А. В. Александров
В.Д.Потапов
Б. П. Державин

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Под редакцией
заслуженного деятеля науки
и техники РСФСР,
академика Российской Академии
архитектуры и строительных наук
А. В. Александрова

Рекомендовано Государственным
комитетом Российской Федерации
по высшему образованию
в качестве учебника
для студентов вузов

Москва «Высшая школа» 1995

ББК 30.121
А46
УДК 539.3/.8

Федеральная программа книгоиздания России

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф. Б.Ф. Власов; кафедра строительной механики Новосибирской государственной академии строительства (зав. кафедрой — канд. техн. наук, и. о. проф. Г. И. Гребешок)

Александров А. В., Потапов В. Д., Державин Б. П.

А46 Сопротивление материалов: Учеб. для вузов. — М.: Высш. шк., 1995. — 560 с.: ил.

1БВК 5-06-002751-1

Данная книга, написанная в соответствии с новой программой курса, отличается бол углубленным рассмотрением вопросов расчета элементов конструкций из композитных и неоднородных материалов; наряду с классическими приемами оценки прочности даютс основные понятия механики разрушения тел с трещинами.

Учебник содержит большое число контрольных вопросов и задач; нетрадиционно построение книги, направленное на лучшее усвоение учебного материала.

2004030000 — 041
А---------- 77 — 95
001(01)—95

ББК 30.121
605

Учебное издание

Александров Анатолий Васильевич
Потапов Вадим Дмитриевич
Державна Борис Павлович

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Редактор *Н. М. ¡Целина*
Младший редактор *Т. Ф. Артюхина*
Художественный редактор *Л. К. Громова*
Технический редактор *И. А. Балелина*
Корректор *Г. И. Кострикова*
Оператор *С. Р. Луковенкова*

ИБ № 9769

ЛР 010146 от 25.12.91. Изд. № ОТМ-776. Сдано в набор 30.04.93. Подл, в печать 08.02.95. Формат 70х100*/!*. Бум. офс. №2. Гарнитура «Таймс». Печать офсетная.

Объем 45,5 уся. печ. л. 45,5 уел. кр.-отт. 33,04 уч.-изд. л. Тираж 20 000 ап. Зак. >6 879.

Издательство «Высшая школа», 101430, Москва, ГСП-4, Неглинная ул., д. 29/14.

Набрано на персональных компьютерах издательства.

Отпечатано в Московской типографии № 4 Министерства печати и информации РФ **1290 Москва, Б. Переяславская ул., 46.**

18ВК 5-06-002751-1

© Коллектив авторов, **1995**

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебник «Сопротивление материалов» написан на основе использования опыта преподавания курса на кафедре «Строительная механика» Московского государственного университета путей сообщения.

Данный учебник создан на базе издававшегося ранее учебника под редакцией чл.-корр. АН СССР А. Ф. Смирнова. Учитывая, что с момента выхода в свет последнего издания этого учебника прошло много лет, настоящий учебник написан практически заново. При этом авторы сделали попытку представить материал в нетрадиционной форме.

Укажем на наиболее существенные особенности предлагаемого издания учебника. В технике вообще и в строительстве в частности все более широкое применение находят элементы конструкций, изготовленные из композитных или неоднородных материалов. Этим вопросам уделено значительное внимание.

Расширены и доведены до более удобного в методическом отношении практического использования вопросы учета ползучести в расчетах элементов конструкций.

Наряду с классическими приемами оценки прочности элементов конструкций при сложном напряженном состоянии даются основные понятия механики разрушения — быстро развивающегося направления оценки прочности тел, имеющих трещины. Эти вопросы имеют важное значение для анализа работы существующих и проектируемых конструкций.

Уделено внимание долговечности деталей, работающих в условиях переменных нестационарных режимов нагружения. Вопросы расчета рациональных тонкостенных стержневых конструкций дополнены расчетом стержней замкнутого профиля.

Для лучшего усвоения курса в учебнике приводятся контрольные вопросы и задачи. В задачах и в иллюстрациях авторы стремились рассмотреть элементы реальных инженерных конструкций.

На поля вынесены дополнительные рисунки и информация, помогающая читателю организовать работу с текстом. В книге использованы сигнальные значки, обозначающие, что в данном месте текста дается:

■ — понятие, имеющее первостепенное значение;

! — формула, имеющая важное значение для практических расчетов, которую рекомендуется запомнить.

Также даны краткие замечания, цель которых — напомнить результаты, относящиеся к ранее пройденным учебным дисциплинам.

В тексте наиболее важные определения выделены другим шрифтом, основные формулы обрамлены рамкой.

Главы 1, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 17, 20, заключение и § 14.6 главы 14 написаны А. В. Александровым; главы 9, 14 (кроме § 14.6), 15, 16, 18, 19 и § 3.13 главы 3 написаны В. Д. Потаповым; главы 2, 3 (кроме § 3.13), 4 — Б. П. Державиным.

Авторы выражают глубокую признательность рецензентам — д-ру физ.-мат. наук, проф. Б. Ф. Власову и коллективу кафедры строительной механики Новосибирской государственной академии строительства за ценные замечания и рекомендации, которые были учтены при завершении работы над рукописью.

Все замечания и пожелания будут приняты авторами с благодарностью. Письма просим направлять по адресу: *101430, Москва, ГСП-4, Неглинная ул., 29/14, издательство «Высшая школа».*

Авторы

ГЛАВА 1

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

§ 1.1. Сопротивление материалов в инженерном образовании

Любое инженерное сооружение — здание, мост, тоннель, автомобиль, корабль и др. — помимо элементов, обеспечивающих функциональное назначение данного объекта, обязательно имеет несущие элементы конструкции, составляющие «силовой каркас» и предназначенные для восприятия нагрузок и различных силовых воздействий на конструкцию. Часто функциональные и несущие свойства совмещаются, например, стены и перекрытия здания выполняют ограждающие функции и одновременно входят в состав несущей части конструкции.

Несущие элементы конструкции должны проектироваться и создаваться так, чтобы они были прочными, т. е. могли воспринимать все силовые воздействия, не разрушаясь в течение достаточно длительного времени. Кратко говоря, конструкции должны быть прочными и долговечными.

Несущая конструкция, например пролетное строение моста, может быть достаточно прочной, но излишне деформативной, недостаточно жесткой. Как следствие, в конструкции могут возникать колебания, затрудняющие или даже делающие невозможной ее эксплуатацию. Сильно сжатая, но недостаточно жесткая колонна может изогнуться (выпучиться) от действия сжимающей нагрузки, что связано с так называемым явлением потери устойчивости колонны.

Проблемами расчета различных типов сооружений и их несущих конструкций на прочность, жесткость и устойчивость занимается инженерная наука — строительная механика. Сопротивление материалов является дисциплиной, в которой изучаются основные понятия и принципы, используемые в этих расчетах. Их применение в сопротивлении материалов обычно ограничивается лишь расчетами отдельных элементов конструкций, таких, как, например, стержень, балка или простейшие составленные из них системы. Расчет сложных многоэлементных конструкций и общие принципы их силового анализа изучаются в последующих курсах, таких, как «Строительная механика» («Статика сооружений»), «Динамика сооружений», «Устойчивость сооружений».

Таким образом, в сопротивлении материалов закладывается фундамент для грамотного проектирования конструкций. Изучаются основные виды деформаций, такие, как растяжение, сжатие, кручение, изгиб стержней, механика развития этих деформаций и приемы оценки прочности. Наряду с введением соответствующих понятий большое внимание уделяется умению представить работу элемента конструкции с помощью сознательно упрощенной расчетной схемы и соответствующих аналитических зависимостей, что принято называть построением *физико-математической модели* работы элемента или части конструкции.

Правильно и грамотно построенные расчетные модели позволяют ответить на многие важные инженерные вопросы: дать оценку прочности существующей конструкции; определить предельно допустимые нагрузки; подобрать необходимые размеры элементов и выбрать подходящие материалы, обеспечивающие их прочность и экономичность; провести оптимизацию параметров конструкции, т. е. найти параметры, обеспЬчивающие в определенном смысле наилучшие свойства этой конструкции, и т. д.

Изучение сопротивления материалов требует хороших знаний по физике, математике, теоретической механике и существенно базируется на сведениях, изучаемых в курсах по этим предметам. Знание основ сопротивления материалов является важнейшим требованием и составной частью при подготовке инженера вообще и инженера-строителя в частности.

§ 1.2. Схематизация элементов конструкций и внешних нагрузок

Основные виды элементов конструкций. К числу основных типов элементов, на которые в расчетной схеме подразделяется целая конструкция, относятся стержень или брус (рис. 1.1, *а),* пластина, оболочка (рис. 1.1, *б)* и массивное тело (рис. 1.1, в).

Указанные типы элементов геометрически различаются лишь соотношением характерных размеров, но с механической точки зрения их деформирование является на-

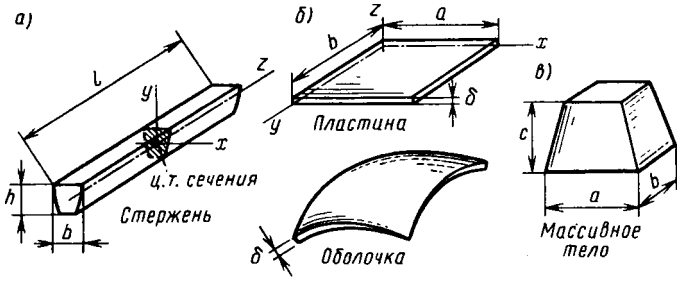


Рис. 1.1. Основные типы элементов конструкций

столько специфичным, что требует получения своих уравнений и зависимостей, составляющих математическую модель этих элементов.

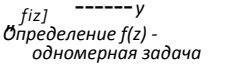
Стержень — это тело, длина которого I существенно превышает характерные размеры поперечного сечения h, Ь. Геометрическое место точек, являющихся центрами тяжести поперечных сечений, будем называть осью стержня.

Стержень

Условимся в дальнейшем оси координат выбирать так, чтобы ось *z* всегда совпадала с осью прямого стержня, а оси *х я у* лежали в плоскости поперечного сечения. Для криволинейного стержня ось *z* совпадает с касательной к оси стержня.

Преимущественная работа материала в стержне — это растяжение или сжатие в осевом направлении (особенность представляет деформация кручения).

Для физико-математической модели стержня характерно то, что основные расчетные уравнения записываются относительно одной независимой переменной — координаты *z*. Их решение составляет так называемую *одномерную задачу.*

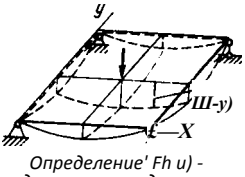


Определение f(z) - одномерная задача

Пластина — это тело, у которого толщина Ô существенно меньше его размеров а и b е плане. Естественно искривленная пластина (криволинейная до загружения) называется оболочкой.

Пластина

Материал пластин и оболочек работает в более сложных условиях, чем у стержня, например, на растяжение — сжатие он будет работать в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Математическая модель пластин и оболочек, как правило, будет состоять из уравнений, зависящих от двух аргументов: *ха у.* Поэтому такая задача относится к классу *двумерных задач.*



Определение' Fh и) - двухмерная задам

Массивное тело характерно тем, что все его размеры a, b и c имеют один порядок.

Ввиду отсутствия какого-либо преимущественного направления функции, описывающие деформирование такого тела, будут существенно зависеть от трех независимых аргументов *x, y, z* и задача является *трехмерной.*

Массивное тело

В настоящем курсе рассматриваются одномерные задачи расчета стержневых элементов конструкций. Решение более сложных двумерных и трехмерных задач расчета пластин, оболочек и массивных тел изучается в продолжении курса, называемом «Основы теории упругости и пластичности».

Укажем на характерные названия стержневых элементов в зависимости от их назначения и вида деформирования (рис. 1.2). Стержни или брусья, в основном работающие на изгиб, называют *.балками.* Стержневые элементы, воспринимающие вертикальные сжимающие силы, называют *стойками,* а наклонные элементы *—раскосами.* Конструкцию, состоящую из соединенных изгибаемых стержней, называют *рамой.* Если же благодаря шарнирному соединению стержней все они работают только на растяжение или сжатие (от нагрузки, приложенной

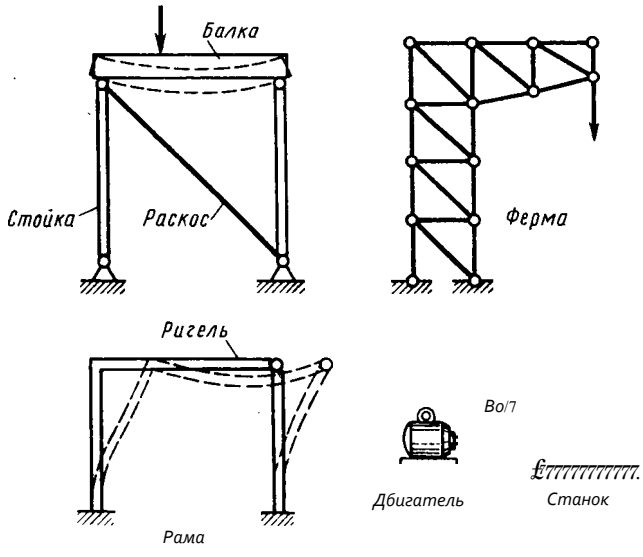


Рис. 1.2. Примеры стержневых конструкций

в узлах), то конструкцию называют *фермой.* Стержень, передающий вращательное движение, например, от двигателя к станку, называют *валом.*

Схематизация внешних нагрузок. Внешние нагрузки подразделяют на *сосредоточенные* и *распределенные.*

Силу или момент, которые условно считаются приложенными в точке, называют сосредоточенными.

Реально через точку, т. е. объект, не имеющий размеров, невозможно передать воздействие конечного значения. Поэтому сосредоточенная сила или момент — это типичная схематизация реальности, позволяющая построить физико-математическую расчетную модель. Поясним сказанное примером.

На рис. 1.3, *а* изображена подкрановая балка. Вертикальные нагрузки от колеса передаются через малую, но *конечную* площадку контакта обода колеса и головки рельса. Это же относится и к горизонтальной силе, возникающей, например, при торможении. Перенесем равнодействующие указанных сил в точку, лежащую на оси стержня, добавив соответствующий момент. Аналогично поступим и с опорными реакциями, в результате чего получим «осевую» расчетную схему (рис. 1.3, б), где обозначена ось балки, загруженная *сосредоточенными* силами и моментами.

Распределенная нагрузка характеризуется в каждой точке числовым значением и направлением вектора *интенсивности* этой нагрузки. Интенсивность может быть отнесена к единице объема *у* (Н/м^3), единице площади *р* (Н/м^2) или единице длины *ц* (Н/м). Соответст---------- называется *объемной* (рис. 1.4, *а), поверхностно\ б)* и *линейно распределенной* или *погонной* (р] *нагрузкой.*

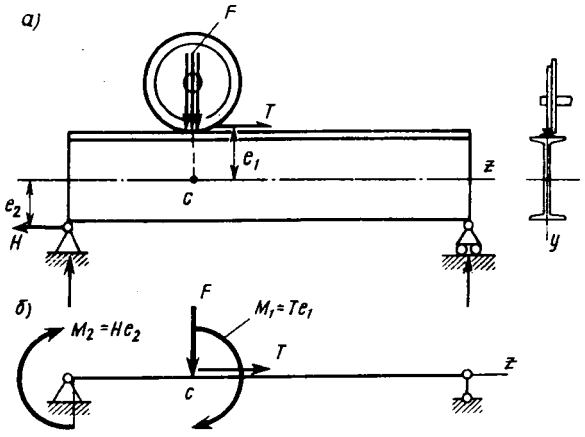


Рис. 1.3. Схематизация работы подкрановой балки

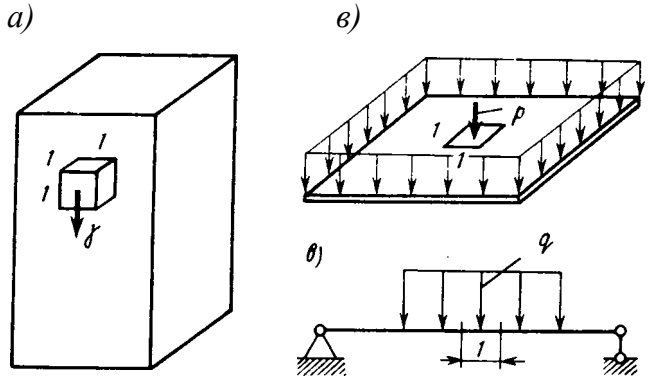


Рис. 1.4. Объемная поверхностная и линейно распределенная нагрузки

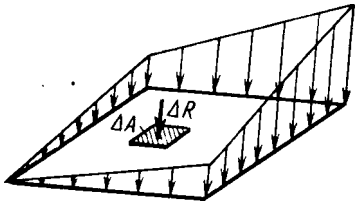


Рис. 1.5. Неравномерная поверхностная нагрузка

На рис. 1.4, *а—в* приведены случаи *равномерно* распределенной нагрузки, когда ее интенсивность можно понимать как силу, приходящуюся соответственно .на единицу объема, площади и длины.

В случае *неравномерно* распределенной нагрузки, например поверхностной (рис. 1.5), для определения ее интенсивности составим вначале выражение для среднего на площадке А *А* значения нагрузки $p_{c?}=АЯ1АА,$ где

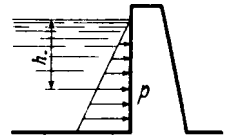
АЛ — равнодействующая сила на площадке *АА.* Теперь,

чтобы характеризовать нагрузку именно в точке, будем стягивать площадку А*А* к точке. Тогда

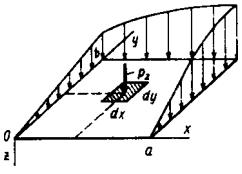
$$p = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta A}. \qquad (1.1)$$

Интенсивность поверхностной нагрузки

Интенсивность поверхностной нагрузки в общем случае определяется как предел отношения равнодействующей сил на рассматриваемой площадке к ее площади, стремящейся к нулю.



Примером поверхностной неравномерно распределенной нагрузки может служить давление жидкости на плотину, изменяющееся с глубиной по закону $p=y$А.



Если распределенная нагрузка изменяется по закону $p_z=p_z(x, y)$, то для определения ее равнодействующей на площади *ахЬ* составим вначале выражение элементарной силы p_zйх<1у, считая ввиду бесконечной малости площадки с1х *ду* интенсивность p_z равномерной на этой площадке. Тогда равнодействующая определится по формуле

$$\int_0^b \int_0^a (p_z\,dx\,dy)\,y = p_z y A. \qquad (1.2)$$

а ее момент, например, относительно оси *х* будет

$$M_x = \int_0^b \int_0^a (p_z\,dx\,dy)\,y = p_z y A. \qquad (1.3)$$

Ко.

Для интенсивности нагрузки применимо следующее правило знаков: *компонента вектора интенсивности положительна, если она совпадает с направлением соответствующей оси координат.*

Пример 1.1. Найти опорные реакции в балке, загруженной нагрузкой, изменяющейся по линейному закону *я—дв (г—а)!а* (рис. 1.6, *а).*

Условие $?.m_Л=0$ запишется в виде

$$Y_в 2a - (дйг)\,г = Р\,д\,2\,а - (г - л)\,г < 12 = 0.$$

Вычисление интеграла дает $Y_в 2a - (Дв/а)\ (5/6)a^3 = 0$. Отсюда $Y_в = (5/12)\ _{Цв}\ a$.

В данном случае вместо вычисления интеграла можно заменить треугольную нагрузку ее равнодействующей, равной площади треугольника (рис. 1.6, б) и приложенной в его центре тяжести, т. е. на расстоянии (2/3) *а* от- вершины. Тогда условие равновесия примет следующий

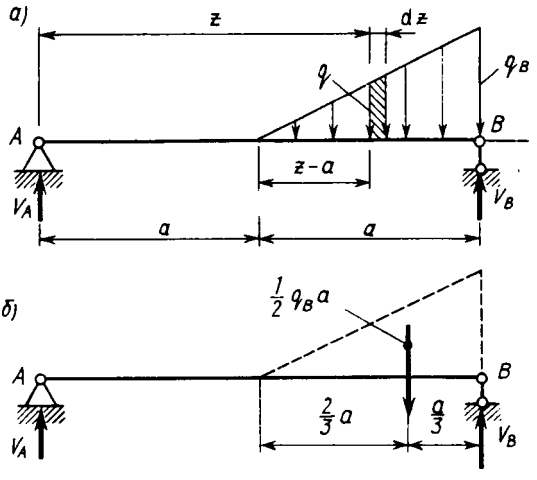
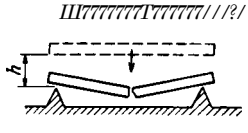


Рис. 1.6. К примеру 1.1

Отсюда получим уже найденное значение Уд.

В случаях сложного очертания нагрузки *д* (г) следует использовать интегрирование, в более простых — замену распределенной нагрузки их равнодействующей.



Эффект приложения нагрузки в очень большой степени зависит от *скорости изменения нагрузки во времени.* Действительно, хрупкая пластинка, спокойно положенная на жесткие упоры, легко выдерживает собственный вес, не разрушаясь. В то же время, будучи сброшенной даже с небольшой высоты Л, она ломается.

Различают нагрузки *статические* и *динамические.* Если нагрузка достаточно быстро изменяет значение или место приложения (например, ударная, вибрационная, подвижная нагрузка), то в результате ее приложения возникают колебания нагружаемого элемента конструкции.

Динамическая нагрузка

Быстро изменяющуюся нагрузку называют динамической, а расчет с учетом возникающего колебательного движения — динамическим расчетом.

Статическая нагрузка

Нагрузка, постоянная или очень медленно изменяющаяся во времени, когда скоростями и ускорениями возникающего движения можем пренебречь, называется статической.

В курсе сопротивления материалов рассматривается в основном статическое приложение нагрузки. В гл. 17 будут рассмотрены простые, но характерные задачи о динамическом нагружении.

§ 1.3. Допущения о свойствах материала элементов конструкций

Элементы строительных конструкций изготовляются из различных материалов — металлов, бетона, дерева, полимеров и др. Их структура и физические свойства могут быть весьма разнообразны. Однако в сопротивлении Материалов удобно пользоваться некоторым *условным материалом,* наделенным определенными идеализированными свойствами деформирования. Рассмотрим эти свойства.

Изменение размеров и формы тела под действием нагрузки называют *деформацией* тела.

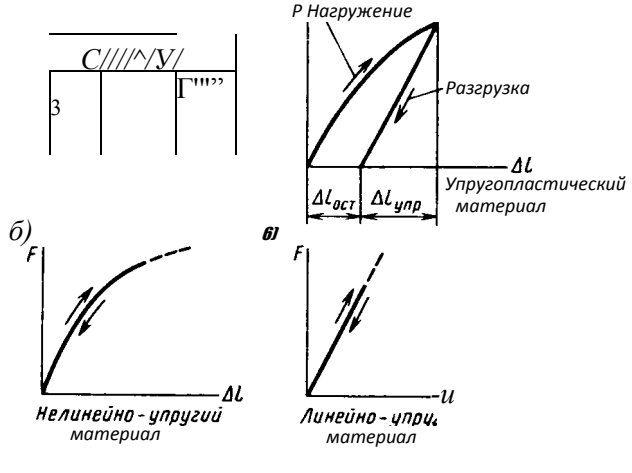
На рис. 1.7 изображены три характерные диаграммы деформирования, связывающие значения силы *Б* и деформации Д/ при нагружении и разгрузке.

Упругая и пластическая части деформации

Часть суммарной деформации, исчезающая после снятия нагрузки, называется упругой (Д/упр). *Деформация, остающаяся после разгрузки, называется остаточной или пластической* ($Д/_{0СТ}$=$Д/_{ПЛ}$).

В общем случае при достаточно больших нагрузках материалы проявляют упругие и пластические свойства, так что Д/ = $Д/_{упр}$ + $Д/_{м}$. Такой материал называют *упруго-пластическим* (рис. 1.7, *а).*

Если остаточные деформации очень малы, то ими можно пренебречь. Материал, в котором возникают только упругие деформации, называют *идеально-упругим.* Если диаграмма деформирования выражена нелинейной зависимостью, то материал называют *нелинейно-упругим* (рис. 1.7, *б),* если линейной зависимостью — *линейно-упругим* (рис. 1.7, *в).* Сформулируем теперь допущения о свойствах условного материала.



Материал элементов конструкций будем в дальнейшем считать сплошным, однородным, изотропным и линейно-упругим.

Допущения о свойствах материала

Свойство *сплошности,* которым наделяется условный материал, говорит о том, что не учитывается конкретная структура материала (зернистая, кристаллическая и др.), и считается, что материал непрерывно заполняет весь объем элемента конструкции. Свойство *однородности* означает, что весь объем материала обладает одинаковыми механическими свойствами. Наконец, *изотропным* называют материал, у которого механические свойства во всех направлениях одинаковы. В противном случае его называют *анизотропным.*

Использование понятия условного материала существенно упрощает изучение механики деформирования элементов конструкций. Соответствие условного материала реальным материалам достигается тем, что в расчет элементов конструкций вводятся экспериментально получаемые усредненные количественные характеристики механических свойств реальных материалов.

Заметим, что в ряде случаев мы будем отступать от принятых допущений. В частности, кроме упругих будем учитывать и пластические деформации, о чем будет оговорено особо.

§ 1.4. Внутренние силы и напряжения

Между частицами твердого тела до приложения внешних нагрузок действуют внутренние, силы, обеспечивающие неизменность его формы. Под влиянием приложенных нагрузок силы взаимодействия получают приращения, между частицами тела несколько изменяются расстояния и тело деформируется.

В сопротивлении материалов под внутренними силами будем понимать приращение сил взаимодействия между частицами, возникающих при его нагружении.

В условном материале (*сплошном* и *однородном,* как было показано в предыдущем параграфе) внутренние силы передаются *сплошным потоком* от одной части тела к другой через разделяющую эти части воображаемую поверхность. При этом в общем случае внутренние силы непрерывно и неравномерно распределены по этой поверхности. На каждой малой площадке, принадлежащей упомянутой поверхности, поток внутренних сил характеризуется значением и направлением вектора интенсивности внутренних сил. Введем количественную меру интенсивности потока внутренних сил в деформируемом теле.

Понятие о напряжении. На рис. 1.8, *а* тело рассечено плоскостью и в этом сечении в рассматриваемой точке *М* выделена малая площадка А*А,,,* ее ориентация в пространстве определяется нормалью площадки *п.* Определим вначале среднюю интенсивность на площадке:

Рис. 1.8. Нормальное и касательное напряжения в точке

$$p_{ср}=\frac{\Delta R_n}{\Delta A_n} \tag{1.4}$$

Для того чтобы охарактеризовать внутренние силы, именно в точке *М* будем стягивать площадку А*Л,,* к точке.

Тогда получим

$$p_n=\lim_{\Delta A_n \to 0} \frac{\Delta R_n}{\Delta A_n} \tag{1.5}$$

Интенсивность внутренних сил p_n, передающихся в точке через выделенную площадку, называется напряжением на данной площадке.

По своей природе напряжение *р,,* — это поверхностная нагрузка, возникающая *на внутренних* поверхностях соприкасания частей тела. Поэтому напряжение, как и интенсивность *внешней* поверхностной нагрузки, выражается в единицах силы, отнесенных к единице площади: Па=Н/м^2 (кгс/см^2, тс/м^2 и т. д.).

Вектор *р,,* выражает так называемое *полное напряжение* на данной площадке. Разложим его на составляющие (рис. 1.8, *б)* так, что

$$P1 = o^2_{я} + *1 \tag{1.6}$$

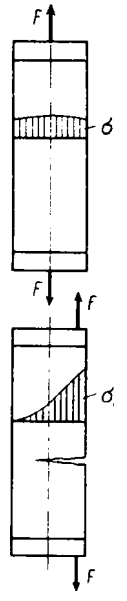
где а,, и т,, — соответственно *нормальное* и *касательное* напряжения на площадке с нормалью *п*.

Заметим, что в дальнейшем будем иметь дело главным образом не с полным напряжением *р,,,* а с его составляющими a_n и т,,.

В общем случае на площадке могут возникать два вида напряжений: нормальное а и касательное т.

Понятие напряжения является фундаментальным для всей механики деформируемого тела. Во многих случаях прочность материала в окрестности данной точки определяется именно напряжениями. Чтобы это проиллюстрировать, представим такой опыт: бумажную полоску, уси-

ленную на концах приклеенными картонными накладками, будем растягивать силой P вдоль оси и вблизи края полоски. Легко убедиться, что при одной и той же силе P в первом случае полоска бумаги остается целой, а во втором — рвется у растянутого края, что объясняется *неравномерным* распределением нормальных напряжений в ее поперечном сечении с максимумом в крайних точках сечения.



Приведенный пример говорит о том, как важно уметь вычислять напряжения в точках деформируемого тела.

Обозначение напряжений. При анализе напряжений в окрестности рассматриваемой точки M (рис. 1.8, *в)* выделяют бесконечно малый элемент в форме параллелепипеда со сторонами е!лг, <*1у,* <&. Если полные напряжения p_x, p_y и p_z, действующие на его гранях, разложить на составляющие, то в общем случае на каждой грани получим одно нормальное и два касательных напряжения. Например, на грани, перпендикулярной оси *х,* это будут a_x, τ_{xy} и $m_{,,}$. Для трех граней элемента они образуют так называемый *тензор напряжений*

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}.$$

Здесь первый столбец состоит из компонент напряжений, действующих на площадках, нормальных к оси *х,* второй — к оси *у,* третий — к оси *г.*

■

Индексы у напряжений

Первый индекс у напряжения, например x_{xy}, говорит о том, что оно действует на площадке с нормалью, параллельной оси х, а второй — о том, что вектор напряжений параллелен оси у. У нормального напряжения оба индекса совпадают, поэтому ставится один индекс.

Как видим, первый индекс служит своеобразным «адресом» площадки, а второй — указателем направления касательного напряжения.

Силовые факторы в поперечном сечении стержня и их выражение через напряжения. Рассмотрим некоторое поперечное сечение нагруженного стержня (рис. 1.9, *а).* Внутренние силы, распределенные по сечению, приведем к главному вектору *Я,* приложенному в центре тяжести сечения, и главному моменту *М.* Далее разложим их на шесть компонент: три силы *N. ()х, Qy* и три момента M_x, M_y, M_z, называемые *внутренними усилиями* или *силовыми факторами в поперечном сечении.*

Компоненты главного вектора и главного момента внутренних сил, распределенных по сечению, называются внутренними усилиями в сечении.

Каждая компонента имеет характерное наименование:

растяжение

N — продольная сила в сечении, связанная с деформацией растяжения или сжатия;

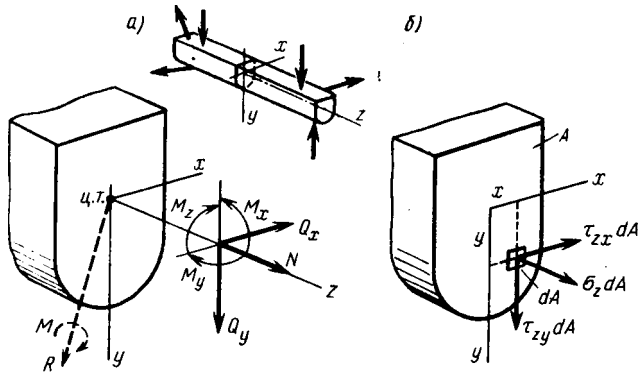


Рис. 1.9. Внутренние усилия и напряжения в поперечном сечении стержня

срез *Ву. Ра*

изгиб н_к и ~



кручение *Г*

См. § 2.1

£2x> 0,y поперечные силы в сечении, возникающие при стремлении к срезу по поперечному сечению в направлении осей *x* и *y;*

M_x, M_y — изгибающие моменты в сечении относительно осей *x* и *y,* возникающие при изгибе соответственно в плоскостях *уг* и *хг*\

$M_г$ — **крутящий момент, возникающий при стремлении к относительному повороту двух частей стержня вокруг ОСИ** *2*

Выразим внутренние усилия через напряжения, действующие в поперечном сечении, предполагая их известными в каждой его точке (рис. 1.9, *б).* Элементарные силы на площадке с*1Л* в этой точке будут $ет_г бА$, т,,с*1А* и $т_{1у}йА$.

Проецируя все элементарные силы на оси *x, y, г* и суммируя моменты этих сил относительно этих осей по всему сечению, получим

*

Выражения внутренних усилий через напряжения

$$7/= |o_г бЛ;\ (>x=^т_{,,}<1\ A;\ ()_y=^x_{1y}<1A;$$

$$M_x= I\ (ст_1 дА)y;\ |\qquad (<x_г(Ь4)\ x; \tag{1.8}$$

$$M,= |\ (.ЪуХ-\ x_{1X}y)йA,$$

где знак J выражает интегрирование по площади *A.*

л

§ 1.5. Перемещения и деформации

От приложения нагрузки тело деформируется, т. е. изменяет свои размеры и форму (рис. 1.10). Некоторая произвольная точка M переходит в новое положение M_x.

Полное перемещение MM_X будем разлагать на компоненты u, v, w, параллельные осям координат, соответственно x, y, z.

Компонента полного перемещения положительна, если она совпадает с направлением соответствующей оси координат.

Но перемещения данной точки M еще не характеризуют степень деформирования *элемента материала* у этой точки. Например, при изгибе балки с консолью перемещения точек консоли не равны нулю. Но в то же время из рисунка ясно, что вся консоль, поворачиваясь вместе с сечением над опорой B, перемещается как жесткое целое и ее материал *не деформируется.*

Введем понятие *деформаций в точке* как количественную меру деформирования материала в ее окрестности.

Выделим в точке M элементарный параллелепипед dxxdyxdz (рис. 1.11). За счет деформации длины его ребер получат абсолютное удлинение Adx, Ady и Adz.

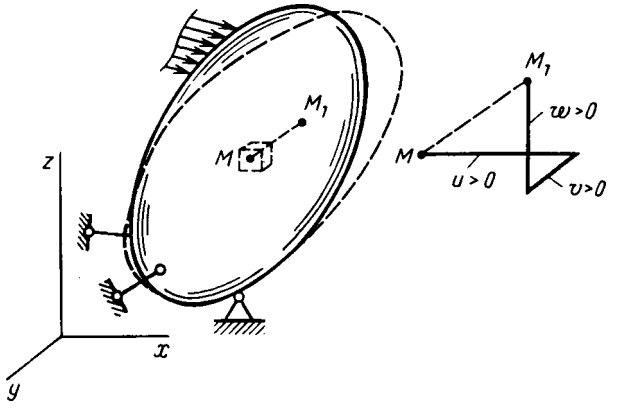
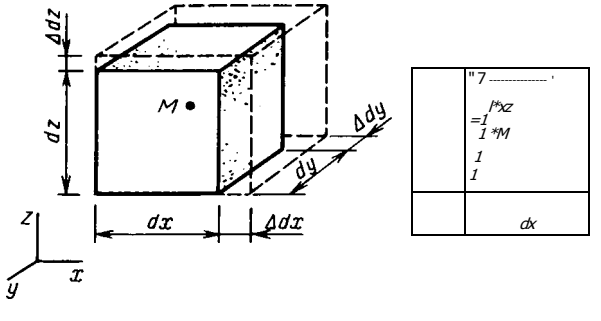


Рис. 1.10. Полное перемещение точки и его компоненты



Вычислим *относительные линейные деформации* в точке:

$$Ex=\frac{Adx}{dx};\ \pounds>=\frac{Ady}{dy};\ e_r=\frac{Adz}{dr} \qquad (1.9)$$

Деформации (1.9) безразмерные и для реальных строительных материалов имеют порядок е«10^{-3}, т. е. достаточно малы.

Кроме линейных деформаций возникают угловые *деформации* или углы сдвкга, представляющие малые изменения первоначально прямых углов параллелепипеда, например, в плоскости *xz* это будет величина y_a. Аналогичные изменения углов возникают в двух других плоскостях: y_n и *Ух,*. Как и линейные деформации, углы сдвига весьма малы и имеют порядок у«10^{-4}...Ю$^{-3}$.

Введенные относительные деформации в точке сведем в таблицу

$$\Gamma.=1\ г\ \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ e^* & 2^{y}- & \\ 1 & & 1 \\ Y_{\varepsilon}\ B & e, & By, \\ 1 & 1 & \\ {}'2^{y\circ} & & \pounds z \end{matrix}\ I\ V^* \qquad (1.10)$$

в которой углы сдвига в целях аналогии с тензором напряжений (1.7) поделены пополам. Величины (1.10) количественно определяют деформации материала в окрестности точки и составляют *тензор деформаций.*

§ 1.6. Принцип суперпозиции

Линейно и нелинейно деформируемые системы. *Систему, в которой внутренние усилия, напряжения, деформации и перемещения прямо пропорциональны действующей нагрузке, называют линейно деформируемой.*

См. § 1.3. и рис. 1.7

Д**того чтобы система была линейно деформируемой, в общем случае требуется, чтобы материал конструкции работал как линейно-упругий, т. е. чтобы его диаграмма деформирования была линейной. Такие системы называют *физически линейными.*

Кроме того, перемещения в конструкции должны быть достаточно малыми, чтобы изменения ее размеров и **формы,** возникающие вследствие деформации, можно было не учитывать в расчетной схеме. Такие системы называют *геометрически линейными.*

Последнее поясним примером. На рис. 1.12, *а, б* показано определение внутренних усилий в стержнях простейшей фермы методом вырезания узла, известным из курса теоретической механики. На рис. 1.12, *а* изображена расчетная схема для составления условия равновесия узла *в деформированном состоянии,* т. е. при угле наклона раскоса /?=а +Да, где Да — изменение угла а, вызванное деформацией стержней. Из рисунка видно, что

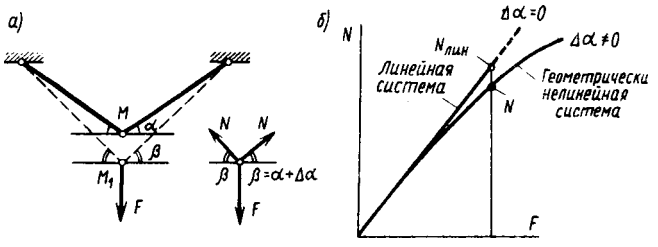


Рис. 1.12. Влияние перемещения узла на усилия в стержнях

N^*
2 sin *fi* 2 sin (а+Да)

Если пренебречь деформациями стержней и считать Да=0, то

$N_{* лик}$ 2 sin a

Поскольку . Да возрастает с ростом силы *F* и sin (а+Да) > sin a, эти зависимости графически будут представлены на рис. 1.12, *б,* где кривая *N=N (F)* отклоняется вниз от линейной зависимости $N_{mm}=N_{1B\acute{I}B}$ *(F).*

Приведенные два графика соответствуют двум типам систем: геометрически нелинейной системе соответствует *N* (*F*), а геометрически линейной системе — *(F).* При малых деформациях (Да-»0) обе кривые практически совпадают.

Определение внутренних сил с учетом влияния перемещений иногда называют *расчетом по деформированному состоянию* (по деформируемой схеме).

В большинстве случаев в эксплуатационных условиях строительные конструкции можно считать физически и геометрически линейными.

Поэтому примем как допущение, что рассматриваемые далее системы являются линейно деформируемыми.

Принцип суперпозиции. Для линейных систем справедливо утверждение, которое называется *принципом суперпозиции* или *наложения* (принцип независимости действия сил).

И

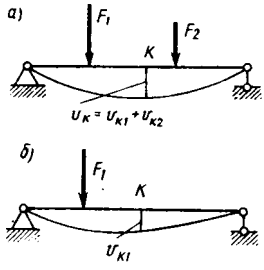
Принцип суперпозикции

Результат действия группы сил равен сумме (алгебраической или геометрической) результатов, полученных от действия каждой силы в отдельности.

Это простое правиле проиллюстрировано на рис. 1.13, *а,* где перемещение точки *К* от двух сил v_K можно получить как алгебраическую сумму:

$$V_{JC}= Vjn + V/2, \qquad (1.11)$$

где v_n и Vjc перемещения от каждой из сил F_t и F_2 (рис. 1.13, *б, в).*



к И
=[^=;Ь

Рис. 1.13. Иллюстрация принципа суперпозиции

Если балка одновременно изгибается в вертикальной и горизонтальной плоскостях от действия вертикальной ^ и горизонтальной $Г_2$ сил, то сумма (1.11) должна быть геометрической.

Вопросы для самоконтроля к главе 1

1.1. Укажите геометрический признак, характерный для стержня, пластины, массивного тела.

1.2. Что такое сосредоточенная сила и момент?

13. Какие виды распределенных нагрузок вы знаете? Что такое интенсивность распределенной нагрузки?

1.4. Что такое упругопластический, нелинейно- и линейно-упругий материалы?

1.5. Сформулируйте допущения о свойствах условного материала, используемого в расчетных моделях.

1.6. Что такое напряжение в деформируемом теле? Какие два вида напряжений вы можете назвать?

1.7. Дайте определение внутренним усилиям в поперечном сечении стержня. Перечислите шесть силовых факторов и выразите их через напряжения.

1.8. Поясните, что такое относительная линейная деформация и угол сдвига.

1.9. В чем состоит физическая и геометрическая нелинейность деформируемой системы? Что такое линейно деформируемая система?

1.10. Сформулируйте принцип суперпозиции и укажите условие его применимости.

ГЛАВА 2

ВНУТРЕННИЕ УСИЛИЯ В ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЯХ СТЕРЖНЯ

§ 2.1. Метод определения внутренних усилий

При действии на тело внешних сил оно деформируется. Следовательно, меняется взаимное расположение частиц тела; в результате этого возникают дополнительные силы взаимодействия между частицами. Эти силы взаимодействия в деформированном теле будем называть *внутренними силами (усилиями).* Для решения задач сопротивления материалов необходимо уметь определять значение и направление внутренних усилий, например в задачах, где оценивается прочность конструкции. При их определении применяется *метод сечений.*

Рассмотрим тело, имеющее форму бруса и находящееся в равновесии под действием системы внешних сил (самоуравновешенной системы сил). Пусть требуется определить внутренние усилия в произвольном сечении *а — а* этого бруса (рис. 2.1, *а).* Мысленно рассечем его по сечению *а* — а на две части и отбросим одну из частей, например часть / (обычно оставляется та часть, при рассмотрении которой получается более простое решение).

Метод сечений

Первыми в середине XIX в. метод сечений ввели немецкие инженеры А. Риттер и Д. Шведлер, которые этот метод использовали для определения усилий в стержнях ферм

Оставшаяся часть *II* в общем случае не будет находиться в равновесии. Для сохранения этой части бруса в равновесии необходимо к ней приложить систему усилий, распределенных по сечению *а — а* (рис. 2.1, б). Эти усилия и есть внутренние усилия в сечении *а — а* рассматриваемого бруса. Они заменяют собой действие отброшенной части *I* (вместе с приложенными к ней внешними силами) на оставшуюся часть *II.* Внутренние усилия, согласно закону о равенстве действия и противодействия, которые приложены к части *II* в сечении *а — а,* равны и противоположны по направлению внутренним усилиям, **действующим на часть *I* в том же сечении.**

В соответствии с правилами статики приведем систему внутренних усилий, действующих на часть *II* в сечении *а* — а, к *главному вектору К* и *главному моменту М,* приложенным в центре тяжести этого сечения. Выберем систему координат *х, у, г* с началом в том же центре тяжести (точка *О).* Ось *г* направим по внешней нормали к сечению, а оси *х, у* расположим в его плоскости (рис. **2.1,** *в).*

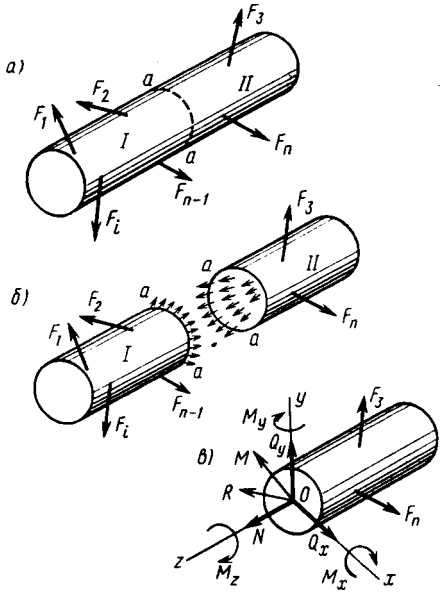


Рис. 2.1. Определение внутренних усилий методом сечений

Разложим главный вектор и главный момент на составляющие по координатным осям х, *у, г.* В результате получим шесть составляющих, которые принято называть *внутренними силовыми факторами* или *внутренними усилиями.*

Ш Составляющие главного вектора носят названия:

усилие вдоль оси *х — продольной силы Ы;*

Внутренние усилия усилия вдоль осей *х* и *у — поперечных сил* $<2_X$ и 0_y соответственно.

Составляющие главного момента носят названия:

момент относительно продольной оси г — *крутящего момента* M_z\

моменты относительно осей х и *у — изгибающих моментов* M_x и M_y соответственно (рис. 2.1, *в).*

Таким образом, после приложения в сечении *а — а* к части *II* усилий, заменяющих собой действие отброшенной части *I* (в общем случае шести силовых факторов), оставшаяся часть *II,* нагруженная и приложенными к ней внешними силами, находится в равновесии. Поэтому для части *II* можно записать шесть уравнений равновесия:

Н

$$\text{№>1 Л.}\quad \text{Елг=о,}\quad \text{I■ -ь}\quad \text{X г=о,}\quad \text{—“}\quad \text{X } 2=0; \tag{2.1}$$

Уравнения равновесия для часта **стержня**

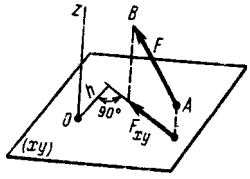
ОСТЧ. ОСТЧ. ОСТЧ.

у $_{м0}$ **у** $_{м}$ **_0, У** M_z**=0.**

^

Напомним основные правила составления уравнений равновесия:

1. Проекция тлы на ось равна произведению силы на косинус угла между направлением силы и положительным направлением оси.
2. Вели сила перпендикулярна оси, то ее проекция на ось равна нулю.
3. Момент силы относительно оси равен произведению проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную оси, на плечо силы.
4. Момент силы относительно оси равен нулю:
   а) если сила параллельна оси;
   б) если линия действия силы пересекает ось.



Из первых трех уравнений равновесия (2.1) соответственно находим усилия Q_x, Qy и ЛГ, а из трех последних — соответственно моменты M_x, M_y и M_z.

Заметим, что знак у этих усилий, получаемый из решения уравнений (2.1), указывает на *правильность* (знак плюс) или *неправильность* (знак минус) выбранных направлений внутренних усилий.

Таким образом, метод сечений дает возможность определить в сечении направление и значение равнодействующих внутренних усилий (или их компонент). Закон же распределения внутренних усилий по сечению остается неизвестным. Для решения этого вопроса необходимо знать, как деформируется данный брус под действием внешних сил, приложенных к нему.

Применение метода сечения для определения значений и направлений внутренних усилий рассмотрим на следующем примере.

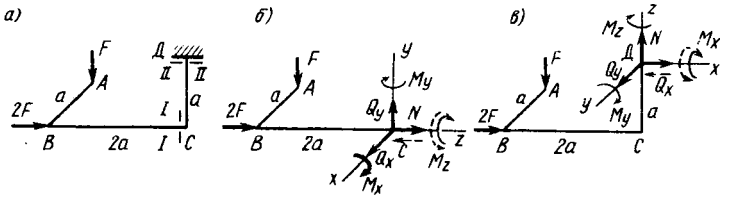
Пример 2.1. Для пространственного стержня (рис. 2.2, *а)* определить значения и направления внутренних усилий в сечениях *I—I* и *II—II.*

Решение. Для определения значений и направлений внутренних усилий в сечениях *I—I* и *II—II* применим метод сечений.

Сечете *I—/.* Рассечем пространственный стержень в сечении *I—I* плоскостью, которая перпендикулярна оси стержня *BC* (рис. 2.2, *б).* Одну часть стержня, например содержащую заделку, отбросим и действие ее на оставшуюся часть заменим шестью внутренними усилиями *N, Q_x. Q_y* и *M_z, M_x, My,* приложенными в сечении *I—I.*

Заметим, что в стержне, закрепленном при помощи жесткой заделки, целесообразно оставлять ту часть стержня, которая не закреплена, так как тогда не требуется определять опорные реакции.

Далее выберем прямоугольную систему осей *x, y, z,* совместив начало координат с центром тяжести сечения *I—I.* Ось г направим вдоль оси рассеченного стержня *BC* (в сторону внешней нормали сечения), а оси *x и y* расположим в плоскости его поперечного сечения, как показано на рис. 2.2, *б.* Такой выбор осей является обязательным.



Внутренние усилия *(}$_x$,* и *N* направим вдоль соответствующих положительных осей *x, y, г*, внутренние усилия M_x, M_y и *M,* — по ходу часовой стрелки при взгляде на оставшуюся часть со стороны положительного направления тех же осей. Такие направления внутренних силовых факторов будем считать положительными.

Часть стержня, нагруженная внешними силами *P, 2P* и усилиями, приложенными в сечении *I—/*, находится в равновесии (рис. 2.2, *б).* Для этой части стержня составим шесть уравнений равновесия, из решения которых определим внутренние усилия в сечении *I—Г.*

ост.ч. ост.ч. ост .4.

I *=0; e_x=0; X У=0, <2,-.Р= 0, $й_y$=P;* £ 2=0, ^+2^=0,

ОСТ.Ч. ост.ч.

*N=-2*Л X *M_x—P2a—0, M_x^2Pa;* £ *$M_{У=(3}$> $M_{У=0}$,*

ост.л.

£ *$M_г$=0,* $M_г$ + Й1=0, *$M_г$=-Pa.*

Таким образом, в сечении *1—1* действует четыре внутренних усилия (£*=0 и *M,шО),* причем два из них — *N* и $M_г$—в направлении, противоположном принятому (на рис. 2.2, *б* действительные направления их показаны пунктиром).

Сечене *II—II.* Рассечем стержень в сечении *II—II* плоскостью, перпендикулярной оси стержня *Сй.* Часть стержня, содержащую жесткое закрепление, отбросим. Выберем систему координат *x, y, г* и действие отброшенной части на оставшуюся заменим шестью внутренними усилиями, как показано на рис. 2.2, *в.* Эта часть стержня находится в равновесии; составим для нее уравнения равновесия:

ост.ч. ост.ч. ост.ч.

X *=0, йг+^-О, ---------- 2*P;* £ Г= О, e,=0; £ 2=0, #-^=0,

ОСТ.Ч. ост.ч.

Ы^Р; £ *$м_x$=0, M_x+Pa*=0, *M_x=-Pa;* £ *$м_y$=°>*

ОСТ.Ч.

*M_y—P2a — 2Pa=0, M_y=*ЛPa;* £ ^*-0, А/$_г$=0.

Следовательно, в сечении *II—II* возникает четыре внутренних усилия (6,-0, $M_г$ = 0), причем два из них — *O_x я M_x* — направлены в обратную сторону (рис. 2.2, я).

Как видно из рассмотренного примера, внутренние усилия, возникающие в поперечных сечениях стержня, меняются вдоль его продольной оси. Для более наглядного представления характера изменения внутренних усилий вдоль оси *г* строят их графики.

Графики изменения внутренних усилий вдоль продольной оси стержня называются эпюрами.

Эпюра внутреннего усилия

Эпюры внутренних усилий, как правило, строят для того, чтобы наметить опасные сечения, т. е. сечения, в которых существует большая вероятность наступления разрушения из-за того, что там внутренние усилия достигают наибольших значений.

При построении эпюр сначала устанавливают границы участков, в пределах которых внутренние усилия изменяются по одной закономерности. Границами таких

участков являются сечения, где приложены внешние сосредоточенные усилия (момент, сила) или начинается и кончается распределенная нагрузка, а тахже сечения, в которых имеется перелом оси стержня.

Далее, применяя метод сечений и учитывая правила знаков, получают аналитические зависимости изменения внутренних усилий в пределах каждого участка. Затем, используя их, строят графики этих усилий — эпюры. При этом ординаты эпюр внутренних усилий в определенном масштабе откладывают от базисной линии, которая проводится параллельно оси стержня. Построенную эпюру принято штриховать линиями, перпендикулярными базисной линии. Кроме того, на эпюрах для характерных ординат обязательно указывать их значения, а в кружочке — знак усилия.

§ 2.2. Внутренние усилия при растяжении и сжатии

При действии на стержень внешних нагрузок, направленных вдоль продольной оси, или нагрузок, равнодействующая которых направлена также вдоль продольной оси, в поперечных сечениях возникает только один силовой фактор — *продольная сила.* Такие нагрузки вызывают *растяжение* и *сжатие стержня.*

Условимся:

продольную силу N считать положительной, если она "рашо ¡тч вызывает растяжение, т. е. направлена от сечения, и отрицательной, если она вызывает сжатие, т. е.- направлена к сечению.

При построении эпюры продольных сил положительные значения *N* будем откладывать вверх от горизонтальной базисной линии или вправо от вертикальной базисной линии; отрицательные значения *N* соответственно будем откладывать в противоположном направлении, т. е. либо вниз, либо влево.

Пример 2.2. Построить эпюру продольных сил для стержня, нагруженного продольными силами (рис. 2.3, *а).*

Решение. Стержень имеет два участка: / и *II.* Выберем начало координат в левом крайнем сечении.

Найдем закономерности изменения продольной силы на каждом участке. Для этого используем метод сечений — в произвольных местах на участках *I а II* проведем сечения *.1—1* и *2—2* и каждый раз будем **отбрасывать правую часть стержня, содержащую закрепление, для того** чтобы предварительно не определять опорную реакцию. Оставшиеся левые части уравновесим положительными (растягивающими) продольными силами Л[т]1 и *N***2** (рис. 2.3, *б, в).*

Заметим, что во избежание ошибки следует неизвестное внутреннее усилие принимать всегда положительным, так как знак усилия, получаемый из решения, позволит установить:

1) правилен ли был выбор направления силы .¡V;
2) какой вид деформации при этом возникает — растяжение или сжатие.

Для оставшихся (левых) частей запишем уравнения равновесия:

Рис. 2.3. К примеру 2.2. Определение продольных сил на участках / *я II*

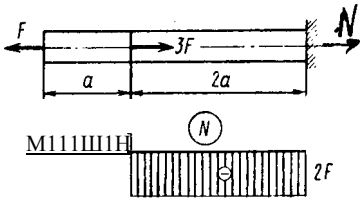


Рис. 2.4. К примеру 2.2. Построение эпюры продольных сил

I. 0<r1<a; II. a<r2<3o;

остл. остл.

X г=^-£=0, X 2=АГ$_2$-£+3/'=0, ЛГ$_2$--2£.

Из полученного решения видно, что в пределах каждого участка продольная сила остается постоянной, т. е. не зависит от продольной координаты *г,* и на участке *II* вместо предполагаемой растягивающей силы продольная сила будет сжимающей (на рис. 2.3, *в* она показана пунктиром).

По полученным выражениям дня .V) и ОД построим этору продольных сил, изображенную на рис. 2.4.

Отметим, что *продольная сила в поперечных сечениях стержня численно равна алгебраической сумме проекций внешних сил на ось стержня, приложенных к его оставшейся части:*

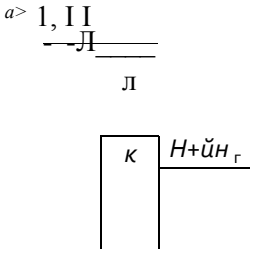


Рис. 2.5. К выводу дифференциальной зависимости между ^ и *N*

Продольная сила *N* и распределенная нагрузка *и* связаны некоторой дифференциальной зависимостью. Рассмотрим стержень, нагруженный продольной распределенной нагрузкой /г (рис. 2.5, *а).* Выделим из стержня элемент длиной *йг* (рис. 2.5, *б).* На него будут действовать нагрузка *и,* которую можно считать равномерно распределенной ввиду малости <*&,* и уравновешивающие продольные силы (положительные): в левом сечении — Л^, в правом — Л^+сШ, где <1# — приращение продольной силы на участке длиной ¿г. Составим уравнение равновесия -— сумму проекций всех сил, приложенных к элементу, на ось стержня:

-#-К$_г$<12-|-(ЛМ-сШ) = 0,

откуда

(2.2) Днфференцнальная зависимость между и *N*

Эта зависимость используется при анализе различных вопросов, в частности при проверке правильности построения эпюры *N.*

Прямер 2.3. Построить эпюру продольных сил для стержня переменного сечения от действия собственного веса; высота сечения А, объемный вес материала у (рис. 2.6, *а).*

Решение. Проведем сечение на расстоянии *г* от нижнего конца стержня, отбросим верхнюю часть и рассмотрим равновесие нижней части стержня (рис. 2.6, *б).* Ширина стержня в этом сечении равна ¿>*=¿>7/7, а продольная сила — весу нижней части:

$$N_1 = \gamma \cdot A_г A_г = \gamma \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{Ьк}{/} .$$

Отсюда видно, что эпюра продольных сил будет очерчена по квадратной параболе. Найдем ординаты эпюры №
при 7=0 N=0;

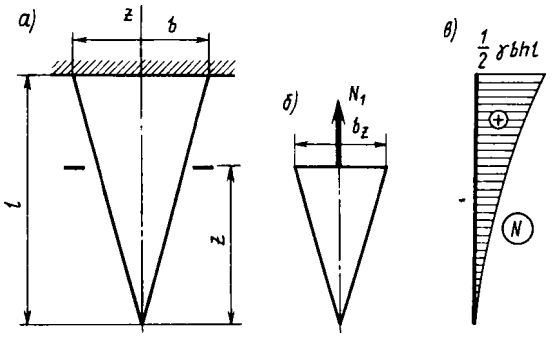


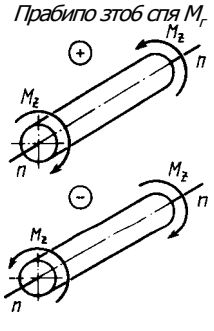
Рис. 2.6. К примеру 2.3

при **2=1** *И=*-^ЬЫ.*

Вычислим производную — = /г=у6Лг//. Следовательно, если эту производную приравнять к нулю, то у функции *N* будет экстремум при г=0 и эпюра *N* должна здесь касаться базисной линии. Вид эпюры *N* изображен на рис. 2.6, *в.*

§ 2.3. Внутренние усилия при кручении

Стержень, который нагружен моментами, действующими в плоскостях, перпендикулярных его продольной оси, испытывает *кручение.* Такие стержни называют *валами.* При этом в поперечных сечениях стержня возникает только одно внутреннее усилие — *крутящий момент* M_z (остальные силовые факторы равны нулю).



Условимся:

крутящий момент считать положительным, если при взгляде на сечение со стороны внешней нормали он направлен по ходу часовой стрелки.

Заметим, что принятое правило знаков для крутящего момента не имеет физического смысла. Оно необходимо для установления направления крутящего момента и при построении эпюры M_z. Положительные значения крутящих моментов на эпюре будем откладывать вверх от горизонтальной базисной линии, а отрицательные значения — вниз. Построение эпюры крутящих моментов принципиально ничем не отличается от построения эпюры продольных сил.

Помимо внешних сосредоточенных крутящих моментов на стержень (вал) может действовать и распределенная по некоторому закону моментная нагрузка интенсивностью *щ,.* Между этой внешней моментной нагрузкой m_1 и крутящим моментом M_z существует дифференциаль-

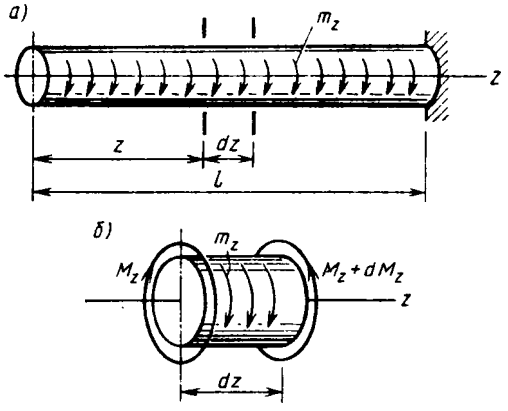


Рис. 2.7. К выводу дифференциальной зависимости между m_2 и $M_г$

ная зависимость. Для ее получения рассмотрим стержень с моментной нагрузкой $m_г$ (рис. 2.7, а), из которого вырежем элемент длиной *йг* (рис. 2.7, *б).* Этот элемент будет нагружен уравновешивающими положительными крутящими моментами (в левом сечении — $M_г$, в правом — $M_г+Ш_и$ где $Ш_1$ — приращение крутящего момента) и внешней распределенной моментной нагрузкой $m_.$, которую можно считать равномерно распределенной ввиду малости *йг.* Составим уравнение равновесия для элемента:

$ЪM_г=0$, $M_г+m_г йг—(M_2+\&M_Т)=О$,

откуда

$$\frac{Ш_г}{ag}=т_г \qquad (2\text{-}3)$$

Дифференциальная зависимость между $m_г$ и M,

Прамер 2.4. Построить эпюру крутящих моментов для стержня, изображенного на рис. 2.8, *а.*

Решение. Разбиваем стержень на два участка: / и *II.* Используя метод сечений, на участке / мысленно проводим в произвольном месте сечение *1—1* (начало координат принимаем в крайнем левом сечении), отбрасываем правую часть стержня и рассматриваем равновесие оставшейся левой части с приложенным в месте сечения положительным крутящим моментом А/] и внешней нагрузкой. Тогда в соответствии с приведенным правилом знаков для участка *I* получаем

осг.ч.

I $M\!\backslash = £ M_{1г}=ma—m2y.$

Аналогично определяем крутящий момент в произвольном сечении *2—2* участка *II* (оставшейся частью является правая, начало координат — в крайнем правом сечении):

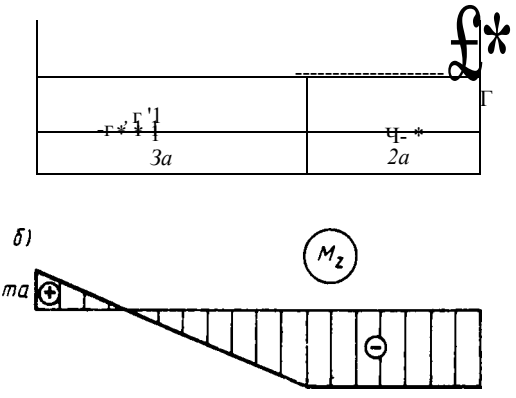


Рис. 2.8. К примеру 2.4

остл.

II 0<72^2д; Л/$_2^{ж}$ Л = — *2та.*

По полученным выражениям строим эпюру M_z (рис. 2.8, *б).*

Для проверки правильности построения эпюры M_z используем дифференциальную зависимость (2.3). Вычисляем первые производные на участках *I* и *II:*

$$cШ_{2\_o}$$

Отсюда следует, что на участке / должна действовать равномерно распределенная моментная нагрузка интенсивностью *т,* а на участке *II* она отсутствует (рис. 2.8, *а).*

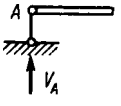
§ 2.4. Основные типы опорных связей и балок. Определение опорных реакций

Стержни, работающие главным образом на изгиб, обычно называют *балками.* Они применяются в конструкциях зданий различного назначения, мостах, в виде подкрановых балок производственных зданий и в других сооружениях. Их широкое распространение объясняется простотой конструкции, изготовления и надежностью в работе.

Балки, как правило, опираются на каменные стены, железобетонные конструкции и др. Для этого используют специальные стальные опорные части. Чаще всего в инженерной практике применяют следующие *типы опорных частей* (или, проще, *опор).*

Типы опор

Шарнирно - подвижная опора



Шарнирно-подвижная опора представляет собой устройство, допускающее перемещение опорного сечения параллельно опорной плоскости, например по горизонтали, и поворот его в вертикальной плоскости относительно оси цилиндрического шарнира и не дающее возмож-

ности перемещения в направлении наложенной связи по вертикали. Реакция такой опоры $У_A$ направлена вдоль опорной связи.

Шарнирно-неподвижная опора не допускает смещений опорного сечения ни в продольном, ни в поперечном направлениях, но допускает поворот этого сечения относительно шарннра. Следовательно, шарнирно-неподвижная опора — опора с двумя связями, которые удобно прикладывать по направлению оси балки и перпендикулярно оси балки. В такой опоре возникают две составляющие опорной реакции: $Н_л$ и $У_A$.

Жесткое закрепление или заделка не допускает поворота опорного сечения и перемещения его ни в каком направлении, т. е. на это сечение наложено три связи. В такой опоре возникают вертикальная V_A и горизонтальная H_A составляющие опорной реакции и изгибающий момент $М_л$.

Если на балку действует нагрузка, расположенная в одной плоскости, то для неподвижного соединения балки с его основанием необходимо три связи. Это условие является необходимым, но не достаточным. В том случае, когда балка соединена с основанием при помощи трех опорных стержней, параллельных друг другу, например вертикальных, она может перемещаться в направлении, перпендикулярном направлению опорных связей, т. е. в горизонтальном, что недопустимо. Также недопустимо соединение балки с основанием при помощи трех стержней, направления которых пересекаются в одной точке, так как возможен мгновенный поворот балки в плоскости вокруг этой точки (например, точки *О).* В этих случаях балки будут геометрически изменяемыми, т. е. подвижными.

Таким образом, *недопустимо соединение балки с основанием при помощи трех шарнирно-подвижных опор, направления которых были бы параллельны друг другу или пересекались в одной точке.*

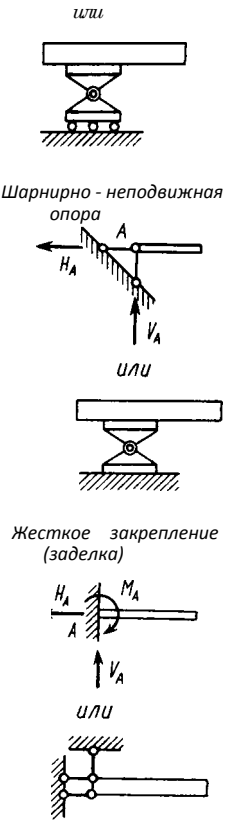
В инженерной практике чаще всего балки соединяются с основанием при помощи указанных выше опор или их сочетаний. Наиболее широко распространены следующие типы балок:

1) *консоль* (рис. 2.9, *а)* — балка с одним жестко защемленным и другим свободным концом;

2) *простая* (рис. 2.9, *б)* — однопролетная балка, имеющая по концам шарнирные опоры, расстояние между опорами *I* называется *пролетом балки;*

3) *консольная* (рис. 2.9, *в, г)* — простая балка, имеющая одну или две консоли (здесь под консолью понимается часть балки, продолжающаяся за опору).

В опорах балок, изображенных на рис. 2.9, *а*—г, от заданной плоской системы сил возникают три реактивных усилия. В этом случае, как известно из теоретической



■

Типы балок

Определение опорных реакций

Рис. 2.9. Типы балок

механики, можно составить три уравнения равновесия и, следовательно, найти неизвестные опорные реакции.

При определении опорных реакций в балке-консоли (рис. 2.9, *а)* следует использовать следующие уравнения равновесия:

$$x_г=0,\ 2У=0,\ £M=0. \qquad (2.4)$$

В балках, показанных на рис. 2.9, *б—г,* опорные реакции можно определять, используя различные комбинации уравнений равновесия (2.4). При этом рекомендуется та, при которой в каждое уравнение равновесия будет входить только одна неизвестная реакция, а именно:

$$Хг=0,\ 1M_A = 0,\ XM_{,,} = 0. \qquad (2.5)$$

В первое из этих уравнений входит в качестве неизвестного реакция H_A, во второе — $У_в$, в третье — $У_A$. Существенным обстоятельством при составлении уравнений (2.5) является то, что независимо найденные реакции $Vл$ и $V_в$ могут быть проверены по уравнению равновесия

ЕУ=0. Эта проверка обязательна, так как гарантирует правильность определения значений и направлений вертикальных реакций $У_л$ и $У_в$:

сумма вертикальных реакций должна быть равна сумме всех вертикальных внешних сил.

Встречаются и более сложные типы балок. На рис. 2.10 представлена балка, состоящая из двух стержней, соединенных в точке С шарниром, — балка с промежу-**точным шарниром.** В этой балке возникают четыре неизвестных реактивных усилия: $H_Л$, $У_A$, M_A и $У_в$. Однако все

п *'/Ьтя*

ı*Ь

они могут быть определены из условий равновесия, так как к трем уравнениям равновесия (2.4) для всей балки добавляется еще одно M_c=0, т. е. сумма моментов относительно шарнира С правых сил (или левых) равна нулю. Из этого дополнительного уравнения сразу определяется реакция $У_a$.

Обязательно следует помнить положение, что уравнения равновесия можно применить как ко всей системе (сложной балке) в целом, так и к каждой части (стержню) в отдельности.

Геометрически неизменяемые системы, в которых опорные реакции могут быть найдены из уравнений равновесия, называются статически определимыми.

Статически определимые * неопределимые системы

Балки, изображенные на рис. 2.9, *а—г* и 2.10, являются статически определимыми.

Среди инженерных конструкций часто встречаются системы, в которых число наложенных связей больше числа уравнений равновесия. Такие системы относятся к статически неопределимым. Например, если из балки (рис. 2.10) удалить шарнир С, то она станет статически неопределимой, так как число неизвестных реакций по-прежнему равно четырем, а число уравнений равновесия только три, так как нет дополнительного уравнения

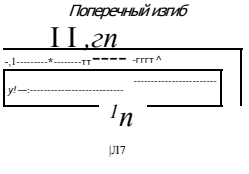
ДР.С. к

X M_c=0.

§ 2.5. Внутренние усилия при изгибе. Дифференциальные зависимости между M_x, £)$_y$ и

В инженерной практике часто применяются балки с поперечным. сечением, имеющим вертикальную ось симметрии. Если внешняя нагрузка н реактивные усилия лежат в одной плоскости, которая совпадает с осью симметрии сечения, то балка будет изгибаться в той же плоскости (ось изгибаемого стержня не выходит из этой плоскости). Такой изгиб называют *плоским.*

Поперечный изгиб



Здесь будут рассматриваться случаи, когда при плоском изгибе внешняя нагрузка перпендикулярна продольной оси балки. Поэтому в поперечных сечениях балки возникают только поперечная сила и изгибающий момент, а продольная сила равна нулю, что нетрудно доказать, спроектировав все силы на продольную ось. Такой изгиб называют *поперечным.*

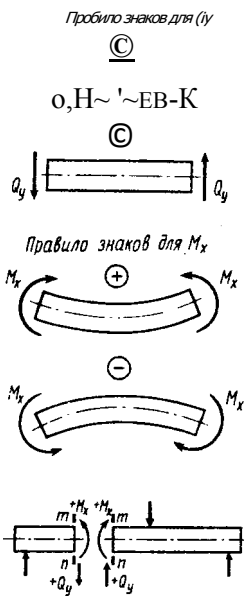
Условимся:

1) *поперечную силу считать положительной, если она направлена так, что стремится повернуть элемент балки по ходу часовой стрелки*;

Г

\y

\~Тч5Я Л £
I ФБ ТашГТУ



2) *изгибающий момент считать положительным, если он изгибает элемент балки выпуклостью вниз, вызывая растяжение нижних волокон.*

Отрицательные величины Qy и M_x соответствуют противоположному направлению.

Отметим, что при таком правиле знаков в левом сечении рассматриваемой части балки положительная поперечная сила направлена вверх, а положительный изгибающий момент — по ходу часовой стрелки. Соответственно в правом сечении положительная сила $O._y$ — вниз, а положительный момент M_x — против хода часовой стрелки.

Между внешней нагрузкой, в частности интенсивностью распределенной нагрузки поперечной силой Qy и изгибающим моментом M_x имеются важные дифференциальные зависимости, которые часто будут использоваться в дальнейшем.

Рассмотрим балку с внешней распределенной нагрузкой q_y, направленной вниз вдоль положительной оси y (рис. 2.11, *а).* Такую нагрузку будем считать положительной. Выделим из нее в произвольном месте элемент длиной <1г (рис. 2.11, *б).* Действие левой отброшенной части балки на элемент заменим поперечной силой $<2_y$ и изгибающим моментом $M,$, а действие правой отброшенной части — силой $Qy+dQy$ и моментом M_x+ $+йM_x$. Здесь $¿(¿y$ и $йM_x$ — приращение поперечной силы и изгибающего момента на элементе *йг.* Предположим, что поперечные силы и изгибающие моменты положительны. Кроме этих сил на элемент действует внешняя распределенная нагрузка $д_y$, которую вследствие малости *йг* можно считать равномерно распределенной. Под действием указанных сил элемент находится в равновесии. Составим для элемента два уравнения равновесия:

$$2У=0,\ —Qy-^-<ly<iz+(Qy+dQy)—O;$$

$$ЕМ_0=0,\ M_x+Qyйz+qydz — — (M_x+йM_x)=0.$$

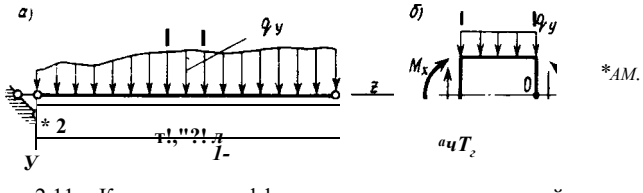


Рис. 2.11. К выводу дифференциальных зависимостей между $д_y$, $<2_y$ и M_x

Из первого уравнения после преобразований получим

$$\frac{dQ_y}{dz} = -q_z \qquad \textbf{(2-6)}$$

Первая производная от поперечной силы по продольной координате г равна интенсивности распределенной нагрузки, взятой с обратным знаком.

Из второго уравнения, пренебрегая членом (с!г)²/2 между u_y, $в_y$ и M, как величинои второго порядка малости, найдем

$$\frac{dM}{dz} = Q \qquad (2.7)$$

Первая производная от изгибающего момента по продольной координате равна поперечной силе.

Зависимость (2.6) с учетом (2.7) может быть записана в виде

$$\frac{d^2M_x}{dz^2} = -q_y \qquad \textbf{(2.8)}$$

Вторая производная от изгибающего момента по продольной координате г *равна интенсивности распределенной нагрузки, взятой с обратным знаком.*

Если к балке на участке, где выделяется элемент *йг,* приложена внешняя распределенная моментная нагрузка m_x, то, рассуждая аналогично вышеизложенному, из уравнения равновесия £Л/$_O$=0 получим зависимость

$$\frac{dM_x}{dz} = Q_y + m_x \qquad (2.9)$$

Первая производная от изгибающего момента по продольной координате г равна сумме поперечной силы и интенсивности распределенной моментной нагрузки.

Зависимость (2.6) в этом случае остается без изменения.

В дальнейшем индексы у u_y, m_x, M_x и б, будем опускать.

На основании полученных дифференциальных зависимостей (2.6), (2.7) можно сформулировать ряд основных положений, оказывающих помощь при построении эпюр поперечных сил и изгибающих моментов и позволяющих их контролировать.

1. На участке, где нет распределенной нагрузки (? = 0), поперечная сила постоянна, изгибающий момент изменяется по линейной зависимости, причем тангенс угла наклона а эпюры M равен силе Q.

»

Дифференциальные зависимости

Немецкий инженер Д. Ш в е д л е р (1851) установил соотношение (2.7) и показал, что «сечение, в котором изгибающий момент достигает своего максимального значения, является в то же самое время и тем сечением, в котором поперечная сила меняет знак»

Л.

у-

йг

Часть балки

В частном случае одновременно может быть <?=0 и 6=0, тогда изгибающий момент постоянен.

П П 1 \Ч

2. На участке, где имеется равномерно распределенная нагрузка, поперечная сила изменяется по линейной зависимости (тангенс угла наклона /? эпюры *Q* равен д), а изгибающий момент — по квадратичной зависимости, у которой выпуклость обращена в сторону действия распределенной нагрузки д.

©

Если на этом участке поперечная сила в одном из сечений равна нулю (б=А/'=0), то изгибающий момент в этом сечении принимает экстремальное значение $M_{ЖС1р}$ — максимум или минимум (здесь касательная к эпюре *М* горизонтальна).

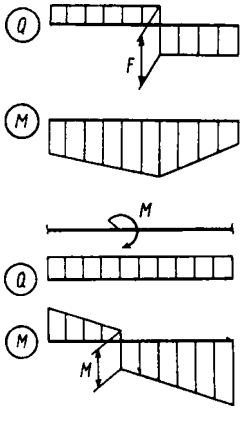
. ^-ггП

3. На участке, где имеется распределенная нагрузка, изменяющаяся линейным образом (например, треугольная нагрузка), поперечная сила изменяется по квадратичной зависимости, а изгибающий момент — по кубической. Выпуклость эпюры б устанавливается в зависимости от характера нагружения распределенной нагрузкой с использованием дифференциальной зависимости (2.6) или по ряду вычисленных значений *Q*. Выпуклость эпюры *М* обращена в сторону действия распределенной: нагрузки.

@1 II 1Ŧ^

1 **ГТг>^**

Л



4. В сечении, где приложена сосредоточенная сила *Р,* на эпюре *Q* будет скачок, равный значению этой силы и направленный в ту же сторону (при построении эпюры слева направо), а эпюра *М* будет иметь перелом, направленный в сторону действия силы Р.

5. В сечении, где приложен сосредоточенный изгибающий момент на эпюре *М,* будет скачок, равный значению момента *М;* на эпюре *()* изменений не будет. При этом направление скачка будет вниз (при построении эпюры слева направо), если сосредоточенный момент действует по ходу часовой стрелки, и вверх, если против хода часовой стрелки.

Правила построения *Q* и *М* в балках

При построении эпюр поперечных сил и изгибающих моментов будем придерживаться следующих правил:

1. Положительные значения откладывать от базисной горизонтальной линии вверх, а отрицательные — вниз.

2. Эпюру *М* строить со стороны растянутых волокон, т. е. положительные значения *М* откладывать вниз, так как эти моменты, согласно принятому правилу знаков, **вызывают растяжение нижних волокон, а отрицательные** значения — вверх.

Заметим, что используют и обратное правило: эпюру *М* строят со стороны сжатых волокон. Это правило обычно применяют в учебных пособиях, предназначенных для студентов машиностроительных специальностей.

Кроме того, напомним замечание (см. § 2.2), которое упрощает запись выражений для *Q* и *М:*

поперечная сила в поперечном сечении балки численно равна алгебраической сумме проекций внешних сил на вертикальную ось у, приложенных к оставшейся части балки; изги-

бающий момент — алгебраической сумме моментов этих же сил относительно горизонтальной оси х, проходящей через центр тяжести сечения, т. е.

$$<2= \overset{\text{ост.ч.}}{Ё}\ Я,и М= \overset{\text{ост л.}}{£}\ \boldsymbol{м_{,x}} \qquad (2.10)$$

Поэтому можно, мысленно представив оставшуюся часть балки с приложенной к ней внешней нагрузкой, составить выражения поперечных сил и изгибающих моментов, используя зависимости (2.10) и правила знаков для *Q и М,* приведенные ранее.

Рассмотрим несколько примеров построения эпюр Си *М.*

Прамер 2.5. Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для простой балки, нагруженной, как показано на рис. 2.12, *а.*

Решение. Сначала определим опорные реакции. Предположим, что вертикальные опорные реакции *Va* и Рд направлены вверх. Горизонтальная реакция.в шарнирно-неподвижной опоре *А* равна нулю, так как **внешняя** нагрузка перпендикулярна оси балки и поэтому на рис. 2.12, *а* не показана.

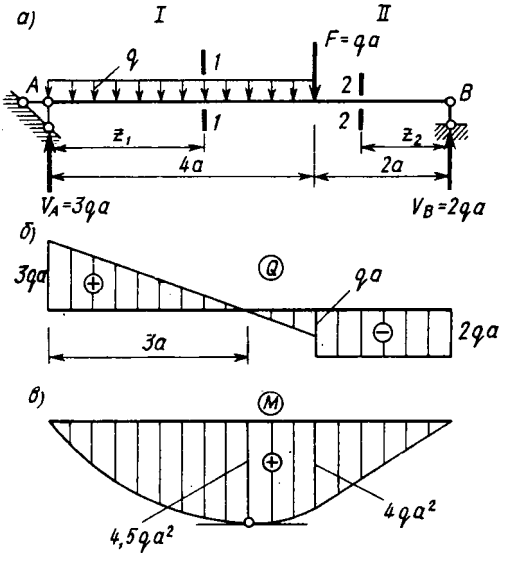
Составим уравнения равновесия — уравнения моментов относительно опор (точек *А и В)* — для того, чтобы реакции $У_А$ и Кд определить независимо друг от друга:

2,Мд=0, У_А6а—?4а (2в+2л)—*ца2а=0;*

$1, M_A = 0$, — Кд6а-(-94а2л-|-^в4л=0.

Отсюда

$У_А$ — 3?а и $У_в$=*2да.*



Положительные знаки, полученные из решения этих уравнений, у опорных реакций указывают на то, что их действительное направление совпало с предполагаемым.

Далее следует обязательно проверить правильность определения реакций V_A и *Уд,* составив следующее уравнение равновесия:

ЕУ-0, *'iqa—q4a—qa+2qa**0.*

Следовательно, реакции найдены верно.

В соответствии с характером нагружения разобьем балку на два участка (рис. 2.12, *а).* Для составления выражений дня б и *М* применим метод сечений. Рассечем балку в произвольных сечениях на каждом участке и рассмотрим на участке / равновесие левой части балки (ось *г* направлена вправо, начало координат в точке *А),* а на' участке *II* равновесие правой части (ось г направлена влево, начало координат в точке *В).*

Выражения поперечных сил и изгибающих моментов будут иметь следующий вид:

участок I

0<21<4л,

Й1 * 3_9а-$_9$гь $M_x = 3?$лг, -*ц*$г_x^{*1}$—;

участок II

$0<2_2<2a$,

$O,2 = —\ 2ча;\ M2\ *= 2\text{^}ог_2$.

Поперечная сила на участке *I* изменяется по линейной зависимости (зависит от г в первой степени). Поэтому для построения эпюры *Q* на этом участке достаточно вычислить значения *2* в начале и в конце участка: при =0 (?=3*ца;* при Г] =4а £? = *—да.*

Затем, отложив их, соединить прямой линией. На участке *II* поперечная сила постоянна (не зависит от г) и поэтому эпюра *0.* представляет собой прямую линию, параллельную базисной линии. Эпюра поперечных сил показана на рис. 2.12, *б.*

На участке *I* изгибающий момент изменяется по квадратичной зависимости (зависит от г во второй степени). Для построения эпюры *М* следует определить значения изгибающего момента в трех сечениях: в начале и в конце участка, а также в сечении, где 2=0, так как здесь момент достигает экстремального значения (максимума или минимума). Последнее утверждение следует из дифференциальной зависимости (2.7).

Вычислим значения *М* в начале и в конце участка: при *г* =0 *М*=0; при 7) =4*а М—^ца*[1]. Определим сечение, где 6=0. Для этого выражение поперечной силы @1 приравняем к нулю:

С^Зда-^-О;

отсюда 2| =3*а.*

Найдем значение *М* в этом сечении:

$А/_2$. _$з_а$=3^я3л—?3а —$\frac{Ъа}{2}$=4,5 *ца*^{2}.

Отложив вычисленные значения изгибающих моментов, проведем через них квадратную параболу с вершиной в сечении **2**\ = *За* (здесь касательная к эпюре *М* должна быть параллельна базисной линии).

Заметим, что при отсутствии сечения, в котором 2 = 0 и *М*= $А/_{эютр}$, определяют значение момента в сечении посередине участка.

На участке *II* изгибающий момент изменяется по линейной зависимости. Вычислим значения *М*:

при гг=0 *М**0; при m_2~2*а М~2да*[1] — и по этим ординатам построим эпюру *М.* Эпюра изгибающих моментов показана на рис. 2.12, *в.*

Пример 2.6. Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для консольной балка, нагруженной, как показано на рис. 2.13,

Решение. Определим опорные реакции из уравнений равновесия:

$$\Sigma M_B = 0,\ V_A 6a - \frac{1}{2} q 6a \frac{1}{3} 6a + 1{,}5qa^2 = 0;$$

$$\Sigma M_A = 0,\ -V_B 6a + \frac{1}{2} q 6a \frac{2}{3} 6a + 1{,}5qa^2 = 0,$$

отсюда «=0,75^0, *Удш*2,25<?а.

При определении опорных реакций распределенная нагрузка была заменена равнодействующей, которая равна площади этой нагрузки (площади треугольника) и приложена в ее центре тяжести, т. е. на

расстоянии Vз высоты треугольника от его основания: $\frac{1}{3} 6a = 2a$ (рис. 2.13, *а).*

Проверим правильность определения реакций:

$$£У=0,\ 0{,}75да — \frac{1}{2} д6а + 2{,}25да = 0.$$

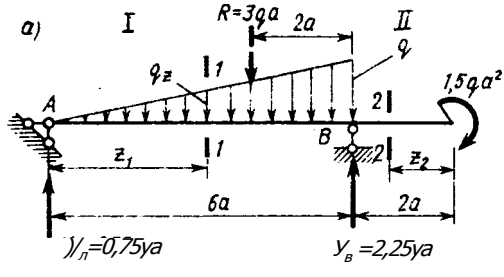
Следовательно, опорные реакция найдены верно.

Данная балка имеет два участка. Составим выражения *Q я М* для участков / и *II,* используя метод сечений.

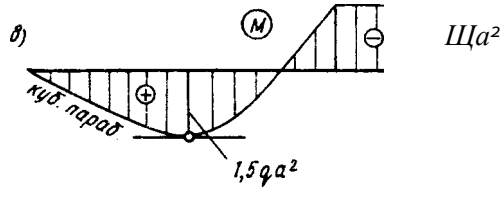
Для произвольного сечения *1—1* на участке /(()<*!< 6а) запишем

выражения 01 и *М\,* рассматривая равновесие левой отсеченной части балки:

$$Q_1 = 0{,}75qa - \frac{1}{2} q_z z_1 = 0{,}75qa - \frac{1}{2} q \frac{z_1}{6a} z_1,$$







2 3 2 *6a* 3

Ординату распределенной нагрузки q_z найдем из подобия треугольников с высотой **2** \ и 6а:

$$\frac{4z\ *\text{i}}{q\ 6a} \text{ и } q_z = q\text{—}. \quad \text{г,}\ 6a$$

Рассматривая равновесие правой части балки на участке *II* (0<22<2л) для сечения *2—2,* получим Аг—О, Ai» —1,5qa^1.

Таким образом, на участке *I* поперечная сила изменяется по квадратичной зависимости, а изгибающий момент — по кубической; на участке *II* поперечная сила равна нулю, а изгибающий момент постоянен.

Построим эпюру *Q.* Для ее построения на участке *I* вычислим значения:

при zi=0 *Q=0,75qa;* прн2|=6я *Q=-2,25qa.*

Через них проведем квадратичную параболу, обращенную выпуклостью вверх, так как в сечении *A* (zi =0) находится ее вершина: здесь ее первая производная равна нулю: $q_A = \text{——=>0}$ ($\frac{d\text{ß}}{dz}$ касательная к эпюре *Q* в этом сечении должна быть параллельна базисной линии). На участке *II* ß=0.

Построим эпюру *M.* Определим значения *M* в начале и в конце участка *I:*

при Z) —0 А/—0; прHZi»6а А/« —1,5qa^2.

На этом участке есть характерное сечение, где ß=0 и А/«=Л/$_{\text{ЭЖС1}}$р. Найдем его:

$$Qi=0,15qa\text{--}q\ \frac{1}{2}\ \text{—}\ \frac{Z\backslash}{6a}\text{»}0;$$

отсюда, решая квадратное уравнение, найдем *z* — 3*a* (второй корень не имеет физического смысла). Определим момент в этом сечении:

$$M_{z,\ \text{г}}\text{—зд“}0,75\text{^в}3a\text{—-о}\ \frac{1}{2}\ \frac{3a}{6a}\ \text{—}3a\ \text{—*}1,5aa\ .$$

По вычисленным значениям изгибающих моментов проводим кубическую параболу с вершиной при *z* —3*a* (касательная к эпюре *M* в этом сечении параллельна базисной линии). На участке *II* изгибающий момент постоянен: —1,5qa^2. Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов показаны на рис. 2.13, *б, в.*

Далее рассмотрим пример построения эпюр *Q и M* при более сложном виде нагружения балки, где целесообразно непосредственно использовать дифференциальные зависимости (2.6)—(2.8).

Пример 2.7. Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для балки, нагруженной распределенной нагрузкой, изменяющейся по квадратичной зависимости q_z**q f-J (рис. 2.14, а).

—гт-ттТГГГЛТ: <*В~

ШЯ,

к

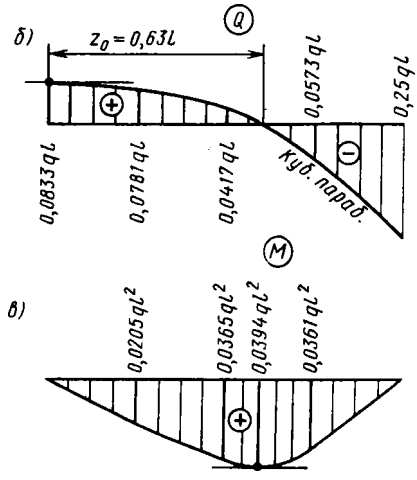


Рис. 2.14. К примеру 2.7

Решение. Выберем начало координат на левой опоре, направив ось **1** вправо, а ось *у* — вниз. Получим выражения б и *М,* используя дифференциальные зависимости. Так, применяя зависимость (2.8), запи-
. шем

<1 ^{г}M

*-Ч7

Здесь нагрузка *д* принята положительной, как и при выводе зависимости (2.8). Дважды интегрируя, найдем

$$\frac{ЛМ}{Аг} - С — \frac{а\,г^{2}}{I^{l}\,3} С ; \quad M - - - — \frac{а\,г^{*}}{I^{l}\,12} Сг+В.$$

Значения произвольных постоянных *Си И* определим из граничных условий:

при 7«0 А/—0, .0=0; при г«*/ ***М***=О, С=—. $\frac{д!}{12}$

Исходя из этого выражения С и ***М*** принимают вид

?/ *д***1** Г /гу

^{Р} **з "*"12*12 |_ V/.**

/а 12 12 12 1_/ \и .

Опорные реакции $У_А$ и *Уд* равны поперечным силам на опорах. Найдем их:

при г=0 $a_A = У_A$=—; при 7=/ $е_л$-$К_л$=-- $\frac{д/}{}$ $\frac{}{дI}$

(знак «—» относится к поперечной силе).

Приравнивая выражение *0,* к нулю, определим положение сечения, в котором изгибающий момент достигает экстремума:

БИТУ =0, откуда го=$\frac{^{3}\sqrt{2}}{}$ /5*0,63/.

Подставляя значение го в выражение *М,* вычислим

$M_{жсг?}=Mm_{IO}=-\frac{a!^{1}}{12}$ (0,63-0,63*) =0,0394$/'.

Используя выражения *Q* и *М,* определим значения поперечных сил и изгибающих моментов в сечениях 0,25/, 0,5/, 0,75/ и построим эпюры *О я М,* которые показаны на рис. 2.14*, б, в.*

§ 2.6. Усилия в рамах и криволинейных стержнях

■ Плоская рама

В конструкциях сооружений и машин встречаются совокупности прямых и криволинейных стержней. Стержневая система, стержни которой (стойки и ригели) во всех или в некоторых узлах жестко соединены между собой, называется *рамой.* Ось таких систем представляет собой ломаную линию. Если ломаная линия рамы лежит в одной плоскости, то ее называют плоской. В этом параграфе будем рассматривать только статически определимые плоские рамы и криволинейные стержни, учитывая, что:

1) ось стержня находится в одной плоскости;
2) все внешние силы лежат в той же плоскости;
3) сечения стержней имеют оси симметрии, которые также лежат в плоскости нагружения.

Тогда в сечениях стержней возникают только три внутренних усилия: продольная сила *Ы,* поперечная сила *Q,* изгибающий момент *М* относительно оси, перпендикулярной плоскости, в которой находится рама или криволинейный стержень.

Правило знаков для продольной и поперечной сил остается прежним, а для изгибающего момента обычно не вводят, но ординаты эпюры *М,* как и ранее, будем откладывать со стороны растянутых волокон; ординаты положительных усилий *N4(2* для горизонтальных стержней рамы будем откладывать вверх от их оси или вправо **для вертикальных** стержней, т. е. с внешней стороны рамы, а ординаты отрицательных усилий — соответственно в противоположном направлении: либо вниз, либо влево, т. е. с внутренней стороны рамы.

Рассмотрим пример построения эпюр *N. Q* и *М* в раме.

Пример 2.8. Построить эпюры ЛГ, б и *М* для рамы, показанной на рис. 2.15, *а.*

Решение. Определим опорные реакции из уравнений равновесия:

£2=0, *Ид — д4а* — 0, отсюда $H_{л}$

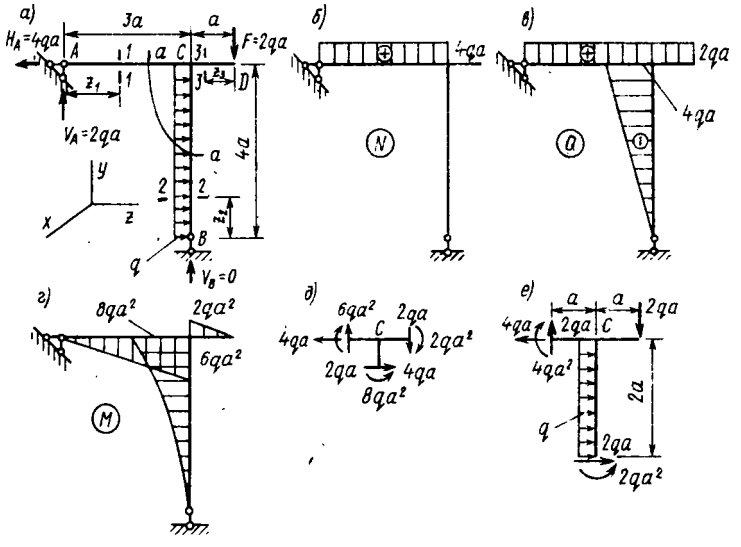


Рис. 2.15. К примеру 2.8

£Л/л = 0, —*Ув3а + 2да4а—д4а2а^=0,* отсюда *Ув=0;*

*ЕМс~0, У*л*3а+2даа—д4а2а=0,* отсюда $У_А=2да$.

Все реакции найдены независимо друг от друга. Проверим правильность их определения, составив следующие уравнения равновесия:

1У=0, *2да—2да=0;*
ЕМд=0, —4да4а+2да3а+2даа + д4а2а=0.

Следовательно, опорные реакции вычислены правильно.

Разделим рамы на три участка: *АС, ВС* и С£>. На каждом участке в произвольном месте проведем сечение (рис. 2.15, *а) я* составим уравнения равновесия для отсеченных частей рамы.

На участке *АС* (0<Г] <3а) в сечении *1—1,* рассматривая равновесие левой части рамы, получим:

#1=4*да, Q\=2qa,* Л/. *—2да?*$_1$

(растянуты нижние волокна стержня *АС).*

На участке *ВС* (0<Z2<4<J) в сечении *2—2,* рассматривая равновесие нижней части рамы, имеем:

$$^2 = 0,\ о1 = -дгг,\ M_г = дг_г \frac{*2}{2}$$

(растянуты левые волокна стержня *ВС).*

На участке *СО* (0<$г_3$< л) в сечении *3—3,* рассматривая равновесие правой части рамы, найдем:

$$Лз = 0,\ Q■_i^{\wedge} = 2qa,\ Мъ = 2цагу$$

(растянуты верхние волокна стержня *СВ).*

По этим выражениям построены эпюры продольных и поперечных сил, изгибающих моментов, изображенные на рис. 2.15, *б,* в, *г.*

Построенные эпюры следует проверить, используя дифференциальные зависимости между *д,* 2 и *М.* Кроме того, необходимо проверить равновесие узлов рамы, т. е. частей рамы, полученных проведением сечений, расположенных на бесконечно малых расстояниях от точки соединения стержней, и отдельных ее частей.

Рассмотрим равновесие узла С (рис. 2.15, *д),* приложив в сечениях внутренние усилия в соответствии с построенными эпюрами *N.* б и *М.* Даже не составляя уравнений равновесия, видим, что узел С находится в равновесии.

Проведем сечение *а—а* и рассмотрим равновесие правой части рамы (рис. 2.15, *е).* К этой части рамы приложим внешние нагрузки и в местах сечений продольные и поперечные силы, изгибающие моменты в соответствии с эпюрами *N.* С и *М.* Составим уравнения равновесия для отсеченной части:

Ег=0, —4да+д2а+2да=0; 2У= 0, 2^л—2^д=0;
ХА/с=0, *4да² + 2даа+2даа—д2аа—2да²—2да2а=0.*

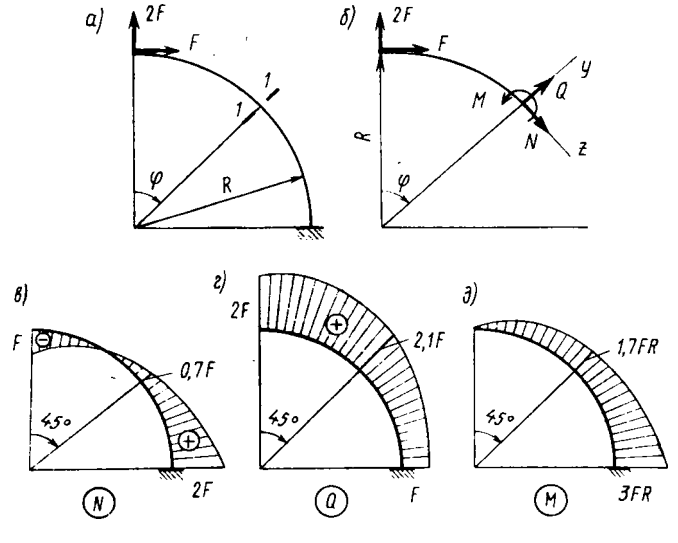
Следовательно, рассматриваемая часть рамы находится в равновесии.

В поперечных сечениях криволинейного стержня возникают те же внутренние усилия, что и в раме. Правила знаков и правила построения эпюр *N. Q* и *М* остаются такими же. Однако в отличие от рамы, состоящей из системы прямолинейных стержней, в криволинейном стержне продольная сила будет определяться как сумма проекций всех внешних сил, приложенных к оставшейся части, на касательную к оси стержня, а поперечная сила — как сумма тех же сил на нормаль к его оси.

Ось криволинейных стержней, как правило, очерчена по дуге окружности. И поэтому положение произвольного сечения целесообразно определять при помощи полярной системы координат. Тогда выражения внутренних усилий будут представлены как функции не продольной координаты г, как это было в прямых стержнях, а угла *(р.*

Рассмотрим пример построения эпюр *N. Q* и *М* в криволинейном стержне.

Пример 2.9. Построить эпюры *N. О* и *М* для криволинейного стержня кругового очертания (рис. 2.16, *а).*



Решение. Рассечем стержень в сечении *1—1* под произвольным углом *ср* и отбросим правую его часть. Уравновесим оставшуюся левую часть внутренними усилиями *N, Q* и *M* положительного направления (рис. 2.16, б). Запишем выражения этих внутренних усилий для данного произвольного сечения:

N=lF&mq>—Feos <p=F (2 sin <p—cos <p);
2=2Fcos<p+.Fsm<p=F(2cos<p+sm <э);
M=2FRáncp+F (R—RcoS(p)=FR (2sin<i>-t-1—cos<p).

Вычислим значения продольной и поперечной силы, изгибающего момента при различных углах *q>:*

при <p=0 *N=—F, Q—2F,* A/=0;
при 9=45° *N=0,7F, Q=2,IF, M=l,7FR;*
при *(p*=90° *N=2F, Q=F, M=2FR.*

Откладывая полученные значения внутренних усилий по нормали к оси (т. е. по радиусу), построим эпюры *N, Q и M* (рис. 2.16, в—á).

Вопросы для самоконтроля к главе 2

2.1. В чем сущность метода сечений?
2.2. Какие внутренние усилия могут возникать в поперечных сечениях стержня в общем случае нагружения?
23. Что называется эпюрой внутреннего усилия и для чего она строится?
2.4. Какое правило знаков принято для продольной силы?
2.5. Какая зависимость существует между продольной силой и интенсивностью продольной распределенной нагрузки?
2.6. Какое правило знаков принято для крутящего момента?
2.7. Какая зависимость существует между крутящим моментом и интенсивностью моменгной распределенной нагрузки?
2.8. Какие типы опор применяются для соединения балок с основанием и какие реактивные усилия могут возникать в этих опорах?
2.9. Какие условия должны выполняться для неподвижного соединения балок с основанием?
2.10. Какие типы балок используются в сооружениях?
2.11. Какие уравнения равновесия применяются для определения опорных реакций и как проверить правильность определения опорных реакций?
2.12. Какие системы называются статически определимыми и чем они отличаются от статически неопределимых систем?
2.13. Какой изгиб называется поперечным и какие внутренние усилия возникают в поперечных сечениях балки при поперечном изгибе?
2.14. Какое правило знаков принято для поперечной силы и изгибающего момента?
2.15. Какие зависимости существуют между поперечной силой, изгибающим моментом и интенсивностью вертикальной распределенной нагрузки?
2.16. Как изменяются эти зависимости, если к балке помимо вертикальной распределенной нагрузки приложена еще и моментная распределенная нагрузка?
2.17. Какие следствия вытекают из дифференциальных зависимостей при поперечном изгибе и как они используются при построении эпюр поперечных сил и изгибающих моментов?
2.18. Какие внутренние усилия могут возникать в поперечных сечениях плоских рам и криволинейных стержней?

Задачи к главе 2

2.1. Определить внутренние усилия в сечениях *1—1* и *2—2* пространственного стержня.

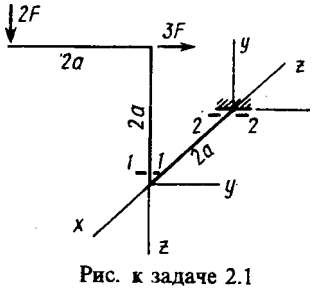


Рис. к задаче 2.1

2.2. Стержень, заделанный в стену, удерживается силами трения /= const, равномерно распределенными по ее толщине. Определить интенсивность сил трения /

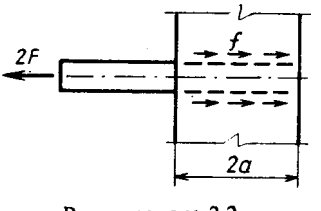


Рис. к задаче 2.2

2.3. Для стержня, находящегося в равновесии и нагруженного продольными силами, определить значение и направление *силы* (на рисунке ее направление показано условно) и построить эпюру продольных сил.

4Л

—X*	
. 2а	3а

2Р

Рис. к задаче 2.3

2.4. Для стержней, изображенных на рисунках *а а б,* построить эпюры крутящих моментов.

а) M 2M 5M 2M

5) /77 а2mam

M* ——————»I¹

Рис. к задаче 2.4

25. Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для балок, нагруженных, как показано на рисунках *а—е.*

Примечание. В ответах к задачам 3—5 даны наибольшие по абсолютным значениям ординаты эпюр 2 и А/; знаки указывают на их направление.

а) |?а ?д2



2.6. Определить длину консоли *а* из условия равенства нулю изгибающего момента посередине пролета балки.

10 кН/м 20 кН

2“ _ ■. 2м а J

Рис. к задаче 2.6

И'Л \ШН

ШШГГГГП

ЮкН/н

2м гм

*ОкН-м 20кН

2м 2м

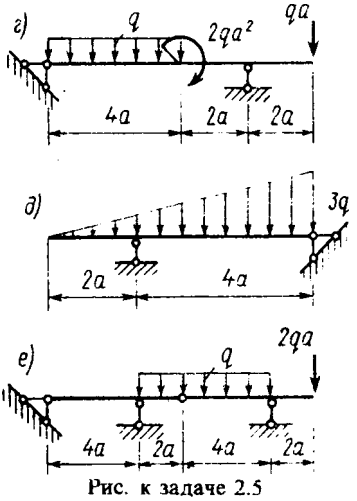
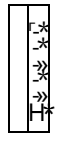


Рис. к задаче 2.5

1П, Для рам, нагруженных, как показано на рисунках *а в б,* построить эпюры продольных и поперечных сил, изгибающих моментов.

Вычислить наибольшие по абсолютному значению величины /V, 2 и А/.

а)



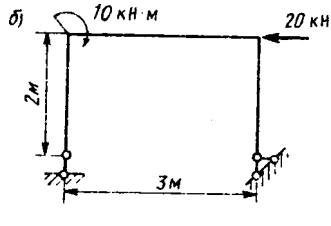


Рис. к задаче 2.7

2.1. Сечение *1—1: N=-2P,* 2* = 0, £>,= -3^ А/$_{г}$ = 0, M_x=*-2Pa,* M_y = 0; сечение 2—2: N=0, *Ох*= “ 3^, {>, = 2/\ А/, = 2/а, M_x = 47Ъ, А/^ = б/Ъ. 2.2. /= /7я. 2.3. ^ - Л Лт$_{наиб}$ = - 5К

2.4. а) А/$_{х}$ндцб= ЗА/; б) А/$_{?}$яяпбхЗ/ид. 2.5. а) ^на^б= *7^» А/$_{Н}$аиб~ *Я& » б) фдаиб" 30 кЫ, А/$_{Н}$яиД ~ 60 кН м, в) £?напб~ 20 кН, А/щщб = 40 к! { м, г) бнаиб= ^ 2^уд, А/щцд = + 2<уд , Д) Снаиб=—4,5<7Д, А/ддиб = 3,75<7Д , е) £?наиб“ ^3(?Д, А/наиб^{3}^ ±4^Д . 2.6. Д=1 м. 2.7. а) ^наиб“^» £?наиб “ А/наиб = 2^ ₾; б) ^наиб =: 10 кН, 2наиб ” X ^ О кН, А/$_{наи}$б = 20 кН М.

ГЛАВА 3

РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

§ 3.1. Напряжения и деформации при растяжении и сжатии. Закон Гука

В различных элементах конструкций и машин возникают только продольные усилия, которые вызывают в них деформацию растяжения или сжатия. Например, трос подъемника при подъеме груза растянут, колонны каркаса многоэтажного здания преимущественно сжаты, элементы ферм могут быть растянутыми или сжатыми и т. д.

В простейшем случае растянутый или сжатый стержень — это стержень с силами, приложенными к его концам и направленными вдоль его оси. Передача усилий к стержню может быть осуществлена различными способами, и от этого зависит характер распределения внутренних усилий в области, близкой к цагружению стержня внешними силами.

Барре де Сен-Венан (1797—1886) — крупный французский ученый в области механики, его основные труды посвящены теории упругости, сопротивлению материалов и гидродинамике

Рассмотрим резиновый стержень прямоугольного поперечного сечения, на поверхность которого нанесена равномерная прямоугольная сетка. Нагрузим этот стержень сосредоточенными растягивающими силами *P,* приложенными в центре тяжести концевых сечений. Стержень деформируется, как показано на рис. 3.1. Сечения стержня, примыкающие к месту приложения силы, искривляются и тем больше, чем ближе они располагаются к силе *P.* Об этом свидетельствует характер искривления вертикальных линий сетки. Такая неравномерная картина деформирования стержня имеет место в ограниченной области, обычно на расстоянии, примерно равном наибольшему размеру поперечного сечения от места нагружения. В этой области также будут неравномерно распределяться напряжения, что соответствует принципу Сен-Венана, который применительно к стержням может быть сформулирован так: *распределение напряжений существенно зависит от способа приложения внешних сил лишь вблизи места нагружения, а в частях, достаточно*

Принцип Сен-Венана

«Способ приложения и распределения сил по концам призм безразличен для эффектов, вызванных на остальной длине, так



генных от места приложения сил, распределение нажений практически зависит только от статического лвалента этих сил.

Следует заметить, что неравномерное распределение фяжений возникает также и в местах резкого измене-

I формы и размеров поперечного сечения бруса.

За пределами указанной области прямоугольная сетка

I искажается и остается равномерной, изменяются лишь р змеры ее ячейки. Вертикальные линии сетки перемещаются параллельно самим себе. Естественно предположить, что и внутри стержня деформации имеют тот же характер, что и на его поверхности. Следовательно, если представить, что стержень состоит из продольных волокон (стерженьков с бесконечно малым поперечным сечением), то все они удлиняются одинаково и, следовательно, поперечные сечения перемещаются параллельно начальным положениям. Такая картина деформации стержня соответствует гипотезе плоских сечений (гипотезе Я. Бернулли): *поперечные сечения стержня, плоские и перпендикулярные его продольной оси до деформации, остаются плоскими и перпендикулярными оси и после деформации.*

На основании гипотезы плоских сечений можно заключить, что так как все продольные волокна деформируются одинаково, то нормальные напряжения, вызывающие эти деформации, также должны быть одинаковыми и, следовательно, распределены по поперечному сечению равномерно, т. е. a_z=const. Используя зависимость

$$N=\int_A a_z dA$$

и учитывая вышесказанное, получим

$$N \sim a_z A,$$

откуда нормальные напряжения определяются по формуле

$$\sigma_z = \frac{N}{A}.$$

Формула (3.1) может быть применена при определении нормальных напряжений в растянутых стержнях и в коротких сжатых стержнях*.

Правило знаков для нормальных напряжений принимается то же, что и для продольной силы: *растягивающие напряжения будем считать положительными, сжимающие — отрицательными.*

В инженерных сооружениях встречаются растянутые или сжатые элементы, имеющие отверстия. В сечениях

что всегда возможно с достаточной степенью приближения заменить приложенные силы статически эквивалентными силами, т. е. имеющими тот же полный момент и ту же равнодействующую, но с распределением точно таким, какое требуют формулы растяжения, изгиба и кручения для того, чтобы стать совершенно точными»

Сен-Венан

Гипотеза плоских сечений

Якоб Бернулли (1654—1705) — старший в талантливой семье швейцарских ученых, математик, физик, механик

* При сжатии длинные стержни могут выпучиться. Это явление и расчет таких стержней рассматриваются в гл. 15.

с отверстием определяют осредненные норма, пряжения по формуле

$$\frac{N}{A_m}$$

где $A_m = A - A_{осл}$ — площадь поперечного сечения A — площадь поперечного сечения брутто; A_a щадь его ослабления.

Формула нормальных напряжений

При действии продольных сил стержень деформируется. Бели стержень растянут, то длина его увеличивается и становится равной /+А/, где А/— это *абсолютная продольная деформация* (удлинение) стержня. Поперечные размеры его уменьшаются и принимают значения А—АА и *Ь—АЬ,* где АЛ и АЛ — это *абсолютные поперечные деформации* стержня (рис. 3.2).

Деформации при растяжении

Отношение абсолютной продольной деформации стержня (элемента) к его первоначальной длине называется *относительной продольной деформацией*:

$$\text{Бпрод} — \frac{\text{г}}{} = \frac{A/}{\text{у}'} \qquad (3.3)$$

Роберт Гук (1635—1705) — английский естествоиспытатель, разносторонний ученый и изобретатель

Отношение абсолютной поперечной деформации стержня (элемента) к его первоначальному поперечному размеру называется *относительной поперечной деформацией*:

$$\text{^попер} — — \frac{AЬ}{Ь — ' A} \qquad (3.4)$$

Здесь знак «+» у деформации е* и знак «—»у деформаций e_x и E_y поставлены потому, что при растяжении продольные размеры стержня увеличиваются, а поперечные размеры уменьшаются. Для изотропных материалов поперечные деформации равны между собой, т. е.

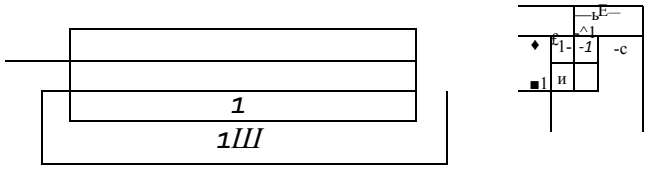
$$\text{^попер} \sim = \text{^у}^{ш} \qquad (3.5)$$

Деформации e_x, e_y и e_z называются также *линейными деформациями* и являются безразмерными величинами.

Закон Гука

«Сила любого упругого тела находится в постоянном отношения с удлинением, поэтому если одна сила растягивает или изгибает его на определенную величину, то две силы будут изгибать его на две такие величины, три — на три и так далее. И это есть Правило, или Закон, Природы,

Английский ученый Роберт Гук открыл фундаментальную закономерность между силами и вызываемыми



ими перемещениями. Э го произошло после многочисленных экспериментов при изучении поведения стальной проволоки, винтовой и спиральной часовой пружин, нагруженных грузами. Результаты своих наблюдений и изме]>ешш Гук в 1676 г. опубликовал в работе «Десяток изобретений, которые я намерен опубликовать», где среди различных проблем была «Истинная теория упругости и жесткости». Иод этим заголовком стояла лишь анаграмма из латинских букв ceiiinosssttuv, расставленных по алфавиту. Так в то время зашифровывали научные открытия, если еще не было уверенности в их достоверности. Лишь тремя годами позже, убедившись в справедливости своих выводов, Гук в трактате о пружинах «De potentia restitutiva or of spring» («О восстановительной способности или об упругости») расшифровал анаграмму в ьиде фразы «Ut tensio sic vis» — «Каково удлинение, такова сила». Гук сформулировал важнейшее соотношение,, устанавливающее прямо пропорциональную зависимость удлинения образца от растягивающей силы. В таком виде закон Гука имеет больше познавательное, чем практическое значение. Это в первую очередь объясняется тем, что в то время отсутствовали понятия «напряжение» и «деформация».

Работая над проблемой жесткости, английский ученый Томас Юнг в начале XIX столетия впервые высказал идею о том, что для каждого материала существует постоянная величина, характеризующая способность его сопротивляться воздействию внешних нагрузок. Понятие об этой величине, названной им модулем упругости (или позже модуль Юнга), было введено и сформулировано в 1807 г. в знаменитом труде «Натуральная философия». Оно отличалось от того, которым пользуются теперь. Юнгом были определены модули упругости для различных материалов из наблюдения частоты вибраций камертона, в частности модуль упругости для стали, равный 200 ГПа, который лишь на 5% отличается от значения, применяющегося в современных инженерных расчетах.

Модуль упругости характеризует важнейшее свойство конструкционного материала — жесткость — и является фундаментальным понятием, так как без него не обходится ни один инженерный расчет элементов конструкции и сооружения.

Следует отметить, что Юнг первый указал на то, что закон Гука справедлив только в определенной области работы материала, т. е. при упругом его поведении.

Последний шаг в формулировании закона Гука в его современном виде сделали французский математик Огюстен Луи Коши, который в 1822 г. сформулировал и ввел в научную литературу такие понятия, как «напряжение» и <<деформация», и французский инженер и ученый Луи Мари Анри Навье, который в 1826 г. дал определение *модуля упругости* как отношение нагрузки, приходящейся на единицу площади поперечного сечения, к произведенному ею относительному удлинению:

в соответствии с которым и происходят все виды Восстанавлив ающего, или Упругого, движения»

Роберт Гук

Томас Юнг (1773—1829) — английский физик, врач и астроном, один из создателей волновой теории света

«Модуль упругости какого-либо вещества представляет собой столбик этого вещества, способный произвести давление на свое основание, которое так же относится к весу, как длина столбика к уменьшению его длины»

Томас Юнг

•Огюстен Луи Коши (1789—1857) — выдающийся французский математик, известен не только работами в различных областях математики, но и в теории упругости ч оптике

Луи Мари Анри Навье (1785—1836)— известный французский инженер и ученый, нм издан первый систематический курс сопротивления материалов для инженеров

Модуль упругости

$$£ = \frac{\sigma}{\varepsilon}.$$

Таким образом, потребовалось почти 150 лет со дня открытия закона Гука, чтобы оно получило практическое применение в виде формулы

Формула закона Гука

$$\sigma = £ \varepsilon \qquad (3.6)$$

Отметим, что модуль упругости E является физической постоянной материала и определяется экспериментально. Его величина выражается в тех же единицах, что и напряжения σ, т. е. в Па, так как деформация е — величина безразмерная. Поскольку модуль упругости большинства материалов имеет большие числовые значения, его обычно выражают в ГПа. Например, для углеродистой стали £=206 ГПа, для меди E= 100 ГПа, для дерева £=10 ГПа. Значения модулей упругости для других часто применяемых материалов даны в табл. 3.1.

Таблица 3.1

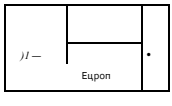
Значения модула уиругоств E и коэффпцаеята Пуассояа μ

Материал	E, ГПа	P
Сталь прокатная	206	0,3
Алюминиевые сплавы	70	0,3
Медь, латунь, бронза	100...130	0,31...0,35
Кетон	4...40	0,2
Кирпичная кладка	0,1...7,8	0,25
Древесина при растяжении (сжатии):		
вдоль волокон	10	0,5
поперек волокон	0,4	0,02
Резина	0,007	0,5
СВАМ при соотношении продольных и поперечных слоев:		
1:1	35	0,13
10:1	58	—
Пробка	—	0

Коэффициент Пуассона

Симон Дени Пуас-
_ЛИ (1741—1840)
---- В^ДЗ!(ИП»ЯСЯ
французский механик, физик и математик, пшроко известны его работы в облает« теоретической и небесной механикя, математической физики, теории упругости н гидромеханики

Абсолютное значение отношения относительной поперечной деформации к относительной продольной деформации при растяжении или сжатии в области действия закона Гука называется *коэффициентом Пуассона*:



(3.7)

Это безразмерный коэффициент, характеризующий свойства материала и определяемый экспериментально.

Коэффициент μ носит имя французского ученого Симона Дени Пуассона, который впервые ввел его в теорию сопротивления материалов. Пуассон считал, что при деформации растяжения или сжатия объем элемента не изменяется, а изменяется лишь форма. При таком подходе не учитывалось влияние материала и коэффициент

/1 принимался постоянным для любого материала и равным 0,25.

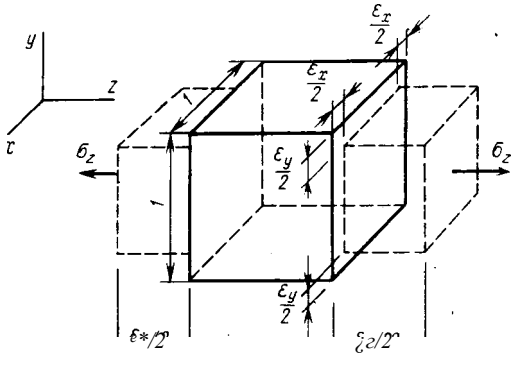
В дальнейшем английский исследователь Джордж Грин теоретически обосновывает, что коэффициент Пуассона не может иметь постоянного значения для всех материалов. После этого .были проведены различными исследователями многочисленные эксперименты, которые показали, что объем деформированного тела может изменяться за счет перераспределения атомных связей в структуре вещества и, следовательно, коэффициент Пуассона имеет постоянное значение только для данного материала в пределах упругих деформаций. Для различных материалов значения коэффициентов Пуассона находятся в пределах 0^/^0,5. Например, для большинства металлов 0,25 <^<0,35, а для бериллия /¿=0,03; в этом материале при растяжении межатомные расстояния благодаря очень жестким связям в поперечном направлении практически не сокращаются. Значения коэффициентов Пуассона для некоторых материалов приведены в табл. 3.1

Запишем теперь количественные соотношения между деформациями и напряжениями для изотропного материала при растяжении (сжатии). Рассмотрим элемент, выделенный из стержня, который растянут вдоль оси *г.* Такой элемент деформируется в продольном и поперечном направлениях (рис. 3.3). Деформация в направлении оси *г* на основании формулы закона Гука (3.6) равна

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} \tag{3.8}$$

поперечные деформации в направлении осей *х* и *у* с учетом выражений (3.5) и (3.7) равны

$$-№_г = -Ц\frac{}{E} \tag{3.9}$$



§ 3.2. Обобщенный закон Гука

В § 3.1 были даны зависимости между деформациями и напряжениями при центральном растяжении стержня из изотропного материала. Получим аналогичные зависимости в общем случае нагружения.

На гранях выделенного элемента возникают нормальное и касательное напряжения. Касательные напряжения на рис. 3.4 условно не показаны, так как они, вызывая деформации сдвига, не изменяют длины сторон элемента, т. е. линейные и угловые- деформации можно рассматривать как независимые.

Заметим, что последнее утверждение справедливо лишь для изотропного материала и в случае линейной зависимости между напряжениями и деформациями.

Воспользуемся принципом независимости действия сил (принципом суперпозиции) и рассмотрим линейные деформации в направлении оси *x,* обусловленные нормальными напряжениями (рис. 3.4).

От действия только напряжений a_x деформация в направлении оси *x* [см. зависимость (3.8)] равна

$$\varepsilon_x = \frac{}{E}.$$

От действия только напряжений a_y или a_z деформации в направлении оси *x* [см. зависимость (3.9)] соответственно равны

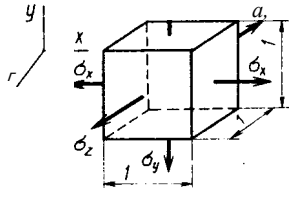
$$(Ty \qquad <T_2$$

Эти напряжения вызывают в направлении оси *x* поперечные деформации (уменьшение размеров элемента) и поэтому принимаются со знаком минус.

Складывая деформации $e_{,,}$ вызванные напряжениями c_x, *(Ty* и $a_{,,}$ окончательно получим

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \mu\frac{\sigma_y}{E} - \mu\frac{\sigma_z}{E}.$$

Рассуждая аналогично, можно получить выражения для линейных деформаций в направлении осей *у* и *г,* т. е. E_y и ε_z. Следовательно,



J

$$\pounds x = \frac{1}{E}[c^{*}\sim H(Oy+O_z)],$$

$$e^{*}=\sim \frac{K}{E}\text{-}/^{1}\ \text{fo+ff*})], \qquad (3.10)$$

$$\pounds z=\frac{-}{E}\ [<?x\text{-}Ц\ \{Cx+Gy)\}\text{-}$$

Формулы обобщенного закона

Полученные зависимости (3.10) являются аналитическим выражением обобщенного закона Гука для изотропного тела.

В эти формулы растягивающие напряжения подставляются со знаком плюс, а сжимающие — со знаком минус.

< § 3.3. Напряжения в сечениях, наклоненных к оси стержня, при растяжении и сжатии

Рассмотрим стержень, растянутый равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью ег. Определим напряжения на наклонной площадке, составляющей угол а с поперечным сечением (рис. 3.5, *а)*. Рассечем стержень по этому наклонному сечению и отбросим правую его часть. На наклонной площадке полные напряжения $p_{,,}$ будут направлены вдоль продольной оси и распределены равномерно (рис. 3.5, *б)*. Оставшаяся левая часть стержня находится в равновесии. Поэтому равнодействующие внешней нагрузки *а* и полных напряжений p_a должны быть равны между собой:

$$aA=p_aA_a,$$

где $A_л=Ajeos$ а — площадь наклонного сечения. Таким образом, полное напряжение на наклонной площадке

$$p_я = a \cos \text{ос}. \qquad \text{^ ц)}$$

Разложим полное напряжение на нормальное и касательное напряжения (рис. 3.5, *в)*. Тогда с учетом формулы (3 11) будем иметь

$$°a—Pa \cos a = a \cos a \cos a,\ m_a = p_a \sin a = a \cos a \sin a,$$



Рис. 3.5. Напряжения на наклонных площадках растянутого стержня

или

Напряжения на наклонной площадке

$$\sigma_a = \sigma \cos^2 a; \quad \tau = -\frac{\sigma}{2} \sin 2a. \tag{3.12}$$

По формулам (3.12) находим значения напряжений на наклонной площадке a,, и т,,. Их направления легко определяются из физических соображений. Возможны два варианта действия напряжений o_a и т,, (рис. 3.6).

Проведем анализ формул (3.12). Значения напряжений на наклонных площадках c, и т,, зависят от положения (ориентации) площадки, т. е. от ее угла наклона.

Анализ напряженного состояния

На площадках, совпадающих с поперечным сечением, т. е. при a —o, имеем

$$\frac{N}{A} = \sigma_{max}, \quad \tau_{,,} = 0.$$

Следовательно, нормальные напряжения будут наибольшими, т. е. $o_a = o_{т,,,}$, а касательные напряжения будут равны нулю.

На площадках, наклоненных под углом a=45°, имеем

$$\sigma_{45^\circ} = \frac{\sigma}{2}, \quad \tau_{45^\circ} = \frac{\sigma}{2}$$

т. е. касательные напряжения будут наибольшими а нормальные напряжения равны касательным.

На продольных площадках, т. е. при а=90°,

$\sigma_a = 0$, $\tau = 0$;

следовательно, нормальные и касательные напряжения будут иметь наименьшие значения.

Кроме того, следует отметить, что на двух взаимно перпендикулярных площадках касательные напряжения равны по абсолютной величине. Действительно,

$$\tau_{\alpha} = -\frac{1}{2} \sigma \sin 2\alpha, \quad \tau_{\alpha + 90^\circ} = -\frac{1}{2} \sigma \sin 2(\alpha + 90^\circ),$$

так как $\left| -\frac{1}{2} \sigma \sin 2\alpha \right| = \left| \frac{1}{2} \sigma \sin 2(\alpha + 90^\circ) \right|$

На площадках с экстремальными значениями нормальных напряжений (в продольных и поперечных сечениях) касательные напряжения равны нулю.

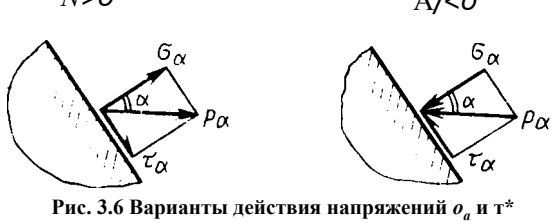


Рис. 3.6 Варианты действия напряжений o_a и т*

§ 3.4. Определение перемещений в общем случае растяжения и сжатия

Рассмотрим стержень, нагруженный на правом конце равномерно распределенной продольной нагрузкой, которая вызывает его растяжение. Выделим два произвольны?: сечения *а—а* и *Ь—Ь,* отстоящие друг от друга на расстоянии *6.2,* От приложенной нагрузки (рис. 3.7) сечение *а—а* переместится в положение a_x—*а* на расстояние aa_x ■= и» *(г),* а сечение *Ь—Ь* — в положение $Ь_1$—*Ь* на расстояние *ЬЬ* = и» (г) + с!н\ Следовательно, удлинение участка стержня длиной *йг* равно *Аб г=сЬм,* а относительное удлинение (деформация)

$$\varepsilon_z = \frac{}{dz}$$

Для линейно-упругого материала с учетом формул (3.1) и (3.8) выражение (3.13) можно записать в виде

г *Е*	$\frac{N}{EA}$

Формулы линейной деформации

т. е.

ён» *N*

йг ~~ ЕЛ'

или $и>' = \frac{}{ЕЛ}$ и $EAn' = M,$ (3-14)

где *ЕА — жесткость стержня при растяжении и сжатии.*

В ряде задач сопротивления материалов применяется дифференциальное уравнение, которое можно получить, используя зависимость сШ/£к=ЛГ= — /$_x$, и продифференцировав выражение (3.14):

(ЕАу»У=&, или

$$ЕЛп^{н} = -1_{г}. \quad (3.15)$$

аа, =ш(г) *ЬЬ,=о/(г] >с!иг*

а	ГГ*	*-*	
	1 а' ., а,	*К* -Л*	—\ -ч
а £	. ь *йг*		
	1		*А1*

Интегрируя уравнение (3.14), определим перемещение произвольного сечения:

$$\int \frac{N}{EJ}\,dz+C.$$

Постоянную интегрирования С найдем из следующего условия: при г=0 и< (0) = >y_0. Отсюда следует, что

С=м>(0) = н'$_о$— перемещение левого сечения стержня.

В результате имеем

Перемещение произвольного сечения

$$w(z)=w_0+\int_0^z \frac{N}{EA}\,dz. \qquad (3.16)$$

Если на некотором участке $ff_x=N/A$=const, то

$$w(z)=w_0+\frac{}{EA}z; \qquad (3.17)$$

следовательно, на этом участке перемещения изменяются по линейной зависимости, а деформация £j=const. Полное удлинение стержня, определяемое по формуле $Al=w(/) — w(0)$, по (3.17) равно

I

Полное удлинение (укорочение) стержня

$$Д/=\frac{}{EJ} \qquad (3.18)$$

Если стержень нагружен продольными нагрузками так, что имеется несколько участков, то на каждом участке следует:

I) при постоянном напряжении a_z=const использовать уравнение (3.17);

2) при переменном напряжении a_zфconst применять уравнение (3.16).

Постоянные интегрирования на участках (или перемещения в начале участков) определяют из условия сопряжения участков между собой (условий непрерывности функции перемещения в сечении при переходе от одного участка к другому).

Сформулируем правило знаков для продольных перемещений: *положительным перемещениям соответствуют перемещения, совпадающие с положительным направлением оси z.*

Пример 3.1. Для стержня, нагруженного, как показано на рис. 3.8, *а,* построить эпюру продольных перемещений IV (г).

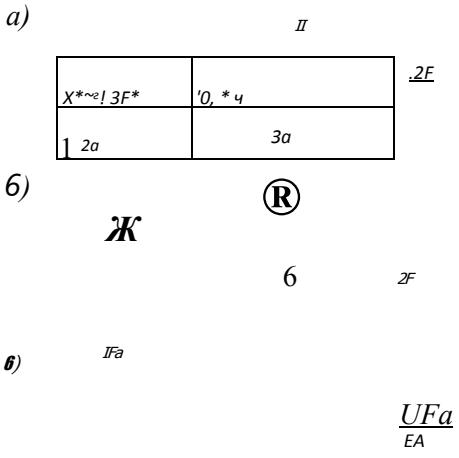


Рис. 3.8. К примеру 3.1

Решение. Разобьем стержень на два участка: *I* и *II.* Определим продольные усилия на каждом участке и выберем локальные системы координат с началом координат в точках *Оу* и 0_2. Запишем перемещения для участков *I* и *II,* используя выражение (3.17), так как $<x_г=$ =const.

Участок /: $0<z_(<2а$,

$$N\backslash=F,\ \mathbf{и}>_1 = \mathbf{н}>01-(\frac{Л}{ЕЛ}.$$

Участок II: $0<Г2<3а$,

$$N_2=-2F,\ w_2 = wta\frac{2Fz_2}{EA}.$$

Здесь woi =0, так как это есть перемещение сечения при z,= 0, т. е. у заделки. Следовательно,

$$tv,=\frac{Fz_{(}}{EA} \qquad (3.19)$$

Значение н>02 найдем из условия непрерывности функции перемещений на грану* участков, т. е. при zj =2д и z_2=0:

$$и\text{-}!\ (2a) = WQ2;\ н\text{-}_{02} = \frac{Fla}{EA}$$

Следовательно,

$$w_2 \frac{гра}{EA\ EA'} \qquad (3\ 20)$$

Заметим, что н'ог — жесткое смещение правой части стержня (второго участка) в результате < деформирования участка / (левой части стержня).

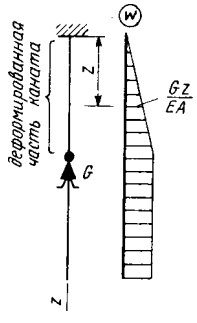
Эпюра продольных сил показана на рис. 3.8, *б.*

Эпюра перемещений и» на каждом участке изменяется по линейной зависимости. По выражениям (3.19) и (3.20) определены значения перемещений при **1** \ = *2а* и *2=3а:

$$и\text{-}, (2д) = \frac{2Pa}{ЕЛ} \text{ ч } -2(3а) = \frac{4.Pa}{ЕЛ}.$$

Эпюра продольных перемещений показана на рис. 3.8, *в.*

Отметим, что на участке положительных значений эпюры *Ф* сечения будут перемещаться вправо (перемещения совпадают с положительным направлением оси г), на участке отрицательных значений — влево (перемещения не совпадают с положительным направлением оси г).



Остановимся еще на одном важном моменте. Очень часто путают два понятия — «деформация» и «перемещение» — хотя ясно, что они не адекватны. Например, представим себе канат, прикрепленный к потолку. По канату на некоторую высоту поднялся человек. Очевидно, что под действием веса человека (пренебрегая весом каната) деформируется (растягивается) только верхняя часть каната, заключенная между потолком и местом, где находится человек. Нижняя часть каната не деформируется, а перемещается как твердое тело.

Следовательно, не всегда перемещения сечений какого-то участка стержня непосредственно связаны с его деформацией.

Снова вернемся к примеру 3.1 и решим его другим способом. Определим перемещения сечений, используя принцип независимости действия сил (принцип суперпозиции) и рассуждения, приведенные выше.

Сечение, принадлежащее концу участка /, переместится в результате деформации части стержня, заключенной между этим сечением и заделкой (длина участка *Г).* Найдем деформацию данной части стержня от каждой силы в отдельности и их сумму:

$$и*!(2а) = \frac{3Р2я}{ЕЛ} - \frac{2Р2а}{ЕЛ} = \frac{2Ра}{ЕЛ}.$$

Сечение переместится вправо.

Крайнее правое сечение переместится в результате деформации всего стержня: от силы 3Р растягивается участок /, а остальная (правая) часть переместится как жесткое тело, включая и рассматриваемое сечение; от силы 2Р сжимается весь стержень. Определим перемещение этого сечения:

$$\mathbf{H>2}(5а) = \frac{3Р2л}{ЕЛ} - \frac{2Р5а}{ЕЛ} - \frac{4Ра}{ЕЛ}.$$

Сечение переместится влево. Естественно, что получен такой же результат, как при решении вышеизложенным способом.

Учет собственного веса. В ряде практических задач в качестве внешней нагрузки встречается равномерно распределенная продольная нагрузка. К ней относится собственный вес стержня при условии, что поперечное сечение его остается постоянным на некотором участке. В этом случае распределенная нагрузка равна $¡¡ = yA_{1j}$ где

у — объемный вес материала стержня; Л, — площадь поперечного сечения.

Рассмотрим стержень с постоянным поперечным сечением площадью *А,* закрепленный верхним концом и нагруженный только собственным весом. Выберем систему координат с началом в точке *О* (нижнее сечение) (рис. 3.9, *а).*

Расчетная схема такого стержня может быть представлена в виде невесомого стержня, нагруженного равномерно распределенной продольной нагрузкой (направлена вниз) интенсивностью *(=уА* (рис. 3.9, *б).*

Значение продольной силы в произвольном сечении (на расстоянии *г* от нижнего конца) равно весу нижележащей части стержня: *(г — уАг.* Напряжение в этом сечении *о*=И1А = уг.* Следовательно, продольная сила и нормальное напряжение пропорциональны *г.* Эпюры *N я а* изображены на рис. 3.9, *в, г.*

Перемещение произвольного сечения от действия собственного веса в соответствии с формулой (3.16) равно

$$и>(г) = Ук'_0 + \frac{уАг}{ЕЛ} < Ьг = М> о + \frac{уАг^2}{ЕА2}.$$

I

Найдем н>$_0$ из условия, что при *2 — 1* (сечение у заделки)

и- (/)=0:

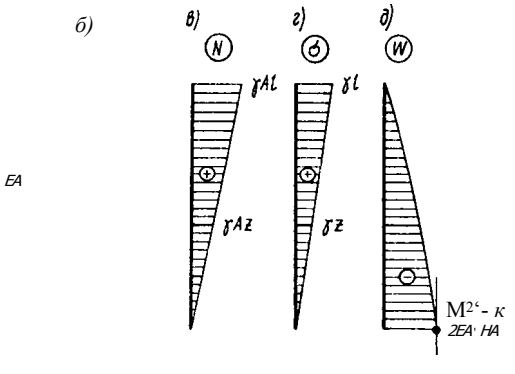
$$и'оН - \frac{уА\,I^2}{ЕА\,2} = 0,$$

отсюда $и>о = \frac{уА1^2}{2\,ЕА}$

Выражение для определения перемещений примет вид

$$и^*(г) = \frac{уА1^2}{2ЕА} + \frac{уЛг^2}{2\,ЕА} = \frac{уА_2}{ЕА}(г^2 - Г).$$

Следовательно, перемещение *V/* изменяется по квадратичной зависимости с экстремумом при 2=0, так как



$w' = N|(EA)$ (рис. 3.9, *д*). Перемещение нижнего сечения стержня (при $z=0$) равно

Полное удлинение (укорочение) стержня от собственного веса

$$\max w = w(l) = \Delta l = \frac{\gamma A l^2}{2EA}, \text{ или } \Delta l = \frac{a}{2EA} \qquad (3.21)$$

где $C \sim \gamma A l$ — вес стержня.

Пркмер 3.2. Определить перемещение сечения *1—1* ступенчатого стержня (рис. 3.10, *а*) с учетом собственного веса (объемный вес материала — *у).*

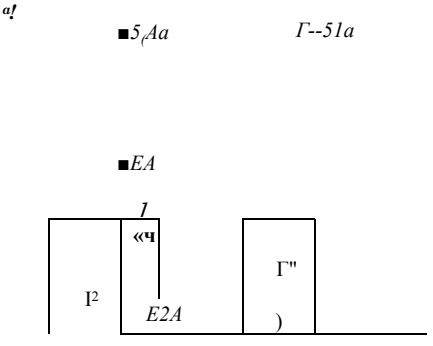


Рис. 3.10. К примеру 3.2

Решение. Разобьем стержень на два участка: / и *II.* Выберем локальную систему координат на каждом участке. Примем за расчетную схему стержня невесомый стержень переменного сечения, нагруженный равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью $q_1 = 2q$ (рис. 3.10, *б).*

Продольная сила в произвольном сечении z_2 участка *II* (из рассмотрения равновесия верхней части стержня) равна

$$N_2 = 5q - 3a = 2z_2 = 2a - 2z_2.$$

Сечение *1—1* располагается в начале участка *II* ($z_2 = 0$), поэтому $w'_1 = w'_{02}$. Следовательно, можно составить выражение перемещений w_1 только для этого участка по формуле (3.16):

$$w_2 = w_{02} + w'_{02} z_2 + \int_0^{z_2} \frac{N_2 dz_2}{EA} = w_{02} + w'_{02} z_2 + \int_0^{z_2} \frac{2a - 2z_2}{EA} dz_2$$

Найдем значение из условия (2я)=0 (сечение у заделки):

$$C = w_{02} = -\frac{2a}{EA} \cdot a + \frac{1}{2EA} (2a)^2;$$

отсюда $w'_{02} = w'_1 = 0$.

Сечение *1—1* в этом примере перемещаться не будет.

Стержень равного сопротивления. Влияние собственного веса следует учитывать в конструкциях, имеющих большую длину, например канатах шахтных подъемников, штангах бурильных устройств либо в массивных конструкциях — опорах мостов, заводских трубах и др. В этих конструкциях рационально применять стержни переменного сечения, у которых напряжения во всех сечениях были бы одинаковыми и близкими к предельно допустимым для данного материала. Такой стержень называется *стержнем равного сопротивления растяжению или сжатию* (рис. 3.11, *а*). Форма его боковой поверхности ограничена кривой, а площадь поперечного сечения изменяется по экспоненциальному закону. Продольная сила также изменяется по этому же закону, а нормальные напряжения во всех сечениях остаются постоянными: $o_z = N(z)/A$ (z) = const (рис. 3.11, *б, в*). Постоянными будут и относительные удлинения: $E=O/E$, перемещения сечений w изменяются по линейной зависимости, так как $E = W'$ (рис. 3.11, *г, д*).

Стержень равного сопротивления

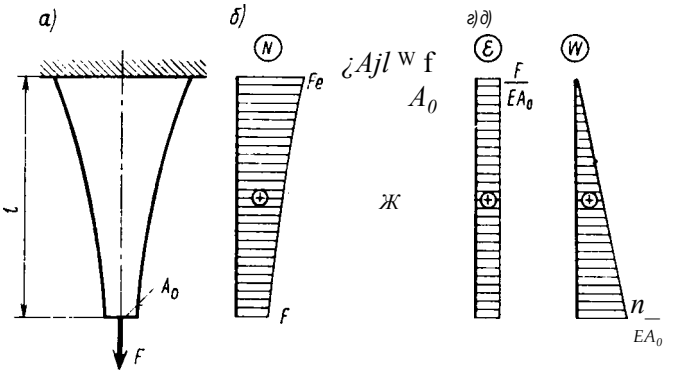
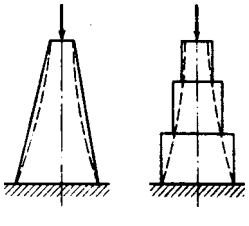


Рис. 3.11. Стержень равного сопротивления

Стержень равного сопротивления относится к равнопрочной конструкции и является наиболее экономичным с точки зрения расхода материала. Однако из-за сложной формы боковой поверхности изготовление его затруднительно, поэтому часто вместо стержня равного сопротивления в инженерной практике применяют стержни либо с наклонными боковыми гранями, либо ступенчатые.



§ 3.5. Статически неопределимые системы

В инженерной практике часто встречаются системы, в которых число наложенных связей больше числа уравнений равновесия. В этих системах невозможно определить как усилия в связях, так и внутренние усилия, используя только уравнения равновесия. Такие системы называются *статически неопределимыми.* Они должны быть геометрически неизменяемыми.

Статически неопределимые системы

Степень статической неопределимости

Разность между числом неизвестных и числом независимых уравнений равновесия, которые можно составить для данной системы, называют *степенью статической неопределимости.*

Рассмотрим несколько систем, изображенных на рис. 3.12, *а—в.* На рис. 3.12, *а* показана система, состоящая из абсолютно жесткой балки, которая прикреплена при помощи трех стержней. Усилия в этих стержнях можно определить, составив три уравнения равновесия. Такая система статически определима. Усложним систему, добавив еще один вертикальный стержень (рис. 3.12, *б).* Число уравнений равновесия осталось прежним — три, а число неизвестных стало четыре. Такая система будет один раз статически неопределима. Усложняя систему дальше, т. е. вводя еще один стержень (рис. 3.12, *в),* получим два раза статически неопределимую систему.

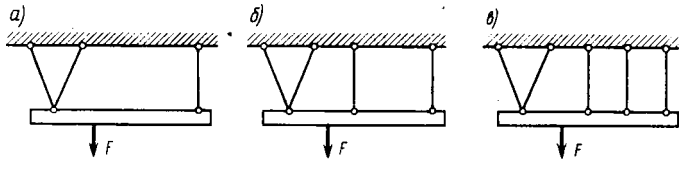


Рис. 3.12. Статически определимая и статически неопределимые системы

Неизвестные усилия в статически неопределимых системах могут быть определены, если условия равновесия дополнить условиями, характеризующими деформацию данной системы. Число этих дополнительных условий (уравнений) равно степени статической неопределимости системы. Их условно называют *уравнениями перемещений.* Так, для системы, изображенной на рис. 3.12, *б,* уравнение перемещений составляется из условия, что после удлинения стержней их нижние концы должны располагаться на прямой, так как они связаны с жесткой балкой.

Рассмотрим решение простейших статически неопределимых систем (раскрытие статической неопределимости) на ряде примеров.

Пример 3.3. Стержень переменного сечения жестко заделан с двух концов и нагружен силой P= 40 кН (рис. 3.13, *а).* Построить эпюры *N я а.*

Решение. От действия силы P в заделках возникают опорные реакции $Я_A$ и $К_в$. Примем их направления противоположными направлению силы P. Составим единственное уравнение равновесия:

E2=0; $-Л_в+Р-Я_A = 0.$

Число неизвестных превышает число возможных уравнений равновесия на единицу. Следовательно, система один раз статически неопределима.

Для ее решения необходимо составить одно дополнительное уравнение — уравнение перемещений. Оно в данной задаче выражает следу-

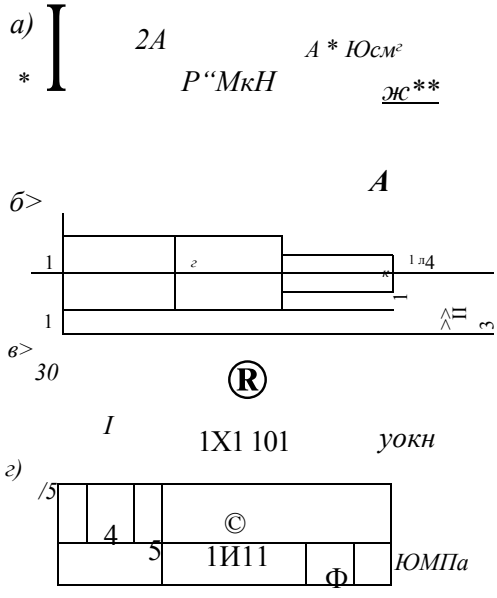


Рис. 3.13. К примеру 3.3

ющую мысль: длина стержня не может измениться, так как он жестко заделан с двух сторон, т. е.

$$Д/=0. \qquad (а)$$

Отбросим одну из заделок, например правую, и заменим ее действие на стержень реакцией $Я_A$ (рис. 3.13, б). В этой системе (теперь статически определимой) в соответствии с уравнением (а) должно выполняться условие Д/=н’^=0. Запишем его, используя принцип независимости действия сил:

$$*л = "ле+»м_A' \quad \frac{Ля\ Я_A a\ 2а}{E2A} \quad \frac{}{EA} \quad \frac{}{"\ E2A} =$$

отсюда $Я_A$ =Р/4 —10 кН.

Подставляя в уравнение равновесия полученную реакцию $Я_A$, найдем

$$Яв=Р—Я_A*=40—10 = 30 \text{ кН}.$$

Реакции $Я_A$ и $Яв$ определены и получены со знаком плюс, что указывает на правильность выбранного направления. Таким образом, раскрыта статическая неопределимость системы.

Эпюра продольных сил строится обычным путем, с применением метода сечений; ее изображение дано на рис. 3.13, *в*.

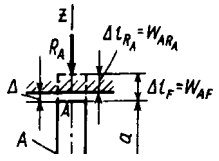
Нормальные напряжения определяются по формуле $о=К/А$ на трех участках:

$$\text{левом} — <_7=+\frac{ЗОЮ^3}{\mathbf{20\ \ КГ^4}}\cdot *= +15'\ 10\ Па«= 15\ МПа\ (растяжение);$$

$$\text{среднем} - \frac{10\text{-}10^3}{20\quad 10^{-4}} \quad 5'10® Па-—5\ МПа\ (сжатие);$$

$$\text{правом} — а— \frac{10\text{-}10^3}{10\text{-}10\text{-}*} — 10‘\ 10*\ Па — —10\ МПа\ (сжатие).$$

Эпюра нормальных напряжений изображена на рис. 3.13, *г*.

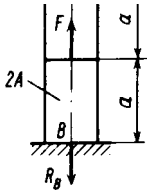


При наличии зазора А, например между правым концом стержня и заделкой, и условия, что зазор будет перекрыт при нагружении стержня, уравнение равновесия остается таким же, а уравнение перемещений примет вид

Д/=и^ = Д,

или

$$\text{ц} \cdot \frac{Fa}{E2A} \frac{R_{A\text{Ü}}}{EA} \frac{Ял2а}{E2A} : — \text{A}$$



Далее решение выполняется в том же порядке, как показано выше.

Прамер 3.4. Для системы, изображенной на рис. 3.14, *а,* определить силу F_y п р и которой в наиболее напряженном стержне напряжения достигнут значения 240 МПа; *1=2* м; Л —10 *ал;* я=60°.

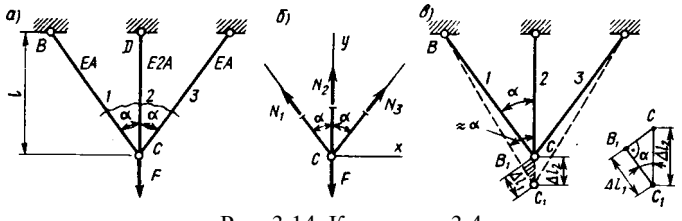


Рис. 3.14. К примеру 3.4

Решение. Вырежем узел С, считая возникающие усилия в стержнях растягивающими (рис. 3.14, *б).* Составим два уравнения равновесия:

1.X=0; —N sin a+ N_3 sin a=0 или $N_1 = Ny$,

ГУ=0; *N\ costt+Ni+Nicosx—F=0.*

С учетом первого уравнения равновесия второе можно записать так:

F=2N cos a+.До-

полученных уравнений равновесия недостаточно для определения усилий в стержнях. Необходимо дополнительно составить одно уравнение перемещений. Следовательно, система один раз статически неопределима.

Для составления уравнения перемещений рассмотрим деформированное состояние системы. При нагружении системы силой *F* узел С опускается по вертикали (рис. 3.14, в), так как удлинения *А1—Щ(ЕА)* крайних стержней будут одинаковыми: усилия *N* =Л/з, длины стержней

/| = $/_3$, жесткости их также равны: *EA\ =*EA*$_3$. Новые положения крайних стержней показаны пунктиром. Отрезок СС$_1$—Д$_2$ представляет собой

удлинение среднего стержня, равное вертикальному перемещению узла *С.* Для определения удлинения левого крайнего стержня радиусом *ВС* проведем дугу с центром в точке *В* до пересечения с новым его положением. Отрезок *B\C* = Д/i представляет собой удлинение стержня *ВС.*

Вследствие малости удлинения стержней (по сравнению с их длиной) можно считать, что угол а практически не изменяется и дуга может быть заменена перпендикуляром, опущенным из узла С на новое направление стержня. Тогда из прямоугольного треугольника *CB\C* (на рис. 3.14, в он заштрихован) получим соотношение

Д/j = Д$_2$ cos a, (а)

которое является уравнением перемещений. Учитывая, что

$$Д/,\frac{N,I}{EA\cos а};\ Д/_2\frac{Nil}{E2A},$$

и подставляя эти значения в уравнение (а), найдем

$$N[=\frac{}{2}\cos^2 а;\ N_2 = INJcos^1 г. \qquad (б)$$

Выразим усилия $N\backslash$ и N_2 через усилие F, подставив соотношение (б) во второе уравнение равновесия:

$$NI=N_3=\frac{F\cos^2 а}{1+м«^3а\ 2};\ Ъ\text{-}\ \frac{F}{1+«к^3а}$$

Определим напряжения в крайних и среднем стержнях:

$$P\ со5^2а \qquad N_2\ P\ 1$$

Из этих выражений видно, что <7(2) >0(1) и, следовательно, при увеличении силы напряжения в среднем стержне быстрее достигнут значения 240 МПа, чем в крайних. Поэтому, приняв напряжение <Т(2)=240 МПа, из второго выражения (в) найдем значение

Рул = 240' 10е' 2 ‘ 10 * 10—■* (1+0,5^3) = 540 кН.

Элементы статически неопределимых систем могут быть изготовлены с неточностями. При сборке систем это приводит к перераспределению усилий (иногда нежелательному). Рассмотрим следующий пример.

Пример 3.5. Нагрузка в виде силы 5=900 кН должна передаваться через жесткую балку на три железобетонные колонны с одинаковым поперечным сечением площадью A =400 см^2. При сборке системы было обнаружено, что средняя колонна изготовлена короче крайних на Д=0,15 см (рис. 3.15). Определить усилия и напряжения в колоннах. Приведенный модуль упругости £=20 ГПа.

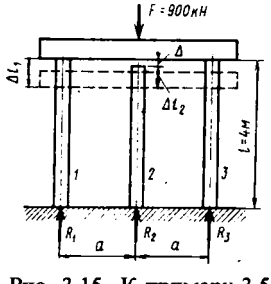


Рис. 3.15. К примеру 3.5

Решение. Проверим, устраняется ли зазор после приложения нагрузки. На крайние колонны передаете» усилие N^^ $F|2$•‘$4SQ$ кН, при этом колонны укоротятся на длину

Следовательно, зазор при нагружении будет перекрыт, т. е. <5= =0,225 см> Д=0,15 см, и внешняя нагрузка будет восприниматься тремя колоннами.

Можно составить два независимых уравнения равновесия, а неизвестных — усилий в колоннах — три. Поэтому система один раз статически неопределима.

Уравнения равновесия:

2У-0; $N_1+N_2+N_3-F=0;$ (а)

$ZM_A=0;\ Nia-Nja\sim$ 0, ЛГ,-ЛГ$_3$. (б)

Подставляя (б) в (а), получим

$F=2N_1+N_2$. (в)

Рассмотрим деформированное состояние системы. При нагружении сначала будут деформироваться крайние колонны. После исчезновения зазора начнут деформироваться все колонны. Уравнение перемещений (рис. 3.15) запишем в виде

Ali—Д/$_2$—Д, или $\dfrac{Nil\ N_2l}{ЕЛ\ ЕЛ}$—Д;

отсюда

№-№ =$\dfrac{ДЕЛ\ 0{,}1510\text{-}^{a'}20\ 10^9\text{-}400\ 10\text{-}*}{/\qquad\qquad 4}$ -300 10* Н-300 кН,

или $N\backslash_{=/^2}$ + 300. (г)

Решая совместно уравнения (в) и (г), найдем усилия в колоннах:

JV, = $_JV_3$=400 кН, $Я_2$-100 кН.

Напряжения в колоннах будут следующими:

$0(I\backslash$ =<$Г(Я$=$\dfrac{400\ 10*}{400\text{-}10\text{-}*}$ —10*10® Па— —10 МПа; ffm*$\dfrac{100\ 10*}{400\ 10\text{-}*}$ т — = -2,5 10* Па--2,5 МПа.

Если бы все стойки были изготовлены одной длины, то ÎÎ|=/Î$_2$“^$_3$=

—900/3 — 300 кН, а <Г(1) — ^(2) — *^(3)=—7,5 МПа.

Таким образом, отклонение от проектных размеров при изготовлении средней колонны привело к перегрузке крайних колонн на 33,3% н к разгрузке средней колонны на 66,6%.

В качестве внешнего воздействия на системы помимо различных видов нагрузок может быть изменение температуры — нагревание или охлаждение. В статически определимых системах при этом элементы ее могут беспрепятственно деформироваться и поэтому усилий и соответственно напряжений не возникает. При изменении температуры в элементах статически неопределимых систем возникают дополнительные усилия, так называемые *температурные усилия (напряжения)*.

Пример 3.6. Перекрытие цеха промышленного предприятия состоит из железобетонных плит, уложенных на кирпичные стены при температуре (о— — 10°С с зазором у одной из стен, равным Д—4 мм (рис. 3.16, *а).* Температура в цехе может повыситься до 90°С.

Возникнут ли дополнительные температурные напряжения в плитах перекрытия? Если эти напряжения возникнут, то чему они будут равны? Силами трения между плитой и ее опорной частью пренебрегаем.

Толщина плиты Л=20 см; коэффициент линейного расширения железобетона а=12 10"6 "С-1, приведенный модуль упругости £=20 ГПа.

Расчетная схема конструкции показана на рис. 3.16, *б.*

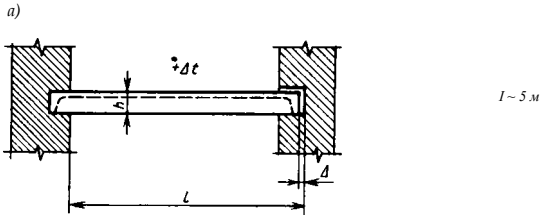


Рис. 3.16. К примеру 3.6

Решение. Найдем удлинение плиты при увеличении температуры на Д/ = 90 —(—10)=100°С:

$Al,=aAtl=$ 12' 10~^{6} 1100'5 = 6■ 10^{-3} м=6 мм.

Имеющийся зазор между плитой и стеной Д=4 мм < Д/,=6 мм,

и поэтому стена будет препятствовать свободному удлинению плиты. Следовательно, система является статически неопределимой, так как возникнут сжимающие реактивные усилия R_A и R_j *(рис.* 3.16, в), т. е.

два неизвестных, а уравнение равновесия, которое может быть составлено, только одно:

EZ=0; $R_{¿}$—Лд=0, $R_{¿}=R_j$.

Составим уравнение перемещений. Отбросим правую заделку и заменим ее действие на плиту реакцией R_j. Теперь плита может свободно удлиниться на Д/,> Д, однако в действительности она сможет удлиниться только на размер зазора. Следовательно, Д/(—Д будет соответствовать деформации (укорочению) от действия реактивного усилия Лд. Таким образом, уравнение перемещений примет вид

Д/<—Д/в,,=Д или *otAll*— Д=$\frac{Ral\ el}{ЕЛ\ Е}$.

Отсюда

12-10_^{6} ■ 100-5-20- 10^{e}—4- $10^{-э}$-20-10®

■ -8 10^{e} Па = — 8 МПа.

Можно найти усилие, с которым плита будет давить на стену:

$_{9}$=ffA = 810* 0,2«1,6 МН/м.

§ 3.6. Краткие сведения о строительных материалах несущих конструкций

К основным строительным материалам, из которых изготовляются элементы несущих конструкций, относятся сталь, алюминиевые сплавы, древесина, пластмассы и др.

Сталь чаще других материалов используется в конструкциях промышленных и общественных зданий, мостов, резервуаров, башен и т. п. Она представляет собой сплав железа с углеродом. По содержанию углерода стали делятся на низкоуглеродистые (0,09...0,25%), среднеуглеродистые (0,25...0,46%) и высокоуглеродистые (0,46...0,75%). Сплавы с содержанием углерода свыше 2% относятся к чугунам. Для улучшения различных физико-механических свойств стали в их состав добавляют легирующие элементы — кремний (С), молибден (М), марганец (Г), никель (Н), хром (Х) и др. Такие стали называют *легированными.* По количеству легирующих примесей они подразделяются на низколегированные (сумма легирующих элементов — 1,8...2,5%), среднелегированные (2,5...8%) и высоколегированные (свыше 8%).

Углеродистые и легированные стали

Углеродистая сталь обычного качества поставляется по трем группам — А, Б и В, при этом в несущих строительных конструкциях применяются стали группы В: А — по механическим свойствам; Б — по химическому составу; В — по механическим свойствам и химическому составу.

В строительных конструкциях используют низкоуглеродистую сталь обычного качества. Для ответственных металлоконструкций и арматуры железобетона чаще применяют легированные стали. В конструкциях мостов используют высококачественные низкоуглеродистые и низколегированные стали.

Сталь применяют при изготовлении листового и профильного проката. В стальном прокате используют различные марки углеродистой и низколегированной сталей. Наиболее широко в строительных конструкциях применяются сталь прокатная угловая равнополочная и неравнополочная, двутавры, швеллеры и другие профили. Сортамент на эти виды проката приведен в Приложениях II—V.

Цветные металлы и их сплавы играют второстепенную роль и применяются в тех случаях, когда это экономически целесообразно или невозможно применение стали. В строительных конструкциях чаще используются алюминиевые сплавы, в которые добавляются легированные элементы из магния, марганца, кремния, цинка и др.; менее широкое применение находят титановые сплавы.

Древесина — древнейший строительный материал. В основных элементах строительных конструкций используют хвойную древесину, так как она содержит меньше пороков, чем лиственная древесина, а также содержит смолы, что оказывает лучшее сопротивление увлажнению и загниванию. Из хвойной древесины наиболее высоким качеством отличается сосновая древесина. Среди лиственных пород выделяется дубовая древесина, обладающая повышенной прочностью и стойкостью против загнивания, но большей стоимостью.

Конструкции из пластмасс начали применяться в нашей стране и за рубежом с середины XX в. Конструкци-

онные пластмассы используют в составе элементов несущих и ограждающих строительных конструкций. Из наиболее прочных стеклопластиков выполняют основные элементы несущих конструкций. Прозрачные стеклопластики применяют в элементах ограждающих конструкций зданий. Сверхлегкие пенопласты используют в средних слоях легких ограждений покрытий и стен.

§ 3.7. Испытания материалов на растяжение и сжатие

При проектировании строительных конструкций, машин и механизмов инженеру необходимо знать значения величин, характеризующих прочностные и деформативные свойства материалов. Их можно получить путем механических испытаний, проводимых в экспериментальных лабораториях на соответствующих испытательных машинах. Таких испытаний проводится много и самых различных, например испытания на твердость, сопротивляемость ударным и переменным нагрузкам, противодействие высоким температурам и т. д. Подробное описание всех видов механических испытаний и применяемых при этом машин и приборов приводится в специальной литературе. Здесь же будут изложены лишь испытания на растяжение и сжатие, в основном металлов и древесины.

Испытания на растяжение. Наибольшую информацию о механических свойствах металлов можно получить из статических испытаний на растяжение. Испытания проводятся в соответствии с ГОСТ 1497—84.

Для испытания на растяжение применяют образцы специальной формы — цилиндрические (рис. 3.17, *а)* или плоские (рис. 3.17, *б).* Образцы имеют рабочую часть с начальной длиной 4, на которой определяется удлинение, и головки с переходным участком, форма и размеры которых зависят от способов их крепления в захватах машины. Различают длинные образцы с отношением 4М)= 10 и короткие — /$_0$/сЦ, = 5. Размеры образцов делают стандартными для того, чтобы результаты испытаний, полученные в разных лабораториях, были сравнимы.

Испытания проводят на разрывных или универсальных машинах. В зависимости от метода приложения

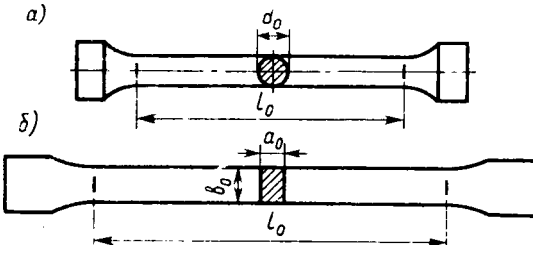
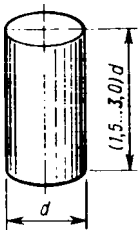


Диаграмма растяжения

нагрузки машины бывают с механическим или гидравлическим приводом. Они обычно выпускаются с вертикальным расположением образца. Передача усилия на образец осуществляется через захваты. Для центральной передачи усилия на образец в машинах имеются специальные устройства. Все машины снабжены устройством для автоматической записи в определенном масштабе *диаграммы растяжения,* т. е. графика зависимости между растягивающей силой *P* и удлинением образца А/.

В настоящее время начинают широко применяться испытательные машины нового поколения — универсальные машины с использованием современной микроэлектроники, которая позволяет полностью автоматизировать ход испытаний и управлять им, начиная от пуска машины до вывода полученных результатов измерений на дисплей и графопостроитель.



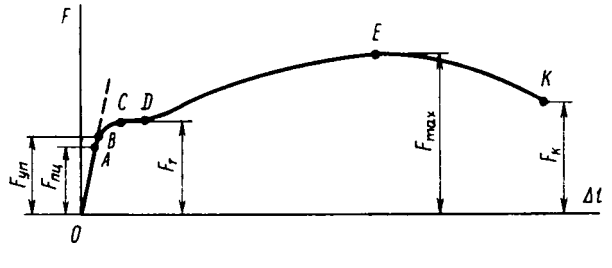
Испытания на сжатие. Для испытания металлов на сжатие применяются цилиндрические образцы с отношением высоты к диаметру в пределах 1,5...3. Применение более длинных образцов недопустимо, так как такие образцы могут искривляться и тем самым искажать результаты испытаний. Следует обратить внимание на некоторую условность получаемых результатов из-за наличия сил трения в опорных поверхностях образца. Поэтому стараются ослабить влияние сил трения введением различных смазок или приданием конусной формы торцевым поверхностям образца.

Испытание на сжатие осуществляется обычно при помощи тех же испытательных машин с применением специальных приспособлений (реверсоров).

§ 3.8. Диаграммы растяжения пластичных и хрупких материалов

Диаграмма низкоуглеродистой стали. Записанная с помощью специального устройства на испытательной машине диаграмма растяжения низкоуглеродистой стали изображена на рис. 3.18. Из этой группы сталей наибольшее применение для строительных конструкций находит сталь марки СтЗ и СтЗГпс.

В начальной стадии нагружения до некоторой точки *А* диаграмма растяжения представляет собой наклонную



прямую, что указывает на пропорциональность между нагрузкой и деформацией — справедливость закона Гука. Нагрузка, при которой эта пропорциональность еще не нарушается, на диаграмме обозначена через и используется для вычисления предела пропорциональности:

^пп ”

Пределом пропорциональности a_m называется наиболь- И

шее напряжение, до которого существует прямо пропор- Предел пропорцио-
циональная зависимость между нагрузкой и деформацией, нальностн

Для СтЗ предел пропорциональности приблизительно равен $о_{пц}$=195...200 МПа.

Зона *О А* называется *зоной упругости.* Здесь возникают только упругие, очень незначительные деформации. Данные, характеризующие эту зону, позволяют определить значение модуля упругости *Е.*

После достижения предела пропорциональности деформации начинают расти быстрее, чем нагрузка, и диаграмма становится криволинейной. На этом участке в непосредственной близости от точки *А* находится точка *В,* соответствующая пределу упругости.

Пределом упругости называется максимальное на- И

пряжение, при котором в материале не обнаруживается Предел упругости
признаков пластической (остаточной) *деформации.*

Предел упругости существует независимо от закона прямой пропорциональности. Он характеризует начало перехода от упругой деформации к пластической.

У большинства металлов значения предела пропорциональности и предела упругости незначительно отличаются друг от друга. Поэтому обычно считают, что они практически совпадают. Для стали СтЗ $о_{уп}$=205...

...210 МПа.

При дальнейшем нагружении криволинейная часть диаграммы переходит в почти горизонтальный участок С1> — *площадку текучести.* Здесь деформации растут практически без увеличения нагрузки. Нагрузка P_T, соответствующая точке *О,* используется при определении физического предела текучести:

Физическим пределом текучести <m_T называется на-

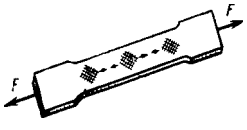
именьшее напряжение, при котором образец деформируется без заметного увеличения растягивающей нагрузки. Физический предел текучести

Предел текучести является одной из основных механических характеристик прочности металлов. Для стали СтЗ <$г_т$=220...250 МПа.

Зона *ВБ* называется *зоной общей текучести.* В этой

зоне значительно развиваются пластические деформации. При этом у образца повышается температура, изменяются электропроводность и магнитные свойства.

Образование пластической деформации в отдельных кристаллах образца происходит уже в начальной (упругой) стадии испытания. Однако эти деформации настолько малы, что не обнаруживаются обычными приборами для измерения малых деформаций. С увеличением нагрузки пластическая деформация начинает накапливаться в микрообъемах образца, а с наступлением текучести эти очаги пластической деформации, сливаясь, захватывают уже макрообъемы образца металла. Необратимо деформированные области образца оказывают повышенное сопротивление дальнейшему деформированию (материал упрочняется), и поэтому пластические деформации начинают развиваться в зонах, еще не подверженных этим деформациям. В дальнейшем пластическая деформация, переходя от одной зоны к другой, распространяется на весь объем рабочей части образца. Особенно наглядно фронт распространения пластической деформации вдоль образца можно наблюдать при испытании плоских полированных образцов. На поверхности таких образцов в момент возникновения очагов пластической деформации появляются темные наклонные полосы, которые, как правило, с осью образца составляют углы, приблизительно равные 45° (линии Людерса — Чернова). Эти линии представляют собой микроскопические неровности, возникающие вследствие необратимых сдвигов, происходящих в кристаллах под действием наибольших касательных напряжений.



Описанные явления вызывают изменение внутренней структуры металла, что приводит к его упрочнению. Диаграмма после зоны текучести снова становится криволинейной. Образец приобретает способность воспринимать возрастающее усилие до значения — точка *E* на диаграмме. Усилие используется для вычисления временного сопротивления:

со-

$$_{A0}$$

временное **сопротивление**

Напряжение, соответствующее наибольшей нагрузке, предшествующей разрушению образца, называется временным сопротивлением.

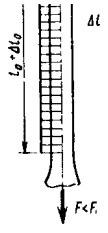
Для стали марки Ст3 временное сопротивление ст.=370...470 МПа.

Зона *OE* называется *зоной упрочнения.* Здесь удлинение образца происходит равномерно по всей его длине, первоначальная цилиндрическая форма образца сохраняется, а поперечные сечения изменяются незначительно и также равномерно.

При максимальном усилии или несколько меньшем его на образце в наиболее слабом месте возникает ло-

кальное уменьшение поперечного сечения — *шейка* (а иногда и две). Дальнейшая деформация происходит в этой зоне образца. Сечение в середине шейки продолжает быстро уменьшаться, но напряжения в этом сечении все время растут, хотя растягивающее усилие и убывает. Вне области шейки напряжения уменьшаются, и поэтому удлинение остальной части образца не происходит. Наконец, в точке *К* образец разрушается. Сила, соответствующая точке *К,* называется разрушающей а напряжения — *истинным сопротивлением разрыву* (истинным пределом прочности), которые равны

МораЬ
:=1



где $A_к$ — площадь поперечного сечения в месте разрыва.

Истинное
вление

Зона *ЕК* называется *зоной местной текучести.* Истинные напряжения в момент разрыва (в шейке) в образце из стали СтЗ достигают 900... 1000 МПа.

Заметим, что иногда временное сопротивление называют пределом прочности. Строго говоря, такое допустимо только в том случае, когда разрыв образца происходит без образования шейки. Это имеет место с хрупкими материалами, например с чугуном. Тогда наибольшая нагрузка практически совпадает с моментом разрушения и предел прочности оказывается почти равным истинному напряжению при разрыве (о диаграмме чугуна см. ниже). У пластичных материалов, например у стали марки СтЗ, наибольшее значение нагрузки не соответствует ее значению при разрушении образца и за характеристику прочности (условную) принимается временное сопротивление.



Интересен механизм разрушения образца из низкоуглеродистой стали. Образец разрушается, как правило, с образованием «чашечки» на одной его части и «конуса» — на другой. Этот излом называют чашечным или изломом «чашечка — конус».

Считают, что такой вид разрушения начинается в области шейки с образования мелких пустот-пор, вытянутых в продольном направлении. Под действием растягивающих напряжений материал перемычек между порами разрушается, поры сливаются, в результате чего появляется центральная трещина в направлении, перпендикулярном оси растяжения. Образование трещины вблизи центра сечения, как показывают эксперименты, объясняется тем, что в этой области вследствие возникающего неоднородного напряженного состояния, при котором нормальное напряжение достигает на оси образца максимального значения, материал обладает пониженной способностью к пластической деформации. Это в значительной мере способствует началу разрушения образца, которое на данной стадии имеет хрупкий характер. Однако в остальной части вблизи поверхности материал продолжает растягиваться пластически.

Затем трещина начинает распространяться в обе стороны по направлению к поверхности, образуя дно будущей чашечки. Увеличение размеров трещины происходит за счет дальнейшего присоединения новых пустот в результате разрыва перемычек и ранее образовавшейся центральной зоны трещины. Процесс развития трещины сопровождается концентрацией напряжений у вершины (острия) трещины.

При приближении трещины к поверхности создаются условия, при которых она поворачивает под углом, равным приблизительно 45°, к первоначальному направлению распространения и, выходя на поверхность, образует коническую часть излома. В этой стадии процесс происходит по механизму, во многом аналогичному расслоению по плоскостям скольжения или соскальзывания.

Описанный выше механизм разрушения относится только к испытаниям на растяжение стандартных образцов цилиндрической формы. Результаты, полученные с другими формами образцов, совершенно **иные.**

Помимо указанных характеристик прочности определяют *характеристики пластичности.*

Относительное удлинение после разрыва

Относительное удлинение после разрыва 8 (%) — это отношение приращения расчетной длины образца после разрыва к ее первоначальному значению, вычисляемое по формуле

$$5 = \frac{\text{Ю0\%}}{I_о}.$$

Заметим, что относительное удлинение после разрыва зависит от отношения расчетной длины образца к его диаметру. С увеличением этого отношения значение *8* уменьшается, так как зона шейки (зона местной пластической деформации) у длинных образцов занимает относительно меньше места, чем в коротких образцах. Кроме того, относительное удлинение зависит и от места расположения шейки (разрыва) на расчетной длине образца. При возникновении шейки в средней части образца местные деформации в области шейки могут свободно развиваться и относительное удлинение будет больше, чем в случае, когда шейка возникает ближе к головке образца, тогда местные деформации будут стеснены.

■ Относительное сужение после разрыва

Другой характеристикой пластичности является *относительное сужение после разрыва ф* (%), представляющее собой отношение уменьшения площади поперечного сечения образца в месте разрыва к начальной площади поперечного сечения образца:

$$\frac{\text{ю0\%.}}{\text{Ло}}$$

Иногда при вычислении значения *ф* для цилиндрических образцов пользуются формулой

Для стали марки Ст3 характеристики пластичности следующие: ¿=25...27% (при испытании коротких образцов); 1^ = 60...70%.

Если образец после нагрузки, соответствующей пределу текучести (рис. 3.19), разгрузить, то процесс разгрузки будет изображен линией MO_1, почти параллельной первоначальному упругому участку диаграммы. Удлинение, полученное образцом до начала разгружения, при разгрузке полностью не исчезает. Оно становится меньше на удлинение $\Delta l_{уп}$ упругой части (отрезок *0\0г).* Остаточное удлинение (отрезок *00{)* называется также пластическим удлинением. Следовательно, за пределом упругости полное удлинение образца состоит из двух частей — упругой и пластической:

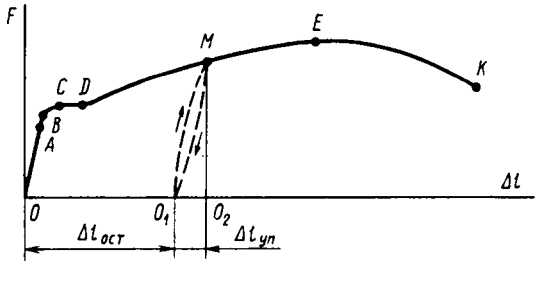
$$\Delta l = \Delta l_{уп} + \Delta l_{ост},$$

а до предела упругости — только из чисто упругой:
$\Delta l_{ост} = 0$.

Если после разгрузки образца его тут же снова нагрузить, то процесс повторного нагружения изобразится линией 0_1M, которая почти совпадает с линией MO_1 описывающей процесс разгрузки. При этом линия нагрузки проходит через ту же точку диаграммы, с которой начался процесс разгрузки. Обе линии (разгрузки и нагрузки) образуют петлю — петлю гистерезиса. После полного цикла образец возвращается к своему первоначальному состоянию; это явление носит название *упругого гистерезиса.* Площадь петли гистерезиса соответствует потерям механической энергии за один цикл, которые весьма малы. Эти потери вызываются так называемым внутренним (молекулярным) трением. Силы трения совершают необратимую работу, что приводит к диссипации (рассеянию) механической энергии в виде тепловой энергии. При выполнении большого числа циклов (разгрузка—нагрузка), например при свободных колебаниях, потери механической энергии становятся значительными и являются причиной постепенного затухания колебательного процесса.

■ Упругий гистерезис

При дальнейшем нагружении (после точки *M)* кривая



продолжается так, как будто не было промежуточной разгрузки. Следовательно, у образца после предварительного деформирования улучшились упругие свойства — повысились предел пропорциональности и предел упругости (ср. участки диаграмм *О В* и O_xM на рис. 3.18 и 3.19), но зато ухудшились пластические свойства — уменьшилось остаточное удлинение после разрыва, т. е. материал стал более хрупким.

Наклеп

Явление повышения упругих свойств материала в результате предварительного пластического деформирования называется *наклепом.*

Наклеп наблюдается не у всех материалов и даже не у всех металлов, таких, например, как свинец, олово и др. Оно широко используется в технике. Иногда наклеп создают искусственно. Например, цепи и канаты подъемных машин подвергают предварительной вытяжке, чтобы устранить остаточные удлинения, которые могут возникнуть во время их работы. Аналогичной обработке подвергают также некоторые виды арматуры железобетонных конструкций, цилиндры гидравлических прессов, турбинные диски и другие элементы машин и механизмов.

Следует заметить, что после предварительной вытяжки металла в некотором направлении его механические свойства изменяются (металл наклепывается) при работе на растяжение только в том же направлении; при работе на сжатие в этом же направлении его свойства почти не изменяются. Последнее обстоятельство имеет большое значение для материала, который подвергается действию переменных напряжений.

В некоторых случаях явление наклепа является нежелательным. Например, оно встречается во многих технологических процессах — прокатке стержней, резании листового материала, штамповке тонкостенных деталей, пробивании отверстий в листах под заклепки и т. п. Для устранения вредного влияния наклепа материал обычно отжигают или удаляют ту часть материала, которая получила наклеп.

Условная и истинная диаграммы. Диаграмма растяжения ¥—/ (А/) (см. рис. 3.18) характеризует свойства образца, так как зависит от его размеров. Для оценки механических свойств материала диаграмму растяжения перестраивают в координатах «напряжение — деформация»; все ординаты делят на первоначальную площадь поперечного сечения A_0, а все абсциссы — на первоначальную длину рабочей части $/_0$. В результате получаем *диаграмму напряжений* <т=/(е) (рис. 3.20), которая имеет тот же вид, что и диаграмма *Р=/* (А*Г),* так как A_0 и $/_0$ постоянны. Эта диаграмма является *условной,* поскольку при ее построении не учитывается изменение значений $A_0 и l_0 в$ процессе испытания. Поэтому определенные ранее пределы пропорциональности и текучести и временное сопротивление являются условными. Истинные же напряжения в каждый

Диаграмма напряжений

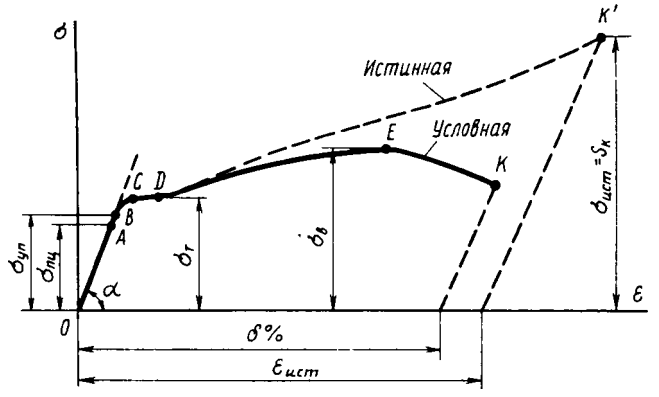


Рис. 3.20. Условная и истинная диаграммы напряжений низкоуглеродистой стали

момент нагружения будут больше условных. Заметное отклонение истинных напряжений от условных происходит после предела текучести, так как сужение сечения становится более значительным. Особенно сильно возрастает разница между напряжениями после образования шейки. Начинают расти и истинные удлинения. Диаграмма напряжений, построенная с учетом сужения площади поперечного сечения $Л_0$ и местного увеличения деформаций, называется *диаграммой истинных напряжений* (на рис. 3.20 она показана пунктиром).

Диаграммы истинных напряжений строятся, как правило, для теоретических исследований, например операций глубокой штамповки, при решении задач образования больших деформаций. Условные диаграммы напряжений используются на практике для определения механических характеристик материалов, а также для определения модуля упругости E: из рис. 3.20 имеем $E=\.\%a. = a1e,$ т. е. значение модуля упругости есть тангенс угла наклона прямолинейного участка диаграммы к оси абсцисс.

Диаграмма низколегированной стали. Диаграмма растяжения низколегированной стали изображена на рис. 3.21. Аналогичную диаграмму имеют и другие пластичные материалы, например красная медь, сплавы алюминия.

В начале диаграммы между нагрузкой и деформацией тоже соблюдается прямо пропорциональная зависимость (закон Гука). Точка, где эта зависимость нарушается, соответствует пределу пропорциональности. После точки

A прямолинейный участок диаграммы плавно переходит в криволинейный — зону пластических деформаций.

На диаграмме растяжения нет площадки текучести. ■ Поэтому вместо физического предела текучести опреде- условный предел ляют *условный предел текучести* $a_{ол}$ (точка I) на рис.

1 C1ч V 1H

3.21) — напряжение, при котором остаточное удлинение достигает 0,2% от рабочей длины образца:

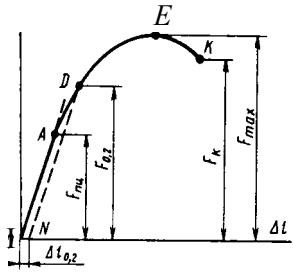


Рис. 3.21. Диаграмма растяжения низколегированной стали. Определение условного предела текучести

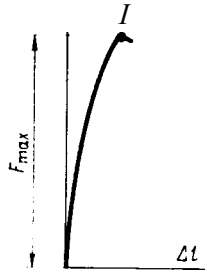


Рис. 3.22. Диаграмма растяжения чугуна

$$\sigma_{0,2} = \frac{F_{0,2}}{A_0}$$

Для определения нагрузки вычисляется значение заданного остаточного удлинения Д/$_{0,2}$ исходя из рабочей длины образца. Отрезок, соответствующий остаточной деформации $Al_{оа}$, откладываем вправо от точки *О* (на рис. 3.21 — отрезок *ОМ).* Из точки *N* проводится прямая, параллельная прямой *О А,* до пересечения с диаграммой растяжения. Ордината точки пересечения *Б* равна нагрузке $P_{ол}$.

В криволинейной части диаграммы нагрузки увеличиваются вместе с увеличением деформаций, которые происходят по всей длине образца. При приближении к максимальной нагрузке на образце появляется местное сужение — шейка. На диаграмме этому состоянию соответствует точка *Е.*

После точки *Е* нагрузка начинает уменьшаться, деформация образца концентрируется в основном в области шейки. Поперечное сечение шейки уменьшается, и при нагрузке $E_к$ образец разрушается — точка *К.*

Следует отметить, что участок диаграммы *ЕК* у низкоуглеродистой стали длиннее, чем у низколегированной. Это указывает на то, что низколегированная сталь обладает меньшей пластичностью, поэтому шейка у нее является менее выраженной. Механические же характеристики прочности выше у низколегированной, чем у низкоуглеродистой стали.

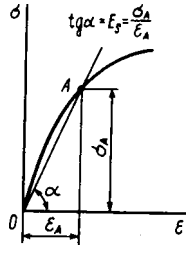
Диаграмма растяжения чугуна. Диаграмма растяжения чугуна, изображенная на рис. 3.22, является типичной для хрупких материалов. Диаграмма не имеет прямолинейного участка, так как упругие деформации не пропорциональны нагрузкам даже при небольших напряжениях. Нагрузка плавно увеличивается до наибольшего значения (точка *Е).* Напряжения при нагрузке P_{m},, соответствуют

пределу прочности $a_ш$. После точки *Е* без уменьшения нагрузки происходит разрыв образца. Образец разрушается при весьма незначительном удлинении и без образования шейки. Остаточные деформации очень малы, обычно менее 1 % от расчетной длины образца.

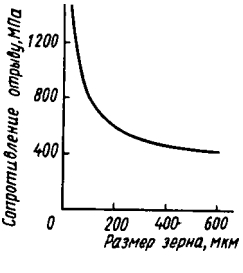
Характер разрушения чугунного существенно отличается от разрушения стального образца. Разрушение чугунного образца происходит в результате отрыва по площадке, перпендикулярной направлению растягивающей силы. На поверхности излома видна крупнозернистая структура материала.

Считают, что источником хрупкого разрушения являются различного рода структурные (микроскопические трещины с острыми углами и др.) и возникающие в ходе деформации дефекты. Трещиноподобные дефекты в материале способствуют более быстрому процессу разрушения, так как создают увеличение (концентрацию) напряжений в углах трещины. Концентрация напряжений может появиться и в местах включений, например в сером чугуне около включений графита в виде чешуек. Чтобы избежать концентрации напряжений у таких включений графита, им придают шаровидную форму, что достигается модифицированием чугуна магнием и некоторыми другими элементами. Напряжения, возникающие около концентраторов напряжений, создают благоприятные условия для распространения трещины разрушения по всему сечению, перпендикулярному оси образца.

Следует отметить, что для чугуна не существует модуля упругости в обычном смысле. Вместо него вводится понятие о секущем модуле, который равен тангенсу угла наклона прямой, проведенной через начальную точку диаграммы *О* и некоторую точку *А: ^а=Е$_5$=<1л/Бл-* Секущий модуль — величина переменная, ее можно считать функцией напряжения, соответствующего точке *А*. Поэтому в расчетах чугунных деталей (например, для определения деформаций) принимается некоторое среднее значение секущего модуля, соответствующего диапазону рабочих напряжений.



Механизм образования деформации. Реальные технические металлы и их сплавы состоят из большого числа *кристаллических зерен,* или *кристаллитов,* ориентированных произвольным образом. Так называются кристаллы неправильной формы и неодинаковых размеров. Размеры кристаллитов могут сильно отличаться друг от друга: от 0,0005 до 2...3 мм^2. Форма, размеры и расположение зерен оказывают влияние на свойства металлов. Так, уменьшение размеров зерен приводит к увеличению прочности на разрыв, а также пластичности и вязкости.



Внутри кристалла находятся атомы металла, расположенные в определенном порядке. Они образуют более или менее правильную трехмерную *кристаллическую решетку.*

При отсутствии нагрузки атомы металла, находящие-

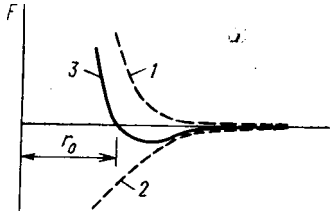


Рис. 3.23. Схема распределения сил взаимодействия между атомами в двухатомной модели

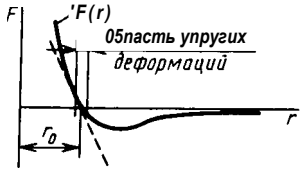


Рис. 3.24. Область упругих деформаций на кривой сил взаимбдействия между атомами

ся в узлах кристаллической решетки, колеблются относительно равновесных положений. Между атомами действуют либо силы притяжения, либо силы отталкивания. Сила взаимодействия между двумя соседними атомами складывается из этих сил. На рис. 3.23 показана схема распределения сил отталкивания (кривая *1)* и притяжения (кривая 2), а также результирующей силы (кривая *3)* как функций расстояния между атомами г (кривые Кондона — Морса). При расположении атомов на расстоянии r_0 сила взаимодействия между ними равна нулю и атомы находятся в *равновесном положении.* Любая попытка незначительного перемещения атомов из этого положения приводит к возникновению сил, стремящихся вернуть их в прежнее состояние.

Можно показать, что модуль упругости должен быть пропорционален наклону кривой *F (г)* в окрестности точки с абсциссой Го (рис. 3.24). Действительно, в этой области — области упругой деформации — касательная к кривой почти совпадает с ней, т. е. практически сила является линейной функцией деформации, что соответствует закону Гука.

Рассмотрим теперь две соседние атомные плоскости кубической кристаллической решетки (рис. 3.25, *а).* Приложение касательных напряжений т к этим плоскостям вызывает взаимное перемещение атомов из равновесного положения на расстояние *8.* Если перемещение $8 < r_0/2$, то деформация будет *упругой* и после снятия напряжений атомы возвратятся в первоначальное положение. Если атом *1* окажется в среднем положении между атомами

щ

Упругая и пластическая деформа- т ция

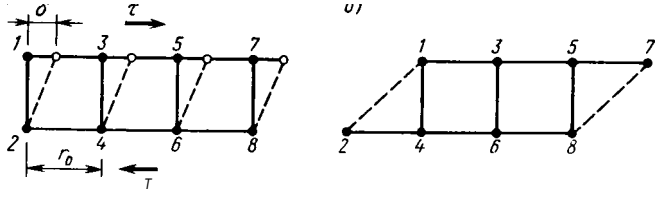


Рис. 3.25. Деформация простой кубической решетки атомов при приложении касательного напряжения

2 и 4 (<5=r_0/2), то этот атом будет находиться в состоянии неустойчивого равновесия и может либо занять новое равновесное положение над атомом *4,* либо вернуться в первоначальное положение над атомом *2.* При перемещении атома *1* в новое положение над атомом *4* и соответственно атомов *3, 5,* ... над атомами *6, 8,...* (рис. 3.25, *б)* каждый предыдущий атом занимает место последующего, в итоге все атомы перемещаются из своих прежних положений в эквивалентные узлы кристаллической решетки на одно межатомное расстояние. В результате такого необратимого смещения атомов начинается *пластическое деформирование.*

Можно показать, что касательные напряжения, при которых начинается пластическая деформация, равны: $т_с=т_{ши}=С/(2я)$ ((?— модуль упругости при сдвиге).

В растянутом стержне наибольшие касательные напряжения, возникающие на площадках, наклоненных под углом 45° к оси стержня, равны: т—=ст»../2. Принимая

<7=£/2,6, получим, что сГщ«=$2т_{1М1}$=*E/(2,6n)* или От»*«

*«E/*10.

Из этих расчетов видно, что для смещения атомов на одно межатомное расстояние необходимо иметь достаточно большое касательное напряжение. Экспериментальное подтверждение приведенных теоретических результатов было получено при испытании микроскопически тонких усов, состоящих из кристаллов высокой степени совершенства. Фактические, определяемые из опытов напряжения, при которых появляется пластическая деформация у металлов, значительно (в десятки и сотни раз) меньше теоретических. Объяснение этого несоответствия было дано рядом ученых в начале 30-х годов XX в. Ими на основании обширных исследований доказано, что перенос вещества, возникающий благодаря пластичности кристаллов, происходит с помощью *дислокации,* т. е. несовершенств, дефектов кристаллической решетки в местах, где имеются атомы или группы атомов, смещенные из положения устойчивого равновесия. Позже экспериментально было установлено существование дислокаций и их основных характеристик.

■ Дислокации

Роль дислокаций в процессе скольжения наглядно иллюстрируется при помощи аналогии, предложенной Н. Ф. Моттом. Она основана на сравнении дислокации со складкой на ковровой дорожке, которую необходимо передвинуть в новое положение (рис. 3.26). Складка

О легко передвигается под действием небольшой силы и,



Рис. 3.26. Схема, иллюстрирующая движение краевой дислокации (по Мотту)

прейдя через всю дорожку, вызовет её перемещение (сдвиг). Сила для того же перемещения дорожки, если бы ее пришлось тянуть целиком (например, в точке *В),* потребовалась бы значительно большая.

Таким образом, пластическая деформация является результатом необратимых смещений атомов (сдвигов), обусловленных движением дислокаций. Движение дислокаций обычно вызывает макроскопическую пластическую деформацию материала. Основным механизмом пластического деформирования металлов является *скольжение,* т. е. смещение одной части кристаллической решетки относительно другой по плоскостям скольжения, ориентированным в кристалле определенным образом. Движение дислокаций при пластической деформации сопровождается динамическими явлениями: выделением теплоты в результате колебаний атомов около вновь приобретенного положения равновесия и возникновением акустических эффектов.

Классы сталей. Стали, применяемые в строительных конструкциях, условно подразделяют на классы, принимая во внимание только их механические свойства при растяжении и не учитывая при этом их химический состав и марки стали. В табл. 3.2 (сокращенной) приведены механические характеристики для проката толщиной от 2 до 20 мм. При увеличении толщины проката значения этих характеристик уменьшаются (см. СНиП П-23—81* — 1991 г.).

Таблица 3.2

Классы сталей дл* строительных конструкций

Клаос стали	Мехашпесхие свойства при растяжении (не ниже)		
	предел тегучести, МП»	временное оопротнвление разрыву, МПа	относительное удлинение *6,* %
С235	235	360	25
С245	245	370	24
С255	255	380	24
С275	275	390	23
С345	345	490	21

§ 3.9. Потенциальная энергия деформации и работа, затраченная на разрыв образца

Потенциальная энергия деформации. При нагружении упругого тела внешние силы совершают работу *А,* которая целиком затрачивается на сообщение кинетической энергии движения тела *К* и накопление потенциальной энергии деформации *II,* которая является полностью обратимой. Это свойство потенциальной энергии широко используется, например, при использовании лука, в заводной пружине часов и т. д. Таким образом,

$A = K + u.$

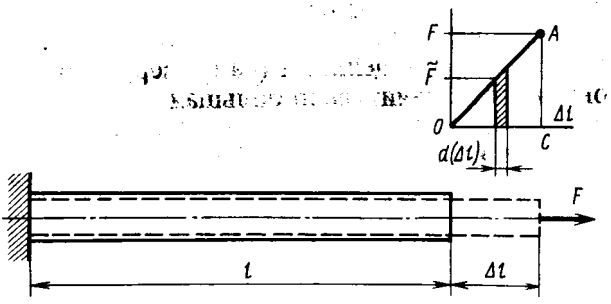


Рис. 3.27. К определению потенциальной энергии деформации

Если сила прикладывается достаточно медленно, т. е. ее скорость приложения стремится к нулю, то можно считать, что *К->0* и работа внешних сил полностью преобразуется в потенциальную энергию деформации

А =11.

Такой процесс нагружения называется статическим. ■

Рассмотрим стержень, который растягивается в пределах упругих деформаций на величину А/ (рис. 3.27). Графически зависимости между силой *Р* и деформацией представлена на рисунке прямой линией. В процессе нагружения сила возрастает от нуля до конечного значения *p,* поэтому этот процесс можно представить как последовательность бесконечно малых приращений удлинения с! (АО, вызываемых силой *Р.* Следовательно, работа текущей силы *Р* на элементарном перемещении с! (А/) равна *&А=Р&* (А/), а работа на перемещении А/

Статическое **нагружение**

Л=[/=| $_{p<\backslash}$ **(А/),**
о

или численно равна площади треугольника *О АС,* показанного на рис. 3.27:

$$A=u=-PA1.$$
2

Исключая из полученного выражения А/, получим

$$1/=-PA1=-P\frac{1}{2}\frac{Я}{ЕЛ}, \text{ или } 11=\frac{P^2 1}{2ЕЛ}. \qquad (3.22)$$
2 *К*

Формулой (3.22) можно пользоваться только в том случае, когда продольная сила и площадь поперечного сечения постоянны.

Если продольная сила или площадь поперечного сечения изменяются по длине стержня, то потенциальная энергия определяется суммированием значений потенциальной энергии, накапливаемой на элементарном участке

<1(7=$\frac{ЬI^1}{2}$ ----- , т. е.
ЕЛ

Формула потенциальной энерпш

$$u = \frac{1}{2EA} \qquad (3.23)$$

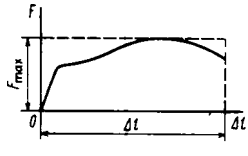
Заметим, что потенциальная энергия всегда положительна и при ее вычислении нельзя пользоваться принципом независимости действия сил, так как между *и и N* нет линейной зависимости.

Удельная потенциальная энергия

Для оценки энергоемкости материала определяют *удельную потенциальную энергию,* накапливаемую в единице объема: *и=и/У,* где *V*— объем стержня. Если объем стержня *У=А1,* то

$$u = \frac{1}{2EA} \frac{a^2}{l} \frac{l}{2} = \frac{a}{2E} \cdot \frac{a}{2} Ee, \text{ или } u = \frac{ab}{2}.$$

Работа, затраченная на разрыв образца. По работе, затраченной на разрыв образца, можно оценить способность материала сопротивляться действию ударных и циклических нагрузок. Чем больше работа, затраченная на разрыв образца, тем лучше будет сопротивляться материал действию динамической нагрузки. Из приведенных ранее рассуждений можно утверждать, что работа, затраченная на разрыв образца, равна полной площади диаграммы растяжения:



A — ^ГПЯЖ А/,

где *г* — коэффициент заполнения диаграммы; для стали марки Ст3 *г]* = 0,85...0,87.

§ 3.10. Диаграммы сжатия различных материалов

Диаграмма низкоуглеродистой стали. Начальный участок диаграммы является прямолинейным — до точки *А* (рис. 3.28). Угол наклона совпадает с углом наклона аналогичного участка диаграммы растяжения. Это свидетельствует о том, что модуль упругости у стали при растяжении и сжатии можно принимать одинаковым. После точки *А* диаграмма плавно переходит в кривую, подобную диаграмме растяжения. Площадка текучести здесь выражена слабо. При дальнейшем нагружении, когда развиваются значительные пластические деформации, образец сплющивается, принимая бочкообразную форму. Обычно на этом испытание заканчивают, так как образец разрушить не удается, не удается определить и предел прочности. Значения предела пропорциональности и предела текучести при растяжении и сжатии практически одинаковы.

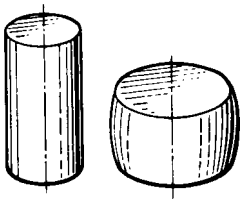


Диаграмма чугуна. Диаграмма с самого начала имеет почти линейную зависимость (рис. 3.29). На этом участке диаграммы форма и размеры образца изменяются незначительно. При приближении к максимальной нагрузке

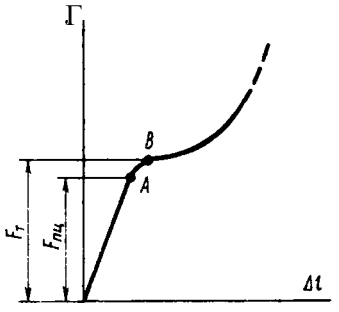


Рис. 3.28. Диаграмма сжатия низкоуглеродистой стали

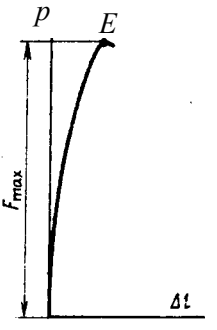


Рис. 3.29. Диаграмма сжатия чугуна

кривая диаграммы становится более пологой и образец принимает слегка бочкообразную форму. Когда нагрузка достигает наибольшего значения, на поверхности образца появляются трещины, угол наклона которых приблизительно равен 45°. Наступает разрушение чугунного образца. Разрушение материала происходит в основном от сдвигов по площадкам с наибольшими касательными напряжениями.

Большинство хрупких материалов (бетон, камень) разрушается при сжатии так же, как чугун, и имеет подобную диаграмму. Хрупкие материалы сопротивляются сжатию значительно лучше, чем растяжению. Например, у серого чугуна предел прочности на сжатие равен 560...900 МПа, а на растяжение— 120...190 МПа, т. е. примерно в 4...5 раз больше.

Диаграмма древесины. Древесина относится к анизотропному материалу, сопротивляемость которой внешней нагрузке зависит от расположения волокон при испытании. Диаграммы сжатия древесины вдоль (кривая *1)* и поперек (кривая *2)* волокон показаны на рис. 3.30.

При сжатии образца вдоль волокон на участке *OA* древесина работает почти упруго и рост деформаций фактически происходит пропорционально увеличению нагрузки. При дальнейшем увеличении нагрузки деформации начинают расти быстрее, чем усилия. Это указывает на упругопластическую область работы материала.

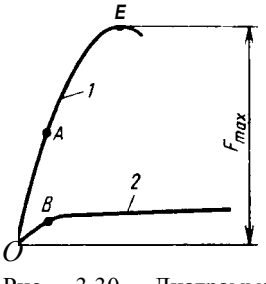


Рис. 3.30. Диаграмма сжатия древесины вдоль и поперек волокон

Разрушение образца происходит при нагрузке (точка *Е)* пластично в результате потери местной устойчивости стенок ряда волокон древесины, проявляющейся в образовании характерной складки. Оно может также сопровождаться обмятием торцов образца и появлением продольных трещин.

При сжатии образца поперек волокон до небольшой нагрузки (точка *В),* соответствующей пределу пропорциональности, между нагрузкой и деформацией существует линейная зависимость. Затем деформации быстро увеличиваются, а нагрузка растет незначительно. В результате образец спрессовывается — уплотняется. При наличии в нем пороков (сучки, трещины и др.) он может разрушиться. Разрушающая нагрузка определяется условно. Она соответствует деформации сжатия образца на $^1/_3$ своей первоначальной высоты.

Как видно из сопоставления диаграмм, изображенных на рис. 3.30, сопротивление древесины сжатию вдоль волокон значительно больше сопротивления поперек волокон (в 8... 10 раз).

В заключение в табл. 3.3 приведем для сравнения механические характеристики (при растяжении и сжатии) наиболее часто применяемых в строительных конструкциях материалов.

Таблица 3.3

Механические характеристики некоторых строительных материалов

Материал	Временное сопротивление (предел прочности) <т,, МПа		Предел текучести «m(a0,2>< МПа	Относительное остаточное удлинение *5,* %	Относительное поперечное сужение \1/, %
	при растяжении	при сжатии			
Сталь:					
низкоуглеродистая СтЗ	370...470		220...250	23...27	60...70
низколегированная 09Г2, 17ГС, 14Г2	450...520		310...350	21 ...23	
Чугун серый СЧ	120...380	500... 1200	–	1—1,4	–
Алюминиевые сплавы:					
дюралюминиевый Д16	230...465		100...350	8...13	30...15
высокопрочный	350...380	—	220...250	10...8	11
Бетон	0,14... 2,5	0,95...43	–	–	–
Кирпич	0.7...3	7.5...100	—	—	—
Древесина хвойная вдоль волокон	25...34	20...33			
СВАМ:					
1:1	480	420		1,4...2	
10:1	900	—	—	—	—

§ 3.11. Влияние различных факторов на механические характеристики материалов

оя л

Описанные испытания материалов проводятся при нормальных условиях, т. е. при температуре 20°С, непрерывном и плавном перемещении захватов машины со скоростью не более 10 мм/мин. Однако существуют различные условия, в которых приходится работать материалу строительных конструкций. Например, при повышенных температурах (конструкции доменных печей, ракетных двигателей) или при пониженных температурах (элементы холодильных установок), при действии радиоактивных, особенно нейтронных, проникающих излучений (ядерные реакторы) и др. Ясно, что механические свойства материалов будут изменяться и зависеть от условий эксплуатации конструкций, элементов машин и механизмов.

Влияние температуры. При повышении температуры у большинства материалов механические характеристики прочности уменьшаются, а при понижении температуры увеличиваются. Например, у стали марки СтЗ при ¿=500°С <7$_т$= 140 МПа, <т,=250 МПа; при /«600°С <г$_т$= =40 МПа, <т,= 150 МПа, т. е. предел текучести a_m-* 0 и при 600...650°С наступает температурная пластичность. При отрицательных температурах у сталей увеличивается их хрупкость — при *<— 45°С СтЗ становится хрупкой. Это свойство называется хладноломкостью.

Хладноломкость

Характеристики пластичности с повышением температуры увеличиваются, а с понижением температуры уменьшаются. При изменении температуры не остаются постоянными и физические характеристики материала: при повышении температуры модуль упругости E существенно уменьшается, а коэффициент Пуассона $ц$ незначительно увеличивается — с 0,28 до 0,33.

Зависимости механических характеристик от повышения температуры показаны на рис. 3.31.

В настоящее время созданы и широко применяются специальные сплавы и металлокерамические материалы, которые могут надежно работать при повышенных температурах (до 1000°С).

Влияние термической обработки. В качестве термической обработки стали используют ее закалку. Закалка стали приводит к значительному повышению предела текучести и временного сопротивления, но при этом снижаются ее пластические свойства; модуль упругости практически не изменяется. Например, для придания указанных свойств низкоуглвродистой стали проводят ее *цементацию* — увеличение содержания углерода в поверхностном слое, с последующей закалкой этого слоя. Для улучшения структуры и механических свойств стали также применяют *нормализацию* — нагрев стали до температуры 750...950°С, выдержка ее и последующее охлаждение на воздухе. Часто нормализация предшествует закалке.

Цементация и нормализация стали

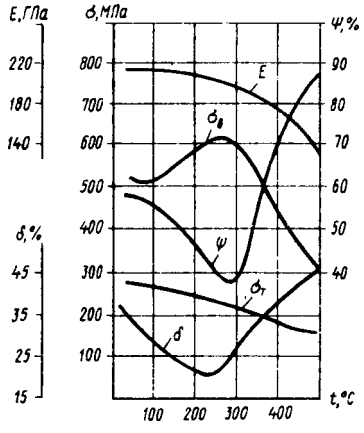


Рис. 3.31. Влияние повышения температуры на механические характеристики низкоуглеродистой стали

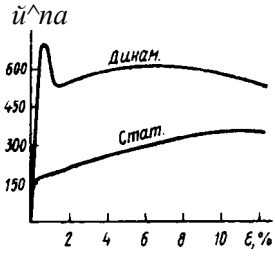


Рис. 3.32. Влияние на диаграмму напряжений низкоуглеродистой стали статического- и динамического нагружений

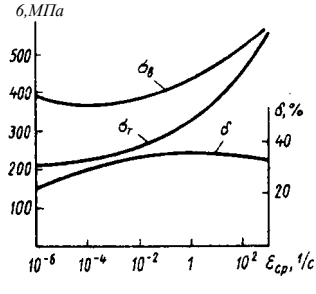


Рис. 3.33. Влияние скорости деформации на механические характеристики низкоуглеродистой стали

Влияние скорости деформации. Скорость нагружения и, следовательно, скорость деформирования влияют на механические характеристики материалов. С их увеличением у материалов увеличиваются механические характеристики прочности, особенно у пластмасс и других органических материалов. На рис. 3.32 изображены диаграммы напряжений низкоуглеродистой стали при статическом и динамическом нагружениях — средняя скорость деформации равна 970 с . Сравнение этих диаграмм показывает, что предел текучести и временное сопротивление стали выше, а модуль упругости при динамическом испытании практически не изменился. Об этом же свидетельствуют зависимости a_m, <т, и B низкоуглеродистой стали от средней скорости деформации, показанные на рис. 3.33.

Влияние технологических факторов. Механические характеристики стали, даже одного состава, зависят от способа ее получения и обработки.

При литье возможность образования различных дефектов в виде пустот, раковин и включений увеличивается. Это приводит к снижению механических характеристик прочности стали.

Прокатка меняет структуру стали — делает ее анизотропной. При этом значительно изменяются механические свойства в направлении прокатки — сталь становится более прочной; в других направлениях механические свойства существенно отличаются от свойств в направлении прокатки.

Волочение представляет собой вытяжку с обжатием. ■ Изделия, полученные таким способом, — стальная проволока и стальные листы — обладают высокими прочностными свойствами.

Волочение

Существуют и другие способы технологической обработки стали: токарная обработка, обработка поверхности роликами, хромированием и др. Все эти способы направлены на то, чтобы улучшить прочностные свойства металлов.

Влияние радиоактивного облучения. Влияние этого фактора на конструкции атомных реакторов, синхрофазотронов и т. п. приводит к увеличению механических характеристик прочности и уменьшению характеристик пластичности. Конечно, влияние облучения зависит от его дозы.

§ 3.12. Методы расчета строительных конструкций

Н. С. Стрелецкий (1885—1967) — крупный русский инженер и ученый в области металлических строительных конструкций

Метод предельных состояний. Этот метод был разработан учеными под руководством проф. Н. С. Стрелецкого и начал применяться с 1955 г. По методу предельных состояний в настоящее время рассчитывают все конструкции промышленных и гражданских зданий и сооружений, мостов и др.

Предельное состояние

Предельным считается состояние, при котором конструкция перестает удовлетворять эксплуатационным требованиям или требованиям, предъявляемым в процессе возведения здания и сооружения.

Различают две группы предельных состояний: *первая* — непригодность к эксплуатации по причинам потери несущей способности; *вторая* — непригодность к нормальной эксплуатации в соответствии с предусмотренными технологическими или бытовыми условиями. В правильно запроектированном сооружении не должно возникнуть ни одно из указанных предельных состояний, т. е. должна быть обеспечена его надежность. Надежностью называется способность объекта сохранять в процессе эксплуатации качество, заложенное при проектировании (недавний пример нарушения надежности

Надежность сооружения

объекта — авария на Чернобыльской АЭС с многочисленными последствиями).

Факторы, от точного учета которых зависит уровень надежности сооружения или отдельного его элемента, следующие: нагрузки и другие воздействия, механические свойства материала, геометрические параметры конструктивных элементов, условия работы, степень ответственности сооружения и др.

Нормативное значение нагрузки и воздействий соответствует их значению при нормальной эксплуатации. Они устанавливаются Строительными нормами и правилами (СНиП). Возможное отклонение значений нагрузок от их нормативных значений учитывается *коэффициентом надежности по нагрузке* л^1, принимаемым по СНиПу.

Расчетная нагрузка

Нагрузки и воздействия, полученные путем умножения их нормативных значений на коэффициент надежности по нагрузке, называются *расчетными.* Например, расчетная сила $P=nP_я$\ расчетная равномерно распределенная нагрузка $ч=nд_я$.

При расчете по первой группе предельных состояний обычно л>1, и тогда расчетные нагрузки являются наибольшими нагрузками, которые могут возникнуть за время эксплуатации сооружения. Например, коэффициент надежности по нагрузке от собственной массы принят n= 1,05...1,2, а по снеговой нагрузке л = 1,4...1,6. Такое различие в значениях коэффициента n объясняется тем, что снеговая нагрузка более изменчива, чем собственная масса.

Коэффициент надежности по нагрузке может быть меньше единицы, т. е. $n < 1$, если это приводит к ухудшению условий работы сооружения. Например, кратковременные нагрузки в стадии возведения принимаются с коэффициентом л = 0,8.

Коэффициент надежности по нагрузке при расчете по второй группе предельных состояний принимается, как правило, равным единице.

Нормативное сопротивление

Основной характеристикой сопротивления материалов силовым воздействиям является *нормативное сопротивление* которое устанавливается СНиПом с учетом условий контроля и статистической изменчивости механических свойств материала. В качестве нормативного сопротивления строительных сталей принимают наименьшее контролируемое (браковочное) значение предела текучести a_T или временного сопротивления ег,. Эти значения устанавливаются ГОСТами или техническими условиями на металл.

Возможное отклонение в неблагоприятную сторону от значений нормативного сопротивления учитывается *коэффициентом надежности по материалу* у„>1. Этот коэффициент отражает статистическую изменчивость свойств материала и их отличие от свойств отдельно

испытанных образцов. Например, для металла у„=

= 1,025...1,15; для бетона $у_м$=1,3...1,5.

Величина, полученная в результате деления норматив- И ного сопротивления на коэффициент надежности по мате- $р_{асчетное}$ сопро-
риалу, называется *расчетным сопротивлением".* пиление

Ум

Она представляет собой наименьшую возможную величину нормативного сопротивления; значения для Л устанавливаются СНиПом.

Возможное неблагоприятное отклонение геометрических характеристик учитывается либо при помощи коэффициента точности, либо путем дополнительного слагаемого, которое прибавляется к нормативному значению геометрической характеристики, либо в ряде случаев коэффициентом надежности по материалу.

Особенности действительной работы материалов, элементов конструкций, их соединений учитываются *коэффициентом условий работы у.* Он отражает влияние температуры, агрессивности среды, длительности и многократной повторяемости воздействия, приближенности расчетных схем и условность расчетных предпосылок (у < 1), а также перераспределение усилий при развитии пластических деформаций и другие благоприятные факторы (у > 1). Числовые значения для *у* устанавливаются СНиПом на основании экспериментальных и теоретических исследований и вводятся в качестве множителя к значению расчетного сопротивления *К.* В большинстве случаев при нормальных условиях работы коэффициент у= 1 и может быть опущен.

Степень ответственности и капитальности сооружений, а также значимость последствий тех или иных предельных состояний учитывается *коэффициентом надежности по назначению* у„<1. Его вводят в качестве делителя к значению расчетного сопротивления или в качестве множителя к значению расчетных нагрузок, воздействий и усилий.

Существуют и другие коэффициенты, которые учитывают особенности расчета и работы сооружения, например коэффициент $л_с$, учитывающий одновременное действие всех расчетных нагрузок. Здесь же приведены коэффициенты, учитывающие основные факторы, которые влияют на надежность сооружения.

Надежность и гарантия от возникновения предельных состояний первой группы (по несущей способности) обеспечиваются выполнением следующего условия:

где *N* — усилие, действующее в рассчитываемом элементе конструкции (функция нагрузок и других воздействий); 5 — предельное усилие, которое может воспринять рас-

считываемый элемент (функция физико-механических свойств материала, размеров элемента и условий работы).

Усилие *ЫI,* являющееся наибольшим возможным усилием (воздействием) за время нормальной эксплуатации конструкции, определяется так:

$N=nF_{яs}$

а предельное усилие

5= *А,,* Л$_{и}$у/(ЫМ)=*Яу/у»*

где *А,,* — геометрическая характеристика сечения.

;

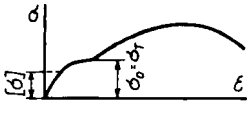
Условие прочности при растяжении

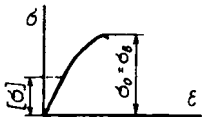
Таким образом, условие прочности (надежности) для центрально растянутого (сжатого) элемента (у,= 1) будет иметь вид

$$№^Л_{ят}Яу, \text{ или } <т_{тжх}=\frac{}{Ащт}$$

Метод допускаемых напряжений. Этот метод остается пока основным при расчете механических узлов и деталей машиностроительных конструкций. Основой метода допускаемых напряжений является предположение, что критерием надежности конструкции будет выполнение следующего условия прочности:

где *От..* — *наибольшее рабочее напряжение,* возникающее в одной из точек опасного сечения и определяемое расчетом; [гг] — допускаемое (предельное) для данного материала напряжение, полученное на основании экспериментальных исследований.





Допускаемое напряжение определяется по формуле

$$[\sigma]=\frac{\sigma_0}{n},$$

где $<т_0$ — опасное напряжение; *п* — коэффициент запаса прочности.

Для пластичных материалов за *опасное напряжение* при статической нагрузке принимается предел текучести $a_г$ или $a_{0Л}$; для хрупких материалов — временное сопротивление (предел прочности) $a_ш$.

Значение *коэффициента запаса прочности,* а следовательно, и допускаемого напряжения зависит от многих факторов. Основными факторами, которые влияют на выбор его значения, являются:

1) соответствие механических свойств материала конструкции и отдельно испытанных образцов;

2) учет конкретных условий работы рассчитываемой конструкции;
3) метод определения напряжений (степень точности этого метода);
4) неточность задания внешней нагрузки;
5) долговечность и значимость проектируемого сооружения или машины.

Значения допускаемых напряжений или коэффициентов запаса прочности устанавливаются техническими условиями и нормами проектирования. Для строительных сталей значение коэффициента запаса прочности (на основании практики проектирования и эксплуатации сооружений и машин) принимается n= 1,4...1,6; для хрупких материалов л=2,5...3,5; для древесины л=3,5...6.

Метод разрушающих нагрузок. Критерий прочности, принятый в методе допускаемых напряжений, а именно напряжения в точке, не всегда и не полностью характеризует условия наступления разрушения конструкции. В ряде случаев за такой критерий целесообразнее принимать предельную нагрузку, которую может выдержать конструкция, не разрушаясь и существенно не изменяя свою форму. При этом условие прочности, состоящее в том, что предельная или разрушающая нагрузка не должна превышать допускаемую, можно представить в виде

Идею расчета по разрушающим нагрузкам высказал ■ 1904 г. А. Ф. Лолейт (1868—1933) — русский инженер и ученый в области железобетонных конструкций

пред

где л — коэффициент запаса прочности, принимаемый таким же, как и в методе допускаемых напряжений.

«V

Ыграмма Прндтт

При определении разрушающей нагрузки для конструкций из пластичного материала принимается схематизированная диаграмма напряжений — диаграмма Прандтля. Схематизация диаграммы заключается в предположении, что материал работает в упругой стадии вплоть до предела текучести, а затем материал обладает безграничной площадкой текучести. Материал, работающий по такой модели, называется идеально упругопластическим. Как правило, эта схематизированная диаграмма напряжений больше всего соответствует действительной диаграмме материала, имеющего ярко выраженную площадку текучести.

Людвиг Прандтль (1875—1953) — выдающийся ученый, один из основателей немецкой школы прикладной механики, широко известен работами в области инженерной механики, особенно в аэродинамике

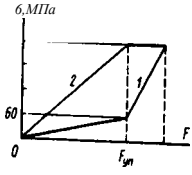
Следует заметить, что определение разрушающей нагрузки возможно только для несложных расчетных схем.

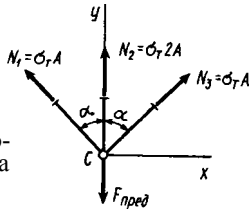
Прамер 3.7. Для статически неопределимой системы, рассмотренной в примере 3.4, определить разрушающую нагрузку, если материал стержней идеально упругопластический и предел текучести $<г_т$=240 МПа.

Решение. Из примера 3.4 было установлено, что при увеличении нагрузки напряжения в среднем (втором) стержне растут быстрее, чем в крайнем (первом), т. е. ад > $_0$(1). Поэтому при достижении в среднем

стержне напряжений, равных пределу текучести <$г_т$=240 МПа, напряжения в крайних стержнях будут меньше, а именно: <7(1)—<Г(Э)=<Г(2) сое² а= =240 0,5² = 60 МПа. Соответствующая нагрузка была -Руд=540 кН.

При дальнейшем увеличении нагрузки напряжения в среднем стержне увеличиваться больше не будут и усилие в нем останется постоянным: Л^ = $с_х$2Л =240'10⁶'2' 10 10-*—480 кН. Система превратится в статически определимую. Напряжения же в крайних стержнях будут увеличиваться одинаково, так как = о^, и, следовательно, одновременно достигнут предела текучести. Этот момент соответствует моменту разрушения системы, а нагрузка ^=/'$_{пред}$. Поскольку система перестает сопротивляться возрастанию внешней нагрузки, она превращается в механизм. Усилие /"пред найдем, используя уравнение равновесия 2Г=0:





²^¹ окаН-Л/г=.Р, или $2c_{mr}/Ic<№a+o_m2Л=Г_{щед}$,

откуда /"пред=$2a_mA$ (1+«ма)=2 240 10⁶ 10 10“‘ (1+0,5) = 720 кН.

Таким образом, после появления пластических деформаций во втором стержне до момента разрушения системы нагрузка увеличилась на 33,3%.

§ 3.13. Основные понятия о вероятностном методе расчета на прочность

1. Случайная изменчивость факторов, определяющих прочность конструкции. Многочисленные экспериментальные данные убедительно свидетельствуют о том, что предел прочности, предел текучести, модуль упругости и другие механические характеристики материалов имеют весьма значительный разброс. Например, при определении предела прочности бетона на сжатие одинаковые результаты не получаются даже тогда, когда образцы изготовлены из бетонной смеси одного замеса. Объясняется это тем, что прочность бетона является функцией многих факторов: крупности и качества (в том числе степени загрязненности) заполнителя, активности цемента, различных технологических факторов и т. п. Принимая во внимание случайную природу этих факторов, естественно считать предел прочности бетона случайной величиной.

Аналогичная ситуация имеет место и для других строительных материалов, таких, как древесина, кирпичная кладка, полимерные композитные материалы. Даже для классических конструкционных материалов, таких, как сталь, алюминиевые сплавы и т. п., имеет место заметный случайный разброс прочностных характеристик.

Для описания случайных величин используются различные вероятностные характеристики, которые определяются в результате статистического анализа опытных данных, получаемых в процессе массовых испытаний. Простейшими из них являются математическое ожидание

и коэффициент вариации, иначе называемый коэффициентом изменчивости. Последний представляет собой отношение среднеквадратичного разброса к математическому ожиданию случайной величины. Так, в нормах проектирования железобетонных конструкций коэффициент изменчивости тяжелого бетона принят постоянным и равным 0,135.

Однако наиболее полную информацию о случайной величине содержит функция распределения (закон распределения).

Часто в качестве распределения прочности материала P (<7,) используется нормальный закон (закон Гаусса)

$$\text{, Ы ш ^)} \; \frac{4}{-00}$$

где $P\ (a_{ш})$ — вероятность того, что предел прочности не превосходит значений «г,; 5 — математическое ожидание и среднеквадратичный разброс величины <т, (угловые скобки здесь и в дальнейшем означают операцию математического ожидания).

Нормально распределенная случайная величина меняется в пределах от — оо до + оо. Однако предел прочности не может иметь отрицательного значения. Тем не менее если отношение $<ст_1)/^>3...4$, то вероятность появления отрицательных значений оказывается пренебрежимо малой и в таком смысле нормальное распределение предела прочности можно считать вполне приемлемым.

В частности, нормальный закон используется для описания распределения механических свойств стального проката. На рис. 3.34 показаны эмпирические кривые распределения предела текучести и кривая Г аусса.

Другим законом, широко применяемым для описания распределения предела прочности материала, является распределение Гумбеля — Вейбулла:

$$P(\,)_{л} = 1 - \exp\left[-a\,(<x, - o3\backslash <т, > <m_a,\right.$$

где а, m, $a_л$ — параметры распределения.

Здесь предполагается, что предел прочности не может быть меньше значения $a_я$. В частном случае параметр $<т_н$ может быть принят равным нулю.

Используются и иные законы распределения предела прочности материалов: распределение Пирсона П1 типа, логарифмически нормальное распределение и др.

Если вид распределения случайной величины заранее не известен, то задача определения закона распределения существенно усложняется.

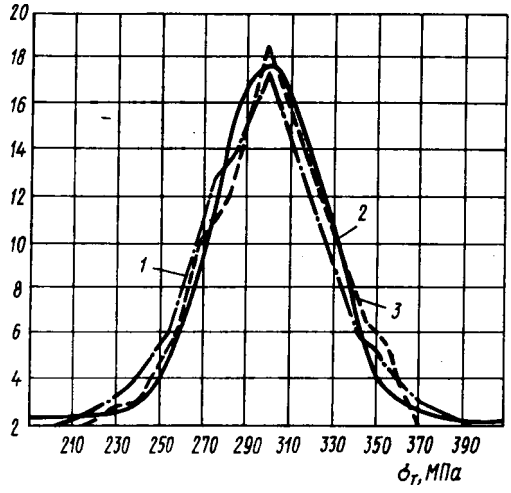


Рис. 3.34. Статистические кривые распределения предела текучести стали:
1,2 — по данным разных заводов; *3* — кривая Гаусса

Для более наглядного представления опытных данных обычно используется графическая форма, для чего имеющиеся л результатов испытаний располагаются в порядке возрастания. Полученная таким образом упорядоченная выборка разбивается на несколько, как правило, одинаковых интервалов. Находят отношение числа испытаний Л/, приходящихся на г-й интервал, к общему числу испытаний:

$$Щ=\frac{Л(}{n'},$$

где и', — частота, соответствующая /-му интервалу.

Сумма частот всех интервалов должна быть, очевидно, равна единице.

Откладывая вдоль оси абсцисс интервалы изменения случайной величины и строя над каждым из них прямоугольник, высота которого пропорциональна частоте и*,-, получают график, называемый гистограммой. Гистограмма является некоторой графической оценкой плотности распределения исследуемой случайной величины. При увеличении числа испытаний упорядоченную выборку можно разбить на все большее число интервалов, число которых, однако, как правило, не превышает 10...12.

Например, при испытании 106 образцов однонаправленного стеклопластика на растяжение были получены значения предела прочности, меняющиеся в пределах 368...602 МПа.

В табл. 3.4 представлено распределение предела прочности при разбиении диапазона его изменения на восемь равных интервалов длиной А=29,25 МПа.

Таблица 3.4

Распределена предела ирочмсп одаоиаирм ниг» сгекдоапспкя

МПа	368... ...397,25	397,25... ...426,5	426,5... ...455,75	455,75... ...415,0	485,0... ...514,25	514,25... ...543,5	543,5... ...572,75	572,75... ...602
Ъ	1	6	10	20	29	*24*	13	3
	0,0094	0,0566	0,0943	0,1887	0,2736	0,2264	0,1226	0,0283
(й-								
х 10*	0,0323	0,1935	0,3225	0,6451	0,9353	0,7741	0,4193	0,0968

На рис. 3.35 показана гистограмма, построенная на основании данных, приведенных в табл. 3.4. Оценки математического ожидания и среднеквадратичного разброса предела прочности соответственно равны <о»> = 498 МПа, 5=43 МПа.

Основной задачей математической статистики является подбор по известным эмпирическим данным теоретического распределения изучаемой случайной величины. Трудность решения этой задачи заключается в выборе теоретической кривой распределения, в некотором смысле наилучшим образом описывающей заданное статистическое распределение. Обычно та или иная функция распределения выбирается либо на основании накопленного опыта, либо из каких-то других соображений. Проверка гипотезы о приемлемости принятой теоретической функции распределения для описания случайной величины производится на основании специальных критериев согласия.

На рис. 3.35 помимо гистограммы приведена кривая нормального распределения при <<т.)=498 МПа

и 5=43 МПа. Критерии согласия свидетельствуют о при-

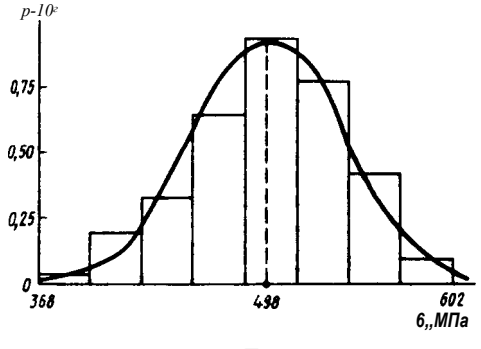


Рис. 3.35. Гистограмма и кривая Гаусса для предела прочности однонаправленного стеклопластика

емлемости нормального закона для описания распределения предела прочности однонаправленного стеклопластика при растяжении.

В качестве другого примера можно привести результаты испытаний 302 образцов бетона на сжатие в возрасте 28 сут в условиях производственного хранения. На основании опытных данных получены оценки математического ожидания предела прочности <a,) = 45,99 МПа,

среднеквадратичного разброса 1=3,46 МПа. Критерии согласия также подтверждают применимость нормального закона для описания распределения предела прочности бетона (рис. 3.36).

При расчетах строительных конструкций наряду с изменчивостью механических характеристик материала приходится считаться с изменчивостью геометрических характеристик элементов, в частности площади поперечного сечения стержней, и внешних воздействий.

Статистический анализ многочисленных замеров натурных конструкций показывает, что для описания геометрических характеристик поперечных сечений может быть использован нормальный закон. При этом числовые значения параметров распределения могут меняться для разных конструкций в достаточно широких пределах. Однако статистический разброс геометрических характеристик чаще всего не очень велик. Например, коэффициент изменчивости площади поперечного сечения арматуры железобетонных конструкций, как правило, не превышает значений 0,02...0,03.

Сложнее обстоит дело с описанием внешних нагрузок, поскольку природа этих нагрузок может быть разной. Для собственного веса конструкций используется нормальное распределение. Так, для собственного веса железобетонных конструкций мостов коэффициент вариации принимается равным 0,033. Другие нагрузки, например

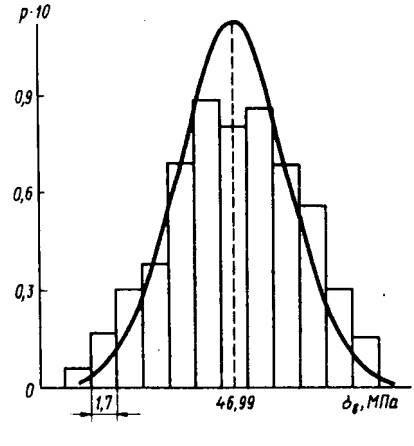


Рис. 3.36. Гистограмма и кривая Гаусса для предела прочности бетона

снеговая, ветровая, имеют несимметричное распределение типа логарифмически нормального или двойного экспоненциального.

Учитывая случайную природу внешних воздействий на конструкцию и изменчивость геометрических характеристик поперечных сечений стержней, можно утверждать, что напряжения, возникающие в этих стержнях, являются случайными величинами.

Следует отметить, что существующие нормы расчета строительных конструкций по предельным состояниям учитывают изменчивость нагрузок и сопротивления материала путем введения соответствующих коэффициентов надежности при определении значений расчетных сопротивлений и расчетных нагрузок.

2. Основы вероятностного метода расчета на прочность. Расчет конструкций на прочность сводится к проверке выполнения условия

$$a < Я. \qquad (3.24)$$

Здесь под *К* понимается предел прочности (или текучести) материала.

Заметим, что в аналогичной форме можно представить и условие жесткости конструкции. Тогда под *а* следует понимать перемещение какой-либо точки или узла конструкции, а под Л — допускаемое (нормативное) перемещение.

Предел прочности материала и напряжение, действующее в конструкции, являются случайными величинами. Характер их изменения таков, что в большинстве случаев нельзя установить имеющие практический смысл верхний предел для напряжений и нижний предел для предела прочности. Поэтому условие (3.24) не может быть заменено неравенством

&max ^ ^пш»

а стало быть, абсолютное требование о выполнении соотношения (3.24) во всех случаях лишено смысла. Можно лишь требовать, чтобы это условие выполнялось с большой вероятностью, достаточно близкой к единице.

Введем новую случайную величину

$$5 = Л\text{-}a, \qquad (3.25)$$

с помощью которой условие прочности записывается в виде

3X). (3.26)

Введем также важное понятие отказа, под которым понимается событие, делающее рассматриваемую систему непригодной для выполнения своих функций.

Понятие отказа

Обращение 5 в нуль, т. е. нарушение условия (3.26), соответствует наступлению предельного состояния конструкции, другими словами — наступлению ее отказа. *Тогда вероятность того, что* 5 *имеет положительное значение, называется вероятностью безотказной работы.*

Вероятность безотказной работы

Если речь идет о прочностном расчете, то можно говорить о вероятности неразрушения конструкции.

Если обозначить через p (5) плотность распределения вероятностей величины 5, то вероятность безотказной работы будет равна

$$P(+)=1*(5)<Ю, \qquad (3.27)$$

о

а вероятность наступления отказа

$$P(-) = 1-P(+). \qquad (3.28)$$

На рис. 3.37 показан график плотности распределения p (5), на котором площадь заштрихованной области определяет вероятность появления отказа (вероятность разрушения) конструкции.

Вероятность неразрушения должна быть не ниже нормативного значения P_+:

$$\boldsymbol{P(+) > P+}$$

Это неравенство можно рассматривать как условие прочности, сформулированное в терминах теории вероятностей.

Из равенства (3.25) нетрудно найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины 5:

<5)=<л> - <<г>, <3²>=<Л²> -2 <Л*>+<г²>,

где 5=5—<5>, 5=<т —<<г>.

Если случайные величины *Л, а* не коррелированы между собой, т. е. <)?&> = О, то дисперсия величины *Я* оказывается равной сумме дисперсий величин *К и ег:*

$$\boldsymbol{<5^2>=<Д^2>+<г^2>.}$$

Среднеквадратичный разброс тех же величин равен

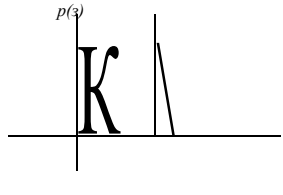
*=л/<$²>» •^=У/<Л²>, 5,=л/<5²>.

Назовем отношение

$$У=\sim^{<5>} \qquad (3.29)$$

коэффициентом безопасности.

Эта величина показывает, сколько отрезков, численно равных может быть отложено в интервале [0, <£>] (рис. 3.37).



Выражение (3.29) можно привести к следующему виду:

$$\gamma = \frac{\text{jfc-i}}{\sqrt{v_R^2 k^2 + v_s^2}} \qquad (3.30)$$

Здесь Л=<Л)/<а) — условный коэффициент запаса;
—коэффициенты вариации (изменчивости) случайных величин Ли *а.*

Часто величины Л и <х подчиняются нормальному закону распределения. Тогда, как известно, *S* также является нормально распределенной величиной. В таком случае выражение (3.27) принимает вид

$$P(+) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}s_S} \int_0^{\infty} \exp\left[-\frac{(S-\langle S\rangle)^2}{2s_S^2}\right] dS. \qquad (3.31)$$

Введем новую переменную интегрирования

$$x = \frac{5-\langle 5\rangle}{*5 \bullet}.$$

После несложных преобразований равенство (3.31) запишется следующим образом:

$$P(+) = 0{,}5 + \Phi(\gamma),$$

причем выражение

$$\Phi(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

является функцией Лапласа, таблицы которой содержатся во многих справочниках по высшей математике и статистике.

В свою очередь, для вероятности разрушения получим выражение

$$P(—) = 0{,}5 — \Phi(y).$$

При расчетах характеристика безопасности *y* имеет перед *P* (—) то преимущество, что последняя выражается, как правило, очень малой десятичной дробью, а *y* — небольшим числом, близким к единице. В табл. 3.5 приведены некоторые значения Р (—) и соответствующие им значения *y,* откуда видно, что с увеличением *y* происходит снижение вероятности наступления отказа.

Часто в расчетах характеристику безопасности *y* принимают равной трем, что при нормальном законе распределения соответствует так называемому правилу трех стандартов. Вероятность наступления отказа при этом оказывается равной 0,00137, а *P* (+)=0,99863.

Таблица 3.5

Значения вероятности наступления отказа, вероятности безотказной работы, характеристики безопасности

P(-)	0,1	0,01	0,001	0,0001	3,2-КГ^5	2,9 10^{-7}
P(+)	0,9	0,990	0,9990	0,999900	0,9999683	0,9999997
У	1,28	2,33	3,1	3,72	4	5

Пример 3.8. Определить вероятность безотказной работы растянутого стального элемента *1* стропильной фермы (рис. 3.38) в предположении гауссовского распределения как предела текучести материала, так и действующего нормального напряжения. Элемент выполнен из стали марки С245, для которой характеристики сопротивления имеют значения *(Я}* = 300 МПа, $у_д$=0,1. Математическое ожидание и коэффициент изменчивости нормального напряжения соответственно равны 190 МПа и 0,1; нормативная вероятность безотказной работы — 0,9986.

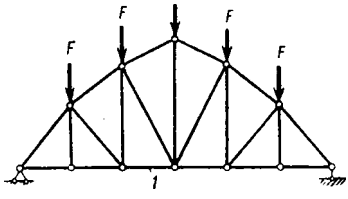


Рис. 3.38. Расчетная схема стропильной фермы

Решение. Найдем значение условного коэффициента запаса:

$$£=\frac{<Л>\ 300}{<<т>\ 190}=1{,}579.$$

Воспользуемся выражением (3.30) для определения характеристики безопасности:

$$У=\frac{1{,}579\text{-}1}{VI\ .579\text{-}0{,}1^2+0{,}1*}=3{,}098.$$

По таблицам функции Лапласа, имеющимся в математических справочниках, найдем вероятность безотказной работы: *P* (+)=0,9990. Таким образом, условие прочности раскоса фермы выполняется с вероятностью, превышающей нормативную: *P* (+)=0,9990 >0,9986.

В заключение заметим, что мы ограничились рассмотрением ситуации, когда внешние нагрузки и предел прочности остаются неизменными во времени. В таком случае вероятность безотказной работы также не меняется во времени. Однако если нагрузки являются функциями времени, тем более случайными, то вероятность безотказной работы конструкции становится также функцией времени. Ее определение представляет собой задачу су-

щественно более сложную, решение которой требует применения методов теории случайных функций и теории надежности, что выходит за рамки курса «Сопротивление материалов».

Вопросы для самоконтроля к главе 3

3.1. В чем заключается принцип Сен-Венана?

3.2. В чем состоит гипотеза плоских сечений (гипотеза Я. Бернулли)?

33. Как вычисляются нормальные напряжения в поперечном сечении растянутого стержня?

3.4. Что называется абсолютной продольной и поперечной деформациями? Как определяются относительная продольная и поперечная деформации? Какова их размерность?

3.5. Сформулируйте закон Гука и напишите его математическое выражение.

3.6. Что называется коэффициентом Пуассона и какие он имеет значения?

3.7. Запишите формулы обобщенного закона Гука.

3.8. Как вычисляются нормальные и касательные напряжения на наклонных площадках растянутого стержня?

3.9. На каких площадках возникают наибольшие нормальные и наибольшие касательные напряжения и чему они равны?

3.10. Изложите методику определения перемещений для общего случая растяжения и сжатия.

3.11. Какой стержень называется стержнем равного сопротивления?

3.12. Какие системы называются статически неопределимыми? Каков порядок их решения?

3.13. Какие характерные точки и участки имеет диаграмма растяжения низкоуглеродистой стали?

,3.14. Что называется пределом пропорциональности, пределом упругости, физическим пределом текучести и временным сопротивлением? Какова их размерность?

3.15. Какие величины характеризуют прочность и пластичность стали?

3.16. Что такое наклеп?

3.17. Какие диаграммы напряжений называются условными и какие — истинными?

3.18. Что называется условным пределом текучести и для каких материалов он определяется?

3.19. Как вычисляется потенциальная энергия деформации при растяжении?

3.20. Что такое удельная потенциальная энергия деформации?

3.21. Как определяется работа, затраченная на разрыв образца?

3.22. Как изменяются механические свойства стали с повышением и понижением температуры?

3.23. Какие методы применяются при расчете строительных конструкций, узлов и деталей машин и механизмов?

3.24. Как записывается условие прочности растянутого стержня по методу предельных состояний?

3.25. В чем разница между методом допускаемых напряжений и методом разрушающих нагрузок?

Задачи к главе 3

3.1. Система из стальных стержней нагружена силой P= 60 кН. Определить напряжения в стержнях и удлинение наклонного стержня, если A\ =4 см ,/<2 = 5 см[1], £=206 ГПа.

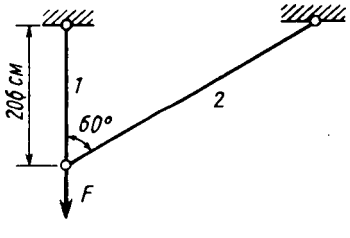


Рис. к задаче 3.1

3Л. Абсолютно жесткий брус подвешен на двух стержнях и нагружен силой А»=60 кН. Стержень *1* стальной ($Л_{ст}$—2 см^2), стержень *2* медный ($Л_м$ —4 см^2). Определить напряжения в стержнях и смещение точки приложения силы, если £„»206 ГПа, £$_м$ = 100 ГПа.

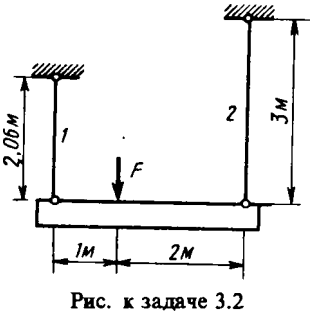


Рис. к задаче 3.2

3 Л. Ступенчатый медный стержень *(E^ —* »100 ГПа) нагружен продольными силами ^1 —120 кН, ^ “60 кК, Лз-20 кН. Площади поперечных сечений >4!-15 см^3, Л$_2$-10 см^2, *Л-}* =*5* см^2. Построить эпюру продольных сил, определить *а~.* и найти, какое из указанных сечений переместите* на большее значение.

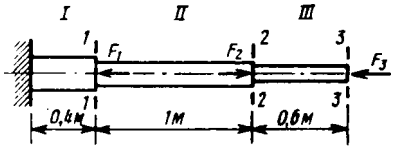


Рис. к задаче 3.3

3.4. Между стальным брусом площадью поперечного сечения *А* —20 см^2, длиной /—4,12 м и фундаментом имеется зазор А-—0,2 см. Определить значение силы Р из условия свободного касания фундамента (без нажатия), а также напряжения в верхней и нижней частях стержня, если £-206 ГПа.

Рис. к задаче 3.4

3.5. Ступенчатый ~~кирпичный~~ столб поддерживает перекрытия двух этажей. Поперечное сечение столба на втором этаже 1 х0,5 м, на первом — 1 х 0,75 м. Давление верхнего перекрытия ^1—480 кН, нижнего ^2-120 кН. Построить эпюру продольных сил, определить наибольшее нормальное напряжение в столбе и полное укорочение столба с учетом собственного веса. Объемный вес кладки 7—20 кН/м*, модуль упругости кладки £^—4 ГПа.

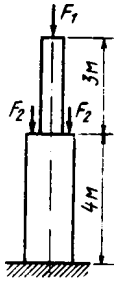


Рис. к задаче 3.5

3.6. Стержень переменного сечения, заделанный левым концом и имеющий зазор Д между правым концом и неподатливой плоскостью, нагружен сосредоточенными продольными силами .Fi —116,52 кН и /2 — 38,84 кН. Определить напряжения на всех участках стержня, если модули упругости £$_{ст}$-206 ГПа, £^ — 100 ГПа.

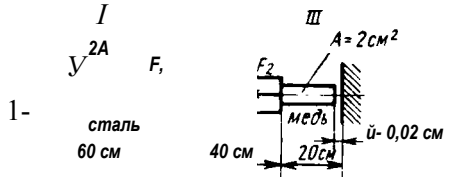


Рис. к задаче 3.6

3.7. Груз весом (7—6,12 кН висит на двух стержнях 1 см, жестко соединенных на концах, причем один — стальной, другой — медный. Определить усилия и напряжения в стержнях, найти вертикальное перемещение груза, если модули упругости £$_{ст}$—206 ГПа, —



ЗЛ. Абсолютно жесткий брус закреплен с помощью шарнирно-неподвижной опоры и двух стальных стержней одинаковой длины и одинакового поперечного сечения *А.* Определить усилия в стержнях от нагрузки *Б.*

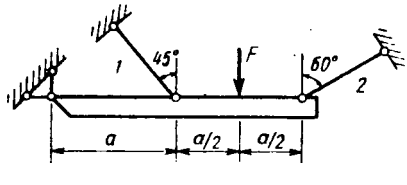


Рис. к задаче 3.8

3.9. Определить напряжения в стержнях системы после нагрева среднего стержня на 50°С. Вертикальный стержень дюралюминиевый с площадью поперечного сечения $Л_д$*= »3 см^2, наклонные стержни из стеклопластика СВАМ с A_c = 8 см^2. Температурный коэффициент линейного расширения дюралюминия $а_д$= =26^{4}10"*, модули упругости £,¡»*35 ГПа, $£_д$=70 ГПа.

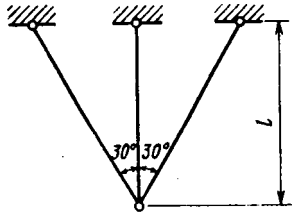


Рис. к задаче 3.9

Ответы к задачам главы 3

3.1. о"! = 150 МПа, <$т_2$=0, Д/$_2$=0,075 см. 3.2. $с_{ст}$=200 МПа, $_{0М}$ = 5О МПа, Д^=0,183 см. 3.3. *Оты.—*^{а}1= —53,3 МПа, »»»»'пи«»-0,021 см (влево). 3.4. ^=400 кН, а,, = 200 МПа, о-$_я$=0. 3.5. ^щм= —1,08 МПа, Д/=1,78 мм. 3.6. = 174,2 МПа, a_2=-117,1 МПа, a_3 = = -40 МПа. 3.7. N,,=2 кН, $сг_м$=25,5 МПа, N,,=4,12 кН, <$_{7СТ}$ =52,5 МПа, Д/=0,51 мм. 3.8. N_1 =0,707 /■. N_2 = К 3.9. <$г_с$=12,5 МПа, <$т_д$=- 57,7 МПа.

ГЛАВА 4

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ СТЕРЖНЯ

§ 4.1. Основные понятия

При расчетах элементов конструкций используются различные геометрические характеристики. Так, например, при растяжении — сжатии использовалась площадь ^поперечного сечения стержня. Она применялась при определении напряжений и деформаций стержня.

Оказывается, при других деформациях эта геометрическая характеристика не является достаточной. Необходимо использовать другие, более сложные геометрические характеристики. Последнее утверждение можно проиллюстрировать на следующем примере — эксперименте.

Возьмите пластмассовую линейку длиной 20...25 см. Зажмите ее в левой руке так, чтобы больший размер поперечного сечения располагался горизонтально, и надавите правой рукой на другом конце (расчетная схема — консольная балка с силой на конце). Линейка изогнется, и правый конец переместится в вертикальном направлении. Затем повторите тот же опыт, но линейку поверните на 90° относительно продольной оси — теперь больший размер поперечного сечения располагается вертикально. Линейка изогнется, и правый конец ее тоже переместится в вертикальном направлении, но на значительно меньшее значение.

Следовательно, при одной и той же площади поперечного сечения стержня, но при разном расположении его линейка-стержень сопротивляется изгибу по-разному. Это позволяет сделать вывод о том, что площадь поперечного сечения не может характеризовать сопротивляемость стержня изгибу и, как будет видно далее (см. гл. 8), при изучении перемещений при изгибе придется вводить другие геометрические характеристики.

Рассмотрим сначала геометрическую характеристику, известную из теоретической механики, — статический момент площади (сечения).

Статические моменты и центр тяжести. Выполняя расчеты на прочность, необходимо бывает вычислять статические моменты всего сечения или части его относительно некоторых осей.

Рассмотрим произвольное поперечное сечение стержня в системе координат *x, y,* выделив элементарную площадку с*A* (рис. 4.1).

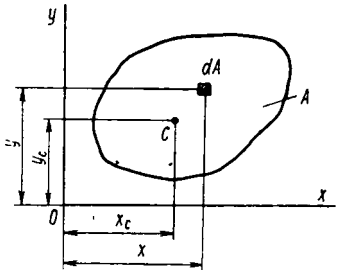


Рис. 4.1. К понятию о статических моментах сечения

Статическим моментом сечения относительно данной оси называется сумма произведений элементарных площадей АЛ на их расстояния до данной оси (например, *x* или у), *которая распространяется на всю площадь сечения А.*

Статический момент

Так, статические моменты сечения относительно осей *x и y* равны

Формулы статического момента

$$S_x = \int_A y\,dA; \quad S_y = \int_A x\,dA. \tag{4.1}$$

Статические моменты обычно выражаются в см^3 или м^3.

При параллельном переносе осей значения статических моментов не остаются постоянными, а изменяются и могут иметь как положительное, так и отрицательное значение. Следовательно, среди семейства параллельных осей существует единственная ось, относительно которой статический момент равен нулю.

Ось, относительно которой статический момент равен нулю, называется *центральной.*

Точка пересечения центральных осей называется *центром тяжести сечения.*

Центральная ось, центр тяжести

Можно показать, что и относительно любой оси, проходящей через центр тяжести сечения, статический момент равен нулю. Для изображенного на рис. 4.1 сечения центр тяжести располагается в точке С, его координатами являются ординаты x_c и y_c. Все оси, которые проходят через эту точку, будут центральными и относительно таких осей статический момент равен нулю.

На основании теоремы Вариньона (из курса теоретической механики) следует, что

$$Б_x = \int_A yйA = Ay_c = EA_1 y_C; \; 5_y = \int_A xйA = Ax_c = T,A_1\, x_{Cc} \tag{4.2}$$

Следовательно, *статический момент площади А относительно какой-либо оси равен произведению всей площади на расстояние от ее центра тяжести до этой оси.*

Из выражений (4.2) получим формулы для определения координат центра тяжести сечения:

;

Формулы центра тяжести сечения

$$\text{£дг } \hat{}_i YC, \quad {}_{Yc} \sim A \sim \text{ЕЛ}, \quad Xc = \frac{ЕЛ/Xc}{A\ IA1}$$

Заметим, что последняя форма записи в выражениях (4.3) относится к определению координат центра тяжести сложного сечения, разбитого на простейшие составные части, для которых известны площади A_1 и положение центра тяжести x_c, и y_{Cz}

Для многих сечений определение положения центра тяжести упрощается. Так, если сечения имеют ось или центр симметрии, то центр тяжести в таких сечениях находится соответственно на оси симметрии или в центре симметрии.

$\hat{}$ *Центр* *синнепеции* \ Ось *синшграы*

Рассмотрим простейшие примеры определения статических моментов и положения центра тяжести сечения.

Прамер 41. Определить положение центра тяжести сечения, имеющего форму полукруга (рис. 4.2).

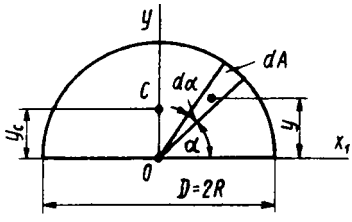


Рис. 4.2. К примеру 4.1

Решение. Ось *у* является осью симметрии. Центр тяжести лежит на этой оси. Для определения его положения достаточно по формуле (4.3) найти координату *у с-*

Вычислим статический момент полукруга относительно оси *x\,* выделив элементарный сектор. Его площадь равна площади треугольника с основанием и высотой *Л:*

$$(jA = \frac{1}{2} Jc1aЛ,$$

а ордината центра тяжести

$$y = \frac{2}{3} Л \text{ яп } a.$$

Тогда

$$8x1^{m} \text{‘\ } Y\&A = \int_{0}^{K} \frac{2}{3} Л \text{яп} a \cdot ЯМa \text{—-} Л^{3}$$

и координата центра тяжести

$$y = \frac{\text{£* я/?}^{2} \frac{2}{3} Л^{3}}{A3\ 2\ 3\ к} \text{—————————} \sim 0{,}424Л.$$

При вычислении статического момента сложного сечения его следует разбить на простые составные части. Тогда статический момент сечения относительно любой оси равен алгебраической сумме статических моментов составных частей сечения относительно той же оси:

^=^ + 5“ + 5“1 + ... + 5;.

Прамер 4.2. Определить положение центра тяжести сечения, имеющего форму трапеции (рис. 4.3, *а).* Размеры сечения даны в см.

а 1 **Ч** 6

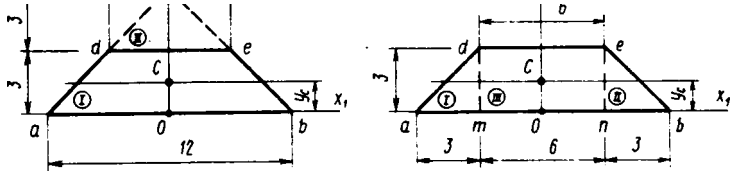


Рис. 4.3. К примеру 4.2

Решение. Как и в примере 4.1, сечение имеет ось симметрии. Поэтому тоже определяем только координату *yc,* пользуясь другим способом. Дополним трапецию до треугольника *abf* и рассмотрим заданное сечение состоящим из двух треугольников: *abf* (часть *I)* и *def* (часть *II).* При вычислении статического момента площадь треугольника *def* следует брать со знаком минус, так как этот треугольник является дополнением к заданному сечению (трапеции).

Определяем статический момент трапеции относительно оси *X* по формуле (4.2):

•S*.=^- S“ =(‘/2• 12• 6) (vJ ■ 6)-C/2• 6• 3) (‘/з• 3+3)=36 см3.

Площадь сечения

A~Jl1-Jl1 = 1/212-6-Ч2 6 см2.

Тогда

$$Уг = \frac{S_x}{A} \frac{36\ 4}{27\ 3} = - \text{ см}.$$

Статический момент сечения S_{Xf} можно также определить как сумму статических моментов составляющих ее частей относительно той же оси X). Для этого разобьем трапецию на два одинаковых треугольника *amd* (часть *Г)* и *nBe* (часть *1Г)* и прямоугольник *mden* (часть *¡II)* (рис. 4.3, *б)* и вычислим:

Sxi^ + S^ + S^- **G G-K-* &*>**

+(6-3) (1,5) = 36 см3.

В примерах 4.1 и 4.2 координата центра тяжести *y c* имеет положительное значение, так как $S_{i,} > 0$ и, следовательно, должна быть отложена от оси x_i вверх (в направлении положительной оси *y).*

Моменты инерции сечения. В дальнейшем при изучении деформаций изгиба и кручения придется пользоваться новыми геометрическими характеристиками — моментами инерции сечения.

Осевой момент инерции

Осевым моментом инерции сечения относительно данной оси называется сумма произведений элементарных площадей сЫ *на квадрат их расстояний до данной оси* (например, *х* или *у), которая распространяется на всю площадь сечения А.* Так, осевые моменты инерции (рис. 4.4) относительно осей *х* и *у* равны

Формулы осевых моментов инерции

$$I_x = \int_{Л} y^2 йA \quad I_y = \int_{A} x^2 \& A. \tag{4.4}$$

Полярный момент инерции

Полярным моментом инерции сечения относительно данной точки (полюс О) называется сумма произведений элементарных площадей ¿А на квадраты их расстояний до этой точки, которая распространяется на всю площадь сечения А. Следовательно,

Формула полярного момента инерции

$$I_p = \int_{A} p^2 \text{сЫ}. \tag{4.5}$$

Осевые и полярный моменты инерции всегда положительны и выражаются в см^4 или м^4.

Отметим интересное свойство: полярный момент инерции равен сумме осевых моментов инерции I_X и $]_y$ относительно любой пары взаимно перпендикулярных осей *хну,* проходящих через полюс *О.*

Действительно, как видно из рисунка, $p^2 = x^2 + y^2$, и

$$/_{,,} = \int_{A} p^2 < 1A = 1 \int_{A} (x^2 + y^2) \partial A = \int_{A} x^2 \partial A + \int_{A} y^2 йA = /_y + /_x.$$

Следовательно,

Л=Л+Л- (4.6)

Если оси х и *у* повернуть относительно полюса *О* на некоторый угол *а* (рис. 4.4), то $p^2 = x\backslash + y^2$ и, следователь-

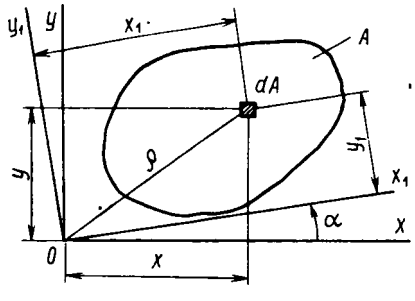


Рис. 4.4. К понятию о моментах инерции

но, $Jj, = J_{xl}+J_{yi}$, т. е. *при любом повороте осей относительно начала координат (полюса О) сумма осевых моментов инерции остается постоянной'.*

щ

Свойство момеи-тов инерции

$J_x+J_y=J_{X_l}+J_y$, $\bar{y}J_1$, =const.

Центробежным моментом инерции сечения относительно осей координат (например, осей *х* и *у) называется сумма произведений элементарных площадей АЛ на их расстояния до этих осей, которая распространяется на всю площадь сечения А.* Таким образом,

Центробежный момент инерции

$$Jxy=\int_A xy\,dA. \qquad (4.7)$$

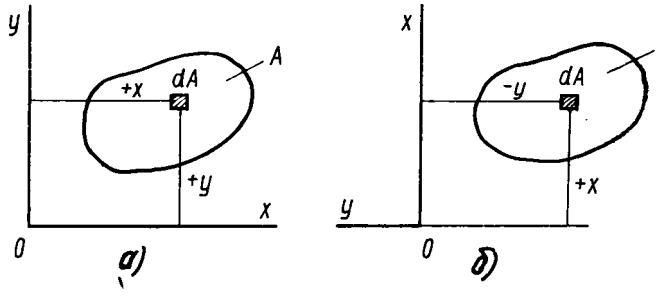
Формула центробежного момента инерции

Центробежный момент инерции Л? выражается в см^4 или м^4 и может быть положительным, отрицательным и равным нулю в зависимости от положения сечения относительно осей координат.

Если сечение занимает положение относительно осей *х и у,* как показано на рис. 4.5, *а,* то в этом случае Лу>0, так как координаты *хну* положительны. Повернем оси координат на 90° против хода часовой стрелки (рис. 4.5, б). Теперь /„„<0, так как х>0, а >><0. Отсюда следует, что при повороте осей на некоторый угол а <90° центробежный момент может быть равен нулю: /^,=0.

Для некоторых сечений можно сразу указать оси, относительно которых 7^=0. Рассмотрим сечение, имеющее ось симметрии (рис. 4.6). Центробежные моменты инерции полусечений, расположенные по разные стороны от оси *у,* равны между собой, но отличаются знаками. Следовательно, = 0.

Последнее замечание является очень важным для практических приложений и на него следует обратить особое внимание.



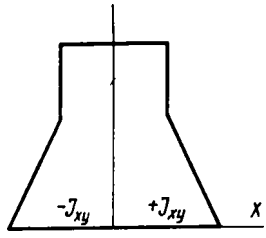


Рис. 4.6. Центробежный момент инерции для симметричных сечений Лу—О

В следующих примерах рассмотрим определение моментов инерции простейших сечений относительно характерных осей.

Пример 43. Определить моменты инерции прямоугольного сечения относительно центральных осей *хж у* (рис. 4.7).

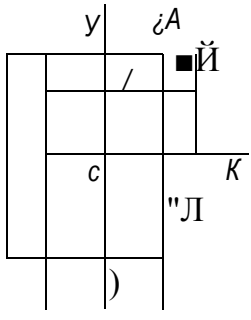


Рис. 4.7. К- примеру 4.3

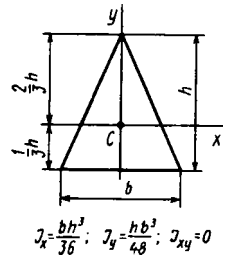
Решение. Разобьем площадь прямоугольника на элементарные прямоугольники с размерами *Ь* (ширина) и <1*у* (высота). Тогда площадь такого прямоугольника (на рис. 4.7 она заштрихована) равна *йЛ=Ь йу.* Подставляя значение *АЛ* в первую формулу (4.4) и интегрируя, получим

$$J_x = \int_A y^2 \, dA = \int_{-A/2}^{+A/2} y^2 b \, dy = \frac{bA^3}{12}$$

По аналогии запишем

$$J_y = \frac{AA^3}{12}.$$

Центробежный момент инерции Л,=О, так как оси дг и *у* являются осями симметрии.



Промер 4.4. Определить моменты инерция круглого сечения относительно центральных осей (рас. 4.8).

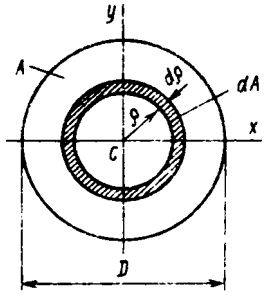
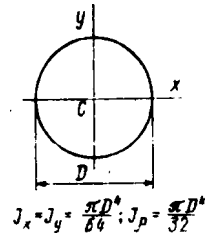


Рис. 4.8. К примеру 4.4

Решение. Эту задачу проще решать так. Сначала определить полярный момент инерции, а затем, учитывая равенство (4.6), =

—н то, что так как моменты инерции относительно любых центральных осей равны между собой в силу симметрии, найти 7_x-У,-/$_p$/2.

Разобьем круг на бесконечно тонкие кольца толщиной *йр* радиусом *р*\ площадь такого кольца *АА^Ьпрйр.* Подставим значение*йА* в выражение (4.5) и интегрируя, получим



$J_x = J_y = \frac{\pi D^4}{64}$; $J_p = \frac{\pi D^4}{32}$

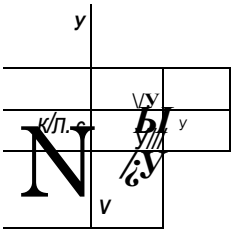
$$/_p\text{-}!p^2 6A'^* \$ p^2 2npdp\text{-}2k — \quad \frac{012}{" 32} \quad Д/2\ яГ»^* *0,1£>^4$$

и *3х* $\frac{nЛ^4}{' 64}$ «О 05.0*.

Погрешность этих приближенных формул составляет ¡,85%.

Пример 4.5. Определять моменты инерции кольцевого сечения относительно центральных осей.

Решение. При вычислении моментов инерции сечения применим способ, который был описатт в примере 4.2. Решение выполним в том же порядке, что и в примере 4.4.



Тогда полярный момент ~~инерции~~ гольца найдем как разность полярных моментов инерции большого круга диаметром *й* и малого круга диаметром </:

$$\frac{nИ^* nб^*}{32\ 32\ 32} \quad a\text{-}^*{}^4)«0,1О^* (I\text{-}^*{}^4).$$

Осевые моменты инерции кольца равны

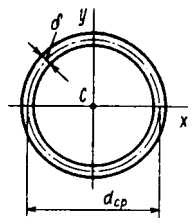
$$ЛвЛ \quad \frac{Л\ яЯ^*}{64} (1 — a^4)«0,05/3^* (I—^{**});$$

в этих формулах *а *¿10.*

Отметим, что полученные формулы моментов инерции дгаг кольцевого сечения неудобны для практического использования, если кольцо имеет малую толщину, т. е. 1> незначительно отличается от </. В этом случае формулы содержат разности четвертых степеней весьма близких чисел н для получения результата с необходимой степенью точности требуется вести вычисления с большим числом значащих цифр. Поэтому более удобной с учетом допустимой погрешности является, приближенная формула, не содержащая разность близких чисел. Получим такую формулу.

Для тонкостенного кольца *A-bir^d-nd^S* н Гср^{ш}4*Д«const.

Тогда приближенные значения моментов инерции равны



$$\bullet W S dA — fnd^S — 2*0, \qquad \frac{d^2}{A} \qquad \frac{n5d^5}{4} \qquad \frac{4}{A}$$

$$e^{\wedge}\frac{JP}{'2} : .\frac{nSdt}{8^{41}} **0,4M'.$$

Точное значение полярного момента инерции для этого сечения может быть записано так:

•W»" я д

Сравнивая приближенную и точную формулы, видим, что погрешность равна *(5/dcp)* 100%. Например, для отношения 5/<4р~0,1 погрешность составляет 1%, для *Sfd^*—0,2 погрешность будет 4'Л. Поэтому приближенной формулой целесообразно пользоваться, если *8/d^*р<0,15.

§ 4.2. Зависимость между моментами инерции при параллельном переносе осей

Выведем формулы моментов инерция относительно произвольных осей x_x и *y* для сечения площадью *A* (рис. 4.9).

Пусть известны все геометрические характеристики этого сечения относительно осей *x и y,* которые параллельны осям X! и >»,. Запишем координаты элементарной площади *A A* в системе координат X),

$$y\!=\!y+a\backslash\, x_{\ell} = x+b.$$

Используя полученное выражение для y_u найдем осевой момент инерции относительно оси

$$/_{X1} = \underset{A}{\backslash y^*<1A} = \underset{A}{\backslash\, (y+a)^2 \partial A} = \underset{A}{\$y^2<1A} + 2a\underset{A}{\$y\text{Л}A} + a^2\underset{A}{\$\ddot{u}A}.$$

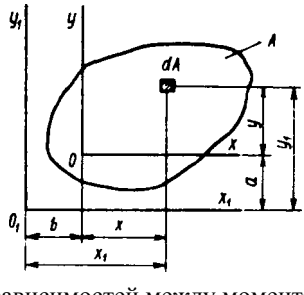


Рис. 4.9. К выводу зависимостей между моментами инерции при параллельном переносе осей

Тогда с учетом (4.1) и (4.4) окончательно будем иметь

$$У_{,,}—З_x\text{-}ь2аЗ_x\text{-}\backslash\text{-}a^2А. \qquad (4.8)$$

Поступая аналогично, получим формулу для осевого момента инерции относительно оси *у^*.

$$1y_1=1y+2Ь5y\text{-}\backslash\text{-}Ь^2А. \qquad (4.9)$$

Зависимость для центробежного момента инерции относительно осей X] и y_1 примет вид

$$Л,* = \underset{А}{|x^y_x} < \underset{А}{1А} = 1\ (x+Ь)\ (y + a) < \underset{А}{М} = \underset{А}{\$хуйА} + \underset{А}{Ь}\ ¡y<1А +$$

$$+ \underset{А}{a}\ \backslash x\&А + \underset{А}{аЬ}\ ¡йА.$$

Тогда с учетом (4.1) и (4.7) окончательно получим

$$3 = З_{xy} \text{ -Ь } ЬБ_X+аБу+аЬА. \qquad (4.10)$$

Напомним, что в формулах (4.8)...(4.10) геометрические характеристики $Б_x$, 5,, $З_x$, $З_y$ и $З_ц$ известны и определены относительно осей *х* и *у* (их часто называют «старыми» или «первоначальными»). Если эти оси центральные, то в полученных зависимостях 5_X=0 и 5^=0. Тогда формулы моментов инерции упрощаются:

$$—З_x\text{-}\backslash\text{-}a\ А,\ Зу^—\ Зу+Ь\ А,\ ^x|y\backslash—Зху+аЬА. \qquad '(4.11)$$

I

Формулы перехода от центральных осей к осям, параллельным им

Формулы (4.11) называют формулами перехода от центральных осей к любым, параллельным им. Подчеркнем, что эти формулы очень часто применяют для вычисления моментов инерции сложных фигур.

Отметим, что при вычислении моментов инерции по формулам (4.8)...(4.11) *а* и *Ь* следует брать с учетом знака в системе координат $х_ь$ $у_х$.

Для первых двух формул (4.11) справедливо следующее определение: *момент инерции относительно любой оси равен моменту инерции относительно центральной оси, параллельной данной, плюс произведение площади сечения на квадрат расстояния между осями.*

Из этих формул видно, что моменты инерции принимают минимальные значения при *а*=0 или ¿=0, т. е. когда оси проходят через центр тяжести. Следовательно, из семейства параллельных осей минимальный момент инерции будет относительно центральной оси.

Результат, представленный в последней формуле (4.11), можно сформулировать следующим образом: *центробежный момент инерции относительно произвольных осей, параллельных центральным, равен центробежному моменту инерции относительно центральных осей плюс*

произведение площади сечения на координаты ее центра тяжести в произвольных осях.

Эта формула еще более упрощается, если одна из центральных осей сечения является осью симметрии. Тогда $I_{xy}=0$ и центробежный момент инерции относительно осей, параллельных центральным, равен

$$I_{xy}—a3>A. \quad (4.12)$$

Складывая первые две формулы (4.11) и учитывая, что $=/_{X[}+7_{),1}$ [см. условие (4.6)], получаем зависимость для полярного момента инерции при параллельном переносе осей из центра тяжести (полюс *О)* в произвольную точку (полюс *О*0:

$$I,=I_9+\{a^c+Ъ^c)A. \quad (4.13)$$

Пример 4.6. Определить момент инерции прямоугольного сечения относительно его основания — оси *x*\.

Решение. Воспользуемся первой формулой переноса (4.11), считая, что момент инерции сечения относительно центральной оси *x* известен (из примера 4.3): $ЫI^{3}$ Тогда

$$I_X=I_x+a\,A\cdot\frac{ьн^3}{12}+\left(\frac{/ЛУ}{\backslash 2/}\right)^2 АЛ=\frac{ьи^3}{3}.$$

3 --^{Ь}—

Укажем на особенность определения моментов инерции тонкостенных стержней, учет которой приводит к некоторым упрощениям при вычислениях. У тонкостенных стержней толщина, как правило, прямоугольных пластинок *8,* из которых состоит сечение стержня, значительно меньше ширины *Ь (8«Ь).* В большинстве случаев при использовании формул перехода (4.11) можно пренебрегать моментом инерции относительно центральной оси, параллельной большему размеру *Ь.*

Рассмотрим прямоугольную пластинку с площадью *А,* принадлежащую некоторому тонкостенному стержню, и определим момент инерции ее относительно оси x_x (рис. 4.10):

$Л_1$=/г + л²у<=“ + a^2 ЬЬ — Aa^2 ^ +1^

Первое слагаемое есть момент инерции пластинки относительно центральной осн *х.* Опеним, какая погрешность может быть внесена в значение момента инерции , если пренебрегать этим слагаемым. Так, при *8/а*=1 /3 она равна 1/ю$_в$, что приблизительно составляет 1% от I_X.

Таким образом, при *а>38* погрешность не превысит 1% и практически всегда можно пренебрегать моментом инерции относительно центральной оси, параллельной большему размеру *Ь,* т. е. считать, что I_x^a^2A.

§ 4.3. Зависимость между моментами инерпин при повороте осей

В предыдущем параграфе были выведены формулы для определения моментов инерции се^{п}епия при параллельном переносе осей и показано, что при этом значения моментов инерции изменяются.

Получим зависимости для вычисления моментов инерции сечения относительно осей *и* и v, повернутых на угол а против хода часовой стрелки (положительное значение угла) по отношению к координатным осям *х, у* (рис. 4.11).

Будем считать, что моменты инерции сечения относительно осей *х и у* известны:

$$I_X = \int_A y^2 dA \quad I_Y = \int_A x^2 dA. \qquad (4.14)$$

Запишем координаты элементарной площади с*1А* в системе координат *и,* v. Из рис. 4.11 очевидно, что

и^апа+хсова; у=_усова—хяпя. (4-15)

Найдем момент инерции относительно оси *и.* Согласно определению,

$$I_u = \int_A v^2 dA. \qquad (4.16)$$

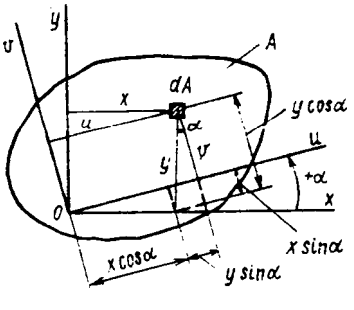


Рис. 4.11. К выводу зависимостей между моментами инерции при повороте осей

Напомним:
2sinacosa = sin2a

Подставив выражение для v из (4.15) в формулу (4.16), получим

$$J_A (y \cos a - x \sin a)^2 dA = \cos^2 a \, J_A y^2 dA -$$

$$-2 \sin a \cos aj \, xy \, dA + \sin^2 aj \, x^2 dA.$$

Тогда с учетом (4.14) окончательно будем иметь

$$Л = Л \cos^2 a + J_y \sin^2 a - Л, \sin 2a. \quad (4.17)$$

Поступая аналогично, найдем момент инерции относительно другой оси v:

$$Л = Л \sin^2 a + J_y \cos^2 a + J_{xy} \sin 2a. \quad (4.18)$$

Напомним:
$\sin^2 a + \cos^2 a = 1$

Отметим, что если сложить выражения (4.17) и (4.18), то

$$Л + Л = Л + Л \quad (4\text{-}19)$$

и, следовательно, получен результат, доказанный в § 4.1, но другим путем, а именно: *сумма осевых моментов инерции относительно двух взаимно перпендикулярных осей не зависит от угла* а *и при повороте осей сохраняет постоянное значение.* Величины, не изменяющиеся при повороте координатных осей, называются *инвариантами.* Следовательно, сумма $J_x + J_y$ является *инвариантом.*

Теперь точно так же (как и /„) получим зависимость для центробежного момента инерции относительно осей *и* и v:

$$/_{uv} = Jmv(Í^ = J (y \sin a + x \cos a) (y\cos a - x\sin a) d/4 =$$

Напомним:
$\cos^2 a - \sin^2 a = -\cos 2a$

$$= \sin a \cos a \, I \, jy^2 dA - jx^2 dA \, J + (\cos^2 a - \sin^2 a) \, jxy \, dA,$$

или после преобразований

$$Ju\,v = \sin 2a + J_{xy} \cos 2a. \quad (4.20)$$

Напомним:
$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$,
$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$

Для удобства вычислений полученные формулы (4.17), (4.18) и (4.20) целесообразно выразить через функции угла 2a:

$$\frac{Jx + Jy}{2} \frac{J_x - Jy}{2} \cos 2a - /_{„} \sin 2a; \; J_v = \frac{Jx + Jy}{2} \frac{Jx - Jy}{2} \cos 2a + Лy \sin 2a;$$

Формулы для определения моментов инерции при повороте осей

$$J_m = \frac{J}{\sim} \sin 2a + J_{xy} \cos 2a.$$

§ 4.4. Главные оси и главные моменты инерции. Понятие о радиусе инерции

В § 4.3 получены зависимости (4.21), из которых видно, что при изменении угла поворота осей а значения моментов инерции изменяются, но при этом сумма осевых моментов инерции относительно таких координатных осей остается постоянной. Следовательно, если относительно одной оси значение момента инерции будет наибольшим, то относительно другой оси, ей перпендикулярной, — наименьшим. Эти оси интересны еще и тем, что центробежный момент инерции относительно них оказывается равен нулю.

Итак:

оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, будем называть *главными осями;*

если начало координат совпадает с центром тяжести сечения, то тогда их называют *главными центральными осями*;

моменты инерции относительно этих осей называются *главными моментами инерции* или *главными центральными моментами инерции.*

Докажем приведенные выше утверждения. Рассмотрим несимметричное сечение и для него определим положение главных осей, если известны моменты инерции $/_x$, I_y и /ф относительно произвольных осей x и y, т. е. угол наклона главных осей ао к осям x и y. Согласно определению главных осей, имеем при а = ао 0, или с учетом формулы (4.20)

—— вт 2ао + Л* сое 2а<) = 0.

Отсюда

J_x—$3y$ sin2ao

2 cos2oo

и тогда

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2J_{xy}}{J_x - J_y}. \qquad (4.23)$$

Формула для определения положения главных осей

По этой формуле определяются два значения угла вц/ и ао" = ао' + 90°, отличающиеся друг от друга на 90°, и положение главных осей, которые являются взаимно перпендикулярными.

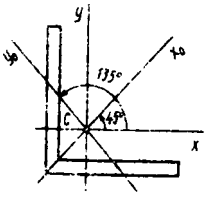
Интересно провести небольшой анализ формулы (4.23). Рассмотрим возможные результаты, кроме «стандартного», когда $I_{xy}ф0$ и I_X—) $_y Ф 0$ и когда определяем два угла oto' и «о*:

—Н—I

1 /^=0и/*-/,#0, тогдо^2ао=0иа<)'=0, ао^ЭД⁰, т. е. оси *х и у* — главные.

2. Л,#0, /,-/,=0, т. е. У,=/, и tg2ao= оо, тогда ао'=45⁰, ао" = 135°.

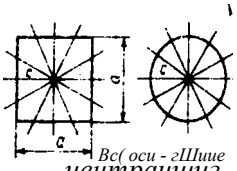
Сситу-ыоЬшецентра'тые, пси ¡¡ид-гШте



Оси x_0 и y_0 - главные центральные

В этом случае примером может быть сечение в виде равнобокого уголка, для которого осевые моменты инерции относительно центральных осей *х ну,* параллельных полкам, равны между собой, а центробежный момент инерции Л,/0, главные оси *Хй* и y_0 с этими осями составляют углы 45 и 135°.

3. Л,=0, Л-/,-О, для tg2ao получается неопределенность вида tg2oto=-. Ее легко раскрыть, используя формулу (4.21) для /в». Из этой формулы следует, что центробежный момент инерции равен нулю при любых значениях угла ¿о, т. е. любые оси (при повороте их) являются главными; примерам таких сечений будут круг, квадрат и др.



Вс(оси - гШше центрачшиг

Таким образом, в сечениях может быть либо пара главных центральных осей, либо бесчисленное множество.

Для сечений, имеющих ось симметрии, положение главных осей определяется просто. Ими являются ось симметрии и перпендикулярная ей ось, так как относительно этих осей центробежный момент инерции сечения равен нулю (см. § 4.1).

Теперь покажем, что относительно главных осей осевые моменты инерции принимают экстремальные значения. Для эгого вычислим первую производную от выражения $/_u$ из (4.21) и приравняем ее к нулю, т. е. найдем угол поворота оси а., при котором моменты инерции будут равны наибольшему ила наименьшему значению:

Напомним:

(втиУ^ысовы

(С08и)'= — ЫвШИ

$$\frac{\text{ал. л-л}}{\text{аа}} \quad \frac{\text{---------}}{2} \; \textit{2} \; \textit{¿ш} \; 2\text{а.} \textit{—3„2} \; \text{сое } 2\text{а.} = \text{О},$$

или

- (Л - Л) *£ 2*Ф - =°»

откуда

$$tg2a, = \frac{'И_{XY}}{*x \; ¿y} \qquad <^4\text{-24})$$

Сравнивая формулы (4.23) и (4.24), можцо сделать вывод, что угол наклона главных осей Оо равен углу наклона осей а,, относительно которых моменты инерции прилимаюг экстремальные значения. Таким образом, доказаны утверждения, приведенные в начале параграфа, а именно:

главными осями являются такие две взаимно перпендикулярные оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, а осевые моменты инерции принимают максимальное и минимальное значения.

Главные оси н главные моменты инерции

Значения главных моментов инерции Л... (или /]) и /„ш (или /2) можно определить, подставляя найденные по формуле (4.23) углы осо' и ао* в выражения (4.17) или (4.18). После этого можно указать оси, относительно которых моменты инерции будут иметь наибольшее и наименьшее значения.

Существует и другой путь (более целесообразный) для определения главных моментов инерции — через известные моменты инерции сечения I_X, I_y и I_{xy}. Получим эти формулы, исключив из первой формулы (4.21) угол а. Тогда

$$Л_{тш}=-/_{тм}=\frac{^^+^}{2}-\text{совгао}—Л_{увтгао}, \qquad (4.25)$$

или, подставляя в (4.25) из формулы (4.22) выражение для величины получаем

$$Л_{тш}=\frac{г^x+^y}{2}-\frac{^x~3y}{2}\text{ яп2а}(Д^*\text{ сое }2ao+(\frac{}{у}\ 2\ ooc\&Ъхф/)\text{ яп2ао}=$$

$$—I^{+}\text{-г^-} \qquad <4\text{-}26>$$

Учитывая, что

$$\frac{1}{\text{С08 2ао}}\blacksquare=\pm\text{ч/ГИр2}^{\wedge};\ tg2a_{<}>=\frac{гГху}{Ix\text{-}3y}.$$

получим

$$—\text{‘г-}=\pm\text{Г-Ц-}\ л/(/,-/,)^{*}+4_{з\backslash y}. \qquad (4.27)$$

Подставляя формулу (4.27) в (4.26), окончательно будем иметь

$$/_{ти}=*\ ^{y}\pm-\ \backslash/(Л\sim/у)^2+4/\ Iy. \qquad (4.28)$$

Формулы главных моментов инерции

Знак плюс перед вторым слагаемым в (4.28) относится к максимальному моменту инерции, знак минус — к минимальному.

Отметим, что если за исходные оси принять главные, то формулы перехода к повернутым осям (4.17), (4.18), (4.20) или (4.21) упрощаются, так как в этих формулах $/^{*}=0$.

Часто вместо формулы (4.23), определяющей положение главных осей, пользуются формулами

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = -\frac{J_{xy}}{J_{\max} - J_y}; \quad \operatorname{tg}\alpha_2 = -\frac{J_{xy}}{J_{\min} - J_y}. \tag{4.29}$$

Здесь угол oti — угол между осью *x* и осью, относительно которой момент инерции равен $J_{,,,,}$ а угол a_2 — угол между осью *x* и осью, относительно которой J^.

Какой же из формул для определения положения главных осей — (4.23) или (4.29) — целесообразнее пользоваться?

По формуле (4.23) определяют положение главных осей, используя известные моменты инерции J_x, J_y и J_{xy}.

При этом по полученным результатам (углам ао' и OQ") невозможно установить, какая из главных осей является осью, относительно которой момент инерции имеет наибольшее (ось максимум) или наименьшее (ось минимум) значение. Однако существует правило, позволяющее решить этот вопрос: ось максимум (или минимум) всегда составляет меньший угол с той из осей (осью je или _y), относительно которой момент инерции имеет большее (или меньшее) значение.

По формулам (4.29) сразу, без дополнительного анализа, определяется положение главной оси, относительно которой момент инерции будет наибольшим или наименьшим. Но зато требуется предварительно найти значения или /тш по формуле (4.28).

Из приведенных рассуждений видно, что проще положение главных осей находить по формулам (4.29), так ка« при расчетах обычно необходимо знать не только положение главных осей, но и значения главных моментов инерции.

Интересно проиллюстрировать графически полученные основные результаты. Формулы (4.21) показывают, что при повороте осей моменты инерции Л и изменяются по синусоидальному закону. На рис. 4.12 изображены графики этих величин, зависящие от угла поворота а. При а=0 (начало координат) значения моментов инерции J_x, J_y и J_{xy} соответствуют известным моментам

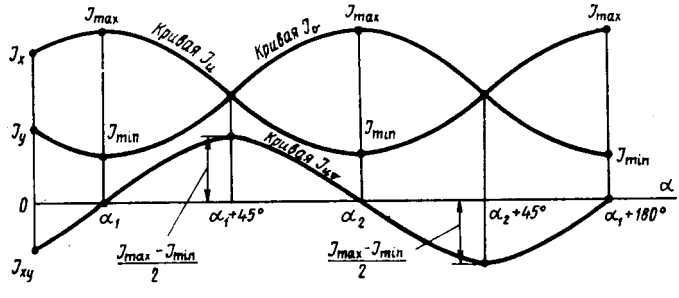


Рис. 4.12. Зависимости моментов инерции сечения от угла поворота

инерции относительно произвольных начальных осей *х н у*. **При углах наклона главных осей а] и a_2 центробежный момент инерции 7^=0, а осевые моменты инерции**

зПИ и Умп.

При углах а!+ 45° и a_2 + 45° наибольшего значения достигает центробежный момент инерции (с разными знаками) а осевые моменты инерции /„ и $У_ч$ равны между собой.

Познакомимся еще с одной геометрической характе-, ристикой — радиусом инерции сечения. Эта величина часто используется в теоретических выводах и практических расчетах.

■

Радиус **инерции**

Радиусом инерции сечения относительно некоторой оси, например *х,* называется величина $/_x$, определяемая из равенства

$$Б=Ax\backslash. \qquad (4\ 30)$$

Из определения следует, что радиус инерции равен расстоянию от оси *х* до той точки, в которой следует сосредоточить (условно) площадь сечения *А,* чтобы момент инерции одной этой точки был равен моменту инерции всего сечения. Зная момент инерции сечения и его площадь, можно из формулы (4.30) найти радиус инерции относительно оси *х:*

$$\boxed{i_x=\sqrt{\frac{J_x}{A}}.} \qquad (4.31)$$

Формула радиуса инерции

Радиусы инерции, соответствующие главным осям, называются *главными радиусами инерции* и определяются по формулам

$$\boxed{i_{max}=\sqrt{\frac{J_{max}}{A}};\quad i_{min}=\sqrt{\frac{J_{min}}{A}}.} \qquad (4.32)$$

§ 4.5. Вычисление моментов инерции тонкостенных сечении

Тонкостенные стержни, как правило, состоят из пластинок, а их поперечные сечения — из прямоугольников. При вычислении моментов инерции таких сечений интегралы по площади *А* заменяют интегралами по длине средней линии контура сечения 5. Для сечений, имеющих постоянную толщину тонкостенных элементов, формулы моментов инерции принимают следующий вид:

J_x—Jy^d/iSrZiJxycLs; *Jy*—jxMiisZiilxxdij J_{xy}—

$$= \int_A xy\,dA = Z(5, \int_{*i} xy\,dj. \qquad (4.33)$$

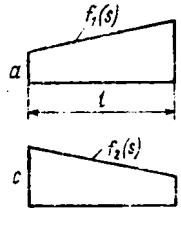
Здесь cL4 = <5ds; δ,=const — толщина тонкостенных элементов.

При такой замене, не учитывается собственный момент инерции тонкостенного элемента относительно средней линии контура, значение которого обычно мало по сравнению с моментом инерции всего сечения. Это является особенностью вычисления моментов инерции тонкостенных сечений по формулам (4.33), и, следовательно, значения их будут определены приближенно (см. § 4.2).

Каждый из интегралов (4.33) может рассматриваться как интеграл, у которого подынтегральное выражение представляет собой произведение двух функций координат: ***x—f*** (**5**) и ***y—/г (s),*** т. е. является частным случаем интеграла

$$/ = \text{E J/, } \textbf{Шг}\ \text{Web.} \qquad (4.34)$$

В интегралах (4.33) обе функции *x* и *y* будут линейными. Для их вычисления используются различные способы. Познакомимся с одним из них. Функции /, (у) и $/_2$ (у) на некотором участке длиной /, в общем случае графически могут быть представлены в виде трапеций. Тогда значение интеграла (4.34) вычисляется по формуле (более подробно об этой формуле см. в Приложении I), которую называют «формулой трапеций»:



$$/ = -(2ac+2bd+ad+be). \qquad (4.35)$$

При вычислениях по формуле (4.35) следует ординаты функций подставлять с учетом их знаков. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 4.7. Определить момент инерции тонкой полоски относительно оси *x* (рис. 4.13, *а).*

Средш
*сини**
**/гЛ^А*

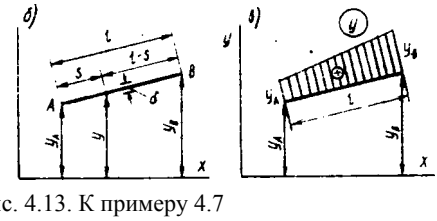


Рис. 4.13. К примеру 4.7

Решение. Заменим тонкую полоску, показанную на рисунке, полоской, очерченной по средней линии той же толщиной **6** (рис. 4.13, *б).*

Текущая координата

$$y_{ш} y_{л} — + y_{ay}$$

Подставим выражение (4.36) в (4.33):

$$\text{ПУЛ—+УВ-) <Ь.} \qquad (4.37)$$

После интегрирования (4.37) получим

$$Л = - (У_{А}^{2} + У * У_{в} + У\%\bullet \qquad (4.38)$$

Формула (4.38) часто применяется при расчетах тонкостенных конструкций.

Тот же результат можно получить и другим способом — построить график функции y (эпюру .у) (рис. 4.13, в) и применить формулу трапеций (4.35) для вычисления $У_{х}$, т. е. «перемножить эпюру y саму на себя»:

$$(2y^{2}_{А} + 2y^{2}_{г} + y\ ¿y_{в} + y_{в}y_{л}) = т\ (Уа + УаУй + Ум) -$$

Прамер 4.8. Для тонкостенного 2-образного сечения определить моменты инерции $/_{х}$, и 7^; размеры сечения даны в см (рис. 4.14, в).

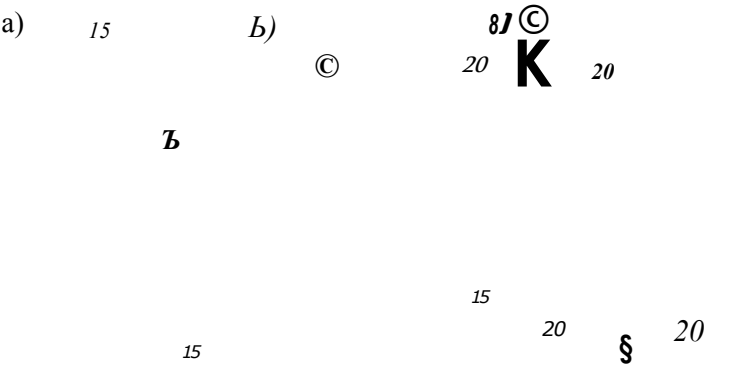


Рис. 4.14. К примеру 4.8

Решение. Сначала вычислим моменты инерции сечения по формулам переноса (4.11). Разобьем сечение на три прямоугольника и получим их точные значения:

$$Л = \frac{14 \cdot 1^{3}}{12} + 14 \cdot 1 \cdot 20^{2} 2 + \frac{2 \cdot 41^{3}}{12} = 22\,689 \text{ см}^{*};$$

$$\frac{114^{3}}{12} + 1'14(7+1)^{*} 2 + \frac{41 \cdot 2^{3}}{12} = 2277 \text{ см}^{*};$$

$$Л > = -2(1\ 14 \cdot 20 \cdot 8) = -4480 \text{ см}^{*}.$$

Вычислим приближенные значения моментов инерции, пользуясь формулами (4.33). Для этого построим эпюры координат x и y (рис. 4.14, *б, в)* и перемножим их, используя формулу трапеции (4.35):

$$/^{*} = 2 \frac{1 \cdot 15}{2} (2 \cdot 20 \cdot 20 + 2 \cdot 20 \cdot 20 + 20 \cdot 20) - I \frac{2 \cdot 20}{2} (2 \cdot 20 \cdot 20) =$$

$I_y = 2\left(\frac{1}{12}\cdot 15\cdot 15\right) = 2250$ см , погрешность 1,19%;

$I_{xy} = -2\left(\frac{1}{2}\cdot 15\cdot 20 + 15\cdot 20\right) = -4500$ см^4, погрешность 0,45%.

Из сравнения полученных результатов видно, что использование формул (4.33) дает небольшую погрешность и свидетельствует о возможности их применения.

§ 4.6. Вычисление моментов инерции сложных фигур

При расчетах балок на прочность и жесткость необходимо определять значения геометрических характеристик сложных поперечных сечений, а именно положение главных центральных осей и главных центральных моментов инерции. Порядок их определения рассмотрим на следующем примере.

Пример 49. Определить положение главных центральных осей и вычислить главные моменты инерции относительно этих осей для заданного сечения (рис. 4.15); размеры сечения на рисунке даны в см.

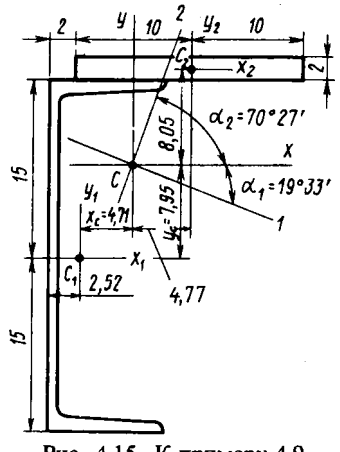


Рис. 4.15. К примеру 4.9

Решение. Сечение разбиваем на: две части: швеллер № 30 и прямоугольник 20х2 см. Геометрические характеристики швеллера № 30 принимаем по ГОСТ 8240—89: >41 = 40,5 см[1], = 5810 см^4,

7^=327 см^4, дсо=2,52 см. Выбираем в качестве вспомогательных осей

центральные оси швеллера № 30 и определяем координаты центра тяжести сечения в этих осях по формулам (4.3):

$$y_c = \frac{2\cdot 20\cdot 16}{40{,}5 + 2\cdot 20} = 7{,}95 \text{ см}; \quad x_г = \frac{2\cdot 20\,(2+10-2{,}52)}{40{,}5 + 2\cdot 20} = 4{,}71 \text{ см}.$$

Отложив полученные значения от осей *x\, У1,* находим положение

Проводим центральные оси сечения *x, y* и относительно этих осей находим осевые и центробежный моменты инерции сечения по формулам (4.11) и (4.12) соответственно:

$$J_x=[5810+40{,}5\ 7{,}954+\frac{20\cdot 2^3}{12}+20\cdot 2\ (15+1-7{,}95)^4=10\ 975\ \text{см}^4;$$

$$J_y=[327+40{,}5\cdot 4{,}71^2]+\frac{2\cdot 20^3}{12}+20\ 2\ (2+10-2{,}52-4{,}71)^2=3469\ \text{см}^4;$$

$$J_{xy}=-40{,}5\cdot 4{,}71\ 7{,}95+20\ 2\ (-8{,}05)\ (-4{,}77)=3052\ \text{см}^4.$$

Вычисляем значения главных центральных моментов инерции по формуле (4.28):

$$J_{max}=\frac{10\ 975+3469}{2}\pm\sqrt{(10\ 975-3469)^2+4\cdot 3052^2}=7222\pm 4837,$$

или окончательно J_{max}—12 059 см^4, J_{min}—2385 см^4.

Определяем положение главных центральных осей по формулам (4.29):

$$\operatorname{tg}\alpha_1=\frac{3052}{12\ 059-3469}=0{,}355,\ \alpha_1=19°33';$$

$$\operatorname{tg}\alpha_2=\frac{3052}{2385-3469}=-2{,}816,\ \alpha_2=-70°27'.$$

Напомним, что положительные углы откладываются от оси *x* против хода часовой стрелки, а отрицательные углы — по ходу часовой стрелки. Положение главных центральных осей (ось максимум обозначена цифрой 1, а ось минимум — цифрой 2) показано на рис. 4.15.

Положение главных центральных осей можно определить и по формуле (4.23):

$$\operatorname{tg}2\alpha_0=\frac{2\cdot 3052}{10\ 975-3469}=0{,}813;$$

откуда $2\alpha_0=39°6'$ и $2\alpha_0=-39°6'+180°=140°54'$, или $\alpha_0=-19°33'$ и $\alpha_0=70°27'$.

Эти углы являются углами наклона главных центральных осей, отложенных от оси *x*. Найдем главные центральные моменты инерции другим путем, подставив полученные значения углов в первую формулу (4.21). В этой формуле

$\sin 2\alpha_0=-0{,}631$, $\cos 2\alpha_0=0{,}776$ и $\sin 2\alpha_0=-0{,}631$, $\cos 2\alpha_0=-0{,}776$.

Тогда

$$J_a=\frac{10\ 975+3469}{2}+\frac{10\ 975-3469}{2}\cdot(-0{,}776)=3052\cdot(-0{,}631)=12\ 059\ \text{см}^4;$$

$$J_b=\frac{10\ 975+3469}{2}+\frac{10\ 975-3469}{2}\cdot(-0{,}770)-3052\cdot 0{,}631=2385\ \text{см}^4=J_{min}.$$

Таким образом, угол α_1 — угол наклона оси максимум, а угол α_2 — угол наклона оси минимум. Результаты, естественно, совпадают с результатами, полученными выше.

Следует заметить, что наименьший угол, найденный по формуле (4.23), соответствует положению главной оси, относительно которой момент инерции имеет максимальное значение при $J_x>J_y$ минимальное значение при $J_x<J_y$.

Выполним проверку правильности вычислений:

1) Л+^-У^+Ушт-М 975 +3469-12 059 + 2385-14 444 см^4;

2) У^-—-— ап2а,,+Уг,,со82а$_0$=---------- (-0,631)+3052 х

х 0,776 =0.

Вопросы для самоконтроля к главе 4

4.1. Что называется статическим моментом сечения относительно оси?

4.2. Какова размерность статического момента?

43. Чему равен статический момент сечения относительно центральной оси?

4.4. По каким формулам определяются координаты центра тяжести сечения?

4.5. Для каких сечений при определении центра тяжести достаточно найти только одну координату?

4.6. Что называется осевым, полярным и центробежным моментами инерции сечения?

4.7. Какова размерность моментов инерции?

4.8. Чему равна сумма осевых моментов инерции сечения относительно взаимно перпендикулярных осей?

4.9. Какие моменты инерции всегда положительны?

4.10. Для каких фигур и относительно каких осей центробежный момент инерции равен нулю?

4.11. Как изменяется центробежный момент инерции при повороте осей координат на 90°?

4.12. Чему равен осевой момент инерции прямоугольника и равнобедренного треугольника относительно центральной оси, параллельной их основанию?

4.13. Чему равны осевые моменты инерции круга и кольца относительно центральных осей?

4.14. Какие оси называются главными и какие — главными центральными?

4.15. Относительно каких центральных осей осевые моменты инерции имеют наибольшее и наименьшее значения?

4.16. Запишите зависимости для осевого и центробежного моментов инерции при параллельном переносе осей.

4.17. Приведите формулы для осевого и центробежного моментов инерции при повороте осей.

4.18. Как определяется положение главных осей?

4.19. По каким формулам находятся главные моменты инерции?

4.20. Какой из двух моментов инерции квадратного сечения больше: относительно центральной оси, параллельной основанию, или относительно оси, совпадающей с диагональю сечения? Почему?

Задачи к главе 4

4.1. Определить положение центра тяжести сечений (рис. *а* и б), имеющих ось симметрии. Размеры даны в см.

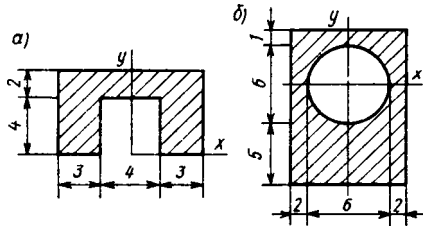


Рис. к задаче 4.1

4.2. Найти внутри квадрата такую точку *Е,* чтобы она была центром тяжести площади, которая получится, если из квадрата вырезать равнобедренный треугольник *ЛЕВ.*

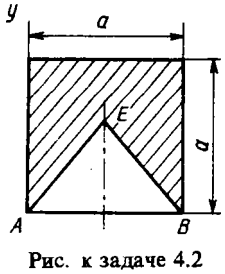


Рис. к задаче 4.2

4-3. Вычислить моменты инерции сечений относительно оси *х* (рис. *а в б).*

4.4. Определить главные центральные моменты инерции сечений (рис. *а—г).* Размеры даны в см.

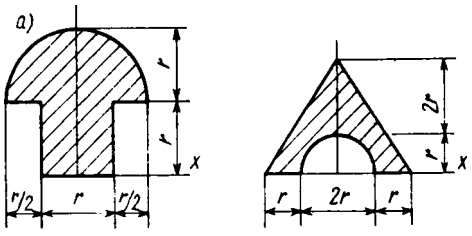


Рис. к задаче 4.3

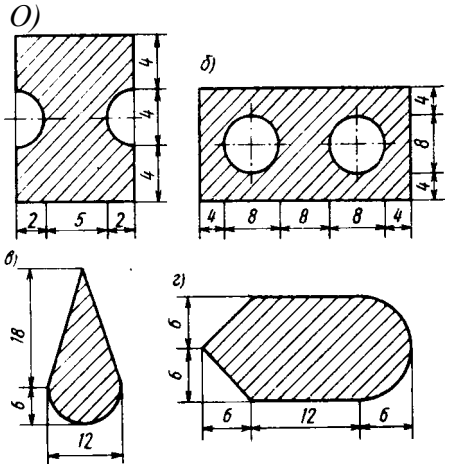


Рис. к задаче 4.4

4.5. Вычислить главные центральные моменты инерции тонкостенного сечения. Размеры даны в см.

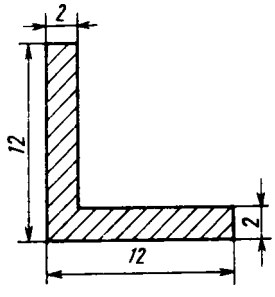


Рис. к задаче 4.5

4.6. Найти положение главных центральных осей и вычислить значения моментов инерции относительно этих осей.

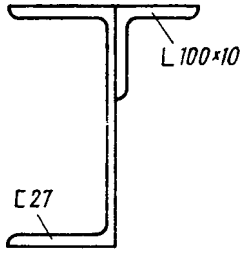


Рис. к задаче 4.6

Ответы к задачам главы 4

4.1. а) $x_c=0$, y_c=3,36 см; б) x_c=0, y_c — —2,63 см. 4.2. $x_c=a/2$, y_c=0,634 a. 43. а) $У_x$= =3,8 г*; б) $/_x$=8,61г*.

4.4.

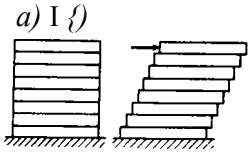
Схема	*а*	*б*	*в*	*г*
■Лгпп ₁ см*	1283 553	36 867 10 521	6045 1157	18 095 3317

4.5. /щи = 895 см⁴, $У_{тк}$=239 см*. 4.6. а, =-9°, $/_т$« = 5888 см*, /^ = 658 см*.

ГЛАВА 5

СДВИГ И КРУЧЕНИЕ

§ 5.1. Чистый сдвиг



Модель в виде стопки пластин испытывает: сжатие (а), сдвиг *(б)*

Кроме деформации растяжения или сжатия материал нагруженного элемента конструкции может испытывать *деформацию сдвига.* В сплошном материале деформацию сдвига можно осуществить, например, если подвергнуть кручению тонкостенную трубу (рис. 5.1, *а).* Прямоугольные до деформации элементы материала стенок трубы превращаются в параллелограммы за счет изменения первоначально прямого угла на малый угол *у,* называемый *углом сдвига.*

На рис. 5.1, б показан элемент, выделенный из стенки трубы. Компоненту касательных напряжений, возникающих на горизонтальных площадках в окружном направлении, обозначим т,,. Одни напряжения m_{1X} существовать на гранях элемента не могут, так как они, образуя пару сил с моментом (т,, ёхй) *¿г,* где в скобках дано значение касательных сил, а ¿г — плечо пары сил, вызвали бы вращение элемента. Поэтому на вертикальных гранях указаны компоненты напряжений т,,, приводящиеся к паре ($т_{Хг}$*йг5)йх.* Найдем соотношение этих напряжений из условия равновесия элемента в виде равенства нулю сум-

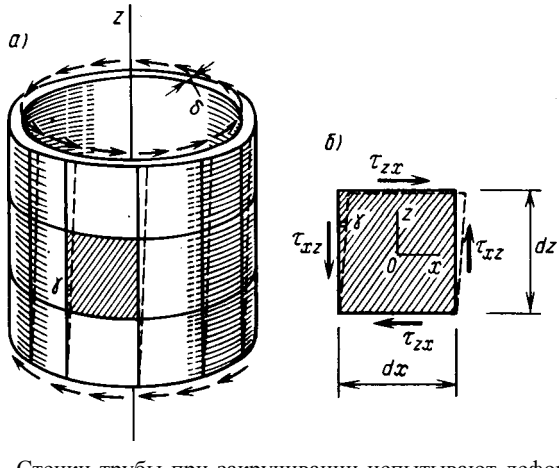


Рис. 5.1. Стенки трубы при закручивании испытывают деформацию сдвига

мы моментов этих пар:

(т„ <1х5) <к - (Тхг <Ы) <1х=0.

Сократив это выражение на произведение *йх&гд,* получим равенство

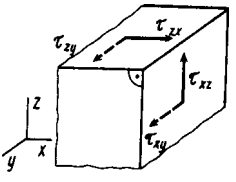
Тгг — (5.1)

называемое *законом парности касательных напряжений*:

на взаимно перпендикулярных площадках касательные напряжения численно равны и направлены так, что стремятся вращать элемент в противоположные стороны.

Закон парности касательных напряжений

Подчеркнем, что в общем случае на каждой площадке могут возникать две компоненты касательных напряжений, например *х,,* и x_{xy}. В законе о парности идет речь о компонентах, перпендикулярных линии пересечения ортогональных площадок.



Таким образом, в плоскости могут быть только два варианта действия касательных напряжений на гранях прямоугольного элемента материала, отличающиеся направлением векторов напряжений $т_в$=т„=т.



Напряженно-деформированное состояние, характеризуемое тем, что на гранях элемента возникают только касательные напряжения, называют чистым сдвигом.

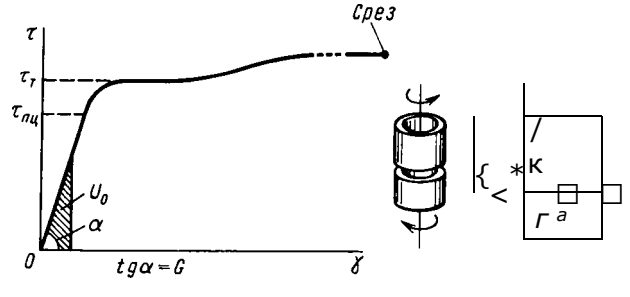
Все элементы стенки трубы на рис. 5.1, *а* находятся в одинаковых условиях и испытывают чистый сдвиг.

Закон Гука при сдвиге. Экспериментальное изучение деформации чистого сдвига обычно проводят путем кручения трубчатых образцов, подобных показанному на рис. 5.1, а, *б,* получая из эксперимента зависимость между напряжением т и углом сдвига *у.* Такая диаграмма сдвига изображена на рис. 5.2 для пластичной стали. До напряжения Тцц, называемого *пределом пропорциональности при сдвиге,* справедлива линейная зависимость

Сравните с диаграммой растяжения

т=(ту. (5.2)

которая носит название *закона Гука при сдвиге.* Напряжение $т_т$ является *пределом текучести при сдвиге,* т. е. каса-



тельным напряжением, при котором угол сдвига возрастает при постоянном напряжении. Для пластичного материала протяженность диаграммы сдвига довольно велика (на рис. 5.2 отмечено пунктиром). Завершается испытание в этом случае срезом материала в плоскости поперечного сечения трубчатого образца.

В формуле (5.2) G — это *модуль упругости материала при сдвиге.* Смещение А (рис. 5.2) называют *абсолютным сдвигом,* а отношение A/a=tgy*y — *относительным сдвигом* или, как указывалось, углом сдвига. Эта величина безразмерная, поэтому модуль сдвига G выражается в единицах напряжения (Йа). В § 13.11 будет теоретически доказана формула, связывающая для изотропного материала три константы упругости: E — модуль упругости при растяжении; *fi* — коэффициент Пуассона; G — модуль сдвига, а именно:

См. § 3.1

$$G=\frac{E}{2(1+*0} \qquad (5.3)$$

Например, для стали £=200 ГПа, /х=0,25 и по формуле (5.3) найдем, что 6=80 ГПа. Зависимость (5.3) подтверждается экспериментально. Характерно, что для многих материалов предел текучести при сдвиге $т_х$ связан с пределом текучести при растяжении a_7 следующим соотношением: $т_т$ а a_T*(у/ъ*. Объяснение этому будет дано ниже (см. гл. 14).

Потенциальная энергия при чистом сдвиге. Вычислим энергию деформации, накапливаемую в элементе размером ахах 1, показанном на рис. 5.2. Эта энергия равна работе касательных сил, приложенных к граням элемента. Работу совершает горизонтальная сила $T= x \cdot a \cdot 1$ на перемещении А= *уа.* Работа этой упругой силы будет $A = (1/2)\ 2'''A = (1/2)\ my\ a^2$. Отнесем численно равную работе энергию деформации к единице объема элемента:

$$M=\frac{1}{2}\text{ТУ}=2C \quad \frac{1}{2}\ \hat{G}\bar{y}' \qquad (5.4)$$

Величина *и* называется *плотностью энергии деформации или удельной потенциальной энергией деформации при чистом сдвиге.* Численно она равна площади треугольника на диаграмме сдвига (рис. 5.2).

Если по объему материала V касательные напряжения т имеют переменное значение, то энергия деформации в объеме V найдется как интеграл:

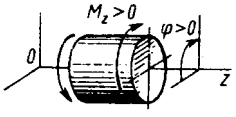
$$u=1][u\&к\&уйг, \qquad (5.5)$$

где *u&xAyûz* энергия, накопленная в элементарном объеме тела.

§ 5.2. Кручение стержней с круглым поперечным сечением. Расчеты на прочность

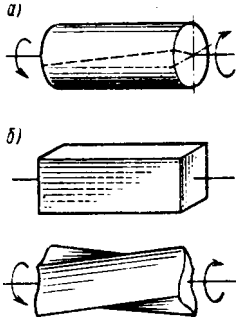
Общая деформация кручения стержня с круглым сечением изображена на рис. 5.3. Эта деформация характерна тем, что поперечные сечения поворачиваются вокруг оси стержня *г* на углы <*p = ср (г),* называемые *углами закручивания,* а в поперечных сечениях возникают касательные напряжения т, приводящиеся к крутящему моменту $M_г$.

Напомним правило знаков для момента $M_.$ (см. выше § 2.3): при взгляде на торцевое сечение элемента стержня <1*г* со стороны его внешней нормали видим, что положительный момент $M_г$ направлен по ходу часовой стрелки.



Угол поворота <p > 0, если при взгляде на сечение в положительном направлении оси *г* видим поворот против хода часовой стрелки.

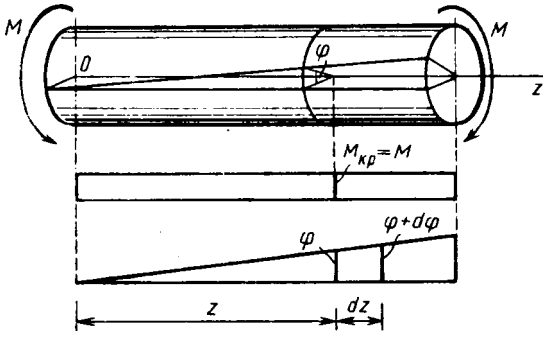
Выведем формулу для напряжений т и найдем зависимость между функцией <p и моментом $M_г$, из которой можно было бы определять углы закручивания. Для сечения в виде круга указанная задача может быть решена достаточно просто путем использования двух допущений о характере деформации стержня, подтверждаемых экспериментально. Кручение стержней с некруглым сечением представляет более сложную задачу и будет рассмотрено ниже в гл. 11 и 12.



При кручении круглое сечение остается плоским (а), а некруглое — искривляется (б)

Вывод формулы для касательных напряжений. Первое допущение состоит в том, что будем считать справедливой гипотезу плоских сечений, т. е. примем, что поперечные сечения при кручении, поворачиваясь вокруг оси *I,* остаются плоскими. Заметим, что для сечения некруглой формы это положение в общем случае несправедливо, сечения при кручении искривляются (депланируют), что существенно усложняет задачу.

Второе допущение утверждает, что все радиусы данного сечения остаются прямыми и поворачиваются на один и тот же угол *(р,* т. е. каждое поперечное сечение поворачивается вокруг оси *г* как жесткий тонкий диск.



Согласно этим допущениям, кручение представляет деформацию сдвига материала, заключенного между соседними поперечными сечениями, вызванную относительным поворотом этих сечений вокруг оси *г.*

С использованием указанных допущений на рис. 5.4 изображена деформация элемента стержня длиной сЬ, выделенного из закручиваемого стержня (см. рис. 5.3) при произвольном значении *г.* На рис. 5.4 условно принято, что левое сечение элемента стержня *йг* остается неподвижным, а правое поворачивается на угол *<1(р,* создаваемый за счет закручивания на длине *йг.* Один из радиусов *ОВ,* оставаясь прямым, поворачивается вместе с сечением на угол ёф, а образующая *СК* произвольной точки *К* этого радиуса переходит в положение *СКи* поворачиваясь на угол *у* — угол сдвига в этой точке вала. Дуга *КК\ = рА(р,* а из треугольника $СКК_X$ тот же отрезок $КК_X$=*у йг.* Из равенства *рй(р=у<Ь* найдем *у=р* (ёф/сЬ) и по закону Гука (5.2) получим касательное напряжение:

$$\tau = G\gamma = G\frac{d\varphi}{dz}\rho \qquad (5.6)$$

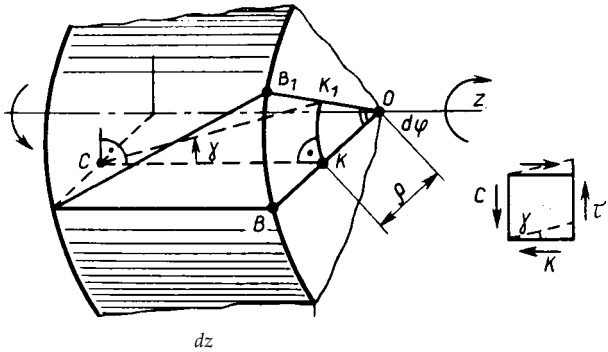
где *G* и-------- константы для всех точек сечения и, следовательно, т в сечении изменяется пропорционально *р.*

Согласно формуле (5.6), закон распределения напряжений т вдоль произвольного радиуса в сечении изображен на рис. 5.5. Во всех точках окружности радиуса *р* напряжение т=const и направлено по касательной к этой окружности.

Величина

$$\theta = \frac{d\varphi}{\quad},$$

содержащаяся в (5.6), называется *относительным (погонным) углом закручивания* и имеет размерность рад/м.



dz

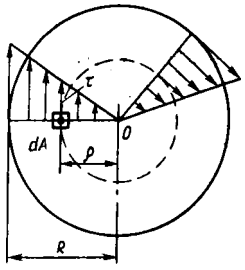
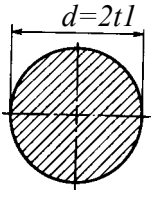


Рис. 5.5. Распределение касательных напряжений в сечении при кручении

При *в*=const это угол закручивания, накапливаемый на единице длины вала. В формуле (5.6) угол *б=dcp/dz* неизвестен и может быть найден из условия, что напряжения т в сечении сводятся к крутящему моменту M_z (рис. 5.5):



$$M_z = \int_A x\,dA\,p = G\,\varphi' \int_A \rho^2\,dA. \qquad (5.7)$$

J =-^=-^0
* 2 32 '

Интеграл по площади поперечного сечения

$$J_p = \int_A \rho^2\,dA$$

представляет полярный момент инерции сечения (м⁴). Из См. гл. 4 (5.7) получаем

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_z}{GJ_p} \qquad (5.8)$$

Соотношение (5.8) далее используется для вычисления углов закручивания *(р — ср (г)*. Произведение (7/„ называется *жесткостью сечения при кручении.* Подставив (5.8) в (5.4), окончательно получим формулу для т:

$$\tau = \frac{M_z}{J_\rho}\,\rho. \qquad (5.9)$$

Формула касательных напряжений при кручении

Подчеркнем, что по закону о парности касательных напряжений формула (5.9) определяет касательное напряжение в плоскости поперечного сечения и одновременно возникающее напряжение в перпендикулярной плоскости диаметрального продольного сечения вала. На рис. 5.6 показано распределение т вдоль радиуса в двух указанных сечениях. Каждый прямоугольный элемент материала, показанный на рис. 5.6, испытывает напряженное состояние чистого сдвига.

Расчеты на прочность. Обеспечение прочности при кручении элементов строительных конструкций круглого сечения производится по методу предельных состояний на основе неравенства

$$\tau_{max} = \frac{M_z}{J_\rho}\,\rho_{max} \leqslant R,$$

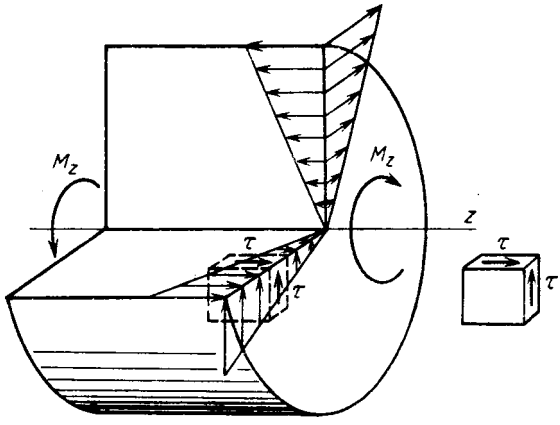
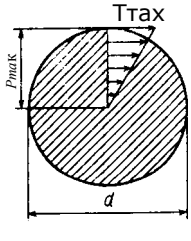


Рис. 5.6. По закону парности в диаметральных сечениях вала возникают такие же касательные напряжения, как и в поперечном сечении

где *Л* — расчетное сопротивление материала стержня при сдвиге, а крутящий момент M_x определяется от расчетных нагрузок с учетом возможных перегрузок. Левую часть неравенства запишем в несколько преобразованном виде:

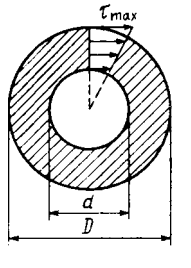
$$\tau_{max} = \frac{M_z}{W_\rho} \leqslant R. \qquad (5.11)$$

Здесь



$$IV, = n\text{ъ} = \text{-}^{*}\text{-} \qquad (5.12)$$
Ртах

— геометрическая характеристика, называемая *моментом сопротивления сечения при кручении* (м^3). Для сплошного круглого сечения



$$1Г, = \frac{\text{я}</^4/32\ \text{ж}/^3\ \text{яЛ}^*\ \text{яЛ}}{m \quad "16 \quad 2} \qquad (5.13)$$

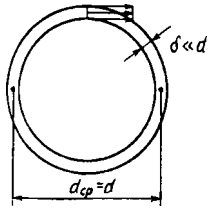
Для полого толстостенного цилиндра

$$\text{Я0732-ж/}^{\text{м}}\text{7}\text{б}2\text{»}\ \text{яЕ}^{\text{п}3\text{-г}}\ \text{Г.}\ \text{Л}\text{К}^{*}\text{Ц}^{4} \qquad (5.14)$$
$$\text{£)/2}$$

Наконец, для тонкостенного кольцевого сечения, когда толщина стенки *8* во много раз меньше среднего диаметра сечения <*1,* можно приближенно принять напряжения т равномерно распределенными по толщине

8 и равными средним напряжениям. Поэтому

$$w_p = \frac{\text{я}</^3 5/4\ nc1^2 5}{<¡¡2 \sim\sim 2} \qquad (5.15)$$



Если используется метод допускаемых напряжений, например при проектировании валов машин, то вместо (5.11) условие прочности получит вид

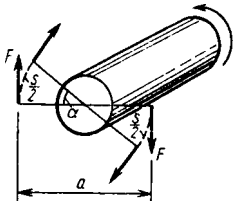
$$м. \qquad (5.16)$$

где [т] — допускаемое касательное напряжение материала стержня.

Если вал машины передает скручивающий момент $M_г$, например от мотора к станку, то значение момента зависит от передаваемой мощности и частоты вращения вала. Учитывая, что мощность равна работе в единицу времени (1 Вт=1 Нм/с), можно составить равенство $N = M_x a\text{-}M_г$ (27Ш/60), где N — мощность, Вт; $M_г$ — момент, Н • м; n — частота вращения, об/мин. Отсюда получим соотношение

$$M_г = \frac{30\ N_n\ N}{\text{я л}} = 9{,}55 \cdot \frac{}{\text{я}}, \qquad (5.17)$$

которым пользуются для определения крутящего момента по заданной мощности и частоте вращения вала.



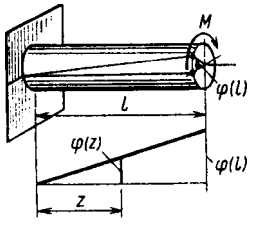
Работа момента M_x — *=Л» при повороте вала на угол *а* равна работе сил *Р* на пути *з:*

А=Л=Л1а=M_1а

§ 5.3. Определение углов закручивания. Расчеты на жесткость

Для определения углов закручивания воспользуемся соотношением (5.8), из которого, интегрируя обе части равенства, найдем

$$9^{-}\ \frac{^{2}\ \Gamma M_г}{\sim JGJ_0}\ \&+<p_0, \qquad (5.18)$$



где $<p_0$ — угол поворота при z = 0.

В частном случае при Л/$_г$ = Л/=const, GJ_P = const и $<p_o$ = 0 получим

$$\frac{Mz}{\sim GJ^*} \qquad \frac{Ml}{} \qquad (5.19)$$

Формулой (5.19) пользуются для определения угла закручивания, накапливаемого на отдельном участке длиной / при постоянных жесткости $C1_P$ и моменте $M_г$=*М.* При этом угол *ф* на длине возрастает от $Фо=0$ до *ф (I)* по линейному закону.

Рассмотрим пример использования формулы (5.19).

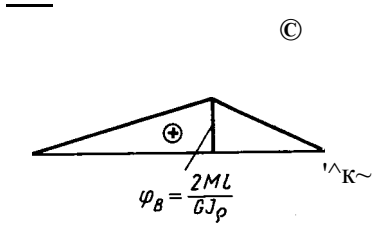


Рис. 5.7. Эпюра углов закручивания в стержне

Пусть требуется построить эпюру углов закручивания для вала, показанного на рис. 5.7. На первом (левом) участке имеем в заделке $<p_{o1} = 0$ и при $M_{й}=2M$ по (5.19) найдем $(p_в=2M1/(01_р)$. На втором участке $(p_2=(рв+ +M_{г1}2_11(CM_1),$ при $M_л= — 3M$ и $г=1$ найдем

$$<рс=(рв\frac{ЗА//}{Cmu}{}_р$$

По найденным значениям $(p_в$ и $ср_с$ на рис. 5.7 построена эпюра $ср\ (¿)$.

При более сложной нагрузке и нескольких участках интегрирования удобно использовать местную (локальную) систему координат в пределах каждого участка (аналогично поступали при определении перемещений и» при растяжении—сжатии, см. § 3.3). При этом необходимо соблюдать условия непрерывности перемещений, т. е. отсутствия разрывов в функции $<p$ на границах участков. В качестве примера рассмотрим вал, равномерно вращающийся под действием сосредоточенных моментов, равных $M,$ $4M$ и $M,$ передаваемых через три шкива (рис. 5.8, *а)*. Вал преодолевает силы трения на среднем участке $2a.$ Пусть силы трения будут равномерно распределены по длине, тогда интенсивность внешнего скручивающего момента от сил трения m найдем из условия равновесия $2,m_2=6M—2am = 0,$ откуда $m=3M/a.$ Найдем углы закручивания вала, условно принимая его среднее сечение неподвижным. Расчетная схема показана на рис. 5.8, *б,* где изображена левая половина вала.

Для каждого участка выберем начало координат на его левом конце в точках $0\backslash$ и $0_2.$ Для первого (левого)

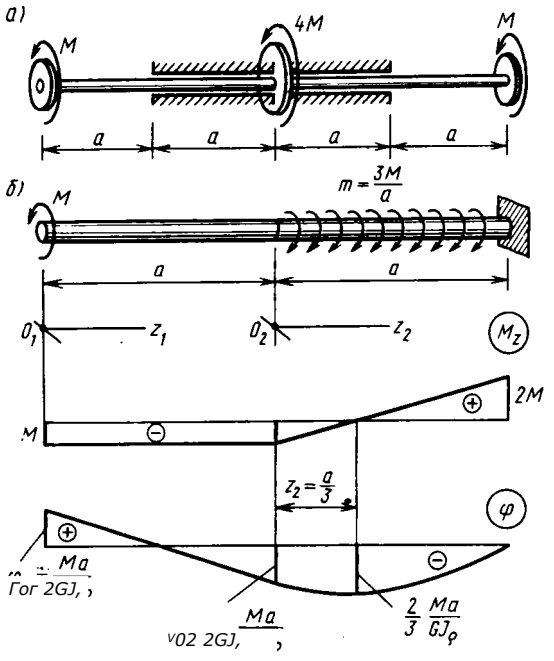


Рис. 5.8. Эпюра крутящих моментов и углов закручивания в вале при равномерном трении на среднем участке

участка $M_{zl} = — M$ и, согласно (5.18), получим

$$<\text{Pi} = \frac{\Gamma M\&z\backslash}{GJ_{,,}} + <\text{Poi} = <\text{Poi} — \frac{Mz\backslash}{GJ_{,,}}$$

где фо₁ — неизвестный пока угол поворота сечения = 0.

Для второго участка $M_{л} = —M + mг_2 = — M + (3M1a)г_2$

$$92 = \frac{— M + (3M/a)г_2}{GJ_{,,}}\, dz_2 + ф_{02} = ф_{й2} — \frac{Mz_2 \,.\, T > Mz\backslash}{GJp\ laGJp} +$$

где $(p_{02}$ — угол поворота при $г_2 = 0$, т. е. на границе участков. Используя условие непрерывности перемещений $<\text{Po}_2 = <\text{P}_1$ $(^1 = a)$, выразим $ф_{02}$ через $ср_{ou}$ а именно: $</>_{02} = <\text{Po}_1 — Л/a/(C/_p)$. Неизвестную величину $ф_{01}$ найдем из граничного условия на правом конце стержня $ф_2$ $(г_2 = a) =$ $= 0$ или

$$(Р_М \sim — \frac{Ma\backslash Ma\ ЪMa'}{} — + \Gamma - ^\Gamma = °»^n$$

откуда найдем ϕ_{01}=Ma/(2C/$_{р}$) и, следовательно, «¡¡>$_{0}$²= = — Л/а/(2С/$_{р}$). Эпюра углов закручивания, построенная по формулам для <*р*\ и ϕ_2, показана на рис. 5.8, *б.*

Заметим: *локальный экстремум функции* <*р* (г) *имеет место в сечении, где производная йср/йг = 0, что, согласно (5.8), означает, что в этом сечении* $M_г$=0. *В нашем примере при* = а/3 \(p_2\$_{тлх}$=*2Ma1(301*$_{1>}$*).*

Расчеты на жесткость. Вал машины, испытывающей чрезмерно большие углы закручивания, может отрицательно влиять на режим ее работы, в частности могут возникнуть нежелательные крутильные колебания. Поэтому помимо условий прочности должны соблюдаться и условия жесткости, которые обычно формулируются в отношении погонного угла закручивания *в* в виде

$$a_p \qquad (5.20)$$

где 0$_{расч}$ — задаваемая техническими условиями величина *в.*

Из двух диаметров вала, полученных из условия прочности (5.16) и из условия жесткости (5.20), принимается большее значение.

Пример 5.1. Полый стальной вал ¿/=0,71) передает от турбины к генератору мощность N=1,0 МВт при номинальной частоте вращения и=600 об/мин. Найти размеры сечения вала, если [т] = 100 МПа х 10 * рад/м. По формуле (5.17) находим

$$Л/_{г}=9{,}55\text{-}=9{,}55\ \text{—}\ =1{,}59\ 10\text{-}^{*}\ \text{Н м}=15{,}9\ \text{кН м}.$$

Турбина *Гтоапор*

Момент сопротивления сечения (5.14) И^ = (1/16)я2)³ (1 — 0,7*) = =0,147/)³. Из условия прочности вала (5.16)

$$\text{Тщал} \approx \frac{M_c}{ГГ.}\ \frac{15{,}9\ 10^3}{0{,}1470}\ \text{г}\ ^{\wedge}\ 100\ '\ 10^{€}$$

найдем £>| = 1 »08 ■ 10^{-3}=0,1 м. Полярный момент инерции, определяемый по формуле =(1 /32) я£>⁴[1 -(</'/))*], при *¿¡0=0,1* будет /¿,=0,294.0*. Для (7=80 ГПа из условия жесткости (5.20)

$$ЫI_p\ 80 \blacksquare 10^{e}\ 0{,}294 \bullet £>^{*}\ \text{:<}510\text{-}$$

найдем **02**=*у/б,**16**-10^{-4} =0,16 м.

Для того чтобы соблюдались оба условия, принимаем больший размер 2?= 160 мм, соответственно </=0.7,£)«110 мм.

§ 5.4. Статически неопределимые задачи при кручении

Как известно, задачу, в которой для определения сжорных реакций и внутренних усилий требуется кроме Сравнений равновесия привлекать условия деформации, / называют статически неопределимой (см. выше § 3.4). Рассмотрим специфику решения таких задач при круче-
I НИИ.

Пусть требуется построить эпюры крутящих моментов, углов закручивания и вычислить максимальное касательное напряжение в стержне, имеющем ступенчатое изменение сечения и неподвижное закрепление (заделку) двух торцевых сечений (рис. 5.9, *а)*. Имеем только одно уравнение равновесия

$$\Sigma m_z = 3M - M_A - M_B = 0,$$

которого недостаточно для определения двух неизвестных опорных моментов.

Для обеспечения равновесия вала достаточно иметь одну заделку, поэтому задача статически неопределима. Составим недостающее условие деформаций, отбросив одну заделку (например, правую) и потребовав, чтобы в этой новой статически определимой расчетной схеме соблюдалось условие отсутствия угла закручивания у отброшенной заделки *(φ_B*=0 (рис. 5.9, *б)*. Для составления

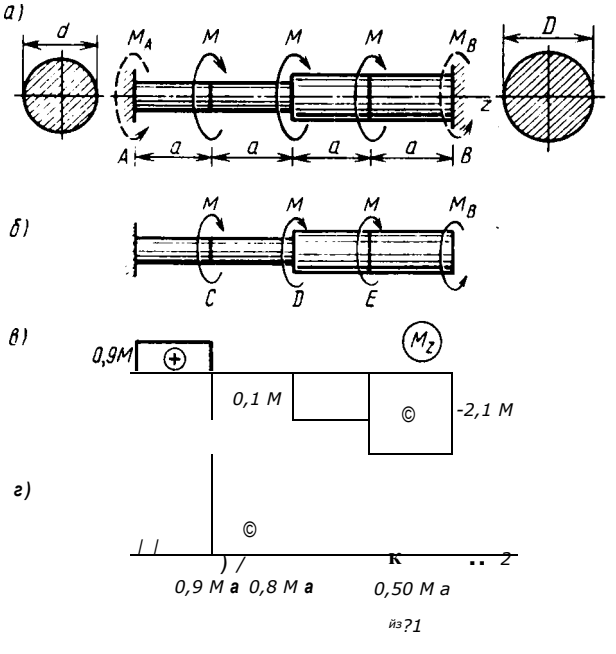


Рис. 5.9. Определение крутящих моментов и углов закручивания в статически неопределимом вале

выражения $<p_в$ применим принцип суперпозиции (независимости действия сил). С использованием формулы (5.19) составляем выражение для $ср_в$ в виде

$$<Рв=\frac{Ма\ M1a\ (M1a\ Ma\ (м_в2а\ M_в2а\ _л}{GJ_{pl}\ GJ_p\ \ GJ_p\ i\ GJ_{pl})\ \ GJ_p\ i\ GJ_{p2}J} =0,$$

где содержимое каждой из скобок представляет собой угол $ср_в$, вызванный закручиванием участка вала от левой заделки до места приложения соответствующего момента. Так как $J_{p2}/J_{pl} = (D/d)^4' = (llO,l)^4'üi4,$ то уравнение $ц>_в$—0 получает следующий вид:

$$21\ Ма\ 5Мва\_\ ^\ \ 4\ GJ_{pi}\ 2GJ_{pl}\sim\ '$$

откуда $M_в$=2,1 *М.* Момент $M_л$ найдем из уравнения равновесия, а именно $M_л$ = ЪМ—2,\М— 0,9Л/. Далее в принятой расчетной схеме отнесем найденный опорный момент к внешней нагрузке и построим для нее обычными методами эпюры $M_z u <p$ (z), показанные на рис. 5.9, *в, г.* Углы $(p_c$, $q>D$ и $(p_E$ получаем как алгебраическую сумму углов закручивания на участках вала, расположенных слева от соответствующего сечения, например $(Рс$=0,9$Mal(GJ_p)y$, $<p_D = (Рс+[—0,lMal(GJ_pi)] = 0,ZMa/(GJ_{pl})$ и т. д.

Указать сечение, в котором т=$т_{т1X}$, сразу не представляется возможным, так как сечение в том месте, где действует имеет больший диаметр. Поэтому вычислим т в крайних точках сечения на первом и четвертом участках:

$$Т)=\frac{M_{IX}\ 0.9A/16}{W_{,,}\ 1\ nd^3}=4,58\frac{M}{d^3};\ т_4=\frac{M_{z^A}\ 2.1A/16}{W_{,,}\ _4\ n\ (djQ,T)}=3,74\frac{M}{d^3}.$$

Следовательно, $т_{т,,}$=Т|=4,58М/rf^3.

Если статически неопределимый стержень, работающий на кручение, имеет более сложную нагрузку или переменное сечение $GJ_P=GJ_P$ (z), то при составлении дополнительного условия деформации стержня типа $(p_в$=0 надо использовать процедуру определения углов закручивания путем интегрирования по выражению (5.18).

§ 5.5. Кручение в упругопластнческой стадии

До сих пор предполагалось, что материал скручиваемого стержня деформируется линейно-упруго в соответствии с законом Гука. Заменим реальную криволинейную диаграмму сдвига условной — диаграммой Прандтля

при сдвиге, ъ е. будем считать, что при $\tau<\tau_т$ (предел *% ш эксперимента* текучести при сдвиге) справедлив закон Гука и материал деформируется линейно-упруго. При напряжениях $\tau=\tau_т$ возникают пластические деформации сдвига, значения которых неограниченны, а напряжения остаются постоянными и равными $\tau_т$.



С использованием указанного упрощения выясним, Диаграмма Пранвдк будет видоизменяться эпюра касательных напряже- $д_{ТДЯ}$,,,,,, сдвиге ний в сечении при постепенном возрастании крутящего о момента $M_{ж}$. 1 ,

В упругой стадии напряжения т распределены вдоль диаметра вала по линейному закону. При возрастании момента M_1 пропорционально возрастают и все напряжения. Конец этой стадии определяет равенство

$$\text{Тщи} \text{“} \text{Ту} \frac{Mm}{ТУ,}$$

когда в точках на периферии сечения впервые появляется текучесть (рис. 5.10, *а).* Соответствующий крутящий момент обозначим M_m. Из этого равенства получим

$$M_т=\tau_т\text{^}=\tau_т\text{—}. \qquad (5.21)$$

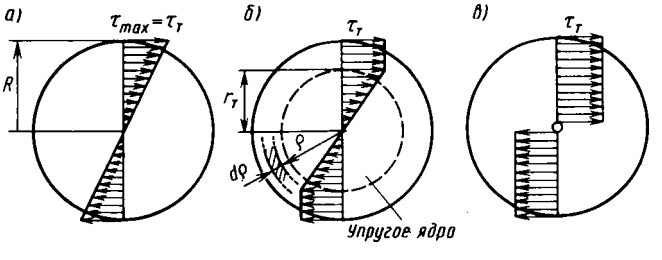
При дальнейшем возрастании момента пластическая зона будет все больше проникать в глубь вала (рис. 5.10, *б),* а все сечение разделится на две зоны: упругре ядро, где $\tau<\tau_т$ с радиусом $г_т$, и пластическую кольцевую зону $г_т$ ^ р ^ Л, где $\tau = \tau_т$. Соответственно суммарный крутящий момент представим как сумму:

$$M_г=M_{г1}+M_а, \qquad (5.22)$$

где момент упругого ядра

$$Л/_{21} = \tau_т у^{т} \frac{яг^3}{} \qquad (5.23)$$

найден по формуле (5.21) *(К* заменено на $г_т$), а момент пластической кольцевой зоны



$$A/_{z2} = \int_{R}^{Я} x_T dAp = {}_{j} x_T 2npdpp = -nx_T (R^3 — rl), \quad (5.24)$$

при вычислении которого элементарная площадь *6А* принята в виде тонкого кольца *йА=2прйр.*

См. § 5.2

Момент упругого ядра $M_л$ связан с его погонным углом закручивания *в* (являющимся общим для упругого ядра и пластической зоны вследствие того, что в упругопластической стадии, как и в упругой, по-прежнему справедлива гипотеза плоских жестких сечений) соотношением (5.8):

$$9 = \frac{\quad}{<?/_{„} C (»_{j}/32)} \quad (5.25)$$

Из (5.23) и (5.25) найдем радиус $г_т = т_т/(0(7)$ и, подставляя его в выражения (5.23), (5.24) и (5.22), получим соотношение в упругопластической стадии между суммарным моментом $M_г$ и погонным углом закручивания *в* в виде

$$M_z = \frac{3}{3} nx_r R — \frac{1}{6} пт, \quad (5.26)$$



График зависимости (5.26) при $M_2 > M_T$ изображен на рис. 5.11. Для $M. < M_m$ справедлив закон Гука и соответствующая часть графика представляет прямую линию. Как видим, в пределе при *в-* со,* $г_т$-»0 пластическая зона стремится охватить все сечение (рис. 5.10, *в)* и внутренний момент стремится к своему предельному значению:

$$•Л^{пред} — \sim ЯТ_т R' \quad (5.27)$$

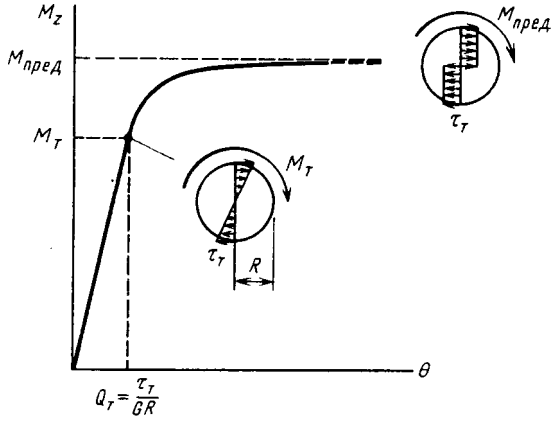


Рис. 5.11. Зависимость между относительным углом закручивания и крутящим моментом в упругопластической стадии

Состояние стержня, когда во всех точках его поперечного сечения возникают пластические деформации, называют пластическим шарниром. Стержень превращается как бы в пластический механизм, в котором углы закручивания неограниченно растут при постоянном моменте

Соотношение /?=$A/_{пре}д/M_т$=4/3= 1,33 показывает, что от момента первого появления пластических деформаций в наиболее напряженных точках вала до полного исчерпывания несущей способности крутящий момент должен возрасти в 1,33 раза. Другими словами, /? выражает резерв несущей способности стержня за счет упругопластических свойств материала.

§ 5.6. Потенциальная энергия деформации при кручении

Внешние силы, создающие упругую деформацию стержня, совершают некоторую работу, которая накапливается в объеме материала стержня в виде потенциальной энергии деформации. В дальнейшем нам потребуются формулы, позволяющие вычислить эту энергию при кручении. Их можно было бы получить с помощью общих выражений (5.4) и (5.5). Но мы поступим более просто.

Представим себе отрезок вала длиной *Аг,* получивший угол закручивания *й<р* от момента M_z. Момент упруго возрастает пропорционально углу <1 <*р.* Поэтому работа этого момента, равная площади графика, с*А* = — *(\12)M_zй(р.* Энергия, накопленная в элементе стержня, <Ш=сЫ, или с учетом (5.8)

$$<Ш — \frac{M_z}{2} \cdot \frac{1}{2} 0], \quad (p = \frac{}{} — 6г. \qquad (5.28)$$

Если здесь заменить $Л/_г$= *01 $_р$ (Аср/йг),* то

$$dU = \frac{1}{2} GJ_\rho \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2 dz. \qquad (5.29)$$

Интегрируя (5.28) и (5.29) по **длине** стержня /, получим из (5.28) выражение для энергии деформации, выраженное через крутящие моменты M_x:

$$U = \int_0^l dU = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_z^2}{GJ_\rho} dz, \qquad (5.30)$$

а из (5.29) — через углы закручивания:

$$U=\int_0^l \mathrm{d}U=\frac{1}{2}\int_0^l GJ_\rho\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}z}\right)^2\mathrm{d}z. \qquad (5.31)$$

Оба эти выражения используются в расчетах. Приведем пример применения формулы (5.30).

Пусть требуется найти опускание X точки приложения силы передаваемой через абсолютно жесткий рычаг на упругий ступенчатый вал (рис. 5.12). Составим равенство работы силы P на перемещении Я энергии деформации вала:

$$A=\frac{1}{2}F\lambda=U=\frac{1}{2}\int_0^{2b}\frac{M_z^2\mathrm{d}z}{GJ_\rho}=\frac{1}{2}\left[\frac{(Fa)^2b}{GJ_{\rho1}}+\frac{(Fa)^2b}{GJ_{\rho2}}\right].$$

Отсюда найдем

$$\lambda=Fa^2b\left(\frac{1}{GJ_{\rho1}}+\frac{1}{GJ_{\rho2}}\right).$$

§ 5.7. Расчет цилиндрических пружин с малым шагом витка

Рассмотрим пружину, растягиваемую силой £ (рис. 5.13, а). Покажем, что пруток, из которого свита цилиндрическая пружина, при малом угле наклона витков работает главным образом на кручение. Для этого отсечем часть пружины сечением, проведенным через ее ось (рис. 5.13, б). Из условий равновесия оставшейся части пружины находим, что в осевом сечении прутка должны возникать сила $O=P$ и момент $M_1=PK$. Если пренебречь

углом наклона оси витка а, положив а=0, то указанное сечение витка можно считать нормальным к оси витка. Тогда Q будет поперечной силой, вызывающей деформацию среза, а $M_г$ — крутящим моментом в сечении

прутка. Оценим значение вызываемых ими напряжений:

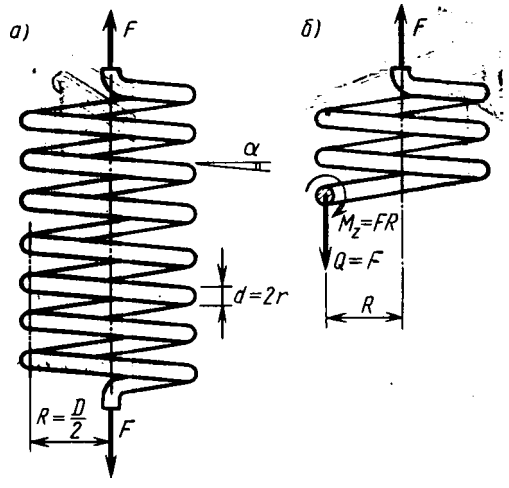


Рис. 5.13. При растяжении пружины в поперечных сечениях ее прутка возникают крутящий момент и поперечная сила

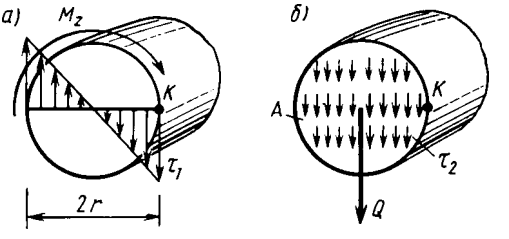


Рис. 5.14. Касательные напряжения в сечении прутка пружины от кручения и среза

от крутящего момента (рис. 5.14, а)

$$\text{Т]} = \frac{M_г}{\text{яг}^3/2} \frac{РЛ\,2\text{га}}{\text{яГ}^3} \quad — \quad — \quad = \quad — \quad (\quad 5 \quad . \quad 3 \quad 2 \quad)$$

где *Я* — радиус навивки пружины; *г* — радиус сечения прутка;

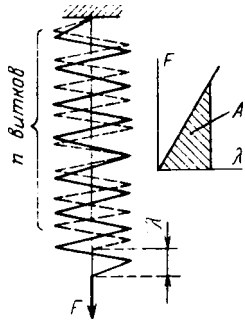
от среза (рис. 5.14, *б)*

$$\text{т}_2 = \frac{\text{О}}{А\ \text{яг}^2}. \qquad (5.33)$$

Наибольшие напряжения возникают во внутренних точках витков, где напряжения $\text{т}_($ и т_2 совпадают по направлению и суммируются (точка *К* на рисунках):

$$\text{т}_{\text{т}},=\text{тл}:=\text{т}_1 + \text{т2} = \frac{2РК}{пг^*}(1_* + 0), \qquad (5.34)$$

где $р = г\{(2К)$. Так, например, если Л=10г, то 0=0,05 и основную роль в деформации пружины будет играть



деформация кручения. Во многих случаях полагают /? = 0 и расчетное напряжение в пружине определяют только по формуле (5.32) от кручения.

Важной характеристикой упругих свойств пружины является *жесткость пружины с* — так называется сила *P,* которая вызывает удлинение пружины *X*= 1. Для получения соотношения *P* и *X* применим энергетический метод. Приравняем работу силы *P* энергии деформации кручения прутка пружины (энергией деформации среза пренебрегаем):

$$\frac{PX}{2} = \frac{C4p}{2} = \frac{1}{2}\int \frac{(FRfl}{GJ_P} f^{\wedge}f = \frac{(FRfl}{2G\ (лг^4/2)}, \qquad (5.35)$$

где / — длина прутка пружины, равная длине одного витка *2пЯ,* умноженной на число витков *п* в пружине, т. е. *1=2пЛп.* Подставляя / в формулу (5.35), после сокращений окончательно получим

$$\text{Сг}^4 \qquad 1\ ,$$

Полагая в (5.36) *X*— 1, найдем жесткость пружины *c=P:*

$$c = \frac{вг^*}{4\ R^3 n} \qquad (5.37)$$

Пример 5.2. Для стальной пружины с параметрами Л=6 см, /•=0,5 см, *п* = 12 витков определить жесткость *с,* осадку и напряжение от силы /'=0,25 кН.

Решение. По формуле (5.37) получим жесткость пружины:

$$c = \frac{\text{Сг}^4}{4Я\ n} = \frac{80\ 10^в 0{,}5^4 10^{-в}}{4\ б^э\ 10^{-6}\ 12} = 4{,}85 \text{ кН/м}.$$

От силы осадка равна Л.=.Р/с =*0,25 ■ 10^3/(4,85 • 10^3) =0,0515 м= = 5,15 см. Напряжение по формуле (5.34) будет

$$\text{Ттах} \approx \frac{2РЛ}{пг^в}\Gamma\ (1 + P) = \frac{2\ 0{,}25 \blacksquare 10^3\ 6\ 10^{-2} / 0{,}5}{3{,}14 \blacksquare 0{,}5^3\ 10^{-«}} : \frac{1}{V\ 12/} + = 79 > 4 \text{ МПа}.$$

§ 5.8. Практические расчеты соединений,
работающих на сдвиг

Здесь приводятся основные сведения о расчетах заклепочных, болтовых и сварных соединений, широко используемых в инженерной практике. Их действительная работа сложна и лишь приближенно может быть охарактеризована как работа на сдвиг. Однако эти расчеты очень просты и достаточно надежны, так как используемые в этих расчетах расчетные сопротивления назначаются на основании опытных данных. Это косвенно позволяет учесть в определенной мере действительную работу этих соединений.

Заклепочные соединения. На рис. 5.15 показана работа одиночной заклепки, соединяющей три листа и называемой двухсрезной. Одним из видов разрушения является срез заклепки по сечениям *m—n* и m_1—*щ* с площадью среза *Лер=2 (пе1²/4).* В момент текучести приближенно можно считать, что касательные напряжения в этих сечениях распределены равномерно. Обозначая расчетное сопротивление заклепки на срез получим расчетную силу на одну заклепку по срезу в виде

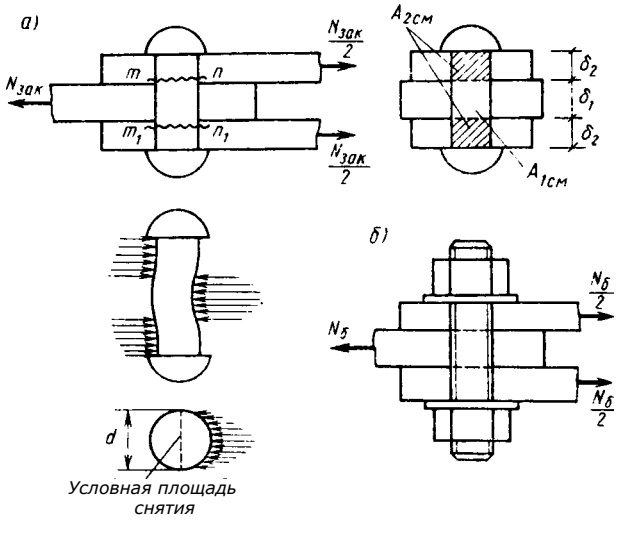
$$N_{\text{зак}}^{\text{ср}} = A_{\text{ср}} R_{\text{ср}}. \qquad (5.38)$$

Для пакета листов в общем случае *А^—п^* (яе?²/4), где $л_{с}р$ — число срезов заклепки.

Помимо среза при относительно тонких листах возможно нарушение соединения вследствие смятия листов или заклепки по поверхности их контакта. Фактическое распределение контактных напряжений весьма сложно (рис. 5.15, б). Поэтому вычисляются условные напряжения смятия, отнесенные к площади $A_{м}$, являющейся проекцией фактической криволинейной площади на плоскость диаметрального сечения заклепки. Из условия прочности

$$\sigma_{\text{см}} = \frac{N_{\text{зак}}}{A_{\text{см}}} \leqslant R_{\text{см}},$$

где Дд, — расчетное ерпротивление на смятие, определя-



емое экспериментально* найдем расчетную силу для заклепки по смятию:

$$\text{тЛЛ} \quad (5.39)$$

В общем случае $Л_{ж} = ¿¿E8,$ где ^ — диаметр заклепки; 2<5 — наименьшая суммарная толщина листов, сминаемых в одном направлении. Например, на рис. 5.15, *а* это будет меньшая из площадей $A_{Xa1}=M\backslash$ и $A_{Ъм}-=c128_{1}$. Естественно, что из двух сил, найденных по срезу и смятию, фактической расчетной силой для заклепки является

меньшая из них.

Расчет заклепочного соединения обычно состоит в определении необходимого числа заклепок *n* при действии на соединение заданного расчетного усилия *N*. В упругой стадии это усилие неравномерно распределяется между заклепками. Однако в предельном состоянии благодаря деформациям текучести усилия в заклепках выравниваются. Поэтому сделаем допущение: сила *N* распределяется между всеми заклепками поровну. Тогда

$$\bullet \quad < \quad , \qquad (5.40)$$

где — наименьшая из двух расчетных сил, найденных для одной заклепки по срезу (5.38) и по смятию (5.39).

Болтовые соединения. Обычные болты типа показанного на рис. 5.15, б рассчитываются, так же как и заклепки, на срез и на смятие по соответствующим формулам. Особенность представляет расчет высокопрочных болтов, применяемых во фрикционных соединениях, где благодаря нормируемому натяжению болта, достигаемому путем завинчивания гайки динамометрическим ключом, создается сжатие пакета листов силой $Р_{б}$ (рис. 5.16). При воздействии на соединение силы $ЛГ_{6}$ она воспринимается силами трения, возникающими на поверхностях контакта обжимаемых листов.

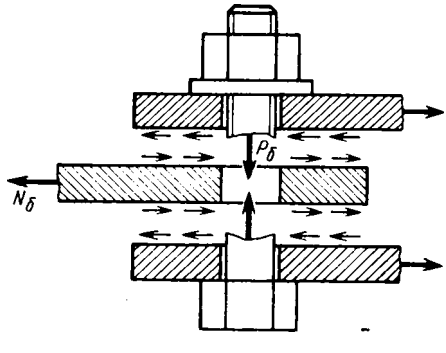


Рис. 5.16. Высокопрочный болт, обжимающий пакет листов с силой /*6, передает усилия *N* за счет сил трения

Расчетная сила, которую способен воспринять болт по трению, будет

ЫI^n^Рфп, $_{ч}$ (5.41)

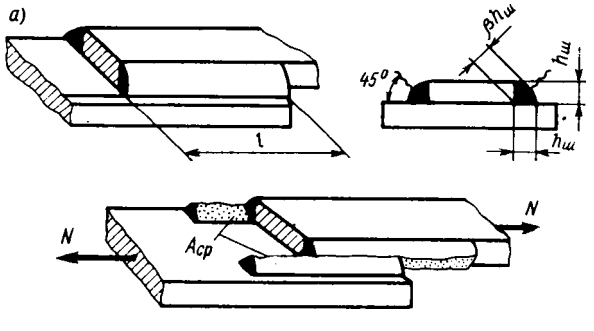
где/ — коэффициент трения; — число плоскостей трения (то же, что число плоскостей среза у заклепки); *m* — коэффициент условий работы (0,8...0,9). Коэффициент трения зависит от вида обработки трущихся поверхностей листов. Так, для обычной малоуглеродистой стали при очистке соединяемых поверхностей пескоструйным аппаратом /=0,45; металлическими щетками /=0,35; без очистки поверхностей /=0,25. Напряжения натяжения болта составляют 0,5...0,6 предела прочности высокопрочной стали, из которой он изготовляется. Число болтов определяется по формуле (5.40) с заменой N_{I^I} на Лб.

Сварные соединения. Рассмотрим принцип расчета сварного соединения на примере соединения двух листов угловыми швами (рис. 5.17, *а).* Сварные соединения не дают ослабления элементов, менее трудоемки, чем другие виды соединений, и потому более экономичны.

Разрушение швов в рассматриваемом соединении происходит от среза по наименьшей возможной площади среза, расположенной в биссекторной плоскости угла, где наплавляется шов (рис. 5.17, б). При этом площадь среза на два шва будет $Л_{ср}=2/й_{ш}/?$, где /? — коэффициент формы углового шва. Он зависит от вида сварки: для однопроходной автоматической /?= 1; однопроходной полуавтоматической и ручной /?=0,8; многопроходной авто- и полуавтоматической /?=0,7; *кщ* — высота катета углового шва.

Предполагая равномерное распределение касательных напряжений по площади среза шва, условие прочности запишем в виде

$$\tau=\frac{N}{A_{ср}}=\frac{N}{2l\beta h_{ш}}\leqslant R_{ср}, \qquad (5.42)$$



где Д,, — расчетное сопротивление материала углового сварного шва на срез; / — расчетная длина шва, которая берется на 10 мм меньше фактической из-за возможного ухудшения качества сварки по концам шва. Чтобы не допускать чрезмерной неравномерности распределения напряжений по длине шва, ставится ограничение на его длину /<60Аш. По формуле (5.42), задавшись каким-либо одним размером шва, например Ац,, можно найти другой размер — длину шва /.

Вопросы для самоконтроля к главе 5

5.1. Что такое чистый сдвиг?

5.2. Как записывается закон Гука при сдвиге? Какие константы упругости вы знаете для изотропного материала и как они взаимосвязаны?

5.3. В чем состоит закон парности касательных напряжений?

5А Из каких гипотез о кручении следует линейный закон распределения касательных напряжений в круглом поперечном сечении?

5.5. Что такое момент сопротивления сечения при кручении? В чем состоит условие прочности?

5.6. Как в общем случае определяются углы закручивания? В чем состоит упрощение этой задачи в случае ступенчато-постоянных жесткости стержня и крутящем моменте?

5.7. Как найти диаметр сечения вала, удовлетворяющего условиям прочности и жесткости?

5.8. Для чего требуется уметь определять углы закручивания при решении статически неопределимых задач?

5.9. Что такое пластический шарнир при кручении?

5.10. Какой основной вид деформации испытывает пруток, из которого свита пружина, при ее растяжении? Что такое жесткость пружины?

Задачи к главе 5

5.1. Какое сечение повернется на наибольший угол «Рщ», и чему этот угол равен?

/77= *COnSt*

Рис. к задаче 5.1

3.2. Что опаснее из соображений прочности: действие двух моментов *М* в одном и том же (1) или в противоположных (2) направлениях? Найдите отношение при прочих равных условиях.

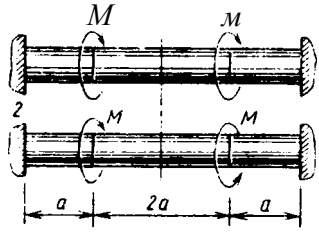


Рис. к задаче 5.2

53. Деревянный брус, продольные волокна которого параллельны оси *г,* испытывает кручение. Расчетное сопротивление на срез поперек волокон Я _= Ю МПа, а вдоль волокон *„=«2 МПа. Нааги *М*^.

5.4. Две пружины, свитые из одинакового прутка с сечением радиуса *г,* имеют радиусы навивки Л| и$Я_2$<Л,. Число витков одинаково.

В какой пружине и во сколько раз возникнут большие напряжения от их одинаковой осадки?

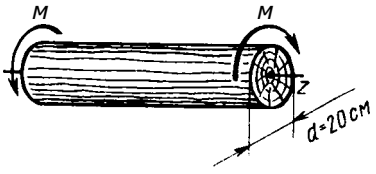


Рис. к задаче 5.3

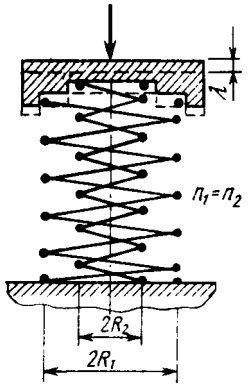
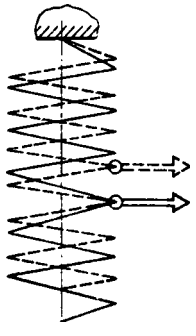


Рис. к задаче 5.4

5.5. Наблюдение показывает, что стрелка, жестко связанная с поперечным сечением прутка пружины, при растяжении перемещается поступательно без поворота вокруг осевой линии прутка. Объясните, почему углы закручивания равны нулю, в то время как пруток работает на кручение.



а

Т

Рис. к задаче 5.5

Ответы к задачам главы 5

5.1. <Рта1=™/2/(86/р) при *г=1/2.* 5.2. Опаснее загружение 1, $M1_{ра1Л}$/Л/$2р_{асч}$=0|5. 5.3. Л/$_{раст}$ = =(я^3/16)Л' =3,14 кНм.5.4. Напряжения от кручения будут большими во внутренней пружине, $_{Т2ір}$/т)$_ч$, = Л^Л[1]. 5.5. Углы закручивания не равны нулю по отношению к оси витка в деформированном состоянии.

ИЗГИБ. НОРМАЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ ^, В ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЯХ СТЕРЖНЯ

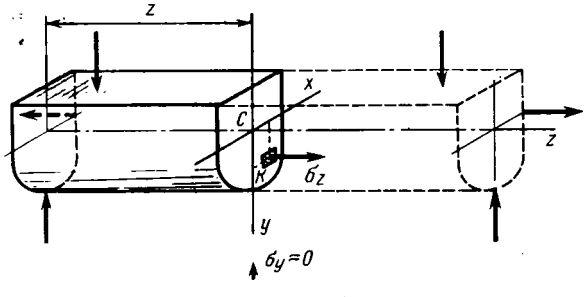
§ 6.1. Основные гипотезы. Расчетная модель стержня

Решим задачу определения нормальных напряжений a_z в произвольной точке K поперечного сечения прямого стержня в общем случае его нагружения (рис. 6.1). Наряду с напряжениями $<m,,$ вообще говоря, в площадках' параллельных оси стержня, развиваются также напряжения a_x и a_y. Однако опыт показывает, что на основной части длины стержня эти напряжения, как правило, бывают значительно меньше напряжений a_z. Поэтому в расчетной модели стержня пренебрегаем влиянием напряжений c_x и $(Ty$ на деформацию элемента т. е. принимаем в формуле обобщенного закона Гука для Б,

$$o_x = 0; O_y = 0; e_r = ^. \qquad (6.1)$$

Если мысленно стержень расчленить на «продольные волокна», то гипотеза (6.1) говорит о том, что в каждой точке стержня продольная деформация волокна развивается так же, как при одноосном растяжении—сжатии волокна и определяется лишь одним напряжением a_z.

Допущение (6.1) называют *гипотезой о ненадавливании продольных волокон:*



бг

бл~0 л I

Рис. 6.1. Напряжения a_x и a_y пренебрежимо малы по сравнению с a_1

волокна стержня, параллельные его оси, испытывают деформацию растяжения—сжатия в продольном направлении и не оказывают давления друг на друга в поперечном направлении.

Гвотеза о иенада-вш продоль-ных волокон

Введем вторую важнейшую гипотезу о характере деформирования модели стержня — *гипотезу плоских сечений:* будем считать, что *каждое поперечное сечение стержня, плоское до деформации, остается плоским и нормальным к искривленной оси стержня после деформации.*

Гипотеза плоских сечеший при изгибе

Это положение позволяет рассматривать поперечное сечение стержня как бесконечно тонкое плоское тело (жесткая пластинка), имеющее в отношении перемещений конечное число степеней свободы. На рис. 6.2, *а—в* показаны три характерные перемещения сечения: продольное поступательное перемещение н>$_c$ и два поворота на углы *(p$_x$* и *(p$_y$.* На основании этого рисунка выразим продольное перемещение произвольной точки через *м/$_c$, (p$_x$* и *ф,.*

Перемещение ю будем считать положительным, если оно направлено в положительном наравлении оси г. Углы ср$_x$ и *(p$_y$ положительны, если нормаль к сечению вместе с сечением поворачивается по кратчайшему угловому пути от оси г соответственно к осям у и х.*

На рис. 6.2, *г* показана проекция сечения, повернутого на угол ϕ_x при взгляде на сечение вдоль оси *х.* Приняв ввиду малости угла вт $\phi_x=\phi_x$, найдем, что произвольная точка *К,* имеющая координату 7>0, получит отрицательное перемещение *(—ф$_x$у),* так как это перемещение противоположно оси *г.* Суммарное перемещение произвольной точки *К* будет следующим:

$$n=н>c-\phi_x y-\phi_y X. \qquad (6.2)$$

Выражение (6.2) математически выражает гипотезу плоских сечений. В нем и>$_c$, ϕ_x и ϕ_y для каждого поперечного сечения величины постоянные, но они могут изменяться в зависимости от координаты *г,* т. е. они являются функциями *г:* \\>$_e$=*ю$_c$* (г); $\phi_x=\phi_x$ *(г);* $\Phi_y=\Phi_y$ (г).

На рис. 6.3, *а* изображена модель стержня, иллюстрирующая гипотезы (6.1) и (6.2). Она представляет набор

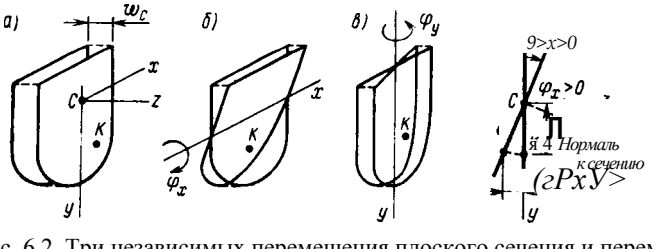


Рис. 6.2. Три независимых перемещения плоского сечения и перемещение произвольной точки *К* от поворота на угол <p_x

Рис. 6.3. Модель стержня, иллюстрирующая гипотезу плоских сечений и гипотезу ненадавливання продольных волокон (условно изображенных в виде упругих пружин)

жестких пластинок — «поперечных сечений», пространство между которыми заполнено «продольными волокнами», условно изображенными в виде упругих пружин. Деформация растяжения—сжатия продольных волокон в этой модели происходит за счет относительного перемещения и поворота соседних сечений, как это схематически изображено на рис. 6.3, *б*.

Сформулированных гипотез достаточно для определения напряжений $<m_x$.

§ 6.2. Вывод формулы для нормальных напряжений в поперечных сечениях

При выводе будем считать, что в рассматриваемом поперечном сечении предварительно определены и стали известны внутренние усилия: продольная сила N и изгибающие моменты M_x и M_y. Через них требуете« выразить напряжение a_x.

Пользуясь формулами (6.1) и (6.2), получим следующее выражение:

$$\varepsilon_z = \frac{<1н>}{dz}$$

(см. § 3.1)

$$\sigma_z = E\varepsilon_z = E\frac{dw}{dz} = E\left(\frac{dw_C}{dz} - \frac{d\varphi_x}{dz}y - \frac{d\varphi_y}{dz}x\right).$$

Обозначим для данного сечения постоянные

$$E\frac{dw_C}{dz} = C_1; \quad -E\frac{d\varphi_x}{dz} = C_2; \quad -E\frac{d\varphi_y}{dz} = C_3 \tag{6.3}$$

и перепишем выражение для a_z в виде

$$o^*—C] + C^y + Cyx. \tag{6.4}$$

Формула (6.4) показывает, что концы векторов o_2 лежат в некоторой плоскости, определяемой тремя константами: C_u C_2 и C_3 (рис. 6.4). Следовательно, в общем случае напряжения a_z в поперечном сечении изменяются по закону плоскости. Для определения С|, C_2, Сэ потребуем, чтобы напряжения $в_z$ приводились к трем известным силовым факторам: N. M_x и M_y. Для этого составляем следующие три равенства, выражающие условия равновесия:

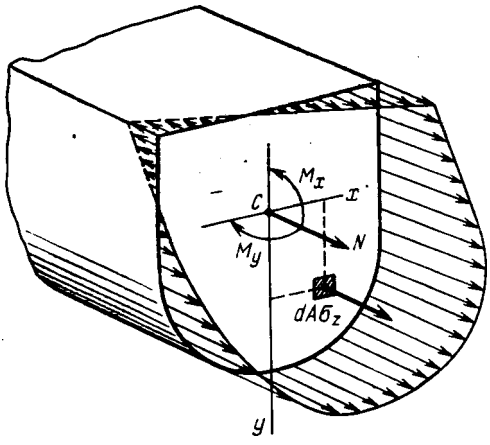


Рис. 6.4. Напряжения в поперечном сечении распределены по закону плоскости

$[o_1\&A=И', \int (a_2йA)y=M_x; \$(o_2йA)x=M_y.$ См. ф-лы (1.8)

Подставив в эти выражения (6.4) и введя обозначения для определенных интегралов, образующих множители при С„ запишем эти равенства в виде системы трех алгебраических уравнений относительно неизвестных С, (/=1, 2, 3):

$$\begin{aligned} &AC, -\text{-}SxC2 - Ь\,{}^{\wedge}y\,C\} — БI^{ш}, \\ &C_1 + У, Сг + Лу\,Сз = M_x, \\ &Бу\,C(+1_{x}y\,C\text{\textbackslash} + 1y\,Сз = M_y, \end{aligned} \qquad (6.5)$$

где в качестве множителей при С/ оказались следующие ^см гд ^ геометрические характеристики поперечного сечения:

площадь и статические моменты площади относительно осей *x* и *y*

$$A = \$<1A;\ Б_x = \$y6A;\ 5y=|;ссЫ;$$

осевые и центробежный моменты инерции

$$1_x=\text{\textbackslash}y^2AA\text{\textbackslash}\ 3_y=\text{\textbackslash}x^2AA\text{\textbackslash}\ 1xy=\text{\textbackslash}xy\&A.$$

При произвольном выборе осей *x, y* все указанные геометрические характеристики будут отличны от нуля и для определения С/ потребуется решить совместно систему уравнений (6.5). Чтобы упростить задачу, выберем оси *x, y* специальным образом так, чтобы

$$5^{\wedge}=0;\ 5^{\wedge}=0;\ /*_{,,}=0. \qquad (6.6)$$

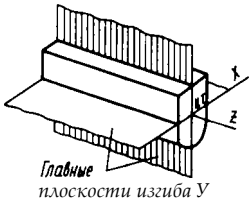
В этом случае система (6.5) распадается на три независимых уравнения, из которых найдем искомые постоянные:

;

Подставив их в (6.4), окончательно получим общую формулу для нормальных напряжений:

«Тре хчленная» формула для нормальных напряжений

$$a_г = \frac{N}{} - \frac{M_x}{} y - \frac{M_y}{} \quad (6.8)$$



Введя условия 5,=0; 5^=0; I_{XI}=0, мы резко упростили определение $C_($ и вычисление напряжений по формуле (6.8). Но при этом формулой (6.8) можно пользоваться только для специальных осей, положение которых в сечении необходимо предварительно определить. Первые два условия говорят о том, что эти оси *проходят через центр тяжести сечения,* а последнее — что эти оси являются для сечения *главными*, как их называли в гл. 4.

Итак, *при использовании формулы (6.8) в качестве осей координат х, у должны быть приняты главные центральные оси сечения. Плоскости х—г и у—г, содержащие ось стержня и одну из главных осей сечения, называются главными плоскостями изгиба стержня.*

Напомним, что в частном, но часто встречающемся случае симметричного сечения специального определения главных осей не требуется, так как ось симметрии и перпендикулярная ей, проходящие через центр тяжести, являются главными центральными осями сечения (рис. 6.1).

Сформулируем правило знаков для внутренних усилий *N. M_x, My,* входящих в формулу (6.8):

Правило знаков для «трехчленной» формулы (6.8)

растягивающая продольная сила N положительна; изгибающие моменты M_x и M_y также положительны, если они в точке, принадлежащей первой четверти осей координат (где х>0иу>0), вызывают растягивающие напряжения.

Сравнив (6.3) и (6.7), получим важные вспомогательные равенства

<1и′с N	¿<Рх	м*.		My
z			йг	Ыу

которые используются для определения перемещений сечений стержня при растяжении—сжатии и изгибе. В гл. 3 произведение *ЕА* называлось *жесткостью сечения при растяжении—сжатии.* Аналогично, произведения $E1_X$, $E3_Y$ называют *жесткостью сечения при изгибе* относительно соответствующей главной оси.

Учитывая, что с1г = с\з=p_x&$ф_x$, последние два равенства (6.9) можно записать в виде (при этом знак минус опускается)

$$-\frac{1}{\rho_x} = \frac{M_x}{EJ_x} \qquad -\frac{M_y}{EJ_y} \tag{6.10}$$

Они дают количественную связь между изгибающими моментами и создаваемыми ими кривизнами элемента стержня $ав_x = 1/p_x$ и $Xy = 1/p$, в главных плоскостях изгиба.

Запишем, кроме того, важное соотношение между радиусом кривизны и относительным удлинением £r=Д c1л/c1л произвольного продольного волокна балки.

Так, для искривления в одной плоскости *уг* имеем ¿у =.p_xйд>$_x$ и АсЬ=^c1<p_x, поэтому

$$E_z = -\frac{y}{\rho_x} \tag{6.11}$$

Аналогично, для плоскости *хг* деформация будет е*=—, а при одновременном изгибе в двух плоскостях е* равно сумме этих выражений.

Если в формуле (6.8) $M_X = M, = 0$, то $o_г = ЩА$. Этот случай центрального растяжения—сжатия детально рассмотрен в гл. 3. Далее рассмотрим некоторые другие частные случаи использования этой формулы.

§ 6.3. Плоский изгиб. Расчеты на прочность

Пусть во всех поперечных сечениях стержня $N = 0$; My—0; $M_x ф 0$ и стержень изгибается в главной плоскости *yz*. Изгиб стержня в одной из главных плоскостей называют главным плоским изгибом или просто плоским изгибом.

Рассмотрим более детально плоский изгиб участка стержня моментом M_x=const (рис. 6.5). Такой случай нагружения называется *чистым изгибом*. Нормальные

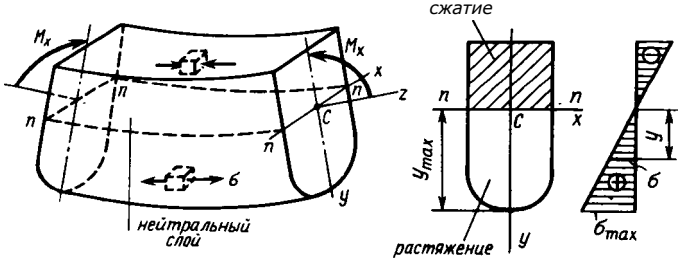


Рис. 6.5. Изгиб в главной плоскости *уг*. Сечения поворачиваются вокруг нулевых линий *n—n*

напряжения в соответствии с (6.8) определяются по формуле*

Формула нормальных напряжений при изгибе в главной плоскости

$$\text{м}_x \qquad \textbf{(6.12)}$$

По высоте сечения имеем две зоны — растяжения и сжатия, их разделяет *нейтральный слой,* продольные волокна которого искривляются, но не меняют своей длины *(а*=0). Линия пересечения нейтрального слоя с плоскостью поперечного сечения *rt-—n* называется *нейтральной* или *нулевой линией.* В данном случае она совпадает с осью *х,* что прямо следует из (6.12), и, следовательно, проходит через центр тяжести сенения *С.*

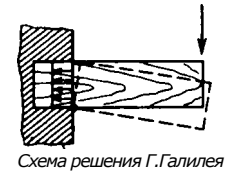
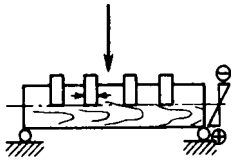


Схема решения Г.Галилея



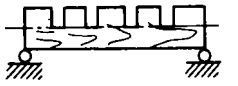
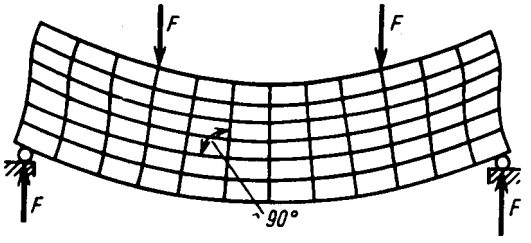


Схема опытоЬ Дюгамепя

Наличие в балке нейтрального слоя, растяжения с выпуклой стороны и сжатия — с вогнутой кажется теперь достаточно очевидным фактом. Однако эти положения далеко не сразу вошли в научные представления о деформации изгиба. Так, например, в 1638 г. было опубликовано решение Г. Галилея задачи о несущей способности консольной балки. В нем принималось, что в заделке на всей высоте сечения действуют равномерно распределенные растягивающие усилия, а вращение в момент излома происходит относительно нижнего ребра сечения. На протяжении почти 200 лет в трудах таких ученых, как Мариотт, Яков Бернулли, Кулон и др., чередовались правильные и неправильные утверждения о положении нулевой точки и форме эпюры напряжений по высоте сечения. Важную роль в доказательстве наличия сжатой зоны сыграли опыты Дюгамеля (1767 г.) с деревянными балочками. Балочки имели с вогнутой стороны пропилы на половине высоты сечения, плотно заполненные вставленными дощечками. При наличии сжатия благодаря заполнению прорезей прочность балки не должна заметно измениться за счет пропилов, что и подтвердили проделанные опыты. Полное и правильное решение задачи о распределении нормальных напряжений в сечении балки было изложено Навье в курсе «Сопротивление материалов» в 1826 г.

Остановимся кратко на условиях . применимости формулы (6.12). Если на поверхности балки (или ее модели) перед изгибом нанести ортогональную сетку продольных и поперечных линий, то можно видеть, что на среднем участке, где балка испытывает чистый изгиб *(*M_x=const и Q_y=0), поперечные линии остаются прямыми и ортогональными к продольным линиям сетки, что подтверждает принятую гипотезу плоских сечений (рис. 6.6). На участке поперечного изгиба из-за влияния попе-

* Здесь и далее, если это не приводит к недоразумениям, нормальное напряжение в поперечном сечении будем обозначать без индекса, полагая $a_z = o$.



М-г

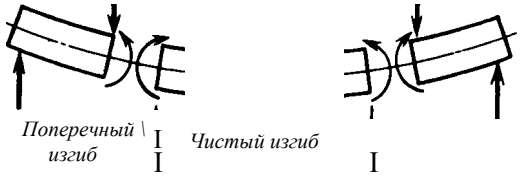


Рис. 6.6. За счет действия поперечных сил сечения искривляются. При чистом изгибе сечения остаются плоскими

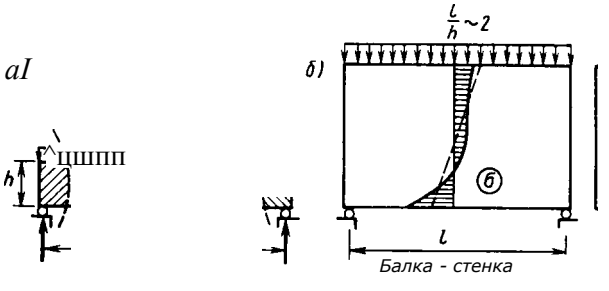


Рис. 6.7. В балках с малым отношением //А, а также вблизи точек приложения сосредоточенных сил формула (6.12) не справедлива

речных сил сечения балки слегка искривляются (на рисунке это искривление сильно преувеличено). Поэтому применение гипотезы плоских сечений является приближенным.

Более точный анализ показывает, что отклонение фактической эпюры от линейной эпюры *а,* определяемой формулой (6.12), зависит от отношения длины и высоты балки *l/h.* На рис. 6.7, *а, б* дано сравнение эпюр *а* для двух балок, имеющих разное значение *l/h.* При малом отношении *l/h* формула (6.12) неприменима. На рис. 6.7, *б* фактическая эпюра a_z показана сплошной линией, а по формуле (6.12) — пунктирной линией. Обычно считается, что ею можно пользоваться с достаточной точностью при *l/h* «8... 10 (рис. 6.7, *а).* Но даже в балке с большим значением *l/h* она может давать заметную погрешность

в областях приложения сосредоточенных сил типа опорных реакций (на рис. 6.7, *а* эти области отмечены штриховкой). Здесь заметное влияние оказывает нарушение и гипотезы плоских сечений, и гипотезы о ненадавливании продольных волокон.

Расчеты на прочность. Наибольшее нормальное напряжение при плоском изгибе возникает в точке, наиболее удаленной от нулевой линии (у=у____). Условие прочности по нормальным напряжениям записывается в виде

$$1=\frac{M_x M_x}{\Pi} \qquad K \tag{6.13}$$

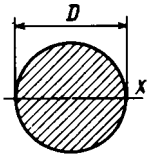
где

$$K=\frac{}{Утях} \tag{6.14}$$

Ц! — геометрическая характеристика сечения, называемая *моментом сопротивления сечения при изгибе* (м^3). Например, для прямоугольного сечения

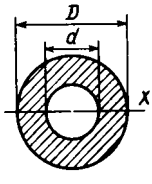
Угтиг?

$$IV, \quad \frac{Бк^{*}\{ 12 Бк^{l}}{'\sim m''} \qquad б'$$



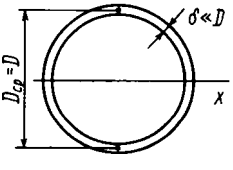
Для круглого сплошного и полого сечений

$$K \; \frac{\_1Ф*164\_ж1>*}{\sim \quad Л/2\ 32\text{-}\ 32} \qquad W_x \; \frac{я(Д^4\text{-}</*)\ 1Ф^{l}}{64\ (.0/2)\ 32}$$



Часто принимают Ж$_я$«0,12)^3 [1 — (</2))^4]. В случае тонкостенного трубчатого сечения с толщиной стенки 5 «2)

$$Г_x= \frac{яД^3<5/8\ п0^2 8}{2>/2}$$



Для прокатных профилей (двутавр, швеллер, уголок и др.) в таблицах сортамента приводятся моменты сопротивления $1Ұ_x$ и $1Ұ_y$ как геометрические характеристики сечений. Для сечений более сложной формы *ТУ,,* вычисляется по формуле (6.14).

Пример 6.1. Шарнирно опертая балка перекрытия с пролетом /—6 м изготовляется из прокатного двутавра (рис. 6.8). Подобрать его сечение, если расчетная равномерно распределенная нагрузка 9—24 кН/м, а расчетное сопротивление стали А—240 МПа.

Решение. Наибольший изгибающий момент в середине пролета

Поэтому условие прочности по нормальным напряжениям в этом сечении (для крайних точек сечения) будет

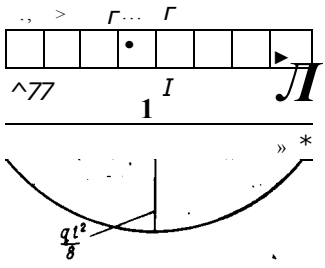


Рис. 6.8. К примеру 6.1

$$M_z \quad \frac{Я l^2}{8\ Ж,} < Л.$$

Отсюда найдем требуемый момент сопротивления сечения:

$$Г_х > \frac{\partial l^2\ 24\ 10^3 6^*}{8Л\ 8\text{-}240\ 10^6} \quad \text{-4,5-КГ}^4\ \text{м}^3\text{-450 см}^3.$$

Из таблицы сортамента находим двутавр № 30, для которого ^=472 см^3. Оценим его прочность:

$$*ти = \frac{_ч l^2\ 24\ 10^3\text{-}6^*}{Ш_х\ 8\ 4{,}72\text{-}10''^4} \text{ --227 МПа<Л-240 (на 5,4%).}$$

Ближайшее меньшее сечение двутавра № 27*а* имеет *1¥$_х$—401* см^3 и дает перенапряжение <$г_{1МХ}$=265 МПа > Л-240 на 10,5%. Поэтому останавливаемся на двутавре № 30.

§ 6.4. Балки рационального сечения

При заданном расчетном изгибающем моменте M_m,, и расчетном сопротивлении материала Л из условия прочности (6.13) можно найти требуемый момент сопротивления сечения:

$$W_x = \frac{M_{xmax}}{R}.$$

В зависимости от выбранной формы сечения требуемый момент сопротивления можно получить при различной площади сечения *А* и, следовательно, различном расходе материала на балку. Поэтому возникает вопрос о рациональной форме сечения, при которой площадь была бы по возможности наименьшей.

Для прямоугольника *№$_х$=Ьк^{2}16, А=Ьк* и отношение

*Ц$^Г_Х$1А = И1*6. Отсюда найдем требуемую площадь:

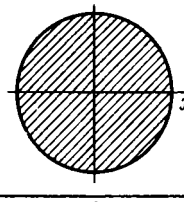
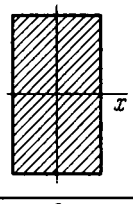
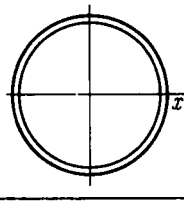
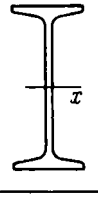
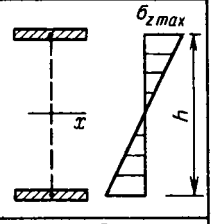
А — 6 *(IVх!И).* Для других форм сечений аналогично получим

где /? — коэффициент, полученный указанным путем и приведенный в табл. 6.1. По данным сортамента, для прокатного двутавра /?«3, полученное как среднее для различных номеров. Наименьшая площадь A_m^=2 (ЙРуА)

требуется для *идеального двутавра,* у которого площадь стенки стремится к нулю, а вся площадь сосредоточена в полках, на уровне, где действуют напряжения о-$_{т}$,,.

Таблица 6.1

Требуемые площади сечении при заданном значении -

					
i	1	2	3	4	5
A_i	$8(W_x/h)$	$6(W_x/h)$	$4(W_x/h)$	$\sim 3(W_x/h)$	$2(W_x/h)$
$\frac{A_i}{A_{min}}$	4	3	2	$\sim 1{,}5$	1

■ Ра и о и а л ь а форма сечения при изгибе

Табл. 6.1 показывает, что *при изгибе сечение тем рациональнее с точки зрения расхода материала, чем оно ближе к Ф°Рме идеального двутавра, т. е. чем большая часть сечения удалена от нейтральной оси и находится в области действия наибольших напряжений а.*

Для данной формы сечения из (6.15) следует, что теоретический расход материала будет тем меньше, чем больше А, т. е. чем выше сечение балки. Однако, как правило, высота балки ограничивается многими дополнительными условиями проектирования и в табл. 6.1 принята одинаковой для всех форм сечений.

Добиться снижения веса балки можно также путем изменения размеров сечения по ее длине в соответствии с эпюрой изгибающих моментов, увеличивая сечение там, где моменты больше, и наоборот. На рис. 6.9, *а* показана балка со ступенчатым изменением толщины полок двутавра, достигаемого путем наваривания или приклепывания дополнительных горизонтальных листов. На рис. 6.9, *б* криволинейная эпюра — это расчетные моменты от нагрузки, а ступенчатая — эпюра моментов M_X=\Y_X]1, которые может воспринять балка ступенчатого сечения *(эпюра материала).* Увеличивая число ступенек, в пределе придем к балке, для которой в каждом сечении соблюдается условие

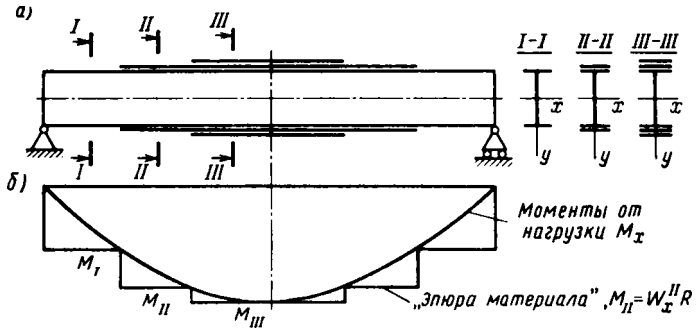


Рис. 6.9. Применение балок со ступенчатым изменением сечения экономит расход материала

$$СТ_{тжх}=\frac{M_x(г)}{}=Л=СОПв1. \qquad (6.16)$$

Такая балка называется *балкой равного сопротивления.* В большинстве случаев закон изменения сечения балки равного сопротивления имеет лишь теоретическое значение. Однако он служит той идеальной моделью, на которую в случае необходимости может ориентироваться инженер при реальном конструировании.

Балка равного сопротивления

Пример 6.2. Консольная балка постоянной высоты А имеет прямоугольное сечение, ширина которого *Ь* (рис. 6.10, *а,* б). Найти закон изменения ширины сечения *Ь=Ь* (г), чтобы от загружены сосредоточенной силой на конце консоли она представляла собой балку равного сопротивления. Расчетное сопротивление Л дано.

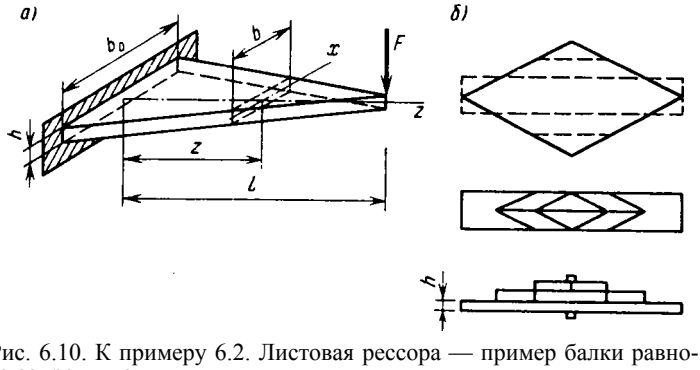


Рис. 6.10. К примеру 6.2. Листовая рессора — пример балки равного сопротивления

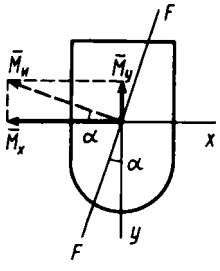
Решение. Изгибающий момент в произвольном сечении \МД~Р (!—г). Условие прочности (6.16) будет

$$/\bullet(/\text{-г})\ /=\bullet(/\text{-г})\ 6 \qquad =Л.$$
$$ЬИ^2$$

Отсюда имеем

где ¿о=6/7/(А²Л) — ширина сечения в заделке. Как видим, ширина должна изменяться по линейному закону (рис. 6.10, *а*). Если треугольную пластину разрезать продольными сечениями на части и сложить их в пакет, обхваченный хомутами, то получим листовую рессору, обладающую высокой гибкостью при соблюдении прочности по нормальным напряжениям во всех поперечных сечениях (рис. 6.10, б). В месте приложения силы ^ из конструктивных соображений ширину полосы оставляют постоянной (пунктир на рисунке).

§ 6.5. Косой изгиб



Предположим, что стержень нагружен так, что суммарный изгибающий момент $M_я$ в сечении действует в плоскости, не совпадающей ни с одной из главных плоскостей (рис. 6.11, *а),* а продольная сила N=0. Такой случай называют *косым изгибом.*

Момент $M_я$ представим в виде вектора, перпендикулярного плоскости нагружения *Р—Р,* в которой действует этот момент. Разложив его на составляющие, найдем

$M_X=M_Л$ сова; $M_y=—M_л$ъ та. (6.17)

Связь между направлением момента и его вектором можно установить по известному из теоретической механики правилу. В данном случае изгибающий момент *М,* будет направлен так, что он сжимает точки сечения в первой четверти осей координат (где x>0; *у*> 0), поэтому он принят со знаком минус. В соответствии с общей формулой (6.8) при *N=0* напряжения будут определяться равенством

$$a=—^{м_x}_{J}у—\frac{My}{J_x}. \quad (6.18)$$

'Ч-:- • •••'*,.... • >.
•:'т .<• й :...

Координаты точек нулевой линии *n—n* обозначим *x,,* и *у,,.* Из условия <7=0 получим уравнение этой линии

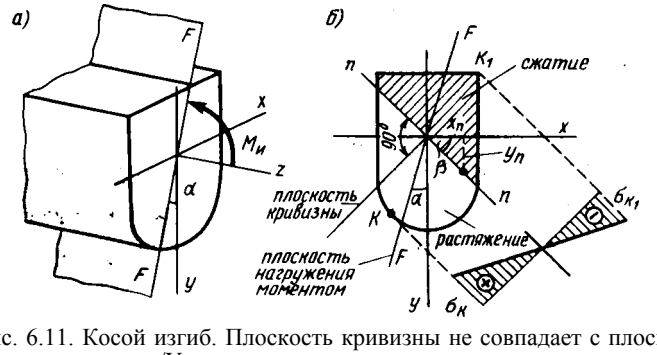
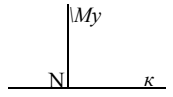


Рис. 6.11. Косой изгиб. Плоскость кривизны не совпадает с плоскостью нагружения /У

при косом изгибе'

$$\frac{M_x}{I_x}y + \frac{M_y}{I_y}x = 0 \qquad (6.19)$$



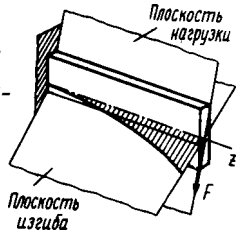
Она проходит через начало координат, а ее наклон к оси *х* определяется тангенсом угла /? (рис. 6.11, *б),* для которого из (6.19) с учетом (6.17) получим выражение

$$\text{№/>-7—57=7 Ч«-} \qquad (6.20)$$

У

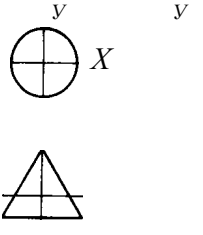
Вектор момента направляется так, что при Взгляде на момент навстречу его вектора. Видам момент Вращающим против хода часовой стрелки

При I_XФ1, угол рфа, т. е. в отличие от изгиба в главной плоскости (см. § 6.3) при косом изгибе нулевая линия не перпендикулярна плоскости действия момента $M_ш$. Плоскость кривизны, будучи ортогональной к п—п, не совпадает с плоскостью действия момента $M_я$ и будет расположена «косо» по отношению к этой плоскости (под углом р—а). Это обстоятельство и объясняет наименование деформации «косой изгиб».



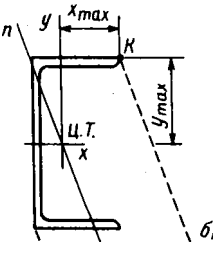
Если консольную балку с высоким прямоугольным сечением *(И»Ь)* нагрузить на конце наклонной силой *Р,* то можно видить, что перемещения сечений (прогибы) будут происходить не в направлении действия силы *Р,* а косо по отношению к силе *Р,* что является следствием косого изгиба.

Интересно отметить, что для сечении, у которых Л=/„ для любой плоскости наклона момента $M_ж$ по (6.20) имеем /?=ос и искривление происходит в плоскости действия момента. Такими сечениями, например, являются круг, квадрат, равносторонний треугольник, составные сечения при Л=*I,*. В подобных случаях любая центральная ось является главной и изгиб от любой наклонной силы (при произвольном угле а) превращается в главный плоский изгиб.



Вернемся к общему случаю косого изгиба (рис. 6.11, *а).* Эпюру *а* в сечении удобно изобразить на оси, перпендикулярной линий *п—п* (рис. 6.11, *о).* Самой напряженной будет точка сечения, наиболее удаленная от *п—п* (точка *К* или *Кх).* Для нее и составляется условие прочности:

$$\sigma_к = \frac{M_x}{W_{xк}} + \frac{M_y}{W_{yк}} \leq [\sigma]. \qquad (6.21)$$



Если очертание сечения таково, что опасная точка *К* имеет координаты $x_к = x_{max}$ и Уг= Ут.. (например, швеллер), то, учитывая, что Л/З'т« = и $I_x = I_y$= условие (6.21) можно выразить через моменты сопротивления сечения:

$$\frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma], \qquad (6.22)$$

Косой изгиб может быть весьма опасен с точки зрения значения напряжений и прогибов, особенно для сечений с резко различными моментами инерции J_x и J_y (для узких и высоких сечений).

Првмер 6.3. Балка мостового грана имеет сечение в виде прокатного двутавра № 60 с геометрическими характеристиками -2510 см^3 «2^-10“* м*; 181 см*—0,181' 10-* м*. Найти наибольшие напряжения *а* при торможении крана, вследствие которого хруз (г отклоняется от вертикали на угол а (рис. 6.12).

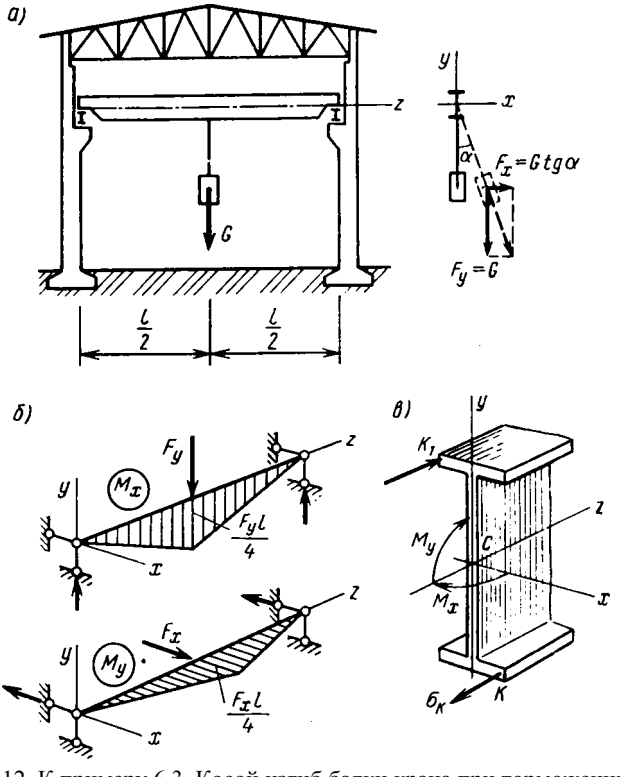


Рис. 6.12. К примеру 6.3. Косой изгиб балки крана при торможении

Дано: /—6 м, С—150 кН, tga—0,1.

Решение. При торможении на балку действуют вертикальная сила ¿^—(7 и горизонтальная (ряс. 6.12, *а).* Они вызывают изгибающие моменты M_x и M_y, эпюры которых показаны на рис. 6.12, *б,* а воздействие моментов M_X~P^\4 и Л/,—/у/4 на среднее сечение балки изображено на рис. 6.12, *в.* Наибольшее растягивающее напряжение возникает в точке *К,* численно равное ему сжимающее — в точке *К*\.

Для точки *К* имеем

M_x M_y <?/ 150* 10* 6 150 10*-6 0,1

$^{(ГК}$~$1Г_X^+1Г_У$~$41Г_X^+41Г,^{Ш}$'$2,5110\text{-}^{3+}$ 0,18110-*

=(90 + 65)-10‘ Па.

При косом изгибе напряжение *а*___-<Тг=155 МПа. При вертикальном грузе о*=А/*/И''*=90 МПа, т. е. за счет косого изгиба напряжения возросли в (155/90)=1,72 раза.

§ 6.6. Общий случай. Внецентренное растяжение—сжатие

В общем случае, когда *N¥=0, M_XФ0* и *M_YФ0,* напряжение *а* в произвольной точке определяется по формуле **(6.8):**

$$c=-+\frac{M_x}{I_x}y+\frac{M_y}{I_y}x.$$

Как и в случае косого изгиба, для наглядного и простого изображения эпюры *а* удобно построить нулевую линию *n*—и, уравнение которой имеет вид

$$-+\frac{M_x}{I_x}y+\frac{M_y}{I_y}x=0 \qquad (6.23)$$

Уравнение нулевой линии в общем случае

Отрезки, отсекаемые линией *n—n* на осях координат x_0 *и* y_0 (рис. 6.13), будут

$$x_0=\frac{I_y}{M_y A}; \quad y_0=\frac{I_x}{M_x A} \qquad (6.24)$$

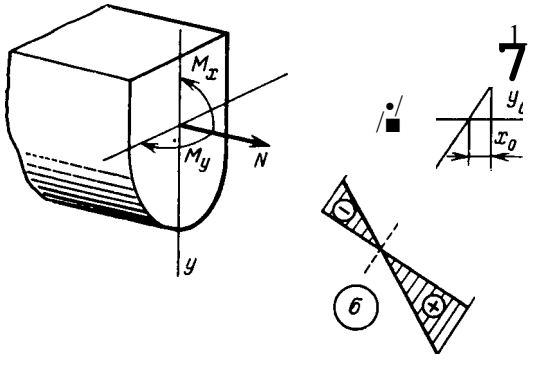


Рис. 6.13. Общий случай нагружения сечения

Часто отрезки *х^ в уо* очень малы и по ним трудно правильно изобразить линию *n—n.* Тогда ее надо строить по двум произвольным точкам, задаваясь, Например, произвольной координатой x_n и определяя из уравнения

Пример 6.4. Колонна промышленного здания, рассматриваемая в примере 6.3, нагружена равнодействующей вертикальных сил P_c= —600 кН и горизонтальной тормозной силой от крана ^=4 кН. Найти наибольшие сжимающие и растягивающие напряжения *а* (рис. 6.14, *а).*

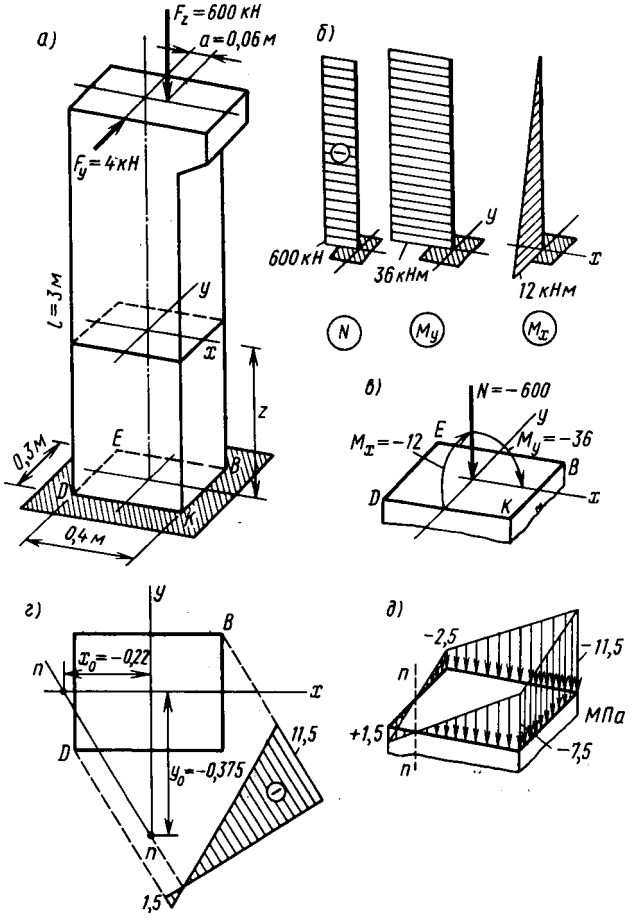


Рис. 6.14. К примеру 6.4. Нормальные напряжения в сечении колонны в общем случае нагружения

Решение. В произвольном поперечном сечении колонны возникают внутренние усилия:

#=-^=-600 кН; M_x~P_y(1-г)~4 (/-г); 600 0,06 =

=36 кН'м.

Эпюры этих усилий показаны на рис. 6.14, *б.* Опасным сечением является сечение у заделки, а действующие в нем усилия показаны на рис. 6.14, *в.* Моменты M_x = — 12 кН‘м и — —36 кН'м приняты'со знаком

минус, поскольку они сжимают точки сечения колонны в первой четверти осей координат *х, у.* Геометрические характеристики сечения:

0,4 0,3³ 0,4 ■ 0,3*

Л-------— “9-10 м*; $ц_x$---------- --------6-10-³ м³; /,= 16 10'* м*;

По формуле (6.8) получим напряжение в произвольной точке сечения:

600 10^3 12-10* 36 10* I* /40 \
— х——(5+—у+22^ хНо* Па. (в)
0,12 9-10'* 16- 10-

Уравнение нулевой линии а—0 дает 5+(40/3)$y_я$+22£ $x_я$—0. Отсюда отрезки, отсекаемые ею на осях, будут хц—— 5/22,5— —0,22 м; y_o~ --15/40=-0,375 м. То же можно получить непосредственно по формулам (6.24). Эпюра *а,* построенная на оси, перпендикулярной линии л—я, показана на рис. 6.14, г. В точке *В* возникает наибольшее сжимающее напряжение г*— — 11,5 МПа. Оно получено по формуле для *о* при х*-0,2 и $y_л$«0,15. При $x_в$--0Д и —0,15 для точки

2) получим наибольшее растягивающее напряжение: 1,5 МПа.

Пространственное изображение эпюры *а* дано на рис. 6.14, *д.*

Заметим, что напряжения в отдельных точках можно вычислить, не составляя общей формулы для *а,* а используя моменты сопротивления $Ж_x$. $№_y$. Так, в данном случае

$$o_в = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{Я'x} + \frac{M}{Жy} = 5 - 2 - 4{,}5 - -11{,}5;$$

$$a_к = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{Ж_x} + \frac{M_y}{Ж,} = 5 + 2 — 4{,}5 — — 7{,}5;$$

$$a_б = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{Ж_x} + \frac{My}{Гy} = 5 + 2 + 4.5 - 1.5;$$

$$a_E = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{Ж_x} + \frac{My}{Ж_y} = 5 — 2 + 4{,}5 — — 2{,}5.$$

Здесь знаки у слагаемых расставлены по физическому смыслу с учетом рис. 6.14, *я,* из которого можно видеть, какую часть сечения растягивает или сжимает каждый из моментов M_x и $M_г$

Внецевтренное растяжение—сжатие — это случай нагружения, когда линия действия растягивающей или сжимающей силы £ не совпадает с осью стержня, а имеет эксцентриситеты $x_г$ и y_P (рис. 6.15). Так, для сжимающей

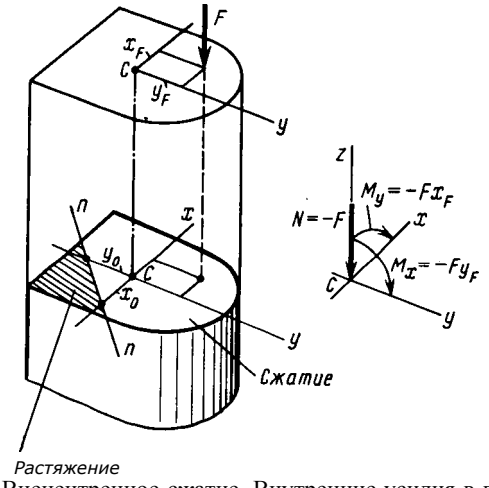


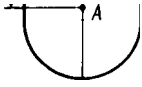
Рис. 6.15. Внецентренное сжатие. Внутренние усилия в поперечном сечении

силы P имеем в произвольном сечении стержня:

$$N=-F;\ M_x=-Py_г;\ M_y=-Px_г. \qquad (6.25)$$

Кроме того, используем понятие радиусов инерции сечения:

$$i_x=\sqrt{\frac{J_x}{A}};\quad i_y=\sqrt{\frac{J_y}{A}}.$$



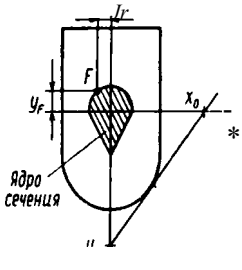
Если условно всю площадь сечения A сосредоточить в точке на расстоянии г'$_x$ от оси x, то $1_X=A$ I \ и, аналогично, $3_y=A$ Подставив эти значения /, и а также внутренние усилия (6.25) в (6.24), получим отрезки, отсекаемые соответствующей нулевой линией на осях:

$$*0=\frac{/*}{xF}\cdot{}^{L}i \qquad Уо=\sim\sim\frac{il}{yF}. \qquad (6.27)$$

Ядро сечения. Если сила стоит в центре сечения (x_F= О, j_f=0), то по (6.27) получаем $x_0=со$, $y_0=оо$. Имеем центральное сжатие с равномерным распределением сжимающих напряжений <m= —F/A по всему сечению. Пусть теперь сила постепенно удаляется от центра, т. е. в формулах (6.27) эксцентриситеты x_F и y_F возрастают. При достаточно больших эксцентриситетах отрезки дсо и $уо$ будут настолько малы, что нулевая линия пересечет контур сечения и часть сечения по одну сторону от л—и окажется сжатой, а по другую — растянутой (этот случай показан на рис. 6.15). Отсюда следует, что можно найти такое граничное удаление силы F от центра, до которого сила будет вызывать в сечении напряжения одного знака и, лишь перешагнув эту границу, вызовет напряжения противоположного знака.

Ядро сечения

Область, очерченная вокруг центра тяжести сечения, обладающая тем свойством, что продольная сила F, будучи расположенной в любой точке этой области, вызывает во всем поперечном сечении напряжения одного знака, называется ядром сечения.



На рис. 6.16 показана трансформация эпюры напряжений $а$ при удалении силы F от центра вдоль оси y. Расположению силы F на границе ядра сечения соответствует положение нулевой линии как касательной к контуру сечения, так как при выходе силы из ядра линия n—n должна пересечь контур сечения. Ядро строят, последовательно задаваясь положением n—n как касательных к контуру сечения. При этом устанавливают отрезки XQ, Уо и из формул (6.27) находят координаты силы:

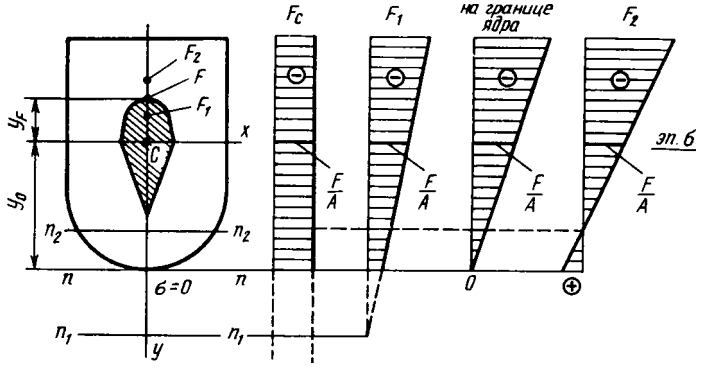
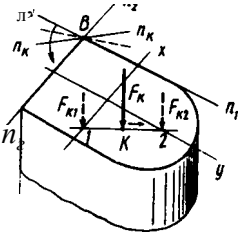


Рис. 6.16. Изменение эпюры *а* при удалении силы от центра сечения. Нулевая линия *n—n* касается контура сечения при расположении силы на границе ядра сечения

$$x_P = \frac{}{*_0} \quad y_г - \quad y_0 \qquad (6.28)$$

Соединив найденные таким путем ряд точек с координатами *Хр, ур,* получают очертание ядра.



Докажем утверждение, помогающее строить ядро сечения:

если нулевая линия вращается вокруг некоторой точки n В, то сила движется по прямой.

Чтобы это доказать, достаточно показать, что при любом положении силы $P_к$ на прямой *1—2* линия $n_к—n_к$ проходит через точку *В,* т. е. $o_в$=0. Это действительно так, поскольку сила $P_к$ может быть разложена на составляющие *P/a* и *Pa,* от каждой из которых напряжение бд=0, так как точка *В* одновременно принадлежит обеим нулевым линиям: *щ—щ* и $n_2—n_2$. Следовательно, утверждение доказано. Оно позволяет спрямлять контур ядра сечения при обходе угловых точек контура сечения.
В данном случае отрезок *1—2* является частью границы ядра сечения.

Пример 6.5. Построить ядро для прямоугольного сечения.
Решение. Проведем линию Л|—*n*\, отсекающую на оси *x* отрезок *xo=Ь/2.* Квадрат радиуса инерции будет $_i$\-*JylA*=AA^3/(12AA)=Л^2/12. По формулам (6.28) получим *xp=—Ь/***6**, а также *y?>*= 0, так как отрезок $У_о = с_о$, что дает точку *1* ядра (рис. 6.17). Аналогично, линия $n_2—n_2$ дает точку 2. Переход от Л|—*n*\ к $n_2—n_2$ осуществляется путем вращения

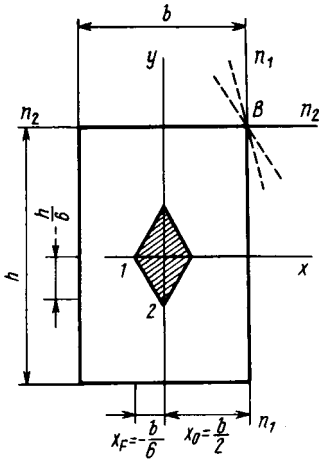


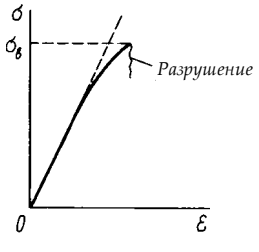
Рис. 6.17. К примеру 6.5

вокруг точки *B,* поэтому прямая *1—2* является частью контура ядра сечения, представляющего собою ромб, расположенный в средней трети высоты и ширины поперечного сечения.

При проектировании стержней из материала, имеющего предел прочности на растяжение значительно меньше, чем на сжатие (например, чугун, бетон, кирпичная кладка), необходимо стараться обеспечить такие условия, при которых равнодействующая продольных сил не выходила бы за пределы ядра сечения и в поперечном сечении не появились бы нежелательные растягивающие напряжения.

Решите задачу 6.7

§ 6.7. Предельная нагрузка при изгибе балки из упругопластического материала



Существенный практический интерес представляет задача об определении несущей способности балки, т. е. вычислении предельной нагрузки, которую она может выдержать. Рассмотрим ее в случае плоского изгиба. Для хрупкого материала, работающего вплоть до самого момента разрушения почти линейно-упруго, предельная нагрузка определяется из условия a___ =А/./И^.=ст.. где ст, — временное сопротивление (предел прочности) материала.

Сложнее обстоит дело с упругопластическим материалом. В целях упрощения задачи для материала балки примем в качестве расчетной так называемую диаграмму Прандтля, предполагая, что при $o<a_T$ материал работает

Текуч/сп

линейно-упруго и, следовательно, справедлива формула (6.12) для нормальных напряжений в ее поперечных сечениях. При достижении в данной точке сечения равенства <7=<$г_т$ возникает текучесть и далее продольное волокно балки в этой точке неограниченно деформируется при

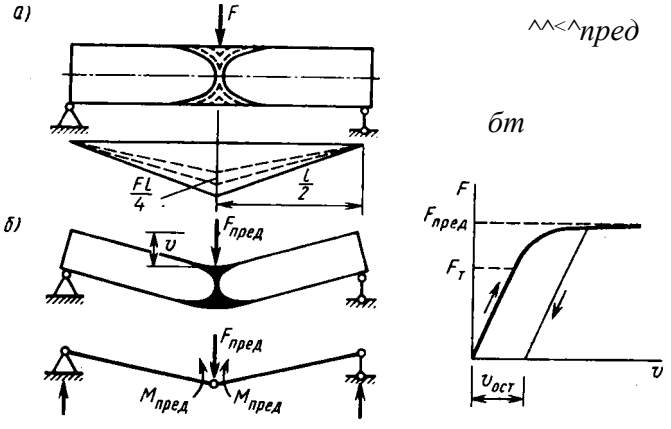


Рис. 6.18. Образование пластического шарнира в балке: P_7 — нагрузка начала текучести; *Рщед* — нагрузка образования пластического механизма

постоянном напряжении $a—a_m$. В таком предположении рассмотрим стадия, проходимые балкой вплоть до исчерпания несущей способности (рис. 6.18, *а).*

При постепенном возрастании внешней силы *Е* линейно-упругая стадия работы балки заканчивается при появлении текучести в самых напряженных крайних точках среднего сечения. Соответствующий изгибающий момент M_m и силу P_m находят из условия $a_{влх}—M_m\hat{}_x=$ =(/'$_x$//4)/Ж,=<$г_т$, откуда

$$M_m=a_m\, IV,;\; P_m\; -\frac{4в_x\backslash Y_x}{I} \qquad (6.29)$$

При дальнейшем росте силы наступает упругопластическая стадия работы балки. Зона текучести будет расширяться от указанных крайних точек, а эпюра *а* в среднем сечении будет трансформироваться при

(рис. 6.18, *а).* В пределе она превратится в ступенчатую эпюру с ординатами *с*= +<$г_т$. Это сечение будет работать в чисто пластической стадии.

Состояние сечения, когда во всех его точках развиваются пластические деформации, называют пластическим шарниром.

Пластический шарнир

При этом балка как бы превращается в механизм, продолжающий увеличивать прогибы V при постоянной внешней нагрузке /'$_{П}р_{ед}$ (рис. 6.13, *б).* Такое состояние называют *пластическим механизмом.* При разгрузке балки образуется остаточный прогиб $\backslash_m$. В поперечном сечении, где образовался пластический шарнир, внутренний момент обозначим Д/$_{т\cdot 1}$ и назовем его *пластическим*

щед выразим из условия (/'$_{пред}$//4)=A/$_{11}$p$_{ет}$ в виде

$$* \text{ пред} \frac{p}{} = \text{'пред}$$

Таким образом, наиболее напряженное сечение балки проходит три стадии работы: линейно-упругая *(M_X^M_7);*

упругопластическая (Л/$_т$<M,<Л/$_{щед}$); чисто пластическая (пластический шарнир) *$_к$M_y=M_mn).*

Определение пластического предельного момента. Получим формулу для *M_a***ре$_Д$ на примере сечения с одной осью симметрии (рис. 6.19). В упругой стадии эпюра** *а* **линейна и нулевая линия совпадает с центральной осью х. В общем случае при образовании пластического шарнира нейтральная линия** *n—n* **смещается от центра тяжести сечения С. Действительно, все сечение делится на часть, растягиваемую постоянным напряжением <г$_т$, с площадью** *Л_р* **и соответствующей силой #$_р$=Л$_р$<т$_т$, и сжимаемую часть** *А^* **с действующей силой** *M_ся= —А^Ог.* **Так как суммарная продольная сила в сечении при поперечном изгибе равна нулю, то из условия N=Л^р+=** *A_p(г_т—A_сж<m_т=0* **получим**

и

Положение нулевой лш при образовании пластического шарнира

$$Ap — Aa — . \qquad \textbf{(6.31)}$$

При образовании пластического шарнира нулевая линия делит площадь поперечного сечения на две равновеликие части.

Внутренний момент $_д$ найдем как момент всех элементарных сил (<г$_т$ с*1А)* **относительно оси** *х* **(или любой другой оси, например и—л, так как эти силы приводятся к паре с моментом** *M_a*^**д):**

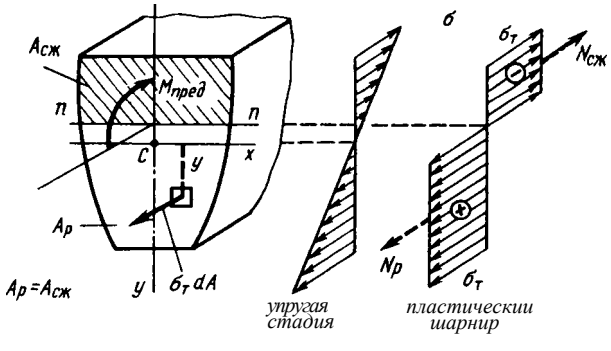


Рис. 6.19. Пластический шарнир в несимметричном сечении. Ось *n*—л делит площадь пополам

Л/щ*д=1 a_mйА-у+ \ <$г_т$ёА^{ш}у*=a_m(/51+3Т), (6.32)

Формула для пластического предельного момента

где *Б1= $ у<И\ £“= | у ¿А*—статические моменты растянутой и сжатой частей сечения относительно оси *х* (ЕЛИ *п—п),* взятые по абсолютному значению (оба положительные). Заметим, что геометрическую характеристику

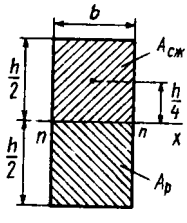
^=55+5? (6.33)

называют иногда *пластическим моментом сопротивления сечения* в отличие от $Я^{е}_{х}$=^$у_{тлх}$ — момента сопротивления в упругой стадии. Поэтому (6.32) можно записать в виде, аналогичном (6.29):

•^щжд = И'ш, (6.34)

Так, для прямоугольного сечения найдем 5“= =*(6к/2)* (А/4) и $И'_{Ш1}$=6А^{2}/4, в то время как \$У_{х}$=*Б1г^{1}16* Поэтому коэффициент

$Р_{тжх}$ = АГщщц Жцд (6.35)



в данном случае будет 6/4=1,5.

Коэффициент Дои показывает, во сколько раз должна возрасти нагрузка от момента появления текучести в балке до полного исчерпания ею несущей способности. Решите задачу 6.8 В данном случае -Рвред^{2}1,*5$Г_{Т}$*.

§ 6.8. Расчет по ограниченной пластической деформации

В целях экономичности конструкций нормами в определенных случаях допускается развитие пластических деформаций, но ограниченной величины, поэтому реально работа сечения **в** конструкции может происходить в упругопластической стадии. Рассмотрим ее более подробно.

Упругопластическая стадия. На примере прямоугольного сечения с использованием диаграммы Прандтля рассмотрим работу элемента балки при моменте $М_{Х}$=*РМ,,* где \<*р<$р_{юи1}$=1,5* (рис. 6.20, *а).* Пусть в сечении образуется упругое ядро с границами *у*= ±$у_{т}$ (рис. 6.20, *б).* Далее относительную глубину зоны текучести обозначим *Г1=$у_{т}$/(0,5к).*

В упругопластической стадии следует различать процесс нагружения и разгрузки. При нагружении вслед за упругими деформациями *£ущ,=&т* на части сечения раз-

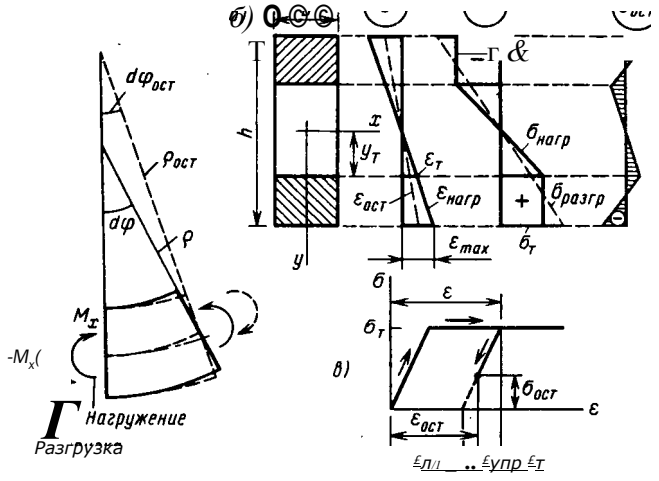


Рис. 6.20. Нагружение и разгрузка элемента балки (а); эпюры деформаций и напряжений (б); диаграмма деформирования в точке (в)

виваются пластические деформации Бщ,, так что в некоторой точке суммарная деформация будет (рис. 6.20, *в)*

$$\varepsilon = \varepsilon_{пл} + \varepsilon_{упр} = \varepsilon_{пл} + \varepsilon_т. \qquad (6.36)$$

Разгрузку элемента можно рассматривать как результат приложения к нему моментов M_x с обратным знаком. В каждой точке сечения разгрузка (т. е. убывание упругих деформаций) происходит линейно-упруго, но в разных точках сечения это убывание деформаций произойдет по-своему, так как сечение остается плоским и поворачивается на определенный угол. В результате в точках сечения образуются остаточные деформации и остаточные напряжения *о^*. Кривизна при нагружении будет $x=1/p$, а после разгрузки остаточная кривизна $x_{ОСГ1}=$

$-$ 1/Росг

Рассмотрим последовательно этап нагружения элемента и этап его разгрузки.

Нагружение. В соответствии с формулой (6.11) в любой точке

Б—£щг]$\frac{Y}{P}$ ■

На границе упругого ядра при $y=y_г$, где £=$Б_Т$=$СТ_т$/£, имеем равенство $в_т=y_т/p$, откуда найдем радиус кривизны:

$$\rho = \frac{y_т}{в_т} = \frac{h}{2\varepsilon_т}\,\eta.$$

Соответствующий момент M_x получим в виде

$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y b y dy = (1,5 - 0,5\rho^2) M_T = (1 - M_T$,

где с учетом (6.37) для P имеем выражения

$f\rho| = 1,5 - 0,5\rho^2 =$ (6.39) Коэффициент $p = \frac{M_x}{M_T}$ в упругопластической стадии

При $P_T/J = (1/2)E_T$, $\rho = 1$, $M_X = M_T$ и текучесть впервые по- является в крайних точках сечения $y = \pm h/2$. Поэтому в (6.39) должно быть $p < p_T$. При $p > p_T$ имеем упругую стадию работы, когда M_x и p связаны соотношением (6.10):

$$M_X = \frac{K\Gamma_X}{p} \frac{Ш^* \kappa M_x}{12p\ 2л,p} = PM_T; \qquad P = \frac{}{2^* \text{гР}}$$ (6.40) Коэффициент P — $= \frac{M_x}{}$ в упругой стадии

На рис. 6.21 по формулам (6.39) и (6.40) представлена зависимость $P = M_x/M_m$ от отношения p/A.' Например, для дни стали, имеющей $\sigma_T = 350$ МПа, $E = 2,1' 10^*$ МПа, $E, =$ $= (\varepsilon_T/E = 1,66\ 10^{"3}$, отношение $p_T/A = l/2e, \ll 300$; следовательно, текучесть начинается при $p/A \ai 300$. При $(p/A)\text{-}^*0$ момент $M_X\text{-}^*A_{ЩКД} = 1,5M_m$. Практически при $(p/A)^* 1Q...20$

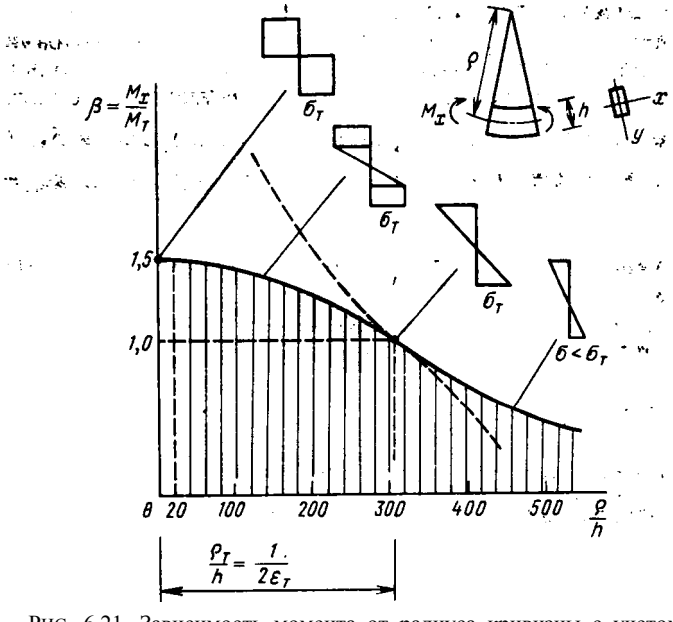


РИС. 6.21. Зависимость момента от радиуса кривизны с учетом пластических деформаций

можно полагать $M_c m M^{\wedge}$. Следовательно, в тех случаях, когда производится холодный загиб стержней из пластичной стали при указанных радиусах кривизны (трубы, стержни арматуры и др.), в сечениях таких стержней на изгибаемом участке практически имеет место пластический шарнир.

Из (6.38) выразим кривизну через момент:

?

«

Зависимость между моментом **и кривизной в** упругопластической стадии

$$æ = \frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EJ_x \psi}, \qquad (6.41)$$

где $ф = ру/з\text{-}2р;\ P = M_X/M_T$.

При 1 </?< 1,5 коэффициент $ф$ изменяется в пределах 1>^>0. Коэффициент $ф$ учитывает снижение жесткости сечения $Ш_x$ за счет развития пластических деформаций.

По мере приближения к образованию пластического шарнира жесткость падает до нуля *(ф-*0),* что означает превращение балки в пластический механизм. Зависимостью (6.41) можно пользоваться при определении прогибов рассматриваемых балок в упругопластической стадии.

Расчет по ограниченной пластической деформации. В расчетах строительных конструкций особое значение имеет *максимальная пластическая деформация* ■»»>

возникающая при деформировании в упругопластической стадии, так как она может служить критерием возникновения микроповреждений в материале в опасной точке. Так, например, для некоторых сортов сталей в конструкциях предлагается $e^{\wedge}, {}_{т,,}=2{,}5\text{-}10^{-3} = 0{,}25\%$. Для использования $Б^{тм}, {}_{т,,}$ в качестве критерия, по которому может быть определена расчетная нагрузка на балку, надо выразить момент M_x через ${}_{т,,}$. Для этого равенство (6.36) запишем для крайних точек сечения y=А/2, заменив в нем на основе гипотезы плоских сечений $e=e_{т1Д}=e_т/^{\wedge}$. Тогда вместо (6.36) получим

$$®г_{П} \; ®_{вл,\ тах}\ Т\ £г>$$

откуда найдем глубину пластической зоны сечения, выраженную через $в^{тм}, {}_{т,,}$:

$$7 = \frac{}{^{\wedge}\ ^{\wedge}{}^{\wedge}_{пл,\ тах}} \blacksquare \qquad (6.42)$$

$$®_т$$

Теперь по (6.38) найдем внутренний момент в сечении

$$M_{ПЛ} = P\ M_T = (1{,}5 — 0{,}5г1^{г})\ M_{г}, \qquad (6.43)$$

который допускается по развитию пластической дефор-

мации. Например, для стали, имеющей ^=1,66-1Ö-"[3], приняв Еля, nux=2,5-10[-3], получим по (6.42))/=1,4 и по f (6.43) $M_{ВЛ}$=1,42$M_Г$. На рис. 6.22 изображено развитие пластической зоны для принятых данных в случае действия на балку равномерно распределенной нагрузки *д*. Сама нагрузка $g_{v,B}$,=*i* M_m*jl*= 11,4 M_r/l^2.

Заметим, что для сечений типа двутавра при одной и той же глубине пластической зоны *г*\ коэффициент *ß* в выражении Л/щ,=*ß*M_r заметно падает по сравнению с прямоугольным сечением и составляет *ß*= 1,05...1,20 в зависимости от соотношения площади полок и стенки. В нормах проектирования стальных конструкций СНиП П-23—-81* для статических нагрузок и сталей с расчетным пределом текучести <$г_т$ < 580 МПа для учета пластических деформаций рекомендуется принимать вместо «упругого» момента сопротивления W_x величину W_m=$c_x W_x$, где c_x зависит от соотношения площади полок и стенки сечения. Например, для симметричного двутавра при *AJA,,=0,25*; 0,5; 1,0; 2,0 значения с,= 1,19; 1,12; 1,07; 1,04 соответственно.

Вместо (6.13) условие прочности с учетом развития пластических деформаций записывается в виде

$$\frac{M_x}{c_x W_x} \leqslant R. \qquad (6.44)$$

Разгрузка. Так как разгрузка в каждой точке сечения происходит по линейному закону (см. рис. 6.20, в), то напряжения от момента (—Л/$_x$) можно подсчитать как в упругой балке (если в какой-либо части сечения не возникает вторичная текучесть, т. е. текучесть при разгрузке). В результате после разгрузки в некоторой точке

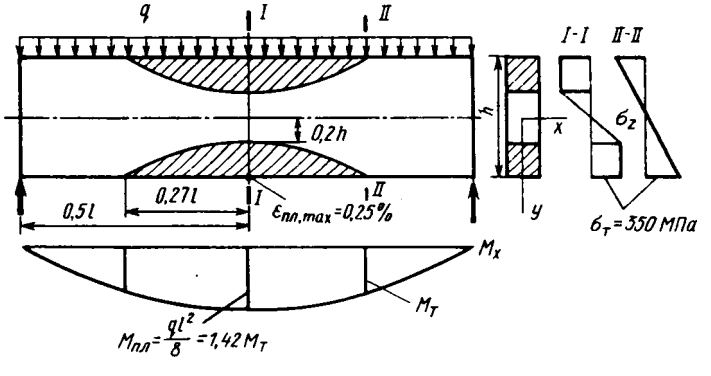


Рис. 6.22. Зова пластических деформаций в балке *для* (Отх = 0.25%

сечения получим ***остаточное напряжение*****:**

$$0ОСТ--0ж»гр_{игр}\blacksquare = Ожр--\frac{M_x}{J}\text{^<Г:}$$

Расчеты при наличии вторичной текучести более сложны и здесь не рассматриваются. На рис. 6.15, *б* линейная эпюра «Тразгр, показанная пунктиром, наложена на эпюру Стщгр, а их разность изображена рядом в виде эпюры остаточных напряжений a_m. Так как в разгруженном сечении продольная сила и изгибающий момент равны нулю (2г=0 и $1m_x$=0), то *остаточные напряжения в поперечном сечении образуют систему самоуравновешенных внутренних сил.*

Радиус кривизны при нагружении p и остаточный радиус Рост через кривизну связаны соотношением

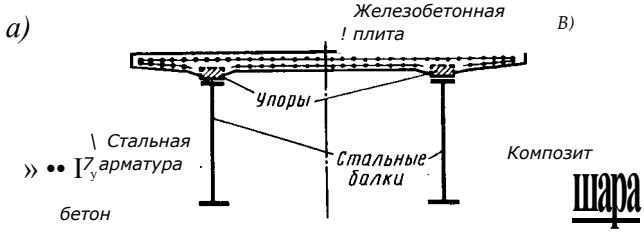
$= зе$— а^изгр, что дает выражение

$$\frac{1}{_{Рост}} \qquad EI_X \qquad (6.46)$$

из которого может быть найден остаточный радиус кривизны.

§ 6.9. Напряжения в стержнях, составленных из неоднородных и композитных материалов

В строительстве часто используются стержни, составленные из различных материалов. Типичным примером является железобетонный стержень или балка, в поперечном сечении которых объединены сечения бетонного стержня с модулем упругости $E_б$ и стальных стержней (арматуры), имеющих модуль E_c (рис. 6.23, *а).* Применяют так называемые сталежелезобетонные балки, где в сжатой зоне при изгибе располагают железобетонную плиту (хорошо работающую на сжатие), а в нижней растянутой зоне — стальные балки. Поперечное сечение сталежелезобетонной балки показано на рис. 6.23, *б.* При этом стальная и бетонная части указанных стержней на всей длине хорошо соединены между собой либо за счет сил сцепления, либо путем создания специальных



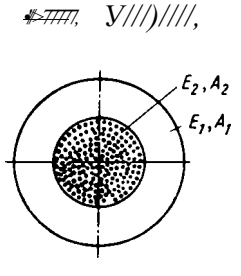
устройств (упоры, отгибы и т. п.). Поэтому они работа-.^ ют при продольных деформациях стержня совместно, как единое монолитное сечение. Это означает, что в целом к такому составному стержню применима гипотеза плоских сечений. Будем также считать справедливой и гипотезу ненадавливания продольных волокон в поперечном направлении.

В последнее время во многих областях техники применяют так называемые *композитные материалы.* Идея здесь состоит в том, что при создании комбинированного материала *основу* армируют большим количеством тонких нитей из другого материала, более прочного и жесткого. В результате возникает возможность получить стержень, имеющий в наиболее нагруженных частях сечения материал с повышенными упругими и прочностными характеристиками. На рис. 6.23, *в*, например, показано сечение балки, у которой материал основы имеет модуль упругости E\, а в нижней и верхней областях — композитные части с усредненным модулем $E_2 > E$\.

Понятие приведенного сечения

В расчетах стержней, составленных из неоднородных материалов, используется понятие *приведенного сечения.* Суть его состоит в том, что *неоднородное сечение заменяется условным однородным, имеющим ту же геометрическую форму, но каждый элемент площади йЛ$_1$ которого изменен (путем умножения на коэффициент приведения п,) пропорционально модулю упругости материала этого элемента. В результате стержень с приведенным однородным сечением по упругим свойствам не будет отличаться от неоднородного стержня.*

Проиллюстрируем сказанное на примере центрального растяжения стержня, составленного из двух материалов с модулями упругости E_x и $E2$ (рис. 6.24). Относи-



тельная деформация e=A/// одинакова для обоих материалов: e, = E_2 = £. Примем в качестве основного материал с модулем *E*\. Напряжения будут соответственно

$$o\backslash = E\backslash\, e;\ a_{\text{г}} = E_2 e = nE_1 \quad \text{Е=па}_{\text{и}} \tag{6.47}$$

где

$$_{\text{п}} = 5_{E\backslash} \tag{6.48}$$

— коэффициент приведения материала *2* к материалу *1,* принятому за основной. Суммарную продольную силу в сечении с учетом (6.47) получим в виде

$$N = |\ {<}\Gamma 1\ c + / o\text{-}_2(\text{Ы2} = (\tau_1\ (|\ {<}1.4, + \{\ \text{иё}\hat{}2) = {<}\Gamma|\text{у}4 \quad \text{Ц)У} \tag{6.49}$$

^1 ¿г .<<1 *1

где площадь приведенного сечения

$$A\text{щ}, = |\ \text{сЬ4}, + I\ n\text{й}Л_2 = Л, + n\text{Лг}. \tag{6.50}$$

Л1 ^2

Из (6.49) и (6.47) имеем окончательные формулы для напряжений

$$<\text{Т1} = \frac{N}{\text{—}};\ \text{а}_2 = \text{л}\text{—}\frac{N}{} = \text{по-!} \tag{6.51}$$

и деформаций

$$<1\text{и}' \qquad \text{АГ} \tag{6.52}$$

я

Особенность эпюры а в неоднородном сечении

Эпюра напряжений а в неоднородном сечении на границах двух материалов имеет разрыв (скачок), так как в точках соприкасания материалов при одинаковых продольных деформациях соответствующие напряжения отличаются в п раз.

Так как при изгибе каждое продольное волокно балки в модели стержня, описанной в § 6.1, работает в условиях одноосного растяжения — сжатия, то приведенное сечение, его геометрические характеристики и формулы для напряжений и деформаций будут строиться аналогично формулам для растяжения (6.50), (6.51) и (6.52), а именно:

Геометрическая характеристика приведенного сечения

любая геометрическая характеристика приведенного сечения получается как для условного однородного сечения, в котором каждый элемент площади ¿А, материала с модулем Е, заменен на элемент приведенной площади $\text{й}A_{Бч>} = n_1 \text{й}A_{,}$, *где п,=Е^Е1 — коэффициент приведения i-го материала к основному (первому) материалу.*

Например, моменты инерции приведенного сечения для неоднородного стержня будут (рис. 6.25)

$$\mathcal{З}_{хщ,} = \backslash y^{1}\hat{}A_{пр}\hat{} \$\ У^{2}n,йA_{I}='E_{I}/_{x1}n_{I};$$

$$\mathcal{З}_{У}\ \text{пр} = £/у/Л(. \qquad (6.53)$$

При этом оси x и y — это главные центральные оси ***приведенного сечения,*** для которых выполняются условия, аналогичные условиям (6.9):

$$5^{*}\ ар=\hat{}У\hat{}A_{Щ1}=\hat{}_{1}n_{1}8_{x},=0;\ \text{пр}=£л_{(}\ 5\hat{}1=0;$$

$$\mathcal{З}_{ху}\ \text{ир}\ J_{\ ХУЛАщ,} — £\ И|/_{ху!} — 0. \qquad (6.54)$$

Координаты центра приведенного сечения относительно произвольно выбранных осей $x_{и}$ вычисляются по формулам

$$Лор \qquad Аар \qquad (6.55)$$

Напряжения a_{1} по аналогии с формулами (6.51) и (6.8) можно вычислить по трехчленной формуле

$$°‘=n‘[m\ \text{Пр}\ /\ N_{M_{x}}\ A/,\ \backslash\ \text{Х пр}\ /_{y}\ \text{Пр}\ / \qquad (6.56)$$

«Тр ехчлекнаа» формула нормальных напряжений в неоднородном сечении

где $n_{1}=E\hat{}E_{и}$ Л]= 1 (приводим все материалы к материалу *1).* Формула (6.56) может быть получена строго, если повторить выкладки применительно к неоднородному материалу стержня (см. § 6.2). На рис. 6.20 показана

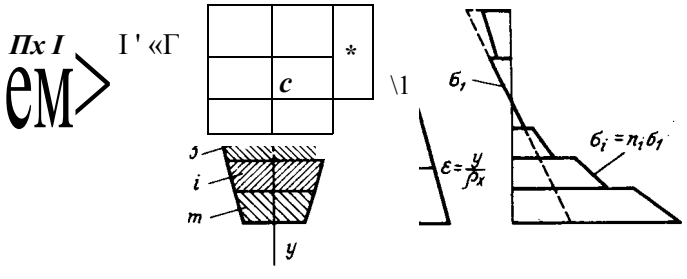


Рис. 6.25. Деформации и напряжения в многослойном неоднородном стержне при плоском изгибе

,рпюра о$^{-}_{<}$ для плоского изгиба, отвечающая выражению

$$в_j = n_{(}y\text{-}y: \frac{M_x}{} \qquad (6.57)$$

Зависимости между кривизнами и моментами по аналогии с (6.52) и (6.10) будут

г	M_x _	1	My
Px	$Ыхщ,'$	Py	$Ё\ ¿y$ пр

Пример 6.6. Построить эпюру нормальных напряжений в среднем сечении сталежелезобетонной балки, входящей в состав путепровода, от временной нагрузки 9—27,3 кН/м (рис. 6.26, *а,* б).

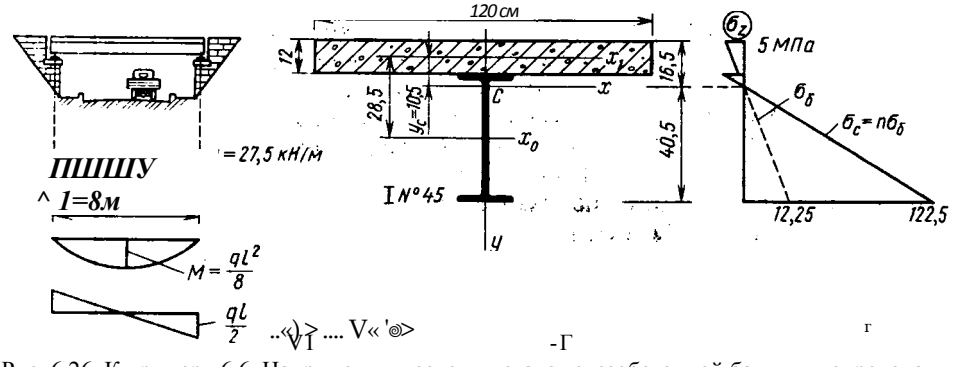


Рис. 6.26. К примеру 6.6. Напряжения в сечении сталежелезобетонной балки путепровода

Решение. Из сортамента для собственной центральной оси двутавра № 45 найдем $/_x$ =27 696 см* и площадь A = 84,7 см^2. Арматурой плиты для простоты пренебрегаем. Примем коэффициент приведения стали к бетону n= 10. Площадь приведенного сечения будет'

³ *Из сортамента:*
Ju₀;гтб сиД-.
Хо^{A} =бЧЛсп²
)

т5

Лр=Л$_6$+лЛ = 120' 12+10-84,7 = 2287 см^a=0,229 м*.

Координата центра тяжести приведенного сечения

$$Ус* \quad \blacksquare\text{^пр ^пр } 2287 \text{ -= 10,5 см=0,105 м.}$$

Момент инерции приведенного сечения относительно главной центральной оси

$$/_{120\ 12^3} + 1440\ \ 10{,}5\text{^} + 10\ (27\ 696 + 84{,}7 \bullet 18\ ) =$$
$$12$$

=0,726 Ю$^{-2}$ м*.

Расчетный момент в среднем сечении М*=9/^{2}/8=27,5·10^3 ■ 8^2/8 =

=220 кН'м. Напряжения в бетонной части сечения по формуле (6.57) при л, = «6=1 будут

При *у*= —0,165 м напряжение —5 МПа, а при у—0,405 м найдем

Об = 12,25 МПа. Эпюра <ге в пределах высоты двутавра показана на рис. 6.26, *б* пунктиром. Если ее ординаты умножим на коэффициент приведения л = 10, то получим соответствующие напряжения в стали (m_c=*nae.*

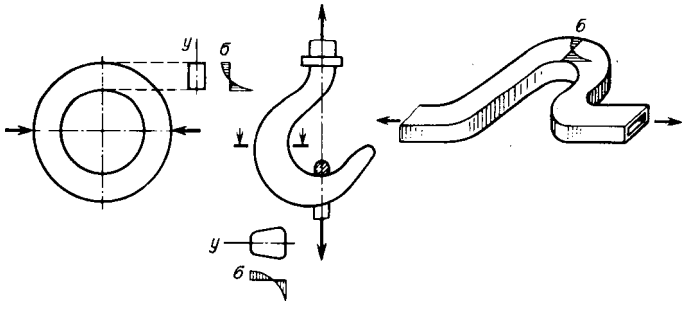
Так, в крайней точке $<\tau_{ст}$,=10-12,25=122,5 МПа.

§ 6.10. Напряжения в кривом стержне

В технике нередко встречаются криволинейные стержневые элементы конструкций, имеющие до нагружения естественную кривизну. К ним относятся всевозможные кольца, являющиеся элементами машин и аппаратов, обода колес, крюки и звенья цепей подъемных устройств, криволинейные участки трубопроводов и газораспределителей и т. п. (рис. 6.27). При растяжении—сжатии и изгибе таких стержней в их поперечных сечениях возникают нормальные напряжения ***а,*** распределенные по сечению, как показывает опыт, по более сложному закону, чем это дает трехчленная формула (**6.8**) для прямолинейного бруса. Поэтому рассмотрим вопрос определения нормальных напряжений в сечениях стержня с учетом его естественной кривизны, ограничившись здесь случаем плоского кривого бруса, имеющего сечение, симметричное относительно плоскости кривизны (оси ***у).***

Центральное растяжение—сжатие. Чтобы создать центральное растяжение кривого стержня конечной длины ***s,*** представим себе, что этот стержень наложен на идеально гладкую цилиндрическую поверхность и на концах его приложены растягивающие силы ***N.*** Со стороны поверхности будет действовать радиальная нагрузка интенсивности ***q,*** которую найдем из условия равновесия элемента дуги d¿=i?d<p. Спроецировав силы на нормаль к дуге, получим ***2N*** sin ***(dcp¡2)—qR*** d<p = 0. Заменив sin (d<p/2) на d<¡p/**2**, найдем

$$q=\frac{N}{R}. \qquad (6.59)$$



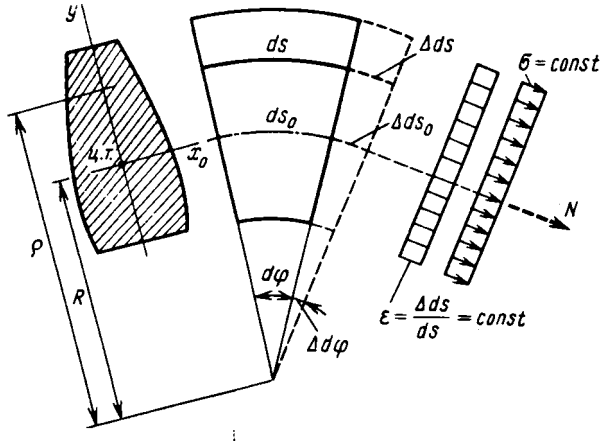
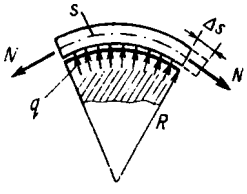


Рис. 6.28. Центральное растяжение элемента кривого бруса



dip

tjds "

Особенность кривых стержней

Если радиус ***R*** переменный ро длине дуги, то радиальная нагрузка ***q,*** которую надо приложить помимо концевых сил, чтобы создать деформацию центрального растяжения криволинейного стержня, также будет переменной. В каждой точке она определяется по формуле (6.59). При ***R= со*** для прямого стержня ***q***=0.

Рассмотрим теперь деформацию растяжения элемента стержня с центральным углом ***dtp*** (рис. 6.28). Как и в прямых стержнях, считаем справедливыми гипотезу плоских сечений и гипотезу ненадавливания волокон (см. § **6.1**).

Главная особенность криволинейных стержней состоит в том, что длины продольных волокон d? ***различны по высоте сечения. Поэтому форма эпюры абсолютных удлинений*** dw=AcЬ ***не совпадает с эпюрой относительных удлинений*** e=A ***ds/ds. В прямом стержне*** dy=ds_0=const ***и формы этих эпюр совпадает.***

В данном случае эпюра ***dw=Ads=pAd<p*** представляет трапецию, а при ***ds=pd(p*** деформации e=Adj/di= =A d<p/d<p=const. Постоянными будут и напряжения по высоте сечения: c7=£e=const. Так как напряжения ***a*** должны приводиться к силе ***N,*** то

$$a=\frac{N}{A} \qquad (6.60)$$

Эта формула совпадает с той, что мы имели для прямых стержней.

Чистый изгиб. На рис. 6.29 показан элемент кривого стержня, испытывающий изгиб в плоскости естественной кривизны моментами M_x. Положение нейтрального слоя фиксируем радиусом г, а его расстояние от центра тяжести обозначим y_0 (как увидим, это смещение направлено всегда к центру кривизны).

Согласно гипотезе плоских сечений, выражения для перемещений dw=Adi и относительных деформаций от поворота сечения на угол Ad<p будут

$$\text{Ads}=y\text{Ad}<p;\ e=\frac{\text{Adi}}{\text{ds}\ pdq>\ dcp\ r+y}=\frac{\text{Ad}*\ y}{}. \qquad (6.61)$$

Как видим, при линейном законе для абсолютных деформаций Adi получили изменение относительных деформаций е по высоте сечения по закону гиперболы, имеющей асимптоту на уровне центра кривизны (см. рис. 6.29). Соответственно напряжения получим в виде

$$o=eE=E\ —\ —.\ \underset{d<p\ r+y}{} \qquad (6.62)$$

Статические условия $N—\$ <rdA = 0$ и $J\ (a\&A)y=M_x$ дают два равенства:

$$\int_A \frac{—<L4}{\Gamma+y} = 0;\ E—\ [\ —\ \&\int_A \frac{A=M_X.}{dtp\ r+y} \qquad (6.63)$$

Первое из них используем далее для определения радиуса кривизны нейтрального слоя г. Из второго найдем отношение А $d(p/dq>$. Для этого преобразуем интеграл:

$$\int_{\Lambda} \frac{jL_{iA}}{r+y} = \int_A \frac{yt'Z-.Z'U.}{r+y}\ [yiA-r\int_A JLdA = \int_A \frac{S,=Ay*}{r+y} \qquad (664)$$

Здесь учтено, что, согласно (6.63), интеграл, стоящий со знаком минус, равен нулю, а первый интеграл представ-

ляет обычный статический момент площади сечения относительно оси ***х.*** Подставляя (6.64) во второе равенство (6.63), найдем

$$\text{Д}\,\partial<p\ M_x \qquad \text{й(р}\ E8_X \tag{6.65}$$

и с учетом (6.62) окончательно получим формулу для ***а*** в сечении кривого бруса:

Формула нормальных напряжений при чистом изгибе кривого бруса

$$a=-\frac{м_x}{(г+у)\ \$xP}\qquad \frac{M_x y}{} \tag{6.66}$$

Вид эпюры сг изображен на рис. 6.29. Заметим, что из (6.64) следует, что >>о>0 и нейтральный слой всегда смещается от центра тяжести к центру кривизны, т. е. в сторону более коротких продольных волокон, где возникают наибольшие нормальные напряжения.

Определение положения нейтрального слоя. Преобразуем первое равенство (6.63):

$$\int \frac{}{Г+У}=\int\left[\frac{}{Г+У}=0.\right.$$

$$\text{J}\,\frac{}{Г+У}\ \text{л}\,\frac{}{Г+У}\qquad \text{J}\,\frac{}{г+У}$$

Отсюда найдем радиус кривизны нейтрального слоя:

Формула радиуса кривизны нейтрального слоя

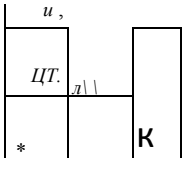
$$Г=\frac{\int_A \frac{dA}{г+у}}{\int_A \frac{dA}{(г+у)P}} \tag{6.67}$$

Например, для сечения прямоугольной формы ***А = ЬIг,*** с***А=Ьйр,***

$$\int_A \frac{p}{} \qquad \int_X \frac{p}{} \qquad *\text{I}$$

и по формуле (6.67) найдем

$$г=\frac{}{\text{1п (Яг/Л,)}} \tag{6.68}$$



Смещение нейтральной оси от центра тяжести получим как разность: $y_0 = Я\text{-}г=0{,}5\ (K_1 + Я_2)\text{-}г.$ Так как значения Лиг обычно очень близки между собой, то при определении y_0 радиус г по (6.68) надо определять с повышенной точностью.

Удобно пользоваться приближенной формулой, дающей непосредственно значение y_0. Для ее получения запишем (6.64) в виде

$$Я_x = A y_0 = \Gamma — <Ы = - \frac{\$ y^2 й A щ, = -1_x щ,,}{Л г + у \ г \ _л \ ,m} \qquad (6.69)$$

где

$$Л_{пр} = \int_A y^2 й Л щ_1 = 1 \int_A y^2 г 1 < 1 А \qquad (6.70)$$

представляет момент инерции приведенного сечения кривого стержня, а переменный по высоте сечения коэффициент T}

$$\frac{г\ г \qquad 1}{р\ г + у\ 1 + у/г} \qquad (6.71)$$

служит коэффициентом приведения этого сечения. Он равен отношению длины волокна ($Ь_0$=гс$1(р$ к длине произвольного волокна $\&=рй<р,$ т. е. $г]=<!Ьй/<Ь=г/р.$ Каждое волокно ¿у на уровне $р = г+у$ с площадью сечения <1^4 с помощью коэффициента мы как бы заменяем волокном, имеющим постоянную длину ($к_0$, но приведенную площадь $\&A_{пр}=г1б А.$ Коэффициент $г$\ «приводит» все волокна переменной длины (15 к длине волокна нейтрального слоя сЬо- Подставляя (6.69) в (6.66), вместо & запишем формулу для напряжений в виде

$$0=4 \quad \frac{м_x}{'Лф} \qquad (6.72)$$

Здесь вместо обозначения $n_{,}$ примененного в формуле (6.57) для коэффициента приведения, использовано обозначение $11,$ поскольку природа «разнородности» различна: коэффициенты л, приводят материалы по модулю упругости, $гг$\ — по длине волокон.

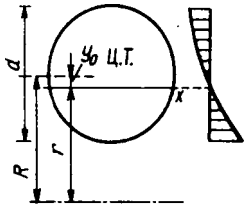
Вернемся к определению смещения _$у_0$, которое найдем из (6.69):

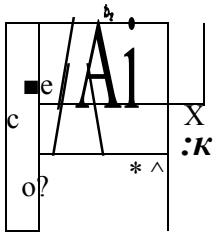
$$\frac{Лпр}{.} \qquad (6.73)$$

Это выражение для y_0 является точным. Приближенное значение получим, если в (6.73) заменим и г «Л,

J

Пр ■блаженная формула для смещения нейтрального слоя от Ц.Т. сечения





тогда

»-£•

Так, для прямоугольного сечения /„ = М³/12, ***A=bh*** и

$$Уй=\frac{}{12R}. \qquad (6.75)$$

Аналогичные вычисления по формулам (6.67) и (6.74) дают для круга

8 *(R-JR³ -Q&d¹)*

и для сечения в виде трапеции

$$r=-\frac{(bi+bjjh^2}{2[(M_2-Mi)\ln (*_2jR_l)-(b_l-b_2)h]} \qquad Уо\cdot\ \frac{b\text{^}Abjbj+bl\ \ h^2}{18\ (A,-Ь*2)^a\ Я}$$

Праир 6.7. Сравним значение максимальных напряжений *а,* вызванных моментом *М* ■ кривом и прямом брусьях, имеющих одинаковые прямоугольные поперечные сечения *bxh* (рис. 630).

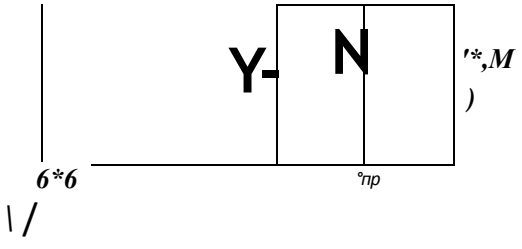


Рис. 6.30. К примеру 6.7

Решение. Для крайних точек в прямом брусе получим

$$a,*\sim \frac{M\_Ш}{УУ,Гьн^2}$$

В кривом брусе наибольшие напряжения возникают в точках с наименьшим радиусом *р—Я*\. По. формулам (6.66) и (6.75) найдем

М (0,5А —>о) *6М6т—*\

⁴ˡ*АуоЯ*\ *Ьк*¹ *6т—*3*

где ж—Л/А. Разница между этими результатами будет

Д. ®*р *&ир__* ²

Kai видим, она зависит от отношения *m—R/h* и убывает при *R-юо,* когда кривой брус превращается в прямой. Так, для *R/h* — 1; 2; 3; 4; 5; 10 значения Д соответственно будут А-40; 18,2; 11,8; 6,9; 3,4%. В связи с этим различают брусья *большой* и *малой кривизны.*

При 0<(Л)И)<5...8 кривые стержни относят к брусьям большой кривизны, которые надо обязательно рассчитывать по формулам для кривого, бруса. При 5...8<(Я/К)<со стержни называют брусьями малой кривизны, в которых практически нормальные напряжения можно определять как в прямых брусьях.

Брусья большой ■ малой кривизны

Иэгвб из плоскости кривизны. Пусть на сечение кривого стержня действует момент M_y, изгибающий брус из

плоскости естественной кривизны (рис. 6.31). Для получения формулы *а* наиболее удобно применить понятие приведенного сечения. Тогда по аналогии с (6.72) получим выражение для *о* в виде

dx

ЦТ

$$a=ц\ \frac{My}{Ч>}\ x, \qquad (6.76)$$

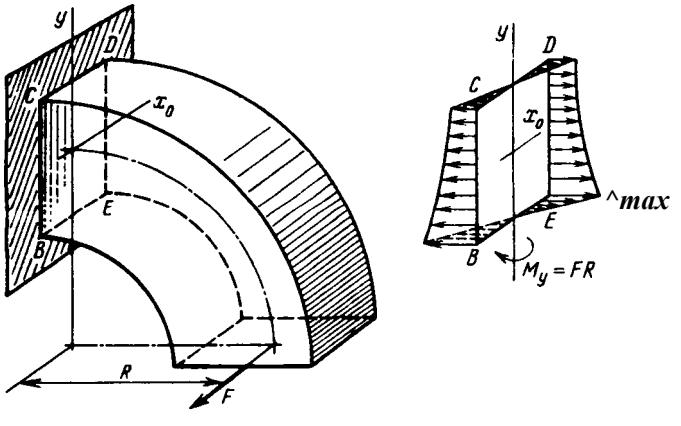
где аналогично (6.70) имеем

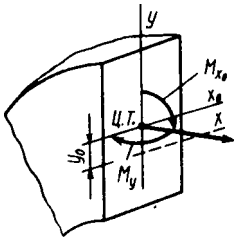
$$J,\ ^=^x^2йAщ,-1x^2г1йA, \qquad (6.77)$$

а *rj* определяется по (6.71). Для прямоугольного сечения <L4=dxd/> и

(6.78)

Вид эпюры *а* в соответствии с формулой (6.76) изображен на рис. 6.31. Здесь вновь более короткие волокна, ближайшие к центру кривизны *(m]>* 1), оказываются более напряженными.





В общем случае нагружения, когда в сечении кривого бруса ***ЫФ.***О, и ***М,Ф0,*** суммируя выражения (6.60), (6.72) и (6.76), получим

$$N\ (M_y \backslash \quad (6.79)$$

Подчеркнем, что при пользовании формулой (6.79) сила ***Н,*** как и в (6.60), считается приложенной в центре тяжести сечения. Поэтому моменты вычисляются относительно осей x_0 и ***у.***

Вопросы для самоконтроля к главе б

6.1. Что дает использование гипотезы плоских сечений и гипотезы о яиидднтамшш волокон при выводе формулы нормальных напряжений при изгибе? Поясните модель стержня, отвечающую этим гипотезам.

6.2. Что такое главные центральные оси сечения н главные плоскости изгиба?

63. Чем различается изгиб в главной и неглавной плоскостях?

6.4. Какая геометрическая характеристика сечения определяет прочность по нормальным напряжениям при изгибе?

6.5. Как находится опасная точка в сечении при плоском изгибе, косом изгибе и в общем случае?

6.6. Какая форма сечения балки является рациональной и почему? Что такое балка равного сопротивления?

6.7. Каким свойством обладают точки, принадлежащие ядру сечения, и как оно строится?

6.8. Что такое пластический шарнир и пластический механизм для балки?

6.9. Какие характерные стадии работы проходит балка из пластичного материала при возрастании нагрузки от нуля до предельного значения?

6.10. Как в СНиПе учитываются допускаемые ограниченные пластические деформации при расчете балок на прочность?

6.11. Как создаются остаточные напряжения и как они вычисляются в сечении балки из упругопластического материала?

6.12. В чем заключается понятие приведенного сечения в расчетах стержней, состоящих из разнородных материалов? Как вычисляются его геометрические характеристики?

6.13. Чем объяснить наличие разрывов в эпюре нормальных напряжений в неоднородных стержнях?

6.14. Почему эпюра нормальных напряжений при изгибе кривого стержня нелинейна по высоте сечения? Где расположены точки с наибольшими нормальными напряжениями?

6.15. Что такое брусья большой и малой кривизны?

Задачи к главе б

6.1. Вычислить момент сопротивления се- 6.2. Определить параметр 5 расчетной на-
чения двутавровой балки № 30, усиленной ли- грузки на балку, если Лаг-120 МПа,
стом 200 х 20 мм, и найти наибольшее напря- а $Я_р$=40 МПа.
жение (Тт.,-

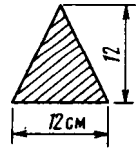
200*20ш
Л___

VI 1

¡а | *а* . |а-*2*

*N*30*

Рис. к задаче 6.1



"1

Рис. к задаче 6.2

63. Подобрать размеры прямоугольного сечения деревянного бруса из условия прочности по нормальным напряжениям, если Л=15 МПа.

6.4. Проверить прочность балки треугольного сечения. Построить эпюру а, определив положение нулевой линии в опасном сечении; Д=20 МПа.

9-г#кН/м

I-1 м

Рис. к задаче 6.3

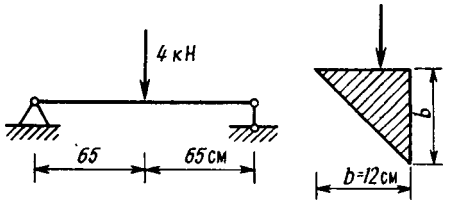


Рис. к задаче 6.4

6.5. Вычислить наибольшие сжимающие и растягивающие напряжения в поперечном сечении колонны.

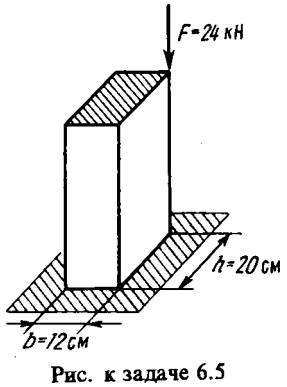


Рис. к задаче 6.5

6.6. Полоса прямоугольного сечения Л=46 центрально растягивается силой 7\ Делается продольный вырез шириною *Ь:* 1) с одной стороны; 2) симметрично с двух сторон от оси полосы. Какой случай опаснее (по значению нормальных напряжений)? Вычислить отношение 0·]цих/^2ти*

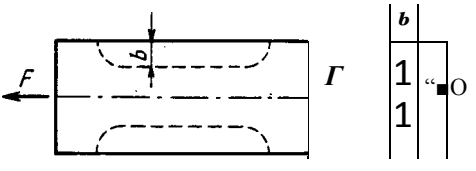


Рис. к задаче 6.6

6.7. Какой предельной высоты *Н* можно сделать длинную плотину, чтобы в горизонтальном сечении кладки не появились растягивающие напряжения? Вес единицы объема кладки — у; воды — уо- Указание: в направлении, перпендикулярном чертежу, рассмотреть участок плотины длиной 1 м.

6.8. Вычислить предельную нагрузку Фпрсд для стальной балки таврового сечения, если <$т_х$=240 МПа. Найти *Р=Чщс Jq^,* где $д_т$ — нагрузка, вызывающая появление текучести (справедлива диаграмма Прандтля).

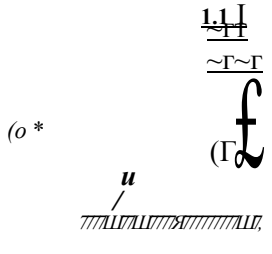


Рис. к задаче 6.7

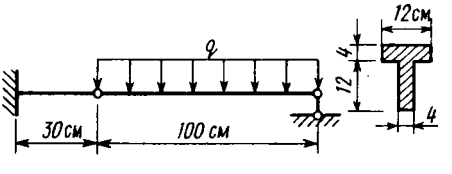


Рис. к задаче 6.8

6.9. Биметаллическая пара в виде стержня изгибается при воздействии силы К Вычислить напряжения <$7_{1тжх}$ и <Т2тк. если $E_1=2E_1$.

6.10. Тонкостенная труба плоского змеевика теплообменного аппарата сжата силой *Р=* 1 кН. Вычислить наибольшие по абсолютному значению нормальные напряжения по формулам кривого и прямого бруса *в**,,,* оценить погрешность последних. Указание: для определения *уо* воспользоваться формулой

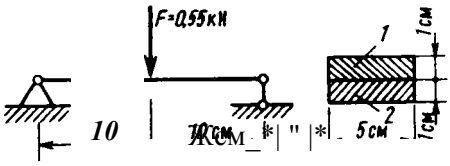


Рис. к задаче 6.9

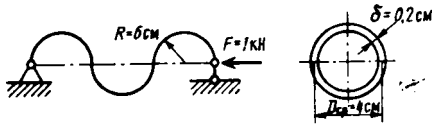


Рис. к задаче 6.10

Ответы к задачам главы 6

6.1. 562 см^5; «Тщ«-177,5 МПа. 6.2. /'р«*—5,76 кН (по растяжению в сечении няд опорой). 63. ¿-10 см, А —20 см. 6.4. - ±24А/$_т$«/А^3 = ±18 МПа<Л = 20 МПа, нулевая линия совпадает с медианой, проходящей через вершину Л. 6.5. <х^$_{ио|}$-1Р/(ЛА)=2 МПа; ^"-7^/(АА)--7 МПа. 6.6. Опаснее случай 7; <Г|$_т$../<г$_{,,,,,,}$-4/3. 6.7. *Н^^Ьу/у/уо.*

^ared-бИ жН/м; />-1,765. 6.9. *$_{1т}$,«-7 МПа; ^$_{,,}$-10 МПа. 6.10. (Т^-46,2 МПа; <т^, = 27,9 МПа, погрешность Д-39,6'/».

ИЗГИБ. КАСАТЕЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ И РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ ПО УСИЛИЯМ СДВИГА

§ 7.1. Касательные напряжения при изгибе

В общем случае в поперечных сечениях балки при плоском поперечном изгибе возникают два силовых фактора: изгибающий момент M_x и поперечная сила 0_{-y}.

Первый реализуется в поперечном сечении системой нормальных напряжений

$$\sigma = \frac{}{J_x} y$$

Поперечная сила $0_{„}$ вектор которой лежит в плоскости поперечного сечения, вызывает в точках сечения касательные напряжения m_{1y}. По закону о парности касательных напряжений (см. § 5.1) на продольных площадках возникают равные им напряжения

$$Тр — Тц = Т.$$

Напряжения m_{zy} возникают вследствие деформации среза

поперек продольных волокон балки, в то время как напряжения $г_{„}$ порождены деформацией сдвига продольных

волокон вдоль балки. Благодаря напряжениям т, возникающим на продольных и поперечных площадках, балка работает на изгиб не как отдельные продольные волокна, а как сплошное монолитное тело.

Действительно, сопоставим работу сплошной балки (рис. 7.1, *а*) и балки, разрезанной рядом горизонтальных сечений на отдельные слои (рис. 7.1, *г*). В последней наблюдаются проскальзывания по плоскостям разрезов, и если пренебречь силами трения, то каждый слой будет изгибаться как самостоятельная балка, а эпюра напряжений *а* по высоте сечения будет иметь разрывы. В сплошной балке (рис. 7.1, а, б) по продольному сечению возникают усилия сдвига, интенсивность которых обозначим Г (усилие, приходящееся на единицу длины, Н/м). Благодаря взаимодействию с усилиями *Т* устраняются относительные проскальзывания частей балки, соприкасающихся по продольному сечению, и балка работает на изгиб как сплошное монолитное тело, а эпюра *а* изменя-

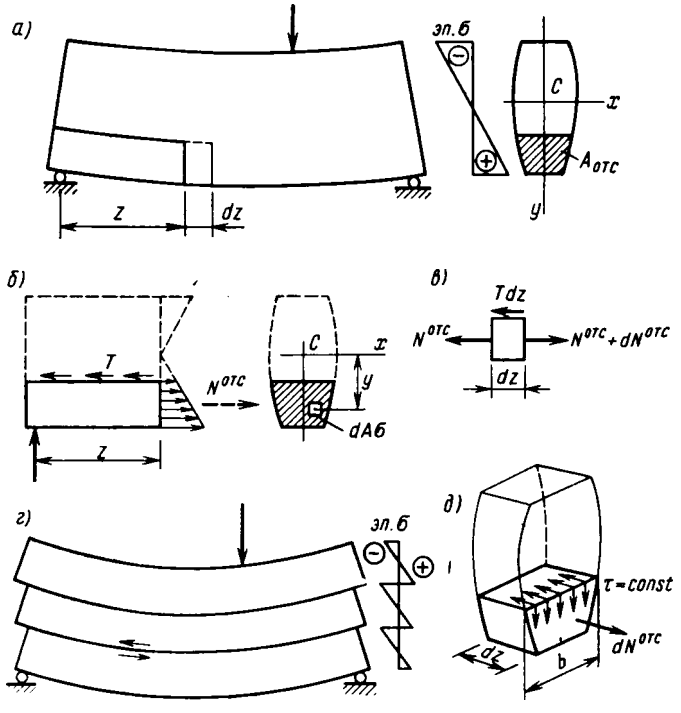


Рис. 7.1. В монолитной балке (а, б) между горизонтальными слоями возникают усилия сдвига *T* (г), устраняющие взаимное скольжение слоев (г). Касательные напряжения принимаются постоянными на ширине сечения ***(д)***

ется по высоте сечения без скачков в соответствии с приведенной выше формулой (7.1).

Усилия сдвига ***Т*** и соответствующие им напряжения т найдем из условия равновесия отсеченной части балки, показанной на рис. 7.1, ***б.*** На этом рисунке равнодействующая усилий ***Т*** уравновешивает продольную силу действующую на площади поперечного сечения отсеченной части стержня. Считая справедливой формулу для ***а*** (7.1), найдем

$$\text{ЛГ} = / \textit{стйА} = \frac{\textit{Ы}}{\textit{у0А}} = \text{^-}. \qquad \text{1Ж С»«} \qquad (7.2)$$

Лоте ^X ^отс ^X

где ***Я*** ”с — статический момент относительно оси ***х*** отсеченной части сечения.

Интенсивность сил ***Т= Т (¿)*** переменна по длине ***г.*** Поэтому рассмотрим равновесие элемента балки длиной ***йг*** с площадью поперечного сечения $A_{„_e}$ ***(рис.*** 7.1, ***в),*** для которого, проецируя все силы на ось г, получим равенство

$$№^{n}\text{-}(№^{n:}\text{+}й1\text{^}^{n}) + ТЛг = 0.$$

Отсюда найдем

$$\Gamma = \frac{\leq 1 Л Г}{Ax}$$

Сделаем допущение о том, что ***касательные напряжения x по ширине сечения Ь распределены равномерно*** (рис. 7.1, ***д),*** после чего из равенства ***Т&2=хЬ&г*** найдем

$$\_m\_ \text{1 аУ"*} \qquad (7.4)$$

Ь Ь Ax

Допущение о постоянстве ***x*** по ширине сечения

Здесь ограничимся рассмотрением балок ***постоянного сечения,*** для которых в формуле (7.2) $8^{тм}$ и 1_X не зависят от координаты *г* и при подстановке в формулу (7.3) могут рассматриваться как постоянные. Учитывая, что $\&M_x/<1я=(\}_{ЛП}$ после указанной подстановки получим окончательную формулу для касательных напряжений при изгибе

$$ш_x \geqslant \frac{}{йх \quad и, \quad Ы, '} \qquad (7.5)$$

Формула Журавского
Проф. Д. И. Журавский (1824—1891) — выдающийся инженер путей сообщения России, строитель мостов Петербургско-Московской ж.д.

а интенсивность сдвигающих усилий ***Т*** (погонная сдвигающая сила) определяется равенством

$$Т=хЬ\text{--}\,.ОуК \qquad (7.6)$$

Л

Формула погонном сдвигающей силы в продольном сечении балки

Формула (7.5) была получена в 1855 г. выдающимся русским инженером-мостовиком проф. Д. И. Журавским в ходе разработки методов расчета деревянных раскосных ферм при проектировании и строительстве Петербургско-Московской железной дороги.

§ 7.2. Распределение касательных напряжений в сечениях балок различной формы

Прямоугольное сечение. Найдем напряжение т, для чего проведем горизонтальный разрез на уровне ***у*** (рис. 7.2, ***а).*** При этом любая часть сечения может рассматриваться как отсеченная. Для нижней части значение можно определить как произведение отсеченной площади $A_m=Ь$ (0,5***И—у)*** на расстояние от оси ***x*** до ее центра тяжести, равное среднему значению между ***у*** и 0,5А, т. е. (0,5А-у) (0,5Л+_у)/2=6 (0,25$Л^2$—р)/2. При $/_x$=

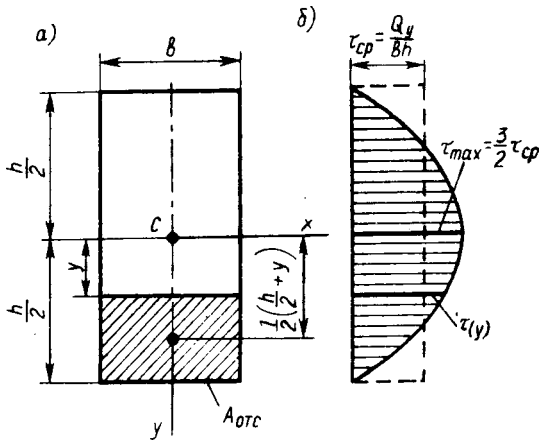
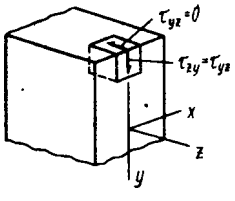


Рис. *12.* Распределение касательных напряжений в прямоугольном сечении балки



где $т_ф$ = б^(6А) — среднее напряжение в сечении. Эпюра т по этой формуле построена на рис. 7.2, б. Наибольшее ,0 касательное напряжение возникает на уровне нейтрального слоя (у=0) и равно $т_{т1х}$=1,5$т_С$р. В крайних точках сечения *(у*= ± А/2) т=**0**, поскольку ■$£"=0. Это согласуется с законом парности касательных напряжений, так как на поверхности бруса т„=**0**.

Толстостенный двутавр. Для изображенного на рис. 7.3, ***а*** сечения при составлении выражения 5'£^{1C} следует рассмотреть два случая: 1) 0,5Л<.у<0,5Я; 2) 0<.у<0,5й. В первом случае по аналогии с прямоугольным сечением получим ***5%^e^=B*** (0,25Я^2— ***у^2)*** и во втором — ***5^{TM}=***

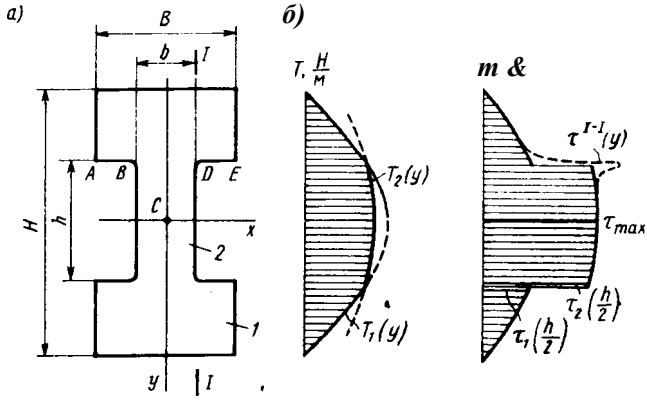


Рис. 7.3. Изменение погонного сдвигающего усилия *Т* и напряжений т по высоте толстостенного двутавра при изгибе

=0,255 (Я²—***И²)+Ь*** (0,25А²— ***у²),*** после чего выражения (7.6) для погонной сдвигающей силы примут вид

$$T_1=\frac{Q_y}{J_x}B\left(\frac{H^2}{4}-y^2\right); \qquad \frac{h}{2}\leqslant y\leqslant\frac{H}{2};$$

$$T_2=\frac{Q_y}{J_x}\left[\frac{B}{4}(H^2-y^2)+b\left(\frac{h^2}{4}-y^2\right)\right]; \quad 0\leqslant y\leqslant\frac{h}{2}.$$

Касательные напряжения соответственно будут *X1 = T_x I B* $т_2$ =* 7У6. Эпюры ***Т*** *(у)* и т *(у)* показаны на рис. 7.3, ***б, в.*** Скачок в эпюре т при ***у***=±А/2 объясняется тем, что сдвигающая сила на этом уровне ***Т*** (А/2) (не имеющая разрыва) в соответствии с допущением о равномерном распределении т по ширине сечения формально делится на ширину ***В*** и ***Ь<В.*** Таким образом, на эпюре т изображены средние по ширине сечения значения напряжений, которые в месте резкого изменения ширины сечения могут сильно отличаться от действительных. В месте перехода от ширины сечения ***Ь*** к ширине ***В*** они имеют условное значение. Например, на участках ***АВ*** и ***БЕ*** действительные напряжения т=0, так как они являются участками поверхности балки, свободными от касательной нагрузки. Истинные напряжения т на среднем участке ***ВИ*** найти можно только с помощью более сложных методов теории упругости. Например, для вертикали, проведенной через точки ***В*** или ***Б*** поперечного сечения балки, эпюра т будет иметь вид, показанный на рис. 7.2, ***в*** пунктиром в верхней части сечения. С удалением от места резкого изменения ширины сечения действительные напряжения и средние по ширине, полученные по формуле (7.5), практически совпадают.

Тонкостенное сечение. В качестве примера рассмотрим сечение балки в виде тонкостенного швеллера (рис. 7.4). Эпюра вертикальных касательных напряжений $т=т_x$, здесь строится аналогично сечению в виде толстостенного двутавра. Напряжения m_{1y} в пределах толщины полок на эпюре не показаны ввиду их условного значения, о чем сказано выше.

Особенностью данного сечения является то, что в полках возникают горизонтальные касательные напряжения

Действительно, если отсечь часть полки с площадью ***Am,*** то нормальные напряжения дадут неуравновешенную силу ***&№™,*** подобную той, которая фигурировала при выводе формулы (7.5) (см. рис. 7.1, ***д).*** Поэтому эта формула справедлива и в данном случае; напряжения т,, в полке будут

$$\tau_{zx}=\frac{Q_y S_x^{отс}}{J_x\delta},$$

где ***8*** — толщина полки. Вдоль размера ***5*** напряжения

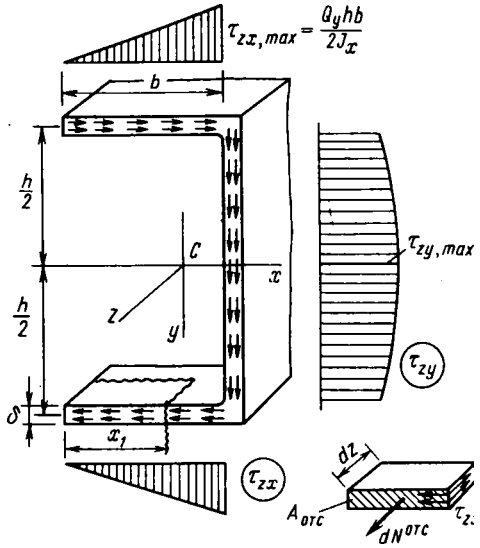


Рис. 7.4. Касательные напряжения в тонкостенном швеллере при изгибе

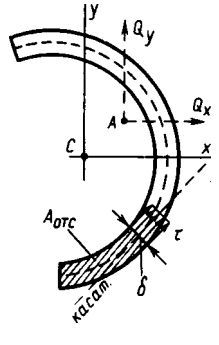


Рис. 7.5. Касательные напряжения при изгибе тонкостенного стержня открытого профиля

т,, распределены равномерно; ***$%^{ze}=Л_m$ (к/2)=$x_1$5*** (А/2).

По ширине полки касательные напряжения изменяются по линейному закону с наибольшей ординатой (т,,)ш«=б,Л*/(2Л).

Обобщая изложенное на случай тонкостенного сечения с произвольным незамкнутым криволинейным профилем, можем констатировать, что при изгибе от поперечной силы ***0,$_y$*** в сечении возникают касательные напряжения т, равномерно распределенные по толщине стенки ***8*** и ориентированные по касательной к очертанию контура сечения (рис. 7.5). Определяются они по формуле

Ф о р м у л а Д. И. Журавского для тонкостенного незамкнутого сечения

$$\sim 5\sim 1_X Ь \qquad (7.7)$$

В случае изгиба в двух плоскостях, когда ***0,$_y$ФО***

и Q_x*0, напряжения т получаются как алгебраическая сумма:

$$т=\frac{0{,}5\text{”}\ 0.5\text{"}®}{1_X 8\ 1{,}8} \qquad (7.8)$$

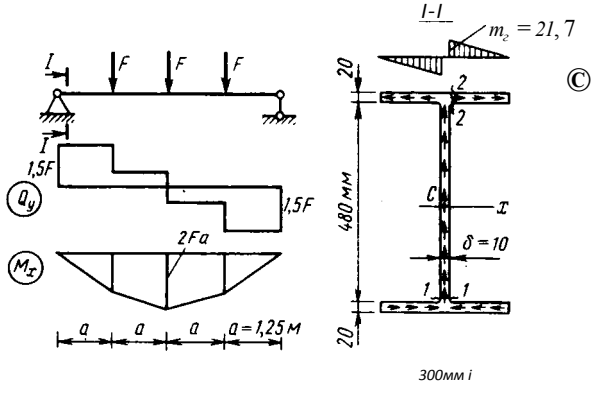
Условие прочности на срез. Из рассмотренного выше видно, что во многих случаях максЬмальные касательные напряжения в поперечном сечении возникают на уровне нейтрального слоя балки, т. е. в точках, где нормальные напряжения от изгибающего момента равны нулю. В таких случаях проверка прочности на сдвиг может быть проведена отдельно по касательным напряжениям по формуле

$$?тш\frac{МГ<я}{■'ж*}$$

где Др — расчетное сопротивление материала балки на срез.

Заметим, что в некоторых случаях могут оказаться опасными такие точки сечения, в которых возникают нормальные и касательные напряжения, каждое из которых не является наибольшим в сечении. Проверка прочности в таких случаях производится с использованием соответствующей теории прочности (см. гл. 14).

Прамер 7.1. Для стальной балки с сечением в виде широкополочного двутавра определить расчетную силу $/'_{р)ил}$, исходя из условия прочности по нормальным напряжениям, если расчетное сопротивление по пределу текучести Л=250 МПа (рис. 7.6). Вычислить наибольшие касательные напряжения в поперечном сечении $т_{...}$ и для этого сечения построить эпюру т. Проверить прочность по касательным натяжениям, если расчетное сопротивление на сдвиг ^=0,58^=145 МПа.



©

$г_с$=ЮЗМЛа

Рис. 7.6. К примеру 7.1. Касательные напряжения в тонкостенном двутавре

Решение. Пренебрегая моментом инерции относительно собственных центральных осей полос, вычислим момент инерции и момент сопротивления сечения:

$$J_x = 2 \cdot 60 \cdot 25^3 + \frac{1 \cdot 48^3}{12} = 84\,200 \text{ см}^4 = 0{,}842 \cdot 10^{-3} \text{ м}^4;$$

$$W_x = \frac{84\,200}{26} = 3240 \text{ см}^3 = 0{,}324 \cdot 10^{-2} \text{ м}^3.$$

Условие прочности по нормальным напряжениям для крайних точек среднего сечения балки дает

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_x} = \frac{2P \cdot 1.25}{0{,}324 \cdot 10^{-2}} \leq [\sigma] = 250 \cdot 10^6.$$

Отсюда найдем $P \leq 0{,}324 \cdot 10^6 \text{ Н} = 324 \text{ кН}$.

Напряжение $\tau_{т.}$ возникает в сечении у опоры, где $Q_{max} = 1{,}5 \cdot P_{шл} = 486$ кН. На уровне центра тяжести

$$S_x = 60 \cdot 25 \cdot 12{,}5 + 24 \cdot 12 \cdot 25 = 1790 \text{ см}^3; \quad \tau_c = \frac{Q_{max} S_x}{J_x b} =$$

$$= \frac{486 \cdot 10^3 \cdot 0{,}179 \cdot 10^{-1}}{0{,}842 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}01} = 103 \text{ МПа}.$$

На уровне разреза *1—1* имеем

$$S_x = 60 \cdot 25 = 1500 \text{ см}^3; \quad \tau_1 = \frac{486 \cdot 10^3 \cdot 0{,}150 \cdot 10^{-1}}{0{,}842 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}01} = 87 \text{ МПа}.$$

На уровне разреза *2—2*

$$S_x = 29 \cdot 25 = 725 \text{ см}^3; \quad \tau_2 = \frac{486 \cdot 10^3 \cdot 0{,}725 \cdot 10^{-3}}{0{,}842 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}02} = 21{,}7 \text{ МПа}.$$

Эпюра т изображена на ряс. 7.6. Условие прочности по касательным напряжениям выполняется, так как $\tau_{т.} = \tau_г = 103 \text{ МПа} < R_{ср} = 145$ МПа.

§ 7.3. Центр изгиба сечения

В общем случае изгиба стержня, когда *и* касательные напряжения в сечении, определяемые от каждой из поперечных сил по принципу независимости действия сил, суммируются геометрически и будут распределены в сечении по некоторому закону. В частном случае тонкостенного стержня (рис. 7.5) они суммируются алгебраически и определяются по формуле (7.8). Возникает вопрос: где располагается точка приложения внутренних сил Q_y и Q_z как компонент равнодействующей касательных сил в сечении (точка *А* на рис. 7.5)?

■ центр изгиба

Точка приложения равнодействующей касательных сил в поперечном сечении, возникающих при изгибе, называется центром изгиба сечения.

Для сечения, имеющего две оси симметрии, центр изгиба лежит на пересечении осей симметрии и совпадает с центром тяжести сечения. Однако в других случаях эти точки не совпадают, что создает некоторые особенности

работы на изгиб таких балок. Вопрос этот особенно актуален для тонкостенных сечений открытого (незамкнутого) профиля. Рассмотрим некоторые примеры таких сечений.

На рис. 7.7, ***а*** показан консольный стержень с сечением в виде равнобокого уголка, изгибаемый вертикальной силой ***P.*** Ось ***x*** — горизонтальная главная ось сечения — является осью симметрии. Опыт показывает, что такой стержень будет изгибаться строго в вертикальной плоскости только в том случае, если сила ***P*** проходит не через центр тяжести сечения С, а через ось ***А—А,*** которая является линией пересечения срединных плоскостей полок уголка (рис. 7.7, ***б).*** В противном случае кроме изгиба наблюдается деформация кручения стержня, характеризуемая появлением углов закручивания ***<p*** (рис. 7.7, ***в).*** Дадим этому объяснение.

При изгибе в каждой из полок система напряжений т, определяемых по формуле (7.7), образует касательные силы ***T,*** пересекающиеся в точке ***А.*** Эта точка и является центром приложения касательных сил в сечении, т. е. центром изгиба. Их равнодействующая ***0.$_y$=P*** сможет быть уравновешена внешней силой без кручения только при соблюдении указанного выше условия пересечения ею точки ***А.***

Если сила ***P*** проходит, например, через центр тяжести С, то парой сил ***P*** и ***<2$_y$=P*** создается крутящий момент ***M^Pe,*** вызывающий деформацию кручения и дополнительные касательные напряжения в сечении, уравновешивающие этот момент. Таким образом,

ось центров изгиба обладает тем свойством, что поперечная нагрузка, пересекающая эту ось, вызывает только изгиб стержня. В противном случае возникает дополнительная деформация кручения относительно этой оси.

Свойство ося центров изгиба

Деформация кручения тонкостенных стержней детально будет изучаться в гл. **11** и **12**, где приводятся общие

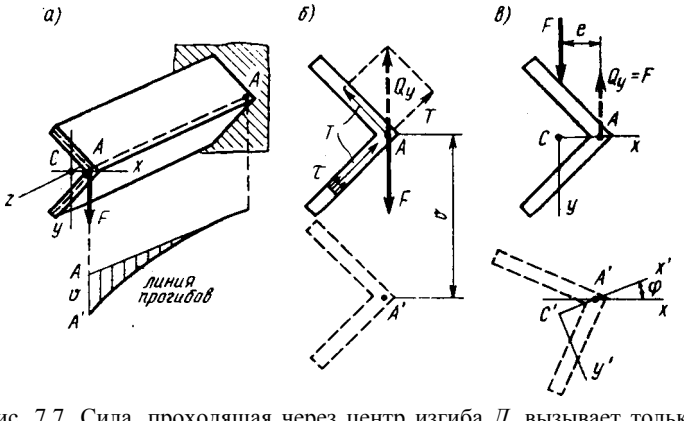


Рис. 7.7. Сила, проходящая через центр изгиба *Л,* вызывает только изгиб уголка (б). При наличии эксцентриситета *е* дополнительно появляется деформация кручения (в)

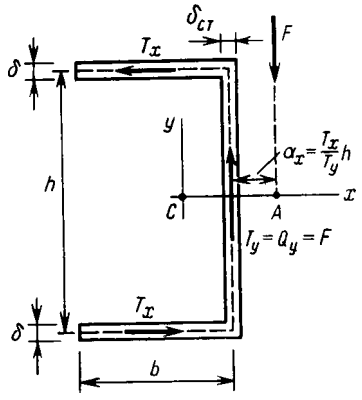


Рис. 7.8. Определение положения центра изгиба швеллера

способы, позволяющие определить положение центра кручения ***А,*** являющегося одновременно и центром изгиба сечения. Знание положения оси центров изгиба необходимо для предотвращения деформации кручения. Стержни открытого профиля относительно слабо сопротивляются кручению, и поэтому для них вопрос о положении центра изгиба особенно важен. Стержни сплошного или замкнутого сечения являются значительно более жесткими в отношении деформации кручения, и для них этот вопрос менее существен.

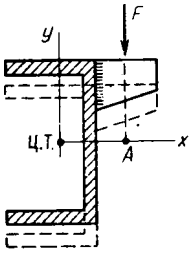
НаЁдем центр изгиба ***А*** для сечения в виде швеллера (рис. 7.8). В полках при изгибе в вертикальной плоскости возникают горизонтальные касательные напряжения с максимальной ординатой $(x_{1X})_{вш}=(2,11Ь1(u_x)$ (см. рис. 7.4). Соответствующие силы будут $T_X=(112)Ь8\ (x_{„})_{ты}=$ $= Qyhb^2 8|(4J_x).$ В сечении стенки сила $T_y=0,_г$ Из условия $Ътл = T_y a_x — T_x к = 0$ найдем

$$a,=\frac{T_x M>^2 5}{T_y\ 4/_x}=\frac{n}{}=\text{-------}.$$

Подставляя сюда значение $/_X=6Л^2$ ¿/2+$Л^3$ $<5_{ст}/12$, приведем выражение a_x к следующему виду:

$$\text{ЗА}$$

$$б + (у1стМ110л) \qquad (7.9)$$



где $А_{„}=к8_{„}$ и $А_{Ж!1}=Ь8$ — площади сечений стенки и полки.

Как видим, центр изгиба может находиться вне контура сечения и для устранения кручения при изгибе должны быть обеспечены конструктивно условия приложения внешней силы против точки ***А.***

Таким образом, наряду с основной осью г стержня, проходящей через центры тяжести сечений, стержень

обладает еще осью центров изгиба, к точкам которой должны приводиться поперечные нагрузки при разделении деформаций изгиба и кручения. Иногда эта ось называется осью жесткости, а сама точка А — центром жесткости (центром сдвига). жесткости

§ 7.4. Расчет на прочность составных стержней по усилиям сдвига

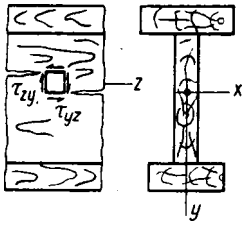
Клеевые соединения. Клеевое соединение составной б&лки (рис. 7.9) непосредственно воспринимает касательные напряжения т, определяемые по формуле (7.5). Поэтому, предполагая, что Т] > $т_2$, условие прочности запишем в виде

(т,,и=т /***х°*** (7.10)

где Л», — расчетное сопротивление клея на срез;

— статический момент площади полки относительно центральной оси ***х; 0,$_y$=0,$_{юа}$*** — наибольшая поперечная $р_{ешнте\ зад}$ 7 ^ сила в балке. 7.2

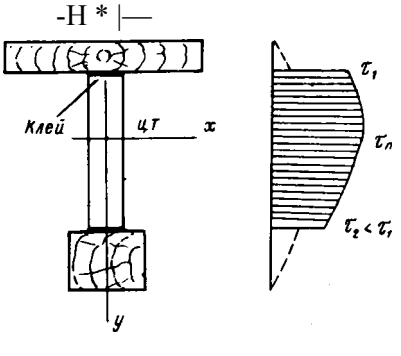
Кроме того, должна бьгть обеспечена прочность на срез основного материала по наибольшим касательным напряжениям, возникающим в большинстве случаев на уровне нейтрального слоя:



■***>х0*** (7.11)

где — расчетное сопротивление на сред материала балки.

В частности, для дерева прочность на скалывание вдоль волокон значительно ниже, чем прочность на срез поперек волокон. Поэтому, учитывая закон парности касательных напряжений =$т_г$,=т, условие (7.11) следует отнести к напряжениям ***$х_п$***. При нарушении условия (7.11)



в деревянной балке возможно появление трещин вдоль волокон древесины.

Сварные соединения. Сварные швы, соединяющие пояс балки с ее стенкой, воспринимают продольные сдвигающие усилия, интенсивность которых ***T*** определяется по формуле (7.6). Наименьшая площадь среза шва, отделяющего полку от стенки, проходит по биссектрисе прямого угла и у одного из швов имеет ширину /?Аш (рис. 7.10).

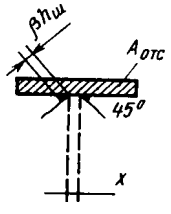


Рис. 7.10. К условию прочности сварного шва на срез

Сдвигающая сила ***T,*** отнесенная к единице длины шва, воспринимается двумя швами, условие прочности которых запишется в виде

Условие прочности на срез сварного шва ■ балке

$$C^{\wedge}щ)т»х \frac{T}{2/^{\wedge}\text{-}1\ 2/^{\wedge}У}, \qquad (7.12)$$

где /? — коэффициент формы углового шва, зависящий от вида сварки (ей. § 5.8). Для авто- и полуавтоматической многопроходной сварки ***р***—0,7; Ап,— высота катета шва; ***Л„,*** — расчетное сопротивление на срез материала шва.

Решите зад. 73

Из (7.12) может быть найдена требуемая высота шва:

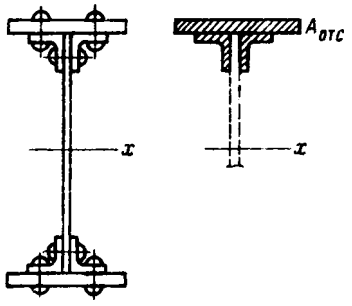
$$к' VI.». ' \qquad (1$$

Заклепочные н болтовые соединения. В клепаной балке (рис. 7.11) взаимное скольжение поясов и вертикальной стенки или горизонтального листа пояса и уголков устраняется за счет работы заклепок на срез и на смятие (см. § 5.8). Наибольшие усилия, действующие на заклепки, будут возникать в соединении пояса и вертикальной стенки. Погонное сдвигающее усилие ***T*** примем постоянным по длине шага расстановки заклепок ***а.*** Тогда силу, действующую на одну заклепку, получим как произведение ***Та,*** после чего составим условие прочности в виде

$$Л^{*}, = Та == \frac{Q\ 5^{2}}{Jx} \text{оге} \cdot a < \qquad (7.14)$$

где ***Б™*** — статический момент площади пояса относите-

а а а



7» '^у" и;

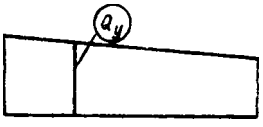


Рис. 7.11. Определение силы, действующей на заклепку ели болт составной балки

льно оси ***x; М**ж* — расчетная сила, которую способна воспринять заклепка (меньшая из двух сил, найденных, по условию среза и смятия).

Обычно в качестве расчетной принимают по эпюре поперечных сил бг=бтм и, найдя из (7.14) шаг

$$*шж', \qquad (7Л5)$$

сохраняют его постоянным по всей длине балки.

Расчет болтовых соединений производится аналогично заклепочным, только вместо усилия ***N1^*** в расчет принимается сала, воспринимаемая одним болтом ***N6*** (см. § 5.8).

Пршмр *УЛ.* Деревянная балка склеена я виде швеллера вз четырех досок с ~~по~~перечны~~м~~ оеченнем 2 х 18 см каждая (рве. *7.12)* Расчетное сопротивление деевесины на растяжение—сжатие Л—11 МПа, на срез вдоль волокон 1,5 МПа. Проверять балку на прочность древесины ж определить требуемую прочность клеевых соединений досок.

Решеяше. Обычным путем находим почожеяие пентря тяжести С, после чего вычисляем момент тмергмв /$_x$**42?2 си* я момент оопрота *ялевяя* Ж,—4272/13—330 ем[1]. Этеоры M_x *ж* 0_y шзобрржегм на рясуихс

Проверка по кормалыьш напряжениям в сечгяии *I—1* с нанболь шнм изгибающим моментом д ает

$$— \frac{3{,}3\ 10^1}{ж_x\ 330\text{-}10\text{-}*} 10\ МПа < Л«■\ 11\ МПа$$

Эпюру касательных напряжений стрдим в сече ап» *П—П,* где й,— кН. На уровве центра тяжести *С* для одной вертикальной полки швеллера стятнчесий момент отсеченной плошадв будет $2?—

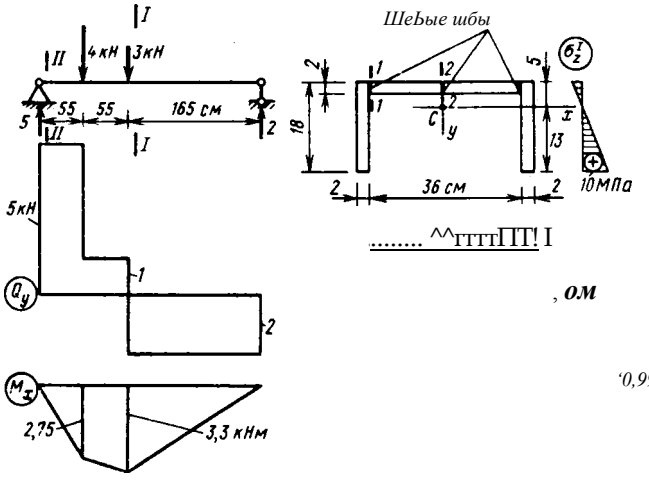


Рис. 7.12. К примеру 7.2. Расчет балки с клеевыми соединениями

= 13'2'6,5-169 см^9. Для места склейки полки и стенки (клеевой шов *1—1)* отсеченную площадь *А* У* составляет вся полка 2х 18—36 см^2 и5Г.....36.4—144*см^3.'По формуле (7.7) найдем

$$\text{*ти}^{\text{ш}}\text{*С} \quad \frac{5\ 10^{*}\ 169\text{-Ю}^{-*}}{J_X\text{Ь}\ 4272\text{-}10\text{-}^{*}\ 2} \quad 0{,}99\ \text{МПа} < \text{Лср-}1{,}5\ \text{МПа};$$

$$\text{ТГ} \quad \frac{\textit{Отлх \$}\ \text{`}\ 5\ 10^{*}\text{-}144\text{-}10^{\text{"}*}}{\textit{З}_X\text{Ь}\quad 4272\text{-}10\text{-}^{*}\text{-}2} = 0{,}85\ \text{МПа}.$$

В клеевом шве *2—2,* совпадающем с осью *у,* 5™—0, поскольку ось *х* является центральной осью площади Следовательно, т—0. Эпюре т показана на рве. 7.12. Условие прочности по скалыванию вдоль волокон выполняется, так сак т,п,,—0,99 МПа<Лср-1,5 МПа. Расчетное сопротивление на срез клеевого шва должно быть /$г_ы$>Т] — -0,85 МПа.

Пример 7.3. Заданную нагрузку воспринимают две рядом стоящие сварные балка (рве. 7.13, *а).* В целях увеличения жесткости балок (уменьшения прогибов) принято решение об объединении их в единое более высокое сечение путем соединения болтами (рис. 7.13, б). Определить, как изменится грузоподъемность балки, и найти тяг постановки болтов *а,* если для металла балок сопротивление /1—210 МПа; для сварного шва расчетное сопротивление на срез Лш—185 МПа; коэффициент формы шва /1—0,7; для болтов диаметр </—20 мм; сопротивление на срез Лер—160 МПа, на смятие 480 МПа.

Решение. Увеличение жесткости балки обязано возрастанию мо- См. понятие жесткости. инерции J_x для более высокого составного сечения по сравнению * – КИС 1 ■ ..... Д д со старым сечением, для которого 2/— 68 400 см^4, где /— .. (о 6.2)

—34 200 см* — момент инерции одного двутавра относительно оси лг<ь вычисляемый обычным путем. Следовательно,

И*, - -V*«* “ 68 400/20- 3420 см».

Момент инерции и момент сопротивления нового составного сечения будут (площадь сечения двутавра *А* —130 см^2)

172 000

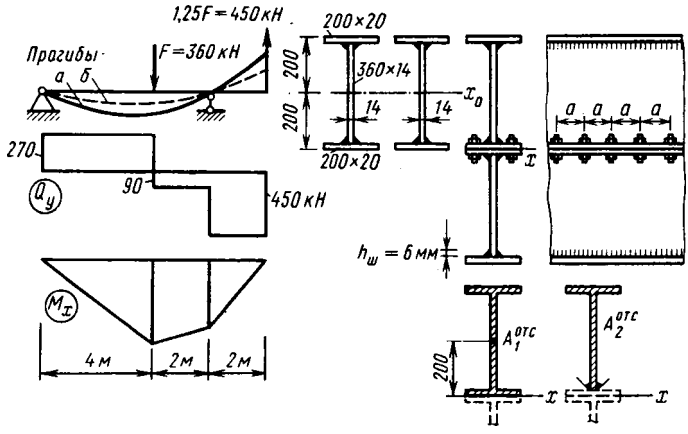


Рис. 7.13. К примеру 7.3. Расчет балки со сварными и болтовыми соединениями:
а — сечение до усиления; *б* — после усиления

Возрастание изгибной жесткости сечения и увеличение прочности по нормальным напряжениям составят отношения

$$\frac{172\,000}{68\,400} \approx 2{,}5; \quad \frac{J_x}{3420} \approx 1{,}25.$$

Соответственно грузоподъемность составной балки возрастает в 1,25 раза и будет равна 1,25 .Р—1,25'360 —450 кН. Перейдем к оценке прочности составного сечения по усилиям сдвига.

Наиболее нагруженными будут сварные швы и болты у центра тяжести составного сечения на участке балки, где Стм = 1Д5 /'с"1 —1,25-450 — 562,5 кН. Статический момент относительно оси *х* площади двутавра *А*™ и двутавра без нижней полки *А*" (рис. 7.13, *б)* будет 5^-130 20 = 2600 см³; £"-130-20-40; 1-2560 см*.

Соответственно погонная сдвигающая сила на уровне соприкасания двутавров Г] и на уровне сварных швов получат значения по формуле (7.6):

$$\frac{562{,}5\ 10^{*}\ 2600\ 10^{-*}}{172\,000\text{-}10''} > 855 \text{ кН/м}; \quad Г_2 \frac{2560}{2600} Г, = \text{Л -840 кН/м.}$$

Касательные напряжения в сварных швах по формуле (7.12) будут следующими:

$$т_ш = \frac{T_z\ 840\ 10^{*}}{2ДА.П\ 2\text{-}0{,}7\text{-}6\text{-}10\text{-}*} \text{ г-100 МПа} < Л_ш\text{-}185 \text{ МПа}.$$

Условие прочности удовлетворяется. Попутно проверим прочность основного металла на срез при расчетном сопротивлении ^—0,58^ = =0,58 210 — 121,5 МПа. По (7.7) найдем

$$\frac{T_z\ 840\ 10^{*}}{10\text{-}3}\text{-60 МПа} < Л,^{*}\text{-}121{,}5 \text{ МПа}.$$

Наконец, определим требуемый шаг расстановки болтов. Расчетная сила, которую может воспринять один болт по срезу, $ср = A_{ср} Я_{ср}$ = =М²/4)$Л_{ср}$=47 кН. То же по смятию: см-<#пЛс*, где $<5_П$ — толщина листа пояса двутавра, в данном случае ¿V® 2'2‘ 10"* х

х 480-10‘-»192 кН. Расчетной для болта является меньшая сила („—47 кН. Учитывая, что по ~~ширине~~ пояса располагается два болта, по формуле (7.15) находим максимально возможный шаг:

$$\text{отп.т} — \blacksquare \quad \Gamma \text{”}0{,}11 \text{ м.}$$

Следовательно, д<11 см. Можно принять л-10 см.

§ 7.5. Усилия сдвига и касательные напряжения в балках из неоднородных материалов

Рассмотрим трехслойную балку прямоугольного сечения, у которой модуль упругости внешних слоев E^, а. среднего слоя E_u причем будем считать, что $E_2=nE_1$ и $n>1$ (рис. 7.14, *а).* Нормальные напряжения в такой балке определяются по формуле

См. § 6.9

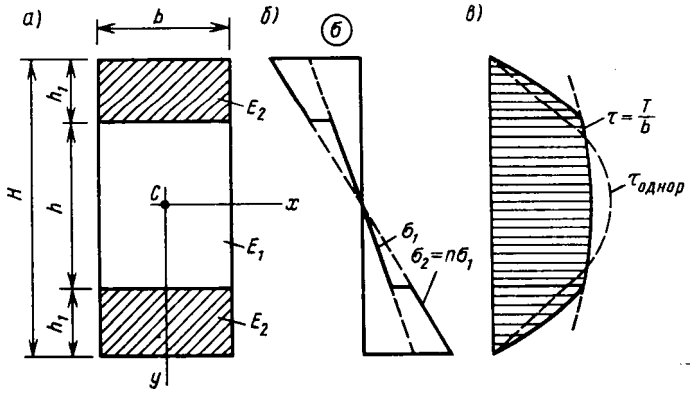
$$<\Gamma 1=n_{/\text{шр}}\text{^-}y \quad (1=1,2),$$

где л, — коэффициент приведения материала балки к материалу с модулем E\. $щ=E1/E_{f}$ = *1;* $л_2=£2/211=л$; — момент инерции приведенного сечения, равный

$$'_{\text{хпр}} \qquad H\frac{Ьк^*}{12}'.$$

Он вычисляется как момент инерции отдельных частей составного сечения, но с умножением площади соответствующей части на коэффициент $n,$ (/= 1, 2).

Используя выражение для *а,* и следуя выкладкам, изложенным выше (см. § 7.1), получим формулы, в которые в качестве геометрических характеристик будут вхо-



дить характеристики приведенного сечения. Так, вместо (7.1) будем иметь

$$\text{ЛГ}''—7'^{*}_{/\text{яр}} \qquad (7.16)$$

где

$$\mathbf{J}\,yrii\&Ai \qquad (7.17)$$

^спе

— статический момент приведенной площади отсеченной части сечения.

Соответственно для погонной сдвигающей силы получим формулу

$$\text{г}=\frac{\text{d V}^{\text{я}*}}{\text{d}*}=^{-a}, \qquad (7.18)$$

а для касательных напряжений вместо (7.5) получим выражение

Сдвигающая сила и касательные напряжения в неоднородном балке

$$_{\text{т}=}\mathbf{1}_{=}\text{Мя}. \qquad (7.19)$$

А $\boldsymbol{bJ}_{\text{М}}\text{р}$

Приведенные формулы применимы для сечений произвольной формы. В частном случае симметричного прямоугольного сечения трехслойной балки (рис. 7.14, ***а)*** будем иметь выражения для $\boldsymbol{T_2}$ и $\boldsymbol{T}$\ в наружном и среднем слоях балки:

$$\text{Г}'=/\backslash\#\text{яГ}\_\,\text{‘}\,)+\,_{0}\text{H}\,]'\,{}^{\circ}{}^{\wedge}4$$

Напряжения т,= ***TJb*** (i= 1, 2). Эпюры ***а*** и т изображены на рис. 7.14, б, ***в.***

Обратим внимание на то, что по высоте сечения при переходе от одного материала к другому, если в напряжениях <т,=Я,E_1 наблюдается скачок, в эпюре Гит (при

См. § ***6S***

b—const) ***скачки отсутствуют.*** В местах соприкасания различных материалов в эпюрах Гит имеют место точки перелома (разрыв есть у производной от этих функций по координате ***у).*** Для сравнения на рис. 7.14, ***в*** пунктиром изображена эпюра т в однородной балке при прочих одинаковых условиях.

Примером использования приведенных формул может служить расчет приспособлений объединительного шва сталежелезобетонной балки (рте. 7.15). Так, если конструкцией, воспринимающей сдвигающие усилия в этом шве, служат уголковые упоры, то при шаге рас-

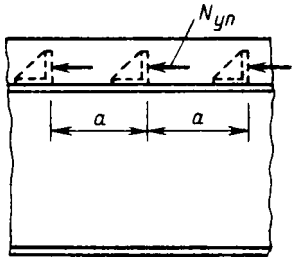


Рис. 7.15. Определение усилия, действующего на упор в сталежелезобетонной балке

Саля, действующая на упор сталежелезобетонной балки

становкн упоров ***а*** усилие на один упор получим в виде

$$\bullet'_{дгпр}\ \boldsymbol{a}. \qquad (7.20)$$

На это усилие и должны рассчитываться упоры (по смятию бетона и прикреплению к стальной балке).

Промер 7.4. Проверять прочность упоров в сталежелезобетонной балке, рассмотренной в примере б.б, если допускаемая расчетная сила на один упор Лрад,—100 кН и шаг а »40 см.

Решение. Максимальная поперечная сила у опоры

-27,5 (8/2) — 110 кН. Момент инерции площади сечения балки, приведенной к бетону, Лпр“0,694-10 м*. Приняв в качестве отсеченной

площадь плиты *А* “—0,12 • 1,2—0,144 м^2, получим £™—0,144-0,105 —0,0152 м^3. Если в качестве отсеченной принять площадь сечения двутавра *Л*™—84,7 см^1, то эту площадь надо умножить на коэффициент приведения я —10 и £ “ —10$^{'}$ 84,7 10** • 0,18—0,0152 м^3 будет иметь то же значение, что и для плиты. По формуле (7.20) найдем силу, действующую на упор:

$$/V\text{----------} = \frac{110\ 0{,}0152}{0{,}694\ ИГ^2} = 0{,}4\text{-}96{,}5\ кН < \#™\text{-}100\ кН.$$

Прочность соединения плиты и стальной балки на сдвиг обеспечена.

Решите зад. 7.4

§ 7.6. Напряжения в балках переменного сечения

При выводе формулы (7.5) для касательных напряжений было введено существенное ограничение, состоявшее в том, что поперечное сечение считалось постоянным по длине балки. На практике нередко встречаются конструкции, включающие стержни переменного сечения. На рис. 7.16 приведены примеры систем, в которых высота сечения балки Л или ширина опоры ***Ь*** являются функциями

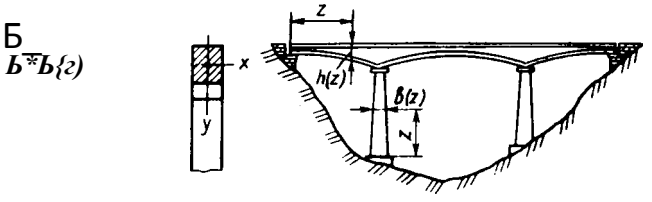


Рис. 7.16. Примеры стержней переменного сечения

координаты *г.* Обычно эти параметры достаточно плавно меняются по длине стержня. В этом случае формула для нормальных напряжений, например для растяжения и изгиба относительно оси ***х***

(7.21)

остается справедливой также для стержней переменного сечения. В формулу же для касательных напряжений переменность сечения вносит существенные поправки.

Рассмотрим элемент балки переменного сечения длиною *йг* (рис. 7.17, ***а).*** Для общности будем считать, что в сечении действуют усилия θ_y, ***N*** и ***М„*** а нормальные напряжения определяются зависимостью (7.21). Из условия равновесия отсеченного элемента балки с площадью поперечного сечения A^{mc}, как и в § 7.1, получим

$$\frac{T}{b\,A_{отс}'} \qquad (7.22)$$

где, используя формулу (7.21), найдем

$$*Г = I\,ой A = - / ЛА + — \setminus удА = ЫI — ^) +$$
$$A_{отс} \qquad ^A_{отс} \qquad A_{отс} \qquad \setminus ^ /$$

(7.23)

Подставив (7.23) в (7.22) и учитывая, что теперь отношения $A^{тм}/A$ и $55^{тм}//$, зависят от г, получим по правилу

Из математики:
(МУ)'=Ы'У+ЫУ'

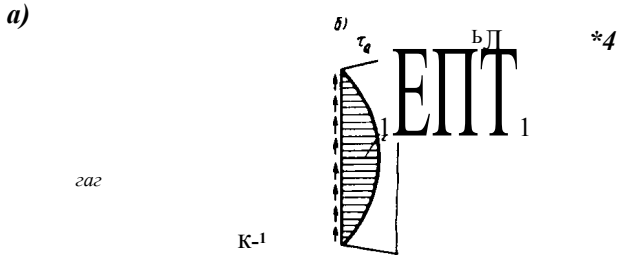


Рис. 7.17. Касательные напряжения в балке переменного сечения, вызываемые усилиями (σ_y, M_x и N

дифференцирования произведения функций

$$\text{Ч } m_{-}\backslash \left[M_{-}\, f^{+}M_{-}\left(f\right)'^{+}{}^{\text{III}}\, i^{+}\text{Ar}\left(i\right)\right]$$

где штрихом обозначена операция дифференцирования по координате z. В дальнейшем примем ***N***= const и, следовательно, ***N'=0.*** Так как $M_x'=Q_y$, то (7.24) перепишем в виде

Формула касательного напряжения *в* балке переменного сечения

$$\tau=\tau_Q+\tau_M+\tau_N=\frac{Q_y S_x^{\text{отс}}}{J_x b}+\frac{M_x}{b}\left(\frac{S_x^{\text{отс}}}{J_x}\right)'+\frac{N}{b}\left(\frac{A^{\text{отс}}}{A}\right)'. \qquad (7.25)$$

Как видно, (7.25) включает в себя прежнее выражение (7.5) в виде τ_e лишь как часть суммарных касательных напряжений. В стержне переменного сечения касательные напряжения вызываются не только поперечной силой бг. но также моментом M_x и продольной силой ***N.***

Для примера примем сечение балки в виде прямоугольника с переменной высотой А=Л ***(г)*** и верхней и нижней гранями, симметрично расположенными относительно оси ***г,*** как это изображено на рас. 7.17, ***а.*** Тогда Л=6А³/12; ***БТ=Ъ*** [(Л/2)²->>²]/2; ***А=Ьк;***

Л°тс=&[(А/2)-.у], а также А'=2tga и по формуле (7.25) получим

На рис. 7.17, ***6*** изображены эпюры отдельных составляющих касательного напряжения (7.26). Возникновение касательных напряжений в крайних точках сечения легко объяснить, если составить условие равновесия для элементарной призмы, выделенной у наклонной грани: £г= ***—айуЬ—хйгЬ—О.*** Отсюда, учитывая, что ***йу1аг=\%а,*** получим Поэтому на эпюрах x_u ***я*** т* в крайних точках имеем ординаты ***Хи={Мх1'1¥д*** (£ак $x_я$***=(М1А)1%а.***

Г
I ь dz

Заметим, что система напряжений $x_{ш}$, так же как и т*, является самоуравновешенной, т. е. равнодействующие соответствующих сил, выражаемые площадью графиков x_u и ***хц,*** равны нулю. Это доказывается по методу сечений с учетом того, что площадь эпюры x_a равна ***(¿г***

Если балка имеет одну грань горизонтальной (рис. 7.18), то при вычислении производных в формуле (7.25), например производной (5 'Г¹//*)', надо учесть, что от аргумента *г* будет зависеть не только высота сечения Л—Ао+^ а, но и координата ***у=уа—г1% Оо,*** где ***ао*** —

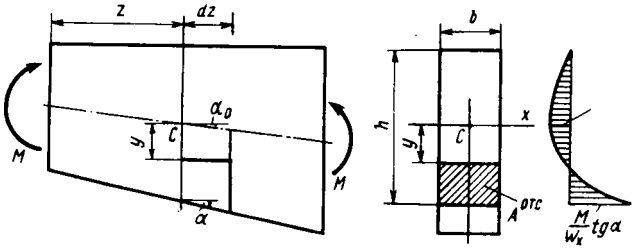


Рис. 7.18. Касательные напряжения в балке с горизонтальной верхней гранью

угол наклона оси балки. В результате при во=0,5 для напряжения x_u получим формулу

Решите задачи 7.5, 7.6

$$\text{т } u = \frac{3}{И', V_K} + \frac{}{K \; V} . \qquad (7.27)$$

Соответствующая эпюра напряжений x_u показана на рис. 7.18. Ее площадь также равна нулю.

§ 7.7. Потенциальная энергия деформации при изгибе

^ Составим выражение для энергии деформации однородной линейно-упругой балки при плоском поперечном изгибе (рис: 7.19, *а,* б). Каждый элемент балки длиной *йг* деформируется от двух факторов: от изгибающего момента элемент искривляется на угол $6<p_x$ и от поперечной силы возникает деформация сдвига со средним углом сдвига *Уф.* Энергию деформации балки получим как сум-

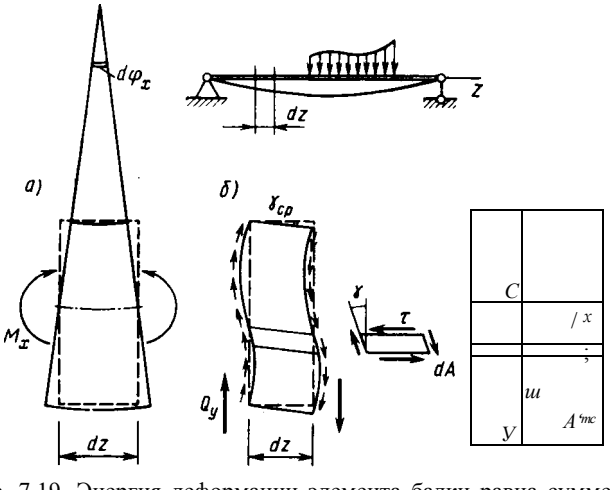


Рис. 7.19. Энергия деформации элемента балки равна сумме энергий деформации изгибания (а) и сдвига (б)

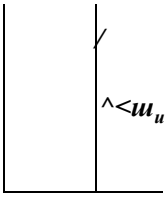
му энергии искривления и энергии сдвига:

$$u=u_u+u_a=1<1u_u+|<1u_{(}, \quad \text{O} \quad \text{o} \quad \text{. .... (7.28)}$$

П'к-

где с$Ш_и$ и $йС/_0$ — соответствующие части энергии, накапливаемой в элементе балки сЬ.

Энергия искривления. Эту часть энергии можно получить как работу момента M_x на угле $\&(p_x$, равную площади треугольника на графике зависимости между M_x и $дср_x$, выражающей закон Гука для элемента балки. С учетом формул (6.9) имеем $йср_x=[M_x/(E^)]$ $йг$ (знак минус опущен). Поэтому



$$<Ш*=-\frac{M_x й(p_x}{2}=-\frac{^<!_Г}{2Ш_X} \qquad (7.29)$$

и, следовательно,

$$' \qquad \frac{/}{1\ Г\ 1/1}$$

$$и“=1^{лш}“\sim Ы^{Лг}- \qquad (7.30)$$

Энергия сдвига. Касательные напряжения распределены неравномерно по поперечному сечению. Пусть в каждой точке, согласно (7.5), они определяются выражением

$$(7-^{31})$$

вызывая по закону Гука (5.2) соответствующий угол сдвига

$$\boldsymbol{x}\ \mathbf{1}$$

$$»-5-5-« \bullet \qquad <7'32)$$

Из-за различия углов сдвига по высоте сечения происходит его некоторое искривление (депланация). Плотность энергии дефюрмации $и$ (5.4) в произвольной точке элемента будет

$$м\frac{1}{2}ту\frac{е;/^г\^2}{20\ \backslash 1_{\chi}Ь)} \qquad (7.33)$$

а энергия, накапливаемая в элементе с объемом $6x<1y<12=<1Aй2,$ составит произведение $идАйг.$ Энергию сИ/е найдем как интеграл по площади сечения $А$ от произведения $и\ йА\ йг,$ т. е.

$$с!С/о=\Gamma\Gamma и йА йг=-\frac{}{2}\frac{\Gamma?\ л}{6л} \qquad (7.34)$$

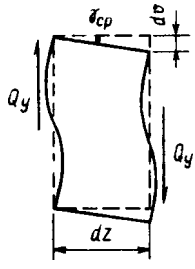
где

$$к \qquad \&А. \qquad (7.35)$$

Коэффициент ***к*** учитывает неравномерность распределения напряжений т по сечению. Его значение зависит от формы сечения. Так, например, для прямоугольника ***к***—6/5 =1,2, а для двутавра при изгибе в плоскости его стенки ***к=А/Л„,*** где ***А*** — площадь всего сечения двутавра; ***А„*** — площадь стенки.

Решите задачу 7.8

Энергия сдвига балки, согласно (7.28), будет



(7.36)

Заметим, что с$Ш_0$ можно выразить через средний угол сдвига элемента балки уц, как работу силы б, на перемещении <1у = ус,, ***йг,*** а именно:

(7.37)

Из сравнения (7.34) и (7.37) получаем угол сдвига элемента балки:

(7.38)

где Тф = *Оу/А* **— средние касательные напряжения в сечении.**

Пример 7.5. Вычислить и сопоставить энергию искривления *и у* и сдвига *I)д* для консольной балки прямоугольного сечения *Ь* х Л длиной *I,* загруженной на конце сосредоточенной силой (рис. 7.20).

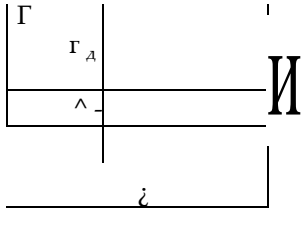


Рис. 7.20. К примеру 7.5.

Решение. Так как M_x~ -Л и -*Р,* то по формулам (7.30) и (7.36) имеем

Уи —~ | (Л) ***"а"*** |<1г— ■

При *к*=6/5 н С*£/2 (1 + /0 получим отношсяне

$$\frac{и_{\sigma}}{u_{и}} \frac{к\ ЕЙ^{2}\ к(1+ц)/кУ}{4\ С\ I^{2}\ 2} \{-) -=0{,}6\ (1\ -ьл^{*})\ (-) \frac{/А\^{*}}{V/}$$

Например, при /г —0,25 и /—10й ({/д/С/^)—0,0075—0,75%, т. е. энергия деформации сдвига составит менее 1% от эяергиа искривления, обусловленной действием изгибающих моментов. Очевидно, такое же количественное влияние этих деформаций будет ■ на прогиб V балки, поскольку работа силы *Р,* составляющая 0,5Лг, равна энергии деформации балки: (7-{/д/+(7д. Поэтому часто в расчетах деформациями сдвига в работе балок на изгиб пренебрегают.

Вопросы для самоконтроля к главе 7

7.1. Объясните, чем уравновешиваются сдвигающие усилия между продольными слоями балки на конечном участке, выделенном двумя поперечными в продольным сечениями.

7.2. Что такое погонная сдвигающая сила и как она вычисляется?

7.3. Каг связаны погонная сила и касательное напряжение?

7.4. На каком уровне в поперечном сечении погонная едаигающаж сила максимальна?

7.5. Изобразите, как распределены касательные напряжения в прямоугольном сечении; в сечении в виде толстостенного тавра; в тонкостенном двутавре.

7.6. Что такое центр изгиба и каким свойством обладает ось центров изгиба? Укажете ось центров изгиба тонкостенного таврового стержня.

7.7. Какие усилия воспринимают соединения ветвей, составной балки? Как определяются требуемые высота сварных швов в шаг заклепок или болтов?

7.8. Какие геометрические характеристики используются при определении касательных напряжений в неоднородных балках?

7.9. Какие силовые факторы, кроме поперечной силы, вызывают дополнительные касательные напряжения в стержнях переменного сечения? Почему дополнительные касательные усилия в сечении самоуравновешеиы?

7.10. Из каких частей состоит суммарная потенциальная энергия деформации балки и какая часть энергии количественно преобладает?

Задачи к главе 7

7.1. Проверить прочность деревянной балки по нормальным напряжениям и по условию скалывания вдоль волокон, если Л—10 МПа, Лс-1,0 МПа.

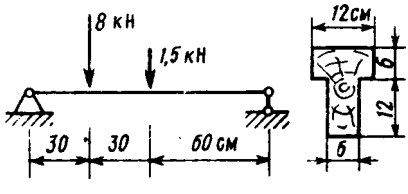


Рис. к задаче 7.1

7.2. Определить требуемый размер оечения *Ь* балки, склеенной из трех брусков квадратного сечения *ЬхЬ,* если расчетное сопротивление клея *Яг»,* а сопротивление дерева на скалывание Да и на растяжение—сжатие *Я.*

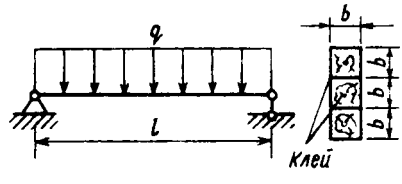


Рис. к задаче 7.2

73. Вычислить расчетную поперечную силу для составного сечения, составленного из двутавра № 30 (/*—7080 см^4) и симметрично расположенных горизонтальных листов 250 х 20, приваренных к полкам сварными швами А„„—6 мм. Принять Лц, = 160 МПа и/}—0,7.

7.4. Вычислить координату y_c центра тяжести, момент *инерция* /эд приведенного сече- , ния и найти шаг болтов прикрепления стенки и уголков сталежелезобетонной балки. Принять: диаметр болтов </—20 мм, расчетное сопротивление на срез Лер—160 МПа, на смятие

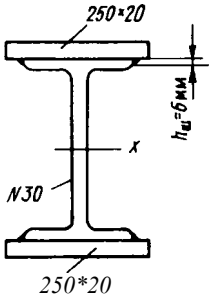


Рис. к задаче 7.3

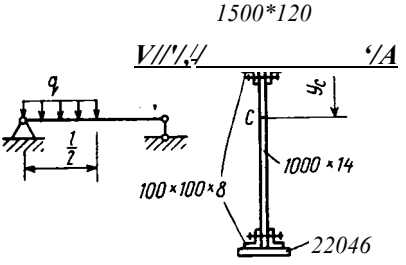


Рис. к задаче 7.4

7.5. Получить формулу для касательных напряжений в вертикальном сечении бруса с наклонной нижней гранью от действия силы *P,* сжимающей его вдоль осевой линии, приняв *P=й.* Указание: в общей формуле (7.24) следует положить 0; $M_x'=0$; $N'=o,$ а координату *у* считать зависимой от *г.*

7.6. Вычислить касательные напряжения в точках *И, С* и *В* сечения у заделки и построить эпюру т в этом сечении при //Ао=5 и 1ва = 0,1

для балки, показанной в задаче 7.5, от действия силы *P* (считая силу /r-=0).

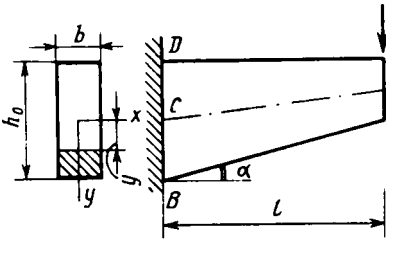


Рис. к задаче 7.5

7.7. Получить формулу для касательных напряжений в балке, загруженной касательной поверхностной нагрузкой с интенсивностью $p_г$ (Н/м²). Указание: в общей формуле (7.24)

следует положить все геометрические характеристики постоянными, а производные от усилий $M' = ЬИр_m/2$ иЛГ= $—Бр_1$.



Рис. к задаче 7.7

7.8. Для стальной балки с сечением в виде двутавра найти отношение энергии деформации сдвига 1/д к энергии деформаций изгиба

и и- Вычислить это отношение для двутавра

№ 40 и /«б м. Принять *к=A/A„.*



Рис. к задаче 7.8

Ответы к задачам главы 7

7.1. о-$_{тая}$ = 5,3<Д = 10 МПа, т$_{т}$,,=0,93<Л$_{а}$ = 1,0 МПа. Условия прочности выполнены.

7.2. Большее из трех значений *Ь*=----------, *Ь* =------, *Ь* = ъ /------. 7.3. С?шшч=550 кН. 7.4. ус=30 см, $J_{хпр}=5{,}55\cdot10^{-2}$ м^4, $a\leqslant10$ см. 7.5. $\tau=$ /Ч§aco5 (a/2) $\left(\frac{1}{2}+\frac{y}{h}\right)$. 7.6. Квадратная парабола с ординатами $\tau_D=0$, $\tau_C=1{,}5\frac{P}{bh_0}\left(1-\frac{l}{h_0}\operatorname{tg}\alpha\right)$, $\tau_B=6\frac{P}{bh_0}\left(\frac{l}{h_0}\operatorname{tg}\alpha\right)$. 7.7. $\tau=p_z\left(\frac{1}{4}+\frac{y}{h}-3\frac{y^2}{h^2}\right)$. 7.8. — И* $=12\frac{E}{G}\left(\frac{J_x}{l^2A_{ст}}\right)$, $\frac{U_Q}{U_M}=0{,}048$.

ГЛАВА 8

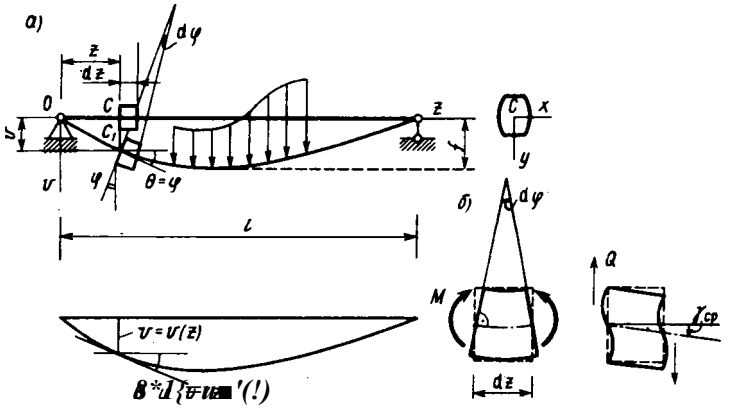
ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ПРИ ИЗГИБЕ

§ 8.1. Некоторые основные понятия

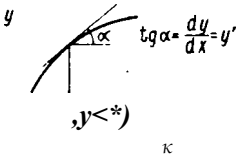
Введем понятие о характерных перемещениях, которыми фиксируется положение произвольного поперечного сечения балки при изгибе. Рассмотрим изгиб стержня в одной из главных плоскостей, например в плоскости *уг* (рис. 8.1, а). Как показывает опыт, реальные стержни, работающие в составе строительных конструкций, испытывают очень малые искривления *(/}1=Ю~* ...10^{-3}). Основной вклад в создание этих деформаций вносят изгибающие моменты, вызывающие искривление каждого элемента балки длиной на угол ***йср*** (рис. 8.1, б). Поперечные силы $<2_y$ создают у элементов деформации сдвига,

которыми во многих случаях пренебрегают. Учет деформаций сдвига и особенности определения перемещений при больших искривлениях будут рассмотрены ниже (см. § 8.6, 8.7).

Итак, ***будем считать искривления малыми и учитывать лишь влияние изгибающих моментов. В этом случае неизвестной функцией, определяющей положение сечений балки в деформированном состоянии, является функция прогибов у***=\ (г). ***При этом прогиб у — это перемещение центра тяжести сечения в направлении главной оси сечения (на рис. 8.1, а это ось у). Ось балки искривляется по кривой с уравнением*** \=\ (г), ***которую называют упругой линией или линией прогибов балки.***



Кроме прогиба характерным перемещением произвольного поперечного сечения является его угол поворота *(p* относительно оси *x.* Угол поворота касательной к линии прогибов обозначим *в.* Так как мы пренебрегли деформациями сдвига, то, согласно гипотезе плоских сечений, каждое сечение при изгибе остается нормальным к оси изогнутого стержня, т. е. угол наклона касательной равен углу поворота сечения *в = (p,* как это изображено на рис. **8.1**, *а.*



Из аналитической геометрии известно, что тангенс угла наклона касательной к кривой равен первой производной от уравнения этой кривой. Следовательно,

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{dv}{dz} = v'.$$

Если угол выражен в радианах, то при малых углах *tgвxQ* и поэтому ввиду равенства *<p=в* имеем простую зависимость между функцией углов поворота сечений и функцией прогибов

I

Зависимость между прогибами и углами поворота сечений (без учета сдвигов)

Таким образом, ***из двух неизвестных функций*** V ***{£) и <p (г) основной является функция прогибов. Углы поворота получаются дифференцированием функции прогибов.***

Задачи определения прогибов для стержней с использованием описанных выше предположений впервые были решены Бернулли и Эйлером. Поэтому такая расчетная модель балки называется балкой Бернулли—Эйлера.

§ 8.2. Дифференциальное уравнение для функции прогибов и его разновидности

При выводе трехчленной формулы нормальных напряжений были получены соотношения (6.9), из которых второе связывает изгибающий момент M_x и создаваемый им угол искривления элемента стержня $d(p_x$. Опуская здесь индекс *x* в обозначениях M_x, $<p_x$ и. *E1„* запишем указанное соотношение (6.9) вместе с равенством (8.1) в виде системы уравнений первого порядка

!

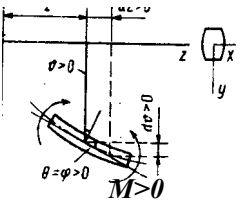
Система уравнений первого порядка

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dz} &= -\frac{M}{EJ}; \\ \frac{dv}{dz} &= \varphi, \end{aligned}\right\}$$

интегрирование которой дает возможность найти функции *ср (г)* и V (г). Напомним правила знаков для V, *<p* и *M,* ранее сформулированные в § **6.1**:

прогиб y> 0 ***совпадает с положительным направлением оси у. Угол <р***>0, ***если касательная к линии прогибов поворачивается от оси г к оси у по кратчайшему углрвому пути. При этом производная у'=ду1йг>0.***

Момент М> О, ***если он создает растяжение в точках первой четверти осей координат (для оси у, направленной вниз, создает выпуклость элемента вниз).***



Из системы (8.2) могут быть получены дифференциальные уравнения более высокого порядка, часто используемые при определении прогибов и исследовании различных вопросов. Так, подставляя ***(р*** из второй строки (**8.2**) в первую, получим уравнение второго порядка

$$\frac{d^2v}{dz^1} = \frac{M}{EJ'} \qquad (8.3)$$

?

Уравнение прогибов второго порядка

Перенеся в (8.3) ***Е/*** в левую часть, путем последовательного дифференцирования обеих частей равенства с учетом того, что ***йМ/йг***=<2 и ***dQ|dz— — д,*** получим

$$\frac{dz}{} \qquad (8.4)$$

и далее

$$\frac{A^1}{dz}\text{-}(EJv'')=q. \qquad (8.5)$$

;

Уравнение четвертого порядка

В частном случае стержня постоянной жесткости £7= const уравнение (8.5) получает вид

$$V^{IV} = \frac{q}{EJ}. \qquad (8.6)$$

Равенства (**8**.1) ■—(8.5), по существу, выражают различные факторы изгибаемого стержня через функцию прогибов V ***(г).*** Полезно для наглядности выписать их отдельно в виде последовательности:

$$cp = v'; \; M = -EJ\backslash\ *; \quad Q=-(EJv\ 7; \; q=(EJv''y. \qquad (8.7)$$

В случае ***EJ***=const последние два равенства будут Q= ***—EJv*** и $q = EJv^{IV}$.

Если одно из равенств (8.7) рассматривается как дифференциальное уравнение для определения функции прогибов V ***(г),*** то все предыдущие могут быть использованы для формулировки соответствующих граничных условий.

§ 8.3. Интегрирование дифференциального уравнения линии прогибов и определение произвольных постоянных

Найдем перемещения для шарнирно опертой балки, имеющей ***EJ***=const и загруженной нагрузкой, интенсивность которой изменяется по закону ***q=p(zjl)*** (рис. **8.2**, ***а).*** Для этого воспользуемся уравнениями (8.2) или эквивалентным им уравнением (8.3). Интегрируя их, получим

$$v' = \varphi = -\int_0^z \frac{M\,dz}{EJ}; \qquad v = \int_0^z \varphi\,dz + C_2, \tag{8,8}$$

где *г* — вспомогательная переменная интегрирования, изменяющаяся в пределах ***0<г<г; С*** и C_2 — произвольные постоянные. Полагая в интеграле переменный верхний предел ***г=0*** и учитывая, что $\int_0^0 (5)\,<12=0$, найдем, что $C_1 = \varphi_0$ и $C_2 = y_0$.

Итак, ***при использовании формул (8.8) постоянные*** $C_1 = \varphi_0$ и $C_2 = y_0$ ***выражают угол поворота и прогиб в начале координат (г*** = 0). Следовательно,

;

Выражения углов поворота и прогибов через изгибающие моменты

$$\varphi = \varphi_0 - \int_0^z \frac{M\,d\tilde{z}}{EJ}; \qquad v = v_0 + \int_0^z \varphi\,d\tilde{z}.$$

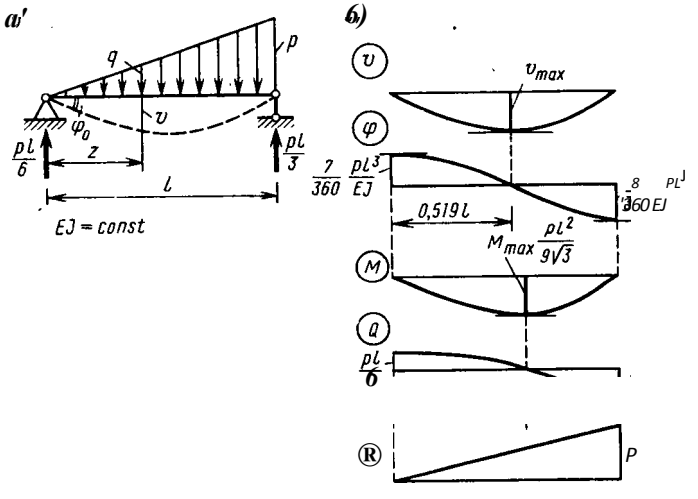


Рис. 8.2. Изгиб шарнирно опертой балки треугольной нагрузкой. Кривые V, *<p, М,* 2, *ц* иллюстрируют цепочку дифференциальных равенств (8.7)

Применим равенства (8.9) в рассматриваемом примере, для чего составим выражение для изгибающего момента:

6 2 3 6 \/ /3/

Подставляя выражение для А/в формулу (8.9), найдем

$$(p = \frac{1}{EJ}\left(\frac{p1^2}{2}\frac{z^3}{6} - \frac{1}{6}\frac{p_1^*}{z^3}\right) + (p_0 z + \langle p_0 \rangle$$

$$y = \frac{1}{EJ}\left(\frac{p1^2}{2}\frac{z^3}{6} - \frac{1}{6}\frac{p_1^*}{z^3}\right) + \frac{1}{EJ}\left(\frac{p1^2}{2}\frac{z^2}{2} - \frac{1}{6}\frac{p_1^*}{z^2}\right) + \langle p_0 z + y_0.$$

Постоянные $\langle p_0$ и y_0 должны быть найдены из условий закрепления балки. В данном случае в начале координат имеется жесткая опора, поэтому $y_0=0$, а угол $\partial\rangle_0$ найдем из условия V (0=0, что дает $\langle p_0=(7/360)$ |>/3/(£/)]. Окончательно выражения для $\langle p$ и V запишем в виде

^<7_30{r+15«'

где £=2//.

На рис. 8.2, *б* изображены эпюры V, $\langle p$, *M, Q я* ?, иллюстрирующие цепочку равенств (8.7). Каждая пара соседних графиков этих функций связана между собой как первообразная и ее производная. Поэтому, например, нулевым точкам эпюр *(p, M, Q,* ^ соответствуют экстремумы в графиках V, *(p, M,* 0, что следует учитывать при их построении. Заметим, что значение $y_{т,,}$=

=0,006522*p1*/(E1)* имеет место близко к середине балки при 2=0,5193/ (что находится из условия *(p*=\' = 0) и сам максимум прогиба очень близок к прогибу посередине пролета: V (//2)=(5/768) &>/*/(£/)] = 0,006510 [p/4/(£/)].

Пример 8.1. Определить прогибы и внутренние усилия *M и Q от* той же нагрузки, что изображена на рис. 8.2, но для балки, имеющей слева заделку, а справа — шарнирную опору.

Решение. В этой балке четыре неизвестные реакции (момент и три силы) и только три условия равновесия для их определения *(£2=о;* £У=0; *Хто=0).* Поэтому данная задача относится к *статически неопределимым.* Общий метод их решения будет рассмотрен в следующей главе. Здесь для решения подобной задачи использовано дифференциальное уравнение (8.6), которое имеет вид

$$\langle 1z^* \sim E y'' EJ$$

Его последовательное интегрирование дает такие результаты:

$$\langle 1^3 y \quad pz^2$$

$$йг \; 2 \; EJ$$

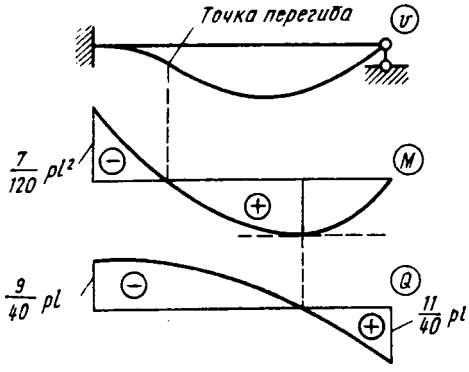


Рис. 8.3. К примеру 8.1. Использование уравнения четвертого порядка для анализа статически неопределимой задачи

$$\text{—г”}\frac{p_{\text{г}}^3}{\text{(к' 6 ЕЛ}}\text{------ (-С12+С2;}$$

$$\frac{\text{<1у } p_{\text{г}}\text{* г}^1}{\text{Лг 24ЕЛ 2}}\text{»*------ 1-С| — + } \boldsymbol{C22+C\};$$

$$\frac{p_{\text{г}}^3}{\text{ПОЕЛ 6}} + C_x \text{ — + С2 — + С37+}C_4.$$

Граничные условия будут: 1) V (0)=0; 2) *у'* (0)=0; 3) А/ (/) = == —*EJv'* (/)*0; 4) v (/) = 0. Первое и второе условия дают Сз = C_4=0.

Третье и четвертое приводят к системе уравнений

$$\frac{pl^2}{\text{6£У}} + C_{,}/+C_2=0;$$

$$\text{-Н—}\frac{p1^{\text{г}}\ C_{x}1\ C_{2}}{\text{120 EJ 6 2}}\text{+——=0},$$

решая которую находим С) = —(9/40) *plftEJ)]* и С2 == (7/120) *p1²/(ET}*\.

После этого составим выражения для *М* и б:

$$M\text{= — £A'=}\frac{p_{\text{г}}\text{* 9 7}}{\text{6/ 40 120}}\text{ 1— р/г-------}p_1;$$

$$\text{С=-ЯЛ”--——+}\frac{\text{рг* 9}}{2}\text{р/}_{/\quad 4\quad 0}$$

Графики *v, М я Q* показаны на рисунке. Обратим внимание на то, что наличие эпюры А/ помогает правильно изобразить график прогибов *у.* Так, на участке, где *Ы*<0, выпуклость графика V вверх, а там, где А/>0, наоборот, вниз. Кроме того, у заделки сечение не поворачивается (^ = у'=0), поэтому касательная к графику V в этой точке горизонтальна.

Рекомендации по ппяв|1_ нлмл› ,,,,д ражению линии прогибов

§ 8.4. Использование локальных систем координат при наличии нескольких участков интегрирования

Если балка делится иа ряд участков, то при определении прогибов с помощью выражений (8.9), так же как это делалось при растяжении—сжатии или кручении, удобно использовать на каждом участке свою местную (локальную) систему, имеющую начало координат на левом или правом конце данного участка. Для границ участков при этом составляются условия непрерывности перемещений (условия «склейки» или «стыковки»). Это позволяет выразить постоянные интегрирования (p_{01} и $y_{0(}$ /-го участка через постоянные предыдущего (/—1)-го участка <Po((-1)> $y_{0(/\_1)}$ и провести весь расчет в достаточно рациональной форме. Рассмотрим особенности вычислений на приме - рах.

Пример 8.2. Найдем прогибы и углы поворота для консольной балки ступенчатого сечения, полагая $Ш_2 = Ш$ и = 2*Ы* (рис. 8.4).

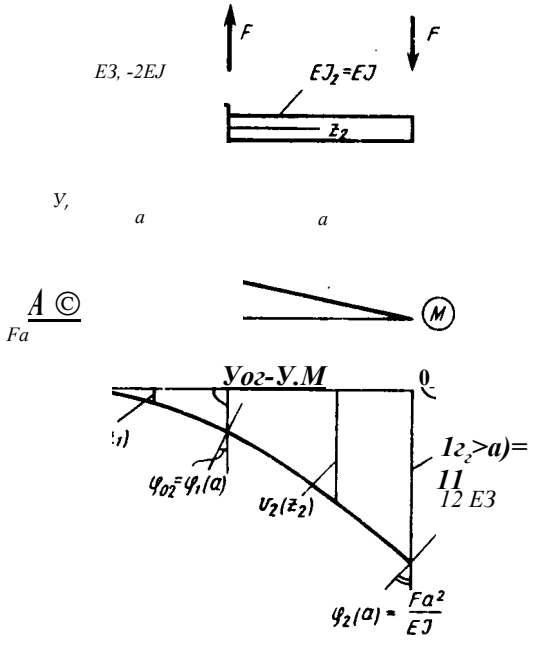


Рис. 8.4. К примеру 8.2. Прогибы ступенчатой консольной балки

Решение. Начало координат первого участка удобно расположить в заделке, где прогиб и угол поворота VQI *=<poi “0. Так как на первом участке *Mi* — — *Fa*=const, то по форму лам (8.9) найдем

На втором участке имеем — *P(a*—и по формулам (8.9) получим

$$y_2 = y_0 + \varphi_0 z_2 + \frac{M_0 z_2^2}{2EI} + \frac{Q_0 z_2^3}{6EI} + \frac{P(z_2-a)^3}{6EI}$$

где ц>02 и Уог — угол поворота и прогиб на границе участков при 22=0.

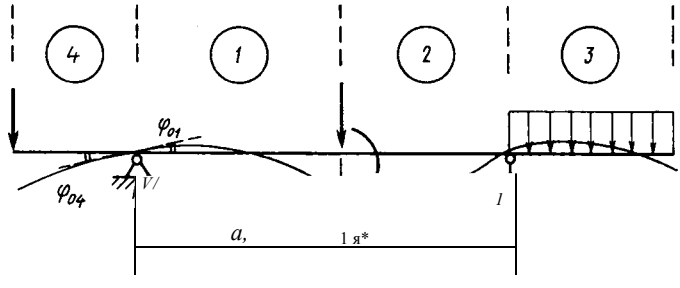
Используя условие непрерывности перемещений, найдем Фо2 и y_02 по формулам для перемещений первого участка при *г\= а,*

а именно:

$$\varphi_{02} = \varphi_0(z_1=a) = \varphi_0 + \frac{M_0 a}{EI} + \frac{Qa^2}{2EI}$$

после него по формулам для ^ и У2 можно найти перемещения на втором участке. В частности, на конце балки при *=а* получим *<p₂ (a)=Pa²/(E1)* и $y_2(a) = (13/12)\,[/*«»/(£/)]$•

В общем случае следует выбирать в качестве первого участка тот, у которого имеется наименьшее число неизвестных начальных перемещений (из двух y_0**1** и $<p_0$**1**). Например, для балки на рис. 8.5 указана целесообразная последовательность нумерации участков и выбора ло-



%	41
90^ - ' <Po1	Ч>„*0
Щ^О	щ=0

1	..... ?1
Уг	Уз
Фог'Щ N	%ъ~-Ч>гЫ
1г$_{в2}$Щ(a_1)	Щ,-о

Т

Рис. 8.5. Рациональная нумерация участков интегрирования и формулировка условий их сопряжения

кальных осей. На первом участке будет только одно неизвестное перемещение <p_{ou} а v_0i=0. Переходя ко второму участку, из условий «склейки» <Po2=<Pi (zj = <Я]) и Vo2=Vi *(zi=a\)* выражаем <p<и и v_{02} через <¡£>oi и эту единственную неизвестную постоянную находим из граничного условия v_2 (z_2=a_2)=0. Для третьего участка имеем v_{03}=0 и <***Pm = <P2 (*2=a£-*** Для четвертого участка, поскольку ось z_4 направлена в сторону, противоположную оси ***z¡,*** условия «склейки» соответственно будут v_M=**0**; ***q>w = — q>0r***

Пример 8.3. Найти прогиб под силой *P* и углы поворота сечений на опорах для шарнирно опертой балки (рис. 8.6).

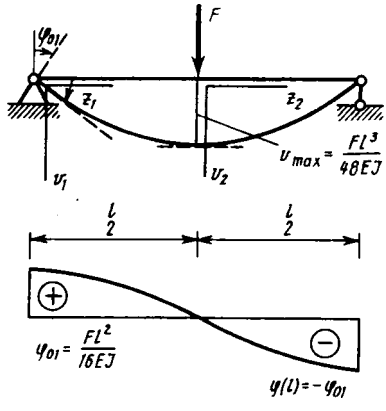


Рис. 8.6. К примеру 8.3. Интегрирование уравнения для прогибов при двух участках

Решение. На первом (левом) участке имеем v_0i -=0, <$p_{0|}$ —неизвестно. Момент *Mi=Fz\/2* и формулы (8.9) дают

$$V^1 = C\,Fz, - \int \left(-\frac{Ft}{2}\right) + \text{ч}\ v_i'' J\,{*}.d{*}, + ve, \frac{Fz}{2} + {*}, 1{*}1.$$

о

Из условия «склейки» через <poi выражаем начальные перемещения для второго участка:

$$(l\backslash FI^2 \quad + V_{02}\text{-}V, \quad (l\backslash FI^3 / \quad -+ {*}0,$$

Момент M_2-*(FP)* [(//2)—rj и по формулам (8.9) получим

$$\text{7} \qquad \textit{Щ я}^{*}\text{г}_2 \qquad \textit{n}^3\ \textit{I}$$
$$\text{у2 - | 9>2-“2 + у02”} \cdots \frac{\text{Н}}{8\ \textit{Ю}\ \textit{\2E1}\ 16\ \textit{E1}} \cdots \textit{Ь'ф01*2} \cdots \frac{\text{1°ф01 “•}}{\textit{96E1 2}}$$
$$\textit{о}$$

Для определения неизвестного од имеем граничное условие на правом конце балки \$_2$ (г$_2$—//2)-0, что дает <p$_0$1-(1/16) *[H²/(E1)]*. По формуле для V] найдем Ущ^-У, (//2)=(1/48) *[P1³/(E7)]*.*

Учет симметрии

Рассмотренное решение умышленно проведено без использования симметрии системы, как пример общего случая загружения. При наличии симметрии решение упрощается. Так, в данном случае можно рассмотреть только левый участок, а <p$_0$**1** ***определить из того условия, что на оси симметрии угол поворота равен нулю, т. е. Я>*** **1** ***(²\ = 1/2)*** = 0, ***что сразу дает <p$_{01}$ = (\/16) [P1²/(E1)].***

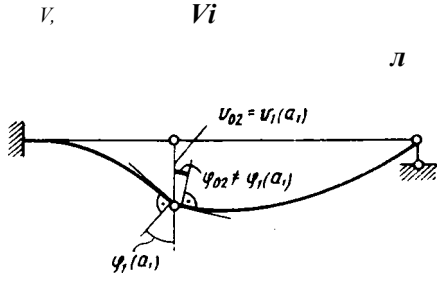


Рис. 8.7. В месте шарнирного соединения участков непрерывность обеспечивается только по прогибам уо2=у1 *(“¡),* а функция углов поворота терпит разрыв <Р**02#<?1 («0**

Если границу между участками создает «врезанный» шарнир (рис. 8.7), то непрерывность перемещений на границе обеспечивается только по прогибам и можно составить только одно условие «склейки»: у<и=У**1 (21=01**).

Угол поворота прямо не связан с углом ***ср***\ (а0 н является неизвестной константой, определяемой из соответствующих граничных условий [на рис. 8.7 из граничного условия у$_2$ (г**2** = в$_2$)=**0**].

§ 8.5. Метод начальных параметров

Рассматриваемый ниже метод представления решения дифференциального уравнения линии прогибов имеет важное методическое значение, поскольку он часто используется в различных задачах сопротивления материалов и строительной механики.

Его сущность состоит в том, что ***для характерного*** ц ***набора частных нагрузок общий интеграл дифференциального уравнения линии прогибов строится как набор соот-*** Метод начальных ***ветствующих частных решений, причем в качестве произ-*** параметров ***вольных постоянных выбираются прогиб*** v_0, ***угол поворота Фо, момент*** M_0 ***и поперечная сила Qo в начале общей системы координат, единой для всего стержня. Решение представляется в виде формулы общего вида для произвольного п-го участка стержня, которая называется универсальной формулой.***

Для стержня постоянного сечения £7= const (рис. **8.8**) расположим начало координат на его левом конце и для первого участка функцию прогибов Vi ***(z)*** разложим в ряд Маклорена (номера участков обозначим римскими цифрами ***I, II, ...,*** а границы участков — арабскими 1, 2, ...):

$$\text{Vi}=v(0)\frac{}{1!}+\frac{}{2!}+\frac{}{3!}+\frac{}{4!}+\blacksquare \qquad (8.10)$$

Так как $V(0)=y_o$, $V^{I}(0)=\text{щ}$ и, согласно дифференциальным зависимостям (8.7), $y^{П}(0)=-M_d/(E1)$, $y^{ш}(0)=$

$=-Co/(\cdot£/)^{IV}V(0)=Цo1(E1)$, то, ограничиваясь случаем постоянной распределенной нагрузки, решение (**8.10**) для первого участка получит окончательный вид

$$Ч1 \qquad = y_0 + \leq \frac{}{2\sqrt{EJ}\sqrt{EJ}} + \blacksquare \qquad (8.11)$$

Переходя ко второму участку, введем функцию ***(г)*** $=y_п(г)-VI(г)$, представляющую разность между

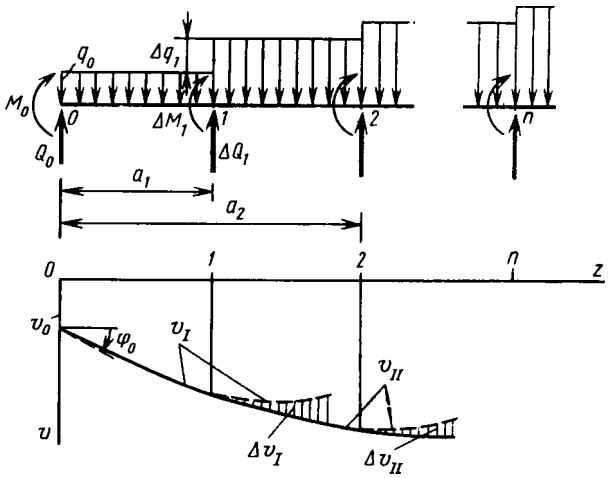


Рис. 8.8. Представление нагрузки и линии прогибов в методе начальных параметров

истинной линией прогибов на втором участке и продолжением функции v_x в пределах второго участка (на рис. **8.8** ординаты Avi заштрихованы). Разлагая ее в ряд Маклорена (**8.10**) по вспомогательной переменной $z_1=z—a_x$ с начальной точкой $z_1 = 0$, получим для Av, решение, аналогичное (**8.11**):

$$\overline{Av_x}(z)=Av,+Aç>,(z-a,)\frac{bQi(z-a_x)^3}{3lEJ}-\frac{b}{2lEJ}$$

$$Ag_t(z—a,)^4$$

где A***Mj, AQ_U Aq_x*** —приращения («скачки») в функциях изгибающих моментов, поперечных сил и интенсивности нагрузки в первой граничной точке. Численно приращения ***AMi*** и ***AQi*** равны сосредоточенным моменту и силе в точке ***1***, а Aq_x — разности интенсивностей второго и первого участков ***Aqy=q_n—qi*** в точке ***1;*** Av! и Aç>$_t$ — это «скачки» в прогибе и угле поворота в граничной точке ***1.*** Они возможны, например, при соединении участков балки с помощью упругой пружины и шарниров. В дальнейшем будем считать линию прогибов непрерывной и положим все Av, и A***q>, (i***= 1, 2, ...) равными нулю.

Имея v_r (z) и A^ (z) для второго участка, найдем v_n как сумму: V_n=vi+Avi. Переходя аналогично к третьему и последующим участкам, получим для произвольного и-го участка ***универсальную формулу***

$$v_{,,}=v_t+\sum_{x'a}\overline{Av,}=v_0+(p_0z\frac{Mqz^*}{21\,EJ}\frac{Qqz^3}{31EJ}\frac{goz^*}{4!\,EJ}-\text{-------}1-$$

$$+£\,(—Ü;\frac{(AM,(z—aj)^2}{}\frac{AQ,(z-ad^3}{}\frac{Ag,(z-a,)A}{}\quad\text{<813>}$$

Для углов поворота функция ***(p_я*** получается дифференцированием ***(p„=dvjdz:***

$$<Pn=Я>\ 0\frac{M_0z}{V.\,EJ}\frac{Qoz^1}{2lEJ}\frac{q_oz^3}{31\,EJ}]\text{-------}(-$$

$$+\ "y^1\ (\frac{AM,(z-ad}{\backslash\,ПЕГ}\frac{AC/(z-Д|)^*}{21E1}\frac{Ad,(z-a,)Л}{3!E/)'}\qquad(\bullet)$$

Величины y_0, ***ϕ_0, M_0*** и £?$_0$ называются ***начальными параметрами.*** В зависимости от закрепления балки и ее нагрузки часть из них бывает известна, а остальные находят из граничных условий.

ПромеР' 8.4. Для показанной на рис. 8.9 балки и нагрузки опорные реакции будут Ло—0 и Лд«2*да.* Начальные параметры: у<>=0, угол 9>о#0 и неизвестен, $Л/_0$=0 и $2_с$=Ло=0.

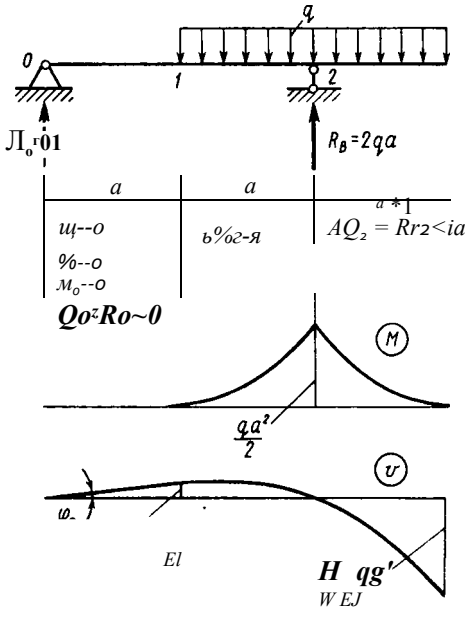


Рис. 8.9. К примеру 8.4. Определение прогибов по методу начальных параметров

Решение. Для первого участка по (8.13) и (8.14) имеем

v_i = <¡»о²; <Pi=<Po-

Первый участок балки, оставаясь прямым, поворачивается вокруг левого шарнира на угол <ро> что соответствует нулевой эпюре моментов на этом участке. На границе в точке *1* добавляется скачок в нагрузке *Aqi = д,* поэтому

$$v_2 = <Po2 + \frac{д\,(г-а)^*}{4!\,E7} \qquad \boldsymbol{ф}\ \mathbf{2} = |\mathbf{?0} + \frac{д\,(г—а)^3}{3!\ £/}$$

В точке *2* имеем скачок в поперечной силе Д2г = *Яв—2да,* а также добавляется третье слагаемое

$$\backslash_3 = ц_г + \frac{д(г—а)^* \ 2да\ (г—а)^3}{4!£У\ 3\backslash Ш} \qquad \mathbf{<Р_3“9_о+\sim} \frac{д\ (г—и)^3\ 2да\ (г—а)^2}{31E1\ 2\backslash Ш}$$

Неизвестный угол поворота *сро* найдем из условия $у_2$ (г=2д)=0, что дает <*ро*= — ^$а^3$/(48£/). Прогиб на правом конце балки будет равен

$$v_3\ (За) = \frac{да^*}{EJ}\left(\frac{/\ 1\ 2\ 1\backslash}{\backslash 16\ 3\ 3J} - \frac{13\ да^*}{48\ EJ}\right).$$

§ 8.6. Численное интегрирование уравнений для прогибов методом конечных разностей

В некоторых случаях интегрирование уравнения для прогибов, например

$$M_x \qquad (8.15)$$

в аналитической форме выполнить не удается. Так, в балках переменного сечения жесткость $EI_x = EI_x(z)$ будет

являться некоторой функцией координаты z и непосредственное интегрирование правой части (8.15) в общем случае станет затруднительным. В подобных случаях решение задачи можно получить численно.

Одним из эффективных численных методов является ***метод конечных разностей,*** суть которого состоит в следующем. Участок интегрирования 0—/ узловыми точками разбивается на интервалы А (рис. 8.10) и производные функции V (г) приближенно заменяются через разности узловых ординат у,, что приводит к решению системы

алгебраических уравнений относительно этих ординат.

Так, если составить выражение квадратной параболы, проходящей через три соседние ординаты y_{i-1},

y_i и y_{i+1} и заменяющей истинную кривую, и продифференцировать это выражение, то получим приближенные формулы для производных ***(операторы численного дифференцирования):***

$$v_i = (-v_{i-1} + v_{i+1})/(2\Delta); \qquad (8.16)$$

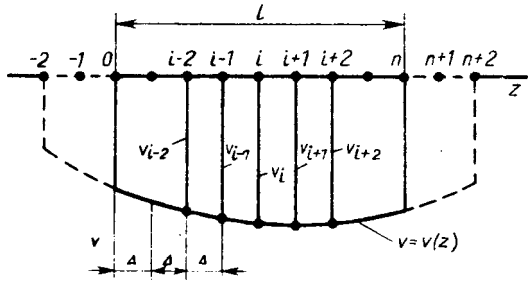
$$y'_i = (y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1})/\Delta^2. \qquad (8.17)$$

Производные более высокого порядка можно получить по следующей схеме:

$$y''_i = 4(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1})/(2\Delta).$$

После замены слагаемых числителя для точек /—1 и 1+1 с помощью оператора (8.17) получим

$$y'''_i = (-y_{i-2} + 2y_{i-1} - 2y_{i+1} + y_{i+2})/(2\Delta^3). \qquad (8.18)$$



Аналогично, по схеме v{^{v}=(v")I найдем

$$V\,г=(v_{,\_2}-4v_{,\_,}+6v_{,}-4v_{,+,}+v_{,+}0/A\ *. \qquad (8.19)$$

Вернемся к уравнению (8.15), в котором заменим левую часть с помощью конечно-разностного оператора (8.17), и применим это уравнение ко всем узловым точкам участка интегрирования:

$$\left.\begin{aligned}(v_{i-1}-2v_i+v_{i+1})=-\frac{M_{xi}}{EJ_{xi}}\Delta^2;\\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n.\end{aligned}\right\} \qquad (8.20)$$

К полученной системе алгебраических уравнений добавим граничные условия, которые также надо выразить с помощью конечно-разностных формул. При этом в систему уравнений операторами производных могут вовлекаться точки, лежащие за границей участка интегрирования, такие, как —2, —1, и + 1, ***n+2.*** Эти дополнительные неизвестные определяются с привлечением краевых условий, добавляемых к системе уравнений.

Пример 8.5. Для балки переменного сечения (рис. 8.11), у которой жесткость изменяется по закону £У*=£/$_0$ [1 -(4а//^{2})г *(1-2%* определить прогибы от равномерно распределенной нагрузки.

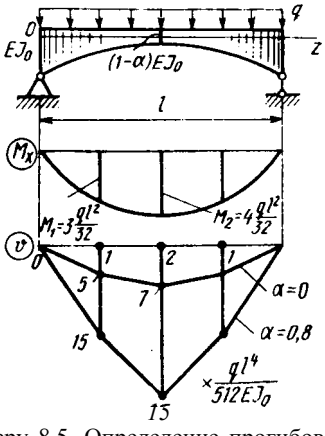


Рис. 8.11. К примеру 8.5. Определение прогибов в балке переменного сечения

Решение. Примем шаг сетки узлов Д=//4. Узловые значения жесткости и изгибающих моментов будут $EJ_i = EJ_o$ (1 —0,75а), $M\backslash$ = »3 (*/*/32); *EJ2 — EJo* (1 — а), А/$_z$ = 4 *(qi²/32);* граничные условия:

v (0)=v (/)=0. Уравнения (8.20) для принятой сетки узлов с учетом симметрии получат вид

$$\left.\begin{aligned}-2v_1+v_2=-\frac{3}{1-0{,}75\alpha}\cdot\frac{ql^2\Delta^2}{32EJ_0};\\ 2v_1-2v_2=-\frac{4}{1-\alpha}\cdot\frac{ql^2\Delta^2}{32EJ_0}.\end{aligned}\right\}$$

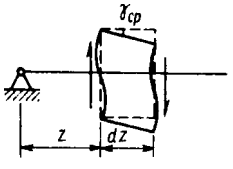
Результаты решения этих уравнений для а=0 (постоянное сечение) и а=0,8 изображены на рисунке. Для а=0 точное значение y_2= =5?/⁴/(384£/$_0$) н погрешность приближенного решения составляет 4,8%.

§ 8.7. Дифференциальное уравнение для прогибов с учетом деформаций сдвига

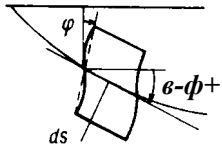
В отличие от случаев, рассмотренных в предыдущих параграфах, здесь необходимо кроме деформации искривления, создаваемого изгибающими моментами, учесть сдвиги элементов балки. Деформация сдвига элемента стержня создается поперечными силами ***Q,*** которые вызывают средний угол сдвига элемента

См. ф-лу (7.38) и рис. **8.1** § **8.1**

$$\gamma_{ср} = \frac{\kappa A}{ел'} \qquad (8.21)$$



где ***к*** — коэффициент, учитывающий неравномерность распределения касательных напряжений в сечении [см. (7.35)]. Если по-прежнему угол поровота поперечного сечения обозначим через ***ф,*** а угол наклона касательной к оси изогнутого бруса через ***в,*** то легко заметить, что отрезок оси (15 как элемент касательной к кривой у=у (г) дополнительно к углу ***ф*** повернется за счет сдвига на угол Уср так, что общий угол наклона касательной ***в*** будет



$$в = ф + \gamma_{ср} \qquad (8.22)$$

Так как ***вфф,*** то поперечные сечения не будут нормальными к оси бруса при учете сдвигов.

На основании равенства ***в***=\′ вместо (8.1) получим

Зависимость между прогибами и углами поворота сечений с учетом сдвигов

$$ф + y_{ср} = y' \qquad (8.23)$$

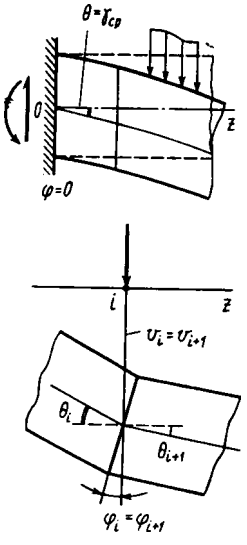
и система дифференциальных уравнений (**8.2**) с учетом сдвигов будет иметь вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dz} &= -\frac{M}{EJ}; \\ \frac{dv}{dz} &= \varphi + \frac{kQ}{GA}. \end{aligned}\right\} \qquad (8.24)$$

Подставив ***ф*** из второй строки в первую, получим вместо (8.3) уравнение второго порядка с учетом сдвигов:

$$м \text{ а } fkQ\backslash$$
$$6г^2 \sim Ш\ дл\ \backslash СЛ/$$

При интегрировании уравнений (8.24) или (8.25) следует иметь в виду, что определению подлежат две отдельные функции перемещений: функция прогибов V *(г)* и функция углов поворота сечений <*p* (г). Последние уже не связаны с прогибами простым соотношением (**8.1**), как это было без учета сдвигов. Их зависимость определяется равенством (8.22). Это создает свои особенности при формулировке граничных условий и условий непрерывности перемещений на границах участков интегрирования. Так, например, в заделке граничные условия при 2=0 будут: 1) v (0)=0 и 2) <*p* (0)=0. При этом из второго условия и равенства (**8.22**) следует, что касательная в заделке повернется на угол **0**=?„-



На границе участков в **1**-й точке условия непрерывности перемещений будут У/=У$_{/+1}$ и <*p,*=<*p,*+]. При этом углы наклона касательных могут быть различны: **0**<^в/+**1**, если ***Q^ФQl*+^.**

Припер 8.6. Найдем прогибы однородной консольной балки прямоугольного сечены с учетом сдвигов от равномерно распределенной нагрузки ^ (рис. 8.12).

Решение. Воспользуемся системой уравнений (8.24). Из первого уравнения находим

$$v = \int_0^z \varphi\, dz + \int_0^z \frac{kQ}{GA}$$

<12+уо.

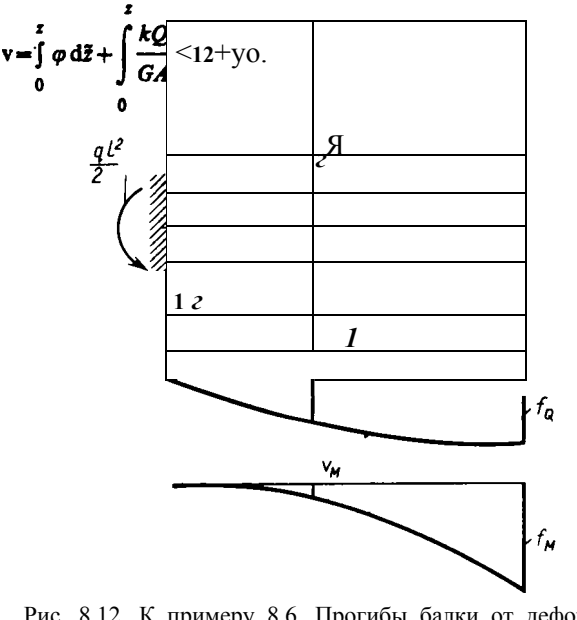


Рис. 8.12. К примеру 8.6. Прогибы балки от деформаций сдвига и от изгиба *У и*

В рассматриваемом случае *М-—д¹²/1—дх²11+дЬя(2шд1—дг,* кроме того, в заделке y_0»0 и <Ро»0, поэтому для *<рм* получим выражение

$$\frac{ql^2z}{2EJ}\frac{qlz^2}{2EJ}\frac{qz^3}{6EJ}\frac{ql^2z^2}{4EJ}\frac{qlz^*}{6EJ}\frac{qz^*}{2AEJ}+=0$$

Полученное выражение для v можно представить как сумму двух функций: v-vu+vn, где v_u $\frac{ql^2z^2}{4\,EJ}\frac{qlz^3}{6EJ}\frac{qz^4}{2AEJ}$ прогибы, вызванные изгибающими моментами; vg $\frac{*}{GA}$ — пропсы от деформаций сдвига, вызванных поперечными силами.

Вид эпюр *Vq* и *Уц* изображен на рисунке. Их сумма дает общую линию прогибов.

Вычислим прогиб на конце балки vq (/) **/q* и (0*"/и* ■ сопоставим их количественно. При г-/ найдем/g,/v и их отношения:

$$f_o\frac{kql^2}{2GA}:\frac{ql^4}{SE/f_u}\frac{f_o\,E\,J}{GAl^2}. \qquad (8.26)$$

В случае однородной балки имеем *Е—2* (l+/i) *G; J=bh³{* 12; *А=bh\ к*=6/5. Полагая *l/h=5* и 0,25, получим

$$\frac{f_o}{f_M}\,2\,(1+p)\,\frac{A^J}{I^1}\,\frac{2}{15}\,\frac{'}{5^2}\,1Д5\,\frac{11}{150},$$

т. е. прогиб, вызванный деформациями сдвига, в 150 раз менее прогиба от изгибающих моментов. Деформациями сдвига оправданно можно пренебрегать, как это и делалось в предыдущих параграфах.

Изгиб многослойной балки. В технике и в строительстве широко используются многослойные элементы конструкций. Рассмотрим трехслойный стержень, состоящий из легкого пористого материала, например пенопласта, называемого заполнителем, связанный на наружных поверхностях с тонкими металлическими листами (несущими слоями). Обычно используются трехслойные панели, прямоугольные в плане, обладающие высокими теплозащитными и несущими свойствами и, кроме того, весьма малым весом. В некоторых случаях работа панели или мысленно выделенной из нее полоски может рассматриваться как работа изгибаемой балки. Оценим влияние деформаций сдвига в такой трехслойной балке, пользуясь расчетной схемой и формулами, полученными в примере **8.6.**

j *несу щий спой*

. ***-X***

Модуль упругости заполнителя во много раз менее модуля упругости несущих слоев. Поэтому считается, что весь изгибающий момент в сечении воспринимается только несущими слоями, а заполнитель воспринимает только касательные напряжения т, которые в этом случае будут постоянны по его толщине. Тогда в формулах (8.26) жесткость ***EJ*** будет относиться только к несущим слоям и составит

где E — модуль упругости материала несущих листов; S — толщина листов.

В то же время сдвиговая жесткость GA будет относиться только к заполнителю и составит $GA = Gbh$, где G — модуль сдвига заполнителя. Ввиду равномерности распределения т по толщине заполнителя коэффициент κ в формуле (8.21) и в формулах примера 8.5 будет равен единице.

Подставляя указанные значения EJ и GA в формулу (8.26) для f_{olfu}, получим искомое отношение прогиба от поперечных сил к прогибу от изгибающих моментов трехслойной балки:

$$f_{a=2}---$$
$$f_u\ Ohl*'$$

Пусть Л//=1/5; S/h= 10^{-2} и E/G= 10^3, тогда f_Q/f_u=0,8, т. е. деформации сдвига увеличивают прогиб f_u от изгибающих моментов на 80% и в этом случае деформациями сдвига ни в коем случае пренебрегать нельзя. Обычно многослойные элементы конструкций рассчитываются с учетом деформаций сдвига.

§ 8.8. Особенности определения больших прогибов

До сих пор мы пользовались допущением о малости прогибов, считая, что v'«<p вместо точного равенства v =tg <p, где <j> — угол наклона сечения и касательной к оси (без учета деформаций сдвига). Это справедливо только если v'«l и углы <p очень малы. Как указывалось в реальных строительных конструкциях, отношение f/l= = $10^{-2}...10^{-3}$, таков же порядок и величин v'aqj, поэтому См. § 8.1 указанное предположение вполне оправданно.

Предположим теперь, что имеется очень тонкая гибкая линейка и ставится задача об определении ее формы изгибания и перемещений без ограничения их значений (рис. 8.13). При этом считаем, что благодаря малой толщине стержня даже при сильных изгибаниях он может работать в упругой стадии, без появления пластических

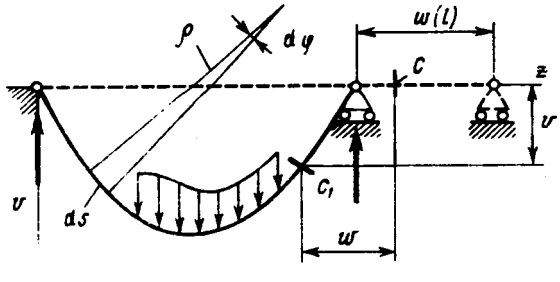
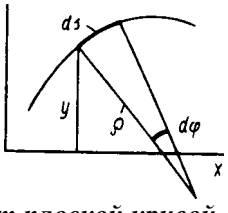


Рис. 8.13. Перемещения при больших прогибах

деформаций. Такие задачи возникают, например, при решении вопросов об условиях работы гибких элементов приборов. В этом случае, пренебрегая влиянием поперечных сил, исходят из соотношения, связывающего кривизну элемента стержня и изгибающий момент [см. (6.10)]:

$$\frac{1}{\rho} \sim \frac{M}{EJ} \qquad (8.27)$$

Взяв -из аналитической геометрии выражение кривизны для плоской кривой и записав его в координатах *vz* вместо (8.27), получим



liputim плоской кривой

$$\frac{1 - dv.\ y''}{S \sim d3 \sim \sim' jMyW}$$

$$V[1+(v')^{i}]^{s\ ю} \qquad \text{^8'28^}$$

В отличие от приближенных линейных дифференциальных уравнений (см. § 8.2) уравнение (8.28) является ***нелинейным*** относительно функции v, поэтому его решение является задачей значительно более сложной, чем ранее рассмотренные. Существуют специальные методы решения таких задач, как правило, с использованием ЭВМ, на которых здесь мы останавливаться не будем.

Подчеркнем, что при составлении уравнения (8.28) момент ***M*** должен вычисляться в ***деформированном состоянии,*** т. е. для поперечного сечения ***изогнутого*** стержня с учетом того, что это сечение получило перемещения v и ***w*** вдоль осей ***y*** и ***z*** (сечение ***Q*** на рис. 8.13). Таким образом, чтобы составить правую часть уравнения (8.28), предназначенного для определения перемещений, надо уже знать эти перемещения и форму изгиба стержня. Это затруднение в существующих методах обычно преодолевается тем, что строится соответствующий метод последовательных приближений, с помощью которого находится форма изгиба стержня для данного уровня нагрузки.

Заметим, что для малых прогибов, когда $(v')^2 \ll 1$ и $1 + (v')^2 \approx 1$, уравнение (8.28) переходит в знакомое приближенное линейное уравнение (8.3):

$$v = -\frac{M}{EJ} \qquad (8.29)$$

Различие кривых, получаемых из приближенного (8.29) и точного (8.28) или (8.27) уравнений, удобно проиллюстрировать на примере изгиба гибкой консоли моментом ***M*** (рис. 8.14). Из уравнения (8.29), интегрируя, получим квадратную параболу (рис. 8.14, ***а)***

$$v = \frac{Mi^{1}}{EJ}. \qquad (8.30)$$

в то время как из точного уравнения (8.27) при Л/=const следует, что это будет окружность с радиусом ***p=EJ/M***

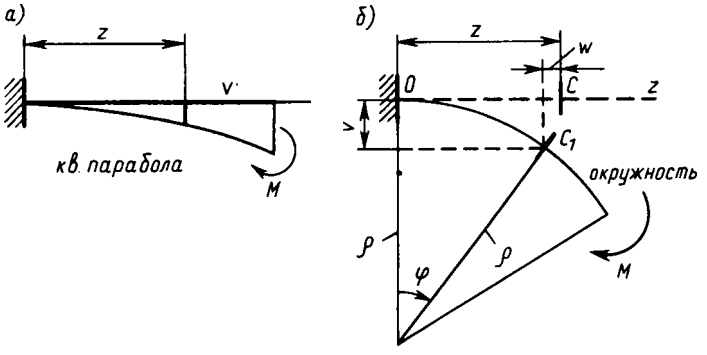


Рис. 8.14. Сравнение кривых, получаемых из приближенного и точного уравнений

(рис. 8.14, ***6),*** для которой перемещения v и ***w*** произвольного сечения С будут

$$v=p\,—pcOs(p=p\ (1—\cos q>)=p\ [1—\cos (z/p)];\quad w=z—p\sin q>=p\,[z/p—\sin (z/p)], \tag{8.31}$$

где **<p=z/p.** При v-»0 очевидно ***p***-*оо и отношения ***(z/p)*** становятся малыми. Разлагая sin ***(z/p)*** и cos ***(z/p)*** в степенной ряд по аргументу ***(z/p)*** и ограничиваясь двумя первыми членами этих рядов, при ***p=EJ/M*** из (8.31) получим

$$v=-\frac{Mz^1}{1EJ'}\qquad w=-\frac{Mz^3}{6\,(EJ}\qquad 2v^* \tag{8.32}$$

Сравнивая (8.30) и (8.32), видим, что выражение v, полученное в пределе из точного решения, совпадает с тем, что дает приближенное уравнение. По поводу ***n*** можно сказать следующее: если V рассматривать как малую первого порядка, то н>, будучи пропорциональной V^2, будет малой второго порядка и именно поэтому в § **8.1** при малых прогибах можно было принять н>=**0**.

§ 8.9. Метод Максвелла—Мора

До сих пор перемещение было результатом решения дифференциального уравнения и представлялось в виде аналитических функций. Но практически использовать аппарат дифференциальных уравнений для произвольной стержневой системы довольно громоздко. Кроме того, во многих случаях не требуется находить функции перемещений, а достаточно лишь вычислить перемещения в конкретных точках конструкции по фиксированным направлениям. Именно эту задачу успешно решает метод, предложенный в 1864 г. английским физиком Дж. Максвеллом для ферм и вторично открытый в 1874 г. немецким ученым О. Мором, в дальнейшем развитый на общий случай деформаций стержневой системы. Он основывается на использовании ***принципа возможных перемещений.***

Из математики:

$$\sin x=x-\frac{X^3}{3!}\ (-\text{jc-*0}\qquad \text{H-----...}\quad 5!$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}\ \text{---------1-*-*0}\qquad \text{H-----...}\quad 4!$$

Рассмотрим этот метод на примере плоской стержневой конструкции (рис. 8.15).

Условимся вначале о стандартном обозначении перемещений. Проекцию полного перемещения ***CC*** на некоторое фиксированное направление ***n—n*** будем обозначать Дф, где первый индекс представляет номер искомого перемещения (л = 1, 2, 3, ...). Второй индекс ***p*** указывает причины, вызывающие деформации отдельных элементов системы и, как следствие, перемещение A_v. Это могут быть нагрузка (как это показано на рис. 8.15), изменение температуры (тогда вместо ***p*** пишется ***t),*** деформации от усадки материала, его ползучести (см. гл. 16) и т. д.

Для определения перемещения ***Ащ,*** Максвеллом было предложено рассматривать данную систему в двух состояниях: в состоянии ***p*** (грузовое состояние) и состоянии ***n*** (вспомогательное состояние).

В грузовом состоянии заданными считаются деформации отдельных бесконечно малых элементов стержней системы. Например, на рис. 8.16 это будут деформации удлинения АсЦ,, изгиба d***q***>$_r$ и сдвига у,d***s,*** вызвавшие элементарные перемещения dA,,,. Если эти деформации являются упругими, то с внутренними силами N_p, M_p и Q_p они связаны известными соотношениями

$$\text{Adj}_p = \frac{M_p ds}{EJ} \quad \text{d}\,q>\,,\,\bar{\cdot}_{\Gamma} \quad kQ, \tag{8.33}$$

где ***к*** — коэффициент по формуле (7.35), учитывающий неравномерность распределения касательных напряжений в сечении при изгибе.

Если найдем элементарное, перемещение dA_v. (рис. 8.16), то полное перемещение получим как определенный

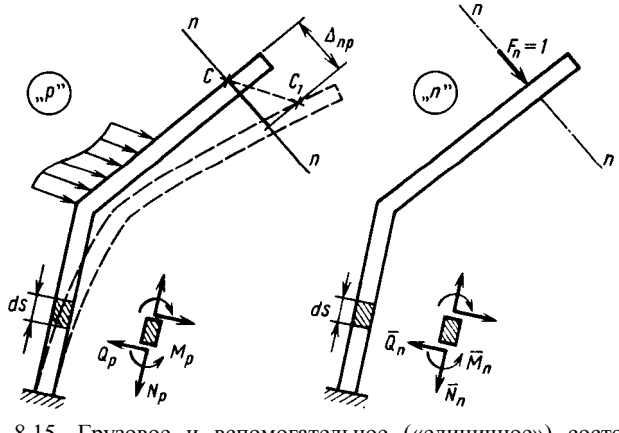


Рис. 8.15. Грузовое и вспомогательное («единичное») состояния в методе Максвелла — Мора

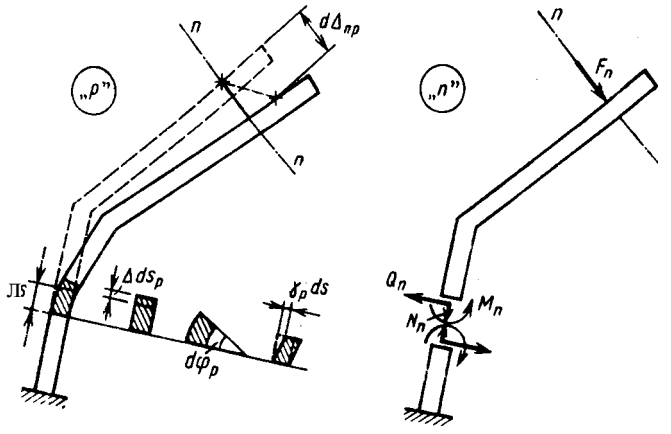


Рис. 8.16. Определение элементарного перемещения ёД^, вызванного деформацией одного элемента <15

интеграл по всей длине стержней ***Ь:***

$$\text{А/ч>=1}\ \int_{\text{о}}^{\text{£,}} \text{¿А*}. \qquad (8.34)$$

Для определения ¿А,* используем вспомогательное состояние ***n,*** которое получается от загружения системы силой ***Г„,*** прикладываемой и ориентируемой так, чтобы она совершала работу на искомом перемещении $Л_9$. Для этого она направляется по линии ***n—n.*** Как мы увидим, эта условная нагрузка является безразмерной и в дальнейшем принимается равной единице, поэтому внутренние силы от такого единичного загружения отмечают сверху черточкой, т. е. ***Я„, Й„,*** а само состояние ***n*** называют ***единичным.***

Напомним из курса теоретической механики общее ***щ*** энергетическое условие равновесия системы сил, а именно ***принцип возможных перемещений: для системы сил, нахо-*** Принцип возмож-
дящейся в равновесии, суммарная работа этих сил на ных перемещений
любых возможных перемещениях (т. е. бесконечно малых перемещениях, допускаемых связями системы) равна нулю.

Применим этот принцип для определения элементарного перемещения возникшего в состоянии ***р*** от деформаций одного только элемента ¿у (рис. 8.16). Там же в состоянии ***n*** показаны внешняя сила .Р. и уравновешивающие ее внутренние силы ***Ы„, М„, ()„,*** очевидно, пропорциональные силе .Г,:

$$N_n = F_n \bar{N}_n; \quad M_n = F_n \bar{M}_n; \quad Q_n = F_n \bar{Q}_n, \qquad (8.35)$$

где $\bar{N}_n$, $\bar{M}_n$, $\bar{Q}_n$ — **внутренние усилия от** $F_n = 1$.

В теоретической механике принцип возможных перемещений формулируется для твердых тел. На рис. 8.16 в состоянии ***n*** деформируемая часть материала элемента dy мысленно удалена и заменена воздействием внутренних сил N_n, M_n и Q_n на соседние части стержня, рассматриваемые при применении принципа как твердые.

Ввиду малости перемещений в состоянии ***p*** примем их на рис. 8.16 в качестве возможных для сил состояния ***n.*** Возможная работа этих сил вычисляется как произведение (с соответствующим знаком) усилия, взятого из состояния ***n*** на соответствующее перемещение из состояния ***p.*** В результате получим

$$F_n dA_v-(N_j A ds_r+M_n dq>_f+Q_n y_p ds)=0, \qquad (8.36)$$

откуда, разделив все на F_n и учтя (8.35), найдем

$$dA_v(N, Ads,+M_n d(p_n+Q_n y_f ds)=fl_n Ads_f+\}_n d(p_n+ \\ + \&?,\&. \qquad (8.37)$$

В формуле (8.37) $fl_K=NJF_n$ ... как раз представляют упомянутые выше внутренние усилия в «единичном» состоянии от безразмерной силы $F_n=1$.

Подставляя (8.37) в (8.34), получим ***формулу Максвелла—Мора*** для перемещения A_v при заданных деформациях Ad?,, d $q>_p$, y, (произвольной природы):

I

Формула Максвелла—Мора в случае:

— произвольных деформаций

$$A_v=\int_0^L Ян\ Ady,+\int_0^L K\}'dq>,+\int_0^L Q_n y_f ds. \qquad (8.38)$$

В частном случае для упругих деформаций (8.33) эта формула получит вид

— упругих деформаций

$$\Delta_{np}=\int_0^L \frac{\bar{N}_n N_p}{EA}\,ds+\int_0^L \frac{\bar{M}_n M_p}{EJ}\,ds+\int_0^L \frac{k\bar{Q}_n Q_p}{GA}\,ds. \qquad (8.39)$$

Таким образом, ***геометрическая задача определения перемещений точек системы по известным деформациям ее элементов свелась к хорошо изученной статической задаче, а именно построению эпюр внутренних усилий в грузовом состоянии p, то же во вспомогательном состоянии n от силы $P_n=1$ и последующему вычислению соответствующих интегралов в формуле (8.39), называемых интегралами Мора.***

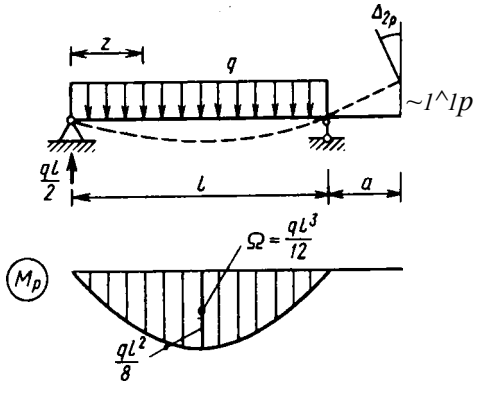
Последняя операция условно называется «перемноже-

нием эпюр», для которого удобно использовать методы, изложенные в Приложении I (формула Верещагина и формула Симпсона), приспособленные для вычисления См. Приложение I интегралов следующего вида:

/=}/(!)*■(*)*.
a

К ним относятся и интегралы Мора, поскольку любое из внутренних усилий в (8.39) является функцией координаты 5. Приведем примеры использования формулы Максвелла—Мора.

Пример 8.7. Определить на конце ковсоли прогиб и угол поворота *&2р,* учитывая лишь деформации, вызванные изгибающими моментами (рис. 8.17).



o -^тттт^тТПТК]'

X,



Рис. 8.17. К примеру 8.7. Определение прогиба и угла поворота по формуле Максвелла — Мора

Решение. В пролете \^*f(qlz-qz¹)|2,* на консоли Л/,-0. От силы $_{л}$ = 1 в пролете моменты *M*\ — —*za/ 1.* По формуле (8.39), удерживая лишь второе слагаемое путем непосредственного интегрирования, получим

$$_{л}\,\Gamma_{\,b.}\,\Gamma 1\,(Л)$$
$$\text{J } E/\,)\,E1\backslash\ 1)\backslash 2\ 2/\ 24£/$$

В этом же иримере используем формулу Верещагина (см. Приложение I). Площадь криволинейной эпюры О—(2/3) *(∂!²/Я)1—^г/12,* а ордината под центром тяжести *(—а/2).* Их произведение дает тот же результат.

$$\frac{1}{EI}\cdot\frac{EJ}{12}\cdot\frac{2}{24EI}$$

Полученный для А/, знак минус говорит о том, что возможная работа силы *Р* «■ 1 на фактическом прогибе А;, будет *отрицательной.* Следовательно, фактический прогиб $Д_{у/}$ будет противоположен силе *Р* ■» 1, т. е. направлен вверх.

Приведенный пример позволяет сформулировать правило знаков при пользовании формулой Максвелла—Мора:

Правило знаков для перемещении, получаемых по формуле Максвелла—Мора

направление единичного воздействия $/_{r}$,= 1 *выбирается произвольно. Полученный по формуле (8.39) знак указывает на то, что искомое перемещение либо совпадает (если получен плюс), либо противоположно (минус) принятому направлению* $/_{r}$,= 1.

Найдем теперь угол поворота Д^. Для этого надо выбрать такое единичное воздействие $P_2=1$, которое бы совершало работу на угле поворота. Таким воздействием является момент. Построив эпюру $А?_2$ от этого момента, по формуле Верещагина найдем

$$\frac{1}{EI}\cdot\frac{EJ}{12}\cdot\frac{1}{24}$$

Площадь $Ci=ql^{b}¡12$ и ордината под ее центром тяжести (1/2) взяты положительными, поскольку ординаты эпюр M_{z} и $А?_2$ отложены в одну сторону; следовательно, их произведение положительно. Угол направлен как момент против часовой стрелки, поскольку полученное значение $Д_2$,>0.

Перемещение $А_{щ}$, определяемое по ф-ле Максвелла—Мора, шляется обобщенным перемещением

Определение угла поворота Д^ в примере 8.7 указывает на то, что в общем случае на перемещение Д^,, получаемое по формуле Максвелла—Мора, надо смотреть как на *обобщенное перемещение.* В зависимости от вида единичного загружения механический смысл А,, может быть различен. Так, две единичные силы, приложенные на одной линии в противоположные стороны, дают изменение расстояния между точками приложения этих сил, а два единичных момента — угол взаимного поворота сечений.

$Г_{Й:1}$

$'/Я/Л$

^ ~~ Ли

Пример 8.8. Найти взаимный угол поворота $Д_{ip}$ сечений, соединенных шарниром, учитывая деформацию изгиба балки с жесткостью EJ и растяжения вертикального стержня, у которого жесткость $EA = \beta\,(EJ/l)$, где $\beta = 48$.

J

ш

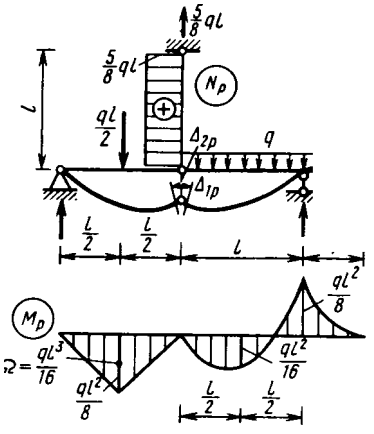


Рис. 8.18. К Примеру 8.8. Определение перемещений в комбинированной системе (с учетом изгиба и растяжения)

Решение. Соответствующее обобщенное (групповое) единичное воздействие показано на рис. 8.18 в виде двух моментов $F\backslash = 1$, приложенных к рассматриваемым сечениям. Формула (8.39) в данном случае получает вид

$$-\text{Я}\,\text{М}\,\frac{L}{\text{O}}\,\frac{L}{\text{O}}\,\frac{M.M,}{EA\ J\ ET}\,ds.$$

Эпюры //р, M_p, н $M\backslash$ изображены на рисунке. Перемножение эпюр проводим по участкам: на вертикальном стержне я левом пролете — по формуле Верещагина, а на правом пролете — по формуле Симпсона:

$$4,,._{}^{5}£.?\_\ ^{\wedge}1_{+}ЛГ_{0\_4}«т_{+0}].$$

$$'8\ ЕЛ\ I\ \backslash 16EJ/\ 2\ 6£/|\_\ \backslash 16/\ \backslash 2/\ ]$$

$$5\ \partial 1^{3}\ 5\ 9/^{3}\ 5$$

$$4\ РШ\ 96\ Ш\sim\ 192\ ЕУ$$

Решите задачу 8.7

Знаки минус поставлены потому, что знаки ординат перемножаемых эпюр M_p и $M\backslash$ противоположны. Поскольку результирующий знак $\&1p < 0$, сечения получают относительный поворот в стороны, противоположные единичным моментам $\wedge = 1$.

Как видим, в формуле Максвелла—Мора каждый интеграл четко выражает вклад соответствующей деформации в искомое перемещение. Обычно учитывают лишь основные виды деформации. В изгибаемых конструкциях учитывают влияние изгибающих моментов, а поперечными силами пренебрегают. В комбинированных систе-

мах, где часть стержней работает на растяжение—сжатие, а часть — на изгиб, учитываются обе эти деформации' как это показано в примере 8.8. В фермах, где каждый /-й стержень работает на растяжение—сжатие и на длине /(эти усилия постоянны, в формуле (8.39) остается только первый интеграл, который приводит к сумме

;

Формула Максвелла для ферм

$$\Delta_{np} = \sum_{i} \frac{N_{pi} N_i}{EA_i} l_i, \qquad (8.40)$$

Именно эта формула была получена Дж. Максвеллом для ферм в 1864 г. и независимо от него вновь получена и обобщена О. Мором в 1874 г.

Пример 8.9. Вычислить полное перемещение точки С фермы Дс (рис. 8.19), считая жесткость *ЕЛ* всех стержней одинаковой.

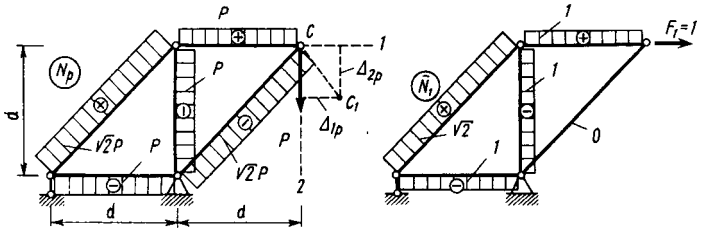


Рис. 8.19. К примеру 8.9. Определение полного перемещения узла С в ферме

Решение. Полное перемещение найдем через составляющие Дс— =-у/д 5,+Ду где $Д_{1P}$ — горизонтальное, а $Д_{iP}$ — вертикальное перемещения. По (8.40) получим

$$Л/_{„}=1\ /_{2}=з \ — \ \frac{\sim JP}{ЕЛ}\ y/\sim u=\{ъ+гу/г)\ —=5_{2}83\ —_{ЁЛ}$$

Аналогично найдем $Ар_{,i}$=(3+4-$_s$/2) *[Pd/(EA)]* = 8,66 *[Pdj(EA)*, после чего получим Ас =10,44 *[Pdj(EЙ)*.

Если стержни входят в состав пространственной конструкции и число внутренних усилий в сечении увеличивается, то в формуле (8.39) добавляются соответствующие слагаемые. Так, при учете деформаций изгиба относительно осей *x* и *y* и деформации кручения стержней формула Максвелла—Мора получит вид

$$A - \sum_{i} \left(\frac{N_{pi} N_i}{EA_i} + \frac{M_{xpi} M_{xi}}{EJ_{xi}} + \frac{M_{ypi} M_{yi}}{EJ_{yi}} + \frac{M_{kpi} M_{ki}}{GJ_{ki}} \right) l_i. \qquad (8.41)$$

Вопросы для самоконтроля к главе 8

8.1. Как связаны функции прогибов, углов поворота сечений и углов наклона касательных к оси балки (без учета деформаций сдвига)?

8.2. Напишите цепочку дифференциальных зависимостей, выражающих элементы изгиба (углы поворота, внутренние усилия и нагрузку) через функцию прогибов.

8.3. Из каких условий находятся постоянные интегрирования дифференциальных уравнений второго и четвертого порядков?

8.4. Как используются условия непрерывности перемещений при нескольких участках интегрирования?

8.5. В чем состоит общая идея метода начальных параметров? Запишите универсальную формулу для прогибов н углов поворота второго участка в общем случае нагружения (ДА/,■= А/, *&0.\=P,* Д?1 *= *q)*■

8.6. Как изменится ответ на вопрос 8.1 с учетом деформации сдвига? Запишите дифференциальные уравнения первого и второго порядков с учетом сдвигов.

8.7. Из каких частей состоят полная энергия деформации балки ори изгибе? Из каких соображений определяется коэффициент, учитывающий неравномерность распределения касательных напряжений в сечении при определении прогибов?

8.8. Чем отличаются дифференциальные уравнения прогибов для жестких и гибких элементов конструкций?

8.9. Опишите порядок определения перемещения по формуле Максвелла—Мора. Как выбирается единичное загружен«? Как определяется истинное направление перемещения?

8.10. Какие практические способы используются при вычислении интегралов Мора и в чем они состоят?

Задачи к главе 8

8.1. Путем интегрирования уравнений первого или второго порядка получить перемещения, указанные в таблице.

Таблица к задаче 8.1

*1**	Схема	Характерный щюгвб	Угол поворота
1		\2*J* 384 *EJ*	<*P* (0)=»-Ф (0- *ql*[1] / *24 EJ*
2	*u* ----------	\2/ 16 *EJ*	*MI* / *MI* <*p* (0=*____ 6 EJ*
3	¡' м М 1 1 If .	*ql** v(0“ 8 EJ	*ql*[3] <p(0« 6 EJ
4	f” J[1]*	*ft*[3] v (/)-------- 3 EJ	*Fl*[2] *v(* 0_ 2EJ
5	**1**—	*MI*[2] v (/)------- 2EJ	*MI* 9>(0---- EJ

8.2. Вычислить прогиб посередине балки и построить эпюру изгибающих моментов, определив моменты на концах и в середине балки. Указание: использовать уравнение четвертого порядка (см. пример 7.1).

8.3. Построить линию прогибов, вычислив прогибы в четвертях пролета и углы поворота на концах балки (согласовать очертание упругой линии с эпюрой моментов).

8.4. Построить ливню прогибов, вычислив прошбы в точках *B* и *D.* Найти так, чтобы балка удовлетворяла условию прочности и условию жесткости, если *R* >=200 МПа, v_m.//= 1/200. В качестве v,^ принять больший из прогибов \в и *vp, 1=6* м; сечение — двутавр **№ 20.**

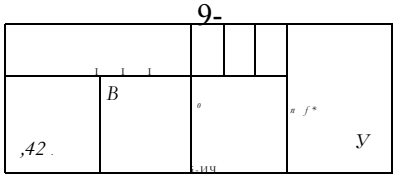


Рис. к задаче 8.4

8£. При испытаниях балки был замерен прогиб посередине пролета /. Принимая, что нагрузка на балку изменяется по длине по закону 9 “ ¥о яп (*mЦ*), найти напряжения <σ_{max} в балке, действовавшие в момент испытаний. Указание: целесообразно воспользоваться уравнением четвертого порядка.

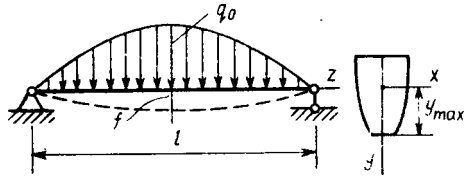


Рис. к задаче 8.5

8.6. Найти прогиб посередине пролета без учета сдвигов v« и с учетом сдвигов $^{v}ht+Q$ и сравнить их, вычислив отношение /?•* =ᵛWᵛv+e- Дано: *∂=40* кН/м; *1=6* м; сечение — двутавр № 40; *к^A/A„,* где *А* — площадь всего сечения; *А„* — площадь сечения стенки.

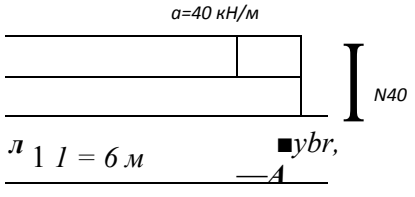
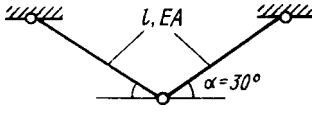


Рис. к задаче 8.6

8.7. Для конструкции, рассмотренной в примере 8.8 (см. § 8.9), дополнительно вычислить прогиб среднего шарнира и прогиб у конца консоли Дз,.

8.8. По формуле Максвелла (8.30) вычислить перемещение точки приложения силы *Р.*



LEA

8.9. Стержни системы, приведенной в задаче 8.8, равномерно нагреваются на /°С. По формуле (8.28) найти вертикальное перемещение А у, конца консоли, если коэффициент температурного расширения а. Указание: для элемента стержня Да*,—afdi.

8.10. Для трехшарнирной рамы найти горизонтальное перемещение ригеля и взаимный угол поворота сечений у среднего шарнира А *2р.* Учесть только деформации изгиба, £7=соп51.

-Н-

Рис. к задаче 8.10

Ответы к задачам главы 8

8.2. v (//2)=(1/384) *[ql*/(EJ)]; M* (0) = *M* (/) = —?/'/12; *M* (//2)=?/³/24. 8.3. v (//4)= -v (3//4) = = *-Ml²l(\2SEJ); <P* (0*) = q> {!)=-M1Ц1АЕ1).* 8.4. v_a=(8/384) *[ql4{EJ)*\, v_c = (9/384) *[ql*¡(EJ)*\, $?_{раС4}$ = = 3,63 кН/м из условия жесткости. 8.5. ($7_{пих}$=я²£/$у_{т4х}$//². 8.6. $y_м$=(5/384) *[ql*/(EJ)];* $v_ß$ = = (1/8*)[ql²KGA„)], ß* = 0,96. 8.7. A_2,=(5/8) *[ql²/{EA)*\, *$A_{3р}$ = (ip6S) [ql*/(EJ)].* 8.8. А„ = 6 *ШЕА)].* 8.9. Дл = 6а//. 8.10. $A_{/р}$ = (5/24) [<70*/(£7)], $A_{2р}$ = (l/24) [$_9$fl³/(^]-

ОСНОВЫ РАСЧЕТА ПРОСТЕЙШИХ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ

§ 9.1. Статически неопределимые системы

Настоящая глава посвящена расчету простейших статически неопределимых систем. Методы расчета сложных статически неопределимых систем излагаются в курсе «Строительная механика».

Рассмотрим стержневую систему, находящуюся в равновесии при действии заданных нагрузок. Если все реакции в связях закрепления, а также внутренние усилия в элементах системы могут быть определены исходя из уравнений равновесия, то такая система называется *статически определимой.*

Статически определимые системы

Простейшим примером такой системы является балка, показанная на рис. 9.1, *а.* Если число опорных связей в балке уменьшить, например до двух (рис. 9.1, *б),* то балка превращается в *геометрически изменяемую систему* (механизм).

Геометрически изменяемые системы

Геометрически изменяемой называется система, в которой перемещения ее точек или элементов могут происходить без деформации стержней.

Таким образом, необходимое число опорных связей в балке или стержневой системе должно быть не менее трех.

В отличие от второй балки (рис. 9.1, б) балка на рис. 9.1, *а* является примером геометрически неизменяемой системы.

Геометрически неизменяемые системы

Геометрически неизменяемой называется такая система, в которой перемещения точек или элементов возможны только за счет деформации стержней.

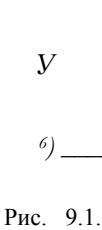


Рис. 9.1. Примеры статически определимой, геометрически изменяемой и статически неопределимой систем

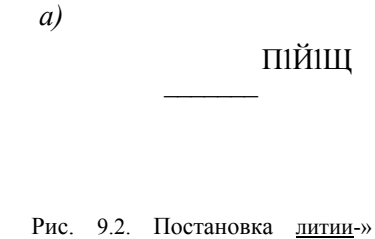


Рис. 9.2. Постановка литии-» связей (двух промежуточных опор) приводит к значительному уменьшению прогибов балки

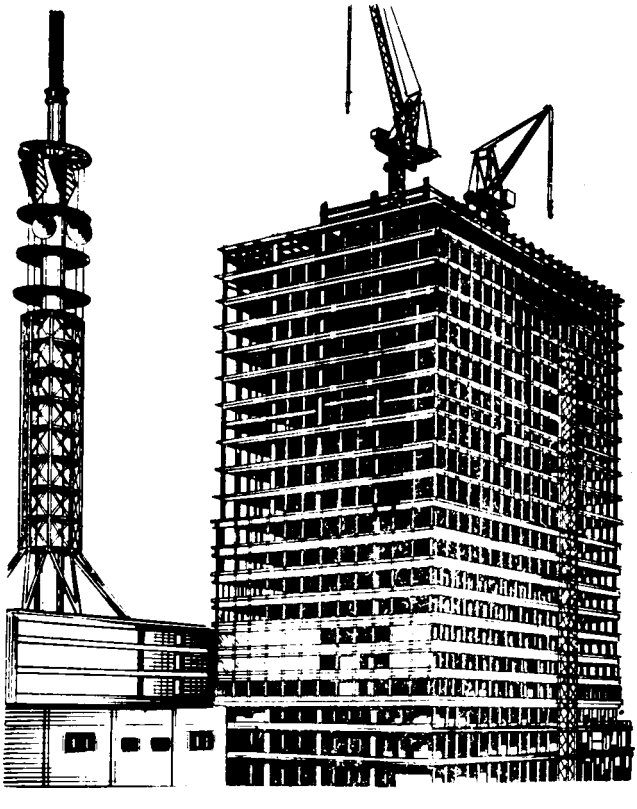


Рис. 9.3. Примеры статически неопределимых систем:
а — пролетное строение моста в виде неразрезной балжи; *б* — каркас здания, представляющий собой статически неопределимую пространственную систему

Статически неопределимые системы

Но в балке может быть не три опорные связи, а больше (рис. 9.1, *в*). Значения опорных реакций в такой балке нельзя найти исходя только из уравнений равновесия. Подобные системы называются *статически неопределимыми.*

По сравнению со статически определимыми неопределимые системы имеют дополнительные связи, которые называют *лишними.* В балке (рис. 9.1, *в)* есть две лишние связи.

Липшие связи

Термин «лишние связи» является условным. Эти связи являются лишними только с той точки зрения, что число связей превышает число уравнений равновесия. В действительности указанные связи являются необходимыми, поскольку при их отсутствии прочность или жесткость конструкции могут быть необеспеченными. Из рис. 9.2, *а, б* видно, что при действии одинаковой нагрузки прогибы в статически определимой балке (рис. 9.2, а) в несколько раз больше прогибов в статически неопределимой балке (рис. 9.2, б).

Именно способностью статически неопределимых систем воспринимать большую нагрузку по сравнению со статически определимыми системами, сохраняя при этом прочность и жесткость конструкции, объясняется их широкое распространение в технике. Для примера на рис. 9.3, *а* показан мост, пролетное строение которого представляет собой неразрезную балку постоянного сечения, а на рис. 9.3, *б* — каркас здания, являющегося сложной многократно статически неопределимой системой.

■

Степень статической неопределимости системы

Усилия в лишних связях называются лишними неизвестными; их число совпадает с числом лишних связей, которое определяет степень статической неопределимости системы.

Степень статической неопределимости можно найти как разность между числом искомых усилий и числом независимых уравнений равновесия, которые можно составить для их получения.

Для балки (см. рис. 9.2, *б)* число неизвестных реакций равно пяти, а число уравнений равновесия для их отыскания — трем. Следовательно, балка является дважды статически неопределимой системой.

§ 9.2. Основная система метода сил

Метод расчета статически неопределимых систем, элементы которых испытывают изгиб, по существу, не отличается от рассмотренных ранее методов расчета статически неопределимых систем при растяжении и кручении.

Сначала в заданной системе отбрасываются лишние связи, а вместо них прикладываются лишние неизвестные $X_1, X_2, \ldots, X_n$. При отбрасывании лишних связей нужно следить за тем, чтобы новая система была геометрически неизменяемой. Полученная таким образом статически

а)

б)

Рис. 9.4. Примеры основной системы для два раза статически неопределимой балки

определимая и геометрически неизменяемая система называется *основной системой.*

Основная система

Поскольку за неизвестные в дальнейшем принимаются усилия в лишних связях, то такой метод расчета статически неопределимых систем получил название *метода сил.*

На рис. 9.4, *а* показана основная система для балки, приведенной на рис. 9.2, *б.*

Лишними связями считаются две промежуточные подвижные опоры. В этом случае основная система представляет собой однопролетную балку, шарнирно опертую по концам. Однако в качестве липших можно выбрать и другие связи. Например, можно отбросить связи над промежуточными опорами, которые воспринимают изгибающий момент. Тогда основная система представляет собой три отдельные шарнирно опертые по концам балки (рис. 9.4, *б).*

Сравните основную систему для балки с основной системой для стержня при растяжении

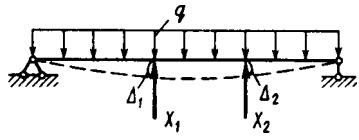
Заметим, что балки такого типа, как представленная на рис. 9.2, *б,* носят название неразрезных балок. Они могут иметь разное число пролетов и находят весьма широкое распространение в строительных конструкциях. Укажем, что с точки зрения упрощения вычислений основная система для неразрезной балки, полученная путем врезания шарниров над промежуточными опорами, всегда более предпочтительна по сравнению со всеми другими основными системами. Подробно особенности расчета неразрезных балок обсуждаются в курсе «Строительная механика».

<*7

§ 9.3. Канонические уравнения метода сил. Примеры расчета статически неопределимых систем

Как уже отмечалось, уравнений равновесия недостаточно для определения усилий в необходимых и лишних связях. Поэтому для нахождения лишних неизвестных ц составляются дополнительные уравнения, которые носят название *уравнений совместности деформаций* или *уровне-* Уравнения дефор-
ний деформаций. Смысл их заключается в том, что пере- мацнй
мещения в основной системе, вызванные внешней нагрузкой и лишними неизвестными, должны быть такими же, как й в заданной системе. Это означает, что, например, в системе, показанной на рис. 9.5, перемещения А] и $Д_2$ должны быть равны нулю, так как в заданной

Рис. 9.5. Прогибы основной системы в виде однопролетной балки под действием неизвестных и нагрузки



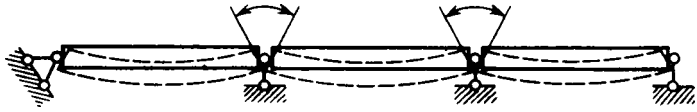


Рис. 9.6. Возможные прогибы основной системы в виде разрезной балки

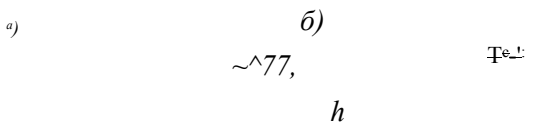


Рис. 9.7. Статически неопределимая рама и один из вариантов основной системы для нее. Возможные перемещения в основной системе

системе вертикальные перемещения сечений балки, находящиеся на промежуточных опорах, равны нулю.

Итак, можно записать

$$A, = 0, Д_2=0, \qquad (9.1)$$

что означает: *суммарные перемещения в основной системе, вызванные внешней нагрузкой и лишними неизвестными, по направлению самих неизвестных должны быть равны нулю.*

В том случае, когда лишними неизвестными являются изгибающие моменты над промежуточными опорами, аналогичные уравнения означают, что взаимные углы раскрытия сечений над промежуточными опорами должны быть равны нулю (рис. 9.6).

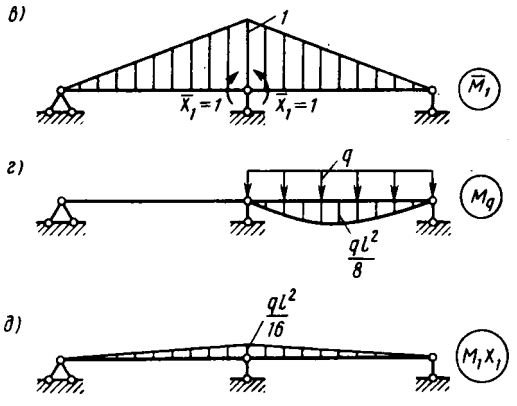
На рис. 9.7, *а* представлена два раза статически неопределимая рама и один из вариантов основной системы для нее (рис. 9.7, *б).* Условия (9.1) для этой системы означают отрицание вертикальных смещений концов горизонтальных стержней.

Пример 9.1. Рассмотрим один раз статически неопределимую балку (рис. 9.8, *а).* Основная система для нее показана на рис. 9.8, *б.*

Решение. На основании принципа независимости действия сил, в соответствии с которым перемещение, вызванное несколькими воздействиями, равно алгебраической сумме перемещений от каждого из этих воздействий в отдельности, уравнение деформаций можно записать следующим образом:

Д,=Д, (ДГ^+Д, (*)=0.

^¡E- л--------4--------£------ н



Ч£ Зо£
,16 32

N
\
ж; ?/
III I ш 9С ЧЖ® 7∂1
N /5

Рис. 9.8.. Статически неопределимая балка, основная система для нее и эпюры внутренних усилий

Первое слагаемое представляет собой перемещение по направлению неизвестного, вызванное ртим же неизвестным, а второе слагаемое —Л] (<?) = Д1ц — перемещение по тому же направлению, вызванное внешней нагрузкой. Величину Д] (Л^) удобно представить в следующем виде:

^1 (^“¿и *X*\>

где ¿и — перемещение по направлению неизвестного *X*\ от *К*\ = 1.

Тогда

Зц ^1+Д;?-0. (9 2)

Значения 5ц и Ау? проще всего определяются с помощью формулы Мора:

ГЩ *Г Й\ Мц*

Для вычисления интегралов построим эпюры *Й* (рис. 9.8, в) и *Мц* (рис. 9.8, г).

Перемножая эпюру *Й* саму на себя по правилу Верещагина, найдем

$$5_{,,}-2\ -1/\ -1\frac{/1\ \backslash\ 2\ 1\ 2I}{\backslash 2\ /3\ БI\ ЪE1}.$$

Для вычисления интеграла в выражении А/, воспользуемся квадратурной формулой Симпсона:

$$Д_{2?}\text{-------}\frac{I}{6E1}\Big(0\text{—}4\ \frac{I\ \partial P}{\backslash\ 2}\text{-'-----}\ 1\text{-}0\ \Big)\frac{я1^3}{8\ \}\ 2AE1}\text{--------}.$$

После подстановки полученных значений в уравнение (9.2) найдем * лишнее неизвестное:

$$5_u\ 16$$

После того как определено значение *X\,* внутренние усилия в заданной статически неопределимой системе могут быть найдены точно так же, как в статически определимых системах.

Однако ординаты эпюры изгибающих моментов *М* (окончательной эпюры *М)* проще определяются на основании принципа независимости действия сил в виде суммы:

$$M=A?1\ X\backslash + M_{9}. \qquad (9\text{-}3)$$

На рис. 9.8, *д* представлена эпюра *Й\X\,* а на рис. 9.8, *е* — эпюра *М.*

Окончательная эпюра поперечных сил *0* приведена на рис. 9.8, *ж.*

Рассмотренный алгоритм расчета один раз статически неопределимой системы легко обобщается на случай более сложных статически неопределимых систем. Например, для дважды статически неопределимой системы (рис. 9.7, *а)* уравнения деформаций (9.1) могут быть записаны в виде (рис. 9.9, *а—в)*

$$\begin{aligned} &^1=Л|\ №)+А]\ (-^2)+А/,=0;\\ &Аг = А2\ (А^ + Дг\ (-^2)+Аг_{?}=0. \end{aligned} \qquad (9.4)$$

Здесь А/ (Л'О, А/ *(X2)* — перемещения в основной системе по направлению /-го неизвестного (/=1, 2) соответственно от неизвестных X_x и X_2', А^ — перемещения по направлению »-го неизвестного от нагрузки.

Слагаемые А, (Л}) удобно записать следующим образом:

а, оо)=ад (»,у=1,2),

где — перемещение по направлению /-го неизвестного, вызванное единичным неизвестным X_j.

Рис. 9.9. Перемещения в основной системе, вызванные неизвестными и внешней нагрузкой

Тогда

¿п *X*\+¿и *Xz*+А $_{i9}$=0;

¿21 + ¿22 *X*\ + Д$_4$ = 0.

Я

Система кавоянческих уравнений метода сил

Система линейных алгебраических уравнений (9.5) носит название системы канонических уравнений метода сил (уравнения записываются по одному правилу или канону). Число уравнений совпадает со степенью статической неопределимости системы.

Перемещений $8_Ц$ и определяются по формуле Мора:

$$\delta_{ij}=\int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_j}{EI}\,ds, \quad \Delta_{iq}=\int \frac{\bar{M}_i M_q}{EI}\,ds. \tag{9.6}$$

Для этого необходимо построить эпюры моментов от единичных неизвестных и от нагрузки в основной статически определимой системе.

В том случае, когда в заданной системе имеется стержень, работающий только на растяжение или сжатие, те же перемещения находятся из выражений

$$\delta_{ij}=\int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_j}{EI}\,ds+\int \frac{\bar{N}_i \bar{N}_j}{EA}\,ds;$$

$$\Delta_{iq}=\int \frac{\bar{M}_i M_q}{EI}\,ds+\int \frac{\bar{N}_i N_q}{EA}\,ds, \tag{9.7}$$

где — нормальные силы в указанных стержнях от единичного неизвестного *%* и от нагрузки.

Интегрирование во вторых слагаемых ведется но длине стержней.

Из системы уравнений (9.5) находят неизвестные X_u X_2, после чего определяют внутренние усилия в элементах заданной системы, так же как это делается в статически определимых системах.

Поскольку эпюры изгибающих моментов в основной системе от единичных неизвестных и от нагрузки уже были построены в процессе отыскания неизвестных, то эпюру моментов M можно построить исходя из равенства

$$M=\bar{M}_y X_1+\bar{M}_2 X_2+M_1.$$

Прнмер 9.2. Построить окончательные эпюры изгибающих моментов, поперечных и нормальных сил в раме путепровода от заданной нагрузки (рис. 9.10, *а).*

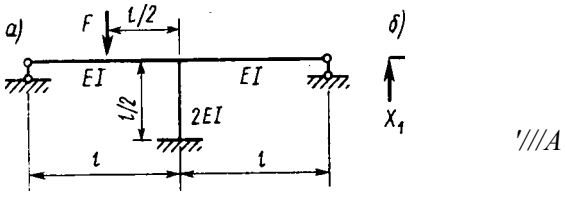


Рис. 9.10. Дважды статически неопределимая рама и основная система для нее

Решение. Рама два раза статически неопределима. Основная система для нее представлена на рис. 9.10, *б,* где в качестве неизвестных приняты усилия в подвижных опорах.

Система канонических уравнений записывается в виде

й 1 + ¿12 %2+

¿21 *X*\ + 522-^2 + Д^цг=0.

Дтя определения единичных *5у* и грузовых перемещений Дуг построим эпюры изгибающих моментов в основной системе от единичных неизвестных и от внешней нагрузки (рис. 9.11, *а*—в).

а) *5)*

x,=/ **x,** = /

у/////. ЖГ

в)

Рис. 9.11. Единичные и грузовая эпюры изгибающих моментов в основной системе

По формуле Мора найдем коэффициенты и свободные члены уравнений, воспользовавшись для вычисления интегралов правилом Верещагина и формулой Симпсона;

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}\cdot l\cdot\frac{2}{3}l\cdot\frac{1}{2}l + l\cdot l\cdot\frac{1}{2}l\right) = \frac{5}{12}\frac{l^3}{EI};$$

$$\Delta_{1P} = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}\cdot l\cdot\frac{2}{3}l\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{ql^2}{8}\cdot\frac{1}{2}l + \frac{1}{3}\cdot\frac{ql^2}{8}\cdot l\cdot\frac{3}{4}l\right) = \frac{7}{96}\frac{ql^4}{EI};$$

$$\delta_{2P} = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}\cdot l\cdot\frac{2}{3}l\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{ql^2}{8} + \frac{1}{3}\cdot\frac{ql^2}{8}\cdot l\cdot\frac{1}{4}l\right) = \frac{1}{48}\frac{ql^4}{EI}.$$

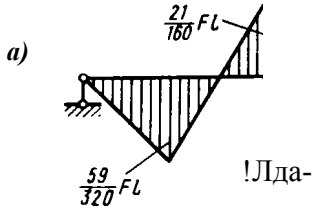
После подстановки полученных выражений в систему канонических уравнений и ее решения имеем

$$X_1 = -\frac{59}{160}P, \quad X_2 = -\frac{9}{160}P.$$

Окончательная эпюра изгибающих моментов определяете* равенством

$$M_{\text{ий}} = X_1 + \bar{I}1X_2 + M_P.$$

На рис. 9.12, *а* показана эпюра *М.*



!Лда-

53

В) /160

ГТЩГТ

■Нц

101 с

iШ 7^77.

б>

®

ЕЕ '160

7777,

Рис. 9.12. Окончательные эпюры внутренних усилий в статически неопределимой раме

Рассматривая статически определимую основную систему под действием найденных сил X_1, X_2 а также P, построим эпюры С и K представленные на рис. 9.12, *б, в.*

Прпир 9.3. Балка длиной 2/ загружена равномерно распределенной нагрузкой *а.* Посередине балка поддерживается упругой подвеской длиной /. Изгноная жесткость балки равна EI, а жесткость подвески на

растяжение — *ЕЛ* Грис. 9.13, *а)*. Необходимо построить эпюру изгибающих моментов в балке и найти усилие > упругой подвеске.

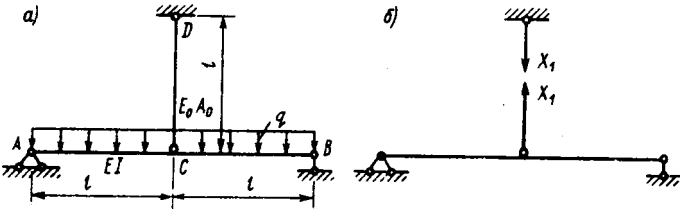


Рис. 9.13. Статически неопределимая комбинированная система и основная система дня нее

Система является одни раз статически неопределимой. Разрезая стержень СХ> и прикладывая в сечении усилия *X\,* действующие в нем, получим основную систему (рис. 9.13, б).

Каноническое уравнение записывается в виде

5ц^1+А/,г-0.

Физический смысл его заключается в отрицании взаимного смещения свободных концов разрезанного стержня в направлении

Так как в системе есть балка, работающая на изгиб, и подвеска, воспринимающая только растягивающее усилие, то заданная система относится к категории комбинированных систем.

Коэффициент дц и свободный член Д]$_?$ канонического уравнения

определяются по формуле (9.7), для чего должны быть построены эпюры изгибающих моментов от единичного неизвестного %\ и нагрузки, а также найдено усилие в подвеске от каждого из этих воздействий.

На рис. 9.14, *а, о* показаны эгооры *М\, М*$_г$ На рис.'9.14, *а* показано также усилие в подвеске от ^ — 1. От распределенной нагрузки усилие в подвеске в основной системе равно нулю.

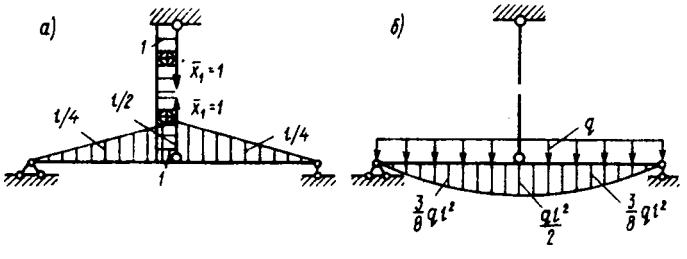


Рис. 9.14. Изгибающие моменты и нормальные силы в основной системе от единичного неизвестного и нагрузки

Для вычисления коэффициента 5ц воспользуемся правилом Верещагина:

$$\text{¿ц”2} - \frac{1}{2}\,/\,/ - \frac{2/1\ 117\ /^3\ /}{2\ 2\ 3\ 2\ £/\ ЕоЛо\ 6EI\ £o^o} \text{ h----},$$

а для вычисления свободного члена А,$_f$ — квадратурной формулой Симпсона:

Из канонического уравнения найдем

$$X_1 = -\frac{5ql^4}{384EJ}\Big(1+\frac{1}{6}\frac{EJ}{EA_0l^2}\Big)^{-1} = -\frac{5ql^4}{384EJ}\Big(1+\frac{1}{12}\frac{EJ}{EA_0l^2}\Big)^{-1}.$$

Введем обозначение

$$EA_0 = k\frac{EJ}{l^2}.$$

Тогда

$$X_1 = -\frac{5ql^4}{384EJ}\left(1+\frac{1}{12k}\right)^{-1}. \qquad (9.8)$$

Ординаты окончательной эпюры изгибающих моментов определяются суммой:

$$M = M_1 X_1 + M_F,$$

а усилие в подвеске — выражением

$$N = X_1.$$

Рассмотрим три случая:

1. $k = 0$. Это означает, что жесткость подвески равна нулю.

Очевидно, что $X_1 = 0$. В результате имеем $M = M_F$, $N = 0$, т. е. заданная система работает как балка, шарнирно закрепленная по концам. На рис. 9.15 эпюра, соответствующая этому случаю, показана пунктиром.

2. $k = \infty$. Такое значение k отвечает абсолютно жесткой подвеске, т. е. она превращается в жесткую подвижную опору, а заданная система представляет собой неразрезную двухпролетную балку.

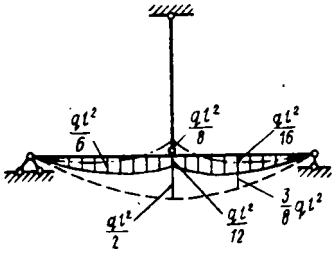


Рис. 9.15. Эпюры изгибающих моментов в комбинированной системе при различных соотношениях между изгибной жесткостью балки и жесткостью подвески при растяжении -— сжатии

Из равенства (9.8) следует

$$X_1 = -\frac{5}{4}ql, \quad N = -\frac{5}{4}ql.$$

Эпюра M для этого случая показана на рис. 9.15 штрихпунжтирной линией.

3. $k \to \infty$. Тогда

$$X_1 \to -\frac{5}{6}ql, \quad M \to -\frac{5}{6}ql^2.$$

Окончательная эпюра M показана на рис. 9.15 сплошной линией.

Анализ распределения усилий в системе для приведенных трех частных случаев свидетельствует о существенном влиянии жесткости подвески на работу конструкции.

§ 9.4. Расчет статически неопределимых систем по методу предельного равновесия

На примере систем, элементы которых работают на одноосное растяжение или сжатие (см. гл. 3), уже обсуждались принципиальные вопросы расчета конструкций по предельным состояниям. В настоящем параграфе рассмотрим особенности такого же расчета применительно к изгибаемым системам.

Допустим, что конструкция выполнена из идеального упругопластического материала, для которого справедлива диаграмма Прандтля с пределом текучести a_m.

Напомним, что исчерпание несущей способности статически определимой изгибаемой балки происходит тогда, когда в ее наиболее опасном сечении образуется пластический шарнир. В этом случае нормальные напряжения в сжатой и растянутой зонах поперечного сечения достигают значения, равного пределу текучести $<г_т$.

Предельное состояние системы

Для статически неопределимых систем образование одного пластического шарнира, как правило, не означает наступления предельного состояния. Переход системы в предельное состояние отождествляется с превращением ее из неизменяемой в геометрически изменяемую систему (механизм).

Поясним сказанное на примере двухпролетной неразрезной балки, показанной на рис. 9.16, *а,* поперечное сечение которой имеет две оси симметрии.

В упругой стадии работы балки распределение изгибающих моментов по ее длине определяется эпюрой, показанной на рис. 9.16, *б.* Как видно, наиболее опасным в упругой стадии является сечение под сосредоточенной силой. Нормальные напряжения в точках поперечного сечения балки определяются формулой

$$\sigma = \frac{M}{I_x} y,$$

а наибольшие напряжения равны

$$Omu L = \frac{M}{\min W_x}.$$

где W_x — момент сопротивления поперечного сечения.

Напряжения, равные пределу текучести, появляются в крайних точках поперечного сечения при силе

Эпюры *а* в сечениях над промежуточной опорой (сечение *1)* и под силой (сечение *2)* при $/_{\text{>}} = ^{\wedge}_1$ показаны на рис.

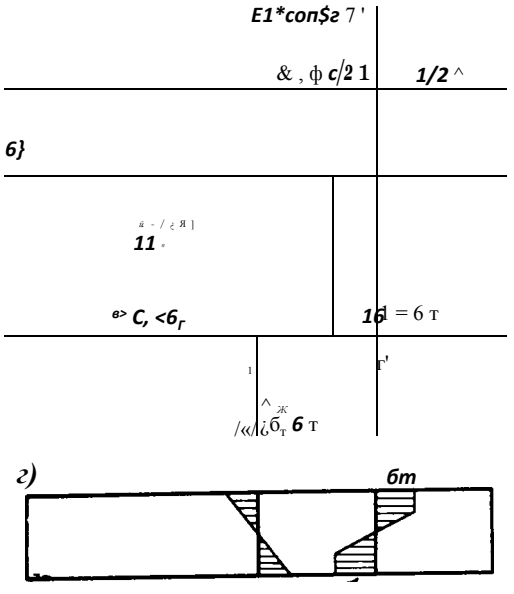


Рис. 9.16. Распределение изгибающих моментов и нормальных напряжений в упругой и упругопластической стадиях деформирования материала бала

При значениях силы />/] те же эпюры принимают вид, представленный на рис. 9.16, *г*.

С возрастанием силы Р (при />/$_1$) глубина зоны пластических деформаций в верхней и нижней частях сечения *2* увеличивается. Это продолжается до тех пор, пока в сечении *2* не образуется пластический шарнир, что происходит при силе (рис. 9.17, *а).* Изгибающий момент, соответствующий появлению пластического шарнира, равен

^пя = ^т И'ш,-

Здесь — пластический момент сопротивления поперечного сечения балки; $5'_{тжх}$ — статический мо - мент верхней половины поперечного сечения относительно нейтральной оси.

Расчетная схема балки и распределение напряжений в сечениях *1* и 2 при могут быть представлены, как показано на рис. 9.17, *а, б.*

Таким образом, с появлением пластического шарнира под силой балка превратилась в статически определимую.

Поскольку исходная система являлась один раз стати-

Рис. 9.17. Распределение напряжений в балке после образования пластического шарнира под силой

чески неопределимой, образование пластического шарнира снизило степень статической неопределимости на единицу. Это утверждение справедливо не только для рассматриваемой неразрезной балки, но и для общего случая статически неопределимой стержневой системы.

При последующем увеличении силы *Р* происходит увеличение изгибающего момента в сечении *1* до тех пор, пока в нем также не образуется пластический шарнир (рис. 9.18, *а, б).* Балка превращается в механизм (точка приложения силы *Р* может перемещаться по вертикали при неизменной силе *Р= Рщ,).*

Составляя уравнение равновесия

$$\text{с}=0,$$

найдем значение силы:

$$F_2=\frac{6M_{пл}}{l},$$

или

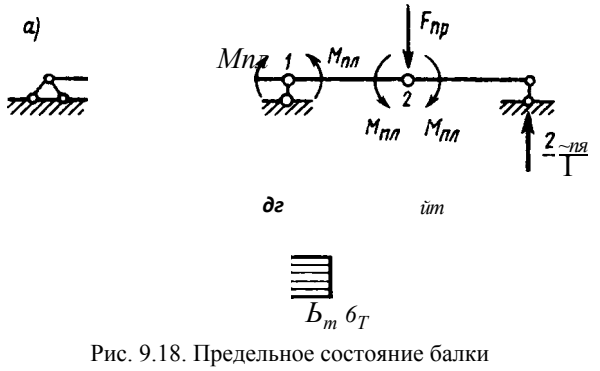


Рис. 9.18. Предельное состояние балки

Очевидно, сила /'$_{пр}$ является предельной нагрузкой для балки.

Отношение предельной силы к силе ^ равно

Аф_39 Гп,_39

Рх~32 Ж,~32 ’

где

а= ^сл
И'х’

В § 6.7 отмечалось, что отношение а больше единицы и его значение зависит от формы поперечного сечения.

Например, для балки прямоугольного сечения имеем

32 2 1,83.

Как видно, предельная сила значительно превосходит значение силы, при которой в крайних точках поперечного сечения впервые появляется текучесть волокон. Интересно обратить внимание на то, что для статически определимой балки аналогичное отношение равно

Вопросы для самоконтроля кглаве 9

9.1. Что называется статически определимой и статически неопределимой системами?

9.2. Что такое геометрически неизменяемая и геометрически изменяемая стержневые системы?

93. Что такое основная система метода сил?

9.4. В чем заключается выбор основной системы?

9.5. Каков физический смысл уравнений деформаций (канонических уравнений метода сил)?

9.6. Как определяются внутренние усилия в статически неопределимых системах?

9.7. Чем определяется предельное состояние изгибаемой системы?

9.8. Что такое предельная нагрузка? Как она определяется?

Задачи

9.1. Расчетная схема элемента обшивки деревянной опалубки представляет собой двухпролетную неразрезную балку. Расчетное значение интенсивности равномерно распределенной поперечной нагрузки равно 39 Н/см. Предполагая, что разрушение балки наступает в тот момент, когда наибольшие нормальные напря-

9.2. Определить внутренние усилия в сечении *к* поперечной рамы каркасного здания, вызванные горизонтальной равномерно распределенной (ветровой) нагрузкой. Сечение *к* располагается на вертикальном стержне близко к узлу рамы. Все элементы рамы имеют жесткость *EI*.

женив достигают значения расчетного сопротивления, определить толщину балки *к* Ширина и длина каждого пролета балки соответственно равны 15 см и 1 м. Расчетное сопротивление древесины при изгибе 14 МПа.

УМ?. ■

21

Рис. к задаче 9.2

Рис. к задаче 9.1

93. На рисунке показана расчетная схема фрагмента металлических подмостей. Найти значение сосредоточенной силы из условия, чтобы вертикальное перемещение узла системы не превышало (1/100)/; *EA=*12E1/(\/21²).*

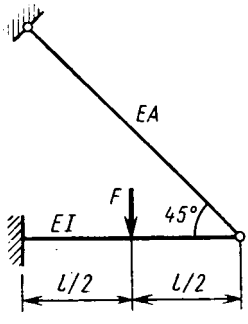


Рис. к задаче 9.3

9.4. В каком сечении *(I—1* или *2—2)* балки пластический шарнир образуется раньше? Материал балки идеально упругопласгический.

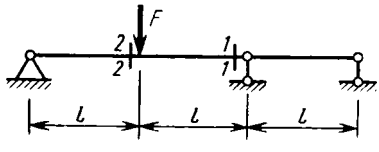


Рис. к задаче 9.4

9.5. Подобрать прямоугольное поперечное сечение элементов портальной рамы из условия наступления ее предельного состояния. Материал рамы идеально упругопластический- Ширина поперечного сечения горизонтального и вертикального элементов одинакова и равна *Ь.* Нормальные силы, действующие в элементах рамы, в расчете не учитываются.

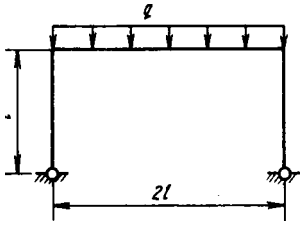


Рис. к задаче 9.5

Ответы к задачам главы 9

9.1. А = 3,73 см«4 см. 9.2. А/*»=15?/²/64, ЛГ*=?//4, {)*= —17?//64. Изгибающий момент вызывает растяжение внутренних волокон рамы. 9.3. ,Р=0,192£7//*. 9.4. Первый пластический шарнир образуется в сечении *2—2.* 9.5. А «* *д1²/(a_mЬ).*

ГЛАВА 10

БАЛКА НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

§ 10.1. Дифференциальное уравнение для функции прогибов и его общий интеграл

Основные понят ■ общий путь решения. Представим себе балку, лежащую на сплошном деформируемом основании, загруженную некоторой внешней нагрузкой (рис. 10.1). Балка изгибается и несколько вдавливается в оснорание, вследствие чего возникает реакция, распределенная по подошве балки *{упругий отпор).* Интенсивность упругого отпора в данной точке, отнесенную к единице длины балки, обозначим г (Н/м). Типичным примером такой балки является работа ленточного фундамента с заданной нагрузкой от сооружения. Другим характерным примером может служить работа корпуса плавающего корабля, где роль упругого отпора будут играть архимедовы силы выталкивания, а весь корпус рассматривается как достаточно длинная балка. Заметим, что к схеме работы балки на упругом основании приводятся многие задачи расчета элементов конструкций (расчет шпал, рельсов, оболочечных конструкций, резервуаров, сопряжений трубопроводов и др.).

Ясно, что балка на упругом основании представляет статически неопределимую систему, в которой внутренние усилия не могут быть найдены без рассмотрения деформаций. Действительно, для определения внутренних усилий в сечении балки надо знать упругий отпор, который, в свою очередь, зависит от вдавливания балки в основание, т. е. от ее прогибов. Степень статической неопределимости такой балки теоретически можно считать равной бесконечности, поскольку эпюра отпора име-

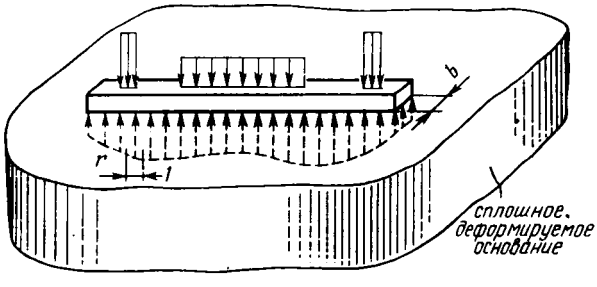


Рис. 10.1. Балка, опирающаяся на сплошное упругое основание

ет бесконечно большое число неизвестных ординат по длине балки.

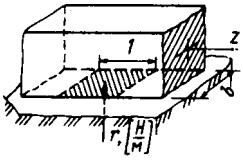
Общий путь расчета балки на упругом основании

Для разрешения этой своеобразной статически неопределимой задачи поступают следующим образом. В качестве основной неизвестной принимают *функцию прогибов балки* y=V *(г)* и составляют для нее соответствующее дифференциальное уравнение. Из решения этого уравнения находят функцию V *(г).* После этого, используя дифференциальные равенства (8.7), получают внутренние усилия в балке:

$$M=-ЬIV''; \qquad (10.1)$$

Дифференциальное уравнение для бадан, лежащей на винклеровом основании. Для расчета балки, связанной с упругим основанием, очень важными являются упругие свойства основания. Рассмотрим здесь частную, но очень распространенную модель деформирования основания, называемую винклеровым основанием (по имени немецкого ученого Э. Винклера (1835—1888), одним из первых введшим ее в расчетную практику).

Эта модель состоит в том, что реальное основание как бы заменяется бесконечным числом упругих, не связанных между собой пружин так, что реакция в каждой точке подошвы балки будет пропорциональна прогибу V в этой точке, равному осадке основания.



!

У подошвы балки шириною Ъ выделим участок длиной, равной единице, и соберем с площади *6x1* суммарную реакцию, считая отпор распределенным по этой площади равномерно. Тогда реакцию на единицу длины балки можно представить в виде

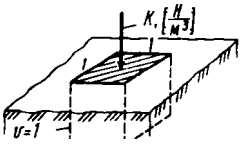
Интенсивность реакции по подошве балки на винклеровом основании

$$г=кЬу, \qquad (10.2)$$

где *к* — коэффициент жесткости упругого основания (коэффициент постели). Экспериментально он определяется путем вдавливания в грунт жесткого штампа.

Коэффициент постели к — это сила, необходимая для вдавливания в грунт штампа с площадью, равной единице, на прогиб y= 1; *размерность коэффициента к* (Н/м^3).

Коэффициент постели



Для примера приведем значения *к* для песчаного грунта различной плотности:

песок рыхлый — £=1,0...5,0 МН/м^3;

» утрамбованный — *к*= 10...100 МН/м^3;

» слежавшийся — £<250 МН/м^3.

На рис. 10.2 изображена балка на винклеровом упругом основании. С учетом внешней нагрузки и упругого отпора суммарная интенсивность распределенной нагрузки *р* в некоторой точке балки будет

$$р — д—г=ц—кЬ\. \qquad (10.3)$$

Для получения дифференциального уравнения используем последнее из равенств (8.7):

(ДуТ=Р=?-Ш.

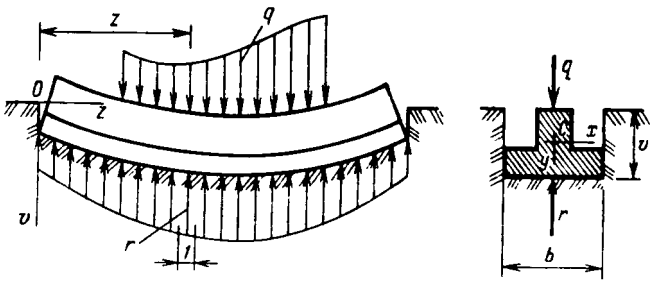


Рис. 10.2. Балка на винклеровом упругом основании

Отсюда, перенося все слагаемые, содержащие неизвестную функцию v, влево, получим

$$(EJ_x v^{ir})'' + kbv = q. \qquad (10.4)$$

;

Уравнение изгиба балки переменного сечении

Примем далее EJ_X= const. Тогда

(Ю.5)

То же для балки постоянного сечения на винклеровом основании

где обозначено

$$"=^4 M\ '»-ч- \qquad (10.6)$$

Коэффициент *P* зависит от относительной величины жесткости основания на просадку *kb* и изгибной жесткости балки EJ_X. Уравнения (10.4) и (10.5) представляют искомые дифференциальные уравнения изгиба балки, лежащей на основании типа Винклера: первое — для балок переменного сечения, а второе — постоянного сечения.

Заметим, что используются и более сложные модели основания, приводящие соответственно и к более сложным уравнениям. Так, в некоторых случаях учитываются касательные силы от взаимного скольжения подошвы балки по поверхности основания (при повороте сечений). Иногда упругий отпор (10.2) принимается зависящим не только от прогиба v, но и от производных прогиба v'_f v" и т. д. (здесь на этих расчетных моделях мы не останавливаемся).

Общкй интеграл уравнения (ЮЛ), поскольку это уравнение четвертого порядка, содержит четыре произвольные постоянные и имеет вид

$$v = v_l + v_J' = e^{-\beta l}\ (\mathrm{CiCos}/fe + \mathrm{Cisin}/te)\text{-}»\text{-}/^1\ (C_3 co«/fz + + C_4 \sin pz) + \mathrm{Vj}\ (q), \qquad (10.7)$$

y_2 — частное решение, зависящее от вида правой части, т. е. от нагрузки 0=0 (*).

Постоянные C_1 — C_4 определяются из граничных условий, формулируемых с учетом условий закрепления балки.

В частном случае нагрузки, распределенной по линейному закону

$$Я=Чо+Ча2, \qquad (10.8)$$

решение $ч_2$ можно задать также в виде линейной функции $Уг—А+Вг$. Путем подстановки в дифференциальное уравнение этих выражений найдем $A=qь|(4fl^{A}EJ_{j}b=qn|(kb)$ и $B=д_0'/(4р*Ш_х)=д_{ий}'ЦкЬ)$. Так что в этом случае

? 9о+?о'*

(‘м>

Механический смысл функции $у_2$ *(г)* по (10.9) — это поверхность просадки основания от нагрузки *д,* приложенной не к балке, а непосредственно к поверхности основания. Очевидно, что выбор частного решения в форме (10.9) возможен не только для линейного закона (10.8), но и для других законов *д (г),* если только соблюдается условие равенства нулю четвертой производной от функции $y_2=я/(кЬ),$ что непосредственно следует из уравнения (10.5).

Определение постоянных С, рассмотрим в следующем параграфе на более простом, но весьма важном случае расчета так называемой *полубесконечной балки.*

§ 10.2. Расчет полубесконечной балки. Краевой эффект

Бесконечную балку разрежем на две части и, отбросив одну из них, поместим начало координат в место разреза (рис. 10.3)..

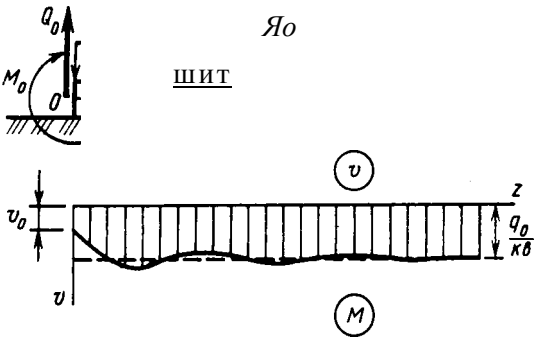
Балка, простирающаяся в области 0<2< оо, *называется полубесконечной.*

Пусть в начальном сечении такой балки заданы момент M_0 и поперечная сила *(?*$_0$, а на всей длине — равномерно распределенная нагрузка $д_0$. В решении (10.7) множитель е^-юо при ***г-* со,*** что противоречит физическому существу задачи. Чтобы устранить это противоречие, положим произвольные постоянные Сэ = С<=0.

Тогда общий интеграл для полубесконечной балки с учетом (10.9) при *до =0* получит вид

\

,г- \ *Яо*



Тгъ>^

Рис. 10.3. Краевой эффект в полубесконечной балке

$$y—e\sim^{z}\ (C\backslash \text{ сое } (_{i}z+ C_2 \text{ вт } /?г)+\frac{}{кЬ}. \qquad (10.10)$$

Для определения $C\backslash$ и C_2 имеем граничные условия в начале координат при $z=0$

$$- EЗ_X \text{ у}'' (0) = M_0; - EЗ_X \text{ V}^{\text{й}'} (0) = \text{Со}, \qquad (Ю. 11)$$

которые при подстановке в них (10.10) дают два алгебраических уравнения относительно $C\backslash$ и C_2:

$$\begin{aligned} &—Ш_x (0^1 \text{ С}, —2/?^2 Cг)\blacksquare\blacksquare Мл \mid \\ &—Ш_x (2p^3C1+2p^z C_2) \quad =<2\text{о}.\mid \end{aligned} \qquad (10.12)$$

Их решение дает

$$\text{С}, = \text{-ДА/о+Со} \quad C_z=-\frac{M_0}{20^* ЬI_x} \qquad (10.13)$$

Подставив эти выражения в (10.10) и используя равенство $<p=\backslash'$, а также (10.1) для внутренних усилий, получим полное решение для рассматриваемой полубесконечной балки в виде следующих формул:

$$\begin{aligned} &\text{у}= [\text{М})^{\wedge}2 \text{ О3*}) + \text{бо}>7\text{э №})]+^{\wedge}; \quad {}_{ко} \\ &(p = y'=\underset{ко}{Ц}- [M_0 2Р_ь (Рг) + (_{y0}Г1, (/?*)]; \\ &M= -ЬI_{ж} м'' = Мя_x (02)+^{\wedge}{}^{\wedge}\underset{Р}{№У}, \\ &<2=\text{у}^{\text{л}},=-\text{м}_0 2^{\wedge}{}_4 \ m+<2\text{от } m, \end{aligned} \qquad (10.14)$$

где *г], (0г)* (/=1, 2, 3, 4) — функции, введенные Циммерманом при решении данной задачи, а именно:

$$\left.\begin{aligned}\eta_1 &= e^{-\beta z}(\cos\beta z+\sin\beta z);\\ \eta_2 &= e^{-\beta z}(\cos\beta z-\sin\beta z);\\ \eta_3 &= e^{-\beta z}\cos\beta z;\quad \eta_4 = e^{-\beta z}\sin\beta z.\end{aligned}\right\} \qquad (10.15)$$

Числовые значения этих функций в зависимости от безразмерного аргумента /?г даны в Приложении VI. Эпюры \,*M* и й, получаемые по (10.14), представлены на рис. 10.3. Их характерной особенностью является волнообразное изменение у края балки с затуханием по мере удаления от места приложения сосредоточенных воздействий.

Краевой эффект

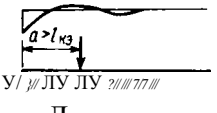
Местные возмущения в прогибах и внутренних усилиях вблизи мест приложения сосредоточенных воздействий называются *краевым эффектом.* Длина 4» на которой ординаты волнообразных кривых краевого эффекта становятся пренебрежимо малыми, называется *длиной краевого эффекта.*

Затухание в формулах (10.14) объясняется наличием множителя $e^{-Дг}$ в функциях *г],* (10.15), стремящегося к нулю при ^-»оо. Оценим длину *1,,* исходя из функции *е~^.* При 2=0 она равна единице. При *рг=п* значение *е* *=0,046 и с точностью до 5% можно считать данную функцию затухшей. Из равенства /?/*,=я найдем длину краевого эффекта:

$$l_{кз} = \frac{\pi}{\beta}.$$

Если действительная длина балки *Ь>1,,,* то краевые воздействия вследствие затухания у такой балки конечной длины вызовут практически тот же эффект, что и в полубесконечной балке. Такие балки условно называют *длинными* и рассчитывают их по формулам для полубесконенных балок. Для сосредоточенных воздействий, приложенных не на краю, расстояние от места их приложения до ближайшего края должно быть *а* >/„ чтобы

/А »/ м >» >/> м »■



„ Длинные балки

такая балка конечной длины могла рассчитываться как *бесконечная* (см. § 10.3). Если указанные условия не соблюдаются, то балка называется *короткой* и должна рассчитываться с помощью общего решения (10.7) с определением вместо двух четырех постоянных C_i (/= 1, 2, 3,

Прмер 10.1. Кайтж прогибы и внутренние усшшх долубесконечной балки, опертой в начальном сечения ва упругую опору, жесткость которой *е* [Н/м], т. е. реакция и осадка опоры связаны соотношением Ло-су$_0$ (рис. 10.4).

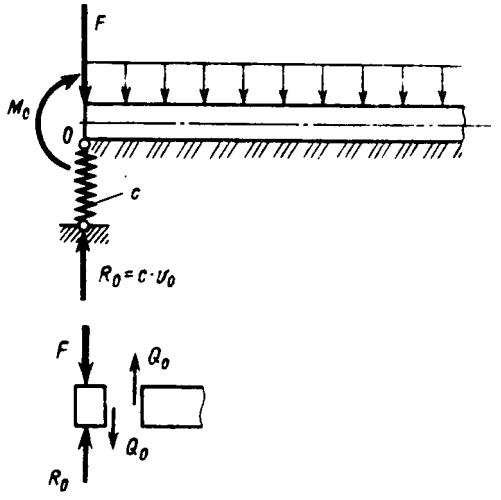


Рис. 10.4. К примеру 10.1. Формулировка граничного условна в балке с упругой опорой

Решение. Для рапешя воспользуемся формулами (10.14), в которых известен момент А/о "А/ и неизвестна поперечная сила *(¿о-Ло-Р.*

Поэтому предварительно ее надо найтж, составив граничное условие:

Со"Ло-.Р-СУО—Д

Из первой формулы (10.14) при *-0 *(т* (0)-1 и *гц* (0)-1) имеем

$$y_0 — \frac{2Д}{кО} СМ/_0 + бо) + 1г_{кО}.$$

после чего найдем

$$\mathbf{0}>- \frac{{}^{ч}оС_{\_р\_}20*^{с}Мо}{кЬ \qquad кЬ} \qquad (10.17)$$

$$1+\frac{ар_с}{кЬ}$$

Так как теперь оба начальных усилия А/$_0$ и 2о стали известны, то все дальнейшие вычисления ведутся по формулам (10.14).

В заключение этого параграфа сделаем замечание, касающееся применимости приведенных решений. Все они получены в предположении, что подошва балки как бы склеена с поверхностью основания и, следовательно, по подошве могут возникать как сжимающие усилия упругого отпора (при прогибах вниз), так и растягивающие (при прогибах вверх). Если наличие таких двусто-

ронних связей не обеспечено, то при определенных загружениях на некоторой длине $/_{отд}$ может возникнуть отрыв балки от основания («отлипание»). Задача в этом случае существенно усложняется, так как зона отлипания заранее не известна и должна быть найдена из условия сопряжения участков балки, работающих совместно с упругим основанием ($z > /_{отл}$) и независимо от основания как обычная балка ($г</_{отд}$).

В большинстве случаев балка имеет достаточно большой пригруз постоянными нагрузками так, что возникающие по подошве усилия отрыва от временных нагрузок не могут превысить сжимающих усилий от пригруза. В результате отлипание не возникает.

§ 10.3. Бесконечная балка на упругом основании

При анализе бесконечной балки во многих случаях можем использовать решение, полученное ранее для полубесконечной балки в виде равенств (10.14), должным образом формулируя граничные условия в начале координат. Покажем это на задаче о действии одиночной силы *F* на бесконечную балку (рис. 10.5). Как и ранее, будем считать, что отлипание балки от поверхности основания отсутствует.

Рассматривая правую половину балки ($z> 0$), при $.z=0$ запишем следующие граничные условия:

$$v'(0)=0;\ бо=-£ \qquad (10.18)$$

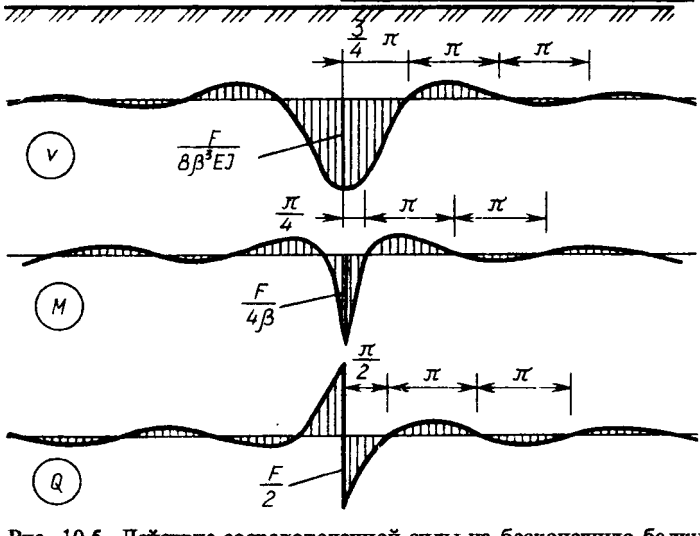


Рис. 10.5. Действие сосредоточенной силы на бесконечную балку

Первое условие написано вследствие симметрии линии прогибов. Второе следует из требований равновесия элемента балки ¿г, вырезанного в точке приложения силы *К* Действительно, для его равновесия по граням элемента должны действовать внутренние силы, гяждяя по *E/2,* что с учетом правила знаков для *О* и дает второе условие (10.18).

Используем формулу для (г) (10.14) для выполнения условия V' (0) = 0. Учитывая, что *щ* (0)=1 и *щ* (0) = 1, получим равенство

$$M_0 2p\text{-}^{\wedge}\text{-}Q_0 = 0,$$

откуда

$$"= \frac{M\ C®\ *}{\sim TГ \sim 7г} \qquad 00.19)$$

Подставляя найденные значения *(¿₀* из (10.18) и M_0 из (10.19) в формулы (10.14), получим решение задачи в следующем виде (заменив *кЬ=Ар* ЫI* и учтя 10.15):

$$A/=\text{-}\ \frac{F}{Чг\ (pz);}\ ,\quad Q=\text{--}\ \frac{F}{Vs\ (fiz).} \qquad У\ (Ю.20)$$

Эпюры v, *М* и *Q* по формулам (10.20) построены на рис. 10.5.

Обратим внимание на то, что наибольший момент $M_{im}=F/(4p),$ возникающий под силой *F* при данной жесткости балки *EJ,* в большой степени зависит от жесткости основания *к,* так как от соотношения *к* и *EJ* зависит коэффициент /? (10.6). При ***р-**** *со* (жесткое основание) А/щ«-»0 и, наоборот, при ***р-*0*** (мягкое основание) Aim., -»оо. Простым подтверждением этого факта может служить такой пример: стеклянная палочка (например, градусник), лежащая на твердой ровной поверхности стола, может безболезненно выдержать довольно значительные надавливания посередине. Но тот же градусник, положенный в мягкое кресло, при незначительном поперечном давлении ломается.

Заметим, что формулы (10.20), дающие решение задачи о действии одной силы на бесконечную балку, используются в случае действия произвольной системы сил (рис. 10.6, *а, б).* На основании принципа независимости действия сил можно для некоторого сечения С—*С* получить интересующий фактор путем алгебраического суммирования результатов действия каждой силы *F,* в отдель-

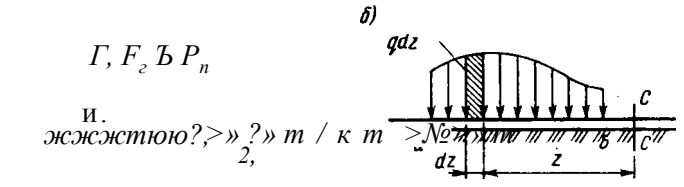


Рис. 10.6. Определение прогиба и усилий в сечении бесконечной балки от произвольной нагрузки

ности. Так, для прогиба и момента (рис. 10.6, *а)* получим

(10.21)

Для распределенной нагрузки сумма заменяется интегралом, например (рис. 10.5, б)

(10.22)

Прикр 10.2. Найти начальные усялиж ¿/$_0$ ■ *Оц* при х»0 для бесконечной балки, имеющей упругую опору с жесткостью *е* (рис. 10.7).

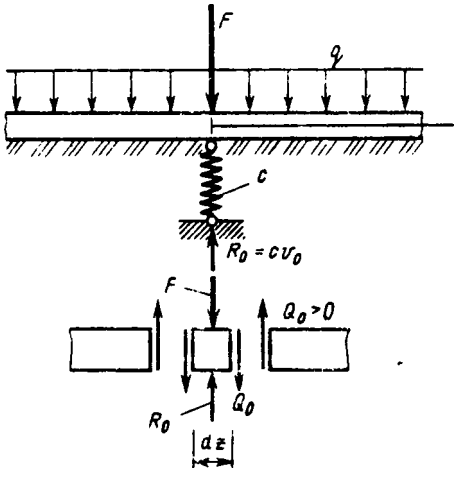


Рис. 10.7. К примеру 10.2. Формулировка силового граничного условия симметричной балки

Решение. В этом случае в граничных условиях (10.18) изменяется второе и эти условия получат вид

у' (0)=*0; 2Со+Д-Ло«0.

Заменяя здесь Ло—су$_0$ и действуя далее, как изложено при получении формул (10.20), получим

$$\text{во} \qquad \text{кь}$$

$$\text{2р} \qquad \text{Вс}$$

$$2\cdot 1 —$$

$$\text{кЬ}$$

$$^{м_О}——'.\ \text{Со}----------\ (Ю\text{-}23)$$

Далее применяются формулы (10.14).

§ 10.4. Понятие о расчете коротких балок на упругом основании

В § 10.2 было уже дано понятие «коротких» балок. К ним относятся балки, у которых расстояние от одного края до другого или расстояние от сосредоточенного воздействия до ближайшего края балки меньше, чем длина затухания краевого эффекта (10.16). Для коротких балок нельзя использовать решения, полученные для балок бесконечной протяженности и требуется исходить из общего интеграла (10.7), содержащего четыре произвольные постоянные C\—C_4 для каждого участка интегрирования. На границах участков необходимо соблюдать соответствующие условия сопряжения участков по перемещениям и внутренним усилиям, что в принципиальном отношении может быть выполнено так же, как было описано в гл. 8 для обычной балки. Однако здесь это приводит к громоздким аналитическим выкладкам.

Поэтому практически расчет коротких балок на упругом основании (или систем из таких балок) производится путем решения на ЭВМ краевой задачи для системы дифференциальных уравнений типа (10.5), составленной в соответствии с числом участков интегрирования (методом конечных разностей, методом прогонки и др.).

Аналитическое решение. В случае необходимости получения аналитического решения дифференциального уравнения (10.5) его удобно вести по *методу начальных параметров.* При произвольном числе участков этот метод позволяет в качестве постоянных интегрирования иметь только четыре начальных параметра: y_0, $<p_0$, $Л/_0$ и 2о — прогиб, угол поворота, момент и поперечную силу в начале координат (г=0). Рассмотрим подробно метод начальных параметров. £м с ^

Для первого участка (рис. 10.8) общий интеграл (10.7) с учетом (10.9) получит вид

$$y_1 = e^{\wedge}(C\backslash \text{ сое } (¡г + C_2 \text{ вт } (¡г) + e^{\wedge}(C_3 \text{ сое } ¡¡г + C_4 \text{ вт } /?г)\ 4\text{-}—.$$

$$\text{кЬ}$$

(10.24)

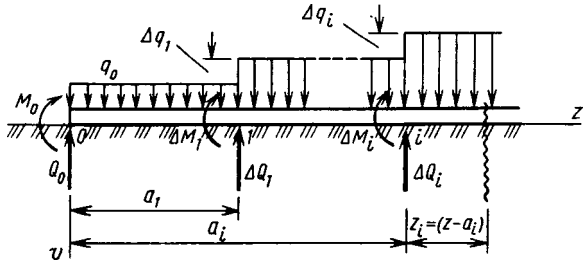


Рис. 10.8. Метод начальных параметров *для* балки на упругом основании

Для определения четырех постоянных *С[—С₄* сформулируем условия при **2=0**:

V (0)=y_0; V' (0) = <p_o; ***М*** (0)= ***—Е1ч" (0) = M_0;*** б (0) =

= 0) = $б_0$. (Ю.25)

Подставив (10.24) в равенства (10.25), получим систему четырех уравнений относительно постоянных *С\—*C_4, решив которую выразим эти постоянные через начальные параметры y_0, ***(р₀, Мо*** и ***Оо-*** После подстановки этих постоянных обратно в (10.24) и группировки слагаемых по соответствующим начальным параметрам решение (10.24) получит вид

$y_1=y_0\hat{}_1\ m+\hat{}к_2$ $_jк,m+$

$+ \frac{Чо}{4Р*Ш}$ (10.26)

где через *& (&г)* (/=1, 2, 3, 4) обозначены функции акад. Л. Н. Крылова, введенные им в связи с задачами расчета корпуса корабля, рассматриваемого как балка на упругом основании. Эти функции и их производные по координате *г* приведены в табл. 10.1.

Таблица 10.1

Функции А. Н. Крылова ■ ах производные

/		*К*	*К*	*К*	
1	сЬ /?г сое *[¡г*	-4 *РЪ*	*-4Р'К₃*	-4 *Р*К₂*	-4 *Р*К1*
2	1 - *(сЪРгьтРг+ьЬ Ргсо&Рг)*	***рк***,	*~*Р²К4*	*-4Р³К₃*	***-лр*к₂***
3	1 - вЬ йг ап & 2	*рК₂*	*Р¹ К*	-4 *Р'Ъ*	*-Ар* К₃*
4	1 - (сЬ/Ьяп/Ь—*¡¡ЬРгсо&Рг)* 4	***рк₂***	***р*к₂***	*Р³Ъ*	-4 *р*К<*

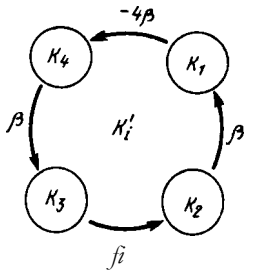


Рис. 10.9. Схема для правила дифференцирования функций А. Н. Крылова

Полезно также иметь в виду правило дифференцирования функций Крылова, схематически изображенное на рис. 10.9. Стрелкой на схеме указано, в какую функцию переводит операция дифференцирования данную функцию Крылова, а в скобках у стрел указан множитель, появляющийся при дифференцировании. Так, например, из схемы на рис. 10.9 следует первая строка табл. 10.1:

$$*;=-4№\ K\backslash=-4PK<=-4P^2K_3;$$

$$K\backslash=-4p^2K_3=-4p^3K_2;\ AT\{^{v}=-4p^3\ K'_2=-4p^A\ K_x.$$

Пользуясь приведенным правилом дифференцирования от функции прогибов (10.26), переходим к углам поворота $ф1=\backslash1$ и далее по формулам (10.1) к внутренним усилиям на первом участке:

$$91=-\qquad (0Z)+<MT|\qquad m-$$

$$_{pEJ}$$

$$M_l=v_04p^2EJK_3\ (fix)+<p\hat{}fiEJK4\ (fiz)+$$

$$+\ m+\hat{}\kappa_2\ №-m,^{K}1\ №)\backslash$$

$$_{p\ p}$$

$$Q_I=v<AP^3EJK_2\ (fiz)+<PM^2EJK>\ (fiz)-$$

$$-McAPЪ\ m+QoKx\ №--Kг\ №)■$$

По аналогии с § 8.5 функцию y_1 продолжаем на второй и последующие участки. Приращения Ду, этой функции будут зависеть от приращений $AM_{,}, AO_{,}$ внутренних сил и $Aд$, — интенсивности нагрузки на границах между участками. Добавляя эти приращения Ду, к функции $y_ь$ получим аналогичную (8.13) универсальную формулу для прогибов л-го участка балки на упругом основании:

$$v_n=v_I\ (\beta z)+\sum_{i=1}^{n-1}\left(-\frac{\Delta M_i}{\beta^2 EJ}K_3\ (\beta z_i)-\frac{\Delta Q_i}{\beta^3 EJ}K_4\ (\beta z_i)+\right.$$

и, аналогично, для углов поворота и внутренних усилий

№>+1

$M_n = M_e$ 0?2) + £ [дМ,К$_i$ +у КМ - (^) ^;

<2,=21^) +1 [- *АММЪ^гд+Д<2,*, Фд* **- у ^№0^.**

(10.29)

Здесь для краткости обозначено г $_i$ = г — г д е а/ — абсцисса 1-й границы между участками.

Как и в обычной балке, в начале координат часть начальных параметров бывает известна, а остальные определяются из граничных условий, формулируемых для противоположного конца стержня.

Применение формул (10.28) и (10.29) может быть удобно при использовании персональных ЭВМ. В более простых задачах их можно использовать и с применением микрокалькуляторов.

Првмер 10.3. Определить прогибы и внутренние усилия в балке длиной 24 лежащей на упругом основании и загруженной силами *P* по концам и *2P* посередине (рис. 10.10).

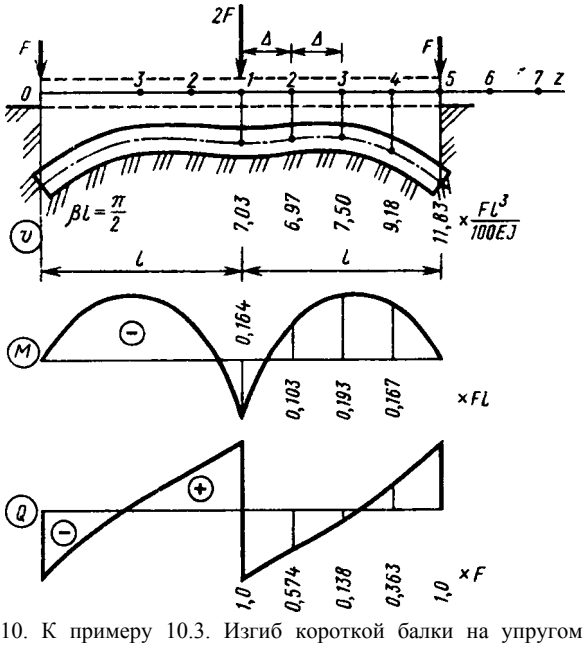


Рис. 10.10. К примеру 10.3. Изгиб короткой балки на упругом основании

Решение. Начальные параметры будут уо*0; <ро#0; *Мо—0;*

$Q_0ш$^ —^ и функция прогибов на первом (левом) участке по (10.26), а также функции углов поворота и внутренних усилий по (10.27) получат вид

$$\text{П -МГ1 № } +\frac{^K_2(P2)}{P} +\frac{¿}{p\ E/}\text{-*4 (/**);}$$

$$(K \text{ » }_y; = \text{ - Уо4/?/^(^7) + <роК1 (Рг) }_+ \text{^з№); } \qquad (10.30)$$

$$M_z \text{ - } y^P^1EЖ_ъ \text{ (/5г) + <роРЕЛ^т----------ДГ}_3 \text{ (Дг);}$$

$$p\ ЕЛ$$

$$\text{й } = y_04p^3E/K_2№) + <p_04p^1EГK_3№) - PX_1 \textbf{0?г).}$$

Если бы балка была несимметричной, то по (10.28) и (10.29) надо было бы составить соответствующие выражения для второго участка, учтя, что на границе участков a\ ~ / и Д£)| =• —2Л Так, для уц получим

$$^п»^{y1}№) + — *,(/»(*-/)). \qquad (10.31)$$

после чего неизвестные $у_0$ и <ро находились бы из условий на правом конце балки 2=2/, а именно Л/д(2/)=0; Сп(2/)=Л

Однако в данном случае используем симметрию балки и для определения уо и 90 напишем условия для сечения, расположенного бесконечно близко слева от оси симметрии: [4]

г-/ у;г0=0; 61(0-*

Эти условия с использованием выражений (10.30) приводят к системе двух уравнений

$$\left.\begin{array}{l} —y_04\ 0K+ \text{ (А)+ фо*. (¿) + } \frac{¥}{P}_{o1\ ,,Kъ} № = \\ y_04P^3ЕЛС_2(X)+<p_04p^1EЖ_3 \text{ (А)- ГС}\end{array}\right\} \qquad (10.32)$$

Пусть $X=p1$=п/2, т. е. $1=1$^2. Вычислив функции Крылова от аргумента Д.=л/2 и заменив $P=n/(21)$, из системы (10.32) найдем уо=0, 11832 [Я³/(£/)] и —0,11459 [/■/*/(£/)]. После этого по формулам (10.30) строим эпюры, изображенные на рис. 10.10.

Числеиюе решение. Покажем использование метода конечных разностей (см. § 8.6) для расчета балок на упругом основании. С помощью формулы (8.19) для четвертой производной запишем уравнение изгиба балки на упругом основании (10.5) в виде системы алгебраических уравнений

$$(У|\_2—4у,\_! +6у,—4у_{,+} , +у_{,+2})+40*Д^4\ У(-—\frac{9(Д*}{\&}\ ^{7(}_{/■}\ ' \qquad (10.33)$$

граничные условия.

Применим эти уравнения к правой половине балки, изображенной на рис. 10.10. Граничные условия в точке *5* будут $А/_5$= — £/у'»»0 и Q_j*'—EJv''—F. Для узловых точек сетки имеем 2РУД, <?$_2$ "■ 9э *= “94=?5=0 (сила P в точке 5 уже вошла во второе граничное условие).

С учетом симметрии уравнения (10.33), записанные для точек *1,2,3, 4,5,* получат вид

$$
\begin{array}{llllll}
(6+a)У! & -8y_2 & +2уз & & & =у/; \\
—4у) +(7 + <х)у2 & & —4уз & + У_4 & & = 0; \\
VI & -4у2 +(6+ос)уз & —4у_4 & +У5 & & -0; \\
 & —4уз +(6+а)y_4 & —4у5 +Ув & & & =0; \\
 УЗ & & —4y_4 +(6+а)У5 —4Ув +У7 & & & =0; \\
 & & у_4 & -2у5 +Ув & & =0; \\
 & уз & -2y_4 & & +2у_6 -у_7 & =У/,
\end{array}
$$

где $у$=200 (Л//)^3,/=(Л^3)/(100£7). Последние две строки выражают граничные условия, записанные с помощью формул (8.17) и (8.18). Так как /И=я/2, то а=40*Д*=я^{4}Д^4/(4/^{4}). При Д// =1/4 значение а—0,095126,

а у-3,125 и решение системы уравнений дает следующие прогибы балки: —7,350/; —7,063/ $у_3$=7,416/, $у_4$—8,948/ Уд — 11,496/. Прогибы

у« и У7 относятся к условно продолженному участку балки и нужны дня

составления левой части уравнения (10.33) в точках 4 и 5 и граничных условий в точке 5. Из решения системы уравнений имеем V«—14,045/;

$у_7$ = 14,483/.

Сравнение полученных прогибов и найденных в примере 10.3 с помощью функций А. Н. Крылова показывает, что погрешность не превосходит 5%. Зная прогибы, можем численно получить изгибающие моменты по формуле

$$M^{-}E3у' = — £'/(У(_1 —2У(+y_{(+|)}/Д^2.$$

Эти вычисления дают моменты $М$\ —0,0459Дг $Мг$= —0,102Л;

Мэ— — 0,187/7, Л/$_4$=-0,163/7, которые (кроме точки 7) достаточно

хорошо совпадают с указанными в примере 10.3. Для повышения точности результатов надо уменьшить интервал Д, увеличив число алгебраических уравнений, что при вычислениях на ЭВМ не представляет затруднений. Так, при Д—//8 погрешность в прогибах в данном примере оказывается менее 1%.

Вопросы для самоконтроля к главе 10

10.1. Почему балка, лежащая на упругом основании, статически неопределима? Каков общий путь расчета такой балки?

10.2. Что такое винклерово упругое основание и какой константой упругости оно характеризуется? Запишите дифференциальное уравнение для прогибов балки, лежащей на этом основании.

10.3. Как упрощается общий интеграл для прогибов полубесконечной балки? Сформулируйте граничные условия в начале координат при заданных моменте и силе.

10.4. Опишите краевой эффект. Что такое длина краевого эффекта, «длинные» и «короткие» балки на упругом основании?

10.5. Какое усложнение в расчет балки вносит ее отлипание от основания?

10.6. Сформулируйте граничные условия в точке приложения сосредоточенной силы к бесконечной балке. Как они изменяются при наличии в этой точке упругой опоры?

10.7. В чем состоит усложнение расчета коротких балок? Как решается эта задача по методу начальных параметров?

10.8. Что такое функции Крылова и каково правило их дифференцирования?

Задачи

10.1. Железобетонная балка таврового сечения лежит на основании с коэффициентом постели $к$=25 МН/м* (утрамбованный песок), *ЮЛ.* Для бесконечной балки с нагрузкой момент и вычислить максимальные нормаль-

Принимая для материала белки £-20 ГПа, напряжения, а также определить реакцию вычислить длину краевого эффекта Ло в упругой опоре. Жесткость упругой опоры с—140 МН/м. Остальные данные принять, как в предыдущей задаче.

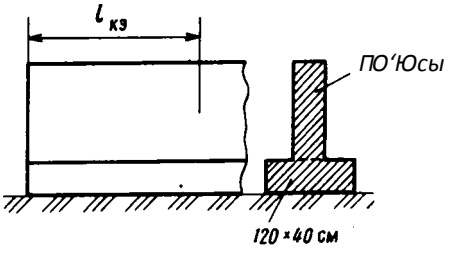


Рис. к задаче 10.1

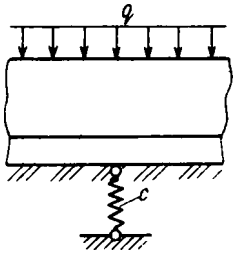


Рис. к задаче 10.2

ЮЛ Найта наибольший изгибающий мо- мент в бесконечной балке от одной силы *Г я* от сцепки из трех сил, расстояние между которыми *а* таково, что /Ъ>-я/2.

10.4. Определить изгибающий момент в заделке короткой балки, если /?/—я. Рекомендуется учесть симметрию,

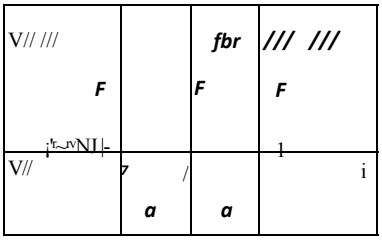


Рис. к задаче 10.3

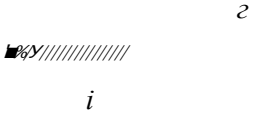


Рис. к задаче 10.4

10.5. Как изменятся результаты решения задачи, рассмотренной в примере 10.3 (см. § 10.4), если к трем сосредоточенным силам добавить нагрузку, распределенную по закону *ч-т* (1-г/о?

Ответы к задачам главы 10

10.1. /„-15,4 м. 10.2. кН м, <W-=3,58 МПа; Ло=б34 кН.

10.3. (А/$_{Г}$)ти-Д/(4Л, *(M-iFlmu*-0,7489 *[F/(4P)]* под крайним грузом. 10.4. А/$_{0}$--$ql^2l(2n^2)$.

10.5. Добавится просадка основания и балки Av— *[4Fiy(n*EJ)]* (1—г//), внутренние усилия не изменятся.

СВОБОДНОЕ КРУЧЕНИЕ СТЕРЖНЕЙ НЕКРУГЛОГО СЕЧЕНИЯ

§ 11.1. Понятие о свободном и стесненном кручении стержня

При рассмотрении деформации кручения стержней круглого сечения (см. гл. 5) мы пользовались *гипотезой плоских сечений.* Однако оказывается, что круглое сечение — это редкое, хотя и важное, исключение, когда сечения при закручивании, не искривляясь, поворачиваются как плоские диски вокруг оси *г* (рис. 11.1). При этом угол сдвига *у* образуется только за счет наклона образующих и формула для касательных напряжений получает простой вид

$$\tau = \frac{M_z}{\blacksquare^{i}p} \qquad (11.1)$$

■ Депланацня ¿¿чс ни

кие *В общем случае при кручении поперечные сечения, плоские Реформации, искривляются по некоторой поверх-*

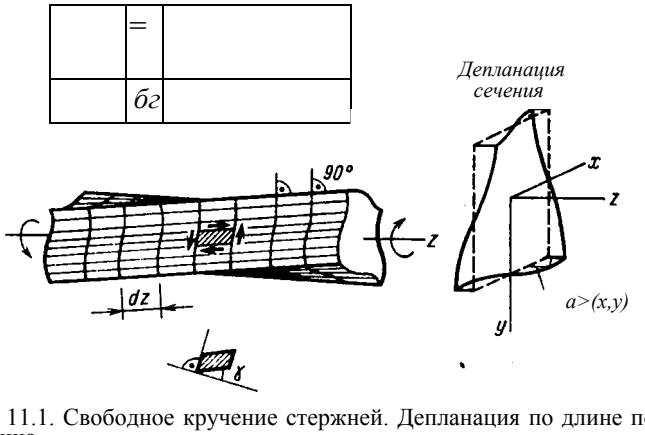


Рис. 11.1. Свободное кручение стержней. Депланация по длине постоянна

ности н>=н' *(х, у), что называется депланацией сечения. Функция* м' *называется функцией депланации сечения. Ее аппликаты выражают продольные перемещения точек сечения в направлении оси г.*

На рис. 11.1 изображена депланация прямоугольных сечений стержня при кручении. Из рисунка видно, что угол сдвига *у*, т. е. изменение прямого угла элемента, выделенного иа поверхности, происходит как за счет наклона образующих, так и из-за наклона сторон, лежащих в поперечных сечениях. Последнее является следствием депланации сечения. Поэтому распределение касательных напряжений по сечению получается значительно более сложным, чем это дает формула (11.1). Строго эта задача решается методами теории упругости. Ниже мы познакомимся с некоторыми результатами этого решения. В частности, оказывается, что в угловых точках сечения прямой угол элемента не изменяется и *у=0* и т=0, в то время как по формуле (11.1) мы получили бы в этих точках при р—Рш значение $т=т_{т,,}$.

В связи с развитием депланации различают два типа кручения стержней: *свободное и стесненное.*

Если депланации всех поперечных сечений одинаковы по длине стержня, то кручение называется свободным. При переменных депланациях его называют стесненным. ■ Свободное ■ стесненное кручение

На рис. 11.1 изображено свободное кручение, когда функция депланации зависит только от *х, у* и не зависит от *г.* Если представить стержень разделенным на продольные волокна, то каждое волокно за счет одинаковой депланации всех сечений переместится в продольном направлении на и> как жесткое целое. Так как его удлинение отсутствует (Дс1г=0), то <т,=0.

При \ свободном кручении в поперечных сечениях возникают только касательные напряжения, а $а_г$—0.

На рис. 11.2 показан стержень, испытывающий стесненное кручение, у которого стеснение развития депланаций создается наличием заделки. Функция и> изменяется вдоль координаты *г,* и поэтому продольные волокна изменяют длину, т. е. Так как е,=Дс1г/(12^0, то, как следствие закона Гука, в сечениях возникают нор-

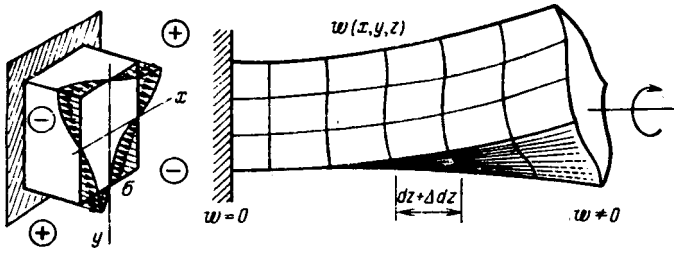


Рис. 11.2. Стесненное кручение стержня. Депланация по длине переменная

мальные напряжения. Итак,

стесненное кручение характерно тем, что в поперечных сечениях возникают помимо касательных напряжений нормальные напряжения a_z.

На рис. 11.2 качественно изображено распределение напряжений a_x по сечению.

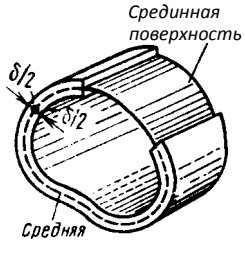
В данной главе будут рассмотрены вопросы свободного кручения стержней характерных типов сечений. Стесненному кручению посвящена гл. 12.

§ 11.2. Свободное кручение тонкостенных стержней замкнутого профиля. Определение напряжений

Тонкостенные стержни замкнутого профиля широко используются в технике благодаря их легкости, жесткости, хорошей технологичности изготовления и, как следствие, высокой экономичности в сравнении с массивными стержнями сплошного сечения.

На рис. 11.3, *а—в* приведены некоторые примеры замкнутых сечений стержневых элементов строительных конструкций.

В целях общности рассмотрим стержень с произвольной формой контура сечения, которое по длине стержня примем постоянным (рис. 11.4, *а).*



Поверхность, делящая толщину стенки 8 пополам, называется срединной поверхностью стержня. Линия пересечения срединной поверхности и поперечного сечения называется средней линией тонкостенного поперечного сечения или его контуром.

При кручении в поперечном сечении стенок стержня возникают касательные напряжения. Их качественное распределение в сечении легко представить, учитывая аналогию в работе рассматриваемого стержня и скручи-

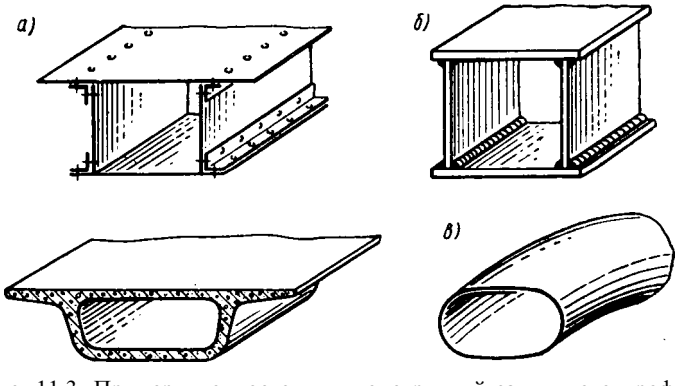


Рис. 11.3. Примеры тонкостенных конструкций замкнутого профиля:

а — коробчатые сечения балочных пролетных строений мостов; *б* — стержневой элемент сварной конструкции; *в* — участок коллектора

Рис. 11,4. Составление условия равновесия Ег=0 для элемента, выделенного из стержня

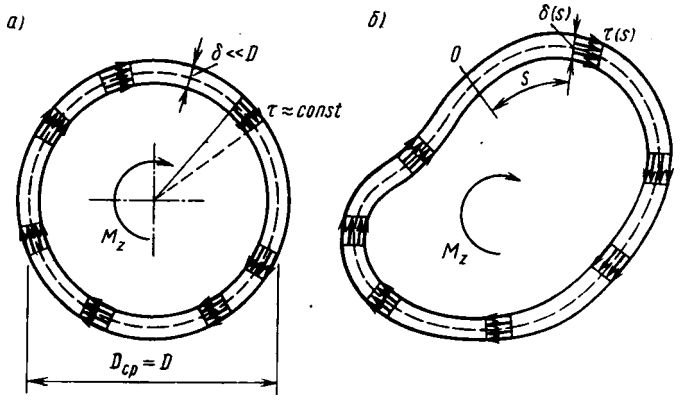


Рис. 11.5. Касательные напряжения в тонкостенной круглой трубе н в произвольном замкнутом сечении

ваемоЁ тонкостенной трубы круглого сечения (рис. 11.5, *а),* напряжения в которой подчиняются формуле (11.1). Ввиду малости толщины стенки *б* по сравнению с диаметром *Ь* неравномерностью т по толщине *8* можно пренебречь. В стержне с произвольной формой контура (рис. 11.5, б) также считаем толщину *8* во много раз меньшей характерного размера сечения и потому в дальнейшем примем, что

касательные напряжения х распределены равномерно по толщине 8.

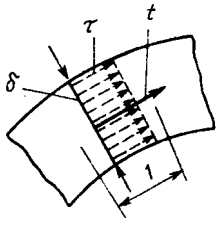
Это допущение означает, что напряжения во всех точках стенки мы отождествляем с напряжениями в соответствующей точке срединной поверхности стержня, где мы как бы концентрируем весь материал его стенок.

Направление *х* в каждой точке контура совпадает с касательной к контуру. Качественно это следует из аналогии с трубой круглого сечения, а более строго доказывается с помощью закона о парности касательных напряжений. Действительно, если разложить у поверхности стержня полное напряжение на тангенциальную составляющую x_{1T} и составляющую *х,,* (где *п* — нормаль

к контуру), то ввиду отсутствия поверхностной нагрузки *Pi* компоненты $x_{,,} = x_a = 0$. Следовательно, остается только тангенциальная составляющая x_{tT}, которую будем обозначать просто т.

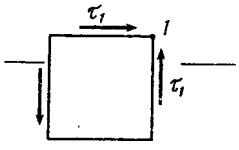
Толщину стенки *8* будем считать в общем случае переменной вдоль дуги контура *s,* т. е. *8=5 (s).*

Произведете t=x8 называют потоком касательных сил. Поток t имеет размерность Н/м. *а механически представляет силу, приходящуюся на единицу длины контура сечения.*



Наша задача — при заданном крутящем моменте M_z установить значение потока *t* и связанного с ним напряжения т=¡¡*8.*

Для определения касательных напряжений рассмотрим равновесие части стержня, вырезанной из него поперечными и продольными сечениями, проведенными в некоторых точках *1* и *2* контура (рис. 11.4, *б).* По закону о парности касательных напряжений в продольных площадках стенки возникают такие же напряжения, как и в поперечном сечении. Проецируя все силы на ось *z* для рассматриваемой части стержня, получим



$T_2 8_2 dz — Xi$ ¿!dz=0.

Отсюда, поскольку точки *1* и *2* выбраны произвольно, можем вывести заключение:

$$x_2 8_2 = ti8i = x8 — t = \text{const}. \qquad (11\text{-}2)$$

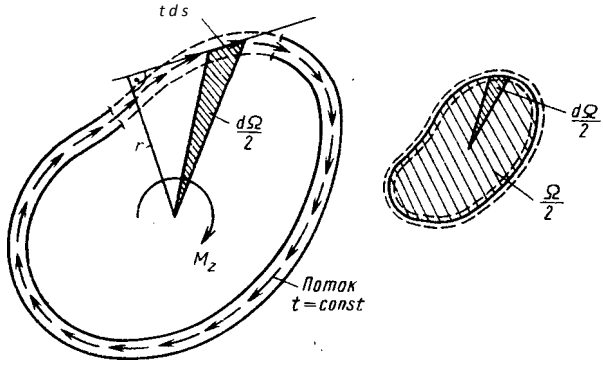
Поток вдоль контура постоянен

При свободном кручении интенсивность потока касательных усилий t вдоль замкнутого контура сечения постоянна на всей длине контура.

Поток *t* найдем из того условия, что суммарный момент вокруг оси *z,* создаваемый потоком усилий вдоль всего контура, приводится к внутреннему крутящему моменту M_z. Из рис. 11.6 с учетом того, что по (11.2)

t=const, найдем

$$M_z = \S tdsr = t\ \$d£l = /ii, \qquad (11\text{-}3)$$



где сШ=<1уг — удвоенная площадь сектора в виде элементарного треугольника с основанием (1?; О — удвоенная площадь, охватываемая контуром сечения.

Отсюда получим окончательную формулу

$$\tau = \frac{t M_z}{2\Omega\delta} \qquad (11.4)$$

»

Формула Бредта

Прамер 11.1. В коробчатой балке пролетного строения моста определить касательные напряжения, вызванные кручением от расчетной нагрузки *д,* установленной с эксцентриситетом *е* относительно плоскости симметрии (рис. 11.7). Принять: /= 15 м, А-2,2 м, А-1,5 м, «—1,0 м, ¿1 = 12 мм, ¿2=20 мм, ¿э—16 мм, $=100 кН/м.

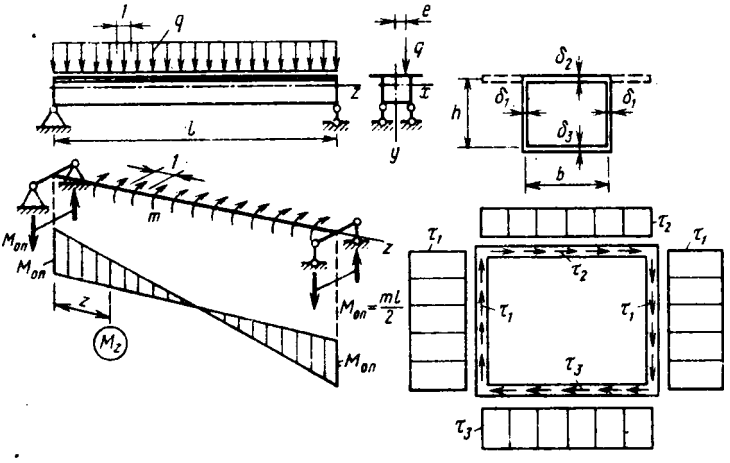


Рис. 11.7. К примеру 11.1. Кручение коробчатой балки

Решение. Распределенная нагрузка создает распределенный скручивающий момент с интенсивностью *m=qe.* Опорные моменты $M_{оа}$ ввиду симметрии относительно среднего сечения будут одинаковыми и могут быть найдены из условия равновесия (при несимметричном нагружении необходимо решить однажды статически неопределимую задачу)

$$1m_z = mi - 2M_{оп} - 0,$$

откуда $Af_{оп} — ml_i 2.$ Эпюра крутящих моментов M_z изображена на рис. 11.6. Из нее следует (Аí^,, - $M_{оа}$ - *ml/2.*

Крутящий момент воспринимается в основном замкнутой частью сечения, поэтому в целях упрощения консоли условно отброшены, а на рис. 11.7 они показаны пунктиром.

В данном случае ввиду переменности момента M_z депланация сечений по д лине будет также переменной (в среднем сечении ввиду симметрии она будет равна нулю).

Поэтому, строго говоря, кручение нельзя считать свободным. Однако, как об этом сказано более подробно ниже (см. § 12.6), на основной части длины для стержней замкнутого профиля приближенно можно принять кручение свободным, в особенности у опор, где действует (А/i)mix—л*//2 и где отсутствуют стеснения развитию депланации. Тогда

(М,Ц, *де!*_ (П 5)

05, 4 *НЬ8,'*

где П — удвоенная площадь, охватываемая контуром сечения П=2АЛ. Подставляя в (11.5) числовые значения, получим:

$$\tau = \frac{100\cdot10^3\cdot1\ 15}{41{,}52{,}2\ 12\cdot10^{-4}} = 9\ 5\ \text{МПа};\ \tau_2 = 5{,}7\ \text{МПа};\ \tau_3 = 7{,}1\ \text{МПа}.$$

Эшора т изображена на рис. 11.7. Малое значение напряжений т по сравнению с расчетными нормальными напряжениями Я=200 МПа говорит о том, что коробчатое (замкнутое) сечение является хорошо приспособленным для восприятия крутящих усилий. Как увидим далее, оно является и весьма жестким в отношении кручения (см. пример 11*2).*

Особенность одноконтурного замкнутого сечения

Заметим, что при выводе формулы (11.4) мы использовали только уравнения статики. Следовательно,

задача определения касательных напряжений при свободном кручении стержня замкнутого одноконтурного сечения оказалась статически определимой.

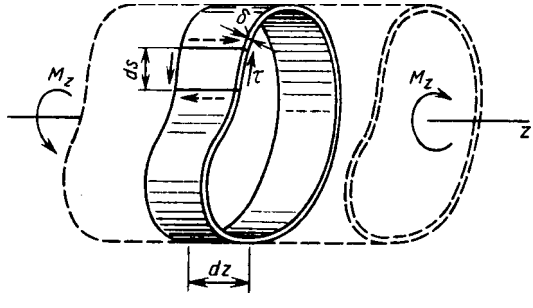
В то же время остался в стороне, например, вопрос о том, вокруг какой оси происходит закручивание стержня, т. е. где в поперечном сечении находится *центр кручения.* На этом вопросе, а также вопросах стесненного кручения стержней замкнутых сечений остановимся ниже (см. § 12.6).

§ 11.3. Жесткость тонкостенных стержней замкнутого профиля при свободном кручении

Для определения углов закручивания необходимо получить зависимость между крутящим моментом M_T и вызываемым им углом закручивания $dq>$ элемента стержня dz (рис. 11.8). Используем для этой цели энергетический подход, а именно составим равенство

$U=A,$

где U — потенциальная энергия деформации элемента стержня длиной dz; A — работа моментов M_z, вызвавших



деформацию элемента. Такой деформацией является чистый сдвиг с напряжением т (11.4). Плотность энергии деформации при чистом сдвиге будет

$$и=\frac{1\ т^{1}}{2\ '<?}$$

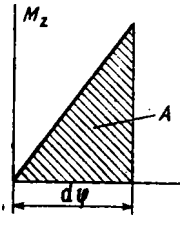
поэтому для элемента стержня с объемом (ЬхскхЙ заключенную в этом объеме энергию найдем в виде

$$<Ш=м<15<1г\pounds=\frac{I^{1}\wedge}{2<?}(Ьс1г<5.$$

Интегрируя по замкнутому контуру 5 и подставив вместо т выражение (11.4) (при этом M_z, *С1* и *йг* как постоянные при интегрировании по контуру выносим за знак интеграла), найдем потенциальную энергию:

(11.6**)**

Работу момента получим как площадь диаграммы, связывающей по закону Гука M_z и угол *йд>* линейной зависимостью. Поэтому



$$A=\frac{M_x\ddot{и}<p.}{2} \qquad (11.7)$$

Подставив (11.6) и (11.7) в равенство £/=Л, получим нужное соотношение

$$\frac{\_M_z}{ОЛв'} \qquad \textbf{(}11.8\textbf{)}$$

где

$$GJ_{кр}=\frac{G\Omega^{2}}{\oint\frac{ds}{\delta}} \qquad (11.9)$$

— жесткость замкнутого сечения при свободном кручении.

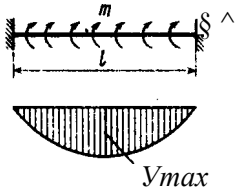
При определении углов закручивания либо интегрируется выражение (11.8) по координате *г,* как это делалось для стержня круглого сечения, либо при использовании формулы Максвелла—Мора жесткость С?/,* вносится в соответствующий интеграл Мора.

Пример 11.2. Получить выражение для углов закручивания коробчатой балки, рассмотренной в примере 11.1, и вычислить ϕ_m,.

Решение. Из рис. 11.7 следует, что тг-т//2—*тх.* Поэтому, интегрируя (11.8), найдем при То—О

ГМ<12 *mb гт*

n^- го/,* 2С/$_{ч>}$



Углы 9 изменяются по квадратной параболе с максимумом при г— //2, где при *т—де* получается

m1² де1²

%п““‘8СЛр'"8(?/$_{жр}$'

Найдем СЛр по формуле (11.9). Так как толщина 5 постоянна на отрезках контура Л и А (см. рве. 11.7)

2М Ь Ь

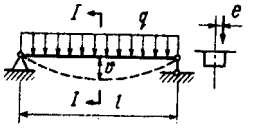
7 г ¿1 32 ¿з

ТО

б(2АА)*

ОАц> 2А *Ь Ъ*

¿1 ¿2 ¿3



Подставляя значения С—80 ГПа, ^«=100 кН/м, /—15 м, А=* 1,5 м, *-2,2 м, г—1,0 м, ^-П-НГ* м, <52-20 10'* м, ¿э«=16 10*[3] м, получим еЛр-7030 МН м[1] и «¡»лих "0,4-10*[5] рад. Интересно оценить разность а прогибах Ду левой и правой стенок поперечного сечения балки, вызванную углом закручивания, равную Ду—¿<$p_{тм}$-*2,20,4 х х 10–[3]в0,88 10‘* м-0,88 мм. Если принять по нормам допустимый прогиб, вызванный изгибом у//*-Ю~[9], то прогиб будет $_{у}$—1510~[э]»= »15 мм. Как видим, Лу значительно меньше у и прогибы от кручения мало изменяют картину прогибов от изгиба. Эго говорит о большой жесткости замкнутого сечения на кручение.

ТАГ

§ 11.4. Определение напряжений и перемещений в тонкостенном стержне замкнутого профиля при растяжении, изгибе и кручении

В данном параграфе ограничимся одноконтурными сечениями, имеющими одну или две оси симметрии, так, что не возникает вопроса о нахождении центра кручения, а само кручение на всей длине приближенно будем считать свободным. Вопросы определения положения центра кручения (центра изгиба) будут рассмотрены ниже (см. § 12.6), поскольку они требуют знакомства с теорией, относящейся к гл. 12.

Рассмотрим технику определения внутренних усилий, геометрических характеристик сечения, напряжений и перемещений на примере коробчатого стержня с прямоугольным контуром (рис. 11.9). Одновременная работа на изгиб и кручение представляет собой пространственную работу стержня, и для большей наглядности целесообразно после определения опорных реакций перейти к «осевой» расчетной схеме в виде оси стержня с приложенными воздействиями в виде сил и моментов. Моменты

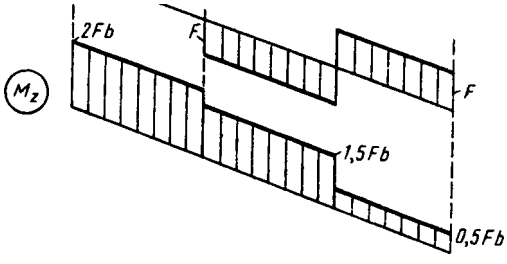


Рис. 11.9. Пространственная работа коробчатой балки на изгиб и кручение, осевая схема балки

получаются от переноса сил в точки оси стержня в соответствующей плоскости поперечного сечения.

Опорные реакция. Из трех условий

=0—*F_{CL} "Ь *3FÜ—2Rca=0;*

*lm_Ac=0-*2Fb—Rib=0',* >

*1,Y=0-*2F—Ra—0* j

находим R_C=2F; R_B=2F\ R_A=2F.

Перенося внешние силы и опорные реакции на ось *z,* добавим внешние моменты:

Л/, = *Fb/2; M_z=2Щ2=Fb* А/$_3$=*Fb/2;*

' •M_A=R_Bb/2+R_Ab/2=2Fb.

Осевая схема коробчатой балки и ее загружение показаны на рисунке. Здесь же изображены эпюры изгибающих моментов M_x, поперечных сил *Q,* и крутящих,

-моментов M_z, которые наглядно иллюстрируют работу каждого участка балки.

Нормальные напряжения от нзгиба определяем по формуле

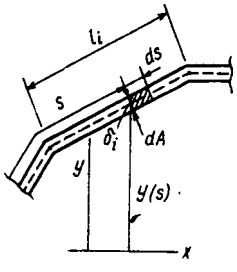
$$a_z = \frac{M_y}{J_x} y. \qquad (11.10)$$

Момент инерции J_x представим как интеграл по дуге s контура сечения:

$$J_x = \int_A y^2 dA = \int_L y^2 \delta ds,$$

где L — длина всего контура.

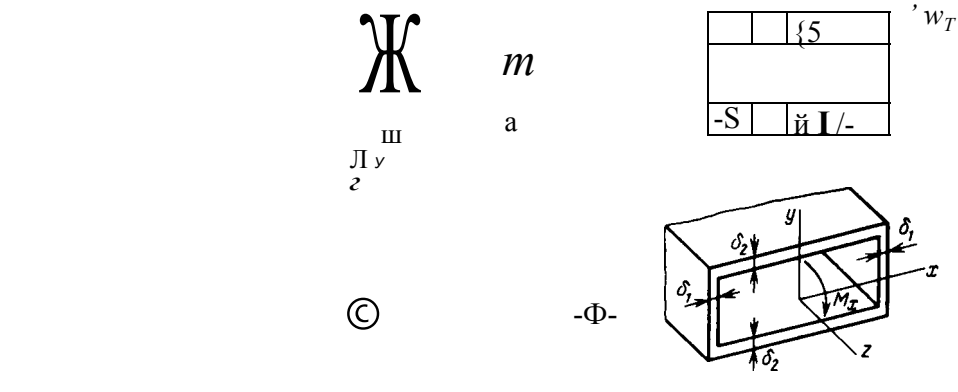
Обычно на отдельных участках контура /, толщина стенки постоянна <5,=const, поэтому выражение для Л можно представить как сумму интегралов:



$$J_x = \sum_u \delta_u \int_u y(s) y(s) ds, \qquad (11.11)$$

где суммирование ведется по всем участкам контура сечения. Под знаком интеграла вместо y^1 (у) напишем произведение y (я) у (л), понимая под y (5) функцию координаты y вдоль дуги 5. На рис. 11.10 построена эпюра функции $y=y$ (у), после чего значения интегралов (11.11) можно вычислять путем «перемножения» эпюр, используя правило Верещагина или формулу Симпсона (см. Приложение I). Так, в данном случае, учитывая, что эпюра y состоит из четырех однотипных частей, по правилу Верещагина «перемножаем» эту эпюру саму на себя:

$$J_x = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \delta \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \delta \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \delta \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \delta \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 2 = \frac{\delta}{6}.$$



Аналогично выражению (11.11) запишем формулу для }у и для центробежного момента инерции Лг

$$I_y = \int_A x^2 dA = \int_{l_1} \delta_1 \, x \, ds; \qquad (11.12)$$

$$\int_A xy \, dA = \int_{l_2} \delta_2 \, xy \, dl.$$

По формулам (11.12) с использованием рис. 11.10 найдем

$$\frac{b^2 \delta_2}{6} + \frac{b^2 \delta_1}{2} = J_{xy} = 0.$$

Равенства /^=0 можно было ожидать, поскольку оси *х* и *у* являются осями симметрии сечения.

Эпюра напряжений *а,* в сечении, где А/$_{Жт}$..=/а по формуле (11.10), подобна эпюре *у—у* (?) и изображена на рис. 11.10, где й^$_х$=Л/>’тм- В общем случае, как обычно, напряжения от изгиба и растяжения определяются по трехчленной формуле

$$\sigma_z = -\frac{N}{A} + \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x.$$

Касательные напряжения возникают в балке (см. рис. 11.9) от крутящего момента M_z и от поперечной силы Q_y:

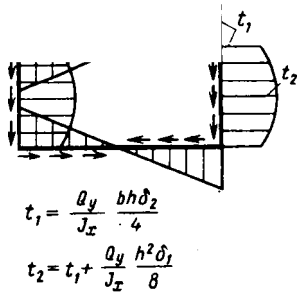
$$\tau_{ИГ} = \frac{M_z}{I_x \delta} \qquad (11.13)$$

или если перейти к потокам ^ = Тжру, <5 и /иг=т„г(5, то

$$q = \frac{M_z}{J_x} \qquad (11.14)$$

Величину 5'^' можно аналогично (11.11) и (11.12) представить через интеграл по дуге 1,°” отсеченной части сечения:

$$S_z = \int_{A^{ОТС}} y \, dA = \int_{b^{ОТС}} y \delta \, ds \qquad (11.15)$$



Эпюры /ц н показаны на рнс. 11.11. При этом интеграл в составе $\boldsymbol{Я^{тм}}$ получен как площадь графика $\boldsymbol{y}$ (лг) на участке $\overline{Ь}^{отс}$ с началом отсчета в точке на вертикальном оси симметрии, где т,,,$_г$=0, и поэтому может быть принято 5$^{тс}=0.

В каждой точке контура суммарный поток

'='«,+'»г, (11.16)

а суммарное напряжение т=*¡/8.*

При нзгибе и кручении в сечении могут возникать большие по модулю как нормальные, так и касательные напряжения. Поэтому проверка на прочность производится, как при сложном напряженном состоянии (см. гл. 13 и 14).

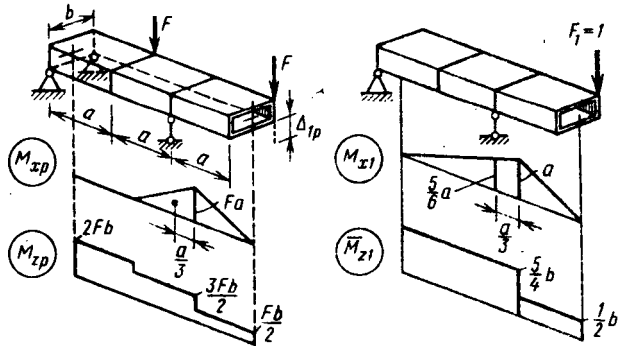
Перемещение А,,, вызванное суммарной деформацией, найдем по формуле Мора (рис. 11.12). Приложив вертикальную единичную силу /] = 1 и построив эпюры $\}_{x1}$ и А?,|, с учетом деформаций от изгибающих моментов и от кручения найдем перемещение $А_{1г}$ «перемножая» соответствующие эпюры по правилу Верещагина:

$$C\,Mxp\,M_x\backslash_{л}\,(*\quad \frac{Mn\,M_{x}\{\,Pa}{2E1_X}\quad \frac{^{2}5\,Pa*2}{6\,2EУ_X\,3}\quad a+\text{------}\bullet\text{- в} +$$

$$\left(\frac{2Л>a_{1}\,3\text{-Янг}^{\wedge}}{a_{xp}{}^{+}2c£_{p})}\quad \frac{3\,Pa*37\,P\&*}{2<?Лр\;2\;4\;E1_X\;8\;б/,}\right.$$

Момент инерции 3_x найден для рассматриваемого сечения выше. Жесткость при свободном кручении бЛр по формуле (11.9) при П=2М будет

$$\frac{20H*Ь*}{h/\delta_1+b/\delta_2}.$$



Рнс. 11.12. Определение перемещения от изгиба и кручения по методу Максвелла — Мора

Как уже говорилось в § 11.1, строгое решение задачи о кручении призматического стержня рассматривается в курсе теории упругости. Поэтому приведем некоторые важнейшие результаты такого решения применительно к прямоугольной форме сечения (рис. 11.13, а).

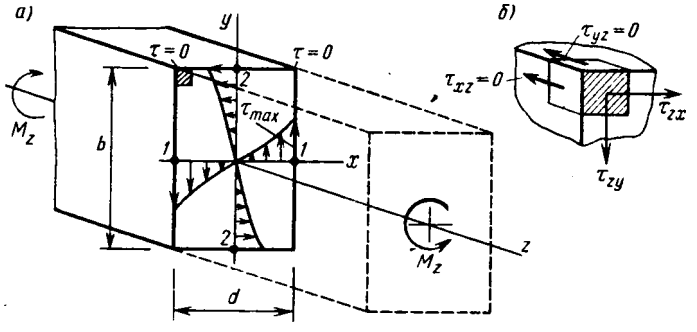


Рис. 11.13. Напряжения в прямоугольном сечении при свободном кручении

Наибольшие касательные напряжения возникают в средних точках *1* длинных сторон контура, которые можно представить в следующем виде:

$$\tau_1 = \tau_{ш} \text{«=-^;} \quad \text{"жр} \qquad (11.17)$$

где коэффициент $\kappa_x = \kappa_x$ *(Ь/с1)* зависит от соотношения длин сторон прямоугольника (табл. 11.1).

В серединах коротких сторон в точках *2* возникают несколько меньшие напряжения. Их выразим через Тщм следующим образом:

$$*2=^2 \text{т.»«;} \quad \kappa_2=\kappa_2 ф/ф^ 1. \qquad (11.18)$$

Значения κ_2 также приведены в табл. 11.1.

Интересно отметить, что в угловых точках г=0; это следует из закона о парности касательных напряжений.

Таблица 11.1

Коэффициенты для расчета прямоугольшлх сечений на кручеаве

ь/а	1,0	1,5	1,75	2	2,5	3	6	10	00
	0,208	0,231	0,239	0,246	0,258	0,267	0,299	0,313	1/3
*2	1,0	0,859	0,820	0,795	0,766	0,753	0,743	0,742	0,742
*3	0,141	0,156	0,214	0,229	0,249	0,263	0,299	0,313	1/3

Для угловой точки (рис. 11.13, *б)* запишем его в виде $x_{zy}=x_n$ и $x_{,,}=x_{,,,}$ но правые части этих равенств равны нулю, поскольку векторы x_{yz} и т*, являются поверхностной нагрузкой p_x, которая отсутствует.

Наконец, угол закручивания <p с моментом M_1 для рассматриваемого стержня будет связан соотношением

$$g\_d<p\_ \frac{M_z}{d\ z\ GJ.\ «P} \qquad (11.19)$$

где $J^k^bd^3$, а $\kappa_г$—$\kappa_ъ$ *(b/d)* приведено в табл. 11.1.

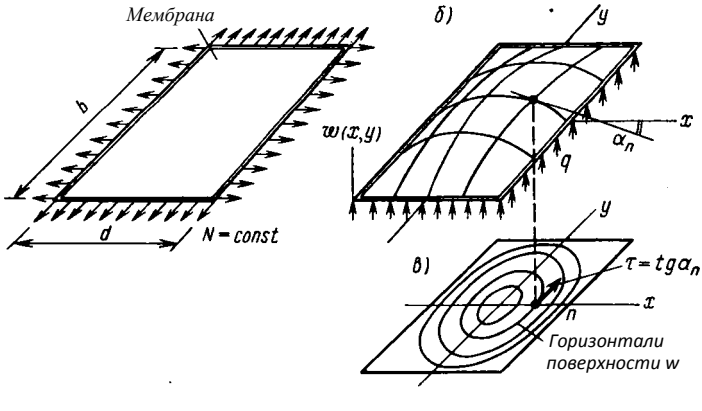
Угол $e=d<p/dz$ называют относительным (погонным) углом закручивания. Он выражает угол закручивания единицы длины стержня (рад/м).

Приведенных данных в основном достаточно для расчета на прочность и жесткость стержней прямоугольного сечения. Для сечений другой формы следует воспользоваться справочной литературой. Но для качественного анализа иногда бывает полезна так называемая *мембранная аналогия*, предложенная немецким ученым Прандтлем. Кратко рассмотрим ее сущность.

Мембранная аналогия

Мембранная аналогия. Представим себе рамку, совпадающую по форме с контуром поперечного сечения, на которую натянута идеально гибкая мембрана, равномерно растягиваемая во всех направлениях усилиями *N* (Н/м) (рис. 11.14, *а).* Величина *N* представляет усилие, приходящееся на единицу длины контура сечения. Пусть теперь на мембрану действует поперечная, равномерно распределенная нагрузка *q,* вызывающая прогибы w (х, *у).*

На рис. 11.14, б показана поверхность прогибов мембраны *w=w (x,* у). Если ее рассечь горизонтальными плоскостями w=const, то в пересечении получим линии, называемые горизонталями поверхности. В некоторой точке в плоскости, нормальной к горизонтали, проведем касательную к поверхности *n* (рис. 11.14, *в).* В теории упр>i ости доказывается, что полное касательное напряже-



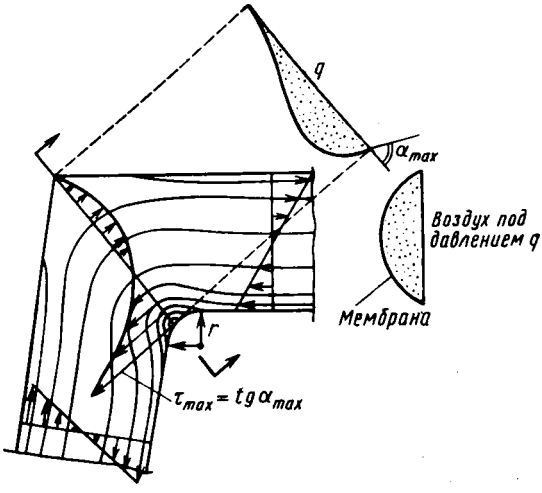
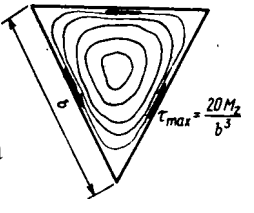


Рис. 11.15. Мембранная аналогия иллюстрирует местное возрастание напряжений во входящем угле контура сечения

ние будет пропорционально тангенсу угла наклона касательной: $г=a\%a_д$, а вектор т направлен по касательной к горизонтали.

С помощью мембранной аналогии можно качественно предсказать положение точек, где $т=т_{ЙЛ1}$. Так, для равностороннего треугольника со стороной *Ь* густота горизонталей наибольшей будет у середин сторон треугольника. Следовательно, в этой окрестности $tga_я$ будет иметь максимальное значение и в средних точках контура Т Ттт»



Расчеты дают $Тш«=20 3/_х/6^3$, т. е. для равностороннего треугольника =0,05 $Ь^3$.

На рис. 11.15 изображены горизонтали поверхности мембраны в окрестности внешнего и внутреннего (входящего) угла контура сечения, а также соответствующие эпюры касательных напряжений. У входящего угла горизонтали сгущаются, крутизна наклона касательных к поверхности возрастает и в точке на контуре этого угла имеет место $r_{тлJ[}=tgcx_{тлх}$. При радиусе закругления *г-*0* напряжение т^-юо. Напротив, у внешнего угла т=0.

Поэтому при конструировании очертания профилей углы, в особенности входящие, обязательно закругляют.

Рассмотрим стержень с поперечным сечением в виде узкого вытянутого прямоугольника *Ьх.8,* где *8«Ь* (рис. 11.16, а). С помощью табл. 11.1 и формул (11.17) и (11.19), полагая *(Ь/8)-*со,* получим

(11.20**)**

При этом напряжение $x=MJW_{Tp}$ практически остается неизменным почти на всей длине *Ь* узкого прямоугольника. Это заключение можно сделать на основании мембранной аналогии, учитывая, что угол *а* наклона касательной к мембранной поверхности вдоль стороны *Ь* практически будет постоянен и, значит, r=tg a«const. Некоторое отступление от этого распределения т будет лишь у узких сторон прямоугольника, примерно на длине *8,* чем пренебрежем, так как, по условию, *о«Ь.*

Формулы (11.20) можно обобщить и на произвольный тонкостенный профиль сечения, у которого средняя линия имеет длину *L* и представляет незамкнутую кривую (рис. 11.16, *б).* Тогда

(11.21**)**

Здесь и далее геометрическую характеристику жесткости тонкостенного сечения при свободном кручении мы обозначили вместо Лр через как это общепринято

в расчетах тонкостенных стержней.

Если сечение состоит из отдельных узких прямоугольников (рис. 11.16, *в),* то вместо (11.20) будем иметь

(11.22**)**

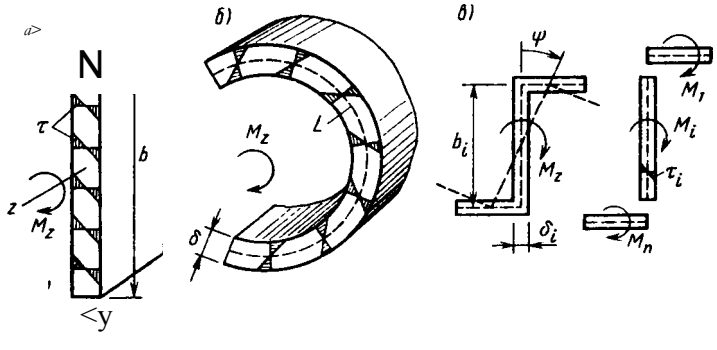


Рис. 11.16. Напряжения *(а),* (*б)* и распределение суммарного крутящего момента (в) в сечении открытого профиля

где /?>1— экспериментальный коэффициент, учитывающий некоторое возрастание жесткости сечения за счет областей пересечения составляющих его прямоугольников и переходных скруглений в прокатных стержнях. Обычно принимают:

для уголков /7=1,0;

для сечений типа швеллера B = 1,12;

для сечений типа двутавра р = 1,2.

Относительный угол закручивания определяется формулой

$$0=\frac{}{\text{dr}}=\frac{}{GJ_d'} \qquad (11.23)$$

где — жесткость сечения тонкостенного стержня при свободном кручении.

Для вычисления касательных напряжений в отдельной у'-й пластине стержня (рис. 11.16, в) представим крутящий момент как сумму моментов, воспринимаемых отдельными частями сечения:

$$M_r=\pounds л/,. \qquad (11.24)$$

Поскольку угол закручивания *9* для всех пластинок, составляющих сечение, общий, соотношения (11.23) можно записать для любой _/-й пластины в виде

Подставив **сюда** *в,* найденное из (11.23), получим

$$Mj=\hat{}\ M_z=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} m\text{-}b^{*l},}M_t \qquad (11.25)$$

и напряжение *x,* с учетом (11.20) будет

$$\frac{Mj\ M)}{1} \qquad (11.26)$$

Сравним жесткость на кручение тонкостенного стержня замкнутого и открытого сечений. Для замкнутого квадратного сечения при *8*—const, согласно формуле (11.9),

$$GJ\,t$$

$$, \text{d}s\ AbjS$$

$$7T$$

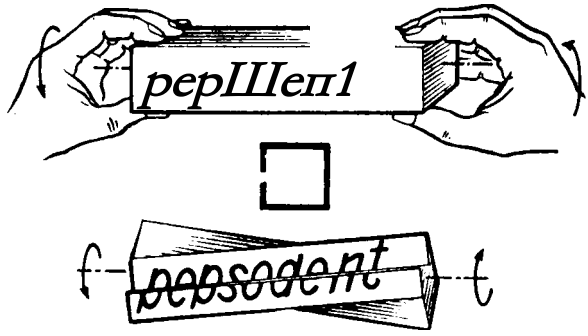


Рис. 11.17. Сопротивление кручению стержни открытого профиля значительно меньше, чем замкнутого, *ж* сопровождается сальной депланацией

Для аналогичного стержня открытого сечения *(в од* ной стенке имеется продольный разрез) по (11.22) при P= 1 получим

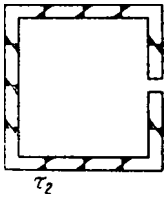
$$\&/,= (?-\frac{4}{3}M^3=-(7\frac{M}{3}*.$$

Отношение жесткостей будет

$$m=\frac{СЛр\ 3}{ЫЛ\ 4}\quad \frac{¿у}{\sim 8)}$$

*&=C0!*13*

Так, при ¿>/¿=20 имеем т=300, т. е. при прочих одинаковых условиях углы закручивания замкнутого коробчатого стержня будут в ЗСЮ раз меньше, чем у стержня с прорезью. Существенно различными будут распределение и касательные напряжения Т1 и τ_2.



В справедливости проделанных расчетов можно убедиться на простом опыте. Возьмите два одинаковых картонных футляра из-под зубной пасты или крема и в одном из них сделайте продольный разрез бритвой (рис. 11.17). При закручивании можно почувствовать несравнимо большее сопротивление цельной коробки, что говорит о большей жесткости стержней замкнутого профиля. Кроме того, кручение разрезанной коробки, моделирующей работу стержня открытого профиля, сопровождается сильной *депланацией,* т. е. искажением сечений за счет продольных перемещений точек, что видно на рисунке по смещению букв надписи на коробке.

Ввиду особой важности депланации для работы тонкостенных стержней незамкнутого сечения она отдельно изучается в следующем параграфе.

§ 11.7. Депланацня незамкнутого тонкостенного сечения

Рассмотрим тонкостенной стержень открытого профиля с произвольной формой сечения (рис. 11.18). При свободном кручении касательные напряжения изменяются по толщине стенки *8* по линейному закону так, что в точках срединной поверхности т=0. Поэтому депланация средней линии каждого поперечного сечения при свободном кручении возникает *без деформаций в срединной поверхности стержня.* Наша задача — получить эти депланации в зависимости от угла закручивания <р (г).

Далее будем изображать лишь срединную поверхность стержня, а его поперечные сечения — в виде средних линий, без указания толщины <5. Положение произвольной точки *M (г,* 5) в срединной поверхности зададим двумя координатами г и 5, причем дуга *я* отсчитывается от некоторой начальной точки M_0, подлежащей далее определению.

В точке *M* проведем плоскость, касательную к срединной поверхности, и обозначим перемещения точки в этой плоскости и» и V, где V — перемещение в тангенциальном к контуру сечения направлении. На рис. 11.19 показано, что в результате поворота сечения и его депланации точка *M* переместилась в положение А/, вместе с элементом срединной поверхности *йг* х ¿5. Получим связь между перемещениями и v, для чего напишем условие отсутствия угла сдвига элемента срединной поверхности, выделенного в точке $M\backslash = {}^{\wedge}a_2$, или

$$\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)ds \qquad \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)dz$$

йх

Знак минус поставлен потому, что приращение перемещения *(ду/дг)* ск направлено в сторону, противоположную направлению отсчета координаты 5. После сокращения

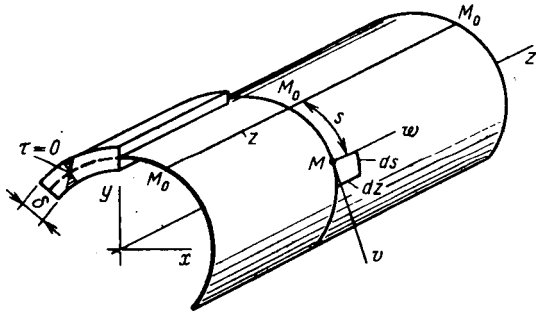


Рис. 11.19. Перемещение элемента срединной поверхности <Ьх<1г в тангенциальной плоскости без деформаций сдвига

;

на ¿У и ск получим искомое соотношение

$$\frac{\partial y}{8\$\ 8z} \tag{11.27}$$

Условие отсутствия сдвигов в срединной поверхности

Здесь использованы обозначения для частных производных *ЩЬв* и *д/дг,* так как перемещения ни» и V точки *М (г,* $) зависят от двух координат: **г** и **5.**

Теперь выразим тангенциальное перемещение V через угол закручивания *д>* (г).

Гипотеза неизгибаемости контура поперечного сечения

Примем гипотезу о том, что вдоль всего стержня установлены диафрагмы, которые, не сопротивляясь депланации, обеспечивают при закручивании стержня поворот каждого поперечного сечения как жесткого диска.

На рис. 11.20 изображен поворот сечения на угол *(р* относительно полюса или центра кручения *А* (он также подлежит определению).

Угол <р будем считать положительным, если он направлен против хода часовой стрелки при взгляде на сечение в положительном направлении оси г.

Из рис. 11.20 найдем полное перемещение точки *М* в плоскости сечения $MM_x=AM<p$ и его тангенциаль-

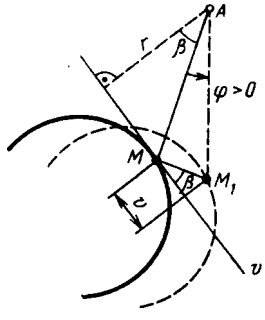


Рис. 11.20. Тангенциальное перемещение v, вызванное поворотом сечения вокруг полюса *А*

ную составляющую v= ***MM***, eos ***p=<pAM*** eos /?. Но так как ***AM*** eos /5=г, то искомое выражение v от ф будет

V—Гф. (11.28)

Подставляя (11.28) в (11.27) и обозначая дифференцирование по координате *г* через (***8<p/дг)=<p***соотношение (11.27) запишем так:

$$\frac{\text{Зн}>}{ds} = -\Gamma\phi \qquad (11.29)$$

Интегрируя его по дуге 5, получим

$$уу = -<p' \Big|_{Ko}^{й} г^{+}н\text{-}о, \qquad (И.ЗО)$$

где и'о — перемещение начальной точки M_0-

Произведение гс1$=(1ш геометрически представляет удвоенную площадь элементарного треугольника с основанием (Ъ, а весь интеграл вдоль дуги ***5*** от M_0 до

M дает так называемую

векториальную площадь о, т. с. площадь, покрываемую радиусом точки при ее движении вдоль контура из начальной точки M_0 в рассматриваемую точку М (рис.

Секториальная площадь

11.21). Секториальная площадь со> 0, ***если радиус р вращается против хода часовой стрелки (при взгляде на сечение в положительном направлении оси г).***

В дальнейшем примем, что м>$_0$=0, тогда **формула**

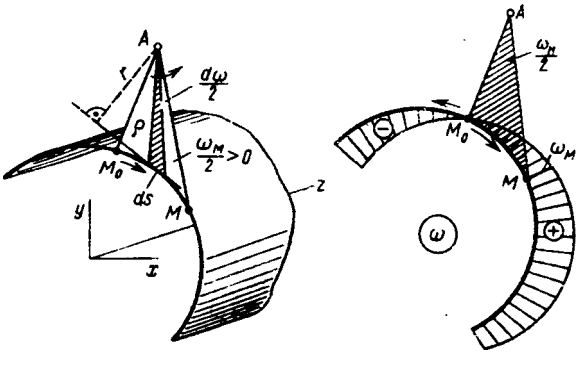
(11.30) окончательно примет вид

»

$$W = -\phi'\omega. \qquad (11.31)$$

Функция деплanации незамкнутого тонкостенного сечения

Она выражает закон изменения перемещения ***м>*** вдоль контура сечения вследствие депланации сечения в срединной поверхности.



Рве. 11.21. Эпюра секториальных координат « тонкостенного сечения

Так как м> пропорционально ***со,*** то говорят, что в тонкостенном стержне открытого профиля ***депланация происходит по закону секториалъных площадей.***

*■ г Степень развитая депланацвй сечения зависит от относительного угла закручивания ***<р',*** служащего в (11.31) общим множителем. С крутящим моментом <р' связан соотношением (11.23).

Между положением точки на дуге ***з*** и площадью ***со*** существует однозначное соответствие. Поэтому секториальную площадь ***со*** называют ***секториальной координатой точки.*** Если ее линейные координаты ***х*** и ***у*** имеют размерность [м], то размерность ***т*** будет [м^2].

Пример 11.3. Построить эпюру ш ■ найти деплана пню для Л-образного сечения, если углы закручивания стержня изменяются по закону 9« ***—вг.***

Решение. За ось кручеина прям ем ось *I ж* будем считать, что точки продольного волокна, совпадающего с осью г, закреплены от продольных смещений (н^1—0) (рис. 11.22). Следовательно, точки *А* **н** располагаются на оси *I* (в центре тяжести сечения). При движении из *Мц* в точку *1* радиус *АМ* лишь удлиняется, не покрывая никакой площади. Поэтому на участке M_0 — *1* имеем а>~0.

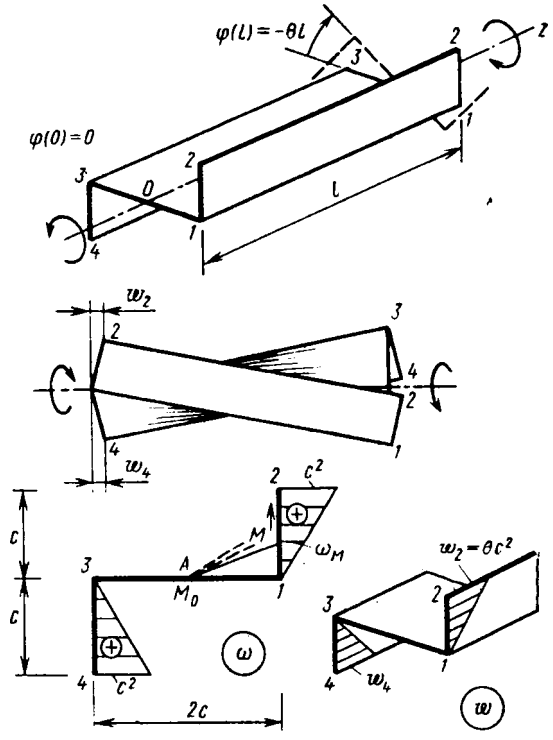


Рис. 11.22. К примеру 11.3. Свободное кручение стержня Я-образного сечения. Эпюра *со* и депланация

При движении из точки *1* в точку *2* радиус *АМ* вращается против хода часовой ~~стрелки~~, поэтому ш>0. В точке 5 о>з—с^2, а в промежуточ-

ных точках она изменяется по линейному закону. То же будет для левого участка контура. Эпюра <o изображена на рисунке.

Углы закручивания по длине стержня изменяются по закону = — 02. Следовательно, относительный угол закручивания <p' = — 0. По формуле (11.31) найдем Эпюра н> изображена на рисунке.

Сравнение эпюр ш и н [1] подтверждает вывод о том, что в стержнях открытого профиля деоланация совершается по закону секториальных площадей.

§ 11.8. Главные секториальные координаты и техника их определения

Из теории изгиба стержней известно, что использование в поперечном сечении специально выбранной системы осей координат ***xy,*** которую (см. гл. 4 и 6) мы назвали главными центральными осями, существенно упрощает расчетные формулы и создает большие удобства в изучении деформаций. Как мы увидим далее, то же самое имеет место для стесненного кручения. Поэтому удобно здесь распространить уже известные для координат ***x*** и ***y*** понятия и на новую секториальную координату со.

Составим таблицу, симметричную относительно главной диагонали, которую назовем «матрицей моментов инерции»:

$$/= \begin{vmatrix} T & & \text{симм} \\ T_X & & \\ \text{У} & \text{У} & \text{Л,} \\ \text{У} & \text{У} & \text{J} \end{vmatrix} \qquad (11.32)$$

Здесь внедиагональные элементы матрицы / представляют интегралы от произведения координат:

$$\int y x \, dA; \qquad (11.33)$$

а элементы на главной диагонали — интегралы от их квадратов:

$$\int y^2 \, dA; \; I_y = \int x^2 \, dA', \qquad /_{ш} = \int (й)^2 c \, dA. \qquad (11.34)$$

Элементы, отмеченные в матрице (11.32) пунктиром, нам хорошо знакомы — это осевые и центробежный моменты инерции площади сечения. Остальные элементы (в равенствах (11.33) и (11.34) взяты в рамку) — новые, они обязаны появлению новой секториальной координаты ***со*** и имеют следующие названия и размерность: $J_{xш}$, ^ — секториально-линейные моменты инерции (статические моменты) площади сечения, м[5]; /„ — секториальный момент инерции сечения, м[6].

Заметим, что в технической литературе и 1_{ya}, обозначают через 5«, и и соответственно называют ***сек-тсриальнс-линейкыми статическими моментами.*** Здесь для подчеркивания аналогии с мы их назвали моментами инерции. Далее будем их называть секториально-линейными статическими моментами и обозначать, как принято, через 5_m и 5^,.

Координаты называются главными, если в матрице моментов инерции] все внедиагональные элементы равны нулю.

Из гл. 4 известно, что именно условию /*, = 0 удовлетворяют главные оси координат. Следовательно, главные секториальные координаты должны быть подчинены условиям

(11.35)

Кроме того, по аналогии с понятием центральных осей, которые удовлетворяют равенствам

$$Б_x = \int_A yAA\,\hat{}\,0 \backslash\ 5,=/;\text{сси} = 0,$$

потребуем, чтобы эпюра ***со*** обращала аналогичный интеграл в ноль:

$$5_{Ш} = \int_A \text{сойА} = 0. \qquad (11.36)$$

Координаты ***со,*** удовлетворяющие равенствам (11.35) и (11.36), называют ***главными секториальными координатами сечения.***

Механический смысл этих равенств легко понять, если условно принять, что эпюра ***со*** — это эпюра нормальных напряжений ***со).*** Тогда станет ясно, что два равенства (11.35) выражают условие того, что при кручении в сечении отсутствуют изгибающие моменты M_x=0, M_y=0, а равенство (11.36) —того, что отсутствует продольная сила ***N=0.*** Можно сказать, что эпюра главных секториальных координат в статическом отношении — это ***самоуравновешенная*** эпюра ***со.***

Техника определения главных секториальных координат. Для выполнения грех равенств (11.35), (11.36) мы можем распоряжаться тремя параметрами, от которых зависит ***со:*** две координаты центра кручения и одна координата начальной точки M_0 на дуге контура сечения.

Для определения координат истинного центра кручения ***А*** зададимся вначале произвольной точкой ***В,*** пользу-

ясь которой как центром кручения при произвольном начале отсчета M\ построим эпюру $(л_в$. Пусть cc_x и cc_y — координаты точки A по отношению к точке B (рис. 11.23). Ниже показано, что $со_л$ и $со_в$ связаны равенством

$$ш_л = ш_в — a_x y + a_y x — C, \qquad (11.37)$$

где C — произвольная постоянная. Соотношение (11.37) показывает, что разность $a\}_B — a)_A = a_x y — a_y x + C = /(x, y)$ выражает уравнение плоскости. Поэтому различным положениям полюсов A и B будут отвечать, согласно (11.31), различные депланации сечения. Однако это различие при переходе от перемещений $n>_A$ к перемещениям н'д будет состоять лишь в добавлении некоторой плоскости Ди> = — $(p'/ (x, y)$, что не создает дополнительного искажения плоского поперечного сечения.

Подставляя (11.37) в (11.35), придем к системе уравнений относительно $<x_x$ и a_y:

$$\begin{aligned} &\text{ОСу } \$xy \text{ “Ь — О,} \\ &\text{оСд* } 3_X y \mid \text{Уу I С— 0} \end{aligned} \qquad (11.38)$$

Так как x, y — это ***главные центральные оси сечения,*** то $J_X y = Q$, $5_X = 0$, $5^\wedge = 0$. Поэтому из (11.38) имеем формулы для координат точки A:

Координаты центра кручения

$$¡уш_B AA$$

$$\backslash y^2 < \backslash A \qquad (11.39)$$

$$A$$

$$\mathbf{I} \qquad хш_в < 1A$$

$$\_?уш_{£=} \_a$$

$$/y$$

$$¡x^3 6A$$

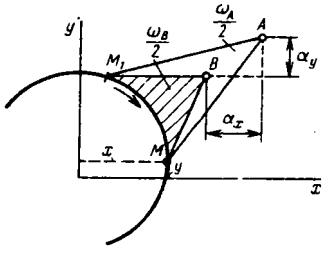


Рис. 11.23. Координаты относительно произвольно выбираемого полюса B

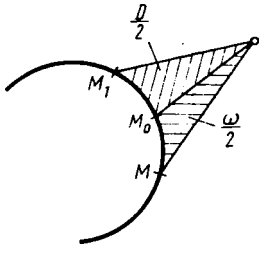


Рис. 11.24. Постоянная величина X) определяет положение нулевой точки M_0

Для нахождения положения точки M_0 построим эпюру co_A при найденном центре кручения A и произвольном начале отсчета M\. Из рис. 11.24 можно видеть, что co_A и co, найденные для истинной точки M_0, отличаются на некоторую постоянную B:

$$co = co_A - 0. \tag{11.40}$$

Подставив (11.40) в условие (11.36), получим

$$3_{юA} - OA = 0,$$

отсюда

$$D = \frac{S_{\omega A}}{A} = \frac{\int \omega_A \, dA}{\int dA}. \tag{11.41}$$

Вычитая B из ординат эпюры $co_л$ по (11.40), получаем эпюру главных секториальных координат. При этом может образоваться не одна нулевая точка. Любая из ниЯ может быть принята в качестве M_0.

Пример 11.4. Построить эпюру главных секториальных координат для г-образного сечения, рассмотренного в примере 11.3.

Решение. Построенную в этом примере эпюру *а>* **обозначим** co_A **и проверим, удовлетворяет ли она двум равенствам (11.35). Для этого на рисунке изображена для главных центральных осей сечения** *ху* **эпюра** *х.* **Из сопоставления ее с эпюрой** m_A **видно, что** $^{\wedge}_{ya1A} =$

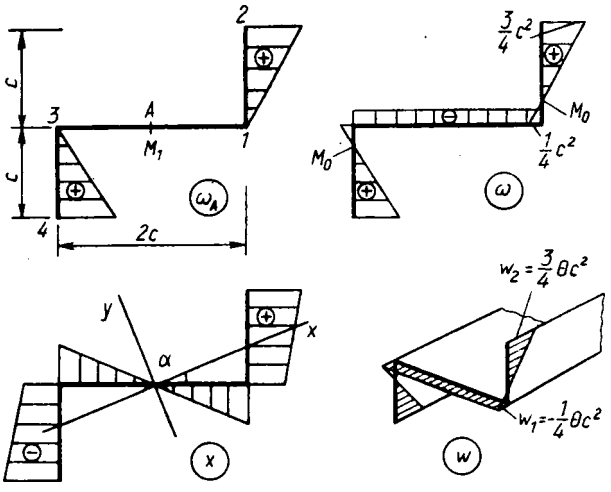
$= | x\omega_{/1}йA = 0$ **и, следовательно, по (11.39) имеем** $x_y=0$. **Аналогично получим** $x_x=0$ **и отсюда заключаем, что принятая в примере 11.3 точка** *А* **является истинным центром кручения.**

Найдем теперь константу *О по* **(11.41):**

$$B = \frac{{}^{*<\blacksquare}_{¡CO_AC1A\ £.5,}}{A} \quad {}^{/\,o}_{4\ c5\ 4} \quad {}^{25\ ^12)}$$

Здесь интеграл по площади заменен суммой интегралов по дуге контура, как это делалось в § 11.5, а интегралы под знаком суммы вычислены как площади эпюры $аз_A$ **на участках контура** $Ь_i$. **Вычитая константу £> из ординат** $<o_A$, **получим главные секториальные координаты** *со* **(рис. 11.25).**

На рисунке, кроме того, изображена эпюра депланаций *н/* **согласно эпюре ш. Сравнивая их с депланациями, найденными в примере 11.3, видим, что они отличаются в данном случае лишь на константу. Это говорит о том, что для свободного кручения переход от неглавных**



Ряс. 11.25. К примеру 11.4. Построение эпюры главных секториальных координат *со Z-обрлзаого* **сечения**

к главным секториальным.координатам означает лишь изменение положения плоскости, от которой отсчитываются депланации данного сечения. Как будет рассмотрено ниже (см. гл. 12), для стесненного кручения переход к главным секториальным координатам станет особенно важным.

Пример 11.5. **Построить эпюры со и** депланации *V/,* **определить положение центра кручения для швеллера.**

Решение. Ввиду наличия у сечения оси симметрии точки *Мо* **и** *А* **находятся на этой оси (рис. 11.26). Определению подлежит координата** x_x **центра кручения** *А,* **отсчитываемая от точки** *В,* **которую мы совместим с точкой** M_0. **Входящие в формулу (11.39) для** $л_x$ **интегралы по площади заменяем интегралами по дуге. Так, используя эпюры** *у* **и** $ш_в$ **по правилу Верещагина, найдем**

$$x_B = \frac{усов_к = 2 \cdot \frac{ИЬ^2}{4} \cdot \frac{А И^2 Ь^2, 5}{2}}{-Н}.$$

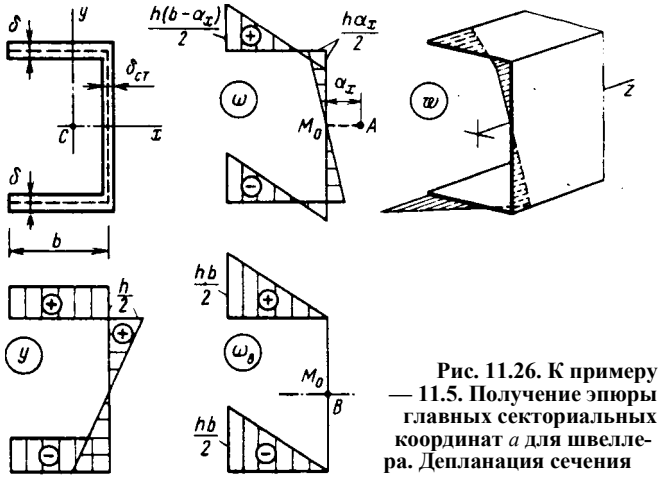


Рис. 11.26. К примеру — 11.5. Получение эпюры главных секториальных координат *а* **для швеллера. Депланация сечения**

$$\text{------}, \qquad (11.42)$$
$$\hat{}x\ 6\ \textbf{-г-}\ A_{г.}/A_{пол}$$

где $A_{с1} = к3_{ст}$, $Лао_{Л}=Ь3$. **Сравнивая этот результат с формулой (7.9), видим, что они полностью совпадают, т. е.**

центр кручения и центр изгиба — это одна и та же точка сечения.

Это можно доказать я в общем случае, но здесь мы этого делать не будем. Эпюра ш и подобная ей, согласно (11.31), эпюра депланаций нг~ —*ср'со* **показаны** ей. **рисунке.**

Преобразование секториальиой координаты при измене- ^ ими положения полюса. Докажем формулу **(11.37),** которой мы воспользовались ранее. На рис. **11.27** изображены приращения секториальиой площади <1ш$_в$>0 и ***й(о$_А$>0,***

получаемые при переходе из точки ***М*** контура в точку ***М***\ на длину пути <1^. При этом координаты точки ***М*** изменяются на **с*у** и **—сЬс.** Из чертежа имеем ***&о)$_в$=г$_в$*** **с1*** и ско^г^&у, а их разность

$$\textbf{С1}\ (со_в — со_м) = (г_в - г_А)\ \textbf{(15 = Дг<1?.} \qquad (11.43)$$

Так как ***Аг=х$_х$со$р + <Ху$тр,*** а сое/?=сГу/сЬ' и вшД =

= (— с1х)/с1л, то, подставляя эти значения в **(11.43),** преобразуем это выражение к виду

$$д\ (си_в - со_л) = а_х й у - а_у й х. \qquad (11.44)$$

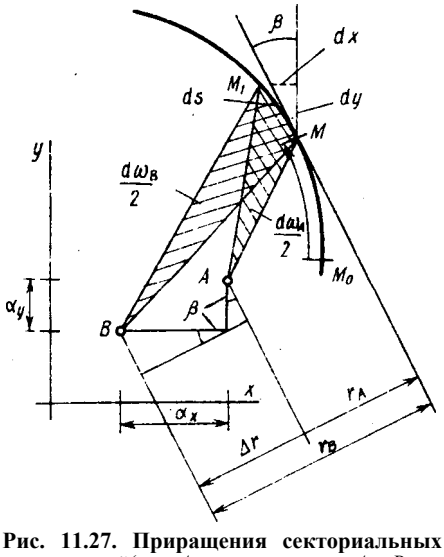


Рис. 11.27. Приращения секториальных координат *й(о$_А$* **и** *Ат$_в$* **для полюсов** *А* **и** *В*

Интегрируя и добавляя произвольную постоянную, получаем

$$a)_в - \omega_A = a_x y - a_y x + C,$$

откуда следует формула (11.37).

Вопросы для самоконтроля к главе 11

11.1. Что такое депланация поперечного сечения?

11.2. Чем различаются свободное и стесненное кручения стержней? Какие напряжения возникают в их поперечных сечениях?

11.3. Каким свойством обладает поток касательных сил при свободном кручении тонкостенного стержня замкнутого одноконтурного сечения? Как определяются напряжения и углы закручивания в таком стержне?

11.4. Как определяются напряжения и углы закручивания при кручении стержней со сплошным прямоугольным поперечным сечением? Напишите соответствующие зависимости для сечения в виде узкого прямоугольника.

11.5. В чем состоит мембранная аналогия?

11.6. Как определяются напряжения и углы закручивания в тонкостенных стержнях открытого профиля при свободном кручении? Какие стержни являются более жесткими на кручение — открытого или замкнутого сечения?

11.7. Что такое секториальная координата точки тонкостенного стержня открытого профиля?

11.8. Как связаны депланации сечений стержня открытого профиля с функцией углов закручивания?

11.9. Каким условиям удовлетворяют главные секториальные координаты?

11.10. Как определяется положение центра кручения и нулевой точки у сечения открытого профиля?

Задачи

11.1. Два швеллера № 20 длиной *1—4* м объединены приваренными планками с шагом *а*—0,3 м. Сила /=40 кН может прикладываться с отклонением от плоскости симметрии на Ста*=0,5 м. Определить расчетное усилие T_m, действующее на планку, и максимальное касательное напряжение в стенке швеллера.

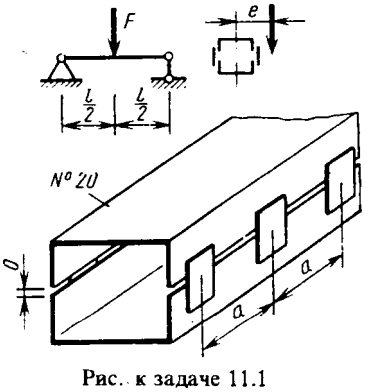


Рис. к задаче 11.1

11.2. Трубчатая тонкостенная балка с сечением в виде равностороннего треугольника опирается в трех углах на опоры. Найти от изгиба (по абсолютному значению), т«дот кРУЧения и вычислить их отношение.

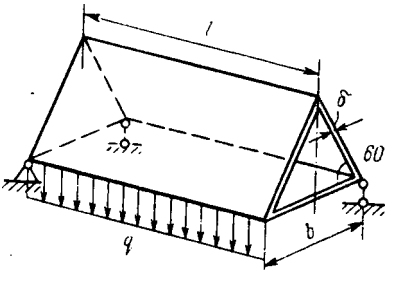


Рис. к задаче 11.2

113. Вычистить наибольшее касательное напряжение в поперечном сечении ломаного стержня (от кручения), а также перемещение ду (с учетом изгиба и кручения), *И = 2Ь.* Результаты выразить через *д, I, Ь, Е* и *О.*

11.4. Стержень длиной / П-образного сечения испытывает свободное кручение моментом .V/- = *М* Найти угол накручивания *(!)* и напряжение Т|1Ш•

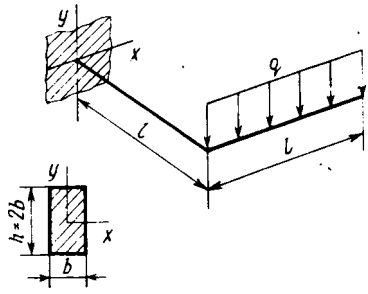


Рис. к задаче 11.3 .

B'<

¿Г-С0Л5?

2c

Рис. к задаче 11.4

11.5. Найти координаты центра кручения ренного в предыдущей задаче. Вычислить пере- ! x_x, и значения главной секториальной коор- мещение и'та* от депланации сечения.

динаты в точках *1, 2, 3* **для стержня, рассмот-**

Отвсты к задачам главы 11

11.1. 7^ = 28,8 кН; $\tau_{тм}$ = 11,89 МПа. 11.2. ^„/$\tau_{гаах}$=//(6А); *с^дРКг^ЬЧ);* 1^ =

= *^2ч1ЦЬ5* **11.3. $\tau_{тах}$ = 1,01б (?/2/А5); Д1р = (0>6875/£-\|-1,092/С) (?/4/*4)- 11.4. ? (/) = ЗЛ/// /(1,12С8с<5^3); x_{max} = ШЦЯс5^2). 11.5. a_x=0; а, = (5/7)с; $ш_0$=0;** *Ш1* **= (5/7)с^2, $ш_2$=-(9/7)с^2; $ш_3$=(10/7)с^2; н'$_{та1}$=н>3** *=~[ч>* **(/)//]** *со3.*

/

СТЕСНЕННОЕ КРУЧЕНИЕ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ

§ 12.1. Общее понятие о теории стесненного кручения стержней открытого профиля (теории Власова). Основные допущения

Само понятие о стесненном кручении стержня уже было дано выше (см. § 11.1). Здесь следует добавить, что развитие инженерной теории стесненного кручения оказалось особенно необходимым для стержней с ***незамкнутым контуром сечения,*** которые находят широкое применение в строительстве, кораблестроении, авиастроении и т. д. Дело в том, что возникающие при стесненном кручении нормальные напряжения в таких стержнях могут иметь большие значения и оказывают существенное влияние на их прочность и жесткость. Общая теория деформирования тонкостенных стержней открытого профиля создана чл.-кор. АН СССР В. 3. Власовым, выдающимся ученым, внесшим крупный вклад в строительную механику тонкостенных конструкций и оболочек.

Напомним, что кручение является стесненным, если депланация переменна по длине стержня.

На рис. 12.1, ***а, б*** дано сравнение свободного и стесненного кручения двутавра. В первом случае (рис. 12.1, ***а)*** депланации по длине стержня постоянны, т. е. w = const, в поперечном сечении возникают только касательные напряжения $\tau_{св}$ и весь крутящий момент уравновешивается моментом этих напряжений $M_{св} = M_{гр}$. Согласно формуле (11.30), с углом закручивания ***ср*** момент свободного кручения M_a связан соотношением

$$M_a = GJ_d(p'. \qquad (12.1)$$

При стесненном кручении (рис. 12.1, ***б)*** для создания деформации свободного кручения идет только часть полного крутящего момента ***M^.*** Другая часть, которую обозначают $M_ш$, в двутавре связана с ***изгибом его полок*** так, что $M_{,0}—Qh.$ Соответствующие касательные напряжения $\tau_ш$ равномерно распределены по толщине полок. Момент $M_{,,,}$ называют изгибно-крутящим, а само стес-

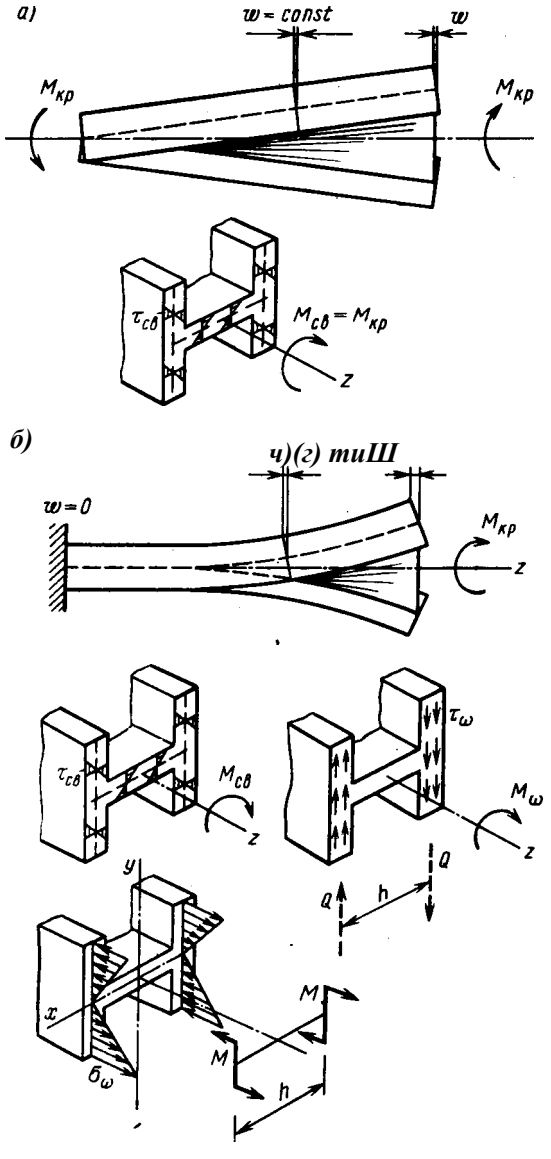


Рис. 12.1. Свободное *(а)* и стесненное (б) кручения двутавра

ненное кручение иногда называют изгибным (для сечения в целом это будет кручение, а для отдельной полки — кручение и изгиб).

Из условия равновесия можно написать единственное соотношение

Условие равновесия для крутящих моментов в сме-

$$M_x p = M_a + M_a = <7/4(p' + M_a$$

Поэтому задача стесненного кручения является статически неопределимой. Равенство (12.2) указывает, что значения моментов M_a и M_m при известном ***Мщ,*** можно найти только предварительно определив углы закручивания ***(р (г).***

При стесненном кручении депланация \\г ***(г)*** по длине стержня переменна (за счет изгиба полок) и, как следствие, в их поперечных сечениях возникают нормальные напряжения, которые обозначают a_m. Их распределение с учетом того, что одна полка изгибается выпуклостью вверх, а другая — вниз, представлено на рис. 12.1, ***б.*** Эти напряжения в данном случае приводятся к бнпаре, т. е. двум противоположно направленным моментам ***М,*** действующим в параллельных плоскостях.

В любом поперечном сечении стержня (рис. 12.1, б) по методу сечений найдем, что $N=0$, $M_x=0$ и $M_y=0$. Отсюда получим три статических условия, которым должна удовлетворять эпюра нормальных напряжений o_a, возникающих при стесненном кручении:

г

Статические условия для нормальных напряжений в сеченкн при стесненном кручении

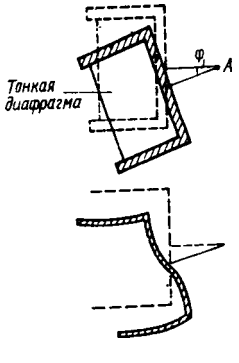
$$\text{ЛГ}=\{a_{ш}\text{сЫ} = 0;\ M_x=\backslash\ (o_a6A)y=0;\ M_y=\backslash\ (o_aйA)x=0. \tag{12.3}$$

При стесненном кручении в поперечных сечениях возникает система взаимоуравновешенных продольных сил и напряжений.

Ясно, что установить их значение статическим путем невозможно, и это лишний раз подтверждает статическую неопределимость задачи о стесненном кручении. Найти их можно только выразив напряжения через функцию углов закручивания *ср (г).*

Общий путь решения будет аналогичен тому, что мы имели при расчете балки на упругом основании, где функцию прогибов V (г) определяли из дифференциального уравнения, а ‘через V (г) выражали все внутренние усилия.

Здесь мы также должны будем выразить $M_ш$, a_m, x_a через функцию углов закручивания <р (г), а ее саму найдем из решения соответствующего дифференциального уравнения.



При решении этой задачи будем пользоваться следующими основными допущениями:

1) благодаря наличию диафрагм считаем, что поперечные сечения поворачиваются вокруг оси центров кручения ***А—А*** как жесткие диски на углы *ср.* Аналогичное положение использовалось при рассмотрении свободного кручения. Оно означает, что считаем устраненными возможные искривления очертания сечения в плоскости поперечного сечения на всей длине стержня;

2) .примем, что депланации поперечных сечений развиваются по закону секториальных площадей [см. (11.31)], как при свободном кручении. Это означает, что пренебрегаем деформациями сдвига в срединной поверхности, вызываемыми напряжениями $\tau_ш$;

3) напряжения $a_ш$ и $\tau_ш$ считаем равномерно распределенными по толщине стенки <5;

4) как и при изгибе, считаем справедливой гипотезу о ненадавливании продольных волокон друг на друга в поперечном направлении (сг,=0).

§ 12.2. Нормальные напряжения $ег_ш$

Пользуясь вторым допущением и зависимостью (11.31) для депланации, запишем выражение продольного перемещения и> от депланации сечения при стесненном кручении:

$$н>=—<p'(г)\ 'со, \qquad (12.4)$$

где $со$ — секториальная координата точки.

По закону Гука с использованием четвертого допущения ($а,$=0) получим выражение для напряжений

$$a_ш=e_1E=—\frac{}{62}E=-(p''Eсо, \qquad (12.5)$$

которое, благодаря тому что множитель (—$(p''E)$ является общим для всех точек сечения, позволяет сделать, такое заключение:

нормальные напряжения a_m распределены в поперечном сечении по закону секториальных площадей со.

Формулу (12.5) приведем к более стандартной форме, аналогичной известному выражению из теории поперечного изгиба:

$$=\frac{}{/x}— У• \qquad (12.6)$$

Для этого примем в выражении (12.4) относительный угол закручивания таким, что (— ') = 1, и подсчитаем работу элементарных сил $a_шAA$ в сечении на соответствующей «единичной» депланации ^=1 $со$ (рис. 12.2). С учетом (12.5) эта работа будет

$$|(o_ш\&A)ca= -ф''E\ |со^2ёЛ, \qquad (12.7)$$

где $со^2йА$, м^6 — ***секториальный момент инерции***

$_A$

Рис. 12.2. Элементарная сила *о^ДЛ* совершает работу на перемещении от депланации к[1]

Поэтому

$$B_a = -ц>'' E1_a. \quad (12.8)$$

Произведение называется ***секториалъной жесткостью*** тонкостенного поперечного сечения, а $B_ш$ — новый ***обобщенный силовой фактор в сечении, отвечающий напряжениям $a_ш$ и называемый бимоментом*** (Н м^2). Так, для двутавра (см. рис. 12.1, ***б) $B_Ш$=M*** ■ А, т. е. он представляет бипару с плечом А, что и объясняет в общем случае наименование ***бимомент.***

Чтобы установить более общую точку зрения на бимомент, сопоставим выражения работы ***А*** для силы /Г, момента ***М*** и бимомента $B_ш$:

$$A = P\,\text{А};\ A = M'\,ср|\ A = B_m\{—(p'). \quad (12.9)$$

В этих равенствах первым сомножителем является обобщенная сила, а вторым — соответствующее обобщенное перемещение (путь А, угол ***ср,*** относительный угол ***ср').*** Таким образом, бимомент можно считать естественным расширением таких известных понятий, как сила и момент, если смотреть на них как на обобщенные силовые факторы.

Подставив значение ***(— ср'')*** из (12.8) в выражение (12.5), окончательно получим формулу

$$B_{a_{CO,}} \quad (12.10)$$

Л»

аналогичную (12.6).

Напряжение $сг_ш > 0$, ***получаемое по этой формуле, является растягивающим.***

В табл. 12.1 приведена сводка зависимостей **теории** поперечного изгиба и стесненного кручения, которая иллюстрирует аналогию между этими двумя деформациями. Последние две строки для деформации кручения написаны по аналогии и их еще предстоит доказать в следующем параграфе.

*

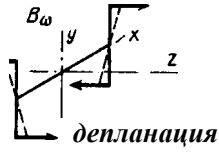
мента через угол

зак РУЧивания

перемещение

М

поворот



»

Формула нормальных напряжений при стесненном кручении

Аналогия в зависимостях теории поперечного изгиба и стесненного кручения

Изгиб	Кручение
Прогиб V (г)	Угол закручивания *ср (г)*
A	*01²йЛ* / *A*
$M_x=\backslash a_z\&Ay=-K1_x y''$ / *A*	*B(й* — J *о & йА с о* = — *Е7-д (р* / *A*
$a_z=\frac{M_x}{y}$ / г; $e_>=л/_x=-£7_{гУ}''$	$a_ш=\frac{B_a}{с\ о}$; $M_ш=B'_к=-E1_ш<p''$
	$т=\frac{M_m 3™}{}$
Л«	Л, <5

Внесем выражение для $a_ш$ (12.10) в статические условия (12.3). Сократив их на множитель $B_a\backslash 3_ш$ $ф$ 0, придем к равенствам

$$|щсЫ = 0;\ ¡соуйА = 0;\ \$\ сох\ й\ А == 0,$$
$$A\ Л \qquad\qquad A$$

которые совпадают с равенствами (11.35) и (11.36), служившими условиями того, что *со* — это ***главные секториальные координаты сечения*** (см. § 11.8). Следовательно,

при использовании формулы (12.10) в качестве секториальных координат со должны приниматься именно главные координаты.

Их определение рассмотрено ранее в § 11.8.

§ 12.3. Касательные напряжения $x_ш$

Для определения касательных напряжений $т_ш$ составим условие равновесия отсеченной части стержня (рис. 12.3), спроецировав все силы на ось *г.*

^(Ы-ЛЛГ^О;

отсюда

$$т_ш=\frac{1<_ш^{отс}}{-\text{—}\bullet} \qquad (12.11)$$

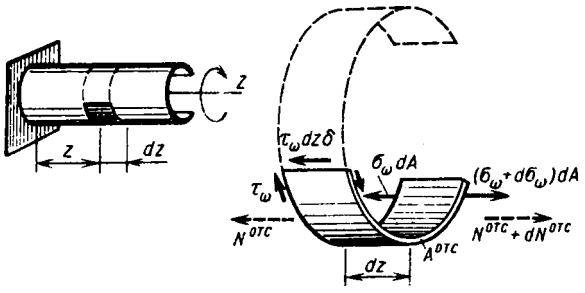


Рис. 12.3. Определение $\tau_ш$ из условия равновесия отсеченной части стержня

продольную силу /V^ГОТС на отсеченной площади ***А :*** ,отс

$$ЛГ== \underset{ОТС}{I}\, a.йA\text{-}\hat{}БТ,^{Да} \qquad (12.12)$$

где

(12.13)

— секториальный статический момент отсеченной части сечения, м^4.

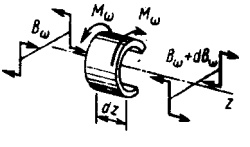
Примем поперечное сечение стержня постоянным по длине; следовательно, в выражении (12.12) /$_ш$ и 5^° не будут зависеть от ***г.*** Тогда, подставив (12.12) в (12.11), получим

(1214)

Докажем равенство

$$\underset{Ax}{ЛВа} = M_ш. \qquad (12.15)$$

Для этого составим условие равновесия элемента стержня длиной по принципу возможных перемещений, приняв в качестве возможного перемещения закручивание элемента стержня на угол ***&(р = &*** и его депланацию ***м= — (р'а>.*** Учитывая правило подсчета работы бимомента (12.9), получим



$$M_0й(р\text{-}йB_a(р' = 0.$$

Подставляя сюда ***А(р = (р'йг*** и сократив на ***ср',*** получим требуемое равенство (12.15), которое можно записать также в следующем виде:

$$M_a = B_a = —EI_m <р* \qquad (12.16)$$

;

Выражение изгибночкрутшщего момента через угол закручивания

Окончательно формула (12.14) для $\tau_ш$ с использованием (12.15) преобразуется к виду

Формула касательных напряжений при стесненном кручении

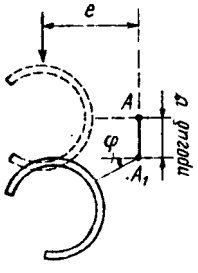
$$\frac{M_\omega S_\omega^{отс}}{J_\omega \delta} \qquad (12.17)$$

В соответствии с рис. 12.3, на основании которого получена эта формула, сформулируем правило знаков: ***напряжения*** $\tau_и$>0 » ***продольном сечении рассматриваемой отсеченной части, если они направлены в сторону, противоположную оси г.***

Теперь, для того чтобы можно было использовать формулы для напряжений $a_ш$ и $\tau_ш$, необходимо найти функцию углов закручивания ***(р*** (г), через которую выражены внутренние усилия B_m (12.8) и $M_ш$ (12.16). Эта задача будет решена в следующем параграфе.

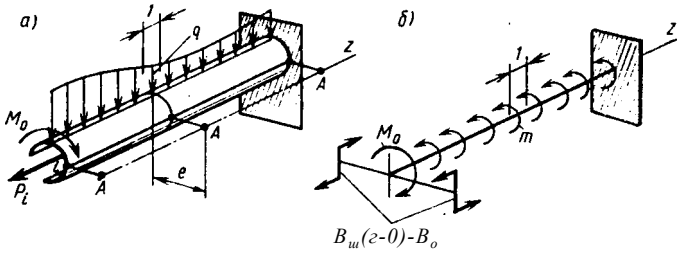
§ 12.4. Дифференциальное уравнение для углов закручивания и его общее решение

Рассмотрим тонкостенный стержень, загруженный некоторой нагрузкой ***q*** (рис. 12.4, ***а),*** который испытывает растяжение, изгиб и кручение. Выделим из этого деформацию кручения, совершаемую вокруг оси ***А—А,*** так как, согласно предыдущему, каждое поперечное сечение при кручении поворачивается как диск вокруг центра кручения ***А.*** Очевидно, что чем больше плечо ***е*** поперечной нагрузки относительно оси ***А—А,*** тем больше будет деформация кручения. При ***е — 0*** поперечная нагрузка вызовет только изгиб. Поэтому ось ***А—А*** называется также осью центров изгиба, о чем уже говорилось ранее.



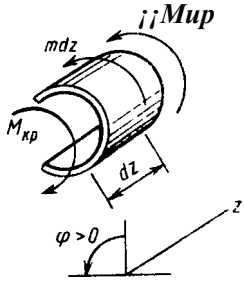
При определении углов закручивания ***(р*** перейдем к осевой расчетной схеме, для чего, совместив с осью ***А—А*** продольную ось ***г,*** мысленно перенесем все поперечные нагрузки на эту ось. На рис. 12.4, ***б*** изображены скручивающие силовые воздействия, которые надо приложить при указанном переносе нагрузок. Интенсивность внешнего момента будет ***т = де.*** Продольная сила $P_в$

приложенная в **1**-й точке контура сечения, порождает



в этом сечении бимомент B_a *(г=О)=B_0,* о чем более подробно сказано ниже. Бимомент B_0 условно изображен на схеме в виде *бипары,* аналогичной той, к которой он приводится в сечении двутавра (см. рис. 12.1).

Напомним, что с внутренним крутящим моментом Л/гр интенсивность *т* связана соотношением (2.3):



(12.18)

Крутящий момент определяем относительно оси центров изгиба А—А. Как и ранее, Л/$_{хр}$> 0, *если при взгляде на сечение со стороны его внешней нормали видим момент вращающим по ходу часовой стрелки.*

Угол поворота <*р* > 0, *если при взгляде на сечение в положительном направлении оси г видим поворот против хода часовой стрелки.*

Дифференциальное уравнение для *(р (г)* получим исходя из условия равновесия (12.2):

$$M_a+M_a=M^{\wedge}. \qquad (12.19)$$

Подставив в (12.19) выражения (12.1) и (12.16) для внутренних моментов M_a и M_m, получим

$$01_{Л}<p'-E1_a<p''=M_{ъ}.$$

Дифференцируя это равенство по *г* один раз и учтя выражение (12.18), приведем его к окончательному виду

»

Дифференциальное уравнение углов закручивав ш< для стержня постоянного сеченые

$$(p^{XV*2}-k^{*}\ (p =—, \qquad (12.20)$$

где

$$k—Ш \qquad (12.21)$$

Рассмотрим случай однородного уравнения, когда *m — 0:*

$$(p^{™}-k^2(p''=0; \qquad (12.22)$$

его общее решение принимает вид

$$<p — C] + C_2z + C_3 cЬ\ kz + C_4 вЬ\ kz. \qquad (12.23)$$

Преобразуем это решение к форме метода начальных параметров, для чего сформулируем следующие граничные условия при $z=0$: $(p(0) = <p_0$; $\phi'\{0) = (p_0'$, $(0)=$ $= (в^{\wedge}(p'-Ш_ш(p''\%_0=M_0$ и $B_a(0)=-E1_ю<p'\cdot(0) = B_{<}$. Используя их, найдем произвольные постоянные:

С— т,Л- С■ Г,"•• Е _ , с,= —, с,=-Д^'"°

Внося их значения в (12.23) и группируя слагаемые при соответствующих начальных параметрах cp_0, cp_a', M_0 и B_0, получим решение в виде

$$(p = cpo + \frac{}{к} вЬкг + — (1— cЪ.кг) + \frac{}{kGJ_i} \{кг — \$).л.кг). \quad (12.24)$$

По выражению (12.24) для cp составляем формулы для внутренних усилий:

$$M_a = cp' = (p_0' cЬ\ кг — B_0к\ \$Ь\ кг + M_0(\ 1 — cЬ\ кг)C\$$

$$B_ш = — EJ_{<a}\ (p'' \sim — (poE3a,к\$Ъкг + B_0cЪкг + — \$Ъкг \quad (12.25)$$

$$M_ы = B_ш' = — (p_0'ЫI,1c1хкг + B_0к\$Ъкг + M_0cЬ,кг.)$$

Здесь учтено, что $к^2 — 03^(E1_ш)$. Путем сложения первой и третьей строк можно видеть, что $M_{св} + M_ш — M_a$, что соответствует выражению (12.19), т. е. одна эпюра, например M_a, служит дополнением эпюры $M_ш$ до ординат суммарных крутящих моментов $Л/_{1р} = М_0$.

Поясним примером вычисления M_0 и B_0 при заданных сосредоточенных силах в сечении 2=0 (рис. 12.5). С учетом правила знаков для крутящего момента составим выражение момента относительно точки A:

$$M_0 = P_2e_2 - P_1e_1. \quad (12.26)$$

Продольная сила $P>$ порождает бимомент B_0, поскольку при депланации этого сечения $м> = (— (p')a>=1\ со$ сила Р„ аналогично (12.7), совершит работу $B_0 = P_1щ$. При нали-

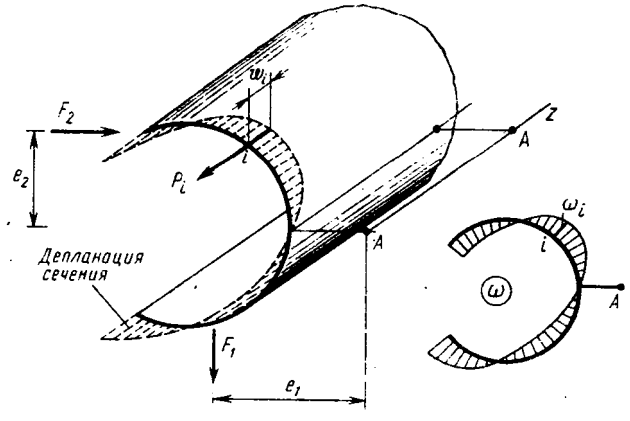


Рис. 12.5. Определение крутящего момента и бимомента в сечении

нии нескольких продольных сил в сечении бимомент определяется путем суммирования:

$$B_n = \sum_{i=1} P_i \omega_i \qquad (12.27)$$

На рис. 12.6 проиллюстрировано возникновение деформации стесненного кручения от продольной внешней силы P_i. Будучи приложенной к краю полки, она вызывает изгиб за счет внецентренного сжатия, что и приводит к закручиванию всего стержня в целом.

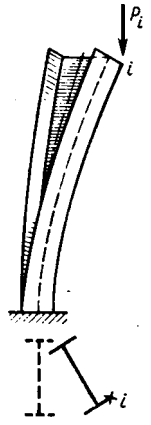


Рис. 12.6. Внецентренное действие продольной силы вызывает кручение

При наличии распределенного момента $m_n = \text{const}$ к общему решению однородного уравнения (12.24) надо добавить частное решение, имеющее вид

$$\text{фчасгн} \quad \frac{m_0}{k^2 GJ_j} \left(z - \frac{1}{2} k^2 z^2 - \operatorname{ch} kz \right). \qquad (12.28)$$

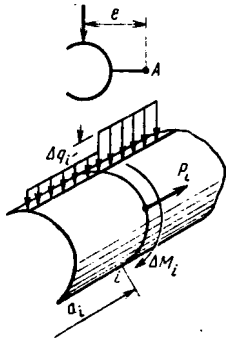
Если стержень имеет несколько участков (рис. 12.7), то, пользуясь приемом продолжения решения для г-го участка (p_i в пределы (г+ 1)-го участка (см. § 8.5 и 10.4), можно составить следующую универсальную формулу для ***п-го*** участка:

$$\langle P_n = \langle P_0 + \frac{}{\kappa} \text{ьЬкг} + \frac{}{GJ_i} (1 - \text{сЬкг}) + \text{-}^{\sim} (\text{кг-\$Ькг}) +$$

$$+ \frac{m_0}{k^2 GJ_d} \left\{ 1 + \frac{k^2 z^2}{2} - \operatorname{ch} kz \; 1 + \sum_{i} \frac{}{GJ_j} \left(1 - \operatorname{ch} kz_i \right) + \frac{AM_i}{kGJ_*} (\text{кг} - \right.$$

$$\left. - \operatorname{sh} kz_j) + \frac{A/^{2}}{\kappa GJ_j} \left(1 + \frac{k^2 z_j}{2} - \operatorname{ch} kz_i \right) \right\} \qquad (12.29)$$

Здесь для краткости обозначено $z_1 = z - a_i$. Под знаком суммы в (12.29) приращения моментов ΔM_i и $\Delta m_i = d_i e$



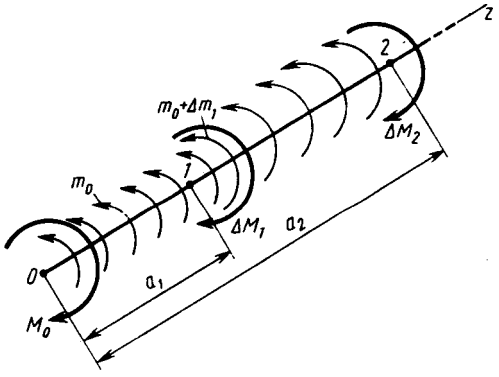
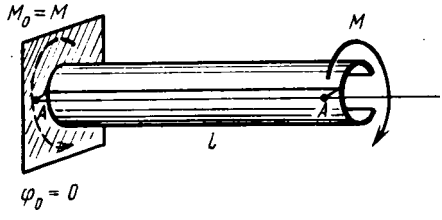


Рис. 12.7. Скручивающая нагрузка на стержень в методе начальных параметров

определяются аналогично (12.26) относительно точки *A,* а приращения бимомента AB_i от продольных сил Р, — по формуле (12.27), т. е. АД = ^ГР,ш,. Как обычно, часть из четырех начальных параметров $<p_0$, $(p_a \backslash B_n$ и M_0 бывает известна, а неизвестные находятся из граничных условий на другом конце стержня.

Пример 12.1. **Составить выражения доя внутренних усилий от стесненного кручения консольного стержня, загруженного моментом** *М* **(рис.** 12.8**).**



$м_0 = м$

Во*0

^Ьк1

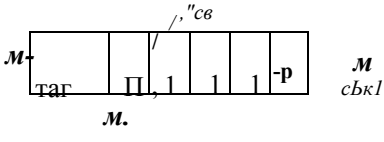


Рис. 12.8. К примеру 12.1. Стесненное кручение консольного стержня

Решение. Воспользуемся выражением (12.24) для угла закручивания. в котором при наличии заделки при г=0 *(ро=0* **и <p_0' = 0. Это последнее равенство следует из того, что, согласно (12.4), депланация** *ч/=—(р'а>* **пропорциональна** *<р',* **и так как в заделке №=0, то и** *<р'=0.* **Остальными начальными параметрами в (12.24) будут момент** *Ма = М* **и бимомент** B_n^0 **(так как** $a_{(0}$ **в заделке не равны нулю), который подлежит определению. Выражение для** *<р* **будет**

$$\text{с>=}\frac{B_0}{C,]_{11}}(1 - \text{сЬ£г)н}\frac{M}{\text{к}C1_л}\text{(кг— вЬ/сг).}$$

Для определения *Во* **имеем граничное условие: при г=/ на свободном конце стержня <$\tau_ш$ = 0, т. е.** $B_{(11}$ **(г = /) = 0. С использованием формул (12.26) при** $M_0 = M$ **это условие приводит к равенству**

$$\textbf{\textit{ВпсЪк}}\text{!-*}\frac{M}{\textbf{\textit{к}}}\text{ б1Ш=0,}$$

откуда находим *В(,= —(М/к) 1Ък1.* **Подставляя начальные параметры**

в формулы (12.25), приведем искомые выражения для внутренних усилий к виду

$$B_ш = \frac{M_к (1—2)}{к \; J_к} \; ; \quad M_т = M \frac{J_к (1-г)}{J_к} ;$$

$$M_{св} = M \sqrt{\frac{J_к J_г}{J_к}} \; (1-г) .$$

Их эпюры изображены на рис. 12.8. Как уже отмечалось, эпюра $M_{св}$ дополняет $M_к$ до полного крутящего момента M.

§ 12.5. Общий случай нагружения тонкостенного стержня открытого профиля

В общем случае нагружения нормальные и касательные напряжения определяются по принципу суперпозиции как алгебраическая сумма напряжений, вызываемых отдельными составляющими деформации. Так, нормальные напряжения будут определяться по четырехчленной формуле

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x + \frac{B_ш}{J_ш} \omega, \qquad (12.30)$$

а касательные напряжения в срединной поверхности стержня — по трехчленной формуле

$$\tau = \frac{Q_y S_x^{отс}}{J_x \delta} + \frac{Q_x S_y^{отс}}{J_y \delta} + \frac{M_ш S_ш^{отс}}{J_ш \delta}$$

Кроме того, в сечении возникают касательные напряжения от свободного, кручения τ_c,, которые определяются по формуле (11.26), где надо положить $M_z = M_к$. Проверка прочности производится с учетом суммарных напряжений σ_z и т методами, изложенными в гл. 13 и 14.

Добавочные нормальные напряжения $\sigma_ю$ от стесненного кручения могут быть значительными по модулю и существенно видоизменить распределение нормальных напряжений, диктуемое первыми тремя членами (12.30), основанными на гипотезе плоских сечений.

Проиллюстрируем сказанное на швеллере, изображенном на рис. 12.9. Сила /'=20 кН приложена в средней точке полки. Для того чтобы воспрепятствовать искривлению контура сечения, в этом месте помещена диафрагма. Будем считать ее достаточно тонкой, чтобы она практически не стесняла депланаций сечения. Сила P вызывает изгиб и кручение стержня. Найдем нормальные напряжения в заделке вначале от изгиба. Момент инерции J_x (см. пример 11.5) определим по формуле

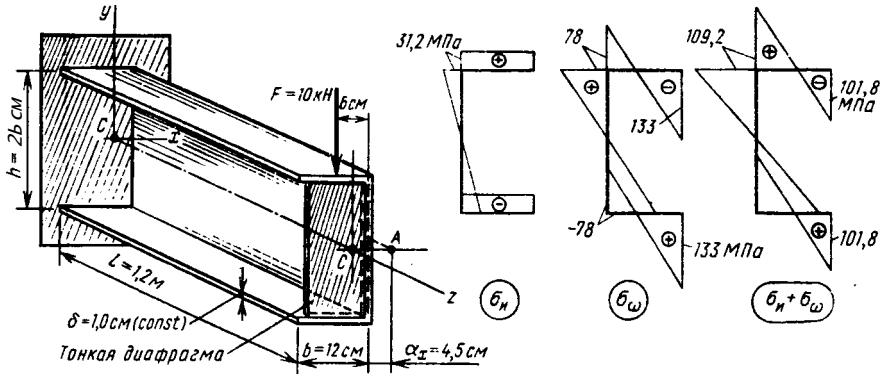


Рис. 12.9. Изгиб и стесненное кручение швеллера. Напряжения у заделки от изгиба от кручения $a_ш$ и суммарные напряжения

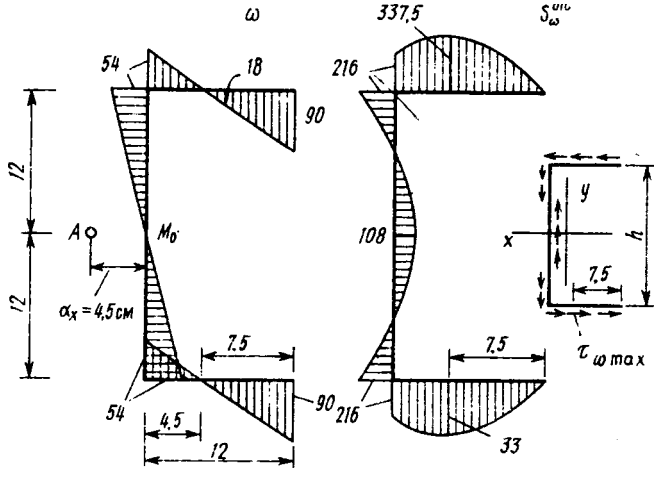


Рис. 12.10. Эпюры *оз*, 5™ и распределение в сечении

Момент сопротивления $УУ_x = 1_x/y_{тях}$ = (0,461/0,12) х х 10^{-4} = 3,84' 10"4 м³ и напряжения в крайних волокнах $a_я = M_x/1¥_x$=*10 10³* 1,2/(3,84 10'4) = 31,2 МПа. Эпюра $a_я$ показана на рис. 12.9.

Найдем теперь напряжения $a_ш$. Для этого, пользуясь формулой (11.42) (см. пример 11.5), при ¿ = сопв1= 1 ий= = *2Ь* находим координату центра изгиба:

$$<x_x — \frac{ЗА\,3\,3}{6 + A^{\wedge}/Аиол} = -\frac{b}{8} — \sim \frac{12}{8} = 4{,}5 \text{ см}.$$

На рис. 12.10 построена эпюра *со* (подчеркнем, что сечение изображено *при взгляде на него в положительном направлении оси г,* как этого требует правило знаков для *со).* По эпюре *со* вычисляем секториальный момент инерции умножая эпюру *со* саму на себя:

$= 2й^(90^2+4\ 18^2 + 54^2)+^ ^ 12^ =$

$= 54\ 432\ см^6 = 0{,}544\text{-}10”^7\ м^6.$

Для полки использовано правило Симпсона, а на половине" высоты стенки — правило Верещагина.

Для определения бимомента воспользуемся результатами примера 12.1. В нашем случае $M=—Pe = -P\ (a_x + 0{,}56) = -10\ 10^3'\ 0{,}105 = -1050$ Н м. Для определения $к=у/ащШ)$ вычислим по формуле (11.22), приняв $р= 1{,}12$:

$$Лг=/?\ 21_{\cdot\ 3}\text{-}\ **¿1 = 1.12\text{---}\frac{48}{3} \blacksquare 1^3 = 17{,}92\ см^4 = 0{,}179\ 10^{-6}\ м^4.$$

Значение $к$ будет следующим:

$$*= Э= /80\ 0’179..1^=_{1,21}47\ м\text{-}‘_{\mathbf{V\ 200\ 0{,}544\ 10}^{-7}}$$

Аргумент $к1= 1{,}147\ 1{,}2= 1{,}377$, $\backslash Ъ.к1=0{,}8802$; значение бимомента в заделке B_0 составит

$$B_0=\text{--}Ш1= -^^\ \underset{\mathbf{1{,}147}}{0{,}8802} = 0{,}805'\ кН\ м^2.$$

Напряжение $a_ш$ в точке $ш_{тм} = 90\ см^2 = 0{,}9\ 10"^2\ м^2$ будет

$$C_{шта}=у\ со_{т,,} = \frac{о’8\text{о}5\text{-}10\_3}{\mathbf{0{,}544\text{-}10}^{7}}\ 0{,}9\ 10\ -\ ^2 = 133\ МПа.$$

Эпюры $a_ш$ и (о’и + о'ш) представлены на рис. 12.9. Как видим, результирующие напряжения $о\text{-}_{пш,}= 109{,}2$ МПа в три с лишним раза превышают напряжения от изгиба $сг_и = 31{,}2$ МПа.

Покажем, как вычислить касательные напряжения г, $^{0)9}$ общее распределение которых в сечении дает эпюра 8 $^{отс.}$

$$|\ £исЫ = \underset{Л^{отс}}{\overset{отс}{£}}<5,\ \{сосЬ.$$

Она строится как площадь эпюры $со,$ домноженная на <5, на отсеченном участке контура сечения. Например, $5Г= Г\ 7{,}5\ 90/2 = 337{,}5\ см^4 = 0{,}337 \bullet 10"^5\ м^4$, а площадь трапеции на длине $¿=12$ см дает $12\ (—54 + 90)/2 = 216\ см^4$. Из примера 12.1 имеем в заделке $\boldsymbol{M_Ш=M.}$

$$\text{А/5“} \qquad \text{1050 0,337 10'}$$
$$\text{] Н1ЯІ “} \qquad \text{—= 6,51 МПа.}$$
$$\text{/ш<5 0,544 10"71 10}$$

Заметим, что равнодействующая касательных сил в вертикальной стенке швеллера должна быть равна нулю, так как от кручения поперечная сила $0_{,y} = 0$. Поэтому площадь эпюры 5^ на высоте стенки А также должна быть равна нулю, что в данном случае выполняется и в чем можно убедиться по формуле Симпсона:

$$\int_{-A/2}^{A/2} \qquad \frac{л}{6}\ (216\text{-}4\text{-}108 + 216)=0.$$

§ 12.6. Особенности стесненного кручения стержней замкнутого профиля

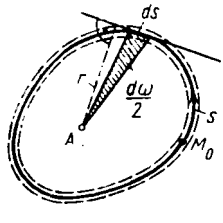
В стержнях открытого профиля предполагалось, что при стесненном кручении депланация происходит по тому же закону, что и при свободном кручении. При этом деформациями сдвига от напряжений $\tau_ш$ в срединной поверхности пренебрегали. В случае *замкнутого сечения* касательные напряжения $\tau_ш$, в отношении которых по-прежнему принято, что они равномерно распределены по толщине стенки <5, существенно влияют на депланацию сечения за счет вызываемых ими сдвигов. С учетом этих сдвигов можно получить выражение для депланации *ю,* аналогичное (12.4), выведенное для стержней открытого профиля:

$$к=-p'(г)\ ¿Ь, \qquad (12.31)$$

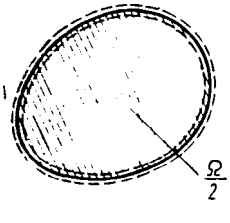
гд.* *со* — главная обобщенная секториальная координата точки, равная

$$со = со—/35. \qquad (12.32)$$

Здесь со = | *г* (15 — секториальная координата, используемая, в стержнях открытого профиля; *г* — длина перпендикуляра, опущенного из центра кручения *А* на касательную к контуру;



$$P=A\sim \qquad (12.33)$$



— параметр, условно называемый *«.средним радиусом» замкнутого контура',* £2 — удвоенная площадь, охватываемая средней линией контура 5;

*. Л?

приведенная длина дуги данной точки контура.

Функция /?' *(г) = йр/йг* — некоторая неизвестная функция, подлежащая определению наряду с неизвестной функцией углов закручивания *(р* (г). Эти две неизвестные функции, по предложению проф. А. А. Уманского, разработавшего рассматриваемую теорию, определяются из двух условий.

Первое условие состоит в том, что напряжения $\tau_{ш}$ приводятся в сечении к суммарному крутящему моменту *М^р.* Из него получается соотношение

$$<P - PP = \frac{QJ}{GJ_{ц}>} \qquad (12.35)$$

где

$$/ = \frac{}{\hat{}} \cdot ds \qquad (12.36)$$

* 5

— геометрическая характеристика замкнутого сечения, характеризующая жесткость при свободном кручении;

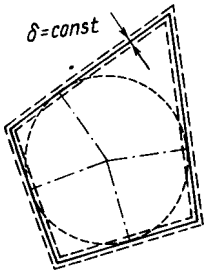
См. ф-лу (11.9)

$$M = 1 \; 1 \sim т- \qquad (12.37)$$

где

$$Jp = \S r^{2} dA \qquad (12.38)$$

— это так называемый *направленный момент инерции.*



Если $J_p = Jd$, то $ц = 0$ и из формулы (12.35) следует, что *ср'* и M_xр связаны так же, как при свободном кручении (11.8), т. е. депланации и стесненное кручение у такого сечения отсутствуют. В частности, при *δ* = const это будет многоугольник, все стороны которого касаются окружности. При *цфО* возникают депланации (12.31) и имеет место стесненное кручение. Величину */1* называют *коэффициентом депланации сечения,* поскольку от *р.* зависит степень развития депланации сечения.

Второе условие выражает периодичность функции депланации (12.31) при обходе контура, то есть отсутствие разрывов в перемещениях *w* в срединной поверхности стержня.

Из него получается дифференциальное уравнение, служащее для определения углов закручивания:

$$a_3 \overline{IV} - к^{2}(p^{2} = \text{»} \quad m \qquad (12.39)$$

где $= \{ co^{2} dA$ —главный обобщенный секториальный момент инерции сечения;

$$к = \frac{No}{Ej_{m}}$$

Напряжения $a_ш$ и т,, вычисляются по формулам

$$<*«=\frac{K,\ -}{''(O}\quad (12.41)$$

$$_м\ м_т a \geqslant A4_ш\ \text{С-}$$

$$(^{12}\text{-}^{42}>$$

где бимомент и изгибно-крутящий моменты определяются через *ср* следующими выражениями:

$$B_ш = \frac{1}{Ы}\text{-}_a<p''\text{-}\ \text{А}/_и\text{=-Л}\ \ \frac{<1B}{\text{аг}} \qquad (12.43)$$

В формуле для $т_ш$ величина 5^ определяется как

$$= \qquad (12.44)$$

где

$$\text{^} = \qquad /) = \text{———}. \qquad (12.45)$$

о

Ввиду аналогии дифференциального уравнения (12.39) и формул для напряжений $a_ю$ и $m_ш$ с зависимостями теории В. 3. Власова все решения рассматриваемой задачи проводятся, как это описано ранее для тонкостенных стержней открытого профиля. Координаты точек A и M_0 находят, как в § 11.8, с заменой *со* на *со.*

Таким образом, наблюдается аналогия в основных зависимостях теории стесненного кручения стержней открытого и замкнутого сечений. В последней вместо обычных секториальных координат и секториальных геометрических характеристик сечений со, $J_{(l_i}$ и т. д. участвуют те же, но обобщенные величины *со,* и т. д.

Вычисления показывают, что длина участка стесненно го кручения, вызываемого, например, заделкой, в случае замкнутого профиля имеет значительно меньшую относительную протяженность, чем у стержней открытого профиля. Эффект стесненного кручения у стержней с замкнутым сечением носит выраженный локальный характер, а на остальной части длины кручение практически можно считать свободным.

-Г ___

эп Вш замни, сеч

I I

р. ------ ·

I ГГТГгг^> отнр 064

Пример 12.2. Найти центр кручения и построить эпюру главных обобщенных секториальных координат для замкнутого прямоугольного сечения.

Решение. Вспомогательную точку B и начало отсчета M_0 выбираем на оси симметрии, после чего строим эпюру $о)_в$ (рис. 12.11). Вычисление p дает

$$p=\frac{\textbf{Ш}}{\frac{4Ь}{5}\cdot\frac{2Ъ}{23}\quad 5'}$$

Переходя в указанном на рисунке направлении вдоль контура от точки к точке, строим эпюру р?. Вычитая ее из ординат эпюры *со*$_{в'}$ **получим эшору** *сов* **— обобщенных (но не главных) секториальяых координат. Координату истинного центра кручения относительно точки** *В* **находим по формуле**

$$\text{“у} \qquad \text{„ У} \qquad ,$$

где <1л1 = <5сЬ. Для вычисления интегралов построена эпюра *х,* **перемножая которую саму на себя и на эпюру <**$a_в$ **(с учетом толщин** *5)* **получим** $1_у ш_В = (191\backslash 5)Ь*6$ **и** $a_y = -(19/60)4 = -0{,}3176$. **Далее, аналогично** *сод,* **строим эпюру** $со_А$ **(на рис.** 12.11 **не показана) и, по формуле** $аз = со_А - p!$ **получаем искомую эпюру обобщенных главных секториальных координат (см. рис.** 12.11**).**

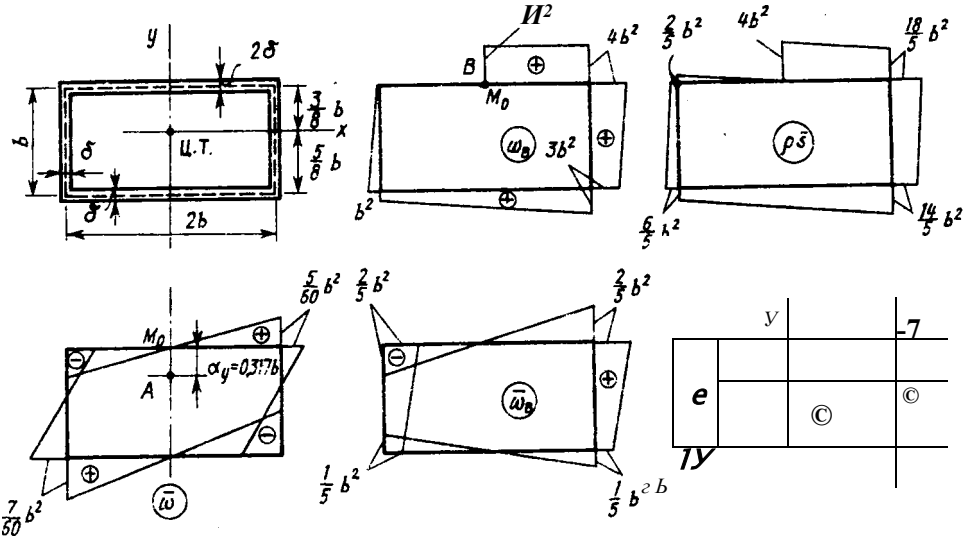
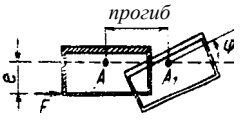


Рис. 12.11. К примеру 12.2. Получение эпюры обобщенных главных секториальных координат ш

Как и в стержнях открытого профиля, точка *А* является одновременно центром изгиба. Например, для того чтобы горизонтальная поперечная сила не вызывала кручения, ее линия действия должна проходить на уровне точки *А*. Крутящий момент вычисляется относительно оси *А—А* M_Tр=^е.



Вопросы для самоконтроля к главе 12

12.1. Какие напряжения и силовые факторы возникают в поперечном сечении тонкостенного стержня открытого профиля при стесненном кручении?

12.2. Почем}' задача о стесненном кручении статически неопределима и каков общий порядок ее решения?

12.3. Основные допущения теории В. 3. Власова.

12.4. По какому закону распределены напряжения $\sigma_{ю}$ в сечении?

12.5. Каким статическим условиям удовлетворяет эпюра $\sigma_{ш}$?

12.6. Приведите формулы, по которым вычисляются напряжения a_m и $x_{ю}$.

12.7. Покажите аналогию в зависимостях теории поперечного изгиба стержней и стесненного кручения.

12.8. Какие характеристики жесткости тонкостенного сечения при стесненном кручении вы знаете?

12.9. Что выражает дифференциальное уравнение углов закручивания в теории В. 3. Власова?

12.10. Запишите универсальную формулу для углов закручивания и покажите на примере, из каких условий определяются начальные параметры.

12.11. Что такое обобщенная секториальная координата и какую роль она играет в теории А. А. Уманского стесненного кручения стержней замкнутого профиля?

12.12. Покажите аналогию между теориями стесненного кручения стержней открытого и замкнутого сечений.

Задачи к главе 12

12.1. Получите формулу аз я координат це- *12.2.* **Чему равно отношение** $(Y_{ш}\backslash 1a_{o.}2$ **для птра изгиба** $\text{ч}_{.x}$ **сечения в виде несимметричного крайних и** $\tau_{ш}|/\tau_{ш}2$ **для средних точек полок двутавра.**

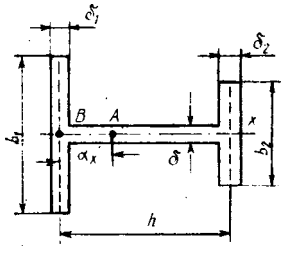


Рис. к задаче 12.1

12.3. Получите формулы Д-втах и Л/$_{ю}$та* в шарнирно опертом стержне, загруженном скручивающим моментом *M* **посередине. На концах - утлы поворота устранены, депланации свободны.**

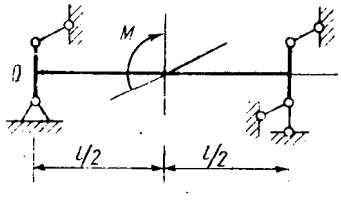


Рис. к задаче 12.3

12.4. Как изменится максимальное нормальное напряжение в стержне, если из точки С силу перенести в точку О? Принять //¿ = 5, Л/5 = 10, *EIO=2,5.*

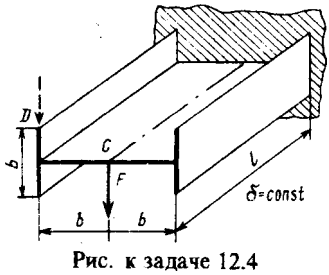


Рис. к задаче 12.4

для 12.5. Указать опасное сечение по нормальним напряжениям (согласно теории В. 3. Власова> и определить <7$_{гт}$,,, приняв данные о размерах стержня из предыдущей задачи,

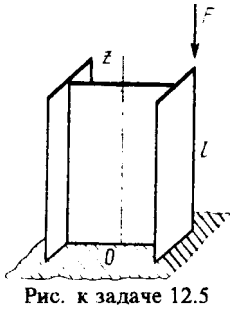


Рис. к задаче 12.5

Ответы к залачам главы 12

12.1. $y_г = A/[1 + bl5_l l(hlS_2)]$. 12.2. $a_{aix}l\ddot{u}_a\text{-}_l = 'x_x h_x l(h\text{-}^{\wedge}{}_X)B_2\backslash\ x_{aX}lx_{ml} = a._x b)l\{h\text{-}a_x)b\backslash$.

12.3. £$_{шт}$,, = [A//(2A-)] th (И/2); W$_{6)m}$,, = M/2. 12.4. ст,,$_г$ = 1,5 *(F_t'5^2);* **<$\tau_{ш}$ = 1,2** *($F/5^2$);* **напряжение возрясгает в 1,8 раза. 12.5. я'гпм1 = ^{0}'юг+$^{<\text{т}}$ш=:(17/8-1-12/8) [F/(A5)] = (29/8)** *[Fj(bS)]'$_t$* **в сечении** *z~*l.*

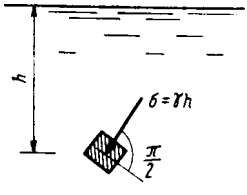
НАПРЯЖЕННОЕ И ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЯ В ТОЧКЕ

§ 13.1. Понятия напряженного состояния в точке и его виды

Напряженное состояние в точке. Ранее, в § 3.2, были получены формулы

$$Ом—G \cos^2 ос;\ т^{\wedge}\text{-}\sin 2a$$

для определения напряжений, действующих по сечениям, наклоненным к оси растянутого или сжатого стержня. Из этих формул видно, что с изменением наклона площадки, проходящей через какую-либо точку твердого тела, изменяются и действующие на ней нормальные o_a и касательные $т_a$ напряжения. При этом было выяснено, что наибольшие нормальные напряжения имеют место в поперечных сечениях, а наибольшие касательные напряжения — в сечениях, проведенных под углом 45° к оси стержня.



Сравните: в отличие от твердого тела в точке жидкости для всех произвольно ориентированных площадок давление одинаково (закон Паскаля)

В более сложных случаях действия сил на брус вопрос об определении наибольших напряжений, а также положения площадок, на которых они действуют, усложняется. Для решения этого вопроса приходится специально исследовать законы изменения напряжений при изменении наклона площадок, проходящих через какую-либо точку. Возникает проблема исследования так называемого напряженного состояния в точке деформируемого тела.

Напряженным состоянием в точке называют совокупность напряжений, действующих по всевозможным площадкам, проведенным через эту точку.

Напряженное состояние в точке

Центральное растяжение или сжатие бруса является простейшим видом деформации тела, когда напряженное состояние всех его точек одинаково (однородное напряженное состояние). В общем случае (рис. 13.1, *а)* в теле напряженное состояние неоднородно — оно меняется от точки к точке, поэтому по любому сечению *m—n* этого тела напряжения распределены неравномерно. В этом случае при изучении напряженного состояния в какой-либо точке *К* мысленно вырезают в окрестности этой точки параллелепипед со сторонами *dx,* d*y* и d*z* (рис. 13.1, *б).* Ввиду малости параллелепипеда можно считать, что

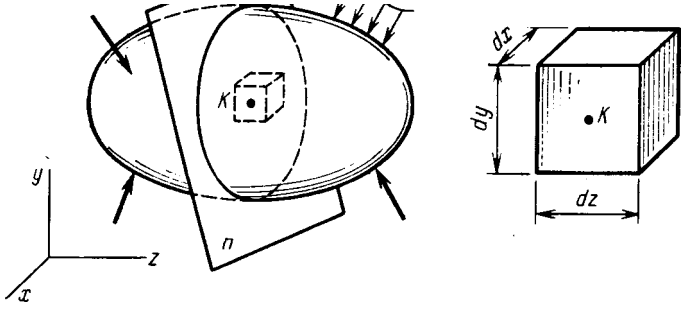


Рис. 13.1. Общий случай деформируемого тела

напряженное состояние во всех его точках одинаково и совпадает с напряженным состоянием в исследуемой точке *К*. Поэтому как по граням, так и по любым его сечениям напряжения считаются распределенными равномерно. Указанные предположения позволяют исследовать закон изменения напряжений по наклонным сечениям элементарного параллелепипеда подобно тому, как это сделано для простого растяжения. Напряжения на гранях параллелепипеда при этом считаются заданными, а напряжения, действующие в его наклонных площадках, определяются с помощью метода сечений, т. е. из условий равновесия отсеченной части параллелепипеда.

Три вида напряженных состояний. В дальнейшем будет показано, что в любой точке нагруженного тела всегда можно выделить элементарный параллелепипед, ориентированный так, что все его грани-площадки будут свободны от касательных напряжений.

Главные площадки и напряжения (см. также § 13.3)

Такие площадки, на которых отсутствуют касательные напряжения, называют главными, а действующие на них нормальные напряжения — главными напряжениями в точке.

Классификацию видов напряженного состояния удобно провести с помощью главных напряжений (рис. 13.2). Различают *линейное, плоское и объемное* напряженные состояния в точке в зависимости от того, испытывает ли параллелепипед растяжение (или сжатие) соответственно в одном, двух или трех взаимно перпендикулярных направлениях.

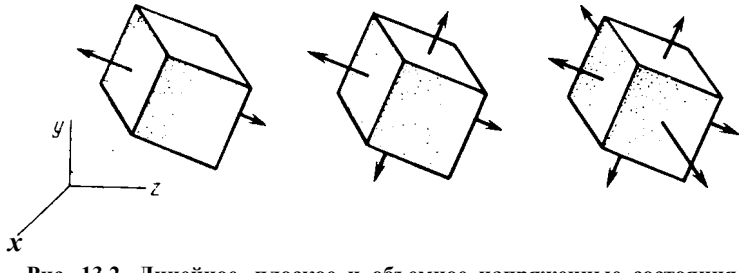


Рис. 13.2. Линейное, плоское и объемное напряженные состояния, представленные главными напряжениями

Линейное напряженное состояние, например, испытывают точки бруса при центральном растяжении или сжатии. Плоское напряженное состояние наиболее часто встречается в задачах сопротивления материалов. Его характерным признаком является отсутствие каких-либо напряжений на двух параллельных гранях параллелепипеда.

Плоское напряженное состояние. Рассмотрим тонкую пластинку, находящуюся под действием произвольной системы сил, приложенных к кромкам пластинки и лежащих в ее плоскости (рис. 13.3, *а).* На поверхности пластинки, параллельной плоскости *ту,* напряжения отсутствуют (о- = 0). Так как толщина пластинки мала, то можно считать, что их нет и внутри пластинки на площадках, параллельных этой поверхности. Поэтому в точках пластинки в общем случае будет иметь место плоское напряженное состояние. В описанных условиях находятся, например, элементы стержней и балок, изготовленных из относительно тонких пластинок.

Вертикальная стенка двутавровой балки, выделенная двумя продольными сечениями *mn* и $m_xП$\ (рис. 13.3, б),

нагружена на контуре некоторыми нормальными и касательными усилиями. Ее точки испытывают плоское напряженное состояние. Ввиду важности этого вида напряженного состояния для задач сопротивления материалов ему будет ниже уделено основное внимание.

Вырежем элементарный параллелепипед из пластинок, показанных на рис. 13.3, в окрестности произвольной точки *К* сечениями, перпендикулярными плоскости пластинки

Со стороны среды, окружающей параллелепипед, на него действуют в общем случае как нормальные, так и касательные усилия. На рис. 13.4 показаны векторы нормальных и касательных напряжений, соответству-

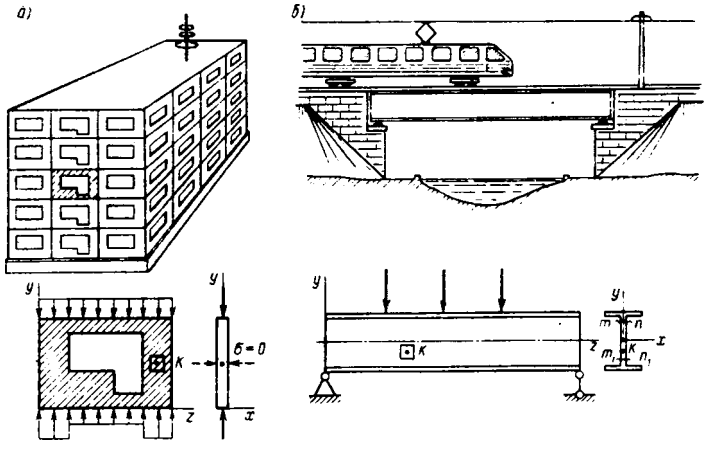


Рис. 13.3. Примеры плоского напряженного состояния: панель сборного здания *(а),* **стенка мостовой балки** *(б)*

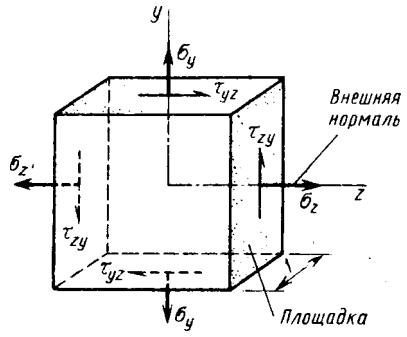


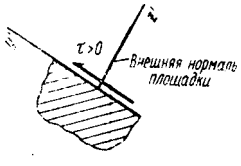
Рис. 13.4. Напряжения на гранях элемента в общем случае плоского напряженного состояния

ющие этим усилиям. Оси координат совмещены с центром элемента.

Правило знаков для напряжений. Выше указывалось, что во всех точках бесконечно малого параллелепипеда напряженное состояние считается однородным. Поэтому одноименные напряжения на параллельных гранях параллелепипеда (рис. 13.4) приняты численно равными друг другу. Следует обратить внимание на индексы при обозначении напряжений. Напомним, что у касательного напряжения, например $m_{гу}$, первый индекс показывает, что данное касательное напряжение действует на площадке с нормалью, параллельной оси *г*. Второй индекс обозначает, что вектор касательного напряжения параллелен оси *у*. У нормального напряжения оба индекса совпадают и поэтому ставится лишь один индекс.

Правило внешней нормали

Примем следующее правило знаков для напряжений. Растягивающее нормальное напряжение будем считать положительным, сжимающее — отрицательным. Знак касательных напряжений т связан с направлениями осей координат: если внешняя нормаль данной площадки совпадает с направлением соответствующей координатной оси, то на этой площадке напряжение т положительно, когда оно совпадает по направлению с соответствующей осью. Если же внешняя нормаль противоположна направлению оси (невидимые грани параллелепипеда на рис. 13.4), то направление т положительно тогда, когда оно также противоположно своей координатной оси. Это правило кратко называют ***правилом внешней нормали.*** Все напряжения, показанные на рис. 13.4 в осях *у, г,* положительны. Для наклонных площадок будем придерживаться того же правила знаков, но знак касательных напряжений будем оценивать относительно наклонных осей *у', г'*. Заметим, что поворот осей координат на 90° меняет знак касательных напряжений на обратный, что в некоторых случаях необходимо учитывать в дальнейшем. При анализе плоского напряженного состояния в точке напряжения *о., a_y, x_{1y}* и m_y. считаются заданными и поэтому их



коном о парности касательных напряжений имеем равенство

(13.1)

§ 13.2. Напряжения в наклонных площадках при плоском напряженном состоянии

В плоской задаче рассмотрим лишь одно семейство наклонных площадок, а именно площадки, перпендикулярные *непогруженным* граням параллелепипеда. Разрежем параллелепипед, изображенный на рис. 13.4, наклонным сечением, перпендикулярным плоскости *zy,* выделив из него треугольную призму (рис. 13.5, *а).* Положение наклонной площадки и связанных с нею осей *z'y'* будем определять углом а.

Угол поворота осей считаем положительным (а>0), если он совершается от оси *z* к оси *y* по кратчайшему угловому пути. Для принятых направлений осей z и *y* угол а>0, если поворот совершается против хода часовой стрелки.

Из рис. 13.5, *а* следует, что

$dA_z = 1' dy = dA$ eos a; $dA_y = 1\ dz = dA$ sin a. (13.2)

Напряжения на наклонной площадке найдем из условий равновесия треугольной призмы. Проецируя силы, действующие на гранях призмы, последовательно на оси *z'* и *y',* получим (рис. 13.5, *б)*

$a_x\ dA$ — a_z **d/íxosa** — $a_y\ dA_y$ **sin a** — x_{zy} **d^Lsina** — $x_{yz} dA_y$ **cosa = 0;**

$x_{,,} d\ A + a_z d\ A_z$ **sina** — $ff_y dA_y cosa$ — $x_{zy} dA_z cosiz$ **+ r^d^sina = 0.**

В этих равенствах каждая сила, действующая на грань призмы, получена как произведение соответствующего напряжения на площадь грани. Подставляя сюда значения из (13.2), сократим все слагаемые на d*A* и, учтя, что

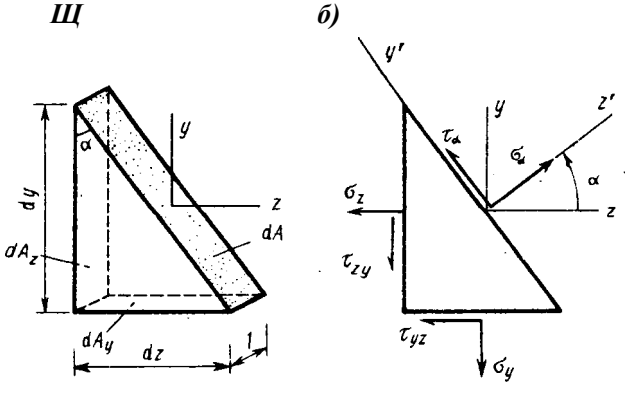


Рис. 13.5. Элементарная призма и напряжения на се гранях — площадках

tzy=iyt, 2siu a cos a=sin 2a и cosa—sin²a=cos2a, найдем

$$<7_a = ff^*\cos^2 a + fl^\sin^2 a + x_{zy} \sin 2a; \quad (13.3)$$

$$an\ 2a + \%\ \cos 2a. \quad (13.4)$$

Из тригонометрии:

$\cos a = \frac{1}{2}(1 +$ -feos 2a);

$\sin^2 a = \frac{1}{2}(1 -$ —cos 2a)

Иногда формулу (13.4) используют в несколько ином виде, который получим, заменив $\cos^2 a$ и $\sin^2 a$ их выражениями через cos 2a:

$$----- 4------- - \cos 2a + x_{zy} \sin 2a. \quad (13.5)$$

Заметим, что знак x_a, получаемый по формуле (13.4), соответствует осям *г'у',* повернутым до совмещения с внешней нормалью рассматриваемой площадки.

Прамер 13.1. Нарве. 13.6 показаны фактические направления и абсолютные значения напряжений, действующих на исходные площадки. Найти напряжения на площадке, повернутой на угол *а*=30°.

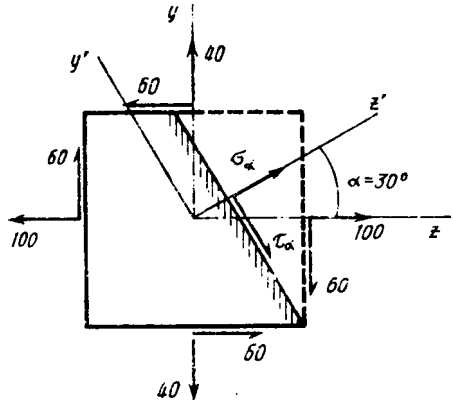


Рис. 13.6. К примеру 13.1. Определение напряже°«й в наклонной площадке

Решение. С учетом правила внешней нормали имеем: $a_г$**=**
= 100 МПа, a_y**— —40 МПа,** $т_{2>}$**=**$т_{>г}$**= — 60 МПа. По формулам (13.4) и (13.5) получим**

$$т_{\_} = \frac{100+40}{2} + \frac{100 - 40}{2}\cos 60° - 60 \cos 60° = -52 - 30 = -82 \text{ МПа};$$

$$\frac{100 - 40}{2} 60° + 60 \sin 60° = 13 \text{ МПа}.$$

Найденные напряжения показаны на рис. 13.6.

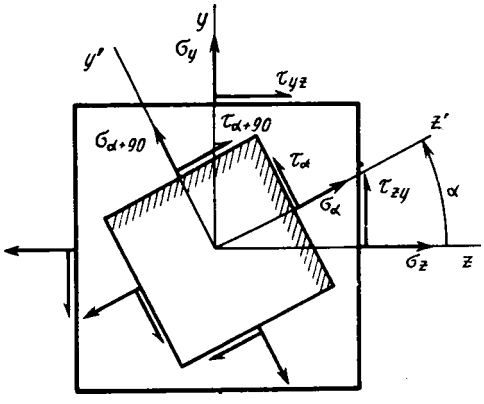


Рис. 13.7. Две группы напряжений определяют одно и то же напряженное состояние в точке

На рис. 13.7 наряду с исходным показан бесконечно малый элемент, выделенный в той же точке, но ориентированный по осям *г'у'*. Найдем напряжения на гранях этого элемента. Напряжение оу = <*m,,* определяется выражением (13.5), а для определения оу = о-$_{а+9}$о‘ в него вместо а подставим а+90°, после чего получим

$$°а+9о^{о=}\text{----------}\wedge \text{сов2а—т^вш/а.} \qquad (13.6)$$

Касательные напряжения на площадках а и а + 90° связаны законом парности $т_а = т_г у = Ту_г ч$ Запишем теперь напряжения, соответствующие осям *гу* и *г'у',* в форме таблиц (матриц):

$$\begin{matrix} \boldsymbol{Oг}\ Т,Л\ (^{а*\ Т}>'Д \\ \boldsymbol{x_{гу}\ а\ у)} \qquad\quad \boldsymbol{a_y)} \end{matrix} \qquad (1.3.7)$$

Так как оси в точке могут выбираться произвольно, то любая группа напряжений (13.7) полностью определяет данное плоское напряженное состояние как его компоненты. При повороте осей их преобразование происходит по выражениям (13.4)—(13.6). Все это позволяет рассматривать напряженное состояние в точке как новое понятие, называемое *тензором напряжений* и являющееся более общим, чем такие понятия, как число или вектор.

тензор — от латинского ***tendere*** —натягивать, напрягать

Укажем одно свойство напряженного состояния, для чего сложим (13.5) и (13.6):

$$ffe + ffi+ÍO' — ffj + СТy — const. \qquad (13.8)$$

Как видим, сумма нормальных напряжений на взаимно ортогональных площадках не зависит от угла а (ин-

вариантна к направлениям осей координат) и, следовательно, для данной точки эта сумма постоянна.

§ 13.3. Главные напряжения

Будем мысленно вращать оси *г'у'* и прямоугольный элемент, меняя угол а (см. рис. 13.7). Очевидно, при каком-то угле ао нормальное напряжение достигнет наибольшего для данной точки значения. На основании (13.8) можно сделать вывод о том, что напряжение на перпендикулярной площадке будет наименьшим. Найдем эти площадки и экстремальные для точки напряжения, для чего приравняем к нулю производную с!$сг_а$/с1а. Продифференцируем (13.5) по аргументу а:

$$\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \text{вт}2\alpha + x_y \text{сое}2\alpha \right]. \qquad (13.9)$$

Сравнив выражение в скобках с формулой (13.4), приходим к равенству

$$\frac{\Delta\sigma_\alpha}{\Delta\alpha} = 2\tau_\alpha. \qquad (13.10)$$

Если приравнять к нулю это выражение и обозначить угол наклона нормалей искомых площадок через Оо, то получим $\tau_{\alpha_0} = 0$, что позволяет сделать важный вывод:

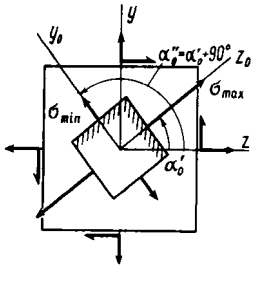
Главные площадки и главные напряжения

на площадках, где действуют экстремальные для точки нормальные напряжения, касательные напряжения равны нулю. Такие площадки называются главными, а соответствующие им нормальные напряжения — главными напряжениями в точке.

Приравнивая выражение в скобках (13.9) к нулю, найдем тангенс двойного угла наклона нормалей главных площадок:

$$\text{1§}2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \qquad (13.11)$$

Выражение (13.11) дает два взаимно перпендикулярных направления с углами наклона Оо' и ао" = ао' + 90°, по которым действуют главные напряжения $\sigma_{\text{ти}}$ и *сг,^*. Для определения значений главных напряжений подставим в формулу (13.5) а = Оо. Вынося сое $2\alpha_0$ за скобку, получим



$$\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \text{н-т^гоо соэгоо} \qquad (13.12)$$

По известной из тригонометрии формуле, используя выражение (13.11), находим

Знак « + » поставлен потому, что косинусы углов $2a_0'$ и 2ao" = $2a_0'$+180° имеют противоположные знаки. Подставляя выражения (13.11) и (13.13) в (13.12), после приведения выражения в скобках к общему знаменателю и сокращения найдем два значения $a_л$^, обозначаемые <*m*, = a_{max} И ***(T2*** — ^шш[1]

$$\sigma_{1,2}=\frac{\sigma_z+\sigma_y}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_z-\sigma_y)^2+4\tau_{zy}^2}. \qquad (13.14)$$

Формула главных напряжений

В этой формуле знак плюс соответствует максимальному главному напряжению, а минус — минимальному.

Из приведенного вывода следует, что при любых исходных напряжениях a_z, a_y, x_{zy} в данной точке существует параллелепипед, на гранях которого действуют только нормальные напряжения.

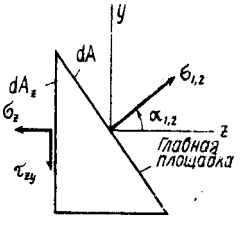
Тензор напряжений (13.7) при плоском напряженном состоянии в осях гцУо) совпадающих с направлениями *C*\ и «$т_2$» запишется в виде

$$\begin{pmatrix}\sigma_1 & 0\\ 0 & \sigma_2\end{pmatrix}. \qquad (13.15)$$

В заключение этого параграфа получим формулу для тангенса одиночного угла наклона искомой главной площадки. Для этого предположим, что наклонная площадка элементарной призмы — одна из главных. Проецируя все силы, действующие на призму, на вертикаль, получим

$c_{12}\,dA\sin ai\,,_2 — a\,y\,dA_y — x_{zy}\,dA_z = 0.$

Отсюда, учитывая равенства (13.2), найдем

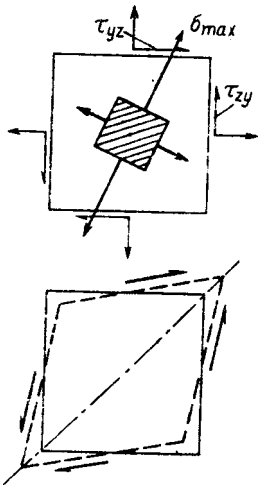


В зависимости от того, какое из главных напряжений, **<т, или <x_2, подставляют в эту формулу, получают тангенс**

угла *(XI* или a_2. Этим автоматически решается вопрос о выборе из двух главных направлений направления *(T_{mx}.*

При этом полезно запомнить следующее правило:

направление всегда проходит через те две четверти осей координат, к которым сходятся стрелки касательных напряжений x_{zy} и x_{y2}.



Указанное правило станет физически более понятным, если обратить внимание на то, что касательные напряжения создают удлинение одной из диагоналей элемента. Именно к этой диагонали и тяготеет направление

§ 13.4. Экстремальные касательные напряжения

Совместим оси координат *гу* с направлениями a_x и cm_2, приняв главные напряжения в качестве исходных: <$x_г$=$сг_ь$ о>=о2, $т_г$,=0.. Формулы (13.4) и (13.5), в которых угол а теперь будет отсчитываться от направления $a_ь$ получат вид (рис. 13.8, *а)*

$$ег_а=\frac{ег1+ег2}{2\ 2}+\frac{а|-°2}{2}\cos 2а; \qquad (13.17)$$

$$т,=\frac{0\text{|}-0г}{2}\text{вш}\ 2а. \qquad (13.18)$$

Из формулы (13.18) следует, что пру а= -45° (вт2а= — 1) касательные напряжения вкгбют экстремальные значения:

(13.19)

■

Экстремальные касательные напряжения

Экстремальные касательные напряжения в точке равны полуразности главных напряжений и действуют на площадках, наклоненных к главным на угол 45° (рис. 13.8, *а).*

Подставляя (13.14) в формулу (13.19), получим выра- • жение Тп,,, через исходные напряжения a_T, a_y и m_{1y}:

$$\sim y/(Pm \qquad + 4т\ |y. \qquad (13.20)$$

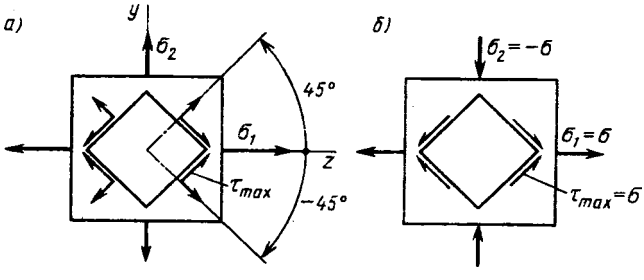


Рис. 13.8. Площадки с экстремальными касательными напряжениями повернуты к главным на 45° *(а);* **чистый сдвиг (б)**

В общем случае на площадках с $\tau_ш$, нормальные напряжения не равны нулю. Действительно, полагая в формуле (13.17) а= +45° и учитывая (13.14), получим

$$<Г±45°—— \sim \bullet \quad 01+02\ O_z + Oy \qquad (13.21)$$

В частном случае, когда на гранях элемента действуют численно равные растягивающее и сжимающее напряжения $o\backslash = — a_2—o$ (рис. 13.8, *б),* экстремальные касательные напряжения (13.19) равны главным напряжениям $\tau_ш$ал=с, а нормальные напряжения (13.21) в этом случае равны нулю. Такой случай напряженного состояния носит название чистого сдвига, а площадки, на которых действуют одни касательные напряжения, называются площадками чистого сдвига.

См. § 5.1

§ 13.5. Круг напряжений

Зависимости напряжений $<m_x$ и $\tau_а$ от угла а имеют наглядную геометрическую интерпретацию в виде круговой диаграммы, предложенной немецким ученым О. Мором.

Обозначим в формулах (13.17) и (13.18) постоянные £г=(сг, + $сг_2$)/2 и Л=(ег, — $сг_2$)/2 и запишем их в виде

$$<m_a=a + Ясо\&2a; \qquad (13.22)$$

$$т„= —Лет\ 2а.$$

В координатах *а — х* равенства (13.22) являются уравнениями окружности радиуса *К* в параметрической форме (рис. 13.9, *а),* которая называется *кругом Мора* или *кру-*

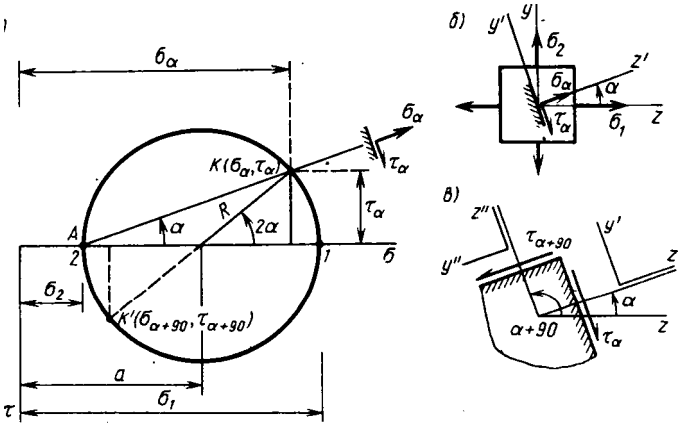


Рис. 13.9. Круг напряжений, построенный по напряжениям *в\, o_2* **и главным площадкам** *(а, б)* **знаки т„ ит,$_{+90}$- различны в повернутых осях** *г'—у'* **и** *г"—у" (в)*

гом напряжений. Каждой наклонной площадке, определяемой углом а как параметром (рис. 13.9, *б),* на окружности соответствует некоторая точка, которую называют изображающей точкой ***К (сг$_а$,*** т,,), имеющей координаты

ст, и т,,.

Взаимно перпендикулярным площадкам, отвечающим повороту осей на углы а и а+ 90°, на окружности соответствуют точки ***К*** и ***К',*** лежащие по концам диаметра. При этом на круге $т_{а+90°}$= — т«, так как формула для $т_я$,

как указывалось ранее, дает знак этого напряжения в повернутых осях ***z', y'*** и z", ***y"*** (рис. 13.9, ***в).***

Если известны главные площадки и напряжения *aj* и a_2, то круг напряжений строится по точкам *1* и *2.*

Чтобы установить соответствие между площадкой и изображающей точкой на окружности, удобно воспользоваться точкой ***А (полюс круга),*** в данном случае совпадающей с точкой 2, а в общем случае имеющей координаты ***А (a_y, x_{zy}).*** Луч ***АК,*** параллельный нормали наклонной площадки, в пересечении с окружностью дает изображающую точку ***К ($o_л$,*** т«), что очевидно из чертежа.

Построение круга Мора ■ общем случае

На рис. 13.10 представлен круг Мора, построенный по неглавным исходным площадкам и напряжениям. Так как напряжения ***x_{1y}*** и ***x_{yz}*** приходится откладывать на диаграмме с различными знаками, то будем их обозначать соответственно т и т'. Отметив изображающие точки вертикальной площадки ***К (<r_z, x)*** и горизонтальной площадки ***К' (ay,*** т') по их координатам и соединив их, получаем центр окружности, после чего строится и сама круговая диаграмма.

Для исходных неглавных площадок также удобно пользоваться полюсом ***А {a_y, r_{zy}).*** В общем случае он

может занимать различное положение на окружности. Практически полюс *А* можно находить как точку пересечения лучей ***КА*** и ***К'А,*** проведенных параллельно нор-

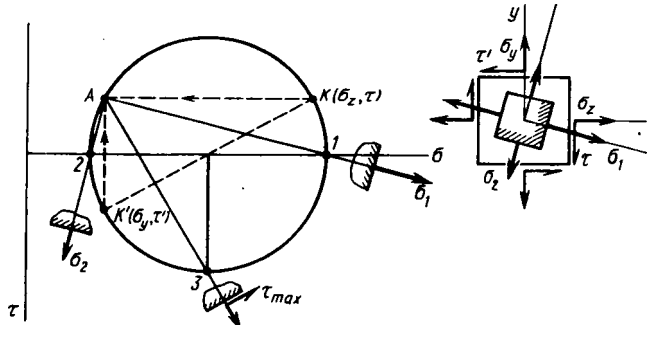


Рис. 13.10. Построение круга напряжений по произвольным исходным площадкам и определение главных напряжений

малям соответствующих площадок (на рис. 13.10 они помечены стрелками).

Луч ***AM,*** проведенный из полюса ***A*** параллельно нормали наклонной площадки, дает в пересечении с окружностью изображающую точку ***M (а***т,,). На рис. 13.10 показано, как по кругу Мора определяется наклон главных площадок: их изображающими точками служат точки 7 и *2,* абсциссы которых имеют экстремальные значения 0·] = 0'тм и <7$_2$ = <Гпш>- Сами площадки перпендикулярны лучам ***А — 1 и А — 2.*** Точка *3,* имеющая экстремальную ординату, соответствует площадке, в которой возникают экстремальные касательные напряжения $x_{m\cdot m} = Я$.

§ 13.6. Примеры анализа плоского напряженного состояния

Рассмотрим несколько характерных примеров определения главных напряжений и площадок, а также построения соответствующих кругов напряжений.

Прямер 13.2. Построить крути напряжений в случаях, показанных рис. 13.11, *а, б,* **где исходными напряжениями являются =Тд,=0,**

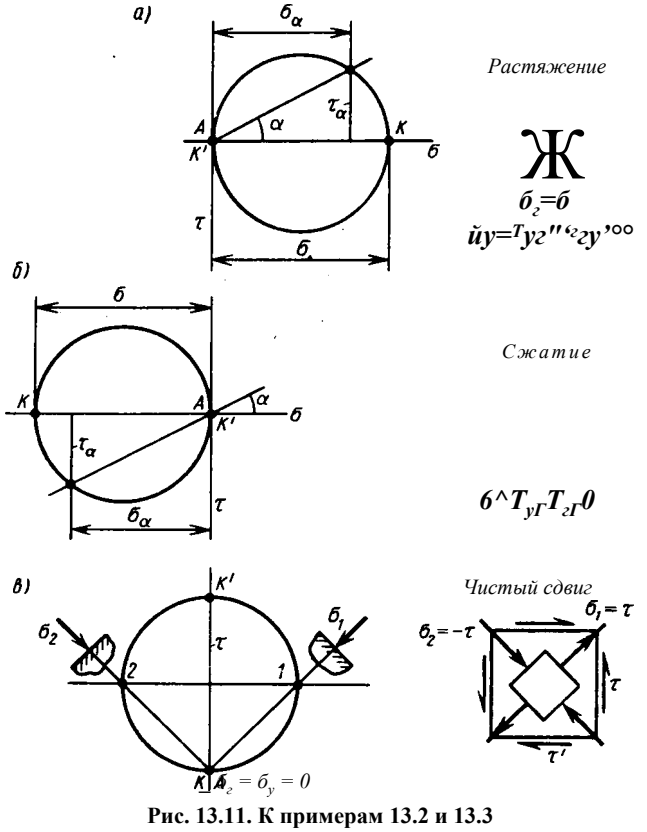


Рис. 13.11. К примерам 13.2 и 13.3

<$т_г$= ±(Т и напряженное состояние представляет одноосное растяжение (рис. 13.11, *а)* **или сжатие (рис. 13.11,** *б).*

'Решение. Исходные площадки являются главными, так как на них отсутствуют касательные напряжения. Одно главное напряжение будет другое равно нулю. Соответствующие круги напряжений построены по точкам *К (а„* **0) и** *К'* **(0, 0). Полюс круга** *А (а„* ■*¡¡у)=А* **(0, 0) находится в начале координат. На рисунках показано графическое определение** ***о**** **и** т,,.

Пример 13.3. Пусть по двум взаимно перпендикулярным площадкам действуют только касательные напряжения $т_{г>}=т_{>2}=т$ (чистый сдвиг).

Решение. Круг напряжений построен на рис. 13.11, *в,* **из которого следует, что главные напряжения =т, <$г_2$ = — т и действуют они под углом 45° к площадкам чистого сдвига. Тот же результат получается аналитически по формулам (13.14) и (13.11):**

$$1\$2oo=\frac{2т}{0}=oo;\ 2<*o=90°;\ «o-45°.$$

Рассмотренное напряженное состояние чистого сдвига возникает, например, в точках скручиваемого стержня (см. гл. 5), в материале которого по поперечным и продольным (радиальным) площадкам действуют касательные напряжения т, а по площадкам, повернутым на угол 45° к образующей, — такие же по модулю, но растягивающие и сжимающие напряжения.

Пример 13.4. Исследовать напряженное состояние в случае наложения двухосного сжатия — растяжения и чистого сдвига. В таком напряженном состоянии находится, например, тонкостенная труба, испытывающая кручение моментом M_1 **и сжатие силой** N **и действие внутреннего давления** p **жидкости или газа (рис. 13.12,** *а).* **Исходные напряжения могут быть определены по формулам**

$$ъ=\sim;\ *\ \frac{N \bullet M_e\ 1M_e\ рБ}{}$$

Последняя формула получена из условия равновесия полукольца (рис. 13.12, *б),* **выделенного из трубы, в виде суммы проекций сил, действующих на полукольцо:** *рй* 1 *—2*a_y **<5** 1**—0.**

Исходные напряжения: —60 МПа; т^-40 МПа; <7^=30 МПа.

Решение.

$$*1,2=-\left(\frac{*}{2}\right)^2+\hat{}\ \pm\sqrt{\left(\frac{*\ х}{2}\right)^2+\left(\frac{-1\ 5}{2}\right)^2}=\frac{-л/9\ 0^2+4\cdot40^2}{2}=—15\pm60{,}2.$$

Таким образом, ^1 **— 45,2 МПа,** $а_2$**= -75,2 МПа (рис. 13.12, в). По формуле (13.16) найдем тангенсы углов наклона** *а* **и (**$т_2$**:**

$$\frac{тху\ 40}{в_х\text{-}а_у\ 15{,}2}=2{,}64;\quad 1_{ий}а_2=\frac{Тм\ 40}{°1\text{-}о_у—105{,}2}=0{,}38.$$

По полученным тангенсам строим направления нормалей главных площадок и сами площадки. Углы имеют следующие значения: а] = 69°,

$а_2$= — 21°.

Экстремальные касательные напряжения $т_т$**..** *=(ол — ат\!2=*

=60,2 МПа действуют на площадках, повернутых на 45° к главным.

На рис. 13.12, *г* **показано также графическое решение задачи с помощью круга Мора, построенного по точкам** *К* **(—60; 40) и /Г (30; —40).**

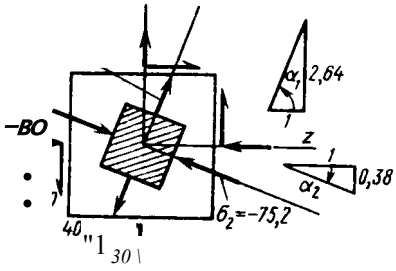


Рис. 13.12. К примеру 13.4. Напряженное состояние в тонкостенной трубе от кручения, сжатия и внутреннего давления

Рассмотрим теперь вопросы анализа напряженного состояния в изгибаемой балке (рис. 13.13). Следуя допущению о ненадавливании волокон в точках балки, полагаем a_y=0, а другие компоненты исходных напряжений будут

Главные напряжения и тангенс угла их наклона находят по формулам

{Ти=?±1лА2+4т2; (13.24)

т
$\sigma_{1,2}$. (13.25)

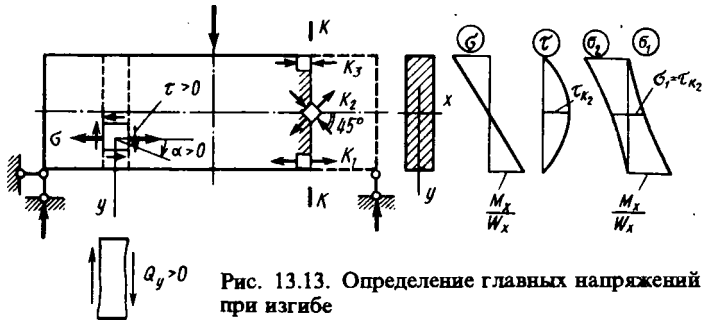


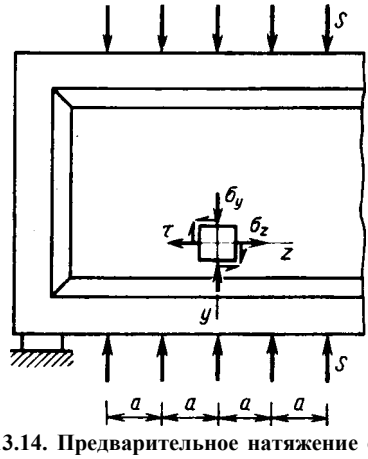
Рис. 13.13. Определение главных напряжений при изгибе

Если ось *у* ориентирована вниз, как это изображено на рис. 13.13, то в формулу (13.25) напряжение т подставляется со знаком поперечной силы $<2_Y$ в соответствии с формулой (13.23), а положительный угол $а_и$, отсчитываемый от оси *г,* будет направлен по ходу часовой стрелки.

По высоте некоторого поперечного сечения *К — К* напряженное состояние изменяется от простого растяжения в точке K_x (где $а_1 = M_X/J_X$, $ст_2 = 0$) до сжатия в верхней точке K_b (в которой $о^- = 0$, $а_г = — M_x/W_x$). На нейтральной оси в точке K_2 имеет место чистый сдвиг, так как $ст_г=0$, в промежуточных точках — сочетание сдвига и растяжения или сжатия. Эпюры главных напряжений $<5\backslash$ и $а_г$ по высоте сечения показаны на рис. 13.13.

Для уменьшения главных растягивающих напряжений в стенке железобетонных балок иногда создают сжатие в поперечном направлении ($а_y < 0$) за счет предварительного натяжения вертикальных стержней силами 5 (рис. 13.14). В этом случае определение главных напряжений ведется по общим формулам (см. пример 13.4) при $а_y$= — —$8_i(ад)$, где *а* — шаг расстановки стержней, *8* — толщина стенки.

Решите задачу **13.5**



"гЗГ

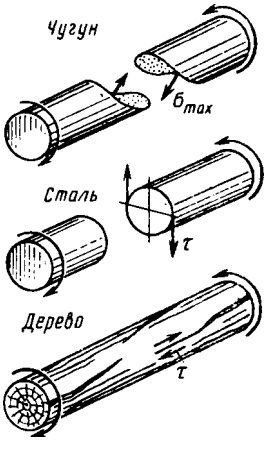
Рис. 13.14. Предварительное натяжение стержней силами *Я* создает сжимающие напряжения $а_y$ в стенке

§ 13.7. Траектории главных напряжений

Наглядное представление о потоке внутренних сил в нагруженном теле дают траектории главных напряжений:

так называется линия, в каждой точке которой касательная совпадает с направлением главного напряжения в этой точке.

При простом растяжении бруса (рис. 13.15, *а)* траекториями главных напряжений, очевидно, являются прямые, параллельные и перпендикулярные его оси. Если во всех точках скручиваемого стержня (рис. 13.15, б) наметим направление главных напряжений, то на поверхности получим сетку взаимно ортогональных кривых, пересекающих образующие под углом 45°, — траекторий главных сжимающих и растягивающих напряжений. Прямоугольный элемент, выделяемый траекториями, испытывает растяжение — сжатие в перпендикулярных направлениях, а касательные напряжения на его гранях отсутствуют.



Последний пример позволяет объяснить особенности разрушения стержней при кручении. Вал, изготовленный из материала, имеющего прочность на растяжение, меньшую, чем на срез, например чугун, разрушается от разрыва по винтообразной поверхности, на площадках которой перед разрушением действовали главные растягивающие напряжения $a_{m\underline{\underline{ax}}}$. Для стального вала более опасной оказывается деформация сдвига, и он разрушается от среза по поперечному сечению. У дерева наименьшая прочность на скалывание вдоль волокон, и поэтому при кручении прежде всего появляются продольные трещины между слоями дерева.

Для получения траекторий в изгибаемой балке на основании (13.25) запишем дифференциальные уравнения (рис. 13.16, а):

$$г\,(у,\ г)\ бу_2\ \mathbf{Т\ (у,\ г)}$$

$$йг\ a\backslash\ (у,\ ¿)\ йг\ a_2\ (у,\ \mathbf{г})$$

где ^ и $у_г$ — ординаты траектории $a\backslash$ и $a_г$ соответственно. Уравнения (13.26) можно проинтегрировать численно, например по методу Рунге — Кутта. На рис. 13.16, б в ле-

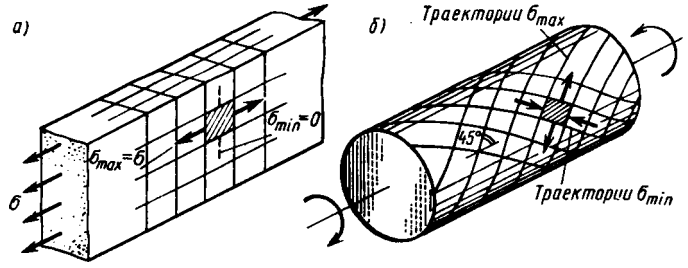


Рис. 13.13. Траектории главных напряжений при растяжении и кру

ЧбНИИ

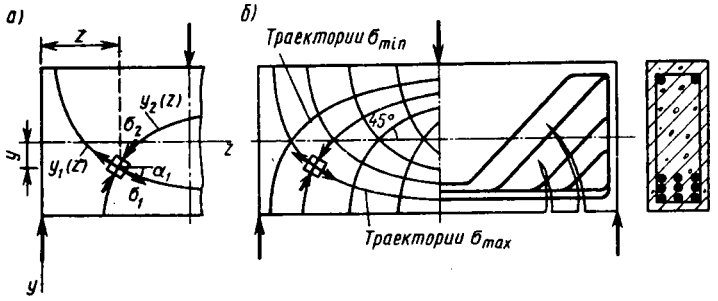


Рис. 13.16. Траектории главных напряжений при изгибе и схема армирования железобетонной балки

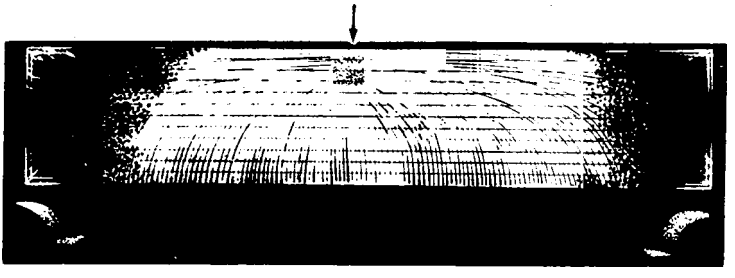
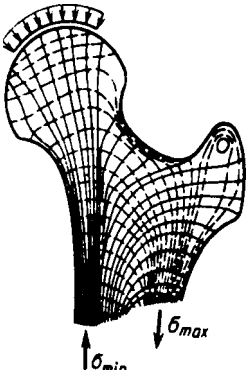


Рис. 13.17. Трещины в хрупком лаковом покрытии в балке. В каждой точке трещина идет перпендикулярно т. е. она совпадает с траекторией *a...z.*



Траектории главных напряжений ■ модели шейхи бедренной кости человека, полученные методом фотоупругости (см. гл. 20)

вой половине показан вид теоретически получаемых траекторий напряжений, а в правой — схема расположения стержней стальной арматуры железобетонной балки, предназначенной для восприятия растягивающих внутренних сил при появлении трещин в бетоне. На рис. 13.17 приведена фотография трещин в хрупком лаковом покрытии балки, изгибаемой сосредоточенной силой. Трещины образовались в направлении, перпендикулярном растягивающим напряжениям $<\tau_{r}$,,, поэтому они совпадают с траекториями сжимающих напряжений $a^{\wedge}_{n}$.

К. Кульмам, занимавшийся в середине XIX в.созданием подъемного крана большой грузоподъемностью, ознакомившись в 1866 г. с распределением напряжений в костной ткани, воскликнул: «Да это же мой кран!»

Знание траекторий главных напряжений во многих случаях дает возможность придать рациональную форму детали или части конструкции.

Интересно отметить, что путем естественного отбора внутренняя структура костей скелета животных приобрела весьма совершенные прочностные и весовые качества. Наиболее прочные волокна костного материала располагаются в соответствии с траекториями главных напряжений, отвечающих основным нагрузкам на скелет. Этот принцип инженеры используют в современных композитных материалах, усиливая материал основы высокопрочными нитями в направлении потока растягивающих усилий в элементах конструкций.

Напряжения, действующие на гранях элементарного параллелепипеда в общем случае объемного напряженного состояния (рис. 13.18, *а),* сведем в таблицу (тензор напряжений)

$$\begin{matrix} Ox & & \\ \wedge xy & a_y & Ъ \\ ,T^*г & & oj \end{matrix} \qquad (13.27)$$

симметричную относительно главной диагонали, поскольку по закону парности касательных напряжений имеем $Тд_y = x_{yx}$, $т_{хг} = т_{„}$, $x_{yz} = x_{ly}$. Как и в плоском в объемном напряженном состоянии, меняя ориентировку параллелепипеда, можно найти такое его положение, когда на всех гранях касательные напряжения будут равны нулю.

См. § 5.1

Такие площадки и действующие на них нормальные напряжения, как и ранее, называются главными напряжениями и главными площадками (рис. 13.18, *б).* Рассмотрим способ их определения.

Предположим, что нам известен наклон какой-либо главной площадки, определяемой нормалью v. Сечением, параллельным этой площадке, выделим из исходного параллелепипеда тетраэдр, изображенный на рис. 13.19, и составим условия равновесия тетраэдра в виде сумм проекций действующих на него сил на оси координат.

Введем обозначения для направляющих косинусов нормали v:

$$\cos(x?v) = /;\ \cos(y?v) = /w;\ \cos(z?v) = n. \qquad (13.28)$$

Примем площадь наклонной грани тетраэдра ***dA~*** 1, тогда площади других граней будут ***dA_x=l,*** с***1A_y=m,***

dA_z=n. Единственное напряжение, действующее на главной площадке, обозначим $<г_{1Л} = ег$ и сумму проекций на ось

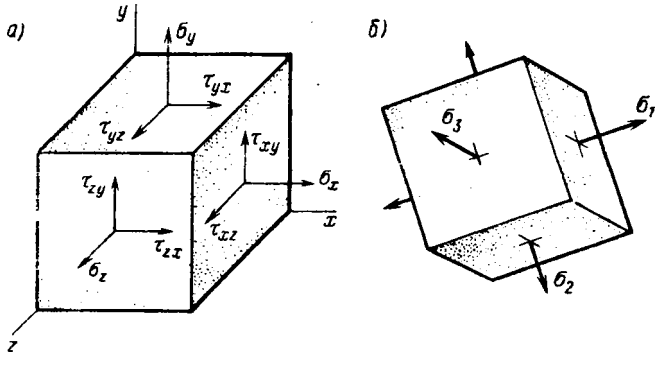


Рис. 13.18. Объемное напряженное состояние. Исходные (а) и главные площадки *(б)*

x запишем в виде

$$al - a_x l - x_{yx} m - x_{zx} n = Q.$$

Аналогичные равенства будут для осей y и z. Все вместе запишем их в виде однородной системы уравнений относительно неизвестных косинусов I, m и n:

$$\begin{aligned} &(a_x - o)1 + x_{yx} m + x_{zx} n = 0; \\ &x_{xy} l + (o_y - a)\, m + x_{zy} n = 0; \\ &x_{xz} l + x_{yz} m + (a_z - a)\, n = 0. \end{aligned} \qquad (13.29)$$

Так как между неизвестными существует зависимость

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1, \qquad (13.30)$$

то одновременно они все не могут быть равны нулю. Как это доказывается в линейной алгебре, при этом условии определитель однородной системы должен быть равен нулю, т. е.

$$\begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma) & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma) & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & (\sigma_z - \sigma) \end{vmatrix} = 0. \qquad (13.30)$$

Из алгебра: определитель

~a_x b_2 c_2+ a_2 b_3 c,+ a_3 b_1 c_2— c_1 b_2 a_3 — c_2 b_3 a_2- c_3 b_2 a_1

Раскрыв определитель, придем к кубическому уравнению

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0, \qquad (13.31)$$

три корня которого как раз и будут значениями трех главных напряжений в рассматриваемой точке. Одно из них будет алгебраически наибольшим для точки, обозначим его σ_1 наименьшее напряжение обозначим σ_3, а промежуточное — σ_2, т. е.

(13.32)

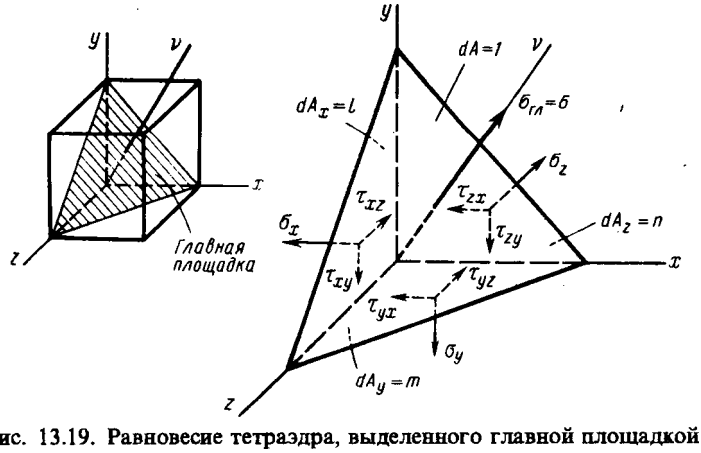


Рис. 13.19. Равновесие тетраэдра, выделенного главной площадкой

При переходе к главным напряжениям тензор напряжений получает вид

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \sigma_2 & \\ & & \sigma_3 \end{pmatrix}. \qquad (13.33)$$

Коэффициенты уравнения 13.31 будут

Инварианты напряженного состояния

$$\begin{aligned} &1_x = a_x + o_y + a_z', \\ &/_2 = a_x\, a_y + a_x\, o_z + a_y\, a_z — x_{yx} — x \setminus_x — x \setminus_y, \\ &/_3 = O_x O_y O_z\, O_x X_{zy}\, (Ty\text{т}_{1X}\, o_1 \text{Т}\, y_x\, 2x_{yx} x_{1x} x_{zy}. \end{aligned} \qquad (13.34)$$

Они не зависят от выбора осей координат, поскольку при любых исходных площадках уравнение (13.31) должно давать одни и те же корни <т$_ь$ а$_2$ и $a_ь$ — главные напряжения в точке. Поэтому величины 1_X, $/_2$ и $/_3$ называются *первым, вторым и третьим инвариантами напряженного состояния* (тензора напряжений).

Для определения /, *m, n,* соответствующих одному из трех главных напряжений, значение этого напряжения надо подставить в (13.29) вместо *а.* Совместное решение (13.29) и (13.30) даст искомые косинусы *I, m, n.*

На рис. 13.20 изображены три круга напряжений для данной точки, каждый из которых соответствует одной паре главных напряжений: a_x — a_2, a_2 — 0э или a_x — *(Т$_3$.* Точки этих окружностей своими координатами дают напряжения на площадках, перпендикулярных плоскостям еГ] — *а 2, а г* — ст$_3$ и a_x — $a_ь$. На площадке общего положения напряжения *а,* и т,, определяются координатами точек площади, заключенной между тремя окружностями. В частности,

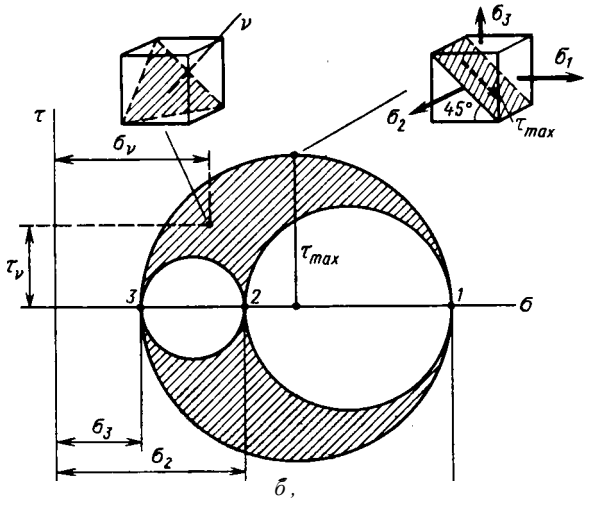


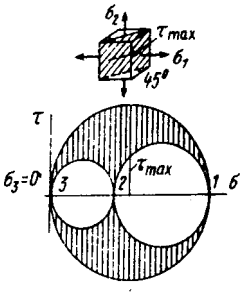
Рис. 13.20. Объемное напряженное состояние, представленное тремя кругами напряжений

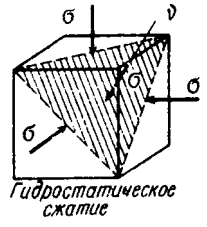
максимальное касательное напряжение для данной точки

$$\tau_{max} = \frac{a|-*r}{-y-} \qquad (13.35)$$

равно полуразности максимального и минимального главных напряжений и действует на площадке, наклоненной к ним на угол 45°.

См. § 143





Гидростатическое сжатие

Прочность материала или переход его под нагрузкой в пластическое состояние иногда связывают с величиной $\tau_{ти}$, и поэтому оно наряду с главными напряжениями

является важной характеристикой напряженного состояния.

Заметим, что плоское напряженное состояние в точке ($е_{г_3}$:=0) в общем случае также должно изображаться тремя кругами напряжений. Лишь при совпадении двух главных напряжений круги сливаются в один.

В частном случае $е_{г_1} = е_{г_2} = <\tau_3 = а$ три круга вырождаются в точку. На всех площадках в этом случае касательные напряжения отсутствуют, а нормальные напряжения равны *а.* Любая площадка является главной. Подобное напряженное состояние испытывает тело, находящееся под действием гидростатического давления.

§ 13.9. Деформированное состояние в точке

Рассмотрим особенности деформирования материала в окрестности некоторой точки *М* деформируемого тела (рис. 13.21, *а).* Выделим элемент *йххаухйг* в этой точке. Его деформации в плоскости *ху* показаны на рис. 13.21, *б.* Это будут относительные удлинения E_x—*Айх/&х,* $в_y$= = ***Айу/йу*** и угол сдвига ***у^.*** Деформации элемента в трех

Тензор деформации

ортогональных плоскостях представим в виде таблицы

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x & \text{симм} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & ; \ Ууг \end{pmatrix} \qquad (13.36)$$

аналогичной (13.27) и называемой *тензором деформаций.* Если мысленно вращать вокруг точки *М* оси *х, у,* г, переводя их во всевозможные положения *х', у',* г', то деформации (13.36) будут непрерывно изменяться.

■ у. .

деформированы состояние в точке *вт/чке*

Совокупность относительных удлинений и углов сдвига для всевозможных направлений осей, проведенных через данную точку, называется деформированным состоянием

Аналогично напряженному состоянию можно указать такие три ортогональные направления *1, 2, 3,* для кото-

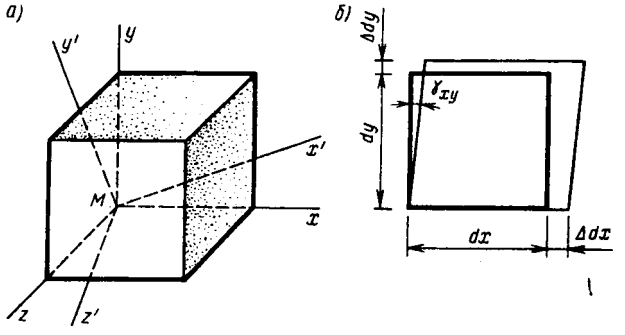


Рис. 13.21. Совокупность деформаций для всевозможных осей, проведенных через точку *M,* представляет деформированное состояние в точке *(а);* деформации элемента в плоскости *x—y* (б)

рых углы сдвига равны нулю, а удлинения

£) ^ Ё2 ^ (13.37)

обладают тем свойством, что £1 и e_3 имеют максимальное и минимальное значения для точки.

Деформации e_u e_2, $в_3$ *в направлениях, для которых отсутствуют углы сдвига, называются главными деформациями в точке.*

Главные деформации

Для главных направлений тензор деформаций (13.36) получит вид

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & O & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \qquad (13.38)$$

Компоненты тензора деформаций при повороте осей изменяются совершенно аналогично компонентам тензора напряжений. Чтобы это показать, рассмотрим деформации в некоторой плоскости (рис. 13.22). Считая главные деформации *E\ = &* и e_2 = А известными,

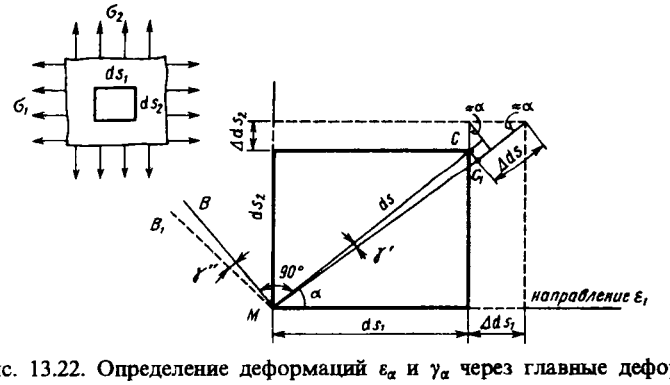


Рис. 13.22. Определение деформаций ε_α и γ_α через главные дефор-

найдем деформации £„=*Ads/ds* и y_a — изменение прямого угла *BMC.* Из рисунка имеем

A di=*A* **di, cos a + A d.?$_2$ sin a.**

Разделив это равенство на **dj** и заменив в первом слагаемом **ds=dj,/cosa** и во втором **dy=ds$_2$/sina,** получим

$$E_a = E\backslash \cos^2 a + E_2 \sin a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$

где использованы выражения **cos² a** и **sin² a** через **cos 2a.**

Из тригонометрии: Далее найдем

те²»-¹ Пх

$$y' = \frac{di}{dj} = \frac{Adii \sin a}{Ads_2 \cos a} = \frac{s_i - e_2}{ds} = \frac{1}{2} \sin 2a.$$

-feos 2a);

$\sin^2 a = \frac{1}{2}(1 -$

-cos2a)

Для получения y" в формуле для y' заменим а на а+ 90° после чего получим

sin2a,

где знак минус говорит о том, что сторона *MB* поворачивается в сторону, противоположную повороту стороны *MC.*

Примем $y_a > 0$, если прямой угол *BMC* уменьшается. Тогда $y_a = y'' - y'$ и формулы для е„ и y_a вместе можно записать так:

$$£« = \frac{£i + e_2}{2} + \frac{8i - e_2}{2} \cos 2a; \quad (13.39)$$

$$-У« = \frac{1}{2}(«1 - e_2) \sin 2a. \quad (13.40)$$

Сравнение этих формул с формулами (13.17), (13.18) для $<\tau_a$ и т„ подтверждает упомянутую аналогию в зависимостях напряженного и деформированного состояний. На основании указанной аналогии можно, например, без вывода написать формулу, аналогичную (13.14), если в последней заменить a_z, a_y и x_{zy} соответственно на e_z, z_y и V-:

$$£1,2 = \frac{+}{2} \pm \sqrt{(e - e)^2 + 4 (b/2)^2}. \quad (13.41)$$

По ней можно определить главные деформации £] и e_2 через исходные деформации $e_г$, e_y и y_{1y} для произвольных осей *z, y,* проведенных в данной точке. По аналогии с (13.8) можно утверждать, что в данной плоскости £„ + e_{a+}ад» = £*+£,= const. Учитывая выражение пер-

вого инварианта (13.34), можно сказать о трех произвольных ортогональных направлениях в точке, что $e^*+e_y + e_2 = \text{const}$.

В точках изотропного упругого тела направления главных деформаций и главны;, напряжений всегда совпадают. В теле с более сложными физическими свойствами (анизотропное тело, сложное упругопластическое нагружение и т. п.) указанного совпадения может и не быть.

§ 13.10. Экспериментальное определение деформаций и напряжений методом тензометрии

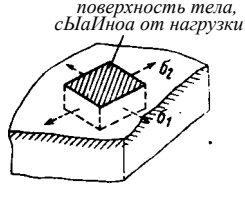
Методы экспериментального определения деформаций и напряжений играют исключительно важную роль в инженерном деле. Они используются как при определении констант упругости и прочности различных материалов (см. гл. 3), так и для проверки различных теоретических или проектных решений, выполняемых на моделях или на реальных опытных объектах. Подробно различные экспериментальные методы изучаются в лабораторном практикуме по сопротивлению материалов и излагаются в руководстве к практикуму. Здесь изложим лишь основной метод, наиболее широко применяемый на практике, — *метод тензометрии.*

Метод тензометрия

Метод тензометрии состоит в измерении малых деформаций в отдельных точках детали или модели и последующем переходе от них к напряжениям с использованием закона Гука.

Для замера относительного удлинения на поверхности тела намечается отрезок, длина которого до деформации 5 называется *базой.* С помощью специальных приборов — *тензометров* — определяется абсолютное удлинение отрезка Ал и вычисляется средняя на длине базы относительная деформация ё = Ал/5. Если на длине базы напряженное состояние изменяется не слишком резко, то найденное среднее значение е можно считать истинным значением для исследуемой точки. В противном случае оно будет приближенным, но тем более близким к истинному, чем меньше база 5.

На поверхности тела, если эта поверхность непосредственно не загружена распределенной нагрузкой,. имеет место плоское (или в частном случае линейное) напряженное состояние, характеризуемое главными напряжениями <7| и $и_2$ и деформациями **Б| и** e_2. Именно эти деформации



могут быть измерены методом тензометрии. Для изотропного тела они связаны с напряжениями законом Гука

$$e,=\frac{\sigma_1}{E}-\mu\frac{\sigma_2}{E};$$

$$E_2=\frac{\sigma_2}{E}-\mu\frac{\sigma_1}{E}.$$

Разрешая уравнения (13.42) относительно напряжений, получим

$$a\backslash = \frac{E}{1 - u_t^2}\,(\pounds 2 + {}^{\wedge}61) \qquad (13.43)$$

$$°2 = \frac{E}{\backslash - u_t^2}\,\mathbf{r}\,(\pounds 2 + {}^{\wedge}61)$$

По измеренным деформациям Е1 и e_2 по формулам (13.43) в методе тензометрии вычисляют напряжения.

При измерении деформаций могут встретиться три характерных случая:

1. Заведомо известно, что в данной точке в известном направлении имеет место простое растяжение или сжатие (рис. 13.23, *а).* Для определения *а* достаточно поставить один тензометр, база которого располагается в направлении действия *а.* Определив из опыта е, по закону Гука найдем

$a=eE.$

Так поступают, например, при испытании образцов на растяжение или сжатие (см. гл. 3).

2. В данной точке известно только направление главных напряжений o_x и a_2 (рис. 13.23, б). Для определения значений этих напряжений необходимо поставить два тензометра, которые устанавливаются своими базами по направлениям гг, и o_2. С их помощью из опыта находим главные деформации Е1 и e_2, после чего по формулам (13.43) находим напряжения $<T\backslash$ и a_2.

3. В данной точке необходимо определить главные напряжения a_x и a_2 и угол *а,* который образует направление a_1 с произвольно выбранной осью *х* (рис. 13.20, *в).*

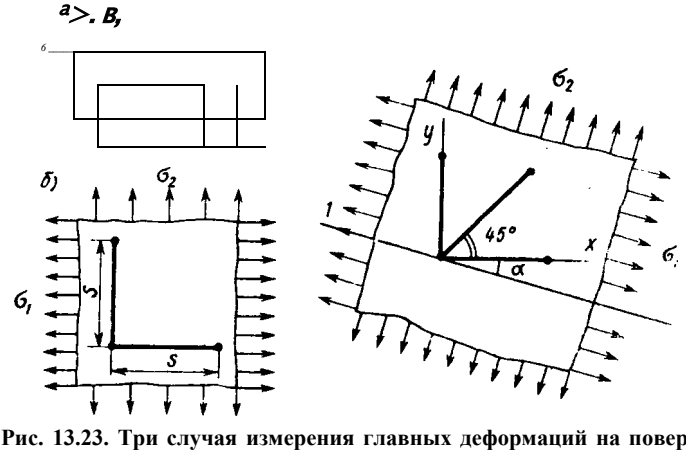


Рис. 13.23. Три случая измерения главных деформаций на поверхности тела

Очевидно, что для определения трех неизвестных a_1 a_2 и а надо получить из опыта три какие-либо деформации.

Обычно в данной точке замеряют три удлинения: e_x и e_y в направлении осей x, y и ε_{45} под углом 45° к ним.

Для этого три тензометра располагают так, как показано Розетка деформа-
на рис. 13.23, *в.* Такая установка тензометров называется ций
прямоугольной розеткой. Применяют и другие виды розе-
ток, например ***равноугольную,*** когда углы между тремя
базами тензометров одинаковы и равны 120°.

Выведем расчетные формулы для прямоугольной розетки. Обозначим угол между направлением £i и направлением ε_x через а; тогда углы между направлением E_i и направлениями ε_{4i} и ε_y соответственно равны а+ 45° и а + 90°. Учитывая это, по формуле (13.39) можно написать:

$$\varepsilon_i=\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}+\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{2}\cos 2a;$$

$$\varepsilon_{45}=\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}+\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{2}\cos 2(a+45°); \quad (13.44)$$

$$\varepsilon_y=\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}-\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{2}\cos 2(a+90°).$$

Решим эти уравнения относительно ε_1, ε_2 и а, помня, что ε_x, ε_y, ε_{45} известны из опыта. С учетом равенства $\cos 2(a\pm 90°)=-\cos 2a$ путем сложения и вычитания первого и третьего уравнений получим

$$\varepsilon_x+\varepsilon_y=\varepsilon_1+\varepsilon_2;$$

$$\varepsilon_x-\varepsilon_y=(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\cos 2a.$$

Перенеся cos 2a в левую часть, складывая и вычитая обе полученные строки, найдем

$$\varepsilon_1=\frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2}+\frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2\cos 2a}, \quad (13.45)$$

$$\varepsilon_2=\frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2}-\frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2\cos 2a}$$

Осталось найти угол а. Заменив во втором уравнении системы (13.44) $\cos 2(a+45°)=-\sin 2a$ и выразив из этого уравнения sin 2a, а из первого уравнения той же системы cos 2a, получим их отношение в виде

$$\operatorname{tg} 2a=\frac{2\varepsilon_{45}-(\varepsilon_x+\varepsilon_y)}{2\varepsilon_x-(\varepsilon_x+\varepsilon_y)}.$$

Сделав замену $\varepsilon_1+\varepsilon_2$ на $\varepsilon_x+\varepsilon_y$, окончательно получим

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y - 2\varepsilon_{45^\circ}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}$$

Формулы (13.45) и (13.46) дают возможность найти направления и значения главных деформаций в точке по замеренным удлинениям z_x, e_{45°, e_y. Зная E\ и e_2, легко

определить напряжения a_x и $ст_2$, для чего надо применить

формулы (13.43).

В ходе вывода был использован рис. 13.20, *в,* на котором угол а от оси *х* отложен по ходу часовой стрелки. Поэтому положительный угол а, найденный по выражению (13.46), следует откладывать также по ходу часовой стрелки.

Из формул (13.45) можно исключить сое 2а, воспользовавшись известным из тригонометрии тождеством

$$\cos 2\alpha = +\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}},$$

в котором *1%2cc* заменяется его выражением (13.46). Таким путем придем к формуле

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_{45^\circ})^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_{45^\circ})^2}, \qquad (13.47)$$

нередко используемой вместо формулы (13.45).

Обратимся теперь к вопросу техники измерения деформаций. В настоящее время существует большое число видов тензометров: механические, оптические, гидравлические, пневматические и др. Однако в последние годы широко применяют электрические тензометры и, в частности, проволочные датчики омического сопротивления.

Датчик — это элемент, который, воспринимая деформацию, преобразует ее в изменение какого-либо электрического параметра. Проволочный датчик преобразует деформацию в изменение омического сопротивления проводника. Он представляет собой несколько петель тонкой (диаметром 0,025...0,030 мм) проволоки, наклеенной на полоску бумаги (рис. 13.24).

Датчик наклеивается специальным клеем на исследуемую деталь, деформации которой передаются проволоке. Опыт показывает, что вследствие деформации меняется сопротивление проволоки. Растяжение проволоки вызывает увеличение сопротивления, а сжатие — его уменьшение. Это изменение сопротивления датчика регистрируется специальной аппаратурой.

Экспериментально установлено, что в области малых деформаций существует линейная зависимость между относительным изменением сопротивления датчика и относительной деформацией проволоки, выражаемая формулой

$$\frac{\Delta R}{R} = \beta \frac{\Delta s}{s} = \beta \varepsilon,$$

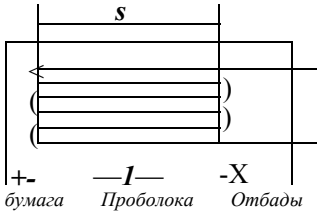


Рис. 13.24. Тензорезистор

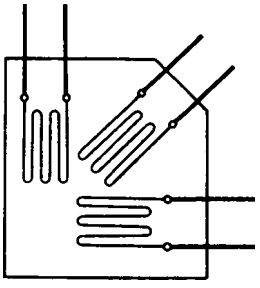


Рис. 13.25. Прямоугольная розетка датчиков

где *К* и ДЛ — начальное сопротивление датчика и его абсолютное приращение; ^ и $Д_5$ — база датчика, равная длине петель проволоки, и ее абсолютная деформация; /? — коэффициент тензочувствительности датчика.

Для наиболее употребительной проволоки из константана (сплав 60% Си и 40% N0 ^=2...2,1. Применяют также и другие сплавы, у которых /?=2...3,5.

Обычная база датчика равна 20 и 10 мм. Применяют датчики и с меньшей базой (до 2 мм). Чем меньше база, тем ближе среднее относительное удлинение, измеряемое на ее длине, к истинному значению деформации в исследуемой точке. Однако с уменьшением базы снижается и точность измерений. Кроме того, датчики с малой базой (2...5 мм) становятся чувствительными к деформации в поперечном направлении из-за деформации участков проволоки на закруглениях петель, что требует специальной тарировки датчиков.

Наряду с одиночными датчиками применяют розетки из датчиков, расположенных на общей бумажной основе (рис. 13.25). Розетка может быть создана и непосредственно на поверхности детали путем соответствующей наклейки датчиков.

Изменения омического сопротивления проволочных датчиков при измерении деформаций очень малы, что требует применения чувствительной измерительной аппаратуры. Чаще всего датчик включают как одно из сопротивлений *Я*\ мостика Уитстона, принципиальная

схема которого показана на рис. 13.26. В диагональ мостика включается чувствительный гальванометр *Г*.

Под балансом моста понимается такой подбор со-
противлений Л„ $Я_2$, $Д_3$ и Л„ когда ток в диагонали

отсутствует и гальванометр показывает нулевой отсчет.

Для баланса необходимо соблюдение равенства

$$Л,Л_3 = Л_2Л_4. \qquad (13.49)$$

Перед испытанием мост балансируют, регулируя сопротивления $Л_3$ и $Л_4$. Деформация, полученная рабочим

датчиком в ходе испытания, приводит к изменению Л, и,

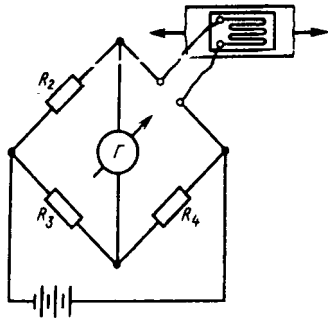


Рис. 13.26. Рабочий датчик Л] в измерительной схеме (мостик Уитстона)

следовательно, к нарушению баланса, вследствие чего стрелка гальванометра отклоняется от нуля. Регистрируя это отклонение, получают деформацию, измеряемую рабочим датчиком Л,.

Колебания температуры весьма заметно изменяют сопротивление датчиков. Для устранения влияния изменения температуры на результаты измерений в качестве сопротивления $Л_2$ применяют датчик, аналогичный рабочему датчику Л] (его называют датчиком температурной компенсации). Будучи наклеен на недеформируемый брус из того же материала, что и испытываемая деталь, этот датчик находится в одинаковом температурном режиме с рабочим датчиком Л]. Одновременное и одинаковое изменение сопротивлений Л, и $Л_2$ из-за температуры не нарушает условия (13.49) баланса моста и делает аппаратуру нечувствительной к изменению температуры.

Основные преимущества проволочных датчиков по сравнению с другими тензометрами заключается в их простоте, малогабаритности и высокой точности. Датчики могут быть установлены в труднодоступных местах и на движущихся деталях; наклеить их можно в большом числе, подключая поочередно с помощью переключателя к измерительной аппаратуре. Это позволяет достаточно полно исследовать напряженное состояние крупных сооружений.

§ 13.11. Зависимость между модулями упругости при растяжении и при сдвиге

Удлинение Дл диагонали AC на рис. 13.27, *а* можно объяснить двояко. С одной стороны, оно является непосредственным следствием деформации сдвига и, значит, при заданных напряжениях т зависит от модуля *д. С* другой стороны, диагональ AC можно представить как волокно материала, растягиваемое напряжением и сжимаемое в поперечном направлении напряжением $a_г$. В этом

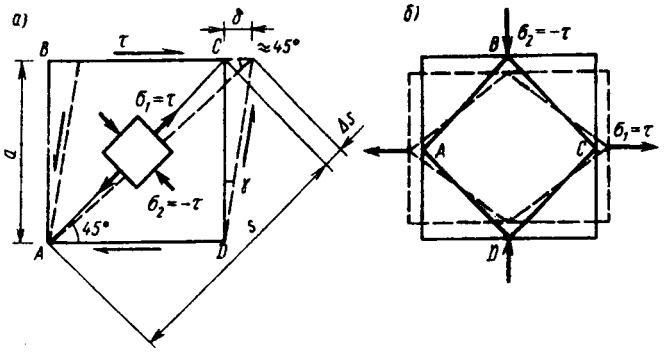


Рис. 13.27. Взаимосвязь деформаций сдвига и растяжения — сжатия

случае его удлинение определяется модулем *E.* Сказанное позволяет сделать вывод о том, что модули *G* и *E* не являются независимыми друг от друга. К этой же мысли можно прийти из рассмотрения рис. 13.27, *б,* где деформация *сдвига* элемента *ABCD,* идентичная деформации, показанной на рис. 13.27, *а,* получена путем *растяжения* и *сжатия* параллелепипеда главными напряжениями $\sigma_1 = -\tau_2$.

Удлинение диагонали *AC* вследствие деформации сдвига (рис. 13.27, *а)* равно

$$\Delta s = S\cos 45° = \frac{\gamma}{2}.$$

Tai: как

$$a = i\cos 45° = \frac{\Gamma_2}{2}$$

и

$$S'$$

то

$$\Delta s = \frac{x}{2G}. \qquad (а)$$

С другой стороны, применяя к волокну *AC* обобщенный закон Гука (13.42), можно написать

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta s}{s} = \frac{\sigma_1}{E} - \frac{\sigma_2}{E}.$$

Подгсавляя $\sigma_1 = \tau$ и $\sigma_2 = -\tau$, имеем

$$\varepsilon_1 = \frac{\tau}{E}(1+\nu) - \frac{\tau}{E}\nu = \frac{\tau}{E}. \qquad (б)$$

Приравнивая выражения (а) и (б), получим искомое соотношение

$$a = \frac{}{2<1+л)} \qquad (13.50)$$

Формула (13.50) показывает, что три постоянные *Е,* <? и *ц,* характеризующие упругие свойства изотропного материала, связаны между собой. Найдя из опыта две из них, можно третью подсчитать по формуле (13.50). Например, для стали при £=200 ГПа и коэффициенте Пуассона *(1*=0,25 по формуле (13.50) найдем

$$(/= \frac{2 \cdot Ю^6}{2\ (1 + 0{,}25)} = 80 \text{ ГПа},$$

что соответствует значениям С, получаемым из эксперимента (см. § 5.1).

§ 13.12. Изменение объема материала при деформации

Обозначим размеры сторон элементарного параллелепипеда до деформации через ***йх, &y*** и ***йг*** (рис. 13.28), После деформации эти размеры равны ёх+А&х:, ***АуЛ-ААу, Аг+ААг.***

Начальный объем параллелепипеда обозначим $У_0$,

а после деформации — *У*\.

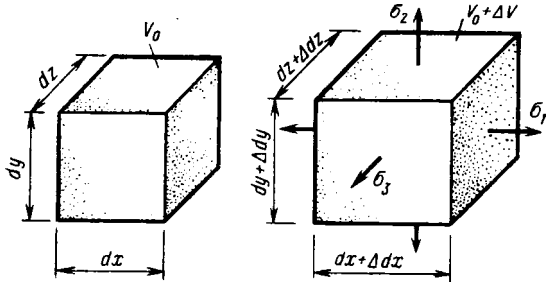
Найдем абсолютное изменение объема параллелепипеда:

$$АУ = У\ - У_0 = (Ах + ААх)\ (ф' + Лс!)')\ (Аг + ААг) - АхАуАг =$$

$$-АхАуАг\left(1 + \frac{Дс1х}{йх} \quad 1 + \frac{Д<1y}{Ау} \quad 1\text{-}1\frac{Д<1г\}{}\right) - АхАуАг. \text{ (а)}$$

В скобках выражения (а) содержатся относительные удлинения:

$$\frac{Д<1дг}{\textbf{\textit{йх}}} = е_{} \quad \frac{Д\,ду}{Ау} = £_{,,} \quad \frac{Д<1г}{с!г} = £*$$



Производя в выражении (а) перемножение величин, стоящих в скобках, получим

$$\Delta V = V_0 (e_x + E_y + \pounds_z + E_x E_y + E_x E_z + E_y E_z + E_x E_y \pounds_z).$$

В реальных строительных материалах относительные удлинения обычно измеряются тысячными, а то и десятитысячными долями. Поэтому их произведениями можно пренебречь. Можно показать, что деформации сдвига дают изменение объема, пропорциональное квадрату и более высоким степеням угла сдвига *у*. Поэтому при малых деформациях этими изменениями объема также пренебрегают. Следовательно,

$$\Delta V = V_0 (\text{б};\text{с} + \text{Бу} + \text{вг}). \qquad (13.51)$$

Относительное изменение объема (или *относительная объемная деформация)* может быть определено по формуле

$$\frac{\Delta V}{V_0} = E_x + E_y + E_z \qquad (13.52)$$

Эта формула справедлива как для упругих, так и для упругопластических деформаций.

Для упругой стадии работы материала можно выразить *9* через напряжения a_x, a_y и a_z. Для этого подставим значения e_x, E_y и e_2 из формулы (3.10) в формулу (13.52). После преобразований получим

$$\theta = \frac{1 - 2\mu}{E}(a_x + a_y + a_z). \qquad (13.53)$$

Рассмотрим случай всестороннего гидростатического сжатия материала, когда $a_x = a_y = a_z = a$. По формуле (13.53) имеем

$$\theta = -3\frac{(1 - 2\mu)}{E} p \qquad (б)$$

Из формулы (б) видно, что коэффициент Пуассона *ц* не может быть больше 0,5, так как в противном случае при всестороннем сжатии тело не уменьшается, а увеличивается в объеме.

Этот вывод подтверждается опытными данными. В природе не обнаружено материалов, у которых коэффициент Пуассона был бы больше 0,5.

Есть материалы (например, парафин), у которых коэффициент Пуассона приближается к 0,5. В этом случае при всестороннем сжатии не происходит изменения объема. Таким образом, парафин по своим упругим свойствам приближается к несжимаемой жидкости.

Для пластической стали, находящейся в состоянии текучести, коэффициент Пуассона также близок к 0,5, вследствие чего объем образца во время текучести не меняется.

§ 13.13. Потенциальная энергия при объемном напряженном состоянии

Найдем удельную потенциальную энергию *и,* т. е. энергию, накопленную вследствие упругих деформаций единицей объема материала при объемном напряженном состоянии. Для этогй рассмотрим кубик со стороной, равной 1, находящийся под действием главных напряжений $a_ъ$ o_2 и £$г_3$. При простом растяжении (см. § 3.9) имеем

$$и=\frac{1}{2}a\,г.$$

Обобщая эту формулу на случай одновременного действия трех напряжений, получим

$$u=-(a_{161}\text{-Ьо}\cdot{}_2\text{Ё}_2+\text{о'зез}). \qquad (13.54)$$

Подставим сюда выражения удлинений по закону Гука (3.10), который следует записать относительно главных напряжений и деформаций, т. е. заменить в (3.10) индексы *x, y, 2* соответственно на 1, 2, 3. В результате получим выражение *и* через главные напряжения в таком виде:

$$u=\frac{1}{E}\text{^-}[a\}+a\backslash+o\backslash\text{-}2\mu\,(<7,<\text{т}_2+\text{^Оз-ю^з})]. \qquad (13.55)$$

Если грани кубика не являются главными площадками и на них действуют нормальные и касательные напряжения, то вместо выражения (13.54) соответственно будем иметь

$$u=\frac{1}{}\text{-}\,(\text{о-,е}_x+<\text{г,б,}+(\text{Т}_2\text{б}_1+\text{т,}_{>}\text{у}_{\text{дз}},+\text{т}_{\text{дг}}\text{у}_{\text{X1}}+\text{т,}_1\text{у}_{>\text{г}}). \qquad (13.56)$$

Вопросы для самоконтроля к главе 13

13.1. Что такое напряженное состояние в точке?

13.2. Дайте понятие о главных напряжениях и трех основных видах напряженного состояния.

13.3. В чем состоит правило внешней нормали?

13.4. Как расположены площадки с напряжениями $\text{т}_{\text{шш}}$ и как они выражаются через главные напряжения?

13.5. Опишите порядок определения экстремальных напряжений в точке и их направлений в случае плоского напряженного состояния.

13.6. Что такое круг напряжений и как он строится?

13.7. Что такое траектории главных напряжений? Изобразите их при кручении стержней круглого сечения.

13.8. Что такое инварианты напряженного состояния? Как определяются экстремальные напряжения в точке в случае объемного напряженного состояния?

13.9. Что называется деформированным состоянием в точке?

13.10. Что такое главные деформации и в чем состоит аналогия между аналитическими зависимостями напряженного и деформированного состояний?

13.11. В чем состоит метод тензометрии? Что такое розетка датчиков и для «го она используется?

13.12. Какие рассуждения позволяют получить зависимость между модулями упругости при растяжении и сдвиге? Сколько независимых констант упругости имеет изотропный материал?

13.13. Как связаны относительные линейные и объемная деформация в точке?

13.14. Из каких соображений обосновывается верхний предел для коэффициента Пуассона? Чему он равен для стали в состоянии текучести?

13.15. Напишите выражения удельной потенциальной энергии деформации в обшем случае напряженного состояния в точке.

Задачи

13.1. Полоса склеена из двух частей по дуге окружности *ЛВ.* Определить наибольшее касательное напряжение на поверхности клеевого соединения Тщ», и соответствующий угол а.

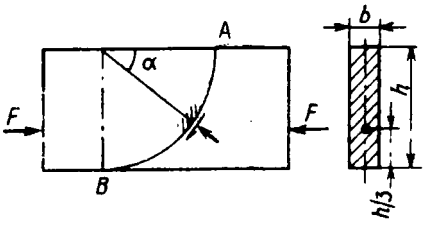


Рис. к задаче 13.1

Принимая напряжения, указанные на рисунке за исходные, найти в точке *М* стенки коробчатой балки главные напряжения и углы их наклона. Вычислить $\tau_{ш}$,.

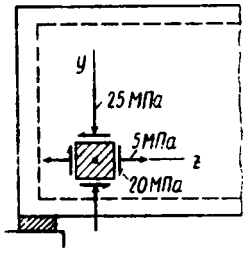


Рис. к задаче 13.2

133. В пластинке, изготовленной из хрупкого материала, от некоторой нагрузки возникают пропорциональные ей напряжения, указанные на рисунке. Считая, что появление трещины определяется наибольшим растягивающим напряжением, найти, во сколько раз должна возрасти нагрузка, чтобы в пластинке появилась трещина. Под каким углом к оси *г* она будет наклонена? Предел прочности на растяжение <т,=50 МПа.

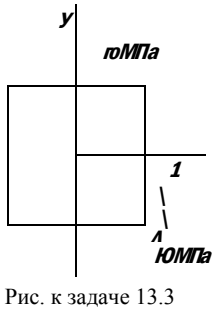


Рис. к задаче 13.3

13.4. В стенках тонкостенного цилиндра за счет кручения созданы касательные напряжения т. Найти наименьшее избыточное внутреннее давление *д,* при котором в стенках цилиндра будут отсутствовать сжимающие напряжения (см. пример 13.4).

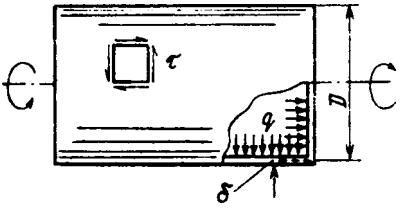


Рис. к задаче 13.4

13.5. Вычислить требуемые силы *Я* предварительного натяжения вертикальных стержней в железобетонной балке (см. рис. 13.14) из условия, чтобы наибольшие растягивающие напряжения в рассматриваемой точке стенки не превышали расчетного сопротивления бетона

13.6. Пластина 100 х 100 см в результате деформации получила приращение длин сторон Д5]*=0,3 мм, Д^2*=0,1 мм. Вычислить

ВуИуиу для осей *и,* v, совмещенных с диагоналями пластины.

при растяжении Л=2,5 МПа. Дано: $сг_2$ = 1,0 МПа, $т_{г>}$ = 3 МПа, шаг а=0,4 м, 5= 0,1 м.

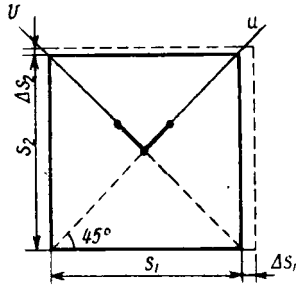


Рис. к задаче 13.6

13.7. Найти изменение длины винтовой линии на поверхности образца *AB,* если диаметр образца при сжатии получил приращение Д</. Коэффициент Пуассона /1. При каком угле а изменение длины А£=0?

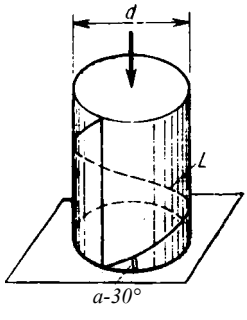


Рис. к задаче 13.7

13.8. При испытании трубопровода тензодатчики зафиксировали деформации e_x=*Ь* 10**, 6^,=7,82 • 10Вычислить избыточное внутреннее давление *д* и продольную силу *N* в поперечном сечении стенок трубы, если в процессе испытаний температура стенок повышалась- на Лг = 50°С. Материал — сталь, .0=800 мм, *i* = 12 мм, £=200 ГПа,/1=0,3, а = = 12' 10~6.

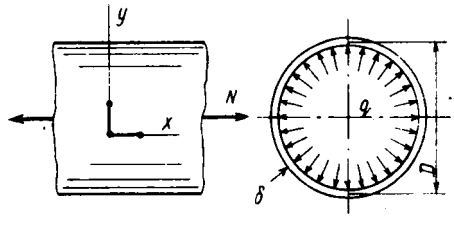


Рис. к задаче 13.8

Ответы к задачам к главе 13

13.1. ^*=0,774 [77(ЛЛ)]; = а«54°30\ 13.2. ег, = 15 МПа; ($г_2$ = -35 МПа; a_1 = -2б°30'; $т_{т,,}$=25 МПа. 133. В 2,07 раза; «=22в30'. 13.4. <7=2^2 (т5/Л). 13.5. 5=140 кН. 13.6. $е_ц$=^,= =0Д10-³; у,,=0,210-³ рад. 13.7. Д1=[(3^-1)/($2_ч$/з^)]А^; 13.8. ? = 1,2 МПа; /7=361 кН.

КРИТЕРИИ ПРОЧНОСТИ И ПЛАСТИЧНОСТИ

§ 14.1. Основные понятия

При оценке несущей способности конструкций и сооружений следует исходить из того, что в одних случаях наступление предельного состояния отождествляется с появлением пластических деформаций, в других — с разрушением конструкций. Если напряженное состояние в элементах сооружения является одноосным, то определение момента появления деформаций- текучести или разрушения осуществляется достаточно просто путем сопоставления напряжений с пределом текучести или пределом прочности. Ситуация существенно усложняется в случае плоского или объемного напряженного состояния.

На первый взгляд наиболее простой способ решения этой задачи состоит в испытании образцов материала при соответствующем нагружении с доведением их до предельного состояния. Однако такой путь приходигся отклонить, поскольку для каждой новой комбинации нормальных и касательных напряжений пришлось бы снова проводить аналогичные эксперименты. Уже не говоря о том, что число таких испытаний было бы слишком велико, трудность заключается в практическом осуществлении подобных опытов. Дело в том, что в настоящее время отсутствуют испытательные машины и измерительная техника, которые позволяли бы создать любое напряженное состояние в образце и получить достоверные результаты.

В связи с этим предпочтение отдается другому пути решения поставленной задачи, заключающемуся в установлении меры напряженного состояния, при достижении которой происходит переход от упругого состояния к предельному.

Такая мера устанавливается с помощью критериев пластичности (текучести) или прочности (разрушения). В качестве таких критериев были предложены различные факторы (максимальные нормальные напряжения, максимальные удлинения, энергия деформации и др.). Не следует удивляться тому, что используется несколько различных критериев, так как каждый из них лишь косвенно отражает сложный, до конца не изученный процесс наступления предельного состояния в материале и оказы-

вается применимым лишь в определенных условиях. Важно подчеркнуть, что «пластичность» и «прочность» — понятия разные, хотя они и могут быть взаимосвязанными. Появление пластических или остаточных деформаций, как правило, далеко не означает разрушение материала, в связи с чем критерии прочности и пластичности не следует отождествлять.

Допустим, что напряженное состояние в точке тела, отвечающее заданной нагрузке, известно. Путем ее увеличения напряжения **в** той же точке увеличиваются пропорционально и в конце концов либо наступает разрушение материала, либо появляются пластические деформации. Назовем коэффициентом запаса в этом случае отношение напряжений, при которых наступает предельное состояние в точке, к одноименным действующим напряжениям.

–

Раввоооасаые на- **аряжеяные состоя-** шш

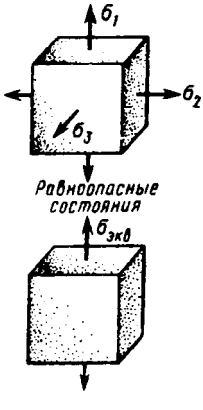
Будем называть два *напряженных состояния равноопасными,* если указанные коэффициенты запаса для них одинаковы.

Критерии текучести или прочности должны давать возможность сравнения степени опасности различных напряженных состояний материала. Указанное сравнение удобно производить, если одно из напряженных состояний, наиболее просто осуществимое в экспериментах, выбирается за основу. Такое напряженное состояние называют *эквивалентным.* Обычно в качестве эквивалентного состояния выбирается *одноосное растяжение.*

ц

Экввв&леитное на- пряжение

Значение напряжения $a_{зп}$, при котором образец материала в условиях одноосного напряженного состояния оказывается в равноопасном состоянии с рассматриваемым сложным напряженном состоянием в точке, называется *эквивалентным напряжением.*



Любое сложное напряженное состояние будем характеризовать главными напряжениями $a_и$ a_2, $a_ъ$. *С* использованием соответствующего критерия, как это показано ниже, может быть получено выражение $_{ег_{мв}}$ =/(ст,, a_2, <$т_3$), после чего условие наступления предельного состояния записывается, как при простом растяжении или сжатии:

^ш=/(^|) СГз) ” 0*0)

где o_0 — опасное напряжение, вызывающее предельное состояние в образце при одноосном напряженном состоянии, т. е. это либо предел текучести a_0 = либо временное сопротивление a_0=$a_ш$.

В соответствии с методом предельных состояний, заменяя *а,,* на соответствующее нормируемое значение расчетного сопротивления материала *Я,* условие прочности (пластичности) при сложном напряженном состоянии в общем случае формулируется в виде

$$=/ (a_и\ вг, <\text{ТэХ}\ Л \qquad (14.1)$$

Далее рассмотрены указанные зависимости при использовании различных критериев:

§ 14.2. Критерии наибольших нормальных напряжений и наибольших удлинений

В качестве первого критерия прочности, называемого ■ обычно *первой теорией прочности,* был принят критерий наибольших нормальных напряжений, в соответствии [1е]Рвая теория с которым причиной наступления предельного состояния прочности считались наибольшие нормальные напряжения. Полагая эквивалентное напряжение равным наибольшему главному напряжению, условие наступления предельного состояния записываем в виде

О'эжв ^*1 ^09

где a_0 — опасное напряжение, равное $<г_т$ или $a_ъ$.

Условие прочности по методу предельных состояний примет вид

0"эи = 0*1 ^ *Ру*

где *К* — расчетное сопротивление при одноосном растяжении.

В случае сжатия те же условия сохраняются, но под эквивалентным напряжением понимается абсолютное значение наименьшего (отрицательного) главного напряжения $<т_{эжв} = |<т_3|$, а под *Л* — расчетное сопротивление при одноосном сжатии.

Теория наибольших нормальных напряжений не получила экспериментального подтверждения. Например, при всестороннем равномерном сжатии материалы не обнаруживают никаких признаков разрушения даже при напряжениях, превышающих предел прочности при сжатии. Если же при оценке прочности воспользоваться теорией наибольших нормальных напряжений, то разрушение должно произойти при $\(m_3\| = a_в$.

В качестве другого критерия прочности был предложен критерий наибольших относительных удлинений, Вторая теория обычно называемый *второй теорией прочности.* В соот- прочности ветствии с ней при наступлении предельного состояния наибольшее удлинение достигает предельного значения, равного относительному удлинению при одноосном растяжении. Условие наступления предельного состояния в этом случае записывается следующим образом:

$$e, = -\frac{1}{E}[<т, - ц\,(a_2 + <т_3)] = e_a,$$

где £, — наибольшее относительное удлинение, соответствующее рассматриваемому напряженному состоянию; $£_0$ — предельное значение относительного удлинения, определяемое из опытов при одноосном растяжении, $в_0 = a_0/E$.

В случае плоского напряженного состояния (при $_0$"з = О) то же соотношение, выраженное с помощью <$т_{э}$,,, принимает вид

<$Т_{Э1В}$ *(Т* /¿0>2 = 0'$_о$.

Следует обратить внимание на то, что последние зависимости считаются справедливыми вплоть до наступления предельного состояния, что в случае разрушения отвечает хрупкому разрушению материала, происходящему без заметных пластических деформаций.

При расчете по предельным состояниям условие прочности записывается следующим образом:

Выражая главные напряжения через напряжения $a_{г}$, $a_{у}$, $x_{2у}$, получим

Вторая теория прочности также не нашла должного экспериментального подтверждения. Например, в опытах со сверхвысоким гидростатическим (всесторонним) давлением размеры испытуемых образцов заметно уменьшаются, т. е. в них появляются большие отрицательные деформации, которые, однако, вопреки теории наибольших относительных удлинений не вызывают разрушения материала.

Учитывая несоответствия между результатами экспериментов и теоретическими прогнозами, которые делаются на основе двух приведенных теорий прочности, в настоящее время как самостоятельные теории они не находят применения в инженерных расчетах.

§ 14.3. Критерии пластичности

Основываясь на опытах французского инженера Треска по истечению металлов через отверстия, Сен-Венан высказал предположение, чт'о в пластическом состоянии максимальное касательное напряжение имеет одно и то же постоянное значение для данного материала, т. е. может быть принято в качестве критерия пластичности, записываемого так:

Ч\— ᵛЪ °о

Отсюда условие пластичности, выраженное через эквивалентное напряжение при $сг_0 = сг_т$, будет

Критерий наибольших касательных напряжений иногда называют третьей теорией прочности. В действительности же этот критерий является критерием пластичности.

Третья теория прочности

В случае плоского напряженного состояния одно из главных напряжений равно нулю. Допустим, что ось *х* совпадает с главной осью, вдоль которой главное напряжение равно нулю. Допустим, что в осях *г, у* действуют только нормальное $a_г = a$ и касательное т напряжения

(нормальное напряжение a_y принимается равным нулю).

Тогда условие (14.2) примет вид

$$\text{СТ}_{31\text{В}} = \text{Х/О}\text{^}+4\text{Г}^5 = (\text{Тт}. \qquad (14.3)$$

Условие прочности при плоском напряженном состоянии по третьей теории

При расчете по методу предельных состояний можно записать

$$\text{Стэх.} = y/a^2 + 4x^2 \text{ ^ Л},$$

где Л — расчетное сопротивление материала при одноосном растяжении.

Эксперименты с различными пластичными материалами свидетельствуют о близости их результатов с результатом теоретического прогноза, полученным с помощью критерия наибольших касательных напряжений. Наложение всестороннего давления на любое напряженное состояние не меняет значения $т_т$„ и, следовательно, не влияет на появление пластических деформаций.

В качестве недостатка рассматриваемого критерия является неучет главного напряжения $a_г$, что не всегда находит опытное подтверждение.

Другим критерием пластичности является критерий удельной энергии изменения формы.

Первоначально было высказано предположение, что переход материала в пластическое состояние связан с достижением удельной потенциальной энергией некоторого предельного значения, определенного для каждого материала. Однако эксперименты показывают, что при всестороннем давлении пластические деформации не появляются даже при сверхвысоких давлениях, хотя при этом накапливается большая удельная потенциальная энергия.

Позже было высказано предположение, что *при возникновении пластических деформаций предельного значения достигает та часть удельной потенциальной энергии, которая обусловлена изменением формы.*

Энергетическая теория пластичности (прочности)

Удельная потенциальная энергия изменения формы при сложном напряженном состоянии равна

$$u\$ = u — \text{«V},$$

где ы=- *(а\£* + о2£2 + о-$_3$еэ) — полная удельная потенци-

альная энергия; ЫУ=| (ЗеГсрС„)— энергия, затрачиваемая на изменение объема. Последняя формула получается, если в выражении для *и* принять, что $a_1 = o\text{-}_2 = a_3 = (m_{cp}$ и $б_1 = E_2 = E_3 = e_{ч>}$, где «г„„ и вер — средние значения напряжений и деформаций, определяемые по формулам

$£_{C}p = (e_1 + e_2 + e_3)/3$, $¡m_{cp} = (cr, + (m_2 + a_3)/3.$

После подстановки сюда выражений для главных осевых деформаций $в_и$ e_2, e_3 через главные напряжения получим

$$6E\ [(<T1 — o\text{-}з)^2 \text{-Ь } (er_2 — cr_3)^2 \text{ Ч- } (er_3 — cr,)^2].$$

При одноосном растяжении имеем $a_x = a_0$, $<т_2 = ст_3 = 0$ и появлению пластических деформаций будет соответствовать равенство

$$ы* = \frac{1+Д}{ЪE} a,^2$$

Принимая эту величину за константу материала, приходим к соотношению

$$a'эг* = —т = \sqrt{(ст1 - °г)^2 + (°г - a_3)^2 + (<т_3 - a_1)^2} = «г_т. \quad (|_4 4)$$

То же условие, выраженное через неглавные напряжения, имеет вид

®зо

$$= \sim y/(a_x - a\ y)^2 + (ay - <т_г)^2 + (a, - a_x)^2 + 6\ (т\ \% + x\ \backslash_x + x\ *,) = a_m. \quad (a)$$

Для плоского напряженного состояния, когда $a_x = a_y = 0$, $<x_г = o$ и $x^ = т„ = 0$, $x_{1y} = x$, условие (а) принимает вид

$$o_{эа} = </o^2 + Ъx^2 = Ot \quad (14.5)$$

Критерий удельной потенциальной энергии изменения формы иногда называют *энергетической (четвертой) теорией прочности.*

I

. Условие прочности при плоском напряженном состоянии по четвертой теории

При расчете по методу предельных состояний прочность конструкции проверяем по следующей формуле:

$$0'эк. = л/a2 + Зт^2 < Л,$$

где *Я* — расчетное сопротивление материала при одноосном растяжении.

Сформулированный критерий пластичности дает хорошие результаты для пластичных материалов, одинаково работающих при растяжении и сжатии.

Интересно отметить, что Мизес, предложивший критерий (14.4), считал его приближенным, а критерий наибольших касательных напряжений — точным. Для сопоставления результатов, следующих из указанных критериев, рассмотрим состояние чистого сдвига.

Из равенства (14.3) имеем

$\tau = 0{,}5\,\sigma_т$,

а из равенства (14.5) —

$\tau = \frac{\sigma_т}{\sqrt{3}} = \sigma_т \cdot 0{,}577$ a_m.

Эксперименты свидетельствуют о том, что пластические деформации при сдвиге появляются при напряжениях, равных (0,56...0,6) a_m. **Таким образом, условие (14.4) оказывается даже более точным по сравнению с условием (14.2) или (14.3). Учитывая близость результатов, вытекающих из приведенных критериев, они занимают в практике расчетов равноправное положение и выбор в каждом конкретном случае одного из них обусловлен главным образом удобством решения задачи.**

Пример 14.1. Используя выражение эквивалентного напряжения, определяемого четвертой теорией прочности (пластичности), найти $<\sigma_{эи}$ в точке примыкания полки к стенке в среднем сечении подкрановой балки двутаврового поперечного сечения (рис. 14.1, *а).* Сравнить полученное значение $<\sigma_{зи)}$ с расчетным сопротивлением материала балки *R*=240 МПа. При вычислении нормального и касательного напряжений для упрощения можно считать толщину полки и стенки двутавра постоянными и равными соответственно 1,02 и 0,65 см (/* = 7080 см).

Решение. Эпюры внутренних усилий представлены на рис. 14.1, *б, в.*

Нормальное напряжение определяется равенством

$$\sigma = \frac{M}{W_x} = \frac{15 \cdot 10^4}{4/д;\ \backslash 2 / 4\ 7080} \cdot 250 \cdot (15 - 1{,}02) = 18\,511{,}7\ \text{Н/см}^2 = 185{,}1\ \text{МПа}.$$

Статический момент отсеченной части поперечного сечения, отвечающий точке *К,* будет

$$S^{™} = bt \cdot \frac{h}{2} = 13{,}5 \cdot 1{,}02\ (15 - 0{,}51) = 199{,}5\ \text{см}^3.$$

Касательное напряжение в стенке балки равно (на уровне точки *К)*

$$\tau = \frac{Q\,S^{отс}}{dI_x} = \frac{15 \cdot 10^{“}\ 199{,}5}{2\ 0{,}65\ 7080} = 3251{,}3\ \text{Н/см}^2 = 32{,}5\ \text{МПа}.$$

Тогда

$$\sigma_{«В} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = 193{,}5\ \text{МПа} < 240\ \text{МПа}.$$

£

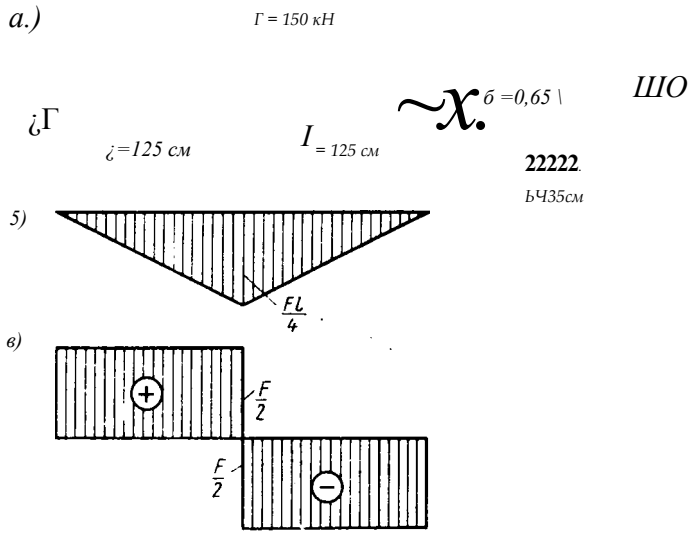


Рис. 14.1. Расчетная схема подкрановой балки и эпюры изгибающих моментов и поперечных сил

Таким образом, в месте соприкасания стенки и полки двутавра состояние стали достаточно далеко от пластического.

Пример 14.2. Рассмотрим стальную балку коробчатого поперечного сечения, напряженное состояние которой исследовалось в § 11.4 (рис. 14.2). В точке *К* отмеченного (опорного) сечения найти эквивалентное напряжение по третьей и четвертой теориям прочности и сопоставить их с расчетным сопротивлением стали *Я*=240 МПа.

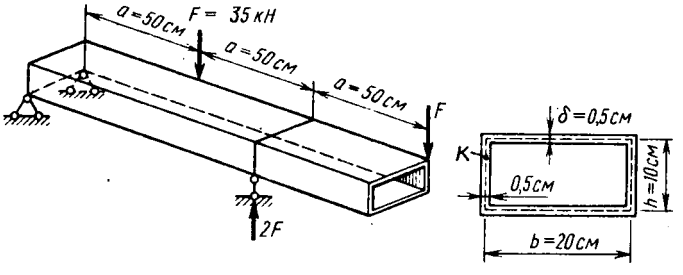


Рис. 14.2. Балка коробчатого поперечного сечения

Решение. На рис. 14.3 приведены эпюры внутренних усилий в балке, возникающие от заданной нагрузки.

Нормальное напряжение *а* в точке *К* равно

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y$$

причем

$$I_x = \frac{A^3}{6} - 5\left(\frac{A}{2}\right)^2 b_3 + 10^3\,0{,}5 + 10^2\,20\,0{,}5 = 583{,}3\ \text{см}^4.$$

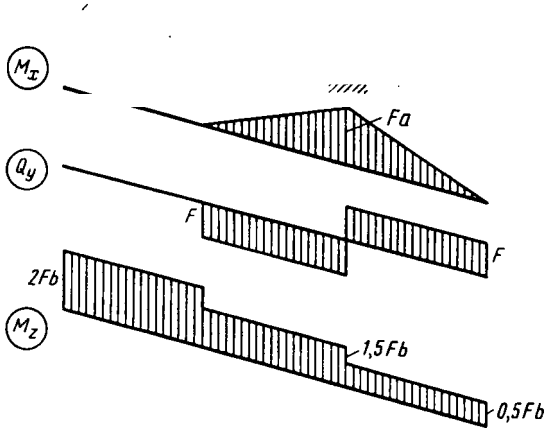


Рис. 14.3. Расчетная схема балки и эпюры внутренних усилий

Тогда

$$\frac{35 \cdot 10^3 \cdot 50}{583{,}3} 5 = 15\,000 \text{ Н/см}^2 = 150 \text{ МПа}.$$

Касательное напряжение, обусловленное изгибом балки, определяется выражением

$$\frac{(2{,}5\text{“ ЮА}}{1_X\ 25\ 4/_x}$$

Отсюда следует

$$\frac{35\,000'20'10}{4\,583{,}3} = 3000{,}2 \text{ Н/см}^2 = 30 \text{ МПа}.$$

Для касательного напряжения, вызванного кручением замкнутого профиля, имеем соотношение

$$M_c\ 1{,}5\ БЬ\ 1{,}5/-$$

$$Tm?{\sim}ад{\sim}2кЬ5{\sim}\ 2И5$$

Подставляя числовые значения, получим

$$1_{Ч}{>}' \frac{1{,}5\ \ 35\,000}{2\ 10\ 0{,}5} = 5250 \text{ Н/см}^2 = 52{,}5 \text{ МПа},$$

а суммарное касательное напряжение будет

$$т = т_я + т_1р = 30 + 52{,}5 = 82{,}5 \text{ МПа}.$$

Из третьей теории прочности следует

$$*э_И = {}^{\wedge 2}+4*^2 = 715^{\circ 2}+^4\text{-}82{,}5^2 = 223 \text{ МПа} < 240 \text{ МПа}.$$

В соответствии с четвертой теорией прочности получим

$$^а эхь — \backslash I^{а2} + Зт^2 = >/150^2 + 3\ '\ 82{,}5^2 = 207{,}2 \text{ МПа} < 240 \text{ МПа}.$$

Как видно, и в первом, и во втором случаях в наиболее напряженной точке поперечного сечения, так же как и всей балки, пластическое состояние материала не наступило.

§ 14.4. Теория прочности Мора

Ряд материалов обладает разной прочностью при растяжении и сжатии, причем прочность при сжатии выше, чем при растяжении. Последнее касается хрупких материалов, таких, как, например, бетон, кирпич и т. п.

Теорию прочности Мора, используемую для оценки прочности подобных материалов, удобно интерпретировать с помощью кругов напряжений.

Напряженное состояние в точке графически может быть представлено на плоскости системой кругов Мора (рис. 14.4). Если оно соответствует началу разрушения материала (предельному состоянию), то большой круг, построенный по предельным значениям главных напряжений ($г_ь < т_3$, можно назвать *предельным кругом.*

Допустим, что проведено большое число испытаний при различных напряженных состояниях, для каждого из которых установлено предельное состояние. В результате на плоскости *о,* т может быть построено семейство предельных кругов Мора (рис. 14.5).

Огибающая этих кругов определяет сочетания нормальных и касательных напряжений для каждого вида напряженного состояния, при которых наступает предельное состояние. В дальнейшем будем предполагать, что эта огибающая является единственной для рассматриваемого материала.

Если напряженное состояние в точке тела таково, что большой круг Мора для него касается огибающей, то это означает либо разрушение материала, либо переход материала в пластическое состояние.

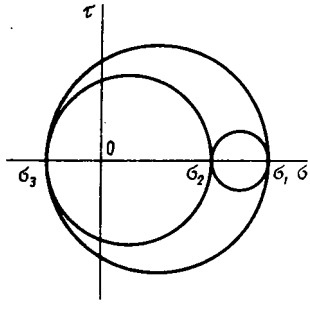


Рис. 14.4. Круги Мора для объемного напряженного состояния в точке

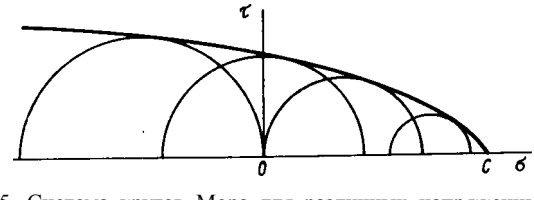


Рис. 14.5. Система кругов Мора для различных напряженных состояний в точке и огибающая этих кругов

Для точного построения огибающей нужно было бы выполнить большое число экспериментов при различных напряженных состояниях, что по разным причинам трудно реализовать практически. Поэтому обычно на основании минимума результатов испытаний для наиболее простых видов напряженного состояния строится схематизированная огибающая.

Для построения огибающей важно также было бы знать положение точки С (рис. 14.5), которая соответствует разрушению материала при всестороннем растяжении. Однако в настоящее время пока не удается провести эксперимент, в котором одновременно создавались бы три растягивающих главных напряжения, в связи с чем не представляется возможным построение предельного круга Мора, который располагался бы правее круга, соответствующего одноосному растяжению.

В связи с изложенным для построения схематизированной огибающей проводятся эксперименты с образцами при одноосном растяжении и сжатии. Огибающая заменяется касательной к кругам Мора, отвечающим результатам этих испытаний (рис. 14.6).

Далее найдем зависимость между главными напряжениями рассматриваемого напряженного состояния (на рис. 14.7 показан пунктиром) и равноопасного ему одноосного растяжения.

В точках касания огибающей с тремя кругами Мора (рис. 14.7) восставим перпендикуляры, которые совпадают с радиусами кругов, и через точку A проведем горизонтальную прямую. Из подобия треугольников ABB_X и $AC\ Ci$ следует

$$\frac{cc,}{ACi} = \frac{вв_{\ell}}{A\beta t}. \qquad (14.6)$$

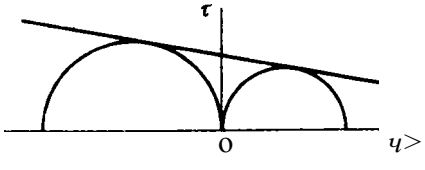


Рис. 14.6. Схематизированная огибающая кругов Мора

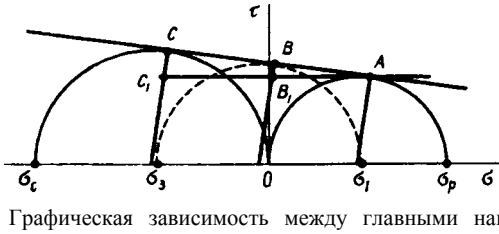


Рис. 14.7. Графическая зависимость между главными напряжениями заданного напряженного состояния и равноопасного ему одноосного растяжения

СС, (<$т_с$-о-$_р$), ЯЯ, =Л [(<т, - <$г_3$)-ст$_р$];

$AC_X = (a_c + a_p)$, ЛВ, = ^{1}- [a_p-(а, + <$т_3$)],

где <7$_р$, <$т_с$ — пределы прочности материала при одноосном растяжении и сжатии.

После подстановки этих выражений в равенство (14.6) получим

*с-<Гр (<Г1-<Гз)-*р

<*с + <Гр <Тр-(Т1+<Гэ)'

или

---- £ °'з =0р- (а)

Примем

тогда, обозначив левую часть равенства *(а)* через <$т_{эжв}$, получим

$$a_{эш} = a_1 - ka_3 = a_p. \quad (14.7)$$

В случае плоского напряженного состояния (рис. 14.8) формула (14.7) принимает вид

$$= \frac{1}{2}a - \frac{1+К}{2}\sqrt{a^2+4т^2} = (т_р.$$

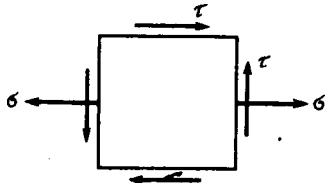
При расчете по методу предельных состояний для оценки прочности используется условие

Условие прочности по теории Мора

$$a_{3,,} = \frac{1-к}{2}2 \leq 7 + \sqrt{} y/<Г^2 + 4m^2 \wedge Л, \quad (14.8)$$

где Л — расчетное сопротивление материала при одноосном растяжении.

Если материал пластичный и обладает одинаковыми



пределами текучести при растяжении и сжатии, то, понимая под $сг_р$ и $<m_c$ предел текучести материала при одноосном растяжении и сжатии, получим $к=1$ и соотношение (14.8) в этом случае совпадает с аналогичным соотношением третьей теории прочности.

Для хрупких материалов величина $к$ часто бывает очень малой (например, для бетона), тогда условие (14.8) имеет вид

$$£Г_э к_{в_2} = \text{--})— y/<т^2 + 4т^2{\wedge}Л,$$

что совпадает с критерием прочности по наибольшим нормальным напряжениям.

Теория Мора дает результаты, хорошо согласующиеся с экспериментальными данными в тех случаях, когда круги напряженного состояния в точке тела располагаются между кругами, соответствующими одноосному растяжению и сжатию, т. е. при $a^{\wedge}>0$, «$т_3<0$.

Отличительной чертой теории Мора от рассмотренных ранее является то, что она полностью базируется на экспериментальных данных и по мере их накопления может уточняться.

В частности, при построении огибающей наряду с двумя упомянутыми ранее кругами можно было бы использовать также круг, отвечающий чистому сдвигу. Однако это уточнение не вносит каких-либо принципиальных изменений, тем более что использование прямолинейной огибающей идет в некоторый запас при оценке прочности материала.

Вместе с тем теория Мора не лишена недостатков. Один из них уже отмечался в связи с трудностями построения огибающей кругов Мора. Другим недостатком является неучет (как и в критерии наибольших касательных напряжений) промежуточного главного напряжения a_2.

§ 14.5. О новых теориях прочности

Критерии прочности и пластичности, рассмотренные в предыдущих параграфах, справедливы для традиционных конструкционных материалов — однородных и изотропных. Однако в последнее время в различных областях техники, в том числе и в строительстве, все большее распространение получают новые, так называемые ***композиционные материалы (композиты).*** Композит представляет собой полимерную или металлическую матрицу, армированную высокопрочными волокнами (стеклянными, угольными и т. п.). Отличительными признаками этих материалов являются их неоднородность и, как правило, ярко выраженная анизотропия свойств. Последнее обстоятельство находит отражение в том числе и в прочностных свойствах композитов.

Армирование композита может быть однонаправлен-

ным (рис. 14.9, *а),* ортогональным (рис. 14.9, *б),* симметричным в нескольких направлениях (рис. 14.9, *в).*

При однонаправленном армировании прочность материала в направлении армирования высокая, а в ортогональном направлении значительно меньше, потому что определяется в основном прочностью матрицы.

Если подвергнуть однонаправленный композит испытанию на растяжение или на сдвиг, то разрушение может произойти частично за счет разрыва волокон, а частично за счет скалывания матрицы. Аналогичные соображения оказываются справедливыми и в общем случае армирования композиционных материалов волокнами.

Условие прочности композита можно записать в следующем виде:

$$/(<;,, a_{г}, <\tau_3) = 0.$$

В настоящее время известно большое число различных критериев прочности, предложенных для новых конструкционных материалов. В частности, один из критериев прочности для ортотропных материалов представляет собой обобщение критерия текучести по удельной энергии формоизменения и в случае плоского напряженного состояния записывается следующим образом:

$$\left(\frac{\sigma_z}{\sigma_{вz}}\right)^2 + \left(\frac{\tau}{\tau_в}\right)^2 = 1, \qquad (14.9)$$

где $сг_{вг}$, г, — пределы прочности материала при растяжении — сжатии в направлении оси г (оси упругой симметрии, рис. 14.9, *а, б)* и при сдвиге; $a_{г}$, т — нормальное напряжение в направлении оси *г* и касательное напряжение.

Если материал имеет разные пределы прочности при растяжении и сжатии, то могут быть использованы условия прочности вида

$$a,(T_1 + Б_1(Г: + C_1T^2 = 1,$$

или

$$a\sigma_z + \sqrt{b\sigma_z^2 + c\tau^2} = 1.$$

Константы, фигурирующие в этих соотношениях, определяются из опытов на растяжение, сжатие и сдвиг.

Следует обратить внимание на то, что результаты испытаний композитов обладают очень большим случайным разбросом и потому указанные константы должны находиться лишь на основе статистического анализа. Последнее обстоятельство тем более затрудняет выбор наилучшего критерия прочности композиционного материала.

Среди композитов, применяемых в строительстве, наибольшее распространение имеют всевозможные полимерные материалы, на прочность которых оказывают большое влияние многие факторы, среди которых в первую очередь нужно назвать температуру и время. Например, увеличение температуры всего на 20...30°С приводит к заметному снижению прочности указанных материалов. Еще более существенным при оценке прочности их является учет временного фактора. Обсуждению этого вопроса посвящена гл. 16.

§ 14.6. О механике хрупкого разрушения тел ири ы алы ним трещин

Обследования эксплуатируемых металлических конструкций (мостов, газгольдеров, корпусов кораблей и т. д.) показывают, что в их материале всегда присутствуют дефекты типа пустот или трещин. Эти трещины могут измеряться как микрометрами (в этом случае они выявляются методами металлографии), так и иметь макроразмеры, измеряемые сантиметрами и даже десятками сантиметров в зависимости от масштаба конструкции (рис. 14.10). Возникает вопрос о том, насколько они опасны в отношении ее разрушения. Инженерная практика имеет примеры многих аварий, происшедших, на первый взгляд, по нецонягным причинам, поскольку разрушение хрупкого типа происходило при достаточно низком уровне напряжений. Так, из 2500 кораблей типа «Либерти», построенных во время второй мировой войны, 145 разломились пополам и почти 700 получили серьезные повреждения в условиях, далеко не экстремальных по уровню нагружения. Во многих странах, особенно в США,

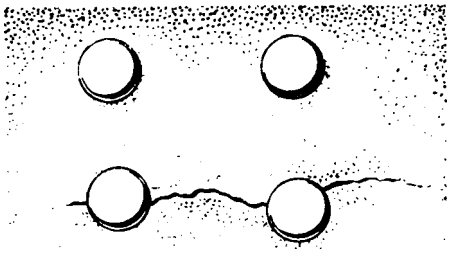


Рис. 14.10. Пример трещины, обнаруженной при обследовании проезжей части клепаного пролетного строения моста

были проведены многочисленные исследования, позволившие установить, что ответственными за внезапные хрупкие разрушения являются дефекты типа трещин. В то же время обследования показывают,. что трещины могут длительное время существовать в конструкции, оставаясь стабильными и не проявляя тенденции к росту. В последние 25...30 лет сформировалось новое направление в вопросах прочности, получившее наименование *механика разрушения.* В нем изучаются вопросы роста и устойчивости трещин в элементах конструкций в зависимости от уровня нагружения и других условий в процессе эксплуатации.

Опишем простой эксперимент, позволяющий наглядно продемонстрировать на установке, изображенной на рис. 14.11, существование некоего *критического* для данного уровня напряжений размера трещины $/=/_{1p}$. Рулонная бумага предварительно натягивается рукоятками, и положение роликов фиксируется стопорными штифтами. Затем, постепенно отодвигая груз на рычаге, в бумаге создают, насколько это возможно, сильное натяжение (до состояния, когда бумага при постукивании по ней «звучит как барабан»). В этом положении рычаг фиксируется с помощью упорного винта. В таком состоянии бумага имитирует растянутый напряжениями *а* элемент конструкции с *фиксированными опорными закреплениями.*

Теперь треугольным лезвием начинаем прорезать бумагу, постепенно увеличивая длину «трещины» *21.* При этом напряжения *а* в бумаге вдали от прореза не изменяются, так как закрепления фиксированы.

При определенном размере прорези *1=1^* происходит

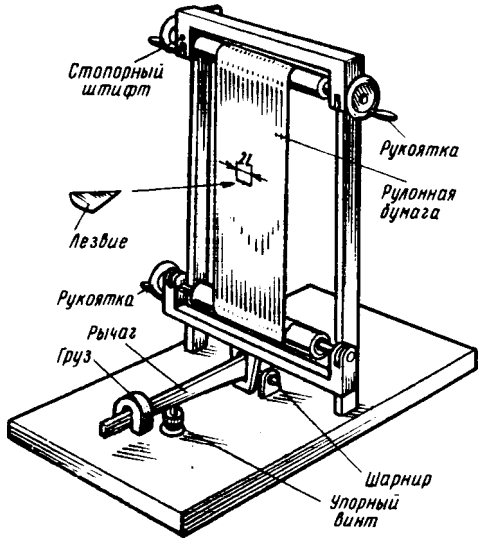
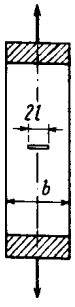


Рис. 14.11. Установка для демонстрации существования критического размера трещины / при растяжении

взрывоподобный разрыв бумаги по всему сечению. Подобное наблюдается и в конструкции с трещиной.

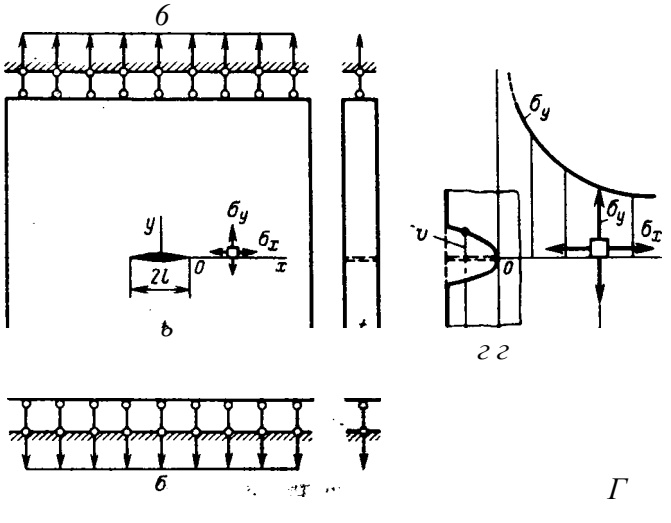
> То же можно показать, растягивая полоску бумаги с прорезью руками[1] (на концах она должна быть усилена приклеенными картонными накладками). При определенном усилии полоска разрывается. Можно подумать, что влияние прорези сводится лишь к ослаблению сечения до площади $A_{ЖП0} = (Ь—21)Ь$. Чтобы показать, что это не так, повторим опыт с другой полоской, имеющей плавное уменьшение сечения до ширины *(Ь—21).* Такую полоску разорвать не удается.



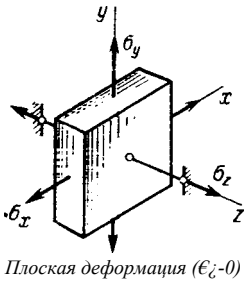
Объяснение состоит в том, что прорезь, как и трещина в конструкции, вносит сильное возмущение в поле напряжений у ее концов, которое при определенной критической длине трещины *1=1^* и напряжении становится неустойчивым. Начинается прогрессирующий рост трещины, что и приводит к хрупкому по внешним признакам разрушению. Рассмотрим эти вопросы подробнее.

Напряжения у острия трещины. На рис. 14.12 показана полоса, растянутая напряжениями *а,* имеющая на концах фиксированные (неподвижные) закрепления. Она имеет малую бесконечно тонкую щель (трещину) длиной *21.* Если считать, что ширина полосы бесконечна *(Ь»21),* то для этого случая в теории упругости для идеально линейно-упругого материала полосы выводятся следующие формулы для напряжений a_y и a_x в точках, лежащих на продолжении трещины, а также для перемещений v берегов трещины:

$$<T_y = <T_x = —7=; \; Ч \stackrel{(1+*)(1+А»)*1}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}}, \qquad (14.10)$$



где г — радиус точки, отсчитанный от острия трещины; ж=(3 — *ц)[{\ +/**) для случая очень тонкой пластины; когда * мало, у конца трещины возникает *плоское напряженное состояние* (<$т_г$=0) (рис. 14.13, *а).* Другой противоположный случай имеем, если толщина пластины *I* велика (*/»2I).* Тогда в центральной части фронта трещины (за исключением зон материала у боковых поверхностей) возникает так называемое *плоское деформированное состояние,* характерное тем, что $е_г$=0 и, как следствие, появляются помимо напряжений a_x и o_y напряжения <$т_г$— =*ц* (<x_1+о>)=2до> (рис. 14.13, *б).* В случае плоской деформации *ае=3—4р.* Формулы (14.10) составляют так называемую сингулярную часть решения (при г-+0, <$г_у$-**сс)* и справедливы только в очень малой окрестности у острия трещины.



Плоская деформация (Є¿-0)

Коэффициент интенсивности напряжения **в** бесконечной пластине

Коэффициент *К}* имеет в рассматриваемом случае значение

$$\wedge = 0\wedge 1 \qquad (14.11)$$

и называется *коэффициентом интенсивности напряжений;* его размерность — Н/м$^{3/2}$. Индекс I связан с тем, что все описанное относится к трещине *отрыва.* В двух других случаях: II — *плоский сдвиг,* III — *антиплоский сдвиг* (рис. 14.14) — будем иметь похожую картину распределения касательных напряжений, а соответствующие коэффициенты интенсивности обозначаются соответственно *Кц* и *Кщ-*

Из формулы для o_y (14.10) видим, что при г-»0 a_y-**сс* следовательно, эта формула может дать сколь угодно большие напряжения у острия. С позиций любой гипотезы прочности это означает опасное состояние трещины. В действительности дело обстоит не так.

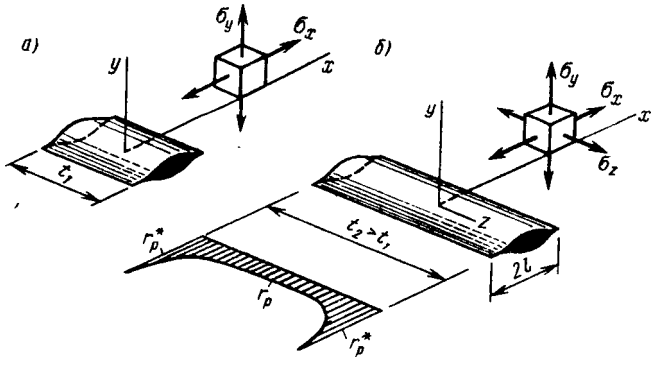


Рис. 14.13. Напряжения у острия трещины в тонкой (а) и толстой (б) пластине

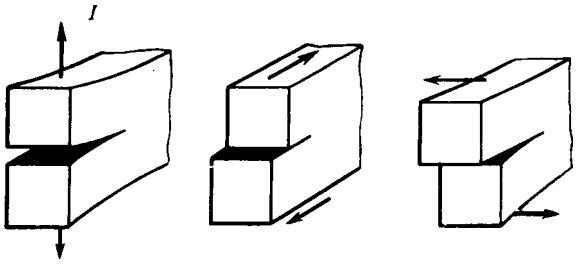


Рис. 14.14. Три типа трещин: *I* — отрыв; *II*— плоский сдвиг; *III* — антиплоскнй сдвиг

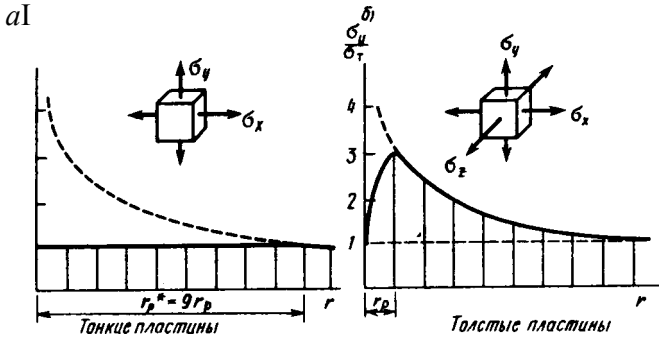


Рис. 14.15. Сравнительная величина радиуса зоны пластических деформаций При плоском напряженном состоянии *(а)* и при плоской деформации *(б)*

Реальное очертание эпюры напряжений благодаря пластическим свойствам материала будет иным, чем показано на рис. 14.12. У острия на линии продолжения трещины возникает зона пластических деформаций на участке (рис. 14.15, *а, б).* На этом рисунке показана длина зоны пластичности, приближенно вычисленная для случаев плоской деформации (толстые пластины) и плоского напряженного состояния (тонкие пластины) по третьей гипотезе пластичности, согласно которой условие текучести имеет вид a_x — <$г_3$ = $ст_т$. В первом случае полагаем *0\ — a_y=K\\-^2n $г_р$, a_3 = 2pa_y;* во втором — <m_1 = — a_y—$K_1$1y/2n$г'_р$, $с_3$ = 0. Тогда из условия o_1 — o_3 = <$г_m$ найдем

$$г_в = \frac{(1-2ц)*K\ .\ K\ }{2n} \qquad г_{„} = \frac{\ }{2no*} \qquad (14.12)$$

Например, для ¿1= 1/3 $г'_р$1$г_р$ = 9, т. е.

при плоской деформации протяженность пластической зоны перед острием трещины значительно меньше, чем при плоском напряженном состоянии.

Толстые н тонкие пластины отличаются размером зоны пластичности у острия трещины

Для достаточно толстой пластины вдоль ее толщины / радиус пластичности будет меняться от значения r_p (14.12) в центре до значения г* в местах выхода трещины на боковую поверхность, где $<m_2=0$ и независимо от толщины существует плоское напряженное состояние (см. рис. 14.13, *б).* Исследованиями установлено, что практически по всей длине трещины можно считать деформацию плоской, если выполняются следующие условия:

/>2,5% />2,5% (14.13)
^{a}m

Как видим, напряженное состояние в зоне у острия трещины не имеет бесконечных значений напряжений. Оно существенно зависит от коэффициента интенсивности напряжений $K_ь$ который, согласно (14.11), зависит от уровня нагруженности элемента *а* и размера трещины /. Оказывается, именно этот коэффициент K_x в определенных случаях определяет устойчивость трещины.

Критический коэффициент интенсивности напряжений. В 1920 г. была опубликована работа А. А. Гриффитса «Явление разрушения и течения в твердых телах», в которой был предложен энергетический подход к решению задачи об устойчивости трещины. Она стала основополагающей в механике разрушения, хотя практическое применение и развитие основных положений этой статьи началось лишь в 30-х годах нашего века, в частности в работах И. Орована, Г. Ирвина и др. Рассмотрим основные положения подхода Гриффитса.

На рис. 14.16 показано острие трещины, которая из положения *1* продвинулась в положение *2.* Для ее продвижения необходимо разрушить внутренние связи, изображенные условно в виде стерженьков, на что должна быть затрачена работа с*А.* В пластине с фиксированными закреплениями эта работа может быть затрачена лишь силами упругости. Как следствие, потенциальная энергия

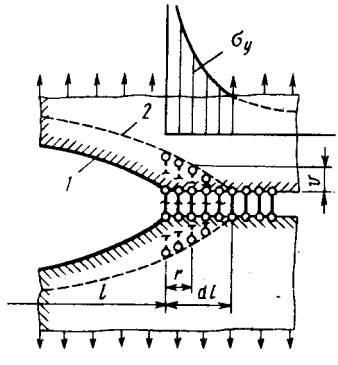


Рис. 14.16. Подрастание трещины приводит к снятию напряжений a_y на участке *¿1 **

деформации пластины уменьшится на <Ш и энергетическое условие продвижения трещины по Гриффитсу запишется в виде равенства

$$дЛ = й(/. \qquad (14.14)$$

Для пластины толщиною /=1 Гриффитс представил работу *АА* в виде

$$6A = 2уй1' 1, \qquad (14.15)$$

где *у* — так называемая *плотность энергии образования свободной поверхности тела.* Для идеально хрупкого и линейно-упругого материала, рассматривавшегося Гриффитсом, *у* — это константа материала, характеризующая удельную работу разрушения межатомных связей при отрыве; величина *261'* 1 — площадь добавочной свободной поверхности у двух берегов подросшей трещины.

Снятие напряжений a_y на участке *61* переводит трещину из состояния *1* в состояние *2*. Поэтому выделение энергии деформации сШ можно подсчитать как работу «упругих» напряжений a_y на перемещениях V берегов трещины, что для плоской деформации дает

$$сШ = 2 \int_0^a уо_y й\, г = <1/, \qquad (14.16)$$

где вычисление интеграла выполнено с использованием формул (14.10) для o_y и v.

Условие (14.14) получает вид

$$2уА1 - (1-//*)\, А? \quad *$$

откуда можем найти *критическое значение* коэффициента интенсивности напряжений:

$$K\backslash c — \frac{I\, 2yE}{1-Л^2} \qquad (14.17)$$

Значение $K\backslash_C$, при котором возможно малое продвижение трещины, поскольку высвобождаемая энергия деформации у конца трещины равна требуемой работе разрушения, называется критическим коэффициентом интенсивности напряжений.

Щ

Кретический коэффшщеат интенсивность няпряже-

В работах Орована и Ирвина было показано, что модель Гриффитса распространения трещины справедлива и при наличии малой зоны пластических деформаций. Это имеет место для толстых пластин при плоской деформации. Тогда константа *у* должна включать работу на создание пластических деформаций у = + + Уш» причем работа, затрачиваемая на хрупкое разрушение межатомных связей, значительно меньше работы



ГТТТТТТТГТТ
пластические деформации

пластической, деформации: Ужр»10 Упл- В этом случае продвижение трещины называют квазихрупким разрушением (слово «квази» означает «как бы»).

Коэффициент *Кю* выражает способность материала к сопротивлению росту трещин и иногда называется *вязкостью разрушения.* Чем больше $АГ_{1С}$, тем выше трещиностойкость материала. Величины $К\backslash_{С}$ определяются экспериментально в соответствии с ГОСТами (см. ГОСТ 25.506—85), о чем будет сказано подробнее ниже.

Условие устойчивости трещины теперь можем записать в виде неравенства

$$\mathbf{I\ c.} \qquad (14.18)$$

где *К* — коэффициент интенсивности напряжений у острия данной трещины в рассматриваемом элементе конструкции. Для случая поперечной трещины в бесконечно широкой растянутой полосе (см. рис. 14.12) *К\ — а^рк1.* Тогда

О ^ К\с,

откуда найдем связь между критическим напряжением о'жр и критическим размером трещины (рис. 14.17):

;

Формула Гриффитса

$$A5c \qquad (14.19)$$

Кривая о'жр =/ (/жр) называется *кривой критического разрушения.* Если при данной длине трещины /=/$_0$ и на-

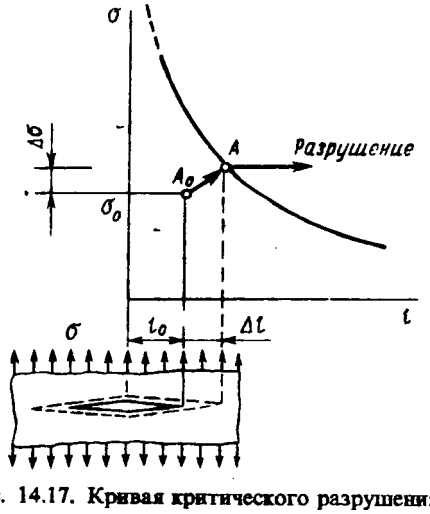


Рис. 14.17. Кривая критического разрушения

□ряжении $a=a_0$ соответствующая точка A_0 (l_0, o_0) лежит ниже упомянутой кривой, то рост трещины энергетически невозможен. Как только трещина подросла до /$_0$+А/ (например, за счет коррозии или за счет циклического во времени нагружения конструкции), а напряжения возросли до (T_0+Aff и точка A_0 перешла в положение A, так трещина становится неустойчивой. Малейшее ее продвижение приводит к выделению энергии деформации d U большей, чем требуется на работу разрушения, вследствие чего быстро формируется *динамический* процесс распространения трещины. Например, в стали скорость этого процесса равна скорости распространения волн деформаций (скорость звука) c=5600 м/с, что создает эффект мгновенного распространения трещины и хрупкого разрушения конструкции. Выделение энергии деформации в короткий промежуток времени создает впечатление взрывоподобного разрушения.

Экспериментальное определение K_{1C} осуществляется на стандартизованных образцах, два из которых показаны на рис. 14.18: один — при испытаниях на изгиб, другой — при внецентренном растяжении. Соотношения размеров, указанные на рисунке, диктуются стремлением обеспечить у острия трещины преимущественно плоское деформированное состояние. В образце предварительно у острия проточки путем циклического нагружения подращивается трещина на 1,25...1,5 мм, так называемая *усталостная трещина* (см. гл. 19). После этого начинают эксперимент по определению коэффициента K_{iC}.

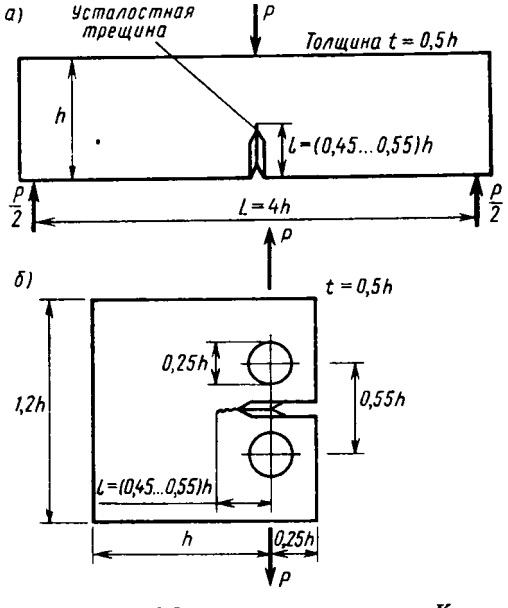


Рис. 14.18. Образцы для определения K_{1C}

Измерению подлежат сила P и смещение берегов трещины у края образца v. Смещение измеряется с помощью специального прибора с листовыми пружинами, концы которых следуют за движением берегов трещины, и тензодатчиков, наклеенных на пружины (рис. 14.19). На графопостроителе получается диаграмма «сила P — смещение v». Кроме того, с помощью микроскопа производится измерение длины трещины /.

На рис. 14.20 показан характерный вид диаграмм «нагрузка P — смещение v». Первый случай (рис. 14.20, *а)* — идеальное хрупкое разрушение при нагрузке $P=P_0$. Второй случай (рис. 14.20, *б)* — хрупкий рост трещины при P=Pe, начавшийся в средней части фронта трещины и сдерживаемый затем пластическими зонами у боковых поверхностей. В третьем случае (рис. 14.20, в) наблюдается непрерывный нелинейный рост смещения за счет двух факторов: хрупкого подрастания трещины и развития пластических деформаций.

Для определения P_0 в этом последнем случае выработана следующая методика. Проводится секущая *ОВ* под углом a, для которого tga=0,95tgao, где a_0 — угол начального линейного участка диаграммы. Точка пересечения диаграммы и секущей дает значение P_e. Установлено, что если при $P=P_0$ смещение V определяется главным образом хрупким ростом трещины, то на уровне $P=0,8P_e$ трещина не должна расти и отклонение диаграммы от прямой, определяемое только пластическими

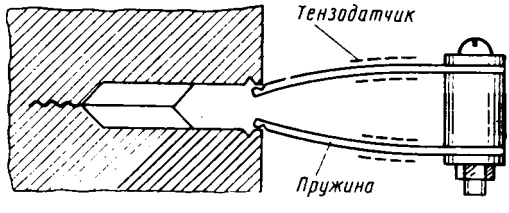


Рис. 14.19. Измеритель раскрытия (смещения у)

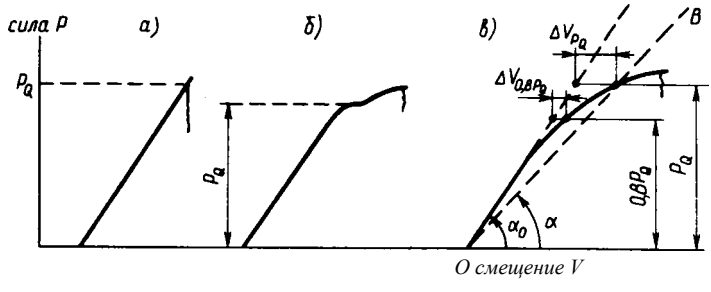


Рис. 14.20. Виды экспериментальных диаграмм нагрузка — смещение

деформациями, должно быть существенно меньше, чем на уровне $P=P_в$. Поэтому вводится требование на отклонение от начальной прямой

Ду $(0{,}8\ P_0) < 0{,}25$ Ду $(P_е)$.

Если оно не соблюдается, то это означает, что в данном эксперименте слитком велико влияние пластических деформаций, и эксперимент бракуется.

По найденной из эксперимента силе $P_в$ вычисляется соответствующий коэффициент интенсивности напряжений:

$$K_{1C} = K, \text{ СРе}). \qquad (14.20)$$

Это делается по соответствующей формуле, полученной методами теории упругости, с учетом конкретного вида образца. Так, для образца, работающего на изгиб (см. рис. 14.17),

$$K' \text{-} fMT\text{-}^{4fi} W^{+} HT \sim^{31'6} +38'7\left(\{\Gamma\right] \qquad (14.21)$$

на внецентренное растяжение (компактный образец)

$$th\ f^{29'6}\left(0^{185{,}5}\left(\Gamma^{+655'7}\left(¡\Gamma\text{-}\right.\right.\right.$$

$$\text{-юп|-} \quad +6391\text{-} \qquad (14.22)$$

После вычисления по (14.20) K_{xc} с использованием формул (14.21) или (14.22) производится проверка условий (14.13). Если они нарушены, то в эксперименте не соблюдены условия плоской деформации и его результаты бракуются.

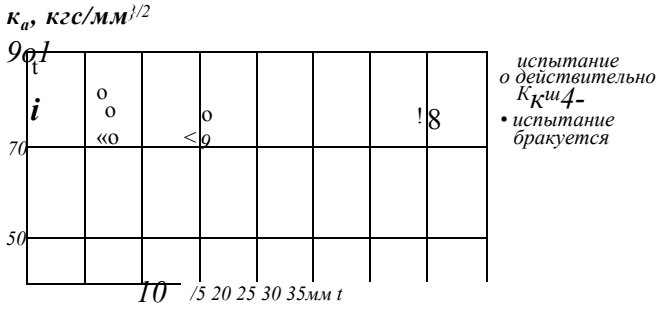


Рис. 14.21. Результаты испытаний образцов различной толщины t из алюминиевого сплава 7075 — Т651

Наибольшее влияние на результаты эксперимента оказывает толщина образца *и* В тонких образцах, где недостаточно реализуются условия плоской деформации, наиболее вероятно получение бракуемых результатов. Это подтверждается результатами испытаний, приведенными для примера на рис. 14.21.*

Заметим, что для тонких пластин разрушение при наличии трещин происходит главным образом в условиях плоского напряженного состояния. Влияние пластической зоны перез фронтом трещины очень велико, и коэффициент $A_{,c}$ не может быть критерием устойчивости трещины. Для таких случаев разработан критерий *критического раскрытия трещины* (здесь на нем мы не останавливаемся).

Вопросы для самоконтроля к главе 14

14.1. Что такое эквивалентное напряжение?

14.2. В чем различие между критериями пластичности и прочности материала?

143. Какие из рассмотренных критериев являются критериями пластичности, а какие — критериями прочности?

14.4. Назовите недостатки каждой из теорий прочности или пластичности.

14.5. В чем заключается приниципиальное отличие теорий прочности композитных материалов от классических теорий прочности и пластичности?

14.6. К^к распределены напряжения у острия трещины в идеально линейно-упругом теле?

14.7. Как изменяется форма эпюры напряжений у острия трещины за счет пластических деформаций? Как влияет на пластическую зону толщина пластины?

14.8. В чем состоит энергетическое условие устойчивости трещины по Гриффитсу?

149. Что такое критический коэффициент интенсивности напряжений K_C и кривая критического разрушения?

14.10. Как экспериментально определяется

* Разрушение (Руководство). Исследование разрушения для инженерных расчетов/ Пер. с англ. М., 1977. В 7-ми томах. Т. 4. С. 57.

ГЛАВА 15

УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

15.1. Основные понятия

До сих пор основное внимание было сосредоточено на определении напряжений, перемещений, возникающих в стержнях, и на оценке их прочности и жесткости. Однако оказывается, что соблюдение условий прочности и малость перемещений по сравнению с допускаемыми нормами еще не гарантируют способности конструкций выполнять предназначенные им функции.

Наряду с анализом прочности и жесткости необходим анализ устойчивости конструкций. С понятием устойчивости мы часто сталкиваемся в повседневной жизни, и правильное интуитивное представление о нем имеется у всех. Поясним это понятие на следующем примере.

Рассмотрим три положения равновесия тяжелого шарика, лежащего на неровной поверхности.

Сместим шарик, находящийся на дне лунки (рис. 15.1, *а),* ненамного влево или вправо и отпустим его. Шарик скатится к нижнему положению равновесия и начнет совершать колебательные движения около него. По истечении некоторого времени шарик остановится в исходном положении.

Волчок при большой скорости вращения устойчив по отношешво к малым боковым воздействиям

Если же задать аналогичное смещение шарику, находящемуся на вершине выпуклости (рис. 15.1, б), го шарик покатится вниз и не вернется в исходное положение. Как ввдно, два положения равновесия принципиально различаются между собой. Первое из них является *устойчивым.* а второе — *неустойчивым.* Таким образом, понятие устойчивости можно считать свойством состояния равновесия (в общем случае — движения) тела или системы тел.

Тшины равновесных состояний

Третье положение равновесия шарика (рис. 15.1, *в)* также является устойчивым, но оно качественно отличается от первого. Если в первом случае шаркж возвращался в исходное положение равновесия, то р третьем случае

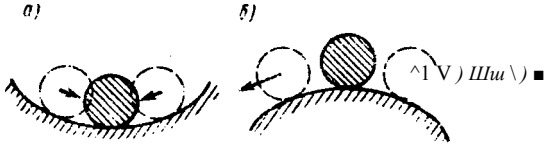


Рис. 15.1 Три различных положения равновесие тяжелого шарика: ■ *а* — устойчивое; *б* — неустойчивое; * — устойчивое Резрятлв'шое

он остается в новом отклоненном положении равновесия. Иногда такое состояние равновесия называют *безразличным.*

Назовем исходное состояние равновесия тела *невозмущенным,* отклонения его от состояния равновесия — *возмущениями,* а новое состояние равновесия — *возмущенным.*

О п р е д е л е н и е устойчивости положения равновесия

Если при действии малых возмущений тело отклоняется от своего невозмущенного состояния равновесия незначительно, то такое состояние равновесия называется устойчивым. Если же состояние равновесия тела не обладает этим свойством, то оно называется неустойчивым.

Данное определение является математически нестрогим, но для наших целей его будет достаточно.

Александр Михайлович Ляпунов (1857—1918) — русский математик и механик

Основы современной математической теории устойчивости движения созданы в конце XIX в. выдающимся русским математиком и механиком А. М. Ляпуновым.

■

Чтобы иметь представление о том, в чем заключается отличие приведенного выше определения устойчивости от введенного Ляпуновым, сформулируем его применительно к шарику.

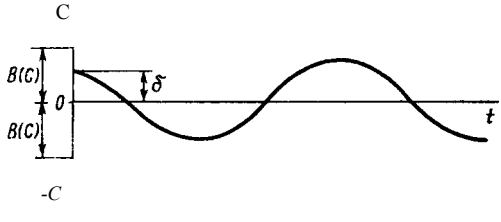
Явление устойчивости важно для различных областей науки и техники, например, гидродинамики — возникновение турбулентности в быстро движущейся жидкости; экологии — взрывное развитие популяций конкурирующих экологических видов и т. д.

Пусть С — произвольное положительное число. Если для любого С, каким бы малым оно ни было, можно выбрать такое малое положительное число *В* (зависящее от *С),* что при любых начальных отклонениях шарика *8* от положения равновесия, удовлетворяющих условию ¡¿| < *В,* в любой момент времени выполняется неравенство |Д| < С, то такое положение равновесия шарика устойчиво.

Здесь под А понимается отклонение шарика от положения равновесия в процессе его колебательных движений.

В осях А ~ / (время) состоянию равновесия шарика соответствует прямая А = 0, т. е. прямая, совпадающая с осью *I.* Тогда приведенное определение устойчивости графически может быть проиллюстрировано так, как показано на рис. 15.2. Отсюда видно, что в случае устойчивого положения равновесия траектория возмущенного движения шарика, оказывается заключенной внутри С-трубки.

Малость возмущений шарика является важным условием данного определения. Если отказаться от этого



предположения, то шарик может оказаться достаточно далеко от первоначального положения равновесия (рис. 15.3).

Рассмотрим абсолютно жесткий стержень, шарнирно закрепленный нижним концом и сжатый силой -Р. В вертикальном положении стержень удерживается упругой пружиной, имеющей жесткость *с*. Она означает, что при повороте стержня на единичный угол в упругом шарнире возникает момент, равный с.

Допустим, что стержень получил отклонение от вертикального положения, определяемое углом *ср.* Если новое положение стержня является равновесным, то, составляя уравнение равновесия $Ет_0$=0, получим

Пшкр = с(р. (а)

Таким образом, рассматриваемая задача является нелинейной, причем нелинейность обусловлена конечным перемещением стержня. Подобные задачи называют геометрически нелинейными.

Если угол *ср* достаточно мал, то можно положить *ътсркср.* В результате нелинейное уравнение (а) заменяется линеаризованным

(Р1—с) ср = 0.

Последнее уравнение имеет два возможных решения.

Какие решения может иметь система однородных линейных алгебраических уравнений

Первое из них, *(р* = 0, означает, что вертикальное положение равновесия стержня соблюдается при любом значении силы *Г.* Такое решение очевидно и потому обычно называется тривиальным.

Второе решение, которому соответствует *срф* 0, возможно только в Том случае, когда обращается в нуль множитель

Р1—с=0.

Отсюда следует, что отклоненное положение равновесия имеет место только при

$$F = \frac{c}{-} = F_*.$$

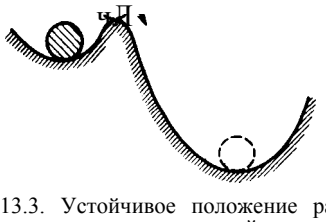
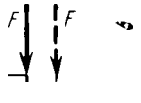
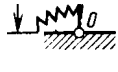


Рис. 13.3. Устойчивое положение равновесия шарика «в малом» и неустойчивое «в большом»



\Ip

Рис. 15.4. Вертикальное (невозмущенное) и отклоненное от вертикали (возмущенное) положения равновесия абсолютно жесткого стержня



положением равновесия стержня возможно другое положение равновесия, как угодно близкое к первому.

Силу P, называют критической силой.

Важно обратить внимание на то, что при $P=P$, угол поворота стержня оказывается неопределенным.

Итак, при $P<P$, стержень имеет только одно — тривиальное — положение равновесия. При $P=P$, стержень начинает отклоняться от вертикального положения равновесия. Интуиция подсказывает, что при $P>P$, стержень отклонится от вертикального положения еще больше, хотя из линеаризованного уравнения это не следует. Значения угла $<p$ при $P>P$, могут быть найдены из нелинейного уравнения (а).

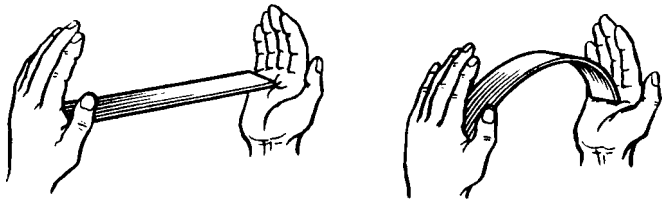
Сравните поведение этого стержня с поведением рассмотренного ранее шарика

Таким образом, при $P<P$, вертикальное положение равновесия стержня является устойчивым, а при $P>P$, — неустойчивым. При $P>P$, происходит переход стержня от исходного вертикального (неустойчивого) положения равновесия к отклоненному (устойчивому) положению равновесия. Этот переход называют потерей устойчивости исходного положения равновесия стержня или, коротко, потерей устойчивости стержня.

С явлением потери устойчивости приходится считаться и в реальных инженерных конструкциях, в которых характер равновесия зависит от действующих нагрузок. При этом необходимо подчеркнуть, что потеря устойчивости может произойти при напряжениях, значительно меньших тех, которые допустимы с точки зрения прочности конструкции.

Для того чтобы убедиться в этом, проведем несложный эксперимент с тонкой линейкой (рис. 15.5). При некотором сжимающем усилии линейка начинает изгибаться. Если усилие уменьшается, то она возвращается в исходное положение.

Таким же образом происходит потеря устойчивости центрально сжатого стержня. На рис. 15.6 показана форма потери устойчивости раскоса металлического пролетного строения железнодорожного моста. Аналогично ведет себя тонкое кольцо при гидростатическом сжатии (давлении). Если давление мало, то во всех сечениях



кольца наблюдается центральное сжатие. Однако при некотором значении q_* круговое очертание становится неустойчивым и ось кольца превращается в эллипс (рис, 15.7).

В других случая« потеря устойчивости сопровождается появлением пластических деформации, в результате чего после уменьшения или удаления нагрузки в конструкции сохраняются остаточные деформации. В качестве примера можно привести балку, показанную **на рис. 15.8**

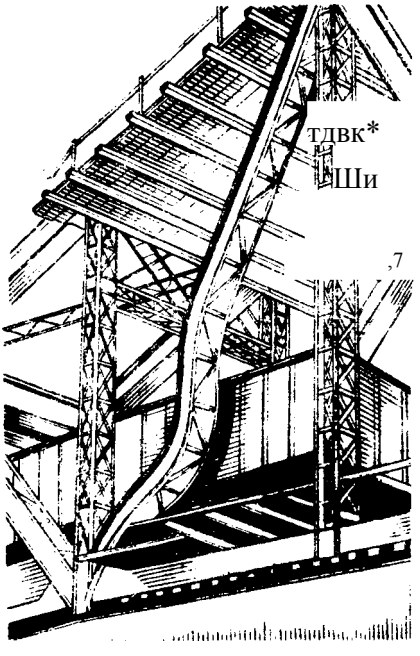


Рис. 15.6. Картина потери устойчивости сжатого раскоса металлического пролетного строения железнодорожного моста

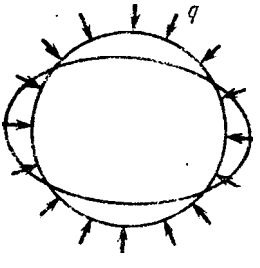


Рис. 15.7. Форма потери устойчивости кольца при гидростатическом сжатйи



Рис, 15.8. Картина потери устойчивости плоской формы изгиба балки

и нагруженную посередине. Вначале балка испытывала только изгиб в вертикальной плоскости (плоский изгиб). При достижении силой определенного значения плоская форма изгиба становится неустойчивой.

Из многочисленных задач устойчивости конструкций в курсе сопротивления материалов обычно ограничиваются рассмотрением только задачи об устойчивости сжатого стержня, оставляя более сложные случаи для специального курса «Устойчивость и динамика сооружений».

Возьмите резиновый шнур, слегка натяните его н начинайте закручивать. После нескольких оборотов одного конца относительно другого прямолинейное положение равновесия шнура становится неустойчивым

§ 15.2. Вывод формулы Эйлера для критической силы

Рассмотрим шарнирно опертый по концам сжатый стержень (рис. 15.9). Предположим, что по какой-то причине стержень получил малое искривление оси, вследствие чего в нем появился изгибающий момент

$M=Ey.$

Необходимо обратить внимание на то, что выражение для изгибающего момента получено для деформированного состояния стержня, в чем проявляется нелинейность задачи и что составляет принципиальное отличие рассматриваемой задачи от рассмотренных в предыдущих главах. Заметим, что при линейной постановке задачи уравнения равновесия составляются для исходного (недеформированного) состояния, а в этом случае изгибающий момент в стержне был бы равен нулю.

При малых прогибах справедливо равенство

$EI\,v'' = -M,$

которое можно представить в виде

$$v'' + k^2 v = 0, \qquad (15.1)$$

где обозначено

$$k^2 = \frac{F}{EI}.$$

Решение однородного дифференциального уравнения (15.1) имеет вид

$$v(z) = B\cos kz + C\sin kz.$$

Произвольные постоянные B и C определяются из граничных условий:

при $z=0$ $v=0$;

при $z=l$ $v=0$.

Из первого условия следует, что $B=0$.

Таким образом, уравнение оси изогнутого стержня записывается так:

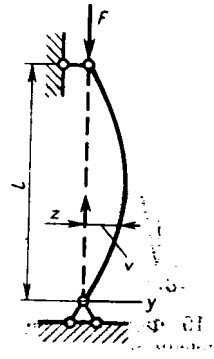


Рис. 15.9. Продольный изгиб сжатого стержня, шарнирно закрепленного по концам

V = С вт *кг.*

Используя второе граничное условие, получим

!(- ;•> .Н)Пам;К, Ш "Л Я Я

* Это уравнение имеет два решения: С=0 и *Сф* 0, но тогда вт *к1=0.*

Первое решение в нашей задаче интереса не представляет, так как при С= 0 прогиб тождественно равен нулю. Последнее означает, что стержень имеет прямолинейную форму равновесия.

Во втором случае из равенства

яп£/=0

I получим

к1=пп, п= 1,2,3,....

В результате имеем

$$\wedge = \frac{n^2 n^2 EI}{l^2}$$

т. е. криволинейная форма равновесия стержня возможна только при фиксированных значениях сжимающей силы. При *п* = 1 стержень изгибается с образованием одной полуволны синусоиды (рис. 15.10), при всех последующих *п* число полуволн соответственно равно *п.*

Наименьшее значение сила *Г* принимает при *п*= 1

$$\frac{n^2 EI}{l^2} \qquad (15.2)$$

Формула Эйлера

Эта сила называется *критической силой.*

Формула (15.2) впервые была получена в 1744 г. великим математиком Леонардом Эйлером. Поэтому иногда ее называют формулой Эйлера, а определяемую с ее помощью критическую силу — эйлеровой силой.

Леонард Эйлер (1707—1783, родился в Швейцарии) — гениальный математик и механик, более 30 лет проработавший в России

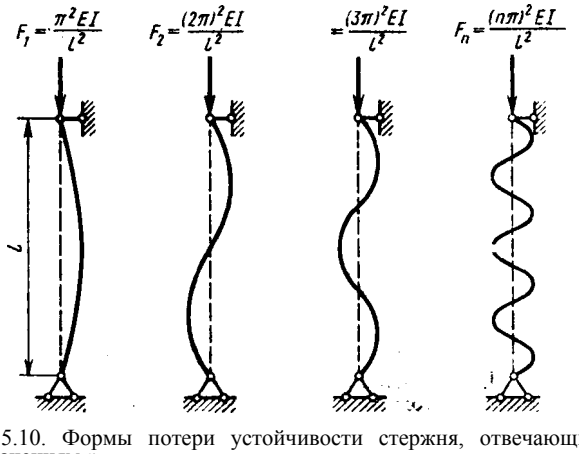


Рис. 15.10. Формы потери устойчивости стержня, отвечающие разаым значениям *п*

сжимающую сш1у, при которой наряду с прямолинейной формой равновесия становится возможной другая (изгибная) форма равновесия. В таких случаях говорят, что происходит ветвление, или бифуркация, равновесных состояний стержня.

Теория бифуркаций является основой современною направления математики — теории катастроф

Как видно, критическая сила ирямо пропорциональна изгибной жесткости стержня и обратно пропорциональна квадрату его длины.

При *п*— 1

$$y = C в1 п \frac{z}{I}.$$

Решите задачи 15.1,15.24, ответьте на вопрос № 15.2

Таким образом, стержень изгибается по полуволне синусоиды с амплитудой С, которая оказывается неопределенной, что является следствием использования приближенного уравнения (15.1), записанного в предположении малости прогиба.

Форма потери устойчивости стержня

Если $/'_{гр} </~$ и не совпадает со значениями $(пп)^2 E1/l^2$ (при 2), то решение того же уравнения является нулевым. Однако рассмотрение точного дифференциального уравнения

$$(1 - V') + к^2 y = 0$$

показывает, что в действительности по мере увеличения сжимающей силы от нуля амплитуда искривления оси стержня меияется гак, как показано на рис. 15.11.

Этот рисунок можно объяснить следующим образом. При $P<P_{1?}$ сгержень имеет только одну — прямолинейную - форму равновесия и более детальное исследование свидетельствует о гом, что эта форма равновесия устойчива.

При $I> P_{хр}$ наряду с прямолинейной имеет месго другая — криволинейная — форма равновесия, причем в этом случае прямолинейная форма равновесия неустойчива, а устойчивой является искривленная форма равновесия. Поэтому практическое значение имеет только первая сила, при которой возможна бифуркация равновесного положения.

Решите задачу 15.3

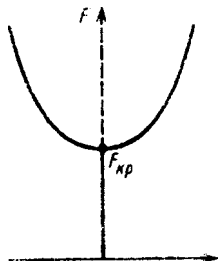


Рис. 15.11. Зависимость между амшш гудой прогиба стержня *я* сжимающей силой

Ч

Изменение числа равновесных состояний является типичным для нелинейных явлений. Линейные задачи имеют всегда только единственное решение.

При приложении силы стержень может внезапно перейти к другой форме равновесия, при этом прогибы и напряжения резко возрастут. Продольный изгиб стержней опасен именно тем, что он наступает неожиданно и его трудно предотвратить в тех случаях, когда неверно назначены размеры сжатого стержня.

Следует обратить внимание на то, что критическая сила не зависит от характеристик прочности материала. Для двух стержней с одинаковыми геометрическими характеристиками, но изготовленными из малоуглеродистой стали и высокопрочной низколегированной стали критические силы одинаковы.

§ 15.3. Влияние способа закрепления концов стержня на значение критической силы

Формула Эйлера получена в предположении шарнирного опирания стержня по концам. На практике встречаются и другие способы закрепления концов. Наиболее часто встречаются способы опирания, показанные на рис. 15.12.

Критическая сила для каждого из этих стержней может быть получена по обобщенной формуле

$$F_{кр} = \frac{n^2 E I}{(\mu l)^2}$$

Формула для критической силы

где μ — коэффициент приведенной длины, а величина $\mu l = l_0$ называется приведенной или свободной длиной.

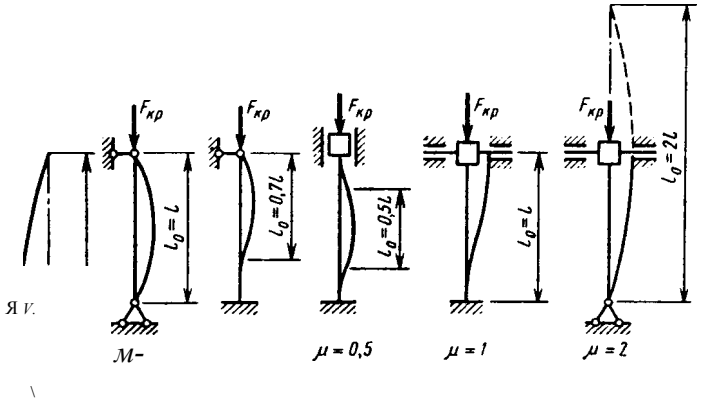


Рис. 15.12. Значения коэффициента приведенной длины для сжатых стержней при различных способах закрепления концов

Приведенная (сво- *условную длину шарнирно опертого по концам стержня,* бодная) длина *для которого критическая сила равна критической силе* стержня г *> для заданного стержня. ' *п

Ось изогнутой стойки, нижний конец которой жестко защемлен, а верхний — свободен, можно рассматривать как половину полуволны шарнирно опертого стержня. В таком случае 4 = 2/ и *ц=2.*

Для стержня, защемленного по концам, длина полуволны между точками перегиба изогнутой оси составляет половину длины стержня. Следовательно, для такого стержня $/_0 = 0{,}5/$ и // = 0,5. Заметим, что верхний конец стержня защемлен по отношению к изгибным деформациям, но свободно смещается в вертикальном направлении (скользит по направляющим)*

Итак, коэффициент *ц* может быть найден исходя из геометрических аналогий.

Пример 15.1. Найти значение критической силы для двутаврового стального стержня, защемленного нижним концом (рис. 15.13).

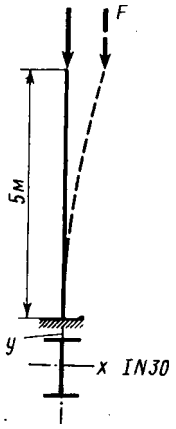


Рис. 15.13. Сжатая стойка двутаврового поперечного сечения

Решение. В соответствии с ГОСТ 8239 -89 (Приложение II) моменты инерции и площадь поперечного сечения двутавра № 30 равны: /* = 7080 см^4, /^ = 337 см^4, *А* =46,5 см^2. Модуль упругости стали

£=2,06' 10^5 МПа. Коэффициент свободной длины *ц — 2.*

Очевидно, что потеря устойчивости стержня произойдет в плоскости наименьшей жесткости стержня, поэтому при вычислении критической силы следует брать наименьший момент инерции поперечного сечения.

В результате найдем

$$/■ = \frac{n^2 E I_y}{M^2} * = \frac{3{,}14^2 \cdot 2{,}06 ■ 10^5 \cdot 10^6\ 337\ 10_{-в}}{} = 68\ 447\ \text{Н}.$$

(2' 5)

Нормальные напряжения в поперечном сечении стержня, возникающие при действии этой сжимающей силы, равны

ч

$$\sigma_{кр}=\frac{F_{кр}}{A}=\frac{68\,447}{46{,}5\cdot 10^{-4}}=14{,}7\ \text{МПа}.$$

Отсюда видно, что потеря устойчивости стержня наступает при напряжениях, значительно меньших предела текучести или предела прочности материала. Действительная сжимающая сила, прикладываемая к стержню, должна быть меньше полученной критической силы.

При определении значения критической силы необходимо считаться с возможностью различных форм потери устойчивости в главных плоскостях стержня, что зависит от способов его закрепления. Если концы стержня закреплены так, что приведенная длина его оказывается одинаковой для обеих главных плоскостей, то при вычислении критической силы следует брать наименьший момент инерции поперечного сечения:

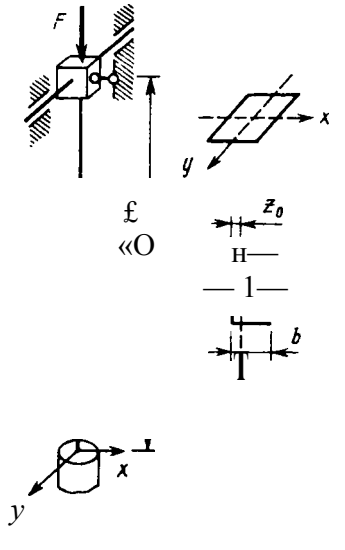
$$F_{кр}=\frac{\pi^2 EI_{min}}{(\mu l)^2}$$

Если же закрепление концов стержня в плоскостях *XOZ* и *YOZ* таково, что коэффициенты приведенной длины различны и равны и μ_2, то необходимо вычислить два значения сжимающей силы:

$$F_1=\frac{\pi^2 EI_y}{(\mu_1 l)^2} \quad \text{и} \quad F_2=\frac{\pi^2 EI_x}{(\mu_2 l)^2}$$

Критической для рассматриваемого стержня является меньшая из этих двух сил.

Прамер 15.2. Определить критическую силу для колонны здания, расчетная схема которой показана на рис. 15.14.



Решение. В плоскости *XOZ* на верхнем конце колонны реализуется шарнирное опирание, а в плоскости *YOZ* — «плавающая» заделка (верхний конец колонны может смешаться в направлении оси *Y* без поворота в плоскости *YOZ).* Нижний конец колонны жестко заделан. Поперечное сечение представляет собой два прокатных швеллера № 20, полки которых сверены. Геометрические характеристики швеллера: *A* = 23,40 см , /, = 1520 см\ ^ = 113 см*, r_0=2,07 см, 6 = 7,60 см. Модуль упругости стали £'=2,06 • 10^5 МПа.

НаДдем моменты инерции ' поперечного сечения колонны: $/_x$=2-1520 = 3040 см*, $/_y = 2\,[I_y + A\,(z_0 - r_0)^2]$“2 [113 + 23,4 (7,6--2.07)²]“ 1657,2 см*.

Для плоскости *YOZ* имеем (/i=l)

$$\text{Л} = \frac{n^2\,2{,}06\cdot 10^5\cdot 10^6\cdot 3040\cdot 10^{-8}}{\text{^}} = 55{,}5 \cdot \text{№}$$

в плоскости *XOZ (p*=0,7)

$$F_2 = \frac{\text{я}^2\,2{,}06\cdot 10^5\cdot 1657{,}2\cdot 10^{-8}}{(0{,}7\cdot 8{,}5)^2} = 951{,}7\ \text{кН}.$$

Таким образом, критической силой для колонны является =Я) =855,5 кН.

§ 15.4. Пределы применимости формулы Эйлера

Формула Эйлера была выведена в предположении, что деформирование материала подчиняется закону Гука. Однако очевидно, что по мере уменьшения длины стержня значение критической силы увеличивается и может оказаться, что начиная с некоторого значения сжимающие напряжения, вызванные ею, будут превышать предел пропорциональности и закон Гука оказывается неприемлемым.

Для определения границы применимости формулы Эйлера найдем нормальное напряжение, соответствующее критической силе:

$$\text{°ч} > \sim \frac{\text{^}\,n^2E}{A\,(p!)^2\,A} \quad \&$$

где $i = \sqrt{\frac{I}{A}}$ -------радиус инерции поперечного сечения стержня.

Введем обозначение $\text{Л} = \frac{}{/}$.

Величина *X* называется *гибкостью стержня.*

Тогда

Гибкость стержня

$$= \sim JT$$

ffrp И *к.*

ч

Рис. 15.15. Зависимость между критическими напряжениями и гибкостью стержня из углеродистой стали

Приравняем это напряжение к пределу пропорциональности, после чего получим

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{\text{щ}}}}.$$

Например, для стали С245 (a_mк 195 МПа, E= =2,06 • 10^5 МПа) найдем

$$\lambda_0 \approx \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot 2{,}06 \cdot 10^5}{195}} \approx 102.$$

Итак, при *Л>Ао* для определения критической силы можно пользоваться формулой Эйлера, если же Я < Л), то формула Эйлера становится неприемлемой. Поэтому на рис. 15.15 при *Л<Ло* гипербола Эйлера показана пунктиром.

Пределы применимости формулы Эйлера

Если стержень достаточно короткий (для сталей Я<40...60), то разрушение стержня происходит вследствие разрушения самого материала. Такое разрушение может иметь различный характер: хрупкое разрушение (например, в бетоне) или появление пластического течения (например, в сталях). Этому условию соответствует горизонтальная прямая на рис. 15.15.

При А, <Я<Ло теоретическое исследование устойчивости стержня существенно усложняется. Для практических расчетов в этом случае используется эмпирическая зависимость, предложенная Ф. С. Ясинским на основе изучения опытных данных:

$$-o \qquad \{15.3)$$

Формула Ясинского

где *а* и *Ь* — константы, зависящие от материала.

Феликс Станиславович Ясинский (1856—1899) — русский инженер н механик

Решите задачу 15.4

Например, для малоуглеродистой стали а = 310 МПа, ¿>=1,14 МПа, а для дерева *а*=29,3 МПа, ¿>=0,194 МПа.

На рис. 15.15 равенству (15.3) соответствует наклонная прямая.

Диаграмма на рис. 15.15 определяет максимальное напряжение, которое может быть приложено при осевом сжатии стержня. При этом напряжении стержень разрушается либо вследствие разрушения материала, либо вследствие потери устойчивости. Причина разрушения определяется гибкостью стержня.

Иногда для отыскания критической силы при *X*\ < <*X*<*Ло* пользуются формулой Эйлера, подставляя в нее значение приведенного момента инерции:

$$'Ф\ (мП^2 \quad \textbf{(15.4)}$$

Такую замену можно объяснить следующим образом. При равномерном осевом сжатии стержня критической силой в нем возникают нормальные напряжения, которым соответствует точка *В* на диаграмме деформирования (рис. 15.16). При появлении продольного изгиба в одной части поперечного сечения возникают малые дополнительные сжимающие напряжения, а в другой части — дополнительные растягивающие напряжения. Как известно, при разгрузке модуль деформирования принимается равным модулю упругости *Е*, а при догружении — равным касательному модулю *Е*¿.

Итак, при продольном изгибе стержень ведет себя как стержень с разными модулями упругости при растяжении и сжатии. Задача об изгибе такого стержня рассматривалась ранее (см. выше § 6.9, гл. 6).

Для стержня прямоугольного поперечного сечения получим

$$\_\ 6Л^3\ 4Е,$$

$$12$$

Изгибную жесткость стержня можно записать в иной форме:

$$П\ ир^{P''}Цр\ *\ *$$

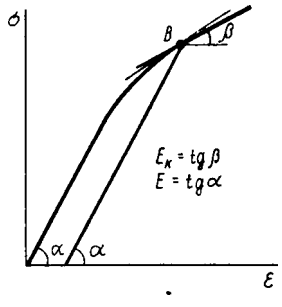


Рис. 15.16. Зависимость между напряжениями и деформациями при догружении и разгрузке

ч

причем для стержня прямоугольного сечения

$$E = \frac{4EE'}{(\sqrt{E}+\sqrt{E'})^2}$$

Эта формула впервые была получена Ф. С. Ясинским именно при решении задачи об устойчивости стержня за пределом упругости.

Тогда выражение (15.4) можно представить следующим образом:

$$p_{\text{Пр}} = \frac{\pi^2 E_{\text{пр}} I}{l^2}$$

Формула для приведенно-модульной критической силы

Интересно отметить, что в 70-х годах XIX в. немецкий ученый Ф. Энгессер предложил использовать формулу Эйлера для определения критической силы за пределом пропорциональности, заменяя в ней модуль упругости касательным модулем

Фридрих Энгессер (1843—1931) — немецкий инженер и механик

$$\frac{\pi^2 E_x I}{l^2}$$

!

Формула для касательно-модульной критической силы

Сила ^ получила название *касательно-модульной.*

В противоположность ей сила *Ещ,* называется *приведенно-модульной.* Она была предложена несколько позже Ф. С. Ясинским и Т. Карманом. Долгое время теория приведенного модуля считалась правильной, а теория касательного модуля — неверной.

Теодор фон Карман (1881—1963, родился в Венгрии) — механик, работавший в Германии н США

При определении той и другой критических сил предполагалось, что внешняя сила мгновенно прикладывается к стержню и в процессе последующего анализа устойчивости равновесного положения предполагалась неизменной. В 1946 г. Ф. Шэнли рассмотрел иную постановку задачи, а именно: он исследовал возможность выпучивания (продольного изгиба) первоначально прямого стержня в условиях увеличивающейся сжимающей силы (в условиях догружения). В результате было установлено, что наименьшей силой, при которой может начаться выпучивание стержня, является касательно-модульная сила.

§ 15.5. Практический расчет сжатых стержней

Если в гл. 3 при расчете сжатых и растянутых стержней на прочность требовалось выполнение условия

площадь поперечного сечения нетто), то теперь необходимо учесть то обстоятельство, чтобы сжимающие напряжения не оказались больше a^\

$$a=-<a_{1?}=\frac{-}{\text{Лбр}\,Л^{*},'}, \qquad (15.6)$$

где Aбр — площадь поперечного сечения стержня брутто.

В знаменателе последнего соотношения фигурирует площадь брутто потому, что местные ослабления (отверстия под заклепки или болты, канавки и т. п.) не оказывают заметного влияния на значение критической силы.

Для обеспечения определенного запаса по устойчивости стержня должно соблюдаться неравенство

Коэффициент запаса по устойчивости

$$_{n}\ . \qquad (15.7)$$

где n — коэффициент запаса по устойчивости, который зависит от возможности случайного увеличения силы $Б\ а$ возможности ее внецентренного приложения, от наличия начальных несовершенств в геометрии стержня и способах его опирания и т. д.

Сопоставим между собой неравенства (15.5) и (15.7) и обозначим отношение их правых частей через *ср:*

$$\varphi=\frac{\sigma_{\text{кр}}}{nR}.$$

Отсюда

$$\sim = <pЯ. \qquad (15.8)$$

Величина $ц>$ называется коэффициентом продольного - изгиба и определяет степень снижения расчетного сопротивления материала при продольном изгибе. Поскольку коэффициент зависит от критического напряжения, которое, например, для упругого стержня определяется выражением

$$\sigma_{\text{кр}}=\frac{\pi^2 E}{\lambda^2},$$

то очевидно, что он зависит от гибкости стержня и от механических свойств материала.

Значения коэффициента $<p$ для различных материалов установлены нормами и приводятся в виде таблиц (например, табл. 15.1). Иногда в таких таблицах учитывается зависимость *ср* от возможных эксцентриситетов.

С учетом равенства (15.8) представим формулу (15.6) в виде

$$a=\frac{P}{\text{Лбр}}<\text{ср}Я.$$

Коэффициенты <*p* иродолыюю нзгаба нейтрально сжатых элементов но СНжП П-23—81

Гибкость элементов *А*	Коэффициент для элементов аз стали с расчетным сопротивлением Л—240 МПа	Гибсость элементов ;	Коэффициент для алемевтов из стали с расчетным сопротивлением Л=240 МПа
10	0,987	130	0,364
20	0,962	140	0,315
30	0,931	150	0,276
40	0,894	160	0,244
50	0,852	170	0,218
60	0,805	180	0,196
70	0,754	190	0,177
80	0,686	200	0,161
90	0,612	210	0,147
100	0,542	220	0,135
110	0,478		
120	0,419		

Разделим это соотношение на *ср:*

$$\frac{\sigma}{Ч> Ч>А} = \frac{F}{\text{бр}} \leqslant R.$$

Обозначим

Оржя $\overline{Ч>}$

и назовем $a_{рисч}$ расчетным напряжением.

Тогда

{

$$Ч>А \text{ бр} \qquad \textbf{(15.9)}$$

Формула для проверки устойчивости

Формула (15.9) удобна тем, что она позволяет пользоваться одним расчетным сопротивлением материала при растяжении и сжатии.

Для деревянных центрально сжатых элементов

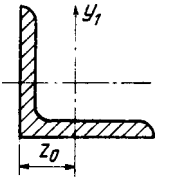
ф — 1 — 0,8 приЛ.^70;

$(p = \frac{3000}{\lambda^2}$ при/>70.

Если задана сжимающая сила, а также все геометрические характеристики стержня, то проверка прочности на сжатие с учетом продольного изгиба каких-либо затруднений не вызывает. Более сложной задачей оказывается подбор сечения стержня при заданной длине и сжимающей силе. Дело в том, что коэффициент *(р* зависит от гибкости стержня, а гибкость неизвестна, поскольку неизвестно сечение. В таком случае расчет выполняется методом последовательных приближений.

Вначале задаются каким-либо значением *(р* (например, полагают <р = 0,5) и из неравенства (15.9) определяют площадь поперечного сечения стержня. По найденной площади подбирается поперечное сечение, определяется его радиус инерции и, наконец, гибкость стержня. Для полученной гибкости по табл. 15.1 определяется уточненное значение *ср,* после чего вычисляется напряжение. Если оно отличается от расчетного сопротивления на величину, большую допустимой нормами погрешности, то определяется уточненное значение площади поперечного сечения. Процесс последовательных приближений продолжается до тех пор, пока разница между напряжением (Трас и расчетным сопротивлением не окажется меньше, как правило, 2...3%.

Пример 15.3. Подобрать поперечное сечение раскоса *1* стального пролетного строения моста, приведенного на рис. 15.17, *а.* Для упрощения расчета таких элементов обычно делается допущение о шарнирном закреплении их по концам (/1=1). Расчетная схема раскоса, состоящего из четырех равнополочных уголков, показана на рис. 15.17, 5. Сжимающее усилие в раскосе равно 300 кН. Расчетное сопротивление стали *К*=240 МПа.



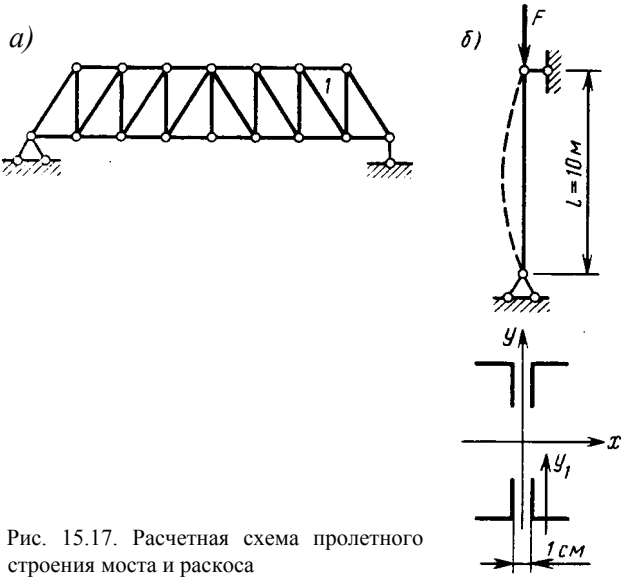


Рис. 15.17. Расчетная схема пролетного строения моста и раскоса

Решение. Приближение 1. Примем <р = 0,25. Найдем площадь поперечного сечения одного уголка:

$$A\backslash = \frac{3\ 10^5}{4\ \ 2{,}4\ 10^*\ 0{,}25} = 12{,}5\ \text{см}^2$$

По сортаменту равнополочных уголков (см. Приложение IV) найдем номер уголка, площадь которого близка к полученной. Таким уголком является уголок 90х90х7, для которого Л| = 12,3 см^2,

I_{y1}=94,3 см*, го = 2,47 см.

Тогда гибкость стержня принимает значение

$$;.=\frac{1000}{4,06}=246.$$

Значение <*p* примем равным минимальному из представленных в табл. 15.1: (p=0,135.

Найдем расчетное нормальное напряжение:

$$^{ff}oaCT=\frac{300\ 000}{49,2\ 0,135}=451,7\ \text{МПа} > 240\ \text{МПа}.$$

Поскольку это значение почти вдвое больше расчетного сопротивления, следует увеличить площадь поперечного сечения стержня.

Приближение 2. Найдем уточненное значение площади:

$$A\backslash=\frac{300\ 000}{4\ 0,135\ 24\ 000}=23,15\ \text{см}^2.$$

Ближайшим по площади поперечного сечения является уголок 100х 100 х 12, для которого *A*i = 22,8 см^2, I_y =209 см*, zo=2,91 см.

Момент инерции I_y и радиус инерции i_y нового поперечного сечения будут

$$Iy=(209 + 22,8 \blacksquare 3,41^2) \blacksquare 4 = 1896,48\ \text{см}^*;$$

$$/_{„}=\frac{/1896,48}{V\ 22,8\ 4}=4,56\ \text{см},$$

а гибкость стержня

$$;.=\frac{1000}{4,56}=219,3.$$

Такой гибкости отвечает коэффициент <p=0,135.

Найдем расчетное нормальное напряжение:

$$(T_0асч=\frac{300\ 000}{0,135\ 22,8\ 4}=243,7\ \text{МПа}.$$

Поскольку это значение напряжения близко к расчетному сопротивлению (относительная погрешность составляет 1,54%), принимаем поперечное сечение в виде равнополочных уголков 100 х 100 х 12.

Максимально допустимая сжимающая сила, которую может воспринять рассматриваемый раскос, равна

$$= 24\ 000\ 4\ 22,8\ 0,135 = 295\ 488\ \text{Н},$$

а эйлерова сила для идеально прямого упругого стержня

$$F_3=\frac{л^2 2,06\ 10^5 1896,48}{1000^2}\approx 385\ 581\ \text{Н}.$$

Как видно, критическая сила $F_{tp} = F_3$ больше F_{max}. Интересно подсчитать коэффициент запаса стержня по устойчивости, воспользовавшись для этого равенством (15.7):

$$n=\frac{I^{\wedge}=^{I}=h_3.}{F_m»x\ 'JI^2\ °}$$

Это можно объяснить тем, что реальные стержни имеют различные несовершенства, снижающие предельную сжимающую силу и учитываемые при назначении коэффициента *q*>.

§ 15.6. Расчет внецентренно сжатой гибкой стойки

Остановимся на задаче о деформировании внецентренно сжатой гибкой стойки, которая представляет интерес по двум причинам. С одной стороны, с подобной задачей часто приходится встречаться при расчете сооружений, поскольку на практике трудно осуществить приложение нагрузки строго вдоль оси стержня. С другой стороны, в такой стойке проявляется сложная нелинейная зависимость между сжимающей силой и напряжениями или прогибом.

Для сравнения запишите уравнение равновесия для недеформнрованного состояния стержня

Рассмотрим гибкий стержень, представленный на рис. 15.18. Изгибающий момент в нем необходимо определять с учетом появляющегося прогиба:

$$M=F\,(e+5-v).$$

Тогда

$$EIv''=F(e+5-v),$$

или

$$v''-i-k^2\backslash = k^2\,(e+8). \qquad (^{fl})$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$v=B\cos kz+ C\sin kz+e + 5.$$

Значения *B, C, 6* находятся из граничных условий:
при 2=0 v = 0 и v'=0;
при $z=l$ v = <5.

Из первых двух условий следует

$$B-\backslash-e-\backslash-Ь — 0,\ кС—0.$$

С учетом С=0 из последнего граничного условия найдем

$$B\cos kl+e=Q.$$

В итоге получим

$$v=\frac{1 — \cos kz}{\cos kl}\,e.$$

Зависимость между прогибом свободного конца стойки <5 и сжимающей силой графически представлена на рис. 15.19. Отсюда видно, что по мере приближения силы F к критическому значению (cos *kl-*0)* прогиб стержня неограниченно увеличивается независимо от эксцентриситета e. Конечно, прогиб стержня не может быть бесконечно большим. Такой результат оказался возможным только благодаря тому, что при записи дифференциального уравнения (а) было использовано приближенное выражение для кривизны оси стержня. Если же воспользоваться точным выражением

то решение задачи сведется к решению нелинейного дифференциального уравнения, из которого следует, что прогиб стержня при любом значении сжимающей силы имеет конечное значение (рис. 15.20, *а, б).* Сравнение решений точного и приближенного (а) уравнений показывает, что при значениях сжимающей силы, меньшей 0,7...0,8, указанные решения практически совпадают и потому для таких случаев вполне оправданным является применение уравнения (а).

Решите задачи (15.6), (15.7), (15.9)

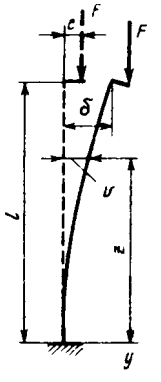


Рис. 15.18. Стойка, сжатая эксцентрично приложенной силой

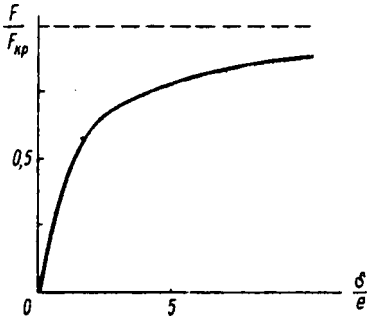


Рис. 15.19. Зависимость между безразмерной сжимающей силой и безразмерным максимальным прогибом эксцентрично сжатой СТОЙКИ

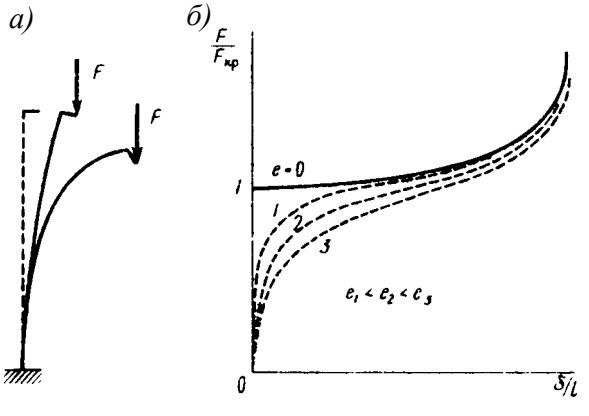


РИС. 15.20. Зависимость между безразмерной сжимающей силой и безразмерным максимальным прогибом эксцентрично сжатой стойки, полученная пу тем решения точного (нелинейного) дифференциального уравнения

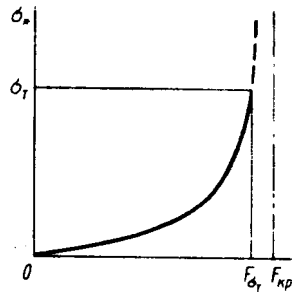


Рис. 15.21. Зависимость между максимальным по модулю сжимающим напряжением, возникающим в стойке, и сжимающей силой, приложенной с эксцентриситетом

Наибольший изгибающий момент возникает в заделке:

$$M = -\frac{Лг}{соМ}$$

а наибольшее (по абсолютной величине) сжимающее напряжение *а,* возникает в сечении рядом с заделкой на вогнутой стороне стержня:

$$a = \frac{Л}{А\ Ц'соак!}$$

Зависимость напряжения *а,* от значения сжимающей силы является нелинейной и графически показана на рис, 15.21.

§ 15.7. Продольно-поперечный изгиб сжатых стержней

При рассмотрении задачи об одновременном изгибе и сжатии стержней (см. гл. 6) считалось, что перемещения и напряжения в каждой точке стержня на основании принципа независимости действия сил могут быть найдены отдельно от сжатия и от изгиба, а затем алгебраически сложены. Такой путь решения возможен, если перемещения в стержне малы и расчет можно производить с использованием исходной, т. е. недеформированной, схемы. Результаты, полученные в § 15.6 для внецентренно сжатой стойки, свидетельствуют о том, что для гибких сжато-изогнутых стержней этот путь решения неприемлем, поскольку сжимающая сила за счет существенных прогибов вызывает в стержне не только равномерное сжатие, но и изгиб. Таким образом,

расчет гибких стержней должен производиться по деформированной схеме. В этом случае поперечный изгиб стержня происходит одновременно с продольным изгибом и потому получил название продольно-поперечного изгиба.

Примером точного решения задачи о продольно-поперечном изгибе стержня может служить решение, найденное в § 15.6 для внецентренно сжатой стойки. В других случаях его получение часто вызывает серьезные затруд-

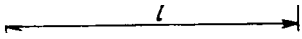


Рис. 15.22. Продольно-поперечный изгиб сжатого стержня

нения, в связи с чем остановимся на приближенных методах решения.

Изгибающий момент в поперечном сечении стержня, показанного на рис. 15.22, при продольно-поперечном изгибе можно представить в виде

$$M—M_0+P\backslash,$$

Для сравнения запишите выражение момента для недеформнрованного состояния стержня

где M_0 — изгибающий момент, вызванный только поперечной нагрузкой.

Отсюда видно, что суммарный момент M может быть найден только после того, как найден прогиб стержня, а прогиб нельзя найти, не зная изгибающего момента.

Если кривизна оси стержня достаточно мала, то уравнение равновесия запишется так:

$$EIy''+P\backslash= —M_0. \qquad (15.10)$$

Для стержня с произвольными граничными условиями на концах вместо этого уравнения следует записать

$$= \qquad (15.10*)$$

где q — интенсивность поперечной распределенной нагрузки; действующей на стержень.

Представим прогиб в виде суммы:

$$y=y_0 + Ay. \qquad (15.11)$$

Здесь y_0 — прогиб, вызванный только поперечной нагрузкой (без учета силы *Г);* Ду — дополнительный прогиб, появившийся в результате действия сжимающей силы *Г.*

Для прогиба y_0 справедливо уравнение

$$EIy_0'' = — M_0. \qquad (15.12)$$

Вычтя из уравнения (15.10) уравнение (15.12), получим

$$EIAy''= —P\backslash. \qquad (15.13)$$

Предположим, что прогиб Ау описывается синусоидой* (в этом как раз и заключается приближенность решения)

* Синусоида является формой потери устойчивости шарнирно опертого по концам центрально сжатого стержня. Если стержень имеет другие закрепления по концам, то вместо синусоиды берется форма потери устойчивости при центральном сжатии этого стержня.

Ау=/ш1 - *г,*

тогда

Ау"= ——/вШ - 2.
р I

Из уравнения (15.13) имеем

$\frac{n}{}$* * *
— Ау=— у.
Р Е1

С учетом равенства (15.11), из которого следует, что А у=у—$у_0$, найдем

у=-
И[1] '

или

$$v = \frac{v_0}{1 - \frac{F}{F_{кр}}}. \qquad (15.14)$$

Эту формулу применяют и для стержней, имеющих иные способы закрепления по концам.

Для шарнирно закрепленного стержня изгибающий момент равен

М—Мо+Ру.

Используя равенство (15.14), можно записать

*м_м*o+^*К* <|515>

Наибольшие (сжимающие) нормальные напряжения определяются выражением

_ *Р Мо Рч*$_п$
^{a} ~ ~ *А~ П'~(1*

Таким образом, нормальные напряжения нелинейно зависят от сжимающей силы.

Для оценки возможности применения формул (15.14) и (15.15) найдем максимальный прогиб и максимальный изгибающий момент в стержне, показанном на рис. 15.23.

F= На.

Рис. 15.23. Продольно-поперечный изгиб сжатого стержня в случае равномерно распределенной поперечной нагрузки

ч

Как известно из гл. 8,

$$y\Gamma = -\frac{}{384}\bullet$$

С учетом сжимающей силы имеем

$$v^{тм} = \frac{5}{192\,EI} = 0{,}0260\frac{}{EI};$$

$$\text{Л/”“=^} + \underset{8}{\mathbf{0{,}0260}} \frac{}{EI} = \mathbf{0{,}2535?/^2}.$$

Для сравнения приведем значения V”“, *M^,* полученные путем точного решения уравнения (15.10):

$$\mathbf{V^{тм} = 0{,}0253}\ \underset{EI}{\text{^, Л/“““«0{,}252?/^2}}.\ .$$

Как видно, результаты оказались достаточно близки Решите задачу между собой. (15.8)

Пример 15.4. Рассмотрим распорку ограждения котлована в виде стального двутавра № 40, стенка которого расположена горизонтально.

Решение. На распорку действуют сжимающая сила и поперечная нагрузка (например, собственный вес), которую будем считать равномерно распределенной ^ (рис. 15.24). Считая распорку шарнирно опертой по концам, исследуем зависимость наибольшего (по модулю) нормального напряжения и максимального прогиба от силы *P,* принимая для простоты 9=0,015/у/.

4=0,015 г, ‘

ПП П М ы П , *Г*

1--15M

Рис. 15.24. Расчетная схема распорки ограждения котлована

Тогда

$$1®1тлх\cdot 1\frac{/\ 0{,}015/7\ 0{,}075P^2l^3}{A\ Ш^m_y\ 384£7_>И/_>\ (1 — a)}>$$

где

$$a = \frac{ЩУ}{Г}$$

Для двутавра № 40 /у=667 см^4, ^ = 86,1 см^3, .4 = 72,6 см^2, *Е*= =2,06 10^5 МПа, <$г_т$=240 МПа.

После подстановки числовых значений получим выражение для Мтах:

Ити=“ 152,5 ^1,553+0,569 ^ МПа;

причем/$_э$= 1107 кН.

На рис. 15.25 показана зависимость |(г|$_{тм}$ от а в пределах изменения сжимающей силы от нуля до $P_{,,}$ »692,0 кН. Под $P_{,,}$ понимается сила,
т т

Рис. 15.25. Зависимость Ипшх от параметра *а*

Рис. 15.26. Зависимость $y_{т=}$ от параметра а

при которой Мша* достигает значения $<x_т$. Для сравнения на рисунке приведена линейная зависимость для найденная в предположении, что дополнительный изгибающий момент, создаваемый продольной силой, равен нулю. В этом случае Ищ»*, отвечающее силе P_a, равно

148 МПа. Погрешность, обусловленная пренебрежением моментом от продольной силы, составляет

$$д_a = \frac{240-148}{240} 100 = 38{,}3\%.$$

Максимальный прогиб балки определяется приближенной формулой

$$v_{Ш\&Л} \frac{0{,}075Л^3}{384E1y(1 — а)}.$$

На рис. 15.26 показан график изменения в зависимости от а.

Там же для сравнения представлен график линейной зависимости, полученной при пренебрежении влиянием продольной силы на прогиб балки.

Прогиб балки при P_a, определяемый с помощью нелинейной и линейной зависимостей, соответственно равен 1,125 и 0,422 см. Погрешность вычисления прогиба при условии пренебрежения влиянием сжимающей силы на прогиб балки равна

$$б_y = \frac{1{,}125-0{,}422}{1{,}125} 100 = 62{,}5\%.$$

Приведенные значения погрешностей $д_a$ и свидетельствуют о существенном влиянии, которое оказывает сжимающая сила на напряженное состояние и на перемещения стержней.

Рассмотренный пример свидетельствует об эффективности приближенной формулы (15.14) при отыскании прогиба сжато-изогнутого стержня. Однако не всегда приближенное решение (15.14) оказывается достаточно близким к точному, в таких случаях приходится обращаться к другим, в частности численным, методам реше-

ния уравнений (15.10) или(15.10*). Проиллюстрируем это на примере метода конечных разностей, основы которого были изложены выше (см. § 8.6).

Разобьем стержень на *n* участков длиной Л=//л. Применяя конечно-разностные формулы для второй и четвертой производных [см. (8.17), (8.19)], заменим дифференциальные уравнения (15.10) и (15.10*) системой линейных алгебраических уравнений

$$EI\frac{V_{,.,}-2y_{,}+y_{1+}1}{A}+^{\wedge}{}_{\dot{c}}=-Jl/o_{,};$$

$$EI\frac{^{\wedge}-2-4y|_{-}1+6y_{,}-4y_{(+1}+y_{<+2}\ y_{,-,}-2y\ _{i}+y_{,+,}}{}+P\text{----------}=\partial_{u}$$

или

$$¥<_{,}+(-2+a)y_{(}-|-y_{,+,}=\frac{}{c/}\quad(15.16)$$

$$У_{(-2}+(-4+a)\,y_{,}-_{,}-|-(6-2a)\,y_{,}+(-4+я)\,y_{,+1}+y_{,+2}=-\frac{a,A^{*}}{El},$$

где а=^-, $\underset{El}{M_{bl}}$, q_{i}—значения изгибающего момента $A/_{0}$ и распределенной нагрузки в 1-м узле.

С учетом граничных условий, записанных с помощью конечных разностей, получим систему уравнений, число неизвестных которой совпадает с числом уравнений. В результате ее решения найдем прогиб в узловых точках, а далее, если это необходимо, нетрудно определить изгибающие моменты и напряжения в точках поперечных сечений стержня.

Пршмер 15.5. На рис. 15.27 представлены расчетная схема и деформированный вид колонны промышленного здания, изгибная жесткость которой постоянна и равна *EI*. Найти наибольший прогиб колонны при 0,5836/^.

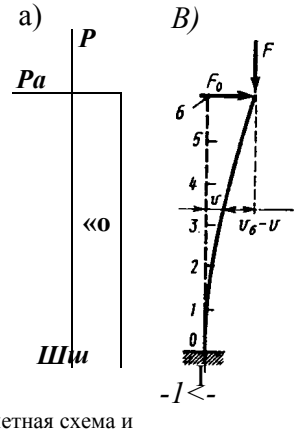


Рис. 15.27. Расчетная схема и промышленного здания

Решение. Для определения прогиба колонны следует воспользоваться уравнением (15.10*). Однако с целью понижения порядка и последующего упрощения решения целесообразно его предварительно дважды проинтегрировать, после чего получим

$$EI\,y'' + \&=-M^*, \qquad (15.17)$$

где (рис. 15.27, *б)*

$$-/\blacksquare,,(/-7)-\hat{}.$$

Решение уравнения (15.17) должно удовлетворять условиям у=0, у'=0 при *z=o,* которые в конечно-разностной форме записываются так:

$$У_{о=0,}\ \frac{У[-У\_!}{2Д}=0 \text{ или } у\_| =У|.$$

Уравнение (15.17) по виду подобно уравнению (15.10), в связи с чем для формирования системы уравнений относительно узловых прогибов используем соотношения (15.16). В итоге с учетом приведенных выше граничных условий имеем

$$2У, \qquad -оу_6=6/?Д$$

$$(-2 + а)\ У[+У_2 \qquad — \qquad ау_6=5/?Д$$

$$У] +(—2+а)\ У_2+У_3 \qquad — \qquad оу*=4/?Д$$

$$у_2 + (—2 + а)\ у_3+у_4 \qquad — \qquad ау_6=3/1Д$$

$$У_3 + (—2 + а)\ У4+У5 \quad —жу«=2/?Д$$

$$у_4 + (-2+а)\ у_5+(1 -а)\ у$$

причем

$$/?=\frac{/ЬЛ^2}{EI}$$

Найдем решение этой системы при 1=0,04, что соответствует *P!Pmp* = 0,5836. Значения $у_($ приведены в табл. 15.2. Для сравнения там же представлены значения прогибов у", полученные путем точного решения дифференциального уравнения (15.10*).

Как видно, результаты численного решения оказываются достаточно близкими к точным. Например, погрешность определения максимального прогиба составляет 2,07%. Увеличивая число участков по длине стержня, нетрудно повысить точность искомого решения.

Таблица 15.2

Значения узловых прогибов, найденные путем приближенного и точного решетя дифференциального уравнения (15.10)

1		у;/дд
1	6,5014	6,2426
2	24,7456	24,0577
3	53,0028	51,7382
4	89.1428	87,1841
5	130,7198	127,9854
6	175,0709	171,5190

Принимая во внимание простоту структуры системы уравнений, не представляет особого труда составление программы для персонального компьютера, например на языке БЭЙСИК, и получения решения задачи с любой требуемой точностью.

По найденным значениям прогиба определяется наибольший изгибающий момент:

После этого могут быть найдены напряжения в наиболее опасном сечении.

Вопросы для самоконтроля к главе 15

15.1. В чем заключается явление потери устойчивости равновесного состояния стержня?

15.2. Влияет ли форма поперечного сечения на критическую силу стержня? (Два стержня шарнирно оперты по концам и сжаты силами *P*. Поперечное сечение одного из них круглое, а другого — квадратное. Для какого из стержней критическая сила окажется больше, если модуль упругости, длина и площадь поперечного сечения у них одинаковы?)

15.3. Какое влияние оказывают на критическую силу упругие и прочностные характеристики материала при потере устойчивости стержня в упругой стадии?

15.4. В чем различие постановок задачи об устойчивости стержня в упругопластической стадии Кармана, Энгес сера и Шэнли?

15.5. Какой физический смысл имеет понятие свободной (приведенной) длины стержня?

15.6. В чем заключается приближенность формулы (15.14)?

Задачи

15.1. Колонна стального каркаса здания, имеющая длину 5 м, представляет собой два швеллера № 30, сваренных друг с другом так, как показано на рисунке. Определить значение критической силы для колонны, считая ее шарнирно опертой по концам.

Рис. к задаче 15.1

15.2. Стержень, шарнирно опертый по концам, равномерно нагревается. Найти значение критической температуры, считая опоры стержня неподвижными, а материал — упругим.

15.4. Как изменится значение критической силы для колонны, рассмотренной в задаче 15.1, если: 1) нижний конец колонны жестко заделан, а верхний свободен; 2) нижний конец жестко заделан, а верхний шарнирно оперт? Проверить применимость формулы Эйлера в каждом из этих случаев. Предел пропорциональности стали принять равным 195 МПа. Если формула Эйлера оказывается неприменимой, то для определения значения критической силы следует воспользоваться формулой Ясинского, полагая *а* = 310 МПа, ¿. = 1,14 МПа.

15.3. Абсолютно жесткий стержень сжат силой К На нижнем конце он имеет упругий шарнир, для которого справедливо соотношение между моментом и углом поворота *M=c<p.* Определить значение критической силы ^жр-

Построить график зависимости между сжимающей силой и углом поворота <*p* при 0 ^ <*p* ^ п/2.

15.5. Проверить устойчивость сжатого стального элемента стропильной фермы, поперечное сечение которого показано на рисунке и состоит из двух равнополочных, уголков, жестко соединенных между собой. Усилие в элементе равно 2000 кН, длина его равна 2,5 м, а расчетное сопротивление стали *Я*=240 МПа. Предполагается, что концы стержня имеют шарнирное опирание.

жж$>

*21.200·100*20*

Рис. к задаче 15.5

15.6. Найти наибольший прогиб и наибольшее по абсолютному значению нормальное напряжение в сжатом силами / стержне, шарнирно опертом по концам и имеющем начальное искривление оси \'о= /о «п яг/7.

15.7. Поперечное сечение сжатого стального стержня показано на рисунке. При каком начальном искривлении оси стержня (влево или вправо от оси *г)* раньше появятся пластические деформации в наиболее опасном сечении? Считать, что стержень имеет шарнирное опирание, а начальное искривление его оси пропорционально sin *nz¡l.*

mH

ZI

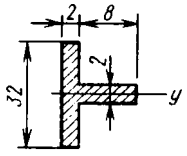


Рис. к задаче 15.7

15.8. Расчетная схема распорки опалубки с учетом технологического оборудования, закрепленного на ней, показана на рисунке. Используя приближенную формулу, определить максимальный прогиб распорки.

F,

$F = 0{,}75F_{кр}$.

2L

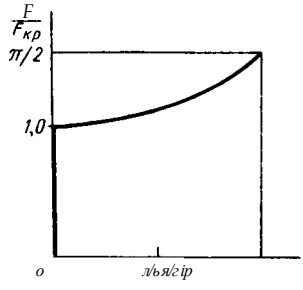
Рис. к задаче 15.8

15.9. Стержень, рассмотренный в задаче 15.3, имеет начальный угол поворота *щ.* Построить график зависимости между силой ^ и полным углом поворота стержня <*p* (при <Ро^<Р<я/2) для разных значений <p_0. Принять «>0=0,05; 0,1; 0,2.

Ответы к задачам главы 15

15.1. /$^{r}_{гр}$=968,64 кН. 15.2. $\Gamma_{гр} = я^2/(aX^2)$, где *а* — коэффициент линейного расширения материала. 153. = *c/1.* График зависимости *P/P^~<p* представлен на рисунке. 15.4. *P^ = 242,\6* кН; *P*™= 1660,04 кН. Примечание: в первом случае формула Эйлера применима, а во втором — неприменима. 15.5. о'расч = 146,8 МПа <240 МПа. Условие устойчивости элемента фермы соблюдается.:. 15.6. v_{nmi}=---------, а=—, |«г|пи,=— 1 Н---------- I. 15.7. Пластические деформации раньше появятся в стержне при начальном искривлении оси стержня влево от оси z. 15.8. $у_{ш}$,= 15.9. Графики зависимостей *FIF_p~q>* показаны на рисунке.

$\frac{/о\,P}{1\text{-}а}$ $\frac{FV\,foA}{A\ L\ (1 — а)\ WJ}$ 1 $\frac{22.Fi/^3}{ЪE1}$



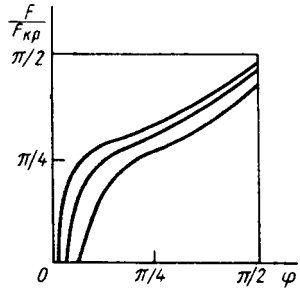


Рис. к ответу задачи 15.3

ПОЛЗУЧЕСТЬ МАТЕРИАЛОВ

§ 16.1. Влияние фактора времени на деформирование материалов

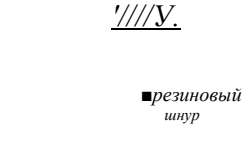
При изучении предыдущих глав предполагалось, что дапряженно-деформированное состояние тела остается неизменным во времени, если неизменны внешние воздействия. В настоящей главе рассматривается новое свойство материалов, связанное с деформированием их во времени при постоянной нагрузке или напряжении.

Способность материала деформироваться во времени при действии постоянных нагрузок называется ползучестью.

Определение ползучести

Явление ползучести присуще таким материалам, как бетон, кирпич, древесина, полимеры, естественный камень, грунты и т. п. Металлы также обнаруживают это свойство деформирования, которое становится особенно заметным при высокой температуре, а в цветных металлах (свинце, меди и т. п.) даже при комнатной температуре.

Проведите эксперимент



Фактор ползучести имеет существенное значение для работы конструкций. Достаточно отметить, что напряжение в арматуре железобетонных конструкций может в процессе ползучести бетона увеличиться в 2...2,5 раза, а перемещения — в 3...4 раза. В машиностроении известны случаи, когда стальные котельные трубы разрушались под действием внутреннего давления вследствие ползучести материала (рис. 16.1). Пунктиром на рисунке нанесены первоначальные размеры поперечного сечения трубы.

Проследите за поведением груза в течение получаса

Хотя явление ползучести было известно давно, экспериментально его исследовал одним из первых В. Вебер в 1835 г. в опытах по воздействию крутящего момента на кварцевые волокна. В них обнаружилось удивительное для неживой материи свойство хранить «память» о воздействиях, которые она испытывала в прошлом.

Опыты по изучению ползучести показали, что она наблюдается при любых напряжениях, даже таких, которые при кратковременном действии нагрузки вызывают только упругие деформации. Результаты испытаний представляют в виде кривых ползучести, т. е. кривых зависимости деформаций от времени (рис. 16.2).

В начальный момент времени деформации имеют значение e (0), равное упругой деформации или сумме упругой и пластической деформаций. Обычно считается,

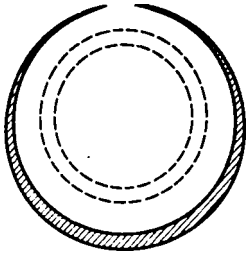


Рис. 16.1. Разрушение стальной котельной трубы под действием внутреннего давления вследствие ползучести материала

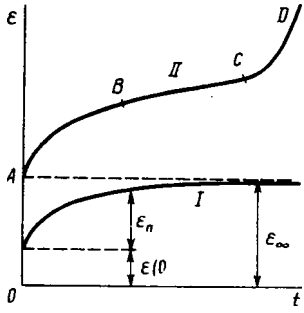


Рис. 16.2. Характерные кривые ползучести материала

что время нагружения (или разгрузки) образца пренебрежимо мало по сравнению с временем проведения эксперимента, в связи с чем можно положить, что напряжение и деформация Е (0) появляются мгновенно.

Ответьте на вопрос № 16.1

С увеличением времени / наблюдается возрастание деформаций, характер которого определяется скоростью ё (точкой обозначена производная по времени /).

На графике / (рис. 16.2) процесс деформирования сопровождается уменьшением скорости е и асимптотическим стремлением ее к нулю. Полная деформация образца, определяемая суммой начальной деформации е (0) и деформации ползучести $е_п$, т. е.

$$£ = £ (0) + Еп,$$

стремится к предельному значению £„.

На графике *II* можно выделить три участка: *AB, BC, СИ.* Участок *AB* характеризуется уменьшением скорости деформирования и соответствует фазе неустановившейся ползучести. По окончании ее скорость ё принимает минимальное значение: наступает фаза установившейся ползучести, когда скорость *Ь* постоянна (участок *BC).* С увеличением напряжения *а* продолжительность периода установившейся ползучести сокращается.

Испытание заканчивается либо хрупким разрушением образца в момент времени, соответствующий точке *С,* либо вязким разрушением, которое происходит с образованием шейки. В последнем случае появляется участок *СИ.*

Характер кривой ползучести и значение деформаций ползучести существенно зависят от действующих напряжений. Увеличение напряжений приводит к возрастанию деформаций ползучести. На рис. 16.3 представлены кривые ползучести при различных *а* для стального образца при температуре 600°С.

Аналогичными приведенным оказываются кривые

Рис. 16.3. Кривые ползучести, полученные при испытании стальных образцов при температуре 600°С, для разных уровней растягивающих напряжений

Рис. 16.4. Зависимость угла закручивали* цилиндрического образца из одеонадравленного стеклопласта от времени

ползучести при сдвиге или кручении. На рис. 16.4 показана для примера зависимость от времени угла закручивания цилиндрического образца диаметром 20 мм, выполненного из однонаправленного стеклопластика, при кручении моментом M = 8200 Н ем.

Если увеличение деформаций ползучести пропорционально увеличению напряжений, то говорят о линейной р ползучести, в противном случае — о нелинейной ползуче-

^ня *оп

Так, ползучесть металлов при высоких температурах нелинейная, а ползучесть бетона, пластмасс при малых напряжениях линейная. В частности, линейная ползучесть бетона при сжатии имеет место при напряжениях., меньших приблизительно половины призменной прочности.

Температура нагрева оказывает значительное влияние на поведение образца во времени. С ее повышением наблюдается увеличение скорости ползучести и та же самая деформация при одном и том же напряжении достигается за меньший промежуток времени.

На ползучесть различных материалов кроме перечисленных оказывают значительное влияние и другие факторы. Например, на ползучести бетона сказываются водоцементное отношение, вид цемента, масштабный фактор, влажность бетона, характер заполшгтеля и т. д.

В некоторых случаях наблюдается изменение механических свойств материала во времени при неизменных внешних условиях и при отсутствии внешних нагрузок. В бетоне изменение свойств обусловлено длительными химическими процессами, происходящими в цементном камне; в пластмассах, каучуках и других материалах органического происхождения — медленно протекающими окислительными процессами. Последние приводят к тому, что через более или менее продолжительный промежуток времени указанные материалы не могут быть использованы как конструкционные. Явление изменения

механических свойств получило условное название — *старение.*

Оказывается, что деформация ползучести при старении зависит не только от продолжительности действия нагрузки, но и от момента ее приложения, другими словами, от возраста материала, в котором было произведено загружение.

На рис. 16.5 приведены кривые ползучести для бетона, полученные при нагружении образцов соответственно через 7, 14, 28 и 90 сут после их изготовления напряжением, равным 0,1 МПа. Из этих графиков видно, что начальные (упругие) деформации также зависят от возраста материала $*_0$, при котором производилось приложение нагрузки. Пунктирной линией показано изменение указанных деформаций в зависимости от времени $¿_0$. Как видно, при увеличении значения начальной деформации стремятся к константе Ео. Кривые ползучести на рис. 16.5 свидетельствуют также о том, что деформации ползучести при неограниченном возрастании времени стремятся к предельным значениям.

Если в некоторый момент времени разгрузить образец, в течение длительного времени находившийся под нагрузкой, то накопленная деформация ползучести начинает уменьшаться, асимптотически стремясь к некоторому пределу е* (рис. 16.6, *а, б).* Такое явление носит название *обратной ползучести.*

Обратная ползучесть

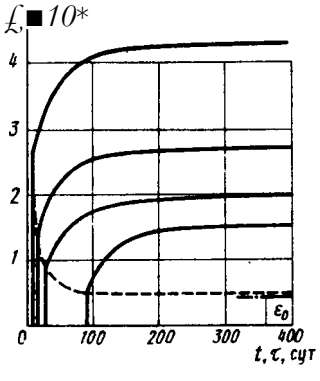


Рис. 16.5. Кривые ползучести для бетона, полученные при нагружении образцов через 7,14, 28 и 90 сут с момента их изготовления

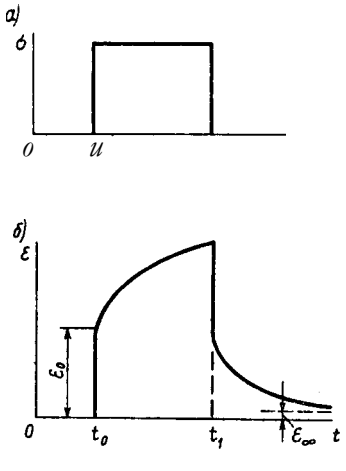


Рис. 16.6. Зависимость деформации от времени при нагружении образца и последующей его разгрузке

В частном случае линейной ползучести деформация Еад может быть равна нулю, т. е. при неограниченном увеличении времени образец полностью восстанавливает свои первоначальные размеры. Это свойство материала называется ***упругим последействием.***

■

Упругое последействие

Имеет ли место упругое последействие для стареющего материала?

Если же после некоторого перерыва вновь загрузить образец первоначальной нагрузкой, то вначале скорость деформации будет несколько большей, чем до перерыва, а затем скорость деформации и сама деформация станут равными тем, которые были при отсутствии перерыва (рис. 16.7). Однако имеются и такие случаи, в которых деформация оказывается большей, чем при отсутствии перерыва.

При рассмотрении ползучести материалов постоянной считалась внешняя нагрузка, исследовалось изменение деформаций во времени. Обратимся к другому случаю, тесно связанному с ползучестью.

Пусть имеется образец, деформация которого постоянна во времени. Напряжения в начальный момент времени принимают значение *а* (0), которое определяется упругими или упругопластическими свойствами материала. Эксперименты показывают, что с увеличением времени происходит снижение этих напряжений (рис. 16.8, ***а, б***).

Явление медленного уменьшения напряжений в образце при постоянной деформации называется релаксацией.

Релаксация напряжений

Результаты испытаний на релаксацию представляются в виде кривых релаксации, т. е. кривых зависимости напряжений от времени.

Ответьте на вопрос № 16.4

В металлических образцах при высоких температурах напряжение часто убывает до нуля.

В заключение заметим, что иногда явления ползучести, релаксации, обратной ползучести и упругого последействия называют ***ползучестью.***

В современной технической литературе термин «пол-

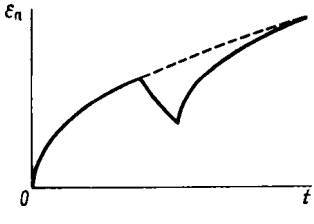


Рис. 16.7. Зависимость деформации ползучести от времени при перерыве в нагружении

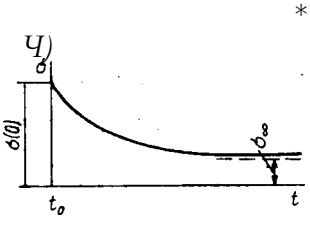


Рис. 16.8. Зависимость напряжения в растягиваемом образце от времени при неизменной деформации

зучесть» часто заменяют термином «вязкоупругость», потому в дальнейшем будем пользоваться ими в равной степени.

§ 16.2. Зависимости между напряжениями и деформациями при линейной ползучести

Из изложенного в предыдущем параграфе ясно, что для вязкоупругого материала должны быть получены такие соотношения е — сг, в которых деформированное состояние в любой момент времени определялось бы не только текущими напряжениями, но и всей предысторией нагружения.

Рассмотрим образец материала, обладающего свойством линейной ползучести, при одноосном напряженном состоянии. Внешняя нагрузка прикладывается в момент времени т>0 (рис. 16.9, *а, б).* За начало отсчета времени принимается момент изготовления образца. Температура образца постоянна и равна комнатной.

Если нагрузка постоянна, то деформация образца в момент времени / (/>т>0) определяется выражением

$$e(/, т) = <т<5 т); \qquad (16.1)$$

причем

$$8\ (*, т)=-+C\ (Г — т).$$
$$E$$

Уравнение кривой ползучести при $<_7 = 1$

Функция *С* (I—т) определяет деформацию ползучести при сг=1. Здесь предполагается, что свойства метериала не зависят от времени (материал не обладает свойством старения).

В момент времени т ползучесть проявиться не успела, потому *8* (т, т)=1 */Е.* Для />т выполняется условие С (/ —т)>0, так как деформация ползучести монотонно возрастает с увеличением времени. На ри^ 16.10 представлены кривые ползучести, которые подчиняются соотношению (16.1) и соответствуют загружению образца в моменты времени $т_ь$ $т_2$, $т_3$.

Для функции С (* — т) справедливы равенства С (г — -0 = С(т-т) = 0.

Рассмотрим общий случай, когда в момент времени $г_0$ к образцу приложена нагрузка, создающая напряжение *а* ($/_0$) и затем меняющаяся во времени (рис. 16.11, *а).*

Принцип наложения (принцип суперпозиции)

Для получения зависимостей между напряжениями и деформациями важное значение имеет принцип наложения. Согласно ему, суммарная деформация ползучести при переменном напряжении может быть найдена как сумма деформаций ползучести, вызванных соответствующими приращениями напряжений.

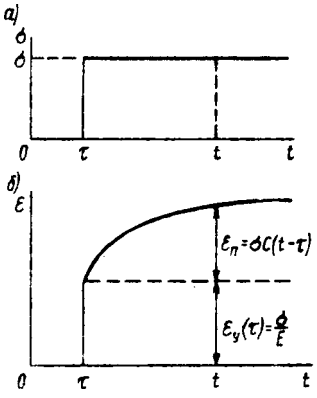


Рис. 16.9. Кривая ползуче-сти для образца, нагруженного в момент времени т

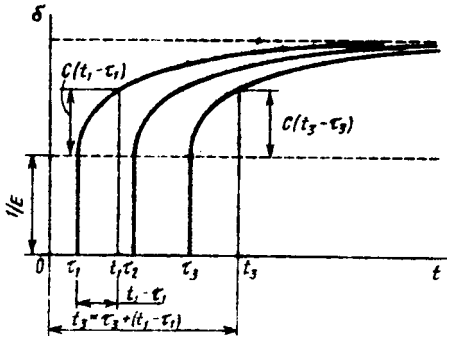


Рис. 16.10. Крвные ползучести для образ - дов, выполненных из нестареющего материала, загруженных в разные моменты времени ,

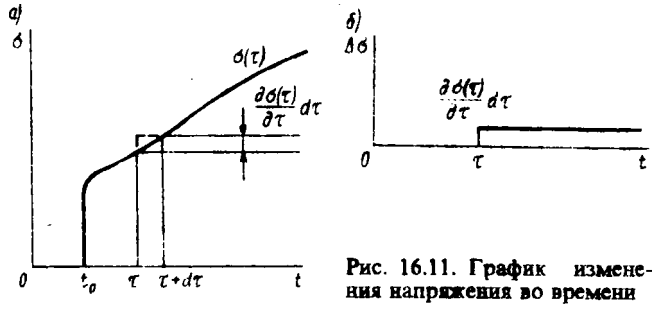


Рис. 16.11. График изменения напряжения во времени

Деформация ползучести de,, зависит от приращения напряжения *da* (г) и продолжительности его действия, но не зависит от значения и длительности действия других приращений.

Если напряжение *а* (т) на интервале времени (io, *0* описывается гладкой функцией (рис. 16.11, б), то

$$d\varepsilon(\tau)=\frac{\partial\sigma(\tau)}{\partial\tau}d\tau.$$

Итак, согласно принципу наложения, приращение **деформации ползучести определяется выражением**

$$d\varepsilon_{\text{пз}}(t,\tau)=C(t-\tau)\frac{\partial\sigma(\tau)}{\partial\tau}d\tau.$$

Полная деформация образца будет

$$\varepsilon(t)=\frac{\sigma(t)}{E}+\int_{\tau_0}^{t}C(t-\tau)\frac{\partial\sigma(\tau)}{\partial\tau}d\tau, \quad (16.2)$$

где $a\ \phi/E$ — мгновенная (упругая) деформация в момент времени /; $a\ (*_0)$ С $((— /_0)$ — деформация ползучести, вы-

в"ЭЭ1“£*'- . званная напряжением $a\ (/<,)$•

Интегральное слагаемое определяет деформацию ползучести, вызванную приращениями напряжений. После интегрирования по частям это слагаемое принимает вид

$$\} \text{ С } (/—\text{т}) — <1\text{т} = [\text{«т (О } C\ (1\text{-}1)\text{-}o\ (1_0)\ C\ (\text{Г}—/\text{о})] — \int_{'0}^{/} \partial Cu\text{-}x) \cdot \dot{a}\ (\dot{\text{т}})\ \text{ат}.$$

Так как С (* — <) = 0, то первое слагаемое в квадратных скобках равно нулю. После подстановки в уравнение (16.2) получим

;

Зависимость между деформациями и напряжениями для вязкоупругого материала

$$\text{е } (0=\sim\sim\sim+ \frac{1}{E}\int_{>0} K\ (*— *)\ (\text{т})\ \text{¿т}. \qquad (16.3)$$

Здесь введено обозначение

$$K(1\text{-т})= \frac{}{\delta\text{-}c}\ \text{С } (/\text{-т})= \frac{}{3\text{т}}\ \delta\ (<, \text{т})\text{^0}.$$

Функция $K\ ((— m)$ имеет размерность 1/(сут МПа).

Первое слагаемое в соотношении (16.3) соответствует упругой деформации, а интегральный член — деформации ползучести, накапливаемой в образце при действии нагрузки от момента времени $/_0$ ДО Функция $K\ (/ — \text{т})$ указывает, что если в момент времени т было приложено напряжение a (т), которое действовало в течение времени $Ax,$ то материал сохраняет воспоминание о действии этого напряжения в виде малой деформации (рис. 16.12, *а, б).*

$\text{¿}\pounds n = K\ (/ — \text{т})\ (\text{т})$ ёт.

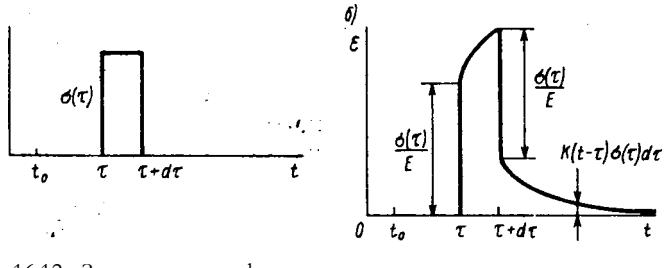


Рис. 16.12. Зависимость деформации от времени при нагружении образца напряжением a (т), действующим на протяжении промежутка времени с!т

Теория ползучести, представляемая соотношением (16.3), получила название наследственной теории ползучести.

Наследственная теория ползучести

Функция $K(t - \tau)$ может иметь различное представление. Например, в зависимости от материала для $K(t-\tau)$ используются выражения

$$K(t-\tau)=\frac{}{}, \quad K(t-\tau)=\frac{}{}e^{-\gamma(t-\tau)}, \quad 0<\alpha<1.$$

Здесь γ, κ, α — постоянные коэффициенты.

Для стареющих материалов, как уже указывалось ранее, механические свойства изменяются с течением времени. Упругие деформации и деформации ползучести зависят от того, в каком возрасте был загружен образец. Зависимость между деформациями и напряжениями, подобная зависимости (16.1), записывается в виде

$$\varepsilon(t, x) = \sigma\delta(\Lambda x), \quad \delta(t, x)=\frac{}{E(\tau)} + C(t, \tau). \tag{16.4}$$

В частности, при расчете бетонных и железобетонных конструкций для функций $E(\tau)$ и $C(t, \tau)$ часто принимают выражения

$$E(x)=E_0(1-Pe^{-\gamma x}), \quad C(t x)=\varphi(\tau)/(t-\tau);$$

$$\varphi(x)=A-\left\{\frac{B}{2+\tau}\right., \text{ или } \varphi(x)=A+Be^{-\gamma x};$$

$$\theta(x)=1-e^{-\gamma x}$$

Иногда функции $E(x)$, $\varphi(x)$ и $\theta(t-\tau)$ представляются суммами аналогичных слагаемых.

С увеличением τ функции $E(\tau)$, $\varphi(x)$ стремятся к постоянным значениям, а $\delta(t, x)$ определяется при этом соотношением

$$\delta(t x)=\frac{1}{E_a}+A[1-e^{-H\theta}] \tag{16.5}$$

Важно отметить, что при $\tau\to+\infty$ и постоянном напряжении деформация ползучести не зависит от момента **времени τ** (от возраста материала, при котором было произведено нагружение образца), а зависит только от продолжительности действия нагрузки $t-\tau$.

Количественно о деформациях ползучести и скорости их приближения к предельному значению можно судить по следующим данным, которые удовлетворительно согласуются с результатами экспериментов для бетона: E_a=20 ГПа, β=1, α = 0,03 1/сут, A = 0,09 1/ГПа, B=

Значения модуля упругости E (т), функции C т) и деформации $e_{ш}$ (при a=0,1 МПа) для разных / и т содержатся в табл. 16.1. Графики изменения деформаций е (/), соответствующие этим данным, показаны на рис. 16.5. Эти данные свидетельствуют о том, что модуль упругости E (т) с увеличением возраста бетона быстро приближается к своему предельному значению E^. Через три месяца со дня изготовления образца разница между действительным и предельным модулями упругости составляет всего 7%.

Таблица 16.1

Зшаченм модуля увдгоста, функцв *С (/,* т) ш предельной деформацп

	*B(** МПа	*(«>-С(1.т)					«¡оо'Ю5
(, сут т, сут		50	100	150	360	720	
7	3800	0,40	0,55	0,59	0,60	0,60	4,22
14	6900	0,52	0,76	0,83	0,86	0,86	2,69
28	11 400	0,53	1,03	1,17	1,22	1,22	1,95
90	18 600		0,41	1,41	1,78	1,78	1,50

Наиболее интенсивный рост деформаций ползучести наблюдается в первое время после нагружения образца, а предельное значение деформации существенно зависит | от возраста бетона к моменту приложения нагрузки. Значение е* для бетона, старением которого можно пренебречь, определяется формулой (16.5) и равно 1,4' 10~3. Уже для бетона, возраст которого достиг грех месяцев, разница составляет 7%.

Для бетона других составов и деформация, и скорость ее изменения могут существенно отличаться от приведенных. Однако характер этих изменений будет таким же.

В общем случае соотношение между напряжениями и деформациями для «стареющих» материалов записывается аналогично (16.3):

I

Зависимость *е~<т* для «стареющего» вязкоупругого материала

$$6 \setminus K_{т} > * ё_{-} \quad <0 \qquad (16.6)$$

Здесь вновь вводится обозначение

$$\boldsymbol{K}\ (\Lambda\ т) = \frac{}{\partial x} < 5\ (/, г).$$

И

Теорка наследг-вены ого старения

Теория ползучести, в основу которой положено выражение (16.6), носит название теории наследственного старения.

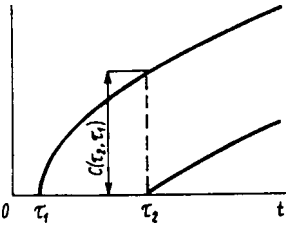


Рис. 16.13. Деформации ползучести при нагружении образца из стареющего материала единичным напряжением в разном возрасте

Соотношения наследственной теории ползучести бы- Людвиг Больцман ли предложены JI. Больцманом в 1874 г. и развиты (1844—1906) — В. Вольтеррой в 1909 г., а уравнения теории наследст- выдающийся авст венного старения — Г. Н. Масловым и Н. Х. Арутюня- римский физик ном в 40-х годах XX столетия.

В некоторых случаях при формировании зависимо- Вито Вольтерра стей между напряжениями и деформациями принимается (1860—1940) — предположение о параллельности кривых ползучести. итальянский мате-

Согласно этой гипотезе, кривые ползучести при посто- матик и механик янном напряжении $\sigma = 1$, соответствующие разным возрастам нагружения т, и $т_2$ ($т_2 > Ti$), могут быть получены следующим образом (рис. 16.13):

$$C(t, т,) = C(/. m\vartheta + C(т_2, т,),$$

причем функция $C(т_2, tj)$ является константой для выбранных значений Tj и $т_2$.

Если момент изготовления образца принять за начало отсчета времени, тогда на основании гипотезы о параллельности кривых ползучести можно записать

$$6(t.T) = \frac{-}{E(т)} + C(t) - C(T).$$

Теория ползучести, построенная на указанной гипотезе, получила название теории старения. Теория старения

Эта теория приводит при расчетах конструкций к существенным упрощениям по сравнению с наследственной теорией старения и наследственной теорией ползучести. Именно последним обстоятельством объясняется весьма широкое применение теории старения в расчетах бетонных и железобетонных конструкций. Ответьте на вопрос № 16.5

Предыдущие рассуждения относились к случаям одноосного растяжения или сжатия. При сдвиге зависимости между деформациями сдвига и касательными напряжениями имеют вид, аналогичный (16.3) и (16.6).

В дальнейшем для краткости будем записывать уравнения типа (16.6) в операторной форме:

$$8 = \frac{-}{E}(1 + К)«Г, \qquad (16.7)$$

Операторная форма соотношения

причем

$$- Кег = J K\{t, т)с(т)\,dt.$$

E

Решите задачу
16.1

Рассмотрим более детально явление ползучести, описываемой зависимостью

$$\varepsilon(t) = \sigma(t)/E + \gamma_K \int_0^t \sigma(\tau)\, e^{H(\tau - t)}\, d\tau \qquad (\varepsilon_0 = 0). \tag{16.8}$$

Покажем, что это равенство эквивалентно дифференциальному уравнению с начальным условием E (0) = $= \sigma(0)/\varepsilon$.

Умножив обе части равенства (16.8) на e^{Ht} получим

$$E\varepsilon' E(0 = e^{Ht}\sigma(*) + \gamma_K \int_0^t e^{H\tau}\sigma(\tau)\, d\tau,$$

после чего продифференцируем их один раз по времени V.

$$E(\gamma_K e + e E) = \gamma_K \sigma + e\sigma + \gamma_K H e < \tau.$$

Поделив теперь уравнение на e получим обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

Закон вязкоупругости в дифференциальной форме

$$\gamma E\varepsilon + E\varepsilon = \gamma(1 + \kappa)\sigma + \sigma, \tag{16.9}$$

решение которого должно удовлетворять начальному условию $\varepsilon(0) = \sigma(0)/E$.

Из уравнения (16.9) следуют законы деформирования простейших моделей упругого тела и вязкой жидкости.

Закон Гука получаем при у = 0

$$\varepsilon = \sigma/E,$$

или с учетом начального условия

$$\varepsilon = \sigma/E.$$

При малых напряжениях, но больших скоростях их изменения первыми слагаемыми в левой и правой частях равенства (16.9) можно пренебречь. Тело ведет себя как упругое. Подобные условия выполняются при загружении образца, в связи с чем материал в начальный момент времени может считаться упругим.

При малой скорости изменения напряжений и деформаций из уравнения (16.9) получаем закон Гука $\varepsilon = \frac{1+\kappa}{E}\sigma$

;

Мгновенный и длительный модуль упругости

с модулем упругости $H = \frac{E}{1+\kappa}$. Этот модуль носит название длительного модуля упругости в отличие от мгновенного модуля упругости E.

Если $\frac{E}{1+\kappa\gamma(1+\kappa)} = 0$, $\frac{1}{\gamma(1+\kappa)} = 0$, а $\frac{1}{EV} = -$, то уравнение (16.9) принимает следующий вид:

$$\sigma = m\varepsilon.$$

»

Вязкая жидкость

Материал, в котором между напряжениями и деформациями выполняется такая связь, называется вязкой жидкостью. Коэффициент пропорциональности ц называется коэффициентом вязкости или коэффициентом внутреннего сопротивления.

Важно отметить, что модель материала, для которого справедлив закон деформирования в форме (16.9), может быть получена как совокупность упругих и вязких элементов, соединенных между собой в определенной последовательности. Действительно, если модель упругого тела обозначить упругой пружиной, а модель вязкой жидкости — поршнем, помещенным в сосуд с вязкой жидкостью, то рассматриваемое тело конструируется из них так, как показано на рис. 16.14.

В чем заключается отличие в поведении во времени упругого тела и вязкой жидкости?

При постоянном напряжении деформация е (<) определяется выражением

(16.10)

Отсюда видно, что при выбранной функции K (*I*—т) деформация изменяется в таких пределах:

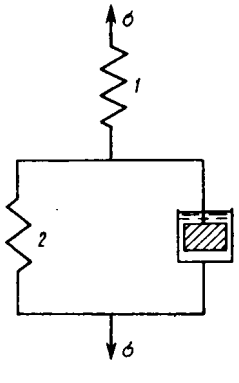
при /=0 е (0)=—;

При /-»СЮ $\pounds \leq = \cdot(1 + \kappa)\text{-}\frac{a0}{E\,H}$.

График изменения е (*) показан на рис. 16.15.

С помощью трехэлементной модели материала (см. рис. 16.14) легко объяснить такое изменение деформаций. В начальный момент времени деформация совпадает с деформацией первого упругого элемента, модуль упругости которого равен $E_X = E$. Под действием напряжений, приходящихся на вязкий элемент *3,* поршень начинает перемещаться в вязкой жидкости. По мере его перемещения часть напряжения $<т_0$ будет передаваться на второй упругий элемент *2* (с модулем упругости E_2). При этом

Сравните с поведением часто применяемых моделей Максвелла и Фойхта



вязкоупругого

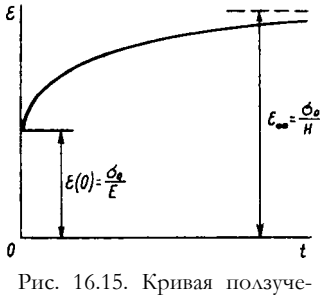
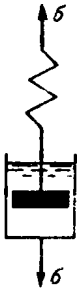


Рис. 16.15. Кривая ползучести для вязкоупругого материала

общая деформация модели увеличивается. При *1-* со* положение поршня в жидкости стабилизируется, т. е. ¿-»0. Напряжение в упругом элементе *2* приближается к $<т_0$.

Суммарная деформация модели стремится к величине

$$\pounds^{*}=\frac{(To\ (TO\ E\backslash+E_2}{E_x E_2 E_X E_1}<m_0.$$



Джемс Клэр Максвелл (1831—1879)— английский физик

Вольдемар Фойхт (1850—1919) — немецкий физик

Таким образом, длительный модуль упругости равен

$$Я«-** \dot{E}1 + E2$$

Рассмотрим нагружение образца, при котором напряжение ($г_0$ сохраняет постоянное значение на промежутке времени от 0 до а при оно тождественно равно нулю (рис. 16.16, *а).*

Деформация при описывается равенством (16.10). При упругая деформация равна нулю, в результате чего из (16.8) имеем

$$в(0=7\ \}в''т<'''*)в'\ (т)<1т,$$

или

$$в\ (/)\text{-}\sim_{в}[\}\qquad а\ (г)\ (1т+1\qquad (т)\ с1т$$

Второй интеграл в квадратных скобках равен нулю, так как $<т = 0$ при $/>*$]. Тогда

$$(0=\sim ук\ I\ е\sim^{у('\sim x)}\ дх.$$

Окончательно получим

$$е(0=7[1+\Lambda(1-Г^{т'})],$$

$$^{е}\ (*)\text{——}\ ке\sim*\ (е^{у>1}\ —\ 1),$$

Имеет ли место упругое последействие в модели Максвелла?

Из второго равенства следует, что деформация с увеличением времени полностью исчезает, т. е. рассматриваемому материалу присуще свойство упругого последействия. График полученных зависимостей представлен на рис. 16.16, *б.*

Такое поведение материала после разгрузки легко объяснимо с помощью модели (см. рис. 16.14).

При $/>/$, деформация модели определяется деформацией только упругого элемента *2* (элемент *1* не деформируется, так как напряжение в нем равно нулю). Напряжения в вязком элементе и упругом элементе *2* равны по

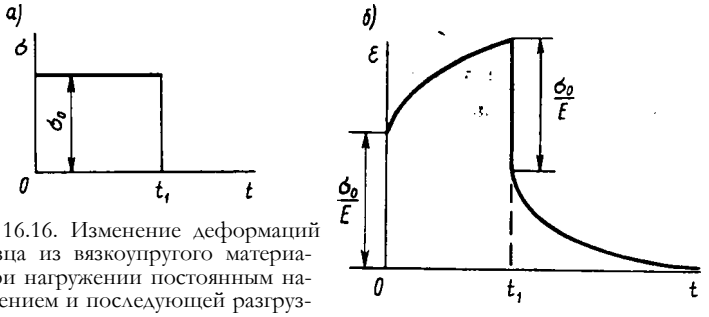


Рис. 16.16. Изменение деформаций образца из вязкоупругого материала при нагружении постоянным напряжением и последующей разгрузке

модулю, но противоположны по знаку (в упругом элементе они растягивающие, а в вязком — сжимающие). Под действием сжимающего напряжения поршень перемещается в жидкости, благодаря чему деформация элемента *2* уменьшается, а стало быть, уменьшается и действующее в нем напряжение. При /->оо положение поршня стабилизируется, т. е. ¿->0, в результате чего напряжение в вязком элементе стремится к нулю. Следовательно, напряжение и деформация в упругом элементе *2* также стремятся к нулю. Таким образом, полная деформация модели при /—»оо стремится к нулю.

§ 16.4. Релаксация напряжений

В том случае, когда известен закон изменения деформации во времени е (/), напряжение *а* (/) может быть найдено путем решения уравнения

£ (0=^ + 1 ***KO,*** т)а(т)ёт.

Уравнение, в котором искомая функция стоит под знаком интеграла, называется *интегральным.* Решение таких уравнений сопряжено с математическими трудностями, и выбор метода их решения в значительной степени зависит от вида функции *К* (/, т).

Для примера возьмем экспоненциальную функцию

КО- т)=£ $\frac{\Gamma^{\tau(''\tau)}}{E}$.

Как было показано в предыдущем параграфе, уравнение (16.6) в этом случае эквивалентно дифференциальному уравнению

$$a + y\,(1 + к)a = Ee + yEe \qquad (16.11)$$

с начальным условием е (0) = о- *(0)1 Е.*

Рассмотрим задачу об изменении напряжений в стержне, вызванных постоянной деформацией (рис. 16.17, а, *б).*

1

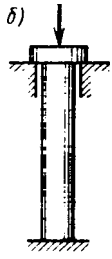


Рис. 16.17. Нагружение стержня, при котором его деформация остается неизменной во времени

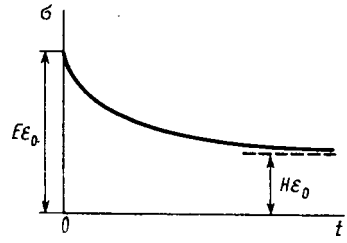


Рис. 16.18. Кривая релаксации напряжений для вязкоупругого материала

В начальный момент времени напряжение равно $a(0) = EE_{n}$, где $EQ=AЦ1$.

Напряжения в произвольный момент времени найдем из уравнения (16.11), которое при заданном воздействии принимает следующий вид:

$$\partial + y(1 + \kappa)a = yE_{в_{и}},\ \textbf{Eo=const.} \qquad (16.12)$$

Общее решение уравнения (16.12) записывается как сумма частного решения

$$\text{О'час}_{\text{т}} \sim \frac{Ee\ \text{о}}{1\ 4\text{-}\kappa}$$

и решения однородного дифференциального уравнения

$$a(t) = ce$$

где с — произвольная постоянная.

В итоге имеем

$$o\{t) = ce + \frac{}{1 + \kappa}.$$

Постоянная c находится из начального условия (при $/=\mathbf{0}$)

$$Eв^{Ee^{\circ}}_{0} = c\text{-}\frac{}{1 + \kappa};$$

отсюда

$$c = \frac{^{\kappa\ mp}Ee_{0}}{+\kappa}.$$

Окончательно найдем

$$1 + \kappa \qquad (16.13)$$

Получен закон изменения напряжений во времени в поперечном сечении стержня, подверженного постоян-

ной деформации £о. График этой зависимости представлен на рис. 16.18. При /->оо напряжение стремится к постоянному значению

$$000\ \frac{E_{во}}{1+K}$$

или

$$<T_{OO}=ЯE_0.$$

Постройте кривую релаксации для модели Максвелла

Построим кривую релаксации применительно к бетонной колонне. Будем считать, что к моменту нагружения возраст бетона достаточно большой, поэтому для функции $K(/ — т)$ справедливо выражение

$$E$$

причем у = 0,03 1/сут; £=1,8.

Подстановка этих параметров в выражение (16.13) дает возможность вычислить значения напряжения в любой момент времени:

I, сут...	О	20	40	60	/-юо
аЦЕео)...	1	0,477	0,379	0,361	0,357

Полученные результаты показывают, что при заданных характеристиках материала напряжения значительно уменьшаются во времени и при оо составляют 0,357 a_0.

Интересно отметить, что это значение напряжения достигается (с погрешностью 1%) уже по истечении 60 сут с момента приложения внешнего воздействия.

§ 16.5. Принцип Волы ерры

Линейное соотношение между напряжениями и деформациями в форме (16.7) отличается от аналогичного соотношения для упругого материала только тем, что вместо величины $1/E$ в законе Гука записан интегральный оператор $-\frac{1}{E}(1+K)$. Отсюда следует простое правило построения решения задачи теории линейной ползучести (линейной вязкоупругости), которое носит название принципа Вольтерры. Принцип заключается в следующем: решение задачи для вязкоупругого стержня или стержневой системы может быть получено так же, как решение аналогичной задачи для упругого стержня, если в процессе решения с интегральными операторами обращаться как с упругими постоянными. В результате решение представляется как произведение функции от упругих постоянных и от пространственных координат на известную функцию времени, которая описывает внешнее силовое воздействие. Далее следует заменить упругие

Принцип Во ль те рры

постоянные интегральными операторами и произвести необходимые операции над ними.

В частности, если напряженное состояние конструкции в предположении упругости ее элементов не зависит от упругих постоянных, то напряженное состояние конструкции, материал которой обладает свойством линейной ползучести, совпадает с решением упругой задачи.

Отсюда видно, что во всех Статически определимых вязкоупругих системах напряженное состояние совпадает с напряженным состоянием аналогичных упругих систем. Если внешние нагрузки остаются постоянными во времени, то и напряжения также не меняются во времени. Влияние ползучести сказывается только на числовых значениях деформаций и перемещений. Последние могут быть найдены, как и в упругих системах, по формуле Максвелла — Мора, для чего необходимо в равенстве (8.39) вместо отношений M_p/E, записать

$$E\,(1+K)M_p \ldots, \text{ или } E(t) \int_{t_0} \kappa(/, т)\, M_p(г)\, ёт, \ldots .$$

Ограничиваясь учетом только изгибающих моментов и нормальных сил, запишем формулу Максвелла — Мора для вязкоупругих систем:

$$\Delta_{np} = \int \frac{1}{E}(1+\mathbf{K})\frac{\bar{M}_n M_p}{I}\,ds + \int \frac{1}{E}(1+\mathbf{K})\frac{\bar{N}_n N_p}{A}\,ds. \qquad (16.14)$$

Для каждого участка заданной системы функции E (/), K (Л г) берутся свои.

Если конструкция является однородной, т. е. выполнена из материалов, обладающих одинаковыми свойствами, то

$$\Delta_{,} = -\frac{(1+K)}{E}\Gamma\left(\frac{1}{V}\,5_{I} + \frac{1}{E}(1+K)\,[\text{^ cЬ.} \qquad (16.15)$$

Если перемещение упругой системы с постоянным во времени модулем упругости E_0 обозначить А то равенство (16.15) можно представить следующим образом:

$$Д\text{^}O+К)\,Д\not{\text{Е}}\backslash \qquad (16.16)$$

В том случае, когда усилия M_p, $Ы_p$ неизменны во времени, выражения (16.15) и (16.16) соответственно принимают вид

$$\Delta_{np} = \delta(t, t_0)\int \frac{\bar{M}_n M_p}{I}\,ds + \delta(t, t_0)\int \frac{\bar{N}_n N_p}{A}\,ds,$$

или

Ответьте на вопрос № 16.6

Пример 16.1. Определим прогиб конца консольной балки (рис. 16.19, в),в момент времени 1в=0 загруженной равномерно распределенной нагрузкой, постоянной во времени. Материал балки является вязкоупругим, для которого

$$K(1-\Gamma^{*})\ll\frac{У^{*}}{Eo}\,\dot{e}^{\Gamma</-\ll)}$$

причем *Ео, к, у* — заданные постоянные.

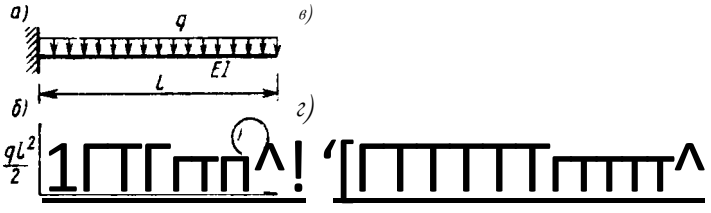


Рис. 16.19. Вязкоупругая балка, загруженная равномерно распределенной нагрузкой

Решение. Перемещение конца упругой консоли y_0 найдем, построив необходимые эпюры *М„ Мр* (рис. 16.19, *б*—г) и вычислив интеграл Мора:

$$У_0=\frac{41^{*}}{8\,Eo1}.$$

На основании принципа Вольтерры перемещение в момент времени *I* можно получить из равенства (16.17), причем

$$Eo\partial\,(/,\,\imath_0)=1+|\,y\kappa e^{\,y}\,{}^{\prime}{}^{*}\,ёт\ll 1+A:\,(1-e^{\,P}).$$

Итак,

$$y(1)=LI+\kappa(1-\dot{e}^{\,-y\,\gg})\frac{41^{*}}{oEo1}.$$

Как видно, при постоянной нагрузке прогиб изменяется во времени по экспоненциальному закону, достигая при *1-*со* предельного значения $Уоо = (1+Ф\ Уо.$

В статически неопределимых упругих системах распределение усилий либо не зависит от упругих постоянных, либо зависит.

В первом случае, как и в статически определимых системах, напряженное состояние при ползучести совпадает с напряженным состоянием упругой системы, если функции E (О, K 0, г) одинаковы для всех элементов конструкции. Меняется только деформированное состояние.

Во втором случае, который может встретиться, например, при расчете конструкций из разномодульных материалов, изменение во времени претерпевает не только деформированное, но и напряженное состояние.

§ 16.6. Поведение вязкоупругих статически неопределимых систем

Особенности работы статически неопределимых неоднородных вязкоупругих систем проиллюстрируем на примере комбинированной системы (рис. 16.20, *а),* состоящей из упругого элемента *1* и вязкоупругой балки 2. Нужно определить усилия в элементах системы, возникающие под действием постоянной во времени нагрузки. Подвеска *1* имеет модуль упругости E_x и площадь поперечного сечения A; балка имеет модуль упругости E, функцию $K(t - \tau) = \frac{}{E} e^{-r(t-\tau)}$, момент инерции I.

Заметим, что аналогичная задача, но для упругой системы рассматривалась выше (см. § 9.3).

Рассматриваемая система является один раз статически неопределимой. В качестве основной системы выбираем систему с разрезанной подвеской, в которой действует неизвестное усилие X_1 (рис. 16.20, *б).*

Эпюры внутренних усилий от единичного неизвестного и нагрузки показаны на рис. 16.20, *в, г.*

Запишем каноническое уравнение в виде

$$-\Delta_1 + \Delta_{1?} = 0,$$

где $\Delta_{П} X_и \Lambda_{1?}$ — условная запись перемещений по направлению неизвестного X_1 соответственно от самого этого неизвестного и от нагрузки с учетом вязкоупругих свойств материала.

*)

н НИИ
1 Л

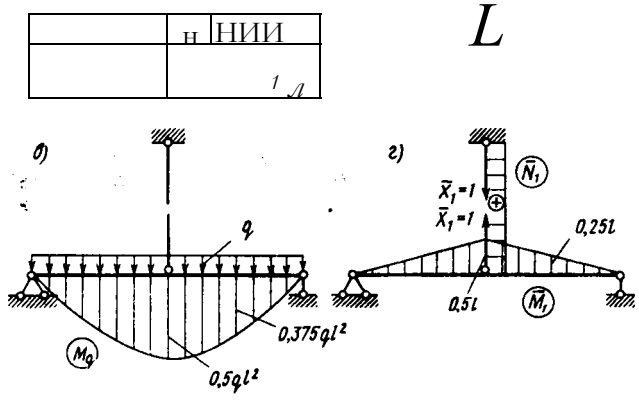


Рис. 16.20. Комбинированная вязкоупругая неоднородная статически неопределимая система *(а),* основная система *(б)* и эпюры внутренних усилий от нагрузки (в) и единичного неизвестного (г)

Первое слагаемое состоит из двух составляющих, учитывающих деформацию упругой подвески и вязкоупругой балки:

$$\&_{\text{п}} X_1 = \&|_x X_1 + \&^r{}_{\text{п}} X_x|$$

причем при ¿о — 0

$$E\backslash A \qquad (\text{о}, *?,*,=(!+\text{к})5?\text{г}*\text{лг},=$$

$$=\text{ш}|*^1 \ ^ + \text{б}|\text{к}(1\text{-}\text{х})X_1 \ (\text{т})\text{с}!\text{т}|$$

Грузовое перемещение

После подстановки этих выражений в каноническое уравнение получим интегральное уравнение

$$\{\text{Б}+^)\text{х}\,\text{ь}\,'^\text{к}\{1\_\text{г})\text{х}\text{л}\,^=$$

$$=\frac{1+E\backslash\text{к}(1\text{-т})\text{с}!\text{т}}{2AE1\backslash\_\text{о}}$$

или

$$\text{X}, (_{)+}2^\} \underset{1+^0}{\Gamma^{\text{тм}}X_{\text{х}}} (\text{т})\text{с}1\text{т}=\text{-}**\text{-} \ |\,|+\text{ук}|\ \underset{4\ (1\ +\text{л})\ |\_\ ^{\}_0}{\text{е}^\text{йх}} \qquad (16.18)$$

Здесь

$$1\ 6\ \kappa E1$$

$$\text{ц}\ ExA1^{\text{ъ}}$$

Решение уравнения (16.18) может быть найдено аналогично тому, как было получено решение задачи о релаксации напряжений (см. § 16.4).

В дальнейшем ограничимся отысканием значений X_1 (/) для двух моментов времени: /=0 и /-»оо.

При / = 0 интегральное слагаемое в уравнении (16.18) обращается в нуль, т. е. система испытывает мгновенные (упругие) деформации

$$\text{X}, (0)=\underset{4(1+/.)}{\text{-}^\text{-}}.$$

Остановимся на определении значения $X\backslash$ при /-»сю.

Для «нестареющего» материала деформация ползучести не зависит от конкретного момента приложения нагрузки т, а зависит только от разности времен /—т. При фиксированном значении т и при /-»оо указанная разность (/ — т)-»оо. То же самое произойдет, если зафиксировать

момент времени / и перенести момент времени г в — оо. Поэтому для нахождения значения $X_x(/)$ при /-»оо можно

перенести начало отсчета времени (НИЖНИЁ предел в интеграле) в — оо.

Тогда уравнение (16.18) запишется следующим образом:

$$*1\ (\text{ОН}\text{-----}\ |\ e\ \Lambda\Gamma,\ (\text{т})\text{с1т} =$$

$$\left\{1 + \text{yifc}\ J_e\text{-}^{\text{Tt}_1\text{-}f_1}\text{dT}\right. \tag{16.19}$$

причем интегральное слагаемое в правой части равно постоянной κ. Действительно,

$$= \kappa\ (1\text{-}0) = \kappa.$$

Будем искать решение уравнения (16.19) в виде $X_x(\text{O} = X\backslash\ (\text{оо}) = \text{const}$. Вынося X, (оо) из-под интеграла, получим

$$X_x\ (\text{оо}) + \text{ДГ, (оо)-^-}\ J\ e\text{~}\kappa(\text{~}\wr dz\text{=-^-}\ (l+k).$$

После вычисления интеграла найдем

$$X_x\ (00) = \frac{5\ (1+k)m l}{4[1+(!+*)\#.]}$$

Интересно обратить внимание на то, что это решение может быть получено минуя решение интегрального уравнения из упругого решения путем замены в нем мгновенного модуля упругости E длительным модулем $E/(1+\kappa)$. Можно доказать, что такая замена возможна всегда, если закон деформирования имеет вид (16.3).

На рис. 16.21 представлен график изменения функции X_1 (0 во времени. Как видно, усилие в подвеске (в упругом элементе) увеличивается во времени.

На рис. 16.22 представлена эпюра изгибающих моментов для случая, когда $\mu = 2$ (этот же случай рассмотрен в § 9.3). Сплошной линией отмечена эпюра M при / = 0 и пунктирной — для бесконечно удаленного момента времени в предположении, что $\kappa = 2$. Эпюры свидетельствуют о том, что распределение усилий изменяется не только количественно, но и качественно. В начальный момент изгибающий момент под подвеской был положительным, а при неограниченном увеличении времени он становится отрицательным. Это обстоятельство должно учитываться при конструировании балки. С другой стороны, изгибающий момент в середине левого или правого пролета балки при / = 0 оказывается в —1,5 раза больше момента при /-+ оо.

Ответьтс на вопрос № 16.7

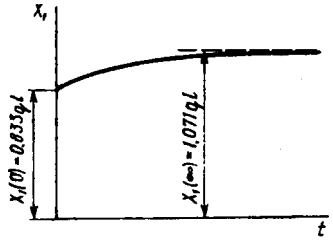


Рис. 16.21. Зависимость неизвестного усилия $X\backslash$ от времени

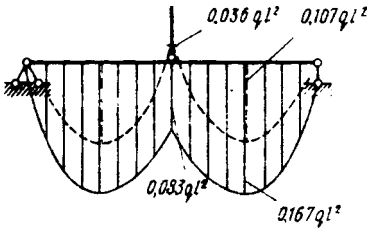


Рис. 16.22. Эпюры изгибающих моментов в балке для моментов времени {=0 и «-»со

Если жесткость подвески мала подвеску можно не учитывать при расчете балки. Система превращается в статически определимую. Усилие в такой системе не меняется во времени. Если же подвеска абсолютно жесткая (/*—»■ оо), то система представляет собой неразрезную двухпролетную балку на жестких опорах. Оказывается, что усилия в такой балке тоже не изменяются во времени.

Приведенный пример иллюстрирует особенности работы неоднородной статически неопределимой системы, в которой иногда происходит значительное перераспределение внутренних усилий.

Решите задачи 16.2, 16-3

§ 16.7. Длительная прочность материалов

При анализе работы конструкций, материал которых обладает свойством ползучести, приходится считаться с двумя факторами: с одной стороны, с возможностью появления недопустимо больших деформаций и перемещений, с другой — с возможностью ее длительного разрушения.

Для оценки прочности материала при ползучести используется понятие предела длительной прочности.

Пределом длительной прочности a_m называется мини- Я

мальное постоянно действующее напряжение, которое Предел длитель
при заданной длительности работы образца приводит ной прочности
к его разрушению.

Ранее уже отмечалось, что испытание образцов при ползучести иногда заканчивается их хрупким или вязким разрушением. Хрупкое разрушение связано с накоплением повреждений в материале, в частности в поликрист аллических **материалах** с развитием многочисленных трещин по границам между зернами. При вязком разрушении трещины развиваются внутри зерен.

Иногда указанные типы разрушения проявляются одновременно, давая картину смешанного разрушения.

В образцах, изготовленных из одного и того же материала при различных нагрузках, могут наблюдаться и хрупкое, и вязкое разрушения. Как правило, при умень-

шении напряжения и соответственно увеличении длительности пребывания образца под нагрузкой деформация к моменту разрушения уменьшается, а характер разрушения становится хрупким.

В отличие от предела кратковременной прочности, о котором шла речь в первых главах, понятие предела длительной прочности материала оказывается связанным со временем. ***Промежуток времени от момента нагружения до момента разрушения образца называется долговечностью.***

Долговечность материала

Каждому значению постоянно действующего напряжения отвечает свое значение долговечности. С увеличением напряжения долговечность образца снижается.

График изменения предела длительной прочности как функции времени обычно представляется в двойных логарифмических или полулогарифмических координатных осях (рис. 16.23). Этот график имеет вид ломаной линии, состоящей из двух прямых. Прямая с меньшим углом наклона соответствует вязким разрушениям, а прямая с большим углом наклона — хрупким разрушениям. Иногда точка пересечения прямых выявляется четко, а иногда существует некоторый криволинейный переходный участок. В некоторых случаях перелом в диаграмме отсутствует вовсе.

Вязкое и хрупкое разрушение материала

Если говорить о длительной прочности бетона, то считается, что он определяется характером структурных дефектов, вызванных длительно действующей нагрузкой. Если дефекты не возникают, то это означает, что действующее напряжение не превосходит предела длительной прочности. При напряжениях, меньших предела длительной прочности, дефекты также могут возникать, но при условии, что их развитие прекращается во времени. Для достаточно большого времени нагружения, равного времени эксплуатации сооружения (~50...70 лет), предел длительной прочности бетона принимается равным $\sim 0{,}8\sigma_{т_в}$, где $<x_в$ — призменная прочность бетона (кратковременная).

Среди материалов, работающих в условиях комнатных температур, вопросы длительной прочности особенно важны для древесины и композитных материалов,

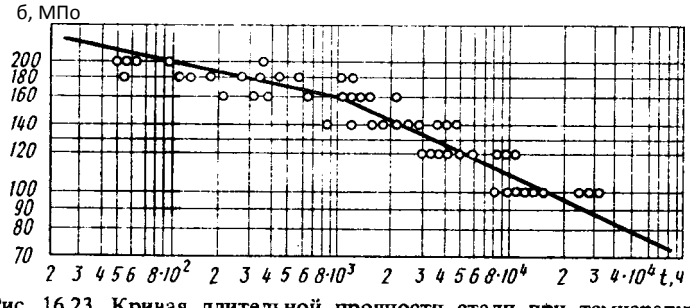


Рис. 16.23. Кривая длительной прочности стали при температуре 525°С

выполненных на основе полимеров (стеклопластики, полимербетон и т. п.).

Для древесины можно привести следующие данные: предел кратковременной прочности сосны при сжатии и растяжении вдоль волокон соответственно равен ~76 и — 111,5 МПа, а предел длительной прочности при тех же нагружениях ~44 и ~ 56 МПа; слоистый пластик ДСП-В (материал, изготовленный из тонких листов лущеного березового шпона, пропитанного синтетическими смолами) при кратковременном нагружении имеет предел прочности при сжатии и растяжении вдоль слоев шпона вдоль волокон рубашки одинаковый и равный —148 МПа, а предел длительной прочности ~75 МПа.

Отсюда **видно,** что пределы длительной прочности древесины для времени нагружения, равного сроку службы конструкции, могут быть меньше половины предела кратковременной прочности.

В табл. 16.2 представлены результаты длительных испытаний однонаправленного стеклопластика на эпоксидном связующем при растяжении вдоль волокон. Целью этих экспериментов являлось определение долговечности образцов при фиксированных значениях действующих напряжений.

Таблица 16.2

Значения долгов*'■остей однонаправленного стеклопластика пря разных уровнях растэтваМмцих напряжен!« при комнатной температуре (Г=20°С)

ф»	Inf, с	(
0,8	8,11	55,5 мин
0,7	11,49	27,1 *ч*
0,6	16,68	4872,2 *ч*

Здесь $a_ш$ — предел кратковременной прочности стеклопластика, равный 780 МПа.

Для прогнозирования долговечности материалов часто используются экспоненциальная $t=ae^{-ba}$ или степенная $t=a^{-\beta}$ зависимости.

Следует отметить, что долговечность материалов резко снижается при повышении температуры. В табл. 16.3 представлены результаты испытаний образцов однонаправленного стеклопластика на эпоксидном связующем при растяжении вдоль волокон при температуре 80°С.

Сопоставление данных, содержащихся в табл. 16.2 и 16.3, свидетельствует о том, что увеличение температуры на 60°С ведет к уменьшению долговечности, особенно заметному при меньших напряжениях.

Длительная прочность и долговечность материала зависит также от других факторов: влажности, «возраста» материала, состава (например, бетона) и др.

Заменяя долюве<ш>стей одяонаоравлеоюго стеклопластик» оря разных уроянх растагияаюпяп нпряжемй пря температуре 7'=80°С

Фя	1п(, с
0,75	5,92 6,2 мин
0,70	8,07 53,3 мин
0,65	9,98 359,8 мин
0,60	12,63 84,9 ч

§ 16.8. Выпучивание вязкоупругого стержня, имеющего начальное искривление

В гл. 15 рассматривался продольно-поперечный изгиб сжатых упругих стержней; исследовалось влияние продольной сжимающей силы на величину прогибов и напряжений в поперечном сечении. В результате было установлено, что и перемещения и напряжения резко увеличиваются по мере приближения продольной силы к критическому значению. Аналогичные задачи в условиях ползучести приобретают особенно важное значение. Остановимся на одной из них.

Рассмотрим вязкоупругий стержень, шарнирно опертый по концам и сжатый продольной силой *Г* (рис. 16.24). Сила приложена в центре тяжести крайних сечений. В исходном состоянии (при отсутствии нагрузки) стержень имел начальный прогиб y_0 (г). В момент приложения силы F прогиб стержня принимает значение v *(г,* 0). При длительном действии нагрузки прогиб V *(г, ()* нарастает во времени.

При решении задачи принимаем зависимость между напряжениями и деформациями в виде

$$e\,(0=\hat{}+\frac{1}{E}\,K\,(/ - т)\,сг\,(г)ёт.$$

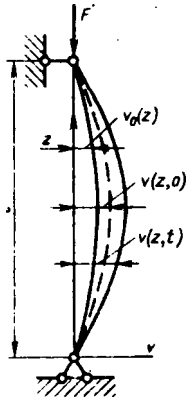


Рис. 16.24. Продольный изгиб сжатого вязкоупругого стержня, имеющего начальный прогиб

В поперечном сечении стержня появляется изгибающий момент $M=Py$. Относительная деформация в точке равна

$$\left[\frac{\partial^2 \backslash}{\partial z^2}\right. \quad (r, \quad r) \quad \left.\frac{\delta^2 \backslash_0}{\delta z^2}\right] W$$

В соответствии с принципом Вольтерры изменение кривизны стержня определяется из выражения

$$\frac{\partial^2 \backslash}{\delta z^2} - \frac{\partial^2 \backslash_0}{\delta z^2} = \frac{F}{EI}\Big|_0 + \int_0^t EK(t-\tau)\, y(z,\tau)\, d\tau \qquad (16.20)$$

Предположим, что начальный прогиб стержня описывается синусоидой

$$v_0(z) = f_0 \sin \frac{\pi z}{l}.$$

Решение уравнения (16.20) ищем в виде

$$v(z, t) = f(t) \sin \frac{\pi z}{l}.$$

Форма прогиба в любой момент времени остается неизменной, меняется только его амплитуда.

После подстановки в уравнение (16.20) получаем

$$\frac{f(t)}{l^2}\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 + \int_0^t EK(t-\tau) f(\tau)\, d\tau \sin \frac{\pi z}{l} = \frac{F}{EI} \sin \frac{\pi z}{l}, \qquad (16.21)$$

где

$$a = \frac{F l^2}{\pi^2 EI} < 1$$

Это соотношение должно выполняться для любого z, что оказывается возможным при условии соблюдения равенства

$$\frac{f(t)}{1-a} + \int_0^t \frac{f(\tau)}{1-a} EK(t-\tau)\, d\tau = A. \qquad (16.22)$$

Примем функцию $EK(t-\tau)$ равной

$$EK(t-\tau) = \gamma e^{-\gamma(t-\tau)}$$

В таком случае решение уравнения (16.22) может быть получено так же, как было найдено решение задачи о релаксации напряжений в § 16.4. Опуская все выкладки, запишем

$$f(t) = \frac{A}{1-a}\left(1 - \frac{a}{1-a}\right) + \frac{a}{1-a}\left(1 + A\gamma\right) e^{-\frac{1}{1-a}\gamma t} \qquad (16.23)$$

$$v\ (z,\hat{n}) = \frac{1}{\backslash\ 1 - a\ y\ 1 - a\ (1 + \kappa)\ I}\, e \cdot \sin - z.$$

Характер движения стержня определяется функцией e^{-yft}, которая, оставаясь всегда положительной, может стремиться к нулю, если $/?>0$, или неограниченно возрастать, если $/?<0$:

при $/?>0$

$$0 < a < и\ л\ и\ \ 0<.F<.F_a; \qquad (16.24)$$

при $/?<0$

$$Y^<a<i, \text{ или } F_a<F<F_w \qquad (16.25)$$

где

$$\_ \frac{*E1}{я\text{-}(1 + k)l^2} \qquad \_\frac{n^2E1}{M\sim\sim F'}$$

Границей, разделяющей случай неограниченного роста функции $e^{\sim y9'}$ от случая ее убывания, является значение $/? = 0$, что соответствует

$$a = l + fc \qquad C^{16'26*}$$

Заметим, что при $/J \to 0$ зависимость (16.23) приводит к неопределенности типа $0/0$. Раскроем ее, разложив функцию $e^{-\gamma\alpha}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $/?=0$. Выражение (16.23) принимает вид

$$/(/) = \{\frac{}{) 1 - a\ 1!\ [1 - a\ (1 + й:)]\ (1 - a)} - yfit\text{-}$$

$$21\ [1\text{-}ot\ (1 + \underline{/})]\ (!\text{-}«)\ \frac{cdc}{\mathcal{N}\!\!\!\!\!\!\text{-}^2 +}\ \text{-}\bullet I^{\Lambda}$$

Учитывая, что $\frac{P\ 1}{1\text{-}a(1+*)\ 1 - *} = \frac{}{}$, при $B = 0$ находим

$$/_{(0 = (1 + y/)\ Л}\ _{1 - a}$$

Значениям нагрузки P, ограниченным неравенствами (16.24) и (16.25), отвечают кривые, показанные на рис. 16.25, где по вертикали откладывается безразмерная амплитуда прогиба, равная

$$/(о\ Л\ .\text{-}»¿Л^{1\_a}$$

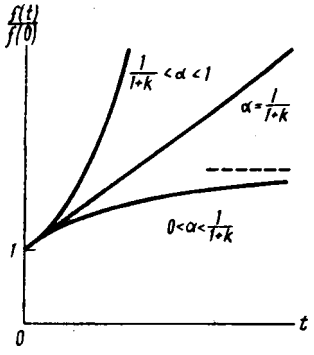


Рис. 16.25. Графики изменения безразмерной амплитуды прогиба стержня во времени при различных значениях параметра *а*

Наклонная прямая соответствует равенству (16.26).

При $0<P<P_a$ амплитуда прогиба возрастает во времени от значения $f(0)$ в начальный момент времени до конечного значения

$$f_{\text{ув}} = \frac{f}{1 - a(1+k)},$$

приближаясь к нему асимптотически при $t \to \infty$.

Нужно отметить, что для получения предельного прогиба нет необходимости решать уравнения (16.20) и (16.22). Достаточно решить задачу для упругого стержня, модуль упругости которого равен длительному модулю H.

При $P_0<P<P_u$ прогиб неограниченно увеличивается во времени. Чем ближе значение силы P к $P_м$, тем интенсивнее происходит рост перемещений.

При $P=P_{Ы}$ прогиб мгновенно обращается в бесконечность. Конечно, это утверждение условно. Прогиб остается конечным при любой силе P, если не происходит разрушение стержня. Такой результат оказался возможным потому, что выражение для кривизны стержня было принято приближенным.

В упругих стержнях при продольно-поперечном изгибе прогиб становится неограниченным при $P=P_Э$ (где $P_э$ — эйлерова критическая сила). При $P<P_э$ стержень считался устойчивым, при $P>P_Э$ — неустойчивым. ■

По аналогии можно утверждать, что движение вязкоупругого стержня устойчиво при $0<P<P_д$, *а при* $P>P_д$ — *неустойчиво.*

Границы устончмвости вязкоупругого стержня

Границей областей устойчивого и неустойчивого движений является значение $P=P_д$, *называемое длительной критической нагрузкой в отличие от силы* $P_м$, *которая называется мгновенной критической нагрузкой.*

Длительная критическая нагрузка

мгновенная критическая нагрузки

Обе эти критические нагрузки определяются по формуле Эйлера; только в первом случае берется длительный

модуль упругости H, а во втором — мгновенный модуль упругости E.

Если H— 0, что соответствует неограниченной ползучести материала, то $/^ = 0$ и, следовательно, при любой отличной от нуля сжимающей силе P прогибы стержня неограниченно растут во времени.

Из всего изложенного можно сделать вывод: при сжимающей силе P^P_a стержень может находиться в эксплуатации лишь в течение ограниченного промежутка времени; при $P<P_Д$ прогибы стремятся к конечному пределу:

При P-*P_a этот предел оказывается достаточно высоким, что также может привести к разрушению стержня.

Для количественной оценки возможного снижения длительной критической нагрузки P_a по сравнению с мгновенной критической нагрузкой $P_{вы}$ рассмотрим бетонную колонну с характеристиками бетона, приведенными в § 16.2. Если возраст бетона к моменту приложения нагрузки больше трех месяцев, можно считать, что $£=£^ = 20$ ГПа, $K(1-x) = 1,Ъуе^{-и'(\sim x)}/E$.

Между $P_{вы}$ и $P_в$ имеет место зависимость ^„=2,8^.

Для подтверждения реальности соотношений вида (16.23) укажем на известный пример опытней бетонной колонны, сжатой эксцентрично приложенной силой P. Прогиб колонны увеличивался во времени с момента приложения нагрузки, пока по истечении семи лет со дня загружения колонна не разрушилась.

Это лишний раз подчеркивает, что в сжатых стержнях, материал которых обладает свойством ползучести, малость прогибов и прочность в начальный момент времени не гарантируют малости прогибов и прочности по прошествии большого промежутка времени.

§ 16.9. Нелинейная ползучесть материалов

Для вязкоупругих материалов интегральные соотношения типа (16.3) и (16.6) достаточно точно отражают зависимость между деформациями и напряжениями во времени при изменении последних в соответствующих границах. В области нелинейной ползучести подобных универсальных зависимостей, которые бы удовлетворительно описывали процесс деформирования различных материалов, при разных законах изменения напряжений в различных температурных условиях нет. Объясняется это тем, что явление нелинейной ползучести чрезвычайно сложно и зависит от многих факторов.

Достаточно общие соотношения, которые могли бы

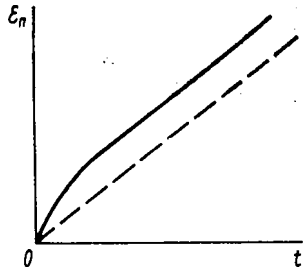


Рис. 16.26. Кривые неустановившейся и установившейся ползучести

их отразить, оказываются исключительно сложными и потому при решении практических задач влекут за собой большие трудности.

В настоящее время в инженерных расчетах получили распространение упрощенные теории: старения; течения; упрочнения; наследственной ползучести. Дадим краткую характеристику каждой из них.

Теория старения. Вернемся к типичной кривой ползучести, рассматривая на ней лишь фазу неустановившейся и установившейся ползучести (рис. 16.26). Полученный график соответствует выражению

Теория старения

$$e=a/E+(p\ (<m,\ (),\qquad (16.27)$$

где предполагается, что в начальный момент времени напряжение не превосходит предела пропорциональности.

Функция *(p (a, /)* обычно берется в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от напряжения, а другая — только от времени, что возможно в тех случаях, когда кривые ползучести подобны (см. § 16.2)

$$<P\ (^{\circ},\ *)=/(<z)\ \boldsymbol{\Phi}\ (0-\qquad (16.28)$$

Функцию */ (a)* часто принимают степенной:

$$/(<x) = <т^{т},\qquad (16.29)$$

для металлов при высоких температурах, например, $m = 3$ и более.

Теория старения предполагает, что соотношение (16.27) остается справедливым и при переменных напряжениях.

Заметим, что теория старения не имеет отношения к процессу «старения» материала.

Теория течения. В этой теории постулируется связь между скоростью изменения деформации е, с одной стороны, и скоростью изменения напряжения *а,* напряжением и временем — с другой:

Теория течения

$$e=\frac{\cdot}{E}+\text{ф}\ (a,\ I).\qquad (16.30)$$

Для Ф *(a,* 0 используются выражения типа (16.28).

Уравнение (16.30) справедливо при не слишком малых

скоростях ползучести и при медленно и монотонно меняющихся напряжениях.

Если деформации ползучести значительно превосходят упругие деформации, первые слагаемые в равенствах (16.27) и (16.30) можно опустить, принимая

$$e=\varphi(c,/), \tag{16.31}$$

$$¿=\Phi\ (a,\ 0- \tag{16.32}$$

В том. случае, когда функция Ф *(a,* 0 не зависит от времени, уравнение (16.32) определяет процесс установившейся ползучести и тело, находящееся в состоянии ползучести, можно рассматривать как нелинейно вязкую жидкость. Такой закон деформирования соответствует пунктирной прямой, показанной на рис. 16.26. Несмотря на кажущуюся грубость замены кривой ползучести прямой, результаты расчетов при достаточно больших г оказываются близкими к действительным'.

Из-за предельной простоты теории старения и течения получили широкое распространение в инженерных расчетах.

Теория упрочнения

Теория упрочнения. Под упрочнением подразумеваются такие изменения в материале, которые происходят по мере накопления деформаций ползучести и приводят к снижению скорости ползучести при заданных напряжении и температуре.

В простейшем случае мерой упрочнения служит деформация ползучести Ец, поэтому принимается зависимость

$$¿=\underset{E}{4}+'A\ (ёш\ O)-$$

Функцию $\varphi\ (\pounds_{„},\ a)$ часто представляют в виде

$$\Phi\ (e_{п},\ ет) = e\text{-}'/(<г).$$

Теория упрочнения удовлетворительно описывает ползучесть при не очень сложных законах изменения внешних нагрузок.

Наследственная теория

Теория наследственной ползучести. Для некоторых материалов напряжения и деформации связацы интегральными соотношениями вида

$$\int_{/o}^{\kappa}(‘л)e[<m(m)]<1m,$$

или

$$\hat{}\ [\pounds\ (0] = <7\ (0+1\ K\ 0\ —г)\ a\ (т)с1т,$$

$$'o$$

которые являются естественным обобщением аналогичных уравнений линейной ползучести.

Здесь *в* [<х (г)], А [е (/)] — нелинейные функции напряжения и деформации соответственно.

Первое из этих выражений используется для бетонов, а второе — для металлов.

Отметим, что выполнение расчетов с применением теории упрочнения и теории наследственной ползучести сопряжено с большими математическими трудностями.

Рассмотрим примеры, иллюстрирующие влияние не- Решите задачу 16.4
линейной ползучести на напряженное и деформированное состояние деталей машин и конструкций.

Првмер 16.2. В стержневой системе, показанной на рис. 16.27, *а*, средний стержень обладает свойством ползучести, описываемой законом (16.30), причем Ф *(а, I)=Во",* а боковые стержни упругие с модулем упругости £2. Найти напряжения и деформации элементов *1, 2* при действии на систему постоянной во времени силы *Р.*

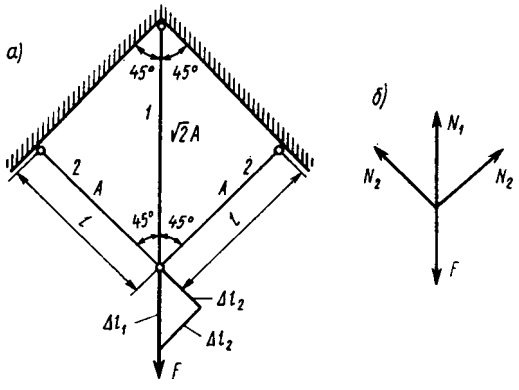


Рис. 16.27. Статически неопределимая стержневая система

Решение. Из равновесия-узла (рис. 16.27, *6)* следует

ЩЩ + ^2ЩЩ=Е.

Поделив обе части этого уравнения на -^2*А,* приходим к равенству

$$a_1 + a_2 = <m, \qquad (16.33)$$

Где использовано обозначение $<т = \frac{Б}{^2 А}$.

Из уравнения неразрывности деформаций

ЫЩ/гЫг

следует

$$£1 = *2' \qquad (16.34)$$

Подставляя выражения для ¿| и «2

$$B1\frac{a|}{E_x} + Ba^{\wedge},\ г_2 = \frac{o_2}{Eг}$$

в равенство (16.34) с. учетом соотношения (16.33), получим дифференциальное уравнение

$$<X\left|\frac{E_1 B}{1+\lambda}\right.-<x''=0;$$

здесь

$n=E[/E_2$.

Решение уравнения (16.35) имеет вид

$$<П=\text{----}\frac{n}{1+\lambda}\,a\,\text{---}\,\tau\text{—}\,1\,*$$

т-1 *I m-1 / n* V

/1 H------ *E*\ *B* (-------*a*) /

V л + 1 \1+и *)*

где использовано начальное условие

$$<г, (0)=\frac{}{1+\lambda}\,a.$$

Соответственно

$$02 — O''—0''\ 1, \frac{<т— eT|}{\$\Gamma'} = \text{'}$$

Результаты показывают, что с увеличением времени напряжение в стержне *1* уменьшается, стремясь к нулю, а напряжения в стержнях *2* увеличиваются, стремясь к постоянному значению *а.* Другими словами, элемент *1* выключается из работы в процессе деформирования, а сила *P* целиком воспринимается только стержнями *2.* Деформации остаются ограниченными, приближаясь к постоянному значению

Ответьте НЯ ВОП- <л

$$*2»=\frac{a}{}.$$

Пример 16.3. Рассмотрим задачу о ползучести балки прямоугольного поперечного сечения при чистом изгибе (рис. 16.28).

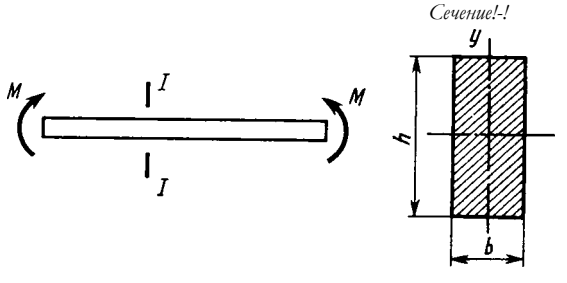


Рис. 16.28. Чистый изгиб балки прямоугольного поперечного сечения

Решение. Найдем распределение напряжений в поперечном сечении балки при установившейся ползучести, принимая зависимость (16.32)

$$\ddot{e} = Ba^m, \qquad (16з6)$$

где *m* нечетно.

Предполагаем справедливым закон плоских сечений, т. е. * = *у, причем ж — кривизна балки.

Из уравнения равновесия имеем

$$M\sim 1<z\mathcal{U}A = в(?\backslash Ч^m \mid y^{(+m)1m}(1y=[-\backslash^{1m}1_m \qquad (16.37)$$

$$\mathcal{A} \qquad —A/2 \qquad \backslash в/$$

Рис. 1*629*. Эпюры нормальных напряжений в поперечном сечении балки при установившейся ползучести для различных показателей степени *m*

Здесь в — скорость изменения кривизны;

$$I_m = b \int_{-h/2}^{h/2} y^{(1+m)/m}\, dy = \frac{2}{2 + \frac{1}{m}}\, b \left(\frac{h}{2}\right)^{(2+1/m)}.$$

Выражая из (16.37) скорость ж и подставляя в равенство (16.36), получим

$$\dot{æ} = B \left(\frac{M}{I_m}\right)^m; \quad \sigma = \frac{M}{I_m} y^{1/m}. \tag{16.38}$$

Таким образом, при нелинейной ползучести распределение напряжений изменяется от линейного (в начальный момент времени) до распределения, определяемого формулой (16.38), которое является предельным. Достигается оно при установившейся ползучести при /-юо. Формулой (16.38) можно пользоваться и при четном *m,* только для этого нужно учитывать изменение знака сри изменении знака координаты *у.* Эпюры нормальных напряжений представлены на рис. 16.29 для разных *m,* где по горизонтальной оси откладывается отношение напряжения *с* к напряжению, которое появляется в начальный момент времени в верхних волокнах балки. И? рисунка видно, что с увеличением *m* распределение напряжений становится подобным распределению нормальных напряжений в предельном случае для идеального упругопластического материала (яя рис. 16.29 покачано пуякти ром).

x

Вопросы для самоконтроля к главе 16

16.1. Возникают ли деформации ползучести при напряжениях, меньших предела текучести, или они появляются только при напряжениях, больших предела текучести или равных ему?

16.2. Всегда ли деформации ползучести растут неограниченно во времени?

163. Есть ли разница между пластическими деформациями и деформациями ползучести и если она есть, в чем заключается?

16.4. Что есть общего и в чем заключается различие явлений ползучести и релаксации напряжений?

16.5. В чем разница между наследственной теорией, теорией наследственного старения и теорией старения?

16.6. В чем особенности изменения напряженно-деформированного состояния статически определимых однородных и неоднородных вязкоупругих систем?

16.7. В чем особенности изменения напряженно-деформированного состояния статически неопределимых однородных и неоднородных вязкоупругих систем?

16.8. Существует ли связь между пределом длительной прочности и долговечностью материала?

16.9. В чем разница между мгновенной и длительной критическими нагрузками?

16.10. Изменяется ли напряженное состояние показанной на рис. 16.27 стержневой системы, если материал всех стержней обладает свойством ползучести, описываемой одним и тем же законом ползучести (16.32) при разных значениях показателя степени *m*1

Задачи

16.1. Фундамент стальной колонны, на которую действует сила ,P=20 кН, опирается на грунтовое основание (суглинок;. Найти площадь подошвы фундамента колонны из условия, что вертикальное перемещение верха колонны в течение первых 60 сут после приложения нагрузки не должно превосходить 1 см. При расчете материал колонны и фундамента считать упругим, а грунт — вязкоупругим. Осадка грунта Д при постоянном давлении определяется выражением

$$\Delta = \frac{c+\alpha}{20+t}\left(1-\right.$$

где c=25 МПа$^{-1}$, a=440 с/МПа, y=0,04 с$^{-1}$. Упругие деформации при расчете не учитываются.

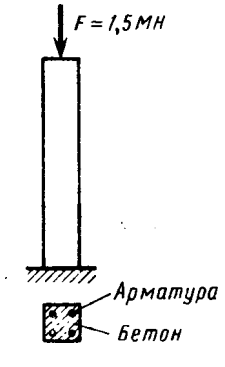
16.3. Найти изгибающий момент в заделке упругой балки, шарнирная опора которой вследствие вязкоупругости основания испытывает осадку во времени. Вычислить значение максимальной осадки опоры, считая, что между реакцией Л и осадкой опоры соблюдается зависимость

$$\Delta(t)=\int_0^t R(\tau)\,d\tau,\quad K=\alpha,\quad a=\frac{l^3}{EI\cdot 3}$$

16.2. Определить распределение усилий между стальной арматурой и бетоном в сжатой колонне, имеющей симметричное армирование, в начальный и бесконечно удаленный моменты времени. Арматуру считать упругой с модулем упругости E_a и площадью поперечного сечения A_a. Бетон — вязкоупругий материал'

$$E_б A_б(t) = \sigma_б(t)+\int_0^t \sigma_б(\tau)K(t,\tau)\,d\tau = \text{const}$$

площадь его поперечного сечения — $A_б$. Вычислить напряжения в арматуре и бетоне в указанные моменты времени, считая $\mu=A_a/A_б =$ =0,03; $n=E_a/E_б=5$.



16.4. Начальное напряжение в болте, работающем при температуре 650°С, равно 0,1 ГПа. Определить время, по истечении которого напряжение снизится в три раза. Фланцы считаются несжимаемыми. Закон ползучести при заданных условиях выражается зависимостью $\varepsilon^{\wedge} = \sigma/E + a\sigma^{*}$, σ=175 ГПа, a = = 1,3 (ГПа^4 ч)^{1}.

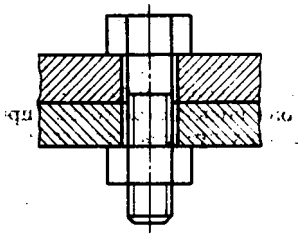


Рис. к задаче 16.4

Ответы к задачам главы 16

16.1. >4 >5547 см^2. 16.2. При <=0 $Ш$ = $\dfrac{}{1+пр}$ = 1,3 МН; #.= $\dfrac{гцЯ}{1+И/1}$ =0,2 МН; при <-*оо

$N6 = \dfrac{P}{1+/уцс}$ »1,15 МН; $\dfrac{/иг\ оо^{\wedge}}{1+цл<к}$ -0,35 МН; »«-[I + \ $K(0)йв$\ —. $\dfrac{E_{д}}{Еб}$ 16.3. М(/) =

$= -(-5+3«)$, $Дт_{„} = \dfrac{-гм}{16}$.16.4. <«38,1 ч.

ГЛАВА 17

ДИНАМИЧЕСКОЕ ДЕЙСТВИЕ НАГРУЗКИ

§ 17.1. Понятие о динамическом нагружении

В § 1.2 кратко уже было дано определение динамической нагрузки как нагрузки, быстро меняющей свое значение или место приложения, в результате чего возникают колебания системы. Здесь поясним более подробно существо развивающихся процессов при действии динамической нагрузки.

Идеальное статическое нагружение предполагает, что в каждый момент постепенного возрастания внешних сил система находится как бы в состоянии покоя, так как в каждый момент существует точное равновесие между внешними силами и уравновешивающими их внутренними силами упругости.

В действительности дело обстоит сложнее. Представим себе, что в момент времени /=0 на платформочку, подвешенную к упругой пружине, ставится груз весом *Сг.* Так как пружина еще не успела растянуться, то усилие ***N*** в ней равно нулю. Поэтому груз С при / = 0 не будет уравновешен силами упругости и начнет «падать», все более растягивая пружину. Заметим, что этот случай называют ***внезапным приложением нагрузки.*** Вместо покоя возникает ***состояние неравномерного движения системы,*** что и является наиболее характерной особенностью динамического нагружения.

Из теоретической механики известен принцип Даламбера, согласно которому движущееся тело или систему тел можно рассматривать находящимися в равновесии, если приложить ***силы инерции.*** Массу движущегося тела весом (7 обозначим ***т*** = (7/# (где *g* — ускорение силы тяжести); его сила инерции будет /= — ***ту,*** где у= =<1²у/с1/² — ускорение движения тела. Силы инерции выступают как дополнительная внешняя нагрузка на упругую систему. Взаимодействие сил инерции и сил упругости порождает упругие колебания при динамическом нагружении, в процессе которых внутренние силы и напряжения могут достигать значений, во много раз больших, чем в покое при статическом действии нагрузок.

Расчет конструкций с учетом сил инерции и возникающего движения масс системы называют динамическим расчетом.

Некоторые примеры динамических воздействий приведены на рис. 17.1, *а—г.* Общие методы динамических расчетов изучаются в специальном разделе строительной

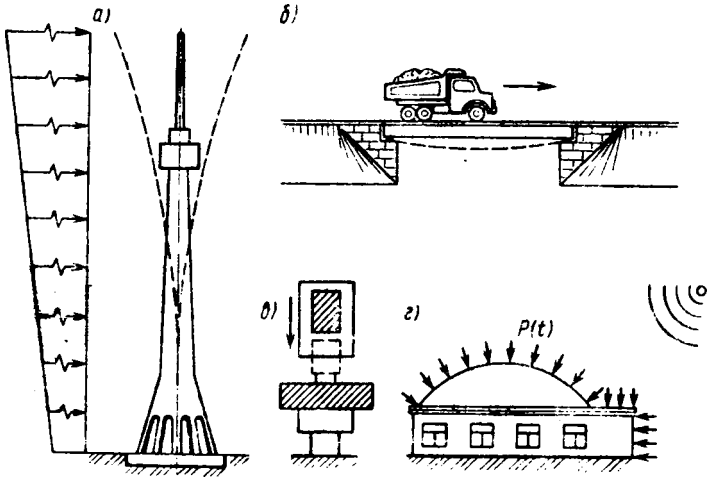
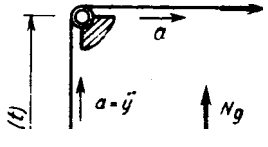


Рис. 17.1. Примеры динамических нагрузок:
ветер (а); подвижная нагрузка (б); ударное действие кузнечного оборудования («); взрыв (г)

механики «Динамика сооружений». Ниже для иллюстрации особенностей динамических расчетов буду! рассмотрены лишь две простейшие задачи: расчет на прочность при движении тела с постоянным ускорением и приближенное решение задачи об ударном действии нагрузки.

§ 17.2. Движение тела с постоянным ускорением. Динамический коэффициент

В качестве характерного примера рассмотрим задачу о подъеме груза С с постоянным ускорением $y=a$ (рис. 17.2). Определим по методу сечений из условия равновесия динамическое значение внутреннего усилия N_a, возникающего в тросе при подъеме, К телу кроме его веса (5 по принципу Даламбера должна быть приложена сила инерции $1=am$, направленная всегда в сторону, проти-



воположную ускорению *а*. Тогда

$$\Lambda\Gamma_{Д}=C?+/= O + a — = \left(1+\frac{a}{g}\right) C?,$$
г

где *g* — ускорение силы тяжести. В покое статическое усилие было бы *N„=0*. Как видим, за счет движения

с ускорением усилие возрастает в отношении

Динамический коэффициент при постоянном ускорении

$$\mu=\frac{N_д}{N_{ст}}=\left(1+\frac{a}{g}\right), \qquad (17.2)$$

где *ц* называют динамическим коэффициентом.

Отношение динамического значения некоторого фактора (усилия, напряжения, перемещения) к соответствующему статическому значению этого фактора называется динамическим коэффициентом.

Приведенный пример имеет главным образом методическое назначение, так как естественным образом позволяет ввести понятие динамического коэффициента.

В инженерной практике очень часто прибегают к использованию динамического коэффициента, когда в расчетах определение внутренних усилий ведут от условных статических (квазистатических) загружений, а затем найденное статическое усилие умножают на динамический коэффициент:

$$АГ_Д=_Д\Lambda Г_{ст}. \qquad (17.3)$$

При этом коэффициент *ц* должен быть предварительно найден из решения соответствующей динамической задачи. В некоторых случаях такой подход дает возможность достаточно просто получить приемлемое решение. Одним из таких случаев является расчет на удар.

§ 17.3. Ударное действие нагрузки

Удар. Рассмотрим воздействие вертикально падающего груза весом б на тело весом $б_0$, соединенное с некоторой упругой конструкцией, например растянутым стержнем или изгибаемой балкой (рис. 17.3). В момент контакта груза и ударяемого тела между ними развивается сила взаимодействия *P=P* (/), характерный график изменения которой во времени / изображен на рис. 17.4. Период соударения т обычно очень мал и измеряется микро- или миллисекундами. Но в этот короткий промежуток времени развиваются очень большие ударные силы взаимодействия. Поэтому хотя отрезок т ничтожно мал, импульс, сообщаемый ударяемому телу ($х_0$, имеет вполне определенное конечное значение

т

О

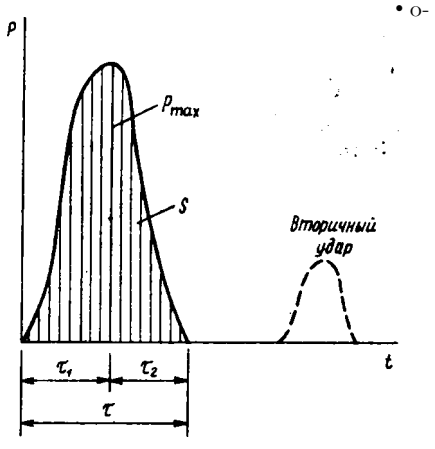


Рис. 17.4. Изменение силы взаимодействия ори ударе во времени

Импульс *Я* равен площади диаграммы -*Р* (/). Конечный импульс £, вызывает появление у тела £$г_0$ конечной скорости движения в направлении удара. Однако перемещения этого тела и, следовательно, деформации упругой системы (удлинение А/ или прогиб V) не успевают развиться за короткий промежуток времени т. Поэтому результатом удара будет возникновение *движения* ударяемой массы с конечной скоростью, а также изменение скорости падения груза на конечное значение.

Взаимодействие тел, при котором за очень малый промежуток времени скачкообразно возникают конечные изменения скорости этих тел, называют ударом.

Период контакта соударяющихся тел определяется по формуле

$$T = T] + T_2,$$

где T] — фаза сближения центров этих тел за счет местных контактных деформаций; $т_2$ — фаза их упругого отталкивания, после которой, вообще говоря, может возникнуть отскок и вторичный удар падающего тела.

Расчетная модель ■ основные допущения. Для того чтобы результаты решения данной задачи можно было применить к различным системам, представим упругую конструкцию в виде пружины с присоединенной точечной массой *m-Go/g* (рис. 17.5, *а).* Массу груза, падающего с высоты А, обозначим А/=(?/#. Примем для этой модели следующие допущения.

1. В реальной конструкции сразу после первого контакта соударяющихся тел вдоль балки или стержня начинают распространяться волны упругих деформаций, о чем подробнее сказано ниже (см. § 17.4).

Для упрощения задачи будем упругую конструкцию считать *безмассовой,* чтобы в ней не возникали указанные волны деформаций.

2. Соударение масс *Мит* будем считать мгновенным (т-»0) и идеально неупругим (без отскока). Местные контактные деформации не учитываем.

Если скорость подлета падающей массы К=у 2^Λ, то после соударения она как бы прилипает к ударяемой массе, после чего они движутся вместе со скоростью $У_0$< V (рис. 17.5, *в),* которую найдем из условия равенства количества движения системы до соударения и после соударения:

$$MУ=(M+m)\ У_0. \qquad (17.5)$$

Отсюда при (= 0 получим начальную скорость движения *двух масс* $У_0$ и соответствующую кинетическую энергию системы T_0:

$$\hat{M}+\overline{m}^{\Gamma\circ}= \quad -\ (M+m)У\backslash \qquad \frac{м^1}{2\ (M+m)}\ V^2. \qquad (17.6)$$

Дальнейшее движение суммарной точечной массы *(M+m)* будет происходить как дьижение системы с одной

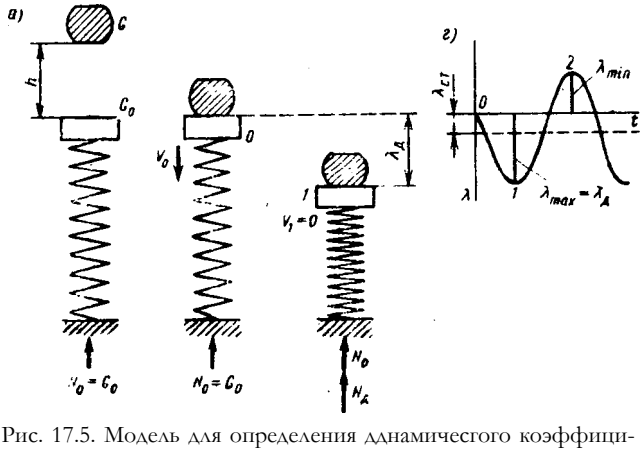


Рис. 17.5. Модель для определения дднамичесгого коэффициента при вертикальном ударе

и при условиях (17.6). Это будут колебания, график которых показан на рис. 17.5, *г*.

Наибольшее усилие в пружине $Ы_a$ возникает в точке *1* в момент, когда перемещение достигает максимального значения $Я=Я_Д$ в крайнем нижнем положении (рис. 17.5, *в)*. В этот момент скорость движения масс и кинетическая энергия системы Г, будут равны нулю.

Для упругой пружины связь между перемещением Я и вызвавшей его внутренней силой N запишем в виде

$$Л=\frac{N}{c} \qquad (17.7)$$

где c — жесткость пружины. Если пружину загрузить условной статической силой, равной весу падающего груза $^{}_{СТ} = С$, то внутренняя сила в пружине $=P_{,,} = C$ и соответствующее перемещение будет

$$_{СС}=\frac{C}{\bullet} \qquad (17.8)$$

Для максимального динамического перемещения $Я_д$ соотношение (17.7) получает вид

$$*«=\frac{Я*}{\bullet_{C}} \qquad (17.9)$$

Разделив (17.9) на (17.8), получим

$$'■\frac{Я_Д}{-с-зе}\ \frac{ЛГ_Д}{} \qquad (1710)$$

Как видим, для принятой расчетной модели в виде системы с одной степенью свободы динамический коэффициент $ц$ одинаков как для перемещений, так и для усилий, т. е.

все факторы в рассматриваемой системе при ударе возрастают в одно и то же число раз по сравнению со статическим загружением. Это число и есть динамический коэффициент ц, подлежащий определению.

Формула для динамического коэффициента. Для определения $Я_д$ и $ц$ используем известную из теоретической механики теорему о том, что приращение кинетической энергии системы равно работе внешних сил. Применим ее к состояниям $Я=Я_О = 0$ (рис. 17.5, *б)* и $Я=Я_Д$ в точке *1* (рис. 17.5, в), тогда по теореме можем написать

$$T_{х}-T_{й}=A, \qquad (17.11)$$

где Г, = 0 — кинетическая энергия системы при $Я=Я_Д$; \ A — работа сил тяжести С и $С_0$ и силы ЛГ, действующей

на массы со стороны пружины, на отрезке движения от До=0 до Я = $Я_д$ (рис. 17.6).

Работа сил С и ($х_0$ положительна'и равна (С+$С_0$) $Я_д$, а силы N — отрицательна и выражается площадью трапеции, отражающей изменение силы N на пути $Я_д$. Следовательно,

$$A = (0+в_0)\ А_Д\text{-}^M_Я+^\ ^_д Я_Д^ = е Я_д\text{-}^\ с Я_д, \quad (17.12)$$

где учтено, что $Л^_0$=б·о и $Ы_a$=с$Я_д$.

Подставляя значение (17.6) для T_0 и (17.12) для A в равенство (17.11), приведем его с учетом (17.8) к квадратному уравнению относительно $Я_д$:

$$Я_Д — 2Я_{ст}Я_д — 2Л \quad ^ = \pm 0. \quad (17.13)$$

, Два корня этого уравнения будут

$$--^(1\pm 7^x(й+5)' \quad (17.14)$$

В этой формуле знак «+» соответствует нижнему амплитудному положению масс *1,* а знак «—» — верхнему положению *2* в процессе колебаний, следующих за ударом (см. рис. 17.5, *г).*

Приняв в (17.14) знак « + », окончательно получим искомую формулу динамического коэффициента:

Динамический коэффициент при вертикальном ударе

$$\mu = \frac{\lambda_д}{\lambda_{ст}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\lambda_{ст}}\ \eta}, \quad (17.15)$$

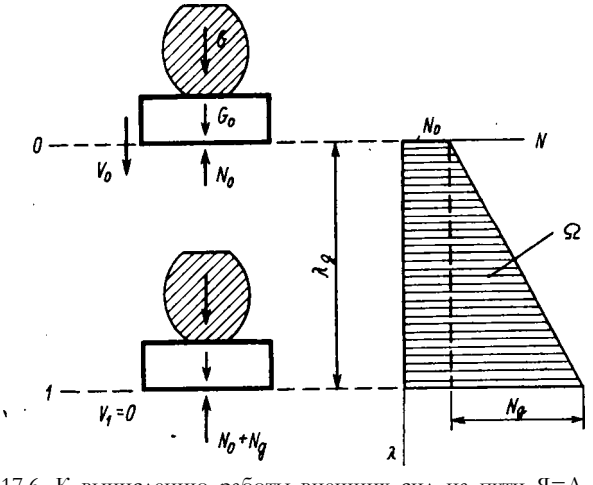


Рис. 17.6. К вычислению работы внешних сил на пути Я=$Л._д$ после удара

где

$$m\}\frac{м\,1}{M+m\;1+m/M}$$

— коэффициент, учитывающий соотношение ударяемой m и ударяющей M масс.

Формулу (17.15) можно выразить через скорость груза, если воспользоваться соотношением $V^2=2gh$. Тогда

I <17_17)

(На рис. 17.7 представлена зависимость $ц$ от параметров удара А/Яст и m/M.

Параметр ^ представляет собой перемещение точки соударения от условной статической силы, равной весу падающего груза.

Она определяет податливость, мягкость пружины (или другой упругой конструкции, на которую падает груз). Естественно, что чем меньше $X_{„}$ тем больше динамический эффект и коэффициент $ц$. (Вспомним, что прыжок с одной и той же высоты на жесткий асфальт и в рыхлый снег может иметь совершенно различные последствия.)

Из рис. 17.7 видно, что чем больше ударяемая масса, тем меньше динамический коэффициент. Связано это с потерями кинетической энергии ударяющего груза при неупругом ударе. Чтобы это подтвердить, достаточно сравнить энергию перед ударом $T=MV^2/2$ и энергию

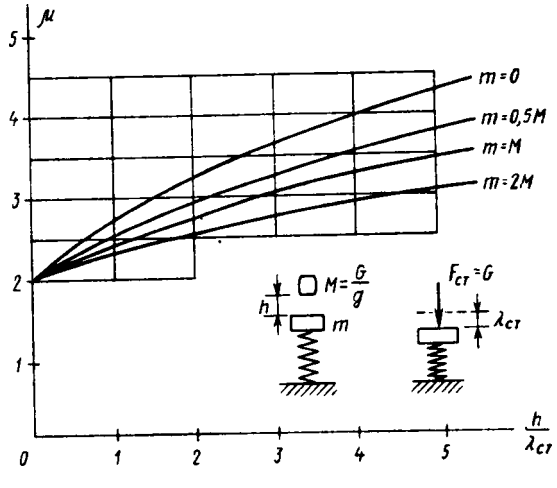


Рис. 17.7. Зависимость динамического коэффициента от относительной высоты падения (ЛДст) и соотношения масс *(m/M)*

$$\frac{T_0}{T}\frac{M}{M+m}\,1+m/M<1. \qquad (17.18)$$

Как видим, это отношение тем меньше, чем больше отношение /и/*М*. Здесь уместно заметить, что когда-то в цирке силачи демонстрировали номер, в котором по тяжелой наковальне, лежащей на груди у артиста, наносился сильный удар молотом. Ясно, что именно масса наковальни *m* снижает динамический коэффициент /х и играет «защитную» роль для поддерживающего ее человека, хотя внешне могло казаться, что эта масса нужна лишь для подчеркивания силы артиста.

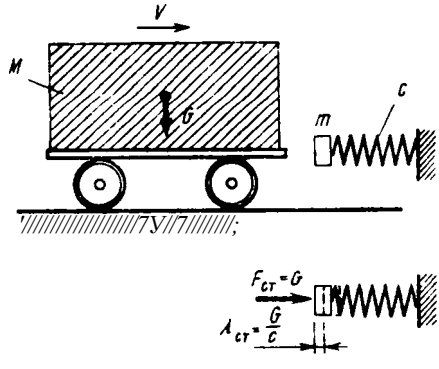
Если ударяемая конструкция не имеет в точке удара сосредоточенной массы *m,* то ее роль в какой-то мере выполняет распределенная масса стержней. Идя в запас прочности, во многих случаях не учитывают распределенную массу конструкции, полагая в формулах (17.15) и (17.16) $m = 0$ и »7 = 1. Тогда

$$\mu=1+\sqrt{1+\frac{2h}{\lambda_{ст}}}. \qquad (17.19)$$

Более точное решение с учетом распределенной массы рассматривается ниже (см. § 17.4).

При й = 0 имеем *ji* = *2.* Это случай так называемого *внезапного приложения нагрузки.* Механизм возникновения движения в этом случае уже рассмотрен в 17.1. Возникающие при этом колебания с амплитудой $A = X_{C1}$ будут совершаться около статического положения равновесия $A=A_{1A}$ так, что ¿т«= $=2X_a$.

Полученные формулы для *ц* соответствуют вертикальному удару. В других условиях формула для *р.* может быть иной. Так, при горизонтальном движении груза <7 со скоростью *V,* например вагонетки по рельсам и ударе ее об упругую преграду (рис. 17.8), аналогичным об-



разом описанный вывод приводит к формуле

$$\mu = \sqrt{\frac{V^2}{g\lambda_{ст}}}\,\eta,$$

где Я„ определяется как перемещение точки соударения от условной силы $P_{уд}$, ориентированной в направлении удара, т. е. горизонтально, и равной весу ударяющего тела <3. Особенность этой задачи по сравнению с ранее рассмотренной состоит в том, что сила тяжести С не совершает работу на перемещении $Я_д$. Само перемещение $Я_д$ и усилие в пружине $Ы_a$ могут быть получены по равенствам $Я_д = /хЯ_{ст}$ и $\Lambda Г_Д = /¿\Lambda^{ст}$, где статические величины, как и ранее, находят от условной силы $P_{уд} = (?$.

Пример 17.1. В процессе монтажа на конструкцию, изображенную на рис. 17.9, падает груз весом С?= 1 кН с высоты А = 0,1 м. Определить максимальные напряжения, возникающие в системе от удара. Массой ударяемой системы в запас прочности пренебрежем.

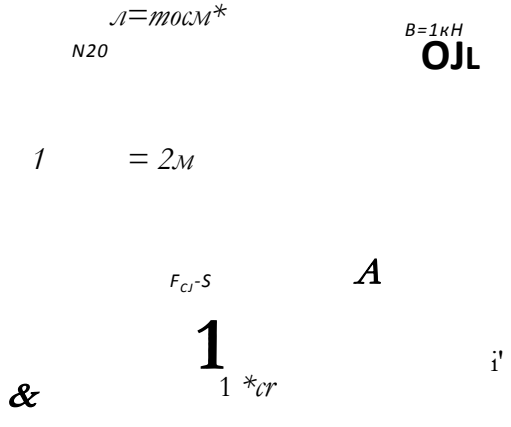


Рис. 17.9. К примеру 17.1

Решение. Загрузив систему в точке удара условной статической силой $F_{уд} = G$ и соответствующей единичной силой, по формуле Мора путем перемножения соответствующих эпюр получим

$$\Delta_{1F} = \int \frac{M_1 M_F}{EJ}\,dz = \frac{0.9 + 1}{EJ}$$

Статические напряжения в двутавровой балке и в тросе $a_{2ст}$ будут

$$(T\backslash_{cr}= \frac{M_x\, a}{n_x\, w_x} \quad \frac{N\,2в}{A\,A}$$

Подставив числовые значения, указанные на рисунке, найдем: $\kappa_{ст}$= =0,172 10~² м, $сг_{1ст}$ = 10,85 МПа; $о\text{-}_{2ст}$ = 6,7 МПа. По формуле (17.19) найдем динамический коэффициент:

$$ц = 1 + \sqrt{1 + \frac{2A}{\text{^ V } 0{,}172\text{-}10^{-2}}} = 11{,}85.$$

Наибольшие динамические напряжения возникают в балке: $о\text{-}_{1д}$=мсг$_{1ст}$ = 11,85 -10,85 = 129 МПа. В тросе эти напряжения будут a_{2a}= =/^2сг = 11,85' 6,7 = 79 МПа.

§ 17.4. Приближенный учет распределенной массы стержней при ударе

Рассмотрим удар груза *О о* конец консольной балки (рис. 17.10, *а),* имеющей массу $m = pA$, где p — плотность материала стержня (масса единицы объема); A — площадь поперечного сечения. При ударе в таком стержне возникает сложное движение типа распространения волны изгибно-сдвиговых деформаций, переходящее в общие изгибные колебания стержня. Для приближенного решения задачи заменим стержень с распределенной массой невесомым стержнем с одной сосредоточенной *приведенной массой* в точке удара $Мщ,_{ш}$ (рис. 17.10, б):

(17.21)

где $m!$ — общая масса ударяемого стержня; $к$ — коэффициент приведения, который найдем из условия равенства кинетической энергии распределенной массы стерж-

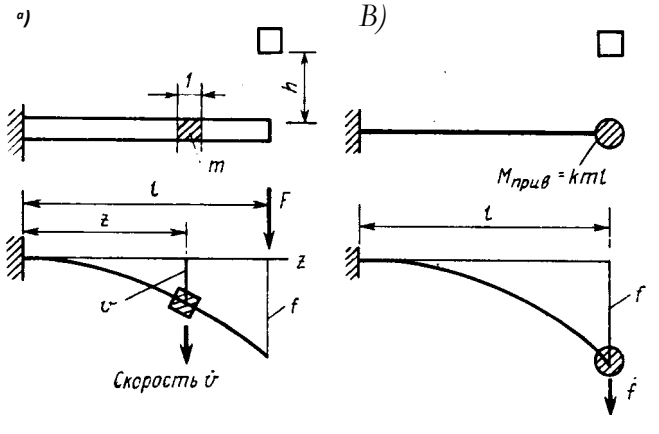


Рис. 17.10. Определение коэффициента приведения распределенной массы балки

Рис. 17.11. Коэффициенты приведения для различных случаев деформации стержней

ря на рис. 17.10, *а* и сосредоточенной приведенной массы $M_{щ1ИВ}$ на рис. 17.9, *б*. Это условие дает равенство

$$^{2}\quad ^{2_0} \qquad (17.22)$$

где/ н у — производные от прогибов по времени *I,* т. е. скорости движения соответствующих сечений балки.

Предположим, что кривая V (г) в каждый момент времени сохраняет неизменную форму, одинаковую с прогибами статических прогибов от силы *P,* действующей в направлении удара.

Применяя методы, описанные в гл. 8, кривую v *(г)* для консоли найдем в виде

(17.23)

Дифференцируя это выражение по /, найдем скорости

(17.24)

подставляя которые в (17.22) получим равенство

$$\text{кт11}\quad \text{?}\ o \setminus {}^{11}/\ 140\ 2$$

Отсюда для консоли получим κ=33/140 = 0,236. Аналогичные выкладки для других типов стержней дают результаты, показанные на рис. 17.11. В случае продольного удара по консоли в качестве функции продольных перемещений **сечений** принята функция и> = *(г;Г)* /, как при статическом сжатии силой *P* в точке удара.

Зная приведенную массу, динамический коэффициент можно определить, используя формулу (17.15):

В предыдущих параграфах при исследовании удара распределенная масса ударяемого стержня или вовсе не учитывалась, или учитывалась приближенно. Это привело к тому, что из расчетной модели выпало такое важное явление, как распространение волн деформаций.

Волны — это возмущения, распространяющиеся в среде с конечной скоростью и несущие с собой энергию без переноса вещества.

Примерами волн могут служить распространение звука в упругой среде, волны на водной поверхности, сейсмические волны в толще земли и на ее поверхности, электромагнитные волны и т. д.

Рассмотрим продольный удар абсолютно твердого тела массой M о плоскую грань торцевого сечения упругого стержня, имеющего постоянную погонную массу (массу единицы длины) $m = pA$, где p — плотность материала стержня (рис. 17.12). Уравнение равновесия элемента йг стержня было получено выше (см. гл. 2) в виде ёЛ^/Лг=— y_c. Если заменить $ЫЕА$ (ёи>/6г) и продифференцировать это равенство, получим

$$\frac{d}{dz}\left(EA\frac{dw}{dz}\right) = -q_z. \qquad (17.26)$$

В данном случае перемещения сечения IV вдоль оси *2* зависят от двух аргументов: координаты *г* и времени /. Поэтому производную по *1* функции и> *(г, /)* надо рассматривать как частную производную, т. е. *д/дг.* Нагрузку q_z составляют силы инерции, которые по принципу Даламбера для единицы длины стержня запишутся следующим образом:

$$q_z = -m\frac{\ddot{и}^{2*}}{\partial t^2}.$$

С учетом сказанного уравнение движения при про-

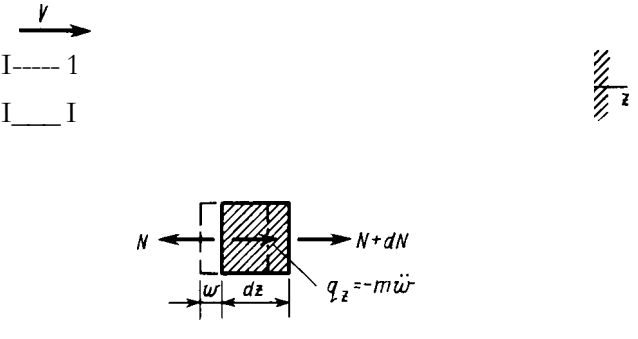


Рис. 17.12. Продольный удар тела по стержню с распределенной массой

дольных колебаниях стержня (17.26) при $EA=con\$\backslash$. получит вид

$$_2\,\partial^1 и > 3^2 и > \qquad \partial c^1\ 81^1 \tag{17.27}$$

где

$$c=\sqrt{\frac{EA}{m}}=\sqrt{\frac{E}{\rho}} \tag{17.28}$$

Это так называемое *волновое уравнение.* Смысл этого названия уясним, если обратим внимание на то, что решение его можно записать в. виде

$$*=/,\ \{c\text{-}a), \tag{17.29}$$

где /] —произвольная функция. На рис. 17.13 изображены графики функции /1 для двух последовательных моментов времени и $/_2$> *1- Из рис. 17.13 видно, что зависимость (17.29) выражает поступательное равномерное движение кривой *вправо* со скоростью *с.* Аналогично можно видеть, что (г+с/) выражает движение кривой $/_2$ *влево* с той же скоростью. Если под /1 и $/_2$ понимать некоторые возмущения, получаемые на левом и правом концах стержня, то их сумма

$$*=/,\ (2\text{-}c/)+/_2\ (c+c() \tag{17.30}$$

будет выражать распространение возмущений в виде бегущих волн в положительном и отрицательном направлениях оси 2. В частности, при $/_2=/$, второе слагаемое в (17.30) может выражать волну, отраженную от заделки.

Скорость *с* (17.28) продольных волн весьма велика. Так, для стали $\underline{f}$«210 ГПа = 2,Г $10^{й}$ Н/м^2, р« «7800 кг/м^3 и с=-^2,1 • $10^{и}$/7800«5200 м/с. Поэтому визуально наблюдать движение волн деформации в сплошном стержне трудно. Как некоторую довольно близкую аналогию напомним распространение эффекта продольного удара локомотива в длинном поезде. Звук от последовательно соударяющихся вагонов позволяет

$$\underline{\cdot\ u}\ \hat{}\qquad Ь>1,$$

$$\underline{ф_2\text{-}Ь)}$$

ощутимо проследить за движением фронта ударной волны.

Рассмотрим теперь более детально процесс соударения абсолютно жесткого тела, движущегося со скоростью V, о торец стержня (рис. 17.14). За малый промежуток времени ё/ тело пройдет путь $Аз= У (11,$ создавая на торце деформацию сжатия е. От торца эта деформация будет распространяться вдоль стержня со скоростью с и за время ё/ создаст сжатие на длине 5= с (к. Считая на этом бесконечно малом отрезке деформацию е распределенной равномерно, найдем деформацию и напряжения на торце:

$$\_M\_УII\_У\Lambda$$

$$5\ c<и\ c'\ I \qquad (_{1731})$$

$$O = EE—E\sim. \mid$$

Получен любопытный результат, состоящий в том, что контактные напряжения и деформации в рассматриваемом случае зависят только от скорости движения тела V, поскольку для данного материала стержня параметры с и E постоянны.

Например, для стали при $£$=210 ГПа, с = 5200 м/с и $У= 5,2$ м/с напряжения на торце будут

$$<т=\frac{}{5200}\ 210\ 10^9 = 210\ МПа,$$

что для малоуглеродистой стали примерно соответствует пределу пропорциональности. При большей скорости возникнут пластические деформации.

Найдем переменную во времени силу взаимодействия тела и стержня P (/) (рис. 17.14). Пусть при г = 0 скорость $У= У_0$; при />0 скорость V будет убывать и будет переменной. Она равна производной по I от перемещения н' на торце, что с учетом (17.31) дает соотношение

$$\frac{йю}{<1/} = У—с\cdot\frac{o\ p}{E\ EA}c—,$$

дифференцируя которое по / перейдем к ускорению тела

$$^TATT \qquad <17\_32>$$

$$s = cdt$$

$$У$$

Но по закону Ньютона ускорение тела связано с силой соотношением

$$\text{¿}I^2 \sim M \qquad (17.33)$$

где знак минус указывает, что действующая на него сила вызывает замедление. Подставив (17.33) в (17.32), получим дифференциальное уравнение

$$\ddot{e}(^{+} aP=O, \qquad (17.34)$$

где

$$a = -\frac{EA}{cM}$$

При начальном условии (при /=0 $P==a_0A = (У_0/с)\ EA$) его решение дает искомое выражение для силы, напряжений и деформации на торце стержня:

$$P=\frac{У_0 EA}{c}\ e\ :\ -a;$$

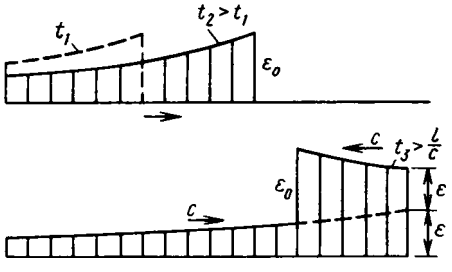
$$o\,P\ Ko\ —a/ \qquad (17.35)$$

$$E\ EA\ c$$

Время прохождения волны от сечения $г = 0$ до сечения $г$ равно г/с. Поэтому если в (17.35) аргумент / заменить на (/—г/с), то получим закон распространения волны деформаций от торца со скоростью с:

$$\text{£}=\frac{У_o}{c}\ e \quad \bullet И \qquad (17.36)$$

На рис. 17.15, *а* изображено распределение е по длине стержня для двух моментов времени: /1 и $/_2 > /_1$. При



¿з >(1/с) накладывается волна, отраженная от заделки, идущая влево со скоростью *с*. При этом в заделке при отражении возникает удвоенная текущая деформация. На левом конце волна вновь отражается от ударяющего тела. В результате в стержне возникает сложная картина движения волн деформаций. На определенном этапе тело останавливается и затем отскакивает от торца.

На рис. 17.16 показана запись на осциллографе показаний двух датчиков *1* и 2, наклеенных у концов стержня, растянутого от падения груза. Шкала, помещенная слева по вертикальной оси, дает значение растягивающей силы .¡V, найденной по показанию датчика. По горизонтальной оси на ленте осциллографа расставлены метки времени с шагом 5—10"3 с.

Зубцы на кривых (/) и II_2 (0 являются следствием многократного прохождения через сечения с датчиками прямой и отраженной волн. На осциллограмме видно, что датчик *2,* расположенный у заделки, на время А/«0,8 10~3 с позже вступает в работу, чем датчик *1*. Это время требуется для прохождения первой волны деформаций расстояния между датчиками /=4,4 м. Отсюда можем определить экспериментально скорость:

$$c = //\Lambda< = \frac{}{0{,}8\ 1<\Gamma^3} = 5500 \text{ м/с}.$$

Это, учитывая приблизительное значение А/, хорошо согласуется с теоретическим значением *с к* 5200 м/с.

Вес падающего груза б = 5 Н, а вызванное им максимальное динамическое усилие в проволоке по осциллограмме ЛГд= 120 Н. Следовательно, экспериментально найденный динамический коэффициент /¿ = Ауб = = 120/5 = 24. Интересно сопоставить этот результат со значением *у,* полученным из приближенной формулы (17.15).

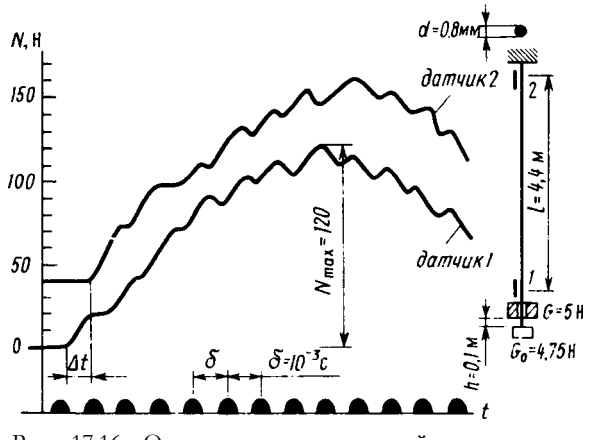


Рис. 17.16. Осциллограммы показаний датчиков при растяжении проволоки от падения груза

$$A_{CT} = Д/_{CT} = \frac{5\ 4{,}4}{EA\ 2{,}1\ ю^{9} - 5\ 10'^{7}} = 21\ 10\ м.$$

Вес платформочки на конце проволоки Со = 4,75 Н; следовательно, Схо/С = 0,95 и ε\= 1/(1 + 0,95) = 0,513. Высота падения Л = 0,1 м. Подставляя в формулу (17.15) эти значения, получим

$$_{ж} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 0{,}513}{21'10}} = 23{,}1.$$

Несмотря на то что при выводе приближенной формулы не учитывались сложные процессы распространения волн деформаций, экспериментальный результат /х = 24 и по формуле (17.15) /¿ = 23,1 оказались достаточно близкими. Конечно, это лишь частное совпадение. Учитывая сложность явления удара, надо ожидать, что расхождения могут быть и более существенными.

Воиросы для самоконтроля к главе 17

17.1. Объясните особенности динамического нагружения по сравнению со статическим.

17.2. Что такое динамический коэффициент и чему он равен при подъеме груза с постоянным ускорением?

17.3. Что такое удар? Какие допущения используются при определении динамического коэффициента при вертикальном ударе?

17.4. Запишите формулу для динамического коэффициента при ударе. Объясните влияние на него величины ^ и массы ударяемого груза.

17.5. Как учитывается распределенная масса стержня с помощью коэффициента приведения и из каких соображений он определяется?

17.6. Что такое волны деформаций и с какой скоростью они распространяются в стержне при растяжении сжатии?

Задачи к главе 17

17.1. Найж ускорение *а* подъема балки на двух тросах, ес.ш возникающие при этом наибольшие напряжения в ней <r_a = 53 МПа, плотность материала балки *р = 5* т/м³.



М-+-

17.2. Определить угловую скорость *ш* равномерного вращения тонкого чугунного кольца в своей плоскости со средним диаметром /> = 1,2 м, при которой кольцо может разорваться от действия центробежных сил инерции, если предел прочности на растяжение <Тр = 120 МПа, плотность *р* = 7,2 т/м³.

17.3. Найти наибольшие динамические нормальные и касательные напряжения в стальной балке при ударе. Распределенной массой ее пренебречь.

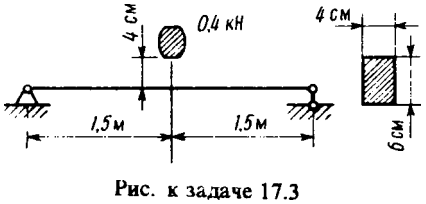


Рис. к задаче 17.3

17.4. Как изменится максимальное нормальное напряжение в балке, если место падения груза из положения *1* перенести в положение 2? Принять Λ=4 *[Gl³/(EJ)]*.

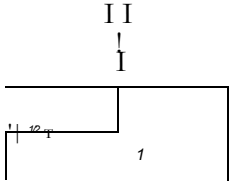


Рис. к задаче 17.4

17.6. Вычислить максимальные нормальные напряжения в стальной трубчатой свае от удара льдины, считая ее нижнее сечение заделанным.

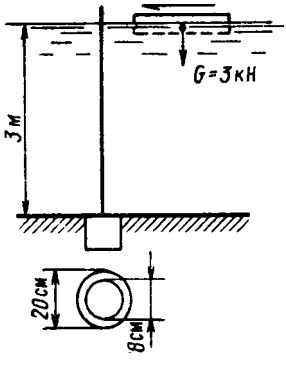


Рис. к задаче 17.6

17.5. Найти наибольшую высоту Λ, с которой можно сбросить груз 0=1 кН, если для стальных тросов *Л*=400 МПа. Считать, что Λ во много раз превышает поэтому в формуле для *ц* в подкоренном выражении можно пренебречь единицей; *£*=200 ГТ1а.

a

A

N

'vbrr

Рис. к задаче 17.5

Ответы к задачам главы 17

17.1. в-9,8 м/с¹. 17.2. со-215 рад/с. 17.3. <7$_Д$—103 МПа; т$_д$-1,03 МПа. 17.4 Напряжения возрастут на 24%. 173. А <0,9 *и.* 17.fi. бд= 150 МПа.

ГЛАВА 18

КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ

§ 18.1. Понятие о концентрации напряжений

Полученные ранее формулы для определения напряжений при растяжении, кручении и изгибе справедливы только в том случае, когда рассматриваемое сечение отстоит на достаточно большом расстоянии от мест резкого изменения формы тела, внутренних углов, выточек, отверстий и т. п. В окрестности выточек, отверстий и т. д., а также в зоне контакта деформируемых тел наблюдается резкое увеличение напряжений, называемое концентрацией напряжений (рис. 18.1, *а*).

Концентрация напряжений

Например, при растяжении длинной полосы, ослабленной выточками (рис. 18.1, б), напряжения в сечении *1—1* распределены равномерно, а в сечении *2—2* — неравномерно, увеличиваясь по мере приближения к краю выточек. Максимальное напряжение в этом сечении можно выразить так:

$$0\cdot тм = a0'я \qquad (18.1)$$

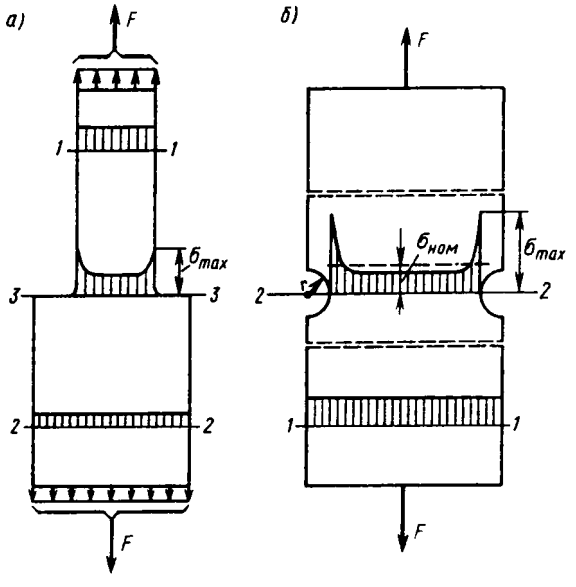


Рис. 18.1. Концентрация напряжений в растянутой пластине в месте резкого изменения ее формы ив месте выточек

где а — *теоретический коэффициент концентрации напряжений,* который зависит от формы выточек и от соотношения размеров ослабления и поперечных размеров полосы. Очевидно, что коэффициент а не может быть меньше единицы.

Теоретический коэффициент концентрации напряжений

Второй сомножитель называют *номинальным напряжением.* За номинальное напряжение принимают напряжение, которое определяется по формулам сопротивления материалов без учета эффекта концентрации. Обычно «г„„„*, определяется по наиболее ослабленному сечению. Так, для рассмотренной полосы

$$\sigma_{ном} = \frac{P}{}$$

Если определение напряжений в ослабленном сечении затруднено, для простоты расчета за $a_{тм}$ принимают напряжение в неослабленном сечении.

Ответьте на вопрос № 18.2

Коэффициент концентрации напряжений а находят либо с помощью методов теории упругости, либо экспериментальным путем.

Например, в теории упругости дается решение для растянутой пластинки, ослабленной круглым отверстием, расположенным на оси симметрии (рис. 18.2). Если ширина пластинки велика по сравнению с радиусом отверстия *г,* то в наиболее ослабленном сечении *1—1* напряжение $\sigma_г$ определяется по формуле

$$\sigma_г = \frac{a}{2} \left(2 + \frac{r^2}{z^2} + 3\frac{r^4}{z^4}\right)$$

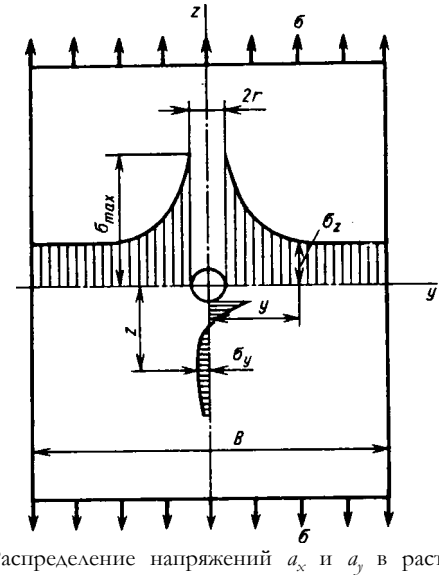


Рис. 18.2. Распределение напряжений a_x и a_y в растянутой пластине с круглым отверстием

где *а* — среднее напряжение в сечении, достаточно удаленном от места ослабления; *у* — расстояние от центра отверстия до точки, в которой определяется напряжение.

При *у—г* a_{max} = *Ьа.* Таким образом, при *г/В->0* $сг_{ном}$ = = <т и а = 3.

С увеличением *у* напряжения быстро убывают, асимптотически приближаясь к напряжению *а.*

В окрестности отверстия имеет место двухосное напряженное состояние. Так, в точках, лежащих на оси *г,* на вертикальных площадках возникают сжимающие напряжения, которые определяют по формуле

$$\sigma_y = -\frac{\sigma}{2}\left(3\frac{r^4}{z^4} - \frac{r^2}{z^2}\right).$$

При *г=г* a_y = — *а* \ при *г— 2 г* a_y = *(Г/32.* Как видно из эпюры (рис. 18.2), эти напряжения быстро затухают.

Приведенное точное решение может быть использовано лишь для пластинки, ширина которой велика по сравнению с диаметром отверстия *(В^* 1 Ог). С уменьшением ширины пластинки теоретический коэффициент концентрации напряжений возрастает, а напряжения у наружных краев пластинки становятся меньше *а.*

Ниже приведены значения коэффициента а для различных значений отношения диаметра отверстия к ширине пластинки:

2г/В...	О	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
	3,00	3,03	3,14	3,36	3,74	4,32

Как видно, коэффициент а заметно увеличивается по мере увеличения отношения *2г/В.*

Чтобы получить представление о степени снижения напряжения $a_г$ на краю пластины в сечении *1—1,* приведем его значение для случая *В=4г.* $сг_г$=0,75сг. Для сравнения запишем значение максимального напряжения в том же сечении: $сг_{тм}$ = 4,32ст.

Концентрация напряжений как при растяжении, так и при других видах деформаций значительно зависит от формы отверстия или выточки.

Рассмотрим случай ослабления широкой пластинки эллиптическим отверстием (рис. 18.3). Точное решение представляется в виде

$$\sigma_{max} = \sigma\left(1 + 2\frac{a}{b}\right),$$

где *а* и *Ь* — полуоси эллипса.

С увеличением отношения *а/Ь* максимальные напряжения возрастают и при узком отверстии, расположенном перпендикулярно направлению растяжения, достигают очень большого значения. В связи с этим большую опас-

Интересно отметить, что напряжения a_y могут быть отрицательными и в тонких пластинах они могут быть причиной потери устойчивости. Возьмите полиэтиленовую пленку, сделайте в ней эллиптическое отверстие и равномерно растяните ее. На поверхности пленки около отверстия появляются морщины

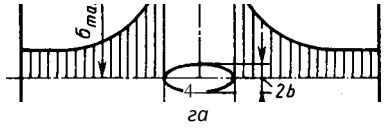


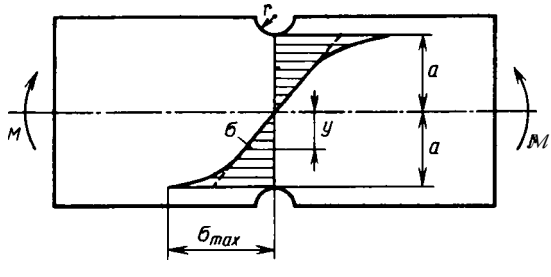
Рис. 18.3. Концентрация напряжений в растянутой пластине, имеющей эллиптическое отверстие

ность представляют тонкие прорези. Особенно большие напряжения возникают у краев поперечных трещин.

Концентрация напряжений возникает также при других видах деформаций. Так, например, при чистом изгибе полосы, ослабленной двумя симметричными выточками, имеющими форму гиперболы (рис. 18.4), теоретический коэффициент концентрации напряжений может быть найден по формуле

$$\alpha = \frac{4\frac{a}{r}\sqrt{\frac{a}{r}}}{3\left[\sqrt{\frac{a}{r}} + \left(\frac{a}{r} - 1\right)\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a}{r}}\right]}, \qquad (18.2)$$

где a — полуширина полосы в месте ослабления; r — радиус кривизны в глубине выточки.



точками

Рис. 18.5. Выточки разной конфигурации

Этой же формулой можно пользоваться для выточек другой формы, так как существенное влияние на коэффициент концентрации оказывает только кривизна у дна выточки. Так, например, с достаточной степенью точности эта формула может быть применена для выточек, показанных на рис. 18.5, *а, б*.

Необходимо отметить, что только для некоторых задач о концентрации напряжений найдены точные аналитические решения. В последнее время в связи с широким применением электронных вычислительных машин для решения задач теории упругости и использованием численных методов оказывается возможным найти теоретический коэффициент концентрации напряжений с достаточной для практических целей точностью для многих очагов концентрации напряжений.

В других случаях, не поддающихся даже численному решению задачи, для определения коэффициента *а* и закона распределения напряжений применяются экспериментальные методы: фотоупругости, голографической интерферометрии, тензометрии, муаровых полос и др. В частности, при использовании оптического метода из специального материала изготовляют образец, который подвергается просвечиванию поляризованным светом. Например, на рис. 18.6 показана картина изохром для растянутой пластины с отверстием. Расшифровка картины полос позволяет установить наиболее напряженные точки и с достаточно высокой степенью точности определить коэффициент концентрации напряжений.

Следует обратить внимание на одну принципиальную трудность решения задачи о концентрации напряжений. Обратимся к формуле (18.2), из которой видно, что при г-> 0 выточка имеет форму острого угла, в вершине угла напряжения равны бесконечности. В действительности вследствие проявления пластических свойств материала напряжения в бесконечность не обращаются, но достигают больших значений. Для деталей из идеально упругопластического материала, для которого справедлива диаграмма Прандтля, концентрация напряжений может не представлять особой опасности. Это объясняется тем, что при достижении пластического состояния в точке напряжения в ней не увеличиваются и текучесть материала распространяется в глубь сечения. Таким образом, происходит выравнивание напряжений в ослабленном се-

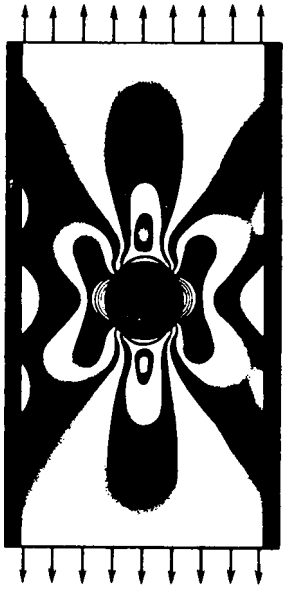


Рис. 18.6. Картина изохром для растянутой пластины с отверстием

чении. Анализ напряженного состояния в зоне концентрации напряжений в этом случае требует решения задачи теории пластичности, что представляет более серьезную проблему, нежели решение аналогичной задачи теории упругости.

В случае хрупких материалов при достижении в ослабленном сечении наибольшего напряжения, равного пределу прочности, образуется трещина, которая, быстро развиваясь, приводит к разрушению конструкции.

Нужно отметить, что опасность концентрации напряжений значительно возрастает при снижении температуры, поскольку материал становится более хрупким.

Особенно опасна концентрация напряжений при действии нагрузок, периодически меняющихся во времени, что более подробно рассматривается ниже (см. гл. 19).

Возникает вопрос о том, каким образом можно снизить концентрацию напряжений.

Из приведенных выше формул для коэффициентов концентрации напряжений видно, что в различного рода трещинах, вырезах, выточках, в местах резкого изменения площади поперечного сечения элемента конструкции желательно заменить острые выточки плавными кривыми, т. е. увеличить радиус кривизны конца трещины или отверстия. Это приводит к снижению концентрации напряжений. Так, например, для прекращения развития трещины в пластинах иногда на конце трещины высверливается круглое отверстие.

Задачу определения напряжений, возникающих при сжатии двух соприкасающихся тел, называют контактной, а напряжения, возникающие по площадкам контакта, — контактными. Эти напряжения нужно знать при проектировании катков опорных частей сооружений, подшипников, зубчатых передач и т. п.

Рассмотрим некоторые случаи распределения напряжений в контактных задачах. Эти задачи решены с помощью методов теории упругости и в данном курсе приводятся без доказательства.

При сжатии двух тел, имеющих гладкую криволиней- Генрих Рудольф
ную поверхность, в зоне контакта происходит соединение Герц (1857—1894)
точек поверхностей этих тел. В результате образуется — немецкий физик
поверхность, называемая *поверхностью давления,* а ее
контур — *контуром давления.* В общем случае, как показал Генрих Герц, контур давления является эллипсом. Напряжения в пределах поверхности давления распределены по полуэллипсоиду, причем на границе поверхности касания они равны нулю, а в центре напряжение принимает наибольшее значение

$$\sigma_{\max} = 1{,}5\,\frac{F}{\pi a b},$$

где P — сила, с которой тела давят друг на друга; *а, Ь* — длины полуосей эллиптического контура давления, значения которых зависят от геометрии поверхностей сдавливаемых тел, от модулей упругости и коэффициентов Пуассона материала этих тел, а также от силы P.

Как видно, значение σ_{max} в 1,5 раза больше среднего напряжения по поверхности касания:

$$\sigma_{ср} = \frac{F}{\pi a b}$$

Так, при сжатии двух цилиндров радиусами Ответьте на воп-
R_1 и R_2 (рис. 18.7, *а, б),* загруженных нагрузкой, равномер- рос № 18.5
но распределенной по длине цилиндров, интенсивностью *р,* образуется поверхность давления в виде прямоугольной полоски с размерами / х 2*Ь*.

Если цилиндры сделаны из одного материала ($E_1 = E_2 = E$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu$, причем $\mu = 0{,}3$), то

$$b = 1{,}522\,\sqrt{\frac{p}{E}\,\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}, \qquad (18.3)$$

$$\sigma_{\max} = 0{,}418\,\sqrt{pE\,\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}}. \qquad (18.4)$$

При неограниченном увеличении одного из радиусов, например R_2, получим решение задачи о сжатии цилиндра

Рис. 18.7. Сжатие двух длинных цилиндров равномерно распределенной нагрузкой и поверхность давления

с полупространством. В результате из выражений (18.3) и (18.4) получим

$$b = 1{,}522\sqrt{\frac{pR_1}{E}},$$

$$\sigma_{\max} = 0{,}418\sqrt{\frac{pE}{R_1}}. \qquad (18.5)$$

Как видно из формулы (18.5), наибольшее напряжение $<\tau_{тм}$ зависит от отношения p/KПри разных значениях р и но одинаковом их отношении $a_{m1\Lambda}$ также одинаково.

Вычисленные по формуле (18.5) напряжения могут оказаться достаточно большими. Однако это еще не означает разрушения материала в зоне контакта. Дело в том, что в этой области имеет место пространственное напряженное состояние, в котором все три главных напряжения оказываются сжимающими. Поэтому расчетные сопротивления при местном смятии принимаются значительно большими, чем при одноосном сжатии.

В случае центрального смятия двух упругих шаров радиусами и $Я_2$ (рис. 18.8, *а)* поверхность касания является кругом радиуса *а* (рис. 18.8, *б).* Вновь предполагая справедливыми равенства $E\backslash = E_2 = E$, $= y_2$ — 0,3, получим

$$a = b = 1{,}109\sqrt[3]{\frac{F}{E}\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}},$$

$$\sigma_{\max} = 0{,}388\sqrt[3]{FE^2\left(\frac{R_1+R_2}{R_1R_2}\right)^2}.$$

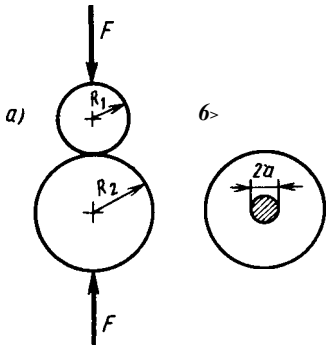


Рис. 18.8. Сжатие двух шаров и поверхность давления

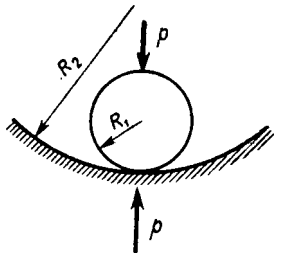


Рис. 18.9. Давление, передаваемое шаром на вогнутую сферическую поверхность

В случае шара радиусом лежащего на упругом полупространстве (***И₂-юо***), найдем

$$a = Ь — 1{,}109 \sqrt[3]{\frac{FR_1}{E}},$$

$$\sigma_{max} = 0{,}388 \sqrt[3]{\frac{FE^2}{R_1^2}}$$

Из формулы (18.7) видно, что $<т_{ш}$,, зависит от отношения ***Р/К].*** При разных значениях ***Г*** и но одинаковых отношениях ***Б/Л*** ? максимальное напряжение остается постоянным.

Если цилиндр радиусом Л] лежит на вогнутой цилиндрической поверхности радиусом $Я_2$ или шар радиуса 7?! находится на дне вогнутой сферической поверхности радиуса $Я_2$ (рис. 18.9), то для определения можно воспользоваться формулами (18.4) и (18.6), подставив в них отрицательное значение ($—И_2$). В итоге получим:

для цилиндра

$$*»,,=0{,}418 \sqrt{\frac{pE}{*1*2}}$$

для шара

$$<7_{тн}=0{,}388$$

Аналогично могут быть найдены напряжения при сдавливании тел и другой формы.

Вопросы для самоконтроля к главе 18

18.1. Что такое концентрация напряжений?

18.2. Что представляет собой теоретический коэффициент концентрации напряжений?

18.3. Как влияет радиус закругления выточки на коэффициент концентрации напряжений?

18.4. Какое влияние оказывают пластические свойства материала на концентрацию напряжений?

18.5. Что такое контактные напряжения?

18.6. Чем объясняется способность материала воспринимать достаточно высокие сжимающие напряжения в зоне контакта двух тел без разрушения?

ПРОЧНОСТЬ МАТЕРИАЛОВ ПРИ" ЦИКЛИЧЕСКИ МЕНЯЮЩИХСЯ НАПРЯЖЕНИЯХ

§ 19.1. Понятие об усталостном разрушении материала и его причины

Многие детали машин и элементы сооружений в процессе эксплуатации подвергаются действию нагрузок, меняющихся во времени. Если уровень напряжений, вызванных этими нагрузками, превышает определенный предел, то в материале начинают происходить необратимые процессы накопления повреждений, которые приводят к образованию трещины. В свою очередь, концентрация напряжений на краю трещины способствует дальнейшему ее развитию.

Чаще всего трещины возникают у поверхности детали, но иногда и в толще материала. Этот процесс ослабляет сечение и по истечении некоторого времени, когда трещина достигает критической длины, происходит разрушение детали или конструкции. Как правило, они разрушаются без видимых остаточных деформаций даже в тех случаях, когда изготовлены из пластических материалов. Высказывалось предположение, что под влиянием переменных напряжений материал со временем постепенно перерождается, как бы «устает».

■ Усталость и выносливость материала

Процесс постепенного накопления повреждений в материале под действием переменных напряжений, приводящих к образованию трещины и разрушению, называется усталостью материала. Свойство материала противостоять усталости называется выносливостью.

Физическая природа процесса усталостного разрушения изучалась различными методами.

Установлено, что материал нужно рассматривать неоднородным микро- и макроскопически. Для материалов микроскопическая неоднородность определяется кристаллическим строением, для неметаллических материалов — молекулярным строением, а для волокнистых и композитных материалов неоднородность носит макроскопический характер.

Механизм процесса усталостного разрушения металлов неразрывно связан со структурной неоднородностью, заключающейся в случайных вариациях размеров и очертаний отдельных зерен металла, их кристаллографической ориентации, в наличии различных включений, дефек-

тов кристаллической решетки и т. п. Вследствие указанной неоднородности при переменных напряжениях', даже не превосходящих предела пропорциональности, в отдельных неблагоприятно ориентированных зернах возникает пластическая деформация. Она связана с деформацией сдвига по некоторым кристаллографическим плоскостям (в некоторых зернах возникают линии скольжения). При определенном уровне напряжений прочность некоторых кристаллитов (зерен) нарушается, следствием чего0 является образование микротрещин по бдной из плоскостей скольжения. Образование трещин связано с касательными напряжениями, а ее развитие в основном определяется нормальными напряжениями. Слияние возникших микротрещин создает благоприятные условия для появления и дальнейшего развития макротрещин, причем наличие начальных дефектов ускоряет данный процесс.

Сргвните явление усталости материала с явлением разрутпеяяя вязкого материала при длительном действ ни нагрузки (см. § 16.7)

После разрушения на поверхности излома, например, металлической детали обычно обнаруживаются две ярко выраженные области. В одной микроповерхность излома сглажена, а в другой проявляются признаки свежего хрупкого разрушения. Кристаллы имеют острую огранку и блестящую чистую поверхность (такую же, как и поверхность разрушения чугунного образца при одноосном статическом растяжении).

На рис. 19.1 показан излом рельса, происшедшего в результате развития трещины, образовавшейся внутри сечения в зоне местного дефекта. На рис. 19.2 представлено усталостное разрушение вагонной оси, где отчетливо видна более гладкая зона постепенного развития трещины. Рис. 19.3 иллюстрирует разрушение горячекатаной арматуры периодического профиля; на рис. 19.4 показано усталостное разрушение раскоса стального пролетного строения железнодорожного моста. Усталостная трещина начала развиваться в зоне концентрации напряжений у заклепочного отверстия.

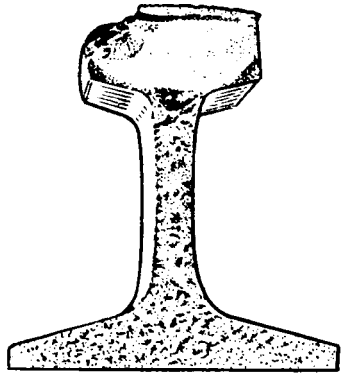


Рис. 19.1. Усталостное разрушение рельса

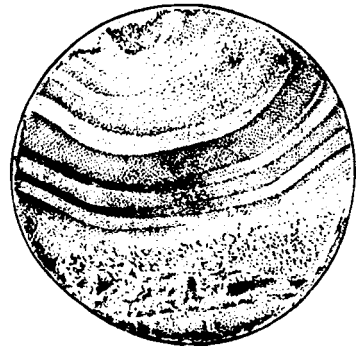


Рис. 19.2. Усталостное разрушение вагонной оси

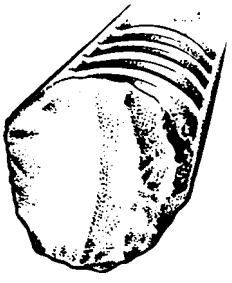


Рис. 19.3. Усталостное разру- шение горячекатаной арматуры раскоса стального пролетного стро- пср и одического профиля при растяжении

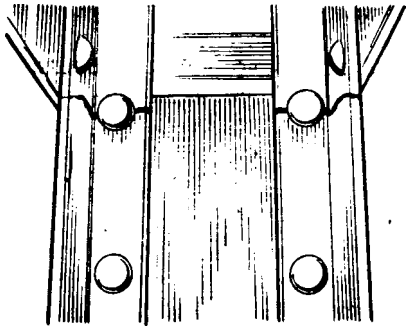


Рис. 19.4. Усталостное разрушение' ения моста

Заметим, что физическая теория прочности твердых тел в настоящее время находится еще не на такой стадии, чтобы на ее основе создать методы расчета на выносливость. В связи с этим теория усталостной прочности материалов строится пока путем накопления экспериментальных данных, на базе которых формулируются некоторые правила расчетов на выносливость.

§ 19.2. Характеристики циклов напряжений

Усталостная прочность материалов при переменных напряжениях зависит от вида напряженного состояния и от характера изменения напряжений во времени.

Рассмотрим случай одноосного напряженного состояния.

Будем называть циклом напряжений однократную их смену, соответствующую полному периоду их изменения.

Цикл напряжений

Определим напряжения в точке ***к,*** расположенной на контуре вала, вращающегося с равномерной угловой скоростью ***со*** (рис. 19.5, ***а, б):***

$$(7 = \frac{м\ M}{I}\ y \frac{}{I}\ \text{гвт ю},$$

или

$$\text{сг} = <\text{т}_a 8\text{т}\ \textit{Щ}. \qquad (19.1)$$

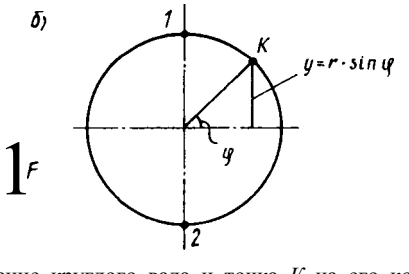


Рис. 19.5. Поперечное сечение круглого вала и точка *К* на его контуре

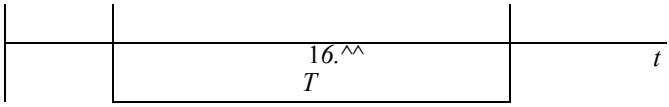


Рис. 19.6. График изменения нормальных напряжений в контурной точке поперечного сечения круглого вала

Наибольшее напряжение возникает в точках ***1*** или ***2*** в зависимости от способа опирания вала и приложения нагрузки. Равенству (19.1) соответствует график изменения напряжения ***а,*** приведенный на рис. 19.6. Как видно, напряжения периодически меняются во времени с периодом ***Т*** (через промежуток времени ***Т*** напряжение принимает одно и то же значение).

Различным законам изменения напряжений соответствуют различные виды циклов. Рассмотренный пример является примером симметричного цикла, который характеризуется равными по абсолютному значению максимальным и минимальным напряжениями. Если вдоль оси вала приложена осевая растягивающая (или сжимающая) сила ***И,*** постоянная во времени, то нормальные напряжения в той же точке ***к*** определяются в этом случае выражением

$$o = o_m + a_a \$ \backslash n \; Ш,$$

где

$$N$$

В зависимости от значения нормальной силы график изменения напряжений во времени может иметь вид, показанный на рис. 19.7, ***а—в.*** Такой закон изменения напряжений называется асимметричным циклом, для которого максимальное и минимальное напряжения по абсолютному значению различны. Если знаки и <Ттш различны, то такой цикл носит название ***знакопеременного.*** Если же знаки максимального и минимального напряжения одинаковы, тогда цикл называется ***знакопостоянным.*** В том случае, когда одно из напряжений ($<\tau_{ши}$ или $сг_{т1п}$) равно нулю, такой цикл носит название *пульсационного* или ***отнулевого*** цикла.

Любой цикл напряжений характеризуется двумя параметрами:

Параметры цикла

$$°m = \frac{frmgj\ °\underline{min}\ ^тжт -}{\quad\quad\quad;\quad\quad} \text{ И } O_a = \frac{\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad}{\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad}$$

где a_m — среднее постоянное напряжение цикла; o_a — амплитуда цикла (наибольшее значение переменной составляющей цикла напряжений).

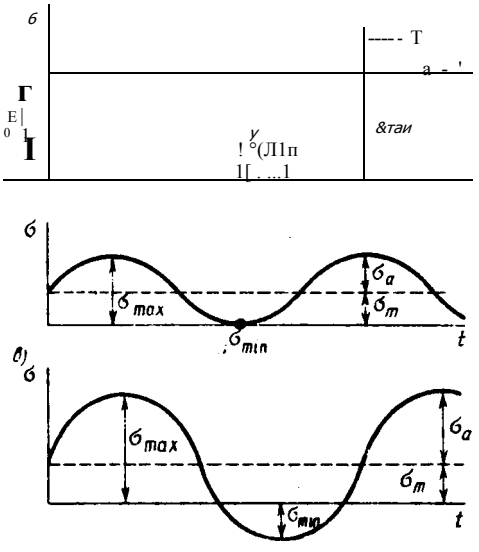


Рис. 19.7. Изменение напряжений при асимметричном цикле: *а* — чеакопостоюшом; *б* — пульсапионном (отнулевом); *в* — чнакопеременном

Разность (Тща* ~ °***mm*** = 2c_0 называется ***размахом напряжений.***

Отношение напряжений

/

$$\frac{\text{----}}{\text{тах}} = \boldsymbol{P}$$

Коэффициент асимметрии цикла

назьшается ***коэффициентом асимметрии цикла.***

Здесь под и <$т_т$,, понимаются наименьшее и наибольшее значения напряжений. При разнозначных напряжениях коэффициент асимметрии принимается со знаком « — ».

Для пульсационного цикла ***р*** = 0, а для симметричного ***р*** = — 1 (поэтому в обозначениях величин, соответствующих симметричному циклу, вводится индекс — 1).

Циклы, имеющие одинаковое значение коэффициента асимметрии, называются подобными.

Подобные циклы

Заметим, что при нормальной (комнатной) температуре в достаточно широком диапазоне частот изменения напряжений (до 5000 циклов/мин) усталостное разрушение определяется только параметрами $сг_а$ и ***a_m***.

§ 19.3. Кривые усталости. Предел выносливости

Основной характеристикой выносливости материала является получаемая экспериментальным путем кривая усталости. Ординаты кривой усталости — значения мак-

симальных напряжений цикла, при которых происходит разрушение детали, а абсцисса — число циклов к, которое выдержала деталь до разрушения (рис. 19.8).

Построение усталостной кривой представляет собой весьма трудоемкую задачу.

Для проведения усталостных испытаний используются специальные машины, которые по виду нагружения образца можно разделить на машины для испытаний при изгибе, кручении, растяжении—сжатии, сложном напряженном состоянии, а также универсальные.

На рис. 19.9 приведена схема простейшей машины, предназначенной для испытания на усталость лабораторных образцов при консольном изгибе с вращением. Образец *1* круглого поперечного сечения с диаметром рабочей части *(1* закреплен в патроне шпинделя *2* машины, вращающегося с определенной скоростью. На конце образца устанавливается подшипник *3,* через который передается сила *Г* постоянного направления. В наиболее опасном сечении *1—1* за счет изгиба образца возникают нормальные напряжения, изменяющиеся в фиксированной точке поперечного сечения по симметричному циклу. Счетчик числа оборотов шпинделя позволяет определить число циклов до разрушения образца (при разрушении образца машина автоматически отключается).

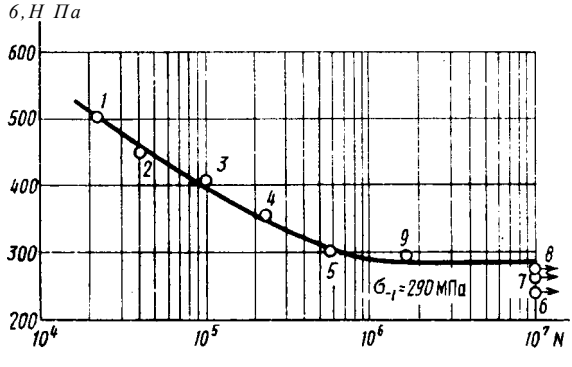


Рис. 19.8. Кривая усталости

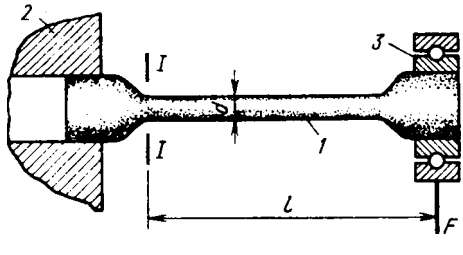


Рис. 19.9. Принципиальная схема простейшей машины, предназначенной для проведения испытаний на усталость при изгибе с вращением:
] — испытуемый образец; *2 —* шпиндель; *3 —* подшипник

Первую машину для усталостных испытаний в середине XIX в. построил немецкий ученый А. Велер, который занимался исследованием усталостной прочности осей подвижного состава железных дорог. Хотя сам Велер не пользовался кривой усталости, в последующем ее стали называть кривой Велера, отмечая тем самым его вклад в решение проблемы усталости материалов.

А. Велер (Велер) (1819—1914) — аемецкня инженер

Для получения характеристик сопротивления усталости необходимо провести испытания не менее десяти одинаковых образцов. При этом каждый образец испытывают только при одной амплитуде напряжений до разрушения (или до базового числа циклов). Под базовым числом циклов $Л^{\wedge}_{6}$ понимается предварительно задаваемое число циклов напряжений, до которого испытывается образец.

Базовое число циклов

Первый образец испытывается при амплитуде напряжений <7„«(0,65...0,75) о-,. Постепенное снижение напряжения $\boldsymbol{o_a}$ приводит к увеличению долговечности образца, под которой понимается число циклов до разрушения.

Так как число циклов при этом растет очень быстро, при построении кривой усталости удобно воспользоваться полулогарифмической системой координат (см. рис. 19.8). Для некоторых материалов, например углеродистых сталей, кривая усталости в такой системе координат имеет горизонтальный участок, которому отвечает напряжение $\boldsymbol{a_p}$.

Напряжение ег/ ***называется пределом выносливости материала и представляет собой характеристику его усталостной прочности.***

Предел выносливости материала

Чаще всего испытания проводятся при симметричном цикле напряжений. В этом случае предел выносливости обозначается ***<m_,.***

В процессе длительных испытаний было установлено, что образцы материалов, кривая усталости которых имеет горизонтальный участок, не разрушившиеся при ***N***= 10 циклах, не разрушаются и при большем числе циклов. Поэтому испытания таких образцов прекращают при #=10^7 циклах и в том случае, если они не разрушились. Точки, соответствующие неразрушившимся образцам, откладывают в правой части графика против базового числа и отмечают стрелками.

Практический ***сто*** с об определена предела выносливости

Для цветных металлов и легированных сталей кривая усталости не имеет горизонтального участка, т. е. для них не удается установить такое число циклов, после которого образец не разрушился бы в дальнейшем (рис. 19.10). В подобных случаях база испытаний принимается 10^8 циклов. В этом случае под пределом выносливости понимается тЪ наименьшее значение максимального напряжения цикла, при котором происходит разрушение образца при базовом числе циклов, и обозначается этот предел <$т_{-1Л}$г.

Определение и редела выносливости для цветных металлов

10^3 10^6 $10'$ 10^e N

Рис. 19.10. Кривая усталости для алюминиевых сплавов

Следует обратить внимание на то, что результаты усталостных испытаний имеют значительный случайный разброс. Для получения достаточно достоверных характеристик прочности материала при переменных напряжениях нужно испытать много образцов, после чего результаты испытаний подвергнуть статистической обработке.

Исследование соотношений между пределом выносливости сг_! и другими характеристиками показало, что для сталей

<7_1«(0,4...0,5) $СГ_в$;

для цветных металлов предел выносливости изменяется в более широких пределах:

<т_1»(0,25...0,5) $ст_в$,

где $<x_в$ — предел прочности материала.

§ 19.4. Диаграмма предельных амплитуд

Диаграмма предельных амплитуд

Для получения характеристик сопротивления усталости при асимметричных циклах производят испытания образцов при различной степени асимметрии и по результатам испытаний строят диаграмму предельных напряжений, характеризующую зависимость между амплитудами циклов $\boldsymbol{a_a}$ и средними значениями напряжений циклов $\boldsymbol{a_m}$ (рис. 19.11).

Заметим, что введение нового параметра (параметра асимметрии цикла) требует испытания уже не десятка, а нескольких десятков образцов. Построение диаграммы

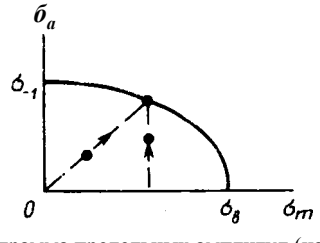


Рис. 19.11. Диаграмма предельных амплитуд (напряжений)

a_a~a_m может быть осуществлено, как правило, двумя способами. Первый способ заключается в том, что всю партию образцов, предназначенную для испытаний, разбивают на несколько серий. Для каждой серии устанавливают среднее значение напряжения a_m. В результате испытаний определяют максимальное значение $a_{„}$, под которым понимается наибольшее значение амплитуды, не вызывающее разрушения образца до базы испытаний при заданном среднем напряжении a_m. Полученные таким образом напряжения a_m и a_a определяют на диаграмме предельных амплитуд одну точку. По результатам испытаний всех серий образцов находят несколько точек указанной диаграммы.

При втором способе для каждой серии образцов сохраняется постоянным коэффициент асимметрии цикла p (при переходе от образца к образцу $a_{„}$ и a_m изменяются, но так, что величина p остается постоянной). Под предельной амплитудой в данном случае понимается то наибольшее значение напряжения, которое при заданном коэффициенте асимметрии не вызывает разрушения образца до базы испытаний.

Назначение диаграммы предельных амплитуд ясно из следующих рассуждений. Допустим, что цикл нагружения образца характеризуется параметрами $<m_a, a_{„}$. Если точка, отвечающая этим значениям $a_a, c_{„}$ оказывается ниже кривой o_a~a_m на рис. 19.11, то рассматриваемый образец способен выдержать неограниченное число циклов или по крайней мере не разрушится до базового числа $ЛГ_6$. Если же точка оказалась выше указанной кривой, то образец разрушится при каком-то ограниченном числе циклов или при числе циклов, меньшем базового числа.

Построение диаграмм предельных амплитуд представляет собой довольно трудоемкую задачу, в связи с чем часто идут по пути ее схематизации (рис. 19.12). Верхняя часть кривой заменяется прямой, проходящей через две точки A и B, причем точка A соответствует симметричному циклу, а точка B — пульсационному (отнулевому) циклу с параметрами $a_a = a_m = a_0/2$.

С х е м а т и з а ц и я диаграммы предельных амплитуд для детали

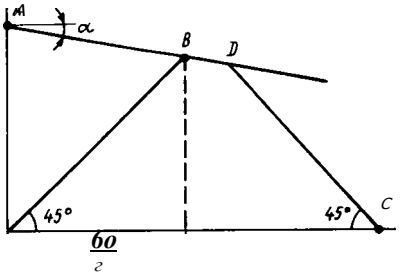


Рис. 19.12. Диаграмма ¿т предельных амплитуд для детали

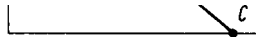


Рис. 19.13. Схематизированная диаграмма предельных амплитуд для хрупких мате- л риалов

Прямая ***Ай*** описывается уравнением

$$(\Gamma_a=(T\text{-}1\text{-}\hat{}(X(T_m,$$

или

$$0_a=0\text{-}_1\text{-}\phi_a 0_m,$$

где

$$\Phi, \quad \frac{2\,\text{ег}\_! - \text{сг}_0}{<^*\text{о}}$$

Если материал является хрупким, то правая часть диаграммы заменяется прямой, наклоненной к оси a_m под углом 45° и проходящей через точку С, соответствующую пределу прочности материала при постоянном во времени нагружении.

Для точек этой прямой справедливо равенство

из которого следует, что максимальное напряжение не должно превосходить предела прочности материала.

Если материал обладает пластическими свойствами, то абсцисса С выбирается равной пределу текучести материала a_T.

В некоторых случаях для хрупких материалов диаграмма предельных амплитуд схематизируется одной прямой, проходящей через точки ***А*** (0, ***a_1)*** и С (<$\text{т}_\text{в}$, 0) (рис. 19.13).

Уравнение прямой ***А С*** по виду совпадает с уравнением (19.2), но с коэффициентом

$$\psi_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_\text{в}}.$$

§ 19.5. Факторы, влияющие на усталостную прочность материала

На предел выносливости материала оказывают влияние многие факторы, в том числе концентрация напряжений, масштабный фактор, качество обработки поверхности, внешняя среда и др. Рассмотрим влияние каждого из них в отдельности.

Концентрация напряжений. Концентрация напряжений при циклическом изменении нагрузки вызывает в зоне очага концентрации зарождение и последующий рост трещины, который завершается усталостным разрушением. Для учета влияния концентрации напряжений на предел выносливости вводится эффективный коэффициент концентрации напряжений κ_a, равный отношению предела выносливости «гладкого» образца a_p и образца с концентратором напряжений a^,, т. е.

Эффективный коэффициент концентрации напряжении

$$\beta = \frac{\sigma_\rho}{}.$$

Экспериментально усгановлено, что коэффициент P уменьшается с увеличением коэффициента асимметрии цикла, т. е. по мере приближения нагружения к статическому, поскольку местные напряжения оказывают малое влияние на статическую прочность материала.

Хотя коэффициент /? должен определяться для каждого значения коэффициента асимметрии цикла, вследствие недостаточности экспериментальных данных в расчетах обычно используются числовые значения эффективного коэффициента концентрации напряжений для симметричного цикла:

$$/» = \frac{\bullet}{<^{*}\text{-}|\kappa}$$

Влияние концентрации напряжений на предел выносливости иногда учитывается коэффициентом чувствительности материала к местным напряжениям:

Коэффициент чувствительности материала

$$? = \frac{0\text{-}1}{a\text{—}1}.$$

где $a = <\tau_{max}/<\tau_{ном}$ — теоретический коэффициент концентрации напряжений (см. гл. 18).

Коэффициент $ц$ зависит главным образом от свойств материала. Для конструкционных сталей коэффициент ^«0,6...0,8, причем более прочным сталям соответствуют большие значения $д$. Поэтому применение высокопрочных материалов при переменных нагрузках не всегда целесообразно.

На рис. 19.14 показаны графики изменения коэффициента чувствительности в зависимости от предела прочности материала $сг_в$ и теоретического коэффициента концентрации напряжений а.

Замечено, что усталостное разрушение в значительной степени зависит от интенсивности уменьшения напряжений в области очага концентрации напряжений. Если местные напряжения убывают достаточно резко, то число зерен материала в зоне высоких напряжений относительно невелико и вероятность зарождения усталостной трещины также относительно невелика.

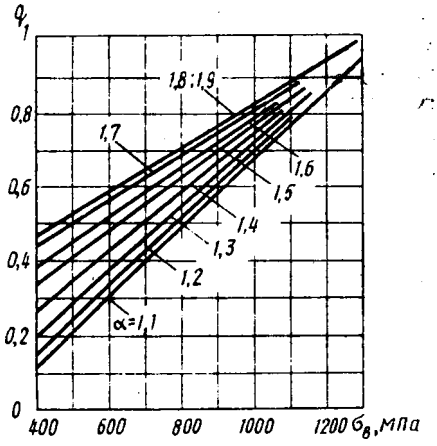


Рис. 19.14. Графики изменения коэффициента чувствительности в зависимости от предела прочности материала и теоретического коэффициента концентрации напряжений

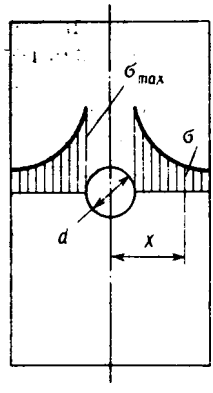


Рис. 19.15. Эпюра нормальных напряжений в зоне концентрации напряжении

Скорость убывания местных напряжений определяется градиентом С/, т. е. производной от напряжения по какой-либо координате (рис. 19.15):

Градиент местных напряжений

$$G=\frac{d\sigma}{dx}$$

Относительным градиентом является

^шах

увеличение которого снижает чувствительность материала к местным напряжениям.

В тех случаях, когда известно точное решение задачи о распределении напряжений в зоне очага концентрации, полученное методами теории упругости, градиент С или ***О*** может быть получен теоретическим путем. Если же точного решения нет, тогда градиент ***б*** может быть найден из экспериментов.

Масштабный фактор. Многочисленными испытаниями установлено, что усталостная прочность образцов при всех прочих равных условиях снижается с увеличением их площади поперечного сечения. Как правило, зависимость между пределом выносливости материала и размерами поперечного сечения имеет асимптотический характер, из чего следует, что для очень больших образцов предел выносливости оказывается неизменным. На сопротивление усталости оказывает влияние также длина образцов, хотя оно менее ярко проявляется по сравнению с влиянием размеров поперечного сечения.

Масштабный фактор

Снижение усталостной прочности с увеличением размеров детали получило название масштабного фактора.

В качестве причин проявления масштабного **фактора** можно указать следующие:

1) статистический фактор — большая вероятность появления дефектов и перенапряженных зерен материала, что приводит к увеличению вероятности разрушения;

2) технологический фактор — влияние способа обработки детали в процессе ее изготовления;

3) производственный фактор — ухудшение качества материала с увеличением объема детали, поковки и т. п.

Для неоднородных материалов, имеющих большое число дефектов, влияние масштабного фактора на предел выносливости выражено сильнее, чем для однородных материалов с существенно меньшим числом дефектов.

Влияние абсолютных размеров детали на предел выносливости материала учитывается с помощью коэффициента масштабного фактора.

В некоторых случаях в справочной литературе значения эффективных коэффициентов концентрации напряжений приводятся с учетом масштабного фактора. Тогда при расчетах детали на выносливость вносить поправку на размеры детали не следует.

Качество поверхности. Результаты испытаний образцов, поверхность которых имеет разную степень чистоты обработки, свидетельствуют о том, что предел выносливости, полученный для образцов с полированной поверхностью, выше, чем для образцов со шлифованной поверхностью, а <Тр последних выше, чем образцов с поверхностью, обработанной резцом, и т. п.

Это обстоятельство объясняется тем, что после обработки резцом на поверхности образца остаются надрезы, царапины и т. п., которые при действии переменных во времени нагрузок провоцируют зарождение и последующее развитие трещин.

Для повышения усталостной прочности деталей используются технологические методы упрочнения их поверхности, такие, как наклеп поверхностного слоя путем обдувки дробью или ультразвуком, закалка токами высокой частоты и др.

Положительное влияние указанных способов на усталостную прочность детали объясняется тем, что в поверхностном слое материала создаются сжимающие напряжения, которые затрудняют развитие усталостных трещин. Кроме того, вследствие наклепа повышается прочность материала в поверхностном слое.

Влияние технологических факторов на усталостную прочность оценивается коэффициентом поверхностного упрочнения.

Внешняя среда. Резкое снижение предела выносливости вызывает коррозия металлов. При этом в поверхностных слоях возникают трещины коррозионной усталости, в основном внутрикристаллические. Около небольших местных коррозионных повреждений возникает концентрация напряжений, причем на дне коррозионной полости появляются максимальные напряжения. Это

Влияние внешней среды

приводит к более интенсивному развитию коррозии и к постепенному углублению трещин усталости. Снижение предела выносливости вследствие коррозии более существенно для высокопрочных сталей. В целях защиты конструкций от коррозии применяют различные защитные (антикоррозионные) покрытия поверхностей, например их окраску.

§ 19.6. Коэффициент запаса при циклическом нагружении

Диаграмма предельных амплитуд, которая рассматривалась выше (см. § 19.4), была построена по результатам испытания образцов. При расчете конструкций нужно учитывать снижение предела выносливости, обусловленное теми факторами, которые обсуждались в предыдущем параграфе. В результате предельное значение амплитуды циклов $\boldsymbol{ст_a}$ для конструкции уменьшается

в $к$ раз и сама диаграмма $o_a \sim o_m$ принимает вид, показанный на рис. 19.16.

Уравнение прямой ***A 'C*** имеет вид

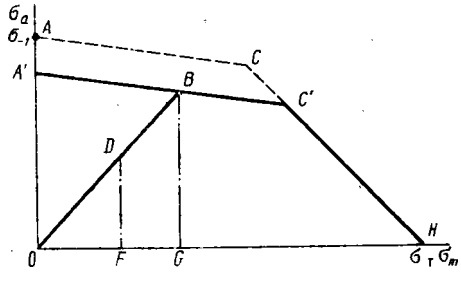
$$C_a = \backslash \ (<7\_1\text{-}ф(T_m).$$

$\boldsymbol{к}$

Рассмотрим точку ***Б*** на диаграмме, которой соответствуют расчетные значения напряжений $\boldsymbol{a_a}$, $\boldsymbol{a_m}$, действующие в конструкции. Так как точка ***О*** находится ниже предельной прямой ***A'C',*** то конструкция обладает некоторым запасом усталостной прочности. При пропорциональном увеличении амплитуды и среднего значения напряжения цикла (при сохранении коэффициента асимметрии цикла) прямая ***Ой*** пересечет прямую ***A'C'*** в точке ***B.*** Под коэффициентом запаса усталостной прочности понимается отношение отрезков

ов ***ос***

Амплитудное значение напряжения, отвечающее точке ***B,***



<ГаВ= 7 (СТ-1 -фОтвУ

Из рассмотрения треугольников ***ОВЕ*** и ***ОБО*** следует

&aB~~~@mB

Приравнивая правые части этих равенств, найдем

'-1
@mB кa„+фa *От-*

Отсюда получим выражение для коэффициента запаса по усталостной прочности конструкции:

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{k_{\sigma}\sigma_a + \psi_{\sigma}\sigma_m}$$

Коэффициент запаса по усталостной прочности материала

Из рассмотрения правой прямой ***С'Н*** на диаграмме предельных амплитуд найдем условие прочности, в соответствии с которым максимальное напряжение цикла Стах = $\sigma_m + \sigma_a$ не может превышать предел текучести (или предел прочности) материала.

Коэффициент запаса по пределу текучести равен

$$n_T = \frac{\sigma_T}{\sigma_{max}}$$

При расчете по предельным состояниям в выражениях коэффициентов запаса вместо пределов выносливости и текучести σ_T записываются расчетные сопротивления по выносливости и по текучести (или по прочности).

При проектировании конструкции сначала производится расчет ее на прочность по текучести и-только в том случае, когда это условие прочности удовлетворяется, выполняется расчет по усталостной прочности.

§ 19.7. Усталостная прочность при нестационарных нагружениях

До сих пор предполагалось, что значение амплитуды напряжений σ_a оставалось неизменным в течение всего срока нагружения конструкции. В большинстве случаев режимы нагружения являются нестационарными и, следовательно, амплитуда напряжений σ_a изменяется во времени. Часто эти изменения носят циклический характер. Продолжительность такого цикла, называемого блоком нагружения, обозначим /б- Для оценки усталостной прочности элемента конструкции необходимо иметь'данные о значениях σ_a и количестве циклов ее повторения на протяжении одного блока нагружения.

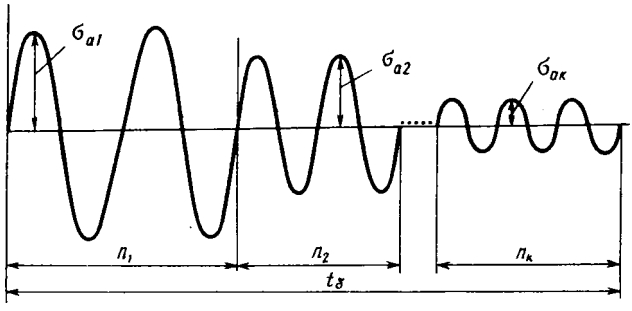


Рис. 19.17. Разбивка интервала изменения напряжения на отрезки, в пределах каждого из которых амплитуда напряжений постоянна

Рис. 19.18. Распределение амплитуд напряжений в блоке нагружения

Еъ^

Для этого разобьем весь интервал изменения напряжения *а* на *к* отрезков, в пределах каждого из которых амплитуда напряжения σ_{a_i}, (/=1, ..., ***к***) считается постоянной и определяется и, — число циклов повторения величины $<\sigma_{a_i}$, (рис. 19.17). По результатам таких вычислений можно построить график зависимости $c\sigma_{a1}$ от и,, показанный на рис. 19.18. Здесь $<x_{ш}$ убывают с ростом порядкового номера г, в результате чего *о^ = о^, о^=о^.*

При неограниченном увеличении числа ***к*** ступенчатая функция распределения параметра o_a переходит в непрерывную функцию.

Число

*

1-1

определяет общее число циклов в одном блоке нагружения.

Если общий срок службы конструкции равен ***Т,*** то число блоков нагружения, укладывающихся в срок службы, равно

$$\lambda = \frac{T}{t_6},$$

а общее суммарное число циклов всех амплитуд напряжений

$$= \boldsymbol{Ane}.$$

Теперь естественно возникает вопрос об определении числа циклов изменения напряжений при нестационарном нагружении, после которых произойдет усталостное разрушение конструкции.

Ответ на этот вопрос может быть получен с помощью гипотезы о линейном суммировании усталостных повреждений, предложенный впервые в 1924 г. Пальмгреном.

Смысл гипотезы заключается в следующем.

Допустим, что $\boldsymbol{M}$ — число циклов до наступления усталостного разрушения при неизменной амплитуде σ_{a1}. Число $\boldsymbol{N_1}$ может быть найдено с помощью кривой Велера. Отношение $\boldsymbol{n_i/N_i}$, где $\boldsymbol{n^* = \kappa n_i}$, определяет относительное усталостное повреждение, соответствующее напряжению $\boldsymbol{\sigma_{a_i}}$.

Очевидно, что усталостному разрушению соответствует равенство

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{n_i^*}{N_i} = 1.$$

Если $\sigma_{a_i} < \sigma_{-1}$ при любом i, то разрушение элемента конструкции не происходит.

Гипотеза линейного суммирования повреждений неоднократно подвергалась проверке. Опыт ее применения показывает, что она дает достоверные результаты, если все значения амплитуды превышают предел выносливости и монотонно изменяются во времени без резких всплесков.

*

Гипотеза линейного суммирования повреждений

Пример 19.1. Сварное соединение стального перекрытия промышленного здания испытывает воздействие переменных усилий с коэффициентом асимметрии р. Число циклов изменения нагрузки Л]. Предельное число циклов для указанного соединения при такой нагрузке равно $Л\Gamma_b$ причем $n_1 = 0{,}5/^{\wedge}$ (рис. 19.19). В связи со сменой производственного оборудования усилия, приходящиеся на сварное соединение, увеличились, но коэффициент асимметрии p сохранился неизменным. Предельное число циклов при новой нагрузке равно N_2. Предполагаемое число циклов приложения этой нагрузки равно $л_2$ ($л_2 = 0{,}4^{\wedge}{}_2$).

1. Произойдет ли разрушение сварного соединения по истечении числа циклов $л_2$? 2. При каком числе циклов $л_1$ наступит усталостное раз-

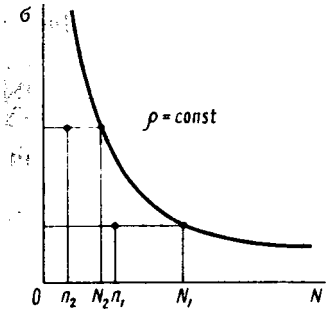


Рис. 19.19. Зависимость между амплитудой изменения напряжения и предельным числом циклов ее повторения

Решение. Найдем коэффициент:

$$y = \frac{«1}{ЛГ_1} + \frac{«2}{лг_2} = 0{,}5 + 0{,}4 = 0{,}9 < 1.$$

Отсюда можно сделать вывод, что при заданном числе циклов />2 сварное соединение не разрушится.

Число циклов *n* ‘ определяется из равенства

$$\frac{}{Щ} + \frac{}{Щ} = 1.$$

Тогда

$$n_1 = 0{,}5^{\wedge}{}_2.$$

Иногда гипотезу линейного суммирования усталостных повреждений записывают в скорректированной форме:

$$\sum_{I-1}^{*} \frac{n_i}{N_i} = a,$$

где *a* определяется на основании многочисленных экспериментов и статистического анализа их результатов.

Последнее соотношение можно представить в виде

$$X \frac{n_i}{N_i} = a.$$

Здесь под знаком суммы стоит выражение, определяющее степень усталостного повреждения, соответствующего напряжению и накапливаемого в течение одного блока нагружения.

Число блоков нагружения за весь срок службы конструкции находится из равенства

$$I -$$

§ 19.8. Расчет на прочность при пердаенных напряжениях

Условие прочности при напряжениях, переменных во времени

Расчет элементов строительных конструкций на выносливость сводится к проверке неравенства вида

где Ст.* — максимальное нормальное напряжение; —

расчетное сопротивление усталости, зависящее от временного сопротивления материала; а — коэффициент, учитывающий число циклов нагружений; — коэффициент, зависящий от вида напряженного состояния и коэффициента асимметрии цикла. Например, для стальных конструкций коэффициент y_y определяется по табл. 19.1.

Таблица 19.1

Значение коэффициента $y_т$ для стальных конструкций

5ПШ	*p*	Уу
Растяжение	— 1<p<0	2,5
	0<p<0,8	1.5 —Р 2,0
	0,8<p<1	1.2—р 1,0 1-р
Сжатие	-1<p<1	2 1-р

Расчетное сопротивление усталости, а также коэффициент ос учитывают качество обработки поверхности рассчитываемого элемента, его конструктивное исполнение, наличие концентраторов напряжений.

Для частных видов конструкций соотношение (19.3) может принимать несколько отличную форму. Так, при расчете стальных конструкций мостов используется следующее неравенство:

(19.4)

где ***Я*** — расчетное сопротивление при растяжении, сжатии и изгибе по пределу текучести материала; ***т*** — коэффициент условий работы;

$$y'\sim(aP+8)-(a\ 0-5)\ p \qquad ^19'5^$$

а, ***5*** — коэффициенты, учитывающие марку стали и нестационарность нагружения; ***р*** — коэффициент асимметрии цикла переменных напряжений; /? — эффективный коэффициент концентрации напряжений.

Коэффициент определяемый выражением (19.5),

, описывает вид диаграммы предельных амплитуд с учетом концентрации напряжений, качества материала и обработки его поверхности, режима нагружения и других факторов.

Пример 19.2. Раскос сквозного стального пролетного строения железнодорожного моста при прохождении поезда испытывает воздействие переменного осевого усилия. Наибольшее растягивающее усилие равно = 1200 кН, наименьшее (сжимающее) усилие Л^п = 200 кН.

Расчетное сопротивление *Я* низколегированной стали марки 15ХСНБ равно 295 МПа. Коэффициент условий работы т = 0,9. Поперечное сечение составное (рис. 19.20) и его площадь равна $Л_{пй1о}$ = 75 см .

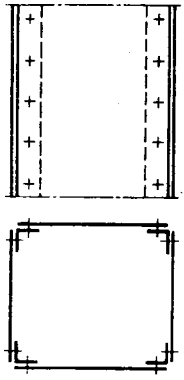


Рис. 19.20. Конструкция раскоса стального пролетного строения железнодорожного моста

Решение. Коэффициент асимметрии цикла определяется так:

$$!АГщш1\_ 1$$

$$-^{тах} 6$$

В соответствии со СНиП 2.05.03—84 коэффициент *¡}* принимается равным 1,5; параметры а=0,72 и 5 = 0,24.

Тогда

$$у_у = [(0,72\ 1,54 - 0,24) - (0,72\ 1,5 — 0,24)/6]^{-1} = 0,85.$$

Найдем максимальное нормальное напряжение:

$$'Тта* = \frac{Ли* 1200\ 10^3}{^пеПо\ 75\ 10} = 160 МПа.$$

Правая часть неравенства (19.4) принимает значение

$$у_х тЯ = 0,85\ 0,9\ 295 = 226,4 МПа > 160 МПа.$$

Следовательно, условие усталостной прочности раскоса выполняется.

§ 19.9. Понятие о малоцикловой усталости

При многоцикловом усталостном разрушении, рассмотренном в предыдущих параграфах, материал деформируется упруго. Разрушение начинается в местах концентрации напряжений как результат развития зародившейся трещины и носит хрупкий характер (без появления заметных пластических деформаций). Другим видом усталости является малоцикловая усталость, под которой понимается разрушение при повторных упругопластических деформациях; она отличается от многоцикло-

щ

Малоцикловая усталость

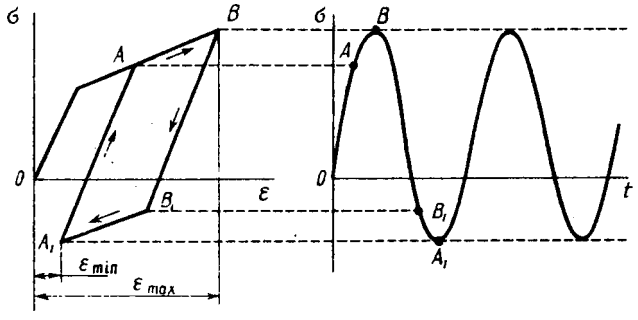


Рис. 19.21. Схематизированная диаграмма деформирования материала (а) и график изменения напряжения во времени *(б)*

вого усталостного разрушения наличием макроскопической пластической деформации в зоне излома. Строгой границы между многоцикловой и малоцикловой усталостями провести нельзя. В СНиП Н-23—81 отмечается, что проверку стальных конструкций на малоцикловую прочность следует выполнять при числе циклов, меньшем 10^5.

Ответьте на вопрос № 19.10

Рассмотрим схематизированную диаграмму деформирования материала, показанную на рис. 19.21, ***а.*** Рядом (рис. 19.21, ***б)*** приведен график изменения напряжений во времени. При первом нагружении вдоль кривой ***OAB*** точка, изображающая состояние материала, движется вдоль диаграммы деформирования по линии ***OAB.*** Затем напряжения уменьшаются и та же точка движется по линии BB_XA_X. По достижении напряжением минимального значения начинается его возрастание и деформирование совершается далее по замкнутой линии ***A\AB3\.***

Размах деформаций за один цикл равен

^шах £щт>

а размах пластических деформаций

^^11.1 ~ Билтах Ещншп?

где Ецлтах! — максимальная и минимальная пластические деформации при циклическом изменении напряжений.

Характер разрушения при малоцикловой усталости зависит от способности материала к накоплению пластических деформаций при циклическом деформировании.

Материалы называются циклически стабильными, если остаточная деформация не меняется во всех циклах.

Стабильный материал

Рассмотренный выше пример иллюстрирует особенности деформирования таких материалов.

В

Для циклически разупрочняюшихся материалов характерны увеличение остаточных деформаций и рост суммарной пластической деформации.

Разунрочниющийся материал

ц

У прочняющийся материал

Если остаточная деформация уменьшается от цикла к циклу, а суммарная пластическая деформация стремится к некоторому предельному значению, то такой материал называется циклически упрочняющимся.

Расчет на малоцикловую прочность связан с большими трудностями, которые в значительной степени объясняются недостатком экспериментальных данных. В некоторых случаях единственным выходом из этого положения является проведение испытаний натурных узлов или их моделей.

Одним из способов повышения сопротивления элементов конструкций малоцикловому усталостному разрушению является изготовление их из циклически упрочняющихся материалов.

Вопросы для самоконтроля к главе 19

19.1. В чем заключается явление усталости материала?

19.2. Что такое цикл напряжений? Какие циклы вам известны? Какие параметры характеризуют цикл напряжений?

19.3. Что представляет собой кривая Велера?

19.4. Что такое предел выносливости?

19.5. Что представляет собой диаграмма предельных амплитуд и каково ее назначение?

19.6. Какие приемы схематизации диаграммы предельных амплитуд вам известны?

19.7. Какие факторы влияют на усталостную прочность материалов? Какие мероприятия позволяют уменьшить влияние этих факторов на усталостную прочность материала?

19.8. В чем отличие стационарных нагружений от нестационарных? Что такое блок нагружения?

19.9. В чем заключается принцип линейного суммирования повреждений?

19.10. Что собой представляет малоцикловая усталость?

19.11. В чем отличие циклически упрочняющихся, стабильных и разупрочняющихся материалов?

ОСНОВЫ НЕКОТОРЫХ МЕТОДОВ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ТЕЛ

§ 20.1. Вводные замечания

В рассмотренных выше главах при теоретическом определении напряжений в стержнях использовались определенные гипотезы, упрощающие решение задачи. Если проверка найденных напряжений или их уточненное исследование выполняются экспериментально, то получаемые результаты в общем случае не полностью укладываются в рамки этих гипотез. Для того чтобы результаты правильно объяснить и использовать, как правило, требуется более широкий взгляд на деформирование элемента конструкции. Такую возможность создает применение основных понятий и уравнений теории упругости. Поэтому ниже, предваряя экспериментальные методы, кратко излагаются уравнения, используемые в теории упругости для наиболее простого, но важного случая, называемого плоской задачей.

В гл. 13 были даны основные сведения о ***методе тензометрии*** как об одном из основных экспериментальных методов. Однако его недостаток состоит в том, что в нем сведения об общей картине деформирования элемента получаются на основе «точечных» измерений деформаций. В настоящее время существует и успешно применяется в механике деформирования значительное число методов, основанных на использовании достижений экспериментальной оптики и примыкающих разделов физики.

Здесь изложены основные представления о наиболее эффективных методах, таких, как ***метод фотоупругости, метод муаровых полос*** и ***метод голографической интерферометрии,*** позволяющие в наглядной форме получить из эксперимента в отличие от метода тензометрии ***общую картину*** деформирования элемента. Соответствующая обработка ее с привлечением уравнений теории упругости позволяет исследовать напряжения и деформации с необходимой детализацией, в отдельных точках и областях элемента.

§ 20.2. Основные уравнения теории упругости для плоской задачи

Пусть дана тонкая пластина с произвольным контуром, нагруженная в ее плоскости некоторой заданной поверхностной p_x, p_y и объемной нагрузкой, компоненты интенсивности которой принято обозначать Л" и У (рис. 20.1). Материал пластины, как и ранее (см. гл. 1), считаем идеально линейно упругим, сплошным, однородным и изотропным.

В точках тонкой пластины возникает плоское напряженное состояние, характеризуемое напряжениями

$$T_{\text{н}}=\begin{pmatrix}\sigma_x & \tau_{yx}\\ \tau_{xy} & \sigma_y\end{pmatrix}, \tag{20.1}$$

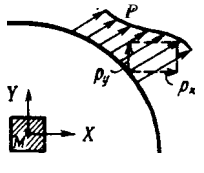
которым отвечают деформации в плоскости пластины

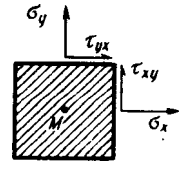
$$T_{\text{д}}=\begin{pmatrix}\varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy}\\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y\end{pmatrix} \tag{20.2}$$

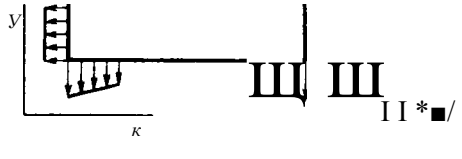
и перемещения точки пластины, определяемые компонентами $u=u\ (x, y)$ и у=у (x, y). Таким образом, в рассматриваемой плоской задаче имеем восемь неизвестных функций: три напряжения a_x, a_y и x_{xy}—m_{yx}; три деформации ε_x, e_y и y_{xy}, два перемещения u и V.

Для их определения составим восемь уравнений, которые делятся на три группы — статические, геометрические и физические, выражающие определенные условия деформирования произвольного элемента тела Ax х сГу, а именно:

статические уравнения, которые выражают условия равновесия элемента тела под действием сил, распределенных по его граням;







геометрические уравнения, которые дают связь между перемещениями и, v и деформациями e_x, e_y и γ_{xy} в теле;

физические уравнения, которые определяют связь между напряжениями и деформациями элемента (закон Гука).

Статические уравнения. На рис. 20.2 показано, что при переходе от грани элемента x = const к грани x+dx=const, напряжения a_x и т^„ будучи непрерывными функциями координат, получают приращения в виде частных дифференциалов ***(dajdx***) dx и ***(∂x^/∂x) Ax.*** Аналогичная картина имеет место и на горизонтальных гранях. С учетом компоненты объемной нагрузки X составим условие равновесия Σx=0, принимая толщину пластины равной единице:

$$X\,dx\,dy+\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dx\right)dy+\left(\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}dy\right)dx=0.$$

Здесь объемная нагрузка собрана по объему элемента (1* ***∂y***' 1, а напряжения — с площади его граней c1y ■ 1 и (1x ■ 1. После сокращения на ***∂x йy*** получим первое из искомых статических уравнений:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+X=0;\\&\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+Y=0.\end{aligned}\right\}$$

(20.3) Статические уравнения

Второе уравнение, выражающее условие Xy = 0, написано по аналогии с первым.

К дифференцированным уравнениям (20.3) добавим в качестве ***граничных условий*** условия равновесия в точках контура пластины (условия на поверхности). По рис. 20.3, обозначив направляющие косинусы нормали к контуру

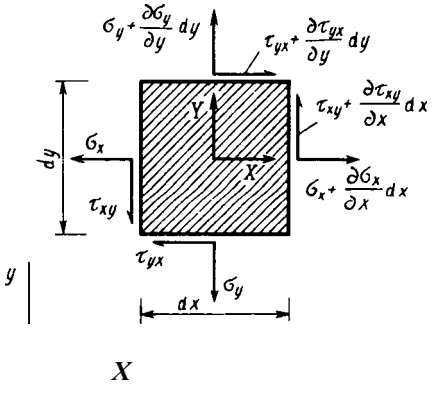
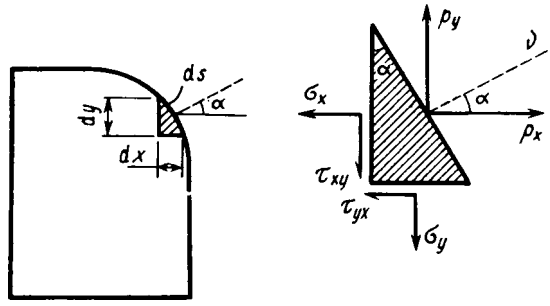


Рис. 20.2. Равновесие элемента пластины при непрерывном изменении напряжений в ее объеме



X

Рис. 20.3. Равновесие элемента на контуре пластины

v через /= cos (x^v) = cosa и ***m*** — cos (y^v)=sina, составим условие Zx=0 для элемента, выделенного у контура:

$$p_x A s - a_x A y - x_{yx} dx = 0.$$

С учетом того, что dy/cb=cosa = / и djc/ds=sin a=m, окончательно запишем условия равновесия на контуре (второе условие пишем по аналогии) в виде

I

Условия равновесия на поверхности

$$o_x 1 + x_{yx} m = p_x, \qquad (20.4)$$

$$x_{1y} 1 + a_y m = p_y.$$

Геометрические уравнения. На время будем считать заданными некоторые непрерывные функции перемещений точек тела ***u = u (x, y) av=v (x, y).*** Выразим через них деформации e_x, e_y и y_{xy}. При этом и деформации, и перемещения будем считать малыми (е«1, ***y«*** 1). В этом предположении продольные деформации e_x, e_y и деформацию сдвига y_{xy} найдем без учета их взаимного влияния.

Из рис. 20.4, ***а*** найдем продольные деформации:

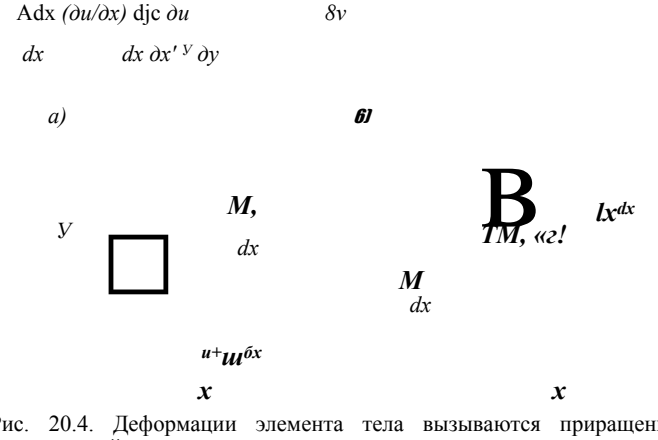


Рис. 20.4. Деформации элемента тела вызываются приращениями перемещений и и у угловых точек элемента

$$\gamma_{xy} = a_1 + cc_1 = \frac{(\partial u/\partial y)\,\Delta y}{a y} + \frac{(\partial v/\partial x)\,\Delta x}{a x} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

Окончательно геометрические уравнения получат вид

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned}\right\}$$

(20.5) Геометрические уравнения

Исключим из этих уравнений перемещения и и V, для чего дважды дифференцируем первую строку по ***у,*** вторую — по ***х,*** третью — по х и ***у.*** Складывая верхние две строки и вычитая нижнюю, получим уравнение

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

(20.6) Уравнение совместности деформаций

Оно называется ***уравнением совместности деформаций,*** так как дает необходимую связь между деформациями, существующую при произвольных непрерывных функциях перемещений ***и,*** v (которые мы исключили).

Если тело до деформации мысленно разбить на бесконечно малые «кирпичики», сообщить им деформации е*. ***e_y и Уф и*** попытаться сложить обратно в целое деформированное тело, то окажутся возможными два случая. В первом (рис. 20.5, ***а)*** все элементы плотно прилягут друг к другу. Такие деформации ***совместны,*** и им отвечает ***непрерывное поле перемещений.*** Во втором случае (рис. 20.5, б) между элементами возникают бесконечно малые разрывы и таким деформациям не отвечает какое-либо непрерывное поле перемещений.

Поле деформаций, которому отвечает непрерывное поле перемещений, называют совместными деформациями. В противном случае деформации называют несовместными.

Деформации совместные и несовместные

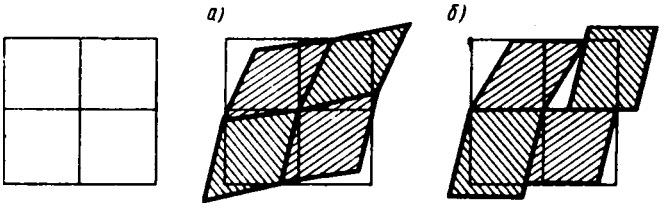


Рис. 20.S. Совместные *(а)* и несовместные (б) деформации элементов тела

Физические уравнения представлены законом Гука, который для плоского напряженного состояния запишется так:

$$\begin{aligned} \pounds x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y); \\ \pounds_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x); \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy}. \end{aligned} \qquad (20.7)$$

или в форме, разрешенной относительно напряжений,

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y); \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x); \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xy}. \end{aligned} \qquad (20.8)$$

Уравнения (20.3), (20.5) и (20.7) вместе составляют необходимые восемь уравнений, решение которых позволяет найти восемь неизвестных функций рассматриваемой плоской задачи.

§ 20.3. Определение напряжений по найденным из эксперимента перемещениям

Изолиния

Ниже описано, как экспериментально получаются семейства интерференционных полос, представляющих ***изолинии*** какого-либо фактора, т. е. ***геометрическое место точек, в которых этот фактор имеет постоянное значение.*** Так, в методе муаров и голографической интерферометрии могут быть получены изолинии перемещений v=const и ***и*** = const. На рис. 20.6 приведена схема семейства изолиний $v_{(}$=const при плоском напряженном состоянии пластины.

Покажем, как, используя уравнения теории упругости, перейти от перемещений к напряжениям. Формулы (20.5) дают возможность вычислить деформации

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \qquad (20.9)$$

и далее по закону Гука (20.8) определить напряжения σ_x, σ_y и τ_{xy}. Производные от перемещений (20.9) определяются численно. Проведем в точке (г, ***J)*** две линии, параллельные осям координат ***х*** и ***у*** (рис. 20.6). Точки их пересечения с изолиниями перемещения v отметим индексами (г— 1), г, (г-н 1) для горизонтальной линии и (/'— 1 ***),j,*** (/'+ 1)

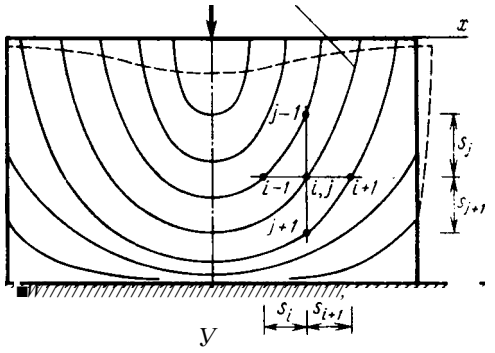


Рис. 20.6. Численное определение деформаций по экспериментально полученному семейству изолиний перемещений

для вертикальной линии. Частную производную ***{dv¡dx)i=\.g(x.i*** вычислим как тангенс угла наклона секущей, проведенной через точки (г—1) и (г+1). Поступая аналогично и для производной по координате ***y,*** найдем

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_i = \frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{s_i + s_{i+1}}; \quad \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_j = \frac{v_{j+1} - v_{j-1}}{s_j + s_{j+1}}. \qquad (20.10)$$

Численное дифференцирование в плоской задаче

Аналогично поступают и с семейством изолиний ***u*** = const.

Наметив сетку линий, параллельных осям координат x и ***y,*** по формулам (20.9) и (20.10) строят поле деформаций, а затем поле напряжений в исследуемой модели. Так как узловые точки ортогональной сетки в общем случае не совпадают с точками пересечения с изолиниями, то для вычисления деформаций и напряжений в узлах применяют формулы интерполирования. Существуют устройства и соответствующие программы для персональных ЭВМ, позволяющие обработать сетку изолиний в автоматическом режиме.

Далее рассмотрим эксперимент с изгибаемой пластиной, для которой получено семейство изолиний прогибов >v = const (рис. 20.7, ***а).*** В теории изгиба пластин по аналогии с гипотезой плоских сечений используется ***гипотеза прямой нормали,*** согласно которой линия ***т—n,*** переходя в положение m_i—n_u остается прямой (рис. 20.7, ***б).*** Тогда при малых прогибах ***(p_x = dw/dx, (p_y=dw/8y*** и перемещения в горизонтальной плоскости произвольной точки с координатой ***z*** будут

$$u = -(p_x z = -z\frac{dw}{dx}; \quad v = -(f)_y z = -z\frac{dw}{dy}. \qquad (20.11)$$

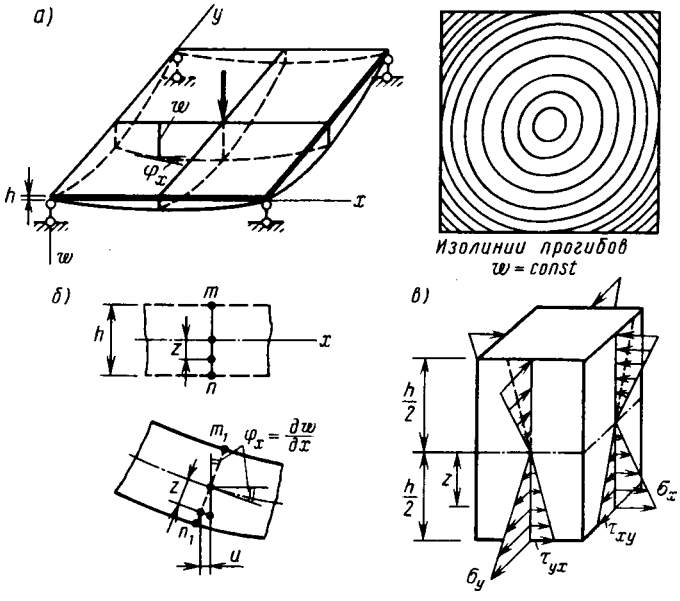


Рис. 20.7. Прогибы и напряжения в изгибаемой пластине

Подставляя формулы (20.11) в (20.9), получим

$$E_x \text{— —} z \frac{\partial^2 \text{ы}}{\partial x^2} > = \text{—2---------1} \quad \text{Уху--} \quad \text{— 2г} \frac{\partial^2 \text{п}}{\text{Зхду}} \qquad (20.12)$$

Напряжения a_x, a_y, x_{xy}, распределенные по толщине пластины А по линейному закону (рис. 20.7, ***в),*** могут быть вычислены при известных деформациях (20.12) по закону Гука (20.8).

Для определения вторых производных от функции прогибов вначале получают по формулам интерполирования поле прогибов в узлах ортогональной сетки линий, фрагмент которой показан на рис. 20.8. Тогда производные в точке ***К*** можно вычислить по формулам численного дифференцирования:

Численное дифференцирование в задаче об изгибе пластины

$$\begin{aligned}
&/\text{ЗиЛ и}'', . \text{— и (З и Л} \quad \underline{*7] \sim \text{ИУ}_4} \\
&\backslash \partial x)к \qquad 2A\ ' \ \backslash \partial y)к \sim \qquad 2\text{Д}\ ' \\
&\delta^{2*}\backslash \qquad \partial\ !\text{ЗиЛ}\ ^{\wedge}{}_{в}\text{-}2\backslash w_к + y/_c \\
&8x^2)к \qquad \partial x\backslash \partial x)к \qquad A^2 \\
&3^2\text{И}>\backslash \qquad + \\
&\partial y^2)к \qquad A^2\ ' \\
&/\ \partial\ ^2\text{п}>\backslash \qquad \textbf{8}\ /\text{ЗнЛ} \qquad \text{Ч-И}^{\wedge}\text{-Иу} \\
&\backslash 8x dy JK\ \partial y\backslash 8x)к
\end{aligned} \qquad (20.13)$$

В некоторых случаях экспериментально получаются изолинии углов поворота нормали к поверхности пластин ***(p_x*** и ***ср_у.*** Тогда вторые производные от функции

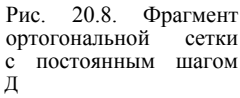


Рис. 20.8. Фрагмент ортогональной сетки с постоянным шагом Д

и> могут быть получены путем численного дифференцирования ***(p_x*** и ***<p_y:***

$$\frac{\partial \phi_x}{\partial x^2} 8^{2}\backslash\backslash> \partial <p_y \partial^2) 1> 8 <p_x \frac{\partial \phi_y}{\partial x' \partial y^2} \partial y \; ' \partial x \partial y \; \partial y \; \partial x$$

Для целей интерполирования, например, на отрезке [*,_!, *(] экспериментальная кривая заменяется обычно кубической параболой (кубическим сплайном) вида

$$/ (x) = \mathbf{a},+\boldsymbol{b_i} (x, - x) + \boldsymbol{Ь} (x, \mathbf{- x)^2} + (x, \mathbf{-} x)^3,$$

где постоянные а,, 6,, с,, 4 подбираются так, чтобы минимизировать ошибки измерений всех ординат /, на данном отрезке. Имеются программы для ЭВМ, автоматически решающие эту задачу.

§ 20.4. Метод фотоупругости

Физические основы метода фотоупругости. Метод основан на том, что некоторые прозрачные материалы при деформации становятся оптически анизотропными; в деформированном состоянии они приобретают свойство двойного лучепреломления (стекло, целлулоид, желатин, бакелит и др.). Такие материалы называют ***оптически активными.*** В оптическом методе исследуется не сама деталь, а ее модель, изготовленная из такого материала. Модель помещается в оптическую установку, называемую ***полярископом,*** где она просвечивается пучком поляризованного света. При нагружении модели на экране появляется ее изображение, покрытое системой полос, анализ которых дает возможность изучить распределение напряжений в модели.

Оптически активные материалы

Известно, что в луче естественного света присутствуют световые колебания всех направлений, перпендикулярных лучу, что связано с хаотической ориентировкой источников световых колебаний у светящегося тела. В поляризованном луче колебания упорядочены. Поляризация называется ***плоской,*** если колебания происходят в одной плоскости, которую называют ***плоскостью поляризации.*** Для ее получения естественный луч пройускают сквозь поляризатор. Им может служить, например, приз-

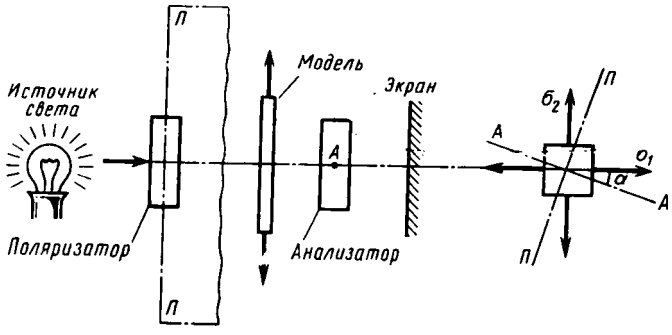


Рис. 20.9. Основные части полярископа

ма Николя, склеиваемая из кристаллов исландского шпата. Поляризатор пропускает колебания в строго определенной плоскости, а составляющие колебаний, перпендикулярные ей, гасит.

Полярископ

На рис. 20.9 схематически показано расположение основных частей полярископа с плоской поляризацией света. Одними из основных частей полярископа являются ***поляризатор*** и ***анализатор.*** Анализатор — это та же призма, что и поляризатор, но в рабочем положении повернутая так, что их плоскости поляризации, обозначенные на рис. 20.9 соответственно ***А—А*** и ***П—П,*** взаимно перпендикулярны. В этом случае луч света, прошедший сквозь поляризатор, будет погашен анализатором, если модель отсутствует или она не нагружена. Экран при этом затемнен.

Предположим, что плоская модель нагружена силами, лежащими в ее плоскости. Тогда плосконоляризованный луч с длиной волны ***X*** на выходе из модели разлагается на два луча, колебания которых происходят во взаимно перпендикулярных плоскостях, совпадающих с плоскостями действия главных напряжений σ_1 и σ_2 в данной точке (рис. 20.10). Эти лучи имеют разность хода

Закон фотоупругостн

$$<5 = C_{Д}A\ (<т,-<г_2), \qquad (20.14)$$

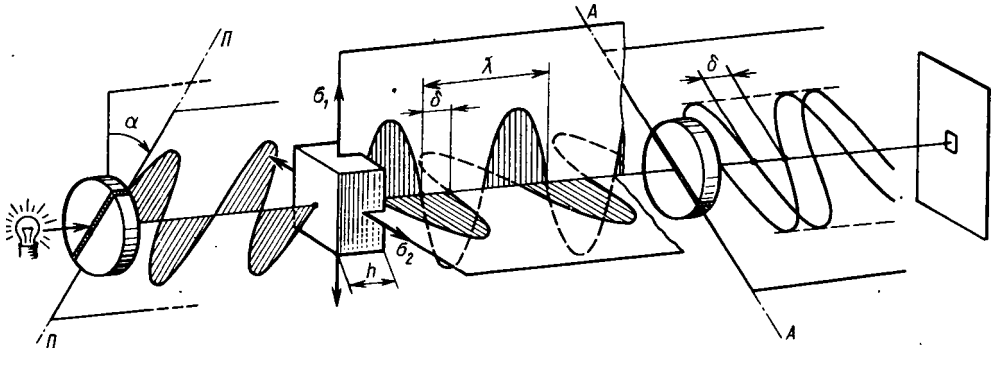


Рис. 20.10. Разложение плоскополяризованного пучка света на два интерферирующих луча в полярнскопе

где ***h*** — толщина прозрачной модели, С* — постоянная, зависящая от свойств материала модели и длины волны света ***к.***

Анализатор пропускает составляющие упомянутых двух лучей, соединяя их в плоскости ***А—А,*** которые будут интерферировать и давать в зависимости от разности хода ***о*** либо усиление освещенности, либо затемнение в данной точке изображения модели на экране. Интенсивность луча на экране определяется выражением

$$I = I_0 \sin^2 2a \sin \frac{n8}{}, \qquad (20.15)$$

где I_0 — интенсивность луча, падающего на модель.

Формула (20.15) указывает на то, что при равномерном освещении нагруженной модели с интенсивностью I_0 освещенность ее изображения на экране в общем случае будет неравномерной. В каждой точке она определяется формулой (20.15). Точки, в которых ***1=0,*** образуют на экране темные полосы, в то время как точки с ***1Ф0*** составят переходные зоны между ними. При этом можно увидеть темные полосы двоякого происхождения, связанные с обращением в нуль одного или другого сызуса в формуле (20.15).

Рассмотрим свойства этих полос подробнее.

Изохромы ■ изоклины. Если в формуле (20.14) разность напряжений a_2 такова, что ***д = X,*** 2А, ..., ***mX,*** то в формуле (20.15) sin ***(n8/X)=0*** и /=0. Такие точки при монохроматическом источнике света образуют на экране темные полосы. Каждой полосе соответствует свое целое число ***m,*** называемое ***порядком полосы.*** Порядок полосы

В случае применения белого света эти полосы будут окрашены, так как условие затухания луча ***5=mX*** не может быть соблюдено сразу для всех составляющих белого света. Каждому значению гг, — $ет_2$ соответствуют свой набор незатухших цветов спектра белого света и, следовательно, своя окраска.

Изолинии одинаковой окраски, соответствующие постоянному значению $<т, — <х_2$, ***называют изохромами.*** Изохрома

Это наименование обычно распространяется и на темные (неокрашенные) полосы, получаемые при монохроматическом свете. По картине указанных темных полос можно установить разность главных напряжений er_i — $<т_2$ в точках модели.

Назовем разность главных напряжений <Tj — $<т_2=«т_0$, вызывающую разность хода лучей, равную длине волны, ***ценой полосы модели.*** Цена полосы

Из формулы (20.14) при ***Ь —).*** имеем

Представим себе, что нагрузка на модель, растет и разность **<71 — *а2*** в некоторой точке последовательно достигает значений c_0, $2<т_0$, ***ma_ü.*** Соответствующая разность хода ***8*** в точке будет равна Я, 2А, ***mX.*** Это, очевидно, вызовет на экране затемнения, называемые затемнениями 1-го, 2-го, ..., ***m-mo*** порядка. Они будут чередоваться с освещением точки в промежуточные моменты.

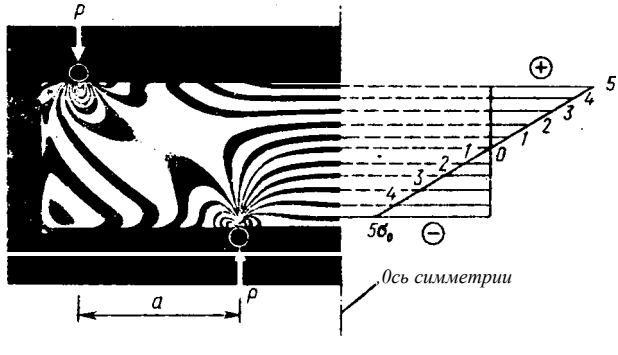
Из сказанного ясно, что если в исследуемой модели наблюдаем полосу порядка т, то разность главных напряжений в точках этой полосы равна

$$гг_1\text{-}ст_2=т(Т_0. \qquad (20.17)$$

Порядок полосы определяется непосредственным подсчетом числа затемнений, возникших в какой-либо точке полосы в процессе роста нагрузки. Обычно порядок полосы совпадает с ее порядковым номером по отношению к нулевой полосе, в точках которой **<m, — <m_2** = 0 при любом значении внешней нагрузки, что упрощает определение порядка полос.

Цена полосы ***a_0*** определяется из опыта путем создания в модели известных напряжений и наблюдения за вызванной ими картиной полос.

На рис. 20.11 приведена фотография полос при изгибе •бакелитовой балочки двумя равными силами. Средний участок балки испытывает действие только моментов ***M,*** в то время как на крайних участках действует еще и внутренняя поперечная сила, что, как видим, отражается на картине полос. На среднем участке в каждой точке имеет место линейное напряженное состояние — растяжение или сжатие напряжением ***а*** параллельно оси балки. Возмущение в картине полос в области точек приложения внешних сил говорит о наличии значительных напряжений, перпендикулярных оси балки. Однако эти области очень недалеко проникают в пределы среднего участка,



в силу чего можно считать, что вдали от точек приложения внешних сил указанные напряжения отсутствуют. На среднем участке разность с, — a_2 равна самому напряжению ***a,*** которое определяем по формуле (20.17):

$$o=mo_0. \qquad (20.18)$$

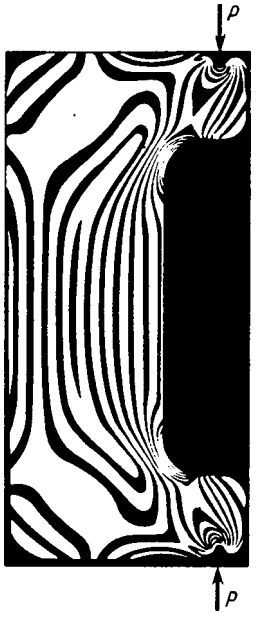
Порядок полос ***m*** указан на фотографии. На этом же рисунке показан график распределения напряжений ***a*** по высоте сечения балки (эпюра ***a),*** построенный по формуле (20.18). Как видим, оптический метод говорит о линейном законе изменения нормальных напряжений ***a*** по высоте балки при изгибе. Этот вывод был получен теоретически выше (см. гл. 6). На рис. 20.12 показаны аналогичная картина полос и построенная по ней эпюра напряжений в сечении внецентренно сжатого бруса.

Рассмотрим теперь темные полосы другого рода, называемые изоклинами.

Изоклиной называется геометрическое место точек, в которых наклон главных напряжений одинаков. Изоклина

Если угол наклона главных напряжений данной изоклины (называемый ***параметром изоклины***) совпадает с углом наклона плоскостей поляризации ***П—П*** и ***А—А*** (см. рис. 20.9), то в формуле (20.15) для точек этой изоклины а = 0, вт2а=0 и ***I=0.*** Такая изоклина видна на экране в виде темной полосы и некоторой темной области, во всех точках которой а«0.

Поворачивая одновременно поляризатор и анализатор с выбранным интервалом (например, 5 или 10°),



Л Л
2 2

<>3210123^5 6

$

Рис. 20.12. Изохромы и эпюра напряжений при внецентренном сжатии

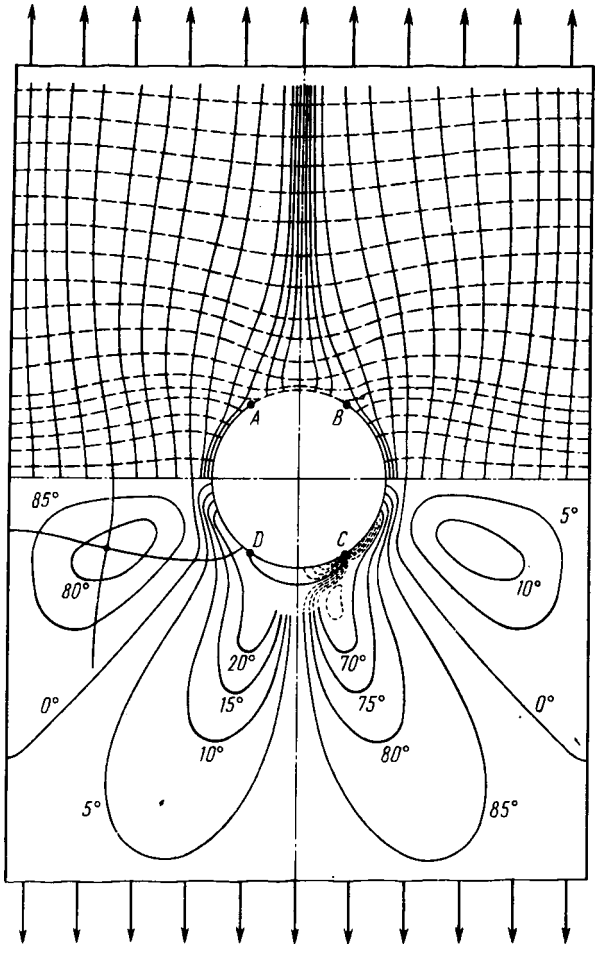


Рис. 20.13. Изоклины (внизу) и траектории главных напряжений (вверху) для растянутой полосы с отверстием

можно получить на экране и зарисовать семейство изоклин данной модели.

На рис. 20.13 в нижней половине показано семейство изоклин для растянутой полосы с отверстием, полученное описанным способом.

Построение траектории главных напряжений

Картина изоклин позволяет построить траектории главных напряжений. На рис. 20.14 приведен один из способов такого построения. Начиная от некоторой точки ***A*** через точки, лежащие посередине между изоклинами, последовательно проводят отрезки ломаной с наклоном, соответствующим параметру пересекаемой изоклины. Вписав затем в ломаную плавную кривую, получают траекторию главного напряжения, проходящую через точку ***A.*** Траектории, построенные по изоклинам, показанным на рис. 20.13, изображены на том же рисунке в верхней половине (сплошной линией — траектории $<\tau_{ь}$

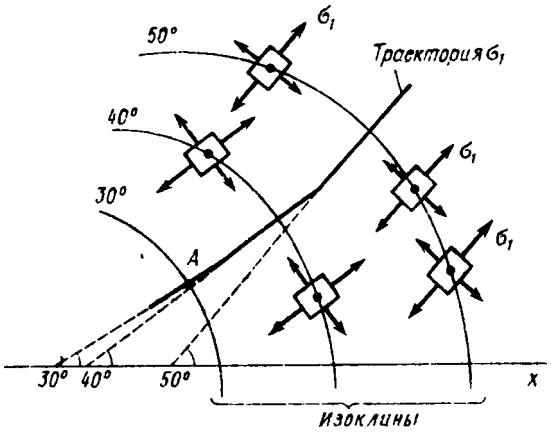


Рис. 20.14. Построение траектории главного напряжения с использованием изоклин

Таким образом, в оптическом методе непосредственно из опыта получают только направления главных напряжений и их разность <т, — сг$_2$. Это дает возможность в каждой точке модели определить касательные напряжения по любой наклонной площадке, применяя формулу плоского напряженного состояния

$$\text{т«}=\frac{a_1 - a_2}{2}\sin 2a. \qquad (20.19)$$

В частности, в каждой точке непосредственно определяется $\tau_{т,,,}$ так как по формуле (13.19) имеем сг, — a_2= ~~ 2Ттд$_X$.

В тех случаях, когда в точках заведомо имеет место линейное напряженное состояние (<т, = <т, o_2 = 0), найденная из опыта разность a_x — a_z равна самому напряжению ***a,*** которым вполне определяется напряженное состояние в точке модели. Это, например, имеет место в точках ненагруженного контура модели.

В общем случае для полного представления о напряженном состоянии помимо разности <τ_5 — <τ_2 необходимо определить каждое из главных напряжений, или, как говорят, необходимо произвести ***разделение этих напряжений.***

Разделение главных напряжений. Для разделения напряжений предложены методы, среди которых имеются методы, требующие постановки дополнительного эксперимента, и чисто вычислительные методы.

Один из экспериментальных методов состоит в следующем. Действию главных напряжений и ***<m$_2$ в*** каждой точке плоской модели толщиной А сопутствует изменение ее толщины на ЛА, связанное с напряжениями на основа-

нии обобщенного закона Гука зависимостью

$$e = \frac{}{n} = \frac{}{c.} = \frac{(m_1 + a_2)}{}$$

отсюда

$$o_1 + o'2 = \frac{E\&\kappa}{цИ} \qquad (20.20)$$

Этот метод заключается в том, что в интересующих точках модели специальным прибором измеряют ДА. Определив затем по (20.20) сумму напряжений и зная их разность <Т) — a_2, можно легко подсчитать каждое напряжение в отдельности.

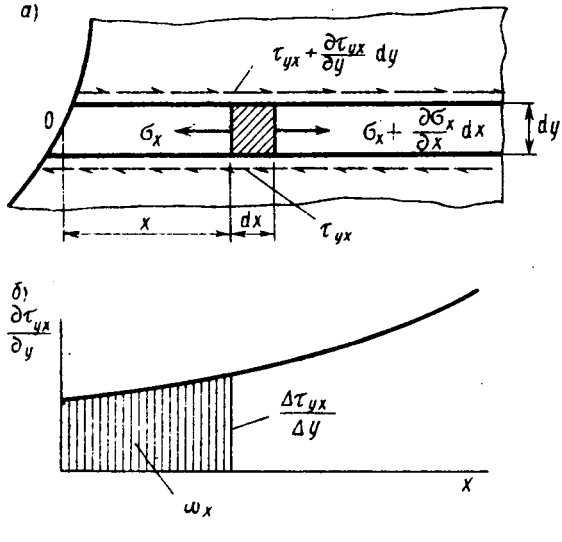
Рассмотрим теперь один из вычислительных методов разделения главных напряжений —***метод численного интегрирования вдоль прямых,*** проведенных параллельно координатным осям (рис. 20.15, ***а).*** Из уравнения (20.3) при 1^=0 имеем

$$\frac{\partial T_{yx}}{\partial x \, \partial y}$$

Интегрируя это равенство вдоль оси ***х,*** найдем

$$o_x = o_{вх,o} + \int_0^X \, dy \qquad (20.21)$$

Вдоль двух линий, параллельных оси ***х,*** расположенных на выбранном расстоянии А***у*** друг от друга, по формуле (20.19) определяют напряжения x_{yx} и строят график разностей этих напряжений Ат,*, поделенных на



расстояние А*у* (рис. 20.15, *б).* Отношение $Дт_{>x}/Дy$ приближенно заменяет производную $дг_{yx}/дy$ под интегралом (20.21).

Напряжение a_x приближенно получим по формуле

$$Ox — \&x,0\ ^x>$$

где $(m_{Xг}$о — напряжение в точке, от которой начинается интегрирование (обычно точка на контуре); $a>_x$ — площадь графика $Am_{yx}/Ay.$

Аналогично, интегрируя вдоль прямых, параллельных оси *у,* определяют и напряжения $a_y.$

Переход от модели к детали. Обратимся теперь к вопросу о переходе от модели к детали. В теории упругости доказывается, что распределение напряжений в теле, находящемся в условиях плоской задачи, не зависит от упругих постоянных материала (модуля упругости *Е* и коэффициента Пуассона /х). Следовательно, закон распределения деформаций и напряжений одинаков в детали и в ее модели, выполненной из различных материалов, при условии их геометрического подобия и подобия в нагрузке. Это позволяет перейти от напряжений $a_ы$ в модели к соответствующим напряжениям *а* в детали по формуле

$$\frac{K, P}{И\ 5\ P_ы} \qquad (20.22)$$

где й*/й — отношение толщин модели и детали; $з_м/з$— отношение соответствующих линейных размеров контура модели и детали; $P/P_м$ — отношение нагрузок на деталь и на модель.

Имеются случаи (многосвязный контур модели, т. е. контур пластинки с отверстиями), когда формула (20.22) строго неприменима, но и в этих случаях ею пользуются как приближенной, но достаточно точной.

Применение фотоупругнх покрытий. Выше упоминалось, что в оптическом методе исследуют не саму деталь, а ее прозрачную модель. Однако область применения этого метода значительно расширена путем использования так называемых ***фотоупругнх покрытий,*** изготовляемых на основе эпоксидных смол. Такое покрытие, обладающее свойством оптической активности, наносится или приклеивается тонким слоем на поверхность исследуемого непрозрачного объекта (металл, бетон, горные породы и т. п.). Деформации покрытия следуют за деформациями поверхностного слоя объекта. Покрытие облучается поляризованным светом, который, отражаясь от поверхности детали, дает возможность получить картину точно так же, как это описано выше для прозрачных

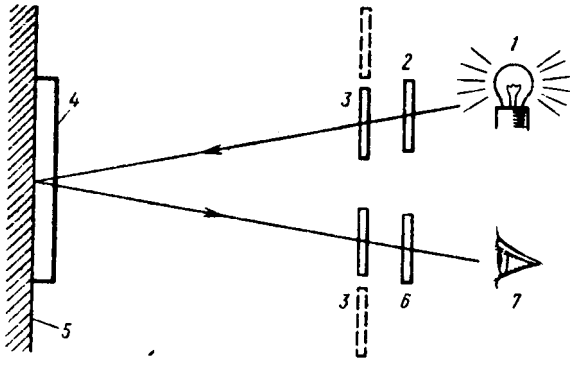


Рис. 20.16. Схема применения фотоупругого покрытия

моделей. На рис. 20.16 *(1* — источник света; *2* — поляризатор; *3* — пластинки в четверть волны; *4* — фотоупругое покрытие; *5* — исследуемый объект; *6* — анализатор; 7 — наблюдатель) показана одна из возможных схем этого способа с так называемым У-образным облучением покрытия.

Слюдяные пластинки в четверть волны ставят для того, чтобы получить круговую поляризацию (как бы быстрое вращение плоскостей ***П—П*** и ***А—А)*** (рис. 20.10), в результате чего изоклины «размываются» и становятся невидимыми.

Применение фотоупругих покрытий дает возможность исследовать напряжения в деталях машин, в строительных конструкциях и других объектах как в лабораторных, так и в натурных условиях.

В заключение отметим, что оптический метод применяют также для исследования и пространственных моделей. Один из способов такого применения носит название ***метода замораживания.*** Основан он на том, что некоторые материалы сохраняют оптическую анизотропию, вызванную деформацией, если модель из такого материала нагружена при повышенной температуре, охлаждена и только после этого разгружена. Оптический эффект сохраняется и после разрезки модели на тонкие пластинки, которые затем просвечивают и изучают, как в плоской задаче, определяя тем самым напряжения внутри пространственной модели.

§ 20.5. Метод муаровых полос

Аналогично методу фотоупругости метод муаровых полос дает возможность получить картину распределения перемещений и деформаций сразу на всей поверхности исследуемой модели или детали. Описание различных разновидностей этого метода выходит за рамки настоящего курса. Поэтому здесь ограничимся лишь основными понятиями об этом методе.

Представим, что на поверхность недеформированной плоской пластинки каким-либо способом нанесена систе-

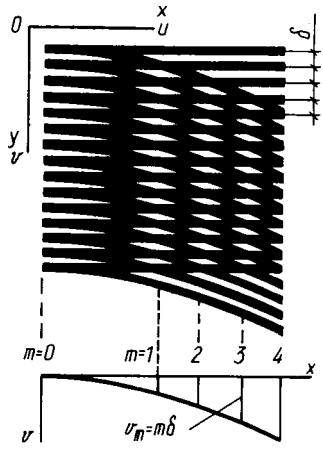


Рис. 20.17. Образование муарового эффекта при совмещении деформированной и недеформированной сеток линий

ма черно-белых линий с постоянным шагом <5 (рис. 20.17). Пусть теперь пластинка получила какие-то деформации в своей плоскости ***xy.*** Обозначим составляющие перемещений точек пластинки в направлении осей ***x*** и ***y*** соответственно через ***u*** и v. Вместе с точками пластинки переместятся и черно-белые линии.

На рис. 20.17 для примера показано, что каждая горизонтальная линия получила одинаковые вертикальные перемещения и искривлена по некоторой кривой v = v ***(x).*** Предположим, что сфотографировали сетку линий до и после деформации и совместили их изображения, как это показано на рис. 20.17. При таком наложении возникает оптический эффект, состоящий в появлении так называемых темных и светлых ***муаровых полос.*** Малые относительные смещения пересекающихся систем линий вызывают значительные перемещения муаровых полос, которые движутся наподобие волн по поверхности пластинки (муар — от французского слова moire — волнообразный рисунок). Чувствительность муаровых полос к малым смещениям пересекающихся линий и позволяет использовать муаровый эффект для измерения смещений и деформаций.

Шаг линий ***Ô*** обычно настолько мал, что на фотографии или на экране сами пересекающиеся линии не видны, а видны лишь муаровые полосы. Связь муаровых полос с перемещениями точек поверхности выясним на рассмотренном примере.

Эффект светлой муаровой полосы создается последовательностью вытянутых криволинейных четырехугольников, образованных пересечением недеформированных линий ***1—1, 2—2, 3—3, ...*** и деформированных линий ***Г—Г, 2′—2′, 3′—3′, ...*** (рис. 20.18). Ось светлой полосы проходит через точки пересечения этих линий (вдоль коротких диагоналей четырехугольников). Промежуток между светлыми полосами более затемнен несовпада-

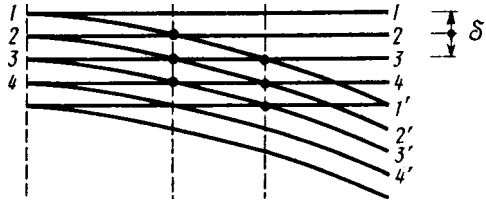


Рис. 20.18. Светлая муаровая полоса образуется там, где смещение кратно шагу сетки |=τ5

ющими участками пересекающихся линий и, отражая меньшее количество света, создает эффект темной муаровой полосы. Переменная интенсивность отражаемого света благодаря различной густоте пересекающихся линий и создает муаровый эффект, который иногда называют механической или геометрической интерференцией.

Из рис. 20.18 видно, что если точки пересечения линий сетки на вертикали ***m*** = 0 имеют перемещения $v_0 = 0$, то точки пересечения на вертикали m= 1 имеют перемещения V! = ***8,*** следующий ряд таких точек будет иметь перемещения v_2 = 2<5 и т. **д.** Таким образом, если число ***m*** рассматривать как параметр светлой муаровой полосы, то во всех точках, лежащих на ее оси (т. е. на средней линии этой полосы), выполняется равенство v_m = /n<5 = const.

Между соседними муаровыми полосами функция v непрерывно меняется так, что разность между перемещениями точек средних линий соседних полос постоянна и равна ***5.*** Обычно для вычисления деформаций достаточно знать разности перемещений соседних точек. Если же нас интересуют сами перемещения, то необходимо дополнительно установить точки, в которых перемещения v (или ***u)*** равны нулю. Такими точками могут быть, например, точки, лежащие на оси симметрии.

Если сетку недеформированных линий расположить вертикально и совместить с их деформированными изображениями, то получим муаровые полосы, соответствующие точкам, в которых постоянны будут перемещения ***u,*** т. е. ***u„=n8*** = const. Таким путем могут быть получены два семейства муаровых полос:

$$\left.\begin{aligned} V_m = v_m\,(x, y) &= \text{const}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots; \\ u_{„} = u_n\,(x, >>) &= \text{const}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots . \end{aligned}\right\} \qquad (20.23)$$

Если функции ***u = u (x, y)*** и V = V ***(x, y)*** интерпретировать как некоторые поверхности, то муаровые полосы (20.23) дают нам изображение этих поверхностей в горизонталях (линиях постоянного уровня функций ***u*** и у).

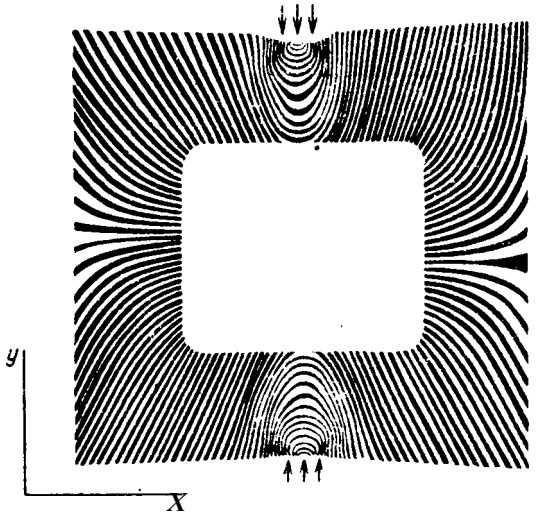


Рис. 20.19. Светлые муаровые полосы, представляющие изолинии v=const

На рис. 20.19 приведена фотография муаровых полос v=const для дюралюминиевой пластинки с квадратным отверстием, сжатой вертикальными силами. Горизонтальная сетка линий, с помощью которой получена эта картина муаровых полос, имеет шаг длиной <5 = 0,125 мм.

Путем численного дифференцирования значений См. § 203
u и v можно перейти к их производным, представляющим (при малых деформациях) линейные и угловые деформации в точках пластинки.

Если деформации нельзя считать малыми, то переход от перемещений к выражениям e_x, e_y и y^ совершается

с помощью более сложных выражений, излагаемых в разделах нелинейной теории упругости. Для упругой стадии, зная деформации, легко можно определить и напряжения с помощью закона Гука. При изучении неупругих деформаций в этом случае используются соотношения теории пластичности.

Преимущество метода муаров состоит в том, что он применим при значительных деформациях независимо от того, являются они упругими или цет. Метод муаров является в настоящее время наиболее эффективным способом для изучения распределения и развития больших деформаций, где область действия других методов становится ограниченной.

Наряду с сетками, непосредственно наносимыми на ■ поверхность детали, муаровый эффект получают и другим способом — путем отражения сетки специального экрана (растра) от исследуемой зеркальной поверхности. Таким путем исследуются, например, пластинки при изгибе. Зеркальная поверхность пластинки создается путем напыления на ее поверхность металлического порошка. Изображения сетки, отраженные в двух состояниях пла-

„ ЛАТКИ ^ отРаж,ifШ(>„

Рис. 20.20. Установка дна получения муарового эффекта методом отраженной сетки

стинки (до изгиба и при изгибе), фотографируют на один и тот же негатив (рис. 20.20, где ***1*** — растр с линиями, перпендикулярными плоскости чертежа; ***2*** — модель пластинки; ***3*** — фотоаппарат; ***4*** — луч, отраженный от растра в точку ***M*** негатива до изгиба пластинки; ***5*** — тот же луч, но после изгиба).

Муаровые полосы на фотографии получаются вследствие искажения линий при отражении от искривленной пластинки (подобно искажению изображения в кривом зеркале). Эти полосы являются линиями постоянных значений углов поворота нормали поверхности пластинки в плоскости, перпендикулярной линиям растра. Прогибы пластинки обозначим w = ***w*** (x, ***y).*** Муаровые полосы дают линии, в точках которых углы ***(p$_x$ = ∂м>/∂x***=const, если

линии отражаемого от пластинки растра параллельны оси ***y,*** и ***<p$_y$=dw/dy*** = const, если линии растра параллельны

оси ***x.*** Путем численного дифференцирования функций ***cp$_x$*** и ***(p$_y$*** можно найти ***d^{2}w/dx*** и ***d^{2}wjdy^2*** и получить

напряжения в пластинке, возникающие при ее изгибе (см. § 20.3).

§ 20.6. Метод голографической интерферометрии

Слово голография происходит от греческого holos — весь, целый. Этим наименованием изобретатель голографии английский физик Д. Габор (1948) подчеркнул главную особенность записи оптической информации в методе, а именно то, что в голограмме регистрируется наиболее полная информация об изображении объекта — не только яркость отражаемого луча в каждой точке поверхности (амплитудная характеристика), но и его фа-

зовая характеристика как колебательного процесса. Особенно успешными стали применения метода голографии в различных областях техники после того, как в 60-х годах для получения голограмм были использованы лазеры.

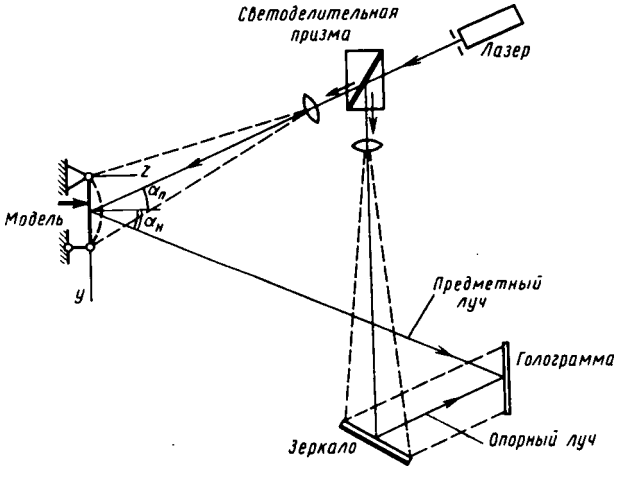
Голограмма — это зафиксированная на фотопластинке интерференционная картина, возникающая от падения на пластинку двух световых фронтов: так называемого ***опорного луча*** (неискаженного) и ***предметного луча,*** рассеянного при отражении от объекта. Фронты обоих пучков света (опорного и предметного) создаются в одной оптической системе с помощью лазера.

На рис. 20.21 показана принципиальная схема такой оптической системы. Луч лазера с помощью светоделительной призмы расщепляется на два луча. Один идет на объект и, отражаясь от него, дает предметный луч. Другой с помощью зеркала направляется на голограмму в обход объекта и образует опорный луч.

Если объект удалить и голограмму просветить лучом лазера в той же оптической системе, то возникает объемное изображение объекта.

Совмещение голограмм объекта, полученных в двух различных состояниях (например, до нагружения и после), порождает картину полос, создаваемую интерференцией, которая характеризует различия объекта в двух состояниях. В деформируемой модели она вызвана различием условий отражения предметного луча от деформированной и недеформированной моделей. Различия условий отражения создаются перемещениями точек поверхности вследствие деформирования модели.

В общем случае для точки поверхности деформируемой модели имеем некоторый пространственно ориентированный вектор полного перемещения с компонентами ***и,*** V, ***ю*** вдоль осей ***х, у*** и ***г.*** Для восстановления этих



перемещений по картине интерференционных полос в общем случае недостаточно одной голограммы. Так, для получения трех компонент ***u,*** v, w нужно получить три голограммы при разных положениях источника света (метод трех голограмм). Следует отметить, что это довольно сложная и громоздкая задача.

В частном случае при известном направлении ожидаемых преобладающих компонент перемещений задача восстановления перемещения по интерференционной картине полос упрощается. Так, для определения перемещения ***w,*** нормального к поверхности (рис. 20.22, ***а),*** можно пользоваться приближенной формулой

$$w=\frac{m\kappa}{\cos a_{,,}+\cos a_{H}}, \qquad (20.24)$$

где ***к*** — длина световой волны лазера; ***m*** — порядок светлых полос интерференции (номер изолинии const); а,, и ***otg*** — углы между направлением перемещения (нормалью к поверхности) и направлениями падения предметного луча и наблюдения отраженного луча соответственно.

Для определения перемещений точек по касательной •к поверхности приближенная формула будет (рис. 20.22, б)

$$\cos a_{,,}—\cos a_{,,} \qquad (20.25)$$

где углы $a_{п}$ и Он отсчитывают от направления перемещения v (оси ***у).***

Формулы (20.24) и (20.25) показывают, что в семействе изолиний w=const или v=const, получаемых методом голографической интерферометрии, полосы будут иметь очень маленький шаг ***5,*** имеющий числовое значение порядка длины световой волны Я (мкм), что говорит о высокой разрешающей способности метода.

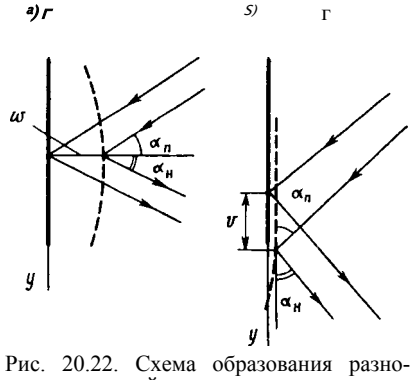


Рис. 20.22. Схема образования разности хода лучей за счет перемещения по нормали к поверхности *(а)* и в тангенциальной плоскости (б)

Заметим, что исключительная чувствительность метода может оказаться его недостатком, так как полученную картину полос могут искажать относительные смещения голограммы и объекта за счет случайных микровибраций системы. Поэтому оптическую систему приходится монтировать на массивных столах с очень высокой виброизоляцией. Для устранения этого недостатка удобным является способ ***наложенной голограммы,*** в котором голограмма жестко скрепляется с освещаемой моделью, и поэтому вибрации не дают их относительных смещений и не вносят искажений в результаты.

На рис. 20.23 приведены интерферограммы перемещений лопатки осевого компрессора в процессе ее вибрации с определенной резонансной частотой. Вначале получают голограмму в статическом состоянии модели. Затем порле возбуждения резонансных колебаний настраивают стробоскоп на частоту, кратную частоте колебаний, что обеспечивает импульсное освещение лазером вибрирующей модели в моменты прохождения ею амплитудных состояний. В этом состоянии проводят голографирование модели. Совмещение двух указанных голограмм дает приведенные интерференционные полосы, являющиеся изолиниями прогибов лопатки.

Различные способы голографической интерферометрии позволяют решать многие сложные задачи механики деформирования и технологического неразрушающего контроля за деталями. Более полные сведения об экспериментальных способах можно найти, например, в книге: Сухарев И. П. Экспериментальные методы исследования деформаций и прочности. М., Машиностроение, 1987. (Библиотека расчетчика.)

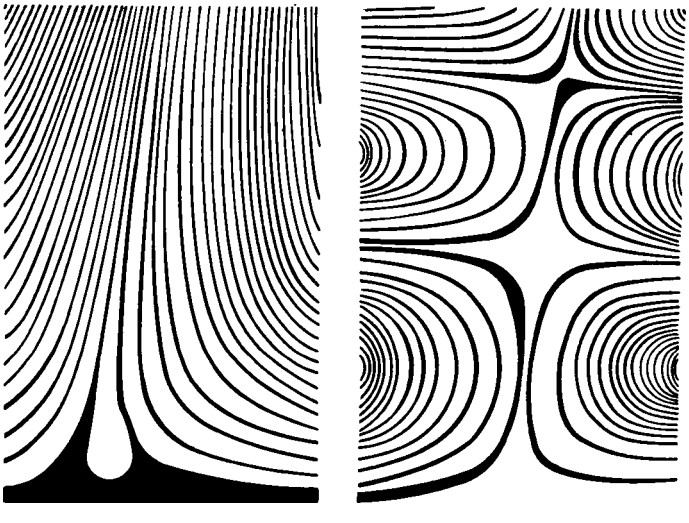


Рис. 20.23. Интерферограммы лопатки компрессора при резонансных колебаниях

Воирсы для самоконтроля к главе 20

20.1. Какой смысл имеют статическая, геометрическая и физическая группы уравнений? г» пишите эти уравнения для плоской задачи. ^

20.2. Что такое изолинии перемещений? Как, имея семейство изолиний перемещений, численно определить деформации и напряжения?

203. Что такое полярископ? Какие два семейства полос образуются на экране в методе фотоупругости?

20.4. Какие способы «разделения» главных напряжений вы знаете в методе фотоупругости?

20.5. Как построить траекторию главного напряжения, зная семейство изоклин?

20.6. Как образуется семейство муаровых полос?

20.7. Что такое голограмма? Как используется метод голографии для получения интерферограмм в механике деформирования?

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В курсе «Сопротивление материалов» были рассмотрены лишь так называемые ***одномерные задачи*** расчета стержневых элементов конструкций. Теперь на этом понятии имеет смысл остановиться более подробно, так как, с одной стороны, это дает возможность бросить общий взгляд на содержание основных глав книги, а с другой — представить более конкретно связь уже изученного материала с тем, что еще предстоит освоить будущему инженеру.

При рассмотрении каждой из типичных деформаций стержня (растяжение, изгиб, кручение) мы следовали в общем одним и тем же путем в математическом описании напряженно-деформированного состояния стержня (или, кратко, НДС стержня). На это указывает сопоставление основных расчетных зависимостей для деформаций стержней, собранных в таблице, где штрихом отмечено дифференцирование по координате ***z.***

См. ных

За основную функцию, описывающую НДС стержня, в каждой из деформаций принята соответствующая функция перемещения поперечного сечения: продольное перемещение ***w — w (z)*** при растяжении, прогиб v — v (z) при плоском изгибе и угол закручивания ***(p — (p*** (г) при кручении. Каждая из этих функций зависит от одного аргумента ***z,*** отсюда и задачу нахождения этих функций называют ***одномерной.***

В § 20.2 были получены основные уравнения плоской задачи теории упругости как типичной двумерной задачи, когда все неизвестные функции (их было восемь) зависели от двух аргументов. Эти уравнения делятся на три группы: статическую, геометрическую и физическую. При этом эти уравнения были составлены для бесконечно малого элемента тела d x x d***y,*** выделенного в направлении изменения двух аргументов, от которых зависят искомые функции.

В одномерной задаче о стержне таким элементом является часть стержня длиной ***dz.*** Для него мы также составили три типа зависимостей: статические, геометрические и физические.

Статические зависимости выражают условия равновесия элемента стержня и дают соотношения между внутренними усилиями и интенсивностью внешней нагрузки.

Геометрические зависимости устанавливают связь между деформацией элемента и функцией перемещения стержня. Конкретно они выражают характерные деформации элемента стержня, такие, как относительное удлинение е. при растяжении, кривизна элемента 1/р и от-

Деформация стержня	Зависимости для элемента стержня			Уравнение для определения перемещения	Формулы напряжений
	статические	геометрические	физические		
Центральное растяжение	$N'=-1$	к,-*'	$<_{г} N$ *г~ $E\sim EA$	$EAy'=K$ или $(EA^{*})'=-1$	N в'шл
Плоский изгиб	$K-йy$ $0,=-ч$	$\frac{1}{p}=-v''$ $e_i=-\frac{y}{P}$	1_M_X p £/*	$E1_x y'=-M_x$ или $(E1_x y'')''=_{ч}$	$a_г=\frac{M_x}{\%x}y$ т— $\frac{6,5«}{]_x ъ}$
Балка на упругом основании	$м=a_y$ $йy=-(9-г)$	— « —	$[\ Mx$ $P\ Ыx$ $г=км$	$V+4p^{*}y=\frac{IV\ я}{E1_x}$ $ГкЬ^$ $\backslash 1Шс$	— « —
Кручение стержня круглого сечения	$M\backslash=—m$	$y=<P'P$	$<p''=\frac{м_г}{}$ С?./,	$ap(p'—M_г$ или $=-m$	$т=\frac{M_г}{-р}$ •'р
Кручение тонкостенного стержня открытого сечения	$M_T=M_{еъ}+M_{u}$ $M'_x=—m$ $B^$	$НГ=—(p'a>$ $\backslash=<pг$ $E,=УУ'=—<p''co$	$<p''=\frac{Ba>}{ш_a}$ $ч>=\frac{м_{сь}}{}$	$(p—к^2 а^{>}=\frac{IV\ m}{E1_a}$ Vй'.	$0(0=\frac{йш}{ЛО}(O$ м т<в

носительное удлинение произвольного волокна $e_г$ при изгибе, угол сдвига ***y*** при кручении через соответствующую основную неизвестную функцию перемещения, а именно: ***м>,у ъ ц>.***

Наконец, ***физические зависимости*** дают количественную связь между деформацией элемента стержня и значением вызывающего ее внутреннего усилия (закон Гука). В эти зависимости входят характерные величины, называемые ***жесткостями сечения*** при растяжении ***EA,*** изгибе EJ_x, кручении GJ_{fi} и т. д.

При получении геометрических зависимостей использовались необходимые гипотезы о характере деформирования (например, гипотеза плоских сечений), позволяющие связать деформации в произвольной точке стержня с функцией перемещения. Именно использование таких гипотез и позволило упростить задачу определения НДС стержня, превратив ее в задачу определения одномерной функции перемещения (и\ V или ***ф).***

Уравнение, служащее для определения функций перемещения ***(разрешающее уравнение),*** представляет собой соответствующую статическую зависимость, выраженную через функцию перемещения, что делается с помощью геометрических и физических соотношений. Так, для растяжения, учитывая геометрические и физические зависимости, имеем выражение ***к=ЕАг$_г$ = ЕАм',*** подставляя

которое в статическое условие ***N'= — 1*** получим разрешающее уравнение ***(ЕАм')'=*** —

Описанные однотипные соотношения и путь решения, которому мы следовали при рассмотрении деформаций стержней, в теории упругости составляют один из методов решения задачи определения НДС деформируемых тел. Его,называют ***методом перемещений,*** где за основную неизвестную принимается функция или функции ***перемещений.***

Ввиду того, что одномерная задача значительно более проста, чем двумерная (и тем более трехмерная), для стержней удалось получить известные готовые формулы для нормальных и касательных напряжений, выраженные через внутренние усилия.

При этом процесс получения этих формул также имеет единый алгоритм. Он состоит в том, что, используя геометрические соотношения и закон Гука, составляем выражения для напряжения в произвольной точке, в которое входит деформация элемента. Например, для растяжения ***о$_1$=е$_1$Е='м'Е,*** где ***Е$_г$=м'*** — деформация элемента. Далее требуем, чтобы эпюра напряжений в сечении приводилась в статическом отношении к соответствующему силовому фактору, что для растяжения дает ЛГ=

= \о$_1$&А = у/'Е\&А = н>'ЕА. Отсюда находим деформацию элемента ***& ' = ЫЕА*** и напряжение ***а$_г$=ЫА.***

Отметим, что если закрепление стержня является статически определимым, то внутренние усилия (Л^г, ***М$_х$,***

М$_г$ и т. д.) непосредственно определяются по методу

сечений через внешние силы, после чего определяются напряжения по указанным формулам. Если же система статически неопределима, например балка на винклеровом упругом основании или задача о стесненном кручении тонкостенного стержня, то вначале необходимо изучить деформации стержня. Для этого из разрешающего уравнения находят перемещения и только через перемещения выражают внутренние усилия и затем напряжения в стержне. Второй случай как раз характерен для методов теории упругости об определении НДС элементов конструкций, имеющих более сложную форму, чем стержень. Эти методы будут рассмотрены во второй части курса «Основы теории упругости и пластичности».

ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРИЛОЖЕНИЕ I

Вычисление определенных интегралов

В сопротивлении материалов и в строительной механике при решении конкретных задач часто возникает необходимость вычисления определенного интеграла вида

$$I=\int_a^b f(x)P(x)dx, \qquad \text{(а)}$$

где функции/и представлены в графическом виде как эпюры. К числу таких задач относятся вычисление геометрических характеристик тонкостенных сечений, вычисление интегралов Мора и др. Ниже излагаются два метода, удобные в применении: первый — вычисление интеграла *I* с помощью формулы Симпсона, второй — с помощью формулы Верещагина.

Формула Симпсона. Обозначим Ф=/ (рис. П.1.1). Если теперь приближенно заменить кривую Ф (х) квадратной параболой, проходящей через три точки с ординатами Ф„, $Ф_с$ и Ф/„ то интеграл / получим

в виде

$$I=I\ (\phi_a+4\phi_c+\phi_b)=I-\ (/Л+4/_c\text{^}+/\text{^}). \qquad \textbf{(б)}$$

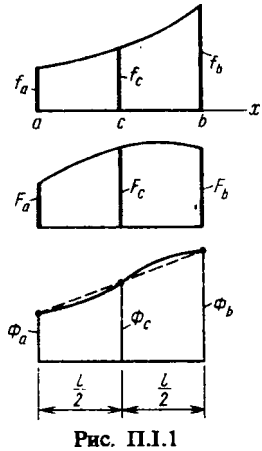


Рис. П.I.1

Заметим, что формула (б) дает точное значение, если кривая Ф *(х)* является кривой 1-го, 2-го и 3-го порядков. В других случаях она дает приближенный результат.

Формула Верещагина. В большинстве случаев одна из эпюр, например / (дс), является на рассматриваемом участке *а—Ь* линейной (рис. П.1.2). В этом случае, обозначив Мл: =(Ш и представив /= *х* а, получим

$$\bullet/=\int_a^b Fdx=\text{tg}\ *\ \int_a^b x\ d\Pi=5\text{^},\ \text{tg}\ a,$$

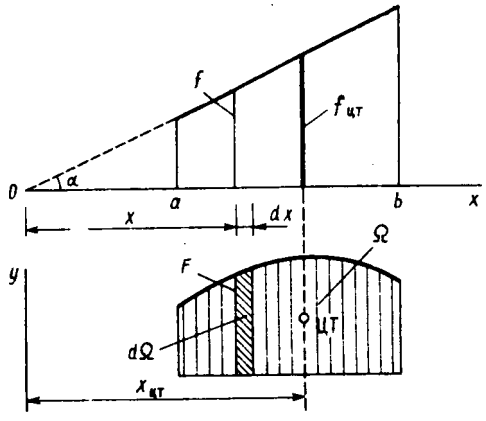


Рис. П.1.2

относительно оси *у*. Подставив сюда значение £$_y$=Ох$_{щ}$, где Хщ. — координата центра тяжести площади П, и заменив $x_{щ}$ /$_{щ}$, окончательно получим формулу Верещагина в виде

$$/\text{-}¡/(x)P\{x)Лx\text{-}аг_{m}. \qquad \text{(в)}$$

Интеграл] равен произведению площади криволинейной эторы О *на ординату линейной э п ю р ы в з я т у ю под центром тяжести площади* П.

Для возможности пользоваться формулой Верещагина надо знать площадь П и положение центра тяжести для характерных кривых. На рис. П.1.3 приводятся необходимые справочные данные.

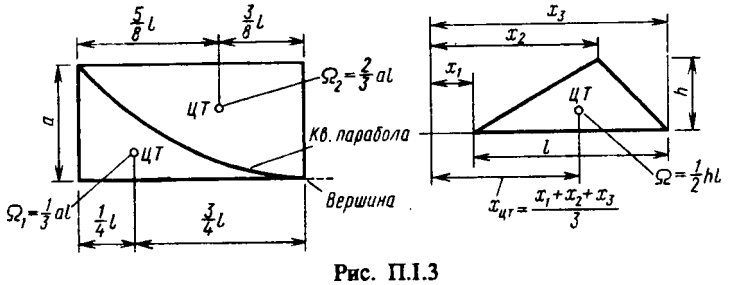
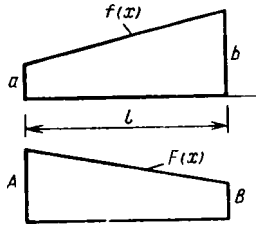


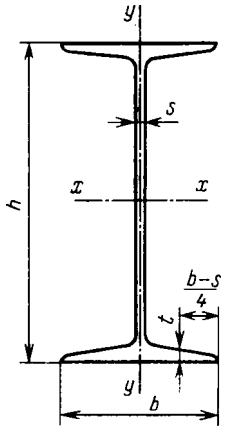
Рис. П.1.3

Если обе эпюры/ и являются линейными (рис. П.1.4), то интеграл У может быть вычислен по формуле

$$\text{—}\cdot[2\ (Aa + BЬ)\ 4\text{-}ЛЬ\ \text{-}+\bullet \qquad \text{(г)}$$
6

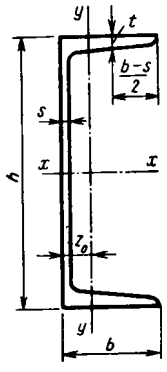
условно называемой формулой «перемножения трапеций».





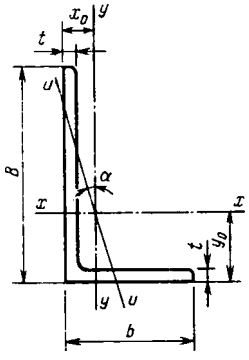
А — высота двутавра;
Ь — ширина полки;
^ — толщина стенки;
I — средняя толщина полки;
А — площадь поперечного сечения;
I — момент инерции;
W — момент сопротивления;
5 — статический момент полусечения;
/ — радиус инерции.

Номер двутавра	Масса 1 м, кг	Размеры, мм				*А,* см^2	■*jX,* см*	*Ух-ал^3*	см	см^3	•V см^4	"V см	см *'у*
		А	Ъ	.г	*I*								
1	2	3	4	5	6	7	8	*9*	10	11	12	13	14
10	9,46	100	55	4,5	7,2	12	198	39,7	4,06	23	17,9	6,49	1,22
12	11,5	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	13,7	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,-8	41,9	11,5	1,55
16	15,9	160	81	5	7,8	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,7
18	18,4	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
20	21	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07
22	24	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27
24	27,3	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37
27	31,5	270	125	6	9,8	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54
30	36,5	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69
33	42,2	330	140	7	11,2	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79
36	48,6	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89
40	57	400	155	8,3	13	72,6	19062	953	16,2	545	667	86,1	3,03
45	66,5	450	160	9	14,2	84,7	27696	1231	18,1	708	808	101	3,09
50	78,5	500	170	10	15,2	100	39727	1589	19,9	919	1043	123	3,23
55	92,6	550	180	И	16,5	118	55962	2035	21,8	1181	1356	151	3,39
60	108	600	190	12	17,8	138	76806	2560	23,6	1491	1725	182	3,54



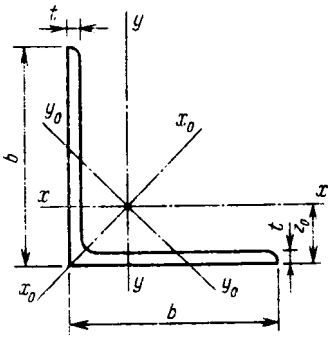
А — высота швеллера;
Ь — ширина полки;
5 — толщина стенки;
I — средняя толщина полки;
А — площадь поперечного сечения;
У — момент инерции;
ТУ — момент сопротивления;
5 — статический момент полусечения;
/ — радиус инерции;
го — расстояние от оси *у* до наружной грани стенки.

Номер швеллера	Масса 1 м, гг	Размеры, мм				*А,* см^2	■>*х.* см^4	*Г$_{х}$, ал^3*	*ix>* см	Я* см^3	о?	*IV* см	см	*го,* см
		Н	*Ь*	*!*	*1*									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
5	4,84	50	32	4,4	7	6,16	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,95	1,16
6 5	5,9	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15	2,54	9	8,7	3,68	1,08	1,24
8	7,05	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10	8,59	100	46	4,5	7,6	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
12	10,4	120	52	4,8	7,8	13,3	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54
14	12,3	140	58	4,9	8,1	15,6	491	70,2	5,6	40,8	45,4	И	1,7	1,67
16	14,2	160	64	5	8,4	18,1	747	93,4	6,42	54,1	63,3	13,8	1,87	1,8
16а	15,3	160	68	5	9	19,5	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2
18	16,3	180	70	5,1	8,7	20,7	1090	121	7,24	69,8	86	17	2,04	1,94
18а	17,4	180	74	5,1	9,3	22,2	1190	132	7,32	76,1	105	20	2,18	2,13
20	18,4	200	76	5,2	*9*	23,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,2	2,07
22	21	220	82	5,4	9,5	26,7	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21
24	24	240	90	5,6	10	30,6	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,6	2,42
27	27,7	270	95	6	10,5	35,2	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47 ■
30	31,8	300	100	6,5	И	40,5	5810	387	12	224	327	43,6	2,84	2,52
33	36,5	330	105	7	11,7	46,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59
36	41,9	360	110	7,5	12,6	53,4	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,1	2,68
40	48,3	400	115	8	13,5	61,5	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75



B — ширина большой полки;
Ь ширина меньшей полки;
I толщина полки;
A площадь поперечного сечения;
У момент инерции;
/ -- радиус инерции;
а — угол наклона главной центральной оси;
I_{xy} центробежный момент инерции;
*о, >'о расстояние от центра тяжести до наружных граней полок.

Номер уголка	Масса 1 м уголка кг	Размеры,			*A*, см²	см⁴	см	"Ч см	*iy*, см	^*u* 1П1Ш*i* см⁴	Ш1П, см		*Yxy*\> см⁴	*0. см	*Y0*> см
		B	*Ь*	г											
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
5/3,2	2,4	50	32	4	3,17	7,98	1,59	2,56	0,90	1,52	0,69	0,401	2,59	0,76	1,65
7,5/5	4,79	75	50	5	6,11	34,8	2,39	12,5	1,43	7,24	1,09	0,436	12	1,17	2,39
9/5,6	6,7	90	56	6	8,54	70,6	2,88	21,2	1,58	12,7	1,22	0,384	22,5	1,28	2,95
10/6,3	7,53 8,7 9,87	100	63	6 7 8	9,58 11,1 12,6	98,3 ИЗ 127	3,2 3,19 3,18	30,6 35 39,2	1,79 1,78 1,77	18,2 20,8 23,4	1,38 1,37 1,36	0,393 0,392 0,391	31.5 36,1 40.5	1,42 1,46 1,5	3,23 3,28 3,32
11/7	10,9	110	70	8	13,9	172	3,51	54,6	1,98	32,3	1,52	0,4	55,9	1,64	3,61
12,5/8	И 12,6 15,5	125	80	7 8 10	14,1 16 19,7	227 256 312	4,01 4 3,98	73,7 83 100	2,29 2,28 2,26	43,4 48,8 59,3	1,76 1,75 1,74	0,407 0,406 0,404	74,7 84,1 102	1,8 1,84 1,92	4,01 4,05 4,14
14/9	14,1 17,5	140	90	8 10	18 22,2	364 444	4,49 4,47	120 146	2,58 2,56	70,3 85,5	1,98 1,96	0,411 0,409	121 147	2,03 2,12	4,49 4,58
16/10	18 19,8 23,6	160	100	9 10 12	22,9 25,3 30	606 667 784	5,15 5,13 '5,11	186 204 239	2,85 2,84 2,82	110 121 142	2,2 2,19 2,18	0,391 0,39 0,388	194 213 249	2,24 2,28 2,36	5,19 5,23 5,32
18/11	22,2 26,4	180	110	10 12	28,3 33,7	952 1123	5,8 5,77	276 324	3,12 3,1	165 194	2,42 2,4	0,376 0,374	295 348	2,44 2,52	5,88 5,97
20/12,5	27.4 29,7 34.4 39,1	200	125	11 12 14 16	34.9 37.9 43.9 49,8	1449 1568 1801 2026	6,45 6,43 6,41 6,38	446 482 551 617	3,58 3,57 3,54 3,52	264 285 327 367	2,75 2,74 2,73 2,72	0,392 0,392 0,39 0,388	465 .503 573 643	2,79 2,83 2,91 2,99	6,5 6,54 6,62 6,71



Ь — ширина полки;

I — толщина полки;

Л — площадь поперечного сечения;

3 — момент инерции;

«— радиус инерции,

— центробежный момент инерции;

го - расстояние от центра тяжести до наружной грани полки.

Номер уголка	Маса 1 м уголка, гг	Размеры, мм		*А,* см^2	*¿х.* см*	см	да^1 см	х^тад- см	-^дПВП, см^4	шт. см	\Jу\' см^4	*0, см
		Ь	*I*									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	3,05 3,77	50	4 5	3,89 4,8	9,21 11,2	1,54 1,53	14,6 17,8	1,94 1,92	3,8 4,63	0,99 0,98	5,42 6,57	1,38 1,42
5,6	3,44 4,25	56	4 5	4,38 5,41	13,1 16	1,73 1,72	20,8 25,4	2,18 2,16	5,41 6,59	1,11 1,1	7,69 9,41	1,52 1,57
6,3	3,9 4,81 5,72	63	4 < 6	4,96 6,13 7,28	18,9 23,1 27,1	1,95 1,94 1,93	29,9 36,8 42,9	2,45 2,44 2,43	7,81 9,52 11,2	1,25 1,25 1,24	И 13,7 15,9	1,69 1,74 1,78
7	5,38 6,39	70	5 6	6,86 8,15	31,9 37,6	2,16 2,15	50,7 59,6	2,72 2,71	13,2 15,5	1,39 1,38	18,7 22,1	1,9 1,94
7,5	5,8 6,89 7,96	75	5 6 7	7,39 8,78 10,1	39,5 46,6 53,3	2,31 2,3 2,29	62,6 73,9 84,6	2,91 2,9 2,89	16,4 19,3 22,1	1,49 1,48 1,48	23,1 27,3 31,2	2,02 2,06 2,1
8	6,78 7,36 8,51	80	5,5 6 7	8,63 9,38 10,8	52,7 57 65,3	2,47 2,47 2,45	83,6 90,4 104	3,11 3,11 3,09	21,8 23,5 27	1,59 1,58 1,58	30,9 33,4 38.3	2,17 2,19 2,23
9	8,33 9,64 10,9	90	6 7 8	10,6 12,3 13,4	82,1 94,3 106	2.78 2,77 2,76	130 150 168	3,5 3,49 3,48	34 38,9 43,8	1,79 1,78 1,77	48,1 55,4 62,3	2,43 2,47 2,51
10	10,8 12.2 15,1 17,9	100	7 8 10 12	13,8 15,6 19,2 22,8	131 147 179 209	3,08 3,07 3,05 3,03	207 233 284 331	3,88 3,87 3,84 3,81	54,2 60,9 74,1 86,9	1,98 1,98 1,96 1,95	76,4 86,3 110 122	2,71 2,75 2,83 2,91
11	11,9 13,5	110	7 8	15,2 17,2	176 198	3,4 3,39	279 315	4,29 4,28	72,7 81,8	2,19 2,18	106 116	2,96 3
12,5	15,5 17,3 19,1 22,7	125	8 9 10 12	19,7 22 24,3 28,9	294 327 360 422	3,87 3,86 3,85 3,82	467 520 571 670	4,87 4,86 4,84 4,82	122 136 149 174	2,49 2,48 2,47 2,46	172 192 211 248	3,36 3,4 3,45 3,53

1	2	3	4 '	5	6	7	8	9 .	10	11	12	13
14	19,4 21,5 25,5	140	9 10 12	24,7 27,3 32,5	466 512 602	4,34 4,33 4,31	739 814 957	5,47 5,46 5,43	192 211 248	2,79 2,78 2,76	274 301 354	3,78 3,82 3,9
16	24,7 27 29,4 34 38,5	160	10 11 12 14 16	31,4 34,4 37,4 43,6 49,1	774 844 913 1046 1175	4,96 4,95 4,94 4,92 4,89	1229 1340 1450 1662 1866	6,25 6,24 6,23 6,2 6,17	319 348 376 431 485	3,19 3,18 3,17 3,16 3,14	455 496 537 615 690	кз 4,35 4,39 4,47 4,55
18	30,5 33,1	180	11 12	38,8 42,2	1216 1317	5,6 5,59	1933 2093	7,06 7,04	500 540	3,59 3,58	716 776	4,85 4,89

ПРИЛОЖЕНИЕ VI I

Значения функций ^ъ, *г\г,* г/з, ги (см. § 10.2)

Рг	*Ш*	*п*	*. И*	44
0,0	1,0000	1,0000	1,0000	0,0000
0,1	0,9907	0,8100	0,9003	0,0903
0,2	0,9651	0,6398	0,8024	0,1627
0,3	0,'9267	0,4888	0,7077	0,2189
0,4	0,8784	0,3564	0,6174	0,2610
0,5	0,8231	0,2415	0,5323	0,2908
0,6	0,7628	0,1431	0,4530	0,3099
0,7	0,6997	0,0599	0,3708	0,3199
Цп	0,6448	0,0000	0,3224	0,3224
0,8	0,6354	-0,0093	0,3131	0,3223
0,9	0,5712	-0,0657	0,2527	0,3185
1,0	0,5083	-0,1108	0,1988	0,3096
1,1	0,4476	-0,1457	0,1510	0,2967
1,2	0,3899	-0,1716	0,1091	0,2807
1,3	0,3355	-0,1897	0,0729	0,2626
1,4	0,2849	-0,2011	0,0419	0,2430
1,5	0,2384	-0,2068	0,0158	0,2226
*ч**	0,2079	-0,2079	0,0000	0,2079
1,6	0,1959	-0,2077	-0,0059	0,2018
1,7	0,1576	-0,2047	-0,0235	0,1812
1,8	0,1234	-0,1985	-0,0376	0,1610
1,9	0,0932	-0,1899	-0,0484	0,1415
2,0	0,0667	-0,1794	-0,0563	0,1231
2,1	0,0439	-0,1675	-0,0618	0,1057
2,2	0,0244	-0,1548	-0,0652	0,0896
2,3	0,0080	-0,1416	-0,0668	0,0748
*и**	0,0000	-0,1340	-0,0670	0,0670
2,4	-0,0056	-0,1282	-0,0669	0,0613
2,5	-0,0166	-0,1149	-0,0658	0,0491
2,6	-0,0254	-0,1019	-0,0636	0,0383
2,7	-0,0320	-0,0895	-0,0608	0,0287
2,8	-0,0369	-0,0777	-0,0573	0,0204
2,9	-0,0403	-0,0666	-0,0534	0,0132
3,0	-0,04226	-0,05632	-0,04929	0,00703
3,1	-0,04314	-0,04688	-0,04501	0,00187
п	-0,04321	-0,04321	-0,04321	0,0000
5/471	— 0,02786	0,00000	-0,01393	-0,01393
6/4 *п*	-0,00898	0,00898	0,00000	-0,00898
7/4 *п*	0,00000	0,00579	0,00290	-0,00290
8/4п	0,00187	0,00187	0,00187	0,00000

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие ... 3

Глава 1. Основные понятия ... 5

§ 1.1. Сопротивление материалов в инженерном образовании ... 5
§ 1.2. Схематизация элементов конструкций и внешних нагрузок ... 6
§ 1.3. Допущения о свойствах материала элементов конструкций ... 12
§ 1.4. Внутренние силы и напряжения ... 13
§ 1.5. Перемещения и деформации ... 17
§ 1.6. Принцип суперпозиции ... 18

Глава 2. Внутренние усилия в поперечных сечениях стержня ... 21

§ 2.1. Метод определения внутренних усилий ... 21
§ 2.2. Внутренние усилия при растяжении и сжатии 25
§ 2.3. Внутренние усилия при кручении ... 28
§ 2.4. Основные типы опорных связей и балок. Определение опорных реакций 30
§ 2.5. Внутренние усилия при изгибе. Дифференциальные зависимости между M_x, Q_y а q_y ... * ... 33
§ 2.6. Усилия в рамах и криволинейных стержнях ... 42

Глава 3. Растяжение и сжатие ... 48

§ 3.1. Напряжения и деформации при растяжении и сжатии. Закон Гука . 48
| 3.2.. Обобщенный закон Гука ... 54
§ 3.3. Напряжения в сечениях, наклоненных к оси стержня, при растяжении и сжатии ... 55
§ 3.4. Определение перемещений в общем случае растяжения и сжатия . . 57
§ 3.5. Статически неопределимые системы ... 63
§ 3.6. Краткие сведения о строительных материалах несущих конструкций 69
§ 3.7. Испытание материалов иа растяжение и сжатие ... 71
§ 3.8. Диаграммы растяжения пластичных и хрупких материалов ... 72
§ 3.9. Потенциальная энергия деформации и работа, затраченная на разрыв образца ... 84
§ 3.10. Диаграммы сжатия различных материалов ... 86
§ 3.11. Влияние различных факторов на мех&яические характеристики материалов ... 89
§ 3.12. Методы расчета строительных конструкций ... 91
§ 3.13. Основные понятия о вероятностном методе расчета на прочность 96

Глава 4. Геометрические характеристики поперечных сечений стержня 108

§ 4.1. Основные понятия . . .* ... 108
§ 4.2. Зависимость между моментами инерции при параллельном переносе осей ... 116
§ 4.3. Зависимость между моментами инерции при иовороте осей ... 119
§ 4.4. Главные оси и главные моменты инерции. Понятие о радиусе инерции 121
§ 4.5. Вычисление моментов инерции тонкостенных сечений ... 125
§ 4.6. Вычисление моментов инерции сложных фигур ... 128

Глава 5. Сдвиг и кручение ... 132

§ 5.1. Чистый сдвиг ... 132
§ 5.2. Кручение стержней с круглым поперечным сечением. Расчеты на прочность ... ; ... 135
§ 5.3. Определение углов закручивания. Расчеты на жесткость 139
§ 5А Статически неопределимые задачи при кручении ... 143

§ 5.5. Кручение в упругопластической стадии 144
§ 5 6. Потенциальная энергия деформации при кручении..... 147
§ 5.7. Расчет цилиндрических пружин с малым шагом витка..... 148
§ 5.8. Практические расчеты соединений, работающих на сдвиг..... 150.

Глава 6. Изгиб. Нормальные напряжения в поперечных сечениях стержня 156

§ 6.1. Основные гипотезы. Расчетная модель сгержня 156
| 6.2. Вывод формулы для нормальных напряжений в поперечных сечениях 158
§ 6.3. Плоский изгиб. Расчеты на прочность..... 161
§ 6.4. Балки рационального сечения..... 165
§ 6.5. Косой изгиб..... 168
§ 6.6. Общий случай. Внецентренное растяжение—сжатие..... 171
§ 6.7. Предельная нагрузка при изгибе балки из упругопластического материала 176
§ 6.8. Расчет по ограниченной пластической деформации..... 179
§ 6.9. Напряжения в стержнях, составленных из неоднородных и композитных материалов..... 184
§ 6.10. Напряжения в кривом стержне..... 189

Глава 7. Изгиб. Касательные напряжения и расчеты на прочность по усилиям сдвиг а..... 199

§ 7.1. Касательные напряжения при изгибе..... 199
§ 7.2. Распределение касательных напряжений в сечениях балок различной формы..... 201
§ 7.3. Центр изгиба сечения..... 206
§ 7.4. Расчет на прочность составных стержней по усилиям сдвига 209
§ 7.5. Усилия сдвига и касательные напряжения в балках из неоднородных материалов..... 214
§ 7.6. Напряжения ь балках переменного сечения..... 216
§ 7.7. Потенциальная энергия деформации при изгибе..... 219

Глава 8. Перемещения при изгибе..... 225

§ 8.1. Некоторые основные понятая..... 225
§ 8.2. Дифференциальное уравнение для функции прогибов и его разновидносгв..... 226
§ 8.3. Интегрирование дифференциального уравнения линии прогибов и определение произвольных постоянных..... 228
§ 8.4. Использование локальных систем координат при наличии нескольких участков интегрирования..... 231
§ 8.5. Метод начальных параметров..... 234
§ 8.6. Численное интегрирование уравнений для прогибов методом конечных разностей..... 238
§ 8.7. Дифференциальное уравнение для прогибов с учетом деформаций сдвига 240
§ 8.8. Особенности определения больших прогибов..... 243
§ 8.9. Метод Максвелла—Мора 245

Глава 9. Основы расчета простейших (магически неопределимых систем 256

§ 9.1. Статически неопределимые системы..... 256
§ 9.2. Основная система метода сил..... 258
I 9.3. Канонические уравнения метода сил. Примеры расчета статически неопределимых систем..... 259
§ 9.4. Расчет статически неопределимых систем по методу предельного равновесия 268

Глава 10. Балка на упругом основании 273

§ 10.1. Дифференциальное уравнение для функции прогибов и его общий интеграл..... 273
§ 10.2. Расчет полубесконечной балки. Краевой эффект..... 276
§ 10.3. Бесконечная балка на упругом основании..... 280
§ 10.4. Понятие о расчете коротких балок на упругом основании..... 283

§ 11.1. Понятие о свободном и стесненном кручении стержня.....290
§ 11.2. Свободное кручение тонкостенных стержней замкнутого профиля. Определение напряжений.....292
§ 11.3. Жесткость тонкостенных стержней замкнутого профиля при свободном кручении.....296
§ 11.4. Определение напряжений и перемещений в тонкостенном стержне замкнутого профиля при растяжении, изгибе и кручении.....298
§ 11.5. Свободное кручение стержня прямоугольного сечения. Мембранная аналогия.....303
§ 11.6. Свободное кручение тонкостенного стержня открытого профиля 306
§ 11.7. Депланация незамкнутого тонкостенного сечения.....309
§ 11.8. Главные секториальные координаты и техника их определения . . 313

Глава 12. Стесненное кручение тонкостенных стержней.....321

§ 12.1. Общее понятие о теории стесненного кручения стержней открытого профиля (теории Власова). Основные допущения.....321
§ 12.2. Нормальные напряжения $a_ш$.....324
§ 12.3. Касательные напряжения $т_ш$.....326
§ 12.4. Дифференциальное уравнение для углов закручивания и его общее решение.....328
§ 12.5. Общий случай нагружения тонкостенного стержня открытого профиля 333
§ 12.6. Особенности стесненного кручения стержней замкнутого профиле 336

Глава 13. Напряженное и деформированное состояния в точке.....341

§ 13.1. Понятия напряженного состояния в точке и его виды.....341
§ 13.2. Напряжения в наклонных площадках при плоском напряженном состоянии 345
§ 13.3. Главные напряжения.....348
§ 13.4. Экстремальные касательные напряжения.....350
§ 13.5. Круг напряжений.....351
§ 13.6. Примеры анализа плоского напряженного состояния.....353
§ 13.7. Траектории главных напряжений.....357
§ 13.8. Объемное напряженное состояние.....359
§ 13.9. Деформированное состояние в точке.....362
§ 13.10. Экспериментальное определение деформаций и напряжений методом тензометрии.....365
§ 13.11. Зависимость между модулями упругости при растяжении и при сдвиге.....370
§ 13.12. Изменение объема материала при деформации.....372
§ 13.13. Потенциальная энергия при объемном напряженном состоянии . 374

Глава 14. Критерии прочности и пластичности.....377

§ 14.1. Основные понятия.....377
§ 14.2. Критерии наибольших нормальпых напряжений и наибольших удлинений 379
§ 14.3. Критерии пластичности.....380
§ 14.4. Теория прочности Мора.....386
§ 14.5. О новых теориях прочности.....389
§ 14.6. О механике хрупкого разрушения тел при наличии трещин 391

Глава 15. Устойчивость сжатых стержней.....403

§ 15.1. Основные понятия.....403
§ 15.2. Вывод формулы Эйлера для критической силы.....408
§ 15.3. Влияние способа закрепления концов стержня на значение критической силы.....411
§ 15.4. Пределы применимости формулы Эйлера.....414
§ 15.5. Практический расчет сжатых стержней.....417
§ 15.6. Расчет внецентренно сжатой гибкой стойки.....422
§ 15.7. Продольно-поперечный изгиб сжатых стержней.....424

Глава 16. Ползучесть материалов....433

§ 16.1. Влияние фактора времени на деформирование материалов 433
§ 16.2. Зависимости между напряжениями и деформациями при линейной ползучести....438
§ 16.3. Частный случай линейной ползучести....444
§ 16.4. Релаксация напряжений....447
§ 16.5. Принцип Вольтерры....449
§ 16.6. Поведение вязкоупругих статически неопределимых систем 452
§ 16.7. Длительная прочность материалов....455
§ 16.8. Выпучивание вязкоупругого стержня, имеющего начальное искривление 458
§ 16.9. Нелинейная ползучесть материалов....462

Глава 17. Динамическое действие нагрузки....470

§ 17.1. Понятие о динамическом нагружении....470
§ 17.2. Движение тела с постоянным ускорением. Динамический коэффициент 471
§ 17.3. Ударное, действие нагрузки....472
§ 17.4. Приближенный учет распределенной массы стержней при ударе . 480
§ 17.5. Понятие о волновой теории удара....482

Глава 18. Концентрация напряжений....489

§ 18.1. Понятие о концентрации напряжений....489
§ 18.2. Контактные напряжения....495

Глава 19. Прочность материалов при одаклически меняющихся напряжениях 499

§ 19.1. Понятие об усталостном разрушении материала и его причины . . 499
§ 19.2. Характеристики циклов напряжений....501
§ 19.3. Кривые усталости. Предел выносливости....503
§ 19.4. Диаграмма предельных амплитуд....506
§ 19.5. Факторы, влияющие на усталостную прочность материала 508
§ 19.6. Коэффициент запаса при циклическом нагружении....512
§ 19.7. Усталостная прочность при нестационарных нагружениях....513
§ 19.8. Расчет на прочность при переменных напряжениях....516
§ 19.9. Понятие о малоцикловой усталости....518

Глава 20. Основы некоторых методов экспериментального исследования напряженно-деформированного состояния тел....521

§ 20.1. Вводные замечания....521
§ 20.2. Основные уравнения теории упругости для плоской задачи 522
§ 20.3. Определение напряжений по найденным из эксперимента перемещениям 526
§ 20.4. Метод фотоупругости 529
§ -20.5. Метод муаровых полос....538
§ 20.6. Метод голографической интерферометрии....542

Заключение 547