



Е. Н. БЕРЕЗКИН

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ
ПО
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ**

Часть первая

ИЗДАТЕЛЬСТВО МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

1973

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ СССР

НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КАБИНЕТ
ПО ЗАОЧНОМУ И ВЕЧЕРНЕМУ ОБУЧЕНИЮ
МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

Е. Н. БЕРЕЗКИН

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Часть первая

Учебно-методическое пособие
для студентов-заочников
механико-математических факультетов
государственных университетов

ИЗДАТЕЛЬСТВО МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1973

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее пособие написано в соответствии с программой курса теоретической механики, действующей в МГУ. Предлагаемые в нем задачи иллюстрируют основные методы теоретической механики и приложение этих методов к решению конкретных задач. Последнее является особенно важным при изучении курса.

Решение задач по теоретической механике представляет серьезные затруднения для учащихся, и научиться их решать самостоятельно весьма трудно. Кроме того, при самостоятельном решении задач нет никакой уверенности в том, что избранный путь решения действительно правильный. При решении задач в аудитории преподаватель контролирует решения и, направляя самостоятельную работу студентов, обращает их внимание на особенности изучаемых методов. Такого контроля и помощи лишены все те, кто изучает предмет самостоятельно. Для них в первую очередь и будет предназначаться это пособие, которое в какой-то мере сможет заменить преподавателя.

В пособии помещены общие указания по решению задач, даются некоторые рекомендации, приводится разбор наиболее общих задач и методов их решения; каждый раздел заканчивается задачами для самостоятельных упражнений.

Прежде чем приступать к решению задач, необходимо изучить соответствующие разделы теоретического курса и в дальнейшем стараться следовать изученным методам. Только при выполнении этих условий пособие действительно окажется полезным и задачи будут помогать усвоению теоретических методов. Для закрепления материала необходимо решить предлагаемые в каждом разделе задачи, краткие указания и ответы к которым даны в конце пособия. При решении задач необходимо стремиться к тому, чтобы решения иллюстрировали теоретические методы курса, и помнить, что основная цель заключается в том, чтобы усвоить эти методы, а не в том, чтобы решить как можно больше задач. Задачи, подо-

бранные в пособии, должны соответствовать этой цели, но научиться решать их можно только не заглядывая постоянно в решения, приведенные в конце брошюры.

В пособии рассмотрены общие методы решения задач по кинематике, аналитической статике, динамике точки и системы. Задачи на применение теории векторов и геометрической статики не рассматриваются.

Настоящий выпуск пособия является первой частью, издаваемой Научно-методическим кабинетом по заочному и вечернему обучению МГУ имени М. В. Ломоносова, и включает в себя указания к решению задач только по одному из разделов курса теоретической механики — кинематике. Части вторая и третья пособия будут издаваться кабинетом в дальнейшем отдельными выпусками.

К И Н Е М А Т И К А

Основной задачей теоретической механики является описание движений механических систем, происходящих под действием заданных сил. Такое описание может быть полностью дано только в динамике системы материальных точек. Все остальные разделы теоретической механики либо решают частные задачи, либо являются подготовкой к решению основной задачи. Последнее больше всего относится к кинематике. Хотя в кинематике имеются свои самостоятельные интересные задачи, все же основная ее цель — подготовка материала для решения задач динамики. В кинематике изучаются движения системы материальных точек без учета причин, вызывающих эти движения. Все такие движения подчиняются определенным правилам и законам; их можно систематизировать в следующем порядке:

1. Скорость и ускорение материальной точки в простейших движениях.

2. Сложное движение материальной точки. Теорема о сложении скоростей для одной материальной точки.

3. Теорема Эйлера о распределении скоростей в твердом теле.

4. Теорема Кориолиса об ускорении материальной точки в сложном движении.

5. Распределение ускорений в твердом теле.

Первый из перечисленных разделов изучает элементарные свойства движения материальной точки, зависимость между координатами материальной точки, возможные скорости и ускорения материальной точки в простейших движениях. Особое внимание следует обратить на определение проекций ускорения материальной точки на различные системы осей и главное — на естественные оси координат.

Второй раздел изучает сложное движение материальной точки в рассматриваемый момент времени (мгновенное состояние движения материальной точки). Наиболее важным яв-

ляется вопрос об определении переносной и относительной скоростей материальной точки и о выборе подвижной системы отсчета. Теорема о сложении скоростей является одной из важнейших теорем кинематики. Она служит основой и при изучении распределения скоростей в твердом теле.

Теорема Эйлера о распределении скоростей в твердом теле может быть представлена формулой

$$\overline{v} = \overline{v_0} + [\overline{\omega} \cdot \overline{OM}].$$

Наиболее существенными здесь являются представления о сложном движении твердого тела в рассматриваемый момент времени и о мгновенных состояниях движения твердого тела (рассматривается лишь состояние скоростей точек твердого тела в данный момент времени). Как частные случаи рассматриваются плоскопараллельное движение твердого тела и случай движения твердого тела с одной неподвижной точкой.

Теорема Кориолиса об ускорении материальной точки в сложном движении и формула Ривальса о распределении ускорений в твердом теле дают представление об ускорениях точек в сложном движении. Теорема Кориолиса определяет переход от одной системы координат к другой при нахождении ускорения материальной точки (системы движутся относительно друг друга). Наиболее важным является вопрос об определении переносного ускорения материальной точки при выборе различных систем отсчета. Переносное движение не зависит от характера относительного движения материальной точки.

Формула Ривальса раскрывает характер теоремы Кориолиса, давая полное представление об определении ускорения точки подвижной системы отсчета.

В дальнейшем при решении задач будем придерживаться представленной здесь последовательности изложения, демонстрируя на простых примерах все преимущества того или иного метода.

Скорость и ускорение материальной точки в простейших движениях

Первыми понятиями, связанными с представлениями о движении материальной точки, с которыми мы встречаемся в кинематике, являются понятия скорости и ускорения материальной точки в пространстве и характер изменения ее параметров. В ряде случаев параметры, определяющие положение материальной точки, находятся в некоторой сложной зависимости, которую необходимо раскрыть для полного определения движения материальной точки.

Рассмотрим несколько задач на раскрытие таких зависимостей, которые могут быть представлены в виде тождеств

внешних соотношений между параметрами, определяющими положения различных материальных точек.

Пример 1. Нить AMC закреплена одним концом в неподвижной точке A и продета через кольцо M , скользящее с постоянной скоростью v_0 по неподвижному стержню AB . Другой конец нити привязан к ползуну C , скользящему по вертикальному стержню DE (рис. 1). Длина нити равна l , расстояние $AE = h$, $AB \perp DE$. Определить скорость ползуна C в зависимости от расстояния $AM = x$.

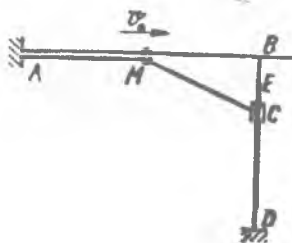


Рис. 1

Решение. Определим положение точки M координатой x , определяющей расстояние точки M от точки A , а положение точки C — координатой y , определяющей ее расстояние от точки D . Так как скорость точки M задана, то производная

$$\frac{dx}{dt} = v_0. \text{ Для определения скорости точки } C \text{ нужно сначала}$$

установить тождественную зависимость координат x и y . Эта зависимость сразу следует из свойств $\triangle MCE$. Обозначим через a длину стержня DE . Тогда

$$(h-x)^2 + (a-y)^2 = (l-x)^2.$$

Это соотношение остается справедливым в любой момент времени и может рассматриваться как тождество по времени. Дифференцируя это тождество, получим

$$-(h-x) \frac{dx}{dt} - (a-y) \frac{dy}{dt} = -(l-x) \frac{dx}{dt},$$

откуда сразу следует

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{l-h}{a-y} \frac{dx}{dt}.$$

Здесь $l > h$, $a > y$. Исключая y и имея в виду, что $\frac{dx}{dt} = v_0$,

получим

$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{-(l-h)}{\sqrt{l^2 - h^2 - 2x(l-h)}} v_0.$$

Таким же способом решается и другая задача.

Пример 2. Ползун A приводится в движение вдоль стержня KB при помощи нити, продетой через неподвижное кольцо C и наматывающейся на колесо, вращающееся с постоянной угловой скоростью ω (рис. 2). Определить скорость v ползуна A как функцию расстояния $AB=x$, если $BC=a$, а радиус колеса равен R .

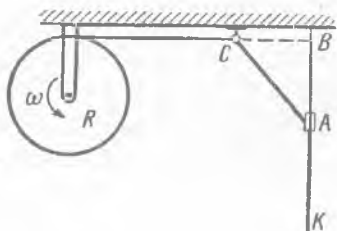


Рис. 2

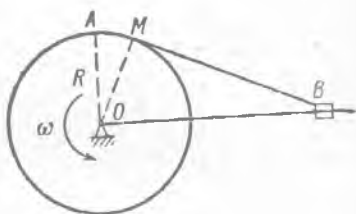


Рис. 3

Решение. Скорость ползуна, совершающего прямолинейное движение, определяется как $v = \frac{dx}{dt}$. Но изменение величины x зависит от того, как наматывается нить. Легко устанавливается зависимость

$$x^2 = s^2 - a^2, \quad (1)$$

где s — длина отрезка нити CA . Этот отрезок уменьшается со скоростью

$$v_1 = -\frac{ds}{dt} = \omega R.$$

Дифференцируя соотношение (1), получим

$$x \frac{dx}{dt} = s \frac{ds}{dt},$$

откуда

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{x}{s} \frac{dx}{dt} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} \omega R.$$

В некоторых случаях указанные здесь тождественные соотношения обнаружить не так просто. Рассмотрим следующий пример.

Пример 3. Ползун B приводится в движение посредством нити, наматывающейся на шкив радиуса R . Определить скорость ползуна в зависимости от расстояния $OB=x$, если угловая скорость шкива равна ω (рис. 3).

Решение. В рассматриваемом случае легко устанавливается простая зависимость

$$x^2 = s^2 + R^2,$$

где x — расстояние ползуна от центра шкива; s — длина отрезка нити MB (M — точка касания нити со шкивом). Это соотношение выполняется в любой момент движения и его, конечно, можно продифференцировать по времени:

$$x \frac{dx}{dt} = s \frac{ds}{dt}.$$

Но здесь скорость изменения величины s , то есть $\frac{ds}{dt}$, оста-

ется неопределенной, и мы не получаем решения задачи. Приходится искать другую величину, изменение которой известно, и другую зависимость, связывающую эти величины. Если в качестве такой величины принять длину участка нити AB , которую обозначим через l , то

$$l = s + R\varphi$$

или

$$l = \sqrt{x^2 - R^2} + R\varphi.$$

Это соотношение остается справедливым во все время движения, а потому, дифференцируя его, будем иметь

$$\frac{dl}{dt} = \frac{x \frac{dx}{dt}}{\sqrt{x^2 - R^2}} + R \frac{d\varphi}{dt}.$$

Здесь $\sin \varphi = \frac{R}{x}$, а потому

$$\cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} = - \frac{R}{x^2} \frac{dx}{dt},$$

откуда

$$\frac{d\varphi}{dt} = - \frac{R}{x \sqrt{x^2 - R^2}} \frac{dx}{dt}$$

и после подстановки получим

$$\frac{dl}{dt} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - R^2}} \left(x - \frac{R^2}{x} \right) \frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{x^2 - R^2}}{x} \frac{dx}{dt}.$$

Скорость изменения величины l теперь уже является известной величиной

$$\frac{dl}{dt} = -R\omega,$$

и мы легко получаем, что

$$v = \frac{dx}{dt} = - \frac{xR\omega}{\sqrt{x^2 - R^2}}.$$

Задачи для самостоятельных упражнений

1. По земле бежит человек и тащит за собой тележку, находящуюся на возвышенном горизонтальном помосте (рис. 4). Определить скорость v тележки и ее ускорение j , если известно, что скорость человека постоянна и равна u , а разность высот конца веревки, за который держится человек, и тележ-

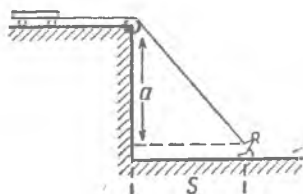


Рис. 4

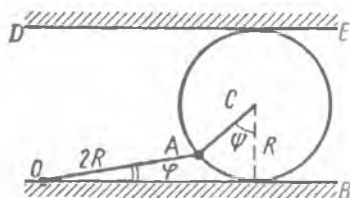


Рис. 5

ки равна a .

2. Стержень OA длины $2R$ вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг своего неподвижного конца O . Конец A стержня шарнирно закреплен на окружности диска радиуса R , который свободно скользит между двумя параллельными направляющими OB и DE . Определить скорость центра диска C в зависимости от величины угла φ (рис. 5).

3. Точки A и B соединены стержнем. Точка A движется по окружности с центром на оси Oz в плоскости, параллельной плоскости xOy . Точка B может скользить по прямой Cy_1 , параллельной оси Oy . Определить скорость точки B в зависимости от угла φ , если известны следующие данные: $OO_1 = h$, $OC = a$, $O_1A = R$, $AB = l$ и v_A — скорость точки A (рис. 6).

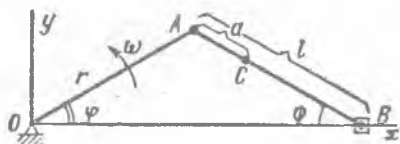


Рис. 10

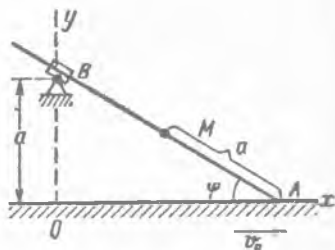


Рис. 11

8. Прямой стержень, конец A которого скользит по неподвижной прямой Ox с постоянной скоростью v_0 , проходит через муфту, вращающуюся на шарнире вокруг неподвижной точки B . Определить траекторию, скорость и ускорение (в функции угла φ) точки M стержня, если $AM = OB = a$ (рис. 11).

9. Кривошип OA , вращаясь с постоянной угловой скоростью ω вокруг неподвижной точки O , приводит в движение ползун B при помощи шатуна AB . Кривошип с шатуном соединен шарниром в точке A . Определить траекторию, скорость и ускорение точки C шатуна, если $OA = AB = l$ и $AC = a$ (рис. 10).

10. Точка движется по коническому сечению $y^2 - 2mx - nx^2 = 0$ с постоянной по величине скоростью v_0 . Определить проекции скорости этой точки на оси координат.

Применение подвижных осей (полярная система координат, естественные оси и т. д.) дает возможность глубже понять некоторые свойства движения. Вместе с тем при этом возникают и некоторые новые затруднения, которые не встречались при изучении движения в прямоугольных декартовых осях. При анализе таких движений применяются как геометрические, так и аналитические методы исследования.

Пример 4. Точка описывает плоскую кривую так, что проекция ее скорости на ось x сохраняет все время постоянную величину c . Зная радиус кривизны траектории и скорость точки в каждый момент времени, определить величину и направление ускорения этой точки.

Решение. Согласно условию задачи, ускорение может быть направлено только по оси Oy (рис. 12). Вектор ускорения имеет две проекции на естественные оси, одна из которых

равна $\frac{v^2}{\rho}$, а вторая $\frac{dv}{dt}$. Проекция вектора скорости на ось

Ox равна C . Из подобия треугольников имеем

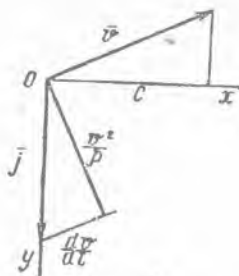


Рис. 12

$$\frac{c}{v} = \frac{v^2}{\rho j},$$

где j — ускорение точки. Отсюда получим

$$j = \frac{v^3}{\rho v}.$$

Аналитическое решение этой же задачи можно получить из определения радиуса кривизны траектории

$$\rho = \frac{v^3}{\left| \begin{matrix} x' y' \\ x'' y'' \end{matrix} \right|}.$$

Подставляя сюда значения x' , y' , ..., будем иметь

$$\rho = \frac{v^3}{c j},$$

откуда непосредственно следует ответ задачи.

Пример 5. Точка описывает плоскую траекторию. Зная радиус кривизны этой траектории и скорость изменения угла, образуемого вектором скорости с некоторой неподвижной прямой, определить скорость точки.

Решение. Аналитическое решение задачи следует непосредственно из определения радиуса кривизны траектории

$$\rho = \frac{ds}{d\varphi}. \text{ Получаем}$$

$$\frac{ds}{dt} = \rho \frac{d\varphi}{dt}.$$

Все рассуждения и формулы становятся более сложными при рассмотрении пространственных задач.

Пример 6. Определить тангенциальную и нормальную составляющие ускорения материальной точки, движение которой задано уравнениями

$$x=f_1(t), \quad y=f_2(t), \quad z=f_3(t).$$

Решение. По определению имеем

$$v = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \sqrt{[f_1'(t)]^2 + [f_2'(t)]^2 + [f_3'(t)]^2},$$

откуда касательная составляющая ускорения находится простым дифференцированием

$$j_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{x'x'' + y'y'' + z'z''}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}.$$

Величина полного ускорения точки может быть определена из условия

$$j^2 = x''^2 + y''^2 + z''^2.$$

Нормальную составляющую ускорения получим, воспользовавшись формулой

$$\begin{aligned} j_n^2 &= \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2 = j^2 - j_\tau^2 = x''^2 + y''^2 + z''^2 - \frac{(x'x'' + y'y'' + z'z'')^2}{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \\ &= \frac{(x'y'' - y'x'')^2 + (y'z'' - z'y'')^2 + (z'x'' - x'z'')^2}{x'^2 + y'^2 + z'^2}. \end{aligned}$$

В случае плоского движения $z' \equiv z'' \equiv 0$. Тогда

$$j_n^2 = \frac{(x'y'' - y'x'')^2}{x'^2 + y'^2}, \quad j_\tau = \frac{x'x'' + y'y''}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}.$$

Пример 7. Точка движется по винтовой линии с постоянной по величине скоростью v_0 . Определить величину и направление ускорения и радиус кривизны траектории точки.

Решение. Параметрические уравнения винтовой линии имеют вид:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = a\varphi.$$

где φ — неизвестная функция времени, r и a — постоянные.

Дифференцируя эти выражения, получим

$$x' = -r\varphi' \sin \varphi, \quad y' = r\varphi' \cos \varphi, \quad z' = a, \quad ,$$

откуда

$$v^2 = (r^2 + a^2)\varphi'^2 = v_0^2 = \text{const}$$

и

$$\varphi' = \frac{v_0}{\sqrt{r^2 + a^2}} = \text{const}.$$

Проекции ускорения получают вид:

$$x'' = -r\varphi'^2 \cos \varphi, \quad y'' = -r\varphi'^2 \sin \varphi, \quad z'' = 0.$$

Из последних формул видно, что вектор ускорения расположен в плоскости, ортогональной к оси винта, а величина ускорения равна

$$j = \sqrt{x''^2 + y''^2} = r\varphi'^2 = \frac{rv_0^2}{r^2 + a^2}.$$

Так как скорость $v = \text{const}$, то касательная составляющая ускорения обращается в нуль, то есть

$$j_\tau = 0$$

и, следовательно,

$$j = j_n = \frac{v^2}{\rho}.$$

Подставляя значение j в эту формулу, будем иметь

$$\frac{rv_0^2}{r^2 + a^2} = \frac{v_0^2}{\rho},$$

откуда

$$\rho = \frac{r^2 + a^2}{r}.$$

В этом случае вектор главной нормали к траектории точки направлен к оси винта, но радиус кривизны траектории оказывается больше радиуса винта. Полное ускорение тоже оказывается направленным по главной нормали. Такое расположение вектора ускорения обусловлено равномерностью движения точки по винтовой линии. Если же движение неравномерное, то появится еще и касательная составляющая ускорения.

При применении полярной системы координат необходимо помнить, что оси этой системы не являются неподвижными. Они вращаются. Это обстоятельство вносит ряд особенностей

при вычислениях. Так, если производная $\frac{dr}{dt}$ представляет

собой проекцию скорости точки на радиус-вектор (радиальная составляющая скорости), то уже проекция ускорения на радиус-вектор не будет равна второй производной от r , то есть

$$\dot{r} = \frac{d^2r}{dt^2} - \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 r.$$

Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 8. Точка описывает плоскую кривую. Радиальная составляющая скорости точки положительна и постоянна по величине, а радиальная составляющая ускорения отрицательна и обратно пропорциональна кубу расстояния от некоторого полюса. Определить траекторию и секторную скорость точки.

Решение. Аналитическое решение этой задачи следует непосредственно из определения радиальной и трансверсальной составляющих ускорения материальной точки. Имеем

$$r' = c, \quad r'' - \varphi'^2 r = -\frac{a^2}{r^3},$$

откуда

$$\varphi'^2 r = \frac{a^2}{r^3}, \quad r' = c.$$

Разделив второе из последних уравнений на первое, будем иметь

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{cr^2}{a}.$$

Отсюда получаем конечное уравнение траектории

$$-\frac{1}{r} = \frac{c}{a} \varphi + c_1,$$

где

$$c_1 = -\frac{1}{r_0} - \frac{c}{a} \varphi_0.$$

Окончательно можно записать:

$$r = \frac{ar_0}{a - Cr_0\varphi + cr_0\varphi_0}.$$

Из формулы

$$\varphi'^2 r = \frac{a^2}{r^3}$$

непосредственно получаем

$$\varphi'^2 r^4 = a^2,$$

так что секторная скорость точки будет равна

$$\frac{1}{2} r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{a}{2} = \text{const.}$$

Из-за того, что оси полярной системы координат являются подвижными, создаются искусственные трудности и при исследовании движения материальной точки, отнесенной к полярным осям. Рассмотрим пример.

Пример 9. Пользуясь формулами для ускорения точки в полярной системе координат, доказать, что если ускорение точки равно нулю, точка будет совершать равномерное и прямолинейное движение.

Решение. Очевидное решение задачи совсем непросто получить, пользуясь только полярной системой отсчета. В самом деле, в этом случае будем иметь

$$\frac{d}{dt}(r^2\varphi') = 0, \quad r'' - \varphi'^2 r = 0.$$

Отсюда следует, что

$$r^2\varphi' = a = \text{const},$$

то есть

$$\varphi' = \frac{a}{r^2}.$$

Далее,

$$r'' = \varphi'^2 r = \frac{a^2}{r^3}$$

или

$$r' \frac{dr'}{dr} = \frac{a^2}{r^3};$$

интегрируя это уравнение, получим

$$r'^2 = -\frac{a^2}{r^2} + \beta^2 \quad (\beta^2 > 0).$$

Подставляя полученное значение в выражение скорости в полярной системе координат, будем иметь

$$v^2 = r'^2 + r^2\varphi'^2 = -\frac{a^2}{r^2} + \beta^2 + \frac{a^2}{r^2} = \beta^2 = \text{const},$$

что говорит о движении точки с постоянной по величине скоростью.

С другой стороны, имеем

$$\frac{dr}{d\varphi} = \pm \frac{r \sqrt{\beta^2 r^2 - a^2}}{a},$$

откуда, интегрируя, получим

$$r = \frac{a}{\beta \cos(\varphi + c)}.$$

Последнее уравнение является уравнением прямой линии в полярной системе координат, чем и доказывается утверждение.

В качестве упражнений на применение полярной системы координат и естественных осей предлагается решить следующие задачи.

Задачи для самостоятельных упражнений

11. Точка описывает плоскую траекторию с постоянной по величине скоростью v_0 . Продолжение вектора ее ускорения все время проходит через заданную неподвижную точку O . Начальное расстояние движущейся точки от точки O равно a . Определить траекторию.

12. Точка движется по эллипсу

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

причем радиус-вектор точки, проведенный из центра эллипса, вращается по закону $\varphi = \varphi(t)$. Определить скорость точки.

13. Зная, что в плоском движении точки модуль ее скорости есть величина постоянная, равная c , а угловая скорость вращения радиуса-вектора тоже постоянна и равна ω , найти уравнения движения и траекторию точки, если известно, что при $\varphi = 0$ имеем $r = 0$.

14. Материальная точка движется по эллипсу

$$r = \frac{p}{1 - e \cos \varphi}$$

так, что ее секторная скорость относительно фокуса эллипса остается постоянной величиной, равной $\frac{c}{2}$. Построить график скорости этой точки.

15. Точка движется по поверхности прямого эллиптического цилиндра по винтовой линии, наклоненной под углом α к образующей цилиндра. Секторная скорость проекции этой точки на плоскость, перпендикулярную к образующей цилиндра, постоянна и равна c . Определить скорость точки.

16. Точка описывает плоскую траекторию. Известно, что секторная скорость этой точки пропорциональна модулю ее радиуса-вектора, а радиальная скорость постоянна, то есть

$$\sigma' = 1/2 ar, v_r = b \quad (a > 0, b > 0)$$

и $\varphi = 0$ и $r = r_0$ при $t = 0$. Найти траекторию точки и уравнения движения.

17. Точка M описывает плоскую кривую. Линия ускорения точки в пересечении с кругом кривизны образует хорду $MA = l$. Выразить величину ускорения через величину скорости и длину этой хорды.

18. Точка описывает окружность радиуса R с начальной скоростью v_0 . Ускорение точки образует с направлением ее скорости постоянный угол α . Определить величину скорости точки как функцию времени.

19. Мост имеет форму параболы $y = -0,005x^2$, причем x и y выражены в метрах. Паровоз движется по мосту с постоянной по величине скоростью, равной 72 км/час. Определить величину ускорения паровоза, когда он находится в вершине параболы.

20. При плоском движении материальной точки угол α между направлениями ее скорости и ускорения остается все время постоянным. Показать, что в этом случае величина скорости точки может быть представлена в виде

$$v = v_0 e^{\pm c(\varphi - \varphi_0)},$$

где φ — угол, образуемый направлением скорости и направлением некоторой неподвижной прямой, расположенной в плоскости движения; φ_0 и v_0 — соответственно начальные значения угла и скорости; $c = \operatorname{ctg} \alpha$.

21. Точка описывает плоскую кривую, причем прямая, по которой направлено ее ускорение j , все время проходит через неподвижную точку O . Показать, что в этом случае

$$j = \mp v \frac{dv}{dr},$$

где v — величина скорости точки, r — модуль ее радиуса-вектора относительно точки O . Знак «+» берется в том случае, когда ускорение направлено от точки O .

22. Найти в полярных координатах (r, φ) уравнение кривой (линии погони), которую опишет корабль, сохраняющий постоянный угол пеленга α на неподвижную точку (угол между направлением скорости и направлением на точку), если известен угол α и $r(\varphi = 0) = r_0$. Корабль принять за материальную точку, движущуюся по плоскости, а за полюс взять произвольную точку этой плоскости. Исследовать частные

случаи: $\alpha = 0$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ и $\alpha = \pi$.

23. Точка описывает циклоиду с постоянной по величине

скоростью v_0 . Показать, что проекция этой точки на ось Oy движется с постоянным ускорением. Уравнение циклоиды имеет вид

$$x = R(\varphi - \sin \varphi), \quad y = R(1 - \cos \varphi).$$

Обратная задача. Найти кривую, если известно, что проекция движущейся по ней с постоянной по величине скоростью v точки на некоторую пересекающую ее и лежащую в ее плоскости прямую имеет постоянное ускорение a .

Сложное движение материальной точки. Теорема о сложении скоростей

Теорема о сложении скоростей является одной из основных теорем кинематики. Она утверждает, что абсолютная скорость материальной точки, участвующей в сложном движении, в каждый момент времени равна геометрической сумме ее переносной и относительной скоростей. Математически эта теорема может быть представлена формулой

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r,$$

где переносной скоростью v_e называется скорость той точки подвижной системы координат, с которой в данный момент совпадает движущаяся материальная точка. Таким образом, переносная скорость зависит не от характера относительного движения материальной точки, а лишь от движения подвижной системы отсчета и от положения материальной точки в данный момент времени. Относительной скоростью v_r материальной точки называется ее скорость в движении относительно подвижной системы координат. В общем случае подвижная система координат совершает некоторое сложное движение, а скорости различных точек этой подвижной системы будут различными и по величине, и по направлению. Это обстоятельство необходимо иметь в виду при определении переносной скорости. Наибольшие затруднения при решении задач этого раздела, по-видимому, заключаются в выборе подвижной системы отсчета.

В ряде случаев сложное движение материальной точки определяется одновременно относительно двух подвижных систем отсчета. При этом полное решение задачи может быть найдено только при учете движения обеих подвижных систем отсчета. Рассмотрим несколько примеров, поясняющих это утверждение.

Пример 10. *Плоская материальная кривая, уравнение которой, отнесенное к подвижной системе отсчета, имеет вид $y=f(x)$, движется в своей плоскости поступательно справа налево с постоянной скоростью v_0 . Палочка OA , длина кото-*

рой равна l , шарнирно закреплена одним концом в неподвижной точке O и опирается на эту кривую другим (свободным) концом. Определить угловую скорость ω палочки в зависимости от положения системы (рис. 13).

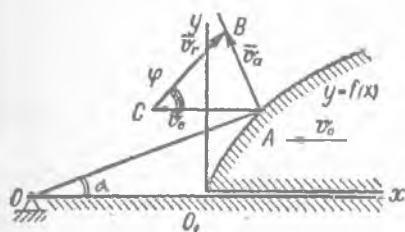


Рис. 13

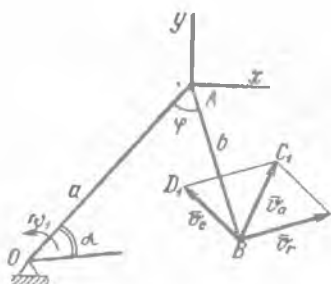


Рис. 14

Решение. Абсолютной траекторией точки A является окружность с центром в точке O . Вектор абсолютной скорости точки A направлен по касательной в этой окружности. Известно только направление этой скорости, но не величина. Свяжем подвижную систему отсчета с движущейся кривой. Тогда переносное движение будет поступательным, а переносная скорость — скоростью v_0 . Относительное движение точки A происходит по кривой $y=f(x)$, а потому и относительная скорость $\vec{v}_r$ направлена по касательной к этой кривой. Из $\triangle ABC$ имеем

$$\frac{v_a}{\sin \varphi} = \frac{v_0}{\sin (90^\circ + \alpha - \varphi)},$$

откуда получаем

$$v_a = \frac{v_0 \sin \varphi}{\cos (\alpha - \varphi)} = \frac{v_0 \operatorname{tg} \varphi}{\cos \alpha + \sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \varphi}.$$

Здесь

$$\sin \alpha = \frac{y}{l}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx},$$

а потому

$$\omega = \frac{v_a}{l} = \frac{v_0 \frac{dy}{dx}}{\sqrt{l^2 - y^2} + y \frac{dy}{dx}}.$$

Условие постоянства скорости ω получает вид

$$\omega_0 \sqrt{l^2 - y^2} + \omega_0 y \frac{dy}{dx} = v_0 \frac{dy}{dx},$$

откуда

$$v_0 \arcsin \frac{y}{l} + \omega_0 \sqrt{l^2 - y^2} = \omega_0 x + C.$$

Если же при $x=0$ имеем $y=0$, то $C=\omega_0 l$.

Пример 11. Палочка OA длины a вращается в плоскости чертежа вокруг неподвижной точки O с постоянной угловой скоростью $\omega_1 = \text{const}$ (рис. 14). Вокруг подвижного конца A этой палочки в той же плоскости вращается другая палочка AB длины b так, что угол φ , заключенный между палочками, изменяется по закону

$$\frac{d\varphi}{dt} - \omega_2 > 0,$$

где ω_2 постоянна по величине. Определить абсолютную скорость точки B , применяя теорему о сложении скоростей.

Решение. Построение решения зависит от выбора подвижной системы отсчета. Выберем сначала подвижную систему отсчета так, чтобы ее начало координат совпадало с точкой A . Ось Ax направим по палочке OA , а ось Ay — ортогонально к ней в плоскости чертежа. Тогда переносная скорость точки будет равна $\omega_1 \cdot OB$ (рис. 15) и направлена ортогонально

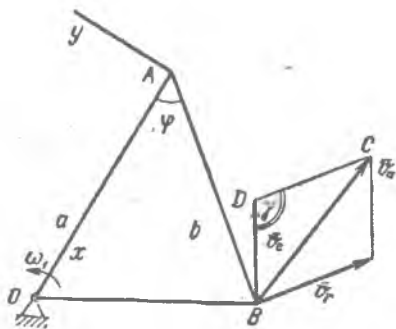


Рис. 15

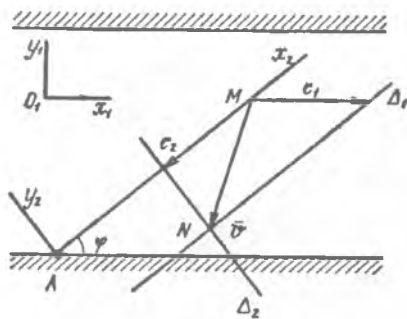


Рис. 16

к OB . Относительное положение палочки AB определяется углом φ , а относительная скорость палочки равна $\omega_2 \cdot b$. Из $\triangle BDC$ имеем

$$v^2 = v_r^2 + v_e^2 + 2v_e v_r \cos \gamma = \omega_2^2 b^2 + \\ + \omega_1^2 (a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi) + 2\omega_2 \omega_1 b (b - a \cos \varphi).$$

Совсем по-другому строится решение в том случае, когда за подвижную систему выбирается система осей с началом в точке A , но движущаяся поступательно. Тогда переносная скорость равна $v_{e_1} = \omega_1 a$, а направлена ортогонально к стержню OA . Положение стержня AB относительно подвижных осей определяется теперь углом $\alpha + \varphi$, который изменяется со скоростью $\omega_1 + \omega_2$. Благодаря этому величина вектора относительной скорости равна (рис. 14)

$$v_r = (\omega_1 + \omega_2)b.$$

Из $\triangle BD_1C_1$ будем иметь

$$\begin{aligned} v^2 &= v_r^2 + v_e^2 - 2v_r v_e \cos \varphi = (\omega_1 + \omega_2)^2 b^2 + \\ &+ \omega_1^2 a^2 - 2(\omega_1 + \omega_2) \cdot \omega_1 ab \cos \varphi = \omega_2^2 b^2 + \\ &+ \omega_1^2 (a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi) + 2\omega_1 \omega_2 b(b - a \cos \varphi). \end{aligned}$$

Пример 12. Лодку M , уносимую течением реки, подтягивают веревкой к точке A берега. Найти траекторию лодки, принимая последнюю за точку и считая, что скорость c_1 течения реки постоянна по всей ее ширине, скорость наматывания веревки постоянна по величине и равна c_2 и скорость лодки относительно реки все время направлена вдоль веревки (рис. 16).

Решение. Выберем сначала за подвижную систему координат систему $O_1 x_1 y_1$, движущуюся поступательно вместе с рекой. В этой системе переносная скорость лодки $\overline{v_{e_1}}$ известна по величине и направлению. Она равна скорости течения реки c_1 , то есть

$$\overline{v_{e_1}} = \overline{c_1}.$$

Относительная скорость лодки направлена вдоль веревки, но не известна по величине. Исходя из этих данных, мы можем только сделать заключение о том, что конец вектора абсолютной скорости лежит на прямой Δ_1 , параллельной веревке, но остается неизвестным точное значение абсолютной скорости.

Выберем теперь другую систему подвижных координат $Ax_2 y_2$, ось Ax_2 которой проходит все время через лодку. В этой системе координат относительное движение лодки полностью известно. Лодка все время находится на прямой Ax_2 , а ее относительная скорость равна скорости сокращения расстояния AM , то есть скорости наматывания веревки c_2 . В переносном движении точка M теперь описывает окружность с центром в точке A . Переносная скорость лодки направлена по касательной к этой окружности, то есть ортогонально к оси Ax_2 , но не известна по величине. Из теоремы о сложении скоростей получаем, что конец вектора абсолютной скорости должен лежать на прямой Δ_2 . Мы получили два заключения

о решении одной и той же задачи. Конец вектора абсолютной скорости лежит на прямой Δ_1 и на прямой Δ_2 одновременно. Эти прямые пересекаются только в одной точке N , которая и определяет положение конца вектора абсолютной скорости. Нетрудно теперь видеть, что в системе Ox_1y_1 относительная скорость лодки

$$v_r = c_2 + c_1 \cos \varphi,$$

а в системе Ax_2y_2 переносная скорость

$$v_{e1} = c_1 \sin \varphi.$$

Для определения траектории лодки запишем проекции абсолютной скорости лодки на оси Ax_2 и Ay_2 , являющиеся полярными осями:

$$\frac{dr}{dt} = -c_2, \quad r \frac{d\varphi}{dt} = -c_1 \sin \varphi.$$

Исключая время, получаем

$$\frac{dr}{r d\varphi} = \frac{c_2}{c_1 \sin \varphi}$$

или

$$\frac{dr}{r} = \frac{c_2}{c_1} \frac{d\varphi}{\sin \varphi}.$$

Отсюда имеем

$$\log r = \frac{c_2}{c_1} \left[\log \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} + \log C \right]$$

или

$$r = \left(C \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right)^{\frac{c_2}{c_1}},$$

а это и есть конечное уравнение траектории, где C — произвольная постоянная, значение которой определяется начальными условиями

$$r_0 = \left(C \operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2} \right)^{\frac{c_2}{c_1}}.$$

Пример 13. Рассмотренный выше метод построения абсолютной скорости может быть применен для определения направления касательных к кривым, если иметь в виду, что вектор абсолютной скорости всегда направлен по касатель-

ной к траектории точки. Для определения направления абсолютной скорости движения материальной точки представляют как сумму двух более простых движений, направление которых известно. Пусть, например, требуется построить касательную к эллипсу.

Решение. Эллипс представляет собой геометрическое место точек, сумма расстояний которых до двух заданных центров (фокусов) является величиной постоянной:

$$r_1 + r_2 = 2a, \quad (a)$$

где a — большая полуось эллипса. Выберем сначала подвижную систему осей $F_1x_1y_1$ с началом в фокусе F_1 , направив ось F_1x_1 в сторону движущейся по эллипсу точки M (рис. 17). Тогда относительная скорость точки M равна скорости изменения расстояния от точки M до фокуса, то есть

$$v_{r_1} = \frac{dr_1}{dt}.$$

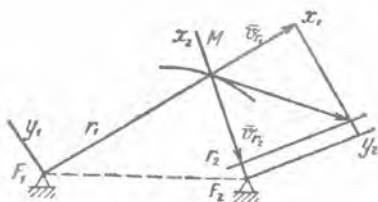


Рис. 17

Выберем теперь подвижную систему координат $F_2x_2y_2$ с началом в фокусе F_2 , направив ось F_2x_2 в сторону движущейся точки M . В новой системе координат относительная скорость точки M направлена вдоль оси F_2x_2 , а ее величина равна скорости изменения расстояния от точки M до фокуса F_2 , то есть

$$v_{r_2} = \frac{dr_2}{dt}.$$

Из уравнения (а) имеем

$$\frac{dr_1}{dt} + \frac{dr_2}{dt} = 0,$$

откуда

$$v_{r_1} = -v_{r_2}.$$

Обе подвижные системы имеют возможность только вращаться вокруг соответствующих фокусов. Благодаря этому и соответствующие переносные скорости направлены перпендикулярно к осям F_1x_1 и F_2x_2 . На основании теоремы о сложении скоростей находим, что конец вектора абсолютной скорости лежит на пересечении перпендикуляров к прямым F_1x_1 и F_2x_2 , проведенным через концы соответствующих векторов относительной скорости.

Задачи для самостоятельных упражнений

Все приводимые ниже задачи предлагается решить с помощью теоремы сложения скоростей.

24. Ползун A движется по горизонтальному рельсу с постоянной скоростью v . Стержень OB длины l вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси O , связанной с ползуном и перпендикулярной к плоскости чертежа. Определить абсолютную скорость точки B стержня (рис. 18).

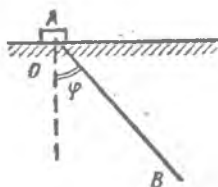


Рис. 18

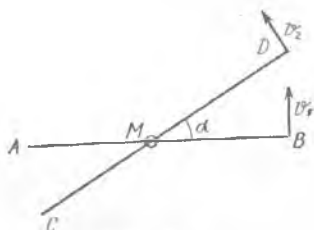


Рис. 19

25. Прямая AB совершает мгновенно-поступательное движение со скоростью v_1 , направленной перпендикулярно к AB . Прямая CD совершает мгновенно-поступательное движение в той же плоскости со скоростью v_2 , направленной перпендикулярно к CD (как показано на рис. 19). Определить величину и направления скорости колечка M , падающего одновременно на обе прямые, если угол между прямыми равен α .

26. Кривошип OA качающегося механизма вращается с угловой скоростью Ω . На конце кривошипа находится ползун, который скользит по стержню, закрепленному своим концом в неподвижной точке C . Определить угловую скорость вращения стержня в тот момент, когда угол φ , образуемый кривошипом и прямой, соединяющей точки C и O , равен 30° . Длина кривошипа равна r , расстояние между неподвижными точками C и O равно a (рис. 20).

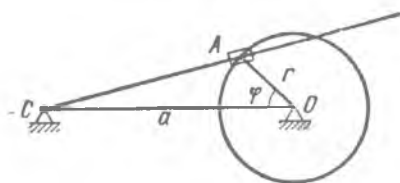


Рис. 20.

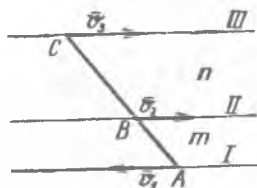


Рис. 21

27. Две точки движутся равномерно с противоположно направленными скоростями v_1 и v_2 соответственно по параллельным прямым I и II , а третья точка движется равномерно

по параллельной им прямой III со скоростью v_3 . Расстояния между соответствующими прямыми равны m и n . Определить величину скорости v_3 , если известно, что во всякий момент времени все три точки лежат на одной прямой (рис. 21).

28. Стержень OA , который может свободно вращаться около неподвижной оси O , расположенной на полу, опирается на стол, имеющий высоту h и движущийся поступательно со скоростью v . Определить абсолютную скорость точки E стержня, находящейся в соприкосновении с углом стола, в тот момент, когда расстояние края стола от точки O равно s (рис. 22).

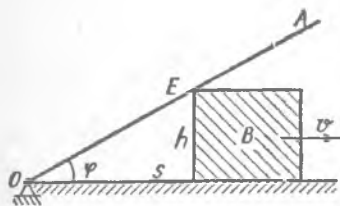


Рис. 22

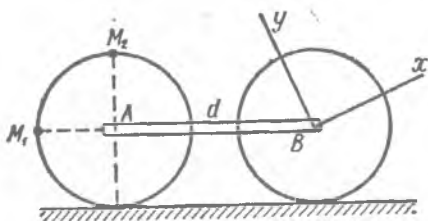


Рис. 23

29. Колеса A и B вагона, движущегося со скоростью v по прямолинейному рельсу, катятся без скольжения. Радиусы колес равны r , а расстояние между осями равно d . Определить скорость точки M_1 колеса A относительно системы координат xBy , неизменно связанной с колесом B (рис. 23).

30. Колеса A и B вагона, движущиеся со скоростью v по прямолинейному рельсу, катятся без скольжения. Радиусы колес равны r , а расстояние между осями равно d . Определить скорость точки M_2 колеса A относительно системы координат, неизменно связанной с колесом B (рис. 23).

31. Колеса A и B вагона, движущиеся со скоростью v по прямолинейному рельсу, катятся без скольжения. Радиусы колес равны r , а расстояние между осями равно d . Определить скорость центра колеса A относительно системы координат, неизменно связанной с колесом B (рис. 23).

32. Прямая OA , совпадающая в начальный момент с осью Oy , вращается равномерно с угловой скоростью ω вокруг начала координат. Одновременно с прямой начинает двигаться точка M , выходя из начального положения $M_0(x_0, y_0)$ и сохраняя во все время движения скорость v_0 , постоянную по модулю и направленную перпендикулярно к OA . Определить относительное движение точки M по отношению к прямой OA (рис. 24).

33. Изогнутый под прямым углом стержень OAB вращается в своей плоскости вокруг неподвижной точки O с постоянной угловой скоростью ω . В той же плоскости находится

неподвижный стержень LN , отстоящий от точки O на расстоянии $OO' = a$. Определить, применяя теорему о сложении скоростей, абсолютную и относительную скорости кольца, надетого одновременно на стержни AB и LN (рис. 9).

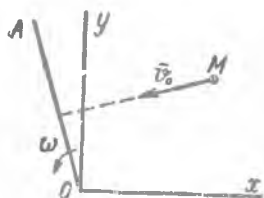


Рис. 24

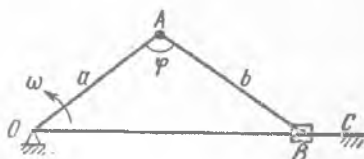


Рис. 25

34. Стержень OA вращается вокруг неподвижной точки O со скоростью ω . В точке A с ним соединен шарнирно стержень AB , на конце которого закреплен ползун B , скользящий по прямой OC . Определить скорость ползуна B , пользуясь теоремой о сложении скоростей (рис. 25).

35. Шарнирный параллелограмм $OA_1A_2O_1$ имеет две неподвижных точки: O и O_1 . Сторона OA_1 вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг неподвижной точки O в плоскости чертежа. По стороне A_1A_2 с постоянной скоростью v движется точка M . Определить величину и направление абсолютной скорости точки M в тот момент, когда $\angle O_1OA_1 = \alpha$, считая, что $OA_1 = a$, $A_1A_2 = b$ (рис. 26).

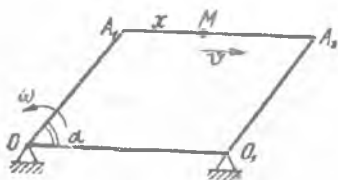


Рис. 26

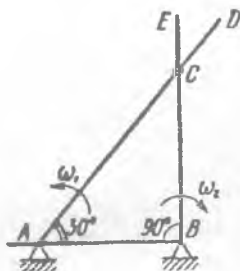


Рис. 27

36. Две палочки AD и BE вращаются в одной плоскости со скоростями ω_1 и ω_2 вокруг точек A и B соответственно. Расстояние между точками A и B равно a . Определить скорость точки C пересечения палочек в тот момент, когда $\angle ABE = 90^\circ$, а $\angle DAB = 30^\circ$ (рис. 27).

37. Палочка AB вращается в плоскости чертежа вокруг неподвижной точки A с постоянной угловой скоростью ω_1 . В той же плоскости вторая палочка CD вращается с постоянной угловой скоростью ω_2 вокруг точки C , движущейся в свою очередь с постоянной скоростью v_0 вдоль неподвижной

направляющей AE . Определить абсолютную скорость кольца M , надетого одновременно на палочки AB и CD , в тот момент, когда $AC=x$, $\angle BAC=\alpha$, а $\angle ACD=90^\circ$ (рис. 28).

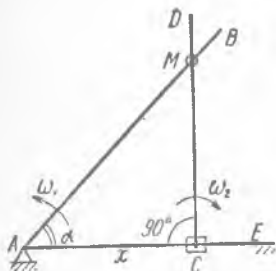


Рис. 28

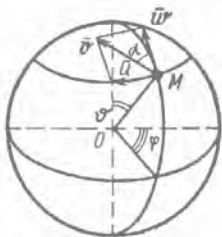


Рис. 29

38. Шар радиуса $2a$ равномерно вращается вокруг неподвижного вертикального диаметра с постоянной угловой скоростью ω . В то же время по вертикали, отстоящей на расстоянии a от неподвижного диаметра, движется точка M , уравнение движения которой имеет вид $z=a \cos kt$, где z — расстояние точки от экваториальной плоскости шара, а $k=2\omega$. Какой формы следует сделать канал внутри шара, чтобы оба движения совершались не мешая друг другу?

39. Прямая FM вращается с постоянной угловой скоростью ω в плоскости данного эллипса вокруг его фокуса F . Определить скорость точки M пересечения этой прямой с эллипсом.

40. Лодку M , уносимую течением реки, гребец все время направляет в точку A берега, сообщая ей постоянную относительную скорость c_2 . Найти траекторию лодки, принимая последнюю за точку и считая, что скорость c_1 течения реки постоянна по всей ее ширине. Исследовать случай $c_1=c_2$.

41. Точка M движется по поверхности шара с постоянной по величине скоростью v , направление которой образует с проходящим через точку меридианом постоянный угол α . Определить траекторию точки (рис. 29).

42. Пользуясь теоремой о сложении скоростей, доказать следующий способ построения касательной к архимедовой спирали $r=at$, $\varphi=bt$. Соединив движущуюся точку M с полюсом O , восстановим из полюса O перпендикуляр к OM и на этом перпендикуляре отложим в сторону вращения радиуса-вектора отрезок OA , равный $\frac{a}{b}$. Прямая, проведенная че-

рез M перпендикулярно к MA , и будет касательной к спирали в точке M .

43. Методом Роберваля построить касательную к лемнискате ($rr_1=\text{const}$).

44. Методом Роберваля построить касательную к гиперболу.

45. Методом Роберваля построить касательную к параболу и показать, что касательная образует с фокальным радиусом-вектором и диаметром параболы равные углы.

46. Шарнирный параллелограмм $OABC$ имеет неподвижную точку O . Стержень OA длины b вращается в плоскости чертежа с постоянной угловой скоростью ω_2 , а стержень OC длины a вращается с постоянной угловой скоростью ω_1 (как показано на рис. 30). По стержню AB движется с постоянной

относительной скоростью v точка M . Определить величину и направление абсолютной скорости точки M в зависимости от угла α и расстояния $AM = x$.

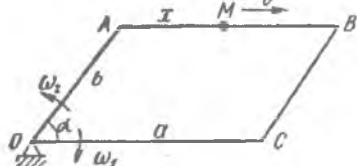


Рис. 30

Кинематика твердого тела.

Распределение скоростей в твердом теле

Мгновенное состояние движения твердого тела определяется распределением скоростей точек твердого тела в данный момент времени. Из теоремы Эйлера известно, что в общем случае мгновенное движение твердого тела всегда можно представить как сложное, состоящее из двух простейших движений: мгновенно-поступательного и мгновенно-вращательного. Скорости точек твердого тела в общем случае определяются по формуле

$$\vec{v}_M = \vec{v}_0 + [\vec{\omega} \times \vec{OM}],$$

где $\vec{v}_0$ — скорость мгновенно-поступательного движения; $\vec{\omega}$ — мгновенная угловая скорость вращения твердого тела.

В случае плоскопараллельного движения твердого тела картина распределения скоростей значительно упрощается. В этом случае мгновенное движение твердого тела сводится либо к одному мгновенно-поступательному, либо к одному мгновенно-вращательному движению. Изучение движения сводится к рассмотрению движения плоской фигуры в своей плоскости, а непрерывное движение может быть представлено как качение без скольжения подвижной центроиды по неподвижной. Такое представление движения в ряде случаев оказывается весьма удобным, а потому важно научиться определять положения мгновенного центра вращения и центроиды. Мгновенный центр вращения определяется как точка твердого тела, скорость которой равна нулю в рассматриваемый момент времени.

Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 14. *Определить положения мгновенного центра вращения и центроиды звена DC шарнирного антипараллелограмма $ACDB$, большое звено которого AB остается неподвижным во все время движения, если известно, что $AB = CD = 2C > AC = BD = 2a$.*

Решение. Точка C звена CD может двигаться только по окружности с центром в точке A . Поэтому скорость точки C всегда направлена перпендикулярно к AC , а мгновенный центр вращения расположен на продолжении прямой AC (рис. 31). Проводя аналогичные рассуждения, получим, что

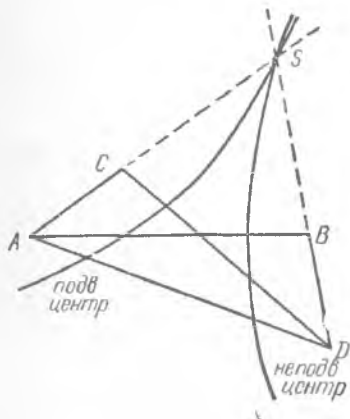


Рис. 31

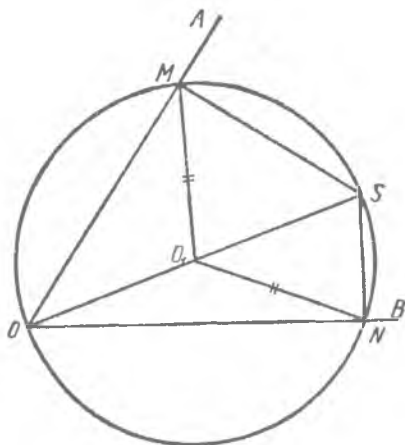


Рис. 32

мгновенный центр вращения находится на продолжении прямой DB . Обе упомянутые прямые пересекаются в некоторой точке S , которая и будет мгновенным центром вращения стержня DC . Из равенства $\triangle ACD$ и $\triangle ABD$ непосредственно следует равенство:

$$\triangle ABC = \triangle DCS,$$

откуда получаем

$$AS - BS = 2a = \text{const},$$

и, следовательно, геометрическим местом точек S будет гипербола, фокусы которой находятся в точках A и B . Эта кривая будет представлять собой неподвижную центроиду.

Аналогично имеем

$$DS - CS = 2a = \text{const},$$

то есть геометрическим местом мгновенных центров по отношению к стержню CD будет гипербола с фокусами в точках C и D . Непрерывное движение стержня CD можно теперь

представить как качение без скольжения гиперболы, связанной со стержнем CD , по неподвижной гиперболе.

Пример 15. Жесткий угол $AOB = \varphi$ (рис. 32) движется в своей плоскости так, что сторона OA все время проходит через неподвижную точку M , а сторона OB — через неподвижную точку N . Найти центроиды этого движения.

Решение. Свяжем подвижную систему отсчета с углом AOB и рассмотрим движение точки N . Абсолютная скорость этой точки равна нулю. В то же время точка N все время остается на прямой OB и, следовательно, ее относительная скорость будет направлена вдоль прямой OB . Но по теореме о сложении скоростей

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$$

и так как $\vec{v}_a = 0$, то

$$\vec{v}_e = -\vec{v}_r,$$

то есть переносная скорость направлена тоже вдоль прямой OB . Но переносной скоростью является скорость точки подвижной системы отсчета, которая связана жестко с движущимся углом. Отсюда следует, что скорость точки N прямой OB направлена вдоль прямой OB . При помощи аналогичных рассуждений приходим к заключению, что скорость точки M прямой OA направлена вдоль этой прямой. Зная направления скоростей двух точек движущегося угла AOB , заключаем, что мгновенный центр вращения угла AOB находится на пересечении перпендикуляров к OA и OB , восстановленных соответственно в точках M и N .

Обозначим через S мгновенный центр вращения угла AOB . Из построения нетрудно видеть, что точки M , S , N , O находятся на одной и той же окружности, диаметр которой равен расстоянию OS , а центр O_1 делит пополам расстояние SO . Очевидно, что $\angle MON = 2\varphi$, а $\triangle MO_1N$ — равнобедренный. Отсюда следует, что точка O_1 является неподвижной во все время движения, а неподвижной центроидой будет окружность радиуса $O_1M = O_1N = r$ с центром в точке O_1 . Подвижной центроидой будет окружность радиуса $2r$ с центром в точке O .

Пример 16. Прямолинейный стержень AB скользит своими концами по двум взаимно перпендикулярным направляющим Ox и Oy , вращающимся вокруг точки O с постоянной угловой скоростью ω . Угол наклона стержня AB к оси Ox изменяется по закону

$$\varphi = \varphi_0 \pm \omega t.$$

Определить абсолютную траекторию произвольной точки M стержня.

Решение. Предположим, что угол φ изменяется по закону $\varphi = \varphi_0 + \omega t$, и пусть стержень имеет длину l . Стержень в этом

случае участвует в двух движениях: вместе с подвижной системой (направляющими) он вращается с угловой скоростью ω против часовой стрелки и относительно подвижной системы отсчета вращается с такой же угловой скоростью ω по часовой стрелке. Мгновенный центр вращения в подвижной системе находится в точке S , расположенной на пересечении перпендикуляров к осям Ox и Oy , восстановленных из концов стержня AB (рис. 33). Результирующее движение в этом случае представляется парой вращений, эквивалентной мгновенно-поступательному движению твердого тела, скорость которого равна моменту пары ωl . Скорость центра стержня во все время движения остается постоянной по величине и направлена ортогонально к прямой OS , а следовательно, центр стержня движется по окружности с постоянной скоростью. Чтобы определить траекторию точки M , воспользуемся тем обстоятельством, что стержень совершает поступательное движение. Построим на прямых OO_1 и O_1M параллелограмм. Сторона O_2O этого параллелограмма остается неподвижной во все время движения, а точка M будет двигаться по окружности с центром в точке O_2 .

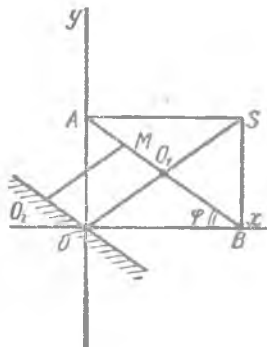


Рис. 33

Рассмотрим второй случай, когда

$$\varphi = \varphi_0 - \omega t.$$

Угол φ убывает, и стержень совершает два происходящие против часовой стрелки вращения. Результирующее движение является мгновенным вращением с мгновенной угловой скоростью 2ω , причем линия действия вектора мгновенной угловой скорости проходит через центр стержня O_1 . Поэтому скорость точки O_1 будет постоянно оставаться равной нулю, а все остальные точки стержня будут описывать концентрические окружности вокруг точки O_2 .

Задачи для самостоятельных упражнений

47. Палочка OA вращается в плоскости чертежа вокруг точки O с постоянной угловой скоростью $\omega_1 = \text{const}$. Вокруг точки A этой палочки вращается в той же плоскости другая палочка AB , причем угол φ между палочками изменяется по закону

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_2 > 0.$$

где $\omega_2 = \text{const}$ (см. рис. 14). Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки B палочки AB , считая, что $OA = a$, $AB = b$.

48. Палочка AB движется в плоскости чертежа так, что ее нижний конец A все время скользит по оси Ox , а сама она все время проходит через неподвижную точку $M(0, h)$. Найти положения движения и мгновенную угловую скорость вращения палочки, если скорость ее конца A равна $v_0 = \text{const}$ (рис. 34).

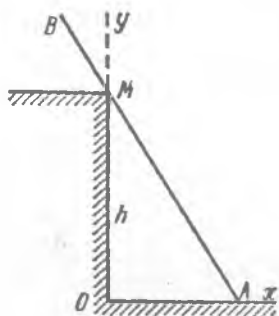


Рис. 34

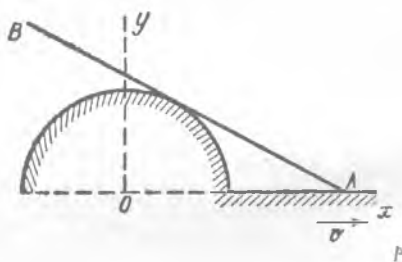


Рис. 35

49. Палочка AB движется в плоскости xOy так, что ее нижний конец A скользит по оси Ox , а сама она касается окружности радиуса r с центром в точке O . Найти скорость изменения $\angle OAB$, а также положение палочки и ее мгновенную угловую скорость, если скорость конца A палочки равна v (рис. 35).

50. Шарнирный плоский механизм состоит из четырех стержней $AD = BC = 2a$ и $AB = CD = 2c < 2a$, связанных шарнирно в точках A, B, C, D так, что сторона AB остается все время неподвижной. Найти зависимость между угловыми скоростями ω_1 и ω_2 звеньев AD и BC соответственно (рис. 36).

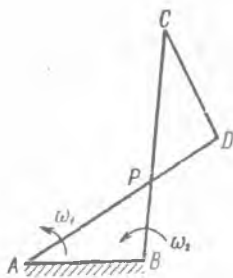


Рис. 36

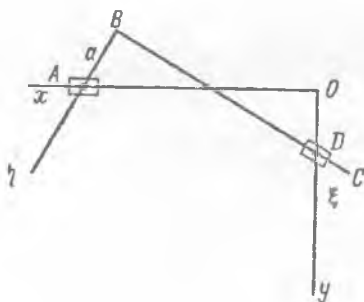


Рис. 37

51. В шарнирном параллелограмме $OABC$ точка O остается все время неподвижной. Звенья OA и OC вращаются в

плоскости чертежа в противоположные стороны соответственно с угловыми скоростями ω_2 и ω_1 . Определить абсолютную угловую скорость вращения стержня AB , его подвижную и неподвижную центроиды, а также абсолютную скорость точки B стержня AB (см. рис. 30).

52. Прямой $\angle ABC$ перемещается в плоскости таким образом, что его точка A скользит по оси Ox , а сторона BC все время проходит через неподвижную точку D на оси y . Найти уравнения неподвижной и подвижной центроид, если известно, что $AB = OD = a$ (рис. 37).

53. Парабола, уравнение которой $y_1^2 = 2px_1$, катится без скольжения по неподвижной прямой. Определить траекторию фокуса параболы.

54. Палочка OA длины a вращается в плоскости чертежа вокруг своей неподвижной точки O с постоянной угловой скоростью ω_1 . Вокруг точки A этой палочки в той же плоскости вращается другая палочка AB длины b , причем угол φ между

палочками изменяется по закону $\frac{d\varphi}{dt} = \omega_2 > 0$, где $\omega_2 =$

$= \text{const}$. Найти мгновенный центр вращения палочки AB и определить скорость движения точки B этой палочки.

55. На общей оси вращения свободно насажены колесо I и водило II . На конце водила свободно насажено колесо III , которое находится в зацеплении с неподвижным колесом IV . Зная радиусы колес, найти отношение угловых скоростей колеса I и водила, скорость которого равна ω_0 (рис. 38).

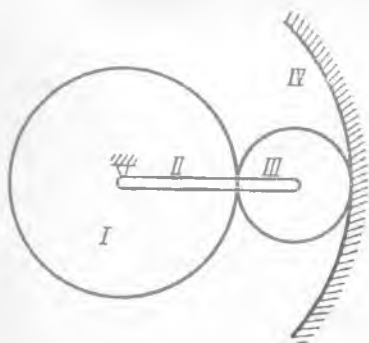


Рис. 38

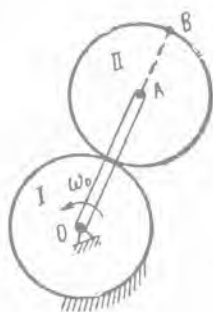


Рис. 39

56. Найти относительную и абсолютную угловые скорости зубчатого колеса II радиуса r_2 , катящегося без скольжения по неподвижному зубчатому колесу I радиуса r_1 и приводящегося в движение кривошипом OA , вращающимся вокруг оси неподвижного колеса O с угловой скоростью ω_0 . Движение кривошипа OA принять за переносное. Определить ускорение точки B (рис. 39).

57. Известно, что Луна, делая полный оборот вокруг Земли, поворачивается за это время вокруг своей оси один раз. Принимая орбиту Луны за окружность и допуская, что ее ось вращения перпендикулярна к плоскости орбиты, определить мгновенную ось вращения Луны и ее мгновенную угловую скорость вращения (принять радиус Земли за R , расстояние от центра Земли до центра Луны за l).

58. В центре O неподвижной окружности радиуса R имеется ось, вокруг которой вращается стержень OM длины p . На конце этого стержня свободно посажено колесо радиуса $r = R - p$, лежащее в плоскости окружности и касающееся ее внутренней стороны. Определить геометрически точку на окружности малого колеса, линия действия скорости которой проходит через точку A , являющуюся концом диаметра, перпендикулярного к OM . Определить аналитически скорость этой точки (рис. 40).

59. Колесо I неподвижно. На его оси свободно насажено водило OA , которое вращается вокруг точки O с угловой скоростью Ω . На водиле насажены колеса II , III и IV , находящиеся в зацеплении между собой и с колесом I . Найти угловую скорость ω_4 колеса IV относительно водила, а также его абсолютную угловую скорость ω_4 (рис. 41).

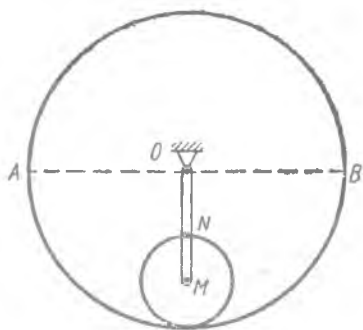


Рис. 40

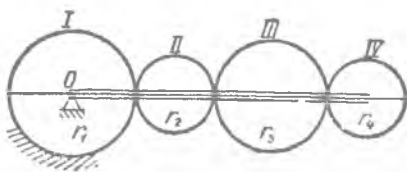


Рис. 41

60. Две параллельные рейки движутся в одну сторону с постоянными по величине скоростями v_1 и v_2 . Между рейками зажат диск радиуса a , катящийся по рейкам без скольжения. Найти угловую скорость диска и скорость его центра (рис. 42).

61. Кривошип OA вращается вокруг точки O с постоянной угловой скоростью ω . При помощи шатуна AB он приводит в движение ползун B . Показать, что скорость ползуна равна $\omega \cdot OD$, где D — точка пересечения AB с перпендикуляром, восстановленным в точке O к прямой OB (рис. 43).

62. Равнобокий клин с заданными углами α помещен между двумя брусками A и B , которые движутся поступательно и прямолинейно по горизонтальной плоскости навстречу друг другу с заданными скоростями v_1 и v_2 . Определить скорость поступательного движения клина (рис. 44).

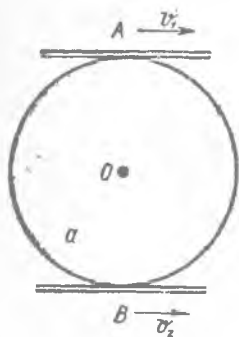


Рис. 42

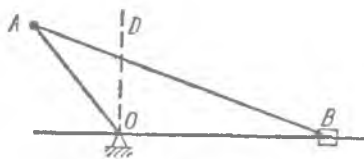


Рис. 43

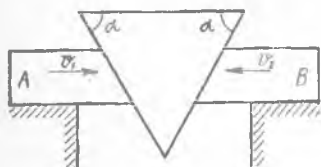


Рис. 44

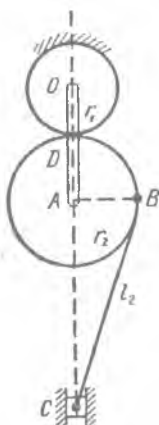


Рис. 45

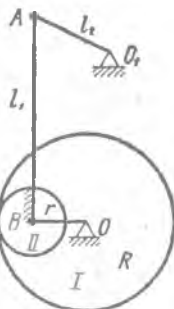


Рис. 46

63. Две рейки движутся параллельно друг другу с постоянными скоростями v_1 и v_2 в противоположные стороны. Между рейками зажат диск радиуса a , который вследствие движения реек и трения катится по ним без скольжения. Найти уравнения центрона и определить скорость v_0 центра O диска и его угловую скорость ω (см. рис. 42).

64. Кривошип $OA=l_1$ вращается вокруг неподвижной оси O с постоянной угловой скоростью ω_0 . Он приводит в движение зубчатое колесо радиуса r_2 , которое катится без скольжения по неподвижному колесу радиуса r_1 и приводит в движение связанный с ним стержень $BC=l_2$. Определить угло-

вую скорость вращения стержня и скорости точек B и C в тот момент, когда радиус AB перпендикулярен к кривошипу OA (рис. 45).

65. Шестеренка II , шарнирно закрепленная на конце стержня OB , катится без скольжения по внутренней поверхности шестеренки I , которая может свободно вращаться вокруг неподвижной оси O (рис. 46). С шестеренкой II жестко связан стержень BA , шарнирно соединенный со стержнем AO_1 , конец O_1 которого неподвижен. Стержень OB вращается вокруг своей неподвижной точки с постоянной угловой скоростью ω_0 . Определить угловую скорость ω шестеренки I и стержня O_1A , принимая во внимание обозначения, указанные на чертеже, и считая, что $\angle OBA = 90^\circ$, $\angle BAO_1 = 45^\circ$.

66. Плоский механизм состоит из трех шарнирно соединенных стержней O_1A , AB , BO , концы O и O_1 которых остаются неподвижными. Шестеренка I свободно вращается вокруг неподвижной точки O и находится в зацеплении с другой такой же шестеренкой II , жестко связанной со стержнем AB и способной вращаться свободно вокруг шарнира B . Стержню O_1A сообщена постоянная угловая скорость ω_0 . Определить угловые скорости стержня OB и шестеренки I в тот момент, когда $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 90^\circ$, $r_1 = r_2 = l$, $O_1A = l$ (рис. 47).

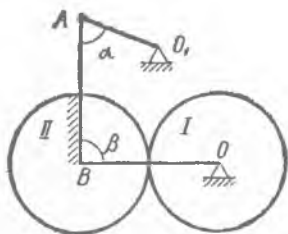


Рис. 47

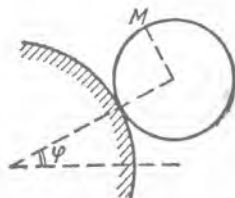


Рис. 48

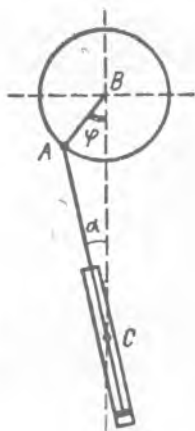


Рис. 49

67. Обруч радиуса r катится без скольжения по неподвижному цилиндру радиуса R с постоянной угловой скоростью ω_0 . По обручу движется точка M с постоянной относительной скоростью v_0 . Определить абсолютную скорость точки M в тот момент, когда она находится в положении, указанном на чертеже (рис. 48). Положение центра обруча определяется углом φ .

68. На чертеже (рис. 49) представлена схема механизма с качающимся цилиндром, который может вращаться вокруг неподвижной точки C . Определить угловую скорость Ω цилиндра в зависимости от угловой скорости ω кривошипа AB и угла поворота его φ , зная, что $AB=a$ и $BC=b$.

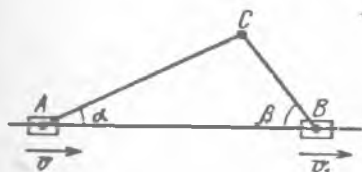


Рис. 50

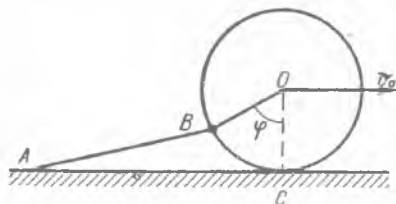


Рис. 51

69. Два стержня AC и BC соединены между собой шарнирно в точке C , а также шарнирно соединены с двумя ползунами A и B , движущимися прямолинейно со скоростями v и v_1 соответственно по прямолинейному рельсу (как показано на рис. 50). Определить скорость точки C в тот момент, когда стержни образуют соответственно углы α и β с рельсом.

70. Диск катится без скольжения по неподвижной прямой так, что его центр движется с постоянной по величине и по направлению скоростью v_0 . К точке B окружности диска шарнирно прикреплен стержень AB , свободный конец которого A скользит по той же неподвижной прямой. Определить скорость свободного конца A стержня в зависимости от угла φ поворота диска. Длина стержня равна l , радиус диска равен r (рис. 51).

71. К концу A стержня OA длины l , вращающегося около неподвижной точки O с постоянной угловой скоростью ω , прикреплен стержень AB , длина которого равна l . Конец B этого стержня шарнирно прикреплен к ползуну, движущемуся по неподвижной прямой A_0C , отстоящей от точки O на расстоянии $OA_0=l$. Определить скорость ползуна в зависимости от его положения, определяемого углами φ и ψ (рис. 52).

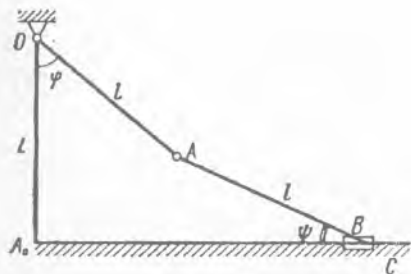


Рис. 52

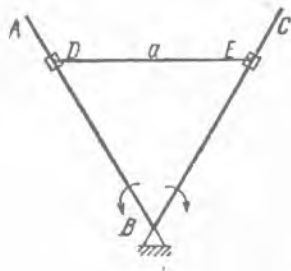


Рис. 53

Определить величину мгновенной угловой скорости вращения стержня AB и найти его мгновенный центр вращения.

72. Стержни AB и BC вращаются равномерно с угловыми скоростями ω и $-\omega$ вокруг неподвижного шарнира B . Стержень DE длины a соединяет ползуны, движущиеся по AB и BC так, что $\triangle DBE$ все время остается равнобедренным. Определить скорость v поступательного движения стержня DE и относительные скорости u скольжения ползунков по соответствующим стержням AB и BC в тот момент, когда $\angle ABC = 60^\circ$ (рис. 53).

73. Шарнирный антипараллелограмм $ABCD$ состоит из четырех стержней: AB , BC , CD и AD . При этом $AB = DC = 2a$, $AD = BC = 2b$. Стержень AD все время остается неподвижным,

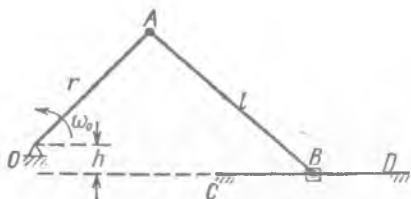


Рис. 54

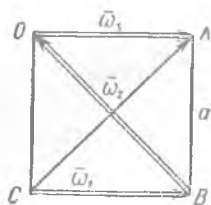


Рис. 55

а стержень AB вращается вокруг точки A с постоянной угловой скоростью ω_0 . Определить скорость точки C стержня DC в тот момент, когда $\angle ADC = 90^\circ$ (см. рис. 75).

74. Плоский механизм состоит из двух шарнирно соединенных стержней $OA = r$ и $AB = l$ и ползуна B . Стержень OA вращается вокруг неподвижной точки O с постоянной угловой скоростью ω_0 . Ползун вынужден скользить по неподвижной прямой CD , не проходящей через неподвижную точку O . Определить скорость v движения ползуна B в тех положениях, где стержень OA оказывается параллельным или перпендикулярным к прямой CD (рис. 54).

В общем случае мгновенное движение твердого тела может быть задано как сложное движение, состоящее из нескольких мгновенно-поступательных и мгновенно-вращательных движений. Такое общее движение всегда можно свести к более простому мгновенному движению — мгновенно-винтовому движению твердого тела. При этом задача сводится к приведению системы скользящих векторов, каковыми являются вектора мгновенной угловой скорости вращения твердого тела, к простейшему виду.

Рассмотрим пример, поясняющий сказанное.

Пример 17. Твердое тело совершает сложное движение, которое сводится к трем мгновенным вращениям вокруг

трех осей, расположенных по двум сторонам и одной диагонали квадрата (как указано на рис. 55), причем угловые скорости соответственно пропорциональны длинам сторон и диагонали квадрата. Привести эту систему мгновенных вращений к одному мгновенному вращению и найти результирующую угловую скорость вращения.

Решение. Рассматриваемая задача сводится к приведению системы, состоящей из трех скользящих векторов, расположенных в одной плоскости, к простейшему виду. Величина и направление вектора определяются по правилу сложения скользящихся векторов. Таким образом, величина результирующего вектора оказывается пропорциональной отрезку CA , а его линия действия параллельна отрезку CA . Для полного определения линии действия остается указать точку, через которую она проходит. Заметим, что два вектора ω_1 и ω_3 эквивалентны одному вектору $\omega = \omega_1 + \omega_3$, линия действия которого параллельна линиям действия векторов ω_1 и ω_3 и делит пополам диагональ BO . Отсюда следует, что вектор ω_2 и вектор ω проходят через одну точку — середину диагонали BO , а следовательно, и результирующий вектор проходит через эту же точку.

Задачи для самостоятельных упражнений

75. Куб, ребро которого равно a , совершает два одновременных вращения с равными по величине угловыми скоростями ω_1 и ω_2 вокруг двух своих непараллельных и непересекающихся ребер AD и OC (как указано на рис. 56). Привести это движение к одному мгновенно-винтовому движению.

76. Дан куб $ABDCFGHE$ с ребром, равным a_M . Скорость v_1 точки A этого куба равна a м/сек и направлена по AG ; скорость v_2 точки B равна $a\sqrt{2}$ м/сек и направлена по стороне BE ; скорость же v_3 точки C равна $a\sqrt{2}$ м/сек и направлена параллельно стороне DF . Определить положение мгновенной винтовой оси, скорость скольжения вдоль мгновенной винтовой оси и мгновенную угловую скорость куба (рис. 57).

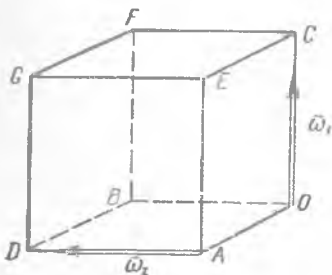


Рис. 56

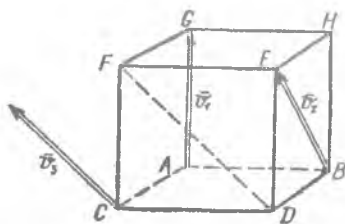


Рис. 57

77. В винте $(\bar{\omega}, \bar{v})$, где v — поступательная скорость и ω — угловая скорость вращения твердого тела, найти геометрическое место точек, скорости которых равны $v\sqrt{2}$.

78. Твердое тело A вращается с постоянной угловой скоростью Ω вокруг оси, совпадающей с одним из ребер куба, величина которого равна a . Твердое тело B совершает мгно-

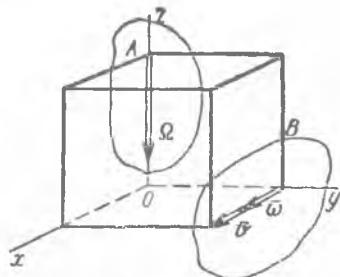


Рис. 58

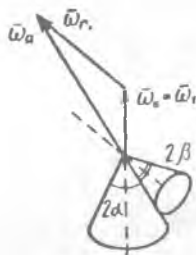


Рис. 59

венно-винтовое движение (ω, v) , ось которого (как показано на рис. 58) совпадает с другим ребром того же куба. Найти движение тела B относительно тела A .

В тех случаях, когда у твердого тела закреплена только одна точка, мгновенное движение тела сводится к одному результирующему мгновенному вращению. При этом мгновенная ось вращения проходит через неподвижную точку. При определении положения мгновенной оси вращения следует помнить, что скорости точек тела, расположенных на мгновенной оси вращения, равны нулю.

Рассмотрим следующий пример.

Пример 18. По неподвижному круговому конусу с углом при вершине, равным 2α , катится без скольжения другой круговой конус с углом при вершине, равным 2β , так, что ось симметрии последнего вращается вокруг оси симметрии неподвижного конуса с постоянной угловой скоростью ω_1 . Определить абсолютную угловую скорость вращения подвижного конуса и найти аксоиды.

Решение. Подвижный конус катится по неподвижному без проскальзывания так, что точки подвижного конуса, расположенные на общей образующей, имеют нулевые скорости. Поэтому мгновенная ось вращения совпадает с общей образующей обоих конусов. Во время движения мгновенная ось вращения перемещается как по поверхности неподвижного, так и по поверхности подвижного конуса. Поэтому аксоидами будут являться эти же самые поверхности конусов. Движение

подвижного конуса теперь можно представить как сложное, состоящее из вращения подвижной системы вокруг оси симметрии неподвижного конуса с переносной угловой скоростью $\omega_e = \omega_1$ (рис. 59) и относительного вращения подвижного конуса вокруг своей оси симметрии в подвижной системе координат. Зная направления абсолютной и относительной угловых скоростей подвижного конуса, а также величину и направление переносной угловой скорости, легко определить величину и направление абсолютной угловой скорости вращения конуса. Из треугольника скоростей будем иметь

$$\frac{\omega_a}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{\omega_1}{\sin \beta},$$

откуда

$$\omega_a = \omega_1 \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \beta}.$$

Пример 19. Горизонтальные колеса *I* и *II* дифференциального механизма вращаются вокруг одной и той же вертикальной оси *AB* соответственно со скоростями ω_1 и ω_2 . Определить мгновенную угловую скорость вращения планетного колеса *III*, ось которого может свободно вращаться вокруг оси *AB* (рис. 60).

Решение. Абсолютное мгновенное движение колеса *III* можно представить как результат сложения переносного движения (вместе с колесом *I*) и относительного движения колеса *III* по отношению к колесу *I*. В таком случае переносная угловая скорость колеса *III* равна ω_1 . Перенесем начало вектора ω_1 в неподвижную точку и рассмотрим относительное движение колеса *III*. В этом относительном движении мгновенная ось вращения Δ_1 колеса *III* проходит через точку соприкосновения колеса *III* с колесом *I* и через точку *O* пересечения осей колес *III* и *I*. Поэтому конец вектора абсолютной угловой скорости расположен на прямой δ_1 , проходящей через конец вектора ω_1 и параллельной прямой Δ_1 . Пред-

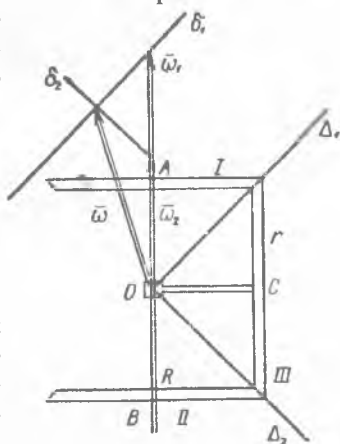


Рис. 60

ставляя теперь мгновенное движение колеса *III* как результат сложения переносного движения (вместе с колесом *II*) и относительного движения колеса *III* по отношению к колесу *II*, аналогичными рассуждениями получим, что конец

вектора абсолютной угловой скорости колеса *III* лежит на прямой δ_2 , параллельной прямой Δ_2 , проходящей через конец вектора ω_2 . Величина вектора абсолютной угловой скорости колеса *III* определится из простого геометрического построения и тогда

$$\omega^2 = \left(\omega_2 + \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \right)^2 + \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \right)^2 \frac{R^2}{r^2},$$

где R и r — соответственно радиусы колес *I* и *III*.

Задачи для самостоятельных упражнений

79. Круглый конус подвешен вершиной к неподвижной точке O и вращается вокруг своей геометрической оси $O\xi$ с постоянной угловой скоростью ω_1 и, кроме того, качается, подобно маятнику, вокруг горизонтальной оси Oy , перпендикулярной к $O\xi$ (рис. 61). В какой момент, то есть при каком значении угловой скорости ω_2 качания маятника, мгновенная ось вращения будет лежать на поверхности конуса, если его высота равна h , а радиус его основания равен R ?

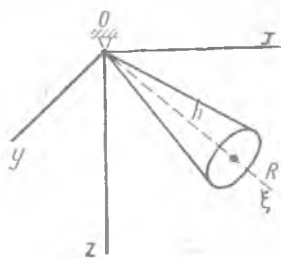


Рис. 61

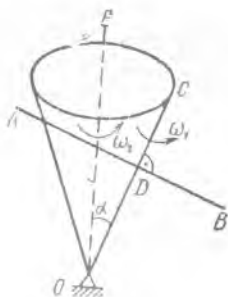


Рис. 62

80. Тело вращается вокруг оси, проходящей через начало координат. Скорость точки $M(1, 0, 1)$ тела $v_1 = 4$ м/сек и образует с осью абсцисс угол $\alpha = 45^\circ$. Скорость точки $M_2(3, 4, 0)$ тела образует с осью абсцисс угол α_2 , причем $\cos \alpha_2 = -0,8$. Найти уравнение мгновенной оси вращения, мгновенную угловую скорость ω и скорость v_2 точки M_2 тела.

81. Диск радиуса R , плоскость которого образует угол α с вертикалью, катится без скольжения по горизонтальной плоскости, описывая на ней окружность, причем ось диска все время проходит через центр O этой окружности. Найти аксоиды и абсолютную угловую скорость ω диска, а также угловую скорость ω_r диска вокруг его оси, линейную ско-

рость $\bar{v}$ его высшей точки M , если центр диска описывает полную окружность с постоянной скоростью v_0 .

82. Круглая пластинка AB вращается вокруг оси OC , проходящей через ее центр D , с постоянной угловой скоростью ω_1 , а сама ось OC вращается в том же направлении вокруг вертикальной оси OE с постоянной угловой скоростью ω_2 . Угол между осями равен α , диаметр пластинки равен $2d$, а расстояние $OD=a$. Определить скорость $\bar{v}$ самой нижней точки B пластинки (рис. 62).

Теорема Кориолиса об ускорении материальной точки в сложном движении. Распределение ускорений в твердом теле

Зависимость между ускорениями материальной точки, определяемыми в подвижной и неподвижной системах отсчета, определяется теоремой Кориолиса. По этой теореме абсолютное ускорение материальной точки равно геометрической сумме ускорений: переносного, относительного и добавочного (кориолисова ускорения), то есть

$$\bar{j}_a = \bar{j}_e + \bar{j}_r + j'.$$

Под переносным ускорением $\bar{j}_e$ понимают ускорение той точки подвижной системы отсчета, с которой в данный момент совпадает изучаемая материальная точка. Относительным ускорением $\bar{j}_r$ называют ускорение материальной точки в ее движении относительно подвижной системы отсчета. Добавочным ускорением j' называют ускорение, равное удвоенному векторному произведению мгновенной угловой скорости вращения подвижной системы отсчета на относительную скорость материальной точки, то есть

$$j' = 2[\bar{\omega} \cdot \bar{v}_r].$$

Наибольшие затруднения возникают при определении переносного и добавочного ускорений. Определение переносного ускорения связано с представлением о движении твердого тела, так как всякую точку подвижной системы отсчета всегда можно рассматривать как точку некоторого твердого тела, жестко связанного с этой подвижной системой отсчета. Ускорения же точек твердого тела определяются по формуле Ривальса, на основании которой ускорение произвольной точки твердого тела равно геометрической сумме ускорения некоторого полюса, за который может быть принята любая точка твердого тела, вращательного и осеостремительного ускорений, то есть

$$\bar{j} = \bar{j}_o + \bar{j}_{op} + \bar{j}_{oc}.$$

Обычно в качестве полюса выбирается та точка твердого тела, ускорение которой может быть определено без излишних затруднений. Вращательное ускорение определяется по формуле

$$\vec{j}_{вр} = [\vec{\epsilon} \cdot \overline{OM}],$$

где $\vec{\epsilon}$ — вектор углового ускорения твердого тела, то есть

$$\epsilon = \frac{d\omega}{dt}.$$

Производная здесь берется по отношению к неподвижной системе отсчета, а вектор $\overline{OM}$ определяет положение точки M относительно подвижной системы координат, движущейся поступательно вместе с полюсом. Осестремительное ускорение можно определить по формуле

$$\vec{j}_{ос} = \vec{\omega} \cdot (\vec{\omega} \cdot \overline{OM}) - \overline{OM} \cdot \omega^2,$$

где $\vec{\omega}$ — абсолютная угловая скорость вращения твердого тела в рассматриваемый момент времени. Пользуясь тем, что $\vec{\omega}$ — скользящий вектор, можно показать, что вектор $\vec{j}_{ос}$ направлен к линии действия вектора $\vec{\omega}$, ортогонален к ней, а его величина пропорциональна расстоянию точки M от линии действия вектора $\vec{\omega}$.

Пример 20. Пользуясь теоремой Кориолиса, определим ускорение материальной точки в полярной системе координат. Воспользуемся следующей схемой. Пусть движение материальной точки M по палочке OA происходит по произвольному закону $s = s(t)$ (рис. 63). Будем предполагать, что палочка вра-

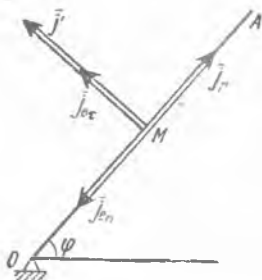


Рис. 63

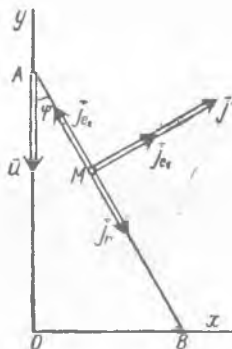


Рис. 64

щается в своей плоскости вокруг неподвижного конца O , причем угол φ , который она образует с некоторой неподвижной прямой этой плоскости, изменяется по произвольному закону $\varphi = \varphi(t)$.

Для определения ускорения материальной точки воспользуемся теоремой Кориолиса. Здесь в переносном движении материальная точка M движется по окружности радиуса s с центром в точке O . Определяя переносное ускорение, мы обязаны положить $s = \text{const}$. Тогда получим две составляющие переносного ускорения:

$$j_{en} = \varphi'^2 s, \quad j_{e\tau} = \varphi'' s.$$

Относительное движение материальная точка совершает по прямой OA . Следовательно, относительное ускорение будет направлено вдоль палочки, а его величина равна

$$j_r = s''.$$

Добавочное ускорение получим из формулы

$$j' = 2 [\bar{\omega} \cdot \bar{v}_r];$$

оно будет направлено ортогонально к палочке в сторону вращения, а по величине равно

$$j' = 2\varphi' s'.$$

Проектируя вектор ускорения на направление палочки и на ортогональное к ней направление (см. рисунок), получим так называемые радиальную и трансверсальную составляющие ускорения:

$$j_r = s'' - \varphi'^2 s, \quad j_\varphi = \varphi'' s + 2\varphi' s'.$$

Пример 21. Палочка AB длины a скользит своими концами A и B по неподвижным вертикальной и горизонтальной прямым так, что ее конец A движется с постоянной скоростью u (рис. 64). По палочке движется материальная точка M с постоянной относительной скоростью $\bar{v}_0$. Определить абсолютное ускорение материальной точки M , принимая в качестве параметра, определяющего положение палочки, угол φ , который она образует с вертикалью.

Решение. Для определения ускорения материальной точки воспользуемся теоремой Кориолиса. За относительное движение примем движение материальной точки M по палочке. Переносное ускорение этой точки можно определить, пользуясь теоремой Ривальса. Примем в качестве полюса точку A . Тогда ускорение полюса $j_o = 0$, а ускорение точки M палочки

будет зависеть лишь от вращения палочки вокруг точки A . Заметим, что вертикальная координата y точки A равна:

$$y = a \cos \varphi.$$

Дифференцируем это выражение и получаем

$$y' = -a\dot{\varphi} \sin \varphi.$$

С другой стороны, $y' = -u$, откуда

$$\dot{\varphi} = \frac{u}{a \sin \varphi}.$$

Дифференцируя последнее выражение еще раз, получим

$$y'' = -a\ddot{\varphi} \sin \varphi - a\dot{\varphi}^2 \cos \varphi.$$

Но так как $y'' = 0$, то

$$\ddot{\varphi} = -\dot{\varphi}^2 \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} = -\frac{u^2 \cos \varphi}{a^2 \sin^3 \varphi}.$$

Определим теперь вращательное j_{e_1} и осестремительное j_{e_2} ускорения точки M палочки:

$$j_{e_1} = \ddot{\varphi} s = -\frac{u^2 s \cos \varphi}{a^2 \sin^3 \varphi},$$

$$j_{e_2} = \dot{\varphi}^2 s = \frac{u^2 s}{a^2 \sin^3 \varphi}.$$

Материальная точка совершает прямолинейное относительное движение с постоянной по величине относительной скоростью v_0 . Поэтому относительное ускорение материальной точки равно нулю. Остается подсчитать добавочное ускорение j' . Оно будет направлено ортогонально к палочке, в сторону возрастания угла φ , а по величине равно

$$j' = 2\dot{\varphi} v_0 = \frac{2uv_0}{a \sin \varphi}.$$

Величину и направление полного ускорения материальной точки можно теперь определить, рассматривая геометрическую сумму составляющих ускорения материальной точки. В результате, как нетрудно видеть, будем иметь

$$j = \sqrt{\left(\frac{2uv_0}{a \sin \varphi} - \frac{us \cos \varphi}{a^2 \sin^3 \varphi} \right)^2 + \frac{u^2 s^2}{a^4 \sin^4 \varphi}}.$$

Следует отметить, что удачный выбор подвижной системы отсчета в ряде случаев является залогом успеха в решении задачи. Рассмотрим следующий пример.

Пример 22. Окружность радиуса a (рис. 65) вращается в своей плоскости вокруг своей неподвижной точки O с постоянной угловой скоростью ω_1 против часовой стрелки. Стержень OA вращается в той же плоскости вокруг точки O с постоянной угловой скоростью ω_2 по часовой стрелке. На стержень и на окружность надето колечко M . Определить скорость и ускорение колечка в зависимости от величины угла φ , который образует радиус окружности со стержнем.

Решение. Определим сначала скорости. В качестве подвижной системы координат выберем систему осей, неизменно связанную со стержнем. Тогда для переносной скорости получим следующее значение:

$$v_{e_2} = \omega_2 S = 2\omega_2 a \cos \varphi.$$

Вектор относительной скорости точки $\bar{v}_{r_2}$ в этой системе направлен вдоль стержня, а потому и конец вектора абсолютной скорости точки M лежит на прямой Δ_2 , параллельной стержню и проходящей через конец вектора переносной скорости $\bar{v}_{e_2}$.

Выберем теперь в качестве подвижной системы координат систему осей, неизменно связанную с окружностью. Тогда переносная скорость $\bar{v}_{e_1}$ по величине будет равна

$$v_{e_1} = \omega_1 S = \omega_1 2a \cos \varphi.$$

Вектор относительной скорости будет направлен по касательной к окружности и, следовательно, конец вектора абсолютной скорости точки M лежит на прямой Δ_1 , параллельной касательной к окружности и проходящей через конец вектора $\bar{v}_{e_1}$. Нетрудно видеть, что прямые Δ_1 и Δ_2 пересекаются в точке S , а потому конец вектора абсолютной скорости точки M будет находиться в той же точке S . Теперь нетрудно определить и величину скорости точки M (см. рис. 65):

$$v_{r_2} = (v_{e_1} + v_{e_2}) \operatorname{tg} \varphi = (\omega_1 + \omega_2) 2a \sin \varphi;$$

$$v_{r_1} = \frac{v_{e_1} + v_{e_2}}{\cos \varphi} = (\omega_1 + \omega_2) 2a = \text{const};$$

$$v_a = 2a \sqrt{\omega_2^2 + \omega_1(\omega_1 + 2\omega_2) \sin^2 \varphi}.$$

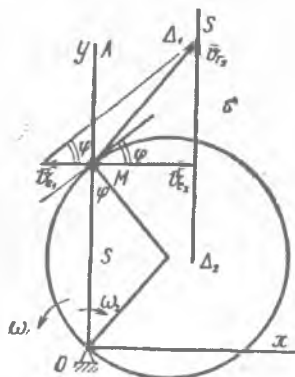


Рис. 65

Перейдем к определению ускорений. В системе осей, неизменно связанной с окружностью, материальная точка движется по окружности с постоянной по величине скоростью $\overline{v}_{r_1}$, а потому и относительное ускорение точки в этой системе отсчета по величине равно

$$j_{r_1} = (\omega_1 + \omega_2)^2 4a$$

и направлено к центру окружности. Переносное ускорение точки в этой системе координат равно

$$j_{e_1} = \omega_1^2 S = \omega_1^2 2a \cos \varphi$$

и направлено к точке O . Добавочное ускорение по величине равно

$$j_1' = 2\omega_1 (\omega_1 + \omega_2) 2a$$

и направлено от центра окружности. Проектируя эти составляющие ускорения на оси x и y , получим:

$$j_x = 4\omega_2 (\omega_1 + \omega_2) a \sin \varphi,$$

$$j_y = -[\omega_1^2 + 2\omega_2 (\omega_1 + \omega_2)] 2a \cos \varphi.$$

Если в качестве подвижной системы координат выбрать систему осей, связанную со стержнем, то, как нетрудно видеть, будем иметь:

$$j_{e_2} = \omega_2^2 S = \omega_2^2 2a \cos \varphi,$$

$$j' = 2\omega_2 (\omega_1 + \omega_2) 2a \sin \varphi.$$

А так как относительное движение в этой системе осей является прямолинейным движением, то для относительного ускорения получим следующее выражение:

$$j_r = \frac{dv_{r_1}}{dt} = (\omega_1 + \omega_2) 2a \frac{d\omega}{dt} \cos \varphi =$$

$$= -(\omega_1 + \omega_2)^2 2a \cos \varphi.$$

Для проекций ускорения на оси x , y получим те же значения:

$$j_x = 4\omega_2 (\omega_1 + \omega_2) a \sin \varphi,$$

$$j_y = -[\omega_1^2 + \omega_2 (\omega_1 + \omega_2)] 2a \cos \varphi.$$

Формулы Ривальса для определения ускорений точек твердого тела значительно упрощаются при рассмотрении плоского движения твердого тела. В плоском движении вектор мгновенной угловой скорости вращения твердого тела

может изменяться только по величине и не меняется по направлению. А это значит, что вектор углового ускорения $\bar{\epsilon}$ и вектор мгновенной угловой скорости $\bar{\omega}$ становятся коллинеарными векторами. Благодаря этому формулы принимают особенно наглядный вид. Формулы значительно упрощаются, если за полюс выбрать ту точку твердого тела, которая в данный момент совпадает с положением мгновенного центра вращения твердого тела. Тогда будем иметь

$$\bar{j} = \bar{\gamma}_c + \bar{\gamma}_\tau + \bar{\gamma}_n,$$

где $\bar{\gamma}_c$ — ускорение точки твердого тела, совпадающей в данный момент с мгновенным центром вращения, причем

$$\gamma_c = -[\bar{\omega} \cdot \bar{u}],$$

где $\bar{\omega}$ — мгновенная угловая скорость вращения твердого тела, $\bar{u}$ — скорость движения мгновенного центра вращения.

γ_τ и γ_n — соответственно касательная и нормальная составляющие ускорения точки M тела при вращении последнего вокруг мгновенного центра вращения. Таким образом, если через CM обозначить расстояние от мгновенного центра вращения до точки M , ускорение которой определяется, то:

$$\gamma_n = \omega^2 \cdot CM, \quad \gamma_\tau = \epsilon \cdot CM.$$

Пример 23. Палочка AB скользит своим концом A по окружности радиуса r и проходит через точку C этой окружности. Определить ускорение точки B палочки, расположенной на расстоянии l от конца A , если точка A движется с постоянной по величине скоростью U_0 (рис. 66).

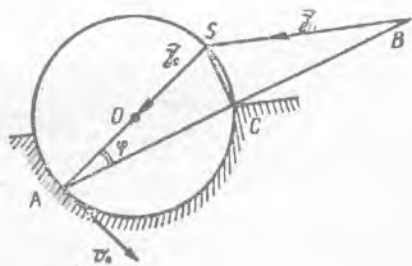


Рис. 66

Решение. Решим эту задачу при помощи формул Ривальса, выбирая в качестве полюса точку твердого тела, совпадающую в данный момент с мгновенным центром вращения. Нетрудно видеть, что мгновенный центр вращения палочки находится на пересечении диаметра окружности, проходящего через точку A , и перпендикуляра к палочке, восстановленного в точке C . Расстояние от точки A до мгновенного центра вращения равно диаметру окружности и остается постоянным во все время движения. Благодаря этому мгновенная угло-

вая скорость вращения палочки остается постоянной во все время движения и по величине равна

$$\omega = \frac{v_0}{2r}.$$

Угловое ускорение палочки ε равно нулю во все время движения. Нетрудно определить ускорение точки тела (палочки), совпадающей с положением мгновенного центра вращения. По величине оно равно

$$\gamma_c = \omega v_0 = \frac{v_0^2}{2r}$$

и направлено к центру окружности. Нормальное ускорение γ_n точки B равно

$$\gamma_n = \omega^2 \cdot SB,$$

где $SB = \sqrt{l^2 + 4r^2 - 4rl \cos \varphi}$. Касательное ускорение равно нулю, так как равно нулю угловое ускорение ε .

Рассмотрим проекции ускорения на направление палочки и на ортогональное к ней направление:

$$j_x = \gamma_c \cos \varphi - \gamma_n \frac{l - 2r \cos \varphi}{SB} = \frac{v_0^2}{r} \cos \varphi - \frac{v_0^2 l}{4r^2},$$

$$j_y = \gamma_c \sin \varphi + \gamma_n \frac{CS}{SB} = \frac{v_0^2}{r} \sin \varphi.$$

Пример 24. Окружность радиуса r катится без скольжения по неподвижной окружности радиуса R так, что скорость ее центра остается постоянной по величине и равна v_0 во все время движения. Определить ускорение точки S окружности, совпадающей в данный момент с положением мгновенного центра вращения, и ускорение точки A , расположенной на противоположном конце диаметра, проходящего через точку S .

Решение. Так как мгновенный центр вращения находится в точке S , то мгновенная угловая скорость ω будет по величине равна

$$\omega = \frac{v_0}{r}.$$

С другой стороны, точка S все время находится на прямой, соединяющей центры окружностей. Поэтому скорость и дви-

жения мгновенного центра вращения определяется из условия

$$\frac{v_0}{R+r} = \frac{u}{R},$$

то есть

$$u = \frac{v_0 R}{R+r}.$$

Тогда ускорение точки S твердого тела имеет вид

$$\gamma_c = \omega u = \frac{v_0^2 R}{r(R+r)}$$

и направлено к центру движущейся окружности.

Нетрудно видеть, что угловое ускорение ϵ будет равно нулю во все время движения, так как вектор мгновенной угловой скорости вращения остается во все время движения постоянным и по величине, и по направлению. Поэтому будет равна нулю и составляющая γ_{τ} . Для γ_n получим следующее значение:

$$\gamma_n = \omega^2 r = \frac{2v_0^2}{r}.$$

Ускорение точки A определится из равенства

$$j_A = \gamma_c - \gamma_n = \frac{v_0^2 R}{r(R+r)} - \frac{2v_0^2}{r} = -\frac{v_0^2 (R+2r)}{r(R+r)}$$

и будет направлено к центру подвижной окружности.

Затруднения, возникающие при определении ускорения точки твердого тела в плоскопараллельном движении, и связанные с определением величины вектора ϵ , иногда могут быть устранены при рассмотрении проекций ускорения точки на различные оси координат. Рассмотрим следующую задачу.

Пример 25. Полый цилиндр радиуса $2r$ вращается вокруг своей неподвижной оси симметрии с постоянной угловой скоростью ω . По внутренней поверхности этого цилиндра катится без скольжения другой цилиндр радиуса r с постоянной относительной угловой скоростью ω_1 (как показано на рис. 67). Определить ускорение точки C малого цилиндра, совпадающей в рассматриваемый момент времени с осью большого.

Решение. Выберем за полюс точку O_1 . Скорость точки O_1 может быть получена как скорость точки в сложном движении, где переносная скорость равна $\omega \cdot r$, а относительная скорость равна $\omega_1 \cdot r$. Тогда абсолютная скорость точки O_1 будет по величине равна

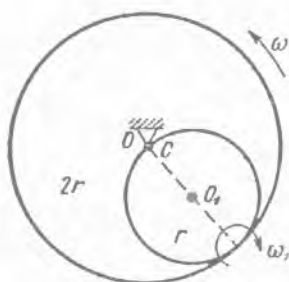


Рис. 67

$$v_{O_1} = (\omega + \omega_1) r$$

и направлена в сторону вращения большого цилиндра. Точка O_1 движется по окружности радиуса r с постоянной по величине скоростью v_{O_1} . Благодаря этому ускорение полюса по величине равно

$$j_{O_1} = \frac{v_{O_1}^2}{r} = (\omega + \omega_1)^2 r$$

и направлено к точке O . Для определенности положим $\omega > \omega_1$. Тогда абсолютная угловая скорость малого колеса будет равна

$$\Omega = \omega - \omega_1$$

и направлена против часовой стрелки. По величине Ω остается постоянной во все время движения. Поэтому угловое ускорение будет равно нулю. Ускорение точки C колеса складывается из ускорения точки O_1 и из нормального ускорения

$$j_n = (\omega_1 - \omega)^2 r.$$

Проектируя на направление OO_1 , получим

$$j = (\omega_1 - \omega)^2 r - (\omega + \omega_1)^2 r = -4\omega_1 \omega r,$$

откуда видно, что ускорение направлено от точки O_1 .

При решении пространственных задач необходимо помнить, что вектора ω и ε вообще не совпадают по направлению. Это обстоятельство создает некоторые осложнения при решении задач. Рассмотрим следующие задачи.

Пример 26. *Прямой круговой конус II с углом при вершине 2β катится без скольжения по внешней стороне неподвижного конуса I с углом при вершине 2α . При этом ось симметрии подвижного конуса вращается вокруг оси симметрии неподвижного конуса с постоянной скоростью угловой ω_0 .*

Определить абсолютное ускорение самой верхней точки M основания подвижного конуса.

Решение. Воспользуемся теоремой Ривальса и выберем за полюс вершину подвижного конуса, остающуюся неподвижной во все время движения. Будем иметь

$$\dot{j}_0 = 0.$$

Остается определить осестремительное $\overline{j}_{oc}$ и вращательное $\overline{j}_{ep}$ ускорения. Для определения этих составляющих найдем сначала величину и направление вектора мгновенной угловой скорости $\overline{\omega}$ вращения твердого тела. Из геометрических построений

$$\omega = \omega_0 \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \beta}.$$

Угловое ускорение $\overline{\varepsilon}$ определяется как производная по времени от вектора мгновенной угловой скорости $\overline{\omega}$. Нетрудно видеть, что конец вектора мгновенной угловой скорости $\overline{\omega}$ будет описывать окружность вокруг вертикальной оси неподвижного конуса со скоростью

$$[\overline{\omega}_0 \overline{\omega}].$$

Это и есть скорость конца вектора $\overline{\omega}$, то есть угловое ускорение $\overline{\varepsilon}$. Таким образом, величина вектора углового ускорения

$$\varepsilon = \omega_0^2 \frac{\sin(\alpha + \beta) \sin \alpha}{\sin \beta}.$$

Величина вращательного ускорения точки M имеет вид

$$\dot{j}_{ep} = \omega_0^2 r \frac{\sin(\alpha + \beta) \sin \alpha}{\sin \beta},$$

где r — радиус основания конуса.

Нетрудно видеть, что расстояние от точки M до мгновенной оси вращения равно

$$h = 2r \cos \beta,$$

поэтому для величины осестремительного ускорения получим значение

$$\dot{j}_{oc} = \omega_0^2 \frac{\sin^2(\alpha + \beta)}{\sin^2 \beta} 2r \cos \beta.$$

Пример 27. Диск радиуса r катается без скольжения по плоскости, описывая окружность радиуса R с постоянной по величине угловой скоростью ω_1 и сохраняя свою плоскость вертикальной. Найти осецентрированное ускорение $\vec{j}_{oc}$ и вращательное ускорение $\vec{j}_{вр}$ точки M , положение которой на ободке диска определяется углом φ (как показано на рис. 68).

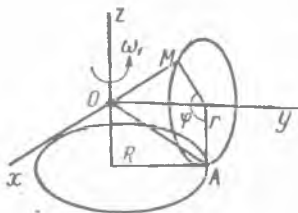


Рис. 68

Решение. Рассматриваемый диск представляет собой твердое тело с одной неподвижной точкой, так как точка O , связанная с телом, остается неподвижной во все время движения.

Решение задачи можно представить в проекциях на подвижные оси координат $Oxyz$. Линия действия вектора мгновенной угловой скорости $\vec{\omega}$ будет все время проходить через две неподвижные точки O и A , а потому проекции вектора $\vec{\omega}$ на выбранные оси координат получают вид

$$\vec{\omega} (0, \omega_y, \omega_z),$$

где $\omega_z = \omega_1$ по условиям задачи. Координаты точки A имеют вид $(0, R, -r)$. Определяя теперь скорость точки A , получим еще одно условие

$$-\omega_y r - \omega_1 R = 0,$$

откуда найдем

$$\omega_y = -\omega_1 \frac{R}{r} = \text{const.}$$

Вектор $\vec{\omega}$ остается постоянным по величине во все время движения. Но конец вектора $\vec{\omega}$ описывает окружность с угловой скоростью ω_1 , благодаря чему величина вектора $\vec{\epsilon}$ будет равна

$$\omega_1 \omega_y = \omega_1^2 \frac{R}{r}.$$

Проекции же вектора $\vec{\epsilon}$ на оси координат получают вид

$$\omega_1^2 \frac{R}{r}, 0, 0.$$

Для определения ускорения точки M воспользуемся теперь формулой Ривальса:

$$\vec{j} = [\bar{\omega} (\bar{\omega} \cdot \overline{OM})] + [\bar{\varepsilon} \cdot \overline{OM}] = \\ = \bar{\omega} [\bar{\omega} \cdot \overline{OM}] - \overline{OM} \cdot \bar{\omega}^2 + [\bar{\varepsilon} \cdot \overline{OM}].$$

Здесь вектор $\overline{OM}$ имеет проекции

$$r \sin \varphi, 0, -r \cos \varphi,$$

поэтому

$$(\bar{\omega} \cdot \overline{OM}) = -r\omega_1 \cos \varphi.$$

Для проекций ускорения на оси координат получаем следующие значения:

$$j_x = -r\omega_1^2 \left(\frac{R^2}{r^2} + 1 \right) \sin \varphi = -\omega_1^2 \frac{R^2 + r^2}{r} \sin \varphi,$$

$$j_y = \omega_1 \frac{R}{r} r\omega_1 \cos \varphi + \omega_1^2 \frac{R}{r} r \cos \varphi = 2\omega_1^2 R \cos \varphi,$$

$$j_z = -\omega_1^2 r \cos \varphi + \omega_1^2 r \left(\frac{R^2}{r^2} + 1 \right) \cos \varphi = \omega_1^2 \frac{R^2}{r} \cos \varphi,$$

поэтому для полного значения ускорения точки M будем иметь

$$j = \omega_1^2 \sqrt{\frac{R^4 + 2r^2 R^2}{r^2} + r^2 \sin^2 \varphi + 2R^2 \cos^2 \varphi}.$$

Задачи для самостоятельных упражнений

83. Равнобедренный прямоугольный треугольник OAB вращается с постоянной угловой скоростью ω в своей плоскости вокруг неподвижной вершины O , а некоторая материальная точка M движется с постоянной относительной скоростью v_0 вдоль стороны AB . Найти абсолютные скорость и ускорение материальной точки в тот момент, когда она находится в положении A , считая, что $AB = a$ (рис. 69).

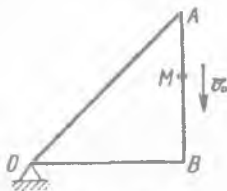


Рис. 69

84. По хорде диска, равномерно вращающегося вокруг неподвижной оси, проходящей через его центр и перпендикулярной к его плоскости, движется с постоянной относительной скоростью u точка M , выходя из середины хорды. Найти абсолютные скорость и ускорение материальной точки M в

зависимости от ее положения на хорде. Угловая скорость вращения диска равна $\bar{\omega}$, расстояние хорды от центра диска равно a , а расстояние материальной точки от середины хорды равно x .

85. Прямая вращается в неподвижной плоскости вокруг своего неподвижного конца O с постоянной угловой скоростью $\bar{\omega}$. В тот момент, когда прямая находится в положении Ox , из точки O вдоль прямой начинает двигаться некоторая материальная частица M . Подобрать такой закон движения материальной частицы вдоль прямой, чтобы она имела постоянную по величине абсолютную скорость v . Найти траекторию и ускорение материальной точки.

86. На неподвижной проволоочной окружности радиуса r надето колечко M , через которое проходит стержень OA , равномерно вращающийся вокруг неподвижной точки O , расположенной на той же окружности. Угловая скорость вращения стержня такова, что он поворачивается на прямой угол за 5 секунд. Определить скорость и ускорение колечка в зависимости от его положения.

87. Зубчатое колесо радиуса R зажато между двумя параллельными рейками, скользящими в одну сторону соответственно с ускорениями $\bar{j}_1$ и $\bar{j}_2$. Найти ускорение $\bar{j}_0$ центра колеса O и угловое ускорение колеса ϵ .

88. Диск радиуса R вращается с постоянной угловой скоростью $\bar{\omega}$ вокруг оси, проходящей через его центр и перпендикулярной к плоскости диска. По диаметру диска, выходя из его центра, движется материальная точка M по закону $s = R \sin \omega t$. Найти абсолютные траекторию, скорость и ускорение материальной точки.

89. Полое кольцо радиуса r жестко соединено с валом O так, что плоскость оси кольца перпендикулярна оси вала O . Кольцо заполнено жидкостью, движущейся в нем в направлении стрелки, как показано на рис. 70, с постоянной относи-

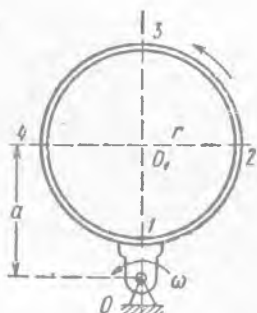


Рис. 70

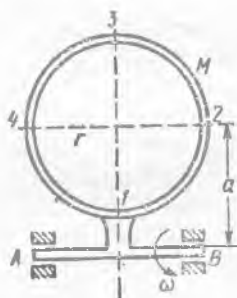


Рис. 71

тельной скоростью u . Определить абсолютные скорость и ускорение частицы жидкости в положениях 1, 2, 3, 4, если вал вращается вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью ω , а расстояние между центрами вала и кольца равно a .

90. Полое кольцо радиуса r жестко соединено с валом AB так, что ось вала расположена в плоскости оси кольца. Кольцо заполнено жидкостью, движущейся в нем с постоянной относительной скоростью u . Вал вращается по часовой стрелке, если смотреть вдоль оси от A к B , (как показано на рис. 71). Угловая скорость вращения вала постоянна по величине и равна ω_0 . Определить величины абсолютных ускорений частиц жидкости, расположенных в точках 1, 2, 3, 4.

91. Окружность с центром в точке O радиуса a вращается в своей плоскости вокруг неподвижной точки C окружности с постоянной угловой скоростью ω против часовой стрелки. Точка M движется по этой окружности по часовой стрелке с угловой скоростью 2ω . В начальный момент точки M , O и C лежат на одной прямой. Определить абсолютную траекторию точки M , ее скорость и ускорение в зависимости от положения.

92. Кривошип OA длины r вращается с постоянной угловой скоростью ω_0 и приводит в движение шатун AB длины l . Ползун B движется по вертикали. Определить угловую скорость и угловое ускорение шатуна, а также ускорение ползуна B в тот момент, когда кривошип и шатун взаимно перпендикулярны и образуют с горизонталью углы $\alpha = 45^\circ$ и $\beta = 45^\circ$ (рис. 72).

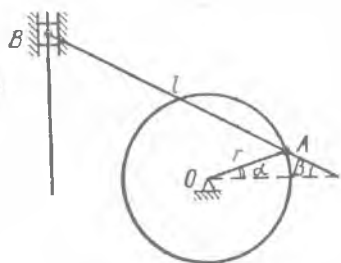


Рис. 72

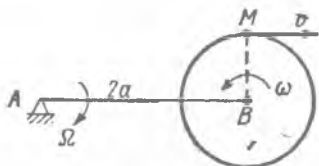


Рис. 73

93. Тонкий стержень OA , способный свободно вращаться около неподвижной точки O , опирается на ползун B , высота которого равна h , движущийся поступательно с постоянной скоростью v . Определить скорость и ускорение точки E стержня, которая в рассматриваемый момент касается ползуна, в зависимости от угла φ наклона стержня (см. рис. 22).

94. Плоскость Oxy вращается вокруг начала координат с переменной угловой скоростью $\omega(t)$. Движение точки в этой

плоскости задано уравнениями $x=f_1(t)$, $y=f_2(t)$. Найти проекции абсолютного ускорения точки на подвижные оси x и y .

95. Стержень AB длины $2a$ вращается по часовой стрелке в плоскости чертежа вокруг неподвижного конца A с постоянной угловой скоростью Ω . На конце стержня свободно насажено колесо радиуса a , вращающееся в той же плоскости, но в противоположную сторону, с постоянной относительной скоростью ω относительно стержня. Определить абсолютное ускорение частицы M , которая движется по ободу колеса по часовой стрелке с постоянной относительной скоростью v в тот момент, когда частица M находится над стержнем (рис. 73).

96. Колесо радиуса R зажато между двумя параллельными рейками, скользящими в разные стороны поступательно соответственно с ускорениями $\vec{j}_1$ и $\vec{j}_2$ и со скоростями $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ в данный момент времени. Найти ускорение центра колеса и угловое ускорение колеса ϵ .

97. Палочка OA вращается в плоскости вокруг точки O с постоянной угловой скоростью ω_1 . Вокруг точки A этой палочки вращается в той же плоскости другая палочка AB , причем угол φ между палочками изменяется по закону

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_2 > 0,$$

где $\omega_2 = \text{const}$. Применяя теорему Кориолиса, определить абсолютное ускорение точки B второй палочки, считая, что $AO=a$, $AB=b$.

98. Квадрат $ABCD$ со стороной a совершает движение в своей плоскости. В рассматриваемый момент времени ускорения его вершин A и B соответственно равны $\vec{j}_A$ и $\vec{j}_B$ и направлены, как показано на чертеже (рис. 74). Найти мгновенную угловую скорость вращения квадрата и его угловое ускорение ϵ . Определить ускорение точки C квадрата.

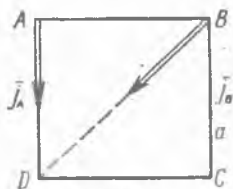


Рис. 74

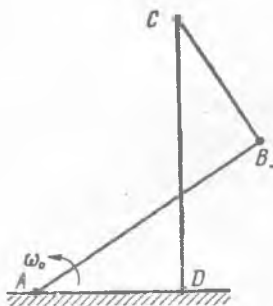


Рис. 75

99. Шарнирный антипараллелограмм $ABCD$ состоит из двух кривошипов AB и CD одинаковой длины $2a$ и шарнирно соединенного с ними стержня BC длины $2b$. Расстояние между неподвижными точками A и D равно $2b$. Кривошип AB

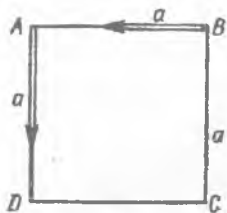


Рис. 76

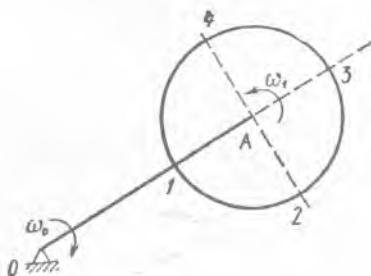


Рис. 77

вращается с постоянной угловой скоростью ω_0 в плоскости чертежа. Определить угловую скорость вращения и угловое ускорение стержня в тот момент, когда $\angle ADC = 90^\circ$ (рис. 75).

100. Квадрат $ABCD$ со стороной a совершает движение в своей плоскости. Найти положение мгновенного центра ускорений квадрата и ускорения его вершин C и D , если известно, что в данный момент ускорения двух его вершин A и B по величине равны a , а направления этих ускорений совпадают с соответствующими сторонами квадрата, как указано на чертеже (рис. 76).

101. Кривошип AO радиуса R вращается вокруг неподвижной точки O в плоскости чертежа с постоянной угловой скоростью ω_0 , направленной по часовой стрелке, как указано на чертеже (рис. 77). Вокруг точки A кривошипа вращается с постоянной абсолютной угловой скоростью ω_1 , направленной против часовой стрелки, круглый диск радиуса r . Определить абсолютные скорости и ускорения точек $1, 2, 3, 4$ диска и его мгновенные центры скоростей и ускорений.

102. Определить скорость и ускорение точки B четырехзвенного механизма, показанного на чертеже, в тот момент, когда звено OA горизонтально, а звено BO_1 направлено под углом в 30° к горизонтальной линии. Кривошип OA длиной r вращается против часовой стрелки с постоянной угловой скоростью ω_0 ; $AB=l$, $BO_1=R$. Прямая $OA \perp OB$ (рис. 78).

103. В эциклической передаче ведущая шестерня радиуса R вращается в данный момент против часовой стрелки с угловой скоростью ω_0 и с угловым ускорением ϵ_0 . Кривошип длины $3R$ вращается вокруг оси шестерни по часовой стрелке с такими же по величине угловой скоростью и угловым ускорением. Найти скорость и ускорение точки M ведомой шестерни радиуса R , лежащей на конце диаметра, перпендикулярного в данный момент времени кривошипу (рис. 79).

104. Найти ускорение середины стержня AB , если известны величины ускорений его концов $\vec{j}_A$ и $\vec{j}_B$ и углы, образованные направлениями ускорений этих концов с прямой AB : $\alpha = 10^\circ$, $\beta = 70^\circ$ (рис. 80).

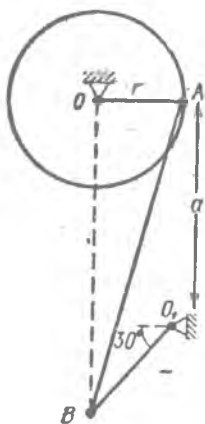


Рис. 78

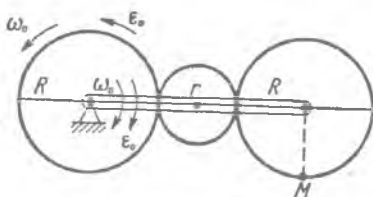


Рис. 79

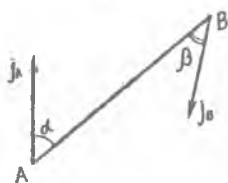


Рис. 80

105. Шестеренка радиуса R катится без скольжения по неподвижной шестеренке того же радиуса. Она приводится в движение кривошипом OC , который вращается вокруг неподвижной оси, являющейся осью неподвижной шестеренки, с угловым ускорением ϵ . В рассматриваемый момент времени кривошип имеет угловую скорость вращения ω . Определить ускорение точки A подвижной шестеренки, которая в данный момент совпадает с мгновенным центром скоростей, ускорение диаметрально противоположной точки B и положение мгновенного центра ускорений.

106. Найти мгновенный центр ускорений, мгновенную угловую скорость вращения и угловое ускорение плоской фигуры, движущейся в своей плоскости, если для данного момента времени известно, что ускорение точки A равно $\vec{\omega}_A$, а ускорение точки B равно $\vec{\omega}_B$, причем ускорения $\vec{\omega}_A$ и $\vec{\omega}_B$ перпендикулярны к отрезку AB и направлены в одну сторону, а $AB = l$.

107. Система состоит из трех зубчатых колес I , II и III , находящихся в зацеплении. Стержень O_1O_2 соединяет центры колес O_1 и O_2 и вращается с постоянной угловой скоростью ω_0 вокруг неподвижной точки O_1 независимо от колеса I . Определить абсолютную угловую скорость вращения колеса I , зная радиусы колес r_1 и r_2 (рис. 81).

108. Плоский механизм состоит из трех шарнирно соединенных между собой стержней OA , AB и BO_1 . Определить

скорость и ускорение точки B механизма в тот момент, когда стержни OA и O_1B вертикальны. Стержень OA вращается с угловым ускорением ε_0 и имеет в данный момент угловую скорость ω_0 ; $OA=r$, $O_1B=R$, $AB=l$, $\angle AOB=90^\circ$. Кроме того, определить угловую скорость вращения стержня AB в рассматриваемом положении и положение мгновенного центра ускорений стержня AB (рис. 82).

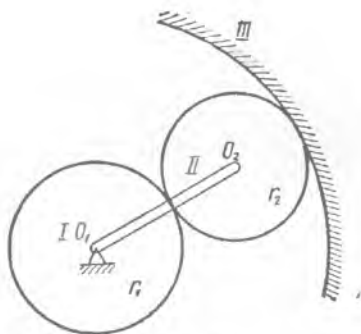


Рис. 81

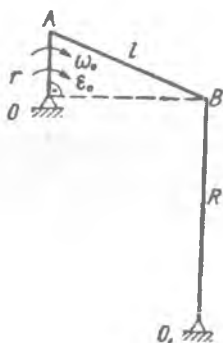


Рис. 82

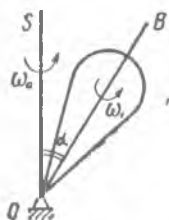


Рис. 83

109. Волчок A вращается относительно оси OB с постоянной угловой скоростью ω_1 . Ось OB описывает равномерно конус с постоянной по величине угловой скоростью ω_0 . $\angle BOS=\alpha=\text{const}$. Найти угловую скорость и угловое ускорение волчка (рис. 83).

110. Конус II с углом при вершине $\alpha_2=45^\circ$ катится без скольжения по внутренней стороне неподвижного конуса I с углом при вершине $\alpha_1=90^\circ$. Высота подвижного конуса $OO_1=h$, а его центр основания описывает окружность с постоянной по величине угловой скоростью ω_0 . Определить переносную, относительную и абсолютную угловые скорости конуса II , а также его абсолютное угловое ускорение ε .

111. Круглый диск вращается вокруг горизонтальной оси CD с постоянной по величине угловой скоростью ω_1 . Ось CD вращается вокруг вертикальной оси AB , проходящей через центр диска O с постоянной по величине угловой скоростью ω_2 . Вычислить величину и направление мгновенной угловой скорости ω и мгновенного углового ускорения ε диска.

112. Диск радиуса R вращается с постоянной по величине угловой скоростью ω_r вокруг горизонтальной оси O_1O_2 , которая в свою очередь вращается с постоянной по величине угловой скоростью ω_e вокруг вертикальной оси. Найти скорости и ускорения точек A и B , расположенных на концах вертикального диаметра диска (рис. 84).

113. Конус, вершина O которого неподвижна, катится без скольжения по плоскости так, что его центр основания движется с постоянной по величине скоростью $\underline{v}_0$. Определить абсолютную угловую скорость, угловое ускорение конуса, а также скорости и ускорения точек A и B диаметра основания AB конуса, если высота конуса равна h , а угол при вершине $\angle BOA = 90^\circ$.

114. Круглый конус с высотой h и углом при вершине 2α катается без скольжения по плоскости так, что его ось симметрии вращается вокруг оси Oz с постоянной по величине угловой скоростью $\bar{\omega}_1$. Определить вращательное $\bar{j}_{вр}$ и осе-стремительное $\bar{j}_{ос}$ ускорение точки M основания конуса.

115. Квадратная рама вращается вокруг оси AB с постоянной по величине угловой скоростью ω_0 . Вокруг оси BC , совпадающей с диагональю рамы, вращается диск с постоян-

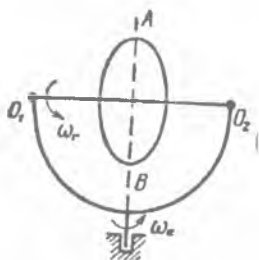


Рис. 84

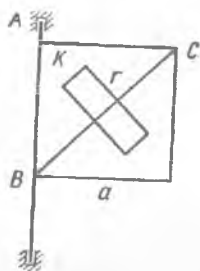


Рис. 85

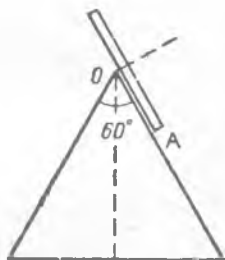


Рис. 86

ной относительной угловой скоростью ω_1 . Определить абсолютные угловые скорость и ускорение диска, а также ускорение точки K диска (рис. 85).

116. Тело вращается одновременно вокруг трех параллельных осей в одну и ту же сторону с одинаковыми по величине угловыми скоростями ω . Определить положение мгновенной оси вращения и угловую скорость результирующего движения.

117. Диск радиуса R , вращаясь вокруг неподвижной точки O (рис. 86), обкатывает без скольжения неподвижный конус с углом при вершине $2\alpha = 60^\circ$. Определить абсолютные угловые скорость и ускорение диска, если ускорение нижней точки A обода диска в каждый момент времени постоянно по величине и равно a .

ОТВЕТЫ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ

1. Задача решается тем же способом, что и пример 1. Тождественное соотношение имеет вид

$$x^2 = a^2 + s^2,$$

где x — длина веревки от человека до помоста. Дифференцируя это выражение, получаем искомую скорость

$$v_1 = \frac{dx}{dt} = \frac{sv}{\sqrt{a^2 + s^2}}.$$

Чтобы получить ускорение, следует продифференцировать выражение для скорости. Будем иметь

$$j = x'' = \frac{a^2 v^2}{\sqrt{(a^2 + s^2)^3}}.$$

2. Легко устанавливается тождественное соотношение

$$2R \sin \varphi = R - R \cos \psi,$$

для горизонтальной координаты центра диска получаем

$$x = 2R \cos \varphi + R \sin \psi.$$

Дифференцированием и исключением ψ отсюда имеем

$$v = \frac{dx}{dt} = 2R\omega \left[-\sin \varphi + \frac{(1 - 2 \sin \varphi) \cos \varphi}{2 \sqrt{\sin \varphi (1 - \sin \varphi)}} \right].$$

3. Дифференцируя зависимость

$$(a - R \cos \varphi)^2 + (y - R \sin \varphi)^2 + h^2 = l^2,$$

получаем выражение для скорости

$$v_B = \frac{dy}{dt} = \left[\cos \varphi - \frac{(a - R \cos \varphi) \sin \varphi}{2 \sqrt{l^2 - h^2 - (a - R \cos \varphi)^2}} \right] v_A.$$

4. Координаты x и y центра шара связаны условием

$$\sqrt{R^2 - y^2} = O_1A = x \sin \varphi,$$

откуда

$$\frac{x^2}{\left(\frac{R}{\sin \varphi}\right)^2} + \frac{y^2}{R^2} = 1,$$

что является уравнением эллипса.

5.
$$v_1 = v_2 = - \frac{u^2 t}{\sqrt{u^2 t^2 + a^2}}.$$

6. Искомая скорость.

$$v = \frac{dx}{dt},$$

где координаты x и φ связаны соотношением

$$a = x \operatorname{tg} \varphi + \frac{r}{\cos \varphi};$$

отсюда дифференцированием найдем

$$x' = \frac{x + r \sin \varphi}{\sin \varphi \cos \varphi} \varphi'$$

или после исключения x

$$x' = \frac{a - r \cos \varphi}{\sin^2 \varphi} \varphi'.$$

Дифференцируя это соотношение вторично, найдем ускорение

$$x'' = \frac{r(1 + \cos^2 \varphi) - 2a \cos \varphi}{\sin^3 \varphi} \varphi'^2.$$

7.

$$x' = - \frac{\omega r \sin(\varphi + \psi)}{\cos \varphi}.$$

8. Здесь $x = a \operatorname{ctg} \varphi - a \cos \varphi$, $y = a \sin \varphi$.

Исключая φ , найдем уравнение траектории

$$x = \frac{a - y}{y} \sqrt{a^2 - y^2}.$$

Дифференцируя по времени x и y , найдем

$$v^2 = v_0^2 (1 - 2 \sin^3 \varphi + \sin^4 \varphi).$$

Дифференцируя по времени x' и y' , получим

$$j^2 = x''^2 + y''^2 = \left(\frac{v_0}{a} \sin^3 \varphi \right)^2 [9 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + \sin^4 \varphi - 4 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + 4 \cos^4 \varphi].$$

9.

$$v = \omega \sqrt{(l+a)^2 \sin^2 \varphi + (l-a)^2 \cos^2 \varphi},$$

$$j = \omega^2 \sqrt{(l+a)^2 \cos^2 \varphi + (l-a)^2 \sin^2 \varphi}.$$

10. Дифференцируя уравнение конического сечения, получим

$$y' = \frac{m + nx}{y} x',$$

кроме того, $x'^2 + y'^2 = v_0^2$, откуда

$$x'^2 \left[1 + \frac{(m + nx)^2}{y^2} \right] = v_0^2,$$

после чего найдем

$$x' = \frac{v_0 y}{\sqrt{y^2 + (m + nx)^2}}, \quad y' = \frac{v_0 (m + nx)}{\sqrt{y^2 + (m + nx)^2}}.$$

11. Окружность с центром в точке O .

12.

$$v = \sqrt{a^4 y^2 + b^4 x^2} \frac{\varphi'}{ab}.$$

13. Из определения скорости имеем

$$\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \omega^2 = c^2,$$

откуда получим

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{\sqrt{c^2 - r^2 \omega^2}}{\omega}.$$

Интегрируя это выражение, будем иметь

$$r = \frac{c}{\omega} \sin(\varphi + c_1).$$

Если потребовать, чтобы при $\varphi=0$ имело бы место условие $r=0$, то получим

$$r = \frac{c}{\omega} \sin \varphi,$$

что является уравнением окружности.

14. Будем иметь

$$x = r \cos \varphi = \frac{p \cos \varphi}{1 - e \cos \varphi}, \quad y = r \sin \varphi = \frac{p \sin \varphi}{1 - e \cos \varphi}.$$

Дифференцируя по времени и исключая φ , получим

$$x'^2 + \left(y' + \frac{ce}{p} \right)^2 = \frac{c^2}{p^2},$$

что представляет собой уравнение окружности в переменных x' и y' .

15.

$$v = \frac{2c}{h \cos \alpha},$$

где h — длина перпендикуляра, опущенного из центра перпендикулярного сечения цилиндра на касательную к этому сечению, проведенную через проекцию движущейся точки.

16. Здесь

$$\varphi' = \frac{a}{r}, \quad r' = b,$$

откуда имеем

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{br}{a}.$$

Интегрируя это соотношение, получим $r = r_0 e^{\frac{b}{a} \varphi}$. Уравнения движения имеют вид

$$r = bt + r_0, \quad \varphi = \frac{a}{b} \ln \left(\frac{b}{r_0} t + 1 \right).$$

17. Из геометрического определения ускорения в проекциях на естественные оси будем иметь

$$j = \frac{2v^2}{l}.$$

18. Из определения проекций ускорения на оси естественного трехгранника получаем

$$v = \frac{Rv_0 \operatorname{tg} \alpha}{R \operatorname{tg} \alpha - tv_0}.$$

19.

$$j = 4 \text{ м/сек}^2, \quad \rho = 0,01 \text{ м.}$$

20. Следует воспользоваться выражениями для составляющих ускорения по осям естественного трехгранника. Легко получить дифференциальное уравнение, интегрируя которое найдем

$$v = v_0 e^{(\varphi - \varphi_0) \operatorname{ctg} \alpha}.$$

21. Решение непосредственно следует из рассмотрения соотношений между проекциями ускорения на оси естественного трехгранника.

22. Рассматривая составляющие скорости точки в полярной системе координат и исключая время, получим дифференциальное уравнение траектории, интегрируя которое, найдем конечное уравнение траектории

$$r = r_0 e^{-\varphi \operatorname{ctg} \alpha}.$$

В частных случаях: при $\alpha = 0$ имеем прямую, при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ — окружность, при $\alpha = \pi$ — прямую.

23. Непосредственные вычисления дают для проекций ускорения на ось Oy значение

$$j_y = -\frac{v_0^2}{4R}.$$

Обратная задача. Если принять данную прямую за ось Ox , а точку пересечения с кривой — за начало координат, то найдем, что искомая кривая является циклоидой

$$y = \frac{1}{2a} \sqrt{2ax(v^2 - 2ax)} + \frac{v^2}{2a} \arccos \frac{\sqrt{v^2 - 2ax}}{v}.$$

24.

$$v_B = \sqrt{l^2 \varphi'^2 + v^2 + 2vl\varphi' \cos \varphi}.$$

25. (см. рис. 87)

$$v = \frac{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2 \cos \alpha}}{\sin \alpha}.$$

$$\omega = \frac{\Omega r (r - a \cos \varphi)}{a^2 + r^2 - 2ar \cos \varphi}.$$

27. Выберем систему подвижных осей, движущихся поступательно вместе с точкой A . Тогда относительные скорости точек B и C будут находиться в соотношении

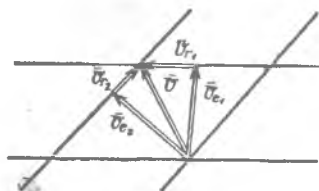


Рис. 87

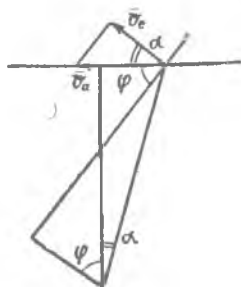


Рис. 88

$$\frac{v_{a_r}}{v_{B_r}} = \frac{m+n}{m}.$$

Далее из условия $\vec{v}_B = \vec{v}_1 + \vec{v}_{B_r}$ получаем $\vec{v}_{B_r} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$, откуда

$$\vec{v}_3 = \vec{v}_1 + \frac{m+n}{m} (\vec{v}_2 - \vec{v}_1).$$

Для модуля скорости отсюда получаем значение

$$v_3 = \frac{n}{m} (v_1 + v_2) + v_2.$$

$$28. \quad v_e = v \frac{h}{\sqrt{s^2 + h^2}}.$$

$$29. \quad v_r = v \frac{d}{r},$$

$$30. \quad v_r = v \frac{d}{r}.$$

$$31. \quad v_r = v \frac{d}{r}.$$

$$32. \quad v_0 = -\omega y + \frac{dx}{dt}, \quad \omega x + \frac{dy}{dt} = 0,$$

$$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t, \quad y = B \cos \omega t - A \sin \omega t - \frac{v_0}{\omega}.$$

33. (см. рис. 88)

$$\frac{v_a}{\sin(\alpha + \varphi)} = \frac{v_e}{\sin \varphi}, \quad v_e = \omega s,$$

$$v_a = \omega s \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\sin \varphi}, \quad \sin(\alpha + \varphi) = \frac{AM}{S},$$

$$v_a = \omega \frac{AM}{\sin \varphi} = \omega \frac{a - r \cos \varphi}{\sin^2 \varphi}, \quad v_r = \frac{\omega(a \cos \varphi - r)}{\sin^2 \varphi}.$$

$$34. \quad v_a = \frac{\omega a \sin \varphi}{a \cos \varphi - b} \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi}.$$

35. Если систему осей жестко связать со стержнем A_1A_2 , то подвижная система координат будет двигаться поступательно, а переносная скорость будет равна скорости точки A . Тогда получим

$$v_M = \sqrt{v^2 + \omega^2 a^2 - 2v\omega a \sin \varphi}.$$

36. (см. рис. 89)

$$v_y = \frac{\omega_1 s_1}{\cos \alpha} + \omega_2 s_2 \operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega_1 a}{\cos^2 \alpha} + \omega_2 a \operatorname{tg}^2 \alpha,$$

$$v_x = \omega_2 s_2 = \omega_2 a \operatorname{tg} \alpha,$$

$$v = \frac{a}{\cos^2 \alpha} \sqrt{\omega_1^2 + 2\omega_1 \omega_2 \sin^2 \alpha + \omega_2^2 \sin^2 \alpha (1 + \cos^2 \alpha)}$$

При $\alpha = 30^\circ$ имеем

$$v = \frac{4a}{3} \sqrt{\omega_1^2 + \frac{1}{2} \omega_1 \omega_2 + \frac{7}{16} \omega_2^2}.$$

$$37. \quad v = \frac{1}{\cos \alpha} \sqrt{\omega_1^2 x^2 + [(\omega_1 + \omega_2)x + v_0 \cos \alpha]^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

$$38. \quad x = a \cos \frac{2\pi t}{n}, \quad y = a \sin \frac{2\pi t}{n}, \quad z = a \sin \frac{4\pi t}{n}.$$

$$39. \quad v = \frac{r\omega}{b} \sqrt{r(2a - r)}.$$

40. В полярных координатах

$$r = r_0 \frac{\sin^{k-1} \frac{\varphi}{2} \cos^{k+1} \frac{\varphi_0}{2}}{\cos^{k+1} \frac{\varphi}{2} \sin^{k-1} \frac{\varphi_0}{2}}, \quad \varphi \neq \pi,$$

где r_0 есть значение r при $\varphi = \varphi_0$.

$$41. \quad \varphi = -\operatorname{tg} \alpha \ln \operatorname{tg} \frac{\pi - 2\vartheta}{4} + C,$$

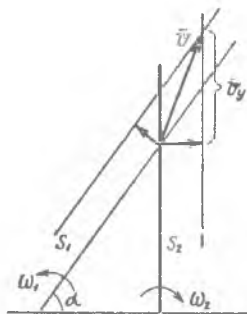


Рис. 89

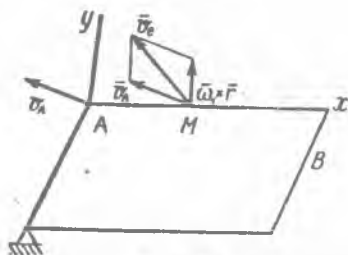


Рис. 90

если при $\varphi = 0 \quad \vartheta = 0$, то

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\vartheta}{2} \right) = e^{-\varphi \operatorname{tg} \alpha}.$$

43. Воспользоваться свойствами лемнискаты $rr_1 = \operatorname{const}$.

46. (см. рис. 90).

Подвижную систему осей выбираем жестко связанной со стержнем AB . Тогда переносная скорость

$$\bar{v}_e = \bar{v}_A + [\bar{\omega}_1 \cdot \bar{AM}]$$

и будем иметь

$$v_{ex} = -\omega_2 b \sin \alpha, \quad v_{ey} = \omega_2 b \cos \alpha - \omega_1 x,$$

после чего находим

$$v^2 = \omega_2^2 b^2 - 2\omega_1 \omega_2 b x \cos \alpha - 2\omega_2 b v_0 \sin \alpha + \omega_1^2 x^2 + v_0^2.$$

$$47. \quad v = \sqrt{\omega_1^2 a^2 + (\omega_1 + \omega_2)^2 b^2 - 2\omega_1 (\omega_1 + \omega_2) ab \cos \varphi},$$

$$j = \sqrt{(\omega_1 + \omega_2)^4 b^2 + \omega_1^4 a^2 - 2\omega_1^2 (\omega_1 + \omega_2)^2 ab \cos \varphi}.$$

48. Мгновенный центр вращения палочки лежит на пересечении перпендикуляра к оси Ox , восстановленного от точки A , и перпендикуляра к палочке, восстановленного из точки M . Из геометрических построений нетрудно получить уравнение неподвижной центроиды

$$x^2 = hy - h^2$$

и уравнение подвижной центроиды

$$h(\xi^2 + \eta^2) = \xi^4.$$

Для мгновенной угловой скорости вращения палочки получим выражение

$$\omega = \frac{v_0}{y} = \frac{v_0 h}{h^2 + x^2}.$$

49. Уравнение неподвижной центроиды

$$x^2 - r^2 x^2 = r^2 y^2$$

Связав подвижную систему координат с палочкой и выбрав ее начало в нижнем конце палочки, уравнение подвижной центроиды получим в виде

$$r\eta = \xi^2;$$

мгновенная угловая скорость выразится как

$$\omega = \frac{v}{y} = \frac{vr}{x\sqrt{x^2 - r^2}}.$$

50. Нетрудно видеть, что $\omega_1 = \frac{v_D}{v_C} \omega_2$; v_C и v_D — скорости точек C и D стержня, мгновенный центр вращения которого находится в точке P пересечения стержней AD и CB . Поэтому будем иметь

$$\frac{v_D}{v_C} = \frac{DP}{PC}.$$

Если положение системы определить углами α и β , то можно показать, что

$$\frac{PD}{PC} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}.$$

Отсюда найдем

$$\omega_1 = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \omega_2.$$

51. Стержень AB остается все время параллельным стержню OC , а потому их абсолютные угловые скорости равны по величине и совпадают по направлению. Следовательно, $\omega_{AB} = \omega_1$. Мгновенный центр вращения стержня AB находится на продолжении стержня OA на расстоянии $x = \frac{\omega_2}{\omega_1} b$ от точки B . Центроиды: подвижная — окружность радиуса $x = \frac{\omega_2}{\omega_1} b$ с центром в точке A ; неподвижная — окружность, центр которой расположен в точке O , а радиус

$$\rho = \frac{\omega_1 + \omega_2}{\omega_1} b.$$

52. Мгновенный центр вращения находится на пересечении перпендикуляров к оси Ox (в точке A) и к оси $B\xi$ (в точке D). Из прямоугольных треугольников имеем

$$(\eta - a)^2 + \xi^2 = y^2, \quad \xi^2 + (y - a)^2 = \eta^2.$$

Кроме того, из подобия треугольников имеем $\xi = x$, откуда сразу находим уравнения центроид:

$$\xi^2 = a(2\eta - a), \quad x^2 + a^2 = 2ay.$$

53. *Решение.* Обозначим через α угол, который ось параболы образует с неподвижной осью Ox . Пусть в точке $A(x_0, 0)$ находится мгновенный центр вращения параболы. Выберем за подвижную систему осей систему координат $x_1 O_1 y_1$, жестко связанную с параболой так, чтобы уравнение параболы в этой системе приняло вид

$$y_1^2 = 2px_1.$$

Тогда уравнение касательной к параболе будет

$$-2p(x_1 - x_{10}) + 2y_{10}(y_1 - y_{10}) = 0,$$

где x_{10}, y_{10} — координаты точки касания, x_1, y_1 — текущие координаты касательной. Отсюда при $y_1 = 0$ получаем координаты точки C , связанные уравнением

$$-p(x_1 - x_{10}) - y_{10}^2 = 0$$

или

$$-2px_{10} = p(x_1 - x_{10}).$$

Из уравнения следует, что $x_1 = -x_{10}$, то есть точка B пересечения оси y_1 с осью x делит пополам отрезок CA равнобедренного треугольника CFA . Значит, FB — координата y фо-

куса параболы. Если теперь v — скорость фокуса параболы, то как нетрудно видеть,

$$v_x = v \sin \alpha, \quad v_y = v \cos \alpha,$$

а потому

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{ctg} \alpha.$$

Но из $\triangle O_1FB$ имеем

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sqrt{4y^2 - p^2}}{p}.$$

Исключая из этих уравнений α , получаем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{4y^2 - p^2}}{p}.$$

Интегрируя это уравнение, находим

$$\frac{p}{2} \ln \left(\frac{2y}{p} - \sqrt{\frac{4y^2}{p^2} - 1} \right) = x + C.$$

Если же положить, что при $x=0$ $y = \frac{p}{2}$, то получим $C=0$.

54. Палочка AB участвует в двух мгновенных вращениях. Результирующая угловая скорость

$$\omega = \omega_1 + \omega_2.$$

Мгновенный центр вращения S лежит на отрезке OA на расстоянии

$$x = \frac{\omega_2 a}{\omega_1 + \omega_2}$$

от точки O и на расстоянии

$$y = \frac{\omega_1 a}{\omega_1 + \omega_2}$$

от точки A . Центроидами являются окружности с центрами в точках O и A . Скорость точки B определяется из условия

$$\vec{v}_B = [\vec{\omega} \cdot \vec{SB}],$$

откуда имеем

$$v_B = \sqrt{\frac{\omega_1^2 a^2}{(\omega_1 + \omega_2)^2} + b^2 - 2 \frac{\omega_1 a b}{\omega_1 + \omega_2} \cos \varphi}.$$

$$55. \quad \omega_1 = \omega_0 \frac{2(r_1 + r_3)}{r_1}.$$

56. Абсолютная угловая скорость

$$\omega_a = \omega_0 \frac{r_1 + r_2}{r_2};$$

относительная угловая скорость

$$\omega_{2r} = \omega_0 \frac{r_1}{r_2},$$

ускорение
$$j = \frac{\omega_0^2}{r_2} (3r_1 r_2 + 2r_2^2 + r_1^2).$$

57. Луна не вращается относительно системы осей, вращающейся вместе с Луной относительно Земли, $\omega_a = \omega_e$. Мгновенная ось вращения Луны проходит через центр Земли.

58. Искомая точка S лежит на пересечении продолжения отрезка ON с окружностью малого колеса.

59. Абсолютная угловая скорость

$$\omega_4 = \Omega \frac{r_4 + r_1}{r_4};$$

относительная угловая скорость

$$\omega_{4r} = \frac{r_1}{r_4} \Omega.$$

60. Положим (для определенности), что $v_1 > v_2$. Тогда мгновенный центр вращения колеса будет находиться на пересечении продолжения диаметра, проходящего через точки касания с прямой, которая проходит через концы векторов v_1 и v_2 . Мгновенная угловая скорость

$$\omega = \frac{v_1 - v_2}{2a};$$

скорость центра диска

$$v = \frac{v_1 + v_2}{2}.$$

61. Мгновенный центр вращения шатуна AB находится на пересечении продолжения отрезка AO с перпендикуляром к

прямой OB , восстановленным в точке B . Отсюда непосредственно следует

$$v_B = \Omega \cdot \overline{SB} = \omega \frac{OD}{SB} \cdot SB = \omega \cdot OD.$$

$$62. \quad v = \sqrt{\frac{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2 \cos 2\alpha}{2\cos^2 \alpha}}.$$

63. Метод решения тот же, что и для задачи 60. Мгновенная угловая скорость

$$\omega = \frac{v_1 + v_2}{2a}.$$

Неподвижной центроидой является прямая, параллельная рейкам, проходящая на расстоянии $2a \frac{v_1}{v_1 + v_2}$ от точки A . Подвижной центроидой является окружность радиуса

$$R = \left| \frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2} \right| a$$

с центром в центре диска. Скорость центра диска равна

$$v_0 = \omega R = \frac{v_1 - v_2}{2}.$$

64. Мгновенный центр вращения стержня BC находится в точке S , расположенной на пересечении продолжения хорды DB с перпендикуляром к прямой OC , проведенным через точку C . Мгновенная угловая скорость

$$\Omega = \frac{v_B}{BS} = \frac{\omega_0 l_1}{\sqrt{l_2^2 - r_2^2}}.$$

скорость точки B

$$v_B = \omega_0 l_1 \sqrt{2};$$

скорость точки C

$$v_C = \omega_0 l_1 \left(1 + \frac{r_2}{\sqrt{l_2^2 - r_2^2}} \right).$$

65. Угловая скорость стержня O_1A

$$\omega_{O_1A} = \omega_0 \frac{R - r}{l_2} \sqrt{2};$$

угловая скорость шестеренки I

$$\omega_1 = \omega_0 \frac{(R-r)(l_1+r)}{Rl_1}.$$

66. Мгновенная угловая скорость вращения стержня OB

$$\omega_{OB} = \omega_0 \frac{\sqrt{3}}{4};$$

угловая скорость вращения шестеренки I

$$\omega_1 = \frac{\omega_0}{4} (2\sqrt{3} - 1).$$

$$67. \quad v = \sqrt{2\omega_0^2 r^2 + v_0^2 - 2v_0\omega_0 r}.$$

68. Мгновенный центр вращения цилиндра находится на пересечении продолжения радиуса AB с перпендикуляром к AC , восстановленным в точке C . Мгновенная угловая скорость цилиндра

$$\Omega = \frac{\omega a(b \cos \varphi - a)}{a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi}.$$

69. При помощи теоремы о сложении скоростей получим

$$v_C = \frac{1}{\sin(\alpha + \beta)} \times$$

$$\times \sqrt{v^2 \sin^2(\alpha + \beta) + (v - v_1)^2 \cos^2 \beta - 2v(v - v_1) \sin \alpha \cos \beta \sin(\alpha + \beta)}.$$

70. Мгновенный центр вращения стержня AB находится в точке S пересечения продолжения хорды BC с перпендикуляром к прямой AC , восстановленным в точке A . Если через Ω обозначить угловую скорость вращения стержня AB , то будем иметь

$$v_A = \Omega \cdot SA.$$

С другой стороны,

$$\Omega \cdot SB = \frac{v_0}{r} BC,$$

откуда получим

$$v_A = \frac{v_0}{r} \frac{BC \cdot SA}{SB}.$$

Отношение $\frac{BC \cdot SA}{SB}$ определяется из геометрических построений, откуда имеем

$$v_A = 2v_0 \left[\frac{r \sin \varphi}{\sqrt{l^2 - 4r^2 \sin^4 \frac{\varphi}{2}}} + 1 \right] \cos^2 \frac{\varphi}{2}.$$

71.

$$v_B = l\omega \frac{\cos(\varphi + \psi)}{\cos \psi}.$$

Угловая скорость вращения стержня AB

$$\Omega = \omega \frac{\sin \varphi}{\cos \psi},$$

где ω — угловая скорость вращения стержня OA .

$$72. \quad v = 2\omega a, \quad u = \omega a \sqrt{3}.$$

$$73. \quad v_C = 4\omega_0 a \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}.$$

74. Скорость движения ползуна B в горизонтальном положении

$$v_B = \omega_0 r \frac{h}{\sqrt{l^2 - h^2}},$$

в вертикальном положении $v_B = v_A = \omega_0 r$.

75. Результирующее движение — мгновенно-винтовое. Ось винта делит пополам сторону OA и сторону FG куба. Величина мгновенной угловой скорости вращения куба равна

$$\Omega = \omega \sqrt{2}; \text{ скорость поступательного движения } v = \frac{\omega a \sqrt{2}}{2},$$

где ω — величина ω_i .

76. Воспользуемся формулой Эйлера

$$\bar{v}_i = \bar{v}_0 + [\bar{\omega} \cdot \bar{r}_i],$$

где $\bar{v}_0$ — скорость некоторой точки тела, принимаемой за полюс, $\bar{\omega}$ — вектор мгновенной угловой скорости вращения тела. Примем за полюс точку A . Оси x, y, z направим по ребрам куба. Проекции вектора $\bar{\omega}$ на эти оси обозначим через $\omega_x, \omega_y, \omega_z$. Тогда, определяя по формуле Эйлера проекции скорости точки B , получим:

$$\omega_y = -1, \quad \omega_x = 0.$$

Далее, определяя таким же путем проекции скорости точки C , получим $\omega_y = 0$. Отсюда следует, что линия действия вектора ω совпадает с направлением скорости точки A и, следовательно, винтовая ось проходит через точку A . Мгновенное движение твердого тела представляется теперь вектором скорости поступательного движения v_1 и вектором мгновенной угловой скорости ω , величина которого равна 1, а направление противоположно направлению вектора v_1 .

77. Поверхность кругового цилиндра, ось которого является осью винта, а радиус $r = \frac{v}{\omega}$.

78. Движение тела B относительно тела A является мгновенно-винтовым. Ось винта пересекает ось y в точке

$$y = \frac{v\Omega + \omega^2 a}{\Omega^2 + \omega^2}.$$

Результирующая угловая скорость вращения ω имеет проекции

$$(\omega, 0, \Omega).$$

Скорость поступательного движения имеет проекции

$$\omega \left(\omega \frac{v - \Omega a}{\omega^2 + \Omega^2} \right), 0, \Omega \left(\omega \frac{v - \Omega a}{\omega^2 + \Omega^2} \right).$$

$$79. \quad \omega_2 = \frac{R}{h} \omega_1.$$

80. Мгновенная ось вращения проходит через неподвижную точку, являющуюся началом координат. Обозначим через $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ проекции вектора мгновенной угловой скорости вращения. Тогда

$$\omega_x = \frac{3\sqrt{2}}{2}, \quad \omega_y = 2\sqrt{2}, \quad \omega_z = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Скорость точки M_2 тела равна $v_2 = 15$ м/сек.

81. Пусть A является точкой касания диска и плоскости. Линия действия вектора абсолютной угловой скорости вращения совпадает с прямой OA . Величина и направление вектора абсолютной угловой скорости ω определяется из треугольника скоростей:

$$\omega = \omega_0 \operatorname{ctg} \alpha,$$

где

$$\omega_0 = \frac{v_0 \sin \alpha}{R \cos^2 \alpha},$$

так что

$$\omega = \frac{v_0}{R \cos \alpha}.$$

Относительная угловая скорость

$$\omega_r = \frac{v_0}{R \cos^2 \alpha}.$$

Неподвижным аксидом является плоскость, по которой катится диск, а подвижным аксидом — конус с углом при вершине 2α , ось которого совпадает с осью симметрии диска. Скорость верхней точки равна $v = 2v_0$.

82. Пластика участвует в сложном движении, состоящем из двух мгновенных вращений с угловыми скоростями ω_1 и ω_2 . Применяя теорему о сложении скоростей, получим: переносная скорость точки B

$$v_{B_e} = \omega_2 (a \sin \alpha + d \cos \alpha);$$

относительная скорость точки B

$$v_{B_r} = \omega_1 d;$$

абсолютная скорость точки B

$$v_a = \omega_2 (a \sin \alpha + d \cos \alpha) + \omega_1 d.$$

83.

$$v^2 = v_0^2 + 2\omega^2 a^2 + 2v_0 \omega a,$$

$$j^2 = 4\omega^4 a^2 + 4\omega^2 v_0^2 + 4\omega^3 a v_0.$$

84. Абсолютная скорость

$$v_a = \sqrt{u^2 + \omega^2 (x^2 + a^2) + 2u a \omega}.$$

Составляющие ускорения

$$j_r = 0, j_e = \omega^2 \sqrt{x^2 + a^2}, j' = 2\omega u$$

Абсолютное ускорение точки

$$j_a = \omega \sqrt{\omega^2 x^2 + \omega^2 a^2 + 4u^2 + 4\omega u a}.$$

$$85. \quad x = \frac{c}{\omega} \sin \omega t,$$

где c — произвольная постоянная. Уравнение траектории в полярных координатах

$$r = \frac{c}{\omega} \sin \varphi.$$

Составляющие ускорения:

$j_r = c\omega \sin \omega t$ — направлено к центру,

$$j_e = \omega^2 x = c\omega \sin \omega t,$$

$$j' = 2\omega c \cos \omega t.$$

$$86. \quad \omega = \frac{\pi}{10}, \quad v_e = 2\pi \sin \varphi, \quad v = 2\pi = \text{const};$$

$$\frac{dv}{dt} = 0, \quad j = \frac{v^2}{\rho} = \frac{2\pi^2}{5}.$$

87. Центр колеса движется прямолинейно. Его ускорение может быть направлено только вдоль оси ξ , параллельной рейкам. Для определения ε имеем равенства:

$$j_2 = j_1 + 2\varepsilon R, \quad \varepsilon = \frac{j_2 - j_1}{2R}.$$

Тогда

$$j_0 = j_1 + \varepsilon R = \frac{j_1 + j_2}{2}.$$

88. Траектория точки $r = R \sin \varphi$; скорость точки $v = \omega R = \text{const}$. Ускорение $j_r = \omega^2 R \sin \omega t$ направлено к центру. Переносное ускорение

$$j_e = \omega^2 R \sin \omega t,$$

добавочное ускорение

$$j' = 2\omega^2 R \cos \omega t,$$

абсолютное ускорение

$$j = 2\omega^2 R = \text{const.}$$

Таким образом, точка движется с постоянными по величине скоростью и абсолютным ускорением j . Это ускорение ортогонально к вектору скорости точки. Радиус кривизны траектории точки $\rho = \frac{R}{2}$.

89. Во всех точках относительное ускорение $j_r = \frac{u^2}{r}$. Добавочное ускорение $j' = 2\omega u$ направлено к центру окружности. В точке 1 имеем:

$$j_e = \omega^2(a - r), \quad j_a = \frac{u^2}{r} + 2\omega u - \omega^2(a - r).$$

Абсолютное ускорение направлено к центру окружности. В точках 2 и 4 переносное ускорение

$$j_e = \omega^2 \sqrt{a^2 + r^2},$$

абсолютное ускорение

$$j_a = \sqrt{\left(\frac{u^2}{2} + 2\omega u + \omega^2 r\right)^2 + \omega^4 a^2}.$$

В точке 3 имеем:

$$j_e = \omega^2(a + r), \quad j = \frac{u^2}{r} + 2\omega u + \omega^2(a + r);$$

абсолютное ускорение направлено к центру окружности.

90. Относительное ускорение направлено к центру окружности и одинаково по величине во всех точках $j_r = \frac{u^2}{r}$. До-

бавочное ускорение в точках 2 и 4 по величине равно $j' = 2\omega_0 u$ и направлено ортогонально к плоскости кольца. В точках 1 и 3 добавочное ускорение равно нулю. Переносное ускорение всюду направлено к оси AB . В точках 2 и 4 оно равно $\omega_0^2 a$, в точке 1 равно $\omega_0^2(a - r)$. В точке 3 $\omega_0^2(a + r)$. Поэтому будем иметь:

$$j_1 = \frac{u^2}{r} - \omega_0^2(a - r),$$

$$j_2 = j_4 = \sqrt{\left(\frac{u^2}{r}\right)^2 + (\omega_0^2 a)^2 + 4\omega_0^2 u^2}.$$

$$j_3 = \frac{u^2}{r} + \omega_0^2(a + r).$$

91. Рассматривая произвольное положение точки M и обозначая через r расстояние точки M от центра C , а через φ — угол между диаметром CO и прямой CM , будем иметь

$$v_e = \omega r, \quad v_r = 2\omega a, \quad r = 2a \cos \varphi;$$

проекция скорости точки на направление радиуса-вектора точки будет $v_r = -2\omega a \sin \varphi$, а проекция скорости точки на трансверсальное направление равна нулю.

Для ускорений получим следующие значения:

$$j_r = 4\omega^2 a, \quad j_e = \omega^2 r = 2\omega^2 a \cos \varphi, \quad j' = 4\omega^2 a.$$

Отсюда следует, что вектор ускорения будет иметь только радиальную составляющую, равную по величине

$$j = 2\omega^2 a \cos \varphi.$$

Трансверсальная составляющая ускорения точки равна нулю. Таким образом, направление радиуса-вектора точки остается неизменным в пространстве, то есть точка будет совершать прямолинейное движение независимо от ее положения на окружности в начальный момент времени

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega, \quad \frac{dv_r}{dt} = j.$$

92. Воспользовавшись формулой Ривальса, будем иметь

$$j_A = \omega_0^2 r, \quad j_{oc} = \omega^2 l, \quad j_{ep} = \varepsilon l, \quad \omega = \omega_0 \frac{r \sin \alpha}{l \sin \beta}.$$

Из условия, что проекция ускорения точки B на горизонталь равна нулю, имеем

$$\omega_0^2 r \cos \alpha - \omega_0^2 \frac{r^2}{l} \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \beta} \cos \beta - \varepsilon l \sin \beta = 0,$$

откуда находим

$$\varepsilon = \frac{\omega_0^2 r (l \cos \alpha \sin^2 \beta - r \sin^2 \alpha \cos \beta)}{l \sin \beta}.$$

Для ускорения ползуна получим значение

$$j = \omega_0^2 l \sin \alpha + \omega_0^2 \frac{r^2}{l^2} \frac{\sin^2 \alpha}{\sin \beta} - \\ - \frac{\omega_0^2 r}{\sin \beta} (l \cos \alpha \sin^2 \beta - r \sin^2 \alpha \cos \beta) \cos \beta.$$

93. За подвижную систему координат выберем систему, жестко связанную со стержнем OA . Рассмотрим сложное движение воображаемой точки контакта E . Тогда искомая скорость будет представлена как переносная скорость точки E , то есть $v_e = v \sin \varphi$, и будет направлена в сторону уменьшения угла φ .

Искомое ускорение будет представлять собой переносное ускорение воображаемой точки. Одна из составляющих j_{en} этого ускорения направлена к оси вращения и равна по величине

$$j_{en} = \frac{v^2}{h} \sin^3 \varphi.$$

Вторая составляющая $j_{e\tau}$ направлена ортогонально к стержню в ту же сторону, что и скорость, а по величине равна кориолисову ускорению воображаемой точки

$$j_{e\tau} = 2 \frac{v^2}{h} \sin^2 \varphi \cos \varphi.$$

Полное ускорение точки E равно

$$j = \frac{v^2}{h} \sqrt{r - 3 \sin^2 \varphi} \sin^2 \varphi.$$

94.

$$j_x = -\omega^2 x - \varepsilon y - 2\omega y' + x'',$$

$$j_y = -\omega^2 y + \varepsilon x + 2\omega x' + y''.$$

95. Искомое ускорение

$$j = (\omega^2 - 2\omega\Omega - \Omega^2) a + \frac{v^2}{a} + 2(\Omega - \omega) v.$$

$$96. \quad j_0 = \frac{j_1 - j_2}{2}, \quad \varepsilon = \frac{j_1 + j_2}{2R}.$$

97. Принимая точку A за полюс, будем иметь:

$$j_a = \omega_1^2 a, \quad j_n = (\omega_1 + \omega_2)^2 b, \quad j_\tau = 0.$$

Полное ускорение точки

$$j = \sqrt{\omega_1^4 a^2 + (\omega_1 + \omega_2)^4 b^2 - 2\omega_1^2 (\omega_1 + \omega_2)^2 ab \cos \varphi}.$$

$$98. \quad \varepsilon = \frac{2j_A - j_B \sqrt{2}}{2a}, \quad \omega^2 = j_B \frac{\sqrt{2}}{2a}.$$

Для ускорения точки C получим значение

$$j_C = j_z = j_A - j_B \sqrt{2}.$$

99. Угловая скорость

$$\Omega = \omega_0 \frac{2a^2}{a^2 - b^2},$$

угловое ускорение

$$\varepsilon = \omega_0^2 \frac{2ab(a^2 - b^2)}{(a^2 - b^2)^2}.$$

100. $\omega = 1$, $\varepsilon = 1$. Мгновенный центр ускорений находится на середине диагонали BD .

$$101. \quad v_1 = \omega_0 R + \omega_1 r, \quad v_2 = \sqrt{\omega_0^2 R^2 + \omega_1^2 r^2},$$

$$v_3 = \omega_0 R - \omega_1 r, \quad v_4 = \sqrt{\omega_0^2 R^2 + \omega_1^2 r^2};$$

$$j_1 = \omega_0^2 R - \omega_1^2 r, \quad j_2 = \sqrt{\omega_0^4 R^2 + \omega_1^4 r^2},$$

$$j_3 = \omega_0^2 R + \omega_1^2 r, \quad j_4 = j_3.$$

$$102. \quad v = \frac{2\omega_0 r \sqrt{l^2 - r^2}}{[V 3(l^2 - r^2) - r]}.$$

$$103. \quad v = R\omega_0 \sqrt{10}, \quad j = R \sqrt{10(\varepsilon_0^3 + \omega_0^4) - 12\varepsilon_0\omega_0^2}.$$

$$104. \quad j = \frac{1}{2} \sqrt{j_A^2 + j_B^2 - 2j_A j_B \cos(\beta - \alpha)} = 5\sqrt{3} \text{ см/сек}^2.$$

$$105. \quad j_A = 2\omega^2 R, \quad j_B = 2R \sqrt{9\omega^4 + 4\varepsilon^2}.$$

Обозначив через M мгновенный центр скоростей, а через K — мгновенный центр ускорений, будем иметь

$$MK = \frac{\omega^2 R}{V \varepsilon^2 + 4\omega^4}, \quad \operatorname{tg} AMK = \frac{\varepsilon}{2\omega^2}.$$

106. Предположим, что $\omega_A > \omega_B$. Тогда мгновенный центр вращения фигуры будет находиться на продолжении AB на расстоянии

$$x = \frac{\omega_B l}{\omega_A - \omega_B}.$$

Мгновенная угловая скорость вращения равна нулю, а угловое ускорение

$$\varepsilon = \frac{\omega_A - \omega_B}{l}.$$

$$107. \quad \omega_1 = 2\omega_0 \left(1 + \frac{r_2}{r_1} \right).$$

108. Стержень AB совершает мгновенно-поступательное движение со скоростью поступательного движения $v_A = \omega_0 r$. Нормальное ускорение точки B равно $j_{Bn} = \omega_0^2 r^2 / R$. С другой стороны, так как точка B является точкой стержня AB , проекцию ускорения точки B на нормаль определим из равенства

$$j_B = j_A + j_{sp}.$$

Тогда

$$j_{Bn} = j_{An} + j_{spn},$$

откуда будем иметь

$$\frac{\omega_0^2 r^2}{R} = \omega_0^2 r + \varepsilon \sqrt{l^2 - r^2}.$$

Отсюда получаем величину углового ускорения стержня

$$\varepsilon = \frac{\omega_0^2 r (r - R)}{R \sqrt{l^2 - r^2}}.$$

Полное ускорение точки B получит вид

$$j_B = \sqrt{\frac{\omega_0^4 r^4}{R^2} + (\varepsilon_0 + \varepsilon)^2 r^2}.$$

$$109. \quad \Omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1\omega_2 \cos \alpha}, \quad \varepsilon = \omega_1\omega_2 \sin \alpha.$$

110. Переносная угловая скорость $\omega_e = \omega_0$. Относительная угловая скорость вращения конуса вокруг своей оси симметрии равна

$$\omega_r = \omega_0 \frac{\sin 135^\circ}{\sin 22,5^\circ}.$$

Вектор абсолютной угловой скорости вращения конуса направлен по общей образующей, а по величине равен $\omega_a = \omega_0$. Вектор углового ускорения ε направлен ортогонально к плос-

кости, образованной осями конусов. По величине угловое ускорение равно

$$\varepsilon = \omega_0^2 \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

111. $\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2$, $\varepsilon = \omega_1 \omega_2$.

112. Нетрудно видеть, что $v_a = v_B = \omega_r R$. Кроме того, угловое ускорение $\varepsilon = \omega_r \omega_e$, а угловая скорость $\Omega \sqrt{\omega_e^2 + \omega_r^2}$. Отсюда получаем

$$j_{oc} = \Omega^2 \rho = R \omega_r \sqrt{\omega_r^2 + \omega_e^2}, j_{sp} = \varepsilon R = \omega_r \omega_e R.$$

Полное же ускорение будет равно $j_A = j_B = R \omega_r \sqrt{4\omega_e^2 + \omega_r^2}$.

113. Абсолютная угловая скорость

$$\omega = \frac{v_0 \sqrt{2}}{h};$$

переносная угловая скорость

$$\omega_1 = \frac{v_0 \sqrt{2}}{h};$$

угловое ускорение

$$\varepsilon = \omega_1 \omega = \frac{2v_0^2}{h^2}.$$

114. $j_{sp} = \frac{\omega_1^2 h}{\sin \alpha}$, $j_{oc} = 2\omega_1^2 \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha}$.

115. $\Omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1 \omega_2 \sin 45^\circ}$, $\varepsilon = \omega_1 \omega_2 \sin 45^\circ$.

116. Мгновенная угловая скорость вращения по величине равна 3ω . Линия действия вектора мгновенной угловой скорости проходит через центр тяжести треугольника ABC , где A , B и C — точки пересечения данных осей с перпендикулярной к ним плоскостью.

117. Линия действия вектора мгновенной угловой скорости вращения диска совпадает с образующей, касающейся диска. Ускорение точки A диска равно $j = \varepsilon R = \text{const}$, что может быть только в том случае, когда абсолютная угловая скорость является постоянной по величине. Нетрудно установить, что

тогда величина абсолютной угловой скорости вращения диска равна

$$\Omega = \sqrt{\frac{c}{R \operatorname{tg} 30^\circ}} .$$

а угловое ускорение диска по величине равно

$$\epsilon = \Omega^2 \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{c}{R} .$$

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
Введение	3
Кинематика	5
Скорость и ускорение материальной точки в простейших движениях	6
Сложное движение материальной точки. Теорема о сложении скоростей	20
Кинематика твердого тела. Распределение скоростей в твердом теле	30
Теорема Кориолиса об ускорении материальной точки в сложном движении. Распределение ускорений в твердом теле . .	45
Ответы и методические указания к задачам	65

Евгений Николаевич Березкин

Решение задач по теоретической механике

(часть первая)

Редактор *Н. В. Сысоева*

Технический редактор *Е. Д. Захарова*

Корректор *Н. Б. Казакова*

Заказная

Сдано в набор	27/IV	1972 г.
Подписано к печати	29/I	1973 г.
Л-58035	Формат	60×90/16
Бумага тип. № 3		
Физ. печ. л.	5,75	Уч.-изд. л. 4,88
Уч. изд. л.	4,88	
Заказ 219	Тираж	4500 экз.
Цена 14 коп.		

Издательство

Московского университета,
Москва, К-9, ул. Герцена, д. 5/7.
Типография Изд-ва МГУ,
Москва, Ленинские горы