окончательная эпюра поперечных сил изображена на рис. 7.8, *г*. При направлении слева направо она строится следующим образом.

На левой опоре действует положительная поперечная сила $Q_A = V_A$. Откладываем ее значение Fb/l в принятом масштабе вверх от базисной линии, параллельной оси балки, и проводим горизонтальную прямую до пересечения с линией действия силы F, которая направлена вниз, поэтому эпюра опускается в сечении C уступом на соответствующую величину. Далее проводим горизонтальную прямую до опоры B, где откладываем вверх ординату реакции $V_B = Fa/l$, попадая снова на базисную линию и замыкая тем самым эпюру.

На построенной эпюре указываем алгебраические знаки и значения характерных ординат, после чего заштриховываем ее перпендикулярно базисной линии. Каждая ордината характеризует в принятом масштабе значение поперечной силы в соответствующем сечении балки.

Построение эпюры M производим по тем же участкам.

Участок AC ($0 \leqslant z \leqslant a$). Алгебраическая сумма моментов всех внешних сил, приложенных слева от сечения $1-1$:

$$M_1(z) = V_A\, z = (Fb/l)\, z.$$

Получили уравнение ***наклонной прямой*** (переменная z входит в первой степени). При $z=0$ момент $M_A = 0$, при $z=a$

$$M_C^{\text{лев}} = (Fb/l)\, a = Fab/l.$$

Индекс «лев» означает, что момент вычислен в сечении, удаленном на бесконечно малое расстояние *влево* от сечения C.

Таким образом, на рассматриваемом участке изгибающий момент возрастает пропорционально абсциссе z от нулевого значения на опоре A до наибольшего значения в сечении, где приложена сила F.

Участок CB ($a \leqslant z \leqslant l$). Аналитическое выражение изгибающего момента в сечении $2-2$ через левые внешние силы:

$$M_2(z) = V_A\, z - F(z-a) = (Fb/l)\, z - F(z-a).$$

Переменная z входит в это уравнение также в первой степени. При $z=a$

$$M_C^{\text{пр}} = (Fb/l)\, a - F(a-a) = Fab/l.$$

Получили то же значение изгибающего момента, что и на предыдущем участке. Индекс «пр» означает, что момент вычислен в сечении, удаленном на бесконечно малое расстояние вправо от сечения C.

При $z=l$ момент $M_B = (Fb/l)l - F(l-a) = Fb - Fb = 0$.

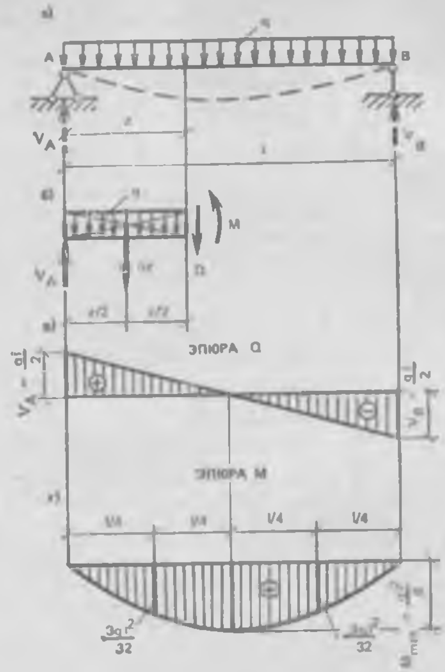
Итак, на рассматриваемом участке с увеличением абсциссы z изгибающий момент убывает от наибольшего значения в сечении C до нуля на опоре B. Окончательная эпюра M (рис. 7.8, *д*) имеет вид треугольника высотой

$$M_{\max} = Fab/l, \tag{7.1}$$

отложенной вниз от базисной линии под силой F.

На построенной эпюре также указываем алгебраический знак и значение характерной ординаты $M_{\max}$, после чего заштриховываем ее тоже перпендикулярно базисной линии. В таком виде эпюра M дает возможность определить в принятом масштабе значение изгибающего момента в любом сечении балки, измерив соответствующую ординату. При рассматриваемом нагружении эпюра имеет только положительные ординаты, поскольку балка по всей длине изгибается выпуклостью вниз (см. рис. 7.8, *а*).

Рис. 7.9



В частном случае, когда сила F приложена в середине пролета, $a=b=l/2$ и

$$M_{max} = Fl/4. \quad (7.1а)$$

Пример 7.2. Построить эпюры Q и M для балки с равномерно распределенной по всему пролету нагрузкой интенсивностью q (рис. 7.9, *а*).

Решение. *Определение опорных реакций.* Равнодействующая нагрузки на балку составляет ql. Реакции направлены вертикально вверх и вследствие симметричного нагружения равны между собой:

$$V_A = V_B = ql/2.$$

Построение эпюры Q. Алгебраическая сумма всех внешних сил, приложенных слева от произвольного сечения в пролете (рис. 7.9, *б*):

$$Q(z) = V_A - qz = ql/2 - qz = q(l/2 - z),$$

где qz — равнодействующая нагрузки, распределенной на участке длиной z.

Полученное выражение является уравнением *наклонной прямой*. При $z=0$ поперечная сила $Q_A = V_A = ql/2$; при $z=l$

$$Q_B = q(l/2 - l) = -ql/2 = -V_B.$$

Эпюра поперечных сил, построенная по найденным ординатам, приведена на рис. 7.9, *в*.

Построение эпюры M. Изгибающий момент в сечении с абсциссой z

$$M(z) = V_A z - qz\cdot z/2 = (ql/2)z - qz^2/2 = (qz/2)(l - z),$$

где $z/2$ — плечо равнодействующей qz относительно рассматриваемого сечения.

Полученное выражение представляет собой уравнение *квадратной параболы* (переменная z входит во второй степени). В опорных сечениях, т.е. при $z=0$ и $z=l$ $M_A = M_B = 0$. Для остальных сечений $z<l$, поэтому изгибающий момент по всему пролету имеет только положительные значения (балка изгибается выпуклостью вниз, см. рис. 7.9, *а*). Наибольший момент вследствие симметричного нагружения возникает посередине пролета. При $z=l/2$

$$M_{max} = [ql/(2\cdot 2)](l - l/2) = ql^2/8. \qquad (7.2)$$

Чтобы построить параболу, следует рассмотреть несколько промежуточных сечений. Так, при $z=l/4$

$$M_{l/4} = [ql/(2\cdot 4)](l - l/4) = {}^3/_{32}ql^2.$$

То же значение справедливо для сечения с абсциссой $z=3l/4$. Окончательная эпюра M изображена на рис. 7.9, *г*.

Из приведенного примера следует, что в сечении, где поперечная сила обращается в нуль (в данном случае посередине балки), изгибающий момент достигает экстремального значения.

Пример 7.3. Построить эпюры Q и M для балки, нагруженной двумя одинаковыми и равноотстоящими от опор сосредоточенными силами F (рис. 7.10, *а*).

Решение. *Определение опорных реакций.* Ввиду симметричного нагружения

$$V_A = V_B = 2F/2 = F.$$

Построение эпюры Q. Согласно примеру 7.1 поперечная сила на участке AC имеет постоянное значение

$$Q_A = Q_C^{\text{лев}} = V_A = F.$$

В произвольном сечении z между точками приложения сил F алгебраическая сумма всех сил, приложенных слева от него, составляет

$$Q(z) = V_B - F = F - F = 0,$$

т.е. на участке CD поперечная сила отсутствует (рис. 7.10, *б*).

И наконец, на участке DB поперечная сила опять постоянна

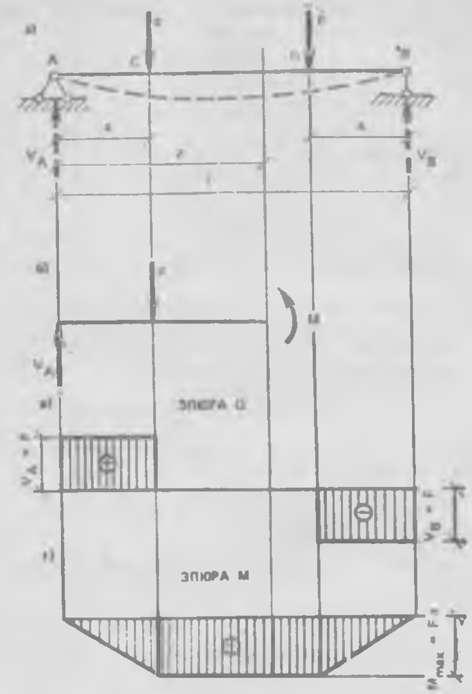
$$Q_D^{\text{пр}} = Q_B = V_A - 2F = -F = -V_B.$$

Эпюра Q имеет вид, показанный на рис. 7.10, *в*.

Построение эпюры M. На участке AC изгибающий момент возрастает, как следует из указанного примера, по линейному закону от нуля до наибольшего значения

$$M_C = V_A a = Fa.$$

Рис. 7.10



В произвольном сечении участка CD

$$M(z) = V_A z - F(z - a) = Fz - F(z - a) = Fa,$$

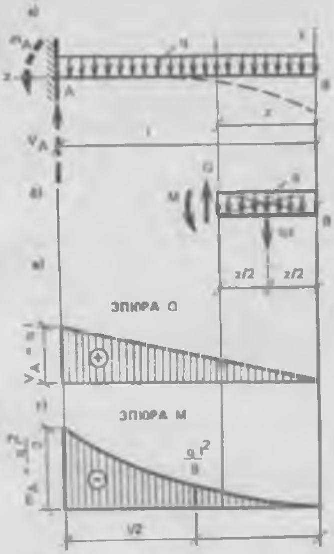
т.е. изгибающий момент не зависит от абсциссы z и на всем протяжении участка остается постоянным.

На участке DB момент убывает по прямой от наибольшего значения до нуля. Эпюра M построена на рис. 7.10, *г*. Она ограничивает равнобедренную трапецию высотой Fa. Все ординаты эпюры положительны, поскольку балка изгибается по всей длине выпуклостью вниз (см. рис. 7.10, *а*).

Анализируя эпюры Q и M, замечаем, что на среднем участке, между симметрично приложенными силами F, балка испытывает чистый изгиб ($Q=0$, $M=\text{const}$).

Пример 7.4. Построить эпюры Q и M для балки, нагруженной в пролете сосредоточенным моментом m (рис. 7.11, *а*).

Решение. *Определение опорных реакций.* Так как нагрузка представлена одним лишь моментом, то из условия $\Sigma Y=0$ заключаем, что реакции должны быть равны и противоположны по направлению. Момент m стремится оторвать балку на опоре A и прижать



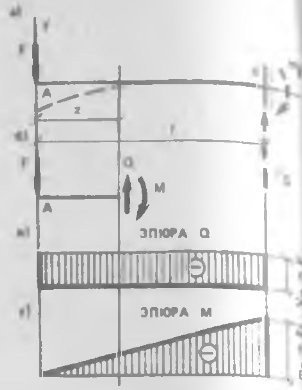


Рис. 7.12

Рис. 7.13

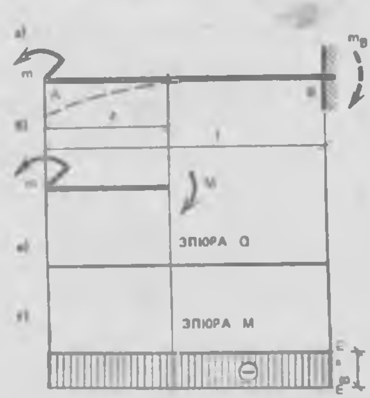


Рис. 7.14

7.13 | 7.12

7.14

выпуклостью вверх (см. рис. 7.12, *а*). Его значение определяется формулой (7.3).

Пример 7.6. Построить эпюры Q и M для консоли, по всей длине которой равномерно распределена нагрузка интенсивностью q (рис. 7.13, *а*).

Решение. *Построение эпюры Q.* Помещаем начало координат на свободном конце консоли и в отличие от предыдущих примеров отсчет абсцисс z ведем справа налево. Тогда алгебраическая сумма всех внешних сил, действующих справа от произвольного сечения (рис. 7.13, *б*),

$$Q(z) = qz.$$

Из этого выражения видно, что поперечная сила находится в *линейной* зависимости от координаты z: при $z=0$ $Q_B=0$; при $z=l$ $Q_A=ql$. Эпюра Q приведена на рис. 7.13, *в*

Построение эпюры М. Изгибающий момент в произвольном сечении

$$M(z) = -qz^2/2.$$

Полученное выражение является уравнением *квадратной параболы*. Положение ее вершины соответствует свободному концу консоли, где $z=0$ и $M_B=0$. Наибольший по абсолютному значению изгибающий момент возникает в заделке ($z=l$):

$$M_{max} = |M_A| = ql^2/2. \tag{7.4}$$

Таким образом, и в этом случае опасным является сечение в заделке. Эпюра M изображена на рис. 7.13, *г*. Для построения параболы использовано промежуточное значение изгибающего момента в середине вылета консоли ($z=l/2$):

$$M_{l/2} = -q(l/2)^2/2 = -ql^2/8.$$

Определение опорных реакций. Согласно эпюре Q в заделке возникает реакция $V_A=ql$, направленная вертикально вверх, поскольку она должна стремиться вращать балку по ходу часовой стрелки, чтобы вызвать положительную поперечную силу.

Реактивный момент в заделке m_A направлен против хода часовой стрелки и изгибает балку выпуклостью вверх (см. рис. 7.13, *а*) согласно отрицательной эпюре M. Его значение определяется формулой (7.4).

Пример 7.7. Построить эпюры Q и M для консоли, нагруженной на свободном конце сосредоточенным моментом m (рис. 7.14, *а*).

Решение. Ввиду отсутствия вертикальной нагрузки поперечная сила по всей длине балки равна нулю (рис. 7.14, *б*, *в*).

Изгибающий момент в произвольном сечении $M(z)=-m$. Он не зависит от абсциссы z и имеет постоянное значение. Следовательно, эпюра M параллельна оси z (рис. 7.14, *г*). Таким образом, консоль испытывает *чистый изгиб*, и в заделке возникает только реактивный момент m_B, равный приложенному моменту m и противоположный по направлению.

Примеры 7.5—7.7 также позволяют сделать два практических вывода: 1) на свободном конце консоли изгибающий момент не равен нулю только в том случае, если там приложен сосредоточенный момент; поперечная сила не равна нулю, если приложена сосредоточенная сила; 2) опасным, как правило, является сечение в заделке консоли, так как там возникает наибольший по абсолютному значению изгибающий момент.

7.3. Дифференциальные зависимости между изгибающим моментом M, поперечной силой Q и интенсивностью распределенной нагрузки q

Анализируя результаты примеров, рассмотренных в предыдущем параграфе, можно установить следующую закономерность: если изгибающий момент является целой алгебраической функцией $M(z)$, т. е. абсцисса z входит в его аналитическое выражение в первой, второй, третьей или любой другой целой степени, то степень функции поперечной силы $Q(z)$ оказывается на единицу ниже. Подобная закономерность аналогична математической зависимости между функцией и ее первой производной.

Докажем, что первая производная от изгибающего момента по абсциссе сечения балки равна поперечной силе, а вторая производная — интенсивности распределенной нагрузки, взятой с отрицательным знаком.

Двумя бесконечно близкими сечениями ab и cd выделим на участке под распределенной нагрузкой элемент длиной dz (рис. 7.15, *а*). Действие левой отброшенной части балки заменим поперечной силой Q и изгибающим моментом M, которые будем считать положительными (рис. 7.15, *б*). Аналогично поступим и с правой частью. Поскольку выделенный элемент бесконечно мал, нагрузку, распределенную по его длине, можно считать равномерной, а так как в пределах элемента к балке не приложены внешние сосредоточенные силы и моменты, значения поперечных сил и изгибающих моментов в сечениях ab и cd отличаются на бесконечно малые величины dQ и dM.

Проецируя все силы на вертикальную ось, из условия равновесия рассматриваемого элемента получим

$$\Sigma Y = 0; \quad Q - (Q + dQ) - q dz = 0.$$

Отсюда после приведения подобных членов $dQ = -q dz$, или

$$dQ/dz = -q, \tag{7.5}$$

т. е. попутно доказали, что первая производная от поперечной силы по абсциссе сечения балки равна интенсивности распределенной нагрузки, взятой с отрицательным знаком.

Взяв сумму моментов всех сил относительно центра

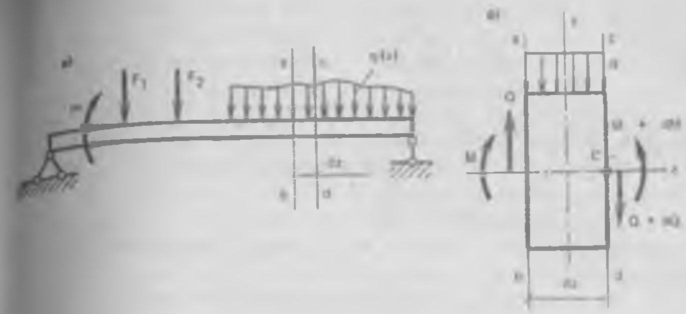


Рис. 7.15

тяжести C правого сечения, составим второе уравнение равновесия:

$$\Sigma m_C = 0; \quad M + Q dz - q dz \cdot dz/2 - (M + dM) = 0.$$

Приводя подобные члены и пренебрегая третьим слагаемым как бесконечно малой величиной более высокого порядка, получим

$$dM/dz = Q, \tag{7.6}$$

что и требовалось доказать. Из двух дифференциальных зависимостей (7.5) и (7.6) легко вывести третью:

$$d^2 M/dz^2 = -q. \tag{7.7}$$

Зависимости (7.5) — (7.7) значительно упрощают процесс построения эпюр поперечных сил и изгибающих моментов, позволяя не прибегать к составлению аналитических выражений функций $Q(z)$ и $M(z)$.

7.4. Построение эпюр Q и M по характерным точкам (сечениям)

В сложных случаях, когда к балке приложено несколько нагрузок и она имеет несколько участков, построение эпюр целесообразно вести по характерным точкам. Эти точки соответствуют сечениям, совпадающим с границами участков, и сечениям, где изгибающий момент достигает экстремальных значений. При таком способе построения полезно руководствоваться следующими правилами.

1. На *ненагруженных* участках балки эпюра Q представляет собой *прямую, параллельную* оси балки (оси абсцисс), а эпюра M — ***наклонную прямую*** (см. рис. 7.8, 7.10—7.12).

Действительно, если отсутствует распределенная нагрузка, то согласно зависимости (7.5) $dQ/dz = -q = 0$ и $Q = \text{const}$ (уравнение прямой, параллельной оси z). Согласно зависимости (7.6) $dM/dz = Q = \text{const}$, т. е. $M = Q \int dz$. Производя интегрирование с точностью до произвольной постоянной, получаем уравнение наклонной прямой $M = Qz$.

2. На участках с ***равномерно распределенной нагрузкой*** эпюра Q — ***наклонная прямая***, а эпюра M — ***квадратная парабола***, обращенная выпуклостью в сторону действия нагрузки (см. рис. 7.9, 7.13). В этом случае $q = \text{const}$ и интегрирование выражений (7.5) и (7.6) с точностью до произвольных постоянных приводит соответственно к уравнению наклонной прямой

$$Q = -q \int dz = -qz$$

и уравнению квадратной параболы

$$M = \int Q dz = -q \int z dz = -qz^2/2.$$

Выпуклость или вогнутость кривой определяется знаком второй производной (7.7).

3. Если на каком-либо участке: а) поперечная сила *положительна*, то изгибающий момент алгебраически *возрастает* (см., например, рис. 7.13, *в, г*); б) поперечная сила *отрицательна*, то изгибающий момент *убывает* (см. рис. 7.11, *г, д*; 7.12, *в, г*); в) поперечная сила ***равна нулю***, то изгибающий момент имеет *постоянное* значение и балка подвергается на этом участке *чистому изгибу* (см. рис. 7.10, *в, г*; 7.14, *в, г*).

Это правило следует из математического определения возрастающих и убывающих функций. Функция $M(z)$ возрастает, когда ее первая производная $dM/dz = Q$ больше нуля, и убывает, когда производная меньше нуля. Постоянная функция имеет нулевую производную.

При используемом принципе построения эпюры M (положительные ординаты — вниз, отрицательные — вверх) возрастающим моментам соответствуют линии, *нисходящие* слева направо, убывающим — *восходящие* слева направо.

4. Если на каком-либо участке эпюра Q при непрерывном изменении проходит через *нулевое* значение (пересекает базисную линию), то изгибающий момент в соответствующем сечении имеет *экстремальное* (максимальное или минимальное) значение на данном участке (см. рис. 7.9, *в, г*) и касательная к эпюре M параллельна базисной линии (оси балки).

Это правило основано на известном из математики признаке наибольшего (максимум) и наименьшего (минимум) значений функции, которые объединяются термином «экстремум». Если производная $dM/dz = Q = 0$, то функция $M(z) = M_{max}$ в том случае, когда Q переходит от знака «плюс» к знаку «минус», и $M(z) = M_{min}$, когда Q переходит от знака «минус» к знаку «плюс».

5. В сечении под *сосредоточенной силой* эпюра Q имеет *скачок*, равный приложенной силе, эпюра M — *излом*, острие которого обращено в сторону действия силы (см. рис. 7.8, 7.10).

В отношении эпюры Q это правило вытекает из общего принципа определения поперечной силы (см. п. 7.2). Как только, мысленно перемещаясь вдоль балки, минуем точку приложения сосредоточенной силы, последняя войдет в алгебраическую сумму учитываемых внешних сил. При перемещении слева направо направления скачка и силы совпадают, при перемещении справа налево они противоположны.

В отношении эпюры M сформулированное правило является следствием того, что производная $dM/dz = Q$ в рассматриваемой точке терпит разрыв.

6. В сечении, где приложен *сосредоточенный момент*, *эпюра M* имеет *скачок*, равный значению этого момента. Направление скачка соответствует принятому правилу знаков изгибающего момента. Эпюра Q проходит через указанное сечение без изменения, поскольку не меняется алгебраическая сумма левых (или правых) сил. Таким образом, угол наклона эпюры M к базисной линии остается постоянным (см. рис. 7.11).

Пример 7.8. Построить эпюры Q и M для свободно лежащей балки пролетом $l = 8$ м, на которую действует нагрузка интенсивностью $q = 12$ кН/м, равномерно распределенная по левой части пролета $a = 5$ м (рис. 7.16, *а*).

Решение. *Определение опорных реакций*:

$$\Sigma m_B = 0; \quad V_A l - qa(a/2 + b) = 0;$$

$$V_A = qa(a/2 + b)/l = 12 \cdot 5(5/2 + 3)/8 \text{ кН} = 41{,}25 \text{ кН},$$

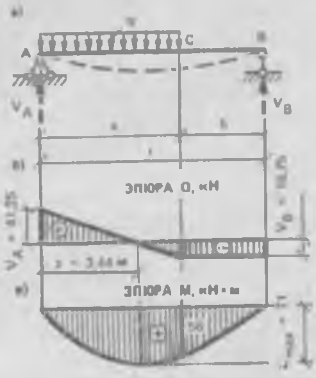


Рис. 7.16

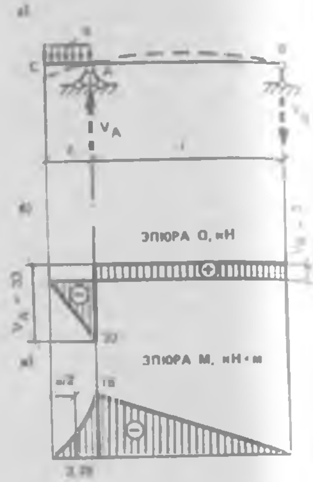


Рис. 7.17

где $b = l - a = 8 - 5$ м $= 3$ м.

$$\Sigma m_A = 0; \quad qa^2/2 - V_B l = 0;$$

$$V_B = qa^2/(2l) = 12 \cdot 5^2/(2 \cdot 8) \text{ кН} = 18,75 \text{ кН}.$$

Проверка. $\Sigma Y = V_A - qa + V_B = 41,25 - 12 \cdot 5 + 18,75 = 0$.

Построение эпюры Q.

$$Q_A = V_A = 41,25 \text{ кН}; \quad Q_C = Q_B = -V_B = -18,75 \text{ кН}.$$

Согласно правилам 2 и 1 на участке AC эпюра Q представляет собой наклонную прямую, на участке CB — прямую, параллельную оси балки (рис. 7.16, *б*), причем на первом участке поперечная сила меняет знак. Определим значение абсциссы z, при котором $Q=0$. Приравнивая нулю аналитическое выражение поперечной силы на участке AC, находим:

$$V_A - qz = 0; \quad z = V_A/q = 41,25/12 \text{ м} = 3,44 \text{ м}.$$

То же значение получится из рассмотрения подобных треугольников, в чем нетрудно убедиться самостоятельно.

Построение эпюры M. На опорах $M_A = M_B = 0$. При направлении справа налево

$$M_C = V_B b = 18,75 \cdot 3 \text{ кН·м} \approx 56 \text{ кН·м}.$$

Согласно упомянутым выше правилам на участке AC эпюра M имеет криволинейное очертание, на участке CB — линейное. Для построения кривой (параболы) найденных значений изгибающего момента недостаточно. Необходимо рассмотреть промежуточное сечение, в качестве которого используем сечение с абсциссой $z = 3,44$ м.

где в соответствии с правилом 4 возникает максимальный изгибающий момент

$$M_{max} = V_A z - qz^2/2 = 41,25 \cdot 3,44 - 12 \cdot 3,44^2/2 \text{ кН·м} \approx 71 \text{ кН·м}.$$

Окончательная эпюра M представлена на рис. 7.16, *в*. Она имеет только положительные ординаты, поскольку балка изгибается по всей длине выпуклостью вниз (см. рис. 7.16, *а*). В точке C, где обрывается распределенная нагрузка, криволинейная часть эпюры плавно переходит в прямолинейную.

Пример 7.9. Построить эпюры Q и M для одноконсольной балки, изображенной на рис. 7.17, *а*. Пролет балки $l=5$ м, вылет консоли $a=1$ м. Интенсивность равномерно распределенной нагрузки $q=$ $=30$ кН/м.

Решение. *Определение опорных реакций.* Нагрузка на консоли стремится оторвать балку от опоры B и прижать к опоре A. Поэтому реакция V_B направлена вертикально вниз, а V_A — вверх. Составляя уравнения равновесия, находим:

$$\Sigma m_B = 0; \quad -qa(a/2+l) + V_A l = 0;$$

$$V_A = qa(a/2+l)/l = 30 \cdot 1(1/2+5)/5 \text{ кН} = 33 \text{ кН}.$$

$$\Sigma m_A = 0; \quad -qa \cdot a/2 + V_B l = 0;$$

$$V_B = qa^2/(2l) = 30 \cdot 1^2/(2 \cdot 5) \text{ кН} = 3 \text{ кН}.$$

Проверка. $\Sigma Y = -qa + V_A - V_B = -30 \cdot 1 + 33 - 3 = 0.$

Построение эпюры Q. Согласно правилам 2 и 1 поперечная сила на консоли меняется по линейному закону, а в пролете постоянна:

$$Q_C = 0; \quad Q_A^{\text{лев}} = -qa = -30 \cdot 1 \text{ кН} = -30 \text{ кН};$$

$$Q_A^{\text{пр}} = Q_B = V_B = 3 \text{ кН}.$$

Эпюра Q представлена на рис. 7.17, *б*. В опорном сечении A она скачком меняет свой знак, причем скачок равен реакции V_A и направлен вверх (если перемещаться слева направо, см. правило 5).

Построение эпюры M. Согласно указанным правилам изгибающий момент меняется по параболическому закону на консоли и по линейному в пролете:

$$M_C = M_B = 0; \quad M_A = -qa^2/2 = -30 \cdot 1^2/2 \text{ кН·м} = -15 \text{ кН·м}.$$

Для построения параболы необходимо промежуточное значение момента в середине консоли

$$M_{\text{ср}} = -q(a/2)^2/2 = -qa^2/8 = -30 \cdot 1^2/8 \text{ кН·м} = -3,75 \text{ кН·м}.$$

Эпюра M показана на рис. 7.17, *в*. Опасным является опорное сечение A, где изгибающий момент достигает наибольшего абсолютного значения $M_{max} = |M_A| = 15$ кН·м. В соответствующей точке эпюры имеется излом, направленный острием вверх, в сторону действия реакции. Эпюра по всей длине отрицательна, поскольку изогнутая ось балки обращена выпуклостью вверх (см. рис 7.17, *а*).

Рассмотренный пример наглядно подтверждает правило 3. На консоли поперечная сила отрицательна и поэтому изгибающий момент убывает от нуля на свободном конце до значения -15 кН·м на опоре A. В пролете поперечная сила положительна и изгибающий момент возрастает от указанного значения до нуля на опоре B.

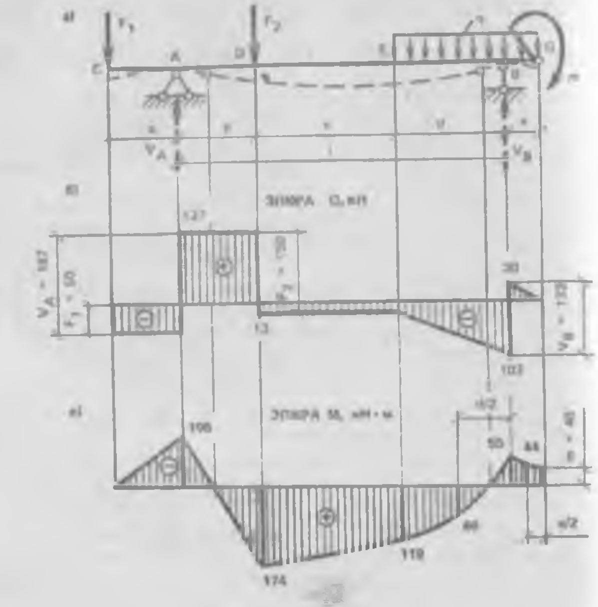


Рис. 7.18

Пример 7.10. Построить эпюры Q и M для двухконсольной балки, к которой приложены сосредоточенные силы $F_1=50$ кН, $F_2=150$ кН; равномерно распределенная нагрузка интенсивностью $q=30$ кН/м и сосредоточенный момент $m=40$ кН·м (рис. 7.18, *а*). Нагрузки разбивают балку на участки длиной $a=b=2$ м, $c=4$ м, $d=3$ м, $e=1$ м.

Решение. *Определение опорных реакций.* Предполагаем, что реакции направлены вверх. Составляя уравнения равновесия, получаем:

$$\Sigma m_B = 0; \qquad -F_1(a+l)+V_A l - F_2(c+d) - $$
$$- q(d+e)[(d+e)/2-e]+m=0;$$
$$V_A = \{F_1(a+l)+F_2(c+d)+q[(d+e)(d-e)]/2-m\}/l =$$
$$= \{50(2+9)+150(4+3)+(30/2)(3+1)(3-1)-40\}/9 \text{ кН} =$$
$$= 187 \text{ кН},$$

где пролет балки $l=b+c+d=2+4+3$ м $=9$ м.

$$\Sigma m_A = 0; \qquad -F_1 a + F_2 b + q(d+e)[(d+e)/2+c+b] -$$
$$- V_B l + m = 0;$$
$$V_B = \{-F_1 a + F_2 b + q(d+e)[(d+e)/2+c+b]+m\}/l =$$
$$= \{-50\cdot 2+150\cdot 2+30(3+1)[3+1)/2+4+2]+$$
$$+40\}/9 \text{ кН} = 133 \text{ кН}.$$

Проверка. $\Sigma Y = -F_1+V_A-F_2-q(d+e)+V_B = -50+187-150-30(3+1)+133=0$

Построение эпюры Q. Перемещаясь от левого свободного конца балки, находим:

$$Q_C = Q_A^{\text{лев}} = -F_1 = -50 \text{ кН};$$
$$Q_A^{\text{пр}} = Q_D^{\text{лев}} = Q_A^{\text{лев}} + V_A = -50+187 \text{ кН} = 137 \text{ кН};$$
$$Q_D^{\text{пр}} = Q_D^{\text{лев}} - F_2 = 137-150 \text{ кН} = -13 \text{ кН}.$$

Остальные значения поперечной силы удобнее получить через правые силы:

$$Q_G = 0; \qquad Q_B^{\text{пр}} = qe = 30\cdot 1 \text{ кН} = 30 \text{ кН};$$
$$Q_B^{\text{лев}} = Q_B^{\text{пр}} - V_B = 30-133 \text{ кН} = -103 \text{ кН};$$
$$Q_E = Q_B^{\text{лев}} + qd = -103+30\cdot 3 \text{ кН} = -13 \text{ кН}.$$

Последнюю строку можно рассматривать как проверку правильности вычислений, так как получили $Q_E = Q_D^{\text{пр}} = -13$ кН. Действительно, на ненагруженном участке балки поперечная сила должна быть постоянной (правило 1).

Эпюра Q, отвечающая найденным значениям, построена на рис. 7.18, *б*. На участках CA, AD и DE она изображается прямыми, параллельными оси балки согласно указанному правилу, на участках EB и BG — параллельными наклонными прямыми согласно правилу 2. В сечениях C, A, D, B, где приложены сосредоточенные силы, эпюра меняется скачкообразно (правило 5). При перемещении слева направо каждый скачок совпадает с соответствующей силой по размеру и направлению, при перемещении справа налево — совпадает по размеру и противоположен по направлению.

Построение эпюры M. Через левые силы имеем:

$$M_C = 0; \qquad M_A = -F_1 a = -50\cdot 2 \text{ кН·м} = -100 \text{ кН·м};$$
$$M_D = -F_1(a+b)+V_A b = -50(2+2)+187\cdot 2 \text{ кН·м} = 174 \text{ кН·м};$$

через правые силы:

$$M_G = -m = -40 \text{ кН·м};$$
$$M_B = -m - qe^2/2 = -40-30\cdot 1^2/2 \text{ кН·м} = -55 \text{ кН·м};$$
$$M_E = -m - q(e+d)^2/2 + V_B d = -40-30(1+3)^2/2 +$$
$$+133\cdot 3 \text{ кН·м} = 119 \text{ кН·м}.$$

Промежуточные значения для построения параболы:

$$M_{e/2} = -m - q(e/2)^2/2 = -m - qe^2/8 = -40 -$$
$$-30\cdot 1^2/8 \text{ кН·м} \approx -44 \text{ кН·м};$$
$$M_{d/2} = -m - q[e+(d/2)]^2/2 + V_B d/2 =$$
$$= -40-30[1+(3/2)]^2/2+133\cdot 3/2 \text{ кН·м} = 66 \text{ кН·м}.$$

Эпюра M представлена на рис. 7.18, *в*. На участке CA изгибающий момент убывает, на участке AD возрастает, а на участке DE

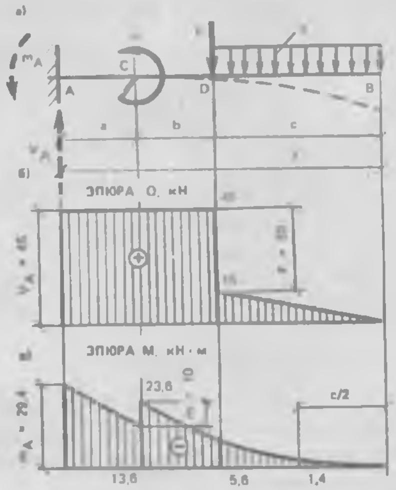


Рис. 7.19

рону действия реакции снова убывает по линейному закону согласно правилам 1 и 3. В точке, соответствующей опорному сечению A, наблюдается излом, направленный острием вверх, в сторону V_A (правило 5). В сечении D излом направлен острием вниз, в сторону действия силы F_2. На участках EB и BG, где действует равномерно распределенная нагрузка, эпюра изображается квадратной параболой (правило 2), претерпевая излом на линии действия опорной реакции V_B (сопряжение на границе участков DE и EB—плавное). В сечении G изгибающий момент скачком падает до нуля, и эпюра принимает, таким образом, замкнутый вид. Скачок равен значению сосредоточенного момента m (правило 6) и направлен вниз (если смотреть слева направо) согласно правилу знаков изгибающего момента.

Эпюра получилась двузначной, следовательно, изогнутая ось балки имеет точки перегиба в сечениях, где изгибающий момент равен нулю (подробнее этот вопрос рассматривается в п. 8.1). Приближенный характер деформирования показан на рис. 7.18, *а*. Опасным является сечение под силой F_2, поскольку в нем возникает наибольший изгибающий момент $M_{max}=M_D=174$ кН·м.

Пример 7.11. Построить эпюры Q и M для консоли, изображенной на рис. 7.19, *а*, приняв $F=30$ кН, $q=20$ кН/м, $m=10$ кН·м; $a=0{,}35$ м, $b=0{,}4$ м, $c=0{,}75$ м.

Решение. *Построение эпюры Q*. Перемещаясь от свободного конца к заделке, находим:

$$Q_B=0; \quad Q_D^{\text{пр}}=qc=20\cdot 0{,}75 \text{ кН}=15 \text{ кН};$$

$$Q_D^{\text{лев}}=Q_D^{\text{пр}}+F=15+30 \text{ кН}=45 \text{ кН};$$

$$Q_C=Q_A=Q_D^{\text{лев}}=45 \text{ кН}=V_A.$$

Эпюра Q приведена на рис. 7.19, *б*. В пределах участка BD поперечная сила меняется по линейному закону (правило 2). В сечении D на эпюре наблюдается скачок, соответствующий сосредоточенной силе F (правило 5). При выбранном направлении (справа налево) скачок отложен вверх, «навстречу» силе.

На участке DA поперечная сила имеет постоянное значение (правило 1), не меняющееся в сечении C, где приложен сосредоточенный момент m (правило 6).

Построение эпюры M (рис. 7.19, *в*) производим по следующим значениям:

$$M_B = 0; \quad M_D = -qc^2 = -20 \cdot 0{,}75^2/2 \text{ кН·м} = -5{,}6 \text{ кН·м};$$

$$M_C^{\text{пр}} = -qc(c/2 + b) - Fb = -20 \cdot 0{,}75(0{,}75/2 + 0{,}4) -$$

$$- 30 \cdot 0{,}4 \text{ кН·м} = -23{,}6 \text{ кН·м};$$

$$M_C^{\text{лев}} = M_C^{\text{пр}} + m = -23{,}6 + 10 \text{ кН·м} = -13{,}6 \text{ кН·м};$$

$$M_A = -qc(c/2 + b + a) - F(b + a) + m = -20 \cdot 0{,}75(0{,}75/2 +$$

$$+ 0{,}4 + 0{,}35) - 30(0{,}4 + 0{,}35) + 10 \text{ кН·м} = -29{,}4 \text{ кН·м}.$$

Согласно эпюре Q на участке BD изгибающий момент меняется по квадратичному закону. Для построения параболы необходимо промежуточное значение:

$$M_{c/2} = -q(c/2)^2/2 = -qc^2/8 = -20 \cdot 0{,}75^2/8 \text{ кН·м} = -1{,}4 \text{ кН·м}.$$

В сечении D имеется излом, направленный острием вниз, в сторону действия силы F. На участках DC и CA момент изменяется по линейному закону, причем угол наклона ветвей эпюры M к базисной линии остается постоянным. В сечении C, где приложен сосредоточенный момент m, ордината эпюры скачком меняется в соответствии со значением этого момента. При направлении справа налево скачок отложен вниз, в сторону положительных ординат, поскольку указанный внешний момент вызывает положительный изгибающий момент. В целом же эпюра M получилась отрицательной, так как консоль изгибается по всей длине выпуклостью вверх (см. рис. 7.19, *а*).

Опасным является сечение в заделке, где возникает наибольший по абсолютному значению изгибающий момент $M_{max} = |M_A| = 29{,}4$ кН·м.

Определение опорных реакций. Положительная эпюра Q свидетельствует о том, что реактивная сила $V_A = Q_A = 45$ кН направлена вверх. Реактивный момент $m_A = |M_A| = 29{,}4$ кН·м направлен против хода часовой стрелки согласно характеру деформирования балки.

7.5. Нормальные напряжения при изгибе

Итак, при прямом поперечном изгибе в сечениях балки возникают два внутренних силовых фактора: изгибающий момент M и поперечная сила Q. Расчетная практика показывает, что изгибающий момент в большинстве случаев имеет решающее значение при подборе сечения и проверке прочности балок.

Для выяснения характера распределения и значения напряжений, вызываемых изгибающим моментом, обратимся к случаю чистого изгиба, который встретился в примере 7.3 (см. рис. 7.10). На среднем участке балки, нагруженной двумя одинаковыми, равноотстоящими от опор сосредоточенными силами, поперечная сила равна нулю и возникает только изгибающий момент M_x.

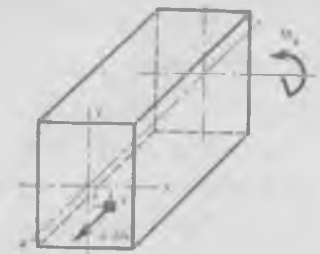


Рис. 7.20

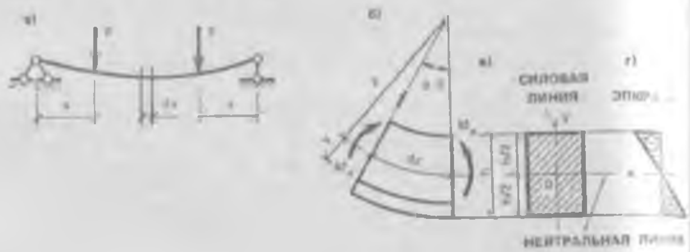


Рис. 7.21

В нагруженном состоянии балка прогибается так, что ее нижние волокна удлиняются, а верхние укорачиваются, т. е. изгиб сопровождается появлением **нормальных** напряжений. При постепенном переходе от удлиняющихся волокон к укорачивающимся (или наоборот) встречается промежуточный слой волокон, которые не меняют своей длины. Этот слой называется *нейтральным*, а линия его пересечения с плоскостью поперечного сечения балки — *нейтральной линией* или *осью* (ось x на рис. 7.2). Следовательно, нейтральная линия является геометрическим местом точек, в которых нормальные напряжения равны нулю.

Изгибающий момент представляет собой результирующий момент внутренних нормальных сил σdA, возникающих на бесконечно малых площадках поперечного сечения балки (рис. 7.20), и может быть выражен в интегральном виде

$$M_x = \int_A \sigma y \, dA, \qquad (7.8)$$

где y — плечо элементарной силы относительно оси x.

Формула (7.8) отражает **статическую** сторону задачи об изгибе прямого бруса, но она не позволяет определить нормальные напряжения по известному изгибающему моменту, пока не установлен закон их распределения по сечению. Поэтому необходимо рассмотреть балку в деформированном состоянии.

При чистом изгибе вводится гипотеза плоских сечений, сформулированная в п. 2.2, а также допущение о ненадавливании волокон друг на друга. Подобное упрощение вполне приемлемо для областей, удаленных от мест приложения сосредоточенных нагрузок.

Двумя бесконечно близкими сечениями выделим на указанном участке балки элемент длиной dz (рис. 7.21, *а*) и изобразим его в укрупненном масштабе (рис. 7.21, *б*). Будучи параллельными друг другу до деформации, оба сечения взаимно повернутся вокруг своих нейтральных линий на угол $d\theta$ после приложения нагрузки. Длина отрезка волокон нейтрального слоя при этом не изменится

$$dz = \rho d\theta, \qquad (7.9)$$

где ρ — радиус кривизны изогнутой оси балки.

Любое другое волокно, лежащее выше или ниже нейтрального слоя, изменит свою длину. Так, относительное удлинение волокон, отстоящих от нейтрального слоя на расстоянии y, согласно формуле (2.2) и зависимости (7.9) составляет

$$\varepsilon = \Delta(dz)/dz = [(\rho + y)\,d\theta - dz]/dz =$$
$$= [(\rho + y)\,d\theta - \rho d\theta]/(\rho d\theta),$$

или после сокращения на $d\theta$ и приведения подобных членов

$$\varepsilon = y/\rho. \qquad (7.10)$$

Эта зависимость выражает **геометрическую** сторону задачи о чистом изгибе: *деформации волокон пропорциональны их расстояниям до нейтрального слоя.* Осталось перейти от деформаций к напряжениям, т. е. рассмотреть **физическую** сторону. В соответствии с допущением о ненадавливании волокон используем выражение закона Гука (2.4) при осевом растяжении (сжатии). После подстановки в него зависимости (7.10) получаем

$$\sigma = Ey/\rho, \qquad (7.11)$$

т. е. нормальные напряжения изменяются по высоте сечения *линейно*.

Подставляя в свою очередь формулу (7.11) в уравнение (7.8) и вынося за знак интеграла дробь E/ρ как постоянную величину, имеем

$$M_x = (E/\rho)\int_A y^2\,dA,$$

или с учетом выражений (5.5)

$$M_x = EJ_x/\rho,$$

откуда

$$1/\rho = M_x/(EJ_x), \qquad (7.12)$$

где $1/\rho$ — кривизна изогнутой оси балки; EJ_x — *жесткость сечения балки при изгибе.*

Подставляя, наконец, полученное выражение кривизны в формулу (7.11), приходим к искомой зависимости

$$\sigma = (M_x/J_x)\,y, \qquad (7.13)$$

которая позволяет вычислять нормальные напряжения при чистом изгибе балки в любой точке ее поперечного сечения. Изгибающий момент M_x и координату y удобнее всего брать по абсолютному значению, а знак напряжений устанавливать из характера деформирования балки (при растяжении — «плюс», при сжатии — «минус»), т. е. по эпюре M, ординаты которой, как условились, откладываются со стороны растянутых волокон. Нетрудно убедиться, что максимальные напряжения возникают в точках, наиболее удаленных от нейтральной линии.

При поперечном изгибе действуют не только нормальные, но и касательные напряжения ($Q \neq 0$). Последние усложняют картину деформирования, приводя к искривлению поперечных сечений балки, в результате чего нарушается гипотеза плоских сечений. Однако исследования показывают, что искажения, вносимые касательными напряжениями, незначительно влияют на нормальные, подсчитанные по формуле (7.13). Таким образом, при определении нормальных напряжений в случае поперечного изгиба вполне применима теория чистого изгиба.

Интерес представляет вопрос о положении нейтральной линии. Согласно интегральному выражению (2.1) и ввиду отсутствия при изгибе продольной силы можно записать

$$N = \int_A \sigma\,dA = 0.$$

Подставляя сюда выражение нормальных напряжений (7.11), получаем

$$E/\rho \int_A y\,dA = 0.$$

Так как $E \neq 0$ (материал балки обладает определенной жесткостью) и $\rho \neq \infty$ (изогнутая ось балки имеет конечный радиус кривизны), остается положить, что

$$\int_A y\,dA = 0.$$

Этот интеграл представляет собой статический момент площади поперечного сечения балки относительно нейтральной линии [оси x, см. формулы (5.1)]. Он равен нулю, следовательно, *нейтральная линия проходит через центр тяжести сечения* (рис. 7.21, *в*).

Условие $M_y = 0$ (отсутствие момента внутренних сил относительно силовой линии) дает

$$\int_A \sigma\,dAx = (E/\rho)\int_A yx\,dA = 0,$$

и по тем же соображениям

$$\int_A xy\,dA = 0,$$

т. е. центробежный момент инерции площади сечения относительно осей x и y [см. формулу (5.8)] равен нулю. Таким образом, эти оси являются главными центральными, которые, как установлено в п. 5.4, составляют прямой угол. Следовательно, *силовая и нейтральная линии при прямом изгибе взаимно перпендикулярны.*

Установив положение нейтральной линии, нетрудно построить эпюру нормальных напряжений по высоте сечения (рис. 7.21, *г*). Ее линейный характер определяется уравнением первой степени (7.13).

7.6. Расчет балок на прочность по нормальным напряжениям

Если сечение балки симметрично относительно нейтральной линии (см. рис. 7.21, *в*), то напряжения в крайних волокнах (при $y = |y|_{max}$)

$$\sigma = (M_x/J_x)\,y_{max} = M_x/W_x, \qquad (7.14)$$

где

$$W_x = J_x/y_{max}. \qquad (7.15)$$

Эта геометрическая характеристика называется *осевым моментом сопротивления* сечения. Она играет при изгибе такую же роль, как полярный момент сопротивления при кручении круглого бруса [см. формулу (6.9)], и имеет размерность длины в третьей степени.

Для прямоугольного сечения (см. рис. 5.4) согласно выражениям (5.9) и (5.10)

$$W_x = \frac{bh^3/12}{h/2} = bh^2/6; \qquad (7.16)$$

$$W_y = hb^2/6. \qquad (7.17)$$

Для круга (см. рис. 5.6) в соответствии с формулой (5.15)

$$W_x = W_y = \frac{\pi D^4/64}{D/2} = \pi D^3/32 \approx 0,1D^3. \qquad (7.18)$$

Симметричными проектируют балки из материалов, одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию (сталь, древесина). Условие прочности для них имеет вид

$$\sigma_{max} = M_{max}/W_{net} \leqslant R\gamma_c, \qquad (7.19)$$

где M_{max} — наибольший по абсолютному значению расчетный изгибающий момент, т. е. момент в опасном сечении балки от расчетных нагрузок, Н·м; W_{net} — момент сопротивления сечения нетто (с учетом ослаблений) относительно нейтральной линии, м³; R — расчетное сопротивление материала балки растяжению (сжатию) при изгибе, Па (МПа); γ_c — коэффициент условий работы балки.

Неравенство (7.19), как и любое условие прочности, позволяет производить три вида расчета.

1. *Проверка прочности* балки по известным размерам ее поперечного сечения (а следовательно, моменту сопротивления W_{net}), максимальному изгибающему моменту M_{max} и расчетному сопротивлению R, используя непосредственно указанное неравенство.

2. *Подбор сечения* по найденному моменту M_{max} и заданному расчетному сопротивлению R:

$$W \geqslant M_{max}/(R\gamma_c). \qquad (7.19а)$$

3. *Определение эксплуатационной способности* (предельного изгибающего момента) по известным размерам поперечного сечения и расчетному сопротивлению R:

$$M \leqslant R\gamma_c W_{net}. \qquad (7.19б)$$

Необходимо иметь в виду, что подбор сечения при изгибе существенно отличается от подбора при осевом растяжении, который благодаря равномерному распределению напряжений сводится к определению лишь

требуемой площади, а форма сечения принимается исключительно по конструктивным соображениям.

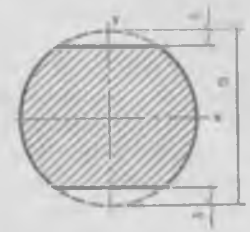


Рис. 7.22

При изгибе форма сечения играет существенную роль, поскольку прочность балки характеризуется значением момента сопротивления, зависящим как от размеров, так и от очертания сечения. Можно получить большой момент сопротивления при малой площади и, наоборот, малый момент — при большой площади. Совершенно очевидно, что первый вариант выгоднее с точки зрения более благоприятной работы на изгиб и расхода материала, хотя он и не всегда возможен конструктивно.

Таким образом, *рациональны те формы поперечного сечения, у которых основная часть площади удалена как можно дальше от нейтральной линии.* Этому условию в первую очередь удовлетворяют балки двутаврового сечения (см. рис. 5.11): у них основная масса материала сконцентрирована в удаленных от нейтрального слоя полках.

Менее выгодно прямоугольное сечение, особенно вытянутое вдоль нейтральной линии [$W_y < W_x$, см. формулы (7.17) и (7.16)]. Еще менее выгодно круговое сечение, так как оно имеет наибольшую толщину на уровне нейтральной линии. Однако момент сопротивления сплошного круга увеличивается на 0,7 %, если срезать сегменты высотой $\delta = 0,011\,D$ (рис. 7.22). Это обстоятельство используют в деревянных балках. Объясняется оно тем, что момент сопротивления есть частное от деления момента инерции на половину высоты сечения. При срезании сегментов в указанных пределах момент инерции убывает в меньшей степени, чем высота. Следовательно, момент сопротивления возрастает и напряжения в наиболее удаленных волокнах падают, несмотря на некоторое уменьшение площади поперечного сечения.

Полое сечение (см. рис. 5.7, 5.8) всегда выгоднее сплошного, равноценного по площади. При этом необходимо иметь в виду, что осевой момент сопротивления сложного сечения (как и полярный, см. п. 6.3) не равен алгебраической сумме моментов сопротивления составляющих фигур. По определению он равен алгебраической сумме осевых моментов инерции указанных фигур (в данном случае — арифметической разности), деленной на расстояние до наиболее удаленных волокон. В частности, для кольцевого сечения (круглая труба) согласно формулам (7.15) и (5.18)

$$W_x = W_y = \frac{J_x}{D/2} = \frac{\pi D^4/64}{D/2}(1-\alpha^4) = (\pi D^3/32)(1-\alpha^4) \approx$$
$$\approx 0{,}1D^3(1-\alpha^4). \qquad (7.20)$$

Аналогично для коробчатого сечения (прямоугольная труба, см. рис. 5.8) на основании выражений (5.19) и (5.20)

$$W_x = \frac{BH^3/12 - bh^3/12}{H/2} = \frac{BH^3 - bh^3}{6H}; \qquad (7.21)$$

$$W_y = \frac{HB^3 - hb^3}{6B}. \qquad (7.22)$$

При проектировании металлических балок широко применяют прокатные профили, изготовляемые на металлургических заводах в соответствии с требованиями ГОСТов. Для облегчения подбора их сечений составлены, как отмечалось в п. 2.10, таблицы сортамента, содержащие геометрические размеры каждого профиля, площадь поперечного сечения, линейную плотность (массу 1 м длины), значения моментов инерции, сопротивления и т. д. Выборочный сортамент стальных прокатных двутавров, швеллеров и уголков приведен в приложении.

Основным балочным прокатным профилем является двутавр. Различают двутавры обыкновенные и широкополочные. Первые применяются давно и пока в строительстве более распространены. Согласно ГОСТ 8239—72 они имеют уклон внутренних граней полок и нумеруются в соответствии с высотой профиля h, выраженной в сантиметрах (наибольший профилеразмер — № 60, см. табл. 1 приложения). Широкополочные двутавры (ГОСТ 26020—83) начали прокатывать в конце 70-х годов. Они имеют параллельные грани полок, что облегчает крепление примыкающих деталей. Высота сечения колеблется в пределах 20—100 см при отношении к ширине полок b от 1,65 : 1 (для малых высот) до 1,25 : 1 (для больших высот). Помимо конструктивных преимуществ широкополочные двутавры отличает бо́льшая экономичность.

Поэтому по мере расширения их производства применение обычных двутавровых балок в строительстве будет постепенно сокращаться.

Цельные деревянные балки имеют круговое сечение (бревна) или квадратное, прямоугольное и другие сечения, получаемые в результате продольной распиловки бревен (см., например, рис. 7.22). Строительные бревна имеют диаметр 14 см и более с градацией через 2 см. Рекомендуемый сортамент пиломатериалов также приведен в приложении.

Для балок из хрупких материалов, т. е. материалов, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию, целесообразны сечения, не симметричные относительно нейтральной линии: тавровое (см. рис. 5.3), асимметричное двутавровое (с полками разной ширины) и др. В этом случае приходится отдельно проверять наибольшие напряжения в растянутой зоне балки и отдельно — в сжатой. Таким образом, условие прочности (7.19) распадается на два:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{t\max} &= (M_{\max}/J_{net})\,y_t < R_t\,\gamma_c; \\ |\sigma_c|_{\max} &= (M_{\max}/J_{net})\,y_c < R_c\,\gamma_c, \end{aligned}\right\} \qquad (7.23)$$

где J_{net} — момент инерции площади сечения нетто относительно нейтральной линии, м⁴; y_t и y_c — расстояния от нейтральной линии до наиболее удаленных точек соответственно растянутой и сжатой зон асимметричного поперечного сечения, м.

В целях рационального использования материала следует стремиться к тому, чтобы указанные расстояния были прямо пропорциональны одноименным расчетным сопротивлениям: $y_t/y_c = R_t/R_c$. Иллюстрацией могут служить балки, изображенные на рис. 7.23. В первом случае (см. рис. 7.23, *а*) растянуты нижние волокна, поэтому тавровое сечение должно быть ориентировано полкой вниз. Во втором случае (см. рис. 7.23, *б*) растянуты верхние волокна и сечение следует располагать полкой вверх.

Пример 7.12. Стальная балка из прокатного двутавра № 20 длиной $l = 4$ м свободно лежит на двух опорах и несет временную равномерно распределенную нагрузку интенсивностью $q_{1n} = 20$ кН/м с коэффицентом надежности $\gamma_{f1} = 1{,}2$ и собственный вес q_{2n} с коэффициентом $\gamma_{f2} = 1{,}05$.

Проверить прочность балки, если расчетное сопротивление стали $R = 240$ МПа. Условия работы — нормальные.

Решение. Расчетная нагрузка на 1 м длины балки (см. рис. 7.23, *а*) согласно формулам (2.21) составляет

$$q = q_{1n}\,\gamma_{f1} + q_{2n}\,\gamma_{f2} = 20\cdot 1{,}2 + 0{,}206\cdot 1{,}05 \text{ кН/м} =$$
$$= 24 + 0{,}22 \text{ кН/м} = 24{,}22 \text{ кН/м}.$$

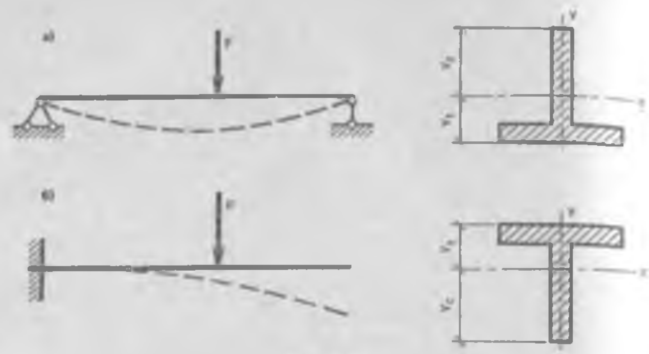


Рис. 7.23

Нормативный вес балки принят по табл. 1 приложения исходя из линейной плотности двутавра $\rho_l = 21$ кг/м и ускорения свободного падения $g = 9{,}81$ м/с²:

$$q_{2n} = \rho_l g = 21 \cdot 9{,}81 \text{ кг}\cdot\text{м}/(\text{м}\cdot\text{с}^2) = 206 \text{ Н/м} = 0{,}206 \text{ кН/м}.$$

Влияние собственного веса незначительно по сравнению с полезной нагрузкой ($q_{2n} \approx 0{,}01 q_{1n}$) и им можно пренебречь. Наибольший расчетный изгибающий момент по формуле (7.2) примера 7.2

$$M_{max} = ql^2/8 = 24{,}22 \cdot 4^2/8 \text{ кН}\cdot\text{м} = 48{,}44 \text{ кН}\cdot\text{м} = 48{,}44 \cdot 10^3 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Момент сопротивления сечения двутавра № 20 согласно той же таблице составляет $W_x = 184$ см³ $= 184 \cdot 10^{-6}$ м³.

Нормальные напряжения по формуле (7.19)

$$\sigma_{max} = M_{max}/W_x = 48{,}44 \cdot 10^3/(184 \cdot 10^{-6}) \text{ Па} =$$
$$= 263 \cdot 10^6 \text{ Па} = 263 \text{ МПа} > R = 240 \text{ МПа},$$

т. е. прочность балки не обеспечена и необходимо увеличить сечение. Требуемый момент сопротивления по формуле (7.19а)

$$W_x \geqslant M_{max}/R = 48{,}44 \cdot 10^3/(240 \cdot 10^6) \text{ м}^3 =$$
$$= 202 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 202 \text{ см}^3.$$

Принимаем двутавр № 20а[1] с $W_x = 203$ см³ > 202 см³.

Пример 7.13. Подобрать прямоугольное сечение деревянных балок чердачного перекрытия сельскохозяйственного здания временного назначения шириной $l = 6$ м (см. рис. 1.10, *б*).

Балки *1*, уложенные с шагом $a = 1{,}2$ м (рис. 7.24), несут постоянную нагрузку от веса наката из горбыля *2* интенсивностью $p_{1n} =$

[1] Для двутавров № 18—30 ГОСТ 8239—72 предусматривает серию «а» (с более широкими и толстыми полками при той же толщине стенки), но ориентироваться на нее рекомендуется только в учебных расчетах, поскольку серийные профили не нашли практического применения и поэтому не освоены металлургическими заводами. То же относится к двутавру № 33.

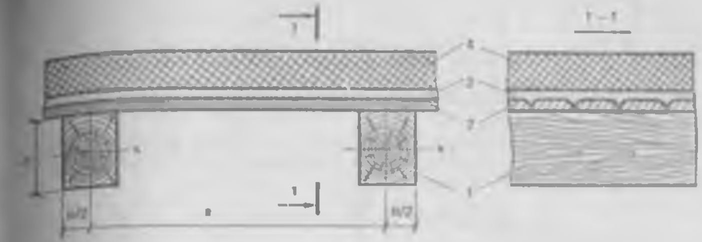


Рис. 7.24

$= 0{,}2$ кН/м², выравнивающего слоя *3* — $p_{2n} = 0{,}4$ кН/м², утеплителя *4* — $p_{3n} = 0{,}65$ кН/м², а также временную нагрузку на перекрытие интенсивностью $p_n = 1$ кН/м². Соответствующие коэффициенты надежности: $\gamma_{f1} = 1{,}1$; $\gamma_{f2} = \gamma_{f3} = 1{,}2$; $\gamma_{fp} = 1{,}4$. Расчетное сопротивление древесины $R = 15$ МПа. Условия работы — нормальные. Собственным весом балок пренебречь.

В качестве возможного конструктивного решения рассмотреть балки, выполненные из бревен. Сравнить оба варианта по расходу материала.

Решение. *Подсчет нагрузок.* Интенсивность расчетной нагрузки на одну балку согласно формулам (1.1) и (2.21)

$$q = [p_{1n}\gamma_{f1} + (p_{2n} + p_{3n})\gamma_{f2} + p_n\gamma_{fp}]a =$$
$$= [0{,}2 \cdot 1{,}1 + (0{,}4 + 0{,}65)1{,}2 + 1 \cdot 1{,}4]1{,}2 \text{ кН/м} = 3{,}46 \text{ кН/м}.$$

Подбор сечения. Балки, опираясь на стены здания, работают по схеме, рассмотренной в примере 7.2 (см. рис. 7.9). Наибольший расчетный изгибающий момент

$$M_{max} = ql^2/8 = 3{,}46 \cdot 6^2/8 \text{ кН}\cdot\text{м} = 15{,}6 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Требуемый момент сопротивления сечения балки согласно неравенству (7.19а)

$$W_x \geqslant \frac{M_{max}}{R/\gamma_n} = \frac{15{,}6 \cdot 10^3}{15 \cdot 10^6/0{,}9} \text{ м}^3 = 936 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 936 \text{ см}^3.$$

Здесь коэффициент надежности по назначению $\gamma_n = 0{,}9$ учитывает категорию (класс ответственности) рассчитываемого объекта (см. п. 2.12).

Задаваясь в соответствии с табл. 5 приложения шириной $b = 15$ см, на основании формулы (7.16) находим требуемую высоту прямоугольного сечения

$$h \geqslant \sqrt{6W_x/b} = \sqrt{6 \cdot 936/15} \text{ см} = 19{,}4 \text{ см}.$$

Округляя до ближайшего табличного значения, принимаем $h = 20$ см. Если предусмотреть балки из круглых бревен, то согласно выражению (7.18)

$$0{,}1D^3 \geqslant W_x,$$

откуда

$$D > \sqrt[3]{10W_x} = \sqrt[3]{10\cdot 936}\ \text{см} = 21{,}1\ \text{см}.$$

Округляя до ближайшего четного значения в бóльшую сторону, принимаем $D=22$ см.

Сравнение вариантов. О расходе материала можно судить по площади поперечного сечения подобранных балок. В случае прямоугольных брусьев

$$A_1 = bh = 15\cdot 20\ \text{см}^2 = 300\ \text{см}^2,$$

в случае бревен

$$A_2 = \pi D^2/4 = 3{,}14\cdot 22^2/4\ \text{см}^2 = 380\ \text{см}^2.$$

Таким образом, балки прямоугольного сечения экономичнее по затрате древесины на

$$\Delta A = \frac{A_2 - A_1}{A_1}100 = \frac{380-300}{300}100\% = 27\%.$$

7.7. Касательные напряжения при поперечном изгибе и их проверка

Для определения касательных напряжений можно вновь обратиться к свободно лежащей на двух опорах балке, нагруженной двумя равными сосредоточенными силами, отстоящими на одинаковых расстояниях от опор (см. рис. 7.10). Только теперь следует рассмотреть не средний, а крайние участки балки, где поперечная сила не равна нулю.

Задача по определению напряжений всегда статически неопределима и требует привлечения геометрических и физических уравнений. Однако можно принять такие гипотезы о характере распределения напряжений, что задача станет статически определимой.

Двумя бесконечно близкими поперечными сечениями ac и ef выделим на одном из крайних участков (например, левом) элемент длиной dz, изобразим его в крупном масштабе (рис. 7.25), а затем проведем продольное сечение mn, образовав в конечном итоге элемент $aenm$. По грани am возникают нормальные напряжения, которые согласно формуле (7.13) составляют $\sigma_1 = (M_x/J_x)y$, где M_x — изгибающий момент в соответствующем поперечном сечении балки. Аналогично на грани en $\sigma_2 = [(M_x+dM)/J_x]y$, где dM_x — приращение изгибающего момента на длине dz.

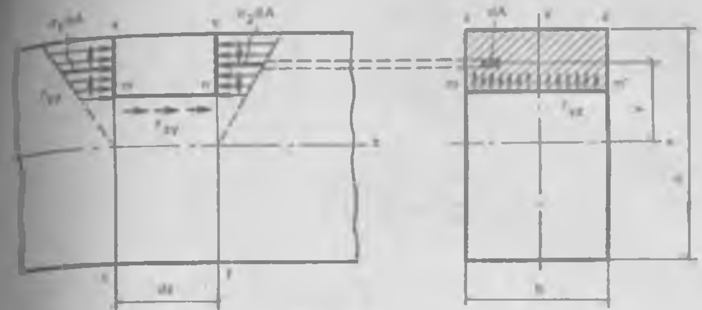


Рис. 7.25

Равнодействующая внутренних продольных сил, распределенных по левой грани:

$$N_1 = \int_{A_0} \sigma_1\,dA = (M_x/J_x)\int_{A_0} y\,dA = (M_x/J_x)S_{x0},$$

где A_0 — площадь отсеченной части поперечного сечения $aa'm'm$; S_{x0} — статический момент отсеченной площади относительно нейтральной линии.

Аналогично на правой грани

$$N_2 = [(M_x + dM_x)/J_x]\,S_{x0}.$$

Обе равнодействующие направлены навстречу друг другу, поскольку элемент $aenm$ находится в сжатой зоне балки. Их разность уравновешивается касательными силами на нижней грани mn.

Предположим, что касательные напряжения τ_{zy} распределены по ширине поперечного сечения балки b равномерно. Такое допущение тем вероятнее, чем меньше ширина по сравнению с высотой сечения h. Тогда равнодействующая касательных сил равна значению напряжений, умноженному на площадь грани: $T = \tau_{zy} b\,dz$.

Составляя уравнение равновесия

$$\Sigma Z = 0; \quad N_1 - N_2 + T = 0,$$

находим $T = N_2 - N_1$, или

$$\tau_{zy}\, b\,dz = [(M_x + dM_x)/J_x]\,S_{x0} - (M_x/J_x)\,S_{x0}.$$

После приведения подобных членов

$$\tau_{zy} = \frac{dM_x/dz}{J_x b} S_{x0}.$$

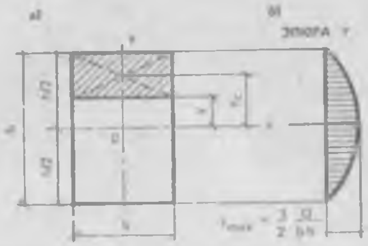


Рис. 7.26

Используя дифференциальную зависимость (7.6), получаем окончательное выражение касательных напряжений в продольных сечениях балки:

$$\tau_{zy} = QS_{x0}/(J_x b). \qquad (7.24)$$

Эта формула была выведена Д. И. Журавским[1] и поэтому часто называется его именем. На основании закона парности касательных напряжений она позволяет определять напряжения и в поперечных сечениях (τ_{yz}).

Для построения эпюры касательных напряжений по высоте балки необходимо установить закон изменения статического момента S_{x0}. В случае прямоугольного сечения (рис. 7.26, *а*) площадь отсеченной (заштрихованной) части $A_0 = b(h/2 - y)$, а расстояние от ее центра тяжести до нейтральной линии

$$y_C = h/2 - {}^1/_2(h/2 - y) = {}^1/_2(h/2 + y).$$

Тогда

$$S_{x0} = A_0 y_C = b(h/2 - y)\,{}^1/_2(h/2 + y) = (b/2)(h^2/4 - y^2) =$$
$$= (b/8)(h^2 - 4y^2). \qquad (7.25)$$

Следует иметь в виду, что принципиально безразлично, брать ли статический момент площади заштрихованной или остальной части поперечного сечения. Оба статических момента равны и противоположны по знаку, поэтому их сумма, представляющая собой статический момент площади всего сечения относительно нейтральной линии (центральной оси x), равна нулю (см. п. 5.1).

[1] Дмитрий Иванович Журавский (1821—1891) — известный русский инженер-мостостроитель и ученый. Он показал, что в некоторых случаях разрушение балок происходит не от разрыва волокон, а от нарушения сопротивления сдвигу.

Подставляя выражение S_{x0} в формулу (7.24), после сокращения на b получаем

$$\tau = [Q/(8J_x)](h^2 - 4y^2), \qquad (7.26)$$

т. е. касательные напряжения в прямоугольном сечении изменяются по закону *квадратной параболы* (переменная y входит во второй степени), достигая максимума на уровне нейтральной линии ($y = 0$):

$$\tau_{max} = \frac{Qh^2}{8bh^3/12} = \frac{{}^3/_2 Q}{bh} = 1{,}5Q/A. \qquad (7.27)$$

Здесь $A = bh$ — площадь всего сечения, а в качестве осевого момента инерции J_x принято значение (5.9).

Формула (7.27) показывает, что наибольшие касательные напряжения в 1,5 раза превышают среднее значение, т. е значение, которое получилось бы в предположении равномерного распределения напряжений по высоте сечения.

При $y = \pm h/2$ (в крайних волокнах) касательные напряжения равны нулю. Соответствующая эпюра построена на рис. 7.26, *б*. Знак касательных напряжений принципиального значения не имеет, и его обычно не указывают.

Условие прочности балки прямоугольного сечения по касательным напряжениям имеет вид:

$$\tau_{max} = \frac{{}^3/_2 Q_{max}}{bh} < R_s \gamma_c, \qquad (7.28)$$

где τ_{max} — максимальное касательное напряжение в опасном сечении балки, Па (МПа); Q_{max} — наибольшая по абсолютному значению расчетная поперечная сила, Н; R_s — расчетное сопротивление материала балки сдвигу (срезу, скалыванию), Па (МПа); γ_c — коэффициент условий работы балки. Остальные обозначения те же, что в формуле (7.27).

Как и ранее рассмотренные условия прочности, неравенство (7.28) позволяет производить известные три вида расчета.

1. *Проверка прочности* производится непосредственно по указанному неравенству.

2. *Подбор ширины сечения* осуществляется по формуле

$$b > \frac{{}^3/_2 Q_{max}}{R_s \gamma_c h}. \qquad (7.28а)$$

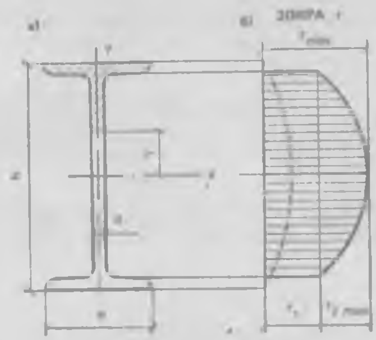


Рис. 7.27

3. *Предельная поперечная сила* определяется из неравенства

$$Q < {}^2/_3 R_s \gamma_c bh. \qquad (7.28б)$$

Допущение о равномерном распределении касательных напряжений по ширине прямоугольного сечения справедливо и для стенки двутавра вследствие ее малой толщины d (рис. 7.27, *а*). Для волокон, лежащих в пределах стенки на произвольном расстоянии y от нейтрального слоя, в формулу (7.24) следует по-прежнему подставлять статический момент площади отсеченной части, а в качестве ширины — толщину стенки.

Разбивая заштрихованную отсеченную часть на два прямоугольника (вертикальный и горизонтальный), имеем

$$\tau = QS_{x0}/(J_x d) = QS_{1x}/(J_x d) + QS_{2x}/J_x d) = \tau_1 + \tau_2.$$

Здесь S_{1x} представляет собой статический момент площади сечения полки относительно нейтральной линии. Он остается постоянным при изменении координаты y в пределах высоты стенки. Величина S_{2x} является статическим моментом площади отсеченной части сечения стенки. С изменением y она меняется по тому же параболическому закону (7.25), что и в прямоугольном сечении. А так как закон изменения величины S_{x0} определяет очертание эпюры касательных напряжений [см. зависимость (7.26)], становится ясным, что эпюра касательных напряжений в стенке двутаврового сечения склазывается из прямоугольной эпюры постоянных напряжений τ_1 и параболической эпюры переменных напряжений τ_2 (рис. 7.27, *б*).

Наибольшие касательные напряжения в симметричном двутавровом сечении должны согласно формуле Журавского удовлетворять условию

$$\tau_{max} = Q_{max} S_x / (J_x d) < R_s \gamma_c, \qquad (7.29)$$

где S_x — статический момент площади половины сечения относительно нейтральной линии, м³ (приводится в сортаменте); J_x — момент инерции площади всего сечения, м⁴ (приводится там же); d — толщина стенки, м. Остальные обозначения те же, что в формуле (7.28).

В месте сопряжения стенки с полкой ширина сечения скачком меняется от величины d до b, поэтому для определения касательных напряжений в волокнах, принадлежащих полкам, в формулу (7.24) формально следовало бы подставить ширину полки b. Тогда получилось бы также параболическое очертание эпюры, которая на рис. 7.27, *б* показана штриховой линией. Однако эта часть эпюры будет носить весьма условный характер, так как допущение о равномерном распределении касательных напряжений по ширине сечения здесь несправедливо и, следовательно, формула Журавского неприменима. На практике эпюру τ_{yz} для двутавровых профилей строят только в пределах стенки.

Пример 7.14. Подобрать сечение прокатной двутавровой балки, расчетная схема которой представлена на рис. 7.18, *а*, и проверить ее прочность на сдвиг.

Расчетное сопротивление стали растяжению (сжатию) при изгибе $R = 240$ МПа, сдвигу $R_s = 140$ МПа. Условия работы—нормальные.

Решение. Сечение подбираем исходя из максимального изгибающего момента $M_{max} = 174$ кН·м (см. рис. 7.18, *в*). По формуле (7.19а) находим

$$W_x \geq M_{max}/R = 174 \cdot 10^3/(240 \cdot 10^6)\ м^3 = 725 \cdot 10^{-6}\ м^3 = 725\ см^3.$$

По табл. 1 приложения принимаем двутавр № 36 с $W_x = 743\ см^3 > 725\ см^3$. Так как подобранное сечение требуется проверить на сдвиг, выписываем из той же таблицы данные, необходимые для подсчета наибольших касательных напряжений: $S_x = 423\ см^3$, $J_x = 13\,380\ см^4$, $d = 0{,}75$ см.

Расчет производим по максимальной поперечной силе $Q_{max} = 137$ кН (см. рис. 7.18, *б*). Пользуясь условием (7.29), получаем

$$\tau_{max} = Q_{max} S_x/(J_x d) = 137 \cdot 10^3 \cdot 423 \cdot 10^{-6}/(13380 \cdot 0{,}75 \cdot 10^{-10})\ Па = 58 \cdot 10^6\ Па = 58\ МПа < R_s = 140\ МПа,$$

т. е. стенка имеет значительный запас прочности на сдвиг.

Пример 7.15. Подобрать размеры прямоугольного поперечного

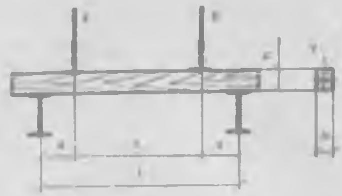


Рис. 7.28

сечения деревянной мостовой поперечины пролетом $l=2,1$ м (рис. 7.28) с отношением сторон $h/b=1,15$.

Расчетные силы давления колес подвижного состава $F=65$ кН, ширина железнодорожной колеи $c=1,524$ м. Расчетное сопротивление древесины растяжению (сжатию) при изгибе $R=16$ МПа, скалыванию при изгибе $R_s=1,8$ МПа. Условия работы — нормальные.

Решение. Мостовая поперечина работает по схеме простой двухопорной балки, нагруженной двумя равными сосредоточенными силами F, отстоящими от опор на одинаковом расстоянии (см. рис. 7.10, *а*)

$$a=(l-c)/2=(2,1-1,524)/2 \text{ м}=0,288 \text{ м}.$$

Расчет на прочность по нормальным напряжениям. Максимальный изгибающий момент согласно эпюре M, приведенной на рис. 7.10, *г*:

$$M_{max}=Fa=65\cdot 0,288 \text{ кН}\cdot\text{м}=18,7 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Требуемый момент сопротивления сечения поперечины по формуле (7.19а)

$$W > M_{max}/R=18,7\cdot 10^3/(16\cdot 10^6) \text{ м}^3 \approx 1170\cdot 10^{-6} \text{ м}^3=1170 \text{ см}^3$$

С другой стороны, момент сопротивления прямоугольного сечения согласно выражению (7.16) и условию примера составляет

$$W_x=bh^2/6=b(1,15b)^2/6=0,22b^3.$$

Приравнивая требуемый момент сопротивления к значению W_x получаем $0,22b^3=1170$, откуда требуемая ширина сечения

$$b > \sqrt[3]{1170/0,22} \text{ см}=17,5 \text{ см}.$$

Расчет на прочность по касательным напряжениям. Подбираем ширину сечения из условия прочности на скалывание, т. е. по наибольшей поперечной силе (см. рис. 7.10, *в*) $Q_{max}=F=65$ кН. Для этого воспользуемся неравенством (7.28а):

$$b > \frac{{}^3/{}_2 Q_{max}}{R_s h},$$

или, учитывая, что $h=1,15b$,

$$1,15b^2 > \frac{{}^3/{}_2 Q_{max}}{R_s}.$$

Отсюда

$$b' > \sqrt{3Q_{max}/(2\cdot 1,15R_s)} =$$

$$= \sqrt{3\cdot 65\cdot 10^3/(2,3\cdot 1,8\cdot 10^6)}\ \text{м} = 0,217\ \text{м} = 21,7\ \text{см}.$$

Таким образом, во втором случае требуется большая ширина, т. е. решающим является расчет на скалывание. Необходимая высота сечения

$$h = 1,15b' = 1,15\cdot 21,7\ \text{см} = 25\ \text{см}.$$

Окончательно по табл. 5 приложения принимаем сечение $b\times h = 22\times 25$ см.

7.8. Расчет балок с учетом развития пластических деформаций

В предыдущих расчетах показано, что основным фактором, характеризующим прочность балки, являются нормальные напряжения в крайних волокнах наиболее опасного сечения, определяемые для симметричных относительно нейтральной линии сечений по формуле (7 14). При этом, однако, предполагалось, что материал балки работает упруго, т. е. напряжения растут прямо пропорционально деформациям, и эпюра нормальных напряжений по высоте сечения имеет треугольное очертание (рис. 7.29, *а*).

Предположим, что балка изготовлена из низкоуглеродистой строительной стали — материала, одинаково хорошо сопротивляющегося растяжению и сжатию. Проследим за работой балки при увеличении нагрузки до такой степени, что напряжения перейдут через пределы пропорциональности и упругости. Для простоты поступим так же, как описано в п. 2.11: заменим сложную диаграмму растяжения стали, состоящую из нескольких участков, диаграммой идеально упругопластичного материала (см. рис. 2.40). Тем самым мы пренебрегаем упрочнением стали после преодоления площадки текучести, что дает некоторый дополнительный запас прочности.

При увеличении нагрузки крайние волокна первыми достигнут предела текучести σ_y (рис. 7.29, *б*), после чего рост напряжений в них прекратится, а деформации будут продолжать расти. Дальнейшее увеличение нагрузки приведет к тому, что текучесть материала будет проникать глубже по сечению, захватывая новые волокна, но в средней части сохранится еще упругое ядро высотой

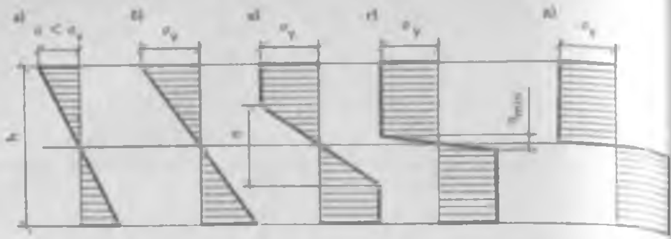


Рис. 7.29

η (рис. 7.29, *в*). Такое состояние соответствует упругопластической стадии работы балки.

И наконец, эпюра напряжений, представленная на рис. 7.29, *г*, характеризует предельное упругопластическое состояние сечения, при котором высота упругого ядра уменьшается до минимума, определяемого значением деформации разрушения крайних волокон. У стали отношение $\eta_{min}/h \approx 1/200$, т. е. чрезвычайно мало́. Поэтому без особой погрешности можно считать, что увеличение нагрузки в конечном итоге доведет до предела текучести напряжения во всех волокнах, чему соответствует прямоугольная эпюра, изображенная на рис. 7.29, *д*.

Наступление этого условного предельного пластического состояния связывают с образованием так называемого ш а р н и р а п л а с т и ч н о с т и, который превращает статически определимую балку в изменяемую систему (вследствие интенсивного нарастания деформаций балка получает угол перелома в наиболее опасном сечении).

Оценим несущую способность балки симметричного сечения в предельном пластическом состоянии при чистом изгибе. Согласно интегральному выражению (7.8) изгибающий момент, отвечающий появлению шарнира пластичности, может быть представлен в виде

$$M_{pl} = \int_A \sigma_y y\,dA = \sigma_y 2 \int_{A/2} y\,dA = \sigma_y 2S_x = \sigma_y W_{pl}, \qquad (7.30)$$

где по-прежнему S_x — статический момент площади полусечения относительно нейтральной линии, а величина

$$W_{pl} = 2S_x \qquad (7.31)$$

называется *пластическим моментом сопротивления* по

аналогии с моментом сопротивления W при обычном расчете.

У реальных сечений отношение W_{pl}/W всегда больше единицы. Так, у прямоугольного сечения (см., например, рис. 7.26, *а*)

$$W_{pl} = 2(bh/2)\,h/4 = bh^2/4 \qquad (7.32)$$

и согласно выражению (7.16)

$$\frac{W_{pl}}{W_x} = \frac{bh^2/4}{bh^2/6} = 1,5.$$

В таком же отношении находятся соответствующие изгибающие моменты M_{pl} и $M = \sigma_y W_x$, т. е. *учет образования шарнира пластичности позволяет повысить несущую способность балок прямоугольного сечения в 1,5 раза по сравнению с обычным, «упругим», расчетом.*

Для других форм поперечного сечения указанное отношение иное, причем оно тем меньше, чем рациональнее распределен материал по высоте балки с точки зрения обычного расчета. Для прокатных двутавровых балок (см. рис. 7.27, *а*) и швеллеров $W_{pl} = 1,12W_x$ при изгибе в плоскости стенки и $W_{pl} = 1,2W_y$ при изгибе параллельно полкам.

Следует, однако, иметь в виду, что расчет из условия предельного равновесия имеет весьма существенный недостаток. Он позволяет судить в конечном итоге только о напряженном состоянии за пределом упругости материала, в то время как картина деформаций остается невыясненной. Между тем изменение геометрической формы любой конструкции допустимо лишь до некоторого предела, зависящего от назначения конструкции, степени ее ответственности и условий эксплуатации. В связи с этим глава СНиП [9] вводит критерий ограниченной пластической деформации стальных балок

$$e_r < 3R_y/E, \qquad (7.33)$$

где e_r — относительное остаточное удлинение, выраженное в долях единицы; R_y — расчетное сопротивление стали растяжению и сжатию, установленное по ее пределу текучести $\sigma_y = R_{yn}$ (см. п. 2.12); E — модуль упругости прокатной стали, равный 206 ГПа.

Удобство такого критерия заключается в том, что он позволяет рассчитывать стальные балки не только из условия появления краевой текучести (см. рис. 7.29, *б*) или условия образования шарнира пластичности (см. рис. 7.29, *д*), но и в промежуточных случаях (см. рис.

15—387

7.29, *в*). Следовательно, имеется возможность частичного учета развития пластических деформаций, т. е. возможность расчета балок в упругопластической стадии работы материала. При этом отпадает необходимость вычисления пластического момента сопротивления $W_{пл}$, поскольку в указанной главе СНиП помещена таблица коэффициентов влияния формы поперечного сечения, которые используются в качестве множителя к упругому моменту сопротивления.

Пример 7.16. Какой номер прокатного двутавра можно назначить при условии образования шарнира пластичности в балке, которая рассчитана в примере 7.12 по упругой стадии работы материала?

Решение. Балка изгибается в плоскости стенки. Требуемый пластический момент сопротивления сечения согласно формуле (7.19а) и приведенным указаниям

$$W_{пл} \geq M_{max}/(1{,}12R) = 48{,}44 \cdot 10^3/(1{,}12 \cdot 240 \cdot 10^6)\ м^3 =$$
$$= 180 \cdot 10^{-6}\ м^3 = 180\ см^3.$$

По сортаменту принимаем двутавр № 20 с $W_x = 184\ см^3 > 180\ см^3$, т. е. тот профиль, который оказался неподходящим в указанном примере. Таким образом, расчет на прочность с учетом развития пластических деформаций позволяет остановиться на меньшем профиле по сравнению с упругим расчетом (двутавр № 20а), что приводит к экономии стали.

7.9. Главные и эквивалентные напряжения при изгибе

В пп. 7.5—7.7 установлено, что в общем случае прямого изгиба в поперечных сечениях балки возникают нормальные и касательные напряжения, которые изменяются как по длине балки, так и по ее высоте. Наибольшие нормальные напряжения в симметричных сечениях проверяют по формуле (7.19), касательные — по формуле Журавского.

Наибольшие нормальные напряжения возникают в крайних, максимально удаленных от нейтральной линии точках поперечного сечения, где касательные напряжения отсутствуют. Поэтому *для крайних волокон ненулевыми главными напряжениями являются нормальные напряжения в поперечном сечении.*

Наибольшие касательные напряжения в поперечном сечении возникают на уровне нейтральной линии, где равны нулю нормальные напряжения. Следовательно, *в волокнах нейтрального слоя главные напряжения определяются значением касательных напряжений.*

В большинстве случаев достаточно проверить отдельно нормальные и отдельно касательные напряжения. Однако иногда наиболее напряженными оказываются промежуточные волокна, в которых возникают и те и другие напряжения. Подобный случай характерен для тех сечений, где изгибающий момент и поперечная сила одновременно достигают больших и тем более максимальных значений: в заделке консоли (см. примеры 7.5, 7.6, 7.11), на опоре консольной балки (см. пример 7.9), в сечениях под сосредоточенными нагрузками (см. примеры 7.1, 7.3, 7.10), а также в сечениях с резко меняющейся шириной. Так, для двутаврового сечения характерна эпюра нормальных напряжений того же очертания, что и для прямоугольного (см. рис. 7.21, *г*). В то же время касательные напряжения в двутавре значительно существеннее из-за малой толщины его стенки. С этой точки зрения наиболее опасны места примыкания стенки к полкам. В соответствующих волокнах возникают большие нормальные напряжения (поскольку волокна находятся близко от краев балки) и значительные касательные напряжения (см. рис. 7.27). Совокупность этих напряжений свидетельствует о том, что материал находится в условиях плоского напряженного состояния и необходима проверка эквивалентных (приведенных) напряжений.

Если воспользоваться формулой (3.11), полагая в ней $\sigma_y = 0$, т. е. по-прежнему пренебрегая взаимным надавливанием волокон, получим следующее выражение главных напряжений:

$$\sigma_{max/min} = \sigma/2 \pm {}^1/_2 \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}. \qquad (7.34)$$

Подставляя его в неравенства (3.32а) и (3.35а), после некоторых преобразований приходим к условиям прочности балок из пластичных материалов:

$$\sigma_{des,\tau} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} < R\gamma_c; \qquad (7.35)$$

$$\sigma_{des,u} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} < R\gamma_c. \qquad (7.36)$$

При расчете стальных балок глава СНиП [9] рекомендует пользоваться условием (7.36) и допускает развитие пластических деформаций, разрешая увеличивать расчетное сопротивление стали путем введения коэффициента условий работы $\gamma_c = 1,15$.

Следует заметить, что эквивалентные напряжения в прокатных балках, как правило, не превышают нормальных напряжений в крайних волокнах и поэтому не требуют специальной проверки. Объясняется это тем, что толщина стенок прокатных профилей достаточно велика, в силу чего касательные напряжения незначительны и при обычных соотношениях между изгибающим моментом и поперечной силой не оказывают существенного влияния на эквивалентные напряжения.

Проверка эквивалентных напряжений необходима в **составных** металлических балках, у которых стенка тоньше, чем у прокатных профилей той же высоты. Составные балки проектируют при больших пролетах и нагрузках, когда вследствие ограниченности сортамента прочность прокатных двутавров недостаточна или они менее экономичны.

В современных стальных конструкциях находят применение преимущественно *сварные* составные балки. Обычно они состоят из трех листов (рис. 7.30, *а*): одного вертикального — стенки и двух горизонтальных — поясов (полок), привариваемых к стенке автоматической сваркой.

Расчет составной балки на прочность включает в себя: 1) предварительный подбор сечения (определение основных размеров: высоты и толщины стенки, ширины и толщины поясов); 2) окончательную проверку прочности подобранного сечения по нормальным и касательным напряжениям (рис. 7.30, *б*, *в*), а также на их совместное действие. Первый этап подробно излагается в учебной литературе по металлическим конструкциям (см., например, [1]), поэтому ограничимся иллюстрацией второго.

Пример 7.17. Проверить прочность сварной балки пролетом $l = 12$ м (рис. 7.31, *а*), сечение которой представлено на рис. 5.11, а размеры указаны в примере 5.3.

На балку действует равномерно распределенная нагрузка интенсивностью $q = 30$ кН/м и сосредоточенная сила $F = 150$ кН. Расчетное сопротивление стали растяжению (сжатию) при изгибе $R_y = 210$ МПа, сдвигу $R_s = 120$ МПа.

Решение. *Определение усилий.* Вследствие симметричного нагружения опорные реакции балки равны между собой:

$$V_A = V_B = (ql + F)/2 = (30 \cdot 12 + 150)/2 \text{ кН} = 255 \text{ кН}.$$

Кроме их значения, для построения эпюры Q (рис. 7.31, *б*) необходимо знать поперечную силу в середине пролета:

$$Q_C^{\text{лев}} = V_A - ql/2 = 255 - 30 \cdot 12/2 \text{ кН} = 75 \text{ кН};$$

$$Q_C^{\text{пр}} = Q_C^{\text{лев}} - F = 75 - 150 \text{ кН} = -75 \text{ кН}.$$

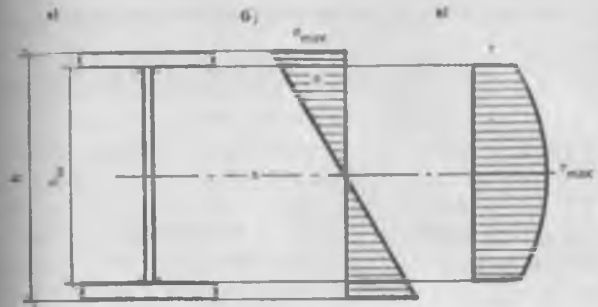


Рис. 7.30

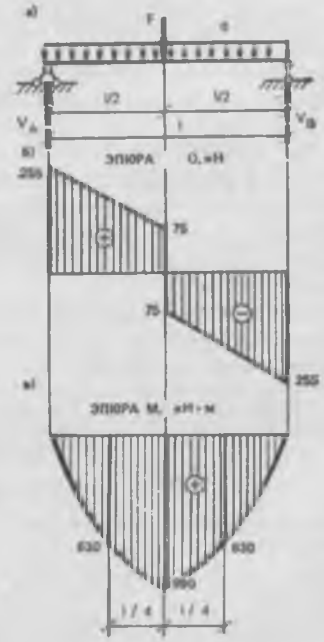


Рис. 7.31

Эпюра M изображена на рис. 7.31, *в*. Максимальный изгибающий момент возникает в середине пролета. На основании принципа независимости действия сил он может быть получен сложением значений (7.1а) и (7.2), найденных в примерах 7.1 (частный случай) и (7.2) от каждой из прикладываемых нагрузок в отдельности:

$$M_{max} = M_F + M_q = Fl/4 + ql^2/8 = 150 \cdot 12/4 + 30 \cdot 12^2/8 \text{ кН} \cdot \text{м} = 990 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

В справедливости промежуточного значения момента $M_{l/4}$ нетрудно убедиться самостоятельно.

Проверка прочности по нормальным напряжениям. Момент сопротивления сечения относительно нейтральной линии по формуле (7.15)

$$W_x = \frac{J_x}{h/2} = \frac{250 \cdot 10^3}{102{,}8/2} \text{ см}^3 = 4860 \text{ см}^3 = 4860 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3,$$

где полная высота балки

$$h = h_w + 2t_f = 100 + 2 \cdot 1{,}4 \text{ см} = 102{,}8 \text{ см}.$$

Нормальные напряжения по формуле (7.19)

$$\sigma_{max} = M_{max}/W_x = 990 \cdot 10^3/(4860 \cdot 10^{-6}) \text{ Па} = 204 \cdot 10^6 \text{ Па} =$$
$$= 204 \text{ МПа} < R_y = 210 \text{ МПа}.$$

Проверка прочности по касательным напряжениям. Опасными являются опорные сечения, где возникает наибольшая расчетная поперечная сила $Q_{max} = 255$ кН (см. рис. 7.31, *б*). Статический момент площади полусечения относительно нейтральной линии

$$S_x = S_{xw} + S_{xf} = (A_w/2)\, h_w/4 + A_f a = (h_w t_w/2) h_w/4 + bt_f\,(h_w/2 +$$
$$+ t_f/2) = h_w^2\, t_w/8 + bt_f\,(h_w + t_f)/2 = 100^2 \cdot 0{,}6/8 +$$
$$+ 28 \cdot 1{,}4\,(100 + 1{,}4)/2 \text{ см}^3 = 750 + 1990 \text{ см}^3 =$$
$$= 2740 \text{ см}^3 = 274 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3.$$

Касательные напряжения согласно формуле (7.29)

$$\tau_{max} = Q_{max}\, S_x/(J_x\, t_w) = 255 \cdot 10^3 \cdot 274 \cdot 10^{5}/(250 \cdot 10^{-5} \cdot 6 \cdot 10^{-3}) \text{ Па} \approx$$
$$\approx 47 \cdot 10^6 \text{ Па} = 47 \text{ МПа} \ll R_s = 120 \text{ МПа}.$$

Проверка прочности по эквивалентным напряжениям. Опасным является сечение в середине пролета, где изгибающий момент имеет максимальное значение, а поперечная сила $Q = 75$ кН достаточно велика. Абсолютное значение нормальных напряжений в местах примыкания стенки к полкам (см. рис. 7.30, *б*) по формуле (7.13)

$$\sigma = (M_{max}/J_x)\, h_w/2 = [990 \cdot 10^3/(250 \cdot 10^{-5})]\ 1/2 \text{ Па} =$$
$$= 198 \cdot 10^6 \text{ Па} = 198 \text{ МПа}.$$

Касательные напряжения (см. рис. 7.30, *в*) по формуле (7.24)

$$\tau = QS_{xf}/(J_x/t_w) = 75 \cdot 10^3 \cdot 199/(250 \cdot 6 \cdot 10^{-3}) \text{ Па} =$$
$$= 9{,}95 \cdot 10^6 \text{ Па} \approx 10 \text{ МПа}.$$

Эквивалентные напряжения по формуле (7.36)

$$\sigma_{des} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{198^2 + 3 \cdot 10^2} \text{ МПа} =$$
$$= 199 \text{ МПа} < R_y\,\gamma_c = 210 \cdot 1{,}15 \text{ МПа} = 241 \text{ МПа}.$$

Таким образом, сечение балки удовлетворяет всем трем условиям прочности, причем запас прочности по наибольшим нормальным напряжениям не превышает 5 %, как того и требует глава СНиП [9] в отношении составных элементов.

Глава 8. ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ПРИ ПРЯМОМ ИЗГИБЕ

8.1. Линейные и угловые перемещения. Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки и его интегрирование

Перемещения поперечных сечений балок приходится определять в двух случаях: при расчет балок на жесткость; при расчете статически неопределимых балок. Различают перемещения *линейные и угловые.* Допущение о малости перемещений (см. п. 1.2) позволяет считать, что линейные перемещения — прогибы y — направлены перпендикулярно продольной оси недеформированной балки (оси z). Поскольку величина y переменна по длине балки, т. е. зависит от абсциссы z, прогиб обозначают как $y(z)$. Наибольший прогиб называется *стрелой прогиба* f. Согласно принятому на рис. 8.1 направлению осей координат *положительным* будем считать прогиб *вверх, отрицательным — вниз.* На рис. 8.1 $y(z)<0$.

Угловые перемещения представляют собой углы поворота θ поперечных сечений балки вокруг их нейтральных линий, или углы между направлениями продольной оси балки до и после деформирования. Величина θ также зависит от координаты z, поэтому угол поворота обозначают как $\theta(z)$.

В упругой стадии работы материала углы поворота настолько малы, что можно считать $\theta \approx \operatorname{tg}\theta$. А так как согласно геометрическому смыслу производной $\operatorname{tg}\theta = dy/dz$, то с достаточной степенью точности угол поворота сечения можно принять равным первой производной от прогиба по абсциссе сечения:

$$\theta(z) \approx dy/dz. \qquad (8.1)$$

Условимся считать угол *положительным,* если сечение поворачивается *против хода часовой стрелки,* и *отрицательным,* если оно поворачивается *по ходу часовой стрелки.* На рис. 8.1 $\theta(z)>0$.

Кривая, в которую обращается продольная ось балки при деформировании, называется изогнутой осью (линия $A'K'B$). Для определения перемещений необходимо знать ее уравнение. Воспользуемся известной из дифференциального исчисления зависимостью между кривизной линии и производными dy/dz, d^2y/dz^2:

$$\frac{1}{\rho} = \pm\frac{d^2y/dz^2}{[1+(dy/dz)^2]^{3/2}}.$$

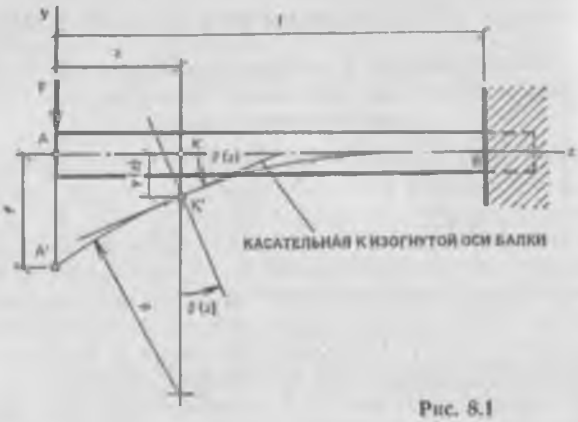


Рис. 8.1

Подставив ее в формулу (7.12), связывающую кривизну оси с изгибающим моментом и жесткостью сечения балки (см. п. 7.5), получим точное дифференциальное уравнение изогнутой оси балки:

$$\frac{d^2y/dz^2}{[1+(dy/dz)^2]^{3/2}} = \pm\frac{M(z)}{EJ_x}. \quad (8.2)$$

Интегрирование этого нелинейного уравнения сопряжено с большими трудностями. Однако ввиду малости углов поворота и их тангенсов квадратами последних $\text{tg}^2\,\theta = (dy/dz)^2$ можно пренебречь как величинами весьма малыми по сравнению с единицей. Действительно, даже при сравнительно невысоких требованиях, предъявляемых к жесткости балок покрытий и перекрытий, предельно допустимый прогиб составляет обычно $^1/_{200}$ пролета (см. разд. 10 главы СНиП [3]). Образующиеся при этом углы поворота не превышают 1° и, следовательно,

$$\text{tg}^2\,\theta < \text{tg}^2\,1° = 0{,}0175^2 \approx 0{,}0003 \ll 1.$$

Тогда уравнение (8.2) принимает упрощенный вид:

$$d^2y/dz^2 = \pm M(z)/(EJ_x).$$

Выбор знака зависит от принятой системы координат. При положительном направлении оси y вверх (рис. 8.2) знаки изгибающего момента и второй производной совпадают. В первом случае (см. рис. 8.2, *а*) момент положителен, так как изогнутая ось обращена выпуклостью

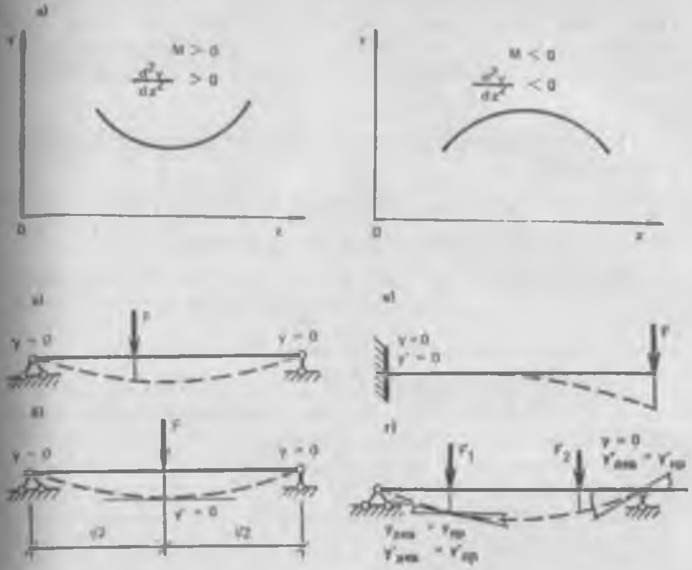


Рис. 8.2

Рис. 8.3

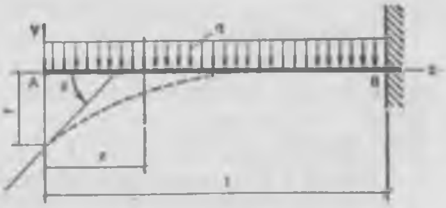


Рис. 8.4

вниз (см. правило знаков изгибающих моментов в п. 7.2), а вторая производная — поскольку вогнутость кривой обращена в сторону положительного направления оси y. Аналогично совпадение знаков и во втором случае (см. рис. 8.2, *б*).

Таким образом, в записанном уравнении следует сохранить только знак «плюс». Вводя обозначение $d^2y/dz^2 = y''(z)$, окончательно получаем *приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси балки*

$$y''(z) = M(z)/(EJ_x). \qquad (8.3)$$

Оно позволяет с приемлемой для практических целей точностью, определять прогибы и углы поворота в любом сечении балки от любой нагрузки. Для балки постоянного сечения уравнение (8.3) удобнее записывать в виде

$$EJ_x y''(z) = M(z). \tag{8.3a}$$

После первого интегрирования получается уравнение углов поворота

$$EJ_x \theta(z) = EJ_x y'(z) = EJ_x dy/dz = \int M(z)\,dz + C,$$

где C — произвольная постоянная интегрирования.

Второе интегрирование дает уравнение прогибов

$$EJ_x y(z) = \int dz \int M(z)\,dz + Cz + D,$$

где D — вторая произвольная постоянная интегрирования.

Значения постоянных C и D определяют из граничных условий, т. е. условий опирания балки и условий на границах смежных участков. В любом случае имеется не менее двух граничных условий. Так, у свободно лежащей балки (рис. 8.3, *а*) прогибы на обеих шарнирных опорах равны нулю. Кроме того, при симметричном нагружении равен нулю и угол поворота сечения в середине пролета (рис. 8.3, *б*).

Консоль имеет нулевые прогиб и угол поворота в заделке (рис. 8.3, *в*). На границе смежных участков балки (рис. 8.3, *г*) прогиб и угол поворота одинаковы как для левого, так и правого участка, т. е. перемещение, полученное из уравнения для левого участка, обязательно равно перемещению, найденному из уравнения для правого участка.

Пример 8.1. Составить дифференциальное уравнение изогнутой оси консоли постоянного сечения, по всей длине которой действует равномерно распределенная нагрузка интенсивностью q (рис. 8.4) Найти наибольший угол поворота θ_{max} и стрелу прогиба f.

Решение. Помещая начало координат на левом, свободном конце консоли, записываем аналитическое выражение изгибающего момента в произвольном сечении

$$M(z) = -qz^2/2.$$

Делая подстановку в уравнение (8.3, а), получаем требуемое дифференциальное уравнение

$$EJ_x y''(z) = -qz^2/2,$$

которое дважды интегрируем:

$$EJ_x y'(z) = -qz^3/6 + C; \tag{а}$$

$$EJ_x y(z) = -qz^4/24 + Cz + D. \tag{б}$$

Для определения произвольных постоянных используем граничные условия в заделке:

1) при $z=l$ угол поворота $y'(l)=0$, т. е. $0=-ql^3/6+C$, откуда $C=ql^3/6$;

2) при $z=l$ прогиб $y(l)=0$, т. е. $0=-ql^4/24+(ql^3/6)l+D$, откуда

$$D=ql^4/24-ql^4/6=-ql^4/8.$$

Подставляя найденные значения постоянных в уравнения (а) и (б), получаем окончательное уравнение углов поворота

$$EJ_x y'(z)=-qz^3/6+ql^3/6$$

и окончательное уравнение прогибов

$$EJ_x y(z)=-qz^4/24+(ql^3/6)z-ql^4/8.$$

Наибольший угол поворота возникает, очевидно, на свободном конце консоли: при $z=0$ $EJ_x y'(0)=ql^3/6$, или

$$\theta_{max}=\theta_A=y'(0)=ql^3/(6EJ_x).$$

Угол получился положительным, следовательно, сечение балки поворачивается против хода часовой стрелки. Наибольший прогиб возникает также на свободном конце:

$$EJ_x y(0)=-ql^4/8;$$

$$f=y(0)=-ql^4/(8EJ_x). \tag{8.4}$$

Знак «минус» свидетельствует о том, что свободный конец опускается. Сравнивая значения θ_{max} и f с выражениями произвольных постоянных, замечаем, что постоянная C пропорциональна углу поворота на свободном конце консоли, а D — прогибу в том же сечении. Отсюда выявляется *геометрический смысл* произвольных постоянных интегрирования дифференциального уравнения изогнутой оси балки: они равны углу поворота (C) и прогибу (D) в начале координат, умноженным на жесткость EJ.

Пример 8.2. Решить задачу, рассмотренную в предыдущем примере, при условии, что защемлен левый конец балки, а свободен правый (см. рис. 7.13, *а*).

Решение. Придерживаясь общего принципа, помещаем начало координат опять на левом, но теперь уже защемленном, конце консоли. На первый взгляд задача при этом усложняется, так как для составления аналитического выражения изгибающего момента предварительно необходимо определить опорную реакцию и реактивный момент в заделке, что не требовалось в предыдущем примере. В данном случае, однако, можно воспользоваться результатами примера 7.6: $V_A=ql$, $m_A=ql^2/2$. Тогда дифференциальное уравнение изогнутой оси балки принимает вид

$$EJ_x y''(z)=-m_A+V_A z-qz^2/2$$

или

$$EJ_x y''(z)=-ql^2/2+qlz-qz^2/2,$$

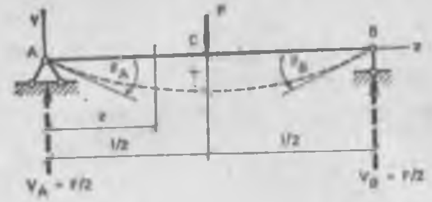
где в отличие от указанного примера z — абсцисса произвольного сечения относительно заделки. После первого интегрирования получаем уравнение углов поворота

$$EJ_x y'(z)=(-ql^2/2)z+qlz^2/2-qz^3/6+C,$$

после второго — уравнение прогибов

$$EJ_x y(z)=-ql^2z^2/4+qlz^3/6-qz^4/24+Cz+D.$$

Рис. 8.5



Далее следовало бы определять произвольные постоянные C и D, но исходя из их геометрического смысла, установленного в предыдущем примере, можно утверждать, что они равны нулю. Тогда при $z=l$ находим искомые перемещения:

$$EJ_x y'(l) = -ql^3/2 + ql^3/2 - ql^3/6 = -ql^3/6,$$

$$\theta_{\max} = y'(l) = -ql^3/(6EJ_x);$$

$$EJ_x y(l) = -ql^4/4 + ql^4/6 - ql^4/24 = -ql^4/8,$$

$$f = y(l) = -ql^4/(8EJ_x).$$

Получили те же абсолютные значения угла поворота и прогиба, однако знак угла изменился на противоположный, т. е. соответствующее сечение поворачивается по ходу часовой стрелки. Знак прогиба сохраняется, поскольку свободный конец по-прежнему опускается.

Таким образом, если начало координат попадает в заделку, то предварительно приходится вычислять опорные реакции, но при этом отпадает необходимость в определении произвольных постоянных интегрирования.

Пример 8.3. Определить углы поворота опорных сечений и стрелу прогиба балки, нагруженной посередине сосредоточенной силой F (рис. 8.5).

Решение. Помещая начало координат на левой опоре, составляем аналитическое выражение изгибающего момента на участке AC. Согласно примеру 7.1

$$M(z) = V_A z = (F/2) z.$$

Подставляя записанное выражение в уравнение (8.3а), получаем дифференциальное уравнение изогнутой оси балки

$$EJ_x y''(z) = Fz/2.$$

Первое интегрирование дает уравнение углов поворота

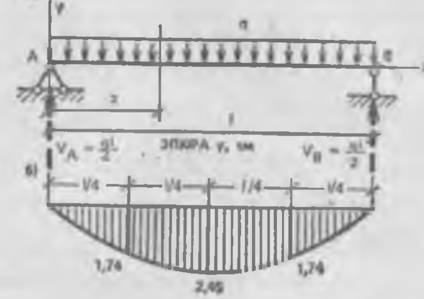
$$EJ_x y'(z) = Fz^2/4 + C,$$

второе — уравнение прогибов

$$EJ_x y(z) = Fz^3/12 + Cz + D.$$

Постоянная $D=0$, поскольку прогиб в начале координат отсутствует. Постоянную C можно найти из граничного условия на правой опоре: при $z=l$ прогиб $y(l)=0$. Но тогда придется составлять выражение изгибающего момента на участке CB. Чтобы не усложнять решение, воспользуемся другим условием, которое является следствием симметричного нагружения: при $z=l/2$ угол поворота

Рис. 8.6



$y'(l/2)=0$, т. е. $Fl^2/(4\cdot 4)+C=0$. Отсюда $C=-Fl^2/16$, и угол поворота опорного сечения A

$$\theta_A = C/(EJ_x) = -Fl^2/(16EJ_x). \quad (8.5)$$

Угол поворота на опоре B вследствие симметричного нагружения будет иметь такое же значение и противоположное направление (поворот против хода часовой стрелки):

$$\theta_B = -\theta_A = Fl^2/(16EJ_x).$$

Наибольший прогиб возникает в середине пролета. Подставляя в уравнение прогибов $z=l/2$ и значения произвольных постоянных, получаем

$$EJ_x y(l/2) = Fl^3/(12\cdot 8) - Fl^2 l/(16\cdot 2) = -Fl^3/48,$$

$$f = y(l/2) = -Fl^3/(48EJ_x) \text{ (прогиб вниз)}. \quad (8.6)$$

Пример 8.4. Определить наибольший прогиб и построить изогнутую ось прямоугольной деревянной балки сечением $b\times h = 15\times 22$ см, по всей длине которой $l=5$ равномерно распределена нагрузка интенсивностью $q=4$ кН/м (рис. 8.6, *а*).

Решение. *Определение наибольшего прогиба.* Помещаем начало координат на левой опоре. Аналитическое выражение изгибающего момента согласно примеру 7.2

$$M(z) = (ql/2) z - qz^2/2.$$

Подставляем это выражение в уравнение (8.3 а):

$$EJ_x y''(z) = qlz/2 - qz^2/2.$$

После первого интегрирования получаем уравнение углов поворота

$$EJ_x y'(z) = qlz^2/4 - qz^3/6 + C,$$

после второго — уравнение прогибов

$$EJ_x y(z) = qlz^3/12 - qz^4/24 + Cz + D.$$

Постоянная $D=0$ по той же причине, что и в предыдущем примере. Постоянную C находим из граничного условия на правой опоре: при $z=l$

$$EJ_x y(l) = ql^4/12 - ql^4/24 + Cl = 0;$$
$$C = ql^3/24 - ql^3/12 = - ql^3/24.$$

Подставляя значения произвольных постоянных в уравнение прогибов, получаем алгебраическое уравнение изогнутой оси балки:

$$EJ_x y(z) = qlz^3/12 - qz^4/24 - (ql^3/24)\,z.$$

Наибольший прогиб возникает в середине пролета. При $z=l/2$

$$EJ_x y(l/2) = ql^4/(12\cdot 8) - ql^4/(24\cdot 16) - ql^4/(24\cdot 2) = - {}^5/_{384} ql^4$$
$$\text{и } f = y(l/2) = - {}^5/_{384} ql^4/(EJ_x). \qquad (8.7)$$

Построение изогнутой оси балки. Предварительно по формуле (5.9) вычисляем момент инерции площади сечения

$$J_x = bh^3/12 = 15\cdot 22^3/12 \text{ см}^4 = 13\,300 \text{ см}^4.$$

Построение производим по точкам, подставляя в алгебраическое уравнение значения текущей координаты z, а также $q=4\cdot 10^3$ Н/м, $l=5$ м, $E=10\cdot 10^9$ Па (см. табл. 2.1) и $J_x = 133\cdot 10^{-6}$ м^4.

На опорах, при $z=0$ и $z=l$, прогибы отсутствуют. При $z=l/4$

$$y(l/4) = \frac{1}{EJ_x}\left(\frac{ql^4}{12\cdot 64} - \frac{ql^4}{24\cdot 256} - \frac{ql^4}{24\cdot 4}\right) = -\frac{19}{2048}\,\frac{ql^4}{EJ_x} =$$
$$= -\frac{19\cdot 4\cdot 10^3\cdot 5^4}{2048\cdot 10\cdot 10^9\cdot 133\cdot 10^{-6}} \text{ м} = -0{,}0174 \text{ м} = -1{,}74 \text{ см}.$$

При $z=l/2$ в соответствии с выражением (8.7)

$$y(l/2) = -\frac{5}{384}\,\frac{ql^4}{EJ_x} = -\frac{5\cdot 4\cdot 5^4}{384\cdot 10\cdot 133} \text{ м} = -0{,}0245 \text{ м} = -2{,}45 \text{ см}.$$

При $z=3l/4$ вследствие симметрии $y(3l/4) = y(l/4) = -1{,}74$ см.

Найденные ординаты откладываем вниз в выбранном масштабе и соединяем плавной кривой, которая представляет собой изогнутую ось или эпюру прогибов рассматриваемой балки (рис. 8.6, *б*).

8.2. Метод начальных параметров

Рассмотренная разновидность аналитического определения перемещений — *метод непосредственного интегрирования* дифференциального уравнения изогнутой оси балки — значительно усложняется в тех случаях, когда балка имеет несколько участков. С этим обстоятельством частично уже пришлось столкнуться в примере 8.3 при определении произвольных постоянных для балки, имеющей два участка и, следовательно, два отличных друг от друга выражения изгибающего момента.

В общем случае, когда к балке приложена система нагрузок, делящих ее на n участков, для вычисления перемещений требуется составить n выражений изгибающего момента, дважды проинтегрировать n дифференциальных уравнений и определить $2n$ произвольных постоянных. Причем для выполнения последней операции кроме двух основных граничных условий (см. рис. 8.3, *а*, *в*) необходимо рассмотреть еще $2(n-1)$ так называемых **условий совместности** (или **неразрывности**) **перемещений** на границах смежных участков (см. рис. 8.3, *г*).

Если не применять специальных приемов, то задача по нахождению произвольных постоянных оказывается весьма трудоемкой уже при числе участков $n=3$. Поэтому в таких случаях прибегают к рационализации аналитического способа определения перемещений.

Условимся: 1) отсчет абсцисс z при составлении аналитических выражений изгибающего момента на всех участках по-прежнему вести от заранее выбранного начала координат, помещаемого на левом конце балки; 2) интегрирование составленных выражений, содержащих скобки, производить без раскрытия скобок; 3) при наличии сосредоточенного момента m его значение представлять в виде произведения $m(z-a)^0$, где a — расстояние от начала координат до сечения, в котором этот момент приложен (записанное произведение равно m, поскольку любая величина в нулевой степени равна единице); 4) при действии распределенной нагрузки, не доходящей до правого конца рассматриваемого участка, продолжать ее до этого конца, одновременно уравновешивая противоположно направленной нагрузкой той же интенсивности.

Выполнение перечисленных условий позволяет ограничиться составлением и интегрированием всего лишь одного дифференциального уравнения — уравнения последнего (крайнего правого) участка балки, в результате чего общее количество постоянных интегрирования оказывается равным двум независимо от числа участков. Уравнение для любого промежуточного участка может быть получено из уравнения последнего участка путем исключения слагаемых, которые содержат нагрузки, приложенные правее рассматриваемого участка.

В математике подобное решение дифференциальных уравнений связано с именем французского ученого

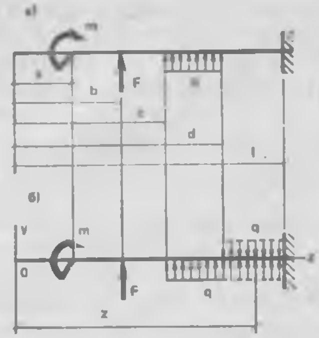


Рис. 8.7

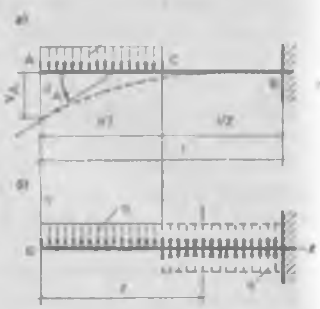


Рис. 8.8

О. Л. Коши (1789—1857). Исторически, однако, сложилось так, что тот же, по существу, метод разрабатывался и в сопротивлении материалов на основе механических идей. В его создании принимали участие немецкий математик А. Клебш (1833—1872) и советские ученые Н. П. Пузыревский (1861—1934), А. Н. Крылов (1863—1945), Н. К. Снитко (1896—1974).

Обратимся к произвольно нагруженной консоли, которая изображена на рис. 8.7, *а*. Согласно условию 1 помещаем начало координат на левом, свободном конце балки (рис. 8.7, *б*). Для соблюдения условия 4 продолжаем равномерно распределенную нагрузку до правого конца и одновременно прикладываем противоположно направленную нагрузку той же интенсивности q. Составляем аналитическое выражение изгибающего момента на последнем участке, имея при этом в виду условие 3:

$$M(z) = m(z-a)^0 + F(z-b) + \frac{q(z-c)^2}{2} - \frac{q(z-d)^2}{2}.$$

Подставляем его в дифференциальное уравнение (8.3а), вводя в знаменатели сомножитель, равный единице:

$$EJ_x y''(z) = m(z-a)^0 + \frac{F(z-b)^1}{1} + \frac{q(z-c)^2}{1\cdot 2} - \frac{q(z-d)^2}{1\cdot 2}.$$

Производим двукратное интегрирование:

$$EJ_x y'(z) = \frac{m(z-a)^1}{1} + \frac{F(z-b)^2}{1\cdot 2} + \frac{q(z-c)^3}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{q(z-d)^3}{1\cdot 2\cdot 3} + C;$$

$$EJ_x y(z) = \frac{m(z-a)^2}{1\cdot 2} + \frac{F(z-b)^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{q(z-c)^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{q(z-d)^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + Cz + D.$$

Постоянные C и D легко определяются из граничных условий в заделке: при $z=l$ угол поворота $y'(l)=0$ и прогиб $y(l)=0$. Согласно геометрическому смыслу постоянных, установленному в примере 8.1,

$$C = EJ_x\theta_0; \quad D = EJ_x y_0,$$

где θ_0 и y_0 — угол поворота и прогиб в начале координат, называемые в дальнейшем **начальными параметрами**.

Подставляя выражения постоянных в уравнения перемещений и располагая члены уравнений по возрастающим степеням переменной z, получаем уравнение углов поворота

$$EJ_x y'(z) = EJ_x\theta_0 + \frac{m(z-a)}{1!} + \frac{F(z-b)^2}{2!} + \frac{q(z-c)^3}{3!} - \frac{q(z-d)^3}{3!}$$

и уравнение прогибов

$$EJ_x y(z) = EJ_x y_0 + EJ_x\theta_0 z + \frac{m(z-a)^2}{2!} + \frac{F(z-b)^3}{3!} + \frac{q(z-c)^4}{4!} - \frac{q(z-d)^4}{4!}.$$

Показатель степени z и выражений в скобках, содержащих z, совпадает с числом, факториал которого представлен в знаменателе. Причем эта закономерность распространяется и на первые члены обоих уравнений, содержащие $z^0=1$, поскольку в математике условно принято, что $0!=1$.

В случае многократного повторения однотипных нагрузок полученные уравнения записывают в более общем виде:

$$EJ_x y'(z) = EJ_x\theta_0 + \frac{\Sigma m_i(z-a_i)}{1!} + \frac{\Sigma F_i(z-b_i)^2}{2!} + \frac{\Sigma q_i(z-c_i)^3}{3!} - \frac{\Sigma q_i(z-d_i)^3}{3!}; \tag{8.8}$$

$$EJ_x y(z) = EJ_x y_0 + EJ_x\theta_0 z + \frac{\Sigma m_i(z-a_i)^2}{2!} + \frac{\Sigma F_i(z-b_i)^3}{3!} +$$

$$+\frac{\Sigma q_i (z-c_i)^4}{4!}-\frac{\Sigma q_i (z-d_i)^4}{4!}, \qquad (8.9)$$

где m_i, F_i и q_i — сосредоточенные моменты, силы (включая реактивные) и распределенные нагрузки, приложенные слева от рассматриваемого сечения, т. е. в промежутке между сечением и началом координат; a_i, b_i, c_i и d_i — абсциссы точек приложения соответственно сосредоточенных моментов и сил, начала и конца каждого участка, занятого распределенной нагрузкой.

Формулы (8.8) и (8.9) называются *универсальными уравнениями* перемещений при изгибе. Если нагрузки имеют направление, противоположное указанному на рис. 8.7, то соответствующие слагаемые следует брать со знаком «минус».

Пример 8.5. Определить перемещения свободного конца и сечения в середине консоли вылетом l, на левой половине которой равномерно распределена нагрузка интенсивностью q (рис. 8.8, *а*).

Решение. *Определение углов поворота.* Помещаем начало координат на левом, свободном конце консоли и продолжаем распределенную нагрузку до правого конца, одновременно прикладывая противоположно направленную компенсирующую нагрузку той же интенсивности (рис. 8.8, *б*).

Универсальное уравнение углов поворота (8.8) в рассматриваемом случае принимает вид

$$EJ_x y'(z)=EJ_x\theta_A-\frac{q(z-c)^3}{3!}+\frac{q(z-d)^3}{3!},$$

или, учитывая, что $c=0$ и $d=l/2$,

$$EJ_x y'(z)=EJ_x\theta_A-qz^3/6+q(z-l/2)^3/6. \qquad (а)$$

Так как угол поворота в начале координат $\theta_A\neq 0$, определяем его из граничного условия в заделке: при $z=l$

$$EJ_x y'(l)=EJ_x\theta_A-ql^3/6+q(l-l/2)^3/6=0;$$

$$EJ_x\theta_A=ql^3/6-q(l/2)^3/6=(ql^3/6)(1-1/8)=\frac{7ql^3}{48}; \qquad (б)$$

$$\theta_A={}^7/_{48}ql^3/(EJ_x).$$

Подставляя в уравнение (а) значение (б) и $z=l/2$, находим угол поворота в середине консоли:

$$EJ_x y'(l/2)=7ql^3/48-q(l/2)^3/6+q(l/2-l/2)^3/6=ql^3/8;$$

$$\theta_C=y'(l/2)=ql^3/(8EJ_x).$$

Оба угла получились положительными, т. е. поворот соответствующих сечений осуществляется против хода часовой стрелки.

Определение прогибов производится в такой же последовательности исходя из универсального уравнения (8.9) и с учетом значения (б):

$$EJ_x y(z)=EJ_x y_A+(7ql^3/48)z-qz^4/24+q(z-l/2)^4/24. \qquad (в)$$

При $z=l$ прогиб $y(l)=0$, т. е.

$$EJ_x y_A+(7ql^3/48)l-ql^4/24+q(l/2)^4/24=0;$$

$$EJ_x y_A=ql^4/(24EJ_x)(-7/2+1-1/16)=-{}^{41}/_{384}ql^4; \qquad (г)$$

$$y_A=-{}^{41}/_{384}ql^4/(EJ_x).$$

Подставляя в уравнение (в) значение (г) и $z=l/2$, находим прогиб в середине консоли:

$$EJ_x y(l/2)=-41ql^4/384+(7ql^3/48)l/2-q(l/2)^4/24=-{}^7/_{192}ql^4;$$

$$y_C=y(l/2)=-{}^7/_{192}ql^4/(EJ_x).$$

Прогибы получились отрицательными, следовательно, они направлены вниз.

8.3. Энергетический метод определения перемещений

Энергетический метод представляет собой наиболее универсальный способ определения перемещений. Он основан на условии (2.14а) равенства работы внешних сил, приложенных к линейно деформируемой упругой системе, и потенциальной энергии деформации.

Работа произвольной совокупности статически приложенных внешних сил (см. рис. 8.3, *г*) согласно теореме Клапейрона (см. п. 2.6) равна полусумме произведений конечного значения каждой силы F_i на конечное значение перемещения Δ_i по ее направлению (в данном случае прогиба):

$$W={}^1/_2\Sigma F_i\Delta_i. \qquad (8.10)$$

Для определения потенциальной энергии деформации, которая численно равна работе внутренних сил, обратимся к рассмотренному раньше бесконечно малому элементу dz, находящемуся в условиях чистого изгиба (см. рис. 7.21, *а*, *б*). Из теоретической механики известно, что работа момента равна его произведению на угловое перемещение. При статическом нагружении следует брать полупроизведение: $dU=M_x d\theta/2$.

Согласно зависимости (7.9) $d\theta=dz/\rho$, или с учетом выражения (7.12) $d\theta=M_x dz/(EJ_x)$. Подставляя это значение в формулу потенциальной энергии, получаем

$$dU=M_x^2\,dz/(2EJ_x).$$

При поперечном изгибе в элементе дополнительно накапливается обусловленная поперечной силой энергия деформации сдвига. Однако в большинстве случаев она пренебрежимо мала по сравнению с энергией чистого изгиба, и записанное выражение элементарной потенциальной энергии можно распространить практически на все случаи прямого изгиба балок.

Для определения полной энергии деформации необходимо просуммировать значения dU по всей длине балки. Поскольку закон изменения изгибающего момента на всех участках различен, суммирование (вычисление определенных интегралов) производят в пределах длины каждого участка l_i и полученные результаты складывают:

$$U = \Sigma \int\limits_{l_i} \frac{M_x^2\,dz}{2EJ_x}. \qquad (8.11)$$

Пример 8.6. Определить стрелу прогиба консоли, нагруженной на свободном конце сосредоточенной силой F (см. рис. 7.12).

Решение. Наибольший прогиб возникает на свободном конце. Согласно теореме Клапейрона сила F при статическом приложении производит работу $W = Ff/2$.

Балка имеет всего один участок, поэтому выражение потенциальной энергии (8.11) упрощается:

$$U = \int\limits_0^l \frac{M_x^2\,dz}{2EJ_x}.$$

Подставляя сюда функцию изгибающего момента $M_x = -Fz$, заимствованную из примера 7.5, получаем

$$U = \int\limits_0^l \frac{(-Fz)^2\,dz}{2EJ_x} = \frac{F^2}{2EJ_x}\int\limits_0^l z^2\,dz = F^2 l^3/(6EJ_x),$$

и уравнение энергетического баланса $W = U$ принимает вид

$$Ff/2 = F^2 l^3/(6EJ_x).$$

Отсюда после сокращения на $F/2$

$$f = Fl^3/(3EJ_x) \qquad (8.12)$$

Прогиб получился положительным. Согласно идее энергетического метода это означает, что он совпадает с направлением силы F, т. е. свободный конец консоли перемещается вниз.

8.4. Интеграл Мора

Рассмотренная в примере 8.6 разновидность энергетического метода носит частный характер. Она применима лишь в тех случаях, когда на балку действует одна сила и необходимо определить прогиб в точке ее прило-

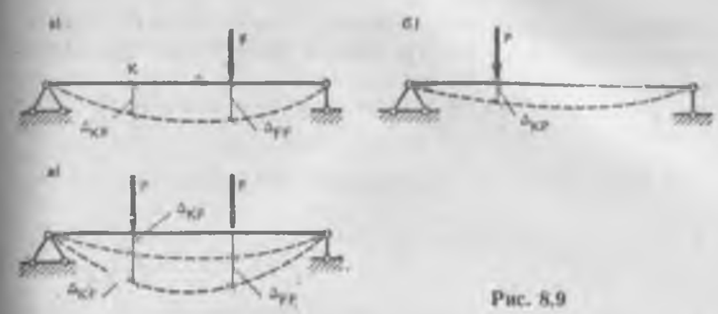


Рис. 8.9

жения. Обратимся к выводу общей формулы перемещений при изгибе.

Пусть требуется найти прогиб в произвольной точке K балки, изображенной на рис. 8.9, *а*. Приложим к ненагруженной балке в этой точке некоторую силу P (рис. 8.9, *б*). Соответствующее состояние балки является вспомогательным. Оно не существует в действительности и поэтому называется фиктивным. Работа силы P на перемещении Δ_{KP} (первая буква индекса указывает точку, где ищется перемещение, вторая — причину, вызвавшую это перемещение) определяется по теореме Клапейрона:

$$W_P = {}^1/_2 P\Delta_{KP}.$$

Соответствующая потенциальная энергия деформации по формуле (8.11)

$$U_P = \Sigma \int\limits_{l_i} \frac{M_{xP}^2\,dz}{2EJ_x},$$

где M_{xP} — изгибающий момент в произвольном сечении балки от силы P.

Поскольку $W_P = U_P$,

$$^1/_2 P\Delta_{KP} = \Sigma \int\limits_{l_i} \frac{M_{xP}^2\,dz}{2EJ_x}. \qquad (а)$$

Приложим далее к балке, нагруженной силой P, заданную нагрузку F (рис. 8.9, *в*). Точка K получит дополнительное перемещение Δ_{KF}, и сила P совершит дополнительную работу

$$W_{PF} = P\Delta_{KF}.$$

В этом выражении отсутствует множитель $^1/_2$, так как в момент приложения нагрузки F сила P уже действовала и свое значение не меняла. Нагрузка F совершает работу на перемещении Δ_{FF} точки ее приложения:

$$W_F = {}^1/_2 F\Delta_{FF}.$$

Соответствующая энергия деформации

$$U_F = \Sigma \int\limits_{l_i} \frac{M_{xF}^2\,dz}{2EJ_x}.$$

Уравнение энергетического баланса $W_F = U_F$ имеет вид

$$^1/_2 F\Delta_{FF} = \Sigma \int\limits_{l_i} \frac{M_{xF}^2\,dz}{2EJ_x}. \qquad (б)$$

Полная работа внешних сил представляет собой, таким образом, сумму трех слагаемых

$$W = W_P + W_F + W_{PF} = {}^1/_2 P\Delta_{KP} + {}^1/_2 F\Delta_{FF} + P\Delta_{KF}. \qquad (в)$$

Энергию деформации при совместном действии сил P и F находим по формуле (8.11), принимая во внимание, что согласно принципу независимости действия сил $M_x = M_{xP} + M_{xF}$:

$$U = \Sigma \int\limits_{l_i} \frac{(M_{xP} + M_{xF})^2\,dz}{2EJ_x}.$$

Раскрывая скобки, получаем

$$U = \Sigma \int\limits_{l_i} \frac{M_{xP}^2 dz}{2EJ_x} + \Sigma \int\limits_{l_i} \frac{M_{xF}^2\,dz}{2EJ_x} + \Sigma \int\limits_{l_i} \frac{M_{xP}\,M_{xF}\,dz}{EJ_x}. \qquad (г)$$

Приравниваем правые части выражений (в) и (г):

$$^1/_2 P\Delta_{KP} + {}^1/_2 F\Delta_{FF} + P\Delta_{KF} = \Sigma \int\limits_{l_i} \frac{M_{xP}^2\,dz}{2EJ_x} +$$

$$+ \Sigma \int\limits_{l_i} \frac{M_{xF}^2\,dz}{2EJ_x} + \Sigma \int\limits_{l_i} \frac{M_{xP}\,M_{xF}\,dz}{EJ_x}.$$

Выражения (а) и (б) свидетельствуют о том, что первые два слагаемых левой части записанного равенства равны соответственно первым двум суммам правой части. На этом основании можно приравнять третьи члены:

$$P\Delta_{KP} = \Sigma \int_{l_i} \frac{M_{xP} M_{xP} dz}{EJ_x}.$$

Отсюда искомое перемещение

$$\Delta_{KP} = \Sigma \int_{l_i} \frac{M_{xP} (M_{xP}/P)\, dz}{EJ_x}.$$

Вводя обозначение $M_1 = M_{xP}/P$ и опуская индекс x у изгибающего момента, получаем окончательную формулу для определения перемещений, которая называется интегралом Мора:

$$\Delta_{KP} = \Sigma \int_{l_i} \frac{M_P M_1 dz}{EJ_x}, \qquad (8.13)$$

где Δ_{KP} — прогиб в рассматриваемом сечении, м; M_P — изгибающий момент в этом сечении от нагрузки, Н·м; M_1 — так называемый *единичный момент*, т. е. изгибающий момент в рассматриваемом сечении от безразмерной «силы», равной единице и приложенной к ненагруженной балке в том же сечении, м; EJ_x — жесткость сечения балки при изгибе, Н·м².

Если балка имеет постоянную жесткость, то

$$\Delta_{KP} = \Sigma \frac{1}{EJ_x} \int_{l_i} M_P M_1 dz. \qquad (8.13а)$$

С физической точки зрения интеграл Мора представляет собой работу единичной силы на перемещении точки ее приложения, вызванном реальной нагрузкой. Определение углов поворота производят аналогично, с той лишь разницей, что вместо единичной силы к ненагруженной балке прикладывают единичный момент.

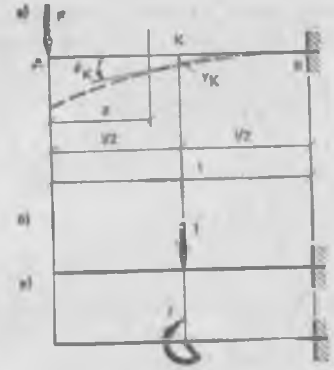
Формулы (8.13) и (8.13а) справедливы при любом нагружении балок с обычно встречающимися размерами, т. е. когда отношение высоты поперечного сечения к длине $h/l < 1/5$.

Пример 8.7. Определить прогиб и угол поворота среднего сечения консоли, рассмотренной в предыдущем примере.

Решение. *Определение прогиба.* Аналитическое выражение изгибающего момента от нагрузки (рис. 8.10, *а*): $M_F = -Fz$.

Прикладываем в среднем сечении ненагруженной балки силу, равную единице (рис. 8.10, *б*), и составляем аналитические выраже-

Рис. 8.10



ния единичных изгибающих моментов. На участке AK ($0<z<l/2$) момент $M_1=0$, на участке KB ($l/2<z<l$)

$$M_1=-1(z-l/2)=l/2-z.$$

Применяя формулу (8.13а), находим

$$\theta_K=\sum\frac{1}{EJ_x}\int_{l_i}M_FM_1\,dz=\frac{1}{EJ_x}\left[\int_0^{l/2}(-Fz)\,0dz+\right.$$

$$\left.+\int_{l/2}^{l}(-Fz)\left(\frac{l}{2}-z\right)dz\right]=-\frac{F}{EJ_x}\int_{l/2}^{l}z\left(\frac{l}{2}-z\right)dz=$$

$$=-\frac{F}{EJ_x}\left(\frac{lz^2}{4}-\frac{z^3}{3}\right)\Bigg|_{l/2}^{l}=-\frac{F}{EJ_x}\left(\frac{l^3}{4}-\frac{l^3}{3}-\frac{l^3}{16}+\frac{l^3}{24}\right)=$$

$$=\frac{5}{48}\frac{Fl^3}{EJ_x}.$$

Положительное значение свидетельствует о том, что направления прогиба и единичной силы совпадают (прогиб вниз).

Определение угла поворота. Вместо силы прикладываем в рассматриваемом сечении единичный момент (рис. 8.10, *в*). Тогда на участке AK по-прежнему $M_1=0$, на участке KB $M_1=1$ и согласно той же формуле

$$\theta_K=\frac{1}{EJ_x}\int_{l/2}^{l}(-Fz)\,1dz=-\frac{F}{EJ_x}\int_{l/2}^{l}z\,dz=$$

$$=-\frac{Fz^2}{2EJ_x}\Bigg|_{l/2}^{l}=-\frac{F}{2EJ_x}\left(l^2-\frac{l^2}{4}\right)=-\frac{3}{8}\frac{Fl^2}{EJ_x}.$$

Знак «минус» указывает на то, что поворот осуществляется в сторону, противоположную направлению единичного момента, т. е. против хода часовой стрелки (см. рис. 8.10, *а*).

8.5. Правило Верещагина

Техника определения перемещений значительно упрощается благодаря применению специального графоаналитического приема для вычисления интеграла вида $\int_a^b M_FM_1dz$, где a и b — пределы интегрирования, т. е. абсциссы пограничных сечений рассматриваемого участка. Поскольку подынтегральное выражение можно трактовать как произведение ординат эпюры изгибающих моментов M_F от действительной нагрузки (*грузовой* эпюры) на ординаты эпюры моментов M_1 от единичной нагрузки (*единичной* эпюры), этот прием называют с п о с о б о м п е р е м н о ж е н и я э п ю р. Он был предложен в 1925 г. студентом Московского института инженеров железнодорожного транспорта А. К. Верещагиным[1] и поэтому называется п р а в и л о м В е р е щ а г и н а.

Сущность этого способа становится понятной, если доказать, что результат перемножения двух эпюр, из которых одна линейна, а другая произвольна, равен произведению площади эпюры произвольного очертания на расположенную под ее центром тяжести ординату линейной эпюры.

Пусть грузовая эпюра имеет произвольное очертание (нелинейное), а единичная — линейное (рис. 8.11), т. е. подчиняется уравнению $M_1=z\operatorname{tg}\alpha$, где α — угол наклона эпюры к оси абсцисс. Подставляя это уравнение в подынтегральное выражение, получаем

$$\int_a^b M_FM_1\,dz=\int_a^b M_Fz\operatorname{tg}\alpha dz=\operatorname{tg}\alpha\int_a^b M_Fz\,dz.$$

Новое подынтегральное выражение есть не что иное, как статический момент элементарной площади $d\omega=M_Fdz$ грузовой эпюры относительно оси ординат. Тог-

[1] Андрей Константинович Верещагин (1896—1959) — талантливый советский ученый и изобретатель. Его имя широко известно, главным образом, в связи с наглядным способом вычисления интеграла Мора. Он внес также большой вклад в развитие военной техники и считается основоположником отечественной школы минной электротехники.

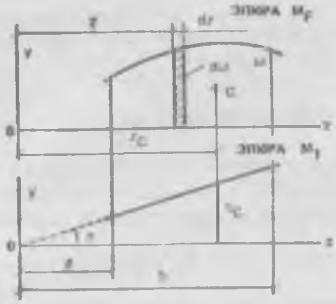


Рис. 8.11

да интеграл представляет собой статический момент площади ω всей грузовой эпюры:

$$S_{y\omega} = \int_a^b M_F z dz.$$

Но согласно формулам (5.3) статический момент площади равен ее произведению на координату центра тяжести: $S_{y\omega} = \omega z_C$. Следовательно,

$$\int_a^b M_F M_1 dz = S_{y\omega} \operatorname{tg}\alpha = \omega z_C \operatorname{tg}\alpha,$$

и так как величина $z_C \operatorname{tg}\alpha$ характеризует ординату η_C единичной эпюры, расположенную под центром тяжести грузовой, то окончательно

$$\int_a^b M_F M_1 dz = \omega\eta_C,$$

что и требовалось доказать.

Левая часть полученного равенства отличается от интеграла Мора отсутствием жесткости сечения, поэтому для определения перемещений результат перемножения эпюр следует разделить на EJ_x. Тогда из формулы (8.13а) получится математическое выражение правила Верещагина:

$$\Delta = \sum \frac{\omega_i \eta_{iC}}{EJ_x}, \tag{8.14}$$

где Δ — искомое перемещение (прогиб или угол поворота).

Эта зависимость справедлива для любой балки постоянного сечения благодаря тому, что, по крайней мере,

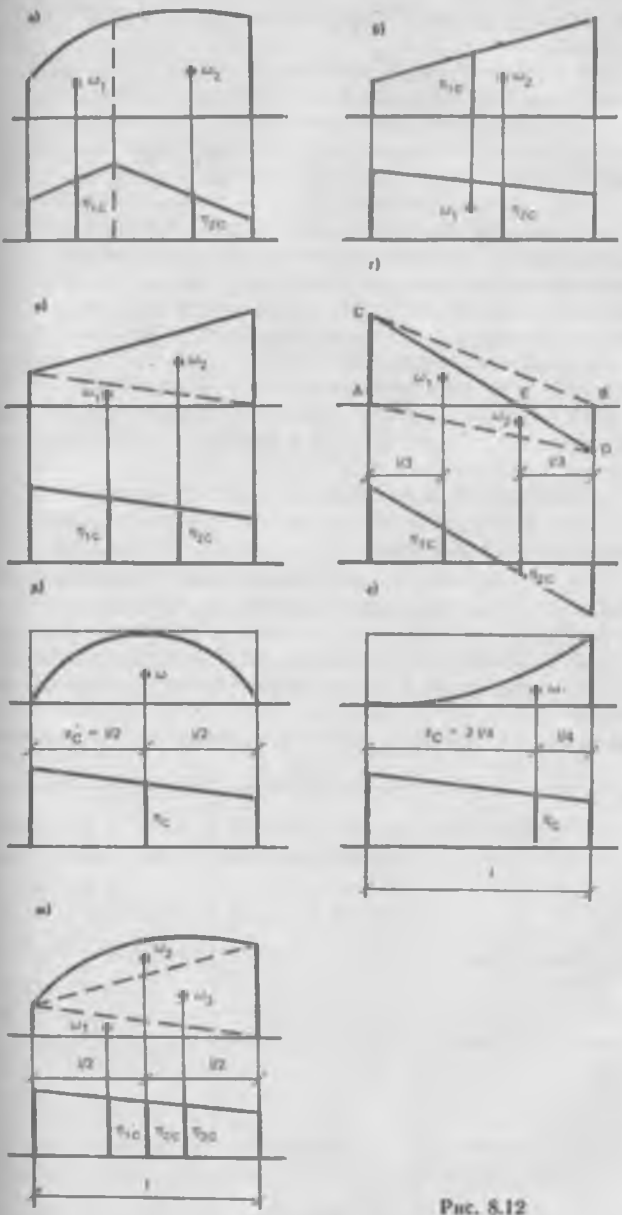


Рис. 8.12

одна из двух эпюр — единичная — всегда очерчивается прямыми.

При использовании правила Верещагина полезно руководствоваться следующими рекомендациями.

1. Результат перемножения эпюр *положителен*, если эпюра и ордината η_C под ее центром тяжести на другой эпюре расположены *по одну сторону* от оси балки (см. рис. 8.11), и *отрицателен*, если *по разные стороны*.

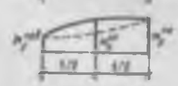
2. Ординату η_C необходимо брать обязательно с *линейной* эпюры, причем линейность понимают в строго математическом смысле: эпюра должна монотонно изменяться по линейному закону (см. например, рис. 7.12, *г*). Эпюра, состоящая из прямолинейных отрезков с разными угловыми коэффициентами (см. рис. 7.8, *д*), является ломаной, и ее рассматривают как нелинейную.

3. Если одна из эпюр криволинейная, а другая ломаная, последнюю разбивают на участки, в пределах которых она линейна (рис. 8.12, *а*).

4. Если обе эпюры линейны, то принципиально безразлично, у какой из них брать площадь и у какой — ординату η_C (рис. 8.12, *б*).

5. При перемножении линейных трапециевидных эпюр нет необходимости находить положение центра тяжести какой-либо из них. Удобнее разбить одну из эпюр на два треугольника и умножить площадь каждого из них на ординату под его центром тяжести с другой эпю-

Таблица 8.1. **Значения интеграла произведения трапециевидных эпюр**

Эпюра M_F	Эпюра M_1	$\int_0^l M_F M_1 \, dz$
		$\frac{l}{6}\left(2M_F^{лев} M_1^{лев} + 2M_F^{пр} M_1^{пр} + M_F^{лев} M_1^{пр} + M_F^{пр} M_1^{лев}\right)$
		$\frac{l}{6}\left[M_F^{лев} M_1^{лев} + M_F^{пр} M_1^{пр} + 2M_F^{ср} \times \left(M_1^{лев} + M_1^{пр}\right)\right]$

ры (рис. 8.12, *в*). Результат такого перемножения приведен в верхней строке табл. 8.1.

Аналогично поступают и в частном случае, когда одна или обе линейные эпюры разнозначны (рис. 8.12, *г*). Если какую-либо из них представить в виде двух треугольников CAB и ABD, расположенных по разные стороны от оси, то добавленные при этом треугольники CEB и AED на результат не влияют, поскольку их ординаты равны между собой и противоположны по знаку.

6. Если грузовая эпюра представляет собой симметричную квадратную параболу (от равномерно распределенной нагрузки интенсивностью q), описываемую уравнением $M(z)=(ql/2)z-qz^2/2$ (см. пример 7.2), то ее площадь

$$\omega=\int_0^l M(z)\,dz=2\int_0^{l/2}[(ql/2)z-qz^2/2]\,dz=$$

$$=2(qlz^2/4-qz^3/6)\Big|_0^{l/2}=2(ql^3/16-ql^3/48)=ql^3/12,$$

что составляет $^2/_3$ площади описанного прямоугольника (рис. 8.12, *д*):

$$\omega={}^2/_3(ql^2/8)\,l={}^2/_3M_{\max}\,l.$$

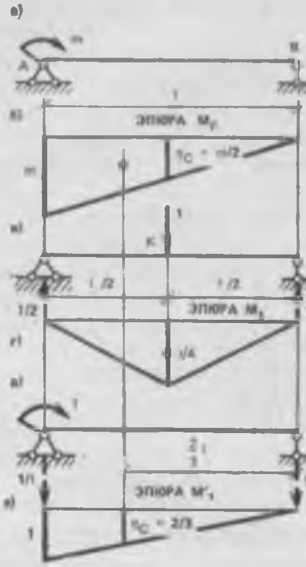
Очевидно, если эпюра представляет собой параболу, описываемую уравнением $M(z)=qz^2/2$ (см. пример 7.6), то ее площадь составляет треть описанного прямоугольника (рис. 8.12, *е*):

$$\omega={}^1/_3M_{\max}\,l={}^1/_3(ql^2/2)\,l=ql^3/6.$$

Абсцисса центра тяжести эпюры в этом случае согласно формулам (5.2) составляет

$$z_C=\frac{\int\limits_{\omega}z\,d\omega}{\omega}=\frac{\int_0^l zM(z)\,dz}{\omega}=\frac{\int_0^l (qz^3/2)\,dz}{ql^3/6}=\frac{ql^4/8}{ql^3/6}={}^3/_4l.$$

7. Если очертание грузовой эпюры имеет вид параболической трапеции (рис. 8.12, *ж*), то эпюру разбивают на два треугольника и параболический сегмент, площадь которого ω_2 всегда равна $ql^3/12$, а положение центра тяжести соответствует середине рассматриваемого участка. Результат перемножения такой эпюры с прямолинейной трапециевидной приведен в нижней строке табл. 8.1, при-



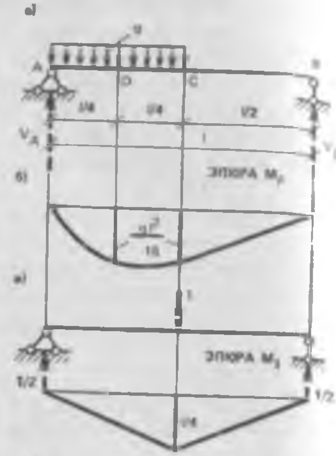


Рис. 8.13

Рис. 8.14

чем он охватывает случай, когда парабола обращена выпуклостью в другую сторону, и частные случаи, представленные на рис. 8.12, *д*, *е*.

Пример 8.8. Определить прогиб в середине пролета и угол поворота на левой опоре балки, изображенной на рис. 8.13, *а*.

Решение. *Определение прогиба.* Грузовая эпюра построена на рис. 8.13, *б* согласно указаниям примера 7.4 (при использовании правила Верещагина эпюры обычно не штрихуют). Прикладывая в середине пролета балки, освобожденной от нагрузки, единичную силу (рис. 8.13, *в*), в соответствии с примером 7.1 строим от нее тоже эпюру изгибающих моментов (рис. 8.13, *г*).

Замечаем, что грузовая эпюра линейна на всем протяжении, а единичная — нелинейна (ломаная), поэтому согласно п. 2 рекомендаций по использованию правила Верещагина в расчет принимаем площадь эпюры M_1, а ординату η_C берем с эпюры M_F. Тогда искомый прогиб на основании формулы (8.14)

$$y_K = \Delta = \omega\eta_C/(EJ_x) = [(1/(EJ_x)](l/4)(l/2)(m/2) = ml^2/(16EJ_x). \qquad (8.15)$$

Положительное значение свидетельствует о том, что прогиб направлен в сторону действия единичной силы, т. е. вниз.

Определение угла поворота производим в следующей последовательности. Прикладываем на левой опоре единичный момент (рис. 8.13, *д*) и строим соответствующую эпюру изгибающих моментов (рис. 8.13, *е*). В этом случае грузовая и единичная эпюры линейны на всем протяжении и согласно п. 4 они равноправны с точки зрения определения площади и ординаты η_C. Искомый угол поворота

$$\theta_A = [ml/(2EJ_x)]\, 2/3 = ml/(3EJ_x). \qquad (8.16)$$

Положительное значение указывает на то, что поворот осуществляется в направлении единичного момента, т. е. по ходу часовой стрелки.

Пример 8.9. Определить прогиб посередине балки с равномерно распределенной нагрузкой на половине пролета (рис. 8.14, *а*).

Решение. Для построения грузовой эпюры воспользуемся результатами примера 7.8. При $a = b = l/2$ получаем следующие значения опорных реакций:

$$V_A = qa\,(a/2 + b)/l = q\,(l/2)(l/4 + l/2)/l = 3ql/8;$$

$$V_B = qa^2/(2l) = q\,(l/2)^2/(2l) = ql/8.$$

Построение грузовой эпюры (рис. 8.14, *б*) производим по характерным точкам:

$$M_A = M_B = 0; \quad M_C = V_B\, l/2 = (ql/8)\, l/2 = ql^2/16;$$

$$M_D = V_A\, l/4 - q\,(l/4)^2/2 = (3ql/8)\, l/4 - ql^2/32 = ql^2/16.$$

Построение единичной эпюры (рис. 8.14, *в*) повторяет предыдущий пример.

Анализируя обе эпюры, видим, что в целом они нелинейны. Их перемножение осуществляем с помощью табл. 8.1. На участке AC имеем параболическую и линейную трапеции, выродившиеся в треугольники с ординатами:

$$M_F^{\text{лев}} = 0,\ M_F^{\text{пр}} = M_F^{\text{ср}} = ql^2/16;\ M_1^{\text{лев}} = 0,\ M_1^{\text{пр}} = l/4.$$

Соответствующее перемещение

$$\Delta_C^{\text{лев}} = \frac{l/2}{6EJ_x}\left(M_F^{\text{пр}} M_1^{\text{пр}} + 2M_F^{\text{ср}} M_1^{\text{пр}}\right) = \frac{l}{12EJ_x} \times$$

$$\times \left(M_F^{\text{пр}} + 2M_F^{\text{ср}}\right) M_1^{\text{пр}} = \frac{l}{12EJ_x}\left(\frac{ql^2}{16} + 2\,\frac{ql^2}{16}\right)\frac{l}{4} =$$

$$= \frac{ql^4}{256EJ_x}.$$

На участке CB обе эпюры линейны:

$$M_F^{\text{лев}} = ql^2/16,\ M_F^{\text{пр}} = 0; \quad M_1^{\text{лев}} = l/4,\ M_1^{\text{пр}} = 0$$

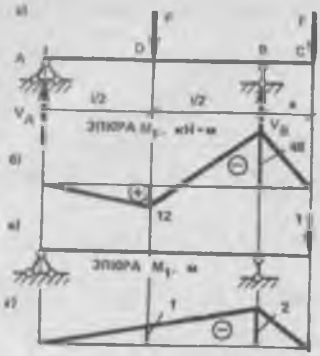
и

$$\Delta_C^{\text{пр}} = \frac{l}{12EJ_x}\, 2M_F^{\text{лев}}\, M_1^{\text{лев}} = \frac{l}{6EJ_x}\,\frac{ql^2}{16}\,\frac{l}{4} = \frac{ql^4}{384EJ_x}.$$

Искомый прогиб

$$y_C = \Delta_C^{\text{лев}} + \Delta_C^{\text{пр}} = \frac{ql^4}{256EJ_x} + \frac{ql^4}{384EJ_x} = \frac{5}{768}\,\frac{ql^4}{EJ_x}.$$

Рис. 8.15



Пример 8.10. Вычислить прогиб на свободном конце одноконсольной двутавровой балки, нагруженной одинаковыми сосредоточенными силами $F=24$ кН на конце консоли вылетом $a=2$ м и в середине пролета $l=6$ м (рис. 8.15, *а*). Расчетное сопротивление стали $R=230$ МПа, модуль упругости $E=206$ ГПа. Условия работы — нормальные.

Решение. *Определение опорных реакций.* Предполагаем, что обе реакции направлены вверх:

$$\Sigma m_B = 0;\quad V_A l - Fl/2 + Fa = 0;$$

$$V_A = \frac{F(l/2-a)}{l} = \frac{24(6/2-2)}{6}\ \text{кН} = 4\ \text{кН};$$

$$\Sigma m_A = 0;\quad Fl/2 - V_B l + F(l+a) = 0;$$

$$V_B = \frac{F(3l/2+a)}{l} = \frac{24(3\cdot 6/2+2)}{6}\ \text{кН} = 44\ \text{кН}.$$

Обе реакции получились положительными. Это подтверждает сделанное предположение, что они направлены вверх.

Проверка. $\Sigma Y = V_A + V_B - 2F = 4 + 44 - 2\cdot 24 = 0$.

Построение грузовой эпюры M_F (рис. 8.15, *б*) производим по следующим ординатам:

$$M_D = V_A\, l/2 = 4\cdot 6/2\ \text{кН·м} = 12\ \text{кН·м};$$

$$M_B = -Fa = -24\cdot 2\ \text{кН·м} = -48\ \text{кН·м}.$$

Подбор сечения. Требуемый момент сопротивления сечения балки по формуле (7.19, *а*)

$$W_x > M_{max}/R = 48\cdot 10^3/(230\cdot 10^6)\ \text{м}^3 = 209\cdot 10^{-6}\ \text{м}^3 = 209\ \text{см}^3.$$

По табл. 1 приложения принимаем двутавр № 22 с $W_x = 232\ \text{см}^3 > 209\ \text{см}^3$ и $J_x = 2550\ \text{см}^4$.

Определение прогиба. Прикладываем на свободном конце единичную силу (рис. 8.15, *в*) и строим от нее эпюру изгибающих моментов (рис. 8.15, *г*). На правой опоре

$$M_{1B} = -1 \cdot a = -1 \cdot 2 \text{ м} = -2 \text{ м},$$

в середине пролета (из подобия треугольников)

$$M_{1D} = M_{1B}/2 = -1 \text{ м}.$$

Грузовая и единичная эпюры имеют ломаное очертание, т. е. нелинейны. Разбиваем их на три линейных отрезка (в пределах участков *AD*, *DB*, *BC*) и перемножаем с помощью табл. 8.1, учитывая алгебраические знаки ординат:

$$y_C = \frac{l/2}{6EJ_x} 2M_{FD} M_{1D} + \frac{l/2}{6EJ_x} (2M_{FD} M_{1D} + 2M_{FB} M_{1B} +$$

$$+ M_{FD} M_{1B} + M_{FB} M_{1D}) + \frac{a}{6EJ_x} 2M_{FB} M_{1B} =$$

$$= \frac{l}{12EJ_x} (4M_{FD} M_{1D} + 2M_{FB} M_{1B} + M_{FD} M_{1B} +$$

$$+ M_{FB} M_{1D}) + \frac{a}{3EJ_x} M_{FB} M_{1B} =$$

$$= \frac{6 \cdot 10^3}{12 \cdot 206 \cdot 10^9 \cdot 2550 \cdot 10^{-8}} [4 \cdot 12 (-1) + 2 (-48)(-2) + 12 (-2) +$$

$$+ (-48)(-1)] + \frac{2 \cdot 10^3}{3 \cdot 206 \cdot 10^9 \cdot 2550 \cdot 10^{-8}} (-48)(-2) \text{ м} \approx$$

$$\approx 0{,}028 \text{ м} = 2{,}8 \text{ см}.$$

8.6. Расчет балок на жесткость

Для того чтобы судить о работе балок, мало знать только напряжения, которые возникают в их поперечных сечениях и по которым проверяют прочность. Даже весьма прочные балки могут оказаться непригодными к эксплуатации, если под нагрузкой они будут сильно деформироваться вследствие недостаточной жесткости.

В целях обеспечения нормальной эксплуатации строительных конструкций расчет изгибаемых элементов производят не только по первой группе предельных состояний, но и по второй — на ж е с т к о с т ь. Во избежание появления чрезмерных перемещений наибольший относительный прогиб $|f|/l$ не должен превышать предельного значения f_u/l, устанавливаемого строительными нормами (см. п. 8.1):

$$|f|/l < f_u/l, \tag{8.17}$$

где $|f|$ — абсолютное значение стрелы прогиба; l — пролет балки (у консоли — двойной вылет).

Расчет на жесткость производят по нормативной нагрузке, т. е. без учета возможной перегрузки[1]. Объясняется это тем, что конструкция должна обладать необходимой жесткостью в течение длительной эксплуатации, а не в критические моменты ее прекращения, характеризуемые предельными состояниями первой группы и коэффициентами надежности по нагрузке $\gamma_f > 1$.

Пример 8.11. Проверить жесткость прямоугольных деревянных балок чердачного перекрытия, рассмотренного в примере 7.13.

Решение. Интенсивность нормативной нагрузки

$$q_n = (p_{1n} + p_{2n} + p_{3n} + p_n)\, a = (0{,}2 + 0{,}4 + 0{,}65 + 1)\ 1{,}2\ \text{кН/м} = 2{,}7\ \text{кН/м}.$$

Момент инерции площади сечения балки по формуле (5.9)

$$J_x = bh^3/12 = 15 \cdot 20^3/12\ \text{см}^4 = 10\,000\ \text{см}^4 = 1 \cdot 10^{-4}\ \text{м}^4.$$

Проверку жесткости производим по формуле (8.17), используя выражение прогиба (8.7), полученное в примере 8.4. При этом имеем в виду, что модуль упругости древесины $E = 10$ ГПа $= 10 \cdot 10^9$ Па (см. табл. 2.1), а предельный относительный прогиб $f_u/l = 1/200$ (см. п. 8.1). Тогда

$$\frac{|f|}{l} = \frac{5}{384}\,\frac{q_n l^3}{EJ_x} = \frac{5 \cdot 2{,}7 \cdot 10^3 \cdot 6^3}{384 \cdot 10 \cdot 10^9 \cdot 1 \cdot 10^{-4}} \approx \frac{1}{132} > \frac{1}{200}.$$

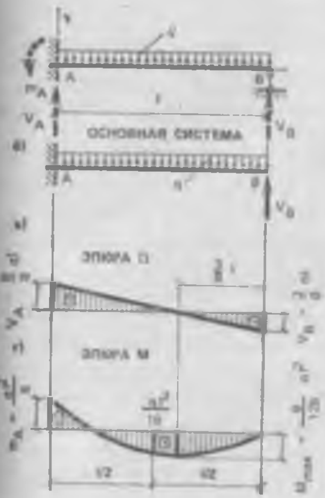
Жесткость недостаточна. Необходимо увеличить поперечные размеры балок или уменьшить их шаг a (см. рис. 1.10, *б*). В первом случае, как нетрудно убедиться самостоятельно, подходящим является сечение $b \times h = 18 \times 22$ см (см. табл. 5 приложения).

8.7. Понятие о расчете статически неопределимых балок

Статически неопределимые системы уже встречались в п. 2.3 при решении задач на растяжение (сжатие). Там недостающие уравнения для определения неизвестных усилий составлялись исходя из рассмотрения системы

---

[1] Согласно СТ СЭВ [10] нагрузку с коэффициентом надежности $\gamma_f \leq 1$ правильнее называть расчетной *эксплуатационной* (в отличие от расчетной *предельной*, учитываемой в расчетах по первой группе предельных состояний, см. п. 2.12). Однако поскольку она в большинстве случаев совпадает с нормативной ($\gamma_f = 1$), для упрощения терминологии и во избежании путаницы здесь и далее в расчетах на жесткость используется термин «нормативная» нагрузка.



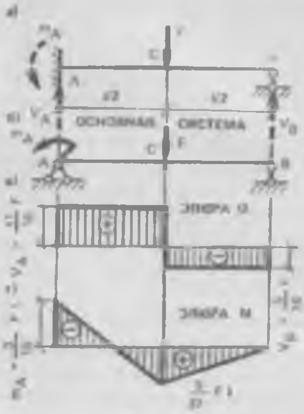


Рис. 8.16

Рис. 8.17

в деформированном состоянии. Расчет статически неопределимых балок также возможен только при анализе геометрической стороны задачи.

Пример 8.12. Построить эпюры Q и M для балки, изображенной на рис. 8.16, *а*.

Решение. *Статическая сторона задачи.* При двух уравнениях равновесия, которые дает статика ($\Sigma Y = 0$ и $\Sigma m = 0$), балка имеет три опорные реакции: V_A, V_B и m_A, т. е. она один раз статически неопределима.

Геометрическая сторона. Мысленно отбросим у заданной балки опору B как лишнюю связь и заменим ее действие неизвестной реакцией V_B. Полученная таким путем статически определимая балка называется основной системой (рис. 8.16, *б*). Для того чтобы она была эквивалентна заданной балке по характеру деформирования, необходимо выполнение условия $y_B = 0$, т. е. перемещение основной системы по направлению неизвестной реакции, приложенной в месте удаления лишней связи, должно отсутствовать.

Физическая сторона состоит в том, что необходимо определить прогиб сечения B основной системы от всех внешних сил, включая реакцию V_B. Применяя принцип независимости действия сил, находим прогиб отдельно от нагрузки q и отдельно от реакции. Для этого достаточно воспользоваться результатами примеров 8.1 и 8.6. Складывая алгебраически выражения (8.4) и (8.12), получаем

$$y_B = -ql^4/(8EJ_x) + V_B\, l^3/(3EJ_x).$$

или согласно геометрическому условию после сокращения на $l^3/(EJ_x)$

$$V_B/3 - ql = 0.$$

Отсюда искомая реакция $V_B = {}^3/_8\,ql$. Знак «плюс» свидетельствует о том, что первоначально принятое направление реакции вверх — правильное. Дальнейший ход решения сводится к расчету консоли на действие заданной равномерно распределенной нагрузки и найденной сосредоточенной силы V_B.

Построение эпюр Q и M осуществлено на рис. 8.16, *в*, *г* по следующим ординатам:

$$Q_B = -V_B = -{}^3/_8 ql, \quad Q_A = V_A = ql - {}^3/_8 ql = {}^5/_8 ql;$$

$$M_B = 0, \quad M_{l/2} = V_B l/2 - q(l/2)^2/2 = (3ql/8)\,l/2 -$$

$$- ql^2/8 = ql^2/16, \quad M_A = (3ql/8)\,l - ql^2/2 = -ql^2/8.$$

В сечении, где поперечная сила равна нулю (оно находится на расстоянии ${}^3/_8\ l$ от правой опоры), изгибающий момент имеет наибольшее положительное значение

$$M_{\max} = (3ql/8)\,{}^3/_8 l - q\,({}^3/_8 l)^2/2 = {}^9/_{128} ql^2.$$

Сравнивая рис. 8.16, *г* и 7.9, *г*, замечаем, что защемление конца простой балки, несущей равномерно распределенную нагрузку, в 2 раза снижает значение изгибающего момента посередине пролета.

Пример 8.13. Построить эпюры Q и M для балки, изображенной на рис. 8.17, *а*

Решение. *Раскрытие статической неопределимости.* Путем рассуждений, аналогичных предыдущему примеру, нетрудно убедиться, что рассматриваемая балка также один раз статически неопределима. Основная система, использованная при решении указанного примера, не является единственно возможной. В качестве лишнего неизвестного можно принять реактивный момент в заделке. Тогда основная система будет представлена простой двухопорной балкой, на которую действует заданная нагрузка и неизвестный сосредоточенный момент m_A (рис. 8.17, *б*).

Дополнительное уравнение в этом случае отражает равенство нулю угла поворота в заделке: $\theta_A = 0$. Применяя опять принцип независимости действия сил, определяем угол поворота на левой опоре основной системы отдельно от нагрузки и отдельно от момента. В первом случае достаточно воспользоваться формулой (8.5) примера 8.3, во втором — формулой (8.16) примера 8.8:

$$\theta_A = -Fl^2/(16EJ_x) + m_A l/(3EJ_x).$$

Отсюда $m_A = {}^3/_{16}\,Fl$.

Построение эпюр Q и M (рис. 8.17, *в*, *г*) производим, руководствуясь частными случаями примеров 7.1, и 7.4, по следующим ординатам:

$$Q_A = Q_C^{\text{лев}} = V_A = F/2 + m_A/l = F/2 + {}^3/_{16}F = {}^{11}/_{16}F;$$

$$Q_C^{\text{пр}} = Q_B = -V_B = -F/2 + {}^3/_{16}F = -{}^5/_{16}F;$$

$$M_A = -m_A = -{}^3/_{16}Fl, \quad M_B = 0,$$

$$M_C = V_B l/2 = {}^5/_{16}Fl/2 = {}^5/_{32}Fl.$$

Глава 9. СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

9.1. Косой изгиб

В предыдущих главах рассмотрены простейшие виды деформации прямого бруса: осевое растяжение (сжатие), сдвиг (срез, скалывание), кручение и прямой изгиб. В реальных условиях элементы конструкций часто испытывают не одну какую-либо деформацию, а одновременно несколько. Такие случаи называются сложным сопротивлением (сложной деформацией). Одним из видов сложного сопротивления является *косой изгиб* — деформация, при которой плоскость действия изгибающего момента не совпадает ни с одной из главных плоскостей бруса.

При *плоском* косом изгибе существует единая для всего бруса силовая плоскость (рис. 9.1), т. е. во всех сечениях углы, составляемые силовыми линиями и главными центральными осями, одинаковы. В случае *пространственного* косого изгиба нагрузки располагаются в разных продольных плоскостях, вследствие чего указанные углы не постоянны по длине бруса.

При поперечном косом изгибе, независимо от того, плоский он или пространственный, в поперечных сечениях бруса возникают четыре внутренних силовых фактора: поперечные силы Q_x, Q_y и изгибающие моменты M_x, M_y (см. рис. 1.15, *г*). Однако влияние поперечных сил, как правило, незначительно, и в расчетах на прочность и жесткость им пренебрегают.

Определение напряжений и перемещений при косом изгибе рассмотрим на примере консоли прямоугольного сечения, к которой приложена сосредоточенная сила F (рис. 9.2, *а*), направленная под углом α к главной центральной оси y. Разложим эту силу на составляющие вдоль главных осей поперечного сечения

$$F_y = F\cos\alpha; \quad F_x = F\sin\alpha. \tag{9.1}$$

Составляющая F_y изгибает консоль в вертикальной плоскости относительно оси x, вызывая в произвольном по длине балки сечении изгибающий момент

$$M_x = F_y z = Fz\cos\alpha = M\cos\alpha. \tag{9.2}$$

Составляющая F_x изгибает консоль в горизонтальной плоскости относительно оси y, вызывая момент

$$M_y = F_x z = Fz\sin\alpha = M\sin\alpha. \tag{9.3}$$

Рис. 9.1

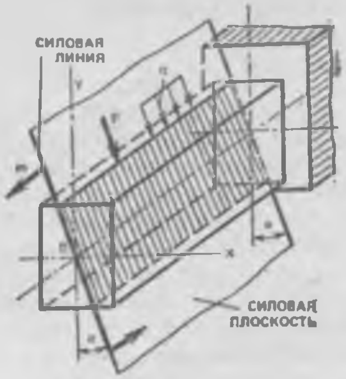
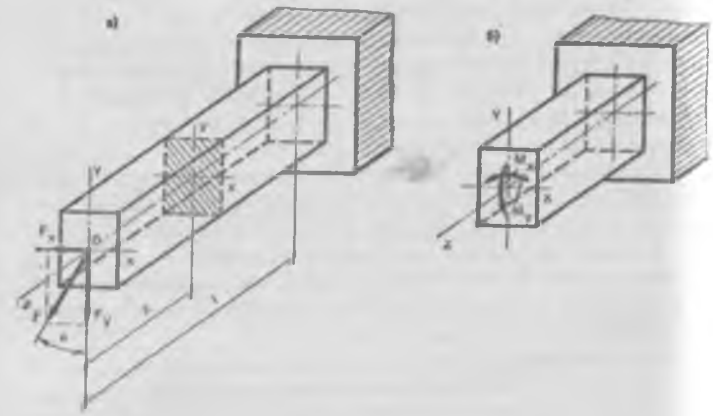


Рис. 9.2



Величина $M=Fz$ представляет собой результирующий изгибающий момент в рассматриваемом сечении, т. е. момент, который возникает в силовой плоскости. Таким образом, косой изгиб можно свести к двум прямым во взаимно перпендикулярных плоскостях (рис. 9.2, *б*).

Для определения нормальных напряжений, обусловленных каждым моментом в отдельности, воспользуемся формулой (7.13), отвечающей случаю прямого изгиба. Тогда при изгибе в вертикальной плоскости получим следующее выражение напряжений в произвольном волокне:

$$\sigma_{M_x} = (M_x/J_x)\,y.$$

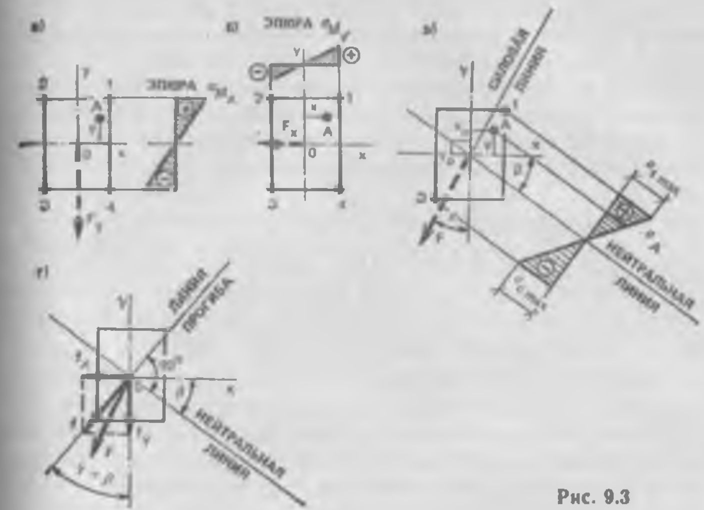


Рис. 9.3

Соответствующая эпюра построена на рис. 9.3, *а*. Наибольшие по абсолютному значению напряжения возникают в крайних верхних и нижних волокнах:

$$|\sigma_{M_x}|_{max} = M_x/W_x.$$

Аналогично записывается выражение напряжений при изгибе в горизонтальной плоскости (рис. 9.3, *б*):

$$\sigma_{M_y} = (M_y/J_y)\,x.$$

Наибольшие напряжения возникают в крайних правых и левых волокнах:

$$|\sigma_{M_y}|_{max} = M_y/W_y.$$

Суммарные напряжения согласно принципу независимости действия сил

$$\sigma = \sigma_{M_x} + \sigma_{M_y} = (M_x/J_x)\,y + (M_y/J_y)\,x. \qquad (9.4)$$

Хотя эта формула получена из рассмотрения частного случая косого изгиба, она носит общий характер. Изгибающие моменты M_x, M_y и координаты x, y интересующего волокна удобнее всего принимать по абсолютному значению, а знак слагаемых напряжений устанавливать исходя из характера деформирования бруса. Так, например, точка A при изгибе в обеих главных плоскостях попадает в растянутую зону балки, поэтому оба слагаемых положительны.

Для построения эпюры суммарных напряжений необходимо предварительно найти положение нейтральной (нулевой) линии. Воспользовавшись формулой (9.4), подставим в нее значения изгибающих моментов (9.2) и (9.3):

$$\sigma = (M \cos\alpha / J_x)\, y + (M \sin\alpha / J_y)\, x = M\,[(\cos\alpha / J_x)\, y + (\sin\alpha / J_y)\, x].$$

Поскольку нейтральная линия является геометрическим местом точек, в которых напряжения отсутствуют, приравниваем записанное выражение нулю:

$$M\,[(\cos\alpha / J_x)\, y_0 + (\sin\alpha / J_y)\, x_0] = 0,$$

где x_0 и y_0 — текущие координаты точек нейтральной линии.

Интерес представляет случай, когда результирующий изгибающий момент $M = Fz \neq 0$, поэтому остается приравнять нулю выражение в квадратных скобках:

$$(\cos\alpha / J_x)\, y_0 + (\sin\alpha / J_x)\, x_0 = 0.$$

Отсюда $y_0 = -(\sin\alpha/\cos\alpha)\,(J_x/J_y)\,x_0 = -\operatorname{tg}\alpha\,(J_x/J_y)\,x_0$.

Получили уравнение прямой, проходящей через начало координат (если $x_0 = 0$, то $y_0 = 0$). В данном случае начало координат совпадает с центром тяжести сечения (точка O на рис. 9.3), поэтому можно утверждать, что *при косом изгибе, как и при прямом, нейтральная линия проходит через центр тяжести поперечного сечения балки.*

Записанное уравнение удовлетворяется, если координаты x_0 и y_0 имеют разные знаки. Таким образом, в сечениях рассматриваемой балки нейтральная линия должна проходить через II ($x_0 < 0$; $y_0 > 0$) и IV ($x_0 > 0$; $y_0 < 0$) квадранты.

Обозначим β угол наклона нейтральной линии к оси x (рис. 9.3, *в*). Тогда $\operatorname{tg}\beta = -y_0/x_0$ и следовательно,

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha\, J_x/J_y. \tag{9.5}$$

Из этой зависимости следуют три важных вывода.

1. Углы α и β отсчитываются в одном направлении, т. е. для совмещения с нейтральной линией ось x следует повернуть на угол β в том же направлении, в каком необходимо повернуть ось y для совмещения с силовой линией (в рассматриваемом случае — по ходу часовой стрелки).

2. При косом изгибе угол $\beta \neq \alpha$, следовательно, в отличие от прямого изгиба нейтральная линия **не перпендикулярна** силовой. Перпендикулярность сохраняется только при $J_x = J_y$, т. е. если главные моменты инерции одинаковы (например, у кругового или квадратного сечений). Но тогда все центральные оси сечения являются главными (см. п. 5.4) и изгиб в любой плоскости будет прямым.

3. Положение нейтральной линии не зависит от значения прикладываемой нагрузки.

Установив положение нейтральной линии, проводим параллельной ей две касательные к сечению и перпендикулярно — базисную линию (см. рис. 9.3, *в*). Далее через точку пересечения базисной и нейтральной линий проводим прямую, которая характеризует линейный закон изменения нормальных напряжений (9.4). Для осуществления последней операции кроме найденной нулевой точки эпюры достаточно вычислить и отложить суммарное напряжение в любой другой точке. Обычно используют наиболее удаленные от нейтральной линии точки, откладывая в принятом масштабе максимальные напряжения растяжения $\sigma_{t\max}$ и сжатия $\sigma_{c\max}$, возникающие в соответствующих волокнах. Чтобы придать эпюре законченный вид, ее заштриховывают, как всегда, перпендикулярно базисной линии и указывают знаки ординат.

Таким образом, определение положения нейтральной линии необходимо в первую очередь для отыскания наиболее напряженных точек поперечного сечения. Однако на примере рассмотренной балки видно, что если сечение имеет две оси симметрии и точки, которые максимально удалены одновременно от обеих осей (прямоугольник, двутавр и т. п.), то эти точки и являются заведомо опасными. Действительно, по эпюрам σ_{M_x} и σ_{M_y} (см. рис. 9.3, *а*, *б*) можно со всей определенностью утверждать, что для балки из пластичного материала наиболее опасны те угловые точки, где совпадают знаки указанных напряжений. В данном случае это точка *1*, где суммируются напряжения растяжения, и точка *3*, где суммируются напряжения сжатия.

Условие прочности таких балок имеет вид

$$\sigma_{\max} = M_x / W_{x\,net} + M_y / W_{y\,net} < R\gamma_c, \qquad (9.6)$$

где M_x и M_y — расчетные изгибающие моменты относительно главных осей x и y в опасном сечении, Н·м; $W_{x\,net}$ и $W_{y\,net}$ — моменты сопротивления сечения нетто относительно указанных осей, $м^3$; R — расчетное сопротивление материала растяжению (сжатию) при изгибе, Па (МПа), γ_c — коэффициент условий работы.

При учете развития пластических деформаций (см. п. 7.8) прочность стальных балок сплошного сечения проверяют в соответствии с рекомендациями главы СНиП [9].

Если балка выполнена из хрупкого материала, то опасной является только точка *1*. В этом случае, однако, рациональнее переходить, как и при прямом изгибе, на асимметричное сечение (см. п. 7.6).

Формула (9.6) предназначена для проверочного расчета. При известных размерах поперечного сечения из нее нетрудно найти и предельно допустимое значение нагрузки. Сложнее осуществить подбор сечения, так как в формулу входят две неизвестные геометрические характеристики W_x и W_y. В общем случае приходится задаваться поперечными размерами и проверять их по указанной формуле. Если неравенство не удовлетворяется, то размеры корректируют и проверяют снова.

Для простых сечений, например прямоугольного, расчет упрощается, особенно если задано отношение размеров. При подборе прокатных двутавров задаются отношением моментов сопротивления $k = W_x/W_y$, которое, как видно из табл. 1 приложения, колеблется от 6 до 14.

Прогибы при косом изгибе определяют тоже на основании принципа независимости действия сил путем геометрического суммирования прогибов в направлениях главных центральных осей.

Установим направление суммарного прогиба той же консоли, которая была уже рассмотрена (см. рис. 9.2). Для определения прогибов отдельно от каждой из составляющих F_x и F_y воспользуемся формулой (8.12) примера 8.6. Тогда прогиб свободного конца консоли по оси x (относительно оси y)

$$f_x = F_x l^3/(3EJ_y),$$

по оси y (относительно оси x)

$$f_y = F_y l^3/(3EJ_x).$$

Полный прогиб

$$f = \sqrt{f_x^2 + f_y^2}\,. \tag{9.7}$$

Его направление характеризуется зависимостью

$$\operatorname{tg}\gamma = f_x/f_y = \frac{F_x l^3/(3EJ_y)}{F_y l^3/(3EJ_x)} = \frac{F_x}{F_y}\,\frac{J_x}{J_y},$$

где γ — угол наклона линии прогиба к оси y (рис. 9.3, *г*).

Подставляя выражения (9.1) и учитывая зависимость (9.5), получаем

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{F\sin\alpha}{F\cos\alpha}\,\frac{J_x}{J_y} = \operatorname{tg}\alpha J_x/J_y = \operatorname{tg}\beta.$$

Таким образом, направление полного прогиба при плоском косом изгибе перпендикулярно нейтральной линии и, следовательно, не совпадает с силовой линией. Именно этим обстоятельством объясняется термин «косой» изгиб.

Пример 9.1. Прямоугольное в плане помещение склада перекрыто треугольными деревянными стропильными фермами пролетом $L=18$ м и высотой $H=3{,}6$ м (рис. 9.4). По верхним поясам ферм шириной $b_1=20$ см уложены деревянные прогоны прямоугольного сечения пролетом $l=4$ м, поддерживающие асбестоцементную кровлю весом $p_{1н}=0{,}16$ кН на 1 м^2 площади горизонтальной проекции покрытия. Кровля несет нагрузку от снегового покрова $p_{2н}=1$ кН на 1 м^2 той же площади.

Подобрать сечение прогонов из условий прочности и жесткости при отношении размеров $h/b=1{,}3$. Расчетное сопротивление древесины $R=15$ МПа. Коэффициенты надежности по нагрузке $\gamma_{f1}=1{,}1$, $\gamma_{f2}=1{,}6$; коэффициент условий работы $\gamma_c=0{,}9$. Предельный относительный прогиб $f_u/l=1/200$.

Решение. *Расчет на прочность.* На каждый прогон (кроме крайних) приходится грузовая площадь шириной в плане $d=L/6=18/6$ м $=3$ м. Расчетная нагрузка на 1 м длины прогона составляет

$$q=(p_{1n}\gamma_{f1}+p_{2n}\gamma_{f2})d=(0{,}16\cdot 1{,}1+1\cdot 1{,}6)\ 3\ \text{кН/м}=5{,}33\ \text{кН/м}.$$

Нагрузка направлена наклонно по отношению к главным осям сечения, поэтому раскладываем ее на составляющие (рис. 9.5, *а*):

$$q_y=q\cos\alpha=q\cos 21^\circ 48'=5{,}33\cdot 0{,}928\ \text{кН/м}=4{,}95\ \text{кН/м};$$

$$q_x=q\sin\alpha=5{,}33\cdot 0{,}371\ \text{кН/м}=1{,}98\ \text{кН/м}.$$

Значения угла α и его тригонометрических функций заимствованы из примера 4.7.

Нормальная составляющая нагрузки q_y изгибает прогон относительно оси x как свободно лежащую на двух опорах (на двух фермах) балку (рис. 9.5, *б*) расчетным пролетом

$$l_1=l-2b_0/2=l-b_1/2=4-0{,}2/2\ \text{м}=3{,}9\ \text{м},$$

где b_0 — ширина опорной площадки прогона, равная половине ширины верхнего пояса фермы (см. рис. 9.4).

Наибольший изгибающий момент по формуле (7.2) примера 7.2,

$$M_x=q_y l_1^2/8=4{,}95\cdot 3{,}9^2/8\ \text{кН}\cdot\text{м}=9{,}41\ \text{кН}\cdot\text{м}.$$

Рис. 9.4

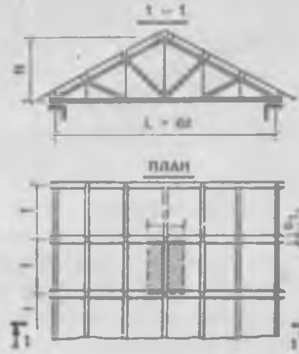
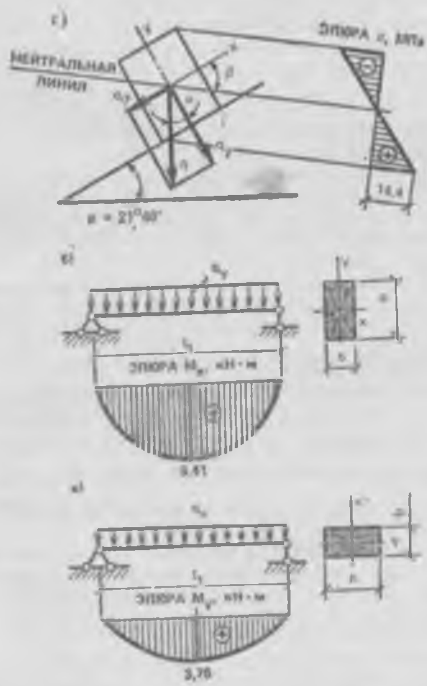

1 – 1
ПЛАН

Рис. 9.5


ЭПЮРА σ, МПа
НЕЙТРАЛЬНАЯ
ЛИНИЯ
14,4
ЭПЮРА M_x, кН · м
ЭПЮРА M_y, кН · м

Скатная составляющая q_x вызывает изгиб относительно оси y (рис. 9.5, *в*). Наибольший момент

$$M_y = q_x\ l_1^2/8 = 1,98\cdot 3,9^2/8\ \text{кН}\cdot\text{м} = 3,76\ \text{кН}\cdot\text{м}.$$

Согласно формулам (7.16) и (7.17) моменты сопротивления сечения находятся в таком же отношении, как и его размеры:

$$\frac{W_x}{W_y} = \frac{bh^2/6}{hb^2/6} = \frac{h}{b} = 1,3.$$

Отсюда $W_y = W_x/1,3$ и условие прочности (9.6) принимает вид

$$\sigma = M_x/W_x + 1,3M_y/W_x < R.$$

Понижающий коэффициент условий работы γ_c опущен по той причине, что он компенсируется равнозначным коэффициентом надежности по назначению $\gamma_n = 0,9$, который учитывает категорию (класс ответственности) рассчитываемого объекта (см. п. 2.12).

Записанное условие прочности выражаем относительно требуемого момента сопротивления:

$$W_x > (M_x + 1,3M_y)/R = (9,41 + 1,3\cdot 3,76) \times$$
$$\times 10^3/(15\cdot 10^6)\ \text{м}^3 = 954\cdot 10^{-6}\ \text{м}^3 = 954\ \text{см}^3.$$

С другой стороны,

$$W_x = bh^2/6 = b(1,3b)^2/6 = 0,282b^3.$$

Следовательно, $0,282\ b^3 > 954$, откуда

$$b > \sqrt[3]{954/0,282}\ \text{см} = 15\ \text{см}$$

и $h = 1,3\ b = 1,3\cdot 15$ см $= 19,5$ см.

По табл. 5 приложения принимаем сечение $b\times h = 15\times 20$ см.

Расчет на жесткость. Нормативная нагрузка

$$q_n = (p_{1n} + p_{2n})\,d = (0,16 + 1)\ 3\ \text{кН/м} = 3,48\ \text{кН/м}.$$

Ее составляющие:

$$q_{yn} = q_n \cos 21^\circ 48' = 3,48\cdot 0,928\ \text{кН/м} = 3,23\ \text{кН/м},$$
$$q_{xn} = q_n \sin 21^\circ 48' = 3,48\cdot 0,371\ \text{кН/м} = 1,29\ \text{кН/м}.$$

Моменты инерции площади сечения по формулам (5.9) и (5.10):

$$J_x = bh^3/12 = 15\cdot 20^3/12\ \text{см}^4 = 10\,000\ \text{см}^4 = 1\cdot 10^{-4}\ \text{м}^4;$$

$$J_y = hb^3/12 = 20\cdot 15^3/12\ \text{см}^4 = 5620\ \text{см}^4 = 0,562\cdot 10^{-4}\ \text{м}^4.$$

Абсолютное значение прогиба по оси y согласно выражению (8.7) примера 8.4 при $E = 10\cdot 10^9$ Па (см. табл. 2.1)

$$f_y = 5q_{yn}\ l_1^4/(384EJ_x) = 5\cdot 3,23\cdot 10^3\cdot 3,9^4/(384\cdot 10\cdot 10^9\cdot 1\cdot 10^{-4})\ \text{м} =$$
$$= 9,8\cdot 10^{-3}\ \text{м} = 0,98\ \text{см};$$

по оси x

$$f_x = 5q_{xn}\ l_1^4/(384EJ_y) = 5\cdot 1,29\cdot 3,9^4/(384\cdot 10\cdot 0,562\cdot 10^2)\ \text{м} =$$
$$= 6,9\cdot 10^{-3}\ \text{м} = 0,69\ \text{см}.$$

Полный прогиб по формуле (9.7)

$$f=\sqrt{f_x^2+f_y^2}=\sqrt{0{,}69^2+0{,}98^2}\ \text{см}=1{,}2\ \text{см}.$$

Полный относительный прогиб

$$f/l_1=1{,}2/390=1/325<1/200,$$

т. е. жесткость обеспечена.

Зная моменты инерции, нетрудно определить положение нейтральной линии. Согласно зависимости (9.5)

$$\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}\alpha J_x/J_y=0{,}4\cdot1/0{,}562=0{,}712,$$

откуда $\beta=35°26'$. Положение нейтральной линии и эпюра суммарных нормальных напряжений в сечении посередине длины прогона показаны на рис. 9.5, *а*. В справедливости максимального значения напряжений нетрудно убедиться самостоятельно, выполнив проверочный расчет подобранного сечения по формуле (9.6).

Рассмотренный пример показывает, что хотя скатная составляющая нагрузки значительно меньше нормальной, ее влияние на прочность и жесткость прогона существенно, поскольку эта составляющая изгибает прогон в плоскости наименьшей жесткости. Для снижения напряжений и прогибов стальные прогоны обычно раскрепляют тяжами, поставленными посередине пролета в плоскости кровли и тем самым вдвое сокращают расчетную длину прогонов при работе на скатную составляющую. В деревянных покрытиях этой цели служат вспомогательные стропильные ноги.

9.2. Прямой изгиб с осевым растяжением (сжатием)

На рис. 9.6, *а* представлен случай, когда прямой поперечный изгиб возникает в сочетании с осевым растяжением. К консоли приложена сила F, направленная наклонно к продольной оси балки, но лежащая в одной из главных плоскостей и приложенная в центре тяжести поперечного сечения. Разложим эту силу на составляющие вдоль оси (F_z) и нормально к ней (F_y).

Составляющая F_z растягивает балку, вызывая постоянную по всей длине продольную силу $N=F_z$ (рис. 9.6, *б*) и постоянные по высоте нормальные напряжения (рис. 9.6, *в*), определяемые по формуле (2.3):

$$\sigma_N=N/A.$$

Составляющая F_y изгибает балку в вертикальной плоскости, вызывая переменный по длине изгибающий момент $M_x=F_y z$ и линейно меняющиеся по высоте напряжения (рис. 9.6, *г*), определяемые по формуле (7.13):

$$\sigma_{M_x}=\left(M_x/J_x\right)y.$$

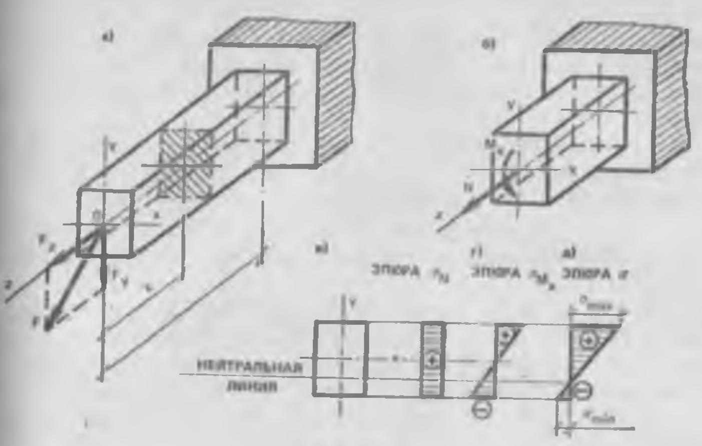


Рис. 9.6

Возникающей при изгибе поперечной силой Q_y обычно пренебрегают.

Суммарные напряжения в произвольном волокне балки согласно принципу независимости действия сил составляют

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_{M_x} = N/A + (M_x/J_x)\, y. \qquad (9.8)$$

Соответствующая эпюра построена на рис. 9.6, *д*. Из нее видно, что *при изгибе с растяжением нейтральная линия смещена относительно центра тяжести сечения.* В этом состоит принципиальное отличие изгиба с растяжением от изгиба без растяжения.

В рассматриваемом случае наиболее напряжены верхние волокна. В них суммируются положительные напряжения от продольной силы и максимальные напряжения от изгибающего момента:

$$\sigma_{max} = N/A + M_x/W_x.$$

Нижние волокна, наоборот, оказываются наименее напряженными, так как в них суммируются разнозначные напряжения:

$$\sigma_{min} = N/A - M_x/W_x.$$

Эти формулы справедливы и в том случае, когда продольная составляющая нагрузки F_z оказывает осевое сжатие, но при условии, что балка имеет большую жесткость, т. е. соблюдается принцип начальных размеров (см. п. 1.2, 3-е допущение). Тогда напряжения σ_N будут отрицательными, а наибольшие по абсолютному значению суммарные напряжения возникнут в нижних волокнах.

Таким образом, условие прочности балки из пластичного материала, испытывающей прямой изгиб в сочетании с осевым растяжением (сжатием), имеет вид

$$\sigma_{max} = N/A_{net} + M_{m.x}/W_{net} \leqslant R\gamma_c, \quad (9.9)$$

где приняты такие же обозначения, как в неравенствах (2.23) и (7.19).

Формула (9.9) удобна в первую очередь для проверки прочности. Если же требуется подобрать сечение балки, то возникают те же трудности, что и при использовании условия (9.6) в случае косого изгиба (см. п. 9.1).

Расчет балок на жесткость при изгибе с растяжением не отличается от аналогичного расчета при изгибе.

Пример 9.2. В некоторых зданиях встречаются лестницы, состоящие из двух наклонных параллельно расположенных металлических балок — косоуров, на которые уложены ступени (рис. 9.7, *а*). Подобрать из условий прочности и жесткости прокатный двутавр для косоура длиной в плане (заложением) $d = 4$ м.

Уклон лестницы $i = 1:1,75$, ширина в плане $b = 1,8$ м. Постоянная нагрузка от ступеней, косоуров и перил $p_{1n} = 3$ кН на 1 м² площади горизонтальной проекции лестницы при коэффициенте надежности $\gamma_{f1} = 1,1$. Временная нагрузка от людей $p_{2n} = 4$ кН на 1 м² той же площади при коэффициенте надежности $\gamma_{f2} = 1,2$. Косоур выполнен из стали с расчетным сопротивлением $R = 225$ МПа и работает в нормальных условиях. Предельный относительный прогиб $f_u/l = 1/200$.

Решение. *Подсчет нагрузок.* Нагрузка на каждый из двух косоуров собирается с полосы шириной $b/2$. Следовательно, полная нагрузка на 1 м длины косоура (рис. 9.7, *б*) составляет: нормативная

$$q_n = [(p_{1n} + p_{2n})\, b/2] \cos\alpha = [(3+4)\, 1,8/2] \times 0,868 \text{ кН/м} = 5,47 \text{ кН/м};$$

расчетная

$$q = [(p_{1n}\gamma_{f1} + p_{2n}\gamma_{f2})\, b/2] \cos\alpha = [(3\cdot 1,1 + 4\cdot 1,2)\, 1,8/2]\, 0,868 \text{ кН/м} = 6,33 \text{ кН/м}.$$

Здесь $\alpha = \operatorname{arctg}(1/1,75) = \operatorname{arctg} 0,571 = 29°45'$.

Расчет на прочность. Составляющая расчетной нагрузки, направленная вдоль оси косоура (рис. 9.7, *в*),

$$q_z = q \sin\alpha = 6,33\cdot 0,496 \text{ кН/м} = 3,14 \text{ кН/м},$$

нормально к оси (рис. 9.7, *г*)

$$q_y = q \cos\alpha = 6,33\cdot 0,868 \text{ кН/м} = 5,49 \text{ кН/м}.$$

Опасным является сечение в середине пролета

$$l = d/\cos\alpha = 4/0,868 \text{ м} = 4,61 \text{ м},$$

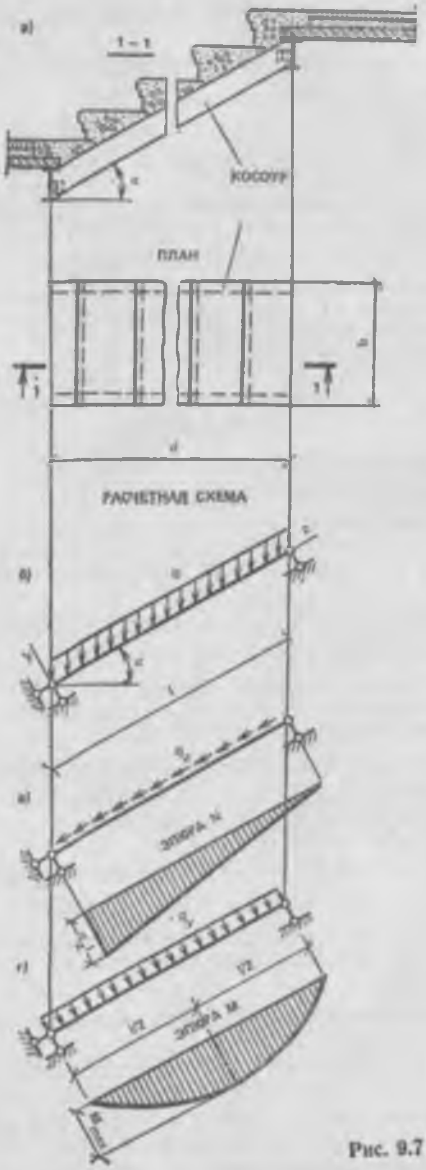


Рис. 9.7

где согласно примеру 7.2 изгибающий момент имеет наибольшее значение

$$M_{max} = q_y l^2/8 = 5{,}49 \cdot 4{,}61^2/8 \text{ кН}\cdot\text{м} = 14{,}6 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Продольная сила в этом сечении

$$N = q_z l/2 = 3{,}14 \cdot 4{,}61/2 \text{ кН} = 7{,}23 \text{ кН},$$

где $q_z l/2$ — равнодействующая осевой нагрузки, распределенной по правой половине пролета косоура.

Подставляя абсолютные значения усилий в условие прочности (9.9), при нормальных условиях работы получаем

$$(7{,}23/A_{net} + 14{,}6/W_{net})\, 10^3 < 225 \cdot 10^6.$$

Из двух слагаемых левой части записанного неравенства первое мало́ по сравнению со вторым. Действительно, числитель второго слагаемого больше числителя первого в 2 раза, а момент сопротивления прокатного двутавра W_x (м³) численно меньше площади сечения A (м²) в 5—30 раз (см. табл. 1 приложения). Поэтому сечение подбираем по второму слагаемому, но с некоторым запасом:

$$14{,}6/W_x < 225 \cdot 10^3.$$

Отсюда требуемый момент сопротивления

$$W_x > 14{,}6/(225 \cdot 10^3) \text{ м}^3 = 64{,}9 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 64{,}9 \text{ см}^3.$$

По указанной таблице приложения предварительно принимаем двутавр № 14 с $W_x = 81{,}7$ см³ > 64,9 см³, $A = 17{,}4$ см² и производим окончательную проверку прочности подобранного сечения по формуле (9.9)

$$\sigma_{max} = 7{,}23 \cdot 10^3/(17{,}4 \cdot 10^{-4}) + 14{,}6 \cdot 10^3/(81{,}7 \cdot 10^{-6}) \text{ Па} =$$

$$= (4{,}2 + 179)\, 10^6 \text{ Па} \approx 183 \cdot 10^6 \text{ Па} = 183 \text{ МПа} < R = 225 \text{ МПа},$$

т. е. прочность косоура обеспечена с запасом.

Расчет на жесткость. Интенсивность нормативной равномерно распределенной нагрузки, нормальной к оси косоура,

$$q_{yn} = q_n \cos\alpha = 5{,}47 \cdot 0{,}868 \text{ кН/м} = 4{,}75 \text{ кН/м}.$$

Наибольший относительный прогиб в соответствии с выражением (8.7) примера 8.4 при $J_x = 572 \cdot 10^{-8}$ м⁴ (см. табл. 1 приложения) и $E = 206 \cdot 10^9$ Па (см. табл. 2.1)

$$|f|/l = 5 q_{yn} l^3/(384 E J_x) = 5 \cdot 4{,}75 \cdot 10^3 \cdot 4{,}61^3/(384 \cdot 206 \cdot 10^9 \times$$

$$\times 572 \cdot 10^{-8}) \approx 1/200 = f_u/l.$$

Следовательно, жесткость косоура также обеспечена, что позволяет окончательно остановиться на двутавре № 14.

9.3. Внецентренное сжатие бруса большой жесткости

Изгиб с растяжением (сжатием) возникает и в том случае, когда брус нагружен в продольном направлении силой, приложенной в н е ц е н т р е н н о, т. е. на некотором расстоянии от центра тяжести сечения.

Ограничимся рассмотрением деформации *внецен-*

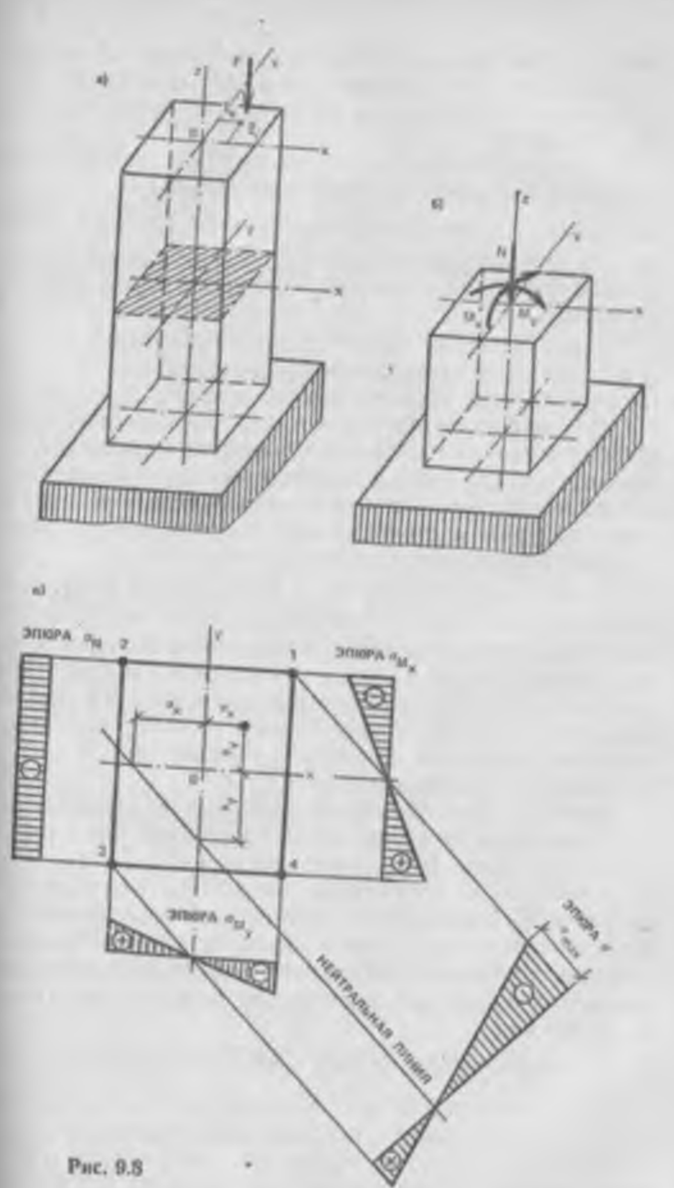


Рис. 9.8

тренного сжатия как более характерной для элементов строительных конструкций (рис. 9.8, *а*). При этом по-прежнему полагаем, что соблюдается принцип начальных размеров.

В любом поперечном сечении бруса возникают три внутренних силовых фактора (рис. 9.8, *б*):

$$N = F; \quad M_x = Fe_y; \quad M_y = Fe_x, \tag{9.10}$$

где e_x и e_y — координаты точки приложения внешней силы, или эксцентриситеты внешней силы вдоль главных центральных осей сечения.

Таким образом, общий случай внецентренного сжатия сводится к центральному (осевому) сжатию в сочетании с чистым косым изгибом, который, как описано в п. 9.1, можно представить в виде двух чистых прямых изгибов во взаимно перпендикулярных плоскостях. Нормальные напряжения в поперечном сечении внецентренно сжатого бруса согласно принципу независимости действия сил равны алгебраической сумме напряжений от каждого внутреннего силового фактора:

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_{M_x} + \sigma_{M_y} = N/A + (M_x/J_x)\,y + (M_y/J_y)\,x. \tag{9.11}$$

Эта формула позволяет определять напряжения в любом волокне бруса. Силовые факторы и координаты x, y следует принимать, как указывалось в п. 9.1, по абсолютному значению, а знак слагаемых напряжений устанавливать по соответствующим эпюрам (рис. 9.8, *в*), т. е. по характеру деформирования бруса.

Наиболее напряженными являются волокна, в которых суммируются напряжения сжатия от всех трех силовых факторов. В рассматриваемом брусе прямоугольного сечения максимальные по абсолютному значению напряжения возникают в волокне, которому соответствует угловая точка *1*. Таким образом, условие прочности в общем случае внецентренного сжатия брусьев симметричного сечения, выполненных из пластичного материала, имеет вид

$$\sigma_{max} = N/A_{net} + M_x/W_{xnet} + M_y/W_{ynet} \leqslant R\gamma_c. \tag{9.12}$$

Здесь приняты те же обозначения, что в формулах (9.6) и (9.9), причем к последней условие прочности приводится в частном случае внецентренного сжатия, когда точка приложения внешней силы находится на одной из главных центральных осей сечения и возникает центральное сжатие в сочетании с чистым прямым изгибом. Так, при нагружении, показанном на рис. 9.9, *а*,

$$\sigma_{max} = N/A_{net} + M_x/W_{xnet} \leqslant R\gamma_c, \qquad (9.12а)$$

на рис. 9.9, *б*,

$$\sigma_{max} = N/A_{net} + M_y/W_{ynet} \leqslant R\gamma_c. \qquad (9.12б)$$

Чтобы построить эпюру суммарных напряжений в поперечном сечении бруса, изображенного на рис. 9.8, необходимо, как и при косом изгибе, определить положение нейтральной линии. По аналогии с п. 9.1 приравниваем нулю выражение напряжений (9.11):

$$N/A + (M_x/J_x)\,y_0 + (M_y/J_y)\,x_0 = 0.$$

Введем обозначение

$$i_x = \sqrt{J_x/A}; \quad i_y = \sqrt{J_y/A}, \qquad (9.13)$$

где i_x — *радиус инерции* сечения бруса относительно оси x, м(см); i_y — то же, относительно оси y.

Отсюда

$$J_x = Ai_x^2; \quad J_y = Ai_y^2. \qquad (9.14)$$

Подставляя формулы (9.14) в записанное уравнение и учитывая значения внутренних силовых факторов (9.10), получаем

$$N/A + \left[\left(Ne_y\right)/\left(Ai_x^2\right)\right] y_0 + \left[Ne_x\right)/\left(Ai_y^2\right)\right] x_0 = 0,$$

или

$$(N/A)\left(1 + e_y\,y_0/i_x^2 + e_x\,x_0/\,i_y^2\right) = 0.$$

Поскольку $N/A \neq 0$, остается положить, что

$$e_x\,x_0/\,i_y^2 + e_y\,y_0/\,i_x^2 + 1 = 0. \qquad (9.15)$$

Получили уравнение нейтральной линии в общем случае внецентренного сжатия. Найдем отрезки, которые она отсекает на координатных осях. При $y_0 = 0$ и $x_0 = a_x$

$$e_x\,a_x/\,i_y^2 + 1 = 0,$$

откуда отрезок, отсекаемый на оси x,

$$a_x = -\,i_y^2/e_x. \qquad (9.16)$$

Аналогично при $x_0 = 0$ и $y_0 = a_y$ отрезок, отсекаемый на оси y,

$$a_y = -\,i_x^2/e_y. \qquad (9.17)$$

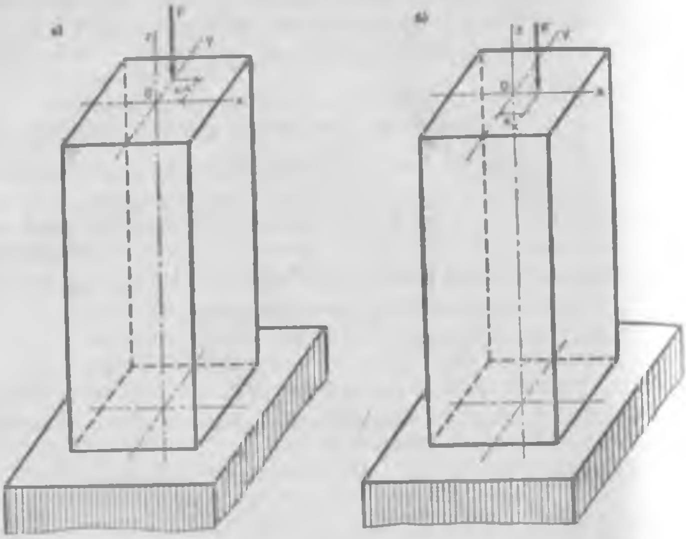


Рис. 9.9

Зависимости (9.16) и (9.17) позволяют сделать два важных вывода.

1. Положение нейтральной линии зависит от значения радиусов инерции, т. е. от формы и размеров поперечного сечения бруса, а также от эксцентриситетов нагрузки, и не зависит от значения нагрузки.

2. Значения a_x и e_x, a_y и e_y имеют разные знаки, поскольку радиус инерции, тем более взятый в квадрате, есть величина существенно положительная. Следовательно, при внецентренном сжатии точка приложения нагрузки и нейтральная линия лежат по разные стороны от центра тяжести сечения.

В рассматриваемом случае (см. рис. 9.8, *а*, *в*) точка приложения силы F находится в первом квадранте ($e_x>0$; $e_y>0$), поэтому нейтральная линия должна непременно пересекать отрицательные направления осей x и y ($a_x<0$; $a_y<0$).

Построение эпюры суммарных напряжений производится так же, как при косом изгибе (см. рис. 9.3, *в* и пояснение к нему в п. 9.1). Заметим лишь, что напряжения в точке 3 могут получиться как положительными, так и отрицательными, в зависимости от значений эксцентриситетов e_x и e_y. Это обстоятельство приходится учитывать при проектировании конструкций из хрупких материалов. Так, швы кладки в неармированных каменных конструкциях настолько плохо сопротивляются растяжению, что в практических расчетах их считают нерабочими. Аналогично поступают и при определении напряжений в грунтах оснований под фундаменты зданий и других сооружений. В подобных случаях нагрузка должна прикладываться, так, чтобы по всему сечению возникали только напряжения сжатия, т. е. чтобы нейтральная линия проходила вне сечения или касалась его (но не пересекала!).

Область вокруг центра тяжести поперечного сечения бруса, внутри которой следует приложить продольную нагрузку, чтобы вызвать по всему сечению напряжения одного знака, называется **ядром сечения**. Построение ядра любого сечения, в том числе и прямоугольного, основывается на вычислении предельного значения эксцентриситета сжимающей силы F, при котором в сечении не возникают напряжения растяжения. Поэтому указываем на рис. 9.10 положения нейтральной линии, совпадающие со сторонами прямоугольника, и нумеруем их, обходя контур сечения по часовой стрелке.

Нейтральная линия *1—1* перпендикулярна главной центральной оси x и отсекает на ней отрезок $a_{x1} = -b/2$. При этом $a_{y1} = \infty$ и согласно зависимостям (9.16), (9.17)

$$e_{x1} = -i_y^2/a_{x1} = -\frac{b^2/12}{-b/2} = b/6;$$

$$e_{y1} = -i_x^2/a_{y1} = -(h^2/12)/\infty = 0,$$

где на основании выражений (9.13) и (5.9), (5.10)

$$i_x^2 = J_x/A = bh^3/(12bh) = h^2/12; \quad i_y^2 = J_y/A = b^2/12. \tag{9.18}$$

Таким образом, соответствующая точка приложения силы *1* лежит на оси x.

Нейтральная линия *2—2* перпендикулярна оси y. В этом случае

$$a_{x2} = \infty, \quad a_{y2} = +h/2;$$

$$e_{x2} = 0, \quad e_{y2} = -\frac{h^2/12}{h/2} = -h/6$$

и точка *2* лежит на оси y.

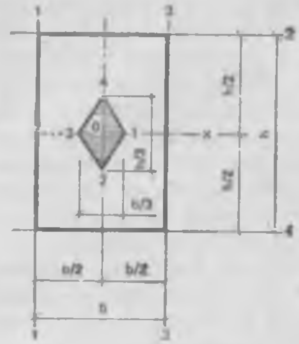


Рис. 9.10

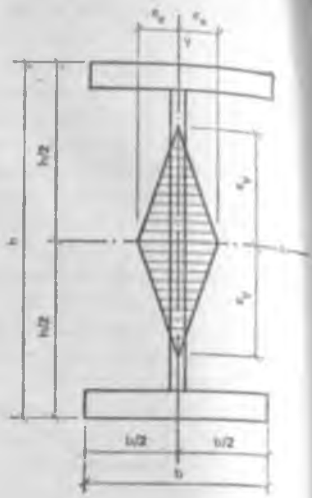


Рис. 9.11

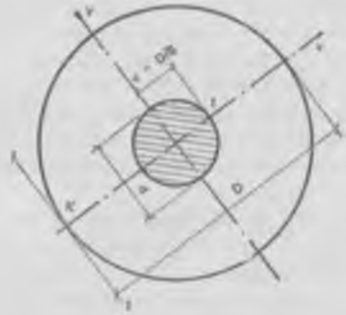
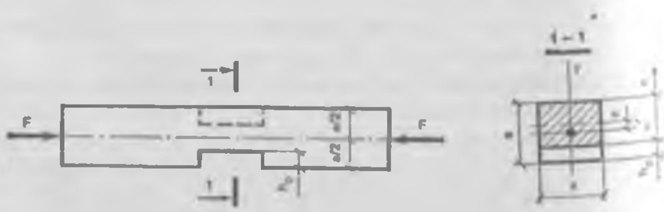


Рис. 9.12

Рис. 9.13



Аналогично определяются координаты точек *3* и *4*, отвечающих положениям нейтральной линии *3—3* и *4—4*. Так как при переходе с одной стороны прямоугольника на другую нейтральная линия поворачивается вокруг угловой точки, точка приложения силы F перемещается по прямой, образуя контур ядра сечения. Действительно, если подставить в уравнение (9.15) координаты любой угловой точки $x_0 = \text{const}$ и $y_0 = \text{const}$, получим уравнение прямой, являющейся геометрическим местом точек приложения силы.

Итак, ядро прямоугольного сечения имеет вид *ромба* с диагоналями, равными третям соответствующих сторон. Аналогичное по форме очертание ядра сечения имеет двутавровый профиль (рис. 9.11). Ввиду симметрии здесь тоже достаточно определить лишь две координаты. Для вершин ромба, лежащих на оси x,

$$e_x = \pm \frac{i_y^2}{b/2};$$

на оси y,

$$e_y = \pm \frac{i_x^2}{h/2}.$$

Числовые значения этих отрезков зависят от соотношения размеров двутавра. Для прокатных двутавров следует, как обычно, руководствоваться данными сортамента (см. табл. 1 приложения).

При построении ядра сплошного кругового сечения достаточно рассмотреть всего одно, произвольное положение нейтральной линии. Ввиду того что у круга все центральные оси главные, точка касания K любой нейтральной линии *1—1* лежит на одном диаметре с соответствующей точкой *1* контура ядра сечения (рис. 9.12). Последняя отстоит от центра круга на расстоянии $e = i_y^2/(-D/2)$, или согласно выражениям (9.13) и (5.15)

$$e = \frac{J_y}{AD/2} = \frac{\pi D^4/64}{(\pi D^2/4)\, D/2} = D/8.$$

Отсюда на основании полярной симметрии можно утверждать, что ядро сечения круга диаметром D есть *концентрический круг* диаметром $d = D/4$.

Пример 9.3. Проверить прочность короткого деревянного бруса квадратного сечения со стороной $a = 20$ см, ослабленного односторонней врезкой глубиной $h_0 = 4$ см (рис. 9.13). Расчетная сжимающая сила $F=300$ кН. Расчетное сопротивление древесины сжатию вдоль волокон $R=15$ МПа. Условия работы — нормальные.

Решение. Неослабленные участки бруса работают на центральное сжатие. В их поперечных сечениях возникает продольная сила $N=F$. Соответствующие напряжения согласно формуле (2.23) составляют

$$\sigma = N/A = 300\cdot10^3/(400\cdot10^{-4})\ \text{Па} = 7{,}5\cdot10^6\ \text{Па} = $$
$$= 7{,}5\ \text{МПа} < R = 15\ \text{МПа},$$

где площадь неослабленного сечения $A=a^2=20^2$ см$^2=400$ см$^2=400\times$ $\times10^{-4}$ м^2.

Ослабленный участок площадью сечения $A_{net}=A-A_0=A-h_0a=$ $=400-4\cdot20$ см$^2=320$ см^2 испытывает внецентренное сжатие (частный случай). Эксцентриситет сжимающей силы относительно центра тяжести (оси x) ослабленного сечения

$$e = a/2 - h/2 = a/2 - (a-h_0)/2 = h_0/2 = 4/2\ \text{см} = 2\ \text{см}.$$

Изгибающий момент

$$M_x = Fe = 300\cdot0{,}02\ \text{кН·м} = 6\ \text{кН·м}.$$

Момент сопротивления согласно выражению (7.16)

$$W_{xnet} = ah^2/6 = a(a-h_0)^2/6 = 20/(20-4)^2/6\ \text{см}^3 =$$
$$= 853\ \text{см}^3 = 853\cdot10^{-6}\ \text{м}^3.$$

Проверку прочности ослабленного сечения производим по формуле (9.12а):

$$\sigma_{max} = N/A_{net} + M_x/W_{xnet} = 300\cdot10^3/(320\cdot10^{-4}) +$$
$$+ 6\cdot10^3/(853\cdot10^{-6})\ \text{Па} = (9{,}4+7{,}2)\,10^6\ \text{Па} = 16{,}6\cdot10^6\ \text{Па} =$$
$$= 16{,}6\ \text{МПа} > R,$$

т. е. прочность не обеспечена. Одним из мероприятий по уменьшению напряжений является осуществление двусторонней врезки (показано штриховой линией). Несмотря на еще большее ослабление сечения, брус оказывается прочным благодаря центральному приложению нагрузки и отсутствию изгиба:

$$A'_{net} = A_{net} - A_0 = 320 - 80\ \text{см}^2 = 240\ \text{см}^2;$$

$$\sigma'_{max} = N/A'_{net} = 300\cdot10^7/240\ \text{Па} = 12{,}5\cdot10^6\ \text{Па} = 12{,}5\ \text{МПа} < R.$$

Пример 9.4. На железобетонную колонну производственного здания (рис. 9.14) передается нормативная нагрузка от перекрытия $F_{1n}=300$ кН и от подкрановой балки $F_{2n}=190$ кН. Первая — приложена центрально к верхней части колонны высотой $H_1=4{,}5$ м и квадратным сечением со стороной $b_1=40$ см. Вторая — приложена к жесткой консоли с эксцентриситетом $e_2=60$ см, относительно продольной оси нижней части колонны высотой $H_2=9$ м и квадратным сечением со стороной $b_2=80$ см.

Определить необходимый размер a квадратного в плане фундамента колонны, если расчетное давление на грунт основания $R=$ $=200$ кПа, удельный вес железобетона колонны $\gamma=24$ кН/м^3, средний удельный вес железобетона фундамента и грунта на его выступах $\gamma_0=20$ кН/м^3, глубина заложения фундамента $H_0=1{,}8$ м. Растяжение в грунте не допускается.

Решение. *Подсчет нагрузок.* На фундамент передаются нагрузки: от перекрытия F_{1n} с эксцентриситетом

$$e_1 = -(b_2/2 - b_1/2) = -(0{,}8 -$$
$$-0{,}4)/2\ \text{м} = -0{,}2\ \text{м};$$

от веса верхней части колонны

$$G_{1n} = \gamma b_1^2 H_1 = 24\cdot0{,}4^2\cdot4{,}5\ \text{кН} \approx 17\ \text{кН}$$

с тем же эксцентриситетом; от подкрановой балки F_{2n} с эксцентриситетом $e_2=0{,}6$ м; от веса нижней части колонны

$$G_{2n} = \gamma b_2^2 H_2 =$$
$$= 24\cdot0{,}8^2\cdot9\ \text{кН} \approx 139\ \text{кН},$$

приложенного центрально.

Согласно главе СНиП [8] размеры подошвы фундамента под внецентренно сжатую колонну подбирают так, чтобы среднее давление на основание под фундаментом не превышало расчетное давление на грунт R, а наибольшее давление по краю фундамента не превышало $1{,}2R$ в частном случае внецентренного сжатия и $1{,}5R$ в общем случае.

Поскольку расчетное давление на грунт устанавливается из условия ограничения совместной деформации основания и здания (предельное состояние второй группы), коэффициенты надежности по нагрузке $\gamma_f=1$. Таким образом, расчетные значения усилий в фундаменте численно совпадают с нормативными:

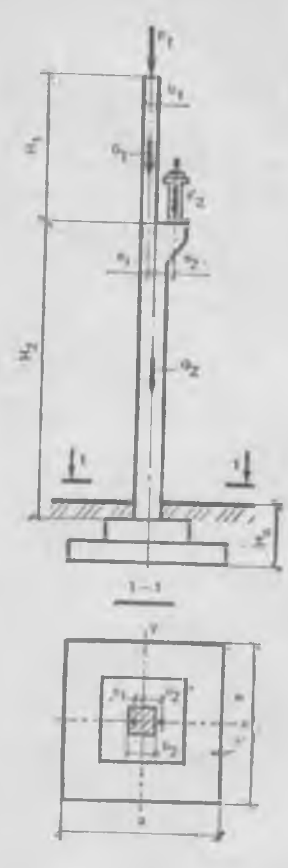


Рис. 9.14

$$N = F_{1n} + G_{1n} + F_{2n} + G_{2n} = 300 + 17 + 190 + 139\ \text{кН} = 646\ \text{кН};$$
$$M_y = (F_{1n} + G_{1n})\,e_1 + F_{2n}\,e_2 = (300+17)(-0{,}2) +$$
$$+ 190\cdot0{,}6\ \text{кН·м} = 50{,}6\ \text{кН·м}.$$

Изгибающий момент направлен по ходу часовой стрелки.

Определение размера подошвы фундамента. Пренебрегая вначале изгибающим моментом, устанавливаем по формуле (2.26) ориентировочную площадь подошвы с учетом собственного веса фундамента и грунта на его выступах:

$$A \geq N/(R - \gamma_0 H_0) = 646\cdot10^3/[(200 - 20\cdot1{,}8)\,10^3]\ \text{м}^2 = 3{,}94\ \text{м}^2.$$

Отсюда требуемый размер стороны квадратного фундамента

$$a \geqslant \sqrt{A} = \sqrt{3,94}\ \text{м} \approx 1,99\ \text{м}.$$

Округляя, назначаем $a=2$ м. Тогда площадь подошвы

$$A = a^2 = 2^2\ \text{м}^2 = 4\ \text{м}^2,$$

момент сопротивления

$$W_y = a^3/6 = 2^3/6\ \text{м}^3 = 1,33\ \text{м}^3.$$

Наибольшее давление на основание численно равно максимальному значению напряжения сжатия. Согласно формуле (9.12б)

$$\sigma_{\max} = \frac{N + \gamma_0 a^2 H_0}{A} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{(646 + 20\cdot 2^2\cdot 1,8)\,10^3}{4} +$$

$$+ \frac{50,6\cdot 10^3}{1,33}\ \text{Па} = (198 + 38)\,10^3\ \text{Па} = 236\cdot 10^3\ \text{Па} =$$

$$= 236\ \text{кПа} < 1,2R = 1,2\cdot 200\ \text{кПа} = 240\ \text{кПа},$$

т. е. прочность обеспечена. Растяжение в грунте не возникнет по той причине, что напряжения от продольной силы превышают по абсолютному значению напряжения от изгибающего момента, и, таким образом, точка приложения равнодействующей сжимающей нагрузки не выходит за пределы ядра сечения.

9.4. Кручение с изгибом

Совместное действие кручения с изгибом приходится учитывать чаще всего при точном расчете валов машин и грузоподъемных механизмов. В этом случае в поперечных сечениях вала возникают изгибающий момент M и крутящий M_z. Очевидно, для пластичного материала равноопасными являются точки A и B, наиболее удаленные от нейтральной линии, т. е. точки пересечения контура сечения с силовой линией (рис. 9.15, *а*). В них нормальные напряжения от изгиба и касательные от кручения одновременно достигают максимального значения (для хрупкого материала опаснее точка A, которая при изгибе попадает в зону растяжения).

Согласно формулам (7.14) и (6.10)

$$\sigma = M/W; \quad \tau_z = M_z/W_p,$$

где W — момент сопротивления сечения относительно нейтральной линии; W_p — полярный момент сопротивления.

На рис. 9.15, *б* изображен элемент, выделенный у точки A. По четырем его граням возникают касательные напряжения, а на двух из них имеются еще и нормальные. Таким образом, при кручении с изгибом опасная точка

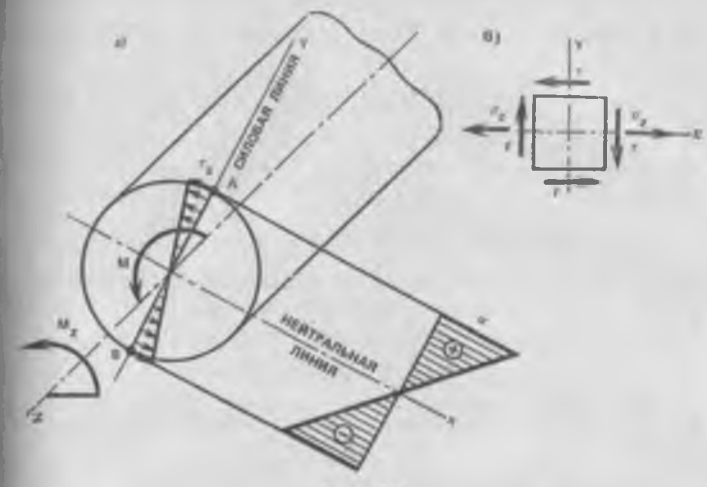


Рис. 9.15

находится в упрощенном плоском напряженном состоянии: $\sigma_z = \sigma$, $\sigma_y = 0$, $\tau = \tau_z$.

Аналогичная картина встречалась при рассмотрении главных напряжений в изогнутом брусе (см. п. 7.9). Отличие состоит лишь в том, что там касательные напряжения обусловлены поперечной силой, а в данном случае — крутящим моментом. Заметим, кстати, что при кручении с изгибом влиянием касательных напряжений от поперечной силы обычно пренебрегают ввиду того, что они достигают максимума на нейтральной линии, т. е. там, где напряжения τ_z и σ равны нулю.

Валы, как правило, изготовляют из среднеуглеродистой стали (содержание углерода — 0,25—0,5 %), механическое поведение которой согласуется с гипотезой наибольших касательных напряжений или энергетической гипотезой (см. п. 3.6). Воспользовавшись формулами (7.25), (7.36) и переходя к расчету по допускаемым напряжениям (по причине, указанной в п. 6.3), получаем следующие условия прочности:

$$\sigma_{des,\tau} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leqslant [\sigma]; \tag{9.19}$$

$$\sigma_{des,u} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leqslant [\sigma]. \tag{9.20}$$

После подстановки значений компонентов напряженного состояния левая часть неравенства (9.19) принимает вид

$$\sigma_{des.\tau} = \sqrt{(M/W)^2 + 4(M_z/W_p)^2}.$$

Сравнивая выражения моментов сопротивления круга (7.18) и (6.11), замечаем, что $W_p = 2W$. Следовательно,

$$\sigma_{des.\tau} = \sqrt{(M/W)^2 + 4[M_z/(2W)]^2} = \sqrt{M^2 + M_z^2}/W = M_{red}/W.$$

Здесь M_{red} — так называемый *приведенный момент*. Он позволяет представить условия прочности (9.19) и (9.20) в форме условия прочности при прямом изгибе

$$\sigma_{des} = M_{n\ red}/W < [\sigma], \tag{9.21}$$

где $M_{n\ red}$ — нормативный момент в опасном сечении вала, Н·м; $[\sigma]$ — допускаемое напряжение материала на растяжение (сжатие), Па (МПа).

Значение приведенного момента определяется используемой гипотезой:

$$M_{red.\tau} = \sqrt{M^2 + M_z^2}; \tag{9.22}$$

$$M_{red.u} = \sqrt{M^2 + 0{,}75M_z^2}. \tag{9.23}$$

В справедливости последнего выражения легко убедиться, если тем же преобразованиям подвергнуть левую часть неравенства (9.20).

Для подбора сечения вала условие (9.21) следует записать относительно требуемого осевого момента сопротивления:

$$W > M_{n\ red}/[\sigma]. \tag{9.24}$$

Отсюда требуемый диаметр сплошного вала в соответствии с формулой (7.18)

$$D > \sqrt[3]{32M_{n\ red}/(\pi[\sigma])} \approx \sqrt[3]{(M_{n\ red}/(0{,}1[\sigma])}, \tag{9.25}$$

полого [(см. выражение (7.20)]

$$D > \sqrt[3]{32M_{n\ red}/\{\pi[\sigma](1-\alpha^4)\}} \approx \sqrt[3]{M_{n\ red}/\{0{,}1[\sigma](1-\alpha^4)\}}, \tag{9.25a}$$

где α — отношение внутреннего диаметра к наружному..

Пример 9.5. На барабан лебедки диаметром $D = 340$ мм навивается стальной канат для подъема груза весом G, не превышающим 50 кН. Подобрать диаметр d вала сплошного сечения, на котором насажен барабан, при самом невыгодном положении груза (рис.

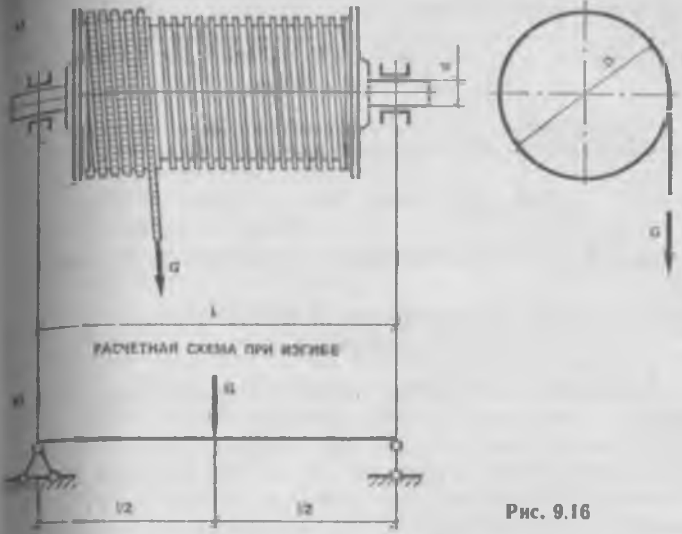


Рис. 9.16

9.16, *а*). Длина вала $l = 1{,}25$ м, допускаемое напряжение стали $[\sigma] = 120$ МПа.

Р е ш е н и е. Вал, опирающийся на подшипники, можно рассматривать как свободно лежащий на двух опорах брус, скручиваемый моментом

$$m = GD/2 = 50 \cdot 0{,}34/2 \text{ кН} \cdot \text{м} = 8{,}5 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

и изгибаемый сосредоточенной силой G. При этом крутящий момент $M_z = m$, а изгибающий момент зависит от положения груза по длине вала (барабана) и достигает наибольшего значения, когда сила G расположена посередине (рис. 9.16, *б*). По формуле (7.1а) примера 7.1

$$M = Gl/4 = 50 \cdot 1{,}25/4 \text{ кН} \cdot \text{м} = 15{,}6 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Нормативный приведенный момент согласно выражению (9.22)

$$M_{n\,red,\tau} = \sqrt{M^2 + M_z^2} = \sqrt{15{,}6^2 + 8{,}5^2} \text{ кН} \cdot \text{м} = 17{,}8 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

согласно выражению (9.23)

$$M_{n\,red,u} = \sqrt{M^2 + 0{,}75 M_z^2} = \sqrt{15{,}6^2 + 0{,}75 \cdot 8{,}5^2} \text{ кН} \cdot \text{м} = 17{,}3 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Требуемый диаметр вала согласно условию (9.25): по гипотезе наибольших касательных напряжений

$$d_\tau \geqslant \sqrt[3]{M_{n\,red,\tau}/(0{,}1\,[\sigma])} = \sqrt[3]{17{,}8 \cdot 10^3/(0{,}1 \cdot 120 \cdot 10^6)} \text{ м} = 0{,}114 \text{ м} = 114 \text{ мм},$$

по энергетической гипотезе

$$d_u \geqslant \sqrt[3]{M_{n\,red.u}/(0{,}1\,[\sigma])} = \sqrt[3]{17{,}3/(0{,}1\cdot 120\cdot 10^3)}\ \text{м} = 0{,}113\ \text{м} = 113\ \text{мм}.$$

Таким образом, результаты расчета по обеим гипотезам почти совпадают. Округляя, окончательно принимаем $d = 120$ мм.

Глава 10. УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

10.1. Понятие об устойчивости первоначальной формы равновесия

Несущая способность сжатого стержня может оказаться исчерпанной вследствие потери устойчивости, т. е. в результате выпучивания, которое происходит раньше, чем стержень выйдет из строя непосредственно от сжатия. Из теоретической механики известно, что равновесие абсолютно твердого тела, независимо от действующих на него сил, бывает устойчивым, безразличным и неустойчивым. Так же обстоит дело и в механике деформируемых тел, с той лишь разницей, что вид равновесия зависит от значения прикладываемой нагрузки.

На рис. 10.1 изображена длинная тонкая стойка, на которую действует осевая сжимающая нагрузка. При сравнительно небольшом значении силы F стойка испытывает сжатие и находится в состоянии устойчивого равновесия, поскольку, получив малое отклонение от вертикали после поперечного «возмущающего» толчка, она быстро возвращается в первоначальное положение (см. рис. 10.1, *а*).

По мере увеличения нагрузки стойка все медленнее возвращается в исходное положение после возмущения и при некотором, критическом значении F_{cr} наступает состояние как бы *безразличного* равновесия: после самостоятельного отклонения от вертикального положения стойка приобретает равновесие и в отклоненном положении (штриховая линия на рис. 10.1, *б*). Происходит бифуркация (разветвление, раздвоение) равновесия, характеризующаяся «обменом» устойчивостью между двумя его формами: прямолинейная форма теряет устойчивость, а криволинейная еще не успевает ее приобрести.

Новая, криволинейная форма равновесия теоретически становится устойчивой при нагрузке, превышающей критическую (см. рис. 10.1, *в*). Однако такое состояние неприемлемо практически, поскольку стойка работает уже не на сжатие, а на сжатие с изгибом, и даже при незначительном превышении нагрузкой критического значения возникают недопустимо большие прогибы и напряжения. Следовательно, критическое состояние необходимо рассматривать как предельное состояние, устанавливаемое из условия устойчивости первоначального равновесного положения сжатого стержня.

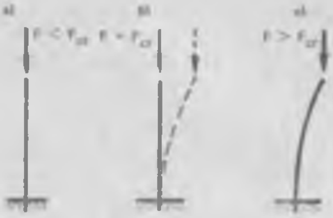


Рис. 10.1

Изгиб, связанный с потерей устойчивости прямолинейной формы равновесия, называется *продольным*, так как его вызывает продольная нагрузка. Наибольшее значение осевой сжимающей силы, до которого сохраняется устойчивость прямолинейной формы равновесия стержня, т. е. невозможен продольный изгиб, называется критическим.

10.2. Формула Эйлера для определения критической силы

Определим значение критической силы стержня с шарнирно закрепленными концами (рис. 10.2, *а*). Полагая, что напряжения не превышают предел пропорциональности, при малых перемещениях можно воспользоваться приближенным дифференциальным уравнением изогнутой оси балки (8.3):

$$y''(z) = M(z)/(EJ).$$

Абсолютное значение изгибающего момента в произвольном сечении (рис. 10.2, *б*) $M(z) = Fy$. Тогда

$$y''(z) = -Fy/(EJ).$$

Знак «минус» в правой части поставлен по той причине, что прогиб и вторая производная разнозначны независимо от выбора положительного направления оси y. Вводя обозначение

$$k^2 = F/(EJ), \qquad \text{(a)}$$

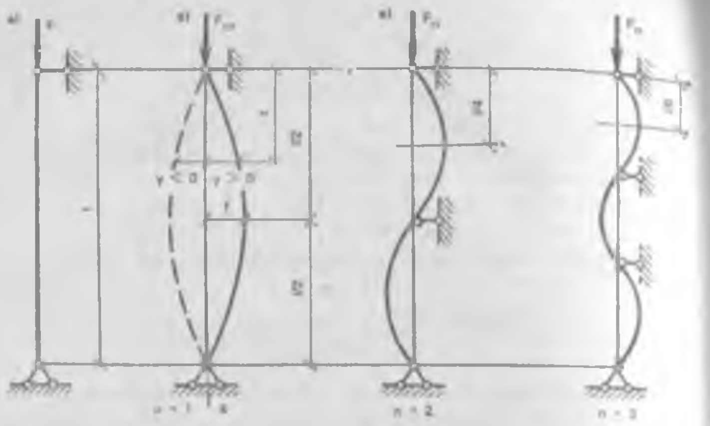


Рис. 10.2

получаем однородное дифференциальное уравнение

$$y'' + k^2 y = 0.$$

Его решение, как известно из математики, имеет вид

$$y = C\sin kz + D\cos kz, \qquad (б)$$

в справедливости которого нетрудно убедиться, если подставить в исходное уравнение выражения y и y''. Постоянные интегрирования C и D определяются из граничных условий. При $z=0$ прогиб $y=0$, т. е.

$$0 = C\sin 0 + D\cos 0 = D,$$

и, таким образом, решение (б) упрощается:

$$y = C\sin kz. \qquad (в)$$

Из второго граничного условия (при $z=l$ прогиб $y=0$) следует

$$C\sin kl = 0.$$

Если $C=0$, то получаем $y\equiv 0$, что не представляет интереса (тривиальное решение), поскольку соответствует первоначальному, неискривленному положению стержня. Остается положить, что $\sin kl=0$. Это уравнение имеет бесчисленное множество корней: $kl=0$, π, 2π, ..., $n\pi$, где n — произвольное целое число. Отсюда

$$k = n\pi/l; \quad k^2 = n^2\pi^2/l^2.$$

Согласно обозначению (а)

$$n^2\pi^2/l^2 = F/(EJ) \text{ и } F = n^2\pi^2 EJ/l^2.$$

Изменяя число n, получим последовательный ряд значений силы F, которым соответствуют различные искривленные формы равновесия стержня. Однако определению подлежит такое значение сжимающей силы, при котором наряду с исходной прямолинейной формой равновесия может существовать смежная криволинейная. Следовательно, необходимо принять наименьшее значение n. Случай, когда $n=0$, лишен смысла, так как при этом $F=0$. Полагая $n=1$ и имея в виду, что продольный изгиб произойдет в плоскости наименьшей жесткости, получаем выражение критической силы

$$F_{cr} = \pi^2 EJ_{\min}/l^2. \tag{10.1}$$

Формула подобного вида впервые выведена в 1744 г. Л. Эйлером[1] и носит его имя. Таким образом, наряду с приведенным определением справедливо утверждение, что критическая сила есть *наименьшее* значение осевой сжимающей нагрузки, при котором стержень теряет способность сохранять первоначальную форму равновесия.

Возвращаясь к уравнению (в), имеем

$$y = C\sin(n\pi/l)z,$$

т. е. изогнутая ось стержня представляет собой *синусоиду*, имеющую n полуволн. Критической силе соответствует синусоида с одной полуволной ($n=1$, см. рис. 10.2, *б*):

$$y = C\sin\pi z/l = f\sin\pi z/l,$$

где f — стрела прогиба (прогиб в середине длины стержня).

При $n=2, 3, ..., m$ искривленные формы равновесия имеют вид синусоиды с соответствующим количеством полуволн в пределах длины стержня (рис. 10.2, *в*). Эти формы неустойчивы, но могут быть реализованы, если перейти к другой системе, подкрепив стержень шарнирными опорами в точках перегиба синусоиды. Тогда сила F будет в 4, 9, ..., m^2 раз превышать критическое значение.

---

[1] Леонард Эйлер (1707—1783) — выдающийся математик, родился в Швейцарии, член Российской Академии наук, один из основоположников русской науки. В строительной механике его имя связано с изучением задачи продольного изгиба.

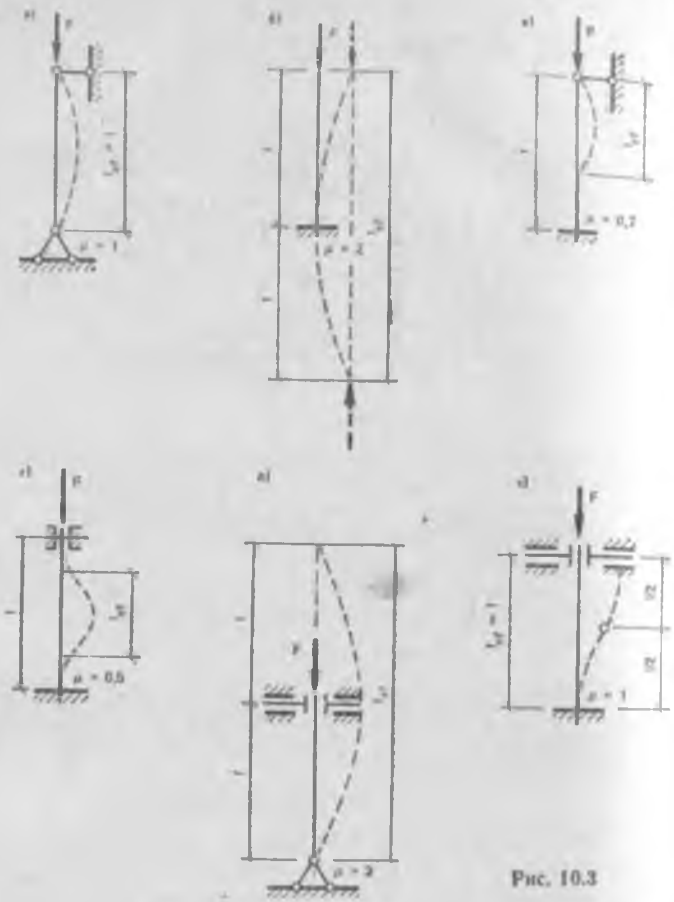


Рис. 10.3

Рассмотренный случай продольного изгиба стержня с шарнирным закреплением концов принято классифицировать как основной. При других способах закрепления значение критической силы может быть получено аналогично — путем решения соответствующего дифференциального уравнения изогнутой оси стержня. Однако в простейших случаях достаточно ограничиться сравнением формы изогнутой оси с той, которая представляет собой одну полуволну синусоиды (см. рис. 10.2, *б*).

Наиболее распространенные расчетные схемы сжатых стержней, включая основную, приведены на рис. 10.3. Соответствующие значения критической силы объединяет формула

$$F_{cr} = \pi^2 EJ_{min}/l_{ef}^2 = \pi^2 EJ_{min}/(\mu l)^2, \qquad (10.2)$$

где $l_{ef} = \mu l$ — *приведенная* или *расчетная* (эффективная) длина стержня; μ — коэффициент приведения, зависящий от способа закрепления его концов; l — фактическая длина.

Приведенная длина — эта та условная длина стержня, которая позволяет свести любой случай закрепления его концов к основной расчетной схеме (см. рис. 10.3, *а*). Так, например, критическая сила стержня с одним защемленным и другим свободным концом (см. рис. 10.3, *б*) имеет такое же значение, как у стержня с шарнирным закреплением обоих концов, но вдвое большей длины. То же справедливо для стержня, у которого один конец закреплен шарнирно, а другой имеет «плавающую» заделку, т. е. не может поворачиваться, но может перемещаться в направлении, перпендикулярном оси недеформированного стержня (см. рис. 10.3, *д*). Если же вместо шарнира ввести полную заделку (см. рис. 10.3, *е*), то изогнутая ось получит в середине точку перегиба и каждую половину стержня можно подвести под случай, представленный на рис. 10.3, *б*. Из сказанного следует, что коэффициент μ есть величина, обратная числу n полуволн синусоиды, умещающихся в пределах фактической длины стержня, потерявшего устойчивость.

Понятие приведенной длины введено в расчетную практику Ф. С. Ясинским[1].

10.3. Критическое напряжение. Пределы применимости формулы Эйлера. Устойчивость стержня за пределом упругости материала

Значение напряжений, вызываемых в стержне критической силой, также называется критическим. Согласно формуле (2.3)

[1] Феликс Станиславович Ясинский (1856—1899) — русский ученый и инженер, родился в Варшаве, внес большой вклад в изучение вопросов продольного изгиба. Он заложил основы современных инженерных методов расчета на устойчивость.

$$\sigma_{cr} = N/A = F_{cr}/A = \pi^2 EJ_{\min}/(l_{ef}^2 A) = \pi^2 Ei_{\min}^2/l_{ef}^2,$$

где A — площадь поперечного сечения стержня брутто (без учета местных ослаблений); $i_{\min}$ — минимальный главный центральный радиус инерции, подчиняющийся зависимостям (9.13) в п. 9.3.

Следуя Ф. С. Ясинскому, введем обозначение

$$\lambda = l_{ef}/i_{\min} = \mu l/i_{\min}, \tag{10.3}$$

где λ — *гибкость* стержня — безразмерная геометрическая характеристика, определяемая способом закрепления его концов, длиной, а также формой и размерами поперечного сечения.

Тогда выражение критического напряжения принимает следующий окончательный вид:

$$\sigma_{cr} = \pi^2 E/\lambda^2. \tag{10.4}$$

Эта функциональная зависимость представляет собой видоизмененную формулу Эйлера и графически изображается *гиперболой* (рис. 10.4). При гибкостях, близких к нулю, критическое значение напряжений должно, казалось бы, стремиться к бесконечности. Однако вывод формулы Эйлера основан на использовании дифференциального уравнения изогнутой оси стержня, материал которого следует закону Гука. Поэтому формула Эйлера справедлива лишь при постоянном модуле упругости E, т. е. при условии, что критическое напряжение не превышает предела пропорциональности. Отсюда предельная гибкость, отвечающая равенству $\sigma_{cr} = \sigma_{pr}$:

$$\lambda_E = \pi\sqrt{E/\sigma_{pr}}. \tag{10.5}$$

Она зависит исключительно от механических свойств материала и имеет постоянное значение. Так, для стали марки Ст3 при $\sigma_{pr} = 195$ МПа и $E = 206$ ГПа

$$\lambda_E = 3,14\sqrt{206 \cdot 10^3/195} = 102;$$

для дюралюминия[1] ($\sigma_{pr} = 275$ МПа, $E = 70$ ГПа)

$$\lambda_E = 3,14\sqrt{70 \cdot 10^3/275} = 50;$$

---

[1] Сплав алюминия с медью (2,2—5,2 %), магнием (0,2—2,7 %) и марганцем (0,2—1 %). Название происходит от нем. Duren (Дюрен) — город, где впервые было начато промышленное производство сплава.

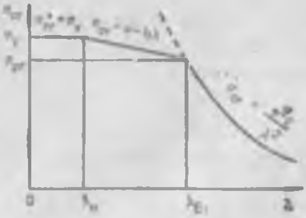


Рис. 10.4

для древесины сосны и ели ($\sigma_{pr}=20$ МПа, $E=10$ ГПа)

$$\lambda_E = 3{,}14\sqrt{10\cdot 10^3/20} = 70.$$

Таким образом, формула Эйлера применима при $\lambda \geqslant \lambda_E$, т. е. только к упругим стержням. Распространение ее на стержни, теряющие устойчивость за пределом упругости (пропорциональности) материала, неверно теоретически и опасно практически, поскольку в этом случае получаются завышенные значения критического напряжения (штриховая линия на указанном рисунке), а следовательно, и критической силы.

При потере устойчивости за пределом упругости критические напряжения определяют по более сложным формулам, учитывающим развитие пластических деформаций, или по эмпирическим зависимостям, одна из которых выражается формулой Тетмайера—Ясинского[1]

$$\sigma_{cr} = a - b\lambda, \qquad (10.6)$$

где a и b — экспериментально установленные параметры, не имеющие физического смысла и зависящие от материала. Для стали марки Ст3 $a=305$ МПа, $b=1{,}12$ МПа; для дюралюминия $a=400$ МПа, $b=2{,}78$ МПа; для древесины указанных пород $a=28{,}7$ МПа, $b=0{,}19$ МПа

Соответствующая критическая сила

$$F_{cr} = \sigma_{cr} A. \qquad (10.7)$$

Зависимость (10.6) носит линейный характер. Получаемые с ее помощью результаты представляют практический интерес также до некоторого предела, характеризуемого гибкостью λ_0, при которой критическое напряжение становится равным значению опасных напряжений

---

[1] Людвиг Тетмайер (L. von Tetmajer, 1850—1905) — швейцарский исследователь, под руководством которого было испытано большое количество сжатых стальных стержней. Результаты, полученные им и другими исследователями, математически обработал и обобщил Ф. С. Ясинский.

сжатия: пределу текучести σ_y — для пластичных материалов (см. рис. 10.4) или пределу прочности σ_u — для хрупких. Для стали указанной марки, например, $\lambda_0 = 30$—40.

Таким образом, сжатые стержни можно отнести к трем категориям: 1) стержни *большой* гибкости ($\lambda \geqslant \lambda_E$), для которых справедлива формула Эйлера; 2) стержни *средней* гибкости ($\lambda_0 \leqslant \lambda < \lambda_E$), которые рассчитывают по формуле Тетмайера—Ясинского; 3) стержни *малой* гибкости ($\lambda < \lambda_0$), имеющие постоянное значение критического напряжения: $\sigma_{cr} = \sigma_y$ или $\sigma_{cr} = \sigma_u$. Для них опасна потеря не устойчивости, а прочности.

Следует иметь в виду, что при проектировании стальных стержней большой гибкости использование высокопрочной стали нецелесообразно, так как модуль E у стали различных марок практически одинаков и добиться повышения устойчивости не удается. Для стержней малой гибкости переход на высокопрочную сталь оправдан, поскольку повышающийся при этом предел текучести приводит к увеличению критического напряжения.

Несомненным недостатком формулы Тетмайера—Ясинского и ей подобных является то, что первый член — критическое напряжение при $\lambda = 0$ — не имеет никакого физического смысла. Это не предел текучести и не предел прочности, а формальное напряжение, полученное в результате статистической обработки опытных данных.

Помимо чисто экспериментального изучения поведения сжатых стержней в упругопластической стадии, известны теоретические исследования, в которых предлагалось расширить область применения формулы Эйлера. Для учета ослабления волокон, работающих при напряжениях выше предела пропорциональности, Ф. Энгессер[1] выдвинул в 1889 г. идею замены постоянного модуля упругости E переменной величиной E_τ. Она представляет собой тангенс угла наклона касательной к диаграмме σ—ε в точке, соответствующей действующему напряжению (рис. 10.5). Тогда

$$F_{cr} = \pi^2 E_\tau J_{\min}/(\mu l)^2. \tag{10.8}$$

---

[1] Фридрих Энгессер (F. Engesser, 1848—1931) — немецкий инженер-строитель, проявивший себя не только в качестве практика, но и как видный специалист в области теории сооружений.

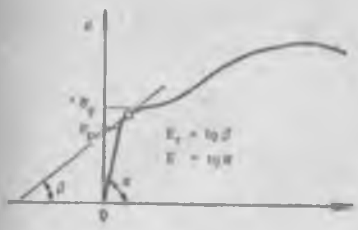
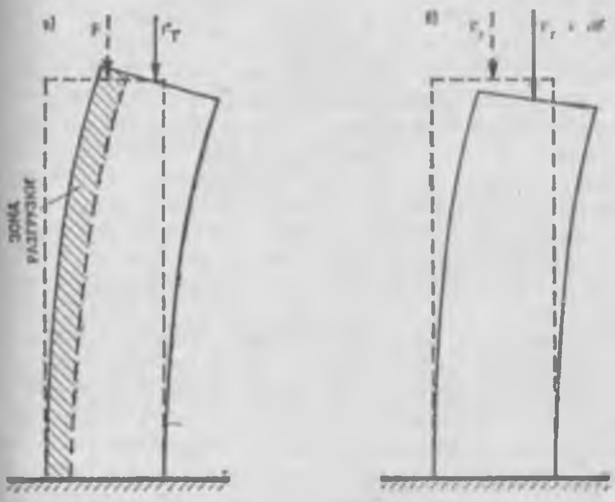


Рис. 10.5

Рис. 10.6



Это предложение вызвало возражение Ф. С. Ясинского по той причине, что при потере устойчивости касательный модуль может быть распространен только на ту часть сечения, в которой основные напряжения сжатия возрастают. Дело заключается в том, что при достижении сжимающей силой критического значения стержень начинает изгибаться, а изгиб, как известно из гл. 7, сопровождается сжатием одних волокон и растяжением других. Следовательно, на вогнутой части стержня напряжения сжатия возрастают, а на выпуклой — уменьшаются, т. е. здесь происходит разгрузка (рис. 10.6, *а*). Но модуль разгрузки, как следует из п. 2.4, совпадает с обычным модулем упругости *E* (см. рис. 2.18). Таким образом, если центрально-сжатый стержень после достижения предела пропорциональности начинает искривляться, то он работает как элемент с различными модулями при растяжении и сжатии.

В соответствии с этим замечанием Ф. Энгессер исправил свою формулу и придал ей вид

$$\sigma_{cr} = \pi^2 T/\lambda^2. \qquad (10.9)$$

Здесь T — приведенный модуль продольного изгиба:

$$T = (EJ_1 + E_\tau J_2)/J, \qquad (10.10)$$

где J_1 — момент инерции относительно нейтральной линии площади части сечения, растянутой при изгибе; J_2 — то же, сжатой; J — момент инерции площади всего сечения.

Как видно, приведенный модуль зависит не только от материала, но и от формы поперечного сечения стержня. Его значение заключено между величинами E и E_τ.

Со времени поправки Ф. С. Ясинского (1895 г.) в течение полувека концепция касательного модуля считалась неверной. Однако в 1947 г. первоначальное решение Ф. Энгессера, отброшенное самим автором, получило новое содержание в работе американского ученого Ф. Р. Шенли.

Представим, что стержень нагружается непрерывно возрастающей силой. Когда она достигает некоторого значения F_τ, стержень начинает изгибаться, но одновременно с изгибом происходит дальнейшее сжатие от продолжающей увеличиваться силы. В результате разгрузка становится невозможной, напряжения возрастают во всех волокнах, быстрее с вогнутой стороны, медленнее с выпуклой.

Так как все волокна получают догрузку, сопротивление изгибу стержня в целом будет определяться касательным модулем E_τ, а значение силы F_τ явится критическим. При этом $F_\tau < F_T$, поскольку модуль $E_\tau < T$. Схема деформирования стержня, теряющего устойчивость при силе F_τ, приведена на рис. 10.6, *б*.

Итак, центрально сжатый стержень имеет в упругопластической стадии целый диапазон критических значений нагрузки

$$F_\tau < F_{cr} < F_T.$$

Подход Ф. С. Ясинского, теоретически совершенно правильный, отвечает представлению, согласно которому абсолютно прямолинейный и идеально центрированный стержень теряет устойчивость при силе $F_{cr} = F_T$ и сразу переходит в криволинейный. В действительности же, вследствие имеющихся всегда случайных эксцентриситетов, стержни подходят к критическому состоянию несколько изогнутыми, в результате чего явление их разгрузки на выпуклой части отсутствует. Поэтому на практике более реальна схема Энгессера—Шенли. Для внецентренно сжатых (сжато-изогнутых) стержней она бесспорна, а поскольку все стержни в той или иной степени сжато-изогнуты, эта схема справедлива, по существу, и при так называемом «центральном продольном изгибе».

Следует заметить, что разница значений F_t и F_T для сжатых стержней реальных конструкций обычно невелика. Поэтому экспериментальным путем трудно установить, при какой именно нагрузке стержень теряет устойчивость. Видимо, этим и объясняется тот факт, что представление о касательно-модульной силе как о наименьшей критической нагрузке в условиях развития пластических деформаций, долго оставалось незамеченным.

Пример 10.1. Определить значение критического напряжения деревянной стойки высотой $H=5$ м, имеющей квадратное сечение со стороной $a=20$ см (рис. 10.7).

Р е ш е н и е. При условии одинакового закрепления обоих концов в пространстве стойка квадратного сечения равноустойчива во всех направлениях, так как центральные моменты инерции имеют постоянное значение (5.11) и, следовательно, постоянное значение соответствующих радиусов инерции. Согласно выражениям (9.18)

$$i = a/\sqrt{12} = 20/\left(2\sqrt{3}\right) \text{ см} = 5{,}77 \text{ см}.$$

Расчетная схема стойки относится к основному случаю продольного изгиба, т. е. коэффициент приведения длины $\mu=1$. Гибкость стойки по формуле (10.3)

$$\lambda = \mu H/i = 1\cdot 500/5{,}77 = 87 > \lambda_E = 70,$$

поэтому критическое напряжение вычисляем по формуле Эйлера

$$\sigma_{cr} = \pi^2 E/\lambda^2 = 3{,}14^2\cdot 10\cdot 10^9/87^2 \text{ Па} = 13\cdot 10^6 \text{ Па} = 13 \text{ МПа},$$

где модуль упругости $E=10$ ГПа согласно табл. 2.1.

Пример 10.2. Определить критическую силу стержня стальной колонны высотой $H=10$ м, одинаково закрепленной в направлении главных плоскостей (рис. 10.8). Сечение сварное двутавровое следующих размеров: $h_w=400$ мм, $t_w=8$ мм, $b=360$ мм, $t_f=18$ мм. Материал — сталь марки Ст3.

Р е ш е н и е. Руководствуясь рекомендациями примера 5.3, вычисляем главные центральные моменты инерции составного двутавра:

$$J_x = t_w h_w^3/12 + 2bt_f\,[(h_w + t_f)/2]^2 = 0{,}8\cdot 40^3/12 + 2\cdot 36\cdot 1{,}8\,[(40 + 1{,}8)/2]^2 \text{ см}^4 = 60\,800 \text{ см}^4;$$

жения предела пропорциональности начинает искривляться, то он работает как элемент с различными модулями при растяжении и сжатии.

В соответствии с этим замечанием Ф. Энгессер исправил свою формулу и придал ей вид

$$\sigma_{cr} = \pi^2 T/\lambda^2. \qquad (10.9)$$

Здесь T — приведенный модуль продольного изгиба:

$$T = (EJ_1 + E_\tau J_2)/J, \qquad (10.10)$$

где J_1 — момент инерции относительно нейтральной линии площади части сечения, растянутой при изгибе; J_2 — то же, сжатой; J — момент инерции площади всего сечения.

Как видно, приведенный модуль зависит не только от материала, но и от формы поперечного сечения стержня. Его значение заключено между величинами E и E_τ.

Со времени поправки Ф. С. Ясинского (1895 г.) в течение полувека концепция касательного модуля считалась неверной. Однако в 1947 г. первоначальное решение Ф. Энгессера, отброшенное самим автором, получило новое содержание в работе американского ученого Ф. Р. Шенли.

Представим, что стержень нагружается непрерывно возрастающей силой. Когда она достигает некоторого значения F_τ, стержень начинает изгибаться, но одновременно с изгибом происходит дальнейшее сжатие от продолжающей увеличиваться силы. В результате разгрузка становится невозможной, напряжения возрастают во всех волокнах, быстрее с вогнутой стороны, медленнее с выпуклой.

Так как все волокна получают догрузку, сопротивление изгибу стержня в целом будет определяться касательным модулем E_τ, а значение силы F_τ явится критическим. При этом $F_\tau < F_T$, поскольку модуль $E_\tau < T$. Схема деформирования стержня, теряющего устойчивость при силе F_τ, приведена на рис. 10.6, *б*.

Итак, центрально сжатый стержень имеет в упругопластической стадии целый диапазон критических значений нагрузки

$$F_\tau < F_{cr} < F_T.$$

Подход Ф. С. Ясинского, теоретически совершенно правильный, отвечает представлению, согласно которому абсолютно прямолинейный и идеально центрированный стержень теряет устойчивость при силе $F_{cr} = F_T$ и сразу переходит в криволинейный. В действительности же, вследствие имеющихся всегда случайных эксцентриситетов, стержни подходят к критическому состоянию несколько изогнутыми, в результате чего явление их разгрузки на выпуклой части отсутствует. Поэтому на практике более реальна схема Энгессера—Шенли. Для внецентренно сжатых (сжато-изогнутых) стержней она бесспорна, а поскольку все стержни в той или иной степени сжато-изогнуты, эта схема справедлива, по существу, и при так называемом «центральном продольном изгибе».

Следует заметить, что разница значений F_t и F_T для сжатых стержней реальных конструкций обычно невелика. Поэтому экспериментальным путем трудно установить, при какой именно нагрузке стержень теряет устойчивость. Видимо, этим и объясняется тот факт, что представление о касательно-модульной силе как о наименьшей критической нагрузке в условиях развития пластических деформаций, долго оставалось незамеченным.

Пример 10.1. Определить значение критического напряжения деревянной стойки высотой $H=5$ м, имеющей квадратное сечение со стороной $a=20$ см (рис. 10.7).

Решение. При условии одинакового закрепления обоих концов в пространстве стойка квадратного сечения равноустойчива во всех направлениях, так как центральные моменты инерции имеют постоянное значение (5.11) и, следовательно, постоянное значение соответствующих радиусов инерции. Согласно выражениям (9.18)

$$i = a/\sqrt{12} = 20/(2\sqrt{3})\ \text{см} = 5,77\ \text{см}.$$

Расчетная схема стойки относится к основному случаю продольного изгиба, т. е. коэффициент приведения длины $\mu=1$. Гибкость стойки по формуле (10.3)

$$\lambda = \mu H/i = 1\cdot 500/5,77 = 87 > \lambda_E = 70,$$

поэтому критическое напряжение вычисляем по формуле Эйлера

$$\sigma_{cr} = \pi^2 E/\lambda^2 = 3,14^2\cdot 10\cdot 10^9/87^2\ \text{Па} = 13\cdot 10^6\ \text{Па} = 13\ \text{МПа},$$

где модуль упругости $E=10$ ГПа согласно табл. 2.1.

Пример 10.2. Определить критическую силу стержня стальной колонны высотой $H=10$ м, одинаково закрепленной в направлении главных плоскостей (рис. 10.8). Сечение сварное двутавровое следующих размеров: $h_w=400$ мм, $t_w=8$ мм, $b=360$ мм, $t_f=18$ мм. Материал — сталь марки Ст3.

Решение. Руководствуясь рекомендациями примера 5.3, вычисляем главные центральные моменты инерции составного двутавра:

$$J_x = t_w h_w^3/12 + 2bt_f[(h_w+t_f)/2]^2 = 0,8\cdot 40^3/12 + 2\cdot 36\cdot 1,8[(40+$$
$$+1,8)/2]^2\ \text{см}^4 = 60\,800\ \text{см}^4;$$

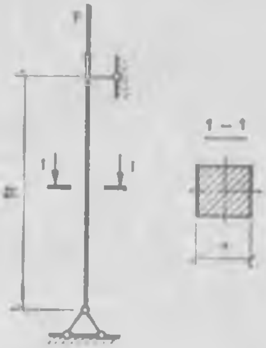


Рис. 10.7

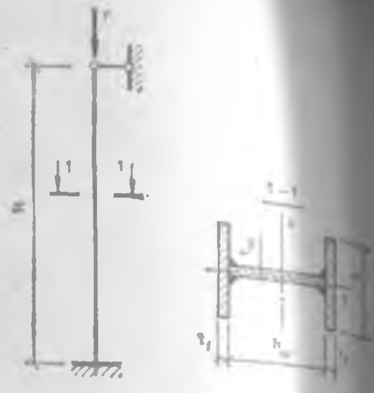


Рис. 10.8

$$J_y = 2t_f b^3/12 = 2\cdot 1{,}8\cdot 36^3/12 \text{ см}^4 = 14\,000 \text{ см}^4.$$

Площадь сечения

$$A = t_w h_w + 2t_f b = 0{,}8\cdot 40 + 2\cdot 1{,}8\cdot 36 \text{ см}^2 = 161{,}6 \text{ см}^2.$$

Минимальный радиус инерции

$$i_{\min} = i_y = \sqrt{J_y/A} = \sqrt{14\,000/161{,}6 \text{ см}} \approx 9{,}3 \text{ см}.$$

Рассматриваемый случай соответствует расчетной схеме, представленной на рис. 10.3, *в*, т. е. $\mu = 0{,}7$ и

$$\lambda = \mu H/i_{\min} = 0{,}7\cdot 1\,000/9{,}3 \approx 75.$$

Найденное значение гибкости находится в интервале применимости формулы Тетмайера — Ясинского. Следовательно,

$$\sigma_{cr} = a - b\lambda = 305 - 1{,}12\cdot 75 \text{ МПа} = 221 \text{ МПа}.$$

Критическая сила согласно выражению (10.7)

$$F_{cr} = \sigma_{cr} A = 221\cdot 10^6\cdot 161{,}6\cdot 10^{-4} \text{ Н} = 3{,}57\cdot 10^6 \text{ Н} \approx 3{,}6 \text{ МН}.$$

10.4. Практический метод расчета сжатых стержней на устойчивость

Итак, несущая способность сжатого стержня может быть исчерпана по двум причинам: 1) вследствие потери прочности, если в стержне из пластичного материала не выполняется условие $\sigma \leqslant \sigma_y$, а в стержне из хрупкого материала — условие $\sigma \leqslant \sigma_u$;

2) вследствие потери устойчивости, если в стержне из любого материала не выполняется условие $\sigma \leqslant \sigma_{cr}$.

Вводя обозначение

$$\varphi_y = \sigma_{cr}/\sigma_y; \quad \varphi_u = \sigma_{cr}/\sigma_u \tag{10.11}$$

и принимая за расчетное сопротивление по-прежнему наименьший предел текучести σ_y пластичного материала и наименьший предел прочности σ_u хрупкого (см. п. 2.12), условие устойчивости можно записать в следующем развернутом виде:

$$\sigma = N/A \leqslant \varphi R \gamma_c, \tag{10.12}$$

где N — продольная сила от расчетной сжимающей нагрузки, Н; A — площадь поперечного сечения стержня брутто, м^2; φ — коэффициент, уменьшающий расчетное сопротивление сжатию R до значения, которое гарантирует устойчивость прямолинейной формы равновесия, и называемый *коэффициентом продольного изгиба;* γ_c — коэффициент условий работы.

Коэффициент φ для конкретного материала можно вычислять по формулам (10.11), подставляя в них значения критического напряжения. Однако в целях облегчения практических расчетов в строительных нормах приводятся готовые выражения или таблицы коэффициентов продольного изгиба в зависимости от гибкости. Согласно главе СНиП [6] для деревянных элементов гибкостью $\lambda \leqslant 70$

$$\varphi = 1 - 0{,}8(\lambda/100)^2, \tag{10.13}$$

гибкостью $\lambda > 70$

$$\varphi = 3\,000/\lambda^2. \tag{10.13а}$$

Для стальных элементов в главе СНиП [9] помещены формулы, применимые к любой марке стали, толщине и виду проката. При этом вводится понятие условной гибкости стержня

$$\bar{\lambda} = \lambda\sqrt{R_y/E}, \tag{10.14}$$

где R_y — расчетное сопротивление материала, установленное по пределу текучести.

Если $0 \leqslant \bar{\lambda} \leqslant 2{,}5$, то

$$\varphi = 1 - (0{,}073 - 5{,}53 R_y/E)\,\bar{\lambda}\sqrt{\bar{\lambda}}; \qquad (10.15)$$

если $2{,}5 < \bar{\lambda} \leqslant 4{,}5$, то

$$\varphi = 1{,}47 - 13 R_y/E - (0{,}371 - 27{,}3 R_y/E)\,\bar{\lambda} + (0{,}0275 - 5{,}53 R_y/E)\,\bar{\lambda}^2; \qquad (10.15а)$$

если $\bar{\lambda} > 4{,}5$, то

$$\varphi = 332/[\bar{\lambda}^2 (51 - \bar{\lambda})]. \qquad (10.15б)$$

Числовые значения коэффициента φ для стальных и деревянных элементов приведены в табл. 10.1.

Таблица 10.1. **Коэффициенты φ продольного изгиба центрально-сжатых элементов**

Гибкость	Значения φ для элементов из							
	стали с расчетным сопротивлением R_y, МПа							древесины
	200	240	280	320	360	400	440	
0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
10	0,988	0,987	0,985	0,984	0,983	0,982	0,981	0,992
20	0,967	0,962	0,959	0,955	0,952	0,949	0,946	0,96[illegible]
30	0,939	0,931	0,924	0,917	0,911	0,905	0,900	0,928
40	0,906	0,894	0,883	0,873	0,863	0,854	0,846	0,872
50	0,869	0,852	0,836	0,822	0,809	0,796	0,785	0,[illegible]
60	0,827	0,805	0,785	0,766	0,749	0,721	0,696	0,712
70	0,782	0,754	0,724	0,687	0,654	0,623	0,595	0,608
80	0,734	0,686	0,641	0,602	0,566	0,532	0,501	0,469
90	0,665	0,612	0,565	0,522	0,483	0,447	0,413	0,370
100	0,599	0,542	0,493	0,448	0,408	0,369	0,335	0,30[illegible]
110	0,537	0,478	0,427	0,381	0,338	0,306	0,280	0,248
120	0,479	0,419	0,366	0,321	0,287	0,260	0,237	0,20[illegible]
130	0,425	0,364	0,313	0,276	0,247	0,223	0,204	0,17[illegible]
140	0,376	0,315	0,272	0,240	0,215	0,195	0,178	0,15[illegible]
150	0,328	0,276	0,239	0,211	0,189	0,171	0,157	0,13[illegible]
160	0,290	0,244	0,212	0,187	0,167	0,152	0,139	0,11[illegible]
170	0,259	0,218	0,189	0,167	0,150	0,136	0,125	0,10[illegible]
180	0,233	0,196	0,170	0,150	0,135	0,123	0,112	0,09[illegible]
190	0,210	0,177	0,154	0,136	0,122	0,111	0,102	0,0[illegible]
200	0,191	0,161	0,140	0,124	0,111	0,101	0,093	0,07[illegible]
210	0,174	0,147	0,128	0,113	0,102	0,093	0,085	0,06[illegible]
220	0,160	0,135	0,118	0,104	0,094	0,086	0,077	0,06[illegible]

Примечания: 1. Для определения промежуточных значений φ [illegible] сается линейная интерполяция. 2. Значения φ для элементов из стали с расчетным сопротивлением $R_y > 440$ МПа следует определять по формулам (10.15) — (10.15б) или по таблице, приводимой в главе СНиП [9].

Обычно условие устойчивости записывают так, чтобы напряжения можно было сравнивать непосредственно с расчетным сопротивлением. Для этого коэффициент продольного изгиба переносят в знаменатель и в левой части неравенства вместо действительных получают условные напряжения

$$\sigma_{ef} = N/(\varphi A) < R\gamma_c. \qquad (10.16)$$

Из сопоставления неравенств (10.16) и (2.23) видно, что расчет сжатых стержней на устойчивость внешне напоминает расчет на прочность. Принципиальное отличие заключается во введении понижающего коэффициента $\varphi < 1$ и замене площади поперечного сечения нетто площадью брутто. Для деревянных элементов такая замена допустима, если площадь ослабления не превышает $0{,}25\,A$. В противном случае расчетная площадь сечения должна назначаться в соответствии с указаниями главы СНиП [6].

Условие (10.16) позволяет производить три вида расчета на устойчивость, идентичные аналогичным расчетам на прочность.

1. *Проверка устойчивости* выполняется непосредственно по указанной формуле при известной сжимающей нагрузке (а следовательно, продольной силе N), площади сечения A, а также длине стержня l и способах закрепления его концов, благодаря чему определяется гибкость λ и коэффициент φ.

2. *Подбор сечения* осуществляется по заданной нагрузке и расчетному сопротивлению материала R, известной длине стержня, способам закрепления его концов и выбранной форме поперечного сечения:

$$A > N/(\varphi R\gamma_c). \qquad (10.16а)$$

Использование этого неравенства затрудняется тем, что в него входят две неизвестные величины A и φ, которые нельзя выразить одну через другую. Поэтому подбор сечения приходится производить способом последовательных приближений, сущность которого пояснена ниже на примерах.

3. *Определение эксплуатационной способности* производится по известным поперечным размерам стержня, его длине, способам закрепления и расчетному сопротивлению:

$$N < \varphi R\gamma_c A. \qquad (10.16б)$$

Если $0 \leqslant \bar{\lambda} \leqslant 2{,}5$, то

$$\varphi = 1 - (0{,}073 - 5{,}53R_y/E)\bar{\lambda}\sqrt{\bar{\lambda}}; \qquad (10.15)$$

если $2{,}5 < \bar{\lambda} \leqslant 4{,}5$, то

$$\varphi = 1{,}47 - 13R_y/E - (0{,}371 - 27{,}3R_y/E)\bar{\lambda} + (0{,}0275 - 5{,}53R_y/E)\bar{\lambda}^2; \qquad (10.15а)$$

если $\bar{\lambda} > 4{,}5$, то

$$\varphi = 332/[\bar{\lambda}^2(51 - \bar{\lambda})]. \qquad (10.15б)$$

Числовые значения коэффициента φ для стальных и деревянных элементов приведены в табл. 10.1.

Таблица 10.1. **Коэффициенты φ продольного изгиба центрально-сжатых элементов**

Гибкость	Значения φ для элементов из							
	стали с расчетным сопротивлением R_y, МПа							древесины
	200	240	280	320	360	400	440	
0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
10	0,988	0,987	0,985	0,984	0,983	0,982	0,981	0,992
20	0,967	0,962	0,959	0,955	0,952	0,949	0,946	0,968
30	0,939	0,931	0,924	0,917	0,911	0,905	0,900	0,928
40	0,906	0,894	0,883	0,873	0,863	0,854	0,846	0,872
50	0,869	0,852	0,836	0,822	0,809	0,796	0,785	[illegible]
60	0,827	0,805	0,785	0,766	0,749	0,721	0,696	0,712
70	0,782	0,754	0,724	0,687	0,654	0,623	0,595	[illegible]
80	0,734	0,686	0,641	0,602	0,566	0,532	0,501	[illegible]
90	0,665	0,612	0,565	0,522	0,483	0,447	0,413	[illegible]
100	0,599	0,542	0,493	0,448	0,408	0,369	0,335	[illegible]
110	0,537	0,478	0,427	0,381	0,338	0,306	0,280	[illegible]
120	0,479	0,419	0,366	0,321	0,287	0,260	0,237	[illegible]
130	0,425	0,364	0,313	0,276	0,247	0,223	0,204	[illegible]
140	0,376	0,315	0,272	0,240	0,215	0,195	0,178	[illegible]
150	0,328	0,276	0,239	0,211	0,189	0,171	0,157	[illegible]
160	0,290	0,244	0,212	0,187	0,167	0,152	0,139	[illegible]
170	0,259	0,218	0,189	0,167	0,150	0,136	0,125	[illegible]
180	0,233	0,196	0,170	0,150	0,135	0,123	0,112	[illegible]
190	0,210	0,177	0,154	0,136	0,122	0,111	0,102	[illegible]
200	0,191	0,161	0,140	0,124	0,111	0,101	0,093	[illegible]
210	0,174	0,147	0,128	0,113	0,102	0,093	0,085	[illegible]
220	0,160	0,135	0,118	0,104	0,094	0,086	0,077	[illegible]

Примечания: 1. Для определения промежуточных значений φ допускается линейная интерполяция. 2. Значения φ для элементов из стали с расчетным сопротивлением $R_y > 440$ МПа следует определять по формулам (10.15) — (10.15б) или по таблице, приводимой в главе СНиП [9].

Обычно условие устойчивости записывают так, чтобы напряжения можно было сравнивать непосредственно с расчетным сопротивлением. Для этого коэффициент продольного изгиба переносят в знаменатель и в левой части неравенства вместо действительных получают условные напряжения

$$\sigma_{ef} = N/(\varphi A) \leqslant R\gamma_c. \qquad (10.16)$$

Из сопоставления неравенств (10.16) и (2.23) видно, что расчет сжатых стержней на устойчивость внешне напоминает расчет на прочность. Принципиальное отличие заключается во введении понижающего коэффициента $\varphi < 1$ и замене площади поперечного сечения нетто площадью брутто. Для деревянных элементов такая замена допустима, если площадь ослабления не превышает $0{,}25A$. В противном случае расчетная площадь сечения должна назначаться в соответствии с указаниями главы СНиП [6].

Условие (10.16) позволяет производить три вида расчета на устойчивость, идентичные аналогичным расчетам на прочность.

1. *Проверка устойчивости* выполняется непосредственно по указанной формуле при известной сжимающей нагрузке (а следовательно, продольной силе N), площади сечения A, а также длине стержня l и способах закрепления его концов, благодаря чему определяется гибкость λ и коэффициент φ.

2. *Подбор сечения* осуществляется по заданной нагрузке и расчетному сопротивлению материала R, известной длине стержня, способам закрепления его концов и выбранной форме поперечного сечения:

$$A \geqslant N/(\varphi R\gamma_c). \qquad (10.16а)$$

Использование этого неравенства затрудняется тем, что в него входят две неизвестные величины A и φ, которые нельзя выразить одну через другую. Поэтому подбор сечения приходится производить способом последовательных приближений, сущность которого пояснена ниже на примерах.

3. *Определение эксплуатационной способности* производится по известным поперечным размерам стержня, его длине, способам закрепления и расчетному сопротивлению:

$$N \leqslant \varphi R\gamma_c A. \qquad (10.16б)$$

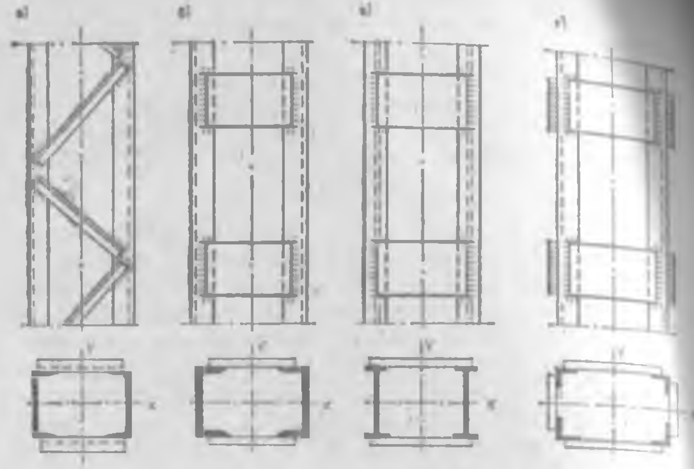


Рис. 10.9

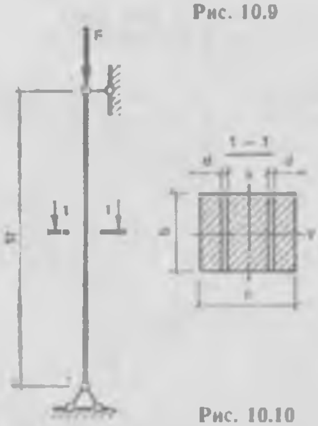


Рис. 10.10

При выборе формы поперечного сечения следует иметь в виду, что в соответствии с любой из вышеприведенных формул критической силы или критического напряжения сечение тем выгоднее, чем больше его минимальный момент инерции J_{min} (или радиус инерции i_{min}) при одной и той же площади A.

Увеличение момента инерции бруса, работающего на поперечный изгиб, достигается, как известно, концентрацией материала по периферии его поперечного сечения (см. п. 7.6). Этот принцип остается в силе и для гибкого сжимаемого стержня с той лишь разницей, что необходимо еще стремиться к равенству главных центральных моментов инерции. В этом случае при одинаковом закреплении в главных плоскостях будет обеспечена равноустойчивость стержня.

Таким образом, теоретически наиболее рациональным следует считать кольцевое сечение (см. рис. 5.7), имеюние наибольший момент инерции при данной площади и одинаковую жесткость по всем направлениям. Однако в строительной практике оно не нашло еще широкого применения из-за конструктивных неудобств, высокой стоимости труб и ряда конъюнктурных обстоятельств. В стальных конструкциях распространены сквозные стержни, состоящие из ветвей в виде прокатных профилей (швеллеров, уголков и двутавров), соединенных между собой решеткой (рис. 10.9, *а*) или планками (рис. 10.9, *б—г*). Равноустойчивость достигается раздвижкой ветвей на требуемое расстояние.

Наиболее распространены двухветвевые стержни из швеллеров полками внутрь (см. рис. 10.9, *а*, *б*). Ориентация профилей полками наружу при одинаковых габаритах сечения менее выгодна вследствие уменьшения радиуса инерции i_y и увеличения расхода металла на решетку.

Сечение из двух двутавров (см. рис. 10.9, *в*) применяется при значительных нагрузках, исключающих использование швеллеров. Четырехветвевые стержни (см. рис. 10.9, *г*) находят применение в тех случаях, когда при малой площади сечения необходимо обеспечить достаточную жесткость (мачты, крановые стрелы и т. п.).

Пример 10.3. Проверить прочность и устойчивость деревянной стойки в сечении, ослабленном двумя отверстиями под болты диаметром $d=18$ мм (рис. 10.10). Сечение стойки прямоугольное размером $b\times h=15\times 20$ см, высота $H=4{,}5$ м. Расчетная сжимающая сила $F=130$ кН, расчетное сопротивление древесины осевому сжатию $R=16$ МПа. Стойка работает в нормальных условиях.

Решение. *Проверка прочности.* Площадь сечения брутто

$$A=bh=15\cdot 20 \text{ см}^2=300 \text{ см}^2.$$

Площадь отверстий под болты

$$A_0=2db=2\cdot 1{,}8\cdot 15 \text{ см}^2=54 \text{ см}^2<0{,}25\ A=0{,}25\cdot 300 \text{ см}^2=75 \text{ см}^2.$$

Площадь сечения нетто

$$A_{net}=A-A_0=300-54 \text{ см}^2=246 \text{ см}^2=246\cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Напряжения сжатия по формуле (2.23) от силы $N=F=130\times\times 10^3$ Н

$$\sigma=N/A_{net}=130\cdot 10^3/(246\cdot 10^{-4}) \text{ Па}=5{,}3\cdot 10^6 \text{ Па}=$$

$$=5{,}3 \text{ МПа}\ll R=16 \text{ МПа}.$$

Проверка устойчивости. При продольном изгибе выпучивание стойки произойдет в плоскости наименьшей жесткости, т. е. в плоскости, перпендикулярной оси y. Минимальный радиус инерции согласно выражениям (9.18)

$$i_{min}=i_y=b/\sqrt{12}=15/\left(2\sqrt{3}\right) \text{ см}=4{,}33 \text{ см}.$$

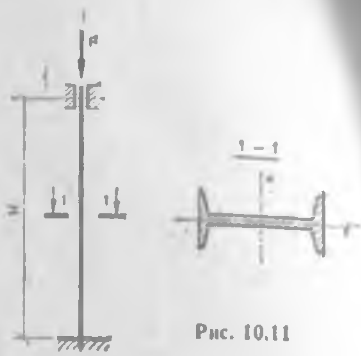


Рис. 10.11

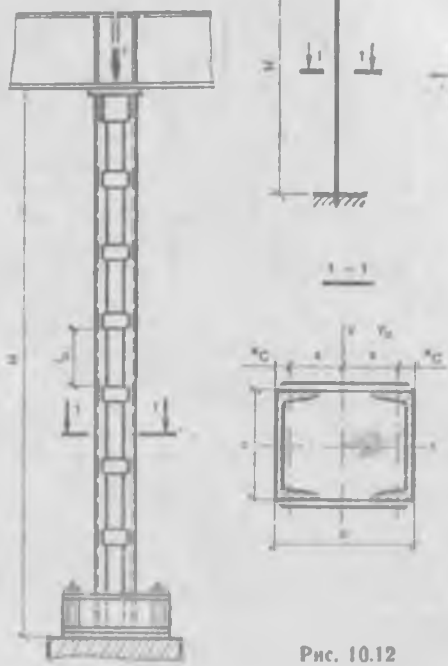


Рис. 10.12

Гибкость стойки по формуле (10.3)

$$\lambda = \mu H / i_{min} = 1 \cdot 450/4,33 \approx 104 > 70.$$

Коэффициент продольного изгиба по формуле (10.13а)

$$\varphi = 3000/\lambda^2 = 3000/104^2 = 0,277.$$

Напряжения по формуле (10.16)

$$\sigma_{ef} = N/(\varphi A) = 130 \cdot 10^7/(0,277 \cdot 300)\ \text{Па} = 15,6 \cdot 10^6\ \text{Па} =$$

$$= 15,6\ \text{МПа} < R.$$

Таким образом, прочность и устойчивость стойки обеспечены, но расчет на устойчивость имеет решающее значение вследствие большой гибкости.

Пример 10.4. Подобрать сечение стержня центрально-сжатой стальной колонны из прокатного двутавра (рис. 10.11). Расчетная

нагрузка $F = 900$ кН. Высота колонны $H = 8$ м, концы в направлении главных плоскостей защемлены. Материал — сталь марки Ст3 с расчетным сопротивлением $R_y = 220$ МПа. Условия работы — нормальные.

Решение. *1-е приближение.* Задаемся коэффициентом продольного изгиба $\varphi_0 = 0,5$, которому в табл. 10.1 соответствует гибкость $\lambda = 111$. Тогда требуемая площадь сечения по формуле (10.16а)

$$A \geqslant N/(\varphi_0 R_y) = 900 \cdot 10^3/(0,5 \cdot 220 \cdot 10^6)\ \text{м}^2 =$$

$$= 81,8 \cdot 10^{-4}\ \text{м}^2 = 81,8\ \text{см}^2.$$

По табл. 1 приложения предварительно принимаем двутавр № 45 с $A = 84,7\ \text{см}^2 > 81,8\ \text{см}^2$ и $i_{min} = i_y = 3,09$ см. Коэффициент приведения $\mu = 0,5$ (см. рис. 10.3, *г*). Отсюда гибкость (10.3)

$$\lambda = \mu H / i_{min} = 0,5 \cdot 800/3,09 \approx 129.$$

Условная гибкость (10.14) при $E = 206 \cdot 10^9$ Па (см. табл. 2.1)

$$\bar{\lambda} = \lambda \sqrt{R_y/E} = 129 \sqrt{220 \cdot 10^6/(206 \cdot 10^9)} =$$

$$= 129 \sqrt{1,068 \cdot 10^{-3}} = 4,22$$

и уточненное значение коэффициента продольного изгиба по формуле (10.15а)

$$\varphi_1 = 1,47 - 13R_y/E - (0,371 - 27,3R_y/E)\,\bar{\lambda} + (0,0275 -$$

$$- 5,53R_y/E)\,\bar{\lambda}^2 = 1,47 - 13 \cdot 1,068 \cdot 10^{-3} - (0,0371 -$$

$$- 27,3 \cdot 1,068 \cdot 10^{-3})\,4,22 + (0,0275 - 5,53 \cdot 1,068 \cdot 10^{-3})\,4,22^2 =$$

$$= 1,456 - 0,342 \cdot 4,22 + 0,0216 \cdot 4,22^2 = 0,398.$$

Такое же значение получается интерполированием по табл. 10.1. Напряжения по формуле (10.16)

$$\sigma_{ef} = N/(\varphi_1 A) = 900 \cdot 10^3/(0,398 \cdot 84,7 \cdot 10^{-4})\ \text{Па} =$$

$$= 267 \cdot 10^6\ \text{Па} = 267\ \text{МПа} > R_y = 220\ \text{МПа},$$

т. е. сечение стержня необходимо увеличить.

2-е приближение. Для ускорения процесса подбора за новое значение коэффициента φ принимаем среднее арифметическое первых двух

$$\varphi_2 = (\varphi_0 + \varphi_1)/2 = (0,5 + 0,398)/2 = 0,449,$$

после чего повторяем расчетный цикл:

$$A > 900/(0,449 \cdot 220 \cdot 10^3)\ \text{м}^2 = 91,1 \cdot 10^{-4}\ \text{м}^2 = 91,1\ \text{см}^2.$$

Принимаем двутавр № 50 с $A = 100\ \text{см}^2$, $i_y = 3,23$ см. Тогда

$$\lambda = 0,5 \cdot 800/3,23 \approx 124; \quad \bar{\lambda} = 124 \sqrt{1,068 \cdot 10^{-3}} = 4,05;$$

$$\varphi_3 = 1,456 - 0,342 \cdot 4,05 + 0,0216 \cdot 4,05^2 = 0,425;$$

$$\sigma_{ef} = 900 \cdot 10^7/(0,425 \cdot 100)\ \text{Па} = 212 \cdot 10^6\ \text{Па} = 212\ \text{МПа} < R_y.$$

Окончательно принимаем двутавр № 50.

Пример 10.5. Подобрать сечение сквозного стержня равноустойчивой сварной центрально-сжатой колонны из двух швеллеров, соединенных планками (рис. 10.12). Расчетная нагрузка от балочного перекрытия $F=1{,}35$ МН. Колонна высотой $H=9$ м защемлена внизу и шарнирно закреплена вверху. Материал конструкции — сталь марки Ст3 с расчетным сопротивлением $R_y=240$ МПа. Условия работы — нормальные.

Решение. *Предварительный подбор сечения.* Расчетной схеме колонны отвечает схема, представленная на рис. 10.3, *в*, поэтому приведенная длина всего стержня

$$l_{ef}=\mu H=0{,}7\cdot 9\ \text{м}=6{,}3\ \text{м}.$$

Практика расчета колонн рассматриваемого типа показывает, что в первом приближении целесообразно задаваться значением $\varphi_0=0{,}7-0{,}9$. Требуемая площадь сечения одного швеллера по формуле (10.16а) при $\varphi_0=0{,}85$ и $N=F/2$

$$A\geqslant(F/2)/(\varphi_0 R_y)=1{,}35\cdot10^6/(2\cdot0{,}85\cdot240\cdot10^6)\ \text{м}^2=$$
$$=33{,}1\cdot10^{-4}\ \text{м}^2=33{,}1\ \text{см}^2.$$

По табл. 2 приложения принимаем швеллер № 27 с $A=35{,}2$ см$^2>33{,}1$ см^2; $J_x=4160$ см^4; $J_{y_0}=262$ см^4; $i_x=10{,}9$ см; $i_{y_0}=2{,}73$ см; $x_C=2{,}47$ см.

Проверка принятого сечения на устойчивость относительно оси x. Эту ось часто называют материальной, поскольку она пересекает ветви колонны. Гибкость сквозного стержня относительно указанной оси равна гибкости одной ветви (швеллера), так как согласно выражениям (9.13) радиус инерции

$$i=\sqrt{2J_x/2A}=\sqrt{J_x/A}=i_x=10{,}9\ \text{см}.$$

Следовательно,

$$\lambda_x=l_x/i_x=l_{ef}/i_x=630/10{,}9\approx58.$$

Коэффициент продольного изгиба по табл. 10.1 (интерполированием)

$$\varphi=0{,}805+[(0{,}852-0{,}805)/10]\,2=0{,}814.$$

Напряжения по формуле (10.16)

$$\sigma_{ef}=N/(\varphi 2A)=1{,}35\cdot10^6/(0{,}814\cdot2\cdot35{,}2\cdot10^{-4})\ \text{Па}=$$
$$=236\cdot10^6\ \text{Па}=236\ \text{МПа}<R_y=240\ \text{МПа}.$$

Расчет на устойчивость относительно оси y сводится к определению ширины сечения b. При отсутствии соединительных планок каждая ветвь колонны работала бы обособленно на продольный изгиб относительно собственной главной центральной оси y_0. При наличии планок обе ветви работают совместно, подобно единому стержню, подвергаясь продольному изгибу относительно главной оси y всего сечения, которая в отличие от материальной оси x называется свободной.

Если придерживаться обычной методики расчета стержней на устойчивость, то гибкость относительно свободной оси следовало бы определять по формуле $\lambda_y=l_y/i_y$, где l_y — приведенная длина стержня колонны относительно оси y. Однако в действительности жесткость колонны относительно свободной оси оказывается пониженной вследствие деформативности планок. Поэтому в расчет вводится так называемая *приведенная гибкость*

$$\lambda_{ef}=\sqrt{\lambda_y^2+\lambda_0^2}.$$

Здесь $\lambda_0=l_0/i_0$ — гибкость участка ветви, заключенного между планками, относительно собственной центральной оси y_0. Ее принимают равной 30—40.

Для рассматриваемой колонны $i_0=i_{y_0}=2{,}73$ см. Задаваясь гибкостью $\lambda_0=30$, находим приведенную длину ветви (расстояние между планками в свету)

$$l_0=i_0\lambda_0=2{,}73\cdot30\ \text{см}=81{,}9\ \text{см}.$$

Придерживаясь кратной разбивки по высоте колонны, принимаем $l_0=80$ см. Учитывая, что для равноустойчивости необходимо соблюдение условия $\lambda_{ef}\leqslant\lambda_x$, из выражения приведенной гибкости определяем требуемую гибкость всего стержня относительно свободной оси

$$\lambda_y=\sqrt{\lambda_{ef}^2-\lambda_0^2}=\sqrt{\lambda_x^2-\lambda_0^2}=\sqrt{58^2-30^2}\approx50.$$

Соответствующий радиус инерции

$$i_y=l_y/\lambda_y=l_{ef}/\lambda_y=630/50\ \text{см}=12{,}6\ \text{см},$$

момент инерции

$$J_y=2Ai_y^2=2\cdot35{,}2\cdot12{,}6^2\ \text{см}^4\approx11\,200\ \text{см}^4.$$

С другой стороны, согласно формуле перехода (5.21а) при параллельном переносе осей

$$J_y=2(J_{y_0}+Aa^2).$$

Приравнивая правые части обоих равенств, после подстановки числовых значений получаем $2(262+35{,}2a^2)=11\,200$, откуда $a=\sqrt{5338/35{,}2}$ см $=12{,}3$ см.

Таким образом, полная ширина сечения стержня

$$b=2(a+x_C)=2(12{,}3+2{,}47)\ \text{см}=29{,}6\ \text{см}\approx30\ \text{см}.$$

Напряжения в колонне при расчете на устойчивость относительно свободной оси не превышают напряжений при проверке относительно материальной оси, поскольку $\lambda_{ef}\leqslant\lambda_x$.

10.5. Понятие об устойчивости балок и их элементов

С явлением потери устойчивости приходится сталкиваться при сжатии не только стержней. Потерять устойчивость первоначальной формы равновесия может и высокая длинная металлическая балка двутаврового профиля с узкими поясами. Выражается это в боковом выпучивании сжатого при изгибе пояса и одновременном закручивании балки в целом (рис. 10.13, *а*). Подобное явление называется потерей *общей устойчивости* балки.

Выпучивание происходит на участках между точками закрепления сжатого пояса. Соответствующие расстояния характеризуют свободную (расчетную) длину балки

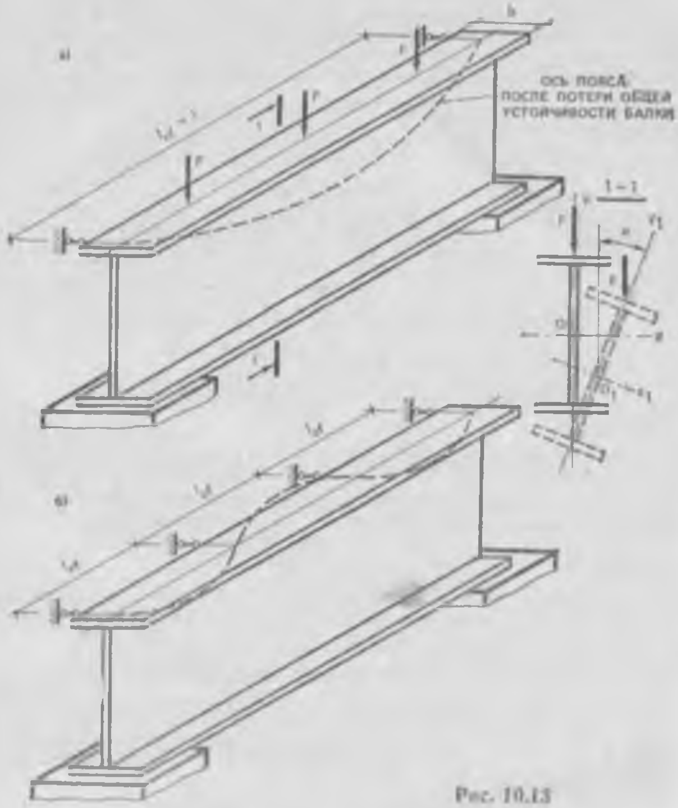


Рис. 10.13

l_{ef}. Общая устойчивость тем выше, чем меньше отношение свободной длины к ширине сжатого пояса l_{ef}/b и чем больше отношение моментов инерции J_y/J_x. Таким образом, увеличение момента инерции относительно нейтральной линии J_x, целесообразное для повышения прочности и жесткости балки, невыгодно с точки зрения ее общей устойчивости.

Повышению общей устойчивости способствуют развитие поясов и уменьшение свободной длины большепролетных балок за счет дополнительных связей (рис. 10.13, *б*). Проверку общей устойчивости балки производят по формуле

$$\sigma_{ef} = M/(\varphi_b W_x) < R_y \gamma_c, \qquad (10.17)$$

где W_x — момент сопротивления поперечного сечения брутто относительно нейтральной линии; φ_b — коэффициент снижения несущей способности балки вследствие возможной потери общей устойчивости, равный отношению критического напряжения к пределу текучести материала и определяемый согласно указаниям глав СНиП [4], [9]. Остальные обозначения те же, что в формуле (7.19).

Сжатые поясные листы и стенка составной металлической балки (см. рис. 7.30, *а*) при недостаточной толщине t могут выпучиться и потерять *местную устойчивость* раньше, чем наступит потеря общей устойчивости балки. Потеря местной устойчивости опасна тем, что вследствие перераспределения усилий возможна преждевременная потеря несущей способности балки в целом. Поэтому при расчете на местную устойчивость исходят из того, чтобы ее потеря не произошла раньше исчерпания несущей способности балки по прочности.

Конструируя балки, следует иметь в виду существенное различие между потерей местной устойчивости стенки и поясного листа. Стенка является промежуточным элементом балки, окаймленным поясами. Поэтому она не может свободно деформироваться в своей плоскости и ее криволинейная форма не сразу приводит к потере несущей способности балки. Поясной же лист имеет свободные свесы и его выпучивание быстро делает балку неработоспособной.

Исследования С. П. Тимошенко[1] показывают, что критическая сила сжатой пластины, отнесенная к единице длины нагруженного контура, может быть представлена формулой, которая напоминает формулу Эйлера для центрально-сжатого стержня постоянного сечения:

$$F_{кр} = k\pi^2 D/b^2, \tag{10.18}$$

где k — коэффициент, зависящий от характера силовых воздействий, способа закрепления краев пластины и ее размеров; b — ширина пластины (размер в направлении, перпендикулярном усилиям сжатия), м; D — жесткость пластины при изгибе (цилиндрическая жесткость), Н·м, играющая ту же роль, что и произведение EJ при изгибе балки:

$$D = EJ/(1-\nu^2) = Et^3/[12(1-\nu^2)], \tag{10.19}$$

где E — модуль упругости материала, Па; $J = 1\cdot t^3/12$ — момент инерции единичной полосы пластины относительно нейтральной оси, м³; ν — коэффициент Пуассона.

---

[1] Степан Прокофьевич Тимошенко (1878—1972) — выдающийся русский ученый в области расчета стержней, пластин и оболочек. Его научно-педагогическая деятельность оказала большое влияние на прогресс инженерного дела и развитие технического образования во всем мире.

Соответствующее критическое напряжение стальной пластины

$$\sigma_{cr} = F_{cr}/t = k\pi^2 Et^3/[12b^2 t(1-\nu^2)] = \{k\pi^2 E/[12(1 - 0{,}3^2)]\}(t/b)^2 = 0{,}9kE(t/b)^2. \qquad (10.20)$$

Сопротивление пластины выпучиванию можно повысить тремя способами: увеличением толщины, уменьшением ширины и укреплением специальными ребрами жесткости. Первый способ менее выгоден из-за повышения расхода металла. Особенно нежелательно утолщение и, следовательно, утяжеление стенки, поскольку бóльшая часть изгибающего момента (до 90 %) приходится на пояса.

Уменьшение ширины пояса опасно с точки зрения общей устойчивости балки, а снижение высоты стенки h_w вызывает согласно зависимости (5.21) уменьшение момента инерции площади поясов относительно нейтральной линии и может привести к недостаточной жесткости балки.

Значительно надежнее и экономичнее устройство ребер жесткости. Они разбивают балку на отдельные, работающие независимо друг от друга, отсеки (рис. 10.14). Поперечные ребра представляют собой дополнительные опоры для сжатого пояса и, кроме того, пересекают возможную поверхность выпучивания стенки.

Вблизи опор в балке возникает, как правило, большая поперечная сила, равная опорной реакции V, и в стенке развиваются значительные касательные напряжения, приводящие к ее перекосу. В результате этого стенка может выпучиться по поверхности, близкой к синусоидальной (рис. 10.15, *а*) в направлении главных напряжений сжатия (рис. 10.15, *б*).

Критическое значение касательных напряжений, которые равномерно распределены по контуру стальной прямоугольной пластины, закрепленной по всем сторонам (рис. 10.15, *в*), определяют по формуле

$$\tau_{cr} = 0{,}9kE(t/b)^2, \qquad (10.21)$$

аналогичной выражению (10.20). Отличие состоит в том, что в данном случае b — меньшая сторона контура пластины (стенки).

По мере удаления от опор поперечная сила уменьшается и влияние касательных напряжений падает. Ближе к середине пролета двухопорной балки более вероятной причиной потери устойчивости стенки являются нормаль-

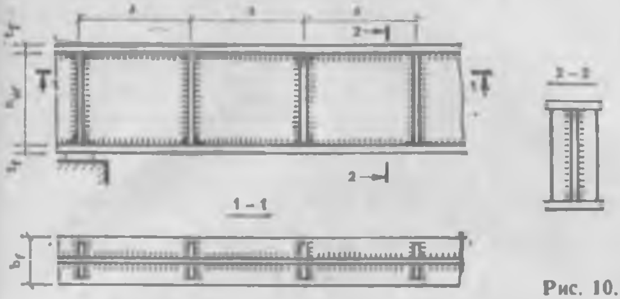


Рис. 10.14

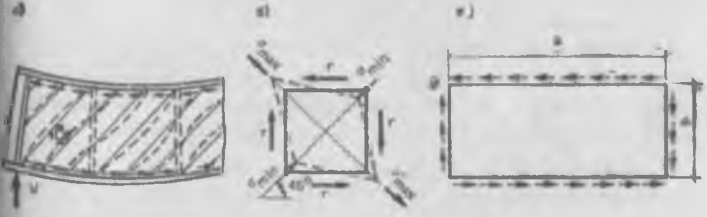


Рис. 10.15

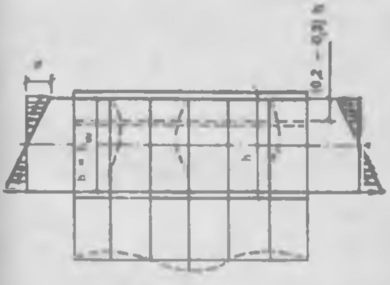


Рис. 10.16

ные напряжения от изгибающего момента (рис. 10.16).

Практика показывает, что критическое нормальное напряжение значительно выше критического касательного, поэтому потеря устойчивости от действия нормальных напряжений опасна только для сравнительно тонких стенок. В этом случае стенка должна быть укреплена в сжатой зоне продольным ребром жесткости (горизонтальные штриховые линии на рис. 10.16).

При поперечном изгибе балка почти на всем протя-

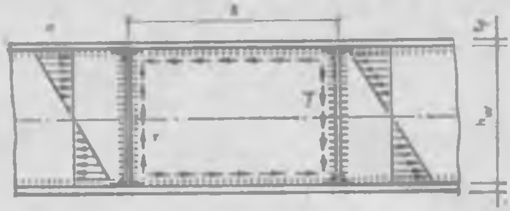


Рис. 10.17

жении испытывает одновременное действие нормальных и касательных напряжений (рис. 10.17). В таких условиях потеря устойчивости стенки может произойти при напряжениях σ_{cr}^{τ} и τ_{cr}^{σ}, меньших, чем критические напряжения σ_{cr} и τ_{cr}, соответствующие раздельному действию нормальных и касательных напряжений, т. е. $\sigma_{cr}^{\tau}/\sigma_{cr}<1$ и $\tau_{cr}^{\sigma}/\tau_{cr}<1$. Эти отношения находятся в функциональной зависимости друг от друга, определяемой характером закрепления пластины, соотношением сторон ее контура и прочими факторами, которые влияют на устойчивость. Исследования С. П. Тимошенко, П. Ф. Папковича[1], а позднее Б. М. Броуде показали, что указанная зависимость описывается уравнением окружности

$$\left(\sigma_{cr}^{\tau}/\sigma_{cr}\right)^2+\left(\tau_{cr}^{\sigma}/\tau_{cr}\right)^2=1.$$

В целях обеспечения устойчивости стенки фактические напряжения в ней не должны превосходить критических значений: $\sigma\leqslant\sigma_{cr}^{\tau}$; $\tau\leqslant\tau_{cr}^{\sigma}$. Тогда условие устойчивости пластины-стенки принимает вид

$$\sqrt{(\sigma/\sigma_{cr})^2+(\tau/\tau_{cr})^2}\leqslant\gamma_c. \tag{10.22}$$

где σ — нормальное напряжение в крайнем сжатом волокне рассматриваемого отсека стенки, определяемое по формуле (7.13) при $y=h_w/2$; τ — среднее значение касательного напряжения в том же отсеке, подсчитываемое по формуле $\tau=Q/(t_w h_w)$; σ_{cr} и τ_{cr} — критические нормальное и касательное напряжения при их раздельном действии, определяемые по формулам (10.20) и (10.21).

При подсчете напряжений σ и τ берутся средние значения изгибающего момента M и поперечной силы Q в пределах отсека.

[1] Петр Федорович Папкович (1887—1946) — видный советский ученый и инженер, основные труды которого посвящены строительной механике корабля.

Если условие (10.22) не соблюдается, то в подкоренном выражении должны быть увеличены знаменатели, что достигается конструктивными мероприятиями, отмеченными выше при раздельном рассмотрении нормальных и касательных напряжений.

Глава 11. ПОНЯТИЕ О ДЕЙСТВИИ ДИНАМИЧЕСКИХ И ПОВТОРНО-ПЕРЕМЕННЫХ НАГРУЗОК

11.1. Расчет элементов конструкций при известных силах инерции

В предыдущих главах рассмотрены расчеты элементов строительных конструкций преимущественно на статическую нагрузку. В реальных условиях нередко приходится сталкиваться с нагрузками, меняющими свое значение, положение или направление в короткие промежутки времени. Такие нагрузки, как отмечалось в п. 1.4, называются *динамическими*.

Расчет на динамическую нагрузку существенно усложняется по сравнению с расчетом на нагрузку, прикладываемую статически. Причина заключается в более сложных методах определения усилий и напряжений, а также механических характеристик материалов, работающих в условиях динамического нагружения. Однако в тех случаях, когда известны силы инерции, определение усилий производится так же, как при статическом нагружении,— с помощью *метода сечений*.

Этот подход основан на известном из теоретической механики принципе Д'Аламбера[1], согласно которому всякое движущееся тело можно считать находящимся в состоянии мгновенного равновесия, если к действующим на него внешним силам добавить силу инерции. Она равна произведению массы m тела на его ускорение a и направлена в сторону, противоположную ускорению.

Пусть груз весом G поднимается с постоянным ускорением a (рис. 11.1, a). Для определения усилия в тросе

[1] Жан Лерон Д' Аламбер (J. L. D' Alembert, 1717—1783)—французский математик и философ. В 1743 г. он впервые сформулировал общие правила составления дифференциальных уравнений движения любых материальных систем, сведя задачи динамики к статике.

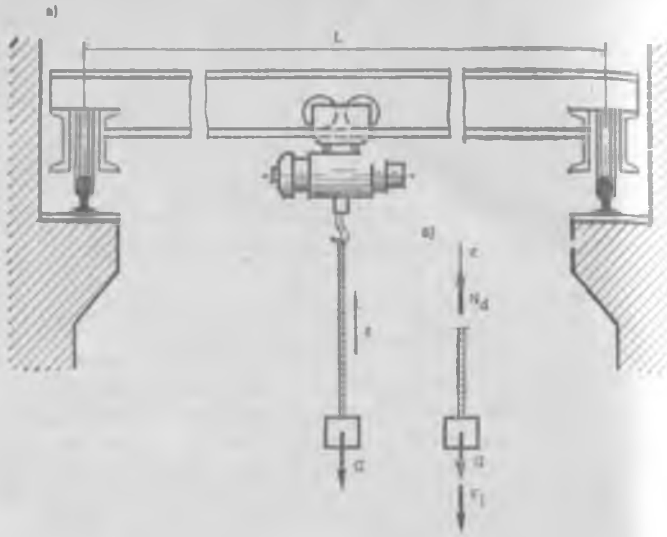


Рис. 11.1

N_d рассечем его в произвольном месте и рассмотрим равновесие системы (рис. 11.1, *б*), пренебрегая собственным весом троса:

$$\Sigma Z = 0; \quad N_d - G - F_i = 0.$$

Сила инерции поднимаемого груза

$$F_i = ma = (G/g)\,a,$$

где g — ускорение свободного падения, равное 9,81 м/с².

Подставляя выражение инерционной силы в уравнение равновесия, получаем

$$N_d - G - Ga/g = 0,$$

откуда

$$N_d = G(1 + a/g).$$

Выражение в скобках характеризует отличие усилия в тросе при равноускоренном подъеме груза G от усилия, возникающего при его статическом приложении. Следовательно,

$$N_d = N_{st} k_d. \tag{11.1}$$

где N_{st} — усилие при статическом нагружении; $k_d = 1 + a/g$ — *динамический коэффициент.*

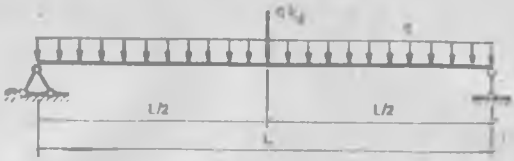


Рис. 11.2

Таким образом, *усилие от динамической нагрузки равно усилию от статической нагрузки, умноженному на динамический коэффициент.*

Пример 11.1. Тележка однобалочного мостового крана пролетом $L=10$ м, выполненного из двутавра № 40, поднимает равноускоренно расчетный груз $G=70$ кН (см. рис. 11.1, *а*). Определить усилие натяжения троса и проверить прочность кран-балки, если за первую секунду груз, находящийся посередине пролета, поднялся на расстояние $s=0{,}5$ м. Расчетное сопротивление стали $R=235$ МПа. Коэффициент условий работы $\gamma_c=0{,}9$. Весом троса пренебречь. Вес кран-балки учесть с коэффициентом надежности $\gamma_f=1{,}05$.

Решение. *Определение усилия в тросе.* Для вычисления динамического коэффициента необходимо найти ускорение a. Воспользуемся известным из кинематики уравнением равнопеременного движения при нулевой начальной скорости $s=at^2/2$, где s — расстояние, пройденное за время t. Тогда

$$a=2s/t^2=2\cdot 0{,}5/1^2 \text{ м/с}^2=1 \text{ м/с}^2$$

и динамический коэффициент

$$k_d=1+a/g=1+1/9{,}81\approx 1{,}1.$$

Усилие от динамического нагружения согласно зависимости (11.1)

$$N_d=Gk_d=70\cdot 1{,}1 \text{ кН}=77 \text{ кН}.$$

Проверка прочности кран-балки. Балка работает на изгиб от собственного веса интенсивностью q, прикладываемого статически, и веса груза G, прикладываемого динамически (рис. 11.2). Наибольший изгибающий момент (см. пример 7.17)

$$M_{max}=M_q+M_G k_d=qL^2/8+Gk_dL/4=0{,}587\cdot 10^2/8+$$
$$+77\cdot 10/4 \text{ кН}\cdot\text{м}=200 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Здесь расчетный вес 1 м длины двутавровой балки № 40

$$q=\rho_l g\gamma_f=57\cdot 9{,}81\cdot 1{,}05 \text{ Н/м}=587 \text{ Н/м}=0{,}587 \text{ кН/м},$$

где ρ_l — линейная плотность балки, кг/м, приводимая в сортаменте (см. табл. I приложения).

По найденному изгибающему моменту проверяем напряжения в балке, имеющей согласно той же таблице момент сопротивления сечения $W_x = 953$ см³:

$$\sigma = M_{max}/W_x = 200\cdot10^3/(953\cdot10^{-6})\ \text{Па} =$$
$$= 210\ \text{МПа} < R\gamma_c = 235\cdot0{,}9\ \text{МПа} = 212\ \text{МПа},$$

т. е. прочность кран-балки обеспечена.

11.2. Приближенный расчет на удар

Определение напряжений и деформаций при ударе представляет собой одну из наиболее сложных задач механики твердого деформируемого тела. Для ее упрощения в сопротивлении материалов вводят ряд допущений.

1. При ударной нагрузке в элементах конструкции возникают только упругие деформации, материал следует закону Гука и рассчитываемая система является линейно-деформируемой (см. п. 1.2, 4-е допущение).

2. В то же время сам удар считается неупругим, т. е. соударяющиеся тела после удара продолжают оставаться в соприкосновении и перемещаются как одно целое, не восстанавливая первоначальной формы.

3. Масса ударяемого элемента мала по сравнению с массой ударяющего груза и при расчете не учитывается.

4. Потери энергии на нагревание соударяющихся тел и местные деформации в зоне контакта не учитываются.

Определение усилий и напряжений при ударе с помощью условия динамического равновесия (принципа Д'Аламбера) затруднительно, так как силы инерции неизвестны. В этом случае приходится первоначально искать перемещения, используя **закон сохранения энергии**:

$$K = U, \tag{11.2}$$

где K — кинетическая энергия ударяющего груза; U — потенциальная энергия деформации ударяемого элемента.

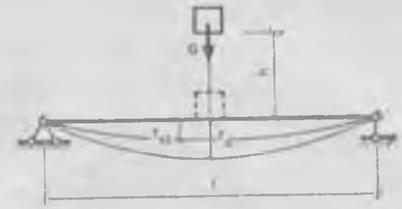
Исследуем удар груза весом G, падающего с высоты h на некоторую упругую систему, например балку (рис. 11.3). Такой удар называется поперечным, или изгибающим. Кинетическая энергия равна работе падающего груза:

$$K = W = G(h + f_d),$$

где f_d — динамический прогиб балки в сечении под грузом.

Эта работа переходит в потенциальную энергию деформации балки, для подсчета которой в силу 1-го до-

Рис. 11.3



пущения можно воспользоваться теоремой Клапейрона (см. п. 8.3):

$$U = Ff/2,$$

где F — эквивалентная сила, которая при статическом приложении вызывает такой же прогиб f, как при ударе, т. е. $f = f_d$.

Если балка подвергается удару в середине пролета, то по формуле (8.6), выведенной в примере 8.3, $f = Fl^3/(48EJ_x)$, откуда $F = 48EJ_x f/l^3$ и, следовательно,

$$U = 48EJ_x f_d^2/(2l^3).$$

В соответствии с уравнением энергетического баланса (11.2) приравниваем выражения кинетической и потенциальной энергии:

$$G(h + f_d) = 48EJ_x f_d^2/(2l^3),$$

или

$$48EJ_x f_d^2 - G2l^3 f_d - Gh2l^3 = 0.$$

Разделив все члены этого уравнения на $48EJ_x$, получим

$$f_d^2 - 2\left[Gl^3/(48EJ_x)\right] f_d - 2\left[Gl^3/(48EJ_x)\right] h = 0.$$

Имея в виду, что $Gl^3/(48EJ_x) = f_{st}$ — прогиб балки от статического приложения груза G, решаем записанное уравнение относительно динамического прогиба

$$f_d = f_{st}\left(1 \pm \sqrt{1 + 2h/f_{st}}\right).$$

Так как отрицательный корень уравнения лишен физического смысла, перед радикалом следует сохранить только знак «плюс»:

$$f_d = f_{st}\left(1 + \sqrt{1 + 2h/f_{st}}\right) = f_{st} k_d. \tag{11.3}$$

Выражение в скобках

$$1+\sqrt{1+2h/f_{st}}=k_d \tag{11.4}$$

показывает, во сколько раз прогиб при ударе превышает прогиб при статическом приложении груза, и называется *динамическим*, или *ударным коэффициентом*. Таким образом, перемещение от ударной нагрузки равно перемещению от статически приложенного груза, умноженному на динамический коэффициент.

Указанное выше 1-е допущение позволяет считать, что напряжения в упругой системе находятся в такой же зависимости

$$\sigma_d=\sigma_{st}\,k_d. \tag{11.5}$$

Пример 11.2. Груз нормативным весом $G_n=2$ кН падает с высоты $h=15$ см на середину свободно лежащей балки пролетом $l=6$ м (см. рис. 11.3). Подобрать сечение стального двутавра и сравнить с сечением, которое требуется при статическом приложении груза. Расчетное сопротивление стали $R=240$ МПа; коэффициент надежности по нагрузке $\gamma_f=1,2$; коэффициент условий работы $\gamma_c=1$; предельный динамический прогиб балки $f_{u,d}={}^1/_{200}\ l$.

Определить также сечение, которое потребуется при мгновенном приложении нагрузки.

Решение. *Подбор сечения при статическом нагружении.* Наибольший расчетный изгибающий момент согласно формулам (2.21) и (7.1а) (см. пример 7.1)

$$M_{max}=G_n\,\gamma_f\,l/4=2\cdot1,2\cdot6/4\ \text{кН}\cdot\text{м}=3600\ \text{Н}\cdot\text{м}.$$

Требуемый момент сопротивления сечения балки по формуле (7.19а)

$$W_x\geqslant M_{max}/R=3600/(240\cdot10^6)\ \text{м}^3=15\cdot10^{-6}\ \text{м}^3=15\ \text{см}^3.$$

Согласно табл. 1 приложения ближайшим является наименьший профиль — двутавр № 10 с $W_x=39,7\ \text{см}^3\gg15\ \text{см}^3$.

Определение динамического коэффициента. Предельно допустимые значения статического и динамического прогибов должны подчиняться зависимости (11.3). Тогда

$$f_{u,st}=f_{u,d}/k_d=l/(200k_d)=6/(200k_d)=0,03/k_d.$$

Подставляя это выражение в формулу (11.4), получаем

$$k_d=1+\sqrt{1+2h/f_{u,st}}=1+\sqrt{1+2\cdot0,15/(0,03k_d)}=$$

$$=1+\sqrt{1+10k_d}\ ,$$

или, перенося единицу в левую часть и возводя обе части уравнения в квадрат,

$$(k_d-1)^2=1+10k_d,$$

откуда

$$k_d^2-2k_d+1=1+10k_d;$$

$$k_d\,(k_d-12)=0.$$

Поскольку $k_d \neq 0$ (в противном случае удар отсутствует), остается положить, что $k_d - 12 = 0$; $k_d = 12$.

Подбор сечения балки при ударе. Предельный статический прогиб

$$f_{u,st} = 0,03/12 \text{ м} = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 2,5 \text{ мм}.$$

Согласно условию жесткости (8.17)

$$f_{u,st} > G_n\, l^3/(48EJ_x).$$

Отсюда требуемый момент инерции площади сечения при $E = 206$ ГПа (см. табл. 2.1)

$$J_x > G_n\, l^3/(48Ef_{u,st}) = 2 \cdot 10^3 \cdot 6^3/(48 \cdot 206 \cdot 10^9 \cdot 2,5 \cdot 10^{-3}) \text{ м}^4 =$$
$$= 1748 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4 = 1748 \text{ см}^4.$$

Принимаем двутавр № 20 с $J_x = 1840 \text{ см}^4 > 1748 \text{ см}^4$, $W_x = 184 \text{ см}^3$ и проверяем его прочность. Согласно формулам (11.5) и (7.19)

$$\sigma_d = \sigma_{st}\, k_d = (M_{\max}/W_x)\, k_d = [3600/(184 \cdot 10^{-6})]\ 12 \text{ Па} =$$
$$= 235 \cdot 10^6 \text{ Па} = 235 \text{ МПа} < R = 240 \text{ МПа},$$

т. е. прочность обеспечена. Таким образом, ударная нагрузка требует значительно более мощного сечения, чем статическая, поскольку напряжения и прогибы возрастают в 12 раз даже при такой малой высоте падения груза, как $h = 15$ см.

Следует, однако, иметь в виду, что изложенная расчетная методика в соответствии с 3-м допущением не учитывает массы ударяемой балки, вследствие чего значение динамического коэффициента оказывается завышенным примерно на 25 %.

Подбор сечения при мгновенном нагружении. Мгновенное безударное приложение нагрузки равносильно ее падению с высоты $h = 0$. Физически этот случай можно представить следующим образом: если груз подвесить на тросе так, чтобы он касался верхнего пояса балки, но не оказывал на него давления и полностью передавался на закрепленный трос, а затем трос мгновенно рассечь, то вся сила тяжести груза внезапно передастся на балку. Тогда из выражения (11.4) следует, что динамический коэффициент $k'_d = 2$, т. е. напряжения и прогибы в 2 раза больше, чем при статическом нагружении, когда предполагается, как известно, постепенное нарастание нагрузки от нуля до конечного значения.

Требуемый момент инерции

$$J'_x = J_x\, k'_d/k_d = 1748 \cdot 2/12 \text{ см}^4 = 291 \text{ см}^4.$$

Ему удовлетворяет двутавр № 12 с $J_x = 350 \text{ см}^4 > 291 \text{ см}^4$ и $W_x = 58,4 \text{ см}^3$. Напряжения составляют

$$\sigma = \left(M_{\max}/W_x\right) k'_d = (3600/58,4)\ 2 \text{ МПа} = 123 \text{ МПа} \ll R.$$

Пример 11.3. При забивке круглой деревянной сваи диаметром $d = 20$ см, длиной $l = 7,5$ м молот копра нормативным весом $G_n = 3$ кН падает с высоты $h = 0,5$ м (рис. 11.4). Проверить прочность сваи в конце забивки, полагая, что ее нижний конец в этот момент не смещается. Расчетное сопротивление древесины $R = 16$ МПа, коэффициент надежности по нагрузке $\gamma_f = 1,2$, коэффициент условий работ $\gamma_c = 1$.

Р е ш е н и е. В процессе забивки свая подвергается продольному, или сжимающему, удару. В этом случае для определения динамических напряжений остаются в силе зависимости, полученные выше для поперечного удара. Отличны лишь формулы, используемые для вычисления статических перемещений и напряжений.

Статическое перемещение верхнего конца сван равно статическому продольному укорочению, определяемому по формуле (2.5):

$$\delta_{st} = \Delta l_{st} = N_n\, l/(EA) = 4G_n\, l/(E\pi d^2) = 4\cdot 3\cdot 10^3\cdot 7{,}5/(10\cdot 10^9 \times$$
$$\times\, 3{,}14\cdot 0{,}2^2)\ \text{м} = 7\cdot 10^{-5}\ \text{м} = 0{,}07\ \text{мм},$$

где модуль упругости $E=10$ ГПа согласно табл. 2.1.

Статическое напряжение по формуле (2.3)

$$\sigma_{st} = N/A = 4\cdot 3\cdot 10^3\cdot 1{,}2/(3{,}14\cdot 0{,}2^2)\ \text{Па} \approx 115\cdot 10^3\ \text{Па} = 0{,}115\ \text{МПа}.$$

Поскольку высота падения молота $h=0{,}5$ м $=500$ мм значительно превышает статическое перемещение сван $\delta_{st}=0{,}07$ мм, динамический коэффициент можно вычислить по упрощенной формуле, отбросив в выражении (11.4) единицы как величины, малые по сравнению с отношением $2h/\delta_{st}$:

$$k_d \approx \sqrt{2h/\delta_{st}} = \sqrt{2\cdot 500/0{,}07} \approx 120.$$

Динамическое напряжение по формуле (11.5)

$$\sigma_d = \sigma_{st}\, k_d = 0{,}115\cdot 120\ \text{МПа} = 13{,}8\ \text{МПа} < R = 16\ \text{МПа},$$

т. е. прочность сван при забивке обеспечена, хотя динамическое напряжение в 120 раз больше статического.

11.3. Прочность при переменных напряжениях

Большинство деталей машин и механизмов, а также элементы некоторых строительных конструкций работают в условиях напряжений, периодически меняющихся во времени t. Совокупность последовательных значений переменных напряжений за один период их изменения T называется *циклом*.

Цикл характеризуется максимальным σ_{max}, минимальным σ_{min} и средним $\sigma_m=(\sigma_{max}+\sigma_{min})/2$ напряжениями, коэффициентом асимметрии[1] $\rho=\sigma_{min}/\sigma_{max}$ и амплитудой $\sigma_a=(\sigma_{max}-\sigma_{min})/2$.

Если $\rho=-1$, $\sigma_m=0$, $\sigma_a=\sigma_{max}$, то цикл называется *симметричным* (рис. 11.5, *а*). В остальных случаях циклы являются асимметричными (рис. 11.5, *б*).

Если минимальное или максимальное напряжение равно нулю, то цикл называется *отнулевым*. При растяжении в этом случае $\rho=0$, $\sigma_{min}=0$, $\sigma_m=\sigma_a=\sigma_{max}/2$ (рис. 11.5, *в*).

---

[1] ГОСТ 23207—78 предусматривает для коэффициента асимметрии обозначение R. Здесь во избежание совпадения с символом расчетного сопротивления материала используется другое обозначение — ρ, принятое в главе СНиП [9].

Если алгебраические знаки напряжений σ_{max} и σ_{min} одинаковы, цикл называется однозначным или знакопостоянным (рис. 11.5, *г*); если знаки неодинаковы — знакопеременным (см. рис. 11.5, *а*, *б*).

Рис. 11.4

Разрушение, вызванное многократным повторением переменных напряжений, называется, как отмечалось в п. 1.4, *усталостным*, а способность материала противостоять такому разрушению — сопротивлением усталости. Анализ выхода из строя различных конструкций и многочисленные экспериментальные исследования показывают, что усталостное разрушение происходит при напряжениях ниже не только предела прочности, но часто и предела текучести, установленного статическим испытанием (см. п. 2.4).

На рис. 11.6 приведен график изменения сопротивления усталости (кривая Вёлера[1]) стали марки Ст3 в зависимости от числа n симметричных циклов. Асимптота этой кривой характеризует напряжение усталостного разрушения при $n_{bas} = 10^7$, называемое **пределом выносливости.**

Указанное число циклов принимают за *базу испытаний*. Опыты показывают, что не разрушившийся за это время стальной образец выдержит сколько угодно большое число циклов при данном максимальном напряжении. Таким образом, под базой следует понимать предварительно задаваемую продолжительность испытаний образцов на усталость.

Обозначим предел выносливости при изгибе σ_ρ, при кручении τ_ρ, при растяжении (сжатии) $\sigma_{\rho t}$. Здесь индекс ρ по-прежнему указывает значение коэффициента асимметрии цикла. Тогда предел выносливости при симметричном цикле изгиба получает обозначение σ_{-1}, кручения — τ_{-1}, растяжения — σ_{-1t}. При отнулевом цикле имеем соответственно σ_0, τ_0 и σ_{0t}.

[1] А. Вёлер (A. Wöhler, 1819—1914) — немецкий ученый и инженер, с экспериментальных работ которого берет начало изучение усталости материалов.

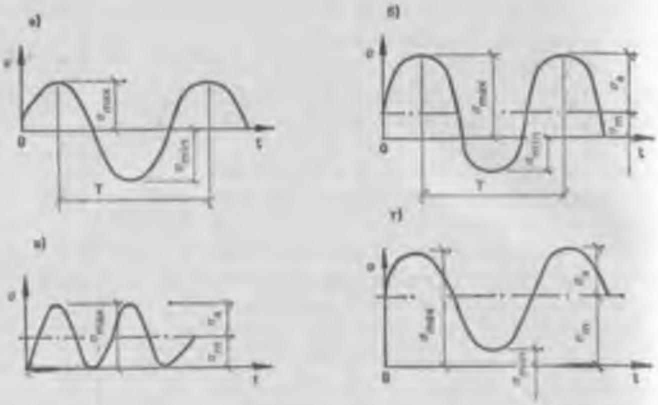


Рис. 11.5

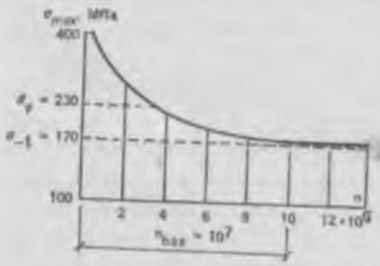


Рис. 11.6

Если образцы подвергнуть испытанию на усталость при каком-либо асимметричном цикле, то кривая усталости расположится выше, чем при симметричном цикле. Следовательно, при любом виде деформирования (изгиб, кручение, растяжение) нагружение с симметричным циклом наиболее опасно.

Кривая усталости алюминиевых сплавов не имеет асимптоты, поэтому базу испытаний для них увеличивают ($n_{bas}=10^8$). То же относится к некоторым легированным сталям, подвергнутым закалке. К таким материалам понятие предела выносливости, строго говоря, неприменимо. За характеристику их сопротивления усталости (относящуюся к спадающему участку кривой Вёлера) принимают *предел ограниченной выносливости* σ_{RN} — наибольшее максимальное по абсолютному значению напряжение цикла, при котором образец еще не разруша-

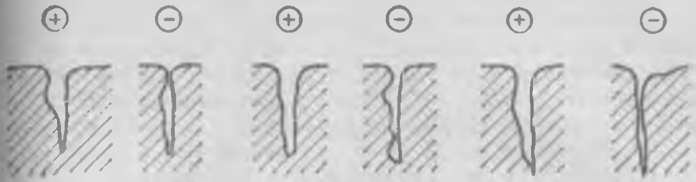


Рис. 11.7

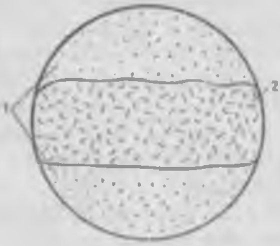


Рис. 11.8

ется после определенного (задаваемого) числа циклов $n < n_{bas}$. Для алюминиевых сплавов, используемых в строительстве, принимают число $n = 2 \cdot 10^6$, не выходящее за рамки циклической долговечности металлических конструкций.

Термин «усталость» сохранился с первой половины XIX в., когда бытовало ошибочное мнение, что металл под влиянием переменных напряжений перерождается, превращается из пластичного «волокнистого» в хрупкий зернистый. В действительности процесс усталостного разрушения не сопровождается структурными изменениями, но терминология укоренилась.

Из большого числа факторов, влияющих на сопротивление усталости, наиболее существенна концентрация напряжений (см. п. 2.8). В местах, где возникают наибольшие напряжения (обычно в зонах изменения сечения или нарушения поверхностного слоя), образуется трещина. Ее зарождение, однако, еще не свидетельствует о потере несущей способности конструкции, которая после этого может выдержать до нескольких миллионов циклов. При однородном напряженном состоянии появлению видимой трещины предшествует 85—90 % общего числа циклов и лишь около 10 % приходится на завершающую стадию разрушения.

В случае знакопеременного цикла трещина то раскрывается, то закрывается (рис. 11.7). При закрытии ее неровные поверхности надавливают друг на друга, обминаются и сглаживаются. По мере возрастания числа циклов трещина постепенно проникает вглубь, еще более увеличивая концентрацию напряжений (на концах трещины возникает объемное напряженное состояние). Когда напряжения в неразрушенной части сечения, которая воспринимает всю нагрузку, окажутся настолько большими, что материал не сможет их выдержать, произойдет внезапное неудержимое разрушение. Картина излома имеет своеобразный вид (рис. 11.8). На образце отчетливо видна гладкая, иногда отполированная зона *1* внедрения усталостной трещины и резко отличающаяся от нее шероховатая матовая поверхность *2* типично хрупкого разрушения.

Проверка элементов строительных конструкций на прочность при циклическом нагружении относится к расчетам по первой группе предельных состояний (см. п. 2.12). Расчет стальных элементов производится по формуле

$$\sigma_{max} < \alpha R v \gamma v, \tag{11.6}$$

где α — коэффициент учета числа циклов нагружения $n \geq 10^5$, вычисляемый согласно главе СНиП [9]; Rv — расчетное сопротивление усталости, принимаемое по той же главе исходя из нормативного сопротивления стали R_{un}; γv — коэффициент, зависящий от алгебраического знака наибольшего по абсолютному значению напряжения:

$$\gamma v = c/(a - \rho). \tag{11.7}$$

При $\sigma_{max} > 0$ (растяжение)
$c = 2{,}5$, $a = 1{,}5$, если $-1 < \rho < 0$;
$c = 2$, $a = 1{,}2$, если $0 < \rho < 0{,}8$;
$c = a = 1$, если $0{,}8 < \rho < 1$.
При $\sigma_{max} < 0$ (сжатие)
$c = 2$, $a = 1$, если $-1 < \rho < 1$.

К строительным конструкциям, подверженным усталостным явлениям, относятся подкрановые балки, балки рабочих площадок и элементы конструкций бункерных и разгрузочных эстакад, многократно воспринимающие нагрузку от подвижных составов, конструкции под двигатели, а также высотные сооружения типа антенн, промышленных труб, башен, мачт и подъемно-транспортных сооружений, испытывающие ветровую нагрузку.

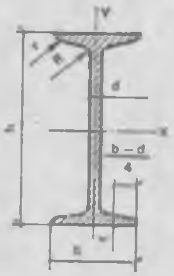
До недавнего времени считалось, что усталость может наступить только после очень большого числа циклов нагружения. Однако усталостные явления проявляются и при относительно небольшом числе n, но достаточно высоких напряжениях. Процесс разрушения под действием циклических напряжений, вызывающих пластическое деформирование материала, получил название **малоцикловой усталости.** К ней может привести, например, частое наполнение и опорожнение резервуаров большой вместимости, попеременное повышение и понижение внутреннего давления в воздухонагревателях доменных печей.

В отличие от обычной (многоцикловой) усталости, при которой пластические деформации локализуются в малых объемах вблизи зоны разрушения и максимальные напряжения ниже предела текучести, малоцикловая усталость характеризуется развитием пластических деформаций, охватывающих значительную часть сечения. Напряжения в этом случае близки к пределу текучести или даже превышают его.

Проблема малоцикловой усталости весьма актуальна для строительных конструкций, поскольку в них почти всегда имеются концентраторы напряжений, способствующие развитию местных пластических деформаций. Эти деформации могут накапливаться даже в случае медленно и редко меняющейся нагрузки, обусловливая высокий уровень напряжений и долговечность материала в течение не более 10^5 циклов.

Приложение. Сортамент материалов

Таблица 1. Сталь горячекатаная. Балки двутавровые (по ГОСТ 8239—72*)

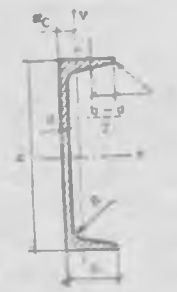


h — высота балки;
b — ширина полки;
d — толщина стенки;
t — средняя толщина полки;
R — радиус внутреннего закругления;
r — радиус закругления полки;
J — момент инерции;
W — момент сопротивления;
S — статический момент площади полусечения;
i — радиус инерции

Номер профиля	Линейная плотность ρ_l, кг/м	Размеры, мм						Площадь сечения A, см²	Геометрические характеристики относительно осей						
									x				y		
		h	b	d	t	R	r		J_x, см⁴	W_x, см³	i_x, см	S_x, см³	J_y, см⁴	W_y, см³	i_y, см
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
10	9,46	100	55	4,5	7,2	7	2,5	12	198	39,7	4,06	23	17,9	6,49	1,22
12	11,5	120	64	4,8	7,3	7,5	3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	13,7	140	73	4,9	7,5	8	3	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	15,9	160	81	5	7,8	8,5	3,5	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,7
18	18,4	180	90	5,1	8,1	9	3,5	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
18а	19,9	180	100	5,1	8,3	9	3,5	25,4	1430	159	7,51	89,8	114	22,8	2,12
20	21	200	100	5,2	8,4	9,5	4	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07
20а	22,7	200	110	5,2	8,6	9,5	4	28,9	2030	203	8,37	114	155	28,2	2,32
22	24	220	110	5,4	8,7	10	4	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27
22а	25,8	220	120	5,4	8,9	10	4	32,8	2790	254	9,22	143	206	34,3	2,5
24	27,3	240	115	5,6	9,5	10,5	4	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37
24а	29,4	240	125	5,6	9,8	10,5	4	37,5	3800	317	10,1	178	260	41,6	2,63
27	31,5	270	125	6	9,8	11	4,5	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54
27а	33,9	270	135	6	10,2	11	4,5	43,2	5500	407	11,3	229	337	50	2,8
30	36,5	300	135	6,5	10,2	12	5	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69
30а	39,2	300	145	6,5	10,7	12	5	49,9	7780	518	12,5	292	436	60,1	2,95
33	42,2	330	140	7	11,2	13	5	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79
36	48,6	360	145	7,5	12,3	14	6	61,9	13 380	743	14,7	423	516	71,1	2,89
40	57	400	155	8,3	13	15	6	72,6	19 062	953	16,2	545	667	86,1	3,03
45	66,5	450	160	9	14,2	16	7	84,7	27 696	1231	18,1	708	808	101	3,09
50	78,5	500	170	10	15,2	17	7	100	39 727	1589	19,9	919	1043	123	3,23
55	92,6	550	180	11	16,5	18	7	118	55 962	2035	21,8	1181	1356	151	3,39
60	108	600	190	12	17,8	20	8	138	76 806	2560	23,6	1491	1725	182	3,54

* Здесь и далее звездочка в обозначении шифра указывает на переиздание соответствующего стандарта с учетом внесенных изменений.

Таблица 2. Сталь горячекатаная. Швеллеры (по ГОСТ 8240—72*)



h — высота швеллера;
b — ширина полки;
d — толщина стенки;
t — средняя толщина полки;
R — радиус внутреннего закругления;
r — радиус закругления полки;

J — момент инерции;
W — момент сопротивления;
S — статический момент площади полусечения;
i — радиус инерции;
x_C — расстояние от оси *y* до наружной грани стенки

Номер профиля	Линейная плотность ρ_l, кг/м	Размеры, мм						Площадь сечения *A*, см²	Геометрические характеристики относительно осей							x_C см
									x				*y*			
		h	*b*	*d*	*t*	*R*	*r*		J_x, см⁴	W_x, см³	i_x, см	S_x, см³	J_y, см⁴	W_y, см³	i_y, см	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
5	4,84	50	32	4,4	7	6	2,5	6,16	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,95	1,16
6,5	5,9	65	36	4,4	7,2	6	2,5	7,51	48,6	15	2,54	9	8,7	3,68	1,08	1,24
8	7,05	80	40	4,5	7,4	6,5	2,5	8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10	8,59	100	46	4,5	7,6	7	3	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
12	10,4	120	52	4,8	7,8	7,5	3	13,3	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54
14	12,3	140	58	4,9	8,1	8	3	15,6	491	70,2	5,6	40,8	45,4	11	1,7	1,67
14а	13,3	140	62	4,9	8,7	8	3	17	545	77,8	5,66	45,1	57,5	13,3	1,84	1,87
16	14,2	160	64	5	8,4	8,5	3,5	18,1	747	93,4	6,42	54,1	63,3	13,8	1,87	1,8
16а	15,3	160	68	5	9	8,5	3,5	19,5	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2
18	16,3	180	70	5,1	8,7	9	3,5	20,7	1090	121	7,24	69,8	86	17	2,04	1,94
18а	17,4	180	74	5,1	9,3	9	3,5	22,2	1190	132	7,32	76,1	105	20	2,18	2,13
20	18,4	200	76	5,2	9	9,5	4	23,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,2	2,07
20а	19,8	200	80	5,2	9,7	9,5	4	25,2	1670	167	8,15	95,9	139	24,2	2,35	2,28
22	21	220	82	5,4	9,5	10	4	26,7	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21
22а	22,6	220	87	5,4	10,2	10	4	28,8	2330	212	8,99	121	187	30	2,55	2,46
24	24	240	90	5,6	10	10,5	4	30,6	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,6	2,42
24а	25,8	240	95	5,6	10,7	10,5	4	32,9	3180	265	9,84	151	254	37,2	2,78	2,67
27	27,7	270	95	6	10,5	11	4,5	35,2	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47
30	31,8	300	100	6,5	11	12	5	40,5	5810	387	12	224	327	43,6	2,84	2,52
33	36,5	330	105	7	11,7	13	5	46,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59
36	41,9	360	110	7,5	12,6	14	6	53,4	10 820	601	14,2	350	513	61,7	3,1	2,68
40	48,3	400	115	8	13,5	15	6	61,5	15 220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75

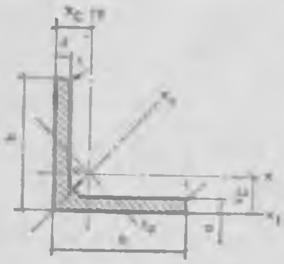


Таблица 3. Рекомендуемый сортамент равнополочных уголков (по ГОСТ 8509—86)

b — ширина полки;
d — толщина полки;
R — радиус внутреннего закругления;
r — радиус закругления полки;

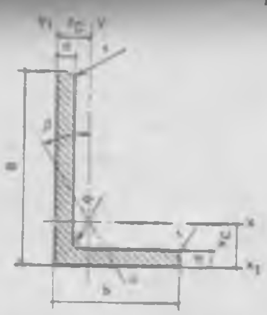
J — момент инерции;
i — радиус инерции;
x_C, y_C — расстояния от центра тяжести до наружных граней полок

Номер профиля	Линейная плотность ρ_l, кг/м	Размеры, мм				Площадь сечения A, см²	Геометрические характеристики относительно осей								
							x		x_0		y_0		x_1	x_C, y_C, см
		b	d	R	r		J_x, см⁴	i_x, см	J_{x_0}, см⁴	i_{x_0}, см	J_{y_0}, см⁴	i_{y_0}, см	J_{x_1}, см⁴	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
5	3,05 3,77	50	4 5	5,5	1,8	3,89 4,8	9,21 11,2	1,54 1,53	14,6 17,8	1,84 1,92	3,8 4,63	0,99 0,98	16,6 20,9	1,38 1,42
5,6	3,44 4,25	56	4 5	6	2	4,38 5,41	13,1 16	1,73 1,72	20,8 25,4	2,18 2,16	5,41 6,59	1,11 1,1	23,3 29,2	1,52 1,57
6,3	3,9 4,81 5,72	63	4 5 6	7	2,3	4,96 6,13 7,28	18,9 23,1 27,1	1,95 1,94 1,93	29,9 36,6 42,9	2,45 2,44 2,43	7,81 9,52 11,2	1,25 1,25 1,24	33,1 41,5 50	1,69 1,74 1,78
7	5,38 6,39	70	5 6	8	2,7	6,86 8,15	31,9 37,6	2,16 2,15	50,7 59,6	2,72 2,71	13,2 15,5	1,39 1,38	56,7 68,4	1,9 1,94
7,5	5,8 6,89 7,96	75	5 6 7	9	3	7,39 8,78 10,1	39,5 46,6 53,3	2,31 2,3 2,29	62,6 73,9 84,6	2,91 2,9 2,89	16,4 19,3 22,1	1,49 1,48 1,48	69,6 83,9 98,3	2,02 2,06 2,1
8	6,78 7,36 8,51	80	5,5 6 7	9	3	8,63 9,38 10,8	52,7 57 65,3	2,47 2,47 2,45	83,6 90,4 104	3,11 3,11 3,09	21,8 23,5 27	1,59 1,58 1,58	93,2 102 119	2,17 2,19 2,23
9	8,33 9,64 10,9	90	6 7 8	10	3,3	10,6 12,3 13,9	82,1 94,3 106	2,78 2,77 2,76	130 150 168	3,5 3,49 3,48	34 38,9 43,8	1,79 1,78 1,77	145 169 194	2,43 2,47 2,51
10	10,8 12,2 15,1 17,9	100	7 8 10 12	12	4	13,8 15,6 19,2 22,8	131 147 179 209	3,08 3,07 3,05 3,03	207 233 284 331	3,88 3,87 3,84 3,81	54,2 60,9 74,1 86,9	1,98 1,98 1,96 1,95	231 265 333 402	2,71 2,75 2,83 2,91
11	11,9 13,5	110	7 8	12	4	15,2 17,2	176 198	3,4 3,39	279 315	4,29 4,28	72,7 81,8	2,19 2,18	308 353	2,96 3
12,5	15,5 17,3 19,1 22,7	125	8 9 10 12	14	4,6	19,7 22 24,3 28,9	294 327 360 422	3,87 3,86 3,85 3,82	467 520 571 670	4,87 4,86 4,84 4,82	122 135 149 174	2,49 2,48 2,47 2,46	516 582 649 782	3,36 3,4 3,45 3,53
14	19,4 21,5 25,5	140	9 10 12	14	4,6	24,7 27,3 32,5	466 512 602	4,34 4,33 4,31	739 814 957	5,47 5,46 5,43	192 211 248	2,79 2,78 2,75	818 911 1097	3,78 3,82 3,9

Продолжение табл. 3

Номер профиля	Линейная плотность ρ_l, кг/м	Размеры, мм				Площадь сечения A, см²	Геометрические характеристики относительно осей								x_C, y_C, см
							x		x_0		y_0		x_1		
		b	d	R	r		J_x, см⁴	i_x, см	J_{x_0}, см⁴	i_{x_0}, см	J_{y_0}, см⁴	i_{y_0}, см	J_{x_1}, см⁴		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14		15
16	24,7	160	10	16	5,3	31,4	774	4,96	1229	6,25	319	3,19	1356		4,3
	27		11			34,4	844	4,95	1341	6,24	348	3,18	1494		4,35
	29,4		12			37,4	913	4,94	1450	6,23	376	3,17	1633		4,39
	34		14			43,3	1046	4,92	1662	6,2	431	3,16	1911		4,47
	38,5		16			49,1	1175	4,89	1866	6,17	485	3,14	2191		4,55
18	30,5	180	11	16	5,3	38,8	1216	5,6	1933	7,06	500	3,59	2128		4,85
	33,1		12			42,2	1317	5,59	2093	7,04	540	3,58	2324		4,89
20	37	200	12	18	6	47,1	1823	6,22	2896	7,84	749	3,99	3182		5,37
	39,9		13			50,9	1961	6,21	3116	7,83	805	3,98	3452		5,42
	42,8		14			54,6	2097	6,2	3333	7,81	861	3,97	3722		5,46
	48,7		16			62	2363	6,17	3755	7,78	970	3,96	4264		5,54
	60,1		20			76,5	2871	6,12	4560	7,72	1182	3,93	5355		5,7
	74		25			94,3	3466	6,06	5494	7,63	1438	3,91	6733		5,89
	87,6		30			111,5	4020	6	6351	7,55	1688	3,89	8130		6,07
22	47,4	220	14	21	7	60,4	2814	6,83	4470	8,6	1159	4,38	4941		5,93
	53,8		16			68,6	3175	6,81	5045	8,58	1306	4,36	5661		6,02
25	61,5	250	16	24	8	78,4	4717	7,76	7492	9,78	1942	4,98	8286		6,75
	76,1		20			97	5765	7,71	9160	9,72	2370	4,94	10 401		6,91

Таблица 4. Рекомендуемый сортамент неравнополочных уголков (по ГОСТ 8510—86)



B — ширина большой полки;
b — ширина малой полки;
d — толщина полки;
R — радиус внутреннего закругления;
r — радиус закругления полки;

J — момент инерции;
i — радиус инерции;
x_C, y_C — расстояния от центра тяжести до наружных граней полок;
α — угол наклона главной центральной оси

Номер профиля	Линейная плотность ρ_L, кг/м	Размеры, мм					Площадь сечения A, см²	Геометрические характеристики относительно осей										J_{xy}, см⁴	tg α
								x		y		x_1		y_1		u			
		B	b	d	R	r		J_x, см⁴	i_x, см	J_y, см⁴	i_y, см	J_{x_1}, см⁴	y_C, см	J_{y_1}, см⁴	x_C, см	J_u, см⁴	i_u, см		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
5/3,2	2,4	50	32	4	5,5	1,8	3,17	7,98	1,59	2,56	0,96	16,6	1,65	4,42	0,76	1,52	0,69	—2,59	0,401
7,5/5	4,79	75	50	5	8	2,7	6,11	34,8	2,39	12,5	1,43	69,7	2,39	20,8	1,17	7,24	1,09	—12	0,436
9/5,6	6,7	90	56	6	9	3	8,54	70,6	2,88	21,2	1,58	145	2,95	35,2	1,28	12,7	1,22	—22,3	0,384
10/6,3	7,53	100	63	6	10	3,3	9,59	98,3	3,2	30,6	1,79	198	3,23	49,9	1,42	18,2	1,38	—31,5	0,393
	8,7			7			11,1	113	3,19	35	1,78	232	3,28	58,7	1,46	20,8	1,37	—35,1	0,392
	9,87			8			12,6	127	3,18	39,2	1,77	266	3,32	67,6	1,50	23,4	1,35	—40,7	0,391

Продолжение табл. 4

Номер профиля	Линейная плотность ρ_l, кг/м	Размеры, мм					Площадь сечения A, см²	Геометрические характеристики относительно осей											
								x		y		x_1		y_1		u			
		B	b	d	R	r		J_x, см⁴	i_x, см	J_y, см⁴	i_y, см	J_{x_1}, см⁴	y_0, см	J_{y_1}, см⁴	x_0, см	J_u, см⁴	i_u, см	J_{xy}, см⁴	tg α
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
11/7	10,9	110	70	8	10	3,3	13,9	172	3,51	54,6	1,98	353	3,61	92,3	1,64	32,3	1,52	—55,9	0,400
12,5/8	11 12,5 15,5	125	80	7 8 10	11	3,7	14,1 16 19,7	227 256 312	4,01 4 3,98	73,7 83 100	2,29 2,28 2,26	452 518 649	4,01 4,05 4,14	119 137 173	1,8 1,84 1,92	43,4 48,8 59,3	1,76 1,75 1,74	—74,8 —84,1 —102	0,407 0,406 0,404
14/9	14,1 17,5	140	90	8 10	12	4	18 22,2	364 444	4,49 4,47	120 146	2,58 2,56	727 911	4,49 4,58	194 245	2,03 2,12	70,3 85,5	1,98 1,96	—121 —146	0,411 0,409
16/10	18 19,8 23,6	160	100	9 10 12	13	4,3	22,9 25,3 30	606 667 784	5,15 5,13 5,11	186 204 239	2,85 2,84 2,82	1221 1359 1634	5,19 5,23 5,32	300 335 405	2,23 2,28 2,36	110 121 142	2,2 2,19 2,18	—194 —213 —249	0,391 0,390 0,388
18/11	22,2 26,4	180	110	10 12	14	4,7	28,3 33,7	952 1123	5,8 5,77	276 324	3,12 3,1	1933 2324	5,88 5,97	444 537	2,44 2,52	165 194	2,42 2,4	—295 —347	0,375 0,374
20/12,5	27,4 29,7 34,4 39,1	200	125	11 12 14 16	14	4,7	34,9 37,9 43,9 49,8	1449 1568 1801 2026	6,45 6,43 6,41 6,38	446 482 551 617	3,58 3,57 3,54 3,52	2920 3189 3726 4264	6,5 6,54 6,62 6,71	718 786 922 1061	2,79 2,83 2,91 2,99	264 285 327 367	2,75 2,74 2,73 2,72	—465 —503 —575 —644	0,392 0,392 0,390 0,385

Таблица 5. Размеры пиломатериалов для несущих деревянных конструкций

Толщина, мм	Ширина, мм						
	100	130	150	180	200	220	250
16	×	×	—	—	—	—	—
19	×	×	—	×	—	—	—
25	×	×	×	×	—	—	—
32	×	×	×	×	—	—	—
40	×	×	×	×	—	—	—
50	×	×	×	×	×	×	—
60	×	×	×	×	×	×	—
75	×	×	×	×	×	×	—
100	×	×	×	×	×	×	—
130	—	×	×	×	—	—	—
150	—	—	×	×	×	—	—
180	—	—	—	×	—	×	—
200	—	—	—	—	×	—	×
220	—	—	—	—	—	—	×
250	—	—	—	—	—	—	×

Примечание. Знаком «×» отмечены рекомендуемые размеры пиломатериалов, знаком «—» — нерекомендуемые.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Михайлов А. М.** Сварные конструкции. — М.: Стройиздат, 1983. — 367 с.
2. **Рубашкин А. Г., Чернилевский Д. В.** Лабораторно-практические работы по технической механике. — М.: Высшая школа, 1975. — 254 с.
3. **СНиП 2.01.07—85.** Нагрузки и воздействия/Госстрой СССР. — М.: ЦИТП Госстроя СССР, 1986. — 36 с. Дополнения. Разд. 10. Прогибы и перемещения. — М.: ЦИТП Госстроя СССР, 1989. — 8 с.
4. **СНиП 2.03.06—88.** Алюминиевые конструкции/Госстрой СССР. — М.: ЦИТП Госстроя СССР, 1988. — 48 с.
5. **СНиП 2.03.01—84.** Бетонные и железобетонные конструкции/Госстрой СССР. — М.: ЦИТП Госстроя СССР, 1985. — 79 с.
6. **СНиП II-25-80.** Деревянные конструкции. Нормы проектирования. — М.: Стройиздат, 1982. — 65 с.
7. **СНиП II-22-81.** Каменные и армокаменные конструкции. Нормы проектирования. — М.: Стройиздат, 1983. — 40 с.
8. **СНиП 2.02.01—83.** Основания зданий и сооружений/Госстрой СССР. — М.: Стройиздат, 1985. — 40 с.
9. **СНиП II-23-81*.** Стальные конструкции/Госстрой СССР. — М.: ЦИТП Госстроя СССР, 1988. — 96 с.
10. **СТ СЭВ 384—76.** Строительные конструкции и основания. Основные положения расчета. — М.: Издательство стандартов, 1979. — 8 с.
11. **СТ СЭВ 1407—78.** Строительные конструкции и основания. Нагрузки и воздействия. Основные положения. — М.: Издательство стандартов, 1979. — 16 с.
12. **СТ СЭВ 1565—79.** Нормативно-техническая документация в строительстве. Буквенные обозначения. — М.: Издательство стандартов, 1980. — 15 с.
13. **Тимошенко С. П.** История науки о сопротивлении материалов. — М.: Гостехтеоретиздат, 1957. — 536 с.
14. **Феодосьев В. И.** Сопротивление материалов. — М.: Наука, 1986. — 512 с.
15. **Филин А. П.** Прикладная механика твердого деформируемого тела. — Т. I. — М.: Наука, 1975. — 832 с.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Михайлов Александр Михайлович

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Редактор З. С. Шестопалова
Мл. редактор И. Б. Волкова
Технический редактор Ю. Л. Циханкова
Корректор Г. А. Кравченко

ИБ № 4304

Сдано в набор 15.03.89. Подписано в печать 31.08.89. Формат 84×108[1]/32. Бумага типографская № 2. Гарнитура «Литературная». Печать высокая. Усл. печ. л. 18,48. Усл. кр.-отт. 18,48. Уч.-изд. л. 18,52. Тираж 78 400 экз. Изд. № AIII-1815. Зак. № 287. Цена 1 руб.

Стройиздат, 101442, Москва, Каляевская, 23а

Владимирская типография Госкомитета СССР по печати.

600000, г. Владимир, Октябрьский проспект, д. 7