



Е. Н. БЕРЕЗКИН

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Часть вторая

ИЗДАТЕЛЬСТВО МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

1974

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ СССР

НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КАБИНЕТ
ПО ЗАОЧНОМУ И ВЕЧЕРНЕМУ ОБУЧЕНИЮ
МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

Е. Н. БЕРЕЗКИН

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Часть вторая

АНАЛИТИЧЕСКАЯ СТАТИКА. ДИНАМИКА ТОЧКИ

Учебно-методическое пособие
для студентов-заочников
механико-математических факультетов
государственных университетов

ИЗДАТЕЛЬСТВО МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1974

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	Стр. 3
I. Аналитическая статика	4
Основные положения	4
Уравнения Лагранжа равновесия системы	21
Метод неопределенных множителей Лагранжа	30
Определение реакций связи. Применение принципа возможных перемещений к системам с неидеальными связями. Силы трения	35
II. Динамика точки	43
Прямолинейное движение материальной точки	44
Пространственное движение материальной точки	54
Движение материальной точки по кривой и по поверхности	61
Движение материальной точки относительно подвижной системы отсчета	75
Ответы и методические указания к задачам	82
Аналитическая статика	82
Динамика точки	102
Литература	136

© Издательство Московского университета, 1974 г.

ЕВГЕНИЙ НИКОЛАЕВИЧ БЕРЕЗКИН

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

(часть вторая)

Аналитическая статика. Динамика точки

Редактор *Г. Н. Фурман*

Технический редактор *Н. А. Лебедева*

Корректор *Н. А. Савенкова*

Сдано в набор 31/V 1974 г.

Подписано к печати 16/XII 1974 г.

Л1-50571

Формат 60×90¹/₁₆

Физ. печ. л. 8,5

Бумага тип. № 3

Уч.-изд. л. 7,82 Заказ 531 Тираж 3500 экз. Цена 22 коп.

*Издательство Московского университета,
Москва, К-9, ул. Герцена, 5/7.
Типография Изд-ва МГУ. Москва, Ленинские горы*

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая книга является второй частью пособия «Решение задач по теоретической механике», издаваемого Научно-методическим кабинетом по вечернему и заочному обучению МГУ им. М. В. Ломоносова. В ней даются указания к решению задач по аналитической статике и динамике точки.

Невозможно указать какие-то общие рецепты, пригодные для решения всевозможных задач. Как бы мы ни старались, всегда найдутся другие задачи, которые не могут быть решены рассмотренными способами. Лучшим помощником, по-видимому, будет сама практика решения задач, приобретение в ней навыка. Поэтому необходимо стремиться самостоятельно проанализировать определенный минимум задач по изучаемому разделу. Причем нужно очень внимательно следить за применением основных теорем и законов теоретической механики, особенно при составлении уравнений движения или равновесия.

Цель, которая поставлена при написании настоящего пособия, заключается в том, чтобы оказать помощь учащимся в понимании существа этих основных законов и теорем, научить применять их на практике. Поэтому мы старались подобрать примеры, иллюстрирующие основные положения теоретической механики, не стремясь отбирать особенно трудные задачи и широко используя известные задачки по изучаемому курсу. При этом предполагается, что, приступая к решению задач, учащийся уже изучил соответствующие главы по одному из учебников по теоретической механике.

1. АНАЛИТИЧЕСКАЯ СТАТИКА

При изучении аналитической статики прежде всего обращается внимание на общую формулировку принципа возможных перемещений (принцип Бернулли), без уяснения которой вообще невозможно решать задачи по аналитической статике. В основе ее лежит понятие работы силы на элементарном возможном перемещении. Поэтому прежде всего нужно выяснить, что называется возможным перемещением системы и как определяется работа силы на возможном перемещении. Причем, вначале должны быть рассмотрены системы с идеальными связями, для которых сумма работ всех сил реакций связей на любом возможном перемещении системы всегда равна нулю. После этого следует перейти к решению задач с неидеальными связями.

Основой всей аналитической статики является теорема Лагранжа о равновесии системы материальных точек. Формулировка этой теоремы имеет следующий вид: «Для равновесия системы материальных точек, на которую наложены идеальные связи, необходимо и достаточно, чтобы сумма работ всех активных сил, действующих на систему, была равна нулю для всех неосвобождающих возможных перемещений системы и была не больше нуля для освобождающих возможных перемещений системы».

Если связи, наложенные на систему материальных точек, являются неосвобождающими, то метод сводится к уравнениям равновесия, которые называются уравнениями Лагранжа. После того, как эти методы будут изучены, мы перейдем к рассмотрению метода неопределенных множителей Лагранжа. Следует научиться определять реакции связей при помощи метода возможных перемещений.

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Основные положения аналитической статики должны быть хорошо изучены по учебнику. Только тогда можно приступать к решению задач. Решение каждой конкретной задачи следует начинать с определения числа степеней свободы системы и выбора параметров, характеризующих положение этой системы, а также с установления зависимости произвольных параметров от независимых. Затем нужно определить все активные силы, действующие

на точки системы, и точки приложения этих сил. Сообщив системе возможные перемещения, соответствующие изменениям независимых параметров, и приравняв нулю каждое из выражений работы, получим в результате столько уравнений равновесия, сколько имеется независимых параметров, определяющих положение механической системы. Эти уравнения дают возможность определить все независимые параметры, которые соответствуют положению равновесия системы.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Полиспаст (механизм для поднятия тяжестей, состоящий из двух систем блоков, каждый из которых смонтирован

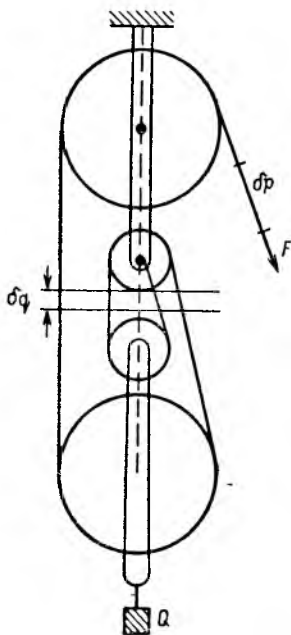


Рис. 1

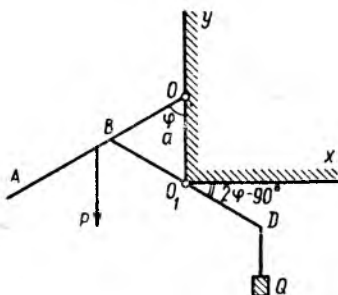


Рис. 2

в общей обойме и насажен на отдельные оси, как указано на рис. 1) оснащен нитью, один из концов которой прикреплен к неподвижной точке полиспаста, а другой свободен и находится под воздействием некоторой активной силы F . Нить последовательно обходит как подвижные, так и неподвижные блоки. К нижнему блоку подвешен груз весом Q . Определить соотношение величин силы F и веса Q при равновесии системы.

Решение. Для решения этой задачи воспользуемся принципом возможных перемещений. Пренебрегая горизонтальным возможным перемещением оси симметрии полиспаста, заметим, что си-

стема обладает всего одной степенью свободы. Система приводится в движение только тогда, когда перемещается вдоль нити ее свободный конец.

Предположим, что размеры блоков подобраны таким образом, что соответственные части нити, заключенные между обеими системами блоков, можно рассматривать как параллельные. Тогда при перемещении точки приложения силы F на расстояние δr груз поднимается на величину δq . Общая длина нити при этом остается неизменной и, как видно из чертежа,

$$4\delta q = \delta r.$$

Подсчитывая работу сил на возможном перемещении и приравнявая эту работу нулю, из принципа возможных перемещений будем иметь

$$F\delta r - Q\delta q = 0,$$

а после подстановки значения δr получим

$$(4F - Q)\delta q = 0.$$

После сокращения на δq получаем условие равновесия

$$Q = 4F.$$

Пример 2. Два однородных стержня BD и OA , имеющих соответственно длину $2a$ и $2l$ и вес P каждый, могут вращаться в одной вертикальной плоскости: первый — вокруг своей середины O_1 ; второй — вокруг шарнира O , расположенного на одной вертикали с O_1 на расстоянии a от точки O_1 (рис. 2). Определить положение равновесия системы.

Решение. Положение системы определяется всего одним параметром — углом φ . Если этот угол остается неизменным, то система не может совершать движений. Отсюда следует, что система имеет всего одну степень свободы. Активные силы P и Q имеют проекции только на вертикальную ось y , а потому и выражение элементарной работы активных сил на возможном перемещении системы получает вид

$$\delta A = -Q\delta y_1 - P\delta y_2.$$

Здесь

$$y_1 = -a \sin \left(2\varphi - \frac{\pi}{2} \right), \quad y_2 = a - l \cos \varphi,$$

откуда

$$\delta y_1 = -2a \sin 2\varphi \delta \varphi, \quad \delta y_2 = l \sin \varphi \delta \varphi.$$

Приравнявая выражение элементарной работы нулю и подставляя значения δy_1 и δy_2 , будем иметь

$$(2Qa \sin 2\varphi - Pl \sin \varphi) \delta \varphi = 0,$$

откуда получаем следующие значения для угла φ :

$$1) \sin \varphi = 0, \text{ т. е. } \varphi = 0, \pi, 2\pi, \dots,$$

и

$$2) \cos \varphi = \frac{Pl}{4Qa}.$$

Первая система значений для φ несовместима с наложенными на систему связями. Второе решение имеет смысл только тогда, когда выполняется условие

$$Pl \leq 4Qa,$$

которое и является условием равновесия системы.

Пример 3. Однородный гладкий стержень AB длины $2l$ и веса P опирается концом на гладкую вертикальную стенку и одной из своих точек лежит на краю C неподвижного стола (рис. 3). Определить угол φ , который образует стержень со столом в положении равновесия, если расстояние от стенки до стола равно a .

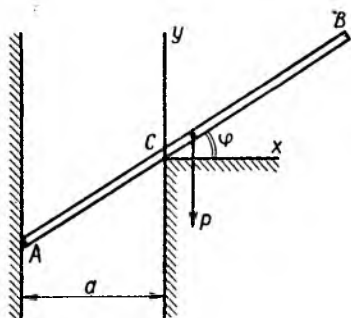


Рис. 3

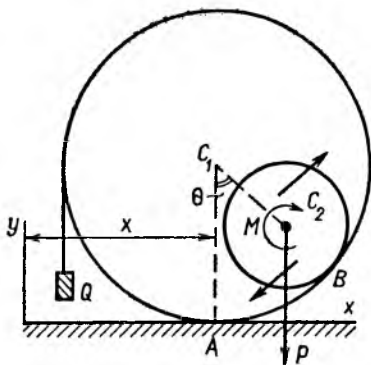


Рис. 4

Решение. Положение стержня здесь, как и в предыдущей задаче, определяется всего одним параметром — углом φ и, следовательно, система имеет одну степень свободы. На стержень действует единственная активная сила — сила тяжести, имеющая вертикальное направление. Подсчитывая работу этой силы на возможном перемещении системы и приравнявая ее нулю, будем иметь

$$-P\delta y_s = 0,$$

где

$$y_s = \left(l - \frac{a}{\cos \varphi} \right) \sin \varphi.$$

Дифференцируя выражение для y_s по φ и подставляя результат дифференцирования в уравнение работы, получим

$$-P(-a \operatorname{tg}^2 \varphi + l \cos \varphi - a) \delta \varphi = 0.$$

Так как $\delta \varphi$ отлично от нуля при произвольном возможном перемещении системы, нулю будет равно выражение, стоящее в скобках. Последнее и представляет собой условие равновесия:

$$-a \operatorname{tg}^2 \varphi + l \cos \varphi - a = 0.$$

Отсюда следует

$$\cos^3 \varphi = \frac{a}{l}.$$

Последнее равенство возможно только при выполнении условия

$$a \leq l.$$

Рассмотрим в качестве примера задачу о равновесии системы с двумя степенями свободы.

Пример 4. В полый цилиндр радиуса R , способный катиться без скольжения по горизонтальной плоскости, вложен другой цилиндр радиуса r и веса P (рис. 4). На малый цилиндр, кроме силы тяжести, действует еще пара сил, расположенная в плоскости чертежа, с моментом M . На полый цилиндр намотана нить, которая на своем свободном конце несет груз веса Q . Полагая поверхности цилиндров достаточно шероховатыми (чтобы не было скольжения), найти положение равновесия системы и определить, при какой зависимости между данными силами это равновесие возможно.

Решение. Положение рассматриваемой системы можно определить двумя независимыми параметрами, в качестве которых выберем расстояние x центра тяжести большого (полого) цилиндра от некоторой неподвижной вертикальной прямой и двугранный угол φ , образованный плоскостью, в которой расположены оси симметрии цилиндров, с вертикальной плоскостью. Нетрудно видеть, что выбранные параметры x и φ могут изменяться независимо один от другого и что при неизменных x и φ система не может совершать движений.

Сообщим системе такое возможное перемещение, при котором не изменяется угол φ (при таком перемещении малый цилиндр будет вращаться вокруг своей оси симметрии, перемещающейся в горизонтальном направлении). Сила P , действующая на малый цилиндр, при таком возможном перемещении не производит работы, и нам остается только подсчитать работу силы Q и пары M . Вертикальная сила Q будет совершать работу, отличную от нуля, только тогда, когда груз перемещается в вертикальном направлении. При изменении координаты x на величину δx большой цилиндр повернется вокруг своей оси симметрии на некоторый

угол $\delta\varphi = \frac{\delta x}{R}$ (этот угол на чертеже не указан). Спускающаяся часть нити при таком перемещении сократится на величину $\delta s = R\delta\varphi = \delta x$. Сила же Q совершит работу $-Q\delta s = -Q\delta x$. Большой цилиндр повернется вокруг своей оси на угол $\delta\varphi$ и относительное бесконечно малое перемещение точки B большого цилиндра (точки касания цилиндров) будет $\delta s_1 = R\delta\varphi = \delta x$. Так как цилиндры не проскальзывают, то таким же по величине будет и относительное перемещение точки B малого цилиндра. Поэтому малый цилиндр повернется вокруг своей оси на угол

$$\delta\psi = \frac{\delta s_1}{r} = \frac{\delta x}{r}$$

(угол на чертеже не указан). Пара сил, действующая на малый цилиндр, при таком повороте совершит работу

$$M\delta\psi = M \frac{\delta x}{r}.$$

Работа же сил пары на поступательном перемещении малого цилиндра всегда равна нулю. Подсчитывая теперь работу всех сил, действующих на систему, и приравнивая эту работу нулю, будем иметь

$$-Q\delta x + M \frac{\delta x}{r} = 0,$$

откуда получаем

$$Q = \frac{M}{r}.$$

Сообщим системе такое возможное перемещение, при котором координата x не меняется, а меняется только угол ϑ . При таком возможном перемещении сила Q работы совершать не будет (отсутствует перемещение точки приложения силы). Работа же силы P на рассматриваемом перемещении будет равна

$$P(R-r) \cos(90^\circ + \vartheta) \delta\vartheta = -P(R-r) \sin\vartheta \delta\vartheta.$$

При вычислении работы пары сил заметим, что малый цилиндр на этом перемещении катится без скольжения по внутренней поверхности неподвижного большого цилиндра, вращаясь вокруг своей оси. Мгновенное перемещение малого цилиндра можно представить как сумму мгновенного поступательного перемещения вместе с осью C_2 и мгновенного вращения вокруг этой оси. На поступательном перемещении пара сил работы не совершает. Если теперь обозначить угол поворота малого цилиндра относительно неподвижно ориентированных осей через $\delta\alpha$, то для изменения этого угла получим равенство

$$r\delta\alpha = (R-r) \delta\vartheta,$$

и работа сил пары будет равна

$$M\delta\alpha = M \frac{R-r}{r} \delta\vartheta.$$

Подсчитывая работу всех активных сил и приравнявая ее нулю, из принципа возможных перемещений получим

$$\left[-P(R-r) \sin \vartheta + M \frac{(R-r)}{r} \right] \delta\vartheta = 0,$$

откуда следует условие для определения угла ϑ :

$$\sin \vartheta = \frac{M(R-r)}{Pr(R-r)} = \frac{M}{Pr}.$$

Действительное значение этого угла определяется только при выполнении условия

$$M \leq Pr.$$

Принцип возможных перемещений позволяет дать обобщение принципа равновесия тяжелых тел, предложенного Торричелли, согласно которому центр тяжести системы тяжелых тел, находящихся в равновесии, занимает наинизшее из возможных положение. Из принципа возможных перемещений нетрудно получить, что при равновесии центр тяжести системы тел занимает стационарное положение. Этот принцип позволяет упростить исследование задачи о равновесии.

Пример 5. Палочка AB длины $2a$ и веса P опирается концом A на наклонную плоскость (π), образующую угол α с горизонталью, а в точке (C) лежит на опоре (рис. 5). Определить угол φ , который палочка образует с горизонталью при равновесии. Размеры и расположение палочки и опоры указаны на чертеже.

Решение. Возможное перемещение палочки в этой задаче сводится к повороту вокруг мгновенного центра вращения S , расположенного в точке пересечения нормалей к плоскости (π), (построенной из конца A палочки) и к палочке (в точке C). При таком возможном перемещении палочки перемещение ее точки D , находящейся в данный момент на одной вертикали с точкой S , будет горизонтальным. Поэтому, если центр тяжести находится в точке D , это положение будет положением равновесия.

Для получения аналитического решения определим координату y центра тяжести палочки. Будем иметь, считая теперь, что $AD=a$,

$$y = a \sin \varphi - AC \sin \varphi,$$

где

$$AC = CE \operatorname{tg} [90^\circ - (\alpha + \varphi)],$$

$$\frac{CE}{\sin(90^\circ + \alpha)} = \frac{b}{\sin[90^\circ - (\alpha + \varphi)]},$$

$$y = a \sin \varphi - b \frac{\sin \varphi \cos \alpha}{\sin(\alpha + \varphi)}.$$

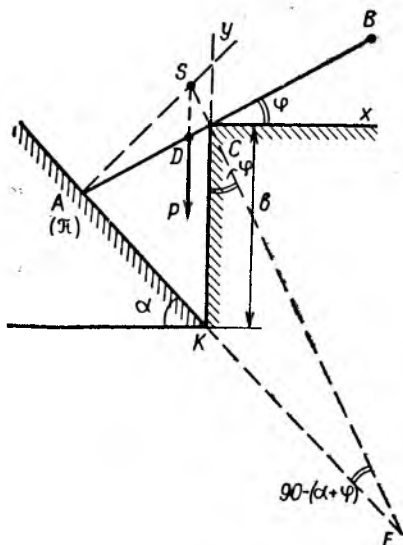


Рис. 5

При бесконечно малом перемещении палочки из этого положения координата y получает приращение

$$\delta y = \left(a \cos \varphi - b \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2(\alpha + \varphi)} \right) \delta \varphi,$$

которое равно нулю в положении равновесия палочки. Отсюда имеем

$$\left(a \cos \varphi - b \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2(\alpha + \varphi)} \right) \delta \varphi = 0.$$

Для определения угла φ из последнего уравнения получим условие

$$a \cos \varphi \sin^2(\alpha + \varphi) - b \sin \alpha \cos \alpha = 0.$$

Пример 6. Два однородных цилиндра веса p каждый положены на внутреннюю поверхность полого цилиндра, как указано на чертеже (рис. 6). Они поддерживают третий цилиндр веса q . Определить зависимость между указанными на чертеже углами α и β , если O — центр большого полого цилиндра, O_3 — центр третьего цилиндра и O_1 и O_2 — соответственно центры первого и второго цилиндров, на которых покоится третий.

Решение. Положение равновесия, симметричное относительно вертикали, которая проходит через центр полого цилиндра, определяется всего одним параметром. Заметим, что если выбрать систему осей xOy с началом в центре полого цилиндра, направив

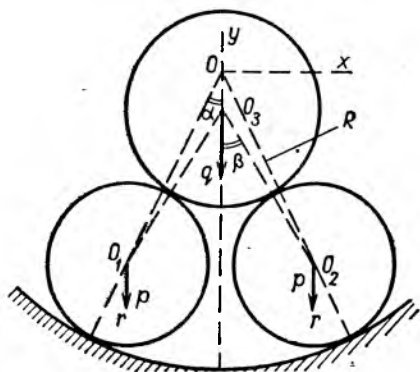


Рис. 6

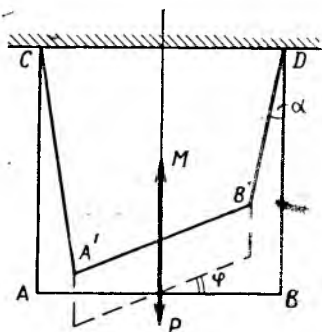


Рис. 7

ось y вертикально вверх, то координата y_c центра тяжести всей системы определяется равенством

$$y_c = \frac{2py_1 + qy_3}{2p + q},$$

где $y_1 = y_2$ — соответственно координаты центров тяжести нижних цилиндров, y_3 — координата центра тяжести верхнего цилиндра. В силу симметрии:

$$y_1 = y_2 = -(R - r) \cos \alpha,$$

$$y_3 = -(R - r) \cos \alpha + (r + \rho) \cos \beta,$$

где R — радиус полого цилиндра, r — радиус нижних цилиндров, ρ — радиус верхнего цилиндра. Тогда для y_c получим

$$y_c = \frac{1}{2p + q} [-2p(R - r) \cos \alpha - q(R - r) \cos \alpha + q(r + \rho) \cos \beta].$$

Приравнявая нулю приращение δy_c , получаем условие равновесия системы:

$$\delta y_c = (R - r) \sin \alpha \delta \alpha - \frac{q}{2p + q} (r + \rho) \sin \beta \delta \beta = 0. \quad (1)$$

Нетрудно установить постоянную зависимость между параметрами α и β системы:

$$(R - r) \sin \alpha = (r + \rho) \sin \beta.$$

Эта зависимость сохраняется при всех возможных перемещениях системы. Дифференцируя последнее равенство, будем иметь

$$(R - r) \cos \alpha \delta \alpha = (r + \rho) \cos \beta \delta \beta. \quad (2)$$

Исключая из уравнений (1) и (2) величину $\delta \beta$, получим для положения равновесия

$$\sin \alpha - \frac{q}{2\rho + q} \cdot \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos \beta} = 0,$$

откуда

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{q}{2\rho + q} \operatorname{tg} \beta.$$

Таким же образом методы аналитической статики применяются и для решения задач о равновесии пространственных систем.

Рассмотрим пример.

Пример 7. Бифилярный маятник представляет собой систему, состоящую из тяжелого однородного стержня AB веса P , подвешенного на двух параллельных нитях CA и DB . Маятник переводится в новое положение $A'B'$ и в этом положении удерживается в равновесии горизонтальной парой сил с моментом M . Найти угол поворота стержня φ в положении равновесия системы, если $CA = DB = AB = l$ (рис. 7).

Решение. Повернувшись на угол φ в горизонтальной плоскости, маятник поднимается вверх на некоторую высоту h над своим первоначальным положением. Заметим, что в силу симметрии системы и действующих сил относительно вертикали, проходящей через центр тяжести стержня, центр тяжести маятника останется на этой вертикали и после перемещения, а сам стержень будет расположен в горизонтальной плоскости. Поэтому систему можно рассматривать как систему с одной степенью свободы. Возможное перемещение системы определяется изменением расстояния центра тяжести стержня z от линии CD или изменением угла φ . Подсчитывая работу сил, действующих на систему, на этом возможном перемещении и приравнявая ее нулю, получим

$$M \delta \varphi + P \delta z = 0.$$

Обозначая через α угол, который нить образует с вертикалью, будем иметь

$$z = l \cos \alpha. \quad \sin \alpha = \frac{2 \frac{l}{2} \sin \frac{\varphi}{2}}{l} = \sin \frac{\varphi}{2},$$

откуда

$$z = l \cos \frac{\varphi}{2}, \quad \alpha = \frac{\varphi}{2}, \quad \delta z = -\frac{l}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \delta \varphi.$$

Подставляя значение δz в уравнение равновесия, получим

$$M\delta\varphi - P \frac{l}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \delta\varphi = 0,$$

и тогда угол φ определится равенством

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{2M}{Pl}.$$

Задачи для самостоятельных упражнений

1. Изображенная на чертеже схема блока состоит из двух самостоятельных блоков OAF и OBC , насаженных на одну неподвижную ось и из подвижного блока O_1ED (рис. 8). Блоки снаб-

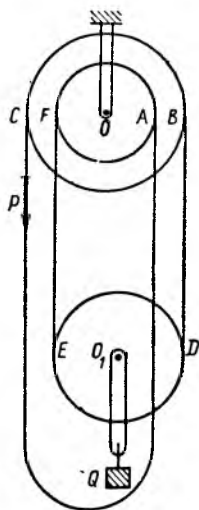


Рис. 8

жены зубцами, на которые насажены звенья замкнутой цепи $CBDEFA$. Некоторая часть этой цепи свешивается свободно, и к ней приложена сила P , как указано на чертеже. К блоку O_1ED подвешен груз весом Q . Найти зависимость между P и Q при равновесии системы, если $OB=R$, $OA=r$, а трением и весом блока O_1ED можно пренебречь.

2. К шарнирам A_1 и A_2 шарнирного четырехзвенника $O_1A_1A_2O_2$ приложены силы F_1 и F_2 , соответственно перпендикулярные к стержням O_1A_1 и O_2A_2 (рис. 9). Четырехзвенник находится в равновесии. Найти зависимость между моментами сил F_1 и F_2 относительно точек O_1 и O_2 и кратчайшими расстояниями от осей вращения O_1 и O_2 до стержня A_1A_2 .

3. Найти соотношение между силами P и Q шарнирного пресса, изображенного на рис. 10, в положении равновесия системы.

Пресс состоит из соединенных шарнирно стержней OF , O_1E , FM , EN , AB , BC , CD , DA , AF и EC , у которых точки O и O_1 закреплены неподвижно, а точки M и N могут скользить по вертикальным прямым.

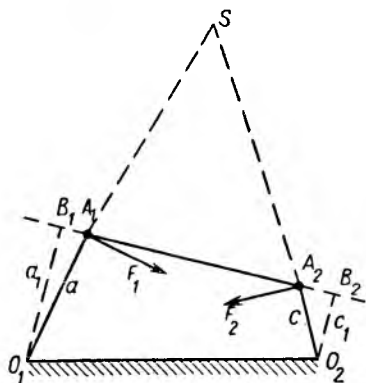


Рис. 9

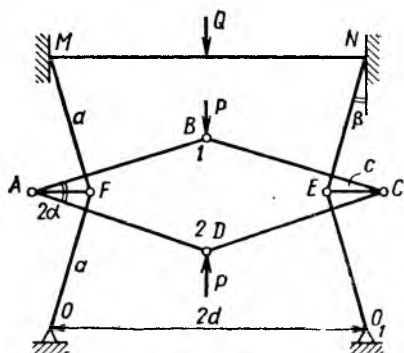


Рис. 10

4. Найти веса P_1 и P_2 двух грузов, удерживаемых в равновесии грузом веса Q на плоскостях, наклоненных к горизонту под

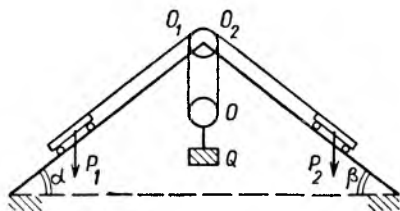


Рис. 11

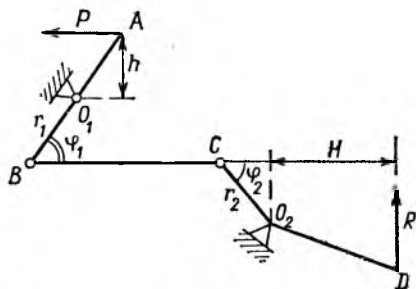


Рис. 12

углами α и β . При этом P_1 и P_2 прикреплены к концам троса, идущего от груза P_1 через блок O_1 , насаженный на горизонтальную ось, к подвижному блоку O , несущему груз Q , а затем через блок O_2 , насаженный на ось блока O_1 , к грузу P_2 (рис. 11). Трением, а также массами блоков и троса следует пренебречь.

5. Механизм (рис. 12) состоит из двух рычагов: прямого AB и ломаного CD , вращающихся вокруг неподвижных шарниров O_1 и O_2 . Концы этих рычагов B и C соединены шарнирно шатуном BC , который составляет с ними в положении равновесия углы φ_1 и φ_2 . В этом положении равновесия превышение точки A над осью

O_1 равно h , а горизонтальное расстояние точки D от оси O_2 равно H . В точке A приложена горизонтальная сила P , а в точке D — вертикальная сила R . $O_1B=r_1$, $O_2C=r_2$. Найти соотношение между силами P и R , при котором механизм будет оставаться в равновесии.

6. Однородный стержень OA весом P_1 может свободно вращаться на неподвижном шарнире O в вертикальной плоскости.

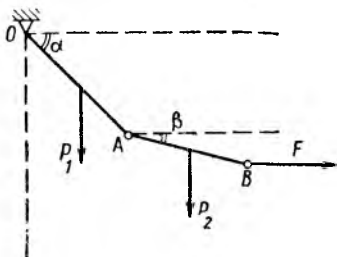


Рис. 13

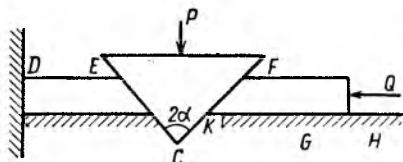


Рис. 14

Конец A этого стержня соединен шарнирно с другим однородным стержнем AB весом P_2 (рис. 13). К концу B второго стержня приложена горизонтальная сила F . Найти углы α и β стержней с горизонтом при равновесии.

7. Противоположные вершины шарнирного параллелограмма $ABCD$ связаны нитями AC и BD , натяжения которых равны соответственно T_1 и T_2 . Доказать, что при равновесии между силами T_1 и T_2 и диагоналями параллелограмма существует зависимость $T_1 : T_2 = AC : BD$.

8. Однородный стержень весом P и длиной $2a$ опирается верхним своим концом A на абсолютно гладкую вертикальную стенку. К нижнему концу B этого стержня привязана нерастяжимая нить BC длины l , прикрепленная к стенке в точке C , расположенной над точкой A на одной с ней вертикали. Обозначим угол стержня со стенкой через α , а угол нити со стенкой через β . Найти соотношение углов α и β при равновесии системы, если плоскость ABC вертикальна и перпендикулярна к стенке.

9. Клин представляет собой призму, перпендикулярное сечение которой имеет вид равнобедренного треугольника EFC с углом 2α . Одной своей гранью EC он опирается на неподвижную призму DE , а другой гранью FC — на призму FG , которая может скользить по гладкой горизонтальной плоскости KH . На клин действует вертикальная сила P , на призму FG — горизонтальная сила Q . Найти зависимость между этими силами при равновесии, пренебрегая трением и собственным весом клина (рис. 14).

10. Две точки A и B , связанные нерастяжимой нитью длины l , могут скользить по двум гладким неподвижным прямым Ox и Oy , образующим между собой угол α . Эти точки отталкиваются от точ-

ки O силами, пропорциональными расстояниям, причем коэффициент пропорциональности для точки A равен k_1 , а для точки B — k_2 . Найти углы β и γ , которые нить образует с прямыми OA и OB в положении равновесия (рис. 15).

11. Подъемный мост OA схематически изображен на рисунке 16 в виде однородной пластинки весом P и длиной $2a$, к краю

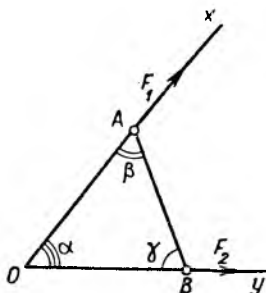


Рис. 15

которой прикреплен канат длины l , перекинутый через малый блок, расположенный на вертикали над точкой O на расстоянии $2a$ от

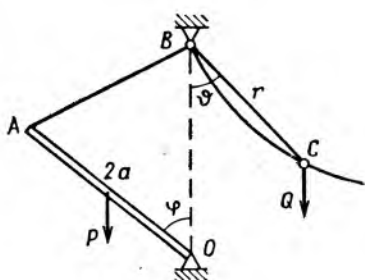


Рис. 16

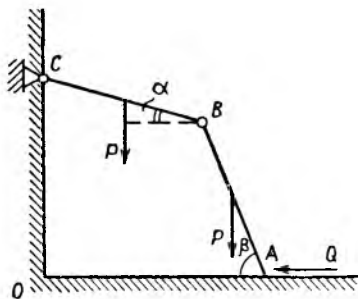


Рис. 17

нее. Другой конец C каната соединен с противовесом, скользящим без трения по криволинейной направляющей. Определить форму этой направляющей и вес противовеса Q , чтобы система всюду находилась в равновесии (безразличное равновесие системы).

12. Два груза, веса которых P и Q , скользят по эллипсу, будучи привязаны к нерастяжимой нити PF_1F_2Q , перекинутой через блоки F_1 и F_2 , помещенные в фокусы эллипса. Большая ось эллипса горизонтальна, а малая вертикальна. Найти зависимость между углами φ_1 и φ_2 , которые образуют отрезки нити PF_1 и QF_2 с горизонтом при равновесии.

13. Два равных однородных бруса AB и BC одинакового веса P соединены шарниром B . Конец C прикреплен к стенке шарниром, а конец A опирается на гладкий горизонтальный пол. Найти

горизонтальную силу Q , которая, будучи приложена к концу A стержня AB , удерживала бы всю систему в положении равновесия при заданных углах α и β (рис. 17).

14. Равносторонний шарнирный шестиугольник, основание которого закреплено неподвижно, находится в равновесии под действием сил P , $-P$, Q , как показано на рисунке 18. Найти зависи-

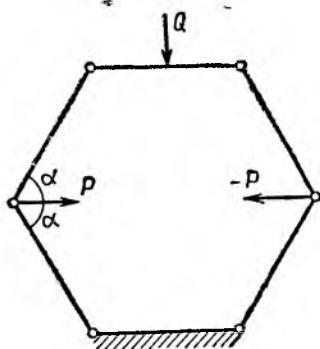


Рис. 18

мость между этими силами при равновесии. Угол α считать известным в положении равновесия.

15. В шарнирном параллелограмме $ABCD$ звено AD неподвижно. Вдоль этого звена может скользить без трения ползун L , соединенный шарнирно со стержнем LK , который в свою очередь

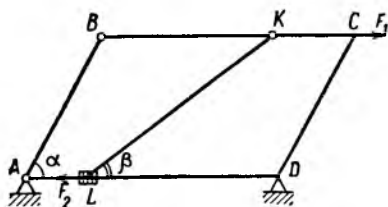


Рис. 19

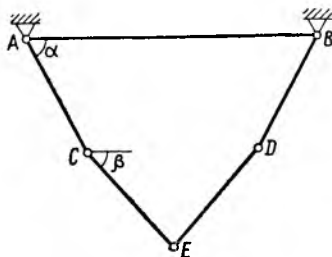


Рис. 20

соединен шарниром K со звеном BC . К точке C приложена сила F_1 , направленная вдоль BC , а к ползуну приложена сила F_2 , направленная по AD . Показать, что при равновесии системы величины силы F_1 и величины силы F_2 находятся в зависимости $\frac{F_1}{F_2} = 1 - \frac{\tan \beta}{\tan \alpha}$ (рис. 19).

16. Четыре стержня равной длины и равного веса соединены друг с другом шарнирами C , D и E . Два крайних стержня могут вращаться на шарнирах около лежащих на одной горизонтали неподвижных точек A и B . Вся система находится в равновесии в

вертикальной плоскости. Показать, что в положении равновесия углы α и β связаны соотношением $\operatorname{tg} \alpha = 3 \operatorname{tg} \beta$ (рис. 20).

17. Пять однородных брусьев одинаковой длины и одинакового веса соединены между собой шарнирами, два из которых могут скользить вдоль горизонтальной прямой. Определить зависимость между углами α и β в положении равновесия системы (рис. 21).

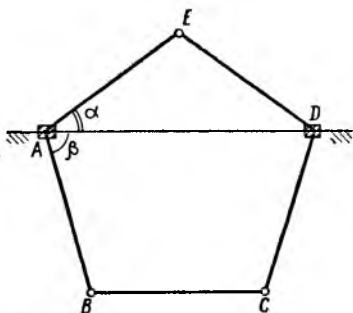


Рис. 21

18. n одинаковых стержней длины l и веса p соединены вместе в точке A и находятся в равновесии, будучи расположены симметрично относительно вертикали, проходящей через точку A (рис. 22). Своими нижними концами стержни опираются на сферическую

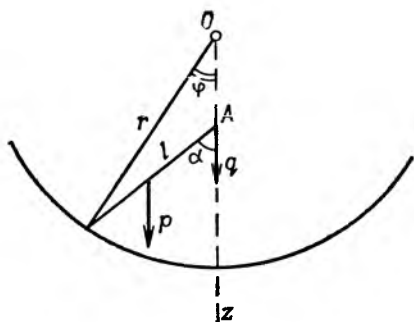


Рис. 22

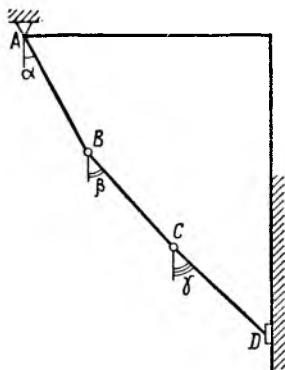


Рис. 23

поверхность радиуса $r > l$, имеющую центр в точке O , расположенной вертикально над точкой A . К узлу, образованному стержнями, подвешен груз весом q . Показать, что если через α обозначить угол, образуемый каждым из стержней с вертикалью, то будет иметь место соотношение

$$l^2 (3n^2 p^2 + 4npq) \cos^2 \alpha = (r^2 - l^2) (np + 2q)^2.$$

19. Три одинаковых стержня AB , BC и CD весом P и длины l каждый соединены шарнирами B и C . Конец A стержня AB шарнирно закреплен в неподвижной точке, а конец D стержня CD

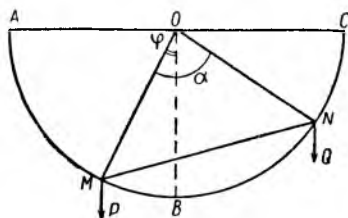


Рис. 24

может свободно скользить по вертикальной прямой, отстоящей от точки A на расстоянии $a < 3l$. Определить углы α , β и γ , которые образуют стержни с вертикалью при равновесии (рис. 23).

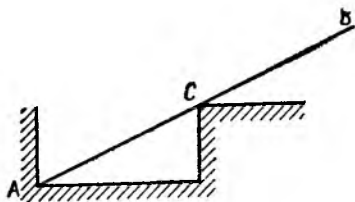


Рис. 25

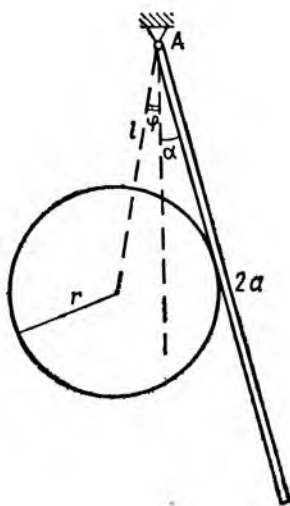


Рис. 26

20. Тяжелая материальная точка веса mg отталкивается от вертикальной оси силой mk^2r , пропорциональной расстоянию точки от этой оси (здесь k — коэффициент пропорциональности, а m — масса точки). На какой поверхности, предполагая, что она является абсолютно гладкой, точка всюду будет находиться в равновесии?

21. В полусферической чаше ABC помещена невесомая палочка MN , на концах которой прикреплены два очень маленьких шарика M и N , имеющих веса соответственно P и Q . Определить

угол $\varphi = \angle MOB$ при равновесии палочки, если известно, что хорда MN стягивает дугу α (рис. 24).

22. Тяжелая палочка AB опирается на острие C , а точка A упирается в угол между гладкой вертикальной стенкой и гладким горизонтальным полом (рис. 25). Где должен находиться центр тяжести палочки, чтобы последняя находилась в равновесии (палочка считается гладкой)?

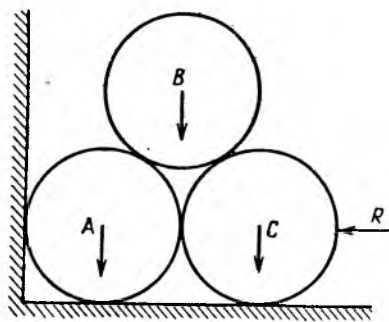


Рис. 27

23. В неподвижной точке A подвешен на веревке длиной l однородный шар радиуса r и весом P . В той же точке A прикреплен при помощи шарнира однородный стержень длины $2a$ и весом Q . В положении равновесия, изображенном на чертеже, веревка и стержень образуют с вертикалью соответственно углы φ и α (рис. 26). Определить эти углы.

24. У стены здания положены три одинаковых трубы, как показано на чертеже (рис. 27). Какую минимальную горизонтальную силу R нужно приложить к оси правой трубы, чтобы удержать все трубы в положении равновесия, если вес каждой из труб равен P ?

УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА РАВНОВЕСИЯ СИСТЕМЫ

Уравнения Лагранжа являются уравнениями равновесия системы материальных точек, записанными в независимых координатах. Очень важно выяснить, когда и при каких условиях можно применять эти уравнения, какие преимущества дают эти уравнения при решении задач на равновесие системы. Особенно большое значение здесь имеет определение обобщенных сил.

Для определения положения системы материальных точек, на которую наложены связи, достаточно знать $k=3n-m$ независимых параметров (здесь n — число точек системы, а m — число независимых уравнений связи), полностью определяющих положение системы материальных точек. Эти независимые параметры q носят название лагранжевых или обобщенных координат системы.

При этом декартовы координаты системы должны быть явно представимы через независимые координаты q так, что

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_k), \quad y_i = y_i(q_1, q_2, \dots, q_k), \\ z_i = z_i(q_1, q_2, \dots, q_k), \quad \text{где } i = 1, 2, \dots, n.$$

Всякое изменение декартовых координат должно полностью определяться изменением координат Лагранжа

$$\delta x_i = \sum_{s=1}^k \frac{\partial x_i}{\partial q_s} \delta q_s, \quad \delta y_i = \sum_{s=1}^k \frac{\partial y_i}{\partial q_s} \delta q_s, \\ \delta z_i = \sum_{s=1}^k \frac{\partial z_i}{\partial q_s} \delta q_s.$$

Тогда условия равновесия системы сведутся к равенствам

$$Q_i = 0,$$

которых будет столько, сколько имеется независимых координат, определяющих положение системы.

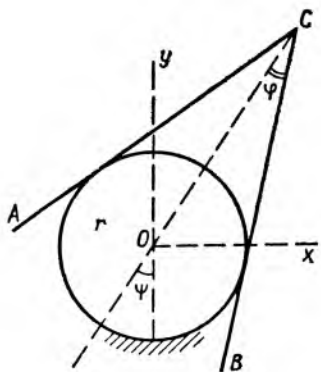


Рис. 28

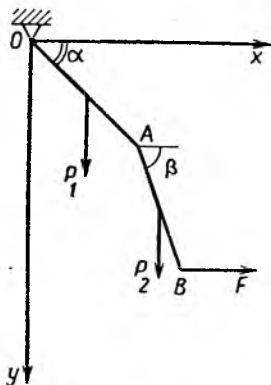


Рис. 29

Пример 1. Два одинаковых стержня AC и CB , имеющие каждый длину $2l$ и вес P , связаны между собой шарниром C и опираются на неподвижный цилиндр радиуса r с горизонтальной осью O (рис. 28). Найти угол $ACB = 2\varphi$ при равновесии системы и угол ψ , который биссектриса этого угла составляет с вертикалью.

Решение. Два параметра φ и ψ полностью определяют положение системы и могут рассматриваться как лагранжевы координаты. Тогда уравнения равновесия получают вид

$$Q_\varphi = 0, \quad Q_\psi = 0. \quad (1)$$

Первое из этих уравнений получим, полагая, что ψ остается неизменным при возможных перемещениях системы. Координата y центра тяжести системы определяется равенством

$$y = - \left(l \cos \varphi - \frac{r}{\sin \varphi} \right) \cos \psi.$$

Поэтому будем иметь

$$Q_{\varphi} = - 2P \frac{\delta y}{\delta \varphi} = 2P \left(- l \sin \varphi + \frac{r \cos \varphi}{\sin^2 \varphi} \right) \cos \psi.$$

Аналогично, полагая неизменным угол φ , будем иметь

$$Q_{\psi} = - 2P \frac{\delta y}{\delta \psi} = - 2P \left(l \cos \varphi - \frac{r}{\sin \varphi} \right) \sin \psi.$$

Из выражений для Q_{φ} и Q_{ψ} видно, что равенства (1) удовлетворяются при одном из двух предположений

$$\begin{aligned} \text{а) } \cos \psi &= 0, \quad l \cos \varphi - \frac{r}{\sin \varphi} = 0; \\ \text{б) } \sin \psi &= 0, \quad l \sin \varphi - \frac{r \cos \varphi}{\sin^2 \varphi} = 0. \end{aligned}$$

Но условия а) не могут быть выполнены при освобождающих связях, так как для их выполнения необходимо, чтобы имело место неравенство $\varphi \geq \frac{\pi}{2}$.

Условия б) при освобождающих связях возможны, лишь когда $\psi = 0$. Но тогда угол φ определяется из равенства

$$l \sin^3 \varphi - r \cos \varphi = 0.$$

Пример 2. Однородный стержень OA весом P_1 может вращаться на неподвижном шарнире O в вертикальной плоскости. Конец A этого стержня соединен шарнирно с другим однородным стержнем AB весом P_2 . К концу B второго стержня приложена горизонтальная сила F . Найти углы α и β стержней с горизонтальным направлением при равновесии системы (рис. 29).

Решение. Система обладает двумя степенями свободы и углы α и β могут быть выбраны в качестве обобщенных координат. Условия равновесия выразятся в виде уравнений

$$Q_{\alpha} = 0 \text{ и } Q_{\beta} = 0,$$

где Q_{α} и Q_{β} — соответствующие обобщенные силы. Для определения этих обобщенных сил рассмотрим сначала перемещение, при котором изменяется только параметр α , а угол β остается неизменным. Работа, подсчитанная на этом перемещении, $\delta A_1 = Q_{\alpha} \delta \alpha$ откуда обобщенная сила

$$Q_{\alpha} = \frac{\delta A_1}{\delta \alpha}.$$

Но выражение элементарной работы имеет вид:

$$\delta A_1 = P_1 \frac{OA}{2} \cos \alpha \delta \alpha + P_2 OA \cos \alpha \delta \alpha + F \cdot OA \cos (90^\circ + \alpha) \delta \alpha.$$

Отсюда, приравнявая Q_α нулю, получаем условие равновесия в виде уравнения

$$\frac{1}{2} (P_1 \cos \alpha + 2P_2 \cos \alpha - 2F \sin \alpha) = 0.$$

Угол α определится теперь равенством

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{P_1 + 2P_2}{2F}.$$

Полагая далее $\delta \alpha = 0$ и $\delta \beta \neq 0$, будем иметь

$$\delta A_2 = Q_\beta \delta \beta,$$

или

$$Q_\beta = \frac{\delta A_2}{\delta \beta}.$$

Подсчитывая работу сил на этом возможном перемещении

$$\delta A_2 = P_2 \frac{AB}{2} \cos \beta \delta \beta + F \cdot AB \cos (90^\circ + \beta) \delta \beta,$$

получим выражение для обобщенной силы

$$Q_\beta = \frac{1}{2} (P_2 \cos \beta - 2F \sin \beta) AB.$$

Приравнявая это выражение нулю, получим условие для определения угла β , откуда

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{P_2}{2F}.$$

З а м е ч а н и е. В тех случаях, когда возможным перемещением оказывается поступательное перемещение всей системы, обобщенная сила, соответствующая этому возможному перемещению, представляет собой сумму проекций всех активных сил, действующих в направлении возможного поступательного перемещения системы.

Если же возможное перемещение сводится к повороту всей системы (как одного твердого тела) вокруг некоторой неподвижной в пространстве оси, то обобщенная сила, соответствующая этому возможному перемещению, будет представлять собой сумму моментов всех активных сил относительно данной неподвижной в пространстве оси.

П р и м е р 3. Рассмотрим задачу о равновесии системы, состоящей из шарнирного четырехзвенника $OCBO_1$, к шарниру B которого приложена вертикальная сила R , а звено BC жестко связано

с диском, центр которого находится в точке B . К диску в точке A по касательной приложена горизонтальная сила S . Размеры в положении равновесия системы указаны на чертеже. Пренебрегая весом стержней и диска, а также трением в шарнирах, определить соотношение между величинами R и S в положении равновесия, указанном на чертеже (рис. 30).

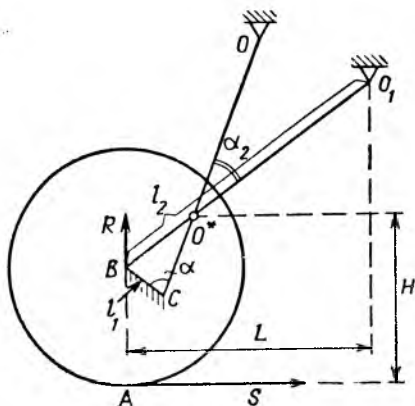


Рис. 30

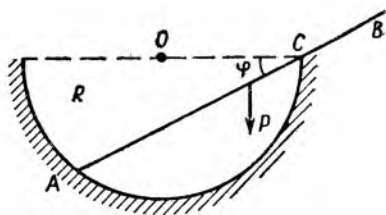


Рис. 31

Решение. Обе действующие на систему силы приложены к одному и тому же твердому телу, каким является диск. Мгновенное же движение диска сводится к одному повороту вокруг мгновенного центра вращения, который находится в точке O^* пересечения стержней BO_1 и CO . Поэтому соответствующая этому возможному перемещению обобщенная сила Q будет представлять собой сумму моментов действующих на систему активных сил относительно мгновенного центра вращения диска O^* . Приравнявая нулю эту обобщенную силу, будем иметь

$$Rh_1 - SH = 0,$$

где

$$h_1 = \frac{l_1 L \sin \alpha_1}{l_2 \sin \alpha_2}.$$

Отсюда сразу получаем условие равновесия в виде

$$R \frac{l_1 L \sin \alpha_1}{l_2 \sin \alpha_2} = SH.$$

С задачей о равновесии системы материальных точек непосредственно связана и задача об устойчивости равновесия системы, когда на эту систему действуют только консервативные силы. Для тяжелых тел эта задача решается на основе принципа Торричелли, который устанавливает, что при устойчивом равновесии центр

тяжести системы занимает наинизшее положение. Если ввести в рассмотрение силовую функцию

$$U = -mgz_c,$$

где m — масса всей системы, а z_c — вертикальная координата z центра тяжести системы (ось z направлена вверх), то условие Торричелли сводится к нахождению максимума силовой функции.

Пример 4. Пусть имеется однородный стержень AB длины $2a$, опирающийся одним из своих концов на криволинейную направляющую, имеющую форму окружности радиуса R (см. рис. 31). Пусть этот стержень касается некоторой точки окружности, находящейся в конце горизонтального диаметра. Определить, пренебрегая трением, положение равновесия стержня и исследовать его на устойчивость.

Решение. Приняв за независимую координату угол φ , который палочка (стержень) образует с горизонтальным диаметром окружности, будем иметь

$$U = mg(2R \cos \varphi - a) \sin \varphi.$$

Здесь по условиям задачи

$$2a > 2R \cos \varphi, \quad \cos \varphi > 0.$$

Условия равновесия определяются из равенства

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0,$$

или

$$mg(-2R + 4a \cos^2 \varphi - a \cos \varphi) = 0,$$

откуда получаем

$$\cos \varphi = \frac{a + \sqrt{a^2 + 32R^2}}{8R}.$$

Это решение задачи о равновесии существует, если имеет место неравенство

$$\frac{a + \sqrt{a^2 + 32R^2}}{8R} \leq 1,$$

откуда получаем

$$a \leq 2R.$$

Неравенство же

$$a > R \cos \varphi,$$

если подставить вместо $\cos \varphi$ его значение из условия равновесия, приводит к неравенству

$$a > \sqrt{\frac{2}{3}} R.$$

Для определения устойчивости положения равновесия исследуем силовую функцию на максимум. Дифференцируя вторично по φ , получим

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = mg(-8R \cos \varphi - a) \sin \varphi.$$

Подставляя сюда значение $\cos \varphi$ из условия равновесия, найдем

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} < 0,$$

откуда следует, что найденное положение равновесия устойчиво.

Задачи для самостоятельных упражнений

25. Найти угол φ , определяющий положение равновесия системы, состоящей из двух однородных стержней OA и AC , изобра-

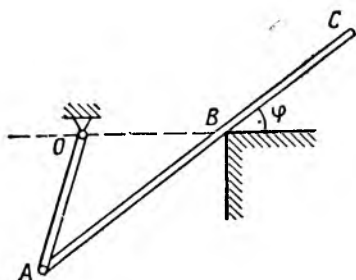


Рис. 32

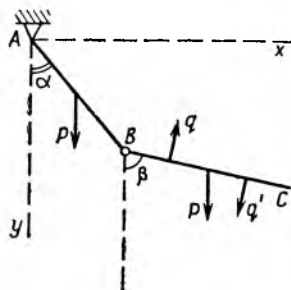


Рис. 33

женной на рис. 32. Дано: $AC=2a$, $AO=OB=a$. Вес стержня AO равен P , вес стержня AC равен $2P$.

26. К стержню BC системы, состоящей из стержней AB и BC , приложена пара сил (qq') , момент которой равен M . Найти значения углов α и β , которые стержни составляют с вертикалью в положении равновесия системы, если вес стержней AB и BC равен P , а их длины $AB=BC=2a$ (рис. 33).

27. Близ концов A и B однородного горизонтального стержня весом P проделаны два небольших отверстия на расстоянии $2a$ одно от другого. В эти отверстия пропущена нить длиной $2l$, к середине которой привязан груз Q , а концы M и N закреплены на одном уровне на расстоянии $2a$ друг от друга (рис. 34). Найти угол α при равновесии системы.

28. Два одинаковых гладких шара весом P каждый подвешены в неподвижной точке O на двух одинаковых нитях и поддерживают третий шар весом Q (рис. 35). Найти зависимость между углами α и β в положении равновесия системы.

29. В неподвижную гладкую полусферическую чашу радиуса R с центром в точке O положено два шара O_1 и O_2 одного радиуса r , но разного веса: P_1 с центром в точке O_1 и P_2 с центром в точке

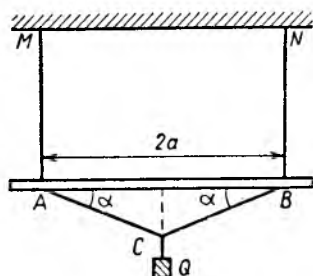


Рис. 34

O_2 . Определить угол φ , образуемый прямой OO_2 с горизонтальным диаметром, если $R=3r$, $P_1=2P_2$ (рис. 36).

30. Прямолинейный однородный стержень AB длиной $2l$ упирается нижним концом A в вертикальную стенку, составляя с ней

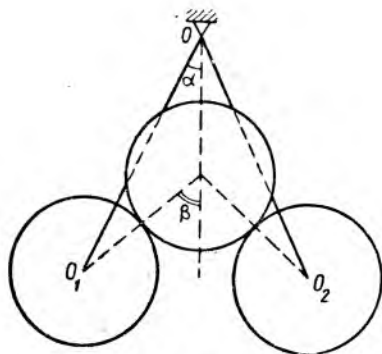


Рис. 35

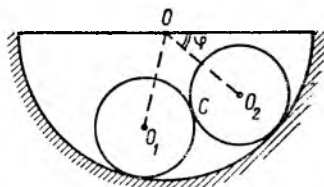


Рис. 36

угол φ . Стержень опирается также и на гвоздь, направленный параллельно стенке. Гвоздь находится от нее на расстоянии a . Определить угол φ в положении равновесия стержня (рис. 37).

31. Найти положение равновесия бруска длиной $2l$ и весом P , опирающегося одним своим концом на вертикальную плоскость, а другим — на внутреннюю поверхность полусферы радиуса r , центр которой отстоит на расстоянии $OC=a$ от вертикальной плоскости (рис. 38).

32. Однородная палочка $AB=a$ весом P положена в неподвижный сосуд, имеющий форму параболоида вращения. Определить положение равновесия палочки, если уравнение параболы, образующей параболоид, имеет вид

$$x^2 = 2py.$$

33. Однородный стержень $AB=a$ весом P опирается одним своим концом на гладкую вертикальную стенку, а другим концом на гладкий неподвижный профиль. Каким должен быть этот профиль, чтобы стержень в любом положении оставался бы в равновесии?

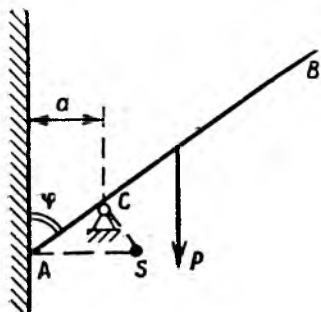


Рис. 37

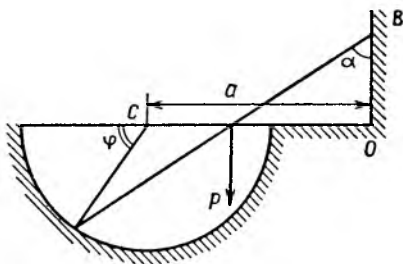


Рис. 38

34. На неподвижный круглый цилиндр радиуса r , ось которого горизонтальна, положен однородный круглый цилиндр радиуса R ,

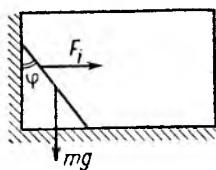


Рис. 39

ось которого также горизонтальна и перпендикулярна к оси первого цилиндра. Определить, в каком положении равновесия будет находиться эта система: безразличном, устойчивом или неустойчивом?

35. На полушар, опирающийся выпуклой поверхностью на горизонтальную плоскость, ставится сделанный из того же материала круглый конус, радиус основания r которого равен радиусу полушара. При каких значениях высоты h этого конуса равновесие будет устойчивым?

36. Найти предельную высоту h цилиндра, при которой тело, состоящее из цилиндра и полушара одинаковой плотности и одинакового радиуса r , теряет устойчивость в положении равновесия, если оно опирается поверхностью полушара на гладкую горизонтальную плоскость.

37. Концы однородного тяжелого стержня длиной $2l$ и массы m скользят без трения по горизонтальному и вертикальному стержням рамки, как показано на рисунке 39. На точки стержня действуют горизонтальные силы, пропорциональные расстояниям

точек от вертикального стержня рамки. Определить положение равновесия стержня и исследовать его на устойчивость.

38. Концы однородного тяжелого стержня AB длиной $2l$ и массы m вынуждены скользить без трения по горизонтальному и вертикальному стержням рамки, как показано на рисунке 40. На

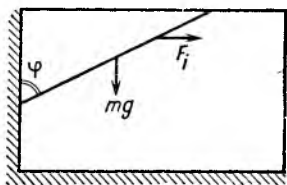


Рис. 40

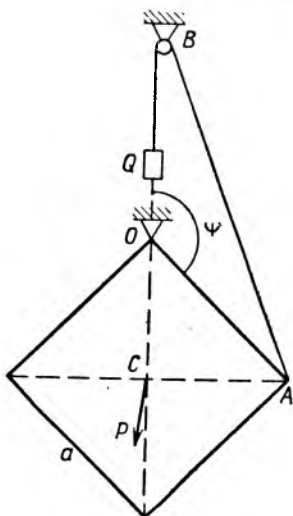


Рис. 41

частицы этого стержня действуют горизонтальные силы, пропорциональные расстояниям частиц от вертикального стержня. Определить положения равновесия стержня и исследовать их на устойчивость.

39. Однородная квадратная пластинка может вращаться в вертикальной плоскости около оси, проходящей через точку O . Вес пластинки равен P , а длина ее стороны равна a . К углу A привязана нить длины l , перекинутая через малый блок B , отстоящий от точки O по вертикали на расстоянии a . На нити висит груз веса $Q = \frac{\sqrt{2}}{2} P$. Определить положения равновесия системы и исследовать их на устойчивость (рис. 41).

МЕТОД НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА

Метод неопределенных множителей Лагранжа занимает особенное положение в аналитической статике. Кроме того, что он имеет большое теоретическое значение при обосновании ряда основных положений теоретической механики, метод дает возможность решать сложные задачи механики, которые иным способом

решаются с большим трудом. Приведенные здесь примеры на применение метода неопределенных множителей призваны подчеркнуть особенности этого метода, хотя иногда они и не представляют самостоятельного интереса.

Метод применяется чаще всего тогда, когда связи, наложенные на систему материальных точек, могут быть заданы аналитическими уравнениями. Тогда основное уравнение равновесия системы материальных точек приводится к виду

$$\delta A + \sum \lambda_i \delta f_i = 0,$$

причем уравнения связи предполагаются заданными в виде

$$f_i = 0.$$

Приравнивая теперь нулю коэффициенты при δx_i , δy_i , δz_i , получим $3k$ уравнений, которые вместе с уравнениями связи определяют положение равновесия системы. Множители λ_i при освобождающих связях в положении равновесия должны быть отрицательными. Множители при неосвобождающих связях могут быть в положении равновесия как положительными, так и отрицательными.

Пример 1. Исследовать условия равновесия материальной точки, находящейся под действием силы тяжести, на гладкой горизонтальной плоскости.

Решение. Горизонтальная плоскость может рассматриваться как односторонняя связь, которая допускает отрыв точки от плоскости вверх. Поэтому, если ось y направить вертикально вверх, условие связи запишется в виде

$$f = -y \leq 0,$$

а основное уравнение равновесия

$$-p \delta y + \lambda \delta f = 0$$

дает

$$-p - \lambda = 0.$$

Отсюда имеем $\lambda = -p < 0$ и, следовательно, равновесие точки не зависит от ее положения на плоскости.

Метод Лагранжа дает возможность определять и реакции связей. В рассматриваемом случае реакция будет равна

$$R = \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = p > 0$$

и, следовательно, направлена вертикально вверх.

Пример 2. Исследовать условия равновесия тяжелой материальной точки, на которую наложены связи

$$f_1 = y - x \leq 0 \text{ и } f_2 = x^2 + y^2 - r^2 \leq 0$$

(здесь предполагается, что ось y направлена вертикально вверх, а ось x — горизонтальна).

Решение. Уравнение равновесия получает вид

$$-mg \delta y + \lambda_1 (\delta y - \delta x) + \lambda_2 (2x \delta x + 2y \delta y) = 0.$$

Приравнивая нулю коэффициенты при δx и δy , получим

$$-mg + \lambda_1 + 2y \lambda_2 = 0,$$

$$-\lambda_1 + 2x \lambda_2 = 0.$$

Присоединяя к этим уравнениям еще уравнения связи, будем иметь

$$x = y = \pm \frac{r \sqrt{2}}{2},$$

$$\lambda_1 = \frac{mg}{2} > 0, \quad \lambda_2 = \pm \frac{mg \sqrt{2}}{4r}.$$

Но так как λ_i в положении равновесия должны быть все отрицательными, мы приходим к заключению, что материальная точка не может находиться в равновесии при действии обеих связей.

Предположим теперь, что одна из связей, скажем f_2 , освобождена и на точку в положении равновесия действует только одна связь f_1 . Получаемые при этих условиях уравнения равновесия

$$-mg + \lambda_1 = 0 \quad \text{и} \quad -\lambda_1 = 0$$

оказываются противоречивыми, следовательно, такого положения равновесия не существует.

Остается рассмотреть случай, когда освобожденной оказывается связь f_1 . Уравнения равновесия тогда получают вид

$$-mg + 2\lambda_2 y = 0, \quad 2x \lambda_2 = 0.$$

Эти уравнения имеют решение

$$x = 0, \quad \lambda_2 = \frac{mg}{2y}.$$

Отрицательное значение для λ_2 получается только в том случае, когда $y < 0$, поэтому будем иметь для положения равновесия следующие значения

$$x = 0, \quad y = -r.$$

Пример 3. Материальная точка с массой m находится в равновесии внутри трехосного эллипсоида с полуосями a , b и c . На точку действуют силы: сила тяжести, параллельная оси z , и сила отталкивания от оси z , пропорциональная расстоянию точки от этой оси. Найти положение равновесия точки.

Решение. Уравнение связи запишем в виде

$$f = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \leq 0.$$

Из принципа Бернулли имеем условие равновесия

$$\delta A = -mg \delta z + kx \delta x + ky \delta y \leq 0, \quad k > 0.$$

Применяя метод множителей Лагранжа, будем иметь

$$-mg \delta z + kx \delta x + ky \delta y + 2\lambda \left(\frac{x}{a^2} \delta x + \frac{y}{b^2} \delta y + \frac{z}{c^2} \delta z \right) = 0,$$

откуда приходим к следующим условиям равновесия

$$kx + \frac{2\lambda x}{a^2} = 0, \quad ky + \frac{2\lambda y}{b^2} = 0, \quad -mg + \frac{2\lambda z}{c^2} = 0.$$

Присоединяя сюда уравнения связи, получим следующие решения:

$$1) \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = \frac{mgc^2}{2\lambda} < 0,$$

$$z = -c, \quad \lambda = -\frac{mgc}{2} < 0;$$

$$2) \quad x = 0, \quad \lambda = -\frac{kb^2}{2} < 0, \quad z = -\frac{mgc^2}{kb^2},$$

$$y = \pm \sqrt{b^2 - \frac{m^2 g^2 c^2}{k^2 b^2}};$$

$$3) \quad \lambda = -\frac{ka^2}{2} < 0, \quad z = -\frac{mgc^2}{ka^2},$$

$$x = \pm \sqrt{a^2 - \frac{m^2 g^2 c^2}{k^2 a^2}}.$$

Два последних решения существуют, если выполняется, соответственно, одно из условий равновесия.

Задачи для самостоятельных упражнений

40. Материальная точка веса P находится на внутренней поверхности конуса с вертикальной осью, заданного уравнением

$$x^2 + 4y^2 - 4z^2 = 0.$$

Точка отталкивается от вершины конуса силой, численно равной $F = kr$, где r — расстояние точки от вершины конуса. Найти положения равновесия точки и давление на поверхность конуса (рис. 42).

41. Найти положения равновесия тяжелой палочки весом P и длины l , нижний конец которой перемещается по окружности радиуса a , расположенной в горизонтальной плоскости и имеющей

центр в начале координат, а верхний конец опирается на вертикальную плоскость xOz (рис. 43).

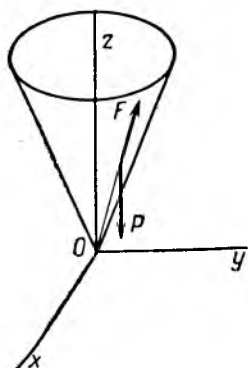


Рис. 42

42. Тяжелое колечко весом P надето на прут, которому придана форма кривой, определяемой уравнениями

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1; \quad \frac{x}{6} + \frac{y}{3} + z = 1,$$

где ось z направлена вертикально вверх. Найти положения равновесия колечка.

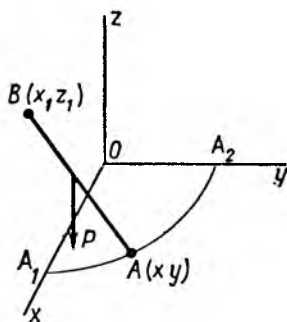


Рис. 43

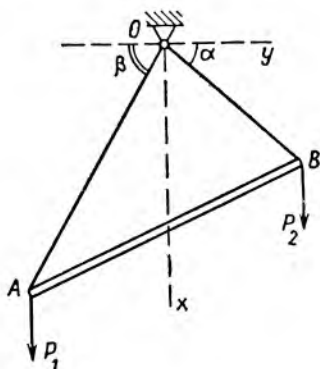


Рис. 44

43. Найти положение равновесия тяжелой материальной точки, расположенной на внутренней поверхности эллиптического цилиндра

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

и вынужденной оставаться в плоскости Oyz . Ось z направлена вертикально вверх.

44. Найти положения равновесия тяжелой материальной точки, находящейся на внутренней поверхности эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

оси которого образуют с вертикалью углы α , β , γ .

45. На нерастяжимой нити, перекинутой через бесконечно малый блок, висит невесомый стержень, к концам которого прикреплены грузы P_1 и P_2 . Длина стержня равна l , длина нити — L . Определить положение равновесия системы (рис. 44).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ СВЯЗИ. ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ К СИСТЕМАМ С НЕИДЕАЛЬНЫМИ СВЯЗЯМИ. СИЛЫ ТРЕНИЯ

Принцип возможных перемещений позволяет определять положения равновесия системы с идеальными связями. При помощи этого же принципа можно определять и реакции связей. Для этого

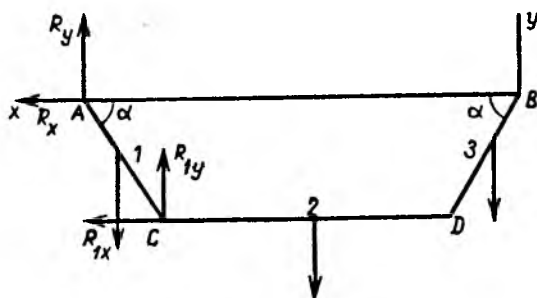


Рис. 45

достаточно наложенные на систему связи заменить силами реакции, действие которых эквивалентно действию связей. В результате освобождения системы появляются новые возможные перемещения, которые раньше не допускались связями. На этих перемещениях будет отлична от нуля работа сил реакции связей. Подсчитывая работу всех действующих на систему сил, включая и силы реакции, на этом новом возможном перемещении системы, мы получим уравнение, из которого определяются реакции связей.

Аналогично поступают и при решении задач с неидеальными связями, вводя дополнительные условия на коэффициент трения.

Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 1. Два одинаковых стержня AC и BD , весом P и длины a каждый, могут свободно вращаться на шарнирах A и B . Они соединены шарнирами C и D с третьим стержнем, располо-

женным горизонтально и имеющим вес Q и длину a_0 . Вся система находится в равновесии в вертикальной плоскости. Определить реакции шарниров A и C , если угол α известен (рис. 45).

Решение. Система находится в равновесии. Чтобы определить реакции в точке A , освободим эту точку и введем вместо имеющейся связи неизвестную пока по величине и по направлению силу реакции R . Обозначим горизонтальную проекцию этой силы через R_x , а вертикальную — через R_y . Освобожденная система получает новые возможные перемещения, при которых точка A может уже перемещаться как по горизонтали, так и по вертикали. Сообщим сначала горизонтальное перемещение точке A . Обозначим это перемещение через δx . Точки 1, 2, 3 приложения сил тяжести так же совершат некоторые перемещения. Подсчитывая работу всех сил на перемещении системы, будем иметь

$$R_x \delta x - P \delta y_1 - Q \delta y_2 - P \delta y_3 = 0.$$

Выражая x и y_i через угол α , получим

$$x = 2a \cos \alpha + a_0, \quad y_1 = y_3 = -\frac{a}{2} \sin \alpha, \quad y_2 = -a \sin \alpha.$$

Теперь уравнение работ примет вид

$$-R_x 2a \sin \alpha \delta \alpha + Pa \cos \alpha \delta \alpha + Qa \cos \alpha \delta \alpha = 0.$$

Отсюда уже легко определить

$$R_x = \frac{P+Q}{2} \operatorname{ctg} \alpha.$$

Среди возможных перемещений освобожденной системы находится поворот стержня AC вокруг точки C . Как известно, обобщенная сила, соответствующая перемещению поворота, равна сумме моментов сил, действующих на твердое тело, относительно центра вращения. Подсчитывая эту обобщенную силу и приравнявая ее нулю, будем иметь

$$P \frac{a}{2} \cos \alpha - R_y a \cos \alpha + R_x a \sin \alpha = 0,$$

откуда после подстановки значения R_x сразу же получим

$$R_y = P + \frac{Q}{2}.$$

Для определения реакций в точке C освободим еще стержень AC в точке C , заменив существующие связи силами реакции R_{1x} , R_{1y} . Освобожденный от связей стержень AC может перемещаться поступательно как в горизонтальном, так и в вертикальном направлениях. Подсчитывая работу на этих перемещениях, легко найдем

$$R_{1x} = -R_x = -\frac{1}{2} (P + Q) \operatorname{ctg} \alpha,$$

$$R_{1y} = P - R_y = -\frac{Q}{2}.$$

Аналогично решается задача и в том случае, когда на систему наложены неидеальные связи — например связи, определяемые трением. При решении задач необходимо освободиться от таких связей, введя неизвестные силы реакции, удовлетворяющие принимаемому закону трения. В большинстве встречающихся задач таким законом является закон Кулона, в соответствии с которым сила трения определяется как сила, пропорциональная давлению, производимому точкой тела на связь. Эта сила препятствует свободному движению материальной точки и уравнивает активные силы, действующие на точку. При этом коэффициент пропорциональности не является постоянной величиной. Он зависит от характера движения, от характера действующих активных сил и обычно определяется неравенством

$$|k| \leq f,$$

где f — коэффициент трения, соответствующий началу движения материальной точки.

Пример 2. Однородный стержень весом P опирается верхним своим концом на негладкую вертикальную стенку (коэффициент трения равен f), а нижним — на гладкий горизонтальный стол и удерживается в равновесии в вертикальной плоскости при помощи привязанной к его нижнему концу и протянутой по столу веревки, которая затем перекинута через блок и несет на своем свободном конце груз весом Q . Найти, при каких значениях угла наклона стержня α возможно равновесие системы, а также определить реакции в точках A и B (рис. 46).

Решение. Введем силу реакции в точке A , состоящую из двух составляющих: нормальной реакции N , направленной перпендикулярно к стенке, и касательной составляющей kN , направленной вдоль стенки. Будем считать эту составляющую положительной, когда она направлена вверх. После введения такой силы реакции среди возможных перемещений появится поступательное перемещение всей системы в горизонтальном направлении. Рассматривая работу всех сил, действующих на систему на этом возможном перемещении, получим условие для определения равновесия

$$-Q \delta x + N \delta x = 0,$$

откуда непосредственно следует

$$N = Q.$$

С другой стороны, среди возможных перемещений будет существовать поворот стержня вокруг мгновенного центра вращения S . Этому возможному перемещению будет соответствовать равенство нулю обобщенной силы, которая определяется как сумма моментов всех сил относительно точки S . Будем иметь

$$Q 2a \sin \alpha - Pa \cos \alpha + kN \cdot 2a \cos \alpha = 0.$$

После подстановки сюда значения N получим условие равновесия

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{P - 2kQ}{2Q} = \frac{P}{2Q} - k,$$

где

$$|k| < f.$$

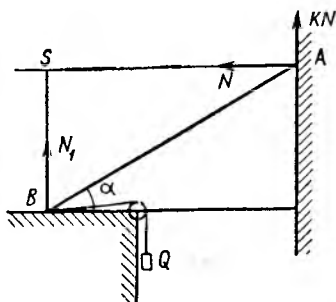


Рис. 46

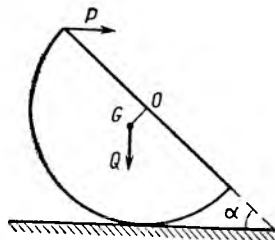


Рис. 47

Для определения реакции в точке B освободим точку B от связи и введем в рассмотрение силу реакции N_1 , ортогональную к полу. Среди возможных перемещений стержня появится поступательное перемещение в вертикальном направлении. Подсчитывая работу всех сил, действующих на стержень, на этом возможном перемещении и приравнявая работу нулю, будем иметь

$$N_1 \delta y - P \delta y + Qk \delta y = 0,$$

откуда следует

$$N_1 = P - Qk.$$

Пример 3. На негладкой горизонтальной плоскости лежит полушар весом Q и с радиусом r . В точке A на него действует горизонтальная сила P . Зная значение коэффициента трения f между полушаром и опорной плоскостью, определить условия равновесия полушара, если расстояние $OG = \frac{3}{8} r$ (рис. 47).

Решение. Скольжению полушара препятствует горизонтальная сила трения F , величина которой удовлетворяет неравенству $F \leq fN$, где через N обозначено вертикальное давление полушара на плоскость. Рассматривая освобождающее вертикальное возможное перемещение полушара, легко определить N из условия

$$(-Q + N) \delta y = 0,$$

откуда следует

$$N = Q.$$

Рассматривая далее поступательное горизонтальное перемещение полушара, будем иметь

$$(P - F) \delta x = 0,$$

откуда следует

$$P = F \leq fQ,$$

или

$$P \leq fQ. \quad (1)$$

Только при выполнении этого условия возможно равновесие.

Выберем начало координат в точке контакта полушара с горизонтальной плоскостью, когда основание полушара горизонтально. Тогда горизонтальную и вертикальную координаты центра тяжести полушара и точки приложения силы P можно будет представить в виде

$$y_G = r - \frac{3}{8} r \cos \alpha, \quad x_A = r \alpha - r \cos \alpha.$$

Среди возможных перемещений системы имеется поворот полушара вокруг точки контакта B . На этом перемещении будем иметь

$$P(r \delta \alpha + r \sin \alpha \delta \alpha) - \frac{3}{8} Qr \sin \alpha \delta \alpha = 0,$$

откуда находим

$$\sin \alpha = \frac{8P}{3Q - 8P}. \quad (2)$$

Положительное значение $\sin \alpha$ получается отсюда при условии

$$3Q - 8P > 0.$$

Условие существования действительного значения α имеет вид

$$\frac{8P}{3Q - 8P} \leq 1.$$

Таким образом, будем иметь

$$P \leq \frac{3}{16} Q. \quad (3)$$

Полученные условия (1), (2), (3) являются условиями равновесия.

Задачи для самостоятельных упражнений

46. Составная балка AD , лежащая на трех опорах, состоит из двух балок, шарнирно соединенных в точке C . На балку дей-

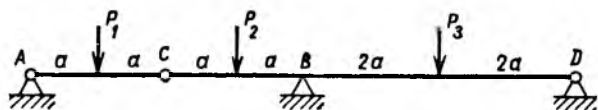


Рис. 48

ствуют вертикальные силы, равные P_1 , P_2 , P_3 , как указано на рисунке 48. Определить опорные реакции в точках A , B и D .

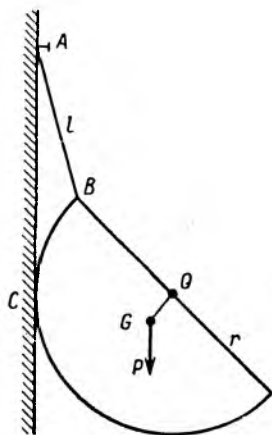


Рис. 49

47. Полушар данного веса P и радиуса r привязан за край нитью длиной l к точке A вертикальной стены и опирается на эту стену выпуклой поверхностью в точке C . Какова длина нити, если в положении равновесия плоскость основания большого круга полушара образует с вертикалью угол в 45° ? Каково натяжение нити T и давление N полушара на стенку, если известно, что $OG = \frac{3}{8} r$ (рис. 49)?

48. Однородный брусок AB длиной $2l$ и весом P опирается одним из своих концов на горизонтальную плоскость AC , а другим концом на выпуклую поверхность полусферы радиуса R ,

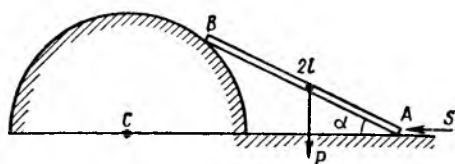


Рис. 50

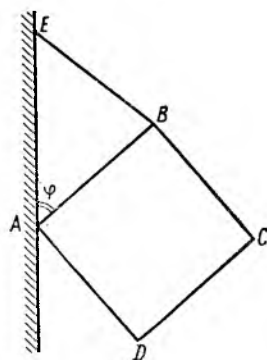


Рис. 51

центр которой находится в точке C . Найти горизонтальную силу S , которую надо приложить в точке A , чтобы удержать бру-

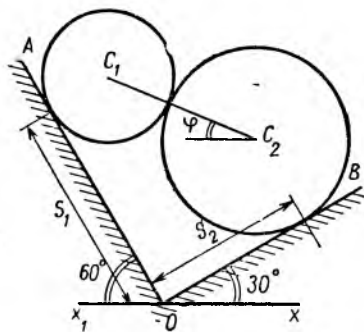


Рис. 52

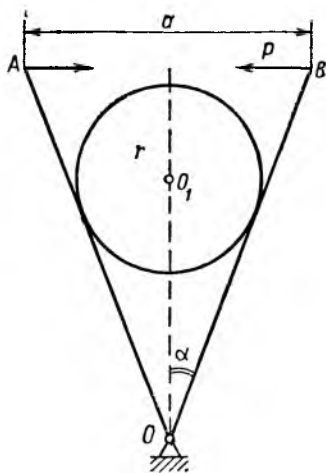


Рис. 53

сок в данном положении при угле α наклона к горизонту, и давление на сферу и плоскость (рис. 50).

49. Квадратная доска $ABCD$ весом P подвешена на веревке BE . Вершиной A доска опирается на неподвижную вертикальную гладкую стенку EA . Определить угол φ , который образует доска с вертикалью в положении равновесия, и натяжение

веревки, если известно, что длина веревки равна стороне квадрата a (рис. 51).

50. Между двумя гладкими наклонными плоскостями OA и OB положены два гладких соприкасающихся однородных цилиндра. Цилиндр с центром C_1 имеет вес P_1 и радиус r_1 , цилиндр с центром C_2 имеет вес $P_2=3P_1$ и радиус r_2 . Определить угол φ , составляемый прямой C_1C_2 с горизонтальной осью xOx_1 , давле-

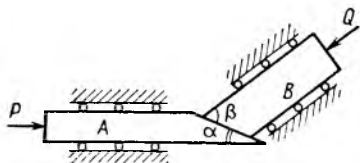


Рис. 54

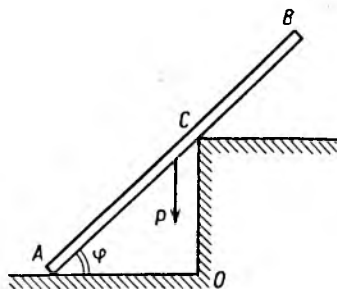


Рис. 55

ния N_1 и N_2 цилиндров на плоскости, а также величину N взаимного давления цилиндров, если угол $AOx_1=60^\circ$, а угол $BOx=30^\circ$ (рис. 52).

51. Шесть одинаковых стержней весом p каждый, сочлененных друг с другом посредством шарниров и образующих правильный шестиугольник, находятся в вертикальной плоскости. Один из стержней AB закреплен в горизонтальном положении. Показать, что шестиугольник будет находиться в равновесии, если к середине M стороны, противоположной AB , приложить силу, равную $3p$ и направленную по вертикали вверх. Определить также реакции в шарнирах A и B .

52. Между двумя пластинками AO и BO (длина каждой равна $2l$), соединенными шарниром O , помещен однородный цилиндр, ось которого O_1 параллельна оси шарнира. Обе оси горизонтальны и лежат в одной вертикальной плоскости. Пластинки сжимают цилиндр под действием двух горизонтальных сил P , равных по величине и направленных в противоположные стороны. Вес цилиндра равен Q , а его радиус — r . Коэффициент трения цилиндра о пластинки равен f , угол $AOB=2\alpha$, расстояние $AB=a$ (рис. 53). Какому условию должна удовлетворять величина силы P для того, чтобы цилиндр находился в равновесии?

53. Два клина A и B , коэффициент трения между которыми равен $f=\operatorname{tg} \varphi$, могут двигаться без трения вдоль своих направляющих. К клину A приложена сила P . Какую силу Q нужно приложить к клину B , чтобы клин A двигался равномерно в сторону действия силы P (рис. 54)?

54. Два клина A и B , коэффициент трения между которыми равен $f = \operatorname{tg} \varphi$, могут двигаться без трения в своих направляющих, как показано на рисунке 54. К клину B приложена сила Q . Какую силу P нужно приложить к клину A , чтобы клин B двигался равномерно в сторону действия силы Q ? Силы P и Q параллельны соответствующим направляющим.

55. Однородная балка длиной $2l$ и весом P опирается нижним концом на шероховатую горизонтальную плоскость, а в точке C — на неподвижную точку, высота которой над плоскостью равна h (рис. 55). Наименьшее значение угла $\varphi = \angle OAC$, при котором балка еще может находиться в равновесии в описанном положении, равно φ_0 . Найти коэффициент f трения в точке A (трением в точке C пренебречь).

II. ДИНАМИКА ТОЧКИ

В основу динамики точки положены законы Ньютона, устанавливающие зависимость ускорения материальной точки от сил, действующих на эту точку. А всякое движение материальной точки изучается только по отношению к некоторой системе координат и определяется силами, действующими в ней на данную точку.

Прежде всего необходимо научиться составлять уравнения движения материальной точки в различных системах отсчета и системах координат. Очень важно уметь построить минимальное количество дифференциальных уравнений движения материальной точки, из которых полностью определяется ее движение. Реакции связей могут быть определены после того, как будет определено движение точки.

При составлении дифференциальных уравнений движения точки необходимо использовать общие теоремы динамики и их первые интегралы. Общие теоремы в ряде случаев значительно упрощают исследование движения материальной точки и, кроме того, способствуют развитию интуиции.

Составлением дифференциальных уравнений движения не заканчивается, а только начинается исследование движения материальной точки. В конечном счете необходимо определить, как будет двигаться она при заданных начальных условиях, а в ряде задач еще потребуются знать, и как изменяется это движение при непрерывном изменении начальных условий. Нужно уметь определять траекторию точки и характер ее движения по этой траектории. Чтобы все это знать, необходимо уметь интегрировать уравнения движения материальной точки. Общие теоремы динамики и их первые интегралы представляют собой некоторые стандартные методы исследования ее движения. В целом ряде случаев эти стандартные методы значительно

упрощают задачу интегрирования уравнений движения материальной точки.

Изучение движения точки относительно подвижной системы отсчета позволяет глубже раскрыть характер законов движения и действующих на точку сил, в зависимости от выбора той или иной системы отсчета.

Как обычно, мы начнем с рассмотрения наиболее простых задач, постепенно переходя к более сложным. Все задачи разобьем на следующие разделы:

1. Прямолинейное движение материальной точки.
2. Пространственное движение свободной материальной точки.
3. Движение материальной точки по кривой и по поверхности.
4. Движение материальной точки относительно подвижной системы отсчета.

ПРЯМОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

В случае прямолинейного движения положение материальной точки относительно некоторого неподвижного пространства определяется всего одной координатой, которой может быть расстояние материальной точки от некоторого фиксированного начала. Наиболее простым случаем здесь будет, по-видимому, вертикальное движение материальной точки в пустоте. Рассмотрим простейший пример такого движения.

Пример 1. Пусть ось z направлена вертикально вверх. Будем предполагать, что на материальную точку действует только сила тяжести. Проекция силы тяжести на ось z будет постоянна по величине и имеет отрицательное значение $-mg$. Поэтому движение материальной точки вдоль оси z будет определяться дифференциальным уравнением

$$mz'' = -mg,$$

или

$$z'' = -g.$$

Мы будем предполагать, что в начальный момент материальная точка находится на оси z и ее начальная скорость направлена вдоль оси z . Как известно, при сделанных предположениях точка будет совершать прямолинейное движение, оставаясь все время на оси z . Интегрируя дважды дифференциальное уравнение движения, получим закон движения материальной точки при произвольных начальных условиях

$$z = -\frac{gt^2}{2} + v_0t + z_0,$$

который и определяет положение материальной точки в любой момент времени в зависимости от начальных условий. В частности, можно определить момент времени t , в который точка занимает положение $z=0$. Этот момент определяется равенством

$$t = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2z_0 g}}{g}.$$

Так как время t всегда больше нуля, при $z_0 > 0$ имеем только одно значение времени t , при котором точка достигает положения $z=0$. Оно определяется формулой

$$t = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2z_0 g}}{g}.$$

Если же $z_0 > 0$, то будем иметь два значения времени t , т. е. t_1 и t_2 , в которые точка пересекает начало координат, сначала двигаясь вверх, а затем двигаясь вниз.

Если сила, действующая на материальную точку, зависит только от положения этой точки и по условиям задачи требуется определить изменения скорости в зависимости от положения материальной точки, можно будет воспользоваться теоремой живых сил.

Пусть, например, материальная точка притягивается неподвижным центром O силой, пропорциональной расстоянию от этой точки до неподвижного центра O . Будем предполагать, что в начальный момент точка находится на расстоянии a от неподвижного центра, а ее скорость равна v_0 и направлена от центра O .

Выберем за ось Ox прямую, проходящую через точку M . Тогда уравнение движения точки получит вид

$$mx'' = -kx,$$

где k — коэффициент пропорциональности. Действующая на материальную точку сила $F = -kx$ обладает силовой функцией $U = -\frac{kx^2}{2}$, а в этом случае, как известно, существует интеграл живых сил

$$\frac{mv^2}{2} = -\frac{kx^2}{2} + h.$$

Постоянная h определяется из начальных условий

$$h = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{ka^2}{2}.$$

Интеграл живых сил определяет зависимость скорости точки от ее положения, а на координату x накладывает условие

$$-kx^2 + mv_0^2 + ka^2 \geq 0,$$

откуда получаем

$$x^2 \leq \frac{m}{k} v_0^2 + a^2.$$

В некоторых задачах силы, действующие на материальную точку, оказываются зависящими от направления движения материальной точки. К таким силам относится, например, сила сопротивления движению точки — сопротивление среды. В общем случае она может быть представлена в виде

$$R = mg \varphi(v).$$

Пусть, например, тяжелая материальная точка движется в вертикальном направлении в сопротивляющейся среде и требуется определить скорость этой точки в зависимости от ее положения. Будем предполагать, что начальная скорость точки равна v_0 и направлена вертикально вверх. Положительную ось Ox направим вертикально вверх, приняв за начало координат начальное положение точки. Уравнение движения для восходящего движения точки получит вид

$$mx'' = -mg - mg \varphi(v).$$

Полагая $x' = v$, будем иметь

$$v \frac{dv}{dx} = -g(1 + \varphi(v)).$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим

$$\int_{v_0}^v \frac{v dv}{1 + \varphi(v)} = -xg.$$

Уравнение определяет движение точки вверх до тех пор, пока ее скорость не обратится в нуль. После этого точка начнет двигаться вниз. Для нисходящего движения уравнение запишется иначе:

$$mx'' = -mg + mg \varphi(v).$$

Отсюда получим

$$v \frac{dv}{dx} = -g(1 - \varphi(v)),$$

и после разделения переменных будем иметь

$$\int_0^v \frac{v dv}{1 - \varphi(v)} = -g(x - x_m).$$

В частном случае, когда сила сопротивления пропорциональна скорости, будем иметь

$$\varphi(v) = kv,$$

где k — постоянный коэффициент пропорциональности. Тогда интеграл, стоящий в левой части, запишется так

$$\int_{v_0}^v \frac{v dv}{1 + kv} = \frac{1}{k^2} \left[k(v - v_0) - \ln \frac{kv + 1}{kv_0 + 1} \right].$$

Максимальная высота x_m достигается в тот момент, когда скорость обращается в нуль. Поэтому

$$x_m = \frac{v_0}{kg} - \frac{1}{k^2 g} \ln(kv_0 + 1).$$

Для определения скорости, с которой точка возвращается в исходное положение, будем иметь уравнение

$$\int_0^v \frac{v dv}{1 - kv} = -g(x - x_0),$$

или, после вычисления интеграла левой части,

$$-\frac{1}{k^2} [kv + \ln(1 - kv)] = -g(x - x_0).$$

Здесь $x_0 = x_m$, и точка достигает начального уровня при $x = 0$. Так что

$$-\frac{1}{k^2} [kv + \ln(1 - kv)] = \frac{1}{k^2} [kv_0 - \ln(1 + kv_0)],$$

что можно переписать в виде

$$k(v + v_0) + \ln \frac{1 - kv}{1 + kv_0} = 0,$$

или

$$e^{k(v+v_0)} = \frac{1 + kv_0}{1 - kv}.$$

Полученная формула связывает скорость, с которой точка возвращается в первоначальное положение, с той скоростью, с которой точка была брошена вертикально вверх.

Рассмотрим теперь приложение исследованного нами метода к изучению малых движений точки около положения равновесия.

Этот пункт является одним из важных в механике, как наиболее часто встречающийся в технических приложениях.

Общая теория малых колебаний материальной точки приводится во всех курсах теоретической механики. Задача обычно сводится к отысканию решения линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Наибольшие затруднения, по-видимому, представляют вопросы, связанные с определением сил, создающих колебательное движение, а также составление дифференциальных уравнений, определяющих малые колебания. В простейших задачах линейные дифференциальные уравнения в точности описывают механический процесс. В общем же случае эти уравнения являются лишь приближенными и остаются справедливыми только для достаточно малых колебаний. Методы линеаризации уравнений движения остаются и в настоящее время наиболее простым и эффективным средством решения большей части технических задач.

В качестве простейшего примера можно рассмотреть задачу о колебаниях материальной точки, подвешенной на пружине и подверженной действию силы тяжести.

Выберем начало координат в точке подвеса пружины и ось Ox направим по вертикали вниз. На точку действует сила тяжести mg , проекция которой на ось Ox положительна и равна mg , а также сила сопротивления пружины, пропорциональная удлинению пружины. Пусть коэффициент жесткости пружины равен c , а длина нерастянутой пружины — l . Тогда уравнение движения точки получит вид

$$mx'' = mg - c(x - l).$$

Если ввести новую зависимую переменную y , определяемую равенством

$$-cy = mg - c(x - l),$$

то уравнение это можно будет записать в более простом виде

$$my'' = -cy,$$

или

$$y'' = -k^2y,$$

где $k^2 = \frac{c}{m}$ — положительная величина. Полученное линейное дифференциальное уравнение имеет общее решение

$$y = c_1 \cos kt + c_2 \sin kt,$$

коэффициенты c_1 и c_2 которого определяются из начальных условий. Если предположить, что в начальный момент пружина не растянута, а точка находится в покое, т. е.

$$y_0 = -\frac{g}{k^2} - l, \quad y'_0 = 0,$$

то для определения произвольных постоянных будем иметь условия

$$c_1 = -\frac{g}{k^2} - l, \quad c_2 = 0.$$

И частное решение, отвечающее этим начальным условиям, запишется в виде:

$$y = \left(-\frac{mg}{c} - l\right) \cos \sqrt{\frac{c}{m}} t.$$

Оно будет представлять колебательное движение около положения равновесия, в котором

$$y_0 = 0, \quad \text{или} \quad x_0 = \frac{mg}{c} + l.$$

Задачи для самостоятельных упражнений

1. Тяжелая материальная точка спускается по гладкой наклонной плоскости, составляющей угол α к горизонту. Найти время, в течение которого точка пройдет путь, равный s метров, если начальная скорость точки направлена вниз вдоль плоскости и равна v_0 .

2. Определить движение тяжелого шарика вдоль воображаемого прямолинейного канала, проходящего через центр Земли, если известно, что сила притяжения внутри земного шара пропорциональна расстоянию движущейся точки от центра Земли и направлена к этому центру. Шарик опущен в канал с поверхности Земли без начальной скорости. Определить скорость шарика при прохождении им центра Земли и время движения до этого центра. Радиус Земли равен $R = 637 \cdot 10^6$ см, ускорение силы притяжения на поверхности Земли равно $g = 980$ см/сек².

3. Материальная точка, находящаяся в поле силы тяжести, пущена с начальной скоростью v_0 вверх по шероховатой наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом, причем коэффициент трения равен f . Определить, при каком условии точка вернется в исходное положение, и какова будет скорость точки при прохождении начального положения.

4. В доске, образующей угол α с горизонтом, требуется просверлить прямой канал AB так, чтобы материальная точка, положенная без начальной скорости в его верхнее отверстие, прошла под действием силы тяжести сквозь отверстие в кратчайшее время. Найти, пренебрегая трением, под каким углом φ к вертикали должен быть просверлен канал (рис. 56).

5. Из некоторой точки A пространства одновременно начинают спускаться по гладким прямым желобам, имеющим всевозможные направления, тяжелые материальные точки. Найти,

на какой поверхности будут расположены эти точки в некоторый момент t , если их начальные скорости равны нулю.

6. Неподвижный центр O притягивает материальную точку массы m силой $F = \mu m r^n$, где r — расстояние от этого центра, а μ — постоянный коэффициент. В начальный момент $r_0 = a$ и скорость точки $v_0 = 0$. Через сколько времени точка достигнет

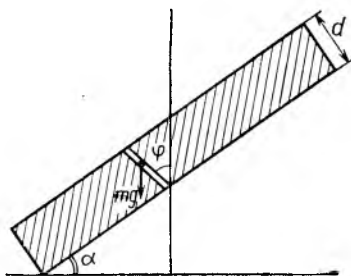


Рис. 56

центра O ? Рассмотреть частные случаи: $n=1$; $n=-2$, $n=-3$, $n=-4$.

7. Материальная точка массы m отталкивается от неподвижного центра O силой, величина которой $F = \mu m r$, где r — расстояние точки от этого центра. В начальный момент $r_0 = a$ и $v_0 = 0$. Найти скорость, которую приобретает точка, пройдя путь $s = a$.

8. Материальная точка массы m притягивается к неподвижному центру O силой, пропорциональной расстоянию точки от этого центра. На расстоянии l величина силы равна P . Найти закон движения точки, если в начальный момент расстояние точки от центра O равно a , а скорость v_0 направлена от центра.

9. Тело падает на Землю с высоты h без начальной скорости. Сопротивление воздуха отсутствует, а сила притяжения Земли считается обратно пропорциональной квадрату расстояния точки от центра Земли. Найти время T , по истечении которого тело достигнет поверхности Земли, и скорость v , которую оно приобретает за это время. Радиус Земли равен R , ускорение силы тяжести у поверхности Земли равно g .

10. Тело брошено с поверхности Земли вертикально вверх с начальной скоростью v_0 . Найти, принимая во внимание силу ньютоновского тяготения и пренебрегая сопротивлением воздуха, на какую максимальную высоту и в течение какого времени поднимется тело, если радиус Земли равен R .

11. Материальная точка спускается под действием силы тяжести по негладкой наклонной плоскости AB с углом наклона α и длиной s . Угол трения точки о плоскость равен φ . Найти скорость, с которой точка приходит в положение B , выходя из положения A без начальной скорости.

12. Шар массы m падает без начальной скорости по вертикали вниз под действием силы тяжести в сопротивляющейся среде, сила сопротивления которой пропорциональна первой степени скорости и равна по величине $R = kmv$, где k — постоянный коэффициент пропорциональности. Найти закон движения шара.

13. Лодке сообщена начальная скорость v_0 . Через t секунд после начала движения эта скорость уменьшается вдвое. Найти закон движения лодки, если сила сопротивления воды пропорциональна скорости лодки.

14. Тело весом P брошено вертикально вверх с начальной скоростью v_0 . Предполагая, что сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости тела, причем коэффициент пропорциональности равен μ , найти скорость, с которой тело упадет обратно на Землю.

15. Шар массы m падает без начальной скорости по вертикали вниз под действием силы тяжести. Сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости шара и равна $R = k\sigma v^2$, где k — постоянный коэффициент пропорциональности, σ — площадь поперечного сечения шара, ρ — плотность воздуха, v — скорость шара. Найти скорость шара v и пройденный им путь s как функции времени. К какому пределу стремится скорость при бесконечном возрастании времени?

16. Тело массы m_1 начинает падать из точки A без начальной скорости в среде, сила сопротивления которой $R = kmv$, где k — коэффициент пропорциональности, m — масса тела, v — его скорость. Одновременно с этим из точки B , находящейся на той же вертикали, ниже точки A на a единиц длины, бросают другое тело массы m_2 с начальной скоростью v_0 , направленной вертикально вверх. Найти, где и когда встретятся эти тела. Каково условие возможной встречи?

17. Лодке сообщена начальная скорость v_0 . При своем движении лодка испытывает сопротивление воды, сила которого пропорциональна квадрату скорости лодки, причем коэффициент пропорциональности равен km , где m — масса лодки. Через какой промежуток времени скорость лодки станет вдвое меньше начальной?

18. Шарик, масса которого равна m , падает под действием силы тяжести и при этом испытывает сопротивление воздуха, так что движение шарика выражается законом

$$x = \frac{g}{2} \left[t - \frac{1}{2} (1 - e^{-2t}) \right],$$

и ось x направлена по вертикали вниз. Определить силу сопротивления воздуха, испытываемую шариком, в зависимости от его скорости.

19. Два геометрически равных и однородных шара сделаны из различных материалов. Удельные веса материалов шаров

соответственно равны γ_1 и γ_2 . Оба шара падают в воздухе. Считая сопротивление воздуха пропорциональным квадрату скорости, определить отношение максимальных скоростей шаров.

20. Тяжелая материальная точка поднимается вверх по шероховатой наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. В начальный момент скорость точки равна v_0 . Коэффициент трения между точкой и плоскостью равен f . Определить, какой путь и в течение какого времени пройдет точка до остановки.

21. Тело пущено с начальной скоростью v_0 вверх по шероховатой наклонной плоскости с углом наклона к горизонту α . Коэффициент трения равен f . Сила сопротивления воздуха равна $F = kmgv^2$, где m — масса тела, v — его скорость, k — коэффициент пропорциональности. С какой скоростью тело, спускаясь обратно вниз, пройдет исходное положение?

22. Два груза A и B весом соответственно P и Q соединены между собой пружиной, как показано на рисунке 57. Груз A

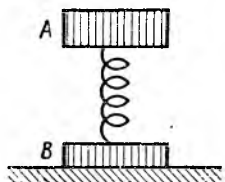


Рис. 57

совершает свободные колебания по вертикальной прямой с амплитудой a и периодом T . Определить максимальное давление груза B на опорную поверхность.

23. Груз весом P подвешен к концу B эластичного шнура, другой конец которого закреплен в точке A . Груз поднимают в положение A и отпускают без начальной скорости. Найти наибольшее удлинение шнура, если его естественная длина равна l_0 , а статическое удлинение под действием силы P равно $\lambda_{ст}$.

24. Груз весом mg подвешен в точке A на пружине, которая в естественном состоянии имеет длину l_0 . Статическое удлинение пружины под действием этого груза равно λ_0 . Груз отпускают падать без начальной скорости из положения, в котором пружина вытянута на $\frac{\lambda_0}{2}$. Определить период колебаний груза и наибольшую силу натяжения пружины.

25. К свободному концу упругой горизонтальной балки, другой конец которой закреплен неподвижно, подвешен на пружине груз весом P . Упругая сила балки пропорциональна стреле прогиба f , а сила натяжения пружины пропорциональна ее удлинению. Статическое удлинение пружины под действием силы P равно $\lambda_{ст}$, а статическая стрела прогиба балки равна $f_{ст}$. Опре-

делить период колебаний груза. Массой балки и пружины пренебречь.

26. Груз весом P подвешен на пружине, другой конец которой прикреплен к нерастяжимой веревке, накрутой на шкив. Шкив равномерно вращается вокруг своей оси, а груз опускается с постоянной скоростью v_0 . Внезапно шкив останавливается. Определить наибольшее удлинение пружины и наибольшую силу ее натяжения, если статическое удлинение пружины под действием силы P равно $\lambda_{ст}$.

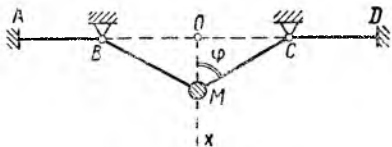


Рис. 58

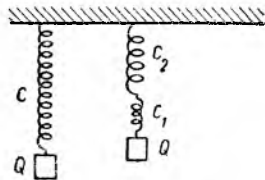


Рис. 59

27. К пружине, один конец которой закреплен неподвижно, подвешены два одинаковых груза. Длина пружины при этом увеличивается на 2 см. Определить амплитуду и период колебаний, которые будет совершать один из грузов, если второй оборвется.

28. Две упругие нити, имеющие в нерастянутом состоянии одинаковую длину $AB=CD=l$, прикреплены своими концами к точкам A и D и продернuty в неподвижные кольца B и C (рис. 58). Другие концы нитей прикреплены к шарика M массы m , находящемуся на перпендикуляре, восстановленном из середины O прямой BC . Шарик отведен на расстояние $OM=s_0$ и предоставлен действию одних только сил упругости нитей. Найти траекторию и закон движения шарика, полагая, что сила упругости нитей пропорциональна относительному удлинению. Коэффициент пропорциональности равен E .

29. Определить коэффициент жесткости s пружины, эквивалентной двойной пружине, состоящей из двух последовательно соединенных пружин с разными коэффициентами жесткости c_1 и c_2 , и указать период колебаний груза Q , подвешенного на такой двойной пружине (рис. 59).

30. С какой скоростью надо бросить с Земли тело по направлению к Луне, чтобы оно остановилось в равновесии между Землей и Луной, считая массу Земли в 81 раз больше массы Луны, а расстояние от Луны до Земли равным 60 земным радиусам?

31. Материальная точка массы m отталкивается от неподвижного центра O силой F , пропорциональной расстоянию точки

от центра ($F=4\text{ мх}$). Найти закон движения точки, если известно, что сопротивление среды R пропорционально первой степени скорости ($R=3\text{ мv}$). В начальный момент расстояние от центра до точки равно единице длины, а скорость точки равна нулю.

32. Определить наивысший предел для скорости тяжелого тела массы m , падающего без начальной скорости в среде, сопротивление которой пропорционально квадрату скорости, если известно, что сила сопротивления среды при скорости, равной единице, равна k^2mg .

33. Определить время движения материальной точки, брошенной вертикально вверх с начальной скоростью v_0 , в среде с сопротивлением, пропорциональным квадрату скорости, от начала движения до возвращения на Землю.

ПРОСТРАНСТВЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

При исследовании движения материальной точки в пространстве следует обратить внимание на определение сил, действующих на материальную точку. Без этого невозможно определить траекторию и характер движения точки. Особенно большое значение имеют задача о движении тяжелой материальной точки в пустоте и задача о движении материальной точки в центральном силовом поле. При исследовании движения большого значения приобретают общие теоремы динамики материальной точки. При решении задач необходимо использовать эти теоремы и их первые интегралы. Рассмотрим несколько конкретных примеров.

Пример 1. Материальная точка M массы m притягивается неподвижным центром O с силой $F=k^2mr$, где k — постоянный коэффициент пропорциональности, r — расстояние точки M от O . В начальный момент расстояние $r_0=a$, а скорость v_0 образует с направлением OM_0 угол α . Найти уравнения движения точки и ее траекторию, принимая прямую OM_0 за ось x .

Решение. Выберем систему неподвижных осей с началом в центре притяжения O . Ось Ox направим так, чтобы она проходила через начальное положение точки. Сила F , действующая на точку, будет направлена по оси Ox , и если бы начальная скорость точки была направлена вдоль оси Ox , точка совершала бы прямолинейное движение. Но направление начальной скорости не совпадает с направлением оси Ox , а потому точка покидает ось Ox и будет совершать некоторое плоское движение. Сила F в каждый момент времени будет направлена к притягивающему центру и проекции этой силы на оси координат будут иметь вид

$$X = -F \cos \varphi = -F \frac{x}{r}, \quad Y = -F \sin \varphi = -F \frac{y}{r}.$$

Подставляя сюда значение силы F , получим

$$X = -k^2 mx, \quad Y = -k^2 my,$$

после чего уравнения движения запишутся в виде

$$mx'' = -k^2 mx, \quad my'' = -k^2 my.$$

Уравнения эти могут быть проинтегрированы независимо одно от другого. В результате получаем общее решение системы

$$x = c_1 \cos kt + c_2 \sin kt, \quad y = c_3 \cos kt + c_4 \sin kt.$$

Из начальных условий имеем

$$\text{при } t = 0, \quad a = c_1, \quad 0 = c_3.$$

$$v_0 \cos \alpha = c_2 k, \quad v_0 \sin \alpha = c_4 k.$$

Так что движение будет происходить по закону

$$x = a \cos kt + \frac{v_0}{k} \cos \alpha \sin kt, \quad y = \frac{v_0}{k} \sin \alpha \sin kt.$$

Исключая из этих уравнений время, получим уравнение траектории

$$\left(\frac{x - y \operatorname{ctg} \alpha}{a} \right)^2 + \left(\frac{yk}{v_0 \sin \alpha} \right)^2 = 1.$$

Пример 2. Материальная точка совершает плоское движение под действием некоторой силы F , причем траектория точки оказывается эллипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, а ее ускорение все время остается параллельным оси Oy . В начальный момент точка находится на оси Oy , а ее скорость равна v_0 . Определить силу, действующую на точку, в функции координат точки.

Решение. Проекция ускорения точки на ось Ox равна нулю, т. е. $x'' = 0$. Отсюда следует, что $x' = \text{const}$ во все время движения. Но в начальный момент скорость направлена вдоль оси Ox , и потому $x' = v_0 = \text{const}$. Записав уравнение траектории в виде

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$$

и дифференцируя его по времени, будем иметь

$$a^2 y y' + b^2 x v_0 = 0,$$

откуда $y' = -\frac{b^2 x v_0}{a^2 y}$. Дифференцируя дважды уравнение траектории и подставляя значение y' , получим уравнение для определения ускорения y''

$$\frac{b^4 x^2 v_0^2}{a^2 y^2} + a^2 y y'' + b^2 v_0^2 = 0,$$

откуда

$$y'' = -\frac{1}{a^2 y} \left(\frac{b^4 x^2}{a^2 y^2} + b^2 \right) v_0^2 = -\frac{b^4 v_0^2}{a^2 y^3}.$$

Таким образом для действующей силы получим значение

$$F = my'' = -\frac{mb^4 v_0^2}{a^2 y^3}.$$

Эта сила направлена к оси Ox и обратно пропорциональна кубу расстояния от точки до оси Ox .

Пример 3. С крепостной башни производят два выстрела, причем начальные скорости снарядов оказываются равными по величине и лежат в одной и той же вертикальной плоскости. Эти начальные скорости направлены под углами α_1 и α_2 к горизонту. Оба снаряда попадают в одну и ту же точку на поверхности Земли. Найти высоту h башни, предполагая, что поверхность Земли вокруг башни горизонтальна и что сопротивление воздуха отсутствует.

Решение. Уравнение траектории точки в общем случае движения под действием силы тяжести имеет вид

$$y = -\frac{gx^2}{2v_0^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) + x \operatorname{tg} \alpha$$

(ось Oy предполагается направленной вертикально вверх). При разных значениях угла α по условиям задачи снаряды попадают в одну и ту же точку. Поэтому, исключая y из двух уравнений траектории, получим

$$-\frac{gx^2}{2v_0^2} (\operatorname{tg}^2 \alpha_1 - \operatorname{tg}^2 \alpha_2) + x (\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2) = 0,$$

откуда

$$-\frac{gx}{2v_0^2} (\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2) + 1 = 0.$$

Тогда для x будем иметь

$$x = \frac{2v_0^2}{g (\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2)}.$$

Здесь x — горизонтальная дальность до цели. Подставляя это значение в уравнение траектории, найдем высоту цели над башней

$$\begin{aligned} y &= -\frac{2v_0^2}{g} \cdot \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_1)}{(\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2)^2} + \frac{2v_0^2}{g} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{(\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2)} = \\ &= -\frac{2v_0^2}{g} \cdot \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2}{(\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2)^2}. \end{aligned}$$

То есть высота башни равна

$$h = \frac{2v_0^2}{g} \cdot \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2}{(\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2)^2}.$$

Пример 4. Материальная точка описывает параболу $y^2 = 2px$ под действием двух равных по величине сил, одна из которых направлена к фокусу параболы и обратно пропорциональна расстоянию точки от этого фокуса. Другая сила параллельна оси абсцисс и направлена в положительную сторону этой оси. Показать, что точка движется по параболе равномерно и определить величину скорости точки.

Решение. Равнодействующая сила направлена по биссектрисе угла, образованного фокальным радиусом и диаметром параболы. Эта равнодействующая не дает проекции на касательную к параболе, и уравнение движения точки в проекции на касательную к траектории получает вид

$$m \frac{dv}{dt} = 0.$$

Отсюда следует, что $v = \text{const}$. Равнодействующая сила

$$F = \frac{mk}{r} 2 \sin \frac{\beta}{2} = \frac{mk}{r} \sqrt{2(1 - \cos \beta)} = \frac{mk}{r} \sqrt{2(1 - \sin \alpha)}$$

где k — коэффициент пропорциональности, а

$$r^2 = y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{(y^2 + p^2)^2}{(2p)^2}.$$

С другой стороны $\sin \alpha = \frac{2x - p}{2r}$, или

$$1 - \sin \alpha = 1 - \frac{2x - p}{2r} = \frac{2p^2}{y^2 + p^2}.$$

Поэтому будем иметь

$$F = \frac{4kmp^2}{\frac{3}{(y^2 + p^2)^2}}.$$

Записывая уравнение движения в проекции на нормаль к траектории, будем иметь $F = \frac{mv^2}{\rho}$ или

$$\frac{4kmp^2}{\frac{3}{(y^2 + p^2)^2}} = \frac{mv^2 p^2}{\frac{3}{(p^2 + y^2)^2}};$$

откуда $v^2 = 4k$ или $v = 2\sqrt{k}$.

При решении задач о движении материальной точки под действием центральных сил удобно пользоваться формулами Бине, которые позволяют по заданной траектории точки определять действующую на эту точку силу или скорость точки. В качестве примера рассмотрим следующую задачу.

Пример 5. Материальная точка массы m описывает окружность радиуса a , притягиваясь некоторой точкой A этой окружности. Найти силу притяжения и скорость точки в зависимости от расстояния точки от A .

Решение. Уравнение окружности в полярной системе координат имеет вид

$$r = 2a \cos \varphi, \text{ или } \frac{1}{r} = \frac{1}{2a \cos \varphi}.$$

Вычисляя производные, получим

$$\frac{d \frac{1}{r}}{d\varphi} = \frac{\sin \varphi}{2a \cos^2 \varphi}, \quad \frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\varphi^2} = \frac{\cos^2 \varphi + 2 \sin^2 \varphi}{2a \cos^3 \varphi}.$$

Тогда будем иметь

$$v = c \sqrt{\left(\frac{d \frac{1}{r}}{d\varphi} \right)^2 + \frac{1}{r^2}} = \frac{c}{2a \cos^2 \varphi} = \frac{2ca}{r^2},$$

где c — постоянная площадей.

$$F = -mc^2 \frac{1}{r^2} \left(\frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\varphi^2} + \frac{1}{r} \right) = -\frac{mc^2}{r^2 a \cos^3 \varphi} = -\frac{8mc^2 a^2}{r^5}.$$

Точка совершает движение под действием силы притяжения, обратно пропорциональной по величине пятой степени расстояния точки от притягивающего центра, причем скорость точки оказывается обратно пропорциональной квадрату расстояния точки от притягивающего центра. Если через v_0 обозначить величину скорости в наиболее удаленной точке траектории, то $c = 2v_0 a$, и будем иметь

$$v = \frac{4v_0 a^2}{r^2}, \quad F = -32 \frac{ma^4}{r^5}.$$

Задачи для самостоятельных упражнений

34. В вершине C равнобедренного прямоугольного треугольника ABC , в котором гипотенуза $AC = 2a$, находится точка M массы m , не имеющая начальной скорости. Каждая из трех вершин треугольника притягивает точку M силой, величина кото-

рой равна $F = k^2mr$, где r является расстоянием точки M от соответствующего центра. Найти траекторию точки и ее скорость.

35. Точка с массой m движется под действием силы отталкивания от неподвижного центра O , изменяющейся по закону $F = k^2mr$, где r — радиус-вектор точки. В начальный момент точка находилась в положении $M_0(a, 0)$ и имела скорость v_0 , направленную параллельно оси y . Определить траекторию точки.

36. Точка массы m движется в плоскости xOy под действием силы притяжения к началу координат, проекции которой на оси координат соответственно равны

$$X = -ma^2x, \quad Y = -mb^2y.$$

В начальный момент точка находится на оси Ox на расстоянии x_0 от начала координат, а ее скорость параллельна оси Oy и равна v_0 . Определить траекторию точки.

37. Материальные точки с одинаковыми массами притягиваются к неподвижному центру O силами, пропорциональными расстояниям точек от центра. Они начинают движение из одной и той же точки M_0 с различными начальными скоростями. Показать, что если концы векторов начальных скоростей будут расположены на одной и той же прямой, параллельной OM_0 , то все точки будут описывать эллипсы с одинаковой площадью.

38. Найти геометрическое место фокусов всех параболических траекторий, соответствующих одной и той же начальной скорости v_0 и всевозможным углам бросания тяжелой материальной точки.

39. Из орудия, находящегося в точке O , произвели выстрел под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0 . Одновременно из точки A , находящейся на расстоянии l по горизонтали от точки O , произвели выстрел вертикально вверх. Определить, с какой начальной скоростью v_1 надо выпустить второй снаряд, чтобы он встретился с первым снарядом. Сопротивление воздуха в расчет не принимать.

40. Из данной точки A одновременно бросают материальные точки с одинаковой по величине скоростью v_0 по различным направлениям, лежащим в одной вертикальной плоскости. Доказать, что если движение происходит в пустоте, то в каждый данный момент все точки расположатся на одной окружности.

41. Материальная точка весом p брошена с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту и движется под влиянием силы тяжести и сопротивления воздуха R . Определить дальнейшее движение точки и наибольшую высоту траектории, предполагая, что сопротивление воздуха пропорционально первой степени скорости и равно $R = kpv$. Здесь k — коэффициент пропорциональности.

42. Тяжелую материальную точку бросают в вертикальной плоскости (ось x направлена вертикально вверх) под углом α к горизонту из начала координат с начальной скоростью v_0 .

Какова должна быть эта начальная скорость и угол α , чтобы траектория точки в момент прохождения через заданную точку пространства M с координатами $x_1 y_1$ составляла бы угол β с горизонтом?

43. Определить дальность полета снаряда, если известно, что радиус кривизны траектории в наивысшей точке равен ρ , а угол наклона ствола орудия к горизонту равен α . Сопротивлением воздуха пренебрегаем.

44. Материальная точка притягивается к неподвижному центру O_1 и отталкивается от неподвижного центра O_2 силами, пропорциональными соответствующим расстояниям, причем коэффициенты пропорциональности для обоих центров одинаковы и равны k . Определить траекторию точки, если расстояние между центрами равно a , в начальный момент точка находится на середине расстояния между центрами O_1 и O_2 , а ее скорость v_0 направлена перпендикулярно к прямой, соединяющей эти центры.

45. Материальная точка притягивается к оси x силой, перпендикулярной к этой оси и пропорциональной массе точки и ее расстоянию от оси, причем коэффициент пропорциональности равен k^2 . Найти траекторию точки, если в начальный момент $x_0=0$, $y_0=h$, а начальная скорость точки равна v_0 и параллельна оси x . В каком месте траектории скорость точки достигает наибольшей величины?

46. Материальная точка движется под действием силы, параллельной оси ординат и обратно пропорциональной кубу расстояния точки от оси абсцисс. Показать, что при любых начальных условиях точка описывает коническое сечение.

47. Материальная точка отталкивается от центра O_1 и притягивается к центру O_2 силами, пропорциональными расстоянию, причем коэффициент пропорциональности в первом случае равен k_1 , а во втором равен k_2 . Показать, что точка описывает эллипс, гиперболу или параболу в зависимости от того, будет ли отношение $\frac{k_1}{k_2}$ меньше, больше или равно единице.

48. Материальная точка с массой m притягивается каждым из двух неподвижных центров O_1 и O_2 , расположенных на расстоянии a один от другого, силами, пропорциональными расстояниям до соответствующих центров с коэффициентом пропорциональности c . Определить условия, при которых точка совершает прямолинейное движение (малые колебания) и найти период колебаний.

49. Материальная точка массы m описывает эллипс с полуосями a и b под действием силы притяжения к его центру. Когда точка находится в конце большей полуоси, ее скорость равна v_0 . Найти силу притяжения F как функцию расстояния точки от притягивающего центра.

50. Под действием центральной силы материальная точка описывает лемнискату

$$r^2 = a^2 \cos 2\varphi,$$

причем полюс совпадает с центром силы. Определить силу, действующую на эту точку, если известно, что в начальный момент $\varphi=0$, $r=1$ и скорость точки равна v_0 .

51. Материальная точка движется под действием центральной силы. Дана по величине и направлению скорость этой точки в трех ее заданных положениях. Найти при помощи геометрических построений центр силы.

52. Материальная точка массы m притягивается к неподвижному центру силой $F = \frac{10m}{r^3}$, где r — расстояние точки от притягивающего центра. В начальный момент полярный угол $\varphi_0=0$, $r_0=1$, $v_0=2$, причем начальная скорость составляет с радиусом-вектором точки угол в 45° . Найти уравнения движения точки в полярных координатах и определить траекторию точки.

53. Зная наибольшее удаление (апогейное расстояние) спутника от Земли и период его обращения, найти эксцентриситет и минимальное расстояние спутника от Земли.

54. Материальная точка массы m описывает эллипс, большая полуось которого равна a , под действием силы ньютоновского притяжения $F = \frac{\mu m}{r^2}$, направленной к фокусу этого эллипса. Определить скорость точки в зависимости от ее расстояния до центра притяжения и величины большой полуоси эллипса.

55. Материальная точка под действием силы ньютоновского притяжения к данному центру бросается из одного и того же места в различных направлениях с одинаковой по величине скоростью. Показать, что геометрическим местом центров эллиптических орбит будет окружность.

56. Материальная точка движется под действием центральной силы, зависящей только от расстояния точки до притягивающего центра, причем радиус кривизны траектории изменяется обратно пропорционально кубу расстояния касательной от центра силы. Определить силу, действующую на точку.

ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ ПО КРИВОЙ И ПО ПОВЕРХНОСТИ

При исследовании движения материальной точки по кривой положение точки определяется всего одним параметром, а следовательно и для определения движения достаточно знать всего одно уравнение движения, в которое не входит лишних неизвестных. Такое уравнение может быть получено либо при помощи теоремы живых сил, либо из естественных уравнений движения. Другие уравнения дают возможность определять реакции связей.

При исследовании движения точки по поверхности мы имеем дело уже с двухпараметрической задачей и одного уравнения уже оказывается недостаточно для определения движения материальной точки. Тем не менее, желательно и в этих случаях научиться составлять уравнения движения так, чтобы в них не входили лишние неизвестные. Это удается далеко не всегда. Чаще всего к желаемому результату приводят теоремы живых сил и момента количества движения. В некоторых случаях полезно применять естественные уравнения движения точки. Упрощения получаются за счет симметрии поверхности, если такая может быть обнаружена. Наибольшие затруднения представляет вопрос определения реакций связи. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Тяжелое колечко массы m надето на гладкую вертикально расположенную проволочную окружность радиуса r . Колечко может свободно передвигаться по ней. В начальный момент оно находится в самой нижней точке окружности и ему сообщена начальная скорость v_0 . Найти условия, при которых колечко совершит полный оборот по окружности и определить давление на нее колечка, когда оно находится в самой верхней ее точке.

Решение. На точку действует только одна активная сила — сила тяжести P , которая является консервативной силой и обладает силовой функцией. Поэтому для определения движения точки можно применить теорему живых сил. Эта теорема сразу дает первый интеграл — интеграл живых сил. Задавая положение точки углом φ , который ее радиус составляет с опущенной вниз вертикалью, интеграл живых сил запишем в виде

$$\frac{mv^2}{2} = mgr \cos \varphi + h,$$

где r — радиус окружности, h — произвольная постоянная, определяемая из начальных условий. Подставляя сюда начальные значения φ и v , будем иметь

$$h = \frac{mv_0^2}{2} - mgr.$$

Тогда для скорости точки получим уравнение

$$v^2 = v_0^2 - gr(1 - \cos \varphi).$$

Чтобы колечко совершило полный оборот, скорость в верхней точке окружности должна быть отлична от нуля. Отсюда получаем условие для определения начальной скорости точки

$$v_0^2 - 2gr \geq 0, \text{ или } v_0 \geq \sqrt{2gr}.$$

Давление колечка в верхней точке окружности определится из уравнения

$$\frac{mv^2}{r} = mg - N,$$

откуда

$$N = mg - \frac{mv^2}{r}.$$

Таким образом, будем иметь после подстановки v^2

$$N = 3mg - \frac{mv_0^2}{r}.$$

Здесь положительное значение реакции N получает тогда, когда она направлена вверх.

Пример 2. По внешней стороне параболы с горизонтальной осью, уравнение которой $y^2 = 2x$, скатывается без трения и без начальной скорости шарик, начальная ордината которого $y_0 = 2$. В какой точке шарик соскочит с параболы?

Решение. Пусть положительная ось Oy направлена вертикально вверх. Движение шарика будет определяться интегралом живых сил, который имеет вид

$$\frac{mv^2}{2} = -mgy + h,$$

постоянная живых сил h при заданных начальных условиях будет равна $h = 2mg$. Тогда скорость определится уравнением

$$v^2 = 2g(2 - y).$$

Для определения момента отрыва шарика от параболы воспользуемся естественными уравнениями движения. В проекции на нормаль будем иметь

$$\frac{mv^2}{\rho} = mg_n - N.$$

В момент отрыва N обращается в нуль. Для определения радиуса кривизны

$$\rho = \frac{(1 + y_x'^2)^{\frac{3}{2}}}{\|y_{xx}''\|}$$

воспользуемся уравнением кривой. Будем иметь

$$y' = \frac{1}{y}, \quad y'' = -\frac{1}{y^3}, \quad \rho = (1 + y^2)^{\frac{3}{2}}$$

$mg_n = mg \cos \alpha$, где $\cos \alpha$ — косинус угла наклона касательной к параболе

$$\cos \alpha = \frac{dx}{ds} = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}.$$

Подставляя эти значения, будем иметь

$$\frac{mv^2}{(1+y^2)^2} = mg \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}.$$

После подстановки значения v^2 и сокращений приходим к уравнению

$$y^3 + 3y - 4 = 0.$$

Нетрудно видеть, что единственным действительным корнем этого уравнения является значение $y=1$. Это и будет то значение y , при котором точка отрывается от параболы.

Пример 3. Тяжелый шарик, масса которого равна m , низан на горизонтальную проволочную окружность радиуса r с коэффициентом трения f . Определить, какую начальную скорость v_0 нужно сообщить шарiku, чтобы он сделал по окружности один полный оборот.

Решение. На материальную точку действует только одна активная сила — сила тяжести. Кроме нее на шарик действуют пассивные силы — нормальная сила реакции и сила трения. Уравнения движения в проекциях на естественные оси координат получают вид

$$m \frac{dv}{dt} = -F_{\text{тр}}, \quad \frac{mv^2}{r} = N_1, \quad 0 = mg - N_2, \quad F_{\text{тр}} = f \sqrt{N_1^2 + N_2^2},$$

где N_1 и N_2 — горизонтальная и вертикальная составляющие нормальной реакции

$$N = \sqrt{N_1^2 + N_2^2} = \frac{m}{r} \sqrt{v^4 + g^2 r^2}.$$

Первое уравнение движения после исключений получает вид

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{f}{r} \sqrt{v^4 + g^2 r^2},$$

или

$$v \frac{dv}{ds} = -\frac{f}{r} \sqrt{v^4 + g^2 r^2}.$$

Разделяя переменные, отсюда будем иметь

$$\frac{dv^2}{\sqrt{v^4 + g^2 r^2}} = -\frac{2f}{r} ds,$$

и после интегрирования получим

$$\ln \frac{v^2 + \sqrt{g^2 r^2 + v^4}}{gr} = -2 \frac{fs}{r} + \ln c.$$

Здесь c — произвольная постоянная, которая определяется из начальных условий, так что

$$\ln c = \ln \frac{v_0^2 + \sqrt{g^2 r^2 + v_0^4}}{gr}.$$

При $s = 2\pi r$ v обращается в нуль, поэтому

$$0 = -4\pi f + \ln \frac{v_0^2 + \sqrt{g^2 r^2 + v_0^4}}{gr}.$$

Это уравнение легко преобразуется к виду

$$v_0^4 - 2v_0^2 gre^{4\pi f} + g^2 r^2 e^{8\pi f} = g^2 r^2 + v_0^4,$$

откуда получаем

$$v_0^2 = \frac{gr}{2} (e^{4\pi f} - e^{-4\pi f}) = gr \operatorname{sh} (4\pi f).$$

Пример 4. Тяжелая материальная точка движется по внутренней поверхности прямого кругового конуса, вершина которого обращена вниз, а ось симметрии вертикальна. Угол при вершине равен 2α . В начальный момент расстояние точки от вершины конуса равно a , начальная скорость равна v_0 и направлена перпендикулярно к образующей конуса. Определить траекторию точки и давление, которое она оказывает на поверхность конуса.

Решение. Положение точки на поверхности конуса задается двумя координатами. Такими координатами могут быть расстояние точки от вершины конуса r и угол φ , который образует вертикальная плоскость (π) , проходящая через ось симметрии и точку M с неподвижной плоскостью xOz . Рассматривая движение точки как сложное, состоящее из прямолинейного относительного движения в плоскости (π) и переносного вращения вместе с плоскостью (π) вокруг оси z , для составляющих скорости будем иметь

$$v_r = \frac{dr}{dt}, \quad v_e = r \frac{d\varphi}{dt} \sin \alpha.$$

На рассматриваемую точку действует только сила тяжести и нормальная реакция поверхности. Поэтому будет существовать интеграл живых сил

$$\frac{m}{2} \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \sin^2 \alpha \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] = -mgr \cos \alpha + h,$$

где h — постоянная живых сил.

Действующие силы не создают момента относительно вертикальной оси z , а потому будет иметь место интеграл площадей, который легко преобразуется к виду

$$r^2 \sin^2 \alpha \frac{d\varphi}{dt} = c.$$

Здесь c — постоянная площадей. Постоянные h и c выражаются через начальные данные

$$h = \frac{mv_0^2}{2} + mga \cos \alpha, \quad c = v_0 a \sin \alpha.$$

Полученные два первых интеграла позволяют определить траекторию точки на поверхности конуса. Для этого из полученных уравнений необходимо исключить время. Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{m}{2} [(dr)^2 + r^2 \sin^2 \alpha (d\varphi)^2] = & \left(-mgr \cos \alpha + \right. \\ & \left. + \frac{mv_0^2}{2} + mga \cos \alpha \right) \frac{r^4 \sin^2 \alpha}{v_0^2 a} (d\varphi)^2. \end{aligned}$$

После разделения переменных будем иметь

$$\begin{aligned} (dr)^2 = & \left(-2 \frac{gr^5 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{v_0^2 a} + v_0^2 \frac{r^4 \sin^2 \alpha}{v_0^2 a} + 2ga \frac{r^4 \sin^2 \alpha}{v_0^2 a^2} - \right. \\ & \left. - r^2 \sin^2 \alpha \right) (d\varphi)^2, \end{aligned}$$

откуда, интегрируя, получим неявное уравнение траектории:

$$\frac{\sin^2 \alpha}{v_0^2 a} \varphi = \int \frac{dr}{r \sqrt{v_0^2 (r^2 - a^2) + 2gr^2 (a - r \cos \alpha)}} + c.$$

Для определения давления точки на поверхность конуса можно было бы воспользоваться естественными уравнениями движения, но такой путь оказывается сложным в данной задаче. Можно еще воспользоваться векторным уравнением движения

$$m\bar{j} = \bar{F} + \bar{N}.$$

Давление точки на поверхность равно по величине и противоположно по направлению силе реакции N , которая зависит от действующих активных сил и от величины и направления ускорения точки. Для определения давления требуется знать проекцию ускорения точки на нормаль к поверхности конуса. При

определении ускорения точки можно заметить, что относительное ускорение направлено по образующей конуса, а в переносном движении точка движется по окружности, плоскость которой перпендикулярна к оси z и имеет касательную и нормальную составляющие j_{e_1} и j_{e_2} . Нормальная составляющая j_{e_2} направлена ортогонально к оси симметрии конуса, а по величине равна

$$j_{e_2} = \varphi'^2 r \sin \alpha.$$

Добавочное ускорение коллинеарно с направлением ускорения j_{e_1} и численно равно $j' = 2\varphi' r' \sin \alpha$. На нормаль к поверхности дает отличную от нуля проекцию только составляющая ускорения j_{e_2} . Поэтому, проектируя уравнение движения на нормаль к поверхности конуса, будем иметь

$$m\varphi'^2 r \sin \alpha \cos \alpha = -mg \sin \alpha + N,$$

откуда

$$N = m(\varphi'^2 r \sin \alpha \cos \alpha + g \sin \alpha).$$

Подставляя значение φ' из интеграла площадей

$$\varphi'^2 = \frac{v_0^2 a^2}{r^4 \sin^2 \alpha},$$

получим значение для

$$N = m \sin \alpha \left(\frac{v_0^2 a^2 \cos \alpha}{r^3 \sin^2 \alpha} + g \right).$$

Пример 5. Тяжелая материальная точка вынуждена оставаться на совершенно гладкой плоскости, которая равномерно вращается вокруг горизонтальной оси, расположенной в самой плоскости. В начальный момент точка находится на оси вращения, а ее скорость направлена вдоль оси вращения и равна v_0 . Определить закон движения точки.

Решение. Выберем в качестве системы отсчета прямоугольную декартову систему координат, у которой ось Ox совпадает с осью вращения, начало совпадает с начальным положением точки, а ось Oz направлена вертикально вверх. Уравнение вращающейся плоскости запишется в виде

$$y \sin \omega t - z \cos \omega t = 0.$$

Для определения движения точки применим уравнения со множителями связи. Будем иметь

$$mx'' = 0, \quad my'' = \lambda \sin \omega t,$$

$$mz'' = -mg - \lambda \cos \omega t.$$

Пусть положение точки в плоскости определяется параметрами ξ и η , так что

$$\xi = x, \quad y = \eta \cos \omega t, \quad z = \eta \sin \omega t.$$

Тогда

$$\begin{aligned} y'' &= \eta'' \cos \omega t - 2\eta' \omega \sin \omega t - \omega^2 \eta \cos \omega t, \\ z'' &= \eta'' \sin \omega t + 2\eta' \omega \cos \omega t - \omega^2 \eta \sin \omega t. \end{aligned}$$

Исключая λ из уравнений движения, будем иметь

$$\eta'' - \omega^2 \eta = -g \sin \omega t, \quad \xi'' = 0.$$

Общее решение этой системы имеет вид

$$\xi = c_1 t + c_2, \quad \eta = c_3 e^{\omega t} + c_4 e^{-\omega t} + \frac{g}{\omega^2} \sin \omega t,$$

коэффициенты c_1 , c_2 , c_3 и c_4 определяются из начальных условий. После определения этих коэффициентов получим

$$\xi = v_0 t, \quad \eta = \frac{g}{2\omega^2} (-e^{\omega t} + e^{-\omega t}) + \frac{g}{\omega} \sin \omega t.$$

Для вычисления сил реакций связей рассмотрим одно из уравнений движения, например,

$$m y'' = \lambda \sin \omega t.$$

Подставляя сюда значение y , выраженное через η , получим

$$m [(e^{\omega t} + e^{-\omega t}) - 4\omega \cos \omega t] g = \lambda,$$

где λ и является нормальной реакцией связи.

Пример 6. Материальная точка весом p подвешена при помощи двух одинаковых нитей к двум опорам, находящимся на одном и том же горизонтальном уровне, причем угол наклона каждой нити к вертикали равен α . Внезапно одну из нитей перерезают. Доказать, что натяжение другой нити мгновенно изменится в отношении $1 : 2 \cos^2 \alpha$.

Решение. В положении равновесия имеет место условие

$$2T_0 \cos \alpha = mg.$$

После обрыва нити уравнение движения точки в проекции на нормаль получит вид

$$\frac{mv^2}{\rho} = -mg \cos \alpha + T = 0,$$

откуда будем иметь

$$T_0 : T = 1 : 2 \cos^2 \alpha.$$

Пример 7. Материальная точка совершает колебания на гладкой параболе с вертикальной осью, изменяя направление

своего движения на концах хорды, проходящей через фокус параболы перпендикулярно к оси параболы. Найти давление точки на параболу в самой нижней точке.

Решение. Запишем уравнение параболы в виде $x^2 = 2ky$. Движение материальной точки происходит в соответствии с интегралом живых сил

$$\frac{mv^2}{2} = -mgy + h,$$

где постоянная h определяется из начальных условий $h = mg \frac{k}{2}$. Тогда скорость в нижней точке параболы будет определяться из равенства $v_1^2 = gk$, а давление определится из уравнения

$$N = mg + \frac{mv^2}{\rho} = mg + \frac{mgk}{k} = 2mg.$$

Пример 8. По лемнискате, уравнение которой $r^2 = 2a^2 \sin 2\varphi$, скользит вниз от вершины O весома материальная

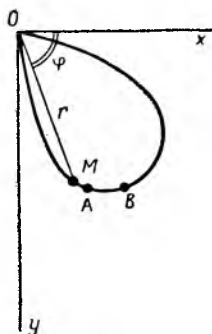


Рис. 60

точка m , начиная движение без начальной скорости. Определить время движения до точки M в зависимости от угла φ при отсутствии трения.

Решение. (См. рис. 60). Движение точки можно определить из интеграла живых сил

$$\frac{mv^2}{2} = mgy + h.$$

В начальный момент $y=0$ и $v=0$. Поэтому $h=0$. Тогда скорость точки определится из условия

$$v^2 = 2gy = 2gr \sin \varphi.$$

Исключая отсюда r , получим

$$v^2 = 2ga \sqrt{2 \sin 2\varphi} \sin \varphi.$$

Движение точки происходит при уменьшении угла φ , поэтому, если $s=s(\varphi)$, то скорость $\frac{ds}{dt}$ будет отрицательной, и будем иметь

$$\frac{ds}{dt} = -\sqrt[4]{8g^2a^2 \sin^2 \varphi \sin 2\varphi}.$$

Но

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2},$$

поэтому

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{2a^2 \frac{\cos^2 2\varphi}{\sin 2\varphi} + 2a^2 \sin 2\varphi} \frac{d\varphi}{dt}.$$

Дифференциальное уравнение движения получает вид

$$\sqrt{2a^2 \frac{\cos^2 2\varphi}{\sin 2\varphi} + 2a^2 \sin 2\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = -\sqrt[4]{8g^2a^2 \sin^2 \varphi \sin 2\varphi},$$

или, после разделения переменных,

$$dt = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{g}} \operatorname{ctg}^{-\frac{3}{4}} \varphi \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi}.$$

Отсюда легко определяется время

$$T = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} \operatorname{ctg}^{-\frac{3}{4}} \varphi \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi} = 2 \sqrt{\frac{a}{g}} \sqrt[4]{\operatorname{ctg} \varphi}.$$

Пример 9. Точка вынуждена оставаться на параболы $y^2=4x$ и движется по этой параболы без воздействия внешних сил, находясь в начальный момент в положении $x_0=y_0=4$ и имея начальную скорость $v_0=5$, направленную к вершине параболы. Через сколько времени точка достигнет вершины параболы?

Решение. Из интеграла живых сил следует, что точка движется по параболы с постоянной скоростью $v_0=5$. Эту скорость можно определить из условия

$$\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dy} \frac{dy}{dt} = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \frac{dy}{dt},$$

где $\frac{dx}{dy} = \frac{y}{2}$. Так как координата y уменьшается, будем иметь

$$\frac{1}{2} \sqrt{4 + y^2} \frac{dy}{dt} = -5, \text{ откуда}$$

$$T = \frac{1}{10} \int_0^4 \sqrt{4+y^2} dy.$$

$$\int_0^4 \sqrt{4+y^2} dy = \left. \frac{y}{2} \sqrt{4+y^2} + 2 \ln(y + \sqrt{4+y^2}) \right|_0^4,$$

и тогда

$$T = \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{5} \ln(2 + \sqrt{5}).$$

Задачи для самостоятельных упражнений

57. Рассматривая всевозможные хорды окружности, плоскость которой вертикальна, начинающиеся в самой нижней точке окружности, доказать, что падение тяжелой точки вдоль любой хорды при отсутствии трения совершается в течение одного и того же времени.

58. Камень весом p , привязанный к нити длиной l , описывает окружность в вертикальной плоскости. Определить наименьшую величину угловой скорости камня, при которой происходит разрыв нити, если ее сопротивление разрыву равно T единиц силы.

59. Автомобиль весом Q кг движется по выпуклому мосту со скоростью v м/сек. Радиус кривизны в середине моста равен ρ . Определить давление автомобиля на мост в момент прохождения высшей точки моста.

60. Шарик весом p граммов, привязанный к нерастяжимой нити, скользит по гладкой горизонтальной плоскости. Другой конец нити втягивают с постоянной скоростью a в отверстие, сделанное на плоскости. Определить движение шарика и натяжение нити T , если известно, что в начальный момент нить расположена по прямой, расстояние между шариком и отверстием равно R , а проекция начальной скорости шарика на перпендикуляр к направлению нити равна v_0 .

61. Груз M массы m вынужден скользить по окружности, плоскость которой вертикальна, под действием силы тяжести и пружины, другой конец которой закреплен в верхней точке окружности. В нерастянутом состоянии пружина имеет длину $\frac{r}{2}$, где r — радиус окружности, а ее коэффициент жесткости равен k^2 . В начальный момент груз находится на расстоянии r от верхней точки окружности, а его скорость равна нулю. Определить давление груза на окружность в тот момент, когда он находится в нижней точке окружности. Какова должна быть жесткость пружины, чтобы давление в нижней точке равнялось нулю?

62. Гладкое тяжелое кольцо M весом Q может скользить без трения по дуге окружности радиуса R , расположенной в вертикальной плоскости. К кольцу привязана упругая нить, продетая в отверстие в самой нижней точке дуги окружности и закрепленная в некоторой точке A , так что, когда кольцо находится в самой нижней точке окружности, натяжение нити равно нулю. Определить давление, производимое кольцом на окружность в зависимости от его положения, если коэффициент упругости нити равен k^2 . В начальный момент кольцо находится в самой верхней точке окружности и ему сообщена ничтожно малая начальная скорость. Положение кольца определяется углом φ , который нить образует с горизонтальной прямой.

63. Груз весом P подвешен на нити длиной l к неподвижной точке O . В начальный момент груз отклоняется от вертикали на угол φ_0 и ему сообщается начальная скорость v_0 перпендикулярно к нити вниз. Определить натяжение нити в наинизшем положении и условия, при которых груз будет вращаться по окружности.

64. Груз массы m подвешен на нити длины l к неподвижной точке O . В начальный момент груз находится в наинизшей точке и ему сообщена горизонтальная скорость $v_0 = 2\sqrt{gl}$. Определить дальнейшее движение груза.

65. Положение материальной точки на вертикальной окружности определяется углом φ , который радиус окружности R образует с вертикалью. В начальный момент точка находится в наивысшем положении и ей сообщена начальная горизонтальная скорость v_0 . Определить значение угла φ , при котором точка отрывается от окружности, предполагая, что окружность гладкая.

66. По рельсам, расположенным в вертикальной плоскости и образующим петлю $CDEF$ радиуса r , скатывается тележка. Движение начинается без начальной скорости из точки A , находящейся на высоте h над низшей точкой C петли. Участок пути AB произвольной формы, часть BC — горизонтальна. Найти, пренебрегая сопротивлениями, какова должна быть высота h , чтобы тележка могла описать окружность $CDEF$.

67. Желоб имеет форму окружности радиуса R , которая установлена в вертикальной плоскости. В начальный момент в низшую точку желоба кладут шарик и сообщают ему горизонтальную скорость v_0 . Какова должна быть эта скорость, чтобы шарик получил колебательное движение математического маятника?

68. Шарик скатывается под действием силы тяжести по внутренней поверхности негладкой неподвижной полусферы радиуса r , выходя без начальной скорости из конца горизонтального диаметра. Зная коэффициент трения f , найти скорость, с которой шарик достигает самой нижней точки полусферы.

69. Материальная точка спускается под действием силы тяжести по гладкой кривой, расположенной в вертикальной плоскости. Известно, что точка удаляется от горизонтали, проходящей

через ее начальное положение с постоянной скоростью c . Найти эту кривую.

70. Точка M весом Q может скользить без трения по дуге параболы $y=ax^2$ (ось y направлена вертикально вверх). Она отталкивается от оси параболы горизонтальной силой $F=m\omega^2x$. В начальный момент точка занимает наинизшее положение и имеет горизонтальную скорость v_0 . Определить, на какую высоту поднимется точка.

71. Тяжелое колечко падает по пруту, согнутому в форме параболы с вертикальной осью. Определить давление N колечка на прут в нижней точке, предполагая, что трение отсутствует. Уравнение параболы $x^2=2y$, причем ось y направлена вертикально вверх. Координаты начального положения колечка $x_0=2$, $y_0=2$, масса равна m .

72. Точка M весом Q может перемещаться по гиперболе, выраженной уравнением $xy=a^2$ и расположенной в вертикальной плоскости (ось y направлена вертикально вверх). Какую горизонтальную силу F притяжения к оси Oy нужно приложить к данной точке, чтобы она оставалась в равновесии в любом положении на гиперболе, а также каково давление N , оказываемое точкой на гиперболу?

73. Тяжелая материальная точка с массой m отталкивается от вертикальной оси Oy горизонтальной силой F , обратно пропорциональной кубу расстояния точки от оси, $F=\frac{ma^2}{x^3}$. Найти кривую, на которой эта точка находилась бы в безразличном равновесии, и нормальное давление точки на кривую.

74. Шарик массы m , к которому привязана резинка длины l (длина в нерастяннутом состоянии), нанизывают на прямую проволоку, образующую угол $\alpha > \varphi$ с горизонтом, где φ — угол трения шарика о проволоку. Свободный конец резинки прикрепляют к этой же проволоке на расстоянии l кверху от шарика, и затем шарик отпускают без начальной скорости. Найти закон движения шарика до его первой остановки, если сила натяжения резинки пропорциональна ее относительному удлинению, причем коэффициент пропорциональности равен c .

75. Шарик весом P скатывается без трения внутри эллипса с полуосями a и b , причем малая ось эллипса вертикальна. Определить давление шарика на эллипс в самой нижней точке, если шарик начинает движение без начальной скорости из конца большой оси эллипса.

76. Шарик весом p скатывается по внешней стороне гладкой параболы с вертикальной осью, выходя из вершины параболы с некоторой заданной начальной скоростью v_0 . Доказать, что давление шарика на параболу изменяется обратно пропорционально радиусу кривизны параболы.

77. Материальная точка движется без трения под действием

силы тяжести по нижней ветви астроида, уравнение которой имеет вид

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = (2r)^{\frac{2}{3}}.$$

Найти, в течение какого времени точка, выходя с ничтожно малой начальной скоростью из положения $(-2r, 0)$, достигает положения $(0, -2r)$.

78. Циклоида расположена в вертикальной плоскости так, что ось ее вертикальна, а вогнутость в вершине A обращена вверх. Материальную точку M помещают в некотором месте циклоиды, причем $AM = s_0$ и сообщают ей скорость v_0 , направленную по касательной к циклоиде вверх. Найти закон движения точки, предполагая, что на точку действует только сила тяжести.

79. Точка массы m движется по цепной линии

$$y = \frac{a}{2} (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}) = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$$

под действием силы отталкивания, параллельной оси Oy , направленной от оси Ox и равной по величине kmy . В момент $t=0$, $x=1$, $x'=1$. Определить давление N точки на кривую и движение точки при $k=1$ и $a=1$, предполагая, что сила тяжести отсутствует. Радиус кривизны цепной линии равен $\frac{y^2}{a}$.

80. Найти такую кривую, расположенную в вертикальной плоскости, чтобы два шарика, помещенных в точке O этой кривой, двигаясь без трения под действием силы тяжести, приходили одновременно в другую ее точку, причем один шарик должен скатываться по кривой, а другой по ее хорде. Начальные скорости шариков равны нулю (рис. 61).

81. Материальная точка, весом которой можно пренебречь, вынуждена оставаться на поверхности круглого цилиндра радиуса r . Точка получила начальную скорость v_0 , направленную под углом φ к образующей цилиндра. Найти движение точки, если коэффициент трения между точкой и поверхностью цилиндра равен f .

82. Материальная точка движется с начальной скоростью v_0 по поверхности шероховатого неподвижного шара радиуса a , притягиваясь к его центру силой F по закону Ньютона $(F = \frac{km}{r^2})$.

Какой путь пройдет точка до остановки, если коэффициент трения равен f ?

83. Материальная точка, находящаяся под действием силы тяжести и вынужденная оставаться на поверхности неподвижного гладкого круглого цилиндра радиуса r с вертикальной осью, получила начальную горизонтальную скорость v_0 . Показать, что если развернуть цилиндр на плоскость, то траектория этой точки превратится в параболу.

84. Сферический маятник состоит из нити OM длины l , прикрепленной одним концом к неподвижной точке O , и тяжелой материальной точки M весом P , прикрепленной к другому концу нити. Точку M отклоняют от положения равновесия так, что ее координаты при $t=0$, $x=x_0$, $y=0$, и сообщают ей начальную скорость $\dot{x}_0=0$, $\dot{y}_0=v_0$, $\dot{z}_0=0$.

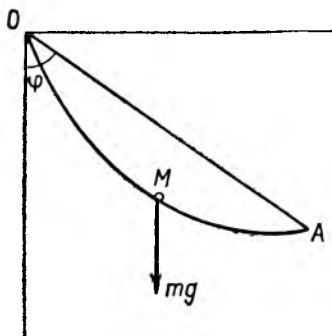


Рис. 61

Определить, при каком соотношении начальных условий точка M будет описывать окружность в горизонтальной плоскости и каково будет время обращения точки M по этой окружности.

85. Материальная точка с массой m движется по внутренней поверхности круглого цилиндра радиуса r . Считая поверхность цилиндра абсолютно гладкой, ось цилиндра вертикальной и учитывая действие силы тяжести, определить давление точки на цилиндр. Начальная скорость точки равна по величине v_0 и составляет угол α с горизонтом.

ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ ОТНОСИТЕЛЬНО ПОДВИЖНОЙ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА

До сих пор, определяя движение материальной точки, мы предполагали, что имеется некоторая неподвижная система отсчета. В этой системе задаются силы, действующие на материальную точку, и движение точки относительно системы отсчета определяется вторым законом Ньютона. Кроме того было установлено, что второй закон Ньютона определяет движение точки относительно любой инерциальной системы отсчета. При этом нигде не говорилось о том, как обнаружить такую инерциальную систему отсчета.

Переходя к изучению конкретных явлений, мы очень быстро убедимся, что движение всегда приходится определять относительно таких систем отсчета, которые сами совершают движение и не являются инерциальными системами. Так, изучая падение материальной точки вблизи поверхности Земли, мы обычно определяем движение относительно системы отсчета, связанной с Землей. Но такая система вместе с Землей в свою очередь совершает сложное

движение в пространстве. Она вращается вокруг земной оси и вместе с Землей вращается вокруг Солнца.

И все же можно потребовать, чтобы движение относительно таких подвижных систем отсчета определялось бы теми же законами, которые действуют и в неподвижной системе. Эта инвариантность законов движения будет связана с определением силы. Так как в различных системах координат точка будет иметь различное ускорение, то и сила, определяющая это ускорение, должна быть в них различной. Как показывается в курсах теоретической механики, при переходе от одной системы отсчета к другой к действующим на материальную точку силам необходимо добавлять силы Кориолиса. Силы Кориолиса являются реальными силами, определяющими движение материальной точки относительно некоторой системы отсчета. Сама же система теперь может рассматриваться как неподвижная. При этом, очевидно, оказываются справедливыми все законы динамики материальной точки.

Силы Кориолиса можно разделить на две группы. К первой относится сила Кориолиса от переносного ускорения $F_e = -mj_e$, где j_e — переносное ускорение точки, и сила Кориолиса от добавочного ускорения точки $F_k = -mj'$ или

$$F_k = -2m[\omega v_r],$$

где ω — угловая скорость вращения подвижной системы отсчета, а v_r — относительная скорость движения материальной точки.

При решении задач на относительное движение точки особенно внимательно нужно следить за определением сил, действующих на точку в данной системе координат. Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 1. Математический маятник подвешен внутри вагона, движущегося по прямолинейным рельсам с постоянным ускорением a . Определить период колебаний маятника, предполагая, что нить, на которой подвешен маятник, нерастяжима и имеет длину l (рис. 62).

Решение. Маятник совершает колебания относительно системы отсчета, связанной с движущимся вагоном. При изучении движения относительно такой системы к действующим силам необходимо добавить силы инерции Кориолиса. Подвижная система, связанная с вагоном, движется поступательно, а потому сила Кориолиса от добавочного ускорения будет равна нулю. Сила Кориолиса от переносного ускорения будет равна $j_e = -ma$, так как система движется с ускорением. Добавляя силу Кориолиса к силе тяжести mg , получим результирующую силу Φ , действующую на точку в подвижной системе отсчета, величина которой определяется равенством

$$\Phi = m\sqrt{g^2 + a^2},$$

а направление ее составляет угол α с вертикалью. Величина угла определяется равенством

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{g}.$$

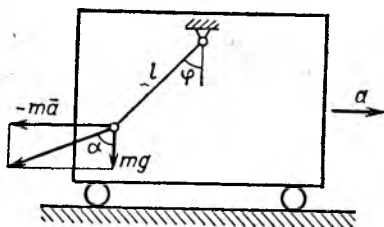


Рис. 62

Нетрудно видеть, что в рассматриваемой системе координат на точку действует постоянная по величине и по направлению сила Φ . Ранее мы видели, что под действием такой силы маятник совершает колебательное движение около положения равновесия, в котором направление нити совпадает с направлением силы, а период колебаний определяется формулой

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{a^*}},$$

где a^* — ускорение, сообщаемое силой свободной материальной точке. В нашем случае это ускорение $a^* = \sqrt{g^2 + a^2}$, поэтому искомый период

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2 + a^2}}}.$$

Пример 2. Прямолинейная трубка OA вращается в вертикальной плоскости вокруг горизонтальной оси O с постоянной угловой скоростью ω . В трубке находится тяжелый шарик массы m , прикрепленный к пружине, другой конец которой закреплен в точке O . Найти закон движения шарика относительно трубки, считая упругую силу пружины пропорциональной ее удлинению с коэффициентом пропорциональности c . В начальный момент трубка горизонтальна, а относительная скорость шарика равна нулю. Пружина в начальный момент имеет естественную длину l_0 . Рассмотреть случай $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$.

Решение. Движение шарика происходит относительно вращающейся трубки, поэтому естественно и подвижную систему отсчета связать с трубкой. Направим ось Ox по направлению трубки. В подвижной системе на шарик будет действовать кроме силы тя-

жести и упругой силы еще силы Кориолиса. Сила Кориолиса от переносного ускорения будет направлена вдоль трубки, а по величине будет равна

$$F_e = m\omega^2 x.$$

Сила же Кориолиса от добавочного ускорения F_k будет направлена перпендикулярно трубке в сторону, противоположную вращению трубки, а по величине будет равна

$$F_k = 2m\omega x',$$

где x' — скорость точки.

Уравнение движения в проекции на ось Ox получит теперь вид

$$mx'' = -c(x - l_0) + m\omega^2 x - mg \sin \omega t,$$

или

$$x'' = -n^2 x + l_0 k^2 - g \sin \omega t,$$

где

$$n^2 = \frac{c}{m} - \omega^2, \quad k^2 = \frac{c}{m}.$$

При заданных начальных условиях будем иметь

$$x = \frac{l_0}{n^2} (k^2 - \omega^2 \cos nt) + \frac{g}{\omega^2 - n^2} \left[\sin \omega t - \frac{\omega}{n} \sin nt \right].$$

В случае $\omega^2 = \frac{c}{m}$ n обращается в нуль, и тогда получим другое решение

$$x = -\frac{g}{\omega} t + l_0 + \frac{l_0 k^2}{2} t^2 + \frac{g}{\omega^2} \sin \omega t.$$

Пример 3. Окружность радиуса r , плоскость которой вертикальна, вращается вокруг своего вертикального неподвижного диаметра с постоянной по величине угловой скоростью ω_0 . По окружности может свободно скользить тяжелая материальная точка массы m . Определить положение относительного равновесия материальной точки и найти период малых колебаний точки около положения устойчивого равновесия.

Решение. Движение точки определяется относительно вращающейся окружности, поэтому целесообразно подвижную систему отсчета связать с окружностью. Выберем начало подвижной системы координат в центре окружности, ось y направим вертикально вверх, а за ось x примем горизонтальный диаметр окружности. В этой системе движение точки будет определяться двумя силами: силой тяжести mg и силой Кориолиса F_e от переносного ускорения, величина которой равна $m\omega^2 x$ и которая направлена от оси вращения. Сила Кориолиса от добавочного ускорения ортогональна к траектории точки и не влияет на характер движения точки.

Сила тяжести и сила Кориолиса F_l допускают существование силовой функции

$$U = -mgy + \frac{m\omega^2 x^2}{2}.$$

Если ввести угол φ , определяющий отклонение точки от вертикального диаметра (начало отсчета в нижней точке), то силовую функцию можно будет записать в виде

$$U = mgr \cos \varphi + \frac{m\omega^2 r^2 \sin^2 \varphi}{2}.$$

В положении равновесия $\frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0$, т. е.

$$-mgr \sin \varphi + m\omega^2 r^2 \sin \varphi \cos \varphi = 0.$$

Отсюда имеем два решения, определяющих положение равновесия точки,

$$1) \sin \varphi = 0, \quad 2) \cos \varphi = \frac{g}{r\omega^2}.$$

Последнее возможно только тогда, когда

$$\omega^2 \geq \frac{g}{r}.$$

Если $\omega^2 > \frac{g}{r}$, то в нижнем положении

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = -g \cos \varphi + \omega^2 r (2 \cos \varphi - 1)$$

будет величиной положительной, а потому это положение равновесия будет неустойчивым. В положении, где $\cos \varphi = \frac{g}{r\omega^2}$ будем иметь

$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} < 0$, а потому это положение устойчиво.

Для определения периода колебаний точки около положения равновесия обратимся сначала к интегралу живых сил

$$\frac{mr^2 \dot{\varphi}^2}{2} = U(\varphi) + h.$$

Дифференцируя это уравнение по времени, получим

$$mr^2 \ddot{\varphi} = \frac{\partial U}{\partial \varphi},$$

или, раскладывая $\frac{\partial U}{\partial \varphi}$ в окрестности положения равновесия по малым значениям $\Delta \varphi$

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = \frac{\partial U}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi_1} + \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \Big|_{\varphi_1} \Delta \varphi + \dots$$

и ограничиваясь малыми членами $\Delta \varphi$ первого порядка (в положении равновесия $\frac{\partial U}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi_1}$ обращается в нуль), будем иметь

$$mr^2 (\Delta \varphi)'' = \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \Big|_{\varphi_1} \Delta \varphi.$$

Это линейное дифференциальное уравнение в случае, когда $\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} < 0$, имеет периодическое решение с периодом

$$T = 2\pi \sqrt{-\frac{mr^2}{\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}}} = \frac{2\pi r \omega}{\sqrt{r^2 \omega^4 - g^2}}.$$

Задачи для самостоятельных упражнений

86. Определить положение относительно равновесия весомой точки, которая может скользить без трения по плоской кривой c , вращающейся с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси z .

87. Тяжелая материальная точка может скользить без трения по параболе с вертикальной осью $x^2 = 2py$, вращающейся вокруг вертикальной оси y с постоянной угловой скоростью ω . В начальный момент точка находится в самом нижнем положении и ей сообщают начальную скорость v_0 . Определить скорость точки в зависимости от ее положения на параболе.

88. Материальная точка свободно падает в Северном полушарии с высоты H на Землю. Учитывая вращение Земли вокруг своей оси и пренебрегая сопротивлением воздуха, определить, насколько отклоняется на восток точка при падении. Географическая широта места равна φ .

89. Трубка AB вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси CD , составляя с ней постоянный угол 45° . В трубке помещен тяжелый шарик M . Определить движение этого шарика, если его начальная скорость равна нулю, а начальное расстояние его от точки O равно a . Определить, пренебрегая трением, давление шарика на стенки трубки в зависимости от положения (рис. 63).

90. К доске, движущейся поступательно по вертикали вниз с постоянным ускорением $a < g$, прикреплен математический маятник длиной l . Найти период малых колебаний маятника.

91. В гладкой горизонтальной прямолинейной трубке, вращающейся с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси,

проходящей через конец трубки, находится шарик массы m . В начальный момент расстояние шарика от оси вращения равно a , а его скорость относительно трубки равна нулю. Найти закон относительного движения шарика вдоль трубки и горизонтальную реакцию N трубки.

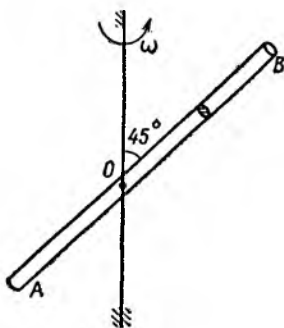


Рис. 63

92. Согнутая в виде окружности радиуса r трубка вращается в горизонтальной плоскости с постоянной угловой скоростью ω вокруг одной из своих точек A . Внутри трубки может перемещаться без трения шарик массы m . Зная, что начальная относительная скорость шарика равна v_0 , найти его относительную скорость и горизонтальную реакцию N трубки. Определить период малых колебаний шарика около положения относительного равновесия.

93. Гладкий прямоугольный клин с углом α движется прямолинейно поступательно по горизонтальной плоскости с постоянным ускорением a . На клин кладут шарик M , который начинает скатываться вниз. Зная вес шарика P и предполагая, что его начальная относительная скорость равна нулю, найти абсолютную траекторию точки, абсолютное и относительное ускорение шарика, а также реакцию N клина. Разобрать частные случаи: 1) $a = g \operatorname{tg} \alpha$, 2) $a = -g \operatorname{ctg} \alpha$.

94. Шарик поступает с некоторой начальной относительной скоростью v_0 в открытый конец B прямой трубки длиной l , вращающейся в горизонтальной плоскости вокруг другого своего конца A с постоянной угловой скоростью ω . Найти, какова должна быть наименьшая величина v_0 начальной относительной скорости, чтобы шарик дошел до точки A .

95. Прямолинейный стержень OA скользит по гладкой горизонтальной плоскости, вращаясь вокруг своего неподвижного конца O с постоянной угловой скоростью ω , и толкает шарик массы m , лежащий на этой плоскости. Найти закон относительного движения шарика вдоль стержня, если коэффициент трения между шариком и стержнем равен f . В начальный момент шарик находится на расстоянии a от точки O , а его скорость относительно стержня равна нулю.

96. В гладкой горизонтальной прямолинейной трубке, вращающейся с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, проходящей через конец трубки, находится шарик массы m . В начальный момент расстояние шарика от оси вращения равно a , а его скорость относительно трубки равна нулю. Найти абсолютную траекторию, абсолютную и относительную скорости шарика при выходе его из трубки, а также время t , когда шарик выскочит из трубки, если длина трубки равна $2a$.

ОТВЕТЫ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ

Аналитическая статика

1. Обозначая через φ угол поворота верхнего блока, будем иметь

$$PR\delta\varphi - \frac{Q(R-r)\delta\varphi}{2} = 0,$$

откуда

$$P = \frac{Q}{2} \left(1 - \frac{r}{R} \right).$$

2. Возможное перемещение стержня A_1A_2 сводится к бесконечно малому повороту вокруг мгновенного центра вращения S , поэтому уравнение возможной работы получает вид

$$-SA_1 \cdot F_1 \delta\varphi + SA_2 \cdot F_2 \delta\varphi = 0,$$

откуда имеем

$$\frac{O_1A_1}{O_2A_2} \cdot \frac{F_1}{F_2} = \frac{a_1}{c_1},$$

где a_1 и c_1 — расстояния точек O_1 и O_2 до прямой A_1A_2 .

3. Обозначая через y_1 , y_2 и y_3 вертикальные координаты соответствующих точек приложения сил, будем иметь

$$-Q\delta y_1 - P\delta y_2 + P\delta y_3 = 0.$$

Выражая теперь y_1 , y_2 , y_3 через α и β и установив зависимость α от β , получим

$$P = Q \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta.$$

4. Система имеет две степени свободы и уравнение работ получает вид

$$P_1 \delta s_1 \sin \alpha + P_2 \delta s_2 \sin \beta - \frac{P}{2} \delta s_1 - \frac{P}{2} \delta s_2 = 0,$$

откуда

$$P_1 = \frac{P}{2 \sin \alpha}, \quad P_2 = \frac{P}{2 \sin \beta}.$$

5. Система имеет одну степень свободы

$$P = R \frac{Hr_1 \sin \varphi_1}{hr_2 \sin \varphi_2}.$$

$$6. \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{2P_2 + P_1}{2F}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{P_2}{2F}.$$

7. Силы T_1 и T_2 совершают работу только тогда, когда изменяются соответствующие длины нитей. Поэтому будем иметь

$$-T_1 \delta l_1 - T_2 \delta l_2 = 0.$$

Присоединяя сюда уравнение связи

$$l_1^2 + l_2^2 = \text{const},$$

получим

$$T_1 l_2 = T_2 l_1.$$

8. В положении равновесия координата центра тяжести z имеет стационарное значение, т. е. $\delta z = 0$. Выражая z через углы, получим

$$z = l \cos \beta - a \cos \alpha.$$

Величины α и β не являются независимыми и связаны соотношением

$$l \sin \beta = 2a \sin \alpha,$$

сохраняющимся в любом положении системы. Исключая отсюда зависимую вариацию, получим условие равновесия

$$2 \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha.$$

$$9. \quad P = 2Q \operatorname{tg} \alpha.$$

10. Обозначая через x и y соответственно расстояния точек A и B от вершины угла, условие равновесия получим в виде

$$k_1 x \delta x + k_2 y \delta y = 0.$$

Величины x и y связаны условием

$$l^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha.$$

После исключения зависимой вариации будем иметь

$k_1 \cos \alpha \sin^2 \gamma - k_2 \cos \alpha \sin^2 \beta + (k_2 - k_1) \sin \gamma \sin \beta = 0$, а исключая γ , получим

$$\operatorname{tg} 2\beta = - \frac{k_1 \sin 2\alpha}{k_2 + k_1 \cos^2 2\alpha}.$$

11. Действующие на систему силы тяжести обладают силовой функцией. Если направить ось Oy вертикально вверх и через y_1

обозначить вертикальную координату центра масс пластины, а через y_2 — координату груза Q , то силовая функция получит вид

$$U = -Py_1 - Qy_2.$$

Величины y_1 и y_2 можно выразить через параметры φ , ϑ , r , указанные на рисунке 16, так что

$$[y_2 = 2a - r \cos \vartheta, \quad y_1 = a \cos \varphi,$$

где

$$r = l - 4a \sin \frac{\varphi}{2}.$$

Поэтому получим]

$$[U = -Pa \cos \varphi - Q \left[2a - \left(l - 4a \sin \frac{\varphi}{2} \right) \cos \vartheta \right].$$

При этом φ и r являются пока некоторыми неизвестными функциями ϑ . Условие равновесия имеет вид $\frac{\partial U}{\partial \vartheta} = 0$ или

$$+ Pa \sin \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} - Q \left[-2a \cos \frac{\varphi}{2} \frac{\frac{\partial r}{\partial \vartheta}}{2a \cos \frac{\varphi}{2}} \cos \vartheta + \right. \\ \left. + \left(l - 4a \sin \frac{\varphi}{2} \right) \sin \vartheta \right] = 0.$$

Если $\varphi = \frac{\pi}{2}$ и $\vartheta = 0$, эта зависимость имеет место лишь при условии

$$-P \frac{\sqrt{2}}{2} + Q = 0,$$

или

$$Q = P \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Кроме того, из условия задачи следует, что U сохраняет постоянное значение в любом положении системы. Определяя значение U в горизонтальном положении моста и считая в этом положении $\vartheta = 0$, будем иметь

$$U_0 = -P \frac{\sqrt{2}}{2} [2a - (l - 2a \sqrt{2})].$$

Приравнивая U значению U_0 и сокращая на P , получим

$$a \cos \varphi + \frac{\sqrt{2}}{2} \left[2a - (l - 4a \sin \frac{\varphi}{2}) \cos \vartheta \right] = \\ = \frac{\sqrt{2}}{2} [2a - (l - 2a \sqrt{2})],$$

а после исключения φ будем иметь неявное уравнение кривой

$$a \left[1 - \frac{(l-r)^2}{8a^2} \right] + \frac{\sqrt{2}}{2} (2a - r \cos \vartheta) = \frac{\sqrt{2}}{2} [2a - (l - 2a \sqrt{2})],$$

или

$$r^2 = 2r(l - 2a \sqrt{2} \cos \vartheta) - 8a^2 + 4al \sqrt{2} - l^2.$$

12. Принцип Бернулли приводит к уравнению

$$P \delta y_1 + Q \delta y_2 = 0,$$

где

$$y_1 = r_1 \sin \varphi_1, \quad y_2 = r_2 \sin \varphi_2, \quad \text{а } r_i \text{ и } \varphi_i$$

связаны условием

$$r_i = \frac{p}{1 + e \cos \varphi_i}.$$

После исключения $\delta \varphi_i$ будем иметь

$$P \frac{e + \cos \varphi_1}{e \sin \varphi_1} \delta r_1 + Q \frac{e + \cos \varphi_2}{e \sin \varphi_2} \delta r_2 = 0.$$

Присоединяя сюда условие нерастяжимости нити

$$\delta r_1 = -\delta r_2,$$

получим условие равновесия

$$P \frac{e + \cos \varphi_1}{\sin \varphi_1} = Q \frac{e + \cos \varphi_2}{\sin \varphi_2}.$$

13. Принцип Бернулли приводит к уравнению

$$-P(2l \cos \beta \delta \beta + l \cos \alpha \delta \alpha) - Pl \cos \beta \delta \beta + \\ + Q(2l \sin \alpha \delta \alpha + 2l \sin \beta \delta \beta) = 0.$$

Присоединяя сюда уравнение связи

$$l \cos \alpha \delta \alpha + l \cos \beta \delta \beta = 0,$$

после исключения зависимой вариации получим условие равновесия

$$Q = -P \frac{\cos \alpha \cos \beta}{\sin(\alpha - \beta)}.$$

$$14. P = Q \operatorname{ctg} \alpha.$$

15. Горизонтальная координата x_c точки приложения силы F_1 определяется равенством

$$x_c = a \cos \alpha + b,$$

где a — длина стержня AB , b — длина стержня BC . Горизонтальная координата x_L точки приложения силы F_2

$$x_L = a \cos \alpha + BK - l \cos \beta,$$

где l — длина стержня LK .

Принцип возможных перемещений приводит к уравнению

$$-F_1 a \sin \alpha \delta \alpha + F_2 (a \sin \alpha \delta \alpha - l \sin \beta \delta \beta) = 0.$$

Здесь координаты α и β связаны равенством

$$a \sin \alpha = l \sin \beta,$$

откуда

$$a \cos \alpha \delta \alpha = l \cos \beta \delta \beta.$$

Исключая $\delta \beta$, получим искомое соотношение.

16. Обозначим длину стержня через l . Тогда принцип возможных перемещений запишется в виде равенства

$$Pl \cos \alpha \delta \alpha + P(2l \cos \alpha \delta \alpha + l \cos \beta \delta \beta) = 0.$$

Параметры α и β здесь связаны неизменным соотношением

$$l \cos \alpha + l \cos \beta = \text{const},$$

откуда

$$\sin \alpha \delta \alpha = -\sin \beta \delta \beta.$$

После исключения $\delta \beta$ будем иметь

$$3 \cos \alpha - \cos \beta \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = 0 \text{ или } 3 \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta.$$

$$17. 2 \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta.$$

18. Пусть α — угол, образованный стержнем с вертикалью, а φ — угол, составляемый радиусом, проведенным из точки O в конец стержня. Параметры φ и α связаны очевидным соотношением

$$r \sin \varphi = l \sin \alpha$$

(см. рис. 22). Если z_1 — координата центра стержня, а z_2 — координата груза, то принцип Бернулли приведет к равенству

$$np \delta z_1 + q \delta z_2 = 0.$$

Выражая z_1 и z_2 через φ и α , после исключения зависимой вариации и сокращений получим

$$np(-2 \sin \varphi \cos \alpha + \sin \alpha \cos \varphi) + 2q(-\sin \varphi \cos \alpha + \sin \alpha \cos \varphi) = 0.$$

После исключения отсюда φ будем иметь искомое соотношение.

$$19. \quad \operatorname{tg} \gamma = 5 \operatorname{tg} \alpha = 3 \operatorname{tg} \beta.$$

20. Уравнение работ имеет вид

$$mk^2 x \delta x - mg \delta y = 0,$$

где $y=f(x)$ — уравнение образующей поверхности вращения. Отсюда

$$mk^2 x \delta x - mg f'(x) \delta x = 0,$$

или после интегрирования

$$f(x) = \frac{k^2 x}{2g}.$$

Следовательно, искомая поверхность — параболоид вращения.

$$21. \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{Q \sin \alpha}{P + Q \cos \alpha}.$$

22. Возможные перемещения палочки являются освобождающими. Условие равновесия имеет вид

$$\delta A \leq 0.$$

Эти возможные перемещения можно представить как результат вращений палочки вокруг одного из мгновенных центров S_1 или S_2 . В первом случае все точки палочки, расположенные на отрезке CA , получают возможные перемещения, имеющие вертикальные составляющие, направленные вверх, а потому, если центр тяжести палочки будет расположен на отрезке CA , работа силы тяжести будет удовлетворять условию $\delta A < 0$. Если же центр тяжести расположен на отрезке CB , то работа силы тяжести на возможном перемещении будет удовлетворять неравенству $\delta A > 0$, и палочка не будет находиться в равновесии.

Во втором случае все точки палочки, кроме A , получают перемещения, направленные вверх (рис. 64), а потому работа силы тяжести будет удовлетворять условию

$$\delta A \leq 0.$$

Таким образом, если центр тяжести палочки расположен на отрезке BC , найдутся перемещения, не удовлетворяющие условию $\delta A \leq 0$, а, следовательно, палочка не будет находиться в равновесии.

$$(l + r) \sin \alpha = (R + r) \sin \beta,$$

где l — длина нити, r — радиус нижнего шара, R — радиус верхнего шара. Таким образом, за независимую координату Лагранжа может быть принят угол α . После исключения зависимой вариации находим условие равновесия

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{Q \operatorname{tg} \alpha}{2P + Q},$$

к которому еще нужно добавить выписанное выше условие связи.

29. Выбрав за независимую координату угол φ , который образует прямая, соединяющая центр O_2 с центром O , с горизонтальной прямой, из уравнения возможных работ получим условие

$$2 \cos \varphi \cos 60^\circ - 2 \sin \varphi \cos 60^\circ + \cos \varphi = 0,$$

откуда

$$\varphi = 49^\circ 6' 24''.$$

30. Возможное перемещение стержня сводится к повороту вокруг мгновенного центра S , который находится на пересечении перпендикуляра к стенке, восстановленного из точки A , и перпендикуляра к палочке, восстановленного из точки C . Обобщенная сила, соответствующая этому возможному перемещению, будет равна моменту силы тяжести относительно мгновенного центра вращения. Равенство нулю момента сил выполняется только тогда, когда линия действия силы тяжести проходит через точку S . Это условие приводит к уравнению

$$l \sin \varphi = \frac{a}{\sin^2 \varphi},$$

откуда

$$\sin \varphi = \sqrt[3]{\frac{a}{l}}.$$

Выше эта задача была решена другим способом (Пример 3, стр. 7).

$$31. y_c = r \sin \varphi - l \cos \alpha,$$

$$\delta y_c = r \cos \varphi \delta \varphi + l \sin \alpha \delta \alpha = 0.$$

Но $a = 2l \sin \alpha - r \cos \varphi$, а потому

$$2l \cos \alpha \delta \alpha + r \sin \varphi \delta \varphi = 0,$$

и условие равновесия принимает вид

$$r \left(\cos \varphi - \frac{\sin \alpha \sin \varphi}{2 \cos \alpha} \right) \delta \varphi = 0,$$

откуда

$$\operatorname{tg} \varphi = 2 \operatorname{ctg} \alpha.$$

Так как

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{r^2 - (2l \sin \alpha - a)^2}}{2l \sin \alpha - a},$$

это условие равновесия перепишется в виде

$$\frac{\sqrt{r^2 - (2l \sin \alpha - a)^2}}{2l \sin \alpha - a} = 2 \operatorname{ctg} \alpha.$$

32. Пусть φ — угол наклона палочки к горизонтальному направлению, и пусть координаты точки $A(x_1, y_1)$ и координаты точки $B(x_2, y_2)$. Тогда

$$x_2 - x_1 = a \cos \varphi, \quad y_2 - y_1 = a \sin \varphi.$$

Замена y через x в последнем уравнении дает

$$x_2^2 - x_1^2 = 2pa \sin \varphi.$$

Отсюда

$$x_2 + x_1 = 2p \operatorname{tg} \varphi, \quad x_1 = p \operatorname{tg} \varphi - \frac{a}{2} \cos \varphi,$$

и тогда для y_c будем иметь

$$\begin{aligned} y_c = y_1 + \frac{a}{2} \sin \varphi &= \frac{1}{2p} \left(p \operatorname{tg} \varphi - \frac{a}{2} \cos \varphi \right)^2 + \\ &+ \frac{a}{2} \sin \varphi = \frac{p}{2} \operatorname{tg}^2 \varphi + \frac{a^2}{8p} \cos^2 \varphi. \end{aligned}$$

Условие равновесия определяется из равенства $\delta y_c = 0$, или

$$\left(p \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos^2 \varphi} - \frac{a^2}{4p} \sin \varphi \cos \varphi \right) \delta \varphi = 0.$$

Отсюда 1) $\varphi = 0$ — палочка горизонтальна и .

$$2) \cos^2 \varphi = \frac{2p}{a} \leq 1, \text{ когда } 2p \leq a.$$

33. Условия равновесия получаем из уравнения

$$P \delta y = 0,$$

откуда следует

$$y = \operatorname{const}, \quad y = \frac{a}{2}.$$

Уравнение профиля:

$$x^2 + (2y - a)^2 = a^2.$$

34. Если через φ обозначить угол, который ось симметрии верхнего цилиндра образует с горизонтальной прямой, будем иметь

$$z_c = (r + R) \cos \varphi + r \varphi \sin \varphi$$

(ось z направлена вертикально вверх). Условие равновесия $\frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0$ получает вид

$$-mg[-R \sin \varphi + r \varphi \cos \varphi] = 0.$$

Этому уравнению удовлетворяет решение $\varphi = 0$. Условие устойчивости равновесия $\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} < 0$ принимает вид

$$-mg(-R + r) < 0,$$

откуда следует $r > R$.

35. Координата z центра тяжести, когда ось симметрии вертикальна, имеет выражение

$$z = \frac{5r^2 + 4rh + h^2}{4(2r + h)}.$$

Равновесие является безразличным при $z = r$. Тогда $h = r\sqrt{3}$. При $z > r$ имеем $h > r\sqrt{3}$ и равновесие неустойчиво, при $z < r$ равновесие устойчиво.

36. Координата z центра тяжести имеет вид

$$z = \frac{5r^2 + 12rh + 6h^2}{8r + 12h}.$$

При $z = r$ равновесие безразличное, тогда $h = \frac{r\sqrt{2}}{2}$. При $h > \frac{r\sqrt{2}}{2}$ рулетка центра тяжести обращена выпуклостью вверх, равновесие неустойчивое. При $h < \frac{r\sqrt{2}}{2}$ рулетка обращена выпуклостью вниз, равновесие устойчиво.

$$37. \quad U = -mgy + \int_0^{2l} \frac{k^2 \rho^2 \sin^2 \varphi d\rho}{2} = -mgl \cos \varphi + \frac{2}{3} k^2 m l^2 \sin^2 \varphi.$$

Условия равновесия определяются из равенства

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = mgl \sin \varphi + \frac{4}{3} k^2 l^2 m \sin \varphi \cos \varphi = 0,$$

откуда будем иметь

$$1) \varphi = 0, \quad 2) \cos \varphi = -\frac{3g}{4k^2 l}.$$

Последнее равенство невозможно по условиям задачи. В положении равновесия

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = mgl + \frac{4}{3} k^2 ml^2 > 0,$$

и, следовательно, равновесие неустойчиво, если палочка опирается на горизонтальный и вертикальный стержни.

38.

$$U = mgl \cos \varphi + \frac{2}{3} k^2 ml^2 \sin^2 \varphi.$$

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = -mgl \sin \varphi + \frac{4}{3} k^2 ml^2 \sin \varphi \cos \varphi = 0,$$

откуда имеем два решения

$$1) \sin \varphi = 0, \text{ т. е. } \varphi = 0; \quad 2) \cos \varphi = \frac{3g}{4k^2 l} \leq 1.$$

Вторая производная

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = -mgl \cos \varphi + \frac{4}{3} mk^2 l^2 (2 \cos^2 \varphi - 1),$$

и при $\varphi = 0$, если $\frac{4}{3} k^2 l^2 > g$, имеем неустойчивость равновесия, а если $\frac{4}{3} k^2 l < g$, — устойчивость. Если $\cos \varphi = \frac{3g}{4k^2 l}$, то

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = \frac{3}{4} \frac{m}{k^2} \left[-\left(\frac{4}{3} k^2 l \right)^2 + g^2 \right],$$

и положение равновесия устойчиво при $\frac{3g}{4k^2 l} < 1$.

39. Пусть x_1 — вертикальная координата центра тяжести пластинки (ось x направлена по вертикали вниз), а x_2 — координата груза. Тогда

$$x_1 = a - \frac{a\sqrt{2}}{2} \cos(\psi + 45^\circ), \quad x_2 = l - 2a \sin \frac{\psi}{2}.$$

и силовая функция получит вид

$$U = P \left(a - \frac{a\sqrt{2}}{2} \right) \cos(\psi + 45^\circ) + Q \left(l - 2a \sin \frac{\psi}{2} \right).$$

При равновесии $\frac{\partial U}{\partial \psi} = 0$ или

$$P \frac{a\sqrt{2}}{2} \sin(\psi + 45^\circ) - P \frac{a\sqrt{2}}{2} \cos \frac{\psi}{2} = 0.$$

Отсюда

$$\sin(\psi + 45^\circ) = \cos \frac{\psi}{2},$$

или

$$2 \cos \left(\frac{3}{8} \pi + \frac{\psi}{4} \right) \sin \left(\frac{3}{4} \psi - \frac{\pi}{8} \right) = 0.$$

Это уравнение имеет решения

$$\psi_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \psi_2 = \frac{\pi}{6}, \quad \psi_3 = \frac{3}{2} \pi.$$

Для исследования устойчивости равновесия рассмотрим вторую производную от функции U . Будем иметь

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \psi^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} P \left[\cos(\psi + 45^\circ) + \frac{1}{2} \sin \frac{\psi}{2} \right].$$

При $\psi_1 = \frac{\pi}{2}$ имеем $\frac{\partial^2 U}{\partial \psi^2} = -\frac{Pa}{4} < 0$ и, следовательно, силовая функция имеет в положении равновесия максимум, т. е. положение равновесия устойчиво. При $\psi_2 = \frac{\pi}{6}$ имеем

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \psi^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} P \left(\cos 75^\circ + \frac{1}{2} \sin 15^\circ \right) > 0,$$

т. е. это положение равновесия оказывается неустойчивым. При $\psi_3 = \frac{3}{2} \pi$ имеем

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \psi^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} P \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4} \right) > 0$$

и, следовательно, положение равновесия неустойчиво.

40. Из уравнения

$$kx\delta x + ky\delta y + (kz - P)\delta z + \lambda(2x\delta x + 8y\delta y - 8z\delta z) = 0$$

получим условия равновесия

$$kx + 2\lambda x = 0, \quad ky + 8\lambda y = 0, \quad kz - P - 8\lambda z = 0.$$

Присоединяя сюда уравнение связи, найдем два положения равновесия

$$1) \quad x = 0, \quad \lambda = -\frac{k}{8}, \quad z = \frac{P}{2k}, \quad y = \pm \frac{P}{2k};$$

$$2) \quad y = 0, \quad \lambda = -\frac{k}{2}, \quad z = \frac{P}{5k}, \quad x = \pm \frac{2}{5} \frac{P}{k}.$$

Возможно еще одно положение равновесия

$$3) \quad x = y = z = 0.$$

Но последняя точка является особой точкой поверхности конуса. Здесь нарушается определение направления нормали к поверхности конуса. Метод Лагранжа не дает возможности исследовать это положение.

Для определения давления на поверхность конуса имеем равенство

$$N = \lambda \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2},$$

откуда получим

$$N_1 = \frac{P \sqrt{2}}{4}, \quad N_2 = \frac{2P \sqrt{5}}{5}.$$

41. Будем предполагать, что на систему наложены неосвобождающие связи. Тогда условие равновесия получит вид

$$-P\delta\left(\frac{z_1}{2}\right) = 0.$$

Уравнения связи запишем в виде

$$f_1 = x^2 + y^2 - a^2 = 0, \quad f_2 = (x - x_1)^2 + y^2 + z_1^2 - l^2 = 0, \\ f_3 = y_1 = 0, \quad f_4 = z = 0.$$

Тогда уравнения равновесия получатся из равенства

$$-\frac{P}{2}\delta z_1 + \lambda_1(2x\delta x + 2y\delta y) + \lambda_2[2(x - x_1)(\delta x - \delta x_1) + \\ + 2y\delta y + 2z_1\delta z_1] + \lambda_3\delta y_1 + \lambda_4\delta z_1 = 0.$$

Отсюда будем иметь

$$2\lambda_1 x + 2\lambda_2(x - x_1) = 0, \quad 2\lambda_1 y + 2\lambda_2 y = 0, \\ \lambda_3 = 0, \quad \lambda_4 = 0, \quad -2\lambda_2(x - x_1) = 0, \quad -\frac{P}{2} + 2\lambda_2 z_1 = 0.$$

Из последнего уравнения следует, что $\lambda_2 \neq 0$. Тогда из предпоследнего уравнения получаем $x = x_1$. Теперь из первого уравнения будем иметь

$$1) \quad \lambda_1 = 0, \quad y = 0, \quad x = \pm a, \\ x_1 = \pm a, \quad y_1 = 0, \quad z_1 = \pm l,$$

т. е. палочка занимает вертикальное положение, или

$$2) \quad x = 0, \quad x_1 = 0, \quad y = \pm a, \\ z_1 = \pm \sqrt{l^2 - a^2},$$

$$\lambda_2 = \pm \frac{P}{4\sqrt{l^2 - a^2}}, \quad \lambda_1 = \mp \frac{P}{4\sqrt{l^2 - a^2}}.$$

42. Имеем

$$-mg\delta z + \lambda_1 \left(\frac{x\delta x}{18} + \frac{2y\delta y}{9} + 2z\delta z \right) + \lambda_2 \left(\frac{\delta x}{6} + \frac{\delta y}{3} + \delta z \right) = 0.$$

Отсюда получаем условия равновесия

$$\frac{\lambda_1 x}{3} + \lambda_2 = 0, \quad \frac{2\lambda_1 y}{3} + \lambda_2 = 0,$$

$$-mg + 2\lambda_1 z + \lambda_2 = 0.$$

λ_1 не может равняться нулю, потому что это привело бы к равенству $\lambda_2 = 0$, что одновременно невозможно по условиям задачи. Поэтому будем иметь $x = 2y$, откуда получаем

$$1) \quad x = y = 0, \quad z = 1, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_1 = \frac{mg}{2};$$

$$2) \quad x = 4, \quad y = 2, \quad z = -\frac{1}{3}, \quad \lambda_1 = -\frac{mg}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{2}{3} mg.$$

43. Уравнение равновесия со множителями

$$-mg\delta z + \lambda_1 \delta x + \lambda_2 \left(\frac{2y\delta y}{b^2} + \frac{2z\delta z}{c^2} \right) = 0$$

дает три уравнения равновесия:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 \frac{2y}{b^2} = 0, \quad -mg + 2\lambda_2 \frac{z}{c} = 0.$$

Отсюда следует

$$y = 0, \quad \lambda_2 = \frac{mgc^2}{z} < 0,$$

$$z < 0 \text{ или } z = -c.$$

44. Уравнения равновесия

$$-mg \cos \alpha + \lambda \frac{2x}{a^2} = 0, \quad -mg \cos \beta + \lambda \frac{2y}{b^2} = 0,$$

$$-mg \cos \gamma + \lambda \frac{2z}{c^2} = 0,$$

а для λ получаем значение

$$\lambda = -\frac{mg}{2} \sqrt{a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \cos^2 \beta + c^2 \cos^2 \gamma}.$$

45. Запишем уравнения связей:

$$f_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2} - L = 0,$$

$$f_2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - l^2 = 0.$$

Условия равновесия получим из равенства

$$P_1 \delta x_1 + P_2 \delta x_2 + \lambda_1 \left[\frac{x_1 \delta x_1 + y_1 \delta y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} + \frac{x_2 \delta x_2 + y_2 \delta y_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}} \right] + \\ + 2\lambda_2 [(x_1 - x_2)(\delta x_1 - \delta x_2) + (y_1 - y_2)(\delta y_1 - \delta y_2)] = 0,$$

откуда будем иметь

$$P_1 + \frac{\lambda_1 x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} + 2\lambda_2 (x_1 - x_2) = 0 \quad (1)$$

$$P_2 + \frac{\lambda_1 x_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}} - 2\lambda_2 (x_1 - x_2) = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\lambda_1 y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} + 2\lambda_2 (y_1 - y_2) = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\lambda_1 y_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}} - 2\lambda_2 (y_1 - y_2) = 0. \quad (4)$$

Сложив (1) и (2), получим

$$P_1 + P_2 + \lambda_1 \left[\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} + \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}} \right] = 0,$$

откуда следует $\lambda_1 \neq 0$. Сложив (3) и (4), получим

$$\lambda_1 \left[\frac{y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} + \frac{y_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}} \right] = 0,$$

откуда

$$\frac{y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} = - \frac{y_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}},$$

т. е. $\cos \alpha = \cos \beta$. Последнее выполняется, если $\alpha = \beta$. Тогда, если $y \neq 0$, будем иметь

$$\frac{\lambda_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} = -2\lambda_2 \frac{y_1 - y_2}{y_1}, \quad \frac{\lambda_1}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}} = 2\lambda_2 \frac{y_1 - y_2}{y_2}.$$

Из первых двух уравнений получим

$$P_1 + 2\lambda_2 \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{y_1} = 0,$$

$$P_2 + 2\lambda_2 \frac{y_1 x_3 - x_1 y_2}{y_2} = 0,$$

откуда

$$2\lambda_2 = \frac{P_1 y_1}{x_1 y_2 - x_2 y_1} = \frac{P_2 y_2}{y_1 x_2 - x_1 y_2}$$

и, следовательно, имеет место равенство

$$\frac{P_1}{P_2} = - \frac{y_2}{y_1}.$$

Условие равновесия выполняется, если $y_1 = y_2 = 0$, т. е. палочка занимает вертикальное положение. Тогда из уравнений связи будем иметь

$$x_1 + x_2 = L, \quad (x_1 - x_2)^2 = l^2.$$

Эта система имеет два решения

$$1) \quad x_1 = \frac{L+l}{2}, \quad x_2 = \frac{L-l}{2};$$

$$2) \quad x_1 = \frac{L-l}{2}, \quad x_2 = \frac{L+l}{2}.$$

46.

$$N_A = \frac{P_1}{2}, \quad N_B = \frac{3P_1 + 5P_2 + 2P_3}{4}, \quad N_D = \frac{P_3}{2} - \frac{P_1 + P_2}{4}.$$

47. Обозначим через φ угол, который нить образует с вертикалью, а через ψ угол, который основание полушара образует с вертикалью, для вертикальной координаты центра тяжести получим

$$y = l \cos \varphi + r \cos \psi + \frac{3}{8} r \sin \psi.$$

Присоединяя сюда условие связи

$$l \sin \varphi + r \sin \psi = r,$$

для определения равновесия получим условия

$$\delta y = -l \sin \varphi \delta \varphi - r \sin \psi \delta \psi + \frac{3}{8} r \cos \psi \delta \psi = 0,$$

$$\delta \varphi = - \frac{r}{l} \frac{\cos \psi}{\cos \varphi} \delta \psi.$$

Отсюда будем иметь

$$\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \psi + \frac{3}{8} = 0.$$

При $\psi = \frac{\pi}{4}$ получим $\operatorname{tg} \varphi = \frac{5}{8}$ и тогда из уравнения связи

$$l = \frac{r(2 - \sqrt{2})}{10} \sqrt{89}.$$

Для определения реакции стенки N достаточно рассмотреть поворот полушара вокруг точки B . Из уравнения работ получим

$$N_4 = P \left(1 - \frac{3}{8} \operatorname{ctg} \psi \right) = \frac{5}{8} P.$$

Рассматривая поступательное возможное перемещение полушара вдоль стенки, из принципа возможных перемещений получим

$$P - T \cos \varphi = 0,$$

откуда

$$T = \frac{P}{\cos \varphi} = P \frac{\sqrt{89}}{8}.$$

48. Пусть x — горизонтальная координата точки A , а y — вертикальная координата центра тяжести палочки (начало координат в точке C). Тогда

$$y = l \sin \alpha, \quad x = \sqrt{R^2 - 4l^2 \sin^2 \alpha} + 2l \cos \alpha.$$

Из уравнения работ на возможном перемещении

$$-P\delta y - S\delta x = 0$$

получим

$$S = \frac{\sqrt{R^2 - 4l^2 \sin^2 \alpha} Pl \cos \alpha}{2l \sin \alpha [2l \cos \alpha + \sqrt{R^2 - 4l^2 \sin^2 \alpha}]}$$

Рассмотрим поворот стержня вокруг точки A и определим реакцию N_B ,

$$N_B = \frac{PR \cos \alpha}{2 [2l \cos \alpha + \sqrt{R^2 - 4l^2 \sin^2 \alpha}] \sin \alpha}.$$

Для реакции N_A будем иметь

$$N_A = P - \frac{Pl \cos \alpha}{2l \cos \alpha + \sqrt{R^2 - 4l^2 \sin^2 \alpha}}.$$

49.

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{3}, \quad N = \frac{P}{\cos \varphi} = \frac{P \sqrt{10}}{3}.$$

50. Пусть y — ось, направленная вертикально вверх. Тогда координаты центров шаров (см. рис. 51)

$$y_1 = s_1 \sin 60^\circ + r_1 \sin 30^\circ, \quad y_2 = s_2 \sin 30^\circ + r_2 \sin 60^\circ.$$

Уравнение равновесия

$$\delta y_1 + 3\delta y_2 = 0$$

дает

$$\sqrt{3}\delta s_1 + 3\delta s_2 = 0. \quad (1)$$

Присоединяя сюда уравнение связи]

$$(s_1 - r_2)^2 + (s_2 - r_1)^2 = (r_1 + r_2)^2, \quad (2)$$

после исключения δs_1 получим

$$\sqrt{3} \frac{(s_2 - r_1)}{(s_1 - r_2)} \delta s_2 = 3\delta s_2,$$

откуда

$$3(s_2 - r_1)^2 = 9(s_1 - r_2)^2. \quad (3)$$

На основании (2) теперь имеем

$$4(s_1 - r_2)^2 = (r_1 + r_2)^2, \text{ откуда } s_2 - r_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}(r_1 + r_2),$$

и тогда

$$\operatorname{tg}(\varphi + 30^\circ) = \frac{s_1 - r_2}{s_2 - r_1} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ т. е. } \varphi = 0.$$

Рассматривая поступательные перемещения системы, найдем

$$N_1 = 2P_1, \quad N_2 = 2\sqrt{3}P_1, \quad N = P_1\sqrt{3}.$$

$$51. N_A = N_B = p\sqrt{\frac{13}{12}}.$$

52. 1) При максимальной силе P сила трения, действующая на цилиндр, направлена вниз. Для определения реакций имеем уравнение

$$Pl \cos(180^\circ - \alpha) \delta \alpha + Nr \operatorname{ctg} \alpha \delta \alpha = 0,$$

где $l = \frac{a}{2 \sin \alpha}$. Поэтому $N = P \frac{a}{2r}$.

Для определения силы P рассмотрим перемещение всей системы. Будем иметь

$$-Q\delta y + 2fN \cos(180^\circ - \alpha) \delta y + 2Pl \cos(180^\circ - \alpha) \delta \alpha = 0,$$

откуда получим

$$P_m = \frac{Qr}{a(\sin \alpha - f \cos \alpha)}.$$

2) При минимальной силе P сила трения, действующая на цилиндр, направлена вверх. Тогда имеем

$$-Q\delta y - 2fN \cos(180^\circ - \alpha) \delta y + 2Pl \cos(180^\circ - \alpha) \delta \alpha = 0,$$

откуда

$$P_m = \frac{Qr}{a(\sin \alpha + f \cos \alpha)}.$$

53. Пусть δx — перемещение нижнего клина, δs — перемещение верхнего клина, δy — перемещение верхнего клина относительно нижнего. Тогда будем иметь

$$\frac{\delta x}{\sin \beta} = \frac{\delta y}{\sin(\beta - \alpha)} = \frac{\delta s}{\sin \alpha}.$$

Подсчитывая работу сил на возможном перемещении, необходимо учитывать работу сил трения. Будем иметь

$$P\delta x + F \cos(180^\circ - \beta + \beta - \alpha) \delta x + F \cos \beta \delta s - Q\delta s = 0,$$

откуда получим

$$P \sin \beta + F \sin(\alpha - \beta) - Q \sin \alpha = 0. \quad (1)$$

Рассмотрим вместо клина B нормальную реакцию M . Тогда работа сил, действующих на клин A , на возможном его перемещении будет равна

$$P\delta x - F \cos \alpha \delta x - N \cos(90^\circ - \alpha) \delta x = 0.$$

Отсюда получим

$$P - F \cos \alpha - N \sin \alpha = 0, \quad (2)$$

где $F = fN$. Исключая N и имея в виду, что $f = \tan \varphi$, получим

$$Q = \frac{P \sin(\beta + \varphi)}{\sin(\alpha + \varphi)}.$$

54. Пусть δx — перемещение клина A , δs — перемещение клина B , δy — перемещение клина B относительно клина A . Тогда

$$\frac{\delta s}{\sin \alpha} = \frac{\delta x}{\sin \beta} = \frac{\delta y}{\sin(\beta - \alpha)},$$

и уравнение работ, с учетом работы сил трения, получит вид

$$P\delta x - F \cos(180^\circ - \alpha) \delta x - F \cos \beta \delta s - Q \delta s = 0,$$

откуда будем иметь

$$P + F \cos \alpha - F \frac{\cos \beta \cos \alpha}{\sin \beta} - Q \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = 0.$$

Заменяя клин B реакцией N , будем иметь

$$P \delta x + F \cos \alpha \delta x - N \cos (90^\circ - \alpha) \delta x = 0,$$

откуда получим

$$P + F \cos \alpha - N \sin \alpha = 0.$$

Так как $F = fN$, то будем иметь

$$N = \frac{P \cos \varphi}{\sin (\alpha - \varphi)}. \quad (3)$$

Рассматривая перемещение клина B , получим

$$Q \delta s - N \sin \beta \delta s + F \cos \beta \delta s = 0,$$

откуда

$$N = \frac{Q \cos \varphi}{\sin (\beta - \varphi)}. \quad (4)$$

При $\beta \leq \varphi$ равновесия не может быть. В это уравнение вошли две неизвестных величины P и N . Из (3) и (4) имеем

$$P \sin (\beta - \varphi) = Q \sin (\alpha - \varphi),$$

т. е. при $\varphi = \alpha$ P обращается в нуль. При $\alpha < \varphi < \beta$ P — отрицательно, т. е. происходит заклинивание. Решение теряет смысл, если $\beta \leq \varphi$, так как $N = \frac{Q \cos \varphi}{\sin (\beta - \varphi)}$ не может быть отрицательной.

55. Мгновенный центр вращения балки находится на пересечении перпендикуляра к балке, восстановленного в точке A , и перпендикуляра к полу в точке C . При начале движения $F = fN$. Обобщенная сила, соответствующая повороту вокруг мгновенного центра, будет равна

$$fN \frac{h}{\sin^2 \varphi} - Pl \cos \varphi = 0,$$

откуда

$$N = \frac{Pl}{hf} \sin^2 \varphi \cos \varphi.$$

Рассматривая в качестве возможного перемещения поворот вокруг точки C , будем иметь

$$-Nh \operatorname{ctg} \varphi + P(h \operatorname{ctg} \varphi - l \cos \varphi) + Fh = 0,$$

откуда

$$f = \frac{l \sin^2 \varphi \cos \varphi}{h - l \sin \varphi \cos^2 \varphi}.$$

1. На точку в направлении движения действует сила, равная по величине проекции силы тяжести на наклонную плоскость, т. е. $mg \sin \alpha$. Поэтому уравнение движения получает вид

$$mx'' = mg \sin \alpha.$$

Отсюда после интегрирования получим

$$x = \frac{gt^2}{2} \sin \alpha + c_1 t + c_2,$$

где постоянные c_1 и c_2 определяются из начальных условий и равны соответственно v_0 и 0. Подставляя значение x , получим время

$$t = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gs \sin \alpha}}{g \sin \alpha}.$$

2. Уравнение движения точки

$$mx'' = -mkx,$$

где k — коэффициент пропорциональности, определяемый из условия равновесия на поверхности Земли, где $mkR = mg$, а потому $k = \frac{g}{R}$. Общее решение уравнения движения имеет вид

$$x = c_1 \cos \sqrt{\frac{g}{R}} t + c_2 \sin \sqrt{\frac{g}{R}} t.$$

При заданных начальных условиях отсюда получаем частное решение

$$x = R \cos \sqrt{\frac{g}{R}} t,$$

откуда видно, что точка совершает гармонические колебания с периодом

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}} = 5064 \text{ с} = 84 \text{ мин } 24 \text{ с}.$$

Скорость точки в центре Земли $v = |x'|$ равна

$$v = R \sqrt{\frac{g}{R}} \sin \sqrt{\frac{g}{R}} t_1,$$

где

$$t_1 = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{R}{g}} = 1266 \text{ с} = 21 \text{ мин } 6 \text{ с}.$$

Поэтому

$$v = R \sqrt{\frac{g}{R}} = \sqrt{gR} = 7,91 \frac{\text{км}}{\text{с}}.$$

Эта скорость называется первой космической скоростью.

3. Пусть ось x направлена вдоль наклонной плоскости. Тогда уравнение движения точки вверх получит вид

$$mx'' = -mg \sin \alpha - fN,$$

где $N = mg \cos \alpha$. Точка будет двигаться вверх до тех пор, пока ее скорость не обратится в нуль. Из теоремы живых сил будем иметь

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = - \int_0^x mg (\sin \alpha + f \cos \alpha) dx,$$

откуда при $v = 0$ получим

$$x = \frac{v_0^2}{2g (\sin \alpha + f \cos \alpha)}.$$

Силы, действующие на точку при ее движении вниз, дают проекции на ось x , равные $-mg \sin \alpha$ и $fmg \cos \alpha$, причем движение будет происходить только при условии $f < \operatorname{tg} \alpha$. Применяя и здесь теорему живых сил, получим

$$\frac{mv^2}{2} = \int_x^0 (-mg \sin \alpha + mgf \cos \alpha) dx,$$

откуда

$$v = v_0 \sqrt{\frac{\sin \alpha - f \cos \alpha}{\sin \alpha + f \cos \alpha}}.$$

4. Пусть толщина доски равна d . Тогда длина отверстия $s = \frac{d}{\cos (\varphi - \alpha)}$. Направив ось x вдоль отверстия вниз от начала движения точки, будем иметь

$$mx'' = mg \cos \varphi.$$

Интегрируя это уравнение при данных начальных условиях, получим

$$x = \frac{gt^2}{2} \cos \varphi,$$

откуда

$$t^2 = \frac{2d}{g \cos (\varphi - \alpha) \cos \varphi}.$$

Для определения экстремального времени рассмотрим производную $\frac{dt^2}{d\varphi}$. Приравнявая ее нулю, получим условие экстремума

$$\frac{\sin (\alpha - \varphi) \cos \varphi - \sin \varphi \cos (\alpha - \varphi)}{\cos^2 (\alpha - \varphi) \cos^2 \varphi} = 0,$$

откуда

$$\sin(\alpha - 2\varphi) = 0 \text{ или } \varphi = \frac{\alpha}{2}.$$

5. Сфера радиуса $R = \frac{gt^2}{2}$, высшая точка которой совпадает с точкой A .

6. Уравнение движения имеет вид

$$mx'' = -\mu mx^n,$$

откуда

$$\frac{x'^2}{2} = -\frac{\mu}{n+1} x^{n+1} + c, \text{ где } c \text{ — произвольная постоянная.}$$

Такое решение имеет место при всех $n \neq -1$. Отсюда получаем

$$t = \sqrt{\frac{n+1}{2\mu}} \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^{n+1} - x^{n+1}}}.$$

При $n = 1$ будем иметь

$$t = \frac{\pi \sqrt{\mu}}{2}.$$

При

$$n = -2 \quad t = \frac{\pi a}{2} \sqrt{\frac{a}{2\mu}}.$$

При

$$n = -3 \quad t = \frac{a^2}{\sqrt{\mu}}.$$

При $n = -1$ уравнение движения получает вид

$$x'' = -\frac{\mu}{x},$$

откуда

$$\frac{x'^2}{2} = \mu (\ln a - \ln x).$$

Тогда

$$t = \frac{1}{\sqrt{2\mu}} \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{\ln a - \ln x}} = \frac{a \sqrt{\pi}}{\sqrt{2\mu}}.$$

$$7. v = a \sqrt{3\mu}.$$

$$8. x = a \sqrt{\frac{P}{ml}} t + v_0 \sqrt{\frac{ml}{P}} \sin \left(\sqrt{\frac{P}{ml}} t \right).$$

9. Уравнение движения можно представить в виде

$$mx'' = -\frac{mk}{(x+R)^2},$$

где $k = gR^2$. Если ввести $z = x + R$, то интеграл живых сил получит вид

$$\frac{z'^2}{2} = \frac{gR^2}{z} - \frac{gR^2}{H},$$

где $H = R + h$. Тогда

$$v = \sqrt{\frac{2gRh}{R+h}}.$$

Интегрируя уравнение, найдем

$$-\sqrt{\frac{2gR^2}{H}} t = -H \left\{ \arcsin \sqrt{\frac{H-z}{H}} + \frac{\sqrt{(H-z)z}}{H} \right\},$$

откуда

$$T = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{R+h}{2g}} \left(\sqrt{Rh} + (R+h) \arccos \sqrt{\frac{R}{R+h}} \right).$$

10.

$$h_{\max} = \frac{v_0^2 R}{2gR - v_0^2},$$

$$t = \frac{R}{2gR - v_0^2} \left[v_0 + \frac{2gR}{\sqrt{2gR - v_0^2}} \arcsin \frac{v_0}{\sqrt{2gR}} \right].$$

11.

$$v = \sqrt{2gs \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos \varphi}}.$$

12.

$$x = \frac{g}{k^2} e^{-kt} - \frac{g}{k^2} + \frac{gt}{k}$$

(ось x направлена вниз).

13. Уравнение движения лодки запишется в виде

$$mx'' = -kx',$$

где k — коэффициент пропорциональности, или

$$x'' = -\mu x', \quad \text{где } \mu = \frac{k}{m}.$$

Интегрируя уравнение и принимая во внимание условия задачи, получим

$$x = \frac{v_0}{\mu} (1 - e^{-\mu t}),$$

где

$$\mu = \frac{1}{t} \ln 2.$$

14. При движении вверх уравнение записывается в виде

$$mx'' = -mg - \mu x'^2.$$

Интегрируя это уравнение, максимальное значение высоты получим при условии обращения в нуль скорости движения, т. е.

$$x_m = \frac{1}{2} \frac{m}{\mu} \ln \left(\frac{\mu}{m} \frac{v_0^2}{g} + 1 \right).$$

Для движения вниз уравнение запишется в виде

$$mx'' = -mg + \mu x'^2$$

(в обоих случаях ось x направлена вертикально вверх). Отсюда найдем уравнение для определения скорости в конце движения

$$\frac{1}{2} \frac{m}{\mu} \ln \left(g - \frac{\mu}{m} x'^2 \right) = \frac{1}{2} \frac{m}{\mu} \ln g - x_m.$$

После подстановки сюда значения x_m найдем

$$v^2 = \frac{mgv_0^2}{\mu v_0^2 + mg}.$$

15.

$$v = \sqrt{\frac{mg}{k\sigma\rho}} \operatorname{th} \left(\sqrt{\frac{k\sigma\rho g}{m}} t \right);$$

$$s = \frac{m}{k\sigma\rho} \ln \operatorname{ch} \left(\sqrt{\frac{k\sigma\rho g}{m}} t \right),$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v = \sqrt{\frac{mg}{k\sigma\rho}}.$$

16. Если направить ось x вертикально вверх, то уравнения движения точек получат соответственно вид

$$m_1 x_1'' = -m_1 g - k m_1 x_1',$$

$$m_2 x_2'' = -m_2 g - k m_2 x_2'.$$

Вычитая второе уравнение из первого, получим

$$(x_1 - x_2)'' = -k(x_1 - x_2)'.$$

Отсюда, интегрируя, найдем

$$(x_1 - x_2) = c_1 e^{-kt} + c_2$$

или при заданных начальных условиях

$$x_1 - x_2 = \frac{v_0}{k} e^{-kt} + a - \frac{v_0}{k}.$$

В момент встречи $x_1 = x_2$, а потому будем иметь для времени встречи значение

$$t = -\frac{1}{k} \ln \left(1 - \frac{ak}{v_0} \right).$$

17.

$$t = \frac{1}{kv_0}.$$

18.

$$R = 2mv.$$

19.

$$x'_1 = x'_2 \sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}}.$$

20.

$$s = \frac{v_0^2}{2g(\sin \alpha + f \cos \alpha)}, \quad t = \frac{v_0}{g(\sin \alpha + f \cos \alpha)}.$$

21.

$$v = v_0 \sqrt{\frac{\sin \alpha - f \cos \alpha}{kv_0^2 + \sin \alpha + f \cos \alpha}}.$$

Точка будет двигаться вниз лишь при условии

$$\operatorname{tg} \alpha > f.$$

22. Направим ось Ox вертикально вверх, приняв за начало координат нижний конец пружины. Тогда уравнение движения верхнего груза будет иметь вид

$$mx'' = -mg - c(x - l_0),$$

где l_0 — длина нерастянутой пружины, а c — коэффициент жесткости. Положив $-cy = mg - c(x - l_0)$, получим общее решение в виде

$$y = a \cos(kt + \delta),$$

где

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \frac{2\pi}{T},$$

а δ — произвольная постоянная. Максимальное значение силы сжатия пружины $|F| = |c(x - l_0)| = |-mg + cy_{\max}|$ достигается, когда $\cos(kt + \delta) = -1$. Тогда будем иметь

$$|F| = P \left(1 + \frac{4a\pi^2}{gT^2} \right),$$

а максимальное давление будет равно

$$N = Q + P \left(1 + \frac{4a\pi^2}{gT^2} \right).$$

23.

$$x_{\max} = \lambda_{\text{ст}} + l_0 + \sqrt{\lambda_{\text{ст}}(\lambda_{\text{ст}} + 2l_0)}.$$

24. Пусть ось x опущена вниз из точки подвеса пружины. Тогда уравнение движения груза получит вид

$$mx'' = mg - c(x - l_0).$$

Для определения коэффициента жесткости пружины c приравняем нулю правую часть уравнения, положив $x = l_0 + \lambda_{\text{ст}}$. Будем иметь $c = \frac{mg}{\lambda_0}$. Для периода колебаний получим значение

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}} = 2\pi \sqrt{\frac{\lambda_0}{g}}.$$

Общее решение уравнения движения имеет вид

$$x = c_1 \cos \sqrt{\frac{g}{\lambda_0}} t + c_2 \sin \sqrt{\frac{g}{\lambda_0}} t + \lambda_0 + l_0.$$

При заданных начальных условиях отсюда получим

$$x = -\frac{\lambda_0}{2} \cos \sqrt{\frac{g}{\lambda_0}} t + \lambda_0 + l_0.$$

Максимальное значение сила натяжения пружины получает при максимальном значении x

$$x_{\max} = \frac{3}{2} \lambda_0 + l_0.$$

Тогда для максимальной величины силы натяжения пружины получим значение

$$F_{\max} = c(x_{\max} - l_0) = \frac{3}{2} \frac{mg}{\lambda_0} \lambda_0 = \frac{3}{2} mg.$$

25. Пусть ось Ox направлена вниз. Тогда уравнение движения получает вид

$$mx'' = mg - c(x - y - l_0),$$

где y — прогиб балки, а l_0 — длина нерастянутой пружины, коэффициент жесткости $c = \frac{mg}{\lambda_{ст}}$. Условие равновесия сил, действующих на пружину и на балку, дает уравнение

$$\frac{mg}{f_{ст}} y = \frac{mg}{\lambda_{ст}} (x - y - l_0),$$

откуда

$$y = \frac{f_{ст}}{\lambda_{ст} + f_{ст}} (x - l_0).$$

Уравнение движения теперь получает вид

$$mx'' = mg - \frac{f_{ст} mg}{\lambda_{ст} + f_{ст}} (x - l_0).$$

Период колебаний будет равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{f_{ст} + \lambda_{ст}}{g}}.$$

26.

$$x_{\max} = \frac{g\lambda_{ст} + v_0 \sqrt{\lambda_{ст} g}}{g}, \quad F_{\max} = P \left(1 + \frac{v_0}{\sqrt{g\lambda_{ст}}} \right).$$

27. Груз будет совершать колебания по закону

$$x = 1 - \cos \sqrt{g} t$$

с периодом

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}.$$

28. Проекция силы на ось x равна

$$F = -2E \frac{s}{l} \cos \varphi = -2E \frac{x}{l},$$

и уравнение движения

$$mx'' = -2E \frac{x}{l}.$$

Траектория будет представлять собой прямую линию, по которой точка движется по закону

$$x = s_0 \cos \sqrt{\frac{2E}{l}} t$$

с периодом

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{2E}}.$$

29. Две пружины находятся в равновесии. Условие равновесия сил записывается в виде

$$c_1(x_1 - l_1) = c_2(x_2 - x_1 - l_2),$$

откуда

$$x_1 = \frac{c_2}{c_1 + c_2} x_2 + \frac{c_1 l_1 - c_2 l_2}{c_1 + c_2}.$$

Сила натяжения пружины

$$F = c_2(x_2 - x_1 - l_2) = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} (x_2 - l_1 + l_2).$$

Жесткость новой пружины, эквивалентной двум старым, будет равна

$$c = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2},$$

а период колебаний

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{Q(c_1 + c_2)}{g c_1 c_2}}.$$

30. Точка может остановиться в положении, в котором равнодействующая всех действующих на нее сил равна нулю. Выбирая начало координат в центре Земли и направив ось Ox на Луну, для силовой функции получим выражение

$$U = \mu m \left[\frac{M}{x} + \frac{M}{81(60r - x)} \right],$$

где m — масса точки, а M — масса Земли. Точка останавливается в положении равновесия, когда $\frac{\partial U}{\partial x} = 0$, поэтому получаем

$$-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{81(60r - x)^2} = 0.$$

Это уравнение имеет решение

$$x = 54r,$$

которое и определяет положение равновесия точки. В положении равновесия силовая функция имеет значение

$$U = \frac{\mu m M}{r} \left(\frac{1}{54} + \frac{1}{486} \right),$$

в котором последнее слагаемое определяется влиянием Луны. Этот член оказывается на порядок выше члена, определяющего влияние Земли. Ближе к Земле влияние Луны уменьшается, и силовая функция может быть в приближенном виде представлена как

$$U_1 = \frac{\mu m M}{x},$$

На поверхности Земли будем иметь

$$U_1 = mgr = \frac{\mu m M}{r},$$

откуда

$$\mu M = gr, \quad \text{или} \quad U = \frac{mgr^2}{x}.$$

Тогда из интеграла живых сил получим

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mgr^2}{x} + h,$$

где постоянная h определяется из начальных условий

$$h = \frac{mv_0^2}{2} - mgr.$$

В момент остановки скорость v обращается в нуль, $x = 54r$, поэтому

$$0 = \frac{mgr^2}{54r} + \frac{mv_0^2}{2} - mgr,$$

откуда

$$v_0^2 = 2gr \left(1 - \frac{1}{54}\right) \quad \text{или} \quad v_0^2 = 2gr \frac{53}{54}, \quad \text{так что} \quad v_0 \approx 11,1 \frac{\text{км}}{\text{с}}.$$

Значение скорости $v = 11,2 \frac{\text{км}}{\text{с}}$ называют второй [космической скоростью. Можно заметить, что вторая производная от силовой функции

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \mu m M \left(\frac{1}{x^3} + \frac{2}{81(60r - x)^3} \right)$$

положительна при $x = 54r$ и, следовательно, равновесное состояние точки оказывается неустойчивым. В действительности точка пройдет это положение равновесия и упадет на Луну или вернется на Землю.

31.

$$x = \frac{1}{5} (4e^t + e^{-4t}).$$

32.

$$v = \frac{1}{h}.$$

33. Для точки, движущейся вверх, уравнение движения имеет вид

$$mx'' = -mg - kmx'^2 \quad (1)$$

(ось x направлена вертикально вверх). Точка движется вверх до тех пор, пока ее скорость не станет равной нулю. Для определения высоты, на которую поднимется точка, преобразуем уравнение к виду

$$\frac{dx'^2}{dx} = -2g - 2kx'^2. \quad (2)$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$x'^2 = ce^{-2kx} - \frac{g}{k},$$

и при заданных начальных условиях ($x_0 = 0$, $x'_0 = v_0$) получим

$$x'^2 = \left(v_0^2 + \frac{g}{k} \right) e^{-2kx} - \frac{g}{k}.$$

Для возвращающейся на Землю точки уравнение движения получает вид

$$mx'' = -mg + kmx'^2, \quad (3)$$

откуда будем иметь

$$\frac{dx'^2}{dx} = -2g + 2kx'^2. \quad (4)$$

Общее решение этого уравнения

$$x'^2 = c_1 e^{2kx} + \frac{g}{k}$$

позволяет определить скорость, с которой точка возвращается на Землю. Для определения константы c_1 имеем условия: при $x=h$, $x'=0$. Отсюда получим

$$x'^2 = -\frac{g}{k} e^{2k(x-h)} + \frac{g}{k}$$

или, после подстановки значения h , будем иметь

$$x'^2 = v_0^2 \frac{g}{v_0^2 k + g}. \quad (5)$$

Последнее уравнение определяет скорость, с которой точка возвращается на Землю. Для определения времени движения точки вверх из уравнения будем иметь

$$\int_{v_0}^0 \frac{dv}{g + kv^2} = -t_1$$

или, после интегрирования,

$$t_1 = -\frac{1}{\sqrt{kg}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{k}{g}} v_0.$$

Для определения времени t_2 движения точки вниз из уравнения (3) получим

$$\int_0^{x'} \frac{dx'}{g - kx'^2} = -t_2,$$

или после интегрирования

$$t_2 = \frac{1}{2\sqrt{kg}} \ln \frac{\sqrt{kg} - kx'}{\sqrt{kg} + kx'},$$

где $x' = -v_0 \sqrt{\frac{g}{v_0^2 k + g}}$. Подставляя значение x' , получим

$$\begin{aligned} t_2 &= \frac{1}{2\sqrt{kg}} \ln \frac{\sqrt{v_0^2 k^2 + kg} + v_0 k}{\sqrt{v_0^2 k^2 + kg} - v_0 k} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{kg}} \ln \frac{\sqrt{v_0^2 k^2 + kg} + v_0 k}{\sqrt{kg}}. \end{aligned}$$

Таким образом, все время движения до возвращения точки на Землю будет равно

$$T = t_1 + t_2 = \frac{1}{\sqrt{kg}} \left[\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{k}{g}} v_0 + \ln \frac{\sqrt{v_0^2 k^2 + kg} + v_0 k}{\sqrt{kg}} \right].$$

34. Обозначая через r_1 , r_2 и r_3 соответственно расстояния точки до вершин A , B и C , для проекций сил, действующих на точку, получим значения

$$X_1 = -k^2 m r_1 \frac{a+x}{r_1} = -k^2 m (a+x),$$

$$X_2 = -k^2 m r_2 \frac{x}{r_2} = -k^2 m x,$$

$$X_3 = k^2 m r_3 \frac{a-x}{r_3} = k^2 m (a-x).$$

Откуда для проекции равнодействующей на ось Ox будем иметь

$$X = -3k^2 mx.$$

Аналогично для проекции на ось Oy получим

$$Y_1 = -k^2 my, \quad Y_2 = k^2 m(a - y), \quad Y_3 = -k^2 my, \\ Y = k^2 m(a - 3y).$$

Уравнения движения точки получают теперь вид

$$x'' = -3k^2 x, \quad y'' = k^2(a - 3y),$$

а общее решение системы

$$x = c_1 \cos k\sqrt{3} t + c_2 \sin k\sqrt{3} t, \\ y = \frac{a}{3} + c_3 \cos k\sqrt{3} t + c_4 \sin k\sqrt{3} t.$$

При $t = 0$

$$x_0 = a, \quad y_0 = 0, \quad \dot{x}_0 = 0, \quad \dot{y}_0 = 0,$$

откуда для частного решения, определяющего движение точки, будем иметь

$$x = a \cos k\sqrt{3} t, \quad y = \frac{a}{3} - \frac{a}{3} \cos k\sqrt{3} t.$$

Исключая время, получим уравнение траектории

$$x + 3y = a.$$

Для скорости получим значение

$$v = \sqrt{\frac{10}{3}} ak \sin k\sqrt{3} t.$$

35.

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{ky}{v_0}\right)^2 = 1.$$

36. Параметрические уравнения траектории имеют вид

$$x = x_0 \cos at, \quad y = \frac{v_0}{b} \sin bt.$$

37. Движение каждой из точек совершается по гармоническому закону

$$mr'' = -kr$$

с периодом $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{r}}$, не зависящим от скорости точки. Движение точки под действием центральных сил происходит по

закону площадей, причем скорость заметания площади пропорциональна моменту вектора скорости относительно начала и не зависит от направления начальной скорости.

38. Уравнение параболической траектории, соответствующей начальной скорости v_0 и углу бросания α , имеет вид

$$y = -\frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} + x \operatorname{tg} \alpha.$$

Заметив, что расстояние точки параболы до директрисы равно расстоянию от этой точки до фокуса параболы. Параметр параболы $p = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g}$. Наивысшая точка параболы определяется из условия $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$, откуда получим

$$x_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} \sin 2\alpha,$$

а для максимальной высоты будем иметь

$$y_{\max} = y(x_{\max}) = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

Расстояние от оси x до директрисы $d = y_{\max} + \frac{p}{2} = \frac{v_0^2}{2g}$. Это расстояние постоянно и равно расстоянию от точки бросания до фокуса параболы. Поэтому искомым геометрическим местом является окружность радиуса

$$d = \frac{v_0^2}{2g}.$$

39. Для столкновения необходимо, чтобы при $x=l$ первый снаряд был выше уровня горизонта, т. е. в уравнении траектории

$$y = -\frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} + x \operatorname{tg} \alpha$$

при $x=l$ должно выполняться условие $y > 0$. Это возможно только тогда, когда $v_0^2 > \frac{gl}{\sin 2\alpha}$. Приравнявая значения координаты y , получим

$$-\frac{gl^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} + l \operatorname{tg} \alpha = -\frac{gl^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} + v \frac{l}{v_0 \cos \alpha},$$

откуда

$$v = v_0 \sin \alpha.$$

40. Интегрируя уравнения движения, получим частное решение

$$x = v_0 t \cos \alpha, \quad y = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t \sin \alpha.$$

Исключая отсюда α , получим уравнение, связывающее координаты и время независимо от угла бросания

$$x^2 + \left(y - \frac{gt^2}{2}\right)^2 = v_0^2 t^2.$$

Это уравнение является геометрическим местом точек в момент t и представляет собой уравнение окружности в каждый момент времени t .

41. Закон движения определяется уравнениями

$$x = \frac{v_0 \cos \alpha}{k} (1 - e^{-gkt}),$$

$$y = \frac{1 + v_0 k \sin \alpha}{gk^2} (1 - e^{-gkt}) - \frac{t}{k}.$$

Максимальная возможная скорость $v_m = \frac{1}{k}$, а максимальная высота

$$y_m = \frac{v_0 \sin \alpha}{gk} - \frac{1}{gk^2} \ln (1 + v_0 k \sin \alpha).$$

42. Дифференцируя уравнение траектории

$$y = -\frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} + x \operatorname{tg} \alpha,$$

получим

$$y' = -\frac{gx}{v_0^2 \cos^2 \alpha} + \operatorname{tg} \alpha.$$

Это уравнение определяет тангенс угла наклона траектории к оси Ox . Отсюда будем иметь

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{gx_1}{v_0^2 \cos^2 \alpha} + \operatorname{tg} \alpha.$$

Вместе с уравнением траектории

$$y_1 = -\frac{gx_1^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} + x_1 \operatorname{tg} \alpha$$

получим систему из двух уравнений для определения α и v_0 . Отсюда найдем

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2y_1 - x_1 \operatorname{tg} \beta}{x_1}; \quad v_0^2 = \frac{x_1^2 - 4x_1 y_1 \sin \beta \cos \beta + 4y_1 \cos^2 \beta}{2(y_1 \cos \beta - x_1 \sin \beta) \cos \beta}.$$

43. Из определения

$$\rho = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}}.$$

Но $x'' = 0$, $y'' = -g$, $x' = v_0 \cos \alpha$.

В наивысшей точке $y' = -gt_{\max} + v_0 \sin \alpha = 0$, а потому

$$\rho = \frac{v_0^3 \cos^3 \alpha}{v_0 g \cos \alpha} = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g},$$

откуда

$$v_0 = \frac{\sqrt{\rho g}}{\cos \alpha}, \quad t_{\max} = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$$

и

$$x_{\max} = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = 2\rho \operatorname{tg} \alpha.$$

44. Пусть начало координат совпадает с центром O_1 , и ось Ox проходит через центр O_2 , а ось Oy совпадает с направлением начальной скорости точки. Тогда уравнения движения получают вид

$$mx'' = -ka, \quad my'' = 0,$$

откуда будем иметь

$$x = -\frac{k a t^2}{2m} + \frac{a}{2}, \quad y = v_0 t.$$

Уравнение траектории

$$x = -\frac{k a y^2}{2m v_0^2} + \frac{a}{2}$$

представляет собой уравнение параболы.

45. Уравнения движения точки имеют вид

$$mx'' = 0, \quad my'' = -k^2 m y.$$

Интегрируя эти уравнения, при заданных начальных условиях найдем уравнение траектории

$$y = h \cos \frac{kx}{v_0}.$$

Для определения скорости можно воспользоваться интегралом живых сил

$$\frac{mv^2}{2} = -\frac{kmy^2}{2} + c,$$

где

$$c = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{k^2mh^2}{2}.$$

Таким образом, максимальное значение скорости получим при $y = 0$

$$v^2 = v_0^2 - k^2h^2.$$

46. Уравнения движения

$$mx'' = 0, \quad my'' = \frac{km}{y^3}.$$

Из интеграла живых сил

$$\frac{m}{2} (x'^2 + y'^2) = -\frac{km}{2y^2} + h_1$$

имеем

$$c_1^2 + y'^2 = -\frac{k}{y^2} + h,$$

где c_1 — произвольная постоянная, или

$$\frac{dy}{dt} = \pm \frac{\sqrt{\alpha y^2 - k}}{y},$$

где $\alpha = h - c_1^2$. Отсюда

$$\frac{1}{\alpha^2} \sqrt{\alpha y^2 - k} = t + c_2.$$

Так как $x = c_1 t + c_3$, где c_2 и c_3 — произвольные постоянные, получаем

$$\frac{1}{\alpha^2} \sqrt{\alpha y^2 - k} = \frac{x}{c_1} + \beta.$$

Последнее уравнение представляет собой уравнение конического сечения.

48. Выберем начало координат в точке O_1 и ось x проведем через точку O_2 . Тогда уравнения движения получают вид

$$mx'' = -2cx + ca, \quad my'' = -2cy.$$

Общим решением будут уравнения

$$x = c_1 \cos \left(\sqrt{\frac{2c}{m}} t + \delta_1 \right) + \frac{a}{2}, \quad y = c_2 \cos \left(\sqrt{\frac{2c}{m}} t + \delta_2 \right),$$

где δ_1 и δ_2 — произвольные постоянные, зависящие от начальных условий.

При $\delta_1 = \delta_2$ траектория точки будет прямой линией

$$x = \frac{c_1}{c_2} y + \frac{a}{2},$$

проекция скорости удовлетворяют условию $c_2 \dot{x}_0 = c_1 \dot{y}_0$, а для периода колебаний имеем значение

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{2c}}.$$

49. Выберем начало координат в центре эллипса. Тогда уравнение эллипса запишется в виде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{или} \quad b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2.$$

Дифференцируя это уравнение по времени, будем иметь

$$b^2 x x' + a^2 y y' = 0.$$

Присоединяя сюда интеграл площадей

$$x y' - y x' = a v_0,$$

получим систему уравнений для определения x' и y' , откуда

$$x' = -\frac{a v_0 y}{b^2}, \quad y' = \frac{x v_0}{a}.$$

Дифференцируя эти равенства по времени, будем иметь

$$x'' = -\frac{a v_0}{b^2} y' = -\frac{v_0^2}{b^2} x, \quad y'' = \frac{v_0}{a} x' = -\frac{v_0^2}{b^2} y.$$

Проекция сил запишутся теперь в виде

$$X = -\frac{m v_0^2}{b^2} x, \quad Y = -\frac{m v_0^2}{b^2} y$$

Отсюда следует, что точка движется под действием центральной силы, пропорциональной расстоянию точки от центра эллипса с коэффициентом пропорциональности $\frac{m v_0^2}{b^2}$.

Воспользовавшись формулами Бине, можно предложить другой способ решения этой задачи, который сводится исключительно к математическим вычислениям. В самом деле, когда определено уравнение траектории в полярных координатах, определение силы сводится к вычислению производных от $\frac{1}{r}$. В настоящей задаче уравнение траектории, отнесенное к центру эллипса, принимает вид

$$\frac{1}{r} = \frac{\sqrt{b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi}}{ab},$$

откуда

$$\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{(a^2 - b^2) \sin \varphi \cos \varphi}{ab \sqrt{b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Выражая через r тригонометрические функции угла φ , будем иметь

$$\sin \varphi = \pm \frac{b}{r} \sqrt{\frac{a^2 - r^2}{a^2 - b^2}}, \quad \cos \varphi = \pm \frac{a}{r} \sqrt{\frac{r^2 - b^2}{a^2 - b^2}}.$$

Здесь знаки правых частей зависят от положения точки в пространстве. Так, для первой четверти будем иметь всюду знак (+). Тогда можно записать!

$$\frac{d \frac{1}{r}}{d\varphi} = \frac{\sqrt{(a^2 - r^2)(r^2 - b^2)}}{abr}.$$

Дифференцируя вторично, получим

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{r^2(a^2 + b^2 - 2r^2) - (a^2 - r^2)(r^2 - b^2)}{abr^2 \sqrt{(a^2 - r^2)(r^2 - b^2)}} \frac{dr}{d\varphi}.$$

Но так как

$$\frac{dr}{d\varphi} = -r^2 \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{r}{ab} \sqrt{(a^2 - r^2)(r^2 - b^2)},$$

то после подстановки будем иметь

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{r^4 - a^2 b^2}{ra^2 b^2}.$$

Подставляя это значение в формулу Бине для силы, получим

$$F = -\frac{mc^2}{r^2} \left(\frac{r^4 - a^2 b^2}{ra^2 b^2} + \frac{1}{r} \right) = -\frac{mv_0^2 r}{b^2}.$$

Здесь постоянная площадей

$$c = av_0.$$

50. Дифференцируя дважды уравнение траектории, получим

$$\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{1}{a} \sin 2\varphi \cos^{\frac{3}{2}} 2\varphi = \frac{a^2}{r^3} \sin 2\varphi,$$

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \frac{1}{r} = -\frac{1}{r} + 3 \frac{a^4}{r^5}.$$

После этого из формул Бине найдем скорость точки

$$v^2 = c^2 \left[\frac{a^4}{r^6} \sin^2 2\varphi + \frac{1}{r^2} \right],$$

откуда

$$v_0^2 = c^2, \quad \text{т. е. } c = v_0.$$

Из формулы Бине для силы будем иметь

$$F = -\frac{mc^2}{r^2} \left[-\frac{1}{r} + 3 \frac{a^4}{r^6} + \frac{1}{r} \right] = -\frac{3mv_0^2 a^4}{r^7}.$$

51. Задача сводится к определению геометрического места точек, относительно которых результирующий момент векторов v_i и $-v_k$ равен нулю. Таким геометрическим местом будет являться прямая, проходящая через точку пересечения линии действия векторов v_i и $-v_k$, направление которых совпадает с направлением равнодействующего вектора для векторов скорости v_i и $-v_k$. Рассматривая точки 1 и 2, найдем другую прямую. Точка пересечения этих прямых и будет искомой точкой, так как относительно нее равны по величине и по направлению моменты скоростей всех трех заданных точек.

52. Из закона площадей имеем

$$c = v_0 \sin \alpha = 2 \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

После этого формула Бине для силы запишется в виде

$$-\frac{10m}{r^8} = -\frac{2m}{r^2} \left(\frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\varphi^2} + \frac{1}{r} \right).$$

Это равносильно уравнению

$$\frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\varphi^2} = \frac{4}{r},$$

общее решение которого имеет вид

$$\frac{1}{r} = c_1 e^{2\varphi} + c_2 e^{-2\varphi}.$$

Для определения c_1 и c_2 из начальных условий получаем равенства

$$1 = c_1 + c_2$$

и из формулы Бине для скорости

$$4 = 2 [4(c_1 - c_2)^2 + (c_1 + c_2)^2].$$

Таким образом, имеем две системы значений постоянных

$$c_1 = \frac{1}{4}, \quad c_2 = \frac{3}{4} \quad \text{и} \quad c_1 = \frac{3}{4}, \quad c_2 = \frac{1}{4}.$$

Но по условиям задачи в начальный момент $\frac{d}{d\varphi} \frac{1}{r} < 0$, а потому

$$2c_1 - 2c_2 < 0 \quad \text{или} \quad c_1 < c_2.$$

Таким образом, имеем только одно решение

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{4} (e^{2\varphi} + 3e^{-2\varphi}).$$

53. Из третьего закона Кеплера имеем

$$\frac{a^3}{T^3} = \frac{\mu}{4\pi^2} = \frac{R^3 g}{4\pi^2},$$

где R — радиус Земли. Тогда $a = \sqrt[3]{\frac{R^3 T^2}{4\pi^2} g}$. Уравнение эллиптической орбиты $r_1 + r_2 = 2a$, где $r_1 = R + \rho_1$, $r_2 = R + \rho_2$, откуда

$$\rho_2 = 2 \sqrt[3]{\frac{R^3 T^2}{4\pi^2} g} - 2R - 2\rho_1.$$

Расстояние между фокусами эллипса

$$2c = \rho_1 - \rho_2 = 2 \sqrt[3]{\frac{R^3 T^2}{4\pi^2} g} - 2R - 2\rho_1,$$

откуда получаем

$$e = \frac{c}{a} = 1 - \frac{R + \rho}{\sqrt[3]{\frac{R^3 T^2}{4\pi^2} g}}.$$

54.

$$v^2 = \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a}.$$

55. Как известно, величина большой полуоси эллиптической орбиты зависит от постоянной живых сил

$$a = \frac{p}{1 + e^2} = \frac{\frac{c^2}{\mu}}{1 - 1 - \frac{hc^2}{\mu^2}} = -\frac{\mu}{h}$$

и потому будет одной и той же для всех орбит. Следовательно, из уравнения эллипса $r_1 + r_2 = 2a$, так как r_1 для всех орбит одна и та же величина, получаем, что расстояние от точки бросания до вторых фокусов $r_2 = 2a - r_1$ одно и то же для всех орбит.

56. Дано, что $\rho = \frac{k}{h^3}$. Из естественных уравнений

$$\frac{mv^2}{\rho} = F_n = F \sin \varphi = F \frac{h}{r},$$

откуда $F = \frac{mv^2 h^2}{k} r$. Из закона площадей получаем $c = hv$, а потому

$$F = \frac{mc^2}{k} r.$$

57. Длина хорды может быть выражена через радиус окружности и угол φ , который хорда составляет с вертикалью $l = 2r \cos \varphi$. Уравнение движения $mx'' = mg \cos \varphi$ при заданных начальных условиях имеет решение $x = \frac{gt^2}{2} \cos \varphi$. Подставляя сюда значение $x = l$, получим

$$t = 2 \sqrt{\frac{r}{g}}.$$

58. Обозначая через φ угол, который нить образует с вертикалью, опущенной вниз, запишем уравнение движения в проекции на нормаль

$$\frac{mv^2}{l} = -mg \cos \varphi + N,$$

откуда

$$N = m\omega^2 l + mg \cos \varphi.$$

Наибольшее значение $N = T$ достигает при $\varphi = 0$ и равно $m\omega^2 l + mg$, откуда

$$\omega = \sqrt{\frac{T - mg}{ml}}.$$

59.

$$N = Q - \frac{Qv^2}{\rho g}.$$

60. Положение шарика на плоскости определяется полярными координатами r и φ . На шарик действует центральная сила — сила натяжения нити. Поэтому имеет место интеграл площадей

$$r^2 \varphi' = c = \text{const.}$$

Постоянная c определяется из начальных условий $c = Rv_0$. Уравнение движения в проекции на радиус-вектор точки запишется в виде

$$m(r'' - r\varphi'^2) = -N,$$

где N — натяжение нити. Принимая во внимание кинематическое условие $r = R - at$, отсюда получим

$$N = \frac{mR^2v_0^2}{r^3} = \frac{mR^2v_0^2}{(R - at)^3}.$$

61. Из интеграла живых сил

$$\frac{mv^2}{2} = -mgr \cos \varphi - \frac{k^2}{2} \left(2r \sin \frac{\varphi}{2} - \frac{r}{2} \right)^2 + h$$

определяем скорость точки в зависимости от ее положения, определяемого углом φ . Постоянная h здесь определяется из начальных условий, когда $\varphi = \varphi_0$. Тогда имеем $\sin \frac{\varphi_0}{2} = \frac{1}{2}$ и $h = \frac{mgr}{2} + \frac{k^2 r^2}{8}$. Скорость в нижней точке траектории теперь будет определяться

$$v_1^2 = 3gr - 2 \frac{k^2 r^2}{m}.$$

Для определения давления воспользуемся уравнением движения в проекции на нормаль к траектории точки. В нижней точке траектории будем иметь

$$\frac{mv_1^2}{r} = -mg + N + k^2 \left(2r \sin \frac{\pi}{2} - \frac{r}{2} \right).$$

Подставляя сюда значение v_1^2 , получим

$$N = 4mg - \frac{7}{2} k^2 r.$$

Для того, чтобы давление равнялось нулю, необходимо выполнение условия

$$k^2 = \frac{8}{7} \frac{mg}{r}.$$

62. Для определения движения точки воспользуемся интегралом живых сил

$$\frac{mv^2}{2} = -mgl \sin \varphi - \frac{k^2 l^2}{2} + h,$$

где l — длина вытянутой части нити. $l = 2r \sin \varphi$, а постоянная $h = 2mgR + 2k^2 R^2$. Сила реакции определяется из уравнения

Подставляя сюда mv^2 из интеграла живых сил, получим

$$N = -5Q - 4k^2r + 6Q \sin^2 \varphi + 6k^2r \sin^2 \varphi.$$

63. Из интеграла живых сил имеем

$$\frac{mv^2}{2} = mgl \cos \varphi + h,$$

где φ — угол, который нить образует с вертикалью, а

$$h = \frac{mv_0^2}{2} - mgl \cos \varphi_0.$$

Натяжение нити

$$N = \frac{mv_0^2}{l} + mg(3 \cos \varphi - 2 \cos \varphi_0).$$

В наинизшем положении

$$N = \frac{Pv_0^2}{lg} + P(3 - 2 \cos \varphi_0).$$

Если $\frac{mv_0^2}{l} - mg(3 + 2 \cos \varphi_0) \geq 0$, то груз никогда не остановится и будет всегда двигаться по окружности.

64. Нить будет натянутой до тех пор, пока сила реакции натяжения N остается положительной по величине.

$$N = 2mg + 3mg \cos \varphi.$$

При $\cos \varphi = -\frac{2}{3}$ натяжение нити обращается в нуль, и груз становится свободным. В этом положении точка будет иметь скорость

$v_1 = \sqrt{\frac{2}{3}gl}$, направленную по касательной к окружности.

Дальнейшее движение происходит по закону свободного движения материальной точки под действием силы тяжести. Если выбрать прямоугольную систему отсчета, направив ось y вертикально вверх, то в начале движения

$$x_0 = l \frac{\sqrt{5}}{3}, \quad y_0 = \frac{2}{3}l, \quad x'_0 = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}gl},$$

$$y'_0 = \sqrt{\frac{10}{3}gl} \frac{1}{3}.$$

Поэтому будем иметь

$$x = -\frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{3} glt + \frac{\sqrt{5}}{3} l},$$

$$y = -\frac{gt^2}{2} + \frac{1}{3} \sqrt{\frac{10}{3} glt + \frac{2}{3} l};$$

уравнение траектории получится в виде

$$y = \frac{-27x^2 - 10\sqrt{5}xl + 9l^2}{16l}.$$

65. Из интеграла живых сил получим

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} + mgR(1 - \cos \varphi).$$

Уравнение движения в проекции на нормаль к траектории дает

$$\frac{mv^2}{R} = mg \cos \varphi - N,$$

откуда после исключения скорости получим

$$N = -mg + 2mg \cos \varphi - \frac{mv_0^2}{2}.$$

Отрыв точки происходит в тот момент, когда реакция N обращается в нуль. При этом имеем

$$\cos \varphi = \frac{gR + v_0^2}{2gR}.$$

Если скорость v_0 такова, что $\frac{gR + v_0^2}{2gR} \geq 1$, т. е. $v_0^2 \geq gR$, то точка оторвется в самом начале движения.

66. $h \geq \frac{5}{2}r.$

67. Скорость шарика определится из условия

$$\frac{mv^2}{2} = -mgr(1 - \cos \varphi) + \frac{mv_0^2}{2}.$$

Чтобы шарик пришел в колебательное движение, должно выполняться условие

$$-2mgr + \frac{mv_0^2}{r} \leq 0,$$

или $v_0^2 \ll 4gr$. Давление шарика на окружность определяется равенством

$$N = mg \cos \varphi + \frac{mv^2}{R},$$

или

$$N = \frac{mv_0^2}{R} - 2mg + 3mg \cos \varphi.$$

Это давление остается всегда больше нуля, если

$$\frac{mv_0^2}{R} - 2mg - 3mg > 0,$$

откуда получаем условие непрерывного движения

$$v_0^2 > 5gR.$$

68. Движение шарика полностью определяется двумя уравнениями

$$m \frac{dv}{dt} = mg \cos \varphi - fN, \quad \frac{mv^2}{r} = -mg \sin \varphi + N,$$

где φ — угол, который образует радиус, соединяющий шарик с центром сферы, с горизонтом. Интегрируя эти уравнения, получим

$$v^2 = \frac{2gr}{1 + 4f^2} [1 - 2f^2 + 3fe^{-f\pi}].$$

69. Из интеграла живых сил имеем

$$v^2 = 2gy + c^2,$$

но

$$v^2 = \left[\left(\frac{dx}{dy} \right)^2 + 1 \right] c^2,$$

а потому

$$\frac{dx}{dy} = \pm \frac{\sqrt{2gy}}{c},$$

откуда после интегрирования находим уравнение искомой кривой

$$x^2 = \frac{8}{9} \frac{g}{c^2} y^3.$$

70.

$$y_m = \frac{mv_0^2 a}{2mga - m\omega^2}.$$

71.

$$N = \frac{2mg(y_0 - y)}{(1 + 2y)^{3/2}} + \frac{mg}{\sqrt{1 + 2y}},$$

откуда при $y = 0$ $N = 5mg$.

72.

$$F = -mg \frac{a^2}{x^3}, \quad N = mg \frac{\sqrt{x^4 + a^4}}{x^2}.$$

73. Если ось y направить вверх, то

$$y = -\frac{a^2}{2gx^2}.$$

$$N = \frac{m}{x^3} \sqrt{g^2 x^6 + a^4}.$$

74. Уравнение движения

$$mx'' = mg \sin \alpha - c \frac{x-l}{l} - N \operatorname{tg} \varphi,$$

где $N = mg \cos \alpha$. Отсюда имеем

$$x = \frac{mgl}{c} \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos \varphi} \left(1 - \cos \sqrt{\frac{c}{ml}} t \right) + l.$$

75. Из теоремы живых сил имеем

$$\frac{mv^2}{2} = -mgy.$$

Уравнение движения в проекции на нормаль к траектории в нижней точке получит вид

$$\frac{mv^2}{\rho} = -mg + N,$$

откуда

$$N = mg \left(1 + \frac{2b}{\rho} \right). \text{ Причем, } \rho = \frac{(1 + y_x'^2)^{\frac{3}{2}}}{y_{xx}},$$

а в нижней точке траектории

$$\rho = \frac{a^2}{b} \text{ и } N = mg \left(1 + 2 \frac{b^2}{a^2} \right).$$

76. Из уравнения живых сил

$$\frac{mv^2}{2} = mgy + \frac{mv_0^2}{2}.$$

Давление определяется равенством

$$N = \frac{mv^2}{\rho} - mg \sin \alpha,$$

где α — угол между касательной к параболу и вертикалью. Тогда

$$N = \frac{2mgx^2}{2\rho\rho} + \frac{mv_0^2}{\rho} - mg \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + x^2}},$$

откуда, после подстановки значения

$$\rho = \frac{(x^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2},$$

получим

$$N = \frac{m(v_0^2 - pg)}{\rho}.$$

77. Если ось y направлена вниз, то из интеграла живых сил

$$v^2 = 2gy,$$

так как

$$v^2 = y'^2 \left[1 + \left(\frac{dx}{dy} \right)^2 \right].$$

А из уравнения траектории

$$\frac{dx}{dy} = - \left(\frac{x}{y} \right)^{\frac{1}{3}} = - \sqrt{\left(\frac{2r}{y} \right)^{\frac{2}{3}} - 1}$$

получим

$$v^2 = y'^2 \left(\frac{2r}{y} \right)^{\frac{2}{3}}.$$

Из теоремы живых сил теперь получим

$$y'^2 \left(\frac{2r}{y} \right)^{\frac{2}{3}} = 2gy.$$

Отсюда, интегрируя, будем иметь

$$(2r)^{\frac{1}{3}} 6y^{\frac{1}{6}} = \sqrt{2g}t + c,$$

где $c = 0$ при $y = 2$. Тогда получим $T = 6 \sqrt{\frac{r}{g}}$.

78. Если уравнение циклоиды в параметрической форме имеет вид $x = a\varphi - a \sin \varphi$, $y = a - a \cos \varphi$, где a — радиус образующего циклоиду круга, φ — переменный параметр, то, очевидно, будем иметь

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = 2a \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi.$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$s = 4a \left(1 - \cos \frac{\varphi}{2} \right).$$

Уравнение движения точки

$$m \frac{dv}{dt} = mg \frac{dy}{ds} = mg \cos \frac{\varphi}{2},$$

или

$$\frac{dv}{dt} = g \left(1 - \frac{s}{4a} \right).$$

Так как $v = \frac{ds}{dt}$, то получим

$$\frac{d^2s}{dt^2} = g \left(1 - \frac{s}{4a} \right).$$

Общее решение этого уравнения

$$s = A \cos \sqrt{\frac{g}{4a}} t + B \sin \sqrt{\frac{g}{4a}} t + 4a$$

при заданных начальных условиях дает

$$s = (s_0 - 4a) \cos \sqrt{\frac{g}{4a}} t + v_0 \sqrt{\frac{4a}{g}} \sin \sqrt{\frac{g}{4a}} t + 4a.$$

79. Из интеграла живых сил

$$v^2 = k(y^2 - y_0^2) + v_0^2.$$

Здесь $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$, $y' = \operatorname{ch} \frac{x}{a} x'$, поэтому $v^2 = x'^2 \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a}$, и получим

$$\operatorname{ch}^2 \frac{x}{2} x'^2 = k(y^2 - y_0^2) + v_0^2.$$

Но $v_0^2 = \operatorname{ch}^2 \frac{1}{a}$, $y_0^2 = a \operatorname{ch}^2 \frac{1}{a}$, а потому $\operatorname{ch}^2 x x'^2 = \operatorname{ch}^2 x$ или $\frac{dx}{dt} = 1$, откуда будем иметь $x = t + 1$. Для определения давления воспользуемся уравнением $\frac{mv^2}{\rho} = N + kmy \cos \varphi$. Здесь

$$\rho = a \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a} = \frac{y^2}{a}, \quad \cos \varphi = \frac{a}{y},$$

а потому

$$N = \frac{mv^2}{\rho} - kma = \frac{am[k(y^2 - y_0^2) + v_0^2]}{y^2} - kma,$$

откуда

$$N = 0.$$

80. Движение точки A по прямой определяется уравнением

$$r = \frac{gt^2}{2} \cos \varphi,$$

откуда будем иметь

$$t = \sqrt{\frac{2}{g}} \sqrt{\frac{r}{\cos \varphi}}.$$

При переходе к другой точке B получим и другое время. Переход на другую траекторию определяется изменением r и угла φ (см. рис. 61). Время движения точки по кривой увеличивается на ту же величину dt . Поэтому, определяя приращение времени при изменении хорды

$$dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{g}} \sqrt{\frac{\cos \varphi}{r}} \frac{\cos \varphi dr + r \sin \varphi d\varphi}{\cos^2 \varphi}$$

и приравнявая его приращению времени при движении по кривой

$$dt^2 = \frac{dr^2 + r^2 d\varphi^2}{2gr \cos \varphi},$$

в результате получим уравнение

$$\frac{dr^2 + r^2 d\varphi^2}{2gr \cos \varphi} = \frac{\cos^2 \varphi dr^2 + r \sin 2\varphi dr d\varphi + r^2 \sin^2 \varphi d\varphi^2}{2gr \cos^3 \varphi},$$

определяющее искомую кривую. Уравнение легко приводится к виду

$$r \cos 2\varphi d\varphi = \sin 2\varphi dr,$$

откуда получаем

$$\ln r = \frac{1}{2} \ln \sin 2\varphi + \ln a,$$

или

$$r = a \sqrt{\sin 2\varphi}.$$

81. Естественные уравнения движения точки имеют вид

$$m \frac{dv}{dt} = -Nf, \quad \frac{mv^2}{\rho} = N_n, \quad 0 = N_\beta,$$

откуда следует, что траектория является геодезической линией с постоянным радиусом кривизны. Исключая N , получим

$$m \frac{dv}{dt} = -f \frac{mv^2}{\rho},$$

откуда после интегрирования найдем

$$\frac{1}{v} = \frac{f}{\rho} t + \frac{1}{v_0}.$$

Перепишем это уравнение в виде

$$\frac{\rho v_0 dt}{v_0 f t + \rho} = ds$$

и, интегрируя, получим

$$s = \frac{\rho}{f} \ln \left(\frac{v_0 f}{\rho} t + 1 \right),$$

где радиус кривизны траектории

$$\rho = \frac{r}{\sin^2 \gamma}.$$

82. Естественные уравнения движения

$$m \frac{dv}{dt} = -fN, \quad \frac{mv^2}{\rho} = \frac{km}{a^2} - N$$

показывают, что движение происходит по геодезической траектории, откуда

$$m \frac{dv}{dt} = -f \left[\frac{km}{a^2} - \frac{mv^2}{a} \right].$$

Интегрируя это уравнение, будем иметь

$$v^2 = \left(v_0^2 - \frac{k}{a} \right) e^{2 \frac{f}{a} s} + \frac{k}{a}.$$

В конце пути скорость обращается в нуль, поэтому

$$s = \frac{a}{2f} \ln \frac{1}{1 - v_0^2 \frac{a}{k}}.$$

83. В цилиндрической системе координат имеем $r = \text{const}$, и уравнения движения получают вид

$$mr\varphi'^2 = N, \quad mr\varphi'' = 0, \quad mz'' = -mg.$$

Развертывая цилиндр на плоскость, получим новую систему координат, в которой

$$z_1 = z, \quad y_1 = r\varphi,$$

и уравнения движения в новой системе получают вид

$$my_1'' = 0, \quad mz_1'' = -mg.$$

Эти уравнения определяют закон движения тяжелой материальной точки в пустоте, по которому точка описывает параболическую траекторию.

84. Уравнения движения имеют вид

$$\frac{mv^2}{\rho} = N \sin \alpha, \quad N \cos \alpha = mg,$$

откуда получаем

$$\frac{mv^2}{\rho} = mg \operatorname{tg} \alpha,$$

а $v^2 = \rho g \operatorname{tg} \alpha$. Но $\operatorname{tg} \alpha = \frac{x_0}{z_0}$, $\rho = x_0$, а потому

$$v = x_0 \sqrt{\frac{g}{z_0}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{z_0}{g}}.$$

85.

$$N = \frac{mv_0^2 \cos^2 \alpha}{r}.$$

86. Пусть кривая задается уравнением $y=f(x)$. Обозначим через α угол, который касательная к кривой образует с горизонталью, тогда условие равновесия получит вид

$$m\omega^2 x \cos \alpha - mg \sin \alpha = 0.$$

Но так как $\operatorname{tg} \alpha = f'(x)$, то в положении равновесия будем иметь

$$f'(x) = \frac{\omega^2 x}{g},$$

87. Скорость точки определяется из закона живых сил

$$\frac{mv^2}{2} = U + h,$$

где U — силовая функция сил, действующих на точку в подвижной системе координат.

$$U = -mgy + \frac{m\omega^2 x^2}{2} = -mgy + m\omega^2 py.$$

Тогда будем иметь

$$\frac{mv^2}{2} = (-mg + m\omega^2 p)y + h,$$

где $h = \frac{mv_0^2}{2}$ и $v^2 = 2(\omega^2 p - g)y + v_0^2$. Если $\omega^2 = \frac{g}{p}$, то точка будет двигаться по параболе равномерно.

88. Уравнения движения точки в системе координат, связанной с Землей, имеют вид

$$\begin{aligned}x'' &= 2\omega y' \sin \varphi, & y'' &= -2\omega (x' \sin \varphi + z' \cos \varphi), \\z'' &= -g + 2\omega y' \cos \varphi.\end{aligned}$$

В начальный момент $x=0$, $y=0$, $z=H$, и тогда в первом приближении будем иметь

$$x=0, \quad y = \frac{\omega g t^3}{3} \cos \varphi, \quad z = -\frac{g t^2}{2} + H.$$

При $z=0$ получим $t = \sqrt{\frac{2H}{g}}$, а отклонение к востоку будет равно

$$y = \frac{\omega g}{3} \left(\frac{2H}{g} \right)^{\frac{3}{2}} \cos \varphi.$$

89. Выбирая в качестве оси x ось, направленную вдоль трубки, составляем уравнение движения

$$m x'' = -mg \cos 45^\circ + m \omega^2 x \sin 45^\circ \cos 45^\circ,$$

или

$$x'' = -g \frac{\sqrt{2}}{2} + \omega^2 x \frac{1}{2}.$$

Решение, соответствующее начальным условиям, имеет вид

$$x = \frac{a\omega^2 - g\sqrt{2}}{2\omega^2} \left(e^{\frac{\omega}{\sqrt{2}}t} + e^{-\frac{\omega}{\sqrt{2}}t} \right) + \frac{g}{\omega^2} \sqrt{2}.$$

Давление на стенки трубки складывается из двух составляющих; первая составляющая, расположенная в вертикальной плоскости,

$$N_1 = m \left(g + \omega^2 x \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \frac{\sqrt{2}}{2};$$

вторая составляющая, расположенная в горизонтальной плоскости,

$$N_2 = \frac{m}{2} (a\omega^2 - g\sqrt{2}) \left(e^{\frac{\omega}{\sqrt{2}}t} - e^{-\frac{\omega}{\sqrt{2}}t} \right).$$

90.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g-a}}.$$

91.

$$x = \frac{a}{2} (e^{\omega t} + e^{-\omega t}) = a \operatorname{ch} \omega t, \quad N = 2ma\omega^2 \operatorname{ch} \omega t.$$

92. Относительная скорость определяется из закона живых сил

$$\frac{mv^2}{2} = -m\omega^2 r^2 \cos \varphi + h,$$

где

$$h = \frac{mv_0^2}{2} + m\omega^2 r^2 \cos \varphi_0,$$

откуда

$$1) v^2 = v_0^2 + 2\omega^2 r^2 (\cos \varphi_0 - \cos \varphi).$$

Для определения силы реакции трубки имеем уравнение

$$\frac{mv^2}{\rho} = N - 2m\omega^2 r \sin^2 \frac{\varphi}{2} - 2m\omega v,$$

откуда

$$2) N = mr \left[\left(\frac{v}{r} + \omega \right)^2 - \omega^2 \cos \varphi \right].$$

$$3) \text{ Период колебаний } T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

93. Выберем за оси подвижной системы координат оси Oxy , связанные с клином, направив ось Ox вдоль наклонной плоскости вниз. Тогда уравнение относительного движения шарика запишется в виде

$$mx'' = mg \sin \alpha - ma \cos \alpha.$$

Отсюда определяем относительное ускорение шарика

$$x'' = g \sin \alpha - a \cos \alpha.$$

Если x_1 и y_1 — горизонтальная и вертикальная оси неподвижной системы отсчета, то

$$x_1'' = a + x'' \cos \alpha = (g \cos \alpha + a \sin \alpha) \sin \alpha,$$

$$y_1'' = -x'' \sin \alpha = (a \cos \alpha - g \sin \alpha) \sin \alpha.$$

Абсолютное ускорение

$$j = \sqrt{g^2 + a^2} \sin \alpha.$$

Уравнение траектории

$$x_1 (a \cos \alpha - g \sin \alpha) - y_1 (g \cos \alpha + a \sin \alpha) = 0.$$

Реакция клина

$$N = m (g \cos \alpha + a \sin \alpha).$$

Если $a = gtg\alpha$, то траектория является прямой линией, параллельной оси x_1 , если $a = gctg\alpha$, то шарик не будет оказывать давления на клин.

94.

$$v_0 = \omega l.$$

95.

$$s = \frac{a}{2\omega \sqrt{f^2 + 1}} [r_2 e^{r_1 t} - r_1 e^{r_2 t}],$$

где r_1 и r_2 — корни уравнения.

$$r^2 + 2\omega f r - \omega^2 = 0.$$

96. Из интеграла живых сил находим $v_r^2 = \omega^2(r^2 - a^2)$. При выходе шарика из трубки $v_r = \omega a \sqrt{3}$, а абсолютная величина его скорости $v = \omega \sqrt{r^2 + 3a^2}$. При выходе шарика из трубки

$$v = \omega a \sqrt{7}.$$

Уравнение траектории в полярных координатах $r = a \operatorname{ch} f$. Время выхода шарика из трубки

$$t = \frac{1}{\omega} \operatorname{arcc} h 2 = \frac{1}{\omega} \ln (2 + \sqrt{3}).$$

ЛИТЕРАТУРА

- Березкин Е. Н. Лекции по теоретической механике, ч. I. Изд-во МГУ, 1967.
 Бухгольц Н. Н. Основной курс теоретической механики, ч. I. М., 1965.
 Аппель П. Теоретическая механика, т. I. М., 1960.
 Ла Валле Пуссен Ш. Ж. Лекции по теоретической механике, т. I. М., 1948.
 Бухгольц Н. Н., Воронков И. М., Минаков А. П. Сборник задач по теоретической механике. М.—Л., 1949.
 Мещерский И. В. Сборник задач по теоретической механике. М., 1972.
 Зернов Б. С. Сборник задач по теоретической механике, ч. 2. Динамика. М.—Л., 1931.
 Веселовский И. Н. Сборник задач по теоретической механике. М., 1955.

Цена 22 коп.