

Т. Б. Айзенберг,
И. М. Воронков,
В. М. Осецкий

Руководство к решению задач по теоретической механике

*Под редакцией
проф. И. М. Воронкова*

ИЗДАНИЕ ШЕСТОЕ,
СТЕРЕОТИПНОЕ

*Допущено Министерством высшего и среднего
специального образования СССР в качестве
учебного пособия для студентов высших
технических учебных заведений*



ИЗДАТЕЛЬСТВО
«ВЫСШАЯ ШКОЛА»
МОСКВА — 1938

УДК 531

А — 361

Важной задачей при изучении курса теоретической механики является самостоятельная работа студентов.

Особую актуальность она приобретает в последнее время, в связи с сокращением для ряда специальностей числа аудиторных часов, отводимых на теоретическую механику. Поэтому возникает потребность в учебных руководствах и пособиях, которые облегчат студентам самостоятельное изучение теоретических разделов курса и помогут им научиться самостоятельно применять теорию к решению практических задач.

Основная цель настоящего пособия — помочь студенту приобрести навыки в решении задач по теоретической механике. Пособие предназначается главным образом для студентов заочных и вечерних отделений высших технических учебных заведений, но оно может быть также полезным и для студентов очного обучения.

Объем и расположение материала в пособии в основном соответствует «Курсу теоретической механики» проф. Н. М. Воронкова и «Сборнику задач по теоретической механике» проф. Н. В. Мещерского. Для облегчения пользования пособием каждому разделу предшествуют краткие сведения по теории и основные формулы, необходимые для решения последующих задач, а также даются соответствующие методические указания.

Большое внимание уделено подбору задач, их классификации и методам решения. Разобранные в пособии задачи в подавляющем большинстве составлены специально для данного руководства. Они не дублируют задачи в сборнике Н. В. Мещерского, но охватывают основные типы задач этого сборника (в соответствии с обычными программами по теоретической механике).

При подготовке в печать этого издания учтены замечания к предыдущим изданиям руководства и внесены следующие исправления и дополнения: уточнена классификация задач по всем трем частям курса, в связи с чем увеличено число рассматриваемых задач; некоторые задачи заменены новыми, введены новые параграфы (разложение силы на составляющие, аналитические методы расчета ферм), заново написаны § 2 гл. I и § 3 гл. IV раздела I, а также § 4 гл. III и гл. V раздела II.



РАЗДЕЛ I

СТАТИКА

Глава I

СХОДЯЩИЕСЯ СИЛЫ

§ 1. СЛОЖЕНИЕ СИЛ, СХОДЯЩИХСЯ В ОДНОЙ ТОЧКЕ

Сложение двух сил, сходящихся в одной точке

Равнодействующая $\vec{R}$ двух сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, приложенных в одной точке и направленных под углом α друг к другу, равна геометрической сумме этих сил и изображается диагональю параллелограмма, построенного на силах $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ (рис. 1), т. е.

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2. \quad (1)$$

Модуль равнодействующей определяется по формуле

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha}, \quad (2)$$

а направление ее определяет-ся углами β и γ между силами

$\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ и равнодействующей $\vec{R}$, которые можно найти по теореме синусов:

$$\frac{F_1}{\sin \beta} = \frac{F_2}{\sin \gamma} = \frac{R}{\sin (180^\circ - \alpha)},$$

или

$$\frac{F_1}{\sin \beta} = \frac{F_2}{\sin \gamma} = \frac{R}{\sin \alpha}. \quad (3)$$

Если силы F_1 и F_2 и угол α между ними заданы, то сначала по формуле (2) находим модуль равнодействующей, а за-

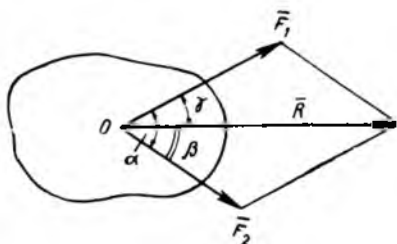


Рис. 1

тем, подставив ее значение в равенства (3), найдем $\sin \beta$ и $\sin \gamma$, а следовательно, и углы β и γ .

При графическом определении равнодействующей двух сходящихся сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ не следует строить весь параллелограмм; достаточно из конца силы $\vec{F}_1$ провести вектор, параллельный и равный второй силе $\vec{F}_2$. Вектор, соединяющий начальную и конечную точки полученной ломаной линии, изображает искомого равнодействующую $\vec{R}$ двух данных сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$.

Вектор $\vec{AC} = \vec{R}$ называется замыкающей стороной силового треугольника ABC (рис. 2).

Если две слагаемые силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ равны по модулю, то параллелограмм, построенный на этих силах, является ромбом, а равнодействующая — диагональю этого ромба. Так как диагонали ромба взаимно перпендикулярны и в точке их пересечения делятся пополам, то равнодействующая, изображаемая вектором $\vec{AC}$, делит вторую диагональ BD пополам, перпендикулярна к ней и, кроме того, сама делится пополам в точке O .

Следовательно, для того чтобы найти равнодействующую двух равных по модулю сходящихся сил, достаточно построить вектор $\vec{AO}$, соединяющий точку приложения слагаемых сил с серединой отрезка, соединяющего концы этих сил, и затем этот вектор удвоить, т. е.

$$\vec{R} = 2\vec{AO}. \quad (4)$$

$$\text{Модуль силы } R \text{ равен } R = 2F \cos \frac{\alpha}{2}, \quad (5)$$

где α — угол между силами $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ (рис. 3).

Это свойство дальше будет использоваться при нахождении равнодействующей двух равных сходящихся сил.

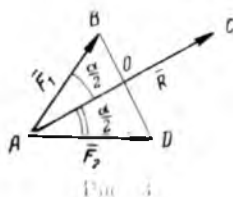


Рис. 3

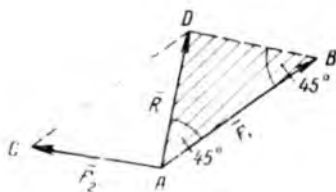


Рис. 4

Пример 1. Как относятся модули сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, если угол между ними равен 135° , а равнодействующая равна по модулю меньшей силе (рис. 4)?

Решение. Пусть векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ изображают искомые силы $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$, причем $F_2 < F_1$ и $\angle CAB = 135^\circ$. Тогда диагональ AD параллелограмма $ABDC$, построенного на этих силах, есть равнодействующая сил $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$, т. е.

$$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 = \overline{AD}.$$

По условию задачи $R = F_2$, или $AD = DB$; следовательно, треугольник ABD — равнобедренный.

Отсюда следует, что $\angle BAD = \angle ABD$. Но

$$\angle BAC + \angle ABD = 180^\circ,$$

откуда

$$\angle ABD = 180^\circ - \angle BAC = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$$

и, следовательно,

$$\angle BAD = 45^\circ \text{ и } \angle ADB = 90^\circ,$$

т. е. треугольник ABD — прямоугольный, а потому

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{BD}{AB} = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Эту же задачу можно решить, пользуясь формулой (2). Действительно:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos 135^\circ},$$

но $R = F_2$, а потому

$$F_2^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cos 45^\circ,$$

откуда

$$F_1 = 2F_2 \cos 45^\circ = F_2 \sqrt{2},$$

т. е.

$$\frac{F_1}{F_2} = \sqrt{2}.$$

Пример 2. Веревка $DABC$, перекинутая через блок, закреплена одним концом C неподвижно; ко второму концу D этой веревки подвешен груз M весом Q н. Найти давление, передаете на ось блока, и угол, который сила давления образует с горизонталью. Угол α между веревкой BC и горизонталью задан (рис. 5).

Решение. В точке A к блоку приложена сила T_1 натяжения веревки AD , а в точке B — сила T_2 натяжения веревки BC , причем эти две силы по величине равны, так как натяжение веревки $DABC$ во всех ее точках одинаково.

Продолжим прямые AD и BC до пересечения в точке E и перенесем силы $\bar{T}_1$ и $\bar{T}_2$ по линиям их действия в эту точку E . Тогда получим две равные силы $\bar{T}_1$ и $\bar{T}_2$, пересекающиеся под углом $90^\circ - \alpha$ в точке E . Найдем их равнодействующую, для чего построим на этих силах параллелограмм. Так как эти силы равны, то полученный параллелограмм является ромбом и равнодействующая направлена по биссектрисе угла AEB , т. е. проходит через точку O . Величину этой равнодействующей найдем по формуле (5)

$$R = 2T_1 \cos \left(\frac{90^\circ - \alpha}{2} \right).$$

Так как сила натяжения T_1 веревки AD равна весу груза M , то $T_1 = Q$, а потому

$$R = 2Q \cos \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right).$$

Сила $\bar{R}$ и есть искомое давление, передаваемое на ось вращения блока. Теперь найдем угол β между силой $\bar{R}$ и горизонталью:

$$\beta = 90^\circ - \frac{90^\circ - \alpha}{2} = \frac{90^\circ + \alpha}{2} = 45^\circ + \frac{\alpha}{2}.$$

Сложение нескольких сил, сходящихся в одной точке и лежащих в одной плоскости

Равнодействующую нескольких сил, сходящихся в одной точке, можно определить способом последовательного сложения. Равнодействующая такой системы сил равна геометрической сумме этих сил, т. е.

$$\bar{R} = \sum \bar{F}_i \quad (6)$$

и выражается по величине и направлению вектором, замыкающим ломаную линию, стороны которой параллельны и равны данным силам. На рис. 6 показано сложение четырех сил. Многоугольник $ABCDE$ называется силовым многоугольником.

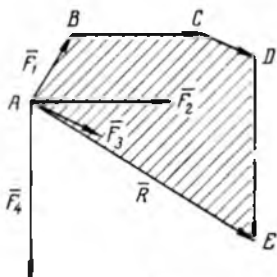


Рис. 6

Таким образом, применяя правило силового многоугольника, равнодействующую силу можно найти при помощи геометрического построения (графически).

Равнодействующую системы сходящихся сил можно опреде-

лить и аналитическим способом (способом проекций). При этом пользуются теоремой о проекции равнодействующей силы на данную ось, согласно которой проекция равнодействующей на данную ось равна алгебраической сумме проекций слагаемых сил на ту же ось.

Применяя эту теорему для случая плоской системы сходящихся сил, находим проекции равнодействующей этих сил на две координатные оси x и y :

$$R_x = \sum X_i, \quad R_y = \sum Y_i. \quad (7)$$

По этим проекциям определяются модуль и направляющие косинусы равнодействующей по следующим формулам:

$$R = \sqrt{(\sum X_i)^2 + (\sum Y_i)^2},$$

$$\cos(\bar{R}, \bar{i}) = \frac{\sum X_i}{R}; \quad \cos(\bar{R}, \bar{j}) = \frac{\sum Y_i}{R}. \quad (8)$$

Таким образом, при решении задачи о сложении сходящихся сил, лежащих в одной плоскости, аналитическим способом сначала нужно выбрать систему координатных осей x и y , найти углы каждой силы с координатными осями и вычислить проекции каждой силы на эти оси.

При вычислении проекции данной силы на ось необходимо иметь в виду, что абсолютное значение этой проекции равно произведению модуля силы на косинус острого угла между силой и осью проекций. При этом если направление этой проекции совпадает с положительным направлением оси, то проекция положительна; в противном случае проекция отрицательна (рис. 7).

Иногда бывает удобнее знак проекции определять иначе, а именно: если направление силы составляет острый угол с положительным направлением данной оси, то проекция силы на эту ось положительна. Если же направление силы составляет острый угол с отрицательным направлением данной оси, то проекция на эту ось отрицательна. Если сила параллельна оси, то проекция силы на эту ось равна модулю силы, взятому со знаком плюс или минус в зависимости от того, какой угол (0 или 180) составляет сила с положительным направлением оси. Если сила перпендикулярна к оси, то проекция силы на эту ось равна нулю.

Пример 3. Определить модуль и направление равнодействующей плоской системы сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$, приложенных в точке A , если $F_1 = F_4 = 100 \text{ н}$, $F_2 = 120 \text{ н}$, $F_3 = 80 \text{ н}$ и если известны углы между этими силами $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 105^\circ$, $\gamma = 60^\circ$ (рис. 8, а).

Решение. Решим эту задачу аналитическим способом. Для этого построим систему координатных осей Ax и Ay , направив ось x по линии действия силы $\vec{F}_1$. Вычислим проекции искомой

равнодействующей на оси x и y по формулам (7). Для этого найдем сначала проекции каждой силы на эти оси. Сила $\vec{F}_1$ направлена по оси x , а потому $F_{1x} = F_1 = 100$; $F_{1y} = 0$. Сила $\vec{F}_2$ составляет острый угол, равный 45° , с положительным направлением оси x и такой же угол с положительным направлением оси y , а потому $F_{2x} = F_2 \cos 45^\circ = F_{2y} = F_2 \cos 45^\circ$. Сила $\vec{F}_3$ составляет острый угол, равный $180^\circ - (\alpha + \beta) = 30^\circ$, с положительным направлением оси x , а с отрицательным направлением оси y эта сила составляет острый угол, равный 60° , а потому $F_{3x} = -F_3 \cos 30^\circ$, $F_{3y} = -F_3 \cos 60^\circ$. Сила $\vec{F}_4$ составляет острый угол, равный $\alpha + \beta = 90^\circ$ с $+y = 180^\circ - 30^\circ$, с поло-

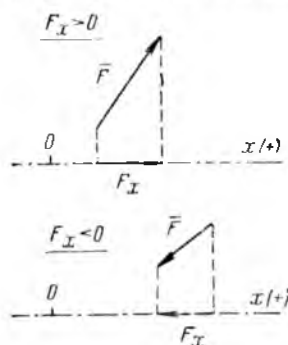


Рис. 7

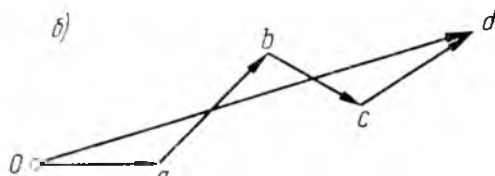
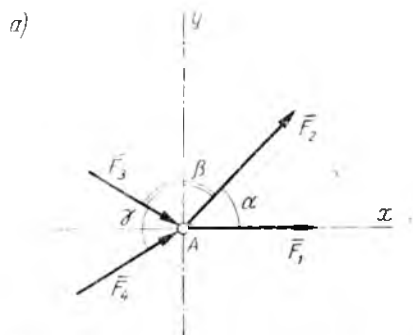


Рис. 8

жительным направлением оси x и острый угол, равный 60° , с положительным направлением оси y , а потому $F_{4x} = F_4 \cos 30^\circ$, $F_{4y} = F_4 \cos 60^\circ$. После того, как проекции всех сил на координатные оси найдены, вычислим проекции равнодействующей на те же оси:

$$R_x = \sum F_x = F_1 + F_2 \cos 45^\circ + F_3 \cos 30^\circ + F_4 \cos 30^\circ = 100 + 60\sqrt{2} + 90\sqrt{3} = 340,3;$$

$$R_y = \sum F_y = F_2 \cos 45^\circ - F_3 \cos 60^\circ + F_4 \cos 60^\circ = 60\sqrt{2} + 10 = 94,6.$$

Теперь находим модуль и направление равнодействующей по формулам (8):

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(340,3)^2 + (94,6)^2} \approx 353,5 \text{ Н},$$

$$\cos(\bar{R}, \bar{i}) = \frac{R_x}{R} = \frac{340,3}{353,5} = 0,959,$$

$$\cos(\bar{R}, \bar{j}) = \frac{R_y}{R} = \frac{94,6}{353,5} = 0,264.$$

Графическое решение этой задачи показано на рис. 8,б, где

$$\overline{Oa} = \overline{F_1}, \quad \overline{ab} = \overline{F_2}, \quad \overline{bc} = \overline{F_3}, \quad \overline{cd} = \overline{F_4}, \quad \overline{Od} = \overline{R}.$$

Сложение сходящихся сил, не лежащих в одной плоскости

Равнодействующая пространственной системы сходящихся сил так же, как и в случае, когда сходящиеся силы лежат в одной плоскости, равна геометрической сумме слагаемых сил, т. е. выражается по величине и направлению замыкающей стороной силового многоугольника, стороны которого равны и параллельны данным силам. Следовательно, $\overline{R} = \sum \overline{F_i}$. В частном случае, когда число слагаемых сил, не лежащих в одной плоскости, равно трем, их равнодействующая выражается по величине и направлению диагональю параллелепипеда, построенного на этих силах. Силовой многоугольник, построенный для пространственной системы сходящихся сил, не является плоской фигурой. Поэтому при сложении сил, не лежащих в одной плоскости, предпочтительнее аналитический способ.

Чтобы найти аналитически величину и направление равнодействующей пространственной системы сходящихся сил (применяя теорему о проекции равнодействующей на данную ось), сначала находят проекции равнодействующей на три координатные оси Ox , Oy , Oz :

$$R_x = \sum X_i, \quad R_y = \sum Y_i, \quad R_z = \sum Z_i. \quad (9)$$

Определив проекции равнодействующей на координатные оси, находят затем ее модуль и направляющие косинусы по формулам:

$$R = \sqrt{(\sum X_i)^2 + (\sum Y_i)^2 + (\sum Z_i)^2}, \\ \cos(\bar{R}, \bar{i}) = \frac{\sum X_i}{R}, \quad \cos(\bar{R}, \bar{j}) = \frac{\sum Y_i}{R}, \quad \cos(\bar{R}, \bar{k}) = \frac{\sum Z_i}{R}. \quad (10)$$

При вычислении проекции данной силы на три взаимно перпендикулярные координатные оси чаще всего встречаются следующие два случая:

1. Углы между силой и координатными осями заданы или их легко определить, исходя из условия задачи, например из соответствующего треугольника. В этом случае величина и знак проекции определяются так же, как и в случае плоской системы сходящихся сил (см. предыдущий параграф).

2. Данная сила и координатная ось, на которую нужно проектировать эту силу, не лежат в одной плоскости и угол между ними не задан. В этом случае часто бывает целесообразно сначала спроектировать данную силу на координатную плоскость, в которой лежит ось проекций, а затем полученную

проекцию силы на эту плоскость спроектировать на данную координатную ось.

При этом необходимо сначала найти угол между данной силой и координатной плоскостью, на которую проектируют эту силу, а затем определить угол между проекцией силы на эту плоскость и данной координатной осью.

Пример 4. К вершине O прямой треугольной призмы приложены пять сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_5$, причем сила $\vec{F}_4$ направлена по диагонали OB грани $OABC$, силы $\vec{F}_1, \vec{F}_3, \vec{F}_5$ — по ребрам OD, OC, OA , а сила $\vec{F}_2$ лежит в плоскости грани ODC и составляет с ребром OD угол 30° . Определить модуль и направление равнодействующей этой системы сил, если $F_1 = F_3 = 100 \text{ Н}$,

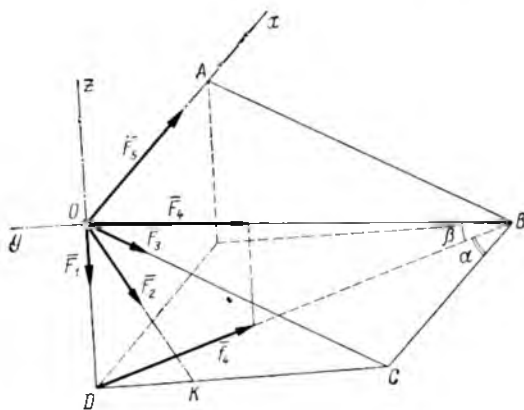


Рис. 9

$F_2 = 200 \text{ Н}$, $F_1 = 150 \sqrt{5} \text{ Н}$, $F_3 = 250 \text{ Н}$ и если известны углы: $\angle DOK = 30^\circ$, $\angle DCO = 30^\circ$, $\angle CBD = \alpha = 60^\circ$ и $OD = OA = CB$ (рис. 9).

Решение. Построим систему координатных осей Ox, Oy и Oz , направив ось Ox по линии действия силы $\vec{F}_5$, ось Oy — параллельно ребру DC призмы, а ось Oz — по ребру DO . Вычислим проекции искомой равнодействующей на оси x, y и z по формулам (9). Для этого найдем сначала проекции каждой силы на эти оси. Сила $\vec{F}_5$ направлена по оси x , а потому $F_{5y} = F_{5z} = 0$, $F_{5x} = F_5$. Сила $\vec{F}_1$ направлена по оси z , а потому $F_{1x} = F_{1y} = 0$, $F_{1z} = -F_1$. Кроме того, силы $\vec{F}_2$ и $\vec{F}_3$ лежат в плоскости zOy , а потому $F_{2x} = F_{3x} = 0$.

Так как сила $\vec{F}_2$ образует острый угол, равный 30° , с отрицательным направлением оси y и острый угол, равный 60° , с отрицательным направлением оси z , то $F_{2z} = -F_2 \cos 30^\circ$,

$F_{1x} = -F_1 \cos 60^\circ$. Аналогично вычисляем F_{2x} и F_{2z} :

$$F_{2y} = -F_2 \cos 60^\circ, \quad F_{2z} = -F_2 \cos 30^\circ.$$

Углы, образованные силой $\vec{F}_4$ с осями x и y , нельзя определить непосредственно из чертежа. Поэтому, чтобы найти проекции силы $\vec{F}_4$ на оси x и y , спроектируем сначала эту силу на плоскость xOy и полученную проекцию которую обозначим через $\vec{f}_4$, спроектируем затем на оси x и y . Тогда

$$\begin{aligned} f_4 &= F_4 \cos \beta, \\ F_{4x} &= f_{4x} = f_4 \cos \alpha = F_4 \cos \beta \cos \alpha, \\ F_{4y} &= f_{4y} = -f_4 \sin \alpha = -F_4 \cos \beta \sin \alpha, \end{aligned}$$

где $\beta = \angle DBO$.

Кроме того, $F_{1z} = -F_1 \sin \beta$.

Найденные значения проекций всех заданных сил на координатные оси можно расположить в табл. 1.

Таблица 1

Проекция	Силы				
	$\vec{F}_1$	$\vec{F}_2$	$\vec{F}_3$	$\vec{F}_4$	$\vec{F}$
F_x	0	0	0	$F_4 \frac{1}{2} \cos \beta$	F_x
F_y	0	$-F_2 \frac{1}{2}$	$-F_3 \frac{\sqrt{3}}{2}$	$-F_4 \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \beta$	0
F_z	$-F_1$	$-F_2 \frac{\sqrt{3}}{2}$	$-F_3 \frac{1}{2}$	$-F_4 \sin \beta$	0

Из прямоугольных треугольников ODB и DBC находим:

$$\begin{aligned} \sin \beta &= \frac{OD}{OB}, \\ \cos \beta &= \frac{DB}{OB}, \\ DB &= 2BC, \\ OB &= \sqrt{OD^2 + DB^2}. \end{aligned}$$

Кроме того, $BC = OD$, а потому

$$OB = \sqrt{OD^2 + 4BC^2} = \sqrt{OD^2 + 4OD^2}, \text{ или } OB = OD \sqrt{5}.$$

Отсюда

$$\sin \beta = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \cos \beta = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Далее вычислим проекции равнодействующей на оси x , y и z по формулам (9):

$$R_x = \frac{F_2}{1} + F_3 = 100,$$

$$R_y = -\frac{F_2}{3} - F_1 \frac{1}{2} - F_3 \frac{1}{5} = -100(1 + 2 + 3),$$

$$R_z = F_1 - F_2 \frac{1}{3} - F_3 \frac{1}{2} - F_4 \frac{1}{4} = -100(3 + 1 + 3).$$

Модуль и направление равнодействующей определяем по формулам (10):

$$R = \sqrt{400^2 + 100^2(1 + 2 + 3)^2 + 100^2(3 + 1 + 3)^2} \approx 763,69 \text{ н},$$

$$\cos(R, i) = \frac{100}{763,69} \approx 0,523,$$

$$\cos(R, j) = -\frac{416,1}{763,69} \approx -0,581$$

$$\cos(R, k) = -\frac{417,2}{763,69} \approx -0,619.$$

§ 2 РАЗЛОЖЕНИЕ СИЛЫ НА СОСТАВЛЯЮЩИЕ

Задача о разложении заданной силы на две или несколько составляющих является обратной по отношению к задаче об определении равнодействующей сходящихся сил. Рассмотрим следующие основные случаи решения этой обратной задачи.

1. Разложение данной силы на две составляющие, лежащие с ней в одной плоскости, если:

а) заданы направления составляющих;

б) заданы модули этих составляющих.

2. Разложение данной силы на три составляющие, лежащие с ней в одной плоскости и направленные по трем заданным непараллельным прямым, не пересекающимся в одной точке.

3. Разложение данной силы по трем заданным направлениям, не лежащим в одной плоскости.

Для того чтобы разложить силу $\vec{F}$ (рис. 10) по двум заданным направлениям Ax и Ay , достаточно из конца B этой силы провести две прямые, параллельные прямым Ax и Ay , до их пересечения с этими прямыми в точках C и D . Тогда векторы $\vec{AC}$ и $\vec{AD}$ являются искомыми составляющими, т. е.

$$\vec{AC} = \vec{F}_1, \vec{AD} = \vec{F}_2, \text{ а } \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

Пример 5 К узлу B шарнирно-стержневого многоугольника $ABCD$, стороной AD которого закреплена неподвижно, приложена заданная сила F . Найти силы, передающиеся на стержни AC и DC если $F = 2 \text{ кн}$, $\angle ABC = 120^\circ$, $\angle BCA = 30^\circ$, $\angle ACD = 90^\circ$ и $\angle \alpha = 60^\circ$ (рис. 11).

Решение. Разложим силу $\vec{F}$ на две составляющие $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, направленные вдоль стержней AB и BC . Для этого построим параллелограмм $A_1B_1C_1B$, в котором сила F является диагональю, т. е. $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. Так как в треугольнике A_1B_1B все углы равны по 60° , то $F_1 = F_2 = F = 2 \text{ кН}$. На стержень BC действует сила $\vec{F}_2$; перенесем эту силу по линии ее действия в точку C и разложим ее на две составляющие $\vec{S}_1$ и $\vec{S}_2$, направленные вдоль

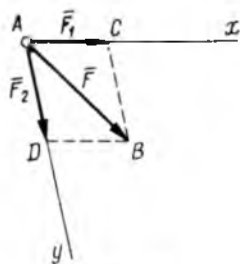


Рис. 10

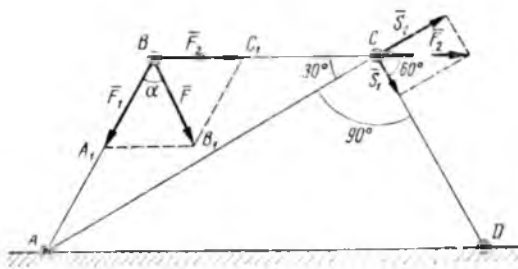


Рис. 11

стержней AC и CD , т. е. построим параллелограмм, в котором сила $\vec{F}_2$ является диагональю. Тогда сила $\vec{S}_1$ действует на стержень CD , а сила $\vec{S}_2$ — на стержень AC . Таким образом, эти силы являются искомыми; причем, учитывая направления сил $\vec{S}_1$ и $\vec{S}_2$, видим, что стержень AC испытывает растяжение, а стержень CD — сжатие. Из прямоугольного силового треугольника находим:

$$S_2 = F_2 \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} F_2,$$

$$S_1 = F_2 \cos 60^\circ = \frac{1}{2} F_2,$$

т. е. $S_2 = 1,73 \text{ кН}$, $S_1 = 1 \text{ кН}$.

Если требуется разложить данную силу F на две составляющие, лежащие с ней в одной плоскости, зная модули F_1 и F_2 этих составляющих, то задача сводится к построению силового треугольника по трем его сторонам. Для построения этого треугольника проведем из центров A и B (начала и конца данной силы F) дуги радиусов $r_1 = F_1$ и $r_2 = F_2$ до их взаимного пересечения в точке C и дополним полученный треугольник ABC до параллелограмма $ACBE$, в котором сила F является диагональю (рис. 12).*

Если требуется разложить заданную силу F по трем заданным непараллельным направлениям, лежащим с ней в одной

* Задача, очевидно, имеет два решения (почему?) Если же $F_1 + F_2 < F$, то задача решений не имеет.

плоскости и не пересекающимися в одной точке, то сначала продолжим эти направления так, чтобы они попарно пересекались в трех точках A , B и C , а затем перенесем заданную силу $\vec{F}$ по линии ее действия в точку пересечения с одним из трех заданных направлений, например в точку B_1 пересечения линии действия силы $\vec{F}$ с прямой AC (рис. 13). Точку B_1 соединим с

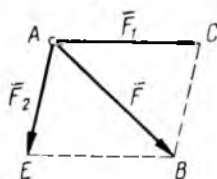


Рис. 12

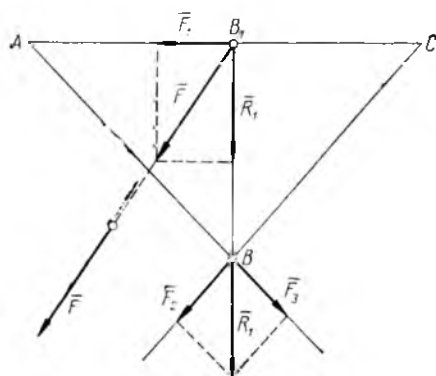


Рис. 13

точкой B пересечения двух других заданных направлений AB и CB и разложим силу $\vec{F}$ по направлениям AC и BB_1 . Тогда

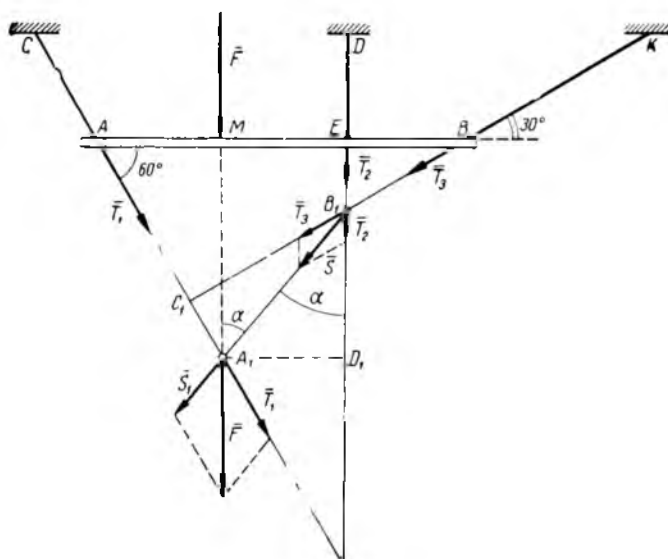


Рис. 14

да $\vec{F} = \vec{R}_1 + \vec{F}_1$. Сила $\vec{F}_1$ и есть одна из трех искомых составляющих силы F , направленная вдоль AC . Остается теперь силу $\vec{R}_1$ перенести по линии ее действия в точку B и

разложить ее по направлениям AB и CB . Тогда $\vec{R}_1 = \vec{F}_2 + \vec{F}_1$. Силы $\vec{F}_2$ и $\vec{F}_1$ определяют искомые составляющие силы $\vec{F}$, направленные вдоль прямых AB и BC .

Пример 6. К горизонтальной балке AB , подвешенной на трех канатах AC , ED и BK , составляющих с прямой AB углы 120° , 90° и 30° , в точке M приложена вертикальная сила $\vec{F}$, равная $0,8$ кН. Определить усилия, растягивающие канаты, если $AM = ME = EB = 1$ м (рис. 14).

Решение. Для определения искомых усилий нужно разложить силу $\vec{F}$ на три составляющие, направленные вдоль канатов AC , ED и BK . Для этого продолжим линию действия силы $\vec{F}$ и прямую AC до их пересечения в точке A_1 , а прямые ED и BK — до их пересечения в точке B_1 . Соединив точки A_1 и B_1 , перенесем силу $\vec{F}$ в точку A_1 и разложим ее на две составляющие $\vec{S}_1$ и $\vec{T}_1$, направленные по прямым A_1A и A_1B_1 . Применяя формулу (3) к построенному параллелограмму сил, получим:

$$\frac{F}{\sin(30^\circ + \alpha)} = \frac{S_1}{\sin 30^\circ} = \frac{T_1}{\sin \alpha}, \text{ где } \angle \alpha = \angle MA_1B_1.$$

Отсюда находим:

$$S_1 = \frac{F \sin 30^\circ}{\sin(30^\circ + \alpha)},$$

$$T_1 = \frac{F \sin \alpha}{\sin(30^\circ + \alpha)}.$$

Далее перенесем силу $\vec{S}_1$ в точку B_1 и разложим ее на две составляющие $\vec{T}_2$ и $\vec{T}_3$, направленные вдоль прямых B_1E и B_1B . Так как сила $\vec{T}_2$ составляет с силами $\vec{T}_1$ и $\vec{S}_1$ соответственно углы α и 60° , то по формуле (3) получим:

$$\frac{S_1}{\sin 60^\circ} = \frac{T_2}{\sin(60^\circ - \alpha)} = \frac{T_3}{\sin \alpha},$$

откуда

$$T_2 = S_1 \frac{\sin(60^\circ - \alpha)}{\sin 60^\circ},$$

$$T_3 = S_1 \frac{\sin \alpha}{\sin 60^\circ}.$$

Подставив найденное значение силы S_1 , получим:

$$T_1 = \frac{2}{\sqrt{3 + \operatorname{ctg} \alpha}} F,$$

$$T_2 = \frac{\sqrt{3 - \operatorname{tg} \alpha}}{(1 + \sqrt{3 \operatorname{tg} \alpha}) \sqrt{3}} F,$$

$$T_3 = \frac{2}{(\sqrt{3 + \operatorname{ctg} \alpha}) \sqrt{3}} F,$$

где

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{A_1 D_1}{B_1 D_1} = \frac{1}{\sqrt{A_1 B_1^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{A_1 C_1^2 + C_1 B_1^2 - 1}}.$$

Из прямоугольных треугольников ABC_1 , BEV_1 , AA_1 найдем:

$$BC_1 = AB \cos 30^\circ,$$

$$AC_1 = AB \sin 30^\circ,$$

$$BB_1 = \frac{BE}{\cos 30^\circ},$$

$$AA_1 = 2 AM,$$

а потому

$$B_1 C_1 = BC_1 - BB_1, \quad A_1 C_1 = AA_1 - AC_1,$$

т. е.

$$B_1 C_1 = \frac{5\sqrt{3}}{6}, \quad A_1 C_1 = \frac{1}{2},$$

откуда

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \text{и} \quad T_1 = \frac{4\sqrt{3}}{9} F, \quad T_2 = \frac{1}{9} F,$$

$$T_3 = \frac{4}{9} F.$$

Силы $\bar{T}_1$, $\bar{T}_2$ и $\bar{T}_3$ являются искомыми силами, растягивающими канаты CA , DE и BK .

Пример 7. Три невесомых стержня соединены между собой в точке B . Стержни AB и BC лежат в координатной плоскости zOx и составляют с осью x углы α и β , а стержень BD расположен в плоскости zOy и составляет с осью Oy угол γ . К узлу B приложена сила $\bar{F}$, параллельная оси y . Определить силу $\bar{S}_1$, растягивающую стержень BD , и силы $\bar{S}_2$ и $\bar{S}_3$, сжимающие стержни AB и BC (рис. 15).

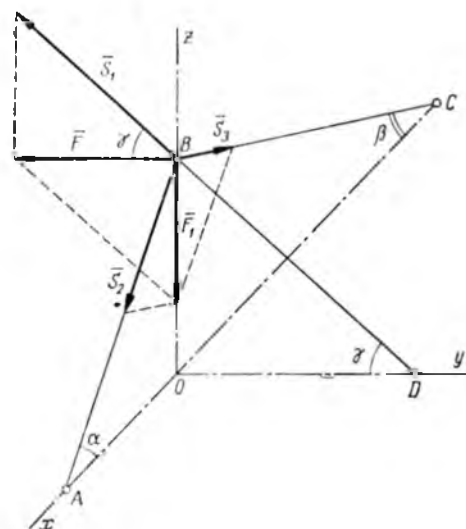


Рис. 15

Решение. Так как плоскость zOy , в которой лежат сила $\bar{F}$ и прямая BD , пересекается с плоскостью zOx , в которой расположены стержни AB и BC , по прямой Oz , то раз-

ложим сначала силу $\bar{F}$ на две составляющие $\bar{S}_1$ и $\bar{F}_1$, направленные по прямым BD и BO . Из построенного прямоугольного треугольника с углом γ находим:

$$S_1 = \frac{F}{\cos \gamma}, \quad F_1 = F \operatorname{tg} \gamma.$$

Для определения сил S_2 и S_3 , действующих на стержни BA и BC , следует разложить силу $\bar{F}_1$ по направлениям этих стержней, построив соответствующий параллелограмм сил. Из этого параллелограмма, заметив, что углы, образуемые силой $\bar{F}_1$ с силами $\bar{S}_2$ и $\bar{S}_3$, равны соответственно $90^\circ - \alpha$ и $90^\circ - \beta$, по формуле (3) находим:

$$\frac{F_1}{\sin [180^\circ - (\alpha + \beta)]} = \frac{S_2}{\sin (90^\circ - \beta)} = \frac{S_3}{\sin (90^\circ - \alpha)},$$

$$\frac{F_1}{\sin (\alpha + \beta)} = \frac{S_2}{\cos \beta} = \frac{S_3}{\cos \alpha},$$

откуда

$$S_2 = \frac{F_1 \cos \beta}{\sin (\alpha + \beta)} = \frac{F_1}{\sin \alpha + \cos \alpha \operatorname{tg} \beta};$$

$$S_3 = \frac{F_1 \cos \alpha}{\sin (\alpha + \beta)} = \frac{F_1}{\sin \beta + \cos \beta \operatorname{tg} \alpha}.$$

Таким образом,

$$S_1 = \frac{F}{\cos \gamma},$$

$$S_2 = \frac{F \operatorname{tg} \gamma}{\sin \alpha + \cos \alpha \operatorname{tg} \beta},$$

$$S_3 = \frac{F \operatorname{tg} \gamma}{\sin \beta + \cos \beta \operatorname{tg} \alpha}.$$

§ 3. СВЯЗИ И РЕАКЦИИ СВЯЗЕЙ

При решении задач по статике, относящихся к равновесию твердого тела, почти всегда рассматриваемое тело является несвободным. Условия, стесняющие свободу движения рассматриваемого тела, называются в механике *связями*. В статике связи осуществляются при помощи твердых или гибких тел, соединенных с данным твердым телом или касающихся его. Обычно задача состоит в определении сил взаимодействия между данным твердым телом и телами, осуществляющими связи, наложенные на это тело. Сила, с которой связь, препятствующая перемещению данного твердого тела в каком-нибудь направлении, действует на это тело, называется *реакцией связи*. Направление реакции связи противоположно тому направлению, в котором связь препятствует перемещению данного тела.

Основные типы связей показаны на рис. 16.

1. Тело опирается на абсолютно твердую гладкую неподвижную поверхность в точке A . Реакция $\bar{N}$ такой поверхности направлена по общей нормали к поверхности данного тела и к опорной поверхности в точке A соприкосновения тела с опорой.

2. Тело опирается на неподвижную точку или на неподвижную линию. Если трением пренебречь, то в этом случае реакция связи $\bar{N}$ приложена к телу в точке соприкосновения его с опорой и направлена по нормали к поверхности тела в этой точке.

3. Тело опирается одной точкой на гладкую неподвижную поверхность. Реакция связи $\bar{N}$ в этом случае приложена в точке соприкосновения тела с поверхностью и направлена по нормали к этой поверхности.

4. Связь осуществляется гибкой, нерастяжимой нитью (цепью, или канатом). Реакция этой связи приложена в точке прикрепления нити к телу и направлена вдоль нити. При этом следует отметить, что нить может быть только растянута. Поэтому реакция нити может быть направлена вдоль нити только в одну сторону, а именно от точки закрепления нити на данном теле к другому закрепленному концу нити.

5. Тело опирается на гладкую неподвижную плоскость каткам, которые могут перемещаться по этой плоскости. Реакция $\bar{R}_A$ такой опоры направлена перпендикулярно к плоскости, по которой могут перемещаться катки.

6. Связь осуществляется при помощи неподвижного цилиндрического шарнира. В этом случае рассматриваемое тело может только вращаться вокруг неподвижной оси цилиндрического шарнира. Если трением в шарнире пренебречь, то реакция неподвижного цилиндрического шарнира направлена по нормали к его цилиндрической поверхности, т. е. лежит в плоскости, перпендикулярной к оси шарнира, и пересекает эту ось. Но направление реакции шарнира в этой плоскости заранее неизвестно; это направление приходится определять в каждом отдельном случае, т. е. в каждой конкретной задаче.

7. Связь осуществляется при помощи невесомого твердого стержня, шарнирно соединенного концами с данным телом, равновесие которого мы рассматриваем, и с другим каким-нибудь телом, например со стойкой, стеной или полом; причем никакие заданные силы к этому стержню не приложены (его весом пренебрегаем). Реакция $\bar{R}_B$ такого стержня, приложенная к данному телу, направлена вдоль стержня. При этом стержень может подвергаться как сжатию, так и растяжению.

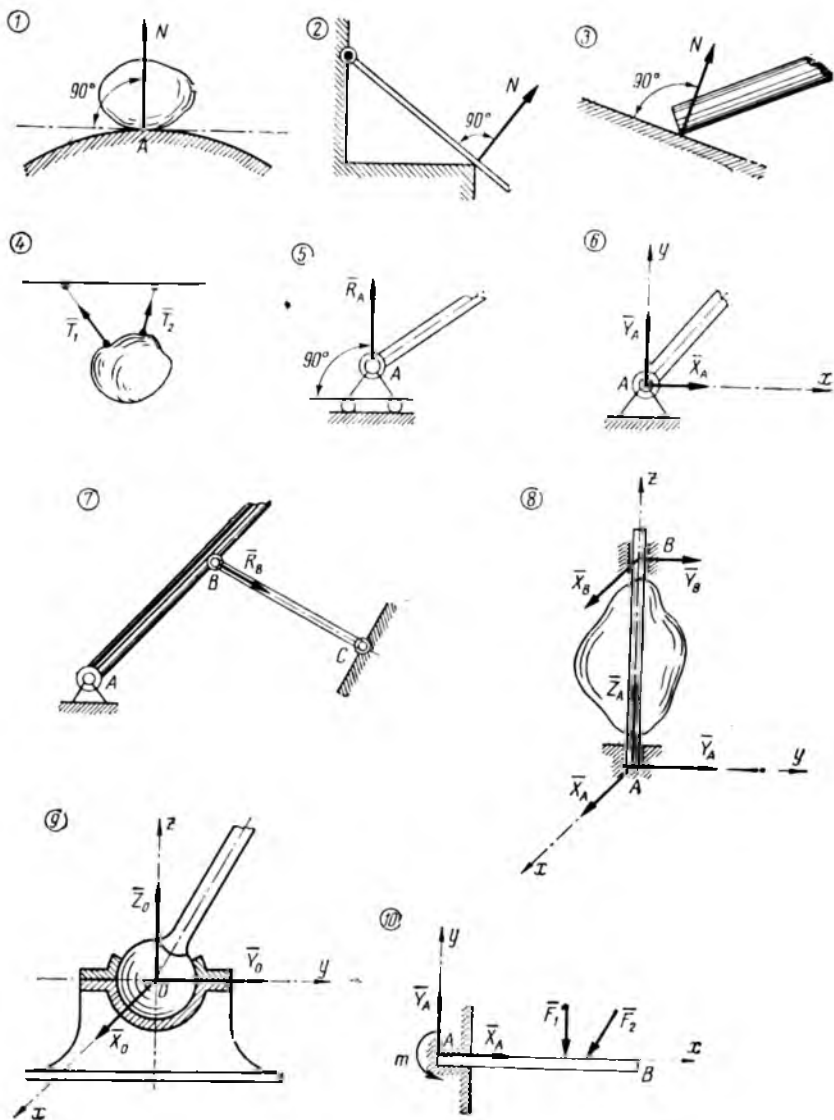


Рис. 16

8. а) Связь осуществляется при помощи подпятника. Подпятник A служит для укрепления пяты стойки и допускает только одно перемещение рассматриваемого твердого тела, а именно вращение этого тела вокруг оси стойки. Основание подпятника препятствует перемещению тела по вертикали вниз (вдоль оси стойки), а стенки подпятника препятствуют перемещению тела в плоскости, перпендикулярной к оси стойки. Реакция $\bar{Z}_A$ основания подпятника направлена по вертикали вверх, а реакция стенок подпятника лежит в горизонтальной плоскости, но направление ее в этой плоскости в общем случае неизвестно, поэтому при решении задач ее нужно разложить на две составляющие по направлениям осей x и y , перпендикулярным к оси Az стойки.

б) Связь осуществляется при помощи неподвижного цилиндрического подшипника. Подшипник B не препятствует вращению тела вокруг оси Az и скольжению вдоль этой оси. Если трением пренебречь, то реакция $\bar{R}_B$ подшипника (реакция цилиндрической поверхности его стенок) пересекает ось вращения тела и лежит в плоскости, перпендикулярной к этой оси; так как подшипник не препятствует скольжению тела вдоль оси вращения, то нет и реакции, направленной вдоль этой оси.

9. Связь осуществляется при помощи сферического шарнира. Сферический шарнир не препятствует вращению тела вокруг любой оси, проходящей через центр O этого шарнира (точку O). Реакция сферического шарнира проходит через центр шарнира O , а направление ее заранее указать нельзя. Поэтому при решении задач эту реакцию придется разлагать на три составляющие по направлениям выбранных осей координат.

10. Если балка AB , расположенная с приложенными к ней заданными силами $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots$ в плоскости xAy , закреплена концом A жестко, т. е. заделка в точке A препятствует как поступательному перемещению балки в любом направлении в плоскости xAy , так и вращательному движению вокруг оси Az , перпендикулярной к плоскости xAy , то реакция заделки эквивалентна силе $\bar{R}_A$, приложенной в точке A , направление которой заранее неизвестно, и паре сил с моментом m , причем силу $\bar{R}_A$ можно разложить на составляющие, направленные по осям x и y , т. е. $\bar{R}_A = \bar{X}_A + \bar{Y}_A$.

§ 4. РАВНОВЕСИЕ СИСТЕМЫ СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

Для того чтобы система сходящихся сил находилась в равновесии, необходимо и достаточно равенство нулю равнодействующей этой системы сил. Это условие можно выразить одним векторным равенством

$$\bar{R} = \sum \bar{F}_i = 0, \quad (11)$$

или тремя скалярными равенствами:

$$\sum X_i = 0, \quad \sum Y_i = 0, \quad \sum Z_i = 0, \quad (12)$$

где X_i , Y_i , Z_i — проекции сил F_i на координатные оси.

Если уравновешенная система сходящихся сил является плоской, то вместо трех равенств (12) будем иметь два:

$$\left. \begin{aligned} \sum X_i &= 0, \\ \sum Y_i &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (12')$$

Уравнение (11) выражает условие замкнутости многоугольника данных сил, т. е. условие равновесия сходящихся сил в геометрической форме.

Уравнения (12) выражают условия равновесия системы сходящихся сил в аналитической форме.

Задачи статики, относящиеся к равновесию несвободного твердого тела, можно классифицировать, во-первых, по расположению линий действия сил, приложенных к рассматриваемому телу, и, во-вторых, каждую такую группу задач можно подразделять на отдельные виды по характеру связей, наложенных на данное тело. В этом параграфе мы рассмотрим равновесие системы сходящихся сил.

Задачи на равновесие системы сходящихся сил можно разделить на следующих два типа:

I. Равновесие плоской системы сходящихся сил.

II. Равновесие сходящихся сил, не лежащих в одной плоскости.

Задачи, относящиеся к первому типу, можно подразделить по характеру связей, наложенных на данное тело, на две группы:

1. Задачи, в которых линии действия всех реакций связей, наложенных на данное тело (равновесие которого рассматривается в задаче), известны.

К таким связям относятся:

а) невесомый стержень, одним концом шарнирно соединенный с данным телом, а другим концом закрепленный при помощи неподвижного шарнира;

б) неподвижная гладкая поверхность или неподвижная гладкая линия, на которую опирается данное тело;

в) гибкая нить (канат, трос);

г) цилиндрический подшипник, ось которого расположена в плоскости действия заданных сил.

2. Задачи, имеющие хотя бы одну связь, наложенную на данное тело, направление реакции которой заранее неизвестно.

Таковыми связями являются неподвижный цилиндрический шарнир и подпятник.

В задачах, относящихся к равновесию несвободного тела

под действием системы сходящихся сил, не лежащих в одной плоскости, связи, наложенные на это тело, чаще всего осуществляются гибкими телами, шарнирно закрепленными стержнями и неподвижными опорными плоскостями. В этих случаях линии действия реакций всех связей известны и, следовательно, задача сводится только к определению модулей этих реакций.

При решении задач, относящихся к равновесию несвободного твердого тела, надо придерживаться следующего общего плана.

Необходимо выделить тело, равновесие которого будем рассматривать в данной задаче, т. е. то тело, к которому приложены как заданные силы, так и те силы, которые требуется определить в данной задаче.

Далее необходимо выяснить, какие связи наложены на рассматриваемое тело, и учесть реакции этих связей.

При этом рекомендуется начертить выделенное тело, изобразить на чертеже в виде векторов заданные силы и реакции связей и установить, каким уравнениям равновесия должна удовлетворять эта система сил, а затем составить и решить эти уравнения.

Рассмотрим сначала решение таких задач, когда все приложенные к телу силы, включая и реакции связей, пересекаются в одной точке и лежат в одной плоскости.

В этом случае задачу можно решить двумя способами: или геометрическим (графически), или аналитическим (по способу проекций).

Задачи типа I

Равновесие плоской системы сходящихся сил

Первая группа

Задачи, в которых линии действия реакций всех связей известны (задачи 17—21, 26—32)*

Пример 8. Плоская ферма, состоящая из невесомых стержней, соединенных между собой по концам шарнирно, находится в равновесии под действием сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, причем сила $\vec{F}_1$ горизонтальна, а сила $\vec{F}_2$ составляет со стержнем ED угол $\alpha = 45^\circ$. Определить усилия в стержнях 1, 2, 3 и 4, если $F_1 = 30$ кн, $F_2 = 20$ кн (рис. 17).

Решение. Рассмотрим сначала узел D ; к этому узлу, находящемуся в равновесии, приложены заданная сила $\vec{F}_2$ и неизвестные реакции стержней 1 и 2, которые обозначим через

* Здесь и дальше в тексте указаны номера задач из «Сборника задач по теоретической механике» Н. В. Мищерского, изд. 1950 г. и последующих изданий.

$\bar{S}_1$ и $\bar{S}_2$. Так как весом стержней пренебрегаем, то эти реакции направлены вдоль соответствующих стержней (см. стр. 20, п. 7).

Таким образом, узел D находится в равновесии под действием трех сил $\bar{F}_1$, $\bar{S}_1$ и $\bar{S}_2$, поэтому $\bar{F}_1 + \bar{S}_1 + \bar{S}_2 = 0$. Далее задачу можно решить либо геометрическим способом, либо аналитическим. Решим сначала эту задачу геометрическим способом. Построим замкнутый силовой треугольник, начав его построение с известной силы $\bar{F}_1$. Из произвольной точки a проведем вектор $\bar{ab}$, параллельный данной силе $\bar{F}_1$, длина которого в выбранном масштабе изображает модуль этой силы. Через точки a и b проведем два луча, параллельные силам $\bar{S}_1$ и $\bar{S}_2$, до их пересечения в точке c .

Треугольник abc и есть искомый замкнутый силовой треугольник. Чтобы найти направление неизвестных сил $\bar{S}_1$ и $\bar{S}_2$, нужно обойти силовой треугольник по его периметру так, чтобы он замкнулся; направление этого обхода определяется направлением известной силы $\bar{F}_1$. Измерив длину сторон bc и ca силового треугольника выбранной единицей масштаба, найдем числовое значение сил $\bar{S}_1$ и $\bar{S}_2$. Мо-

дули неизвестных сил $\bar{S}_1$ и $\bar{S}_2$ можно также найти тригонометрически из треугольника abc , в котором известны сторона $ab = F_1$ и два угла: $\angle abc = 120^\circ$ (углы abc и DBA равны как углы с параллельными сторонами) и $\angle acb = 30^\circ$ (см. рис. 17 и 18). Из этого треугольника находим:

$$\frac{S_1}{\sin 120^\circ} = \frac{S_2}{\sin 30^\circ} = \frac{F_1}{\sin 30^\circ},$$

а потому

$$S_2 = F_1, \quad S_1 = F_1 \frac{\sin 60^\circ}{\sin 30^\circ},$$

или

$$S_2 = F_1 = 30 \text{ кН}, \quad S_1 = F_1 \sqrt{3} = 51,9 \text{ кН}.$$

Мы нашли реакции S_1 и S_2 стержней DE и DK , т. е. те силы, с которыми эти реакции действуют на узел D . Важно при этом выяснить, будут ли стержни DE и DK работать на растяжение

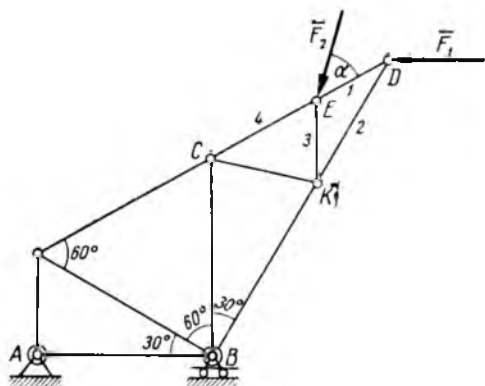


Рис. 17

или на сжатие. Для этого рассмотрим равновесие каждого стержня отдельно; начнем со стержня DK (рис. 19, а).

Реакция стержня DK , приложенная к узлу D , направлена от узла D внутрь отрезка DK . Но тогда сила $\bar{S}_2$, с которой шарнир D действует на стержень DK , или иначе — реакция шарнира D , приложенная к стержню DK , равна по модулю и противоположна по направлению силе $\bar{S}_2$, т. е. $\bar{S}_2' = -\bar{S}_2$. Стержень DK находится в равновесии под действием двух сил: реакции $\bar{S}_2'$ шарнира D и реакции шарнира K , которую обозначим через $\bar{S}_2''$. Отсюда следует, что силы $\bar{S}_2'$ и $\bar{S}_2''$, направленные по одной прямой, равны по модулю и противоположны по направлению, т. е. $\bar{S}_2' = -\bar{S}_2''$. Силы $\bar{S}_2'$ и $\bar{S}_2''$, приложенные к концам стержня

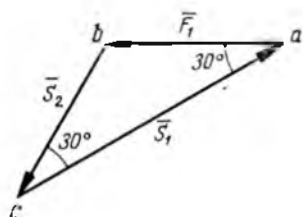


Рис. 18

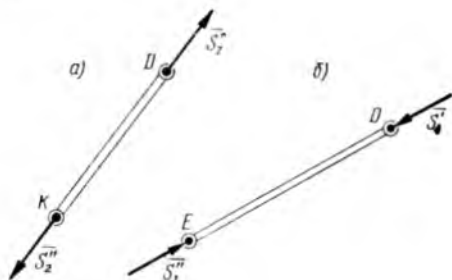


Рис. 19

KD , вызывают, очевидно, растяжение этого стержня. Отсюда заключаем, что если вектор $\bar{S}_2$, изображающий реакцию стержня KD на шарнир D и показанный на самом стержне, направлен от узла D , то стержень растянут. Теперь рассмотрим стержень DE (рис. 19, б). Реакция $\bar{S}_1$ этого стержня на шарнир D , начерченная на самом стержне DE , направлена, как видно, к шарниру D . Аналогично предыдущему заключаем, что реакция $\bar{S}_1'$ шарнира D на стержень DE , приложенная к этому стержню, будет равна по модулю и прямо противоположна по направлению силе $\bar{S}_1$, т. е. $\bar{S}_1' = -\bar{S}_1$. Так как стержень DE находится в равновесии, то реакция $\bar{S}_1'$ шарнира E , приложенная к этому стержню, равна по модулю и прямо противоположна по направлению силе $\bar{S}_1$, т. е. $\bar{S}_1' = -\bar{S}_1$. Очевидно, что силы $\bar{S}_1$ и $\bar{S}_1'$, приложенные к стержню DE , сжимают этот стержень. Поэтому можно сказать, что если вектор $\bar{S}_1$, изображающий реакцию стержня DE на шарнир D и начерченный на самом стержне, направлен к узлу D , то стержень сжат. Таким образом, сформулируем следующее правило:

Если изображенный на самом стержне, вектор силы, с которой данный стержень действует на шарнир (узел), направлен от шарнира (от узла), то стержень растянут. Если же этот вектор направлен к шарниру (к узлу), то стержень сжат.

Рассмотрим далее аналитический способ решения этой задачи. Направим ось Dx по линии действия силы $\bar{F}_1$, а ось Dy перпендикулярно к ней, как показано на рис. 20, и найдем проекции всех сил, приложенных к шарниру D на эти оси. Известно, что абсолютное значение проекции силы на ось равно произведению модуля этой силы на косинус острого угла между направлением силы и осью проекций. При этом, если направление силы составляет острый угол с положительным направлением оси проекций, то проекция силы на эту ось положительна. Если же направление силы составляет острый угол с отрицательным направлением оси проекций, то проекция силы на эту ось отрицательна.

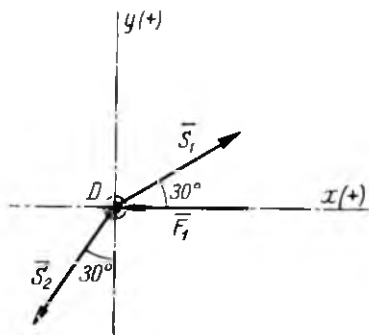


Рис. 20

Сила $\bar{F}_1$ совпадает с отрицательным направлением оси Dx , а потому проекция ее на эту ось равна модулю самой силы, взятому со знаком минус, а ее проекция на ось Dy равна нулю. Сила S_1 составляет острый угол 30° с положительным направлением оси Dx и острый угол 60° с положительным направлением оси Dy , а потому

$$S_{1x} = S_1 \cos 30^\circ, \quad S_{1y} = S_1 \cos 60^\circ.$$

Сила S_2 составляет острый угол 60° с отрицательным направлением оси Dx и острый угол 30° с отрицательным направлением оси Dy , а потому

$$S_{2x} = -S_2 \cos 60^\circ, \quad S_{2y} = -S_2 \cos 30^\circ.$$

При равновесии тела сумма проекций всех приложенных к телу сил на каждую из координатных осей равна нулю. Таким образом, получим два следующих уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} 1) & -F_1 + S_1 \cos 30^\circ - S_2 \cos 60^\circ = 0, \\ 2) & S_1 \cos 60^\circ - S_2 \cos 30^\circ = 0, \end{aligned} \quad \left\{ \right.$$

или

$$\begin{aligned} 1) & S_1 \sqrt{3} - S_2 = 2F_1, \\ 2) & S_1 = S_2 \sqrt{3}. \end{aligned} \quad \left\{ \right.$$

Решим теперь эту систему уравнений относительно неизвестных S_1 и S_2 :

$$S_2 = F_1 - 30 \text{ кН}, \quad S_1 = S_2 + 3 = 51,9 \text{ кН}.$$

Чтобы определить усилия в стержнях 3 и 4, рассмотрим узел E , находящийся в равновесии под действием заданной силы $\vec{F}_2$ и трех реакций стержней 1, 3, 4, направленных вдоль этих стержней. Неизвестные реакции стержней 3 и 4 обозначим через $\vec{S}_3$ и $\vec{S}_4$, направив их от рассматриваемого узла E . Что касается реакции стержня 1, приложенной к узлу E , то по закону равенства действия и противодействия она равна по модулю и противоположна по направлению силе $\vec{S}_1$, т. е. равна силе $\vec{S}_1'$. Следовательно, $\vec{S}_1' + \vec{S}_3 + \vec{S}_4 - \vec{F}_2 = 0$. Для определения неизвестных сил применим сначала аналитический способ решения задачи. Для этого выберем оси координат, как указано на рис. 21, и найдем проекции каждой силы на эти оси.

Тогда имеем:

$$\begin{aligned} S_{1x}' &= -S_1' \cos 30^\circ, \\ S_{3x} &= 0, \quad F_{2x} = -F_2 \cos 75^\circ; \\ S_{1y}' &= -S_1' \cos 60^\circ, \\ S_{3y} &= -S_3, \\ F_{2y} &= -F_2 \cos 15^\circ; \\ S_{1x} &= -S_1 \cos 30^\circ; \\ S_{1y} &= -S_1 \cos 60^\circ. \end{aligned}$$

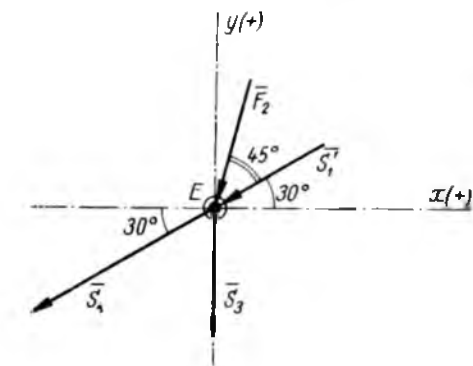


Рис. 21

Приравнявая нулю сумму проекций всех сил на каждую из координатных осей Ex и Ey , получим два уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} -S_1' \cos 30^\circ - F_2 \cos 75^\circ - S_4 \cos 30^\circ &= 0, \\ -S_3 - S_1' \cos 60^\circ - F_2 \cos 15^\circ - S_4 \cos 60^\circ &= 0. \end{aligned}$$

Из этих уравнений находим:

$$\begin{aligned} S_1 &= -F_2 \frac{\cos 75^\circ}{\cos 30^\circ} - S_4, \\ S_3 &= -S_1' \cos 60^\circ - F_2 \cos 15^\circ - S_4 \cos 60^\circ, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} S_1 &= -20 \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) - 30 + 3, \\ S_2 &= -20 \left(\cos 15^\circ - \frac{\cos 75^\circ}{\sqrt{3}} \right), \end{aligned}$$

т. е.

$$S_1 = -57,9 \text{ кН}, \quad S_2 = -16,2 \text{ кН}.$$

Так как после решения уравнений равновесия мы получили отрицательные значения для неизвестных реакций S_3 и S_4 , то эти силы имеют направления, противоположные выбранным нами на рис. 21, т. е. силы $\bar{S}_3$ и $\bar{S}_4$ направлены к узлу E и стержни 3 и 4 сжаты. Полученные результаты проверим геометрически, т. е. рассмотрим геометрический способ решения этой задачи. Для этого построим замкнутый многоугольник сил $\bar{F}_2$, $\bar{S}_1$, $\bar{S}_3$, $\bar{S}_4$ (рис. 22). Направления сил $\bar{S}_3$ и $\bar{S}_4$ найдем после того, как обойдем периметр построенного силового многоугольника $dekld$, причем направление этого обхода определяется направлением известных сил $\bar{F}_2$ и $\bar{S}_1$. Измерив стороны ld и kl силового многоугольника выбранной единицей масштаба, найдем модули искомых сил S_3 и S_4 .

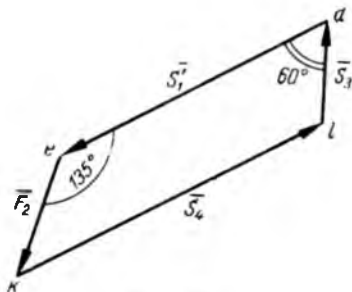


Рис. 22

Так как углы между силами $\bar{F}_2$, $\bar{S}_1$, $\bar{S}_3$ и $\bar{S}_4$ заданы, то можно найти углы силового многоугольника, а затем вычислить и длины двух неизвестных его сторон, что и рекомендуется выполнить студенту самостоятельно.

Чтобы определить, будут ли стержни 3 и 4 растянуты или сжаты, перенесем векторы $\bar{S}_3$ и $\bar{S}_4$ с силового многоугольника на стержни EC и EK фермы; тогда силы $\bar{S}_3$ и $\bar{S}_4$ будут направлены к узлу E , а потому эти стержни сжаты.

Примечание. При аналитическом способе решения этой задачи заранее неизвестно, в какую сторону следует направлять реакции стержней. В таких случаях эти реакции можно направлять по соответствующим стержням в ту или другую сторону произвольно. Если в результате решения уравнений равновесия для этих реакций получим положительные значения, то реакции были направлены верно. Если же для какой-нибудь из этих неизвестных сил получим отрицательное значение, то выбранное направление реакции нужно изменить на противоположное. В дальнейшем условимся неизвестную реакцию стержня, приложенную к шарниру (к узлу), направлять по самому стержню от этого узла. Если, решая уравнения равновесия, получим для этой реакции положительное значение, то реакция направлена верно и, следовательно, стержень растянут. Если же для искомой реакции получим отрицательное значение, то это укажет на то, что в действительности реакция данного стержня имеет направление, противоположное принятому нами, т. е. она направлена к узлу и, следовательно, данный стержень сжат.

Таким образом, при указанном условии относительно направления реакции стержня, по знаку этой реакции можно определить, будет ли данный стержень растянут или сжат.

Пример 9. Груз весом $P = 60$ кН подвешен при помощи каната, перекинутого через небольшой блок A и идущего к лебедке D . Определить усилия в стержнях AC и BA крана. Углы,

определяющие направления стержней и каната, заданы на рис. 23.

Решение. Рассмотрим равновесие узла A крана, к которому приложены сила P , реакции стержней AC и AB и сила натяжения каната AD . Обозначим реакцию стержня AB через $\bar{S}_1$,

реакцию стержня AC через $\bar{S}_2$ и силу натяжения каната AD через T .

Реакции стержней $\bar{S}_1$ и $\bar{S}_2$ направлены вдоль этих стержней от узла A ; сила T направлена, очевидно, вдоль каната от A к D , так как канат растянут. Кроме того, $T = P$, так как при отсутствии трения в блоке натяжение каната, перекинутого через этот блок, во всех точках одинаково.

Так как узел A находится в равновесии под действием сил $\bar{S}_1$, $\bar{S}_2$, P , T , то можно составить два уравнения равновесия этой системы сходящихся сил.

Выберем оси координат, как указано на рис. 23, найдем проекцию каждой силы на эти оси и составим два уравнения равновесия, приравняв нулю сумму проекций всех сил на каждую из координатных осей:

$$-S_1 - S_2 \cos 60^\circ + T \cos 60^\circ = 0,$$

$$-S_2 \cos 30^\circ - P - T \cos 30^\circ = 0.$$

Из второго уравнения находим:

$$-S_2 = \frac{P}{\cos 30^\circ} + T = P \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \right) \approx 129,1 \text{ кН},$$

$$S_2 = -129,1 \text{ кН}.$$

Теперь из первого уравнения получаем:

$$\begin{aligned} S_1 = T \cos 60^\circ - S_2 \cos 60^\circ &= \frac{T - S_2}{2} = \frac{P + P \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \right)}{2} = \\ &= P \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = 94,6 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Так как полученное значение силы $\bar{S}_2$ отрицательно, то сила S_2 имеет направление, противоположное направлению, выбранному на рисунке, т. е. она направлена от C к A , и, следовательно, стержень AC сжат.

Задачу можно решить и геометрически, построив замкнутый многоугольник сил $\vec{T}$, $\vec{P}$, $\vec{S}_1$, $\vec{S}_2$ (рис. 24).

Направления сил $\vec{S}_1$ и $\vec{S}_2$ найдем после того, как обойдем периметр построенного силового многоугольника, причем направление этого обхода определяется направлением известных сил $\vec{P}$ и $\vec{T}$.

Измерив стороны cd и da силового многоугольника выбранной единицей масштаба, найдем величину искомых сил $\vec{S}_1$ и $\vec{S}_2$. Так как углы между силами $\vec{P}$, $\vec{T}$, $\vec{S}_1$, $\vec{S}_2$ заданы, то можно найти углы силового многоугольника, а затем вычислить и длины двух неизвестных его сторон. В самом деле, из построения силового многоугольника следует, что

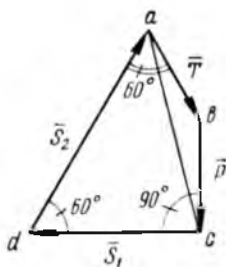


Рис. 24

$$\angle dcb = 90^\circ, \quad \angle cda = 60^\circ, \quad \angle bad = 60^\circ,$$

а потому

$$\angle abc = 360^\circ - (90^\circ + 60^\circ + 60^\circ) = 150^\circ.$$

Если соединим точки a и c , то треугольник abc будет равнобедренным, так как $P = T$, а потому

$$\angle bac = \angle bca = \frac{180^\circ - 150^\circ}{2} = 15^\circ.$$

Отсюда следует, что

$$\angle dca = 75^\circ, \quad \angle cad = 45^\circ$$

и

$$ac = 2ab \cos 15^\circ = 2P \cos 15^\circ.$$

Применяя теперь к треугольнику adc теорему синусов, получим:

$$\frac{ac}{\sin 60^\circ} = \frac{S_2}{\sin 75^\circ} = \frac{S_1}{\sin 45^\circ},$$

откуда

$$S_1 = \frac{2P \cos 15^\circ \sin 45^\circ}{\sin 60^\circ} \approx 94 \text{ кН},$$

$$S_2 = \frac{2P \cos 15^\circ \sin 75^\circ}{\sin 60^\circ} \approx 129 \text{ кН}.$$

Чтобы определить, будут ли стержни AB и AC сжаты или растянуты (рис. 23), перенесем векторы $\vec{S}_1$ и $\vec{S}_2$ с силового многоугольника на стержни AB и AC , тогда сила $\vec{S}_2$ будет направлена к узлу A , а сила $\vec{S}_1$ будет направлена от узла A , а потому стержень AC сжат, а стержень AB растянут.

Вторая группа

Задачи, где имеются связи, направление реакций которых неизвестно
(задачи 36—41, 43)

Пример 10. Жесткая рама закреплена в точке A при помощи неподвижного цилиндрического шарнира, а в точке B опирается катками на гладкую наклонную плоскость, составляющую с горизонтом угол $\alpha = 30^\circ$. На горизонтальном участке CD рама находится под действием равномерно

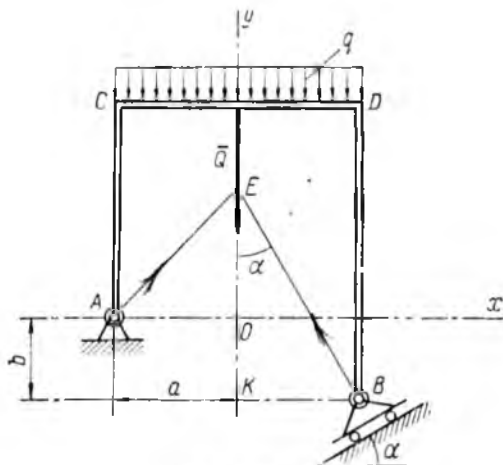


Рис. 25

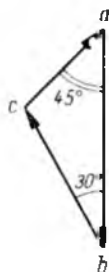


Рис. 26

распределенной вертикальной нагрузки интенсивности $q = 5 \text{ кН/м}$. Определить реакции опор в точках A и B , если $CD = 2a = 1,2 \text{ м}$ и $OK = b = a(\sqrt{3} - 1)$ (рис. 25).

Решение. Найдем сначала равнодействующую Q системы параллельных сил, приложенных к раме на участке CD , которая равна сумме слагаемых сил, т. е. $Q = q \cdot 2a = 6 \text{ кН}$, и приложена в середине отрезка CD . Реакцию опоры B обозначим через $\bar{R}_B$. Она направлена перпендикулярно к опорной плоскости катков. Реакция $\bar{R}_A$ неподвижного шарнира приложена к раме в точке A , но направление ее неизвестно. Для определения линии действия силы $\bar{R}_A$ воспользуемся теоремой о трех уравновешенных непараллельных силах. Так как рама находится в равновесии под действием трех сил $\bar{Q}$, $\bar{R}_B$ и $\bar{R}_A$, то линии действия этих сил пересекаются в одной точке.

Продолжив линии действия сил $\bar{Q}$ и $\bar{R}_B$, найдем точку E , через которую должна проходить сила $\bar{R}_A$, приложенная в точке A . Следовательно, прямая AE является линией действия силы $\bar{R}_A$. Теперь задача может быть решена двумя способами:

геометрическим (построением замкнутого силового треугольника) и аналитическим (методом проекций). Построим замкнутый треугольник abc сил $\overline{Q}$, $\overline{R}_B$ и $\overline{R}_A$, в котором $\overline{ab} = \overline{Q}$, а стороны $\overline{bc}$ и $\overline{ac}$ соответственно параллельны прямым BE и AE . Тогда $\overline{bc} = \overline{R}_B$ и $\overline{ca} = \overline{R}_A$ (рис. 26). Далее определим углы в построенном силовом треугольнике: $\angle abc = \alpha$. Из прямоугольного треугольника KEB находим:

$$BE = \frac{KB}{\sin 30^\circ} = 2a,$$

$$KE = BE \cos 30^\circ = a\sqrt{3},$$

а потому $OE = KE - KO = a\sqrt{3} - b$, или $OE = a\sqrt{3} - a(\sqrt{3} - 1) = a$. Отсюда $AO = OE$ и $\angle AEO = \angle cab = 45^\circ$. В треугольнике abc проведем прямую ce , перпендикулярную к ab , тогда $ae = ce = \frac{bc}{2}$, $be = bc \cos 30^\circ$, и $ab = ae + eb = bc \frac{(1 + \sqrt{3})}{2}$, $ac = ae\sqrt{2}$, а потому

$$R_B = \frac{2Q}{1 + \sqrt{3}} \approx 4,4 \text{ кН},$$

$$R_A = \frac{Q\sqrt{2}}{1 + \sqrt{3}} \approx 3,1 \text{ кН}.$$

Рассмотрим теперь аналитический способ решения. Начало координат выберем в точке O , ось y направим по прямой OE , а ось x — по прямой AO . Проектируя силы Q , $\overline{R}_A$ и $\overline{R}_B$ на оси x и y , получим следующие два уравнения равновесия:

$$1) \sum X = R_A \cos 45^\circ - R_B \cos 60^\circ = 0;$$

$$2) \sum Y = -Q + R_A \cos 45^\circ + R_B \cos 30^\circ = 0.$$

Из первого уравнения находим

$$R_A\sqrt{2} = R_B.$$

Тогда из второго уравнения имеем

$$Q = R_A \frac{\sqrt{2}}{2} + R_B \frac{\sqrt{3}}{2} = R_A (1 + \sqrt{3}) \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Отсюда

$$R_A = \frac{\sqrt{2}Q}{1 + \sqrt{3}}, \quad R_B = \frac{2Q}{1 + \sqrt{3}}.$$

В заключение можно сделать следующие выводы:

1. Если линии действия всех реакций связей, наложенных на данное тело, равновесие которого рассматривается в задаче, известны, то при геометрическом способе решения задачи нужно построить замкнутый силовой многоугольник, начав построение его с известных сил. Число неизвестных сил не должно быть больше двух. В случае, когда число всех приложенных к данному телу сил, включая и реакции связей, равно трем, задача сводится к построению силового треугольника по заданной стороне и заданным направлениям двух других его сторон.

После того как построен замкнутый силовой многоугольник, две неизвестные силы можно определить либо непосредственным измерением, либо вычислением.

При тригонометрическом решении силового треугольника обычно применяется теорема синусов.

Однако иногда бывает удобнее вместо теоремы синусов применить метод подобия, т. е., исходя из условия задачи, найти такой треугольник с известными сторонами, который был бы подобен силовому треугольнику. Тогда легко определить неизвестные стороны силового треугольника из условия пропорциональности соответственных сторон подобных треугольников.

2. При аналитическом способе решения нужно выбрать систему координатных осей, найти углы, образуемые каждой силой с этими осями, и определить проекции каждой силы на координатные оси; затем нужно составить два уравнения равновесия, приравнявая нулю сумму проекций всех сил на каждую из координатных осей, и решить эти уравнения.

Если в результате решения этих уравнений значение какой-либо неизвестной силы получилось отрицательным, то это значит, что эта сила имеет направление, противоположное тому, которое мы выбрали для нее при составлении уравнений равновесия. Следует иметь в виду, что если число всех сил, приложенных к данному телу, больше трех, то вычисление величины искомых в задаче сил тригонометрическим способом становится обычно громоздким. В этом случае предпочтительней аналитический способ решения.

3. Когда линия действия какой-либо реакции неизвестна, как, например, в случае неподвижного цилиндрического шарнира или подшипника, а число сил, приложенных к данному телу, равно трем, то, применяя теорему о пересечении в одной точке трех непараллельных уравновешенных сил, можно найти точку, через которую проходит эта неизвестная реакция. Так как точка приложения неизвестной реакции задана, то тем самым определяется ее линия действия. Далее задача решается или геометрическим, или аналитическим способом, как это было указано в рассмотренных выше примерах.

Равновесие системы сходящихся сил, не лежащих в одной плоскости
(задачи 212, 213, 215, 217)

В настоящем параграфе рассмотрим равновесие тела, к которому приложена система сходящихся сил, не лежащих в одной плоскости.

В общем случае задачи, относящиеся к равновесию неплоской системы сходящихся сил, проще решать аналитическим способом при помощи трех уравнений равновесия.

При этом необходимо обратить внимание на нахождение проекций сил на координатные оси.

Следует иметь в виду, что если имеем систему четырех уравновешенных сил, не лежащих в одной плоскости, то задачу часто можно решить проще, заменив две заданные силы их равнодействующей; так как три уравновешенные силы всегда лежат в одной плоскости, то задачу о равновесии четырех сходящихся сил, не лежащих в одной плоскости, можно свести, таким образом, к задаче о равновесии плоской системы трех сил, решение которой рассмотрено в предыдущем параграфе.

Пример 11. Груз P весом 10 кН поддерживается при помощи каната, перекинутого через блок O и идущего к лебедке E . Определить усилия в стержнях AO , OB , OC крана, если плоскость OAB горизонтальна, $AD = DB$, $OA = OB$, $\angle DCO = 60^\circ$, $\angle COE = 30^\circ$ и $\angle AOB = 90^\circ$ (рис. 27).

Решение. Рассмотрим равновесие шарнирного болта O , к которому приложены реакции стержней S_A , S_B , S_C и силы натяжения каната T_1 и T_2 . Так как натяжение каната во всех его точках одинаково, то $T_1 = T_2 = P$.

Так как стержни закреплены шарнирно и их весом мы пренебрегаем, то реакции стержней направлены вдоль этих стержней. Допустим, что стержни растянуты, т. е. реакции направ-

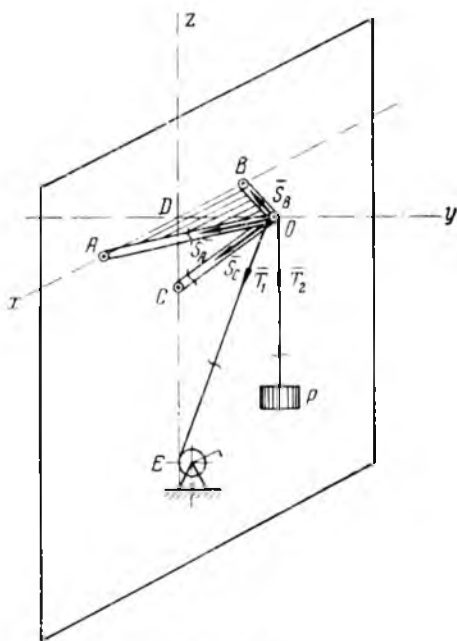


Рис. 27

лены от узла O . Силы $\bar{S}_A$, $\bar{S}_B$, $\bar{S}_C$, T_1 , T_2 не лежат в одной плоскости.

Составим три уравнения равновесия этих сил, для чего выберем сначала систему координатных осей x , y , z так, чтобы силы $\bar{S}_A$, $\bar{S}_B$, $\bar{S}_C$, T_1 , T_2 лежали в координатных плоскостях; ось Dz направим перпендикулярно к плоскости AOB ; начало координат выберем в точке D , а оси x и y направим соответственно по прямым AB и OD . Тогда силы $\bar{S}_A$ и $\bar{S}_B$ будут расположены в плоскости xDu , а силы $\bar{S}_C$, T_1 , T_2 — в вертикальной плоскости zDu . При таком выборе координатных осей легко определить углы каждой силы с координатными осями, а следовательно, и ее проекции на эти оси. Так как силы $\bar{S}_A$ и $\bar{S}_B$ лежат в плоскости xDu , то $S_{Az} = S_{Bz} = 0$. Найдем углы, составляемые этими силами с осями x и y . По условию задачи $AO = OB$, а потому треугольник AOB равнобедренный; кроме того, $AD = DB$ и $\angle AOB = 90^\circ$. Следовательно, прямая OD есть биссектриса угла AOB и $\angle DAO = \angle DBO = 45^\circ$.

Теперь находим проекции сил $\bar{S}_A$ и $\bar{S}_B$ на координатные оси x и y .

Проекции S_{Bx} , S_{Ay} , S_{By} , очевидно, отрицательны, так как силы $\bar{S}_A$ и $\bar{S}_B$ образуют острые углы с отрицательным направлением оси Dy , а сила $\bar{S}_B$ образует острый угол и с отрицательным направлением оси Dx :

$$\begin{aligned} S_{Ax} &= S_A \cos 45^\circ, & S_{Bx} &= -S_B \cos 45^\circ, \\ S_{Ay} &= -S_A \cos 45^\circ, & S_{By} &= -S_B \cos 45^\circ. \end{aligned}$$

Силы $\bar{S}_C$, T_1 , T_2 лежат в плоскости zDu , а потому они перпендикулярны к оси Dx и, следовательно,

$$T_{1x} = T_{2x} = S_{Cx} = 0.$$

Сила T_2 параллельна оси Dz , а потому $T_{2y} = 0$ и $T_{2z} = -P$. Углы между силой $\bar{S}_C$ и осями y и z заданы по условию задачи, а потому находим:

$$S_{Cz} = -S_C \cos 60^\circ, \quad S_{Cy} = -S_C \cos 30^\circ.$$

Остается найти углы силы T_1 с осями y и z . Для этого рассмотрим треугольник OCE . Угол DCO — внешний угол этого треугольника, а потому он равен сумме углов COE и CEO , т. е. $60^\circ = 30^\circ + \angle CEO$, откуда $\angle CEO = 30^\circ$. Из прямоугольного треугольника ODE находим, что $\angle DOE = 60^\circ$. Таким образом, T_1 образует острый угол в 30° с отрицательным направлением оси z и острый угол в 60° с отрицательным направлением оси y , а потому

$$T_{1y} = -T_1 \cos 60^\circ \quad \text{и} \quad T_{1z} = -T_1 \cos 30^\circ.$$

Указанные значения проекций можно расположить в виде табл. 2.

Составим теперь три уравнения равновесия, для чего достаточно приравнять нулю сумму проекций всех сил на каждую координатную ось:

$$1) S_A \cos 45^\circ - S_B \cos 45^\circ = 0;$$

$$2) -S_A \cos 45^\circ - S_B \cos 45^\circ - S_C \cos 30^\circ - T_1 \cos 60^\circ = 0;$$

$$3) -T_2 - T_1 \cos 30^\circ - S_C \cos 60^\circ = 0,$$

Таблица 2

	Силы				
	S_A	S_B	S_C	T_1	T_2
Острый угол силы с осью x	45°	45°	90°	90°	90°
Знак проекции силы на ось x	+	—			
Проекция силы на ось x	$+ S_A \cos 45^\circ$	$- S_B \cos 45^\circ$	0	0	0
Острый угол силы с осью y	45°	45°	30°	60°	90°
Знак проекции силы на ось y	—	—	—	—	
Проекция силы на ось y	$- S_A \cos 45^\circ$	$- S_B \cos 45^\circ$	$- S_C \cos 30^\circ$	$- T_1 \cos 60^\circ$	0
Острый угол силы с осью z	90°	90°	60°	30°	0°
Знак проекции силы на ось z			—	—	—
Проекция силы на ось z	0	0	$- S_C \cos 60^\circ$	$- T_1 \cos 30^\circ$	$- T_2$

или

$$S_A - S_B = 0,$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} S_A + \frac{\sqrt{2}}{2} S_B + \frac{\sqrt{3}}{2} S_C + \frac{1}{2} P = 0,$$

$$P + P \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{S_C}{2} = 0.$$

Решая эту систему трех уравнений относительно неизвестных S_A , S_B , S_C , получим:

$$-S_C = 2P + P\sqrt{3} = P(2 + \sqrt{3}) = 10(1 + \sqrt{3}),$$

или

$$S_C \approx -10 \cdot 3,73 = -37,3 \text{ кН}; \quad S_A = S_B$$

и

$$\begin{aligned} -\sqrt{2}S_A &= \frac{P}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}S_C = 5 - 5\sqrt{3}(2 + \sqrt{3}) = \\ &= -10\sqrt{3} - 10 \approx -27,3 \text{ кН}, \end{aligned}$$

или

$$S_A = S_B = \frac{27,3}{\sqrt{2}} \approx 19,3 \text{ кН}.$$

Так как мы получили отрицательное значение для силы S_C , то выбранное нами направление этой силы нужно изменить на противоположное; следовательно, стержень CO не растянут, как мы предполагали, а сжат.

Пример 12. Невесомые стержни AC , AB и AD соединены шарнирно между собой в точке A и с неподвижными опорами в точках C , D и B . К узлу A приложена сила $F = 8 \text{ кН}$, составляющая с координатными осями x и y углы α , $\beta = 60^\circ$. Определить реакции стержней AC , AB и AD , если $\delta = 60^\circ$, $\varphi = 45^\circ$ (рис. 28).

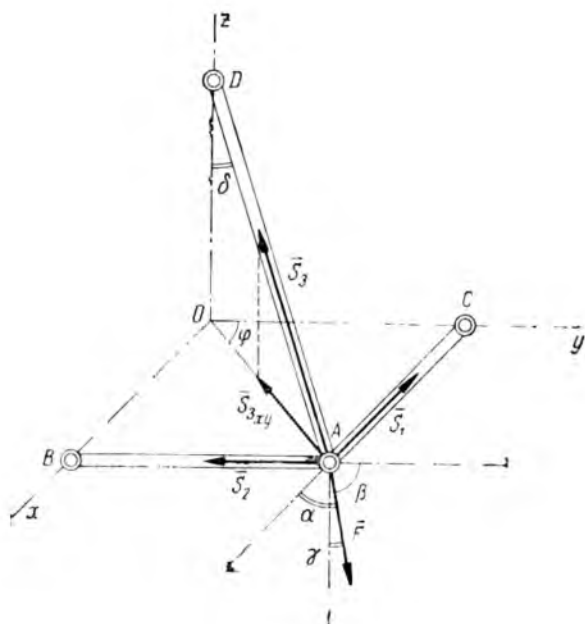


Рис. 28

Решение. Рассмотрим равновесие узла A , к которому приложены заданная сила $\vec{F}$ и реакции $\vec{S}_1, \vec{S}_2, \vec{S}_3$ стержней AC, AB и AD , направленные вдоль этих стержней. Допустим, что эти реакции направлены от узла A . Так как линии действия сил $\vec{F}, \vec{S}_1, \vec{S}_2, \vec{S}_3$ пересекаются в одной точке A , то имеем четыре уравновешенные *сходящиеся силы*, не лежащие в одной плоскости, а потому вычислим проекции этих сил на выбранные координатные оси и составим три уравнения равновесия.

Силы $\vec{S}_1$ и $\vec{S}_2$ параллельны соответственно осям x и y , а потому $S_{1y} = S_{1z} = 0, S_{2x} = S_{2z} = 0, S_{1x} = -S_1, S_{2y} = -S_2$. Так как углы α и β между силой $\vec{F}$ и положительными направлениями осей x и y заданы, то $F_x = F \cos 60^\circ = \frac{1}{2} F, F_y = F \cos 60^\circ = \frac{1}{2} F$.

Угол γ между силой $\vec{F}$ и осью z мы найдем из соотношения $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$, откуда $\cos^2 \gamma = 1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta = \frac{1}{2}$ и $\cos \gamma = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Так как сила $\vec{F}$ составляет острый угол с отрицательным направлением оси z , то $F_z = -\frac{\sqrt{2}}{2} F$. Угол δ между силой $\vec{S}_3$ и положительным направлением оси z задан, а потому $S_{3z} = S_3 \cos 60^\circ = \frac{1}{2} S_3$. Углы между силой $\vec{S}_3$ и осями x и y не заданы и их нельзя определить непосредственно из чертежа, а потому спроектируем эту силу на плоскость xOy и полученную проекцию, которую обозначим через S_{3xy} , спроектируем затем на оси x и y . Тогда $S_{3xy} = S_3 \sin \delta, S_{3x} = -S_3 \sin \delta \cos \varphi, S_{3y} = -S_3 \sin \delta \sin \varphi$. Приравнявая нулю сумму проекций всех сил на оси x, y и z , получим следующие три уравнения равновесия:

$$1) \sum X_i = -S_1 + \frac{F}{2} - S_3 \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} = 0;$$

$$2) \sum Y_i = -S_2 + \frac{F}{2} - S_3 \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} = 0;$$

$$3) \sum Z_i = -F \frac{\sqrt{2}}{2} + S_3 \frac{1}{2} = 0.$$

Из третьего уравнения находим: $S_3 = F \sqrt{2} \approx 11,28$ кн.

Из первых двух уравнений имеем:

$$S_1 = S_2 = \frac{F}{2} - S_3 \frac{\sqrt{6}}{4} = F \frac{(1 - \sqrt{3})}{2} = -2,92 \text{ кн.}$$

Так как мы получили отрицательные значения для сил S_1 и S_2 , то выбранные нами направления для этих сил следует изме-

нить на противоположные; следовательно, стержни AB и AC сжаты, а стержень AD растянут, так как реакция этого стержня, как мы и предполагали, направлена от узла A .

Г л а в а II

ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СИЛ

§ 1. ПРИВЕДЕНИЕ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ СИЛ К ДАННОМУ ЦЕНТРУ

Моментом силы $\vec{F}$ относительно данной точки O называется произведение величины силы на ее плечо, т. е. на длину перпендикуляра, опущенного из точки O на линию действия этой силы. Если сила $\vec{F}$ стремится вращать тело вокруг данной

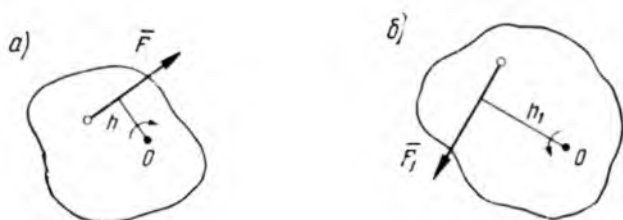


Рис. 29

точки O в направлении, обратном движению часовой стрелки, то условимся момент силы $\vec{F}$ относительно точки O считать положительным; если же сила стремится вращать тело вокруг точки O в направлении, совпадающем с направлением движения часовой стрелки, то момент силы относительно этой точки будем считать отрицательным. Следовательно,

$$\begin{aligned} m_O(\vec{F}) &= -Fh \text{ (рис. 29, а)} \\ m_O(\vec{F}_1) &= +F_1h_1 \text{ (рис. 29, б).} \end{aligned} \quad (13)$$

Если линия действия силы $\vec{F}$ проходит через данную точку O , то момент силы $\vec{F}$ относительно этой точки равен нулю.

Сложение сил, расположенных как угодно на плоскости, можно выполнить двумя способами:

- 1) последовательным сложением;
- 2) приведением данной системы сил к произвольно выбранному центру.

Первый способ становится громоздким при большом числе слагаемых сил и неприменим для пространственной системы сил, второй же способ является общим, более простым и удобным.

Если задана система сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n$, расположенных как угодно в одной плоскости, то, перенося все эти силы в про-

извольно выбранную в этой плоскости точку O , называемую центром приведения, получим приложенную в этом центре силу

$$\bar{R} = \sum \bar{F}_i \quad (14)$$

и пару с моментом

$$M_O = \sum m_O(\bar{F}_i). \quad (15)$$

Геометрическая сумма сил данной системы называется главным вектором этой системы сил.

Алгебраическая сумма моментов сил плоской системы относительно какой-нибудь точки O плоскости их действия называется главным моментом этой системы сил относительно этой точки O .

Главный момент изменяется с изменением центра приведения; зависимость главного момента от выбора центра приведения выражается следующей формулой:

$$M_{O_1} = M_O + m_O(\bar{R}), \quad (16)$$

где O и O_1 — два различных центра приведения.

Так как сила $\bar{R}$ и пара с моментом M_O , получающаяся в результате приведения данной плоской системы сил к центру O , лежат в одной плоскости, то их можно привести к одной силе $\bar{R}^* = \bar{R}$, приложенной в некоторой точке O^* . Эта сила является равнодействующей данной плоской системы сил.

Таким образом, если $R \neq 0$, $M_O \neq 0$, то система сил приводится к одной равнодействующей, не проходящей через центр приведения O . При этом момент равнодействующей относительно любой точки будет равен алгебраической сумме моментов всех данных сил относительно той же точки (теорема Вариньона).

Если начало координат выбрано в центре приведения и известны проекции всех сил на оси координат и координаты точек приложения этих сил, то момент равнодействующей находим по формуле

$$m_O(\bar{R}^*) = \sum (x_i Y_i - y_i X_i). \quad (17)$$

Если в результате приведения системы сил к данному центру окажется, что главный вектор этой системы равен нулю, а главный момент ее отличен от нуля, то данная система эквивалентна паре сил, причем главный момент системы равен моменту этой пары и не зависит в данном случае от выбора центра приведения. Если $M_O = 0$, а $R \neq 0$, то система приводится к равнодействующей, приложенной в центре приведения O .

Если $M_O = 0$ и $R = 0$, то система сил находится в равновесии. Все случаи, встречающиеся при сложении сил плоской системы, можно представить в виде табл. 3.

Таблица 3

$F \neq 0, M_O \neq 0$	Система приводится к равнодействующей силе $\bar{R}^* = \sum \bar{F}_i$, не проходящей через центр приведения O
$F \neq 0, M_O = 0$	Система приводится к равнодействующей $\bar{R} = \sum \bar{F}_i$, проходящей через центр приведения O
$F = 0, M_O \neq 0$	Система приводится к одной паре, момент которой равен $\sum m_O(\bar{F}_i)$ и не зависит от выбора точки O
$F = 0, M_O = 0$	Система сил находится в равновесии

Равновесие плоской системы сил рассмотрим в следующем параграфе, а теперь перейдем к решению задач на сложение сил плоской системы.

Пример 13. Дана плоская система четырех сил $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \bar{P}_4$; проекции X и Y этих сил на координатные оси, координаты x, y точек их приложения заданы в табл. 4.

Таблица 4

	Силы			
	$\bar{F}_1$	$\bar{F}_2$	$\bar{F}_3$	$\bar{F}_4$
x	1	-2	3	-4
y	4	1	-3	-3
x	2	-2	3	-1
y	1	-1	-3	-6

Привести эту систему к началу координат и затем найти линию действия равнодействующей.

Решение. Найдем проекции главного вектора заданной системы сил на координатные оси по формуле (14)

$$R_x = \sum X_i = 1 - 2 + 3 - 4 = -2,$$

$$R_y = \sum Y_i = 4 + 1 - 3 - 3 = -1.$$

Откуда

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{5}.$$

Главный момент M_O находим по формуле (15)

$$M_O = \sum m_O(\bar{F}_i) = \sum (xY - yX) = 8 - 2 - 9 + 12 - (1 + 2 - 9 + 24) = 9 - 18 = -9.$$

Пусть $A(x, y)$ — точка линии действия искомой равнодействующей $\bar{R}^*$. Тогда

$$m_O(\bar{R}^*) = xR_y^* - yR_x^*,$$

но

$$R_y^* = R_y^* = -1$$

и

$$R_x^* = R_x^* = -2,$$

а потому

$$m_O(\bar{R}^*) = -x + 2y = 2y - x.$$

С другой стороны, по теореме Вариньона имеем:

$$m_O(\bar{R}^*) = \sum m_O(\bar{F}_i) = -9.$$

Следовательно,

$$2y - x = 9,$$

или

$$x - 2y + 9 = 0.$$

Это и есть уравнение линии действия равнодействующей.

Пример 14. Найти равнодействующую четырех сил, действующих по сторонам правильного шестиугольника, направление которых указано на рис. 30, если $P_1 = P_3 = 2P$ и $P_2 = P_4 = P$.

Решение. Выберем за центр приведения центр O шестиугольника и найдем главный вектор $\bar{R}$ и главный момент M_O данной системы сил относительно центра O . Так как $\bar{P}_1 = -\bar{P}_3$ и $\bar{P}_2 = \bar{P}_4$, то главный вектор $\bar{R}$ равен $2\bar{P}_4$, а главный момент

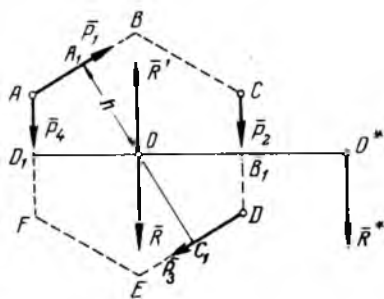


Рис. 30

$$M_O = m_O(\bar{P}_1) + m_O(\bar{P}_2) + m_O(\bar{P}_3) + m_O(\bar{P}_4).$$

Для того чтобы найти момент силы $\bar{P}_1$ относительно точки O , опустим перпендикуляр OA_1 из точки O на линию действия этой силы. Так как сила $\bar{P}_1$ стремится вращать шестиугольник вокруг точки O по часовой стрелке, то

$$m_O(\bar{P}_1) = -P_1 OA_1 = -P_1 h,$$

где h — длина апофемы OA_1 правильного шестиугольника. Аналогично вычислим моменты остальных сил относительно точки O :

$$m_O(\bar{P}_2) = -P_2 OB_1 = -P_2 h,$$

$$m_O(\bar{P}_3) = -P_3 h,$$

$$m_O(\bar{P}_4) = P_4 OD_1 = P_4 h$$

и

$$M_O = -P_1 h - P_2 h - P_3 h + P_4 h = -(P_1 + P_3) h = -4Ph.$$

Итак, данная система сил эквивалентна силе $\bar{R} = 2P_4$, приложенной в точке O , и паре с моментом $M_O = -4Ph$.

Одну из сил $\bar{R}'$ этой пары выберем равной и противоположно направленной силе $\bar{R}$ и приложенной в точке O . Тогда вторая сила пары $\bar{R}^*$ будет приложена в точке O^* , причем $OO^* \perp \bar{R}$. Так как

$$M_O = m(\bar{R}^*, \bar{R}),$$

то

$$OO^* = \frac{|M_O|}{R} = \frac{4Ph}{2P} = 2h.$$

Силы $\bar{R}$ и $\bar{R}'$ эквивалентны нулю, а потому данная система сил приводится к одной силе $\bar{R}^*$, которая, следовательно, и есть равнодействующая этой системы сил.

§ 2. РАВНОВЕСИЕ РЫЧАГА

Рычагом называется твердое тело, которое может вращаться вокруг неподвижной оси под действием сил, лежащих в одной плоскости, перпендикулярной к этой оси. Точка пересечения плоскости, в которой лежат все силы, приложенные к рычагу, с осью вращения называется *точкой опоры рычага*.

Условием равновесия рычага является равенство нулю алгебраической суммы моментов всех приложенных к нему сил относительно точки O — опоры рычага, т. е.

$$\sum m_O(\bar{F}_i) = 0. \quad (18)$$

Задачи этого параграфа можно разделить на следующие две группы:

- 1) задачи, относящиеся к равновесию рычага;
- 2) задачи, относящиеся к равновесию твердого тела при возможном его опрокидывании.

Первая группа

Равновесие рычага (задачи 81—84, 112, 113)

Пример 15. Буровая штанга AB весом $Q = 20$ кН укреплена при помощи каната BCD , перекинутого через шкив C и накрученного на барабан лебедки D диаметром 25 см. С барабаном жестко соединен рычаг OE длиной 180 см и весом $G = 1$ кН, на конце которого укреплен противовес E .

Найти вес P этого противовеса (рис. 31).

Решение. Так как натяжение каната во всех его точках одинаково, то реакция каната T , приложенная к барабану лебедки, равна весу штанги Q .

Рычаг OE с неподвижной точкой O находится в равновесии; поэтому алгебраическая сумма моментов всех приложенных к нему сил относительно этой точки O равна нулю, т. е.

$$\sum m_O(\vec{F}_i) = 0,$$

или

$$+ P \cdot OE + G \frac{OE}{2} - Tr = 0,$$

откуда

$$P = -G \frac{OE}{2OE} + T \frac{r}{OE} = -\frac{G}{2} + T \frac{r}{OE},$$

или

$$P = 0.89 \text{ кН.}$$

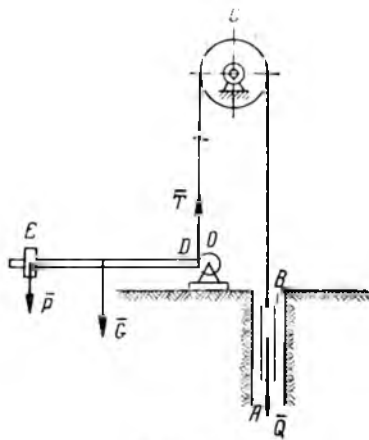


Рис. 31

Пример 16. Однородная балка AB весом $G = 6$ кН, закрепленная в точке A шарнирно, наклонена к горизонтальной оси

Ax под углом $\alpha = 30^\circ$ и удерживается в равновесии при помощи прикрепленной к ней в точке B веревки BDE перекинутой через неподвижный блок D , к свободному концу которой подвешен груз E весом P . Балка AB находится под действием перпендикулярной к ней равномерно распределенной нагрузки интенсивности $q = 2$ кН/м и вертикальной силы $F = 1$ кН, приложенной в точке C , причем $\frac{AC}{CB} = \frac{1}{3}$. Веревка BD составляет с вертикалью угол $\beta = 30^\circ$. Определить вес груза P если $AB = 3$ м (рис. 32).

Решение. Равнодействующая системы равных параллельных сил, приложенная в середине C , балки AB , равна $Q = qAB = 2 \cdot 3 = 6$ кН. Так как натяжение веревки во всех ее

точках одинаково, то реакция веревки $\bar{T}$, приложенная к балке в точке B , равна по модулю весу груза P . Таким образом, рычаг AB с неподвижной точкой A находится в равновесии под действием четырех сил $\bar{F}$, $\bar{Q}$, $\bar{G}$ и $\bar{T}$; поэтому алгебраическая сумма моментов этих сил относительно точки опоры A равна нулю, т. е.

$$m_A(\bar{F}) + m_A(\bar{Q}) + m_A(\bar{G}) + m_A(\bar{T}) = 0. \quad (a)$$

Так как каждая из сил $\bar{F}$, $\bar{Q}$, $\bar{G}$ вращает балку AB вокруг неподвижной точки A по часовой стрелке, а сила $\bar{T}$ вращает эту балку вокруг точки A против часовой стрелки, то $m_A(\bar{T}) > 0$, а моменты остальных сил относительно точки A отрицательны.

Кроме того, $AB \perp \bar{Q}$, а потому

$$m_A(\bar{Q}) = -Q \frac{AB}{2}.$$

Чтобы вычислить моменты остальных сил относительно точки A , опустим из этой точки на линию действия каждой силы перпендикуляры, тогда

$$m_A(\bar{F}) = -F \cdot AK,$$

$$m_A(\bar{G}) = -G \cdot AL,$$

$$m_A(\bar{T}) = T \cdot AA_1.$$

Из треугольников ACK , AC_1L и AA_1B находим:

$$AK = AC \cos \alpha \quad AL = \frac{AB}{2} \cos \alpha \quad \text{и} \quad AA_1 = AB \sin \gamma,$$

причем

$$AC = \frac{AB}{4}, \quad \gamma = 90^\circ - \alpha - \beta,$$

а потому

$$AA_1 = AB \sin [90^\circ - (\alpha + \beta)] = AB \cos (\alpha + \beta).$$

Подставив эти значения в уравнение (a), имеем:

$$-F \frac{1}{4} AB \cos \alpha - Q \frac{AB}{2} - G \frac{AB}{2} \cos \alpha + TAB \cos (\alpha + \beta) = 0,$$

откуда

$$T = \frac{\frac{1}{4} F \cos \alpha + \frac{Q}{2} + \frac{G}{2} \cos \alpha}{\cos (\alpha + \beta)},$$

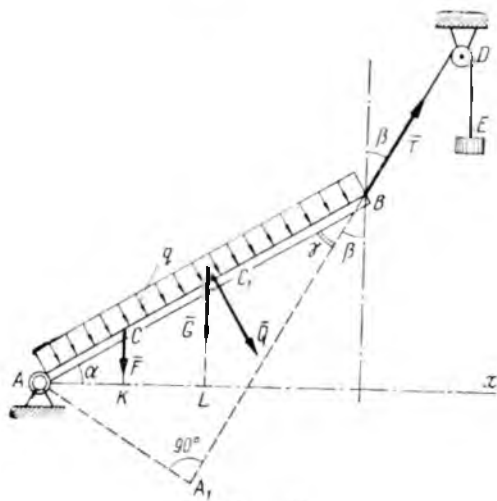


Рис. 32

или

$$T = \left(\frac{F}{2} + G \right) \frac{\sqrt{3}}{2} + Q = (0,5 + 6) \frac{\sqrt{3}}{2} + 6 \approx 11,63 \text{ кН.}$$

Вторая группа

Равновесие тела, которое может опрокидываться
(задачи 94—97)

Пример 17. Подъемный кран весом $Q = 20 \text{ кН}$ имеет вылет $l = 5 \text{ м}$, ширина его основания $AB = a = 4 \text{ м}$. Вес противовеса, имеющего форму куба с ребром $b = 2 \text{ м}$, равен $P = 5 \text{ кН}$. Центр тяжести крана находится на вертикали, проходящей через середину отрезка AB . Найти наибольший вес G груза, поднимаемого краном без опрокидывания вокруг точки A (рис. 33).

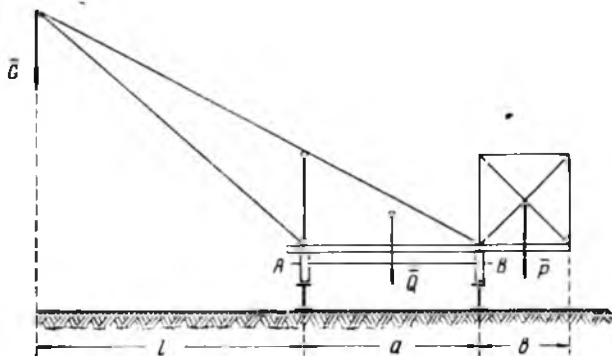


Рис. 33

Решение. Так как колесо B в начальный момент опрокидывания отделяется от опорной плоскости и все давление переносится на опору A , то реакция опоры B становится в этот момент равной нулю, и мы имеем, следовательно, тело с одной неподвижной опорой A , вокруг которой оно может вращаться. Применяя поэтому условие равновесия рычага, получим:

$$m_A(\bar{G}) + m_A(\bar{Q}) + m_A(P) = 0,$$

или

$$Gl - Q \frac{a}{2} - P \left(\frac{b}{2} + a \right) = 0,$$

откуда

$$G = \frac{P \left(\frac{b}{2} + a \right) + Q \frac{a}{2}}{l} = \frac{5 \cdot 5 + 20 \cdot 2}{5} = 13 \text{ кН.}$$

§ 3. РАВНОВЕСИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ СИЛ

Для равновесия плоской системы сил, приложенных к твердому телу и не пересекающихся в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы главный вектор $\bar{R}$ этих сил и их главный момент M_O относительно произвольной точки O , лежащей в плоскости действия этих сил, были равны нулю, т. е.

$$\left. \begin{aligned} \sum \bar{F}_i &= 0, \\ \sum m_O(\bar{F}_i) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

В координатной форме эти условия выражаются следующими тремя уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \sum F_{ix} &= 0, \\ \sum F_{iy} &= 0, \\ \sum m_O(\bar{F}_i) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Условия равновесия плоской системы сил, расположенных как угодно на плоскости, можно выразить еще в двух других видах.

1. Алгебраическая сумма моментов сил относительно трех произвольных точек A , B , C , не лежащих на одной прямой, равна нулю, т. е.

$$\left. \begin{aligned} \sum m_A(\bar{F}_i) &= 0, \\ \sum m_B(\bar{F}_i) &= 0, \\ \sum m_C(\bar{F}_i) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

2. Алгебраическая сумма моментов всех сил относительно двух произвольных точек A и B равна нулю и сумма проекций этих сил на какую-либо ось, не перпендикулярную к прямой, соединяющей точки A и B , равна нулю, т. е.

$$\left. \begin{aligned} \sum m_A(\bar{F}_i) &= 0, \\ \sum m_B(\bar{F}_i) &= 0, \\ \sum F_{ix} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

В частном случае, если все силы плоской системы параллельны, то условия равновесия (20) таких сил выражаются не тремя, а двумя уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \sum F_{ix} &= 0, \\ \sum m_O(\bar{F}_i) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

причем ось Ox параллельна данным силам.

Условия равновесия плоской системы параллельных сил можно выразить и в другой форме:

$$\left. \begin{aligned} \sum m_A(\bar{F}_i) &= 0, \\ \sum m_B(\bar{F}_i) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

причем прямая AB не параллельна данным силам.

Задачи на равновесие плоской системы сил можно разбить на два основных типа, а именно:

- 1) задачи на равновесие плоской системы параллельных сил;
- 2) задачи на равновесие плоской системы сил, расположенных как угодно.

Задачи второго типа можно еще классифицировать по характеру связей, наложенных на рассматриваемое тело, подразделяя их на следующие две группы:

- а) задачи, в которых линия действия реакций всех связей известны;
- б) задачи, в которых линия действия реакции одной из связей неизвестна.

Общие указания, сделанные в § 6, гл. I, о направлении реакций связей и решении задач на равновесие несвободного твердого тела, остаются такими же и при решении задач этого параграфа.

Чтобы задача была статически определима, число неизвестных реакций должно быть не больше трех, так как при равновесии твердого тела под действием плоской системы сил в общем случае можно составить три уравнения равновесия [уравнения (20) или (21), или (22)].

При составлении уравнений равновесия за центр моментов следует выбирать такую точку, через которую проходят линии действия двух неизвестных сил, тогда в уравнение моментов относительно этой точки войдет только одна неизвестная сила и ее легко будет определить из этого уравнения.

Если данное тело находится в равновесии под действием плоской системы параллельных сил, то число неизвестных реакций не должно быть больше двух, так как в этом случае мы имеем только два уравнения равновесия [уравнения (23) или (24)].

Задачи типа I

Равновесие плоской системы параллельных сил (задачи 89—94)

Пример 18. Однородная горизонтальная балка $AB = 1,5$ м весом $P = 1500$ н, заложенная между двумя опорами C и D , находится в равновесии под действием пары сил $(\bar{F}_1, \bar{F}_2)$ с моментом $m = 1000$ н·м. К концу B балки прикреплена веревка, переброшенная через блоки K и E , другой конец которой за-

креплен неподвижно в точке L . К центру подвижного блока E подвешен груз весом $Q = 400 \text{ н}$. Определить реакции опор C и D , если $AC = 25 \text{ см}$, $CD = 30 \text{ см}$; трением на блоках и в опорах пренебречь (рис. 34).

Решение. Так как опоры C и D относятся к типу связей, указанному на рис. 16 (2), то реакции этих опор $\bar{R}_C$ и $\bar{R}_D$ направлены перпендикулярно к балке. Как видно из рисунка, силы, приложенные к балке, стремятся повернуть балку так,

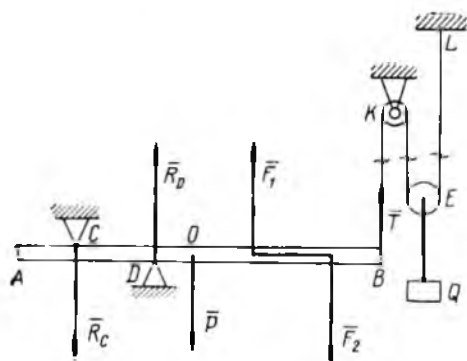


Рис. 34

что давление балки на опору C направлено по вертикали вверх, поэтому реакция $\bar{R}_C$ направлена по вертикали вниз, давление балки на опору D направлено по вертикали вниз, поэтому реакция $\bar{R}_D$ опоры D направлена по вертикали вверх. Реакция веревки T , приложенная к балке в точке B , направлена вдоль веревки, т. е. по вертикали вверх. Так как натяжение веревки во всех ее точ-

ках одинаково, то сила T равна натяжению части KE веревки, которое равно, очевидно, $\frac{Q}{2}$. Следовательно, $T = \frac{Q}{2}$.

Таким образом, балка AB находится в равновесии под действием параллельных сил P , T , $\bar{R}_C$, $\bar{R}_D$, F_1 , F_2 , причем $F_2 = -F_1$, а потому составим два уравнения равновесия (23) для этой балки. Приравняв нулю алгебраическую сумму сил, приложенных к балке AB , и сумму их моментов относительно точки C , получим два уравнения равновесия для определения двух искомых реакций $\bar{R}_C$ и $\bar{R}_D$. При составлении этих уравнений необходимо учесть, что сумма моментов сил пары относительно любой точки не зависит от положения этой точки и равна моменту этой пары, поэтому

$$m_C(\bar{F}_1) + m_C(\bar{F}_2) = m(\bar{F}_1, \bar{F}_2) = -1000 \text{ н} \cdot \text{м}.$$

Этот момент берем со знаком минус, потому что пара стремится повернуть балку по часовой стрелке. Алгебраическая сумма сил пары равна нулю, следовательно, имеем:

$$1) R_D - R_C - P + T = 0,$$

$$2) m_C(P) + m_C(T) + m_C(\bar{R}_D) + m(F_1, l_2) = 0.$$

Найдем теперь моменты сил P , T , R_D относительно точки C :

$$m_C(\bar{R}_D) = R_D CD = 0,3 R_D$$

$$m_C(\bar{T}) = TCB = T1,25 = 250 \text{ н} \cdot \text{м},$$

$$m_C(\bar{P}) = -P \cdot CO = -P \left(\frac{AB}{2} - AC \right) = -P \cdot 0,5 = -750 \text{ н} \cdot \text{м}.$$

Так как силы $\bar{T}$ и $\bar{R}_D$ стремятся повернуть балку вокруг точки C против часовой стрелки, то моменты этих сил относительно точки C положительны, а момент силы $\bar{P}$ относительно точки C отрицателен, так как сила $\bar{P}$ стремится повернуть балку вокруг точки C по часовой стрелке. Подставив все заданные и найденные значения сил и их моментов в уравнения равновесия, получим:

$$1) R_D - R_C = 1300;$$

$$2) 0,3 R_D - 750 + 250 - 1000 = 0.$$

Из второго уравнения находим

$$R_D = \frac{1500}{0,3} = 5000 \text{ н},$$

Подставив значение R_D в первое уравнение, получим

$$R_C = R_D - 1300 = 3700 \text{ н}.$$

Задачи типа II

Равновесие плоской системы сил в общем случае

Первая группа

Задачи, в которых линии действия реакций всех связей известны
(задачи 118—125)

Пример 19. Однородная горизонтальная балка AB весом $P = 120 \text{ н}$ концом B опирается при помощи катков на гладкую наклонную плоскость с углом наклона $\alpha = 30^\circ$, а в точках A и C балка соединена шарнирно с невесомыми стержнями AK и CL , шарнирно закрепленными в неподвижных точках K и L . В точке D под углом $\beta = 45^\circ$ к балке приложена сила $F = 60 \text{ н}$. Определить реакции в точках A , C и B , если $AD = 5DB$, $BC = 2CA$, стержень CL вертикален, а стержень AK составляет с осью балки угол $\gamma = 60^\circ$ (рис. 35).

Решение. Реакция $\bar{R}_B$ в точке B направлена перпендикулярно к опорной плоскости катков, а реакции $\bar{R}_A$ и $\bar{R}_C$ невесомых стержней AK и CL направлены вдоль этих стержней [см. рис. 16 (5 и 7)]. Так как балка находится в равновесии

под действием плоской системы непараллельных сил ($\vec{F}$, $\vec{P}$, $\vec{R}_A$, $\vec{R}_C$, $\vec{R}_B$), то нужно составить три уравнения равновесия, приравняв нулю суммы проекций на оси Cx и Cy всех сил, приложенных к балке, и сумму моментов этих сил относительно

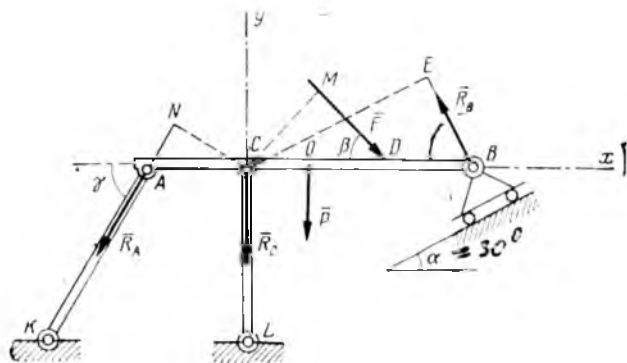


Рис. 35

точки C . Вычисления моментов всех сил относительно точки C и проекций этих сил на оси Cx и Cy расположим в табл. 5.

Составим следующие три уравнения равновесия:

$$\left. \begin{aligned} 1) & -R_A \cos 60^\circ - R_B \cos 60^\circ + F \cos 45^\circ = 0; \\ 2) & -R_A \cos 30^\circ - P - R_C - F \cos 45^\circ + R_B \cos 30^\circ = 0; \\ 3) & R_A \frac{AB \sqrt{3}}{6} - P \frac{AB}{6} - F \frac{AB \sqrt{2}}{4} + R_B \frac{AB \sqrt{3}}{3} = 0. \end{aligned} \right\}$$

Из первого и третьего уравнений имеем:

$$\begin{aligned} R_A + R_B &= F \sqrt{2}; \\ (R_A + 2R_B) \frac{\sqrt{3}}{6} &= P \frac{1}{6} + \frac{\sqrt{2}}{4} F. \end{aligned}$$

Решая последние два уравнения совместно, находим R_B и R_A :

$$R_B = \frac{P}{\sqrt{3}} - F \sqrt{2} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \approx 57,8 \text{ н},$$

$$R_A = F \sqrt{2} - R_B \approx 26,8 \text{ н}.$$

Подставив найденные значения R_A и R_B во второе уравнение равновесия, найдем:

$$\begin{aligned} R_C &= -P - F \frac{\sqrt{2}}{2} + (R_B - R_A) \frac{\sqrt{3}}{2} = \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2} F (3\sqrt{3} - 2) \approx -135,5 \text{ н}. \end{aligned}$$

Таблица 5

Сила	X	Y	Плечо силы относительно точки C	Знак момента относительно точки C	m_C
$\bar{P}$	0	$-P$	$CO = \frac{AB}{2} - \frac{AB}{3} = -\frac{AB}{6}$	-	$-P \frac{AB}{6}$
$\bar{F}$	$F \cos 45^\circ = F \frac{\sqrt{2}}{2}$	$-F \cos 45^\circ = -F \frac{\sqrt{2}}{2}$	$CM = CD \sin 45^\circ = (CB - BD) \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \times AB$	-	$-F \frac{\sqrt{2}}{4} AB$
$\bar{R}_A$	$-R_A \cos 60^\circ = -\frac{R_A}{2}$	$R_A \cos 30^\circ = R_A \frac{\sqrt{3}}{2}$	$CN = CA \sin 60^\circ = \frac{AB}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = AB \frac{\sqrt{3}}{6}$	+	$R_A \frac{\sqrt{3}}{6} AB$
$\bar{R}_B$	$-R_B \cos 60^\circ = -\frac{R_B}{2}$	$R_B \cos 30^\circ = R_B \frac{\sqrt{3}}{2}$	$CE = CB \sin 60^\circ = \frac{2}{3} AB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} AB$	+	$R_B \frac{\sqrt{3}}{3} AB$
$\bar{R}_C$	0	$-R_C$	0		0

Знак минус, полученный для значения силы $\bar{R}_C$, указывает, что эта сила имеет направление, противоположное принятому на рисунке, т. е. стержень CL не растянут, а сжат.

Вторая группа

Задачи, в которых линия действия реакции одной из связей неизвестна (задачи 129—135)

Пример 20. Однородная балка AB весом $P = 40$ н концом A закреплена шарнирно, а промежуточной точкой D опирается свободно на гладкий неподвижный цилиндр. К концу B балки прикреплена веревка, перекинутая через неподвижный блок и несущая на свободном конце груз весом $Q_1 = 10$ н. В точке C к балке подвешен груз весом $Q_2 = 20$ н. Определить реакции опор R_A и R_D в точках A и D , если $\angle KBA = \angle BAK = 30^\circ$, $\frac{AC}{CB} = \frac{1}{2}$ и $\frac{AD}{DB} = 2$ (рис. 36).

Решение. Реакция $\bar{R}_D$ гладкой цилиндрической неподвижной поверхности направлена по общей нормали к поверхности цилиндра и балки, а реакция веревки $\bar{T}$ направлена вдоль веревки. Так как натяжение веревки во всех ее точках одинаково, то $T = Q_1 = 10$ н. Реакция неподвижного цилиндрического шарнира приложена в точке A , а модуль и направление этой реакции неизвестны. Поэтому выберем ось координат Ax и Ay , направленные, как указано на рис. 36, и разложим реакцию $\bar{R}_A$ на две составляющие $\bar{X}_A$ и $\bar{Y}_A$, направленные по этим осям. Следовательно, балка AB находится в равновесии под действием плоской системы непараллельных сил $\bar{P}$, $\bar{T}$, $\bar{X}_A$, $\bar{Y}_A$, $\bar{R}_D$, $\bar{Q}_2$, а потому составим три уравнения равновесия для этой системы сил. Эти уравнения упрощаются, если их составить в форме (22). При этом за центры моментов следует выбрать такие точки, в которых пересекаются по две неизвестные силы, т. е. точку A и точку E пересечения линий действия сил $\bar{Y}_A$ и $\bar{R}_D$.

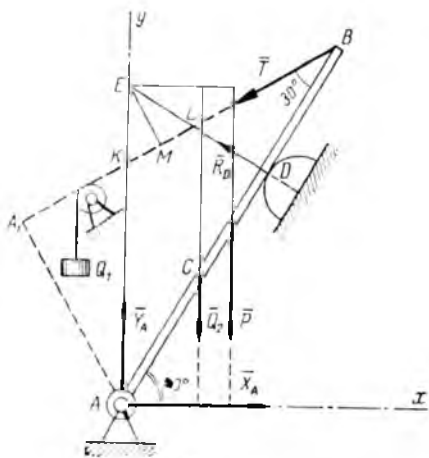


Рис. 36

Составим теперь два уравнения моментов относительно точек A и E и уравнение проекций на ось Ay , не перпендикулярную к прямой AE :

$$1) \sum Y = Y_A + R_D \cos 60^\circ - T \cos 60^\circ - Q_2 - P = 0;$$

$$2) \sum m_A = -Q_2 \frac{AB}{3} \cos 60^\circ - P \frac{AB}{2} \cos 60^\circ + R_D AD + T \cdot AA_1 = 0;$$

$$3) \sum m_E = X_A AE - T \cdot EM - Q_2 \frac{AB}{3} \cos 60^\circ - P \frac{AB}{2} \cos 60^\circ = 0.$$

Отрезки AA_1 , AE и EM найдем из треугольников AA_1B , AED и EMK :

$$AA_1 = AB \sin 30^\circ = \frac{AB}{2},$$

$$EA = \frac{AD}{\cos 30^\circ} = \frac{2 \cdot 2AB}{3 \sqrt{3}}.$$

Так как $\angle EKL = \angle KLE = 60^\circ$, то

$$EM = KE \cos 30^\circ,$$

а $KE = LE = LK$.

Из равнобедренного треугольника AKB находим:

$$\frac{AB}{2} = AK \cos 30^\circ,$$

откуда

$$AK = \frac{AB}{\sqrt{3}} \text{ и } KE = \frac{4}{3 \sqrt{3}} AB = \frac{AB}{\sqrt{3}} = \frac{AB}{3 \sqrt{3}}.$$

Следовательно,

$$EM = \frac{AB}{3 \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AB}{6}.$$

Подставив значения заданных сил и вычисленных плеч, получим:

$$1) Y_A + \frac{R_D}{2} = 65;$$

$$2) \frac{2}{3} R_D = -10 \cdot \frac{1}{2} + 20 \cdot \frac{1}{6} + 40 \cdot \frac{1}{4};$$

$$3) X_A \frac{4}{3 \sqrt{3}} - Q_1 \cdot \frac{1}{6} - 20 \cdot \frac{1}{6} - 40 \cdot \frac{1}{4} = 0.$$

Из третьего уравнения находим X_A :

$$X_A = \left(10 + \frac{10}{3} + \frac{5}{3} \right) \cdot \frac{3 \sqrt{3}}{4} = 45 \frac{\sqrt{3}}{4} \approx 19,46 \text{ н.}$$

Из второго уравнения находим R_D :

$$R_D = \left(10 + \frac{10}{3} - 5 \right) \cdot \frac{3}{2} = 12,5 \text{ н.}$$

Найденные значения X_A и R_D подставим в первое уравнение и найдем Y_A :

$$Y_A = 65 - \frac{R_D}{2} = 58,75 \text{ н.}$$

Модуль полной реакции R_A и ее угол φ с осью Ax определим по формулам:

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{(58,75)^2 + (19,46)^2} \approx 61,64 \text{ н,}$$

$$\varphi = \arctg \frac{Y_A}{X_A},$$

или

$$\varphi = \arctg 3,01,$$

т. е.

$$\varphi = 72^\circ.$$

Пример 21. Однородный стержень AB весом $Q = 20 \text{ н}$ в точке A закреплен шарнирно, а в точке C свободно опирается на опору C . На стержень AB действует пара с моментом $M = 5 \text{ н} \cdot \text{м}$, а к

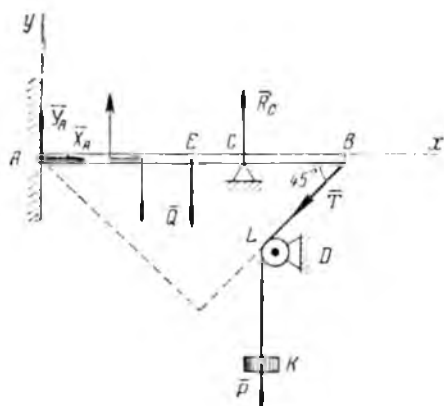


Рис. 37

концу стержня B привязана веревка, перекинутая через блок D , на конце которой висит груз весом $P = 51,2 \text{ н}$. Определить реакции шарнира A и опоры C , если $AC = 2BC = 40 \text{ см}$, а $\angle ABL = 45^\circ$ (рис. 37).

Решение. Реакция $\bar{R}_C$ опоры C направлена перпендикулярно к стержню AB . Направление реакции $\bar{R}_A$ шарнира A неизвестно; поэтому разлагаем эту реакцию на две составляющие $\bar{X}_A$ и $\bar{Y}_A$, направленные по осям координат, причем ось Ax на-

правлена вдоль стержня AB , а ось Ay перпендикулярна к нему. Реакция веревки BD приложена к стержню в точке B и направлена вдоль веревки. Так как натяжение веревки BLK во всех ее точках одинаково, то реакция веревки T равна по величине весу груза P , т. е. $T = P$.

Составим три уравнения равновесия, приравнявая нулю сумму проекций всех сил на координатные оси и сумму моментов этих сил относительно начала координат:

$$1) X_A - T \cos 45^\circ = 0;$$

$$2) Y_A + R_C - Q - T \cos 45^\circ = 0;$$

$$3) R_C \cdot AC - T \cdot AB \cos 45^\circ - Q \cdot AE - M = 0,$$

Из первого уравнения находим:

$$X_A = T \cdot \cos 45^\circ = P \frac{\sqrt{2}}{2} = 5 \text{ н.}$$

Из уравнения (3), в котором

$$AC = 40, \quad AB = AC + CB = 60$$

и

$$AE = \frac{AB}{2} = 30,$$

находим:

$$R_C = \frac{60T \cos 45^\circ + 30Q + M}{40} = \frac{3}{4} \sqrt{2} P + \frac{3}{4} Q + \frac{M}{40} = 35 \text{ н.}$$

Подставив значение R_C во второе уравнение, получим:

$$Y_A = Q + P \cos 45^\circ - R_C = Q + P \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{4} \sqrt{2} P - \frac{3}{4} Q - \frac{M}{40},$$

или

$$Y_A = \frac{Q}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} P - \frac{M}{40} = -10 \text{ н.}$$

Пример 22. Вертикальная ось которого равен $P = 12 \text{ кН}$, может и подшипнике B . Груз весом $Q = 8,4 \text{ кН}$ поднимается при помощи веревки, перекинутой через блок E и идущей к лебедке D , закрепленной на оси крана, как указано на рис. 38. Определить реакции подшипника B и подпятника A , если центр тяжести C отстоит от оси вращения на расстоянии, равном $0,9 \text{ м}$, $AB = 12 \text{ м}$ и $KE = 4 \text{ м}$ (рис. 38).

Решение. Реакция $\bar{R}_B$ подшипника B перпендикулярна к оси вращения AB , а реакция $\bar{R}_A$ подпятника складывается из двух составляющих $\bar{X}_A$ и $\bar{Y}_A$, где $\bar{X}_A$ — реакция стенок, а $\bar{Y}_A$ — реакция дна подпятника [см. рис. 16 (8)].

Составим три уравнения равновесия для сил $\bar{X}_A$, $\bar{Y}_A$, $\bar{R}_B$, $\bar{P}$, $\bar{Q}$, приложенных к крану, приравняв нулю суммы проекций этих сил на оси x и y и сумму их моментов относительно

AB подъемного крана, вес вращается в подпятнике A

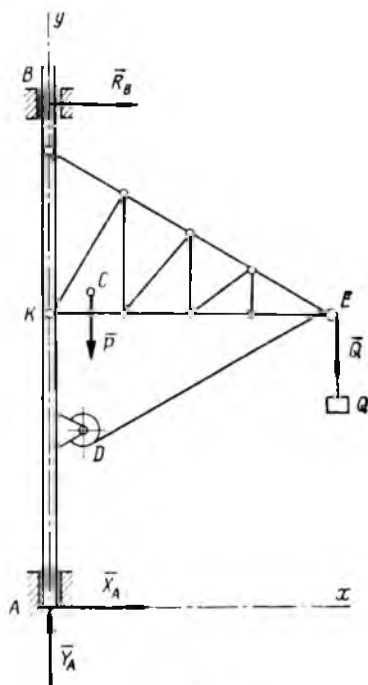


Рис. 38

точки A :

- 1) $X_A + R_B = 0$;
- 2) $Y_A - P - Q = 0$;
- 3) $-P \cdot 0,9 - Q \cdot 4 - R_B \cdot 12 = 0$.

Из третьего уравнения находим R_B :

$$R_B = \frac{-P \cdot 0,9 - Q \cdot 4}{12} = -3,7 \text{ кН.}$$

Подставляя значение R_B в первое уравнение, найдем X_A :

$$X_A = -R_B = 3,7 \text{ кН.}$$

Из второго уравнения находим Y_A :

$$Y_A = P + Q = 20,4 \text{ кН.}$$

Примечание. Уравнения равновесия можно было составить и в другой форме, приравняв нулю сумму моментов всех сил, приложенных к крану относительно точек A и B , и сумму проекций этих сил на ось y :

$$-R_B \cdot 12 - P \cdot 0,9 - Q \cdot 4 = 0,$$

$$X_A \cdot 12 - P \cdot 0,9 - Q \cdot 4 = 0,$$

$$Y_A - P - Q = 0.$$

§ 4. РАВНОВЕСИЕ СИСТЕМЫ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ НЕСКОЛЬКИХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

В случае системы твердых тел, соединенных между собой, силы, действующие на эту систему, можно подразделить на две группы:

- 1) внешние силы;
- 2) внутренние силы.

Внутренними силами называются силы взаимодействия между телами, входящими в данную систему. По закону равенства действия и противодействия внутренние силы всегда попарно

равны по модулю и прямо противоположны по направлению, но приложены к двум разным взаимодействующим между собой телам системы.

Внешними силами называются те силы, с которыми тела, не входящие в данную систему, действуют на тела этой системы.

Рассмотрим, например, систему, изображенную на рис. 39.

Балка AB весом P , может вращаться вокруг оси A неподвижного цилиндрического шарнира и концом B опирается свободно на другую балку CD весом P_2 , которая подперта в точке E и соединена со стеной шарниром D .

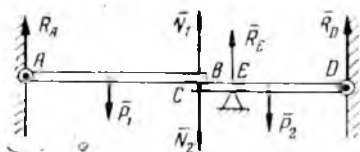


Рис. 39

В данном случае система состоит из двух тел: балки AB и балки CD .

Внутренними силами для данной системы являются силы взаимодействия между балками, т. е. сила $\bar{N}_2$, давления балки AB на балку CD и сила $\bar{N}_1$, с которой балка CD действует на балку AB . По закону равенства действия и противодействия силы $\bar{N}_1$ и $\bar{N}_2$ равны по модулю и противоположны по направлению, т. е. $\bar{N}_1 = -\bar{N}_2$.

Весы $\bar{P}_1$ и $\bar{P}_2$ балок представляют собой силы, с которыми эти балки притягиваются к Земле, и, следовательно, для данной системы являются силами внешними, так как Земля по отношению к этой системе есть внешнее тело. Реакции $\bar{R}_A$ и $\bar{R}_D$ шарнирных опор A и D , а также реакция $\bar{R}_E$ опоры E являются для данной системы тоже внешними силами, так как шарнирные опоры A и D и опора E не принадлежат к рассматриваемой системе, состоящей только из двух балок.

При решении задач на равновесие системы тел необходимо учесть, что все внешние и внутренние силы, приложенные к *каждому телу* в отдельности, уравниваются. Следовательно, в случае плоской системы сил можно составить по три уравнения равновесия для каждого из этих тел в отдельности.

Таким образом, для системы, состоящей из n тел, можно составить всего $3n$ уравнений равновесия. Поэтому, если число неизвестных сил в данной задаче не более $3n$, то такая задача является статически определенной. Если же число неизвестных в задаче окажется больше $3n$, то такая задача не может быть разрешена только на основании уравнений статики абсолютно твердого тела и потому является статически неопределенной.

Так как внутренние силы попарно равны по величине и направлены по одной прямой в противоположные стороны, то алгебраическая сумма их моментов относительно любой точки равна нулю и сумма их проекций на любую ось также равна нулю. Поэтому, если составим уравнение равновесия (уравнение моментов относительно какой-либо точки, или уравнение проекций на какую-либо ось) для каждого тела в отдельности и затем все эти уравнения сложим, то в полученном уравнении члены, содержащие внутренние силы, попарно уничтожаются и, следовательно, в это уравнение будут входить только внешние силы.

Таким образом, если система тел находится в равновесии, то внешние силы, приложенные к этой системе, удовлетворяют тем же трем уравнениям равновесия, что и в случае равновесия одного абсолютно твердого тела. Эти уравнения представляют собой условия равновесия внешних сил, действующих на систему.

Из этих уравнений можно найти все *внешние реакции*, если число этих внешних реакций не больше трех. Если же число

внешних реакций окажется больше трех или если в задаче, кроме внешних реакций, требуется найти неизвестные *внутренние силы*, то необходимо применять метод *расчленения системы*, т. е. нужно рассматривать равновесие каждого тела системы в отдельности и для каждого из этих тел составлять уравнения равновесия, учитывая при этом *все силы*, приложенные к рассматриваемому телу. Если система состоит, например, из двух твердых тел, то, применяя метод расчленения, получим в общем случае всего шесть уравнений равновесия (по три уравнения для каждого тела). Для составления шести уравнений равновесия можно применять еще и другой прием, а именно: составить сначала три уравнения для всей системы в целом (как для одного абсолютно твердого тела) и затем к этим трем уравнениям присоединить три уравнения равновесия, составленные только для одного из двух тел данной системы. Этот второй прием нередко предпочтительнее, так как в уравнения равновесия, составленные для всей системы в целом, входят *только внешние силы* и потому эти уравнения обычно оказываются проще.

Задачи, относящиеся к равновесию системы твердых тел, в зависимости от вида соединения этих тел между собой можно разделить на следующие четыре типа:

1. Задачи, где тела, входящие в систему, опираются свободно друг на друга.

2. Задачи, где тела, входящие в систему, соединены между собой гибкой нитью или невесомым стержнем, концы которого прикреплены к этим телам при помощи шарниров.

3. Задачи, где тела, входящие в систему, соединены между собой при помощи шарнира.

4. Задачи, относящиеся к определению усилий в стержнях плоской фермы.

Задачи типа I

Тела, входящие в систему, опираются свободно друг на друга
(задачи 108, 109, 164, 166—168)

В задачах этого типа внутренние силы, т. е. силы давления этих тел друг на друга, направлены по общей нормали к поверхности одного из этих тел в точке соприкосновения его с другим телом.

Пример 23. Однородная горизонтальная балка AB длиной 6 м и весом $P_1 = 2400$ н, закрепленная в неподвижной точке A шарнирно, опирается свободно в точке C на подпорную балку CD длиной 5 м и весом $P_2 = 3200$ н. Балка CD , составляющая с вертикалью угол $\alpha = 60^\circ$, закреплена в точке D при помощи неподвижного цилиндрического шарнира и удерживается в равновесии при помощи горизонтальной веревки EK , причем $DE = 2$ м.

В точке B к балке AB приложена сила $F = 1200$ н, наклоненная к балке под углом $\beta = 60^\circ$. Определить реакции шарниров A и D , натяжение веревки и давление балки AB на балку CD , если точки A и D лежат на одной вертикали (рис. 40).

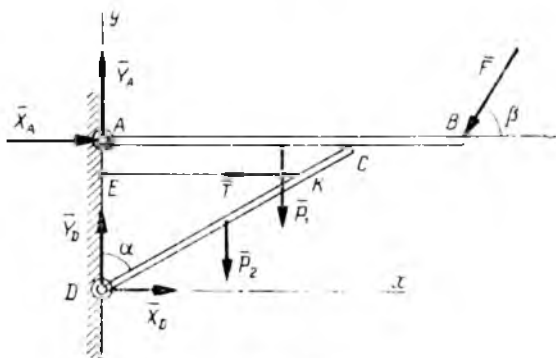


Рис. 40

Решение. Данная система состоит из двух тел: балок AB и CD . Внешними силами для этой системы тел являются силы $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$, $\bar{F}$, реакция веревки $\bar{T}$, направленная вдоль веревки, и реакции $\bar{R}_A$ и $\bar{R}_D$ шарниров A и D .

Разложим каждую из этих реакций на две составляющие: вертикальные ($\bar{Y}_A$ и $\bar{Y}_D$) и горизонтальные ($\bar{X}_A$ и $\bar{X}_D$). Для внешних сил, приложенных ко всей системе, можно составить только три уравнения равновесия, а число неизвестных сил равно пяти ($\bar{X}_A$, $\bar{Y}_A$, $\bar{X}_D$, $\bar{Y}_D$, $\bar{T}$), поэтому расчленим систему, т. е. рассмотрим равновесие каждой балки в отдельности. Так как балка AB опирается на конец балки CD свободно, то реакция $\bar{R}_C$ балки CD , приложенная к балке AB , направлена перпендикулярно к AB , т. е.

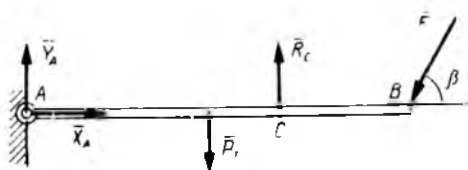


Рис. 41

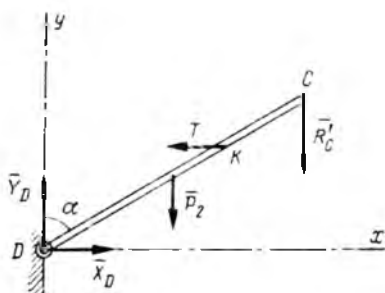


Рис. 42

по вертикали вверх. Следовательно, балка AB находится в равновесии под действием сил $\bar{X}_A$, $\bar{Y}_A$, $\bar{F}$, $\bar{R}_C$, $\bar{P}_1$ (см. рис. 41).

Составим три уравнения равновесия этих сил, приравняв нулю алгебраическую сумму их моментов относительно точек A

и C и алгебраическую сумму проекций этих сил на ось x :

$$1) -P_1 \frac{AB}{2} - F AB \sin \beta + R_C AC = 0;$$

$$2) Y_A AC - P_1 \left(AC - \frac{AB}{2} \right) + F BC \sin \beta = 0;$$

$$3) X_A - F \cos \beta = 0.$$

Но

$$AC = CD \sin \alpha = 5 \sin 60^\circ = \frac{5\sqrt{3}}{2},$$

а потому эти уравнения принимают вид:

$$-\frac{P_1}{2} - F \frac{\sqrt{3}}{2} + R_C \frac{5\sqrt{3}}{12} = 0,$$

$$Y_A \frac{5\sqrt{3}}{2} - P_1 \left(\frac{5\sqrt{3}}{2} - 3 \right) + F \left(6 - \frac{5\sqrt{3}}{2} \right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,$$

$$X_A - F \frac{1}{2} = 0.$$

Из этих уравнений находим:

$$X_A = \frac{F}{2} = 600 \text{ н},$$

$$R_C = \frac{P_1 + F\sqrt{3}}{5\sqrt{3}} \cdot 6 \approx 3100,8 \text{ н},$$

$$Y_A = P_1 \left(1 - \frac{2\sqrt{3}}{5} \right) - F \left(\frac{6}{5} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = (96 - 36\sqrt{3}) \cdot 10 \approx 337,2 \text{ н}.$$

Далее рассмотрим равновесие балки CD под действием сил $\bar{X}_D$, $\bar{Y}_D$, $\bar{P}_2$, $\bar{T}$, $\bar{R}_C$, где $\bar{R}_C$ — давление балки AB на балку CD , причем по закону равенства действия и противодействия $\bar{R}_C = -\bar{R}_C$. Составим три уравнения равновесия сил, приложенных к балке CD , приравнявая нулю алгебраическую сумму моментов этих сил относительно точки A и алгебраическую сумму их проекций на оси x и y (см. рис. 42):

$$4) X_D - T = 0;$$

$$5) Y_D - P_2 - R_C = 0;$$

$$6) -P_2 \frac{DC}{2} \sin \alpha - R_C DC \sin \alpha + T \cdot DE = 0.$$

Из этих уравнений находим:

$$T = \left(\frac{P_2}{2} + R_C \right) \frac{DC}{DE} \sin \alpha = (1600 + 3100,8) \frac{5\sqrt{3}}{4} = 10,17 \text{ кн},$$

$$X_D = T = 10,17 \text{ кн},$$

$$Y_D = P_2 + R_C = 6,3 \text{ кн}.$$

Задачи типа II

Тела, входящие в систему, соединены между собой гибкой нитью или невесомым стержнем, концы которого прикреплены к этим телам при помощи шарниров
(задачи 108, 162, 163)

В задачах этого типа реакции нити или стержня, направленные вдоль этой нити или вдоль этого стержня, являются внутренними силами.

Пример 24. В шестизвенном механизме к кривошпиу OA приложена пара сил с моментом m , вращающая этот кривошип против часовой стрелки. Стержень AB соединен шарнирно с кривошпином OA и коромыслом BC причем коромысло BC может

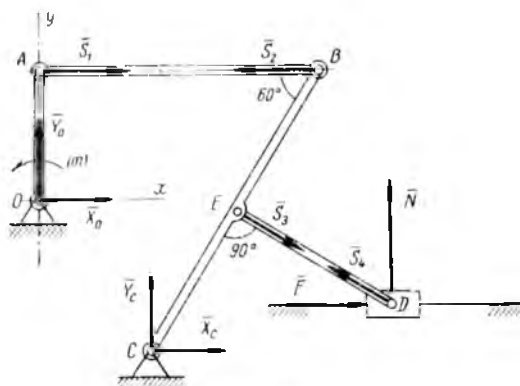


Рис. 43

вращаться вокруг неподвижной точки C . Стержень ED соединен шарнирно концом E с серединой звена CB , а концом D — с ползуном, который может перемещаться в горизонтальных направляющих. Определить, какую горизонтальную силу $\bar{F}$ следует приложить к ползуну D , чтобы механизм оставался в равновесии, а также реакции шарниров O и C и реакцию горизонтальных направляющих ползуна D , если $OA \perp AB$, $\angle ABC = 60^\circ$, $\angle DEC = 90^\circ$; кривошип OA вертикален. Весами всех звеньев механизма пренебрегаем; $m = 30 \text{ н} \cdot \text{м}$, $OA = 0,5 \text{ м}$ (рис. 43).

Решение. Система состоит из трех тел: кривошипа OA , коромысла CB и ползуна D , соединенных между собой шарнирно невесомыми стержнями AB и DE . Поэтому расчленим систему и рассмотрим равновесие каждого из этих тел в отдельности. Реакции $\bar{S}_1$ и $\bar{S}_2$ невесомого стержня AB , приложенные к звеньям OA и CB соответственно в точках A и B , направлены вдоль стержня AB в противоположные стороны и равны по модулю, т. е. $\bar{S}_1 = -\bar{S}_2$. Точно так же реакции $\bar{S}_3$ и $\bar{S}_4$

невесомого стержня ED , приложенные соответственно в точке E к коромыслу CB и в точке D к ползу, направлены вдоль стержня ED в противоположные стороны и по модулю равны, т. е. $\bar{S}_3 = -\bar{S}_4$ [см. рис. 16(7)]. Реакцию каждого из шарниров O и C разложим на составляющие: вертикальную ($\bar{Y}_O$ и $\bar{Y}_C$) и горизонтальную ($\bar{X}_O$ и $\bar{X}_C$). Нормальная реакция N горизонтальных направляющих ползуна вертикальна; предположим, что она направлена вверх. Для определения всех неизвестных сил составим уравнения равновесия для каждого из трех указанных тел: кривошипа OA , коромысла CB и ползуна D :

а) для кривошипа OA (два уравнения моментов относительно точек O и A и уравнение проекций на ось y):

$$1) m - S_1 OA = 0,$$

$$2) m + X_O OA = 0,$$

$$3) Y_O = 0;$$

б) для коромысла CB (два уравнения проекций на оси x и y и уравнение моментов относительно точки C):

$$4) X_C - S_2 + S_1 \cos(90^\circ - 60^\circ) = 0,$$

$$5) Y_C - S_3 \cos 60^\circ = 0,$$

$$6) -S_3 CE + S_2 CB \sin 60^\circ = 0;$$

в) для ползуна (только два уравнения проекций на оси x и y , так как силы, приложенные к ползу, пересекаются в одной точке):

$$7) S_4 \cos 30^\circ - F = 0,$$

$$8) S_4 \cos 60^\circ + N = 0.$$

Из первого и шестого уравнений находим:

$$S_1 = \frac{m}{OA} = 60 \text{ н},$$

$$S_3 = S_2 \sqrt{3};$$

так как

$$S_1 = S_2 \text{ и } S_3 = S_4,$$

то

$$S_2 = 60 \text{ н и } S_3 = S_4 = 60 \sqrt{3} \text{ н}.$$

Далее из четвертого и пятого уравнений находим X_C и Y_C , а из седьмого и восьмого уравнений F и N :

$$Y_C = \frac{S_3}{2} = 30 \sqrt{3} = 51,9 \text{ н}, \quad X_C = S_2 - S_3 \frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= 60 - 30 \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = -30 \text{ н}, \quad F = S_4 \frac{\sqrt{3}}{2} = 90 \text{ н},$$

$$N = -\frac{S_4}{2} = -30 \sqrt{3} = -51,9 \text{ н}.$$

Знаки минус, полученные для N и X_C , указывают, что направления этих сил противоположны указанным на рисунке.

Задачи типа III

Тела, входящие в систему, соединены между собой шарнирно (задачи 110—112, 143, 147—154)

В этом случае внутренняя сила, т. е. сила, с которой одно тело действует на другое, приложена в центре шарнира, но направление ее неизвестно.

Поэтому при решении таких задач эту силу разлагают на две составляющие, направленные по координатным осям. Из задач этой группы следует особо отметить важный частный случай, а именно: система состоит из двух тел с тремя шарнирами, из которых два являются неподвижными опорными шарнирами, а третий соединяет эти два тела между собой, например, в случае трехшарнирной арки (рис. 44). Если трехшарнирная арка находится в равновесии под действием плоской системы сил, то можно составить всего шесть уравнений равновесия (по три уравнения для каждой части AC и BC арки в отдельности).



Рис. 44

Так как направление реакции в каждом из трех шарниров A , B и C неизвестно, то при решении задачи о равновесии трехшарнирной арки каждую из этих реакций нужно разложить на две составляющие (по координатным осям x и y). Следовательно, всего будем иметь шесть неизвестных реакций, которые можно найти из шести уравнений равновесия. Таким образом, задача о равновесии трехшарнирной арки является статически определимой.

Пример 25. Две однородные балки $AB = 4$ м и весом $P_1 = 60$ н и $BC = 3$ м и весом $P_2 = 40$ н соединены в точке B шарнирно. Первая балка горизонтальна и концом A заделана жестко, а вторая концом C свободно опирается на гладкую наклонную плоскость с углом наклона $\alpha = 30^\circ$. Определить реакции в точках A и C , если $\angle ABC = 120^\circ$ (рис. 45).

Решение. Данная система состоит из двух тел: балок AB и BC . Реакция $\bar{R}_C$ наклонной плоскости направлена перпендикулярно к этой плоскости, а реакция заделки эквивалентна силе $\bar{R}_A$, приложенной в точке A , направление которой неизвестно, и паре сил с неизвестным моментом m [см. рис. 16(10)]. Обозначая составляющие силы $\bar{R}_A$ по координатным осям через $\bar{X}_A$ и $\bar{Y}_A$, составим три уравнения равновесия внешних сил, приложенных к данной системе: уравнения проекций

на оси x и y и уравнение моментов относительно точки B :

$$1) X_A + R_C \cos 60^\circ = 0,$$

$$2) Y_A + R_C \cos 30^\circ - P_1 - P_2 = 0,$$

$$3) P_1 \frac{AB}{2} - Y_A AB - P_2 \frac{BC}{2} \cos 60^\circ + R_C BK = m = 0,$$

где $BK \perp R_C$. Так как в этих трех уравнениях число неизвестных равно четырем (X_A , Y_A , R_C , m), то для решения задачи необходимо данную систему расчленить в шарнире B и рассмотреть равновесие одной из балок в отдельности. При этом достаточно составить только одно уравнение равновесия для этой балки. В данном случае проще всего составить уравнение

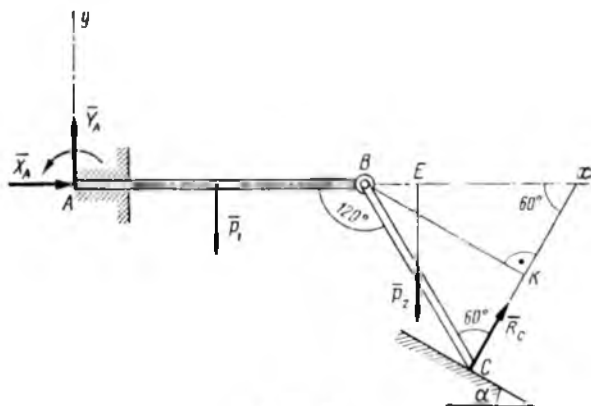


Рис. 45

моментов относительно точки B для балки BC , так как неизвестная реакция шарнира B в это уравнение не войдет. Составляя это уравнение, получим:

$$4) -P_2 \frac{BC}{2} \cos 60^\circ + R_C BK = 0.$$

Отрезок BK найдем из прямоугольного треугольника BCK , в котором $\angle BCK = 60^\circ$; $BK = BC \cdot \cos 30^\circ$, а потому $R_C = P_2 \frac{BC}{4BK} = \frac{P_2}{2\sqrt{3}} = \frac{20\sqrt{3}}{3} \approx 11,52$ н. Подставив найденное значение R_C

в первые три уравнения, находим:

$$X_A = R_C \frac{1}{2} = 5,76 \text{ н},$$

$$Y_A = P_1 + P_2 - \frac{R_C \sqrt{3}}{2} = 100 - 10 - 90 \text{ н},$$

$$m = Y_A AB - P_1 \frac{AB}{2} = 240 \text{ н} \cdot \text{м}.$$

Пример 26. На рис. 46 показана схема копра, состоящего из двух одинаковых ферм, соединенных между собой шарниром B . Веса этих ферм Q_1 и Q_2 равны и приложены в точках D и E .

На левую ферму действует горизонтальная сила $\bar{P}$ давления ветра. Определить реакции в шарнирах A , B , C при указанных на рисунке размерах.

Решение. Направление реакций в шарнирах A , B , C неизвестны, а потому разложим каждую из них на горизонтальную и вертикальную составляющие, направив их, как указано на рисунке. Пусть $\bar{X}_B$, $\bar{Y}_B$ — реакции левой фермы, приложенные к ферме BC в точке B , а $\bar{X}_B$, $\bar{Y}_B$ — реакции правой фермы, приложенные в той же точке к ферме AB , причем $\bar{X}_B = -\bar{X}_B$ и $\bar{Y}_B = -\bar{Y}_B$.

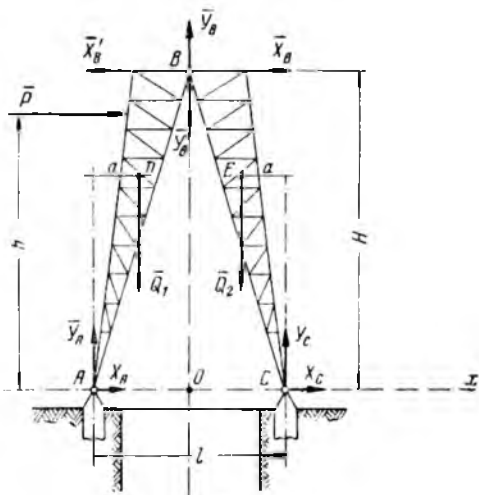


Рис 46

Так как в данной задаче нужно найти шесть неизвестных реакций (X_A , Y_A , X_C , Y_C , X_B , Y_B), то нужно составить шесть уравнений равновесия. Для этого сначала составим три уравнения равновесия для всей системы в целом (уравнения равновесия внешних сил $\bar{X}_A$, $\bar{Y}_A$, $\bar{X}_C$, $\bar{Y}_C$, $\bar{P}$, $\bar{Q}_1$, $\bar{Q}_2$).

Приравнявая нулю сумму моментов сил относительно каждой из точек A и C и сумму проекций этих сил на ось x , получим:

- 1) $X_A + X_C + P = 0$,
- 2) $Y_C l - Q_2(l - a) - Q_1 a - Ph = 0$,
- 3) $Q_1(l - a) + Q_2 a - Ph - Y_A l = 0$.

Далее составим три уравнения равновесия для фермы BC (уравнения равновесия сил $\bar{X}_C$, $\bar{Y}_C$, $\bar{X}_B$, $\bar{Y}_B$, $\bar{Q}_2$, приложенных к этой ферме). Приравнявая нулю сумму моментов этих сил относительно точки C и сумму их проекций на оси x и y , получим:

- 4) $X_B + X_C = 0$,
- 5) $Y_C + Y_B - Q_2 = 0$,
- 6) $Q_2 a - X_B h - Y_B \frac{l}{2} = 0$.

Решим теперь полученную систему шести уравнений. Из второго и третьего уравнений находим:

$$Y_A = \frac{Q_1 l - Q_1 a + Q_2 a - Ph}{l} = \frac{Q_1 l - Ph}{l} = Q - P \frac{h}{l},$$

$$Y_C = \frac{Q_2 l - Q_2 a + Q_1 a + Ph}{l} = \frac{Q_2 l + Ph}{l} = Q + P \frac{h}{l}.$$

Из пятого уравнения находим:

$$Y_B = Q_2 - Y_C = Q_2 - Q_2 - P \frac{h}{l} = -\frac{h}{l} P.$$

Из шестого уравнения имеем:

$$HX_B = Q_2 a + \frac{h}{2} P \quad \text{и} \quad X_B = \frac{2aQ_2 + hP}{2H}.$$

Теперь из четвертого и первого уравнений получаем:

$$X_C = -X_B = -\frac{2aQ_2 + hP}{2H},$$

$$X_A = -P - X_C = \frac{2aQ_2 + hP}{2H} - P = \frac{2aQ_2 + hP - 2HP}{2H},$$

или

$$X_A = \frac{2aQ_2 + P(h - 2H)}{2H}.$$

Задачи типа IV

Задачи, относящиеся к определению усилий в стержнях плоской фермы (задачи 197—207)

Фермой называется геометрически неизменяемая система прямолинейных стержней, соединенных по концам шарнирами. В задачах статики рассматриваются только статически определимые фермы, т. е. такие фермы, для которых выполняется соотношение

$$m = 2n - 3,$$

где m — число стержней,

n — число узлов (шарниров) фермы.

Кроме того, предположим, что внешние силы приложены только в узлах фермы и трение в шарнирах отсутствует. Тогда, если пренебречь весом стержней, их реакции будут направлены вдоль этих стержней и каждый стержень будет либо сжат, либо растянут. При решении задач, как правило, направляют реакцию каждого стержня от соответствующего узла, т. е. предполагают, что стержень растянут. Будет ли данный стержень в действительности растянут или сжат определяется по знаку найденной из уравнений равновесия реакции этого стержня: если реакция положительна, то стержень растянут, а если она отрицательна, то стержень сжат (см. гл. I, § 4).

Пример 27. Определить усилия в стержнях плоской фермы, изображенной на рис. 47, пренебрегая весами стержней, если силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ горизонтальны и каждая из них равна 20 кН, а сила $\vec{F}_3$ вертикальна и равна 15 кН; $AH = HC = CD = h$, $AB = a = \frac{3}{4}h$ (рис. 47).

Решение. Внешними силами для данной системы являются заданные силы $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ и реакции опор $\vec{R}_A$ и $\vec{R}_B$ в точках А и В. Усилия в стержнях, соединяющих узлы фермы, являются внутренними силами для этой системы. Для того чтобы определить внутренние силы, необходимо систему расчленить. Поэтому, чтобы определить усилия в стержнях 1, 2, 3, разрежем ферму по этим стержням, мысленно отбросим нижнюю часть фер-

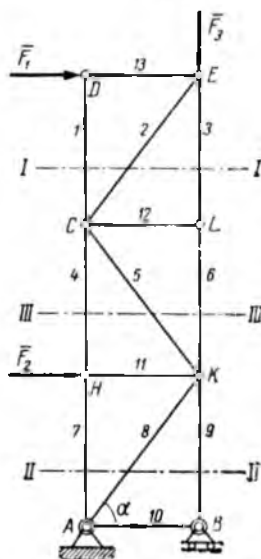


Рис. 47

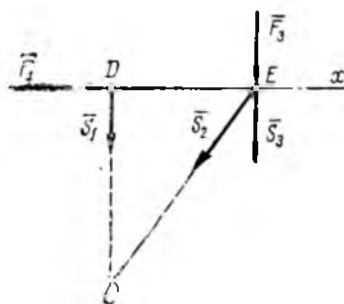


Рис. 48

мы и уравновесим оставшуюся верхнюю часть реакциями разрезанных стержней $\vec{S}_1$, $\vec{S}_2$, $\vec{S}_3$, которые направлены вдоль этих стержней. Предполагая, что стержни 1, 2, 3 растянуты, направим каждую из сил $\vec{S}_1$, $\vec{S}_2$, $\vec{S}_3$ от соответствующего узла. Составим три уравнения равновесия для верхней части фермы в виде (22), т. е. два уравнения моментов относительно точки С пересечения стержней 1 и 2 и относительно точки Е пересечения стержней 2 и 3 и одно уравнение проекций на ось x , перпендикулярную к параллельным стержням 1 и 3 (рис. 48).

Тогда в каждое уравнение равновесия войдет только одна неизвестная сила:

$$\begin{aligned}\sum m_C &= -F_1 h - F_3 a - S_3 a = 0, \\ \sum m_E &= S_1 a = 0, \\ \sum X &= F_1 - S_2 \cos \alpha = 0.\end{aligned}$$

Из этих уравнений находим:

$$S_3 = -\frac{1}{3} F_1 \dots F_3 = -41,6 \text{ кН},$$

$$S_1 = 0,$$

$$S_2 = \frac{F_1}{\cos \alpha},$$

где

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + h^2}} = \frac{3}{5},$$

а потому

$$S_2 = \frac{5}{3} F_1 = 33,3 \text{ кН}.$$

Так как $S_2 > 0$, $S_3 < 0$, $S_1 = 0$, то стержень 2 растянут, 3 — сжат, а 1 — не работает.

Для определения усилий в стержнях 7, 8, 9 проведем сечение II—II по этим стержням и рассмотрим равновесие части фермы $IIDEK$, находящейся под действием сил $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$, $\bar{F}_3$ и реакций $\bar{S}_7$, $\bar{S}_8$, $\bar{S}_9$ перерезанных стержней 7, 8, 9. Направляя каждую из сил $\bar{S}_7$, $\bar{S}_8$, $\bar{S}_9$ от соответствующего узла, составим два уравнения моментов относительно то-

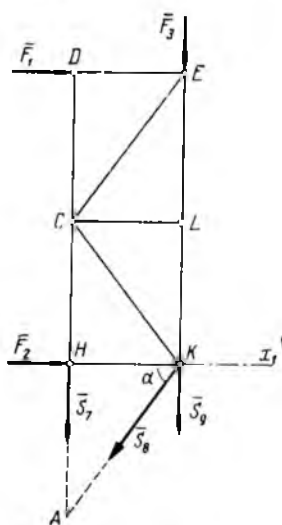


Рис. 49



Рис. 50

чек A и K и одно уравнение проекций на ось x_1 (рис. 49)

$$\sum m_A = -F_2 h - F_3 a - F_1 3h - S_9 a = 0,$$

$$\sum m_K = S_7 a - F_1 2h = 0,$$

$$\sum X = F_1 + F_2 - S_8 \cos \alpha = 0.$$

Из этих уравнений находим:

$$S_u = -(F_2 + 3F_1) \frac{h}{a} = F_3 = -121,6 \text{ кН},$$

$$S_v = 2 \frac{h}{a} F_1 = 53,3 \text{ кН},$$

$$S_{\kappa} = \frac{F_1 + F_2}{\cos \alpha} = 66,6 \text{ кН}.$$

Так как $S_u > 0$, $S_{\kappa} > 0$, а $S_v < 0$, то стержни 7 и 8 растянуты, а стержень 9 сжат. Аналогично, проводя разрез III—III, найдем усилия в стержнях 4, 5, 6.

Для определения усилия в оставшихся стержнях 10, 11, 12, 13 проще воспользоваться способом вырезания узлов. Вырежем, например, узел В, к которому приложена неизвестная вертикальная реакция R_B опоры В, неизвестная реакция $\bar{S}_{10}$ стержня 10 и реакция $\bar{S}_9$ стержня 9, равная по модулю и противоположная по направлению найденной уже реакции $\bar{S}_u$. Так как стержень 9 сжат, то реакция $\bar{S}_9$ направлена к узлу В и по модулю равна $|\bar{S}_9|$, т. е. $|\bar{S}_9| = |\bar{S}_u| = F_3 + (F_2 + 3F_1) \frac{h}{a}$ (рис. 50).

Для сходящихся сил R_B , $\bar{S}_9$, $\bar{S}_{10}$ составим два уравнения равновесия (два уравнения проекций на оси x и y):

$$\sum X = -S_{10} = 0,$$

$$\sum Y = R_B - |\bar{S}_9| = 0,$$

откуда $S_{10} = 0$, $R_B = |\bar{S}_9| = F_3 + (F_2 + 3F_1) \frac{h}{a} = 121,6 \text{ кН}$. Аналогично, вырезая узлы D, L и H, найдем реакции S_{11} , S_{12} и S_{13} .

Примечание. Силу $\bar{S}_9$ можно было бы направить по общему правилу от узла В, но тогда эту силу нужно считать равной найденному алгебраическому значению силы S_9 , т. е. $S_9 = -\left\{F_3 + (F_2 + 3F_1) \frac{h}{a}\right\}$; уравнение проекций на ось y при этом будет

$$R_B + S_9 = 0,$$

откуда

$$R_B = -S_9 = F_3 + (F_2 + 3F_1) \frac{h}{a}.$$

Описанные классификация и типы задач не включают всех видов задач на равновесие системы тел. Необходимо иметь в виду, что возможны и такие задачи, в которых два тела, входящие в данную систему, соединены между собой двумя внутренними связями того или другого из описанных типов связей, например при помощи нити и шарнира, как в задаче

№ 147 из «Сборника задач» П. В. Мещерского. Кроме того, возможны задачи на равновесие системы трех тел. Методы решения всех таких задач остаются такими же, как и в случае одной внутренней связи, соединяющей два тела системы.

Г л а в а III

РАВНОВЕСИЕ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕНИЯ

Трением скольжения называется сопротивление, возникающее при относительном скольжении двух соприкасающихся тел. Поэтому сила трения скольжения, приложенная к одному из трущихся тел, направлена противоположно его скорости относительно второго тела.

Опытным путем установлено, что величина силы трения скольжения пропорциональна нормальному давлению одного из трущихся тел на другое, т. е.

$$F_{\text{тр}} = fN, \quad (25)$$

Коэффициент пропорциональности f (отвлеченное число) называется коэффициентом трения скольжения.

Как показывает опыт, величина этого коэффициента зависит от материала трущихся тел, от состояния их поверхностей, а также от их относительной скорости.

Если трущиеся тела находятся в покое, то в этом случае трение называется статическим. Максимальная величина силы статического трения, т. е. величина этой силы, соответствующая моменту начала относительного скольжения трущихся тел, определяется по той же формуле, что и в случае трения при относительном движении, т. е.

$$(F_{\text{тр}})_{\text{max}} = f_{\text{ст}}N, \quad (26)$$

где $f_{\text{ст}}$ — статический коэффициент трения.

Этот коэффициент обычно несколько больше коэффициента трения при движении. Отсюда следует, что величина силы статического трения всегда удовлетворяет условию:

$$F_{\text{тр}} \leq f_{\text{ст}}N. \quad (26')$$

Благодаря наличию силы трения между данным телом и опорной поверхностью полная реакция $\vec{R}$ этой поверхности есть равнодействующая двух сил: нормальной реакции $\vec{N}$ и силы трения $F_{\text{тр}}$ (рис. 51).

Угол φ между направлениями нормальной реакции $\bar{N}$ и полной реакции $\bar{R}$, соответствующий максимальному значению силы трения, называется *углом трения*.

Отсюда следует, что

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{(F_{\text{тр}})_{\max}}{N} = \frac{f_{\text{ст}} \cdot N}{N} = f_{\text{ст}}. \quad (27)$$

Метод решения задач статики при наличии трения остается таким же, как и в случае отсутствия трения, т. е. сводится к составлению и решению уравнений равновесия, но только в эти уравнения, кроме заданных сил, приложенных к данному телу, и тех реакций, которые рассматривались в предыдущей главе, войдут еще и силы трения. При этом следует иметь в виду, что в таких задачах расчет ведется обычно на максимальную величину сил трения, а потому эти силы определяются по формуле

$$(F_{\text{тр}})_{\max} = f_{\text{ст}} N.$$

Рассматриваемые ниже задачи, относящиеся к равновесию тел при наличии трения, можно разделить, как и в предыдущей главе, на два основных типа:

- I. Задачи, относящиеся к равновесию одного твердого тела.
- II. Задачи, в которых рассматривается равновесие системы тел.

Задачи, относящиеся к первому типу, можно еще подразделить на следующие две группы:

- 1) задачи, решаемые при помощи двух уравнений равновесия (двух уравнений проекций);
- 2) задачи, решаемые при помощи трех уравнений равновесия.

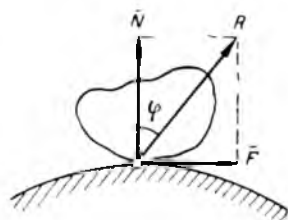


Рис. 51

Задачи типа I

Первая группа

Задачи, решаемые при помощи двух уравнений равновесия
(задачи 73, 74)

Пример 28. Дробление руды при помощи щековой дробилки происходит путем раздавливания ее между подвижной щекой BC и неподвижной щекой AC .

Найти максимальную величину угла α между щеками, при котором возможно дробление, для чего руда не должна выдавливаться вверх. Угол трения между куском руды и щеками дробилки равен φ (рис. 52).

Решение. Нормальные реакции шек AC и BC обозначим N_1 и N_2 , силы трения $-F_1$ и F_2 ; при этом

$$F_1 \leq N_1 \text{ и } F_2 \leq N_2,$$

где f — коэффициент трения между куском руды и поверхностями шек AC и BC , $f = \operatorname{tg} \varphi$, φ — угол трения.

Так как под действием сил N_1 и N_2 кусок руды будет выдавливаться вверх, то приложенные к нему силы трения F_1 и F_2 будут направлены вдоль шек AC и BC вниз.

Следовательно, кусок разрабатываемой руды находится в равновесии под действием сил F_1 , F_2 , N_1 , N_2 (весом руды пренебрегаем ввиду малых размеров куска руды), а потому сумма проекций этих сил на любую ось равна нулю. Если за оси проекций выберем направления CA и CB , то будем иметь:

$$\begin{aligned} 1) & -F_1 - F_2 \cos \alpha + N_2 \sin \alpha = 0, \\ 2) & -F_2 - F_1 \cos \alpha + N_1 \sin \alpha = 0, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} 1) & F_1 + F_2 \cos \alpha = N_2 \sin \alpha, \\ 2) & F_1 \cos \alpha + F_2 = N_1 \sin \alpha. \end{aligned}$$

Рис. 32

Сложив эти уравнения, получим:

$$(F_1 + F_2)(1 + \cos \alpha) = (N_1 + N_2) \sin \alpha.$$

Так как

$$F_1 + F_2 \leq f(N_1 + N_2),$$

то

$$(1 + \cos \alpha)(F_1 + F_2) \leq f(1 + \cos \alpha)(N_1 + N_2),$$

или

$$(N_1 + N_2) \sin \alpha \leq (N_1 + N_2) f(1 + \cos \alpha),$$

отсюда

$$\sin \alpha \leq f(1 + \cos \alpha),$$

или

$$\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} \leq f.$$

Но

$$\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2},$$

а

$$1 - \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2},$$

поэтому

$$\frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} \leq f,$$

или

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \leq \operatorname{tg} \varphi,$$

откуда

$$\frac{\alpha}{2} \leq \varphi,$$

или

$$\alpha \leq 2\varphi.$$

Следовательно, максимальная величина угла, при котором руда не будет выдавливаться вверх, равна удвоенному углу трения.

Приведенное решение этой задачи можно упростить, если за ось проекций принять биссектрису угла ACB . Тогда достаточно составить только одно уравнение проекций на эту ось. В самом деле, проектируя все силы, приложенные к куску руды, на направление биссектрисы угла ACB , получим:

$$-F_1 \cos \frac{\alpha}{2} - F_2 \cos \frac{\alpha}{2} + N_1 \sin \frac{\alpha}{2} + N_2 \sin \frac{\alpha}{2} = 0,$$

или

$$(F_1 + F_2) \cos \frac{\alpha}{2} = (N_1 + N_2) \sin \frac{\alpha}{2},$$

откуда

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{F_1 + F_2}{N_1 + N_2}.$$

Но

$$F_1 + F_2 \leq f(N_1 + N_2) = \operatorname{tg} \varphi (N_1 + N_2),$$

поэтому

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \leq \operatorname{tg} \varphi,$$

откуда

$$\frac{\alpha}{2} \leq \varphi,$$

или

$$\alpha \leq 2\varphi.$$

Рассмотрим далее геометрический способ решения этой задачи.

Сначала построим линии действия полных реакций $\bar{R}_1$ и $\bar{R}_2$ шек AC и BC , приложенных к куску руды в точках E и D .

Угол между полной реакцией и ее нормальной составляющей не превышает угла трения, поэтому, обозначая угол между силами $\bar{R}_1$ и $\bar{N}_1$ через β и угол между силами $\bar{R}_2$ и $\bar{N}_2$ через γ , будем иметь: $\beta \leq \varphi$ и $\gamma \leq \varphi$.

Так как кусок руды находится в равновесии под действием двух сил $\bar{R}_1$ и $\bar{R}_2$, то линии действия этих сил лежат на прямой ED . Из треугольника CDE имеем:

$$\alpha = 180^\circ - (90^\circ - \beta) - (90^\circ - \gamma) = \beta + \gamma.$$

Но

$$\beta + \gamma \leq 2\varphi.$$

Следовательно,

$$\alpha \leq 2\varphi,$$

т. е.

$$\alpha_{\max} = 2\varphi.$$

Вторая группа

Задачи, решаемые при помощи трех уравнений равновесия
(задачи 175—182)

Пример 29. Вращающийся кулачок 1 сообщает толкателю 2 поступательное равномерное движение в вертикальных направляющих (рис. 53). При своем движении толкатель преодолевает сопротивление Q . Учитывая трение в направляющих, определить давление кулачка на толкатель при указанном на рисунке положении механизма. Размеры h и b , толщина δ толкателя, а также угол α между осью толкателя и касательной к профилю кулачка в точке его касания с острием толкателя известны, коэффициент трения в направляющих равен f . Трением между кулачком и толкателем пренебречь. Какому условию должен удовлетворять угол α , чтобы не произошло заклинивание механизма?

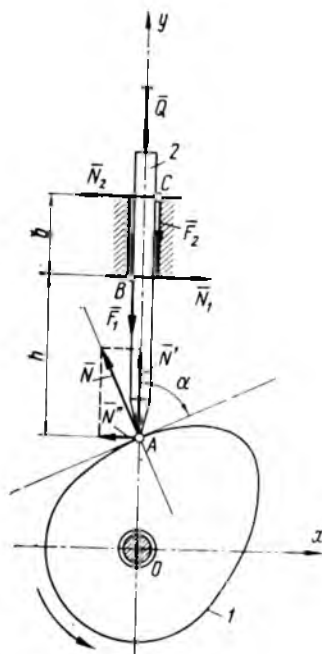


Рис. 53

Решение. Давление $\bar{N}$ кулачка на толкатель направлено перпендикулярно к профилю кулачка. Силу $\bar{N}$ можно разложить на две составляющие: $N' = N \sin \alpha$ — вдоль оси толкателя и $N'' = N \cos \alpha$ — перпендикулярно к оси толкателя. Первая из них перемещает толкатель и преодолевает сопротивление его движению, вторая

изгибает толкатель. Благодаря этим силам толкатель перемещается и прижимается к направляющим в точках B и C , где возникают нормальные реакции N_1 и N_2 и силы трения $F_1 = fN_1$ и $F_2 = fN_2$. Так как толкатель движется прямолинейно и равномерно, то все приложенные к нему силы уравновешиваются. Поэтому, располагая, как указано на рисунке, оси координат, получим:

$$\begin{aligned}\sum X &= -N \cos \alpha + N_1 - N_2 = 0, \\ \sum Y &= N \sin \alpha - fN_1 - fN_2 - Q = 0, \\ \sum m_B &= N_2 b - fN_2 \delta - Q 0,5\delta + N \sin \alpha 0,5\delta - N \cos \alpha \cdot h = 0.\end{aligned}$$

Эти уравнения можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned}N_1 - N_2 &= N \cos \alpha, \\ N_1 + N_2 &= \frac{1}{f} (N \sin \alpha - Q), \\ N_2 (b - f\delta) &= 0,5\delta Q + N (h \cos \alpha - 0,5\delta \sin \alpha).\end{aligned}$$

Из первых двух уравнений находим:

$$N_2 = \frac{1}{2f} (N \sin \alpha - Q) - \frac{1}{2} N \cos \alpha.$$

Подставляя это выражение N_2 в третье уравнение, имеем:

$$\begin{aligned}\frac{b-f\delta}{2f} (N \sin \alpha - Q) - \frac{b-f\delta}{2} N \cos \alpha &= 0,5\delta Q + N (h \cos \alpha - 0,5\delta \sin \alpha), \\ \text{или} \\ (b-f\delta) (N \sin \alpha - Q) - f(b-f\delta) N \cos \alpha &= \\ &= f\delta Q + Nf(2h \cos \alpha - \delta \sin \alpha).\end{aligned}$$

Отсюда получаем:

$$N = \frac{bQ}{(b-f\delta)(\sin \alpha - f \cos \alpha) - f(2h \cos \alpha - \delta \sin \alpha)}.$$

Для того чтобы не произошло заклинивания механизма, должно соблюдаться условие:

$$(b-f\delta)(\sin \alpha - f \cos \alpha) - f(2h \cos \alpha - \delta \sin \alpha) > 0,$$

или

$$(b-f\delta)(\operatorname{tg} \alpha - f) > (2h - \delta \operatorname{tg} \alpha) \cdot f,$$

откуда

$$\operatorname{tg} \alpha > (2h - b + f\delta) \frac{f}{b}.$$

Задачи типа II

Равновесие системы тел при наличии трения (задачи 186 — 188)

Пример 30. Два груза A и B , веса которых равны P и Q , лежащие на наклонных плоскостях с углами α и β , связаны веревкой, перекинутой через блок O .

Найти отношение весов $\frac{P}{Q}$ при равновесии, если угол трения грузов о плоскость равен φ (рис. 54).

Решение. Найдем наибольшую величину отношения $\frac{P}{Q}$, при которой еще возможно равновесие, предполагая, что дальнейшее увеличение этого отношения вызовет движение груза A по наклонной плоскости вниз, а, следовательно, груз B начнет двигаться вверх. В этом случае

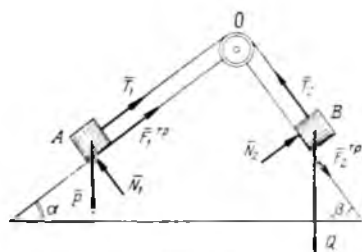


Рис. 54

силы трения F_1^{tp} и F_2^{tp} , приложенные к грузам A и B , будут направлены вдоль соответствующих наклонных плоскостей, как указано на рисунке. Нормальные реакции наклонных плоскостей, приложенные к грузам обозначим $\bar{N}_1$ и $\bar{N}_2$.

Рассмотрим равновесие груза A , к которому приложены силы P , $\bar{N}_1$, F_1^{tp} , а также сила натяжения $\bar{T}_1$ веревки.

Проектируя эти силы на направление AO и направление, перпендикулярное к AO , получим два уравнения равновесия:

- 1) $F_1^{tp} + T_1 - P \sin \alpha = 0$,
- 2) $N_1 - P \cos \alpha = 0$.

Аналогично, рассматривая равновесие груза B , к которому приложены силы Q , F_2^{tp} , N_2 и сила $\bar{T}_2$ натяжения веревки, и проектируя эти силы на направление OB и направление, перпендикулярное к OB , получим еще два уравнения равновесия:

- 3) $F_2^{tp} - T_2 + Q \sin \beta = 0$,
- 4) $N_2 - Q \cos \beta = 0$.

Учитывая, что $T_1 = T_2$, исключим эти две неизвестные силы, сложив первое уравнение с третьим.

Тогда получим:

- 1) $F_1^{tp} + F_2^{tp} - P \sin \alpha + Q \sin \beta = 0$,
- 2) $N_1 = P \cos \alpha$,
- 3) $N_2 = Q \cos \beta$.

По

- 4) $F_1^{tp} = \operatorname{tg} \varphi N_1 = \operatorname{tg} \varphi P \cos \alpha$,

а

$$F_2^{tp} = \operatorname{tg} \varphi N_2 = \operatorname{tg} \varphi Q \cos \beta.$$

поэтому

$$F_1^{tp} + F_2^{tp} = \operatorname{tg} \varphi (P \cos \alpha + Q \cos \beta).$$

С другой стороны, из первого уравнения имеем:

$$F_1^{\text{тр}} + F_2^{\text{тр}} = P \sin \alpha - Q \sin \beta.$$

Следовательно,

$$P \sin \alpha - Q \sin \beta = \operatorname{tg} \varphi (P \cos \alpha + Q \cos \beta).$$

Разделив это уравнение на Q , получим:

$$\frac{P}{Q} \sin \alpha - \sin \beta = \operatorname{tg} \varphi \left(\frac{P}{Q} \cos \alpha + \cos \beta \right).$$

Отсюда

$$\frac{P}{Q} (\sin \alpha - \operatorname{tg} \varphi \cos \alpha) = \sin \beta + \operatorname{tg} \varphi \cos \beta$$

и

$$\frac{P}{Q} = \frac{\sin \beta + \operatorname{tg} \varphi \cos \beta}{\sin \alpha - \operatorname{tg} \varphi \cos \alpha} = \frac{\sin \varphi \cos \beta + \cos \varphi \sin \beta}{\sin \alpha \cos \varphi - \cos \alpha \sin \varphi} = \frac{\sin (\beta + \varphi)}{\sin (\alpha - \varphi)}.$$

Таким образом, мы нашли наибольшее значение отношения $\frac{P}{Q}$, при котором еще возможно равновесие, т. е.

$$\left(\frac{P}{Q} \right)_{\max} = \frac{\sin (\beta + \varphi)}{\sin (\alpha - \varphi)}.$$

Найдем теперь наименьшее значение отношения $\frac{P}{Q}$, при котором существует равновесие, но так, что дальнейшее уменьшение этого отношения вызовет опускание груза B и поднятие груза A .

В этом случае направления сил трения $\overline{F}_1^{\text{тр}}$ и $\overline{F}_2^{\text{тр}}$ будут противоположны направлениям этих сил в предыдущем случае. Поэтому, чтобы получить наименьшее значение отношения $\frac{P}{Q}$, достаточно в первом и третьем уравнениях равновесия изменить знаки при $F_1^{\text{тр}}$ и $F_2^{\text{тр}}$ на обратные, что равносильно изменению знака при $\operatorname{tg} \varphi$ в четвертом уравнении.

Следовательно, будем иметь:

$$\left(\frac{P}{Q} \right)_{\min} = \frac{\sin (\beta - \varphi)}{\sin (\alpha + \varphi)}.$$

Таким образом, равновесие данной системы возможно при условии:

$$\frac{\sin (\beta - \varphi)}{\sin (\alpha + \varphi)} \leq \frac{P}{Q} \leq \frac{\sin (\beta + \varphi)}{\sin (\alpha - \varphi)}.$$

Пример 31. Два клина A и B , коэффициент трения между которыми $f = \operatorname{tg} \varphi$, могут двигаться без трения в своих направляющих. К клину A приложена сила $\overline{P}$.

Какую силу Q нужно приложить к клину B , чтобы клин A двигался равномерно в направлении действия силы $\overline{P}$, если углы α и β известны? Весом клиньев пренебречь (рис. 55).

Решение. Обозначим реакцию направляющих, примененную к клину A , через $\bar{R}_1$, а реакцию направляющих, примененную к клину B , через $\bar{R}_2$. Так как каждый клин может двигаться в своих направляющих без трения, то реакции $\bar{R}_1$ и $\bar{R}_2$ направлены по нормали к поверхности соответствующего клина.

При равномерном движении клина A в направлении силы $\bar{P}$ клин B будет скользить по клину A вверх, а потому сила трения $\bar{F}_2$, примененная к клину B , будет направлена по прямой CD вниз, т. е. в сторону, противоположную перемещению

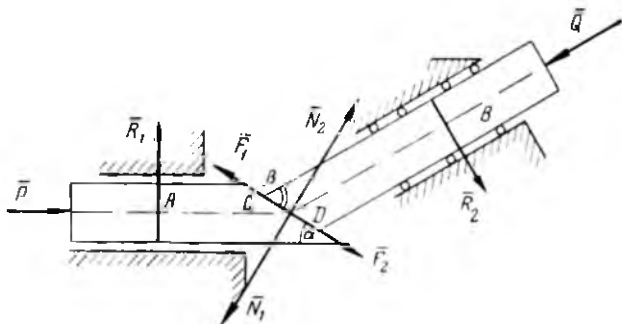


Рис. 55

клина B относительно клина A . По закону равенства действия и противодействия сила трения $\bar{F}_1$ клина B , примененная к клину A , будет равна по величине и направлена противоположно силе трения $\bar{F}_2$, а нормальная реакция $\bar{N}_1$ клина A , примененная к клину B , равна по величине и направлена противоположно нормальной реакции $\bar{N}_2$ клина B , примененной к клину A , т. е.

$$\bar{N}_1 = -\bar{N}_2 \quad \text{и} \quad \bar{F}_1 = -\bar{F}_2.$$

Так как клин A движется равномерно, то силы $\bar{P}$, $\bar{R}_1$, $\bar{N}_1$ и $\bar{F}_1$, примененные к этому клину, уравниваются. При этом клин B будет также двигаться равномерно, и, следовательно, силы $\bar{Q}$, $\bar{F}_2$, $\bar{R}_2$, $\bar{N}_2$, примененные к этому клину, тоже уравниваются. Поэтому сумма проекций всех сил, примененных к каждому клину, на направление движения этого клина равна нулю, т. е.

$$1) \quad P - F_1 \cos \alpha - N_1 \sin \alpha = 0,$$

$$2) \quad F_2 \cos \beta + N_2 \sin \beta - Q = 0.$$

Кроме того,

$$F_1 = fN_1 \quad \text{и} \quad F_2 = fN_2,$$

где f — коэффициент динамического трения. Подставив эти значения сил трения в первое и второе уравнения, будем иметь:

$$P = N_1 (f \cos \alpha + \sin \alpha),$$

$$Q = N_2 (f \cos \beta + \sin \beta).$$

Но

$$N_1 = N_2,$$

поэтому

$$\frac{P}{Q} = \frac{f \cos \alpha + \sin \alpha}{f \cos \beta + \sin \beta} = \frac{\operatorname{tg} \varphi \cos \alpha + \sin \alpha}{\operatorname{tg} \varphi \cos \beta + \sin \beta} = \frac{\sin \varphi \cos \alpha + \cos \varphi \sin \alpha}{\sin \varphi \cos \beta + \cos \varphi \sin \beta} = \frac{\sin (\varphi + \alpha)}{\sin (\varphi + \beta)},$$

откуда

$$Q = P \frac{\sin (\varphi + \beta)}{\sin (\varphi + \alpha)}.$$

Пример 32. Подъемное приспособление состоит из двух жестких прямоугольных рычагов ACB и DKE , скрепленных шарнирно с поперечной CK . Верхние подушки, соединенные с этими рычагами при помощи шарниров A и D , раздвигаются клином M , а нижние подушки, вращающиеся на шарнирах B и E , зажимают поднимаемый груз весом P . Определить силу, растягивающую поперечину CK , и наименьший коэффициент трения f , нижних подушек о стенки груза, при котором, груз может быть удержан, если заданы коэффициент трения f между верхними подушками и клином, углы α и β и длины $AC = DK = l_1$, $CB = KE = l_2$. Весом приспособления пренебречь (рис. 56).

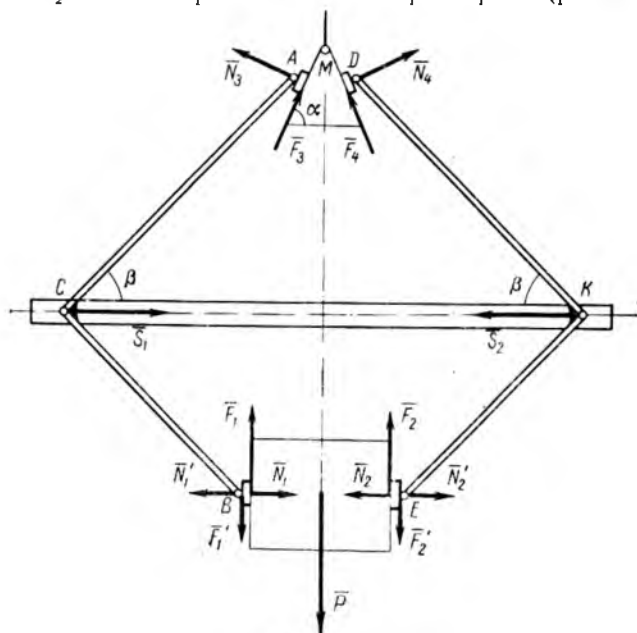


Рис. 56

Решение. Система состоит из трех тел: двух рычагов ACB и DKE и поднимаемого груза. Обозначим силы давления рычагов на груз в точках B и E , направленные перпендикулярно к стенкам груза, через N_1 и N_2 , а нормальные реакции груза, приложенные к рычагам BCA и EKD , — через N_3 и N_4 . Тогда $N_1 = -N_3$ и $N_2 = -N_4$. Силы трения F_1 и F_2 , приложенные к грузу, направлены по вертикали вверх, а к подушкам рычагов приложены соответственно силы трения F'_1 и F'_2 , причем $F'_1 = -F_1$ и $F'_2 = -F_2$. В точках A и D к верхним по-

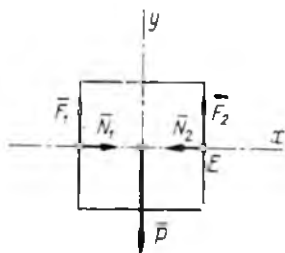


Рис. 57

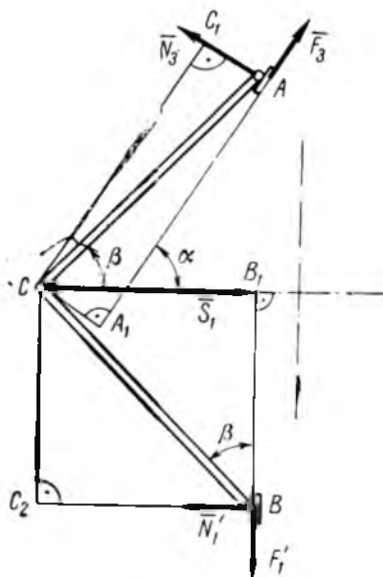


Рис. 58

душкам приложены нормальные реакции N_3 и N_4 , клина, направленные перпендикулярно к его боковым поверхностям, и силы трения F_1 и F_2 , направленные перпендикулярно к силам N_3 и N_4 вверх. По формулам (25) и (26) имеем:

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= f_1 N_3, \\ F_2 &= f_2 N_4, \end{aligned} \right\} \quad (a) \quad \left. \begin{aligned} F_3 &= f N_1, \\ F_4 &= f N_2, \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

Из условий равновесия груза под действием веса P , нормальных реакций N_1 и N_2 и сил трения F_1 и F_2 , имеем:

$$N_1 = N_2, \quad F_1 = F_2 = \frac{P}{2}.$$

Тогда

$$N_1 = N_2 = \frac{F_1}{f_1} = \frac{P}{2f_1}. \quad (c)$$

Теперь рассмотрим равновесие рычага ACB под действием сил F_1 , N_1 , N_3 , F_3 и реакции S_1 поперечины CK , направленной вдоль

этой поперечины. Приравнявая нулю сумму проекций всех этих сил на оси x и y и сумму их моментов относительно точки C , имеем:

$$F_3 \cos \alpha - N_3 \sin \alpha + S_1 - N'_1 = 0,$$

$$F_3 \sin \alpha + N_3 \cos \alpha - F'_1 = 0,$$

$$-N'_1 CC_2 - F'_1 CB_1 + F_3 CA_1 + N_3 CC_1 = 0,$$

где $\overline{CC_1} \perp \overline{N_3}$, $\overline{CC_2} \perp \overline{N_1}$, $\overline{CB_1} \perp \overline{F_1}$, $\overline{CA_1} \perp \overline{F_3}$. (рис. 58)
Из треугольника CAC_1 , в котором $\angle CAA_1 = \alpha - \beta$, находим:

$$CC_1 = AA_1 = AC \cos (\alpha - \beta) = l_1 \cos (\alpha - \beta),$$

$$CA_1 = AC \sin (\alpha - \beta) = l_1 \sin (\alpha - \beta).$$

Далее, из треугольника CBB_1 имеем:

$$CB_1 = CB \sin \beta = l_2 \sin \beta,$$

$$BB_1 = CB \cos \beta = l_2 \cos \beta.$$

Кроме того, из уравнений (а), (b) и (с):

$$F_3 = \operatorname{tg} \varphi N_3, \quad N'_1 = N_1 = \frac{P}{2f_1},$$

где φ — угол трения между верхними подушками и клином.

Уравнения равновесия принимают вид:

$$N_3 (\operatorname{tg} \varphi \cos \alpha - \sin \alpha) + S_1 - \frac{P}{2f_1} = 0,$$

$$N_3 (\operatorname{tg} \varphi \sin \alpha + \cos \alpha) = \frac{P}{2},$$

$$N_3 l_1 [\cos (\alpha - \beta) + \operatorname{tg} \varphi \sin (\alpha - \beta)] = \frac{Pl_2}{2} \left(\frac{\cos \beta}{f_1} + \sin \beta \right).$$

Так как

$$\operatorname{tg} \varphi \cos \alpha - \sin \alpha = \frac{\sin (\varphi - \alpha)}{\cos \varphi},$$

$$\operatorname{tg} \varphi \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\cos (\varphi - \alpha)}{\cos \varphi},$$

$$\operatorname{tg} \varphi \sin (\alpha - \beta) + \cos (\alpha - \beta) = \frac{\cos (\varphi - \alpha + \beta)}{\cos \varphi},$$

то окончательно имеем:

$$1) \quad N_3 \frac{\sin (\varphi - \alpha)}{\cos \varphi} + S_1 = \frac{P}{2f_1};$$

$$2) \quad N_3 \frac{\cos (\varphi - \alpha)}{\cos \varphi} = \frac{P}{2};$$

$$3) \quad N_3 l_1 \frac{\cos (\varphi - \alpha + \beta)}{\cos \varphi} = \frac{Pl_2}{2} \left(\frac{\cos \beta}{f_1} + \sin \beta \right).$$

Из уравнения (2) находим:

$$N_s = \frac{P \cos \varphi}{2 \cos (\varphi - \alpha)}.$$

Подставив найденное значение N_s в уравнения 1 и 3, находим из этих уравнений f_1 и S_1 :

$$\frac{P}{2} \operatorname{tg} (\varphi - \alpha) + S_1 = \frac{P}{2 f_1},$$

$$\frac{l_1 \cos (\varphi - \alpha + \beta)}{l_2 \cos \beta \cos (\varphi - \alpha)} = \frac{1}{f_1} + \operatorname{tg} \beta,$$

откуда

$$f_1 = \frac{l_2}{l_1 + [l_1 \operatorname{tg} (\alpha - \varphi) - l_2] \operatorname{tg} \beta},$$

$$S_1 = \frac{P}{2} \left[\frac{1}{f_1} - \operatorname{tg} (\varphi - \alpha) \right] = \frac{P}{2 l_2} [l_1 - l_2 \operatorname{tg} \beta + (l_1 \operatorname{tg} \beta + l_2) \operatorname{tg} (\alpha - \varphi)].$$

Г л а в а IV

СИСТЕМА СИЛ, РАСПОЛОЖЕННЫХ КАК УГОДНО В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. МОМЕНТ СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ТОЧКИ КАК ВЕКТОР И МОМЕНТ СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ

При изучении системы сил в пространстве момент силы $\vec{F}$ относительно точки O изображается вектором, приложенным в точке O , перпендикулярным к плоскости π , в которой лежат сила $\vec{F}$ и точка O , и направленным так, чтобы наблюдатель, смотрящий с конца этого вектора на плоскость π , видел силу $\vec{F}$ направленной по отношению к точке O против часовой стрелки.

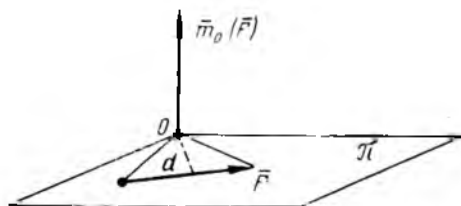


Рис. 59

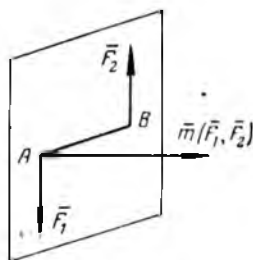


Рис. 60

Модуль этого момента равен произведению силы F на длину перпендикуляра d , опущенного из точки O на линию действия этой силы (рис. 59).

Аналогично в виде вектора изображается и момент пары, а именно: вектор-момент пары перпендикулярен к плоскости этой

пары и направлен так, что наблюдатель, смотрящий на пару с конца этого вектора, видел направление вращения, вызываемого парой, против часовой стрелки.

Абсолютное значение момента пары равно произведению модуля одной из сил пары на плечо этой пары (рис. 60). Вектор-момент пары равен вектору-моменту одной из сил пары относительно точки приложения второй силы этой пары.

Кроме момента силы относительно точки, при изучении системы сил в пространстве приходится рассматривать также и момент силы относительно той или иной оси.

Моментом силы $\vec{F}$ относительно данной оси называется алгебраическое значение момента проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную к этой оси, относительно точки пересечения оси с этой плоскостью.

Следовательно, чтобы найти момент силы $\vec{F}$ относительно оси z , нужно спроектировать силу $\vec{F}$ на плоскость, перпендикулярную к оси z и проведенную через произвольную точку O , лежащую на этой оси, и затем полученную проекцию $\vec{f}$ умножить на длину h перпендикуляра, опущенного из точки O на линию действия проекции $\vec{f}$. При этом произведение fh берется со знаком плюс или минус (рис. 61).

Таким образом,

$$m_z(\vec{F}) = \pm m_O(\vec{f}) = \pm fh. * \quad (28)$$

Знак момента силы относительно данной оси выбирается следующим образом: если наблюдатель, смотрящий с положительного конца оси, видит проекцию $\vec{f}$ направленной по отношению к точке O против часовой стрелки, то момент силы $\vec{F}$ относительно этой оси считается положительным. В противном случае этот момент считается отрицательным. Поэтому на рис. 61 момент силы $\vec{F}$ относительно оси z положителен.

Из формулы (28) следует, что момент силы относительно оси z равен нулю, если $f=0$, или $h=0$, т. е. когда сила $\vec{F}$

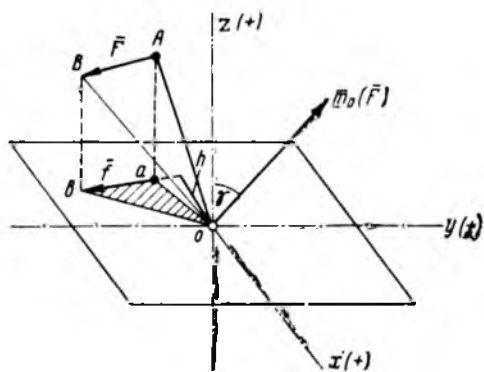


Рис. 61

* Здесь и в дальнейшем под $m_O(\vec{f})$ понимается модуль момента вектора $\vec{f}$ относительно точки O .

параллельна оси либо когда линия действия этой силы пересекает данную ось.

Моменты силы $\vec{F}$ относительно трех координатных осей x , y и z выражаются следующими формулами:

$$\left. \begin{aligned} m_x(\vec{F}) &= yZ - zY, \\ m_y(\vec{F}) &= zX - xZ, \\ m_z(\vec{F}) &= xY - yX, \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

где X , Y , Z — проекции силы $\vec{F}$ на координатные оси, а x , y , z — координаты точки приложения силы.

Между моментом силы $\vec{F}$ относительно данной оси и вектором моментом той же силы относительно какой-нибудь точки, лежащей на этой оси, существует следующая зависимость: проекция вектора-момента силы $\vec{F}$ относительно произвольной точки O на какую-либо ось, проходящую через эту точку, равна моменту силы $\vec{F}$ относительно этой оси, т. е.

$$m_z(\vec{F}) = m_O(\vec{F}) \cos \gamma,$$

Пример 33. К вершинам C , B и D куба со стороной a приложены равные по модулю силы $\vec{P}$, $\vec{S}$ и $\vec{Q}$, направленные соответственно по стороне

BE и по диагоналям DA и DK . Найти моменты каждой из этих сил относительно координатных осей x , y и z (рис. 62).

Решение. *Первый способ (геометрический).* При вычислении моментов нескольких сил относительно координатных осей следует сначала выделить те силы, которые пересекают одну из координатных осей или ей параллельны, так как в этих случаях момент

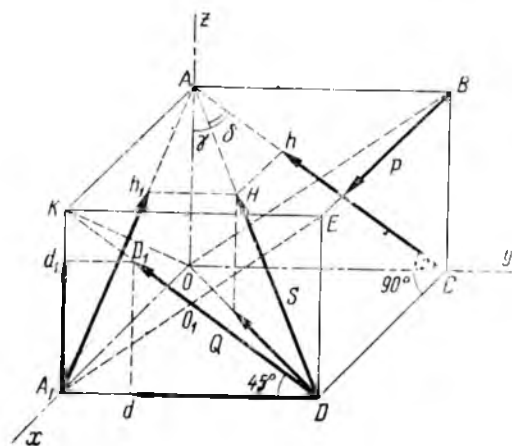


Рис. 62

силы относительно оси равен нулю. Сила $\vec{P}$ параллельна оси x , а сила $\vec{S}$ пересекает ось z , а потому $m_x(\vec{P}) = 0$ и $m_z(\vec{S}) = 0$. Далее следует выделить те силы, которые расположены в плоскости, перпендикулярной к одной из координатных

осей; в этом случае момент силы относительно такой оси по абсолютной величине равен моменту силы относительно точки пересечения этой оси с перпендикулярной к ней плоскостью, в которой расположена эта сила.

Сила $\bar{Q}$ лежит в плоскости $KEDA_1$, перпендикулярной к оси x , причем A_1 — точка пересечения оси x с этой плоскостью. Так как $A_1E \perp KD$, то плечо силы $\bar{Q}$ относительно точки A_1 равно $A_1O_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}a$. Следовательно, $m_{A_1}(\bar{Q}) = \frac{\sqrt{2}}{2}aQ$. Для наблюдателя, смотрящего с положительного конца оси x на плоскость A_1DEK , сила $\bar{Q}$ стремится вращать куб вокруг оси x против часовой стрелки, поэтому момент силы $\bar{Q}$ относительно оси x положителен, и, следовательно, $m_x(\bar{Q}) = m_{A_1}(\bar{Q}) = \frac{\sqrt{2}}{2}aQ$.

Аналогично вычисляются моменты силы $\bar{P}$ относительно осей y и z , так как сила $\bar{P}$ расположена в плоскости $EBCD$, перпендикулярной к оси y , и в плоскости $ABEK$, перпендикулярной к оси z :

$$\begin{aligned} m_y(\bar{P}) &= m_C(\bar{P}) = P \cdot CB = Pa, \\ m_z(\bar{P}) &= -m_A(\bar{P}) = -P \cdot AB = -Pa. \end{aligned}$$

Теперь переходим к вычислению моментов силы $\bar{Q}$ относительно осей y и z и моментов силы $\bar{S}$ относительно осей x и y .

Чтобы вычислить момент силы $\bar{Q}$ относительно оси y , следует сначала эту силу спроектировать на координатную плоскость zOx . Для этого следует из начала D и конца D_1 силы $\bar{Q}$ провести прямые, параллельные оси y , до пересечения с плоскостью zOx в точках A_1 и d_1 . Тогда вектор $\overline{A_1d_1} = \bar{Q}_{x_2}$ является проекцией силы $\bar{Q}$ на плоскость xOz . Плечо этой проекции относительно точки O равно $OA_1 = a$. Для наблюдателя, смотрящего с положительного конца оси y на плоскость zOx , сила $\bar{Q}_{x_2}$ стремится вращать куб вокруг оси y по часовой стрелке, поэтому момент силы $\bar{Q}$ относительно оси y отрицателен, и, следовательно,

$$m_y(\bar{Q}) = -Q_{x_2}a.$$

Но

$$Q_{x_2} = Q \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}Q,$$

а потому

$$m_y(\bar{Q}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}aQ.$$

Для вычисления момента силы $\bar{Q}$ относительно оси z спроектируем эту силу на плоскость xOy ; для этого из конца D_1 силы

$\bar{Q}$ проведем прямую, параллельную оси z , до пересечения с плоскостью xOy в точке d . Тогда вектор $\overline{Dd} = \bar{Q}_{xy}$ является проекцией силы $\bar{Q}$ на плоскость xOy . Плечо силы Q_{xy} относительно точки O равно $OA_1 = a$. Так как момент силы $\bar{Q}$ относительно оси z отрицателен, то

$$m_z(\bar{Q}) = -m_o(\bar{Q}_{xy}) = -Q_{xy}a.$$

Но

$$Q_{xy} = Q \cos 45^\circ = Q \frac{\sqrt{2}}{2},$$

а потому

$$m_z(\bar{Q}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} aQ.$$

Чтобы вычислить моменты силы $\bar{S} = \overline{DH}$ относительно осей x и y , находим проекции этой силы $S_{yz} = \overline{Ch}$ и $S_{xz} = \overline{A_1h_1}$ на координатные плоскости yOz и xOz . Так как грани куба являются квадратами, то $OB \perp Ch$ и $OK \perp A_1h_1$, а потому

$$m_x(\bar{S}) = S_{yz} \frac{OB}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} aS_{yz},$$

$$m_y(\bar{S}) = -S_{xz} \frac{OK}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} aS_{xz}.$$

Далее

$$S_{xz} = S_{yz} = S \cos \delta;$$

из прямоугольного треугольника DAC находим

$$\cos \delta = \frac{AC}{AD} = \frac{a \sqrt{2}}{a \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Следовательно,

$$m_x(\bar{S}) = \frac{\sqrt{3}}{3} aS,$$

$$m_y(\bar{S}) = -\frac{\sqrt{3}}{3} aS.$$

Второй способ (аналитический). Под аналитическим способом определения моментов силы относительно координатных осей понимается вычисление этих моментов по формуле (29). При этом нужно предварительно найти (если они не заданы) координаты точки приложения силы и ее проекции на оси координат. Принимая во внимание, что сила $\bar{P}$ параллельна оси x , сила $\bar{Q}$ перпендикулярна к этой оси и составляет с осями y и z углы 45° , получим:

$$P_x = P, \quad P_y = P_z = 0, \quad Q_x = 0, \quad Q_y = -Q \cos 45^\circ =$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} Q, \quad Q_z = Q \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} Q.$$

Обозначим угол $\angle DAO$ через γ . Тогда $S_x = S \cos \gamma$. Чтобы вычислить проекции силы $\bar{S}$ на оси x и y , спроектируем эту силу на плоскость xOy , а затем полученную проекцию S_{xy} , направленную по прямой DO , спроектируем на оси x и y . Тогда имеем:

$$S_{xy} = S \sin \gamma, \quad S_x = -S_{xy} \cos 45^\circ, \\ S_y = -S_{xy} \cos 45^\circ,$$

$$\text{или } S_x = S_y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \gamma S.$$

Из прямоугольного треугольника OAD находим:

$$\cos \gamma = \frac{OA}{AD} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \\ \sin \gamma = \frac{OD}{AD} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Значения координат точек приложения заданных сил, которые находим непосредственно из чертежа, и значения моментов этих сил, вычисляемые по формулам (29), указаны в табл. 6 и 7.

Таблица 6

Точка приложения силы	Координаты		
	x	y	z
B	0	a	a
D	a	a	0

Таблица 7

Сила	Моменты сил относительно координатных осей		
	$m_z = yZ - zY$	$m_y = zX - xZ$	$m_x = xY - yX$
$\bar{P}$	0	Pa	$-Pa$
$\bar{Q}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} aQ$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} aQ$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} aQ$
$\bar{S}$	$\frac{\sqrt{3}}{3} aS$	$-\frac{\sqrt{3}}{3} aS$	0

Таким образом, момент силы относительно координатной оси можно вычислить двумя способами:

1) аналитическим способом, пользуясь формулами (29), выражающими искомый момент силы через проекции этой силы на координатные оси и через координаты точки ее приложения;

2) геометрическим способом.

При геометрическом способе определения момента силы относительно координатной оси следует различать три случая:

1) сила лежит в координатной плоскости, перпендикулярной к координатной оси, относительно которой вычисляется момент, тогда момент силы относительно этой оси равен по модулю ее моменту относительно начала координат;

2) через линию действия силы можно провести плоскость, перпендикулярную к одной из координатных осей, тогда момент силы относительно такой оси равен по модулю моменту силы относительно точки пересечения этой плоскости с данной координатной осью;

3) если сила не лежит в плоскости перпендикулярной к данной координатной оси, то следует эту силу спроектировать на координатную плоскость, перпендикулярную к данной оси, и вычислить момент полученной проекции относительно начала координат.

§ 2. ПРИВЕДЕНИЕ ПРОИЗВОЛЬНОЙ СИСТЕМЫ СИЛ К ДАННОМУ ЦЕНТРУ

(задачи 232—240)

Если задана система сил $\vec{F}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), расположенных как угодно в пространстве, то эти силы можно привести к произвольно выбранному центру O . В результате такого приведения, как и в случае плоской системы сил, получим одну силу $\vec{R}$, приложенную в центре приведения O и равную главному вектору данной системы сил, и одну пару с вектором-моментом $\vec{M}_O$, равным главному моменту этой системы сил относительно центра O .

Следовательно, будем иметь:

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_i; \quad \vec{M}_O = \sum \vec{m}_O(\vec{F}_i).$$

Аналитически модуль и направление векторов $\vec{R}$ и $\vec{M}_O$ определяются по их проекциям на координатные оси x , y и z , начало которых находится в центре приведения O , причем

$$\begin{aligned} R_x &= \sum X_i, \\ R_y &= \sum Y_i, \\ R_z &= \sum Z_i, \\ M_{Ox} &= \sum m_x(\vec{F}_i), \\ M_{Oy} &= \sum m_y(\vec{F}_i), \\ M_{Oz} &= \sum m_z(\vec{F}_i). \end{aligned} \tag{30}$$

Отсюда имеем:

$$\left. \begin{aligned} R &= \sqrt{(\sum X_i)^2 + (\sum Y_i)^2 + (\sum Z_i)^2} \\ \cos(R, \bar{i}) &= \frac{R_x}{R} = \frac{\sum X_i}{R} \\ \cos(\bar{R}, \bar{j}) &= \frac{R_y}{R} = \frac{\sum Y_i}{R} \\ \cos(\bar{R}, \bar{k}) &= \frac{R_z}{R} = \frac{\sum Z_i}{R} \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

$$\left. \begin{aligned} M_o &= \sqrt{[\sum m_x(\bar{F}_i)]^2 + [\sum m_y(\bar{F}_i)]^2 + [\sum m_z(\bar{F}_i)]^2} \\ \cos(\bar{M}_o, \bar{i}) &= \frac{M_{ox}}{M_o} = \frac{\sum m_x(\bar{F}_i)}{M_o} \\ \cos(\bar{M}_o, \bar{j}) &= \frac{M_{oy}}{M_o} = \frac{\sum m_y(\bar{F}_i)}{M_o} \\ \cos(\bar{M}_o, \bar{k}) &= \frac{M_{oz}}{M_o} = \frac{\sum m_z(\bar{F}_i)}{M_o} \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Модуль и направление главного вектора не зависят от выбора центра приведения. Поэтому главный вектор является первым инвариантом данной системы сил. Модуль и направление главного момента $\bar{M}_o$ изменяются с изменением центра приведения.

Но скалярное произведение $\bar{R} \cdot \bar{M}_o$ главного вектора и главного момента не зависит от выбора центра приведения, т. е. является вторым инвариантом данной системы сил. При этом $\bar{R} \cdot \bar{M}_o = RM_o \cos \varphi$, где φ — угол

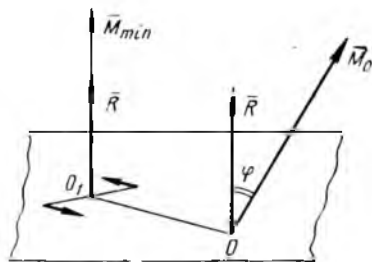


Рис. 63

между направлениями главного вектора $\bar{R}$ и главного момента $\bar{M}_o$. Выражая это скалярное произведение через проекции векторов $\bar{R}$ и $\bar{M}_o$, имеем:

$$\bar{R} \cdot \bar{M}_o = R_x M_{ox} + R_y M_{oy} + R_z M_{oz}. \quad (33)$$

Если второй инвариант данной системы сил не равен нулю, то эта система приводится к динаме, т. е. к паре и к силе, перпендикулярной к плоскости этой пары (рис. 63).

Прямая, проходящая через точку O_1 , по которой направлены векторы $\bar{R}$ и $\bar{M}_o$, называется центральной осью данной системы сил. При этом отрезок OO_1 перпендикулярен к векторам $\bar{R}$

$\bar{M}_O$, а его длина равна:

$$OO_1 = \frac{M_O \sin \varphi}{R}.$$

При перемещении центра приведения по центральной оси главный момент данной системы не изменяется, т. е. остается равным M_O , причем его модуль является наименьшим по сравнению с модулем главного момента данной системы сил относительно всякого другого центра приведения, не лежащего на центральной оси.

Величина этого наименьшего момента определяется по формуле

$$M_{\min} = M_O \cos \varphi = \frac{M_O R \cos \varphi}{R} = \frac{\bar{R} \cdot \bar{M}_O}{R}. \quad (34)$$

Аналитически положение центральной оси определяется с помощью уравнений, которые имеют следующий вид:

$$\frac{M_{Ox} - (yR_z - zR_y)}{R_x} = \frac{M_{Oy} - (zR_x - xR_z)}{R_y} = \frac{M_{Oz} - (xR_y - yR_x)}{R_z}, \quad (35)$$

где x , y и z — текущие координаты точки, лежащей на центральной оси.

Может оказаться, что скалярное произведение $\bar{R} \cdot \bar{M}_O$ равно нулю, но каждый из сомножителей отличен от нуля. В этом случае главный момент перпендикулярен главному вектору, т. е. сила и пара, получающаяся в результате приведения данной системы сил к центру O , лежат в одной плоскости.

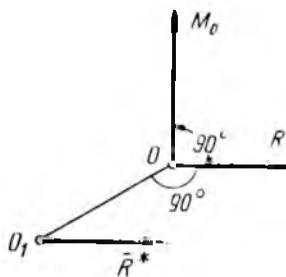


Рис. 64

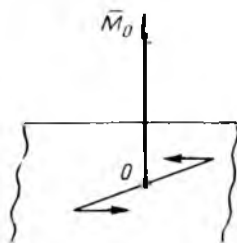


Рис. 65

В этом случае, как уже было указано в § 1 гл. II, система приводится к равнодействующей, $\bar{R}^* = \bar{R}$, которая проходит через точку O_1 , лежащую на перпендикуляре, к векторам $\bar{R}$ и $\bar{M}_O$ на расстоянии $OO_1 = \frac{M_O}{R}$ (рис. 64). Если $M_O = 0$ и $R \neq 0$, то система сил приводится, очевидно, к одной равнодействующей силе $\bar{R}$, проходящей через центр приведения O .

Если же $R=0$, а $M_0 \neq 0$, то заданная система сил приводится к одной паре с моментом $\bar{M}_0$; в этом случае главный момент системы не изменяется с изменением центра приведения, т. е. относительно любого центра приведения главный момент будет равен M_0 (рис. 65).

Наконец, если главный вектор $\bar{R}$ и главный момент $\bar{M}_0$ одновременно равны нулю, то данная система находится в равновесии.

Эти результаты можно расположить в табл. 8.

Таблица 8

$\bar{R} \cdot \bar{M}_0 \neq 0$	$\bar{R} \cdot \bar{M}_0 = 0$			
	$R \neq 0$ $M_0 \neq 0$	$R = 0$ $M \neq 0$	$R \neq 0$ $M_0 = 0$	$R = 0$ $M_0 = 0$
Система сил приводится к динаме	Система сил приводится к равнодействующей $\bar{R}^* = \sum \bar{F}_i$, не проходящей через центр приведения O	Система сил приводится к одной паре, момент которой равен $\sum m_O(\bar{F}_i)$ и не зависит от выбора центра приведения O	Система сил приводится к равнодействующей $\bar{R} = \sum \bar{F}_i$, проходящей через центр приведения O	Система сил находится в равновесии

Пример 34. Даны три силы $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3$, приложенные в точках $A_1(0; 2; 1), A_2(1; -1; 3), A_3(2; 3; 1)^*$, и их проекции на координатные оси (в ньютонах).

Силы	Проекция		
	x	y	z
$\bar{P}_1$	3	5	4
$\bar{P}_2$	-2	2	-6
$\bar{P}_3$	-4	-7	2

Привести эту систему сил к началу координат.

Решение. Определим сначала проекции главного вектора и главного момента на координатные оси:

$$R_x = \sum X_i = 3 - 2 - 4 = -3,$$

$$R_y = \sum Y_i = 5 + 2 - 7 = 0,$$

$$R_z = \sum Z_i = 4 - 6 + 2 = 0.$$

* Координаты заданы в метрах.

Для вычисления моментов сил $\bar{P}_i$ относительно координатных осей воспользуемся формулами (29). Тогда имеем:

$$M_{Ox} = \sum (y_i Z_i - z_i Y_i) = (-5 \cdot 1 + 4 \cdot 2) + \\ + [(-1) \cdot (-6) - 3 \cdot 2] + [3 \cdot 2 - 1 \cdot (-7)] = 3 + 0 + 13 = 16,$$

$$M_{Oy} = \sum (z_i X_i - x_i Z_i) = (1 \cdot 3 - 0 \cdot 4) + [3 \cdot (-2) - 1 \cdot (-6)] + \\ + [-2 \cdot 2 + 1 \cdot (-1)] = 3 + 0 - 5 = -2,$$

$$M_{Oz} = \sum (x_i Y_i - y_i X_i) = (0 \cdot 5 - 2 \cdot 3) + [1 \cdot 2 - (-1) \cdot (-2)] + \\ + [2 \cdot (-7) - 3 \cdot (-1)] = -6 + 0 - 11 = -17$$

Теперь по найденным проекциям определяем величину главного вектора и главного момента:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = 0,$$

$$M_O = \sqrt{M_{Ox}^2 + M_{Oy}^2 + M_{Oz}^2} = \sqrt{16^2 + 2^2 + 17^2} = 23,4 \text{ н} \cdot \text{м}.$$

Для определения направления главного момента находим его направляющие косинусы:

$$\cos(\bar{M}_O, \bar{i}) = \frac{M_{Ox}}{M_O} = \frac{16}{23,4} = 0,683$$

$$\cos(\bar{M}_O, \bar{j}) = \frac{M_{Oy}}{M_O} = \frac{-2}{23,4} = -0,085,$$

$$\cos(\bar{M}_O, \bar{k}) = \frac{M_{Oz}}{M_O} = \frac{-17}{23,4} = -0,726.$$

Так как главный вектор данной системы сил равен нулю, то эта система сил приводится к одной паре с моментом $\bar{M}_O$, причем этот момент не изменяется с изменением центра приведения.

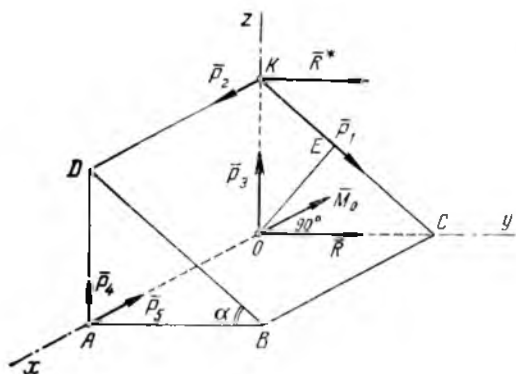


Рис. 66

Пример 35. По ребрам призмы действуют, как указано на рис. 66, силы $P_1 = 40$, $P_2 = 10$, $P_3 = 15$, $P_4 = 5$ н. Кроме того, дано $OA = 2OK = 20$ см, $\alpha = 30^\circ$. Привести эту систему сил к простейшему виду.

Решение. Выберем систему координатных осей, как указано на рисунке, и найдем проекции главного вектора на координатные

оси:

$$\begin{aligned} R_x &= \sum X_i = P_2 - P_3 = 0, \\ R_y &= \sum Y_i = P_1 \cos \alpha = 40 \cos 30^\circ = 20\sqrt{3}, \\ R_z &= \sum Z_i = P_3 + P_4 - P_1 \sin \alpha = 15 + 5 - 40 \frac{1}{2} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что главный вектор направлен по оси y и равен $20\sqrt{3}$ н.

Приводя данную систему сил к началу координат, найдем проекции M_{Ox} , M_{Oy} , M_{Oz} на оси x , y , z главного момента $\bar{M}_O$ относительно точки O :

$$M_{Ox} = \sum m_x(\bar{P}_i).$$

Так как силы $\bar{P}_1$, $\bar{P}_3$, $\bar{P}_4$ пересекают ось x , а силы $\bar{P}_2$ параллельна этой оси, то моменты этих сил относительно оси x равны нулю и, следовательно,

$$M_{Ox} = m_x(\bar{P}_1).$$

Сила $\bar{P}_1$ лежит в плоскости zOy , причем наблюдатель, смотрящий с положительного конца этой оси, видит силу $\bar{P}_1$ направленной относительно точки O по часовой стрелке, поэтому

$$m_x(\bar{P}_1) = -P_1 OE = -P_1 OK \cos \alpha = -3,46 \text{ н} \cdot \text{м}.$$

Далее

$$M_{Oy} = \sum m_y(\bar{P}_i).$$

Силы $\bar{P}_1$, $\bar{P}_3$, $\bar{P}_4$ пересекают ось y , поэтому их моменты относительно этой оси равны нулю.

Следовательно,

$$M_{Oy} = m_y(\bar{P}_2) + m_y(\bar{P}_3).$$

Силы $\bar{P}_2$ и $\bar{P}_4$ лежат в плоскости zx , поэтому

$$m_y(\bar{P}_2) = P_2 OK = 1 \text{ н} \cdot \text{м}$$

и

$$m_y(\bar{P}_4) = -P_4 OA = -1 \text{ н} \cdot \text{м}.$$

Итак,

$$M_{Oy} = P_2 OK - P_4 OA = 10 \cdot 0,1 - 5 \cdot 0,2 = 0.$$

Так как силы $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$, $\bar{P}_3$, $\bar{P}_4$ пересекают ось z , а сила $\bar{P}_1$ параллельна этой оси, а потому момент каждой из этих сил относительно оси z равен нулю, следовательно,

$$M_{Oz} = \sum m_z(\bar{P}_i) = 0.$$

Так как

$$M_{Ox} = M_{Oy} = M_{Oz} = 0,$$

то главный момент $\bar{M}_O$ направлен по оси x и

$$M_O = \sqrt{M_{Ox}^2 + M_{Oy}^2 + M_{Oz}^2} = 3,46 \text{ н} \cdot \text{м}.$$

Таким образом, данная система сил эквивалентна силе $\bar{R}$, приложенной в точке O , и паре с моментом $\bar{M}_O$.

Остается теперь выяснить, к какому простейшему виду можно привести данную систему сил: к одной равнодействующей силе или к динаме. Так как главный вектор $\bar{R}$ перпендикулярен главному моменту $\bar{M}_O$, то сила $\bar{R}$ и пара (с моментом $\bar{M}_O$) лежат в одной плоскости zOy , поэтому они приводятся к одной равнодействующей силе $\bar{R}^*$, равной и параллельной силе $\bar{R}$ и приложенной в точке O_1 . Найдем эту точку O_1 .

Для этого нужно на прямой, проведенной из точки O и перпендикулярной к векторам $\bar{R}$ и $\bar{M}_O$, т. е. в данном случае на оси z , отложить отрезок, равный

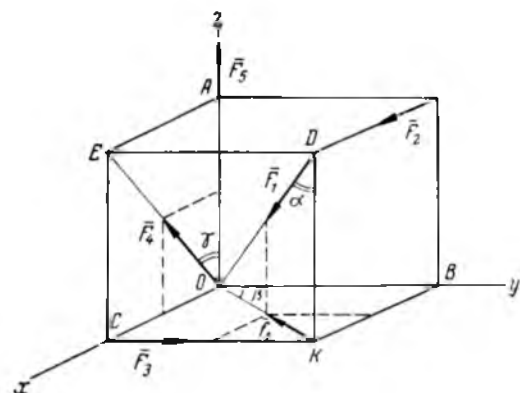
$$OO_1 = \frac{M_O}{R} = \frac{2\sqrt{3}}{20\sqrt{3}} = 0,1 \text{ м.}$$

При этом отрезок OO_1 следует отложить на оси в таком направлении, чтобы, смотря с конца вектора-момента $\bar{M}_O$, можно было видеть равнодействующую силу $\bar{R}^*$, приложенную в точке O_1 , направленной по отношению к точке O против часовой стрелки. Так как $OO_1 = 10$, то точка O_1 совпадает с данной точкой K .

Точка K и будет точкой приложения равнодействующей. Итак, данная система сил приводится к равнодействующей силе $\bar{R}^*$, приложенной в точке K и направленной параллельно оси y , причем

$$R^* = 20\sqrt{3} \text{ н.}$$

Рис. 67



Пример 36. Дана система сил $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$, $\bar{F}_3$,

$\bar{F}_4$, $\bar{F}_5$, приложенных в вершинах прямоугольного параллелепипеда и направленных, как указано на рис. 67, причем

$$F_1 = 60, \quad F_2 = F_3 = 10 \text{ н,}$$

$$F_4 = 10\sqrt{5}, \quad F_5 = 20 \text{ н,}$$

$$OA = OB = 20 \text{ см,} \quad OC = 10 \text{ см.}$$

Привести эту систему сил к простейшему виду.

Решение. Координатные оси x , y , z направим, как ука-

зано на чертеже, и введем следующие обозначения: угол ODK обозначим α , угол KOB — β и угол AOE — γ .

При вычислении проекций заданных сил на координатные оси заметим, что проекции силы $\bar{F}_1$ на оси x и y нужно находить так же, как это было указано в примере № 12, т. е. сначала силу $\bar{F}_1$ следует спроектировать на плоскость xOy и полученную проекцию $\bar{F}_1$ спроектировать затем на оси x и y .

Значения проекций всех заданных сил и координаты их точек приложения расположим в виде табл. 9.

Таблица 9

$\bar{F}_i$	x_i	y_i	z_i	x_i	y_i	z_i
$\bar{F}_1$	$-F_1 \sin \beta =$ $= -F_1 \sin \alpha \sin \beta$	$-F_1 \cos \beta =$ $= -F_1 \sin \alpha \cos \beta$	$-F_1 \cos \alpha$	10	20	20
$\bar{F}_2$	F_2	0	0	0	20	20
$\bar{F}_3$	0	F_3	0	10	0	0
$\bar{F}_4$	$F_4 \sin \gamma$	0	$F_4 \cos \gamma$	0	0	0
$\bar{F}_5$	0	0	F_5	0	0	20

Из прямоугольных треугольников ODK , OCE и OBK находим:

$$\cos \alpha = \frac{DK}{OD} = \frac{20}{\sqrt{10^2 + 20^2 + 20^2}} = \frac{2}{3},$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{\sqrt{5}}{3},$$

$$\cos \beta = \frac{BO}{OK} = \frac{20}{\sqrt{10^2 + 20^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}},$$

$$\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$\sin \gamma = \frac{AE}{OE} = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{и} \quad \cos \gamma = \sqrt{1 - \sin^2 \gamma} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Теперь вычислим проекции главного вектора на координатные оси:

$$\begin{aligned} R_x &= -F_1 \sin \alpha \sin \beta + F_2 + F_4 \sin \gamma = \\ &= -60 \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + 10 + 10 \sqrt{5} \frac{1}{\sqrt{5}} = 0, \end{aligned}$$

$$R_y = -F_1 \sin \alpha \cos \beta + F_3 = -60 \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + 10 = -30,$$

$$R_z = -F_1 \cos \alpha + F_4 \cos \gamma + F_5 = -60 \cdot \frac{2}{3} + 10 + 5 \frac{2}{\sqrt{5}} + 20 = 0.$$

Отсюда видим, что главный вектор $\bar{R}$ направлен по оси y влево и по величине равен 30 н.

Переходим к вычислению главного момента $\bar{M}_O$ относительно центра приведения O .

Сила $\bar{F}_2$ параллельна оси x , а остальные силы пересекают эту ось, поэтому момент каждой силы относительно оси x равен нулю. Следовательно, $M_{Ox} = 0$.

Точно так же момент каждой из сил $\bar{F}_1$, $\bar{F}_3$, $\bar{F}_4$, $\bar{F}_5$ относительно оси y равен нулю, а потому

$$M_{Oy} = m_y(\bar{F}_2) = z_2 X_2 - x_2 Z_2 = 20 F_2 = 200 \text{ н} \cdot \text{см}.$$

Моменты сил $\bar{F}_1$, $\bar{F}_4$, $\bar{F}_5$ относительно оси z равны нулю, так как эти силы пересекают эту ось, следовательно,

$$M_{Oz} = m_z(\bar{F}_2) + m_z(\bar{F}_3) = -20 F_2 + 10 F_3 = -100 \text{ н} \cdot \text{см}.$$

Так как $M_{Ox} = 0$, то главный момент M_O лежит в плоскости zOy и по величине равен

$$M_O = \sqrt{M_{Ox}^2 + M_{Oy}^2 + M_{Oz}^2} = 100 \sqrt{5} \text{ н} \cdot \text{см}.$$

Так как главный вектор и главный момент отличны от нуля, то необходимо выяснить, приводится ли данная система сил к динаме или к одной равнодействующей силе. Для этого вычислим скалярное произведение главного вектора и главного момента:

$$\bar{R} \cdot \bar{M}_O = R_x M_{Ox} + R_y M_{Oy} + R_z M_{Oz} = (-30) 200 = -6000 \text{ н} \cdot \text{см}$$

Так как это произведение не равно нулю, то векторы $\bar{R}$ и $\bar{M}_O$ не перпендикулярны и, следовательно, данная система сил приводится к динаме.

Найдем точку, через которую проходит центральная ось данной системы сил, а также величину главного момента относительно этой точки.

Для этого построим главный вектор $\bar{R}$ и главный момент $\bar{M}_O$ по их проекциям на координатные оси и разложим главный момент по правилу параллелограмма на два составляющих момента $\bar{M}'$ и $\bar{M}''$, из которых $\bar{M}'$ направлен вдоль главного вектора, т. е. по оси y , а $\bar{M}''$ перпендикулярен к нему, т. е. направлен по оси z .

Следовательно,

$$M' = |M_{Oy}| = 2 \text{ н} \cdot \text{м}, \quad M'' = |M_{Oz}| = 1 \text{ н} \cdot \text{м} \quad (\text{рис. 68}).$$

Пара, имеющая момент $\bar{M}''$, лежит в плоскости xOy , т. е. в одной плоскости с главным вектором $\bar{R}$, поэтому одну из

сил $\bar{R}'$ этой пары можно выбрать равной по величине силе $\bar{R}$ и направленной прямо противоположно этой силе. Тогда вторая сила этой пары $\bar{R}^*$ будет приложена в точке O^* , лежащей на оси x , причем плечо пары будет равно

$$OO^* = \frac{M'}{R} = \frac{100}{30} \approx 3,3 \text{ см.}$$

Система, состоящая из силы $\bar{R}$ и пары $(\bar{R}', \bar{R}^*)$, очевидно, эквивалентна одной силе $\bar{R}^*$. Таким образом, заданная система сил эквивалентна силе $\bar{R}^*$ и паре с моментом M' , причем $M' \parallel \bar{R}^*$. Следовательно, заданная система сил приводится к динаме, а точка O^* находится на центральной оси.

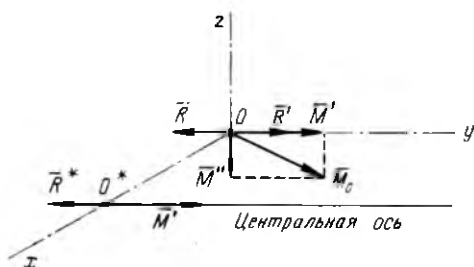


Рис. 65

M' есть наименьший главный момент данной системы сил, т. е.

$$M_{\min} = 200 \text{ н} \cdot \text{см} = 2 \text{ н} \cdot \text{м.}$$

Эту же задачу можно решить другим способом.

После того как определим проекции на координатные оси главного вектора и главного момента, можно составить уравнения центральной оси данной системы сил:

$$\frac{M_{Ox} - (yR_z - zR_y)}{R_x} = \frac{M_{Oy} - (zR_x - xR_z)}{R_y} = \frac{M_{Oz} - (xR_y - yR_x)}{R_z}.$$

Подставляя сюда значения M_{Ox} , M_{Oy} , M_{Oz} и R_x , R_y , R_z , получим:

$$\frac{z(-30)}{0} = \frac{200}{-30} = \frac{-100 - [x(-30)]}{0},$$

откуда

$$z = 0 \text{ и } 30x - 100 = 0,$$

т. е.

$$x = \frac{10}{3}.$$

Эти равенства показывают, что центральная ось проходит через точку $O^* \left(\frac{10}{3}; 0, 0 \right)$ и параллельна оси y . Чтобы найти

модуль наименьшего главного момента, достаточно скалярное произведение $\vec{R} \cdot \vec{M}_O$ разделить на величину главного вектора, т. е.

$$M_{\min} = \frac{\vec{R} \vec{M}_O}{R} = \frac{60}{30} = 2 \text{ н} \cdot \text{м}.$$

§ 3. РАВНОВЕСИЕ СИСТЕМЫ СИЛ В ПРОСТРАНСТВЕ

Для равновесия системы сил, приложенных к твердому телу, в общем случае необходимо и достаточно, чтобы главный вектор $\vec{R}$ этой системы сил и ее главный момент относительно произвольно выбранного центра O были равны нулю т. е.

$$\left. \begin{aligned} \vec{R} &= \sum \vec{F}_i = 0, \\ \vec{M}_O &= \sum m_{O_i}(\vec{F}_i) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Учитывая формулы (30), выражающие проекции главного вектора и проекции главного момента на координатные оси, заключаем, что предыдущие два векторных равенства эквивалентны следующим шести скалярным уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} R_x &= \sum X_i = 0, \\ R_y &= \sum Y_i = 0, \\ R_z &= \sum Z_i = 0, \\ M_{Ox} &= \sum m_x(\vec{F}_i) = 0, \\ M_{Oy} &= \sum m_y(\vec{F}_i) = 0, \\ M_{Oz} &= \sum m_z(\vec{F}_i) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Эти шесть уравнений выражают условия равновесия системы сил в общем случае. В частных случаях число уравнений равновесия может оказаться меньше, так как некоторые из шести уравнений (37) обращаются в тождества.

В настоящем параграфе рассмотрим задачи на равновесие несвободного твердого тела под действием пространственной системы сил, не сходящихся в одной точке. По расположению линий действия всех сил, приложенных к рассматриваемому телу, включая и реакции связей, такие задачи можно разделить на четыре типа: 1) задачи на равновесие пространственной системы параллельных сил; 2) задачи на равновесие пространственной системы сил, образующих систему непараллельных компланарных* векторов; 3) задачи на равновесие системы некомпланарных сил, каждая из которых параллельна одной из координатных осей; 4) задачи на равновесие системы некомпланарных сил в общем случае.

* Компланарными называются векторы, параллельные некоторой плоскости. Если такие векторы приложены в одной точке, то получится система векторов, расположенных в одной плоскости.

Равновесие пространственной системы параллельных сил
(задачи 246—252)

Если все силы, приложенные к рассматриваемому твердому телу, параллельны между собой, то, направляя одну из координатных осей, например ось Oz , параллельно этим силам, имеем три уравнения равновесия:

$$\left. \begin{array}{l} 1) \sum Z_i = 0, \\ 2) \sum m_x(\vec{F}_i) = 0, \\ 3) \sum m_y(\vec{F}_i) = 0. \end{array} \right\} \quad (38)$$

Остальные уравнения обращаются в тождества. Таким образом, число неизвестных в задачах этого типа не должно превышать трех. Оси Ox и Oy , перпендикулярные к направлениям данных сил, следует выбирать так, чтобы моменты сил относительно этих осей вычислялись возможно проще.

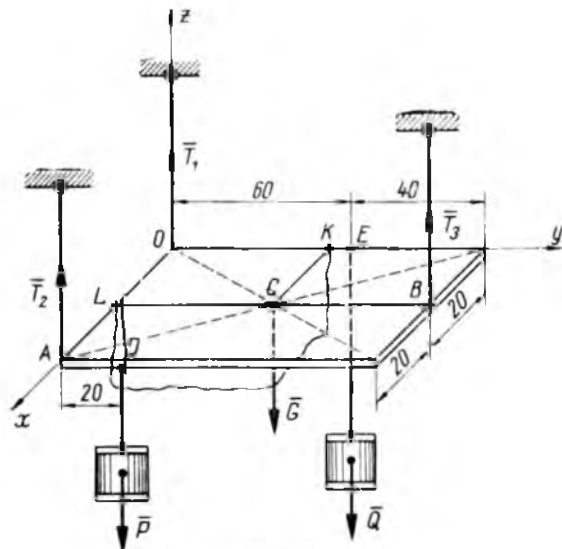


Рис. 69

Пример 37. Однородная прямоугольная плита весом $G = 300$ н подвешена горизонтально на трех вертикальных тросах. К плите подвешены грузы весом $P = 200$ н и $Q = 100$ н. Определить реакции тросов. Размеры в сантиметрах указаны на рис. 69.

Решение. Изобразим в виде векторов заданные силы $\vec{P}$, $\vec{Q}$ и $\vec{G}$, учитывая что центр тяжести C прямоугольника нахо-

дится в точке пересечения его диагоналей, а также реакции связей $\bar{T}_1$, $\bar{T}_2$ и $\bar{T}_3$, направляя последние вдоль тросов и учитывая, что тросы могут работать только на растяжение.

Располагаем, как указано на рис. 69, координатные оси и составляем уравнения равновесия сил (заданных и реакций связей), действующих на плиту. Так как силы $\bar{P}$, $\bar{Q}$, $\bar{G}$, $\bar{T}_1$, $\bar{T}_2$ и $\bar{T}_3$ параллельны оси Oz , то следует составить три уравнения равновесия в форме (38). Проекции сил $\bar{T}_1$, $\bar{T}_2$, $\bar{T}_3$ на ось z положительны, а проекции сил $\bar{P}$, $\bar{Q}$ и $\bar{G}$ отрицательны. Кроме того, силы $\bar{T}_1$ и $\bar{T}_2$ пересекают ось x , а сила $\bar{Q}$ пересекает ось y , поэтому моменты сил $\bar{T}_1$ и $\bar{T}_2$ относительно оси x и момент силы $\bar{Q}$ относительно оси y равны нулю.

Поэтому уравнения равновесия (38) принимают вид:

- 1) $\bar{T}_1 + \bar{T}_2 + \bar{T}_3 - \bar{P} - \bar{Q} - \bar{G} = 0$,
- 2) $m_x(\bar{P}) + m_x(\bar{G}) + m_x(\bar{Q}) + m_x(\bar{T}_3) = 0$,
- 3) $m_y(\bar{P}) + m_y(\bar{G}) + m_y(\bar{T}_2) + m_y(\bar{T}_3) = 0$.

Сила $\bar{P}$ лежит в плоскости, перпендикулярной к оси x , а потому (см. пример 33)

$$m_x(\bar{P}) = -m_A(\bar{P}) = -P \cdot AD.$$

Аналогично силы $\bar{G}$ и $\bar{T}_3$, так же как и сила $\bar{Q}$, лежат в плоскости, перпендикулярной к оси x , а потому

$$m_x(\bar{G}) = -m_L(\bar{G}) = -G \cdot LC,$$

$$m_x(\bar{Q}) = -m_O(\bar{Q}) = -Q \cdot OE,$$

$$m_x(\bar{T}_3) = m_L(\bar{T}_3) = T_3 \cdot LB.$$

Таким же образом вычисляем моменты сил $\bar{P}$, $\bar{G}$, $\bar{T}_2$ и $\bar{T}_1$ относительно оси y .

Для вычисления моментов силы относительно координатных осей можно также воспользоваться аналитическими формулами (29). В этом случае имеем:

$$m_x(\bar{G}) = y_C G_z - z_C G_y - y_L G_z,$$

так как $G_y = 0$.

Но $y_C = 0,5$ м, $G_z = -G$, следовательно,

$$m_x(\bar{G}) = -0,5G, \quad m_y(\bar{G}) = z_L G_x - x_L G_z = -x_C G_z,$$

но

$$x_C = 0,2 \text{ м}, \quad G_z = -G,$$

а потому

$$m_y(G) = -0,2G.$$

Аналогично можно вычислить моменты всех остальных сил относительно осей x и y .

Таким образом, уравнения равновесия переписутся так:

$$\begin{aligned} T_1 + T_2 + T_3 - P - Q - G &= T_1 + T_2 + T_3 - 600 = 0, \\ -20 \cdot 200 - 50 \cdot 300 - 60 \cdot 100 + T_3 \cdot 100 &= 0, \\ -T_3 \cdot 40 + P \cdot 40 + G \cdot 20 - T_2 \cdot 20 &= 0, \end{aligned}$$

или

- 1) $T_1 + T_2 + T_3 = 600$,
- 2) $100T_3 = 25\,000$,
- 3) $40T_2 + 20T_3 = 14\,000$.

Из второго уравнения находим

$$T_3 = 250 \text{ н.}$$

Подставив это значение в первое и третье уравнения, получим:

$$\begin{aligned} T_1 + T_2 &= 350 \text{ н.} \\ 40T_2 + 5000 &= 14\,000, \end{aligned}$$

откуда

$$T_2 = 225 \text{ н. и } T_1 = 125 \text{ н.}$$

Задачи типа II

Равновесие сил, образующих систему непараллельных компланарных векторов

В рассматриваемом случае одну из трех координатных осей (например, ось x) располагают перпендикулярно к данным силам. Сумма проекций этих сил на выбранную таким образом ось тождественно равна нулю ($\sum X_i = 0$), поэтому из шести уравнений равновесия пространственной системы сил остается только пять:

$$\left. \begin{aligned} \sum Y_i &= 0, \\ \sum Z_i &= 0, \\ \sum m_x(\bar{F}_i) &= 0, \\ \sum m_y(\bar{F}_i) &= 0, \\ \sum m_z(\bar{F}_i) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Следовательно, число неизвестных в задаче на равновесие одного тела не должно превышать пяти. Обычно в задачах данного типа приходится рассматривать равновесие тела, имеющего

неподвижную ось вращения. Так, например, тело может быть закреплено на валу, который опирается на два цилиндрических подшипника (рис. 70), причем на тело действуют силы, перпендикулярные к оси вращения. Обычно подшипники конструктивно оформляются так, что препятствуют осевым перемещениям вала (рис. 70, а); применяются также упорные подшипники (рис. 70, б). Однако, если на тело действуют силы, перпендикулярные к оси вала, то вдоль этой оси никаких реакций не возникает и реакции подшипников направлены тоже перпендикулярно к оси вала, т. е. опоры, показанные на рис. 70, а и 70, б, в рассматриваемом частном случае эквивалентны опорам, изображенным на рис. 70, в, где никаких устройств, фиксирующих вал в осевом направлении, нет.

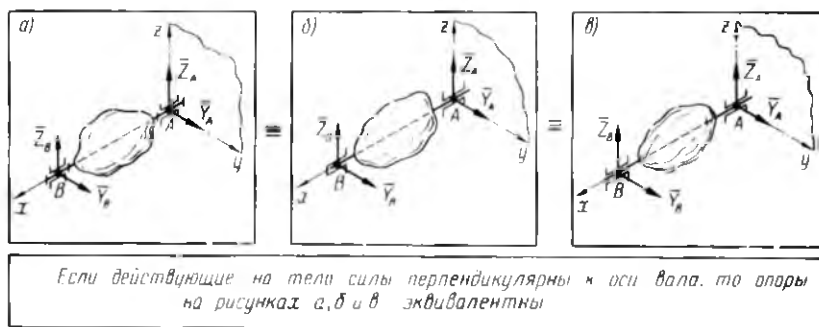


Рис. 70

Ось вала следует принять за одну из координатных осей (например, ось x), тогда две другие оси (y и z) располагаются перпендикулярно к оси вала и реакция каждого подшипника разлагается на два компонента вдоль этих двух осей (см. рис. 70). В некоторых случаях координатные оси можно выбрать так, чтобы каждая сила, действующая на тело, была параллельна одной из координатных осей [см. задачи № 254—256, 261].

Пример 38. Груз Q опускается равномерно при помощи каната, накрученного на барабан радиуса r_D . На общем валу с барабаном заклинено колесо E и тормозной шкив C радиуса r_C . К колесу E приложена пара сил, тормозящая вращение вала, момент которой равен m^* (силы, образующие эту пару, на рисунке не показаны, а направление ее указано круговой стрелкой). Ввиду того, что этот момент не обеспечивает равномерного спуска груза, осуществляется еще притормаживание системы при помощи колодочного тормоза, причем колодка тормоза при-

* В таких случаях обычно говорят короче: «к колесу E приложен тормозящий момент m^* ».

жимается к тормозному шкиву силой P . Определить эту силу, а также реакции подшипников, если коэффициент трения между колодкой и тормозным шкивом равен f . Размеры указаны на рисунке (рис. 71).

Решение. Рассмотрим равновесие вала с закрепленными на нем телами. На вал, кроме реакций подшипников, действуют: вертикальная сила Q натяжения каната, равная весу груза Q ; вертикальная сила P давления колодки на тормозной шкив; сила трения F , направленная по касательной к тормозному шкиву (т. е. в данном случае горизонтально), и, наконец, тормозящий момент m , который можно изобразить в виде вектора, направленного по оси вала. Рассмотренные силы образуют систему вертикальных и горизонтальных векторов, *перпендикулярных* к оси вала (силы, образующие заданную пару, можно направить параллельно оси y , или оси z , так как пару можно расположить как угодно в ее плоскости). Поэтому, принимая точку A за начало координат, ось x направим по оси вала, а две другие оси располагаем, как указано на рисунке (горизонтально и вертикально). Учитывая, что реакции подшипников направлены перпендикулярно к оси вала, разлагаем каждую

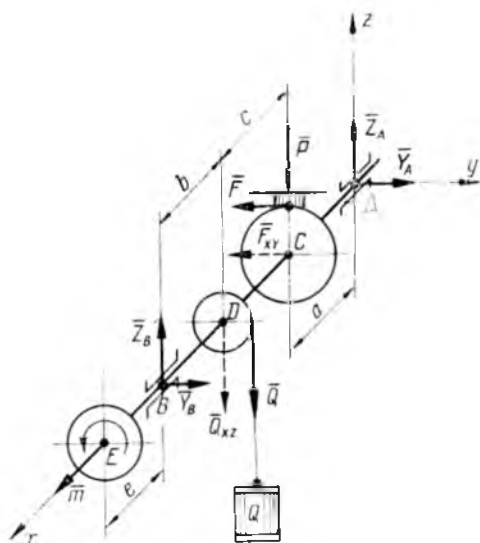


Рис. 71

из них на два компонента вдоль осей y и z . Таким образом, получаем систему сил, расположенных параллельно плоскости yz , причем каждая из них параллельна одной из координатных осей. Поэтому в данной задаче можно составить пять уравнений равновесия по формулам (39). При этом вычисления проекции сил на координатные оси не вызывает трудностей. Остановимся на определении моментов сил относительно этих осей. Силы Z_A , Y_A , Z_B , Y_B и P пересекают ось x , поэтому их моменты относительно этой оси равны нулю. Точно так же силы Y_A и Z_A пересекают каждую из осей y и z , а потому их моменты относительно этих осей равны нулю. Силы P , Q , Z_B парал-

дельны оси z , а силы F и $\bar{Y}_B$ параллельны оси y , поэтому

$$m_z(P) = m_z(Q) = m_z(Z_B) = 0, \quad m_y(F) = m_y(\bar{Y}_B) = 0.$$

Следовательно, уравнения равновесия (39) принимают вид:

- 1) $Y_A + Y_B - F = 0^*$,
- 2) $Z_A + Z_B - P - Q = 0$,
- 3) $m_x(F) + m_x(Q) + m = 0$,
- 4) $m_y(P) + m_y(\bar{Q}) + m_y(Z_B) = 0$,
- 5) $m_z(F) + m_z(\bar{Y}_B) = 0$.

При составлении этих уравнений учтено, что *сумма моментов сил, образующих пару, относительно какой-либо оси равна проекции вектора-момента пары на эту ось*. Поэтому тормозящий момент m вошел лишь в уравнение (3), так как вектор m проектируется на ось x в свою натуральную величину, а на остальные две оси его проекции равны нулю.

Найдем теперь моменты сил F и Q относительно оси x ; эти силы расположены в плоскостях, перпендикулярных к оси x , поэтому

$$m_x(F) = m_c(\bar{F}) = Fr_c$$

и

$$m_x(Q) = -m_D(\bar{Q}) = -Qr_D.$$

Далее вычислим моменты сил P , $\bar{Q}$ и $\bar{Z}_B$ относительно оси y ; силы P и $\bar{Z}_B$ расположены в плоскости zAx , перпендикулярной к оси y , поэтому

$$m_y(P) = m_A(P) = Pa;$$

$$m_y(\bar{Z}_B) = -m_A(\bar{Z}_B) = -Z_B(a + b + c).$$

Чтобы вычислить момент силы $\bar{Q}$ относительно оси y , достаточно эту силу спроектировать на плоскость zAx , тогда

$$m_y(\bar{Q}) = m_A(Q_{xz}) = Q_{xz}(a + c) = Q(a + c),$$

так как $Q_{xz} = Q$ (проекция силы $\bar{Q}$ на плоскость zAx показана пунктиром).

Теперь находим моменты сил F и $\bar{Y}_B$ относительно оси z :

$$m_z(F) = -m_A(F_{xy}) = -F_{xy}a = -Fa,$$

* Силы, составляющие пару, приложенную к вороту, в первое и второе уравнения не входят, так как сумма проекций сил пары на любую ось равна нулю.

так как $F_{xy} = F$ (проекция силы F на плоскость xy показана пунктиром),

$$m_z(Y_B) = m_A(Y_B) = Y_B(a + b + c).$$

Таким образом, получим следующие пять уравнений равновесия рассматриваемой системы сил:

$$1) Y_A + Y_B - F = 0,$$

$$2) Z_A + Z_B - P - Q = 0,$$

$$3) Fr_C - Qr_D + m = 0$$

$$4) Pa + Q(a + c) - Z_B(a + b + c) = 0,$$

$$5) -Fa + Y_B(a + b + c) = 0.$$

К составленным выше пяти уравнениям равновесия присоединяется еще одно уравнение, выражающее закон Кулона:

$$6) F = fP.$$

Из третьего уравнения находим:

$$F = \frac{1}{r_C} (Qr_D - m).$$

Тогда из шестого уравнения имеем:

$$P = \frac{F}{f} = \frac{1}{fr_C} (Qr_D - m).$$

Из четвертого уравнения:

$$Z_B = \frac{1}{l} [Pa + Q(a + c)] = \frac{1}{l} \left[\frac{a}{fr_C} (Qr_D - m) + Q(a + c) \right]$$

где

$$l = a + b + c.$$

Из пятого уравнения:

$$Y_B = \frac{a}{lr_C} (Qr_D - m).$$

После этого из первого и второго уравнений нетрудно найти Y_A и Z_B :

$$Y_A = F - Y_B = \frac{l-a}{lr_C} (Qr_D - m),$$

$$Z_A = P + Q - Z_B = (Qr_D - m) \frac{b+c}{lfr_C} + Q \frac{b}{l}.$$

В ряде случаев координатные оси невозможно выбрать так, чтобы каждая из действующих на тело сил была параллельна одной из осей (см. задачи № 251, 257, 260, 262—264, 266, 276, 279—281). Тогда координатные оси следует выбрать так, чтобы наибольшее число сил удовлетворяло этому условию.

Пример 39. Ворота, при помощи которого поднимается груз G , удерживается в равновесии вертикальными силами P и Q , из которых сила Q известна по модулю. Вес ворот равен G_1 , радиус колеса равен r , остальные размеры указаны на рисунке. Определить модуль силы P и реакции подшипников A и B , если угол α известен (рис. 72).

Решение. Рассматриваем равновесие ворот. За начало координат принимаем точку A , ось y направим по оси ворот, а ось z — по вертикали вверх, т. е. параллельно силам P , Q и G_1 ;

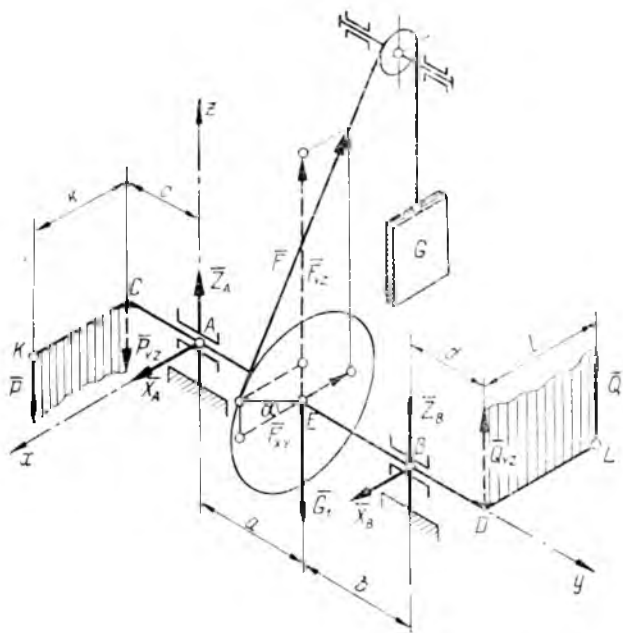


Рис. 72

ось x направим, как указано на рис. 72. Канат мысленно разрежем и заменим его действие на ворот силой F , равной по модулю весу груза, т. е. $F = G$. Каждую из реакций в точках A и B разлагаем на две составляющие, параллельные осям x и z , т. е.

$$R_A = Z_A + X_A, \quad R_B = Z_B + X_B$$

Вычислим моменты действующих на ворот сил относительно координатных осей.

Относительно оси x :

$$m_x(X_A) = m_x(\bar{Z}_A) = 0;$$

$$m_x(P) = m_x(P_{yz}) = P_{yz}c = Pc.$$

(Проекция силы P на плоскость yz , перпендикулярную к оси x , показана пунктиром; очевидно, $P_{yz} = P$.)

$$m_x(F) = m_x(F_{yz}) = F_{yz}a = F \cos \alpha \cdot a.$$

(Проекция силы F на плоскость yz показана на рисунке пунктиром; сила F образует с плоскостью yz угол, равный углу α , а потому $F_{yz} = F \cos \alpha$.)

$$m_x(G_1) = -m_x(G_2) = -G_1a; \quad m_x(Z_B) = m_x(Z_R) = Z_B(a+b);$$

$$m_x(Q) = m_x(Q_{yz}) = Q_{yz}(a+b+d) = Q(a+b+d).$$

Относительно оси y :

$$m_y(X_A) = m_y(\bar{Z}_A) = m_y(X_B) = m_y(Z_B) = m_y(G_1) = 0;$$

$$m_y(P) = m_y(P) = Pk; \quad m_y(F) = -m_y(\bar{F}) = -Fr;$$

$$m_y(Q) = m_D(Q) = Ql.$$

Относительно оси z :

$$m_z(P) = m_z(X_A) = m_z(\bar{Z}_A) = m_z(Z_B) = m_z(G_1) = m_z(Q) = 0;$$

$$m_z(F) = m_z(F_{xy}) = F_{xy}a = F \cos(90^\circ - \alpha)a = F \sin \alpha \cdot a;$$

$$m_z(X_B) = -m_z(X_B) = -X_B(a+b).$$

Учитывая, что $F = G$, составим пять уравнений равновесия рассматриваемой системы сил:

- 1) $X_A - G \cos(90^\circ - \alpha) + X_B = 0,$
- 2) $X_A + Z_B - P - G_1 + Q + G \cos \alpha = 0,$
- 3) $Pc + G \cos \alpha \cdot a - G_1a + Z_B(a+b) + Q(a+b+d) = 0,$
- 4) $Pk - Gr + Ql = 0,$
- 5) $G \sin \alpha \cdot a - X_B(a+b) = 0.$

Из пятого уравнения имеем:

$$X_B = \frac{a}{a+b} G \sin \alpha.$$

Из четвертого уравнения находим:

$$P = \frac{1}{k} (Gr - Ql).$$

Из третьего уравнения:

$$Z_B = \frac{1}{a+b} \left[G_1a - \frac{c}{k} (Gr - Ql) - Ga \cos \alpha - Q(a+b+d) \right].$$

Подставив найденные значения X_B и Z_B в первые два уравнения равновесия, находим из этих уравнений X_A и Z_A :

$$X_A = G \sin \alpha - X_B = G \sin \alpha \left(1 - \frac{a}{a+b} \right) = \frac{b}{a+b} G \sin \alpha;$$

$$Z_A = P + G_1 - Q - G \cos \alpha - Z_B = G \left[\frac{r}{k} \left(1 + \frac{c}{a+b} \right) - \frac{b}{a+b} \times \right. \\ \left. \times \cos \alpha \right] + Q \left[\frac{d}{a+b} - \frac{l}{k} \left(1 + \frac{c}{a+b} \right) \right] + G_1 \frac{b}{a+b}.$$

Задачи типа III

Равновесие системы некомпланарных сил, каждая из которых параллельна одной из координатных осей

В задачах этого типа рассматриваются только те случаи, когда три координатные оси можно выбрать так, чтобы каждая из сил, приложенных к телу, была параллельна одной из этих осей. Для системы некомпланарных и не сходящихся в одной точке сил имеем шесть уравнений равновесия (37). Следовательно, число неизвестных в задаче на равновесие одного тела может быть равно шести.

В задачах этого типа, где рассматривается равновесие тела с неподвижной осью вращения (практически наиболее часто встречающийся случай), уже нельзя считать, что цапфа или вал и подшипник при различных конструктивных его оформлениях образуют цилиндрическую пару (такое соединение, при котором возможны и повороты вала в подшипнике, и осевые перемещения), как это показано на рис. 70.

Если на тело действуют силы, не перпендикулярные к оси вала, то в подшипнике, фиксирующем вал в осевом направлении, возникает реакция, состоящая из трех компонентов, два из которых направлены перпендикулярно к оси вала и один —

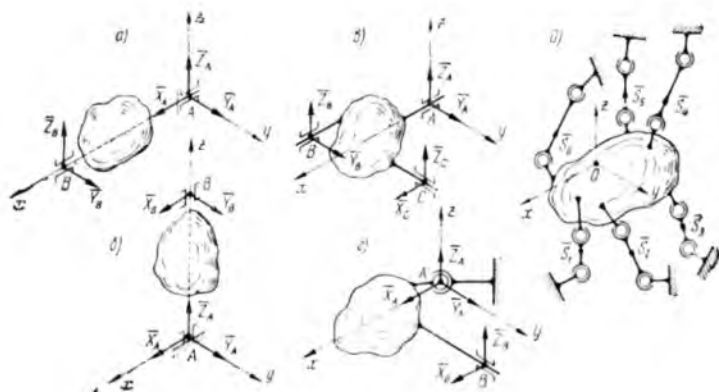


Рис. 73

вдоль оси вала, как это показано для упорного подшипника на рис. 73, а и для подшипника — на рис. 73, б. Поэтому, для обеспечения равновесия тела, имеющего ось вращения, должны применяться специальные устройства для устранения возможности осевого перемещения тела (упорные подшипники, подшипники, стопорные кольца и т. д.).

В ряде случаев возможность поступательного перемещения тела вдоль трех осей исключается соответствующим расположением цилиндрических подшипников, не имеющих фиксирующих устройств в осевом направлении (рис. 73, в). В зависимости от характера связей, наложенных на несвободное тело, задачи третьего типа можно подразделить на две группы.

Первая группа

Задачи о равновесии тела, имеющего неподвижную ось вращения (задачи 277, 278)

Пример 40. Массивная однородная плита, имеющая форму прямоугольного параллелепипеда, весом G , может вращаться вокруг вертикальной оси AB . К плите в точке D прикреплен канат, переброшенный через неподвижный блок и несущий на свободном конце груз весом Q , а в точке E приложена сила P , направленная вдоль ребра b . Система удерживается в равновесии при помощи пары с моментом m , приложенной к диску, закрепленному на валу AB . Определить величину момента m , а также реакции подшипника A и подшипника B . Размеры указаны на рис. 74.

Решение. Рассмотрим равновесие плиты. Изобразим в виде векторов действующие на плиту силы P , G и Q (последняя направлена вдоль каната). Так как все эти силы взаимно ортогональны, располагаем оси координат x , y и z так, чтобы каждая сила была параллельна одной из осей. Момент пары

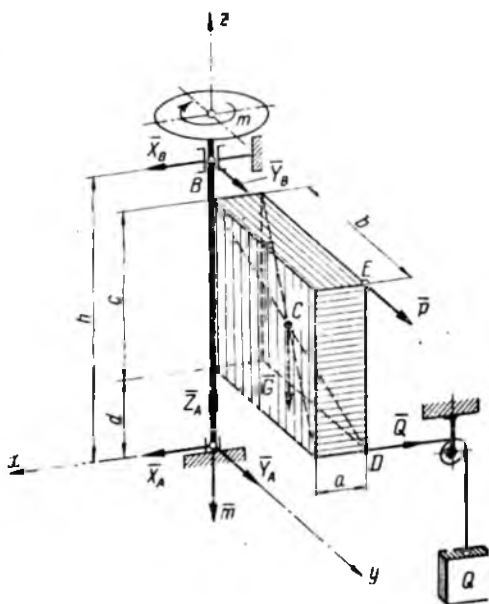


Рис. 74

представим в виде вектора; этот вектор направлен по оси z вниз (глядя из конца этого вектора на плоскость действия пары, мы должны видеть пару направленной против часовой стрелки). Реакцию подпятника разложим на составляющие X_A , Y_A и Z_A , направленные по осям x , y и z . Учитывая, что реакция подшипника B направлена перпендикулярно к оси AB , разлагаем ее на две составляющие X_B и Y_B , направленные вдоль осей x и y . Следовательно, в случае равновесия тела, закрепленного при помощи подпятника и подшипника, имеем пять неизвестных опорных реакций X_A , Y_A , Z_A , X_B , Y_B . Но число уравнений равновесия, в которые входят эти неизвестные реакции, также равно пяти, так как в уравнение моментов относительно оси вращения (оси z) эти реакции не войдут (силы X_A , Y_A , X_B , Y_B , Z_A пересекают ось z и моменты их относительно этой оси равны нулю). Искомый момент пары найдем из уравнения моментов относительно оси z . Из рис. 74 легко определяются проекции сил P , G и Q , приложенных в точках E , C и D , на выбранные координатные оси, а также координаты указанных точек:

$$\left. \begin{aligned} X_E &= 0, & Y_E &= P, & Z_E &= 0, \\ x_E &= -a, & y_E &= b, & z_E &= d + c; \\ X_C &= 0, & Y_C &= 0, & Z_C &= -G, \\ x_C &= -\frac{a}{2}, & y_C &= \frac{b}{2}, & z_C &= d + \frac{c}{2}; \\ X_D &= -Q, & Y_D &= 0, & Z_D &= 0, \\ x_D &= -a, & y_D &= b, & z_D &= d. \end{aligned} \right\}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} m_x(P) &= y_E Z_E - z_E Y_E = -\underline{(d + c) P}; \\ m_y(P) &= 0; \\ m_z(P) &= x_E Y_E - y_E X_E = \underline{aP}; \\ m_x(G) &= y_C Z_C - z_C Y_C = \underline{-\frac{b}{2} G}; \quad m_y(G) = z_C X_C - x_C Z_C = \underline{-\frac{a}{2} G}; \\ m_z(G) &= 0; \\ m_x(Q) &= 0; \\ m_y(Q) &= 0; \\ m_z(Q) &= x_D Y_D - y_D X_D = \underline{bQ}; \\ m_x(R_A) &= \underline{-h Y_B}, \quad m_y(R_B) = \underline{h X_B}, \quad m_z(R_B) = 0; \\ m_x(R_A) &= m_y(R_A) = m_z(R_A) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, приходим к следующим уравнениям равновесия рассматриваемой системы сил:

- 1) $X_A + X_B - Q = 0$,
- 2) $Y_A + Y_B + P = 0$,
- 3) $Z_A - G = 0$,
- 4) $-hY_B - (c + d)P - \frac{b}{2}G = 0$,
- 5) $hX_B - \frac{a}{2}G - dQ = 0$,
- 6) $-aP + bQ - m = 0$.

Из пятого уравнения имеем: $X_B = \frac{1}{h} \left(\frac{a}{2}G + dQ \right)$.

Из шестого уравнения находим: $m = bQ - aP$.

Из четвертого уравнения: $Y_B = -\frac{1}{h} \left[(c + d)P + \frac{b}{2}G \right]$.

Теперь нетрудно из первого, второго и третьего уравнений найти остальные три неизвестные величины:

$$X_A = \left(1 - \frac{a}{h} \right) Q - \frac{a}{2h} G, \quad Y_A = \left(\frac{c + d}{h} - 1 \right) P + \frac{b}{2h} G, \quad Z_A = G.$$

Вторая группа

Задачи о равновесии тела, имеющего три цилиндрические опоры

Задачи этой группы тоже имеют большое практическое значение, так как в технике часто применяется крепление узлов машины на три точки.

Пример 41. Тело, имеющее форму прямоугольного параллелепипеда, опирается на три цилиндрические опоры A , B и C . К телу приложены силы P , Q и G и, кроме того, в плоскостях трех граней действуют три пары с моментами m_1 , m_2 и m_3 (направления вращения этих пар указаны круговыми стрелками). Расстояние $OC = c$, остальные размеры указаны на рисунке. Определить опорные реакции в точках A , B и C (рис. 75).

Решение. Выберем, как указано на рис. 75, систему координат $Oxyz$. Моменты пар, действующих на тело, изобразим в виде векторов $\vec{m}_1$, $\vec{m}_2$ и $\vec{m}_3$, приложенных в точке O . Реакции каждого шарнира разлагаем на две составляющие, перпендикулярные к его оси и направленные параллельно двум другим осям:

$$\begin{aligned} \vec{R}_A &= Y_A + Z_A, \quad \vec{R}_B = Y_B + Z_B, \\ \vec{R}_C &= X_C + Z_C. \end{aligned}$$

Таким образом, в данной задаче имеем шесть неизвестных сил: Y_A , Z_A , Y_B , Z_B , X_C , Z_C .

Так как число уравнений равновесия также равно шести, то задача является статически определенной. Все силы, приложенные к телу, параллельны одной из координатных осей

и определение проекций этих сил на оси координат не вызывает трудностей. При вычислении моментов этих же сил относительно координатных осей необходимо учесть, что силы $\bar{Z}_A$, $\bar{Y}_A$, $\bar{Z}_B$, $\bar{Y}_B$ пересекают ось x , а силы $\bar{Z}_C$, X_C , P пересекают ось y ,

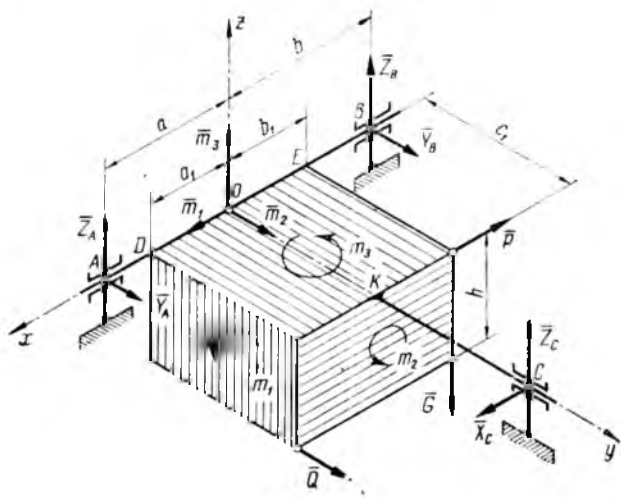


Рис. 75

а потому момент каждой из этих сил относительно соответствующей оси равен нулю, т. е.

$$m_x(\bar{R}_A) = m_x(\bar{R}_B) = m_y(\bar{R}_C) = m_y(P) = 0.$$

Кроме того, сила P параллельна оси x , сила Q — оси y , а сила $\bar{G}$ параллельна оси z и $m_x(\bar{P}) = m_y(\bar{Q}) = m_z(\bar{G}) = 0$. Моменты остальных сил относительно осей x , y и z определяются одним из указанных выше способов (см. пример 33):

$$m_x(\bar{Q}) = m_D(\bar{Q}) = Qh, \quad m_z(\bar{Q}) = m_O(\bar{Q}_{xy}) = Qa,$$

(проекция $\bar{Q}_{xy}$ силы $\bar{Q}$ на плоскость xy на рисунке не показана, очевидно, $Q_{xy} = \bar{Q}$);

$$m_x(\bar{G}) = -m_E(\bar{G}) = -Gc; \quad m_y(\bar{G}) = -m_K(\bar{G}) = -Gb;$$

$$m_y(\bar{R}_A) = -Z_A a; \quad m_z(\bar{R}_A) = Y_A a; \quad m_y(\bar{R}_B) = Z_B b;$$

$$m_z(\bar{R}_B) = -Y_B b; \quad m_x(\bar{R}_C) = Z_C c; \quad m_z(\bar{R}_C) = -X_C c.$$

Составляем шесть уравнений равновесия системы сил:

- 1) $X_C - P = 0,$
- 2) $Y_A + Y_B + Q = 0,$
- 3) $Z_A + Z_B + Z_C - G = 0,$

- 4) $Qh - Gc_1 + Z_c c + m_1 = 0$,
 5) $-Gb_1 - Z_A a + Z_B b + m_2 = 0$,
 6) $Pc_1 + Qa_1 + Y_A a - Y_B b - X_c c + m_3 = 0$.

Из первого и четвертого уравнений имеем:

$$X_c = P, \quad Z_c = \frac{1}{c} (Gc_1 - Qh - m_1)$$

Теперь второе и шестое уравнения можно переписать так:

$$Y_A + Y_B = -Q;$$

$$Y_A a - Y_B b = P(c - c_1) - Qa_1 - m_3.$$

Решая совместно эти уравнения, находим:

$$Y_A = \frac{1}{a+b} [P(c - c_1) - Q(a_1 + b) - m_3];$$

$$Y_B = -\frac{1}{a+b} [P(c - c_1) + Q(a - a_1) - m_3].$$

Аналогично решаем совместно третье и пятое уравнения и определяем Z_A и Z_B :

$$Z_A = \frac{1}{a+b} \left\{ \frac{b}{c} [G(c - c_1) + Qh + m_1] - Gb_1 + m_2 \right\};$$

$$Z_B = \frac{1}{a+b} \left\{ \frac{a}{c} [G(c - c_1) + Qh + m_1] + Gb_1 - m_2 \right\}.$$

Таким образом, все шесть неизвестных компонентов опорных реакций определены.

Задачи типа IV

Равновесие системы некомпланарных сил в общем случае

В задачах этого типа, так же как и в задачах типа III, имеем шесть уравнений равновесия. Кроме связей, рассмотренных в задачах предыдущего типа, здесь находят применение сферические подшипники (рис. 73, в) и опоры в виде стержней, имеющих на концах сферические шарниры (рис. 73, д).

Задачи этого типа в зависимости от характера связей, наложенных на данное тело, можно подразделить на три группы.

Первая группа

Задачи о равновесии тела, имеющего неподвижную ось вращения
 (задачи 270, 271, 273, 274)

Пример 42. Груз Q поднимается равномерно при помощи лебедки (рис. 76). Струна каната в точке E набегания каната на барабан составляет с образующей барабана угол $90^\circ - \gamma$; плоскость, проходящая через ось барабана и точку E , наклонена к горизонту под углом β , причем расстояние от точки E до плоскости симметрии зубчатого колеса лебедки равно c ; радиусы барабана и зубчатого колеса лебедки соответственно равны r и R .

остальные размеры указаны на рисунке. Определить модуль движущего усилия P , приложенного в точке D и образующего с касательной к начальной окружности колеса угол α , а также реакции подшипников A и B , если силы сопротивления движению, возникающие в подшипниках, приводятся к одной паре с моментом m . Вес ворота равен G и центр тяжести его находится посередине между опорами A и B (рис. 76).

Решение. Рассмотрим равновесие барабана лебедки вместе с колесом, которые совместно с валом AB составляют одно твердое тело. Показываем на рисунке силы, действующие на

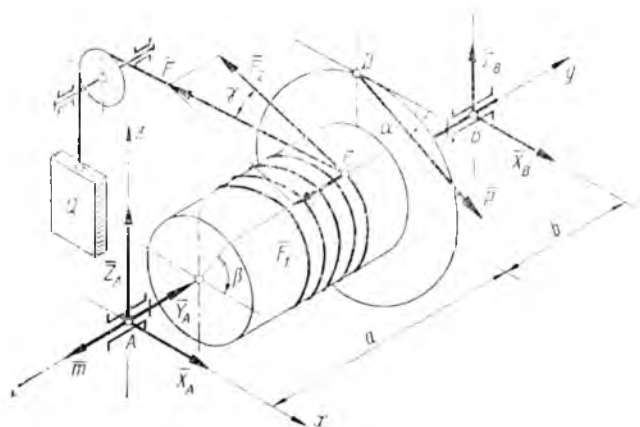


Рис. 76

это тело: силу P , приводящую ворот в движение, и силу F натяжения каната, которая равна весу груза Q , если пренебречь потерями в блоке (на трение в подшипниках и на изгиб каната), т. е. $F = Q$. Так как ворот, если смотреть от A к B , вращается по часовой стрелке, то пара, препятствующая этому движению, направлена против часовой стрелки и, следовательно, момент этой пары изобразится в виде вектора m , направленного по оси ворота, как указано на рисунке. Вертикальную силу веса G ворота на рисунке не показываем, чтобы изложение не загромождать рисунок. Точку A принимаем за начало координат и координатные оси располагаем, как указано на рисунке, принимая ось вала за ось x и направляя ось z по вертикали вверх. Обращаем внимание на конструкции подшипников A и B . Так как эти подшипники фиксируют вал лебедки в осевом направлении, то в них, кроме перпендикулярных к оси вала реакций, могут возникать также продольные реакции, направленные вдоль оси вращения. Очевидно, продольная реакция возникает в том подшипнике, который воспринимает давление, направленное вдоль

оси вращения и вызываемое действием приложенных к телу заданных сил. В рассматриваемом случае осевое давление воспринимает подшипник A . Поэтому реакция подшипника A состоит из трех компонентов:

$$R_A = X_A + Y_A + Z_A.$$

Реакция подшипника B состоит из двух компонентов:

$$R_B = X_B + Z_B.$$

Разложив силу F натяжения каната на две составляющие F_1 и F_2 , направленные вдоль образующей барабана и перпендикулярно к ней, имеем

$$F_1 = F \sin \gamma = Q \sin \gamma; \quad F_2 = F \cos \gamma = Q \cos \gamma.$$

После этого легко найти проекции силы F , приложенной в точке E , на выбранные координатные оси:

$$\begin{aligned} X_E &= -F_2 \cos (90^\circ - \beta) = -Q \cos \gamma \sin \beta; \\ Y_E &= -F_1 = -Q \sin \gamma; \\ Z_E &= F_2 \cos \beta = Q \cos \gamma \cos \beta. \end{aligned}$$

Находим координаты точки E :

$$x_E = r \cos \beta; \quad y_E = a - c; \quad z_E = r \sin \beta.$$

Далее находим проекции силы $\bar{P}$ и координаты точки ее приложения:

$$\begin{aligned} X_D &= P \cos \alpha; \quad Y_D = 0; \quad Z_D = -P \sin \alpha; \\ x_D &= 0; \quad y_D = a; \quad z_D = R. \end{aligned}$$

Обозначая через C центр тяжести ворота, имеем:

$$X_C = Y_C = 0, \quad Z_C = -G, \quad x_C = z_C = 0, \quad y_C = \frac{l}{2},$$

где $l = a + b$.

Моменты всех действующих сил относительно координатных осей вычислим по формулам (29):

$$m_x(F) = (a - c) Q \cos \beta \cos \gamma + r \sin \beta Q \sin \gamma - Q (h \cos \beta \cos \gamma + r \sin \beta \sin \gamma), \quad \text{где } h = a - c;$$

$$m_y(F) = -r \sin \beta Q \cos \gamma \sin \beta - r \cos \beta Q \cos \gamma \cos \beta = -Q r \cos \gamma;$$

$$m_z(F) = -r \cos \beta Q \sin \gamma + h Q \cos \gamma \sin \beta = Q (h \sin \beta \cos \gamma - r \sin \gamma \cos \beta);$$

$$m_x(\bar{P}) = -P \sin \alpha \cdot a; \quad m_y(\bar{P}) = P R \cos \alpha; \quad m_z(\bar{P}) = -P \cos \alpha \cdot a;$$

$$m_x(\bar{G}) = -G \frac{l}{2}; \quad m_y(\bar{G}) = m_z(\bar{G}) = 0; \quad m_x(\bar{R}_A) = m_y(\bar{R}_A) =$$

$$= m_z(\bar{R}_A) = 0; \quad m_x(\bar{R}_B) = Z_B l, \quad m_y(\bar{R}_B) = 0;$$

$$m_z(\bar{R}_B) = -X_B l.$$

Составляем уравнения равновесия рассматриваемой системы сил:

- 1) $-Q \sin \beta \cos \gamma + P \cos \alpha + X_A + X_B = 0,$
- 2) $-Q \sin \gamma + Y_A = 0,$
- 3) $Q \cos \beta \cos \gamma - P \sin \alpha - G + Z_A + Z_B = 0,$
- 4) $Q (h \cos \beta \cos \gamma + r \sin \beta \sin \gamma) - Pa \sin \alpha - G \frac{l}{2} + Z_B l = 0,$
- 5) $-Qr \cos \gamma + PR \cos \alpha - m = 0,$
- 6) $Q (h \sin \beta \cos \gamma - r \cos \beta \sin \gamma) - Pa \cos \alpha - X_B l = 0.$

Из второго и пятого уравнений находим Y_A и P :

$$Y_A = Q \sin \gamma;$$

$$P = \frac{Qr \cos \gamma + m}{R \cos \alpha}.$$

Подставив найденное значение силы P в оставшиеся уравнения, определяем из них остальные неизвестные реакции.

Из шестого уравнения:

$$X_B = \frac{1}{l} \left[Q (h \sin \beta \cos \gamma - r \cos \beta \sin \gamma - \frac{ar}{R} \cos \gamma) - \frac{am}{R} \right].$$

Из четвертого уравнения:

$$Z_B = \frac{G}{2} + \frac{1}{l} \left[Q \left(\frac{ar}{R} \operatorname{tg} \alpha \cos \gamma - h \cos \beta \cos \gamma - r \sin \beta \sin \gamma \right) + \frac{am}{R} \operatorname{tg} \alpha \right].$$

После этого из первого и третьего уравнений находим:

$$X_A = \frac{Q}{l} \left\{ (b + c) \sin \beta - \frac{r}{R} l \right\} \cos \gamma + r \cos \beta \sin \gamma - \frac{m}{Q} \cdot \frac{l}{R} \Bigg\};$$

$$Z_A = \frac{Q}{l} \left\{ \frac{rb}{R} \operatorname{tg} \alpha - (b + c) \cos \beta \right\} \cos \gamma + r \sin \beta \sin \gamma + \frac{m}{Q} \cdot \frac{b}{R} \operatorname{tg} \alpha \Bigg\} + \frac{G}{2}.$$

Вторая группа

Задачи о равновесии тела, имеющего одну из опор в виде сферического шарнира
(задачи 265, 267, 275)

Пример 43. Тело, имеющее форму шестигранной призмы (рис. 77), закреплено в точке A при помощи сферического шарнира, а в точке B — при помощи цилиндрического подшипника и, кроме того, шарнирно соединено с прямолинейным невесомым стержнем CE , конец E которого закреплен шарнирно. Через блок D перекинут канат. Один конец каната закреплен в неподвижной точке L , а к свободному его концу прикреплен груз весом Q . В точке K приложена вертикальная сила P , направ-

ленная вверх, и в наклонной грани призмы действует пара сил с моментом m , направление которой указано круговой стрелкой. Определить реакции связей при следующих данных: $P = 400 \text{ н}$, $Q = 500 \text{ н}$, $m = 1000 \text{ н} \cdot \text{м}$, $a = 80 \text{ см}$, $b = 40 \text{ см}$, $c = d = 20 \text{ см}$, $\alpha = \beta = 30^\circ$, $\gamma = \delta = 60^\circ$.

Решение. Показываем силы, действующие на призму: $\vec{P}$, $\vec{Q}$, $\vec{T}$, которая удовлетворяет условию $T = Q$. Момент пары изображим в виде вектора $\vec{m}$, приложенного в точке A ; этот вектор

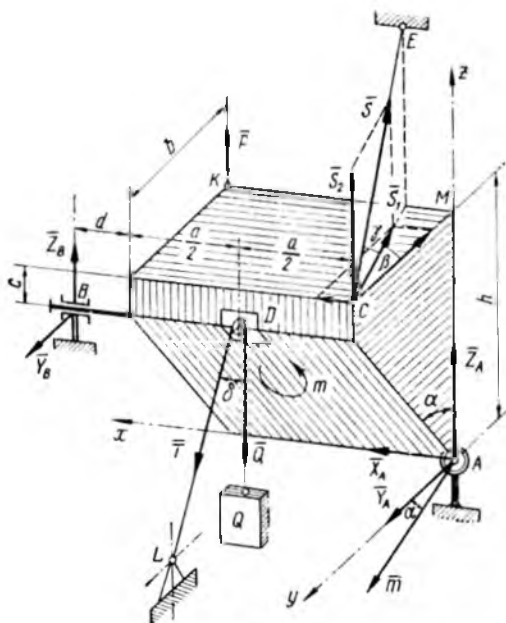


Рис 77

направлен перпендикулярно к наклонной грани призмы так, что из его конца видим пару направленной против часовой стрелки. Реакция $\vec{S}$ стержня CE направлена вдоль стержня так, что стержень работает на растяжение. Принимая центр A сферического шарнира за начало координат, располагаем координатные оси, как указано на рисунке. Реакцию сферического шарнира разлагаем на три компонента вдоль выбранных осей:

$$\vec{R}_A = \vec{X}_A + \vec{Y}_A + \vec{Z}_A.$$

Реакцию цилиндрического шарнира B разлагаем на две составляющие, учитывая, что она перпендикулярна к оси цилиндра:

$$\vec{R}_B = \vec{Y}_B + \vec{Z}_B.$$

Реакцию S стержня, приложенную в точке C и направленную вдоль стержня CE , разлагаем предварительно на горизонтальную S_1 и вертикальную S_2 , составляющие, после чего легко находим ее проекции на координатные оси:

$$\begin{aligned} X_C &= S_1 \sin \beta = S \cos \gamma \sin \beta = 0,25 S, \\ Y_C &= -S_1 \cos \beta = -S \cos \gamma \cos \beta = -0,433 S, \\ Z_C &= S_2 = S \sin \gamma = 0,866 S. \end{aligned}$$

Силы T и Q заменяем одной равнодействующей $R_D = T + Q$, находим проекции этой силы на оси координат:

$$\begin{aligned} X_D &= 0; \quad Y_D = Q \sin \delta = 500 \cdot 0,866 = 433; \\ Z_D &= Q \cos \delta = Q (1 - \cos \delta) = 750. \end{aligned}$$

Далее имеем:

$$X_A = 0; \quad Y_A = 0; \quad Z_A = P = 400.$$

Теперь вычислим координаты точек приложения всех приложенных к призме сил и моменты этих сил относительно координатных осей (см. формулы 29):

$$x_B = a + d; \quad y_B = b; \quad z_B = h - c;$$

$$x_C = 0; \quad y_C = b; \quad z_C = h;$$

$$x_E = a; \quad y_E = 0; \quad z_E = h;$$

$$x_D = \frac{a}{2}; \quad y_D = b; \quad z_D = h - c;$$

$$m_x(\bar{R}_A) = m_y(R_A) = m_z(\bar{R}_A) = 0;$$

$$\begin{aligned} m_x(\bar{R}_B) &= hZ_B - (h - c)Y_B = 0,4Z_B - 0,69Y_B; \quad m_y(\bar{R}_B) = -x_BZ_B = \\ &= -(a + d)Z_B = -Z_B; \quad m_z(\bar{R}_B) = x_BY_B = (a + d)Y_B = Y_B, \end{aligned}$$

$$m_x(S) = b \sin \gamma S = hS \cos \gamma \cos \beta = (b \sin \gamma + h \cos \gamma \cos \beta) S = 0,73 S;$$

$$\begin{aligned} m_y(S) &= z_C X_C = hS \cos \gamma \sin \beta = 0,22 S; \quad m_z(S) = -y_C X_C = \\ &= -bS \cos \gamma \sin \beta = -0,1 S; \quad m_x(\bar{P}) = m_x(\bar{P}) = 0; \end{aligned}$$

$$m_y(P) = -Pa = -320;$$

$$\begin{aligned} m_x(\bar{R}_D) &= -bQ(1 + \cos \delta) - (h - c)Q \sin \delta = \\ &= -[b(1 + \cos \delta) + (h - c) \sin \delta] Q = -600; \end{aligned}$$

$$m_y(\bar{R}_D) = -x_D Z_D = \frac{a}{2} Q (1 + \cos \delta) = 300;$$

$$m_z(\bar{R}_D) = x_D Y_D = \frac{a}{2} Q \sin \delta = 173,2.$$

Наконец, находим проекции вектора-момента пары $\bar{m}$ на координатные оси:

$$m_x = 0, \quad m_y = m \cos \alpha = 866; \quad m_z = -m \sin \alpha = -500.$$

Теперь нетрудно составить шесть уравнений равновесия сил, действующих на призму:

$$\begin{aligned} X_A + 0,25 S &= 0, \\ Y_A + Y_B - 0,433 S + 433 &= 0, \\ Z_A + Z_B + 0,866 S - 400 - 750 &= 0, \\ 0,4 Z_B - 0,69 Y_B + 0,73 S - 600 &= 0, \\ -Z_B - 0,22 S - 320 + 300 - 866 &= 0, \\ Y_B - 0,1 S + 173,2 - 500 &= 0. \end{aligned}$$

Эти уравнения можно представить проще в таком виде:

$$\begin{aligned} X_A + 0,25 S &= 0, & (a) \\ Y_A + Y_B - 0,433 S &= -433 & (б) \\ Z_A + Z_B + 0,866 S &= 350, & (в) \\ 0,4 Z_B - 0,69 Y_B + 0,73 S &= 600, & (г) \\ -Z_B - 0,22 S &= -846, & (д) \\ Y_B - 0,1 S &= 326,8. & (е) \end{aligned}$$

Из уравнений (д) и (е) имеем:

$$Z_B = 0,22 S + 846 \text{ и } Y_B = 0,1 S + 326,8.$$

Подставляя эти выражения Z_B и Y_B в уравнение (г), получим уравнение с одним неизвестным S , из которого получаем: $S = 652 \text{ н}$.

После этого находим: $Z_B = 989 \text{ н}$; $Y_B = 392 \text{ н}$.

Теперь из уравнений (а), (б) и (в) легко определяются величины X_A , Y_A и Z_A .

Третья группа

Задачи о равновесии тела, закрепленного при помощи шести стержней, соединенных с телом и опорами шарнирно (задачи 268, 269)

Пример 44. Однородная плита весом G (рис. 78), имеющая форму прямоугольного параллелепипеда, опирается на шесть прямолинейных стержней, соединенных своими концами с плитой и с неподвижными опорами при помощи сферических шарниров. На плиту действует, как указано на рисунке, горизонтальная сила P и в точке A подвешен груз Q . Найти усилия в стержнях, пренебрегая их весом. Указанные на рисунке размеры и углы заданы [эти величины связаны между собой очевидными соотношениями: $h = a \operatorname{ctg} \alpha = b \operatorname{ctg} \beta$ (рис. 78)].

Решение. Рассматриваем равновесие плиты под действием силы $\vec{P}$, веса G , натяжения Q каната, на котором подвешен груз, и реакций $S_1, \dots, S_6$ стержней. Последние направляем

так, как будто все стержни работают на растяжение (т. е. от шарниров A, B, C и D вдоль стержней). Координатные оси x, y, z располагаем, как указано на рисунке. Чтобы определить шесть реакций $\bar{S}_1, \dots, \bar{S}_6$, неизвестных по модулю, но известных по направлению, составим шесть уравнений равновесия, приравнявая нулю сумму проекций всех сил на координатные оси и сумму их моментов относительно тех же осей. Следовательно, при решении задач о равновесии тела, закрепленного при помощи шести невесомых прямолинейных стержней, не лежащих

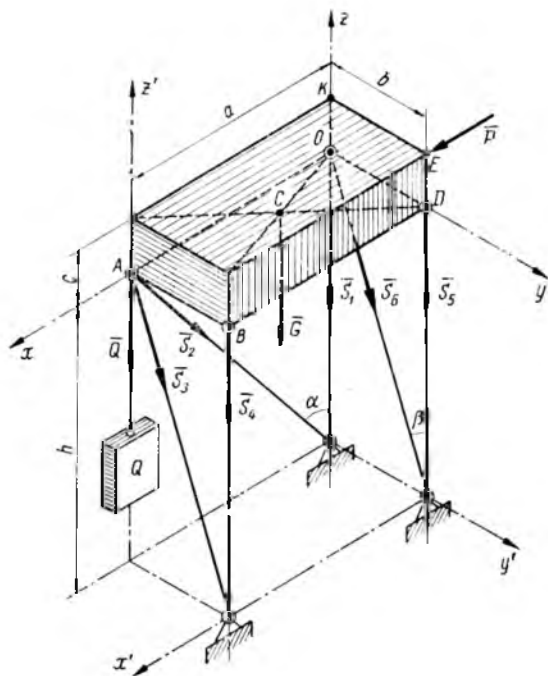


Рис 78

в одной плоскости, получаем шесть неизвестных по модулю, но известных по направлению реакций стержней, которые определяются из шести уравнений равновесия системы; поэтому задача статически определения. Для того чтобы составить шесть уравнений равновесия, определим проекции каждой силы на оси x, y и z и ее моменты относительно этих осей. Определение проекций рассмотренных сил на координатные оси не вызывает трудностей. Остановимся на определении моментов этих сил относительно осей x, y и z . Силы $\bar{S}_1$ и $\bar{S}_6$ приложены в начале координат, поэтому моменты этих сил относительно каждой из осей

x , y и z равны нулю, т. е.

$$\begin{aligned}m_x(\bar{S}_1) - m_y(\bar{S}_1) - m_z(\bar{S}_1) &= 0, \\m_x(\bar{S}_u) - m_y(\bar{S}_u) - m_z(\bar{S}_u) &= 0.\end{aligned}$$

Силы $\bar{Q}$, $\bar{S}_2$, $\bar{S}_3$ пересекают ось x , а сила $\bar{P}$ параллельна этой оси, поэтому $m_x(\bar{Q}) = m_x(\bar{S}_2) = m_x(\bar{S}_3) = m_x(\bar{P}) = 0$.

Точно так же силы $\bar{S}_1$ и $\bar{S}_3$ пересекают соответственно оси z и y , а потому $m_z(\bar{S}_1) = m_y(\bar{S}_3) = 0$.

Силы $\bar{Q}$, $\bar{S}_1$, $\bar{S}_2$ параллельны оси z , а потому

$$m_z(\bar{Q}) = m_z(\bar{S}_1) = m_z(\bar{S}_2) = 0.$$

Кроме того,

$$\begin{aligned}m_x(\bar{S}_1) &= -m_A(\bar{S}_1) = -S_1 b; \\m_x(\bar{S}_2) &= -m_O(\bar{S}_2) = -S_2 b;\end{aligned}$$

$m_x(\bar{G}) = -m_O(\bar{G}_{y2}) = -G \frac{b}{2}$, так как $G_{y2} = G$ (проекция силы $\bar{G}$ на плоскость yz на рисунке не показана);

$$m_y(\bar{S}_1) = m_u(\bar{S}_1) = S_1 a \sin(90^\circ - \alpha) = S_1 a \cos \alpha;$$

$$m_y(\bar{S}_3) = m_O(\bar{S}_{3xz}) = a S_3 \cos \beta;$$

$$m_y(\bar{Q}) = m_O(\bar{Q}) = Qa, \quad m_y(\bar{P}) = m_L(\bar{P}) = Pc;$$

$$m_y(\bar{G}) = m_O(\bar{G}_{xz}) = G \frac{a}{2};$$

$$m_z(\bar{S}_1) = m_D(\bar{S}_1) = S_1 a;$$

$$m_z(\bar{S}_3) = m_O(\bar{S}_{3xy}) = S_3 \sin \beta \cdot a;$$

$$m_z(\bar{P}) = -m_K(\bar{P}) = -Pb.$$

Теперь можем составить шесть уравнений равновесия рассматриваемой системы сил:

- 1) $-S_2 \sin \alpha + P = 0$,
- 2) $S_3 \sin \beta + S_u \sin \beta = 0$,
- 3) $-S_1 - S_2 \cos \alpha - S_3 \cos \beta - S_4 - S_3 - S_u \cos \beta - Q - G = 0$,
- 4) $-S_1 b - S_3 b - G \frac{b}{2} = 0$,
- 5) $a S_2 \cos \alpha + a S_3 \cos \beta + S_1 a + Pc + Qa + G \frac{a}{2} = 0$,
- 6) $a S_3 \sin \beta - bP = 0$.

Из первого и шестого уравнений определяем S_2 и S_3 :

$$S_2 = \frac{P}{\sin \alpha}, \quad S_3 = \frac{b}{a} \cdot \frac{P}{\sin \beta}.$$

Далее, из второго уравнения имеем:

$$S_4 = -S_3 = -\frac{b}{a} \cdot \frac{P}{\sin \beta}.$$

Подставляя найденные значения S_2 , S_3 и S_4 в остальные уравнения системы и учитывая, что $h = a \operatorname{ctg} \alpha = b \operatorname{ctg} \beta$, определяем из четвертого и пятого уравнений силы S_4 и S_3 , а затем из третьего уравнения — силу S_1 :

$$P[a \operatorname{ctg} \alpha + b \operatorname{ctg} \beta + c] + Qa + G \frac{a}{2} + S_4 a = 0;$$

$$S_4 + S_3 = -\frac{G}{2};$$

$$-S_1 - P \operatorname{ctg} \alpha - (S_3 + S_4) \cos \beta - Q - \frac{G}{2} = 0,$$

откуда

$$S_4 = -\left[P \frac{2h + c}{a} + Q + \frac{G}{2}\right];$$

$$S_3 = -\frac{G}{2} - S_4 = P \frac{2h + c}{a} + Q;$$

$$S_1 = -\left(P \operatorname{ctg} \alpha + Q + \frac{G}{2}\right).$$

Знаки минус, полученные для реакций S_1 , S_3 и S_4 , указывают на то, что эти силы имеют направления, противоположные принятым на рисунке, и, следовательно, стержни *1*, *4* и *6* сжаты.

Следует отметить, что третье и пятое уравнения получились громоздкими: в первое из них входят все шесть неизвестных, во второе — три. Эти уравнения можно было бы заменить уравнениями моментов относительно осей x' и y' . Действительно, силы $\bar{S}_3$, $\bar{S}_4$, $\bar{S}_5$ и $\bar{S}_6$ пересекают ось x' , следовательно,

$$m_{x'}(\bar{S}_3) = m_{x'}(\bar{S}_4) = m_{x'}(\bar{S}_5) = m_{x'}(\bar{S}_6) = 0;$$

$m_{x'}(P) = 0$ (сила параллельна оси x');

$$m_{x'}(\bar{S}_1) = S_1 b; \quad m_{x'}(\bar{S}_2) = S_2 \cos \alpha \cdot b;$$

$$m_{x'}(G) = G \frac{b}{2}; \quad m_{x'}(Q) = Qb.$$

Таким образом,

$$\sum m_{x'} = S_1 b + b S_2 \cos \alpha + Qb + G \frac{b}{2} = 0,$$

т. е. получаем уравнение, в которое входят только две неизвестные величины, одну из них (S_2) мы уже определили из первого уравнения. Поэтому

$$S_1 = -(S_2 \cos \alpha + Q + 0,5G) = -(P \operatorname{ctg} \alpha + Q + 0,5G).$$

Аналогично имеем:

$$m_y(\bar{S}_1) = m_y(\bar{S}_2) = m_y(\bar{S}_3) = m_y(\bar{S}_4) = 0$$

(силы пересекают ось y');

$$m_{y'}(\bar{S}_3) = S_3 \cos \beta \cdot a; \quad m_{y'}(\bar{S}_4) = S_4 a;$$

$$m_{y'}(\bar{P}) = P(h + c);$$

$$m_{y'}(\bar{G}) = G \frac{a}{2}; \quad m_{y'}(\bar{Q}) = Qa.$$

Следовательно,

$$\sum m_{y'} = aS_3 \cos \beta + S_4 a + (h + c)P + Qa + \frac{a}{2}G = 0.$$

Воспользовавшись выражением S_3 , найденным из первого уравнения, имеем:

$$\begin{aligned} S_4 &= - \left[\frac{h+c}{a}P + Q + 0,5G + S_3 \cos \beta \right] = \\ &= - \left[\frac{h+c}{a}P + Q + 0,5G + P \frac{b}{a} \operatorname{ctg} \beta \right], \end{aligned}$$

или, учитывая, что $b \operatorname{ctg} \beta = h$; $S_4 = - \left(\frac{2h+c}{a}P + Q + 0,5G \right)$. Силу S_4 можно было бы найти непосредственно из уравнения моментов относительно оси z' . Действительно, моменты всех сил, за исключением $\bar{S}_4$ и $\bar{P}$, относительно оси z' равны нулю, так как все эти силы либо пересекают ось z' , либо ей параллельны.

Таким образом,

$$\sum m_{z'} = -S_4 \sin \beta \cdot a - Pb = 0,$$

откуда

$$S_4 = - \frac{b}{a} \cdot \frac{P}{\sin \beta}.$$

Г л а в а V

ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ

Задачи, рассматриваемые в этой главе, можно разделить на следующие четыре группы:

1) задачи на определение общего центра тяжести нескольких тел, веса и положения центров тяжести которых известны;

2) задачи на определение центра тяжести однородного контура;

3) задачи на определение центра тяжести площади плоской фигуры (однородной точкой плоской пластинки);

4) задачи на определение центра тяжести объема (однородного тела).

При решении задач, относящихся ко второй, третьей и четвертой группам, рассмотрим только те случаи, когда применим метод разбиения данной линии, плоской фигуры или данного тела на конечное число простейших по форме частей, центры тяжести которых легко определяются.

Если данное тело имеет плоскость или ось, или центр симметрии, то центр тяжести такого тела лежит соответственно в этой плоскости, на этой оси или в этом центре симметрии. Поэтому для упрощения вычислений при решении задач плоскость симметрии всегда нужно выбирать за одну из координатных плоскостей, а ось симметрии — за одну из координатных осей.

Первая группа

(задача 298)

Если веса данных тел обозначим P_i , а координаты их центров тяжести x_i, y_i, z_i , то координаты общего центра тяжести этих тел определяются по формулам:

$$x_c = \frac{\sum P_i x_i}{\sum P_i}, \quad y_c = \frac{\sum P_i y_i}{\sum P_i}, \quad z_c = \frac{\sum P_i z_i}{\sum P_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (40)$$

Пример 45. Центры тяжести грузов A_1, A_2, A_3, A_4 , веса

которых соответственно равны $P_1 = P_3 = 10, P_2 = 5, P_4 = 15$ н, находятся в вершинах тетраэдра; высота этого тетраэдра A_4M проходит через точку M пересечения медиан основания $A_1A_2A_3$ тетраэдра. Дано: $A_1A_2 = 4$ см, $A_1A_3 = 8$ см, $A_4M = 40$ см. Угол $\alpha = 30^\circ$. Найти положение центра тяжести этих грузов (рис. 79).

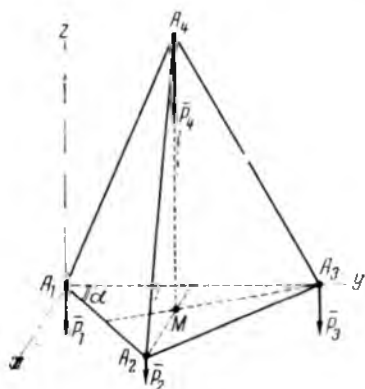


Рис 79

Решение. Координатные оси с началом в точке A_1 напомним, как указано на рис. 79. Тогда координаты центров тяжести данных грузов A_1, A_2, A_3, A_4 будут соответственно равны:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, & x_2 &= 2 \text{ см}, & x_3 &= 0, & x_4 &= x_M, \\ y_1 &= 0, & y_2 &= 2\sqrt{3} \text{ см}, & y_3 &= 8 \text{ см}, & y_4 &= y_M, \\ z_1 &= 0, & z_2 &= 0, & z_3 &= 0, & z_4 &= 40 \text{ см}. \end{aligned}$$

Так как точка M есть точка пересечения медиан треугольника $A_1A_2A_3$, то, как известно из аналитической геометрии,

$$x_M = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{2}{3}; \quad y_M = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} = \frac{2\sqrt{3} + 8}{3}.$$

Теперь, применяя формулы (40), находим координаты искомого центра тяжести:

$$x_c = \frac{P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3 + P_4 x_4}{P_1 + P_2 + P_3 + P_4} = \frac{5 \cdot 2 + 15 \cdot \frac{2}{3}}{40} = 0.5;$$

$$y_c = \frac{P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3 + P_4 y_4}{P_1 + P_2 + P_3 + P_4} = \frac{5 \cdot 2 \sqrt{3} + 10 \cdot 8 + 15 \cdot \frac{2 \sqrt{3} + 8}{3}}{40} = 3 + \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$z_c = \frac{P_1 z_1 + P_2 z_2 + P_3 z_3 + P_4 z_4}{P_1 + P_2 + P_3 + P_4} = \frac{15 \cdot 40}{40} = 15, \text{ или}$$

$$x_c = 0.5 \text{ см}; \quad y_c = 3.86 \text{ см}; \quad z_c = 15 \text{ см}.$$

Вторая группа (задачи 286, 299—301)

Разбив данный однородный контур на n простейших по форме линий, обозначим длины этих линий l_i , а координаты их центров тяжести x_i, y_i, z_i . Тогда координаты центра тяжести данного контура определяются по формулам:

$$x_c = \frac{\sum l_i x_i}{\sum l_i}, \quad y_c = \frac{\sum l_i y_i}{\sum l_i}, \quad z_c = \frac{\sum l_i z_i}{\sum l_i} \dots \quad (41)$$

В случае плоского контура, плоскость которого принимаем за координатную плоскость xOy , будем иметь: $z_i = 0$ ($i = 1, 2, 3, 4, \dots, n$) и, следовательно, $z_c = 0$.

Пример 46. Определить координаты центра тяжести S однородного контура $AEBDKA$, состоящего из дуги полуокружности AEB , прямолинейного отрезка BD и дуги окружности DKA с центром в точке B , если $AO = OB = r$; $BD = 2r$; $\angle ABD = 90^\circ$. Оси координат указаны на рис. 80.

Решение. Заданный контур разобьем на три части: полуокружность AEB , отрезок BD и четверть окружности DKA . Обозначим центры тяжести этих частей соответственно C_1, C_2, C_3 , а их длины l_1, l_2, l_3 . Тогда $l_1 = \pi r$; $l_2 = 2r$; $l_3 = \pi r$.

Центр тяжести C_1 дуги AEB лежит на оси y , причем $OC_1 = \frac{r \sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2r}{\pi}$, поэтому $x_1 = 0$; $y_1 = -\frac{2r}{\pi}$.

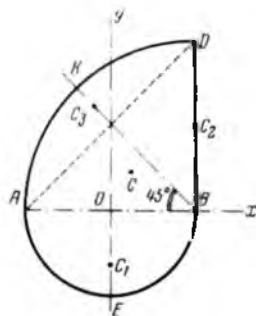


Рис. 80

* Расстояние от центра тяжести S дуги окружности радиусом R до центра O этой окружности определяется по формуле $OS = \frac{R \sin \alpha}{\alpha}$, где α — половина центрального угла этой дуги.

Центр тяжести отрезка BD лежит в середине этого отрезка, а потому

$$x_2 = r; \quad y_2 = \frac{BD}{2} = r.$$

Центр тяжести дуги AKD лежит на отрезке KB , причем

$$BC_3 = \frac{2r \sin \frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{4r \sqrt{2}}{\pi}.$$

Следовательно,

$$x_3 = -(BC_3 \cos 45^\circ - r) = -\left(\frac{4r}{\pi} - r\right); \quad y_3 = BC_3 \cos 45^\circ = \frac{4r}{\pi}.$$

Полученные расчетные данные расположим в табл. 10.

Таблица 10

№ частей	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
1	πr	0	$-\frac{2r}{\pi}$	0	$-2r^2$
2	$2r$	,	,	$2r^2$	$2r^2$
3	πr	$r - \frac{4r}{\pi}$	$\frac{4r}{\pi}$	$\pi r \left(r - \frac{4r}{\pi}\right)$	$4r^2$

Теперь координаты искомого центра тяжести находим по формулам (40):

$$x_c = \frac{l_1 x_1 + l_2 x_2 + l_3 x_3}{l_1 + l_2 + l_3} = \frac{r(\pi - 2)}{2(\pi + 1)}; \quad y_c = \frac{l_1 y_1 + l_2 y_2 + l_3 y_3}{l_1 + l_2 + l_3} = \frac{2r}{\pi + 1}.$$

Третья группа

(Задачи 287—296)

Разбив данную плоскую фигуру на n простейших по форме частей, обозначим площади этих частей S_i , а координаты их центров тяжести x_i, y_i . Тогда координаты центра тяжести данной фигуры определяются по формулам:

$$x_c = \frac{\sum S_i x_i}{\sum S_i}; \quad y_c = \frac{\sum S_i y_i}{\sum S_i} \quad (42)$$

$$(i = 1, 2, 3, \dots, n).$$

Пример 47. Определить координаты центра тяжести площади, ограниченной контуром $AEBDKA$ (рис. 81).

Решение. Разобьем данную плоскую фигуру на две части: полуокруг AEB и четверть круга $BAKD$. Обозначим центры тяжести этих частей и их площади соответственно C_1 , C_2 и S_1 , S_2 . Тогда $S_1 = \frac{\pi r^2}{2}$, $S_2 = \pi r^2$. Центр тяжести полуокруга AEB лежит на оси Oy , причем

$$OC_1 = \frac{2}{3} \frac{r \sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{4r}{3\pi},$$

поэтому $x_1 = 0$, $y_1 = -\frac{4r}{3\pi}$.

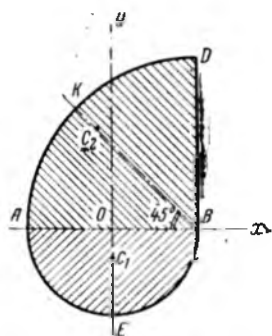


Рис. 81

Центр тяжести C_2 кругового сектора $ABDKA$ лежит на прямой BK , причем

$$BC_2 = \frac{2}{3} \frac{2r \sin \frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{8r \sqrt{2}}{3\pi};$$

$$x_2 = -(BC_2 \sin 45^\circ - r) = -\frac{8r}{3\pi} + r; \quad y_2 = BC_2 \sin 45^\circ = \frac{8r}{3\pi}.$$

Координаты искомого центра тяжести данной плоской фигуры $AEBDKA$ находим по формулам (41):

$$x_c = \frac{S_1 x_1 + S_2 x_2}{S_1 + S_2} = \frac{-\pi r^2 \left(\frac{8r}{3\pi} - r \right)}{\frac{3}{2} \pi r^2} = \frac{2}{3} r \frac{(-8 + 3\pi)}{3\pi} = \frac{2r}{9\pi} (-8 + 3\pi);$$

$$y_c = \frac{S_1 y_1 + S_2 y_2}{S_1 + S_2} = \frac{-\frac{\pi r^2}{2} \cdot \frac{4r}{3\pi} + \pi r^2 \cdot \frac{8r}{3\pi}}{\frac{3}{2} \pi r^2} = \frac{4r}{3\pi}; \quad x_c = \frac{2r}{9\pi} (3\pi - 8); \quad y_c = \frac{4r}{3\pi}.$$

Пример 48. Определить положение центра тяжести профиля, состоящего из прямоугольника и двух уголков, размеры кото-

* Расстояние от центра тяжести C кругового сектора радиусом R до центра круга O определяется по формуле $OC = \frac{2}{3} \frac{R \sin \alpha}{\alpha}$, где α — половина центрального угла этого сектора.

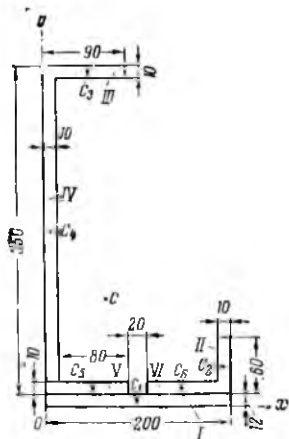


Рис. 82

рых в миллиметрах указаны на рис. 82.

Решение. Выберем систему координатных осей, как указано на рис. 82, и заданный профиль разобьем на шесть прямоугольников $I, II, \dots, VI$. Обозначим центры тяжести этих прямоугольников соответственно $C_1, C_2, \dots, C_6$, а их площади $S_1, S_2, S_3, \dots, S_6$.

$$\text{Тогда } S_1 = 200 \cdot 12 = 2400 \text{ мм}^2 = 24 \text{ см}^2;$$

$$S_2 = 60 \cdot 10 = 600 \text{ мм}^2 = 6 \text{ см}^2;$$

$$S_3 = S_5 = S_6 = 80 \cdot 10 = 800 \text{ мм}^2 = 8 \text{ см}^2;$$

$$S_4 = 350 \cdot 10 = 3500 \text{ мм}^2 = 35 \text{ см}^2.$$

При вычислении координат $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_6, y_6$ точек $C_1, C_2, \dots, C_6$ следует учесть, что центр тяжести прямоугольника находится в точке пересечения его диагоналей, а поэтому

$$x_1 = 100 \text{ мм} = 10 \text{ см};$$

$$x_2 = 200 - 5 = 195 \text{ мм} = 19,5 \text{ см};$$

$$x_3 = x_5 = 10 + 40 = 50 \text{ мм} = 5 \text{ см}; \quad x_4 = -5 \text{ мм} = 0,5 \text{ см};$$

$$x_6 = 200 - 10 - 40 = 150 \text{ мм} = 15 \text{ см};$$

$$y_1 = 6 \text{ мм} = 0,6 \text{ см}; \quad y_2 = 12 + 30 = 42 \text{ мм} = 4,2 \text{ см};$$

$$y_3 = 12 + 350 - 5 = 357 \text{ мм} = 35,7 \text{ см}; \quad y_4 = 12 + \frac{350}{2} = 187 \text{ мм} = 18,7 \text{ см}; \quad y_5 = y_6 = 12 + 5 = 17 \text{ мм} = 1,7 \text{ см}.$$

Полученные данные расположим в виде табл. 11.

Искомые координаты центра тяжести данного профиля находим по формулам (42):

$$x_c = \frac{\sum S_i x_i}{\sum S_i} = \frac{240 + 117 + 40 + 17,5 + 40 + 120}{24 + 6 + 8 + 35 + 8 + 8} = \frac{574,5}{89} = 6,45 \text{ см};$$

$$y_c = \frac{\sum S_i y_i}{\sum S_i} = \frac{14,4 + 25,2 + 285,6 + 654,5 + 13,6 + 13,6}{89} = \frac{1006,9}{89} = 11,31 \text{ см}.$$

Если в данной фигуре имеются вырезы (отверстия), то координаты центра тяжести такой фигуры определяются тем же способом, как и в примерах 47 и 48, по тем же формулам (42), но только площади вырезанных частей (поскольку они отнимаются) нужно считать отрицательными, т. е. брать со знаком минус.

№ частей	S_i	x_i	y_i	$S_i x_i$	$S_i y_i$	
1	24	10	0,6	240	14,4	
2	6	19,5	4,2	117	25,2	
3	8	5	35,7	40	285,6	
4	35	0,5	18,7	17,5	654,5	
5	8	5	1,7	40	13,6	
6	8	15	1,7	120	13,6	

Пример 49. Определить положение центра тяжести фигуры, представляющей собой круг радиусом R с центром в точке O , из которого вырезаны три круга с центрами в точках O_1, O_2, O_3 , если расстояния между центрами этих кругов и их радиусы соответственно равны:

$$OO_1 = l_1, \quad l_1 = \frac{2}{3}R, \quad l_2 = \frac{R}{2}, \quad l_3 = \frac{3}{4}R,$$

$$OO_2 = l_2, \quad r_1 = \frac{R}{8}, \quad r_2 = \frac{R}{4}, \quad r_3 = \frac{R}{6},$$

$$OO_3 = l_3.$$

Угол α равен 120° (рис. 83).

Решение. Начало координат выберем в центре O большого круга, а ось x направим по прямой, соединяющей точки O и O_1 . Будем рассматривать данную фигуру, как состоящую из кругов радиусов r_1, r_2, r_3 и полного круга радиусом R (без вырезов). Обозначим площади этих кругов S_1, S_2, S_3, S_4 , а координаты их центров тяжести $x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3; x_4, y_4$.

Так как центр тяжести каждого круга совпадает с центром этого круга, то

$$x_1 = l_1 \cos 60^\circ = \frac{R}{3};$$

$$x_2 = l_2 \cos 60^\circ = \frac{R}{4};$$

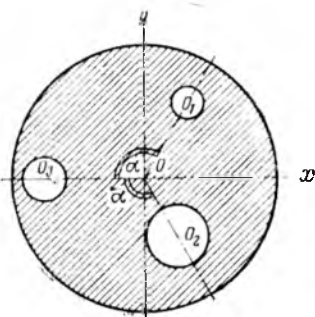


Рис. 83

$$x_3 = -l_3 = -\frac{3R}{4};$$

$$x_4 = 0;$$

$$y_1 = l_1 \cos 30^\circ = \frac{R\sqrt{3}}{3}; \quad y_2 = -l_2 \cos 30^\circ = -\frac{R\sqrt{3}}{4};$$

$$y_3 = y_4 = 0.$$

Кроме того, $S_4 = \pi R^2$. Так как площади вырезанных кругов отнимаются, то, как было указано выше, их надо считать отрицательными, т. е.

$$S_1 = -\pi r_1^2 = -\frac{\pi R^2}{64}; \quad S_2 = -\pi r_2^2 = -\frac{\pi R^2}{16};$$

$$S_3 = -\pi r_3^2 = -\frac{\pi R^2}{36}.$$

Таким образом, получим табл. 12.

Т а б л и ц а 12

№ частей	S_i	x_i	y_i	$S_i x_i$	$S_i y_i$
1	$-\frac{\pi R^2}{64}$	$\frac{R}{3}$	$\frac{R\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\pi R^2}{192}$	$-\frac{\pi R^2 \sqrt{3}}{192}$
2	$-\frac{\pi R^2}{16}$	$\frac{R}{4}$	$-\frac{R\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{\pi R^2}{64}$	$\frac{\pi R^2 \sqrt{3}}{64}$
3	$-\frac{\pi R^2}{36}$	$-\frac{3R}{4}$	0	$\frac{\pi R^2}{48}$	0
4	πR^2	0	0	0	0

Координаты искомого центра тяжести будут:

$$x_c = \frac{\sum S_i x_i}{\sum S_i} = \frac{\pi R^2 \left(-\frac{1}{192} - \frac{1}{64} + \frac{1}{48} \right)}{\pi R^2 \left(-\frac{1}{64} - \frac{1}{16} - \frac{1}{36} + 1 \right)} = 0;$$

$$y_c = \frac{\sum S_i y_i}{\sum S_i} = \frac{\pi R^2 \sqrt{3} \left(-\frac{1}{192} + \frac{1}{64} \right)}{\pi R^2 \left(-\frac{1}{64} - \frac{1}{16} - \frac{1}{36} + 1 \right)} = \frac{6\sqrt{3}}{515} R.$$

Итак, $x_c = 0$, $y_c \approx 0,02R$.

Четвертая группа

Разбив данное тело на n простейших по форме частей, обозначим объемы этих частей V_i , а координаты их центров тяжести x_i , y_i , z_i . Тогда координаты центра тяжести данного тела

определяют по формулам:

$$x_c = \frac{\sum V_i x_i}{\sum V_i}, \quad y_c = \frac{\sum V_i y_i}{\sum V_i}, \quad z_c = \frac{\sum V_i z_i}{\sum V_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (43)$$

Пример 50. На рис. 84 показан разрез тела, состоящего из цилиндра радиусом r и высоты h и двух полушаров радиусами R_1, R_2 , центры которых совпадают с центрами нижнего и верхнего оснований цилиндра. Определить центр тяжести этого тела, если $R_1 = 2R_2$, $h = 4R_2$, $r = \frac{R_2}{3}$.

Решение. Так как ось z является для данного тела осью симметрии, то искомый центр тяжести C этого тела лежит на оси z , поэтому достаточно вычислить только одну координату z_c .

Обозначим объемы полушаров и цилиндра соответственно V_1, V_2, V_3 , а их центры тяжести C_1, C_2, C_3 . За начало координат выберем точку C_1 . Тогда эти объемы и координаты центров тяжести C_1, C_2, C_3 будут соответственно равны:

$$V_1 = \frac{2}{3} \pi R_1^3 = 144\pi r^3,$$

$$z_1 = -\left(\frac{h}{2} + \frac{3}{8} R_1\right)^* = -\frac{33}{4} r,$$

$$V_2 = \frac{2}{3} \pi R_2^3 = 18\pi r^3, \quad z_2 = \frac{h}{2} + \frac{3}{8} R_2^* = \frac{57}{8} r;$$

$$V_3 = \pi r^2 h = 12\pi r^3, \quad z_3 = 0.$$

Искомую координату z_c центра тяжести данного тела находим по третьей формуле из (42):

$$z_c = \frac{V_1 z_1 + V_2 z_2 + V_3 z_3}{V_1 + V_2 + V_3} = \frac{-\frac{33}{4} 144 + \frac{57}{8} 18}{174} r = -\frac{1413}{232} r,$$

или

$$z_c = -6,09 r.$$

Итак,

$$z_c \approx -6r.$$

В некоторых случаях применение метода разбиения тела (или данной плоской фигуры) на простейшие части связано с особым приемом, который можно назвать методом дополнения.

* Расстояние от центра тяжести полушара радиусом R до его основания равно $\frac{3}{8} R$ (см. учебник проф. И. М. Воронкова, § 56).

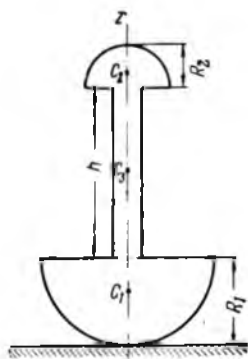


Рис. 84

Сущность этого метода состоит в следующем: к данному телу *I* присоединяют второе тело *II* так, чтобы получилось новое тело *III* простой геометрической формы, центр тяжести которого легко можно определить. Например, продолжив две противоположные стороны данного четырехугольника до их пересечения, можно дополнить его до треугольника; усеченный тетраэдр можно дополнить до четырехгранной пирамиды. Если при этом положение центра тяжести присоединенного тела *II* также легко можно определить, то к телу *III* применяем метод разбиения на простейшие части; это тело можно рассматривать состоящим из двух частей: данного тела *I* и добавленного тела *II*, и, следовательно, можно воспользоваться формулами (43).

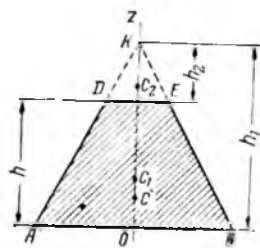


Рис. 85

Пример 51. Определить расстояние центра тяжести усеченного круглого конуса *ADEB* от его нижнего основания, если известны радиусы *R* и *r* верхнего и нижнего оснований конуса и его высота *h* (рис. 85).

Решение. Начало координат выберем в центре *O* нижнего основания усеченного конуса, а ось *z* направим по его высоте.

Так как ось *z* является осью симметрии усеченного конуса, то искомый центр тяжести лежит на этой оси в некоторой точке *C* с координатой z_C , которую и требуется определить. Применяя метод дополнения, дополним данный усеченный конус до конуса *ABK*.

Пусть C_1 и C_2 — центры тяжести конусов *AKB* и *DKE*, V_1 , V_2 — их объемы. Тогда $OC_1 = z_1$, $OC_2 = z_2$ и $V_1 = V_2 + V$, где V — объем данного усеченного конуса. Рассматривая конус *AKB*, как бы состоящий из двух частей *ADEB* и *DKB* и применяя формулу (43), имеем:

$$z_1 = \frac{z_2 V_2 + z_C V}{V_1},$$

откуда

$$z_C = \frac{z_1 V_1 - z_2 V_2}{V}$$

или

$$z_C = \frac{z_1 V_1 - z_2 V_2}{V_1 - V_2}. \quad (44)$$

Так как объемы двух подобных конусов *AKB* и *DKE* пропорциональны кубам радиусов их оснований, то $\frac{V_1}{V_2} = \frac{R^3}{r^3}$ и, следовательно,

$$z_C = \frac{z_1 R^3 - z_2 r^3}{R^3 - r^3}.$$

Кроме того, расстояние от центра тяжести конуса до его основания равно $\frac{1}{4}$ высоты этого конуса, а потому

$$z_1 = \frac{h_1}{4}, \quad z_2 = h + \frac{h_2}{4} = h + \frac{h_1 - h}{4} = \frac{h_1 + 3h}{4}$$

и

$$z_1 R^3 - z_2 r^3 = \frac{h_1 R^3 - (h_1 + 3h) r^3}{4} = \frac{h_1 (R^3 - r^3) - 3hr^3}{4}.$$

Учитывая, что $\frac{h_1}{h} = \frac{R}{R-r}$, т. е. $h_1 = \frac{Rh}{R-r}$, получим

$$\begin{aligned} z_1 R^3 - z_2 r^3 &= \frac{h}{4} [R(R^2 + Rr + r^2) - 3r^3] = \frac{h}{4} [R^3 - r^3 + r(R^2 - r^2) + \\ &+ r^2(R - r)] = \frac{h(R-r)}{4} [R^2 + rR + r^2 + r(R+r) + r^2] = \\ &= \frac{h(R-r)}{4} (R^2 + 2rR + 3r^2). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} z_c &= \frac{h(R-r)(R^2 + 2rR + 3r^2)}{4(R^3 - r^3)} = \frac{h(R^2 + 2rR + 3r^2)}{4(R^2 + Rr + r^2)}, \\ z_c &= \frac{h(R^2 + 2rR + 3r^2)}{4(R^2 + Rr + r^2)}. \end{aligned}$$

Если данное тело имеет полости (вырезанные части), то координаты центра тяжести такого тела определяются по тем же формулам (43), но только в этих формулах объемы вырезанных частей нужно брать со знаком минус.

Пример 52. Из усеченного конуса, радиусы нижнего и верхнего оснований которого R и r , а высота h , вырезан круглый цилиндр радиусом r , имеющий с конусом общую ось и высоту, равную $h_1 = \frac{h}{2}$. Найти расстояние центра тяжести оставшейся части от нижнего основания конуса (рис. 86).

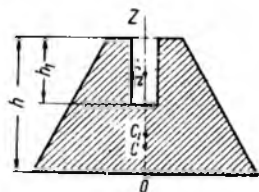


Рис. 86

Решение. Возьмем начало координат в центре нижнего основания конуса, а ось z направим по его оси симметрии. Искомый центр тяжести C лежит на оси z . На этой же оси лежат центр тяжести C_1 сплошного усеченного конуса (без выреза) и центр тяжести C_2 вырезанного цилиндра, причем

$$OC_1 = z_1 = \frac{h}{4} \frac{R^3 + 2Rr + 3r^2}{R^2 + rR + r^2}, *$$

$$OC_2 = z_2 = h - \frac{h_1}{2} = \frac{3}{4} h.$$

* См. предыдущий пример.

Объемы сплошного усеченного конуса и вырезанного цилиндра будут соответственно равны:

$$V_1 = \frac{\pi h}{3} (R^2 + Rr + r^2), \quad V_2 = -\pi r_1^2 h_1 = -\frac{\pi r_1^2 h}{2}$$

(объем V_2 вырезанного цилиндра считаем отрицательным).

Применяя теперь третью формулу из (42), получим

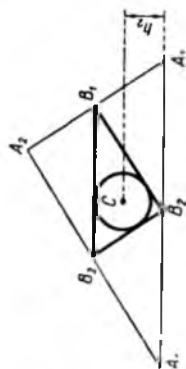
$$z_c = \frac{\frac{\pi h^2}{12} (R^2 + 2Rr + 3r^2) - \frac{3}{8} \pi r_1^2 h^2}{\frac{\pi h}{3} (R^2 + Rr + r^2) - \frac{\pi r_1^2 h}{2}} = \frac{h}{4} \cdot \frac{2(R^2 + 2Rr + 3r^2) - 9r_1^2}{2(R^2 + Rr + r^2) - 3r_1^2}.$$

Положение центра тяжести некоторых однородных линий, фигур и тел

Положение центра тяжести

1. Периметр треугольника

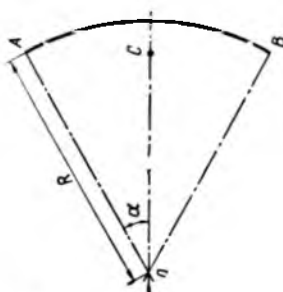
Центр тяжести находится в центре круга, вписанного в треугольник $B_1B_2B_3$, где B_1, B_2, B_3 — середины сторон данного треугольника.



$$h_2 = \frac{H_2}{2} \cdot \frac{a_1 + a_3}{a_1 + a_2 + a_3},$$

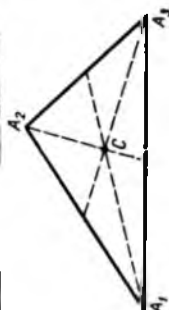
где a_1, a_2, a_3 — стороны данного треугольника и H_2 — высота, соответствующая стороне a_2 .

2. Дуга окружности радиуса R



$$OC = R \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

3. Треугольник



Центр тяжести находится в точке пересечения медиан:

$$x_C = \frac{1}{3} (x_1 + x_2 + x_3),$$

$$y_C = \frac{1}{3} (y_1 + y_2 + y_3), \text{ где}$$

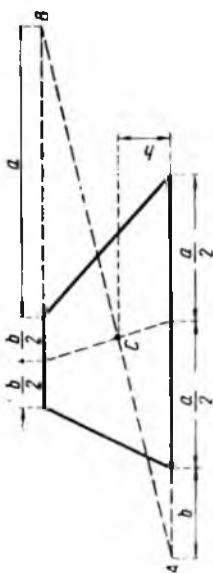
x_i, y_i — координаты вершин треугольника

Линии

Площади

Положение центра тяжести

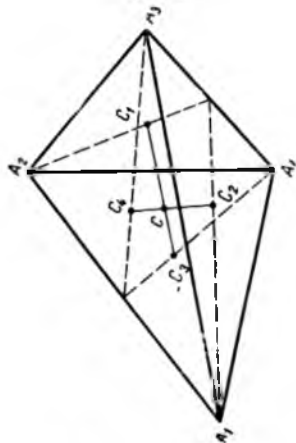
4. Трапеция



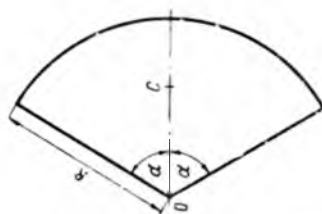
Центр тяжести находится в точке пересечения прямой AB и прямой, соединяющей середины параллельных сторон.

$$h = \frac{H}{3} \cdot \frac{a+2b}{a+b}, \text{ где } H - \text{высота трапеции}$$

5. Четырехугольник

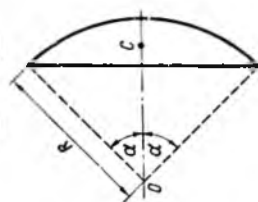


Центр тяжести C находится в точке пересечения отрезков C_1C_3 и C_2C_4 , где C_1 — центр тяжести треугольника $A_2A_3A_4$, C_2 — центр тяжести треугольника $A_1A_3A_4$, C_3 — центр тяжести треугольника $A_1A_2A_4$ и C_4 — центр тяжести треугольника $A_1A_2A_3$.



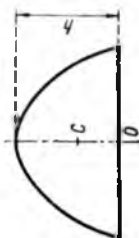
6. Круговой сектор
радиусом R

$$OC = \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$



7. Круговой сегмент
радиусом R

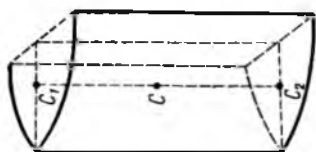
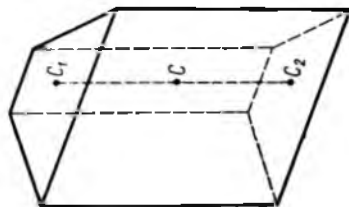
$$OC = \frac{4}{3} \frac{R \sin^3 \alpha}{2\alpha - \sin^2 \alpha}$$



8. Параболический
сегмент

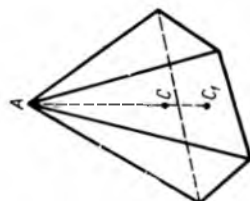
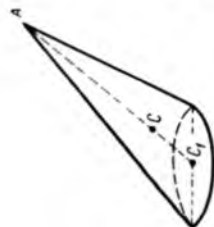
$$OC = \frac{2}{5} h$$

9. Призма или цилиндр



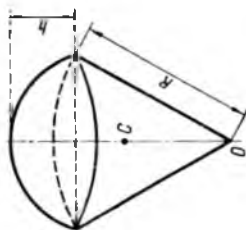
Центр тяжести C находится в середине отрезка, соединяющего центры тяжести C_1 и C_2 верхнего и нижнего оснований

10. Пирамида или конус



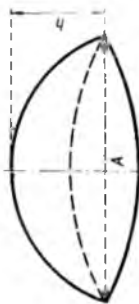
$C_1C = \frac{1}{4} AC_1$, где C_1 — центр тяжести основания, A — вершина и C — центр тяжести пирамиды или конуса

11. Шаровой сектор
радиусом R



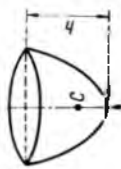
Центр тяжести C лежит на оси симметрии. причем $OC = \frac{3}{8} \times (2R - h)$, где h — высота шарового сегмента

12. Шаровой сегмент
радиусом R



Центр тяжести C лежит на оси симметрии на расстоянии от основания сегмента $AC = \frac{3}{4} \cdot \frac{(2R - h)^2}{(3R - h)}$

13. Параболоид вращения



Центр тяжести C лежит на оси симметрии на расстоянии от вершины параболоида $OC = \frac{2}{3} h$, где h — высота параболоида

РАЗДЕЛ II

КИНЕМАТИКА

Глава I

КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

Кинематика изучает движение механической системы, в частности абсолютно твердого тела, независимо от сил, действующих на эту систему. Так как при движении твердого тела различные его точки могут двигаться различно, то в кинематике сначала изучается движение более простого объекта, а именно движение точки, а затем — движение твердого тела.

Определить движение точки — это значит уметь определить положение этой точки по отношению к выбранной системе отсчета в любой момент времени t .

В кинематике применяются три способа, описывающих движение точки: векторный, координатный и естественный.

При векторном способе определения движения радиус-вектор $\vec{r}$ движущейся точки M , проведенный из выбранного неподвижного центра (начала системы отсчета), выражается как векторная функция от времени, т. е.

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (45)$$

Координатный способ определения движения точки состоит в том, что координаты движущейся точки в выбранной системе координат выражаются как функции времени t .

Уравнения движения точки в декартовых координатах имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(t), \\ y &= f_2(t), \\ z &= f_3(t). \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Если точка движется в плоскости xOy , то будем иметь только

два уравнения движения:

$$\begin{aligned}x &= f_1(t), \\ y &= f_2(t).\end{aligned}$$

В этом случае можно определить движение точки, применяя и полярную систему координат; уравнения движения точки в полярных координатах запишутся так:

$$\left. \begin{aligned}r &= F_1(t), \\ \varphi &= F_2(t).\end{aligned} \right\} \quad (47)$$

где r и φ — полярные координаты движущейся точки

При естественном, или натуральном, способе движение точки определяется ее траекторией и уравнением движения по этой траектории:

$$s = \overline{OM} = f(t), \quad (48)$$

где O — начало отсчета дуг на траектории, а s — дуговая координата точки M или взятая с соответствующим знаком длина дуги, отсчитываемая вдоль траектории от начала отсчета до точки M (рис. 87).

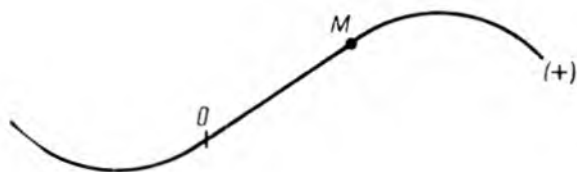


Рис. 87

Уравнение (48) называется законом, или уравнением, движения точки M по ее траектории.

Задачи, относящиеся к «Кинематике точки», можно разделить на следующие основные типы:

I. Задачи, относящиеся к прямолинейному движению точки. В задачах этого типа требуется определить скорость v и ускорение ω из уравнения прямолинейного движения точки, причем это уравнение или задано, или его нужно предварительно составить, исходя из условия задачи.

II. Задачи, относящиеся к криволинейному движению точки. Задачи, относящиеся ко второму типу, можно разделить на четыре группы:

1) задачи, в которых требуется определить траекторию, скорость и ускорение точки по заданным уравнениям движения в декартовых координатах;

2) задачи, в которых требуется составить уравнения движения точки в декартовых координатах и определить траекторию движения точки, а также ее скорость и ускорение;

3) задачи, в которых применяется естественный способ задания движения точки, т. е. задана траектория движения, а уравнение движения по этой траектории либо задано, либо его можно найти из условия задачи;

4) комбинированные задачи.

§ 1. ЗАДАЧИ ТИПА I

Прямолинейное движение точки (задачи 322—324, 336—342, 408—411)*

Если точка движется прямолинейно, то в этом случае скорость v и ускорение $\bar{w}$ направлены по прямолинейной траектории, а модули их равны:

$$|v| = \left| \frac{ds}{dt} \right|, \quad |w| = \left| \frac{d^2s}{dt^2} \right| = \left| \frac{dv}{dt} \right|, \quad (49)$$

где s — расстояние движущейся точки, отсчитываемое от некоторой неподвижной точки O траектории.

Если выбрать прямую, по которой движется точка, за ось Ox , а расстояние $OM = s$ обозначить через x , то проекции векторов скорости $\bar{v}$ и ускорения $\bar{w}$ на направление траектории будут равны:

$$v = \frac{dx}{dt}, \quad w = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad (50)$$

где v и w — алгебраические значения скорости и ускорения, причем знаки $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{d^2x}{dt^2}$ указывают, в какую сторону по оси Ox направлены векторы скорости и ускорения.

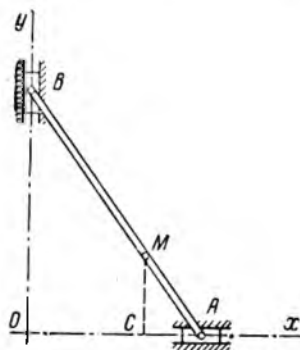


Рис. 88

При составлении уравнения прямолинейного движения точки необходимо рассматривать положение движущейся точки в произвольный момент времени t , а не ее начальное или конечное положение и выразить ее расстояние от начала отсчета как функцию времени t .

Пример 53. Линейка эллипсографа длиной $AB = l = 1$ м скользит своими концами по осям Ox и Oy . Конеч A линейки движется по оси Ox , причем закон этого прямолинейного движения выражается так: $OA = 0,1t$ м. Составить уравнение движения точки B и определить скорости и ускорения точек A и B (рис. 88).

* Здесь и дальше номера задач указаны по «Сборнику задач по теоретической механике» проф. И. В. Мещерского, изд. 1950 г. и послед. изд.

Решение. Точка B движется прямолинейно по оси Oy ; расстояние этой точки от неподвижной точки O найдем из прямоугольного треугольника OAB :

$$OB = \sqrt{AB^2 - OA^2} = \sqrt{1 - 0,01t^2}.$$

Таким образом, уравнением прямолинейного движения точки B запишется так: $y_B = \sqrt{1 - 0,01t^2}$.

Скорости и ускорения точек A и B , которые направлены соответственно по осям Ox и Oy , найдем по формулам (49):

$$v_A = \frac{dx_A}{dt} = \frac{d \cdot 0,1t}{dt} = 0,1 \text{ м/сек},$$

$$v_B = \frac{dy_B}{dt} = \frac{d \sqrt{1 - 0,01t^2}}{dt} = \frac{-0,01t}{\sqrt{1 - 0,01t^2}} \text{ м/сек},$$

$$\omega_A = \frac{dv_A}{dt} = 0,$$

$$\begin{aligned} \omega_B = \frac{dv_B}{dt} = \frac{d^2 y_B}{dt^2} &= -0,01 \left\{ \frac{\sqrt{1 - 0,01t^2} - t \frac{-0,01t}{\sqrt{1 - 0,01t^2}}}{1 - 0,01t^2} \right\} = \\ &= -\frac{0,01}{(1 - 0,01t^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ м/сек}^2. \end{aligned}$$

Так как $\frac{dy_B}{dt} < 0$ и $\frac{d^2 y_B}{dt^2} < 0$, то скорость ползуна B направлена к точке O и ползун движется ускоренно.

Пример 54. Круглый эксцентрик диаметром $2r$ вращается вокруг оси O , отстоящей от геометрической оси C эксцентрика на расстоянии, равном $OC = a =$

$= \frac{r}{3}$; угол φ изменяется по зако-

ну $\varphi = \frac{\pi}{2} t$ (угол φ измеряется в радианах, r — в см, а t — в сек). Найти уравнение прямолинейного движения точки M стержня MN , движущегося в вертикальных направляющих, как указано на рис. 89, а также скорость и ускорение этой точки в момент $t_1 = 3 \text{ сек}$ (рис. 89).

Решение. Стержень MN движется в вертикальных направляющих, а потому точка M стержня движется прямолинейно по неподвижной прямой, проходящей через точку O и направленной вдоль стержня MN . Выберем эту прямую за ось Oy , а начало отсчета — в точке O и выразим расстояние $OM = y$

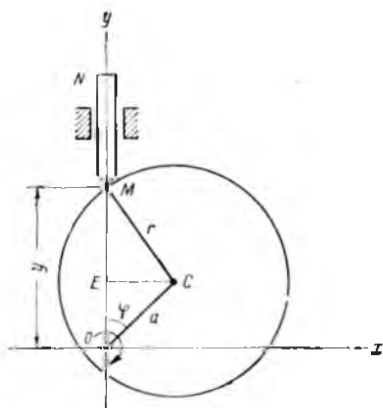


Рис. 89

как функцию времени t ; для этого достаточно выразить отрезок OM через угол φ . Проведя из точки C высоту CE в треугольнике MOC , имеем:

$$OM = OE + EM.$$

Но $OE = a \cos \varphi$, $EC = a \sin \varphi$, $EM = \sqrt{MC^2 - EC^2} = \sqrt{r^2 - a^2 \sin^2 \varphi}$, а потому

$$y = OM = a \cos \varphi + \sqrt{r^2 - a^2 \sin^2 \varphi}.$$

Подставляя значения угла φ и $r = 3a$ в последнее равенство, получим закон движения точки M :

$$y = a \left(\cos \frac{\pi}{2} t + \sqrt{9 - \sin^2 \frac{\pi}{2} t} \right).$$

Скорость и ускорение точки M найдем по формулам (49):

$$\begin{aligned} v = \frac{dy}{dt} &= \frac{d}{dt} a \left(\cos \frac{\pi}{2} t + \sqrt{9 - \sin^2 \frac{\pi}{2} t} \right) = -\frac{\pi}{2} a \sin \frac{\pi}{2} t \times \\ &\times \left(1 + \frac{\cos \frac{\pi}{2} t}{\sqrt{9 - \sin^2 \frac{\pi}{2} t}} \right) = -\frac{\pi a \sin \frac{\pi}{2} t}{2 \sqrt{9 - \sin^2 \frac{\pi}{2} t}} \times \\ &\times \left(\cos \frac{\pi}{2} t + \sqrt{9 - \sin^2 \frac{\pi}{2} t} \right), \end{aligned}$$

или

$$v = -\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{2} t}{\sqrt{9 - \sin^2 \frac{\pi}{2} t}} y.$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \omega = \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{dv}{dt} &= -\frac{\pi}{2} \left[y \frac{d}{dt} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{2} t}{\sqrt{9 - \sin^2 \frac{\pi}{2} t}} \right) + \right. \\ &\left. + \frac{\sin \frac{\pi}{2} t}{\sqrt{9 - \sin^2 \frac{\pi}{2} t}} \frac{dy}{dt} \right]. \end{aligned}$$

$$\text{Так как } \frac{dy}{dt} = v \text{ и } \frac{d}{dt} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{2} t}{\sqrt{9 - \sin^2 \frac{\pi}{2} t}} \right) = \frac{9\pi \cos \frac{\pi}{2} t}{2 \left(9 - \sin^2 \frac{\pi}{2} t \right)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\omega = -\frac{\pi}{2} \left[y \frac{9 \cos \frac{\pi}{2} t}{2 \left(9 - \sin^2 \frac{\pi}{2} t \right)^{\frac{3}{2}}} + v \frac{\sin \frac{\pi}{2} t}{\sqrt{9 - \sin^2 \frac{\pi}{2} t}} \right].$$

Таким образом,

$$\omega = -\frac{\pi^2}{4} y \frac{\left[9 \cos \frac{\pi}{2} t - \sin^2 \frac{\pi}{2} t \sqrt{9 - \sin^2 \frac{\pi}{2} t} \right]}{\left(9 - \sin^2 \frac{\pi}{2} t \right)^{\frac{3}{2}}}.$$

В момент $t_1 = 3$ сек

$$v_1 = \frac{\pi}{2} a \text{ см/сек}, \quad \omega_1 = \frac{\pi^2}{8\sqrt{2}} a \text{ см/сек}.$$

Так как $v_1 > 0$ и $\omega_1 > 0$, то скорость и ускорение точки M направлены от точки O , т. е. по вертикали вверх, и точка M движется ускоренно.

§ 2. ЗАДАЧИ ТИПА II

Криволинейное движение точки

Первая группа

Задачи, в которых требуется определить траекторию, скорость и ускорение точки из уравнений движения в декартовых координатах

(задачи 311, 313—316, 320, 322, 326, 328, 349, 352, 354)

Если движение точки определяется уравнениями в декартовых координатах, то, для того чтобы найти траекторию точки, достаточно из уравнений движения исключить время t . Вектор скорости и вектор ускорения определяются по их проекциям на оси декартовых координат, причем

$$\left. \begin{aligned} v_x = \dot{x} = \frac{dx}{dt}, \\ v_y = \dot{y} = \frac{dy}{dt}, \\ v_z = \dot{z} = \frac{dz}{dt}; \end{aligned} \right\} (50) \quad \left. \begin{aligned} \omega_x = \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}, \\ \omega_y = \ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2}, \\ \omega_z = \ddot{z} = \frac{d^2z}{dt^2}. \end{aligned} \right\} (51)$$

Отсюда получаем формулы разложения векторов скорости $\vec{v}$ и ускорения $\vec{\omega}$ по координатным осям:

$$\vec{v} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}, \quad (52)$$

$$\vec{\omega} = \ddot{x} \vec{i} + \ddot{y} \vec{j} + \ddot{z} \vec{k}. \quad (53)$$

Модули и направляющие косинусы векторов скорости и ускорения определяются по формулам:

$$|\bar{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}, \quad (54)$$

$$\left. \begin{aligned} \cos(\bar{v}, \bar{i}) &= \frac{\dot{x}}{|\bar{v}|}, \\ \cos(\bar{v}, \bar{j}) &= \frac{\dot{y}}{|\bar{v}|}, \\ \cos(\bar{v}, \bar{k}) &= \frac{\dot{z}}{|\bar{v}|}, \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

$$|\bar{w}| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}, \quad (56)$$

$$\left. \begin{aligned} \cos(\bar{w}, \bar{i}) &= \frac{\ddot{x}}{|\bar{w}|}, \\ \cos(\bar{w}, \bar{j}) &= \frac{\ddot{y}}{|\bar{w}|}, \\ \cos(\bar{w}, \bar{k}) &= \frac{\ddot{z}}{|\bar{w}|}. \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

Пример 55. По заданным уравнениям движения точки в декартовых координатах найти траекторию, скорость и ускорение этой точки:

$$1) \quad x = \frac{a}{2} (e^{kt} + e^{-kt}) = a \operatorname{ch}(kt);$$

$$y = \frac{b}{2} (e^{kt} - e^{-kt}) = b \operatorname{sh}(kt);$$

$$2) \quad x = R \sin \omega t;$$

$$y = R (1 - \cos 2 \omega t);$$

$$z = R \sin \omega t.$$

(Координаты x , y и z заданы в метрах, а t — в сек.)

Решение. 1) Чтобы найти траекторию точки, исключим из уравнений движения время t ; из первого уравнения имеем:

$$\frac{2x}{a} = e^{kt} + e^{-kt}, \text{ а из второго: } \frac{2y}{b} = e^{kt} - e^{-kt}. \text{ Возведя эти равенства}$$

в квадрат и вычитая второе из первого, получим:

$$\frac{4x^2}{a^2} - \frac{4y^2}{b^2} = (e^{kt} + e^{-kt})^2 - (e^{kt} - e^{-kt})^2 = 4, \text{ или } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Следовательно, искомая траектория есть гипербола с полуосями a и b . Полагая в начальный момент $t_0 = 0$, находим: $x_0 = a$, $y_0 = 0$, т. е. в начальный момент точка находится в вершине гиперболы $A_0(a, 0)$. При дальнейшем возрастании t координаты x и y точки возрастают, оставаясь положительными. Следовательно, точка A движется по правой ветви гиперболы в направ-

лени, указанном на рис. 90. Воспользовавшись формулами (50), (51), найдем проекции скорости и ускорения точки на координатные оси:

$$v_x = \frac{ak}{2} (e^{kt} - e^{-kt}) = \frac{a}{b} ky;$$

$$v_y = \frac{bk}{2} (e^{kt} + e^{-kt}) = \frac{b}{a} kx;$$

$$w_x = \frac{ak^2}{2} (e^{kt} + e^{-kt}) = k^2 x;$$

$$w_y = \frac{bk^2}{2} (e^{kt} - e^{-kt}) = k^2 y.$$

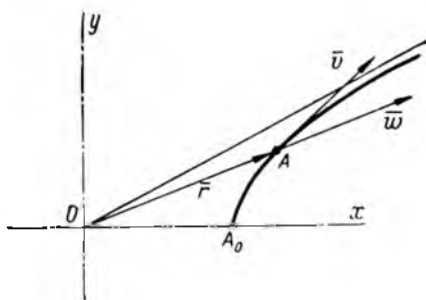


Рис 90

Далее по формулам (54) — (56) находим:

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \frac{k}{ab} \sqrt{a^4 x^2 + b^4 y^2},$$

$$\cos(\bar{v}, \bar{i}) = \frac{v_x}{|v|} = \frac{a^2 y}{\sqrt{a^4 y^2 + b^4 x^2}},$$

$$\cos(v, j) = \frac{v_y}{|v|} = \frac{b^2 x}{\sqrt{a^4 y^2 + b^4 x^2}},$$

$$w = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = k^2 \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Но $x^2 + y^2 = r^2$, а потому $w = k^2 r$.

Кроме того, $\bar{w} = k^2 x \bar{i} + k^2 y \bar{j} = k^2 (x \bar{i} + y \bar{j})$.

Так как $x \bar{i} + y \bar{j} = \bar{r}$, то $\bar{w} = k^2 \bar{r}$, т. е. вектор ускорения направлен по радиусу-вектору движущейся точки.

$$\begin{aligned} 2) \quad x &= R \sin \omega t, \\ y &= R (1 - \cos 2 \omega t), \\ z &= R \sin \omega t. \end{aligned}$$

Чтобы найти уравнение траектории, достаточно из уравнений движения исключить время t . Из первого и третьего уравнений имеем: $z = x$ — это есть уравнение плоскости, проходящей

через ось y и биссектрису координатного угла zOx . Далее, находя из первого уравнения $\sin \omega t$ и подставляя это значение во второе уравнение, имеем: $\sin \omega t = \frac{x}{R}$.

$$y = (1 - \cos 2\omega t) = R (2 \sin^2 \omega t),$$

или

$$y = \frac{2}{R} x^2.$$

Это есть уравнение параболического цилиндра с образующими, параллельными оси z , причем направляющей этого цилиндра является парабола $y = \frac{2}{R} x^2$, лежащая в плоскости xOy . Таким образом, траекторией точки является линия пересечения поверхностей

$$\left. \begin{aligned} z &= x, \\ y &= \frac{2}{R} x^2. \end{aligned} \right\}$$

В начальный момент $t_0 = 0$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$, т. е. точка находится в начале координат; так как координаты x и z изменяются периодически в пределах от $-R$ до R , а координата y — в пределах от 0 до $2R$, то точка совершает колебательное движение по дуге параболы.

По формулам (50) и (51) вычислим проекции скорости и ускорения на оси x , y и z :

$$\begin{aligned} v_x &= R\omega \cos \omega t, & w_x &= -R\omega^2 \sin \omega t, \\ v_y &= 2R \sin 2\omega t, & w_y &= 4R\omega^2 \cos 2\omega t, \\ v_z &= R\omega \cos \omega t, & w_z &= -R\omega^2 \sin \omega t. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \vec{v} &= R\omega \cos \omega t \vec{i} + 2R\omega \sin 2\omega t \vec{j} + R\omega \cos \omega t \vec{k}, \\ \vec{w} &= -R\omega^2 \sin \omega t \vec{i} + 4R\omega^2 \cos 2\omega t \vec{j} - R\omega^2 \sin \omega t \vec{k}, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \vec{v} &= R\omega (\cos \omega t \vec{i} + 2 \sin 2\omega t \vec{j} + \cos \omega t \vec{k}), \\ \vec{w} &= R\omega^2 (-\sin \omega t \vec{i} + 4 \cos 2\omega t \vec{j} - \sin \omega t \vec{k}). \end{aligned}$$

Далее находим модули векторов скорости и ускорения по формулам (54) и (56):

$$\begin{aligned} |\vec{v}| &= R\omega \sqrt{2(\cos^2 \omega t + 2 \sin^2 2\omega t)} = \sqrt{2} R \omega \cos \omega t \cdot \sqrt{1 + 8 \sin^2 \omega t}, \\ |\vec{w}| &= R\omega^2 \sqrt{2(\sin^2 \omega t + 8 \cos^2 2\omega t)} = \sqrt{2} R \omega^2 \cdot \sqrt{\sin^2 \omega t + 8 \cos^2 2\omega t}. \end{aligned}$$

Вторая группа

Задачи, в которых требуется составить уравнения движения точки в декартовых координатах и определить траекторию движения, а также скорость и ускорение точки
(задачи 317, 319, 327, 332—334, 359, 369)

При решении задач этой группы следует сначала составить уравнения движения точки; для этого нужно рассмотреть положение движущейся точки в произвольный момент времени, а не ее начальное или конечное положение, и выразить ее текущие координаты как функции времени t . Далее следует придерживаться такого же плана, как и при решении задач предыдущей группы.

Пример 56. Составить уравнения движения точки M колеса паровоза, отстоящей от оси колеса на расстоянии r , равном 0,8 м,

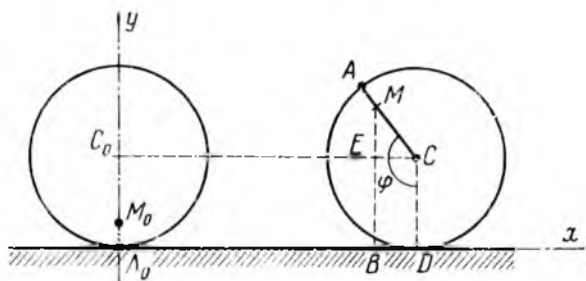


Рис 91

если паровоз движется равномерно по прямолинейному участку пути со скоростью $v_c = 16$ м/сек, и найти скорость и ускорение точки M . Колесо катится по рельсу без скольжения, а его радиус равен $R = 1$ м. В начальный момент точка M занимает положение M_0 на вертикальном диаметре колеса (рис. 91).

Решение. Ось Ox направим по рельсу, а ось Oy проведем через точку M_0 , принимая за начало координат точку A_0 . Рассмотрим два положения колеса в начальный момент $t = 0$ и в текущий момент времени t . Отметим положение центра C колеса и его радиуса CA , на котором расположена точка M в момент t . Так как расстояние от центра колеса до рельса все время равно радиусу R , то точка C движется по прямой, параллельной оси Ox , и притом по условию задачи равномерно, а потому расстояние от этой точки до ее начального положения равно $C_0C = v_c t$. Так как $CD \parallel C_0A_0$, то $\angle ACD$ есть угол поворота колеса вокруг своей оси за t сек, который обозначим через φ . Для того чтобы найти уравнения движения точки M ,

найдем координаты этой точки:

$$\begin{aligned}x_M &= A_0 B, \\y_M &= MB.\end{aligned}$$

Но $A_0 B = A_0 D - CE = C_0 C - CE$ и $MB = ME + EB$, или $x_M = v_c t - CE$, $y_M = R + EM$.

Из треугольника MEC имеем:

$$\begin{aligned}ME &= r \sin(\varphi - 90^\circ) = -r \cos \varphi, \\EC &= r \cos(\varphi - 90^\circ) = r \sin \varphi,\end{aligned}$$

а потому $x_M = v_c t - r \sin \varphi$, $y_M = R - r \cos \varphi$.

Найдем зависимость угла φ от времени t . Так как качение колеса по рельсу происходит без скольжения, то $\sphericalangle AD = DA_0$. Но

$$DA_0 = CC_0 = v_c t, \quad \sphericalangle DA = R\varphi,$$

а потому

$$v_c t = R\varphi$$

и

$$\varphi = \frac{v_c t}{R} = 16t.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}x_M &= 16t - r \sin 16t, \\y_M &= 1 - r \cos 16t\end{aligned}$$

т. е. искомой траекторией является укороченная циклоида. Если точка M находится на ободу колеса, то $r = R$ и мы получаем следующие уравнения движения циклоиды:

$$\begin{aligned}x_M &= v_c t - R \sin \frac{v_c}{R} t, \\y_M &= R - R \cos \frac{v_c}{R} t.\end{aligned}$$

Если же $r > R$, например, $r = 1,2 R$, то аналогично можно получить уравнения движения точки M , описывающей удлиненную циклоиду.

Подставив значение r в уравнения движения точки M , имеем:

$$\begin{aligned}x_M &= 16t - 0,8 \sin 16t, \\y_M &= 1 - 0,8 \cos 16t.\end{aligned}$$

Для определения проекций векторов скорости и ускорения на оси x и y воспользуемся формулами (50) и (51):

$$\begin{aligned}v_x &= 16 - 12,8 \cos 16t, & \omega_x &= 204,8 \sin 16t, \\v_y &= -12,8 \sin 16t, & \omega_y &= 204,8 \cos 16t.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\vec{v} = 16 [\vec{i} (1 - 0,8 \cos 16 t) - \vec{j} 0,8 \sin 16 t],$$

$$\vec{w} = 204,8 (\vec{i} \sin 16 t + \vec{j} \cos 16 t).$$

Далее вычислим модули векторов скорости $\vec{v}$ и ускорения $\vec{w}$ по формулам (54), (56):

$$|\vec{v}| = \sqrt{(16 - 12,8 \cos 16 t)^2 + (12,8)^2 \sin^2 16 t} = 16 \sqrt{1 + 0,1 \cos 16 t};$$

$$|\vec{w}| = \sqrt{(\cos^2 16 t + \sin^2 16 t) (204,8)^2} = 204,8 \text{ м/сек}^2.$$

Пример 57. Линейка эллипсографа $AB = 10\sqrt{2}$ см концами A и B скользит по двум прямолинейным направляющим, образующим между собой угол $\alpha = 135^\circ$. Найти траекторию, скорость и

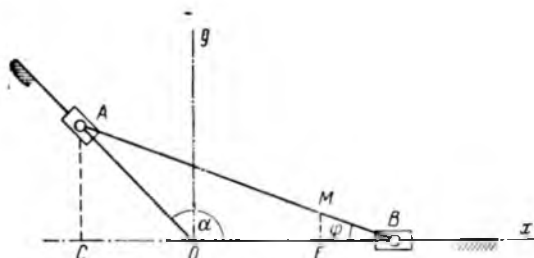


Рис. 92

ускорение точки M линейки, если $\frac{AM}{MB} = 3$ и закон движения ползуна A выражается уравнением $OA = s = 20 \sin \frac{\pi}{2} t$ (рис. 92).

Решение. Ось Ox направим по прямой OB , а ось Oy — перпендикулярно к OB и построим координаты точки M :

$$x = OE = BC - OC - BE;$$

$$y = ME.$$

Далее выразим координаты точки M через заданный отрезок OA ; для этого опустим перпендикуляр из точки A на ось Ox . Из подобных треугольников ACB и MEB находим:

$$\frac{AC}{ME} = \frac{BC}{BE} = \frac{AB}{MB} = 4, \text{ откуда } ME = \frac{1}{4} AC \text{ и } BE = \frac{1}{4} BC.$$

Следовательно,

$$x = \frac{3}{4} BC - OC.$$

$$y = \frac{1}{4} AC.$$

Так как из прямоугольных треугольников $АОС$ и $АВС$ имеем:

$$\begin{aligned} OC &= AC = AO \sin \alpha, \\ AC &= AB \sin \varphi, \\ BC &= AB \cos \varphi, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} x &= \frac{3}{4} AB \cos \varphi - AO \sin \alpha = \frac{3}{4} \cdot 10 \sqrt{2} \cos \varphi - 20 \sin \frac{\pi}{2} t \cdot \sin 45^\circ, \\ y &= 10 \frac{\sqrt{2}}{4} \sin \frac{\pi}{2} t, \end{aligned}$$

или

$$x = 10\sqrt{2} \left(\frac{3}{4} \cos \varphi - \sin \frac{\pi}{2} t \right), \quad y = \frac{5\sqrt{2}}{2} \sin \frac{\pi}{2} t.$$

Остается выразить зависимость между φ и t . Из треугольника $ОАВ$ по теореме синусов имеем:

$$\frac{AB}{\sin \alpha} = \frac{AO}{\sin \varphi},$$

откуда

$$\sin \varphi = \frac{AO}{AB} \sin \alpha = \sin \frac{\pi}{2} t \quad \text{и} \quad \varphi = \frac{\pi}{2} t.$$

Таким образом, уравнения движения точки M имеют вид:

$$\begin{aligned} x &= 10\sqrt{2} \left(\frac{3}{4} \cos \frac{\pi}{2} t - \sin \frac{\pi}{2} t \right), \\ y &= \frac{5\sqrt{2}}{2} \sin \frac{\pi}{2} t. \end{aligned}$$

Чтобы найти уравнение траектории, достаточно из этих уравнений исключить t ; для этого перепишем уравнения движения в виде:

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{2} t &= \frac{y}{2,5\sqrt{2}}, \\ \cos \frac{\pi}{2} t &= \left(\frac{x}{10\sqrt{2}} + \frac{4y}{10\sqrt{2}} t \right) \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Возведя эти уравнения в квадрат и складывая их, получим уравнение траектории (эллипс):

$$18y^2 + 2(x + 4y)^2 = 25.$$

Теперь вычислим проекции векторов скорости и ускорения на оси координат по формулам (50) и (51):

$$\begin{aligned} v_x = \dot{x} &= \frac{-5\pi\sqrt{2}}{4} \left(3 \sin \frac{\pi}{2} t + 4 \cos \frac{\pi}{2} t \right), \\ v_y = \dot{y} &= \frac{5\pi\sqrt{2}}{4} \cos \frac{\pi}{2} t, \end{aligned}$$

$$\omega_x = \ddot{x} = \frac{-5\pi^2 \sqrt{2}}{8} \left(3 \cos \frac{\pi}{2} t - 4 \sin \frac{\pi}{2} t \right),$$

$$\omega_y = \ddot{y} = \frac{-5\pi^2 \sqrt{2}}{8} \sin \frac{\pi}{2} t,$$

или

$$v_x = -\frac{\pi}{6} (4x + 25y),$$

$$v_y = \frac{\pi}{6} (x + 4y),$$

$$\omega_x = -\frac{\pi^2}{4} x,$$

$$\omega_y = -\frac{\pi^2}{4} y.$$

Отсюда по формулам (52) и (53) находим:

$$\bar{v} = \frac{\pi}{6} \{ -(4x + 25y) \bar{i} + (x + 4y) \bar{j} \},$$

$$\bar{\omega} = -\frac{\pi^2}{4} (x \bar{i} + y \bar{j}) = -\frac{\pi^2}{4} \bar{r},$$

где $\bar{r}$ — радиус-вектор точки M . Таким образом, вектор ускорения направлен противоположно радиусу-вектору движущейся точки.

§ 3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ И УСКОРЕНИЯ ТОЧКИ ПРИ ЕСТЕСТВЕННОМ СПОСОБЕ ЗАДАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

(задачи 323, 324, 336—349)

Если заданы траектория движущейся точки и закон ее движения по этой траектории $s = f(t)$, то вектор скорости направлен по касательной к траектории, а его проекция на направление касательной определяется по формуле

$$v_\tau = \frac{ds}{dt}, \quad (58)$$

причем абсолютное значение этой проекции равно модулю скорости, т. е.

$$|v_\tau| = \left| \frac{ds}{dt} \right| = |v|.$$

Вектор ускорения определяется по его проекциям на естественные оси (касательную, главную нормаль и бинормаль):

$$\omega_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}, \quad \omega_n = \frac{v^2}{\rho}, \quad \omega_b = 0, \quad (59)$$

где ρ — радиус кривизны траектории в данной точке.

Следовательно.

$$|\omega| = \sqrt{\omega_{\tau}^2 + \omega_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv_{\tau}}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}. \quad (60)$$

Если плоская траектория задана уравнением $y=f(x)$, то радиус кривизны траектории вычисляется по формуле

$$\rho = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}, \quad (61)$$

где $y' = \frac{dy}{dx}$ и $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$.

Рассмотрим частные случаи:

1. Если точка движется прямолинейно и неравномерно, то радиус кривизны траектории $\rho \rightarrow \infty$ и, следовательно, $\omega_n = 0$.

В этом случае ускорение $\vec{\omega}$ направлено по прямолинейной траектории точки и по модулю равно

$$\omega = |\vec{\omega}| = \left| \frac{dv_{\tau}}{dt} \right| = \left| \frac{dv_s}{dt} \right|. \quad (62)$$

2. Если точка движется по кривой равномерно, то

$$v_{\tau} = \text{const} \quad \text{и} \quad \omega_{\tau} = \frac{dv_{\tau}}{dt} = 0,$$

а потому ускорение $\vec{\omega}$ направлено по нормали к траектории и по модулю равно

$$\omega = \omega_n = \frac{v^2}{\rho}. \quad (63)$$

3. Если точка движется прямолинейно и равномерно, то

$$\omega_n = 0, \quad \omega_{\tau} = 0 \quad \text{и} \quad \omega = 0.$$

Пример 58. Вагонетка движется равномерно по закруглению радиусом $R=600$ м, причем ускорение ее центра тяжести равно $\omega=0,0026$ м/сек². Найти скорость центра тяжести вагонетки.

Решение. Так как центр тяжести вагонетки перемещается по окружности равномерно, то его ускорение $\vec{\omega}$ направлено по радиусу этой окружности к центру и согласно формуле (59) по модулю равно

$$\omega = \omega_n = \frac{v^2}{\rho}.$$

Но радиус кривизны окружности равен ее радиусу, а потому

$$\omega = \frac{v^2}{R},$$

откуда

$$v^2 = R\omega$$

$$v = \sqrt{R\omega} = \sqrt{0,0026 \cdot 600} = \sqrt{1,56} = 1,25 \frac{\text{м}}{\text{сек}}.$$

Пример 59. Точка движется с постоянным тангенциальным ускорением a по окружности радиуса R без начальной скорости. Через сколько секунд после начала движения касательное и нормальное ускорения станут численно равны между собой?

Решение. Для решения задачи воспользуемся формулами:

$$\omega_\tau = \frac{dv}{dt} = a.$$

$$\omega_n = \frac{v^2}{\varrho} = \frac{v^2}{R}.$$

Интегрируя уравнение $dv = a dt$, имеем:

$$\int_{v_0}^v dv = \int_0^t a dt,$$

отсюда, принимая во внимание, что $v_0 = 0$ и $a = \text{const}$, находим $v = at$ и, следовательно,

$$\omega_n = \frac{a^2 t^2}{R}.$$

В искомый момент времени t_1 касательное и нормальное ускорения равны между собой, а потому

$$\frac{a^2 t_1^2}{R} = a,$$

откуда

$$t_1 = \sqrt{\frac{R}{a}}.$$

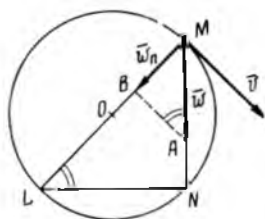


Рис. 93

Пример 60. Точка движется по окружности; в некоторый момент ее скорость равна v , а ускорение направлено по хорде $MN = l$. Зная v и l , найти ускорение точки в этот момент (рис. 93).

Решение. Пусть на рис. 93 векторы $\overline{MA}$ и $\overline{MB}$ обозначают соответственно ускорения $\overline{\omega}$ и $\overline{\omega_n}$. Тогда из подобия прямоугольных треугольников MAB и MLN имеем:

$$\frac{\omega}{\omega_n} = \frac{ML}{MN} = \frac{2R}{l},$$

отсюда

$$\omega = \frac{2R}{l} \omega_n = \frac{2R}{l} \cdot \frac{v^2}{\varrho} = \frac{2R}{l} \cdot \frac{v^2}{R} = \frac{2v^2}{l}.$$

Пример 61. Машина идет по выпуклому мосту AB . Ее центр тяжести M описывает при этом параболу $y = -0,005x^2$, а расстояние $s = \overset{\frown}{AM}$, отсчитываемое от точки A вдоль дуги параболы, изменяется по закону $s = \frac{2}{3}t^3 - 9t^2 + 60t$ (x , y и s выражены в метрах, а t — в сек). Определить скорость и ускорение центра тяжести машины в тот момент, когда он находится в вершине параболы, если в этот момент скорость машины достигает минимума (рис. 94).

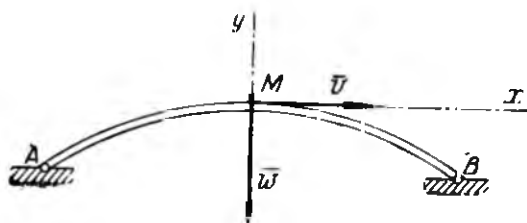


Рис. 94

Решение. Так как траектория и закон движения точки M по ее траектории заданы, то для решения задачи воспользуемся формулами (58), (59) и (60). Тогда имеем:

$$v = \frac{ds}{dt} = 2t^2 - 18t + 60$$

$$\omega_\tau = \frac{dv}{dt} = 4t - 18,$$

$$\omega_n = \frac{v^2}{\rho}.$$

Радиус кривизны траектории определим по формуле (61):

$$\rho = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}, \text{ где } y' = \frac{dy}{dx} = -0,01x, \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = -0,01.$$

Следовательно,

$$\rho = \frac{(1 + 0,0001x^2)^{3/2}}{0,01}.$$

Но в вершине параболы координата x точки M равна нулю, поэтому $\rho = 100$ м.

Остается определить, в какой момент времени машина достигает вершины параболы; так как скорость ее в этот момент достигает минимума, то $\frac{dv}{dt} = 0$, откуда $4t_1 - 18 = 0$ и $t_1 = \frac{18}{4} = 4,5$ сек. Следовательно, $v_1 = 2t_1 - 18t_1 + 60 = 60 - 81 + 9 \cdot 4,5 = 19,5$ м/сек.

Так как в вершине параболы касательное ускорение $\omega_\tau = \frac{dv}{dt}$ равно нулю, то $\omega = \omega_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(19,5)^2}{100} = 3,8$ м/сек².

§ 4. КОМБИНИРОВАННЫЕ ЗАДАЧИ

(задачи 312, 353, 355—358, 367—369, 371, 373)

К задачам этого типа относятся такие задачи, в которых требуется, исходя из уравнений движения точки в декартовых координатах, найти закон движения точки по ее траектории, т. е. выразить дуговую координату s в функции времени, а также найти касательное и нормальное ускорения точки и радиус кривизны траектории.

Чтобы найти закон движения точки по ее траектории, нужно из заданных уравнений движения определить скорость v и составить уравнение: $ds = v dt$.

Отсюда, интегрируя, получим:

$$\int_{s_0}^s ds = \int_0^t v dt,$$

или

$$s = s_0 + \int_0^t v dt,$$

где s_0 — значение дуговой координаты s при $t = 0$.

Касательное ускорение определяется по формуле

$$\omega_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}{dt}; \quad (64)$$

после этого нормальное ускорение можно найти из равенства

$$\omega_n = \sqrt{\omega^2 - \omega_\tau^2}, \quad (65)$$

где

$$\omega^2 = \ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2.$$

Определив ω_n , найдем радиус кривизны по формуле

$$\rho = \frac{v^2}{\omega_n}. \quad (66)$$

Пример 62. Даны уравнения движения точки:

$$x = akt,$$

$$y = \frac{a}{2} (e^{kt} + e^{-kt}) = a \operatorname{ch}(kt).$$

Найти траекторию, закон движения точки по траектории и радиус кривизны траектории в зависимости от ординаты y .

Решение. Чтобы найти траекторию, достаточно исключить из уравнений движения время t ; для этого найдем значение t

из первого уравнения и подставим его во второе. Тогда имеем:

$$t = \frac{x}{ak}, \quad y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) = a \operatorname{ch} \left(\frac{x}{a} \right).$$

Следовательно, траектория точки есть цепная линия. Далее находим скорость v :

$$v_x = \dot{x} = ak.$$

$$v_y = \dot{y} = \frac{ak}{2} (e^{kt} - e^{-kt}) = ak \operatorname{sh} (kt),$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = ak \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 (kt)} = ak \operatorname{ch} (kt) = \frac{ak}{2} (e^{kt} + e^{-kt}).$$

Предполагая, что $s_0 = 0$, теперь имеем:

$$s = \int_0^t v dt = \frac{ak}{2} \int (e^{kt} + e^{-kt}) dt = \frac{a}{2} (e^{kt} - e^{-kt}) = a \operatorname{sh} (kt).$$

Ускорения ω_x и ω_n находим по формулам (51), (59) и (65):

$$\omega_x = \ddot{x} = 0,$$

$$\omega_y = \ddot{y} = \frac{ak^2}{2} (e^{kt} + e^{-kt}) = ak^2 \operatorname{ch} (kt),$$

$$|\vec{\omega}| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} = \frac{ak^2}{2} (e^{kt} + e^{-kt}) = ak^2 \operatorname{ch} (kt),$$

$$\omega_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} [ak \operatorname{ch} (kt)] = \frac{ak^2}{2} (e^{kt} - e^{-kt}),$$

$$\omega_n = \sqrt{\omega^2 - \omega_\tau^2} = ak^2 \sqrt{\operatorname{ch}^2 (kt) - \operatorname{sh}^2 (kt)} = ak^2.$$

Теперь по формуле (66) находим радиус кривизны траектории:

$$\rho = \frac{v^2}{\omega_n} = \frac{a^2 k^2 (e^{kt} + e^{-kt})^2}{4ak^2} = \frac{a}{4} (e^{kt} + e^{-kt}).$$

Но

$$e^{kt} + e^{-kt} = \frac{2y}{a},$$

поэтому

$$\rho = \frac{a}{4} \cdot \frac{4y^2}{a^2} = \frac{y^2}{a}.$$

Пример 63. Даны уравнения движения точки:

$$x = 2t, \quad y = 4t^2, \quad z = 3t^2,$$

причем x , y , z выражены в метрах, а время t — в сек.

Найти радиус кривизны траектории в точке, где скорость v движущейся точки равна 5 м/сек.

Решение. Скорость и ускорение движения точки находим по формулам (50) и (51):

$$\dot{x} = 2, \quad \dot{y} = 8t, \quad \dot{z} = 6t, \quad |\vec{v}| = \sqrt{4 + 64t^2 + 36t^2} = 2\sqrt{1 + 25t^2},$$

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = 8, \quad \ddot{z} = 6, \quad |\vec{w}| = \sqrt{64 + 36} = 10.$$

Далее находим ω , ω_n и ϱ по формулам (64), (65) и (66):

$$\omega = \frac{dv}{dt} = \frac{2 \cdot 50t}{2\sqrt{1 + 25t^2}} = \frac{100t}{v},$$

$$\omega_n = \sqrt{\omega^2 - \omega_t^2} = \sqrt{100 - \frac{100^2 t^2}{v^2}} = \frac{10}{v} \sqrt{v^2 - 100t^2} = \frac{20}{v},$$

$$\varrho = \frac{v^2}{\omega_n} = \frac{v^3}{20} = \frac{5^3}{4} = \frac{25}{4} = 6,25 \text{ м.}$$

Пример 64. Точка описывает плоскую траекторию так, что проекция ее скорости на ось Ox постоянна и равна c . Доказать, что в этом случае ускорение равно

$$\omega = \frac{c^3}{v^3},$$

где v — скорость,

ϱ — радиус кривизны траектории (рис. 95).

Решение. Так как $v_x = c = \text{const}$, то $\omega_x = \dot{v}_x = 0$, т. е. вектор ускорения параллелен оси Oy . Построив проекцию вектора скорости $\vec{v} = \overline{MA}$ на ось Ox и проекцию вектора ускорения $\vec{w} = \overline{ME}$ на нормаль к траектории, получим два прямоугольных треугольника MAB и MED . В этих треугольниках углы $\angle AMB$ и $\angle EMD$ равны, как углы с перпендикулярными сторонами, а потому эти треугольники подобны. Отсюда находим:

$$\frac{MA}{MB} = \frac{ME}{MD}.$$

Но

$$MB = v_x = c, \quad ME = w, \quad MD = \omega_n = \frac{v^2}{\varrho}, \quad MA = v,$$

следовательно,

$$\frac{v}{c} = \frac{\omega \varrho}{v^2}$$

и

$$\omega = \frac{c^3}{v^3}.$$

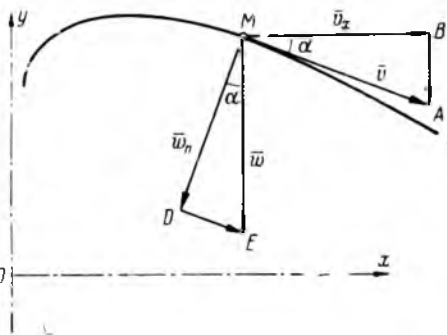


Рис. 95

ВРАЩЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

Если твердое тело движется так, что две его точки остаются неподвижными, то такое движение тела называется вращательным движением вокруг неподвижной оси.

Прямая, соединяющая две неподвижные точки тела, называется осью вращения этого тела.

Если выбраны две плоскости, проходящие через ось вращения, причем одна из них неподвижна, а вторая неизменно связана с вращающимся телом, то угол φ между этими двумя плоскостями, измеряемый в радианах и отсчитываемый в направлении, противоположном движению часовой стрелки, если смотреть с положительного конца оси вращения, определяет положение тела в любой момент времени t и является непрерывной однозначной функцией времени (рис. 96), т. е.

$$\varphi = f(t). \quad (67)$$

Равенство (67) называется уравнением, или законом, вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси. Угол $\varphi - \varphi_0$ называется углом поворота, или угловым перемещением тела.

Первая и вторая производные по времени от угла φ называются соответственно угловой скоростью и угловым ускорением тела и обозначаются буквами ω и ϵ , т. е.

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = f'(t), \quad \epsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} = f''(t). \quad (68)$$

При этом $[\omega] = \frac{\text{радиан}}{\text{сек}} = \frac{1}{\text{сек}} = \text{сек}^{-1}$

и

$$[\epsilon] = \frac{\text{радиан}}{\text{сек}^2} = \frac{1}{\text{сек}^2} = \text{сек}^{-2}.$$

Если число оборотов в минуту вращающегося тела равно n , то

$$\omega = \frac{2\pi n}{30}. \quad (69)$$

Задачи, относящиеся к вращательному движению твердого тела вокруг неподвижной оси, можно разделить на три основных типа:

- 1) определение углового перемещения, угловой скорости и углового ускорения тела;
- 2) определение скоростей и ускорений точек вращающегося тела;
- 3) задачи, относящиеся к передаче вращательного движения от одного тела к другому.

§ 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УГЛА ПОВОРОТА, УГЛОВОЙ СКОРОСТИ И УГЛОВОГО УСКОРЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА, ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

(задачи 375—385)

Если $\omega = \text{const}$ и, следовательно, $\varepsilon = 0$, то вращение тела называется равномерным; в этом случае

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t. \quad (70)$$

Если $\varepsilon = \text{const}$, то вращение тела называется равнопеременным; в этом случае

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t, \quad \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}. \quad (71)$$

Если $\omega_0 > 0$, то при $\varepsilon > 0$ вращение тела — равноускоренное, а при $\varepsilon < 0$, вращение тела — равнозамедленное.

Пример 65. С момента выключения мотора пропеллер аэроплана, вращавшийся с угловой скоростью соответствующей $n = 1200$ об/мин, сделал до остановки 80 оборотов.

Найти, сколько времени прошло с момента выключения мотора до остановки пропеллера, считая его вращение равномерно замедленным.

Решение. Так как вращение пропеллера равномерно замедленное, то по формулам (71), считая $\varphi_0 = 0$, будем иметь:

$$\varphi = \omega_0 t + \varepsilon \frac{t^2}{2},$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t,$$

причем

$$\omega_0 = \frac{\pi n}{30} = 40\pi \frac{1}{\text{сек}}.$$

Так как пропеллер сделал 80 оборотов, то угол поворота равен $\varphi = 80 \cdot 2\pi = 160\pi$ рад.

Так как, кроме того, в момент остановки угловая скорость пропеллера равна нулю, то $\omega = 0$.

Таким образом, получаем два уравнения:

$$40\pi t + \frac{\epsilon t^2}{2} = 160\pi,$$

$$40\pi + \epsilon t = 0.$$

Отсюда находим:

$$\epsilon = -\frac{40\pi}{t}$$

и

$$40\pi t - \frac{40\pi}{t} \frac{t^2}{2} = 160\pi;$$

следовательно,

$$t = \frac{160\pi}{20\pi} = 8 \text{ сек.}$$

Пример 66. В период разгона маховик вращается вокруг своей оси по закону

$$\varphi = \frac{\pi}{4} t^3.$$

Определить угловую скорость и угловое ускорение маховика в момент, когда он сделает 27 оборотов.

Решение. По формулам (68) находим:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{3}{4} \pi t^2,$$

$$\epsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{3}{2} \pi t.$$

Далее находим, в какой момент времени t угол поворота φ будет равен $27 \cdot 2\pi = 54 \pi \text{ рад}$:

$$\varphi = \frac{\pi}{4} t^3 = 54\pi,$$

отсюда

$$t = \sqrt[3]{54 \cdot 4} = 6 \text{ сек.}$$

Угловая скорость и угловое ускорение в этот момент будут равны:

$$\omega = \frac{3}{4} \pi \cdot 6^2 = 27\pi \frac{1}{\text{сек}},$$

$$\epsilon = \frac{3}{2} \pi \cdot 6 = 9\pi \frac{1}{\text{сек}^2}.$$

§ 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ И УСКОРЕНИЙ ТОЧЕК ТВЕРДОГО ТЕЛА, ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

(задачи 386—394)

Если твердое тело вращается вокруг неподвижной оси, то любая его точка, не лежащая на оси вращения, описывает окружность, плоскость которой перпендикулярна к этой оси, а

скорость и ускорение точки определяются по формулам:

$$v = R\omega, \quad \vec{\omega}_\tau = R\epsilon, \quad \vec{\omega}_n = R\omega^2, \quad \omega = R \sqrt{\epsilon^2 + \omega^4}, \quad (72)$$

где R — расстояние движущейся точки от оси вращения.

Векторы скорости $\vec{v}$ и касательного ускорения $\vec{\omega}_\tau$ направлены по касательной к окружности, описываемой данной точкой тела, а вектор нормального ускорения $\vec{\omega}_n$ направлен по радиусу этой окружности к ее центру.

Если вращение тела ускоренное, то векторы $\vec{v}$ и $\vec{\omega}_\tau$ направлены в одну и ту же сторону; в случае же замедленного вращения — в противоположные стороны.

Если тело вращается равномерно, то $\omega = \text{const}$, следовательно, в этом случае $v = \text{const}$; $\epsilon = 0$, $\vec{\omega}_\tau = 0$ и

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_n, \quad (73)$$

т. е. вектор ускорения $\vec{\omega}$ совпадает в этом случае с нормальным (центростремительным) ускорением.

Пример 67. Колесо радиуса $R = 1$ м вращается равномерно вокруг своей оси, делая один оборот за 0,25 сек. Найти скорость и ускорение точки, лежащей на ободе колеса.

Решение. Так как колесо вращается равномерно, то согласно формуле (70)

$$\omega = \frac{\varphi - \varphi_0}{t}.$$

Но за время $t = 0,25$ сек угол поворота колеса равен

$$\varphi - \varphi_0 = 2\pi \text{ рад},$$

поэтому

$$\omega = \frac{2\pi}{0,25} = 8\pi \frac{1}{\text{сек}}.$$

Далее по формуле (72) будем иметь:

$$v = R\omega = 1 \cdot 8\pi \text{ м сек} \approx 25,12 \text{ м сек},$$

$$\omega = \omega_n = R\omega^2 = 1 \cdot 64\pi^2 = 631,04 \text{ м сек}^2.$$

Пример 68. Вал начинает вращаться с угловой скоростью

$$\omega_0 = 2\pi \frac{1}{\text{сек}}$$

равноускоренно и за 10 сек делает 30 оборотов. Найти ускорение точки, отстоящей от оси вращения вала на расстоянии, равном 0,5 м, в тот момент, когда скорость этой точки равна 2π м/сек.

Решение. Для определения углового ускорения вала воспользуемся формулами (71), считая $\varphi_0 = 0$:

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\epsilon t^2}{2}.$$

Но при $t = 10$ сек угол поворота равен $\varphi = 30 \cdot 2\pi = 60\pi$ рад, а потому

$$2\pi \cdot 10 = 50\epsilon = 60\pi,$$

откуда

$$\epsilon = \frac{40\pi}{50} = 0,8\pi \frac{1}{\text{сек}^2}.$$

Далее по формулам (72) находим:

$$\omega = R \sqrt{\epsilon^2 + \omega^4} = 0,5 \sqrt{0,64\pi^2 + \omega^4} \quad \text{и} \quad v = R\omega = 0,5\omega.$$

В тот момент, когда $v = 2\pi$ м/сек, имеем:

$$\begin{aligned} \omega = \frac{v}{0,5} &= 4\pi \frac{1}{\text{сек}} \quad \text{и} \quad \omega = 0,5 \sqrt{0,64\pi^2 + 4^4\pi^4} = \\ &= 4\pi \sqrt{4\pi^2 + 0,01} \approx 8\pi^2 = 79 \text{ м/сек}^2. \end{aligned}$$

Пример 69. Вал вращается в подшипниках вокруг неподвижной горизонтальной оси по закону $\varphi = \frac{\pi}{16} \sin \frac{3}{4} \pi t$, где φ — угол поворота вала в радианах. Определить скорость и ускорение точки M вала, отстоящей от оси вращения на расстоянии $r = 0,8$ м в тот момент, когда угловая скорость вала достигает наибольшего абсолютного значения.

Решение. Найдем сначала угловую скорость и угловое ускорение вала по формулам (68):

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{3}{4} \pi \cos \frac{3}{4} \pi t = \frac{3\pi^2}{64} \cos \frac{3}{4} \pi t \text{ сек}^{-1}, \\ \epsilon &= \frac{d\omega}{dt} = -\frac{9\pi^3}{256} \sin \frac{3}{4} \pi t \text{ сек}^{-2}. \end{aligned}$$

Теперь по формулам (72) получим:

$$\begin{aligned} v &= r\omega = \frac{3\pi^2}{64} r \cos \frac{3}{4} \pi t, \\ \omega_{\tau} &= r\epsilon = -\frac{9\pi^3}{256} r \sin \frac{3}{4} \pi t, \\ \omega_n &= r\omega^2 = \frac{9\pi^4}{64^2} r \cos^2 \frac{3}{4} \pi t. \end{aligned}$$

Угловая скорость ω достигает наибольшего абсолютного значения в момент t_1 , когда $\left| \cos \frac{3}{4} \pi t \right| = 1$, отсюда $\frac{3}{4} \pi t_1 = k\pi$, т. е. $t_1 = \frac{4}{3} k$, где $k = 0, 1, 2, 3, \dots$, следовательно, $t_1 = 0, \frac{4}{3}, \frac{8}{3}, \dots$ сек. В эти моменты имеем:

$$\begin{aligned} v_{\max} &= \frac{3\pi^2}{64} r = 0,8 \frac{3\pi^2}{64} = \frac{0,3\pi^2}{8} \approx 0,37 \text{ м/сек}, \\ \omega_{\tau_1} &= 0, \quad \omega_1 = \omega_n = \frac{9\pi^4}{64^2} 0,8 = \frac{0,9}{8} \pi^4 \approx 10,94 \text{ м/сек}^2, \end{aligned}$$

§ 3. ПЕРЕДАЧА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ОТ ОДНОГО ТЕЛА К ДРУГОМУ

Пример 70. Шкив *I* радиусом $O_1B = r_1$, вращаясь равномерно, делает n оборотов в минуту; он соединен бесконечным ремнем со шкивом *II* радиусом $O_2C = r_2$. Определить скорость и ускорение точки *A* шкива *III* радиусом $O_2A = R$, жестко соединенного со шкивом *II* (рис. 97).

Решение. Так как все точки ремня имеют одинаковые скорости, то

$$v_B = v_C,$$

или $\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$, где ω_1 и ω_2 — угловые скорости шкивов *I* и *II*, или

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1},$$

т. е. угловые скорости шкивов, соединенных бесконечным ремнем, обратно пропорциональны их радиусам. Отсюда

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{r_1}{r_2}.$$

или, учитывая формулу (69), $\omega_2 = \frac{\pi n}{30} \cdot \frac{r_1}{r_2} = \text{const}$. Так как шкив *III*, которому принадлежит точка *A*, жестко соединен со шкивом *II*, то их угловые скорости равны и, следовательно, скорость точки *A* равна

$$v_A = \omega_2 R = \frac{\pi n}{30} \cdot \frac{r_1}{r_2} R.$$

Так как $\omega_2 = \text{const}$, то ускорение $\vec{w}_A$ точки *A* равно нормальному (центростремительному) ускорению этой точки, и, следовательно,

$$\vec{w}_A = R \omega_2^2 = \frac{\pi^2 n^2 r_1^2}{900 r_2^2} R.$$

Пример 71. Зубчатое колесо *I* с числом зубьев $z_1 = 80$ начнет вращаться равноускоренно из состояния покоя с угловым ускорением $\varepsilon_1 = 1 \text{ сек}^{-2}$ и приводит в движение находящееся с ним во внутреннем зацеплении колесо *II* с числом зубьев $z_2 = 20$. Определить угловую скорость колеса *II* и ускорение точки *B*, лежащей на окружности этого колеса через 1 сек после начала движения, если радиус колеса *II* равен $r_2 = 15 \text{ см}$ (рис. 98).

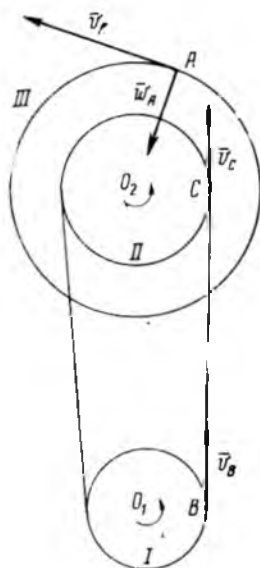


Рис. 97

Решение. Допустим, что колесо *I* вращается в направлении, противоположном движению часовой стрелки; тогда скорость точки *C* зацепления колес будет направлена, как указано на рис. 98, и, следовательно, колесо *II* будет вращаться в том же направлении, что и колесо *I*, т. е. против движения часовой стрелки. Для скорости точки *C*, как принадлежащей одновременно и колесу *II*, имеем

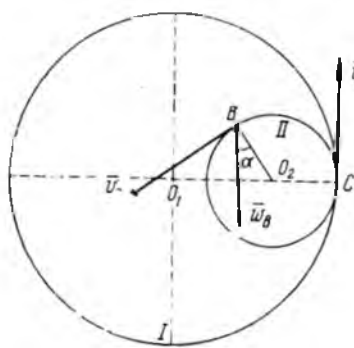


Рис. 98

$$v_C = \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2,$$

где ω_1 и ω_2 — угловые скорости колес *I* и *II*, а r_1 и r_2 — их радиусы.

Следовательно,

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}.$$

Но

$$2\pi r_1 = z_1 h \quad \text{и} \quad 2\pi r_2 = z_2 h,$$

где h — шаг зацепления*,

отсюда

$$\frac{2\pi r_1}{2\pi r_2} = \frac{z_1 h}{z_2 h}, \quad \text{или} \quad \frac{r_1}{r_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

А поэтому

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1},$$

т. е. угловые скорости находящихся в зацеплении зубчатых колес обратно пропорциональны числам их зубцов. Следовательно,

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{z_1}{z_2} = \frac{80}{90} \omega_1 = 4\omega_1,$$

но, согласно формуле (71), $\omega_1 = \varepsilon_1 t = \pi t$, поэтому $\omega_2 = 4\pi t \frac{1}{\text{сек}}$.

При $t = 1 \text{ сек}$ имеем: $\omega_2 = 4\pi \frac{1}{\text{сек}}$.

Угловое ускорение колеса *II* будет равно

$$\varepsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = 4\pi \frac{1}{\text{сек}^2}.$$

* См. сноску на стр. 222.

Теперь по формуле (72) находим ускорение точки B :

$$\omega_B = r_2 \sqrt{\varepsilon_2^2 + \omega_2^4} = 15 \sqrt{(4\pi)^2 + (4\pi t)^2} = 60\pi \sqrt{1 + 16\pi^2 t^4}.$$

При $t = 1$ сек

$$\omega_B = 60\pi \sqrt{1 + 16\pi^2} \approx 60\pi \cdot 4\pi \text{ см сек}^2 \approx 2,4\pi^2 \text{ м сек}^2.$$

Направление ускорения $\vec{\omega}_B$ определяется углом α между радиусом O_B и вектором $\vec{\omega}_B$:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{r_2}{\omega_2^2} = \frac{15}{16\pi^2} = \frac{1}{4\pi} = 0,079, \text{ откуда } \alpha = 4^\circ 30'.$$

Глава III

ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Если при движении твердого тела расстояние от любой его точки до данной неподвижной плоскости не изменяется, то такое движение тела называется *плоскопараллельным*.

Изучение плоскопараллельного движения тела сводится к изучению движения плоской фигуры, движущейся в своей плоскости (сечения тела плоскостью, параллельной данной неподвижной плоскости).

Задачи, относящиеся к плоскопараллельному движению тела, можно разбить на следующие основные типы:

1. Составление уравнений плоскопараллельного движения твердого тела (уравнений движения плоской фигуры).
2. Определение скоростей точек плоской фигуры.
3. Нахождение подвижной и неподвижной центроид.
4. Определение ускорений точек плоской фигуры.

§ 1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ

(задачи 492—500)

Положение неизменяемой плоской фигуры в ее плоскости вполне определяется положением двух произвольных ее точек A и B .

Следовательно, изучение движения плоской фигуры в ее плоскости сводится к изучению движения прямолинейного отрезка AB , с которым фигура неизменно связана. Но положение от-

резка AB определяется положением, т. е. двумя координатами x_A и y_A , его точки A , называемой полюсом, и углом φ , который образует этот отрезок с некоторой осью неизменного направления, лежащей в плоскости данной фигуры (рис. 99).

Таким образом, движение плоской фигуры, движущейся в своей плоскости, можно определить следующими тремя уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} x_A &= f_1(t), \\ y_A &= f_2(t), \\ \varphi &= f_3(t). \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

Уравнения (74) называются уравнениями движения плоской фигуры, или уравнениями плоскопараллельного движения твердого тела. Из этих уравнений следует, что движение плоской фигуры можно разложить на два движения: 1) поступательное движение, определяемое первыми двумя уравнениями (74), и 2) вращательное движение вокруг полюса, определяемое третьим из уравнений (74).

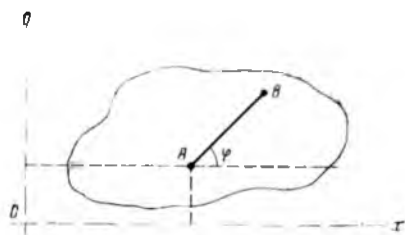


Рис. 99

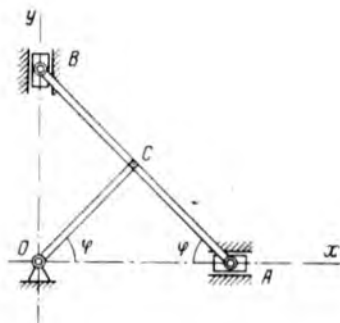


Рис. 100

Пример 72. Линейка AB эллипсографа приводится в движение кривошипом OC , вращающимся равномерно вокруг оси O , с угловой скоростью $\omega = \text{const}$. Принимая точку A за полюс, составить уравнения движения линейки эллипсографа если (рис. 100)

$$OC = BC = AC = r.$$

Решение. Так как точка A движется по оси Ox , то $y_A = 0$. Если угол, образуемый линейкой AB с осью x , обозначим φ , то из равнобедренного треугольника AOC будем иметь: $AO = 2OC \cos \varphi$, или $x_A = 2r \cos \varphi$.

При равномерном вращении угол AOC поворота кривошипа за t сек будет равен ωt , т. е.

$$\varphi = \omega t.$$

Таким образом, уравнения движения линейки AB имеют вид:

$$\begin{aligned}x_A &= 2r \cos(\omega t), \\y_A &= 0, \\ \varphi &= \omega t.\end{aligned}$$

Пример 73. Шестеренка радиуса r , катящаяся внутри неподвижного колеса радиуса R , приводится в движение кривошипом OA , вращающимся равномерно вокруг оси O этого колеса, с угловой скоростью $\omega = \text{const}$.

Составить уравнения движения подвижной шестеренки, принимая ее центр A за полюс (рис. 101).

Решение. Найдем координаты x_A, y_A полюса A .

Из треугольника OAB имеем:

$$\begin{aligned}x_A &= OB = OA \cos \alpha, \\y_A &= AB = OA \sin \alpha,\end{aligned}$$

но $OA = OC - AC = R - r$ и $\alpha = \omega t$, как угол поворота кривошипа при равномерном вращении.

Следовательно,

$$\begin{aligned}x_A &= (R - r) \cos \omega t, \\y_A &= (R - r) \sin \omega t.\end{aligned}$$

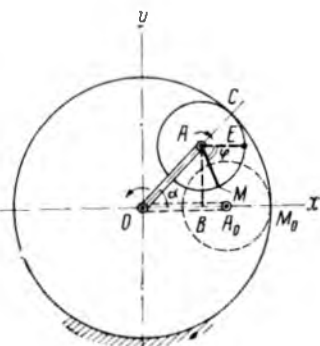


Рис. 101

Далее нужно найти угол поворота подвижной шестеренки вокруг полюса A . Для этого рассмотрим радиус AM подвижной шестеренки, который в начальный момент занимал положение A_0M_0 .

Тогда угол поворота равен $\angle EAM = \varphi$.

При этом отрезок AE параллелен оси x и, следовательно, $\angle CAE = \alpha$. Так как качение подвижной шестеренки по неподвижной происходит без скольжения, то

$$\overline{CM}_0 = \overline{CM}.$$

Но

$$\overline{CM}_0 = R\alpha$$

и

$$\overline{CM} = r(\varphi + \alpha),$$

а поэтому

$$r(\alpha + \varphi) = R\alpha,$$

откуда

$$\varphi = \alpha \left(\frac{R}{r} - 1 \right) = \left(\frac{R}{r} - 1 \right) \omega t.$$

Таким образом, искомые уравнения движения запишутся так:

$$x_A = (R - r) \cos \omega t,$$

$$y_A = (R - r) \sin \omega t,$$

$$\varphi = \left(\frac{R}{r} - 1 \right) \omega t.$$

§ 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ ТОЧЕК ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ, ДВИЖУЩЕЙСЯ В СВОЕЙ ПЛОСКОСТИ

(задачи 501 — 538)

Движение плоской фигуры в ее плоскости можно разложить на два движения:

1) поступательное движение со скоростью, равной скорости какой-либо точки A тела, принятой за полюс, и

2) вращательное движение вокруг этого полюса (вокруг оси, проходящей через полюс и перпендикулярной к плоскости движущейся фигуры). При этом угловая скорость вращательного движения *не зависит от выбора полюса*. Отсюда следует, что скорость любой точки B плоской фигуры равна геометрической сумме двух скоростей: скорости полюса v , и скорости v_{BA} точки B во вращательном движении вокруг полюса, т. е.

$$v_B = v_A + v_{B,A}, \quad (75)$$

причем $v_{BA} = \overline{AB} \omega$ и $v_{BA} = AB \omega$.

Отсюда следует теорема о проекциях скоростей точек плоской фигуры: *проекции скоростей двух точек плоской фигуры на прямую, соединяющую эти точки, равны между собой*.

Мгновенным центром скоростей (МЦС) называется такая точка P плоской фигуры, скорость которой в данный момент равна нулю.

Если известны скорость v_A какой-либо точки A плоской фигуры и угловая скорость этой фигуры, то, повернув вектор v_A вокруг точки A на 90° в направлении вращения фигуры и отложив на этой полупрямой отрезок

$$AP = \frac{v_A}{\omega}, \quad (76)$$

получим точку P , которая является МЦС (рис. 102).

Если же известны направления скоростей двух точек плоской фигуры, то МЦС находят как точку пересечения перпендикуляров, восстановленных в этих точках к направлениям их скоростей.

Если мгновенный центр скоростей P найден и если известна угловая скорость ω фигуры, то скорость любой точки B фигуры определяется как скорость этой точки во вращательном

движении вокруг мгновенного центра скоростей, т. е. вектор v_B перпендикулярен к отрезку PB и по модулю равен произведению ωPB .

Отсюда следует, что скорости точек плоской фигуры пропорциональны их расстояниям от мгновенного центра скоростей, т. е.

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{PA}{PB}. \quad (77)$$

Таким образом, скорость любой точки движущейся плоской фигуры можно определить двумя способами:

- 1) по формуле (75);
- 2) при помощи мгновенного центра скоростей.

Из задач, относящихся к этому параграфу, следует обратить внимание на такие задачи, в которых имеются плоские механизмы, состоящие из нескольких звеньев (например, задачи 517, 533, 536—538). При решении этих задач рассматривают последовательно движения отдельных звеньев механизма, начиная с того звена, движение которого задано, и при переходе от одного звена к другому определяют скорости тех точек, которые являются общими для этих двух звеньев механизма. Следует подчеркнуть, что мгновенный центр скоростей можно находить только для каждого звена в отдельности; то же относится и к угловым скоростям (см. пример 75).

Пример 74. Стержень AB длиной 5 м опирается на неподвижное ребро C двугранного угла и движется в плоскости чертежа так, что нижний его конец A скользит по горизонтальной оси x со скоростью, равной $v_A = 4$ м/сек. Определить угловую скорость ω и скорости точек B и C стержня в момент, когда угол $\varphi = 30^\circ$, если $OC = 2$ м (рис. 103).

Решение. 1-й способ. Скорость точки A направлена по прямолинейной траектории этой точки, а скорость точки C стержня AB направлена вдоль этого стержня. Принимая точку A за полюс, по формуле (75) имеем:

$$\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{v}_{CA},$$

причем $\vec{v}_{CA} \perp AC$. На основании этого векторного равенства строим треугольник скоростей. Для этого в точке C строим вектор $\vec{v}_A$, из конца a которого опустим перпендикуляр ac на прямую AB , тогда $\vec{v}_C = \vec{Cc}$ и $\vec{v}_{CA} = \vec{ac}$, причем $\angle aCc = \varphi$. Из

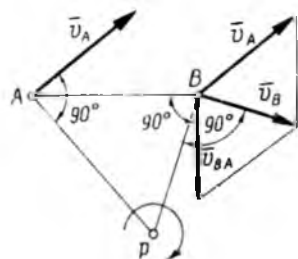


Рис. 102

этого треугольника имеем.

$$v_C = v_A \cos \varphi = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \approx 3,46 \text{ м/сек},$$

$$v_{CA} = v_A \sin \varphi = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2 \text{ м/сек}.$$

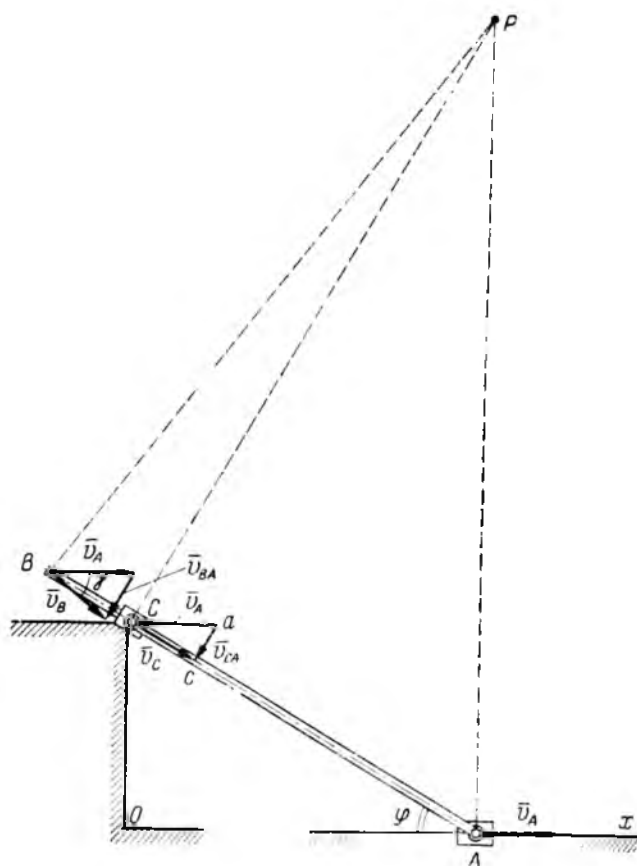


Рис. 103

Но

$$v_{CA} = \omega AC,$$

откуда

$$\omega = \frac{v_{CA}}{AC} = \frac{2}{4} = 0,5 \text{ 1/сек}$$

Переходя к определению скорости точки B, имеем: $v_B = v_A + v_{BA}$, причем вращательная скорость v_{BA} точки B во-

круг полюса A перпендикулярна к AB и по модулю равна

$$v_{BA} = \omega AB = 5 \cdot \frac{1}{2} = 2,5 \text{ м/сек.}$$

Аналогично предыдущему строим для точки B треугольник скоростей, в котором известны по модулю и направлению две стороны v_A и v_{BA} . Так как угол в треугольнике скоростей, лежащий против стороны v_B , равен $90^\circ - \varphi = 60^\circ$, то

$$v_B = \sqrt{v_A^2 + v_{BA}^2 - 2v_A v_{BA} \cos 60^\circ} = \sqrt{4^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2 \cdot 4 \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2}} = 3,5 \text{ м/сек.}$$

2-й способ. Скорости точек C и B и угловую скорость стержня AB можно найти и другим способом, построив мгновенный центр скоростей стержня AB , как точку P пересечения прямых AP и CP , перпендикулярных к скоростям v_A и v_C . Тогда

$$\frac{v_A}{PA} = \frac{v_B}{PB} = \frac{v_C}{PC} = \omega.$$

Расстояния PA и PC находим из треугольника APC , а расстояние PB — из треугольника BPC :

$$PA = \frac{AC}{\sin \varphi} = \frac{4}{\sin 30^\circ} = 8 \text{ м.}$$

$$PC = AC \operatorname{ctg} \varphi = 4 \operatorname{ctg} 30^\circ = 4\sqrt{3} \text{ м.}$$

$$PB = \sqrt{BC^2 + PC^2} = \sqrt{1 + 48} = 7 \text{ м.}$$

Следовательно,

$$\omega = \frac{v_A}{PA} = \frac{4}{8} = 0,5 \frac{1}{\text{сек.}}$$

$$v_C = \omega PC = 0,5 \cdot 4\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \approx 3,46 \text{ м/сек.}$$

$$v_B = \omega PB = 0,5 \cdot 7 = 3,5 \text{ м/сек.}$$

Вектор v_B перпендикулярен к отрезку PB .

Пример 75. Кривошип $O_1A = 20$ см делает 120 оборотов в минуту и при помощи звена $AB = 100$ см приводит в движение стержень $O_2B = 60$ см, закрепленный шарнирно в точке O_2 . Определить угловую скорость стержня AB и угловую скорость стержня O_2B в момент, когда кривошип O_1A займет вертикальное положение, если известно, что в этот момент звено AB образует с вертикалью $\angle O_1AB = 60^\circ$ и $\angle ABO_2 = 30^\circ$ (рис. 104).

Решение. *1-й способ.* Данный механизм состоит из трех звеньев:

1) кривошип O_1A , вращающегося вокруг оси O_1 с угловой скоростью:

$$\omega = \frac{dn}{30} = 4\pi \frac{1}{сек};$$

2) стержня O_2B , вращающегося вокруг оси O_2 ;

3) стержня AB , движущегося в плоскости чертежа.

Найдем скорость точки A . Вектор v_A перпендикулярен к радиусу вращения O_1A и по модулю равен

$$v_A = \omega O_1A = 4\pi 20 = 80\pi \text{ см/сек.}$$

Далее рассмотрим точку B .

Так как точка B принадлежит звену O_2B , вращающемуся вокруг неподвижной точки O_2 , то скорость точки B перпендикулярна к O_2B . Принимая точку A за полюс, по формуле (75) имеем:

$$v_B = v_A + v_{BA}, \text{ причем } v_{BA} \perp AB \text{ и } v_{BA} = \omega_1 AB.$$

На основании этого векторного равенства строим треугольник скоростей. Для этого в точке B строим вектор $Ba = v_A$ и луч, перпендикулярный к O_2B , а из точки a — луч, перпендикулярный к AB , до их взаимного пересечения в точке b . Тогда

$$v_B = Bb, \quad v_{BA} = ab, \quad \text{причем } \angle aBb = \angle Bba = 30^\circ.$$

Следовательно,

$$v_{BA} = v_A = 80 \text{ см/сек и } v_B = 2v_A \cos 30^\circ = v_A \sqrt{3} = 80\pi \sqrt{3} \text{ см/сек.}$$

Рис. 104

Теперь, зная скорости v_B и v_{BA} , находим искомые угловые скорости ω_1 и ω_2 стержней AB и O_2B :

$$\omega_2 = \frac{v_B}{O_2B} = \frac{80\pi \sqrt{3}}{60} = \frac{4\pi \sqrt{3}}{3} \frac{1}{сек},$$

$$\omega_1 = \frac{v_{BA}}{AB} = \frac{80\pi}{100} = 0,4\pi \frac{1}{сек}.$$

Если бы в данной задаче не требовалось находить угловую скорость звена AB , то скорость точки B проще было бы найти

по неподвижному колесу I радиуса $r_1 = 50$ см. С колесом II в точке A соединен шарнирно стержень $AB = 80$ см, который приводит в движение ползун B , перемещающийся по горизонтальной направляющей, проходящей через точку O_1 . Построить мгновенный центр скоростей звена AB и найти его угловую скорость, а также скорость точки B в тот момент, когда кривошип O_1O_2 вертикален и $O_2A \parallel O_1B$ (рис. 105).

Решение. Так как движение кривошипа O_1O_2 задано, то этот кривошип является ведущим звеном, поэтому сначала найдем скорость точки O_2 . Вектор $\vec{v}_{O_2}$ перпендикулярен к O_1O_2 и по модулю равен

$$v_{O_2} = \omega_{O_1O_2} \cdot O_1O_2 = 4\pi \cdot 40 = 160\pi \text{ см/сек.}$$

Далее рассмотрим точку A , которая принадлежит колесу II ; это колесо катится без скольжения по неподвижному колесу I и поэтому скорость точки C колеса I равна нулю, т. е. точка C является мгновенным центром скоростей для колеса II , и скорость $\vec{v}_A$ точки A перпендикулярна к CA . Кроме того, по формуле (77) имеем:

$$\frac{v_A}{v_{O_1}} = \frac{AC}{O_1C} = 1/\sqrt{2},$$

откуда

$$v_A = v_{O_1} / \sqrt{2} = 160\pi / \sqrt{2} \text{ см/сек.}$$

Перейдем теперь к стержню AB . Так как ползун B движется прямолинейно, то скорость $\vec{v}_B$ точки B направлена по прямой O_1B . Чтобы построить мгновенный центр скоростей для звена AB , достаточно восставить перпендикуляры в точках A и B к направлениям векторов $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$ до пересечения этих перпендикуляров в точке C_1 . Тогда $\angle BC_1A = 45^\circ$, $\sin \gamma = \frac{O_1O_2}{AB} = \frac{40}{80} = \frac{1}{2}$, откуда $\gamma = 30^\circ$.

По формулам (76) и (77) находим ω_{AB} и v_B :

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AC_1}, \quad \frac{v_B}{v_1} = \frac{BC_1}{AC_1}.$$

Из треугольника ABC_1 имеем:

$$\frac{BC_1}{\sin 15^\circ} = \frac{AC_1}{\sin 120^\circ} = \frac{AB}{\sin 45^\circ},$$

откуда

$$AC_1 = AB \frac{\sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} = 80 \cdot \frac{\sqrt{3}}{1/\sqrt{2}},$$

$$\frac{BC_1}{AC_1} = \frac{\sin 15^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{1}{2 \cos 15^\circ}$$

Таким образом, $\omega_{AB} = \frac{160\pi \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{80 \sqrt{3}} = \frac{4\pi \sqrt{3}}{3} \text{ 1/сек}$

и $v_B = v_A \cdot 2 \sin 15^\circ \approx 0,54 v_A \approx 58,4\pi \text{ см/сек.}$

§ 3. ЦЕНТРОИДЫ

(задачи 542, 544—549, 552, 553)

Геометрическое место мгновенных центров вращения на неподвижной плоскости, в которой движется плоская фигура, называется *неподвижной центроидой*, а геометрическое место мгновенных центров скоростей на плоскости самой движущейся фигуры называется *подвижной центроидой*.

В каждый данный момент подвижная и неподвижная центроиды касаются друг друга, и точка касания этих кривых является в данный момент мгновенным центром вращения (мгновенным центром скоростей) движущейся плоской фигуры.

Данное движение плоской фигуры в ее плоскости можно осуществить, построив подвижную и неподвижную центроиды и заставив первую катиться без скольжения по второй с соответствующей угловой скоростью.

Задачи, в которых требуется найти неподвижную и подвижную центроиды, решаются двумя способами: аналитическим и геометрическим.

При аналитическом способе определения центроид текущие координаты мгновенного центра вращения в неподвижной системе координат и текущие координаты того же центра в подвижной системе координат, неизменно связанной с движущейся фигурой, нужно выразить как функции времени, или другого переменного параметра (например, угла поворота фигуры); исключив затем этот переменный параметр, получим соответственно уравнения подвижной и неподвижной центроид (см. задачи 552, 553).

При геометрическом способе определения центроид искомые центроиды находят, исходя из геометрических соображений. Например, если расстояние мгновенного центра вращения от данной *неподвижной* точки оказывается постоянным, то неподвижная центроида есть окружность; если сумма расстояний мгновенного центра вращения от двух данных точек подвижной плоскости, т. е. плоскости самой движущейся фигуры, есть величина постоянная, то подвижная центроида есть эллипс, фокусы которого находятся в этих точках подвижной плоскости, и т. п. (см. задачи 542, 547, 548).

Пример 77. Стержень $AB = l$ концами скользит по двум прямым OA и OB , образующим между собой угол $\alpha = 45^\circ$. Найти подвижную и неподвижную центроиды (рис. 106).

Решение. *1-й способ (геометрический).* Так как скорости точек A и B направлены соответственно по прямым OA и OB , то мгновенный центр вращения P стержня AB находим как точку пересечения перпендикуляров, восстановленных из точек A и B к прямым OA и OB . Поэтому углы α и APB равны как углы с перпендикулярными сторонами, т. е. $\angle APB = 45^\circ + \text{const}$. Отсюда следует, что подвижная центроида есть геометрическое

место таких точек, из которых отрезок AB виден под одним и тем же углом, равным 45° . Как известно из геометрии, таким геометрическим местом является дуга APB окружности, описанной около треугольника APB ; так как сумма углов APB и AOB равна 180° , то эта окружность проходит и через точку O . Но сторона треугольника равна диаметру описанного круга, умноженному на синус угла, противолежащего этой стороне, поэтому, обозначая радиус подвижной центроиды через R , имеем:

$$l = 2R \sin 45^\circ,$$

откуда

$$R = \frac{l}{2 \sin 45^\circ} = \frac{\sqrt{2}l}{2}.$$

Так как $\angle OAP = 90^\circ$ то отрезок OP является диаметром подвижной центроиды, а потому $OP = 2R = \sqrt{2}l = \text{const}$, т. е. расстояние мгновенного центра вращения P от неподвижной точки O постоянно; отсюда следует, что неподвижная центроида есть окружность радиуса $OP = 2R = \frac{1}{2} \sqrt{2} l$ с центром в точке O .

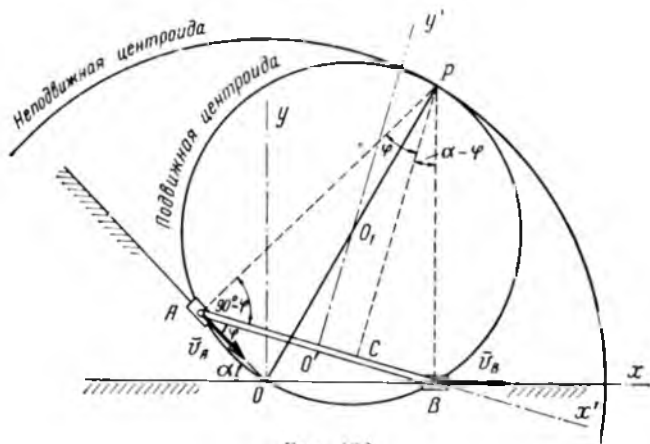


Рис. 103

2-й способ (аналитический). Построим две системы координатных осей: неподвижную Oxy и подвижную $O'x'y'$, неизменно связанную со стержнем AB , как указано на рис. 106; начало O' подвижной системы возьмем в середине отрезка AB . Если обозначим координаты точки P в неподвижной системе Oxy через x и y , а в подвижной системе $O'x'y'$ — через x' и y' , то

$$x = OB, \quad y = BP, \quad x' = O'C, \quad y' = CP.$$

Обозначим далее переменный угол OAB через φ и выразим координаты x и y через этот угол. Из треугольников OAB и APB по теореме синусов имеем:

$$\frac{x}{\sin \varphi} = \frac{l}{\sin (180^\circ - \alpha)} \quad \text{и} \quad \frac{y}{\sin (90^\circ - \varphi)} = \frac{l}{\sin \alpha},$$

отсюда находим:

$$x = \frac{l}{\sin \alpha} \sin \varphi, \quad y = \frac{l}{\sin \alpha} \cos \varphi.$$

Чтобы найти геометрическое место точек P на неподвижной плоскости, т. е. получить уравнение неподвижной центронды, нужно из этих уравнений исключить параметр φ . Для этого достаточно возвести каждое из этих уравнений в квадрат и затем их сложить. Тогда получим:

$$x^2 + y^2 = \frac{l^2}{\sin^2 \alpha} = \frac{l^2}{\sin^2 45^\circ},$$

или

$$x^2 + y^2 = 2l^2.$$

Отсюда видим, что неподвижная центронда есть окружность радиуса $\sqrt{2}l$ с центром в начале координат O .

Чтобы выразить теперь через угол φ координаты x' и y' точки P в подвижной системе осей, рассмотрим треугольники ACP и BCP , из которых имеем:

$$AC = CP \operatorname{tg} \varphi$$

и

$$CB = CP \operatorname{tg} (\alpha - \varphi),$$

или

$$\frac{l}{2} + x' = y' \operatorname{tg} \varphi$$

и

$$\begin{aligned} \frac{l}{2} - x' &= y' \operatorname{tg} (\alpha - \varphi) = y' \operatorname{tg} (45^\circ - \varphi) = \\ &= \frac{\operatorname{tg} 45^\circ - \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg} 45^\circ \operatorname{tg} \varphi} y' = \frac{1 - \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg} \varphi} y'. \end{aligned}$$

Освобождаясь во втором уравнении от знаменателя, получим:

$$\left(\frac{l}{2} - x' \right) (1 + \operatorname{tg} \varphi) = y' (1 - \operatorname{tg} \varphi).$$

Чтобы найти геометрическое место точек P на подвижной плоскости, т. е. найти подвижную центронду, нужно из этих двух уравнений исключить $\operatorname{tg} \varphi$. Из первого уравнения имеем:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\frac{l}{2} + x'}{y'}.$$

Подставляя это значение $\operatorname{tg} \varphi$ во второе уравнение, получим:

$$\frac{l}{2} - x' + \frac{l^2 - x'^2}{y'^2} = y' - \frac{l}{2} - x',$$

или

$$x'^2 + y'^2 - ly' = \frac{l^2}{4},$$

или

$$x'^2 + \left(y' - \frac{l}{2} \right)^2 = \frac{l^2}{2},$$

отсюда видим, что подвижная центроида есть окружность радиуса $\frac{l}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} l$ с центром в точке $O_1 \left(0, \frac{l}{2} \right)$.

Пример 78. Стержень, согнутый в виде прямого угла ABC , перемещается так, что точка A движется по оси x , а сторона BC все время проходит через неподвижную точку D на оси y . Найти уравнения подвижной и неподвижной центроид, если $AB = OD = a$ (рис. 107).

Решение. 1-й способ (геометрический). Скорость точки A направлена по оси Ox , а скорость точки D — вдоль стержня BC .

Мгновенный центр вращения P стержня ABC находится в точке пересечения перпендикуляров, восставленных из точек A и D к скоростям этих точек. Так как прямоугольные треуголь-

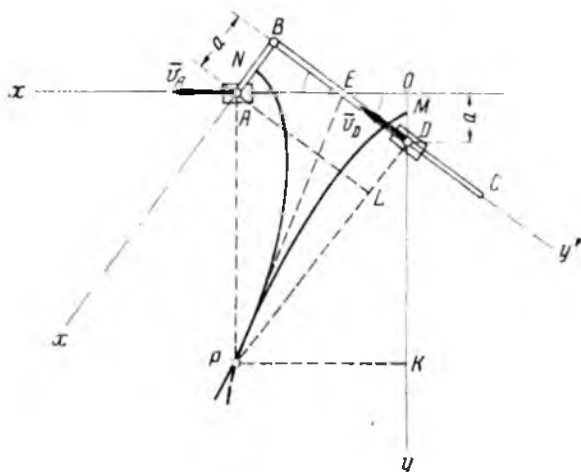


Рис. 107

ники ABE и OED , в которых $\angle AEB = \angle OED$ и $AB = OD$, равны, то $AE = ED$, а потому из равенства треугольников APE и DPE заключаем, что $AP = DP$. Но, как известно из аналитической геометрии, геометрическое место точек, расстояния от которых до данной неподвижной точки (точки D) и до данной неподвижной прямой (прямой Ox) равны между собой, есть парабола. Поэтому неподвижная центроида есть парабола, для которой прямая Ox является директрисой, а точка D — фокусом. Точно так же рассматривая геометрическое место точек P на подвижной плоскости, связанной со стержнем ABC , из равенства $AP = DP$ заключаем, что подвижная центроида есть парабола, для которой директрисой является прямая BC , а фокусом — точка A .

2-й способ (аналитический). Если построим координаты x и y точки P в неподвижной системе Oxy , то

$$x = OA = PK, \quad y = OK = AP.$$

Из треугольника PDK имеем:

$$PD^2 = PK^2 + DK^2 = PK^2 + (OK - a)^2,$$

или, принимая во внимание, что $PD = AP$,

$$y^2 = x^2 + (y - a)^2, \quad \text{или} \quad x^2 = 2a \left(y - \frac{a}{2} \right).$$

Следовательно, неподвижная центроида есть парабола с осью Oy и с вершиной в точке $\left(0, \frac{a}{2}\right)$.

Построив теперь координаты x' и y' точки P в подвижной системе осей $Bx'y'$, неизменно связанных со стержнем ABC , имеем:

$$x' = PD, \quad y' = BD.$$

Чтобы найти зависимость между x' и y' , проведем отрезок AL , параллельный BD .

Тогда

$$LD = a, \quad AL = BD = y', \quad PL = x' - a$$

и

$$AP^2 = PL^2 + LA^2,$$

или

$$PD^2 = PL^2 + LA^2,$$

т. е.

$$x'^2 = (x' - a)^2 + y'^2,$$

или

$$y'^2 = 2a \left(x' - \frac{a}{2} \right).$$

Следовательно, подвижная центроида есть парабола с осью Bx' и с вершиной в точке $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$.

§ 4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСКОРЕНИЙ ТОЧЕК ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ

(задачи 557—578)

Ускорение любой точки движущейся плоской фигуры можно определить двумя способами: 1) как геометрическую сумму ускорений этой точки в поступательном и вращательном движениях фигуры и 2) как ускорение этой точки во вращательном движении вокруг мгновенного центра ускорений, причем мгновенным центром ускорений называется такая точка плоской фигуры, ускорение которой в данный момент равно нулю.

Если известны ускорение $\ddot{\omega}_A$ некоторой точки A фигуры (ускорение полюса), а также угловая скорость ω и угловое

ускорение ε фигуры, то ускорение любой ее точки B определяется по формуле

$$\vec{\omega}_B = \vec{\omega}_A + \vec{\omega}_{BA} = \vec{\omega}_A + \vec{\omega}_{BA}^{(n)} + \vec{\omega}_{BA}^{(\tau)}. \quad (78)$$

Здесь вектор $\vec{\omega}_{BA}$ — ускорение точки B во вращательном движении вокруг полюса A ; $\vec{\omega}_{BA}^{(n)}$ и $\vec{\omega}_{BA}^{(\tau)}$ — касательная и нормальная составляющие этого ускорения.

Следовательно,

$$\omega_{BA}^{(n)} = \omega^2 AB, \quad \omega_{BA}^{(\tau)} = \varepsilon AB; \quad (79)$$

при этом вектор $\vec{\omega}_{BA}^{(n)}$ направлен вдоль AB (от точки B к точке A), а вектор $\vec{\omega}_{BA}^{(\tau)}$ перпендикулярен к AB .

Угол α между векторами $\vec{\omega}_{BA}$ и $\vec{BA}$ определяется по формуле

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}, \quad (80)$$

при этом в случае ускоренного вращения фигуры векторы $\vec{\omega}_{BA}^{(\tau)}$ и $\vec{v}_{BA}$ (вращательная скорость точки B вокруг полюса A) лежат по одну сторону от прямой AB , в противном случае эти векторы расположены по разные стороны от этой прямой.

Если угловая скорость фигуры постоянна, т. е. $\omega = \text{const}$, то $\varepsilon = 0$, а следовательно, и $\alpha = 0$, т. е. вектор $\vec{\omega}_{BA}$ совпадает по направлению с вектором $\vec{BA}$. Если же в данный момент $\omega = 0$, то $\alpha = \frac{\pi}{2}$ и вектор $\vec{\omega}_{BA}$ перпендикулярен к вектору $\vec{BA}$.

На основании равенства (78) ускорение точки B можно найти построением многоугольника ускорений и применением затем метода проекций, спроектировав векторное равенство (78) на выбранные оси.

Если мгновенный центр ускорений Q принять за полюс, то для ускорения произвольно выбранной точки M фигуры имеем:

$$\vec{\omega}_M = \vec{\omega}_Q + \vec{\omega}_{MQ},$$

но $\omega_Q = 0$, а потому

$$\vec{\omega}_M = \vec{\omega}_{MQ} = \vec{\omega}_{MQ}^{(n)} + \vec{\omega}_{MQ}^{(\tau)}, \quad (81)$$

т. е. ускорение любой точки M плоской фигуры определяется как ускорение во вращательном движении вокруг мгновенного центра ускорений (рис. 108).

При этом ускорение $\vec{\omega}_{MQ}^{(n)}$ направлено по прямой MQ от точки M к центру Q , а ускорение $\vec{\omega}_{MQ}^{(\tau)}$ перпендикулярно к MQ и

$$\omega_{MQ}^{(n)} = QM\omega^2, \quad \omega_{MQ}^{(\tau)} = QM\varepsilon. \quad (82)$$

Ускорение $\vec{\omega}_M$ точки M равно по модулю

$$\omega_M = QM \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2} \quad (83)$$

и составит с направлением MQ угол

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{|\mathbf{F}|}{\omega^2}. \quad (84)$$

Отсюда следует: 1) угол α для всех точек фигуры имеет в данный момент одно и то же значение; 2) ускорения точек плоской фигуры пропорциональны расстояниям этих точек от мгновенного центра ускорений.

Чтобы определить для данного момента положение мгновенного центра ускорений нужно:

1) найти ускорение $\vec{\omega}_A$ какой-либо точки A фигуры [обычно при решении задач рассматриваемого типа ускорение одной точки фигуры (механизма) или задается, или его можно легко найти];

2) повернуть полупрямую, по которой направлен вектор $\vec{\omega}_A$, вокруг точки A на острый угол $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{|\mathbf{F}|}{\omega^2}$ или в направлении вращения фигуры, если это вращение является ускоренным, или в противоположном направлении в противном случае;

3) на полученной после этого поворота полупрямой отложить отрезок

$$AQ = \frac{\omega_A}{\sqrt{\omega^2 + \varepsilon^2}}. \quad (85)$$

Отметим два частных случая:

1) пусть $\varepsilon = 0$, тогда $\operatorname{tg} \alpha = \frac{|\mathbf{F}|}{\omega^2} = 0$ и $\alpha = 0$, следовательно, ускорение $\vec{\omega}_M$ любой точки M движущейся фигуры направлено по MQ , т. е. проходит через центр Q . Поэтому мгновенный центр ускорений Q в этом случае можно найти как точку пересечения прямых, по которым направлены ускорения двух каких-либо точек фигуры;

2) пусть $\omega = 0$, тогда $\operatorname{tg} \alpha = \infty$ и $\alpha = 90^\circ$; следовательно, ускорение $\vec{\omega}_M$ любой точки M фигуры перпендикулярно к MQ . Поэтому мгновенный центр ускорений Q в этом случае можно найти как точку пересечения перпендикуляров, восстановленных из двух каких-либо точек движущейся фигуры к ускорениям этих точек.

Задачи, относящиеся к этому параграфу, можно разделить на следующие четыре группы:

1) задачи, в которых заданы векторы скорости и ускорения одной точки и прямолинейная траектория второй точки плоской фигуры, ускорение которой требуется найти (задачи 566—571, 573—579);

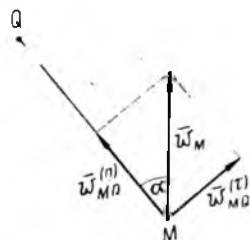


Рис. 108

2) задачи, в которых заданы векторы скорости и ускорения одной точки и криволинейная траектория второй точки плоской фигуры, ускорение которой требуется найти (задачи 572, 573, 575);

3) задачи, в которых требуется определить ускорение точки катящегося без скольжения колеса (задачи 556—563);

4) задачи, в которых заданы ускорения двух точек плоской фигуры, а требуется определить ускорение третьей точки этой фигуры (задачи 564, 574, 576—578).

Первая группа

В задачах первой группы известны ускорение $\vec{\omega}_A$ полюса A и направление искомого ускорения $\vec{\omega}_B$ точки B плоской фигуры, так как точка B движется прямолинейно. Для определения модуля ускорения $\vec{\omega}_B$ следует найти сначала угловую скорость фигуры, а затем ускорение $\vec{\omega}_{BA}^n$. Далее задача решается по формуле (78), на основании которой следует построить в выбранном масштабе многоугольник ускорений, в котором будут известны направления всех сторон и модули сторон, изображающих ускорения $\vec{\omega}_A$ и $\vec{\omega}_{BA}^n$. Из построенного многоугольника ускорений определяются графически ускорение $\vec{\omega}_{BA}^t$ и искомое ускорение $\vec{\omega}_B$. Ускорения $\vec{\omega}_{BA}^t$ и $\vec{\omega}_B$ можно определить также без построения многоугольника ускорений методом проекций, спроектировав равенство (78) на прямую BA (для определения $\vec{\omega}_B$) и на прямую, перпендикулярную к вектору $\vec{\omega}_B$ (для определения $\vec{\omega}_{BA}^t$). Из полученных двух уравнений находим $\vec{\omega}_{BA}^t$ и $\vec{\omega}_B$.

Пример 79. Кривошип $OA = 10$ см нецентрального кривошипно-шатунного механизма вращается вокруг неподвижной оси O с угловой скоростью $\omega_0 = 2$ 1/сек и угловым ускорением $\epsilon_0 = 4$ 1/сек² и приводит в движение шатун $AB = 550$ см, соединенный с ним шарнирно в точке A . Ползун B перемещается в наклонных неподвижных направляющих mn . Определить ускорение ползуна B и угловое ускорение шатуна AB в тот момент, когда $\angle ABn = 60^\circ$ и $AB \perp OA$ (рис. 109, а).

Решение. Так как движение кривошипа OA задано, то можно найти скорость и ускорение точки A . Вектор $\vec{v}_A$ перпендикулярен к OA и по модулю равен $v_A = \omega_0 OA = 2 \cdot 10 = 20$ см/сек. Вектор ускорения $\vec{\omega}_A$ складывается из касательного ускорения $\vec{\omega}_A^t$, направленного перпендикулярно к OA , и нормального ускорения $\vec{\omega}_A^n$, направленного по кривошипу OA от A к O , т. е. $\vec{\omega}_A = \vec{\omega}_A^t + \vec{\omega}_A^n$, причем $\omega_A^n = \omega_0^2 OA = 4 \cdot 10 = 40$ см/сек², $\omega_A^t = \epsilon_0 OA = 4 \cdot 10 = 40$ см/сек.

Так как ползунок B движется поступательно и прямолинейно, то векторы $\vec{v}_B$ и $\vec{\omega}_B$ направлены по прямой mn . С другой стороны, точка B принадлежит шатуну AB , движущемуся в плоскости рисунка; принимая в этом движении точку A за полюс, по формулам (75) и (78) имеем:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}, \quad (a)$$

$$\vec{\omega}_B = \vec{\omega}_A + \vec{\omega}_{BA}^n + \vec{\omega}_{BA}^t, \quad (б)$$

причем $\vec{v}_{BA} \perp AB$, $\vec{\omega}_{BA}^t \perp AB$, вектор $\vec{\omega}_{BA}^n$ направлен вдоль BA и

$$v_{BA} = \omega_1 AB, \quad \omega_{BA}^t = \epsilon_1 AB, \quad \omega_{BA}^n = \omega_1^2 AB = \frac{v_{BA}^2}{AB},$$

где ω_1 и ϵ_1 — угловая скорость и угловое ускорение шатуна AB . Для определения вращательной скорости точки B вокруг полюса

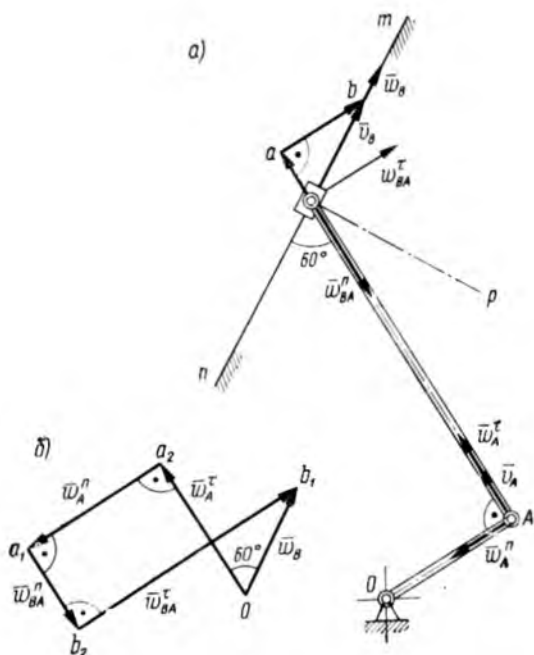


Рис. 109

А построим на основании равенства (а) треугольник скоростей, в котором

$$\overline{Ba} = \vec{v}_A, \quad \overline{ab} = \vec{v}_{BA}, \quad \overline{Bb} = \vec{v}_B.$$

Из этого треугольника имеем:

$$v_{BA} = v_A \operatorname{tg} 60^\circ = v_A \sqrt{3} = 20 \sqrt{3} = 34,6 \text{ см/сек}$$

и, следовательно,

$$\omega_{BA}^n = \frac{v_{B,A}^2}{AB} = \frac{1200}{50} = 24 \text{ см/сек}^2.$$

Теперь в векторном равенстве (6) остаются неизвестными только модули ускорений ω_B и ω_{BA} ; на основании этого равенства построим многоугольник ускорений, учитывая, что направление его замыкающей стороны ω_B известно. Построение этого многоугольника следует начать с известных его сторон, т. е. с ускорений ω_A^n , ω_A^t и ω_{BA}^n . Из точки o проведем вектор $oa_2 = \omega_A^t$, из точки a_2 — вектор $a_2a_1 = \omega_A^n$, а из точки a_1 — вектор $a_1b_2 = \omega_{BA}^n$. Далее из точки b_2 проводим прямую, параллельную вектору ω_{BA}^t , т. е. перпендикулярную к a_2a_1 , а из точки o — прямую, параллельную вектору ω_B , т. е. параллельную направлению mn . Если точку пересечения этих прямых обозначим через b_1 , то $b_2b_1 = \omega_{BA}^t$ и $ob_1 = \omega_B$ (рис. 109, б). Измерив длины сторон ob_1 и b_2b_1 в выбранном масштабе ускорений, найдем численные значения ω_B , ω_{BA}^t и $\epsilon_1 = \frac{\omega_{BA}^t}{AB}$.

Если в построенном многоугольнике ускорений обозначить точку пересечения сторон oa_2 и b_2b_1 через c_1 , то получим прямоугольный треугольник oc_1b_1 , в котором $\angle c_1ob_1 = 60^\circ$, а потому

$$ob_1 = 2oc_1, \quad b_1c_1 = oc_1 \operatorname{tg} 60^\circ;$$

кроме того

$$oc_1 = oa_2 - a_1b_2 = \omega_A^t - \omega_{BA}^n.$$

Следовательно,

$$\omega_B = ob_1 = 2(\omega_A^t - \omega_{BA}^n) = 2(40 - 24) = 32 \text{ см/сек}^2;$$

$$\begin{aligned} \omega_{BA}^t &= b_2b_1 = b_2c_1 + c_1b_1 = \omega_{BA}^n + (\omega_A^t - \omega_{BA}^n) \sqrt{3} = \\ &= 40 + 16\sqrt{3} \approx 67,68 \text{ см/сек}^2, \end{aligned}$$

а

$$\epsilon = \frac{\omega_{BA}^t}{AB} = \frac{40 + 16\sqrt{3}}{50} \approx 1,35 \text{ 1/сек}^2.$$

Рассмотрим теперь, как найти численные значения ускорений ω_B и ω_{BA} методом проекций. Для этого спроектируем векторное равенство (6) на прямую BA и на прямую Bp , перпендикулярную к mn :

$$1) \quad \omega_B \cos 60^\circ = \omega_A^t - \omega_{BA}^n,$$

$$2) \quad 0 = (\omega_A^t - \omega_{BA}^n) \cos 30^\circ + \omega_A^n \cos 60^\circ - \omega_{BA}^t \cos 60^\circ.$$

Отсюда

$$\begin{aligned}\omega_B &= 2(\omega_A^r - \omega_{BA}^n), \\ \omega_{BA}^r &= \omega_A^r + (\omega_A^r - \omega_{BA}^n) \cdot 3.\end{aligned}$$

Вторая группа

В задачах второй группы известны ускорение ω_A точки A и криволинейная траектория точки B , ускорение которой требуется найти. Поэтому известны радиус кривизны ρ траектории и направления векторов $\vec{v}_B$, $\vec{\omega}_B^r$ (по касательной к траектории) и $\vec{\omega}_B^n$ (по нормали траектории), причем

$$\vec{\omega}_B = \vec{\omega}_B^n + \vec{\omega}_B^r.$$

Если принять точку A за полюс, то по формуле (78) получим:

$$\vec{\omega}_B = \vec{\omega}_A + \vec{\omega}_{BA}^n + \vec{\omega}_{BA}^r.$$

следовательно,

$$\vec{\omega}_B^n + \vec{\omega}_B^r = \vec{\omega}_A + \vec{\omega}_{BA}^n + \vec{\omega}_{BA}^r. \quad (a)$$

Определив угловую скорость фигуры ω и скорость $\vec{v}_B$, найдем ускорения:

$$\omega_B^n = \frac{v_B^2}{\rho}, \quad \omega_{BA}^n = \omega^2 AB.$$

Теперь в векторном равенстве (a) остаются неизвестными только модули ускорений $\vec{\omega}_B^r$ и $\vec{\omega}_{BA}^r$. На основании этого векторного равенства следует построить две ломаные линии:

- 1) сторонами одной из них являются векторы $\vec{\omega}_B^n$ и $\vec{\omega}_B^r$;
- 2) сторонами второй ломаной линии являются векторы $\vec{\omega}_A$, $\vec{\omega}_{BA}^n$ и $\vec{\omega}_{BA}^r$. Из этих построенных многоугольников графически определяются неизвестные ускорения $\vec{\omega}_B^r$, $\vec{\omega}_{BA}^r$ и $\vec{\omega}_B$. Задача может быть решена также методом проекций. Для определения ускорения $\vec{\omega}_B^r$ достаточно спроектировать векторное равенство (a) на прямую AB , после чего ускорение точки B находим по формуле

$$\omega_B = \sqrt{(\omega_B^r)^2 + (\omega_B^n)^2}.$$

Пример 80. В механизме, изображенном на рис. 110, а, кривошип $OA = 25$ см вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 2$ 1/сек в плоскости рисунка вокруг неподвижной точки O и при помощи стержня AB приводит в движение кривошип BC , вращающийся в той же плоскости вокруг неподвижной точки C . Определить скорость и ускорение точки B в тот момент, когда

кривошип OA горизонтален, $\angle OAB = 60^\circ$, $\angle ABC = 30^\circ$, если $AB = BC = 50$ см.

Решение. Найдем сначала скорость $\bar{v}_A$ и ускорение $\bar{\omega}_A$ точки A звена OA , движение которого задано. Вектор $\bar{v}_A$ перпендикулярен к OA и по модулю равен

$$v_A = \omega OA = 2 \cdot 25 = 50 \text{ см/сек.}$$

Так как кривошип OA вращается равномерно, то ускорение $\bar{\omega}_A$ направлено вдоль AO , причем

$$\omega_A = \omega^2 OA = 4 \cdot 25 = 100 \text{ см/сек}^2.$$

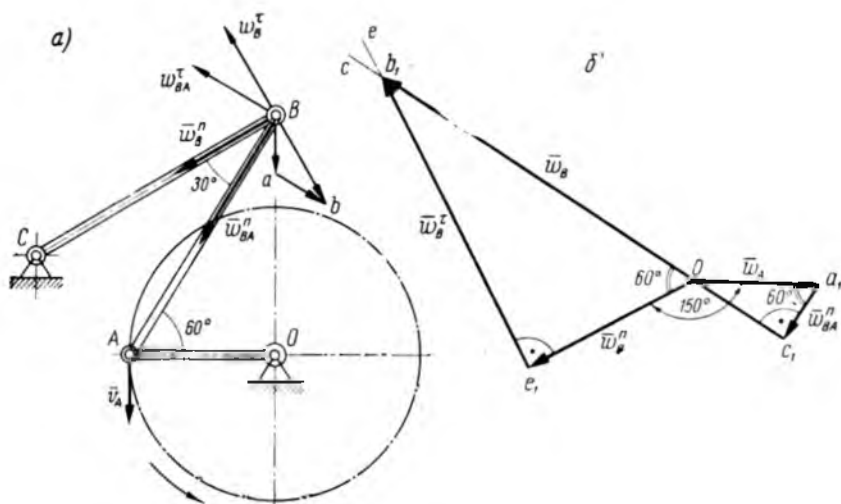


Рис. 110

Так как точка B принадлежит звену BC , вращающемуся вокруг неподвижной точки C , то траекторией точки B является дуга окружности с центром в точке C и радиусом CB . Поэтому векторы $\bar{v}_B$ и $\bar{\omega}_B^t$ направлены по одной прямой, перпендикулярной к BC , а вектор $\bar{\omega}_B^n$ направлен вдоль BC и по модулю равен $\omega_B^n = \frac{v_B^2}{BC}$. Кроме того

$$\bar{\omega}_B = \bar{\omega}_B^n + \bar{\omega}_B^t. \quad (a)$$

С другой стороны, точка принадлежит звену BC , движущемуся в плоскости рисунка; принимая в этом движении точку A

за полюс, по формулам (75) и (78) имеем:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}, \quad (6)$$

$$\vec{\omega}_B = \vec{\omega}_A + \vec{\omega}_{BA}^n + \vec{\omega}_{BA}^t, \quad (в)$$

где векторы $\vec{v}_{BA}$ и $\vec{\omega}_{BA}^t$ направлены по одной прямой, перпендикулярной к AB , а вектор $\vec{\omega}_{BA}^n$ направлен вдоль BA , причем

$\omega_{BA}^n = \frac{v_{BA}^2}{AB}$. До того как переходить к определению ускорений, следует пойти скорости v_B и v_{BA} ; для этого построим, согласно равенству (6), треугольник скоростей B . Тогда

$$\vec{Ba} = \vec{v}_A, \quad \vec{ab} = \vec{v}_{BA}, \quad \vec{Bb} = \vec{v}_B,$$

причем

$$\angle Bba = \angle ABC = 30^\circ, \quad \angle aBb = 90^\circ \rightarrow \angle CBo = 30^\circ.$$

Отсюда

$$Ba = ab, \text{ т. е. } v_{BA} = v_A = 50 \text{ см/сек},$$

$$v_B = Bb = 2Ba \cos 30^\circ = \sqrt{3} v_A = 50 \sqrt{3} \text{ см/сек}.$$

Следовательно,

$$\omega_B^n = \frac{v_B^2}{BC} = \frac{3v_A^2}{BC} = 150 \text{ см/сек}^2$$

и

$$\omega_{BA}^n = \frac{v_{BA}^2}{AB} = 50 \text{ см/сек}^2.$$

Теперь переходим к определению искомого ускорения $\vec{\omega}_B$. Для этого построим многоугольники ускорений по формулам (а) и (в), начиная построение с известных векторов $\vec{\omega}_B^n$, $\vec{\omega}_A$ и $\vec{\omega}_{BA}^n$. Из точки o проводим вектор $\vec{oa}_1 = \vec{\omega}_A$, из точки a_1 — вектор $\vec{a_1c_1} = \vec{\omega}_{BA}^n$, а из точки c_1 — прямую c_1c , параллельную вектору $\vec{\omega}_{BA}^t$, т. е. перпендикулярную к a_1c . Далее, из точки o проведем вектор $\vec{oe_1} = \vec{\omega}_B^n$, а из точки e_1 — прямую e_1e , параллельную вектору $\vec{\omega}_B^t$, т. е. перпендикулярную к oe_1 . Точку пересечения прямых c_1c и e_1e обозначим через b_1 , тогда $\vec{e_1b_1} = \vec{\omega}_{BA}^t$, $\vec{c_1b_1} = \vec{\omega}_{BA}^n$ и $\vec{ob_1} = \vec{\omega}_B$. Измерив выбранной единицей масштаба длины сторон $\vec{e_1b_1}$, $\vec{c_1b_1}$ и $\vec{ob_1}$, найдем модули ускорений $\vec{\omega}_{BA}^t$, $\vec{\omega}_{BA}^n$ и $\vec{\omega}_B$.

Так как все углы в многоугольниках ускорений известны (см. рис. 110, б), а неизвестными остаются только модули двух сторон, то эти стороны можно вычислить по формулам тригонометрии. Так как $oa_1 = 2a_1c_1$ и $\angle oa_1c_1 = 60^\circ$, то $\angle a_1oc_1 = 30^\circ$,

$\angle a_1 c_1 o = 90^\circ$ и прямая $c_1 c$ проходит через точку o , т. е. многоугольник ускорений превращается в два треугольника: $\triangle oa_1 c_1$ и $\triangle oe_1 b_1$, в которых $\angle e_1 o b_1 = 60^\circ$. Из этих прямоугольных треугольников имеем:

$$e_1 b_1 = oe_1 \operatorname{tg} 60^\circ, \quad ob_1 = 2oe_1 \quad \text{и} \quad oc_1 = oa_1 \sin 60^\circ, \\ c_1 b_1 = c_1 o + ob_1,$$

откуда

$$\omega_B^r = \frac{1}{3} \omega_B^n, \quad \omega_B^r = 2\omega_B^n, \\ \omega_{BA}^r = \omega_A \frac{\sqrt{3}}{2} + \omega_B^n.$$

Как было указано выше, численные значения векторов ω_B^r , ω_B^n , ω_{BA}^r можно найти методом проекций: проектируя векторное равенство $\omega_B^n + \omega_B^r = \omega_A + \omega_{BA}^r + \omega_{BA}^n$ на прямые BA и BC , получим:

- 1) $\omega_B^r \cos 60^\circ = \omega_B^n \cos 30^\circ = \omega_A \cos 60^\circ = \omega_{BA}^n$;
- 2) $\omega_B^n = \omega_A \cos 30^\circ + \omega_{BA}^n \cos 30^\circ + \omega_{BA}^r \cos 60^\circ$.

Отсюда

$$\omega_B^r = \omega_A - 2\omega_{BA}^n + \omega_B^n \sqrt{3} = 150 \sqrt{3} \text{ см/сек}^2, \\ \omega_{BA}^r = \frac{1}{3} \omega_A - 2\omega_B^n - \omega_{BA}^n \sqrt{3} = (300 + 50 \sqrt{3}) \text{ см/сек}^2, \\ \omega_B = \sqrt{(\omega_B^r)^2 + (\omega_B^n)^2} = 300 \text{ см/сек}^2.$$

Третья группа

Особенностью задач этой группы является то, что угловое ускорение ϵ фигуры находится здесь как производная $\frac{d\omega}{dt}$ по времени от угловой скорости, т. е. $\epsilon = \frac{d\omega}{dt}$.

Пример 81. Кривошип OA вращается в плоскости рисунка вокруг неподвижной точки O с угловой скоростью $\omega = 2 \text{ 1/сек}$ и угловым ускорением $\epsilon = 4 \text{ 1/сек}^2$ и приводит в движение свободно посаженную на него в точке A шестерню I радиуса $r_1 = 5 \text{ см}$, катящуюся без скольжения внутри неподвижного колеса II радиуса $r_2 = 15 \text{ см}$. Определить скорость и ускорение точки B подвижной шестерни, если $\angle OAB = 60^\circ$ (рис. 111, а).

Решение. Найдем сначала скорость v_A точки A и касательное и нормальное ускорения ω_A^r и ω_A^n этой точки: $v_A = \omega OA = = \omega(r_2 - r_1) = 20 \text{ см/сек}$, $\omega_A^n = \omega^2 OA = 40 \text{ см/сек}^2$, $\omega_A^r = \epsilon OA = = 40 \text{ см/сек}^2$; так как $\omega_A^n = \omega_A^r$, то вектор ω_A составляет с направлением AO угол 45° , а с направлением AB — угол, равный $60 - 45 = 15^\circ$. Качение шестерни I по неподвижному колесу II

происходит без скольжения, а потому мгновенный центр скоростей шестерни I находится в точке касания P колес и следовательно, угловая скорость подвижной шестерни I равна:

$$\omega_1 = \frac{v_A}{r_1} = \omega \frac{(r_2 - r_1)}{r_1} = \omega \left(\frac{r_2}{r_1} - 1 \right);$$

отсюда угловое ускорение этой шестерни равно

$$\varepsilon_1 = \frac{d\omega_1}{dt} = \left(\frac{r_2}{r_1} - 1 \right) \frac{d\omega}{dt} = \left(\frac{r_2}{r_1} - 1 \right) \varepsilon.$$

Далее задача может быть решена двумя способами:

- 1) по формуле (78);
- 2) при помощи мгновенного центра ускорений по формулам (83), (84).

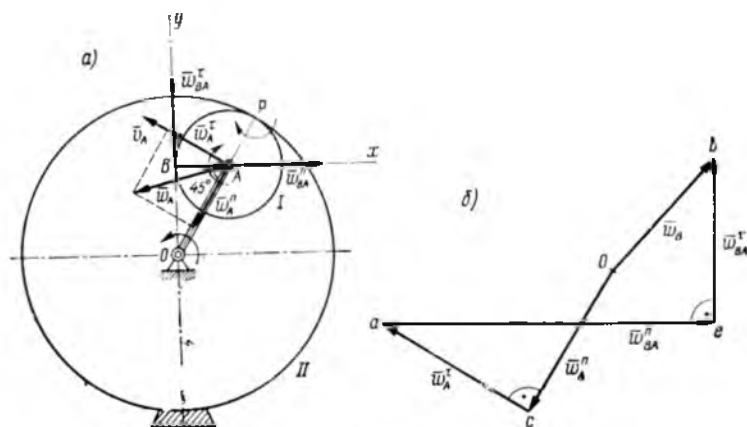


Рис. 111

1-й способ. Выбирая точку A за полюс, имеем:

$$\bar{w}_B = \bar{w}_A^n + \bar{w}_A^t + \bar{w}_{BA}^n + \bar{w}_{BA}^t, \quad (a)$$

причем

$$\omega_{BA}^n = \omega_1^2 AB = \omega^2 \left(\frac{r_2}{r_1} - 1 \right)^2 AB = 80 \text{ см/сек}^2,$$

$$\omega_{BA}^t = \varepsilon_1 AB = \varepsilon \left(\frac{r_2}{r_1} - 1 \right) AB = 40 \text{ см/сек}^2.$$

Вектор $\bar{w}_B$ есть замыкающая сторона ломаной линии, сторонами которой являются векторы $\bar{w}_A^n$, $\bar{w}_A^t$, $\bar{w}_{BA}^n$, $\bar{w}_{BA}^t$, известные как по модулю, так и по направлению. Таким образом, все слагаемые в правой части предыдущего векторного равенства известны и по модулю, и по направлению. Построив много-

угольник ускорений, в котором

$$\overline{Oc} = \omega_A^n, \quad \overline{ca} = \omega_A^t, \quad \overline{ac} = \omega_{BA}^n, \quad \overline{cb} = \omega_{BA}^t,$$

найдем искомое ускорение ω_B точки B : $\overline{Ob} = \omega_B$ (рис. 111, б).

Для определения модуля и направления вектора ω_B методом проекций, спроектируем векторное равенство (а) на оси x и y , направленные по BA и перпендикулярно к BA . Тогда

$$\begin{aligned} \omega_{Bx} &= \omega_{BA}^n - \omega_A^n \cos 60^\circ - \omega_A^t \cos 30^\circ = \\ &= 80 - 20 - 20\sqrt{3} = (60 - 20\sqrt{3}) \text{ см/сек}^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_{By} &= \omega_{BA}^t - \omega_A^n \cos 30^\circ + \omega_A^t \cos 60^\circ = \\ &= 40 - 20\sqrt{3} + 20 = (60 - 20\sqrt{3}) \text{ см/сек}^2. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\omega_B = \sqrt{\omega_{Bx}^2 + \omega_{By}^2} = 20(3 - \sqrt{3})\sqrt{2} \approx 35,8 \text{ см/сек}^2.$$

Так как $\omega_{Bx} = \omega_{By}$, то вектор ω_B образует с направлением BA угол 45° .

2-й способ. По формулам (84) и (85) находим:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{e_1}{\omega_1^2} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}, \quad AQ = \frac{\omega_A}{\sqrt{e_1^2 + \omega_1^4}} = \frac{40\sqrt{2}}{8\sqrt{5}} = \sqrt{10} \approx 3,16 \text{ см.}$$

Повернув вектор ω_A вокруг точки A в направлении вращения шестерни I , т. е. по часовой стрелке, на угол $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$ и отложив на полученном после этого луче отрезок

$AQ = \sqrt{10} \approx 3,16$ см, получим точку Q — мгновенный центр ускорений (рис. 112). Тогда для ускорения ω_B точки B по формуле (83) имеем:

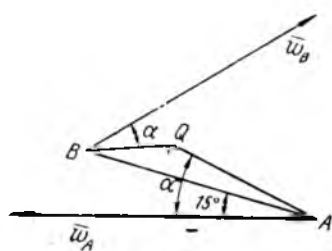


Рис. 112

$$\begin{aligned} \omega_B &= BQ \sqrt{e_1^2 + \omega_1^4} = \\ &= BQ \sqrt{8^2 + 16^2} = BQ \cdot 8\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Расстояние BQ вычислим из треугольника ABQ , в котором $\angle BAQ = \alpha - 15^\circ$; $BQ^2 = AB^2 + AQ^2 - 2AB \cdot AQ \cos(\alpha - 15^\circ) = 35 - 20\sqrt{2}(\cos 15^\circ + \operatorname{tg} \alpha \sin 15^\circ) \approx 4,15$, т. е. $BQ = 2,03$ см и, следовательно, $\omega_B = 2,03 \cdot 8\sqrt{5} \approx 36 \text{ см/сек}^2$.

Вектор ω_B составляет с направлением BQ такой же угол α , как и вектор ω_A с направлением AQ .

Четвертая группа

Пример 82. Равносторонний треугольник ABC движется в плоскости xOy так, что его вершины A и B перемещаются по осям Ox и Oy , причем $\omega_A = 20\sqrt{3} \text{ см/сек}^2$, а $\omega_B = 20 \text{ см/сек}^2$. Найти ускорение ω_C вершины C в момент, когда сторона AC параллельна оси Ox , если $AC = 20 \text{ см}$ (рис. 113, а).

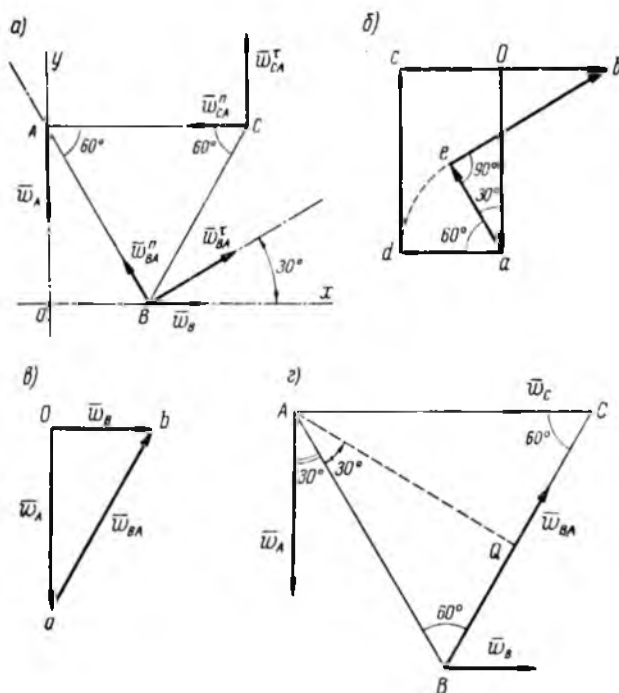


Рис 113

Решение. 1-й способ. Выберем точку A за полюс, тогда, согласно формуле (78), имеем:

$$\vec{\omega}_B = \vec{\omega}_A + \vec{\omega}_{BA}^n + \vec{\omega}_{BA}^\tau, \quad (a)$$

$$\vec{\omega}_C = \vec{\omega}_A + \vec{\omega}_{CA}^n + \vec{\omega}_{CA}^\tau. \quad (b)$$

Векторы $\vec{\omega}_{BA}^n$ и $\vec{\omega}_{CA}^n$ направлены соответственно по BA и CA , а векторы $\vec{\omega}_{BA}^\tau$ и $\vec{\omega}_{CA}^\tau$ — соответственно перпендикулярны к BA и CA , причем

$$\omega_{BA}^n = \omega^2 AB, \quad \omega_{CA}^n = \omega^2 CA, \quad \omega_{BA}^\tau = \varepsilon AB, \\ \omega_{CA}^\tau = \varepsilon CA.$$

Так как $BA = CA$, то

$$\omega_{BA}^n = \omega_{CA}^n, \quad \omega_{BA}^t = \omega_{CA}^t.$$

На основании равенств (а) и (б) построим многоугольники ускорений точек B и C . Для этого из произвольной точки O проводим векторы $\overline{Oa} = \omega_A$ и $\overline{Ob} = \omega_B$. Далее из точки a проводим прямую, параллельную вектору ω_{BA}^n , т. е. параллельную BA , а из точки b — прямую, параллельную ω_{BA}^t , т. е. перпендикулярную к BA до их взаимного пересечения в точке e . Тогда

$$\overline{ae} = \omega_{BA}^n, \quad \overline{eb} = \omega_{BA}^t.$$

Чтобы построить многоугольник ускорений для точки C , проведем вектор $\overline{ad}$, параллельный вектору ω_{CA}^n , т. е. параллельный CA и равный по модулю ae (так как $\omega_{CA}^n = \omega_{BA}^n$, то $ad = \omega_{BA}^n = \omega_{CA}^n = ae$, т. е. $\overline{ad} = \overline{ae}$). Затем из точки d проведем вектор $\overline{dc}$, перпендикулярный вектору $\overline{ad}$, причем $dc = \omega_{CA}^t = \omega_{BA}^t = eb$. Соединив точки O и c , получим замыкающую сторону многоугольника $Oadc$, т. е. $\overline{Oc} = \omega_C$ (рис. 113, б).

Для решения задачи методом проекций спроектируем равенство (а) на прямую BA и прямую, перпендикулярную к BA , а равенство (б) — на оси x и y . Тогда имеем:

$$1) -\omega_B \cos 60^\circ = -\omega_A \cos 30^\circ + \omega_{BA}^n;$$

$$2) -\omega_B \sin 30^\circ = \omega_A \sin 60^\circ - \omega_{BA}^t;$$

$$3) \omega_{Cx} = -\omega_{CA}^n;$$

$$4) \omega_{Cy} = -\omega_A + \omega_{CA}^t.$$

Отсюда

$$\omega_{BA}^n = \omega_A \cos 30^\circ - \omega_B \cos 60^\circ = 20 \sqrt{3} \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{20}{2} = 20 \text{ см/сек}^2;$$

$$\omega_{BA}^t = \omega_A \sin 60^\circ + \omega_B \sin 30^\circ = \frac{20 \sqrt{3}}{2} + \frac{20 \sqrt{3}}{2} = 20 \sqrt{3} \text{ см/сек}^2;$$

$$\omega_{Cx} = -\omega_{CA}^n = -\omega_{BA}^n = -20 \text{ см/сек}^2;$$

$$\omega_{Cy} = -\omega_A + \omega_{CA}^t = -\omega_A + \omega_{BA}^t = -20 \sqrt{3} + 20 \sqrt{3} = 0.$$

Следовательно, ускорение ω_C точки C равно по модулю 20 см/сек^2 и направлено по оси Ox влево.

2-й способ (при помощи мгновенного центра ускорений). Так как в данной задаче ускорения ω_A и ω_B заданы, то мгновенный центр ускорений проще всего можно найти как точку пересечения двух прямых, проведенных из точек A и B под

одним и тем же углом $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}$ к ускорениям точек [см. формулу (84)]. Но угол α равен углу между векторами $\vec{\omega}_{BA}$ и $\vec{BA}$ [см. формулу (80)]. Из равенства (78) имеем:

$$\vec{\omega}_{BA} = \vec{\omega}_B - \vec{\omega}_A.$$

Чтобы построить вектор $\vec{\omega}_{BA}$, т. е. разность $\vec{\omega}_B - \vec{\omega}_A$, проведем из произвольной точки O векторы $\vec{Oa} = \vec{\omega}_A$ и $\vec{Ob} = \vec{\omega}_B$ и соединим их концы. Тогда $\vec{\omega}_{BA} = \vec{ab}$ (рис. 113, в). Из прямоугольного треугольника Oab находим:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{Oa}{Ob} = \frac{\omega_A}{\omega_B} = \frac{1}{3}, \quad \text{где } \gamma = \angle Oba,$$

т. е. $\gamma = 60^\circ$. Отсюда следует, что вектор $\vec{\omega}_{BA}$, проведенный из точки B , направлен по стороне BC треугольника ABC и потому составляет с направлением BA угол 60° (рис. 113, г). Следовательно, $\alpha = 60^\circ$. Теперь, чтобы построить мгновенный центр ускорений, достаточно повернуть на угол 60° против часовой стрелки вектор $\vec{\omega}_A$ вокруг точки A , а вектор $\vec{\omega}_B$ вокруг точки B . Полученные после этого поворота векторы будут направлены соответственно по биссектрисе угла A треугольника ABC и по стороне BC ; точка пересечения Q этих прямых является мгновенным центром ускорений. Так как, очевидно, $QC = QB$, то $\omega_C = \omega_B = 20 \text{ см/сек}^2$ [см. формулу (83)].

Вектор $\vec{\omega}_C$ составляет с направлением CQ угол $\alpha = 60^\circ$, т. е. направлен по стороне CA треугольника ABC (рис. 113, г).

Г л а в а IV

СОСТАВНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

§ 1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ И ТРАЕКТОРИЯ СОСТАВНОГО ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

Если мы рассматриваем движение точки по отношению к системе координат Ox, y, z , которая в свою очередь движется относительно системы отсчета $Oxyz$, принимаемой за неподвижную, то движение точки M по отношению к подвижным осям O, x, y, z , называется *относительным*. Движение подвижных осей O, x, y, z относительно неподвижной системы отсчета $Oxyz$ называется *переносным*, а движение точки M относительно неподвижных осей называется в этом случае *составным*, или *абсолютным движением*. В связи с этим

различают абсолютную ($\bar{v}_a$), относительную ($\bar{v}_r$) и переносную ($\bar{v}_e$) скорости точки M , а также абсолютное ($\bar{w}_a$), относительное ($\bar{w}_r$) и переносное ($\bar{w}_e$) ускорения этой точки. При этом относительной скоростью и относительным ускорением точки называют ее скорость и ускорение в относительном движении, абсолютной скоростью и абсолютным ускорением точки называют ее скорость и ускорение в абсолютном движении. Переносной скоростью и переносным ускорением точки называются соответственно скорость и ускорение той точки, неизменно связанной с подвижной системой осей, с которой в данный момент совпадает точка M .

Задачи, относящиеся к этому параграфу, можно разбить на два основных типа:

1) зная относительное движение точки и переносное движение, найти уравнения и траекторию абсолютного движения этой точки (задачи 417, 419—422);

2) зная абсолютное движение точки и переносное движение, найти уравнения и траекторию относительного движения точки (задачи 418, 423, 425).

При решении этих задач следует прежде всего установить подвижную и неподвижную системы отсчета и выяснить характер переносного движения, т. е. характер движения того тела, с которым неизменно связана выбранная подвижная система осей. После этого следует установить, какое движение рассматриваемой точки является абсолютным движением и какое — относительным.

Пример 83. Движение точки относительно подвижных осей Ox_1y_1 задано уравнениями:

$$x_1 = 4 \sin \frac{\pi}{2} t,$$

$$y_1 = 1 - \cos \frac{\pi}{2} t.$$

Подвижные оси Ox_1y_1 вращаются в своей плоскости вокруг неподвижной точки O по закону $\varphi = \frac{\pi}{2} t$. Составить уравнения движения точки M относительно осей Oxy (уравнения абсолютного движения) (рис. 114).

Решение. Переносным движением в данной задаче является вращение подвижных осей Ox_1y_1 вокруг точки O . Чтобы найти уравнения абсолютного движения точки M , нужно ее координаты x и y в неподвижной системе осей выразить в функциях времени t .

Построив координаты точки M в подвижных и неподвижных системах осей, имеем по формулам преобразования координат

при повороте осей на угол φ :

$$x = x_1 \cos \varphi + y_1 \sin \varphi,$$

$$y = y_1 \cos \varphi - x_1 \sin \varphi,$$

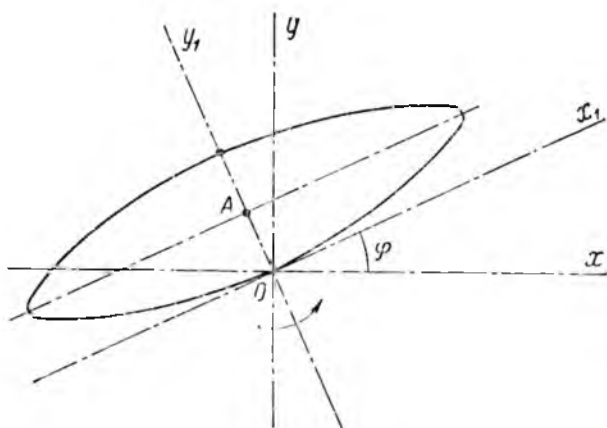


Рис. 114

или, подставляя значения x_1 , y_1 и φ , получим искомые уравнения абсолютного движения точки M :

$$x = 4 \sin \frac{\pi}{2} t \cos \frac{\pi}{2} t + \left(1 - \cos \frac{\pi}{2} t\right) \sin \frac{\pi}{2} t,$$

$$y = \left(1 - \cos \frac{\pi}{2} t\right) \cos \frac{\pi}{2} t - 4 \sin \frac{\pi}{2} t \sin \frac{\pi}{2} t,$$

или

$$x = \frac{3}{2} \sin \pi t + \sin \frac{\pi}{2} t,$$

$$y = \cos \frac{\pi}{2} t + \frac{3}{2} \cos \pi t - \frac{5}{2}.$$

Примечание. Исключив t из уравнений относительного движения точки M , находим ее относительную траекторию:

$$(y_1 - 1)^2 + \left(\frac{x_1}{4}\right)^2 = 1.$$

Это есть эллипс с полуосями $a=2$, $b=1$ и с центром в точке $A(0, 1)$. Следовательно, абсолютное движение точки M можно представить как движение по этому эллипсу, который вращается вокруг точки O .

Пример 84. Резец совершает прямолинейное возвратно-поступательное движение так, что его конец M движется по неподвижной оси Ox по закону $x=OM=a \sin \omega t$. Составить уравнения движения точки M относительно диска, вращающегося

равномерно с угловой скоростью ω вокруг точки O , и найти траекторию этого относительного движения (рис. 115).

Решение. Подвижную систему координатных осей Ox_1y_1 , неизменно связанных с диском, выберем так, чтобы в начальный момент ось Ox_1 совпала с неподвижной осью Ox .

Тогда уравнение переносного вращательного движения запишется так:

$$\varphi = \omega t.$$

Чтобы получить уравнения относительного движения точки M , найдем ее координаты в подвижной системе отсчета Ox_1y_1 :

$$x_1 = OB = OM \cos \varphi,$$

$$y_1 = -OA = -OM \sin \varphi.$$

Подставив сюда значения φ и OM , получим:

$$x_1 = a \sin \omega t \cos \omega t = \frac{a \sin 2\omega t}{2},$$

$$y_1 = -a \sin \omega t \sin \omega t = -a \sin^2 \omega t.$$

Это и есть уравнения относительного движения точки M .

Чтобы найти траекторию относительного движения этой точки, достаточно из последних двух уравнений исключить время t .

Для этого возведем первое из этих уравнений в квадрат:

$$x_1^2 = a^2 \sin^2 \omega t \cos^2 \omega t = a^2 \sin^2 \omega t (1 - \sin^2 \omega t).$$

Заменяя $a \sin^2 \omega t$ через y_1 , получим:

$$x_1^2 = -y_1 (a + y_1),$$

или

$$y_1^2 = -ay_1 - x_1^2,$$

или

$$x_1^2 + ay_1 + y_1^2 = 0,$$

или

$$x_1^2 + \left(y_1 + \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}.$$

Следовательно, искомая траектория есть окружность радиуса $\frac{a}{2}$ с центром в точке $\left(0, -\frac{a}{2}\right)$.

§ 2 ТЕОРЕМА СЛОЖЕНИЯ СКОРОСТЕЙ

Если точка M участвует в составном движении, то имеет место следующая теорема: абсолютная скорость точки равна геометрической сумме переносной и относительной скоростей этой точки (рис. 116), т. е.

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r. \quad (86)$$

Если угол между векторами $\vec{v}_e$ и $\vec{v}_r$ обозначим α , то модуль и направление вектора абсолютной скорости определяются по



Рис. 116

формулам (87) и (88):

$$v_a = \sqrt{v_e^2 + v_r^2 + 2v_e v_r \cos \alpha} \quad (87)$$

и

$$\frac{v_a}{\sin \alpha} = \frac{v_e}{\sin \beta} = \frac{v_r}{\sin \gamma}, \quad (88)$$

где β и γ — углы, образуемые вектором $\vec{v}_a$ с векторами $\vec{v}_e$ и $\vec{v}_r$.

Задачи, относящиеся к этому параграфу, можно разделить на четыре основных типа.

Задачи типа I

(задачи 435, 439, 444)

Зная переносную и относительную скорости точки найти ее абсолютную скорость.

Решение задач этого типа сводится к построению параллелограмма скоростей по двум смежным его сторонам $\vec{v}_e$ и $\vec{v}_r$.

Пример 85. Круглый цилиндр радиуса r вращается вокруг своей вертикальной оси Oz с угловой скоростью $\omega = \frac{\pi}{2} t^2$ 1/сек. По поверхности цилиндра перемещается точка M по винтовому пазу по закону $s = \frac{at^2}{2}$, где s есть длина дуги M_0M винтовой линии.

Касательная к винтовой линии составляет с образующей цилиндра угол $\gamma = 30^\circ$. Определить абсолютную скорость точки M в момент t (t выражено в сек, а s — в м) (рис. 117).

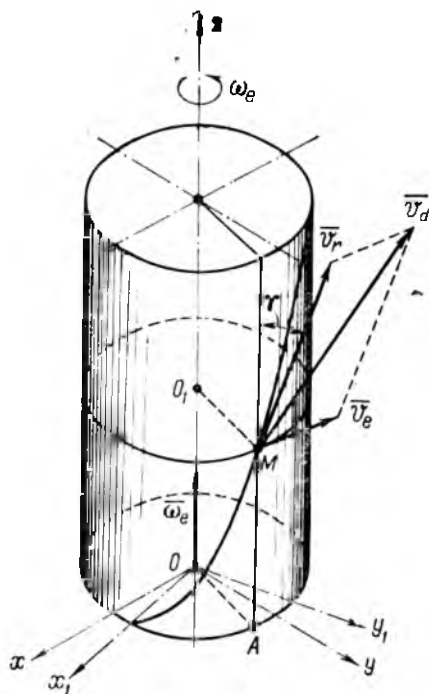


Рис. 117

Так как угол между векторами $\bar{v}_r$ и $\bar{v}_e$ равен $90^\circ - \gamma = 60^\circ$, то по формуле (87) абсолютная скорость точки M будет равна

$$\begin{aligned} v_a &= \sqrt{v_e^2 + v_r^2 + 2v_e v_r \cos(90^\circ - \gamma)} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{\pi}{2} r t^2\right)^2 + a^2 t^2 + 2 \frac{\pi}{2} r t^2 a t \cdot \frac{1}{2}} = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(\pi r t + a)^2 + 3a^2} \text{ см/сек.} \end{aligned}$$

Задачи типа II

(задачи 433, 441—443)

Зная абсолютную скорость точки и направления переносной и относительной скоростей этой точки, найти модули этих скоростей.

Решение задач этого типа сводится к построению параллелограмма скоростей по данной диагонали и направлениям двух смежных его сторон.

Пример 86. Механизм состоит из двух параллельных валов O и O_1 , кривошип OA и кулисы O_1B ; расстояние между осями валов равно $OO_1 = 30$ см, длина кривошипа OA равна 10 см. Кривошип вращается равномерно вокруг оси O с угловой ско-

Решение. Если систему подвижных осей Ox_1y_1z неизменно свяжем с цилиндром, то переносное движение будет вращательным вокруг неподвижной оси Oz с угловой скоростью $\omega_e = \frac{\pi}{2} t^2$ 1 сек. Поэтому переносная скорость точки M будет направлена перпендикулярно к плоскости MO_1z и по модулю равна $v_e = \omega_e r = \frac{\pi}{2} r t^2$. Относительным движением точки M (движением по отношению к цилиндру) является ее движение по заданной винтовой линии по закону $s = \frac{at^2}{2}$. Следовательно, относительная скорость точки M направлена по касательной к винтовой линии и по модулю равна

$$v_r = \frac{ds}{dt} = at \text{ см/сек.}$$

ростью $\omega = 4 \frac{1}{\text{сек}}$. Найти переносную и относительную скорости точки A , а также угловую скорость ω_1 кулисы в момент, когда кривошип OA составляет с вертикалью угол $\varphi = 60^\circ$ (рис. 118).

Решение. Если за подвижную систему отсчета выберем систему, неизменно связанную с кулисой O_1B , то переносное движение будет вращательным вокруг оси O_1 с угловой скоростью ω_1 . Поэтому переносная скорость точки A будет перпендикулярна к O_1A и по модулю равна $v_e = O_1A\omega_1$. Относительное движение точки A , т. е. ее перемещение относительно кулисы, является прямолинейным вдоль O_1B . Поэтому вектор относительной скорости $\bar{v}_r$ этой точки направлен по прямой O_1B . Но точка A принадлежит одновременно и кривошипу OA , вращающемуся вокруг неподвижной оси O с угловой скоростью $\omega = 4 \frac{1}{\text{сек}}$, а потому

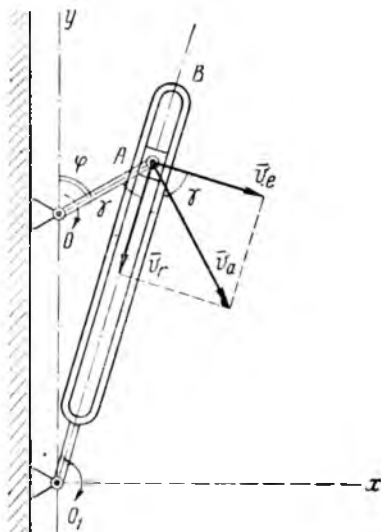


Рис. 118

траекторией абсолютного движения точки A , т. е. ее движения по отношению к неподвижной системе координат O_1xy , является окружность радиуса OA .

Абсолютная скорость точки A направлена перпендикулярно к OA и по модулю равна

$$v_a = \omega OA = 4 \cdot 10 = 40 \text{ см/сек.}$$

Зная модуль и направление вектора $\bar{v}_a$ и направления векторов $\bar{v}_e$ и $\bar{v}_r$, строим параллелограмм скоростей, в котором вектор $\bar{v}_a$ должен быть диагональю. Так как $\bar{v}_r \perp \bar{v}_e$, то из прямоугольного треугольника имеем:

$$v_r = v_a \cdot \sin \gamma, \quad v_e = v_a \cdot \cos \gamma,$$

где γ — угол между векторами $\bar{v}_a$ и $\bar{v}_e$, равный углу AOO_1 . Для определения этого угла из треугольника OO_1A находим:

$$\begin{aligned} O_1A &= \sqrt{O_1O^2 + OA^2 - 2O_1O \cdot OA \cos(180^\circ - \varphi)} = \\ &= \sqrt{30^2 + 10^2 - 2 \cdot 30 \cdot 10 \cos 60^\circ} = 10\sqrt{13}, \end{aligned}$$

$$\frac{O_1O}{\sin \gamma} = \frac{O_1A}{\sin(180^\circ - \varphi)} = \frac{OA}{\sin \varphi}.$$

Отсюда

$$\sin \gamma = \frac{O_1 O}{O_1 A} \sin \varphi = \frac{30}{10 \sqrt{13}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3 \sqrt{3}}{2 \sqrt{13}}$$

и

$$\cos \gamma = \sqrt{1 - \sin^2 \gamma} = \sqrt{1 - \frac{27}{52}} = \frac{5}{2 \sqrt{13}}.$$

Следовательно,

$$v_r = 40 \frac{3 \sqrt{3}}{2 \sqrt{13}} = 60 \frac{\sqrt{39}}{13} = 24,27 \text{ см/сек};$$

$$v_e = 40 \frac{5}{2 \sqrt{13}} = \frac{100 \sqrt{13}}{13} = 27,73 \text{ см/сек}.$$

Из равенства $v = \omega_1 \cdot O_1 A$ находим

$$\omega_1 = \frac{v}{O_1 A} = \frac{100 \sqrt{13}}{13 \cdot 10 \sqrt{13}} = \frac{10}{13} = 0,77 \text{ 1/сек}.$$

Задачи типа III

(задачи 436, 437, 440)

Зная векторы $\vec{v}_a$ и $\vec{v}_r$ (или векторы $\vec{v}_a$ и $\vec{v}_e$), найти модуль и направление вектора $\vec{v}_r$ (или вектора $\vec{v}_e$).

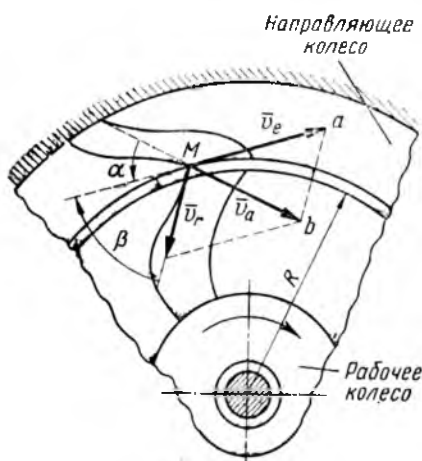


Рис. 119

Решение задач этого типа сводится к построению параллелограмма скоростей по данной диагонали, одной из его сторон и углу между ними.

Пример 87. Частица M воды поступает из направляющего колеса турбины в рабочее колесо (рис. 119) со скоростью $v = 7,57 \text{ м/сек}$, которая образует с направлением касательной к внутренней окружности направляющего колеса угол $\alpha = 40^\circ$. Найти скорость частицы относительно рабочего колеса и угол β , который должны составлять лопатки рабочего колеса с направлением касательной в месте входа воды,

если вода поступает в рабочее колесо без удара, наружный радиус рабочего колеса $R = 225 \text{ мм}$ и угловая скорость вращения турбины равна $n = 320 \text{ об/мин}$.

Решение. Если за переносное движение принять вращение турбины вокруг оси O с угловой скоростью $\omega_r = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi \cdot 320}{30} = \frac{32}{3} \pi$ в сек, то переносная скорость частицы M будет направлена перпендикулярно к радиусу OM и по модулю равна $v_e = \omega_r \times OM = \frac{32}{3} \pi \times 0,225 = 2,4\pi$ м/сек.

Заданная скорость, с которой частица вступает в рабочее колесо, является абсолютной скоростью v_a . Зная векторы v_a и v_e , строим параллелограмм скоростей, в котором вектор v_a является диагональю, и находим относительную скорость v_r частицы M , направленную по касательной к лопатке рабочего колеса. Из треугольника скоростей, в котором известны стороны v_a , v_e и угол α между ними, находим:

$$v_r = \sqrt{v_a^2 + v_e^2 - 2v_e v_a \cos \alpha} = \\ = \sqrt{7,57^2 + (2,4\pi)^2 - 2 \cdot 7,57 \cdot 2,4\pi \cos 40^\circ} = 5,16 \text{ м/сек.}$$

По формуле (88) имеем:

$$\frac{v_r}{\sin \alpha} = \frac{v_a}{\sin \beta},$$

откуда

$$\sin \beta = \frac{v_a \cdot \sin \alpha}{v_r} = \frac{7,57 \cdot 0,643}{5,16} = 0,939, \\ \beta = 71^\circ.$$

Задачи типа IV

(задачи 430, 434, 438)

Зная вектор $\vec{v}_e$ (или вектор $\vec{v}_r$) и направления скоростей $\vec{v}_a$ и v_r (или v_a и v_e), найти модули этих скоростей.

При решении задач типа IV параллелограмм скоростей следует строить по заданной его стороне v_r (или v_e) и известным направлениям другой его стороны $\vec{v}_r$ (или $\vec{v}_e$) и диагонали $\vec{v}_a$.

Решение задач этого типа аналогично решению задач типа II.

Пример 88. Параболический кулак, контур которого имеет форму параболы $y_1 = 9 - x_1^2$, движется поступательно и прямолинейно по неподвижной горизонтальной плоскости по закону $s = 30t$ и толкает опирающийся на него стержень CD , который перемещается в вертикальных направляющих. Найти скорость стержня в зависимости от расстояния конца C стержня от оси Ox_1 (рис. 120).

Решение. Подвижные оси $O_1x_1y_1$, неизменно связанные с кулаком, направлены, как указано на рис. 120. Переносным движением является поступательное и прямолинейное движение кулака со скоростью $v_1 = \frac{ds}{dt} = 30$ см/сек. Поэтому переносная скорость $\bar{v}_e$ точки C независимо от ее положения на параболе равна поступательной скорости кулака $v_1 = 30$ см/сек и направлена по горизонтали вправо. Так как абсолютное движение стержня CD есть поступательное движение в вертикальном направлении, то абсолютная скорость точки C направлена по вертикали. Кроме того, точка C стержня CD перемещается относительно кулака по заданной параболе, а потому относительная

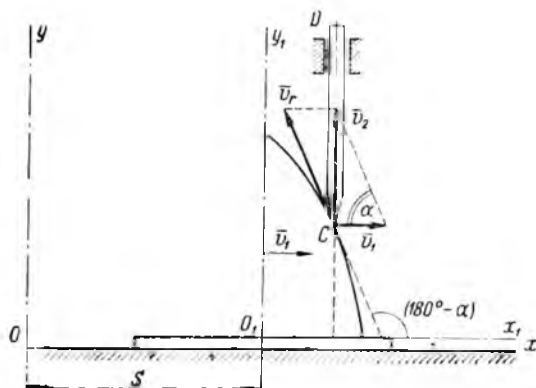


Рис. 120

скорость этой точки направлена по касательной к этой параболе. Таким образом, нам известны модуль и направление скорости $\bar{v}_e$ и направления скоростей $\bar{v}_a$ и $\bar{v}_r$. Для определения абсолютной скорости $\bar{v}_a$ нужно построить параллелограмм скоростей, в котором одной стороной является вектор $\bar{v}_e$, другая сторона направлена по касательной к параболе в точке C , а диагональ направлена по вертикали CD . Так как $\bar{v}_a \perp \bar{v}_e$, то из прямоугольного треугольника скоростей находим:

$$v_a = v_e \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

Касательная к параболе, по которой направлен вектор $\bar{v}_r$, составляет с положительным направлением оси Ox_1 угол, равный $180^\circ - \alpha$, а потому

$$\operatorname{tg} (180^\circ - \alpha) = \frac{dy_1}{dx_1} = -2x_1,$$

или

$$\operatorname{tg} \alpha = 2x_1.$$

Следовательно,

$$v_a = 30 \sqrt{9 - y_1},$$

или

$$v_a = 60 \sqrt{9 - y_1}.$$

§ 3. ТЕОРЕМА СЛОЖЕНИЯ УСКОРЕНИЙ ПРИ ПЕРЕНОСНОМ ПОСТУПАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ

В случае составного движения точки, если переносное движение является поступательным, абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме ее переносного и относительного ускорений (рис. 121), т. е.

$$\vec{w}_a = \vec{w}_e + \vec{w}_r, \quad (89)$$

или

$$\vec{w}_a = \vec{w}_e^{(\tau)} + \vec{w}_e^{(n)} + \vec{w}_r^{(\tau)} + \vec{w}_r^{(n)}, \quad (90)$$

где $\vec{w}_e^{(\tau)}$ и $\vec{w}_e^{(n)}$ — касательная и нормальная составляющие переносного ускорения точки, а $\vec{w}_r^{(\tau)}$ и $\vec{w}_r^{(n)}$ — касательная и нормальная составляющие ее относительного ускорения (рис. 122).

Если переносное или относительное движение является прямолинейным, то соответствующее нормальное ускорение ($\vec{w}_e^{(n)}$ или $\vec{w}_r^{(n)}$) будет равно нулю; при криволинейном равно-

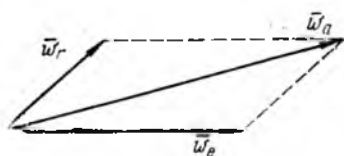


Рис. 121

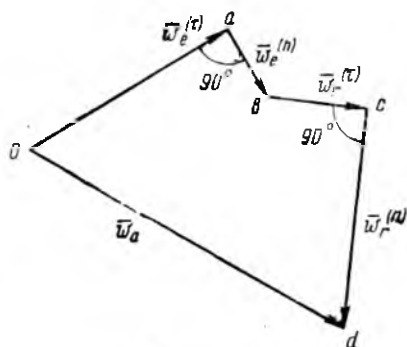


Рис. 122

мерном переносном или относительном движении обращается в нуль соответствующее касательное ускорение ($\vec{w}_e^{(\tau)}$ или $\vec{w}_r^{(\tau)}$).

Задачи, относящиеся к этому параграфу, можно решить двумя способами: геометрическим или аналитическим.

Геометрическое решение задачи состоит в построении параллелограмма или многоугольника ускорений на основании векторных равенств (89) или (90).

При аналитическом решении задачи применяется метод проекций, т. е. искомое ускорение определяется по его проекциям на выбранные координатные оси. При этом следует иметь в виду, что проекция абсолютного ускорения на какую-либо

ось равна алгебраической сумме проекций составляющих ускорений на ту же ось; проектируя, например, векторные равенства (89) или (90) на ось x , имеем:

$$\bar{a}_{ax} = \bar{a}_{ax}^{(r)} + \bar{a}_{ax}^{(n)}, \quad (91)$$

или

$$\bar{a}_{ax} = \bar{a}_{ex}^{(r)} + \bar{a}_{ex}^{(n)} + \bar{a}_{rx}^{(r)} + \bar{a}_{rx}^{(n)}. \quad (92)$$

Задачи, относящиеся к этому параграфу (в основном задачи из сборника П. В. Мецгерского), можно разделить на следующие три основных типа

Задачи типа I

(задачи 447—450, 455, 457—459)

1. Заданы переносное и относительное ускорения точки, т. е. векторы $\bar{a}_e$ и $\bar{a}_r$, или эти ускорения можно непосредственно найти из условий задач, характеризующих относительное и переносное движения.

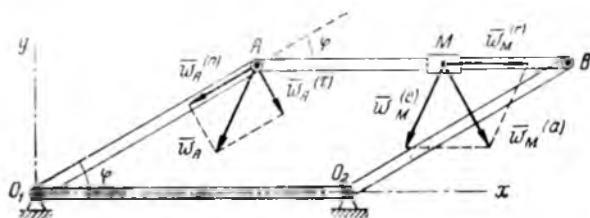


Рис. 123

Определить абсолютное ускорение $\bar{a}_M$ этой точки.

Пример 89. Кривошип $O_1A = 0,5$ м шарнирного параллелограмма O_1ABO_2 , вращается вокруг неподвижной оси O_1 с угловой скоростью $\omega_1 = 2t$ 1/сек.

Вдоль стороны AB этого параллелограмма перемещается ползун M по закону $AM = s = 5t^2$ (s выражено в метрах, t — в сек). Определить абсолютное ускорение ползуна M в момент времени $t = 2$ сек, если угол φ в этот момент равен 30° (рис. 123).

Решение. Аналитический способ. Движение ползуна M будем рассматривать как составное, состоящее из двух движений: 1) относительного движения, т. е. движения по отношению к стержню AB , и 2) переносного движения вместе с этим стержнем. Так как при движении стержень AB остается параллельным неподвижному звену O_1O_2 , то движение этого стержня является поступательным. Следовательно, переносное ускорение точки M равно ускорению точки A , т. е.

$$\bar{a}_M^{(e)} = \bar{a}_A = \bar{a}_A^{(r)} + \bar{a}_A^{(n)}.$$

Но точка A принадлежит криволинии O_1A , а потому

$$\omega_1^{(n)} = \omega_1^2 \cdot O_1A = 8 \text{ м/сек}^2,$$

$$\omega_A^{(\tau)} = \epsilon_1 \cdot O_1A = \frac{d\omega_1}{dt} \cdot O_1A = 2 \cdot 0,5 = 1 \text{ м/сек}^2.$$

При этом вектор $\bar{\omega}_A^{(\tau)}$ направлен перпендикулярно к O_1A , а вектор $\bar{\omega}_A^{(n)}$ направлен вдоль AO_1 к центру O_1 . Так как в относительном движении ползуна перемещается вдоль стержня AB по закону $s = 5t^2$, то его относительное ускорение $\bar{\omega}_M^{(r)}$ направлено вдоль этого стержня, причем

$$\omega_M^{(r)} = \frac{d^2s}{dt^2} = 10 \text{ м/сек}^2.$$

Абсолютное ускорение $\bar{\omega}_M^{(a)}$ точки M определяется по теореме сложения ускорений при переносном поступательном движении:

$$\bar{\omega}_M^{(a)} = \bar{\omega}_M^{(e)} + \bar{\omega}_M^{(r)} = \bar{\omega}_A^{(\tau)} + \bar{\omega}_A^{(n)} + \bar{\omega}_M^{(r)}.$$

Проектируя это равенство на координатные оси x и y , получаем

$$\omega_{Mx}^{(a)} = \omega_{Mx}^{(r)} + \omega_{Ax}^{(\tau)} + \omega_{Ax}^{(n)} = \omega_M^{(r)} + \omega_A^{(\tau)} \cdot \sin \varphi -$$

$$- \omega_A^{(n)} \cos \varphi = 10 + 1 \cdot \frac{1}{2} - 8 \frac{\sqrt{3}}{2} = 10,5 - 4\sqrt{3} = 3,58 \text{ м/сек}^2,$$

$$\omega_{My}^{(a)} = \omega_{My}^{(r)} + \omega_{Ay}^{(\tau)} + \omega_{Ay}^{(n)} = -\omega_A^{(\tau)} \cdot \cos \varphi - \omega_A^{(n)} \cdot \sin \varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2} - 4.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \omega_M^{(a)} &= \sqrt{(10,5 - 4\sqrt{3})^2 + \left(4 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \\ &= \sqrt{175 - 80\sqrt{3}} \approx 6,1 \text{ м/сек}^2. \end{aligned}$$

Если угол между ускорением $\omega_M^{(a)}$ и осью x обозначим α , то

$$\cos \alpha = \frac{\omega_{Mx}^{(a)}}{\omega_M^{(a)}} = \frac{3,58}{6,1} = 0,586,$$

откуда

$$\alpha = 54^\circ 6'.$$

Решим теперь эту задачу *геометрическим способом*. Для этого из произвольной точки O (рис. 124) проводим вектор $\bar{Oa} = \bar{\omega}_A^{(a)}$, причем длина этого вектора равна восьми единицам выбранного масштаба ускорений, затем из точки a проводим вектор $\bar{ab} = \bar{\omega}_A^{(\tau)}$, длина которого равна единице масштаба ускорений.

Далее из точки b проводим вектор $\overline{bc}$, причем $bc = 10$ единицам масштаба. Вектор $\overline{Oc}$, замыкающий ломаную линию $Oabc$, определит по модулю и направлению искомое абсолютное ускорение точки M , т. е. $\overline{\omega}_M^{(a)} = \overline{Oc}$ (рис. 124).

Задачи типа II

Заданы векторы $\overline{\omega}_a$ и $\overline{\omega}_e$ (или $\overline{\omega}_r$), либо эти векторы можно найти непосредственно из условий задачи, характеризующих абсолютное и переносное (или относительное) движения. Определить вектор $\overline{\omega}_r$ (или $\overline{\omega}_e$).

Пример 90. Полуцилиндр радиуса $r = 10$ см движется поступательно и прямолинейно по неподвижной горизонтальной плоскости с ускорением $\overline{\omega}_1$ и толкает опирающийся на него стержень CD , который перемещается поступательно в вертикальных

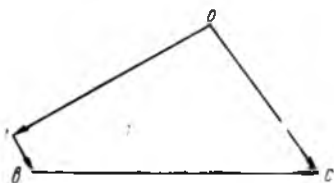


Рис. 124

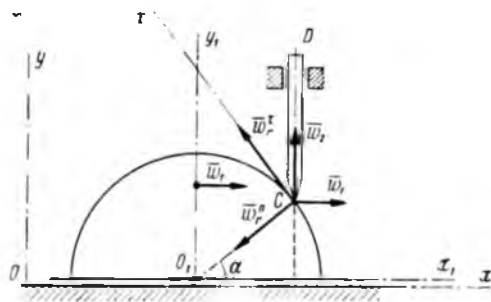


Рис. 125

направляющих с ускорением $\overline{\omega}_2$. Определить касательное и нормальное ускорения точки C в ее движении по отношению к цилиндру в тот момент, когда $\angle CO_1x_1 = \alpha = 60^\circ$ (рис. 125).

Решение. Переносным движением в данной задаче является (так же, как и в примере № 88) движение полуцилиндра, а так как это движение поступательное, то переносное ускорение $\overline{\omega}_e$ точки C стержня равно $\overline{\omega}_1$. Абсолютное ускорение точки C равно, очевидно, заданному ускорению $\overline{\omega}_2$ стержня CD , т. е. $\overline{\omega}_a = \overline{\omega}_2$. В относительном движении (в движении по отношению к полуцилиндру) точка C перемещается по полуокружности радиуса r . Поэтому относительное ускорение равно $\overline{\omega}_r = \overline{\omega}_r^{(n)} + \overline{\omega}_r^{(t)}$, причем вектор относительного нормального ускорения $\overline{\omega}_r^{(n)}$ направлен по радиусу CO_1 , а вектор относительного касательного ускорения $\overline{\omega}_r^{(t)}$ направлен перпендикулярно к O_1C , как указано на рисунке. По формуле (89) имеем:

$$\overline{\omega}_a = \overline{\omega}_e + \overline{\omega}_r = \overline{\omega}_e + \overline{\omega}_r^{(n)} + \overline{\omega}_r^{(t)},$$

или

$$\vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_r^{(n)} + \vec{\omega}_r^{(\tau)}. \quad (a)$$

В этом векторном равенстве неизвестны только модули искоемых ускорений $\vec{\omega}_r^{(n)}$ и $\vec{\omega}_r^{(\tau)}$. Для определения этих модулей достаточно спроектировать это векторное равенство на две выбранные оси. В данном случае, принимая во внимание направления векторов $\vec{\omega}_r^{(\tau)}$ и $\vec{\omega}_r^{(n)}$, эти оси целесообразно направить по радиусу O_1C и по касательной $C\tau$. Проектируя равенство (a) на эти оси, получим:

$$\omega_2 \cos(90^\circ - \alpha) = \omega_1 \cos \alpha - \omega_r^{(n)},$$

$$\omega_2 \cos \alpha = -\omega_1 \sin \alpha + \omega_r^{(\tau)},$$

откуда

$$\omega_r^{(n)} = \omega_1 \cos \alpha - \omega_2 \sin \alpha,$$

$$\omega_r^{(\tau)} = \omega_2 \cos \alpha + \omega_1 \sin \alpha,$$

т. е.

$$\omega_r^{(n)} = \frac{\omega_1 - \omega_2 \sqrt{3}}{2}, \quad \omega_r^{(\tau)} = \frac{\omega_1 \sqrt{3} + \omega_2}{2}.$$

Задачи типа III

(задачи 445, 446)

Известны абсолютное ускорение $\vec{\omega}_a$ и направления всех составляющих ускорений $\vec{\omega}_e^{(\tau)}$, $\vec{\omega}_e^{(n)}$, $\vec{\omega}_r^{(\tau)}$, $\vec{\omega}_r^{(n)}$, а также модули двух из них. Найти модули двух других составляющих ускорений.

Пример 91. Кривошип $OC = r$ вращается вокруг неподвижной оси O с данной угловой скоростью $\omega = \text{const}$. Соединенный с ним при помощи шарнира ползун C может перемещаться вдоль стороны AB шарнирного параллелограмма O_1ABO_2 с неподвижным звеном O_1O_2 . Углы α и β для данного положения механизма известны.

Определить относительное ускорение ползуна C и угловое ускорение кривошипа O_1A , длина которого равна a (рис. 126).

Решение. Движение ползуна C будем рассматривать как составное, состоящее из двух движений: 1) относительного движения по отношению к стержню AB и 2) переносного движения вместе с этим стержнем. Так как при движении стержень AB остается параллельным неподвижному звену O_1O_2 , то движение этого стержня, а следовательно, и переносное движение, будет поступательным.

Поэтому переносная скорость и переносное ускорение точки C равны соответственно скорости и ускорению точки A , т. е.

$$\vec{v}_C^{(e)} = \vec{v}_A \quad \text{и} \quad \vec{\omega}_C^{(e)} = \vec{\omega}_A = \vec{\omega}_A^{(r)} + \vec{\omega}_A^{(n)}$$

векторы $\vec{v}_A$ и $\vec{\omega}_A^{(r)}$ направлены перпендикулярно к кривошпилю O_1A , а вектор $\vec{\omega}_A^{(n)}$ — вдоль O_1A к центру O_1 , причем

$$v_A = a\omega_1, \quad \omega_A^{(n)} = a\omega_1^2, \quad \omega_A^{(r)} = a\varepsilon_1,$$

где ω_1 и ε_1 — угловая скорость и угловое ускорение стержня O_1A .

Так как относительное движение точки C есть прямолиней-

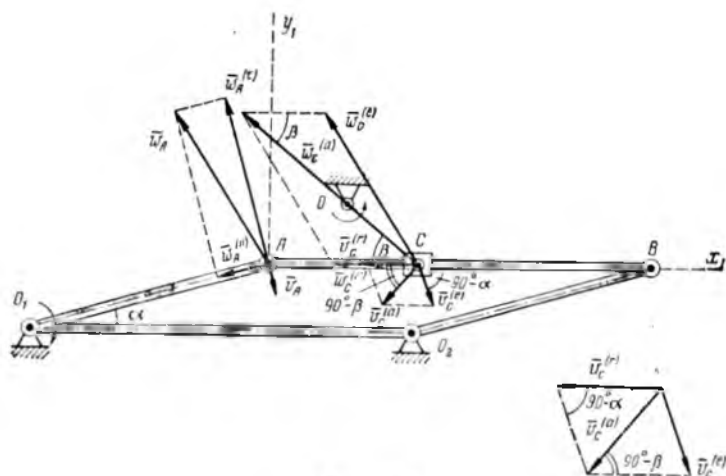


Рис. 126

ное движение вдоль стержня AB , то относительная скорость и относительное ускорение $\vec{\omega}_C^{(r)}$ этой точки направлены вдоль стержня AB .

Но точка C принадлежит одновременно и кривошпилю OC , вращающемуся равномерно вокруг оси O , поэтому абсолютная скорость $\vec{v}_C^{(a)}$ и абсолютное ускорение $\vec{\omega}_C^{(a)}$ точки C направлены соответственно по перпендикуляру к OC и вдоль OC к центру O , причем

$$v_C^{(a)} = r\omega, \quad \omega_C^{(a)} = r\omega^2.$$

Зная модуль и направление вектора $\vec{v}_C^{(a)}$ и направления векторов $\vec{v}_C^{(r)}$ и $\vec{v}_C^{(e)}$, строим параллелограмм скоростей и по теореме синусов из него находим:

$$\frac{v_C^{(r)}}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{v_C^{(e)}}{\sin(90^\circ - \beta)},$$

отсюда

$$v_C^{(e)} = v_C^{(a)} \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} = \frac{r\omega \cos \beta}{\cos \alpha}.$$

Но

$$v_C^{(e)} = v_A = a\omega_1,$$

поэтому

$$\omega_1 = \frac{r \cos \beta}{a \cos \alpha} \omega$$

и, следовательно,

$$\omega_A^{(n)} = a\omega_1^2 = \frac{r^2\omega^2}{a} \cdot \frac{\cos^2 \beta}{\cos^2 \alpha}.$$

По теореме сложения ускорений имеем:

$$\overline{\omega}_C^{(a)} = \overline{\omega}_C^{(r)} + \overline{\omega}_C^{(e)} = \overline{\omega}_C^{(r)} + \overline{\omega}_A^{(r)} + \overline{\omega}_A^{(n)}. \quad (a)$$

В этом векторном равенстве известны теперь направления всех векторов и модули двух из них: $\omega_C^{(a)}$ и $\omega_A^{(n)}$, остается найти модули векторов $\omega_C^{(r)}$ и $\omega_A^{(r)}$. Для этого спроектируем равенство (a) на оси Ax_1 и Ay_1 , тогда получим:

$$\begin{aligned} \omega_C^{(a)} \cos \beta &= \omega_C^{(r)} + \omega_A^{(r)} \sin \alpha + \omega_A^{(n)} \cos \alpha, \\ \omega_C^{(a)} \sin \beta &= \omega_A^{(r)} \cos \alpha - \omega_A^{(n)} \sin \alpha. \end{aligned}$$

Из этих уравнений находим:

$$\begin{aligned} \omega_A^{(r)} &= \frac{1}{\cos \alpha} (\omega_C^{(a)} \sin \beta + \omega_A^{(n)} \sin \alpha) = \frac{r\omega^2}{\cos \alpha} \left(\sin \beta + \frac{r}{a} \cdot \frac{\cos^2 \beta}{\cos^2 \alpha} \sin \alpha \right) = \\ &= \frac{r\omega^2}{a \cos^3 \alpha} (a \sin \beta \cos^2 \alpha + r \sin \alpha \cos^2 \beta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_C^{(r)} &= \omega_C^{(a)} \cos \beta - \omega_A^{(r)} \sin \alpha - \omega_A^{(n)} \cos \alpha = \\ &= \omega_C^{(a)} \cos \beta - \frac{\sin \beta \cdot \sin \alpha}{\cos \alpha} \omega_C^{(a)} - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} \omega_A^{(n)} - \omega_A^{(n)} \cos \alpha = \\ &= \frac{r\omega^2}{a \cos^3 \alpha} [a \cos (\alpha + \beta) \cos^2 \alpha - r \cos^2 \beta]. \end{aligned}$$

Угловое ускорение ε_1 звена O_1A находим по формуле:

$$\varepsilon_1 = \frac{\omega_A^{(r)}}{O_1A} = \frac{r\omega^2}{a^2 \cos^2 \alpha} (a \sin \beta \cos^2 \alpha + r \sin \alpha \cos^2 \beta).$$

Рассмотрим теперь геометрический способ решения этой задачи (рис. 127).

Из произвольной точки O строим в выбранном масштабе векторы $Oa = \overline{\omega}_C^{(a)}$ и $Ob = \omega_A^{(n)}$. Затем из точек a и b проводим

прямые, параллельные соответственно векторам $\vec{\omega}_C^{(r)}$ и $\vec{\omega}_A^{(r)}$, до их пересечения в точке c . Тогда

$$\vec{\omega}_A^{(r)} = \vec{bc}, \quad \vec{\omega}_C^{(r)} = \vec{ca} \quad \text{и} \quad r = \frac{bc}{O_1A}.$$

§ 4 ТЕОРЕМА СЛОЖЕНИЯ УСКОРЕНИИ ПРИ ПЕРЕНОСНОМ ВРАЩАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ

В случае составного движения точки, если переносное движение является вращательным, абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме переносного, относительного и кориолисова или добавочного, ускорений этой точки, т. е.

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega} + \vec{\omega}_r + \vec{\omega}_k, \quad (93)$$

или

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_c^{(r)} + \vec{\omega}_c^{(n)} + \vec{\omega}_r^{(r)} + \vec{\omega}_r^{(n)} + \vec{\omega}_k. \quad (94)$$

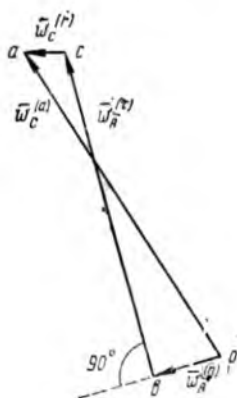


Рис. 127

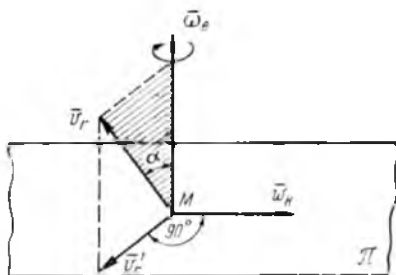


Рис. 128

Кориолисово ускорение ω_k равно удвоенному векторному произведению угловой скорости переносного вращения на относительную скорость точки, т. е.

$$\omega_k = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r. \quad (95)$$

Следовательно, модуль этого ускорения равен

$$\omega_k = 2\omega_e v_r \sin \alpha, \quad (96)$$

где α — угол между векторами $\vec{\omega}_e$ и $\vec{v}_r$.

Чтобы найти направление кориолисова ускорения $\vec{\omega}_k$ движущейся точки M , достаточно в точке M построить векторы $\vec{\omega}_e$ и $\vec{v}_r$ и восставить из этой точки перпендикуляр к плоскости,

в которой лежат эти векторы $\vec{\omega}_e$ и $\vec{v}_r$. Вектор $\vec{\omega}_k$ направлен по этому перпендикуляру так, чтобы наблюдатель, смотрящий с конца этого вектора, видел поворот вектора $\vec{\omega}_r$ на угол α против часовой стрелки до совмещения его с вектором $\vec{v}_r$ (рис. 128).

Направление вектора $\vec{\omega}_k$ можно определить и другим способом.

Проведем через точку M плоскость π , перпендикулярную к вектору $\vec{\omega}_e$, и спроектируем относительную скорость $\vec{v}_r$ на эту плоскость. Если полученную проекцию $\vec{v}_r'$ повернем в плоскости π на 90° вокруг точки M в направлении переносного вращения (рис. 128), то получим направление вектора $\vec{\omega}_k$.

Если $\vec{v}_r \perp \vec{\omega}_e$, т. е. если вектор $\vec{v}_r$ лежит в плоскости π , то для того, чтобы получить направление корнолисова ускорения, достаточно повернуть вектор $\vec{v}_r$ в плоскости π на 90° в направлении переносного вращения; в этом случае

$$\alpha = 90^\circ, \quad \sin \alpha = 1$$

и, следовательно,

$$\omega_k = 2\omega_e v_r.$$

Если вектор угловой скорости переносного вращения параллелен относительной скорости $\vec{v}_r$, то либо $\alpha = 0$, либо $\alpha = 180^\circ$ и, следовательно, $\sin \alpha = 0$, а потому в этом случае $\omega_k = 0$.

Задачи этого параграфа можно решить двумя способами: геометрическим и аналитическим.

Геометрическое решение задачи состоит в построении многоугольника ускорений на основании векторного равенства (93) или (94).

При аналитическом способе решения применяется метод проекций, т. е. искомое ускорение определяется по его проекциям на выбранные координатные оси.

Задачи, относящиеся к этому параграфу, можно разделить на следующие два основных типа.

Задачи типа I

(задачи 462—464, 466—468, 470, 476—483, 489, 490)

Требуется найти модуль и направление абсолютного ускорения.

Пример 92. В примере 85 определить абсолютное ускорение точки M (рис. 129).

Решение. Переносным движением в данном примере является вращение цилиндра вокруг оси z с угловой скоростью

$\omega_z = \frac{\pi t^2}{2} \text{ сек}^{-1}$ и угловым ускорением $\varepsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt} = \pi t \text{ 1/сек}^2$. Поэтому переносное ускорение точки M равно

$$\bar{\omega}_e = \bar{\omega}_e^{(\tau)} + \bar{\omega}_e^{(n)}.$$

Переносное нормальное ускорение $\bar{\omega}_e^{(n)}$ точки M направлено по радиусу MO_1 кругового сечения цилиндра, проходящего через точку M , причем

$$\bar{\omega}_e^{(n)} = O_1M \cdot \omega_z^2 = \frac{r\pi^2 t^4}{1}.$$

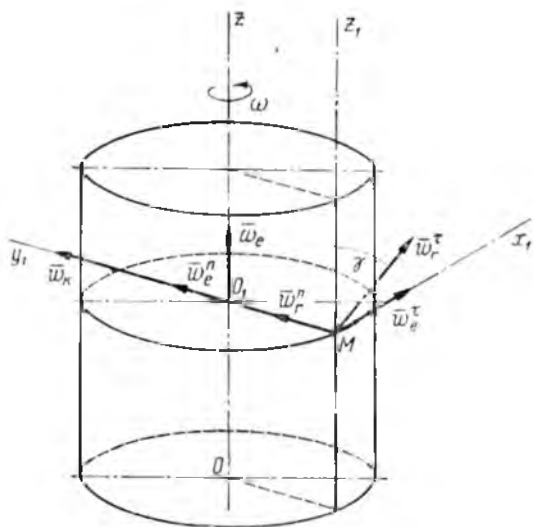


Рис. 129

Переносное касательное ускорение $\bar{\omega}_e^{(\tau)}$ точки M направлено по касательной к этому круговому сечению, причем

$$\bar{\omega}_e^{(\tau)} = O_1M \cdot \varepsilon_z = \pi t r.$$

Относительным движением точки M (движение по отношению к цилиндру) является ее движение по винтовой линии со скоростью

$$v_r = \frac{ds}{dt} = at.$$

Поэтому

$$\bar{\omega}_r = \bar{\omega}_r^{(\tau)} + \bar{\omega}_r^{(n)}.$$

Относительное касательное ускорение $\bar{\omega}_r^{(\tau)}$ точки M направлено по касательной к винтовой линии, причем

$$\bar{\omega}_r^{(\tau)} = \frac{dv_r}{dt} = a.$$

Относительное нормальное ускорение $\omega_r^{(n)}$ точки M направлено по главной нормали винтовой линии, т. е. по радиусу MO_1 , причем

$$\omega_r^{(n)} = \frac{v_r^2}{\varrho},$$

где ϱ — радиус кривизны винтовой линии определяется по формуле $\varrho = \frac{r}{\sin^2 \gamma} = 4r^*$.

Следовательно,

$$\omega_r^{(n)} = \frac{a^2 t^2}{4r}.$$

Остается найти кориолисово ускорение $\bar{\omega}_k$, построив предварительно вектор переносной угловой скорости ω_p , направленный по оси Oz вращения цилиндра. Так как векторы ω_e и v_r не перпендикулярны, то для того, чтобы найти направление вектора ω_k , нужно спроектировать вектор v_r на плоскость, проходящую через точку M и перпендикулярную к вектору ω_e , и полученную проекцию, направленную, очевидно, по одной прямой с вектором ω_e^r , повернуть на 90° в направлении переносного вращения; следовательно, вектор $\bar{\omega}_k$ будет направлен по радиусу MO_1 , причем

$$\omega_k = 2\omega_e v_r \sin \gamma = \omega_e v_r = \frac{\pi}{2} t^2 \cdot at.$$

По теореме Корнолиса имеем:

$$\bar{\omega}_a = \bar{\omega}_e + \bar{\omega}_r + \bar{\omega}_k = \bar{\omega}_e^{(n)} + \bar{\omega}_e^{(\tau)} + \bar{\omega}_r^{(\tau)} + \bar{\omega}_r^{(n)} + \bar{\omega}_k.$$

Проектируя это векторное равенство на три взаимно перпендикулярные оси Mx_1 , My_1 , Mz_1 , получим:

$$\omega_{ax_1} = \omega_r^{(\tau)} \cos(90^\circ - \gamma) + \omega_e^{(\tau)},$$

$$\omega_{ay_1} = \omega_r^{(n)} + \omega_e^{(n)} + \omega_k,$$

$$\omega_{az_1} = \omega_r^{(\tau)} \cos \gamma,$$

или

$$\omega_{ax_1} = \pi r t + \frac{a}{2},$$

$$\omega_{ay_1} = \frac{t^2}{4r} (a + \pi r t)^2,$$

$$\omega_{az_1} = \frac{a \sqrt{3}}{2}.$$

* См. «Курс теоретической механики» проф. И. М. Воронкова, изд. 1962 г., § 70

По найденным проекциям находим модуль абсолютного ускорения точки M :

$$\omega_a = \sqrt{a^2 + \pi^2 r^2 l^2 a + \frac{l^4}{16r^2} (a + \pi l)^4 + \pi r l a} \text{ см/сек}^2.$$

Задачи типа II

(задачи 465, 469, 471—474)

Требуется найти одно или два из составляющих ускорений.

Пример 93. Найти относительное ускорение камня кулисы (по отношению к кулисе) и угловое ускорение кулисы в при-

мере 86 при условии, что кривошип OA вращается равномерно, т. е. $\omega = \text{const}$ (рис. 130).

Решение. Так как абсолютное движение точки A есть равномерное вращение вокруг неподвижной оси O , то вектор $\vec{\omega}_a$ абсолютного ускорения этой точки направлен вдоль AO к центру O и по модулю равен $\omega_a = \omega_a^{(n)} = \omega^2 \cdot AO = 160 \text{ см/сек}^2$.

Переносное движение, т. е. движение кулисы является вращательным вокруг неподвижной оси O_1 , а потому $\vec{\omega}_e = \vec{\omega}_e^{(n)} + \vec{\omega}_e^{(r)}$; вектор $\vec{\omega}_e^{(n)}$ направлен вдоль AO_1 к центру O_1 , а вектор $\vec{\omega}_e^{(r)}$ перпендикулярен к O_1A , причем $\omega_e^{(n)} = O_1A \cdot \omega_1^2 = 21,3 \text{ см/сек}^2$, $\omega_e^{(r)} = O_1A \cdot \epsilon$, где ϵ , есть угловое ускорение кулисы.

Относительное движение камня A есть прямолинейное движение вдоль прорези кулисы, поэтому вектор относитель-

ного ускорения $\vec{\omega}_r$ направлен вдоль AO .

Вектор переносной угловой скорости $\vec{\omega}$ направлен по оси переносного вращения, т. е. перпендикулярно к плоскости рисунка, а вектор $\vec{v}_r$ относительной скорости лежит в этой плоскости следовательно, $\vec{v}_r \perp \vec{\omega}$. Поэтому чтобы найти направление кориолисова ускорения $\vec{\omega}_k$, достаточно вектор $\vec{v}_r$ по-

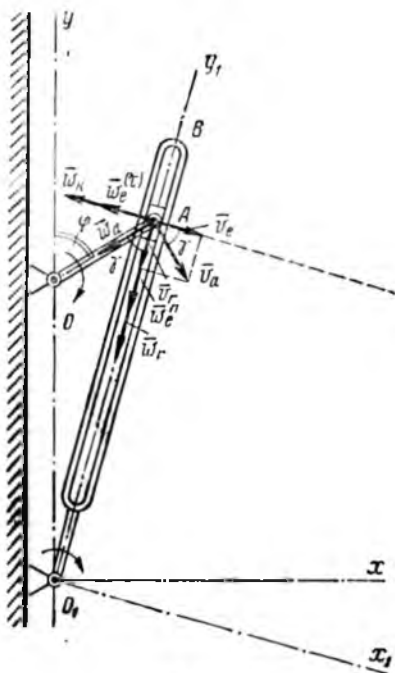


Рис. 130

вернуть на 90° в плоскости рисунка в направлении переносного вращения. Модуль этого ускорения находим по формуле (96):

$$\omega_k = 2\omega_1 v_r \sin 90^\circ = 2\omega_1 v_r = 37,24 \text{ см/сек}^2.$$

По теореме Кориолиса имеем:

$$\omega_a = \omega_e + \omega_r + \omega_k = \omega_e^{(r)} + \omega_e^{(n)} + \omega_r + \omega_k.$$

Проектируя это векторное равенство на оси x_1 и y_1 , направленные, как указано на рис. 130, получим:

$$1) -\omega_a \sin \gamma = -\omega_e^{(r)} - \omega_k;$$

$$2) -\omega_a \cos \gamma = -\omega_e^{(n)} - \omega_r.$$

Отсюда находим:

$$\begin{aligned} \omega_r &= -\omega_e^{(n)} + \omega_a \cos \gamma = \\ &= -21,3 + 160 \frac{5}{2\sqrt{13}} = 89,62 \text{ см/сек}^2, \end{aligned}$$

$$\omega_e^{(r)} = \omega_a \sin \gamma - \omega_k = 160 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{13}} - 37,24 = 77,88 \text{ см/сек}^2$$

и

$$\varepsilon_1 = \frac{\omega_e^{(r)}}{O_1 A} = 2,15 \text{ 1/сек}^2.$$

Геометрический способ решения. В векторном равенстве

$$\omega_a = \omega_e^{(r)} + \omega_e^{(n)} + \omega_r + \omega_k$$

направления всех векторов и модули трех из них (ω_a , $\omega_e^{(n)}$, ω_k) известны. Нужно найти модули ускорений $\omega_e^{(r)}$ и ω_r .

Для этого из произвольной точки a строим в выбранном масштабе векторы $\overline{ab} = \omega_e^{(n)}$ и $\overline{ac} = \omega_e^{(r)}$ и из точки c — вектор $\overline{cd} = \omega_k$ (рис. 131).

Затем из точек b и d проводим два луча, параллельных векторам $\overline{\omega_r}$ и $\overline{\omega_a^{(r)}}$, до их пересечения в точке e .

Тогда

$$\overline{de} = \overline{\omega_r}, \quad \overline{ce} = \overline{\omega_a^{(r)}},$$

$$\varepsilon_1 = \frac{ce}{O_1 A}.$$

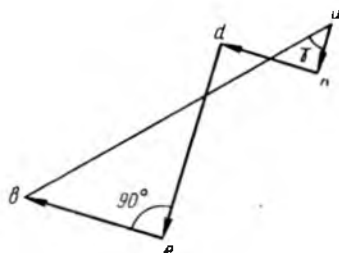


Рис. 131

СОСТАВНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 1. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Задачи данной главы относятся к составному движению твердого тела, которое складывается из двух вращательных движений вокруг параллельных или пересекающихся осей. Из таких задач особое практическое значение имеют те, в которых рассматриваются планетарные (задачи 580—584, 593, 613) и дифференциальные (задачи 588, 589, 615, 622—633) механизмы.

Зубчатые механизмы с одной степенью свободы, в числе звеньев которых имеются колеса с подвижными осями, называются планетарными, в отличие от обыкновенных зубчатых передач, у которых геометрические оси колес при работе механизма остаются неподвижными. Колеса планетарного механизма с неподвижными осями называются *солнечными* или *центральными*, а с подвижными — *планетарными* или *спутниками*. Звено, несущее оси спутников называется *поводком* или *водителем*. Зубчатый механизм с подвижными осями, число степеней свободы которого больше единицы, называется *дифференциальным*. В простейшем случае дифференциальный механизм имеет две степени свободы, т. е. два звена механизма могут обладать независимыми друг от друга движениями. При решении задач данной главы удобно пользоваться понятием передаточного отношения. *Передаточным отношением* $i_{\alpha\gamma}$ между звеньями μ и γ механизма передачи вращательного движения называется отношение угловой скорости ω_μ звена μ к угловой скорости ω_γ звена γ :

$$i_{\alpha\gamma} = \frac{\omega_\mu}{\omega_\gamma}. \quad (97)$$

Пусть имеется сложная передача, состоящая из n звеньев. Обозначим через $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ их угловые скорости, а через $i_{12}, i_{23}, \dots, i_{(n-1),n}$ — передаточные отношения от первого звена ко второму, от второго к третьему и т. д. Тогда

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2}, \quad i_{23} = \frac{\omega_2}{\omega_3}, \quad \dots, \quad i_{(n-1),n} = \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n}.$$

Перемножая эти равенства, имеем:

$$i_{1n} = \frac{\omega_1}{\omega_n} = i_{12} \cdot i_{23} \cdot \dots \cdot i_{(n-1),n}, \quad (98)$$

т. е. передаточное отношение сложной передачи равно произведению промежуточных передаточных отношений. Передаточное отношение (число) может быть выражено через конструктивные

параметры механизма передачи. Простейшая зубчатая передача состоит из двух круглых цилиндрических зубчатых колес, которые служат для передачи вращения между параллельными валами (рис. 132). Для обеспечения постоянного передаточного отношения профили зубьев, находящихся в зацеплении колес, должны иметь определенные очертания, причем с указанными колесами можно мысленно связать две взаимно касающиеся окружности, центры которых совпадают с центрами этих колес и которые при вращении этих колес катятся одна по другой без скольжения. Такие окружности называются *начальными*

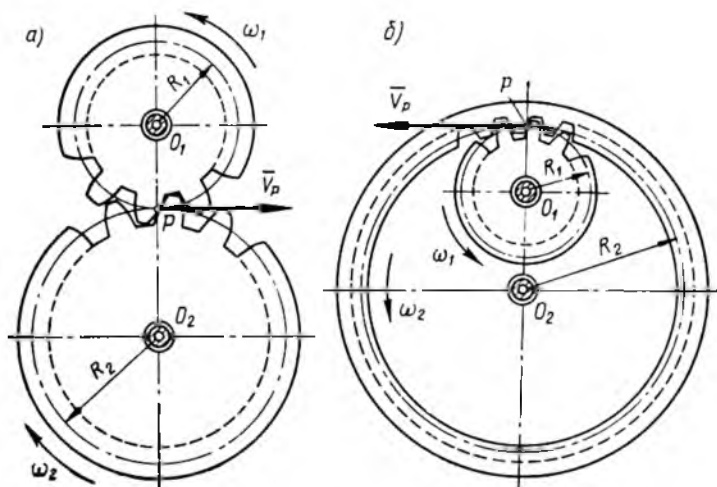


Рис. 132

или *центроидными* окружностями этих колес, а точка P их касания — *полюсом зацепления*. Цилиндры, соответствующие начальным окружностям, называются *начальными цилиндрами*. Рассмотрим внешнее зацепление двух круглых цилиндрических колес с параллельными осями (рис. 132, а). Пусть R_1 и R_2 — радиусы начальных окружностей этих колес, а ω_1 и ω_2 — их угловые скорости. В данном случае направления вращения ведущего и ведомого колес противоположны, поэтому угловую скорость одного колеса можно рассматривать как *положительную*, а другого — как *отрицательную* величину. Так как соприкасающиеся в данный момент точки начальных окружностей, находящихся в зацеплении зубчатых колес, должны иметь общую скорость, то, обозначая величину этой скорости через v_p и полагая $\omega_1 > 0$, $\omega_2 < 0$, имеем:

$$v_p = \omega_1 R_1 = -\omega_2 R_2$$

или

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{R_2}{R_1} = -\frac{z_2}{z_1} = \text{const}, \quad (99)$$

где z_1 и z_2 — числа зубьев соответствующих колес; отношение радиусов начальных окружностей, находящихся в зацеплении колес, можно заменить отношением чисел их зубьев, потому что шаг* зацепления у этих колес должен быть одинаков и, следовательно, радиусы начальных окружностей этих колес прямо пропорциональны числам их зубьев.

Таким образом, при внешнем зацеплении двух круглых цилиндрических колес с параллельными осями передаточное отношение равно обратному отношению радиусов начальных окружностей или чисел зубьев этих колес, взятому со знаком минус. Знак минус показывает, что ведущее и ведомое колеса вращаются в разные стороны и, следовательно, их угловые скорости имеют разные знаки. Если нас интересуют только абсолютные значения угловых скоростей ведущего и ведомого колес, то знак минус в выражении передаточного отношения следует опустить. В случае внутреннего зацепления двух круглых цилиндрических колес с параллельными осями (рис. 132, б) оба колеса вращаются в одну сторону, поэтому

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{z_2}{z_1}, \quad (100)$$

т. е. в этом случае передаточное отношение равно обратному отношению радиусов начальных окружностей или чисел зубьев и всегда является числом положительным.

Аналогично определяется передаточное отношение между коническими колесами. Следует иметь в виду, что в тех случаях, когда оси колес не параллельны, передаточное отношение является величиной положительной.

§ 2. СЛОЖЕНИЕ ВРАЩЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ОСЕЙ

Если относительное и переносное движения тела являются вращательными вокруг параллельных осей (рис. 133), то распределение абсолютных скоростей в теле в каждый данный момент такое, как при вращательном движении вокруг мгновенной оси, которая параллельна осям составляющих вращений и делит расстояние между ними внутренним образом (если направления переносного и относительного вращений

* Шагом зацепления называется расстояние между двумя одноименными точками двух смежных зубьев, измеренное по начальной окружности.

совпадают) или внешним образом (если направления этих вращений противоположны) на части, обратно пропорциональные относительной и переносной угловым скоростям, т. е.

$$\frac{\omega_e}{O_1O_2} = \frac{\omega_r}{O_1O} = \frac{\omega_a}{O_1O_2}, \quad (101)$$

где ω_e , ω_r и ω_a — соответственно переносная относительная и абсолютная угловые скорости.

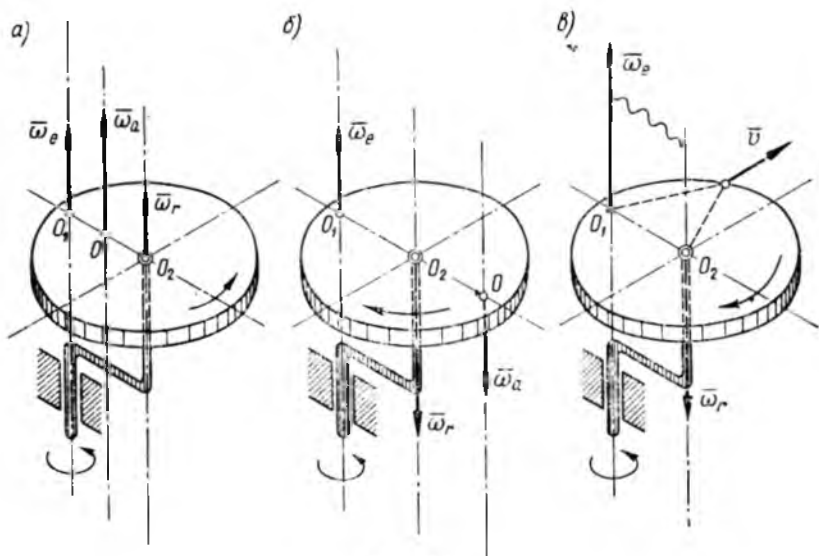


Рис 133

Если направления угловых скоростей $\bar{\omega}_e$ и $\bar{\omega}_r$ совпадают (рис. 133, а), то абсолютная угловая скорость $\bar{\omega}_a$ направлена в ту же сторону и по модулю равна сумме их модулей:

$$\omega_a = \omega_e + \omega_r. \quad (102)$$

Если же векторы $\bar{\omega}_e$ и $\bar{\omega}_r$ направлены в противоположные стороны (рис. 133, б), то абсолютная угловая скорость $\bar{\omega}_a$ направлена в сторону большего из них и по модулю равна разности их модулей, т. е.

$$\omega_a = \omega_r - \omega_e. \quad (103)$$

если $\omega_r > \omega_e$,

и

$$\omega_a = \omega_e - \omega_r, \quad (104)$$

если $\omega_e > \omega_r$.

Если относительная и переносная угловые скорости образуют пару угловых скоростей, т. е. $\omega_r = -\omega_e$ (рис. 133, в),

то распределение абсолютных скоростей в теле такое, как при поступательном движении, причем абсолютная скорость любой точки тела в данный момент равна вектору-моменту указанной пары:

$$v = \overline{m}(\overline{\omega}_e, \overline{\omega}_r); \quad v = \omega_e \cdot O_1 O_2 = \omega_r \cdot O_1 O_2. \quad (105)$$

При решении задач на сложение вращений вокруг параллельных осей часто оперируют не с модулями угловых скоростей, а с их алгебраическими величинами, которые представляют собой проекции угловых скоростей на ось, параллельную осям рассматриваемых вращений. Выбор положительного направления указанной оси произволен. В этом случае угловые скорости одного

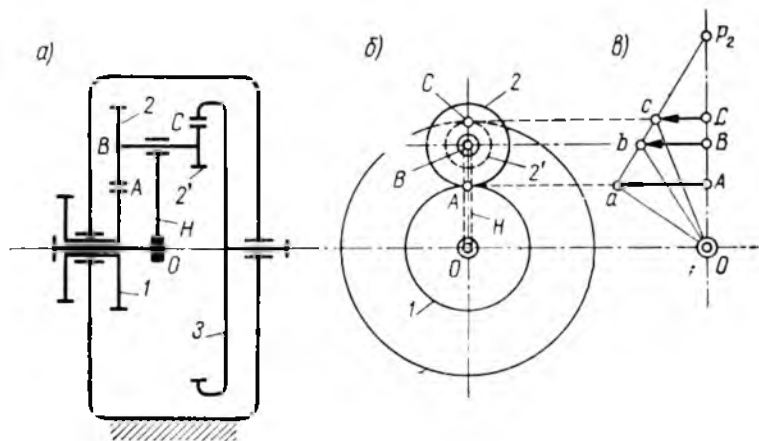


Рис. 134

направления являются положительными, а противоположного направления — отрицательными величинами и абсолютная угловая скорость выражается в виде алгебраической суммы составляющих угловых скоростей.

Пример 94. В дифференциальном механизме (рис. 134, а и б) ведущими звеньями являются колесо 1 и водило H, несущее ось двойного сателлита 2—2'. Зная угловые скорости ω_1 и ω_H колеса 1 и водила H, а также числа зубьев всех колес, найти угловую скорость ω_3 колеса 3.

Решение. 1-й способ (метод Виллиса). Сущность метода заключается в сведении задачи анализа планетарных и дифференциальных механизмов к анализу обыкновенных зубчатых механизмов путем перехода от абсолютного движения звеньев рассматриваемого планетарного механизма к их относительному движению по отношению к водилу.

Пусть имеем планетарный механизм, оси колес которого параллельны. Обозначим через ω_μ , ω_ν и ω_H алгебраические зна-

чения абсолютных угловых скоростей соответственно звеньев μ , ν и водила H . Для перехода к движению относительно водила сообщим мысленно всей системе вращение вокруг оси водила с угловой скоростью — ω_H (т. е. равной угловой скорости водила, но направленной в прямо противоположную сторону). Тогда водило остановится, и звенья μ и ν , на основании теоремы сложения вращений, получат угловые скорости $\omega_\mu - \omega_H$ и $\omega_\nu - \omega_H$. Так как при неподвижном водиле получаем обыкновенный зубчатый механизм, звенья которого вращаются вокруг неподвижных осей, то к этому механизму можно применить формулу (97) для передаточных отношений, что приводит нас к так называемой формуле Виллиса:

$$\frac{\omega_\mu - \omega_H}{\omega_\nu - \omega_H} = i_{\mu\nu}^{(H)}, \quad (106)$$

где $i_{\mu\nu}^{(H)}$ — передаточное отношение между звеньями μ и ν в их движении относительно водила H (о чем говорит верхний индекс). Это передаточное отношение, как уже указывалось в § 1, можно выразить через конструктивные и геометрические параметры механизма (числа зубьев или радиусы начальных окружностей, находящихся в зацеплении колес).

В нашей задаче применим формулу Виллиса к звеньям 1 и 3:

$$\text{но} \quad \frac{\omega_3 - \omega_H}{\omega_1 - \omega_H} = i_{31}^{(H)} = i_{32}^{(H)} i_{21}^{(H)},$$

$$i_{32}^{(H)} = \frac{z_2}{z_3},$$

(передаточное отношение между колесами 3 и 2' положительное, так как колеса имеют внутреннее зацепление);

$$i_{21}^{(H)} = -\frac{z_1}{z_2}$$

(здесь передаточное отношение отрицательно, так как колеса 2 и 1 имеют внешнее зацепление).

Таким образом,

$$\frac{\omega_3 - \omega_H}{\omega_1 - \omega_H} = -\frac{z_2 \cdot z_1}{z_3 z_2},$$

откуда

$$\omega_3 = \omega_H - \frac{z_2 \cdot z_1}{z_3 z_2} (\omega_1 - \omega_H) \quad (\text{ответ}).$$

Пусть, например, $z_1 = 60$, $z_2 = 40$, $z_2' = 20$, $z_3 = 120$ и, кроме того, колесо 1 и водило H вращаются в одну сторону с угловыми скоростями $\omega_1 = 140 \text{ 1/сек}$ и $\omega_H = 60 \text{ 1/сек}$. В этом случае $\omega_3 = 60 - \frac{20 \cdot 60}{120 \cdot 40} (140 - 60) = 60 - \frac{1}{4} \cdot 80 = 40 \text{ сек}^{-1}$. Если бы колесо 1 и водило H вращались в противоположные стороны, то угловую скорость одного из этих звеньев необходимо было бы считать величиной положительной, а другого — отрицательной.

В этом случае при тех же абсолютных значениях угловых скоростей звеньев I и II мы бы имели:

$$\omega_3 = 140 \text{ сек}^{-1}; \omega_H = -60 \text{ сек}^{-1}; \omega_3 = -60 - \frac{20 \cdot 60}{120 \cdot 40} (140 + 60) = \\ = -60 - 50 = -110 \text{ 1/сек},$$

т. е. колесо 3 вращалось бы в ту же сторону, что и водило, так как знаки их угловых скоростей совпадают.

Если закрепим колесо I , то получим простой планетарный механизм. Формула Виллиса в этом случае остается в силе, надо только положить в этой формуле $\omega_1 = 0$, что дает:

$$\omega_3 = \omega_H \left(1 + \frac{z_2 z_1}{z_3 z_2} \right).$$

2-й способ (метод мгновенных центров скоростей). Так как звенья планетарного или дифференциального механизма с параллельными осями совершают плоскопараллельное движение, то при анализе такого механизма можно применить теорию плоскопараллельного движения и, в частности, воспользоваться методом мгновенных центров скоростей. Решение задачи полезно сопровождать построениями треугольников скоростей, которые обычно выносят за пределы механизма (рис. 134, в). Радиусы колес рассматриваемого механизма обозначим через R_1 , R_2 , R_3 . Тогда имеем:

$$v_A = R_1 \omega_1 \text{ и } v_B = \omega_H (R_1 + R_2)$$

на рис. 134, в скорость точки A касания колес 1 и 2 изображена в виде вектора $\overline{Aa}$, а скорость точки B — в виде вектора $\overline{Bb}$. Зная скорости точек A и B , через концы a и b этих скоростей проводим прямую и в пересечении этой прямой с продолжением прямой AB в точке P_2 получаем мгновенный центр скоростей двучленного колеса $2-2'$. Скорость точки C касания колес $2'$ и 3 изобразится на рисунке вектором $\overline{Cc}$. Зная скорость точки C колеса 3 , находим угловую скорость этого колеса:

$$\omega_3 = \frac{v_C}{R_3}.$$

Построение треугольников скоростей и является геометрическим решением данной задачи. Для получения аналитического выражения для ω_3 воспользуемся следующими уравнениями, вытекающими из наших построений:

$$v_A = R_1 \omega_1 = \omega_2 (P_2 C + R_2 + R_2), \quad (a)$$

$$v_B = (R_1 + R_2) \omega_H = \omega_2 (P_2 C + R_2), \quad (b)$$

$$v_C = \omega_2 P_2 C, \quad (в)$$

где ω_2 — угловая скорость колеса $2-2'$ вокруг мгновенного центра скоростей P_2 .

Вычитая из равенства (а) равенство (б), получим:

$$R_1\omega_1 - (R_1 + R_2)\omega_H = \omega_2 R_2,$$

откуда

$$\omega_2 = \frac{1}{R_2} [R_1\omega_1 - (R_1 + R_2)\omega_H]. \quad (г)$$

Поделив эти равенства почленно друг на друга, находим:

$$\frac{R_1\omega_1}{(R_1 + R_2)\omega_H} = \frac{P_2C + R_2' + R_2}{P_2C + R_2},$$

или

$$\frac{R_1\omega_1 - (R_1 + R_2)\omega_H}{(R_1 + R_2)\omega_H} = \frac{R_2}{P_2C + R_2'}.$$

откуда

$$P_2C = \frac{R_2(R_1 + R_2)\omega_H}{R_1\omega_1 - (R_1 + R_2)\omega_H} - R_2'. \quad (д)$$

Используя равенства (в), (г) и (д), имеем:

$$\begin{aligned} v_C = \omega_2 \cdot P_2C &= (R_1 + R_2)\omega_H - \frac{R_2'}{R_2} [R_1\omega_1 - (R_1 + R_2)\omega_H] = \\ &= \omega_H R_1 - \frac{R_1 R_2'}{R_2} (\omega_1 - \omega_H). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\omega_2 = \frac{v_C}{R_2} = \omega_H - \frac{R_1 R_2'}{R_2 R_2} (\omega_1 - \omega_H).$$

Заменяв отношения радиусов отношениями чисел зубьев, получим ранее найденный ответ.

§ 3. СЛОЖЕНИЕ ВРАЩЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ ПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ ОСЕЙ

Если относительное и переносное движения тела являются вращательными вокруг пересекающихся осей (рис. 135), то распределение абсолютных скоростей в теле в каждый данный момент такое, как при вращательном движении вокруг мгновенной оси, проходящей через точку пересечения осей составляющих вращений и направленной по диагонали параллелограмма, построенного на угловых скоростях этих вращений. Вектор абсолютной угловой скорости тела равен геометрической сумме векторов его переносной и относительной угловых скоростей:

$$\bar{\omega}_a = \bar{\omega}_e + \bar{\omega}_r. \quad (107)$$

Пример 95. Зная угловую скорость ω_H водила H планетарной конической передачи (рис. 136, а) найти относительную и абсолютную угловые скорости колеса I , находящегося в зацеплении

с неподвижным колесом 2. Даны радиусы R_1 и R_2 колес *, а также углы $2\alpha_1$ и $2\alpha_2$ растворов их начальных конусов.

Решение. Движение колеса 1 складывается из вращательного движения водила H вокруг оси OA_2 с угловой скоростью ω_H (переносное движение) и вращательного движения вокруг оси OA_1 по отношению к водилу H с некоторой угловой скоростью ω_{1H} (относительное движение). При указанном на рис. 136, а круговой стрелкой направлении вращения водила вектор ω_H переносной угловой скорости колеса 1 направлен по оси OA_2 вниз. Вектор ω_{1H} его относительной угловой скорости направ-

лен по оси OA_1 . Мгновенная ось абсолютного движения колеса 1 совпадает с общей образующей OP начальных конусов колес 1 и 2, так как при работе механизма эти конусы должны катиться один по другому без скольжения, что обеспечивается соответствующей формой зубьев находящихся в зацеплении конических зубчатых колес. Таким образом, вектор ω_1 абсолютной угловой скорости колеса 1 направлен по линии OP .

Применяя формулу (107), имеем:

$$\omega_1 = \omega_H + \omega_{1H}.$$

Здесь и в дальнейшем одной чертой внизу подчеркнуты векторы, для которых известны только линии действия, двумя чертами — векторы, известные и по модулю и по направлению.

Для построения параллелограмма угловых скоростей, соответствующего этому векторному равенству, от центра O пересечения осей рассматриваемых вращений откладываем заданный вектор $\underline{Om} = \omega_H$ (рис. 136, а), из конца m этого вектора проводим прямую, параллельную оси OA_1 до пересечения в точке n с осью OP абсолютного вращения и дополняем полученный треугольник Omn до параллелограмма, для чего из точки n проводим прямую, параллельную OA_2 , до пересечения в точке e с осью OA_1 . Векторы $\underline{Oe}$ и $\underline{On}$ дают соответственно искомую относительную угловую скорость ω_{1H} и абсолютную угловую скорость ω_1 колеса 1. Вместо построения параллелограмма угловых скоростей можно ограничиться построением треугольника угловых скоростей, который лучше вынести за пределы механизма (рис. 136, б). Для этого

* Радиусами конических колес называют наибольшие радиусы их начальных конусов.

от произвольного центра o откладываем заданный вектор $oa_2 = \omega_H$, а из конца a_2 и начала o этого вектора проводим две взаимного пересечения в точке a_1 прямые $a_2a_1 \parallel \omega_{1H}$ (т. е. параллельно оси OA_1) и $oa_1 \parallel \omega_1$ (т. е. параллельно оси OP). Стороны полученного треугольника oa_2a_1 и выражают собой заданную и искомые угловые скорости, т. е. $oa_2 = \omega_H$; $a_2a_1 = \omega_{1H}$; $oa_1 = \omega_1$. Из параллелограмма или треугольника угловых скоростей имеем:

$$\frac{\omega_H}{\sin \alpha_1} = \frac{\omega_{1H}}{\sin \alpha_2} = \frac{\omega_1}{\sin \alpha},$$

где $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ — межосевой угол конической передачи.

Отсюда относительная угловая скорость колеса I по отношению к водилу H равна

$$\omega_{1H} = \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1} \omega_H = \frac{R_2}{R_1} \omega_H, \text{ так как}$$

$$\sin \alpha_1 = \frac{R_1}{R} \text{ и } \sin \alpha_2 = \frac{R_2}{R}, \text{ где}$$

$R = OP$. Абсолютная угловая

скорость колеса I равна $\omega_1 = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_1} \omega_H$. Модуль абсолютной угловой скорости можно определить также по теореме косинусов:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\omega_H^2 + \omega_{1H}^2 - 2\omega_H \omega_{1H} \cos \alpha} = \\ &= \sqrt{\omega_H^2 + \frac{R_2^2}{R_1^2} \omega_H^2 - 2\omega_H^2 \frac{R_2}{R_1} \cos \alpha} = \\ &= \frac{\omega_H}{R_1} \sqrt{R_1^2 - R_2^2 + 2R_1 R_2 \cos \alpha}. \end{aligned}$$

Пример 96. На ведущем валу I планетарной передачи с коническими колесами (рис. 137, а) заклинено колесо 1, находящееся в зацеплении с колесами 2 двойных сателлитов, свободно сидящих на осях водила H . Колесо 2 находится в зацеплении с неподвижным колесом 4, а колесо 2' — с колесом 3, заклиненным на ведомом валу II . Определить передаточное отношение между валами I и II .

Решение. 1-й способ (метод Виллиса). Обозначим через R_1, R_2, R_2', R_3 и R_4 радиусы колес 1, 2, 2', 3, 4. Перейдем от абсолютного движения звеньев рассматриваемого механизма к их относительному движению по отношению к водилу H . Для

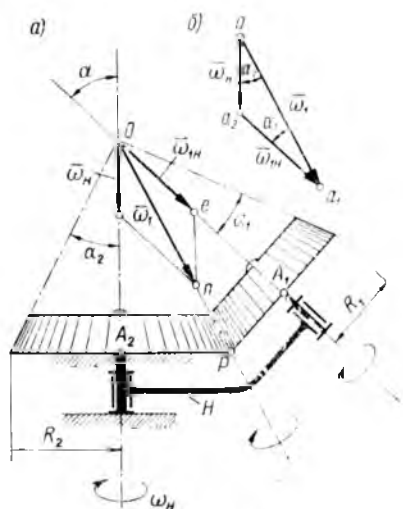


Рис. 136

этого сообщим мысленно всей системе вращение вокруг оси $I-II$ с угловой скоростью $-\bar{\omega}_H$. Тогда водило, несущее ось сателлитов, остановится и мы получим обыкновенную коническую передачу, колеса которой вращаются вокруг неподвижных осей с угловыми скоростями $\bar{\omega}_d - \bar{\omega}_H$, где $d = 1, 2, 3, 4$. Пользуясь методом Виллиса, установим связь между угловыми скоростями колес $1, 3, 4$ и водила H . Так как звенья $1, 3, 4$ и

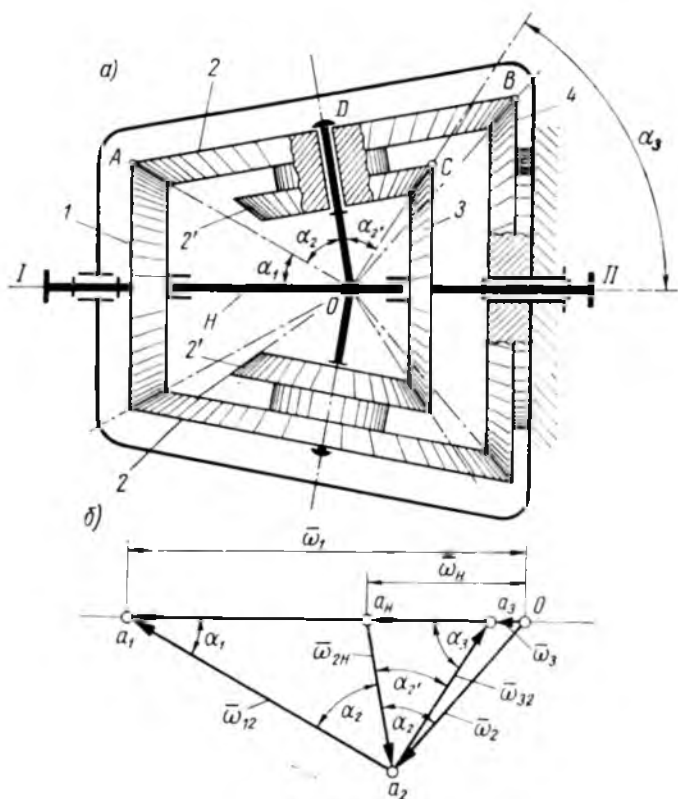


Рис 137

H имеют общую ось вращения, то угловые скорости этих звеньев являются параллельными векторами и их можно рассматривать как алгебраические величины.

Применяя формулу Виллиса к колесам 1 и 4 , имеем:

$$\frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_4 - \omega_H} = i_{14}^{(H)} = -\frac{R_4}{R_1},$$

где $\omega_1 - \omega_H$ и $\omega_4 - \omega_H$ — относительные угловые скорости колес 1 и 4 по отношению к водилу H . Передаточное отношение

в данном случае считаем отрицательным, так как колеса 1 и 4 при неподвижном водиле (при неподвижной оси колеса 2) вращаются в разные стороны (линейные скорости точек А и В этих колес при неподвижной оси колеса 2 имеют противоположные направления). Колесо 2 здесь играет роль паразитного колеса, его радиус не влияет на величину передаточного отношения между колесами 1 и 4. Так как абсолютная угловая скорость четвертого колеса $\omega_4 = 0$, то из последнего уравнения находим:

$$\omega_1 = \omega_H \left(1 + \frac{R_4}{R_1} \right). \quad (a)$$

Применяя вторично формулу Виллиса, уже теперь к колесам 3 и 4, имеем:

$$\frac{\omega_3 - \omega_H}{\omega_4 - \omega_H} = i_{34}^{(H)} = \frac{R_2'}{R_3} \cdot \frac{R_4}{R_2}.$$

Передаточное отношение в данном случае равно произведению двух передаточных отношений (от колеса 3 к колесу 2' и от колеса 2 к колесу 4), причем это передаточное отношение является величиной положительной, так как колеса 3 и 4 при неподвижной оси колес 2 и 2' вращаются в одну сторону (линейные скорости точек В и С имеют одинаковое направление). Таким образом,

$$\omega_3 = \omega_H \left(1 - \frac{R_2' R_4}{R_3 R_2} \right). \quad (б)$$

Равенства (а) и (б) выражают абсолютные угловые скорости колес 1 и 3 через угловую скорость водила. Разделив равенство (а) на (б), получим передаточное отношение между ведущим и ведомым валами рассматриваемой передачи, т. е. передаточное отношение между колесами 1 и 3 при неподвижном колесе 4:

$$i_{1, H} = i_{13}^{(4)} = \frac{1 + \frac{R_4}{R_1}}{1 - \frac{R_2' R_4}{R_3 R_2}} \quad (\text{ответ}).$$

В этой формуле отношения радиусов находящихся в зацеплении колес могут быть заменены отношениями чисел их зубьев.

2-й способ (геометрический). Этот способ основан на построении векторных треугольников угловых скоростей. При построении указанных треугольников исходят из векторных уравнений, выражающих зависимость между угловыми скоростями звеньев рассматриваемого механизма.

Принимая движение колеса 2 за переносное движение и применяя формулу (107) к колесу 1 имеем:

$$\vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_{12},$$

где $\overline{\omega}_1$ — абсолютная угловая скорость колеса 1, известная по модулю и направлению (что показывают две черты снизу);

$\overline{\omega}_2$ — абсолютная угловая скорость колеса 2, которая по отношению к колесу 1 является переносной угловой скоростью и для которой известна линия действия (что показывает одна черта снизу);

$\overline{\omega}_{12}$ — относительная угловая скорость колеса 1 по отношению к колесу 2, для которой линия действия тоже известна (что показывает одна черта снизу). Вектор $\overline{\omega}_2$ направлен по мгновенной оси вращения колеса 2, которая совпадает с общей образующей OB начальных конусов колеса 2 и неподвижного колеса 1, а вектор $\overline{\omega}_{12}$ — по общей образующей OA начальных конусов колес 1 и 2 (рис. 137, а).

Для построения треугольника угловых скоростей, соответствующего последнему векторному уравнению, от произвольного центра o (рис. 137, б) откладываем заданный вектор $oa_1 = \overline{\omega}_1$, а из начала o и конца a_1 этого вектора проводим до взаимного пересечения в точке a_2 прямые $oa_2 \parallel OB$ и $a_1a_2 \parallel OA$. Тогда имеем:

$$\overline{oa_2} = \overline{\omega}_2; \quad \overline{a_1a_2} = \overline{\omega}_{12}.$$

Определив угловую скорость $\overline{\omega}_2$ колеса 2, переходим к определению угловой скорости $\overline{\omega}_3$ колеса 3. Принимая опять движение колеса 2 за переносное, имеем:

$$\overline{\omega}_3 = \overline{\omega}_2 + \overline{\omega}_{32}.$$

Вектор $\overline{\omega}_3$ направлен по той же оси $I-II$, что и вектор $\overline{\omega}_1$, а вектор $\overline{\omega}_{32}$ — по общей образующей OC колес 3 и 2'. Для построения треугольника угловых скоростей достаточно из точки a_2 провести прямую $a_2a_3 \parallel OC$ до пересечения в точке a_3 с прямой oa_1 , что даст:

$$\overline{a_2a_3} = \overline{\omega}_{32}; \quad \overline{oa_3} = \overline{\omega}_3.$$

Угловую скорость $\overline{\omega}_H$ водила и угловую скорость двойного сателлита 2—2' по отношению к водилу находим на основании уравнения

$$\overline{\omega}_2 = \overline{\omega}_H + \overline{\omega}_{2H}.$$

Вектор $\overline{\omega}_H$ направлен по оси $I-II$, а вектор $\overline{\omega}_{2H}$ — по оси OD . Проведя из конца a_2 вектора $\overline{\omega}_2$ прямую $a_2a_H \parallel OD$ до пересечения в точке a_H с прямой oa_1 , имеем:

$$\overline{oa_H} = \overline{\omega}_H; \quad \overline{a_Ha_2} = \overline{\omega}_{2H}.$$

Искомое передаточное отношение определяется так:

$$i_{I, H} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{oa_1}{oa_2}.$$

Это передаточное отношение можно выразить также через углы растворов начальных конусов конических колес. Обозначив половинны указанных углов через $\alpha_1, \alpha_2, \dots$, из треугольника oa_1a_2 имеем:

$$\omega_1 = \omega_2 \frac{\sin 2\alpha_2}{\sin \alpha_1}. \quad (B)$$

Из треугольника oa_2a_3 следует:

$$\omega_3 = \omega_2 \frac{\sin (\alpha_2 - \alpha_3)}{\sin \alpha_3}. \quad (Г)$$

Поделив эти равенства, получим

$$i_{I, H} = \frac{\sin 2\alpha_2 \cdot \sin \alpha_3}{\sin \alpha_1 \cdot \sin (\alpha_2 - \alpha_3)}. \quad (\text{ответ}).$$

Выражая функции углов $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ через радиусы конических колес, этот ответ можно привести к виду, найденному ранее.

Пример 97. В дифференциальном механизме (рис. 138) ведущими звеньями являются колесо I и водило H , несущее ось двойного сателлита $2-2'$. Зная угловые скорости ω_1 и ω_H колеса I и водила H , а также радиусы всех колес, найти угловую скорость колеса 3 . Известно, что $\omega_1 < \omega_H$.

Решение. *1-й способ (метод Виллиса).* Сообщим мысленно всей системе вращение с угловой скоростью $-\omega_H$. Тогда водило H остановится, а к векторам угловых скоростей остальных звеньев механизма прибавится вектор $-\omega_H$. Рассматривая угловые скорости звеньев I, H и 3 , имеющих общую ось вращения, как алгебраические величины, получаем следующее соотношение между относительными угловыми скоростями колес I и 3 по отношению к водилу H :

$$\frac{\omega_3 - \omega_H}{\omega_1 - \omega_H} = i_{31}^{(H)} = -\frac{R_2}{R_3} \cdot \frac{R_1}{R_2}.$$

Передаточное отношение между колесами 3 и I в их относительном движении по отношению к водилу H здесь отрицательно потому, что при неподвижном водиле H эти колеса вращаются в разные стороны. Отсюда, учитывая, что $\omega_1 < \omega_H$, имеем:

$$\omega_3 = \omega_H + \frac{R_2 R_1}{R_3 R_2} (\omega_H - \omega_1) \quad (\text{ответ}).$$

В этой формуле отношения радиусов находящихся в зацеплении колес могут быть заменены отношениями чисел их

зубьев. Если бы колесо 1 и водило H вращались в противоположные стороны, то угловую скорость одного из этих звеньев следовало бы считать положительной, а другую — отрицательной. Знак в этом случае показывал бы, в сторону какого звена (1 или H) вращается колесо 3.

При решении подобных задач необходимо внимательно проследить, какой знак имеет передаточное отношение соосных

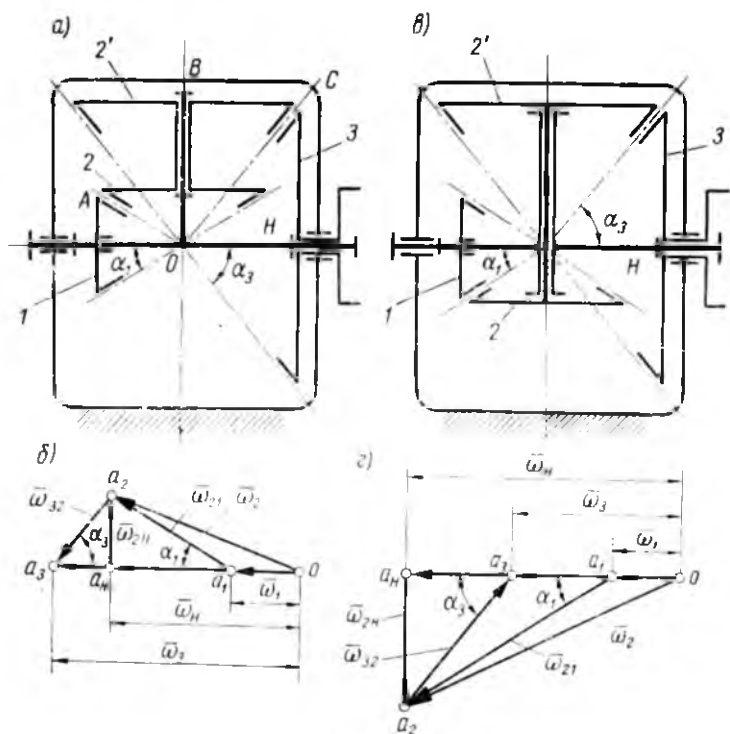


Рис. 138

звеньев в их движении по отношению к водилу. Так, например, в механизме, изображенном на рисунке 138 а, колеса 1 и 3 при неподвижном водиле H вращаются в одну сторону, следовательно, здесь, в отличие от предыдущего, $i_{31}^{(H)} > 0$, т. е.

$$\frac{\omega_3 - \omega_H}{\omega_1 - \omega_H} = i_{31}^{(H)} = + \frac{R_2}{R_3} \cdot \frac{R_1}{R_2},$$

откуда, если, по-прежнему, $\omega_H > \omega_1$, то

$$\omega_3 = \omega_H - \frac{R_2}{R_3} \cdot \frac{R_1}{R_2} (\omega_H - \omega_1).$$

2-й способ (геометрический). Решим эту же задачу при помощи векторных треугольников угловых скоростей. В данном случае мгновенная ось абсолютного движения двойного сателлита 2—2' заранее неизвестна, поэтому для определения его абсолютной угловой скорости ω_2 воспользуемся двумя векторными уравнениями, приняв сначала за переносное движение вращение колеса I , а затем—вращение водила:

$$\omega_2 = \omega_1 + \omega_{21}; \quad \omega_2 = \omega_H + \omega_{2H}.$$

Вектор ω_{21} относительной угловой скорости сателлита 2—2' по отношению к колесу I направлен по общей образующей OA начальных конусов этих колес, а вектор ω_{2H} относительной угловой скорости сателлита 2—2' по отношению к водилу H —по оси OB (рис. 138, а). От произвольного центра o (рис. 138, б) откладываем заданные векторы $oa_1 = \omega_1$ и $oa_H = \omega_H$, из концов a_1 и a_H этих векторов проводим до взаимного пересечения в точке a_2 прямые $a_1a_2 \parallel OA$ и $a_Ha_2 \parallel OB$, тогда получим:

$$\overline{a_1a_2} = \omega_{21}, \quad \overline{a_Ha_2} = \omega_{2H}, \quad \overline{oa_2} = \omega_2.$$

Определив вектор ω_2 , переходим к определению угловой скорости ω_3 колеса 3 , исходя из равенства:

$$\omega_3 = \omega_2 + \omega_{32}.$$

Вектор ω_3 направлен по оси вращения колеса 3 , совпадающей с осью вращения звеньев I и H , а вектор ω_{32} —по общей образующей OC начальных конусов колес $2'$ и 3 . Проведем из начала o и конца a_2 вектора $oa_2 = \omega_2$ прямые $oa_3 \parallel \omega_3$ и $a_2a_3 \parallel \omega_{32}$, до их взаимного пересечения в точке a_3 , получаем треугольник Oa_2a_3 угловых скоростей колеса 3 , из которого находим:

$$\omega_3 = \overline{oa_3} \quad \text{и} \quad \omega_{32} = \overline{a_2a_3}.$$

Обозначая половины углов раствора начальных конусов конических колес I и 3 соответственно через α_1 и α_3 , имеем (рис. 138, а и б):

$$\omega_{2H} = (\omega_H - \omega_1) \operatorname{tg} \alpha_1; \quad \omega_3 = \omega_H + \omega_{2H} \operatorname{ctg} \alpha_3,$$

откуда окончательно:

$$\omega_3 = \omega_H + (\omega_H - \omega_1) \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{ctg} \alpha_3 \quad (\text{ответ}).$$

Учитывая, что $\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{R_1}{R_2}$ и $\operatorname{ctg} \alpha_3 = \frac{R_2}{R_3}$ (см. рис. 138, а), придем к найденному ранее результату. На рис. 138, г показаны треугольники угловых скоростей для механизма, изображенного на рис. 138, а.

РАЗДЕЛ III

ДИНАМИКА

ДИНАМИКА ТОЧКИ

Глава I

ДВЕ ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ТОЧКИ

§ 1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

В динамике изучается движение механических систем в связи с действующими на них силами. Простейшим объектом механики является материальная точка — тело, размерами которого при решении данной задачи можно пренебречь.

Если на положение материальной точки и на ее движение не наложены никакие ограничения, то точка называется *свободной*, в противном случае имеем движение *несвободной* точки. Условия, которые накладывают определенные ограничения на положения материальной точки и на ее движение, называются связями, наложенными на эту точку. Материальное тело, при помощи которого осуществляется связь, наложенная на данную материальную точку, действует на эту точку с некоторой силой, называемой реакцией *этой связи*.

Согласно закону равенства действия и противодействия, сила, с которой материальная точка действует на тело, осуществляющее связь, равна по модулю и прямо противоположна по направлению *реакции* этой связи.

На основании второго и четвертого законов динамики имеем:

$$m\bar{\omega} = m \frac{dv}{dt} = \bar{F}, \quad (108)$$

где m — масса материальной точки; $\bar{\omega}$ — ее ускорение и $\bar{F}$ — равно-

действующая всех сил, приложенных к этой точке, включая (в случае несвободной точки) и реакции связей.

В Международной системе единиц масса измеряется в килограммах, а сила — в ньютонах (*н*). Обычно массу тела находят как отношение его веса *P*, выраженного в ньютонах, к ускорению силы тяжести $g = 9,81 \text{ м/сек}^2$, т. е.

$$m = \frac{P}{g}. \quad (109)$$

Проектируя векторное равенство (108) на ось той или иной системы координат, получаем дифференциальные уравнения движения материальной точки в этой системе.

В прямоугольной системе декартовых координат имеем:

$$m\ddot{x} = X; \quad m\ddot{y} = Y; \quad m\ddot{z} = Z, \quad (110)$$

где *x*, *y*, *z* — координаты точки, а *X*, *Y*, *Z* — проекции действующей силы (равнодействующей) на соответствующие оси. В случае несвободной точки к этим уравнениям присоединяются уравнения связей. Если точка движется прямолинейно, то, принимая эту прямую за ось *x*, имеем:

$$m\ddot{x} = X. \quad (111)$$

В системе естественных осей имеем:

$$m \frac{dv}{dt} = F_{\tau}; \quad m \frac{v^2}{\rho} = F_n, \quad 0 = F_b, \quad (112)$$

где

v — скорость точки;

ρ — радиус кривизны траектории;

F_τ, *F_n*, *F_b* — проекции действующей силы соответственно на касательную, главную нормаль и бинормаль траектории.

Уравнения (112) называются *эйлеровыми* или *естественными* уравнениями движения материальной точки.

Пользуясь уравнениями (108) и (110), можно решать две основные задачи динамики точки.

§ 2. ПЕРВАЯ ОСНОВНАЯ ЗАДАЧА ДИНАМИКИ ТОЧКИ

Эта задача заключается в том, что по заданному движению и известной массе материальной точки требуется определить силу, действующую на эту точку, или, если на материальную точку действует несколько сил, определить одну из них.

Решение этой задачи сводится к определению ускорения точки, которое в том случае, когда движение точки задано, нетрудно найти по правилам кинематики.

Задачи этого параграфа можно разделить на следующих два основных типа в зависимости от траектории движущейся точки:

- I. Задачи, относящиеся к прямолинейному движению точки.
- II. Задачи, относящиеся к криволинейному движению точки.

Задачи типа I

Задачи этого типа, в которых рассматривается прямолинейное движение точки, решаются при помощи уравнения (III); их можно разделить на две группы.

Первая группа

Задачи, в которых к движущейся материальной точке приложена одна сила. Необходимо определить эту силу.

Пример 98. Материальная точка массой $m=400$ г совершает гармонические колебания по горизонтальной оси Ox по закону $x=20 \sin \frac{\pi}{2} t$ (x выражено в см, t —в сек). Найти силу, действующую на точку в функции от x .

Решение. Находим проекцию ускорения точки на ось Ox :

$$\omega_x = \ddot{x} = -5\pi^2 \sin \frac{\pi}{2} t \frac{\text{см}}{\text{сек}^2}$$

Далее находим проекцию на ось действующей силы:

$$X = m\omega_x = -400 \cdot 5\pi^2 \cdot \sin \frac{\pi}{2} t = -2000\pi^2 \sin \frac{\pi}{2} t.$$

Но $\sin \frac{\pi}{2} t = \frac{x}{20}$, а потому $X = -100\pi^2 x$ дин,

Так как проекция силы на ось Ox и координата x движущейся точки противоположны по знаку, то искомая сила направлена вдоль оси Ox к началу координат O .

По модулю эта сила равна $986 |x|$, т. е. пропорциональна расстоянию от движущейся точки до начала O .

Вторая группа

Ко второй группе относятся задачи, в которых к движущейся материальной точке приложено несколько сил, причем требуется найти одну из них.

К этой группе следует отнести такие задачи, в которых требуется определить неизвестную реакцию связи, что характерно для движения несвободной материальной точки.

Пример 99. Клеть весом P поднимается с помощью каната, накрученного на барабан радиуса R , вращающийся вокруг непод-

вижной горизонтальной оси по закону:

$$\varphi = \frac{a}{2} (e^{\omega t} + e^{-\omega t}) = a \operatorname{ch}(\omega t).$$

Определить натяжение каната как функцию высоты подъема h (рис. 139).

Решение. При повороте барабана на угол φ клеть поднимается на высоту $h = R\varphi$. Силу натяжения каната обозначим через T . На клеть действуют две силы: натяжение каната T и вес клетки P , причем $T > P$, так как ускорение клетки направлено вверх. Равнодействующая этих сил $F = T - P$. Применяя формулу (108), получим:

$$m\omega = T - P,$$

откуда

$$T = P + m\omega = P + \frac{P}{g} \omega = P \left(1 + \frac{\omega}{g} \right).$$

Ускорение ω клетки найдем по формуле

$$\omega = \frac{d^2 h}{dt^2} = R \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = R \frac{a\omega^2}{2} (e^{\omega t} + e^{-\omega t}) = \frac{R a \omega^2}{2} \operatorname{ch}(\omega t),$$

или

$$\omega = \omega^2 h.$$

Следовательно,

$$T = \frac{P}{g} \omega^2 h + P = P \left(\frac{\omega^2 h}{g} + 1 \right).$$

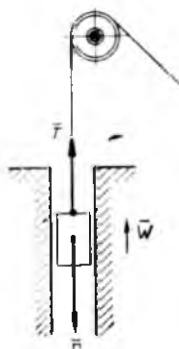


Рис. 139

Задача типа II

Задачи этого типа, в которых рассматривается криволинейное движение материальной точки, можно также разделить на две группы, как и задачи первого типа.

Первая группа

Задачи, в которых к движущейся материальной точке приложена одна сила; требуется определить эту силу.

Если движение точки задано уравнениями в декартовых координатах:

$$x = f_1(t); \quad y = f_2(t); \quad z = f_3(t), \quad (113)$$

где

x, y, z — координаты точки;

t — время,

то на основании уравнений (110) находим проекции искомой силы на три координатные оси:

$$X = m\ddot{x} = m f_1''(t), \quad Y = m\ddot{y} = m f_2''(t), \quad Z = m\ddot{z} = m f_3''(t). \quad (114)$$

Затем нужно найти модуль действующей силы $\vec{F}$ и ее направляющие косинусы по формулам:

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}; \quad (115)$$

$$\cos \alpha = \frac{X}{F}; \quad \cos \beta = \frac{Y}{F}; \quad \cos \gamma = \frac{Z}{F}. \quad (116)$$

Пример 100. Материальная точка массой $m = 0,5$ кг совершает движение согласно уравнениям:

$$x = 2t^2 + 1; \quad y = t^2 - 1; \quad z = t^3 - 1$$

причем координаты точки выражены в метрах, время — в секундах. Определить величину и направление силы действующей на точку, в момент $t = 1$ сек.

Решение. 1. Находим проекции скорости данной точки на оси координат:

$$\dot{x} = 4t; \quad \dot{y} = 2t; \quad \dot{z} = 3t^2.$$

2. Находим проекции ускорения точки на оси координат:

$$\ddot{x} = 4; \quad \ddot{y} = 2; \quad \ddot{z} = 6t = 6 \text{ (при } t = 1).$$

3. На основании уравнений (114) находим проекции силы на оси координат:

$$X = m\ddot{x} = 2; \quad Y = m\ddot{y} = 1; \quad Z = m\ddot{z} = 3.$$

4. По формулам (115) и (116) находим модуль силы и направляющие косинусы:

$$F = \sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{14} \approx 3,74 \text{ Н},$$

$$\cos \alpha = \frac{2}{3,74} = 0,534; \quad \cos \beta = \frac{1}{3,74} = 0,267;$$

$$\cos \gamma = \frac{3}{3,74} = 0,804.$$

откуда

$$\alpha = 57^\circ 41'; \quad \beta = 74^\circ 30'; \quad \gamma = 36^\circ 42'.$$

Если же движение точки задано естественным способом, т. е. задана траектория точки и закон ее движения по этой траектории $s = f(t)$, то следует, воспользовавшись уравнениями (112), найти проекции искомой силы $\vec{F}$ на естественные оси, а затем по этим проекциям вычислить ее модуль.

Пример 101. Материальная точка массой $m = 2$ кг описывает криволинейную траекторию по закону $s = 12 \sin \frac{t}{2}$ (s выражено в м, t — в сек). В данный момент она занимает положение M и имеет скорость $v = 3$ м/сек, причем радиус кривизны траектории в точке M равен 6 м. Найти в этот момент силу, действующую на эту материальную точку.

Решение. Находим скорость точки и проекции ее ускорения на касательную и главную нормаль траектории:

$$v = \frac{ds}{dt} = 6 \cos \frac{t}{2}; \quad \omega_t = \frac{dv}{dt} = -3 \sin \frac{t}{2}; \quad \omega_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{v^2}{6}.$$

Согласно условию, в данный момент t имеем $v = 3$ м/сек; поэтому $6 \cos \frac{t}{2} = 3$, откуда $\cos \frac{t}{2} = \frac{1}{2}$ и $\frac{t}{2} = \frac{\pi}{3}$ или $t = \frac{2\pi}{3}$.

Следовательно, в этот момент

$$\omega_t = -3 \sin \frac{\pi}{3} = -\frac{3\sqrt{3}}{2},$$

$$\omega_n = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}.$$

Теперь на основании уравнений (112) находим проекции искомой силы на касательную и главную нормаль:

$$F_t = m\omega_t = -3\sqrt{3} \quad F_n = m\omega_n = 3.$$

Отсюда искомая сила

$$F = \sqrt{F_t^2 + F_n^2} = 6 \text{ н.}$$

Вторая группа

Задачи, в которых к движущейся материальной точке приложено несколько сил и одну из них требуется найти.

В этой группе, так же как и в задачах второй группы типа 1, часто встречаются такие задачи, где требуется определить неизвестную реакцию связи при движении несвободной материальной точки.

Пример 102. Центробежный регулятор состоит из двух шаров A и B весом P каждый, муфты C весом Q и четырех одинаковых невесомых стержней $AC = BC = DA = DB = l$, закрепленных по концам шарнирно. Регулятор вращается вокруг неподвижной вертикальной оси z . Определить усилия в стержнях и угловую скорость регулятора, предполагая, что угол α , образуемый каждым из стержней с вертикалью, имеет заданное постоянное значение α (рис. 140).

Решение. Рассмотрим движение шара A , принимая его за материальную точку, которая описывает

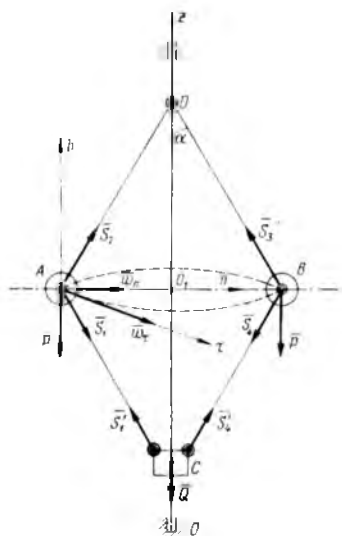


Рис. 140

окружность, расположенную в горизонтальной плоскости, с центром в точке O_1 и радиусом, равным R . К этому шару приложены три силы: вес $\overline{P}$ и реакции $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$ стержней AD и AC , направленные вдоль этих стержней и равные искомым усилиям. Применяя уравнения движения материальной точки в естественной форме, т. е. уравнения (112), и проектируя все силы, приложенные к шару A , на естественные оси τ , n и b , показанные на рис. 140, имеем:

$$m \frac{dv}{dt} = 0,$$

$$m \frac{v^2}{\rho} = (S_1 + S_2) \sin \alpha,$$

$$0 = (S_2 - S_1) \cos \alpha - P.$$

или, учитывая, что $v = \omega R = \omega l \sin \alpha$, получим:

$$ml \sin \alpha \frac{d\omega}{dt} = 0,$$

$$ml \sin \alpha \omega^2 = (S_1 + S_2) \sin \alpha,$$

$$0 = (S_2 - S_1) \cos \alpha - P.$$

Следовательно,

$$S_1 + S_2 = \frac{P}{g} l \omega^2, \quad \omega = \text{const},$$

$$S_2 - S_1 = \frac{P}{\cos \alpha}.$$

Аналогичным соотношением удовлетворяют действующие на шар B реакции S_3 и S_4 стержней BD и CB , причем, очевидно, $S_2 = S_3$ и $S_1 = S_4$. Рассмотрим теперь муфту C , к которой приложены вес $\overline{Q}$ и реакции $\overline{S}_1'$, $\overline{S}_4'$ стержней CA и CB , равные по модулю и противоположные по направлению силам $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_4$. Так как при $\alpha = \text{const}$ муфта C по оси z не перемещается, то сумма проекций всех приложенных сил на ось z равна нулю, т. е.

$$Q - (S_1' + S_4') \cos \alpha = Q - (S_1 + S_1) \cos \alpha = 0.$$

Таким образом, мы получили следующие три уравнения для определения неизвестных S_1 , S_2 и ω :

$$1) \quad S_1 + S_2 = \frac{P}{g} l \omega^2;$$

$$2) \quad S_2 - S_1 = \frac{P}{\cos \alpha};$$

$$3) \quad Q = 2S_1 \cos \alpha.$$

Решая эти уравнения, находим:

$$S_1 = \frac{Q}{2 \cos \alpha}, \quad S_2 = \frac{Q + 2P}{2 \cos \alpha}, \quad \omega = \frac{g}{l} \cdot \frac{Q + P}{P \cos \alpha}.$$

Пример 103. Материальная точка массы m движется в плоскости Oxy в сопротивляющейся среде под действием силы притяжения к центру O , равной $\vec{F} = -k^2 m \vec{r}$, где $k = \text{const}$, $\vec{r}$ — радиус-вектор этой точки. Найти силу сопротивления среды F_1 как функцию скорости, если известны уравнения движения точки:

$$x = ae^{-nt} (\sin k_1 t + \alpha),$$

$$y = be^{-nt} \sin (k_1 t + \beta),$$

причем

$$k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}.$$

Решение. 1. Находим проекции скорости и ускорения движущейся точки на ось Ox :

$$v_x = \dot{x} = ae^{-nt} [k_1 \cos (k_1 t + \alpha) - n \sin (k_1 t + \alpha)]$$

$$\omega_x = \ddot{x} = ae^{-nt} [(n^2 - k_1^2) \sin (k_1 t + \alpha) - 2nk_1 \cos (k_1 t + \alpha)];$$

так как

$$n^2 - k_1^2 = 2n^2 - k^2,$$

то

$$\begin{aligned} \omega_x = & -k^2 ae^{-nt} \sin (k_1 t + \alpha) - 2ane^{-nt} \times \\ & \times [k_1 \cos (k_1 t + \alpha) - n \sin (k_1 t + \alpha)] = -k^2 x - 2nv_x. \end{aligned}$$

На основании уравнений (96) имеем:

$$m\omega_x = X = F_x + F_{1x};$$

но

$$F_x = -k^2 mr_x = -k^2 mx,$$

а потому

$$m\omega_x = -k^2 mx + F_{1x},$$

или

$$-mk^2 x - 2mnv_x = -k^2 mx + F_{1x},$$

откуда

$$F_{1x} = -2mnv_x.$$

Аналогично находим $F_{1y} = -2mnv_y$. Следовательно, искомая сила $\vec{F}_1 = -2mn\vec{v}$, т. е. сила сопротивления среды, пропорциональна скорости точки и направлена противоположно этой скорости.

Классификация задач

Группы	Типы задач	
	I (прямолинейное движение)	II (криволинейное движение)
I-я (к движущейся точке приложена одна сила)	Задачи 649—651 *	Задачи 652, 672, 673
2-я (к движущейся точке приложено несколько сил)	Задачи 637, 638, 640, 648, 653—655, 658, 659—661, 662	Задачи 644—646, 656, 663, 667, 669, 670, 671

§ 3 ВТОРАЯ ОСНОВНАЯ ЗАДАЧА ДИНАМИКИ ТОЧКИ

Эта задача заключается в том, что по заданным силам, приложенным к движущейся материальной точке, массе этой точки и начальным условиям ее движения (начальному положению и начальной скорости), требуется определить движение этой точки. Для решения этой задачи необходимо:

1) установить, какие силы действуют на материальную точку;
2) составить дифференциальные уравнения движения точки в форме (110) или (112);

3) проинтегрировать эти уравнения;

4) определить по начальным условиям движения произвольные постоянные, которые войдут в интегралы этих уравнений.

Если интегрирование дифференциальных уравнений движения точки сводится к квадратурам, как в приводимых ниже примерах, то будем вычислять эти квадратуры в соответствующих пределах, т. е. будем вычислять определенные интегралы, причем нижние пределы интегрирования определяются начальными условиями движения точки. Тогда отпадает необходимость определения произвольных постоянных. Заметим, что почти во всех задачах, помещенных в сборнике И. В. Мещерского и относящихся ко второй основной задаче динамики точки, имеются два типа дифференциальных уравнений: или уравнения с разделяющимися переменными, или линейные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Задачи этого параграфа можно разделить на следующие три основных типа.

I. Задачи, относящиеся к прямолинейному движению свободной материальной точки.

* Номера задач указаны из сборника И. В. Мещерского изд. 1950 г. и последующих изданий.

II. Задачи, относящиеся к криволинейному движению свободной материальной точки.

III. Задачи, относящиеся к движению несвободной материальной точки.

Задачи типа I

Задачи этого типа, в которых рассматривается прямолинейное движение точки, можно разделить на четыре группы.

Первая группа

Задачи, в которых равнодействующая всех сил, приложенных к данной материальной точке постоянна.

Если траекторию прямолинейного движения точки принять за ось x , то дифференциальное уравнение движения точки в этом случае примет вид

$$m\ddot{x} = X = \text{const.}$$

откуда

$$\ddot{x} = \frac{X}{m} = \text{const.}$$

Так как в случае прямолинейного движения точки ускорение ее $\omega = \ddot{x}$, то $\omega = \text{const.}$, т. е. движение точки является равнопеременным. Поэтому по формуле кинематики для пройденного пути при равномерно-переменном движении имеем:

$$s = x - x_0 = v_0 t + \frac{\omega t^2}{2},$$

где v_0 — начальная скорость точки

Отсюда

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{X}{m} \frac{t^2}{2}. \quad (117)$$

Это уравнение выражает закон прямолинейного движения точки под действием постоянной силы.

Если в задаче требуется найти скорость v как функцию от расстояния x , то левую часть уравнения (108) приведем к виду

$$m \frac{dv}{dt} = m \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = mv \frac{dv}{dx},$$

тогда уравнение (111) принимает вид

$$v \frac{dv}{dx} = \frac{X}{m} = \text{const.},$$

откуда

$$\int_{v_0}^v v dv = \int_{x_0}^x \frac{X}{m} dx,$$

или

$$\frac{v^2 - v_0^2}{2} = \frac{X}{m} (x - x_0),$$

т. е.

$$v^2 = v_0^2 + 2 \frac{X}{m} (x - x_0). \quad (118)$$

Пример 104. Материальная точка массы $m = 0,5$ кг движется под действием постоянной силы $F = 10$ н. В начальный момент скорость точки равна $v_0 = 2$ м/сек. Определить скорость точки в тот момент, когда она пройдет расстояние $s = 5$ м.

Решение. Так как скорость точки требуется найти как функцию расстояния, то по формуле (118) имеем:

$$v^2 = v_0^2 + 2 \frac{X}{m} (x - x_0).$$

т. е.

$$v^2 = 4 + 2 \cdot \frac{10}{0,5} \cdot 5 = 204,$$

откуда

$$v = 14,28 \text{ м/сек.}$$

Вторая группа

Задачи, в которых равнодействующая всех сил, приложенных к одной материальной точке, есть функция времени t .

В этом случае дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{x} = X = f(t).$$

Так как $\dot{x} = v_x = v$, то получаем дифференциальное уравнение первого порядка

$$m \frac{dv}{dt} = f(t),$$

или

$$m dv = f(t) dt.$$

Интегрируя это уравнение в соответствующих пределах, имеем:

$$mv - mv_0 = \int_0^t f(t) dt,$$

откуда

$$v = \frac{dx}{dt} = v_0 + \frac{1}{m} \int_0^t f(t) dt. \quad (119)$$

Интегрируя это уравнение первого порядка, получим x как функцию от t , т. е. найдем искомый закон движения точки.

Пример 105. На материальную точку, совершающую прямолинейное движение, действует сила F , равномерно убывающая с течением времени и по истечении T сек обращающаяся в нуль. Какой скорости достигнет точка по истечении T сек и какой путь она пройдет за это время, если в начальный момент ($t=0$) скорость точки равна нулю, а ее ускорение равно ω_0 (рис. 141)?

Решение. Так как сила F , действующая на материальную точку, убывает равномерно с течением времени, то $F = F_0 - at$, причем $a = \text{const}$.

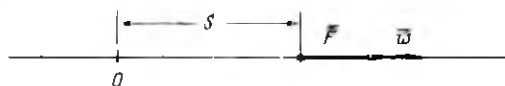


Рис. 141

В начальный момент ускорение точки равно ω_0 , поэтому $F_0 = m\omega_0$; кроме того, при $t=T$ по условию $F=0$, а потому $F_0 - aT = 0$; отсюда

$$a = \frac{m\omega_0}{T} \text{ и } F = m\omega_0 - \frac{m\omega_0}{T}t = m\omega_0\left(1 - \frac{t}{T}\right).$$

Следовательно, дифференциальное уравнение движения точки на основании равенств (111) запишется так:

$$\frac{mdv}{dt} = F = m\omega_0\left(1 - \frac{t}{T}\right), \text{ или } dv = \omega_0\left(1 - \frac{t}{T}\right)dt.$$

Интегрируя это уравнение в пределах от $v_0=0$ до v и от 0 до t , имеем:

$$v = \omega_0\left(t - \frac{t^2}{2T}\right).$$

Так как $v = \frac{dx}{dt}$, то

$$\frac{dx}{dt} = \omega_0\left(t - \frac{t^2}{2T}\right),$$

откуда

$$dx = \omega_0\left(t - \frac{t^2}{2T}\right)dt.$$

Интегрируя это уравнение в пределах от 0 до x и от 0 до t , находим:

$$x = \omega_0 \int_0^t t dt - \frac{\omega_0}{2T} \int_0^t t^2 dt = \frac{\omega_0 t^2}{2} \left(1 - \frac{t}{3T}\right).$$

Чтобы найти скорость v_1 и пройденный путь x_1 к моменту времени T , достаточно в предыдущих равенствах положить время t равным T сек.

Тогда имеем:

$$v_1 = \omega_0 \frac{T}{2} \quad \text{и} \quad x_1 = \frac{\omega_0 T^2}{3}.$$

Третья группа

Задачи, в которых равнодействующая всех сил, приложенных к данной материальной точке, есть функция координаты этой точки. В этом случае дифференциальное уравнение движения точки имеет вид

$$mx = X = f(x),$$

или

$$m \frac{dv}{dt} = f(x).$$

Чтобы свести это дифференциальное уравнение к уравнению с разделяющимися переменными, преобразуем левую часть:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = v \cdot \frac{dv}{dx}.$$

Тогда

$$\frac{mv \, dv}{dx} = f(x),$$

или

$$mv \, dv = f(x) \, dx. \quad (120)$$

Отсюда, интегрируя это уравнение в соответствующих пределах, имеем:

$$\frac{mv^2 - mv_0^2}{2} = \int_{x_0}^x f(x) \, dx. \quad (120')$$

Из этого равенства находим скорость v как функцию от расстояния x , т. е. $v = \frac{dx}{dt} = \varphi(x)$, или, разделяя переменные $\frac{dx}{\varphi(x)} = dt$ и проинтегрировав это уравнение первого порядка, найдем зависимость между x и t . Если $f(x)$ является линейной функцией от x , то уравнение (111) будет линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Поэтому для решения этого уравнения можно воспользоваться общей теорией интегрирования таких дифференциальных уравнений, т. е. составить соответствующее характеристическое уравнение, найти его корни и затем общее решение данного диффе-

решения дифференциального уравнения. Две произвольные постоянные в общем решении находятся по начальным условиям движения точки.

Пример 106. Материальная точка M массы m движется прямолинейно по оси Ox . Точка отталкивается от неподвижного центра O силой F , пропорциональной массе m и расстоянию, причем коэффициент пропорциональности равен $k=4$. Найти закон движения точки, если начальное расстояние ее от центра O равно $x_0=5$ м, а начальная скорость $v_0=2$ м/сек (рис. 142).



Рис. 142

Решение. Первый способ. По условию задачи $F = kmx$, поэтому дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{x} = kmx,$$

или

$$\ddot{x} = 4x.$$

Так как в данном случае $f(x) = 4mx$, то по формуле (120) имеем:

$$v dv = 4x dx,$$

откуда

$$\int_{v_0}^v v dv = 4 \int_{x_0}^x x dx = 2(x^2 - x_0^2),$$

или

$$\frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) = 2(x^2 - x_0^2),$$

т. е.

$$v = \frac{dx}{dt} = 2\sqrt{x^2 - 24}$$

и

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2 - 24}} = 2dt.$$

Отсюда

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 24}} = 2t,$$

т. е.

$$\ln \left| x + \sqrt{x^2 - 24} \right|_{x_0}^x = 2t,$$

или

$$2t = \ln \left| \frac{x + \sqrt{x^2 - 24}}{5} \right|.$$

Следовательно,

$$x + \sqrt{x^2 - 24} = 6e^{2t}.$$

Из этого соотношения находим:

$$x^2 - 24 = (6e^{2t} - x)^2,$$

откуда

$$x = \frac{3e^{4t} + 2}{e^{2t}},$$

или

$$x = 3e^{2t} + 2e^{-2t}.$$

Второй способ. Так как в данном случае функция $f(x) = 4mx$ является линейной функцией от x , то дифференциальное уравнение (120) является линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами.

Для решения этого уравнения воспользуемся теорией интегрирования линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и составим соответствующее характеристическое уравнение: $u^2 - 4 = 0$. Найдем его корни: $u_1 = 2$ и $u_2 = -2$.

Следовательно, общее решение выразится так:

$$x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t}.$$

Постоянные C_1 и C_2 находим по начальным условиям движения. Для этого сначала найдем скорость точки, продифференцировав последнее уравнение по времени t :

$$v = \frac{dx}{dt} = 2C_1 e^{2t} - 2C_2 e^{-2t}.$$

В начальный момент при $t=0$ согласно условию имеем:

$$x_0 = 5 \text{ и } v_0 = 2.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= 5, \\ 2C_1 - 2C_2 &= 2. \end{aligned}$$

откуда

$$C_1 = 3, \quad C_2 = 2;$$

таким образом,

$$x = 3e^{2t} + 2e^{-2t}.$$

Четвертая группа

Задачи, в которых равнодействующая всех сил, приложенных к данной материальной точке, зависит от скорости этой точки, что имеет место при движении точки в сопротивляющейся среде.

В этом случае дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$m \frac{dv}{dt} = f(v),$$

или, разделяя переменные,

$$\frac{mdv}{f(v)} = dt.$$

Отсюда

$$m \int_{v_0}^v \frac{dv}{f(v)} = \int_0^t dt = t. \quad (121)$$

Выполняя здесь интегрирование и разрешая затем полученное уравнение относительно v , находим скорость точки как функцию времени, т. е.

$$v = \frac{dx}{dt} = \psi(t),$$

Следовательно,

$$dx = \psi(t) dt$$

и

$$x = x_0 + \int_0^t \psi(t) dt. \quad (122)$$

Это уравнение выражает искомый закон движения точки. Если в задаче требуется найти скорость v как функцию расстояния x , то левую часть уравнения (108) преобразуем:

$$\frac{dv}{dt} = v \frac{dv}{dx}.$$

Тогда уравнение (109) принимает вид

$$mv \frac{dv}{dx} = f(v),$$

или, разделяя переменные,

$$\frac{mv dv}{f(v)} = dx,$$

откуда

$$x - x_0 = \int_{v_0}^v \frac{mv dv}{f(v)}. \quad (123)$$

Пример 107. Материальная точка массы $m = 0,1$ кг движется прямолинейно под действием постоянной силы $F = 0,3$ н. Движение происходит в среде, сила сопротивления которой выра-

жаётся линейной функцией скорости

$$R = 0,2v + 0,1v^2,$$

где v — скорость точки. Найти закон движения точки, если начальная скорость равна нулю (рис. 143).

Решение. Изобразим действующие силы на рисунке. Сила $\bar{F}$ направлена в сторону движения, а сила $\bar{R}$ — противоположно скорости. По формуле (111) дифференциальное уравнение движения точки имеет вид

$$0,1\ddot{x} = 0,3 - 0,2v - 0,1v^2.$$

Так как в данном случае равнодействующая всех приложенных сил есть линейная функция от скорости, т. е.

$$f(v) = 0,3 - 0,1v^2 - 0,2v,$$

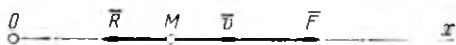


Рис. 143

то по формуле (121) имеем:

$$t = \int_{v_0}^v \frac{dv}{3 - 2v - v^2} = \int_{v_0}^v \frac{dv}{4 - (1 + v)^2},$$

откуда

$$t = \frac{1}{4} \ln \frac{3 + v}{3(1 - v)}.$$

Из этого уравнения находим v :

$$v = \frac{e^{4t} - 1}{e^{4t} + \frac{1}{3}}.$$

Воспользуемся далее уравнением (122) и найдем искомый закон движения точки:

$$x - x_0 = \int_0^t \frac{e^{4t} - 1}{e^{4t} + \frac{1}{3}} dt.$$

Чтобы вычислить этот интеграл, сделаем замену переменных

$$e^{4t} = z;$$

тогда

$$dz = 4z dt$$

и

$$\int_0^t \frac{e^{4t} - 1}{e^{4t} + \frac{1}{3}} dt = \int_1^z \frac{z - 1}{z + \frac{1}{3}} \cdot \frac{dz}{4z} = \frac{1}{4} \left\{ -\ln z + 4 \ln \frac{3e^{4t} + 1}{4} \right\}.$$

Следовательно,

$$x - x_0 = -3t + \ln \frac{3e^{4t} + 1}{4}.$$

Задачи типа II

Задачи этого типа, в которых рассматривается криволинейное движение свободной материальной точки, можно также разделить на четыре группы.

Первая группа

Задачи, в которых движение материальной точки происходит под действием постоянной силы.

Пример 108. Начальная скорость снаряда $v_0 = 490$ м/сек. Под каким углом α к горизонту следует бросить этот снаряд из начала координат, чтобы он попал в точку с координатами $y = 700$ м, $z = 680$ м?

Сопротивлением воздуха пренебрегаем.

Решение. Ось z направим по вертикали вверх, а ось y — по горизонтали так, чтобы начальная скорость снаряда лежала в плоскости Ozy .

Тогда, как известно (см., например, курс теоретической механики И. М. Воронкова, § 100), снаряд будет двигаться в вертикальной плоскости zOy , причем уравнения его движения имеют вид

$$y = v_0 t \cos \alpha, \quad z = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}.$$

Исключая отсюда t , получаем уравнение траектории (параболы):

$$z = y \operatorname{tg} \alpha - \frac{gy^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}.$$

или, заменяя $\frac{1}{\cos^2 \alpha}$ на $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha$, получаем:

$$z = y \operatorname{tg} \alpha - \frac{gy^2}{2v_0^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha).$$

Подставляя сюда значения $y = 700$; $z = 680$; $g = 9,8$; $v_0 = 490$, получаем:

$$\operatorname{tg}^2 \alpha - 70 \operatorname{tg} \alpha + 69 = 0.$$

Решая это квадратное уравнение относительно $\operatorname{tg} \alpha$, находим:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = 1; \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = 69,$$

откуда

$$\alpha_1 = 45^\circ; \alpha_2 = 89^\circ.$$

Пример 109. Частица M массы m , несущая заряд отрицательного электричества e , вступает в однородное электрическое поле постоянного напряжения E , имеющего горизонтальное направление, с вертикальной скоростью $\bar{v}_0$.

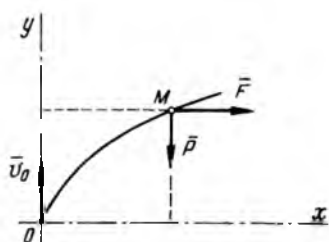


Рис. 144

Определить дальнейшее движение частицы, зная, что в электрическом поле на нее действует сила $F = eE$, направленная в сторону, противоположную напряжению поля. При решении задачи учесть действие силы тяжести P (рис. 144).

Решение. За начало координат O возьмем начальное положение частицы, ось x направим по горизонтали в сторону, противоположную напряжению поля, а ось y — по вертикали вверх (рис. 144). Тогда проекции равнодействующей сил $\bar{P}$ и F на оси x и y будут равны:

$$X = F = eE = \text{const}; \quad Y = -P = -mg = \text{const}.$$

Дифференциальные уравнения движения частицы, согласно уравнениям (110), имеют вид:

$$m\ddot{x} = eE,$$

$$m\ddot{y} = -mg;$$

или

$$\frac{dx}{dt} = \frac{eE}{m},$$

$$\frac{dy}{dt} = -g.$$

Отсюда

$$dx = \frac{eE}{m} dt; \quad dy = -g dt.$$

Интегрируя эти уравнения в соответствующих пределах, получаем:

$$x - x_0 = \int_0^t \frac{eE}{m} dt = \frac{eE}{m} t; \quad y - y_0 = - \int_0^t g dt = -gt.$$

Но $\dot{x}_0 = v_{0x} = 0$ и $y_0 = v_{0y} = v_0$, поэтому

$$x = \frac{dx}{dt} t = \frac{eE}{m} t, \quad y = \frac{dy}{dt} t = v_0 - gt,$$

или

$$dx = \frac{eE}{m} t dt, \quad dy = (v_0 - gt) dt.$$

Отсюда, интегрируя, находим:

$$x - x_0 = \frac{eE}{m} \int_0^t t dt = \frac{eE}{2m} t^2,$$

$$y - y_0 = v_0 \int_0^t dt - g \int_0^t t dt = v_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

Так как в начальный момент частица находится в начале координат, то $x_0 = y_0 = 0$ и, следовательно,

$$x = \frac{eE}{2m} t^2,$$

$$y = v_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

Эти уравнения определяют движение частицы M . Предлагается читателю доказать, что проекция скорости частицы на прямую, перпендикулярную к равнодействующей сил $\vec{F}$ и $\vec{P}$, остается неизменной.

Вторая группа

Задачи, в которых равнодействующая всех сил, приложенных к данной материальной точке, а следовательно, и ее проекции на координатные оси, являются функциями времени. В этом случае

$$X = f_1(t); \quad Y = f_2(t); \quad Z = f_3(t),$$

причем функции $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$ известны. Тогда дифференциальные уравнения движения точки имеют вид

$$m\ddot{x} = f_1(t), \quad m\ddot{y} = f_2(t); \quad m\ddot{z} = f_3(t).$$

Каждое из этих уравнений можно проинтегрировать в отдельности таким же способом, как и в задачах второй группы типа I.

Третья группа

Задачи, в которых равнодействующая всех сил, приложенных к данной материальной точке, зависит от положения этой точки, т. е. является функцией ее координат. Такой случай возможен, например, когда материальная точка притягивается

к данному неподвижному центру или отталкивается от него силой, зависящей от расстояния точки до этого центра.

Пример 110. Материальная точка M массой m отталкивается от неподвижного центра O силой $\vec{F} = c\vec{r}$, где r — расстояние точки M от центра O , а c — постоянный коэффициент. В начальный момент расстояние $r_0 = OM_0 = a$, а скорость точки $\vec{v}_0$ — перпендикулярна к направлению OM_0 . Найти движение точки M и ее траекторию (рис. 145).

Решение. Принимая центр O за начало координат, ось x направим по OM_0 , как указано на рис. 145.

Так как $\vec{F} = c\vec{r}$, то, проектируя обе части этого векторного равенства на оси Ox и Oy и учитывая, что $r_x = x$, $r_y = y$, где x и y — координаты движущейся точки, получаем:

$$F_x = cx, \quad F_y = cy.$$

Дифференциальные уравнения движения точки M согласно уравнениям (110) имеют вид:

$$m\ddot{x} = cx,$$

$$m\ddot{y} = cy,$$

или, полагая $\frac{c}{m} = k^2$,

$$\ddot{x} - k^2x = 0,$$

$$\ddot{y} - k^2y = 0.$$

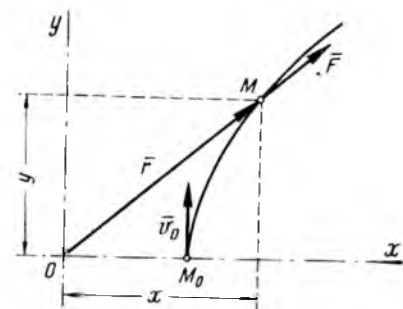


Рис. 145

Каждое из этих линейных уравнений можно проинтегрировать отдельно, для этого составим характеристическое уравнение $u^2 - k^2 = 0$ и найдем его корни:

$$u_1 = k, \quad u_2 = -k.$$

Следовательно, общее решение дифференциальных уравнений движения точки запишется так:

$$x = C_1 e^{kt} + C_2 e^{-kt},$$

$$y = C_3 e^{kt} + C_4 e^{-kt}.$$

Отсюда

$$\dot{x} = k(C_1 e^{kt} - C_2 e^{-kt}),$$

$$\dot{y} = k(C_3 e^{kt} - C_4 e^{-kt}).$$

Остается найти постоянные C_1, C_2, C_3, C_4 . При $t = 0$ имеем:

$$x_0 = a, \quad y_0 = 0, \quad v_{0x} = 0, \quad v_{0y} = v_0.$$

Подставляя эти значения в предыдущие уравнения, получаем:

$$x_0 = C_1 + C_2 = a; \quad \dot{x}_0 = k(C_1 - C_2) = 0;$$

$$y_0 = C_3 + C_4 = 0; \quad \dot{y}_0 = k(C_3 - C_4) = v_0.$$

Отсюда находим:

$$C_1 = C_2 = \frac{a}{2}; \quad C_3 = -C_4 = \frac{v_0}{2k}.$$

Следовательно,

$$x = \frac{a}{2} (e^{kt} + e^{-kt}),$$

$$y = \frac{v_0}{2k} (e^{kt} - e^{-kt}).$$

Эти уравнения определяют движение точки M . Чтобы найти уравнение траектории в обычном виде, достаточно из них исключить параметр t . Для этого, полагая $\frac{v_0}{k} = b$, перепишем предыдущие уравнения в виде:

$$\frac{x}{a} = \frac{e^{kt} + e^{-kt}}{2} = \operatorname{ch}(kt),$$

$$\frac{y}{b} = \frac{e^{kt} - e^{-kt}}{2} = \operatorname{sh}(kt).$$

Возведя теперь эти уравнения в квадрат и вычитая второе уравнение из первого, получаем:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Траектория точки M есть гиперболы.

Четвертая группа

Задачи, в которых рассматривается движение материальной точки под действием некоторой заданной силы (постоянной или переменной) в сопротивляющейся среде, причем сила сопротивления среды зависит от скорости материальной точки.

Пример 111. Точка M массой $m = 0,1$ кг движется под действием силы, которая притягивает ее к неподвижному центру O и пропорциональна расстоянию точки от этого центра, причем коэффициент пропорциональности $c = 0,6$ н/см. Движение происходит в среде, сопротивление которой пропорционально первой степени скорости, причем коэффициент пропорциональности $\mu = 0,5 \frac{\text{н} \cdot \text{сек}}{\text{м}}$.

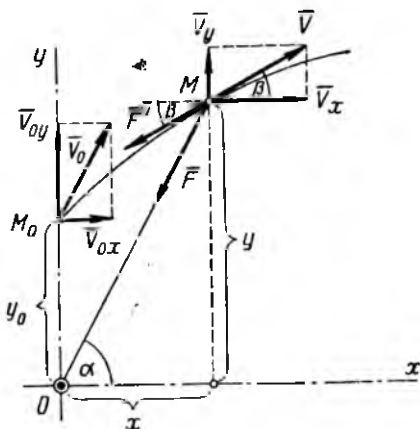


Рис. 146

Начальные условия: $x_0 = 0$, $y_0 = 30$ м, $v_{0x} = \dot{x}_0 = 20$ м/сек, $v_{0y} = \dot{y}_0 = 10$ м/сек. Найти кинематические уравнения движения точки (рис. 146).

Решение. Обозначим $\bar{F}$ силу, притягивающую точку M к центру O , и $\bar{F}'$ силу сопротивления среды, направленную противоположно скорости $\bar{v}$ точки M . Тогда

$$\bar{F} = -c\bar{r} \text{ и } \bar{F}' = -\mu\bar{v}.$$

Обозначая α и β углы, соответственно образуемые радиусом-вектором $\bar{r}$ точки M и вектором $\bar{v}$ скорости этой точки с осью x , составляем дифференциальные уравнения движения точки в декартовых координатах:

$$m\ddot{x} = X = -F \cos \alpha - F' \cos \beta = -cr \cos \alpha - \mu v \cos \beta;$$

$$m\ddot{y} = Y = -F \sin \alpha - F' \sin \beta = -cr \sin \alpha - \mu v \sin \beta.$$

Или после подстановки числовых значений

$$\ddot{x} + 5\ddot{x} + 6x = 0; \quad \ddot{y} + 5\ddot{y} + 6y = 0.$$

Дальнейшее решение задачи зависит от характера полученных дифференциальных уравнений. В данном случае получены независимые друг от друга линейные дифференциальные уравнения второго порядка, и для решения их можем воспользоваться теорией интегрирования таких уравнений, известной из курса математики. Составляем характеристическое уравнение, соответствующее первому уравнению:

$$u^2 + 5u + 6 = 0,$$

отсюда

$$u_1 = -2; \quad u_2 = -3.$$

Следовательно, общее решение данного дифференциального уравнения выразится так:

$$x = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t}.$$

Совершенно аналогично для второго дифференциального уравнения получаем:

$$y = C_3 e^{-2t} + C_4 e^{-3t}.$$

Отсюда

$$x = -2C_1 e^{-2t} - 3C_2 e^{-3t}, \quad y = -2C_3 e^{-2t} - 3C_4 e^{-3t}.$$

Подставляя начальные данные в найденные для x , y , $\dot{x}$ и $\dot{y}$ выражения

$$t_0 = 0; \quad x_0 = 0; \quad y_0 = 30; \quad \dot{x}_0 = 20; \quad \dot{y}_0 = 10,$$

имеем:

$$\begin{aligned} 0 &= C_1 + C_2; \quad 20 = -2C_1 - 3C_2, \\ 30 &= C_3 + C_4; \quad 10 = -2C_3 - 3C_4. \end{aligned}$$

Отсюда

$$C_1 = 20; C_2 = -20; C_3 = 100; C_4 = -70.$$

Таким образом, окончательно получаем следующие кинематические уравнения движения точки:

$$x = 20(e^{-2t} - e^{-3t}); y = 10(10e^{-2t} - 7e^{-3t}).$$

Задачи типа III

Задачи этого типа, в которых рассматривается движение *несвободной* материальной точки, можно разделить на две группы.

Первая группа

Задачи, в которых рассматривается движение несвободной точки по заданной неподвижной линии.

В этом случае, поскольку траектория точки известна, проще воспользоваться дифференциальными уравнениями движения

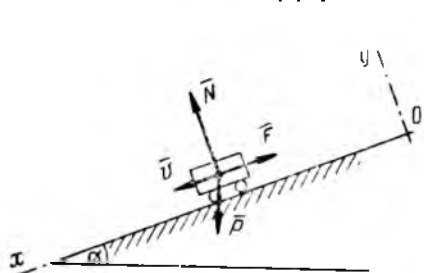


Рис. 147

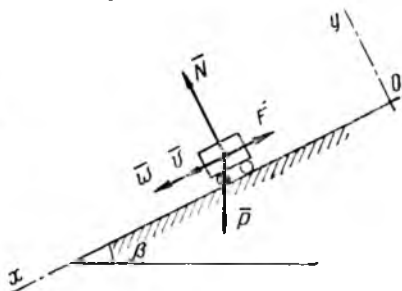


Рис. 148

точки в естественной форме (112); при этом необходимо учесть реакции связей, т. е. нормальную реакцию и силу трения (если трение учитывается).

Пример 112. Известно, что на прямолинейном участке железнодорожного пути с углом наклона α вагон, получив некоторую начальную скорость вниз по уклону, движется затем равномерно.

Считая сопротивление движению пропорциональным нормальному давлению колес на рельсы, определить закон движения этого вагона, если он будет двигаться вниз без начальной скорости по прямолинейному участку пути с углом наклона $\beta > \alpha$ (рис. 147 и 148).

Решение. Вагон движется поступательно под действием веса $\vec{P}$, нормальной реакции $\vec{N}$ и силы сопротивления $\vec{F}$, которая направлена по наклонной плоскости вверх, противоположно движению вагона.

Сначала рассмотрим равномерное движение вагона по пути с углом наклона α .

Согласно уравнениям (110), имеем:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= mg \sin \alpha - F, \\ m\ddot{y} &= mg \cos \alpha - N. \end{aligned}$$

Так как вагон движется прямолинейно и равномерно, то $\ddot{x} = 0$, $\ddot{y} = 0$; поэтому $N = mg \cos \alpha$ и $F = mg \sin \alpha$.

Согласно условию,

$$F = fN,$$

где f — коэффициент сопротивления. Следовательно,

$$mg \sin \alpha = f mg \cos \alpha,$$

откуда

$$f = \operatorname{tg} \alpha.$$

Теперь рассмотрим второй случай, когда вагон движется по участку пути с углом наклона β .

Аналогично предыдущему на основании уравнений (110) имеем (см. рис. 148):

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= mg \sin \beta - F, \\ m\ddot{y} &= -mg \cos \beta + N = 0. \end{aligned}$$

Так как ускорение ω вагона параллельно оси x (рис. 148), то $\omega_x = \ddot{y} = 0$, поэтому $N = mg \cos \beta$ и $F = fmg \cos \beta$, следовательно, $m\ddot{x} = mg \sin \beta - fmg \cos \beta$, или, подставляя значение f и сокращая на m , получим:

$$\ddot{x} = g (\sin \beta - \operatorname{tg} \alpha \cos \beta),$$

или

$$\ddot{x} = \frac{g}{\cos \alpha} \cdot \sin (\beta - \alpha) = \text{const.}$$

Следовательно, вагон движется с постоянным ускорением $\omega = \frac{g}{\cos \alpha} \cdot \sin (\beta - \alpha)$. Поэтому по формуле для пройденного пути при равномерно ускоренном движении без начальной скорости имеем:

$$x = \frac{\omega t^2}{2} = \frac{gt^2}{2 \cos \alpha} \sin (\beta - \alpha).$$

Это и есть искомый закон движения вагона.

Пример 113. Материальная точка весом $P = 1,96$ н, лежащая на горизонтальной поверхности стола, привязана к неподвижной точке O нитью длиной $l = 35$ см. Точке сообщена начальная скорость $v_0 = 4,9$ м/сек, перпендикулярная к направлению натянутой нити, вследствие чего точка описывает на столе окружность (рис. 149). Найти скорость точки и силу

натяжения нити через 1 сек после начала движения, если коэффициент трения $f = 0,25$.

Решение. К данной материальной точке приложены силы: вес $\vec{P}$, нормальная реакция стола $\vec{N}$, сила трения $F_{тр} = fN$ и натяжение T нити.

Составляем уравнения движения точки в форме Эйлера (в проекциях на касательную, нормаль и бинормаль):

$$m \frac{dv}{dt} = -F_{тр} = -fN;$$

$$\frac{mv^2}{\rho} = T; \quad 0 = N - P.$$

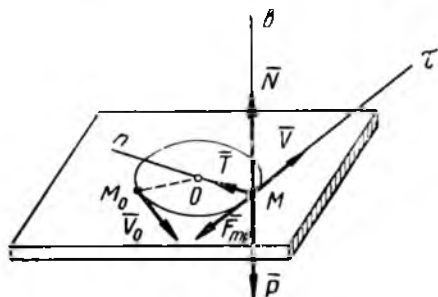


Рис. 149

Из последнего уравнения $N = P = mg$; следовательно,

$m \frac{dv}{dt} = -fmg$, откуда $dv = -fgdt$ и $v = -fgt + C$. Так как $v = v_0$, при $t = 0$, то $C = v_0$; поэтому $v = v_0 - fgt$. При $t = 1$ и при числовых данных задачи имеем: $v = 4,9 - 0,25 \cdot 9,8 = 2,45$ м/сек.

Из второго уравнения Эйлера, учитывая, что $\rho = l = 0,35$ м, находим натяжение нити в момент $t = 1$ сек:

$$T = \frac{mv^2}{l} = \frac{Pv^2}{gl} = \frac{1,96 \cdot 2,45^2}{0,35 \cdot 9,8} = 3,43 \text{ н.}$$

Вторая группа

Ко второй группе относятся задачи, в которых рассматривается криволинейное движение точки по данной неподвижной поверхности.

В этих задачах следует составлять дифференциальные уравнения движения точки в координатной форме, учитывая при этом, кроме равнодействующей $\vec{F}$ заданных сил, приложенных к движущейся точке, нормальную реакцию $\vec{N}$ поверхности и силу трения $F_{тр}$. Поэтому дифференциальные уравнения движения точки имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x + N_x + F_x^{тр}; \\ m\ddot{y} &= F_y + N_y + F_y^{тр}; \\ m\ddot{z} &= F_z + N_z + F_z^{тр}. \end{aligned} \right\} \quad (124)$$

Если к этим уравнениям присоединить уравнение Кулона

$$F_{тр} = fN,$$

где f — коэффициент трения, и уравнение связи (т. е. уравнение

поверхности $\varphi(x, y, z) = 0$, по которой перемещается точка, то получим систему пяти уравнений, из которых можно определить все пять искомых величин: x , y , z , N и $F_{\text{тр}}$. Если трение отсутствует, то последние члены в правых частях уравнений (124) исчезают.

Пример 114. Материальная точка M движется по гладкой наклонной плоскости с углом наклона α под действием собственного веса $\bar{P}$; ее начальная горизонтальная скорость $\bar{v}_0$ перпендикулярна к линии наибольшего ската этой плоскости. Определить движение этой точки и ее траекторию, а также реакцию наклонной плоскости (рис. 150).

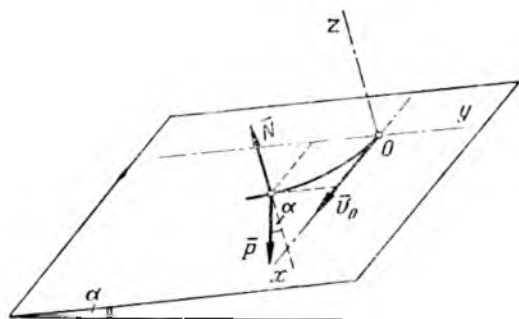


Рис. 150

Решение. Начало координат выберем в начальном положении материальной точки, а оси x и y — лежащими в наклонной плоскости, причем ось x — горизонтальна, а ось y — парал-

лельна линии наибольшего ската; ось z направим по нормали к наклонной плоскости. Так как на точку M действуют сила тяжести $\bar{P}$, направленная по вертикали вниз, и реакция наклонной плоскости $\bar{N}$, перпендикулярная к этой плоскости, то дифференциальные уравнения движения точки запишутся так:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= X = 0, \\ m\ddot{y} &= Y = -P \sin \alpha = -mg \sin \alpha, \\ m\ddot{z} &= Z = N - P \cos \alpha. \end{aligned}$$

Так как точка M движется в плоскости xOy , то получим $z = 0$ (уравнение связи) и, следовательно, $\dot{z} = \ddot{z} = 0$; поэтому $N - P \cos \alpha = 0$, откуда $N = P \cos \alpha$.

Остается проинтегрировать первые два уравнения, которые перепишем в виде:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 0, \\ \frac{dy}{dt} &= -g \sin \alpha. \end{aligned}$$

Интегрируя эти уравнения, получим:

$$x = \text{const} = x_0, \quad y - y_0 = -gt \sin \alpha.$$

Но

$$\dot{x}_0 = v_{ox} = v_0, \quad \dot{y}_0 = v_{oy} = 0,$$

а поэтому

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = v_0, \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt} = -gt \sin \alpha.$$

Отсюда, интегрируя и принимая во внимание, что $x_0 = y_0 = 0$, находим:

$$x = v_0 t, \quad y = -\frac{gt^2}{2} \sin \alpha.$$

Эти уравнения определяют движение точки M по наклонной плоскости.

Исключая отсюда параметр t , находим траекторию этой точки:

$$y = -\frac{g \sin \alpha}{2v_0^2} x^2.$$

Это — парабола, расположенная под осью Ox .

Посмотрим теперь, как изменится решение этой задачи, если учесть силу трения между материальной точкой и наклонной плоскостью, равную

$$F_{\text{тр}} = fN,$$

где f — коэффициент трения.

Третье дифференциальное уравнение движения точки M (относящееся к оси z) остается, очевидно, без изменения; поэтому $N = P \cos \alpha$ и, следовательно, $F_{\text{тр}} = fP \cos \alpha = \text{const}$. Так как сила трения направлена противоположно скорости $\vec{v}$, то

$$\vec{F}_{\text{тр}} = -fP \cos \alpha \frac{\vec{v}}{v}.$$

Отсюда

$$F_{\text{тр}x} = -fP \cos \alpha \frac{v_x}{v} = -fP \cos \alpha \frac{\dot{x}}{v},$$

$$F_{\text{тр}y} = -fP \cos \alpha \frac{v_y}{v} = -fP \cos \alpha \frac{\dot{y}}{v}.$$

Следовательно, дифференциальные уравнения движения точки M в плоскости xOy после сокращения на m имеют вид:

$$\ddot{x} = -fg \cos \alpha \frac{\dot{x}}{v}, \quad \ddot{y} = -g \sin \alpha - fg \cos \alpha \frac{\dot{y}}{v}.$$

Интегрирование этих дифференциальных уравнений можно выполнить, пользуясь приближенными методами.

Пример 115. Тяжелая материальная частица массы m движется по внутренней поверхности шероховатого круглого

цилиндра $x^2 + y^2 - R^2 = 0$. Коэффициент трения между частицей и цилиндром равен k . В начальный момент частица находится на оси Ox и получает скорость v_0 , перпендикулярную к оси Ox

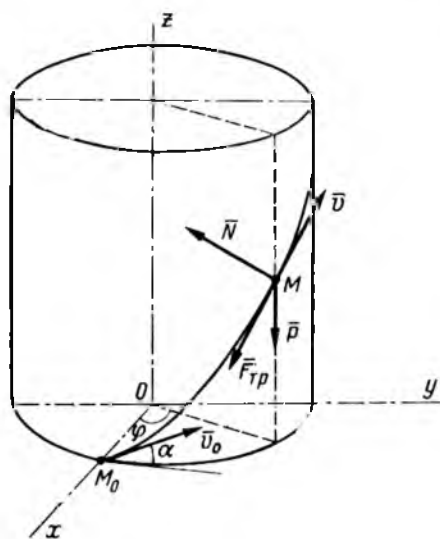


Рис. 151

и составляющую с плоскостью xOy угол α . Составить дифференциальные уравнения движения частицы и определить ее давление на поверхность. Пронтегрировать полученные уравнения в случае гладкой поверхности ($k=0$) (рис. 151).

Решение. Частица $M(x, y, z)$ движется под действием трех сил: веса $\vec{P}$, направленного по вертикали вниз, нормальной реакции $\vec{N}$ цилиндра, направленной по внутренней нормали к его поверхности, и силы трения $\vec{F}_{тр}$, направленной противоположно вектору скорости $\vec{v}$. Найдём проекции этих сил на каждую из трех координатных осей:

$P_x = P_y = 0$; $P_z = -mg$; $N_z = 0$; $N_x = -N \cos \varphi$; $N_y = -N \sin \varphi$, где φ — угол, образуемый с осью Ox проекцией радиуса-вектора точки M на плоскость xOy .

Так как $\cos \varphi = \frac{x}{R}$, $\sin \varphi = \frac{y}{R}$, то

$$N_x = -N \frac{x}{R}, \quad N_y = -N \frac{y}{R}.$$

Далее имеем:

$$\vec{F}_{тр} = -kN \frac{\vec{v}}{v},$$

где $\frac{\vec{v}}{v}$ — единичный вектор скорости.

Отсюда

$$F_x^{тр} = -kN \frac{v_x}{v} = -kN \frac{\dot{x}}{v}, \quad F_y^{тр} = -kN \frac{v_y}{v} = -kN \frac{\dot{y}}{v},$$

$$F_z^{тр} = 0.$$

Следовательно, уравнения (124) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} 1) \quad m\ddot{x} &= -N \frac{x}{R} - kN \frac{\dot{x}}{v}; \\ 2) \quad m\ddot{y} &= -N \frac{y}{R} - kN \frac{\dot{y}}{v}; \\ 3) \quad m\ddot{z} &= -kN \frac{\dot{z}}{v} - mg. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Присоединяя к этим уравнениям уравнение связи

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0, \quad (b)$$

мы получили систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными x , y , z и N . Продифференцируем дважды уравнение связи:

$$x\dot{x} + y\dot{y} = 0. \quad (в)$$

$$x^2 + x\ddot{x} + y^2 + y\ddot{y} = 0. \quad (г)$$

Умножим первое из уравнений (а) на x , второе — на y и сложим их почленно:

$$m(x\ddot{x} + y\ddot{y}) = -NR - \frac{k}{v}N(x\dot{x} + y\dot{y}). \quad (д)$$

Учитывая соотношения (в) и (г), получим:

$$N = -\frac{m}{R}(x\ddot{x} + y\ddot{y}),$$

или

$$N = \frac{m}{R}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2). \quad (e)$$

Подставляя найденное значение N в уравнения (а), получим систему нелинейных дифференциальных уравнений, содержащих координаты x , y и z , а также первые и вторые производные от этих координат по времени.

Так как решение этой системы дифференциальных уравнений представляет собой сложную математическую задачу, то рассмотрим частный случай, когда поверхность цилиндра гладкая.

Тогда система (а) принимает вид:

$$\left. \begin{aligned} 1) \quad m\ddot{x} &= -N \frac{x}{R}; \\ 2) \quad m\ddot{y} &= -N \frac{y}{R}; \\ 3) \quad m\ddot{z} &= -mg. \end{aligned} \right\} \quad (a')$$

Чтобы исключить из первых двух уравнений силу N , поделим

почленно первое уравнение на второе; тогда имеем:

$$\frac{\ddot{x}}{\ddot{y}} = \frac{x}{y},$$

откуда

$$\ddot{x}y - \ddot{y}x = 0.$$

Но

$$\ddot{x}y - \ddot{y}x = \frac{d}{dt}(\dot{x}y - \dot{y}x) = 0,$$

а поэтому

$$\dot{x}y - \dot{y}x = \text{const.}$$

Так как

$$x = R \cos \varphi, \quad y = R \sin \varphi,$$

то

$$\dot{x}y - \dot{y}x = -R^2 \dot{\varphi} = \text{const.}$$

Следовательно,

$$\varphi = \text{const} = C_1.$$

Постоянную C_1 находим из начальных условий движения:

$$t_0 = 0, \quad x_0 = R, \quad y_0 = z_0 = 0, \quad \dot{x}_0 = 0, \quad \dot{y}_0 = v_0 \cos \alpha,$$

$$\dot{z}_0 = v_0 \sin \alpha, \quad C_1 = \varphi_0 = \frac{v_0 \cos \alpha}{R}.$$

Отсюда

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{v_0 \cos \alpha}{R}, \quad \int_{\varphi_0=0}^{\varphi} d\varphi = \frac{v_0 \cos \alpha}{R} \int_0^t dt,$$

или

$$\varphi = \frac{v_0 \cos \alpha}{R} t.$$

Таким образом,

$$x = R \cos \left(\frac{v_0 \cos \alpha}{R} t \right); \quad y = R \sin \left(\frac{v_0 \cos \alpha}{R} t \right).$$

Интегрируя третье уравнение системы (а') и определяя произвольную постоянную интегрирования, получим:

$$z = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t \sin \alpha.$$

Подставляя найденные значения $\dot{x}$ и $\dot{y}$ в равенство (с), имеем:

$$N = \frac{m}{R} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = mR\psi^2 = \frac{mv_0^2 \cos^2 \alpha}{R}.$$

Таблица 15

Классификация задач

Группа	Типы задач		
	I (прямолинейное движение материальной точки)	II (криволинейное движение свободной материальной точки)	III (движение несвободной материальной точки)
1-я	Движение точки под действием постоянной силы (задачи 674, 675, 678, 679, 682, 686)	Движение точки под действием постоянной силы (задачи 709—719, 729)	Точка движется по заданной линии (задачи 820, 821)
2-я	Движение точки под действием силы, зависящей от времени (задачи 694, 698, 701, 702)	Движение точки под действием силы, зависящей от времени (задача 731)	Точка движется по заданной поверхности (задачи 642, 643, 646, 650, 816, 819, 822)
3-я	Движение точки под действием силы, зависящей от координаты точки (задачи 699, 700)	Движение точки под действием силы, зависящей от положения точки (задачи 724—728)	
4-я	Движение точки под действием силы, зависящей от скорости (задачи 680, 683—685, 693, 695—697, 706—708)	Движение точки в сопротивляющейся среде (задачи 720—722, 730)	

Глава II

КОЛЕБАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Задачи, относящиеся к этой главе, можно разделить на следующие основные типы:

I. Гармонические свободные колебания.

II. Затухающие колебания.

III. Вынужденные колебания: а) при наличии сопротивления (задачи 853, 855, 858, 859, 860); б) при отсутствии сопротивления (задачи 854, 857, 861).

§ 1. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

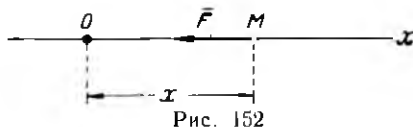
(задачи 825—842)

Пусть материальная точка M массы m движется прямолинейно под действием силы $\vec{F}$, притягивающей ее к неподвижному центру O и пропорциональной расстоянию движущейся точки от центра O . Следовательно,

$$F = c \cdot OM,$$

где c — постоянный коэффициент пропорциональности.

Силу $\vec{F}$ назовем восстанавливающей силой. Если выбрать за ось x прямолинейную траекторию точки M , поместив начало



координат в точке O , то (рис. 152) дифференциальное уравнение движения точки M запишется так:

$$\frac{md^2x}{dt^2} = -cx,$$

где x — абсцисса точки, или $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{c}{m}x = 0$.

Обозначив $\frac{c}{m}$ через k^2 , получим:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0, \quad (125)$$

это — линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка. Так как корни характеристического уравнения $u^2 + k^2 = 0$ являются мнимыми, то общий интеграл этого дифференциального уравнения имеет следующий вид:

$$x = A \cos(kt) + B \sin(kt), \quad (126)$$

где A и B — произвольные постоянные, которые определяются по начальным условиям движения.

Если при $t=0$, $x=x_0$, $v=v_0$, то $A=x_0$ и $B=\frac{v_0}{k}$, следовательно,

$$x = x_0 \cos kt + \frac{v_0}{k} \sin kt. \quad (127)$$

Общий интеграл уравнения (125) можно представить и так:

$$x = a \sin(kt + \alpha), \quad (128)$$

где a и α — постоянные, определяемые по начальным условиям движения при помощи следующих формул:

$$\left. \begin{aligned} a &= \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{k^2}} \text{ — амплитуда колебаний,} \\ \alpha &= \arctg \frac{kx_0}{v_0} \text{ — начальная фаза,} \end{aligned} \right\} \quad (129)$$

Уравнение (128) есть уравнение гармонических колебаний с круговой (циклической) частотой k .

Период этих колебаний T определяется по формуле

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}. \quad (130)$$

Пример 116. Груз весом $P = 20$ н подвешен на пружине, которая в естественном состоянии имеет длину $l_0 = 40$ см.

Статическое удлинение пружины под действием этого груза равно 4 см. Груз приведен в положение M_0 и отпущен без начальной скорости.

Определить период колебаний груза и наибольшую силу натяжения пружины, если $AM_0 = 42$ см (рис. 153).

Решение. Ось x направим по вертикали вниз, а начало координат O выберем в положении равновесия груза, т. е. в том положении, где вес груза и реакция пружины уравновешиваются.

Статическое удлинение пружины, соответствующее положению равновесия груза, обозначим λ_{cr} , а удлинение пружины, соответствующее положению M груза, обозначим λ . Тогда

$$\lambda = \lambda_{cr} + x.$$

Так как реакция пружины пропорциональна ее удлинению, то

$$F = c\lambda = c(\lambda_{cr} + x),$$

где c — постоянный коэффициент пропорциональности, называемый жесткостью пружины.

В положении равновесия модуль силы F равен весу груза; поэтому

$$c\lambda_{cr} = F_{cr} = P,$$

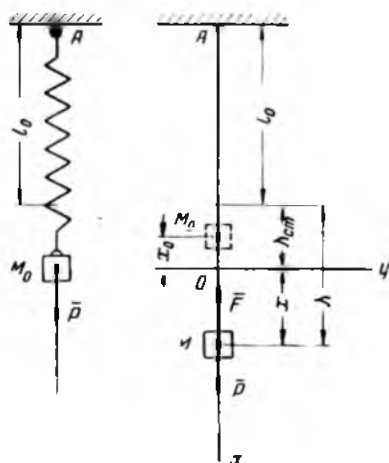


Рис 153

откуда

$$c = \frac{P}{\lambda_{\text{ст}}} = \frac{20}{4} = 5 \text{ н/см.}$$

Дифференциальное уравнение движения груза имеет следующий вид:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = P - F \text{ или } m \frac{d^2 x}{dt^2} = P - c(\lambda_{\text{ст}} + x).$$

Но $P = c\lambda_{\text{ст}}$, поэтому $m \frac{d^2 x}{dt^2} = -cx$, или

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x = 0, \text{ где } k^2 = \frac{c}{m}.$$

Мы получили дифференциальное уравнение (125) гармонических свободных колебаний.

Отсюда следует, что груз, подвешенный на пружине, будет совершать гармонические колебания около начала координат, т. е. около равновесного положения. Период этих колебаний найдем по формуле (130):

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}},$$

но $m = \frac{P}{g}$ и $c = \frac{P}{\lambda_{\text{ст}}}$, поэтому

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\lambda_{\text{ст}}}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}.$$

Амплитуду колебаний определяем по формуле (129):

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{k^2}}.$$

По условию задачи $x_0 = -2 \text{ см}$ и $v_0 = 0$, поэтому $a = 2 \text{ см}$. Следовательно,

$$\lambda_{\text{max}} = \lambda_{\text{ст}} + a = 6 \text{ см}$$

и

$$F_{\text{max}} = c\lambda_{\text{max}} = 5 \cdot 6 = 30 \text{ н.}$$

Пример 117. К свободному концу A упругой горизонтальной балки, другой конец которой закреплен неподвижно, подвешен на пружине груз весом P . Упругая сила балки пропорциональна стреле прогиба f , а сила натяжения пружины пропорциональна ее удлинению λ , причем жесткость балки равна c_1 , а жесткость пружины равна c_2 . Определить период колебаний груза, пренебрегая массами балки и пружины (рис. 154).

Решение. Как и в предыдущей задаче, ось x направим по вертикали вниз, а начало координат O выберем в положении равновесия груза. Если статический прогиб балки, т. е. ее прогиб при равновесии груза, обозначим $f_{\text{ст}}$, естественную

длину пружины обозначим l_0 , а ее статическое удлинение $\lambda_{ст}$, то (рис. 154)

$$A_0A = f_{ст} \text{ и } AO = l_0 + \lambda_{ст}.$$

Прогиб балки в некоторый момент t , когда груз занимает положение M , обозначим f . Длина пружины в этот момент, как видно из рис. 154. б, равна

$$l = AM = A_0M - A_0A = A_0O + OM - A_0A = f_{ст} + l_0 + \lambda_{ст} + x - f.$$

Следовательно, удлинение пружины

$$\lambda = l - l_0 = x - f + f_{ст} + \lambda_{ст}.$$

К грузу M приложены две силы: вес P и реакция пружины F , причем $F = c_2\lambda$. Если пренебречь массой пружины, то силы натяжения пружины на ее концах будут равны; следовательно,

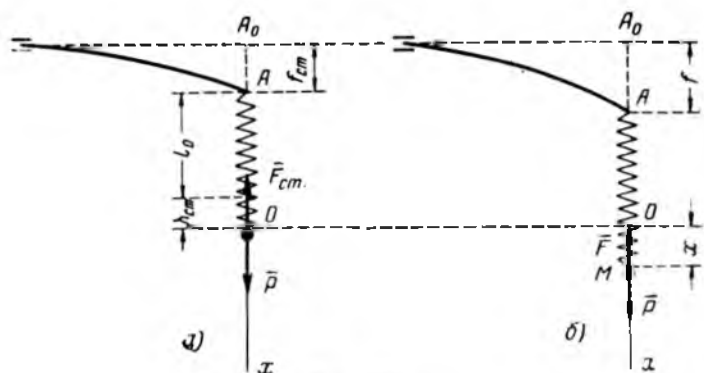


Рис. 154

к концу A балки приложена сила, равная $c_2\lambda$. С другой стороны, если пренебречь массой балки, то приложенная к ней в точке A реакция пружины будет c_1f , а потому $c_1f = c_2\lambda$.

Отсюда $f = \frac{c_2}{c_1}\lambda$, и, следовательно,

$$\lambda = x - \frac{c_2}{c_1}\lambda + f_{ст} + \lambda_{ст},$$

или

$$\frac{c_1 + c_2}{c_1}\lambda = x + f_{ст} + \lambda_{ст}.$$

В положении равновесия груза имеем:

$$c_2\lambda_{ст} = c_1f_{ст} = P,$$

откуда $f_{ст} = \frac{P}{c_1}$ и $\lambda_{ст} = \frac{P}{c_2}$

поэтому

$$\frac{c_1 + c_2}{c_1} \lambda = x + P \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \right) = x + \frac{c_1 + c_2}{c_1 c_2} P,$$

отсюда

$$\lambda = \frac{c_1}{c_1 + c_2} x + \frac{P}{c_2}.$$

Дифференциальное уравнение движения груза по оси x имеет вид:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = P - F = P - c_2 \lambda.$$

Подставляя значение λ , получим:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = - \frac{c_1 c_2}{(c_1 + c_2)} x,$$

или

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x = 0, \quad \text{где} \quad k^2 = \frac{c_1 c_2}{m (c_1 + c_2)},$$

т. е. получаем дифференциальное уравнение (125) гармонических колебаний с частотой k .

Отсюда следует, что искомый период колебаний груза

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{m (c_1 + c_2)}{c_1 c_2}},$$

или

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{P}{g} \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \right)} = 2\pi \sqrt{\frac{\lambda_{ст} + J_{ст}}{g}}.$$

§ 2. ЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ

(задачи 843—852)

Если материальная точка M массы m движется по оси Ox под действием восстанавливающей силы F , притягивающей эту точку к неподвижному центру O в *сопротивляющейся среде*, то на эту точку, кроме силы $\bar{F}$, действует еще сила сопротивления $\bar{R}$, пропорциональная скорости v точки M , т. е.

$$\bar{R} = -\mu \bar{v},$$

где μ — постоянный коэффициент пропорциональности (рис. 155). Тогда $R_x = -\mu v_x = -\mu \frac{dx}{dt}$ и дифференциальное уравнение движения точки под действием восстанавливающей силы в сопротивляющейся среде принимает вид:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -cx - \mu \frac{dx}{dt}.$$

Введем обозначения: $\frac{c}{m} = k^2$ и $\frac{n}{m} = 2n$. Тогда имеем

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x + 2n \frac{dx}{dt} = 0. \quad (131)$$

Если $k > n$, то движение точки является колебательным и общее решение этого уравнения имеет вид:

$$x = e^{-nt} (A \cos k_1 t + B \sin k_1 t) = e^{-nt} \cdot a \sin(k_1 t + \alpha), \quad (132)$$

где $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$.

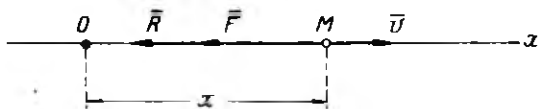


Рис. 155

Постоянные A и B (либо a и α) определяются по начальной скорости v_0 и начальной координате x_0 следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} A &= x_0, \quad B = \frac{v_0 + nx_0}{k_1}, \\ \text{либо} \quad a &= \frac{1}{k_1} \sqrt{k_1^2 \cdot x_0^2 + (v_0 + nx_0)^2}, \\ \alpha &= \arctg \frac{k_1 x_0}{v_0 + nx_0}. \end{aligned} \right\} \quad (133)$$

Уравнение (131) есть уравнение затухающих колебаний. Период затухающих колебаний определяется по формуле

$$T = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}}. \quad (134)$$

Моменты времени, в которые точка получает максимальные отклонения от начала координат (положения равновесия), образуют арифметическую прогрессию с разностью, равной полупериоду $\frac{T}{2}$. Амплитуды затухающих колебаний образуют убывающую геометрическую прогрессию, знаменатель которой называется декрементом затухания и обозначается буквой D , причем

$$D = e^{-\frac{\pi n}{k_1}} = e^{-\frac{\pi T}{2}}. \quad (135)$$

Величина $\ln D$ называется логарифмическим декрементом.

Пример 118 Материальная точка совершает прямолинейные колебания в сопротивляющейся среде под действием силы, пропорциональной расстоянию от этой точки до неподвижного центра O . Сила сопротивления среды пропорциональна скорости точки. В начальный момент $x_0 = 0$ и $v_0 = 1$ м/сек. Зная, что

период колебаний $T = 2$ сек, а декремент затухания $D = \frac{1}{2}$, найти закон движения точки (рис. 156).

Решение. Выберем начало координат в неподвижном центре O ; ось x направим по прямолинейной траектории точки, силу притяжения к центру O обозначим $\vec{F}$, а силу сопротивления среды обозначим $\vec{R}$. Тогда

$$F_x = -cx, \quad R_x = -\mu \frac{dx}{dt},$$

где c и μ — постоянные коэффициенты; дифференциальное уравнение движения точки имеет вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} + k^2 x = 0,$$

где $2n = \frac{\mu}{m}$ и $k^2 = \frac{c}{m}$, а m — масса точки.

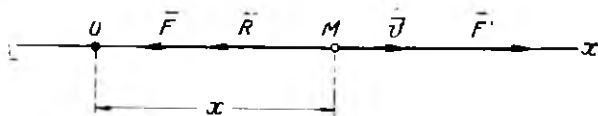


Рис. 156

Решение этого уравнения найдем по формулам (132) и (133):

$$x = e^{-nt} \left(x_0 \cos k_1 t + \frac{v_0 + nx_0}{k_1} \sin k_1 t \right),$$

или, подставив значения x_0 и v_0 , получим:

$$x = e^{-nt} \frac{1}{k_1} \sin k_1 t.$$

Чтобы найти постоянные k_1 и n , воспользуемся формулами (134) и (135):

$$T = \frac{2\pi}{k_1} = 2 \text{ сек} \quad \text{и} \quad D = e^{-\frac{nT}{2}} = \frac{1}{2},$$

отсюда

$$k_1 = \pi \quad \text{и} \quad e^{-n} = \frac{1}{2}, \quad \text{или} \quad n = \ln 2.$$

Закон движения точки принимает вид:

$$x = \frac{e^{-t \ln 2} \sin \pi t}{\pi},$$

но

$$e^{-t \ln 2} = 2^{-t},$$

поэтому

$$x = \frac{2^{-t} \sin \pi t}{\pi}.$$

§ 3. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

(задачи 853—861)

Если на материальную точку M , движущуюся по оси x , кроме силы F , пропорциональной расстоянию x , и силы сопротивления среды, пропорциональной скорости v , действует еще некоторая периодически изменяющаяся сила F' , которую назовем возмущающей силой (рис. 156), то дифференциальное уравнение движения точки запишется так:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} + cx = F'.$$

Пусть, например, возмущающая сила изменяется по закону

$$F' = H \sin(pt + \beta).$$

Тогда, полагая $\frac{H}{m} = h$ и сохраняя обозначения, принятые в предыдущем параграфе, получим:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} + k^2x = h \sin(pt + \beta). \quad (136)$$

При $k > n$ общее решение этого уравнения имеет вид:

$$x = ae^{-nt} \sin(k_1t + \alpha) + b \sin(pt + \beta + \gamma), \quad (137)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \gamma &= -\frac{2np}{k^2 - p^2}, \\ b &= \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (138)$$

Первый член правой части равенства (137) представляет собой затухающие колебания, а второй — так называемые вынужденные колебания.

Постоянные a и α определяются по начальным условиям движения. Если $k^2 > 2n^2$, то при

$$p = \sqrt{k^2 - 2n^2} \quad (139)$$

амплитуда вынужденных колебаний достигает максимума, равного

$$b_{\max} = \frac{h}{2n \sqrt{k^2 - n^2}}. \quad (140)$$

При отсутствии сопротивления $R = 0$, а следовательно, и $n = 0$: дифференциальное уравнение движения точки принимает вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = h \sin(pt + \beta). \quad (141)$$

Полагая в равенствах (137), (138) $n=0$, имеем его общее решение:

$$x = a \sin(kt + \alpha) + b \sin(pt + \beta),$$

где

$$b = \frac{h}{k^2 - p^2} \quad \text{при } k \neq p. \quad (142)$$

Первый член последнего равенства представляет собой свободные колебания, второй член — вынужденные.

Если частоты свободных и вынужденных колебаний совпадают, т. е. если $p=k$, то возникает резонанс, тогда решение уравнения (141) представляется в виде

$$x = a \sin(kt + \alpha) - \frac{ht}{2p} \cos(pt + \beta). \quad (143)$$

В этом случае амплитуда вынужденных колебаний неограниченно возрастает с возрастанием t .

Пример 119. Тело весом $P=49$ н, погруженное в жидкость, подвешено на пружине, статическое удлинение которой под действием веса этого тела равно 1 см.

Свободный конец пружины совершает вертикальные колебания около неподвижной точки A_0 по закону $y_A = A_0 A = 0,05 \sin 5\pi t$, причем y_A выражено в метрах, t — в секундах.

Сила сопротивления жидкости при движении груза пропорциональна его скорости v и при $v=1$ м/сек равна 15,7 н. Найти амплитуду вынужденных колебаний (рис. 157).

Решение. Выберем начало координат O в положении равновесия тела, предполагая при этом,

что конец A пружины находится в точке A_0 ; тогда $A_0 O = l_0 + \lambda_{ст}$, где l_0 — длина недеформированной пружины, $\lambda_{ст}$ — ее статическое удлинение.

Ось y направим по вертикали вниз. В некоторый момент t , когда тело занимает положение M , длина пружины

$$l = l_0 + \lambda_{ст} + y - A_0 A,$$

а ее удлинение

$$\lambda = l - l_0 = \lambda_{ст} + y - A_0 A = \lambda_{ст} + y - 0,05 \sin 5\pi t.$$

Если жесткость пружины обозначим c , то реакция пружины

$$F = c\lambda = c\lambda_{ст} + cy - 0,05c \sin 5\pi t,$$

но $c\lambda_{ст} = P$, поэтому

$$F = P + cy - 0,05c \sin 5\pi t.$$

Сила сопротивления жидкости

$$\bar{R} = -\mu \bar{v},$$

где μ — коэффициент пропорциональности, $\bar{v}$ — скорость тела.

Дифференциальное уравнение движения тела имеет вид:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = P - F - \mu \frac{dy}{dt} = -cy + 0,05c \sin 5\pi t - \mu \frac{dy}{dt},$$

или

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2n \frac{dy}{dt} + k^2 y = h \sin 5\pi t,$$

где

$$2n = \frac{\mu}{m},$$

$$k^2 = \frac{c}{m},$$

$$h = \frac{0,05c}{m} = 0,05 k^2.$$

Мы получили дифференциальное уравнение (136), в котором нужно положить $p = 5\pi$ и $\beta = 0$. Поэтому искомую амплитуду вынужденных колебаний находим по формуле (138):

$$b = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}} = \frac{0,05k^2}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}};$$

разделив числитель и знаменатель на k^2 , получим:

$$b = \frac{0,05}{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{k^2}\right)^2 + 4 \frac{n^2}{k^2} \frac{p^2}{k^2}}}.$$

Подставим числовые значения входящих сюда величин:

$$m = \frac{p}{g} = \frac{49}{9,8} = 5 \text{ кг}; \quad \mu = 15,7 \frac{\text{н·сек}}{\text{м}}; \quad n = \frac{\mu}{2m} = 1,57;$$

$$c = \frac{P}{\lambda_{ст}} = \frac{49}{0,01} = 4900 \frac{\text{н}}{\text{м}}; \quad k^2 = \frac{c}{m} = 980; \quad p = 5\pi; \quad \frac{p^2}{k^2} = \frac{25\pi^2}{980} = \frac{1}{4}.$$

Следовательно,

$$b = \frac{0,05}{\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{(1,57)^2}{980}}} \text{ м} \approx 6,7 \text{ см.}$$

Пример 120. Колеблющаяся масса вибрационного грохота, установленного на наклонной плоскости с углом наклона α (рис. 158, а), приводится в движение при помощи двух пружин жесткостью c н/м каждая, соединенных с ползуном B кривошипно-шатунного механизма. Длина l шатуна AB значительно больше длины r кривошипа OA , так что первой и более высокими степенями отношения $\frac{r}{l}$ можно пренебречь, т. е. можно считать, что ползун B движется по тому же закону, что и проекция A' пальца A кривошипа на ось x . Вес грохота равен G н. Определить вынужденные колебания грохота, пренебрегая потерями на трение, если кривошип вращается по закону $\varphi = \omega t$. При каком числе оборотов в минуту кривошипа наступит резонанс?

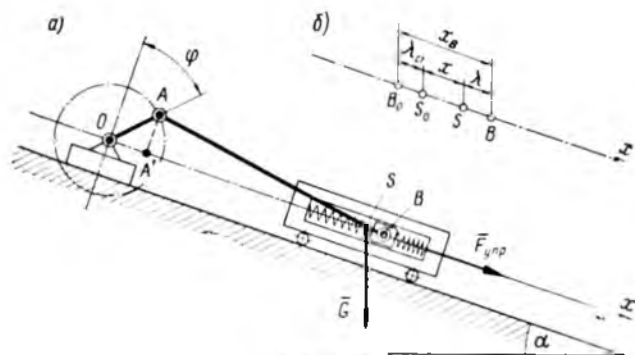


Рис. 158

Решение. Обозначим среднее положение ползуна (при $\varphi = 0$) через B_0 , а смещение ползуна из этого положения — через x_B тогда имеем:

$$x_B = B_0B \approx OA' = r \sin \varphi = r \sin \omega t.$$

Смещение x центра тяжести грохота отсчитываем от того положения S_0 , в котором он находился бы при среднем положении ползуна, если бы система оставалась в покое. Очевидно,

$$B_0S_0 = \lambda_{ст} = \frac{G \sin \alpha}{2c},$$

т. е. B_0S_0 — статическая деформация пружин привода грохота под действием составляющей его веса, направленной вдоль наклонной плоскости. Отсюда деформация пружин (см. рис. 158, б, где смещения ползуна и грохота показаны в увеличенном масштабе) выразится следующим образом:

$$\lambda = x_B - x - \lambda_{ст},$$

а потому проекция силы упругости пружины на ось x определяется так:

$$X_{\text{упр}} = 2c\lambda = 2c(x_H - x - \lambda_{\text{ст}}).$$

Отсюда получаем дифференциальное уравнение движения груза:

$$\frac{G}{g} \ddot{x} = X_{\text{упр}} + X_{\text{весл}} = 2c(x_H - x - \lambda_{\text{ст}}) + \\ + G \sin \alpha = 2cx_H - 2cx = 2cr \sin \omega t - 2cx,$$

или

$$\ddot{x} + \frac{2cg}{G} x = \frac{2cg}{G} r \sin \omega t.$$

Вводя обозначения $\frac{2cg}{G} = k^2$ и $\frac{2cg}{G} r = h$, имеем:

$$\ddot{x} + k^2 x = h \sin \omega t.$$

Отсюда на основании уравнения (141) получаем:

$$x = \frac{h}{k^2 - \omega^2} \sin \omega t = \frac{r}{1 - \left(\frac{\omega}{k}\right)^2} \sin \omega t.$$

Резонанс наступает при $\omega = \omega_{\text{кр}} = k$, откуда

$$n_{\text{кр}} = \frac{30\omega_{\text{кр}}}{\pi} = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{2cg}{G}} = 30 \sqrt{\frac{2cg}{\pi^2 G}} = 300 \sqrt{\frac{2c}{G}} = 424 \sqrt{\frac{c}{G}}.$$

Пример 121. Материальная точка массой $m = 50$ кг движется по горизонтальной прямой, притягиваясь к неподвижному центру O силой $\bar{F}$, пропорциональной расстоянию точки от этого центра, причем коэффициент пропорциональности $c = 200$ н/м. Кроме того, на точку действует возмущающая сила

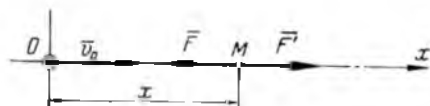


Рис. 159

$F' = 2 \sin 2t$, выраженная в ньютонах. Найти закон движения точки если в начальный момент $x = x_0 = 0$, $v = v_0 = 1$ см/сек и возмущающая сила F' в начале движения (при $t < \frac{\pi}{2}$) совпадает по направлению с начальной скоростью (рис. 159).

Решение. Выбирая начало координат в центре O и направляя ось Ox по траектории точки в сторону ее начальной скорости, составляем дифференциальное уравнение движения точки:

$$50\ddot{x} = -200x + 2 \sin 2t \quad \text{или} \quad \ddot{x} + 4x = 0,04 \sin 2t,$$

т. е. получаем уравнение (141), в котором

$$k^2 = 4, \quad h = 0,04, \quad p = 2, \quad \beta = 0.$$

Так как частоты свободных и вынужденных колебаний совпадают ($k = p = 2$), то возникает резонанс и закон движения точки определяется уравнением (143):

$$x = a \sin(kt + \alpha) - \frac{ht}{2k} \cos(kt + \beta) = a \sin(2t + \alpha) - 0,01t \cos 2t,$$

откуда

$$v = \dot{x} = 2a \cos(2t + \alpha) + 0,02t \sin 2t - 0,01 \cos 2t.$$

Пользуясь начальными условиями ($t_0 = 0$, $x_0 = 0$; $v_0 = 1$ см/сек $= 0,01$ м/сек), имеем:

$$x_0 = a \sin \alpha = 0; \quad v_0 = 2a \cos \alpha - 0,01 = 0,01.$$

Следовательно,

$$\alpha = 0, \quad a = \frac{0,02}{2} = 0,01.$$

Таким образом,

$$x = 0,01 (\sin 2t - t \cos 2t).$$

Глава III

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ И ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА ДЛЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

§ 1. ТЕОРЕМА О КОЛИЧЕСТВЕ ДВИЖЕНИЯ

Теорему о количестве движения материальной точки можно выразить в векторной или в скалярной форме.

В векторной форме теорему о количестве движения можно выразить двумя способами:

а) дифференциал количества движения материальной точки равен элементарному импульсу силы, действующей на эту точку:

$$d(m\bar{v}) = \bar{F}dt = d\bar{S}; \quad (144)$$

б) изменение количества движения материальной точки за некоторый конечный промежуток времени $t - t_0$ равно полному импульсу действующей силы за тот же промежуток времени:

$$m\bar{v} - m\bar{v}_0 = \int_{t_0}^t \bar{F}dt = \bar{S}. \quad (145)$$

Скалярное выражение теоремы о количестве движения в дифференциальной или конечной форме получаем, проецируя векторное равенство (144) или векторное равенство (145) на каждую из трех неподвижных координатных осей:

$$\left. \begin{aligned} d(mv_x) &= Xdt = dS_x; \\ d(mv_y) &= Ydt = dS_y; \\ d(mv_z) &= Zdt = dS_z. \end{aligned} \right\} \quad (146)$$

$$\left. \begin{aligned} mv_x - mv_{0x} &= \int_0^t Xdt = S_x; \\ mv_y - mv_{0y} &= \int_0^t Ydt = S_y; \\ mv_z - mv_{0z} &= \int_0^t Zdt = S_z. \end{aligned} \right\} \quad (147)$$

В случае движения материальной точки по прямой линии, которую примем за ось x , имеем (рис. 160):

$$d(mv) = Xdt, \quad (148)$$

$$mv - mv_0 = \int_0^t Xdt, \quad (149)$$

где v — алгебраическое значение скорости, $X = +F$ или $X = -F$ в зависимости от направления силы, причем F — равнодействующая всех сил, приложенных к точке. Задачи этого параграфа можно разделить на три основных типа:

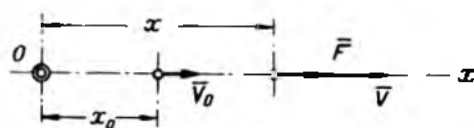


Рис. 160

1) задачи, относящиеся к прямолинейному движению точки, в которых требуется определить или скорость точки, или время движения, или действующую силу;

2) задачи, относящиеся к криволинейному движению точки, в которых требуется определить ее скорость или время движения;

3) задачи, в которых по заданному изменению количества движения материальной точки требуется определить импульс действующей на нее силы.

Задачи типа I

Задачи этого типа можно разделить на три группы:

- 1) задачи, в которых сила, приложенная к материальной точке (или равнодействующая всех приложенных сил), постоянна;
- 2) задачи, в которых сила, приложенная к материальной точке (или равнодействующая всех приложенных сил), есть функция времени;
- 3) задачи, в которых сила, приложенная к материальной точке (или равнодействующая всех приложенных сил), есть функция скорости этой точки.

Первая группа

Движение точки происходит под действием постоянной силы, т. е. $X = \pm F = \text{const}$. В этом случае можно применить теорему о количестве движения в конечной или интегральной форме (149), причем отсчет времени здесь можно вести от нуля:

$$mv - mv_0 = \int_{t_0=0}^t X dt = \lambda t. \quad (150)$$

Отсюда нетрудно определить одну из трех величин v , F или t , если две другие заданы.

Применяя теорему о количестве движения к прямолинейному движению точки, ось x удобнее всегда направлять в сторону начальной скорости точки, а если начальная скорость равна нулю, то в сторону силы, действующей на точку.

Пример 122. Вагонетка, вес которой вместе с полезной нагрузкой $P = 8500$ н, при движении по горизонтальному пути испытывает сопротивление, величина которого составляет 0,01 от всех вертикальных нагрузок. Рабочий толкает вагонетку с силой $F = 170$ н (рис. 161).

Через сколько времени рабочий сообщит вагонетке скорость $v = 0,6$ м/сек?

Решение. На вагонетку действуют: 1) вертикальная сила тяжести $P = 8500$ н, 2) нормальная реакция N рельсов, 3) горизонтальная сила $F = 170$ н, с которой рабочий толкает вагонетку, 4) горизонтальная сила сопротивления:

$$F' = 0,01 P.$$

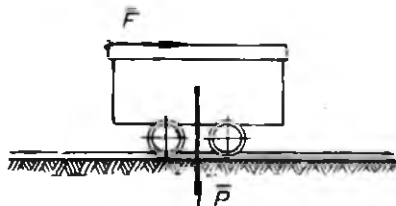


Рис. 161

В данной задаче имеется не материальная точка, а система тел (кузов вагонетки, полезная нагрузка, колесные скаты), ко-

торые связаны друг с другом. Пренебрегая вращательным дви-

женнем скатов, можно считать, что все части рассматриваемой системы движутся поступательно вместе с кузовом вагонетки. При этом можно считать, что масса вагонетки сосредоточена в центре ее тяжести и в центре тяжести приложена равнодействующая всех сил, действующих на вагонетку (справедливость этих допущений доказывается в динамике системы).

Таким образом, данная задача о движении системы сводится к задаче о движении материальной точки (центра тяжести вагонетки), на которую действует сила

$$\bar{R} = \bar{P} + \bar{F} + \bar{N} + \bar{F}'.$$

Обозначая проекцию силы $\bar{R}$ на направление движения вагонетки через X , имеем:

$$X = F - F' = F - 0,01P = 170 - 85 = 85 \text{ н} = \text{const.}$$

Теперь применяем теорему о количестве движения:

$$mv - mv_0 = Xt,$$

откуда, учитывая, что $v_0 = 0$ и что $m = \frac{P}{g}$, находим:

$$t = \frac{mv}{X} = \frac{Pv}{X} = \frac{500 \cdot 0,6}{9,8 \cdot 85} = 6,1 \text{ сек.}$$

Вторая группа

Движение точки происходит под действием силы, которая является функцией времени, т. е. $X = f(t)$. В этом случае теорему о количестве движения тоже применяют в конечной форме, но отсчет времени здесь не всегда можно вести от нуля. В общем случае имеем:

$$mv - mv_0 = \int_{t_0}^t f(t) dt = \eta(t), \quad (151)$$

отсюда находим скорость:

$$v = v_0 + \frac{1}{m} \eta(t). \quad (152)$$

Если в задаче требуется определить время, то это уравнение нужно разрешить относительно t . Если же нужно найти закон движения точки, то это уравнение нужно проинтегрировать, заменив скорость v на $\frac{dx}{dt}$.

Пример 123. На тело весом $P = 20 \text{ н}$, находящееся в покое на горизонтальной плоскости, действует вертикальная сила F , возрастающая от нуля пропорционально времени, причем коэффициент пропорциональности равен 2 н/сек (рис. 162). Через

сколько времени после начала действия силы F тело начинает двигаться? Найти закон этого движения.

Решение. На тело, пока оно находится в покое, действуют три силы: сила тяжести $P=20$ н, сила $F=2t$ и нормальная реакция N плоскости AB . В момент начала движения сила N , очевидно, обращается в нуль, и с этого момента на тело действуют только две силы: $\vec{F}$ и $\vec{P}$. Проекция равнодействующей сил, приложенных к телу с момента начала движения, на ось x , по которой будет двигаться центр тяжести тела, выразится так:

$$X = F - P = 2t - 20 = 2(t - 10).$$

Это выражение для X справедливо только с момента $t = 10$ сек, когда движущая сила F станет равна силе тяжести P , ибо до этого момента на тело действует, как мы уже отмечали, еще третья сила $\vec{N}$.

Так как в данном случае $X = f(t)$, то для решения задачи можно применить теорему о количестве движения в конечной форме. Учитывая,

что $m = \frac{P}{g} = \frac{20}{9.8} = \frac{10}{4.9}$ и $v_0 = 0$, имеем:

$$\frac{10}{4.9} v = \int_{10}^t X dt = \int_{10}^t 2(t - 10) dt = \left| (t - 10)^2 \right|_{10}^t = (t - 10)^2,$$

откуда

$$v = 0.49(t - 10)^2,$$

по

$$v = \frac{dx}{dt},$$

следовательно,

$$dx = 0.49(t - 10)^2 dt.$$

Выбирая начало координат в начальном положении центра тяжести тела, т. е. полагая $x_0 = 0$, получаем:

$$x = \int_{10}^t 0.49(t - 10)^2 dt = 0.49 \left| \frac{(t - 10)^3}{3} \right|_{10}^t = 0.163(t - 10)^3.$$

Итак, движение начинается через 10 сек после начала действия силы F , причем $x = 0.163(t - 10)^3$. Заметим, что полученное уравнение справедливо только с момента $t = 10$ сек.

Третья группа

Движение точки происходит под действием силы, зависящей от скорости, т. е. $X = f(v)$. В этом случае теорему о количестве движения следует применять в дифференциальной форме (148):

$$d(mv) = Xdt = f(v)dt,$$

или

$$m \frac{dv}{f(v)} = dt,$$

отсюда находим время:

$$t = m \int_{v_0}^v \frac{dv}{f(v)} = m\varphi(v).$$

Если в задаче требуется определить скорость, то это уравнение нужно разрешить относительно v .

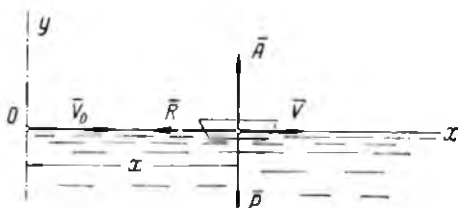


Рис. 163

Пример 124. В тот момент, когда скорость моторного судна равна v_0 , выключается мотор, и судно движется, испытывая сопротивление воды, величина которого пропорциональна скорости, причем коэффициент пропорциональности равен μ : масса судна равна m . Через какой промежуток времени скорость судна уменьшится вдвое (рис. 163)?

Решение. Вес судна P уравнивается архимедовой силой A . В горизонтальном направлении действует одна только сила сопротивления воды $\bar{R}$, направленная в сторону, противоположную скорости судна. Направляя ось x в сторону движения, имеем:

$$X = -\mu v,$$

т. е. X является функцией от v . Поэтому применяем теорему о количестве движения в дифференциальной форме (148):

$$d(mv) = Xdt = -\mu vdt.$$

Разделяя переменные, получим:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{\mu}{m} dt.$$

Теперь интегрируем в соответствующих пределах:

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = -\frac{\mu}{m} \int_0^t dt,$$

откуда

$$\left[\ln v \right]_{v_0}^v = -\frac{\mu}{m} t,$$

или

$$\ln v - \ln v_0 = -\frac{\mu}{m} t.$$

или

$$\ln \frac{v}{v_0} = -\frac{\mu}{m} t.$$

Отсюда находим:

$$t = -\frac{m}{\mu} \ln \frac{v}{v_0} = \frac{m}{\mu} \ln \frac{v_0}{v} = \frac{m}{\mu} \ln \frac{v_0}{0.5 v_0} = \frac{m}{\mu} \ln 2.$$

Задачи типа II

Задачи этого типа, в которых рассматривается криволинейное движение точки и требуется найти скорость точки или время движения, можно разделить на такие же три группы, как и задачи первого типа:

1) движение происходит под действием постоянной силы;

2) движение происходит под действием силы, зависящей от времени;

3) движение происходит под действием постоянной силы в среде, сопротивление которой пропорционально первой степени скорости.

В этих трех случаях теорема о количестве движения дает первые интегралы дифференциальных уравнений движения. В первом и во втором случаях, т. е. когда сила постоянна или является функцией времени, теорема применяется в конечной форме, выражаемой уравнениями (147). Из уравнений (147) по заданным проекциям силы находят проекции скорости на координатные оси. В третьем случае теорема применяется в дифференциальной форме.

Первая группа

Так как в этом случае сила $\vec{F} = \text{const}$, то и ее проекции на координатные оси x , y , z постоянны. Поэтому теорему о количестве движения можно применять в конечной форме (147).

Следовательно, имеем:

$$mv_x - mv_{0x} = Xt, \quad mv_y - mv_{0y} = Yt; \quad mv_z - mv_{0z} = Zt.$$

Из этих уравнений определяются проекции скорости, а затем и скорость $\bar{v}$. Наоборот, зная проекцию скорости на какую-либо ось, можно найти время.

Пример 125. Определить, пользуясь теоремой о количестве движения, время, в течение которого тело, брошенное под углом α_0 к горизонту с начальной скоростью v_0 , достигает максимальной высоты (рис. 164).

Решение. Координатные оси располагаем в плоскости движения тела, причем ось x направляем горизонтально, а ось

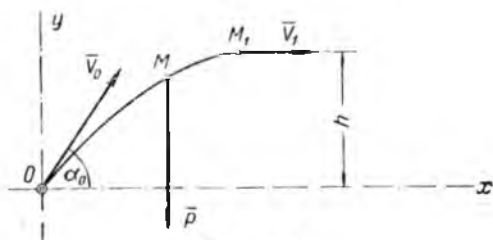


Рис. 164

y — вертикально вверх. Составим уравнение, выражающее изменение проекции количества движения на ось y :

$$mv_{1y} - mv_{0y} = S_y = - \int_0^{t_1} P dt = - mg \int_0^{t_1} dt = - mgt_1,$$

но $v_{1y} = 0$ (в наивысшей точке скорость тела горизонтальна), и $v_{0y} = v_0 \sin \alpha_0$, а потому $t_1 = \frac{v_0 \sin \alpha_0}{g}$.

Вторая группа

В этом случае сила F , а следовательно, и ее проекции на координатные оси являются известными функциями времени, т. е.

$$X = f_1(t); \quad Y = f_2(t); \quad Z = f_3(t).$$

Теорема о количестве движения применяется здесь в конечной форме (147).

Выполняя интегрирование, находим из этих уравнений проекции скорости, а затем и скорость $\bar{v}$.

Пример 126. На материальную точку массой $m = 2$ кг действует сила, проекции которой на координатные оси равны:

$$\begin{aligned} X &= 6 \cos 2t; \\ Y &= 6 \sin 2t; \\ Z &= -6 \sin 2t \end{aligned}$$

(сила выражена в н, время t — в сек).

Определить скорость $\bar{v}_2$ точки в момент $t_2 = \pi = 3,14$ сек, если в момент $t_1 = \frac{\pi}{2}$ сек ее скорость $\bar{v}_1$ равна по модулю 2 м/сек и составляет с координатными осями x , y , z углы, равные соответственно 30° , 60° и 90° .

Решение. Так как проекции силы на координатные оси являются функциями времени, то теорему о количестве движения можно применить в конечной форме (147). Для этого вычислим сначала проекции на координатные оси импульса действующей силы за промежуток времени от момента t_1 до момента t_2 :

$$S_x = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} X dt = 6 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(2t) dt = 3 \left| \sin 2t \right|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 0,$$

$$S_y = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} Y dt = 6 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(2t) dt = -3 \left| \cos 2t \right|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -6 \text{ н} \cdot \text{сек}.$$

Так как Z отличается от Y только знаком, то $S_z = 6 \text{ н} \cdot \text{сек}$. Далее на основании уравнений (147) получаем:

$$\begin{aligned} mv_{2x} - mv_{1x} &= S_x = 0, \\ mv_{2y} - mv_{1y} &= S_y = -6, \\ mv_{2z} - mv_{1z} &= S_z = 6. \end{aligned}$$

Отсюда при $m=2$ находим проекции искомой скорости:

$$\begin{aligned} v_{2x} &= v_{1x}, \\ v_{2y} &= v_{1y} - 3, \\ v_{2z} &= v_{1z} + 3. \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} v_{1x} &= v_1 \cdot \cos 30^\circ = \sqrt{3}, \\ v_{1y} &= v_1 \cdot \cos 60^\circ = 1, \\ v_{1z} &= v_1 \cdot \cos 90^\circ = 0, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} v_{2x} &= \sqrt{3}, \\ v_{2y} &= -2, \\ v_{2z} &= 3. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$v_2 = \sqrt{v_{2x}^2 + v_{2y}^2 + v_{2z}^2} = \sqrt{16} = 4 \text{ м/сек}.$$

Если углы вектора $\vec{v}_2$ с координатными осями обозначим α, β, γ , то

$$\cos \alpha = \frac{v_{2x}}{v_2} = \frac{\sqrt{3}}{4} = 0,4330,$$

$$\cos \beta = \frac{v_{2y}}{v_2} = -0,5,$$

$$\cos \gamma = \frac{v_{2z}}{v_2} = 0,75.$$

Отсюда $\alpha = 54^\circ 30'$, $\beta = 120^\circ$, $\gamma = 48^\circ 30'$.

Третья группа

В этом случае проекция силы на каждую из трех координатных осей является линейной функцией проекции скорости на ту же ось, и теорему о количестве движения применяют в форме (146).

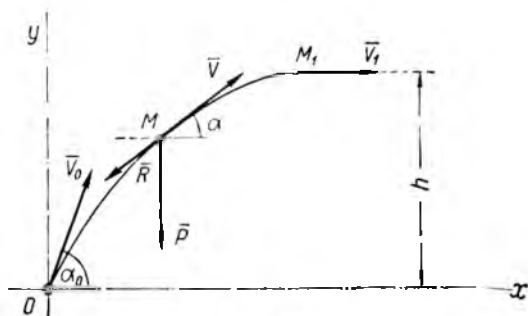


Рис. 165

Прежде чем интегрировать уравнения (146), надо разделить переменные, для чего достаточно эти уравнения разделить соответственно на X, Y, Z ; последующее решение аналогично решению в случае прямолинейного движения точки под действием силы, зависящей от скорости.

Пример 127. Решить пример 125, учитывая сопротивление воздуха, величина которого выражается формулой

$$R = kP \cdot v,$$

где k — постоянный коэффициент, P — вес тела, v — его скорость (рис. 165).

Решение. Координатные оси располагаем так же, как в примере 125 (см. рис. 164). Так как на тело действует сила, которая является функцией скорости, то теорему о проекции количества движения на ось y применяем в дифференциальной форме

$$d(mv_y) = Y dt;$$

но

$$Y = -P - R \sin \alpha = -P(1 + kv \sin \alpha) = -P(1 + kv_y).$$

Следовательно,

$$m dv_y = -mg(1 + kv_y) dt,$$

откуда

$$dt = - \frac{dv_y}{g(1 + kv_y)}.$$

Учитывая, что v_y изменяется в пределах от $v_0 \sin \alpha_0$ до нуля, имеем:

$$t_1 = - \int_{v_0 \sin \alpha_0}^0 \frac{dv_y}{g(1 + kv_y)} = \frac{1}{kg} \left| \ln(1 + kv_y) \right|_{v_0 \sin \alpha_0}^0 = \\ = \frac{1}{kg} \ln(1 + kv_0 \sin \alpha_0).$$

Задачи типа III

В задачах этого типа известно количество движения точки в начальный и конечный моменты, а следовательно, и его проекции на координатные оси. Проекции искомого импульса силы определяются по формулам (147), т. е.

$$S_x = mv_x - mv_{0x},$$

$$S_y = mv_y - mv_{0y},$$

$$S_z = mv_z - mv_{0z}.$$

По этим проекциям находятся модуль и направление импульса $\vec{S}$.

Пример 128. Материальная точка M перемещается по шероховатому криволинейному желобу, расположенному в вертикальной плоскости xOy , под

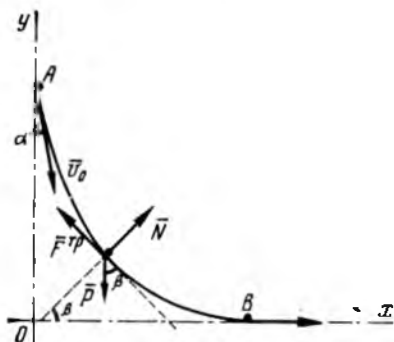


Рис. 166

действием собственного веса $\vec{P}$. Угол трения равен φ . Начальная скорость этой точки, когда она занимает положение A , составляет с вертикальной осью Oy угол α и по модулю равна v_0 , а ее конечная скорость в точке B направлена по горизонтальной оси Ox и по модулю равна v . Найти импульс нормальной реакции $\vec{N}$ желоба за промежуток времени t , в течение которого точка M переместилась из A в B (рис. 166).

Решение. Применим теорему о количестве движения ма-

териальной точки в форме (147):

$$m(v_x - v_{0x}) = \int_0^t X dt,$$

$$m(v_y - v_{0y}) = \int_0^t Y dt.$$

Здесь X и Y — проекции на оси x и y равнодействующей всех сил, приложенных к точке M , т. е. сил $\vec{P}$, $\vec{N}$ и силы трения $\vec{F}_{\text{тр}}$. Поэтому

$$X = P_x + N_x + F_{\text{тр}x} = N_x + F_{\text{тр}x},$$

$$Y = P_y + N_y + F_{\text{тр}y} = -P + N_y + F_{\text{тр}y}.$$

Кроме того, имеем:

$$F_{\text{тр}} = fN,$$

где f — коэффициент трения, $f = \tan \varphi$.

Если угол силы $\vec{N}$ с осью x обозначим β , то

$$N_x = N \cos \beta, \quad N_y = N \sin \beta, \quad F_{\text{тр}x} = -F_{\text{тр}} \cdot \sin \beta = -fN \sin \beta =$$

$$= -fN_y, \quad F_{\text{тр}y} = F_{\text{тр}} \cdot \cos \beta = fN \cos \beta = fN_x.$$

Следовательно, уравнения (147) принимают вид:

$$m(v - v_0 \sin \alpha) = \int_0^t N_x dt - f \int_0^t N_y dt,$$

$$mv_0 \cos \alpha = \int_0^t N_y dt + f \int_0^t N_x dt - Pt.$$

Так как

$$\int_0^t N_x dt = S_x \quad \text{и} \quad \int_0^t N_y dt = S_y,$$

где S_x , S_y — проекции искомого импульса $\vec{S}$ силы $\vec{N}$ на оси x и y , то:

$$S_x - fS_y = m(v - v_0 \sin \alpha),$$

$$fS_x + S_y = mv_0 \cos \alpha + Pt = m(v_0 \cos \alpha + gt).$$

Из этих уравнений можно найти S_x и S_y и затем по этим проекциям вычислить импульс S . Но проще возвести эти уравнения в квадрат и сложить их. Тогда получим:

$$(1 + f^2)(S_x^2 + S_y^2) = m^2[(v - v_0 \sin \alpha)^2 + (gt + v_0 \cos \alpha)^2].$$

Отсюда, замечая, что $S_x^2 + S_y^2 = S^2$ и

$$1 + f^2 = 1 + \tan^2 \varphi = \frac{1}{\cos^2 \varphi},$$

находим:

$$S = m \cos \varphi \int (v - v_0 \sin \alpha)^2 + (gt + v_0 \cos \alpha)^2 = \\ = \frac{P \cos \varphi}{g} \int (v - v_0 \sin \alpha)^2 + (gt + v_0 \cos \alpha)^2.$$

Т а б л и ц а 16

Классификация задач

Типы	Группы		
	1-я	2-я	3-я
I Определение времени или скорости при прямолинейном движении точки	Постоянная сила (задачи 733, 734, 737, 743)	Сила, зависящая от времени (задачи 694, 698)	Сила, зависящая от скорости (задачи 687, 691, 696)
II Определение времени или скорости при криволинейном движении точки	Постоянная сила	Сила, зависящая от времени	Движение точки в сопротивляющейся среде
III Определение импульса силы по изменению количества движения (задачи 741, 744)			

§ 2. ТЕОРЕМА О МОМЕНТЕ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

Момент количества движения материальной точки $m\vec{v}$ относительно некоторого центра O равен векторному произведению радиуса-вектора движущейся точки $\vec{r}$ на количество движения $m\vec{v}$, т. е.

$$\vec{m}_0(m\vec{v}) = \vec{r} \times m\vec{v}. \quad (153)$$

Очевидно, что модуль момента количества движения равен

$$|\vec{m}_0(m\vec{v})| = mvh, \quad (154)$$

где h — плечо вектора $\vec{v}$ относительно центра O (рис. 167).

Проектируя векторное равенство (153) на координатные оси, проходящие через центр O , получаем формулы для моментов количества движения материальной точки относительно этих

осей:

$$\begin{aligned} m_x(m\vec{v}) &= m(y\dot{z} - z\dot{y}); & m_y(m\vec{v}) &= m(z\dot{x} - x\dot{z}); \\ m_z(m\vec{v}) &= x\dot{y} - y\dot{x}. \end{aligned} \quad (155)$$

В векторной форме теорема о моменте количества движения выражается так: производная по времени от момента количества движения материальной точки относительно какого-либо неподвижного центра O равна моменту действующей силы относительно того же центра, т. е.

$$\frac{d}{dt} \bar{m}_O(m\vec{v}) = \bar{m}_O(\vec{F}). \quad (156)$$

Проектируя векторное равенство (156) на какую-либо из координатных осей, проходящих через центр O , получаем уравнение, выражающее ту же теорему в скалярной форме:

$$\frac{d}{dt} m_x(m\vec{v}) = m_x(\vec{F}), \quad (157)$$

т. е. производная по времени от момента количества движения материальной точки относительно какой-либо неподвижной оси

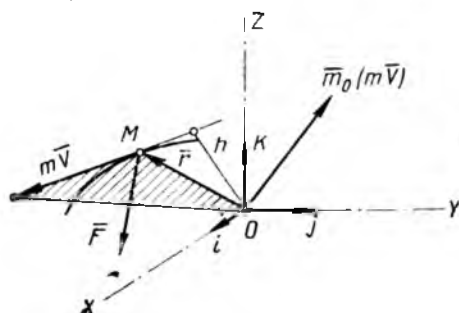


Рис. 167

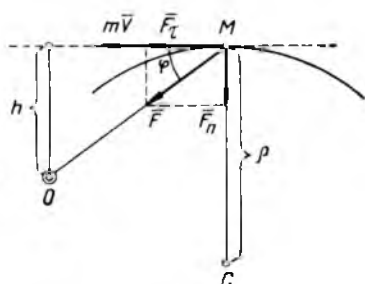


Рис. 168

равна моменту действующей силы относительно той же оси. Эта теорема имеет большое значение при решении задач в случае движения точки под действием центральной силы. Центральной силой называется такая сила, линия действия которой все время проходит через одну и ту же точку, называемую центром этой силы. Если материальная точка движется под действием центральной силы $\vec{F}$ с центром в точке O , то

$$\frac{d}{dt} \bar{m}_O(m\vec{v}) = \bar{m}_O(\vec{F}) = 0,$$

и, следовательно, $\bar{m}_O(m\vec{v}) = \text{const.}$ Таким образом, момент количества движения в данном случае остается постоянным по модулю и по направлению. Отсюда следует, что материальная точка под действием центральной силы описывает плоскую

кривую, расположенную в плоскости, проходящей через центр силы.

Если известна траектория, которую описывает точка под действием центральной силы, то, пользуясь теоремой о моменте количества движения, можно найти эту силу как функцию расстояния r от точки до центра силы.

Действительно, так как момент количества движения относительно центра силы остается постоянным, то, обозначая h плечо вектора $m\vec{v}$ относительно центра силы, имеем:

$$vh = \text{const.} \quad (158)$$

Для определения этой постоянной должна быть известна скорость точки в каком-либо месте траектории. С другой стороны, имеем (рис. 168):

$$F_n = F \sin \varphi = \frac{mv^2}{\varrho},$$

где ϱ — радиус кривизны траектории, φ — угол между радиусом-вектором точки и касательной к траектории в этой точке.

Отсюда

$$F = \frac{mv^2}{\varrho \cdot \sin \varphi} \quad (159)$$

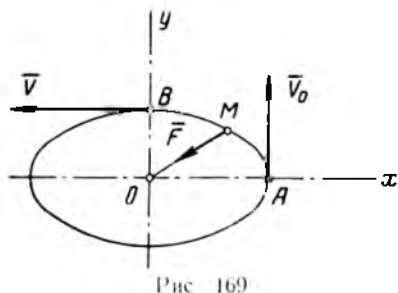


Рис. 169

Итак, имеем два уравнения (158) и (159) с двумя неизвестными v и F ; остальные величины, входящие в эти уравнения, т. е. h , ϱ и φ , являясь элементами заданной траектории, легко могут быть найдены. Таким образом, можно найти v и F как функции r .

Пример 129. Точка M описывает эллипс под действием центральной силы $\vec{F}$ (рис. 169). Скорость в вершине A равна $\vec{v}_0$. Найти скорость v в вершине B , если $OA = a$ и $OB = b$.

Решение. Так как в данном случае

$$m_0(m\vec{v}) = \text{const}, \text{ то } mvb = mv_0a, \text{ откуда } v = \frac{a}{b} v_0.$$

Пример 130. Точка M массы m описывает окружность радиуса a , пригнываясь точкой A этой окружности (рис. 170).

В начальный момент точка находится в положении B и имеет скорость v_0 . Определить скорость v точки и силу притяжения F как функции радиуса-вектора r .

Решение. Так как $m_A(\vec{F}) = 0$, то

$$m_A(m\vec{v}) = \text{const} = m_A(m\vec{v}_0),$$

следовательно,

$$mvh = mv_0 2a;$$

откуда

$$v = v_0 \frac{2a}{h}.$$

Но из рисунка имеем:

$$r = 2a \cos(90^\circ - \alpha) = 2a \sin \alpha,$$

откуда $\sin \alpha = \frac{r}{2a}$, поэтому $h = r \sin \alpha = \frac{r^2}{2a}$ и, следовательно,

$$v = \frac{4a^2 v_0}{r^2}.$$

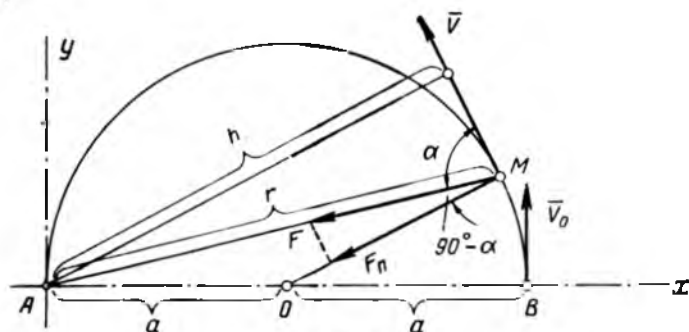


Рис. 170

Силу F находим, пользуясь уравнением (159):

$$F_n = F \sin \alpha = \frac{mv^2}{\varrho} = \frac{mv^2}{a},$$

отсюда

$$F = \frac{mv^2}{a \sin \alpha} = \frac{m}{a} \frac{16a^4 v_0^2 2a}{r^4} = \frac{32ma^4 v_0^2}{r^5}.$$

§ 3. РАБОТА И МОЩНОСТЬ

Работа dA силы на бесконечно малом перемещении ds , называемая *элементарной работой*, выражается формулой

$$dA = F \cos \alpha \cdot ds = F_\tau \cdot ds, \quad (160)$$

где $ds = MM_1$, α — угол между силой $\vec{F}$ и скоростью $\vec{v}$ точки ее приложения (рис. 171), или в виде скалярного произведения:

$$dA = \vec{F} \cdot \vec{dr}, \quad (161)$$

где $\vec{dr} = \vec{v} dt$ — дифференциал радиуса-вектора точки приложения силы.

Выражая это скалярное произведение через проекции векторов F и $d\vec{r}$ на координатные оси, получаем аналитическое выражение элементарной работы:

$$dA = Xdx + Ydy + Zdz, \quad (162)$$

где X, Y, Z — проекции силы на координатные оси, dx, dy, dz — бесконечно малые изменения (дифференциалы) координат точки приложения силы при элементарном перемещении этой точки.

Если сила F приложена к твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси z , то

$$dA = m_z(F) d\varphi, \quad (163)$$

где $d\varphi$ — элементарный угол поворота тела вокруг оси.

Если к телу, имеющему неподвижную ось вращения Oz приложена пара

сил с моментом $\vec{m}$, то элементарная работа этой пары выражается следующим образом:

$$dA = m_z \cdot d\varphi,$$

где m_z — проекция вектора — момента пары на ось Oz .

Особый интерес представляет случай, когда сила является функцией координат точки и, кроме того,

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}; \quad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}; \quad \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial z}. \quad (164)$$

В этом случае существует такая функция координат $U = U(x, y, z)$, частные производные которой по координатам равны проекциям силы на соответствующие координатные оси, т. е.

$$\frac{\partial U}{\partial x} = X; \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Y; \quad \frac{\partial U}{\partial z} = Z. \quad (165)$$

Такая функция называется силовой, или *потенциальной*, функцией. Таким образом, если существует силовая функция, то

$$dA = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = dU, \quad (166)$$

т. е. *элементарная работа силы равна полному дифференциалу силовой функции*. Ограниченная или неограниченная часть про-

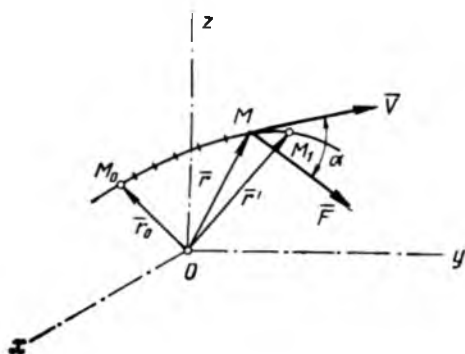


Рис. 171

странства, где проявляется действие силы, имеющей силовую функцию, называется *силовым потенциальным полем*. Геометрическое место точек силового потенциального поля, в которых силовая функция сохраняет постоянное значение, называется *экипотенциальной поверхностью, или поверхностью уровня*.

Работа A силы F на конечном пути определяется как предел суммы элементарных работ и выражается в виде криволинейного интеграла, взятого вдоль дуги M_0M траектории от точки M_0 до точки M :

$$A = \int_{(M_0)}^{(M)} F \cos \alpha \, ds = \int_{(M_0)}^{(M)} \vec{F} \cdot \vec{dr} = \int_{(M_0)}^{(M)} (Xdx + Ydy + Zdz) \quad (167)$$

Если произведение $F \cos \alpha$ выражается известной функцией дуговой координаты s точки приложения силы, то переменной интегрирования является эта величина s и формула для вычисления работы принимает вид

$$A = \int_{s_0}^s F \cos \alpha \cdot ds = \int_{s_0}^s F_\tau \, ds, \quad (168)$$

где s_0 и s — значения дуговой координаты, соответствующие положениям M_0 и M точки приложения силы, F_τ — проекция силы на касательную к траектории этой точки.

Если постоянная по модулю сила образует с прямой, по которой движется ее точка приложения, *постоянный* угол α , то

$$A = F\sigma \cos \alpha. \quad (169)$$

В частном случае, когда точка M движется по прямой под действием постоянной силы F , направленной по той же прямой в сторону движения или против движения, то соответственно имеем:

$$A = + F\sigma, \text{ или } A = - F\sigma, \quad (170)$$

где σ — путь, пройденный точкой.

Если при вращательном движении твердого тела вокруг неподвижной оси момент приложенной к нему силы является функцией угла φ поворота тела, т. е.

$$m_z(\vec{F}) = f(\varphi),$$

то

$$A = \int_{\varphi_0}^{\varphi} m_z(\vec{F}) \, d\varphi. \quad (171)$$

Аналогично определяется работа пары сил:

$$A = \int_{\varphi}^{\varphi_0} m_z \, d\varphi. \quad (172)$$

Работа силы, имеющей потенциальную функцию, на конечном перемещении выражается разностью значений этой функции в конечной и начальной точках пути:

$$A = \int_{(M_0)}^{(M)} dU = U - U_0, \quad (173)$$

т. е. в этом случае работа силы не зависит от кривой, по которой перемещается точка M , а зависит лишь от начального и конечного ее положений. При изучении движения материальной точки в силовом потенциальном поле весьма большое значение имеет понятие *потенциальной энергии*. Потенциальная энергия материальной точки представляет собой особый вид энергии, которым обладает точка, находящаяся в силовом потенциальном поле. Потенциальная энергия Π равна работе, которую совершила бы сила поля при перемещении точки ее приложения из данного положения $M(x, y, z)$ в положение $M^{(0)}(x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)})$, принятое за нулевое, т. е.

$$\Pi = U^{(0)} - U, \quad (174)$$

откуда

$$d\Pi = -dU = -dA. \quad (175)$$

Работа силы на конечном пути через потенциальную энергию выражается так:

$$A = \Pi_0 - \Pi. \quad (176)$$

Если на точку действует несколько сил, то работа равнодействующей этих сил на каком-либо пути равна сумме работ составляющих сил на том же пути.

В технической системе единиц работа измеряется в килограмм-метрах (кГм). В Международной системе единиц единицей работы является 1 джоуль = 1 н.м. = 0,102 кГм.

Мощность N характеризует быстроту, с которой совершается работа, и в общем случае определяется как производная от работы по времени:

$$N = \frac{dA}{dt} = F \cos \alpha \cdot v = \vec{F} \cdot \vec{v}, \quad (177)$$

т. е. мощность равна скалярному произведению вектора силы на вектор скорости.

Если работа A производится равномерно, то мощность определяется так:

$$N = \frac{A}{t}, \quad (178)$$

где t — время, в течение которого произведена работа.

Таким образом, в этом частном случае мощность численно равна работе, производимой в единицу времени.

При вращательном движении твердого тела вокруг неподвижной оси z :

$$N = M_z \omega, \quad (179)$$

где $M_z = \sum m_z(F)$ — главный момент приложенных к телу сил относительно оси вращения, ω — угловая скорость тела.

В технической системе единиц мощность измеряется в кГм/сек или в лошадиных силах, причем

$$1 \text{ л. с.} = 75 \text{ кГм/сек.}$$

В Международной системе единиц единицей мощности является

$$1 \text{ вт} = 1 \text{ Дж/сек или } 1 \text{ кВт} = 1000 \text{ вт} = 102 \text{ кГм/сек.}$$

При решении задач на вычисление работы и мощности часто используют *коэффициент полезного действия*. Коэффициентом полезного действия η называется отношение полезной работы или мощности* к работе или мощности движущих сил:

$$\eta = \frac{A_p}{A_d} = \frac{N_p}{N_d}. \quad (180)$$

Так как вследствие вредных сопротивлений $A_p \leq A_d$, то $\eta \leq 1$.

При вычислении работы нужно различать следующие случаи.

1. Прямолинейное движение под действием постоянной по модулю и направлению силы; в задачах такого типа применяются формулы (169) и (170) (задачи 756, 762).

2. Прямолинейное движение под действием силы, проекция которой на направление прямолинейной траектории является функцией расстояния точки от некоторого неподвижного центра на этой прямой (задача № 768); в задачах этого типа применяется формула (167), которая, если направить ось x по траектории точки, принимает вид

$$A = \int_{x_0}^x X dx. \quad (181)$$

3. Криволинейное движение под действием постоянной по модулю и направлению силы; в этом случае можно использовать формулу (167).

4. Криволинейное движение под действием силы, которая является функцией координат точки приложения силы.

Здесь определение работы сводится к вычислению криволинейного интеграла по формуле (167). Если в рассматриваемом случае существует силовая функция, то работу определяют по формуле (173) или (176).

* Если мощность вычисляется по формуле (178).

5. Вращательное движение твердого тела под действием постоянного момента или момента, являющегося функцией угла поворота тела; в этом случае для вычисления работы применяется формула (171).

Для вычисления мощности в зависимости от характера движения пользуемся формулой (177) при прямолинейном или криволинейном движении точки приложения силы (задачи 760, 764), или формулой (179) — в случае вращательного движения твердого тела (задачи 771, 772, 765). Среднюю мощность можно определять по формуле (178).

Пример 131. Вдоль тяги, при помощи которой тянут вагончик по горизонтальному пути, действует постоянная сила $F=250$ н (рис. 172). Тяга образует с горизонтом угол $\alpha=32^\circ$. Определить работу, совершенную силой F на пути $\sigma=200$ м.

Решение. Здесь работу определяем по формуле (169):

$$A = F\sigma \cos \alpha = 250 \cdot 200 \cdot 0,848 = 4240 \text{ Дж.}$$

Пример 132. Тело весом $P=20$ н передвигают по горизонтальному полу при помощи горизонтальной силы на расстояние $\sigma=6$ м. Определить работу, которую совершит при этом сила трения, если коэффициент трения между поверхностью тела и полом $f=0,35$.

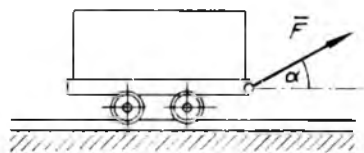


Рис. 172

Решение. Согласно закону Кулона, сила трения $F_{\text{тр}} = fN$, где N — нормальное давление тела на поверхность пола, причем в данном случае $N=P=20$ н. Так как сила трения направлена в сторону, противоположную движению, то работа этой силы отрицательна:

$$A_{\text{тр}} = -fP\sigma = -0,35 \cdot 20 \cdot 6 = -42 \text{ Дж.}$$

Пример 133. Найти работу силы тяжести при перемещении материальной точки из положения $M_0(x_0, y_0, z_0)$ в положение $M(x, y, z)$, а также вычислить потенциальную энергию точки в положении M (рис. 173).

Решение. Направляя ось z вертикально вверх, имеем:

$$X=0; \quad Y=0; \quad Z=-P,$$

где P — вес тела. Следовательно, по формуле (162)

$$dA = -Pdz,$$

откуда

$$A = - \int_{z_0}^z P dz = -P(z - z_0) = P(z_0 - z). \quad (182)$$

т. е. работа силы тяжести равна произведению веса материальной точки на разность ее высот в начальном и конечном положениях, причем эти высоты отсчитываются от произвольно выбранной горизонтальной плоскости.

Потенциальную энергию точки определим на основании формулы (175):

$$d\Pi = -dA = Pdz. \quad (183)$$

Отсюда

$$\Pi = Pz + C,$$

где C — произвольная постоянная интегрирования*.

Пример 134. Определить работу силы упругости растянутого стержня, к концу которого подвешен груз M , при перемещении этого груза из положения M_0 в положение M , если длина недеформированного стержня равна l_0 ; вычислить также потенциальную энергию точки в положении M (рис. 174).

Решение. Обозначив силу упругости F и направив ось x по вертикали вниз, имеем:

$$F_x = -cx,$$

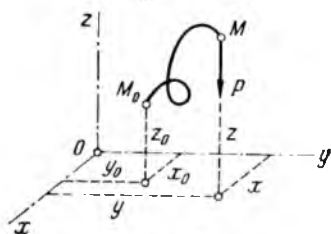


Рис. 173



Рис. 174

где x — удлинение стержня, c — его жесткость. Следовательно,

$$dA = X dx = -cx dx,$$

$$A = - \int_{x_0}^x cx dx = - \frac{c}{2} (x^2 - x_0^2), \quad (184)$$

$$d\Pi = -dA = cx dx,$$

отсюда

$$\Pi = \frac{c}{2} x^2 + C. \quad (185)$$

* Обычно потенциальная энергия определяется с точностью до произвольной постоянной, т. е. в выражении потенциальной энергии произвольную постоянную отбрасывают, так как при решении задач приходится иметь дело или с дифференциалами и производными от потенциальной энергии, или с разностью значений потенциальной энергии для двух положений точки или системы.

Пример 135. На материальную точку действует сила, проекции которой на координатные оси выражаются так:

$$X = 2x + y; \quad Y = x + z^2; \quad Z = 2yz + 1.$$

Определить работу этой силы при перемещении точки из положения $M_0(1; 2; 3)$ в положение $M_1(2; 3; 4)$, если сила выражена в н, а координаты — в см.

Решение. Выясним прежде всего, существует ли в данном случае силовая функция: для этого находим частные производные:

$$\frac{\partial X}{\partial y} = 1; \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = 1; \quad \frac{\partial Y}{\partial z} = 2z; \quad \frac{\partial Z}{\partial y} = 2z;$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial X}{\partial z} = 0.$$

Отсюда получаем, что

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}; \quad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}; \quad \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial z},$$

т. е. условия (164) выполняются, и силовая функция существует. Полный дифференциал этой функции равен элементарной работе, т. е. $dU = dA$. Элементарную работу находим по формуле $dA = Xdx + Ydy + Zdz$ или, подставляя значения X , Y , Z :

$$\begin{aligned} dA &= (2x + y)dx + (x + z^2)dy + (2yz + 1)dz = \\ &= 2xdx + ydx + xdy + z^2dy + 2yzdz + dz. \end{aligned}$$

Это выражение действительно является полным дифференциалом

$$dA = d(x^2) + d(xy) + d(yz^2) + d(z) = d(x^2 + xy + yz^2 + z).$$

Итак,

$$dU = d(x^2 + xy + yz^2 + z).$$

Отсюда

$$U = x^2 + xy + yz^2 + z + C.$$

Значения функции U в точках M_0 и M_1 равны:

$$U_0 = 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3^2 + 3 + C = 24 + C,$$

$$U_1 = 2^2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4^2 + 4 + C = 62 + C.$$

Следовательно, искомая работа равна

$$A = U_1 - U_0 = 62 - 24 = 38 \text{ н см.}$$

Пример 136. Определить работу центральной силы, модуль которой является функцией расстояния материальной точки от центра этой силы, т. е. $F = f(r)$ (рис. 175).

Решение. В данном случае единичный вектор силы F равен $\pm \frac{\vec{r}}{r}$, причем знак (+ или —) выбирается в зависимости от того, отталкивается от центра силы или притягивается к нему точка M .

Таким образом, вектор силы F выразится так:

$$\vec{F} = \pm f(r) \frac{\vec{r}}{r}.$$

Отсюда, пользуясь формулой (161), имеем:

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \pm f(r) \frac{\vec{r}}{r} \cdot d\vec{r}.$$

Но $\vec{r} \cdot \vec{r} = r^2$.

Следовательно,

откуда $\vec{r} \cdot d\vec{r} = r dr$,

$$dA = \pm \frac{f(r) r dr}{r} = \pm f(r) dr,$$

т. е. элементарная работа является полным дифференциалом и, значит, существует силовая функция, причем

$$dU = dA = \pm f(r) dr,$$

отсюда

$$U = \pm \int f(r) dr.$$

Итак, в данном случае имеем общую формулу, по которой сразу можем определить силовую функцию в зависимости от радиуса-вектора точки приложения силы, а затем вычислить работу силы при перемещении этой точки из положения $M_0(r_0)$ в положение $M(r)$:

$$A = U - U_0 = U(r) - U(r_0) = \int_{r_0}^r \pm f(r) dr. \quad (186)$$

Пример 137. Один конец пружины закреплен шарнирно в точке O , а к другому концу ее прикреплен шарик. Длина нерастянутой пружины — l_0 , жесткость ее — c . Шарик перемещают из положения M_1 в положение M_2 , причем пружина растянута и не изгибается. Определить работу силы упругости пружины, если

$$OM_1 = r_1 \text{ и } OM_2 = r_2$$

(рис. 176).

Решение. Модуль силы упругости пружины в данном случае выражается так:

$$F = c(r - l_0) = f(r).$$

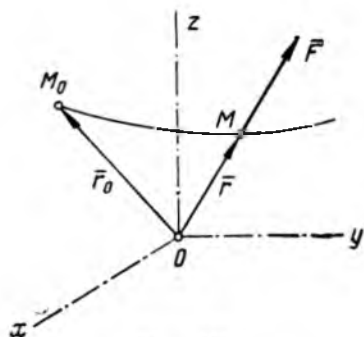


Рис. 175

Следовательно, можно воспользоваться формулой (186):

$$A = - \int_{r_1}^{r_2} c (r - l_0) dr = - \left[\frac{c(r - l_0)^2}{2} \right]_{r_1}^{r_2} = - \frac{c}{2} [(r_1 - l_0)^2 - (r_2 - l_0)^2].$$

Знак минус перед интегралом стоит потому, что сила притягивает шарик к центру O .

Пример 138. Колесо радиуса R катится без скольжения по горизонтальному рельсу. Найти работу трения качения при перемещении центра колеса на расстояние s , если вертикальная нагрузка на ось колеса равна P и коэффициент трения качения f_k (рис. 177).

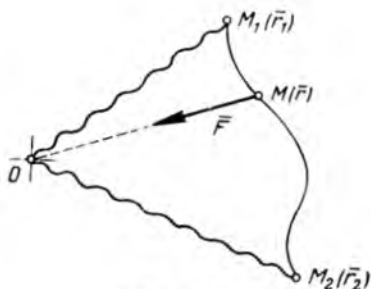


Рис. 176

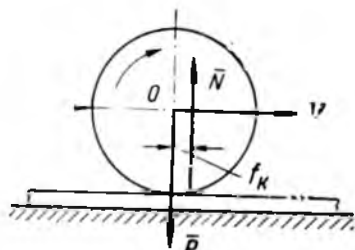


Рис. 177

Решение. Трение качения возникает, как известно, вследствие деформаций колеса и рельса. Момент пары трения качения по закону Кулона будет равен

$$M_k = f_k N = f_k P.$$

Так как эта пара стремится повернуть колесо в направлении, противоположном его вращению, то работа трения качения будет отрицательна и равна произведению постоянного момента M_k на угол поворота φ колеса [по формуле (172)]:

$$A = - M_k \varphi = - f_k P \varphi.$$

При качении колеса без скольжения имеем: $s = R\varphi$. Следовательно,

$$A = - f_k \frac{P}{r} s.$$

Пример 139. К валу длиной l , один конец которого закреплен жестко, приложен на свободном конце крутящий момент, который заставляет вал испытывать деформацию кручения. Определить работу возникающих при этом сил упругости, если суммарный момент упругих сил пропорционален углу закручивания, причем коэффициент пропорциональности (коэффициент

жесткости вала на кручение) равен c . Определить также потенциальную энергию этого вала в зависимости от угла закручивания (рис. 178).

Решение. Момент сил упругости выражается формулой $M_{\text{упр}} = -c\varphi$.

Отсюда, на основании формулы (172), имеем:

$$dA = dU = -c\varphi d\varphi.$$

Следовательно,

$$A = - \int_{\varphi_0}^{\varphi} c\varphi d\varphi = - \frac{c}{2} (\varphi^2 - \varphi_0^2).$$

Для потенциальной энергии имеем:

$$d\Pi = -dU = c\varphi d\varphi,$$

а потому

$$\Pi = \frac{c\varphi^2}{2} + C.$$

Пример 140. Для определения натяжений S_1 и S_2 ветвей конвейерной ленты привод A конвейера установлен на катки и включен динамометр D между приводом и неподвижной стойкой C .

Определить натяжения S_1 и S_2 , если показание динамометра равно $\bar{P}$ (в ньютонах), диаметр приводного барабана d , потребляемая электродвигателем привода мощность равна N и приводной барабан делает n оборотов в минуту (рис. 179)

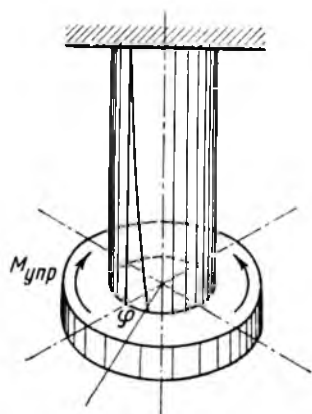


Рис. 178

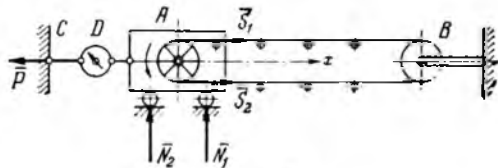


рис. 179

Решение. Рассматривая равновесие действующих на привод сил и пренебрегая трением между катками и опорной плоскостью, имеем:

$$\sum X = S_1 + S_2 - P = 0,$$

откуда

$$S_1 + S_2 = P. \quad (a)$$

Так как привод барабана вращается равномерно, то вращающий момент на валу двигателя, очевидно, определится так:

$$M_{\text{вр}} = S_1 \frac{d}{2} - S_2 \frac{d}{2} = (S_1 - S_2) \frac{d}{2},$$

но на основании формулы (179), мощность двигателя

$$N = M_{вр} \omega = \frac{\pi n}{30} M_{вр}.$$

Отсюда

$$M_{вр} = \frac{10N}{n},$$

и, следовательно,

$$S_1 - S_2 = \frac{10N}{n} \cdot \frac{2}{d}. \quad (6)$$

Решая совместно уравнения (а) и (б), находим:

$$S_1 = \frac{P}{2} + 10 \frac{N}{nd},$$

$$S_2 = \frac{P}{2} - 10 \frac{N}{nd}.$$

Пример 141. Найти мощность машины, поднимающей 100 раз в минуту молот весом $P = 9000$ н на высоту $h = 0,6$ м, если коэффициент полезного действия $\eta = 0,8$.

Решение. Находим полезную работу за 1 мин:

$$A_n = P \cdot h \cdot 100 = 9000 \cdot 100 \cdot 0,6 = 540\,000 \text{ Дж}.$$

Теперь по формуле (178) находим полезную мощность:

$$N_n = \frac{A_n}{t} = \frac{540\,000}{60} = 9000 \text{ Вт} = 9 \text{ кВт}.$$

Далее, пользуясь формулой (180), определяем искомую мощность двигателя:

$$N = \frac{N_n}{\eta} = \frac{9}{0,8} = 11,25 \text{ кВт}.$$

Классификация задач данного параграфа приведена в табл. 17.

§ 4. ТЕОРЕМА О КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Кинетическая энергия материальной точки выражается половиной произведения массы этой точки на квадрат ее скорости.

Теорему о кинетической энергии материальной точки можно выразить в трех видах:

$$1) \quad d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = F \cos \alpha \, ds = dA, \quad (187)$$

т. е. дифференциал кинетической энергии материальной точки равен элементарной работе силы, действующей на эту точку;

$$2) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{mv^2}{2} \right) = \frac{dA}{dt} = N \quad (188)$$

т. е. производная по времени от кинетической энергии материальной точки равна мощности силы, действующей на эту

точку;

$$3) \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int_{(M_0)}^{(M)} F \cos \alpha \, ds, \quad (189)$$

т. е. изменение кинетической энергии материальной точки на конечном пути M_0M равно работе силы, действующей на точку на том же пути.

Таблица 17

Классификация задач

Группы	Типы		
	I (прямолинейное движение)	II (криволинейное движение)	III (вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси)
1-я	Действующая сила постоянна ($F = \text{const}$). Задачи 756—761, 766	Действующая сила постоянна ($F = \text{const}$)	Вращающий момент постоянный. Задачи 755, 765, 767, 771, 772
2-я	Действующая сила зависит от положения точки приложения силы [$F = f(x)$]. Задачи 768, 790 (вычисление потенциальной энергии), 769, 784	Действующая сила зависит от координат точки приложения силы [$F = F(x, y, z)$]. Задачи 770, 788 (вычисление работы)	Вращающий момент зависит от угла поворота тела

Если на точку действует несколько сил, то в правые части уравнений (187) — (189) входит работа или мощность равнодействующей этих сил, которая равна сумме работ или мощностей всех составляющих сил.

В случае прямолинейного движения точки, направляя ось x по прямой, по которой движется точка, имеем:

$$\text{и} \quad d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = X \, dx \quad (190)$$

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int_{x_0}^x X \, dx, \quad (191)$$

где $X = \pm F$, так как в этом случае равнодействующая всех приложенных к точке сил направлена по оси x .

Применяя теорему о кинетической энергии в случае несвободного движения материальной точки, нужно иметь в виду следующее: если на точку наложена совершенная стационарная связь (точка движется по абсолютно гладкой неподвижной поверхности или линии), то реакция связи в уравнения не входит, ибо эта реакция направлена по нормали к траектории точки и, следовательно, ее работа равна нулю. Если же приходится учитывать трение, то в уравнение кинетической энергии войдет работа или мощность силы трения.

Задачи, относящиеся к этому параграфу, можно разделить на два основных типа.

I. Задачи на применение теоремы о кинетической энергии при прямолинейном движении точки.

II. Задачи на применение теоремы о кинетической энергии при криволинейном движении точки.

Кроме того, задачи, относящиеся к типу I, можно разделить на три группы:

1) сила, действующая на точку (или равнодействующая нескольких сил), постоянна, т. е. $X = \text{const}$, где X — проекция силы (или равнодействующей) на ось x , направленную по прямолинейной траектории точки;

2) сила, действующая на точку (или равнодействующая), является функцией расстояния (абсциссы этой точки), т. е.

$$X = f(x);$$

3) сила, действующая на точку (или равнодействующая), есть функция скорости этой точки, т. е.

$$X = f(v).$$

Задача, относящиеся к типу II, можно разделить на три группы:

1) сила, действующая на точку (или равнодействующая), постоянна и по модулю и по направлению (например, сила веса);

2) сила, действующая на точку (или равнодействующая), есть функция положения этой точки (функция координат точки);

3) движение точки при наличии сил сопротивления.

Задачи типа I

Первая группа

Точка движется прямолинейно под действием постоянной силы

В этом случае $F = \text{const}$, и уравнение кинетической энергии принимает вид:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \pm F\sigma,$$

где σ — путь, пройденный точкой.

Из этого уравнения определяется скорость v , если пройденный путь известен, или, наоборот, по заданной скорости v определяется пройденный путь s .

Пример 142. Вагонетка движется самокатом вниз по наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол α (рис. 180).

Определить скорость вагонетки в конце пути, длина которого равна l ; начальная скорость вагонетки $v_0 = 0$, коэффициент общего сопротивления движению f .

Решение. На вагонетку действуют сила тяжести $P = mg$, нормальная реакция N наклонной плоскости и сила сопротивления движению $F = fN$. Применяя теорему о кинетической энергии на пути длиной l , имеем:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A_P + A_F.$$

Но $v_0 = 0$.

$$A_P = mgh = mgl \sin \alpha,$$

$$A_F = -Fl = -fNl.$$

Для определения нормального давления вагонетки на наклонную плоскость вес вагонетки P разлагаем на две составляющие, направленные вдоль наклонной плоскости и перпендикулярно к ней.

Последняя составляющая и определяет нормальное давление на плоскость, равное нормальной реакции этой плоскости.

Следовательно, $N = mg \cos \alpha$ и $A_F = -fmg \cos \alpha l$. Таким образом, уравнение кинетической энергии принимает вид:

$$\frac{mv^2}{2} = mgl \sin \alpha - fmg \cos \alpha l = mgl (\sin \alpha - f \cos \alpha),$$

откуда

$$v = \sqrt{2gl (\sin \alpha - f \cos \alpha)}.$$

Следует заметить, что при решении некоторых задач можно одновременно применять теорему о кинетической энергии и теорему о количестве движения. Это относится к задачам, в которых рассматривается движение под действием постоянной силы (задачи 678, 775, 776, 779) или силы, зависящей от скорости (задачи 687, 689, 693, 696), причем требуется определить и время, и путь движения точки. Для определения времени движения следует применить теорему о количестве движения, а при определении пути — теорему кинетической энергии.

Пример 143. Телу весом P , лежащему на горизонтальной плоскости, сообщают начальную горизонтальную скорость v_0 .

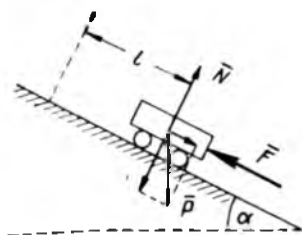


Рис. 180

Во сколько времени и на каком расстоянии остановится тело, если коэффициент трения тела о плоскость равен f ?

Решение. Так как в задаче требуется определить время движения и расстояние, пройденное телом до остановки, то при решении этой задачи проще всего воспользоваться и теоремой о количестве движения, и теоремой о кинетической энергии. Так как скорость тела в момент остановки равна нулю, то, применяя теорему о количестве движения, имеем:

$$-mv_0 = -F_{\text{тр}} t,$$

откуда

$$t = \frac{mv_0}{F_{\text{тр}}} = \frac{Pv_0}{gF_{\text{тр}}}.$$

По закону Кулона сила трения $F_{\text{тр}} = fN$, причем в данном случае $N = P$. Следовательно, $t = \frac{v_0}{fg}$.

Далее, применяя теорему о кинетической энергии, имеем:

$$-\frac{Pv_0^2}{2g} = -F_{\text{тр}} \sigma,$$

где σ — путь, пройденный телом до остановки. Отсюда находим:

$$\sigma = \frac{Pv_0^2}{2gF_{\text{тр}}} = \frac{v_0^2}{2fg}.$$

Вторая группа

Точка движется прямолинейно под действием силы, которая является функцией абсциссы этой точки

В этом случае $X = f(x)$, следовательно, по формуле (191) имеем:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int_{x_0}^x f(x) dx,$$

это уравнение, устанавливающее зависимость между v и x , позволяет найти величину x , если скорость v известна, или, наоборот, зная x , определить v .

Пример 144. Клеть весом P опускается на канате равномерно со скоростью v_0 . Внезапно верхний конец каната защемляется. Определить наибольшее удлинение каната после защемления, если его статическое удлинение под действием веса клетки равно $\lambda_{\text{ст}}$ (рис. 181).

Решение. На клетку действуют две силы: сила веса P и сила упругости каната $F = c\lambda$, где c — жесткость каната, λ — его удлинение. Пока клетка опускается равномерно, удлинение каната равно статическому удлинению ($\lambda = \lambda_{\text{ст}}$) и сила P урав-

повешивается силой упругости каната, т. е.

$$F_{\text{сг}} = c\lambda_{\text{сг}} = P,$$

откуда

$$c = \frac{P}{\lambda_{\text{сг}}},$$

и, следовательно,

$$F = \frac{P}{\lambda_{\text{сг}}} \lambda.$$

Положение центра тяжести клетки в момент защемления каната выбираем за начало координат и ось x направляем по вертикали вниз. После защемления каната, благодаря его способности деформироваться, клетка продолжает опускаться. В момент, когда удлинение каната достигает максимальной величины, скорость клетки обращается в нуль. Обозначая через X проекцию на ось x равнодействующей сил, приложенных к клетке, и учитывая, что $\lambda = \lambda_{\text{сг}} + x$, имеем:

$$X = P - F = P - \frac{P}{\lambda_{\text{сг}}} \lambda = P - \frac{P}{\lambda_{\text{сг}}} (x + \lambda_{\text{сг}}) = -\frac{P}{\lambda_{\text{сг}}} x.$$

Применяя теорему о кинетической энергии, имеем:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int_{x_0}^x X dx = -\frac{P}{\lambda_{\text{сг}}} \int_0^x x dx = -\frac{P}{2\lambda_{\text{сг}}} x^2.$$

Но при $x = x_{\text{max}}$ скорость клетки v равна нулю; поэтому

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{P}{2\lambda_{\text{сг}}} x_{\text{max}}^2,$$

откуда

$$x_{\text{max}}^2 = \frac{mv_0^2}{P} \lambda_{\text{сг}} = \frac{v_0^2}{g} \lambda_{\text{сг}} \quad \text{и} \quad x_{\text{max}} = v_0 \sqrt{\frac{\lambda_{\text{сг}}}{g}}.$$

Следовательно,

$$\lambda_{\text{max}} = \lambda_{\text{сг}} + x_{\text{max}} = \lambda_{\text{сг}} + v_0 \sqrt{\frac{\lambda_{\text{сг}}}{g}}.$$

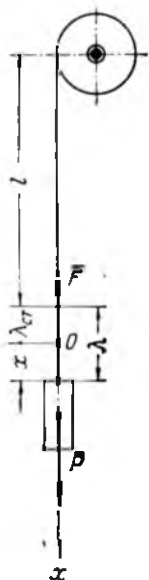


Рис. 181

Третья группа

Точка движется прямолинейно под действием силы, являющейся функцией скорости этой точки

В этом случае $X = f(v)$ и теорему о кинетической энергии применяют в дифференциальной форме:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = X dx = f(v) dx.$$

Прежде чем интегрировать, здесь нужно разделить переменные, что даст:

$$m \frac{v \, dv}{f(v)} = dx. \quad \text{Отсюда:} \quad m \int_{v_0}^v \frac{v \, dv}{f(v)} = x - x_0.$$

Выполнив интегрирование и решив полученное после этого уравнение относительно v , находим скорость как некоторую функцию от x , т. е. $v = \Phi(x)$. Если в задаче требуется найти закон прямолинейного движения точки, то, заменяя v на $\frac{dx}{dt}$, получим:

$$\frac{dx}{dt} = \Phi(x),$$

или, разделяя переменные,

$$\frac{dx}{\Phi(x)} = dt,$$

отсюда

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{\Phi(x)} = \int_0^t dt = t.$$

Это уравнение устанавливает зависимость между x и t , т. е. дает искомый закон движения материальной точки.

В некоторых случаях, когда действующая на материальную точку сила зависит от скорости этой точки, закон движения точки можно найти несколько проще, применяя совместно и теорему о количестве движения и теорему о кинетической энергии.

Если $X = f(v)$, то, применяя теорему о количестве движения в дифференциальной форме, имеем*:

$$\frac{m \, dv}{f(v)} = dt.$$

Отсюда, интегрируя, получаем уравнение вида:

$$\varphi(v) = t - t_0. \quad (a)$$

Применяя затем теорему о кинетической энергии, в дифференциальной форме, получим:

$$\frac{mv \, dv}{f(v)} = dx.$$

Отсюда, интегрируя, имеем:

$$\psi(v) = x - x_0. \quad (б)$$

Исключая теперь из уравнений (a) и (б) переменную v , нахо-

* См. § 1 настоящей главы.

дим зависимость между координатой x и временем t , т. е. найдем искомый закон движения.

Пример 145. В момент, когда скорость моторного судна равна v_0 , выключается мотор. Сила сопротивления воды определяется по эмпирической формуле:

$$R = \alpha v + \beta v^2,$$

где α и β — постоянные. Масса судна равна m . Найти расстояние, которое пройдет судно с момента выключения мотора до остановки.

Решение. Направляем ось x в сторону движения судна и выбираем начало координат в той точке, где находился центр тяжести судна в момент выключения мотора. Проекция на ось x силы сопротивления, приложенной к судну, равна

$$X = -(\alpha v + \beta v^2).$$

Так как эта сила является функцией скорости, то применяем теорему о кинетической энергии в дифференциальной форме:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = X dx = -(\alpha + \beta v) v dx.$$

Разделяя переменные, получим:

$$-\frac{mdv}{\alpha + \beta v} = dx.$$

Обозначая σ путь, пройденный судном, и учитывая, что в начале этого пути скорость судна равна v_0 , а в конце обращается в нуль, имеем:

$$\int_0^\sigma dx = -m \int_{v_0}^0 \frac{dv}{\alpha + \beta v} = m \int_0^{v_0} \frac{dv}{\alpha + \beta v} = \frac{m}{\beta} \left[\ln(\alpha + \beta v) \right]_0^{v_0} = \frac{m}{\beta} \ln \frac{\alpha + \beta v_0}{\alpha},$$

откуда

$$\sigma = \frac{m}{\beta} \ln \left(1 + \frac{\beta}{\alpha} v_0 \right).$$

Пример 146. Материальная точка массы m , получив начальную скорость v_0 , движется по горизонтальной, абсолютно гладкой плоскости, испытывая сопротивление среды, определяемое формулой $R = km\sqrt{v}$, где v — скорость точки. Найти закон движения точки.

Решение. Рассмотрим решение этой задачи при помощи совместного применения теоремы о количестве движения и теоремы о кинетической энергии.

Принимая начальное положение точки за начало координат и направляя ось x в сторону движения точки, находим:

$$X = -R = -km \sqrt{v}.$$

Применяя теорему о количестве движения и теорему о кинетической энергии в дифференциальной форме, имеем:

$$d(mv) = X dt = -km \sqrt{v} dt$$

и

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = X dx = -km \sqrt{v} dx,$$

или, разделяя переменные и сокращая их на m :

$$\frac{dv}{\sqrt{v}} = -k dt \quad \text{и} \quad \int \sqrt{v} dv = -k dx,$$

интегрируя эти уравнения, находим:

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{\sqrt{v}} = -k \int_0^t dt, \quad \int_{v_0}^v \sqrt{v} dv = -k \int_0^x dx.$$

Отсюда

$$\sqrt{v} - \sqrt{v_0} = -\frac{kt}{2} \quad (a')$$

и

$$v^{\frac{3}{2}} - v_0^{\frac{3}{2}} = -\frac{3kx}{2}. \quad (б')$$

Чтобы найти зависимость между x и t , достаточно из уравнений (a') и (б') исключить скорость v . Из уравнения (a') имеем:

$$\sqrt{v} = v^{\frac{1}{2}} = \sqrt{v_0} - \frac{kt}{2}.$$

Подставляя это значение в уравнение (б'), получаем:

$$x = \frac{2}{3k} (v_0^{\frac{3}{2}} - v^{\frac{3}{2}}) = \frac{2}{3k} \left[v_0^{\frac{3}{2}} - \left(\sqrt{v_0} - \frac{kt}{2} \right)^{\frac{3}{2}} \right].$$

Это уравнение, выражающее x как функцию времени t , и есть искомый закон движения точки.

Из уравнений (a') и (б') можно также найти время T , в течение которого двигалась точка до остановки, и пройденный ею за это время путь σ . Полагая в равенствах (a) и (б) $v=0$, имеем:

$$T = \frac{2}{k} \sqrt{v_0}, \quad \sigma = \frac{2}{3k} v_0^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3k} v_0 \sqrt{v_0}.$$

Задачи типа II

Первая группа

Точка движется криволинейно под действием постоянной силы

Такой постоянной силой является обычно сила тяжести, т. е. вес P материальной точки. Поэтому работа силы определяется по формуле $A = -P(z - z_0)$ при условии, что ось z направлена по вертикали вверх. Следовательно, применяя в этом случае теорему о кинетической энергии, получаем уравнение:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -P(z - z_0).$$

Пример 147. Определить для данного момента высоту h подъема тела M , брошенного под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0 , если в этот момент известен угол θ , образуемый скоростью v с горизонтальной осью абсцисс.

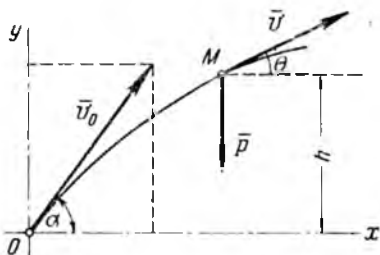


Рис 182

Сопротивлением воздуха пренебречь (рис. 182).

Решение. Так как действующая на тело сила тяжести $\bar{P}$ вертикальна, то проекция скорости на горизонтальную ось x остается постоянной и равной своему начальному значению, т. е.

$$v_x = \text{const} = v_0 \cos \alpha.$$

С другой стороны, $v_x = v \cos \theta$, поэтому $v_0 \cos \alpha = v \cos \theta$, и $v = \frac{v_0 \cos \alpha}{\cos \theta}$.

Применяя теорему о кинетической энергии, в конечной форме на участке пути OM имеем:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A_P = -P \cdot h = -mgh.$$

Отсюда

$$h = \frac{v_0^2 - v^2}{2g} = \frac{1}{2g} \left(v_0^2 - \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{\cos^2 \theta} \right) = \frac{v_0^2}{2g} \left(1 - \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \theta} \right).$$

Вторая группа

Точка движется криволинейно под действием силы, зависящей от положения этой точки

В задачах этой группы теорема о кинетической энергии применяется обычно в случае, когда для сил, действующих на материальную точку, существует силовая функция. Тогда работа вычисляется по формуле (173).

Следовательно, в этом случае имеем:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A = U - U_0.$$

Пример 148. Материальная частица массы $m = 90$ г, находящаяся в поле силы тяжести, отталкивается от неподвижного центра O силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния частицы от этого центра (рис. 183). В начальный момент частица находится в положении M_0 ($x_0 = 1$ см; $y_0 = 2$ см; $z_0 = 2$ см) и имеет скорость $v_0 = 28\sqrt{5}$ см/сек, направленную так, что при дальнейшем движении частица проходит через точку M_1 ($x_1 = 2$ см; $y_1 = 4$ см; $z_1 = 4$ см).

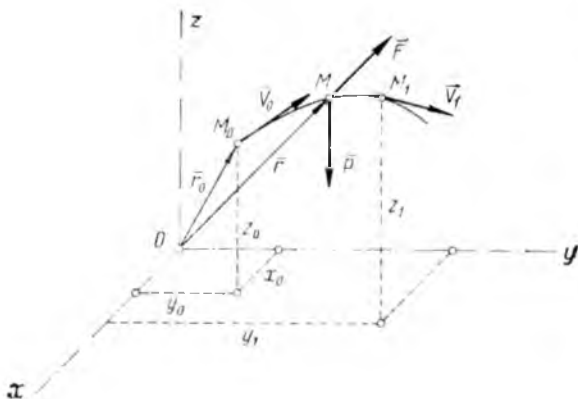


Рис. 183

Определить скорость частицы в точке M_1 , если известно, что величина отталкивающей силы в момент, когда частица находится в положении M_0 , равна $0,03$ н.

Решение. На частицу действуют две силы: сила тяжести $P = mg$ и отталкивающая сила $F = \frac{k}{r^2}$, где r — расстояние OM . Определим коэффициент k . В начальный момент по условию задачи $F = F_0 = 0,03$ н и $r^2 = r_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 9 \cdot 10^{-4}$ м². Следовательно, $k = F_0 r_0^2 = 0,03 \cdot 9 \cdot 10^{-4} = 27 \cdot 10^{-8}$.

Применяем теорему о кинетической энергии на участке пути $M_0 M_1$:

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A_P + A_F,$$

но на основании формул (182) и (184) имеем:

$$A_P = -P(z_1 - z_0) = -mg(z_1 - z_0);$$

$$A_F = \int_{r_0}^{r_1} \frac{k}{r^2} dr = k \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_0}^{r_1} = k \left(-\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_0} \right) = \frac{k(r_1 - r_0)}{r_1 r_0},$$

следовательно,

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -mg(z_1 - z_0) + \frac{k(r_1 - r_0)}{r_1 r_0},$$

кроме того,

$$r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} = \sqrt{9} = 3 \text{ см}; \quad r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} = 6 \text{ см}.$$

Отсюда

$$v_1^2 = v_0^2 - 2g(z_1 - z_0) + \frac{2k(r_1 - r_0)}{mr_1 r_0} = (28\sqrt{5})^2 \cdot 10^{-4} - 2 \cdot 9,8 \cdot 0,02 + \\ + \frac{2 \cdot 27 \cdot 10^{-6} (0,06 - 0,03)}{0,09 \cdot 0,03 \cdot 0,06} = 0,01 \text{ и } v = \sqrt{0,01} = 0,1 \text{ м/сек.}$$

Третья группа

Движение точки при наличии сил сопротивления

Пример 149. Автомобиль весом G , обладающий в положении M_1 скоростью $\bar{v}_1$ (рис. 184), начинает с этого положения движение самокатом и в положении M_2 приобретает скорость $\bar{v}_2$, после чего включается двигатель. Определить суммарную работу сопротивлений движению автомобиля на участке $M_1 M_2$, а также среднюю величину приведенной к центру тяжести автомобиля силы сопротивления движению. Высоты H_1 и H_2 даны.

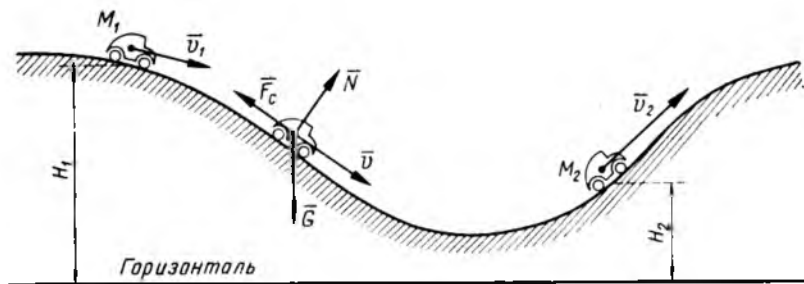


Рис. 184

Решение. Применяя теорему кинетической энергии в конечной форме на участке пути $M_1 M_2$, имеем:

$$\frac{G}{g} (v_2^2 - v_1^2) = G(H_1 - H_2) - A_c,$$

где A_c — абсолютная величина суммарной работы сопротивлений движению автомобиля. Отсюда

$$A_c = G(H_1 - H_2) - \frac{G}{g} (v_2^2 - v_1^2).$$

Среднее значение суммарной силы сопротивления движению на участке M_1M_2 определится так:

$$F_C = \frac{A_C}{s} = \frac{G}{s} \left[H_1 - H_2 - \frac{1}{g} (v_2^2 - v_1^2) \right],$$

где s — длина участка M_1M_2 .

Таблица 18

Классификация задач

Типы	Группы задач		
	1-я	2-я	3-я
I Прямолинейное движение точки	Постоянная сила (задачи 773, 774, 777—781, 805)	Сила, зависящая от положения точки (задачи 699, 785—787, 793—795)	Сила, зависящая от скорости (задачи 687, 689, 693, 695, 696, 782)
II Криволинейное движение точки	Постоянная сила (задача 783)	Сила, зависящая от положения точки (задача 788)	Движение точки при наличии сил сопротивления

§ 5. ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА ДЛЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Векторное дифференциальное уравнение движения несвободной точки имеет вид

$$m\ddot{x} = F + N,$$

где F — действующая на точку заданная (активная) сила,

N — реакция связей (рис. 185).

Это уравнение можно переписать так:

$$F + N + (-m\ddot{x}) = 0. \quad (192)$$

Последний член уравнения (192) представляет собой некоторую силу, по модулю равную произведению массы m точки на ее ускорение $\ddot{x}$ и направленную противоположно этому ускорению. Эта сила называется силой инерции и обозначается $\bar{F}^{(u)}$, т. е.

$$\bar{F}^{(u)} = -m\ddot{x}. \quad (193)$$



Рис. 185

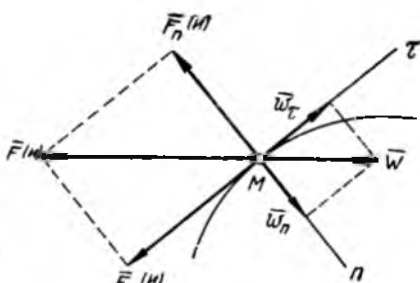


Рис. 186

Пользуясь этим обозначением, уравнение (192) можно представить в следующем виде:

$$\vec{F} + \vec{N} + \vec{F}^{(n)} = 0, \quad (194)$$

т. е. заданная сила, действующая на материальную точку, реакция связей и сила инерции для каждого момента движения уравновешиваются (принцип Даламбера).

Таким образом, силу инерции можно определить так же, как такую силу, которая, будучи приложена к материальной точке, уравновешивает все заданные силы, приложенные к этой точке, и реакции связей.

Проекции силы инерции на координатные оси на основании равенства (194) выражаются следующим образом:

$$F_x^{(n)} = -m\ddot{x}, \quad F_y^{(n)} = -m\ddot{y}, \quad F_z^{(n)} = -m\ddot{z}. \quad (195)$$

При криволинейном движении материальной точки сила инерции складывается из двух составляющих, из которых одна направлена по касательной к траектории, а другая — по главной нормали (рис. 186). Первая составляющая называется касательной, или тангенциальной, силой инерции и обозначается $F_\tau^{(n)}$, вторая составляющая называется нормальной силой инерции, или центробежной силой, и обозначается $F_n^{(n)}$, причем

$$\vec{F}_\tau^{(n)} = -m\vec{\omega}^{(t)}, \quad \vec{F}_n^{(n)} = -m\vec{\omega}^{(n)}. \quad (196)$$

Для модулей тангенциальной и нормальной сил инерции имеем следующие выражения:

$$|F_\tau^{(n)}| = m \left| \frac{dv}{dt} \right|, \quad |F_n^{(n)}| = \frac{mv^2}{\rho}. \quad (197)$$

Если точка совершает вращательное движение по окружности радиуса R с угловой скоростью ω и угловым ускорением ε , то модули тангенциальной и нормальной сил инерции выразятся следующим образом:

$$|F_\tau^{(n)}| = mR|\varepsilon|, \quad |F_n^{(n)}| = mR\omega^2. \quad (198)$$

Тангенциальная и нормальная силы инерции направлены соответственно противоположно тангенциальному и нормальному ускорениям точки.

Задачи, относящиеся к этому параграфу, можно разделить на следующих три типа:

I. Материальная точка движется прямолинейно.

II. Материальная точка совершает криволинейное равномерное движение.

III. Материальная точка совершает неравномерное криволинейное движение.

Задачи типа I

Прямолинейное движение несвободной материальной точки
(задачи 637—640, 647, 648, 649)

В этом случае радиус кривизны траектории $\varrho = \infty$ и, следовательно, $F_n^{(и)} = \frac{mv^2}{\varrho} = 0$, поэтому сила инерции состоит из одной тангенциальной составляющей, т. е. $\vec{F}^{(и)} = \vec{F}_\tau^{(и)}$.

Пример 150. Тело весом P движется прямолинейно с данным ускорением ω по горизонтальной плоскости под действием неко-

торой силы F , образующей с горизонтом угол α . Определить модуль этой силы, если коэффициент трения между передвигаемым телом и плоскостью равен f (рис. 187).

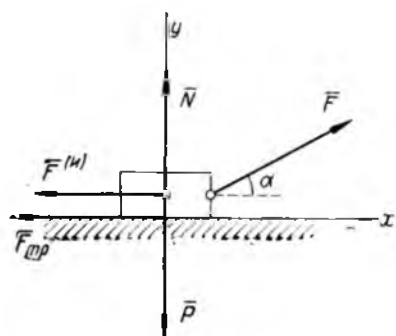


Рис. 187

Решение. На рис. 187 показаны действующие на тело силы: вес P , сила F , нормальная реакция пола $\bar{N}$ и сила трения $\bar{F}_{тр}$. Если приложить к телу силу инерции $F^{(и)}$, направленную противоположно ускорению ω , то располагая координатные оси, как указано на рисунке, будем иметь два урав-

нения равновесия:

$$\begin{aligned} \sum X &= F \cos \alpha - fN - F^{(и)} = 0, \\ \sum Y &= F \sin \alpha - P + N = 0, \end{aligned}$$

причем $F^{(и)} = m\omega = \frac{P}{g} \omega$.

Решая совместно эти уравнения, находим:

$$F = \frac{P \left(f + \frac{\omega}{g} \right)}{\cos \alpha + f \sin \alpha} = \frac{fg + \omega}{g (\cos \alpha + f \sin \alpha)} P.$$

Задачи типа II

Равномерное криволинейное движение несвободной материальной точки
(задачи 646, 670)

Если материальная точка движется по некоторой кривой с постоянной по модулю скоростью ($v = \text{const}$), то тангенциальное ускорение точки равно $\omega_\tau = \frac{dv}{dt} = 0$, поэтому сила инерции состоит из одной только нормальной составляющей, т. е. $\vec{F}^{(и)} = \vec{F}_n^{(и)}$.

Пример 151. Полый полушар радиусом $R = 2$ м равномерно вращается вокруг своей вертикально расположенной оси симметрии, делая 30 об/мин. Внутри полушара находится шарик весом $P = 2$ н. Найти высоту h , соответствующую положению равновесия шарика относительно полушара и реакцию полушара $\bar{N}$ в этом положении (рис. 188).

Решение. Три силы — вес шарика P , нормальная реакция полушара $\bar{N}$ и сила инерции $F^{(u)}$ — уравниваются. Располагая координатные оси, как указано на рисунке, и обозначая α угол, образуемый реакцией $\bar{N}$ с горизонтом, составим уравнения равновесия:

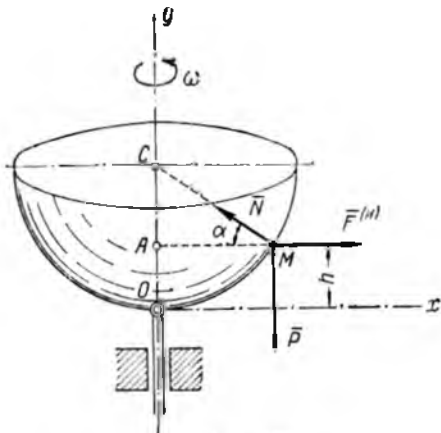


Рис. 188

$$\sum X = F^{(u)} - N \cos \alpha = 0; \quad \sum Y = N \sin \alpha - P = 0.$$

Учитывая, что при равномерном вращении полушара $F^{(u)} = F_n^{(u)} = m AM \omega^2 = mR \cos \alpha \omega^2$, эти уравнения можно переписать так:

$$N \cos \alpha = mR \cos \alpha \omega^2, \quad N \sin \alpha = P.$$

Из первого уравнения находим:

$$N = mR \omega^2 = \frac{P}{g} R \omega^2,$$

но

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \pi \text{ 1/сек.}$$

$$\text{Следовательно, } N = \frac{P}{g} R \pi^2 = \frac{2}{9,81} \cdot 2 \cdot 9,86 \approx 4 \text{ н.}$$

Из второго уравнения находим:

$$\sin \alpha = \frac{P}{N} = \frac{Pg}{PR\pi^2} = \frac{g}{R\pi^2} = \frac{9,81}{2 \cdot 9,86} \approx \frac{1}{2}.$$

откуда $\alpha = 30^\circ$. Далее из треугольника CMA имеем:

$$CA = R \sin \alpha = 1 \text{ м,}$$

и, следовательно,

$$h = OA = OC - CA = 2 - 1 = 1 \text{ м.}$$

Пример 152. Лента ленточного конвейера наклонена к горизонту под углом α . Определить минимальную скорость ленты,

при которой песчаная лентой частица руды отделяется от поверхности ленты в месте набегания ленты на барабан, если радиус барабана равен R (рис. 189).

Решение. На частицу, находящуюся в данный момент в точке набегания ленты на барабан, действуют: вес P , нор-

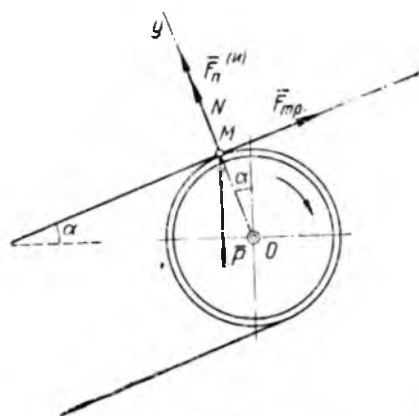


Рис. 189

мальная реакция барабана N и сила трения $F_{тр}$. Прикладываем к частице нормальную силу инерции $F_n^{(m)}$ и составляем уравнение равновесия полученной после этого системы сил, проецируя эти силы на ось y , направленную по нормали к поверхности ленты:

$$\sum Y = F_n^{(m)} + N - P \cos \alpha = 0,$$

по $F_n^{(m)} = \frac{mv^2}{R}$, поэтому $N = P \cos \alpha - \frac{Pv^2}{gR}$. Частица отделяется от поверхности ленты в месте набегания ленты

на барабан, если $N = 0$. Поэтому минимальная скорость, при которой происходит отделение частицы от ленты, определяется из уравнения:

$$P \cos \alpha - \frac{Pv^2}{gR} = 0,$$

откуда

$$v = \sqrt{gR \cos \alpha}.$$

Задачи типа III

Неравномерное криволинейное движение несвободной материальной точки (задачи 802, 803, 816—820, 822)

В этом случае при решении задач по принципу Даламбера к движущейся материальной точке необходимо прикладывать две силы инерции: тангенциальную $F_t^{(m)}$ и нормальную $F_n^{(m)}$. Уравнения равновесия лучше составлять так, чтобы в каждое уравнение входила только одна из этих сил инерции, для чего координатные оси следует направлять по касательной и главной нормали к траектории движущейся точки.

В выражение нормальной силы инерции входит величина v^2 ; если скорость v в данной задаче неизвестна, то в большинстве

случаев для ее нахождения проще всего применить теорему кинетической энергии материальной точки.

Пример 153. Математический маятник длиной l и весом P отвели на угол φ_0 от положения равновесия и сообщили ему начальную скорость $\bar{v}_0$, направленную перпендикулярно к нити вверх. Найти натяжение нити маятника в зависимости от угла φ нити с вертикалью (рис. 190).

Решение. Четыре силы — вес маятника P , реакция нити $\bar{N}$, касательная и нормальная силы инерции $F_{\tau}^{(n)}$ и $F_n^{(n)}$, согласно принципу Даламбера, уравновешиваются. Поэтому, проектируя эти силы на нормаль траектории маятника (на направление радиуса MO), получим

$$N - P \cos \varphi - F_n^{(n)} = 0.$$

Так как

$$F_n^{(n)} = \frac{mv^2}{\rho} = \frac{mv^2}{l},$$

то из этого уравнения найдем

$$N = P \cos \varphi + \frac{mv^2}{l}.$$

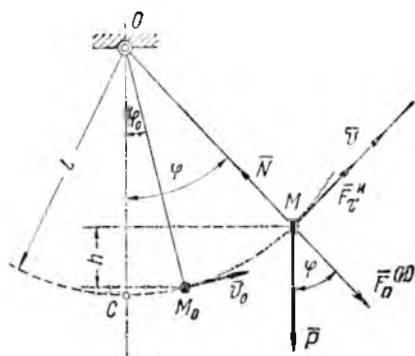


Рис. 190

Чтобы найти скорость v маятника, применим на участке пути M_0M теорему о кинетической энергии:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A_P = -Ph.$$

Отсюда $mv^2 = mv_0^2 - 2Ph = P \left(\frac{v_0^2}{g} - 2h \right)$ и, следовательно,

$$N = P \cos \varphi + \frac{P}{l} \left(\frac{v_0^2}{g} - 2h \right) = P \left(\cos \varphi + \frac{v_0^2}{lg} - \frac{2h}{l} \right).$$

Но $h = l \cos \varphi_0 - l \cos \varphi = l (\cos \varphi_0 - \cos \varphi)$, а поэтому

$$N = P \left(3 \cos \varphi - 2 \cos \varphi_0 + \frac{v_0^2}{lg} \right).$$

Пример 154. Материальная частица находится внутри неподвижного цилиндра радиусом R . В начальный момент частица находится в положении M_0 и получает вертикальную скорость $\bar{v}_0$. Коэффициент трения частицы о поверхность цилиндра равен f . Пренебрегая действием силы тяжести, найти зависимость между скоростью v частицы и углом α , определяющим ее положение внутри цилиндра (рис. 191).

Решение. На частицу действуют: нормальная реакция цилиндра $\vec{N}$ и сила трения $F_{тр}$. Применяя принцип Даламбера, прикладываем к частице тангенциальную $F_{\tau}^{(u)}$ и нормальную $F_n^{(u)}$ силы инерции. Приравнявая нулю сумму проекций этих сил на нормаль, получим:

$$N - F_{(n)}^{(u)} = 0,$$

или

$$N = F_n^{(u)} = \frac{mv^2}{R}.$$

Согласно закону Кулона,

$$F_{тр} = fN = f \frac{mv^2}{R}.$$

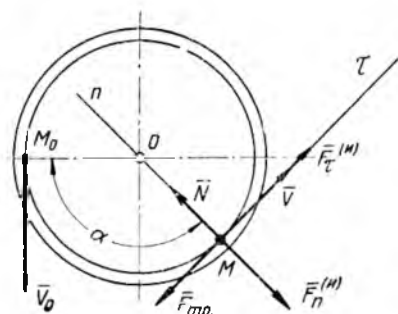


Рис. 191

Далее применяем теорему о кинетической энергии в дифференциальной форме:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = -F_{тр} ds.$$

Отсюда, учитывая, что $ds = R d\alpha$, имеем: $mv dv = -\frac{mv^2}{R} f R d\alpha$ или $\frac{dv}{v} = -f d\alpha$.

Интегрируем

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = -f \int_0^\alpha d\alpha \quad \text{или} \quad \ln \frac{v}{v_0} = -f\alpha,$$

откуда

$$v = v_0 e^{-f\alpha}.$$

ДИНАМИКА СИСТЕМЫ

Глава IV

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ

§ 1. ТЕОРЕМЫ О КОЛИЧЕСТВЕ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ И О ДВИЖЕНИИ ЦЕНТРА МАСС

Количеством движения системы называется геометрическая сумма количеств движения всех материальных точек этой системы, т. е.

$$\vec{K} = \sum m\vec{v}, \quad (199)$$

где K — количество движения системы; отсюда получаем проекции количества движения на координатные оси:

$$\left. \begin{aligned} K_x &= \sum m v_x = \sum m \frac{dx}{dt} = \sum m \dot{x}, \\ K_y &= \sum m v_y = \sum m \frac{dy}{dt} = \sum m \dot{y}, \\ K_z &= \sum m v_z = \sum m \frac{dz}{dt} = \sum m \dot{z}. \end{aligned} \right\} \quad (200)$$

Теорема о количестве движения системы формулируется так.

Векторная производная по времени от количества движения системы равна главному вектору всех внешних сил, приложенных к этой системе, т. е.

$$\frac{dK}{dt} = R^{(e)} = \sum \bar{F}^{(e)}, \quad (201)$$

отсюда следует, что производная по времени от проекции количества движения системы на данную неподвижную ось равна проекции главного вектора внешних сил на ту же ось, т. е.

$$\left. \begin{aligned} \frac{dK_x}{dt} &= R_x^{(e)} = \sum X^{(e)}, \\ \frac{dK_y}{dt} &= R_y^{(e)} = \sum Y^{(e)}, \\ \frac{dK_z}{dt} &= R_z^{(e)} = \sum Z^{(e)}. \end{aligned} \right\} \quad (202)$$

Центром масс системы называется геометрическая точка C , координаты которой определяются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} x_C &= \frac{\sum m x}{M}, \\ y_C &= \frac{\sum m y}{M}, \\ z_C &= \frac{\sum m z}{M}, \end{aligned} \right\} \quad (203)$$

где M — масса данной системы, причем $M = \sum m$; x, y, z — координаты материальных точек этой системы. Из формул (203) следует, что положения центра масс и центра тяжести твердого тела совпадают.

Если данная система состоит из нескольких, например, из трех тел, то, обозначая массы этих тел M_1, M_2, M_3 , а их центры масс (центры тяжести) C_1, C_2, C_3 , имеем:

$$\left. \begin{aligned} x_C &= \frac{M_1 x_{C_1} + M_2 x_{C_2} + M_3 x_{C_3}}{M}, \\ y_C &= \frac{M_1 y_{C_1} + M_2 y_{C_2} + M_3 y_{C_3}}{M}, \\ z_C &= \frac{M_1 z_{C_1} + M_2 z_{C_2} + M_3 z_{C_3}}{M}. \end{aligned} \right\} \quad (204)$$

Если предположить, что в центре масс сосредоточены вся масса системы, то количество движения системы будет равно количеству движения ее центра масс (центра тяжести). Следовательно, обозначая через $\bar{v}_C$ скорость центра масс системы, имеем

$$\bar{K} = M\bar{v}_C, \quad (205)$$

отсюда:

$$\left. \begin{aligned} K_x &= Mv_{Cx} = M\dot{x}_C, \\ K_y &= Mv_{Cy} = M\dot{y}_C, \\ K_z &= Mv_{Cz} = M\dot{z}_C. \end{aligned} \right\} \quad (205')$$

Учитывая, что ускорение центра масс C равно $\bar{w}_C = \frac{d\bar{v}_C}{dt}$, из равенств (204) и (205) имеем

$$M\bar{w}_C = \bar{R}^{(e)} = \sum \bar{F}^{(e)}, \quad (206)$$

отсюда

$$\left. \begin{aligned} M\ddot{x}_C &= R_x^{(e)} = \sum X^{(e)}, \\ M\ddot{y}_C &= R_y^{(e)} = \sum Y^{(e)}, \\ M\ddot{z}_C &= R_z^{(e)} = \sum Z^{(e)}. \end{aligned} \right\} \quad (206')$$

Уравнения (206') представляют собой дифференциальные уравнения движения центра масс системы и выражают следующую теорему о движении этого центра: центр масс системы движется так же, как материальная точка, в которой сосредоточена масса всей системы и к которой приложены все внешние силы, действующие на эту систему.

Следствие. Если главный вектор внешних сил или его проекция на данную неподвижную ось равны нулю, то количество движения системы или его проекция на эту ось остаются неизменными, т. е.

$$1) \text{ если } \bar{R}^{(e)} = \sum \bar{F}^{(e)} = 0,$$

то

$$\bar{K} = \sum m\bar{v} = M\bar{v}_C = \text{const}; \quad (207)$$

$$2) \text{ если } R_x^{(e)} = \sum X^{(e)} = 0,$$

то

$$K_x = \sum mv_x = Mv_{Cx} = \text{const}. \quad (207')$$

Задачи, относящиеся к этому параграфу, можно разделить на следующие три основных типа:

I. Задачи на вычисление количества движения системы (задачи 966—969).

II. Задачи, в которых осуществляется сохранение количества движения системы или его проекции на данную неподвиж-

ную ось, т. е. применяются равенства (207) или (207') (Задачи 951—957, 970—974).

III. Задачи на применение теоремы о количестве движения системы или о движении центра масс к определению реакций связей (задачи 958—963, 975—980).

Задачи типа I

Задачи этого типа можно решать двумя способами: либо при помощи формул (199) и (200), либо при помощи формул (205) и (206)

Пример 155. В механизме, изображенном на рис. 192, кривошип $OO_1 = r$ весом P_1 вращается в вертикальной плоскости вокруг неподвижной оси O с постоянной угловой скоростью ω и приводит в движение колесо I радиусом r и весом P , которое катится без скольжения по неподвижному колесу II радиусом $2r$. Центр тяжести колеса I находится в точке O_1 . Прямолинейный стержень AB весом P_2 , соединенный шарниром A с колесом I , движется поступательно в вертикальных направлениях.

Найти проекции количества движения этой системы на координатные оси x и y (рис. 192).

Решение. *Первый способ.* Данная система состоит из трех тел: кривошипа OO_1 , подвижного колеса I и стержня AB . Поэтому $\bar{K} = \bar{K}_1 + \bar{K}_2 + \bar{K}_3$, где $\bar{K}_1$, $\bar{K}_2$, $\bar{K}_3$ — количества движения кривошипа, колеса I и стержня AB .

На основании формулы (205), применяемой к каждому из этих тел в отдельности, имеем

$$\bar{K} = \frac{P_1}{g} \bar{v}_C + \frac{P_2}{g} \bar{v}_C + \frac{P}{g} \bar{v}_{O_1}, \quad (a)$$

где $\bar{v}_{O_1}$, $\bar{v}_C$, $\bar{v}_C$ — соответственно скорости точек O_1 , C_1 (центра тяжести кривошипа) и C_2 (центра тяжести стержня).

Так как точки O_1 и C_1 принадлежат кривошипу вращающемуся вокруг оси O , то векторы $\bar{v}_C$ и $\bar{v}_{O_1}$ перпендикулярны к OO_1 и по модулю равны:

$$v_{C_1} = \frac{r}{2} \omega \quad \text{и} \quad v_{O_1} = r\omega.$$

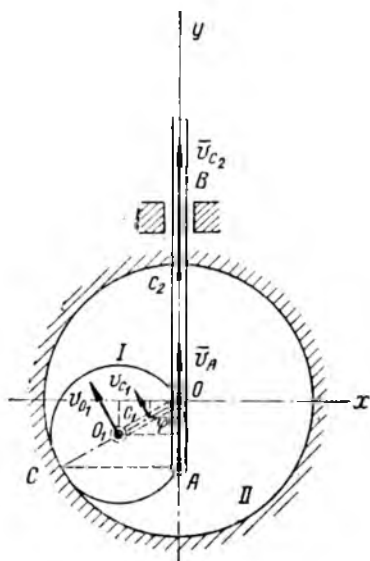


Рис 192

Так как стержень AB движется поступательно, то $\bar{v}_C = \bar{v}_A$, причем вектор v_A направлен по AB .

Чтобы найти скорость точки A , принадлежащей колесу I , заметим, что мгновенный центр вращения этого колеса находится в точке C касания колес I и II .

Следовательно,

$$\frac{v_A}{v_O} = \frac{AC}{O_1C} = \frac{2r \sin \varphi}{r} = 2 \sin \varphi,$$

где $\varphi = \omega t$ — угол поворота кривошипа; отсюда

$$v_A = 2v_{O_1} \sin \varphi = 2r\omega \sin(\omega t).$$

Теперь из равенства (а) находим искомые проекции количества движения данной системы:

$$\begin{aligned} K_x &= -\frac{P_1}{g} v_{C_1} \cos \varphi - \frac{P}{g} v_{O_1} \cos \varphi = -\frac{r\omega \cos \varphi}{g} \left(\frac{P_1}{2} + P \right) = \\ &= -\frac{r\omega \cos \omega t}{2g} (P_1 + 2P), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_y &= \frac{P_1}{g} v_{C_1} \sin \varphi + \frac{P}{g} v_{O_1} \sin \varphi + \frac{P_2}{g} v_A = \frac{P_1}{g} \cdot \frac{r}{2} \omega \sin \omega t + \\ &+ \frac{P}{g} r\omega \sin \omega t + \frac{2P_2}{g} r\omega \sin \omega t = \frac{r\omega \sin \omega t}{2g} (P_1 + 2P + 4P_2). \end{aligned}$$

Второй способ. На основании формул (204) имеем:

$$Mx_C = \frac{P_1}{g} x_{C_1} + \frac{P_2}{g} x_{C_2} + \frac{P}{g} x_{O_1}, \quad My_{C_1} = \frac{P_1}{g} y_{C_1} + \frac{P_2}{g} y_{C_2} + \frac{P}{g} y_{O_1},$$

где M — масса всей данной системы, состоящей из трех тел; C — центр масс этой системы.

Из рис. 192 находим:

$$x_{C_1} = -OC_1 \sin \varphi = -\frac{l}{2} \sin \omega t, \quad x_{C_2} = 0,$$

$$y_{C_1} = -OC_1 \cos \varphi = -\frac{l}{2} \cos \omega t, \quad y_{C_2} = AC_2 - OA = l - 2r \cos \omega t,$$

где

$$l = AC_2 = \text{const},$$

$$x_{O_1} = -OO_1 \sin \varphi = -r \sin \omega t,$$

$$y_{O_1} = -OO_1 \cos \varphi = -r \cos \omega t.$$

Следовательно,

$$Mx_C = -\frac{P_1}{g} \frac{r}{2} \sin \omega t - \frac{P}{g} r \sin \omega t = -(P_1 + 2P) \cdot \frac{r \sin \omega t}{2g};$$

$$M y_c = -\frac{P_1}{g} \cdot \frac{r}{2} \cos \omega t - \frac{P}{g} r \cos \omega t + \frac{P_2}{g} (l - 2r \cos \omega t) = \\ = -\frac{r \cos \omega t}{2g} (P_1 + 2P + 4P_2) + \frac{P_2}{g} l.$$

Отсюда на основании формул (205') получаем:

$$K_x = M \dot{x}_c = \frac{-r \omega \cos \omega t}{2g} (P_1 + 2P), \\ K_y = M \dot{y}_c = \frac{r \omega \sin \omega t}{2g} (P_1 + 2P + 4P_2).$$

Задачи типа II

К задачам второго типа относятся задачи, в которых сумма проекций всех внешних сил на данную неподвижную ось, например, на ось x , равна нулю. В этом случае (см. равенство 207') имеем

$$K_x = \sum m v_x = \text{const.}$$

Следовательно, если обозначим $\bar{K}_0$ количество движения системы в начальный момент (при $t=0$), то $K_x = K_{0x}$ или

$$\sum m v_x = \sum m v_{0x} \quad (208)$$

Если в начальный момент система неподвижна, т. е. начальные скорости всех ее точек равны нулю, то в этом случае $K_{0x} = 0$ и, следовательно,

$$\sum m v_x = 0. \quad (209)$$

Так как $K_x = M v_{Cx}$ (см. равенства 205'), то при $K_x = \text{const}$ имеем:

$$v_{Cx} = (v_{Cx})_{t=0}.$$

Если в начальный момент скорость центра масс системы равна нулю, то $(v_{Cx})_{t=0} = 0$ и, следовательно, $v_{Cx} = 0$ или $\frac{dx_c}{dt} = 0$; отсюда

$$x_c = \text{const} = x_{C_0}, \quad (210)$$

т. е. абсцисса центра масс системы в рассматриваемом случае постоянна.

Задачи второго типа можно решать двумя способами:

- 1) на основании равенств (208) и (209);
- 2) с применением равенства (210).

Пример 156. Определить перемещение плавающего крана, поднимающего груз весом $P_1 = 20$ кн, при повороте стрелы крана на 30° до вертикального положения. Вес крана $P_2 = 200$ кн, длина стрелы $OA = 8$ м. Сопротивлением воды пренебречь (рис. 193).

Решение. *Первый способ.* В данной задаче имеем систему, состоящую из двух тел: плавучего крана и груза; внешними силами, приложенными к этой системе, являются вес крана P_2 , вес груза P_1 и вертикальное давление воды, направленное снизу вверх (архимедова сила). Так как все эти внешние силы вертикальны, то сумма их проекций на горизонтальную ось x равна нулю.

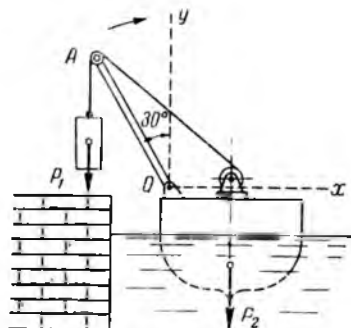


Рис. 193

Кроме того, в начальный момент система неподвижна, поэтому, применяя равенство (209), получим

$$\frac{P_1}{g} v_{1x} + \frac{P_2}{g} v_{2x} = 0,$$

где v_{1x} и v_{2x} — проекции на ось x абсолютных скоростей груза и плавучего крана.

Заменяя v_{1x} и v_{2x} на $\frac{dx_1}{dt}$ и $\frac{dx_2}{dt}$, где x_1 и x_2 — соответственно абсциссы груза и центра тяжести крана, получим:

$$\frac{P_1}{g} \frac{dx_1}{dt} + \frac{P_2}{g} \frac{dx_2}{dt} = 0$$

или, интегрируя,

$$P_1 x_1 + P_2 x_2 = \text{const} = P_1 x_{01} + P_2 x_{02},$$

где x_{01} и x_{02} — абсциссы груза и центра тяжести крана в начальный момент, причем, как видно из рисунка,

$$x_{01} = -OA \sin 30^\circ = -4.$$

В момент, когда стрела займет вертикальное положение, абсцисса x_1 груза будет равна перемещению s крана; следовательно, в этот момент имеем

$$P_1 s + P_2 x_2 = -4P_1 + P_2 x_{02}$$

или

$$P_1 s + P_2 (x_2 - x_{02}) = -4P_1.$$

Так как

$$x_2 - x_{02} = s,$$

то

$$(P_1 + P_2) s = -4P_1,$$

откуда находим

$$s = -\frac{4P_1}{P_1 + P_2} = -\frac{4}{11} = -0,36 \text{ м.}$$

Знак минус указывает на то, что кран переместился влево.

Второй способ. Применяя равенство (210), имеем

$$x_c = \text{const},$$

где x_c — абсцисса центра масс (центра тяжести) данной системы (груза и крана).

Но

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{P_1 x_1 + P_2 x_2}{P_1 + P_2},$$

поэтому

$$P_1 x_1 + P_2 x_2 = \text{const.}$$

Таким образом, мы имеем то же уравнение, которое получили выше, при первом способе решения задачи. Из этого уравнения так же, как при первом способе решения, находим искомое перемещение крана.

Пример 157. На горизонтальной платформе весом P_1 установлена наклонная плоскость AB , образующая с горизонтом угол α (рис. 194). По этой наклонной плоскости при помощи лебедки поднимается груз C весом P_2 так, что расстояние AC изменяется по закону $s = \frac{1}{2} at^2$.

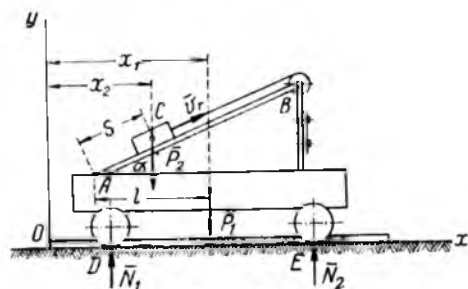


Рис. 194

В начальный момент вся система находится в покое.

Определить скорость, с которой будет двигаться платформа; сопротивлением движению платформы пренебрегаем.

Решение. Первый способ. В данной задаче мы имеем систему, состоящую из двух тел: платформы и груза C ; внешними силами, приложенными к этой системе, являются вес платформы P_1 , вес груза P_2 и нормальные реакции $\bar{N}_1$ и $\bar{N}_2$ рельсов в точках D и E . Так как все эти силы вертикальны, то сумма их проекций на горизонтальную ось x равна нулю, т. е. $\sum X^{(e)} = 0$; поэтому, учитывая, что в начальный момент система неподвижна, и применяя равенство (209), как в предыдущей задаче, получим

$$\frac{P_1}{g} v_{1x} + \frac{P_2}{g} v_{2x} = 0, \quad (a)$$

где v_{1x} и v_{2x} — проекции на ось x скоростей платформы и груза.

Если поступательное движение платформы принять за переносное движение, то относительным движением груза будет его перемещение по наклонной плоскости AB . Следовательно, вектор $\bar{v}_r$ относительной скорости груза направлен параллельно AB и по модулю равен

$$v_r = \frac{ds}{dt} = at.$$

Вектор $\bar{v}_c$ переносной скорости груза равен скорости платформы $\bar{v}_1$, параллельной оси x ; поэтому

$$v_{cx} = v_{1x} = v_1.$$

По теореме сложения скоростей имеем: $v_{2x} = v_{c_x} + v_{1_y} = v_1 + at \cos \alpha$. Поэтому равенство (а) переписывается так:

$$\frac{P_1}{g} v_1 + \frac{P_2}{g} (v_1 + at \cos \alpha) = 0.$$

Отсюда находим

$$v_1 = -\frac{P_2}{P_1 + P_2} at \cos \alpha.$$

Знак минус указывает на то, что платформа будет перемещаться влево.

Второй способ. Абсцисса центра масс данной системы равна

$$x_C = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{P_1 x_1 + P_2 x_2}{P_1 + P_2},$$

где x_1 и x_2 — абсциссы центров тяжести платформы и груза. Следовательно, на основании равенства (210) имеем

$$P_1 x_1 + P_2 x_2 = \text{const.}$$

Но, как видно из рисунка, $x_2 = x_1 - l + s \cos \alpha$, а потому

$$P_1 x_1 + P_2 (x_1 - l + s \cos \alpha) = \text{const.}$$

Дифференцируя это равенство по t , получим:

$$P_1 \frac{dx_1}{dt} + P_2 \left(\frac{dx_1}{dt} + \frac{ds}{dt} \cos \alpha \right) = 0,$$

или

$$(P_1 + P_2) \frac{dx_1}{dt} = -P_2 at \cos \alpha,$$

отсюда

$$\frac{dx_1}{dt} = v_1 = -\frac{P_2}{P_1 + P_2} at \cos \alpha.$$

Задачи типа III

Задачи типа III, в которых требуется определить реакции связей, также можно решать двумя способами:

1) по теореме о количестве движения системы [по уравнениям (202)];

2) по теореме о движении центра масс [по уравнениям (206')].

Пример 158. Мотор, вес которого равен P_1 , прикреплен к фундаменту болтами.

Вес ротора мотора равен P_2 , а его центр тяжести C_2 смещен относительно оси вращения на расстояние $OC_2 = e$. Ротор вращается по закону $\varphi = \frac{\pi t^2}{2}$. Определить вертикальное давление мотора на фундамент и горизонтальное усилие, приходящиеся

на все болты, в момент $t = 1$ сек (рис. 195).

Решение. *Первый способ.* В данной задаче мы имеем систему, состоящую из двух тел: корпуса мотора и ротора.

Внешними силами, приложенными к этой системе, являются вес мотора, вес ротора, реакции в болтах.

Обозначим вертикальные реакции в точках A и B через Y_A и Y_B , а горизонтальные реакции обозначим X_A и X_B .

Если количества движения мотора и ротора обозначим $\bar{K}_1$ и $\bar{K}_2$, то количество движения данной системы будет $\bar{K} = \bar{K}_1 + \bar{K}_2$. Так как мотор неподвижен, то $K_1 = 0$ и, следовательно, $\bar{K} = \bar{K}_2$.

Количество движения ротора находим по формуле (205)

$$\bar{K}_2 = \frac{P_2}{g} \bar{v}_2,$$

где $\bar{v}_2$ — скорость точки C_2 . Следовательно, $\bar{K} = \frac{P_2}{g} \bar{v}_2$. Отсюда находим проекции количества движения данной системы на координатные оси: $K_x = \frac{P_2}{g} v_{2x}$, $K_y = \frac{P_2}{g} v_{2y}$.

Применяя теперь теорему о количестве движения системы [уравнения (202)], получим

$$\frac{dK_x}{dt} = \sum X^{(e)}, \quad \frac{dK_y}{dt} = \sum Y^{(e)},$$

или

$$\frac{P_2}{g} \frac{dv_{2x}}{dt} = X_A + X_B, \quad \frac{P_2}{g} \frac{dv_{2y}}{dt} = Y_A + Y_B - (P_1 + P_2). \quad (a)$$

Скорость центра тяжести C_2 ротора перпендикулярна к радиусу OC_2 и по модулю равна $v_2 = OC_2 \omega = e\omega$, где $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \pi t$ — угловая скорость ротора.

Следовательно, $v_{2x} = v_2 \cos \varphi = e\omega \cos \varphi$; $v_{2y} = -v_2 \sin \varphi = -e\omega \sin \varphi$.

Поэтому уравнения (a) принимают вид:

$$\begin{aligned} X_A + X_B &= \frac{eP_2}{g} \frac{d}{dt} (\omega \cos \varphi) = \frac{eP_2}{g} \left(\frac{d\omega}{dt} \cos \varphi - \omega \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} \right) = \\ &= \frac{eP_2}{g} \left(\frac{d\omega}{dt} \cos \varphi - \omega^2 \sin \varphi \right). \end{aligned}$$

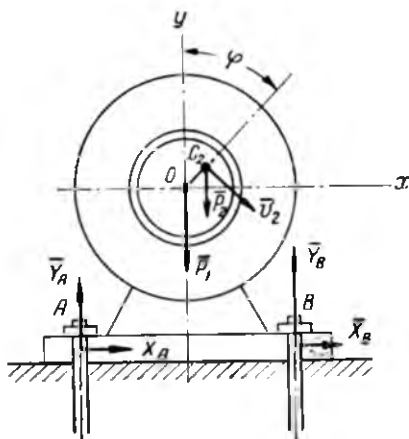


Рис. 195

$$\begin{aligned}
 Y_A + Y_B &= P_1 + P_2 - \frac{eP_2}{g} \frac{d(\omega \sin \varphi)}{dt} = \\
 &= P_1 + P_2 - \frac{eP_2}{g} \left(\frac{d\omega}{dt} \sin \varphi + \omega \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} \right) = \\
 &= P_1 + P_2 - \frac{eP_2}{g} \left(\frac{d\omega}{dt} \sin \varphi + \omega^2 \cos \varphi \right).
 \end{aligned}$$

В момент $t = 1$ сек имеем:

$$\varphi = \frac{\pi t^2}{2} = \frac{\pi}{2}, \quad \sin \varphi = 1, \quad \cos \varphi = 0, \quad \omega = \pi t = \pi; \quad \frac{d\omega}{dt} = \pi;$$

поэтому в этот момент

$$\begin{aligned}
 X_A + X_B &= -\frac{eP_2}{g} \pi^2, \quad Y_A + Y_B = P_1 + P_2 - \frac{eP_2}{g} \frac{d\omega}{dt} = \\
 &= P_1 + P_2 - e\pi \frac{P_2}{g}.
 \end{aligned}$$

Таким образом, полное вертикальное давление на фундамент в момент $t = 1$ сек равно $P_1 + P_2 - e\pi \frac{P_2}{g}$, а общее горизонтальное усилие, приходящееся на все болты, равно $\frac{eP_2}{g} \pi^2$.

Второй способ. Применяя теорему о движении центра масс системы [уравнения (206')], имеем

$$M\ddot{x}_C = X_A + X_B, \quad M\ddot{y}_C = Y_A + Y_B - P_1 - P_2,$$

где x_C и y_C — координаты центра тяжести данной системы, состоящей из корпуса мотора с центром тяжести в точке O и из ротора с центром тяжести в точке C_1 . По формулам (204) находим:

$$Mx_C = \frac{P_1}{g} x_0 + \frac{P_2}{g} x_{C_1} \quad \text{и} \quad My_C = \frac{P_1}{g} y_0 + \frac{P_2}{g} y_{C_1}.$$

Но $x_0 = y_0 = 0$, $x_{C_1} = OC_1 \sin \varphi = e \sin \varphi$,

$$y_{C_1} = OC_1 \cos \varphi = e \cos \varphi,$$

а потому

$$Mx_C = \frac{P_2}{g} e \sin \varphi, \quad My_C = \frac{P_2}{g} e \cos \varphi.$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
 M\ddot{x}_C &= \frac{P_2}{g} e \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} = \frac{P_2}{g} e \omega \cos \varphi, \\
 M\ddot{y}_C &= -\frac{P_2}{g} e \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{P_2}{g} e \omega \sin \varphi, \\
 M\ddot{x}_C &= \frac{eP_2}{g} \frac{d}{dt} (\omega \cos \varphi), \quad M\ddot{y}_C = -\frac{eP_2}{g} \frac{d}{dt} (\omega \sin \varphi).
 \end{aligned}$$

Следовательно,

$$X_A + X_B = \frac{eP_2}{g} \frac{d}{dt} (\omega \cos \varphi), \quad Y_A + Y_B = P_1 + P_2 - \frac{eP_2}{g} \frac{d}{dt} (\omega \sin \varphi).$$

Мы получили, таким образом, те же уравнения, как и при первом способе решения. Из этих уравнений так же как указано выше, получим тот же результат.

§ 2. ТЕОРЕМА О КИНЕТИЧЕСКОМ МОМЕНТЕ СИСТЕМЫ

Главный момент количеств движения всех материальных точек системы относительно данного центра или данной оси называется *кинетическим моментом* системы относительно этого центра или этой оси.

Следовательно, обозначая кинетический момент системы относительно точки O (начала координат) $\bar{L}_0$, а кинетические моменты системы относительно координатных осей L_x , L_y , L_z , имеем:

$$\bar{L}_0 = \Sigma \bar{m}_0 (\bar{m}\bar{v}), \quad (211)$$

$$\left. \begin{aligned} L_x &= \Sigma m_x (\bar{m}\bar{v}) = \Sigma (y m v_z - z m v_y) = \Sigma m (yz - zy), \\ L_y &= \Sigma m_y (\bar{m}\bar{v}) = \Sigma (z m v_x - x m v_z) = \Sigma m (zx - xz), \\ L_z &= \Sigma m_z (\bar{m}\bar{v}) = \Sigma (x m v_y - y m v_x) = \Sigma m (xy - yx). \end{aligned} \right\} \quad (212)$$

Теорема о кинетическом моменте системы состоит в следующем:

производная по времени от кинетического момента системы относительно данного неподвижного центра или данной неподвижной оси равна главному моменту всех внешних сил, приложенных к этой системе относительно того же центра или той же оси, т. е.

$$\frac{d\bar{L}_0}{dt} = \bar{M}_0^{(e)} = \Sigma \bar{m}_0 (\bar{F}^{(e)}). \quad (213)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dL_x}{dt} &= M_x^{(e)} = \Sigma m_x (\bar{F}^{(e)}), \\ \frac{dL_y}{dt} &= M_y^{(e)} = \Sigma m_y (\bar{F}^{(e)}), \\ \frac{dL_z}{dt} &= M_z^{(e)} = \Sigma m_z (\bar{F}^{(e)}). \end{aligned} \right\} \quad (214)$$

Следствие. Если главный момент всех внешних сил относительно неподвижного центра O или данной неподвижной оси z равен нулю, то кинетический момент системы относительно этого центра или этой оси остается неизменным, т. е.

$$1) \text{ если } \bar{M}_0^{(e)} = 0, \text{ то } \bar{L}_0 = \text{const.} \quad (215)$$

$$2) \text{ если } M_z^{(e)} = 0, \text{ то } L_z = \text{const.} \quad (216)$$

При поступательном движении твердого тела его кинетический момент относительно любой оси z равен моменту относительно той же оси количества движения центра масс этого тела в предположении, что в этом центре сосредоточена вся масса M тела, т. е.

$$L_z = m_z (M\bar{v}_C). \quad (217)$$

Если твердое тело вращается вокруг оси z с угловой скоростью ω , то его кинетический момент относительно этой оси равен произведению момента инерции этого тела относительно оси вращения на угловую скорость, т. е.

$$L_z = J_z \omega. \quad (218)$$

При этом моментом инерции тела относительно данной оси z называется сумма произведений массы каждой элементарной частицы тела на квадрат ее расстояния до этой оси, т. е.

$$J_z = \sum m r^2, \quad (219)$$

где m — масса элементарной частицы, а r — ее расстояние до оси z .

Если твердое тело движется параллельно данной неподвижной плоскости, то его кинетический момент относительно любой оси z , перпендикулярной к этой плоскости, равен моменту относительно оси z количества движения центра масс C этого тела в предположении, что в этом центре сосредоточена вся масса M тела плюс кинетический момент тела относительно оси Cz' в его вращательном движении, вокруг этой оси, причем ось Cz' проходит через центр масс тела и параллельна оси z , т. е.

$$L_z = m_z (M\bar{v}_C) + J_{Cz'} \omega, \quad (220)$$

где

$J_{Cz'}$ — момент инерции тела относительно оси Cz' ,

ω — алгебраическое значение угловой скорости тела (положительное, если тело вращается вокруг оси Cz' против часовой стрелки, и отрицательное в противном случае).

Из равенств (214) и (218) получаем дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси z :

$$J_z \frac{d\omega}{dt} = \sum m_z (\bar{F}^e), \quad (221)$$

где $\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon$ — угловое ускорение тела.

Задачи, относящиеся к этому параграфу, можно разделить на следующие пять основных типов:

I. Задачи на вычисление кинетического момента системы.

II. Задачи, в которых осуществляется сохранение кинетического момента системы относительно неподвижного центра

или неподвижной оси, т. е. используются равенства (215) или (216).

III. Задачи, относящиеся к вращению твердого тела вокруг неподвижной оси.

IV. Задачи, относящиеся к крутильным колебаниям.

V. Задачи на определение гироскопических реакций в случае гироскопа с двумя степенями свободы.

Задачи типа I

Задачи этого типа можно решать при помощи общих формул (211) или (212).

Кинетический момент твердого тела следует вычислять в зависимости от вида движения тела по формулам (217), (218) или (220).

Пример 159. Механизм эллипсографа состоит из ползунов A и B весом P каждый, кривошипа OC весом P и линейки AB весом $2P$. Кривошип OC вращается вокруг неподвижной оси Oz , перпендикулярной к плоскости чертежа, с угловой скоростью ω .

Найти кинетический момент этой системы относительно оси Oz , рассматривая линейку AB и кривошип OC как однородные тонкие стержни, а ползуны A и B — как материальные точки, если $OC = AC = CB = l$ (рис. 196).

Решение. *Первый способ.* Данный механизм состоит из четырех тел: кривошипа OC , линейки AB и ползунов A и B , а потому искомый кинетический момент равен

$$L_z = L_z^{(1)} + L_z^{(2)} + L_z^{(3)} + L_z^{(4)},$$

где $L_z^{(1)}$, $L_z^{(2)}$, $L_z^{(3)}$, $L_z^{(4)}$ — соответственно кинетические моменты кривошипа, линейки и ползунов A и B относительно оси z .

Кинетический момент кривошипа OC находим по формуле (218):

$$L_z^{(1)} = J_z^{(1)} \omega,$$

где $J_z^{(1)}$ — момент инерции кривошипа относительно оси z , равный $\frac{M_1 l^2}{3} = \frac{P}{g} \frac{l^2}{3}$;

следовательно

$$L_z^{(1)} = \frac{P}{3g} l^2 \omega.$$

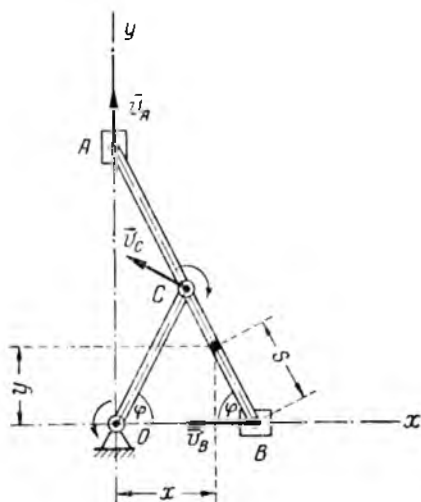


Рис. 196

Так как скорости ползунов A и B направлены соответственно вдоль осей Ox и Oy и, следовательно, пересекают ось Oz , то $L_z^{(1)} = L_z^{(2)} = 0$.

Чтобы вычислить кинетический момент $L_z^{(2)}$ линейки, применим последнюю из формул (212).

Разобьем стержень AB на бесконечно малые элементы (материальные частицы); массу такого элемента обозначим m , а его координаты обозначим x и y . Тогда

$$x = (2l - s) \cos \varphi; \quad y = s \sin \varphi,$$

где s — расстояние рассматриваемого элемента от точки B . Отсюда

$$\dot{x} = -(2l - s) \sin \varphi \cdot \dot{\varphi} = -(2l - s) \sin \varphi \cdot \omega; \quad \dot{y} = s \cos \varphi \cdot \omega.$$

Следовательно, момент количества движения элемента относительно оси z будет

$$m_z(m\vec{v}) = m(xy - y\dot{x}) = m[(2l - s)\omega \cos^2 \varphi + (2l - s)s\omega \sin^2 \varphi] = \\ = m(2l - s)s\omega;$$

а поэтому $L_z^{(2)} = \sum m(xy - y\dot{x}) = \sum m(2l - s)s\omega = \omega(2l \sum ms - \sum ms^2)$, но $\sum ms = M_2 s_C = \frac{2P}{g} l$, а $\sum ms^2$ — момент инерции стержня AB относительно точки B , равный $M_2 \frac{AB^2}{3} = \frac{8P}{3g} l^2$. Следовательно, $L_z^{(2)} = \omega \left(\frac{4P}{g} l^2 - \frac{8P}{3g} l^2 \right) = \frac{4P}{3g} l^2 \omega$.

Таким образом, искомый кинетический момент механизма будет

$$L_z = \frac{P}{3g} l^2 \omega + \frac{4P}{3g} l^2 \omega = \frac{5P}{3g} l^2 \omega.$$

Второй способ. Так как движение стержня AB является плоскопараллельным, то его кинетический момент относительно оси z можно найти проще, применяя формулу (220),

$$L_z^{(2)} = m_z(M_2 \vec{v}_C) + J_C^{(2)} \omega_1,$$

где $J_C^{(2)}$ — момент инерции стержня AB относительно оси, проходящей через его центр тяжести C и перпендикулярной к плоскости xOy (относительно точки C),

ω_1 — угловая скорость вращения стержня вокруг этой оси (вокруг точки C).

Следовательно,

$$J_C^{(2)} = M_2 \frac{AB^2}{12} = \frac{M_2 l^2}{3}.$$

Так как стержень AB вращается вокруг точки C по часовой стрелке, то $\omega_1 = -\frac{d\varphi}{dt} = -\omega$. Так как точка C принадлежит и

криволиней OC , то ее скорость $\vec{v}_C$ перпендикулярна к OC и $v_C = l\omega$, поэтому $m_z(M_z \vec{v}_C) = M_z l^2 \omega$. Следовательно,

$$L_z^{(2)} = M_z l^2 \omega - \frac{M_z l^2 \omega}{3} = \frac{2}{3} M_z l^2 \omega = \frac{4P}{3g} l^2 \omega$$

и
$$L_z = L_z^{(1)} + L_z^{(2)} = \frac{P}{3g} l^2 \omega + \frac{4P}{3g} l^2 \omega = \frac{5P}{3g} l^2 \omega.$$

Задачи типа II

К задачам типа II, как было указано выше, относятся такие задачи, в которых сумма моментов всех внешних сил, действующих на систему относительно данной неподвижной оси, например оси z , равна нулю. В этом случае (см. равенство 216) имеем

$$L_z = \sum m_z(m\vec{v}) = \text{const.}$$

Следовательно, если обозначим $L_z^{(0)}$ кинетический момент системы относительно оси z в начальный момент при $t=0$, то в рассматриваемом случае имеем

$$L_z = L_z^{(0)}, \text{ или } \sum m_z(m\vec{v}) = \sum m_z(m\vec{v}_0). \quad (222)$$

Если в начальный момент система неподвижна, то начальные скорости всех ее точек равны нулю, следовательно, $L_z^{(0)} = 0$, и в этом случае

$$L_z = \sum m_z(m\vec{v}) = 0. \quad (222')$$

При решении задач второго типа нужно составить уравнение (222) или уравнение (222') и определить из него ту величину, которую требуется найти в данной задаче.

Пример 160. На поверхности круглого однородного цилиндра радиусом r и массы M , который может вращаться без трения вокруг неподвижной вертикальной оси z , имеется канал в форме винтовой линии; в этом канале находится шарик (материальная точка) массой m . В некоторый момент, когда система неподвижна, шарик начинает двигаться по винтовой линии под действием силы тяжести, а цилиндр начинает при этом вращаться вокруг оси z в противоположном направлении. На какой угол повернется цилиндр за то время, в течение которого шарик опустится на расстояние, равное шагу h винтовой линии (рис. 197).

Решение. Внешними силами для данной системы, состоящей из цилиндра и шарика, являются их веса и реакции закрепленных точек, через которые проходит ось вращения

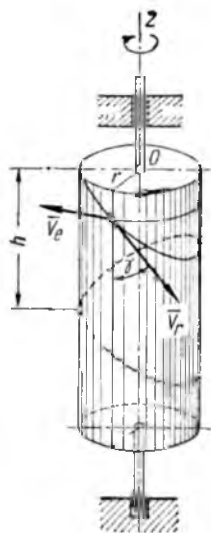


Рис. 197

цилиндра z . Так как моменты этих сил относительно оси z равны нулю и в начальный момент система неподвижна, то применяется уравнение (222'), т. е. $L_z = 0$, где L_z — кинетический момент данной системы относительно оси z . Этим уравнением и воспользуемся для решения задачи.

Кинетический момент вращающегося цилиндра относительно оси вращения z равен $J_z \omega = -\frac{Mr^2}{2} \omega$, где ω — угловая скорость цилиндра (знак минус берем потому, что цилиндр вращается по часовой стрелке, если смотреть с положительного конца оси z).

Если относительную скорость шарика, направленную по касательной к винтовой линии, обозначим v_r , а постоянный угол скорости с осью z — через γ , то горизонтальная составляющая относительной скорости, направленная по касательной к цилиндру, по модулю будет равна $v_r \sin \gamma$. Переносная скорость $\bar{v}_e$ шарика (скорость во вращательном движении вокруг оси z) направлена противоположно горизонтальной составляющей относительной скорости и по модулю равна $r\omega$. Поэтому горизонтальная составляющая абсолютной скорости шарика равна

$$v_r \sin \gamma - r\omega,$$

а момент количества движения шарика относительно оси z равен

$$m(v_r \sin \gamma - r\omega)r,$$

следовательно,

$$L_z = -\frac{Mr^2\omega}{2} + mr(v_r \sin \gamma - r\omega);$$

так как $L_z = 0$, то

$$-\frac{Mr^2\omega}{2} + m(v_r \sin \gamma - r\omega)r = 0$$

или

$$\left(\frac{M}{2} + m\right)r\omega = mv_r \sin \gamma. \quad (a)$$

Если угол поворота цилиндра обозначим φ , то

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt};$$

проекция v_z абсолютной скорости шарика на ось z , очевидно, равна $-v_r \cos \gamma$, а потому

$$\frac{dz}{dt} = v_z = -v_r \cos \gamma$$

и

$$v_r \sin \gamma = v_r \cos \gamma \operatorname{tg} \gamma = -\operatorname{tg} \gamma \frac{dz}{dt}.$$

Следовательно, уравнение (a) принимает вид

$$\left(\frac{M}{2} + m\right)r \frac{d\varphi}{dt} = -m \operatorname{tg} \gamma \frac{dz}{dt},$$

или

$$\left(\frac{M}{2} + m\right) r dz = -m \operatorname{tg} \gamma dz.$$

Интегрируя это уравнение и принимая во внимание, что в начальный момент $\varphi_0 = 0$ и $z_0 = 0$, получим

$$\left(\frac{M}{2} + m\right) r \varphi = -m \operatorname{tg} \gamma z.$$

Полагая по условию задачи $z = -h$, находим искомый угол поворота цилиндра

$$\varphi = \frac{m \operatorname{tg} \gamma h}{\left(\frac{M}{2} + m\right) r}.$$

Так как между углом наклона γ винтовой линии и ее шагом h имеется зависимость $\operatorname{tg} \gamma = \frac{2\pi r}{h}$, то $\varphi = \frac{2\pi m}{\frac{M}{2} + m}$.

Если, например, $M = 6m$, то цилиндр повернется на 90° .

Задачи типа III

В зависимости от внешних сил, приложенных к вращающемуся твердому телу, задачи типа III можно разделить на три группы.

1. Главный момент приложенных к телу сил относительно оси вращения есть величина постоянная.

2. Главный момент приложенных к телу сил относительно оси вращения зависит от угловой скорости тела. Этот случай возможен при вращении тела в сопротивляющейся среде.

3. Главный момент приложенных к телу сил относительно оси вращения есть функция угла φ поворота тела, как, например, это бывает в случае движения физического маятника.

Первая группа

Для решения этих задач нужно составить и затем проинтегрировать дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела [уравнение (221)].

Пример 161. Сплошной цилиндр радиусом r , положенный, как указано на рис. 198, на цилиндрические ролики A и B , вращается с угловой скоростью ω_0 вокруг своей горизонтальной оси O . В некоторый момент ролики затормаживаются. Через сколько времени после этого цилиндр остановится, если коэффициент трения между цилиндром и роликами равен f , а $\angle AOB = 2\alpha$.

Решение. Внешними силами, приложенными к вращающемуся цилиндру, являются его вес $\vec{P}$, нормальные реакции $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ роликов и силы трения $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ между цилиндром и роликами, причем $F_1 = fN_1$ и $F_2 = fN_2$.

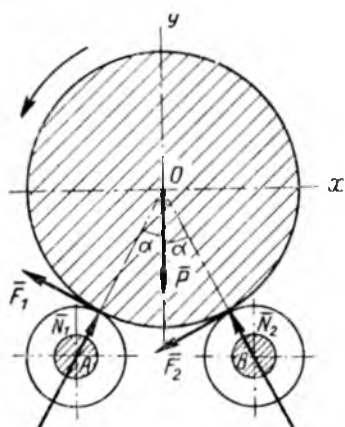


Рис. 198

Так как моменты сил $\vec{P}$, $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ относительно оси вращения O цилиндра равны нулю, то главный момент внешних сил относительно этой оси $M_0 = -F_1 r - F_2 r = -fr(N_1 + N_2)$, поэтому дифференциальное уравнение вращательного движения цилиндра имеет вид

$$J_0 \frac{d\omega}{dt} = -fr(N_1 + N_2).$$

Найдем теперь силы N_1 и N_2 ; для этого, применяя теорему о движении центра масс системы, составим дифференциальные уравнения движения центра тяжести O цилиндра:

$$My_c = \sum Y^{(e)} = -P + (N_1 + N_2) \cos \alpha - F_2 \sin \alpha + F_1 \sin \alpha,$$

$$M\ddot{x}_c = \sum X^{(e)} = N_1 \sin \alpha - N_2 \sin \alpha - F_2 \cos \alpha - F_1 \cos \alpha.$$

Так как точка O неподвижна, то $\ddot{x}_c = \ddot{y}_c = 0$, а потому

$$\begin{aligned} (N_1 - N_2) \sin \alpha - f(N_1 + N_2) \cos \alpha &= 0, \\ (N_1 + N_2) \cos \alpha + f(N_1 - N_2) \sin \alpha &= P. \end{aligned}$$

Исключая из этих уравнений разность $N_1 - N_2$, получим

$$N_1 + N_2 = \frac{P}{(1 + f^2) \cos \alpha}$$

и, следовательно,

$$J_0 \frac{d\omega}{dt} = -\frac{frP}{(1 + f^2) \cos \alpha}.$$

Но для цилиндра $J_0 = \frac{P}{g} \frac{r^2}{2}$, а потому

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{2gf}{(1 + f^2) r \cos \alpha} = \text{const.}$$

Интегрируя это уравнение, находим

$$\omega - \omega_0 = -\frac{2gf}{(1 + f^2) r \cos \alpha} t.$$

Так как в момент остановки цилиндра $\omega = 0$, то искомое время равно

$$t = \frac{(1 + f^2) r \cos \alpha \omega_0}{2gf}.$$

Вторая группа

При интегрировании дифференциального уравнения вращательного движения твердого тела в этих задачах нужно применить способ разделения переменных.

Пример 162. Для быстрого торможения больших маховиков применяется электрический тормоз, состоящий из двух полюсов, расположенных диаметрально противоположно и несущих на себе обмотку, питаемую постоянным током. Токи Фуко, индуцируемые в массе маховика, при его движении около полюсов создают тормозящий момент M_1 , пропорциональный скорости v на ободе маховика: $M_1 = kv$, где k — коэффициент, зависящий от магнитного потока и размеров маховика. Момент M_2 от трения в подшипниках можно считать постоянным: радиус маховика r ; момент инерции его относительно оси вращения J . Найти, через какой промежуток времени остановится маховик, вращающийся с угловой скоростью ω_0 .

Решение. Главный момент внешних сил, приложенных к маховику относительно его оси вращения, равен

$$M = -(M_1 + M_2) = -(kv + M_2),$$

поэтому, составляя для маховика уравнение (221), имеем

$$J \frac{d\omega}{dt} = -(kv + M_2),$$

или, заменяя v на $r\omega$,

$$J \frac{d\omega}{dt} = -(kr\omega + M_2).$$

Разделяя здесь переменные, получим

$$\frac{J d\omega}{M_2 + kr\omega} = -dt.$$

Отсюда, интегрируя, находим

$$\left. \frac{J}{kr} \ln(M_2 + kr\omega) \right|_{\omega_0}^0 = -t$$

или

$$t = \frac{J}{kr} \ln \frac{M_2 + kr\omega_0}{M_2} = \frac{J}{kr} \ln \left(1 + \frac{kr}{M_2} \omega_0 \right).$$

Третья группа

В этих задачах главный момент внешних сил, приложенных к вращающемуся твердому телу, является функцией угла поворота φ этого тела, т. е. $M = f(\varphi)$. Если в уравнении (221) угловую скорость ω заменить производной $\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$, то это уравнение

принимает вид:

$$J\ddot{\varphi} = M = f(\varphi).$$

При решении задач третьей группы нужно проинтегрировать это уравнение.

Пример 163. Однородный круглый диск радиуса r совершает колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси, перпендикулярной к плоскости диска и проходящей через точку O , причем расстояние от точки O до центра тяжести C диска равно $\frac{r}{2}$.

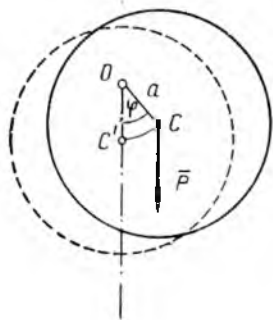


Рис. 199

Найти закон движения диска при малых колебаниях, а также период этих колебаний. В начальный момент угол отклонения диска от равновесного положения равен φ_0 , а его начальная угловая скорость равна нулю (рис. 199).

Решение. В данной задаче диск является физическим маятником. Если вес маятника обозначим P , а расстояние OC обозначим a , то $m_0(\bar{P}) = -aP \sin \varphi$; а поэтому дифференциальное уравнение вращательного движения маятника имеет вид

$$J_0 \ddot{\varphi} = -aP \sin \varphi.$$

При *малых* колебаниях можно положить $\sin \varphi \approx \varphi$. Тогда получим дифференциальное уравнение малых колебаний маятника

$$J_0 \ddot{\varphi} + aP \varphi = 0$$

или

$$\ddot{\varphi} + k^2 \varphi = 0,$$

где

$$k^2 = \frac{aP}{J_0}.$$

Мы получили дифференциальное уравнение гармонических колебаний; его общее решение имеет вид: $\varphi = C_1 \sin(kt) + C_2 \cos(kt)$. Отсюда $\dot{\varphi} = kC_1 \cos(kt) - kC_2 \sin kt$.

Так как в начальный момент по условию задачи $\varphi = \varphi_0$, $\dot{\varphi} = 0$, то из этих уравнений, полагая в них $t = 0$, находим $C_2 = \varphi_0$, $C_1 = 0$. Следовательно,

$$\varphi = \varphi_0 \cos kt.$$

Это уравнение выражает искомый закон движения маятника при малых колебаниях. Период этих колебаний равен

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{J_0}{aP}}.$$

В данной задаче $a = \frac{r}{2}$; момент инерции диска находим по теореме о моментах инерции относительно параллельных осей:

$$J_0 = J_C + M \cdot OC^2 = \frac{Mr^2}{2} + M \frac{r^2}{4} = \frac{3}{4} Mr^2 = \frac{3P}{4g} r^2.$$

Поэтому

$$k = \sqrt{\frac{2g}{3r}}, \quad \varphi = \varphi_0 \cos \left(\sqrt{\frac{2g}{3r}} t \right),$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{3r}{2g}}.$$

Сравнивая последнюю из этих формул с периодом колебаний математического маятника $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$, где l — длина нити маятника, видим, что приведенная длина рассматриваемого физического маятника равна

$$l = \frac{3}{2} r.$$

Задачи типа IV

Задачи этого типа, относящиеся к крутильным колебаниям, можно разделить на три группы:

- 1) свободные крутильные колебания;
- 2) затухающие крутильные колебания;
- 3) вынужденные крутильные колебания.

При решении всех этих задач следует составить дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела [уравнение (221)] и затем это уравнение проинтегрировать.

Первая группа

В задачах этой группы приложенный к телу момент пропорционален углу φ , определяющему положение вращающегося тела, и имеет противоположный знак, т. е. $M = -c\varphi$, где c — коэффициент пропорциональности. Следовательно, уравнение (221) принимает вид

$$J \frac{d^2\varphi}{dt^2} + c\varphi = 0,$$

или

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0,$$

где $k^2 = \frac{c}{J}$; это есть дифференциальное уравнение гармонических колебаний, решение которого рассмотрено в главе II. По формулам (127) и (130) находим

$$\varphi = \varphi_0 \cos(kt) + \frac{\dot{\varphi}_0}{k} \sin(kt)$$

или

$$\varphi = \varphi_0 \cos \left(\sqrt{\frac{c}{J}} t \right) + \frac{\dot{\varphi}_0}{\sqrt{\frac{c}{J}}} \sin \left(\sqrt{\frac{c}{J}} t \right).$$

Период этих гармонических колебаний равен

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{c}}.$$

Вторая группа

В задачах этой группы к вращающемуся телу, кроме момента $M = -c\varphi$, приложен еще момент сопротивления, пропорциональный угловой скорости тела, т. е. момент $M_1 = -\mu\dot{\varphi}$, где μ — коэффициент пропорциональности.

Поэтому уравнение (221) принимает вид:

$$J\ddot{\varphi} = -c\varphi - \mu\dot{\varphi}$$

или

$$\ddot{\varphi} + \frac{c}{J}\varphi + \frac{\mu}{J}\dot{\varphi} = 0,$$

или $\ddot{\varphi} + 2n\dot{\varphi} + k^2\varphi = 0$, где $2n = \frac{\mu}{J}$ и $k^2 = \frac{c}{J}$. Мы получили дифференциальное уравнение затухающих колебаний (при $k > n$), решение которого находим по формулам (132) и (133): $\varphi = ae^{-nt} \sin \left(\sqrt{k^2 - n^2} t + \alpha \right)$.

или

$$\begin{aligned} \varphi &= ae^{-\frac{\mu}{2J}t} \sin \left(\sqrt{\frac{c}{J} - \frac{\mu^2}{4J^2}} t + \alpha \right) = \\ &= ae^{-\frac{\mu}{2J}t} \sin \left(\frac{1}{2J} \sqrt{4Jc - \mu^2} t + \alpha \right). \end{aligned}$$

Период этих затухающих колебаний [см. формулу (134)]:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}} = \frac{4\pi J}{\sqrt{4Jc - \mu^2}}.$$

Постоянные a и α определяются по начальным условиям движения тела (по начальному углу φ_0 и начальной угловой скорости $\dot{\varphi}_0$).

Третья группа

В этих задачах, кроме моментов $M = -c\varphi$ и $M_1 = -\mu\dot{\varphi}$, к вращающемуся телу приложен момент M_2 , выражающийся периодической функцией времени, т. е. изменяющейся со временем, например по гармоническому закону (по закону синуса или косинуса).

Если $M_p = H \sin(pt)$, где H и p — постоянные величины, то уравнение (221) имеет вид

$$J\ddot{\varphi} + \mu\dot{\varphi} + c\varphi = H \sin(pt),$$

или

$$\ddot{\varphi} + 2n\dot{\varphi} + k^2\varphi = h \sin(pt),$$

где

$$2n = \frac{\mu}{J}, \quad k^2 = \frac{c}{J} \quad \text{и} \quad h = \frac{H}{J}.$$

Здесь мы имеем дифференциальное уравнение 2-го порядка с правой частью, отличной от нуля. Интегрирование такого уравнения рассмотрено в § 3 главы II; его общее решение имеет вид

$$\varphi = ae^{-nt} \sin(\sqrt{k^2 - n^2}t + \alpha) + b \sin(pt + \beta),$$

или

$$\varphi = ae^{-\frac{\mu}{2J}t} \sin\left(\frac{1}{2J}\sqrt{4Jc - \mu^2}t + \alpha\right) + b \sin(pt + \beta)$$

Второй член в правой части этого равенства выражает вынужденные крутильные колебания. Амплитуда b и начальная фаза β этих вынужденных колебаний, согласно сказанному в § 3 главы II, определяются по формулам:

$$\begin{aligned} b &= \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}} = \frac{H}{J \sqrt{\left(\frac{c}{J} - p^2\right)^2 + \frac{\mu^2}{J^2}p^2}} = \\ &= \frac{H}{\sqrt{(c - Jp^2)^2 + \mu^2p^2}}, \\ \operatorname{tg} \beta &= -\frac{2np}{k^2 - p^2} = -\frac{\mu p}{J\left(\frac{c}{J} - p^2\right)} = -\frac{\mu p}{c - Jp^2}. \end{aligned}$$

Постоянные a и α определяются по начальным условиям вращательного движения тела.

При $p = k = \sqrt{\frac{c}{J}}$, т. е. при равенстве частот свободных гармонических и вынужденных колебаний, имеем явление резонанса. Амплитуда вынужденных колебаний в этом случае будет

$$b_{\text{рез}} = \frac{H}{\mu p} = \frac{H}{\mu k} = \frac{H}{\mu} \sqrt{\frac{J}{c}}.$$

При отсутствии момента сопротивления нужно в уравнениях и формулах третьей группы задач положить $\mu = n = 0$. Тогда дифференциальное уравнение крутильных колебаний имеет вид: $J\ddot{\varphi} + c\varphi = H \sin(pt)$, а его общее решение

$$\varphi = a \sin(kt + \alpha) + b \sin(pt),$$

$$\varphi = a \sin \left(\sqrt{\frac{c}{J}} t + \alpha \right) + b \sin (pt).$$

Амплитуда вынужденных крутильных колебаний будет определяться по формуле $b = \frac{H}{c - Jp^2}$.

При $p = \sqrt{\frac{c}{J}}$, т. е. в случае резонанса при отсутствии сопротивлений общее решение предыдущего дифференциального уравнения (закон вращательного движения тела) имеет вид

$$\varphi = a \sin (kt + \alpha) - \frac{H}{2Jk} t \cos (kt),$$

или

$$\varphi = a \sin \left(\sqrt{\frac{c}{J}} t + \alpha \right) - \frac{H}{2J} \sqrt{\frac{J}{c}} t \cos \left(\sqrt{\frac{c}{J}} t \right).$$

Постоянные a и α определяются, как и в предыдущем случае (при наличии сопротивления), по начальным условиям движения тела.

Пример 164. Для определения коэффициента вязкости жидкости наблюдают колебания диска, подвешенного на упругой вертикальной проволоке в жидкости. К диску приложен переменный момент, равный $M' \sin (pt)$ ($M' = \text{const}$), при котором наблюдается явление резонанса. Момент сопротивления движению диска в жидкости равен $\mu' S \omega$, где μ' — коэффициент вязкости жидкости, S — сумма площадей верхнего и нижнего оснований диска, ω — его угловая скорость.

Определить коэффициент вязкости жидкости μ' , если амплитуда вынужденных колебаний диска при резонансе равна φ' .

Решение. К диску, вращающемуся вокруг вертикальной оси, приложен момент M упругих сил, возникающий при закручивании проволоки на угол φ и пропорциональный этому углу, момент сопротивления жидкости $M_1 = \mu' S \omega$ и переменный момент $M_2 = M' \sin (pt)$.

Поэтому в данном случае имеем:

$$\mu = \mu' S, \quad H = M'.$$

Так как по условию задачи при данной частоте p наблюдается резонанс, причем амплитуда вынужденных крутильных колебаний диска равна φ' , то по вышеуказанной формуле

$$b_{\text{рез}} = \frac{H}{\mu p} \text{ находим } \varphi' = \frac{M'}{\mu' S p}, \text{ откуда } \mu' = \frac{M'}{\varphi' S p}.$$

Задачи типа V

Представим себе движущееся твердое тело, одна точка O которого закреплена неподвижно, например при помощи сферического шарнира (рис. 200). Как известно из кинематики, в каж-

данный момент такое тело вращается вокруг некоторой определенной мгновенной оси, проходящей через неподвижную точку O . Вектор мгновенной угловой скорости тела, направленный по мгновенной оси вращения, обозначим $\vec{\omega}$, а его проекции на координатные оси, начало которых находится в точке O , обозначим $\omega_x, \omega_y, \omega_z$. Найдем кинетический момент этого тела относительно оси x . Разбивая тело на

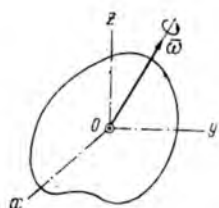


Рис. 200

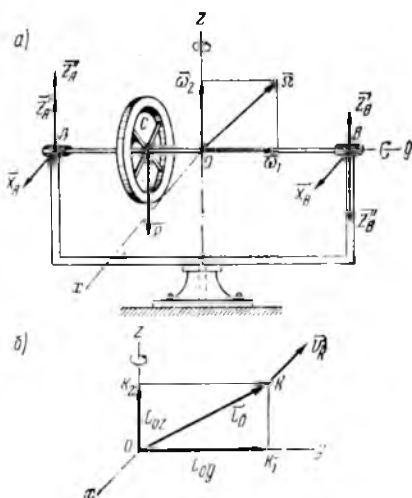


Рис. 201

элементарные частицы и применяя формулы (212), имеем

$$L_x = \sum m_x (m\bar{v}) = \sum m (y v_z - z v_y),$$

где m — масса элементарной частицы, y и z — ее координаты, а v_y, v_z — проекции скорости частицы на оси y и z .

Проекции на координатные оси скорости $\bar{v}$ точки вращающегося твердого тела определяются по кинематическим формулам Эйлера*:

$$v_x = \omega_y z - \omega_z y, \quad v_y = \omega_z x - \omega_x z, \quad v_z = \omega_x y - \omega_y x.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} L_x &= \sum m (\omega_x y^2 - \omega_y xy - \omega_z xz + \omega_x z^2) = \\ &= \omega_x \sum m (y^2 + z^2) - \omega_y \sum m xy - \omega_z \sum m xz, \end{aligned}$$

или

$$L_x = J_x \omega_x - J_{xy} \omega_y - J_{xz} \omega_z,$$

где $J_x = \sum m (y^2 + z^2)$ — момент инерции тела относительно оси x , $J_{xy} = \sum m xy$ и $J_{xz} = \sum m xz$ — центробежные моменты инерции тела.

* Вывод этих формул можно найти, например, в курсе теоретической механики проф. И. М. Воронкова.

Если координатные оси x, y, z направим по главным осям инерции данного тела в точке O , то $J_{xy} = J_{yz} = 0$, а потому в этом случае $L_x = J_x \omega_x$.

Аналогично найдем, что при этом условии кинетические моменты тела относительно осей y и z будут равны

$$L_y = J_y \omega_y, \quad L_z = J_z \omega_z.$$

Предположим теперь, что твердое тело, имеющее форму тела вращения вокруг оси AB , например колесо или тор, равномерно вращается вокруг этой оси AB с угловой скоростью $\bar{\omega}_1$; в то же время эта горизонтальная ось AB вращается равномерно вокруг неподвижной вертикальной оси с угловой скоростью $\bar{\omega}_2$. Требуется определить реакции в подшипниках A и B , перпендикулярные к оси AB , если вес тела равен P и $AC = l_1$, $CB = l_2$, $AB = l_1 + l_2 = l$, причем C — центр тяжести данного тела (рис. 201, a и b). Такое тело представляет собой гироскоп с двумя степенями свободы.

Вращение вокруг оси AB с угловой скоростью $\bar{\omega}_1$ называется собственным вращением гироскопа, а вращение с угловой скоростью $\bar{\omega}_2$ вокруг оси z называется прецессионным вращением, или прецессией гироскопа. Неподвижную точку пересечения осей вращения примем за начало координат O и направим координатные оси, как указано на рис. 201, a . Горизонтальные реакции подшипников A и B , параллельные оси x , обозначим $\bar{X}_A$ и $\bar{X}_B$; вертикальные статические реакции подшипников, обусловленные только весом P гироскопа, обозначим $\bar{Z}_A$ и $\bar{Z}_B$, причем очевидно $\bar{Z}_A = \frac{Pl_1}{l}$ и $\bar{Z}_B = \frac{Pl_2}{l}$, а динамические вертикальные реакции обозначим $\bar{Z}'_A$ и $\bar{Z}'_B$.

Найдем кинетический момент L_0 гироскопа относительно неподвижной точки O . Сложив векторы $\bar{\omega}_1$ и $\bar{\omega}_2$ получим абсолютную мгновенную угловую скорость гироскопа $\bar{\Omega}$ [см. равенство (107)]. Так как гироскоп есть тело вращения вокруг оси y , то эта ось и две перпендикулярные к ней оси x и z являются главными осями инерции гироскопа в точке O , а потому, как было указано выше, кинетические моменты гироскопа относительно этих осей равны

$$L_x = J_x \Omega_x, \quad L_y = J_y \Omega_y, \quad L_z = J_z \Omega_z,$$

или, так как $\Omega_x = 0$, $\Omega_y = \omega_1$, $\Omega_z = \omega_2$, то $L_x = 0$,

$$L_y = J_y \omega_1, \quad L_z = J_z \omega_2.$$

Учитывая, что L_x , L_y , L_z являются проекциями вектора $\bar{L}_0$ на координатные оси, по найденным проекциям строим вектор $\overrightarrow{OK} = \bar{L}_0$ (рис. 201, b).

Применяя теперь теорему о кинетическом моменте системы относительно неподвижной точки O (см. уравнение 213), имеем

$$\frac{d\overline{L}_O}{dt} = \overline{M}_O^{(e)}.$$

Так как производная $\frac{d\overline{L}_O}{dt}$ есть скорость $\overline{v}_K$ точки K , то

$$\overline{v}_K = \overline{M}_O^{(e)}. \quad (223)$$

Это равенство выражает теорему Резаля, т. е. *скорость, с которой перемещается конец вектора, изображающего кинетический момент системы относительно неподвижной точки O , равна главному моменту внешних сил, действующих на эту систему, относительно той же точки*

Так как $L_y = \text{const}$ и $L_z = \text{const}$, то вектор $\overline{OK}$ описывает круглый конус, вращаясь вокруг оси z с угловой скоростью ω_2 . Отсюда следует, что вращательная скорость $\overline{v}_K$ точки K направлена параллельно оси x , как показано на рис. 201 б и по модулю равна

$$v_K = \omega_2 \cdot K_2 K = \omega_2 L_y = J_y \omega_1 \omega_2.$$

Применяя затем теорему о движении центра тяжести системы (см. уравнение 206), имеем

$$M\overline{\omega}_C = \overline{R}^{(e)},$$

где $\overline{R}^{(e)}$ — главный вектор внешних сил, которыми в данной задаче являются вес $\overline{P}$ и искомые реакции подшипников A и B . Проектируя это векторное равенство и равенство (223) на оси x и z и учитывая, что силы $\overline{P}$, $\overline{Z}_A$ и $\overline{Z}_B$ взаимно уравновешиваются, получим четыре уравнения:

- 1) $M\omega_{Cx} = R_x^{(e)} = X_A + X_B,$
- 2) $M\omega_{Cz} = R_z^{(e)} = Z_A - Z_B,$
- 3) $v_{Kx} = M\omega_{Ox}^{(e)} = -Z_A AO - Z_B OB,$
- 4) $v_{Kz} = M\omega_{Oz}^{(e)} = X_A AO - X_B OB.$

Так как скорость $\overline{v}_K$ параллельна оси x , а центростремительное ускорение точки C направлено по оси y (от C к O), то $v_{Kx} = -J_y \omega_1 \omega_2$, $v_{Kz} = 0$, $\omega_{Cx} = \omega_{Cz} = 0$. Поэтому предыдущие уравнения принимают вид

$$X_A + X_B = 0, \quad Z_A - Z_B = 0, \quad Z_A AO + Z_B OB = J_y \omega_1 \omega_2, \\ X_A AO - X_B OB = 0.$$

Из этих уравнений находим:

$$X_A = X_B = 0, \quad Z_A = Z_B = \frac{J_y \omega_1 \omega_2}{l}.$$

Так как динамические реакции Z_A и Z_B равны по модулю и направлены противоположно, то они образуют пару с моментом, равным $J_y \omega_1 \omega_2$, называемым гироскопическим моментом. Следовательно, обозначая этот момент M_r , имеем

$$M_r = J_y \omega_1 \omega_2. \quad (224)$$

Эта пара лежит в плоскости, в которой расположены векторы $\bar{\omega}_1$ и $\bar{\omega}_2$. Учитывая направления векторов $\bar{v}_K$, $\bar{\omega}_1$ и $\bar{\omega}_2$, получаем векторное равенство:

$$\bar{v}_K = \bar{M}_r = J_y \bar{\omega}_2 \times \bar{\omega}_1. \quad (224')$$

Возникновение реакций Z_A и Z_B , а также гироскопического момента, обусловленное изменением направления оси AB собственного вращения гироскопа, называется гироскопическим эффектом.

Пример 165. Турбина, вал которой параллелен продольной оси судна, делает 300 оборотов в минуту; вес вращающихся частей равен 200 кн, а их радиус инерции относительно оси вращения турбины равен 1,5 м. Определить гироскопические давления на подшипники, расстояние между которыми $l = 6$ м, если судно поворачивается вокруг вертикальной оси на 15° в сек.

Решение. Обозначая угловую скорость вращения судна вокруг вертикальной оси z через ω_2 , а угловую скорость вращения турбины вокруг горизонтальной оси y через ω_1 , имеем:

$$\omega_1 = \frac{\pi 300}{30} = 10 \pi \text{ 1 сек.}, \quad \omega_2 = \frac{2\pi 15}{360} = \frac{\pi}{12} \text{ 1 сек.}$$

По формуле (224) находим гироскопический момент

$$M_r = J_y \omega_1 \omega_2,$$

но

$$J_y = \frac{P}{g} r_{ин}^2,$$

где P — вес вращающихся частей турбины и $r_{ин}$ — их радиус инерции; поэтому $M_r = \frac{P}{g} r_{ин}^2 \omega_1 \omega_2 = \frac{200\,000}{9,8} \cdot 2,25 \cdot \frac{10}{12} \pi^2 = 375\,000 \text{ н} \cdot \text{м}.$

Искомые гироскопические давления образуют пару сил, лежащую в вертикальной плоскости, причем момент этой пары равен M_r , а ее плечо равно l ; следовательно, вертикальное гироскопическое давление на каждый подшипник равно

$$\frac{M_r}{l} = \frac{375\,000}{6} = 62\,500 \text{ н}.$$

Пример 166. С концом вертикального вала OO_1 шарнирно соединен горизонтальный стержень OC , на который свободно насажен массивный цилиндрический каток (бегун). При враще-

нии вала OO_1 , вокруг вертикальной оси z бегун катится без скольжения по горизонтальной плоскости, на которую закладывается измельчаемый материал (рис. 202, a и b). Определить гироскопические реакции в точках O и A , а также усилие в стержне OC , если заданы вес бегуна P , длина $OC=l$, радиус бегуна R и угловая скорость вала $\omega = \text{const}$.

Решение. Обозначим угловую скорость собственного вращения бегуна вокруг оси OC через ω_1 . Так как качение бегуна по горизонтальной плоскости происходит без скольжения, то скорость точки A равна нулю; поэтому мгновенная ось вращения бегуна проходит через точки O и A , а его абсолютная угловая скорость $\bar{\Omega}$ направлена по прямой OA , причем $\bar{\Omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}$.

Построив параллелограмм угловых скоростей, из подобных треугольников OAC и Oac имеем:

$$\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{AC}{OC} = \frac{R}{l}, \text{ откуда } \omega_1 = \omega \frac{l}{R}.$$

Теперь по формуле (224) найдем гироскопический момент

$$M_r = J_v \omega_1 \omega.$$

Рассматривая бегун как однородный цилиндр, имеем

$$J_v = \frac{PR^2}{2g}$$

и, следовательно,

$$M_r = \frac{PR^2}{2g} \omega^2 \frac{l}{R} = \frac{PR\omega^2 l}{2g}.$$

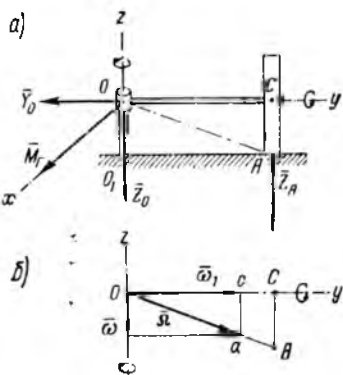


Рис. 202

Гироскопические реакции $\bar{Z}_O$ и $\bar{Z}_A$ в точках O и A образуют пару сил, момент которой равен M_r и направлен, согласно формуле (224'), по оси x , как указано на рис. 202, a . Отсюда следует, что, во-первых, силы $\bar{Z}_A$ и $\bar{Z}_O$ имеют направления, указанные на рис. 202, a , и, во-вторых,

$$Z_A = Z_O = \frac{M_r}{l} = \frac{PR}{2g} \omega^2.$$

Таким образом, полное давление бегуна на горизонтальную плоскость в точке A равно сумме двух сил: веса P и гироскопического давления, равного Z_A , т. е.

$$P + \frac{PR}{2g} \omega^2 = P \left(1 + \frac{R\omega^2}{2g} \right).$$

Центростремительное ускорение центра тяжести C бегуна направлено вдоль оси y от C к O и по модулю равно $\omega_c = l\omega^2$. Поэтому, применяя теорему о движении центра тяжести системы,

Классификация задач

Таблица 19

Группы	Типы задач				
	I	II	III	IV	V
	Задачи на вычисление кинетического момента системы (задача 981)	Задачи, в которых имеет место сохранение кинетического момента системы (задачи 982—983)	Задачи, относящиеся к вращению твердого тела вокруг неподвижной оси	Задачи, относящиеся к крутильным колебаниям	Задачи на определение гироскопических величин (задачи 1029—1035, 1039)
1-я	—	—	Главный момент приложенных к телу внешних сил относительно оси вращения есть величина постоянная (задачи 990—992)	Свободные крутильные колебания (задачи 1014—1017, 1022, 1023)	—
2-я	—	—	Главный момент приложенных к телу внешних сил относительно оси вращения зависит от угловой скорости (задачи 993—999)	Затухающие крутильные колебания (задачи 1019, 1020, 1025)	—
3-я	—	—	Главный момент приложенных к телу внешних сил относительно оси вращения есть функция угла поворота тела (задачи 1003—1013)	Вынужденные крутильные колебания (задачи 1021—1024)	—

получим:

$$\frac{P}{R} \omega_{Cv} = Y_o,$$

где Y_o — реакция в точке O по направлению оси y .

Отсюда

$$Y_o = \frac{P}{R} l \omega^2.$$

Растягивающее усилие в стержне OC , очевидно равно этой реакции Y_o .

§ 3. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ СИСТЕМЫ

Кинетической энергией, или живой силой системы, называется сумма живых сил всех материальных точек этой системы, т. е.

$$T = \sum \frac{mv^2}{2}, \quad (225)$$

где T — кинетическая энергия системы, m и v — масса и скорость материальной точки, принадлежащей данной системе.

Теорему об изменении кинетической энергии системы можно выразить в трех видах:

$$1) dT = \sum dA, \quad (226)$$

т. е. дифференциал кинетической энергии системы равен сумме элементарных работ всех внешних и внутренних сил, действующих на эту систему,

$$2) \frac{dT}{dt} = \sum N, \quad (227)$$

т. е. производная по времени от кинетической энергии системы равна мощности всех внешних и внутренних сил, действующих на эту систему;

$$3) T - T_o = \sum A, \quad (228)$$

т. е. при перемещении системы из одного положения в другое, изменение ее кинетической энергии равно сумме работ на этом перемещении всех внешних и внутренних сил, действующих на эту систему.

Равенство (226) выражает теорему об изменении кинетической энергии системы в дифференциальной форме, а равенство (228) — ту же теорему в конечной форме. Равенство (227) выражает теорему о зависимости между кинетической энергией системы и мощностью действующих на систему сил. Следует иметь в виду, что только в случае, когда имеется неизменяемая система (абсолютно твердое тело), сумма работ всех внутренних сил на любом перемещении системы равна нулю.

Поэтому в общем случае при применении теоремы об изменении кинетической энергии системы внутренние силы учитываются.

В случае *стационарных связей без трения реакции таких связей не производят работы* (сумма работ реакций при перемещении системы равна нулю). Поэтому в этом случае реакции связей не входят ни в одно из равенств (226) — (228).

При вычислении работы и мощности сил, действующих на данную систему, следует пользоваться формулами и указаниями, приведенными в § 3 главы III.

Задачи, относящиеся к этому параграфу, можно разделить на следующие два основных типа:

I. Задачи на вычисление кинетической энергии системы.

II. Задачи на применение теоремы об изменении кинетической энергии системы, состоящей из одного тела или из нескольких тел.

Задачи типа I

При решении задач этого типа необходимо иметь в виду следующее:

а) если тело, принадлежащее данной системе, движется поступательно то его кинетическая энергия равна

$$T = M \frac{v_C^2}{2}, \quad (229)$$

где M — масса тела, v_C — скорость его центра тяжести (или любой другой его точки, так как при поступательном движении тела скорости всех его точек равны);

б) если тело вращается вокруг данной оси, то его кинетическая энергия вычисляется по формуле

$$T = J \frac{\omega^2}{2}, \quad (230)$$

где J — момент инерции тела относительно оси вращения.

ω — его угловая скорость;

в) если тело, входящее в систему, совершает плоскопараллельное движение, то в этом случае его кинетическая энергия вычисляется по формуле

$$T = M \frac{v_C^2}{2} + J_C \frac{\omega^2}{2}, \quad (231)$$

где M — масса тела, v_C — скорость центра тяжести тела, ω — его угловая скорость, J_C — момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр тяжести тела и перпендикулярной к неподвижной плоскости, параллельно которой перемещается это тело (задачи 1045–1046).

Пример 167. Вычислить кинетическую энергию механизма эллипсографа, состоящего из кривошипа OC весом P , вращающегося вокруг неподвижной оси O с угловой скоростью ω и приводящего в движение линейку AB с ползунами A и B , причем $OC = AC = CB = l$.

Вес линейки $2P$, а веса ползунов A и B равны $Q_1 = Q_2 = Q$ (рис. 203).

Решение. Так как данная система состоит из четырех тел, то ее кинетическая энергия, согласно формуле (225), равна

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4,$$

где T_1 — кинетическая энергия кривошипа, T_2 — кинетическая энергия линейки AB , T_3 и T_4 — соответственно кинетическая энергия ползунов A и B .

Кинетическую энергию кривошипа находим по формуле (230)

$$T_1 = J_O \frac{\omega^2}{2} = \frac{Pl^2}{3g} \frac{\omega^2}{2} = \frac{Pl^2}{6g} \omega^2.$$

Так как движение линейки AB является плоскопараллельным, то по формуле (231) имеем:

$$T_2 = \frac{2P}{g} \frac{v_C^2}{2} + J_C \frac{\omega_1^2}{2},$$

где

$$v_C = l\omega \text{ и } J_C = \frac{2P}{g} \frac{(2l)^2}{12} = \frac{2P}{3g} l^2.$$

Чтобы найти угловую скорость ω линейки, построим ее мгновенный центр вращения O_1 , тогда

$$\omega_1 = \frac{v_C}{CO_1} = \frac{l\omega}{l} = \omega,$$

и, следовательно,

$$T_2 = \frac{2P}{3g} l^2 \frac{\omega^2}{2} + \frac{2P}{g} \frac{l^2 \omega^2}{2} = \frac{4}{3} \frac{Pl^2 \omega^2}{g}.$$

Теперь находим скорости точек A и B :

$$v_A = O_1 A \omega_1 = O_1 A \omega$$

и

$$v_B = O_1 B \omega_1 = O_1 B \omega.$$

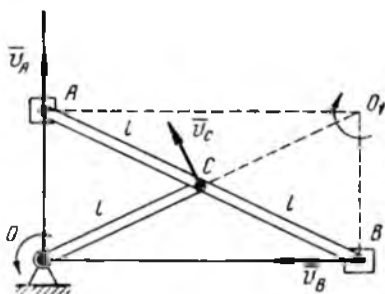


Рис. 203

Отсюда по формуле (229) имеем:

$$T_3 = \frac{Q}{g} \frac{v_A^2}{2} = \frac{Q}{2g} O_1 A^2 \omega^2,$$

$$T_4 = \frac{Q}{g} \frac{v_B^2}{2} = \frac{Q}{2g} O_1 B^2 \omega^2,$$

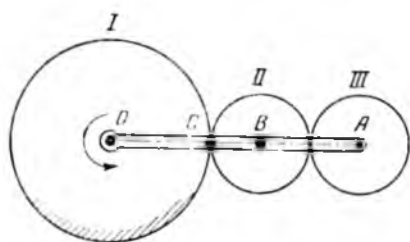
и, следовательно,

$$T_3 + T_4 = \frac{Q}{2g} \omega^2 (O_1 A^2 + O_1 B^2) = \frac{Q}{2g} \omega^2 AB^2 = \frac{Q \cdot 4l^2}{2g} \omega^2 = \frac{2Q}{g} l^2 \omega^2.$$

Таким образом,

$$T = \frac{Pl^2 \omega^2}{6g} + \frac{4Pl^2 \omega^2}{3g} + \frac{2Ql\omega^2}{g} = \frac{l^2 \omega^2}{2g} (3P + 4Q).$$

Пример 168. Планетарный механизм приводится в движение кривошипом OA , соединяющим оси трех зубчатых колес I , II



и III . Колесо I , радиус которого равен r_1 , неподвижно; кривошип вращается вокруг неподвижной оси O с угловой скоростью ω . Вес каждого из колес II и III равен P , радиус каждого из них r , вес кривошипа Q .

Вычислить кинетическую энергию механизма, считая колеса однородными дисками, а кривошип — однородным тонким стержнем, если $r_1 = 2r$ (рис. 204).

Рис. 204

Решение. Кинетическая энергия данной системы равна

$$T = T_1 + T_2 + T_3,$$

где T_1 , T_2 , T_3 — соответственно кинетическая энергия кривошипа и колес II и III . По формуле (230) находим:

$$T_1 = \frac{J_O \omega^2}{2} = \frac{Q}{g} \frac{OA^2 \omega^2}{2} = \frac{25Q}{6g} r^2 \omega^2.$$

Кинетическую энергию колес II и III вычисляем по формуле (231):

$$T_2 = \frac{P}{g} \frac{v_B^2}{2} + \frac{J_B \omega_2^2}{2},$$

$$T_3 = \frac{P}{g} \frac{v_A^2}{2} + \frac{J_A \omega_3^2}{2},$$

где J_B и J_A — моменты инерции колес II и III относительно осей, проходящих через точки B и A и перпендикулярных к

плоскости рисунка, ω_1 и ω_2 — абсолютные угловые скорости этих колес.

Так как точки A и B принадлежат кривошипу, то

$$v_A = OA \omega = 5r\omega \text{ и } v_B = OB \omega = 3r\omega.$$

Кроме того, $I_A = \frac{P}{2g} r^2$ и $I_B = \frac{P}{2g} r^2$.

Так как колесо I неподвижно, то скорость точки C , принадлежащей колесу II , равна нулю, т. е. точка C является для колеса II мгновенным центром вращения. Отсюда следует, что

$$v_B = CB \omega_2 = r\omega_2 \text{ и } \omega_2 = \frac{v_B}{r} = \frac{3r\omega}{r} = 3\omega.$$

По теореме сложения угловых скоростей в случае параллельных осей вращения относительная угловая скорость (по отношению к кривошипу) колеса II будет равна

$$\omega_2' = \omega_2 - \omega = 3\omega - \omega = 2\omega.$$

Так как колеса II и III имеют равные радиусы и находятся во внешнем зацеплении, то их *относительные угловые скорости равны* по величине и *противоположны* по знаку, т. е.

$$\omega_3' = -\omega_2' = -2\omega.$$

Потому по той же теореме абсолютная угловая скорость колеса III равна

$$\omega_3 = \omega_3' + \omega = -\omega.$$

Следовательно,

$$T_2 = \frac{P}{2g} 9r^2 \omega^2 + \frac{Pr^2}{2g} \frac{9\omega^2}{2} = \frac{27P}{4g} r^2 \omega^2,$$

$$T_3 = \frac{P}{2g} 25r^2 \omega^2 + \frac{Pr^2}{2g} \frac{\omega^2}{2} = \frac{51P}{4g} r^2 \omega^2$$

и

$$T = \frac{25Q}{6g} r^2 \omega^2 + \frac{27}{4g} Pr^2 \omega^2 + \frac{51}{4g} Pr^2 \omega^2 = \frac{25Q}{6g} r^2 \omega^2 + \frac{39P}{2g} r^2 \omega^2 = \\ = \frac{25Q + 117P}{6g} r^2 \omega^2.$$

Задачи типа II

Задачи этого типа можно разделить на следующие три группы:

1. Задачи, решаемые при помощи уравнения (228), т. е. на основании теоремы об изменении кинетической энергии в конечной форме.

Уравнение (228) следует применять в тех случаях, когда действующие на систему заданные силы или постоянны (и по модулю, и по направлению), или для них существует силовая

функция, а в числе известных и искомых в задаче механических величин имеются, кроме этих сил, только скорости (линейные или угловые) и перемещения (поступательные или угловые) тел, входящих в данную систему.

2. Задачи, решаемые при помощи уравнения (226), т. е. на основании теоремы об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме.

Уравнение (226) следует применять в тех случаях, когда заданные переменные силы (или сила), действующие на систему, зависят от скорости, а известные и искомые в задаче механические величины те же, что и в предыдущем случае.

В этом случае при интегрировании уравнения (226) сначала нужно разделить переменные.

3. Задачи, решаемые при помощи уравнения (227), т. е. на основании теоремы о зависимости между кинетической энергией системы и мощностью действующих на систему сил. Уравнение (227) следует применять в тех случаях, когда требуется найти (либо, наоборот, задано) ускорение тела — линейное (при поступательном движении тела) или угловое (при вращательном движении).

Первая группа

Пример 169. Груз A весом P , подвешен к однородному нерастяжимому канату длиной l и весом Q .

Канат переброшен через блок B , вращающийся вокруг оси O , перпендикулярной к плоскости рисунка. Второй конец каната прикреплен к оси катка C , катящегося без скольжения по неподвижной горизонтальной плоскости. Блок B и каток C — однородные круглые цилиндры радиусом r и весом P_2 каждый. Коэффициент трения качения катка C о горизонтальную плоскость равен f_k . В начальный момент, когда система находилась в покое, с блока B свешивалась часть каната длиной l . Определить скорость груза A в зависимости от его вертикального перемещения h (рис. 205).

Рис 205

Решение. Так как в данной задаче известными величинами являются перемещение h груза и постоянные силы $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, Q , а требуется найти скорость v груза, то следует воспользоваться уравнением (228), выражающим теорему об изменении кинети-

ческой энергии в конечной форме:

$$T - T_0 = \sum A.$$

Кинетическая энергия данной системы равна

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4,$$

где T_1 , T_2 , T_3 , T_4 — соответственно кинетическая энергия груза A , блока B , катка C и каната. Так как скорость любой точки каната равна скорости v груза, движущегося поступательно, то по формуле (229) находим:

$$T_1 = \frac{P_1 v^2}{g \cdot 2}, \quad T_4 = \frac{Q v^2}{g \cdot 2}.$$

Кинетическую энергию вращающегося блока находим по формуле (230):

$$T_2 = \frac{J_0 \omega^2}{2}, \quad \text{где } J_0 = \frac{P_2 r^2}{2g} \quad \text{и} \quad \omega = \frac{v}{r}$$

(угловая скорость блока); следовательно,

$$T_2 = \frac{P_2 v^2}{4g}.$$

Так как движение катка C является плоскопараллельным, то по формуле (231) имеем:

$$T_3 = \frac{P_3 v_C^2}{g \cdot 2} + J_C \frac{\omega_1^2}{2},$$

где $J_C = \frac{P_3 r^2}{2g}$, ω_1 — угловая скорость катка.

Так как каток катится без скольжения, то скорость точки касания его с неподвижной плоскостью равна нулю, т. е. эта точка является мгновенным центром вращения катка.

Отсюда следует, что $v_C = r\omega_1$, поэтому

$$T_3 = \frac{P_3}{2g} v_C^2 + \frac{P_3}{4g} v_C^2 = \frac{3 P_3 v_C^2}{4g} = \frac{3}{4} \frac{P_3}{g} v^2.$$

Таким образом,

$$T = \frac{P_1}{2g} v^2 + \frac{Q}{2g} v^2 + \frac{P_2 v^2}{4g} + \frac{3 P_3 v^2}{4g} = \frac{v^2}{2g} (P_1 + Q + 2P_3).$$

В начальный момент система находилась в покое, поэтому $T_0 = 0$.

Перейдем теперь к вычислению суммы работ всех сил, приложенных к данной системе при перемещении груза A на расстояние h .

Работа силы $\bar{P}_1$, очевидно, будет $A_1 = P_1 h$. Работа каждой из сил $\bar{P}_2$ равна нулю, так как точка O неподвижна, а точка

С перемещается по горизонтали. Момент пары трения качения равен $f_k P_2$, а работа сил этой пары, согласно § 3 гл. III, будет равна произведению момента пары на угол φ поворота катка, взятому со знаком минус, так как направление момента пары трения качения противоположно направлению угловой скорости катка; следовательно,

$$A_k = -f_k P_2 \varphi.$$

Так как угловая скорость катка ω_1 равна угловой скорости ω блока В, то угол поворота φ катка равен углу поворота блока, т. е. $\varphi = \frac{h}{r}$, поэтому

$$A_k = -f_k P_2 \frac{h}{r}.$$

При качении катка без скольжения, работа силы трения скольжения $\bar{F}_{\text{тр}}$ будет равна нулю, поскольку равна нулю скорость точки приложения этой силы.

Так как, согласно § 3 гл. III, работа силы тяжести равна произведению веса тела на *вертикальное* перемещение его центра тяжести, то, сравнивая начальное положение $C_0 E D A_0$ каната с его конечным положением $C E D A$, нетрудно видеть, что работа A_0 веса каната равна произведению веса его части $C_0 C = h$ равного $\frac{Q}{L} h$, на разность высот центров тяжести этой части

$C_0 C$ и части каната $A_0 A$, т. е. на $r + l + \frac{h}{2}$. Поэтому

$$A_2 = \frac{h}{L} \left(r + l + \frac{h}{2} \right) Q.$$

Таким образом,

$$\sum A = A_1 + A_k + A_2 = P_1 h - f_k P_2 \frac{h}{r} + \frac{h}{L} \left(r + l + \frac{h}{2} \right) Q.$$

Подставляя найденные значения суммы работ и кинетической энергии T в уравнение (228), находим:

$$\frac{v^2}{2g} (P_1 + Q + 2P_2) = h \left[P_1 + \frac{Q}{L} \left(r + l + \frac{h}{2} \right) - \frac{f_k}{r} P_2 \right].$$

Отсюда находим искомую скорость груза:

$$v = \sqrt{\frac{2gh \left[P_1 + \frac{Q}{L} \left(r + l + \frac{h}{2} \right) - \frac{f_k}{r} P_2 \right]}{P_1 + Q + 2P_2}}.$$

Пример 170 Прямоугольная пластинка $ABCD$ со сторонами a и b и весом P вращается вокруг вертикальной оси z с начальной угловой скоростью ω_0 . Каждый элемент пластинки испытывает при этом сопротивление воздуха, направление которого перпендикулярно к плоскости пластинки, а величина прямо пропорциональна площади элемента и квадрату его скорости v ; коэффициент пропорциональности равен μ . Сколько оборотов сделает пластинка до того момента, когда ее угловая скорость станет вдвое меньше начальной (рис. 206)?

Решение. Так как силы сопротивления, приложенные к пластинке, зависят от скорости, то для решения задачи следует воспользоваться уравнением (226)

$$dT = \sum dA.$$

Так как пластинка вращается вокруг неподвижной оси, то ее кинетическую энергию находим по формуле (230):

$$T = I_z \frac{\omega^2}{2}, \text{ откуда } dT = J_z \omega d\omega.$$

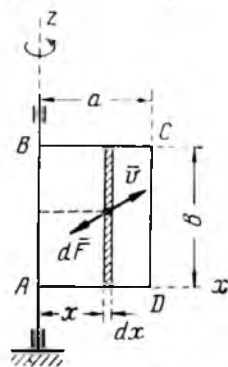


Рис. 206

Работа силы тяжести P , очевидно, равна нулю, так как высота центра тяжести пластинки не изменяется.

Чтобы вычислить работу сил сопротивления, воспользуемся формулой для определения работы сил, приложенных к вращающемуся твердому телу (см. главу III, § 3):

$$\sum dA = M_z d\varphi,$$

где M_z — сумма моментов всех приложенных к телу сил относительно оси вращения, $d\varphi$ — элементарный угол поворота тела.

Чтобы вычислить M_z , разобьем пластинку на элементарные прямоугольники со сторонами b и dx .

Тогда сила сопротивления, приложенная к такому прямоугольнику, равна

$$dF = \mu v^2 b dx = \mu b (\omega x)^2 dx$$

и

$$m_z(dF) = -x dF = -\mu b \omega^2 x^3 dx;$$

следовательно,

$$M_z = \sum m_z(dF), \text{ т. е. } M_z = -\mu b \omega^2 \int_0^a x^3 dx = -\frac{1}{4} \mu b a^4 \omega^2 \text{ и } \sum dA = -\frac{1}{4} \mu b a^4 \omega^2 d\varphi.$$

Таким образом уравнение (226) принимает вид

$$J_z \omega d\omega = -\frac{1}{4} \mu b a^4 \omega^2 d\varphi,$$

или

$$J_z d\omega = -\frac{1}{4} \mu b a^4 \omega d\varphi.$$

Разделяя здесь переменные, получим:

$$J_z \frac{d\omega}{\omega} = -\frac{1}{4} \mu b a^4 d\varphi;$$

отсюда, интегрируя, имеем:

$$J_z \int_{\omega_0}^{\frac{\omega_0}{2}} \frac{d\omega}{\omega} = -\frac{\mu b a^4}{4} \varphi \quad \text{или} \quad J_z [\ln \omega]_{\omega_0}^{\frac{\omega_0}{2}} = \frac{\mu b a^4}{4} \varphi,$$

откуда находим угол поворота пластинки:

$$\varphi = \frac{4 J_z \ln 2}{\mu b a^4}.$$

Применяя вышеуказанную разбивку пластинки $ABCD$ на элементарные прямоугольники, момент инерции J_z пластинки представим в виде:

$$J_z = \sum m x^2,$$

где m — масса элементарного (заштрихованного) прямоугольника.

Если массу пластинки обозначим M , то масса, приходящаяся на единицу площади, будет $\frac{M}{ab}$, а потому

$$m = \frac{M}{ab} b dx = \frac{M}{a} dx$$

и

$$J_z = \int_a^0 \frac{M}{a} x^2 dx = \frac{M}{a} \left[\frac{x^3}{3} \right]_a^0 = \frac{M a^2}{3} = \frac{P}{3g} a^2.$$

Следовательно, $\varphi = \frac{4 P \ln 2}{3g \mu b a^2}$.

Разделив этот угол φ на 2π , получим искомое число оборотов пластинки, равное $\frac{2 P \ln 2}{3\pi g \mu b a^2}$.

Третья группа

Пример 171. Прямоугольная пластинка со сторонами a и b может вращаться без трения вокруг вертикальной оси AB , проходящей через ее середину и параллельной стороне b . На

конец оси надет шкив C радиусом r , на который намотана гибкая нерастяжимая нить; другой конец нити перекинута через блок D , и к нему приязан груз весом P , приводящий во вращение пластинку.

Пренебрегая массами шкива и блока, найти ускорение груза, если вес пластинки равен Q и никаких сопротивлений движению нет (рис. 207).

Решение. Так как требуется определить ускорение груза, то для решения этой задачи воспользуемся уравнением (227)

$$\frac{dT}{dt} = \sum N.$$

Кинетическая энергия данной системы, состоящей из пластинки, вращающейся вокруг неподвижной оси z , и груза, движущегося поступательно, равна

$$T = J_z \frac{\omega^2}{2} + \frac{P}{2g} v^2,$$

где J_z — момент инерции пластинки относительно оси вращения, ω — ее угловая скорость, v — скорость груза.

Так как нить нерастяжима, то скорость груза равна окружной скорости шкива, т. е. $v = r\omega$, и, следовательно,

$$T = J_z \frac{v^2}{2r^2} + \frac{P}{2g} v^2.$$

Зная момент инерции прямоугольной пластинки относительно ее стороны, равной b , найденный в предыдущем примере, и применяя теорему о моментах инерции относительно двух параллельных осей, имеем:

$$\frac{Q}{g} \frac{a^2}{3} = J_z + \frac{Q}{g} \frac{a^2}{4},$$

откуда

$$J_z = \frac{Q}{g} \frac{a^2}{12},$$

поэтому

$$T = \frac{Q}{g} \frac{v^2}{2r^2} \frac{a^2}{12} + \frac{P}{2g} v^2 = \frac{v^2}{2g} \left(\frac{Qa^2}{12r^2} + P \right)$$

и

$$\frac{dT}{dt} = \frac{v}{g} \left(\frac{Qa^2}{12r^2} + P \right) \frac{dv}{dt}.$$

При перемещении груза работу будет производить только сила P (вес груза), поскольку сопротивления пренебрегаем.

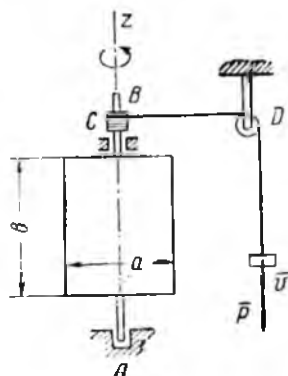


Рис. 207

Так как сила $\bar{P}$ и скорость груза $\bar{v}$ направлены по одной прямой в одну и ту же сторону, то мощность найдем по формуле (177) (см. гл. III, § 3) $N = P\bar{v}$. Подставив найденные значения мощности и производной $\frac{dT}{dt}$ в уравнение (227), получим:

$$\frac{v}{g} \left(\frac{Qa^2}{12r^2} + P \right) \frac{dv}{dt} = P\bar{v},$$

отсюда

$$\omega = \frac{dv}{dt} = \frac{12r^2P}{Qa^2 + 12r^2P} g = \text{const.}$$

Следовательно, движение груза является равномерноускоренным.

§ 4. КОМБИНИРОВАННЫЕ ЗАДАЧИ

В этих задачах приходится применять совместно две из тех теорем динамики системы, которые рассмотрены в предыдущих параграфах; например, теоремы о количестве движения и о кинетическом моменте системы или теоремы об изменении кинетической энергии и о движении центра масс системы.

Пример 172. На ступенчатый шкив весом P_3 , вращающийся вокруг неподвижной оси O , накрутены канаты, к концам которых подвешены грузы A и B весом P_1 и P_2 . Предполагая, что на эту систему действуют только силы тяжести, и пренебрегая сопротивлениями, найти ускорения грузов и реакцию в точке O .

Радиусы R и r и радиус инерции $r_{\text{ин}}$ шкива относительно оси O известны (рис. 208).

Решение. Так как в заданной задаче требуется определить ускорения грузов, то применим уравнение (227). Сначала вычислим по формулам (229) и (230) кинетическую энергию T данной системы,

состоящей из двух грузов, движущихся поступательно, и шкива, вращающегося вокруг неподвижной оси:

$$T = \frac{P_1}{2g} v_1^2 + \frac{P_2}{2g} v_2^2 + J_0 \frac{\omega^2}{2},$$

где v_1 и v_2 — скорости грузов A и B , J_0 — момент инерции шкива относительно оси вращения, ω — его угловая скорость.

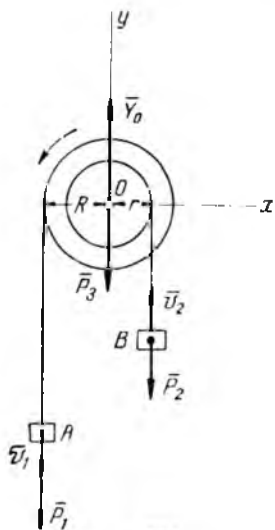


Рис. 208

Но

$$v_1 = R\omega, \quad v_2 = r\omega, \quad J_0 = \frac{P_3}{g} r_{00}^2,$$

поэтому

$$T = \frac{P_1}{2g} R^2 \omega^2 + \frac{P_2}{2g} r^2 \omega^2 + \frac{P_3}{2g} r_{00}^2 \omega^2 = \frac{\omega^2}{2g} (P_1 R^2 + P_2 r^2 + P_3 r_{00}^2).$$

Отсюда

$$\frac{dT}{dt} = (P_1 R^2 + P_2 r^2 + P_3 r_{00}^2) \frac{\omega}{g} \varepsilon,$$

где $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$ — угловое ускорение шкива.

Так как груз B поднимается, а груз A опускается, то сумма мощностей, действующих на систему сил, равна

$$\sum N = P_1 v_1 - P_2 v_2 = (P_1 R - P_2 r) \omega.$$

Следовательно, уравнение (227) имеет вид

$$\frac{\omega}{g} (P_1 R^2 + P_2 r^2 + P_3 r_{00}^2) \varepsilon = \omega (P_1 R - P_2 r),$$

откуда

$$\varepsilon = \frac{P_1 R - P_2 r}{P_1 R^2 + P_2 r^2 + P_3 r_{00}^2} g.$$

Искомые ускорения грузов равны:

$$\omega_1 = R\varepsilon = \frac{Rg(P_1 R - P_2 r)}{P_1 R^2 + P_2 r^2 + P_3 r_{00}^2} \quad \text{и} \quad \omega_2 = r\varepsilon = \frac{rg(P_1 R - P_2 r)}{P_1 R^2 + P_2 r^2 + P_3 r_{00}^2}.$$

Для определения реакции в точке O применим теорему о проекции количества движения $\bar{K}$ системы на неподвижную ось (см. § 1 этой главы). Выбрав координатные оси x и y , как указано на рисунке, на основании этой теоремы имеем:

$$\frac{dK_x}{dt} = \sum X^{(e)} = X_0; \quad \frac{dK_y}{dt} = \sum Y^{(e)} = Y_0 - P_1 - P_2 - P_3,$$

где X_0 , Y_0 — составляющие искомой реакции по координатным осям. Учитывая, что скорости грузов A и B параллельны оси y и что количество движения шкива равно нулю, так как его центр тяжести лежит на оси вращения, находим:

$$K_x = 0, \quad K_y = -\frac{P_1}{g} v_1 + \frac{P_2}{g} v_2.$$

Из этих уравнений получаем:

$$X_0 = 0, \quad Y_0 = P_1 + P_2 + P_3 - \frac{P_1}{g} \frac{dv_1}{dt} + \frac{P_2}{g} \frac{dv_2}{dt} = P_1 + P_2 + P_3 - \frac{P_1}{g} \omega_1 + \frac{P_2}{g} \omega_2 = P_1 + P_2 + P_3 - \frac{(P_1 R - P_2 r)^2}{P_1 R^2 + P_2 r^2 + P_3 r_{00}^2}.$$

Угловое ускорение шкива можно найти и по теореме о кинетическом моменте системы. Применяя эту теорему по отношению к оси O , имеем:

$$\frac{dL_o}{dt} = \sum m_o (F^{(w)}) = m_o (\bar{P}_1) + m_o (\bar{P}_2) = P_1 R - P_2 r. \quad (a)$$

(Моменты внешней силы $\bar{P}_2$ и реакции в точке O относительно оси вращения шкива равны, очевидно, нулю). Кинетический момент L_o данной системы относительно оси O равен сумме кинетических моментов шкива и двух грузов относительно той же оси. Следовательно,

$$L_o = J_o \omega + \frac{P_1}{g} R^2 \omega + \frac{P_2}{g} r^2 \omega = \frac{P_2}{g} r_{\text{ин}}^2 \omega + \frac{P_1}{g} R^2 \omega + \frac{P_2}{g} r^2 \omega = \\ = (P_1 R^2 + P_2 r^2 + P_2 r_{\text{ин}}^2) \frac{\omega}{g}.$$

Поэтому уравнение (a) принимает вид

$$\frac{P_1 R^2 + P_2 r^2 + P_2 r_{\text{ин}}^2}{g} \frac{d\omega}{dt} = P_1 R - P_2 r;$$

отсюда

$$\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon = \frac{P_1 R - P_2 r}{P_1 R^2 + P_2 r^2 + P_2 r_{\text{ин}}^2} g.$$

Пример 173. Доска весом P_1 лежит на двух цилиндрических катках радиусом r и весом P_2 каждый. Вся система движется под действием заданной горизонтальной силы $\bar{F}$, приложенной

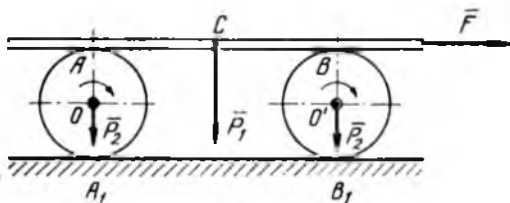


Рис. 209

к доске; при этом предполагается, что катки катятся без скольжения и что скорость доски равна скорости катка в точке A . Найти ускорение доски и общую силу трения в точках A и B (рис. 209).

Решение. Для определения ускорения $\bar{\omega}$ доски воспользуемся, как и в предыдущей задаче, уравнением (227):

$$\frac{dT}{dt} = \sum N.$$

Так как доска движется поступательно, а движение катков является плоскопараллельным, то кинетическую энергию данной

системы находим по формулам (229) и (231):

$$T = \frac{P_1}{g} \frac{v^2}{2} + 2 \left[J_O \frac{\omega^2}{2} + \frac{P_2}{g} \frac{v_O^2}{2} \right],$$

где v — скорость доски, v_O — скорость центра тяжести катка, ω — угловая скорость катка, J_O — его момент инерции, относительно оси O , перпендикулярной к плоскости рисунка.

Так как каток катится без скольжения, то точка A_1 есть его мгновенный центр вращения; отсюда следует, что

$$v_{A_1} = 2r\omega, \quad v_O = r\omega \quad \text{и} \quad v_O = \frac{v_{A_1}}{2} = \frac{v}{2}.$$

Кроме того, $J_O = \frac{P_2}{2g} r^2$, поэтому

$$T = \frac{P_1}{2g} v^2 + 2 \left[\frac{P_2}{2g} \frac{v^2}{4} + \frac{P_2}{4g} \frac{v^2}{4} \right] = \frac{v^2}{2g} \left[P_1 + \frac{3}{4} P_2 \right].$$

Отсюда

$$\frac{dT}{dt} = \left(P_1 + \frac{3}{4} P_2 \right) \cdot \frac{v}{g} \frac{dv}{dt} = \left(P_1 + \frac{3}{4} P_2 \right) \frac{v\omega}{g}.$$

Так как силы $\bar{P}_1$ и $\bar{P}_2$ перпендикулярны к скоростям их точек приложения, а силы трения между катками и опорой

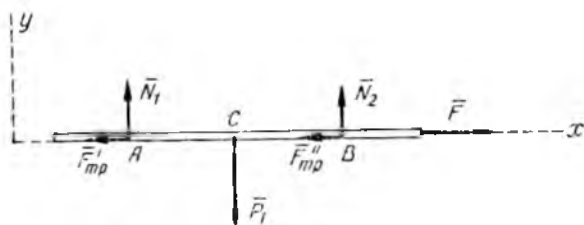


Рис. 210

плоскостью приложения в точках A и B , скорости которых равны нулю, то работа каждой из этих сил равна нулю. Сумма работ внутренних сил трения между доской и катками, приложенных в точках A и B , также равна нулю, так как доска не скользит по каткам.

Поэтому работу производит только сила $\bar{F}$, мощность которой равна $N = Fv$.

Следовательно, уравнение (227) принимает вид

$$\left(P_1 + \frac{3}{4} P_2 \right) \frac{v}{g} \omega = Fv,$$

откуда

$$\omega = \frac{4}{4P_1 + 3P_2} F.$$

Чтобы найти равнодействующую $\vec{F}_{\text{тр}}$ сил трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ и $\vec{F}_{\text{тр}}$, приложенных к доске в точках A и B , рассмотрим отдельно движение доски и составим уравнения движения ее центра тяжести C :

$$\frac{P_1}{g} \omega_x = F - F_{\text{тр}}, \quad \frac{P_1}{g} \omega_y = N_1 + N_2 - P_1,$$

где N_1 и N_2 — нормальные реакции катков, приложенные к доске в точках A и B (рис. 210).

$$\text{Но } \omega_x = \omega \text{ и } \omega_y = 0, \text{ поэтому } F_{\text{тр}} = F - \frac{P_1}{g} \omega = F - \frac{4P_1 F}{4P_1 + 3P_2} = \\ = \frac{3P_2 F}{4P_1 + 3P_2}, \quad N_1 + N_2 = P_1.$$

Если обозначим f коэффициент трения между доской и катками, то $F_{\text{тр}} \leq fN_1$ и $F_{\text{тр}} \leq fN_2$. Отсюда следует, что

$$F_{\text{тр}} = F_{\text{тр}} + F_{\text{тр}} \leq f(N_1 + N_2),$$

или

$$\frac{3P_2 F}{4P_1 + 3P_2} \leq fP_1, \text{ т. е. } f \geq \frac{3P_2 F}{P_1(4P_1 + 3P_2)}.$$

Такому условию должен удовлетворять коэффициент трения, чтобы доска не скользила по каткам.

Таблица 20

Классификация задач

Группы	Типы задач	
	I Задачи на вычисление кинетической энергии (задачи 1040—1045)	II Задачи на применение теоремы об изменении кинетической энергии системы, состоящей из одного тела или нескольких тел
1-я	—	Задачи, решаемые при помощи теоремы об изменении кинетической энергии в конечной форме (задачи 1053—1074)
2-я	—	Задачи, решаемые при помощи теоремы об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме
3-я	—	Задачи, решаемые при помощи теоремы о зависимости между кинетической энергией системы и мощностью действующих на систему сил (задачи 932—934, 940—942, 1091)

ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА И ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

§ 1. ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА ДЛЯ СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

Если к каждой материальной точке движущейся системы приложить силу инерции этой точки, то все эти силы инерции будут уравновешиваться заданными силами и реакциями связей, приложенными к данной системе. В этом и состоит сущность принципа Даламбера для системы.

Таким образом, если заданную силу, приложенную к k -той точке механической системы, состоящей из n материальных точек, обозначим $\vec{F}_k$, реакцию связей, приложенную к той же точке, обозначим $\vec{N}_k$ и силу инерции этой точки $\vec{F}_k^{(u)}$, то имеем:

$$\vec{F}_k + \vec{N}_k + \vec{F}_k^{(u)} = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (232)$$

При этом

$$\vec{F}_k^{(u)} = -m_k \vec{w}_k, \quad (233)$$

т. е. сила инерции материальной точки равна по модулю произведению массы этой точки на ее ускорение и направлена противоположно этому ускорению.

Отсюда следует, что система заданных сил, реакций связей и сил инерции удовлетворяет уравнениям статики, т. е. сумма проекций всех этих сил на любую ось и сумма их моментов относительно любой точки или любой оси равна нулю.

Таким образом, принцип Даламбера дает общий прием составления уравнений, необходимых для решения задачи динамики системы, причем эти уравнения имеют ту же форму, что и уравнения статики. Этот прием оказывается особенно полезным при решении тех задач, в которых требуется найти динамические реакции связей, т. е. реакции, возникающие при движении системы.

Задачи, относящиеся к этому параграфу, можно разделить на два основных типа:

I. Задачи, в которых силы, приложенные к каждому телу системы (заданные силы и реакции связей), и силы инерции, их уравновешивающие, лежат в *одной плоскости*.

II. Задачи, в которых заданные силы, реакции связей и силы инерции, их уравновешивающие, образуют *пространственную систему* сил.

Задачи типа I

Так как в задачах этого типа рассматривается плоская система сил (заданные силы, реакции связей и силы инерции), находящихся в равновесии, то применяем три уравнения плос-

кой статике: два уравнения проекций и одно уравнение моментов.

В частных случаях будем иметь только два из этих уравнений: два уравнения проекций (в случае сходящихся сил) или одно уравнение проекций и одно уравнение моментов (в случае параллельных сил).

Если в задаче имеется система, состоящая из двух или нескольких тел, то приходится, расчленив эту систему, составлять уравнения равновесия для каждого тела в отдельности, совершенно так же, как в статике.

Задачи типа I можно разделить на три группы.

Первая группа

К этой группе относятся задачи, в которых тела, входящие в систему (или одно тело), движутся *поступательно*.

Решая эти задачи по принципу Даламбера, необходимо к каждой материальной частице движущегося тела приложить силу инерции этой частицы. Так как при поступательном движении тела все его точки имеют одно и то же ускорение $\bar{\omega}$, то силы инерции материальных частиц тела будут в этом случае пропорциональны массам этих частиц, параллельны и направлены в одну сторону (противоположно ускорению $\bar{\omega}$); поэтому все эти силы инерции приносятся к одной равнодействующей силе, приложенной в центре тяжести тела:

$$\bar{F}^{(in)} = -\sum m\bar{\omega} = -\bar{\omega}\sum m = -M\bar{\omega},$$

где M — масса тела.

Итак, сила инерции поступательно движущегося тела равна по модулю произведению массы этого тела на его ускорение, направлена противоположно этому ускорению и приложена в центре тяжести тела.

После того как в центре тяжести каждого поступательно движущегося тела мы приложим силу инерции этого тела, данная система, согласно принципу Даламбера, будет в равновесии. Поэтому для этой системы можно составить уравнения равновесия и, решив их, найти те неизвестные величины, которые требуется определить в данной задаче.

Обычно искомыми величинами в этих задачах являются ускорения тел и реакции связей.

Пример 174. Два груза A и B весом P и Q , связанные нерастяжимой нитью, перекинутой через невесомый блок, вращающийся вокруг неподвижной оси O , могут скользить по граням неподвижной призмы, причем коэффициент трения равен f . Найти ускорение ω , с которым будут двигаться грузы, и силу натяжения нити, если углы α и β известны (рис. 211).

Решение. Каждый из грузов A и B движется поступательно и прямолинейно. Допустим, что груз A опускается с ускорением $\bar{\omega}_1$. Так как грузы A и B связаны нерастяжимой нитью, то груз B будет подниматься с ускорением $\bar{\omega}_2$, равным по модулю ускорению $\bar{\omega}_1$, т. е. $\omega_1 = \omega_2 = \omega$.

Применяя принцип Даламбера, приложим к грузу A силу инерции этого груза, равную по модулю $F_1^{(u)} = \frac{P}{g} \omega$ и направленную противоположно ускорению $\bar{\omega}_1$, а к грузу B — силу инерции, равную по модулю $F_2^{(u)} = \frac{Q}{g} \omega$ и направленную противоположно ускорению $\bar{\omega}_2$. Тогда, по принципу Даламбера, данная система будет находиться в равновесии.

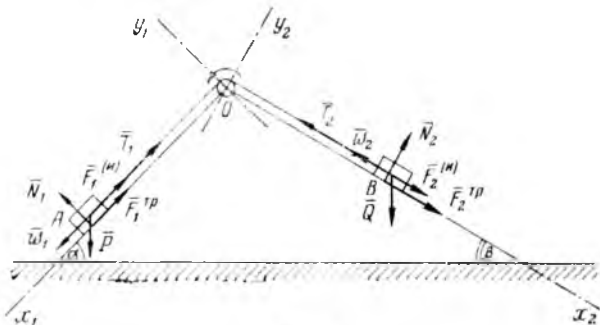


Рис 211

Расчленив эту систему, т. е. перерезав нить, составим по два уравнения равновесия для каждого груза в отдельности. Для этого спроектируем все силы, приложенные к грузу A , т. е. силы $\bar{P}$, $\bar{N}_1$, $\bar{F}_{тр1}$, $\bar{F}_1^{(u)}$, $\bar{T}_1$, на оси Ox_1 и Oy_1 , а силы, приложенные к грузу B , т. е. силы $\bar{Q}$, $\bar{N}_2$, $\bar{F}_{тр2}$, $\bar{F}_2^{(u)}$, $\bar{T}_2$, — на оси Ox_2 и Oy_2 . Здесь $\bar{N}_1$ и $\bar{N}_2$ — нормальные реакции граней призмы, $\bar{F}_{тр1}$ и $\bar{F}_{тр2}$ — силы трения, $\bar{T}_1$, $\bar{T}_2$ — реакции (силы натяжения) нити, приложенные соответственно к грузам A и B , причем $T_1 = T_2 = T$.

Тогда имеем для груза A :

$$P \sin \alpha - F_{тр1} - F_1^{(u)} - T = 0,$$

$$N_1 - P \cos \alpha = 0;$$

для груза B :

$$Q \sin \beta + F_{тр2} + F_2^{(u)} - T = 0,$$

$$N_2 - Q \cos \beta = 0.$$

Из второго и четвертого уравнений находим:

$$N_1 = P \cos \alpha, \quad N_2 = Q \cos \beta.$$

Следовательно,

$$F_{тр1} = fN_1 = fP \cos \alpha,$$

$$F_{тр2} = fN_2 = fQ \cos \beta.$$

Подставив значения сил трения и сил инерции в первое и третье уравнения, получим:

$$\frac{P}{g} \omega + T = P \sin \alpha - fP \cos \alpha = P (\sin \alpha - f \cos \alpha),$$

$$T - \frac{Q}{g} \omega = Q \sin \beta + fQ \cos \beta = Q (\sin \beta + f \cos \beta).$$

Отсюда находим:

$$\omega = \frac{P (\sin \alpha - f \cos \alpha) - Q (\sin \beta + f \cos \beta)}{P + Q} g$$

и

$$T = \frac{PQ [\sin \alpha + \sin \beta - f (\cos \alpha - \cos \beta)]}{P + Q} = \frac{2PQ}{P + Q} \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \times \\ \times \left(\cos \frac{\alpha - \beta}{2} + f \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \right).$$

Вторая группа

К этой группе относятся задачи, в которых тела, входящие в систему (или одно тело), имеют *вращательное движение* вокруг неподвижной оси.

Ускорение каждой точки такого тела равно геометрической сумме касательного и нормального (центростремительного) ускорений. В соответствии с этим, решая задачу по принципу Даламбера, мы должны к каждой материальной частице вращающегося тела приложить две силы инерции частицы: 1) касательную силу инерции, равную по модулю произведению массы частицы на ее касательное ускорение и направленную противоположно этому ускорению, и 2) нормальную силу инерции (центробежную силу), равную по модулю произведению массы частицы на ее нормальное ускорение и направленную противоположно этому ускорению.

В остальном метод решения задач этой группы остается таким же, как и в задачах первой группы. Если тело вращается равномерно, то касательные ускорения, а следовательно, и касательные силы инерции всех его материальных частиц равны нулю.

Пример 175. Два однородных стержня OA и OB весом P каждый прикреплены концами при помощи шарнира O к вертикальному стержню OD , а их концы A и B привязаны нерастяжимыми горизонтальными нитями к точке D этого стержня. Треугольник AOB начинают вращать вокруг оси OD с постоянной угловой скоростью ω . Найти натяжения T нитей и реакцию

шарнира O , приложенную к стержню OB , если $OA = OB = a$ и $\angle DOB = \varphi$ (рис. 212).

Решение. К стержню OB , вращающемуся равномерно вокруг оси OD , приложены заданная сила $\bar{P}$, реакции $\bar{X}_O$, $\bar{Y}_O$ шарнира O и реакция $\bar{T}$ нити.

Применяя принцип Даламбера, разобьем стержень OB на бесконечно малые элементы и приложим к каждому такому элементу силу инерции $\bar{f}_k^{(n)}$, направленную противоположно его ускорению $\bar{\omega}_k$ и равную по модулю $f_k^{(n)} = m_k \omega_k$, где m_k — масса элемента.

Если рассматриваемый элемент находится на расстоянии s_k от точки O , то $\omega_k = r_k \omega^2 = s_k \sin \varphi \omega^2$, и, следовательно, $f_k^{(n)} = m_k \omega^2 s_k \sin \varphi$.

Согласно принципу Даламбера, сила $\bar{P}$, реакции $\bar{X}_O$, $\bar{Y}_O$, $\bar{T}$ и силы инерции $\bar{f}_k^{(n)}$, приложенные к каждому элементу стержня OB , взаимно уравновешиваются. Поэтому будем иметь три уравнения равновесия:

уравнение проекций на ось x :

$$X_O - T + \sum f_k^{(n)} = 0,$$

уравнение проекций на ось y :

$$Y_O - P = 0$$

и уравнение моментов относительно точки O :

$$-P \frac{a}{2} \sin \varphi + Ta \cos \varphi - \sum f_k^{(n)} s_k \cos \varphi = 0.$$

Вычислим суммы, входящие в эти уравнения:

$$\sum f_k^{(n)} = \sum m_k \omega^2 s_k \sin \varphi = \omega^2 \sin \varphi \sum m_k s_k,$$

$$\sum f_k^{(n)} s_k \cos \varphi = \sum m_k \omega^2 s_k^2 \sin \varphi \cos \varphi = \omega^2 \sin \varphi \cos \varphi \sum m_k s_k^2.$$

Но по формуле (203) для координаты центра тяжести C имеем:

$$\sum m_k s_k = M \cdot s_C = \frac{P}{g} \frac{a}{2},$$

$$\sum m_k s_k^2 = J_O = \frac{Ma^2}{3} = \frac{Pa^2}{3g},$$

где J_O — момент инерции стержня OB относительно точки O .

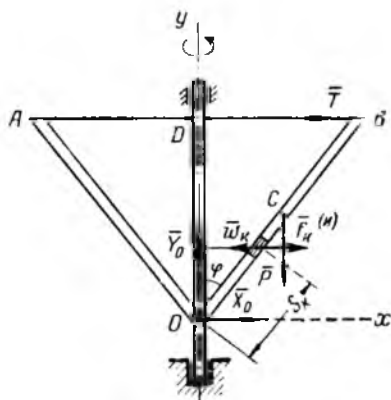


Рис. 212

Поэтому уравнения равновесия принимают вид

$$X_O - T + \frac{Pa}{2g} \omega^2 \sin \varphi = 0,$$

$$Y_O - P = 0,$$

$$-P \frac{a}{2} \sin \varphi + Ta \cos \varphi - \frac{Pa^2 \omega^2}{3g} \sin \varphi \cos \varphi = 0.$$

Решая эти уравнения, получаем

$$Y_O = P,$$

$$T = \frac{P}{2} \left(\operatorname{tg} \varphi + \frac{2a\omega^2}{3g} \sin \varphi \right),$$

$$X_O = T - \frac{Pa}{2g} \omega^2 \sin \varphi = \frac{P}{2} \left(\operatorname{tg} \varphi - \frac{a\omega^2}{3g} \sin \varphi \right).$$

Третья группа

К этой группе относятся такие задачи, в которых некоторые из тел, входящих в систему, имеют вращательное движение, а другие движутся поступательно.

Метод решения задач этой группы на основании принципа Даламбера по существу ничем не отличается от метода решения задач первых двух групп. Только здесь имеются и тела, поступательно движущиеся, и тела, вращающиеся.

Пример 176. К шкиву подъемника радиусом R применен вращающий момент M ; веса грузов равны P_1 и P_2 . Определить угловое ускорение шкива и натяжения частей каната AC и BD , считая шкив однородным круглым цилиндром весом P_3 и пренебрегая сопротивлениями и весом каната (рис. 213, а и б).

Решение. Решая задачу по принципу Даламбера, приложим к грузам силы инерции, равные $F_1^{(n)} = \frac{P_1}{g} \omega_1$, $F_2^{(n)} = \frac{P_2}{g} \omega_2$ и направ-

ленные противоположно ускорениям $\bar{\omega}_1$ и $\bar{\omega}_2$ этих грузов, причем $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. Кроме

того, нужно приложить силу инерции к *каждой материальной частице* шкива. Так как ускорение такой частицы складывается из касательного ускорения $\bar{\omega}_\tau$ и нормального ускорения $\bar{\omega}_n$, то и сила инерции этой материальной частицы является равнодействующей двух сил: касательной силы инерции $\bar{f}_\tau^{(n)}$, направленной противоположно ускорению $\bar{\omega}_\tau$, и нормальной

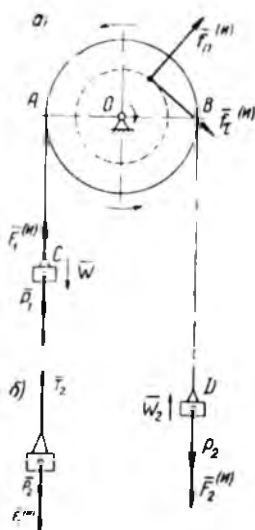


Рис. 213

силы инерции (центробежной силы) $\vec{f}_n^{(n)}$, направленной противоположно ускорению ω_n . Если массу материальной частицы обозначить m , а ее расстояние от оси вращения r , то

$$f_r^{(n)} = m\omega_n^2 = mr\varepsilon, \quad f_n^{(n)} = m\omega_n^2 = mr\omega^2,$$

где ε и ω — угловое ускорение и угловая скорость шкива.

После того как мы приложим все эти силы инерции, можно, согласно принципу Даламбера, рассматривать данную систему, как находящуюся в равновесии. Следовательно, сумма моментов всех внешних сил, приложенных к этой системе, и сил инерции относительно точки O будет равна нулю. Поэтому, учитывая, что моменты относительно точки O силы $\vec{P}_2$, центробежных сил и реакции в точке O равны нулю, получаем следующее уравнение:

$$M + RP_1 - RP_2 - RF_1^{(n)} - RF_2^{(n)} - \Sigma rf_i^{(n)} = 0,$$

или

$$M - R(P_2 - P_1) - R(P_1 + P_2) \frac{\omega}{g} - \Sigma mr^2 \varepsilon = 0.$$

Силы натяжения канатов AC и BD в это уравнение не входят, так как для данной системы эти силы являются внутренними.

Но $\Sigma mr^2 \varepsilon = \varepsilon \Sigma mr^2 = J_O \cdot \varepsilon$,

где J_O — момент инерции шкива относительно оси O , причем для однородного круглого цилиндра $J_O = \frac{P_2}{2g} R^2$. А потому предыдущее уравнение принимает вид

$$R(P_1 + P_2) \frac{\omega}{g} + \frac{P_2}{2g} R^2 \varepsilon = M - R(P_2 - P_1).$$

Так как $\omega = R\varepsilon$, то из этого уравнения находим:

$$\omega = \frac{M - R(P_2 - P_1)}{R(P_1 + P_2 + 0,5P_2)} g$$

и

$$\varepsilon = \frac{\omega}{R} = \frac{M - R(P_2 - P_1)}{R^2(P_1 + P_2 + 0,5P_2)} g.$$

Для определения натяжения каната BD расчленим систему и рассмотрим в отдельности правый груз, к которому приложены сила $\vec{P}_2$, сила инерции $\vec{F}_2^{(n)}$ и реакция каната $\vec{T}_1$ (рис. 213, б).

Так как эти силы уравновешиваются, то

$$T - P_2 - F_2^{(n)} = 0,$$

откуда

$$\begin{aligned} T_2 &= P_2 + F_2^{(n)} = P_2 + \frac{P_2}{g} \omega = P_2 \left(1 + \frac{\omega}{g} \right) = \\ &= P_2 \left[1 + \frac{M - R(P_2 - P_1)}{R(P_1 + P_2 + 0,5P_2)} \right] = \frac{P_2 [M + R(2P_1 + 0,5P_2)]}{R(P_1 + P_2 + 0,5P_2)}. \end{aligned}$$

Рассматривая затем равновесие левого груза в отдельности, найдем натяжение каната AC

$$T_1 = \frac{P_1 [R(2P_2 + 0.5P_3) - M]}{R(P_1 + P_2 + 0.5P_3)}.$$

Задачи типа II

К этому типу относятся задачи, в которых заданные силы, реакции связей и силы инерции образуют пространственную систему сил. Эти задачи можно разделить на две группы.

Первая группа

К этой группе относятся задачи, в которых требуется определить реакции двух закрепленных точек оси при вращении точечных масс вокруг этой оси.

Решение задач этой группы аналогично решению задач второй группы типа I, только здесь приходится составлять в общем случае шесть уравнений равновесия пространственной статки.

Вторая группа

К этой группе относятся задачи, в которых требуется определить реакции двух закрепленных точек твердого тела (двух подшипников или подшипника и подшипника), возникающие при вращении *твердого тела* вокруг неподвижной оси, проходящей через эти закрепленные точки.

При решении этих задач по принципу Даламбера нужно разбить вращающееся твердое тело на элементарные материальные частицы и к каждой такой частице приложить касательную и нормальную силы инерции этой частицы. Так как, согласно принципу Даламбера, все эти силы инерции уравновешиваются заданными силами, приложенными к телу, и реакциями закрепленных точек, то в общем случае имеем шесть известных из статки уравнений равновесия (три уравнения проекций и три уравнения моментов). В эти уравнения войдут, во-первых, сумма проекций всех сил инерции на каждую из трех выбранных координатных осей, или, что то же, проекции главного вектора сил инерции на каждую из этих осей, и, во-вторых, суммы моментов всех сил инерции относительно каждой координатной оси, или, что то же, главные моменты сил инерции относительно каждой из этих осей. Если ось вращения тела примем за координатную ось z , то проекции главного вектора сил инерции на координатные оси будут равны (см., например, «Курс теоретической механики» П. М. Воронкова, § 139)

$$R_x^{(m)} = M(x_C \omega^2 + y_C \varepsilon), \quad R_y^{(m)} = M(y_C \omega^2 - x_C \varepsilon), \quad R_z^{(m)} = 0, \quad (234)$$

а главные моменты сил инерции относительно координатных осей выразятся так:

$$M_x^{(n)} = J_{zx}\varepsilon - J_{yz}\omega^2, \quad M_y^{(n)} = J_{yz}\varepsilon + J_{zx}\omega^2, \quad M_z^{(n)} = -J_z\varepsilon. \quad (235)$$

В этих формулах M — масса тела, ω и ε — соответственно угловая скорость и угловое ускорение тела, x_C и y_C — координаты центра тяжести C тела, J_{zx} и J_{yz} — центробежные моменты инерции тела и J_z — момент инерции тела относительно оси вращения.

Отметим некоторые частные случаи:

1. Тело вращается равномерно. Тогда $\omega = \text{const}$ и $\varepsilon = 0$.
2. Центр тяжести тела лежит на оси вращения. Тогда $x_C = y_C = 0$ и, следовательно,

$$R_x^{(n)} = R_y^{(n)} = R_z^{(n)} = 0. \quad (236)$$

В этом случае все силы инерции приводятся к одной паре, проекции вектора-момента которой на координатные оси определяются по формулам (235).

3. Координатная плоскость xOy является плоскостью симметрии тела. Тогда центр тяжести тела лежит в этой плоскости, и ось вращения z как ось, перпендикулярная к плоскости симметрии, является главной осью инерции тела в точке O , поэтому $J_{yz} = J_{zx} = 0$. Если при этом $\varepsilon = 0$, то

$$M_x^{(n)} = M_y^{(n)} = M_z^{(n)} = 0$$

и

$$R_x^{(n)} = Mx_C\omega^2, \quad R_y^{(n)} = My_C\omega^2, \quad R_z^{(n)} = 0. \quad (237)$$

В этом случае все силы инерции приводятся к одной равнодействующей, равной $\bar{R}^{(n)} = M\omega^2\bar{r}_C$, где $\bar{r}_C$ — радиус-вектор точки C , т. е. приводятся к одной силе, равной *центробежной силе центра тяжести*, если предположить, что в этом центре сосредоточена вся масса тела; при этом линия действия этой равнодействующей $\bar{R}^{(n)}$ проходит через центр тяжести тела.

4. Если ось вращения z является главной центральной осью инерции тела и если при этом тело вращается равномерно, то $\varepsilon = 0$, $x_C = y_C = 0$ и $J_{yz} = J_{zx} = 0$, а потому $R_x^{(n)} = R_y^{(n)} = R_z^{(n)} = 0$ и $M_x^{(n)} = M_y^{(n)} = M_z^{(n)} = 0$, т. е. система сил инерции является в этом случае уравновешенной системой. Следовательно, в уравнения равновесия, составленные на основании принципа Даламбера, силы инерции не войдут; эти уравнения будут совпадать с уравнениями статики, которые используются при равновесии тела под действием приложенных к нему заданных сил. Поэтому искомые реакции закрепленных точек будут в этом случае равны статическим реакциям.

При решении задач этой группы по принципу Даламбера следует иметь в виду, что в уравнение моментов относительно оси вращения z искомые реакции закрепленных точек не входят, так как их моменты относительно этой оси равны нулю. Поэтому эти реакции определяются из остальных пяти уравнений равновесия. Если в данной задаче, как это нередко бывает, требуется найти только реакции, *перпендикулярные к оси вращения z* , то достаточно составить четыре уравнения равновесия (два уравнения

проекции на оси x и y и два уравнения моментов относительно этих осей).

Пример 177. Однородный гонкий диск радиусом R и весом P посажен на горизонтальный вал под углом α к оси вала и жестко скреплен с валом, причем центр тяжести O диска лежит на оси вала.

Определить реакции подшипников A и B , если вал

вращается с постоянной угловой скоростью ω и $AO = OB = a$. Весом вала и трением в подшипниках можно пренебречь (рис. 214).

Решение. Реакция каждого из подшипников перпендикулярна к оси вращения вала и равна геометрической сумме двух сил: статической реакции, вызываемой весом $\bar{P}$ диска, и инерционной реакции, возникающей при вращении диска и обусловленной проявлением инерции материальных частиц вращающегося диска.

Каждая из статических реакций равна, очевидно, $\frac{P}{2}$ и направлена по вертикали вверх. Для определения инерционных реакций применим принцип Даламбера. Составляющие инерционной реакции по координатным осям x и y , приложенные в точке A , обозначим $\bar{X}_A$ и $\bar{Y}_A$, а инерционные реакции, приложенные в точке B , обозначим $\bar{X}_B$ и $\bar{Y}_B$. При этом ось x лежит в одной плоскости с осью вращения вала и с нормалью On к плоскости диска, ось y — в плоскости диска; ось z направим по оси вращения вала. Оси x и y связаны с диском и вращаются вместе с ним. Диаметр Oz_1 диска лежит в плоскости xOz и, следовательно, перпендикулярен к оси y .

Так как сила $\bar{P}$ уравновешивается статическими реакциями подшипников, то, согласно принципу Даламбера, силы инерции материальных частиц диска будут уравновешиваться инерционными реакциями $\bar{X}_A$, $\bar{Y}_A$, $\bar{X}_B$, $\bar{Y}_B$.

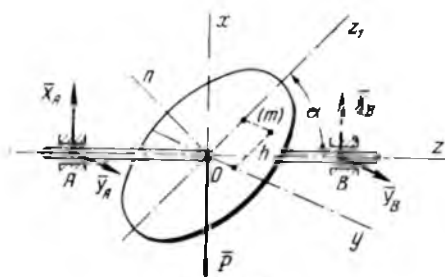


Рис. 214

Поэтому имеем следующие четыре уравнения равновесия: уравнение проекций на ось x

$$R_x^{(n)} + X_A + X_B = 0,$$

уравнение проекций на ось y

$$R_y^{(n)} + Y_A + Y_B = 0,$$

уравнение моментов относительно оси x

$$M_x^{(n)} + aY_A - aY_B = 0,$$

уравнение моментов относительно оси y

$$M_y^{(n)} - aX_A + aX_B = 0.$$

В этих уравнениях, как было уже указано выше, $R_x^{(n)}$, $R_y^{(n)}$ — проекции на оси x и y , главного вектора сил инерции материальных частиц диска, $M_x^{(n)}$ и $M_y^{(n)}$ — главные моменты этих сил относительно тех же осей. Так как в данной задаче центр тяжести диска лежит на оси вращения z и $\omega = \text{const}$, то $x_0 = y_0 = 0$ и $\varepsilon = 0$, поэтому из формул (234) и (235) имеем:

$$R_x^{(n)} = R_y^{(n)} = 0, \quad M_x^{(n)} = -J_{yz}\omega^2, \quad M_y^{(n)} = J_{zx}\omega^2.$$

Кроме того, так как ось y , направленная по диаметру диска, есть ось симметрии диска, то она является его главной центральной осью инерции, а поэтому $J_{yz} = 0$.

Следовательно, предыдущие уравнения принимают вид:

$$X_A + X_B = 0, \quad Y_A + Y_B = 0, \quad a(Y_A - Y_B) = 0, \\ a(X_A - X_B) = J_{zx}\omega^2.$$

Из этих уравнений находим:

$$Y_A = Y_B = 0, \quad X_A = J_{zx} \frac{\omega^2}{2a}, \quad X_B = -J_{zx} \frac{\omega^2}{2a}.$$

Вычислим центробежный момент инерции J_{zx} . Если рассмотрим материальную частицу диска с массой m , то, как видно из рис. 215, координаты этой частицы будут равны

$$x = h \sin \alpha, \quad z = h \cos \alpha,$$

где h — расстояние этой частицы от оси y . Следовательно,

$$J_{zx} = \sum m h^2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha \sum m h^2, \quad \text{но } \sum m h^2 —$$

момент инерции диска относительно оси y (относительно диаметра), равный $\frac{MR^2}{4}$, поэтому $J_{zx} = \frac{MR^2}{8} \sin 2\alpha$.

Таким образом, окончательно получаем:

$$Y_A = Y_B = 0, \quad X_A = \frac{MR^2}{16a} \omega^2 \sin 2\alpha = \frac{PR^2}{16ag} \omega^2 \sin 2\alpha = -X_B$$

Отсюда видно, что инерционные реакции подшипников параллельны оси x ; следовательно, эти реакции, сохраняя постоянную величину, непрерывно изменяют свое направление, так как ось x вращается вместе с диском. Отрицательное значение силы X_B указывает на то, что эта сила имеет направление, противоположное принятому на рис. 214, а поэтому реакции X_A , X_B образуют пару сил, лежащую в плоскости, проходящей через ось вращения и нормаль On к плоскости диска.

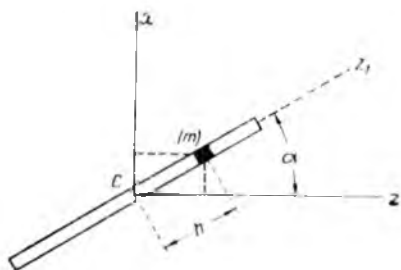


Рис. 215

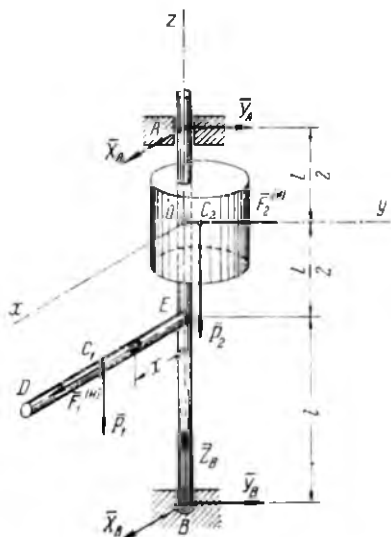


Рис. 216

Пример 178. С вертикальной осью, укрепленной в подшипнике A и подпятнике B , жестко соединены перпендикулярный к этой оси тонкий стержень DE длиной l и весом $\bar{P}_1$ и круглый однородный цилиндр весом $\bar{P}_2$, образующие которого параллельны оси AB . При этом цилиндр насажен эксцентрично так, что его центр тяжести C_2 находится от оси AB на расстоянии $OC_2 = a$. Цилиндр и стержень вращаются вокруг оси AB с данной угловой скоростью $\omega = \text{const}$. Найти реакции подшипника A и подпятника B , если $BE = l$, $EO = AO = \frac{l}{2}$ и $OC_2 \perp ED$ (рис. 216).

Решение. Проведем координатные оси, связанные с цилиндром, как указано на рис. 216, т. е. ось z направим по оси вращения BA , ось y — по прямой OC_2 и ось x — параллельно стержню ED .

Составляющие реакции подшипника A по осям x и y обозначим $\bar{X}_A$ и $\bar{Y}_A$, а составляющие реакции подпятника B по координатным осям — $\bar{X}_B$, $\bar{Y}_B$ и $\bar{Z}_B$.

Применяя принцип Даламбера, разобьем стержень DE на бесконечно малые элементы и к каждому такому элементу приложим соответствующую силу инерции.

Так как $\omega = \text{const}$, то $\epsilon = 0$ и, следовательно, касательные силы инерции всех элементов стержня будут равны нулю, а их нормальные силы инерции (центробежные силы) будут направлены вдоль стержня от оси вращения.

Равнодействующая этих центробежных сил имеет то же направление и по модулю равна

$$F_1^{(n)} = \sum m x \omega^2 = \omega^2 \sum m x,$$

где m — масса элемента, x — расстояние от элемента до оси вращения. Но $\sum m x = M_1 x_{C_1} = \frac{P_1}{g} x_{C_1}$, где x_{C_1} — расстояние центра тяжести C_1 стержня от оси AB , равное $\frac{l}{2}$, поэтому $F_1^{(n)} = \frac{P_1}{2g} l \omega^2$.

Так как плоскость xOy является для цилиндра плоскостью симметрии и цилиндр вращается равномерно, то, как было указано выше, силы инерции материальных частиц цилиндра приводятся в этом случае к одной равнодействующей $F_2^{(n)}$, равной центробежной силе центра тяжести C_2 цилиндра в предположении, что в этом центре сосредоточена вся масса цилиндра. Следовательно, $F_2^{(n)} = M_2 y_{C_2} \omega^2 = \frac{P_2}{g} a \omega^2$; эта сила $F_2^{(n)}$ приложена в точке C_2 и направлена по OC_2 , т. е. по оси y .

Согласно принципу Даламбера, заданные силы $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$ реакции $\bar{X}_B$, $\bar{Y}_B$, $\bar{Z}_B$, $\bar{X}_A$, $\bar{Y}_A$ и силы инерции $\bar{F}_1^{(n)}$, $\bar{F}_2^{(n)}$ взаимно уравновешиваются; поэтому для этой системы сил можно составить следующие пять уравнений равновесия (три уравнения проекций на оси x , y , z и два уравнения моментов относительно осей x и y):

$$X_A + X_B + F_1^{(n)} = 0; \quad Y_A + Y_B + F_2^{(n)} = 0;$$

$$Z_A - P_1 - P_2 = 0;$$

$$-P_2 a - Y_A \frac{l}{2} + \frac{3}{2} Y_B l = 0;$$

$$P_1 \frac{l}{2} - F_1^{(n)} \frac{l}{2} + X_A \frac{l}{2} - \frac{3}{2} X_B l = 0,$$

или

$$X_A + X_B = -\frac{P_1}{2g} l \omega^2; \quad Y_A + Y_B = -\frac{P_2}{g} a \omega^2;$$

$$Z_A = P_1 + P_2;$$

$$Y_A - 3Y_B = -2P_2 \frac{a}{l}; \quad X_A - 3X_B = \frac{P_1}{2g} l \omega^2 - P_1.$$

Из этих уравнений находим

$$X_B = \frac{P_1}{4} \left(1 - \frac{\omega^2}{g} \right); \quad X_A = -\frac{P}{4} \left(1 + \frac{\omega^2}{g} \right);$$

$$Z_A = P_1 + P_2;$$

$$Y_B = \frac{aP_2}{4} \left(\frac{2}{l} - \frac{\omega^2}{g} \right); \quad Y_A = -\frac{aP_2}{4} \left(\frac{2}{l} + \frac{3\omega^2}{g} \right).$$

Таблица 21

Классификация задач

Тип I Плоская система сил			Тип II Пространственная система сил	
Уравнения равновесия			Уравнения равновесия	
1)	$\sum X = 0,$		1)	$\sum X = 0,$
2)	$\sum Y = 0,$		2)	$\sum Y = 0,$
3)	$\sum m_a(\vec{F}) = 0$		3)	$\sum Z = 0,$
			4)	$\sum m_x(\vec{F}) = 0,$
			5)	$\sum m_y(\vec{F}) = 0,$
			6)	$\sum m_z(\vec{F}) = 0$
1-я группа	2-я группа	3-я группа	1-я группа	2-я группа
Тела, входящие в систему (или одно тело), движутся поступательно	Тела, входящие в систему (или одно тело), имеют вращательное движение	Некоторые из тел, входящих в систему, имеют вращательное движение, а другие тела движутся поступательно	Определение реакций двух закрепленных точек оси при вращении точечных масс вокруг этой оси	Определение реакций двух закрепленных точек оси при вращении твердого тела вокруг этой оси
Задачи 878—8 0, 925, 926, 928	Задачи 891—901, 1101, 1102, 1099	Задачи 927, 929, 930	Задачи 1103, 1104	Задачи 1100, 1105—1110

§ 2. ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ (ВИРТУАЛЬНЫХ) ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Если на систему материальных точек наложены те или иные связи, то для такой системы не всякое перемещение оказывается возможным. Если при этом связи не зависят от времени, т. е. если в уравнения связей время t явно не входит, то такие связи называются *стационарными*; в противном случае связи называются *нестационарными*. В дальнейшем рассматриваются только стационарные связи.

Возможным (виртуальным) перемещением данной системы называется совокупность любых бесконечно малых перемещений материальных точек этой системы, допускаемых в данный момент наложенными на систему связями.

Проекции на координатные оси возможного перемещения $\delta \vec{s}_A$ точки A системы обозначаются $\delta x_A, \delta y_A, \delta z_A$ и представляют

собой изменения координат этой точки при ее возможном перемещении, называемые *вариациями координат* этой точки.

Если на систему, состоящую из n материальных точек, наложены s стационарных связей вида

$$f_i(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n) = 0 \quad (238)$$

$$(i = 1, 2, \dots, s),$$

то из $3n$ координат точек системы произвольными являются только $3n - s$, а остальные s координат могут быть выражены как функции этих произвольных координат из s предыдущих уравнений. Число

$$k = 3n - s, \quad (239)$$

т. е. число независимых координат точек системы называется *числом степеней свободы* этой системы.

Если сумма элементарных работ реакций связей, наложенных на систему, при любом возможном перемещении системы равна нулю, то такие связи называются *совершенными* (идеальными). Необходимое и достаточное условие равновесия системы с совершенными связями дает *принцип возможных перемещений*, который формулируется следующим образом: для того чтобы рассматриваемое положение системы с совершенными связями являлось положением равновесия этой системы, необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех заданных (активных) сил, действующих на систему, при любом ее возможном перемещении из этого положения равнялась нулю.

Следовательно, необходимое и достаточное условие равновесия системы выражается уравнением

$$\sum \delta A = \sum F \cos \alpha \delta s = 0. \quad (240)$$

Пользуясь аналитическим выражением элементарной работы, получим общее уравнение статик в таком виде:

$$\sum (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) = 0. \quad (241)$$

Задачи, относящиеся к этому параграфу, можно разделить на три типа:

I. Задачи, в которых при заданном положении равновесия системы требуется определить силы, действующие на систему, или найти зависимость между этими силами.

II. Задачи, в которых при заданных силах, действующих на систему, требуется определить положение равновесия этой системы.

III. Задачи на применение принципа возможных перемещений к определению реакций связей.

Следует иметь в виду, что в каждом из этих типов могут рассматриваться системы с одной или несколькими степенями свободы.

Пример 179. Два невесомых стержня AB и BC соединены шарниром B , в котором приложена вертикальная сила $\bar{Q}$, направленная вниз. Концы C шарнирно прикреплены к стене, а концы A шарнирно соединены с ползунком, который может без трения скользить по полу. Какую горизонтальную силу P надо приложить к ползуну, чтобы система при заданных углах α и β находилась в равновесии (рис. 217)?

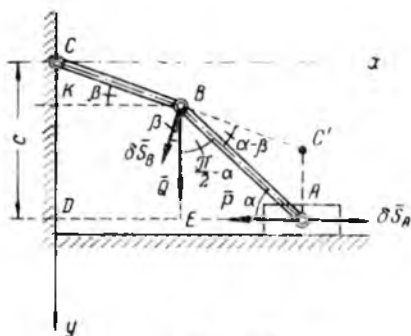


Рис. 217

Решение. Если ползун прижат к полу, то рассматриваемая система имеет одну степень свободы, так как на две точки $B(x_B, y_B)$ и $A(x_A, y_A)$, определяющие положение системы, наложены три связи:

$$\begin{aligned} x_B^2 + y_B^2 - b^2 = 0, \quad (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 - a^2 = 0, \\ y_A - c = 0^*. \end{aligned}$$

Поэтому число степеней свободы данной системы равно

$$k = 2n - s = 2 \cdot 2 - 3 = 1.$$

Применяя принцип возможных перемещений, задачу можно решить двумя способами.

Первый способ. Сообщаем системе возможное перемещение. Для точки A возможное перемещение δs_A направлено параллельно оси x , а возможное перемещение δs_B точки B направлено по касательной к траектории (к окружности с центром в точке C), которую может описывать точка B , т. е. перпендикулярно к стержню CB . Далее, пользуясь основным выражением элементарной работы, на основании принципа возможных перемещений имеем [см. уравнение (240)]

$$\sum \delta A = -P \delta s_A + Q \delta s_B \cos \beta = 0.$$

Отсюда

$$P = \frac{\delta s_B}{\delta s_A} Q \cos \beta.$$

* Эти уравнения выражают следующие условия: а) расстояние $BC = b = \text{const}$, б) расстояние $AB = a = \text{const}$ и в) расстояние от точки A до оси x , т. е. $DC = c = \text{const}$.

Теперь нужно найти зависимость между δs_B и δs_A . Так как расстояние между точками B и A при возможном перемещении системы остается неизменным, то проекции возможных перемещений этих точек на прямую BA , их соединяющую, равны между собой:

$$np_{BA}(\overline{\delta s_B}) = np_{BA}(\overline{\delta s_A}),$$

т. е.

$$\delta s_B \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha + \beta \right) = \delta s_A \cos \alpha,$$

или

$$\delta s_B \sin (\alpha - \beta) = \delta s_A \cos \alpha,$$

откуда

$$\frac{\delta s_B}{\delta s_A} = \frac{\cos \alpha}{\sin (\alpha - \beta)};$$

следовательно,

$$P = Q \frac{\cos \alpha \cos \beta}{\sin (\alpha - \beta)}.$$

Зависимость между δs_A и δs_B можно также найти, построив мгновенный центр вращения C' стержня AB , который лежит на пересечении перпендикуляров, восставленных из точек A и B к векторам $\overline{\delta s_A}$ и $\overline{\delta s_B}$ (см. рис. 217). Тогда возможные перемещения точек A и B , так же, как их возможные скорости, пропорциональны расстояниям этих точек от мгновенного центра вращения звена AB . Следовательно,

$$\frac{\delta s_B}{\delta s_A} = \frac{C'B}{C'A}.$$

Но из треугольника $AC'B$ по теореме синусов имеем

$$\frac{C'B}{C'A} = \frac{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)}{\sin (\alpha - \beta)} = \frac{\cos \alpha}{\sin (\alpha - \beta)},$$

поэтому

$$\frac{\delta s_B}{\delta s_A} = \frac{\cos \alpha}{\sin (\alpha - \beta)}.$$

Второй способ. Сообщая системе возможное перемещение и пользуясь аналитическим выражением элементарной работы, имеем [см. уравнение (241)]

$$\begin{aligned} \sum (X\delta x + Y\delta y) &= P_x\delta x_A + P_y\delta y_A + Q_x\delta x_B + Q_y\delta y_B = \\ &= -P\delta x_A + Q\delta y_B = 0. \end{aligned}$$

Теперь следует найти зависимость между вариациями δy_B и δx_A координат точек B и A .

Для этого выражаем координаты y_B и x_A через углы α и β : $y_B = b \sin \beta$; $x_A = DE + EA = b \cos \beta + a \cos \alpha$. При бесконечно

малом возможном перемещении системы углы α и β получают бесконечно малые приращения $\delta\alpha$ и $\delta\beta$, а координаты x_A и y_B , являющиеся функциями этих углов, получают приращения δx_A и δy_B . Пользуясь тем, что приращение функции при бесконечно малом приращении аргумента можно заменить ее дифференциалом, имеем

$$\delta y_B = b \cos \beta \delta\beta; \delta x_A = -b \sin \beta \delta\beta - a \sin \alpha \delta\alpha.$$

Подставляя эти значения δx_A и δy_B в уравнение равновесия системы, получим

$$bP \sin \beta \delta\beta + aP \sin \alpha \delta\alpha + bQ \cos \beta \delta\beta = 0.$$

Таким образом, вариации координат точек A и B мы выразили через вариации углов α и β . Зависимость же между вариациями $\delta\alpha$ и $\delta\beta$ легко установить, исходя из того, что

$$CD = CK + KD = c = \text{const},$$

или

$$b \sin \beta + a \sin \alpha = c = \text{const}.$$

Варьируя это уравнение, находим

$$a \cos \alpha \delta\alpha + b \cos \beta \delta\beta = 0, \text{ откуда } \delta\alpha = -\frac{b \cos \beta}{a \cos \alpha} \delta\beta.$$

Подставляя это значение $\delta\alpha$ в уравнение, выражающее условие равновесия системы, получаем

$$bP \sin \beta \delta\beta - bP \frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha} \delta\beta + bQ \cos \beta \delta\beta = 0,$$

или

$$b [P \sin (\beta - \alpha) + Q \cos \beta \cos \alpha] \delta\beta = 0,$$

и, следовательно,

$$P \sin (\beta - \alpha) + Q \cos \alpha \cos \beta = 0;$$

отсюда

$$P = \frac{\cos \alpha \cos \beta}{\sin (\alpha - \beta)} Q.$$

Задачи типа II

(задачи 909, 910)

Пример 180. Три стержня одинакового веса Q соединены между собой шарнирами. Первый стержень может вращаться вокруг неподвижного шарнира O , а к свободному концу третьего стержня приложена горизонтальная сила $\bar{F}$, которая удерживает всю систему в вертикальной плоскости в равновесии.

При этом стержни образуют с вертикалью углы, соответственно равные $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$. Определить эти углы, если $F=Q$ (рис. 218).

Решение. Принимая центр шарнира O за начало координат, координатные оси направляем, как указано на рис. 218. На шесть координат точек A, B и C рассматриваемой системы наложено три условия ($OA = \text{const}, AB = \text{const}, BC = \text{const}$); следовательно, система имеет $k = 2n - s = 2 \cdot 3 - 3 = 3$ степени свободы.

В соответствии с этим положение данной системы определяется тремя независимыми друг от друга параметрами — тремя углами φ_1, φ_2 и φ_3 .

Вес каждого стержня можно разложить на две составляющие, приложенные по его концам; тогда получим систему сил, показанную на рис. 218. Пользуясь аналитическим выражением элементарной работы, условие равновесия этой системы сил можно выразить в следующем виде:

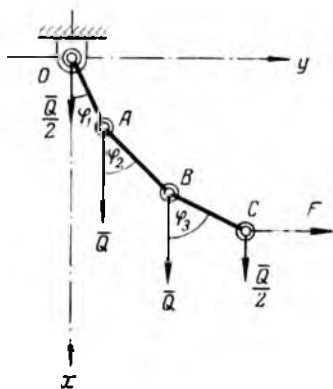


Рис. 218

$$Q\delta x_A + Q\delta x_B + \frac{Q}{2}\delta x_C + F\delta y_C = 0.$$

Учитывая, что по условию задачи $F=Q$, и производя сокращение, имеем

$$\delta x_A + \delta x_B + \frac{1}{2}\delta x_C + \delta y_C = 0.$$

Вводя обозначения $OA=a$, $AB=b$ и $BC=c$, выражаем координаты точек A, B и C через искомые углы $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$:

$$x_A = a \cos \varphi_1; \quad x_B = a \cos \varphi_1 + b \cos \varphi_2;$$

$$x_C = a \cos \varphi_1 + b \cos \varphi_2 + c \cos \varphi_3; \quad y_C = a \sin \varphi_1 + b \sin \varphi_2 + c \sin \varphi_3.$$

Отсюда находим выражения вариаций координат этих точек через вариации углов $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$:

$$\delta x_A = -a \sin \varphi_1 \delta \varphi_1; \quad \delta x_B = -a \sin \varphi_1 \delta \varphi_1 - b \sin \varphi_2 \delta \varphi_2;$$

$$\delta x_C = -a \sin \varphi_1 \delta \varphi_1 - b \sin \varphi_2 \delta \varphi_2 - c \sin \varphi_3 \delta \varphi_3;$$

$$\delta y_C = a \cos \varphi_1 \delta \varphi_1 + b \cos \varphi_2 \delta \varphi_2 + c \cos \varphi_3 \delta \varphi_3.$$

Подставляя эти значения вариаций координат в уравнение, выражающее условие равновесия системы, и группируя члены,

содержащие $\delta\varphi_1$, $\delta\varphi_2$ и $\delta\varphi_3$, получаем

$$a(\cos\varphi_1 - 2,5\sin\varphi_1)\delta\varphi_1 + b(\cos\varphi_2 - 1,5\sin\varphi_2)\delta\varphi_2 + c(\cos\varphi_3 - 0,5\sin\varphi_3)\delta\varphi_3 = 0.$$

Это равенство должно выполняться при всяком возможном перемещении данной системы, т. е. при любых значениях вариаций $\delta\varphi_1$, $\delta\varphi_2$ и $\delta\varphi_3$, а так как эти вариации друг от друга не зависят и каждая из них может иметь произвольное значение, то это возможно лишь при условии, что коэффициент при каждой из этих вариаций равен нулю, т. е.

$$\cos\varphi_1 - 2,5\sin\varphi_1 = 0,$$

$$\cos\varphi_2 - 1,5\sin\varphi_2 = 0,$$

$$\cos\varphi_3 - 0,5\sin\varphi_3 = 0,$$

$$\text{или } \operatorname{tg}\varphi_1 = 0,4; \operatorname{tg}\varphi_2 = 0,6667; \operatorname{tg}\varphi_3 = 2.$$

Отсюда находим:

$$\varphi_1 = 21^\circ 48'; \varphi_2 = 33^\circ 40'; \varphi_3 = 64^\circ 25'.$$

Задачи типа III

(задачи 922—924)

Пример 181. Трехшарнирная симметричная арка нагружена силами $\bar{P}$ и $\bar{Q}$ (рис. 219). Найти горизонтальную составляющую реакции шарнира B при указанных на рисунке размерах.

Решение. Горизонтальную составляющую реакции шарнира B обозначим X . Чтобы найти эту реакцию, нужно шарнирно-неподвижную опору B заменить опорой на катках для того, чтобы точка B могла перемещаться в горизонтальном направлении. Сообщим теперь этой точке возможное горизонтальное перемещение δs_B .

Тогда полуарка OA повернется вокруг неподвижной точки A на некоторый элементарный угол $\delta\varphi_A$. При этом точка O получит возможное перемещение δs_O , которое будет направлено по касательной к дуге окружности, описываемой точкой O , т. е. перпендикулярно к AO . Зная направления возможных перемещений δs_O и δs_B точек O и B , находим мгновенный центр

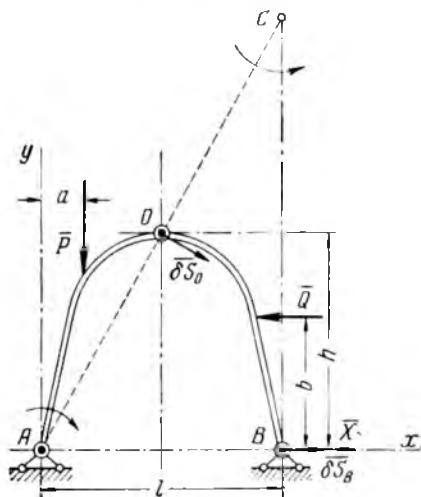


Рис. 219

окружности, описываемой точкой O , т. е. перпендикулярно к AO . Зная направления возможных перемещений δs_O и δs_B точек O и B , находим мгновенный центр

вращения C полуарки BO как точку пересечения перпендикуляров, восстановленных в точках O и B к векторам $\overline{\delta s_O}$ и $\overline{\delta s_B}$. Тогда перемещение полуарки BO можно представить как поворот вокруг центра C на некоторый элементарный угол $\delta\varphi_C$.

На основании принципа возможных перемещений имеем

$$\sum \delta A = \delta A_X + \delta A_Q + \delta A_P = 0.$$

Вычисляя работу каждой из сил $\overline{P}$, $\overline{Q}$, $\overline{X}$ как произведение момента этой силы относительно центра вращения на угол поворота (см. формулу 163), получим

$$\delta A_X = |m_C(\overline{X})| \delta\varphi_C = X 2h \delta\varphi_C,$$

$$\delta A_Q = -|m_C(\overline{Q})| \delta\varphi_C = -Q(2h - b) \delta\varphi_C^*,$$

$$\delta A_P = |m_A(\overline{P})| \delta\varphi_A = Pa \delta\varphi_A.$$

Следовательно, получаем уравнение

$$2Xh\delta\varphi_C - Q(2h - b)\delta\varphi_C + Pa\delta\varphi_A = 0,$$

откуда

$$X = \frac{Q(2h - b)}{2h} - \frac{Pa \delta\varphi_A}{2h \delta\varphi_C}.$$

Так как точка O принадлежит одновременно обеим полуаркам OA и OB ,

то $\delta s_O = AO\delta\varphi_A = OC\delta\varphi_C$.

Но $OA = OC$, а потому $\delta\varphi_A = \delta\varphi_C$, и

$$X = \frac{1}{2h} [Q(2h - b) - Pa].$$

§ 3. ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ

(уравнение Даламбера — Лагранжа)

Применяя совместно принцип Даламбера и принцип возможных перемещений к движущейся системе, можно сделать следующий вывод: *при движении системы, на которую наложены совершенные связи, сумма элементарных работ всех заданных сил, действующих на систему, и сил инерции материальных точек системы равна нулю при любом возможном перемещении системы из занимаемого ею в каждый данный момент положения.*

* Работа силы $\overline{Q}$ отрицательна, так как сила $\overline{Q}$ направлена относительно центра C по часовой стрелке, а поворот полуарки BO вокруг этого центра происходит против часовой стрелки.

Этот результат выражается одним из следующих уравнений:

$$\sum (\bar{F} + \bar{F}^{(u)}) \delta \bar{r} = 0, \quad (242)$$

или, так как $\bar{F}^{(u)} = -m\bar{\omega}$,

$$\sum (\bar{F} - m\bar{\omega}) \delta \bar{r} = 0, \quad (243)$$

или в координатной форме

$$\sum \left[\left(X - m \frac{d^2 x}{dt^2} \right) \delta x + \left(Y - m \frac{d^2 y}{dt^2} \right) \delta y + \left(Z - m \frac{d^2 z}{dt^2} \right) \delta z \right] = 0. \quad (244)$$

Уравнение (242), или (243), или (244) называется общим уравнением динамики (уравнением Даламбера—Лагранжа).

В настоящем параграфе рассмотрим задачи двух типов:

I. Задачи, в которых требуется установить условия относительного равновесия системы.

II. Задачи, в которых требуется определить ускорения точек системы.

В задачах каждого из этих типов могут рассматриваться системы с одной или несколькими степенями свободы.

Задачи типа I

(задачи 925—929, 935—939)

Пример 182. Центробежный регулятор (рис. 220) состоит из двух шаров A и A' весом P каждый, размерами которых можно пренебречь. Шары закреплены на концах A и A' коленчатых прямоугольных рычагов, кото-

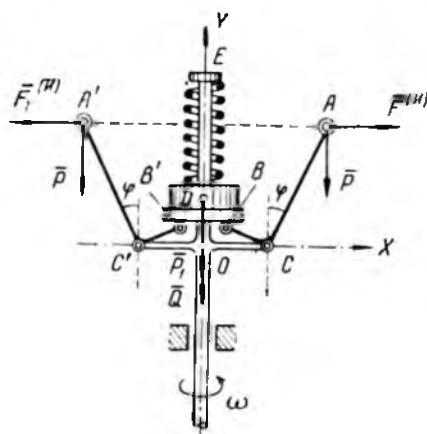


Рис. 220

рые имеют шарнирные опоры C и C' на перекладине COC , соединенной неизменно с осью регулятора. Муфта D весом P_1 отжимается вниз пружины, а с другой стороны поддерживается роликами B и B' рычагов регулятора. Определить жесткость c пружины, если при заданной постоянной угловой скорости ω угол отклонения стержней CA и $C'A'$ от вертикали равен φ . Даны расстояния: $OE = l$, $AC = A'C' = a$, $CB = C'B' = b$, $OC = OC' = e$ и длина недеформированной пружины $l_0 > l$.

Высота муфты равна h .

Решение. Координатные оси располагаем как указано на рис. 220. Данными силами, действующими на систему, яв-

ляются веса шаров и муфты, а также сила упругости пружины $Q = c\lambda$, где λ — деформация (сжатие) пружины. Кроме того, в точках A и A' приложим центробежные силы инерции $F^{(u)} = F_1^{(u)} = \frac{P}{g} R \omega^2$, где R — расстояние от центра каждого из шаров до оси вращения y .

На основании уравнения Даламбера — Лагранжа сумма работ всех этих сил при любом возможном перемещении системы равна нулю. Следовательно, пользуясь аналитическим выражением элементарной работы, имеем

$$F^{(u)} \delta x_A - F_1^{(u)} \delta x_{A'} - P \delta y_A - P \delta y_{A'} - (P_1 + Q) \delta y_D = 0.$$

Но

$$x_A = -x_{A'} = e + a \sin \varphi, \quad y_A = y_{A'} = a \cos \varphi \quad \text{и} \quad y_D = b \sin \varphi + \frac{h}{2},$$

$$\text{откуда} \quad \delta x_A = -\delta x_{A'} = a \cos \varphi \delta \varphi, \quad \delta y_A = \delta y_{A'} = -a \sin \varphi \delta \varphi,$$

$$\delta y_D = b \cos \varphi \delta \varphi.$$

Кроме того, $R = x_A = e + a \sin \varphi$ и, следовательно, $F^{(u)} = F_1^{(u)} = \frac{P}{g} R \omega^2 = \frac{P}{g} (e + a \sin \varphi) \omega^2$.

Таким образом, уравнение Даламбера — Лагранжа принимает вид

$$\left| 2 \frac{P}{g} (e + a \sin \varphi) \omega^2 a \cos \varphi + 2Pa \sin \varphi - (P_1 + Q) b \cos \varphi \right| \delta \varphi = 0.$$

Отсюда, учитывая, что $\delta \varphi \neq 0$, находим

$$bQ \cos \varphi = 2Pa \left(\frac{e + a \sin \varphi}{g} \omega^2 \cos \varphi + \sin \varphi \right) - bP_1 \cos \varphi;$$

следовательно, $Q = 2P \frac{a}{b} \left(\frac{e + a \sin \varphi}{g} \omega^2 + \operatorname{tg} \varphi \right) - P_1$.

Определив Q , нетрудно найти жесткость c пружины. Действительно, деформация пружины $\lambda = l_0 - (l - h - b \sin \varphi)$, поэтому

$$c = \frac{Q}{\lambda} = \frac{Q}{l_0 - l + h + b \sin \varphi}.$$

Задачи типа II

(задачи 930, 943—948)

Пример 183. Через блоки A и B с неподвижными осями переброшен шнур, поддерживающий подвижной блок C ; части шнура, не лежащие на блоках, вертикальны. Блок C нагружен гирей весом $P = 10$ н, а к концам шнура прикреплены грузы весом $P_1 = 20$ н и $P_2 = 30$ н. Определить ускорения всех трех

грузов, пренебрегая массой блока и шнура и трением на осях (рис. 221).

Решение. Располагая координатные оси, как указано на рис. 221, применяем общее уравнение динамики в форме (244), которое в данном случае принимает вид

$$\left(P - \frac{P}{g} \omega\right) \delta x + \left(P_1 - \frac{P_1}{g} \omega_1\right) \delta x_1 + \left(P_2 - \frac{P_2}{g} \omega_2\right) \delta x_2 = 0,$$

где ω , ω_1 , ω_2 — проекции искомых ускорений грузов на ось x .

Учитывая, что длина шнура постоянна, очевидно, имеем

$$x_1 + 2x + x_2 = \text{const.}$$

Таким образом, три координаты x , x_1 и x_2 , определяющие положение данной системы (предполагается, что все грузы перемещаются прямолинейно), связаны одним условием; следовательно, данная система имеет две степени свободы. Варьируя последнее равенство, находим зависимость между вариациями координат трех грузов:

$$\delta x_1 + 2\delta x + \delta x_2 = 0,$$

отсюда

$$\delta x = -\frac{1}{2} (\delta x_1 + \delta x_2).$$

Подставляя это значение δx в уравнение Даламбера—Лагранжа и вынося за скобки множители δx_1 и δx_2 , получим

$$\begin{aligned} \left(P_1 - \frac{P_1}{g} \omega_1 - \frac{P}{2} + \frac{P}{2g} \omega\right) \delta x_1 + \\ + \left(P_2 - \frac{P_2}{g} \omega_2 - \frac{P}{2} + \frac{P}{2g} \omega\right) \delta x_2 = 0. \end{aligned}$$

Это уравнение имеет место при любых, независимых друг от друга значениях вариаций δx_1 и δx_2 , а это возможно лишь при условии, что коэффициент при каждой из этих вариаций равен нулю. Следовательно, должно быть:

$$\frac{P}{2g} \omega - \frac{P_1}{g} \omega_1 = \frac{P}{2} - P_1, \quad \frac{P}{2g} \omega - \frac{P_2}{g} \omega_2 = \frac{P}{2} - P_2,$$

или, подставляя данные числовые значения весов,

$$\omega - \omega_1 = 0, \quad 2\omega - 3\omega_2 = -g.$$

Отсюда

$$\omega_1 = \omega \quad \text{и} \quad \omega_2 = \frac{2}{3} \omega + \frac{g}{3}.$$

Чтобы получить третье уравнение для определения трех искомых ускорений, продифференцируем дважды по t уравнение $x_1 + 2x + x_2 = \text{const.}$ Тогда имеем

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + 2\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2x_2}{dt^2} = 0,$$

или

$$\omega_1 + 2\omega + \omega_2 = 0.$$

Подставляя сюда значения ω_1 и ω_2 , получаем

$$\omega + 2\omega + \frac{2}{3}\omega + \frac{g}{3} = 0.$$

Отсюда находим

$$\omega = -\frac{g}{11}$$

и, следовательно,

$$\omega_1 = -\frac{g}{11}, \quad \omega_2 = -\frac{2}{33}g + \frac{g}{3} = \frac{3}{11}g.$$

Отрицательное значение ускорений ω и ω_1 указывает на то, что их направление совпадает с отрицательным направлением оси x , т. е. что эти ускорения направлены вверх.

§ 4. УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА II РОДА (ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ В ОБОБЩЕННЫХ КООРДИНАТАХ)

Обобщенными координатами механической системы называются независимые друг от друга параметры, при помощи которых можно определить в каждый данный момент положение этой системы и через которые, следовательно, можно выразить декартовы координаты всех ее точек.

Таким образом, если обозначим k обобщенных координат $q_1, q_2, \dots, q_k$, то декартовы координаты каждой материальной точки $M_i(x_i, y_i, z_i)$ системы можно выразить как функции параметров $q_1, q_2, q_3, \dots, q_k$ и времени t , т. е.

$$\left. \begin{aligned} x_i &= x_i(q_1, q_2, q_3, \dots, q_k, t), \\ y_i &= y_i(q_1, q_2, q_3, \dots, q_k, t), \\ z_i &= z_i(q_1, q_2, q_3, \dots, q_k, t). \end{aligned} \right\} (i=1, 2, \dots, n). \quad (245)$$

Если связи, наложенные на систему, являются стационарными, то время t в правые части этих уравнений не войдет. Число k независимых обобщенных координат равно числу степеней свободы данной системы.

В соответствии с числом независимых обобщенных координат, т. е. с числом степеней свободы данной механической

системы, имеем для нее k уравнений Лагранжа II рода:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k \end{array} \right. \quad (246)$$

формулам

$$Q_j = \frac{\partial U}{\partial q_j} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j}, \quad (249)$$

где U — силовая функция, Π — потенциальная энергия системы, т. е. обобщенная сила равна частной производной от силовой функции или взятой с обратным знаком частной производной от потенциальной энергии системы по соответствующей обобщенной координате.

При вычислении обобщенных сил по формулам (249) необходимо предварительно силовую функцию или потенциальную энергию системы выразить через обобщенные координаты этой системы.

Интегрируя систему уравнений Лагранжа, находим обобщенные координаты $q_1, q_2, \dots, q_k$ как функции времени t и $2k$ произвольных постоянных $C_1, C_2, \dots, C_{2k}$, определяемых начальными условиями движения системы.

Задачи на применение уравнений Лагранжа в большинстве случаев можно отнести к одному из следующих типов:

I. Задачи, в которых требуется только составить дифференциальные уравнения движения системы.

II. Задачи, в которых требуется определить ускорения (линейные или угловые).

III. Задачи, относящиеся к малым колебаниям системы. Задачи каждого из этих типов можно разделить на две группы в зависимости от того, рассматривается ли в данной задаче система с одной степенью свободы или с числом степеней свободы, большим единицы.

Задачи типа I

Первая группа

(задачи 1190, 1193, 1194, 1196, 1197, 1201, 1203—1205)

Пример 184. Кулачок, имеющий форму круглого эксцентрика радиуса R , вращается вокруг оси O парой сил с моментом M (рис. 222). Вес кулачка равен P , и центр тяжести его находится в геометрическом центре C_1 , причем $OC_1 = e$; радиус инерции кулачка относительно оси O равен k . Жесткость пружины, прижимающей тарелку толкателя к кулачку, равна s и при наименьшем положении толкателя ($\varphi = 0$) пружина сжата на величину λ_0 . Принимая угол поворота φ кулачка за обобщенную координату, составить дифференциальное уравнение движения системы. Трением пренебречь. Вес толкателя равен P_2 .

Решение. Движение системы определяется одним уравнением

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q. \quad (a)$$

Кинетическая энергия T системы складывается из кинетической энергии T_1 кулачка и кинетической энергии T_2 толкателя, причем

$$T_1 = \frac{J_0 \omega^2}{2} = \frac{P_1}{g} k^2 \frac{\dot{\varphi}^2}{2}; \quad T_2 = \frac{P_2}{g} \cdot \frac{\dot{y}_2^2}{2}.$$

Кроме того,

$$\left. \begin{aligned} y_{C_1} &= y_1 = -OC_1 \cos \varphi = -e \cos \varphi; \\ y_{C_2} &= y_2 = R - e \cos \varphi + \text{const.} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Учитывая, что $\dot{y}_2 = e \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}$, получаем

$$T = T_1 + T_2 = \frac{P_1}{g} k^2 \frac{\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{P_2}{g} e^2 \frac{\sin^2 \varphi}{2} \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2g} (P_1 k^2 + P_2 e^2 \sin^2 \varphi) \dot{\varphi}^2;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{1}{g} (P_1 k^2 + P_2 e^2 \sin^2 \varphi) \dot{\varphi};$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{1}{g} (P_1 k^2 + P_2 e^2 \sin^2 \varphi) \ddot{\varphi} + \frac{1}{g} P_2 e^2 \sin 2\varphi \cdot \dot{\varphi}^2; \quad (в)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{1}{2g} P_2 e^2 \sin 2\varphi \cdot \dot{\varphi}^2. \quad (г)$$

Переходим к определению обобщенной силы, соответствующей обобщенной координате φ . Кроме движущего момента M , на систему действуют веса P_1 и P_2 кулачка и толкателя, а также сила P упругости пружины. Последняя направлена вертикально вниз и по модулю определяется так:

$$P = c (\lambda_0 + e - e \cos \varphi).$$

Варьируем координату φ и определяем сумму виртуальных работ действующих на систему активных сил:

$$\sum \delta A = M \delta \varphi - P_1 \delta y_1 - P_2 \delta y_2 - P \delta y_2.$$

Но на основании равенств (6) имеем

$$\delta y_1 = e \sin \varphi \cdot \delta \varphi; \quad \delta y_2 = e \sin \varphi \delta \varphi.$$

Таким образом,

$$\sum \delta A = M \delta \varphi - [P_1 + P_2 + c (\lambda_0 + e - e \cos \varphi)] e \sin \varphi \delta \varphi.$$

Отсюда находим обобщенную силу системы, соответствующую обобщенной координате φ :

$$Q = \frac{\sum \delta A}{\delta \varphi} = M - [P_1 + P_2 + c (\lambda_0 + e - e \cos \varphi)] e \sin \varphi. \quad (д)$$

Учитывая равенства (в), (г) и (д), уравнение (а) можно предста-

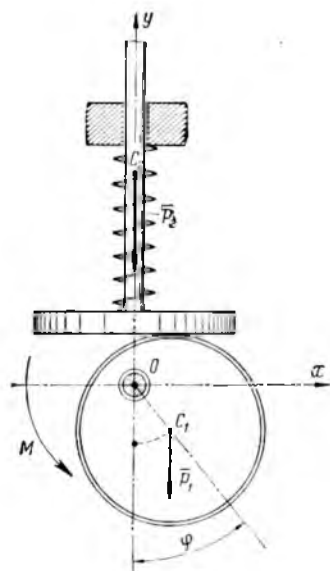


Рис. 222

вить в следующем виде:

$$(P_1 k^2 + P_2 e^2 \sin^2 \varphi) \ddot{\varphi} + 0,5 P_2 e^2 \sin 2\varphi \dot{\varphi}^2 + \\ + [P_1 + P_2 + c(\lambda_0 + e - e \cos \varphi)] e g \sin \varphi = Mg.$$

Вторая группа

(задачи 1210, 1213, 1214, 1218, 1221)

Пример 185. На шкив радиуса r намотана нить к концу которой подвешен точечный груз весом $P = mg$, где m — масса груза (рис. 223). К шкиву приложен вращающий момент M , при помощи которого этот груз поднимается, раскачиваясь в то же время в вертикальной плоскости. Составить дифференциальные уравнения движения системы, если момент инерции шкива относительно его оси равен J_0 и длина свисающей части нити при ее вертикальном положении в начальный момент равна l_0 .

Решение. Система имеет две степени свободы. В качестве обобщенных координат принимаем угол φ поворота шкива и угол ψ отклонения нити от вертикали. Тогда движение системы определяется уравнениями

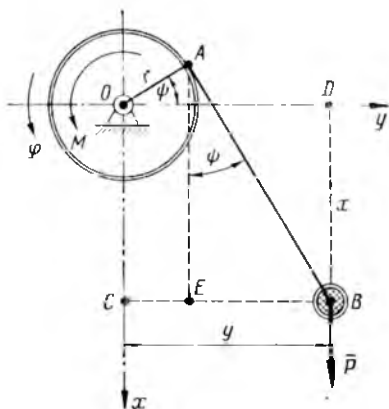


Рис. 223

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= Q_{\varphi}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \psi} &= Q_{\psi}. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Расстояние от точки B подвеса груза до точки A набегающей нити на шкив определяется следующим образом:

$$l = BA = l_0 - r\varphi + r\psi.$$

Отсюда находим координаты точки B :

$$\left. \begin{aligned} x &= l \cos \psi - r \sin \psi = (l_0 - r\varphi + r\psi) \cos \psi - r \sin \psi; \\ y &= l \sin \psi + r \cos \psi = (l_0 - r\varphi + r\psi) \sin \psi + r \cos \psi. \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

Кинетическая энергия системы складывается из кинетических энергий шкива и груза:

$$T = \frac{1}{2} J_0 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2),$$

но на основании равенств (б)

$$\dot{x} = -r\dot{\varphi} \cos \psi - (l_0 - r\varphi + r\psi) \sin \psi \dot{\psi};$$

$$y = -r\dot{\varphi} \sin \psi + (l_0 - r\varphi + r\psi) \cos \psi \dot{\psi}.$$

Следовательно,

$$T = \frac{J_0}{2} \dot{\varphi}^2 + \frac{m}{2} [r^2 \dot{\varphi}^2 + (l_0 - r\varphi + r\psi)^2 \dot{\psi}^2].$$

Производим операции, указанные уравнениями (а):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= J_0 \dot{\varphi} + mr^2 \dot{\varphi} = (J_0 + mr^2) \dot{\varphi}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) &= (J_0 + mr^2) \ddot{\varphi}, \\ \frac{\partial T}{\partial \psi} &= -mr(l_0 - r\varphi + r\psi) \dot{\psi}. \end{aligned} \right\} \quad (в)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} &= m(l_0 - r\varphi + r\psi) \dot{\psi}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} \right) &= m(l_0 - r\varphi + r\psi) \ddot{\psi} + \\ &+ 2mr(l_0 - r\varphi + r\psi)(\dot{\psi} - \dot{\varphi}) \dot{\psi}; \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} &= mr(l_0 - r\varphi + r\psi) \dot{\psi}^2. \end{aligned} \right\} \quad (г)$$

Варьируя координаты φ и ψ , находим сумму виртуальных работ сил, действующих на систему:

$$\sum \delta A = M\delta\varphi + P\delta x,$$

но на основании уравнений (б) имеем

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \delta\varphi + \frac{\partial x}{\partial \psi} \delta\psi = -r \cos \psi \delta\varphi - (l_0 - r\varphi + r\psi) \sin \psi \delta\psi.$$

Таким образом,

$$\sum \delta A = (M - Pr \cos \psi) \delta\varphi - P(l_0 - r\varphi + r\psi) \sin \psi \delta\psi.$$

Коэффициенты при вариациях $\delta\varphi$ и $\delta\psi$ обобщенных координат в выражении виртуальных работ и являются обобщенными силами системы

$$\left. \begin{aligned} Q_\varphi &= M - Pr \cos \psi; \\ Q_\psi &= -P(l_0 - r\varphi + r\psi) \sin \psi. \end{aligned} \right\} \quad (д)$$

Учитывая равенства (в), (г) и (д), уравнения (а) можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} (J_0 + mr^2) \ddot{\varphi} + mr(l_0 - r\varphi + r\psi) \dot{\psi}^2 &= M - Pr \cos \psi; \\ (l_0 - r\varphi + r\psi) \ddot{\psi} + r(\dot{\psi} - \dot{\varphi}) \dot{\psi} &= -g \sin \psi. \end{aligned}$$

Пример 186. Водило AB , представляющее собой однородный тонкий стержень длиной $2l$ и массой m , вращается вокруг оси O неподвижной шестерни 1 под действием приложенного к нему момента M и приводит в движение две одинаковые свободно насаженные на водило шестеренки 2 и 2' радиусом r и массой $m_2 = m$ каждая, которые катятся по сцепленной с ними неподвижной шестерне 1 и приводят в движение зубчатое колесо 3, обладающее массой $m_3 = \frac{5}{3} m$. К окружности колеса 3 приложена сила сопротивления P . Определить угловое ускорение ϵ водила, если шестеренки 2 и 2' представляют собой сплошные однородные диски, а масса колеса 3 равномерно распределена по его окружности (рис. 224).

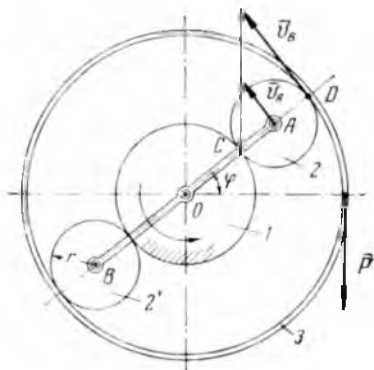


Рис. 224

Решение. Положение данного механизма вполне определяется одним параметром — углом φ поворота водила, который и принимаем за обобщенную координату. В соответствии с этим в данной задаче имеем одно уравнение Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q.$$

Вычисляем кинетическую энергию T системы, которая складывается из кинетической энергии $T_{\text{вод}}$ водила, энергии $2T_2$ двух бегающих шестеренок и энергии T_3 колеса 3:

$$T = T_{\text{вод}} + 2T_2 + T_3 = \frac{J\omega^2}{2} + 2 \left(\frac{m_2 v_A^2}{2} + \frac{J_2 \omega_2^2}{2} \right) + \frac{J_3 \omega_3^2}{2},$$

где J и J_3 — моменты инерции водила и колеса 3 относительно оси O , а J_2 — момент инерции шестеренки 2 относительно оси вращения A .

Угловые скорости ω_2 шестеренки 2 и ω_3 колеса 3, а также линейную скорость точки A выражаем через угловую скорость водила $\omega = \dot{\varphi}$, которая в данном случае является обобщенной скоростью:

$$v_A = \omega OA = \omega l, \quad \omega_2 = \frac{v_A}{CA} = \frac{\omega l}{r}$$

(мгновенный центр вращения шестеренки 2 находится в точке C зацепления этой шестеренки с неподвижной шестерней 1); для определения ω_2 находим скорость точки D зацепления шестеренки 2 с колесом 3: $v_D = 2v_A = 2\omega l$; следовательно,

$$\omega_2 = \frac{v_D}{OD} = \frac{2\omega l}{l+r}.$$

Теперь вычисляем моменты инерции:

$$J = \frac{m(AB)^2}{12} = \frac{m4l^2}{12} = \frac{ml^2}{3}; \quad J_2 = \frac{m_2 r^2}{2} = \frac{mr^2}{2};$$

$$J_3 = m_3 OD^2 = \frac{5}{3} m (l+r)^2.$$

Таким образом, для кинетической энергии системы получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} T &= \frac{ml^2}{6} \omega^2 + m\omega^2 l^2 + \frac{mr^2}{2} \frac{\omega^2 l^2}{r^2} + \frac{5}{6} m (l+r)^2 \frac{4\omega^2 l^2}{(l+r)^2} = \\ &= \frac{ml^2\omega^2}{6} + m\omega^2 l^2 + \frac{ml^2\omega^2}{2} + \frac{10}{3} \omega^2 l^2 m = 5\omega^2 l^2 m = 5l^2 \dot{\varphi}^2 m. \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = 10l^2 m \dot{\varphi}; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = 10ml^2 \ddot{\varphi} = 10ml^2 \varepsilon,$$

где ε — угловое ускорение водила;

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0, \text{ так как } T \text{ не зависит от } \varphi.$$

Определим теперь обобщенную силу.

При повороте водила на элементарный угол $\delta\varphi$ сумма работ, действующих на данную систему сил, равна

$$\sum \delta A = M\delta\varphi - P(l+r)\delta\varphi_3,$$

где $\delta\varphi_3$ — угол поворота колеса 3. Но зависимость между углами φ и φ_3 , очевидно, такова же, как и между угловыми скоростями водила и колеса 3. Следовательно,

$$\delta\varphi_3 = \frac{2l}{l+r} \delta\varphi,$$

поэтому

$$\sum \delta A = M\delta\varphi - P(l+r) \frac{2l}{l+r} \delta\varphi = (M - 2Pl) \delta\varphi;$$

отсюда

$$Q = \frac{\sum \delta A}{\delta\varphi} = M - 2Pl.$$

Подставляя найденные значения обобщенной силы и производных $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right)$ и $\frac{\partial T}{\partial \varphi}$ в уравнение Лагранжа, получаем

$$10ml^2 \epsilon = M - 2Pl,$$

откуда

$$\epsilon = \frac{M - 2Pl}{10ml^2}.$$

Вторая группа

(задачи 943—947, 1114, 1120)

Пример 187. Невесомая и нерастяжимая нить, намотанная на однородный цилиндрический барабан D радиуса $R = 10$ см и весом $G = 20$ н, охватывает подвижный блок C , неподвижный блок B и идет параллельно наклонной плоскости mn , образующей с горизонтом угол $\alpha = 30^\circ$ (рис. 225). К свободному концу нити прикреплен груз A весом $P = 40$ н, который может без трения

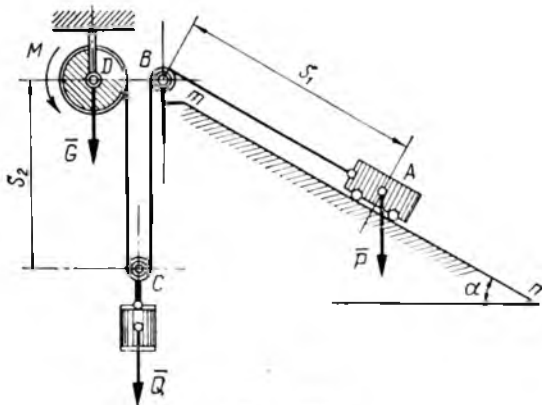


Рис. 225

перемещаться по плоскости mn , а к подвижному блоку подвешен груз весом $Q = 20$ н. Определить ускорения грузов, если к барабану приложена пара сил с моментом $M = 1$ н·м, направленным, как указано на рисунке. Массами блоков B и C пренебречь.

Решение. Система имеет две степени свободы. В качестве обобщенных координат системы принимаем расстояния s_1 и s_2 (рис. 225). Тогда движение системы определяется уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial s_1} &= Q_1; \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial s_2} &= Q_2. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Обозначая угол поворота барабана D через φ , имеем

$$s_1 + 2s_2 + R\varphi = L = \text{const.} \quad (6)$$

Составляем выражение кинетической энергии системы:

$$T = \frac{P}{g} \frac{\dot{s}_1^2}{2} + \frac{Q}{g} \frac{\dot{s}_2^2}{2} + \frac{GR^2}{2g} \dot{\varphi}^2.$$

На основании равенства (6)

$$\varphi = -\frac{1}{R}(\dot{s}_1 + 2\dot{s}_2).$$

Следовательно,

$$T = \frac{1}{2g} [P\dot{s}_1^2 + Q\dot{s}_2^2 + 0,5G(s_1 + 2s_2)^2].$$

Производим операции, указанные уравнениями (а)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial s_1} &= \frac{1}{g} [P\dot{s}_1 + 0,5G(s_1 + 2s_2)]; \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}_1} \right) &= \frac{1}{g} [(P + 0,5G)\ddot{s}_1 + G\ddot{s}_2]; \\ \frac{\partial T}{\partial s_1} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (в)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial s_2} &= \frac{1}{g} [Q\dot{s}_2 + G(s_1 + 2s_2)]; \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}_2} \right) &= \frac{1}{g} [G\dot{s}_1 + (Q + 2G)\ddot{s}_2]; \\ \frac{\partial T}{\partial s_2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (г)$$

Варьируя обобщенные координаты системы, находим сумму виртуальных работ, действующих на систему сил

$$\sum \delta A = P \sin \alpha \delta s_1 + Q \delta s_2 + M \delta \varphi,$$

но на основании равенства (6)

$$\delta \varphi = -\frac{1}{R}(\delta s_1 + 2\delta s_2),$$

следовательно,

$$\sum \delta A = \left(P \sin \alpha - \frac{M}{R} \right) \delta s_1 + \left(Q - 2 \frac{M}{R} \right) \delta s_2.$$

Отсюда определяем обобщенные силы:

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= P \sin \alpha - \frac{M}{R}; \\ Q_2 &= Q - 2 \frac{M}{R}. \end{aligned} \right\} \quad (д)$$

Учитывая равенства (в), (г) и (д), уравнения (а) можно пред-

ставить в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} (P + 0,5G)s_1 + Gs_2 &= \left(P \sin \alpha - \frac{M}{R}\right)g, \\ Gs_1 + (Q + 2G)s_2 &= \left(Q - 2\frac{M}{R}\right)g. \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

Подставляя сюда числовые данные, имеем

$$\left. \begin{aligned} 5s_1 + 2s_2 &= g, \\ s_1 + 3s_2 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Отсюда

$$s_1 = \frac{3}{13}g; \quad s_2 = -\frac{1}{13}g.$$

Задачи типа III

В задачах этого типа рассматриваются малые колебания системы с одной (первая группа) или двумя (вторая группа) степенями свободы около положения устойчивого равновесия. В этих задачах положение устойчивого равновесия следует принять за начало отсчета обобщенных координат и, далее, пользуясь уравнениями Лагранжа, составлять дифференциальные уравнения движения системы.

Эти уравнения получаются, вообще говоря, нелинейными. Однако, если заранее известно, что обобщенные координаты и обобщенные скорости являются малыми величинами, то полученные уравнения можно линеаризовать. Линеаризованные уравнения получаются из данных нелинейных уравнений путем отбрасывания членов, содержащих квадраты и более высокие степени обобщенных координат и скоростей. Например, при малых значениях координаты α можно положить $\sin \alpha \approx \alpha$; $\cos \alpha \approx 1$. Члены, содержащие α^2 , α^3 , $\alpha\dot{\alpha}$, следует отбросить.

Первая группа

(задачи 1243—1247)

Пример 188. Составить дифференциальное уравнение малых колебаний системы, показанной на рис. 226, около ее равновесного положения и найти период этих колебаний, если известны массы m_1 и m_2 грузов A и D , жесткость c пружины BE и длины стержней $OA = l_1$, $OB = OC = CD = l_2$. Массами пружины и стержней, а также размерами груза A можно пренебречь. При горизонтальном положении стержня AB вес груза A уравновешивается силой упругости пружины. При малых отклонениях системы от равновесного положения можно считать, что пружина остается вертикальной.

Решение. За обобщенную координату данной системы с одной степенью свободы принимаем угол α отклонения стержня AB от горизонтали, отсчитываемый от оси x против часовой стрелки, тогда имеем уравнение Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \alpha} = Q.$$

Вычисляем кинетическую энергию системы:

$$T = \frac{m_1 v_A^2}{2} + \frac{m_2 v_D^2}{2},$$

где v_A и v_D — скорости грузов A и D , но

$$v_A = l_1 \dot{\alpha} \text{ и } v_D = \dot{y}_D = \frac{d}{dt} (2l_2 \cos \alpha) = -2l_2 \sin \alpha \dot{\alpha},$$

поэтому

$$T = \frac{1}{2} (m_1 l_1^2 + 4m_2 l_2^2 \sin^2 \alpha) \dot{\alpha}^2.$$

При малых колебаниях системы можно пренебречь малой величиной 4-го порядка $\sin^2 \alpha \dot{\alpha}^2$. Тогда $T = \frac{m_1}{2} l_1^2 \dot{\alpha}^2$.

Вычисляем потенциальную энергию системы:

$$\begin{aligned} H &= m_1 g (h - y_A) + m_2 g (h - y_D) + \frac{c \lambda^2}{2} = \\ &= m_1 g (h - l_1 \sin \alpha) + m_2 g (h - 2l_2 \cos \alpha) + \frac{c \lambda^2}{2}, \end{aligned}$$

где h — высота точки O над поверхностью земли, λ — удлинение пружины, причем

$$\lambda = \lambda_{cr} + l_2 \sin \alpha,$$

где λ_{cr} — статическое удлинение пружины при равновесном положении системы.

Следовательно,

$$H = (m_1 + m_2) gh - m_1 g l_1 \sin \alpha - 2m_2 g l_2 \cos \alpha + \frac{c}{2} (\lambda_{cr} + l_2 \sin \alpha)^2.$$

Теперь находим

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} = m_1 l_1^2 \dot{\alpha}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} \right) = m_1 l_1^2 \ddot{\alpha}, \quad \frac{\partial T}{\partial \alpha} = 0.$$

Вычисляем обобщенную силу как взятую с обратным знаком частную производную от потенциальной энергии по обобщенной

координате:

$$Q = -\frac{\partial \Pi}{\partial u} = m_1 g l_1 \cos \alpha - 2m_2 g l_2 \sin \alpha - c(\lambda_{c_1} + l_2 \sin \alpha) l_2 \cos \alpha.$$

Так как при равновесном положении системы сумма моментов относительно точки O сил, приложенных к рычагу AB (веса груза A и силы упругости пружины), равна нулю, то $m_1 g l_1 = c \lambda_{c_1} l_2$; поэтому

$$Q = -(2m_2 g l_2 + c l_2^2 \cos \alpha) \sin \alpha = -l_2 (2m_2 g + c l_2 \cos \alpha) \sin \alpha.$$

При малых колебаниях системы около положения равновесия ввиду незначительности угла α можно положить

$$\sin \alpha \approx \alpha \quad \text{и} \quad \cos \alpha \approx 1.$$

Тогда

$$Q = -l_2 (2m_2 g + c l_2) \alpha.$$

Подставляя найденные значения производных $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} \right) \cdot \frac{\partial T}{\partial \alpha}$ и обобщенной силы Q в уравнение Лагранжа, получим дифференциальное уравнение малых колебаний данной системы

$$m_1 l_1^2 \ddot{\alpha} + l_2 (2m_2 g + c l_2) \alpha = 0,$$

или

$$\ddot{\alpha} + k^2 \alpha = 0,$$

где

$$k^2 = \frac{l_2 (2m_2 g + c l_2)}{m_1 l_1^2}.$$

Мы получили дифференциальное уравнение гармонических колебаний с круговой частотой k . Период этих колебаний равен

$$\frac{2\pi}{k} = 2\pi l_1 \sqrt{\frac{m_1}{l_2 (2m_2 g + c l_2)}}.$$

Вторая группа

(задачи 1219, 1301, 1303, 1304)

Пример 189. Два однородных сплошных цилиндра общим весом P_1 , жестко закрепленные на оси, толщиной и массой которой можно пренебречь, образуют скат, опирающийся на горизонтальные опоры (рис. 227). На той же оси свободно насажен тонкий стержень длиной l , несущий на конце точечный груз A весом P_2 . Определить движение этой системы, пренебрегая массой стержня и предполагая, что отклонения маятника CA от вертикали весьма малы; трение в узле C отсутствует и цилиндры катятся по опорам без скольжения (рис. 227).

Решение. В данном случае рассматривается система с двумя степенями свободы. Координатные оси располагаем так, как указано на рис. 227. В качестве обобщенных координат выбираем

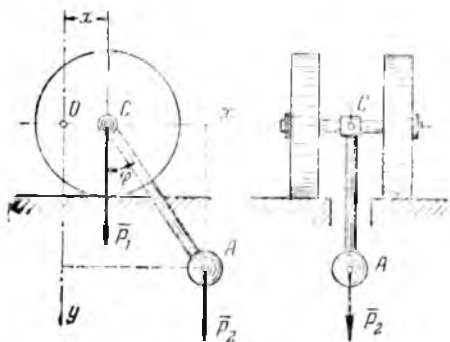


Рис. 227

абсциссу x точки C и угол φ отклонения стержня CA от вертикали. В соответствии с этим в данной задаче составляем два уравнения Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x,$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi.$$

Обозначив общую массу цилиндров через m_1 , а массу груза A через m_2 , вычисляем кинетическую энергию T системы, которая складывается из кинетической энергии T_1 цилиндров и кинетической энергии T_2 груза A , причем

$$T_1 = \frac{m_1 v_C^2}{2} + J_C \frac{\omega^2}{2} \quad \text{и} \quad T_2 = \frac{m_2 v_A^2}{2},$$

где v_C и v_A — скорости точек C и A , ω — угловая скорость цилиндров, а J_C — момент инерции цилиндров относительно оси вращения, проходящей через точку C . Следовательно,

$$T = T_1 + T_2 = \frac{m_1 v_C^2}{2} + \frac{J_C \omega^2}{2} + \frac{m_2 v_A^2}{2}.$$

При этом

$$v_C = \dot{x}, \quad J_C = \frac{m_1 R^2}{2} \quad \text{и} \quad \omega = \frac{v_C}{R} = \frac{\dot{x}}{R},$$

где R — радиус цилиндров.

Для определения скорости точки A выразим ее декартовы координаты x_A и y_A через выбранные обобщенные координаты $x_A = x + l \sin \varphi$, $y_A = l \cos \varphi$.

Отсюда

$$\dot{x}_A = \dot{x} + l \cos \varphi \dot{\varphi}, \quad \dot{y}_A = -l \sin \varphi \dot{\varphi}.$$

$$\text{Следовательно, } v_A^2 = \dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2 = (\dot{x} + l \cos \varphi \dot{\varphi})^2 + l^2 \sin^2 \varphi \dot{\varphi}^2 = \\ = \dot{x}^2 + l^2 \cos^2 \varphi \dot{\varphi}^2 + 2\dot{x}\dot{\varphi}l \cos \varphi + l^2 \sin^2 \varphi \dot{\varphi}^2 = \dot{x}^2 + l^2 \dot{\varphi}^2 + 2\dot{x}\dot{\varphi}l \cos \varphi.$$

Теперь получаем

$$T = \frac{m_1 \dot{x}^2}{2} + \frac{1}{2} m_1 R^2 \frac{\dot{x}^2}{2R^2} + \frac{m_2}{2} (\dot{x}^2 + l^2 \dot{\varphi}^2 + 2\dot{x}\dot{\varphi}l \cos \varphi) = \\ = \frac{1}{2} [(1,5m_1 + m_2) \dot{x}^2 + m_2 l (\dot{\varphi}^2 + 2\dot{x}\dot{\varphi} \cos \varphi)].$$

Отсюда

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = (1,5 m_1 + m_2) \dot{x} + m_2 l \dot{\varphi} \cos \varphi;$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = (1,5 m_1 + m_2) \ddot{x} + m_2 l (\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi);$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0;$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} &= m_2 l (\dot{l} \dot{\varphi} + \dot{x} \cos \varphi); \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = m_2 l (\ddot{l} \dot{\varphi} + \ddot{x} \cos \varphi - \\ &- \dot{x} \dot{\varphi} \sin \varphi); \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = -m_2 l \dot{x} \dot{\varphi} \sin \varphi. \end{aligned}$$

Обобщенные силы Q_x и Q_φ находим по общим формулам (247). Замечая, что $P_{1x} = P_{2x} = 0$, $P_{1\varphi} = P_1$, $P_{2\varphi} = P_2$,

$$y_C = 0 \text{ и } y_A = l \cos \varphi,$$

на основании этих формул получаем

$$Q_x = P_1 \frac{\partial y_C}{\partial x} + P_2 \frac{\partial y_A}{\partial x} = 0,$$

$$Q_\varphi = P_1 \frac{\partial y_C}{\partial \varphi} + P_2 \frac{\partial y_A}{\partial \varphi} = -P_2 l \sin \varphi = -m_2 g l \sin \varphi.$$

Так как в данной задаче система находится под действием сил гравитации, для которых существует силовая функция, то обобщенные силы можно определить и по формулам (249). Силовая функция для сил P_1 и P_2 имеет вид

$$U = P_1 y_C + P_2 y_A = P_2 l \cos \varphi.$$

Следовательно,

$$Q_x = \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad Q_\varphi = \frac{\partial U}{\partial \varphi} = -P_2 l \sin \varphi = -m_2 g l \sin \varphi.$$

Таким образом, уравнения Лагранжа принимают вид

$$\begin{aligned} (1,5 m_1 + m_2) \ddot{x} + m_2 l (\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) &= 0, \\ l \ddot{\varphi} + \ddot{x} \cos \varphi + g \sin \varphi &= 0. \end{aligned}$$

Так как по условию задачи отклонения маятника CA от вертикали весьма малы (т. е. координата φ и ее первая производная по времени являются весьма малыми величинами), то полученные точные дифференциальные уравнения движения системы можно заменить более простыми приближенными уравнениями, полагая $\sin \varphi \approx \varphi$ и $\cos \varphi \approx 1$. Кроме того, произведение $\dot{\varphi}^2 \sin \varphi$ является малой величиной более высокого порядка, чем остальные члены; поэтому можно положить $\dot{\varphi}^2 \sin \varphi \approx 0$; тогда получаем прибли-

женные уравнения Лагранжа:

$$(1,5m_1 + m_2)x + m_1 l \dot{\varphi} = 0, \quad (a)$$

$$x + l\dot{\varphi} + g\varphi = 0. \quad (б)$$

Из уравнения (a) имеем

$$x = -\frac{m_2 l}{1,5m_1 + m_2} \dot{\varphi}.$$

Первое интегрирование этого уравнения дает

$$x = -\frac{m_2 l}{1,5m_1 + m_2} \varphi + C_1.$$

После вторичного интегрирования получаем

$$x = -\frac{m_2 l}{1,5m_1 + m_2} \varphi + C_1 t + C_2.$$

Для того чтобы определить функцию φ , из уравнений (a) и (б) исключаем x :

$$-\frac{m_2 l}{1,5m_1 + m_2} \ddot{\varphi} + l\ddot{\varphi} + g\varphi = 0,$$

или

$$1,5m_1 l \ddot{\varphi} + (1,5m_1 + m_2) g \varphi = 0,$$

или

$$\ddot{\varphi} + \left(1 + \frac{2m_2}{3m_1}\right) \frac{g}{l} \varphi = 0.$$

Вводя обозначение

$$\left(1 + \frac{2m_2}{3m_1}\right) \frac{g}{l} = k^2,$$

имеем

$$\ddot{\varphi} + k^2 \varphi = 0.$$

Общее решение этого уравнения будет

$$\varphi = C_3 \cos kt + C_4 \sin kt,$$

откуда

$$\dot{\varphi} = -C_3 k \sin kt + C_4 k \cos kt.$$

Следовательно,

$$x = C_1 t + C_2 - \frac{m_2 l}{1,5m_1 + m_2} (C_3 \cos kt + C_4 \sin kt).$$

Полученные уравнения, выражающие координаты x и φ как функции времени t , и определяют движение рассматриваемой системы. Произвольные постоянные C_1 , C_2 , C_3 и C_4 определяются по начальным условиям движения системы. В начальный момент

при $t=0$ имеем

$$x_0 = -\frac{m_2 l}{1,5m_1 + m_2} \varphi_0 + C_2; \quad \dot{x}_0 = -\frac{m_2 l}{1,5m_1 + m_2} \dot{\varphi}_0 + C_1;$$

$$\varphi_0 = C_3, \quad \dot{\varphi}_0 = kC_4.$$

Пусть

$$x_0 = 0, \quad \dot{x}_0 = 0, \quad \varphi_0 \neq 0, \quad \dot{\varphi}_0 = 0.$$

Тогда

$$C_1 = 0, \quad C_2 = \frac{m_2 l}{1,5m_1 + m_2} \varphi_0, \quad C_3 = \varphi_0, \quad C_4 = 0$$

и, следовательно,

$$\varphi = \varphi_0 \cos kt, \\ x = \frac{m_2 l \varphi_0}{1,5m_1 + m_2} (1 - \cos kt),$$

где

$$k = \sqrt{\left(1 + \frac{2m_2}{3m_1}\right) \frac{g}{l}} = \sqrt{\left(1 + \frac{2P_2}{3P_1}\right) \frac{g}{l}}.$$

Пример 190. Крановая тележка (рис. 228) массой $m_1 = 22000$ кг наезжает со скоростью $v_0 = 1$ м/сек на упругий буфер, жесткость которого $c = 8700$ н/см. В центре тяжести A тележки подвешен груз B массой $m_2 = 20400$ кг на канате длиной $l = 14$ м. Определить движение тележки и груза после соприкосновения тележки с упором, пренебрегая массой каната.

Решение. В качестве обобщенных координат данной системы с двумя степенями свободы принимаем перемещение s тележки с момента соприкосновения с упором и угол φ отклонения каната от вертикали, который в начальный момент равен нулю. Если рассматривать груз как материальную точку, то кинетическая энергия системы равна

$$T = \frac{m_1 v_A^2}{2} + \frac{m_2 v_B^2}{2},$$

где скорость тележки $v_A = \dot{s}$, а скорость v_B груза — геометрическая сумма переносной скорости, равной v_A , и относительной скорости (по отношению к тележке) $v' = l\dot{\varphi}$ и направленной перпендикулярно к AB . Поэтому

$$v_B^2 = v_A^2 + v'^2 + 2v_A v' \cos \varphi = \dot{s}^2 + l^2 \dot{\varphi}^2 + 2sl\dot{\varphi} \cos \varphi$$

и, следовательно,

$$T = (m_1 + m_2) \frac{\dot{s}^2}{2} + \frac{m_2}{2} (l^2 \dot{\varphi}^2 + 2sl\dot{\varphi} \cos \varphi).$$

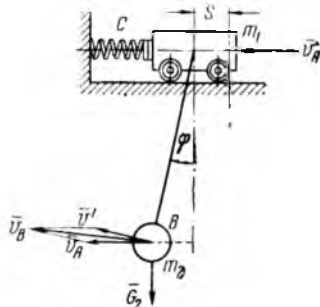


Рис. 228

Так как сжатие пружины равно, очевидно, s , то потенциальная энергия данной системы равна

$$\Pi = \frac{cs^2}{2} + m_2 gl (1 - \cos \varphi).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} &= -m_2 l \dot{\varphi} \dot{s} \sin \varphi, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m_2 (l^2 \ddot{\varphi} + l \dot{s} \cos \varphi), \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) &= m_2 l (\ddot{l} \dot{\varphi} + \ddot{s} \cos \varphi - \dot{s} \dot{\varphi} \sin \varphi), \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = m_2 gl \sin \varphi, \\ \frac{\partial T}{\partial s} &= (m_1 + m_2) \dot{s} + m_2 l \dot{\varphi} \cos \varphi, \quad \frac{\partial T}{\partial s} = 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial s} \right) &= (m_1 + m_2) \ddot{s} + m_2 l \cos \varphi \ddot{\varphi} - m_2 l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial s} &= cs. \end{aligned}$$

Составляя теперь для данной системы два уравнения Лагранжа, получаем

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2) \ddot{s} + m_2 l \ddot{\varphi} \cos \varphi + cs &= m_2 l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi; \\ \ddot{s} \cos \varphi + l \ddot{\varphi} + g \sin \varphi &= 0. \end{aligned}$$

Считая, что в данном случае угловая скорость $\dot{\varphi}$ и угол φ отклонения каната от вертикали при движении остаются небольшими, полученные уравнения можно заменить приближенными уравнениями, полагая $\sin \varphi \approx \varphi$, $\cos \varphi \approx 1$ и пренебрегая членом, содержащим $\dot{\varphi}^2$. Тогда получаем следующую систему двух линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} m\ddot{s} + m_2 l \ddot{\varphi} + cs &= 0; \\ \ddot{s} + l \ddot{\varphi} + g\varphi &= 0, \end{aligned} \quad (a)$$

где $m = m_1 + m_2$.

Частные решения уравнений (a) ищем в виде

$$s = A_1 \sin(kt + \alpha) \quad \text{и} \quad \varphi = A_2 \sin(kt + \alpha).$$

Подставляя эти выражения и их вторые производные в уравнения (a) и сокращая эти уравнения на $\sin(kt + \alpha)$, имеем

$$(c - mk^2) A_1 - m_2 l k^2 A_2 = 0, \quad -k^2 A_1 + (g - l k^2) A_2 = 0,$$

или

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{c - mk^2}{m_2 l k^2} = \frac{k^2}{g - l k^2} = \lambda.$$

Отсюда получаем следующее уравнение частот:

$$(c - mk^2)(g - l k^2) - m_2 l k^4 = 0.$$

После упрощений это уравнение принимает вид

$$k^4 - \frac{mg + cl}{m_1 l} k^2 + \frac{cg}{m_1 l} = 0,$$

или

$$k^4 - pk^2 + q = 0,$$

где

$$p = \frac{mg + cl}{m_1 l} = 40,4 \quad \text{и} \quad q = \frac{cg}{m_1 l} = 27,9.$$

Решая уравнение частот, находим

$$k_1^2 = \frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad \text{и} \quad k_2^2 = \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q},$$

откуда

$$k_1 \approx 0,8 \text{ сек}^{-1} \quad \text{и} \quad k_2 \approx 6,3 \text{ сек}^{-1}.$$

Таким образом, для отношения амплитуд получаем два значения:

$$\lambda_1 = \frac{c - mk_1^2}{m_2 l k_1^2} = \frac{k_1^2}{q - l k_1^2} = 0,76 \quad \text{и} \quad \lambda_2 = \frac{c - mk_2^2}{m_2 l k_2^2} = \frac{k_2^2}{g - l k_2^2} = -0,07.$$

Обозначая через $A_1^{(1)}$ и $A_2^{(1)}$ амплитуды, соответствующие первой частоте k_1 , а через $A_1^{(2)}$ и $A_2^{(2)}$ амплитуды, соответствующие второй частоте k_2 , имеем

$$A_2^{(1)} = \lambda_1 A_1^{(1)}, \quad A_2^{(2)} = \lambda_2 A_1^{(2)}.$$

Итак, получаем две системы частных решений уравнений (а). Первая система:

$$s^{(1)} = A_1^{(1)} \sin(k_1 t + \alpha_1) \quad \text{и}$$

$$\varphi^{(1)} = A_2^{(1)} \sin(k_1 t + \alpha_1) = \lambda_1 A_1^{(1)} \sin(k_1 t + \alpha_1).$$

Вторая система:

$$s^{(2)} = A_1^{(2)} \sin(k_2 t + \alpha_2) \quad \text{и} \quad \varphi^{(2)} = A_2^{(2)} \sin(k_2 t + \alpha_2) = \lambda_2 A_1^{(2)} \sin(k_2 t + \alpha_2),$$

где α_1 и α_2 — начальные фазы, соответствующие частотам k_1 и k_2 .

Первая система частных решений соответствует так называемому первому главному колебанию рассматриваемой механической системы, вторая система частных решений соответствует второму главному колебанию.

В силу линейности исходных дифференциальных уравнений (а) общее решение этих уравнений складывается из частных решений, т. е.

$$\begin{aligned} s &= s^{(1)} + s^{(2)} = A_1^{(1)} \sin(k_1 t + \alpha_1) + A_1^{(2)} \sin(k_2 t + \alpha_2); \\ \psi &= \psi^{(1)} + \psi^{(2)} = \lambda_1 A_1^{(1)} \sin(k_1 t + \alpha_1) + \lambda_2 A_1^{(2)} \sin(k_2 t + \alpha_2). \end{aligned} \quad (6)$$

В этих уравнениях $A_1^{(1)}$, $A_1^{(2)}$, α_1 и α_2 являются произвольными постоянными, которые определяются по начальным условиям движения системы.

Дифференцируя уравнения (б) по времени t , имеем

$$\left. \begin{aligned} \dot{s} &= A_1^{(1)} k_1 \cos(k_1 t + \alpha_1) + A_1^{(2)} k_2 \cos(k_2 t + \alpha_2); \\ \dot{\varphi} &= \lambda_1 A_1^{(1)} k_1 \cos(k_1 t + \alpha_1) + \lambda_2 A_1^{(2)} k_2 \cos(k_2 t + \alpha_2). \end{aligned} \right\} \quad (\text{в})$$

В рассматриваемом примере $s_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$, $\dot{s}_0 = v_0$, $\dot{\varphi}_0 = 0$ при $t = 0$.

Подставляя эти значения в уравнения (б) и (в), имеем

$$\begin{aligned} 0 &= A_1^{(1)} \sin \alpha_1 + A_1^{(2)} \sin \alpha_2; \quad 0 = \lambda_1 A_1^{(1)} \sin \alpha_1 + \lambda_2 A_1^{(2)} \sin \alpha_2; \\ v_0 &= A_1^{(1)} k_1 \cos \alpha_1 + A_1^{(2)} k_2 \cos \alpha_2; \quad 0 = A_1^{(1)} \lambda_1 k_1 \cos \alpha_1 + A_1^{(2)} \lambda_2 k_2 \cos \alpha_2. \end{aligned}$$

Из этих уравнений находим

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0, \quad A_1^{(1)} = \frac{v_0 \lambda_2}{k_1 (\lambda_2 - \lambda_1)} = 0,11;$$

$$A_1^{(2)} = -\frac{v_0 \lambda_1}{k_2 (\lambda_2 - \lambda_1)} = 0,14.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} s &= 0,11 \sin 0,8t + 0,14 \sin 6,3t; \\ \varphi &= 0,08 \sin 0,8t - 0,01 \sin 6,3t. \end{aligned}$$

Рассмотрим еще второй способ решения полученной системы (а) двух линейных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{s} + m_2 l \ddot{\varphi} + cs &= 0, \\ \ddot{s} + l \ddot{\varphi} + g\varphi &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Путем последовательного дифференцирования каждого из уравнений этой системы находим

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^3 s}{dt^3} + m_2 l \frac{d^3 \varphi}{dt^3} + c \frac{ds}{dt} &= 0; \\ \frac{d^3 s}{dt^3} + l \frac{d^3 \varphi}{dt^3} + g \frac{d\varphi}{dt} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{г})$$

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^4 s}{dt^4} + m_2 l \frac{d^4 \varphi}{dt^4} + c \frac{d^2 s}{dt^2} &= 0, \\ \frac{d^4 s}{dt^4} + l \frac{d^4 \varphi}{dt^4} + g \frac{d^2 \varphi}{dt^2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{д})$$

Исключая сначала из этих шести уравнений обобщенную координату φ и ее производные, а затем координату s и ее производные, получаем два независимых друг от друга линейных диф-

дифференциальных уравнения четвертого порядка:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^4 s}{dt^4} + \frac{mg + cl}{m_1 l} \frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{cg}{m_1 l} s &= 0, \\ \frac{d^4 \varphi}{dt^4} + \frac{mg + cl}{m_1 l} \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{cg}{m_1 l} \varphi &= 0, \end{aligned} \right\}$$

или, введя опять обозначения $\frac{mg + cl}{m_1 l} = p$, $\frac{cg}{m_1 l} = q$,

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^4 s}{dt^4} + p \frac{d^2 s}{dt^2} + qs &= 0, \\ \frac{d^4 \varphi}{dt^4} + p \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + q\varphi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

Составим характеристическое уравнение, соответствующее каждому из уравнений этой системы.

Корни этого уравнения равны:

$$\begin{aligned} u_{1,2} &= \pm \sqrt{-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}} = \pm ik_1; \\ u_{3,4} &= \pm \sqrt{-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}} = \pm ik_2. \end{aligned}$$

Следовательно, решение уравнений (e) имеет вид

$$\begin{aligned} s &= C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t + C_3 \cos k_2 t + C_4 \sin k_2 t; \\ \varphi &= C'_1 \cos k_1 t + C'_2 \sin k_1 t + C'_3 \cos k_2 t + C'_4 \sin k_2 t, \end{aligned} \quad (ж)$$

где $C_1, C_2, C_3, C_4, C'_1, C'_2, C'_3, C'_4$ — произвольные постоянные. Перейдем к определению этих постоянных, для чего воспользуемся начальными условиями движения. Полагая в уравнениях (a) и (г) $t=0$ и учитывая, что по условиям задачи $s_0 = \varphi_0 = 0$, $\dot{\varphi}_0 = 0$, $s_0 = v_0$, имеем

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{s}_0 + m_2 l \ddot{\varphi}_0 &= 0, \\ \ddot{s}_0 - l \ddot{\varphi}_0 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (a')$$

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{s}_0 + m_2 l \ddot{\varphi}_0 + cv_0 &= 0, \\ \ddot{s}_0 + l \ddot{\varphi}_0 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (г')$$

Решая каждую из этих систем в отдельности, получим

$$\ddot{s}_0 = \ddot{\varphi}_0 = 0, \quad \ddot{s}_0 = -\frac{cv_0}{m_1}, \quad \ddot{\varphi}_0 = \frac{cv_0}{lm_1}.$$

Теперь определяем постоянные C_1, C_2, C_3, C_4 . Для этого

вычислим из первого из уравнений (ж) производные $\dot{s}$, $\ddot{s}$, $\dddot{s}$:

$$\left. \begin{aligned} \dot{s} &= -C_1 k_1 \sin k_1 t + C_2 k_1 \cos k_1 t - C_3 k_2 \sin k_2 t + C_4 k_2 \cos k_2 t, \\ \ddot{s} &= -C_1 k_1^2 \cos k_1 t - C_2 k_1^2 \sin k_1 t - C_3 k_2^2 \cos k_2 t - C_4 k_2^2 \sin k_2 t, \\ \dddot{s} &= C_1 k_1^3 \sin k_1 t - C_2 k_1^3 \cos k_1 t + C_3 k_2^3 \sin k_2 t - C_4 k_2^3 \cos k_2 t. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Полагая в этих равенствах и в первом из уравнений (ж) $t=0$, получим следующую систему четырех уравнений относительно неизвестных $C_1, \dots, C_4$:

$$\left. \begin{aligned} s_0 &= C_1 + C_3 = 0, \\ \dot{s}_0 &= C_2 k_1 + C_4 k_2 = v_0, \\ \ddot{s}_0 &= -C_1 k_1^2 - C_3 k_2^2 = 0, \\ \ddot{s}_0 &= -C_2 k_1^3 - C_4 k_2^3 = -\frac{cv_0}{m_1}. \end{aligned} \right\}$$

Решая совместно первое и третье уравнения, находим $C_1 = C_3 = 0$. Из второго и четвертого уравнений имеем

$$C_2 = \frac{v_0 - C_4 k_2}{k_1} \text{ и } C_4 (k_2^3 - k_2 k_1^2) = v_0 \left(\frac{c}{m_1} - k_1^2 \right),$$

откуда

$$\begin{aligned} C_1 &= -\frac{v_0}{k_2 (k_2^2 - k_1^2)} \left(\frac{c}{m_1} - k_1^2 \right), \\ C_2 &= \frac{-v_0}{k_1 (k_2^2 - k_1^2)} \left(\frac{c}{m_1} - k_1^2 \right). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$s = \frac{v_0}{k_2^2 - k_1^2} \left\{ \frac{1}{k_2} \left(\frac{c}{m_1} - k_1^2 \right) \sin k_2 t - \frac{1}{k_1} \left(\frac{c}{m_1} - k_2^2 \right) \sin k_1 t \right\}.$$

Аналогично, для определения постоянных C_1, C_2, C_3, C_4 получим следующую систему четырех уравнений:

$$\left. \begin{aligned} C_1 + C_3 &= 0, \\ C_2 k_1 + C_4 k_2 &= 0, \\ -C_1 k_1^2 - C_3 k_2^2 &= 0, \\ -C_2 k_1^3 - C_4 k_2^3 &= \frac{cv_0}{lm_1}. \end{aligned} \right\}$$

$$\text{Отсюда находим } C_1 = C_3 = 0, \quad C_2 = \frac{cv_0}{lm_1 (k_2^2 - k_1^2)} \cdot \frac{1}{k_1},$$

$$C_4 = -\frac{cv_0}{lm_1 (k_2^2 - k_1^2)} \cdot \frac{1}{k_2}, \text{ и, следовательно,}$$

$$\varphi = \frac{cv_0}{lm_1 (k_2^2 - k_1^2)} \left\{ \frac{1}{k_1} \sin k_1 t - \frac{1}{k_2} \sin k_2 t \right\}.$$

Подставляя в полученные уравнения числовые данные, приходим к прежним результатам.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Н. Н. Бухгольц, И. М. Воронков, А. П. Милаков. Сборник задач по теоретической механике. М., Гостехтеоретиздат, 1949.

Н. А. Бражинченко, В. Л. Кан, Б. Л. Минцберг, В. И. Морозов Л., Сборник задач по теоретической механике. Судпромгиз, 1962.

И. М. Воронков. Курс теоретической механики. М., Гостехтеоретиздат, 1957 и последующие издания.

Л. Г. Лойцянский и И. Лурье. Курс теоретической механики, ч. I и II. М., Гостехтеоретиздат, 1954, 1957 и последующие издания.

Е. Л. Николаи. Теоретическая механика, ч. I и II. М., Гостехтеоретиздат, 1957 и последующие издания.

В. М. Осецкий. Сборник задач по теоретической механике. Динамика. Под редакцией проф. И. М. Воронкова. М., 1962.

В. М. Осецкий. Техническая механика. М., Госгортехиздат, 1962.

С. М. Тарг. Краткий курс теоретической механики. М., Физматгиз, 1958.

А. А. Яблонский, В. М. Никифорова. Курс теоретической механики, ч. I. М., Высшая школа, 1962.

А. А. Яблонский. Курс теоретической механики, ч. II. М., Высшая школа, 1962.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
-----------------------	---

Раздел I СТАТИКА

Глава I. Сходящиеся силы	5
§ 1. Сложение сил, сходящихся в одной точке	5
§ 2. Разложение силы на составляющие	14
§ 3. Связи и реакции связей	19
§ 4. Равновесие системы сходящихся сил	22
Глава II. Плоская система сил	40
§ 1. Приведение плоской системы сил к данному центру	40
§ 2. Равновесие рычага	44
§ 3. Равновесие твердого тела под действием плоской системы сил	48
§ 4. Равновесие системы, состоящей из нескольких твердых тел	58
Глава III. Равновесие при наличии трения	72
Глава IV. Система сил, расположенных как угодно в пространстве	84
§ 1. Момент силы относительно точки как вектор и момент силы относительно оси	84
§ 2. Приведение произвольной системы сил к данному центру	90
§ 3. Равновесие системы сил в пространстве	100
Глава V. Центр тяжести	125

Раздел II. КИНЕМАТИКА

Глава I. Кинематика точки	142
§ 1. Задачи типа I	144
§ 2. Задачи типа II	147
§ 3. Определение скорости и ускорения точки при естественном способе определения движения точки	155
§ 4. Комбинированные задачи	159
Глава II. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси	162
§ 1. Определение угла поворота, угловой скорости и углового ускорения твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси	163
§ 2. Определение скоростей и ускорений точек твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси	164
§ 3. Передача вращательного движения от одного тела к другому	167

Глава III. Плоскопараллельное движение твердого тела	169
§ 1. Уравнения движения плоской фигуры	169
§ 2. Определение скоростей точек плоской фигуры, движущейся в своей плоскости	172
§ 3. Центроиды	179
§ 4. Определение ускорений точек плоской фигуры	183
Глава IV. Составное движение точки	197
§ 1. Уравнения движения и траектория составного движения точки	197
§ 2. Теорема сложения скоростей	201
§ 3. Теорема сложения ускорений при переносном поступательном движении	207
§ 4. Теорема сложения ускорений при переносном вращательном движении	214
Глава V. Составное движение твердого тела	220
§ 1. Общие замечания	220
§ 2. Сложение вращений твердого тела вокруг параллельных осей	222
§ 3. Сложение вращений твердого тела вокруг пересекающихся осей	227
Раздел III. ДИНАМИКА	236
ДИНАМИКА ТОЧКИ	236
Глава I. Две основные задачи динамики точки	246
§ 1. Дифференциальные уравнения движения материальной точки	236
§ 2. Первая основная задача динамики точки	237
§ 3. Вторая основная задача динамики точки	244
Глава II. Колебательное движение материальной точки	267
§ 1. Свободные колебания	268
§ 2. Затухающие колебания	272
§ 3. Вынужденные колебания	275
Глава III. Общие теоремы динамики и принцип Даламбера для материальной точки	280
§ 1. Теорема о количестве движения	280
§ 2. Теорема о моменте количества движения	292
§ 3. Работа и мощность	295
§ 4. Теорема о кинетической энергии материальной точки	306
§ 5. Принцип Даламбера для материальной точки	318
ДИНАМИКА СИСТЕМЫ	324
Глава IV. Общие теоремы динамики системы	324
§ 1. Теоремы о количестве движения системы и о движении центра масс	324
§ 2. Теорема о кинетическом моменте системы	335
§ 3. Теорема об изменении кинетической энергии системы	355
§ 4. Комбинированные задачи	366
Глава V. Принцип Даламбера и принцип возможных перемещений	371
§ 1. Принцип Даламбера для системы материальных точек	371
§ 2. Принцип возможных (виртуальных) перемещений	384
§ 3. Общее уравнение динамики (уравнение Даламбера—Лагранжа)	391
§ 4. Уравнения Лагранжа II рода (дифференциальные уравнения движения системы в обобщенных координатах)	395
Рекомендуемая литература	417

Айзенберг Татьяна Борисовна
Воронков Иван Михайлович
Осецкий Всеволод Михайлович
**РУКОВОДСТВО К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ
ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ**

Редактор *Э. Г. Овсянников*
Технический редактор *В. А. Зорина*
Корректор *М. И. Ковалева*

Т-021-4 Сдано в набор 10/IX 64 г. Подп. к печати 9/VI-65 Формат 60×90¹/₁₆.
Объем 26,25 печ. л. Уч.-изд. л. 24,08. Изд. № ОТ-162 Тираж 50 000 экз.

Зак 2332. Цена 8⁰ коп.

Москва, К-51, Неглинная ул., д. 29/14.

Издательство «Высшая школа»

БЗ — 39/30 от 30/V-68

Отпечатано с матриц Первой Образцовой типографии имени А. А. Жданова
в Московской типографии № 4 Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР
Б. Переяславская, 46