П. Шохайдарова
Ш. Шозиётов
Ж. Зоиров

НАЗАРИЙ МЕХАНИКА

НАЗАРИЙ МЕХАНИКА

16

П. Шоҳайдарова,
Ш. Шозиётов,
Ж. Зоиров

НАЗАРИЙ МЕХАНИКА

Олий ва махсус ўрта таълим министрлиги
олий техника ўқув юртларининг талабалари учун ўқув қўлланмаси
сифатида тавсия этган

Қайта ишланган ва тўлдирилган иккинчи нашри

ТОШКЕНТ «ЎҚИТУВЧИ» 1991

Ушбу ўқув қўлланмасида назарий механиканинг статика, кинематика, нуқта ва система динамикаси, қаттиқ жисм динамикаси, аналитик механика элементлари ва кичик тебранишлар назарияси бўлимлари баён этилган.

Ўқув қўлланмаси олий техника ўқув юртлари учун назарий механика бўйича тўлиқ (170 — 204 соат ҳажмдаги) программа асосида ёзилган.

Китобда механиканинг асосий тушунчалари ва қонунларини ёритиш билан бирга инженерлик мутахассислигининг турли соҳаларида учрайдиган қатор амалий масалалар батафсил ечиб кўрсатилган.

Мазкур ўқув қўлланмаси олий техника ўқув юртларининг талабаларига мўлжалланган.

Ш $\frac{1603020000 - 298}{353\ 04 - 91}$ 113 — 91

ISBN 5 — 645 — 01222 — 4

БИРИНЧИ НАШРИГА СЎЗ БОШИ

Ҳозирги замон фани ва техникасининг тез суръатлар билан ўсиши, ишлаб чиқариш процессларининг механизациялаштирилиши ва автоматлаштирилиши ҳамда турли хил иншоотларни лойиҳалаш ишлари умумтехника фанларининг асоси бўлган назарий механикани пухта ўрганишни талаб қилади.

Ўзбек тилида назарий механикадан ёзилган дарсликлар камлиги ҳамда ишлаб чиқаришдан ажралмаган ҳолда ўқиётган студентлар бу фанни пухта ўзлаштиришларини таъминлаш масаласи мавжуд дарсликларга нисбатан ихчам ва программага мос қўлланма яратиш эҳтиёжини туғдирди. Шуларни эътиборга олиб авторлар бир неча йиллар давомида турли Олий техника ўқув юртларида ўқиган лекцияларини умумлаштириб, назарий механикадан ушбу қўлланмани тавсия этдилар.

Бу қўлланма Тошкент шаҳар олий ўқув юртлари ўқитувчиларининг назарий механикадан умумшаҳар илмий методик семинари ҳамда ЎзССР Олий ва махсус ўрта таълим министрлиги ҳузуридаги илмий методик Советнинг механика секцияси томонидан олий техника ўқув юртларининг сиртқи ва кечки бўлимлари студентлари учун ўқув қўлланмаси сифатида нашр қилишга тавсия этилди.

Қўлланма қўлёзмасини ўқиб чиқиб, унинг сифатини ошириш борасида берган маслаҳатлари учун профессор Т. Р. Рашидов, доцент А. И. Зельтин, доцент С.Қ. Азиз-Қориевга авторлар ташаккур билдирадилар.

Қўлёзмани таҳрир қилиб босмага тайёрлаш жараёнида махсус редакторлар Қ. Б. Муминов ва Э. В. Эргашев катта жонкуярлик кўрсатдилар. Уларга ҳам авторлар самимий миннатдорчилик билдирадилар.

Иккинчи нашрига сўз боши

Китобнинг иккинчи нашри биринчи нашрга оид фикр-мулоҳазаларни эътиборга олиб қайтадан ишланди ва олий техника ўқув юртларининг кундузги бўлими учун ҳам мослаштирилди. Баъзи параграфлар қайтадан ёзилди ва янги масалалар билан тўлдирилди. 12, 22, 47, 84, 97, 98, 128, 148, 149, 155, 157, 160, 164, 168, 174-параграфлар шулар жумласидандир.

Китобнинг иккинчи нашрига оид фикр ва мулоҳазаларни қуйидаги адресга юборишингизни илтимос қиламиз: Тошкент — 129, Навоий кўчаси, 30. «Ўқитувчи» нашриётининг илмий-техника адабиёти редакцияси.

Муаллифлар

I боб

КИРИШ

1-§. Умумий мулоҳазалар

Назарий механика фани олий техника ўқув юртларида ўтиладиган асосий фанлардан бири бўлиб, унинг қонунлари материаллар қаршилиги, қурилиш механикаси, машина ва механизмлар назарияси каби қатор фанлар учун хилма-хил ва мураккаб техника масалаларини ечишда назарий асос сифатида қўлланилади.

Назарий механика фани моддий жисмларнинг бир-бирига кўрсатадиган таъсири ва механик ҳаракатнинг умумий қонунлари ҳақидаги фандир.

Моддий дунёда учрайдиган ҳамма ҳодисалар материянинг ҳар хил кўринишларидан ва унинг хусусиятларидан иборатдир.

В. И. Ленин бундай деган эди: «Оламда ҳаракат қилувчи материядан бошқа ҳеч бир нарса йўқдир, ҳаракат қилувчи материя эса фақат макон ва вақтда ҳаракат қилади»*.

Бу таърифга кўра, ҳаракат материянинг ажралмас ва асосий хоссаси бўлиб, оламда рўй берадиган барча ҳодисаларни ўз ичига олади. Шунинг учун ҳаракат сўзидан оддий кўчишдан тортиб, молекулалар, атомлар, электронлар, электромагнит ҳодисалари, физик-кимёвий, биологик ўзгаришда бўладиган мураккаб жараёнлар тушунилади.

Табиий фанлар материя ҳаракатини ва унинг хусусиятларини ўргатади.

Табиий фанлардан бўлган назарий механика фани материя ҳаракатларидан энг соддаси ҳисобланган механик ҳаракатни текширади.

Вақт ўтиши билан моддий жисмларнинг бир-бирларига нисбатан фазода кўчиши *механик ҳаракат* дейилади. Бу ҳаракат жисмларнинг ўзаро таъсирлашуви натижасида содир бўлади.

Моддий жисмларнинг мувозанати механик ҳаракатнинг хусусий ҳоли бўлганлиги сабабли, назарий механикада моддий жисмларнинг бу ҳолати ҳам текширилади.

Назарий механика фани, механик масаланинг қандай нуқтаи назардан қўйилишига қараб, уч қисмга: статика, кинематика ва динамикага бўлинади.

---

*Ленин В. И. Материализм ва эмпириокритицизм. Тўла асарлар тўплами, 18-том, 203-бет.

Моддий жисмларнинг мувозанати, уларга қўйилган кучларни қўшиш, айириш ва кучларни таъсир жиҳатдан тенг бўлган эквивалент кучлар системаси билан алмаштириш масалалари назарий механиканинг *статика* бўлимида текширилади.

Жисмларнинг ҳаракатини уларнинг массаси ва уларга таъсир этувчи кучларга боғламай, фақат геометрик нуқтаи назардан текшириш масаласи *кинематика* қисмига киради.

Динамикада эса моддий жисмларнинг ҳаракати шу ҳаракатни вужудга келтирувчи куч билан биргаликда текширилади.

СТАТИКА

II боб

ҚАТТИҚ ЖИСМ СТАТИКАСИ ВА СТАТИКАНИНГ АСОСИЙ АКСИОМАЛАРИ

2- §. Асосий тушунчалар ва таърифлар

Статикада жисмнинг мувозанати деганда, унинг маълум жисмга қўзғалмас равишда маҳкамланган координаталар системасига нисбатан тинч вазияти тушунилади.

Статиканинг асосий тушунчалари, таърифларини келтирамиз.

1. *Моддий нуқта* деганда, ҳаракати ёки мувозанатини текширишда ўлчамлари ва шаклининг аҳамияти бўлмаган, массаси бир нуқтада жойлашган деб тасаввур қилинадиган жисм тушунилади.

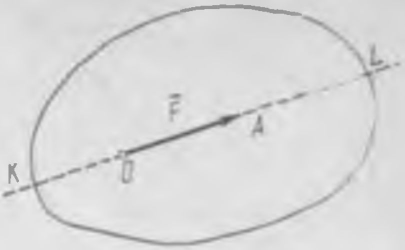
2. Куч таъсиридаги жисмнинг ихтиёрий иккита нуқтаси орасидаги масофа доимо ўзгармасдан қолса, бундай жисм *абсолют қаттиқ жисм* дейилади.

Табиатда абсолют қаттиқ жисм йўқ, ҳар қандай жисм ҳам оз бўлса-да деформацияланади — шакли ўзгаради. Агар бу ўзгариш жисмнинг ўлчамларига нисбатан жуда кичик бўлса, механик ҳаракатни текширишда мазкур ўзгаришни эътиборга олмаймиз. Қаттиқ жисмни бундай абстрактлаштириб қараш жисмнинг ҳаракатини ўрганишни соддалаштиради.

3. Жисмларнинг бир-бирларига кўрсатган ўзаро таъсирларининг миқдор ўлчови *куч* дейилади. Бу таъсир натижасида жисмнинг кинематик ҳолати ёки шакли ўзгаради (деформацияланади).

Кучнинг жисмга таъсири: 1) куч қўйилган нуқта, 2) кучнинг йўналиши, 3) кучнинг миқдори билан аниқланади.

Жисмнинг бевосита куч таъсир этадиган нуқтаси *куч қўйилган нуқта* дейилади. Тинч ҳолатда турган эркин моддий жисмнинг берилган куч таъсирида олган ҳаракат йўналиши *кучнинг йўналиши* дейилади. Кучнинг миқдорини ўлчаш учун уни куч бирлиги деб қабул қилинган бирор катталик билан солиштирилади. МГСС системада куч бирлиги учун килограмм-куч (1 кгк), халқаро (СИ) системада ньютон (1 Н) қабул қилинган; бунда 1 кгк = 9,81 Н; 1 Н = 0,102 кгк.



1- расм.

Куч миқдор ва йўналишга эга бўлгани учун вектор катталик билан ифодаланади. Вектор кесмасининг маълум масштабдаги узунлиги кучнинг миқдорини, стрелканинг йўналиши кучнинг йўналишини ифодалайди (1- расм).

Куч вектори ётган (KL) чизиқ *кучнинг таъсир чизиғи* дейилади. Куч қўйилган нуқтани O билан белгилаймиз. Одатда куч вектори $\overline{F}$ орқали, миқдори эса F билан белгиланади.

4. Кучлар системаси. Жисмга қўйилган $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n$ кучлар тўплами *кучлар системаси* дейилади.

Жисмга қўйилган ($\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n$) кучлар системаси кўрсатадиган таъсирни бошқа ($\overline{Q}_1, \overline{Q}_2, \ldots, \overline{Q}_n$) кучлар системаси бера олса, бундай икки куч системаси *эквивалент кучлар системаси* дейилади. Уларнинг эквивалентлиги қуйидагича ёзилади:

$$(\overline{F}_1\ \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n) \backsim (\overline{Q}_1, \overline{Q}_2, \ldots, \overline{Q}_n).$$

5. Тенг таъсир этувчи куч. Кучлар системасининг жисмга таъсирини ёлғиз бир куч бера олса, бундай куч мазкур *кучлар системасининг тенг таъсир этувчиси* дейилади. ($\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n$) кучлар системасининг тенг таъсир этувчисини $\overline{R}'$ билан белгиласак, у ҳолда

$$(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n) \backsim \overline{R}'.$$

6. Мувозанатлашган кучлар системаси. Тинч турган жисм унга қўйилган ($\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n$) кучлар системаси таъсирида ҳам тинч ҳолатда қолса, бундай кучлар системаси *мувозанатлашган кучлар системаси* ёки нолга эквивалент система дейилади. Мувозанатлашган кучлар системаси нолга эквивалентдир:

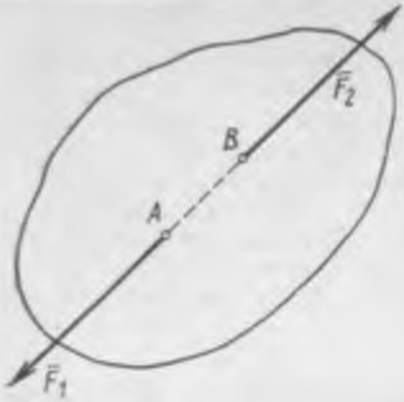
$$(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n) \backsim 0.$$

7. Саноқ системаси. Механикада берилган жисмнинг ҳаракати ёки ҳолати бирор жисм билан боғланган координаталар системасига нисбатан текширилади. Бу координаталар системаси *саноқ системаси* дейилади. Статика бўлимида Ер билан бевосита боғланган саноқ системасидан фойдаланилади.

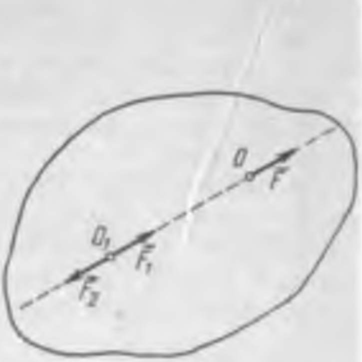
8. Эркин жисм. Жисм фазода ихтиёрий томонга ҳаракатлана олса, бундай жисм *эркин жисм* дейилади.

3- §. Статиканинг асосий аксиомалари

Назарий механиканинг статика қисми тажриба ва кузатишлар ёрдамида аниқланган қуйидаги аксиомаларга асосланади:



2- расм.



3- расм.

1- аксиома. *Эркин жисмнинг исталган икки нуқтасига миқдорлари тенг, йўналиши эса шу нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқ бўйича қарама-қарши томонга йўналган иккита куч таъсир этса, бундай кучлар ўзаро мувозанатлашади* (2- расм).

Кучларнинг миқдори $|\overline{F}_1| = |\overline{F}_2|$. Агар кучларнинг йўналишини эътиборга олсак, $\overline{F}_1 = -\overline{F}_2$ бўлиб, бунда манфий ишора кучларнинг қарама-қарши томонга йўналганлигини билдиради. Бундай икки кучдан ташкил топган система ноллик системадан иборат бўлади:

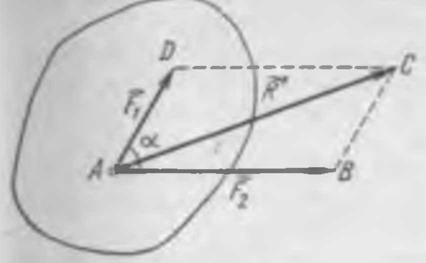
$$(\overline{F}_1, \overline{F}_2) \backsim 0.$$

2- аксиома. *Нолга эквивалент системани жисмга таъсир этувчи кучлар системасига қўшиш ёки ундан айириш билан кучлар системасининг жисмга таъсири ўзгармайди.*

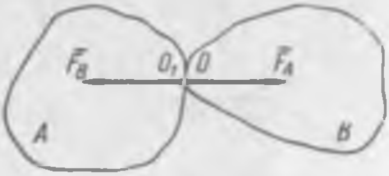
Бу аксиомалардан қуйидаги натижа келиб чиқади: *куч ўз таъсир чизиғи бўйлаб бир нуқтадан иккинчи нуқтага миқдор ва йўналиши ўзгартирилмай кўчирилса, унинг жисмга таъсири ўзгармайди.*

Исбот. Жисмнинг O нуқтасига қўйилган $\overline{F}$ кучнинг таъсир чизиғида O_1 нуқтани олиб, шу нуқтага миқдорлари $F = F_1 = F_2$ бўлган ҳамда мазкур чизиқда ётувчи $(\overline{F}_1, \overline{F}_2) \backsim 0$ системани қўшамиз (3- расм). 1- аксиомага кўра $(\overline{F}, \overline{F}_2) \backsim 0$ бўлганидан уни ташлаб юборсак, у ҳолда O_1 нуқтада $\overline{F}_1$ куч қолади. Шундай қилиб, O_1 нуқтага қўйилган $\overline{F}$ куч ўрнига O_1 нуқтага қўйилган худди шундай $\overline{F} = \overline{F}_1$ кучни оламиз. Натижа исботланди.

3- аксиома. (*параллелограмм аксиомаси*). *Жисмнинг бирор нуқтасига қўйилган турли йўналишдаги икки кучнинг тенг таъсир этувчиси миқдор жиҳатдан шу кучларга қурилган параллелограммнинг улар қўйилган нуқтадан ўтувчи диагоналига тенг бўлиб, шу диагонал бўйлаб йўналади.*



4- расм.



5- расм.

Жисмнинг бирор A нуқтасига қўйилган, бир-бири билан α бурчак ташкил этувчи $\overline{F}_1$ ва $\overline{F}_2$ кучларнинг тенг таъсир этувчисини $\overline{R}'$ билан белгилаймиз (4- расм). Аксиомага кўра $R' = \overline{F}_1 + \overline{F}_2$

4- аксиома. *Жисмларнинг бир-бирига таъсири ўзаро тенг ва бир тўғри чизиқ бўйлаб қарама-қарши томонга йўналади.*

Масалан, A жисмнинг B жисмга кўрсатадиган $\overline{F}_A$ таъсир кучи B жисмнинг O нуқтасига қўйилади (5- расм). B жисмнинг A жисмга $\overline{F}_B$ таъсир кучи A жисмнинг O_1 нуқтасига қўйилади. $\overline{F}_A$ ва $\overline{F}_B$ кучлар миқдор жиҳатдан бир-бирига тенг ва таъсир чизиқлари умумий бўлиб, қарама-қарши томонга йўналган:

$$\overline{F}_A = -\overline{F}_B.$$

Бу аксиома Ньютоннинг учинчи қонунини ифодалайди.

5- аксиома. *Берилган кучлар таъсирида деформацияланадиган жисм мувозанат ҳолатида абсолют қаттиқ жисмга айланса, унинг мувозанати ўзгармайди.*

Бу аксиома *қотиш принципи* дейилади.

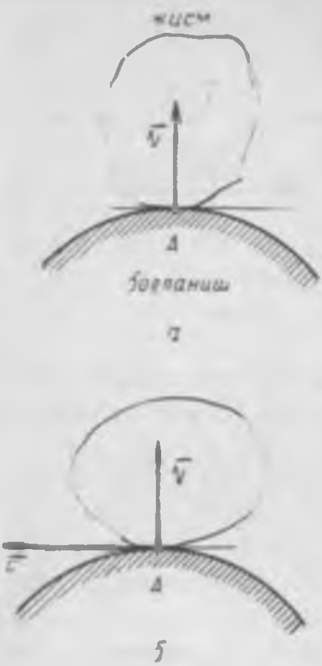
4- §. Боғланиш ва боғланиш реакциялари

Жисмнинг ҳаракати ёки ҳолати бирор сабаб билан чекланган бўлса, у *боғланишдаги жисм* дейилади. Жисмнинг ҳаракати ёки ҳолатини чекловчи сабаб эса *боғланиш* дейилади. Масалан, рельсларда турган вагоннинг вертикал йўналишдаги ҳаракати чекланган. Бунда рельслар вагон учун боғланиш вазифасини ўтайди; вагон эса боғланишдаги жисмдир.

Боғланишнинг жисмга кўрсатадиган таъсирини белгиловчи куч *боғланиш реакция кучи* дейилади.

Назарий механикада боғланишдаги жисмнинг ҳаракатини ёки мувозанатини эркин жисмнинг ҳаракати ёки мувозанатига келтириб текширилади. Бу ҳол қуйидаги аксиома билан ифодаланади.

6- аксиома. *Боғланишдаги жисмни эркин жисм шаклига келтириш учун жисм таъсир этувчи кучлар қаторига боғланиш реакция кучини ҳам қўшиш керак.*



6- расм.

Бу аксиома жисмни *боғланишдан бўшатиш аксиомаси* дейилади.

Боғланишдаги жисмларнинг ҳаракати қайси томондан чекланган бўлса, реакция кучи шу йўналишга тескари йўналган бўлади.

Жисмлар, асосан, таянчлар (қирралар, шарнирлар), ип, занжир ва қайишлар воситасида боғланган бўлади.

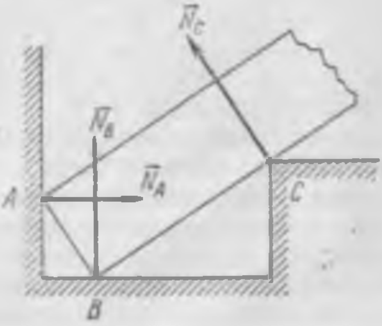
Боғланишдаги жисмларнинг боғланиш реакция кучларини аниқлаш статиканинг асосий масалаларидан ҳисобланади. Умумий ҳолда масалани ечмасдан туриб, боғланиш реакция кучининг миқдори ва йўналишини аниқлаб бўлмайди. Лекин айрим ҳолларда берилган масалани ечмасдан туриб, реакция кучларининг йўналишини аниқлаш мумкин. Бундай боғланишларни қуйидаги уч группага ажратиш мумкин:

1. Жисм қўзғалмас силлиқ сиртга A нуқтада таянади. Бу ҳолда сиртнинг реакция кучи $\overline{N}$ жисмнинг A нуқтасига қўйилган бўлиб, шу нуқтада сиртга ўтказилган нормаль бўйлаб йўналган бўлади (6-расм, *а*). Бу куч *нормал реакция кучи* дейилади. Агар жисм ва сирт силлиқ бўлмаса, A нуқтада нормал реакция кучидан ташқари, уринма реакция кучи $\overline{F}$ ҳам пайдо бўлади (6- расм, *б*). Бу $\overline{F}$ куч *ишқаланиш кучи* деб аталади.

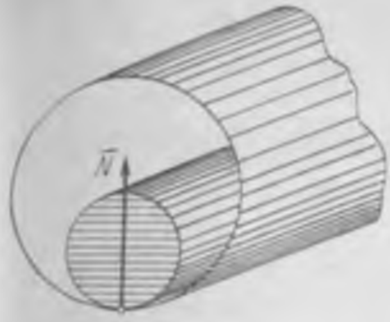
7, 8, 9- расмларда таянч нуқталарида қайси сиртга (жисм ёки таянч сиртга) нормаль ўтказиш мумкин бўлса, нормал реакция кучи шу нормаль бўйича йўналтирилади.

2. Жисмлар чўзилмайдиган ип, занжир, қайиш ёки стерженлар воситасида осилган бўлса, уларда ҳосил бўладиган реакция кучлари

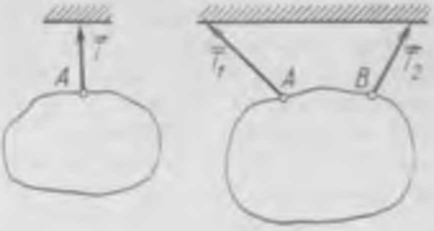
7- расм.



8- расм.



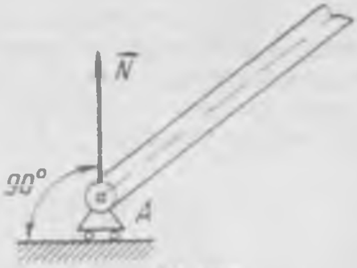
9- расм.



10- расм.

мос равишда иплар, занжирлар, қайишлар, стерженлар бўйлаб йўналган бўлади (10- расм). Ипларда ҳосил бўладиган реакция кучлари одатда $\overline{T}$, $\overline{T}_1$, $\overline{T}_2$ билан белгиланади ва *таранглик кучи* дейилади.

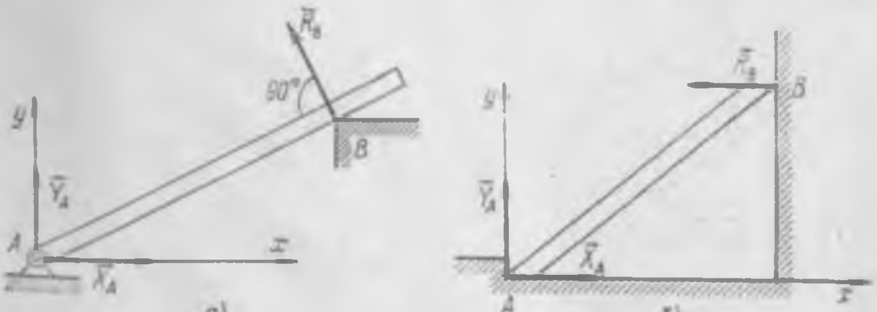
3. Жисм қўзғалмас текисликка ғалтаклар воситасида таяниб турса (11-расм), *A* нуқтадаги реакция кучи $\overline{N}$ шу текисликка перпендикуляр йўналади.



11- расм.

Реакция кучларининг йўналиши олдиндан номаълум бўлган боғланишларнинг асосий турлари билан танишамиз:

1. Жисм цилиндрсимон шарнир воситасида иккинчи жисмга боғланган бўлса, боғланиш реакция кучининг таъсир чизиғи цилиндрнинг марказий ўқидан ўтади ва цилиндр ўқига перпендикуляр текисликда ётади. Масалан, жисм *A* нуқтада цилиндрсимон шарнир воситасида қўзғалмас текислик билан боғланган (12-расм,*a*). Бунда боғланиш реакция кучининг таъсир чизиғи *A* нуқтадан ўтади, лекин йўналиши номаълум. Бундай ҳолда реакция кучини цилиндр ўқига перпендикуляр йўналган *x* ва *y* ўқларнинг мусбат йўналишлари бўйича ташкил этувчиларга ажратиб, уларни жисмнинг мувозанат шартларидан аниқланади.



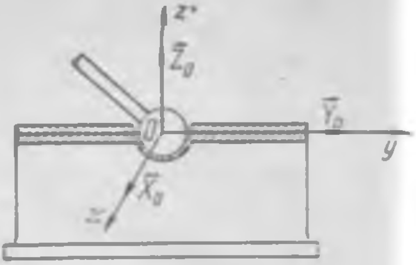
a)

б)

12- расм.

2. Бир жисм иккинчи жисмга тиралиб турган бўлса (12-расм, *б*), бундай ҳолда ҳам реакция кучининг йўналиши номаълум бўлиб, у 1-ҳолдагидек ташкил этувчиларга ажратилади ва уларни жисмнинг мувозанат шартларидан аниқланади.

3. Жисм сферик шарнир воситасида богланган бўлса (13-расм), бу шарнир ўз маркази *O* дан ўтадиган ҳар қандай ўқ атрофида жисмнинг айланишига тўсқинлик қилмайди. Сферик шарнирнинг реакция кучи *O* нуқтадан ўтади, лекин қайси томонга йўналганлиги олдиндан маълум эмас. Масалани ечишда бундай реакция кучини танлаб олинган координата ўқларига параллел йўналган ташкил этувчиларга ажратиб, уларни жисмнинг мувозанат шартларидан топилади.



13- расм.

III боб

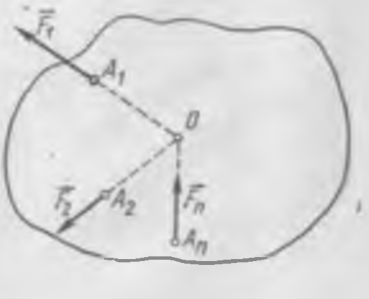
БИР НУҚТАДА КЕСИШУВЧИ КУЧЛАР СИСТЕМАСИ

Таъсир чизиқлари бир нуқтада кесишадиган кучлар системаси *бир нуқтада кесишувчи кучлар системаси* дейилади. Яъни жисмнинг A_1, A_2, . . . , A_n нуқталарига, таъсир чизиқлари *O* нуқтада кесишадиган тегишлича $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n$ кучлар таъсир этса, бу кучлар бир нуқтада кесишувчи кучлар системасини ташкил қилади (14-расм).

Кучларни уларнинг таъсир чизиқлари бўйлаб кўчириш мумкин бўлганлиги туфайли, бир нуқтада кесишувчи кучлар системасини доимо бир нуқтага қўйилган кучлар системаси билан алмаштириш мумкин (15-расм). Бир нуқтада кесишувчи кучларни қисқача *кесишувчи кучлар* ҳам дейилади.

Бир нуқтада кесишувчи кучларни геометрик ёки аналитик усулда қўшиш мумкин.

14- расм.



15- расм.

5- §. Бир нуқтада кесишувчи кучларни геометрик усулда қўшиш

Жисмнинг бирор A нуқтасига қўйилган ва ўзаро α бурчак ташкил этувчи $\overline{F}_1$ ва $\overline{F}_2$ кучларнинг тенг таъсир этувчиси, параллелограмм аксиомасига кўра, шу кучларга қурилган параллелограммнинг A нуқтасидан ўтувчи диагонали билан ифодаланади (16- расм, *а*). Яъни бир нуқтага қўйилган иккита кучнинг тенг таъсир этувчиси $\overline{R}'$ шу кучларнинг геометрик йиғиндисига тенг:

$$\overline{R'} = \overline{F}_1 = \overline{F}_2. \tag{3.1}$$

Бир нуқтага қўйилган иккита кучнинг тенг таъсир этувчисини кучлар учбурчаги усулида ҳам аниқлаш мумкин (16- расм, *б*). Бунинг учун ихтиёрий A_1 нуқтага $\overline{F}_1$ кучни қўйиб, бу кучнинг учи D_1 нуқтага $\overline{F}_2$ кучни ўзига параллел равишда келтирамиз. Биринчи кучнинг боши A_1 ни иккинчи кучнинг учи C_1 билан туташтирувчи $\overline{R}'$ вектор тенг таъсир этувчи кучни ифодалайди. Кучларни бу усулда қўшиш *кучлар учбурчаги усули* дейилади.

Тенг таъсир этувчининг модулини $\Delta A_1 C_1 D_1$ дан косинуслар теоремасига асосан аниқлаймиз:

$$R' = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos(180^\circ - \alpha)}$$

ёки (3.2)

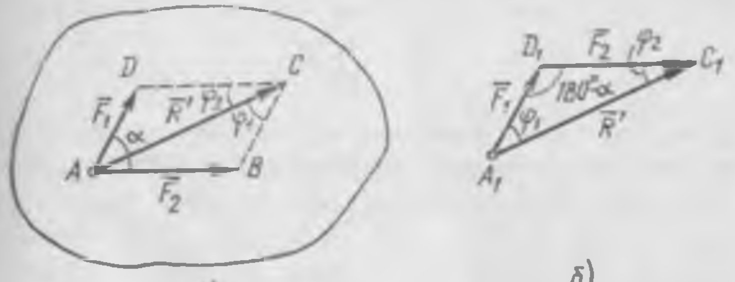
$$R' = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha}.$$

Тенг таъсир этувчи $\overline{R}'$ кучнинг $\overline{F}_1$ ва $\overline{F}_2$ кучлар билан ташкил қилган φ_1 ва φ_2 бурчаклари синуслар теоремасига кўра аниқланади:

$$\frac{F_1}{\sin\varphi_2} = \frac{F_2}{\sin\varphi_1} = \frac{R'}{\sin(180^\circ - \alpha)}. \tag{3.3}$$

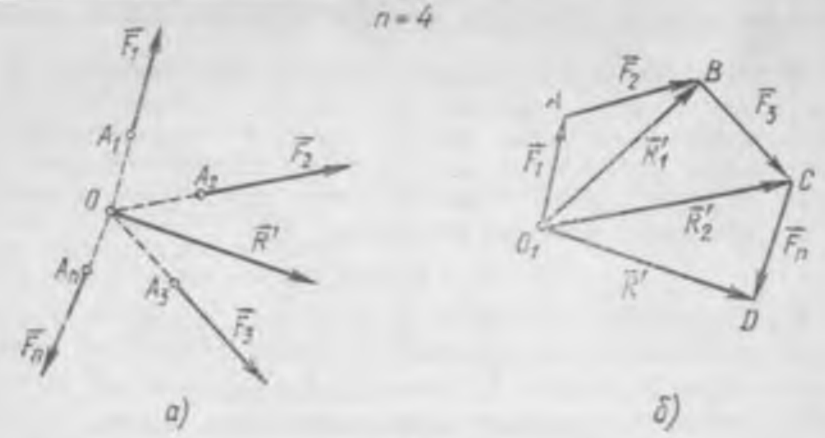
Бир нуқтада кесишувчи ($\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, . . . , $\overline{F}_n$) кучлар системасининг (17- расм, *а*) тенг таъсир этувчисини аниқлаймиз. Кучлар учбурчаги қоидасига асосан бу кучларни кетма-кет қўшамиз.

Аввало $\overline{F}_1$ ва $\overline{F}_2$ кучларнинг тенг таъсир этувчиси $\overline{R}'_1$ ни аниқлаймиз, сўнгра $\overline{R}'_1$ ва $\overline{F}_3$ кучларнинг тенг таъсир этувчиси $\overline{R}'_2$ ни



а) б)

16- расм.



17- расм.

аниқлаймиз ва ҳоказо (17- расм, *б*). Аниқлик учун расмда $n = 4$ бўлган ҳол кўрсатилган. $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$, $\overline{F}_4$ кучларни қўшиш натижасида *O_1ABCD кучлар кўпбурчаги* ҳосил қилинади. Бу кўпбурчакда $\overline{F}_1$, кучнинг боши билан $\overline{F}_4$ кучнинг учини бирлаштирувчи $\overline{R}'$ вектор $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$, $\overline{F}_4$ кучларнинг тенг таъсир этувчисини ифодалайди. Шундай қилиб,

$$\overline{R}_1' = \overline{F}_1 + \overline{F}_2,$$
$$\overline{R}_2' = \overline{R}_1' + \overline{F}_3 = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3,$$
$$\overline{R}_3' = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3 + \overline{F}_4$$

ёки

$$\overline{R}_3' = \sum_{k=1}^{4} \overline{F}_k .$$

Худди шунингдек, n та кучнинг тенг таъсир этувчисини аниқлаймиз:

$$\overline{R}' = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k . \qquad (3.4)$$

Демак, бир нуқтада кесишувчи кучларнинг тенг таъсир этувчиси $\overline{R}'$ шу кучларнинг геометрик йиғиндисига тенг. Яъни $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, . . . , $\overline{F}_n$ кучлар учун юқоридагидек кучлар кўпбурчаги тузилса, бу кўпбурчакда $\overline{F}_1$ кучнинг боши билан $\overline{F}_n$ кучнинг учини бирлаштирувчи $\overline{R}'$ вектор мазкур кучлар системасининг тенг таъсир этувчиси бўлади.

6- §. Кучнинг ўқдаги проекцияси

Куч билан ўқ бир текисликда ётган бўлса, $\overline{F}$ кучнинг Ox ўқдаги проекциясини аниқлаш учун кучнинг боши A ва учи B дан Ox ўққа перпендикуляр (Aa), (Bb) пунктир чизиқларни ўтказамиз (18- расм). У ҳолда мос ишора билан олинган ab кесма $\overline{F}$ кучнинг Ox ўқдаги проекциясини ифодалайди, бунда a нуқтадан b нуқтага кўчиш Ox ўқнинг мусбат йўналиши билан устма-уст тушса — мусбат ишора, унга тескари йўналса — манфий ишора олинади. Бу таърифга кўра, 18- расмда

$$X = F\cos\alpha,$$
$$X_1 = -F_1\cos\varphi$$

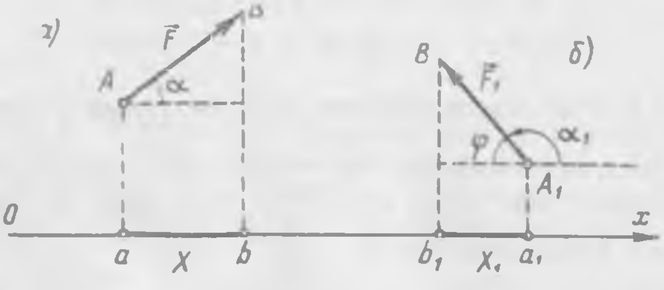
(баъзан кучнинг ўқдаги проекцияси F_x кўринишда ҳам белгиланади) ёки $\cos\alpha_1 = \cos(180° - \varphi) = -\cos\varphi$ бўлгани учун

$$X = F\cos\alpha,$$
$$X_1 = F_1\cos\alpha_1. \qquad (3.5)$$

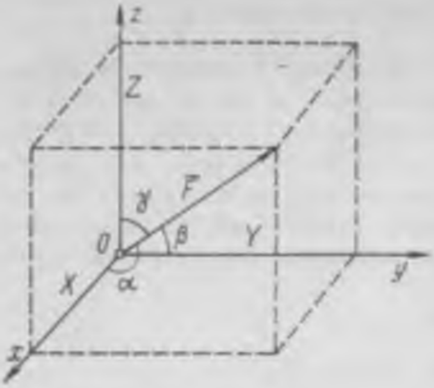
Демак, *кучнинг бирор ўқдаги проекцияси скаляр миқдор бўлиб, куч модули ҳамда кучнинг шу ўқ мусбат йўналиши билан ташкил қилган бурчаги косинусининг кўпайтмасига тенг.* Бу таърифдан кўринадики, кучнинг параллел ва бир хил йўналган ўқлардаги проекциялари ўзаро тенг бўлади. Агар $\alpha = 90°$ бўлса, $\cos 90° = 0$ бўлгани учун $X = 0$ бўлади. $\overline{F}$ кучнинг $Oxyz$ Декарт координата ўқларидаги проекцияларини аниқлаш учун координаталар бошини $\overline{F}$ кучнинг бошида оламиз (19- расм). $\overline{F}$ кучнинг x, y, z ўқлар билан ташкил қилган бурчакларини мос равишда α, β, γ билан белгилаймиз. Бу ҳолда, диагонали F га тенг бўлган параллелепипед (мос ишора билан олинган) томонларининг узунлиги (3.5) га асосан $\overline{F}$ кучнинг координата ўқларидаги проекцияларини ифодалайди:

$$X = F\cos\alpha,\ Y = F\cos\beta,\ Z = F\cos\gamma. \qquad (3.6)$$

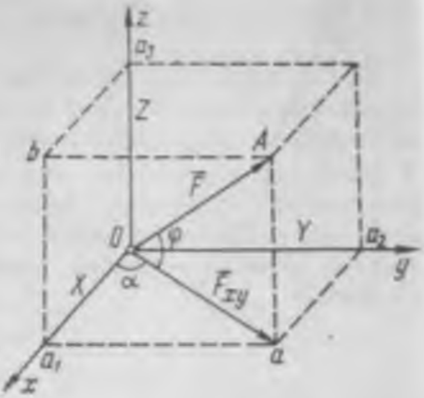
Координата ўқларидаги проекциялари орқали кучнинг ўзини топиш усули уни *аналитик усулда аниқлаш* дейилади. Бу ҳолда кучнинг



18- расм.



19- расм.



20- расм.

модули (параллелепипеднинг диагоналига тенг бўлгани учун) қуйидагича аниқланади:

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}, \qquad (3.7)$$

$\overline{F}$ кучнинг йўналишини топиш учун йўналтирувчи косинусларни (3.6) тенгликларга асосан аниқлаймиз:

$$\cos\alpha = \frac{X}{F}, \ \cos\beta = \frac{Y}{F}, \ \cos\gamma = \frac{Z}{F}. \qquad (3.8)$$

Куч билан ўқ бир текисликда ётмай, улар орасидаги бурчак берилмаган бўлса, кучнинг ўқдаги проекциясини қуйидагича аниқлаш мумкин. Масалан, 20- расмда кўрсатилган $\overline{F}$ куч Oxy текислигида ётмайди, куч билан ўқлар орасидаги бурчак ҳам номаълум. Координаталар бошини $\overline{F}$ куч қўйилган нуқтада олиб, кучнинг учи A дан Oxy текисликка перпендикуляр (Aa) чизиқни ўтказамиз. У ҳолда $\overline{F}_{xy} = \overline{Oa}$ вектор F кучнинг Oxy текисликдаги проекциясини ифодалайди. $\overline{F}_{xy}$ векторнинг Ox ва Oy ўқлардаги проекцияларини аниқлаш учун a нуқтадан Ox ва Oy ўқларга мос равишда перпендикуляр (aa_1), (aa_2) чизиқларни ўтказамиз. Oa_1 ва Oa_2 мос равишда $\overline{F}$ кучнинг Ox ва Oy ўқлардаги проекцияларини ифодалайди:

$$X = Oa_1 = F_{xy}\cos\alpha = F\cos\varphi\cos\alpha,$$
$$Y = Oa_2 = F_{xy}\cos(90^\circ - \alpha) = F\cos\varphi\sin\alpha.$$

7- §. Тенг таъсир этувчини аналитик усулда аниқлаш

Юқорида кўрганимиздек, бир нуқтада кесишувчи $\overline{F_1}, \overline{F_2}, \ldots, \overline{F_n}$ кучларнинг тенг таъсир этувчиси (3.4) га кўра шу кучларнинг геометрик йиғиндисига тенг: $R' = \sum_{k=1}^{n} \overline{F_k}$.

Бу векторли тенгликни координата ўқларига проекциялаб, тенг таъсир этувчининг координата ўқларидаги проекциялари R'_x, R'_y, R'_z ларни аниқлаймиз:

$$\left.\begin{aligned} R'_x &= \sum_{k=1}^{n} X_k , \\ R'_y &= \sum_{k=1}^{n} Y_k , \\ R'_z &= \sum_{k=1}^{n} Z_k . \end{aligned}\right| \tag{3.9}$$

Тенг таъсир этувчининг модули (3.7) га асосан аниқланади:

$$R' = \sqrt{(R'_x)^2 + (R'_y)^2 + (R'_z)^2} =$$
$$\sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} Y_k\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} Z_k\right)^2}, \tag{3.10}$$

йўналиши эса (3.8) га кўра аниқланади:

$$\left.\begin{aligned} \cos(\widehat{\overline{R}', x}) &= \frac{R'_x}{R'} , \\ \cos(\widehat{\overline{R}', y}) &= \frac{R'_y}{R'} , \\ \cos(\widehat{\overline{R}', z}) &= \frac{R'_z}{R'} . \end{aligned}\right| \tag{3.11}$$

8- §. Бир нуқтада кесишувчи кучларнинг мувозанати

Агар бир нуқтада кесишувчи ($\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, . . . , $\overline{F}_n$) кучлар системасининг тенг таъсир этувчиси $\overline{R}'$ нолга тенг бўлса, у ҳолда бундай кучлар системаси мувозанатда бўлади, аксинча, кучлар системаси мувозанатда бўлса, тенг таъсир этувчи нолга тенг бўлади:

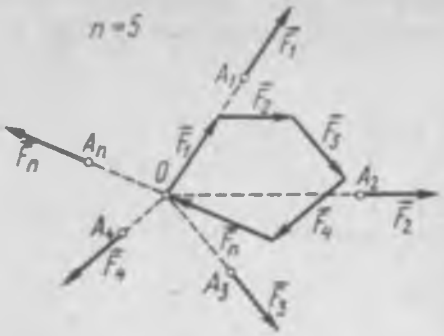
$$\overline{R}' = 0 \tag{3.12}$$

ёки

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k = 0. \tag{3.13}$$

(3.12) ёки (3.13) тенгламалар кесишувчи кучлар системаси мувозанати зарурий ва етарли шартининг векторли ифодасидир. Демак, *кесишувчи кучлар системаси* таъсиридаги эркин жисм мувозанатда бўлиши учун мазкур системани *ташкил этувчи кучларнинг геометрик йиғиндиси нолга тенг бўлиши зарур ва етарлидир.*

(3.12), (3.13) тенгламаларнинг геометрик маъноси қуйидагичадир: фараз қилайлик, жисмнинг A_1, A_2, . . . ,A_n нуқталарига таъсир чизиқлари O нуқтада кесишувчи $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, . . . , $\overline{F}_n$ мувозанатлашувчи кучлар систе-



21- расм.

маси таъсир этаётган бўлсин (21-расм). Бу кучлар учун кучлар кўпбурчаги ясалса (аниқлик учун $n=5$ бўлган ҳолни кўриб чиқамиз), у ёпиқ бўлади, яъни мазкур кўпбурчакда биринчи кучнинг боши билан охирги кучнинг учи устма-уст тушади. Аксинча, кучлар кўпбурчаги ёпиқ бўлса, $\overline{R}'=0$ бўлади. Шунга кўра, *кесишувчи кучлар системаси мувозанатда бўлиши учун бу кучларга қурилган кучлар кўпбурчаги ёпиқ бўлиши зарур ва етарлидир.*

Тенг таъсир этувчи куч $\overline{R}'=0$ бўлса, (3.10) га кўра

$$R'_x=0,\ R'_y=0,\ R'_z=0$$

бўлади. (3.9) ни эътиборга олсак,

$$\left.\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} X_k=0,\\ \sum_{k=1}^{n} Y_k=0,\\ \sum_{k=1}^{n} Z_k=0.\end{aligned}\right| \qquad (3.14)$$

Демак, *кесишувчи кучлар системаси мувозанатда бўлиши учун кучларнинг ҳар бир координата ўқларидаги проекциялари йиғиндиси нолга тенг бўлиши зарур ва етарлидир.*

Умуман, (3.14) ифодада номаълум кучлар ҳам бўлиши мумкин. Шунинг учун уни *кесишувчи кучлар системаси таъсиридаги эркин жисм мувозанати тенгламаларининг аналитик ифодаси* ҳам дейилади.

Кесишувчи кучлар бир текисликда жойлашган бўлса, *Ox* ва *Oy* ўқларни шу текисликда олиб, (3.14) тенгламаларнинг учинчиси эътиборга олинмайди:

$$\left.\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} X_k=0,\\ \sum_{k=1}^{n} Y_k=0.\end{aligned}\right| \qquad (3.15)$$

Бу тенгламалар *текисликдаги кесишувчи кучлар системасининг мувозанат тенгламалари* дейилади.

Ёзувни қисқартириш мақсадида келгусида (3.14) даги тенгламаларни қуйидагича ёзамиз:

$$\left.\begin{array}{l}\sum X_k = 0,\\ \sum Y_k = 0,\\ \sum Z_k = 0.\end{array}\right\} \qquad (3.16)$$

Мувозанатдаги жисм эркин бўлмаса, боғланишлардан бўшатиш ҳақидаги аксиомага кўра, боғланишларнинг жисмга кўрсатадиган таъсирини уларнинг реакция кучи билан алмаштирамиз. Натижада бундай жисмни берилган кучлар таъсиридаги ва боғланиш реакция кучлари таъсиридаги эркин жисм деб қараш мумкин. Шу сабабли мазкур жисм учун тузилган (3.14) ёки (3.15) тенгламаларда берилган кучлар қатори боғланиш реакция кучларининг ташкил этувчилари ҳам қатнашади.

Умуман, жисмнинг мувозанатига доир масалалар қуйидаги тартибда ечилади.

1. Берилган масалада мувозанати текширилаётган жисмга таъсир этаётган кучлар расмда тасвирланади.

2. Жисмни боғланишлардан бўшатиб, уларнинг таъсири боғланиш реакция кучлари билан алмаштирилади.

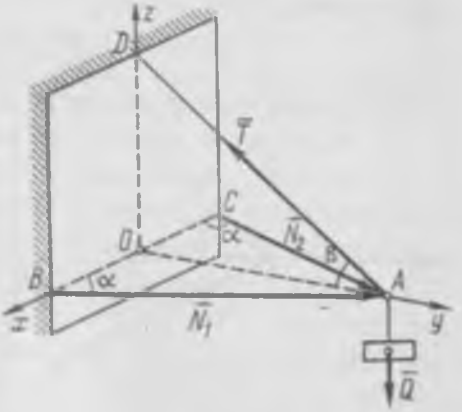
3. Координата ўқларини мос равишда танлаб олиб, мувозанат тенгламаларини тузамиз. Координата ўқларини шундай танлаш лозимки, иложи борича кучларни проекциялаш осон бўлсин. Масалан, ўқлардан бирини бирор номаълум реакция кучига тик равишда йўналтирилса, мос мувозанат тенгламасида номаълумлар камроқ қатнашади.

4. Тузилган мувозанат тенгламаларн биргаликда ечилади.

1-масала. $Q = 300$ Н юк AB, AC стерженлар ва AD занжир воситасида тутиб турилади. Агар $\alpha = \widehat{CBA} = \widehat{BCA} = 60°$, $\beta = \widehat{OAD} = 30°$ бўлса, AB, AC стерженлардаги зўриқиш ва AD занжирнинг таранглик кучи аниқлансин. A, B, C ва D нуқталар шарнир орқали бириктирилган (22-расм).

Изоҳ. Стержень бўйлаб йўналган чўзувчи ёки сиқувчи куч *стержендаги зўриқиш* деб аталади. Сиқувчи кучни чўзувчи кучдан фарқ қилиш учун уни манфий сон билан ифодалаймиз. Стержендаги S зўриқиш миқдор жиҳатдан шу стерженнинг реакция кучи $\overline{N}$ га тенг бўлади: $|\overline{S}| = |\overline{N}|$.

Ечиш. Масалани юқоридаги тартибда ечамиз. A нуқтадаги юкни $\overline{Q}$ куч билан алмаштирамиз. Боғланишдан бўшатиш ҳақидаги аксиомага кўра AB ва AC стерженларни $\overline{N}_1$ ва $\overline{N}_2$ реакция кучлари ҳамда AD занжирни T таранглик кучи билан алмашти-



22- расм.

рамиз. Бу кучлар A нуқтада кесишадиган мувозанатлашувчи кучлар системасини ташкил этади. Координата ўқларини расмда кўрсатилганидек ўтказиб, (3.16) га мувофиқ мувозанат тенгламаларини тузамиз:

$$\sum X_k = 0: \qquad -N_1 \cos 60^\circ + N_2 \cos 60^\circ = 0,$$

$$\sum Y_k = 0; \qquad N_1 \cos 30^\circ + N_2 \cos 30^\circ - T \cos 30^\circ = 0,$$

$$\sum Z_k = 0; \qquad -Q + T \cos 60^\circ = 0.$$

Бу тенгламаларни биргаликда ечиб занжирнинг таранглик кучи

$$T = \frac{Q}{\cos 60^\circ} = 600 \text{ Н}$$

ва N_1, N_2 реакция кучлари

$$N_1 = N_2 = \frac{T}{2} = 300 \text{ Н}$$

бўлишини аниқлаймиз. AB ва AC стерженлар сиқилади. Шу сабабли улардаги зўриқишлар манфий қийматга эга бўлади:

$$S_1 = S_2 = -300 \text{ Н}.$$

9- §. Уч куч мувозанатига оид теорема

Бир текисликда ётувчи ва ўзаро параллел бўлмаган уч куч мувозанатлашса, уларнинг таъсир чизиқлари бир нуқтада кесишади.

Исбот. Жисмнинг A_1, A_2 ва A_3 нуқталарига бир текисликда ётувчи, параллел бўлмаган, мувозанатлашувчи $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$ кучлар қўйилган бўлсин (23-расм). У ҳолда $(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3) \backsim 0$.

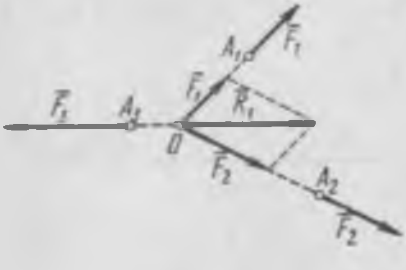
Кучлар параллел бўлмагани учун улардан ихтиёрий иккитасининг таъсир чизиғи бирор нуқтада кесишади. Масалан, $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$ кучларнинг таъсир чизиқлари O нуқтада кесишсин. Бу кучларни таъсир чизиқлари бўйлаб O нуқтага кўчирамиз ва параллелограмм қоидасига асосан қўшамиз:

$$\overline{R}_1 = \overline{F}_1 + \overline{F}_2.$$

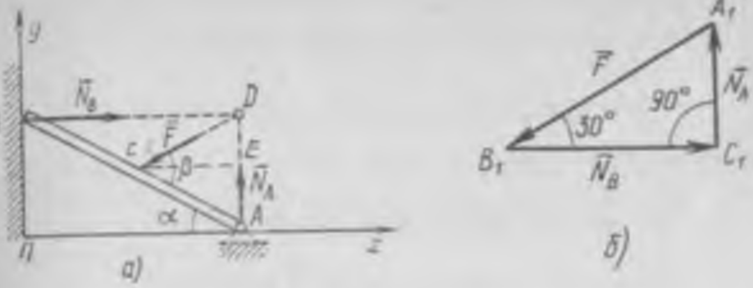
$\overline{R}_1$ кучнинг таъсир чизиғи $\overline{F}_1$ ва $\overline{F}_2$ кучларнинг таъсир чизиқлари кесишган нуқтадан ўтади. Шундай қилиб,

$$(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3) \backsim (\overline{R}_1, \overline{F}_3) \backsim 0.$$

Бу муносабатдан кўрамизки, 1-аксиомага асосан, $\overline{R}_1$ ва $\overline{F}_3$ кучлар мувозанатлашиши учун уларнинг миқдорлари тенг, йўналиши эса бир тўғри чизиқ бўйлаб қарама-қарши томонга йўналган бўлиши керак.



23- расм.



24- расм.

Яъни F_3 кучнинг таъсир чизиғи ҳам O нуқтадан ўтар экан. Шундай қилиб, теорема исботланди. Бу теорема *уч куч теоремаси* дейилади.

2-масала. AB стержень A нуқтада шарнир воситасида маҳкамланган ва B нуқтада вертикал деворга эркин таяниб туради (24-расм, *а*). Стерженнинг ўртасига $\beta = 60°$ бурчак остида $F = 400$ Н куч қўйилган. $\alpha = 30°$ бўлганда A ва B нуқталардаги ишқаланишларни ҳисобга олмай, N_A, N_B реакция кучлари аниқлансин.

Ечиш. Аввал масалани геометрик усулда ечамиз. Бунинг учун A ва B нуқталардаги боғланишларни $\overline{N}_A$, $\overline{N}_B$ реакция кучлари билан алмаштирамиз. B нуқтада стержень деворга эркин таяниб турганлиги сабабли $\overline{N}_B$ деворга тик равишда йўналади. $\overline{F}$ ва $\overline{N}_B$ кучларнинг таъсир чизиқларини давом эттириб, улар кесишган D нуқтани аниқлаймиз. A шарнирдаги реакция кучи $\overline{N}_A$ нинг йўналишини аниқлаш учун уч куч мувозанатига оид теоремадан фойдаланамиз. AB стержень вертикал текисликда жойлашган $\overline{F}$, $\overline{N}_B$ ва $\overline{N}_A$ кучлар таъсирида мувозанатда бўлганидан $\overline{N}_A$ нинг таъсир чизиғи ҳам D нуқтадан ўтади ва $\alpha + \beta = 90°$, $AC = CB$ бўлгани учун AD Oy ўқига параллел бўлади. $\overline{N}_A$ кучнинг йўналишини аниқлаш учун $\overline{F}$, $\overline{N}_B$, $\overline{N}_A$ кучлардан ёпиқ кучлар учбурчагини тузамиз. Бунинг учун маълум $\overline{F}$ кучни бирор масштабда ихтиёрий A_1 нуқтага ўзига параллел равишда қўямиз (24-расм, *б*) ҳамда бу кучнинг боши A_1 ва учи B_1 нуқталардан $\overline{N}_A$ ва $\overline{N}_B$ ларнинг таъсир чизиқларига мос равишда параллел бўлган тўғри чизиқлар ўтказамиз. Уларнинг кесишган нуқтасини C_1 билан белгилаймиз. $A_1B_1C_1$ учбурчак изланаётган кучлар учбурчагидир. $\overline{N}_B$ ва $\overline{N}_A$ кучларнинг йўналишини аниқлаш учун бу кучлар учбурчагини периметри бўйича шундай айланиб ўтиш керакки, кучлар учбурчаги A_1 нуқтада ёпилсин; $\overline{B_1C_1}$ ва $\overline{C_1A_1}$ векторлар $\overline{N}_B$ ва $\overline{N}_A$ кучларни ифодалайди. Кучлар учбурчагининг B_1C_1 ва C_1A_1 томонларини берилган масштабда ўлчаб, $\overline{N}_B$ ва $\overline{N}_A$ кучларнинг миқдорлари аниқланади.

$\overline{N}_A$ ва $\overline{N}_B$ ларнинг миқдорини кучлар учбурчаги $A_1B_1C_1$ га синуслар теоремасини қўллаб ҳам аниқлаш мумкин:

$$\frac{N_A}{\sin 30^\circ} = \frac{N_B}{\sin 60^\circ} = \frac{F}{\sin 90^\circ},$$

бундан

$$N_A = F \sin 30^\circ = 400 \cdot \frac{1}{2} = 200 \text{ Н},$$

$$N_B = F \cos 30^\circ = 400 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 346{,}4 \text{ Н}.$$

Берилган масалани $A_1B_1C_1$ кучлар учбурчаги ва DCE геометрик учбурчакнинг ўхшашлигидан фойдаланиб ҳам ечиш мумкин. Бу учбурчакларнинг ўхшашлигидан

$$\frac{N_A}{DE} = \frac{F}{CD} = \frac{N_B}{CE}.$$

Расмда $CD = 2DE$, $CE = \sqrt{(CD)^2 - (DE)^2} = \sqrt{3}DE$ бўлгани учун

$$\frac{N_A}{DE} = \frac{F}{2DE} = \frac{N_B}{\sqrt{3}DE},$$

бундан

$$N_A = \frac{F}{2} = 200 \text{ Н},$$

$$N_B = \frac{\sqrt{3}}{2} F = 346{,}4 \text{ Н}.$$

Худди шу масалани аналитик усулда ечамиз. Ox ва Oy ўқларни расмдагидек ўтказиб, (3.15) га асосан иккита мувозанат тенгламасини тузамиз:

$$\sum X_k = 0; \quad N_B - F \cos 30^\circ = 0,$$

$$\sum Y_k = 0; \quad N_A - F \cos 60^\circ = 0,$$

бундан

$$N_B = F \cos 30^\circ = 400 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 346{,}4 \text{ Н},$$

$$N_A = F \cos 60^\circ = 400 \cdot \frac{1}{2} = 200 \text{ Н}.$$

IV боб

КУЧ МОМЕНТИ

10-§. Кучнинг нуқтага нисбатан моменти

Тажрибаларнинг кўрсатишича, куч таъсирида жисм илгариланма ҳаракатда, шунингдек, бирор нуқта ёки ўқ атрофида айланма ҳаракатда бўлиши мумкин. Жисмнинг айланма ҳаракати жисмга қўйилган куч моментига боғлиқ бўлади.

Қайси нуқтага нисбатан момент олинадиган бўлса, шу нуқта *момент маркази* дейилади. Момент марказидан кучнинг таъсир чизиғига туширилган перпендикуляр кесма *куч елкаси* дейилади (25-расм, *а,б*). Одатда куч елкаси h билан белгиланади.

Аввал жисмга бир текисликда ётувчи кучлар системаси таъсир этаётган ҳолни кўрамиз. Бунда *кучнинг нуқтага нисбатан моменти* деб, мос ишора билан олинган куч миқдорининг куч елкасига кўпайтмасига тенг катталикка айтилади.

$\overline{F}$ кучнинг O марказга нисбатан моменти одатда, $M_0(\overline{F})$ билан белгиланади:

$$M_0(\overline{F}) = \pm Fh. \tag{4.1}$$

Агар куч жисмни момент маркази атрофида соат мили айланадиган томонга тескари йўналишда айлантиришга интилса, одатда, куч моменти мусбат, акс ҳолда — манфий деб ҳисобланади.

Куч моменти МКГСС системасида кгк·м билан, СИ системасида Н·м билан ўлчанади.

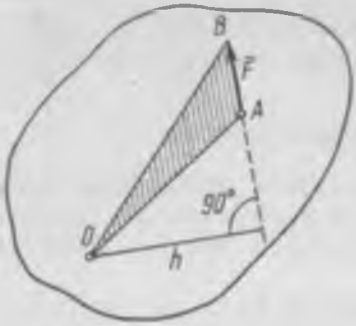
Кучнинг нуқтага нисбатан моменти қуйидаги хоссаларга эга:

1. *Кучнинг миқдори ва йўналишини ўзгартирмай таъсир чизиғи бўйлаб исталган нуқтага кўчирилса, куч моменти ўзгармайди* (чунки кучнинг елкаси ўзгармай қолади).

2. *Агар кучнинг таъсир чизиғи момент марказидан ўтса, унинг шу нуқтага нисбатан моменти нолга тенг бўлади* (чунки кучнинг елкаси нолга тенг бўлади; 25-расм, *в*).

а) *б)* *в)*

25-расм.



26- расм.

3. $\overline{F}$ кучнинг боши ва учини момент маркази O билан туташтириб $\triangle AOB$ ни ҳосил қиламиз (26-расм). Бу учбурчакнинг юзи $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} Fh$ бўлади. Буни (4.1) билан солиштирсак,

$$|M_0(\overline{F})| = 2S_{\triangle AOB} \qquad (4.2)$$

эканлигини кўрамиз.

Демак, *кучнинг нуқтага нисбатан моменти модули кучнинг боши ва учини момент маркази билан туташтиришдан ҳосил бўлган учбурчак юзининг иккиланганига тенг.* Бу натижа *кучнинг нуқтага нисбатан моментининг геометрик маъносини ифодалайди.*

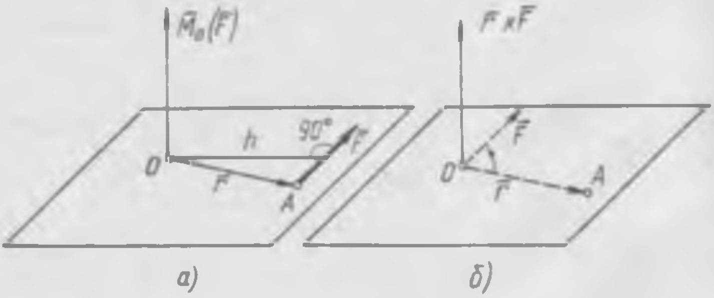
11-§. Кучнинг нуқтага нисбатан моменти вектори

Агар жисмга фазовий кучлар таъсир этса, у ҳолда жисмнинг мазкур кучлар таъсирида айланиш йўналишини аниқлаш учун одатда кучнинг нуқтага нисбатан моменти вектор тарзида қаралади.

Кучнинг нуқтага нисбатан моменти вектори момент марказига қўйилган бўлиб, бу марказ ва кучнинг таъсир чизиғи орқали ўтган текисликка перпендикуляр йўналади ҳамда унинг учидан қараганимизда куч жисмни соат милининг айланишига тескари йўналишда айлантиришга интилади.

$\overline{F}$ кучнинг O нуқтага нисбатан моменти векторини аниқлаш учун куч қўйилган A нуқтанинг O марказга нисбатан радиус-вектори $\overline{r}$ нинг шу куч векторига векторли кўпайтмасини аниқлаймиз (27-расм, *а*).

Векторлар алгебрасидан маълумки, $\overline{r} \times \overline{F}$ вектор $\overline{r}$ ва $\overline{F}$ ётган текисликка перпендикуляр йўналган бўлиб, унинг учидан қараганда $\overline{r}$ ни $\overline{F}$ вектор устига тушириш учун соат милининг айланишига тес-



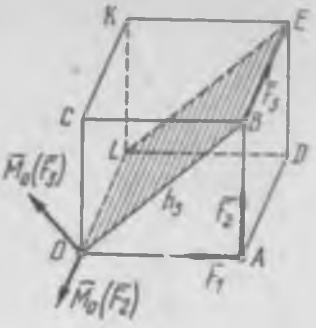
а) б)

27- расм.

кари йўналишда энг қисқа бурчакка буриш керак (27-расм, б). Бу векторнинг модули $|\overline{r}\times\overline{F}| = rF\sin(\widehat{\overline{r},\overline{F}})$. O нуқтадан $\overline{F}$ кучнинг таъсир чизиғига тик h кесмани ўтказамиз, у ҳолда расмдан $h = r\sin(\widehat{\overline{r},\overline{F}})$ бўлгани учун

$$|r\times\overline{F}| = F\cdot h = |\overline{M}_0(\overline{F})|. \qquad (4.3)$$

$\overline{r}\times\overline{F}$ векторнинг йўналиши кучнинг нуқтага нисбатан моменти вектори $\overline{M}_0(\overline{F})$ билан уст-ма-уст тушади; $\overline{r}\times\overline{F}$ ва $\overline{M}_0(\overline{F})$ векторларнинг миқдорлари тенг, йўналиши устма-уст тушгани учун улар ўзаро тенг бўлади:



28- расм.

$$\overline{M}_0(\overline{F}) = \overline{r}\times\overline{F}. \qquad (4.4)$$

Шундай қилиб, *кучнинг нуқтага нисбатан моменти вектор катталик бўлиб, момент марказига нисбатан куч қўйилган нуқта радиус-векторининг куч векторига векторли кўпайтмасига тенг.*

3-масала. Томонлари $OA = a$, $AD = b$, $AB = c$ бўлган параллелепипеднинг A учига $\overline{F}_1$ ва $\overline{F}_2$ кучлар, B учига эса $\overline{F}_3$ куч қўйилган (28-расм). Бу кучларнинг O нуқтага нисбатан моментлари аниқлансин.

Ечиш. O нуқта $\overline{F}_1$ кучнинг таъсир чизиғида ётади, шу сабабли $h = 0$ ва $\overline{M}_0(\overline{F}_1) = 0$ бўлади.

$\overline{F}_2$ кучнинг елкаси $h_2 = OA = a$ бўлгани учун

$$|\overline{M}_0(\overline{F})| = F_2\cdot h_2 = F_2\cdot a.$$

$\overline{M}_0(\overline{F}_2)$ вектор $OABC$ текисликка перпендикуляр равишда параллелепипеднинг LO томони бўйлаб йўналган бўлади.

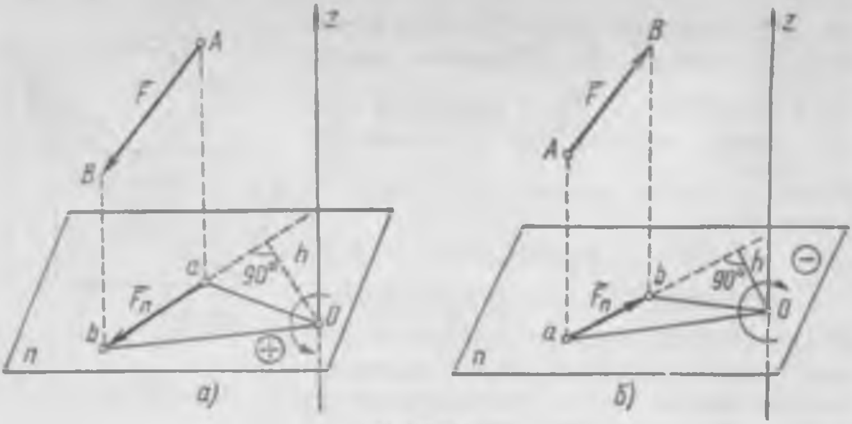
F_3 кучнинг елкаси $h_3 = \sqrt{a^2 + c^2}$ бўлгани учун

$$|\overline{M}_0(\overline{F}_3)|\, F_3\cdot\sqrt{a^2 + c^2}.$$

$\overline{M}_0(\overline{F}_3)$ вектор штрихланган $OBEL$ текисликка перпендикуляр равишда шундай йўналганки, унинг учидан қараганда $\overline{F}_3$ куч параллелепипедни соат милининг айланишига тескари йўналишда айлантиришга интилиши керак.

12-§. Кучнинг ўққа нисбатан моменти

$\overline{F}$ кучнинг z ўққа нисбатан моментини аниқлаймиз. Бунинг учун z ўққа перпендикуляр $П$ текисликни ўтказиб, бу текисликка $\overline{F}$ кучни проекциялаймиз (29-расм). Бу проекцияни $\overline{F}_П$ билан белгилаймиз. $F_П$ дан z ўқнинг $П$ текислик билан кесишган O нуқтасига нис-



29- расм.

батан олинган моменти $\overline{F}$ кучнинг z ўққа нисбатан моментини ифодалайди. $\overline{F}$ кучнинг z ўққа нисбатан моменти $M_z(F)$ билан белгиланади. *Кучнинг бирор ўққа нисбатан моменти* деб, унинг шу ўққа перпендикуляр текисликдаги проекциясининг ўқ билан текислик кесишган нуқтасига нисбатан олинган моментига айтилади. Таърифга кўра

$$M_z(\overline{F}) = M_0(\overline{F}_{\text{п}}),$$

ёки

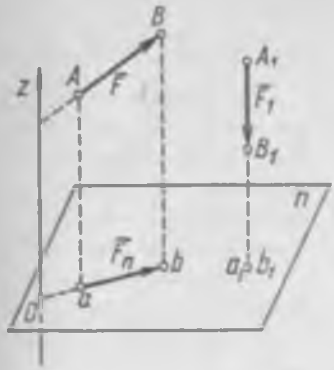
$$M_z(\overline{F}) = \pm F_{\text{п}} \cdot h. \qquad (4.5)$$

Кучнинг ўққа нисбатан моменти скаляр миқдор бўлиб, ўқнинг мусбат йўналишидан қараганда кучнинг ўққа перпендикуляр текисликдаги проекцияси жисмни соат милининг айланишига тескари йўналишда айлантиришга интилса, одатда момент мусбат ишора билан (29- расм, *а*), акс ҳолда манфий ишора билан (29- расм, *б*) олинади.

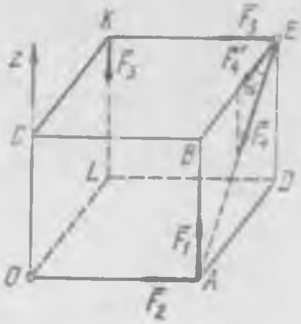
Агар кучнинг таъсир чизиғи ўқни кесиб ўтса ёки ўққа параллел бўлса, $h = 0$ ёки $F_{\text{п}} = 0$ бўлади (30- расм). Бинобарин, (4.5) га асосан, ҳар иккала ҳолда ҳам кучнинг ўққа нисбатан моменти нолга тенг бўлади.

4- масала. Томонлари $OA = a$, $AD = b$, $AB = c$ бўлган параллелепипеднинг учларига $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$, $\overline{F}_4$, $\overline{F}_5$ кучлар қўйилган (31- расм). Бу кучларнинг Oz ўққа нисбатан моментлари аниқлансин.

Ечиш. $\overline{F}_1$ ва $\overline{F}_5$ кучларнинг таъсир чизиқлари Oz ўққа параллел, $\overline{F}_2$ кучнинг таъсир чизиғи эса Oz ўқни кесиб ўтади. Шунинг учун F_1, F_2, F_3 кучларнинг Oz ўққа нисбатан моментлари нолга тенг бўлади. $\overline{F}'_4$ кучнинг Oz ўққа нисбатан моментини ҳисоблаш учун бу кучни шу ўққа перпендикуляр бўлган $CBEK$ текисликка проекцияси $\overline{F}'_4$ нинг миқдорини аниқлаймиз: $|\overline{F}'_4| = F_4 \cos\alpha = F_4 \frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}}$.



30- расм.



31- расм.

$\overline{F}_4'$ кучнинг *Oz* ўқ *CBEK* текислик билан кесишган *C* нуқтасига нисбатан моментини аниқлаймиз. $\overline{F}_4'$ куч *Oz* ўқнинг мусбат йўналишидан қараганда параллелепипедни соат милининг айланиш йўналишида айлантиришга интилгани туфайли $\overline{F}_4$ кучнинг *Oz* ўққа нисбатан моменти манфий қийматга эга бўлади:

$$M_z(\overline{F}_4) = M_C(\overline{F}_4') = -F_4'\cdot a = -\frac{F_4\cdot ab}{\sqrt{b^2+c^2}}$$

$\overline{F}_3$ куч *Oz* ўққа перпендикуляр *CBEK* текисликда ётади ҳамда бу куч ўқнинг мусбат йўналишидан қараганда параллелепипедни соат милининг айланишига тескари йўналишда айлантиришга интилади. Шу сабабли $\overline{F}_3$ кучнинг моменти мусбат бўлади:

$$M_z(\overline{F}_3) = b\cdot F.$$

13-§. Кучнинг ўққа нисбатан моменти билан шу ўқдаги нуқтага нисбатан моменти орасидаги муносабат

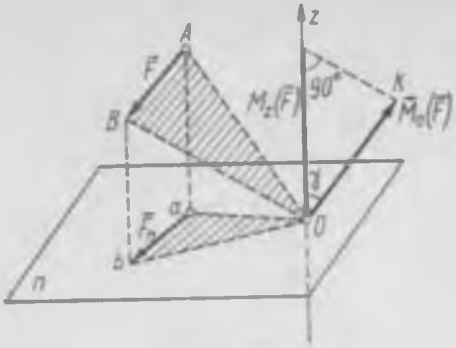
Берилган $\overline{F}$ кучнинг бирор *Oz* ўққа ва шу ўқда ётувчи *O* нуқтага нисбатан моментини аниқлаймиз (32-расм). (4.2) га асосан

$$|M_z(\overline{F})| = 2S_{\triangle Oab},$$

$$|\overline{M}_0(\overline{F})| = 2S_{\triangle OAB}.$$

Oab ва *OAB* учбурчакларнинг текисликлари орасидаги бурчак бу текисликларга ўтказилган перпендикуляр чизиқлар *Oz* ва *OK* орасидаги γ бурчакка тенг бўлади. $\triangle OAB$ нинг *П* текисликдаги проекцияси $\triangle Oab$ дир. Шу сабабли

$$M_z(\overline{F}) = 2\,S_{\Delta OAB}\cos\gamma = M_0(\overline{F})\cos\gamma \tag{4.6}$$



32- расм.

ёки

$$M_z(\overline{F}) = [\overline{M}_0(\overline{F})]_z. \quad (4.7)$$

Демак, *кучнинг бирор ўққа нисбатан моменти унинг шу ўқда олинган ихтиёрий нуқтага нисбатан моменти векторининг мазкур ўқдаги проекциясига тенг бўлади.*

O нуқтадан x, y, z Декарт координата ўқларини ўтказиб, (4.6) га кўра бу ўқларга нисбатан $\overline{F}$ кучнинг моментини ҳисоблаймиз:

$$\left.\begin{aligned} M_x(\overline{F}) &= M_0(\overline{F})\cos\alpha; \\ M_y(\overline{F}) &= M_0(\overline{F})\cos\beta; \\ M_z(\overline{F}) &= M_0(\overline{F})\cos\gamma. \end{aligned}\right\} \quad (4.8)$$

Бу формулаларда α, β, γ лар $\overline{M}_0(\overline{F})$ векторнинг координата ўқлари билан ташкил қилган бурчакларини ифодалайди.

(4.8) тенгликларини квадратга оширив, қўшсак:

$$M_0(\overline{F}) = \sqrt{[M_x(\overline{F})]^2 + M_y(\overline{F})]^2 + [M_z(\overline{F})]^2}. \quad (4.9)$$

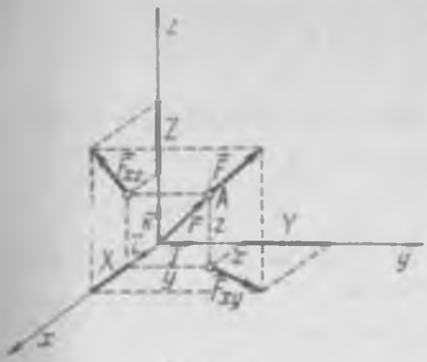
$\overline{F}$ кучнинг координата ўқларнга нисбатан моментлари маълум бўлса, бу формула ёрдамида координата ўқлари боши O га нисбатан куч моментининг сон қийматини аниқлаш мумкин. (4.8) дан кучнинг нуқтага нисбатан моментининг йўналтирувчи косинуслари учун қуйидаги ифодаларни оламиз:

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{M_x(\overline{F})}{M_0(\overline{F})}; \\ \cos\beta &= \frac{M_y(\overline{F})}{M_0(\overline{F})}; \\ \cos\gamma &= \frac{M_z(\overline{F})}{M_0(\overline{F})}. \end{aligned}\right\} \quad (4.10)$$

Булардан фойдаланиб α, β, γ бурчакларни топиш мумкин.

14-§. Кучнинг координата ўқларига нисбатан моментларини аналитик усулда аниқлаш

Координата ўқларининг бирлик йўналтирувчи векторларини $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ билан белгиласак, $\overline{F}$ (X, Y, Z) кучни ва бу куч қўйилган A (x, y, z) нуқтанинг радиус-векторини қуйидагича ёзиш мумкин (33- расм):



33- расм.

34- расм.

$$\left.\begin{aligned}\overline{F} &= X\cdot\overline{i} + Y\cdot\overline{j} + \overline{Z}\cdot k,\\ \overline{r} &= x\cdot\overline{i} + y\cdot\overline{j} + z\cdot\overline{k}.\end{aligned}\right\} \qquad (4.11)$$

(4.4) формулага кўра $\overline{M}_0(\overline{F})$ ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\overline{M}_0(\overline{F}) = \overline{r}\times\overline{F} = \begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ x & y & z\\ X & Y & Z\end{vmatrix}. \qquad (4.12)$$

$\overline{M}_0(\overline{F})$ векторнинг координата ўқларидаги ташкил этувчилари орқали ифодаси $\overline{M}_0(\overline{F}) = M_x(\overline{F})\ \overline{i} + M_y(\overline{F})\ \overline{j} + M_z(\overline{F})\ \overline{k}$ ни назарда тутиб, (4.12) детерминантни биринчи йўлига нисбатан ёйиб ёзамиз:

$$M_x(\overline{F})\ \overline{i} + M_y(\overline{F})\overline{j} + M_z(\overline{F})\ \overline{k} = (y\cdot Z - z\cdot Y)\overline{i} + (z\cdot X -$$
$$- x\cdot Z)\overline{j} + (x\cdot Y - y\cdot X)\overline{k}.$$

Бу ифодадаги $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ лар олдидаги мос коэффициентларни тенглаштириб қуйидаги муносабатларни оламиз:

$$\left.\begin{aligned}M_x(\overline{F}) &= yZ - zY,\\ M_y(\overline{F}) &= zX - xZ,\\ M_z(\overline{F}) &= xY - yX.\end{aligned}\right\} \qquad (4.13)$$

Агар кучнинг координата ўқларидаги проекциялари ва куч қўйилган нуқтанинг координаталари маълум бўлса, кучнинг координата ўқларига нисбатан моментларини аниқлашда (4.13) дан фойдаланиш қулай бўлади.

5-масала. Оғирлиги P, томонлари $OA = a$, $OC = b$ бўлган горизонтал текисликда ётувчи бир жинсли $OABC$ плитанинг B нуқтасига xz текисликка параллел ва xy текислик билан α бурчак ташкил қилувчи $\overline{F}$ куч таъсир этади (34-расм). $\overline{P}$ ва $\overline{F}$ кучларнинг координата ўқларига нисбатан моментлари аниқлансин.

Ечиш. $\overline{P}$ куч D $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ нуқтага, $\overline{F}$ куч B $(x_2,\ y_2,\ z_2)$ нуқтага қўйилган. Расмдан кўриниб турибдики,

$$x_1 = \frac{b}{2}, \quad y_1 = \frac{a}{2}, \quad z_1 = 0,$$

$$x_2 = b, \quad y_2 = a, \quad z_2 = 0.$$

Кучларнинг координата ўқларидаги проекцияларини аниқлаймиз:

$$X_1 = P_x = 0, \qquad Y_1 = P_y = 0, \quad Z_1 = P_z = -P,$$

$$X_2 = F_x = -F\cos\alpha, \quad Y_2 = F_y = 0, \quad Z_2 = F_z' = F\sin\alpha.$$

(4.13) формулалар ёрдамида $\overline{P}$ ва $\overline{F}$ кучларнинг координата ўқларига нисбатан моментларини ҳисоблаймиз:

$$M_x(\overline{P}) = y_1Z_1 - z_1Y_1 = -\frac{a}{2}P,$$

$$M_y(\overline{P}) = z_1X_1 - x_1Z_1 = \frac{b}{2}P,$$

$$M_z(\overline{P}) = x_1Y_1 - y_1X_1 = 0.$$

Худди шунингдек,

$$M_x(\overline{F}) = y_2Z_2 - z_2Y_2 = aF\sin\alpha,$$

$$M_y(\overline{F}) = z_2X_2 - x_2Z_2 = -bF\sin\alpha,$$

$$M_z(\overline{F}) = x_2Y_2 - y_2X_2 = aF\cos\alpha.$$

V боб

ЖУФТ КУЧЛАР НАЗАРИЯСИ

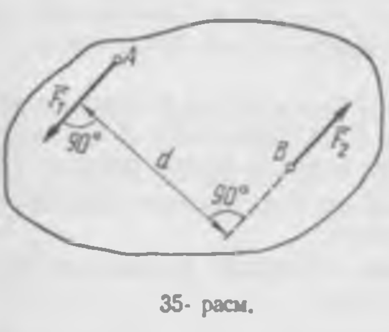
15-§. Жуфт куч ва жуфт кучнинг моменти

Миқдорлари тенг, таъсир чизиқлари бир тўғри чизиқда ётмайдиган, параллел ва қарама-қарши йўналган икки куч *жуфт куч* дейилади.

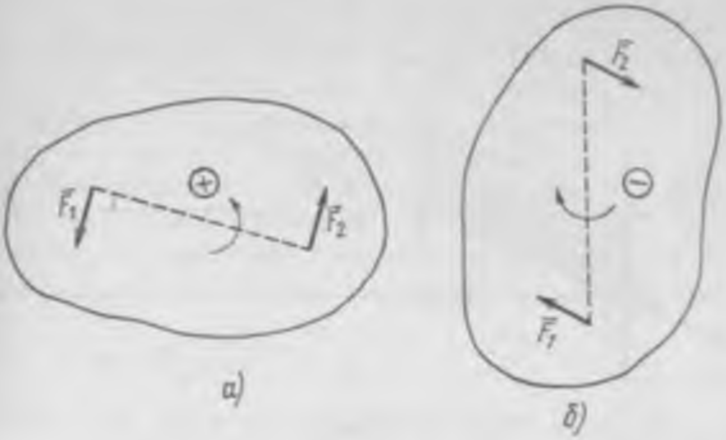
35-расмда кўрсатилган $|\overline{F}_1| = |\overline{F}_2|$, $\overline{F}_1 \uparrow\downarrow \overline{F}_2$ бўлган иккита: $\overline{F}_1$ ва $\overline{F}_2$ кучлар жуфт кучни ташкил этади. Жуфт куч $(\overline{F}_1, \overline{F}_2)$ кўринишида белгиланади.

Жуфт кучни ташкил этувчи кучларнинг таъсир чизиқлари орасидаги энг қисқа масофа *жуфт кучнинг елкаси* дейилади ва d билан белгиланади. Жуфт куч ётган текислик *жуфт куч текислиги* дейилади.

Жуфт кучни битта куч билан алмаштириш мумкин эмас, яъни *жуфт куч тенг таъсир этувчига эга бўлмайди*. Ҳақиқатан ҳам, агар $(\overline{F}_1, \overline{F}_2)$ жуфт куч бирор $\overline{Q}$ тенг таъсир этувчига эга бўлганда эди,



35- расм.



36- расм.

$(\overline{F}_1, \overline{F}_2)$ ва $\overline{Q}' = -\overline{Q}$ кучлар системаси мувозанатда бўлиши керак эди, лекин бу мумкин эмас, чунки $\overline{F}_1 + \overline{F}_2 = 0$, $Q \neq 0$ бўлгани учун $\overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{Q} \neq 0$. Шундай қилиб, жуфт кучни битта куч билан алмаштириш ёки мувозанатлаш мумкин эмас. Шу сабабли фақат жуфт куч таъсирида бўлган жисм илгариланма ҳаракат қила олмайди. Жуфт куч жисмни жуфт куч текислигида айланма ҳаракатга келтириши мумкин. Айлантириш эффекти: 1) жуфт кучни ташкил этувчи кучларнинг модули $|\overline{F}_1| = |\overline{F}_2|$ ва жуфт куч елкасининг узунлиги d га; 2) жуфт куч текислигининг эгаллаган ҳолатига; 3) жуфт куч таъсиридаги жисмнинг айланиш йўналишига боғлиқ бўлади. Мазкур эффектни аниқлаш учун жуфт куч моменти тушунчаси киритилади.

Дастлаб бир текисликда ётувчи кучларнинг хусусиятлари билан танишамиз. *Жуфт кучнинг моменти* деб, мос ишора билан олинган жуфт куч ташкил этувчи кучлардан бирининг миқдорини жуфт куч елкасининг узунлигига кўпайтмасига тенг катталикка айтилади. Жуфт куч моменти M билан белгиланади:

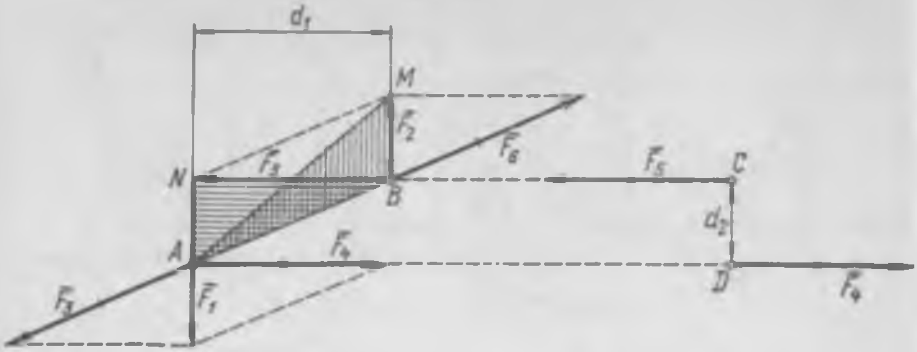
$$M = \pm F_1 d = \pm F_2 d \qquad (5.1)$$

Жуфт куч жисмни соат милининг айланишига тескари томон айлантиришга интилса, унинг моменти мусбат (36- расм, *а*); соат милининг айланиши бўйича айлантиришга интилса, манфий ишора билан олинади (36- расм, *б*).

МКГСС системасида жуфт кучнинг моменти килограмм-куч · метр (кгк · м), СИ системасида Ньютон · метр (Н · м) билан ўлчанади.

16- §. Эквивалент жуфт кучлар ҳақидаги теоремалар

Бир жуфт кучнинг жисмга кўрсатадиган таъсирини бошқа жуфт куч бера олса, бундай жуфт кучлар *эквивалент жуфт кучлар* дейилади.



37- расм.

1- теорема. *Агар жуфт кучни шу жуфт куч текислигида ётувчи ва моменти берилган жуфт кучнинг моментига тенг бўлган жуфт куч билан алмаштирилса, жуфт кучнинг жисмга таъсири ўзгармайди.*

Исбот. Жисмга елкаси d_1 ва моменти M_1 га тенг$(\overline{F_1}, \overline{F_2})$ жуфт куч таъсир этаётган (37- расм) ва унинг ташкил этувчилари A ва B нуқталарга қўйилган бўлсин. A ва B нуқталардан ўзаро параллел (AD) ва (BC) чизиқлар ўтказиб, бу чизиқлар орасидаги энг қисқа масофани d_2 билан белгилаймиз. $\overline{F_1}$ кучни BA ва AD бўйлаб йўналган $\overline{F_3}$, $\overline{F_4}$ ташкил этувчиларга, $\overline{F_2}$ кучни CB ва AB бўйлаб йўналган $\overline{F_5}$ ва $\overline{F_6}$ ташкил этувчиларга ажратамиз:

$$\overline{F_1} = \overline{F_3} + \overline{F_4}, \quad \overline{F_2} = \overline{F_5} + \overline{F_6}.$$

Натижада $(\overline{F_1}, \overline{F_2}) \backsim (\overline{F_3}, \overline{F_4}, \overline{F_5}, \overline{F_6})$ ҳосил бўлади. Ясалишига кўра $\overline{F_3} = -\overline{F_6}$, $\overline{F_4} = -\overline{F_5}$. $\overline{F_3}$ ва $\overline{F_6}$ бир тўғри чизиқ бўйлаб қарама-қарши томонга йўналгани учун $(\overline{F_3}, \overline{F_6}) \backsim 0$. $\overline{F_4}$ ва $\overline{F_5}$ кучлар елкаси d_2 га тенг бўлган жуфт кучни ташкил этади. $\overline{F_4}$ ва $\overline{F_5}$ кучларни таъсир чизиқлари бўйлаб D ва C нуқталарга келтирамиз. Натижада $(\overline{F_1}, \overline{F_2})$ жуфт куч ўрнига $(\overline{F_4}, \overline{F_5})$ жуфт кучга эга бўламиз, яъни $(\overline{F_1}, \overline{F_2}) \backsim (\overline{F_4}, \overline{F_5})$. Бу жуфт кучлар жисмни бир томонга айлантиришга интилади. $(\overline{F_1}, \overline{F_2})$ жуфт кучнинг моментини M_1 билан, $(\overline{F_4}, \overline{F_5})$ жуфт кучнинг моментини M_2 билан белгиласак,

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= F_2 d_1 = 2S_{\triangle ABM}, \\ M_2 &= F_5 d_2 = 2S_{\triangle ABN}. \end{aligned}\right\} \qquad (5.2)$$

ABM ва ABN учбурчаклар ўзаро конгруэнтдир. Чунки (AB) томон умумий, $(NM) \parallel (AB)$ бўлгани учун бу учбурчаклар бир хил баландликка эга. Бинобарин, $M_1 = M_2$. Шундай қилиб, 1- теорема исботланди.

2-теорема. *Жуфт кучни ўзининг таъсир текислигига параллел бўлган текисликка кўчирилса, унинг жисмга таъсири ўзгармайди.*

Исбот. Елкаси AB га тенг, $П$ текисликда ётувчи $(\overline{F}_1, \overline{F}_2)$ жуфт куч берилган (38-расм). $П$ текисликка параллел $П_1$ текисликда $A_1B_1 \# AB$ кесмани оламиз. A_1 ва B_1 нуқталарга $(\overline{F}_3, \overline{F}_4) \backsim 0$ ва $(\overline{F}_6, \overline{F}_5) \backsim 0$ системаларни қўямиз ва $F_1 = F_3 = F_4 = F_5 = F_6$ деб оламиз. Ноллик системани ташкил қилувчи кучларнинг таъсир чизиқлари $\overline{F}_1$ ва $\overline{F}_2$ кучларнинг таъсир чизиқларига параллел бўлсин. У ҳолда

$$(\overline{F}_1, \overline{F}_2) \backsim (\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, \overline{F}_4, \overline{F}_5, \overline{F}_6) \qquad (5.3)$$

бўлади. AB ва A_1B_1 ларга параллелограмм қуриб, AB_1 ва BA_1 диагоналларни ўтказамиз. $\overline{F}_1$ ва $\overline{F}_5$ параллел кучларни қўшиб O нуқтага қўйилган $\overline{R}_1$ кучга эга бўламиз:

$$R_1 = F_1 + F_5 = 2F_1.$$

Худди шунингдек, $\overline{F}_2$ ва $\overline{F}_4$ параллел кучларни қўшиб

$$R_2 = F_2 + F_4 = 2F_1$$

кучни оламиз. $\overline{R}_1$ ва $\overline{R}_2$ кучларнинг миқдорлари тенг, йўналиши қарама-қарши бўлгани учун $(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_5, \overline{F}_4) \backsim (\overline{R}_1, \overline{R}_2) \backsim 0$. Бинобарин,

$$(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, \overline{F}_4, \overline{F}_5, \overline{F}_6) \backsim (\overline{F}_3, \overline{F}_6). \qquad (5.4)$$

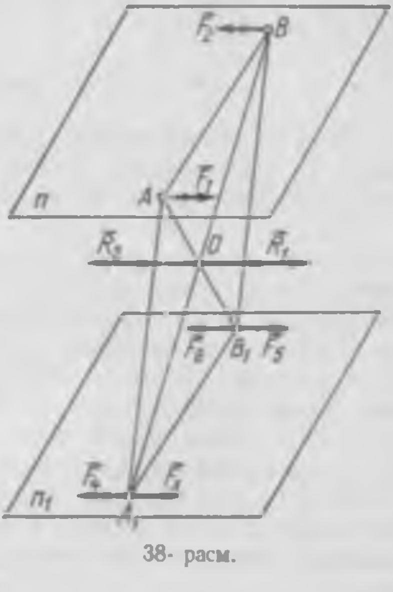
(5.3) ва (5.4) муносабатларни солиштирсак, $(\overline{F}_1, \overline{F}_2) \backsim (\overline{F}_3, \overline{F}_6)$ ҳосил бўлади. Шундай қилиб 2-теорема исботланди.

Юқорида исботланган теоремалардан қуйидаги натижалар келиб чиқади:

1) жуфт куч моментини ўзгартирмай, жуфт кучни ўз таъсир текислигида ихтиёрий ҳолатга келтириш мумкин;

2) жуфт куч моментини ўзгартирмай, унинг ташкил этувчилари ва елкаси ўзгартирилса, жуфт кучнинг жисмга таъсири ўзгармайди;

3) бир текисликда ёки параллел текисликларда ётувчи, моментлари тенг ва айланиш йўналишлари бир хил бўлган икки жуфт куч ўзаро эквивалент бўлади.



38-расм.

39- расм.

17-§. Жуфт куч моментига оид теорема

Теорема. *Жуфт куч моменти уни ташкил этувчи кучларнинг шу жуфт куч ётган текисликдаги ихтиёрий нуқтага нисбатан моментларининг алгебраик йиғиндисига тенг.*

Исбот. $(\overline{F}_1, \overline{F}_2)$ жуфт куч берилган (39-расм). Мазкур жуфт куч текислигидаги бирор O нуқтани олиб, ундан жуфт куч тузувчи кучларнинг таъсир чизиқларига тик $|Ob|$ чизиқни ўтказамиз. $ab = d$ ва $F_1 = F_2$ эканлигини эътиборга олиб, $\overline{F}_1$ ва $\overline{F}_2$ кучларнинг O нуқтага нисбатан моментлари йиғиндисини аниқлаймиз:

$$M_0(\overline{F})_1 + M_0(\overline{F}_2) = -Oa\cdot F_1 + Ob\cdot F_2 = -Oa\cdot F_1 + (d + Oa)F_2 =$$
$$= -Oa\cdot F_1 + d\cdot F_2 + OaF_2 = F_2\cdot d = M.$$

шундай қилиб,

$$M = M_0(\overline{F}_1) + M_0(\overline{F}_2). \qquad (5.5)$$

(5.5) тенгликдан кўрамизки, агар O нуқта ўрнида A ёки B нуқтани олсак,

$$M = M_A(\overline{F}_2) = M_B(\overline{F}_1) \qquad 5.6)$$

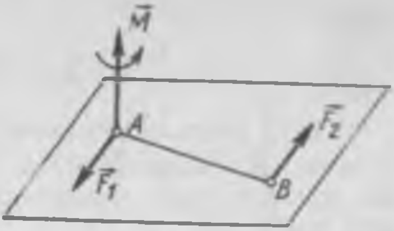
бўлади, яъни жуфт кучнинг моменти уни ташкил этувчи кучлардан бирининг иккинчиси қўйилган нуқтага нисбатан моментига тенг бўлади:

18-§. Жуфт куч моментининг векторлиги

Жуфт кучнинг жисмга таъсири: 1) жуфт куч моментининг модули; 2) жуфт кучнинг таъсир текислиги; 3) шу текисликдаги айланиш йўналиши билан ифодаланади.

Фазода ихтиёрий вазиятда жойлашган жуфт кучларнинг жисмга таъсирини аниқлаш учун мазкур учта омилнинг ҳар бирини билиш зарур. Бунинг учун жуфт куч моменти вектор тарзида ифодаланади. *Жуфт куч моментининг вектори М* билан белгиланади. Жуфт куч моменти шундай векторки, унинг модули жуфт кучни ташкил этувчи кучлардан бирининг жуфт куч елкаси узунлигига кўпайтмасига тенг ҳамда жуфт кучнинг таъсир текислигига перпендикуляр йўналган бўлиб, унинг учидан қаралганда, жуфт куч жисмни соат милининг айланишига тескари йўналишда айлантиришга интилади (40-расм).

Жуфт кучни ўзининг таъсир текислигида ёки унга параллел текисликда ихтиёрий ҳолатга кўчириш мумкин бўлганидан, жуфт куч моменти векторини жисмнинг ихтиёрий нуқтасига қўйиш мумкин.



40- расм.

Демак, *жуфт куч моменти вектори эркин вектор бўлади.*

Жуфт куч моменти вектори маълум бўлса, жуфт кучнинг жисмга таъсирини аниқлаш мумкин. Ҳақиқатан ҳам $\overline{M}$ берилган бўлса, унга перпендикуляр текисликни ўтказиб, жуфт кучнинг таъсир текислиги аниқланади ва M нинг йўналишига қараб жуфт кучнинг айланиш йўналиши белгиланади.

40- ва 27- расмларни солиштириб $\overline{M}$, $\overline{M}_B$ $(\overline{F}_1)$ векторларнинг бир хил йўналишга эга эканлигини кўрамиз. Демак,

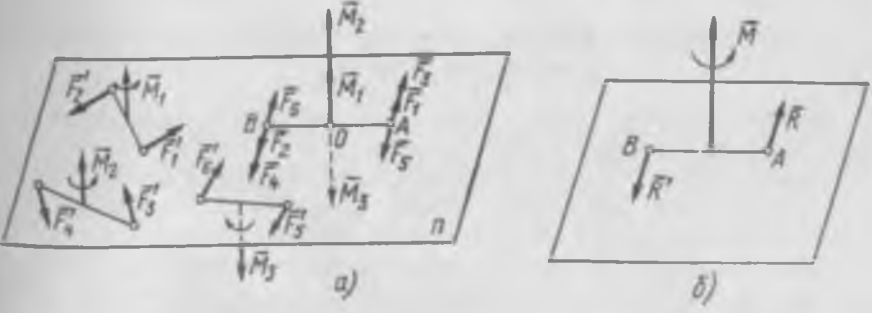
$$\overline{M}=\overline{M}_B\ (\overline{F}_1)=\overline{M}_A\ (\overline{F}_2). \tag{5.7}$$

19- §. Бир текисликда ва параллел текисликларда ётувчи жуфт кучларни қўшиш

Теорема. *Бир текисликда ётувчи жуфт кучлар системаси биргина жуфт кучга эквивалент бўлиб, унинг моменти берилган жуфт кучлар моментларининг алгебраик йиғиндисига тенг.*

Исбот. Бирор Π текисликда моментлари $\overline{M}_1$, $\overline{M}_2$, $\overline{M}_3$ га тенг бўлган $(\overline{F}_1,\ \overline{F}_2)$, $(\overline{F}_3, \overline{F}_4)$, $(\overline{F}_5, \overline{F}_6)$ жуфт кучлар системасини оламиз (41- расм, *а*). Эквивалент жуфт кучлар ҳақидаги 1-теоремага асосан жуфт кучларни бирор $|AB|=d$ елкага келтириб, мазкур жуфт кучлар системасига эквивалент бўлган, ташкил этувчилари A ва B нуқталарга қўйилган $(\overline{F}_1,\ \overline{F}_2)$, $(\overline{F}_3, \overline{F}_4)$, $(\overline{F}_5,\ \overline{F}_6)$ жуфт кучлар системасини оламиз. Бу жуфт кучларнинг моментлари орасида қуйидаги муносабат бажарилиши керак:

$$F_1\cdot d=F_1'\cdot d_1,\quad F_3\cdot d=F_3'\cdot d_2,\quad F_5\cdot d=F'\cdot d_3,$$



41- расм.

бундан

$$F_1 = F'_1 \frac{d_1}{d}, \quad F_3 = F'_3 \frac{d_2}{d}, \quad F_5 = F'_5 \frac{d_3}{d}. \tag{5.8}$$

A ва *B* нуқталардаги кучларни алоҳида-алоҳида қўшиб *A* нуқтада $\overline{R}$ кучни, *B* нуқтада $\overline{R}'$ кучни оламиз (41-расм, *б*), бу кучлар ўзаро параллел, лекин қарама-қарши томонга йўналган бўлиб, миқдорлари тенг:

$$R = R' = F_1 + F_3 - F_5. \tag{5.9}$$

Демак, берилган жуфт кучлар системаси биргина $(\overline{R}, \overline{R}')$ жуфт кучга келтирилди, шунинг учун бу жуфт кучни *тенг таъсир этувчи жуфт куч* деб аташ мумкин.

(5.8) даги $\overline{F}_1$, $\overline{F}_3$, $\overline{F}_5$ ларнинг қийматларини (5.9) га қўйсак,

$$R \cdot d = F'_1 d_1 + F'_3 d_2 - F'_5 d_3.$$

тенглик ҳосил бўлади. Бу тенгликнинг чап томони тенг таъсир этувчи жуфт кучнинг моментларини ифодалайди. Ўнг томони эса берилган жуфт кучлар моментларининг алгебраик йиғиндисидан иборат, яъни

$$M = M_1 + M_2 + M_3. \tag{5.10}$$

Учта жуфт куч учун теорема исбот қилинди. Худди шунингдек, бир текисликда ётувчи, моментлари M_1, M_2, . . . , M_n га тенг *n* та жуфт кучлар системасини қўшиш натижасида битта тенг таъсир этувчи жуфт кучни олиш мумкин; бу жуфт кучнинг моменти қуйидагича аниқланади:

$$M = M_1 + M_2 + \ldots + M_n = \sum_{k=1}^{n} M_k. \tag{5.11}$$

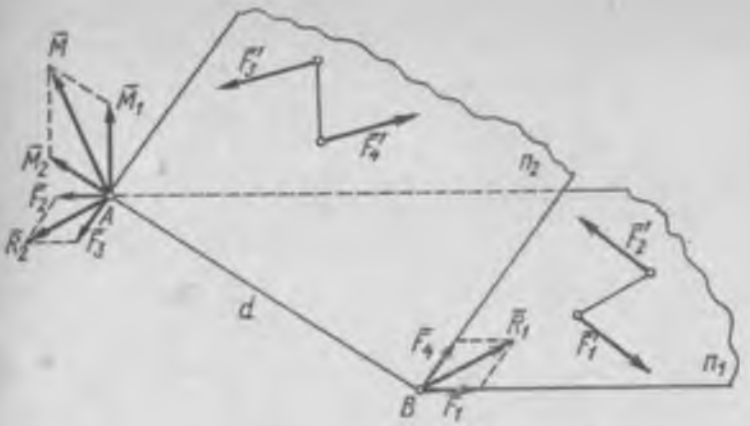
Агар жуфт кучлар системаси параллел текисликларда ётса, эквивалент жуфт кучлар ҳақидаги 2-теоремага асосан, уларни бир текисликда ётувчи жуфт кучлар системаси билан алмаштириш мумкин. Шу сабабли исботланган теорема параллел текисликларда ётувчи жуфт кучлар системаси учун ҳам ўринли бўлади.

20-§. Фазода ихтиёрий вазиятда жойлашган жуфт кучларни қўшиш

Дастлаб, фазодаги иккита кесишувчи текисликларда жойлашган жуфт кучларни қўшишни кўриб чиқамиз.

Теорема. *Иккита кесишувчи текисликларда жуфт кучлар ёлғиз жуфт кучга эквивалент бўлиб, унинг моменти берилган жуфт кучлар моментларининг геометрик йиғиндисига тенг.*

Исбот. Кесишувчи $П_1$ ва $П_2$ текисликларда жойлашган, моментлари мос равишда $\overline{M}_1$ ва $\overline{M}_2$ бўлган $(\overline{F}'_1, \overline{F}'_2)$ ва $(\overline{F}'_3, \overline{F}'_4)$ жуфт кучлар берилган бўлсин (42-расм).



42- расм.

$П_1$ ва $П_2$ текисликларнинг кесишиш чизиғида бирор $|AB|=d$ кесмани олиб, берилган жуфт кучларни ўз текислигида умумий елка d га келтирамиз. Эквивалент жуфт кучлар ҳақидаги теоремалардан олинган натижаларга кўра $(\bar F_1', \bar F_2)$ жуфт кучни $(\bar F_1, \bar F_2)$ билан, $(\bar F_3', \bar F_4')$ жуфт кучни эса $(\bar F_3, \bar F_4)$ эквивалент жуфт кучлар билан алмаштирамиз.

Бунда

$$M_1=F_1 d, \; M_2=F_2 d \tag{5.12}$$

бўлади. B ва A нуқталарга қўйилган $\bar F_1$, $\bar F_4$ ва $\bar F_2$, $\bar F_3$ кучларни қўшамиз:

$$\left.\begin{aligned} \bar R_1 &= \bar F_1 + \bar F_4, \\ \bar R_2 &= \bar F_2 + \bar F_3, \end{aligned}\right\} \tag{5.13}$$

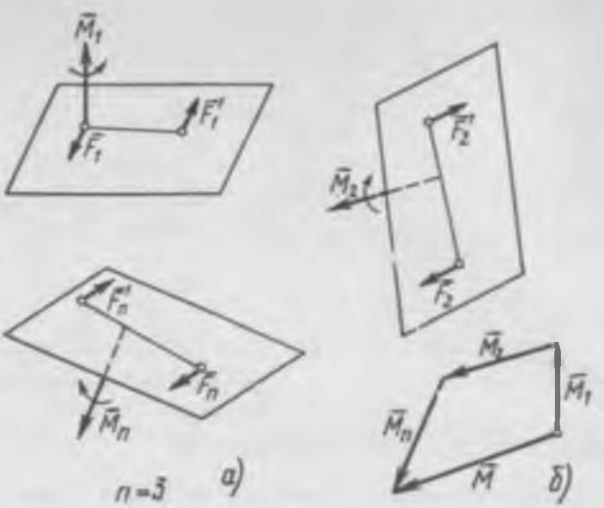
Натижада $(\bar F_1, \bar F_2)$, $(\bar F_3, \bar F_4)$ жуфт кучлар ёлғиз $(\bar R_1, \bar R_2)$ жуфт кучга эквивалент бўлади. (5.7) ва (4.4) га кўра бу жуфт кучларнинг моменти қуйидагича аниқланади:

$$\bar M = \bar M_A(\bar R_1) = \overline{AB}\times \bar R_1 = \overline{AB}\times(\bar F_1 + \bar F_4) =$$
$$= \overline{AB}\times \bar F_1 + \overline{AB}\times \bar F_4 = \bar M_A(\bar F_1) + \bar M_A(\bar F_4) = \bar M_1 + \bar M_2.$$

Шундай қилиб,

$$\bar M = \bar M_1 + \bar M_2. \tag{5.14}$$

$\bar M_1$ ва $\bar M_2$ векторларга ясалган параллелограмм $\bar F_1$, $\bar F_4$ ва $\bar F_2$, $\bar F_3$ кучларга ясалган параллелограммларга ўхшашдир, чунки мос равишда томонлари перпендикуляр, бурчакларининг катталиги тенг ва (5.12) га асосан мос томонлари мутаносибдир. Шунинг учун $\bar M$ вектор $(\bar R_1, \bar R_2)$, жуфт куч текислигига перпендикуляр йўналади ва модули $M = R_1 \cdot d$ бўлади. Теорема исботланди.



43- расм.

Фазода ихтиёрий вазиятда жойлашган $(\overline{F}_1, \overline{F}_1')$, $(\overline{F}_2, \overline{F}_2')$, . . . , $(\overline{F}_n, \overline{F}_n')$ жуфт кучлар берилган бўлсин. Бу жуфт кучларнинг моментларини $\overline{M}_1, \overline{M}_2, \ldots, \overline{M}_n$ (аниқлик учун расмда $n = 3$ бўлган ҳолни кўрсатамиз) билан белгилаймиз (43- расм, *а*). Юқоридагидек, жуфт кучларни кетма-кет қўшиб, битта натижаловчи жуфт кучни оламиз. Бу жуфт кучнинг моменти берилган жуфт кучлар моментларининг геометрик йиғиндисига тенг (43- расм, *б*):

$$\overline{M} = \overline{M}_1 + \overline{M}_2 + \ldots + \overline{M}_n$$

ёки

$$\overline{M} = \sum_{k=1}^{n} \overline{M}_k. \qquad (5.15)$$

Шундай қилиб, *фазода ихтиёрий вазиятда жойлашган n та жуфт кучларни қўшиш натижасида ҳосил бўлган тенг таъсир этувчи жуфт кучнинг моменти берилган жуфт кучлар моментларининг геометрик йиғиндисига тенг.*

21-§. Жуфт кучлар системасининг мувозанати

Қаттиқ жисмга таъсир этувчи, фазода ихтиёрий вазиятда жойлашган жуфт кучлар системаси момент вектори берилган жуфт кучлар моментларининг геометрик йиғиндисига тенг бўлган битта жуфт кучга эквивалент бўлади. Шу сабабли *жисмга таъсир этувчи жуфт кучлар системаси мувозанатда бўлиши учун уларга эквивалент бўлган жуфт куч моменти вектори нолга тенг бўлиши зарур ва етарлидир.*

Шундай қилиб, *жуфт кучлар системаси мувозанати шартининг векторли ифодаси* $\overline{M} = 0$, (5.15) га асосан қуйидагича ёзилади:

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{M}_k = 0, \qquad (5.16)$$

яъни жуфт кучлар моменти векторларига қурилган кўпбурчак ёпиқ бўлиши керак. Бу ҳолда *жуфт кучлар системаси мувозанатининг аналитик ифодаси* қуйидагича бўлади:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} M_{kx} = 0, \\ \sum_{k=1}^{n} M_{ky} = 0, \\ \sum_{k=1}^{n} M_{kz} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (5.17)$$

Бинобарин, *жисмга таъсир этувчи жуфт кучлар системаси мувозанатда бўлиши учун жуфт кучлар моментлари векторларининг ҳар бир координата ўқларидаги проекцияларининг йиғиндиси нолга тенг бўлиши зарур ва етарлидир.*

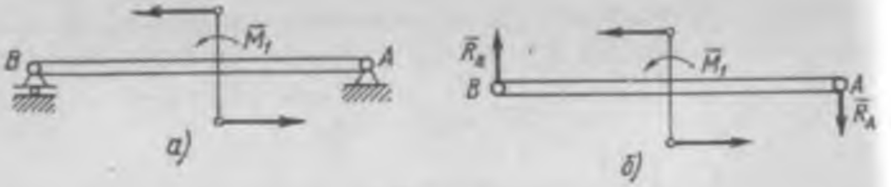
Бир текисликда (ёки параллел текисликларда) жойлашган жуфт кучлар системасининг мувозанат шарти (5.11) га асосан қуйидагича бўлади:

$$\sum_{k=1}^{n} M_k = 0. \qquad (5.18)$$

Демак, *қаттиқ жисмга таъсир этувчи бир текисликда (ёки параллел текисликларда) жойлашган жуфт кучлар системаси мувозанатда бўлиши учун жуфт куч моментларининг алгебраик йиғиндиси нолга тенг бўлиши зарур ва етарлидир.*

6-масала. Узунлиги $AB = 8$ м бўлган балканинг A нуқтаси шарнир воситасида бириктирилган, B нуқтаси эса эркин таянчда ётади. Балкага моменти $M_1 = 24$ Н·м. бўлган жуфт куч таъсир этади (44-расм, *а*). Балканинг оғирлигини эътиборга олмасдан, таянч реакция кучлари аниқлансин.

Ечиш. Боғланишдаги AB балкани эркин жисм шаклига келтириш учун A ва B нуқталардаги таянчларнинг балкага кўрсатадиган таъсирини боғланишлар ҳақидаги аксиомага асосан реакция кучлари билан алмаштирамиз. Берилган балкага қўйилган жуфт куч балкани соат мили айланадиган томонга тескари йўналишда айлантиришга интилади. Балка мувозанатда қолиши учун таянч кучлари соат мили айланадиган йўналишдаги ($\overline{R}_A$, $\overline{R}_B$) жуфт кучни ҳосил қилиши керак (44-расм, *б*). (5.18) га кўра жуфт кучларнинг мувозанат тенгламасини тузамиз:



а) б)

44- расм.

$$M_1 + M_2 = 0.$$

Бунда $M_2 = -AB \cdot R_B = -AB \cdot R_A$, $(\overline{R}_A\ \overline{R}_B)$ жуфт кучнинг моментини ифодалайди. M_1 ва M_2 нинг қийматини (1) га қўйиб, номаълумларни аниқлаш мумкин:

$$R_A = R_B = 3\ \text{Н}.$$

VI боб

Фазода ихтиёрий жойлашган кучлар системаси

Таъсир чизиқлари фазода ихтиёрий равишда жойлашган кучлардан ташкил топган система *фазодаги кучлар системаси* дейилади. Фазодаги кучлар системаси таъсиридаги жисмнинг қандай ҳолатда (мувозанатда ёки ҳаракатда) бўлишини аниқлаш учун жисмга қўйилган кучлар содда ҳолга келтирилади.

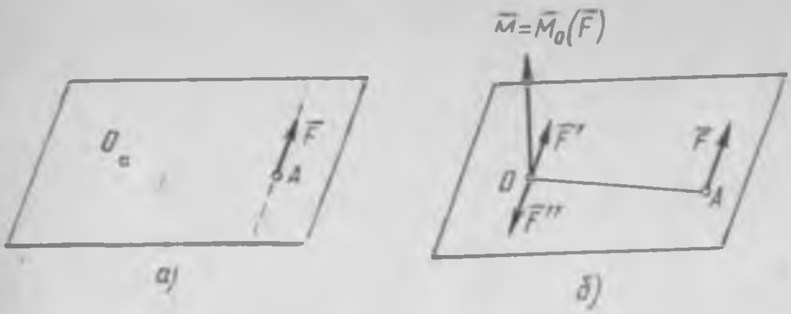
22- §. Кучни ўзига параллел равишда кўчиришга оид лемма

Жисмнинг бирор нуқтасига қўйилган кучни унинг таъсир чизиғи бўйлаб исталган нуқтага кўчирганда кучнинг жисмга таъсири ўзгармаслиги бизга маълум. Аммо тажрибадан маълумки, куч ўзига параллел равишда таъсир чизиғида ётмайдиган бирор нуқтага кўчирилса, кучнинг жисмга таъсири ўзгаради. Кучни ўзига параллел равишда жисмнинг қайси нуқтасига келтирилса, шу нуқта *келтириш маркази* дейилади.

Кучнинг жисмга таъсирини ўзгартирмай уни ўзига параллел равишда бир нуқтадан иккинчи нуқтага келтириш масаласи 1804 йилда француз олими Луи Пуансо (1777 — 1859) исботлаган қуйидаги лемма билан ифодаланади.

Лемма. *Жисмнинг бирор нуқтасига қўйилган куч жисмда олинган ихтиёрий келтириш марказига қўйилган худди шундай кучга ва моменти берилган кучнинг келтириш марказига нисбатан моментига тенг жуфт кучга эквивалент бўлади.*

Исбот. Жисмнинг *A* нуқтасига қўйилган $\overline{F}$ кучни ўзига параллел равишда жисмнинг ихтиёрий *O* нуқтасига келтириш керак (45- расм, *а*).



45- расм.

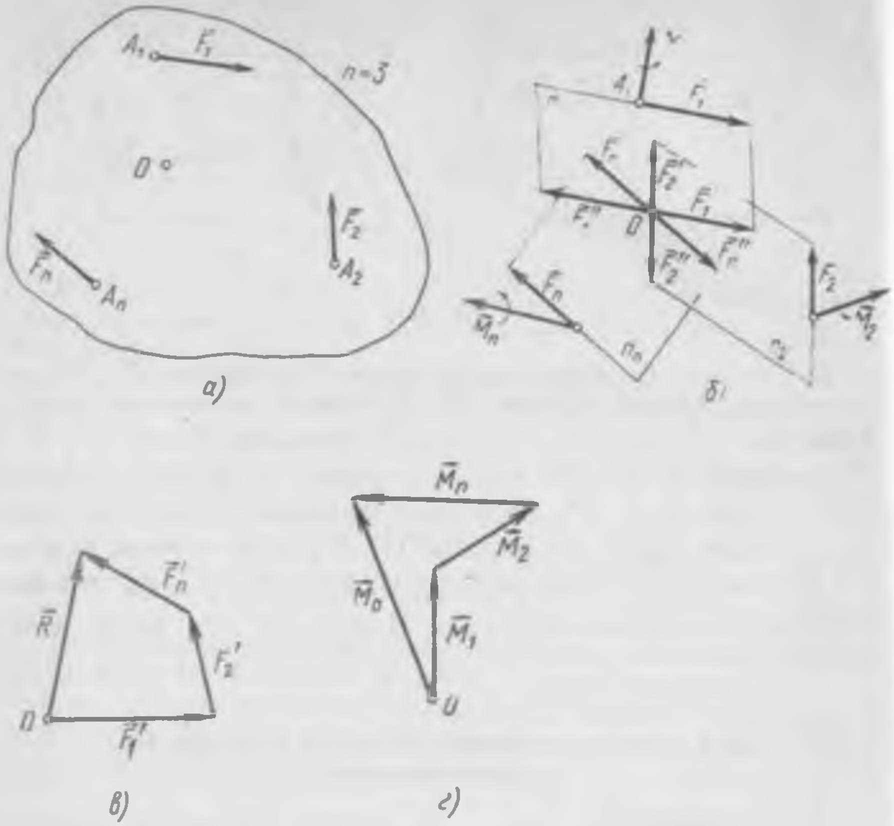
Бунинг учун O нуқтага таъсир чизиғи $\bar{F}$ га параллел $(\bar{F}', \bar{F}'') \backsim 0$ системасини қўямиз (45-расм, *б*). Бу ноллик системанинг ташкил этувчилари $|\bar{F}'| = |\bar{F}''| = |\bar{F}|$ бўлсин. Натижада $\bar{F} \backsim (\bar{F}, \bar{F}', \bar{F}'')$. Ўз навбатида $(\bar{F}, \bar{F}'\ \bar{F}'')$ кучлар системаси O нуқтага қўйилган $\bar{F}' = \bar{F}$ кучга ва $(\bar{F}, \bar{F}'')$ жуфт кучга эквивалент бўлади. Бу жуфт куч *қўшилган жуфт куч* дейилади. $(\bar{F}, \bar{F}'')$ жуфт кучнинг моменти $\bar{M}$, $\bar{F}$ кучнинг O нуқтага нисбатан моменти $\bar{M}_O(\bar{F})$ га тенглиги жуфт кучлар назариясидан маълум: $\bar{M} = \bar{M}_O(\bar{F})$. Шу билан лемма исботланди.

23-§. Фазода ихтиёрий жойлашган кучларни бир нуқтага келтириш

Энди жисмнинг $A_1, A_2, \ldots, A_n$ нуқталарига фазода ихтиёрий йўналган $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \ldots, \bar{F}_n$ кучлар системаси қўйилган ҳолда бу кучларни O марказга келтирамиз (46-расм, *a*). Ҳар бир куч ва O нуқта орқали $\Pi_1, \Pi_2 \ldots, \Pi_n$ текисликлар ўтказамиз. Пуансо леммасига кўра, ҳар бир куч ўз текислигида ўзига тенг куч ва қўшилган жуфт куч билан келтирилади. Натижада келтириш маркази O нуқтага қўйилган $\bar{F}_1 = \bar{F}'_1, \bar{F}_2 = \bar{F}'_2, \ldots, \bar{F}_n = \bar{F}'_n$ кучлар системаси ва моментлари

$$\left.\begin{aligned} \bar{M}_1 &= \bar{M}_0(\bar{F}_1), \\ M_2 &= \bar{M}_0(\bar{F}_2), \\ &\ldots\ldots\ldots, \\ \bar{M}_n &= \bar{M}_0(\bar{F}_n) \end{aligned}\right| \qquad (6.1)$$

бўлган қўшилган жуфт кучлар системаси $(\bar{F}_1, \bar{F}''_1), (\bar{F}_2, \bar{F}''_2), \ldots, (\bar{F}_n, \bar{F}''_n)$ (аниқлик учун расмда $n = 3$ бўлган ҳолни кўриб чиқамиз) ҳосил бўлади (46-расм, *б*). $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \ldots, \bar{M}_n$ векторлар мос равишда $\Pi_1\ \Pi_2, \ldots, \Pi_n$ текисликларга перпендикуляр равишда йўналади



46- расм.

ҳамда мусбат йўналишда қараганимизда, қўшилган жуфт кучлар жисмни соат милининг айланишига тескари йўналишда айлантиришга интилади.

O марказга қўйилган $\overline{F}'_1$, $\overline{F}'_2$, . . . , $\overline{F}'_n$ кучларни геометрик қўшиб битта $\overline{R}$ кучни оламиз (46- расм, *в*):

$$\overline{R} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}'_k,$$

ёки

$$\overline{R} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k. \qquad (6.2)$$

$\overline{R}$ куч фазодаги *кучлар системасининг бош вектори* дейилади. Бинобарин, *кучлар системасининг бош вектори мазкур кучларнинг геометрик йиғиндисига тенг бўлади.*

$(\overline{F}_1, \overline{F}_1'), (\overline{F}_2, \overline{F}_2'), \ldots, (\overline{F}_n, \overline{F}_n')$ фазовий жуфт кучларни қўшиб моменти $\overline{M}_O$ га тенг битта жуфт кучни оламиз. Бу жуфт кучнинг моменти (5.15) га асосан мазкур жуфт кучлар моментлари — $\overline{M}_1, \overline{M}_2, \ldots, \overline{M}_n$ ларнинг геометрик йиғиндисига тенг (46-расм, *г*):

$$\overline{M}_O = \sum_{k=1}^{n} \overline{M}_k$$

ёки (6.1) га кўра

$$\overline{M}_O = \sum_{k=1}^{n} \overline{M}_O(\overline{F}_k). \tag{6.3}$$

$\overline{M}_O$ ни $(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n)$ *кучлар системасининг бош моменти* дейилади. Демак, *фазодаги кучлар системасининг бирор марказга нисбатан бош моменти ташкил этувчи кучларнинг шу марказга нисбатан моментларининг геометрик йиғиндисига тенг.*

Шундай қилиб, қуйидаги теорема исботланди: *фазода ихтиёрий жойлашган кучлар системасини бирор O марказга келтириш натижасида бу кучлар системаси келтириш марказига қўйилган бош вектор $\overline{R}$ га тенг битта куч ва моменти $\overline{M}_O$ га тенг бўлган битта жуфт куч билан алмаштирилади* (46-расм, *д*).

Бундай усул билан кучлар системасини бир марказга келтириш *кучлар системасини содда ҳолга келтириш* дейилади.

$\overline{R}$ ва $\overline{M}_O$ векторларни аналитик усулда, яъни уларнинг координата ўқларидаги проекцияларига кўра аниқлаш мумкин. Худди 7-§ даги каби R_x, R_y, R_z лар учун ушбу муносабатлар ўринли бўлади:

$$R_x = \sum_{k=1}^{n} X_k, \qquad R_y = \sum_{k=1}^{n} Y_k, \qquad R_z = \sum_{k=1}^{n} Z_k. \tag{6.4}$$

Шунингдек, бош векторнинг модули ва йўналиши қуйидагича аниқланади:

$$R = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} Y_k\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} Z_k\right)^2}\,. \tag{6.5}$$

$$\left.\begin{aligned} \cos(\widehat{\overline{R}, x}) &= \frac{R_x}{R} \\ \cos(\widehat{\overline{R}, y}) &= \frac{R_y}{R}, \\ \cos(\widehat{\overline{R}, z}) &= \frac{R_z}{R}. \end{aligned}\right\} \tag{6.6}$$

Бош момент $\overline{M}_0$ нинг координата ўқларидаги проекцияларини M_x, M_y, M_z билан белгиласак, векторлар йиғиндисининг ўқдаги проекцияси ҳақидаги теоремага асосан $M_x = \sum_{k=1}^{n} [\overline{M}_O(\overline{F}_k)]_x$ ёки (4.7) га кўра $M_x = \sum_{k=1}^{n} M_x(\overline{F}_k)$ бўлади. Шунга ўхшаш формулалар M_y ва M_z катталиклар учун ҳам ўринли бўлади. Демак,

$$\begin{aligned} M_x &= \sum_{k=1}^{n} M_x(\overline{F}_k), \\ M_y &= \sum_{k=1}^{n} M_y(\overline{F}_k), \\ M_z &= \sum_{k=1}^{n} M_z(\overline{F}_k). \end{aligned} \tag{6.7}$$

Бу моментнинг модули ва йўналиши учун қуйидагига эга бўламиз:

$$M_O = \sqrt{\left[\sum_{k=1}^{n} M_x(\overline{F}_k)\right]^2 + \left[\sum_{k=1}^{n} M_y(\overline{F}_k)\right]^2 + \left[\sum_{k=1}^{n} M_z(\overline{F}_k)\right]^2} \tag{6.8}$$

$$\left.\begin{aligned} \cos(\widehat{\overline{M}_O, x}) &= \frac{M_x}{M_O}, \\ \cos(\widehat{\overline{M}_O, y}) &= \frac{M_y}{M_O}, \\ \cos(\widehat{\overline{M}_O, z}) &= \frac{M_z}{M_O}. \end{aligned}\right\} \tag{6.9}$$

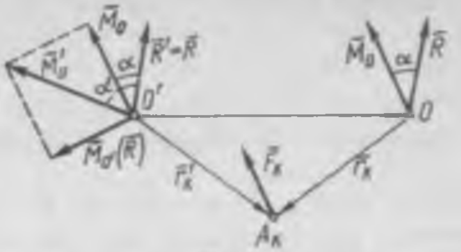
Юқорида исботланган теоремадан қуйидаги хулоса келиб чиқади: *бош векторлари ва бош моментлари устма-уст тушадиган иккита кучлар системаси статик эквивалент бўлади*. Бинобарин, қаттиқ жисмга таъсир этувчи ихтиёрий кучлар системаси унинг бош вектори ва бош моменти билан аниқланади.

24- §. Фазодаги кучлар системасининг инвариантлари

Берилган кучлар системасини унга эквивалент бўлган система билан алмаштирганда ўзгармай қоладиган вектор ёки скаляр катталик *кучлар системасининг инварианти* дейилади.

(6.2) тенгликдан кўрамизки, бош вектор $\overline{R}$ нинг миқдори ва йўналиши келтириш марказига боғлиқ бўлмайди, чунки келтириш маркази ўзгарганида $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n$ кучлар ўзгармай қолади, натижада бош вектор ўзгармайди. Шу туфайли $\overline{R}$ бош вектор фазодаги *кучлар системасининг биринчи инварианти* дейилади.

O келтириш маркази ўзгариши натижасида мазкур марказга нисбатан куч қўйилган нуқтанинг $\overline{r}_k$ радиус-вектори ўзгаради. Бинобарин, (4.4) га кўра F_k кучнинг *O* нуқтага нисбатан моменти ҳам ўзгаради. Шунинг учун бош момент келтириш марказига боғлиқ бўлади. Фазодаги ($\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, . . . , $\overline{F}_n$) кучлар системасини O дан бошқа O' нуқтага келтириб, бу марказга нисбатан ҳисобланган бош моментни $\overline{M}_{O'}$ билан, бош векторни $\overline{R}'$ билан белгиласак (47-расм), у ҳолда (6.3) га кўра



47- расм.

$$\overline{M}_{O'} = \sum_{k=1}^{n} \overline{M}_{O'}(\overline{F}_k) = \sum_{k=1}^{n} \overline{r}'_k \times \overline{F}_k.$$

Бу формулада $\overline{r}'_k$ вектор $\overline{F}_k$ куч қўйилган A_k нуқтанинг O' нуқтага нисбатан радиус-векторини ифодалайди. 47-расмда $\overline{r}'_k = \overline{r}_k + \overline{O'O}$ бўлгани учун

$$\overline{M}_{O'} = \sum_{k=1}^{n} (\overline{r}_k + \overline{O'O}) \times \overline{F}_k = \sum_{k=1}^{n} \overline{r}_k \times \overline{F}_k + \sum_{k=1}^{n} \overline{O'O} \times \overline{F}_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \overline{r}_k \times \overline{F}_k + \overline{O'O} \times \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k.$$

Агар $\overline{R} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k$ эканлигини эътиборга олсак, олдинги ифодадан

$$\overline{M}_{O'} = \overline{M}_O + \overline{O'O} \times \overline{R} \qquad (6.10)$$

келиб чиқади.

(4.12) га асосан

$$\overline{O'O} \times \overline{R} = \overline{M}_{O'}(\overline{R})$$

бош векторнинг O' нуқтага нисбатан моментини ифодалайди. Шу сабабли (6.10) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\overline{M}_{O'} - \overline{M}_O = \overline{M}_{O'}(\overline{R}),$$

яъни *келтириш марказини ўзгартириш натижасида бош моментнинг ўзгариши аввалги O келтириш марказига қўйилган кучлар системаси бош векторининг янги O' келтириш марказига нисбатан моментига тенг.*

(6.10) ни $\overline{R}' = \overline{R}$ биринчи инвариантга скаляр кўпайтирсак,

$$\overline{R}' \cdot \overline{M}_{O'} = \overline{R} \cdot \overline{M}_O + \overline{R} \cdot (\overline{O'O} \times \overline{R}),$$

бу тенгликда $\overline{R} \cdot (\overline{O'O} \times \overline{R}) = 0$, чунки аралаш кўпайтмада иккита бир хил кўпайтувчига эгамиз.

Шундай қилиб,

$$\overline{R}\cdot\overline{M}_{O'}=\overline{R}\cdot\overline{M}_O=\text{const} \qquad (6.11)$$

ёки

$$M_{O'}\cos\alpha'=M_O\cos\alpha=\text{const}, \qquad (6.12)$$

бунда $\alpha'=\widehat{\overline{R}',\overline{M}_{O'}}$, $\alpha=\widehat{\overline{R},\overline{M}_O}$. (6.11) ва (6.12) тенгликлардан кўрамизки, бош векторнинг бош моментга скаляр кўпайтмаси ёки *бош моментнинг бош вектордаги проекцияси ўзгармасдан қолади.* Бу катталик фазодаги *кучлар системасининг иккинчи инварианти* дейилади.

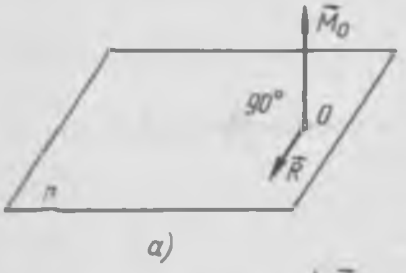
25- §. Фазодаги кучлар системасини жуфт кучга ёки тенг таъсир этувчига келтириш

Жисмга таъсир этувчи фазодаги $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n$ кучлар системасининг бош вектори $\overline{R}=0$, бош моменти $\overline{M}\neq 0$ бўлса, бундай кучлар системаси моменти бош моментга тенг бўлган битта тенг таъсир этувчи жуфт кучга келтирилади. Бу ҳолда (6.10) га кўра бош момент $\overline{M}_O$ келтириш марказига боғлиқ бўлмайди.

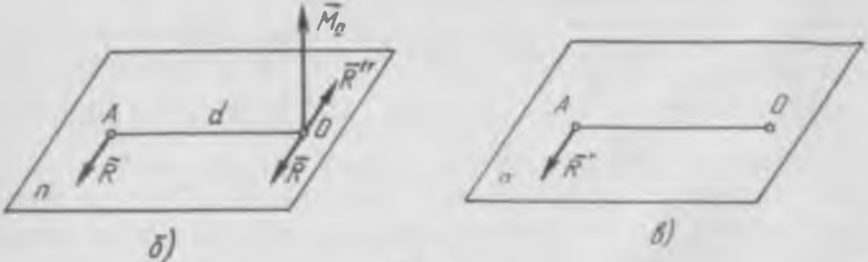
Фазодаги кучлар системаси тенг таъсир этувчига келтирилиши мумкин бўлган қуйидаги икки ҳолни кўриб чиқайлик.

1. Агар фазодаги кучлар системасининг бирор келтириш марказига нисбатан бош моменти $\overline{M}_O=0$, бош вектори $\overline{R}\neq 0$ бўлса, фазодаги кучлар системасининг жисмга таъсирини битта $\overline{R}$ бош вектор билан алмаштириш мумкин. Шу сабабли бош вектор $\overline{R}$ берилган кучлар системасининг O нуқтадаги тенг таъсир этувчисини ифодалайди.

2. Фазодаги кучлар системасини бирор O марказга келтириш натижасида $\overline{R}$ бош вектор $\overline{M}_O$ бош моментга перпендикуляр йўналган бўлсин. Бош вектор орқали бош моментга перпендикуляр $П$ текис-



а)



б) в)

48- расм.

лик ўтказамиз (48-расм, *а*). Бу текисликда моменти $\overline{M}_O$ бош моментга тенг бўлган ($\overline{R}'$, $\overline{R}''$) жуфт кучни оламиз, унинг ташкил этувчилари $|\overline{R}'| = |\overline{R}''| = |\overline{R}|$ бўлиб, $\overline{R}$ га параллел йўналган (48-расм, *б*). Жуфт кучнинг айланиш йўналишини $\overline{M}_O$ векторга мослаб оламиз. Бу ҳолда ($\overline{R}'$, $\overline{R}''$) жуфт кучнинг елкасини *d* билан белгиласак, бош момент $\overline{M}_O$ миқдор жиҳатдан қуйидагича аниқланади:

$$M_O = R' d = Rd. \qquad (6.13)$$

$\overline{R}'$ кучни бош вектор қўйилган *O* нуқтага жойлаштирамиз. У ҳолда бош вектор $\overline{R}$ билан $\overline{R}''$ миқдор жиҳатдан тенг, йўналиши қарама-қарши бўлгани учун 1-аксиомага кўра ўзаро мувозанатлашади, яъни $(\overline{R}, \overline{R}'') \backsim 0$ бўлади. Натижада *A* нуқтада биргина $\overline{R}'$ куч қолади (48-расм, *в*). Бу куч берилган кучлар системасига эквивалент бўлади. $\overline{R}'$ куч берилган кучлар системасининг тенг таъсир этувчиси бўлади.

Демак, *бирор O нуқтада бош вектор* $\overline{R}$ *бош момент* $\overline{M}_O$ *га перпендикуляр йўналган бўлса, кучлар системаси келтириш маркази O дан* $d = \frac{M_O}{R}$ *масофадаги A нуқтага қўйилган ва бош вектор* $\overline{R}$ *га параллел йўналган тенг таъсир этувчи* $\overline{R}'$ *кучга келтирилади.*

26-§. Тенг таъсир этувчининг моменти ҳақидаги Вариньон теоремаси

Француз олими Пьер Вариньон (1654—1722) фазодаги кучлар системасининг тенг таъсир этувчисига оид қуйидаги теоремани исботлаган.

Агар фазодаги кучлар системаси тенг таъсир этувчига келтирилса, бу тенг таъсир этувчининг ихтиёрий нуқтага нисбатан моменти барча кучларнинг мазкур нуқтага нисбатан моментларининг геометрик йиғиндисига тенг.

Исбот. Фазодаги $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n$ кучлар системаси таъсир чизиғи *A* нуқтадан ўтадиган $\overline{R}'$ тенг таъсир этувчига келтирилади, деб фараз қилайлик. Тенг таъсир этувчининг ихтиёрий *O* нуқтага нисбатан моментини аниқлаймиз. Бунинг учун $\overline{R}'$ куч ва *O* нуқта орқали *П* текислик ўтказиб (48-расм, *в*), $\overline{R}'$ кучни Пуансо леммасига асосан *O* нуқтага келтирамиз. Натижада *O* нуқтада $\overline{R}' = \overline{R}$ кучга ва моменти $\overline{R}'$ кучнинг *O* нуқтага нисбатан моменти $\overline{M}_O = \overline{M}_O(\overline{R}')$ га тенг бўлган ($\overline{R}'$, $\overline{R}''$) жуфт кучга эга бўламиз (48-расм, *б*). ($\overline{R}'$, $\overline{R}''$) жуфт кучнинг моменти бош моментга тенг бўлиши керак: $\overline{M} = \overline{M}_O$.

Бунда $\overline{M} = \overline{M}_O(\overline{R})$ эканлиги ва (6.3) эътиборга олинса,

$$\overline{M}_O(\overline{R}') = \sum_{k=1}^{n} \overline{M}_O(\overline{F}_k). \qquad (6.14)$$

келиб чиқади. Шундай қилиб, теорема исботланди.

(6.14) тенгликни O нуқтадан ўтувчи бирор Oz ўққа проекциялаймиз:

$$\left\{\overline{M}_O(\overline{R}')\right\} = \sum_{k=1}^{n} \left\{\overline{M}_O(\overline{F}_k)\right\}_z.$$

(4.7) тенгликка асосан охирги ифода қуйидагича ёзилади:

$$M_z(\overline{R}') = \sum_{k=1}^{n} M_z(\overline{F}_k).$$

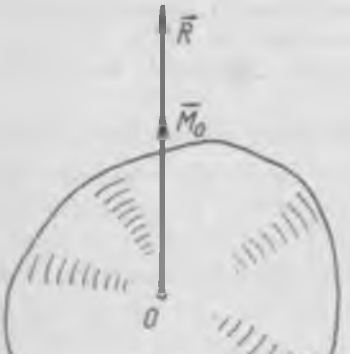
Демак, *тенг таъсир этувчининг бирор ўққа нисбатан моменти барча кучларнинг мазкур ўққа нисбатан моментларининг алгебраик йиғиндисига тенг.*

Изоҳ. Агар $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n$ кучлар бир текисликда ётса, у ҳолда (6.14) да мазкур кучлар моментларининг геометрик йиғиндиси ўрнига алгебраик йиғиндиси олинади:

$$M_O(\overline{R}') = \sum_{k=1}^{n} M_O(\overline{F}_k).$$

Бинобарин, *текисликдаги кучлар системаси тенг таъсир этувчисининг шу текисликдаги бирор нуқтага нисбатан моменти барча кучларнинг мазкур нуқтага нисбатан моментларининг алгебраик йиғиндисига тенг.*

27- §. Фазодаги кучлар системасини динамик винтга келтириш



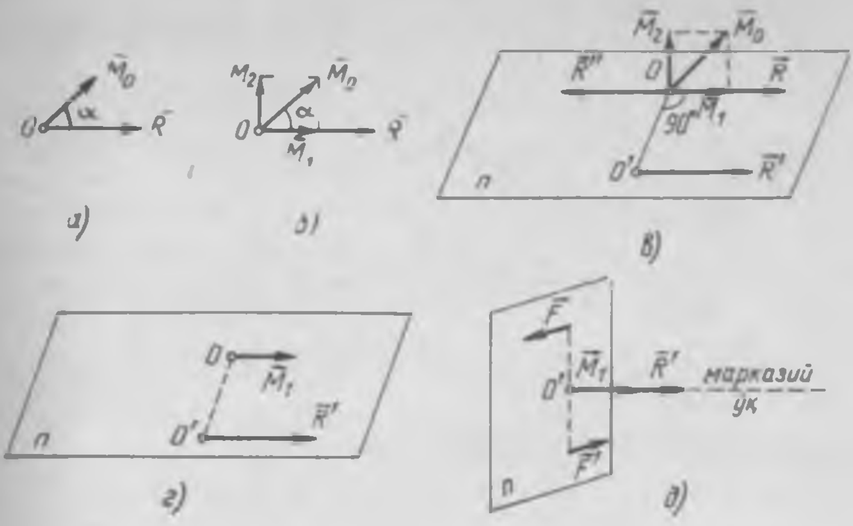
49- расм.

Берилган кучлар системасини ихтиёрий O нуқтага келтириш натижасида $\overline{R}$ бош вектор билан $\overline{M}_0$ бош момент бир чизиқ бўйлаб йўналган (яъни $\alpha = 0$) бўлса, бундай ҳол *динамик винт* дейилади (49- расм). Бош моментнинг бош векторга нисбати *винт параметри* дейилади. Винт параметри p билан белгиланса,

$$p = \frac{M_O}{R}.$$

$\overline{R}$ билан $\overline{M}_O$ йўналган чизиқ *винт ўқи* дейилади.

Берилган кучлар системасини O марказга келтириш натижасида $\overline{R}$ бош век-



50- расм.

тор билан $\overline{M}_0$ бош момент орасидаги бурчак $\alpha \neq 90^\circ$ бўладиган ҳолни текширамиз. Аниқлик учун α бурчакни ўткир бурчак деб оламиз (50- расм, *а*). Бу ҳолда $\overline{M}_0$ бош момент векторини $\overline{R}$ бош вектор бўйлаб йўналган $\overline{M}_1$ ва унга перпендикуляр йўналган $\overline{M}_2$ ташкил этувчиларга ажратамиз (50- расм, *б*). У ҳолда

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= M_O\cos\alpha = \frac{R\,M_O\cos\alpha}{R} = \frac{\overline{R}\cdot\overline{M}_O}{R},\\ M_2 &= M_O\sin\alpha \end{aligned}\right\} \tag{6.15}$$

Моменти $\overline{M}_2$ га тенг жуфт куч ва $\overline{R}$ бош векторни ($\overline{M}_2 \perp \overline{R}$ бўлгани туфайли) O нуқтадан $\overline{M}_2$ га перпендикуляр ўтказилган $П$ текисликдаги (50- расм, *в*)

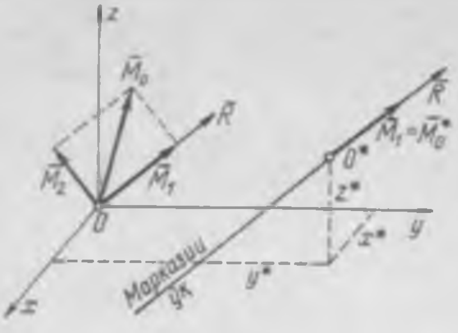
$$OO' = \frac{M_2}{R} = \frac{M_O\sin\alpha}{R} = d$$

масофада O' нуқтага қўйилган $\overline{R} = \overline{R}'$ куч билан алмаштириш мумкин (50- расм, *г*).

$\overline{M}_1$ момент вектори эркин бўлгани учун уни ўзига параллел равишда O' нуқтага келтирамиз (50- расм, *д*). Натижада берилган кучлар системаси O нуқтага қўйилган $\overline{R} = \overline{R}'$ кучга ва шу куч бўйлаб йўналган $\overline{M}_1$ моментли ($\overline{F}$, $\overline{F}'$) жуфт кучга келтирилади. ($\overline{F}$, $\overline{F}'$) жуфт куч $\overline{M}_1$ векторга перпендикуляр $П_1$ текисликда ётади.

Шундай қилиб, кучлар системаси O келтириш марказидан $OO' = d$ масофадаги O' нуқтада параметри $p = \frac{M_1}{R} = \frac{M_0\cos\alpha}{R}$ бўлган динамик винтга келтирилади.

28- §. Марказий винт ўқи



51- расм.

Фазода шундай O^* нуқтани танлаб олайликки, берилган кучлар системаси шу нуқтада динамик винтни ташкил этсин, яъни $\overline{R}$ бош вектор билан $\overline{M}_{O^*}$ бош момент бир тўғри чизиқ бўйлаб йўналсин. У ҳолда $\overline{R}$ билан $\overline{M}_{O^*}$ йўналган чизиқ *динамик винт ўқи* ёки *марказий ўқ* дейилади. Марказий ўқ тенгламасини аниқлаш учун $\overline{M}_{O^*} \parallel \overline{R}$ шартдан фойдаланамиз, яъни

$$p=\frac{\overline{M}_{O^*}}{\overline{R}}=\frac{\overline{R}\cdot\overline{M}_{O^*}}{R^2}=\frac{\overline{R}\cdot\overline{M}_O}{R^2}, \qquad (6.17)$$

бунда p ўзгармас миқдор бўлиб, винт параметридир. (6.10) га асосан $\overline{M}_{O^*}=\overline{M}_O-\overline{OO^*}\times\overline{R}$ бўлганидан (6.17) қуйидагича ёзилади:

$$p=\frac{\overline{M}_O-\overline{OO^*}\times\overline{R}}{\overline{R}}. \qquad (6.18)$$

Бу тенглама *вектор кўринишдаги марказий ўқ тенгламасидир.*

Марказий ўқнинг аналитик тенгламасини ёзиш учун ихтиёрий O нуқтада x, y, z координата ўқларини ўтказамиз (51- расм). Бу нуқтага кучларни келтириш натижасида бош вектор $\overline{R}$ ва бош момент $\overline{M}_0$ га эга бўлайлик. Марказий ўқда ихтиёрий $O^*(x^*, y^*\ z^*)$ нуқтани оламиз. Бу нуқтада $\overline{M}_{O^*}=\overline{M}_1$ бўлиб, $\overline{R}(R_x, R_y, R_z)$ векторнинг таъсир чизиғи бўйлаб йўналади.

(6.18) тенгликни координата ўқларига проекциялаб марказий ўқнинг аналитик тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$\frac{M_x-(y^*R_z-z^*R_y)}{R_x}=\frac{M_y-(z^*R_x-x^*R_z)}{R_y}=$$
$$=\frac{M_z-(x^*R_y-y^*R_x)}{R_z}=p, \qquad (6.19)$$

бунда M_x, M_y, M_z лар $\overline{M}_O$ бош моментнинг координата ўқларидаги проекцияларидир.

29- §. Кучлар системасини содда ҳолга келтиришга оид масалалар

7- масала. Кубнинг томони a га тенг бўлиб (52- расм, a), учларига

$$F_1=F_2=5\sqrt{2}\ \text{Н};\ F_3=10\sqrt{2}\ \text{Н};\ F_4=20\,\text{Н}$$

кучлар қўйилган. Бу кучлар системаси содда ҳолга келтирилсин.

Ечиш. *Ox*, *Oy* ва *Oz* ўқларни расмда кўрсатилгандек, кубнинг қирралари бўйлаб йўналтириб, бош векторнинг қийматини (6.4) ва (6.5) дан ҳисоблаймиз:

$$R_x = \sum_{k=1}^{4} X_k = -F_3 + F_4 \cos 45^\circ = 0,$$

$$R_y = \sum_{k=1}^{4} Y_k = -F_4 \cos 45^\circ = -10\sqrt{2}\,\text{Н},$$

$$R_z = \sum_{k=1}^{4} Z_k = F_1 + F_2 = 10\sqrt{2}\,\text{Н},$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = 20\,\text{Н}.$$

$R_x = 0$ бўлгани учун бош вектор *yz* текисликда ётади. Бош векторнинг йўналишини (6.6) дан аниқлаймиз:

$$\cos(\widehat{\overline{R}, x}) = \frac{R_x}{R} = 0, \quad \widehat{\overline{R}, x} = 90^\circ,$$

$$\cos(\widehat{\overline{R}, y}) = \frac{R_y}{R} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \widehat{\overline{R}, y} = 135^\circ,$$

$$\cos(\widehat{\overline{R}, z}) = \frac{R_z}{R} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \widehat{\overline{R}, z} = 45^\circ.$$

Худди шунингдек, бош моментни (6.7) — (6.8) дан аниқлаймиз:

$$M_x = \sum_{k=1}^{4} M_x(\overline{F}_k) = F_2 a + F_4 a \cos 45^\circ = 15\sqrt{2}\, a\ \text{Н}\cdot\text{м}.$$

$$M_y = \sum_{k=1}^{4} M_y(\overline{F}_k) = -F_1 a - F_2 a + F_4 a \cos 45^\circ = 0,$$

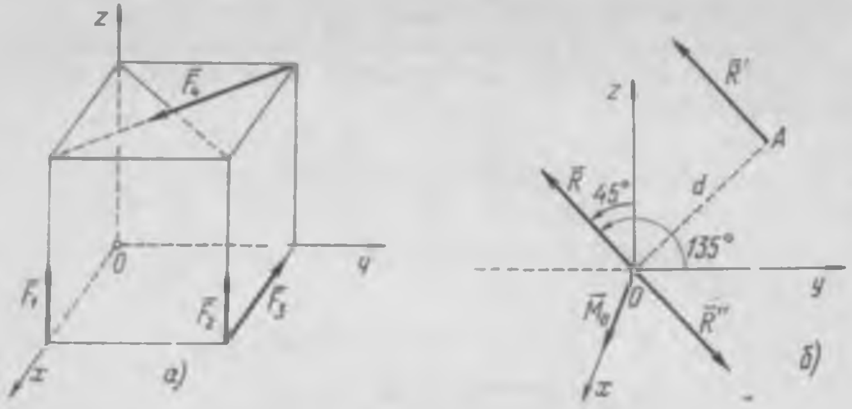
$$M_z = \sum_{k=1}^{4} M_z(\overline{F}_k) = F_3 a - F_4 a \cos 45^\circ = 0,$$

$$M_0 = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = 15\sqrt{2}\, a\ \text{Н}\cdot\text{м}.$$

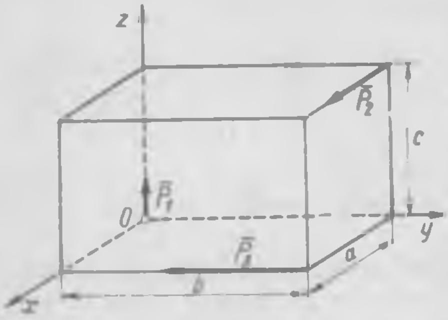
$M_y = 0$, $M_z = 0$ бўлгани учун бош момент *x* ўқ бўйлаб йўналади.

Шундай қилиб, берилган кучлар системасини *O* нуқтага келтириш натижасида миқдори $R = 20$ Н ва йўналиши $\widehat{\overline{R}, x} = 90^\circ$, $\widehat{\overline{R}, y} = 135^\circ$, $\widehat{\overline{R}, z} = 45^\circ$ бўлган бош вектор $\overline{R}$ га ҳамда моменти $M_0 = 15\sqrt{2}a$ Н·м бўлган ва *Ox* ўқ бўйича йўналган жуфт кучга эга бўламиз (52- расм, *б*).

Бу ҳолда $\overline{R} \perp \overline{M}_0$ бўлгани учун 25- § га кўра кучлар системаси $\overline{R'}$ тенг таъсир этувчига келтирилади ҳамда $d = OA = \frac{M_0}{R} = \frac{3\sqrt{2}}{4}\ a$ ва $R' = R$, $\overline{R'} \parallel \overline{R}$ бўлади.



52- расм.



53- расм.

8- масала. Ўлчамлари $a = 2$м, $b = 4$ м, $c = 3$ м бўлган параллелепипеднинг учларига 53- расмда кўрсатилганидек $P_1 = 2$ Н, $P_2 = 5$ Н, $P_3 = 14$ Н кучлар таъсир этади. Бу кучлар системаси содда ҳолга келтирилсин. Агар кучлар системаси динамик винтга келтирилса, марказий ўқ тенгламаси ҳамда бу ўқнинг zOx ва xOy текисликлар билан кесишган нуқталарининг координаталари аниқлансин.

Ечиш. Бош векторнинг координата ўқларидаги проекциялари, модули ва йўналишини аниқлаймиз:

$$R_x = P_2 = 5 \text{ Н}, \quad \cos(\widehat{\overline{R}, x}) = \frac{R_x}{R} = \frac{1}{3},$$

$$R_y = -P_3 = -14 \text{ Н}, \quad \cos(\widehat{\overline{R}, y}) = \frac{R_y}{R} = -\frac{14}{15},$$

$$R_z = P_1 = 2 \text{ Н}, \quad \cos(\widehat{\overline{R}, z}) = \frac{R_z}{R} = \frac{2}{15}.$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = 15 \text{ Н}.$$

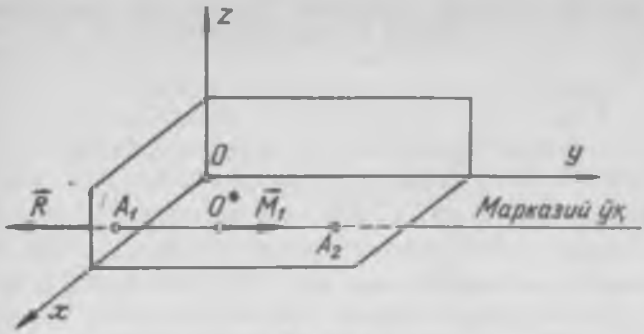
Бош моментнинг координата ўқларидаги проекцияларини аниқлаймиз:

$$M_x = 0,$$

$$M_y = P_2 c = 15 \text{ Н}\cdot\text{м},$$

$$M_z = -P_2 b - P_3 a = -48 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Демак, $\overline{R} \neq 0$, $\overline{M}_0 \neq 0$.



54- расм.

Берилган кучлар системаси тенг таъсир этувчига ёки динамик винтга келтирилишини аниқлаш учун бош векторнинг бош моментга скаляр кўпайтмасини ҳисоблаймиз:

$$\overline{R}\cdot\overline{M}_o = R_x M_x + R_y M_y + R_z M_z = -306\ \text{Н}^2\cdot\text{м}.$$

Бу кўпайтма нолдан фарқли, шу сабабли $\overline{R}$ ва $\overline{M}_0$ векторлар бир-бирига перпендикуляр бўлмайди, натижада берилган кучлар системаси динамик винтга келтирилади.

(6.17) ни эътиборга олиб, марказий ўқнинг фазодаги ҳолатини (6.19) дан аниқлаймиз:

$$\frac{M_x-(y^*R_z-z^*R_y)}{R_x}=\frac{\overline{R}\cdot\overline{M}o}{R^2};\quad \frac{-2y^*-14z^*}{5}=-\frac{306}{225},$$
$$\frac{M_y-(z^*R_x-x^*R_z)}{R_y}=\frac{\overline{R}\cdot\overline{M}o}{R^2},\quad \frac{15-5z^*+2x^*}{-14}=-\frac{306}{225}.$$

Шундай қилиб, марказий ўқ тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$\left.\begin{aligned}2y^*+14z^*&=6{,}8,\\ 2x^*-5z^*&=4{,}04.\end{aligned}\right\}$$

Марказий ўқнинг zOx текислик билан кесишган $A_1(x_1, y_1, z_1)$ нуқтасининг координаталарини юқоридаги тенгламалардан аниқлаймиз: бунда $y_1=0$ эканлигини эътиборга оламиз:

$$x_1=3{,}23\ \text{м};\qquad z_1=0{,}486\ \text{м}.$$

Марказий ўқнинг xOy текислик билан кесишган $A_2(x_2, y_2, z_2)$ нуқтасининг координаталарини аниқлаймиз; бунда $z_2=0$ эканлигини эътиборга оламиз:

$$x_2=2{,}02\ \text{м};\qquad y_2=3{,}4\ \text{м}.$$

$\overline{R}\cdot\overline{M}_1=\overline{R}\cdot\overline{M}_0<0$ бўлгани учун марказий ўқ бўйича $\overline{R}$ ва $\overline{M}_1$ лар қарама-қарши йўналган бўлади (54-расм).

30-§. Фазодаги кучлар системаси мувозанати шартларининг векторли ифодалари

Кучлар системасини бош векторга тенг битта кучга ва моменти бош моментга тенг битта жуфт кучга келтириш ҳақидаги теоремадан фойдаланиб кучлар системасининг мувозанати шартларини келтириб чиқариш мумкин. Агар берилган кучлар системаси мувозанатда бўлса, у ҳолда унга эквивалент бўлган бош векторга тенг битта $\overline{R}$ куч ва моменти бош момент $\overline{M}_0$ га тенг жуфт кучлардан ташкил топган система нолга эквивалент бўлиши керак. Агар $\overline{R}$ ва $\overline{M}_0$ нолдан фарқли бўлса, бундай кучлар системаси мувозанатда бўла олмайди, чунки жуфт кучни битта куч билан мувозанатлаш мумкин эмас. Агар $\overline{R} = 0$, $\overline{M}_0 \neq 0$ бўлса, кучлар системаси битта жуфт кучга келтирилади ёки $\overline{M}_0 = 0$, $\overline{R} \neq 0$ бўлган ҳолда кучлар системаси келтириш марказига қўйилган битта тенг таъсир этувчига эквивалент бўлади. Ҳар иккала ҳолда ҳам кучлар системаси мувозанатда бўла олмайди. Шу сабабли кучлар системаси мувозанатда бўлиши учун $\overline{R} = 0$ ва $\overline{M}_0 = 0$ бўлиши зарурий шарт ҳисобланади. Бу шартлар кучлар системаси мувозанатининг етарли шартини ҳам ифодалайди. Ҳақиқатан ҳам, бу шартлар бажарилса, келтириш маркази O га кўчирилган барча кучлар ҳам, қўшилган жуфт кучлар системаси ҳам мувозанатлашади.

Шундай қилиб, *фазодаги кучлар системаси мувозанатда бўлиши учун кучлар системасининг бош вектори ва ихтиёрий келтириш марказига нисбатан бош моменти нолга тенг бўлиши зарур ва етарлидир.* Яъни *фазодаги кучлар системаси мувозанати шартининг векторли ифодаси* қуйидагича ёзилади:

$$\overline{R} = 0; \quad \overline{M}_0 = 0. \tag{6.20}$$

31-§. Фазодаги кучлар системаси мувозанатининг аналитик шартлари

23-§ да кўрганимиздек, берилган кучлар системасининг бош вектори ва бош моменти (6. 5) ва (6. 8) дан аниқланади. Шу сабабли (6. 20) тенгликлар *фазодаги кучлар системаси мувозанатининг аналитик шартларини ифодаловчи қуйидаги олтита алгебраик тенгликлар системасига эквивалент* бўлади:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n} X_k = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} Y_k = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} Z_k = 0; \\ &\sum_{k=1}^{n} M_x(\overline{F}_k) = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} M_y(\overline{F}_k) = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} M_z(F_k) = 0. \end{aligned}\right| \tag{6.21}$$

Демак, *жисмга таъсир этувчи фазодаги кучлар системаси мувозанатда бўлиши учун барча кучларнинг учта Декарт координата ўқларининг ҳар биридаги проекцияларининг йиғиндилари нол-*

га тенг бўлиши ва кучларнинг учта координата ўқларининг ҳар бирига нисбатан моментларининг йиғиндилари ҳам нолга тенг бўлиши зарур ва етарлидир.

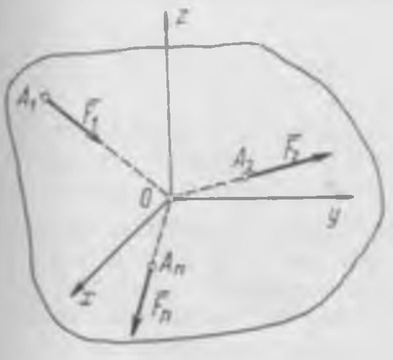
32-§. Хусусий ҳолларда кучлар системасининг мувозанати тенгламалари

1. Бир нуқтада кесишувчи кучлар системаси. $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n$ кучларнинг таъсир чизиқлари O нуқтада кесишсин (55-расм). Бу O нуқтани координаталар боши қилиб оламиз. Барча кучлар учала координата ўқларини кесиб ўтади. Бинобарин, кучларнинг мазкур ўқларга нисбатан моментлари нолга тенг бўлади. Натижада (6. 21) даги охирги учта тенглама айниятга айланади.

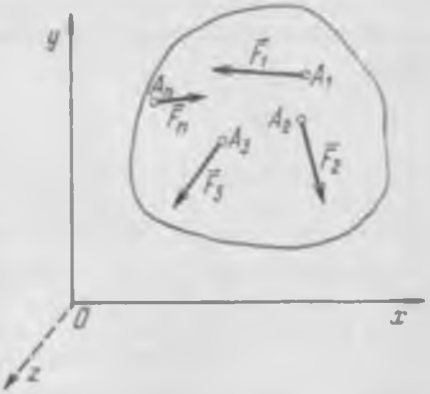
Шунга кўра (6. 21) тенгламаларни кесишувчи кучлар системаси учун татбиқ этсак, аввал келтириб чиқарилган (3. 14) ифода ҳосил бўлади:

$$\left.\begin{aligned} \sum X_k &= 0, \\ \sum Y_k &= 0, \\ \sum Z_k &= 0. \end{aligned}\right\}$$

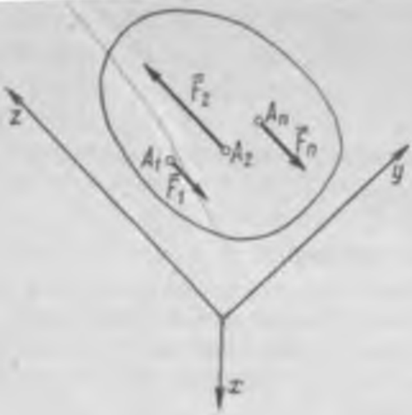
2. Текисликдаги кучлар системаси. $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n$ кучлар Oxy текисликда ётувчи кучлар системасини ташкил этсин (56-расм). Бу ҳолда кучлар z ўққа перпендикуляр текисликда ётганлиги туфайли уларнинг шу ўқдаги проекциялари нолга тенг бўлади. Кучларнинг таъсир чизиқлари x ва y ўқларга ё параллел, ёки уларни кесиб ўтгани учун кучларнинг Ox ва Oy ўқларга нисбатан моментлари нолга тенг бўлади. Натижада (6. 21) нинг учинчи, тўртинчи ва бешинчи тенгламалари айниятга айланади. Барча кучлар Oxy текисликда ётганлиги сабабли уларнинг z ўққа нисбатан моментлари координаталар боши O га нисбатан моментларининг алгебраик қийматига тенг бўлиб қолади. Шу сабабли *текисликдаги кучлар системасининг мувозанати тенгламаларини* қуйидагича ёзиш мумкин:



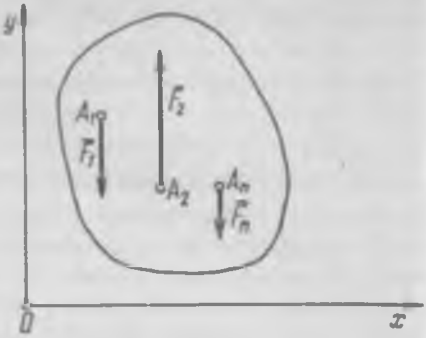
55- расм.



56- расм.



57- расм.



58- расм.

$$\left.\begin{aligned}\sum X_k &= 0,\\ \sum Y_k &= 0,\\ \sum M_o(\overline{F}_k) &= 0.\end{aligned}\right\} \qquad (6.22)$$

Бинобарин, *текисликдаги кучлар системаси таъсиридаги эркин жисм мувозанатда бўлиши учун кучларнинг координата ўқларидаги проекцияларининг йиғиндилари ва кучларнинг улар ётган текисликдаги ихтиёрий нуқтага нисбатан моментларининг йиғиндиси нолга тенг бўлиши зарур ва етарлидир.*

3. Параллел кучлар системаси. а) $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n$ кучлар фазодаги параллел кучлар системасини ташкил этсин (57-расм). Бу ҳолда *Oz* ўқни кучларга параллел йўналтирамиз. Кучларнинг таъсир чизиқлари *Oxy* текисликка перпендикуляр бўлгани учун уларнинг *Ox* ва *Oy* ўқлардаги проекциялари нолга тенг бўлади. Кучлар *Oz* ўққа параллел бўлгани учун кучларнинг мазкур ўққа нисбатан моментлари нолга тенг бўлади. Натижада (6. 21) даги биринчи, иккинчи, олтинчи тенгламалар айниятга айланади ва *фазодаги параллел кучлар таъсиридаги эркин жисмнинг мувозанати тенгламалари* қуйидагича ёзилади:

$$\left.\begin{aligned}\sum Z_k &= 0,\\ \sum M_x(\overline{F}_k) &= 0,\\ \sum M_y(\overline{F}_k) &= 0.\end{aligned}\right\} \qquad (6.23)$$

Шундай қилиб, *фазодаги параллел кучлар системаси таъсиридаги эркин жисм мувозанатда бўлиши учун кучларнинг шу кучларга параллел бўлган ўқдаги проекцияларининг йиғиндиси ҳамда мазкур кучларга перпендикуляр икки ўққа нисбатан моментларининг йиғиндилари алоҳида-алоҳида нолга тенг бўлиши зарур ва етарлидир.*

б) ($\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n$) кучлар системаси текисликдаги параллел кучлар системасини ташкил этсин (58-расм). Бу ҳолда кучлар ётган текислик учун Oxy текисликни олиб, ўқлардан бирини (масалан, Oy ни) кучларнинг таъсир чизиғига параллел йўналтирамиз. Кучларнинг таъсир чизиқлари Ox ўққа перпендикуляр йўналгани учун уларнинг бу ўқдаги проекциялари нолга тенг бўлади. Бинобарин, (6. 22) даги биринчи тенглама айниятга айланади ва *текисликдаги параллел кучлар системаси таъсиридаги эркин жисмнинг мувозанати тенгламалари* қуйидагича ёзилади:

$$\left.\begin{aligned} &\sum Y_k = 0, \\ &\sum M_o(\overline{F}_k) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (6.24)$$

Демак, *бир текисликда жойлашган параллел кучлар системаси таъсиридаги эркин жисм мувозанатда бўлиши учун кучларнинг ўзларига параллел бўлган ўқдаги проекцияларининг йиғиндиси ва мазкур кучлар ётган текисликдаги ихтиёрий нуқтага нисбатан моментларининг йиғиндиси нолга тенг бўлиши зарур ва етарлидир.*

Мувозанати текширилаётган жисмга боғланишлар қўйилган бўлса, (6. 21) — (6. 24) тенгламаларни тузишда боғланиш реакция кучларини ҳам эътиборга олиш керак.

33-§. Текисликдаги кучлар системаси мувозанати тенгламаларининг бошқача кўринишлари

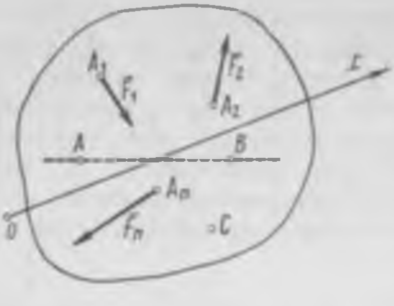
Текисликдаги кучлар системасининг мувозанатига оид масалалар ечганда (6. 22) га тенг кучли қуйидаги мувозанат тенгламаларидан ҳам фойдаланилади.

I. Текисликда ётувчи ихтиёрий кучларнинг шу текисликдаги бир тўғри чизиқда ётмайдиган учта нуқтага нисбатан моментларининг алгебраик йиғиндилари алоҳида-алоҳида нолга тенг бўлса, кучлар системаси мувозанатда бўлади (59-расм):

$$\left.\begin{aligned} &\sum M_A(\overline{F}_k) = 0, \\ &\sum M_B(\overline{F}_k) = 0, \\ &\sum M_C(\overline{F}_k) = 0. \end{aligned}\right| \qquad (6.25)$$

Булардан биринчи тенгликнинг бажарилиши A нуқтага нисбатан бош моментнинг нолга тенглигини ифодалайди. Бу ҳолда текисликдаги кучлар системаси A нуқтадан ўтувчи тенг таъсир этувчига келтирилиши мумкин. Худди шундай ҳол B нуқта учун ҳам ўринли бўлиб, тенг таъсир этувчи B нуқтадан ўтади, яъни у (AB) чизиқда ётади деб қараш мумкин. C нуқта (AB) чизиқда ётмаганлиги сабабли, учинчи тенгликдан (Вариньон теоремасига кўра)

$$\sum M_C(\overline{F}_k) = M_C(\overline{R}) = 0,$$



59- расм.

яъни тенг таъсир этувчининг C нуқтага нисбатан моменти нолга тенг бўлишини кўрамиз. Охирги тенглик $\overline{R}=0$ бўлгандагина ўринлидир. Шундай қилиб, кучлар системаси мувозанатда бўлади.

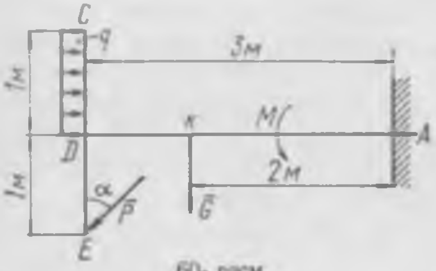
2. Текисликда ётувчи ихтиёрий кучларнинг шу текисликда ётувчи ихтиёрий иккита нуқтага нисбатан моментларининг йиғиндилари ва мазкур нуқталардан ўтувчи чизиққа перпендикуляр бўлмаган ўқдаги проекцияларининг йиғиндиси алоҳида-алоҳида нолга тенг бўлса, бундай кучлар системаси мувозанатда бўлади:

$$\left.\begin{aligned} \sum M_A(\overline{F}_k) &= 0, \\ \sum M_B(\overline{F}_k) &= 0, \\ \sum X_k &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (6.26)$$

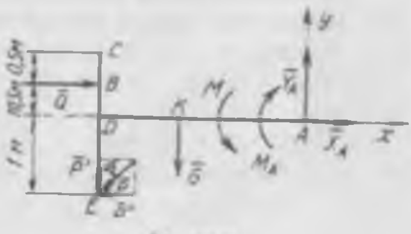
Олдинги ҳолдагидек, биринчи икки шартнинг бажарилиши тенг таъсир этувчининг (AB) чизиқ бўйлаб йўналганлигини (59-расм) ифодаласа, учинчи тенглама унинг (AB) га перпендикуляр бўлмаган ўқдаги проекциясининг нолга тенглигини ифодалайди. Шунинг учун $\overline{R} = 0$ бўлиб, кучлар системаси мувозанатда бўлади.

9-масала. 60-расмда тасвирланган конструкция A нуқтада деворга қисиб маҳкамланган. Агар $G=100$ Н, $P=600$ Н, $M=1000$ Н·м, $q = 100$ Н/м, $\alpha = 45°$ бўлса, A таянчдаги реакция кучлари аниқлансин.

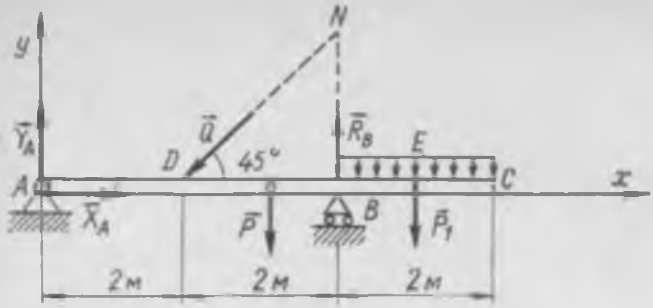
Ечиш. A нуқтадаги боғланиш шу нуқтанинг кўчишини чеклаш билан бирга конструкциянинг вертикал текисликда мазкур нуқта атрофида айланишига ҳам тўсқинлик қилади. Шу сабабли қисилган ердаги боғланишни $\overline{X}_A, \overline{Y}_A$ реакция кучлари ва моменти M_A га тенг реакция жуфт моменти билан алмаштирамиз (61-расм). DC оралиқдаги текис тақсимланган кучларни B нуқтага ($DB = \frac{1}{2} DC$) қўйилган $Q = DC \cdot q = 100$ Н горизонтал куч билан алмаштирамиз.



60- расм.



61- расм.



62- расм.

Текисликдаги конструкцияга таъсир этувчи кучлар системаси учун мувозанат тенгламаларини тузамиз:

$$\sum X_k = 0; \qquad Q - P\sin\alpha + X_A = 0;$$
$$\sum Y_k = 0; \qquad -P\cos\alpha - G + Y_A = 0;$$

$$\sum M_A(\overline{F}_k) = 0; -M_A + M + G\cdot AK + P\cos\alpha\cdot AD - P\sin\alpha\cdot DE -$$
$$-Q\cdot DB = O.$$

Охирги тенгламада $\overline{P}$ кучнинг A нуқтага нисбатан моментини ҳисоблашда унинг ташкил этувчилари $\overline{P}'(P' = P\cos\alpha)$ ва $\overline{P}''(P'' = P\sin\alpha)$ моментларининг йиғиндиси олинган. Бу тенгламалардан X_A, Y_A, M_A номаълумларни аниқлаймиз:

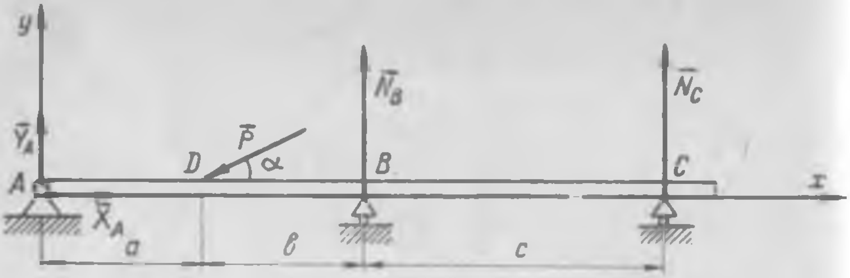
$$X_A = 324{,}26\text{Н}, \ Y_A = 1424{,}26 \text{ Н}, \ M_A = 3798{,}\ 52 \text{ Н·м}.$$

10- масала. Оғирлиги $P = 8$ Н бўлган AC балканинг D нуқтасига $Q = 6$ Н, BC қисмига интенсивлиги $q = 3$Н·м бўлган текис тақсимланган куч қўйилган. Балка B нуқтада эркин таянчда ётади, A нуқтада таянч билан шарнир воситасида бириктирилган. A ва B нуқталардаги реакция кучлари аниқлансин. Ўлчамлар 62- расмда кўрсатилган.

Ечиш. Балканинг CB қисмига қўйилган текис тақсимланган кучни E нуқтага қўйилган $P_1 = BC\cdot q = 6$ Н куч билан алмаштирамиз. Оғирлик кучи P ни ва A, B нуқталарнинг реакция кучларини 62-расмдагидек йўналтириб, AC балка учун мувозанат тенгламаларини (6. 26) кўринишида тузамиз:

$$\sum M_A(\overline{F}_k) = 0; \qquad -2Q\cos 45° - 3P + 4R_B - 5P_1 = 0,$$
$$\sum M_B(\overline{F}_k) = 0; \qquad -1\cdot P + 1\cdot P + 2Q\cdot\cos 45° - 4Y_A = 0,$$
$$\sum X_k = 0; \qquad X_A - Q\cos 45° = 0.$$

Бу тенгламалар системасини ечсак, $R_B = 15{,}6$ Н, $Y_A = 2{,}61$ Н, $X_A = 4{,}2$ Н келиб чиқади.



63- расм.

34-§. Статик аниқ ва статик аниқмас масалалар

Берилган масалада номаълумлар сони мувозанат тенгламалари сонига тенг бўлса, бундай масала *статик аниқ масала* дейилади. Агар масалада номаълумлар сони мувозанат тенгламалари сонидан ортиқ бўлса, бундай масала *статик аниқмас масала* дейилади.

Масалан, AC балканинг D нуқтасига $\overline{P}$ куч таъсир этади (63-расм). Балка A нуқтада шарнир воситасида боғланган, B, C нуқталарда эса эркин таяниб туради. A, B, C нуқталарнинг таянч реакциялари аниқлансин.

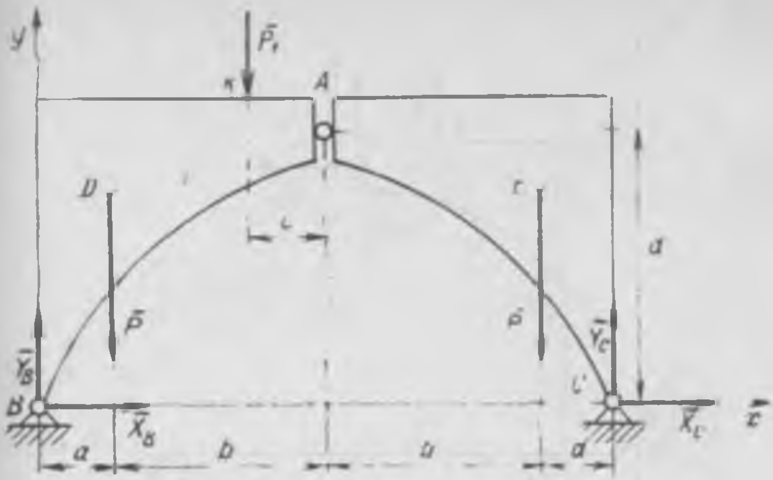
Балкага қўйилган $\overline{P}$ куч қаторига $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$, $\overline{N}_B$, $\overline{N}_C$ реакция кучларини қўшиб, уни эркин ҳолга келтирамиз. Балкага текисликдаги кучлар системаси таъсир этаётганлиги туфайли учта мувозанат тенгламасини тузиш мумкин. Номаълумлар сони эса тўртта. Шу сабабли кўрилаётган масала статик аниқмас масаладир.

35-§. Бир неча жисмдан ташкил топган системанинг мувозанати

Бир-бирлари билан боғланган бир неча жисмлардан ташкил топган системанинг мувозанатини аниқлашга ўтамиз. Бунинг учун системага таъсир этувчи кучларни икки гуруҳга: ички ва ташқи кучларга ажратамиз. Системани ташкил этувчи жисмларнинг бир-бирларига кўрсатадиган таъсир кучлари *ички кучлар* дейилади. Системага кирмаган жисмларнинг унга кўрсатадиган таъсир кучлари *ташқи кучлар* дейилади.

Масалан, учиб кетаётган самолётни барча қисмлари билан биргаликда система деб олсак, унинг поршенига газнинг босим кучи, поршеннинг шатунга таъсир кучи ва шунга ўхшаш кучлар ички кучлар гуруҳига киради. Самолётнинг оғирлиги, кўтариш кучи, ҳавонинг қаршилик кучи ташқи кучлар гуруҳига киради.

Агар системани бир бутун яхлит қаттиқ жисм деб қарасак, таъсир ва акс таъсир ҳақидаги аксиомага асосан, ички кучлар жуфт-жуфт ҳолда миқдорлари тенг, йўналишлари бир тўғри чизиқ бўйлаб қарама-қарши томонга йўналган кучлар системасини ташкил этади. Шунинг учун ички кучларнинг бош вектори ва бирор марказга нисбатан бош моменти нолга тенг бўлади. Агар система мувозанатда



64- расм.

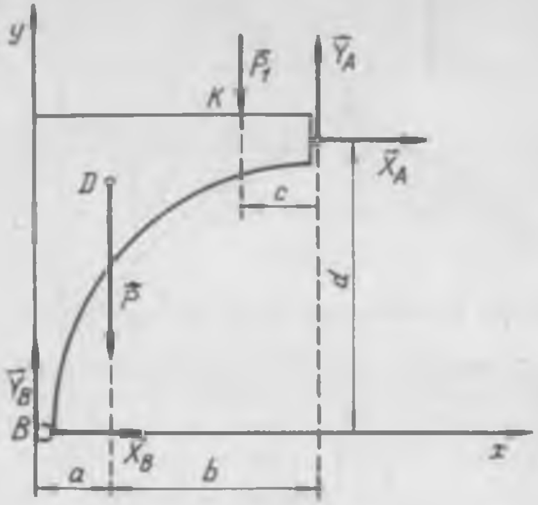
бўлса, унинг таркибидаги ҳар бир жисм мувозанатда бўлади. Системанинг мувозанатини текшириш учун системани ташкил этувчи ҳар бир жисмнинг мувозанати алоҳида текширилади. Мувозанати текширилаётган системада ажратиб олинган бирор жисмнинг мувозанати текширилаётганда бу жисмга системани ташкил этувчи бошқа жисмларнинг таъсири кучлар билан алмаштирилади. Бу кучлар система учун ички кучлар бўлади, аммо ажратиб олинган жисм учун ташқи кучлар қаторига киради.

Текисликдаги кучлар таъсирида N та жисмдан ташкил топган система мувозанатда бўлса, ҳар бир жисм учун учтадан мувозанат тенгламаси тузиш мумкин. Натижада система мувозанат тенгламаларининг сони $3N$ та бўлади.

Баъзан системани яхлит битта жисм деб қараб, учта мувозанат тенгламаси тузилади. Бу тенгламаларда ички кучлар қатнашмайди. Сўнгра $N - 1$ та жисмлар учун учтадан мувозанат тенгламаси тузилади. Натижада $3 + 3\ (N - 1) = 3N$ та мувозанат тенгламаларини оламиз.

11-масала. Кўприк A шарнир билан бир-бирига ҳамда B ва C шарнирлар билан икки қирғоқдаги таянчларга бириктирилган икки қисмдан иборат. Кўприкнинг K нуқтасига P_1 юк қўйилган. Кўприк ҳар бир қисмининг оғирлиги P бўлиб, D ва E нуқталарга қўйилган. Ўлчамлар 64-расмда кўрсатилган. B ва C нуқталардаги реакция кучлари ҳамда кўприк қисмларининг A нуқтадаги ўзаро таъсир кучлари аниқлансин.

Ечиш. Бу масалада $\overline{P}$, $\overline{P}_1$ кучлар ҳамда B ва C шарнирларнинг реакция кучлари ташқи кучларни ташкил этади. B ва C шарнирларнинг реакция кучлари номаълум бўлгани учун уларни Bx ва By ўқларнинг мусбат йўналишлари бўйлаб йўналган ташкил этувчиларига ажратамиз.



65- расм.

Система иккита жисмдан ташкил топгани учун системанинг мувозанат тенгламалари 6 та бўлади.

Бутун кўприк учун мувозанат тенгламалари қуйидагича бўлади:

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma X_k = 0;\; X_B + X_C = 0; \\ \Sigma Y_k = 0;\; Y_B - P - P_1 - P + Y_C = 0; \\ \Sigma M_B (\bar{F}_k) = 0;\; -aP - (a + b - c)\, P_1 - \\ -(a + 2b)\, P + 2\, (a + b)\, Y_C = 0. \end{array}\right| \quad (1)$$

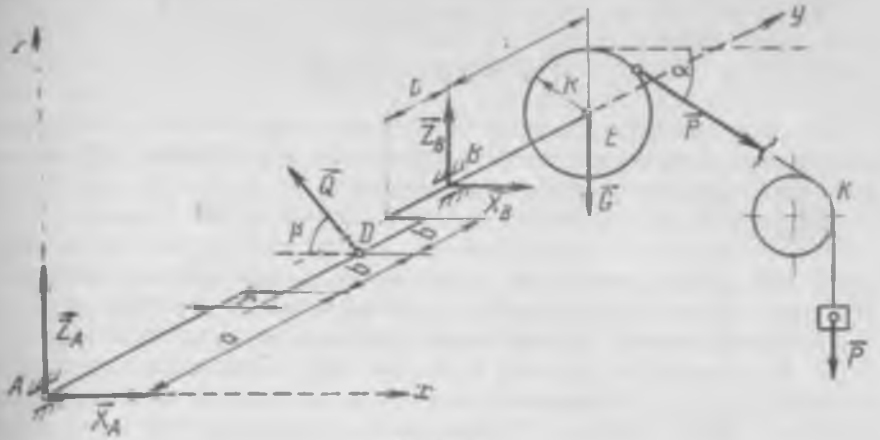
Энди кўприкнинг чап қисмини олиб, ўнг қисмининг берадиган таъсирини *A* нуқтанинг реакция кучи билан алмаштирамиз. *A* нуқтанинг реакция кучини *Bx* ва *By* ўқларнинг мусбат йўналиши бўйича йўналган $\bar{X}_A$ ва $\bar{Y}_A$ ташкил этувчиларга ажратамиз (65-расм). Кўприкнинг чап қисми учун мувозанат тенгламаларини тузамиз:

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma X_k = 0;\; X_B + X_A = 0; \\ \Sigma Y_k = 0;\; Y_B - P - P_1 + Y_A = 0; \\ \Sigma M_A\, (\bar{F}_k) = 0;\; P_1 \cdot c + P \cdot b - Y_B\, (a + b) + X_B \cdot d = 0. \end{array}\right\} \quad (2)$$

(1) ва (2) тенгламалар системасидан 6 та номаълум реакция кучларини аниқлаймиз. Мазкур тенгламалар системасини ечганда номаълумлардан бирортаси манфий қийматга эга бўлса, унинг йўналиши аслида тескари бўлади.

36-§. Фазодаги кучлар системасининг мувозанатига оид масала ечиш

12-масала. 66-расмда тасвирланган конструкциянинг таянч реакция кучлари аниқлансин. Қуйидагилар берилган: $Q = 3000$ Н; $G = 2000$ Н; $a = 0{,}6$ м; $b = 0{,}2$ м; $c = 0{,}4$; $r = 0{,}05$ м; $\alpha = 30°$; $\beta = 60°$.



66- расм.

Ечиш. Валга таъсир этувчи кучларни расмда тасвирлаймиз. P кучни арқон бўйлаб йўналтирамиз. A ва B нуқтадаги цилиндрсимон подшипникларнинг таъсирини $\overline{X}_A, \overline{Z}_A, \overline{X}_B, \overline{Z}_B$ реакция кучлари билан алмаштирамиз. Кучларнинг координата ўқларидаги проекцияларини ва мазкур ўқларга нисбатан моментларини ҳисоблаб, (6.21) га мувофиқ мувозанат тенгламаларини тузамиз:

$$\Sigma X_k = 0;\ X_A - Q\cos 60^\circ + X_B + P\cos 30^\circ = 0; \qquad (1)$$

$$\Sigma Y_k = 0;\ 0 = 0;$$

$$\Sigma Z_k = 0;\ Z_A + Q\cos 30^\circ + Z_B - P\cos 60^\circ - G = 0; \qquad (2)$$

$$\Sigma M_x\ (\overline{F}_k) = 0;\ (a+b)\cdot Q\cos 30^\circ + (a+3b)\,Z_B - \qquad (3)$$

$$-(a+3b+c)\cdot P\cos 60^\circ - (a+3b+c)\ G = 0;$$

$$\Sigma M_y\ (\overline{F}) = 0; -r\,Q\cos 30^\circ + R\cdot P = 0; \qquad (4)$$

$$\Sigma M_z\ (\overline{F}) = 0;\ (a+b)\cdot Q\cos 60^\circ - (a+3b)\ X_B +$$

$$+(a+3b+c)\cdot P\cos 30^\circ = 0. \qquad (5)$$

Тенгламаларни биргаликда ечиб қуйидаги қийматларни топамиз. (4) дан: $P = \frac{r\cdot Q\cos 30^\circ}{R} = 649{,}5$ Н; (5) дан: $X_B = \frac{1}{a+3b}\ [(a+b)\times$ $\times\, Q\cos 60^\circ + (a+3b+c)\times P\cos 30^\circ] = 1749{,}96$Н; (1) дан: $X_A =$ $= Q\cos 60^\circ - X_B - P\cos 30^\circ = -812{,}42$ Н; (3) дан: $Z_B = \frac{1}{a+3b}\times$ $\times[-(a+b)\cdot Q\cdot\cos 30^\circ + (a+3b+c)\,P\cos 60^\circ + (a+3b+c)\,G] =$ $= 1367{,}67$ Н; (2) дан: $Z_A = -Q\cos 30^\circ - Z_B + P\cos 60^\circ + G =$ $= 355{,}08$ Н.

VII боб

ИШҚАЛАНИШ

Боғланишдаги жисмларнинг бири иккинчисига нисбатан силжиганда уларнинг бир-бирига тегиб турган сиртларида ҳосил бўладиган қаршилик кучи *ишқаланиш кучи* дейилади.

Ишқаланишнинг қуйидаги асосий 2 турини кўриб чиқамиз.

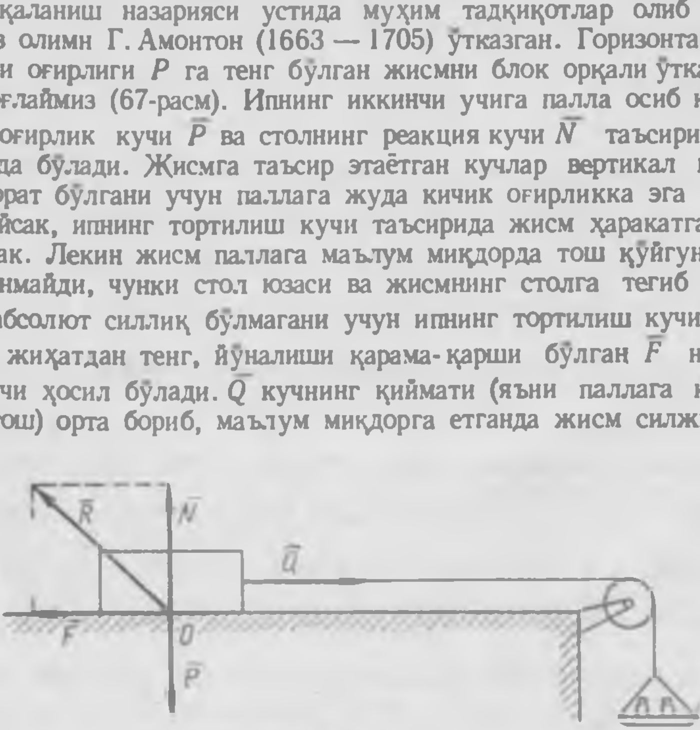
1. Бир жисмнинг иккинчи жисм устида сирпаниши натижасида ҳосил бўладиган ишқаланиш *сирпанишдаги ишқаланиш* дейилади. Масалан, поршень цилиндр ичида ҳаракатланганда ёки чана қор устида ҳаракатланганда сирпанишдаги ишқаланиш ҳосил бўлади.

2. Бир жисмнинг иккинчи жисм устида сирпанмасдан думалаши натижасида ҳосил бўладиган ишқаланиш *думалашдаги ишқаланиш* дейилади. Рельс устидаги ғилдиракнинг думалаши бунга мисол бўла олади.

37-§. Сирпанишдаги ишқаланиш қонунлари

Сирпанишдаги ишқаланиш кучининг мавжудлигини Морен тажрибаси деб аталувчи қуйидаги тажриба ёрдамида кузатиш мумкин.

Аслида бундай тажрибани А.М. Морендан (1775 — 1880) анча аввал ишқаланиш назарияси устида муҳим тадқиқотлар олиб борган француз олими Г. Амонтон (1663 — 1705) ўтказган. Горизонтал стол устидаги оғирлиги P га тенг бўлган жисмни блок орқали ўтказилган ипга боғлаймиз (67-расм). Ипнинг иккинчи учига палла осиб қўямиз. Жисм оғирлик кучи $\bar{P}$ ва столнинг реакция кучи $\bar{N}$ таъсирида мувозанатда бўлади. Жисмга таъсир этаётган кучлар вертикал кучлардан иборат бўлгани учун паллага жуда кичик оғирликка эга бўлган тош қўйсак, ипнинг тортилиш кучи таъсирида жисм ҳаракатга келиши керак. Лекин жисм паллага маълум миқдорда тош қўйгунча ҳаракатланмайди, чунки стол юзаси ва жисмнинг столга тегиб турган юзаси абсолют силлиқ бўлмагани учун ипнинг тортилиш кучи $\bar{Q}$ га миқдор жиҳатдан тенг, йўналиши қарама-қарши бўлган $\bar{F}$ ишқаланиш кучи ҳосил бўлади. $\bar{Q}$ кучнинг қиймати (яъни паллага қўйиладиган тош) орта бориб, маълум миқдорга етганда жисм силжиш ол-



67- расм.

дида туради, бу ҳолда ишқаланиш кучи $F = F_{max}$ энг катта (максимал) қийматга эришади. Мазкур куч энг катта *статик ишқаланиш кучи* дейилади. Шундан сўнг паллага оз миқдорда тош қўйсак, жисм сирпана бошлайди. Жисм ҳаракатланаётганда ҳосил бўладиган ишқаланиш кучи *динамик ишқаланиш кучи* ёки ҳаракатдаги ишқаланиш кучи дейилади. Бу тажрибадан кўрамизки, статик ишқаланиш кучи $\overline{F}$ нолдан то энг катта ишқаланиш кучигача ўзгаради:

$$0 \leqslant F \leqslant F_{max}. \tag{7.1}$$

Кузатилган тажрибадан маълум бўладики, боғланиш реакция кучи фақат нормал реакция кучидан иборат бўлмай, жисмларнинг бир-бирига тегиб турган юзаси орқали ўтган уринма текислигида ётувчи уринма реакция кучидан ҳам иборат бўлар экан. Шунинг учун боғланишнинг тўла реакция кучи уринма ва нормал реакция кучларнинг геометрик йиғиндисига тенг бўлади:

$$\overline{R} = \overline{F} + \overline{N}. \tag{7.2}$$

Француз олими Ш.Г. Кулон (1736 — 1806) ўтказган тажрибаларига асосланиб, сирпанишдаги ишқаланиш қонунларини қуйидагича таърифлаган.

1. *Энг катта ишқаланиш кучи нормал босимга мутаносибдир:*

$$F_{max} = fN, \tag{7.3}$$

бунда: F_{max} — энг катта статик ишқаланиш кучи; f — *сирпанишдаги ишқаланиш коэффициенти;* N — нормал босим.

2. *Ишқаланиш кучи жисмларнинг ишқаланувчи сиртлари ўлчамларига боғлиқ бўлмайди.*

3. *Сирпанишдаги ишқаланиш кучи жисмларнинг материалига ва ишқаланувчи сиртларнинг ишланиш даражасига боғлиқ бўлади.* Сиртлар силлиқ бўлса, ишқаланиш кучи кам бўлади.

4. *Жисм ҳаракатда бўлганда ишқаланиш кучи тинч тургандагига нисбатан камроқ бўлади.*

(7.3) дан

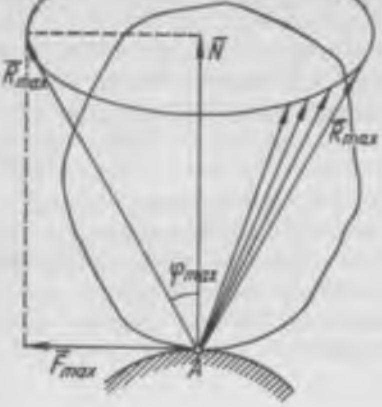
$$f = \frac{F_{max}}{N}, \tag{7.4}$$

яъни сирпанишдаги ишқаланиш коэффициенти ўлчовсиз сон бўлиб, унинг қийматини юқорида келтирилган Морен тажрибаси асосида аниқлаш мумкин. Турли материаллар учун ишқаланиш коэффициентининг қийматлари справочникларда берилади.

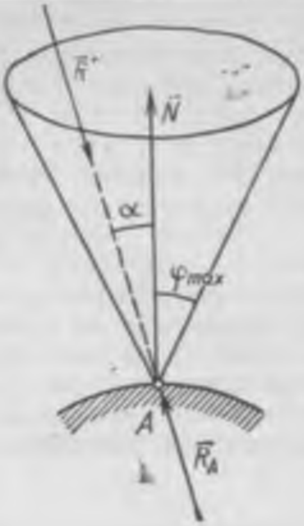
38-§. Ишқаланиш бурчаги. Ишқаланиш конуси

Агар бирор сиртга таяниб турган жисм сирпаниш олдида (мувозанат чегарасида) бўлса, ишқаланиш кучи энг катта қийматга эга бўлади (68-расм), яъни

$$\overline{R}_{max} = \overline{N} + \overline{F}_{max}. \tag{7.5}$$



68- расм.



69- расм.

Ишқаланиш кучи энг катта қийматга эришганда тўла реакция кучи $\bar{R}_{\max}$ нинг нормал реакция кучи $\bar{N}$ билан ташкил қилган $\varphi_{\max}$ бурчаги *ишқаланиш бурчаги* дейилади. 68-расмдан кўриниб турибдики,

$$\mathrm{tg}\,\varphi_{\max} = \frac{F_{\max}}{N} = \frac{fN}{N} = f. \qquad (7.6)$$

Шундай қилиб, ишқаланиш бурчагининг тангенси ишқаланиш коэффициентига тенг бўлар экан. Силжитувчи $\bar{Q}$ куч жисмга турли йўналишда таъсир этиши мумкин бўлганидан энг катта ишқаланиш кучи ҳам уринма текислигида ўз йўналишини ўзгартиради. A нуқтадаги нормал реакция кучига нисбатан ҳар бир йўналишга тегишли тўлиқ реакция кучини ишқаланиш бурчаги $\varphi_{\max}$ остида ўтказсак, унинг геометрик ўрни конус сиртидан иборат бўлади. Бу конус *ишқаланиш конуси* дейилади.

Тажрибаларнинг кўрсатишича, ёғоч учун ишқаланиш конусининг асоси эллипсдан иборат бўлади.

Мисол тариқасида бир нуқтаси билан қўзғалмас сиртга таянадиган жисмнинг мувозанатини текширамиз (69-расм). Таяниш нуқтасини A билан белгилаймиз. Жисм мувозанатда бўлиши учун жисмга таъсир этаётган кучларнинг тенг таъсир этувчиси $\bar{R}'$ A нуқтада пайдо бўладиган тўлиқ реакция кучи $\bar{R}_A$ га миқдор жиҳатдан тенг, йўналиши эса қарама-қарши бўлиши керак.

A нуқтада ишқаланиш конусини ясаймиз. Жисм мувозанатда бўлганда R_A кучнинг таъсир чизиғи ишқаланиш конуси ичида ётади, мувозанат чегарасида (сирпаниш олдида) эса конус сиртида ётиши мумкин. Шу сабабли $\bar{R}_A$ куч $\bar{R}'$ кучни ишқаланиш конуси ичидагина мувозанатлай олади. Тенг таъсир этувчи кучнинг нормал реакция кучи $\overline{N}$ билан ташкил қилган бурчагини α билан белгиласак, $\alpha = \varphi_{\max}$ бўлганда жисм мувозанат чегарасида бўлади; $\alpha > \varphi_{\max}$ бўлса, жисм сирпана бошлайди. Шундай қилиб, *бир нуқтаси билан қўзғалмас сиртга таянган жисм мувозанатда бўлиши учун бу жисмга таъсир этаётган кучларнинг тенг таъсир этувчиси ишқаланиш конусидан ташқарида бўлмаслиги керак.*

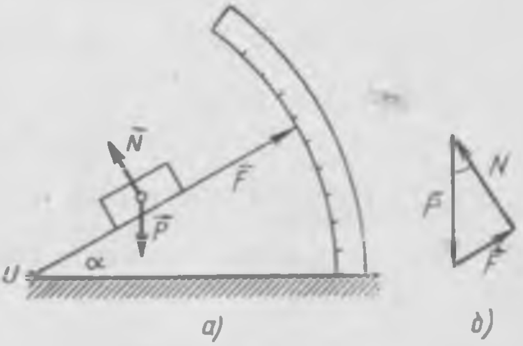
39-§. Ишқаланиш бурчагини тажриба йўли билан аниқлаш

Оғирлиги P га тенг бўлган жисмни горизонт билан α бурчак ташкил қилувчи қия текисликка қўямиз (70-расм, *а*). O нуқта қўзғалмас бўлиб, α бурчакни шкала бўйича ўлчаб ўзгартириш мумкин. α бурчакни орттира бориб жисмнинг сирпаниш олдидаги (мувозанат чегарасидаги) $\alpha_{\max}$ бурчакни топиш мумкин. Жисм бир нуқтада кесишувчи $\overline{P}$, $\overline{N}$, $\overline{F}$ кучлар таъсирида мувозанатда бўлиши учун мазкур кучларга қурилган кучлар учбурчаги ёпиқ бўлиши керак (70-расм, *б*). Кучлар учбурчагидан $\operatorname{tg}\alpha = \frac{F}{N}$, мувозанат чегарасида $\operatorname{tg}\alpha_{\max} = \frac{F_{\max}}{N} = \frac{fN}{N} = f$. Буни (7.6) билан солиштириб $\alpha_{\max} = \varphi_{\max}$ эканлигига ишонч ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, шкаладан аниқланган $\alpha_{\max}$ бурчакнинг қиймати ишқаланиш бурчагига тенг бўлар экан.

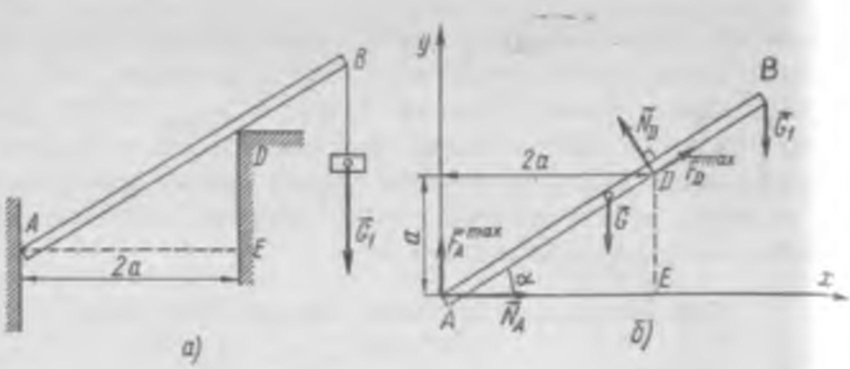
Бинобарин, қия текисликдаги жисм мувозанатда бўлиши учун $\alpha \leqslant \varphi_{\max}$ шарт бажарилиши, яъни текисликнинг қиялик бурчаги ишқаланиш бурчагидан катта бўлмаслиги зарур.

13-масала. Оғирлиги G га тенг бир жинсли ингичка AB стержень A учи билан вертикал деворга ва D нуқтасида қиррага таянади. B учига оғирлиги $G_1 = \frac{G}{2}$ га тенг юк осилган. Масофалар: $AE = 2a$, $DE = a$; стержень билан девор орасидаги ва қирра билан стержень орасидаги ишқаланиш коэффициентлари $f_A = 0{,}3$; $f_D = 0{,}3$ берилган.

A учи пастга сирпанмаслиги учун стерженнинг энг қисқа узунлиги, шунингдек, A ва D нуқталарнинг нормал реакциялари $\overline{N}_A$, $\overline{N}_D$ аниқлансин (71-расм, *а*).



70-расм.



71- расм.

Ечиш. Стержень ҳаракатланиши олдидаги мувозанат ҳолатида унга таъсир этувчи кучларни кўрсатамиз. Стерженга берилган $\bar{G}$ ва $\bar{G}_1$ кучлар, A ва D нуқталарда нормал реакция кучлари $\bar{G}$, $\bar{N}_A$, $\bar{N}_D$ ҳамда сирпаниш йўналишига тескари йўналган энг катта ишқаланиш кучлари $\bar{F}_A^{\max}$, $\bar{F}_D^{\max}$ таъсир этади (71- расм, *б*). $\bar{F}_A^{\max}$ ва $\bar{F}_D^{\max}$ кучларнинг қиймати (7.3) га асосан аниқланади:

$$F_A^{\max} = f_A N_A, \quad F_D^{\max} = f_D N_D. \qquad (1)$$

Стерженнинг узунлигини l билан белгилаймиз. 71- расмдан:

$$AD = \sqrt{(AE)^2 + (ED)^2} = a\sqrt{5}\,,$$

$$\cos\alpha = \frac{AE}{AD} = \frac{2}{\sqrt{5}}; \quad \sin\alpha = \frac{ED}{AD} = \frac{1}{\sqrt{5}}\,.$$

Стерженга таъсир этувчи кучлар бир текисликда ётувчи кучлар системаси бўлгани учун мувозанат тенгламаларини (6.22) кўринишида тузамиз:

$$\sum X_k = 0; \; N_A - N_D \sin\alpha + F_D^{\max} \cos\alpha = 0, \qquad (2)$$

$$\sum Y_k = 0; \; F_A^{\max} - G + N_D \cos\alpha + F_D^{\max} \sin\alpha - G_1 = 0, \qquad (3)$$

$$\sum M_A \; (\bar{F}_k) = 0; \; -G\cdot\frac{l}{2}\cos\alpha + N_D a\sqrt{5} - G_1 l \cos\alpha = 0. \qquad (4)$$

(1) ни (2) ва (3) га қўямиз:

$$N_A - N_D \sin\alpha + f_D N_D \cos\alpha = 0, \qquad (5)$$

$$f_A N_A - G + N_D \cos\alpha + f_D N_D \sin\alpha - \frac{G}{2} = 0. \qquad (6)$$

(5) ва (6) тенгламаларни биргаликда ечиб N_A ва N_D ларни аниқлаймиз:

$$N_A = \frac{3G\,(\sin\alpha - f_D \cos\alpha)}{2[(f_A + f_D)\sin\alpha + (1 + f_A f_D)\cos\alpha]}\,,$$

$$N_D = \frac{3G}{2\,[(f_A+f_D)\,\sin\alpha+(1-f_A\,f_D)\cos\alpha]}.$$

f_A, f_D, $\sin\alpha$ ва $\cos\alpha$ ларнинг қийматларини қўйсак, $N_A = 0{,}38G$, $N_D = 0{,}63\sqrt{5}\,G$ ҳосил бўлади.

N_D ва $\cos\alpha$ ларнинг қийматларини (4) га қўйиб, стерженнинг узунлигини аниқлаймиз:

$$-G\frac{l}{2}\frac{2}{\sqrt{5}}+0{,}63\sqrt{5}G \quad a\sqrt{5}-\frac{G}{2}\,l\,\frac{2}{\sqrt{5}} = 0,$$

бундан $l = 1{,}575\sqrt{5}\;a$, яъни

$$AB = 1{,}575\,AD.$$

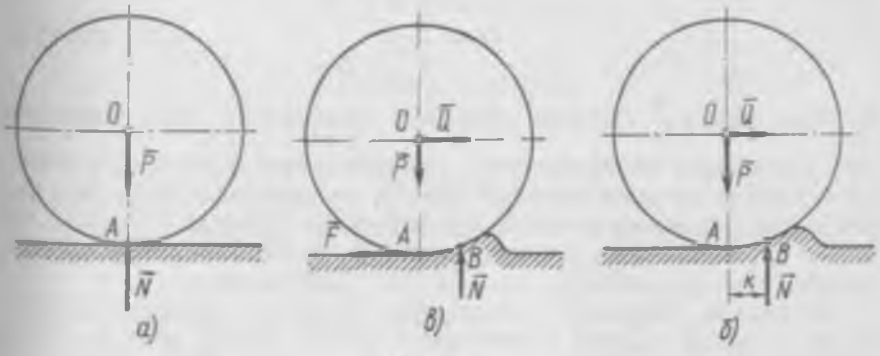
Стержень DB қисмининг узунлиги $DB = AB - AD = 0{,}575\,AD$.

40-§. Думалашдаги ишқаланиш

Оғирлиги P ва радиуси R га тенг цилиндр горизонтал текисликда турган бўлсин, у ҳолда цилиндрнинг оғирлик кучи P текисликнинг A нуқтадаги нормал реакция кучи $\overline{N}$ билан мувозанатлашади (72-расм, *а*):

$$\overline{N}+\overline{P}=0.$$

Цилиндрнинг марказига унча катта бўлмаган горизонтал $\overline{Q}$ куч таъсир этса, цилиндр мувозанат ҳолатида қолаверади. Бундай ҳолда цилиндр билан текисликнинг деформацияланиши натижасида ишқаланиш A нуқтада ҳосил бўлмай, икки жисмнинг бир-бирига тегиб турган (эзилган) юзасида ҳосил бўлади. Эзилиш юзаси уриниш нуқтаси A дан жисмнинг думалаш томонида жойлашади. Эзилган юзанинг ҳар бир нуқтасида ҳосил бўладиган N нормал реакция кучларининг тенг таъсир этувчиси A нуқтага эмас, балки эзилган юзадаги бирор B нуқтага қўйилган бўлади (72-расм, *б*). B нуқтада, $\overline{N}$ кучдан таш-



72- расм.

қари, Q кучга тескари йўналишда горизонтал сирпанишдаги ишқаланиш кучи $\overline{F}$ ҳам ҳосил бўлади (72-расм, *в*). Думаловчи жисм жуда кичик деформацияланганидан $\overline{F}$ кучни A нуқтага қўйилган деб қараш мумкин. $\overline{F}$ билан $\overline{Q}$ елкаси R га тенг бўлган жуфт кучни ташкил этиб, цилиндрни думалатишга интилади. B нуқтадаги $\overline{N}$ куч билан $\overline{P}$ оғирлик кучи жуфт кучни ташкил этади. Бу жуфт куч ($\overline{Q}$, $\overline{F}$) жуфт кучнинг таъсирига тескари йўналишда цилиндрнинг думалашига қаршилик кўрсатади. Шундай қилиб, цилиндрга моментлари бир-бирига қарама-қарши йўналган ($\overline{Q}$, $\overline{F}$) ва ($\overline{P}$, $\overline{N}$) жуфт кучлар таъсир этади. ($\overline{Q}$, $\overline{F}$) жуфт кучнинг моменти ($\overline{P}$, $\overline{N}$) нинг моментига тенг бўлгандагина цилиндр сирт устида думалаш олдида туради. Цилиндрнинг думалашига қаршилик кўрсатувчи ($\overline{P}$, $\overline{N}$) жуфт куч *думалашдаги ишқаланиш жуфт кучи*, бу жуфт кучнинг $\overline{M}$ моменти *думалашдаги ишқаланиш моменти* дейилади. Думалашдаги ишқаланиш моменти $M = kN$ бирор M_{max} дан катта бўла олмайди, яъни

$$0 \leqslant M \leqslant M_{max}. \qquad (7.7)$$

Тажрибаларнинг кўрсатишича, думалашдаги ишқаланиш моментининг энг катта қиймати нормал босимга мутаносиб бўлади:

$$M_{max} = \delta \cdot N. \qquad (7.8)$$

Бунда $\delta > k$ бўлиб, *думалашдаги ишқаланиш коэффициенти* дейилади ва у узунлик бирлигида ўлчанади. Тажрибаларнинг кўрсатишича, думалашдаги ишқаланиш коэффициенти жисмларнинг материалига, ишқаланувчи сиртларнинг ишланиш даражасига, ғилдиракнинг радиусига ва нормал босимга боғлиқ бўлади. Ғилдирак думалаши олдида

$$|\overline{M}_A(\overline{Q})| = |\overline{M}_A(\overline{N})|$$

ёки

$$Q \cdot R = \delta \cdot N,$$

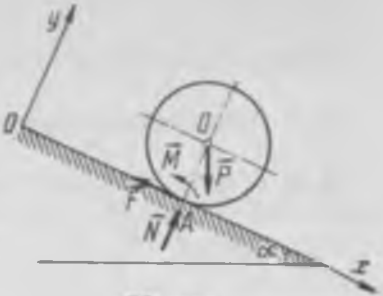
бундан

$$Q = \frac{\delta}{R} N. \qquad (7.9)$$

Бу формуладаги $\frac{\delta}{R}$ катталик кўпчилик материаллар учун сирпанишдаги ишқаланиш коэффициенти f дан анча кичик бўлади. Шу сабабли техникада кўпинча сирпанма ҳаракат ғилдираклар, ғалтаклар, шарикли подшипниклар, роликли подшипниклар ёрдамида бўладиган думалаш ҳаракати билан алмаштирилади. Бу ҳолда жисмни сирпантиришдан кўра думалатиш учун кам куч талаб этилади.

14-масала. Оғирлиги P ва радиуси R га тенг ғилдирак горизонт билан α бурчак ташкил этувчи қия текислик бўйлаб думаламаслиги учун α бурчакнинг қиймати қандай бўлиши керак (73-расм)? Ғилдиракнинг думалашдаги ишқаланиш коэффициенти δ ва сирпанишдаги ишқаланиш коэффициенти f берилган.

Ечиш. Ғилдиракка оғирлик кучи P, сирпанишдаги ишқаланиш кучи $\overline{F}$, текисликнинг нормал реакция кучи $\overline{N}$ ва моменти $\overline{M}$ га тенг бўлган думалашдаги ишқаланиш жуфт кучи таъсир этади. Булар текисликдаги кучлар системасини ташкил этади. Ax ўқни қия текислик бўйлаб, Oy ўқни унга перпендикуляр ҳолда йўналтириб, ғилдиракнинг мувозанат тенгламаларини (6.22) га мувофиқ тузамиз:



73- расм.

$$\sum X_k = 0; \quad P\sin\alpha - F = 0, \tag{1}$$

$$\sum Y_k = 0; \; -P\cos\alpha + N = 0, \tag{2}$$

$$\sum M_A\ (\overline{F}_k) = 0; \; M - P\cdot R\sin\alpha = 0. \tag{3}$$

(1) дан $F = P\sin\alpha$, (2) дан $N = P\cos\alpha$. (7.1) ва (7.3) га асосан

$$P\sin\alpha \leqslant f P\cos\alpha$$

келиб чиқади. Охирги ифодадан

$$\operatorname{tg}\alpha \leqslant f.$$

(3) дан ғилдиракнинг қия текислик бўйлаб думаламаслик шартини аниқлаймиз:

$$P\cdot R\sin\alpha = M.$$

(7.7) ва (7.8) га асосан

$$M \leqslant \delta\cdot N = \delta\cdot P\cos\alpha.$$

Шунинг учун

$$P R\sin\alpha \leqslant \delta\cdot P\cos\alpha,$$

бундан

$$\operatorname{tg}\alpha \leqslant \frac{\delta}{R}.$$

$\frac{\delta}{R}$ катталик f дан кичик бўлгани учун

$$0 \leqslant \alpha \leqslant \operatorname{arc\,tg}\frac{\delta}{R}. \tag{4}$$

(4) муносабат ғилдиракнинг қия текислик бўйлаб думаламаслик шартини ифодалайди.

VIII боб

ПАРАЛЛЕЛ КУЧЛАР МАРКАЗИ ВА ОҒИРЛИК МАРКАЗИ

41-§. Бир томонга йўналган иккита параллел кучни қўшиш

A ва B нуқталарга бир томонга йўналган $\overline{F}_1$ ва $\overline{F}_2$ кучлар қўйилган бўлсин (74-расм). A ва B нуқталарга таъсир чизиқлари AB да ётувчи ихтиёрий $(\overline{F}_3, \overline{F}_4) \backsim 0$ системани қўямиз. A ва B нуқталарга қўйилган $\overline{F}_1$ ва $\overline{F}_3$ ҳамда $\overline{F}_2$ ва $\overline{F}_4$ кучларни параллелограмм қоидасига асосан қўшиб $\overline{R}_1 = \overline{F}_1 + \overline{F}_3$ ва $\overline{R}_2 = \overline{F}_2 + \overline{F}_4$ кучларни оламиз. $\overline{R}_1$ ва $\overline{R}_2$ кучларнинг таъсир чизиқларини давом эттириб, уларнинг кесишган нуқтасини O билан белгилаймиз. O нуқтага $\overline{R}_1$ ва $\overline{R}_2$ кучларни кўчириб, $\overline{R}_1$ ни $\overline{F}_1$, $\overline{F}_3$ кучларга, $\overline{R}_2$ ни $\overline{F}_2$, $\overline{F}_4$ кучларга ажратамиз. O нуқтага қўйилган $(\overline{F}_3, \overline{F}_4) \backsim 0$ бўлгани учун A ва B нуқталарга қўйилган $\overline{F}_1$ ва $\overline{F}_2$ кучлар ўрнига O нуқтага қўйилган, OC бўйлаб йўналган $\overline{F}_1$ ва $\overline{F}_2$ кучларга эга бўлдик. Бу кучларнинг тенг таъсир этувчиси уларнинг алгебраик йиғиндисига тенг:

$$R' = F_1 + F_2. \tag{8.1}$$

$\overline{R}'$ ни таъсир чизиғи бўйлаб C нуқтага кўчирамиз. Расмдаги $\triangle OAC \backsim \backsim \triangle OA_1A_2$, $\triangle OCB \backsim \triangle OB_1B_2$ учбурчаклар ўхшашлигидан қуйидаги пропорцияларни тузамиз:

$$\frac{AC}{F_3} = \frac{OC}{F_1}; \quad \frac{CB}{F_4} = \frac{OC}{F_2}.$$

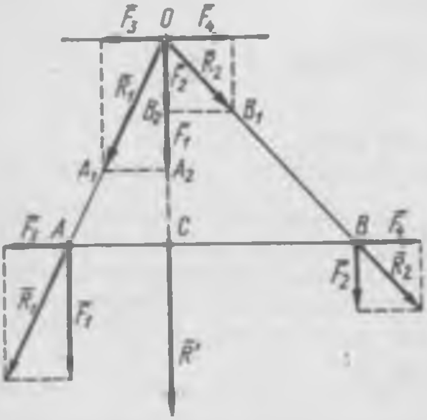
$F_3 = F_4$ эканлигини эътиборга олсак,

$$\frac{F_1}{CB} = \frac{F_2}{AC} \tag{8.2}$$

ҳосил бўлади. Пропорциянинг хоссасига кўра

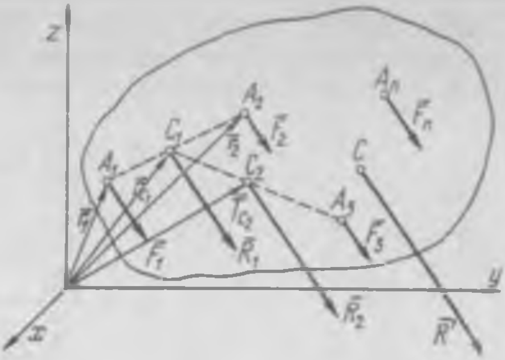
$$\frac{F_1}{CB} = \frac{F_2}{AC} = \frac{R'}{AB}. \tag{8.3}$$

(8.1) ва (8.3) дан қуйидаги натижа келиб чиқади: *бир томонга йўналган икки параллел кучнинг тенг таъсир этувчиси шу кучларнинг алгебраик йиғиндисига тенг бўлиб, йўналиши мазкур кучлар йўналишида, тенг таъсир этувчининг таъсир чизиғи эса бу кучлар қўйилган нуқталар орасидаги масофани шу кучларга тескари мутаносиб бўлакларга бўлади.*



74- расм.

42-§. Параллел кучлар маркази



75- расм.

Фазода бир томонга йўналган параллел $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n$ кучлар жисмнинг $A_1, A_2, \ldots, A_n$ нуқталарига қўйилган бўлсин. Шу кучларнинг тенг таъсир этувчиси $\overline{R}'$ ни ва унинг қўйилган нуқтаси C нинг координаталарини аниқлаймиз. Бунинг учун бирор $Oxyz$ координаталар системасига нисбатан $A_1, A_2, \ldots, A_n$ нуқталарнинг радиус-векторларини $\overline{r}_1, \overline{r}_2, \ldots, \overline{r}_n$ билан белгилаймиз (75-расм). Даставвал $\overline{F}_1$ ва $\overline{F}_2$ кучларни қўшамиз:

$$R_1 = F_1 + F_2. \tag{8.4}$$

$\overline{R}_1$ қўйилган C_1 нуқтанинг радиус-вектори $\overline{r}_{C_1}$ ни (8.2) дан фойдаланиб аниқлаймиз:

$$\frac{F_1}{C_1A_2} = \frac{F_2}{A_1C_1} \text{ ёки } \frac{\overline{A_1C_1}}{F_2} = \frac{\overline{C_1A_2}}{F_1}. \tag{8.5}$$

Расмдан

$$\overline{A_1C_1} = \overline{r}_{C_1} - \overline{r}_1, \quad \overline{C_1A_2} = \overline{r}_2 - \overline{r}_{C_1}, \tag{8.6}$$

(8.6) ни (8.5) га қўйиб, $\overline{R}_1$ куч қўйилган C_1 нуқтанинг радиус-вектори $\overline{r}_{C_1}$ ни аниқлаймиз:

$$\overline{r}_{C_1} = \frac{F_1\overline{r}_1 + F_2\overline{r}_2}{F_1 + F_2}. \tag{8.7}$$

Энди $\overline{R}_1$ куч билан $\overline{F}_3$ кучни қўшамиз:

$$R_2 = R_1 + F_3 = F_1 + F_2 + F_3 = \sum_{k=1}^{3} F_k. \tag{8.8}$$

Бу куч $\overline{F}_3$ кучга параллел йўналади. $\overline{R}_2$ куч қўйилган нуқтанинг радиус-вектори (8.7) га асосан қуйидагича аниқланади:

$$r_{C_2} = \frac{R_2\overline{r}_{C_1} + F_3\overline{r}_3}{R_1 + F_3} = \frac{(F_1 + F_2)\dfrac{F_1\overline{r}_1 + F_2\overline{r}_2}{F_1 + F_2} + F_3\overline{r}_3}{F_1 + F_2 + F_3} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{3} F_k\overline{r}_k}{\sum\limits_{k=1}^{3} F_k} \tag{8.9}$$

Худди шунингдек, n та параллел кучларни қўшиш натижасида C нуқтага қўйилган битта тенг таъсир этувчи $\overline{R'}$ кучни оламиз. (8.4), (8.8), (8.7), (8.9) муносабатларга асосан

$$R' = \sum_{k=1}^{n} F_k, \tag{8.10}$$

$$\overline{r}_c = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} F_k \overline{r}_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} F_k}. \tag{8.11}$$

$\overline{R}'$ куч берилган $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n$ кучларга параллел йўналади. (8.11) формула ёрдамида аниқланадиган C нуқта *параллел кучлар маркази* дейилади.

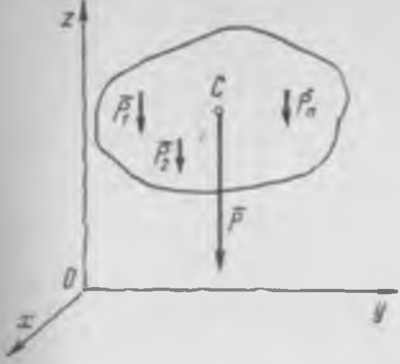
$\overline{r}_c$ ва $\overline{r}_k$ векторларнинг координата ўқларидаги проекцияларини мос равишда x_c, y_c, z_c, x_k, y_k, z_k орқали белгиласак, (8.11) дан параллел кучлар маркази C нуқтанинг координаталарини аниқлайдиган қуйидаги муносабатларни оламиз:

$$x_c = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} F_k x_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} F_k}, \quad y_c = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} F_k y_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} F_k}, \quad z_c = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} F_k z_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} F_k}. \tag{8.12}$$

(8.11), (8.12) формулалардан кўрамизки, тенг таъсир этувчи қўйилган C нуқта ҳолати кучларнинг йўналишига боғлиқ бўлмай, фақат уларнинг миқдорига ва қўйилган нуқталарининг координаталарига боғлиқ бўлади. Шунга асосан, агар кучлар қўйилган нуқталарни ўзгартирмай, барча кучларни бирор α бурчакка бурсак, бу кучларнинг тенг таъсир этувчиси ҳам шу бурчакка бурилиб, қўйилган нуқтасининг ҳолати ўзгармайди.

43-§. Қаттиқ жисмнинг оғирлик маркази координаталарининг умумий формулалари

Бирор қаттиқ жисмнинг ҳар бир бўлагига ернинг марказига йўналган тортиш кучи (оғирлик кучи) таъсир этади. Бу кучларни $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2, \ldots, \overline{P}_n$ билан белгилаймиз. Ернинг радиусига нисбатан жисмнинг ўлчамлари жуда кичик бўлгани учун бу кучларни параллел кучлар деб қараш мумкин. Бу параллел кучларнинг маркази — C нуқта жисмнинг оғирлик маркази бўлади (76-расм). (8.12) да $\overline{F}_k$ кучларнинг ўрнига $\overline{P}_k$ кучларни олсак, *жисмнинг оғирлик маркази координаталарини* топамиз:



76- расм.

$$\left.\begin{aligned} x_c &= \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} P_k x_k}{P}, \\ y_c &= \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} P_k y_k}{P}, \\ z_c &= \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} P_k z_k}{P}. \end{aligned}\right\} \quad (8.13)$$

Бу формулада $P = \sum\limits_{k=1}^{n} P_k$ жисмнинг оғирлигини ифодалайди.

Агар жисм бир жинсли бўлса, оғирлик маркази унинг қандай материалдан ташкил топганига боғлиқ бўлмай, фақат геометрик шаклига боғлиқ бўлади.

Оғирлиги P га тенг бўлган жисм V ҳажмга эга бўлсин. У ҳолда жисмни n та бўлакдан иборат деб қараймиз. Оғирлиги P_k га тенг бўлган бўлакча ҳажмини ΔV_k билан белгиласак, $P_k = \gamma_k \Delta V_k$ бўлади. Бу ерда γ ҳажм бирлигига тўғри келган оғирликни ифодалайди. Агар жисм бир жинсли бўлса, $\gamma_k = \gamma = \text{const}$ бўлади. Келгусида бир жинсли жисмларнинг оғирлик марказини аниқлаймиз. Шу сабабли

$$P_k = \gamma \cdot \Delta V_k. \quad (8.14)$$

Буни эътиборга олиб, (8.13) га асосан, *ҳажмга эга бўлган бир жинсли жисмнинг оғирлик маркази координаталари* учун қуйидаги ифодаларни оламиз:

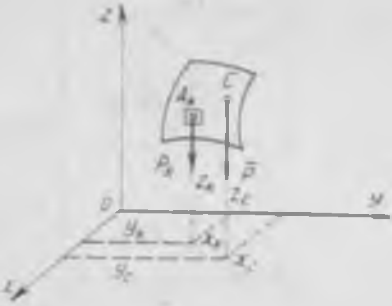
$$x_c = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \Delta V_k x_k}{V}, \quad y_c = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \Delta V_k y_k}{V}, \quad z_c = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \Delta V_k z_k}{V}. \quad (8.15)$$

Бу формулада $V = \sum\limits_{k=1}^{n} \Delta V_k$ бутун жисм ҳажмини ифодалайди. (8.15) да n чексизликка интилса, $\Delta V_k \to 0$. У ҳолда йиғиндиларнинг лимити ҳажм бўйича олинган аниқ интегрални ифодалайди:

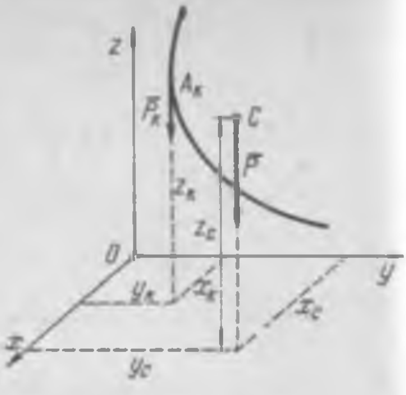
$$x_c = \frac{\int\limits_{(V)} x dV}{V}, \quad y_c = \frac{\int\limits_{(V)} y dV}{V}, \quad z_c = \frac{\int\limits_{(V)} z dV}{V}, \quad (8.16)$$

бунда $V = \int\limits_{(V)} dV$ — бутун жисм ҳажми.

Сирт оғирлик марказининг координаталари ҳам худди юқоридагидек аниқланади:



77- расм.



78- расм.

$$x_c = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \Delta S_k x_k}{S}, \; y_c = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \Delta S_k y_k}{S}, \; z_c = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \Delta S_k z_k}{S} \qquad (8.17)$$

ёки

$$x_c = \frac{\int\limits_{(S)} xdS}{S}, \; y_c = \frac{\int\limits_{(S)} ydS}{S}, \; z_c = \frac{\int\limits_{(S)} zdS}{S}. \qquad (8.18)$$

Бунда S бутун сирт юзасини, x_k, y_k, z_k сирт бўлаклари оғирлик марказининг координаталарини ифодалайди (77- расм).

Чизиқнинг оғирлик маркази қуйидаги формулалардан аниқланади:

$$x_c = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \Delta l_k x_k}{L}, \; y_c = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \Delta l_k y_k}{L}, \; z_c = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \Delta l_k z_k}{L}, \qquad (8.19)$$

бунда: $L = \sum\limits_{k=1}^{n} \Delta l_k$ бутун чизиқнинг узунлигини, Δl_k чизиқ бирор бўлагининг узунлигини, x_k, y_k, z_k лар эса шу бўлак оғирлик марказининг координаталарини ифодалайди (78- расм). (8.19) формулаларнинг интегралли ифодаси қуйидагича бўлади:

$$x_c = \frac{\int\limits_{(L)} xdl}{L}, \; y_c = \frac{\int\limits_{(L)} ydl}{L}, \; z_c = \frac{\int\limits_{(L)} zdl}{L}. \qquad (8.20)$$

44-§. Жисмларнинг оғирлик марказини аниқлаш усуллари

Симметрия усули. Агар жисм симметрия текислигига эга бўлса, жисмнинг оғирлик маркази симметрия текислигида ётади (79-расм). Буни исбот қилиш учун симметрия текислиги орқали Oxy текисликни ўтказамиз. У ҳолда ҳажми ΔV_k га тенг жисмнинг ҳар бир A_k $(x_k,$ $y_k,$ $z_k)$ заррачасига A'_k $(x_k,$ $y_k - z_k)$ заррачаси мос келади. Шу сабабли

$$z_c = \frac{\sum \Delta V_k z_k}{V} = 0$$

бўлади.

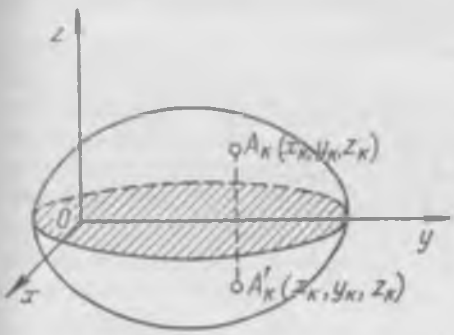
Жисм симметрия ўқига эга бўлса, шу ўқ бўйлаб O_z ўқни йўналтирамиз (80-расм). У ҳолда жисмнинг ҳар бир A_k $(x_k,$ $y_k,$ $z_k)$ заррачасига A'_k $(-x_k,$ $-y_k,$ $z_k)$ заррача мос келади. Шу сабабли

$$x_c = \frac{\sum \Delta V_k x_k}{V} = 0, \quad y_c = \frac{\sum \Delta V_k x_k}{V} = 0.$$

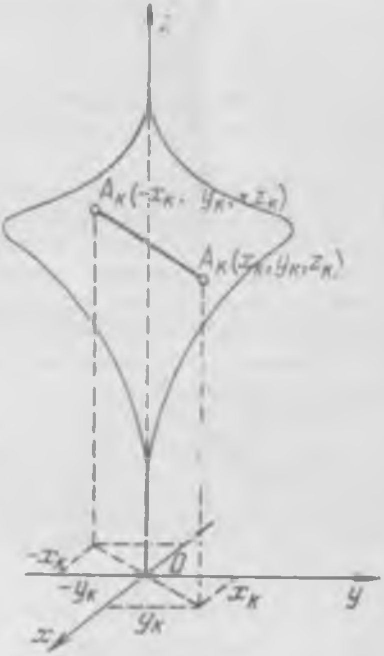
Шундай қилиб, жисм симметрия ўқига эга бўлса, унинг оғирлик маркази шу симметрия ўқида бўлар экан. Худди шунингдек, жисм симметрия марказига эга бўлса, унинг оғирлик маркази шу симметрия марказида ётиши исботланади.

Жисмни бўлакларга ажратиш усули. Агар жисмни оғирлик марказлари маълум бўлган бир неча қисмларга ажратиш мумкин бўлса, у ҳолда бундай жисмнинг оғирлик маркази (8.14), (8.17), (8.19) формулалар ёрдамида аниқланади.

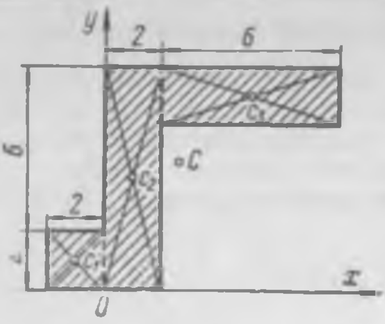
15-масала. 81-расмдаги жисм юзасининг оғирлик маркази аниқлансин. Барча ўлчамлар сантиметрда берилган.



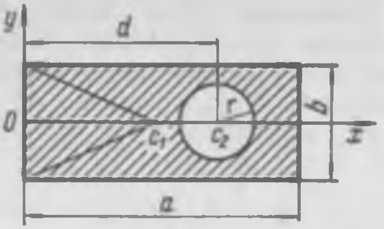
79-расм.



80-расм.



81- расм.



82- расм.

Ечиш. Координата ўқларини ўтказиб, жисм юзасини учта тўртбурчакка бўламиз (бўлиш чизиқлари штрих билан кўрсатилган). Ҳар бир бўлаги оғирлик марказининг координаталарини ва юзларини аниқлаймиз: C_1 (— 1; 1), C_2 (1; 4), C_3 (5; 7), $S_1 = 4$ см², $S_2 = 16$ см², $S_3 = 12$ см². Берилган шаклнинг оғирлик марказини (8.17) формулага асосан аниқлаймиз:

$$x_c = \frac{S_1x_1 + S_2x_2 + S_3x_3}{S_1 + S_2 + S_3} = \frac{4\cdot(-1) + 16\cdot1 + 12\cdot5}{4 + 16 + 12} = 2\,\frac{1}{4}\ \text{см};$$

$$y_c = \frac{S_1y_1 + S_2y_2 + S_3y_3}{S_1 + S_2 + S_3} = \frac{4\cdot1 + 16\cdot4 + 12\cdot7}{4 + 16 + 12} = 4\,\frac{3}{4}\ \text{см}.$$

C нуқтани расмда кўрсатамиз. Бу мисолдан кўрамизки, жисмнинг оғирлик маркази геометрик нуқта бўлиб, жисмнинг ўзида ётиши шарт эмас экан.

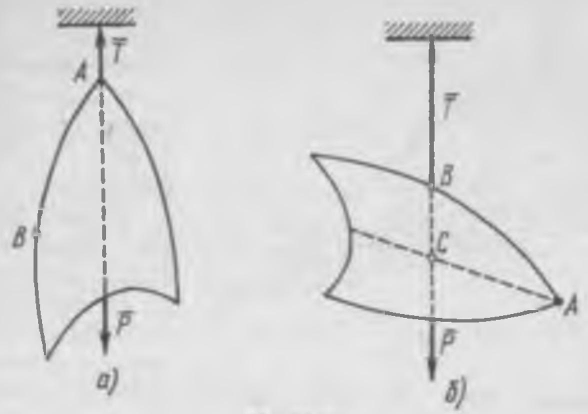
Манфий юза (ҳажм) усули. Агар жисмнинг бирор қисми қирқиб ташланган бўлса, бундай тешик жисмнинг оғирлик маркази манфий юзани (ёки ҳажм) қўшиш усули билан аниқланади. Бу усулнинг моҳияти шундан иборатки, жисмни қирқилмаган бутун жисм ва қирқилган жисмдан иборат деб қаралади; қирқилган бўлак юзаси шартли равишда манфий ишора билан олинади.

16- масала. 82- расмдаги жисмнинг оғирлик маркази аниқлансин. Ўлчамлар расмда берилган.

Ечиш. *Ox* ўқни жисмнинг симметрия ўқи бўйлаб йўналтирамиз. У ҳолда жисмнинг оғирлик маркази бу ўқда ётади. Шу сабабли $y_c = 0$ бўлади. x_c ни аниқлаш учун жисмни қирқилмаган тўртбурчак юзасидан ва юзаси манфий қийматга эга бўлган *r* радиусли доирадан иборат деб қараймиз. У ҳолда

$$x_1 = \frac{a}{2},\ x_2 = d,$$

$$S_1 = ab,\ S_2 = -\pi r^2.$$



83- расм.

Топилган қийматларни (8.8) га қўямиз:

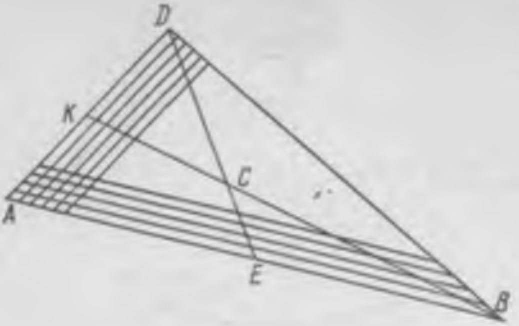
$$x_c = \frac{S_1x_1 + S_2x_2}{S_1 + S_2} = \frac{ab\cdot\frac{a}{2} - \pi r^2\cdot d}{ab - \pi r^2} = \frac{a^2b - 2\pi r^2d}{2\,(ab - \pi r^2)};\ y_c = 0.$$

Тажриба усули. Юзага эга бўлган жисмни аввал A нуқтасидан, сўнгра B нуқтасидан ипга осамиз (83- расм, *а*, *б*). У ҳолда жисм оғирлик кучи P ва ипнинг таранглик кучи $\overline{T}$ таъсирида мувозанатда бўлади. Ипнинг таранглик кучи $\overline{T}$ вертикал юқорига йўналганлиги сабабли, оғирлик кучи $\overline{P}$ унга тескари йўналади ва таранглик кучи ётган чизиқда ётади. Жисмда иккала ҳолат учун мос равишда A ва B нуқталар орқали оғирлик кучининг таъсир чизиғини ўтказсак, бу чизиқларнинг кесишган нуқтаси жисмнинг оғирлик марказини ифодалайди.

45- §. Оддий шаклли баъзи жисмларнинг оғирлик марказларини аниқлаш

Учбурчак юзасининг оғирлик маркази. Ихтиёрий ABD учбурчак юзасининг оғирлик марказини аниқлаш учун учбурчак юзасини AB томонга параллел бўлган кичик бўлакларга ажратамиз (84- расм). Бу бўлакларнинг оғирлик маркази DE медианада ётади. Худди шунингдек, учбурчак юзасини AD томонга параллел бўлган бўлакларга ажратсак, бу бўлакчаларнинг оғирлик маркази BK медианада ётади. Шундай қилиб, *учбурчак юзасининг оғирлик маркази унинг медианалари кесишган нуқтасида ётишини кўрамиз.* Геометриядан маълумки, медианаларнинг кесишган нуқтаси асосдан медиананинг $\frac{1}{3}$ қисмида ётади.

Учбурчак юзасининг оғирлик марказини билган ҳолда ихтиёрий кўпбурчак юзасининг оғирлик марказини аниқлашимиз мумкин. Бу-



84- расм.

нинг учун кўпбурчак юзасини бир неча учбурчакларга ажратиб (8.18), формула ёрдамида кўпбурчак юзаси оғирлик марказининг координаталари аниқланади.

Айлана ёйининг оғирлик маркази. Радиуси R га, марказий бурчаги 2α га тенг бўлган айлана ёйи ($\smile AB$) нинг оғирлик марказини аниқлаймиз. Бунинг учун Ox ўқни айлана ёйининг симметрия ўқи бўйлаб йўналтирамиз (85- расм). У ҳолда айлана ёйининг оғирлик маркази шу Ox ўқда ётади ($y_c=0$). 85- расмдан $dl=Rd\varphi$, $x=R\cos\varphi$, $L=\smile AB=2R\alpha$ эканлигини эътиборга олиб, (8.20) формулаларнинг биринчисини қуйидагича ёзиш мумкин:

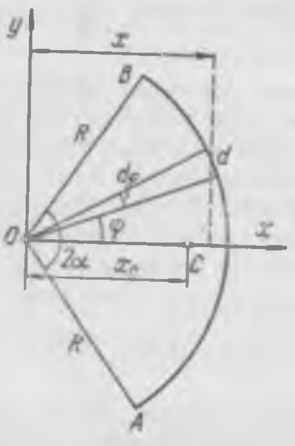
$$x_c=\frac{\int\limits_{(L)} xdl}{L}=\frac{\int\limits_{-\alpha}^{+\alpha} R^2\cos\varphi\, d\varphi}{2R\alpha}=\frac{R\sin\alpha}{\alpha}.$$

Демак, берилган *айлана ёйи оғирлик марказининг координатаси*

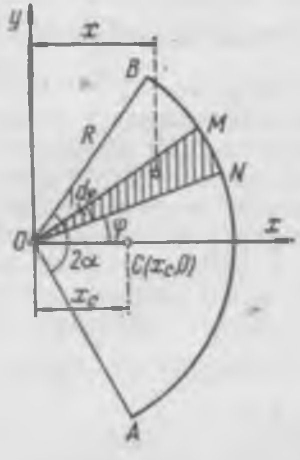
$$x_c=\frac{R\sin\alpha}{\alpha} \tag{8.21}$$

формула ёрдамида аниқланади.

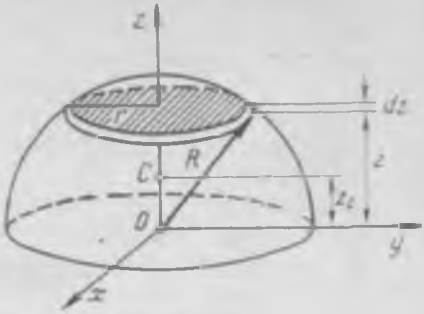
Доира секторининг оғирлик маркази. Радиуси R га, марказий бурчаги 2α га тенг *доира секторининг оғирлик маркази* аниқлансин (86- расм).



85- расм.



86- расм.



87- расм-

Ox ўқни сектор юзининг симметрия ўқи бўйлаб йўналтирсак, оғирлик маркази шу ўқда ётади. Расмдан

$$dS = \frac{1}{2} R^2 d\varphi, \; x = \frac{2}{3} R\cos\varphi$$

эканлиги кўриниб турибди, чунки элементар *OMN* секторни баландлиги *R* га тенг учбурчак деб қарасак, $\smile MN = Rd\varphi$ оғирлик маркази *O* нуқтадан $\frac{2}{3} R$ масофада ётади. Шу сабабли (8.18) га асосан

$$x_c = \frac{\int\limits_{(S)} xdS}{\int\limits_{(S)} dS} = \frac{\int\limits_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{2}{3}\cos\varphi\cdot\frac{1}{2} R^2 d\varphi}{\int\limits_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{1}{2} R^2 d\varphi} = \frac{R}{3\alpha} \sin\varphi \Big|_{-\alpha}^{+\alpha}$$

Демак,

$$x_c = \frac{2}{3} R \frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

Яримшарнинг оғирлик маркази. Радиуси *R* га тенг бўлган яримшарнинг оғирлик марказини аниқлаймиз (87- расм). *Oz* ўқни симметрия ўқи бўйлаб йўналтирсак,

$$x_c = 0, \; y_c = 0, \; z_c = \frac{1}{V} \int\limits_{(V)} zdV. \qquad (8.22)$$

Радиуси *r* га, қалинлиги *dz* га тенг элементар дискни ажратиб оламиз. У ҳолда

$$r = \sqrt{R^2 - z^2}, \; dV = \pi r^2 dz = \pi (R^2 - z^2) \; dz.$$

Яримшарнинг ҳажми

$$V = \frac{2}{3} \pi R^3$$

бўлгани учун (8.22) қуйидагичг бўлади:

$$z_c = \frac{1}{\frac{2}{3}\pi R^3} \int\limits_0^R z\,\pi \, (R^2 - z^2) \; dz = \frac{\frac{\pi R^4}{2} - \frac{\pi R^4}{4}}{\frac{2}{3}\pi R^3} = \frac{3}{8} R.$$

Демак, *яримшарнинг оғирлик маркази*

$$z_c = \frac{3}{8} R$$

формуладан аниқланади.

КИНЕМАТИКА

46-§. Асосий тушунчалар

Назарий механиканинг *кинематика* бўлимида жисмларнинг ҳаракати мазкур жисмларнинг массаси ва уларга таъсир этувчи кучларга боғламай, фақат геометрик нуқтаи назардан текширилади.

Кинематика сўзи юнонча «кинема» сўзидан олинган бўлиб, ҳаракат деган маънони англатади.

Кинематиканинг теорема ва формулалари техникада турли машина ва механизмлар қисмларининг ҳаракатини ўрганишда назарий асос сифатида қўлланилади.

XIX асрнинг бошларида техниканинг тез суръатлар билан тараққий этиши, жумладан, машинасозликнинг ривожланиши жисм ҳаракатининг геометрик хусусиятларини текшириш масаласини илгари сурди. Шу даврдан бошлаб кинематика назарий механиканинг мустақил қисми бўлиб ажралди.

Кинематикада жисмнинг ҳаракати бошқа жисм билан боғланган саноқ системасига нисбатан текширилади. Айнан бир вақтда жисм турли саноқ системасига нисбатан турлича ҳаракатда бўлиши мумкин. Масалан, кема палубасидаги жисм кема билан боғланган саноқ системасига нисбатан ҳаракатсиз бўлса, қирғоқ билан боғланган саноқ системасига нисбатан кема билан биргаликда ҳаракатланади; агар бирор жисм Ерга нисбатан тинч турган бўлса, Қуёш билан боғланган саноқ системасига нисбатан Ер билан биргаликда ҳаракатда бўлади ва ҳоказо. Табиатда мутлақо ҳаракатсиз жисм бўлмагани туфайли, мутлақо қўзғалмас саноқ системаси ҳам мавжуд бўлмайди. Шу сабабли «ҳаракат» ва «мувозанат» тушунчалари нисбий тушунчалардир.

Техника масалаларини ечишда, одатда, Ер билан қўзғалмас боғланган саноқ системаси олинади. Ерга нисбатан қўзғалмас бўлган саноқ системаси *асосий* ёки *«қўзғалмас» саноқ системаси* дейилади. Қўзғалмас саноқ системасини танлаб олиш масаланинг қўйилишига боғлиқ бўлади. Танлаб олинган саноқ системасига нисбатан жисм вазияти вақт ўтиши билан ўзгармаса, жисм олинган системага нисбатан *тинч ҳолатда* дейилади. Агар вақт ўтиши билан мазкур саноқ системасига нисбатан жисмнинг вазияти ўзгарса, жисм шу системага нисбатан *ҳаракатда* бўлади. Жисмнинг танланган саноқ системасига нисбатан ҳар ондаги вазиятини аниқлаш мумкин бўлса, унинг ҳаракати кинематик берилган деб ҳисобланади.

Кинематикада жисмларнинг массасини эътиборга олмай, унинг геометрик образи қаралади. Классик механикада моддий жисмларнинг ҳаракати уч ўлчовли Евклид фазосига нисбатан текширилади ҳамда фазони мутлақо қўзғалмас деб қаралади. Ҳаракат ўлчовига оид катталиклар Евклид геометрияси асосида олинади.

Кинематикада учрайдиган барча чизиқли ўлчовлар (ҳаракатдаги нуқтанинг координаталари, ўтган йўлининг узунлиги ва ҳоказо) техник ва СИ системасида метрда олинади.

Механикада вақт абсолют деб ҳисобланади, яъни уни барча саноқ системалари учун (уларнинг нисбий ҳаракатидан қатъи назар) бир хилда ўтади деб қаралади. Вақт одатда t билан белгиланади ва у ҳаракатнинг аргументи ҳисобланади. Вақт ўлчови учун МКГСС системасида соат ёки минут, СИ системасида секунд (с) қабул қилинган.

Қаттиқ жисм ҳаракатини кузатар эканмиз, кўпинча унинг нуқталари турлича ҳаракат қилишини кўрамиз. Шу сабабли жисм ҳаракатини ўрганиш учун унинг нуқталари ҳаракатини ўрганишга тўғри келади. Дастлаб нуқта кинематикасини ўрганиб, ундан қаттиқ жисм кинематикасини ўрганишга ўтилади.

Кўчиш ва ҳаракат тушунчалари механиканинг асосий тушунчаларидир. Бирор саноқ системасига нисбатан нуқтанинг маълум Δt вақт ичида фазода бир ҳолатдан бошқа ҳолатга ихтиёрий равишда ўтиши *кўчиш* дейилади. Нуқтанинг кўчиши унинг бошланғич ва охирги ҳолатлари ҳамда ўтган Δt вақт оралиғи билан аниқланади.

Нуқтанинг бошланғич ҳолатдан охирги ҳолатга вақтга боғлиқ ҳолда аниқ бир усулда ўтишини *ҳаракат* деб атаймиз. Бинобарин, нуқтанинг бошланғич ва охирги ҳолатлари орасидаги ҳар бир ҳолатига вақтнинг аниқ бир пайти мос келади.

Фазода ҳаракатланаётган нуқтанинг бирор саноқ системасига нисбатан ҳолати билан вақт орасидаги боғланишни ифодаловчи тенглама *нуқтанинг ҳаракат қонунини* аниқлайди.

Кинематиканинг асосий вазифаси нуқтанинг (ёки жисмнинг) ҳаракат қонунларини ўрганишдан иборат. Вақтнинг ихтиёрий пайтида фазода нуқтанинг ҳолатини бирор саноқ системасига нисбатан аниқлаш мумкин бўлса, у ҳолда мазкур *нуқтанинг ҳаракат қонуни* маълум бўлади. Агар нуқтанинг бирор саноқ системасига нисбатан ҳаракат қонуни берилган бўлса, *нуқта ҳаракатининг кинематик хусусиятлари*: траекторияси, тезлиги ва тезланишларини аниқлаш мумкин бўлади.

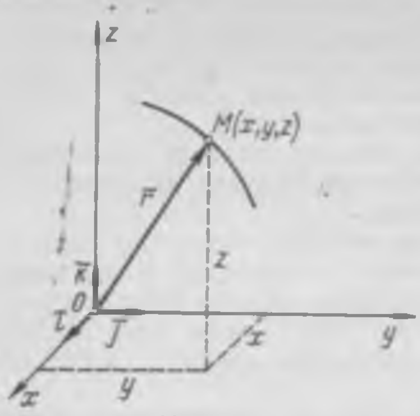
Вақт ўтиши билан нуқтанинг фазода қолдирадиган изи унинг траекторияси дейилади.

IX боб

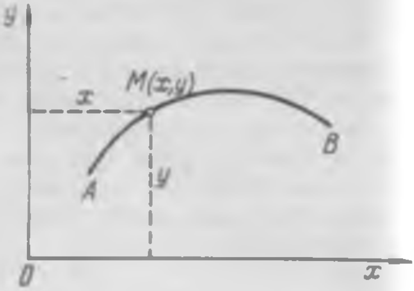
НУҚТА КИНЕМАТИКАСИ

47-§. Нуқта ҳаракатининг бериліш усуллари

Кинематикада нуқтанинг ҳаракати, асосан, вектор, координаталар ва табиий усулда берилади.



88- расм.



89- расм.

1. Вектор усули. Бу усулда M нуқтанинг ҳолати бирор қўзғалмас O марказдан ўтказилган r радиус-вектор билан аниқланади (88-расм). M нуқта ҳаракатланганда унинг r радиус-вектори вақт ўтиши билан маълум қонун асосида ўзгаради, яъни скаляр аргумент t нинг векторли функциясидан иборат бўлади:

$$\bar{r} = \bar{r}(t). \tag{9.1}$$

Агар $\bar{r}(t)$ функция маълум бўлса, t вақтнинг ҳар бир пайти учун M нуқтанинг ҳолати маълум бўлади. Шу сабабли (9.1) тенглама *нуқтанинг вектор шаклидаги ҳаракат тенгламаси ёки ҳаракат қонуни* дейилади. Нуқта ҳаракатининг (9.1) векторли тенгламаси t вақтнинг бир қийматли, узлуксиз ва дифференциалланадиган функцияси бўлади. $r = const$ бўлса, *нуқта тинч ҳолатда* бўлади.

2. Координаталар усули. *Охуz* саноқ системасига нисбатан ҳаракатланаётган M нуқтанинг ҳолатини унинг учта x, y, z Декарт координаталари орқали аниқлаш мумкин (88-расм). Нуқта ҳаракатланганда унинг координаталари вақт ўтиши билан ўзгаради. Бинобарин, M нуқтанинг координаталари t вақтнинг функциясидан (бир қийматли, узлуксиз ва дифференциалланадиган) иборат бўлади:

$$\left.\begin{aligned} x &= f_1(t), \\ y &= f_2(t), \\ z &= f_3(t). \end{aligned}\right| \tag{9.2}$$

Нуқта координаталари билан вақт орасидаги (9.2) муносабатлар берилган бўлса, M нуқтанинг фазода исталган пайтдаги ҳолати маълум бўлади. Агар вақт ўтиши билан $x = const$, $y = const$, $z = const$ бўлса, яъни x, y, z лар ўзгармаса, нуқта мазкур саноқ системасига нисбатан тинч ҳолатда бўлади. Шу сабабли *нуқтанинг Декарт координаталаридаги ҳаракат тенгламаси* деб аталувчи (9.2) тенгламалар нуқтанинг ҳолатини бутунлай аниқлай олади.

Нуқта ҳаракати вектор ва координата усулларида берилганда, улар орасида қуйидаги муносабат мавжуд бўлади:

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k},$$

бунда $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ лар координата ўқларнинг бирлик векторларидир.

(9.2) тенгламалардан t вақтни йўқотиб, нуқтанинг траекторияси тенгламаси аниқланади. Масалан, (9.2) нинг биринчисини t га нисбатан ечиб $t = \varphi(x)$ ни оламиз. Топилган t ни (9.2)тенгламаларнинг иккинчисига ва учинчисига қўйиб қуйидаги тенгламаларни оламиз:

$$y = f_2[\varphi(x)] = F_1(x); \quad z = f_3[\varphi(x)] = F_2(x). \qquad (9.3)$$

(9.3) тенгламалар *нуқта траекториясининг тенгламасини* ифодалайди.

Агар нуқта траекторияси бир текисликда ётса, у ҳолда xy текислик учун мазкур траектория ётган текисликни оламиз (89-расм). Бунда нуқтанинг ҳаракат тенгламаси

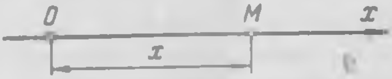
$$\left.\begin{aligned} x &= f_1(t), \\ y &= f_2(t) \end{aligned}\right\} \qquad (9.4)$$

шаклида ёзилади. (9.4) тенгламалар *нуқтанинг текисликдаги ҳаракат тенгламалари* дейилади.

Нуқта тўғри чизиқли ҳаракатда бўлса, ҳаракат траекторияси бўйлаб x ўқни йўналтирамиз, бу ҳолда

$$x = f(t)$$

нуқтанинг тўғри чизиқли ҳаракат тенгламасини ифодалайди (90-расм).



90- расм.

Нуқтанинг ҳаракати, Декарт координаталаридан ташқари, қутб координаталарида, цилиндрик координаталарда, сферик координаталарда ёки эгри чизиқли координаталарда ҳам берилиши мумкин. Масалан, ҳаракати

$$x = 5\cos t,$$
$$y = 3 - 5\sin t$$

тенгламалар билан берилган (бунда t секундда, x, y — сантиметрда ўлчанади) нуқтанинг траекторияси тенгламасини аниқлаш учун бу тенгламаларни

$$x = 5\cos t,$$
$$y - 3 = -5\sin t$$

кўринишда ёзамиз ва уларни квадратга ошириб қўшамиз. Бунда t вақт берилган тенгламалардан йўқотилиб, нуқтанинг траекторияси тенгламаси ҳосил бўлади:

$$x^2 + (y - 3)^2 = 25.$$

Демак, нуқтанинг траекторияси маркази C (0; 3) нуқтада бўлган, радиуси $R = 5$ см га тенг айланадан иборат (91-расм).

Айтайлик, нуқта бир вақтнинг ўзида

$$x = Ae^{-ht}\cos(kt + \alpha),$$
$$y = Ae^{-ht}\sin(kt + \alpha)$$

қонун асосида ўзаро перпендикуляр йўналишда сўнувчан тебранм ҳаракатда иштирок этсин. Бунда $A > 0$, $h > 0$, $k > 0$ ва α лар ўзгармас миқдорлардир. Мазкур нуқтанинг қутб координаталаридаги ҳаракат тенгламаси ва траекторияси тенгламасини аниқлаймиз.

Маълумки, қутб координаталари r, φ билан Декарт координаталари орасида қуйидаги муносабатлар мавжуд бўлади:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$
$$r^2 = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad tg\varphi = \frac{y}{x}, \quad x \neq 0.$$

Шундан келиб чиқиб,

$$r = Ae^{-ht}, \tag{1}$$
$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(kt + \alpha) \text{ ёки } \varphi = kt + \alpha \tag{2}$$

бўлишнни аниқлаймиз. (2) дан t ни топиб, уни (1) га қўйсак,

$$r = Ae^{-\frac{h}{k}(\varphi - \alpha)} \tag{3}$$

кўринишдаги траектория тенгламаси ҳосил бўлади.

Шундай қилиб, нуқтанинг траекторияси (3) тенглама билан ифодаланадиган логарифмик спиралдан иборатдир.

3. Табиий усул. Нуқтанинг траекторияси маълум бўлса, нуқта ҳаракатини табиий усулда аниқлаш қулай бўлади.

Нуқтанинг траекторияси бирор O_1xyz координата системасига нисбатан маълум бўлсин (92-расм). Траекториянинг бирор O нуқтасини саноқ боши учун танлаб олиб, уни қўзғалмас нуқта деб қараймиз. Ҳаракатланаётган нуқтанинг ҳолати траектория бўйлаб ҳисобланадиган $|\overset{\frown}{OM}| = s$ ёй координатаси билан аниқланади. Нуқтанинг траекториядаги ҳолатини бир қийматли аниқлаш учун ёй координатасининг мусбат ва манфий йўналишлари кўрсатилади.

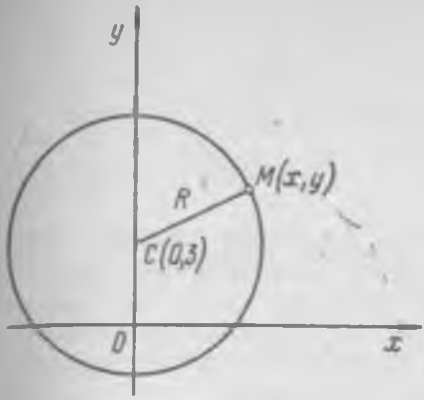
Вақт ўтиши билан нуқта чизиқ бўйлаб ҳаракатланиши натижасида унинг ёй координатаси s ўзгариб боради ҳамда t вақтнинг бир қийматли, узлуксиз ва дифференциалланадиган функциясидан иборат бўлади:

$$s = f(t). \tag{9.5}$$

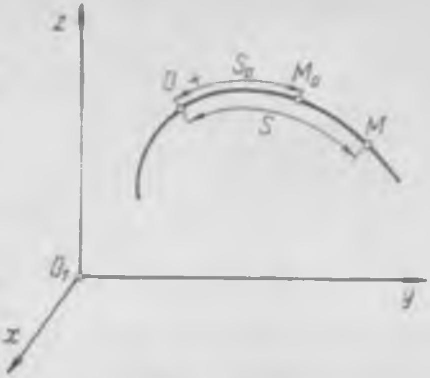
Бу муносабат *нуқтанинг ҳаракат тенгламаси* ёки *чизиқ бўйлаб ҳаракат қонуни* дейилади.

Агар $f(t)$ функция маълум бўлса, t вақтнинг ҳар бир пайти учун s ни аниқлаб, уни ишорасига қараб O нуқтадан траектория бўйича қўямиз. Натижада M нуқтанинг берилган пайтдаги ҳолати аниқланади.

Шундай қилиб, *M нуқтанинг ҳаракатини табиий усулда аниқлаш* учун унинг траекторияси, траекторияда олинган O қўзғалмас



91- расм.



92- расм.

нуқта, ёй координатасининг ҳисоблаш йўналиши ва $s = f(t)$ ҳаракат тенгламаси берилган бўлиши керак.

Нуқтанинг s ёй координатаси билан траектория бўйлаб ўтган σ *йўли* доимо бир хил бўлавермайди. Агар M нуқта O қўзғалмас нуқтадан бошлаб $[0, t]$ вақт оралиғида доимо бир йўналишда ҳаракат қилса, нуқтанинг шу вақт ичида ёй координатаси билан ўтган йўли ўзаро тенг бўлади.

Агар t_0 бошланғич вақтда нуқта M_0 ҳолатда бўлиб, унинг ҳолати s_0 ёй координатаси воситасида, t вақтдан кейинги M ҳолати $\overset{\frown}{OM} = s$ ёй координатаси билан аниқланса (92-расм), $t_1 - t_0$ вақт оралигида нуқтанинг бир томонга ҳаракатланиши натижасида ўтилган йўл

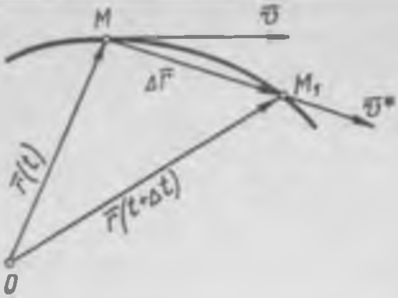
$$\sigma = |\overset{\frown}{M_0M}| = |\overset{\frown}{OM} - \overset{\frown}{OM_0}| = |s - s_0| \tag{9.6}$$

формула билан аниқланади; бу ҳолда ўтилган йўл билан ёй координатаси тенг бўлмайди.

Демак, нуқта саноқ бошидан бир томонга ҳаракатланса, унинг ёй координатаси модули нуқтанинг ўтган йўлини ифодалайди. Агар доимо $s = \text{const}$ бўлса, нуқта берилган саноқ системасига нисбатан тинч ҳолатда бўлади.

48-§. Ҳаракати вектор усулида берилган нуқтанинг тезлиги

Нуқта ҳаракати вектор усулида берилганда унинг радиус-вектори $\bar{r} = \bar{r}(t)$ ҳар он учун вақт функцияси сифатида аниқланади. Фараз қилайлик, t вақтда бирор O марказга нисбатан $\bar{r}$ радиус-вектор билан аниқланувчи нуқта M ҳолатни эгалласин ҳамда $t_1 = t + \Delta t$ вақтдан кейин M_1 ҳолатни эгаллаб, радиус-вектори $\bar{r}_1 = \bar{r}(t + \Delta t)$ бўлсин (93-расм). У ҳолда $\bar{r}(t + \Delta t) - \bar{r}(t) + \Delta\bar{r}$ нуқтанинг Δt вақтдаги кўчишини ифодалайди. $\Delta\bar{r}$ ни *нуқтанинг вектор кўчиши* дейилади.



93- расм.

Нуқтанинг вектор кўчиши $\Delta\bar{r}$ нинг шу кўчиш учун кетган Δt вақтга нисбати мазкур *нуқтанинг ўртача тезлиги* дейилади. Ўртача тезлик векторини $\bar{v}^*$ билан белгиласак:

$$\bar{v}^* = \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t}. \qquad (9.7)$$

Бунда Δt скаляр миқдор бўлганидан, $\bar{v}^*$ векторнинг йўналиши $\Delta\bar{r}$ нинг йўналиши билан бир хил бўлади. Нуқта ўртача тезлик векторининг Δt нолга интилгандаги лимити *нуқтанинг берилган пайтдаги тезлик вектори* дейилади ва $\bar{v}$ билан белгиланади:

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t}$$

ёки

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}. \qquad (9.8)$$

Шундай қилиб, *нуқтанинг берилган пайтдаги тезлик вектори нуқтанинг радиус-векторидан вақт бўйича олинган биринчи тартибли ҳосилага тенг бўлади.*

$\bar{v}^*$ вектор ҳаракат йўналишида $\overline{MM_1}$ кесувчи бўйлаб йўналади. Δt нолга интилганда, M_1 нуқта траектория бўйлаб M га интилади, шу сабабли MM_1 вектор лимит ҳолатида эгри чизиққа M нуқтада ўтказилган уринма билан устма-уст тушади. Бинобарин, M нуқтанинг тезлик вектори $\bar{v}$ траекторияга M нуқтада ўтказилган уринма бўйлаб ҳаракат йўналиши томон йўналади. (9.8) га кўра, тезлик вектори t вақтнинг векторли функцияси бўлади. Вақт ўтиши билан тезлик вектори ўзгаради.

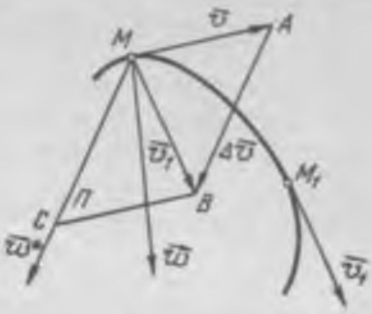
СИ бирликлар системасида тезлик м/с да ўлчанади.

49-§. Ҳаракати вектор усулида берилган нуқтанинг тезланиши

Вақт ўтиши билан нуқта тезлигининг миқдор ва йўналиш жиҳатидан ўзгаришини ифодаловчи катталик *тезланиш* дейилади.

Фараз қилайлик, ҳаракатланувчи нуқта t вақтда M ҳолатда бўлиб, тезлиги $\bar{v}$ га тенг бўлсин, $t+\Delta t$ вақт ўтгандан сўнг нуқта M_1 ҳолатга келиб, тезлиги $\bar{v}_1$ бўлсин (94-расм). Тезлик векторининг Δt вақт ичидаги ўзгаришини аниқлаймиз.

Бунинг учун $\bar{v}_1$ векторни ўзига параллел равишда M нуқтага кўчириб, бу нуқтада томонларидан бири $\bar{v}$ тезликка, диагонали эса $\bar{v}_1$ тезликка тенг $MABC$ параллелограмм ясаймиз. У ҳолда параллелограммнинг иккинчи томони Δt вақт ичида тезликнинг ўзгариши $\Delta\bar{v}$ ни ифодалайди.



94- расм.

Нуқта тезлик векторининг ўзгариши $\Delta\bar{v}$ нинг шу ўзгариш учун кетган Δt вақтга нисбати мазкур *нуқтанинг Δt вақт оралиғидаги ўртача тезланиши* дейилади. Ўртача тезланиш векторини $\bar{w}^*$ билан белгиласак,

$$\bar{w}^* = \frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t}. \qquad (9.9)$$

$\bar{w}^*$ векторнинг йўналиши $\Delta\bar{v}$ нинг йўналиши билан бир хил бўлиб, нуқта траекториясининг ботиқ томонига йўналади. Нуқтанинг ўртача тезланиш вектори $\bar{w}^*$ нинг Δt нолга интилгандаги лимити *нуқтанинг берилган пайтдаги тезланиш вектори* дейилади ва $\bar{w}$ билан белгиланади:

$$\bar{w} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t},$$

ёки (9.8) га кўра

$$\bar{w} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}. \qquad (9.10)$$

Демак, *нуқтанинг берилган пайтдаги тезланиш вектори нуқта тезлик векторининг вақт бўйича олинган биринчи тартибли ҳосиласига ёки радиус-векторининг вақт бўйича олинган иккинчи тартибли ҳосиласига тенг.*

Агар нуқта бир текисликда ётувчи траектория бўйича ҳаракатланса, у ҳолда $\bar{w}$ тезланиш вектори, ўртача тезланиш вектори $\bar{w}^*$ каби, траектория текислигида ётади ҳамда траекториянинг ботиқ томонига йўналади.

Агар нуқтанинг траекторияси бир текисликда ётмайдиган эгри чизиқдан иборат бўлса, $\bar{w}^*$ вектор M нуқтадан ўтувчи $MABC$ параллелограмм текислиги $П$ да ётади ҳамда траекториянинг ботиқ томонига $\Delta\bar{v}$ га параллел равишда йўналади (94-расм). Бунда $П \parallel \bar{v}_1$ бўлади. M_1 нуқта M га интилгандаги лимитда, бу текисликнинг эгаллаган ҳолати *эгрилик текислиги ёки ёпишма текислик* дейилади. Демак, умумий ҳолда тезланиш вектори M нуқтада траекторияга ўтказилган эгрилик текислигида ётади ва траекториянинг ботиқ томонига йўналади.

СИ бирликлар системасида тезланиш м/с^2 да ўлчанади.

50- §. Ҳаракати координаталар усулида берилган нуқтанинг тезлиги

Нуқтанинг ҳаракати бирор қўзғалмас Декарт координата ўқларига нисбатан (9.2) кўринишдаги

$$x = f_1(t),\ y = f_2(t),\ z = f_3(t)$$

тенгламалар билан берилган бўлсин (95-расм, *a*). У ҳолда нуқтанинг радиус-вектори $\bar{r}$ ва тезлиги $\bar{v}$ ни координата ўқларидаги проекциялари орқали қуйидагича ёзиш мумкин:

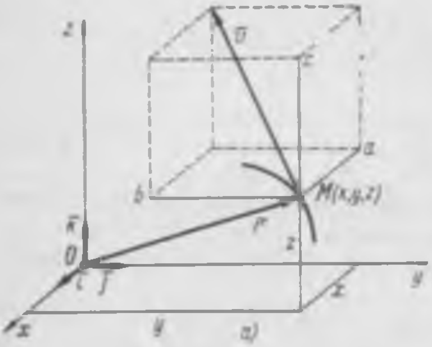
$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}, \tag{9.11}$$

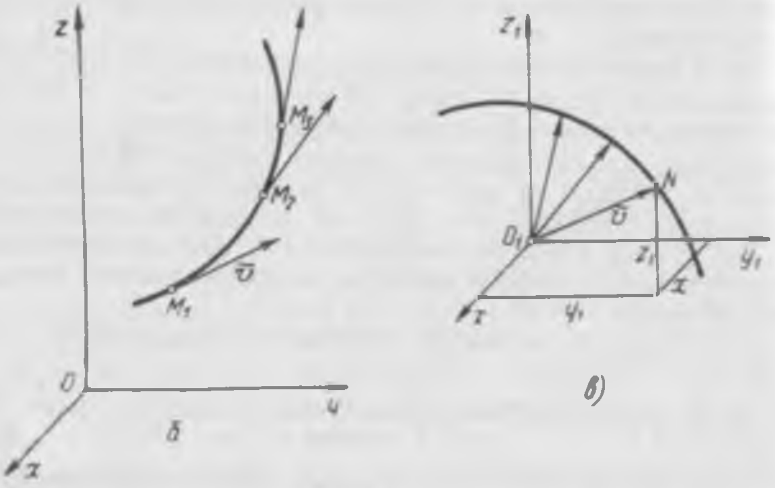
$$\bar{v} = v_x\bar{i} + v_y\bar{j} + v_z\bar{k}, \tag{9.12}$$

бунда: x, y, z лар M нуқтанинг координаталарини, $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ лар координата ўқларининг бирлик векторларини $\bar{v}_x$, v_y, v_z лар эса тезлик векторининг координата ўқларидаги проекцияларини ифодалайди. $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ бирлик векторларининг миқдори ва йўналиши ўзгармаслигини ва (9.8) ифодани эътиборга олиб, (9.11) дан вақт бўйича ҳосила оламиз:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\bar{i} + \frac{dy}{dt}\bar{j} + \frac{dz}{dt}\bar{k}. \tag{9.13}$$

(9.12) ва (9.13) формулалардаги $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ векторлар олдидаги коэффициентларни солиштириб, *тезликнинг координата ўқларидаги проекцияларини* аниқлаймиз:





95- расм.

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}. \qquad (9.14)$$

Демак, тезлик векторининг бирор қўзғалмас Декарт координаталар ўқидаги проекцияси нуқтанинг мос координаталаридан вақт бўйича олинган биринчи ҳосилага тенг бўлади. *Ma*, *Mb*, *Mc* қирралари координата ўқларига параллел ва v_x, v_y, v_z ларнинг миқдорига тенг бўлган параллелепипеднинг диагонали *M нуқтанинг тезлигини* ифодалайди:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}. \qquad (9.15)$$

$$\cos(\widehat{\overline{v}, \overline{i}}) = \frac{\dot{x}}{v}, \quad \cos(\widehat{\overline{v}, \overline{j}}) = \frac{\dot{y}}{v}, \quad \cos(\widehat{\overline{v}, \overline{k}}) = \frac{\dot{z}}{v} \qquad (9.16)$$

Нуқта *Oxyz* координаталар системасига нисбатан бирор траектория бўйлаб ҳаракатлансин (95-расм, *б*). Нуқтанинг траекторияда эгаллаган бир неча M_1, M_2, M_3, . . . , кетма-кет ҳолатларига мос тезликларининг барчасини миқдор ва йўналишларини ўзгартирмай, бирор O_1 қутбга келтирайлик (95-расм, *в*). Бу ҳолда тезлик векторларининг учлари бирор узлуксиз эгри чизиқни чизади. Мазкур эгри чизиқ *нуқта тезлигининг годографи* дейилади.

Нуқтанинг *Oxyz* координаталар системасига нисбатан ҳаракати маълум бўлганда тезлик годографи тенгламасини чиқариш учун тезликлар келтирилган O_1 қутбда *Oxyz* координаталар системасига параллел бўлган $O_1x_1y_1z_1$ координаталар системасини ўтказамиз. Тезлик годографида бирор *N* нуқтани олиб, унинг координаталарини x_1, y_1, z_1 билан белгилаймиз. *N* нуқтанинг радиус-вектори $\overline{O_1N} = \overline{v}$ бўлиб, бунда $\overline{v}$ — траектория бўйлаб ҳаракатланаётган нуқтанинг тезлиги. Агар нуқтанинг ҳаракат қонуни (9.2) кўринишида берилса, у ҳолда *N* нуқтанинг координаталари қуйидагича аниқланади:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \dot{x}, \\ y_1 &= \dot{y}, \\ z_1 &= \dot{z}, \end{aligned}\right\} \quad \text{ёки} \quad \left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{df_1(t)}{dt}, \\ y_1 &= \frac{df_2(t)}{dt}, \\ z_1 &= \frac{df_3(t)}{dt}. \end{aligned}\right\} \qquad (9.17)$$

Бу тенгламалар *N нуқтанинг тезлик годографи бўйича ҳаракат тенгламасини* ифодалайди. (9.17) тенгламалардан *t* вақтни чиқариб ташласак, $O_1x_1y_1z_1$ координаталар системасига нисбатан тезлик годографининг тенгламасини ҳосил қиламиз.

Агар нуқта миқдор жиҳатдан ўзгармас тезлик билан ҳаракатланса, бундай ҳаракат *текис ҳаракат* дейилади. Эгри чизиқли текис ҳаракатдаги нуқтанинг тезлик годографи, радиуси миқдор жиҳатдан тезликка тенг бўлган сфера сиртидаги эгри чизиқдан иборат бўлади. Тўғри чизиқли текис ҳаракатдаги нуқтанинг тезлик годографи битта нуқтадан иборат бўлади.

51-§. Ҳаракати координаталар усулида берилган нуқтанинг тезланиши

Ҳаракати координаталар усулида (9.2) тенгламалар билан берилган нуқтанинг тезланишини аниқлаш учун $\overline{w}$ тезланишни координата ўқларидаги w_x, w_y, w_z проекциялари орқали ифодалаймиз:

$$\overline{w} = w_x \overline{i} + w_y \overline{j} + w_z \overline{k}. \tag{9.18}$$

(9.12) ва (9.18) ларни (9.10) га қўямиз:

$$w_x \overline{i} + w_y \overline{i} + w_z \overline{k} = \frac{d}{dt}(v_x \overline{i} + v_y \overline{j} + v_z \overline{k}) = \frac{dv_x}{dt}\overline{i} +$$

$$+ \frac{dv_y}{dt}\overline{j} + \frac{dv_z}{dt}\overline{k}.$$

Бу тенгликнинг икки томонидаги $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ бирлик векторлар олдидаги коэффициентларни солиштириб, (9.14) ни эътиборга олсак, қуйидаги ифодага эга бўламиз:

$$\left.\begin{aligned} w_x &= \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}, \\ w_y &= \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}, \\ w_z &= \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{z}. \end{aligned}\right\} \tag{9.19}$$

Демак, *тезланиш векторининг бирор қўзғалмас Декарт координаталар ўқидаги проекцияси нуқтанинг мос координаталаридан вақт бўйича олинган иккинчи ҳосилага ёки тезлик векторининг мос координата ўқларидаги проекциясидан вақт бўйича олинган биринчи ҳосилага тенг бўлади.*

Нуқта тезланишининг модули ва йўналиши қуйидаги формулалардан топилади:

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}; \tag{9.20}$$

$$\cos(\widehat{\overline{w}, \overline{i}}) = \frac{\ddot{x}}{w}, \ \cos(\widehat{\overline{w}, \overline{j}}) = \frac{\ddot{y}}{w}, \ \cos(\widehat{\overline{w}, \overline{k}}) = \frac{\ddot{z}}{w}. \tag{9.21}$$

Агар нуқта тўғри чизиқли ҳаракатда бўлса, унинг ҳаракати битта

$$x = f(t)$$

тенглама билан аниқланади. Бу ҳолда нуқта тезлиги ва тезланишининг миқдори

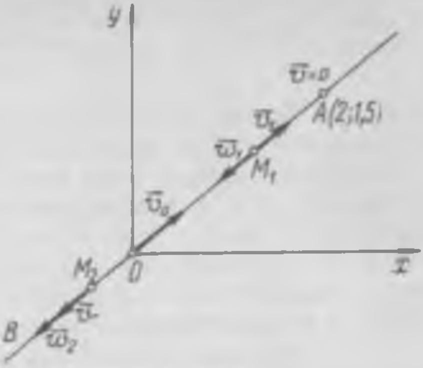
$$v = |v_x| = |\dot{x}| = \left|\frac{dx}{dt}\right|,$$

$$w = |w_x| = \ddot{x} = \left|\frac{d^2x}{dt^2}\right|$$

бўлади. Агар $v_x > 0$ бўлса, нуқтанинг тезлиги x ўқнинг мусбат йўналиши бўйича, $v_x < 0$ бўлса, x ўқнинг мусбат йўналишига тескари йўналади. Тезланишнинг йўналиши ҳам шундай аниқланади.

Агар вақт ўтиши билан тўғри чизиқли ҳаракатдаги нуқта тезланишининг миқдори орта борса, яъни нуқтанинг тезлиги билан тезланиши бир йўналишда бўлса, бундай ҳаракат *тезланувчан ҳаракат* дейилади.

Вақт ўтиши билан нуқта тезланишининг миқдори камая борса, яъни тезланишнинг йўналиши тезликка қарама-қарши йўналса, бундай ҳаракат *секинланувчан ҳаракат* дейилади.



96- расм.

52-§. Нуқтанинг тезлик ва тезланишларини аниқлашга оид масалалар

Нуқта кинематикасида кўпинча нуқтанинг ҳаракат тенгламалари берилган бўлиб, унинг траекторияси, тезлиги ва тезланиши каби *кинематик элементларини* аниқлаш талаб этилади. Айрим ҳолларда ҳаракат тенгламаси берилмайди. Бундай ҳолда масалада берилган шартлардан фойдаланиб, даставвал нуқтанинг ҳаракат тенгламалари тузилади, сўнгра нуқта ҳаракатининг кинематик элементлари топилади. Қуйида шундай икки ҳол учун масалалар ечамиз.

17-масала. Ҳаракати

$$x = 4t - 2t^2, \quad y = 3\,(t - 0{,}5\,t^2)$$

тенгламалар билан берилган нуқтанинг траекторияси, тезлиги ва тезланиши топилсин (x, y — метрда, t — секундда ўлчанади).

Ечиш. а) Берилган ҳаракат тенгламасидан t ни йўқотсак, нуқтанинг траектория тенгламаси $y = \frac{3}{4}\,x$ кўринишда бўлади. Демак, нуқтанинг траекторияси координата бошидан ўтувчи Ox ўқ билан $\alpha = \operatorname{arc\,tg}\frac{3}{4}$ бурчак ташкил этувчи тўғри чизиқдан иборат (96-расм);

б) нуқта тезлигининг координата ўқларидаги проекцияларини (9.14) га, тезлигининг модулини (9.15) га мувофиқ аниқлаймиз:

$$v_x = \dot{x} = 4\,(1 - t)\ \text{м/с}, \quad v_y = \dot{y} = 3\,(1 - t)\ \text{м/с},$$

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = 5\ (1 - t)\ \text{м/с};$$

в) (9.19) дан тезланишнинг координата ўқларидаги проекциялари

$$w_x = \ddot{x} = -\ 4\ \text{м/с}^2, \quad w_y = \ddot{y} = -\ 3\ \text{м/с}^2$$

модули

$$w = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = 5 \text{ м/с}^2$$

топилади. Ҳаракат тўғри чизиқли бўлганидан v билан w, траекторияни ифодаловчи тўғри чизиқ бўйлаб йўналади.

Бошланғич пайтда, яъни $t=0$ бўлганда, $x = x_0 = 0$, $y = y_0 = 0$ ва $v = v_0 = 5$ м/с бўлганлиги учун нуқта $t = 0$ да координата бошидан траектория бўйлаб O дан A га v_0 бошланғич тезлик билан ҳаракатланади. $t=1$ с бўлса, $x=2$ м, $y=1{,}5$ м бўлиб, нуқта A (2; 1,5) ҳолатда, тезлиги эса $v = 0$ бўлади. Демак, нуқта 1 секунд давомида O дан A га секинланувчан ҳаракат билан кўчади.

$t > 1$ секунддан бошлаб нуқта тезлигининг модули орта боради ҳамда $v_x < 0$, $v_y < 0$, $w_x < 0$, $w_y < 0$ бўлганлигидан нуқта A дан B га қараб тезланувчан ҳаракат билан кўчади (бу ҳол нуқтанинг M_2 ҳолатида тасвирланган).

18-масала. 97-расм, *а* да кривошип-шатунли механизм тасвирланган. OA кривошип O нуқта атрофида $\varphi = \omega t$ (бунда $\omega = \text{const}$) тенгламага мувофиқ айланади. Агар $OA = AB = a$ бўлса, AB шатуннинг ўртасидаги M нуқтанинг траекторияси, тезлиги, тезлик годографи ва тезланиши аниқлансин.

Ечиш. M нуқтанинг ҳаракат тенгламаларини тузамиз. Бунинг учун масалада берилган шартлардан фойдаланиб нуқтанинг координаталари x ва y билан t вақт орасидаги муносабатни аниқлаймиз. Расмдан:

$$x = OE = OB - EB = 2\,OA\cos\varphi - \frac{AB}{2}\cos\varphi = \frac{3a}{2}\cos\omega t,$$

$$y = ME = \frac{AB}{2}\sin\varphi = \frac{a}{2}\sin\omega t.$$

Шундай қилиб, нуқтанинг ҳаракат тенгламалари қуйидагича бўлади:

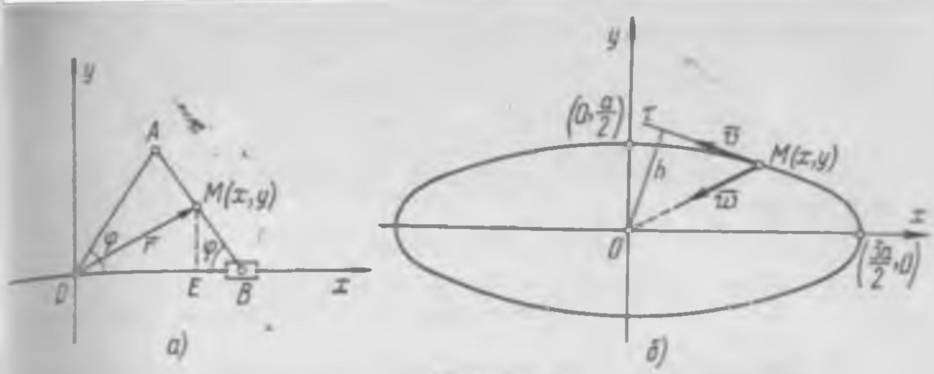
$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{3a}{2}\cos\omega t, \\ y &= \frac{a}{2}\sin\omega t. \end{aligned}\right| \qquad (1)$$

(1) дан t вақтни йўқотиш учун уни қуйидагича ёзамиз:

$$\frac{x}{\frac{3a}{2}} = \cos\omega t, \quad \frac{y}{\frac{a}{2}} = \sin\omega t.$$

Буларнинг ҳар бирини квадратга ошириб, қўшамиз:

$$\left(\frac{x}{\frac{3a}{2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\frac{a}{2}}\right)^2 = 1.$$



97- расм.

Демак, нуқтанинг траекторияси маркази координата бошида, ярим ўқлари $\frac{3a}{2}$ ва $\frac{a}{2}$ бўлган эллипсдан иборат (97- расм, *б*).

Тезликнинг координата ўқларидаги проекциялари (9.14) га кўра аниқланади:

$$v_x = \dot{x} = -\frac{3a}{2}\,\omega\,\sin\omega t = -3\,\omega y,$$

$$v_y = \dot{y} = -\frac{a}{2}\,\omega\,\cos\omega t = \frac{1}{3}\,\omega x.$$

(9.15) га асосан тезлик модули вақт функцияси сифатида аниқланади:

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \frac{a\omega}{2}\sqrt{9\,\sin^2\omega t + \cos^2\omega t} = \frac{a\omega}{2}\sqrt{1 + 8\,\sin^2\omega t},$$

ёки нуқта координаталари орқали қуйидагича ифодаланади:

$$v = \frac{\omega}{3}\sqrt{x^2 + 81\,y^2}.$$

Аналитик геометриядан маълумки, ярим ўқлари a_1 ва b_1 га тенг эллипснинг M нуқтасига ўтказилган уринмадан унинг марказигача бўлган h масофа

$$h = \frac{a_1^2\,b_1^2}{\sqrt{b_1^4 x^2 + a_1^4 y^2}}$$

формуладан аниқланади. Бу масалада

$$h = \frac{9\,a^2}{4\sqrt{x^2 + 81\,y^2}}$$

бўлганидан тезликнинг миқдори учун қуйидагини оламиз:

$$v = \frac{3a^2\,\omega}{4h}.$$

Бу формуладан кўриниб турибдики, нуқта тезлигининг модули шу нуқтада эллипсга ўтказилган уринмадан унинг марказигача бўлган масофага тескари мутаносиб равишда ўзгаради. Бинобарин, эллипснинг катта ва кичик яримўқларининг учларида тезлик модули мос равишда энг кичик ва энг катта қийматларга эга бўлади.

Тезлик годографининг параметрик тенгламаси (9.17) га асосан аниқланади:

$$x_1 = -\frac{3a}{2}\omega\sin\omega t,$$

$$y_1 = \frac{a}{2}\omega\cos\omega t.$$

Бу тенгламалардан t ни чиқариб ташласак, тезлик годографининг тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$\frac{x_1^2}{\left(\frac{3a}{2}\omega\right)^2} + \frac{y_1^2}{\left(\frac{a}{2}\omega\right)^2} = 1.$$

Шундай қилиб, тезлик годографи яримўқлари $\frac{3a}{2}\omega$ ва $\frac{a}{2}\omega$ га тенг эллипсдан иборат бўлади.

(9.19) дан фойдаланиб тезланишнинг координата ўқларидаги проекциялари аниқланади:

$$w_x = \ddot{x} = -\frac{3a\omega^2}{2}\cos\omega t = -\omega^2 x,$$

$$w_y = \ddot{y} = -\frac{a\omega^2}{2}\sin\omega t = -\omega^2 y.$$

(9.20) га асосан тезланиш модули қуйидагича ифодаланади:

$$w = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \omega^2\sqrt{x^2 + y^2} = \omega^2 r,$$

бунда r ҳаракатланувчи нуқта радиус-векторининг модулидир. Тезланиш йўналиши (9.21) дан аниқланади:

$$\left.\begin{aligned} \cos(\widehat{\bar{w}, x}) &= \frac{\ddot{x}}{w} = -\frac{x}{r}, \\ \cos(\widehat{\bar{w}, y}) &= \frac{\ddot{y}}{w} = -\frac{y}{r}. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Нуқта радиус-векторининг косинуслари учун

$$\left.\begin{aligned} \cos(\widehat{\bar{r}, x}) &= \frac{x}{r}, \\ \cos(\widehat{\bar{r}, y}) &= \frac{y}{r} \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

формулалар ўринлидир.

(3) ва (4) ни солиштириб, $\overline{w}$ векторнинг йўналтирувчи косинуслари $\overline{r}$ радиус-векторнинг йўналтирувчи косинусларидан фақат ишораси билан фарқ қилишини кўрамиз. Бу эса нуқта тезланиши унинг радиус-векторига тескари йўналганлигини кўрсатади. Бу ҳолни яна қуйидагича изоҳлаш мумкин: нуқтанинг тезланиши $\overline{w}$ унинг радиус-вектори r га мутаносиб равишда ўзгаради:

$$\overline{w} = w_x \overline{i} + w_y \overline{j} = \omega^2 (x \overline{i} + y\overline{j}) = -\omega^2 \overline{r}.$$

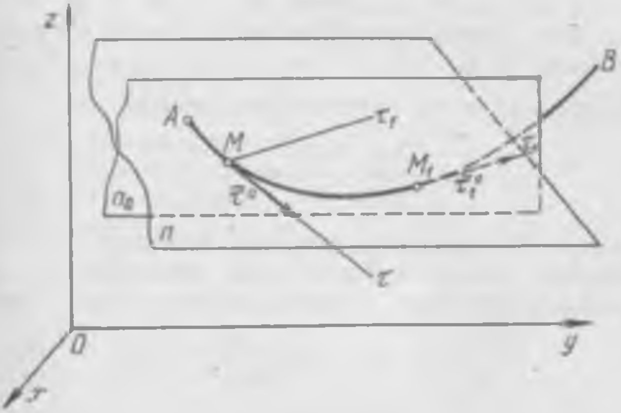
Бундаги минус ишора $\overline{w}$ тезланиш $\overline{r}$ радиус-векторга тескари йўналганлигини ифодалайди.

53-§. Дифференциал геометриядан баъзи маълумотлар

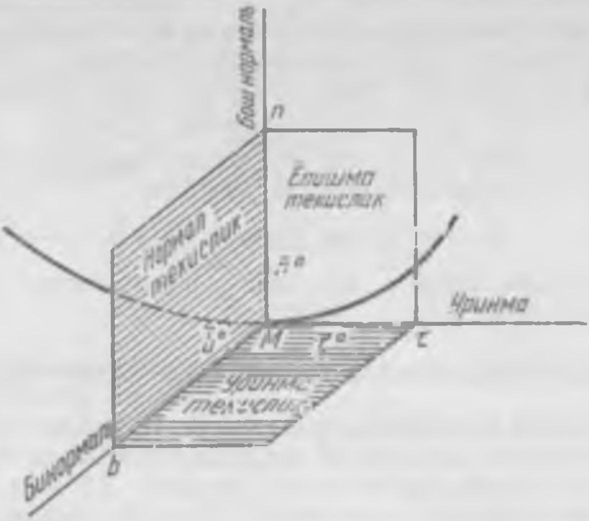
1. Табиий координаталар системаси. Қўзғалмас $Oxyz$ координаталар системасига нисбатан M нуқта бир текисликда ётмайдиган эгри чизиқ AB бўйлаб ҳаракатлансин (98-расм). AB эгри чизиқда мазкур нуқтанинг бир-бирига яқин иккита M ва M_1 ҳолатларини олиб, ҳар бири орқали $M\tau$ ва $M_1\tau_1$ уринмаларни ўтказамиз. Бу уринмаларнинг йўналиши нуқта ҳаракатининг мусбат йўналишидаги $\overline{\tau}^\circ$ ва $\overline{\tau}_1^\circ$ бирлик векторлар билан аниқланади. AB эгри чизиқ бир текисликда ётмагани учун $M\tau$ ва $M_1\tau_1$ уринмалар орқали битта текислик ўтказиб бўлмайди. M нуқтада $M_1\tau_1$ га параллел, $M\tau_1$ чизиқни ўтказамиз. $\tau M \tau_1$ ётган текисликни Π_0 билан белгилаймиз. M_1 нуқта M га интилганда Π_0 нинг $M\tau$ атрофидаги ҳолати ўзгара боради. Π_0 текисликнинг эгаллаган лимит ҳолатини Π билан белгилаймиз. Π текислик эгри чизиқнинг M нуқтасидаги *ёпишма текислик* дейилади.

Агар эгри чизиқ бир текисликда ётса, бу текислик эгри чизиқнинг ёпишма текислиги бўлади.

M нуқтадаги уринмага перпендикуляр қилиб ўтказилган текислик *нормал текислик* дейилади. Нормал текисликда ётувчи ва M нуқтадан ўтувчи ҳар қандай тўғри чизиқ нормални ифодалайди. Нормал текислик билан ёпишма текисликнинг кесишиш чизиги Mn ни



98- расм.



99- расм.

M нуқтадаги *бош нормаль* дейилади (99-расм). Бош нормалнинг йўналиши *M* нуқтадан эгри чизиқнинг ботиқ томонига йўналган $\overline{n}^0$ бирлик вектор билан аниқланади.

Танланган $M\tau$ ва Mn ларга перпендикуляр бўлган ва улар билан ўнг системани ташкил этадиган Mb нормални ўтказамиз. Бу нормаль *бинормаль* дейилади. Бинормаль ва уринма орқали ўтувчи текислик *уринма текисликдир*. Эгри чизиқнинг *M* нуқтасидан ўтказилган уринма ва бинормалнинг бирлик векторларини мос равишда $\overline{\tau}^0$, $\overline{b}^0$ билан белгилаймиз.

M нуқтадан ўтказилган уринма, бош нормаль ва бинормаллар бўйлаб йўналган ўқлар *табиий координата ўқлари* дейилади. Бу ўқлар нуқта билан биргаликда ҳаракатланади. Табиий ўқлардан ташкил топган координаталар системаси *табиий координаталар системаси* дейилади.

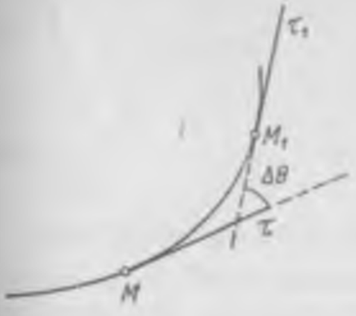
2. Эгри чизиқнинг эгрилиги. *M* нуқтанинг траекториясини ифодаловчи эгри чизиқнинг бир-бирига жуда яқин *M* ва M_1 нуқталаридан $M\tau$ ва $M_1\tau_1$ уринмаларни ўтказамиз. Уринмалар орасидаги бурчакни $\Delta\theta$ билан, MM_1 ёйни Δs билан белгилаймиз (100-расм). $\frac{\Delta\theta}{\Delta s}$ нисбатнинг Δs нолга интилгандаги лимити

$$k = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{d\theta}{ds} \tag{9.22}$$

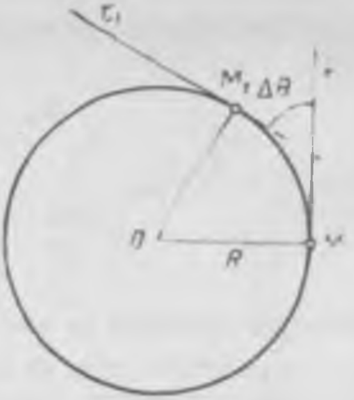
эгри чизиқнинг M нуқтадаги эгрилиги дейилади.

Эгриликнинг тескари қиймати эгри чизиқнинг *M* нуқтасидаги *эгрилик радиуси* дейилади. Эгрилик радиуси ρ билан белгиланади:

$$\rho = \frac{1}{k} = \frac{ds}{d\theta}. \tag{9.23}$$



100- расм.



101- расм.

Мисол тариқасида R радиусли айлананинг эгрилигини топамиз (101- расм). M ва M_1 нуқталарда айланага ўтказилган уринмалар орасидаги бурчакни $\Delta\theta$ билан белгилаймиз. Айланада $\breve{MM_1} = R\cdot\Delta\theta$ бўлгани учун, M нуқтадаги эгрилик

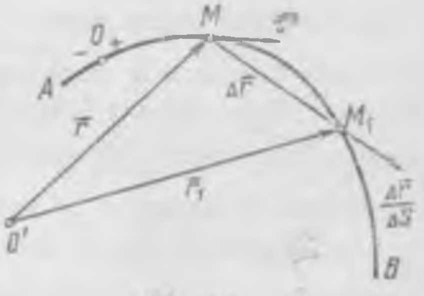
$$k = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta\theta\cdot R} = \frac{1}{R}$$

формуладан аниқланади. Шундай қилиб, айлананинг ихтиёрий нуқтасидаги эгрилик ўзгармас бўлиб, айлананинг радиусига тескари мутаносиб бўлади.

54- §. Ҳаракати табиий усулда берилган нуқтанинг тезлиги

Нуқта ҳаракати табиий усулда берилганда, яъни унинг AB траекторияси, траекторияда олинган қўзғалмас O нуқта (саноқ боши) ва s ёй координатасининг ҳисоблаш йўналиши ҳамда траектория бўйлаб ҳаракат тенгламаси $s = f(t)$ берилганда нуқтанинг тезлигини аниқлаймиз (102- расм). Нуқта t вақтда M ҳолатни, $t + \Delta t$ вақтдан кейин M_1 ҳолатни эгалласин. Мазкур нуқталарнинг ёй координаталарини аниқлаймиз:

$$s = \breve{OM},\ s_1 = OM_1 = \breve{OM} + MM_1 = s + \Delta s.$$



102- расм.

Ихтиёрий O' нуқтани олиб, бу нуқтадан M ва M_1 нуқталарнинг мос равишда $\bar r$ ва $\bar r_1$ радиус-векторларини ўтказамиз ҳамда (9.8) га асосан M нуқтанинг тезлигини аниқлаймиз:

$$\bar v = \frac{d\bar r}{dt}.$$

Нуқтанинг $\bar r$ радиус-вектори s ёй координатасига боғлиқ, яъни

$\overline{r} = \overline{r}(s)$. Шу сабабли нуқтанинг тезлиги учун қуйидаги ифодани ёзиш мумкин:

$$\overline{v} = \frac{d\overline{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}, \tag{9.24}$$

бунда

$$\frac{d\overline{r}}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \overline{r}}{\Delta s}. \tag{9.25}$$

$\frac{\Delta \overline{r}}{\Delta s}$ векторнинг йўналиши $\Delta \overline{r}$ векторники билан бир хил бўлади. $\Delta s \to 0$ да уннинг йўналиши ёй координатаси ортиб борадиган томонга M нуқтада траекторияга ўтказилган урииманинг йўналишига интилади. Бу ҳолда

$$\lim_{\Delta S \to 0} \left| \frac{\Delta \overline{r}}{\Delta s} \right| = \lim_{M_1 \to M} \frac{|\overline{MM_1}|}{\overline{MM_1}} = 1.$$

Шундай қилиб, $\frac{d\overline{r}}{ds}$ вектор миқдор жиҳатдан бирга тенг ҳамда ёй координатаси ортиб борадиган томонга M нуқтада траекторияга ўтказилган уринма бўйича йўналади, яъни $\frac{d\overline{r}}{ds}$ вектор уринманинг бирлик вектори $\overline{\tau^\circ}$ ни ифодалайди (103-расм):

$$\overline{\tau^\circ} = \frac{d\overline{r}}{ds}. \tag{9.26}$$

(9.26) ни (9.24) га қўйиб, нуқтанинг тезлигини аниқлаймиз:

$$\overline{v} = \frac{ds}{dt}\overline{\tau^\circ}, \tag{9.27}$$

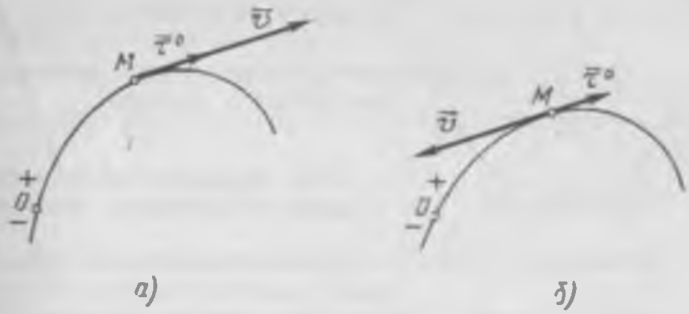
бунда

$$\frac{ds}{dt} = v \tag{9.28}$$

тезликнинг алгебраик қийматини ифодалайди.

Агар вақтнинг бирор пайтида $\frac{ds}{dt} > 0$ бўлса, s функция шу пайтда ўсувчан бўлади ва $\overline{v}$ тезликнинг йўналиши уринманинг бирлик вектори $\overline{\tau_1}$ билан бир хил бўлади (103-расм, *а*). Агар вақтнинг бирор пайтида $\frac{\Delta s}{dt} < 0$ бўлса, s функция шу пайтда камаювчан бўлади ва $\overline{v}$ тезликнинг йўналиши $\overline{\tau^\circ}$ га тескари бўлади (103-расм, *б*).

Агар $\frac{ds}{dt}$ ҳосила узлуксиз равишда ўзгариб $\frac{ds}{dt} = 0$ орқали ўтганда ўз ишорасини ўзгартирса, s ёй координатаси бу пайтда максимум ёки



103- расм.

минимум қийматга эришади, яъни нуқтанинг ҳаракат йўналиши ўзгаради.

Шундай қилиб, $v = \frac{ds}{dt}$ нуқта тезлигининг алгебраик қиймати билан бирга траекториядаги йўналишини ҳам ифодалайди.

19- масала. Оғиш бурчаги кичик бўлганда маятник $s = a\sin kt$ қонун асосида айлана ёйи бўйлаб ҳаракатланади (104- расм, *а*). Бунда ёй координатаси боши учун *O* нуқта олинган, *a* ва *k* ўзгармас миқдорлардир. Маятникни ифодаловчи нуқтанинг тезлиги ва тезликнинг энг катта қиймати аниқлансин.

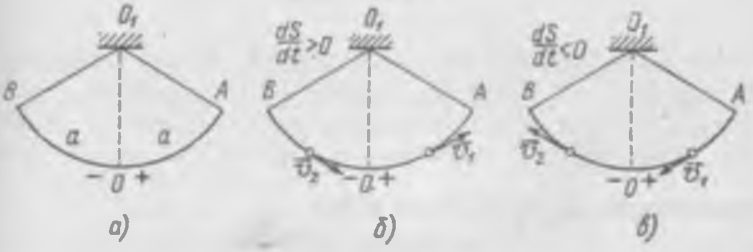
Ечиш. (9. 28) га асосан

$$v = \frac{ds}{dt} = ak\cos kt. \qquad (1)$$

$\frac{ds}{dt} > 0$ бўлса, нуқтанинг тезлиги ёй координатасининг мусбат йўналиши бўйича (104- расм, *б*), $\frac{ds}{dt} < 0$ бўлса, ёй координатасининг манфий йўналиши бўйича (104- расм, *в*) йўналади.

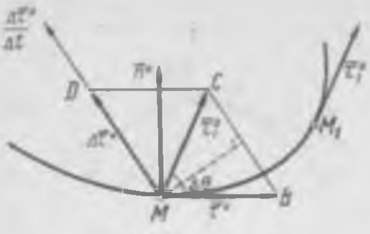
Ҳаракат қонунидан кўрамизки, нуқта ёй амплитудаси *a* га тенг бўлган гармоник тебранма ҳаракатда бўлади. Энг четки *A* га *B* нуқталарда $\sin kt = \pm 1$ ва $\cos kt = 0$ бўлгани учун бу нуқталарда тезлик нолга тенг. (1) дан

$$v_{\max} = ak$$



104- расм.

бўлишини аниқлаймиз. Яъни $|\cos kt| = 1$, $\sin kt = 0$ бўлганда (ёки нуқта 0 дан ўтганда) унинг тезлиги максимум қийматга эришади.



105- расм.

55-§. Ҳаракати табиий усулда берилган нуқтанинг тезланиши

Нуқта тезланишининг табиий координата ўқларидаги проекцияларини аниқлаймиз. Бунинг учун (9. 27) формулани қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$\overline{v} = v\,\overline{\tau^0},$$

бунда: τ^0 — уринманинг бирлик вектори; $v = \frac{ds}{dt}$ — тезликнинг алгебраик қиймати. У ҳолда нуқта тезланиши учун берилган (9. 10) формула қуйидагича бўлади:

$$\overline{w} = \frac{d\overline{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\tau^0 + v\frac{d\overline{\tau^0}}{dt} = \frac{dv}{dt}\,\overline{\tau^0} + v\,\frac{d\overline{\tau^0}}{ds}\,\frac{ds}{dt}. \qquad (9.29)$$

Бу формуладаги $\frac{d\overline{\tau^0}}{ds}$ векторнинг миқдори ва йўналишини аниқлаймиз:

$$\frac{d\overline{\tau^0}}{ds} = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\overline{\tau^0}}{\Delta s},$$

бунда $\Delta\overline{\tau^0}$ вектор траекториянинг M ва M_1 нуқталарида мос равишда олинган $\overline{\tau^0}$ ва $\overline{\tau_1}$ уринмалар бирлик векторларининг айирмасига тенг (105- расм). $|\overline{MB}| = 1$, $|\overline{MC}| = 1$ бўлгани учун, тенг ёнли MBC учбурчакдан

$$|\Delta\overline{\tau^0}| = |\overline{BC}| = 2\sin\frac{\Delta\theta}{2},$$

бунда $\Delta\theta$ орқали $\overline{\tau^0}$ ва $\overline{\tau_1}$ бирлик векторлар орасидаги бурчак белгиланган. Натижада

$$\left|\frac{d\overline{\tau^0}}{ds}\right| = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{|\Delta\overline{\tau^0}|}{\Delta s} = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\Delta s}$$

ёки

$$\left|\frac{d\overline{\tau^0}}{ds}\right| = \lim_{\Delta s\to 0}\left(\frac{\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}}\cdot\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\right) = \lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}}\cdot\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta s},$$

бу тенгликда (9.22) ва (9.23) га кўра

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta s} = k = \frac{1}{\rho},$$

бунда: k — траекториянинг M нуқтадаги эгрилиги; ρ — эгрилик радиуси. Бинобарин, $\left|\frac{d\overline{\tau}^\circ}{ds}\right| = \frac{1}{\rho}$ бўлиб, $\frac{d\overline{\tau}^\circ}{ds}$ векторнинг модули траекториянинг M нуқтадаги эгрилигини ифодалайди. Мазкур векторнинг йўналиши $\widehat{DMB}$ нинг $\Delta\theta \to 0$ даги лимит ҳолати билан аниқланади:

$$\widehat{DMB} = \widehat{DMC} + \widehat{CMB} = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\Delta\theta}{2}\right) + \Delta\theta = \frac{\pi}{2} + \frac{\Delta\theta}{2},$$

Бу тенгликдан кўрамизки, $\Delta\theta \to 0$ да $\widehat{DMB} \to \frac{\pi}{2}$, яъни $\frac{d\overline{\tau}^\circ}{ds}$ векторнинг йўналиши M нуқтада траекторияга ўтказилган $\overline{n}^\circ$ бош нормаль бирлик векторининг йўналиши билан бир хил бўлади.

Шундай қилиб, $\frac{d\overline{\tau}^\circ}{ds}$ вектор миқдор жиҳатдан $\frac{1}{\rho}$ га тенг, йўналиши бош нормаль бўйлаб траекториянинг эгрилик маркази томон йўналади, яъни

$$\frac{d\overline{\tau}^\circ}{ds} = \frac{1}{\rho}\overline{n}^\circ. \tag{9.30}$$

(9.28) ва (9.30) га асосан, (9.29) қуйидагича ёзилади:

$$\overline{w} = \frac{dv}{dt}\overline{\tau}^\circ + \frac{v^2}{\rho}\overline{n}^\circ. \tag{9.31}$$

Бу формула ёрдамида тезланишнинг табиий координата ўқларидаги ташкил этувчилари аниқланади. $\frac{dv}{dt}\overline{\tau}^\circ$ вектор траекторияга M нуқтада ўтказилган уринма бўйича йўналади ва *уринма тезланиш* дейилади ҳамда $\overline{w}_\tau$ билан белгиланади:

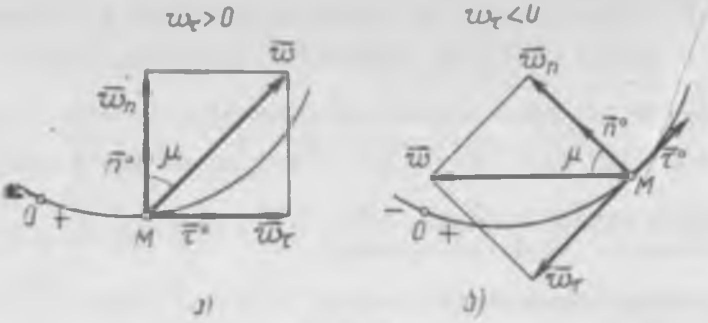
$$\overline{w}_\tau = \frac{dv}{dt}\overline{\tau}^\circ. \tag{9.32}$$

$\frac{v^2}{\rho}\overline{n}^\circ$ вектор эса траекторияга M нуқтада ўтказилган бош нормаль бўйлаб йўналади ва *нормал тезланиш* дейилади ҳамда $\overline{w}_n$ билан белгиланади:

$$w_n = \frac{v^2}{\rho}\overline{n}^\circ. \tag{9.33}$$

Уринманинг бирлик вектори $\overline{\tau}^\circ$ ва бош нормалнинг бирлик вектори $\overline{n}^\circ$ траекториянинг M нуқтасида ўтказилган эгрилик текислигида ётганлиги туфайли M нуқтанинг тезланиши ҳам мазкур эгрилик текислигида ётади. Шу сабабли тезланишнинг бинормалдаги ташкил этувчиси нолга тенг бўлади.

(9.32) ва (9.33) га асосан тезланишнинг табиий координата ўқларидаги проекциялари қуйидагича аниқланади:



106- расм.

$$w_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}, \tag{9.34}$$

$$w_n = \frac{v^2}{\rho}. \tag{9.35}$$

Бу тенгликлардан кўрамизки, *нуқта тезланишининг уринмадаги проекцияси тезликнинг алгебраик қийматидан вақт бўйича олинган биринчи тартибли ҳосилага ёки нуқтанинг ёй координатасидан вақт бўйича олинган иккинчи тартибли ҳосилага тенг; нуқта тезланишининг бош нормалдаги проекцияси шу нуқта тезлиги квадратининг траекториянинг берилган нуқтадаги эгрилик радиусига нисбатига тенг.*

Траекториянинг M нуқтасида уринма ва бош нормалнинг бирлик векторлари $\bar{\tau}^\circ$, $\bar{n}^\circ$ бўйича йўналган $\bar{w}_\tau$ ва $\bar{w}_n$ векторларни тасвирлаймиз (106- расм). Бунда $\bar{w}_n$ нормал тезланиш доимо M нуқтада траекториянинг ботиқ томонига йўналади ва мусбат қийматга эга бўлади. $\bar{w}_\tau$ уринма тезланиш эса $w_\tau > 0$ да $\bar{\tau}^\circ$ билан бир йўналишда бўлади (106- расм, а) $w_\tau < 0$ да $\bar{\tau}^\circ$ га қарама-қарши йўналади (106- расм, *б*).

Нуқтанинг тезланиш вектори $\bar{w}$ уринма тезланиш $\bar{w}_\tau$ ва нормал тезланиш $\bar{w}_n$ ларнинг геометрик йиғиндисига тенг:

$$\bar{w} = \bar{w}_\tau + \bar{w}_n. \tag{9.36}$$

Бу икки тезланиш ўзаро перпендикуляр йўналганидан тўла тезланиш модули

$$w = \sqrt{w_\tau^2 + w_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2} \tag{9.37}$$

формуладан, йўналиши эса

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{|w_\tau|}{w_n} \tag{9.38}$$

формуладан топилади.

56-§. Ҳаракатнинг хусусий ҳоллари

1. **Тўғри чизиқли ҳаракат.** Агар нуқтанинг траекторияси тўғри чизиқдан иборат бўлса, $\rho = \infty$ бўлади. Бу ҳолда $w_n = \frac{v^2}{\rho} = 0$ бўлиб, нуқтанинг тезланиши фақат уринма тезланишга тенг бўлади:

$$w = w_\tau = \frac{dv}{dt}.$$

Бу ҳолда нуқтанинг тезлиги фақат миқдор жиҳатдан ўзгарганлиги туфайли нуқтанинг уринма тезланиши тезликнинг сон қиймати жиҳатдан ўзгаришини ифодалайди.

2. **Эгри чизиқли текис ҳаракат.** Агар нуқта эгри чизиқли текис ҳаракат қилса, яъни $v = \text{const}$ бўлса, $w_\tau = \frac{dv}{dt} = 0$ бўлиб, нуқтанинг тезланиши фақат нормал тезланиш $w = w_n = \frac{v^2}{\rho}$ га тенг бўлади. Бу ҳолда нуқтанинг тезланиш вектори $\overline{w}$ доимо эгри чизиқнинг ботиқ томонига йўналган бош нормаль бўйлаб йўналади. $v = \text{const}$ бўлгани учун бу тезланиш вақт ўтиши билан фақат нуқта тезлиги йўналишининг ўзгаришидан ҳосил бўлади. Бинобарин, нормал тезланиш нуқта тезлигининг йўналиш жиҳатдан ўзгаришини ифодалайди.

Текис ҳаракат тенгламасини тузиш учун (9. 28) тенгликдан фойдаланамиз, бунда $v = v_0 = \text{const}$ бўлганидан $v_0 = \frac{ds}{dt}$ ёки

$$ds = v_0\,dt \qquad (9.\,39)$$

Дастлабки пайтда, яъни $t=0$ да нуқтанинг ёй координатаси s_0 га тенг, t вақтдан кейин эса s га тенг бўлсин. У ҳолда (9. 39) ни интеграллаcак, $\int_{s_0}^{s} ds = \int_0^t v_0 dt$ ёки

$$s = s_0 + v_0 t \qquad (9.\,40)$$

келиб чиқади. (9. 40) ифода *нуқтанинг эгри чизиқли текис ҳаракати тенгламаси* дейилади.

3. **Тўғри чизиқли текис ҳаракат.** Бу ҳолда $w = w_\tau = w_n = 0$ бўлади. Фақат тўғри чизиқли текис ҳаракатда нуқтанинг тезланиши доимо нолга тенг бўлишини таъкидлаб ўтамиз.

4. **Эгри чизиқли текис ўзгарувчан ҳаракат.** Агар нуқтанинг ҳаракати давомида доимо $w_\tau = \text{const}$ бўлса, бундай ҳаракат *текис ўзгарувчан ҳаракат* дейилади. Текис ўзгарувчан ҳаракат тенгламасини топиш учун ҳаракатнинг бошланғич шартлари берилган бўлиши керак. Дастлабки пайтда, яъни $t = 0$ да $s = s_0$ ва $v = v_0$ бўлсин. (9. 34) формуладан

$$dv = w_\tau dt \qquad (9.41)$$

тенгликни оламиз. (9. 41) ни $w_\tau = \text{const}$ эканлигини эътиборга олиб интеграллаймиз:

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_{0}^{t} w_\tau dt$$

ёки

$$v = v_0 + w_\tau t \tag{9.42}$$

(9.42) дан эгри чизиқли текис ўзгарувчан ҳаракатдаги нуқтанинг тезлиги аниқланади. Бу ердаги v нинг ўрнига $\frac{ds}{dt}$ ни қўямиз:

$$\frac{ds}{dt} = v_0 + w_\tau t \text{ ёки } ds = v_0 dt + w_\tau t dt.$$

Бу тенгламанинг икки томонини яна интеграллаб текис ўзгарувчан ҳаракат тенгламасини оламиз:

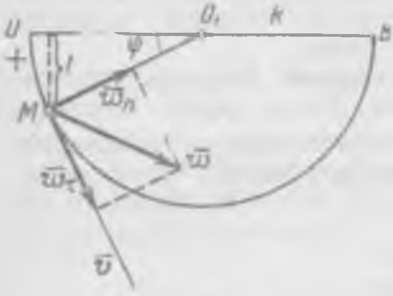
$$s = s_0 + v_0 t + w_\tau \frac{t^2}{2}. \tag{9.43}$$

Тўғри чизиқли текис ўзгарувчан ҳаракат тезлиги ва ҳаракат тенгламаси ҳам (9.42) (9.43) формулалар каби топилади, фақат ёй координатаси s ўрнида нуқтанинг тўғри чизиқли координатаси x қатнашади:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= v_0 + wt, \\ x &= x_0 + v_0 t + \frac{wt^2}{2}. \end{aligned}\right| \tag{9.44}$$

57-§. Нуқтанинг уринма ва нормал тезланишларига оид масалалар

20-масала. Нуқта R радиусли айлана бўйлаб s масофани ўтган ондаги тезлиги $v = \sqrt{2gh}$ га тенг; бунда h — айлананинг горизонтал OB диаметридан нуқтанинг пастга тушиш баландлиги. Агар шу пайтда $\overset{\frown}{OO_1M} = \varphi$ бўлса, нуқтанинг унга мос келувчи тезланиши топилсин (107-расм).



107-расм.

Ечиш. Нуқтанинг ҳолатини ёй координатаси $\overset{\frown}{OM} = s = R\varphi$ билан аниқлаймиз. Нуқтанинг нормал тезланишини (9. 35) дан топамиз. $\rho = R$, $v = \sqrt{2gh}$, $h = R \sin\varphi$ қийматларини $w_n = \frac{v^2}{\rho}$ формулага қўйсак,

$$w_n = 2g \sin\varphi \tag{1}$$

ҳосил бўлади. Уринма тезланиш эса (9.34) воситасида аниқланади:

$$w_\tau = \frac{dv}{dt} \text{ ёки } w_\tau = \frac{d}{dt}\left(\sqrt{2gh}\right) = \frac{g}{\sqrt{2gh}}\,\frac{dh}{dt}. \qquad (2)$$

$h = R\sin\varphi$ бўлганидан

$$\frac{dh}{dt} = \frac{d}{dt}(R\sin\varphi) = R\cos\varphi\,\frac{d\varphi}{dt}. \qquad (3)$$

Нуқта тезлигининг алгебраик қийматини (9.28) дан топамиз:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(R\cdot\varphi) = R\,\frac{d\varphi}{dt}, \qquad (4)$$

бундан

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\sqrt{2gh}}{R}. \qquad (5)$$

(5) ни (3) га қўйсак,

$$\frac{dh}{dt} = \sqrt{2gh}\,\cos\varphi \qquad (6)$$

ҳосил бўлади. (6) га асосан (2) дан қуйидаги келиб чиқади:

$$w_\tau = g\cos\varphi. \qquad (7)$$

(1) ва (7) ни (9.37) га қўямиз ва нуқтанинг тўлиқ тезланишини аниқлаймиз:

$$w = \sqrt{w_\tau^2 + w_n^2} = g\sqrt{(2\sin\varphi)^2 + (\cos\varphi)^2} = g\sqrt{1 + 3\sin^2\varphi}.$$

21-масала. Снаряднинг ҳаракати

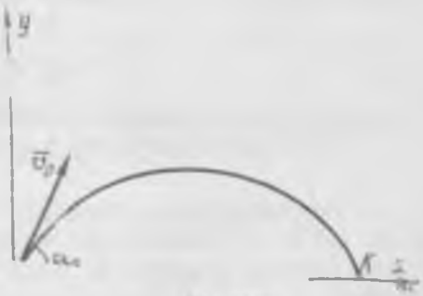
$$x = v_0 t\cos\alpha_0,\ y = v_0 t\sin\alpha_0 - \frac{1}{2}gt^2 \qquad (1)$$

тенгламалар билан берилган, бу ерда v_0 ва α_0 — доимий миқдорлар; $\alpha_0 < \frac{\pi}{2}$. Снаряднинг энг узоққа тушиш масофаси x_{max} ва Ерга тушиш олдидаги траекториясининг эгрилик радиуси ρ топилсин.

Ечиш. Ҳаракат тенгламаларидан t ни йўқотиб, траекториянинг тенгламасини топамиз:

$$y = x\,\mathrm{tg}\,\alpha_0 - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha_0}x^2. \qquad (2)$$

Демак, траектория параболадан иборат экан (108-расм). Нуқта Ерга (Ox ўққа) тушган вақтда унинг координаталари (x_{max}, 0) бўлади. (1) да $y = 0$ деб қараб, снаряднинг Ерга тушиш вақти t_1 ни аниқлаймиз:



108- расм.

$$0 = v_0 t \sin\alpha_0 - \frac{1}{2} g t^2,$$

бунда $t = 0$ бошланғич вақтни,

$$t = t_1 = \frac{2v_0 \sin\alpha_0}{g} \tag{3}$$

эса снаряднинг энг узоққа тушиш вақтини билдиради. У ҳолда

$$x = x_{\max} = v_0 \cos\alpha_0 \cdot t_1 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha_0}{g}. \tag{4}$$

(9.14), (9.15), (9.19) ва (9.20) формулалар воситасида v тезлик ва w тезланишни топамиз:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v_0 \cos\alpha_0, \quad \ddot{x} = 0, \\ \dot{y} &= v_0 \sin\alpha_0 - gt, \quad \ddot{y} = -g, \\ v^2 &= \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = v_0^2 - 2 v_0 g t \sin\alpha_0 + g^2 t^2, \\ w^2 &= \ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 = g^2. \end{aligned} \tag{5}$$

(9.34) га кўра уринма тезланиш

$$w_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{-g(v_0 \sin\alpha_0 - gt)}{\sqrt{(v_0 \cos\alpha_0)^2 + (v_0 \sin\alpha_0 - gt)^2}}$$

бўлади. Бу ердаги t нинг ўрнига Ерга тушиш вақти t_1 ни қўйиб шу пайтдаги w_τ ни топамиз:

$$w_\tau = \frac{-g(v_0 \sin\alpha_0 - 2v_0 \sin\alpha_0)}{\sqrt{v_0^2 \cos^2\alpha_0 + v_0^2 \sin^2\alpha_0}} = g \sin\alpha_0.$$

(9.37) га асосан нуқтанинг нормал тезланиши қуйидагича бўлади:

$$w_n = \sqrt{w^2 - w_\tau^2} = \sqrt{g^2 - g^2 \sin^2\alpha_0} = g \cos\alpha_0.$$

(3) ни (5) га қўйсак, $t = t_1$ пайтдаги тезликнинг қиймати $v = v_0$ эканлиги келиб чиқади.

(9.35) даги v нинг ўрнига v_0 ни қўйсак, эгрилик радиуси

$$\rho = \frac{v^2}{w_n} = \frac{v_0^2}{g \cos\alpha_0}.$$

X боб

ҚАТТИҚ ЖИСМНИНГ ИЛГАРИЛАНМА ВА ҚЎЗҒАЛМАС ЎҚ АТРОФИДАГИ АЙЛАНМА ҲАРАКАТИ

Қаттиқ жисм кинематикасида учрайдиган масалалар икки қисмга бўлинади: 1) бутун жисмнинг ҳаракати ва бу ҳаракатнинг кинематик хусусиятларини аниқлаш; 2) жисм ҳар бир нуқтасининг ҳаракатини ўрганиш.

Дастлаб қаттиқ жисмнинг энг содда ҳаракатлари: илгариланма ва қўзғалмас ўқ атрофидаги айланма ҳаракатларини кўриб чиқамиз.

58-§. Қаттиқ жисмнинг илгариланма ҳаракати

Жисмда олинган ҳар қандай кесма жисм ҳаракати давомида ҳамма вақт ўз-ўзига параллел қолса, жисмнинг бундай ҳаракати *илгариланма ҳаракат* дейилади.

Илгариланма ҳаракатдаги жисм нуқталарининг траекториялари исталган кўринишда бўлиши мумкин. Масалан, тўғри чизиқли рельсда ҳаракатланаётган вагон кузовининг ҳаракати илгариланма ҳаракат бўлиб, кузов нуқталарининг траекториялари тўғри чизиқдан иборат.

Иккинчи мисол тариқасида 109-расмда кўрсатилган AB спарникнинг ҳаракатини кузатамиз. O_1A ва O_2B кривошиплар O_1, O_2 ўқлар атрофида айланганда, AB спарник ҳамма вақт ўз-ўзига параллел қолади, яъни илгариланма ҳаракат қилади. Спарникнинг A ва B нуқталари марказлари O_1, O_2 нуқталарда ётган айланалар чизади. Демак, бу ҳолда илгариланма ҳаракатдаги AB спарник нуқталарининг траекториялари айланалардан иборат бўлади.

Қаттиқ жисмнинг илгариланма ҳаракатига оид қуйидаги теоремани исботлаймиз.

Теорема. *Илгариланма ҳаракатдаги жисмнинг ҳамма нуқталари бир хил чизиқ (траектория) чизади ва ҳар онда миқдор ҳамда йўналишлари жиҳатдан бир хил тезликка ва бир хил тезланишга эга бўлади.*

Теоремани исботлаш учун жисмнинг берилган $Oxyz$ қўзғалмас координаталар системасига нисбатан илгариланма ҳаракатини текширамиз (110-расм). Жисмда ихтиёрий A ва B нуқталарни олиб, уларнинг радиус-векторларини $\overline{r}_A$ ва $\overline{r}_B$ билан белгилаймиз. Расмдан

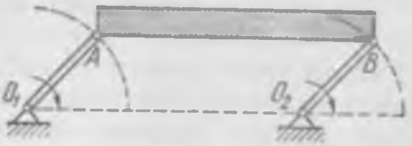
$$\overline{r}_B = \overline{r}_A + AB. \qquad (10.1)$$

Жисм ҳаракатланганда $\overline{r}_A$, $\overline{r}_B$ ўзгаради. Аммо AB кесманинг узунлиги ва йўналиши ўзгармайди. Чунки қаттиқ жисм таърифига кўра, AB кесманинг узунлиги ўзгармас бўлиб, илгариланма ҳаракат таърифига кўра, у доимо ўзига параллел қолади. Шунинг учун (10.1) тенгликдаги $\overline{r}_A$ ва $\overline{r}_B$ векторлар ўзгарганда, уларнинг A ва B нуқталарининг траекториялари бир хил бўлади, яъни $AA_1 = BB_1$ ва параллел бўлади.

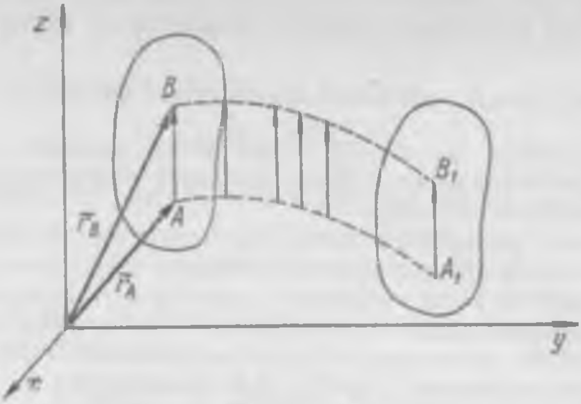
B нуқтанинг тезлигини аниқлаш учун (10.1) дан t вақт бўйича ҳосила оламиз:

$$\frac{d\overline{r}_B}{dt} = \frac{d\overline{r}_A}{dt} + \frac{d\overline{AB}}{dt},$$

бунда $\dfrac{d\overline{AB}}{dt} = 0$ бўлгани учун



109- расм.



110- расм.

$$\frac{d\bar r_B}{dt} = \frac{d\bar r_A}{dt} \tag{10.2}$$

ёки

$$\bar v_B = \bar v_A .$$

A ва *B* нуқталар ихтиёрий нуқталар бўлгани учун илгариланма ҳаракатдаги жисмнинг қолган барча нуқталарининг тезликлари ҳам бир хил бўлади. (10.2) дан *t* вақт бўйича ҳосила оламиз:

$$\frac{d\bar v_B}{dt} = \frac{d\bar v_A}{dt} ,$$

ёки

$$\bar w_B = \bar w_A \tag{10.3}$$

(10.3) тенгликдан илгариланма ҳаракатдаги жисм ҳамма нуқталарининг тезланишлари бир хилда бўлишини кўрамиз. Шундай қилиб, теорема исботланди.

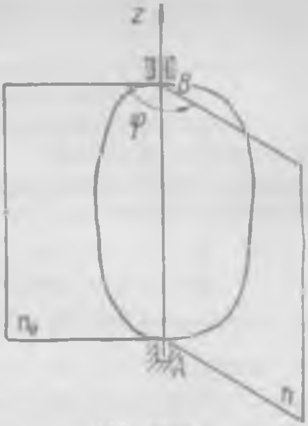
Бу теоремадан, ***жисмнинг илгариланма ҳаракати унинг бирор нуқтасининг ҳаракати билан аниқланади***, деган хулосага келамиз. Одатда, бундай нуқта учун жисмнинг оғирлик маркази *C* нуқта олинади. Мазкур нуқтанинг ҳаракат тенгламаларини координата усулида қуйидагича ёзиш мумкин:

$$x_c = f_1(t); \quad y_c = f_2(t); \quad z_c = f_3(t). \tag{10.4}$$

Шу сабабли илгариланма ҳаракатдаги жисмнинг кинематикаси нуқта кинематикасидан фарқ қилмайди.

Илгариланма ҳаракатдаги жисм нуқтасининг $\bar v$ тезлиги ва $\bar w$ тезланиши жисмнинг барча нуқталари учун бир хилда бўлганидан уларни мос равишда жисмнинг тезлиги ва тезланиши дейилади. $\bar v$ ва $\bar w$ векторлар жисмнинг ихтиёрий нуқтасига қўйиб тасвирланади.

59-§. Қаттиқ жисмнинг қўзғалмас ўқ атрофидаги айланма ҳаракати тенгламаси



111- расм.

Ҳаракатланувчи қаттиқ жисмнинг иккита нуқтаси доимо қўзғалмасдан қолса, унинг бундай ҳаракати *қўзғалмас ўқ атрофидаги айланма ҳаракат* дейилади. Шу қўзғалмас нуқталардан ўтган тўғри чизиқ *айланиш ўқи* дейилади. Жисмнинг айланиш ўқида жойлашган нуқталари доимо ҳаракатсиз бўлади.

Қаттиқ жисмнинг айланма ҳаракатини текшириш учун айланиш ўқи орқали иккита текислик ўтказамиз. Улардан бири қўзғалмас $П_0$ текислик, иккинчиси эса жисм билан маҳкам бириктирилган ва у билан бирга ҳаракатланадиган $П$ текислик бўлсин (111-расм). Айланиш ўқини жисмнинг A ва B нуқталари орқали юқорига йўналтирамиз ва уни Az билан белгилаймиз. Жисм Az ўқ атрофида ҳаракатланганда $П$ текислик $П_0$ текисликка нисбатан φ бурчакка бурилади. Бу бурчак *айланиш бурчаги* дейилади (у радианда ўлчанади). Айланиш ўқининг мусбат йўналишидан қараганимизда жисм соат милининг айланишига тескари йуналишда айланса, айланиш бурчаги мусбат, акс ҳолда манфий деб ҳисобланади. Қўзғалувчан текисликнинг қўзғалмас текисликка нисбатан фазодаги ҳолати исталган t вақт учун φ бурчак билан аниқланади. $П$ текислик жисм билан маҳкам бириктирилганидан жисмнинг ҳолати ҳам φ бурчак билан аниқланади. Жисм Az ўқ атрофида айланганда мазкур бурчак вақтнинг узлуксиз, бир қийматли функцияси сифатида ўзгаради:

$$\varphi = f(t). \qquad (10.5)$$

Бу ифода *жисмнинг қўзғалмас ўқ атрофидаги айланма ҳаракати тенгламаси* дейилади. Агар (10.5) тенглик берилган бўлса, жисмнинг $П_0$ текисликка нисбатан вақтнинг ҳар бир пайтидаги ҳолати маълум бўлади.

60-§. Айланма ҳаракатнинг бурчак тезлиги. Текис айланма ҳаракат

Айланиш бурчаги φ дан вақт бўйича олинган биринчи ҳосила *жисмнинг бурчак тезлиги* дейилади ва ω билан белгиланади:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \qquad (10.6)$$

ёки

$$\omega = \dot{\varphi} = f'(t).$$

Бунда ҳосиланинг ишораси жисмнинг айланиш йўналишини ифодалайди. $\varphi = f'(t) > 0$ бўлса, шу онда $f(t)$ функция ўсувчан бўлади, яъни ўқнинг мусбат йўналишидан қараганда, соат милининг айланишига тескари йўналишда айланади; $\varphi = f'(t) < 0$ бўлса, шу онда $f(t)$ функция камаювчан бўлади, яъни жисм соат милининг айланиш йўналишида айланади.

Агар ҳаракат давомида $\omega = \omega_0$ ўзгармаса, *жисм текис айланма ҳаракатда* дейилади. Бу ҳолда

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 = \text{const}, \quad d\varphi = \omega_0\, dt.$$

Бу тенгламани интеграллаймиз:

$$\varphi = \omega_0 t + C_1.$$

Бунда C_1 интеграллаш доимийси бўлиб, ҳаракатнинг бошланғич шартларидан аниқланади. Масалан, бошлангич ($t = 0$) пайтда айланиш бурчаги $\varphi = \varphi_0$ бўлсин. У ҳолда юқоридаги тенгликдан $C_1 = \varphi_0$ бўлади. Шундай қилиб, *жисмнинг текис айланма ҳаракати тенгламаси*

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t \qquad (10.7)$$

кўринишда ёзилади.

Агар $t = 0$ пайтда $\varphi_0 = 0$ бўлса, (10.7) га кўра текис айланма ҳаракат тенгламаси $\varphi = \omega t$ кўринишда ёзилади. Бундан

$$\omega = \frac{\varphi}{t}. \qquad (10.8)$$

СИ системасида бурчак тезлиги рад/с (ёки 1/с) да ўлчанади.

Жисм бир марта тўла айланганда $\varphi = 2\pi$ бўлади. Жисм бир минутда n марта айланса, текис айланма ҳаракатнинг бурчак тезлиги қуйидагига тенг бўлади:

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30} \text{ рад/с}. \qquad (10.9)$$

Бу формулада бир минутдаги айланишлар сони n жисм текис айланма ҳаракатининг бурчак тезлигини характерлайди.

22-масала. Буғ турбинаси дискни ҳаракатга келтириш давридаги айланиш тенгламаси ёзилсин; айланиш бурчаги вақтнинг кубига мутаносиб ва $t = 3$ с бўлганда бурчак тезлиги $n = 810$ айл/мин га тенг бўлади.

Ечиш. Масала шартига кўра, дискнинг ҳаракат қонунини қуйидаги формула билан ифодалаш мумкин:

$$\varphi = kt^3 \text{ рад},$$

бу ерда k — ўзгармас қийматга эга бўлган ва изланаётган номаълум коэффициент.

(10.6) га асосан дискнинг бурчак тезлиги ω ни аниқлаймиз:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = 3kt^2. \qquad (1)$$

$t = 3$ с бўлганда $n = 810$ айл/мин бўлиши маълум; (10.9) га асосан

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{810\pi}{30} = 27\pi \text{ рад/с}. \qquad (2)$$

k ни топиш учун (1) га $t = 3$ с қийматни қўйиб, (2) билан солиштирсак, $k = \pi$ келиб чиқади.

Шундай қилиб, дискнинг ҳаракат қонуни $\varphi = \pi t^3$ кўринишида ёзилади.

61- §. Айланма ҳаракатнинг бурчак тезланиши. Текис ўзгарувчан айланма ҳаракат

Вақт бирлиги ичида жисмнинг бурчак тезлиги ўзгариши билан характерланадиган катталик *жисмнинг бурчак тезланиши* дейилади. Жисмнинг айланма ҳаракатдаги бурчак тезланиши бурчак тезлигидан вақт бўйича олинган биринчи тартибли ҳосилага ёки айланиш бурчагидан вақт бўйича олинган иккинчи тартибли ҳосилага тенг бўлади. Бурчак тезланиш одатда ε билан белгиланади:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \qquad (10.10)$$

Бурчак тезланиш рад/с^2 ёки 1/с^2 билан ўлчанади.

(10.10) да $\frac{d\omega}{dt}$ ҳосиланинг ишораси жисм айланма ҳаракати бурчак тезлигининг орта бориши ёки камайишини ифодалайди. $\frac{d\omega}{dt} > 0$ бўлса, ω орта боради ва бундай ҳаракат *тезланувчан айланма ҳаракат* дейилади; $\frac{d\omega}{dt} < 0$ бўлса, ω камая боради ва бундай ҳаракат *секинланувчан айланма ҳаракат* дейилади.

Агар ҳаракат давомида $\varepsilon = \varepsilon_0 = \text{const}$ бўлса, жисмнинг бундай ҳаракати *текис ўзгарувчан айланма ҳаракат* дейилади.

Текис ўзгарувчан айланма ҳаракат тенгламасини аниқлаш учун (10.10) тенгликни қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$d\omega = \varepsilon_0 dt.$$

Бу тенгликни интеграллаб $\omega = \varepsilon_0 t + C_1$ ни ҳосил қиламиз. Бунда C_1 интеграллаш доимийси бўлиб, ҳаракатнинг бошланғич шартларидан топилади. Масалан, $t = 0$ да $\omega = \omega_0$ бўлса, $C_1 = \omega_0$ бўлади. У ҳолда *текис ўзгарувчан айланма ҳаракатнинг бурчак тезлиги*

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t \qquad (10.11)$$

формуладан аниқланади.

Текис ўзгарувчан айланма ҳаракат тенгламасини келтириб чиқариш учун (10.6) га кўра (10.11) ни қуйидагича ёзамиз:

$$d\varphi = (\omega_0 + \varepsilon t)\, dt.$$

Бу тенгликни интегралласак,

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2} + C_2.$$

$t = 0$ да $\varphi = \varphi_0$ бўлса, охирги тенгликдан $C_2 = \varphi_0$ бўлишини кўрамиз. У ҳолда

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}. \qquad (10.12)$$

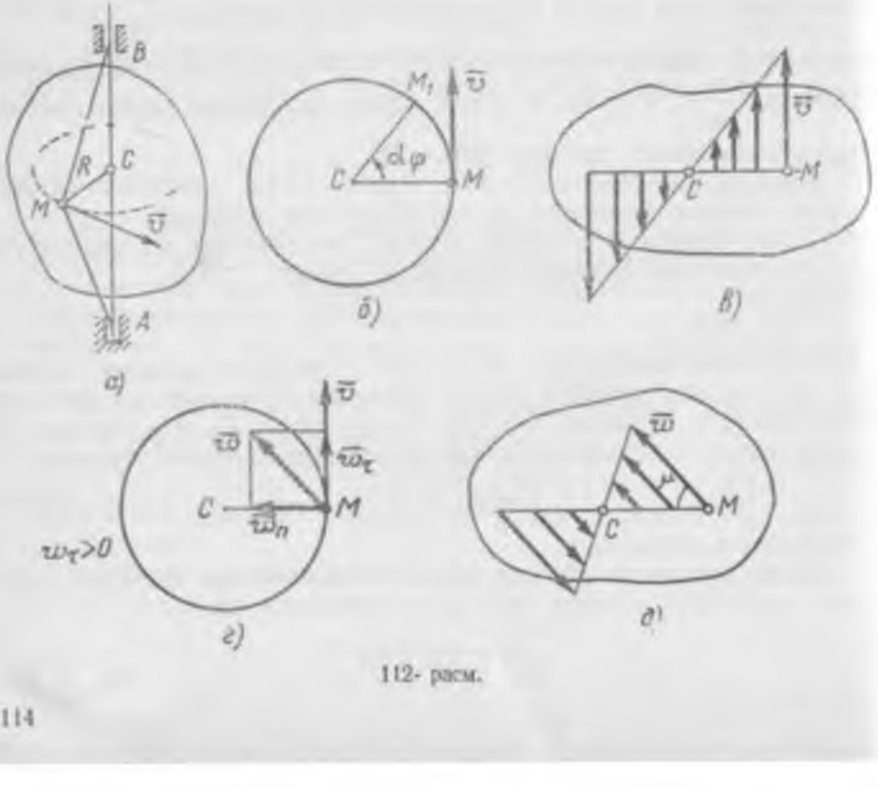
Бу тенглама *жисмнинг қўзғалмас ўқ атрофидаги текис ўзгарувчан айланма ҳаракати тенгламасини* ифодалайди.

Жисмнинг айланма ҳаракати тенгламаси $\varphi = f(t)$, бурчак тезлиги ω ва бурчак тезланиши ε қўзғалмас ўқ атрофида айланаётган бутун жисмнинг ҳаракатини кинематик характерлайди. Аммо жисм айрим нуқталарининг ҳаракатини аниқлаш учун бу катталиклар етарли эмас.

62- §. Қўзғалмас ўқ атрофида айланма ҳаракатдаги жисм нуқталарининг тезлиги ва тезланиши

Қўзғалмас ўқ атрофида айланма ҳаракатдаги жисм нуқталарининг ҳаракатини характерловчи кинематик элементларни, яъни траектория, тезлик ва тезланишларни аниқлаймиз.

Жисмнинг айланиш ўқида иккита қўзғалмас A ва B нуқталарни оламиз. Жисмнинг айланиш ўқидан R масофада жойлашган M нуқтани олиб, уни A ва B нуқталар билан туташтирамиз (112-расм, *а*).



112- расм.

Жисм айланиш ўқи атрофида айланганда MA ва MB кесмаларнинг узунлиги ўзгармас бўлганидан M нуқта радиуси R га тенг, маркази айланиш ўқининг C нуқтасида жойлашган айлана чизади. Бу айлана M нуқтанинг траекториясини ифодалайди. M нуқта жисмнинг ихтиёрий нуқтаси бўлганидан, айланма ҳаракатдаги жисм нуқталарининг траекториялари, маркази айланиш ўқида бўлган ва айланиш ўқига тик текисликларда жойлашган айланалардан иборат эканини кўрамиз. Энди M нуқтанинг траектория бўйлаб ҳаракатини кузатайлик (112-расм, *б*). Бирор t вақтда мазкур нуқта M ҳолатда бўлиб, dt вақт ўтгандан кейин у траектория бўйлаб M ҳолатга кўчсин. Шу dt вақт ичида жисм ўқ атрофида $d\varphi$ бурчакка айланади. Нуқта эса траектория бўйлаб $ds = Rd\varphi$ ёйни босиб ўтади. M нуқтанинг траектория бўйлаб ҳаракат тезлиги (9.28) формулага мувофиқ аниқланади:

$$v = \frac{ds}{dt} = R\,\frac{d\varphi}{dt} = R\omega. \qquad (10.13)$$

Бу формула ёрдамида аниқланадиган v тезлик *жисм нуқтасининг чизиқли тезлиги* дейилади.

Шундай қилиб, *қўзғалмас ўқ атрофида айланма ҳаракатдаги жисм ихтиёрий нуқтаси чизиқли тезлигининг миқдори жисм бурчак тезлигининг мазкур нуқтадан айланиш ўқигача бўлган масофага кўпайтмасига тенг. Чизиқли тезлик М нуқта чизган айланага ҳаракат йўналиши бўйича ўтказилган уринма бўйлаб йўналади.*

Жисмнинг барча нуқталари учун берилган онда ω бир хил қийматга эга бўлгани учун (10.13) дан қуйидаги натижани оламиз: қўзғалмас ўқ атрофида айланма ҳаракатдаги жисм нуқтасининг чизиқли тезлиги мазкур нуқтадан айланиш ўқигача бўлган масофага мутаносиб тарзда ўзгаради (112-расм, *в*).

Қўзғалмас ўқ атрофида айланма ҳаракатдаги жисм нуқталарининг траекториялари айланалардан иборат бўлгани учун M нуқтанинг тезланиши уринма ва нормал тезланишлардан ташкил топади, (9.34) ва (9.35) га асосан

$$w_\tau = \frac{dv}{dt} \text{ ва } w_n = \frac{v^2}{\rho}.$$

Кўрилаётган ҳолда $\rho = R$ ва $v = R\omega$ бўлгани учун

$$w_\tau = \frac{d}{dt}\left(R\cdot\omega\right) = R\cdot\varepsilon, \qquad (10.14)$$

$$w_n = \frac{(R\cdot\omega)^2}{R} = \omega^2 R. \qquad (10.15)$$

Уринма тезланиш $\bar{w}_\tau$ траекторияга ўтказилган уринма бўйлаб (агар ҳаракат тезланувчан бўлса, ҳаракат йўналишида; секинланувчан ҳаракатда эса, унга тескари) йўналади. Нормал тезланиш $\bar{w}_n$ эса $\bar{R}$ бўйлаб айланиш ўқи томон йўналган бўлади (112-расм, г). Баъзан $\bar{w}_\tau$ ни *айланма тезланиш* деб, w_n ни эса *марказга интилма тезланиш* деб ҳам юритилади. (9.37) формуладан тезланишнинг миқдори

$$w = \sqrt{w_\tau^2 + w_n^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \qquad (10.16)$$

ва (9.38) дан мазкур тезланишнинг йўналиши

$$\mathrm{tg}\,\mu = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2} \qquad (10.17)$$

топилади.

Жисмнинг барча нуқталари учун берилган онда ω ва ε бир хил қийматга эга бўлганидан μ бурчак ҳам шу онда мазкур нуқталар учун битта қийматга эга бўлади. (10.16) дан айланма ҳаракатдаги жисм нуқтасининг тезланиши мазкур нуқтадан айланиш ўқигача бўлган масофага мутаносиб равишда ўзгаришини кўрамиз (112-расм, д).

63- §. Бурчак тезлик ва бурчак тезланишнинг векторлиги

Юқорида кўрганимиздек, қўзғалмас ўқ атрофида айланма ҳаракатдаги жисмнинг бурчак тезлиги (10.6) формула ёрдамида аниқланадиган скаляр катталик билан ифодаланади. У ҳолда нуқта чизиқли тезлигининг миқдори (10.13) формуладан топилади. Нуқта чизиқли тезлигининг вектор шаклидаги формуласини аниқлаш учун *бурчак тезликни вектор катталик деб қараймиз.* Бунинг учун бурчак тезлик векторини айланиш ўқи бўйлаб йўналган ва унинг мусбат йўналишидан қаралганда, айланиш соат милининг айланишига тескари йўналишда кўринадиган, айланиш ўқининг ихтиёрий нуқтасига қўйилган вектор билан тасвирлаймиз. Бурчак тезлик векторининг модули

$$|\bar\omega| = \left|\frac{d\varphi}{dt}\right|$$

формуладан аниқланади.

Бурчак тезлик вектори $\bar\omega$ берилган бўлса: 1) $\bar\omega$ вектор ётувчи айланиш ўқининг ҳолати; 2) $\bar\omega$ векторнинг йўналиши ёрдамида аниқланадиган айланиш йўналиши ва 3) $\bar\omega$ векторнинг модулига тенг бўлган жисм бурчак тезлигининг абсолют қиймати маълум бўлади. Шу сабабли бурчак тезликни вектор тарзида тасвирлаш кўпчилик кинематика масалаларини ечишни осонлаштиради.

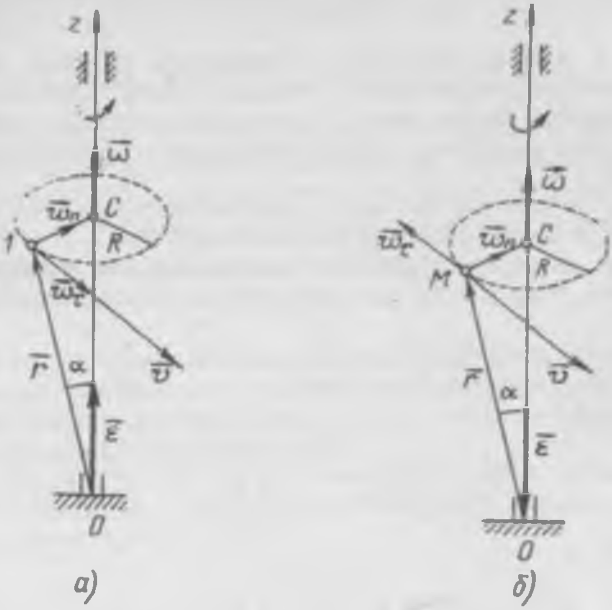
Айланиш ўқи учун z ўқни олиб, мазкур ўқнинг бирлик векторини k билан белгиласак, қуйидагича ёза оламиз:

$$\bar\omega = \frac{d\varphi}{dt}\bar k. \qquad (10.18)$$

Айланиш ўқи қўзғалмас бўлгани учун $\bar k = \overline{\mathrm{const}}$; жисмнинг бурчак тезланишини аниқлаш учун (10.18) дан вақт бўйича ҳосила оламиз:

$$\bar\varepsilon = \frac{d\bar\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}\bar k. \qquad (10.19)$$

(10.18) ва (10.19) формулалардан кўрамизки, $\bar\omega$ ва $\bar\varepsilon$ векторлар $\frac{d\varphi}{dt}$ ва $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ бир хил ишорали бўлса, айланиш ўқи бўйлаб бир то-



113- расм.

монга (113-расм, *а*), турли ишорали бўлса, қарама-қарши томонга йўналади (113-расм, *б*).

$\bar{\varepsilon}$ векторнинг модули

$$|\bar{\varepsilon}| = \left|\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right|.$$

64- §. Айланма ҳаракатдаги жисм нуқталари тезлиги ва тезланишининг векторли ифодалари

Жисм ихтиёрий M нуқтасининг айланиш ўқидаги O нуқтага нисбатан радиус-векторини $\bar{r}$ билан белгилаймиз. У ҳолда M нуқта тезлигининг модули

$$|\bar{v}| = R\omega = r\omega\,\sin(\widehat{\bar{\omega}\cdot\bar{r}}) = |\bar{\omega}\times\bar{r}|$$

формуладан аниқланади.

$\bar{v}$ тезлик вектори $\bar{\omega}$ бурчак тезлик билан $\bar{r}$ радиус-вектор ётган текисликка перпендикуляр равишда, айланиш йўналишида M нуқтага айланага ўтказилган уринма бўйлаб йўналади (113-расм). $\bar{\omega}\times\bar{r}$ вектор $\bar{\omega}$ ва $\bar{r}$ ётган текисликка (яъни M нуқта ва айланиш ўқи орқали ўтувчи текисликка) перпендикуляр равишда, айланиш йўналиши бўйича йўналади.

Бинобарин, $\bar{v}$ ва $\bar{\omega}\times\bar{r}$ векторлар модуль жиҳатдан тенг, йўналиши бир хил, яъни улар ўзаро тенг бўлади:

$$\overline{v} = \overline{\omega} \times \overline{r}\,. \qquad (10.20)$$

Шундай қилиб, *қўзғалмас ўқ атрофида айланма ҳаракатдаги жисм ихтиёрий нуқтасининг чизиқли тезлиги жисмнинг бурчак тезлик вектори билан мазкур нуқтанинг айланиш ўқидаги ихтиёрий нуқтага нисбатан радиус-векторининг векторли кўпайтмасига тенг.*

(10.20) ифода қаттиқ жисм кинематикасидаги асосий формулалардан бири бўлиб, *Эйлер формуласи* дейилади.

Уринма ва марказга интилма тезланишларнинг векторли ифодасини аниқлаш учун (10.20) дан вақт бўйича ҳосила оламиз:

$$\overline{w} = \frac{d\overline{v}}{dt} = \frac{d\overline{\omega}}{dt} \times \overline{r} + \overline{\omega} \times \frac{d\overline{r}}{dt}\,.$$

Бунда

$$\frac{d\overline{\omega}}{dt} = \overline{\varepsilon} \text{ ва } \frac{d\overline{r}}{dt} = \overline{v}$$

бўлгани учун

$$\overline{w} = \overline{\varepsilon} \times \overline{r} + \overline{\omega} \times \overline{v}. \qquad (10.21)$$

Бу тенгликдаги $\overline{\varepsilon} \times \overline{r}$ уринма тезланиши, $\overline{\omega} \times \overline{v}$ марказга интилма тезланишни ифодалашини кўрсатамиз.

113-расм, *а* да тезланувчан айланма ҳаракат, шу расмнинг *б* сида секинланувчан айланма ҳаракат учун уринма ва марказга интилма тезланишларнинг йўналиши кўрсатилган.

$\overline{\varepsilon} \times \overline{r}$ векторнинг модули:

$$|\overline{\varepsilon} \times \overline{r}| = |\overline{\varepsilon}|\,\overline{r}\,\sin\alpha = |\overline{\varepsilon}|\,R = |\overline{w_\tau}|$$

бўлади; бунда α орқали $\overline{r}$ радиус-вектор билан $\overline{\varepsilon}$ бурчак тезланиш орасидаги бурчак белгиланган.

$\overline{\varepsilon} \times \overline{r}$ вектор $\overline{\varepsilon}$ ва $\overline{r}$ ётган текисликка (яъни M нуқта ва айланиш ўқи орқали ўтувчи текисликка) перпендикуляр равишда тезланувчан айланма ҳаракатда $\overline{v}$ тезлик йўналиши бўйича (113-расм, *а*), секинланувчан айланма ҳаракатда эса унга тескари йўналади (113-расм, *б*).

Бинобарин, $\overline{\varepsilon} \times \overline{r}$ ва $\overline{w_\tau}$ векторларнинг модуллари тенг, йўналиши бир хил, яъни улар ўзаро тенг бўлади:

$$\overline{w_\tau} = \overline{\varepsilon} \times \overline{r}. \qquad (10.22)$$

Шундай қилиб, *қўзғалмас ўқ атрофида айланма ҳаракатдаги жисм ихтиёрий нуқтасининг уринма тезланиши жисмнинг бурчак тезланиш вектори билан мазкур нуқтанинг айланиш ўқидаги ихтиёрий нуқтага нисбатан радиус-векторининг векторли кўпайтмасига тенг.*

Кўрилаётган ҳолда $\bar{v} \perp \bar{\omega}$ бўлгани учун, $\sin(\widehat{\bar{\omega}\ \bar{v}})=1$ бўлади. Шу сабабли

$$|\bar{\omega} \times \bar{v}| = |\bar{\omega}||\bar{v}| \sin(\widehat{\bar{\omega}, \bar{v}}) = |\bar{\omega}||\bar{v}| = R\omega^2 = w_n.$$

Агар бурчак тезлик вектори $\bar{\omega}$ ни фикран M нуқтага кўчирсак, $\bar{\omega} \times \bar{v}$ вектор тезланувчан айланма ҳаракатда ҳам, секинланувчан айланма ҳаракатда ҳам MC радиус бўйича C марказга йўналади.

Бинобарин, $\bar{\omega} \times \bar{v}$ ва $\bar{w}_n$ векторларнинг модуллари тенг, йўналиши бир хил, яъни улар ўзаро тенг бўлади:

$$\bar{w}_n = \bar{\omega} \times \bar{v}. \tag{10.23}$$

Шундай қилиб, *қўзғалмас ўқ атрофида айланма ҳаракатдаги жисм ихтиёрий нуқтасининг марказга интилма тезланиши жисмнинг бурчак тезлик вектори билан мазкур нуқта чизиқли тезлигининг векторли кўпайтмасига тенг.*

(10.22) ва (10.23) га асосан қўзғалмас ўқ атрофида айланма ҳаракатдаги жисм ихтиёрий нуқтасининг тезланишини ифодаловчи тенгликни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\bar{w} = \bar{w}_\tau + \bar{w}_n. \tag{10.24}$$

(10.22), (10.23) ва (10.24) формулалар мос равишда *қўзғалмас ўқ атрофида айланаётган каттиқ жисм нуқталарининг уринма, марказга интилма ва тўлиқ тезланишларининг векторли ифодасидир.*

23-масала. 114-расмда тасвирланган механизмда A юк $x=(0{,}18+0{,}7t^2)$ M (t вақт секунд ҳисобида) қонун бўйича тўғри чизиқли илгариланма ҳаракат қилади. Қуйидагилар берилган: $R_2 = 1$ м; $r_2 = 0{,}6$ м; $R_3 = 0{,}75$ м. Юк $S=0{,}2$ м йўлни ўтган пайтда механизм M нуқтасининг тезланиши аниқлансин.

Ечиш. A юк $S=0{,}2$ м йўлни ўтишига кетган τ вақтни ҳисоблаймиз:

$$s = x_{(t=\tau)} - x_{(t=0)} = 0{,}7\ \tau^2,$$

бундан

$$\tau = \sqrt{\frac{s}{0{,}7}} = \sqrt{\frac{0{,}2}{0{,}7}} = 0{,}53\ с.$$

Ҳаракат тенгламасидан вақт бўйича ҳосила олиб, A юкнинг тезлигини аниқлаймиз:

$$v_A = \dot{x} = 1{,}4t\ м/с.$$

r_2 радиусли ғилдирак гардишида ётган нуқтанинг тезлиги $v_A =$

114- расм.

$= r_2 \omega_2$. Бундан механизм 2-бўғинининг бурчак тезлиги учун қуйидаги ифодани оламиз:

$$\omega_2 = \frac{\dot{x}}{r_2} = \frac{1,4\,t}{0,6} = \frac{7}{3}\,t\,c^{-1}.$$

Тишли илашмали R_2 ва R_3 радиусли ғилдираклар қарама-қарши йўналишда айланади ва уларнинг бурчак тезликлари ғилдираклар радиусларига тескари мутаносибдир: $\frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{R_3}{R_2}$.

Бундан

$$\omega_3 = \frac{R_2}{R_3}\,\omega_2 = \frac{1}{0,75}\cdot\frac{7}{3}\,t = \frac{28}{9}\,t\,c^{-1}.$$

(10.10) га асосан бурчак тезланиш

$$\varepsilon_3 = \frac{d\omega_3}{dt} = \frac{28}{9}\,c^{-2} = const.$$

(10.3) га кўра M нуқта тезлигининг миқдори

$$w_\tau = R_{3\omega_3} = 0,75\ \omega_3$$

бўлиб, 3-ғилдирак радиусига перпендикуляр равишда, у айланадиган томонга йўналган.

(10.14) га биноан M нуқтанинг урима тезланиши миқдор жиҳатдан

$$w_\tau = R_3\,\varepsilon_3 = 2,33\ м/с^2$$

бўлиб, йўналиши v тезлик бўйича йўналади, чунки ғилдираклар тезланувчан ҳаракат қилади ($\varepsilon > 0$).

M нуқта марказга интилма тезланишининг миқдори (10.15) ёрдамида аниқланади:

$$w_n = R_3\,\omega_3^2 = 0,75\ \omega_3^2.$$

$\overline{w}_n$ вектор радиус бўйича ғилдирак марказига йўналади.

(10.16) воситасида M нуқтанинг тўлиқ тезланиши топилади:

$$w = R_3\sqrt{\varepsilon_3^2 + \omega_3^4}\,.$$

Аниқланган ифодаларнинг $t = \tau$ вақтдаги қийматлари қуйидаги жадвалда келтирилган:

ω_3, c^{-1}	ε_3, c^{-2}	v, м/с	Тезланиш, м/с²		
			w_τ	w_n	w
1,65	3,11	1,24	2,33	2,02	3,09

XI боб

ҚАТТИҚ ЖИСМНИНГ ТЕКИС ПАРАЛЛЕЛ ҲАРАКАТИ

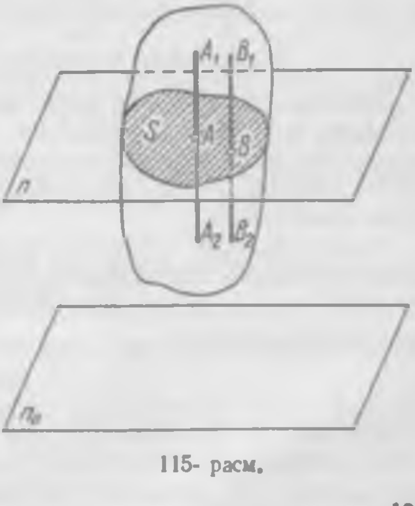
Жисмнинг ҳар бир нуқтаси доимо бирор қўзғалмас $П_0$ текисликка параллел текисликда ҳаракатланса, унинг бундай ҳаракати текис параллел ҳаракат дейилади.

Қаттиқ жисмнинг текис параллел ҳаракатига қуйидаги мисолларни келтириш мумкин: 1) асоси доимо бирор қўзғалмас текисликда сирпанувчи конуснинг ҳаракати; 2) тўғри чизиқли рельсда ғилдиракнинг думалаши; 3) бир текисликда ҳаракатланувчи машина ва механизм қисмларининг ҳаракати ва ҳоказо.

65-§. Текис параллел ҳаракатнинг хусусиятлари. Текис шаклнинг ҳаракат текислигида кўчиши

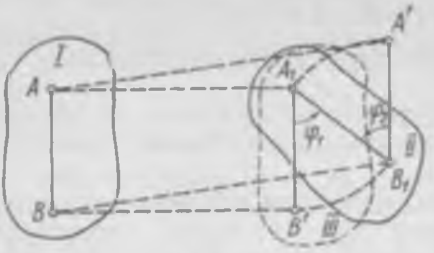
Қаттиқ жисмнинг текис параллел ҳаракатини ўрганиш учун жисм орқали $П_0$ текисликка параллел бўлган ихтиёрий $П$ текисликни ўтказамиз. $П$ текислик жисмда S қирқимни ҳосил қилади (115-расм). Келгусида S юзани *текис шакл* деб атаймиз. Текис шакл ҳамма вақт $П$ текисликда ҳаракатланади. Текис параллел ҳаракатдаги жисмда $П$ текисликка перпендикуляр қилиб олинган A_1A_2 кесма ўзига параллел равишда кўчади, яъни A_1A_2 кесма илгариланма ҳаракатда бўлади. Шу сабабли жисмнинг бу кесмада ётган ҳамма нуқталарининг ҳаракатини ўрганиш ўрнига, улардан бирининг, масалан, S текис шакл A нуқтасининг ҳаракатини ўрганиш кифоя. Шунингдек, $П$ текисликка перпендикуляр B_1B_2 кесманинг ҳаракатини ўрганиш ўрнига унинг S юзадаги B нуқтасининг ҳаракатини ўрганиш етарлидир. Шундай қилиб, қатттиқ жисмнинг текис параллел ҳаракатини ўрганиш учун жисмда $П_0$ қўзғалмас текисликка параллел бўлган S юзанинг $П$ текисликдаги ҳаракатини билсак кифоя.

Текис шакл ҳаракатланадиган $П$ текислик *текис шаклнинг ҳаракат текислиги* дейилади. Ҳаракат текислигида жойлашган қўзғалмас Oxy координаталар системасига нисбатан текис шаклнинг ҳаракатини ўрганамиз. Келгусида ҳаракат текислиги учун шакл текислигини оламиз.



115- расм.

Текис шаклнинг ўз текислигидаги ҳаракати унинг ихтиёрий икки нуқтасининг ҳолати билан ёки бу нуқталарни туташтирувчи кесманинг ҳолати билан аниқланади. Шу сабабли текис шаклнинг ҳаракатини ўрганиш ўрнига унда олинган ихтиёрий кесманинг ҳаракатини ўрганиш кифоя.



116- расм.

Текис шакл ҳаракатини ундаги кинематик ҳолати аниқ бўлган нуқта ҳаракатига боғлаб ўрганиш қулай бўлади: бу нуқта *қутб* деб юритилади.

Текис шаклнинг кўчишига оид қуйидаги теоремани исботлаймиз.

Теорема. *Текис шаклнинг ҳаракат текислигидаги ҳар қандай кўчишини қутб билан биргаликдаги илгариланма ҳаракати ҳамда қутбдан ҳаракат текислигига перпендикуляр равишда ўтувчи ўқ атрофидаги айланма ҳаракатидан ташкил топган деб қараш мумкин.*

Исбот. Текис шаклнинг ҳаракат текислигидаги ихтиёрий икки ҳолатини оламиз: унинг *I* ҳолати AB билан, *II* ҳолати эса A_1B_1 билан аниқлансин (116-расм). A нуқтани қутб деб олиб, текис шаклга шундай илгариланма кўчиш берамизки, натижада A нуқта A_1 нуқта билан устма-уст тушсин. У ҳолда текис шакл пунктир билан чизилган *III* ҳолатни эгаллайди, бунда $A_1B' \parallel AB$. Текис шаклнинг илгариланма кўчиши $\overline{AA_1}$ вектор билан аниқланади. A_1 нуқтадан ҳаракат текислигига перпендикуляр равишда ўтувчи ўқ атрофида текис шаклни $B'\widehat{A_1}B_1 = \varphi_1$ бурчакка айлантирсак, текис шакл *II* ҳолатни эгаллайди. Шундай қилиб, теорема исботланди.

Қутб учун B нуқтани олсак, илгариланма кўчиш $\overline{BB_1}$ вектор билан ифодаланади. Текис шаклни B_1 қутб атрофида $A'\widehat{B_1}A_1 = \varphi_2$ бурчакка айлантирсак, текис шакл *П* ҳолатни эгаллайди. Расмдан кўрамизки, $\overline{BB_1} \neq \overline{AA_1}$; яъни илгариланма кўчиш қутбни танлашга боғлиқ бўлади; $\overline{B'A} \, || \, \overline{B_1A'}$ ва A_1B_1 умумий бўлгани учун $\varphi_1 = \varphi_2$ ҳамда айланиш йўналиши бир хил бўлади. Шундай қилиб, *қутб атрофида айланиш бурчаги қутбни танлашга боғлиқ бўлмайди.*

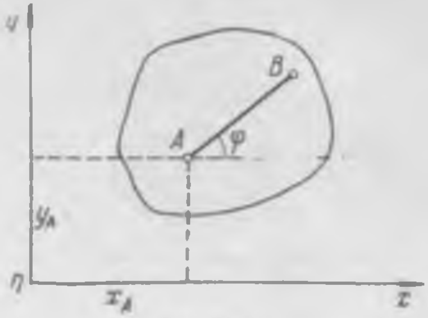
66-§. Текис шаклнинг ҳаракат тенгламаси

Юқорида исботланган теоремага асосан, текис шаклнинг ўз текислигидаги ҳар ондаги ҳаракатини илгариланма ва айланма ҳаракатлардан иборат деб қараш мумкин; илгариланма ҳаракат қутбни танлашга боғлиқ бўлади ва қутб учун олинган нуқтанинг ҳаракати билан аниқланади.

Текис шаклнинг бирор A нуқтасини қутб учун қабул қилиб, унинг қўзғалмас Oxy координаталар системасига нисбатан координаталарини x_A, y_A билан белгилаймиз (117-расм). A нуқтанинг ҳаракатини аниқлайдиган

$$x_A = f_1(t), \; y_A = f_2(t)$$

тенгламалар текис шаклнинг илгариланма ҳаракатини ифодалайди. Текис шаклда олинган ихтиёрий AB кесманинг x ўқ билан ташкил



117- расм.

қилган бурчагини φ билан белгиласак, жисм ҳаракатланганда φ бурчак вақт функцияси сифатида ўзгаради:

$$\varphi = f_3(t).$$

Шундай қилиб, текис шаклнинг ҳаракати

$$\left.\begin{aligned} x_A &= f_1(t),\\ y_A &= f_2(t),\\ \varphi &= f_3(t), \end{aligned}\right| \qquad (11.1)$$

тенгламалар билан аниқланади. (11.1) тенгламалар *қаттиқ жисмнинг текис параллел ҳаракати тенгламалари* дейилади.

Хусусий ҳолда $\varphi = const$ бўлса, текис шаклда олинган AB кесма доимо ўзига параллел равишда ҳаракатланади ва текис шакл (ёки жисм) илгариланма ҳаракатда бўлади. Агар ҳаракат давомида x_A ва y_A лар ўзгармас қийматга эга бўлса-ю, φ бурчак ўзгарса, у ҳолда A нуқта қўзғалмасдан қолади ва текис шакл A нуқта атрофида айланма ҳаракатда бўлади, яъни жисм A нуқтадан ўтувчи ва шакл текислигига тик ўқ атрофида айланма ҳаракатда бўлади.

Маълумки, қутб атрофида айланиш бурчаги қутбга боғлиқ бўлмайди. Шу сабабли текис шакл қутб атрофида айланганда унинг барча нуқталари ҳар онда бир хил бурчак тезлик ва бир хил бурчак тезланишга эга бўлади ва қуйидаги формула воситасида аниқланади:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt},$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \qquad (11.2)$$

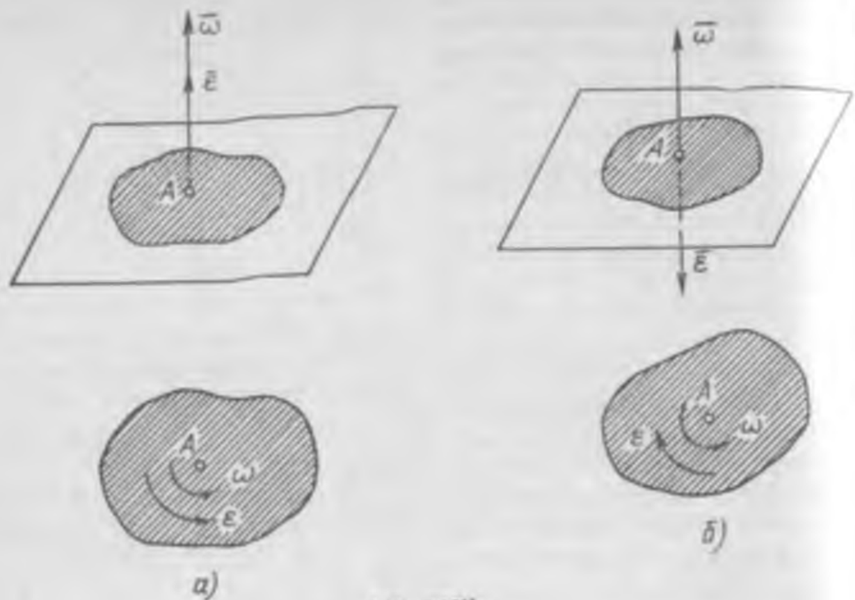
Бурчак тезлик $\bar{\omega}$ ва бурчак тезланиш $\bar{\varepsilon}$ векторлари текис шакл текислигига A қутб орқали ўтган перпендикуляр чизиқда ётади. Агар текис шакл қутб атрофида тезланувчан айланма ҳаракатда бўлса, $\bar{\omega}$ ва $\bar{\varepsilon}$ лар бир томонга (118-расм, *а*), секинланувчан айланма ҳаракат қилса, қарама-қарши томонга йўналади (118-расм, *б*)

67-§. Текис шакл нуқтасининг тезлигини қутб усулида аниқлаш

Текис шакл нуқталарининг тезликлари орасидаги боғланиш қуйидаги теорема ёрдамида аниқланади.

Теорема. *Текис шакл ихтиёрий нуқтасининг тезлиги қутб тезлиги билан мазкур нуқтанинг қутб атрофидаги айлана бўйлаб ҳаракатидаги чизиқли тезлигининг геометрик йиғиндисига тенг.*

Исбот. S текис шаклнинг ҳаракатини қўзғалмас Oxy координата-



118- расм.

лар системасига нисбатан текширамиз. A нуқтани қутб деб олсак, ихтиёрий B нуқтанинг Oxy системага нисбатан радиус- вектори $\bar{r}_B$ A қутб радиус- вектори $\bar{r}_A$ билан қуйидагича боғланади (119- расм, *a*):

$$\bar{r}_B = \bar{r}_A + \overline{AB}. \qquad (11.3)$$

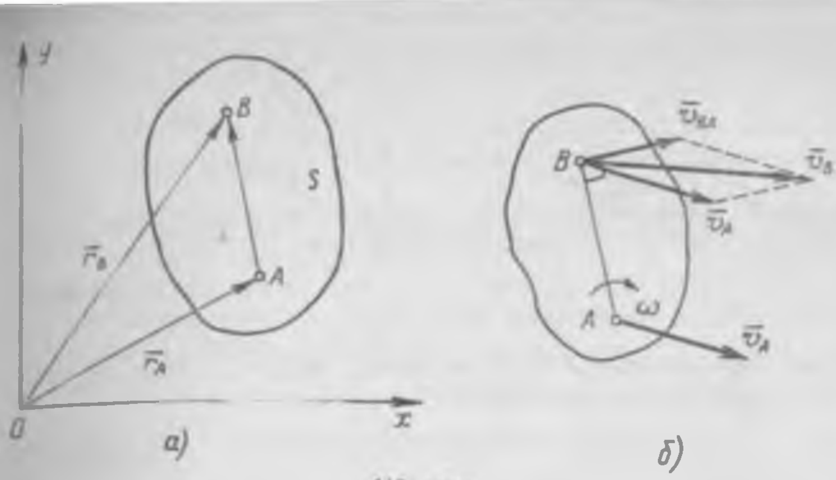
(11. 3) дан вақт бўйича ҳосила олиб, B нуқтанинг тезлигини аниқлаймиз:

$$\bar{v}_B = \frac{dr_B}{dt} = \frac{d\bar{r}_A}{dt} + \frac{d\overline{AB}}{dt}, \qquad (11.4)$$

бунда $\frac{d\bar{r}_A}{dt} = \bar{v}_A$ қутб деб олинган нуқтанинг тезлигини ифодалайди.

Текис шакл ҳаракатланганда $\overline{AB}$ вектор модули ўзгармайди, йўналиши эса, жисм қутб атрофида айланиши билан ўзгаради. Шу сабабли $\frac{d\,\overline{AB}}{dt}$ ҳосила B нуқтанинг A нуқта атрофида айлангандаги чизиқли тезлигини ифодалайди; уни $\bar{v}_{BA}$ билан белгилаймиз, яъни

$$\frac{d\overline{AB}}{dt} = \bar{v}_{BA}$$



119- расм.

Эйлер формуласига кўра $\bar{v}_{AB}$ ни текис шаклнинг бурчак тезлиги $\bar{\omega}$ ва радиус-вектор AB ларнинг векторли кўпайтмаси орқали ифодалаймиз:

$$\bar{v}_{BA} = \bar{\omega} \times \overline{AB},$$

бунда $\bar{v}_{BA}$ айланиш радиуси AB га перпендикуляр равишда, текис шаклнинг айланиш йўналиши бўйича йўналади ва унинг модули

$$|\bar{v}_{BA}| = |\bar{\omega}| \cdot |\overline{AB}| \tag{11.5}$$

бўлади.

У ҳолда (11.4) ни қуйидагича ёзиш мумкин (119-расм, *б*):

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA} \tag{11.6}$$

ёки

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A = \bar{\omega} \times \overline{AB}. \tag{11.7}$$

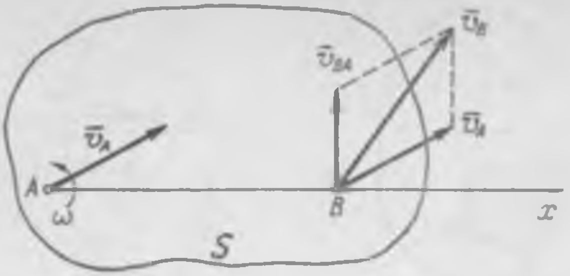
Теорема исботланди.

Текис шакл бирор нуқтасининг тезлиги ва айланма ҳаракатининг бурчак тезлиги берилганда *текис шакл* бошқа бир *нуқтасининг тезлигини* (11.7) формулага мувофиқ аниқлаш уни *қутб усулида аниқлаш* дейилади.

68- §. Текис шакл икки нуқтаси тезликларининг проекцияларига оид теорема

Теорема. *Текис шаклнинг иккита нуқтаси тезликларининг шу нуқталардан ўтувчи ўқдаги проекциялари ўзаро тенг бўлади.*

Исбот. Текис шакл A ва B нуқталарининг тезликлари берилган бўлсин (120-расм). Маълумки, B нуқтанинг тезлигини (11.6) кўри-



120- расм.

нишида ёзиш мумкин. A ва B нуқталар орқали x ўқни ўтказиб, (11.6) ни шу ўққа проекциялаймиз:

$$(\bar{v}_B)_x = (\bar{v}_A)_x + (\bar{v}_{BA})_x.$$

$\bar{v}_{BA} \perp x$ бўлгани учун бу тенгликда $(\bar{v}_{BA})_x = 0$ бўлади. Шундай қилиб,

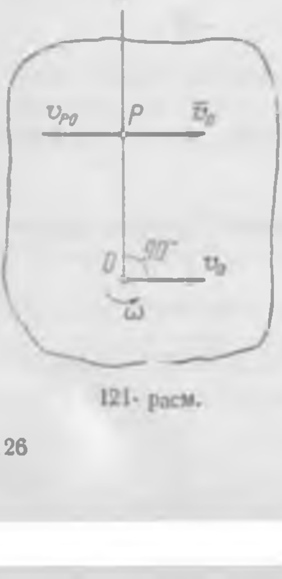
$$(\bar{v}_B)_x = (\bar{v}_{Ax}). \qquad (11.8)$$

Теорема исботланди.

Текис шаклнинг бирор B нуқтаси тезлиги йўналиши ва бошқа A нуқтасининг тезлиги маълум бўлганда B нуқта тезлигининг миқдори (11.8) дан фойдаланиб топилади.

69-§. Тезликларнинг оний маркази

Берилган онда тезлиги нолга тенг бўлган текис шакл нуқтаси *тезликларнинг оний маркази* ёки қисқача *оний марказ* дейилади. Текис шаклнинг тезлиги нолга тенг бўлган биргина нуқтаси ҳар онда мавжуд эканлигини исботлаймиз. Текис шакл бирор O нуқтасининг тезлиги $\bar{v}_0$ ва шу O нуқта атрофидаги айланма ҳаракатининг бурчак тезлиги ω берилган бўлсин (121-расм). O нуқтани қутб деб оламиз. Қутбдан айланма ҳаракат йўналишида $\bar{v}_0$ га перпендикуляр OK чизиқни ўтказамиз. OK чизиқда $OP = \frac{v_0}{\omega}$ тенгликка мос келувчи P нуқтани олиб, (11.6) формулага кўра унинг тезлигини аниқлаймиз:



121- расм.

$$\bar{v}_P = \bar{v}_O + \bar{v}_{PO}. \qquad (11.9)$$

(11.5) га асосан $v_{PO} = \omega \cdot OP$ ёки $OP = \frac{v_O}{\omega}$ бўлгани учун $v_{PO} = \omega \cdot \frac{v_0}{\omega} = v_O$ ҳамда P нуқтада $\bar{v}_{PO}$ вектор $\bar{v}_O$ га қарама-қарши йўналади, яъни

$$\bar{v}_{PO} = -\bar{v}O.$$

У ҳолда (11.9) тенгликдан $\bar{v}_P = O$ бўлиши келиб чиқади. Бинобарин, P нуқта текис шаклнинг тезликларн оний маркази бўлади.

70- §. Текис шакл нуқталарининг тезликларини оний марказдан фойдаланиб аниқлаш

Берилган онда текис шаклнинг оний маркази P ни қутб деб олиб, (11.6) формулага мувофиқ текис шакл A, B, C нуқталарининг тезликларини топамиз (122- расм):

$$\bar{v}_A = \bar{v}_P + \bar{v}_{AP}, \quad \bar{v}_B = \bar{v}_P + \bar{v}_{BP}, \quad \bar{v}_C = \bar{v}_P + \bar{v}_{CP}.$$

Бу ерда $\bar{v}_P = 0$ бўлгани учун қуйидагича ёза оламиз:

$$\bar{v}_A = \bar{v}_{AP}, \quad \bar{v}_B = \bar{v}_{BP}, \quad \bar{v}_C = \bar{v}_{CP}$$

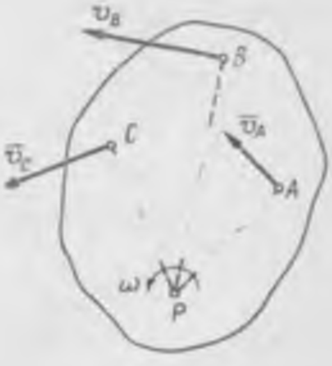
ҳамда

$$v_A = \omega \cdot PA, \; v_B = \omega PB, \; v_C = \omega PC,$$
$$\bar{v}_A \perp PA, \quad \bar{v}_B \perp PB, \quad \bar{v}_C \perp PC. \qquad (11.10)$$

Демак, *бирор онда оний маркази маълум бўлган текис шакл нуқталарининг шу ондаги тезликларини оний марказ атрофида худди оддий айланма ҳаракатдаги жисм нуқталарининг тезликлари каби топиш мумкин.* Текис шакл ихтиёрий нуқтасининг тезлиги унинг оний марказ атрофида айланишидаги бурчак тезлиги билан мазкур нуқтадан оний марказгача бўлган кесма узунлигига кўпайтмасига тенг бўлади ва айланиш йўналиши бўйича шу кесмага перпендикуляр равишда йўналади. (11.10) дан текис шакл нуқталарининг айни пайтдаги тезликлари орасидаги муносабатни аниқлаймиз:

$$\frac{v_A}{PA} = \frac{v_B}{PA} = \frac{v_C}{PC}, \qquad (11.11)$$

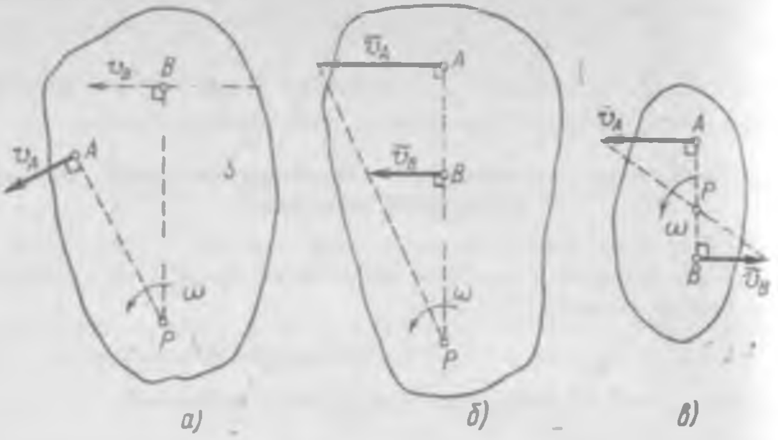
яъни текис шакл нуқталарининг ҳар ондаги тезликлари модули оний марказдан мазкур нуқталаргача бўлган масофаларга мутаносиб бўлади.



122- расм.

71- §. Баъзи ҳолларда тезликларнинг оний марказини аниқлаш

1. Агар текис шакл бирор A нуқтасининг тезлиги $\bar{v}_A$ ва B нуқтасининг тезлиги йўналган чизиқ маълум бўлса, тезликларнинг оний маркази A ва B нуқталардаги тезликларга ўтказилган перпендикулярларнинг кесишган нуқтасида бўлади (123-расм, *а*). A нуқта тезлигининг модули маълум бўлгани учун A нуқтадан оний



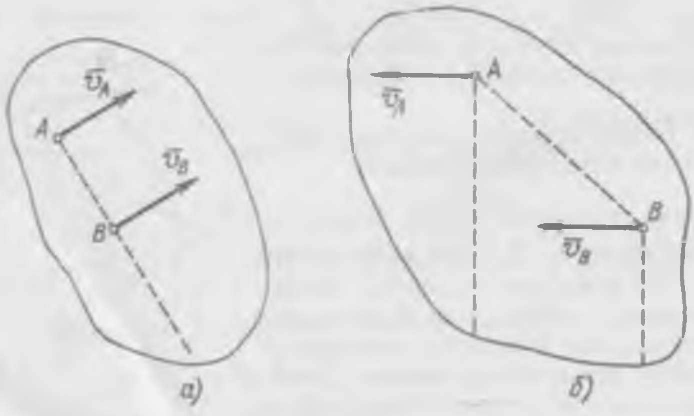
123- расм.

марказгача бўлган AP масофани аниқлаб, (11.10) дан текис шаклнинг бурчак тезлигини топамиз:

$$\omega = \frac{v_A}{AP}.$$

2. Агар текис шакл A ва B нуқталарининг тезликлари параллел ва AB га перпендикуляр йўналган бўлса, у ҳолда оний марказни аниқлаш учун тезликлар модули ҳам маълум бўлиши керак (123-расм, *б*, *в*).

(11.11) га кўра $\frac{v_B}{v_A} = \frac{PB}{PA}$. Бинобарин, A ва B нуқталар тезлик векторларининг учи оний марказ орқали ўтувчи тўғри чизиқда ётади. Шу тўғри чизиқнинг (AB) билан кесишган нуқтаси тезликлар оний маркази бўлади.

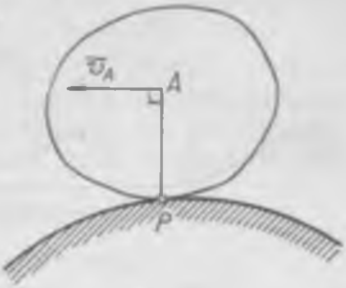


124- расм.

Агар текис шакл A ва B нуқталарининг тезликлари тенг ва параллел йўналган бўлса, у ҳолда тезликлар оний маркази чексизликда бўлади ($AP = \infty$); текис шаклнинг бурчак тезлиги

$$\omega = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_A}{\infty} = 0,$$

яъни текис шакл берилган онда илгариланма ҳаракат қилади (124- расм, *а*, *б*).



125- расм.

3. Техникада кўпинча текис шакл бирор қўзғалмас чизиқ устида сирпанмасдан ҳаракатланадиган ҳоллар учрайди. Тўғри чизиқли рельс устида сирпанмасдан думалаётган ғилдирак бунга мисол бўла олади. Бу ҳолда текис шаклнинг қўзғалмас чизиққа тегиб турган нуқтасининг тезлиги нолга тенг бўлгани учун оний марказ шу уриниш нуқтасида ётади (125-расм).

72-§. Текис шакл нуқтасининг тезланиши

Текис шакл нуқталарининг тезланишлари орасидаги боғланиш қуйидаги теорема ёрдамида аниқланади.

Теорема. *Текис шакл ихтиёрий нуқтасининг тезланиши қутб тезланиши билан мазкур нуқтанинг қутб атрофида айланишидаги тезланишининг геометрик йиғиндисига тенг.*

Исбот. Текис шакл бирор A нуқтасининг ҳамда мазкур нуқта атрофида текис шаклнинг ω айланиш бурчак тезлиги ва ε бурчак тезланишининг алгебраик қиймати берилган бўлсин.

A нуқтани қутб деб олиб, текис шакл ихтиёрий *B* нуқтасининг тезлигини (11.7) формуладан аниқлаймиз:

$$\overline{v}_B = \overline{v}_A + \overline{\omega} \times \overline{AB}$$

B нуқтанинг тезланишини аниқлаш учун (11.7) дан вақт бўйича ҳосила оламиз:

$$\overline{w}_B = \frac{d\overline{v}_B}{dt} = \frac{d\overline{v}_A}{dt} + \frac{d\overline{\omega}}{dt} \times \overline{AB} + \overline{\omega} \times \frac{d\overline{AB}}{dt}.$$

Бунда

$$\frac{d\overline{v}_A}{dt} = \overline{w}_A, \quad \frac{d\overline{\omega}}{dt} = \overline{\varepsilon}, \quad \frac{d\overline{AB}}{dt} = \overline{v}_{BA} = \overline{\omega} \times \overline{AB}$$

бўлгани учун

$$\overline{w}_B = \overline{w}_A + \overline{\varepsilon} \times \overline{AB} + \overline{\omega} \times \overline{v}_{BA},$$

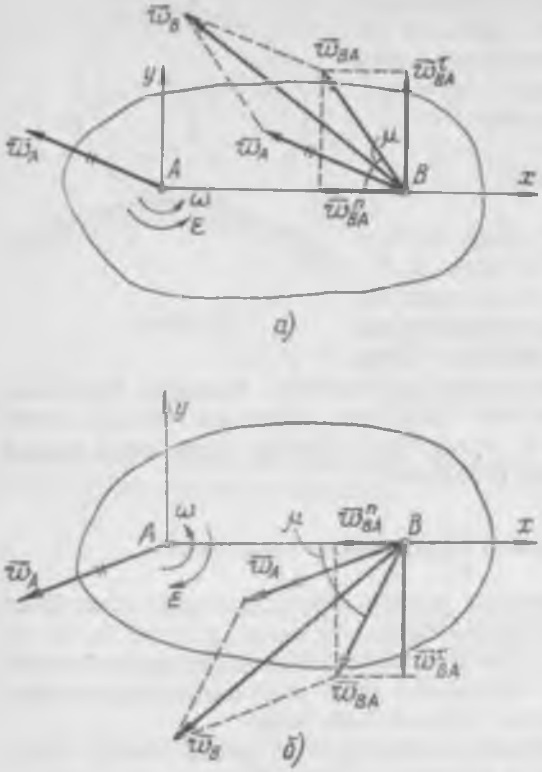
бунда $\overline{w}_A$—A нуқтанинг тезланиши; $\overline{\varepsilon} \times \overline{AB} = \overline{w}^{\tau}_{BA}$—$B$ нуқтанинг A қутб атрофида айланишидаги тезланиши; $\overline{\omega} \times \overline{v}_{BA} = \overline{w}^{n}_{BA}$—$B$ нуқтанинг A қутб атрофида айланишидаги марказга интилма тезланиши.

Шундай қилиб,

$$\overline{w}_B=\overline{w}_A+\overline{w}^{\tau}_{BA}+\overline{w}^{n}_{BA} \qquad (11.12)$$

(11.12) да $\overline{w}^{\tau}_{BA}+\overline{w}^{n}_{BA}=\overline{w}_{BA}$ деб ёзиш мумкин, бунда $\overline{w}_{AB}$—B нуқтанинг A атрофида айланишидаги тезланиши.

B нуқтанинг A атрофида айланиши тезланувчан бўлганда $\overline{w}^{\tau}_{BA}$ A қутбга нисбатан айланиш йўналиши бўйича (126-расм, *a*), секинланувчан бўлганда эса—унга қарама-қарши йўналади (126-расм, *б*), яъни $\overline{w}^{\tau}_{BA}$ нинг A қутбга нисбатан йўналиши бурчак тезланиши ε нинг йўналишига боғлиқ равишда олинади.



126- расм.

Натижада B нуқтанинг тезланиши қуйидаги формуладан аниқланади:

$$\overline{w}_B=\overline{w}_A+\overline{w}_{BA}. \qquad (11.13)$$

(10.14), (10.15) ларга асосан $w^{\tau}_{BA}=AB\cdot\varepsilon$, $w^{n}_{BA}=AB\omega^2$. Шу сабабли $\overline{w}_{BA}$ нинг модули қуйидагича аниқланади:

$$w_{BA}=AB\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4}. \qquad (11.14)$$

$\overline{w}_{BA}$ нинг йўналиши (10.17) га кўра аниқланади:

$$\operatorname{tg}\mu=\frac{|\varepsilon|}{\omega^2}. \qquad (11.15)$$

Шундай қилиб, B нуқтадаги $\overline{w}^{\tau}_{BA}$ ва $\overline{w}^{n}_{BA}$ тезланишларни геометрик қўшиб $\overline{w}_{BA}$ тезланишни аниқлаймиз ва уни B нуқтага кўчирилган A қутбнинг тезланиши $\overline{w}_A$ билан бирга геометрик қўшиб B нуқтанинг тезланишини аниқлаймиз.

Теорема исботланди.

Текис шакл бирор нуқтасининг тезланиши ҳамда айланма ҳаракат бурчак тезлиги ва бурчак тезланиши маълум бўлса, бу теоремадан фойдаланиб текис шакл ихтиёрий нуқтасининг тезланиши аниқланади.

Текис шакл ихтиёрий нуқтаси тезланишининг миқдори ва йўналишини (11.13) дан фойдаланиб аниқлаш мураккаб бўлиши мумкин. Бу ҳолда $\overline{w}_B$ нинг бир-бирига перпендикуляр йўналган ўқлардаги проекциялари топилади. Бунинг учун ўқлардан бирини, масалан, x ўқни айланиш радиуси (AB) бўйлаб, иккинчисини эса унга перпендикуляр равишда ўтказиб, (11.12) ни мазкур ўқларга проекциялаймиз.

$$\left.\begin{aligned} w_{Bx} &= w_A\cos\varphi - w^n_{BA} = w_A\cos\varphi - AB\omega^2, \\ w_{By} &= w_A\sin\varphi - w^\tau_{BA} = w_A\sin\varphi - \varepsilon\cdot AB, \end{aligned}\right\} \qquad (11.16)$$

бунда $\overline{w}_A$ вектор билан x ўқнинг мусбат йўналиши ташкил қилган бурчакнинг катталиги φ га тенг деб олинган. $\overline{w}_B$ нинг координата ўқларидаги проекциялари маълум бўлса, унинг модули ва йўналиши қуйидаги тенгликлардан аниқланади:

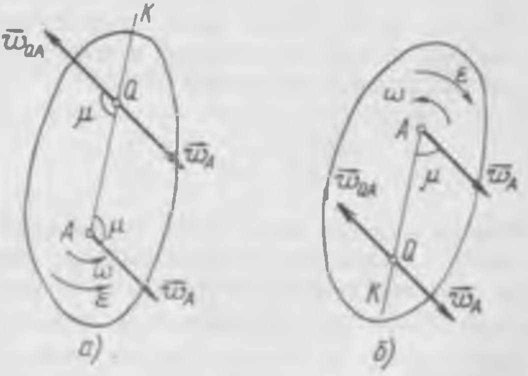
$$w_B = \sqrt{w^2_{Bx} + w^2_{By}}, \qquad (11.17)$$

$$\cos(\widehat{\overline{w}, x}) = \frac{w_{Bx}}{w_B}, \quad \cos(\widehat{\overline{w}, y}) = \frac{w_{By}}{w_B}. \qquad (11.18)$$

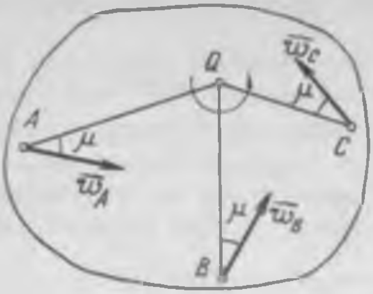
73- §. Тезланишларнинг оний маркази

Текис шаклнинг берилган ондаги тезланиши нолга тенг бўлган нуқтаси (ёки текис шаклга боғланган ва у билан биргаликда ҳаракатланувчи текисликнинг нуқтаси) *тезланишларнинг оний маркази* дейилади.

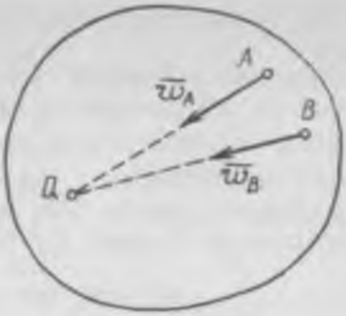
Агар текис шакл бирор A нуқтасининг тезланиши $\overline{w}_A$ ва текис шаклнинг бурчак тезлиги ω ҳамда бурчак тезланиши ε берилган бўлса, тезланишларнинг оний маркази қуйидагича аниқланади. Дастлаб $\operatorname{tg}\mu = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}$ формуладан μ бурчак топилади. Сўнгра тезланувчан айланма ҳаракатда $\overline{w}_A$ векторга ҳаракат йўналиши бўйича, секинланувчан айланма ҳаракатда эса айланиш йўналишига тескари йўналишда μ бурчак остида AK тўғри чизиқни ўтказамиз (127-расм, *а*, *б*). Бу тўғри чизиқда шундай Q нуқтани аниқлаймизки, бунда



127- расм.



128- расм.



129- расм.

$$AQ=\frac{w_A}{\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4}} \tag{11.19}$$

бўлсин. У ҳолда Q нуқта тезланишларнинг оний марказини ифодалайди. Ҳақиқатан ҳам (11.13), (11.14) формулаларга кўра

$$\overline{w}_Q=\overline{w}_A+\overline{w}_{QA},\ w_{QA}=AQ\cdot\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4}=w_A.$$

Бундан ташқари, w_{QA} вектор AK тўғри чизиқ билан μ бурчакни ташкил қилади, яъни $\overline{w}_{QA}$ миқдор жиҳатдан w_A га тенг, йўналиши эса $\overline{w}_A$ га қарама-қаршидир. Шу сабабли $\overline{w}_Q=\overline{w}_A+\overline{w}_{QA}=0$.

Агар тезланишларнинг оний маркази Q ни қутб деб олсак, $w_Q=0$ бўлгани учун (11.13) ва (11.14) формулаларга кўра

$$\overline{w}_B=\overline{w}_{QB}$$

ва

$$w_B=BQ\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4}. \tag{11.20}$$

Шундай қилиб, текис шакл нуқталарининг берилган ондаги тезланишлари мазкур нуқталардан тезланишларнинг оний марказигача бўлган масофаларга мутаносиб бўлади:

$$\frac{w_B}{BQ}=\frac{w_A}{AQ}=\frac{w_C}{CQ}=\ \ldots\ =\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4}. \tag{11.21}$$

Бундан ташқари, текис шакл нуқталарининг тезланиш векторлари ва мазкур нуқталарни тезланишларнинг оний маркази билан туташтирувчи кесмалар орасидаги μ бурчаклар ҳам бир хил бўлади (128- расм). $\varepsilon=0$ бўлган ҳол учун $\overline{w}_A=\overline{w}_{QA}^n$, $\overline{w}_B=\overline{w}_{QB}^n$ ҳамда тезланишларнинг оний маркази $\overline{w}_A$ ва $\overline{w}_B$ йўналган чизиқларнинг кесишган нуқтасида бўлади (129- расм).

74-§. Текис параллел ҳаракатдаги қаттиқ жисм нуқталарининг тезлик ва тезланишларини аниқлашга доир масалалар

24- масала. Узунлиги 0,2 м бўлган *OA* кривошип $\omega_0=10\frac{1}{с}$ бурчак тезлик билан бир маромда айланади ва узунлиги 1 м бўлган *AB* шатунни ҳаракатга келтиради. *B* сирпангич вертикал бўйлаб ҳаракат қилади. Кривошип ва шатун ўзаро перпендикуляр ва горизонтал ўқ билан $\alpha=\beta=45°$ бурчак ташкил қилган пайт учун шатуннинг бурчак тезлиги ва бурчак тезланиши ҳамда *B* сирпангичнинг тезлиги ва тезланиши топилсин (130- расм).

Ечиш. Бу масалада механизм *OA* кривошип, *AB* шатун ва *B* сирпангичдан ташкил топган. *OA* кривошип *A* қўзғалмас ўқ атрофида айланади. *B* сирпангич вертикал чизикда илгариланма ҳаракат қилади, *AB* шатун *xy* текисликда текис параллел ҳаракатда бўлади.

Масалани ечишни қутб учун олинадиган *A* нуқтанинг тезлиги ва тезланишини аниқлашдан бошлаймиз:

$$v_A=\omega_0 OA,\quad v_A=2\frac{м}{с},\quad \bar{v}_A\perp OA.$$

B нуқтанинг тезлигини қуйидаги уч усулда аниқлаймиз.

1. Текис шакл икки нуқтаси тезликларининг проекцияларига сид

$$(\bar{v}_A)_{\overline{AB}}=(\bar{v}_B)_{\overline{AB}}$$

теорема асосида аниқлаймиз (130-расм, *a*):

$$v_A=v_B\cos 45°,\ v_B=\frac{v_A}{\cos 45°}=2,82\frac{м}{с}.$$

2. Тезликлар оний марказидан фойдаланиб v_B ни топамиз. *A* нуқтадан $\bar{v}_A$ га, *B* нуқтадан $\bar{v}_B$ га ўтказилган перпендикулярларнинг кесишган *P* нуқтаси *AB* шатун учун тезликларнинг оний маркази бўлади. Расмдан *AP* ва *BP* оний айланиш радиусларини аниқлаш мумкин:

$$AP=AB,\quad BP=AB\sqrt{2}.$$

$A\in AB$ ни эътиборга олиб, шатуннинг оний бурчак тезлиги ω_{AB} ни топамиз:

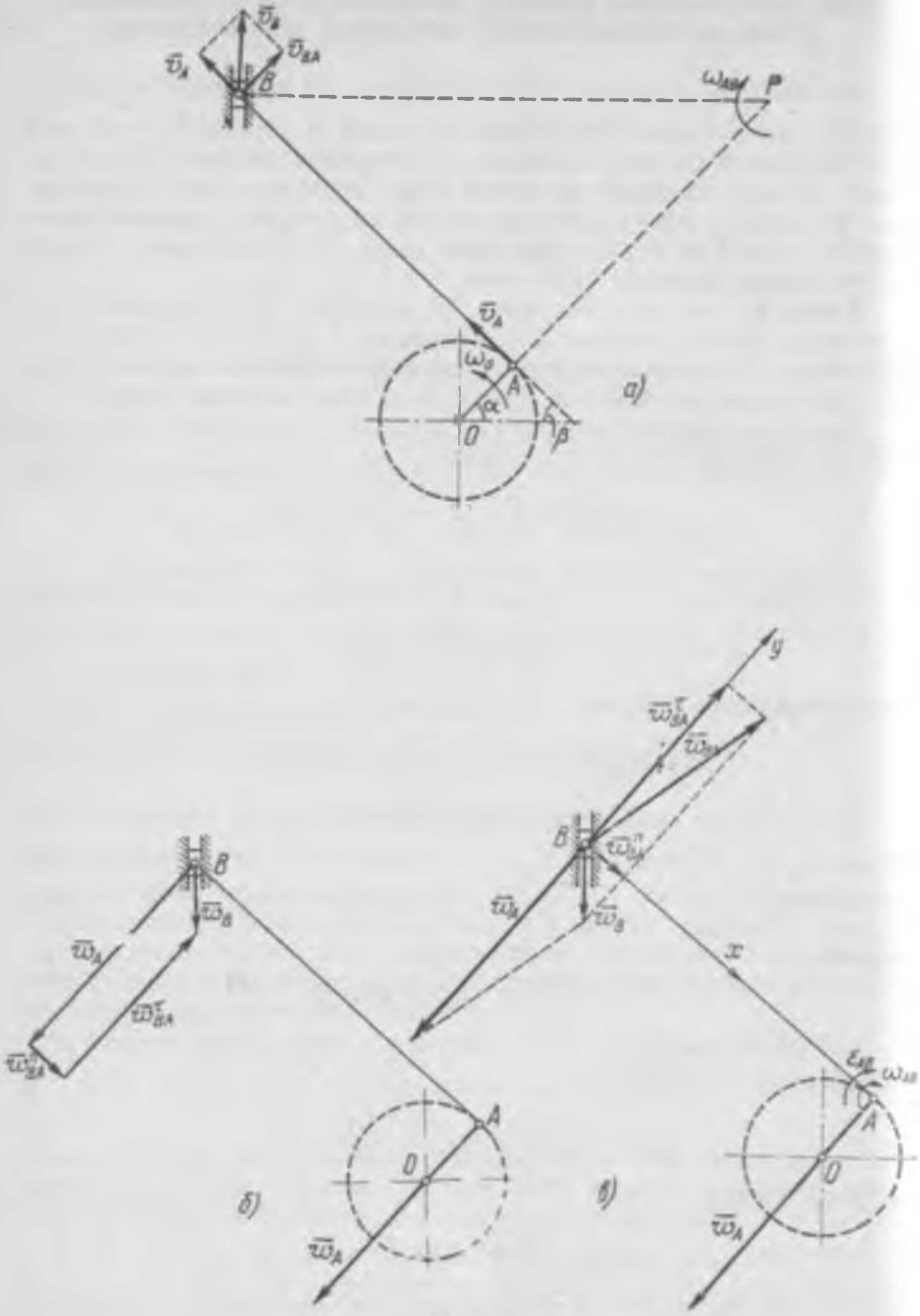
$$v_A=\omega_{AB}\cdot AP,\quad \omega_{AB}=\frac{v_A}{AP}=2\frac{1}{с}.$$

Шундай қилиб,

$$v_B=\omega_{AB}\cdot BP=2AB\sqrt{2}=2,82\frac{м}{с}.$$

3. *AB* шатуннинг *A* нуқтасини қутб учун олиб, *B* нуқтанинг тезлигини (11.6) формула ёрдамида аниқлаймиз:

$$\bar{v}_B=\bar{v}_A=\bar{v}_{BA}.$$



$\bar{v}_B$
$\bar{v}_{BA}$
$\bar{v}_A$
B
ω_{AB}
P
$\bar{v}_A$
ω_0
A
α
O
β
a)
y
$\bar{w}^{\tau}_{BA}$
$\bar{w}_{BA}$
B
$\bar{w}^{n}_{BA}$
$\bar{w}_A$
$\bar{w}_B$
x
ε_{AB}
ω_{AB}
A
O
$\bar{w}_A$
в)
B
$\bar{w}_B$
$\bar{w}_A$
$\bar{w}^{\tau}_{BA}$
$\bar{w}^{n}_{BA}$
A
O
$\bar{w}_A$
б)

130- расм.

Бунда $v_{BA}=\omega_{AB}\cdot AB=2\frac{м}{с}$; $\bar{v}_{BA}\perp BA$, $\bar{v}_A$ эса $\overline{AB}$ бўйлаб йўналганидан $\bar{v}_{BA}\perp\bar{v}_A$. Бу ҳолда

$$v_B=\sqrt{v_{BA}^2+v_A^2}=2{,}82\frac{м}{с}.$$

B нуқтанинг тезланишини аниқлаш учун *A* нуқтани қутб деб олиб, (11.12) формулани қўллаймиз:

$$\bar{w}_B=\bar{w}_A+\bar{w}^{\tau}_{BA}+\bar{w}^{n}_{BA}.$$

OA кривошип ω_0 бурчак тезлик билан текис айланма ҳаракатда бўлгани учун *A* нуқтанинг тезланиши *O* марказга йўналади ва унинг модули қуйидагича аниқланади:

$$w_A=w^n_A=OA\cdot\omega_0^2=0{,}2\cdot10^2=20\frac{м}{с^2}$$

AB шатун *A* қутб атрофида айланганда *B* нуқтанинг марказга интилма тезланиши *B* нуқтадан *A* нуқта томонга йўналади ҳамда (10.15) га асосан

$$w^n_{BA}=AB\cdot\omega^2_{AB}=4\frac{м}{с^2}$$

бўлади.

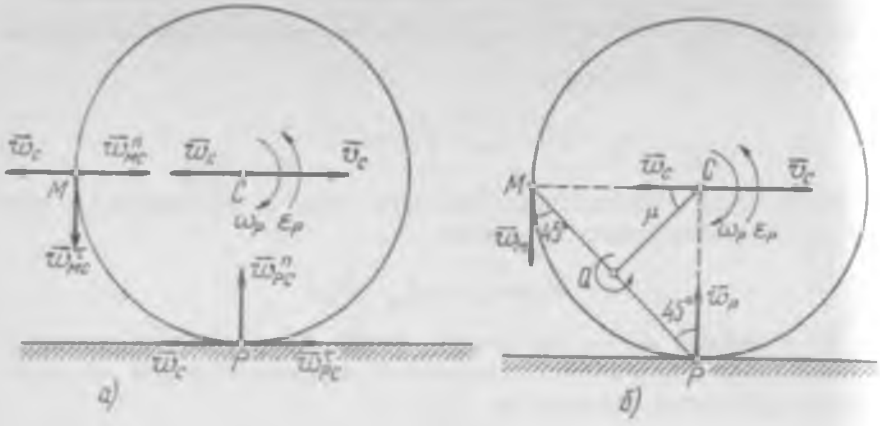
Масала шартига кўра *B* нуқтанинг тезланиши $\bar{w}_B$ вертикал чизиқ бўйлаб йўналади. $\bar{w}_B$ ни дастлаб график усулда аниқлаймиз. Бунинг учун *B* нуқтада танланган масштаб бирлигида *A* нуқтанинг тезланиши $\bar{w}_A$ ни қўямиз (130-расм, *б*). $\bar{w}_A$ векторнинг учидан (*BA*) га параллел равишда $\bar{w}^n_{BA}$ векторни ўтказамиз. $\bar{w}^n_{BA}$ векторнинг учидан (*BA*) га перпендикуляр бўлган (яъни $\bar{w}^n_{BA}$ га параллел бўлган) тўғри чизиқ ўтказамиз. Бу тўғри чизиқнинг *B* ползуннинг тезланиши йўналган чизиқ билан кесишган нуқтаси $\bar{w}_B$ ва $\bar{w}^{\tau}_{BA}$ векторларнинг учини ифодалайди. Расмда ўлчаш йўли билан $\bar{w}_B$ ва $\bar{w}_{BA}$ ларни аниқлаймиз:

$$w_B=5{,}65\ м/с^2,\quad w^{\tau}_{BA}=16\ м/с^2.$$

$w^{\tau}_{BA}=AB\cdot\varepsilon_{AB}$ бўлгани учун *AB* шатуннинг бурчак тезланиши

$$\varepsilon_{AB}=\frac{w^{\tau}_{BA}}{AB}=\frac{16}{1}=16\ с^{-2}$$

130-расм, *а* ва *б* ларни солиштириб, $\bar{v}_B$ ва $\bar{w}_B$ лар ўзаро қарама-қарши томонга йўналганлигини кўрамиз. Бинобарин, *B* сирпангич кўрсатилган ҳолатда вертикал бўйлаб секинланувчан ҳаракатда бўлади. Шу пайтда ω ва ε лар бир томонга йўналгани учун *B* нуқта



131- расм.

А қутб атрофида тезланувчан айланма ҳаракатда бўлади, деган хулосага келамиз (130- расм, *в*).

$\bar{w}_B$ ва $\bar{w}_{BA}^\tau$ ларнинг йўналишини билган ҳолда уларнинг модулини аналитик усулда аниқлаш йўли билан текшириш мумкин. Бунинг учун *В* нуқтада *x* ва *y* ўқларни олиб, (11.12) ни бу ўқларга проекциялаймиз:

$$w_B \cos 45^\circ = w_{BA}^n, \tag{1}$$

$$-w_B \cos 45^\circ = w_A + w_{BA}^\tau. \tag{2}$$

(1) дан w_B ни топамиз:

$$w_B = \frac{w_{BA}^n}{\cos 45^\circ} = 5{,}65 \text{ м/с}^2.$$

w_B нинг қийматини (2) га қўйиб, w_{BA}^τ ни ҳисоблаймиз.

$$w_{BA}^\tau = -w_B \cos 45^\circ + w_A = 16 \text{ м/с}^2.$$

25- масала. Радиуси $r = 0{,}5$ м бўлган ғилдирак тўғри чизиқли рельсда сирпанмай ғилдирайди; берилган пайтда ғилдирак *С* марказининг тезлиги $v_C = 0{,}5 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ ва секинланиши $w_C = 0{,}5 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Ғилдирак тезланишининг оний маркази, тезликлар оний марказининг тезланиши, шунингдек, ғилдирак *М* нуқтасининг тезланиши топилсин (131- расм).

Ечиш. Бу масалани икки усулда ечамиз.

1. Ғилдирак *С* марказининг $\bar{v}_C$ тезлиги ва $\bar{w}_C$ тезланиши маълум бўлганидан, *С* нуқтани қутб деб, (11.12) формулага мувофиқ *М* нуқтанинг тезланишини қуйидаги формуладан аниқлаймиз:

$$\bar{w}_M = \bar{w}_C + \bar{w}_{MC}^\tau + \bar{w}_{MC}^n, \tag{1}$$

бу ерда

$$w^{\tau}_{MC}=\varepsilon_P MC,$$

$$w^{n}_{MC}=\omega_P^2 MC$$

бўлиб, ω_P ва ε_P лар оний бурчак тезлик ва оний бурчак тезланишни ифодалайди.

Ғилдирак сирпанмасдан думалаганидан ғилдирак билан рельснинг уриниш нуқтаси P тезликларнинг оний маркази бўлади. У ҳолда

$$v_C=CP\cdot\omega_P=r\,\omega_P, \tag{2}$$

бундан

$$\omega_P=\frac{v_C}{r},\ \omega_P=1\,\frac{1}{\text{c}}. \tag{3}$$

Ғилдирак бурчак тезлигининг йўналиши v_C нинг йўналишига мувофиқ аниқланади, яъни кузатувчидан шакл текислигига перпендикуляр равишда йўналади. C нуқта тўғри чизиқли ҳаракатда бўлгани учун унинг тезланиши қуйидагича аниқланади:

$$w_C=\frac{d}{dt}(CP\cdot\omega_P)=CP\,\frac{d\omega_P}{dt}=CP\cdot\varepsilon_P,$$

бундан

$$\varepsilon_P=\frac{w_C}{CP},\ \ \varepsilon_P=1\ \text{c}^{-2}. \tag{4}$$

ε_P нинг йўналиши $\overline{w}_C$ нинг йўналишига мувофиқ аниқланади, яъни шакл текислигига перпендикуляр равишда кузатувчи томонга йўналади.

Энди w^{τ}_{MC} ва w^{n}_{MC} ларни топамиз:

$$w^{\tau}_{MC}=\frac{w_C}{CP}\cdot MC=w_C\,;\ CP=MC, \tag{5}$$

$$w^{n}_{MC}=\omega^2 MC=\left(\frac{v_C}{CP}\right)^2\cdot MC=\frac{v_C^2}{CP}=0{,}5\ \text{м/с}^2. \tag{6}$$

$\overline{w}^{\tau}_{MC}$ ва $\overline{w}^{n}_{MC}$ векторларни M нуқтада 131-расмдагидек тасвирлаймиз. C нуқтанинг ҳаракати секинланувчан бўлганидан $\overline{w}^{\tau}_{MC}$ M нуқтада ғилдиракка уринма равишда пастга йўналади; $\overline{w}^{n}_{MC}$ эса M нуқтадан айланиш маркази C нуқтага қараб йўналади. (11.12) га мувофиқ M нуқтага $\overline{w}_C$ вектор ҳам қўйилади. Энди M нуқтанинг тезланишини топамиз (131-расм, *а*):

$$w_M=\sqrt{(w^{\tau}_{MC})^2+(w_C-w^{n}_{MC})^2}=\sqrt{w_C^2+\left(w_C-\frac{v_C^2}{CP}\right)^2}=0{,}5\ \text{м/с}^2.$$

Бу тезланиш M дан вертикал пастга қараб йўналади.

P нуқтанинг тезланишини (11.12) га мувофиқ аниқлаймиз:

$$\overline{w}_P = \overline{w}_C + \overline{w}^{\tau}_{PC} + \overline{w}^{n}_{PC}\,. \qquad (7)$$

$MC = PC$ ва ғилдиракнинг ҳамма нуқталари бир хил оний бурчак тезланиш ε_P ҳамда бир хил оний бурчак тезлик ω_P га эга бўлганидан *P* нуқтаниг уринма ва нормал тезланишларининг миқдорлари *M* нуқтанинг мос тезланишларига тенг бўлади; йўналишлари *P* нуқтада ε_P, ω_P ларнинг йўналишларига асосан олинади:

$$w^{\tau}_{PC} = w^{\tau}_{MC} = w_C,$$

$$w^{n}_{PC} = w^{n}_{MC} = \frac{v_C^2}{PC}\,.$$

(7) тенгликка мувофиқ $\overline{w}_C$, $\overline{w}^{\tau}_{PC}$ ларни *P* нуқтага 131-расм, *а* да тасвирлангандек қўямиз. У ҳолда

$$w_P = \sqrt{(w_C - w_{CP})^2 + (w^{n}_{PC})^2} = 0{,}5 \text{ м/с}^2.$$

Бу тезланиш *P* нуқтадан *C* га қараб йўналади. Бу тенгликдан тезликлар оний марказининг тезланиши нолдан фарқли бўлишини кўрамиз.

Шундай қилиб, *M* ва *P* нуқталар тезланишларининг миқдорлари тенг, йўналиши эса параллел бўлиб, қарама-қарши томонларга йўналади.

2. Энди бу масалани тезланишлар оний марказидан фойдаланиб ечамиз. Ғилдиракнинг $\overline{v}_C$ тезлиги ва $\overline{w}_C$ тезланиши маълум бўлганидан, ω_P ва ε_P ларни юқоридагидек аниқлаш мумкин.

Q нуқтани тезланишлар оний маркази деб, унинг *C* нуқтага нисбатан ҳолатини (11.19) формула асосида топамиз:

$$CQ = \frac{w_C}{\sqrt{\varepsilon_P^2 + \omega_P^4}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \text{ м.}$$

Энди *CQ* кесманинг $\overline{w}_C$ билан ташкил этган бурчагини аниқлаймиз:

$$\mathrm{tg}\,\mu = \frac{|\varepsilon_P|}{\omega_P^2} = 1, \qquad \mu = 45^\circ = \frac{\pi}{4} \text{ рад.}$$

$\overline{w}_C$ тезланиш йўналган чизиққа ε_P йўналишида μ бурчак остида *CQ* чизиғини ўтказсак, тезланишлар оний маркази *Q* нинг ҳолати маълум бўлади (131-расм, *б*). $\triangle CQP$ тенг ёнли бўлганидан

$$PQ = \frac{\sqrt{2}}{4} \text{ м.}$$

P нуқта тезланишининг модули

$$w_P = PQ\sqrt{\varepsilon_P^2 + \omega_P^4} = \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{2} = 0{,}5 \text{ м/с}^2.$$

Бу тезланиш P нуқтада $[P\,Q]$ га 45° бурчак остида ўтиб, P дан C томон йўналади.

Шунингдек,

$$w_M = MP\cdot\sqrt{\varepsilon_P^2+\omega_P^4} = 0{,}5\ \text{м/с}^2.$$

Бу тезланиш MP билан 45° бурчак ташкил қилиб, M нуқтада ε_P йўналишига биноан вертикал пастга йўналади.

XII боб

ҚАТТИҚ ЖИСМНИНГ ҚЎЗҒАЛМАС НУҚТА АТРОФИДА АЙЛАНМА ҲАРАКАТИ

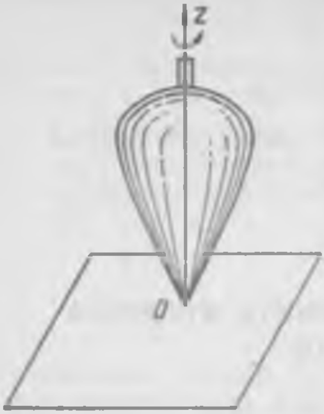
Жисм ҳаракатланганда унинг бирор нуқтаси доимо қўзғалмасдан қолса, *қаттиқ жисмнинг* бундай ҳаракати *қўзғалмас нуқта атрофидаги айланма ҳаракат* ёки *сферик ҳаракат* дейилади.

Масалан, жисм бирор нуқтаси билан бошқа бир қўзғалмас жисмга сферик шарнир воситасида бириктирилган бўлса, вақт ўтиши билан жисм нуқталари шарнир атрофида сферик ҳаракатда бўлади; ёки ўткир учли пирилдоқ горизонтал текисликдаги бирор нуқтада туриб қолган ҳолда, унинг бу нуқта атрофидаги ҳаракати жисмнинг қўзғалмас нуқта атрофидаги айланма ҳаракатига мисол бўла олади (132-расм).

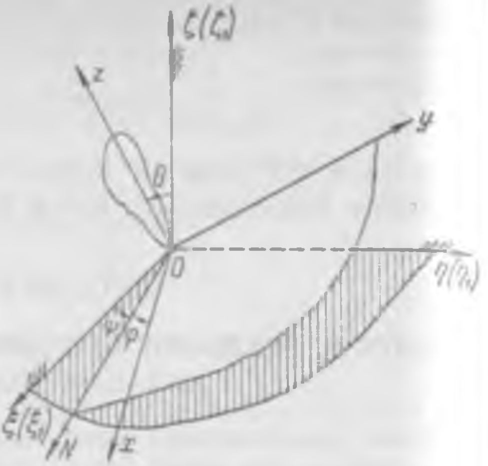
75-§. Эйлер бурчаклари. Сферик ҳаракат тенгламалари

Жисмнинг қўзғалмас O нуқта атрофидаги ҳаракатини ўрганиш учун $O\xi\eta\zeta$ қўзғалмас координаталар системасини ва жисм билан маҳкам бириктирилган ҳамда у билан бирга ҳаракатлана оладиган $Oxyz$ координаталар системасини ўтказамиз (133-расм). Жисм ҳаракатини ўрганиш учун $O\xi\eta\zeta$ қўзғалмас системани асосий координаталар системаси деб қабул қилиб, $Oxyz$ қўзғалувчи координаталар системасининг ҳаракатини асосий системага нисбатан ўрганиш кифоя.

Қўзғалувчи $Oxyz$ системанинг қўзғалмас системага нисбатан вазиятини Эйлер бурчаклари деб аталувчи учта бурчак орқали аниқлаш мумкин. Эйлер бурчаклари қуйидагича киритилади: қўзғалмас $O\xi\eta$ текислик билан қўзғалувчи Oxy текисликнинг кесишган ON чизиғи *тугунлар чизиғи* дейилади. Қўзғалмас $O\xi\eta$ текисликда ётувчи $O\xi$ ўқ билан ON орасидаги бурчак ψ билан белгиланади. Ушбу бурчак *прецессия бурчаги* дейилади. Қўзғалувчи Oxy текисликда ётувчи ON билан Ox орасидаги бурчак φ билан белгиланади ва *соф айланиш бурчаги* дейилади. $O\zeta$ ва Oz орасидаги бурчак θ билан белгиланади ва *нутация бурчаги* дейилади. $O\zeta$, Oz, ON ўқларнинг учларидан қараганимизда шу ўқларга мос перпендикуляр текисликларда жойлашган ψ, φ, θ бурчаклар соат милининг айланишига тескари йўналишда орта борадиган йўналишни бурчакларнинг мусбат йўналиши деб қабул қиламиз.



132- расм.



133- расм.

Агар ψ, θ, φ бурчаклар маълум бўлса, қўзғалувчи $Oxyz$ координаталар системасининг ва у билан бирга жисмнинг $O\xi\eta\zeta$ қўзғалмас системага нисбатан вазияти маълум бўлади. Ҳақиқатан ҳам, бошланғич пайтда $O\xi\eta\zeta$ билан устма-уст тушадиган ва жисмга бириктирилган $O\xi_1\eta_1\zeta_1$ системани қуйидаги кетма-кет учта айлантириш билан $Oxyz$ устига тушириш мумкин. Дастлаб $O\xi_1\eta_1\zeta_1$ ни $O\zeta$ ўқ атрофида кўрсатилган йўналишда ψ бурчакка айлантирсак, $O\xi_1$ ўқ ON билан устма-уст тушади. Шундан кейин ON ўқ атрофида $O\zeta_1$ ни кўрсатилган йўналишда θ бурчакка айлантирамиз, бу ҳолда $O\zeta_1$ ўқ Oz билан устма-уст тушади; ниҳоят Oz ўқ атрофида ON ни кўрсатилган йўналишда ψ бурчакка айлантирсак, ON ўқ Ox билан устма-уст тушади. Натижада $O\xi_1\eta_1\zeta_1$ система $Oxyz$ система билан устма-уст тушади. Қўзғалувчи $Oxyz$ системанинг қўзғалмас $O\xi\eta\zeta$ системага нисбатан вазиятини аниқлайдиган, бир-бирига боғлиқ бўлмаган эркин ўзгарувчи ψ, θ, φ бурчаклар *Эйлер бурчаклари* дейилади.

Жисмнинг қўзғалмас нуқта атрофидаги ҳаракати учта Эйлер бурчаклари билан аниқланганни учун бундай жисмнинг эркинлик даражаси учта бўлади.

Агар ψ, φ ва θ бурчаклар t вақтнинг узлуксиз функцияси кўринишида

$$\left.\begin{aligned} \psi &= f_1(t), \\ \varphi &= f_2(t), \\ \theta &= f_3(t) \end{aligned}\right\} \tag{12.1}$$

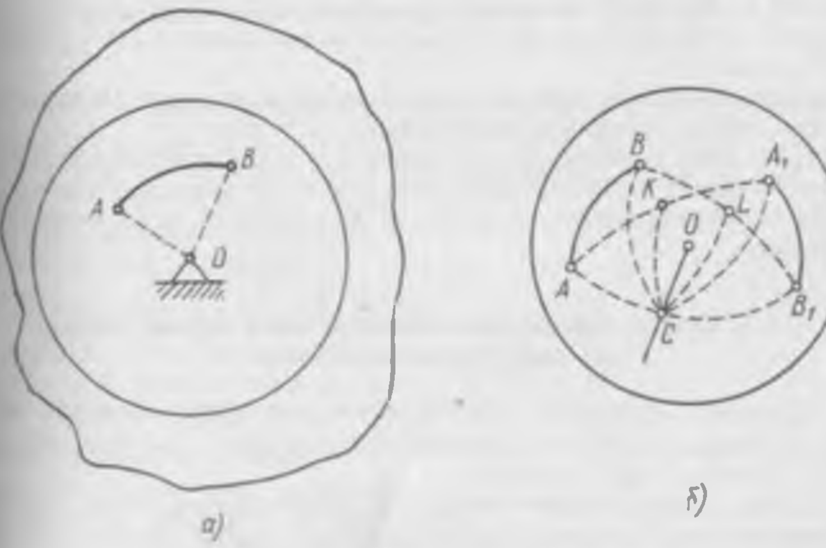
берилган бўлса, қаттиқ жисмнинг қўзғалмас нуқта атрофидаги ҳаракати аниқланган бўлади. (12.1) тенгликлар *қаттиқ жисмнинг қўзғалмас нуқта атрофидаги ҳаракат тенгламалари* дейилади.

76-§. Қўзғалмас нуқта атрофида айланувчи жисмнинг кўчишига оид Эйлер — Даламбер теоремаси

Фазода жисмнинг вазияти унинг бир тўғри чизиқ устида ётмайдиган уч нуқтаси билан аниқланиши геометриядан маълум. O нуқта қўзғалмас бўлгани учун жисмнинг ҳолати унинг O нуқтадан ўтувчи бир тўғри чизиқда ётмайдиган иккита ихтиёрий нуқтасининг ҳолати билан аниқланади. Бу икки нуқтани қуйидагича оламиз. Қўзғалмас O нуқтани марказ қилиб, ихтиёрий радиус билан сфера чизамиз (134- расм, *a*). Сферани жисм билан бириктирилган деб қараймиз. Сфера устида жисмнинг ихтиёрий A ва B нуқталарини олиб, уларни сфера катта айланасининг ёйи билан туташтирсак, олинган AB ёйнинг ҳолатига асосан берилган жисмнинг ҳолатини аниқлаш мумкин. Сферик ҳаракатдаги жисмнинг бир ҳолатдан бошқа ҳолатга кўчиши қуйидаги *Эйлер—Даламбер* теоремаси билан аниқланади.

Теорема. *Қўзғалмас нуқта атрофида айланувчи қаттиқ жисмнинг бир ҳолатдан иккинчи ҳолатга ўтишини қўзғалмас нуқта орқали ўтувчи бирор ўқ атрофида бир айлантириш билан олиш мумкин.*

Исбот. Сфера сиртида олинган $\smile AB$ жисмнинг биринчи вазиятини, $\smile A_1B_1$ эса иккинчи вазиятини ифодаласин (134- расм, *б*). Теоремани исботлаш учун A ва A_1 ни ҳамда B ва B_1 ни сфера катта айланасининг ёйлари билан туташтирамиз. Ҳосил бўлган AA_1 ва BB_1 ларнинг ўртасидаги K ва L нуқталардан мазкур ёйларга сферик перпендикуляр ёйлар ўтказиб, уларнинг сфера сиртида кесишган нуқтасини C билан белгилаймиз. C ва O нуқталар орқали OC ўқни ўтказамиз. C нуқтани сфера катта айланасининг ёйлари орқали A, A_1 ва B, B_1 лар билан туташтириб, сферик $\triangle ABC$ ва $\triangle A_1B_1C_1$ ларни



134- расм.

135- расм.

ҳосил қиламиз. C нуқта A ва A_1 нуқталардан ҳамда B ва B_1 нуқталардан тенг узоқликда бўлганидан $AC = A_1C$ ва $BC = B_1C$; жисм қаттиқ жисм бўлганидан

$$\overset{\smile}{AB} = \overset{\smile}{A_1B_1}.$$

Шу сабабли ABC ва $A_1B_1C_1$ сферик учбурчаклар конгруэнт бўлади, натижада сферик $\triangle ABC$ ни (OC) атрофида $\widehat{ACA_1} = \widehat{BCB_1} = \varphi$ бурчакка айлантирсак, сферик $\triangle A_1B_1C_1$ нинг устида тушади, яъни $\smile AB$ $\smile A_1B_1$ ҳолатини эгаллайди. Теорема исботланди.

Қаттиқ жисмнинг қўзғалмас нуқта атрофидаги ҳаракатини кетма-кет узлуксиз элементар кўчишлардан иборат деб қараш мумкин. Исботланган теоремага асосан, ҳар бир элементар кўчишни қўзғалмас нуқтадан ўтувчи бирор ўқ атрофида чексиз кичик бурчакка бурш натижасида олиш мумкин. Бундай ўқ *айланиш оний ўқи* ёки *оний ўқ* дейилади. Шундай қилиб, жисмнинг қўзғалмас нуқта атрофидаги ҳаракатини шу нуқтадан ўтувчи оний ўқлар атрофида кетма-кет узлуксиз оний айланма ҳаракатлардан ташкил топган деб қараш мумкин. Бу ҳол оний ўқнинг фазода узлуксиз равишда ўзгариб туришини кўрсатади. Оний ўқ вақт ўтиши билан фазода ва жисмда из қолдиради. Оний ўқлар қолдирган изларининг геометрик ўрни боши қўзғалмас нуқтада бўлган конуссимон сиртдан иборат бўлади. Оний ўқнинг ҳаракатсиз фазода чизган конуссимон сирт *қўзғалмас аксоид*, жисмда чизган конуссимон сирт *қўзғалувчи аксоид* дейилади. Конусларнинг бир-бири билан тегиб турган умумий чизиғи оний ўқ бўлади (135- расм).

Қаттиқ жисмнинг сферик ҳаракатини итальян олими Пуансо геометрик тарзда қуйиндагича тасвирлайди.

Қўзғалмас нуқтаси бўлган қаттиқ жисмнинг бир ҳолатдан иккинчи ҳолатга ўтишини қўзғалувчи аксоидни қўзғалмас аксоид устида сирпантирмасдан думалатиш натижасида амалга ошириш мумкин.

77- §. Сферик ҳаракатдаги жисмнинг оний бурчак тезлиги ва оний бурчак тезланиши

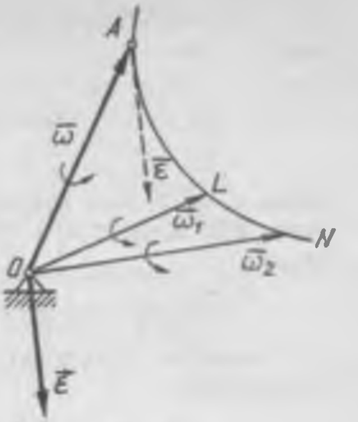
Қўзғалмас нуқтага эга бўлган қаттиқ жисмнинг айланиш оний ўқи атрофида элементар бурчакка айланишидаги $\bar{\omega}$ бурчак тезлик *оний бурчак тезлик* дейилади.

Жисм қўзғалмас нуқта атрофида ҳаракатланганда оний ўқнинг йўналиши ўзгара боради, шу сабабли оний бурчак тезлик вектори миқдор ва йўналиш жиҳатидан ўзгаради. Одатда $\bar{\omega}$ оний бурчак тезлик вектори қўзғалмас *O* нуқтага қўйилган ва оний ўқ бўйлаб йўналган вектор билан тасвирланади.

Оний бурчак тезлик векторидан вақт бўйича олинган биринчи ҳосила *оний бурчак тезланиши* дейилади:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{d\bar{\omega}}{dt}. \qquad (12.2)$$

$\bar{\varepsilon}$ оний бурчак тезланиш вектори, $\bar{\omega}$ векторнинг годографи *ALN* га ўтказилган уринма бўйича йўналади (136-расм). $\bar{\varepsilon}$ векторни ҳам *O* нуқтага қўйилган вектор билан тасвирлаймиз.



136- расм.

Демак, *жисм қўзғалмас нуқта атрофида ҳаракатланганда, қўзғалмас ўқ атрофидаги ҳаракатдан фарқли равишда оний бурчак тезлик вектори* $\bar{\omega}$ *билан оний бурчак тезланиш вектори* $\bar{\varepsilon}$ *бир чизиқда ётмайди.*

78-§. Қўзғалмас нуқта атрофида айланувчи жисм нуқтасининг тезлиги

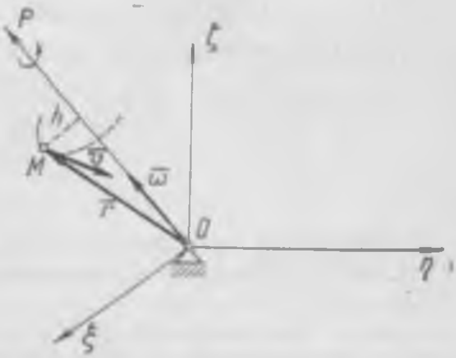
Жисм қўзғалмас нуқта атрофида ҳаракатланаётганда ҳар онда айланиш оний ўқи мавжуд бўлиб, жисм шу пайтда $\bar{\omega}$ оний бурчак тезлик билан айланма ҳаракатда бўлади. Жисмнинг оний ўқда ётмайдиган исталган *M* нуқтасининг чизиқли тезлигини аниқлаймиз. Уни Эйлер формуласига мувофиқ аниқлаймиз:

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}, \qquad (12.3)$$

бунда $\bar{r} = \overline{OM}$ — *M* нуқтанинг радиус-вектори, *O* ва *M* — жисм нуқтаси бўлганидан $|\overline{OM}| = \text{const}$ бўлади. Тезлик вектори *OP* оний ўқ ва *M* нуқта ётган текисликка перпендикуляр йўналган бўлади (137-расм). Унинг модулини иккита вектор векторли кўпайтмасининг модули каби аниқлаймиз:

$$|\bar{v}| = \omega \cdot r \sin(\widehat{\bar{\omega}\,\bar{r}}) = \omega h, \qquad (12.4)$$

бунда *h* — *M* нуқтадан *OP* айланиш оний ўқига туширилган перпендикуляр бўлиб, у $h = r \cdot \sin(\widehat{\bar{\omega}, \bar{r}}) = r \cdot \sin\gamma$ га тенг.



137- расм.

Агар оний бурчак тезлигининг қўзғалувчи ўқлардаги проекцияларини $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ билан ва бу ўқларнинг бирлик векторларини

$\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ билан белгиласак, (12.3) ни детерминант шаклида қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\overline{v}=\overline{\omega}\times\overline{r}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ \omega_x & \omega_y & \omega_z\\ x & y & z\end{vmatrix},$$

бунда x, y, z — M нуқтанинг координаталари. Бу детерминантни биринчи йўл элементлари бўйича ёйиб, тезлик учун қуйидаги ифодани оламиз:

$$\overline{v}=(\omega_y z-\omega_z y)\,\overline{i}+(\omega_z x-\omega_x z)\,\overline{j}+(\omega_x y-\omega_y x)\,\overline{k}. \qquad (12.5)$$

$\overline{v}$ векторни координата ўқларидаги унинг проекциялари орқали ифодалаймиз:

$$\overline{v}=v_x\overline{i}+v_y\overline{j}+v_k\overline{k}.$$

Бу ифодани (12.5) билан солиштириб тезликнинг x, y, z қўзғалувчи ўқлардаги проекцияларини оламиз:

$$\left.\begin{aligned}v_x&=\omega_y z-\omega_z y,\\ v_y&=\omega_z x-\omega_x z,\\ v_z&=\omega_x y-\omega_y y.\end{aligned}\right\} \qquad (12.6)$$

Шу тарзда $\overline{v}$ нинг ξ, η, ζ қўзғалмас координата ўқларидаги проекцияларини ҳам аниқлаш мумкин:

$$\left.\begin{aligned}v_\xi&=\omega_\eta\zeta-\omega_\zeta\eta,\\ v_\eta&=\omega_\zeta\xi-\omega_\xi\zeta,\\ v_\zeta&=\omega_\xi\eta-\omega_\eta\xi,\end{aligned}\right\} \qquad (12.7)$$

бунда: ξ, η, ζ — M нуқтанинг қўзғалмас координаталар системасига нисбатан координаталари; ω_ξ, ω_η, ω_ζ — оний бурчак тезликнинг қўзғалмас координата ўқларидаги проекциялари.

Оний ўқ устида жойлашган нуқталар учун $h=0$ бўлганидан (12.4) формуладан оний ўқ барча нуқталарининг тезликлари нолга тенг; бинобарин, мазкур нуқталар учун $v_x=v_y=v_z=0$ ва $v_\xi=v_\eta=v_\zeta=0$ бўлади. Натижада (12.6) ва (12.7) лардан мос равишда қуйидаги тенгликларни оламиз:

$$\frac{h}{\omega_x}=\frac{y}{\omega_y}=\frac{z}{\omega_z}, \qquad (12.8)$$

$$\frac{\xi}{\omega_\xi}=\frac{\eta}{\omega_\eta}=\frac{\zeta}{\omega_\zeta} \qquad (12.9)$$

(12.8) ва (12.9) тенгламалар оний ўқнинг мос равишда қўзғалувчи $Oxyz$ ва қўзғалмас $O\xi\eta\zeta$ координаталар системаларига нисбатан тенгламаларини ифодалайди. (12.8) дан t вақтни йўқотиб *қўзғалувчи аксоиднинг тенгламасини*, (12.9) тенгламадан *эса қўзғалмас аксоиднинг тенгламасини* ҳосил қиламиз.

79-§. Қўзғалмас нуқта атрофида айланувчи жисм нуқтасининг тезланиши

Қўзғалмас нуқта атрофида ҳаракатланаётган жисм нуқтасининг тезланиши унинг тезлик векторини ифодаловчи (12.3) дан вақт бўйича олинган ҳосилага тенг:

$$\overline{w} = \frac{d\overline{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\overline{\omega} \times \overline{r}) = \frac{d\overline{\omega}}{dt} \times \overline{r} + \overline{\omega} \times \frac{d\overline{r}}{dt},$$

бунда: $\frac{d\overline{\omega}}{dt} = \overline{\varepsilon}$ — жисмнинг оний бурчак тезланиши; $\frac{d\overline{r}}{dt} = \overline{v} = \overline{\omega} \times \overline{r}$ — M нуқтанинг тезлиги. Бу ифодаларга кўра

$$\overline{w} = \overline{\varepsilon} \times \overline{r} + \overline{\omega} \times \overline{v}. \qquad (12.10)$$

(12.10) даги

$$\overline{w}^{\varepsilon} = \overline{\varepsilon} \times \overline{r} \qquad (12.11)$$

айланма тезланиш,

$$\overline{w}^{\omega} = \overline{\omega} \times \overline{v} \qquad (12.12)$$

ўққа интилма тезланиш дейилади.

$\overline{w}^{\varepsilon}$ вектор $\overline{\varepsilon}$ ва M нуқта ётган текисликка перпендикуляр равишда йўналади (138-расм) ва сон қиймати қуйидагича бўлади:

$$w^{\varepsilon} = \varepsilon \cdot r \cdot \sin(\widehat{\overline{\varepsilon}, \overline{r}}).$$

M нуқтадан $\overline{\varepsilon}$ вектор йўналган OE ўққа туширилган перпендикуляр MC_1 кесмани h_1 билан белгиласак, $r \cdot \sin(\widehat{\overline{\varepsilon}, \overline{r}}) = h_1$ бўлади. Шунинг учун

$$\omega^{\varepsilon} = \varepsilon \cdot h_1. \qquad (12.13)$$

$\overline{w}^{\omega}$ вектор $\overline{\omega}$ билан $\overline{v}$ ётган текисликка перпендикуляр равишда (MC) чизиқ бўйлаб йўналади ва сон қиймати

$$w^{\omega} = |\overline{\omega} \times \overline{v}| = \omega \cdot v \cdot \sin(\widehat{\overline{\omega}, \overline{v}}) = \omega^2 h \qquad (12.14)$$

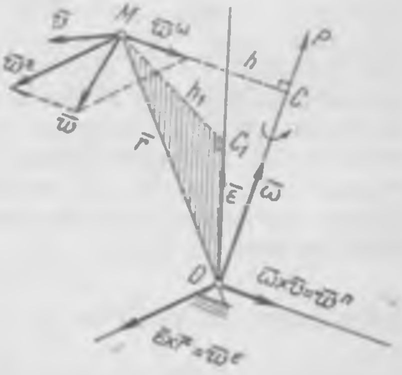
формуладан аниқланади. (12.14) да h — M нуқтадан оний айланиш ўқигача бўлган масофа.

Шундай қилиб, (12.11) ва(11.12) ларга кўра (12.10) ифода

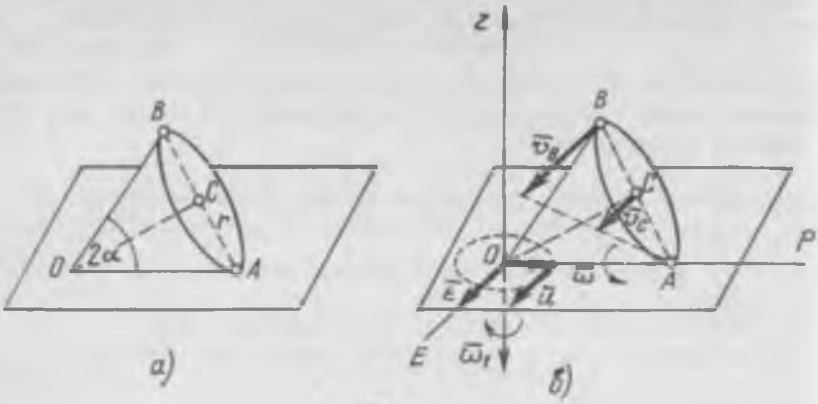
$$\overline{w} = \overline{w}^{\varepsilon} + \overline{w}^{\omega} \qquad (12.15)$$

кўринишда ёзилади. (12.15) формула қуйидаги *Ривальс теоремасини* ифодалайди.

Теорема. *Қўзғалмас нуқта атрофида айланаётган жисм нуқтасининг тезланиши айланма тезланиш билан ўққа интилма тезланишларнинг геометрик йиғиндисига тенг.*



138- расм.



139- расм.

Тезланиш модули параллелограмм қоидасига мувофиқ топилади:

$$w = \sqrt{(w^{\varepsilon})^2 + (w^{\omega})^2 + 2w^{\varepsilon} \cdot w^{\omega} \cdot \cos(\widehat{\bar{w}^{\varepsilon}, \bar{w}^{\omega}})}. \qquad (12.16)$$

Изоҳ. $\bar{w}^{\varepsilon}$ ва $\bar{w}^{\omega}$ ларга доир (12.11) ва (12.12) ифодалар ташқи кўринишидан $\bar{w}_{\tau}$ уринма ва $\bar{w}_n$ нормал тезланишларга ўхшаса ҳам, аслида улардан фарқ қилади. Чунки кўрилаётган ҳолда $\bar{\omega}$ билан $\bar{\varepsilon}$ бир чизиқ бўйлаб йўналмайди. Шунинг учун $h_1 \neq h$. Натижада $\bar{w}^{\varepsilon}$ тезланиш билан $\bar{v}$ тезлик бир чизиқ бўйлаб йўналмайди.

26- масала. *O* учи қўзғалмас бўлган конус қўзғалмас горизонтал текисликда сирпанмасдан думалайди. Конуснинг учидаги бурчаги $2\alpha = 60°$ ва асосининг радиуси $r = 0{,}2$ м. Агар конус асоси марказининг тезлиги $v_C = 0{,}6$ м/с $=$ const бўлса, конуснинг бурчак тезлиги, бурчак тезланиши, асосининг пастки *A* нуқтаси ва энг юқори *B* нуқтасининг тезлиги ва тезланиши аниқлансин (139- расм, *а*).

Ечиш. 1. Конуснинг бурчак тезлигини аниқлаймиз. Конуснинг битта *O* нуқтаси доимо қўзғалмас бўлгани учун конуснинг ҳаракати сферик ҳаракатдан иборат бўлади. Бундай ҳаракатни ҳар онда оний ўқ атрофидаги айланма ҳаракатдан иборат деб қараш мумкин. Масала шартига кўра, конус текисликда сирпанмасдан думалагани учун *OP* айланиш оний ўқи унинг горизонтал текисликка тегиб турган *OA* ясовчиси билан ҳар онда устма-уст тушади. Шу сабабли *OA* ясовчидаги ҳамма нуқталарнинг тезликлари нолга тенг бўлади (139- расм, *б*). *C* нуқтанинг тезлигидан фойдаланиб оний бурчак тезликнинг модулини аниқлаймиз. (12.14) га асосан *C* нуқтанинг тезлиги:

$$v_C = \omega \cdot CD.$$

140-расмдан $CD = CA \cos 30° = r \cdot \cos 30° = 0{,}17$ м. У ҳолда

$$\omega = \frac{v_C}{CD} \approx 3{,}46^{-1}\text{с}^{-1}.$$

Оний бурчак тезлик вектори $\bar{\omega}$ оний *OP* ўқ бўйлаб йўналади.

2. Конуснинг бурчак тезланишини аниқлаймиз. Оний бурчак тезлик $\overline{\omega}$ миқдор жиҳатдан ўзгармас бўлгани учун конус Oz ўқ атрофида бир марта айланганда $\overline{\omega}$ векторнинг учи горизонтал текисликда ω радиусли айлана чизади, яъни оний бурчак тезликнинг годографи ω радиусли айланадан иборат (139-расм, *б*). $\overline{\omega}$ векторнинг Oz ўқ атрофидаги айланиш бурчак тезлиги ω_1 OC ўқнинг Oz ўқ атрофидаги айланиш бурчак тезлиги билан бир хил бўлади. Шунинг учун

$$\omega_1 = \frac{v_C}{CK}.$$

140-расмдан

$$CK = OC\cos 30^\circ = OA\cos 30^\circ \cdot \cos 30^\circ = 2r\cos^2 30^\circ = 0{,}3\ \text{м}$$

бўлгани учун

$$\omega_1 = 2\ \text{с}^{-1}.$$

Шундай қилиб, $\overline{\omega}$ вектор z ўқ атрофида $|\omega_1| = 2\ \text{с}^{-1}$ бурчак тезлик билан айланар экан. У ҳолда оний бурчак тезланиш вектори $\overline{\varepsilon}$ оний бурчак тезлик вектори $\overline{\omega}$ учининг тезлигига тенг бўлади:

$$\varepsilon = u = \omega_1\omega = 6{,}93\ \text{с}^{-2}.$$

$\overline{u}$ вектор $\overline{\omega}$ векторнинг годографига уринма бўйлаб йўналади. Шу сабабли оний бурчак тезланиш горизонтал текисликда $\overline{u}$ га параллел равишда OE бўйлаб йўналади ва $\overline{\varepsilon} \perp \overline{\omega}$ бўлади.

3. A ва B нуқталарнинг тезлигини аниқлаймиз. A нуқта оний ўқда ётганлиги туфайли унинг тезлиги нолга тенг бўлади:

$$v_A = 0.$$

B нуқтанинг тезлигини (12.4) га асосан аниқлаймиз:

$$v_B = \omega\ BD_1.$$

($BD_1 = 2CD = 0{,}2\sqrt{3}$ м бўлгани учун

$$v_B = 1{,}2\ \text{м/с}.$$

B нуқтанинг тезлиги $\overline{v}_B$ худди C нуқтанинг тезлиги $\overline{v}_C$ каби POz текисликка перпендикуляр равишда йўналади ҳамда

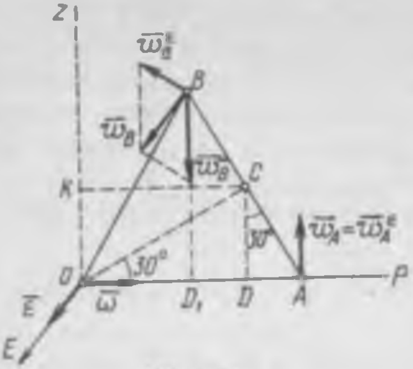
$$\frac{v_B}{v_C} = \frac{BD_1}{CD} = 2$$

бўлади.

4. A ва B нуқталарнинг тезланишини аниқлаймиз. B нуқтанинг тезланишини (12. 15) га асосан аниқлаймиз:

$$\overline{w}_B = \overline{w}_B^{\varepsilon} + \overline{w}_B^{\omega},$$

бунда $\overline{w}_B^{\varepsilon}$ — бурчак тезланиш вектори йўналган OE ўққа нисбатан B



140- расм.

нуқтанинг айланма ҳаракат тезланиши; $\overline{w}_B^\omega$ шу нуқтанинг *OP* оний ўқ атрофида айланишидаги ўққа интилма тезланиши. $BO = 2r$ бўлгани учун (12.13) га кўра

$$w_B^\varepsilon = \varepsilon \cdot BO = 2{,}771 \quad \text{м/с}^2$$

бўлади. $\overline{w}_B^\varepsilon$ векторни *POz* текисликда (*OB*) га перпендикуляр равишда шундай йўналтирамизки, $\overline{\varepsilon}$ векторнинг мусбат йўналишидан қараганда, $\overline{w}_B^\varepsilon$ векторнинг йўналиши соат милининг айланишига тескари йўналишда бўлсин (140- расм).

(12. 14) формула ёрдамида w_B^ω ни аниқлаймиз:

$$w_B^\omega = \omega^2 \cdot BD_1 = 4{,}157 \ \text{м / с}^2.$$

$\overline{w}_B^\omega$ вектор *B* нуқтадан *OP* оний ўққа туширилган перпендикуляр бўйлаб оний ўқ томонга йўналади.

(12. 16) га асосан *B* нуқтанинг $\overline{w}_B$ тезланиши модулини аниқлаймиз:

$$w_B = \sqrt{(w_B^\varepsilon)^2 + (w_B^\omega)^2 + 2\, w_B^\varepsilon\, w_B^\omega \cos 120^\circ} = 3{,}66 \ \text{м/с}^2.$$

A нуқтанинг ўққа интилма тезланиши нолга тенг: $w_A^\omega = 0$. Шунинг учун

$$w_A = w_A^\varepsilon = \varepsilon \cdot AO = 2{,}771 \ \text{м/с}^2$$

$\overline{w}_A^\varepsilon$ вектор *POz* текисликда *OA* га перпендикуляр равишда юқорига йўналади.

Охирги тенгликдан кўрамизки, оний ўқ нуқталарининг тезланиши умумий ҳолда нолдан фарқли бўлар экан.

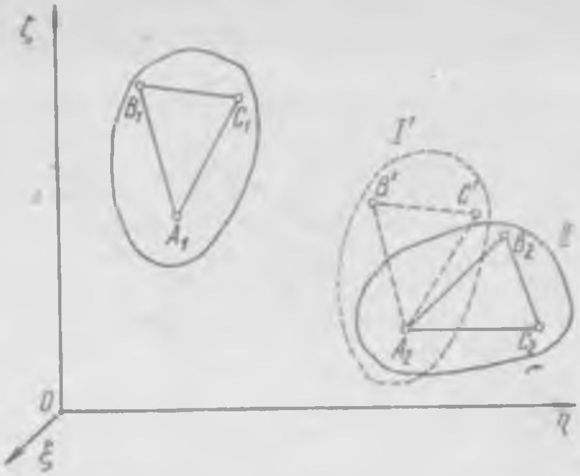
XIII боб

ҚАТТИҚ ЖИСМ ҲАРАКАТИНИНГ УМУМИЙ ҲОЛИ

80- §. Эркин қаттиқ жисмнинг ҳаракатини илгариланма ва айланма ҳаракатларга ажратиш

Эркин жисмнинг фазода умумий ҳолда кўчишини ўрганиш қуйидаги *Шаль теоремасига* асосланади.

Теорема. *Эркин жисмнинг фазодаги ҳар қандай кўчишини бир илгариланма ҳаракат ва қутб деб танлаб олинган нуқтадан ўтувчи бирор ўқ атрофида бир айлантириш билан амалга ошириш мумкин.*



141- расм.

Исбот. Эркин жисмнинг бирор қўзғалмас $O\xi\eta\zeta$ координаталар системасига нисбатан вазияти унинг бир тўғри чизиқда ётмайдиган A, B, C нуқталарининг ҳолати, яъни $\triangle ABC$ ҳолати билан аниқланади. Эркин жисмнинг ихтиёрий иккита ҳолатини, яъни t_1 вақтдаги I ҳолатини, t_2 вақтдаги II ҳолатини оламиз (141- расм). Бунда бир тўғри чизиққа ётмайдиган A, B, C нуқталар мос равишда A_1, B_1, C_1 ва A_2, B_2, C_2, ҳолатларини эгалласин. У ҳолда жисмнинг $\triangle t = t_2 - t_1$ вақтдаги кўчишини қуйидагича бажариш мумкин. Жисмга шундай илгариланма кўчиш берамизки, натижада A_1 нуқта A_2 нуқта билан устма-уст тушсин. Бунда B_1, C_1 нуқталар B', C' нуқталарга ўтади. У ҳолда $\triangle ABC$ вазияти $\triangle A_2B'C'$ га алмашинади ва жисм I' ҳолатини эгаллайди. Эйлер — Даламбер теоремасига кўра, жисмни I' ҳолатдан II ҳолатга A қутбдан ўтувчи бирор оний ўқ атрофида бир айлантириш билан ўтказиш мумкин. Теорема исботланди.

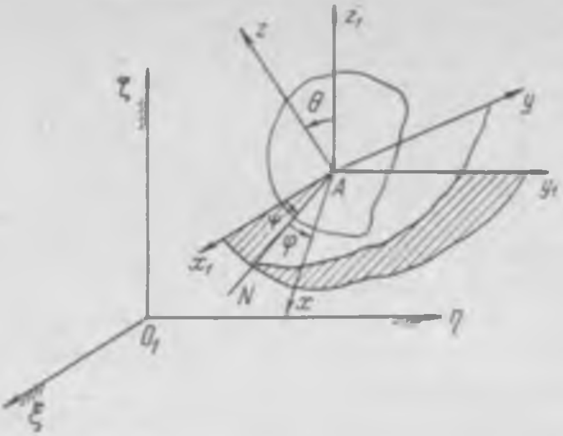
Ҳаракатни бу хилда илгариланма ва айланма қисмларга ажратиш жисмнинг ҳақиқий ҳаракатини акс эттира олмайди. Жисмнинг ҳақиқий ҳаракатини тасвирлаш учун ихтиёрий $\triangle t$ вақт оралиғини кичик бўлакларга бўлиб, мазкур бўлакларга мос бўлган эркин жисмнинг ҳаракатини қутбнинг илгариланма ҳаракати ва қутбдан ўтувчи оний ўқ атрофидаги айланма ҳаракатларидан ташкил топган деб қаралади.

Эркин жисмда олинган қутб координаталарини ξ_A, η_A ζ_A билан белгиласак:

$$\left.\begin{aligned} \xi_A &= f_1(t), \\ \eta_A &= f_2(t), \\ \zeta_A &= f_3(t). \end{aligned}\right| \qquad (13.1)$$

тенгламалар **қутбнинг ҳаракат тенгламаларини** ифодалайди.

Жисмнинг қутб атрофидаги ҳаракатини аниқлаш учун қутб нуқтасида $O_1\,\xi\,\eta\,\zeta$ қўзғалмас координата системасига параллел бўлган $Ax_1y_1z_1$ ҳамда жисмга бириктирилган $Axyz$ координата системалари-



142 -расм.

ни ўтказамиз (142- расм). У ҳолда жисмнинг қутб атрофидаги сферик ҳаракатини ψ, φ, θ Эйлер бурчаклари билан аниқлаш мумкин. Шу сабабли

$$\left.\begin{aligned} \psi &= f_4(t), \\ \varphi &= f_5(t), \\ \theta &= f_6(t). \end{aligned}\right\} \qquad (13.2)$$

тенгламалар жисмнинг қутб атрофидаги айланма ҳаракатини ифодалайди.

Шундай қилиб, (13.1), (13.2) тенгламалар биргаликда *эркин қаттиқ жисмнинг умумий ҳолдаги ҳаракат тенгламаларини* ифодалайди.

81- §. Эркин қаттиқ жисм нуқталарининг тезлиги ва тезланиши

Эркин қаттиқ жисм ихтиёрий B нуқтасининг тезлиги, текис параллел ҳаракатдаги каби, $\overline{v}_A$ қутбнинг тезлиги ва $\overline{v}_{BA}$ қутбдан ўтувчи оний ўқ атрофидаги айланма ҳаракат тезликларининг геометрик йиғиндисига тенг:

$$\overline{v}_B = \overline{v}_A + \overline{v}_{BA} = \overline{v}_A + \overline{\omega} \times \overline{AB}, \qquad (13.3)$$

бунда $\overline{\omega}$ оний бурчак тезликдир.

Шунга ўхшаш, B нуқтанинг тезланиши учун (11.13) каби қуйидаги формула ўринлидир:

$$\overline{w}_B = \overline{w}_A + \overline{w}_{BA}. \qquad (13.4)$$

(13.3) ва (13.4) формулаларнинг исботи текис параллел ҳаракатдаги каби бўлади. (13.4) даги $\overline{w}_{BA}$ Ривальс теоремасидан аниқланади:

$$\overline{w}_{BA} = \overline{w}^{\varepsilon}_{BA} + \overline{w}^{\omega}_{BA}. \qquad (13.5)$$

XIV боб

НУҚТАНИНГ МУРАККАБ ҲАРАКАТИ

Шу пайтгача нуқта ёки жисмнинг ҳаракатини қўзғалмас деб қабул қилинган бирор координаталар системасига нисбатан текширдик. Кўпинча техникада учрайдиган масалаларни ечишда нуқта ёки жисмнинг ҳаракатини икки ва ундан ортиқ координата системаларнга нисбатан текширишга тўғри келади. Бундай ҳолда координата системаларидан бири қўзғалмас деб олиниб, қолганлари эса унга нисбатан маълум қонунга мувофиқ ҳаракат қилади, деб қаралади. Бу ҳолда нуқта (ёки жисм) қўзғалмас координаталар системасига нисбатан мураккаб ҳаракатда бўлади. Масалан, Ернинг сунъий йўлдоши ичида ҳаракатланаётган бирор нуқта Ерга нисбатан мураккаб ҳаракатда бўлади. Вагон ичида юраётган йўловчи поезд ҳаракатланаётганда Ерга нисбатан мураккаб ҳаракатда бўлади. Бу мисолларда Ер билан боғланган координаталар системаси қўзғалмас бўлиб, сунъий йўлдош ва поезд билан боғланган координаталар системаси қўзғалувчи координаталар системасидан иборат бўлади.

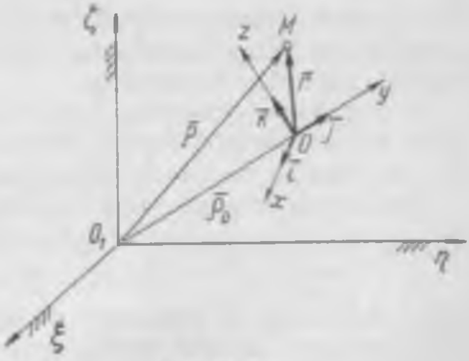
82-§. Нуқтанинг нисбий, кўчирма ва мураккаб ҳаракатлари

M нуқтанинг қўзғалмас $O_1\xi\eta\zeta$ координаталар системасига нисбатан мураккаб ҳаракатини текширамиз. Бунинг учун $O_1\xi\eta\zeta$ га нисбатан ихтиёрий равишда ҳаракатланадиган $Oxyz$ координаталар системасини оламиз (143- расм).

M нуқтанинг қўзғалувчи $Oxyz$ координаталар системасига нисбатан ҳаракати ***нисбий ҳаракат*** дейилади. Нуқтанинг нисбий ҳаракати текширилаётганда қўзғалувчи координаталар системасининг ҳаракати фикран эътиборга олинмайди. Нуқтанинг нисбий ҳаракатда чизган траекторияси ***нисбий траектория*** дейилади.

Нуқтанинг нисбий траектория бўйлаб ҳаракат тезлиги *нисбий тезлик*, нисбий тезликнинг нисбий ҳаракат траекторияси бўйича ўзгаришини ифодаловчи тезланиш *нисбий тезланиш* дейилади. Нисбий тезлик $\bar{v}_r$ билан, нисбий тезланиш $\bar{w}_r$ билан белгиланади.

Ернинг сунъий йўлдоши ичидаги нуқтанинг сунъий йўлдош билан бириктирилган координаталар системасига нисбатан ҳаракати нисбий ҳаракат бўлади. Нуқтанинг сунъий йўлдошга нисбатан тезлиги нисбий тезлик, тезланиши нисбий тезланиш бўлади.



143- расм.

M нуқтани $Oxyz$ қўзғалувчи координаталар системасига нисбатан берилган онда фикран қўзғалмас деб қараб, унинг қўзғалувчи координаталар системаси билан биргаликда қўзғалмас $O_1\xi\eta\zeta$ координаталар системасига нисбатан қилган ҳаракати *кўчирма ҳаракат* дейилади. Нуқтанинг кўчирма ҳаракати қўзғалувчи координаталар системасининг қўзғалмас координаталар системасига нисбатан ҳаракати билан аниқланади.

Ҳаракати кузатилаётган M нуқтани берилган онда қўзғалувчи $Oxyz$ координаталар системасининг бирор нуқтаси билан устма-уст тушган ва унга нисбатан қўзғалмас деб қараб, шу нуқтанинг қўзғалувчи координаталар системаси билан биргаликда қўзғалмас координаталар системасига нисбатан ҳаракат тезлиги берилган онда *кўчирма тезлик* ва тезланиши *кўчирма тезланиш* дейилади. Кўчирма тезлик $\overline{v}_e$ билан, кўчирма тезланиш $\overline{w}_e$ билан белгиланади.

Келтирилган мисолда M нуқтани сунъий йўлдошнинг бирор нуқтасида жойлашган деб қараб, мазкур нуқтанинг сунъий йўлдош билан биргаликда Ерга нисбатан ҳаракати кўчирма ҳаракат бўлади. Сунъий йўлдош M нуқтасининг Ерга нисбатан тезлиги кўчирма тезликни, тезланиши кўчирма тезланишни ифодалайди.

M нуқтанинг бевосита қўзғалмас координаталар системасига нисбатан ҳаракати *мураккаб ҳаракат* ёки *абсолют ҳаракат* дейилади. Нуқтанинг бундай ҳаракат тезлиги *абсолют тезлик*, тезланиши *абсолют тезланиш* дейилади. Абсолют тезлик $\overline{v}_a$ билан, абсолют тезланиш $\overline{w}_a$ билан белгиланади.

Келтирилган мисолда сунъий йўлдош ичидаги M нуқтанинг Ер билан боғланган координаталар системасига нисбатан ҳаракати абсолют ҳаракат бўлади.

143-расмда тасвирланган M нуқтанинг $O_1\xi\eta\zeta$ координаталар системасига нисбатан ҳаракати мураккаб ҳаракат бўлиб, бу ҳаракатни нисбий ва кўчирма ҳаракатдан ташкил топган деб қараймиз.

Нуқтанинг мураккаб ҳаракатини текширганда нисбий, кўчирма ва ва абсолют тезликлари ҳамда тезланишлари орасидаги муносабатни топиш асосий масала ҳисобланади.

M нуқтанинг қўзғалмас $O_1\xi\eta\zeta$ координаталар системасига нисбатан ҳолати координаталар боши O_1 ва M нуқта орқали ўтувчи $\overline{\rho}$ радиус-вектор билан аниқланади. Яъни $\overline{\rho}$ радиус-векторининг ўзгариши абсолют ҳаракатни белгилайди.

M нуқтанинг қўзғалувчи $Oxyz$ координаталар системасига нисбатан ҳолати координаталар боши O ва M нуқта орқали ўтувчи $\overline{r}$ радиус-вектор воситасида аниқланади.

Қўзғалувчи координаталар системасининг бирлик векторларини $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ билан белгиласак, $\overline{r}$ қуйидагича ифодаланади:

$$\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}.$$

Бунда x, y, z лар M нуқтанинг нисбий ҳаракатини белгиловчи координаталаридир. Шундай қилиб, нуқтанинг нисбий ҳаракат тенгламалари ушбу кўринишда ёзилади:

$$\left.\begin{aligned} x &= f_1(t), \\ y &= f_2(t), \\ z &= f_3(t). \end{aligned}\right| \qquad (14.1)$$

Қўзғалмас системанинг координаталар боши O_1 ва қўзғалувчи системанинг координаталар боши O нуқта орқали ўтувчи $\overline{\rho}_0$ радиус-векторнинг ўзгариши O нуқтанинг абсолют ҳаракатини белгилайди.

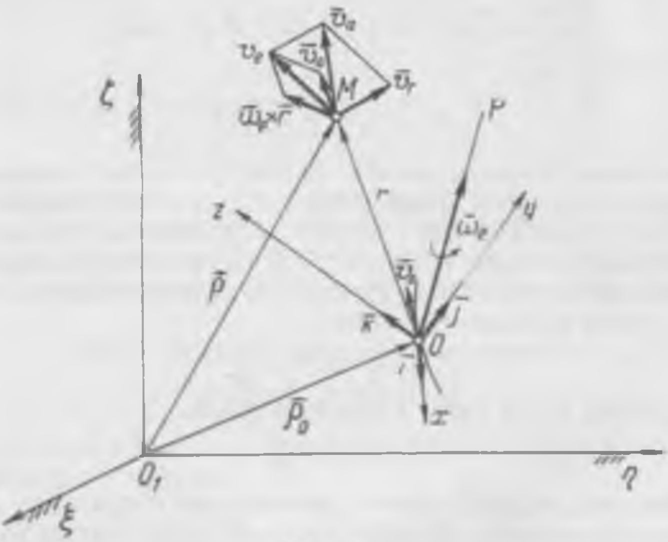
83- §. Тезликларни қўшиш теоремаси

M нуқтанинг $O_1\xi\eta\zeta$ қўзғалмас координаталар системасига нисбатан абсолют тезлигини аниқлаш учун ҳаракатни қўзғалувчи $Oxyz$ координаталар системасига нисбатан нисбий ҳаракат ва бу координаталар системаси билан биргаликда содир бўладиган кўчирма ҳаракатдан ташкил топган деб қараймиз (143- расм). Қўзғалувчи $Oxyz$ координаталар системаси қўзғалмас $O_1\xi\eta\zeta$ координаталар системасига нисбатан худди эркин жисм каби ҳаракатлансин. У ҳолда юқорида кўрганимиздек, $Oxyz$ координаталар системасининг ҳаракатини координаталар боши O нуқта—қутбнинг илгарилама ҳаракати ва бу қутб атрофидаги сферик ҳаракатдан ташкил топган деб қараш мумкин. Мазкур сферик ҳаракатни O нуқтадан ўтувчи OP оний ўқ атрофидаги $\overline{\omega}_e$ бурчак тезлик билан содир бўлувчи айланма ҳаракатдан иборат деб қараймиз (144- расм).

Расмдан қуйидаги муносабатни оламиз:

$$\overline{\rho} = \overline{\rho}_0 + \overline{r} = \overline{\rho}_0 + (x\,\overline{i} + y\,\overline{j} + z\,\overline{k}. \qquad (14.2)$$

M нуқтанинг абсолют тезлигини аниқлаш учун (14.2) дан вақт бўйича ҳосила оламиз:



144- расм.

$$\frac{d\bar{\rho}}{dt} = \frac{d\bar{\rho}_o}{dt} + \left(\frac{dx}{dt}\bar{i} + \frac{dy}{dt}\bar{j} + \frac{dz}{dt}\bar{k}\right) + \left(x\frac{d\bar{i}}{dt} + y\frac{d\bar{j}}{dt} + z\frac{d\bar{k}}{dt}\right) \qquad (14.3)$$

Бунда

$$\frac{d\bar{\rho}}{dt} = \bar{v}_a \qquad (14.4)$$

нуқтанинг абсолют тезлигини ифодалайди,

$$\frac{d\bar{\rho}_o}{dt} = \bar{v}_o, \qquad (14.5)$$

бунда O қутбнинг тезлигидир; (14.1) га кўра $\frac{dx}{dt} = v_{rx}$, $\frac{dy}{dt} = v_{ry}$, $\frac{dz}{dt} = v_{rz}$ бўлиб, нисбий тезликнинг қўзғалувчи x, y, z координаталар ўқларидаги проекцияларини ифодалайди. Шу сабабли нуқтанинг нисбий тезлиги қуйидагича топилади:

$$\frac{dx}{dt}\bar{i} + \frac{dy}{dt}\bar{j} + \frac{dz}{dt}\bar{k} = v_{rx}\bar{i} + v_{ry}\bar{j} + \bar{v}_{rz}\bar{k} = v_r \qquad (14.6)$$

Қўзғалувчи $Oxyz$ координаталар системаси O нуқтадан ўтувчи OP оний ўқ атрофида $\bar{\omega}_e$ бурчак тезлик билан айланма ҳаракатда бўлгани учун $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ бирлик векторлардан вақт бўйича олинган ҳосила, радиус-векторлари $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ га тенг бўлган нуқталарнинг чизикли тезлиги каби олинади. У ҳолда Эйлер формуласига кўра қуйидаги тенгликлар ўринли бўлади:

$$\frac{d\bar{i}}{dt} = \bar{\omega}_e \times \bar{i};\quad \frac{d\bar{j}}{dt} = \bar{\omega}_e \times \bar{j};\quad \frac{d\bar{k}}{dt} = \bar{\omega}_e \times \bar{k}. \qquad (14.7)$$

(14.4) — (14.7) ларга асосан (14.3) ни қуйидагича ёзамиз:

$$\bar{v}_a = \bar{v}_o + \bar{v}_r + \bar{\omega}_e \times (x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}),$$

ёки

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_o + \bar{\omega}_e \times \bar{r}. \qquad (14.8)$$

M нуқтанинг кўчирма тезлиги $Oxyz$ қўзғалувчи координаталар системасининг шу нуқта билан устма-уст тушган нуқтасининг $O_1\xi\eta\zeta$ га нисбатан тезлигига тенг бўлади. Кўрилаётган ҳолда $Oxyz$ координаталар системаси қўзғалмас $O_1\xi\eta\zeta$ га нисбатан худди эркин жисм каби ҳаракатланаётгани учун M нуқтанинг кўчирма тезлиги (13.3) га асосан қуйидагича ёзилади:

$$\bar{v}_o + \bar{\omega}_e \times \bar{r} = \bar{v}_e. \qquad (14.9)$$

Шундай қилиб, (14.8) ушбу кўринишни олади.

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_e. \qquad (14.10)$$

Бу тенглик *тезликларни қўшиш теоремасини* ифодалайди.

Нуқтанинг абсолют ҳаракат тезлиги унинг нисбий ва кўчирма ҳаракат тезликларининг геометрик йиғиндисига тенг.

Бу теорема *тезликларнинг параллелограмм қоидаси* дейилади.

(14.9) дан кўрамизки, кузатилаётган ҳолда M нуқтанинг кўчирма ҳаракат тезлиги қутб O нинг тезлиги $\bar{v}_O$ ва OP оний ўқ атрофидаги айланма ҳаракат тезлиги $\bar{\omega}_e \times \bar{r}$ га қурилган параллелограммнинг диагонали билан ифодаланади.

Агар кўчирма ҳаракат илгариланма ҳаракатдан иборат, яъни $\bar{\omega}_e = 0$ бўлса, у ҳолда қўзғалувчи координаталар системаси билан боғланган барча нуқталарнинг тезликлари геометрик тенг бўлиб, қутбнинг тезлиги $\bar{v}_0$ билан аниқланади:

$$\bar{v}_e = \bar{v}_O.$$

Бу ҳолда ҳам (14.10) формула ўринли бўлади.

Абсолют тезликнинг модули нисбий ва кўчирма тезликларга қурилган параллелограммнинг диагонали билан ифодаланади:

$$v_a = \sqrt{v_r^2 + v_e^2 + 2\,v_e v_r \cos\alpha}, \tag{14.11}$$

бунда

$$\alpha = (\widehat{\bar{v}_e, v_r}).$$

Агар $\alpha = 0$, яъни $\bar{v}_r$ билан $\bar{v}_e$ бир тўғри чизиқ бўйлаб бир томонга йўналган бўлса, абсолют тезлик қуйидагича топилади:

$$v_a = \sqrt{v_r^2 + v_e^2 + 2\,v_e v_r} = v_e + v_r.$$

Агар $\alpha = 90°$, яъни $\bar{v}_e \perp \bar{v}_r$ бўлса, абсолют тезлик

$$v_a = \sqrt{v_r^2 + v_e^2}$$

формуладан, $\alpha = 180°$, яъни $\bar{v}_r$ билан $\bar{v}_e$ бир тўғри чизиқ бўйлаб қарама-қарши йўналган ҳолда эса

$$v_a = \sqrt{v_r^2 + v_e^2 - 2\,v_e v_r} = |v_r - v_e|$$

формуладан аниқланади.

Агарда нисбий, кўчирма ва абсолют тезликлардан ихтиёрий иккитаси маълум бўлса, учинчи номаълум тезликни тезликларни қўшиш ҳақидаги (14.10) теоремадан фойдаланиб аниқлаш мумкин.

84-§. Тезланишларни қўшиш теоремаси
(Кориолис теоремаси)

M нуқтанинг кўчирма ҳаракати илгариланма бўлмаган ҳолда абсолют тезликнинг қуйидаги

$$\bar{v}_a = \frac{d\bar{\rho}_o}{dt} + \left(\frac{dx}{dt}\bar{i} + \frac{dy}{dt}\bar{j} + \frac{dz}{dt}\bar{k}\right) + \left(x\frac{d\bar{i}}{dt} + y\frac{d\bar{j}}{dt} + z\frac{d\bar{k}}{dt}\right)$$

ифодасидан вақт бўйича ҳосила оламиз:

$$\frac{d\bar v_a}{dt} = \frac{d^2\bar\rho_o}{dt^2} + \left(\frac{d^2x}{dt^2}\bar i + \frac{d^2y}{dt^2}\bar j + \frac{d^2z}{dt^2}\bar k\right) +$$

$$+ 2\left(\frac{dx}{dt}\frac{d\bar i}{dt} + \frac{dy}{dt}\frac{d\bar j}{dt} + \frac{dz}{dt}\frac{d\bar k}{dt}\right) + x\frac{d^2\bar i}{dt^2} + y\frac{d^2\bar j}{dt^2} + z\frac{d^2\bar k}{dt^2} \qquad (14.12)$$

(14.12) да

$$\frac{d\bar v_a}{dt} = w_a \; . \qquad (14.13)$$

М нуқтанинг абсолют тезланишини,

$$\frac{d^2\bar\rho_e}{dt^2} = \bar w_o \qquad (14.14)$$

О қутбнинг тезланишини,

$$\frac{d^2x}{dt^2}\bar i + \frac{d^2y}{dt^2}\bar j + \frac{d^2z}{dt^2}\bar k = \bar w_r \qquad (14.15)$$

М нуқтанинг нисбий тезланишини ифодалайди. (14.7) ва (14.6) ларга асосан қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$\frac{dx}{dt}\frac{d\bar i}{dt} + \frac{dy}{dt}\frac{d\bar j}{dt} + \frac{dz}{dt}\frac{d\bar k}{dt} = \bar\omega_e \times \left(\frac{dx}{dt}\bar i + \frac{dy}{dt}\bar j + \frac{dz}{dt}\bar k\right) =$$

$$= \bar\omega_e \times \bar v_r \, , \qquad (14.\ 16)$$

$$\frac{d^2\bar i}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\bar i}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\bar\omega_e \times \bar i\right) = \frac{d\bar\omega_e}{dt} \times \bar i + \bar\omega_e \times \frac{d\bar i}{dt} =$$

$$= \bar\varepsilon_e \times \bar i + \bar\omega_e \times \left(\bar\omega_e \times \bar i\right),$$

бунда $\bar\varepsilon_e = \frac{d\bar\omega_e}{dt}$ бўлиб, *OE* ўқ атрофидаги оний бурчак тезланишдир (145-расм). Худди шунингдек,

$$\frac{d^2\bar j}{dt^2} = \bar\varepsilon_e \times \bar j + \bar w_e \times (\bar\omega_e \times \bar j),$$

$$\frac{d^2\bar k}{dt^2} = \bar\varepsilon_e \times \bar k + \omega_e \times (\bar\omega_e \times \bar k).$$

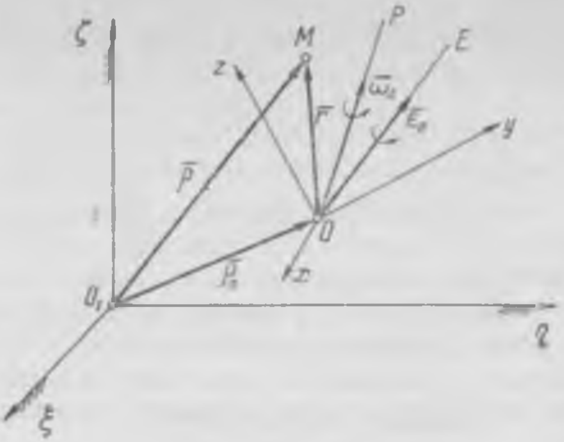
Шу сабабли

$$x\frac{d^2\bar i}{dt^2} + y\frac{d^2\bar j}{dt^2} + z\frac{d^2\bar k}{dt^2} = \left[\bar\varepsilon_e \times \bar i + \bar\omega_e \times \left(\bar\omega_e \times \bar i\right)\right]x +$$

$$+ \left[\bar\varepsilon_e \times \bar j + \bar\omega_e \times \left(\bar\omega_e \times \bar j\right)\right]y + \left[\bar\varepsilon_e \times \bar k + \bar\omega_e \times \left(\bar\omega_e \times \bar k\right)\right]z =$$

$$= \bar\varepsilon_e \times \left(x\bar i + y\bar j + z\bar k\right) + \bar\omega_e \times \left[\bar\omega_e \times \left(x\bar i + y\bar j + z\bar k\right)\right] =$$

$$= \bar\varepsilon_e \times \bar r + \bar\omega_e \times \left(\bar\omega_e \times r\right). \qquad (14.17)$$



145- расм.

(14.13) — (14.17) ларга асосан (14.12) ни қуйидагича ёзамиз:

$$\bar w_a = \bar w_o + \bar w_r + 2\left(\bar\omega_e \times \bar v_r\right) + \bar\varepsilon_e \times \bar r + \bar\omega_e \times \left(\bar\omega_e \times r\right). \quad (14.18)$$

М нуқтанинг кўчирма тезланиши *Oxyz* қўзғалувчи координаталар системасининг шу нуқта билан устма-уст тушган нуқтасининг *O*ξηζ га нисбатан тезланишига тенг бўлади. Қўрилаётган ҳолда *Oxyz* координаталар системаси худди эркин жисм каби ҳаракатлангани учун $\bar w_e$ кўчирма ҳаракат тезланиши *O* қутбнинг тезланиши $\bar w_o$ ҳамда қутб атрофидаги айланма ҳаракат тезланиши $\bar w^e = \bar\varepsilon_e \times \bar r$ ва *OP* оний ўққа интилма тезланиш $\bar w^\omega = \bar\omega_e \times \left(\bar\omega_e \times r\right)$ дан ташкил топади:

$$\bar w_o + \bar\varepsilon_e \times \bar r + \bar\omega_e + \left(\bar\omega_e \times \bar r\right) = \bar w_e \,. \quad (14.19)$$

(14. 18) даги

$$2\left(\bar\omega_e \times \bar v_r\right) = \bar w_k \quad (14.20)$$

Кориолис тезланиши дейилади.

Шундай килиб, нуқтанинг абсолют тезланиши қуйидаги тенгликдан аниқланади:

$$\bar w_a = \bar w_r + \bar w_e + \bar w_k \,. \quad (14.21)$$

(14.21) тенглик кўчирма ҳаракати илгариланма бўлмаган нуқтанинг тезланишларини қўшиш ҳақидаги *Кориолис* (1792 — 1843) *теоремасини* ифодалайди.

Кўчирма ҳаракати илгариланма бўлмаган мураккаб ҳаракатдаги нуқтанинг абсолют тезланиши унинг нисбий, кўчирма ва Кориолис тезланишларининг геометрик йиғиндисига тенг.

Агар нуқтанинг ҳаракати табиий усулда берилса, у ҳолда нисбий тезланишни уринма ва нормал ташкил этувчилардан иборат деб қараш мумкин.

$$\bar{w}_r = \bar{w}_r^\tau + \bar{w}_r^n ,$$

бунда

$$w_r^\tau = \frac{dv_r}{dt} = \ddot{s}_r , \quad w_r^n = \frac{v_r^2}{\rho_r}$$

бўлиб, s_r — ҳисоблаш бошидан нуқтанинг нисбий ҳаракат чизиғи бўйлаб унинг берилган ондаги ҳолатигача бўлган ёй координатаси; ρ_r — нисбий ҳаракат чизиғининг эгрилик радиуси.

Кўчирма ҳаракат қўзғалмас ўқ атрофидаги айланма ҳаракатдан иборат бўлган хусусий ҳолда кўчирма ҳаракат тезланиши учун

$$\bar{w}_e = \bar{w}_e^\tau + \bar{w}_e^n$$

формула ўринлидир. Агар айланиш ўқидан нуқтагача бўлган энг қисқа масофани R билан, кўчирма ҳаракат бурчак тезлиги ва бурчак тезланишини мос равишда ω_e ва ε_e билан белгиласак, (10.14) ва (10.15) ларга кўра, кўчирма уринма тезланиш

$$w_e^\tau = R\varepsilon,$$

кўчирма нормал тезланиш эса

$$w_e^n = R\omega_e^2$$

формулалар ёрдамида аниқланади. Бу ҳолда нуқтанинг абсолют тезланиши учун қуйидаги тенгликни ёза оламиз:

$$\bar{w}_a = \bar{w}_r^\tau + \bar{w}_r^n + \bar{w}_e^\tau + \bar{w}_e^n + \bar{w}_k . \qquad (14.21')$$

Агар кўчирма ҳаракат илгарилланма ҳаракатдан иборат бўлса, у ҳолда $\bar{\omega}_e = 0$, $\bar{\varepsilon}_e = 0$. Шу сабабли қўзғалувчи координаталар системаси билан боғланган барча нуқталарнинг тезланишлари ўзаро геометрик тенг бўлиб, қутбнинг тезланиши $\bar{w}_o$ билан аниқланади:

$$\bar{w}_e = \bar{w}_o .$$

Бу ҳолда $\bar{w}_k = 2\left(\bar{\omega}_e \times v_r\right) = 0$. Шу сабабли (14.21) ни кўрилаётган ҳолда қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$\bar{w}_a = \bar{w}_r + \bar{w}_e . \qquad (14.22)$$

(14.22) *формула кўчирма ҳаракати илгариланма ҳаракатдан иборат бўлган нуқта учун тезланишларни қўшиш ҳақидаги* қуйидаги *теоремани* ифодалайди.

Кўчирма ҳаракати илгариланма ҳаракатдан иборат бўлган нуқтанинг абсолют тезланиши унинг нисбий ва кўчирма тезланишларининг геометрик йиғиндисига тенг.

Шундай қилиб, кўчирма ҳаракат илгариланма ҳаракат бўлганда, нуқтанинг абсолют тезланиши нисбий тезланиш $\overline{w}_r$ ва кўчирма тезланиш $\overline{w}_e$ ларга қурилган параллелограммнинг диагонали билан ифодаланади. Бу ҳолда абсолют тезланишнинг модули қуйидагича ҳисобланади:

$$w_a = \sqrt{w_r^2 + w_e^2 + 2w_r w_e \cos\left(\widehat{\overline{w}_r\ \overline{w}_e}\right)} \ . \tag{14.23}$$

85-§. Кориолис тезланиши

Юқорида кўрганимиздек, Кориолис тезланиши мураккаб ҳаракатдаги нуқтанинг кўчирма ҳаракат бурчак тезлиги билан нисбий ҳаракат тезлигининг векторли кўпайтмасининг иккиланганига тенг.

$$\overline{w}_k = 2\left(\overline{\omega}_e \times \overline{v}_r\right). \tag{14.24}$$

Агар ω_e билан v_r орасидаги бурчак катталигини α билан белгиласак, *Кориолис тезланишининг модули*

$$w_k = 2\omega_e\ v_r \sin\alpha \tag{14.25}$$

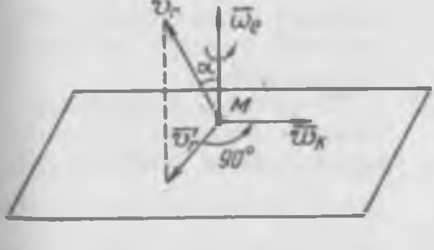
формуладан аниқланади.

Кориолис тезланишининг йўналишини қуйидаги *Жуковский қоидаси* асосида аниқлаш қулайдир.

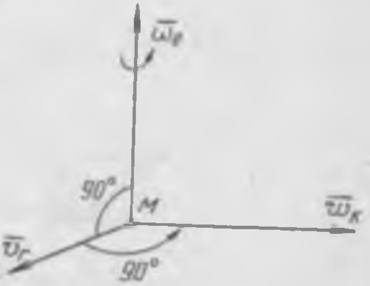
Кориолис тезланишининг йўналишини аниқлаш учун нуқтанинг нисбий тезлигини кўчирма ҳаракат айланиш ўқига перпендикуляр текисликка проекциялаб, бу проекцияни мазкур текисликда, кўчирма ҳаракат айланиши йўналишида 90° бурчакка буриш керак (146-расм).

Агар $\omega_e \perp v_r$ бўлса (147-расм), $\sin\alpha = 1$. У ҳолда

$$w_k = 2\omega_e\ v_r\ . \tag{14.26}$$



146- расм.



147- расм.

(14.25) формулага кўра Кориолис тезланиши нолга тенг бўладиган ҳолларни кўриб чиқамиз:

1) юқорида кўрилганидек, $\omega_e = 0$, яъни кўчирма ҳаракат илгариланма ҳаракатдан иборат бўлса, $w_k = 0$ бўлади;

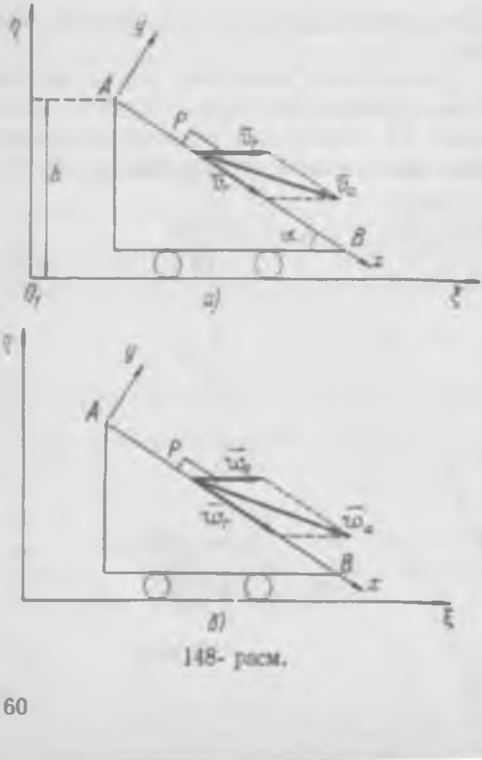
2) нисбий ҳаракат тезлиги бирор онда нолга тенг бўлса, шу онда $w_k = 0$ бўлади;

3) $\alpha = 0$ ёки $\alpha = 180°$ бўлса, яъни нисбий ҳаракат кўчирма ҳаракат айланиш ўқига параллел равишда содир бўлса ёки берилган онда нисбий ҳаракат тезлиги мазкур ўққа параллел бўлса, $w_k = 0$ бўлади.

86-§. Мураккаб ҳаракатдаги нуқтанинг тезлик ва тезланишларини аниқлашга доир масалалар

Мураккаб ҳаракатдаги нуқтанинг тезлик ва тезланишларини аниқлашга доир масалаларни қуйидаги тартибда ечиш тавсия этилади.

1. Қўзғалмас ва қўзғалувчи координата системалари танлаб олинади.
2. Ҳаракатни нисбий, кўчирма ва абсолют ҳаракатларга ажратилади.
3. Кўчирма ҳаракатни фикран тўхтатиб, нуқтанинг нисбий ҳаракат тезлиги ва тезланишлари аниқланади.
4. Нисбий ҳаракатни фикран эътиборга олмай, нуқтанинг кўчирма ҳаракат тезлиги ва тезланишлари аниқланади.
5. Тезликларни қўшиш теоремасидан фойдаланиб, нуқтанинг изланаётган абсолют тезлиги топилади.
6. Нуқта илгариланма кўчирма ҳаракатда бўлмаса, унинг Кориолис тезланиши аниқланади.
7. (14.21) ёки (14.22) ни координата ўқларига проекциялаб нуқта абсолют тезланишининг проекциялари топилади.
8. Мазкур проекциялар воситасида нуқта абсолют тезланишининг миқдори ва йўналиши аниқланади.



148- расм.

27-масала. Аравачанинг AB томони горизонт билан $\alpha = 45°$ бурчак ташкил этади. Аравача $O_1\xi$ ўқ бўйлаб $w_{\text{п}} = 1\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ ўзгармас тезланиш билан тўғри чизиқли ҳаракат қилади. Шу текисликда P жисм $w_r = \sqrt{2}\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ ўзгармас нисбий тезланиш билан тушиб келади. Текислик билан жисмнинг бошланғич тезлиги нолга тенг, жисмнинг бошланғич ҳолати $\xi = 0$, $\eta = h$ координаталар билан аниқланади. Жисмнинг абсолют ҳаракати тенгламаси, абсолют тезлиги ва тезланиши топилсин (148-расм).

Ечиш. Шаклда кўрсатилган $O_1\xi\eta$ текислик — қўзғалмас текислик. AB қия текислик орқали қўзғалувчи Axy координаталар системасини ўтказамиз. P жисмнинг Ax га нисбатан ҳаракати нисбий, жисмнинг фақат Axy билан биргаликда $O_1\xi\eta$ га нисбатан ҳаракати кўчирма (илгариланма), жисмнинг $O_1\xi\eta$ га нисбатан ҳаракати абсолют (мураккаб) ҳаракат бўлади. Нисбий ҳаракат ўзгармас w_r тезланиш билан содир бўлганда унинг нисбий тезлиги

$$v_r = v_{r_0} + w_r t$$

формулага мувофиқ топилади. Шунингдек, кўчирма ҳаракат тезлиги ҳам аниқланади:

$$v_e = v_{e_0} + w_e t.$$

Масаланинг шартига кўра, бошланғич $t = 0$ пайтда қия текислик ва жисмнинг бошланғич тезликлари нолга тенг: $v_{e_0} = 0$, $v_{r_0} = 0$. Шу сабабли

$$v_r = w_r t \text{ ва } v_e = w_e t.$$

$\bar{v}_r$ Ax ўқ буйлаб, $\bar{v}_e$ эса $O_1\xi$ ўққа параллел равишда йўналган. Улар орасидаги бурчак 45° га тенг. Абсолют тезликнинг миқдорини (Ī4.11) формулага мувофиқ аниқлаймиз (148-расм, *а*):

$$v_a = \sqrt{v_e^2 + v_r^2 + 2 v_e v_r \cos 45^\circ} =$$

$$= \sqrt{(w_r t)^2 + (w_e t)^2 + 2 w_r w_e t^2 \cos 45^\circ};$$

бунда $w_r = \sqrt{2}$ м/с², $w_e = w_0 = 1\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ бўлгани учун

$$v_a = \sqrt{5}\ t\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

келиб чиқади. Энди P жисмнинг Ax ўқ бўйлаб ўтган йўлини топамиз. Ҳаракат текис тезланувчан бўлганидан

$$x = x_0 + v_{r_0} t + \frac{w_r t^2}{2}.$$

Шунга ўхшаш, кўчирма ҳаракат қонунини ёзамиз:

$$\xi_e = \xi_0 + v_{e_0} t + \frac{w_e t^2}{2}.$$

$t = 0$ да $\xi_0 = 0$, $x_0 = 0$, $v_{r_0} = 0$, $v_{e_0} = 0$ бўлганидан

$$x = \frac{w_r t^2}{2}, \quad \xi_e = \frac{w_e t^2}{2}$$

ҳосил бўлади.

Энди *P* жисмнинг $O_1\xi\eta$ қўзғалмас системага нисбатан абсолют ҳаракати тенгламасини аниқлаймиз:

$$\xi = x\cos\alpha + w_e\frac{t^2}{2},$$

$$\eta = h - x\sin\alpha.$$

Юқоридагиларни эътиборга олсак, абсолют ҳаракат тенгламалари

$$\xi = t^2, \quad \eta = h - \frac{t^2}{2}$$

кўринишда ёзилади. Бу ҳаракат тенгламаларидан *t* вақтни чиқариб ташласак, абсолют ҳаракат траекториясининг тенгламасини оламиз:

$$\eta = h - \frac{\xi}{2},$$

яъни абсолют ҳаракат траекторияси тўғри чизиқдан иборат бўлади. Масалада кўчирма ҳаракат илгариланма бўлганидан, (14.22) га биноан, абсолют тезланиш

$$\bar{w}_a = \bar{w}_e + \bar{w}_r$$

формула ёрдамида аниқланади (148-расм, *б*). Абсолют тезланиш модули

$$w_a = \sqrt{w_e^2 + w_r^2 + 2w_e w_r \cos 45^\circ} = \sqrt{5}\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

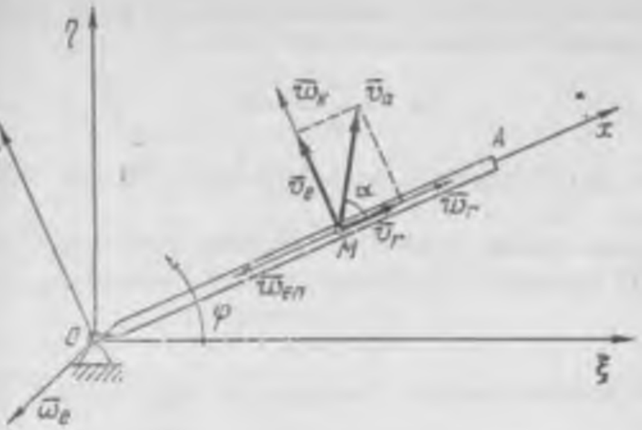
Абсолют ҳаракат тўғри чизиқли бўлгани учун бу натижанинг тўғрилигини абсолют тезликдан вақт бўйича ҳосила олиб текшириш мумкин:

$$w_a = \frac{dv_a}{dt} = \sqrt{5}\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

28-масала. *OA* кулиса ўзининг *O* учи атрофида ўзгармас $\omega = 2\text{с}^{-1}$ бурчак тезлик билан айланади. *M* ползун *OA* кулиса бўйлаб *O* дан *A* га қараб $S = OM = (2 + 3t^2)$ м қонун асосида ҳаракат қилади. Ползуннинг $t = 1$ с даги абсолют тезлиги ва тезланиши топилсин (149-расм).

Ечиш. *O* нуқта орқали $O\xi\eta$ қўзғалмас координаталар системасини ҳамда *OA* кулиса орқали *Ox* қўзғалувчи ўқни ўтказамиз. *M* нуқтанинг тезлигини тезликларни қўшиш теоремаси (14.10) га мувофиқ аниқлаймиз:

$$\bar{v}_a = \bar{v}_e + \bar{v}_r.$$



149- расм.

M нуқтанинг нисбий тезлигини топиш учун унинг *Ox* ўқ бўйлаб нисбий ҳаракат тенгламаси $s = 2 + 3t^2$ дан t бўйича хосила оламиз:

$$v_r = 6t\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

$\bar{v}_r$ тезлик *M* дан *A* га қараб йўналади. *M* ползунни *OA* кулисага нисбатан ҳаракатсиз деб қарасак, *M* нинг кулиса билан биргаликда қўзғалмас *O* нуқта атрофидаги ҳаракати кўчирма ҳаракат бўлади ва унинг тезлиги

$$v_e = \omega \cdot OM = 2(2 + 3t^2)\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

$\bar{v}_e$ айланиш йўналишида (*OM*) га перпендикуляр равишда йўналади, яъни $\bar{v}_e + \bar{v}_r$. Шу сабабли $\bar{v}_a$ нинг модули

$$v_a = \sqrt{v_e^2 + v_r^2} = \sqrt{(4 + 6t^2)^2 + (6t)^2}$$

тенгликдан топилади. $t = 1$ с бўлганда $v_a \approx 11{,}64$ м/с, α бурчак тангенси эса $\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_e}{v_r} = \frac{5}{3}$ га тенг бўлади. α бурчак қийматига кўра $\bar{v}_a$ нинг йўналиши топилади.

M ползуннинг берилган ондаги кўчирма ҳаракати айлана бўйлаб ҳаракат бўлганидан унинг абсолют тезланиши Кориолис теоремасидан аниқланади:

$$\bar{w}_a = \bar{w}_r + \bar{w}_e + \bar{w}_k.$$

Демак, $\bar{w}_r$ нисбий, w_e кўчирма ва $\bar{w}_k$ Кориолис тезланишларини аниқлашимиз керак.

Нисбий ҳаракат тўғри чизиқли бўлганидан унинг тезланиши нисбий тезликнинг t бўйича ҳосиласига тенг:

$$w_r = \frac{dv_r}{dt} = 6\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}\ .$$

Бунда $w_r > 0$ бўлганидан нисбий тезланиш нисбий тезлик бўйича йўналади.

Кўчирма ҳаракат кулисанинг айланма ҳаракатидан иборат бўлганидан M нуқтанинг $\overline{w}_e$ кўчирма ҳаракат тезланиши

$$\overline{w}_e = \overline{w}_{en} + \overline{w}_{e\tau}$$

формула асосида топилади. Берилган масалада кўчирма ҳаракат бурчак тезлиги ω_e ўзгармас бўлганидан $\varepsilon_e = \frac{d\omega_e}{dt} = 0$ бўлади. Бу ҳолда:

$$w_{e\tau} = \varepsilon_e \cdot OM = 0;\ \ w_e = w_{en} = \omega_e^2 \cdot OM = 4\,(2 + 3t)^2\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}\ .$$

Бу тезланиш OA бўйлаб M дан O айланиш марказига қараб йўналади.

Кўчирма ҳаракат бурчак тезлик вектори O нуқтадан шакл текислигига перпендикуляр ўтган ўқ бўйлаб кузатувчи томонга йўналади, яъни $\overline{\omega}_e \perp \overline{v}_r$. Бу ҳолда $\overline{w}_k$ нинг миқдори (14.26) га кўра қуйидагича бўлади:

$$w_k = 2\omega_e \cdot v_r = 24\,t\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\ .$$

$\overline{v}_r \perp \overline{\omega}_e$ бўлганидан $\overline{v}_r$ ни M нуқта атрофида айланма ҳаракат йўналишида 90° га айлантирсак, $\overline{w}_k$ нинг йўналиши топилади.

Абсолют тезланиш модулини $w_a = \sqrt{w_{ax}^2 + w_{ay}^2}$ формулага кўра аниқлаймиз. Расмдан:

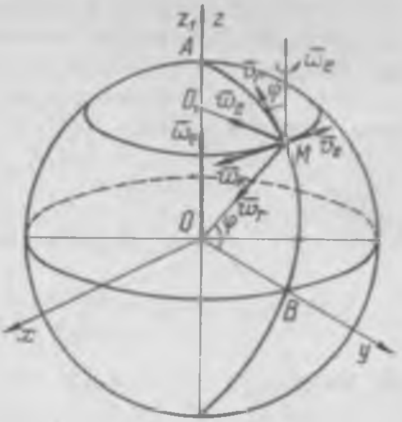
$$w_{ax} = w_r - w_{en}\ ,\quad w_{ay} = w_k\ .$$

Шунга кўра, $t = 1$ с да абсолют тезланиш модули

$$w_a = \sqrt{(w_r - w_{en})^2 + w_k^2} = 27{,}8\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

бўлади.

29-масала. R радиусли Ер шари ўзгармас ω_e бурчак тезлик билан ғарбдан шарққа қараб ўз ўқи атрофида айланади. Ер шарининг AB меридиани бўйлаб M жисм жанубдан шимолга қараб $\overline{v}_r$ ўзгармас миқдорли нисбий тезлик билан ҳаракат қилади. Жисм Ер шарининг шимолий ярим шарида φ кенгликда ётган вақтида қандай абсолют тезлик ва абсолют тезланишга эга бўлади (150-расм)?



150- расм.

Ечиш. Ҳаракатланувчи жисмни нуқта деб қараймиз. Ер шари айланма ҳаракатининг бурчак тезлик вектори айланиш ўқи бўйлаб йўналади. M нуқта Ернинг Oz_1 айланиш ўқига нисбатан мураккаб ҳаракат қилади. Унинг Ер сиртида AB меридиан бўйлаб ҳаракати нисбий, фақат Ер билан бирга Oz_1 ўқ атрофида айланиши кўчирма ҳаракат бўлади.

M нуқтанинг нисбий тезлиги шу нуқтада AB га ўтказилган уринма бўйлаб йўналган.

M нуқтанинг айланиш ўқига перпендикуляр бўлган O_1M радиусли айлана бўйлаб кўчирма ҳаракати тезлигини топамиз. Расмдан $O_1M = R\cos\varphi$. Кўчирма тезлик модули $v_e = \omega_e \cdot O_1M = \omega_e \cdot R\cos\varphi$ формула ёрдамида аниқланади.

Бу тезлик O_1M радиусли айланага ўтказилган уринма бўйлаб йўналади. Абсолют тезликни (14.10) формулага мувофиқ топамиз:

$$\overline{v}_a = \overline{v}_r + \overline{v}_e\ .$$

Бу масалада $\overline{v}_e \perp \overline{v}_r$ бўлганидан

$$v_a = \sqrt{v_e^2 + v_r^2} = \sqrt{v_r^2 + \omega_e^2 \cdot R^2 \cdot \cos^2\varphi}\ .$$

M нуқтанинг абсолют тезланишини Кориолис теоремасига мувофиқ аниқлаймиз:

$$\overline{w}_a = \overline{w}_r + \overline{w}_e + \overline{w}_k.$$

M нуқта ўзгармас нисбий тезлик билан AB меридиан бўйлаб ҳаракатланганидан, у меридиан айланаси бўйлаб текис ўзгарувчан айланма ҳаракат қилади.

$\overline{w}_r = \overline{w}_{rn} + \overline{w}_{r\tau}$ тенгликдаги $w_{rn} = \frac{v_r^2}{\rho}$, $w_{r\tau} = \frac{dv_r}{dt} = 0 (v_r = \text{const})$ бўлганидан $\overline{w}_r = \overline{w}_{rn}$ эканлиги келиб чиқади. Бу тезланиш M дан Ер маркази O га қараб йўналади. Кўчирма ҳаракат Ер ўқи Oz_1 атрофида $\omega_e = \text{const}$ бурчак тезлиги билан айланма ҳаракатдан иборат бўлгани учун $w_{e\tau} = \varepsilon_e \cdot R = 0$, чунки $\varepsilon_e = \frac{d\omega_e}{dt} = 0$. Шу сабабли

$$w_e = w_{en} = \omega_e^2 \cdot O_1M = \omega_e^2 \cdot R\cos\varphi.$$

Бу тезланиш M дан $\overline{MO_1}$ бўйлаб йўналади. Энди Кориолис тезланишини топамиз:

$$\overline{w}_k = 2\ (\overline{\omega}_e \times \overline{v}_r).$$

Бу тезланиш $\overline{\omega}_e$ билан v_r ётган текисликка перпендикуляр равишда M нуқтада кўчирма ҳаракат траекториясига уринма равишда йўналади, миқдори эса $w_k = 2\omega_e v_r \sin\varphi$ га тенг бўлади.

(14.21) тенгликнинг ҳар икки томонини x, y, z координата ўқларига проекциялаймиз:

$$w_{ax} = 2\omega_e \cdot v_e \sin\varphi;$$

$$w_{ay} = -\left(R\omega_e^2 + \frac{v_r^2}{R}\right)\cos\varphi;$$

$$w_{ar} = -\frac{v_r^2}{R}\sin\varphi.$$

У ҳолда

$$w_a = \sqrt{w_{ax}^2 + w_{ay}^2 + w_{az}^2} =$$

$$= \sqrt{\left(4v_r^2 \cdot \omega_e^2 + \frac{v_r^4}{R^2}\right)\sin^2\varphi + \left(R\omega_e^2 + \frac{v_r^2}{R}\right)^2\cos^2\varphi}.$$

Агар нуқта экваторда бўлса $\varphi = 0$; бу ҳолда $\overline{\omega}_e \parallel \overline{v}_r$ бўлиб, M нуқтанинг Кориолис тезланиши бўлмайди, яъни:

$$w_k = 2\omega_e \cdot v_r \sin\varphi = 0.$$

$$\text{Бу ҳолда } w_e = w_{ay} = -R\omega_e^2 - \frac{v_r^2}{R}.$$

Агар M нуқта шимолий қутбда бўлса, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\overline{\omega}_e \perp \overline{v}_r$ бўлади ва M нуқтанинг Кориолис тезланиши энг катта қийматга эришади:

$$w_k = 2\omega_e \cdot v_r.$$

Бу ҳолда M нуқтанинг абсолют тезланиши қуйидагича бўлади:

$$w_a = \sqrt{w_{ax}^2 + w_{az}^2} = \sqrt{4\omega_e^2 v_r^2 + \frac{v_r^4}{R^2}}.$$

XV боб

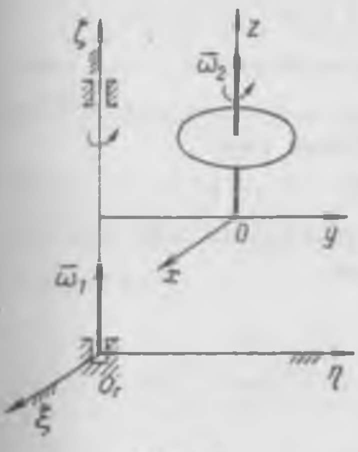
ҚАТТИҚ ЖИСМНИНГ МУРАККАБ ҲАРАКАТИ

Жисмнинг мураккаб ҳаракати тушунчаси нуқтанинг мураккаб ҳаракатига ўхшаш. Баъзи ҳолларда жисмнинг қўзғалмас саноқ системасига нисбатан ҳаракатини икки ҳаракатдан ташкил топган деб қараш қулай бўлади; бу ҳаракатлардан бири жисмнинг маълум қонун асосида $Oxyz$ қўзғалувчи координаталар системасига нисбатан нисбий ҳаракати бўлиб, иккинчиси — жисмнинг $O_1\xi\eta\zeta$ қўзғалмас саноқ системасига нисбатан қўзғалувчи саноқ системаси билан биргаликдаги кўчирма ҳаракати бўлади. Юқорида кўрганимиздек, эркин жисмнинг умумий ҳолдаги ҳаракатини илгариланма ҳаракат ва оний ўқ атрофида айланма ҳаракатдан ташкил топган деб қараш мумкин. Шунинг учун одатда жисмнинг мураккаб (абсолют) ҳаракатини аниқлаш масаласи унинг кўчирма ва нисбий ҳаракат турларига қараб, ё илгариланма ҳаракатларни, ё айланма ҳаракатларни ёки айланма ва илгариланма ҳаракатларни қўшиш масаласига келтирилади. Жисм ҳаракатларини қўшишнинг амалда учрайдиган баъзи ҳолларини кўриб ўтамиз.

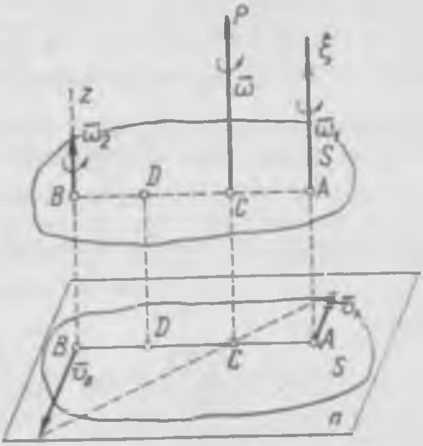
87-§. Иккита параллел ўқ атрофида айланувчи жисмнинг ҳаракатларини қўшиш

Қаттиқ жисмнинг нисбий ва кўчирма ҳаракатлари параллел ўқлар атрофидаги айланма ҳаракатлардан иборат бўлсин. Бундай ҳолга 151-расмда кўрсатилган жисмнинг ҳаракати мисол бўла олади. Фараз қилайлик, жисм $Oxyz$ қўзғалувчи системанинг Oz ўқи атрофида $\overline{\omega}_2$ бурчак тезлик билан нисбий айланма ҳаракатда бўлиб, Oz ўқнинг ўзи унга параллел қўзғалмас $O_1\zeta$ ўқ атрофида $\overline{\omega}_1$ бурчак тезлик билан кўчирма-айланма ҳаракатда бўлсин. Бунда жисм бир вақтда икки параллел ўқ атрофидаги айланма ҳаракатда иштирок этади. Унинг ҳамма нуқталари Oz ва $O_1\zeta$ параллел ўқларга перпендикуляр бўлган текисликларда ҳаракатланади.

Жисмнинг икки параллел ўқ атрофидаги айланма ҳаракатини қўшиш масаласи айланиш ўқига перпендикуляр бўлган текисликлардаги S қирқимнинг ҳаракатини, яъни текис параллел ҳаракатни ўрганишга келтирилади (152-расм). S текис шаклнинг ўз текислигидаги ҳаракатини оний марказ атрофида оний айланма ҳаракатдан иборат деб қараш мумкин. Текис шаклнинг ўз текислигидаги ҳаракатини тезликлар оний маркази атрофида оний айланма ҳаракатдан иборат деб қараш мумкин. Текис шаклнинг тезликлар оний марказининг вазиятини



151- расм.



152- расм.

ва оний бурчак тезлигини аниқлашда уч ҳол бўлиши мумкин. Бу ҳолларнинг ҳар бирини кўриб ўтамиз.

1. Бир томонга йўналган икки параллел ўқ атрофидаги жисм айланма ҳаракатларини қўшиш. Жисм бир вақтда иккита параллел z ва ζ ўқлар атрофида бир томонга қараб йўналган $\overline{\omega}_2$ ва $\overline{\omega}_1$ бурчак тезликлар билан айланма ҳаракатда деб қараб, унинг шу икки ҳаракатини қўшамиз (152-расм).

Бунинг учун ўқларга перпендикуляр текислик ўтказамиз, текисликнинг ўқ билан кесишган нуқталарини A ва B орқали белгилаймиз. AB кесмада бирор D нуқтани олиб, унинг $\overline{v}_a$ абсолют тезлигини топамиз. Нуқта мураккаб ҳаракатда бўлгани учун унинг тезлиги тезликларни қўшиш теоремасига мувофиқ аниқланади:

$$\overline{v}_a = \overline{v}_e + \overline{v}_r,$$

бунда $v_e = AD \cdot \omega_1$ ва $v_r = DB \cdot \omega_2$; бу кўчирма ва нисбий тезликлар D нуқтада кесмага перпендикуляр равишда, бир чизиқ бўйлаб қарама-қарши томонларга йўналади. Бу ҳолда

$$v_a = (AD\,\omega_1 - BD\,\omega_2). \tag{15.1}$$

AB да шундай C нуқтани топиш мумкинки, унинг шу ондаги абсолют тезлиги нолга тенг. У ҳолда C нуқта жисмнинг айланиш оний маркази бўлади ва (15.1) га кўра

$$v_C = AC\,\omega_1 - BC\,\omega_2 = 0.$$

Бундан

$$\frac{AC}{BC} = \frac{\omega_2}{\omega_1}. \tag{15.2}$$

C нуқтадан айланиш ўқига параллел ўтган CP чизиқ устидаги жисм нуқталарининг тезлиги шу онда нолга тенг бўлади ва шу сабабли CP айланиш оний ўқи бўлади.

Оний айланиш бурчак тезлиги $\overline{\omega}$ нинг миқдорини аниқлаш учун B нуқтанинг абсолют тезлиги v_B ни (15.1) га кўра топамиз:

$$v_B = AB \cdot \omega_1 - 0 \cdot \omega_2 = AB \cdot \omega_1. \tag{15.3}$$

Иккинчи томондан, B нуқта айланиш оний ўқи атрофида ω бурчак тезлик билан айланма ҳаракатда бўлгани учун

$$v_B = \omega \cdot BC. \tag{15.4}$$

(15.3) ва (15.4) тенгликларни солиштириб қуйидагини оламиз:

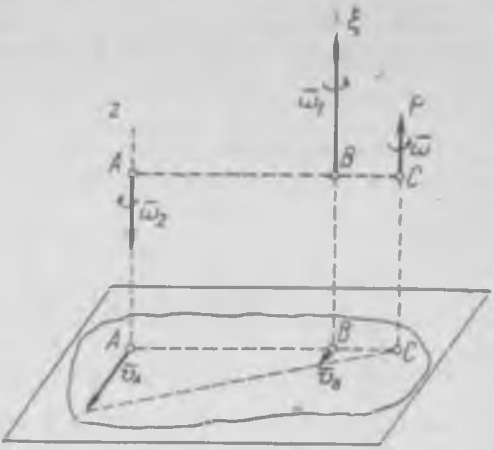
$$\omega \cdot BC = \omega_1 \cdot AB,$$

бундан

$$\omega = \frac{\omega_1 \cdot AB}{BC} = \omega_1 \frac{AC + BC}{BC} = \omega_1 \left(\frac{AC}{BC} + 1 \right),$$

ёки (15.2) ни эътиборга олсак,

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 \tag{15.5}$$



153- расм.

(15.2) ва (15.5) тенгликлардан кўрамизки, *бир-бирига параллел икки ўқ атрофида бир томонга айланувчи жисмнинг ҳаракатларини қўшиш натижасида олинган абсолют ҳаракат оний айланма ҳаракатдан иборат бўлиб, айланиш оний ўқи айланма ҳаракатлар содир бўлаётган ўқларга параллел равишда йўналади ҳамда ўқлар орасидаги масофани ичкаридан кўчирма ва нисбий ҳаракат бурчак тезликларига тескари мутаносиб бўлган бўлакларга бўлади. Оний айланма ҳаракат бурчак тезлигининг модули нисбий ва кўчирма ҳаракат бурчак тезликларининг алгебраик йиғиндисига тенг ва унинг йўналиши берилган бурчак тезликларининг йўналиши билан бир хил.*

2. Икки параллел ўқ атрофида қарама-қарши томонга айланувчи жисмнинг ҳаракатларини қўшиш. Жисм қўзғалувчи z ўқ атрофида $\bar{\omega}_2$ бурчак тезлик билан нисбий ҳаракатда, қўзғалмас ва z га параллел $B\zeta$ ўқ атрофида кўчирма ҳаракатда бўлиб, $\bar{\omega}_1$ бурчак тезлик билан айлансин (153-расм.) Кўчирма ва нисбий ҳаракатлар йўналишлари бир-бирига тескари бўлсин. $\omega_1 > \omega_2$ бўлган шундай иккита ҳаракатни қўшамиз.

Бу ҳолда ҳам қаттиқ жисмнинг ҳаракатларини қўшиш айланиш ўқларига перпендикуляр текисликдаги текис шаклнинг оний айланма ҳаракатига келтирилишини исботлаймиз. Бунинг учун z ва ζ ўқларга перпендикуляр текислик ўтказиб, унинг ўқлар билан кесишган нуқталарини A ва B билан белгилаймиз. AB кесманинг давомида бурчак тезлиги катта бўлган ўқ томонида жойлашган C нуқтанинг тезлигини топамиз:

$$v_C = AC \cdot \omega_2 - \omega_1 \cdot BC. \tag{15.6}$$

Бундаги $AC \cdot \omega_2$ ва $\omega_1 \cdot BC$ лар AB га перпендикуляр ва қарама-қарши томонларга йўналади. C нуқтани шундай танлаймизки, унинг абсолют тезлиги v_C нолга тенг бўлсин. У ҳолда (15.6) дан ушбу тенгликни оламиз:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{\omega_1}{\omega_2}. \tag{15.7}$$

C нуқтанинг тезлиги нолга тенг бўлгани учун у айланиш оний маркази ва айланиш ўқига параллел бўлган CP ўқ айланиш оний ўқи бўлади.

Оний айланиш бурчак тезлиги ω нинг миқдорини аниқлаш учун B нуқтанинг тезлигини (15.6) га кўра топамиз:

$$v_B = AB\cdot\omega_2 - 0\cdot\omega_1 = AB\cdot\omega_2. \tag{15.8}$$

Иккинчи томондан, B нуқта айланиш оний ўқи атрофида ω бурчак тезлик билан айланма ҳаракатда бўлгани учун

$$v_B = \omega\cdot BC. \tag{15.9}$$

(15.8) ва (15.9) ларни солиштириб $\omega\cdot BC = AB\cdot\omega_2$ тенгликни оламиз. Бундан $\omega = \frac{AB\cdot\omega_2}{BC} = \frac{(AC - BC)\cdot\omega_2}{BC} = \left(\frac{AC}{BC} - 1\right)\omega_2$, ёки (15.7) ни эътиборга олсак, қуйидаги ҳосил бўлади:

$$\omega = \omega_1 - \omega_2. \tag{15.10}$$

(15.6) ва (15.10) тенгликлардан кўрамизки, *бир-бирига параллел иккита ўқ атрофида қарама-қарши томонга бир-бирига тенг бўлмаган бурчак тезликлар билан айланувчи жисмнинг ҳаракатларини қўшиш натижасида олинган абсолют ҳаракат оний айланма ҳаракатдан иборат бўлиб, айланиш оний ўқи айланма ҳаракатлар содир бўлаётган ўқларга параллел равишда йўналади ҳамда ўқлар орасидаги масофани ташқи томондан (катта бурчак тезлик томондан) кўчирма ва нисбий ҳаракат бурчак тезликларига тескари мутаносиб бўлакларга бўлади. Оний айланма ҳаракат бурчак тезлиги катта бурчак тезлиги билан бир хил йўналади ва унинг модули берилган бурчак тезликларининг айирмасига тенг.*

Айланиш оний ўқининг берилган ўқлардан бирортасига нисбатан ҳолатини аниқлаш учун (15.7) дан ҳосилавий пропорция тузамиз:

$$\frac{AC - BC}{BC} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_2}$$

ёки

$$\frac{AB}{BC} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_2},$$

бундан

$$BC = \frac{AB\cdot\omega_2}{\omega_1 - \omega_2} = \frac{AB\cdot\omega_2}{\omega}. \tag{15.11}$$

3. Жуфт айланиш.

3. Жуфт айланиш. Қаттиқ жисм икки параллел ўқ атрофида қарама-қарши томонга айланиб, бурчак тезликлари сон жиҳатдан бир-бирига тенг бўлса, бундай айланиш *жуфт айланиш* дейилади. Жуфт айланишда $\overline{\omega}_1 = -\overline{\omega}_2$ бўлади.

Фараз қилайлик, жисм бурчак тезликлари $\overline{\omega}_1$ ва $\overline{\omega}_2$ га тенг бўлган (бунда $\overline{\omega}_1 = -\overline{\omega}_2$) иккита оний айланма ҳаракатда қатнашсин. Бундай жуфт айланиш хусусиятини тасаввур қилиш учун жисм ихтиёрий M нуқтасининг ҳаракатини текширамиз. M нуқтанинг $\overline{\omega}_1$ ва ω_2 текислигидаги Q ва P нуқталарга нисбатан ҳолати $\overline{QM} = \overline{r}_1$ ва $\overline{PM} = \overline{r}_2$ векторлар билан аниқлансин (154-расм). Тезликларни қўшиш теоремасидан фойдаланиб M нуқтанинг абсолют тезлигини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\overline{v}_M = \overline{\omega}_1\times\overline{r}_1 + \overline{\omega}_2\times\overline{r}_2$$

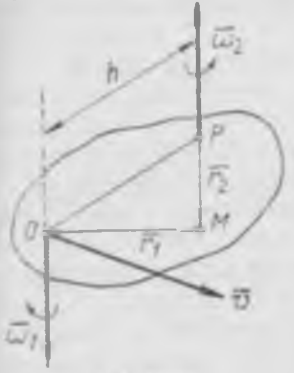
бунда $\overline{\omega}_2 = -\overline{\omega}_1$, $\overline{r}_1 - \overline{r}_2 = \overline{OP}$ бўлганидан

$$\overline{v}_M = \overline{v} = \overline{\omega}_1\times(\overline{r}_1 - \overline{r}_2) = \overline{\omega}_1\times\overline{QP} \tag{15.12}$$

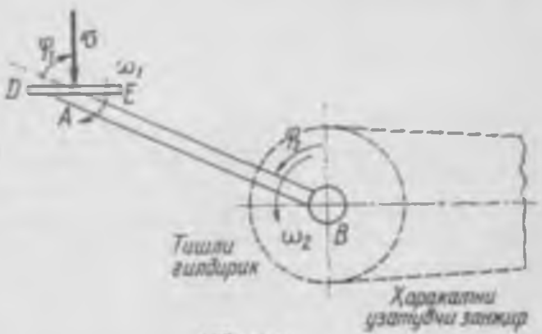
келиб чиқади. (15.12) тенгликдан кўрамизки, M нуқтанинг тезлиги унинг ҳолатига боғлиқ бўлмайди. $\overline{QP}$ ва $\overline{\omega}_1$ жисмнинг ҳамма нуқталари учун умумий бўлганидан $\overline{v}$ тезлик ҳам жисмнинг ҳамма нуқталари учун бир хил бўлади, яъни жуфт айланишдаги жисм ҳар онда илгариланма ҳаракатда бўлади. Илгариланма ҳаракат тезлиги $\overline{v}$ жуфт айланиш векторлари ($\overline{\omega}_1$, $\overline{\omega}_2$) ётган текисликка перпендикуляр йўналади; унинг мусбат йўналишидан қараганимизда, жуфт айланиш бурчак тезликлари векторларининг йўналиши соат милининг айланишига тескари йўналишда бўлишини кўришимиз мумкин. Тезликнинг сон қиймати $v = \omega_1\cdot h$, бунда h — айланиш ўқлари орасидаги энг қисқа масофа бўлиб, у *жуфт айланиш елкаси* дейилади. $\overline{v}$ вектор *жуфт айланиш моменти* дейилади.

Шундай қилиб, қуйидаги натижага келамиз. *Жуфт айланиш жуфт айланиш текислигига перпендикуляр йўналишда бўлган оний илгариланма ҳаракатга эквивалент бўлиб, илгариланма ҳаракат тезлигининг катталиги жуфт айланиш моментига тенг.* Аксинча, қаттиқ жисмнинг илгариланма ҳаракат тезлигини, шу тезлик векторига перпендикуляр текисликда жойлашган, моменти $v = \omega\cdot h$ га тенг ($\overline{\omega}_1$, $\overline{\omega}_2$) оний жуфт айланиш билан алмаштириш мумкин (154-расм).

Жуфт айланишга велосипед DE педалининг рамага нисбатан ҳаракати мисол бўла олади. Велосипеднинг AB кривошипи B нуқтадан ўтган ўқ атрофида тўла бир марта айланганда, унинг DE педали ҳам A нуқта атрофида тескари томонга тўла бир марта айланади (155-



154- расм.



155- расм.

расм). Демак, ҳар онда педалнинг AB кривошипга нисбатан φ_1 айланиш бурчаги AB нинг рамага нисбатан φ_2 айланиш бурчагига тенг, шунинг учун $\bar{\omega}_1 = -\bar{\omega}_2$. Натижада бу икки айланиш A ва B нуқталардан ўтган ўқлар атрофидаги жуфт айланишдан иборат бўлиб, педаль эса миқдори $v = AB\cdot\omega_1$ бўлган тезлик билан илгарнланма ҳаракат қилади.

88- §. Жисмнинг параллел ўқлар атрофидаги ҳаракатларини қўшишга доир масалалар

Қаттиқ жисмнинг параллел ўқлар атрофидаги айланма ҳаракатларини қўшишга мисол тариқасида ҳаракатни узатувчи механизмларни кўрсатиш мумкин. Ҳаракатни тасмалар ёрдамида ёки тишли ғилдираклар (шестернялар) воситасида узатиш мумкин. Тишли узатмалар ҳаракатининг турига қараб, оддий, планетар ва дифференциал узатмаларга бўлинади.

Валларининг ҳаммаси қўзғалмайдиган подшипникларда айланадиган тишли ғилдираклар бир-бири билан илашган бўлса, уларнинг шу тариқа илашиши *оддий узатма* дейилади (156 — 158-расмлар). Одатда бундай узатмада валлардан бири етакчи, қолганлари етакланувчи деб ҳисобланади.

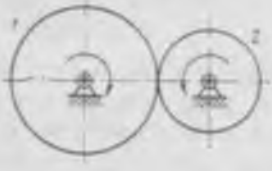
Оддий узатмада ғилдираклар бир-бирига нисбатан силжимайди. Шу сабабли ғилдираклар тегиб турган нуқтада қуйидаги муносабат ўринли бўлади:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm\frac{r_2}{r_1} = \pm\frac{z_2}{z_1}, \qquad (15.13)$$

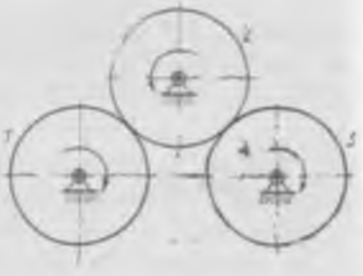
бунда: ω_1 ва ω_2 — тишли ғилдиракларнинг бурчак тезлиги; z_1 ва z_2 — ғилдираклар тишларининг сони; r_1 ва r_2 — ғилдираклар радиуслари. Ғилдираклар ташқаридан илашган бўлса, бу формулада манфий ишора, ичкаридан илашган бўлса, мусбат ишора олинади.

Узатмадаги 1-тишли ғилдирак қўзғалмас бўлиб, кетма-кет илашган, қолганлари мазкур қўзғалмас ғилдирак ўқи атрофида айланадиган AB кривошипга ўрнатилган бўлса, бундай узатма *планетар узатма* дейилади (159-расм).

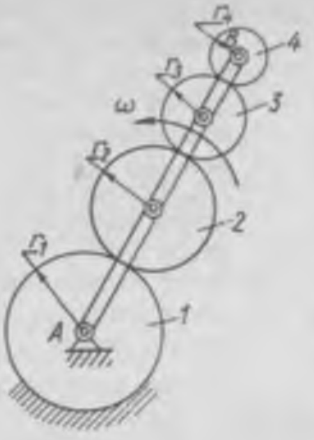
156- расм.



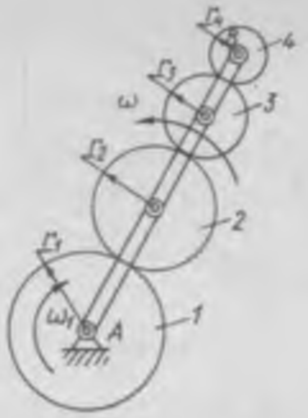
157- расм.



158-расм.



159- расм.



160- расм.

Агар планетар узатмада 1-тишли ғилдирак ҳам *AB* кривошип айланадиган ўқ атрофида айланадиган бўлса, бундай узатма *дифференциал узатма* дейилади (160-расм).

Планетар ёки дифференциал узатма бўғинларининг кинематик хусусиятлари қуйидаги усуллар ёрдамида ҳисобланади.

1. Бурчак тезлик векторларини қўшиш усули. Айланиш ўқлари параллел ўқлардан иборат бўлганда абсолют ҳаракат бурчак тезлиги (15.5) ёки (15.10) формула ёрдамида аниқланади.

2. Тезликларининг оний марказидан фойдаланиш усули. Масалада тезликларнинг оний марказини аниқлаш мумкин бўлса, бўғиннинг абсолют бурчак тезлиги $\omega_a = \frac{v_a}{r}$ формуладан топилади.

Нисбий бурчак тезликнинг катталигини (15.5) ёки (15.10) га асосан бундай ёзиш мумкин:

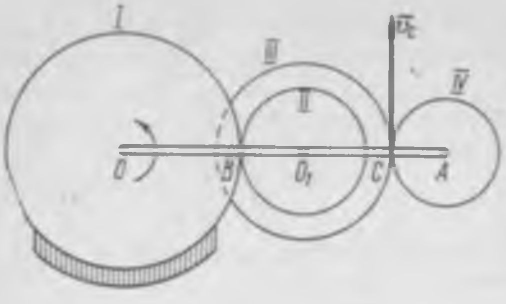
$$\omega_2 = \omega_a - \omega_1,$$

бу ерда: ω_2 — нисбий ҳаракат бурчак тезлиги; ω_a — абсолют ҳаракат бурчак тезлиги; ω_1 — кўчирма ҳаракат бурчак тезлиги.

3. Виллис усули ёки «тўхтатиш усули». Бу усулда дифференциал ёки планетар узатма оддий узатмага келтирилади ва унга мос кинематик нисбатлардан фойдаланилади. *«Тўхтатиш усули»* ни масалаларга қўллаб баён қиламиз.

30-масала. Тишлари сони z_1 бўлган I қўзғалмас шестернянинг *O* ўқи атрофида ω_0 ўзгармас бурчак тезлик билан айланадиган *OA* кривошипдаги ўқларга тишларининг сони z_2, z_3 бўлган II ва III жуфт шестернялар ҳамда тишларининг сони z_4 бўлган IV шестерня ўтқазилган. IV шестернянинг абсолют бурчак тезлиги топилсин (161-расм).

Ечиш. 1. Масалани «Тўхтатиш усули» билан ечиш учун бутун системага фикран бурчак тезлиги кривошипнинг бурчак тезлигига



161- расм.

тенг, лекин тескари томонга йўналган, яъни бурчак тезлиги — ω_0 бўлган кўчирма ҳаракат берамиз. У ҳолда *OA* кривошип тўхтайди ва оддий узатмага эга бўламиз. *OA* тўхтагандан кейин (15.5) формулага асосан кўзғалмас ғилдиракнинг бурчак тезлиги — ω_0 га, II ва III жуфт ғилдиракларнинг бурчак тезлиги $\omega_{2,3}$ — ω_0га тенг бўлади (бунда $\omega_{2,3}$ —мазкур ғилдиракларнинг тўхтагунча бўлган бурчак тезлиги), IV ғилдиракнинг бурчак тезлиги $\omega_4 - \omega_0$ (бунда ω_4 — IV ғилдиракнинг тўхтагунча бўлган бурчак тезлиги) бўлади. Ғилдиракнинг бурчак тезликларини қуйидаги жадвалга ёзамиз:

	Кривошип	Тишли ғилдираклар		
		1	2,3	4
Тўхтагунча бўлган бурчак тезлиги	ω_0	0	$\omega_{2,3}$	ω_4
Тўхтагандан кейинги бурчак тезлиги	0	$-\omega_0$	$\omega_{2,3}-\omega_0$	$\omega_4-\omega_0$
Илашиш тури	—	ташқи		ташқи

I ва II ғилдираклар ҳамда III ва IV ғилдираклар ташқи илашганини эътиборга олиб, (15.13) формулага асосан қуйидаги тенгликларни оламиз:

$$\frac{-\omega_0}{\omega_{2,3}-\omega_0} = -\frac{z_2}{z_1}, \quad \frac{\omega_{2,3}-\omega_0}{\omega_4-\omega_0} = -\frac{z_4}{z_3},$$

бундан

$$-\frac{\omega_0}{\omega_4-\omega_0} = \frac{z_2 \cdot z_4}{z_1 \cdot z_3}$$

ёки

$$\omega_4 = \omega_0\left(1 - \frac{z_1 \cdot z_3}{z_2 \cdot z_4}\right).$$

Охирги формула ёрдамида IV ғилдирак бурчак тезлигининг миқдори ва йўналиши аниқланади.

2. Масалани бурчак тезликларни қўшиш усулида ечиш учун I, II, III, IV ғилдираклар абсолют бурчак тезликларининг алгебраик қийматини мос равишда ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 билан белгилаймиз. Мазкур ғилдиракларнинг *OA* кривошипга нисбатан айланма ҳаракати нисбий ҳара-

кат бўлади. Нисбий ҳаракат бурчак тезликларини ω_{1r}, ω_{2r}, ω_{3r}, ω_{4r} билан белгиласак, (15.10) га асосан

$$\omega_{1r}=\omega_1-\omega_0, \qquad \omega_{2r}=\omega_2-\omega_0,$$
$$\omega_{3r}=\omega_3-\omega_0, \qquad \omega_{4r}=\omega_4-\omega_0,$$

бунда ω_0 — кривошипнинг бурчак тезлиги бўлиб, кўчирма ҳаракат бурчак тезлигини ифодалайди.

I ва II шестернялар ҳамда III ва IV шестернялар ташқи илашганини эътиборга олсак (15.13) га асосан

$$\frac{\omega_{1r}}{\omega_{2r}}=-\frac{z_2}{z_1}, \quad \frac{\omega_{3r}}{\omega_{4r}}=-\frac{z_4}{z_3}$$

тенгликлар ўринли бўлади. Бу иккита тенгликни ўзаро кўпайтириб, ω_{1r}, ω_{2r}, ω_{3r}, ω_{4r} ларнинг юқоридаги қийматларини қўйсак ҳамда $\omega_1=0$, $\omega_2=\omega_3$ (чунки II ва III ғилдираклар битта ўққа ўтқазилган бириктирилган жуфт шестернялар) эканлигини эътиборга олсак, $\frac{-\omega_0}{\omega_4-\omega_0}=\frac{z_2\cdot z_4}{z_1\cdot z_3}$, бундан $\omega_4=\omega_0\left(1-\frac{z_1\cdot z_3}{z_2\cdot z_4}\right)$ келиб чиқади.

3. Масалани тезликларнинг оний марказини аниқлаш усули билан ечамиз. II шестерня қўзғалмас бўлган *I* шестерня билан *B* нуқтада илашади. Шу сабабли *II* шестерня *B* нуқтасининг тезлиги нолга тенг бўлади. Бундан кўрамизки, *II* ва *III* жуфт шестерняларнинг айланиш оний ўқи *B* нуқтадан ўтади. Натижада қуйидаги тенгликни оламиз:

$$\frac{\omega_{2r}}{\omega_0}=\frac{z_1}{z_2}.$$

$\omega_{2r}=\omega_{3r}$ бўлгани учун

$$\frac{\omega_{3r}}{\omega_0}=\frac{z_1}{z_2}, \text{ бундан } \omega_{3r}=\omega_0\frac{z_1}{z_2}.$$

OA кривошип соат милининг айланишига тескари йўналишда айланганлиги туфайли *III* ғилдиракнинг *C* нуқтаси оний марказ *B* нуқта атрофида соат милининг айланишига тескари йўналишда айланади, унинг тезлиги $\bar{v}_C$ *OC* га перпендикуляр йўналади[*]; модули эса қуйидагига тенг бўлади: $v_C=r_3\cdot\omega_{3r}$; бунда r_3 билан *III* ғилдиракнинг радиуси белгиланган. Иккинчи томондан, *C* нуқта *IV* шестерняга тааллуқли бўлиб, унинг тезлиги $|\omega_{4r}|\cdot r_4$ га тенг; бунда r_4 билан *IV* ғилдиракнинг радиуси белгиланган; $|\omega_{4r}|$ эса *IV* ғилдирак нисбий бурчак тезлигининг абсолют қийматини ифодалайди. Шундай қилиб, $|\omega_{4r}|\cdot r_4=r_3\,\omega_{3r}$ тенгликни оламиз, бундан $|\omega_{4r}|=\frac{r_3}{r_4}\,\omega_{3r}=$ $=\frac{z_3\cdot z_1}{z_4\cdot z_2}\,\omega_0\cdot\bar{v}_C$ векторнинг йўналишидан кўрамизки, *IV* шестерня *A* атрофида соат милининг айланиш йўналишида айланади. Шу сабабли

---

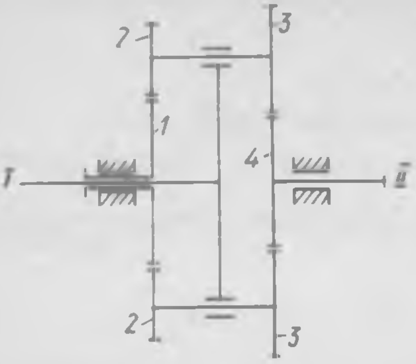
[*] Соат милининг айланишига тескари йўналишдаги айланма ҳаракатнинг бурчак тезлигини мусбат деб қараймиз.

$\omega_{4r} = -\frac{z_1 z_3}{z_2 z_4}\omega_0$ бўлади. *IV* шестернянинг абсолют бурчак тезлиги (15.5) га асосан

$$\omega_4 = \omega_0 + \omega_{4r} = \left(1 - \frac{z_1 \cdot z_3}{z_2 \cdot z_4}\right)\omega_0$$

формуладан аниқланади.

«Тўхтатиш усули» билан яна қуйидаги масалани ечамиз.



162- расм.

31- масала. Дифференциал механизмли редуктор етакланувчи валининг бурчак тезлиги ω_{II} топилсин; узатманинг бир-бирига бириктирилган шестернялар ўтказилган етакчи (кривошипли) вали $\omega_I = 120\ \text{с}^{-1}$, ғилдирак *1* $\omega_1 = 180\ \text{с}^{-1}$ бурчак тезлик билан айланади. Ғилдиракларнинг тишлари сони мос равишда $z_2 = 20$, $z_3 = 40$, $z_4 = 60$; ғилдирак *1* билан етакчи валнинг айланиш йўналиши бир хил (162-расм).

Ечиш. Редукторнинг ҳамма бўғинларига (шестернялар *1*, *2*, *3*, *4* га ва кривошипга) сон қиймати кривошипнинг бурчак тезлиги ω_1 га тенг, аммо унга қарама-қарши йўналган бурчак тезлик берамиз. Шу тарзда дифференциал узатмани оддий узатмага айлантирамиз ва мос бурчак тезликларни қуйидаги жадвалга ёзамиз:

	Етакчи вал *I*	Тишли ғилдираклар		
		1	*2, 3*	*4, II*
Тўхтагунча бурчак тезлиги	ω_I	ω_1	$\omega_{2,3}$	ω_{II}
Тўхтагандан кейинги бурчак тезлиги	0	$\omega_1 - \omega_I$	$\omega_{2,3} - \omega_I$	$\omega_{II} - \omega_I$
Илашиш тури	—	ташқи		ташқи

Кривошипнинг бурчак тезлиги ω_I билан шестерня *1* нинг бурчак тезлиги бир хил йўналгани учун улар бир хил ишора билан олинган.

Кривошип фикран тўхтатилгандан кейин шестернялар бурчак тезликларининг нисбатини (15.13) формулага асосан тишлар сони орқали ифодалаймиз:

$$\frac{\omega_{2,3} - \omega_I}{\omega_1 - \omega_I} = -\frac{z_1}{z_2}, \quad \frac{\omega_{II} - \omega_I}{\omega_{2,3} - \omega_I} = -\frac{z_3}{z_4},$$

буларда илашиш тури ташқи бўлгани учун тишлар сони нисбати олдида минус ишора олинган. Олинган тенгликларни ўзаро кўпайтирсак,

$$\frac{\omega_{II}-\omega_I}{\omega_1-\omega_I} = \frac{z_1\cdot z_3}{z_2\cdot z_4}$$

бўлади. Бу тенгликдан номаълум бурчак тезлик ω_{II} ни аниқлаймиз:

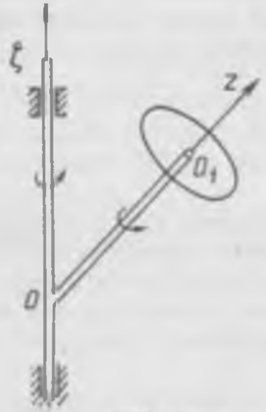
$$\omega_{II} = \omega_I + (\omega_1 - \omega_I)\cdot\frac{z_1\cdot z_3}{z_2\cdot z_4};$$

берилганларга кўра $\omega_{II} = 280\,\frac{1}{c}$; етакланувчи *II* валнинг бурчак тезлиги мусбат ишорали чиқди. Шу сабабли етакланувчи *II* вал етакчи *I* вал билан бир томонга айланади.

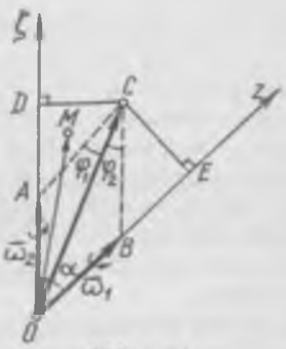
89-§. Жисмнинг кесишувчи ўқлар атрофидаги айланма ҳаракатларини қўшиш

Жисм бир-бири билан *O* нуқтада кесишувчи икки: *Oz* ва *Oζ* ўқлар атрофида айланма ҳаракатда бўлсин. Бундай ҳаракатга мисол тариқасида 163-расмда кўрсатилган дискнинг мураккаб ҳаракатини кўрсатиш мумкин.

Жисм қўзғалувчи *Oz* ўқ атрофида $\overline{\omega}_1$ бурчак тезлик билан нисбий айланишда бўлиб, *Oz* ўқ жисм билан бирга *Oζ* қўзғалмас ўқ атрофида $\overline{\omega}_2$ бурчак тезлик билан кўчирма айланишда бўлсин (164-расм). Шу икки ҳаракатни қўшиб дискнинг мураккаб ҳаракатини аниқлаймиз. Бунинг учун $\overline{\omega}_2$ ни $\overline{OA}$ ва $\overline{\omega}_1$ ни $\overline{OB}$ векторлар билан белгилаб, мазкур векторларни параллелограмм қоидасига асосан қўшамиз. Параллелограмм диагоналининг учидаги *C* нуқтанинг тезлигини аниқлаймиз. *C* нуқтанинг кўчирма ҳаракат тезлиги миқдор жиҳатдан $\omega^2\cdot DC$ га тенг ва кузатувчидан расм текислигига перпендикуляр равишда йўналади, нисбий ҳаракат тезлиги эса $\omega_1\cdot CE$ га тенг бўлиб, расм текислигига перпендикуляр равишда кузатувчи томон йўналади. $\omega_2\cdot DC$ ва $\omega_1\cdot CE$ кўпайтмаларнинг ҳар бири *OACB* параллелограммнинг юзини ифодалайди, шу сабабли бу кўпайтмалар тенг бўлади.



163- расм.



164- расм.

Шундай қилиб, C нуқтанинг нисбий ва кўчирма ҳаракат тезликлари миқдор жиҳатдан тенг, йўналиши бир тўғри чизиқ бўйлаб қарама-қарши томонга йўналади. Тезликларни қўшиш ҳақидаги теоремага асосан C нуқтанинг тезлиги нолга тенг. Жисмнинг O нуқтаси қўзғалмас бўлгани учун бу нуқтанинг тезлиги ҳам нолга тенг. Шундай қилиб берилган онда жисмнинг мураккаб ҳаракатида унинг иккита нуқтасининг абсолют тезлиги нолга тенг бўлиб, бу нуқталардан ўтувчи OC ўқ айланиш оний ўқини ифодалайди.

Жисмнинг OC чизиғида ётмайдиган нуқталари OC атрофида оний айланма ҳаракатда бўлади.

Оний айланиш бурчак тезлиги ω ни ва оний ўқнинг вазиятини аниқлаш учун жисмнинг ихтиёрий M нуқтасининг абсолют тезлигини топамиз. Тезликларни қўшиш теоремасига мувофиқ

$$\bar{v}_M = \bar{v}_e + \bar{v}_r = \bar{\omega}_2 \times \overline{OM} + \bar{\omega}_1 \times \overline{OM},$$

бундан

$$\bar{v}_M = (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2) \times \overline{OM}. \qquad (15.14)$$

Иккинчи томондан, M нуқтанинг тезлиги $\bar{v}_M$ оний ўқ OC атрофида $\bar{\omega}$ бурчак тезлик билан содир бўлади, яъни

$$\bar{v}_M = \bar{\omega} \times \overline{OM}. \qquad (15.15)$$

(15.14) ва (15.15) тенгликларни солиштириб, ушбу тенгликни оламиз:

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2.$$

Оний бурчак тезликнинг модули косинуслар теоремаси асосида топилади:

$$\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\,\omega_1\,\omega_2 \cos\alpha},$$

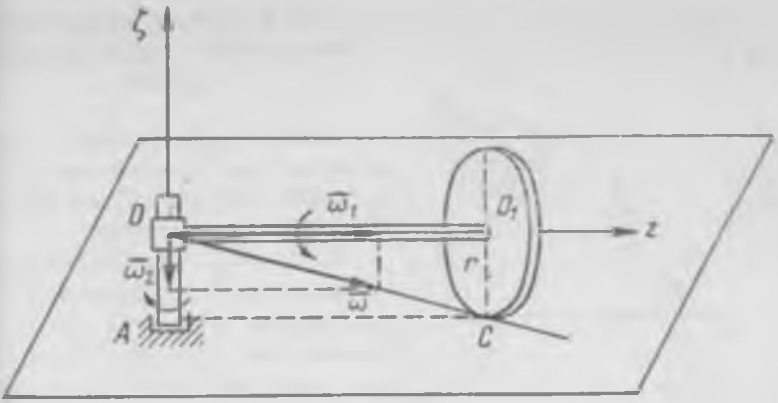
бунда α — Oz ва $O\zeta$ ўқлар орасидаги бурчак. OC оний ўқнинг $\bar{\omega}_1$ ва $\bar{\omega}_2$ лар билан ташкил қилган бурчакларини φ_1 ва φ_2 билан белгиласак, $\triangle OAC$ дан (164-расм) қуйидаги тенгликни оламиз:

$$\frac{\omega_1}{\sin\varphi_2} = \frac{\omega_2}{\sin\varphi_1} = \frac{\omega}{\sin(\pi-\alpha)}.$$

Бу тенгликлардан φ_1 ёки φ_2 ни топиб, оний ўқнинг берилган Oz ва $O\zeta$ ўқларга нисбатан вазияти аниқланади.

Демак, *жисмнинг бир нуқтада кесишувчи ўқлар атрофидаги айланма ҳаракатларини қўшиш натижасида олинган абсолют ҳаракати мазкур нуқтадан ўтувчи ўқ атрофидаги оний айланма ҳаракатдан иборат бўлиб, абсолют ҳаракат бурчак тезлиги нисбий ва кўчирма ҳаракатлар бурчак тезликларининг геометрик йиғиндисига тенг.*

Худди шунингдек, жисм бир нуқтада кесишувчи n та ўқлар атрофида айланма ҳаракатда бўлса, бундай айланма ҳаракатни қўшиш



165- расм.

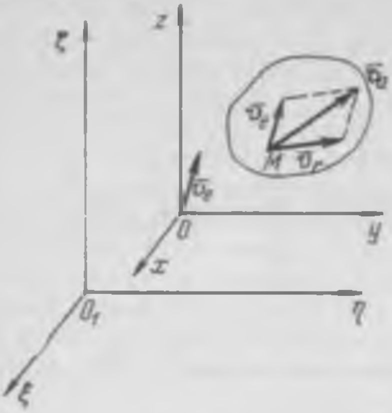
натижасида ҳосил бўладиган оний айланма ҳаракатлар бурчак тезлиги берилган $\bar\omega_1$, $\bar\omega_2$, . . . , $\bar\omega_n$ бурчак тезликларнинг геометрик йиғиндисига тенг бўлади:

$$\bar\omega = \bar\omega_1 + \bar\omega_2 + \ldots + \bar\omega_n = \sum_{k=1}^{n} \bar\omega_k .$$

32- масала. Горизонтал OO_1 ўқ қўзғалмас вертикал $O\zeta$ ўқ атрофида $\bar\omega_2$ бурчак тезлик билан айланганда OO_1 ўққа унинг O_1 нуқтасида подшипник ёрдамида ўрнатилган диск горизонтал текисликда сирпанмасдан думалайди. Дискнинг радиусини r ва $OO_1=l$ деб ҳисоблаб, дискнинг OO_1 атрофидаги нисбий айланиш бурчак тезлиги $\bar\omega_1$ ва абсолют ҳаракат бурчак тезлиги $\bar\omega$ топилсин (165- расм).

Ечиш. Диск қўзғалмас горизонтал текисликда сирпанмасдан думалагани учун дискнинг қўзғалмас текислик билан уринган C нуқтасининг абсолют тезлиги нолга тенг. C ни O нуқта билан туташтирсак, оний ўқ OC ни оламиз. Оний бурчак тезлик $\bar\omega$ оний ўқ бўйлаб, дискнинг нисбий ҳаракат бурчак тезлиги $\bar\omega_1$ OO_1 бўйлаб йўналади. $\bar\omega_2$ ва $\bar\omega_1$ ларга қурилган параллелограмм тўғри тўртбурчакдан иборат бўлади. Шаклдаги учбурчакларнинг ўхшашлигидан $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{OO_1}{O_1C} = \frac{l}{r}$, бундан $\omega_1 = \frac{l}{r}\ \omega_2$.

Абсолют ҳаракатнинг бурчак тезлиги $\bar\omega = \bar\omega_1 + \bar\omega_2$ бўлади; унинг сон қиймати $\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$ ёки ω_1 нинг қийматини ҳисобга олсак, $\omega = \sqrt{\left(\frac{l}{r}\cdot\omega_2\right)^2 + \omega_2^2} = \frac{\omega_2}{r}\sqrt{l^2 + r^2}$ бўлади.



166- расм.

90-§. Қаттиқ жисмнинг илгариланма ҳаракатларини қўшиш

Нисбий ҳаракати ҳам, кўчирма ҳаракатн ҳам илгариланма ҳаракатдан иборат бўлган қаттиқ жисмнинг ҳаракатларини қўшамиз.

Жисм $Oxyz$ қўзғалувчи системага нисбатан $\bar{v}_1$ нисбий тезлик билан илгариланма ҳаракатда бўлиб, $Oxyz$ система эса қўзғалмас $O_1\xi\eta\zeta$ системага нисбатан $\bar{v}_2$ кўчирма тезлик билан илгариланма ҳаракатда бўлсин (166-расм). Бу ҳолда қаттиқ жисм ихтиёрий M нуқтасининг абсолют тезлиги нисбий ва кўчирма тезликларнинг геометрик йиғиндисига тенг бўлади: $\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_e$.

Жисмнинг нисбий ва кўчирма ҳаракатлари илгариланма бўлганидан унинг ҳамма нуқталари учун $\bar{v}_1 = \bar{v}_r$ ва $\bar{v}_2 = \bar{v}_e$. Бу ҳолда жисм ҳамма нуқталарининг абсолют тезлиги бир хил бўлади: $\bar{v}_a = \bar{v}_1 + \bar{v}_2$.

Шундай қилиб, *жисмнинг кўчирма ва нисбий ҳаракатлари илгариланма ҳаракат бўлганда уларни қўшиш натижасида ҳосил бўлган абсолют ҳаракат илгариланма ҳаракат бўлиб, унинг тезлиги кўчирма ва нисбий ҳаракатлар тезликларининг геометрик йиғиндисига тенг.*

91-§. Винт ҳаракати

Жисм қўзғалмас Oz ўқ атрофида $\bar{\omega}$ бурчак тезлик билан айланиб кўчирма ҳаракатда ҳамда z ўқ бўйлаб $\bar{v}$ тезлик билан нисбий илгариланма ҳаракатда бўлсин. Жисмнинг бундай ҳаракати *винт ҳаракати* дейилади (167-расм).

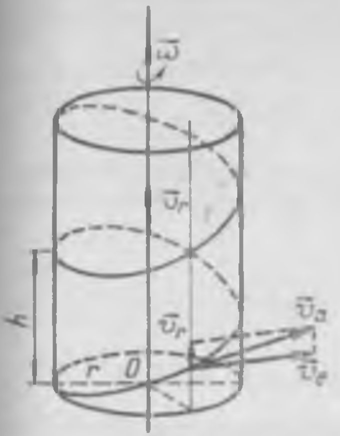
167- расм.

Агар айланма (кўчирма) ҳаракатнинг бурчак тезлиги $\bar{\omega}$ билан илгариланма ҳаракат тезлиги $\bar{v}$ ўқ бўйлаб бир томонга йўналса, бундай ҳаракат *ўнг винт ҳаракати* дейилади. Агар $\bar{\omega}$ билан $\bar{v}$ қарама-қарши йўналса, *чап винт ҳаракати* дейилади.

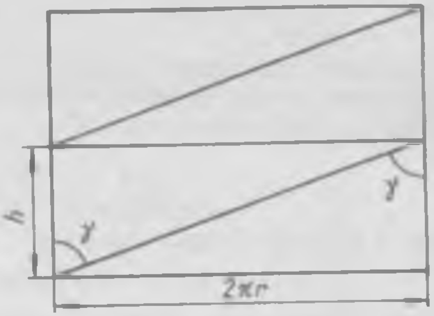
Нисбий тезлик $\bar{v}$ нинг кўчирма ҳаракат бурчак тезлиги $\bar{\omega}$ га нисбатига тенг катталик *винт параметри* дейилади ва у p билан белгиланади:

$$p = \frac{v}{\omega}. \tag{15.16}$$

Агар жисмнинг ўқ атрофида айланиш бурчагини φ билан, айланиш ўқи бўйлаб кўчишини s билан белгиласак,



168- расм.



169- расм.

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt},\ v = \frac{ds}{d\varphi}$$

бўлади. Бу ҳолда

$$p = \frac{ds}{d\varphi}. \tag{15.17}$$

Агар винт параметри p ўзгармас бўлса, (15.17) ни $d\varphi$ га кўпайтириб, 0 дан s гача ва 0 дан φ гача бўлган чегараларда интеграллаcак,

$$\int_0^s ds = \int_0^\varphi p d\varphi$$

ёки

$$s = p\varphi$$

ҳосил бўлади. Бу тенгликдан кўрамизки, айланиш ўқи бўйлаб кўчиш s винт ўқи атрофида айланиш бурчаги φ га мутаносибдир.

Жисм бир марта тўлиқ айланганда $\varphi = 2\pi$ бўлади, бунда жисмнинг ўқ бўйлаб кўчишини $s = h$ десак,

$$h = 2\pi p$$

ёки

$$p = \frac{h}{2\pi}$$

тенгликни оламиз. Жисмнинг винт ўқи атрофида бир марта тўлиқ айланишида унинг винт ўқи бўйлаб кўчиши h *винт қадами* дейилади.

Винт ҳаракатидаги жисмнинг ихтиёрий нуқтасидан айланиш ўқи z гача бўлган масофа доимо ўзгармасдан қолади. Шу сабабли жисмнинг z ўқдан r масофада турган ихтиёрий нуқтасининг траекторияси радиуси r га тенг бўлган цилиндр сиртида ётади (168-расм).

Цилиндр сиртидаги M нуқтанинг v_a абсолют тезлиги тезликларни қўшиш теоремасига мувофиқ аниқланади:

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_e.$$

$\bar{v}_r \perp \bar{v}_e$ бўлгани учун $\bar{v}_a$ нииг модули қуйидаги тенгликдан топилади

$$v_a = \sqrt{v_r^2 + v_e^2} = \omega\sqrt{p^2 + r^2}.$$

Абсолют тезликнинг айланиш ўқи ёки цилиндрнинг ясовчиси билан ташкил этган бурчагини γ билан белгилаб, (15.16) ни эътиборга олсак, $\operatorname{tg}\gamma$ қуйидагига тенг бўлади:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{v_e}{v_r} = \frac{\omega \cdot r}{v} = \frac{r}{p}.$$

Агар $p = \text{const}$ бўлса, у ҳолда

$$\operatorname{tg}\gamma = \text{const}.$$

Демак, r радиусли цилиндр сиртида ҳаракатланувчи M нуқтанинг траекторияси *винт чизиғи* деб аталувчи чизиқдан иборат бўлиб, цилиндр ясовчиларини бир хил бурчак остида кесиб ўтади. Агар цилиндрни ясовчиси бўйлаб кесиб, текисликка ёйсак, бу текисликда винт чизиғи ясовчи билан γ бурчак ташкил этувчи тўғри чизиқдан иборат бўлади (169- расм) ва

$$h = 2\pi r \operatorname{ctg}\gamma$$

формула ҳосил бўлади.

ДИНАМИКА

XVI боб

ДИНАМИКАГА КИРИШ

92-§. Динамиканинг асосий тушунчалари

Жисмларнинг механик ҳаракатини уларнинг массасига ва ҳаракатни вужудга келтирувчи кучларга боғлиқ равишда текширадиган назарий механиканинг бўлими *динамика* дейилади.

Статикада таъсир этувчи кучларни ўзгармас деб қараган эдик, бироқ жисм ҳаракатланганда унга ўзгармас кучлардан ташқари, миқдор ва йўналиш жиҳатдан ўзгарадиган кучлар ҳам таъсир этади. Жисмларнинг ўзаро таъсир кучлари вақтга, жисм ҳолатига ва унинг тезлигига маълум муносабатда боғлиқ эканлиги тажрибалардан маълум. Масалан, электровоз реостатини кетма-кет улашда ёки узишда ҳосил бўладиган тортиш кучи вақтга боғлиқ, пружинанинг эластиклик кучи жисмларнинг ҳолатига боғлиқ, суюқлик ёки ҳавонинг қаршилик кучи эса жисмнинг тезлигига боғлиқ бўлади.

Демак, умумий ҳолда жисмга таъсир этувчи кучлар вақтга, жисмнинг ҳолатига ва тезлигига боғлиқ бўлади:

$$\overline{F}=\overline{F}\left(\overline{t}\,,\ \overline{r}\,,\ \overline{v}\right),$$

бунда: t — ҳаракат вақти, $\overline{r}$ — нуқтанинг ҳолатини аниқловчи радиус-вектор ва $\overline{v}$ — нуқта тезлиги. Ўзгарувчан кучларни содда ҳолга, яъни бош вектор ва бош моментга келтириш масаласи худди ўзгармас кучлар сингари бажарилади. Жисмнинг ҳаракати унга қўйилган кучгагина боғлиқ бўлиб қолмай, балки жисмнинг инертлик хусусиятига ҳам боғлиқдир.

Бир кучни икки жисмга айрим-айрим таъсир эттирилса, айнан бир хил вақт ичида жисмлар турли масофаларни босиб ўтиши ва олган тезликлари турлича бўлиши тажрибада аниқланган. Жисмнинг қўйилган кучлар таъсирида ўз тезлигини тез ёки секин ўзгартириш хусусияти *жисмнинг инертлиги* дейилади. Агар бир хил кучлар таъсирида икки жисмдан бирининг тезлиги иккинчисига нисбатан секин ўзгарса, биринчи жисм кўпроқ инертликка эга дейилади.

Жисмнинг инертлигини миқдор жиҳатдан ифодаловчи физик катталик *жисмнинг массаси* дейилади.

Классик механикада жисмнинг массаси ўзгармас, скаляр ва мусбат катталик деб қаралади.

Умумий ҳолда жисмнинг ҳаракати унинг массаси ва қўйилган кучларгагина боғлиқ бўлмай, балки жисм шаклига, аниқроғи, жисмни ташкил этган зарраларнинг жойлашувига (массаларининг тақсимланишига) ҳам боғлиқ бўлади.

Динамикада дастлаб жисмларнинг ўлчамлари ва массаларининг тақсимланишини эътиборга олмаган ҳолда уларнинг ҳаракатини ўрганиш учун моддий нуқта тушунчаси киритилади.

Ҳаракатини ўрганишда ўлчамлари аҳамиятга эга бўлмаган, лекин массага эга бўлган жисм *моддий нуқта* дейилади.

Масалан, Ернинг ўз орбитаси бўйлаб Қуёш атрофидаги ҳаракати ўрганилаётганда, мазкур орбитанинг ўлчамларига нисбатан Ернинг ўлчамлари жуда кичик бўлгани учун Ерни моддий нуқта деб қараш мумкин. Лекин Ернинг ўз ўқи атрофидаги ҳаракатини ҳам эътиборга олиш зарур бўлса, Ерни моддий нуқта деб бўлмайди, чунки Ернинг ўқидан ҳар хил узоқликдаги нуқталари бу ҳаракат вақтида ҳар хил масофани ўтади.

Динамикада жисмнинг ҳаракатини ўрганишни, одатда, унинг айрим нуқтаси ҳаракатини ўрганишдан бошланади. Динамика икки қисмга бўлинади:

1. Моддий нуқта динамикаси.
2. Механик система ва қаттиқ жисм динамикаси.

93- §. ДИНАМИКАНИНГ АСОСИЙ ҚОНУНЛАРИ

Ўрганилаётган механика курси 1687 йилда Ньютон таърифлаган қонунларга асосланган бўлиб, *классик механика* деб аталади. Классик механика қонунлари жисмларнинг тезликлари ёруғлик тезлигидан анча кичик бўлган ҳолда ўринли бўлади.

1-қонун (инерция қонуни). Ташқи таъсирлардан ҳоли бўлган моддий нуқта бирор куч таъсир этмагунча ўзининг тинч ҳолатини ёки тенг ўлчовли тўғри чизиқли ҳаракатини сақлашга интилади.

Шундай қилиб, инерция қонунига кўра $\overline{F} = 0$ бўлса, $\overline{w} = 0$ бўлиб, $\overline{v} = \text{const}$ бўлади; бу ерда: $\overline{v}$ — моддий нуқтанинг тезлик вектори; $\overline{w}$ — тезланиш вектори; $\overline{F}$ — моддий нуқтага таъсир этаётган куч вектори.

1-қонун ўринли бўладиган нуқтанинг ҳаракати инерцион ҳаракат, бу қонуннинг ўзи эса инерция қонуни дейилади.

2-қонун (динамиканинг асосий қонуни). Моддий нуқтанинг куч таъсирида олган тезланиши билан массасининг кўпайтмаси миқдор жиҳатдан шу кучга тенг бўлиб, тезланиши куч билан бир хил йўналишда бўлади (170-расм):

$$m\overline{w} = \overline{F}, \tag{16.1}$$

бу ерда m ўзгармас миқдор бўлиб, берилган моддий нуқтанинг массасини ифодалайди.

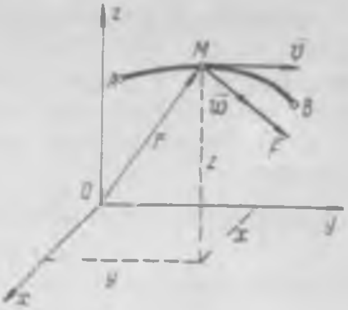
(16.1) тенглама *динамиканинг асосий тенгламаси* дейилади ва *у динамиканинг асосий қонунини* ифодалайди.

Кинематикадан маълумки, $\overline{w} = \frac{d\overline{v}}{dt}$.

Буни эътиборга олиб, (16.1) тенгламани ушбу кўринишда ёзамиз:

$$m\frac{d\overline{v}}{dt} = \overline{F}. \qquad (16.2)$$

Агар $\overline{v} = \mathrm{const}$ бўлса, $\overline{F} = 0$ бўлади. Яъни нуқтага (ёки жисмга) куч таъсир этмаса, нуқта (ёки жисм) инерцион ҳолатда бўлади.



170- расм.

Куч билан нуқта тезланиши бир чизиқ бўйлаб йўналгани учун (16.1) га кўра уларнинг модуллари орасида қуйидаги тенглик ўринли бўлади:

$$mw = F. \qquad (16.3)$$

Бундан

$$w = \frac{F}{m}, \qquad (16.4)$$

яъни, моддий нуқтанинг берилган куч таъсирида олган тезланиши кучга тўғри мутаносиб, нуқта массасига эса тескари мутаносиб бўлади.

Ҳар қандай жисм бўшлиқда оғирлик кучи таъсирида ерга бир хил ўзгармас g тезланиш билан тушиши тажриба ёрдамида аниқланган. Оғирлик кучининг жисмга берадиган бу $g = 9{,}81$ м/с^2 тезланиши *эркин тушиш тезланиши* деб юритилади. (16.3) тенгламага кўра, эркин тушаётган нуқта (ёки жисм) нинг оғирлик кучи

$$P = mg$$

формуладан, массаси эса

$$m = \frac{P}{g} \qquad (16.5)$$

формуладан аниқланади.

Моддий жисмга таъсир этувчи куч манбаи бирор бошқа жисмда бўлади. Аммо бу таъсир бир томонлама бўлмайди. Иккинчи жисмга биринчи жисм ҳам маълум таъсир кўрсатади. Моддий жисмларнинг бундай ўзаро таъсирлари классик механикада қуйидаги қонун билан берилади.

3-қонун (таъсир ва акс таъсирнинг тенглиги қонуни). Иккита моддий нуқта миқдорлари тенг ва шу нуқталарни туташтирувчи тўғри чизиқ бўйлаб қарама-қарши томонга йўналган кучлар билан бир-бирига таъсир этади.

171- расм.

Масалан, A моддий нуқта B нуқтага $\overline{F}_A$ куч билан таъсир этс B нуқта ҳам A нуқтага $\overline{F}_B$ куч билан таъсир қилади. Бунда $\overline{F}_B$ нинг миқдори $\overline{F}_A$ кучга тенг бўлиб, A ва B нуқталардан ўтувч тўғри чизиқ бўйлаб унга тескари йўналади (171-расм). (16.1) га кўр A ва B нуқталар учун динамиканинг иккинчи қонуни қуйидагич ёзилади:

$$\overline{F}_B = m_A \overline{w}_A, \tag{16.6}$$

$$\overline{F}_A = m_B \overline{w}_B, \tag{16.7}$$

3-қонунга кўра

$$\overline{F}_A = -\overline{F}_B \tag{16.8}$$

бўлади, бунда $|\overline{F}_A| = |\overline{F}_B|$.

(16.8) га мувофиқ (16.6) ва (16.7) тенгликлардан ушбу муносабатларни оламиз:

$$m_A \overline{w}_A = -m_B \overline{w}_B; \tag{16.9}$$

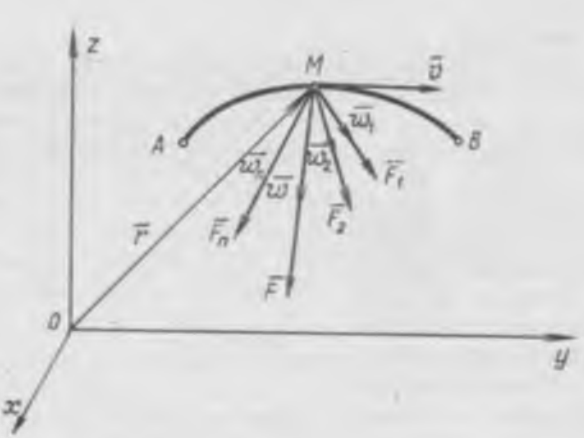
$$\frac{m_A}{m_B} = -\frac{\overline{w}_B}{\overline{w}_A} \tag{16.10}$$

Бундаги минус ишора нуқталарнинг тезланиши қарама-қарши йўналганлигини ифодалайди.

Динамиканинг 3-қонуни статиканинг 1-аксиомасидан тубдан фарқ қилади. Ҳақиқатан ҳам, статиканинг биринчи аксиомаси битта жисмга таъсир этувчи икки кучнинг мувозанати шартини ифодаласа, динамиканинг 3-қонуни иккита жисмнинг ўзаро таъсирини ифодалайди.

4-қонун (кучлар таъсирининг ўзаро мустақиллиги қонуни). Моддий нуқтанинг унга қўйилган бир неча кучлар таъсирида олган тезланиши ҳар бир кучнинг алоҳида таъсирида нуқта оладиган тезланишларнинг геометрик йиғиндисига тенг.

Моддий нуқтага $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, . . . $\overline{F}_n$ кучлар таъсир этаётган бўлсин (172-расм). Ҳар бир куч таъсирида нуқтанинг олган тезланишларини



172- расм.

$\overline{w}_1$, $\overline{w}_2$, . . . $\overline{w}_n$ билан белгилаймиз. У ҳолда 2-қонунга мувофиқ

$$\left.\begin{array}{l} \overline{F}_1 = m\overline{w}_1 \\ \overline{F}_1 = m\overline{w}_2, \\ \cdots\cdots\cdots \\ \overline{F}_n = m\overline{w}_n , \end{array}\right| \qquad (16.11)$$

4-қонунга асосан $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \cdots \overline{F}_n$ кучлар таъсирида нуқтанинг олган тезланиши

$$\overline{w} = \overline{w}_1 + \overline{w}_2 + \cdots + \overline{w}_n \qquad (16.12)$$

бўлади. Буни эътиборга олиб, (16.11) ни қўшиб

$$m\overline{w} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \cdots + \overline{F}_n$$

ёки

$$m\overline{w} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k \qquad (16.13)$$

муносабатни оламиз. (16.13) тенглама бир неча кучлар таъсир этаётган нуқта учун динамиканинг асосий қонунини ифодалайди.

Классик механика қонунлари ўринли бўлган саноқ системаси *инерциал система* дейилади. Бундай системага нисбатан текширилаётган ҳаракат абсолют ҳаракат деб қаралади. Аксарият техника масалаларини ечишда инерциал система сифатида Ер билан бевосита боғланган система олинади. Агар Ернинг суткалик айланиши ҳисобга олинса, инерциал система учун координаталар боши Ернинг марказида ва координата ўқлари учта «қўзғалмас» юлдузларга йўналтирилган система қабул қилинади. Астрономияда инерциал система учун маркази Қуёшда олинган гелиоцентрик система қабул қилинади.

94-§. Механик ўлчов бирликлари системаси

Ҳамма механик катталикларни ўлчаш учун учта асосий ўлчов бирликларни киритиш етарлидир. Булардан иккитаси учун вақт ва узунлик бирликлари олиниши кинематика бўлимидан маълум. Одатда, учинчи ўлчов бирлиги сифатида масса ёки кучнинг ўлчов бирликлари олинади. Аммо масса ва куч орасида динамиканинг асосий қонунига кўра (16.3) тенглик мавжудлигидан уларни ихтиёрий равишда олиб бўлмайди. Шу сабабли механикада бир-биридан фарқ қилувчи икки турдаги бирликлар системаси киритилади.

Биринчи тур бирликлар системаси. Ҳозирги пайтда *халқаро СИ бирликлар системасининг* таркибий қисми бўлган МКС системаси кенг қўлланилади. Бу системада асосий ўлчов бирликлари учун қуйидаги бирликлар олинади: 1) узунлик бирлиги — 1 метр (м); масса бирлиги — 1 килограмм (кг); 3) вақт бирлиги — 1 секунд (с).

Қолган барча механик катталикларнинг бирлиги асосий бирликлардан ҳосилавий бирлик сифатида олинади. Масалан, куч бирлиги учун 1 ньютон (Н) қабул қилинади; (16.3) га кўра 1 Н = 1 кг д/с², яъни 1 кг массага 1 м/с² тезланиш берадиган куч бирлиги 1 ньютонга тенг.

Иккинчи тур бирликлар системаси. Механикада СИ системасидан ташқари, *техник бирликлар системаси* деб аталувчи МКГСС системаси ҳам қўлланилади. Бу системада асосий ўлчов бирликлари учун қуйидаги бирликлар қабул қилинган: 1) узунлик бирлиги — 1 метр (м); 2) куч бирлиги — 1 килограмм-куч (кгк); 3) вақт бирлиги — 1 секунд (с).

Бу бирликлар системасида масса бирлиги учун 1 техник масса бирлиги (т. м. б.) қабул қилинган; (16 3) га кўра

$$1 \text{ т. м. б.} = \frac{1 \text{ кгк}}{1 \text{ м/с}^2}.$$

1 кг массага 1 кгк куч $g = 9{,}81\,\text{м/с}^2$ тезланиш беради; худди шу массага 1 Н катталикдаги куч $1\,\text{м/с}^2$ тезланиш беради. Шу сабабли

$$1 \text{ кгк} = 9{,}81 \text{ Н}$$

ёки

$$1 \text{ Н} = 0{,}102 \text{ кгк}.$$

Бундан ташқари, қуйидаги муносабатлар ўринлидир:

$$1 \text{ кгк} = 1 \text{ т. м. б.} \cdot 1\,\text{м/с}^2,$$
$$1 \text{ кгк} = 1 \text{ кг} \cdot 9{,}81\,\text{м/с}^2.$$

Ҳар қандай масалани ечишда фақат битта бирликлар системасидан фойдаланиш керак.

XII боб

МОДДИЙ НУҚТА ҲАРАКАТИНИНГ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАРИ ВА УЛАРНИ ЕЧИШ

95-§. Моддий нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламалари

Эркин моддий нуқта F куч таъсирида қўзғалмас $Oxyz$ саноқ системасига нисбатан ҳаракатланаётган бўлсин (170-расм). Бу нуқта учун Ньютоннинг иккинчи қонуни қуйидагича ёзилади:

$$m\overline{w} = \overline{F}\cdot \tag{17.1}$$

Агар моддий нуқта бир қанча кучлар таъсирида бўлса, $\overline{F}$ ни шу кучларнинг тенг таъсир этувчиси, яъни $\overline{F} = \sum\limits_{k=1}^{n}\overline{F}_k$ деб қараймиз.

$$\overline{w} = \frac{d\overline{v}}{dt} = \frac{d^2\overline{r}}{dt^2}$$

бўлгани учун (17.1) қуйидагича ёзилади:

$$m\frac{d\overline{v}}{dt} = \overline{F} \tag{17.2}$$

ёки

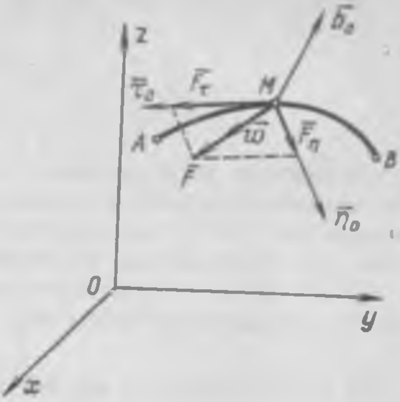
$$m\frac{d^2\overline{r}}{dt^2} = \overline{F}\cdot \tag{17.3}$$

(17.2) ёки (17.3) тенглама *эркин моддий нуқта ҳаракати дифференциал тенгламасининг векторли ифодаси* дейилади.

Динамиканинг асосий қонунини ифодаловчи (17.3) векторли тенгламани Декарт координата ўқларига проекциялайлик (170-расм:)

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= X, \\ m\ddot{y} &= Y, \\ m\ddot{z} &= Z, \end{aligned}\right\} \qquad (17.4)$$

бунда: X, Y, Z — кучнинг координата ўқларидаги проекциялари; $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$ — тезланиш проекциялари.



173- расм.

(17.4) тенгламалар нуқта координаталарига нисбатан иккинчи тартибли дифференциал тенгламалар системасини ташкил этади. Бу тенгламалар *эркин моддий нуқтанинг Декарт координаталаридаги ҳаракат дифференциал тенгламалари* дейилади.

Моддий нуқта ҳаракати дифференциал тенгламаларини табиий координата ўқларида ҳам ифодалаш мумкин.

Нуқтанинг траекториясида у билан биргаликда ҳаракатланувчи, уринма, бош нормаль ва бинормаллардан ташкил топган табиий координата ўқларини ўтказамиз (173-расм). Бу ўқларнинг бирлик векторларини мос равишда $\bar{\tau}^\circ$, $\bar{n}^\circ$, ва $\bar{b}^\circ$, билан белгиласак, тезланиш векторининг табиий координата ўқларидаги ифодаси

$$\bar{w} = \frac{dv}{dt}\bar{\tau}^\circ + \frac{v^2}{\rho}\bar{n}^\circ$$

шаклда ёзилиши кинематикадан маълум.

Кучнинг табиий координата ўқларидаги ифодаси қуйидагича бўлади:

$$\bar{F} = F_\tau \bar{\tau}^\circ + F_n \bar{n}^\circ + F_b \bar{b}^\circ,$$

бу ерда F_τ, F_n, F_b — моддий нуқтага таъсир этувчи кучнинг мос равишда уринма, бош нормаль ва бинормалдаги проекциялари.

Шуларга кўра динамиканинг асосий тенгламаси (17.1) қуйидагича ёзилади:

$$m\frac{dv}{dt}\bar{\tau}^\circ + m\frac{v^2}{\rho}\bar{n}^\circ = F_\tau \bar{\tau}^\circ + F_n \bar{n}^\circ + F_b \bar{b}^\circ.$$

Охирги тенгликнинг икки томонидаги мос бирлик векторлар олдидаги коэффициентларни тенглаб,

$$\left.\begin{aligned} m\frac{dv}{dt} &= F_\tau, \\ m\frac{v^2}{\rho} &= F_n, \\ 0 &= F_b \end{aligned}\right\} \tag{17.5}$$

тенгламаларни ҳосил қиламиз. *Эркин моддий нуқтанинг табиий координата ўқларидаги ҳаракати дифференциал тенгламаларини* ифодаловчи (17.6) тенгламалар *нуқта дифференциал тенгламаларининг Эйлер формасида* берилиши дейилади.

(17.5) да $F_b = 0$ эканлиги моддий нуқтага таъсир этувчи куч эгрилик текислигида ётишини кўрсатади.

96-§. Боғланишдаги моддий нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламалари

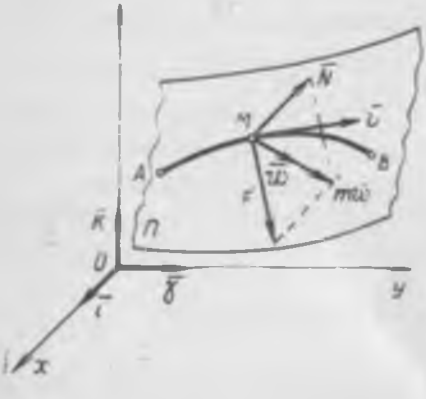
Агар ҳаракатланувчи моддий нуқтага бирор боғланиш қўйилган бўлса, дифференциал тенгламаларни тузишда, боғланишдан бўшатиш ҳақидаги аксиомага кўра, реакция кучини ҳам таъсир этувчи кучлар қаторига қўшиб олинади.

Масалан, *M* моддий нуқта *П* силлиқ сирт устида $\overline{F}$ куч таъсирида ҳаракатланаётган бўлса, у ҳолда *П* сирт моддий нуқта учун боғланиш вазифасини ўтайди (174- расм). Сирт силлиқ бўлганидан боғланиш реакция кучи $\overline{N}$ ни ҳаракати кузатилаётган $\overline{M}$ нуқтада сиртга ўтказилган нормаль бўйлаб йўналтирамиз. Натижада боғланишдаги нуқта $\overline{F}$ ва $\overline{N}$ кучлар таъсиридаги эркин нуқта деб қаралади. Бундай нуқта учун Ньютоннинг иккинчи қонунини қўллаймиз:

$$m\overline{w} = \overline{F} + \overline{N}. \tag{17.6}$$

(17.6) тенглама *боғланишдаги нуқта ҳаракати дифференциал тенгламасининг векторли ифодаси* дейилади.

(17.6) ни Декарт координата ўқларига проекциялаб, шу ўқларга нисбатан ҳаракат дифференциал тенгламаларини ҳосил қиламиз:

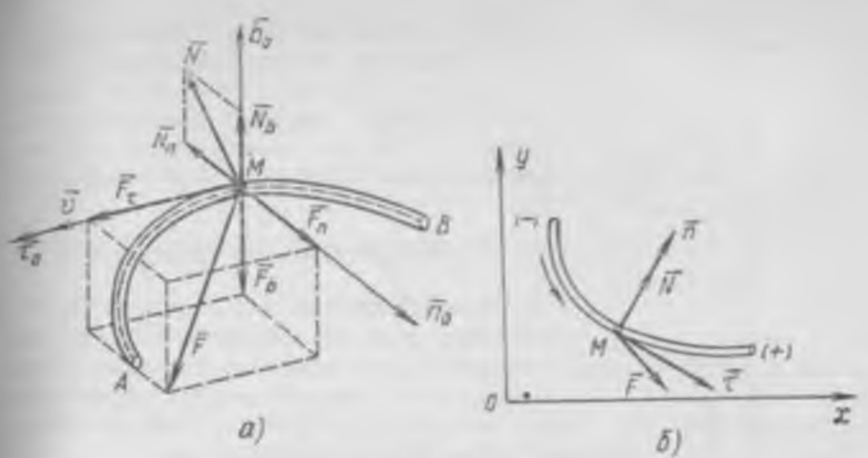


174- расм.

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= X + N_x, \\ m\ddot{y} &= Y + N_y, \\ m\ddot{z} &= Z + N_z, \end{aligned} \tag{17.7}$$

бунда N_x, N_y^1, N_z — реакция кучининг координата ўқларидаги проекциялари.

Агар моддий нуқта силлиқ бўлмаган сирт устида ҳаракатланса, нормал реакция кучидан ташқари, сиртга уринма бўйича йўналган ва



175- расм.

Кулон қонунига кўра аниқланувчи ишқаланиш кучини ҳам қўшиш керак.

Агар моддий нуқта $\bar{F}$ куч таъсирида қўзғалмас силлиқ эгри чизиқ бўйича ҳаракатланса (масалан, шарча найча ичида ҳаракатланса), бу чизиқнинг нормал реакция кучини $\bar{N}$ билан белгилаб, нуқтанинг табиий координата ўқларидаги ҳаракати дифференциал тенгламаларини қуйидагича ёзиш мумкин (175-расм, *a*):

$$\left.\begin{aligned} m\frac{dv}{dt} &= F_\tau, \\ m\frac{v^2}{\rho} &= F_n + N_n, \\ 0 &= F_b + N_b. \end{aligned}\right\} \qquad (17.8)$$

Агар берилган эгри чизиқ бир текисликда ётса (175-расм, *б*), бу текислик учун эгрилик текислиги олинади, у ҳолда (17.8)

$$\left.\begin{aligned} m\frac{dv}{dt} &= F_\tau, \\ m\frac{v_2}{\rho} &= F_n + N, \end{aligned}\right\} \qquad (17.8')$$

ёки

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2s}{dt^2} &= F_\tau, \\ m\frac{v^2}{\nu} &= F_n + N \end{aligned}\right\} \qquad (17.9)$$

кўринишда ёзилади.

176- расм.

(17.9) тенгламаларнинг биринчисида боғланиш реакция кучи қатнашмаганлигидан бу тенглама нуқтанинг берилган эгри чизиқ бўйлаб ҳаракати қонунини аниқлашга имкон беради; (17.9) нинг иккинчисидан фойдаланиб боғланиш реакция кучи N топилади.

97- §. Математик тебрангич

Чўзилмайдиган ва оғирлиги ҳисобга олинмайдиган ипга осилган ҳамда оғирлик кучи таъсирида бирор вертикал текисликда ҳаракатланадиган моддий нуқта *математик тебрангич* дейилади. Бунда моддий нуқта сифатида ўлчамлари ипнинг l узунлигига нисбатан анча кичик бўлган жисм олинади.

M нуқтага оғирлик кучи $\overline{P}$ ва ипнинг таранглик кучи $\overline{T}$ таъсир этади (176-расм). Табрангичнинг вертикалдан оғиш бурчагини φ билан белгилаймиз. Тебрангичнинг вертикал текисликдаги ҳаракатини текшириш учун (17.8′) нинг биринчи тенгламасини тузамиз. Бунда

$$v = l\dot{\varphi}\,,\ F_{\tau} = -mg\sin\varphi$$

бўлишини эътиборга олсак,

$$ml\ddot{\varphi} = -mg\sin\varphi$$

ёки

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0 \qquad (1)$$

(1) тенглама чизиқсиз дифференциал тенгламадан иборат бўлиб, унинг ечимини элементар функциялар орқали ифодалаб бўлмайди.

Математик тебрангичнинг кичик тебранма ҳаракатини текширамиз ва (1) да φ бурчак кичик бўлганидан $\sin\varphi \approx \varphi$ деб қараймиз. У ҳолда *математик тебрангичнинг кичик тебранма ҳаракати тенгламаси* қуйидагича ёзилади:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0. \qquad (2)$$

Бунда

$$k^2 = \frac{g}{l}$$

белгилаш киритиб, тенгламани

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0 \qquad (3)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Чизиқли, ўзгармас коэффициентли ва бир жинсли (3) тенгламани интеграллаш учун унга мос тенгламани тузамиз:

$$\lambda^2 + k^2 = 0.$$

Бу тенгламанинг илдизлари

$$\lambda_1 = +ik,$$
$$\lambda_2 = -ik.$$

Шунга кўра (3) дифференциал тенгламанинг умумий ечими

$$\varphi = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt \tag{4}$$

кўринишда бўлади. Бундаги интеграллаш доимийлари C_1 ва C_2 ни

$$t = 0 \text{ да } \quad \varphi = \varphi_0, \quad \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0. \tag{5}$$

бошланғич шартларга кўра аниқлаймиз.

(4) дан вақт бўйича ҳосила олиб, тебрангичнинг O нуқта атрофида айланишдаги бурчак тезлигини топамиз:

$$\dot{\varphi} = -kC_1 \sin kt + kC_2 \cos kt. \tag{6}$$

(5) ни (4) ва (6) га қўйиб, C_1 ва C_2 ни аниқлаймиз:

$$C_1 = \varphi_0, \quad C_2 = \frac{\dot{\varphi}_0}{k}.$$

C_1 ва C_2 ларнинг қийматларини (4) га қўйиб, математик тебрангичнинг кичик тебранишлари қонунини аниқлаймиз:

$$\varphi = \varphi_0 \cos kt + \frac{\dot{\varphi}_0}{k} \sin kt. \tag{7}$$

(4) да C_1 ва C_2 лар ўрнига

$$C_1 = a \sin\alpha, \quad C_2 = a \cos\alpha,$$

янги ўзгармас a ва α ларни киритиб, математик тебрангичнинг кичик тебранишлар ҳаракат қонунини

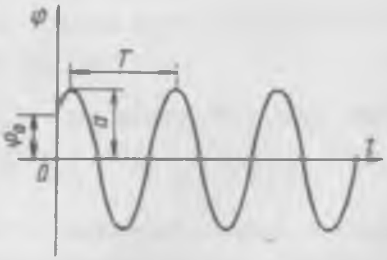
$$\varphi = a \sin(kt + \alpha) \tag{8}$$

кўринишда ёзиш мумкин (177-расм). Бунда: a — кичик тебранишлар амплитудаси (радианда ўлчанади); α — бошланғич фаза; k — тебранишлар частотаси. a ва α лар бошланғич шартлар орқали қуйидагича аниқланади:

$$\left.\begin{aligned} a &= \sqrt{\varphi_0^2 + \frac{\dot{\varphi}_0^2}{k^2}}, \\ \alpha &= \operatorname{arc\,tg} \frac{\varphi_0 k}{\dot{\varphi}_0}, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

(8) тенглама *нуқтанинг гармоник тебранма ҳаракати тенгламасини ифодалайди.*

Математик тебрангичнинг кичик тебранишлар даври



177- расм.

$$T = \frac{2\pi}{k}$$

ёки

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{10}$$

формуладан аниқланади.

(10) дан кўрамизки, математик тебрангичнинг кичик тебранишлар даври ҳаракатнинг бошланғич шартларига боғлиқ бўлмай, асосан, тебрангичнинг l узунлигига боғлиқ бўлади.

98-§. Моддий нуқта динамикасининг икки асосий масаласи

Моддий нуқта динамикасининг асосий қонунини ифодаловчи (17.1) тенглик ёрдамида нуқтага таъсир этувчи куч билан нуқтанинг тезланиши орасидаги муносабат аниқланади. Бу қонундан фойдаланиб нуқта динамикасининг қуйидаги икки асосий масаласи ечилади.

Моддий нуқта динамикасининг биринчи асосий масаласида нуқтанинг массаси ва ҳаракат қонунига кўра ҳар онда бу ҳаракатни вужудга келтирувчи кучни топиш ўрганилади.

Нуқтага таъсир этувчи кучни топишда, нуқтанинг ҳаракат қонуни қандай усулда берилишига қараб, юқорида чиқарилган дифференциал тенгламаларнинг векторли (17.1), Декарт координата ўқларидаги (17.4) ёки табиий координата ўқларидаги (17.8) ифодаларининг биридан фойдаланилади. Ҳар қайси усулда ҳам масалани ечиш ҳаракат қонунидан нуқтанинг тезланишини топишга келтирилади.

Масалан, массаси m га тенг моддий нуқтанинг ҳаракат тенгламалари Декарт координаталарида берилган бўлсин:

$$x = f_1(t); \qquad y = f_2(t); \qquad z = f_3(t). \tag{17.10}$$

У ҳолда ҳаракатни вужудга келтирувчи кучнинг координата ўқларидаги проекцияларини аниқлаш учун (17.10) ҳаракат тенгламаларидан вақт бўйича икки марта ҳосила олиб, (17.4) га қўямиз:

$$X = m f_1''(t);$$
$$Y = m f_2''(t);$$
$$Z = m f_3''(t).$$

Проекцияларига кўра кучнинг модули

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}, \tag{17.11}$$

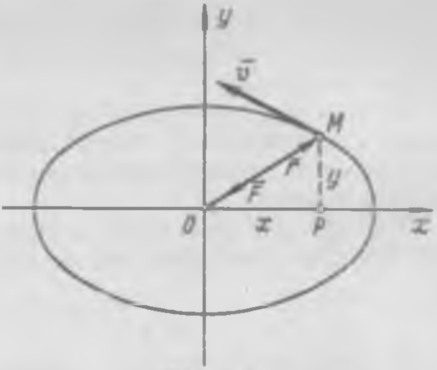
формуладан, йўналиши эса

$$\cos(\widehat{\overline{F}, \overline{x}}) = \frac{X}{F}; \ \cos(\widehat{\overline{F}, \overline{y}}) = \frac{Y}{F}; \ \cos(\widehat{\overline{F}, \overline{z}}) = \frac{Z}{F}. \tag{17.12}$$

формулалардан аниқланади.

Мисол учун, массаси m га тенг бўлган M моддий нуқтанинг ҳаракат тенгламалари қуйидагича берилган:

$$x = a\cos kt;$$
$$y = b\sin kt.$$



178- расм.

M нуқтага таъсир этувчи $\bar F$ кучни аниқлаймиз (178- расм).

Берилган ҳаракат тенгламаларидан t ни йўқотиб, нуқтанинг траекторияси тенгламасини топамиз:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Демак, нуқтанинг траекторияси ярим ўқлари a, b га тенг бўлган эллипсдан иборат.

Нуқта ҳаракат тенгламаларининг ҳар биридан t вақт бўйича икки марта ҳосила олиб, тезланишнинг проекцияларини топамиз:

$$\ddot x = -k^2a\cos kt = -k^2x;$$
$$\ddot y = -k^2b\sin kt = -k^2y.$$

(17.4) дифференциал тенгламалардан фойдаланиб номаълум кучнинг ҳар ондаги координата ўқларидаги проекциялари аниқланади:

$$X = -mk^2x;$$
$$Y = -mk^2y.$$

(17.11) га мувофиқ кучнинг модулини аниқлаймиз:

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2} = k^2m\sqrt{x^2 + y^2} = k^2mr, \qquad (1)$$

бунда $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

(17.12) дан фойдаланиб кучнинг йўналтирувчи косинусларини топамиз:

$$\cos(\widehat{\bar F, x}) = \frac{X}{F} = -\frac{x}{r}, \quad \cos(\widehat{F, y}) = \frac{Y}{F} = -\frac{y}{r}\cdot \qquad (2)$$

Нуқта радиус-вектори $\bar r$ нинг йўналтирувчи косинусларини аниқлаймиз:

$$\cos(\widehat{\bar r, x}) = \frac{x}{r}, \quad \cos(\widehat{\bar r, y}) = \frac{y}{z}\cdot \qquad (3)$$

(2) ва (3) тенгликларни солиштириб

$$\bar F = -k^2m\bar r \qquad (4)$$

муносабатни оламиз.

Шундай қилиб, (1) ва (4) тенгликлардан кўрамизки, M нуқта уни O марказга тортувчи ва нуқтадан O марказгача бўлган масофага мутаносиб бўлган куч таъсирида ҳаракатланади.

Моддий нуқта динамикасининг иккинчи асосий масаласида массаси ва нуқтага таъсир этувчи куч берилганда нуқтанинг ҳаракат қонуни аниқланади.

Бу масалани ечиш (17.3) ва (17.4) ёки (17.5) ҳаракат дифференциал тенгламаларини интеграллашга келтирилади. Шу сабабли динамиканинг иккинчи асосий масаласини ечиш биринчисига нисбатан анча мураккабдир.

Юқорида кўрганимиздек, умумий ҳолда нуқтага таъсир этувчи куч бир қанча омилларга боғлиқ бўлади. Масалан,

$$\overline{F} = \overline{F}(t, \overline{r}, \overline{v}).$$

Бу ҳолда нуқта ҳаракат қонунининг Декарт координата ўқларидаги ифодасини топиш учун кучнинг координата ўқларидаги проекцияларини

$$X = X(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z});$$
$$Y = Y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z});$$
$$Z = Z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z});$$

кўринишида ёзиб, (17.4) нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламаларини қуйидагича ёзамиз:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= X(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}); \\ m\ddot{y} &= Y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}); \\ m\ddot{z} &= Z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}); \end{aligned}\right| \qquad (17.13)$$

(17.13) тенгламалар x, y, z ларга нисбатан иккинчи тартибли дифференциал тенгламалар системасини ташкил этади.

Шундай қилиб, Декарт координата ўқларига нисбатан нуқтанинг ҳаракат қонунини аниқлаш масаласи учта иккинчи тартибли дифференциал тенгламалар системаси (17.13) ни биргаликда интеграллашга келтирилади. Мазкур тенгламаларни ечиб, ҳаракатланаётган нуқтанинг x, y, z координаталари t вақтнинг ва 6 та ихтиёрий ўзгармасларнинг функцияси сифатида аниқланади:

$$\begin{aligned} x &= x(t, C_1, C_2, \ldots, C_6); \\ y &= y(t, C_1 C_2, \ldots, C_6); \\ z &= z(t, C_1, C_2, \ldots, C_6). \end{aligned} \qquad (17.14)$$

(17.14) дан кўрамизки, нуқта берилган куч таъсирида бирор аниқ траектория бўйича ҳаракатланмайди; балки интеграллаш натижасида ҳосил бўлган. $C_1, C_2, \ldots, C_6$ сонларнинг ҳар бир қийматига мос келувчи ҳаракатлар тўпламидан иборат бўлади. Ҳаракатнинг қандай содир бўлиши бошланғич шартларга боғлиқ. Масалан, оғирлик кучи таъсирида ҳаракатланаётган нуқтанинг траекторияси бошланғич тезликнинг йўналишига қараб тўғри ёки эгри чизиқли бўлади.

Моддий нуқтанинг бошланғич пайтдаги ҳолати ва тезлигини ифодаловчи шартлар *бошланғич шартлар* дейилади. Масалан, бошланғич шартлар қуйидагича бўлсин:

$$\left.\begin{array}{l} x = x_0,\ y = y_0,\ z = z_0, \\ \dot{x} = \dot{x}_0,\ \dot{y} = \dot{y}_0,\ \dot{z} = \dot{z}_0. \end{array}\right\} \qquad (17.15)$$

(17.15) га мос келувчи $C_1, C_2, \ldots, C_6$ ларни аниқлаш учун (17.14) дан вақт бўйича ҳосила олиб, нуқта тезлигининг проекцияларини аниқлаймиз:

$$\left.\begin{array}{l} \dot{x} = \dot{x}(t, C_1, C_2, \ldots, C_6); \\ \dot{y} = \dot{y}(t, C_1, C_2, \ldots, C_6); \\ \dot{z} = \dot{z}(t, C_1, C_2, \ldots, C_6). \end{array}\right| \qquad (17.16)$$

Бошланғич (17.15) шартларни (17.14) ва (17.16) тенгламаларга қўйиб $x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0\ \dot{z}_0$ лар қатнашадиган олтита алгебраик тенгламалар системасига эга бўламиз. Бу олтита тенгламалар системасидан ўзгармас сонлар $C_\alpha\, (\alpha = \overline{1,6})$ ни аниқлаймиз:

$$C_\alpha = f_\alpha(t_0, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0), \ (\alpha = \overline{1,6}).$$

Буларни (17.14) га қўйсак, (17.13) нинг қуйидаги ечимини оламиз:

$$\left.\begin{array}{l} x = x(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0); \\ y = y(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0); \\ z = z(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0). \end{array}\right| \qquad (17.17)$$

(17.17) тенгламалар маълум кучлар таъсиридаги нуқтанинг берилган бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ҳаракат қонунининг Декарт координата ўқларидаги ифодасидан иборат.

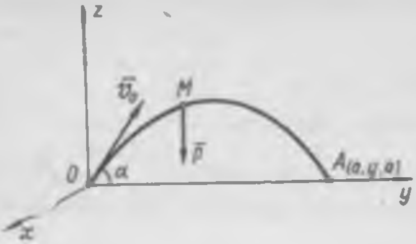
Дифференциал тенгламалар курсидан маълумки, иккинчи тартибли учта дифференциал тенгламалар системасининг (17.14) кўринишидаги умумий ечимини аниқлаш ўрнига бу тенгламаларнинг қуйидаги

$$f_k(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = C_k, \ (k = \overline{1,6}) \qquad (17.18)$$

6 та биринчи интегралларини аниқлаш етарлидир.

Техникада баъзан аралаш турдаги масалаларни ечишга тўғри келади. Бундай масалаларни ҳал қилишда нуқтанинг ҳаракат қонунини аниқлаш билан бирга, таъсир этувчи айрим кучларни ҳам аниқлашга тўғри келади. Боғланишлардан бўшатиш ҳақидаги аксиомага кўра бундай нуқтани берилган кучлар ва номаълум боғланиш реакция кучлари таъсиридаги эркин нуқта деб қаралади.

99- §. Динамиканинг иккинчи масаласини ечишга оид мисоллар



179- расм.

Моддий нуқта динамикасининг иккинчи асосий масаласи қуйидаги тартибда ечилади.

1. Инерциал саноқ системасини киритиб, координата ўқлари танлаб олинади. Агар нуқта бирор ҳолатда мувозанатда бўла олса, у ҳолда саноқ боши учун нуқтанинг статик мувозанат ҳолати олинади.

2. Нуқтага таъсир этувчи ва боғланиш реакция кучлари кўрсатилади.

3. Нуқта ҳаракатининг бошланғич шартлари аниқланади, яъни $t = 0$ бўлган бошланғич пайтда $x_0, y_0, z_0\, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$ аниқлаб олинади.

4. Нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламалари тузилади.

5. Тузилган дифференциал тенгламаларнинг бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечими аниқланади ва изланаётган номаълумлар топилади.

Нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламаларини нуқтага таъсир этувчи куч:

1) миқдор ва йўналиш жиҳатдан ўзгармаган;

2) фақат вақтга боғлиқ бўлган;

3) фақат нуқтанинг фазодаги ҳолатига боғлиқ бўлган;

4) фақат нуқтанинг тезлигига боғлиқ бўлган ҳолларда осонгина интеграллаш мумкин.

33- масала. Горизонтга α бурчак остида v_0 бошланғич тезлик билан отилган жисмни моддий нуқта деб қараб ҳамда ҳавонинг қаршилигини ҳисобга олмай, мазкур нуқтанинг фақат оғирлик кучи таъсиридаги ҳаракати аниқлансин.

Ечиш. O координаталар бошини нуқтанинг бошланғич ҳолатида олиб, Oz ўқни вертикал юқорига йўналтирамиз: Oyz текисликни эса v_0 бошланғич тезлик ётган текисликда оламиз (179- расм).

У ҳолда ҳаракатнинг бошланғич шартларини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\left.\begin{aligned} &t = 0 \text{ да } x_0 = 0,\ g_0 = 0,\ z_0 = 0; \\ &\dot{x}_0 = 0,\ \dot{y}_0 = v_0 \cos\alpha;\ \dot{z}_0 = v_0 \sin\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Нуқтага таъсир этувчи кучнинг координата ўқларидаги проекциялари

$$X = 0,\ Y = 0,\ Z = -mg$$

бўлгани учун нуқтанинг Декарт координата ўқларидаги ҳаракати дифференциал тенгламалари қуйидагича ёзилади:

$$m\ddot{x} = 0;$$
$$m\ddot{y} = 0;$$
$$m\ddot{z} = -mg$$

Бу тенгламаларни интеграллаймиз:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= C_1; \\ \dot{y} &= C_2 \\ \dot{z} &= -gt + C_3. \end{aligned}\right| \qquad (2)$$

Олинган тенгламаларни яна бир марта интеграллаймиз:

$$\left.\begin{aligned} x &= C_1t + C_4; \\ y &= C_2t + C_5; \\ z &= -\frac{gt^2}{2} + C_3t + C_6. \end{aligned}\right| \qquad (3)$$

$C_\alpha(\alpha = 1,6)$ ўзгармас сонларни аниқлаш учун ҳаракатнинг бошланғич шартлари (1) ни (2) ва (3) га қўямиз. Натижада

$$\left.\begin{aligned} C_1 = 0,\ C_2 = v_0\cos\alpha,\ C_3 = v_0\sin\alpha, \\ C_4 = 0,\ C_5 = 0,\ C_6 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

(4) га кўра нуқтанинг ҳаракат тенгламалари (3) қуйидагича ёзилади:

$$\left.\begin{aligned} x &= 0; \\ y &= v_0t\cos\alpha; \\ z &= -\frac{gt^2}{2} + v_0t\sin\alpha. \end{aligned}\right| \qquad (5)$$

Бу тенгламалар системасидан кўрамизки, оғирлик кучи таъсирида нуқта yOz текисликда бирор траектория бўйлаб ҳаракатланади.

Бу траектория тенгламасини топиш учун (5) дан t вақтни йўқотамиз. (5) нинг иккинчисидан t ни топиб, учинчисига қўямиз:

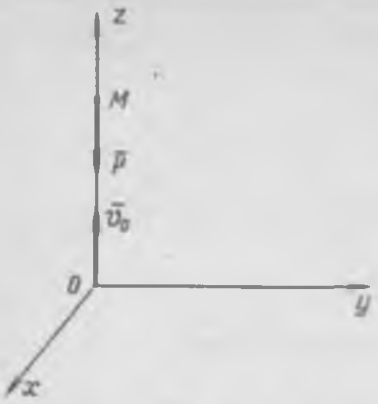
$$z = y\,tg\,\alpha - \frac{gy^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}. \qquad (6)$$

Шундай қилиб, нуқтанинг траекторияси ўқи Oz га параллел бўлган параболадан иборат. (1) бошланғич шартлар ўрнига қуйидаги шартларни олайлик:

$$\left.\begin{aligned} &t = 0 \text{ да} \\ &x_0 = 0;\ y_0 = 0;\ z_0 = 0; \\ &\dot{x}_0 = 0;\ \dot{y}_0 = 0;\ \dot{z}_0 = v_0, \end{aligned}\right| \qquad (7)$$

яъни бошланғич пайтда нуқта координаталар бошида бўлиб, вертикал юқорига v_0 тезлик билан отилган (180- расм). Бу ҳолда

$$C_1 = O,\ C_2 = O,\ C_3 = v_0;$$
$$C_4 = O,\ C_5 = O,\ C_6 = O.$$



180- расм.

Бинобарин, нуқтанинг ҳаракат тенгламалари қуйидагича бўлади:

$$\left.\begin{aligned} x &= O; \\ y &= O; \\ z &= -\frac{gt^2}{2} + v_0 t, \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

яъни (7) бошланғич шартларда нуқта Oz ўқ бўйича тўғри чизиқли ҳаракат қилади.

(6) ва (8) тенгламалардан кўрамизки, бошланғич шартларнинг берилишига қараб, нуқтанинг траекторияси турлича бўлиши мумкин экан.

34-масала. Массаси m га тенг бўлган моддий нуқта $F = F_0 \cos \omega t$ (бу ерда F_0 ва ω — ўзгармас миқдорлар) қонунга мувофиқ ўзгарувчи куч таъсирида тўғри чизиқли ҳаракат қилади. Бошланғич пайтда нуқта координаталар бошида бўлиб, тезлиги $x_0 = v_0$. Нуқтанинг ҳаракат тенгламаси топилсин.

Ечиш. O координаталар бошини нуқтанинг бошланғич ҳолатида олиб, F кучни Ox ўқ бўйича йўналтирамиз.

У ҳолда нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламасини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$m\ddot{x} = F_0 \cos \omega t,$$

бунда $\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt}$ бўлгани учун

$$m\frac{d\dot{x}}{dt} = F_0 \cos \omega t$$

ёки

$$m\,d\dot{x} = F_0 \cos \omega t\,dt.$$

Бу тенгламани бошланғич шартларга мос келувчи чегараларда интеграллаймиз:

$$m\int_{\dot{x}}^{\dot{x}} d\dot{x} = F_0 \int_0^t \cos \omega t\,dt; \quad m\dot{x} - m\dot{x}_0 = \frac{F_0}{\omega} \sin \omega t,$$

бунда $\dot{x}_0 = v_0$ бўлгани учун охирги тенгламани $\frac{dx}{dt}$ га нисбатан ечиб қуйидагича ёзамиз:

$$\frac{dx}{dt} = v_0 + \frac{F_0}{m\omega}\sin\omega t,$$

буни dt га кўпайтирамиз ва бошланғич $t = 0$ пайтда $x = 0$ эканлигини эътиборга олиб, бу тенгламани интеграллаймиз:

$$\int_0^x dx = v_0 \int_0^t dt + \frac{F_0}{m\omega}\int_0^t \sin\omega t dt.$$

Бундан

$$x = v_0 t + \frac{F_0}{m\omega^2} - \frac{F_0}{m\omega^2}\cos\omega t$$

кўринишдаги ҳаракат қонунини оламиз. Бу тенгламадан кўрамизки, нуқтанинг ҳаракатини

$$x_1 = v_0 t + \frac{F_0}{m\omega^2}$$

қонунга бўйсунадиган текис ўлчовли ҳаракат ҳамда $x_2 = -\frac{F_0}{m\omega^2}\cos\omega t$ қонунга бўйсунадиган гармоник тебранма ҳаракатларнинг йиғиндисидан иборат деб қараш мумкин.

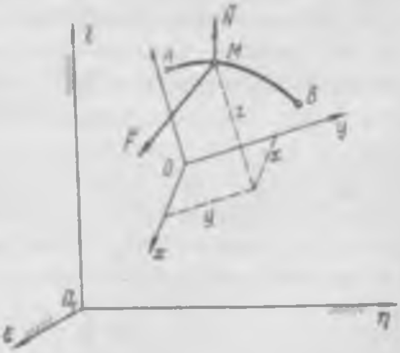
XVIII боб

МОДДИЙ НУҚТАНИНГ НИСБИЙ ҲАРАКАТИ ДИНАМИКАСИ

100-§. Моддий нуқта нисбий ҳаракатининг дифференциал тенгламалари

Динамика қонунлари ва улар асосида олинган ҳамма тенгламаларни шу пайтгача моддий нуқтанинг абсолют ҳаракати учун, яъни моддий нуқтанинг инерциал саноқ системасига нисбатан ҳаракати учун ўринли деб қарадик. Энди моддий нуқтанинг *инерциал бўлмаган саноқ системасига* нисбатан ҳаракатини текширамиз.

Фараз қилайлик, массаси m бўлган боғланишдаги M моддий нуқта бирор $Oxyz$ саноқ системасига нисбатан ҳаракатлансин, бироқ бу системанинг ўзи ҳам бошқа бир инерциал $O_1\xi\eta\zeta$ саноқ системасига нисбатан маълум қонун асосида ҳаракатланаётган бўлсин (181-расм).



181- расм.

Моддий нуқтага қўйилган актив кучларнинг тенг таъсир этувчисини $\overline{F}$, боғланиш реакциясининг тенг таъсир этувчисини $\overline{N}$ десак, Ньютоннинг иккинчи қонунига кўра қуйидагига эга бўламиз:

$$m\overline{w}_a = \overline{F} + \overline{N}, \tag{18.1}$$

бу ерда $\overline{w}_a$ — нуқтанинг абсолют тезланиши. Тезланишларни қўшиш ҳақидаги

$$\overline{w}_a = \overline{w}_e + \overline{w}_r + \overline{w}_k$$

Кориолис теоремасига кўра (18.1) қуйидагича ёзилади:

$$m\overline{w}_e + m\overline{w}_r + m\overline{w}_k = \overline{F} + \overline{N}$$

ёки

$$m\overline{w}_r = \overline{F} + \overline{N} + (-m\overline{w}_e) + (-m\overline{w}_k), \tag{18.2}$$

бу ерда $(-m\overline{w}_e)$ ва $(-m\overline{w}_k)$ векторлар мос равишда *кўчирма ва Кориолис инерция кучлари* дейилади. Уларни қуйидагича белгилаймиз:

$$-m\overline{w}_e = \overline{\Phi}_e, \quad -m\overline{w}_k = \overline{\Phi}_k. \tag{18.3}$$

(18.3) га кўра (18.2) ни қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$m\overline{w}_r = \overline{F} + \overline{N} + \overline{\Phi}_e + \overline{\Phi}_k. \tag{18.4}$$

(18.4) тенглама *моддий нуқта нисбий ҳаракати дифференциал тенгламасининг векторли кўриниши* дейилади. Бу тенгламанинг иккала томонини қўзғалувчи саноқ системасининг координата ўқларига проекциялаб *нуқта нисбий ҳаракати дифференциал тенгламаларининг координата ўқларидаги ифодасини* оламиз:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x + N_x + \Phi_{ex} + \Phi_{kx}; \\ m\ddot{y} &= F_y + N_y + \Phi_{ey} + \Phi_{ky}; \\ m\ddot{z} &= F_z + N_z + \Phi_{ez} + \Phi_{kz}. \end{aligned}\right\} \tag{18.5}$$

Демак, нисбий ҳаракатдаги моддий нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламасини тузишда моддий нуқтага таъсир этувчи берилган куч ва реакция кучлари қаторига кўчирма ва Кориолис инерция кучлари ҳам қўшилади. Бу $\overline{\Phi}_e$ ва $\overline{\Phi}_k$ кучларни қўшиш натижасида қўзғалувчи система кўчишининг нуқтанинг нисбий ҳаракатига кўрсатадиган таъсири эътиборга олинади.

Қуйидаги хусусий ҳолларни кўриб чиқамиз.

1. Қўзғалувчи саноқ системаси илгариланма ҳаракатда бўлсин. У ҳолда $\overline{\omega}_e = o$ ва $\overline{\Phi}_k = 0$ бўлади. Бинобарин, моддий нуқта нисбий ҳаракатининг дифференциал тенгламаси

$$m\overline{w}_r = \overline{F} + \overline{N} + \overline{\Phi}_e \tag{18.6}$$

кўринишда ёзилади.

2. Қўзғалувчи саноқ системаси илгариланма ва тўғри чизиқли тенг ўлчовли ҳаракатда бўлсин. Бу ҳолда $\overline{w}_e=0$, $\overline{w}_k=0$, $\overline{\Phi}_e=0$, $\overline{\Phi}_k=0$ бўлиб, (18.4) тенглама қуйидаги кўринишга келтирилади:

$$m\overline{w}_r = \overline{F} + \overline{N}. \tag{18.7}$$

Демак, бу ҳолда нуқта нисбий ҳаракатининг дифференциал тенгламаси худди қўзғалмас саноқ системасидаги тенгламалар каби бўлади; бошқача айтганда, қаралаётган қўзғалувчи саноқ системаси ҳам инерциал система бўлади. Шунинг учун ҳар қандай механик тажриба билан қўзғалувчи саноқ системасининг бундай ҳаракатини сезиш мумкин эмас.

Масалан, илгариланма ва тўғри чизиқли тенг ўлчовли ҳаракатланаётган кемадаги ҳамма томони берк каютада жойлашган кузатувчи, кема ҳаракатдами ёки тинч ҳолда турибдими, сеза олмайди. Чунки кузатувчи кўчирма ва Кориолис инерция кучларининг таъсирини сезмаганлигидан бошқа саноқ системасига нисбатан ўз ҳолатини аниқлай олмайди. Бу муҳим натижа Галилей томонидан аниқланган бўлиб, *классик механиканинг нисбийлик принципи* деб аталади.

3. Нуқта қўзғалувчи саноқ системасига нисбатан тўғри чизиқли ва тенг ўлчовли ҳаракатлансин ($v_r = const$). Бу ҳолда $\overline{w}_r = 0$ бўлиб, (18.4) тенглама қуйидаги кўринишни олади:

$$\overline{F} + \overline{N} + \overline{\Phi}_e + \overline{\Phi}_k = 0, \tag{18.8}$$

яъни берилган кучлар ва реакция кучлари ҳар онда кўчирма ва Кориолис инерция кучлари билан мувозанатлашади.

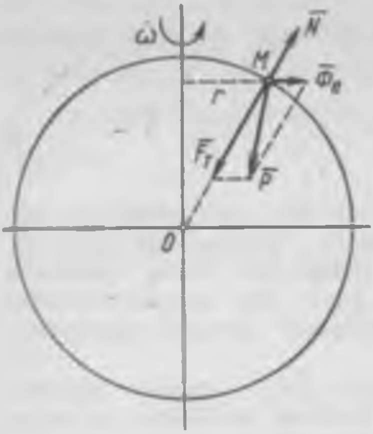
4. Нуқта қўзғалувчи саноқ системасига нисбатан тинч ҳолатда бўлсин. Бу ҳолда $\overline{v}_r=0$, $\overline{w}_r=0$, $\overline{\Phi}_r=0$ бўлади. Шу сабабли (18.4) тенглама ушбу кўринишни олади:

$$\overline{F} + \overline{N} + \overline{\Phi}_e = 0, \tag{18.9}$$

яъни берилган кучлар, реакция кучлари ва кўчирма инерция кучлари ҳар онда ўзаро мувозанатлашади. (18.9) тенглама *моддий нуқта нисбий мувозанат тенгламасининг векторли кўриниши* дейилади.

101-§. Жисмларнинг мувозанати ва ҳаракатига Ер айланишининг таъсири

Динамиканинг техникада учрайдиган кўпгина масалаларини ечишда Ер сирти билан боғлиқ саноқ системасини, одатда, инерциал система деб ҳисобланади. Бу билан Ернинг суткалик айланиши, Қуёш атрофида орбита бўйлаб ҳаракати ҳисобга олинмайди. Аммо Ер орбита бўйлаб Қуёш атрофида ҳаракатланганда (18.4) тенгламага кирадиган кўчирма инерция кучи амалда Қуёшнинг тортиш кучи билан мувозанатлашади. Шундай қилиб, Ер сирти билан боғлиқ бўлган саноқ системасини инерциал система деб ҳисоблаш билан унинг сутка ичи-



182- расм.

да Ер билан бирга юлдузларга нисбатан айланишинигина эътиборга олмадик. Бу айланиш

$$\omega = \frac{2\pi}{86164} \approx 0,0000729\ \frac{1}{c}$$

бурчак тезлик билан содир бўлади.

Бундай секин айланнш жисмнинг ҳаракатига ва мувозанатига қандай таъсир этишини текширамиз.

1. Ер сиртидаги нисбий мувозанат. Оғирлик кучи. Ерга нисбатан қўзғалмас бўлган силлнқ горизонтал текисликда ётувчи нуқтани оламиз (182-расм). Унинг ерга нисбатан мувозанати шарти (18.9) тенгликка мувофиқ $\overline{F}_T + \overline{N} + \overline{\Phi}_e = 0$ кўринишда ёзилади. Бунда F_T — ернинг тортиш кучи; $\overline{N}$ — текисликнинг реакцияси; $\overline{\Phi}_e$ — кўчирма инерция кучи.

$\omega = \mathrm{const}$ бўлганидан $\overline{\Phi}_e$ куч фақат Ернинг айланиш ўқига перпендикуляр бўлган нормал ташкил этувчидан иборат бўлади. $\overline{F}_T$ ва Φ_e кучларни қўшиб, уларнинг тенг таъсир этувчисини $\overline{P}$ билан белгилаймиз:

$$\overline{F}_T + \overline{\Phi}_e = \overline{P}. \tag{18.10}$$

У ҳолда M моддий нуқтага ўзаро мувозанатлашувчи иккита $\overline{P}$ ва $\overline{N}$ куч таъсир этади. $\overline{P}$ куч M нуқтанинг *оғирлик кучи* дейилади. $\overline{P}$ куч ернинг берилган нуқтасида вертикал йўналган бўлиб, унга перпендикуляр бўлган текислик горизонтал текисликдир.

Шундай қилиб, кўчирма ҳаракатнинг инерция кучи

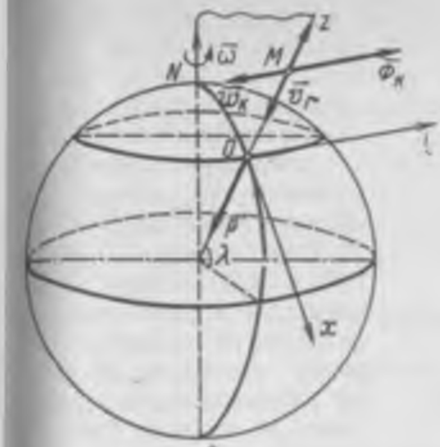
$$\Phi_e = mr\,\omega^2, \tag{18.11}$$

бунда: m — нуқтанинг массаси; r — нуқтадан Ернинг айланиш ўқигача бўлган масофа; ω — Ернинг ўз ўқи атрофида айланиш бурчак тезлиги.

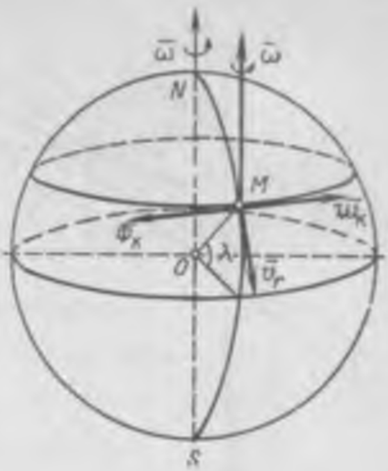
ω^2 жуда кичик, шунинг учун $\Phi_e \ll F_T$ бўлиб, $\overline{P}$ нинг йўналиши $\overline{F}_T$ нинг йўналишидан жуда оз фарқ қилади.

Жисмни тарозида тортганда $\overline{P}$ куч аниқланади, яъни жисм $\overline{P}$ куч билан тарози палласини босади. Шундай қилиб, мувозанат тенгламасига оғирлик кучини киритиш билан $\overline{\Phi}_e$ кучни ҳам киритган бўламиз, яъни Ернинг айланиш таъсирини ҳам эътиборга олган бўламиз.

2. Эркин тушаётган жисмнинг вертикалдан оғиши. Ер сиртига унча катта бўлмаган (Ернинг радиусига нисбатан жуда кичик масо-



183- расм.



184-расм.

фага тенг) баландликдан оғирлик кучи таъсирида эркин тушаётган моддий нуқтанинг ҳаракатини кузатамиз. Нуқтага таъсир этувчи $\overline{P}=m\overline{g}$ огирлик кучи (18.10) га мувофиқ аниқланади. Уни ўзгармас деб ҳисоблаймиз ҳамда ҳавонинг қаршилик кучини эътиборга олмаймиз. Ер билан боғланган ва Ер билан биргаликда ҳаракатланувчи координата ўқларини қуйидагича танлаб оламиз: z ўқни вертикал юқорнга, x ўқни меридианга уринма бўйича жанубга ва y ўқнн параллелга уринма равишда шарққа қараб йўналтирамиз (183- расм).

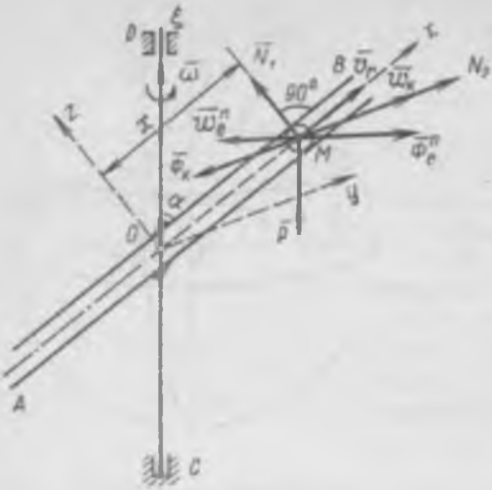
Танланган $Oxyz$ координаталар системасига нисбатан M нуқтанинг ҳаракати қаралаётганда (18.4) тенгламага асосан, нуқтага таъсир этувчи Ернинг тортиш кучи қаторига $\overline{\Phi}_e$ кўчирма ва $\overline{\Phi}_k$ Кориолис инерция кучларини қўшиш керак. Лекин $\overline{\Phi}_e$ куч $\overline{P}$ оғирлик кучи таркибига киради. Шундай қилиб, Ернинг айланишини эътиборга олиш учун $\overline{P}$ кучга Кориолис инерция кучини қўшиш кифоя.

$\overline{\Phi}_k$ куч $\overline{P}$ га нисбатан анча кичик бўлгани учун биринчи яқинлашишда нуқтанинг $\overline{v}_r$ нисбий тезлигини $\overline{P}$ кучнинг йўналиши бўйича, яъни вертикал пастга йўналган деб қаралади.

Ернинг ўз ўқи атрофидаги $\overline{\omega}$ айланиш бурчак тезлигини айланиш ўқи бўйлаб шундай йўналтирамизки, унинг мусбат йўналишидан қараганимизда Ернинг айланиши соат милининг айланишига тескари йўналишда кўринсин. У ҳолда 181- расмда кўрсатилганидек, $\overline{w}_k=2\overline{\omega}\times$ $\times\overline{v}_r$ Кориолис тезланиши NOS меридиан текислигига перпендикуляр равишда параллелга ўтказилган уринма бўйлаб ғарбга йўналади; Кориолис инерция кучи эса (шимолий ярим шарда ҳам, жанубий ярим шарда ҳам) шарққа йўналади.

Шундай қилиб, биринчи яқинлашишда эркин тушаётган моддий нуқта Ернинг айланиши таъсирида вертикалдан шарққа томон оғади.

3. Ер сирти бўйлаб ҳаракатланувчи жисмга Ер айланишининг таъсири. Ер сиртида меридиан чизиғи бўйлаб шимолий ярим шарда шимолдан жанубга ҳаракатланаётган *М* нуқтанинг Кориолис тезланиши, 184-расмда кўрсатилганидек, параллелга *М* нуқтада ўтказилган уринма бўйлаб шарққа йўналади; Кориолис инерция кучи эса унга тескари йўналишда, яъни ғарбга йўналади. Шу сабабли, меридиан бўйлаб шимолдан жанубга оқаётган дарё шимолий ярим шарда ўнг қирғоқни, жанубий ярим шарда эса чап қирғоқни Кориолис инерция кучи таъсирида ювиб кетади.



185- расм.

35- масала. *AB* найча вертикал *CD* ўқ билан ўзгармас $\alpha = 45°$ бурчак ҳосил қилади ва унинг атрофида доимий ω бурчак тезлик билан айланади. Найча ичида массаси *m* га тенг шарча ҳаракатланади. Агар шарчанинг бошланғич тезлиги нолга тенг бўлиб, *O* нуқтагача бўлган бошланғич оралиқ *a* га тенг бўлса, шу шарчанинг ҳаракати ҳамда шарчанинг найча деворига босим кучи аниқлансин.

Ечиш. *Ox* ўқни *AB* бўйлаб йўналтириб, *Oxyz* қўзғалувчи координаталар системаси найча билан биргаликда ҳаракатланади деб қараймиз (185- расм). Бу координаталар системасининг қўзғалмас $O\xi$ ўқига нисбатан ҳаракати *M* нуқта учун кўчирма ҳаракатни ифодалайди. Нуқтанинг найча бўйлаб ҳаракати нисбий ҳаракатдан иборат.

M нуқтага унинг оғирлик кучи $\bar{P}$, найча деворининг нормал реакция кучи $\bar{N}$ қўйилган. $\bar{N}$ кучни ўзаро перпендикуляр ҳамда *z* ва *y* ўқларга мос равишда параллел бўлган $\bar{N}_1$ ва $\bar{N}_2$ ташкил этувчиларга ажратамиз.

Бундан ташқари, *M* нуқтага марказдан қочирма инерция кучи $\bar{\Phi}_e^n$ ва Кориолис инерция кучи $\bar{\Phi}_k$ ни қўямиз. Нисбий тезликнинг *Ox* ўқдаги проекциясини мусбат деб қарасак, у ҳолда Кориолис тезланиши *Oy* ўққа параллел йўналади; Кориолис инерция кучи эса унга тескари йўналади. Найча ўзгармас бурчак тезлик билан айланганн учун инерция кучларининг модули (18.3) га асосан қуйидагича аниқланади:

$$\Phi_e = \Phi_e^n = mw_e^n = m\omega_e^2 x \sin\alpha,$$

$$\Phi_k = mw_k = 2\,m\omega_e v_r \sin\alpha,$$

бунда

$$\omega_e = \omega, \quad v_r = \dot{x}.$$

Нуқтанинг нисбий ҳаракат тенгламаси (18.4) га асосан

$$m\overline{w}_r = \overline{P} + \overline{N}_1 + \overline{N}_2 + \overline{\Phi}_e^n + \overline{\Phi}_k \tag{1}$$

кўринишда ёзилади.

(1) ни Ox ўққа проекциялаб нуқтанинг нисбий ҳаракати дифференциал тенгламасини оламиз:

$$m\ddot{x} = \Phi_e^n \sin\alpha - P\cos\alpha,$$

$$m\ddot{x} = m\omega^2 x \sin^2\alpha - mg\cos\alpha$$

ёки

$$\ddot{x} - \omega^2 x \sin^2\alpha = -g\cos\alpha. \tag{2}$$

Бу дифференциал тенгламанинг умумий ечими

$$x = x_1 + x_2$$

кўринишга эга бўлади. Бунда x_1 — (2) га тааллуқли бир жинсли дифференциал тенгламанинг умумий ечими; x_2 — (2) тенгламанинг хусусий ечими.

Характеристик тенгламани тузиб, унинг илдизларини топамиз:

$$\lambda^2 - \omega^2 \sin^2\alpha = 0,$$

$$\lambda_1 = \omega\sin\alpha, \quad \lambda_2 = -\omega\sin\alpha.$$

Шу сабабли бир жинсли дифференциал тенгламанинг умумий ечимини

$$x_2 = C_1 e^{\omega t \sin\alpha} + C_2 e^{-\omega t \sin\alpha}$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бунда $\alpha = 45°$ деб олсак,

$$x_1 = C_1 e^{0,5\,\omega t\sqrt{2}} + C_2 e^{-0,5\,\omega t\sqrt{2}}.$$

(2) тенгламанинг хусусий ечиминн $x_2 = D$ кўринишда оламиз. У ҳолда (2) га кўра

$$x_2 = D = \frac{g\cos\alpha}{\omega^2\sin^2\alpha} = \frac{g\sqrt{2}}{\omega^2}.$$

Бинобарин, M нуқтанинг нисбий ҳаракат тенгламаси қуйидагича бўлади:

$$x = C_1 e^{0,5\,\omega t\sqrt{2}} + C_2 e^{-0,5\,\omega t\sqrt{2}} + \frac{g\sqrt{2}}{\omega^2}. \tag{3}$$

Бундай ҳаракат тезлиги

$$\dot{x} = 0,5\,\omega\sqrt{2}\,\left(C_1 e^{0,5\,\omega t\sqrt{2}} - C_2 e^{-0,5\,\omega t\sqrt{2}}\right) \tag{4}$$

формуладан аниқланади.

Ҳаракатнинг бошланғич шартлари

$$t = 0,\ x = a,\ \dot{x} = 0 \tag{5}$$

ни (3) ва (4) га қўйсак:

$$a = C_1 + C_2 + \frac{g\sqrt{2}}{\omega^2};$$
$$0 = 0{,}5\,\omega\sqrt{2}\,(C_1 - C_2),$$

бундан C_1 ва C_2 интеграллаш доимийлари аниқланади:

$$C_1 = C_2 = \frac{1}{2}\left(a - \frac{g\sqrt{2}}{\omega^2}\right).$$

Натижада (5) бошлангич шартларда нуқтанинг нисбий ҳаракати ва нисбий ҳаракат тезлиги қуйидагича бўлади:

$$x = OM = \frac{1}{2}\left(a - \frac{g\sqrt{2}}{\omega^2}\right)\left(e^{0,5\,\omega t\sqrt{2}} + e^{-0,5\,\omega t\sqrt{2}}\right) + \frac{g\sqrt{2}}{\omega^2}. \tag{6}$$

$$v_r = \dot{x} = \frac{\sqrt{2}}{4}\,\omega\left(a - \frac{g\sqrt{2}}{\omega^2}\right)\left(e^{0,5\,\omega t\sqrt{2}} - e^{-0,5\,\omega t\sqrt{2}}\right). \tag{7}$$

(6) ва (7) дан кўрамизки, бу масалада нуқтанинг нисбий ҳаракати ва нисбий тезлиги унинг массасига боғлиқ эмас экан.

Найча деворининг реакция кучи

$$N = \sqrt{N_1^2 + N_2^2}.$$

формуладан аниқланади. N_1 ва N_2 ларни топиш учун (2) ни y ва z ўқларга проекциялаймиз (бунда $\bar{w}_r$ бу ўқларга перпендикуляр эканлигини эътиборга оламиз):

$$0 = N_2 - \Phi_k,$$
$$0 = N_1 - P\cos 45^\circ - \Phi_e^n \cos 45^\circ.$$

Бундан

$$\left.\begin{aligned} N_2 &= \Phi_k = m\,\omega\,v_r\sqrt{2}, \\ N_1 &= \frac{m\sqrt{2}}{2}(g + \omega^2 x). \end{aligned}\right| \tag{8}$$

M шарчанинг найча деворига кўрсатадиган босими миқдор жиҳатдан реакция кучи N га тенг, йўналиши эса унга қарама-қарши бўлади.

102- §. Вазнсизлик

Агар Ер сиртига яқин бирор горизонтал текислик устидаги нуқта тинч ҳолатда бўлса, унга таъсир этувчи Ернинг тортиш кучи текисликнинг нормал реакция кучи билан мувозанатлашади. Бунда нуқтанинг горизонтал текисликка кўрсатадиган босимини ифодаловчи куч миқдори *нуқтанинг оғирлиги* ёки *вазни* дейилади.

Масалан, юкнинг тарози палласига кўрсатадиган босими юкнинг оғирлигини ифодалайди.

Агар нуқта берилган саноқ системасида, бу системага нисбатан мувозанатда турган жисмга босим кўрсатмаса, нуқтанинг бундай ҳолати *вазнсизлик ҳолати* дейилади.

Ернинг тортиш кучи таъсирида ҳаракатланаётган нуқтанинг эркин қаттиқ жисмга маҳкам бириктирилган, инерциал бўлмаган қўзғалувчи саноқ системасига нисбатан вазнсизлик ҳолатини текширамиз. Ер атмосферасидан ташқарида ҳаракатланаётган Ернинг сунъий йўлдоши бундай жисмга мисол бўлади. Сунъий йўлдошга нисбатан нисбий мувозанатдаги нуқтанинг вазнсизлик ҳолатини текширамиз. Бундай нуқтанинг нисбий тезлиги ва нисбий тезланиши нолга тенг бўлади. Шу сабабли нуқтанинг нисбий мувозанат тенгламаси (18.9) орқали ифодаланади:

$$\overline{F} + \overline{N} + \overline{\Phi}_e = 0.$$

Бу ерда: $\overline{F} = m\overline{g}$ — нуқтага таъсир этувчи Ернинг тортиш кучи; $\overline{N}$ — сунъий йўлдош ичидаги нуқтага қўйилган реакция кучи; $\overline{\Phi}_e = -m\overline{w}_e$ — кўчирма инерция кучи.

Вазнсизлик ҳолатида $\overline{N} = 0$ бўлиб, нисбий мувозанат тенгламаси қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$\overline{F} + \overline{\Phi}_e = 0.$$

Шундай қилиб, вазнсизлик ҳолати

$$\overline{F} = -\overline{\Phi}_e = m\overline{w}_e \text{ ёки } \overline{w}_e = \overline{g}$$

бўлганда, яъни кўчирма ҳаракат тезланиши эркин тушиш тезланишига тенг бўлганда вужудга келади. Нуқта сунъий йўлдошнинг массаси марказида жойлашган ҳолда бу шарт ўринлидир, чунки масса маркази фақат ернинг тортиш кучидан иборат ташқи куч таъсирида ҳаракатланади ва унинг тезланиши $\overline{g}$ га тенг бўлади. Бу тезланиш айни вақтда нуқтанинг кўчирма тезланишини ҳам ифодалайди. Агар моддий нуқта сунъий йўлдошнинг массаси марказида жойлашмаса, йўлдош айланма ҳаракатда бўлгани учун нуқтанинг кўчирма ҳаракат тезланиши масса марказининг тезланишидан фарқ қилади. Шу сабабли нуқта вазнсизлик ҳолатида бўлмайди. Агар йўлдош илгариланма ҳаракатда бўлса, йўлдош ичидаги ихтиёрий нуқта вазнсизлик ҳолатида бўлади.

Худди шунингдек, $\overline{g}$ тезланиш билан пастга тушаётган лифт кабинасида ҳам вазнсизлик ҳодисаси кузатилади.

Космонавтика ривожланганн сари вазнсизлик ҳодисасини ўрганиш муҳим аҳамиятга эга бўлмоқда.

XIX боб

МЕХАНИК СИСТЕМА ДИНАМИКАСИГА КИРИШ

103-§. Механик система. Механик системага таъсир этувчи кучларнинг тафсифи

Бир-бири билан маълум муносабатда боғланган ҳамда ҳар бир нуқтасининг ҳаракати бошқа нуқталарининг ҳолати ва ҳаракатига боғлиқ бўлган моддий нуқталар тўплами *механик система* дейилади. Исталган машина ёки механизм механик системага мисол бўла олади, чунки машина ва механизмларнинг қисмлари бир-бирлари билан шарнирлар, стерженлар, тасмалар ёки тишли ғилдираклар воситасида боғланган бўлади. Бу ҳолда система нуқталарига боғланишлар орқали бериладиган таранглик кучлари ёки ўзаро босим кучлари таъсир этади.

Агар механик системани ташкил этувчи нуқталар орасидаги масофалар доимо ўзгармасдан қолса, бундай механик система *ўзгармас механик система* дейилади. Масалан, абсолют қаттиқ жисмни ўзгармас механик система нуқталарининг тўпламидан иборат деб қараш мумкин.

Агар механик системанинг барча нуқталари эркин бўлса, у ҳолда системани ташкил этувчи нуқталар орасидаги боғланишлар мазкур нуқталарнинг ўзаро таъсир кучидан иборат бўлади. Бунда биз эркин нуқталардан ташкил топган механик системага эга бўламиз. Масалан, Қуёш системасини бундай системага мисол қилиб кўрсатиш мумкин, чунки Қуёш ва планеталар ўзаро бутун дунё тортилиш кучи таъсирида бўлади.

Агар механик система нуқталарига боғланишлар қўйилган бўлса, система *боғланишдаги система* дейилади. Бундай системага мисол тариқасида узунлиги ўзгармас бўлган стержень билан бириктирилган икки моддий нуқтани олиш мумкин.

Берилган механик система нуқталарига таъсир этувчи кучлар ички ва ташқи кучларга ажратилади.

Механик системани ташкил этувчи нуқталарнинг ўзаро таъсир кучлари *ички кучлар* дейилади. Ички кучлар, одатда, $\overline{F}^i$ билан белгиланади.

Механик система нуқталарига бу системага кирмайдиган нуқта ёки жисмларнинг таъсир кучлари *ташқи кучлар* дейилади. Ташқи кучлар $\overline{F}^e$ билан белгиланади.

Масалан, автомобилни механик система деб қарасак, двигатель цилиндрларида ҳосил бўладиган газларнинг поршенга босим кучлари, поршеннинг шатунга, шатуннинг тирсакли валга таъсир кучлари ва ҳоказо кучлар ички кучлардир; автомобиль оғирлиги, автомобиль ғилдираклари билан Ер сирти орасидаги ишқаланиш кучи, ҳавонинг қаршилик кучи ва бошқалар ташқи кучлардир.

Боғланишдаги механик система нуқталарига таъсир этувчи кучлар боғланиш реакция кучларига ва актив кучларга ажратилади. Бу кучлар ўз навбатида ички ёки ташқи кучлар бўлиши мумкин.

186- расм.

Ички кучларнинг асосий хоссалари билан танишамиз.

1. Динамиканинг учинчи қонунига кўра механик системанинг ҳар қандай икки нуқтаси (масалан, M_1 ва M_2 нуқталари) миқдор жиҳатдан тенг ва бир чизиқ бўйлаб қарама-қарши томонларга йўналган $\overline{F}_1^i$ ва $\overline{F}_2^i$ кучлар билан бир-бирига таъсир этади (186-расм). Бу кучларнинг геометрик йиғиндиси нолга тенг:

$$\overline{F}_1^i + \overline{F}_2^i = 0.$$

Шу сабабли N та нуқтадан ташкил топган механик система учун қуйидаги муносабат ўринли бўлади:

$$\overline{R^i} = \sum_{k=1}^{N} \overline{F}_k^i = 0. \qquad (19.1)$$

Демак, система нуқталарига таъсир этувчи ички кучларнинг геометрик йиғиндиси (бош вектори) нолга тенг бўлади. Бундан буён йиғинди чегарасини тушириб ёзамиз ва k ни 1 дан N гача қийматларни олади, деб ҳисоблаймиз.

(19.1) ни бирор Ox ўққа проекцияласак

$$\sum X_k^i = 0, \qquad (19.2)$$

яъни ички кучларнинг ихтиёрий ўқдаги проекциялари йиғиндиси нолга тенг бўлади.

2. $\overline{F}_1^i$ ва $\overline{F}_2^i$ кучларнинг бирор O нуқтага нисбатан моментларини топамиз. 186-расмдан

$$\overline{M}_O(\overline{F}_1^i) + \overline{M}_O(\overline{F}_2^i) = 0,$$

бўлишини кўрамиз, чунки иккала кучнинг елкаси бир хил бўлиб, момент векторлари қарама-қарши йўналган. У ҳолда бутун система учун қуйидагини ёза оламиз:

$$\overline{M}_O^i = \sum \overline{M}_O(\overline{F}_k^i), \qquad (19.3)$$

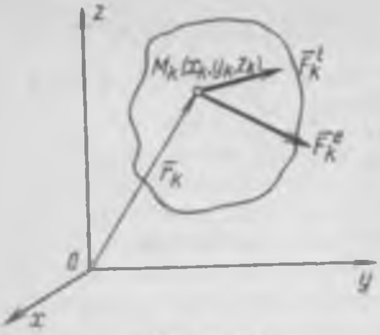
бунда $\overline{M}_O^i$ ички кучларнинг O марказга нисбатан бош моментини ифодалайди. (19.3) ни ихтиёрий Ox ўққа проекциялаймиз:

$$\sum M_{Ox}(\overline{F}_k^i) = 0. \qquad (19.4)$$

(19.3) ва (19.4) лардан кўрамизки, ички кучларнинг ихтиёрий нуқтага нисбатан ҳисобланган моментларининг геометрик йиғиндиси ёки ихтиёрий ўққа нисбатан моментларининг йиғиндиси нолга тенг бўлади.

(19.2) ва (19.4) ифодалар фазода ихтиёрий вазиятда жойлашган кучлар системасининг мувозанат тенгламаларига ўхшаса-да, ички кучлар мувозанатлашмайди. Чунки улар системанинг турли нуқталарига қўйилганлиги туфайли мазкур кучлар таъсирида системанинг нуқталари бир-бирига нисбатан ҳаракатланади. Ўзгармас механик система ёки қаттиқ жисм қаралаётганда ички кучлар мувозанатлашувчи кучлар системасини ташкил этади.

104-§. Механик система ҳаракатининг дифференциал тенгламалари



187- расм.

Механик система N та моддий нуқталардан ташкил топган бўлсин. Бу системанинг ихтиёрий M_k нуқтасини олиб, массасини m_k билан, унга таъсир этувчи ташқи кучлар ҳамда ички кучларнинг тенг таъсир этувчиларини мос равишда $\overline{F}_k^e$, $\overline{F}_k^i$ билан белгилаймиз (187-расм). У ҳолда система нуқталари ҳаракатининг дифференциал тенгламалари Ньютоннинг иккинчи қонунига биноан қуйидагича ёзилади:

$$m_k \overline{w}_k = \overline{F}_k^e + \overline{F}_k^i (k = 1, \overline{N}). \qquad (19.5)$$

(19.5) ни Декарт координата ўқларига проекциялаб қуйидаги $3N$ та тенгламалар системасига эга бўламиз:

$$\left.\begin{aligned} m_k \ddot{x}_k &= X_k^e + X_k^i; \\ m_k \ddot{y}_k &= Y_k^e + Y_k^i, \\ m_k \ddot{z}_k &= Z_k^e + Z_k^i. \end{aligned}\right| (k = \overline{1, N}). \qquad (19.6)$$

Бу тенгламалар системаси *механик система ҳаракатининг Декарт координата ўқларидаги дифференциал тенгламалари* дейилади. Бу тенгламаларнинг ўнг томони умумий ҳолда t вақтга ҳамда системани ташкил қилувчи барча нуқталарнинг координаталари ва координаталарнинг вақт бўйича ҳосиласига боғлиқ бўлади. Бу тенгламалар системасининг, умумий ҳолда, механик система ҳатто битта нуқтадан ташкил топганда ҳам аниқ ечими топилмаган. Лекин ҳозирги замон электрон ҳисоблаш машиналарини қўллаб бу тенгламаларнинг тақрибий ечимини жуда катта аниқлик билан топиш мумкин.

Кўпинча (19.6) тенгламаларда қатнашувчи ички кучлар ҳам номаълум бўлади, шу сабабли масалани ечиш янада мураккаблашади.

105-§. Боғланишдаги механик система ҳаракатининг дифференциал тенгламалари

Агар система нуқталарига боғланишлар қўйилган бўлса, у ҳолда боғланишлардан бўшатиш ҳақидаги аксиомага кўра, таъсир этаётган $\overline{F}_k$ актив кучлар қаторига $\overline{N}_k$ боғланиш реакция кучларини ҳам қўшиш керак. Натижада механик системани $\overline{F}_k$ актив кучлар ва $\overline{N}_k$ реакция кучлари таъсиридаги эркин механик система деб қаралади. Бундай система ҳаракатининг дифференциал тенгламалари Ньютоннинг иккинчи қонунига асосан қуйидагича ёзилади:

$$m_k\overline{w}_k = \overline{F}_k + \overline{N}_k, \ (k = \overline{1, N}). \qquad (19.7)$$

У ҳолда *боғланишдаги система ҳаракатининг Декарт координата ўқларидаги дифференциал тенгламалари* қуйидаги кўрннишни олади

$$\left.\begin{aligned} m_k\ddot{x}_k &= X_k + N_{kx}, \\ m_k\ddot{y}_k &= Y_k + N_{ky}, \\ m_k\ddot{z}_k &= Z_k + N_{kz}, \end{aligned}\right| (k = \overline{1, N}) \qquad (19.8)$$

Бунда X_k, Y_k, Z_k лар актив кучларнинг, N_{kx}, N_{ky}, N_{kz} лар эса реакция кучларининг координата ўқларидаги проекцияларидир. (19. 8) тенгламаларда эркин системадан фарқли равишда $3N$ та N_{kx}, N_{ky}, N_{kz} номаълум реакция кучлари ҳам қатнашади.

Шундай қилиб, боғланишдаги механик система ҳаракатининг $3N$ та дифференциал тенгламаларнда $6N$ та x_k, y_k, z_k, N_{kx}, N_{ky}, N_{kz} номаълумлар қатнашади, яъни номаълумлар сони тенгламалар сонидан ортиқ бўлади. Шу сабабли боғланишдаги механик системанинг ҳаракатини аниқлаш учун боғланишлар турини ифодаловчи қўшимча маълумотлар (масалан, ишқаланиш қонуни) берилган бўлиши керак.

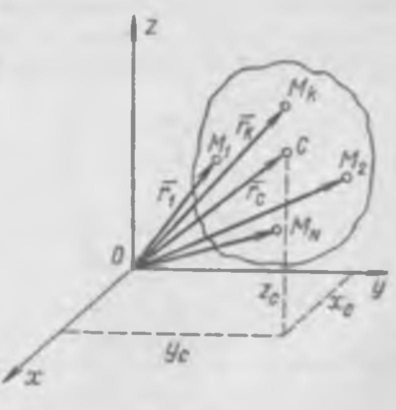
XX боб

Массалар геометрияси

106-§. Системанинг массалар маркази ва унинг координаталари

Механик система динамикасида система нуқталари массаларининг тақсимланишини ифодаловчи катталиклар муҳим аҳамиятга эга. Бу катталиклар ҳақидаги таълимот *массалар геометрияси* дейилади.

Механик система M_1, M_2, . . . , M_N нуқталардан ташкил топган бўлсин. Бу нуқталарнинг массаларини мос равишда m_1, m_2, . ., m_N билан белгилаймиз. *Oxyz* координаталар системасига нисбатан система нуқталарининг ҳолати $\overline{r}_1$, $\overline{r}_2$, . . . , $\overline{r}_n$ радиус-векторлар билан аниқлансин (188-расм).



188- расм.

Система нуқталари массаларининг йиғиндиси

$$M = \sum m_k$$

системанинг массаси дейилади.

Система динамикасида радиус-вектори

$$\overline{r}_c = \frac{\sum m_k \overline{r}_k}{M} \qquad (20.1)$$

формула ёрдамида аниқланадиган геометрик нуқта *C системанинг массалар маркази* дейилади.

(20. 1) нинг иккала томонини x, y, z координата ўқларига проекциялаб массалар марказининг координаталари аниқланади:

$$x_c = \frac{\sum m_k x_k}{M};$$
$$y_c = \frac{\sum m_k y_k}{M}; \qquad (20.2)$$
$$z_c = \frac{\sum m_k z_k}{M};$$

Бу формулалардан кўрамизки, система массалар марказининг ҳолати таъсир этувчи кучларга боғлиқ бўлмай, фақат берилган система нуқталарининг ҳолатига ва уларнинг массаларига боғлиқ бўлади. Агар система бир жинсли оғирлик кучи майдонида жойлашса, бу системанинг массалар маркази унинг оғирлик маркази билан устма-уст тушади. Система оғирлик кучи майдонида ҳаракатланса, оғирлик маркази мавжуд; (20.2) формулалар эса ихтиёрий система учун ўринли бўлади. Шунинг учун системанинг массалар маркази тушунчаси оғирлик марказига нисбатан кенг маънога эга.

107-§. Системанинг инерция моментлари. Инерция моментларининг умумий формулалари

Система динамикасини ўрганишда муҳим аҳамиятга эга бўлган система нуқталари массаларининг ўққа, нуқтага ёки текисликкача бўлган масофалар квадратига кўпайтмаларининг йиғиндисига тенг бўлган динамик катталиклар аниқланади. Бу катталиклар система массаларининг ўқ, нуқта ёки текисликка нисбатан тақсимланишини ифодалайди ва мос равишда *системанинг ўққа, нуқтага* ёки *текисликка нисбатан инерция моментлари* дейилади.

Системанинг x, y, z, координата ўқларига нисбатан инерция моментлари I_x, I_y, I_z билан белгиланади. У ҳолда таърифга кўра

$$I_z = \sum m_k h_k^2, \qquad (20.3)$$

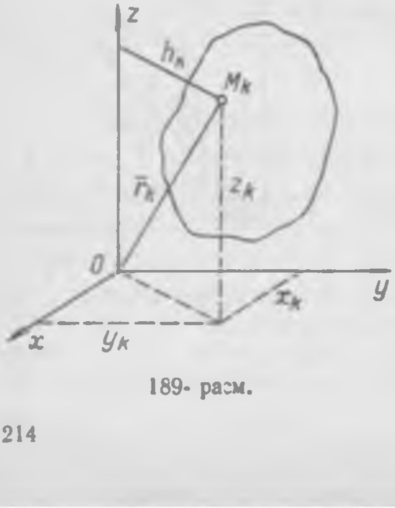
бунда h_k — берилган ўқдан m_k массали нуқтагача бўлган масофа (189-расм).

Системанинг O нуқтага (қутбга) нисбатан инерция моменти эса қуйидагича ёзилади:

$$I_O = \sum m_k r_k^2, \qquad (20.4)$$

бу ерда r_k — O нуқтадан системанинг M_k нуқтасигача бўлган масофа.

Системанинг ҳолатини $Oxyz$ координаталар системасига нисбатан



189- расм.

аниқлаймиз (189-расм). Система M_k нуқтасининг координаталарини x_k, y_k, z_k билан белгилаймиз. У ҳолда системанинг O координаталар бошига нисбатан инерция моменти қуйидагича ёзилади:

$$I_O = \sum m_k r_k^2 = \sum m_k (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2). \qquad (20.5)$$

Системанинг координата ўқларига нисбатан инерция моментлари

$$\left.\begin{aligned} I_x &= \sum m_k (y_k^2 + z_k^2), \\ I_y &= \sum m_k (x_k^2 + z_k^2), \\ I_z &= \sum m_k (x_k^2 + y_k^2) \end{aligned}\right\} \qquad (20.6)$$

формулалардан аниқланади.

Ўққа нисбатан инерция моментларини қўшиб координаталар бошида жойлашган нуқтага нисбатан инерция моменти олинади:

$$I_x + I_y + I_z = 2I_O. \qquad (20.7)$$

Моддий жисм текис шаклдан иборат бўлса, x ва y ўқларни шакл текислигида олсак, $I_z = I_O$ бўлади. У ҳолда (20.7) қуйидагича ёзилади:

$$I_x + I_y = I_O. \qquad (20.8)$$

Системанинг yz, xz ва xy текисликларга нисбатан инерция моментлари қуйидаги формулалар асосида ҳисобланади:

$$\left.\begin{aligned} I_{(yz)} &= \sum m_k x_k^2, \\ I_{(xz)} &= \sum m_k y_k^2, \\ I_{(xy)} &= \sum m_k z_k^2. \end{aligned}\right\} \qquad (20.9)$$

МКГСС бирликлар системасида инерция моменти 1 кгк·м·с² да халқаро СИ бирликлар системасида эса, 1 кгм² да ўлчанади.

Қаттиқ жисмнинг бирор z ўққа нисбатан инерция моментини аниқлаш учун уни жуда кичик бўлакчалардан ташкил топган деб қараб, ҳар бир бўлакча массасининг берилган ўққача бўлган масофа квадратига кўпайтмаларининг йиғиндисини тузамиз ва бўлакчалар сони $N \to \infty$ ҳамда бўлакчалар массаси $\Delta m_k \to 0$ бўлгандаги лимитини ҳисоблаймиз:

$$I_z = \lim_{\substack{N \to \infty \\ \Delta m_k \to 0}} \sum_{k=1}^{N} r_k^2 \Delta m_k$$

ёки

$$I_z = \int_{(M)} r^2 dm.$$

Бу интеграл бутун жисм массаси бўйича аниқланади.

Ҳажмга эга бўлган жисм учун $dm = \rho\, dv$, бунда: ρ — ҳажм бирлигига тўғри келадиган жисм массаси; dv — жисм бўлакчасининг ҳажми.

Бир жинсли жисм учун $\rho = \text{const}$ бўлиб,

$$I_z = \int\limits_{(M)} r^2 dm = \int\limits_{(V)} r^2 \rho\, dv = \rho \int\limits_{(V)} r^2 dv. \tag{20.10}$$

Бир жинсли моддий сиртнинг инерция моменти

$$I_z = \rho_1 \int\limits_{(S)} r^2 ds \tag{20.11}$$

формуладан аниқланади, бунда: ρ_1 — сирт бирлигига тўғри келадиган масса; ds — сирт бўлакчасининг юзи бўлиб, интеграл бутун сиртнинг S юзи бўйича олинади.

Бир жинсли моддий чизиқ учун

$$I_z = \rho_2 \int\limits_{(L)} r^2 dl, \tag{20.12}$$

бунда: ρ_2 — узунлик бирлигига тўғри келувчи масса; dl — чизиқ бўлакчасининг узунлиги. Интеграл бутун чизиқнинг L узунлиги бўйича олинади.

Кўпинча жисмнинг ўққа нисбатан инерция моменти

$$I_z = M\rho_u^2 \tag{20.13}$$

формуладан аниқланади,

$$\rho_u = \sqrt{\frac{I_z}{M}} \tag{20.14}$$

бўлиб, *жисмнинг ўққа нисбатан инерция радиуси* дейилади. Инерция радиуси узунлик бирлигида ўлчанади. Жисмнинг массаси ва инерция радиуси берилган бўлса, ўққа нисбатан инерция моментини (20.13) дан аниқлаш қулай. Оддий шаклдаги жисмларнинг инерция радиуслари жадвалларда берилади.

Ҳажмга эга бўлган бир жинсли жисмнинг бирор қутбга нисбатан инерция моменти учун (20.10) — (20.12) га ўхшаш формулалар ўринли бўлади ва r ни жисмнинг бирор заррасидан қутбгача бўлган масофа деб қаралади.

108-§. Жисмнинг параллел ўқларга нисбатан инерция моментларини ҳисоблаш. Гюйгенс-Штейнер теоремаси

Жисмнинг ўққа нисбатан инерция моменти жисм нуқталарининг массаларига ва мазкур нуқталардан ўққача бўлган масофалар квадратига боғлиқлиги (20.6) формулалардан кўриниб турибди. Шу сабабли жисмнинг турли ўқларга нисбатан инерция моментлари турлича бўлади.

Жисмнинг бирор ўққа нисбатан инерция моменти маълум бўлса, шу ўққа параллел бўлган исталган бошқа ўққа нисбатан инерция моментини қандай ҳисоблашни кўриб ўтамиз.

Бунинг учун жисмнинг массалар маркази C орқали ихтиёрий $Cx'y'z'$ координата ўқларини ўтказамиз ва Cx' ўқда ихтиёрий O нуқтани олиб, бу нуқтада $Oy \parallel Cy'$, $Oz \parallel Cz'$ бўлган Ox, Oy, Oz координата ўқларини ўтказамиз (190-расм). У ҳолда (20.6) га кўра

$$I_z = \sum m_k (x_k^2 + y_k^2).$$

190-расмдан жисмнинг ихтиёрий M_k нуқтаси учун $x_k = x_k' - d$, $y_k = y_k'$ бўлганидан

$$I_z = \sum m_k [(x_k' - d)^2 + y_k'^2] = \sum m_k (x_k'^2 + y_k'^2) + \\ + d^2 \sum m_k - 2d \sum m_k x_k'. \qquad (20.15)$$

(20.15) да $\sum m_k (x_k'^2 + y_k'^2) = I_{Cz'}$ — жисмнинг массалар марказидан ўтувчи ўққа нисбатан инерция моменти; $\sum m_k = M$ — бутун жисм массаси; d — параллел ўқлар орасидаги масофа. Массалар марказининг координаталарини аниқловчи (20.2) формулага асосан $\sum m_k x_k' = Mx_C'$. Қаралаётган ҳолда массалар маркази C координата бошида олинганидан $x_C' = 0$. Шу сабабли $\sum m_k x_k' = 0$ бўлади. Натижада (20.15) қуйидаги кўринишни олади:

$$I_z = I_{Cz'} + Md^2. \qquad (20.16)$$

Бу формула ушбу — *Гюйгенс-Штейнер теоремасини* ифодалайди: *жисмнинг бирор ўққа нисбатан инерция моменти, жисмнинг массалар марказидан ўтувчи ва мазкур ўққа параллел бўлган ўққа нисбатан инерция моменти билан жисм массасининг ўқлар оралиғи квадратига кўпайтмасининг йиғиндисига тенг.*

Жисмнинг массалар марказидан d_1 масофада ўтувчи z_1 ўққа нисбатан инерция моменти I_{z_1} берилган бўлса, шу ўққа параллел ва массалар марказидан d_2 масофада ўтувчи z_2 ўққа нисбатан инерция моменти I_{z_2} ни аниқлаш мумкин. Ҳақиқатан ҳам Гюйгенс-Штейнер теоремасига кўра

$$I_{z_1} = I_{Cz'} + Md_1^2,$$
$$I_{z_2} = I_{Cz'} + Md_2^2,$$

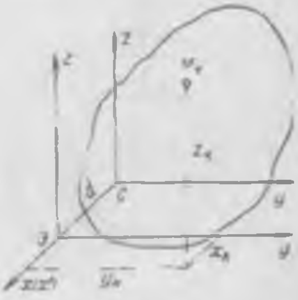
булардан

$$I_{z_2} - I_{z_1} = M(d_2^2 - d_1^2)$$

ёки

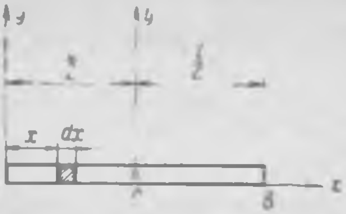
$$I_{z_2} = I_{z_1} + M(d_2^2 - d_1^2).$$

109-§. Баъзи оддий шаклли жисмларнинг инерция моментларини ҳисоблаш



190-расм.

1. Бир жинсли стерженнинг инерция моменти. Кўндаланг кесимининг ўлчамлари узунлигига нисбатан анча кичик цилиндр ёки призма шаклидаги жисмлар ингичка стержень деб қаралади. AB стержень перпендикуляр бўлган Ay ўққа нисбатан инерция моментини ҳисоблаймиз (191-расм). Узунлиги l га тенг стер-



191- расм.

женнинг Ay ўқдан x масофада жойлашган бўлаги узунлигини dx билан, массасини dm билан белгилаймиз. Агар стерженнинг узунлик бирлигига тўғри келадиган массасини ρ_2 билан белгиласак, $dm = \rho_2 dx$ бўлади. Жисм инерция моментини ҳисоблаш формуласининг интеграл кўриниши (20.12) дан фойдаланиб ушбу ифодани ёза оламиз:

$$I_y = \rho_2 \int_0^l x^2 dx = \frac{\rho_2 l^3}{3}.$$

Агар бутун стерженнинг массасини M билан белгиласак, у ҳолда $M = \rho_2 l$ бўлганидан

$$I_y = \frac{Ml^2}{3}. \qquad (20.17)$$

Стерженнинг массалар марказидан унга перпендикуляр ўтган Cy' ўққа нисбатан инерция моменти $I_{Cy'}$ ни Гюйгенс-Штейнер теоремаси ва (20.17) формулага кўра ҳисоблаш мумкин:

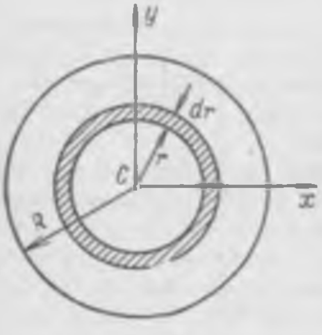
$$I_{Cy'} = I_y - Md^2 = \frac{Ml^2}{3} - M\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{Ml^2}{12}. \qquad (20.18)$$

2. Ингичка доиравий ҳалқанинг инерция моменти. Массаси M ва радиуси R га тенг бўлган ингичка доиравий ҳалқанинг марказдан ўтувчи ва ҳалқа текислигига перпендикуляр бўлган Cz ўққа нисбатан инерция моментини топамиз. Ҳалқанинг ҳамма нуқталари Cz ўқдан $h_k = R$ масофада жойлашганлигидан ва жисмнинг массаси ҳалқа гардиши бўйлаб текис тақсимланганидан, (20.3) формулага кўра

$$I_{Cz} = \sum m_k R^2 = R^2 \sum m_k = MR^2 \qquad (20.19)$$

келиб чиқади.

3. Бир жинсли доиравий пластинканинг инерция моменти. Массаси M ва радиуси R га тенг бўлган бир жинсли доиравий пластинканинг пластинка текислигига перпендикуляр бўлган ва массалар марказидан ўтувчи Cz ўққа нисбатан инерция моментини ҳисоблаймиз (192-расм). Бунинг учун ундан радиуслари r ва $r + dr$ бўлган айланалар орасидаги доиравий элементар ҳалқани ажратамиз. Унинг юзи $2\pi r dr$, массаси эса $dm = 2\pi r \rho_1 dr$ га тенг, бу ерда ρ_1 — пластинканинг юза бирлигидаги массаси. У ҳолда (20. 19) формулага биноан, ажратилган элементар ҳалқа қатламининг инерция моменти



192- расм.

$$dI_{Cz} = r^2dm = 2\pi\rho_1 r^3dr.$$

Бутун пластинка учун эса

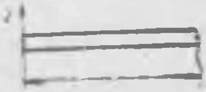
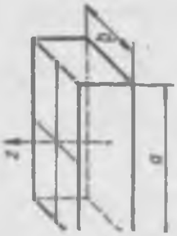
$$I_{Cz} = 2\pi\rho_1 \int_0^R r^3dr = \frac{1}{2}\pi\rho_1 R^4$$

формула ўринли бўлади. Бунда $\rho\pi_1 R^2 = M$ эканини назарда тутиб, қуйидагини оламиз:

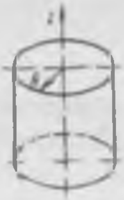
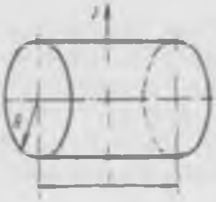
$$I_{Cz} = \frac{1}{2}MR^2. \qquad (20.20)$$

Пластинка текислигида Cx ва Cy ўқларни ўтказсак (192- расм), (20.8) га асосан $I_{Cx} + I_{Cy} = I_{Cz}$ ва диск учун $I_{Cx} = I_{Cy}$. Бинобарин, $I_{Cx} = I_{Cy} = \frac{I_{Cz}}{2} = \frac{MR^2}{4}$.

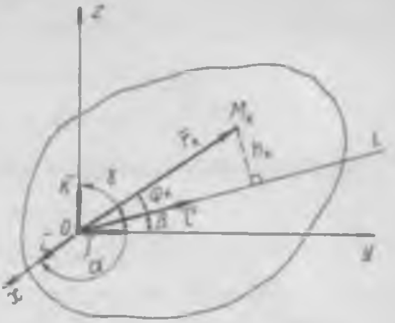
Масалалар ечишда кўпроқ учрайдиган айрим бир жинсли жисмларнинг инерция моментлари қуйидаги жадвалда берилган:

Жисм хили	Жисм шакли	Инерция моменти	Инерция радиуси
Ингичка стержень		$\frac{Ml^2}{3}$	$\frac{l}{\sqrt{3}}=0,577l$
Доиравий юпқа пластинка		$\frac{MR^2}{4}$	$0,5\ R$
Тўғри бурчакли параллелепипед		$M\ \frac{a^2+b^2}{12}$	$\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2\sqrt{3}} =$ $=0,289\sqrt{a^2+b^2}$

Давом

Жисм хили	Жисм шакли	Инерция моменти	Инерция радиуси
Юпқа деворли шар		$\frac{2}{3}MR^2$	$\sqrt{\frac{2}{3}}R =$ $= 0{,}816\ R$
Доиравий цилиндр (айланиш ўқига нисбатан)		$\frac{MR^2}{2}$	$\frac{R}{2} = 0{,}707\ R$
Доиравий цилиндр (кўндаланг ўқига нисбатан)		$\frac{M}{10}(l^2+3R^2)$	$\sqrt{\frac{l^2+3R^2}{12}}$
Шар		$\frac{2}{5}MR^2$	0,632 R
Доиравий конус (айланиш ўқига нисбатан)		$\frac{3}{10}MR^2$	0,547 R

110-§. Жисмнинг берилган нуқтадан ўтувчи ихтиёрий ўққа нисбатан инерция моменти



193- расм.

Берилган O нуқтадан ўтувчи бирор l ўққа нисбатан жисмнинг инерция моменти I_l ни топамиз. x, y ва z ўқларнинг бирлик векторларини $\bar i$, $\bar j$, $\bar k$ орқали, l ўқнинг бирлик векторини $\bar l^\circ$ орқали, унинг координата ўқлари билан ташкил этган бурчакларини мос равишда α, β, γ билан белгилаймиз (193-расм). У ҳолда, таърифга кўра, жисмнинг ўққа нисбатан инерция моменти қуйидагича бўлади:

$$I_l = \sum m_k h_k^2, \tag{20.21}$$

бунда h_k — M_k нуқтадан l ўққача бўлган масофа.

M_k нуқтанинг радиус-вектори $\overline{OM}_k = \bar r_k$ ва $\bar l^\circ$ учун қуйидагиларни ёза оламиз:

$$\bar r_k = x_k \bar i + y_k \bar j + z_k \bar k,$$

$$\bar l^\circ = \cos\alpha\, \bar i + \cos\beta\, \bar j + \cos\gamma\, \bar k,$$

у ҳолда

$$\bar r_k \cdot \bar l^\circ = x_k \cos\alpha + y_k \cos\beta + z_k \cos\gamma. \tag{20.22}$$

Аммо $\bar r_k \cdot l^\circ$ учун яна ушбу тенглик ўринли бўлади:

$$\bar r_k \cdot \bar l^\circ = r_k \, |l^\circ| \cos\varphi_k = r_k \cos\varphi_k, \tag{20.23}$$

бу ерда φ_k билан $\bar r_k$ ва $\bar l^\circ$ орасидаги бурчак кўрсатилган. (20.22) ва (20.23) дан

$$x_k \cos\alpha + y_k \cos\beta + z_k \cos\gamma = r_k \cos\varphi_k.$$

Расмдан $h_k = r_k \sin\varphi_k$ бўлгани учун (20.21) қуйидагича ёзилади:

$$I_l = \sum m_k r_k^2 \sin^2\varphi_k = \sum m_k [r_k^2 - (r_k \cos\varphi_k)^2].$$

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ эканлигини эътиборга олиб, I_l учун қуйидаги ифодага эга бўламиз:

$$I_l = \sum m_k [(x_k^2 + y_k^2 + z_k^2)(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) -$$
$$- (x_k \cos\alpha + y_k \cos\beta + z_k \cos\gamma)^2]$$

ёки

$$I_l = \sum m_k [(y_k^2 + z_k^2)\cos^2\alpha + (z_k^2 + x_k^2)\cos^2\beta + (x_k^2 + y_k^2)\cos^2\gamma -$$
$$- 2y_k z_k \cos\beta\cdot\cos\gamma - 2 z_k x_k \cos\gamma\cdot\cos\alpha -$$
$$- 2x_k y_k \cos\alpha\cdot\cos\beta]. \qquad (20.24)$$

Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$\left.\begin{aligned} A = I_x &= \sum m_k (y_k^2 + z_k^2), \\ B = I_y &= \sum m_k (z_k^2 + x_k^2), \\ C = I_z &= \sum m_k (x_k^2 + y_k^2), \end{aligned}\right\} \qquad (20.25)$$

$$\left.\begin{aligned} D = I_{yz} &= \sum m_k y_k z_k, \\ E = I_{zx} &= \sum m_k z_k x_k \\ F = I_{xy} &= \sum m_k x_k y_k. \end{aligned}\right| \qquad (20.26)$$

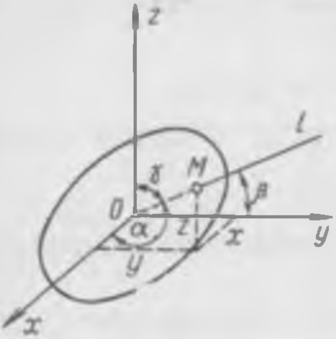
D, E, F катталиклар *марказдан қочувчи инерция моменти* дейилади. У ҳолда l ўққа нисбатан инерция моменти қуйидагича бўлади:

$$I_l = I_x\cos^2\alpha + I_y\cos^2\beta + I_z\cos^2\gamma - 2I_{yz}\cos\beta\cdot\cos\gamma -$$
$$- 2I_{zx}\cos\gamma\cdot\cos\alpha - 2I_{xy}\cos\alpha\cdot\cos\beta. \qquad (20.27)$$

Бу формулалар ёрдамида жисмнинг берилган x,y, z координата ўқларига нисбатан инерция моментлари I_x, I_y, I_z ҳамда марказдан қочувчи инерция моментлари I_{yz}, I_{zx}, I_{xy}, шунингдек l ўқнинг координата ўқлари билан ташкил этган бурчаклари: α, β, γ лар маълум бўлганда, координаталар бошидан ўтувчи ихтиёрий l ўққа нисбатан инерция моменти аниқланади.

111-§. Инерция эллипсоиди

(20.27) да α, β, γ ларга турлича қийматлар бериб, жисмнинг координаталар бошидан ўтувчи ўқлар дастасига нисбатан инерция моментлари ҳисобланади.



194- расм.

Жисмнинг O нуқтадан ўтувчи ўқлар дастасига нисбатан инерция моментларининг тақсимланишини геометрик тасвирлаш учун l ўқда ихтиёрий $OM = R$ масофада M нуқтани оламиз. У ҳолда M нуқтанинг координаталари

$$x = R\cos\alpha,\ y = R\cos\beta,\ z = R\cos\gamma.$$

тенгликлардан топилади (194- расм).

Бу тенгликлардан $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ ларни аниқлаб, уларни (20.27) га қўямиз:

$$I_lR^2 = I_xx^2 + I_yy^2 + I_zz^2 - 2I_{yz}yz - 2I_{zx}zx - 2I_{xy}xy. \quad (20.28)$$

R катталикни шундай танлаймизки,

$$I_lR^2 = k^3$$

ёки

$$R = \frac{k}{\sqrt{I_e}} \quad (20.29)$$

бўлсин. R нинг қийматини (20.28) га қўямиз:

$$I_xx^2 + I_yy^2 + I_zz^2 - 2I_{yz}yz - 2I_{zx}zx - 2I_{xy}xy = k^2. \quad (20.30)$$

Бу тенглама иккинчи тартибли сирт тенгламасини ифодалайди. (20.29) да I_l доимо нолга тенг бўлмаган мусбат катталик бўлгани учун (20.30) тенглама билан ифодаланадиган сиртнинг чексиз узоқлашган нуқтаси бўлмайди, шу сабабли у маркази O нуқтада ётувчи эллипсоидни ифодалайди. Эллипсоид тенгламасидаги x, y, z ўзгарувчилар олдидаги коэффициентлар жисмнинг инерция моменти бўлганидан, бу эллипсоид *инерция эллипсоиди* дейилади.

(20. 25) ва (20.26) лардаги белгилашларга асосан инерция эллипсоидининг (20.30) тенгламасини

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2\,Dyz - 2\,Ezx - 2\,Fxy = k^2 \quad (20.31)$$

кўринишида ёзиш мумкин. Бу тенгламада k ўзгармас катталик бўлиб, инерция эллипсоидининг масштабини ифодалайди. Демак, жисмнинг O нуқтасига берилган масштабда аниқ бирор инерция эллипсоиди мос келади. k га турлича қийматлар бериб O нуқта атрофида ҳар хил концентрик инерция эллипсоидларини оламиз.

Аналитик геометриядан маълумки, агар координата ўқларини инерция эллипсоидининг бош ўқлари бўйлаб йўналтирсак, инерция эллипсоидининг тенгламасида координаталарнинг кўпайтмасини ўз ичига олган ҳадлар қатнашмайди. Инерция эллипсоидининг бош ўқлари *инерция бош ўқлари* дейилади. Инерция эллипсоидининг бош ўқларга нисбатан тенгламаси қуйидагича ёзилади:

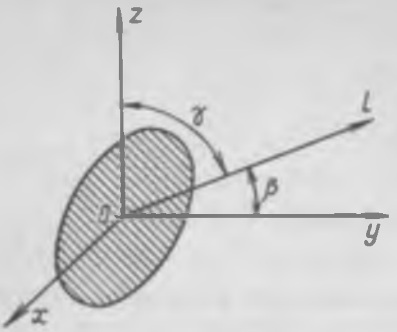
$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1. \quad (20.32)$$

Бинобарин, бош ўқларга нисбатан марказдан қочувчи инерция моментлари нолга тенг бўлади. (20.32) да A, B, C лар жисмнинг инерция бош ўқларига нисбатан инерция моментлари бўлиб, улар *инерция бош моментлари* дейилади.

Агар $Oxyz$ координата системасининг ўқларидан бирини, масалан Oz ни, маркази O нуқтада бўлган инерция эллипсоидининг бош ўқи бўйлаб йўналтирсак, у ҳолда (20.31) да yz ва xz кўпайтмаларни ўз ичига олган ҳадлар қатнашмайди, бинобарин, марказдан қочувчи D, E инерция моментлари нолга тенг бўлади.

Агар O нуқта жисмнинг массалар марказида олинса, у ҳолда бу нуқта учун ясалган инерция эллипсоиди *марказий эллипсоид* дейилади.

Марказий эллипсоиднинг бош ўқлари *инерция марказий бош ўқлари* дейилади.



195- расм.

Агар x, y, z ўқларни маркази O нуқтада бўлган инерция эллипсоидининг бош ўқлари бўйлаб йўналтирсак, у ҳолда жисмнинг O нуқтадан ўтувчи ихтиёрий l ўққа нисбатан инерция моменти (20.27) га кўра

$$I_l = I_x \cos^2\alpha + I_y \cos^2\beta + I_z \cos^2\gamma \tag{20.33}$$

формула ёрдамида ҳисобланади.

36- масала. Массаси M, радиуси R бўлган бир жинсли доиравий дискнинг O марказидан ўтувчи ва диск текислиги билан 60° бурчак ташкил этувчи l ўққа нисбатан инерция моменти топилсин (195-расм).

Ечиш. Координаталар бошини O нуқтада олиб, диск Oxz текисликда ётади деб қарайлик. У ҳолда $\alpha = 90°$, $\beta = 30°$, $\gamma = 60°$ эканлигини назарда тутсак, $\cos\alpha = 0$, $\cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\gamma = \frac{1}{2}$ бўлади.

Дискнинг x, y, z координата ўқларига нисбатан инерция моментлари

$$I_x = I_y = \frac{MR^2}{4},\ I_0 = \frac{MR^2}{2}$$

ҳамда x, y, z ўқлар инерция бош ўқларн бўлгани учун (20.33) дан фойдаланиб I_l ни ҳисоблаймиз:

$$I_e = \frac{MR^2}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{MR^2}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{7}{16} MR^2.$$

112- §. Инерция бош ўқларининг хусусиятлари

Инерция бош ўқларининг қуйидаги хусусиятларини кўриб чиқамиз.

1. Инерция марказий бош ўқи шу ўқ устида ётувчи барча нуқталар учун бош ўқдан иборат бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, агар Cz ўқ учун инерция марказий бош ўқи олинса,

$$I_{xz} = \sum m_k x_k z_k = 0,\ I_{yz} = \sum m_k y_k z_k = 0,$$
$$x_C = y_C = 0.$$

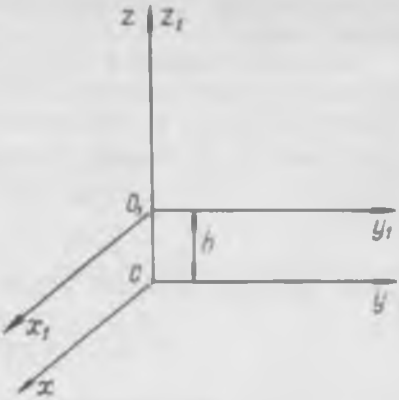
бўлади (196- расм).

Cz ўқда ихтиёрий O_1 нуқтани олиб, бу нуқтада O_1x_1 ва O_1y_1 ўқлар мос равишда Cx ва Cy ўқларга параллел бўлган $O_1x_1y_1z_1$ координаталар системасини ўтказамиз. У ҳолда

$$I_{x_1z_1} = \sum m_k x_k (z_k - h) = \sum m_k x_k z_k - hMx_C = 0,$$
$$I_{y_1z_1} = \sum m_k y_k (z_k - h) = \sum m_k y_k z_k - hMy_C = 0,$$

нобарин, O_1z_1 ўқ ҳам бош ўқ бўлади.

2. *Агар бир жинсли жисм моддий симметрия ўқига эга бўлса, бу ўқ устида ётувчи барча нуқталар учун мазкур ўқ марказий бош ўқдан иборат бўлади.*



196- расм.

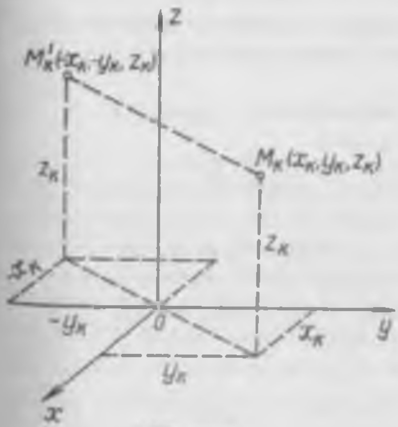
Жисмнинг массаси бирор ўққа нисбатан симметрик равишда жойлашган бўлса, бу ўқ *моддий симметрия ўқи* дейилади. Агар моддий симметрия ўқи учун z ўқ олинса, у ҳолда жисмнинг ҳар бир m_k массали $M_k(x_k, y_k, z_k)$ заррасига худди шундай m'_k массали $M'_k(-x_k, -y_k, -z_k)$ зарраси мос келади (197-расм). Натижада I_{xz}, I_{yz} марказдан қочувчи инерция моментлари ва жисмнинг оғирлик маркази C нуқтанинг координаталари x_C, y_C лар учун қуйидаги муносабатлар ўринли бўлади:

$$I_{xz} = \sum m_k x_k z_k - \sum m'_k x_k z_k = 0; \qquad x_C = \frac{\sum m_k x_k - \sum m'_k x_k}{\sum (m_k + m'_k)} = 0;$$

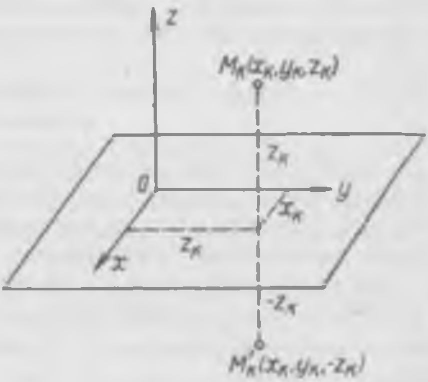
$$I_{yz} = \sum m_k y_k z_k - \sum m'_k y_k z_k = 0; \qquad y_C = \frac{\sum m_k y_k - \sum m'_k y_k}{\sum (m_k + m'_k)} = 0.$$

Шундай қилиб, z ўқ бош ўқ бўлиб, жисмнинг масса марказидан ўтади, яъни инерция марказий бош ўқидан иборат бўлади.

3. *Агар бир жинсли жисм моддий симметрия текислигига эга бўлса, бу текисликка перпендикуляр бўлган ҳар қандай ўқ мазкур*



197- расм.



198- расм.

ўқнинг текислик билан кесишган нуқтасига нисбатан бош ўқдан иборат бўлади.

Жисмнинг симметрия текислигига перпендикуляр равишда ўтувчи ихтиёрий Oz ўқни ўтказамиз (198-расм). У ҳолда жисмнинг ҳар бир m_k массали $M_k(x_k, y_k, z_k)$ заррасига m'_k массали $(m'_k = m_k)$ $M'_k(x_k, y_k, z_k)$ заррасн мос келади. Бинобарин,

$$I_{xz} = \sum m_k x_k z_k - \sum m'_k x_k z_k = 0,$$
$$I_{yz} = \sum m_k y_k z_k - \sum m'_k y_k z_k = 0$$

бўлади. Бу формулалардан кўрамизки, Oz ўқ O нуқта учун бош ўқдир.

XXI боб

Динамиканинг умумий теоремалари

Юқорида биз динамика масалаларини ечишда моддий нуқта ёки механик система ҳаракати дифференциал тенгламаларининг векторли ёки координата ўқларидаги ифодасидан фойдаланиш мумкин эканлигини кўрдик. Бу тенгламаларни интеграллаб нуқта ёки система ҳаракатининг тўлиқ тасвири ҳосил қилинади. Аммо бундай тенгламаларни интеграллаш масаласи, айниқса, тенгламаларида қўшимча номаълумлар қатнашадиган моддий нуқталар системаси учун ниҳоятда мураккабдир. Шунинг учун бу усулни қўллаш ҳар доим ҳам мақсадга мувофиқ бўлавермайди. Кўпинча система ҳар бир нуқтасининг ҳаракатини аниқлаш ўрнига мазкур система нуқталарининг ҳаракатини ифодаловчи бир неча механик катталиклар орасидаги муносабатларни топишнинг ўзи етарли бўлади. Динамиканинг умумий теоремалари ёрдамида худди шундай муносабатлар аниқланади. Бу теоремаларнинг татбиқ этилиши масалалар ечиш жараёнини бирмунча соддалаштиради, шунингдек, тенгламалар тартибини пасайтиришга ёки уларнинг сонини камайтиришга, тенгламалардан айрим номаълум кучларни чиқариб ташлашга имкон беради. Баъзи ҳолларда динамиканинг умумий теоремалари воситасида ҳаракат дифференциал тенгламаларининг (17.18) кўринишидаги биринчи интегралларини олиш мумкин.

113-§. Система массалар марказининг ҳаракати ҳақидаги теорема

Айрим ҳолларда система ҳаракатининг хусусиятини аниқлаш учун мазкур система массалар марказининг ҳаракат қонунини билиш етарли бўлади. Система массалар марказининг ҳаракатини аниқлаш учун система ҳаракатининг дифференциал тенгламаларидан фойдаланамиз.

N та нуқтадан ташкил топган механик системанинг ихтиёрий M_k нуқтасига таъсир этувчи ташқи кучлар ҳамда ички кучлар тенг таъсир этувчилари мос равишда $\overline{F}^e_k$, $\overline{F}^i_k$ га ва M_k нуқтанинг бу кучлар таъсирида олган тезланиши $\overline{w}_k$ га тенг бўлсин. У ҳолда (19.5) га кўра система нуқталари ҳаракатининг дифференциал тенгламалари

$$\left.\begin{aligned} m_1\bar{w}_1 &= \bar{F}^e_1+\bar{F}^i_1,\\ m_1\bar{w}_2 &= \bar{F}^e_2+\bar{F}^i_2,\\ &\dots\dots\dots\\ m_N\bar{w}_N &= \bar{F}^e_N+\bar{F}^i_N \end{aligned}\right\} \qquad (21.1)$$

ўринишда ёзилади.

(21.1) тенгламаларнинг чап ва ўнг томонларини ҳадлаб қўшамиз:

$$\sum m_k\bar{w}_k=\sum\bar{F}^e_k+\sum\bar{F}^i_k. \qquad (21.2)$$

(20.1) га кўра

$$\sum m_k\bar{r}_k=M\bar{r}_c$$

тенглик ўринли бўлади. Бу тенгликнинг иккала томонидан вақт бўйича икки марта ҳосила оламиз:

$$\sum m_k\frac{d^2\bar{r}_k}{dt^2}=M\frac{d^2\bar{r}_c}{dt^2}$$

ёки

$$\sum m_k\bar{w}_k=M\bar{w}_c,$$

бу ерда $\bar{w}_c$ — система массалар марказининг тезланиши.

Ички кучларнинг хоссасига кўра

$$\sum\bar{F}^i_k=0.$$

Бундан ташқари,

$$\sum\bar{F}^e_k=\bar{R}^e$$

ташқи кучларнинг бош векторини ифодалайди.

(21.2) қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$M\bar{w}_c=\bar{R}^e. \qquad (21.3)$$

Бу ифода *система массалар марказининг ҳаракати ҳақидаги теоремани* ифодалайди: *системанинг массалар маркази, массаси бутун система массасига тенг бўлган ва система нуқталарига таъсир этувчи барча ташқи кучларнинг бош вектори таъсиридаги моддий нуқта каби ҳаракатда бўлади.*

(21.3) дан кўрамизки, бу теорема исталган механик система массалар марказининг ҳаракатини аниқлашда аввалдан номаълум бўлган ҳамма ички кучларни эътиборга олмасликка имкон беради.

(21.3) тенгламани x, y, z координата ўқларига проекциялаб система массалар маркази ҳаракати дифференциал тенгламаларининг Декарт координата ўқларидаги ифодасини оламиз:

$$\left.\begin{aligned} M\ddot{x}_c &= R^e_x, \\ M\ddot{y}_c &= R^e_y, \\ M\ddot{z}_c &= R^e_z. \end{aligned}\right| \qquad (21.4)$$

Массалар марказининг ҳаракати ҳақидаги теоремадан муҳим хулоса келиб чиқади.

Илгариланма ҳаракатдаги қаттиқ жисмнинг ҳаракати битта нуқтасининг ҳаракати билан тўлиқ аниқланиши кинематикадан маълум. Бинобарин, системанинг массалар марказини, массаси бутун система массасига тенг бўлган ва ташқи кучларнинг бош вектори таъсиридаги моддий нуқта деб қаралса, унинг ҳаракати жисмнинг илгариланма ҳаракатини ифодалайди.

Умумий ҳолда эркин жисмнинг ҳаракатини массалар маркази билан биргаликдаги илгариланма ҳаракат ва массалар маркази атрофидаги айланма ҳаракатдан иборат деб қараш мумкин.

Система массалар марказининг ҳаракати ҳақидаги теоремадан фойдаланиб жисмнинг фақат илгариланма ҳаракати аниқланади. Жисмнинг масса маркази атрофидаги айланма ҳаракати динамиканинг бошқа теоремаларидан фойдаланиб аниқланади. Шундай қилиб, бирор жисмни моддий нуқта деб қараш масаласи жисмнинг қандай ҳаракат қилишига боғлиқ бўлади.

Масалан, планеталарнинг Қуёш атрофидаги илгариланма ҳаракати текширилаётганда уларни массаси мазкур планеталарнинг массасига тенг моддий нуқталар деб қараш мумкин, лекин планеталарнинг ўз ўқи атрофидаги айланма ҳаракати қаралаётганда уларни моддий нуқта деб ҳисоблай олмаймиз.

114-§. Система массалар маркази ҳаракатининг сақланиш қонуни

Система массалар марказининг ҳаракати ҳақидаги теоремадан қуйидаги натижаларни оламиз.

1. Фараз қилайлик, системага таъсир этувчи ташқи кучларнинг бош вектори нолга тенг бўлсин:

$$\overline{R}^e = \sum \overline{F}^e_k = 0.$$

У ҳолда (21.3) тенгламадан $\overline{w}_c = \frac{d^2\overline{r}_c}{dt^2} = 0$ бўлиб,

$$\overline{v}_c = \text{const}$$

бўлишини кўрамиз. Яъни система нуқталарига таъсир этувчи кучларнинг бош вектори нолга тенг бўлса, системанинг массалар маркази тўғри чизиқли, тенг ўлчовли ҳаракат қилади.

Агар массалар маркази бошланғич пайтда тинч ҳолатда бўлса, у ҳолда $\overline{v}_c = 0$ бўлиб, натижада

$$\bar{r}_c = \text{const},$$

яъни система ҳаракатланганда системанинг массалар маркази тинч ҳолатда қолади.

2. Фараз қилайлик, системага таъсир этувчи ташқи кучларнинг бош вектори нолдан фарқли бўлиб, унинг бирор ўқдаги проекцияси нолга тенг бўлсин:

$$R_x^e = X^e = 0.$$

У ҳолда (21.4) тенгламаларнинг биринчисидан

$$\ddot{x}_c = 0$$

$$\dot{x}_c' = \text{const}$$

келиб чиқади.

Демак, системага таъсир этувчи ташқи кучларнинг бирор ўқдаги проекцияларининг алгебраик йиғиндиси нолга тенг бўлса, система массалар маркази тезлигининг шу ўқдаги проекцияси ўзгармас бўлади. Хусусан, агар бошланғич пайтда $\dot{x}_c = v_{cx_0} = 0$ бўлса, системанинг ҳаракати давомида $v_{cx} = 0$ бўлади, яъни бу ҳолда система массалар марказининг координатаси x_c ўзгармай қолади:

$$x_c = x_{c_0} = \text{const}.$$

Олинган натижалар система массалар маркази ҳаракатининг сақланиш қонунини ифодалайди.

Система массалар маркази ҳаракатининг сақланиш қонунини қўллашга оид бир неча мисоллар келтирамиз.

1. Ҳавонинг қаршилигини ҳисобга олмай, горизонтга нисбатан қиялатиб $\bar{v}_0$ бошланғич тезлик билан отилган тўп ўқининг оғирлик кучи таъсиридаги ҳаракатини текширамиз. Ўқ учиб кетаётганда ҳавода ёрилса, унинг бўлаклари турли томонга учиб кетади, лекин бўлакларининг бирортаси ерга бориб тушгунча уларнинг массалар маркази илгариги ҳаракатини давом эттиради. Бўлакчалардан бирортаси ерга тушгандан сўнг, системага таъсир этувчи ташқи кучларга Ернинг реакция кучи ҳам қўшилиб, ўқ массалар марказининг ҳаракатини ўзгартиради. Ўқ ёрилганда ҳосил бўладиган кучлар моҳияти бўйича ички кучлардан иборат бўлгани учун улар ўқ массалар марказининг ҳаракатини ўзгартира олмайди.

2. Абсолют силлиқ горизонтал текислик устида турган одам ўзича горизонтал йўналишда ҳаракат қила олмайди. Чунки одамнинг оғирлиги ва горизонтал силлиқ текисликнинг нормал реакцияси ташқи кучлар бўлиб, бу иккала куч вертикал йўналгани сабабли уларнинг горизонтал ўқдаги проекциялари йиғиндиси нолга тенг. Агар одам бошланғич пайтда тинч ҳолатда бўлса, массалар маркази ҳаракатининг сақланиш қонунига кўра, у ўз гавдасининг масса марказига горизонтал кўчиш бера олмайди. Масалан, одам ўнг оёғини олдинга кўтарганда унинг чап оёғи орқага сурилади ва массалар маркази ўз жойида қолади. Одамнинг оёқ кийимн билан горизонтал текислик

орасида сирпанишдаги ишқаланиш мавжуд бўлганда, одам чап оёғининг орқага кетишига қаршилик кўрсатадиган ва олдинга йўналган ишқаланиш кучи таъсир этади. Бунда ишқаланиш кучи ташқи куч бўлиб, одамнинг олдинга ҳаракат қилишига имкон беради.

3. Паровоз, автомобиль ва шунга ўхшаш системаларнинг горизонтал йўналишдаги ҳаракатини ҳам шундай тушунтириш мумкин. Двигателдаги газнинг поршенга босими автомобилга нисбатан ички куч бўлгани туфайли автомобилнинг массалар марказини ҳаракатлантира олмайди. Двигателдан етакчи ғилдиракларга айлантирувчи момент узатилиши ҳисобига етакчи ғилдирак айланади. Автомобиль ўнгга ҳаракатланганда етакчи ғилдиракнинг текисликка тегиб турган нуқтаси чапга силжишга интилади. У ҳолда ғилдиракка ўнг томонга йўналган ишқаланиш кучи таъсир этади. Бу куч ташқи куч бўлиб, автомобиль массалар марказининг ўнг томонга силжишига имкон беради. Агар ишқаланиш кучи бўлмаса, ёки бу куч етакланувчи ғилдиракнинг қаршилигини енга олмаса, автомобиль ҳаракатлана олмайди. Бунда етакчи ғилдирак айланса-да, автомобиль жойидан қўзғалмайди.

Изоҳ. Етакланувчи ғилдиракка айлантирувчи момент таъсир қилмасдан, балки унинг ўқига қўйилган куч таъсир қилади. Бу куч таъсирида ҳамма ғилдираклар ва улар билан бирга ғилдиракнинг текисликка тегиб турган нуқтаси ҳам автомобиль билан биргаликда ўнг томонга силжийди. Бунда ғилдиракка орқага йўналган ишқаланиш кучи таъсир этади. Бу куч ташқи куч бўлиб, ғилдирак ҳаракатини тўхтатишга интилади.

115-§. Моддий нуқта ва механик системанинг ҳаракат миқдори

Механикада моддий нуқта (механик система) нинг ҳаракат ўлчовларидан бири сифатида унинг ҳаракат миқдори олинади. Нуқта массаси билан тезлик вектори кўпайтмасига тенг вектор катталик *нуқтанинг ҳаракат миқдори* дейилади. Нуқтанинг ҳаракат миқдори $m\overline{v}$ тезлик вектори бўйича йўналади.

Халқаро СИ бирликлар системасида нуқтанинг ҳаракат миқдори кг·м/с билан ўлчанади.

Система нуқталари ҳаракат миқдорларининг геометрик йиғиндисига тенг бўлган $\overline{K}$ вектор *системанинг ҳаракат миқдори* дейилади:

$$\overline{K} = \sum m_k \overline{v}_k. \qquad (21.5)$$

(21.5) да $\overline{v} = \frac{d\overline{r}_k}{dt}$ ва m_k=const бўлгани учун

$$\overline{K} = \sum m_k \frac{d\overline{r}_k}{dt} = \frac{d}{dt} \sum m_k \overline{r}_k.$$

(20.1) га кўра

$$\sum m_k \overline{r}_k = M\overline{r}_c$$

бўлгани учун

$$\overline{K} = \frac{d}{dt}\left(M\overline{r}_C\right) = M\frac{d\overline{r}_c}{dt} = M\overline{v}_C.$$

Шундай қилиб,

$$\overline{K} = M\overline{v}_{\bullet}. \qquad (21.6)$$

Демак, *системанинг ҳаракат миқдори система массаси билан унинг массалар маркази тезлигининг кўпайтмасига тенг.*

(21.6) дан кўрамизки, агар массалар маркази системанинг ҳаракати давомида кўзғалмасдан қолса, системанинг ҳаракат миқдори нолга тенг бўлади. Масалан, массалар марказидан ўтувчи ўқ атрофида айланма ҳаракатдаги жисмнинг ҳаракат миқдори нолга тенг бўлади.

Агар жисм мураккаб ҳаракатда бўлса, $\overline{K}$ фақат системанинг массалар маркази билан биргаликдаги илгариланма ҳаракатини ифодалайди. Масалан, горизонтал рельсда ҳаракатланаётган ғилдиракнинг ҳаракат миқдори, ғилдиракнинг массалар маркази C нуқта атрофида қандай айланишидан қатъий назар, $\overline{K} = M\overline{v}_{\bullet}$ бўлади.

116-§. Моддий нуқта ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теорема

Бирор қўзғалмас $Oxyz$ координаталар системасига нисбатан M нуқтанинг $\overline{F}$ куч таъсиридаги ҳаракатини кузатамиз (199-расм). Бу нуқтанинг ҳаракат қонунини қуйидагича ёзамиз:

$$m\overline{w} = \overline{F}$$

ёки

$$\frac{d\,(m\overline{v})}{d\,t} = \overline{F}. \qquad (21.7)$$

Бунда $m\overline{v}$ нуқтанинг ҳаракат миқдори векторини ифодалайди. (21.7) нинг иккала томонини dt га кўпайтирсак,

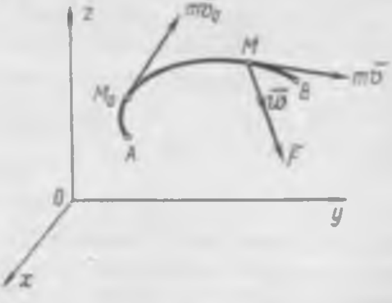
$$d\,(m\overline{v}) = \overline{F}\,d\,t \qquad (21.8)$$

ёки

$$d\,(m\overline{v}) = d\overline{S}$$

келиб чиқади. Бу ерда $d\overline{S} = \overline{F}\,d\,t$ — *кучнинг dt вақт ичидаги элементар импульси* дейилади.

Моддий нуқтанинг ҳаракат миқдори ҳақидаги теореманинг дифференциалли (21.8) ифодасини қуйидагича таърифлаймиз: *нуқта*



199- расм.

ҳаракат миқдорининг дифференциали нуқтага таъсир этувчи кучнинг элементар импульсига тенг.

Нуқта ҳаракат миқдорининг чекли вақт ичида ўзгаришини аниқлаш учун (21.8) ни интеграллаймиз:

$$m\bar{v}-m\bar{v}_0=\int_0^t=\bar{F}\,dt, \qquad (21.9)$$

бунда $\bar{v}_0$ билан $t=0$ бошланғич пайтдаги тезлик, $\bar{v}$ билан исталган t пайтдаги тезлик кўрсатилган. Кучнинг чекли $[0, t]$ вақт оралиғидаги импульси учун

$$\bar{S}=\int_0^t \bar{F}\,dt \qquad (21.10)$$

белгилаш киритиб, (21.9) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$m\bar{v}-m\bar{v}_0=\bar{S}. \qquad (21.11)$$

(21.11) ифода *чекли вақт оралиғида нуқта ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теоремани* ифодалайди; *нуқта ҳаракат миқдорининг бирор чекли вақт оралиғида ўзгариши унга таъсир этувчи кучнинг шу вақт ичидаги импульсига тенг.* (21.11) ни координата ўқларига проекциялаб

$$\left.\begin{aligned} m v_x - m v_{0x} &= S_x \\ m v_y - m v_{0y} &= S_y \\ m v_z - m v_{0z} &= S_z \end{aligned}\right\} \qquad (21.12)$$

системани ҳосил қиламиз. (21.12) даги $S_x=\int_0^t X\,dt$, $S_y=\int_0^t Y\,dt$, $S_z=\int_0^t Z\,dt$ нуқтага қўйилган куч импульсининг координата ўқларидаги проекцияларидир.

Демак, *чекли вақт ичида нуқта ҳаракат миқдорининг бирор координата ўқи бўйича ўзгариши нуқтага таъсир этувчи кучнинг шу вақт оралиғидаги импульсининг мазкур ўқдаги проекциясига тенг.*

Нуқта ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теоремадан қуйидаги муҳим натижаларни оламиз.

1. Агар нуқтага таъсир этувчи куч $\bar{F}=0$ бўлса, (21.8) га кўра

$$d(m\bar{v})=0$$

ёки

$$m\bar{v}=\text{const}, \qquad (21.13)$$

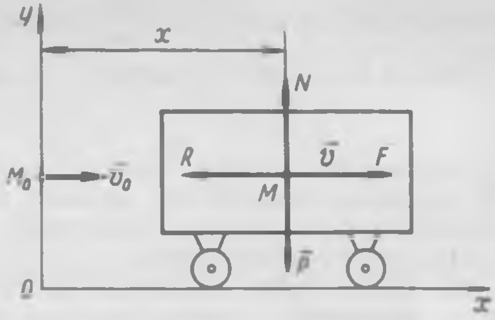
яъни нуқтага таъсир этувчи куч нолга тенг бўлса, нуқтанинг ҳаракат миқдори, миқдор ва йўналиш жиҳатдан ўзгармас бўлади. (21.13) тенглик *нуқта ҳаракат миқдорининг сақланиш қонунини* ифодалайди.

2. Агар кучнинг бирор ўқдаги проекцияси нолга тенг бўлса:

$$X=0,$$

у ҳолда

$$m v_x = \text{const}.$$



200- расм.

Агар нуқтага боғланишлар қўйилган бўлса, (21.11) теоремадан фойдаланишда берилган кучларнинг импульси қаторига боғланиш реакция кучларининг импульсларини ҳам қўшиш керак.

37- масала. Массаси m га тенг бўлган локомотив йўлнинг горизонтал қисмида ҳаракатланади (200- расм). Локомотивга тортиш кучи $F=\text{const}$ ва ўзгармас R қаршилик кучи таъсир этади. Локомотивнинг тезлиги қандай t вақт оралиғида v_0 дан v га ўзгаради?

Ечиш. Локомотивни моддий нуқта деб қараймиз ва Ox ўқни ҳаракат йўналиши бўйича йўналтирамиз. Локомотивга таъсир этувчи кучларни расмда кўрсатамиз. Локомотивнинг оғирлик кучини $\overline{P}$ билан белгилаймиз. Локомотив рельс орқали боғланишда бўлгани учун рельснинг нормал реакцияси $\overline{N}$ ни ҳам киритиш лозим. Моддий нуқта ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги (21.12) теореманинг Ox ўққа проекциясидан фойдаланамиз:

$$m v - m v_0 = (F-R)t,$$

бундан

$$t=\frac{m(v-v_0)}{F-R}.$$

117-§. Система ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теорема

Механик система N та нуқтадан ташкил топган бўлсин. Системанинг ихтиёрий M_k нуқтасига таъсир этувчи ташқи кучлар ҳамда ички кучларнинг тенг таъсир этувчилари мос равишда $\overline{F}_k^e$, $\overline{F}_k^i$ бўлсин. У ҳолда система нуқталари ҳаракатининг дифференциал тенгламалари қуйидагича ёзилади:

$$\frac{d}{dt}\left(m_k \overline{v}_k\right)=\overline{F}_k^e+\overline{F}_k^i,\quad \left(k=\overline{1,\ N}\right). \qquad (21.14)$$

(21.14) тенгламалар системасини қўшамиз:

$$\frac{d}{dt}\sum m_k \overline{v}_k=\sum \overline{F}_k^e+\sum \overline{F}_k^i, \qquad (21.15)$$

бунда: $\sum m_k \overline{v}_k=\overline{K}$ — системанинг ҳаракат миқдори; $\sum \overline{F}_k^e=\overline{R}^e$ — ташқи кучларнинг бош вектори. Ички кучларнинг хоссасига кўра

$$\sum \overline{F}_k^i = 0.$$

Натижада (21.15) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\frac{d\overline{K}}{dt} = \overline{R}^e. \qquad (21.16)$$

(21.16) тенглама *система ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теоремани* ифодалайди: *система ҳаракат миқдорининг вақт бўйича биринчи ҳосиласи системага таъсир этувчи ташқи кучларнинг бош векторига тенг.*

(21.16) ни Декарт координата ўқларига проекциялаб, система ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теоремани скаляр кўринишда ёзамиз:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dK_x}{dt} &= R_x^e, \\ \frac{dK_y}{dt} &= R_y^e, \\ \frac{dK_z}{dt} &= R_z^e, \end{aligned}\right| \qquad (21.17)$$

яъни, *система ҳаракат миқдорининг бирор ўқдаги проекциясидан вақт бўйича олинган ҳосила, системага таъсир этувчи ташқи кучлар бош векторининг мазкур ўқдаги проекциясига тенг.*

Система ҳаракат миқдорининг чекли вақт ичида ўзгаришини аниқлаш учун (21.16) ни dt га кўпайтириб, интеграллаймиз:

$$\overline{K} = \overline{K}_0 = \int_0^t \overline{R}^e dt$$

ёки

$$\overline{K} - \overline{K}_0 = \overline{S}^e. \qquad (21.18)$$

Бунда $\overline{K}_0$ билан $t = 0$ бошланғич пайтдаги, $\overline{K}$ билан ихтиёрий t вақтдаги системанинг ҳаракат миқдори белгиланган; $\overline{S}^e = \int_0^t \overline{R}^e dt$ — t вақт ичида системага таъсир этувчи ташқи кучлар бош векторининг импульси.

(21.18) ифода *чекли вақт ичида система ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теоремани* ифодалайди: *система ҳаракат миқдорининг чекли вақт ичида ўзгариши системага таъсир этувчи ташқи кучлар бош векторининг шу вақт ичидаги импульсига тенг.*

(21.18) ни Декарт координата ўқларига проекциялаб қуйидагини ёзамиз:

$$\left.\begin{aligned} K_x - K_{0x} &= S_x^e, \\ K_y - K_{0y} &= S_y^e, \\ K_z - K_{0z} &= S_z^e. \end{aligned}\right| \qquad (21.19)$$

Система ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теорема билан система массалар марказининг ҳаракати ҳақидаги теоремалар орасидаги муносабатни аниқлаймиз. Бунинг учун (21.6) ни (21.16) га қўямиз:

$$\frac{d}{dt}\left(M\overline{v_c}\right) = \overline{R^e}$$

ёки

$$\overline{M}\omega_c = \overline{R}^e.$$

Бу муносабат система массалар маркази ҳаракати ҳақидаги теоремани ифодалаши бизга маълум.

Шундай қилиб, умуман олганда, система массалар марказининг ҳаракати ҳақидаги теорема ва система ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теорема битта теореманинг икки хил кўрнишини ифодалайди. Қаттиқ жисмнинг ҳаракатини ўрганишда бу теоремаларнинг исталган бирортасидан фойдаланиш мумкин. Бунда кўпинча, массалар марказининг ҳаракати ҳақидагн теоремадан фойдаланилади. Бироқ, туташ муҳит (суюқлик ёки газлар) учун бутун системанинг массалар маркази тушунчаси амалда ўз маъносини йўқотади. Шу сабабли, бу ҳолда масалалар ечганда система ҳаракат мнқдорнинг ўзгариши ҳақидаги теоремадан фойдаланиш мақсадга мувофиқ бўлади. Система ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақндаги теоремадан зарба назариясида, ракеталар ҳаракатини ўрганишда ва бошқа бир қатор амалнй масалаларни ечишда ҳам самарали фойдаланиш мумкин.

118-§. Система ҳаракат миқдорининг сақланиш қонуни

Система ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теоремадан қуйндаги муҳим натижаларни оламиз.

1. Система нуқталарига таъсир этувчи ташқи кучларнинг бош вектори нолга тенг бўлсин:

$$\overline{R}^e = 0.$$

У ҳолда (21.16) га кўра системанинг ҳаракат миқдори ўзгармас бўлади:

$$\overline{K} = \sum m_k \overline{v}_k = M\overline{o}_c = \overline{C}. \qquad (21.20)$$

(21.20) тенглик *система ҳаракат миқдорининг сақланиш қонунининг векторли ифодаси* дейилади.

Шундай қилаб, *агар системага таъсир этувчи ташқи кучларнинг бош вектори нолга тенг бўлса, у ҳолда система ҳаракат миқдорининг вектори модуль ва йўналиш жиҳатдан ўзгармасдан қолади.*

(21.20) даги $\overline{C}$ ўзгармас миқдор система таркибига кирган нуқталарнинг бошланғич ҳолатига боғлиқ. (21.20) дан кўрамизки, бошланғич пайтда системанинг ҳаракат миқдори нолга тенг бўлса, ташқи кучларнинг бош вектори нолга тенг бўлади ва ички кучлар системанинг ҳаракат миқдорини ўзгартира олмайди.

2. Система нуқталарига таъсир этувчи ташқи кучлар бош векторининг бирор (масалан, Ox) ўқдаги проекцияси нолга тенг бўлсин:

$$R^e_x = 0,$$

у ҳолда (21.17) га кўра

$$K_x = M\dot{x}_c = \text{const} \tag{21.21}$$

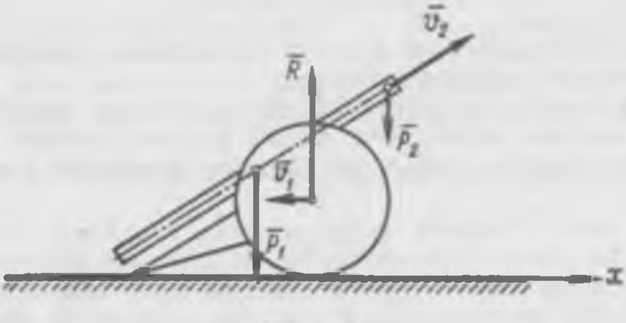
бўлади. (21.21) тенглик бирор *координата ўқи бўйича система ҳаракат миқдорининг сақланиш қонунини* ифодалайди: *системага таъсир этувчи кучлар бош векторининг бирор ўқдаги проекцияси нолга тенг бўлса, у ҳолда система ҳаракат миқдорининг мазкур ўқдаги проекцияси ўзгармас бўлади.*

119-§. Механик система ҳаракат миқдорининг ўзгариши ва система массалар марказининг ҳаракати ҳақидаги теоремаларни қўллашга оид масалалар

Механик система ҳаракат миқдорининг ўзгариши ва система массалар марказининг ҳаракати ҳақидаги теоремаларни қўллашга оид масалалар қуйидаги тартибда ечилади.

1. Қўзғалмас координаталар системаси танлаб олинади.
2. Система нуқталарига таъсир этувчи барча ташқи кучлар ҳамда боғланиш реакция кучлари расмда тасвирланади.
3. Масаланинг шартига кўра, теоремаларни ифодаловчи (21.4), (21.17), (21.19) тенгламалардан бирортаси тузилади.
4. Бошланғич шартлар аниқланади.
5. Берилган бошланғич шартлардан фойдаланиб тузилган дифференциал тенгламаларни интеграллаб, изланаётган номаълумлар топилади.

38-масала. Горизонт билан $\alpha = 30°$ бурчак ташкил қилувчи тўп стволининг оғирлиги $P_1 = 11000$ Н, тўп ўқининг оғирлиги $P_2 = 540$ Н. Ўқ стволнинг оғзидан чиқишида $v_2 = 900$ м/с тезлик билан ҳаракат қилади. Ўқнинг отилиб чиқиш пайтида тўп стволининг эркин суратда орқага тепиш тезлигининг горизонтал тузувчиси аниқлансин (201-расм).



201-расм.

Ечиш. Координаталар бошини O нуқтада олиб, x ўқни горизонтал бўйлаб ўнгга йўналтирамиз.

Тўп ствoли ва ўқи механик системани ташкил этади. Системага ствол ва ўқнинг оғирлик кучлари $\overline{P}_1$ ва $\overline{P}_2$ ҳамда боғланиш реакция кучи $\overline{P}$ таъсир қилади. Бу кучлар x ўққа перпендикуляр бўлгани учун $R_x^e = 0$. Шу сабабли (21.17) ни тузсак, система ҳаракат миқдорининг x ўқ бўйича сақланиш қонуни (21.21) га эга бўламиз:

$$K_x = \text{const}.$$

Бошланғич $t = 0$ пайтда, яъни ўқ отилиши олдида, ствол ва ўқнинг тезликлари нолга тенг:

$$v_{10} = 0; \; v_{20} = 0.$$

Ўқ тўп ствoлидан чиқиш пайтидаги ствол тезлигининг горизонтал ташкил этувчиси v_{1x} ни аниқлаш керак.

Берилган бошланғич шартларга кўра

$$K_x = 0,$$

яъни

$$m_1 v_{1x} - m_2 v_{2x} = 0$$

ёки

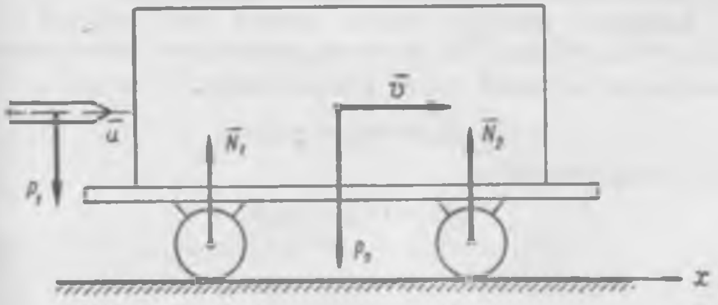
$$\frac{P_1}{g} v_{1x} + \frac{P_2}{g} v_2 \cos 30^\circ = 0,$$

бундан

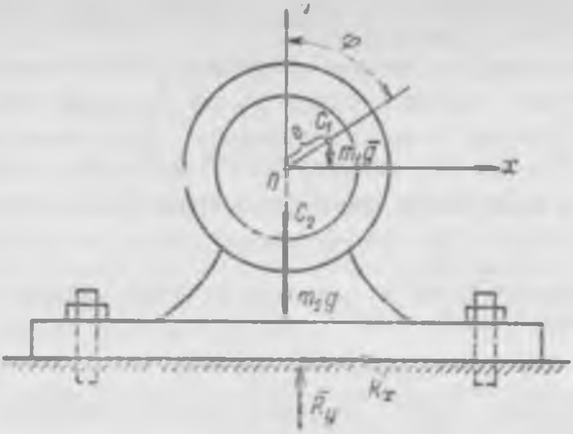
$$v_{1x} = -\frac{P_2 v_2}{P_1} \cos 30^\circ = -\frac{540 \cdot 900}{11000} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -3{,}82 \text{ м/с}.$$

Бунда манфий ишора тўп ствoлининг тепиш тезлиги ўқ ҳаракатига қарама-қарши томонга қараб йўналганлигини ифодалайди.

39-масала. $\overline{v}$ тезлик билан горизонтал йўналишда учиб келаётган m_1 массали ўқ аравачага ўрнатилган ва қум тўлдирилган яшикка бориб тегади (202-расм). Агар аравачанинг мазкур яшик билан бир-



202- расм.



203- расм.

галикдаги массаси m_2 га тенг бўлса, ўқ яшикка урилгандан кейин аравача қандай тезлик билан ҳаракатланади?

Ечиш. Ньютоннинг учинчи қонунига кўра, ўқ яшикка урилганда, ўқ билан аравачанинг ўзаро таъсир кучлари миқдор жиҳатдан бир-бирига тенг бўлади. Агар ўқ билан аравачани битта механик система деб қарасак, бу кучлар ички кучларни ташкил этади. Шу сабабли бу система учун ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теоремани қўллаганда мазкур кучлар қатнашмайди.

Агар Ox ўқни аравачанинг ҳаракат йўналишида горизонтал ўнг томонга йўналтирсак, у ҳолда система нуқталарига таъсир этувчи $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ оғирлик кучлари ва рельс $\overline{N}_1$, $\overline{N}_2$ реакция кучларининг бу ўқдаги проекциялари нолга тенг бўлади. Бу ҳолда ҳаракат миқдорининг сақланиш қонуни ўринли бўлади:

$$K_x = \text{const}$$

ёки

$$K_{0x} = K_x \, , \tag{1}$$

бунда K_{0x}, K_x — мос равишда ўқ аравачага урилишидан олдинги ва урилгандан кейинги системанинг ҳаракат миқдорлари.

Ўқ аравачага урилиши олдида аравача тинч ҳолатда [бўлгани учун $K_{0x} = m_1 u$ бўлади. Ўқ аравачага урилгандан кейин аравача билан биргаликда v тезлик билан ҳаракатланади. У ҳолда

$$K_x = (m_1 + m_2) v$$

бўлиб, (1) тенгликка кўра

$$m_1 u = (m_1 + m_2) v.$$

Бунда

$$v = \frac{m_1}{m_1 + m_2} u.$$

40-масала. Умумий массаси m бўлган электр мотори горизонтал пойдеворга болтлар билан маҳкамланган. Роторнинг массаси m_1 ва унинг массалар маркази айланиш ўқидан $OC_1 = l$ масофада жойлашган ҳамда ротор $\varphi = \frac{\pi t_2}{2}$ қонунга мувофиқ айланади. $t = 1$ с ўтганда двигателнинг пойдеворга кўрсатган вертикал босими ва болтлардаги горизонтал зўриқиш топилсин (203-расм).

Ечиш. Электр мотори статорининг оғирлик марказини ва массасини мос равишда C_2 ва m_2 деб белгилаймиз. Ox ва Oy координата ўқларини ўтказамиз. Статор ва ротордан ташкил топган системага уларнинг оғирлик кучлари m_2g, m_1g, пойдеворнинг нормал реакция кучи $R_y = R_{1y} + R_{2y}$ ва болтларнинг горизонтал реакцияси $R_x = R_{1x} + R_{2x}$ таъсир этади. Система массалар марказининг ҳаракати ҳақидаги теореманинг координата ўқлардаги (21.4) ифодасидан фойдаланамиз:

$$m\ddot{x}_c = R_x^e;\ m\ddot{y}_c = R_y^e. \tag{2}$$

Агар C_1 ва C_2 нуқталарнинг координаталарини мос равишда $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$ билан белгиласак, системанинг массалар маркази координаталари

$$x_c = \frac{1}{m}(m_1x_1 + m_2x_2),$$
$$y_c = \frac{1}{m}(m_1y_1 + m_2y_2)$$

формулалардан аниқланади. x_2, y_2 координаталар ўзгармас бўлганидан

$$\ddot{x}_c = \frac{m_1}{m}\ddot{x};\ \ddot{y}_c = \frac{m_1}{m}\ddot{y}_1.$$

Натижада (2) қуйидагича ёзилади:

$$m_1\ddot{x}_1 = R_x\ ,$$
$$m_1\ddot{y}_1 = -mg + R_y\ . \tag{3}$$

Расмдан x_1, y_1 координаталарни топамиз:

$$x_1 = l\sin\varphi = l\sin\frac{\pi t^2}{2},$$
$$y_1 = l\cos\varphi = l\cos\frac{\pi t^2}{2},$$

бундан

$$\ddot{x}_1 = \pi l\left(\cos\frac{\pi t^2}{2} - \pi t^2\sin\frac{\pi t^2}{2}\right),$$
$$\ddot{y}_1 = -\pi l\left(\sin\frac{\pi t^2}{2} - \pi l_2\cos\frac{\pi t^2}{2}\right).$$

Шунга кўра (3) дан

$$R_x = m_1 \pi l \left(\cos\frac{\pi t^2}{2} - \pi t^2 \sin\frac{\pi t^2}{2}\right),$$

$$R_y = mg - m_1 \pi l \left(\sin\frac{\pi t^2}{2} + \frac{\pi t^2}{2}\cos\frac{\pi t^2}{2}\right)$$

ни ҳосил қиламиз.

$t = 1$ с бўлганда

$$R_x = -m_1 \pi^2 l,$$
$$R_y = mg - m_1 \pi l.$$

Бу тенгликлардан кўрамизки, $t = 1$ с бўлганда $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ва R_x горизонтал равишда чапга йўналади; $mg > m_1 \pi l$ бўлганда R_y вертикал юқорига йўналади.

120-§. Система ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теоремани суюқликнинг стационар оқимига татбиқ этиш. Эйлер теоремаси

Система ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теоремадан туташ муҳитлар механикасида кенг фойдаланилади.

Фараз қилайлик, моддий нуқталар системаси берилган пайтда σ_1 ва σ_2 кесимлар билан чегараланган τ ҳажмга эга бўлган қувур ичида оқувчи суюқликдан иборат бўлсин (204-расм). Суюқликнинг қувурдаги оқимини стационар оқимдан иборат, яъни ҳар бир σ_1 ва σ_2 кесимдаги суюқлик зарраларининг тезликлари бир хилда бўлиб, вақтга боғлиқ эмас деб қараймиз. Бу кесимлардаги суюқлик зарраларининг тезликлари $\overline{v_1}$ ва $\overline{v_2}$ га тенг бўлсин. У ҳолда

$$d\overline{K} = \rho_2 v_2 \sigma_2 (dt)\, \overline{v_2} - \rho_1 v_1 \sigma_1 (dt)\, \overline{v_1}, \tag{21.22}$$

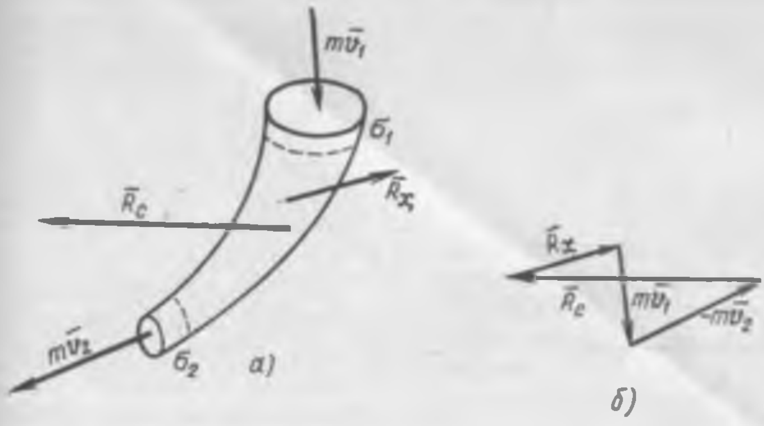
бунда ρ_1 ва ρ_2 билан σ_1 ва σ_2 кесимлардаги зичлик белгиланган; $\rho_1 v_1 \sigma_1$, $\rho_2 v_2 \sigma_2$ эса мазкур кесимлар орқали вақт бирлиги ичида оқиб ўтувчи суюқлик массаларини ифодалайди. Қувурнинг иктиёрий кесими орқали вақт бирлиги ичида бир хил миқдордаги суюқлик массаси оқиб ўтади деб қарасак,

$$\rho_1 v_1 \sigma_1 = \rho_2 v_2 \sigma_2 = m$$

бўлади ва (21.22) қуйидагича ёзилади:

$$\frac{d\overline{K}}{dt} = m\left(\overline{v_2} - \overline{v_1}\right). \tag{21.23}$$

Туташ муҳитлар механикасида бирор ҳажмни банд қилган суюқликка таъсир этувчи кучлар суюқликнинг ҳар бир заррасига таъсир этувчи ҳажм кучларига (масалан, оғирлик кучи) ва берилган ҳажмнинг сиртидаги суюқлик зарраларига таъсир этувчи сирт кучларига



204- расм.

(масалан, суюқлик ҳаракатланганда қувур деворида ҳосил бўладиган ишқаланиш кучи) бўлинади. У ҳолда ташқи кучларнинг бош вектори қуйидагича аниқланади:

$$\overline{R}^e = \overline{R}_x + \overline{R}_c ,$$

бунда $\overline{R}_x$ ва $\overline{R}_c$ лар мос равишда ҳажм кучларининг ва сирт кучларининг бош векторларини ифодалайди.

Натижада система ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги

$$\frac{d\overline{K}}{dt} = \overline{R}_x + \overline{R}_c \qquad (21.24)$$

теорема қуйидагича ёзилади:

$$m(\overline{v}_2 - \overline{v}_1) = \overline{R}_x + \overline{R}_c$$

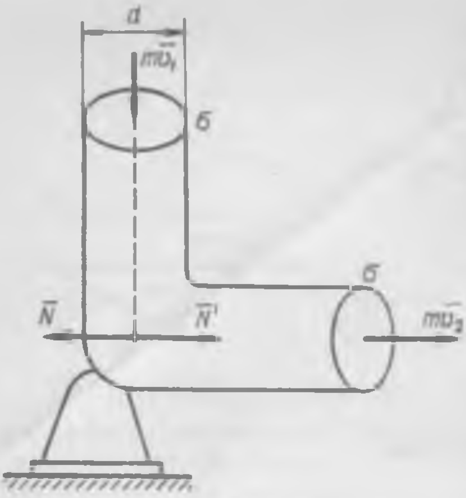
ёки

$$m\overline{v}_1 - m\overline{v}_2 + \overline{R}_x + \overline{R}_c = 0. \qquad (21.25)$$

Яъни *қувурнинг иккита ихтиёрий кесими орқали оқиб ўтувчи суюқликнинг шу кесимлар орасидаги ҳажмнинг ички томонига йўналган вақт бирлигидаги ҳаракат миқдорлари ҳамда ҳажм ва сирт кучлари бош векторларининг геометрик йиғиндиси нолга тенг бўлади*. Бу *Эйлер теоремаси* деб аталади. (21.25) ни 204-расм, *б* билан тасвирлаш мумкин.

41- масала. Диаметри $d = 0{,}3$ м бўлган қувурда $v = 2$ м/с тезлик билан сув оқади. Қувур тирсагидаги таянчга тушадиган қўшимча босимнинг горизонтал ташкил этувчиси N аниқлансин (205-расм).

Ечиш. Қувур тирсагини тўлдириб оқувчи сувнинг зарраларига ҳар онда оғирлик кучи ва қувур деворида ҳосил бўладиган реакция кучи таъсир этади. Оғирлик кучлари ҳажм кучларидан иборат бўлиб, уларнинг бош вектори қувурнинг берилган ҳажмини банд этган сув-



205- расм.

нинг оғирлиги кучига тенг ва вертикал бўйлаб йўналгани учун унинг горизонтал ўқдаги проекцияси нолга тенг бўлади.

Қувур тирсагидаги таянчга сувнинг оқиши натижасида тушадиган қўшимча босимнинг излаиаётган горизонтал ташкил этувчиси $\bar{N}$ қувур тирсагида ҳосил бўладиган сирт кучларидан иборат реакция кучи бош векторининг горизонтал ташкил этувчиси $\bar{N}'$ га миқдор жиҳатдан тенг, йўналиши қарама-қарши бўлади. Қувурга кирувчи сувнинг $\bar{v}_1$ тезлиги вертикал ва қувурдан чиқувчи сувнинг $\bar{v}_2$ тезлиги горизонтал йўналгани учун (21.25) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$N' - m v_2 = 0,$$

ёки $N' = N$ ва $v_2 = v$ бўлганидан

$$N = m v = \rho v \sigma \cdot v = \frac{\pi d^2}{4} \rho v^2 = 28{,}9 \text{ Н}.$$

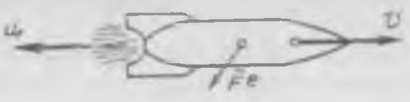
121-§. Ўзгарувчан массали жисм ҳақида тушунча. И. В. Мешчерский тенгламаси

Одатда, назарий механикада ҳаракатланаётган жисмнинг массаси ўзгармас деб қаралади. Лекин техникада жисмларнинг массаси вақтга боғлиқ равишда ўзгарадиган масалалар кўп учрайди. Бунда жисмларнинг массаси ундан зарраларнинг ажралиши ёки унга ташқаридан зарраларнинг қўшилиши натижасида ўзгаради. Масалан, ракета ёки самолёт ҳаракатланганда ёнилғининг ёниши ҳисобига уларнинг массаси камая боради, ғалтакка ипнинг ўралиши натижасида унинг массаси орта боради ва ҳоказо.

Вақт ўтиши билан зарралар қўшилиши ёки ажралиши натижасида массаси узлуксиз равишда ўзгарадиган жисм *ўзгарувчан массали жисм* деб аталади.

Ўзгарувчан массали жисм ҳаракатланганда унинг ўтган масофасига нисбатан жисмнинг ўлчамларини эътиборга олмаслик мумкин бўлса ёки жисм илгариланма ҳаракатда бўлса, у ҳолда бундай жисмга (зарралар қўшилиши ёки ажралиши натижасида массалар маркази ҳолатининг жисмга нисбатан ўзгаришини эътиборга олмай) *ўзгарувчан массали нуқта* деб қараймиз.

Массаси узлуксиз равишда камайиб борувчи ракетани ўзгарувчи массали нуқта деб қараб, унинг ҳаракати дифференциал тенгламасини чиқарамиз.



206- расм.

Ёнилғи ёнганда ракетадан ажралувчи зарраларнинг ракета корпусига нисбатан нисбий тезлигини $\overline{u}_r$ билан белгилаймиз (206-расм). Ракетадан ажралувчи зарраларни ва ракетани битта система деб қараймиз. У ҳолда ракетанинг массаси M ёнилғи ёниши натижасида ажралувчи зарралар ҳисобига камая боради ҳамда M ни вақтнинг узлуксиз функциясидан иборат деб қараймиз:

$$M = f(t).$$

Шу сабабли dt вақт ичида ажралувчи зарраларнинг массасини dM билан белгиласак, $dM < 0$ бўлади, бинобарин, сон модули таърифига кўра $|dM| = -dM$.

(21.16) тенгламани берилган система учун

$$d\overline{K} = \overline{F}^e\,dt \tag{21.26}$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бунда $\overline{F}^e$ — ракетага таъсир этувчи ташқи кучларнинг геометрик йиғиндисига тенг куч.

Агар ракетанинг $\overline{v}$ тезлиги dt вақт ичида $d\overline{v}$ га ўзгарса, у ҳолда системанинг ҳаракат миқдори $M\,d\overline{v}$ га ўзгаради. Ажралувчи зарралар эса ракетага нисбатан $\overline{u}_r$ нисбий тезликка эга бўлади ва ҳаракат миқдори $-\overline{u}_r\,dM$ га ўзгаради. Шундай қилиб,

$$d\overline{K} = M\,d\overline{v} - \overline{u}_r\,dM. \tag{21.27}$$

(21.27) ни (21.26) га қўйиб, dt га бўлсак,

$$M\frac{d\overline{v}}{dt} = \overline{F}^e + \overline{u}_r\frac{dM}{dt} \tag{21.28}$$

тенглама келиб чиқади.

(21.28) тенглама *ўзгарувчан массали нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламасини* ифодалайди. Бу тенгламани 1897 йилда рус олими И. В. Мешчерский тавсия этган ва шунинг учун унинг номи билан аталади.

(21.28) даги

$$\overline{u}_r\frac{dM}{dt} = \overline{\Phi} \tag{21.29}$$

катталик куч ўлчамлигига эга бўлади ва *реактив куч* дейилади. Бунда $\frac{dM}{dt}$ ажралувчи массанинг секундлик сарфини ифодалайди.

122-§. Циолковский формуласи

И. В. Мещерский тенгламасини қўллашга мисол тариқасида фақат реактив кучдан бошқа куч таъсир этмайдиган майдондаги ракетанинг ҳаракатини текширамиз. Бу ҳолда (21.28) да $\overline{F^e} = 0$ бўлади ва у

$$M\frac{d\overline{v}}{dt} = \overline{u}_r\,\frac{dM}{dt} \qquad (21.30)$$

кўринишда ёзилади.

x ўқни ракетанинг ҳаракат тезлиги $\overline{v}$ бўйича йўналтирамиз ва ракетадан ажралувчи зарраларнинг тезлиги $\overline{u}_r$ ни (ёнилғи ёниши натижасида ҳосил бўладиган газларнинг ракета двигателидан ажралиш тезлигини) ўзгармас ва $\overline{v}$ га қарама-қарши йўналган деб қараймиз. У ҳолда (21.30) ни x ўққа проекциялаб, ушбу кўринишда ёзамиз:

$$M\,dv = -u_r\,dM$$

ёки

$$dv = -u_r\,\frac{dM}{M}.$$

Бу тенгламани интеграллласак,

$$v = v_0 + u_r \ln\frac{M_0}{M}, \qquad (21.31)$$

бунда v_0 ва M_0 лар мос равишда ракетанинг бошланғич пайтдаги тезлигини ва массасини ифодалайди.

(21.31) формула ёрдамида ракета массасининг камайиши натижасида ракета тезлигининг ортиш қонуни аниқланади. Ракета корпусининг массасини $M_к$, ёнилғининг бошланғич массасини $M_ё$ билан белгиласак, ракетанинг бошланғич пайтдаги массаси $M_0 = M_ё + M_к$, ёнилғи ёниб бўлгандан кейинги массаси $M = M_к$ бўлади. Ёнилғи ёниб бўлганда ракета энг катта тезликка эришади ва бу тезлик (21.31) га асосан

$$v_{max} = v_0 + u_r \ln\left(1 + \frac{M_ё}{M_к}\right)$$

формуладан аниқланади. Бу формула *Циолковский формуласи* дейилади.

Агар $v_0 = 0$ бўлса,

$$v_{max} = u_r \ln\left(1 + \frac{M_ё}{M_к}\right).$$

Циолковский формуласидан кўрамизки, ракетанинг энг катта тезлиги ажралувчи зарраларнинг нисбий тезлигига тўғри мутаносиб равишда ўзгаради ҳамда $\frac{M_ё}{M_к}$ нисбат ортгани сари v_{max} ҳам орта боради. $\frac{M_ё}{M_к} = z$ сони *Циолковский сони* дейилади.

123- §. Моддий нуқта ҳаракат миқдорининг моменти ва системанинг кинетик моменти

Моддий нуқтанинг (механик системанинг) бирор марказ атрофидаги айланишини ифодалашда ҳаракатнинг ўлчови сифатида нуқта ҳаракат миқдорининг моменти (системанинг кинетик моменти) тушунчасидан фойдаланилади.

Статикада кўрганимиздек, $\overline{F}$ кучнинг O марказга нисбатан моменти

$$\overline{M}_O(\overline{F})=\overline{r}\times\overline{F}$$

тенглик билан ифодаланади. Бунда $\overline{r}$ ҳаракатланувчи нуқтанинг O марказга нисбатан радиус-векторини ифодалайди. Худди шунингдек, нуқта ҳаракат миқдори $m\overline{v}$ нинг шу марказга нисбатан моменти

$$\overline{l}_O=\overline{r}\times m\overline{v} \qquad (21.32)$$

формуладан аниқланади (207- расм). Бу вектор O нуқтага қўйилган деб қаралади ва момент маркази ҳамда $m\overline{v}$ вектор орқали ўтувчи текисликка перпендикуляр равишда шундай йўналтириладики, унинг мусбат учидан қаралганда O нуқта атрофида $m\overline{v}$ вектор йўналишидаги айланиш соат милининг айланишига тескари кўриниши керак.

Координаталар бошини O марказда олиб, қўзғалмас x, y, z ўқларни ўтказсак. (21.32) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

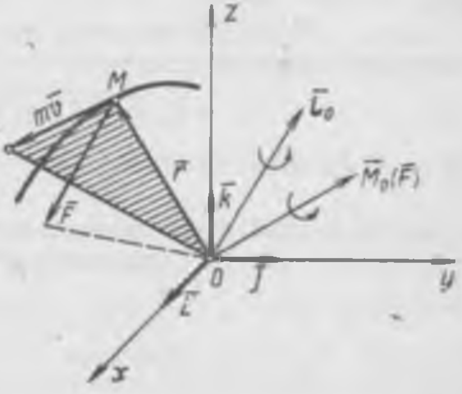
$$\overline{l}_O=m\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ x & y & z\\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z}\end{vmatrix},$$

бунда $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ — координата ўқларининг бирлик векторлари. Охирги тенгликни x, y, z ўқларга проекциялаб, кучнинг ўққа нисбатан моменти каби, нуқта ҳаракат миқдорининг мос ўқларга нисбатан моментини аниқлаймиз:

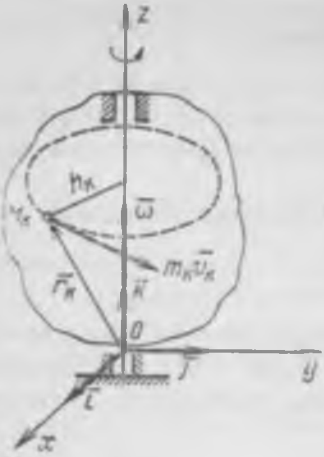
$$\left.\begin{aligned} l_x&=m(y\dot{z}-z\dot{y}),\\ l_y&=m(z\dot{x}-x\dot{z}),\\ l_z&=m(x\dot{y}-y\dot{x}).\end{aligned}\right| \qquad (21.33)$$

Нуқта ҳаракат миқдорининг моменти СИ бирликлар системасида кг·м²/с билан ўлчанади.

Механик система барча нуқталари ҳаракат миқдорларининг бирор марказга нисбатан моментларининг геометрик йиғиндисига тенг бўлган $\overline{L}_0$ катталик *механик системанинг*



207- расм.



208- раси.

марказга нисбатан кинетик моменти (ёки ҳаракат миқдорининг бош моменти) дейилади:

$$\overline{L_O} = \sum \bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k. \tag{21.34}$$

(21.34) ни Декарт координата ўқларига проекциялаб системанинг координата ўқларига нисбатан кинетик моменти аниқланади:

$$\left.\begin{aligned} L_x &= \sum m_k (y_k \dot{z}_k - z_k \dot{y}_k), \\ L_y &= \sum m_k (z_k \dot{x}_k - x_k \dot{z}_k), \\ L_z &= \sum m_k (x_k \dot{y}_k - y_k \dot{x}_k). \end{aligned}\right\} \tag{21.35}$$

Қўзғалмас ўқ атрофида айланма ҳаракатдаги қаттиқ жисмнинг кинетик моментини ҳисоблаймиз. z ўқни айланиш ўқи бўйлаб йўналтирамиз (208- расм). Берилган жисмни элементар моддий зарраларга ажратамиз. Бундай зарралардан ихтиёрий биттаси — M_k нинг массасини m_k билан, ундан ўққача бўлган масофани h_k билан белгилаб, z ўққа нисбатан жисмнинг кинетик моментини ҳисоблаймиз:

$$L_z = \sum m_k v_k h_k = \sum m_k h_k^2 \cdot \omega = \omega \sum m_k h_k^2,$$

бу ерда $\sum m_k h_k^2 = I_z$ — жисмнинг z ўққа нисбатан инерция моменти Бинобарин,

$$L_z = L_z\,\omega. \tag{21.36}$$

Демак, *қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи жисмнинг айланиш ўқига нисбатан кинетик моменти жисмнинг мазкур ўққа нисбатан инерция моменти билан бурчак тезлигининг кўпайтмасига тенг.*

Битта ўқ атрофида айланувчи бир неча жисмдан ташкил топган системанинг кинетик моменти

$$L_z = I_{1z}\,\omega_1 + L_{2z}\,\omega_2 + \ldots + I_{nz}\,\omega_n \tag{21.37}$$

формула ёрдамида ҳисобланади.

124- §. Моддий нуқта ҳаракат миқдори моментининг ўзгариши ҳақидаги теорема

Массаси m га тенг бўлган моддий нуқта $\bar{F}$ куч таъсирида ҳаракатлансин. Бу нуқта ҳаракат миқдори ва $\bar{F}$ кучнинг бирор O марказга нисбатан моментлари орасидаги боғланишни аниқлаймиз (207- расмга қаранг).

$\overline{r} = \overline{r}\,(t)$ эканлигини эътиборга олиб, (21.32) нинг иккала томонидан вақт бўйича ҳосила оламиз:

$$\frac{d\overline{l}_O}{dt} = \frac{d\overline{r}}{dt} \times m\overline{v} + \overline{r} \times m\frac{d\overline{v}}{dt} = \overline{v} \times m\overline{v} + \overline{r} \times m\overline{w}. \qquad (21.38)$$

$\overline{v}$ ва $m\overline{v}$ параллел векторлар бўлгани учун $\overline{v} \times m\overline{v} = 0$ ҳамда Ньютоннинг иккинчи қонуни $m\overline{w} = \overline{F}$ эканлигини эътиборга олсак, (21.38) қуйидагича ёзилади:

$$\frac{d\overline{l}_O}{dt} = \overline{r} \times \overline{F}.$$

$\overline{r} \times \overline{F} = \overline{M}_0(\overline{F})$ бўлгани учун

$$\frac{d\overline{l}_O}{dt} = \overline{M}_O(\overline{F}). \qquad (21.39)$$

(21.39) ифода *нуқта ҳаракат миқдорининг О марказга нисбатан моменти ўзгариши ҳақидаги теоремани* ифодалайди: *моддий нуқта ҳаракат миқдорининг бирор қўзғалмас марказга нисбатан моментидан вақт бўйича олинган ҳосила нуқтага таъсир этувчи кучнинг шу марказга нисбатан моментига тенг.*

(21.39) ни x, y, z ўқларга проекциялаб қуйидагиларни оламиз:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dl_x}{dt} &= M_x(\overline{F}), \\ \frac{dl_y}{dt} &= M_y(\overline{F}), \\ \frac{dl_z}{dt} &= M_z(\overline{F}). \end{aligned}\right\} \qquad (21.40)$$

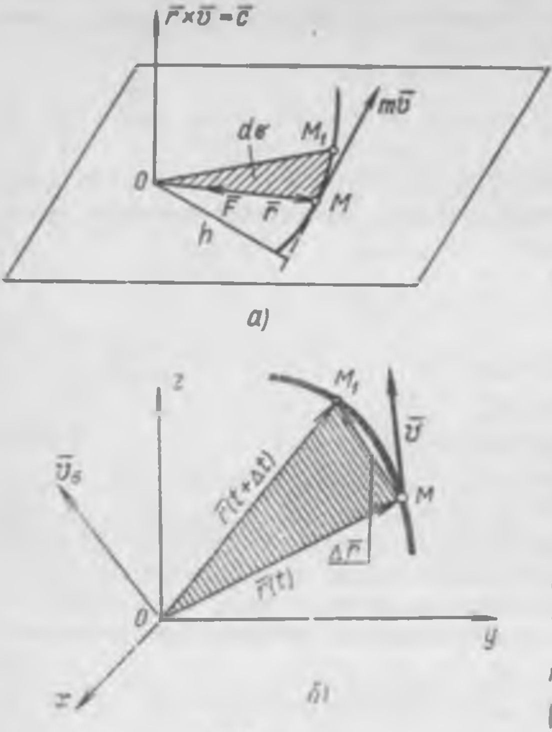
Бу муносабатлар *нуқта ҳаракат миқдорининг координата ўқларига нисбатан моментлари ўзгариши ҳақидаги теоремани* ифодалайди: *моддий нуқта ҳаракат миқдорининг бирор қўзғалмас ўққа нисбатан моментидан вақт бўйича олинган ҳосила, нуқтага таъсир этувчи кучнинг шу ўққа нисбатан моментига тенг.*

Агар моддий нуқтага бир қанча кучлар таъсир этса, $\overline{F}$ шу кучларнинг тенг таъсир этувчиси деб қаралади.

125-§. Нуқтанинг марказий куч таъсиридаги ҳаракати. Юзалар қонуни

$\overline{F}$ кучнинг бирор қўзғалмас O марказига нисбатан моменти нолга тенг бўлсин. Бу ҳолда $\overline{F} = 0$ бўлиши ёки $\overline{F}$ кучнинг таъсир чизиғи доимо момент марказидан ўтиши керак. $\overline{F} = 0$ бўлган ҳолни эътиборга олмай, иккинчи ҳолни текширамиз.

Доимо таъсир чизиғи момент марказидан ўтувчи куч *марказий куч* дейилади. Кучнинг таъсир чизиғи ўтадиган O нуқта *куч маркази* дейилади.



209- расм.

Марказий куч таъсиридаги нуқта учун (21.39) қуйидагича ёзилади:

$$\frac{d\bar{l}_O}{dt}=0,$$

бундан

$$\bar{l}_O=\text{const},$$

ёки

$$\bar r\times m\bar v=\text{const}.$$

Бу тенглама *нуқта ҳаракат миқдори моментининг сақланиш қонунини* ифодалайди: *марказий куч таъсиридаги нуқта ҳаракат миқдорининг куч марказига нисбатан моменти ўзгармасдан қолади.*

Охирги тенгламада $m=\text{const}$ бўлганидан уни

$$\bar r\times\bar v=\bar c \tag{21.41}$$

кўринишда ёзиш мумкин.

(21.41) да $\bar r\,(x,y,z)$, $\bar v\,(\dot x;\ \dot y,\ \dot z)$, $\bar c\,(c_1,c_2,c_3)$ эканлигини назарда тутиб, координата ўқларига проекциялаймиз:

$$\left.\begin{aligned} y\dot z-z\dot y&=c_1,\\ z\dot x-x\dot z&=c_2,\\ x\dot y-y\dot x&=c_3.\end{aligned}\right| \tag{21.42}$$

Шундай қилиб, марказий куч таъсиридаги моддий нуқта учун ҳаракат миқдори моментининг ўзгариши ҳақидаги теоремани қўллаб нуқта ҳаракати дифференциал тенгламасининг (21.41) ёки (21.42) тенгламалар билан ифодаланадиган биринчи интегралларини топиш мумкин экан.

Бу биринчи интегралларга яққол геометрик изоҳ бериш мумкин. $\bar r\times\bar v$ вектор доимо $\bar r$ ва $\bar v$ ётган текисликка перпендикуляр равишда йўналади ва ўзгармас йўналишга эга бўлади (209- расм, *а*). Шу сабабли $\bar r$ ва $\bar v$ векторлар доимо *O* марказдан ўтувчи бир текисликда ётади. Демак, марказий куч таъсиридаги нуқтанинг траекторияси текис эгри чизиқдан иборат бўлади.

(21.41) нинг физик моҳиятини талқин қилиш учун нуқтанинг радиус-вектори чизган юзанинг ўзгариш тезлигини ифодаловчи вектор катталик — секторли тезлик тушунчасини киритамиз.

Фараз қилайлик, моддий нуқта t вақтда ўз траекториясида M ҳолатни, $t + \Delta t$ вақтда M_1 ҳолатни эгалласин (209-расм, *б*). OMM_1 учбурчакнинг юзи $\bar{r}$ радиус-вектор билан $\Delta \bar{r} = \bar{r}(t + \Delta t) - \bar{r}(t)$ кўчиш векторининг векторли кўпайтмаси модулининг ярмига тенг:

$$S_{\Delta OMM_1} = \frac{1}{2} |\bar{r} \times \Delta \bar{r}|.$$

$\frac{1}{2}(\bar{r} \times \Delta \bar{r})$ вектор $\bar{r}$ ва $\Delta \bar{r}$ ётган текисликка перпендикуляр равишда йўналади; бу векторни $\Delta \bar{\sigma}$ билан белгилаймиз:

$$\Delta \bar{\sigma} = \frac{1}{2}(\bar{r} \times \Delta \bar{r}). \qquad (21.43)$$

$\Delta \bar{\sigma}$ юза вектори орттирмасининг унга мос Δt вақт оралиғига нисбатининг $\Delta t \to 0$ даги лимити *нуқтанинг O* марказга нисбатан *секторли тезлиги* дейилади. Бинобарин, секторли тезлик

$$\bar{v}_\sigma = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{\sigma}}{\Delta t}$$

ёки

$$\bar{v}_\sigma = \frac{d\bar{\sigma}}{dt} \qquad (21.44)$$

формуладан аниқланади.

Секторли тезликнинг $\bar{v}$ тезлик орқали ифодасини топиш учун (21.43) тенгликнинг иккала томонини Δt га бўламиз:

$$\frac{\Delta \bar{\sigma}}{\Delta t} = \frac{1}{2} \frac{\bar{r} \times \Delta \bar{r}}{\Delta t} = \frac{1}{2}\left(\bar{r} \times \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t}\right).$$

$\Delta t \to 0$ даги лимитни ҳисоблаймиз:

$$\bar{v}_\sigma = \frac{1}{2} \lim_{\Delta t \to 0}\left(\bar{r} \times \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t}\right) = \frac{1}{2}(\bar{r} \times \bar{v})$$

ёки

$$2\bar{v}_\sigma = \bar{r} \times \bar{v} = \bar{M}_O(\bar{v}). \qquad (21.45)$$

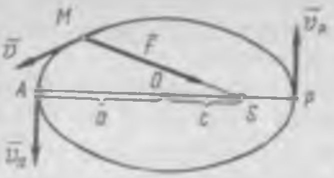
Яъни *нуқтанинг бирор марказга нисбатан иккиланган секторли тезлиги шу марказга нисбатан ҳисобланган нуқта тезлигининг моментига тенг.*

(21.41) га асосан

$$2\bar{v}_\sigma = \bar{c}$$

ёки

$$\bar{v}_\sigma = \frac{\bar{c}}{2}. \qquad (21.46)$$



210- расм.

Шундай қилиб, марказий куч таъсиридаги нуқтанинг секторли тезлиги ўзгармас бўлади. (21.44) га кўра (21.46) дан

$$\frac{d_\sigma}{dt} = \frac{c}{2}$$

муносабатни оламиз. Бу тенгламани интеграллласак,

$$\sigma = \frac{c}{2}\,t + c_1$$

бўлади. Демак, марказий куч таъсиридаги нуқтанинг радиус-вектори чизган юза вақтга мутаносиб равишда орта боради ва траекторияси бир текисликда ётувчи эгри чизиқдан иборат бўлади. Бу натижа *юзалар қонуни* ёки *юзалар интеграли* дейилади.

42- масала. Планета фокусларидан бирида Қуёш жойлашган эллипс бўйлаб Қуёшга тортувчи куч таъсирида ҳаракатланади. Планетанинг Қуёшга энг яқин ҳолатдаги (перигейдаги) $\overline{v}_p$ тезлиги берилган бўлса, унинг Қуёшдан энг узоқ ҳолатидаги (апогейдаги) $\overline{v}_a$ тезлиги топилсин. Эллипснинг катта яримўқи a ва эллипс марказидан Қуёшгача бўлган масофа c берилган.

Ечиш. Планетага куч маркази Қуёшда бўлган тортиш кучи таъсир этади. Планетани M билан, Қуёшни эса S билан белгилаймиз (210- расм). У ҳолда

$$\overline{M}_S(\overline{F}) = 0$$

бўлиб, нуқта ҳаракат миқдорининг S марказга нисбатан моменти сақланиш қонуни

$$M_S(m\,\overline{v}_a) = M_S(m\overline{v}_p).$$

кўринишда ёзилади. Ёки

$$mv_a(a + c) = mv_p(a - c).$$

Бундан изланаётган v_a тезликни аниқлаймиз:

$$v_a = \frac{a-c}{a+c}\,v_p = \frac{1-e}{1+e}\,v_p,$$

бу ерда $e = \frac{c}{a} < 1$ эллипснинг эксцентриситетини ифодалайди.

126- §. Механик система кинетик моментининг ўзгариши ҳақидаги теорема

Механик система N та нуқтадан ташкил топган бўлсин. Системанинг бирор ихтиёрий M_k нуқтасини олиб, унга таъсир этувчи ташқи кучлар ҳамда ички кучлар тенг таъсир этувчиларини мос равишда $\overline{F}_k^e$, $\overline{F}_k^i$ билан белгилаймиз (211- расм). Моддий нуқта учун чиқарилган ҳаракат миқдори моментининг ўзгариши ҳақидаги теоремани механик системанинг ҳар бир нуқтаси учун қўллаб қуйидагига эга бўламиз:

$$\frac{d\overline{l}_{Ok}}{dt} = M_O(\overline{F}^e_k) + M_O(\overline{F}^i_k), \ (k = 1,2, \ldots N),$$

бу ерда $\overline{l}_{Ok} = \overline{r}_k \times m_k\overline{v}_k$ — нуқта ҳаракат миқдорининг O марказга нисбатан моменти. Бу ифодаларни қўшамиз:

$$\frac{d}{dt}\sum \overline{l}_{Ok} = \sum \overline{M}_O(\overline{F}^e_k) + \sum \overline{M}_O(\overline{F}^i_k). \qquad (21.47)$$

Ички кучларнинг хоссасига кўра

$$\sum \overline{M}_O(\overline{F}^i_k) = 0.$$

У ҳолда (21.34) га мувофиқ (21.47) ни ушбу кўринишда ёзамиз:

$$\frac{d\overline{L}_O}{dt} = \sum \overline{M}_O(\overline{F}^e_k) \qquad (21.48)$$

ёки

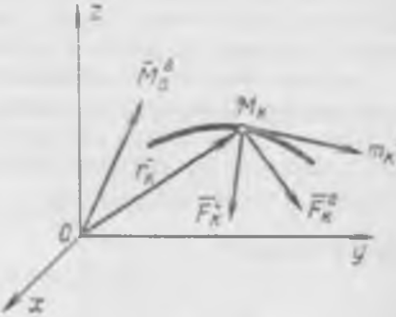
$$\frac{d\overline{L}_O}{dt} = \overline{M}^e_O,$$

бу ерда $\overline{M}^e_O = \sum \overline{M}_O(\overline{F}^e_k) = \sum \overline{r}_k \times \overline{F}^e_k$ — система нуқталарига таъсир этувчи ташқи кучларнинг O марказга нисбатан бош моменти.

(21.48) ифода *система кинетик моментининг ўзгариши ҳақидаги теоремани* ифодалайди: *механик системанинг бирор қўзғалмас марказга нисбатан кинетик моментининг вақт бўйича ҳосиласи система нуқталарига таъсир этувчи ташқи кучларнинг шу марказга нисбатан бош моментига тенг.*

(21.48) ифоданинг ҳар иккала томонини x, y, z ўқларга проекциялаймиз:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dL_x}{dt} &= \sum M_x(\overline{F}^e_k), \\ \frac{dL_y}{dt} &= \sum M_y(\overline{F}^e_k), \\ \frac{dL_z}{dt} &= \sum M_z(\overline{F}^e_k). \end{aligned}\right| \qquad (21.49)$$



211- расм.

Демак, *механик системанинг бирор қўзғалмас ўққа нисбатан кинетик моментидан вақт бўйича олинган ҳосила система нуқталарига таъсир этувчи* *ташқи кучларнинг шу ўққа нисбатан моментларининг йиғиндисига тенг.*

Система кинетик моментининг ўзгариши ҳақидаги теоремадан қаттиқ жисмнинг айланма ҳаракатини ўрганишда, гироскоплар назариясида кенг фойдаланилади.

Бу теореманинг афзаллиги шундан иборатки, система ҳаракат миқдорининг ўзгаришига оид теоремадагидек, олдиндан номаълум бўлган ички кучлар қатнашмайди.

127- §. Система кинетик моментининг сақланиш қонуни

Система кинетик моментининг ўзгариши ҳақидаги теоремадан масалалар ечишда муҳим аҳамиятга эга бўлган қуйидаги натижаларни оламиз.

Ташқи кучларнинг қўзғалмас O марказга нисбатан бош моменти нолга тенг бўлсин:

$$\sum \overline{M}_o \left(\overline{F}_k^e\right) = 0,$$

у ҳолда (21.48) га кўра

$$\overline{L}_o = \overline{C}. \qquad (21.50)$$

бўлади. (21.50) тенглик *система кинетик моментининг сақланиш қонунини* ифодалайди: *агар система нуқталарига таъсир этувчи ташқи кучларнинг бирор марказга нисбатан бош моменти нолга тенг бўлса, системанинг шу нуқтага нисбатан кинетик моменти миқдор ва йўналиш жиҳатдан ўзгармас бўлади.*

2. Система нуқталарига таъсир этувчи ташқи кучларнинг бирор қўзғалмас z ўққа нисбатан моментларининг йиғиндиси нолга тенг бўлсин:

$$\sum M_z \left(\overline{F}_k^e\right) = 0,$$

у ҳолда (21.49) га кўра

$$L_z = \text{const} \qquad (21.51)$$

бўлади. Шундай қилиб, *система нуқталарига таъсир этувчи ташқи кучларнинг бирор қўзғалмас ўққа нисбатан моментларининг йиғиндиси нолга тенг бўлса, системанинг шу ўққа нисбатан кинетик моменти ўзгармас бўлади.*

Система кинетик моментининг сақланиш қонунидан кўрамизки, ички кучлар системанинг кинетик моментини ўзгартира олмайди.

Агар система қаттиқ жисмдан ёки жисмлар тўпламидан иборат бўлиб, бирор z ўқ атрофида айлана олса ва

$$\sum M_z \left(\overline{F}_k^e\right) = 0$$

шарт бажарилса,

$$L_z = I_z \omega = \text{const}$$

ёки

$$I_z \omega = I_{z0}\, \omega_0 \qquad (21.52)$$

келиб чиқади. (21.52) да I_z ва ω — жисмнинг исталган t вақтдаги инерция моменти ва бурчак тезлиги; I_{z0} ва ω_0 — бошланғич пайтдаги инерция моменти ва бурчак тезлиги.

Бу қонунни Жуковский скамейкаси мисолида яққол кузатиш мумкин. Вертикал ўқ атрофида деярли ишқаланишсиз айланадиган Жуковский скамейкасининг горизонтал платформасига қўлларига тош ушлаган одам турганидан кейин унга ω_0 бурчак тезлик берилса, у ҳолда

$$I_{z0}\,\omega_0 = I_z\,\omega$$

бўлади. Чунки одамнинг, тошларнинг ва платформанинг оғирлик кучларидан ташкил топган ташқи кучлар z ўққа параллел йўналган ёки таянч подшипникда ҳосил бўладиган реакция кучи z ўқни кесиб ўтади ва уларнинг шу ўққа нисбатан моменти нолга тенг.

Бинобарин, агар одам қўлларини ёзиб, инерция моментини оширса, у ҳолда айланиш бурчак тезлиги пасаяди ёки, аксинча, қўлларини пастга туширса, айланиш бурчак тезлиги ортади. Ҳақиқатда ҳавонинг қаршилик кучи ва подшипникларда ҳосил бўладиган ишқаланиш кучлари таъсирида айланиш бурчаги аста-секин кичиклаша боради.

43-масала. Иккита қаттиқ жисм битта қўзғалмас ўқ атрофида ўзгармас ω_1 ва ω_2 бурчак тезликлар билан бир-бирига боғлиқ бўлмаган ҳолда айланади. Қаттиқ жисмларнинг шу ўққа нисбатан инерция моментлари мос равишда I_1 ва I_2 га тенг. Агар улар айланиш вақтида бир-бирига бириктириладиган бўлса, қандай ω бурчак тезлик билан айланади?

Ечиш. Айланиш ўқи учун Oz ўқни оламиз. Иккита жисмдан ташкил топган система нуқталарига уларнинг оғирлик кучлари таъсир этади. Бу кучлар Oz ўққа параллел. Бундан ташқари, таянч реакция кучлари Oz ўқни кесиб ўтади. Шу сабабли система нуқталарига таъсир этувчи ташқи кучларнинг Oz ўққа нисбатан бош моменти

$$M_z^e = 0.$$

бўлади ва система кинетик моментининг сақланиш қонунига кўра

$$L_z = L_{z0}.$$

Бунда

$$L_{z0} = I_1\omega_1 + I_2\omega_2$$

жисмлар бирлаштирилгунга қадар системанинг кинетик моментини,

$$L_z = I_1\omega + I_2\,\omega = \omega\,(I_1 + I_2)$$

жисмлар бириктирилгандан кейинги кинетик моментни ифодалайди. Шундай қилиб,

$$\omega\,(I_1 + I_2) = I_1\,\omega_1 + I_2\,\omega_2,$$

бундан

$$\omega = \frac{I_1\,\omega_1 + I_2\,\omega_2}{I_1 + \omega_2}.$$

128- §. Механик система кинетик моментининг массалар марказига нисбатан ўзгариши ҳақидаги теорема

Юқорида бирор қўзғалмас марказга нисбатан механик система кинетик моментининг ўзгариши ҳақидаги теоремани исботлаган эдик.

Қаттиқ жисмнинг мураккаб ҳаракатини (жумладан, текис параллел ҳаракатини) ўрганишда қўзғалмас марказға нисбатан механик системанинг кинетик моменти билан системанинг массалар марказиға нисбатан нисбий ҳаракати кинетик моменти орасидагн боғланишдан фойдаланишга тўғри келади.

Бу боғланишни топиш учун қўзғалмас O нуқтада $O\xi\eta\zeta$ қўзғалмас координата ўқларини ва система массалар маркази C билан бирга илгариланма ҳаракатланувчи $Cxyz$ координаталар системасини оламиз. У ҳолда жисмнинг абсолют ҳаракатинн массалар маркази билан биргаликдаги илгариланма ҳаракат ва массалар марказидаги $Cxyz$ координаталар системасиға нисбатан айланма ҳаракатлардан ташкил топган деб қараш мумкин.

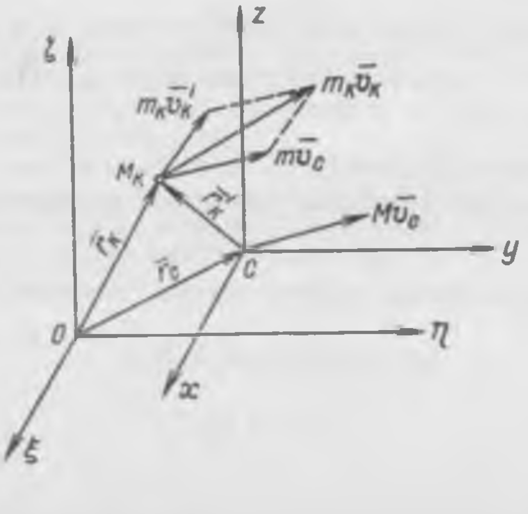
Кўчирма ҳаракат илгариланма ҳаракатдан иборат бўлгани учун система барча нуқталарининг кўчирма тезликлари бир хил ва система масса марказининг тезлигига тенг бўлади, яъни $\overline{v}_{ke} = \overline{v}_C$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$. Система ихтиёрий M_k нуқтасининг масса марказига нисбатан нисбий тезлигини $\overline{v}_{kr} = \overline{v}'_k$ билан белгиласак, у ҳолда M_k нуқтанинг абсолют тезлиги тезликларни қўшиш теоремасига кўра

$$\overline{v}_k = \overline{v}_C + \overline{v}'_k \tag{21.53}$$

бўлади.

Радиус-векторлар орасида қуйидаги муносабат мавжуд бўлади (212- расм):

$$\overline{r}_k = \overline{r}_C + \overline{r}'_k, \tag{21.54}$$



212- расм.

Қўзғалмас $O\xi\eta\zeta$ координаталар системасига нисбатан абсолют ҳаракатдаги системанинг қўзғалмас O марказга нисбатан кинетик моменти (21.34) дан топилади:

$$\overline{L}_0 = \sum \overline{r}_k \times m_k \overline{v}_k.$$

Бу формулага $\overline{r}_k$ ва $\overline{v}_k$ ларнинг ифодаларини (21.53) ва (21.54) дан келтириб қўямиз:

$$\overline{L}_0 = \overline{r}_C \times \overline{v}_C \sum m_k + \sum \overline{r}'_k \times m_k \overline{v}'_k +$$

$$+ \overline{r}_C \times \sum m_k \frac{d\overline{r}'_k}{dt} + \left(\sum m_k \overline{r}'_k\right) \times \overline{v}_C. \qquad (21.55)$$

Бунда $\sum m_k = M$ — бутун система массаси ҳамда

$$\overline{r}_C \times \sum m_k \frac{d\overline{r}'_k}{dt} = \overline{r}_C \times \frac{d}{dt} \sum m_k \overline{r}'_k.$$

Лекин массалар марказининг таърифига кўра ва координаталар боши C нуқтада бўлгани учун

$$\sum m_k \overline{r}'_k = M\overline{r}'_C = 0.$$

Шундай қилиб, (21.55) да охирги иккита ҳад нолга тенг бўлади ва бу формула қуйидаги кўринишни олади:

$$\overline{L}_O = \overline{r}_C \times M\overline{v}_C + \overline{L}'_C, \qquad (21.56)$$

бунда

$$\overline{L}'_C = \sum \overline{r}'_k \times m_k \overline{v}'_k$$

системанинг массалар марказига нисбатан нисбий ҳаракат кинетик моментини ифодалайди.

(21.56) формула қўзғалмас марказга нисбатан механик системанинг кинетик моменти билан системанинг массалар марказига нисбатан нисбий ҳаракат кинетик моментлари орасидаги боғланишни ифодалайди: *механик системанинг қўзғалмас O марказга нисбатан абсолют ҳаракатининг кинетик моменти, массаси бутун система массасига тенг бўлган массалар марказининг шу нуқтага нисбатан кинетик моменти билан системанинг илгариланма ҳаракатдаги массалар марказига нисбатан нисбий ҳаракат кинетик моментининг геометрик йиғиндисига тенг.*

(21.54) ва (21.56) ларни назарда тутиб, система кинетик моментининг ўзгариши ҳақидаги теоремани қуйидагича ёзамиз:

$$\frac{d}{dt}\left(\overline{r}_C \times M\overline{v}_C + \overline{L}'_C\right) = \sum \left(\overline{r}_C + \overline{r}'_k\right) \times \overline{F}^e_k$$

ёки

$$\frac{d}{dt}\left(\overline{r}_C \times M\overline{v}_C\right) + \frac{d\overline{L}'_C}{dt} = \overline{r}_C + \sum \overline{F}^e_k + \sum \overline{r}'_k \times \overline{F}^e_k \qquad (a)$$

Бу тенгликда

$$\frac{d}{dt}\left(\overline{r}_C \times M\overline{v}_C\right) = \frac{d\overline{r}_C}{dt} \times M\overline{v}_C + \overline{r}_C \times M\overline{w}_C$$

бўлишини ҳамда $\frac{d\overline{r}_C}{dt} = \overline{v}_C$; массалар марказининг ҳаракати ҳақидаги теоремага кўра $M\overline{w}_C = \overline{R}^e = \sum \overline{F}_k^e$ эканлигини эътиборга олсак, ушбу муносабат ўринли бўлади:

$$\frac{d}{dt}\left(\overline{r}_C \times M\overline{v}_C\right) = \overline{r}_C \times \overline{R}^e.$$

Буни назарда тутиб, (а) ни қуйидагича ёза оламиз:

$$\frac{d\overline{L}'_C}{dt} = \sum \overline{r}'_k \times \overline{F}_k^e. \qquad (21.57)$$

(21.57) тенглик (21.48) га ўхшаш бўлиб, *механик система кинетик моментининг массалар марказига нисбатан ўзгариши ҳақидаги теоремани* ифодалайди.

(21.48) ва (21.57) тенгликларни солиштирамиз. (21.48) да [системанинг кинетик моменти $\overline{L}_O$ ни ҳисоблашда система нуқталарининг қўзғалмас нуқтага нисбатан абсолют тезлиги эътиборга олинади; (21.57) да эса система нуқталарининг тезлиги жисмнинг массалар маркази билан биргаликда илгариланма ҳаракат қилувчи *Cxyz* координаталар системасига нисбатан ҳисобланади ҳамда момент маркази учун системанинг массалар маркази олинади.

129-§. Кучнинг иши. Қувват

Жисмнинг бирор куч таъсирида кўчишини ифодалаш учун иш тушунчаси киритилади. Иш ҳаракатланувчи нуқтага қўйилган кучнинг нуқта тезлиги модулини ўзгартирадиган таъсирини ифодалайди.

Дастлаб миқдори ва йўналиши жиҳатдан ўзгармас бўлган $\overline{F}$ куч таъсиридаги нуқтанинг тўғри чизиқли ҳаракатдаги ишини ҳисоблаймиз. Тўғри чизиқли ҳаракатдаги нуқтанинг кўчиши унинг тезлиги йўналишида бўлади.

Фараз қилайлик, куч қўйилган нуқта тўғри чизиқ бўйича s йўлни ўтсин ҳамда кучнинг йўналиши тўғри чизиқ билан устма-уст тушсин. У ҳолда мусбат ёки манфий ишора билан олинган F кучнинг s йўлга кўпайтмаси *иш* дейилади. Шундай қилиб, иш

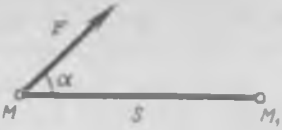
$$A = \pm F \cdot s.$$

формуладан аниқланади. $\overline{F}$ кучнинг йўналиши нуқта тезлигининг йўналиши билан бир хил бўлса, бу тенгликда мусбат ишора, акс ҳолда манфий ишора олинади.

Агар $\overline{F}$ кучнинг йўналиши нуқта ҳаракатланаётган тўғри чизиқ билан бирор α бурчак ташкил этса, иш учун

$$A = F \cdot s \cos\alpha. \qquad (21.58)$$

формула ўринли бўлади (213-расм).



213- расм.

(21.58) да α нинг ўткир ёки ўтмас бурчак бўлишига қараб, иш мос равишда мусбат ёки манфий қийматга эга бўлади. $\alpha = \frac{\pi}{2}$ да эса $\overline{F}$ кучнинг иши нолга тенг бўлади.

Агар кучнинг миқдори ва йўналиши ўзгарувчан бўлса ёки куч қўйилган нуқта эгри чизиқ бўйича ҳаракат қилса (21.58) формула ёрдамида ишни ҳисоблаш мумкин эмас. Бу ҳолда нуқтанинг бутун ўтган йўлини фикран шундай кичик бўлакларга бўламизки, натижада бу бўлакларнинг ҳар бирини тўғри чизиқли ва мазкур бўлакларга таъсир этувчи кучларни миқдор ва йўналиш жиҳатдан ўзгармас деб қараш мумкин бўлсин (214-расм). У ҳолда ҳар бир бўлакка мос бўлган элементар иш (21.58) га асосан қуйидаги формула ёрдамида ҳисобланади:

$$dA = F \cos(\widehat{\overline{F}, \overline{v}})\, ds. \qquad (21.59)$$

Бу тенгликдаги ds нуқта ёй координатасининг дифференциали бўлиб элементар кўчишни ифодалайди: $ds = vdt$. Бинобарин, (21.59) ни ушбу кўринишда ёзиш мумкин:

$$dA = F \cdot v \cdot dt \cos(\widehat{\overline{F}, \overline{v}}) = \overline{F} \cdot \overline{v}\, dt.$$

Бунда $\overline{v} = \frac{d\overline{r}}{dt}$ бўлганидан элементар иш учун

$$dA = \overline{F} \cdot d\overline{r} \qquad (21.60)$$

муносабатни оламиз.

Агар нуқта ҳаракати Декарт координаталарида берилган бўлса,

$$\overline{F} = X\overline{i} + Y\overline{j} + Z\overline{k},$$

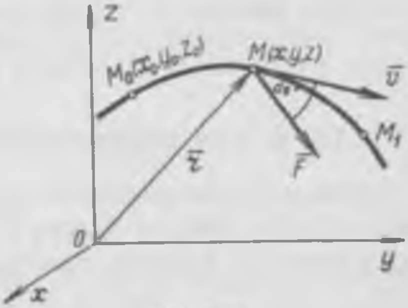
$$d\overline{r} = dx\overline{i} + dy\overline{j} + dz\overline{k}$$

эканлигини эътиборга олиб, (21.60)

$$dA = Xdx + Ydy + Zdz \qquad (21.61)$$

кўринишда ёзилади ва *элементар ишнинг аналитик ифодаси* дейилади.

Шундай қилиб, нуқта ҳаракати табиий усулда, вектор усулида ёки координата усулида берилганда кучнинг элементар иши мос равишда (21.59), (21.60) ёки (21.61) формулаларнинг бирортаси ёрдамида аниқланади.



214- расм.

Умумий ҳолда (21.61) формуланинг ўнг томонидаги уч ҳад нуқта координаталарига боғлиқ бирор функциянинг тўлиқ дифференциалига тенг бўлмаслиги мумкин.

Нуқта M_0 ҳолатдан M_1 ҳолатга чекли кўчишида $\overline{F}$ кучнинг ишини ҳисоблаш учун бу кўчишни лимит ҳолатида элементар кўчишдан иборат бўладиган n та кўчишдан ташкил топган деб қараймиз. У ҳолда $\overline{F}$ кучнинг чекли кўчишдаги иши

$$A=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} dA_k$$

формуладан аниқланади. Бунда dA_k билан k — элементар кўчишдаги элементар иш белгиланган.

(21.59) — (21.61) ларга асосан нуқта траектория бўйлаб M_0M_1 га чекли кўчишидаги кучнинг иши табиий усулда

$$A=\int_{M_0}^{M_1} F ds\cos(\widehat{\overline{F},\ \overline{v}}), \qquad (21.62)$$

вектор усулида

$$A=\int_{M_0}^{M_1}\overline{F}\bullet d\overline{r}, \qquad (21.63)$$

координаталар усулида

$$A=\int_{M_0}^{M_1}(Xdx+Ydy+Zdz) \qquad (21.64)$$

формулалардан фойдаланиб ҳисобланади.

Халқаро СИ бирликлар системасида иш жоулда ўлчанади: 1Ж = = 1Н·м.

Механикада иш тушунчаси билан биргаликда қувват тушунчаси ҳам қўлланилади. Кучнинг вақт бирлиги ичида бажарган иши *қувват* дейилади. Қувватни N билан белгиласак, таърифга кўра

$$N=\frac{dA}{dt} \text{ ёки } N=\frac{\overline{F}\cdot d\overline{r}}{dt}=\overline{F}\bullet\overline{v}. \qquad (21.65)$$

Қувват халқаро СИ бирликлар системасида ватт билан ўлчанади; 1Вт = 1Ж/с = 0,102 кгк·м/с. Бундан ташқари, қувват техникада от кучида ҳам ўлчанади. 1 от кучи (о.к.) = 75 кгк·м/с = 735,5 Вт.

130-§. Тенг таъсир этувчининг иши ҳақидаги теорема

Ҳаракати кузатилаётган M нуқтага $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n$ кучлар системаси таъсир этаётган бўлсин (215-расм). Бу кучларнинг тенг таъсир этувчиси R' уларнинг геометрик йиғиндисига тенг:

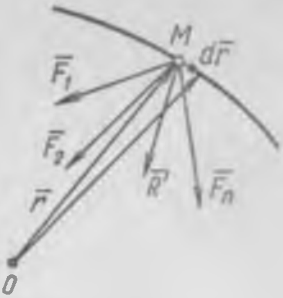
$$\overline{R}'=\overline{F}_1+\overline{F}_2+\ldots\overline{F}_n.$$

$\overline{R}'$ тенг таъсир этувчи кучнинг $d\overline{r}$ элементар кўчишдаги элементар иши (21.60) га кўра

$$dA = \overline{R}'\cdot\overline{dr}$$

формуладан аниқланади. $\overline{R}'$ ни унинг ташкил этувчилари билан алмаштирсак, қуйидаги тенгламани оламиз:

$$\overline{R}'\cdot d\overline{r} = \overline{F}_1\cdot d\overline{r} + \overline{F}_2\cdot d\overline{r} + \ldots + \overline{F}_n\cdot\overline{dr}. \qquad (21.66)$$



215- расм.

(21.66) тенглама қуйидаги теоремани ифодалайди: *бир нуқтага қўйилган кучлар системаси тенг таъсир этувчисининг шу нуқтанинг элементар кўчишида бажарган элементар иши ташкил этувчи кучларнинг худди шу элементар кўчишдаги элементар ишларининг алгебраик йиғиндисига тенг.*

M нуқтага қўйилган $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, . . . , $\overline{F}_n$ кучлар тенг таъсир этувчиси $\overline{R'}$ нинг нуқта M_0 ҳолатдан M_1 ҳолатга кўчишида чекли йўлдаги ишини аниқлаш учун (21.66) ни интеграллаш зарур.

131-§. Кучнинг ишини ҳисоблашга оид мисоллар

Умумий ҳолда нуқтага таъсир этувчи кучнинг иши нуқтанинг ҳаракатига боғлиқ бўлади. Бинобарин, ишни ҳисоблаш учун нуқтанинг ҳаракатини билиш зарур. Баъзи ҳолларда табиатда шундай кучлар учрайдики, уларнинг ишини ҳисоблаш учун нуқтанинг бошланғич ва охирги ҳолатларини билиш етарли бўлади. Бундай кучларга мисол тариқасида оғирлик кучи ва марказий кучларни кўрсатиш мумкин.

Оғирлик кучининг иши. M (x, y, z) моддий нуқтанинг M_0 (x_0, y_0, z_0) бошланғич ҳолатдан M_1 (x_1, y_1, z_1) ҳолатга ўтишида нуқтага таъсир этувчи mg оғирлик кучининг ишини ҳисоблаймиз (216-расм). z ўқни вертикал тарзда юқорига йўналтириб, оғирлик кучининг координата ўқларидаги проекцияларини топамиз:

$$X = 0,\ Y = 0,\ Z = -mg.$$

(21.61) га кўра, бажарилган элементар ишни ҳисоблаймиз:

$$dA = Xdx + Ydy + Zdz = -mgdz, \qquad (21.67)$$

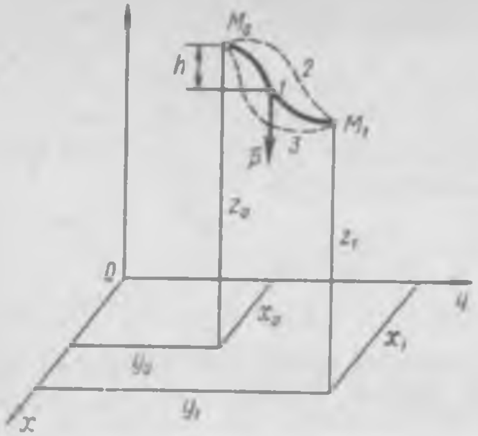
бундан

$$A = -mg\int_{z_0}^{z_1} dz = -mg\ (z_1 - z_0).$$

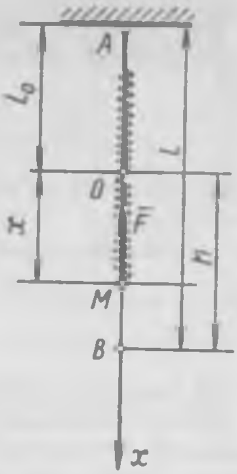
$|z_1 - z_0| = h$ белгилашни киритсак, қуйидаги тенгликни оламиз:

$$A = \pm mgh, \qquad (21.68)$$

бунда $z_1 < z_0$ бўлса, мусбат ишора, $z_1 > z_0$ бўлса, манфий ишора олинади.



216- расм.



217- расм.

Шундай қилиб, моддий нуқта оғирлик кучининг иши оғирлик кучининг модули билан нуқтанинг бошланғич ва охирги вазиятларига тегишли баландликлари фарқининг кўпайтмасига тенг. (21.68) дан кўрамизки, агар $h = 0$ бўлса ёки нуқта ёпиқ эгри чизиқ бўйлаб ҳаракатланса, нуқтага таъсир этувчи оғирлик кучининг иши нолга тенг бўлади. Демак, моддий нуқтага таъсир этувчи оғирлик кучининг иши фақат унинг оғирлигига ва нуқта баландлигининг ўзгаришига боғлиқ бўлиб, траекториянинг шаклига ва нуқта ўтган йўлнинг узунлигига боғлиқ бўлмайди (жумладан, 1, 2, 3 чизиқлар бўйича ҳисобланган ишлар бир хил бўлади).

Эластиклик кучининг иши. Бирор пружинанинг эркин учига бириктирилган *M* нуқтанинг вертикал *Ox* ўқ бўйлаб ҳаракатини текширамиз (217- расм). Координаталар боши учун пружина деформацияланмаган ҳолатдаги *M* нуқтанинг вазиятига мос келувчи *O* нуқтани қабул қиламиз. Бунда $l_0 = AO$ — пружинанинг табиий узунлиги. Пружинани l узунликка чўзиб, нуқтани *O* мувозанат ҳолатдан четлатсак, у ҳолда нуқтага *O* марказга қараб йўналган пружинанинг эластиклик кучи $\overline{F}$ таъсир этади. Гук қонунига кўра бу куч пружинанинг $\Delta l = l - l_0$ узайишига мутаносиб бўлади. Пружинанинг узайишини x билан белгилаб, *M* нуқтага таъсир этувчи $\overline{F}$ кучни аниқлаймиз:

$$|\overline{F}| = c|\Delta l| = cx,$$

бунда c—пружинанинг бикрлик коэффициенти, c катталик пружинани узунлик бирлигига чўзувчи (ёки сиқувчи) кучга тенг бўлиб, одатда техникада кгк/м да ўлчанади.

M нуқтанинг *O* вазиятдан *B* вазиятга кўчишида эластиклик кучининг ишини ҳисоблаймиз. $\overline{F}$ кучнинг координата ўқларидаги проекцияларини аниқлаймиз:

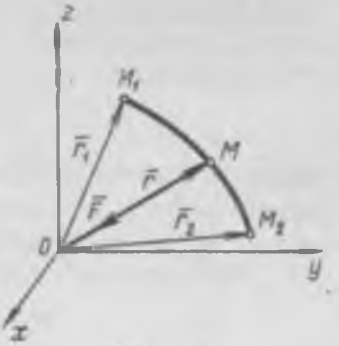
$$X = -cx, \quad Y = Z = 0.$$

(21. 64) га кўра пружина $OB = h$ га чўзилгандаги эластиклик кучининг иши

$$A = -\int_0^h cxdx = -\frac{ch^2}{2} \qquad (21.69)$$

формула асосида топилади.

(21. 69) дан кўрамизки, нуқтага таъсир этувчи эластиклик кучининг иши ҳам нуқтанинг тўғри чизиқ бўйлаб ҳаракат қонунига боғлиқ бўлмай, фақат нуқтанинг бошланғич O ва охирги B ҳолатларининг координаталарига боғлиқ бўлади.



218- расм.

Марказий кучнинг иши. Фараз қилайлик, $M(x, y, z)$ нуқтага қўзғалмас O марказга тортувчи $\overline{F}$ марказий куч таъсир этсин. Марказий кучни M нуқтадан O марказгача бўлган r масофага мутаносиб ва нуқта радиус-векторига қарама-қарши йўналган деб қараймиз (218-расм):

$$\overline{F} = \overline{F}(r) = -F_r(r)\frac{\overline{r}}{r}.$$

(21.60) га асосан марказий кучнинг элементар ишини ҳисоблаймиз:

$$dA = -F_r(r)\frac{\overline{r}\cdot d\overline{r}}{r},$$

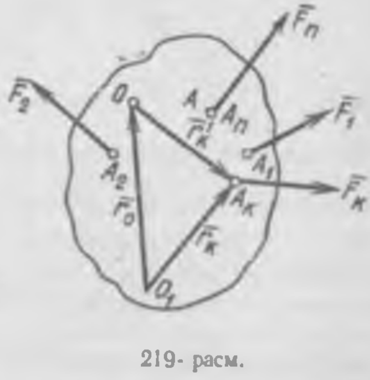
бунда $\overline{r}^2 = r^2$ бўлгани учун уни дифференциалласак, $\overline{r}\cdot d\overline{r} = r\cdot dr$ бўлади. Шу сабабли

$$dA = -F_r(r)\cdot dr.$$

Чекли масофани ўтишдаги марказий кучнинг иши $A = -\int_{r_1}^{r_2} F_r\ (r)\ dr$ формуладан топилади.

132- §. Қаттиқ жисмга таъсир этувчи кучларнинг элементар иши

Дастлаб қаттиқ жисм ҳаракатининг умумий ҳоли учун элементар иш формуласини чиқарамиз. Эркин қаттиқ жисмнинг $A_1, A_2, \ldots, A_n$ нуқталарига мос равишда $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_r$ кучлар таъсир этсин (219- расм). $\overline{F}_k\ (k = 1, \overline{N})$ кучларнинг элементар ишларини ҳисоблаймиз.



219- расм.

Жисмнинг ихтиёрий O нуқтасини қутб учун танлаб олсак, у ҳолда эркин қаттиқ жисм A_k нуқтасининг тезлиги (13.3) га асосан қуйидагича аниқланади:

$$\overline{v}_k = \overline{v}_0 + \omega \times \overline{r'}_k, \tag{21.70}$$

бунда $\overline{v}_k$ — ҳаракати кузатилаётган A_k нуқтанинг тезлиги; $\overline{v}_0$ — O қутбнинг тезлиги; $\overline{\omega}$ — жисмнинг оний бурчак тезлиги; $\overline{r'}_k$ — A_k нуқтанинг O қутбга нисбатан радиус-вектори.

(21.70) ни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$\frac{d\overline{r}_k}{dt} = \frac{d\overline{r}_0}{dt} + \overline{\omega} \times \overline{r'}_k.$$

Бу тенгликни dt га кўпайтирсак,

$$d\overline{r}_k = d\overline{r}_0 + \overline{\omega} dt \times \overline{r'}_k$$

ҳосил бўлади. Бунда $\overline{\omega}\, dt = d\overline{\varphi}$ — жисмнинг қутбдан ўтувчи оний ўқ атрофида элементар айланишдаги бурчак вектори. $d\overline{\varphi}$ вектор $\overline{\omega}$ бўйича йўналади

Шундай қилиб, A_k нуқтанинг элементар кўчиши учун қуйидаги ифодани оламиз:

$$d\overline{r}_k = d\overline{r}_0 + d\overline{\varphi} \times \overline{r'}_k. \tag{21.71}$$

У ҳолда жисмга таъсир этувчи кучларнинг элементар иши

$$dA = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k \cdot d\overline{r}_k = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k \cdot d\overline{r}_0 + \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k \cdot (d\overline{\varphi} \times \overline{r'}_k) \tag{21.72}$$

формуладан аниқланади. Бунда $\sum\limits_{k=1}^{n} \overline{F}_k = \overline{R}$ — таъсир этувчи кучларнинг бош вектори.

Аралаш кўпайтманинг хоссасига кўра

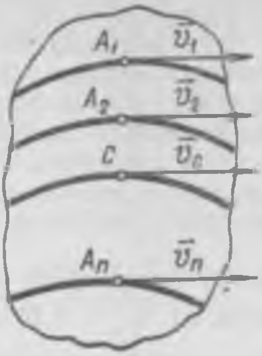
$$\sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k \cdot (d\overline{\varphi} \times \overline{r'}_k) = d\overline{\varphi} \cdot \sum_{k=1}^{n} \overline{r'}_k \times \overline{F}_k$$

ва $\overline{M}_0 = \sum\limits_{k=1}^{n} \overline{r'}_k \times \overline{F}_k$ жисмга қўйилган кучларнинг O қутбга нисбатан бош моменти эканлигини эътиборга олсак, (21.72) қуйидагича ёзилади:

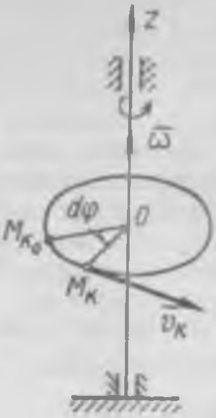
$$dA = \overline{R} \cdot d\overline{r}_0 + \overline{M}_0 \cdot d\overline{\varphi}. \tag{21.73}$$

(21.73) формула *эркин қаттиқ жисм нуқталарига таъсир этувчи кучларнинг элементар иши ҳақидаги теоремани ифодалайди: эркин қаттиқ жисмга таъсир этувчи кучларнинг элементар иши қаттиқ жисмнинг қутб билан илгарилама ҳаракатдаги элементар кўчишида кучлар бош векторининг иши билан жисмнинг қутб атрофида* *элементар айланма кўчишида кучларнинг кутбга нисбатан бош моменти ишининг алгебраик йиғиндисига тенг.*

Бу теоремадан фойдаланиб қаттиқ жисмнинг асосий ҳаракатларидаги кучларнинг элементар ишини ҳисоблаймиз.



220- расм.



221- расм.

1. **Илгариланма ҳаракат.** Бу ҳолда элементар айланма кўчиш нолга тенг бўлади (220-расм): $d\overline{\varphi}=0$. Шу сабабли (21.73) қуйидагича ёзилади:

$$dA=\overline{R}\cdot d\overline{r_0},$$

яъни *илгариланма ҳаракатдаги қаттиқ жисм нуқталарига таъсир этувчи кучларнинг элементар иши қутбнинг (массалар марказининг) элементар кўчишидаги кучлар бош векторининг ишига тенг.*

2. **Қўзғалмас ўқ атрофидаги айланма ҳаракат.** Бу ҳолда қутбни z айланиш ўқида оламиз (221-расм), натижада

$$d\overline{r_0}=0,\ \overline{M_0}\cdot d\overline{\varphi}=M_z\,d\varphi.$$

шу сабабли

$$dA=M_z\,d\varphi, \tag{21.74}$$

яъни *қўзғалмас ўқ атрофида айланма ҳаракатдаги қаттиқ жисм нуқталарига таъсир этувчи кучнинг элементар иши жисмнинг ўқ атрофида элементар айланма кўчишидаги кучларнинг айланиш ўқига нисбатан бош моменти ишига тенг.*

Кўрилаётган ҳолда жисмга таъсир этувчи кучларнинг қуввати қуйидагича бўлади:

$$N=\frac{dA}{dt}=M_z\frac{d\varphi}{dt}$$

ёки

$$N=M_z\omega,$$

бунда ω — жисмнинг бурчак тезлиги.

3. **Текис параллел ҳаракат.** Жисмнинг текис параллел ҳаракатини қутб билан биргаликда илгариланма ҳаракат ва қутб атрофидаги айланма ҳаракатдан иборат деб қаралганидан, қутб учун жисмнинг массалар марказини олсак, (21.73) га кўра элементар иш

$$dA=\overline{R}\cdot d\overline{r_C}+M_C\,d\varphi \tag{21.75}$$

формуладан аниқланади. (21.75) да $d\overline{r}_C$ — массалар марказининг элементар кўчиши; M_{Cz} — таъсир этувчи кучларнинг массалар марказига нисбатан (ёки массалар марказидан текис шакл текислигига перпендикуляр равишда ўтувчи ўққа нисбатан) бош моменти; $d\varphi$ — массалар маркази атрофидаги элементар айланма кўчиш.

Бинобарин, *текис параллел ҳаракатдаги жисм нуқталарига таъсир этувчи кучларнинг элементар иши жисм массалар марказининг элементар кўчишидаги кучлар бош вектори иши билан жисмнинг масса маркази атрофида элементар айланма кўчишидаги кучларнинг массалар марказига нисбатан бош моменти ишининг йиғиндисига тенг.*

4. Сферик ҳаракат. Бу ҳолда қутб учун жисмнинг қўзғалмас нуқтасини оламиз. Натижада $d\overline{r}_0 = 0$ бўлади. Шу сабабли (21.73) дан

$$dA = M_0 d\overline{\varphi} = M_{OP} \cdot d\varphi,$$

бунда $d\varphi$ — оний ўқ атрофидаги элементар айланма кўчиш; M_{OP} — — кучларнинг оний ўққа нисбатан бош моменти.

Шундай қилиб, *сферик ҳаракатдаги қаттиқ жисм нуқталарига таъсир этувчи кучларнинг элементар иши кучларнинг оний ўққа нисбатан бош моментининг жисм шу ўқ атрофида элементар айланма кўчишидаги ишига тенг.*

133-§. Потенциалли куч майдони

Нуқтага таъсир этувчи кучнинг бирор кўчишдаги иши умумий ҳолда нуқтанинг шу кўчишдаги ҳаракат қонунига боғлиқ бўлади. Аммо юқорида кўрганимиздек, нуқтага қўйилган оғирлик кучининг, эластиклик кучининг ёки марказий кучларнинг нуқтанинг бирор кўчишидаги ишлари шу нуқтанинг ҳаракат қонунига боғлиқ бўлмайди. Бундай кучлар *потенциалли кучлар* деб аталувчи кучлар туркумига киради.

Потенциалли куч майдони ва куч функцияси. Фазонинг бирор соҳасига киритилган моддий нуқтага нуқта координаталарининг функцияси бўлган куч таъсир этса, бундай соҳа *куч майдони* дейилади.

Куч майдонига мисол тариқасида планеталар ёки Қуёшнинг тортиш кучи майдонини олиш мумкин. Бошқа мисол сифатида электр ёки электромагнит майдонини кўрсатиш мумкин.

Майдон кучини $\overline{F}\,(X, Y, Z)$ билан белгиласак, бу кучнинг элементар иши (21.61) га мувофиқ

$$dA = X(x, y, z)dx + Y(x, y, z)dy + Z(x, y, z)dz \tag{21.76}$$

кўринишда ёзилади. Бу ифоданинг ўнг томони умумий ҳолда нуқта координаталарига боғлиқ бирор функциянинг тўлиқ дифференциали бўлмайди. Куч майдонлари ичида бизни (21.76) нинг ўнг томонидаги уч ҳад бирор $U(x, y, z)$ функциянинг тўлиқ дифференциали бўладиган куч майдони қизиқтиради:

$$dA = dU. \tag{21.77}$$

Бундай куч майдони *потенциалли куч майдони* дейилади.

Шундай қилиб, потенциалли куч майдонида бажарилган элементар иш

$$dA = Xdx + Ydy + Zdz \tag{21.78}$$

формуладан аниқланади. U функциянинг тўлиқ дифференциали учун яна қуйидаги ифодани ёзиш мумкин:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz. \tag{21.79}$$

(21.77) ўринли бўлиши учун (21.78) ва (21.79) тенгликлардаги dx, dy, dz лар олдидаги мос коэффициентлар ўзаро тенг бўлиши зарур:

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, Y = \frac{\partial U}{\partial y}, Z = \frac{\partial U}{\partial z}. \tag{21.80}$$

Бинобарин, (21.80) шартларни қаноатлантирувчи x, y, z координаталарнинг бир қийматли, чекли ва дифференциалланадиган U функцияси мавжуд бўлса, яъни майдон кучининг координата ўқларидаги проекциялари U функциядан мос координаталар бўйича олинган хусусий ҳосилаларга тенг бўлса, бундай куч майдони потенциалли куч майдонидан иборат бўлади.

U функция *куч функцияси* деб, бундай майдон кучи *потенциалли куч* ёки *консерватив куч* деб аталади.

Демак, потенциалли майдон кучи $\overline{F}$ қуйидагича аниқланади:

$$\overline{F} = \frac{\partial U}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\overline{k}$$

ёки

$$\overline{F} = gradU.$$

Шундай қилиб, $\overline{F}$ куч U скаляр функциянинг градиентига тенг бўлади.

Майдон кучининг координата ўқларидаги проекциялари $X(x, y, z)$, $Y(x, y, z)$, $Z(x, y, z)$ нинг кўринишига қараб, майдоннинг потенциалли эканлигини аниқлай олмаймиз. Бу масалани ечиш учун (21.80) дан хусусий ҳосилалар оламиз:

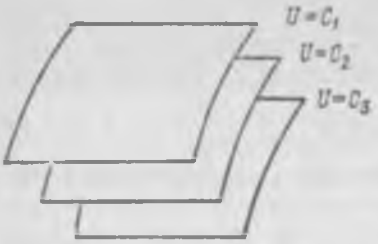
$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x};$$

$$\frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}, \quad \frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y},$$

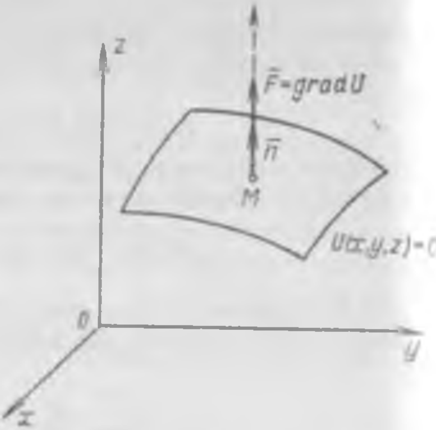
$$\frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}, \quad \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x},$$

ёки аралаш ҳосилалар тенглигидан

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}, \quad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}, \quad \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x}. \tag{21.81}$$



222- расм.



223- расм.

(21.81) тенгликлар куч майдони потенциалли бўлишининг зарурий шартини ифодалайди (бу тенгликлар етарли шарт эканлигини ҳам исботлаш мумкин).

Тенг потенциалли сирт. Потенциалли куч майдонидаги куч функцияси x, y, z координаталарнинг функциясидан иборат:

$$U = U(x,\ y,\ z).$$

Агар бу функция ўзгармас миқдорга тенг, яъни

$$U = (x,\ y,\ z) = C \tag{21.82}$$

бўлса, бундай тенглама воситасида аниқланадиган сирт *тенг потенциалли сирт* дейилади. (21.82) да C га турлича қийматлар бериб, ҳар қайсисида куч функцияси ўзгармасдан қоладиган сиртлар тўплами ҳосил қилинади (222-расм).

(21.82) ни дифференциалласак,

$$dU = 0$$

бўлади. Шу сабабли (21.77) га асосан қуйидаги натижани оламиз: нуқтанинг тенг потенциалли сирт бўйича ҳар қандай элементар кўчишидаги кучнинг иши нолга тенг, яъни

$$dA = \bar F \cdot d\bar r = 0$$

ёки

$$|\bar F| \cdot |d\bar r| \cdot \cos\left(\widehat{\bar F,\ d\bar r}\right) = 0. \tag{21.83}$$

(21.83) да $|\bar F| \neq 0$, $|d\bar r| \neq 0$ бўлгани учун $\cos\left(\widehat{\bar F,\ d\bar r}\right) = 0$

ёки

$$\widehat{\bar F,\ d\bar r} = \frac{\pi}{2}$$

бўлади. Яъни $\bar F$ куч тенг потенциалли сирт нормали бўйлаб йўналади (223-расм).

134-§. Потенциалли куч майдонидаги иш. Потенциал энергия

(21.63) ва (21.77) га мувофиқ потенциалли куч майдонида нуқта M_0 ҳолатдан M ҳолатга кўчишида бажарилган иш

$$A = \int_{M_0}^{M} \overline{F} \cdot d\overline{r} = \int_{U_0}^{U} dU = U - U_0 \tag{21.84}$$

формуладан аниқланади, бунда $U_0 = U_0(x_0, y_0, z_0)$, $U = U(x, y, z)$.

Шундай қилиб потенциалли кучнинг иши нуқтанинг охирги ва бошланғич ҳолатларига мос келувчи куч функцияларининг айирмасига тенг (224-расм).

(21.84) га асосан, потенциалли куч майдонида нуқтанинг ёпиқ эгри чизиқ бўйича кўчишидаги майдон кучининг иши нолга тенг бўлади:

$$A = \oint \overline{F} \cdot d\overline{r} = 0.$$

(21.77) дан кўрамизки, потенциал функция ўзгармас сонгача аниқлик билан топилади:

$$U = U_0 + A. \tag{21.85}$$

Агар координата бошини нуқтанинг бошланғич M_0 ҳолатида олсак, бу нуқтада $U_0 = 0$ деб ҳисоблаш мумкин. У ҳолда (21.85) ушбу кўринишда ёзилади:

$$A = U(x, y, z). \tag{21.86}$$

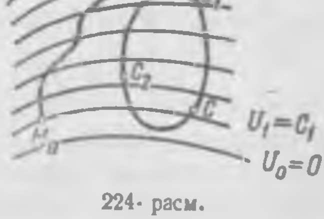
(21.86) тенглик куч функциясининг физик хусусиятини ифодалайди: *куч функцияси нуқта координаталар бошидан майдоннинг берилган нуқтасигача кўчгандаги майдон кучининг иши билан ўлчанадиган катталикни ифодалайди.*

Майдон кучи потенциалли бўлган ҳолда куч функцияси U билан бир қаторда майдоннинг берилган нуқтасидаги энергия миқдорини ифодалайдиган ва потенциал энергия деб аталадиган бошқа П функция ҳам киритилади.

Куч майдонининг M нуқтасидаги *потенциал энергияси* П деб, майдон кучининг нуқта M ҳолатдан бошланғич M_0 ҳолатга кўчишидаги иши билан ўлчанадиган катталикка айтилади. Потенциал энергия қуйидагига тенг бўлади:

$$\Pi = A = \int_{M}^{M_0} \overline{F} \cdot d\overline{r} = U_0 - U, \tag{21.87}$$

бунда U_0 майдоннинг барча нуқталари учун бир хил бўлиб, нуқтанинг бошланғич ҳолатига боғлиқ. Агар координаталар боши нуқтанинг бошланғич ҳолатида олинса, $U_0 = 0$ бўлиб, потенциал энергия учун



224- расм.

$$\Pi = -U \tag{21.88}$$

формула ўринли бўлади.

Демак, *потенциалли куч майдонининг берилган нуқтасидаги потенциал энергия ана шу нуқтадаги куч функциясининг тескари ишорали қийматига тенг.*

135-§. Куч функциясини ҳисоблашга доир мисоллар

Потенциалли куч майдонига мисол тариқасида бир жинсли оғирлик кучи майдонини ва чизиқли эластиклик кучи майдонини олиб, бу майдонлар учун куч функциясини ҳисоблаймиз.

1. Бир жинсли оғирлик кучи майдонининг куч функцияси. Бир жинсли оғирлик кучи майдонидаги элементар иш (21.67) га кўра

$$dA = -mgdz = -d(mgz) = dU$$

формуладан аниқланади. Бундан куч функциясини аниқлаймиз:

$$U = -mgz + \text{const}. \tag{21.89}$$

Демак, бир жинсли оғирлик кучи майдони потенциаллидир.

2. Чизиқли эластиклик кучи майдонининг куч функцияси. Чизиқли эластиклик кучи қуйидагича аниқланади:

$$\overline{F} = -c\overline{r},$$

ёки

$$X = -cx,\ Y = -cy,\ Z = -cz.$$

Бинобарин, чизиқли эластиклик кучининг элементар иши

$$dA = Xdx + Ydy + Zdz = -c(xdx + ydy + zdz) = -c\overline{r}\cdot d\overline{r} =$$
$$= d\left(-\frac{cr^2}{2}\right)$$

га тенг, чунки

$$xdx + ydy + zdz = \overline{r}\cdot d\overline{r},\ r^2 = \overline{r}^2.$$

Шундай қилиб, чизиқли эластиклик кучнинг куч функцияси учун қуйидаги ифодани оламиз:

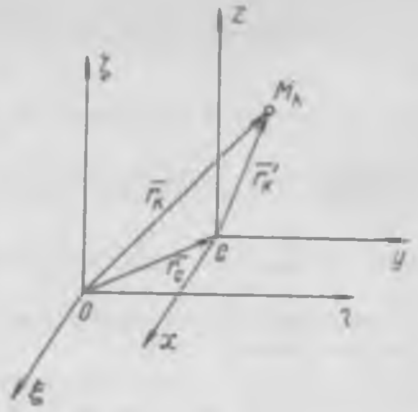
$$U = -\frac{cr^2}{2} + \text{const},$$

ёки $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ бўлгани учун

$$U = -\frac{c}{2}(x^2 + y^2 + z^2) + \text{const}.$$

Бу ифодадан кўрамизки, *эластиклик кучи таъсиридаги нуқта учун тенг потенциалли сиртлар маркази координата бошида бўлган сферик сиртлардан иборат.*

136- §. Нуқта ва системанинг кинетик энергияси. Кёниг теоремаси



225- расм.

Механикада моддий нуқта ҳаракатининг динамик хусусиятларидан бири сифатида унинг кинетик энергияси олинади. Нуқта массасининг унинг тезлиги квадратига кўпайтмасининг ярмига тенг бўлган $\frac{mv^2}{2}$ скаляр катталик *нуқтанинг кинетик энергияси* дейилади.

Халқаро СИ бирликлар системасида нуқтанинг кинетик энергияси $\frac{кг \cdot м^2}{с^2}$ ёки Н·м да ўлчанади.

Механик системанинг кинетик энергияси унинг барча нуқталари кинетик энергияларининг йиғиндисига тенг

$$T = \sum \frac{m_k v_k^2}{2} \qquad (21.90)$$

катталик *системанинг кинетик энергияси* дейилади.

Нуқта ёки системанинг кинетик энергияси нуқталар тезликларининг йўналишига боғлиқ бўлмайди. Механик системанинг барча нуқталари тинч ҳолатда бўлгандагина системанинг кинетик энергияси нолга тенг бўлади.

Механик система қўзғалмас $O\xi\eta\zeta$ координаталар системасига нисбатан ҳаракатлансин. Системанинг массалар маркази C нуқтада олинган ва у билан бирга илгариланма ҳаракатланувчи $Cxyz$ координаталар системасини киритамиз (225-расм). У ҳолда системанинг $O\xi\eta\varsigma$ координаталар системасига нисбатан абсолют ҳаракатини массалар маркази билан биргаликдаги илгариланма ҳаракат ва ундан ўтувчи $Cxyz$ координаталар системасига нисбатан айланма ҳаракатдан ташкил топган деб қараш мумкин.

Расмдан

$$\overline{r}_k = \overline{r}_c + \overline{r}'_k.$$

M_k нуқта тезлиги учун

$$\overline{v}_k = \overline{v}_C = \overline{v}'_k \qquad (21.91)$$

формула ўринли бўлади. Бунда $\overline{v}'_k = \frac{d\overline{r}'_k}{dt}$ нуқтанинг нисбий тезлигидир.

$v_k^2 = \overline{v}_k^2$ эканини назарда тутиб, (21.91) ва (21.90) ларга кўра системанинг абсолют ҳаракатдаги кинетик энергиясини ҳисоблаймиз:

$$T = \frac{v_C^2}{2}\sum m_k + \sum \frac{m_k v_k'^2}{2} + \overline{v}_C \cdot \sum m_k \overline{v}'_k, \qquad (21.92)$$

бунда $\sum m_k = M$ — система массаси; $\sum \frac{m_k v_k'^2}{2} = T'_C$ — системанинг массалар марказига нисбатан нисбий ҳаракат кинетик энергияси.

$$\sum m_k \overline{v}'_k = \sum m_k \frac{d\overline{r}'_k}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum m_k \overline{r}'_k\right) = 0,$$

чунки ҳаракатдаги координаталар системасининг боши массалар марказида олингани туфайли

$$\sum m_k \overline{r}'_k = M\overline{r}'_C = 0$$

бўлади.

Шундай қилиб, (21.92) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$T = \frac{Mv_C^2}{2} + T'_C. \qquad (21.93)$$

(21.93) тенглик система кинетик энергияси ҳақидаги *Кёниг теоремасини* ифодалайди: *мураккаб ҳаракатдаги системанинг кинетик энергияси массаси система массасига тенг деб олинадиган массалар марказининг кинетик энергияси ҳамда массалар маркази билан биргаликда илгариланма ҳаракатланувчи координаталар системасига нисбатан системанинг нисбий ҳаракат кинетик энергияларининг йиғиндисига тенг.*

137-§. Қаттиқ жисмнинг кинетик энергияси

Қаттиқ жисмнинг қуйидаги ҳаракатларида унинг кинетик энергиясини ҳисоблашни кўриб чиқамиз.

1. **Илгариланма ҳаракат.** Қаттиқ жисм илгариланма ҳаракатда бўлса, барча нуқталарининг тезлиги ҳар онда ўзаро тенг бўлади: $\overline{v}_k = \overline{v}_C$, бунда $\overline{v}_C$ — жисм масса марказининг тезлиги. Шу сабабли

$$T = \sum \frac{m_k v_k^2}{2} = \frac{v_C^2}{2}\sum m_k = \frac{Mv_C^2}{2}. \qquad (21.94)$$

Шундай қилиб, *илгариланма ҳаракатдаги жисмнинг кинетик энергияси массаси бутун жисм массасига тенг бўлган массалар марказининг кинетик энергиясига тенг.*

2. **Қўзғалмас ўқ атрофидаги айланма ҳаракат.** Қўзғалмас ўқ атрофида айланаётган жисм исталган M_k нуқтаси тезлигининг модули $v_k = \omega h_k$ формуладан аниқланади. Бунда: ω — жисмнинг бурчак тезлиги; h_k — жисмнинг M_k нуқтасидан айланиш ўқигача бўлган масофа.

Демак, мазкур жисмнинг кинетик энергияси

$$T = \sum \frac{m_k\ v_k^2}{2} = \sum \frac{m_k \omega^2 h_k^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum m_k h_k^2$$

ёки

$$T = I_z \frac{\omega^2}{2} \qquad (21.95)$$

бўлади, бунда $I_z = \sum m_k h_k^2$ — жисмнинг айланиш ўқига нисбатан инерция моменти.

Бинобарин, *қўзғалмас ўқ атрофида айланаётган жисмнинг кинетик энергияси жисмнинг айланиш ўқига нисбатан инерция моменти билан унинг бурчак тезлиги квадрати кўпайтмасининг ярмига тенг.*

3. Текис параллел ҳаракат. Қаттиқ жисмнинг текис параллел ҳаракатини массалар маркази билан биргаликдаги илгариланма ҳаракат ва унинг атрофидаги айланма ҳаракатдан иборат деб қараймиз. У ҳолда (21.93) да нисбий ҳаракат кинетик энергияси

$$T'_C = \frac{I_{Cz}\omega^2}{2}$$

формуладан аниқланади; бунда I_{Cz} — жисмнинг массалар маркази орқали ҳаракат текислигига перпендикуляр равишда ўтувчи ўққа нисбатан инерция моменти. Шундай қилиб;

$$T = \frac{Mv_C^2}{2} + I_{Cz}\frac{\omega^2}{2}. \qquad (21.96)$$

Яъни, *текис параллел ҳаракатдаги жисмнинг кинетик энергияси массалар маркази билан биргаликдаги жисмнинг илгариланма ҳаракат кинетик энергияси ва жисмнинг массалар маркази орқали ҳаракат текислигига перпендикуляр равишда ўтувчи ўқ атрофида айланма ҳаракат кинетик энергияларининг йиғиндисига тенг.*

4. Сферик ҳаракат. Қўзғалмас O нуқта атрофида сферик ҳаракатдаги қаттиқ жисмнинг ҳар ондаги ҳаракатини шу нуқтадан ўтувчи бирор оний ўқ атрофидаги айланма ҳаракатдан иборат деб қараш мумкинлиги кинематикадан маълум. Бинобарин, бу ҳолда кинетик энергияни ҳисоблаш учун (21.95) формуладан фойдаланиш мумкин:

$$T = I_e \frac{\omega^2}{2}, \qquad (21.97)$$

бунда I_e — оний ўққа нисбатан инерция моменти бўлиб, (20.27) формуладан аниқланади.

(21.97) дан кўрамизки, *қўзғалмас нуқта атрофида ҳаракатланувчи жисмнинг кинетик энергияси жисмнинг оний айланиш ўқига нисбатан инерция моменти I_e нинг оний бурчак тезлиги ω квадратига кўпайтмасининг ярмига тенг.*

5. Қаттиқ жисм ҳаракатининг умумий ҳоли. Эркин қаттиқ жисмнинг ҳаракатини массалар маркази билан биргаликдаги илгариланма ҳаракат ва унинг атрофидаги айланма ҳаракатдан ташкил топган деб қарасак, эркин қаттиқ жисмнинг кинетик энергияси (21.93) ва (21.97) ларга кўра

$$T = \frac{Mv_C^2}{2} + \frac{I_e\,\omega^2}{2} \tag{21.98}$$

формула ёрдамида ҳисобланади.

Шундай қилиб, *эркин қаттиқ жисмнинг кинетик энергияси массалар маркази билан биргаликдаги жисмнинг илгариланма ҳаракат кинетик энергияси ва массалар маркази орқали ўтувчи оний ўқ атрофида айланма ҳаракат кинетик энергияларининг йиғиндисига тенг.*

Агар механик система бир неча қаттиқ жисмдан ташкил топган бўлса, у ҳолда ҳар бир жисмнинг кинетик энергияси айрим-айрим ҳисобланади ва уларнинг йиғиндиси олинади. Жисмлар системасининг кинетик энергияси шу йўсинда ҳисобланади.

138-§. Моддий нуқта кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақидаги теорема

Массаси m га тенг бўлган M эркин моддий нуқта $\overline{F}$ куч таъсирида ҳаракатлансин (226-расм). Нуқтага таъсир этувчи кучнинг M_0M_1 кўчишдаги иши билан нуқта кинетик энергиясининг ўзгариши орасидаги муносабатни аниқлаймиз. Бунинг учун динамиканинг асосий қонунини $m\overline{w} = \overline{F}$ кўринишда олиб, бу тенгламанинг ҳар иккала томонини M нуқтанинг траекториясига ҳаракат йўналиши бўйича ўтказилган $M\tau$ уринмага проекциялаймиз:

$$mw_\tau = F_\tau. \tag{21.99}$$

Уринма тезланиш w_τ ни қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$w_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\,\frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds}\,v.$$

Бундан ташқари, $F_\tau = F\cos\alpha$ бўлгани учун

$$mv\,\frac{dv}{ds} = F\cos\alpha$$

муносабатни оламиз. Унинг ҳар иккала томонини ds га кўпайтирсак,

$$mvdv = F\cos\alpha\cdot ds.$$

бўлади. Ҳосил қилинган тенгламанинг чап қисми нуқта кинетик энергиясининг дифференциалини, ўнг қисми эса (21.59) га кўра элементар ишни ифодалайди. Шундай қилиб,

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = d\,A \tag{21.100}$$

(21.100) формула *нуқта кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақидаги теореманинг дифференциалли ифодасидир: нуқта кинетик* *энергиясининг дифференциали нуқтага таъсир этувчи кучнинг элементар ишига тенг.*

(21.100) ни dt га бўлиб, $\frac{dA}{dt}=N$ — қувват эканлигини назарда тутсак, ушбу тенгламани оламиз:

226- расм.

$$\frac{d\left(\frac{mv^2}{2}\right)}{dt} = N. \qquad (21.101)$$

Яъни, *моддий нуқта кинетик энергиясидан вақт бўйича олинган ҳосила унга таъсир этувчи кучнинг қувватига тенг.*

(21.100) ни нуқтанинг бошланғич M_0 ва охирги M_1 ҳолатларига мос чегараларда интеграллаймиз:

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A, \qquad (21.102)$$

бунда $A = \int\limits_{M_0}^{M_1} F\cos\alpha \cdot ds$ билан F кучнинг M_0M_1 кўчишдаги иши кўрсатилган. (21.102) тенглама *чекли кўчишда нуқта кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақидаги теоремани ифодалайди: нуқтанинг бирор чекли кўчишида кинетик энергиясининг ўзгариши унга таъсир этувчи кучнинг худди шундай кўчишдаги ишига тенг.*

Агар моддий нуқтага бир неча куч таъсир этса, (21.100), (21.102) тенгламаларда мазкур кучлар тенг таъсир этувчисининг иши ёки қуввати олинади.

Боғланишлар қўйилган нуқтага кинетик энергиянинг ўзгариши ҳақидаги теоремани қўллаш учун боғланишларни боғланиш реакция кучлари билан алмаштирамиз. Агар M нуқта қўзғалмас, идеал силлиқ сирт бўйича ҳаракатланса, бундай сиртнинг реакция кучи M нуқтада сиртга ўтказилган нормаль бўйича йўналади, шу сабабли нуқтанинг элементар кўчишидаги бундай реакция кучининг иши нолга тенг бўлади.

Бинобарин, идеал силлиқ сирт устида ҳаракатланаётган нуқта учун кинетик энергиянинг ўзгариши ҳақидаги теорема эркин нуқта кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақидаги теоремалар билан бир хил бўлади.

Агар нуқта қўзғалмас, силлиқ бўлмаган сирт бўйича ҳаракатланса, у ҳолда нуқтага қўйилган кучларнинг ишидан ташқари, ишқаланиш кучининг иши ҳам ҳисобга олинади.

139-§. Нуқта механик энергиясининг сақланиш қонуни

Агар M нуқта потенциалли куч майдонида ҳаракатланса, элементар иш (21.77) га кўра аниқланади ҳамда нуқта кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақидаги теоремани ифодаловчи (2'.100) формула ушбу кўринишда ёзилади:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dU. \tag{21.103}$$

Бу ифодани интеграллаб

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = U - U_0 \tag{21.104}$$

муносабатни оламиз. Бунда U ва U_0 лар куч функциясининг бошланғич ва охирги ҳолатларга мос келувчи қийматларидир. Бинобарин, *потенциалли куч майдонида кинетик энергиянинг ўзгариши нуқтанинг охирги ва бошланғич ҳолатларига мос келувчи куч функцияси қийматларининг айирмасига тенг.*

Куч функцияси ўрнига потенциал энергияни киритсак, (21.88) га биноан (21.104) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \Pi_0 - \Pi$$

ёки

$$\frac{mv^2}{2} + \Pi = \frac{mv_0^2}{2} + \Pi_0 = h, \tag{21.105}$$

бунда h — ўзгармас катталик.

Нуқта кинетик ва потенциал энергияларининг йиғиндиси *тўлиқ механик энергияни* ифодалайди ва у E билан белгиланади, яъни

$$E = \frac{mv^2}{2} + \Pi = h. \tag{21.106}$$

(21.106) тенглик нуқта ҳаракат дифференциал тенгламасининг биринчи интегралидан иборат бўлиб, *энергия интеграли* дейилади. Бу тенглик *нуқта механик энергиясининг сақланиш қонунини* ифодалайди: *потенциалли куч майдонида ҳаракатланаётган нуқта кинетик ва потенциал энергияларининг йиғиндиси ўзгармасдан қолади.*

140-§. Механик система кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақидаги теорема

Механик система N та моддий нуқталардан ташкил топган бўлсин. Системанинг ҳар бир нуқтасига актив кучлардан ташқари, боғланиш реакция кучларини ҳам қўямиз ва система нуқталарига қўйилган кучларни ички ва ташқи кучлардан иборат икки гуруҳга ажратамиз. Системанинг M_k нуқтасига таъсир этаётган ташқи кучлар ҳамда ички кучларнинг тенг таъсир этувчилари мос равишда $\overline{F}_k^e$, $\overline{F}_k^i$ бўлсин. У ҳолда системанинг ҳар бир нуқтасини $\overline{F}_k^e$ ва $\overline{F}_k^i$ кучлар таъсиридаги эркин нуқта деб қараш мумкин. Бинобарин, (21.100) га асосан системанинг ҳар бир нуқтаси кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақидаги теореманинг дифференциалли ифодаси қуйидагича ёзилади:

$$d\left(\frac{m_k v_k^2}{2}\right) = dA_k^e + dA_k^i, \quad (k = 1, 2, \ldots, N), \tag{21.107}$$

бунда dA_k^e ва dA_k^i — мос равишда, система нуқталарига таъсир этувчи ташқи ва ички кучларнинг элементар ишлари. (21.107) ифодани ҳадлаб қўшамиз:

$$d\left(\sum \frac{m_k v_k^2}{2}\right) = \sum dA_k^e + \sum dA_k^i$$

ёки

$$dT = \sum dA_k^e + \sum dA_k^i, \tag{21.108}$$

бунда $T = \sum \frac{m_k v_k^2}{2}$ — системанинг кинетик энергияси. (21.108) тенглама *система кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақидаги теореманинг дифференциалли ифодасидир: система кинетик энергиясининг дифференциали системага таъсир этувчи ташқи ва ички кучлар элементар ишларининг йиғиндисига тенг.*

(21.108) ни интеграллаб система нуқталарининг чекли кўчишларида кинетик энергиясининг ўзгаришига оид теоремага эга бўламиз:

$$T - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i, \tag{21.109}$$

бунда: T_0 ва T — мос равишда системанинг бошланғич ва исталган пайтдаги кинетик энергиялари; A_k^e — система нуқталарига таъсир этувчи ташқи кучларнинг иши; A_k^i — ички кучларнинг чекли кўчишдаги ишлари.

(21.109) муносабат *система кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақидаги теоремани* ифодалайди: *системанинг бир ҳолатдан иккинчи ҳолатга кўчишида кинетик энергиясининг ўзгариши система нуқталарига таъсир этувчи барча ташқи ва ички кучларнинг мос кўчишлардаги ишларининг йиғиндисига тенг.*

(21.108) ва (21.109) дан кўрамизки, система динамикасининг бошқа умумий теоремаларидан фарқли равишда, система кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақидаги теоремада ички кучлар ҳам қатнашади.

Ўзгармас механик система учун (ёки абсолют қаттиқ жисм учун) ички кучлар бажарган ишларнинг йиғиндиси нолга тенг бўлади. Бу ҳолда (21.109) қуйидагича ёзилади:

$$T - T_0 = \sum A_k^e. \tag{21.110}$$

Яъни, *ўзгармас механик система (ёки абсолют қаттиқ жисм) бир ҳолатдан иккинчи ҳолатга кўчишида кинетик энергиясининг ўзгариши мазкур система (ёки қаттиқ жисм) нуқталарига таъсир этувчи барча ташқи кучларнинг мос кўчишлардаги ишларининг йиғиндисига тенг.*

Агар механик системани ташкил қилувчи нуқталар қўзғалмас силлиқ сиртлар устида ҳаракатланса, боғланиш реакция кучлари мазкур сиртларга ўтказилган нормаль бўйича йўналгани учун система нуқталарининг ҳар қандай кўчишида боғланиш реакция кучларининг иши нолга тенг бўлади ва (21. 109) да боғланиш реакция кучлари қатнашмайди.

141 §. Система механик энергиясининг сақланиш қонуни

Система кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақидаги теоремани

$$T - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i = \sum A_k \tag{21.111}$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Агар система нуқталарига таъсир этувчи ички ва ташқи кучлар консерватив кучлардан иборат бўлса, қуйидаги муносабат ўринли бўлади:

$$\sum A_k = \Pi_0 - \Pi,$$

бунда Π_0, Π лар билан система нуқталарига таъсир этувчи ички ва ташқи кучларнинг бошланғич ва исталган пайтга мос бўлган потенциал энергиялари белгиланган. Бу ҳолда (21. 111) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$T - T_0 = \Pi_0 - \Pi$$

ёки

$$T + \Pi = T_0 + \Pi_0 = h, \tag{21.112}$$

бунда h — ўзгармас катталик.

Тўлиқ механик энергияни E билан белгиласак,

$$E = T + \Pi = h \tag{21.113}$$

бўлади. (21.113) формула *энергия интеграли* дейилади ва *механик система энергиясининг сақланиш қонунини* ифодалайди: *консерватив кучлар таъсиридаги механик система кинетик ва потенциал энергияларининг йиғиндиси ўзгармасдан қолади.*

Механик системанинг сақланиш қонуни ўринли бўладиган механик системалар *консерватив системалар* дейилади.

Абсолют қаттиқ жисм учун барча ички кучлар ишларининг йиғиндиси нолга тенг бўлади, бинобарин, ички кучларнинг потенциал энергияси ўзгармас катталикка тенг бўлади; бу ўзгармасни нолга тенг деб олиш мумкин. Бу ҳолда (21.113) да потенциал энергия фақат ташқи кучларнинг потенциал энергиясидан иборат бўлади ва унинг система кинетик энергияси билан йиғиндиси ўзгармас бўлади.

Нуқта ёки механик система потенциалли бўлмаган куч майдонида ҳаракатланса, механик энергия ўзгаради. Масалан, турли қаршиликларни енгишда система механик энергиясининг бир қисми иссиқлик, электр ёки бошқа хил энергияларга айланиб сарф бўлиши мумкин. Лекин ҳар қандай куч майдонида ҳаракатланаётган нуқта ёки механик системанинг барча турдаги тўлиқ энергияси ўзгармасдан қолади.

142-§. Моддий нуқта ва система кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақидаги теоремаларни қўллашга оид масалалар

44-масала. Бошланғич тезлиги v_0 га тенг бўлган жисм горизонт билан α бурчак ташкил этувчи қия текислик бўйлаб ҳаракатланади (227-расм). Жисм билан текислик орасидаги ишқаланиш коэффициенти f га тенг. Нуқта s йўлни ўтгандан сўнг қандай тезликка эга бўлиши аниқлансин.

Ечиш. Жисмга $P = mg$ оғирлик кучи, N қия текисликнинг нормал реакция кучи ва $F_{иш} = fN$ сирпанишдаги ишқаланиш кучлари таъсир этади. $\overline{P}$ кучни қия текислик бўйича ва унга перпендикуляр йўналишда $\overline{P}_1$ ва $\overline{P}_2$ ташкил этувчиларга ажратамиз. У ҳолда

$$P_1 = mg \sin\alpha, \quad P_2 = mg\cos\alpha$$

бўлади. Бинобарин, нормал реакция кучи

$$N = P_2 = mg\cos\alpha$$

ва ишқаланиш кучи

$$F_{иш} = fmg\cos\alpha$$

формулалардан аниқланади.

Берилган жисм s йўлни ўтишида кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақидаги (21.102) теоремани қўллаймиз:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = P_1 \cdot s - F_{иш} \cdot s,$$

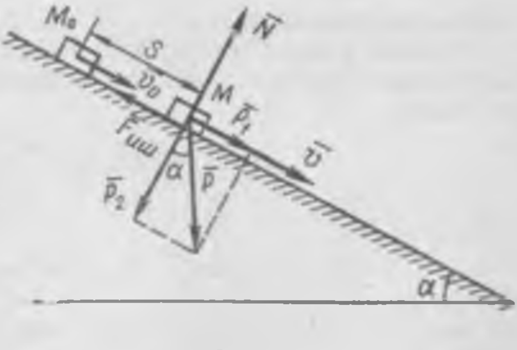
ёки

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = mgs(\sin\alpha - f\cos\alpha).$$

Бундан

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2mgs(\sin\alpha - f\cos\alpha)}$$

45-масала. Иккита заррача мусбат электр билан зарядланган бўлиб, биринчи заррача қўзғалмас бўлиб, заряди q_0 га тенг; иккинчи заррачанинг массаси m га, заряди q_1 га тенг. Иккинчи заррача биринчи заррачанинг $F = \frac{q_0 q_1}{x^2}$ га тенг итариш кучи таъсирида ҳаракатланади (бунда x — заррачалар орасидаги масофа). Агар иккинчи заррачанинг бошлан-



227- расм.

ғич тезлиги $v_0 = 0$ бўлса, бу заррача $M_0(x_0)$ ҳолатдан $M_1(x_1)$ ҳолатга кўчишида қандай тезликка эга бўлиши аниқлансин. $x_0 = a$, $x_1 = b$ масофалар берилган (228-расм).

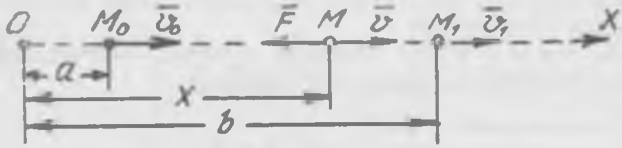
Ечиш. Иккинчи заррача учун кинетик энергиянинг ўзгариши ҳақидаги теоремани қўллаймиз:

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int\limits_a^b F dx = \int\limits_a^b \frac{q_0 q_1}{x^2} dx = \frac{q_0 q_1}{ab}(b - a)$$

$v_0 = 0$ бўлгани учун

$$v_1 = \sqrt{\frac{2q_0 q_1}{mab}(b - a)} \ .$$

46-масала. m массали нуқта $F = k\sqrt{v}$ H қаршилик кучи таъсир этадиган муҳитда v_0 м/с тезлик билан ҳаракат қила бошлайди. Бу ерда: v — нуқтанинг тезлиги; k — ўзгармас мусбат коэффициент. Нуқтанинг оғирлик кучини ҳисобга олмай, унинг қанча вақтдан кейин ва қандай масофани ўтиб тўхташи аниқлансин.



228- расм.

Ечиш. Бу масалани ҳаракат миқдори ва кинетик энергиянинг ўзгариши ҳақидаги теоремалардан фойдаланиб ечамиз.

Нуқтанинг бошланғич ҳолатини координаталар боши учун қабул қилиб, x ўқни ҳаракат йўналиши бўйича йўналтирамиз (228-расм). Кучнинг x ўқдаги проекцияси

$$X = -F = -k\sqrt{v}$$

тенгликдан аниқланади.

Берилган нуқта учун ҳаракат миқдорининг ўзгариши ва кинетик энергиянинг ўзгариши ҳақидаги теоремаларни дифференциал кўринишда ёзамиз:

$$d(mv) = Xdt; \quad d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = Xdx$$

ёки

$$d(mv) = -k\sqrt{v}\ dt; \ d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = -k\sqrt{v}\ dx.$$

Бу тенгламаларни ўзгарувчиларни ажратиш усули билан интеграллаймиз:

$$m \int_{0}^{v} \frac{dv}{\sqrt{v}} = -k \int_{0}^{t} dt,$$

$$\frac{m}{2} \int_{v_0}^{v} \frac{dv^2}{\sqrt{v}} = -k \int_{0}^{s} dx.$$

Охирги тенгликда $\frac{dv^2}{\sqrt{2v}} = \sqrt{v}\,dv$ эканлигини назарда тутиб, интегралларни ҳисоблаймиз:

$$2m\sqrt{v}\,\Big|_{v_0}^{v} = -kt\,\Big|_{0}^{t},$$

$$\frac{2}{3}mv\sqrt{v}\,\Big|_{v_0}^{v} = -kx\,\Big|_{0}^{s}.$$

Бу тенгликларда $v = 0$ десак (чунки нуқта тўхтаганда тезлиги нолга тенг бўлади), қуйидаги тенгламалар ҳосил бўлади:

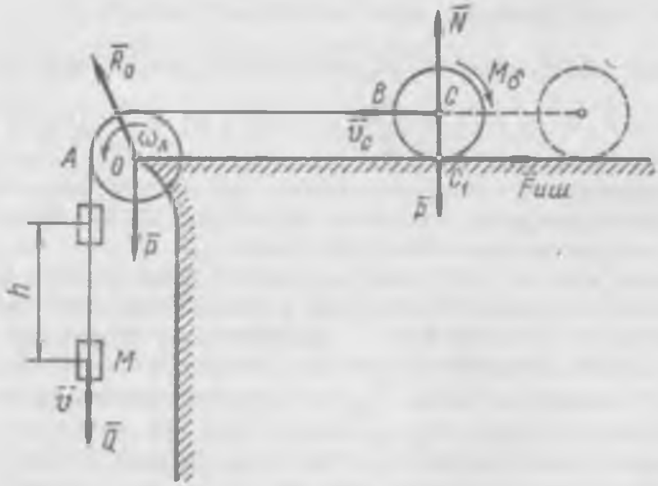
$$2m\sqrt{v_0} = kt,$$

$$\frac{2}{3}mv_0\sqrt{v_0} = ks.$$

Булардан нуқтанинг тўхташ вақти ва ўтган йўлини аниқлаймиз:

$$t = 2\frac{m}{k}\sqrt{v_0}\ \text{с},$$

$$s = \frac{2}{3}\,\frac{m}{k}\,v_0\sqrt{v_0}\ \text{м}.$$



229- расм.

47-масала. Оғирлик кучи Q га тенг бўлган M юк пастга тушиб, чўзилмайдиган ип воситасида горизонтал текисликда сирпанмасдан ғилдирайдиган B ғилдиракни ҳаракатлантиради; ип қўзғалмас A блокдан ўтказилган. A блок билан B ғилдирак ҳар бирининг оғирлиги P ва радиуси R га тенг бўлган бир жинсли дисклар деб қаралади. Думалашдаги ишқаланиш коэффициенти δ га тенг. Блок ва ғилдиракнинг ўқларида ҳосил бўладиган ишқаланишни ва ипнинг оғирлигини эътиборга олмай, M юкнинг тезлиги унинг тушиш баландлиги h га боғлиқ равишда аниқлансин (229-расм). Бошланғич пайтда система тинч ҳолатда бўлган.

Ечиш. Бу масалада юкнинг кўчиши h ва ўзгармас P, Q кучлар маълум бўлиб, юкнинг v тезлигини топиш керак. Бунинг учун юк, ип, блок ва ғилдиракдан ташкил топган система учун (21.109) формула билан ифодаланадиган кинетик энергиянинг ўзгариши ҳақидаги теоремани қўллаймиз. Бошланғич пайтда система тинч ҳолатда бўлгани учун $T_0 = 0$.

Юк, блок ва ғилдиракнинг кинетик энергияларини T_1, T_2, T_3 билан белгиласак, юк тўғри чизиқли илгариланма ҳаракат қиладн, блок O нуқтадан ўтувчи ўқ атрофида айланма ҳаракатда бўлади, ғилдирак эса текис параллел ҳаракат қилади. Шу сабабли T_1, T_2, T_3 лар мос равишда (21.94), (21.95) ва (21.96) формулалардан аниқланади:

$$T_1 = \frac{Q}{g}\frac{v^2}{2}; \; T_2 = T_{Oz}\frac{\omega_A^2}{2}; \;\; T_3 = \frac{P}{g}\frac{v_C^2}{2} + T_{Cz}\frac{\omega_B^2}{2},$$

бунда: $T_{Oz} = T_{Cz} = \frac{P}{g}\frac{R^2}{2}$ — блок ва ғилдиракларнинг марказидан расм текислигига перпендикуляр равишда ўтувчи ўққа нисбатан инерция моментлари; $\omega_A = \frac{v}{R}$ — блокнинг бурчак тезлиги; $v_C = v$ — юк тезлигига тенг бўлган ғилдирак марказининг тезлиги ва $\omega_B = \frac{v_C}{R}$.

Шундай қилиб, қаралаётган системанинг кинетик энергияси:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{v^2}{4g}(2Q + 3P + P) = \frac{v^2}{2g}(Q + 2P).$$

Ип таранглик кучининг иши нолга тенг бўлганидан, ип билан бириктирилган жисмлар системаси учун ички кучлар бажарган ишларнинг йиғиндиси ҳам нолга тенг бўлади.

Блокнинг оғирлик кучи ва O нуқтанинг таянч реакция кучи қўзғалмас O нуқтага қўйилгани туфайли бу кучларнинг иши нолга тенг.

Ғилдиракнинг оғирлик кучи C нуқтанинг кўчишига тик равишда йўналгани учун бу кучнинг иши ҳам нолга тенг. Нормал реакция кучи $\overline{N}$ ва ишқаланиш кучи $\overline{F}_{\text{иш}}$ тезликларнинг оний маркази C_1 нуқтага қўйилгани туфайли бу кучларнинг иши ҳам нолга тенг. Натижада фақат юкнинг оғирлик кучи ва ғилдиракнинг думалашига қаршилик кўрсатувчи ишқаланиш моменти M_δ иш бажаради. Бинобарин,

$$\sum A_k^e = Qh - M_\delta \varphi ,$$

бунда φ — юк h баландликдан пастга тушганда ғилдиракнинг айланиш бурчаги. M_δ ва φ лар

$$M_\delta = \delta \cdot N = \delta \cdot P = \text{const}; \quad \varphi = \frac{h}{R}$$

формулалардан аниқланади. Шунинг учун

$$\sum A_k^e = Q \cdot h - \delta P \frac{h}{R} .$$

T ва $\sum A_k^e$ ларнинг қийматини кинетик энергиянинг ўзгариши ҳақидаги теоремага қўйиб қуйидаги тенгламани оламиз:

$$\frac{v^2}{2g} (Q + 2P) = h \left(Q - \frac{\delta}{R} P \right),$$

бундан

$$v = \sqrt{\frac{2gh \left(Q - \frac{\delta}{R} P \right)}{Q + 2P}} .$$

143-§. Механик ҳаракатнинг ўлчовлари ҳақида

Механикада икки хил ўлчовлар мавжуд бўлиб, улардан бири моддий объектларнинг (моддий нуқта ёки механик системанинг) *механик ҳаракат ўлчовини*, иккинчиси эса мазкур объектларнинг *ўзаро механик таъсирини* ифодалайди.

Ҳаракат миқдори, ҳаракат миқдорининг моменти (кинетик момент) ва кинетик энергия каби катталиклар моддий объектларнинг механик ҳаракат ўлчовини ифодалайди. Куч, куч моменти, кучнинг импульси, кучнинг қуввати, кучнинг иши каби катталиклар эса моддий объектларнинг ўзаро механик таъсирини ифодалайди.

Динамиканинг умумий теоремалари воситасида моддий объектларнинг механик ҳаракат ўлчовлари билан уларнинг бир-бирига ўзаро механик таъсири орасидаги муносабатлар ўрнатилади.

Кинематика бўлимида нуқта ҳаракатининг асосий кўрсаткичларидан бири сифатида нуқтанинг тезлиги олинади. Динамика бўлимида эса тезлик асосий кўрсаткич бўла олмайди. Динамикада моддий объектнинг массасини билиш муҳим аҳамиятга эга (масалан, темир йўл вагони ва кичкина вагонча, Ер шари ва глобус, тўп ўқи, милтиқ ўқи ва ҳоказо). Бинобарин, механик ҳаракатнинг ўлчовлари m ва v нинг бирор функциясидан иборат бўлади.

Моддий нуқта (ёки механик система) ҳаракатланганда, умумий ҳолда механик ҳаракатнинг ўлчовлари (ҳаракат миқдори, кинетик момент, кинетик энергия) ўзгаради. Бу ўзгаришлар уларнинг характери ва моддий объектларнинг бир-бирига ўзаро қандай таъсир этишига боғлиқ бўлади.

Моддий жисмларнинг бир-бирига механик таъсирининг интенсивлигини ифодаловчи физик катталиклар *ўзаро механик таъсирнинг ўлчовлари* дейилади.

Механик ҳаракатнинг биринчи векторли ўлчови учун ҳаракат миқдори олинади.

Берилган моддий объектга бошқа моддий объектларнинг хар ондаги таъсирини ифодаловчи ўзаро механик таъсирнинг асосий ўлчови учун *куч* олинади. Лекин куч таъсирининг эффекти фақат унинг ҳар ондаги миқдори ва йўналишига боғлиқ бўлмай, балки таъсир вақтига ҳам боғлиқ бўлади. Шундай қилиб, *ўзаро механик таъсирнинг биринчи векторли ўлчови бўлган куч импульси* тушунчасини киритишга тўғри келади.

Ҳаракат миқдори билан куч импульси орасидаги муносабат нуқта (ёки система) ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теорема воситасида аниқланади.

Механик ҳаракатнинг иккинчи векторли ўлчови учун ҳаракат миқдорининг моменти (кинетик момент) олинади. Механик ҳаракатнинг иккинчи векторли ўлчовига *ўзаро механик таъсирнинг иккинчи векторли ўлчови* мос келади; у эса *кучнинг марказга нисбатан моменти векторидир.*

Нуқта ҳаракат миқдорининг моменти (ёки системанинг кинетик моменти) билан нуқтага таъсир этувчи кучнинг марказга нисбатан моменти (системага таъсир этувчи ташқи кучларнинг бош моменти) орасидаги боғланиш ҳаракат миқдори моментининг (кинетик моментнинг) ўзгариши ҳақидаги теорема воситасида аниқланади.

Механик ҳаракатнинг скаляр ўлчови сифатида кинетик энергия олинади. Ҳаракатнинг скаляр ўлчови бошқа ўлчовларга нисбатан универсал ўлчов ҳисобланади. Чунки механик ҳаракат бошқа хил ҳаракатга айланганда (масалан, иссиқликка ёки электрга айланганда) механикада тушуниладиган ҳаракат йўналиши ўз маъносини йўқотади.

Механик ҳаракатнинг скаляр ўлчовига кучнинг қуввати, кучнинг элементар иши ёки чекли кўчишдаги иши каби *ўзаро механик таъсирнинг скаляр ўлчовлари* мос келади. Улар орасидаги муносабат кинетик энергиянинг ўзгариши ҳақидаги теорема ёрдамида аниқланади.

Механик харакатнинг битта ўлчови ёрдамида нуқта ҳаракатини тўлиқ аниқлаб бўлмайди. Ҳақиқатан хам, 46-масалада ҳаракат миқдори ва нуқтага таъсир этувчи қаршилик кучини билган ҳолда нуқтанинг неча секунддан кейин тўхташини топиш мумкин, лекин бу ҳолда нуқтанинг қанча йўлни ўтиб тўхташини аниқлай олмаймиз. Ёки нуқтанинг бошланғич кинетик энергияси ва қаршилик кучи маълум бўлганда нуқтанинг қанча масофани ўтиб тўхташини аниқлаш мумкин, лекин қанча вақтдан кейин тўхташини топа олмаймиз. Яъни бу масалани тўлиқ ечиш учун механик ҳаракатнинг икки ўлчовидан фойдаланишга тўғри келади.

XXII боб

ҚАТТИҚ ЖИСМНИНГ БАЪЗИ ҲАРАКАТ ҲОЛЛАРИ

Системанинг ҳаракат миқдори ва кинетик моменти ҳақидаги теоремалар қаттиқ жисм динамикасида муҳим роль ўйнайди. Ҳақиқатан ҳам, биз ҳаракат миқдори қаттиқ жисмнинг илгариланма ҳаракати ўлчовини ифодалашини кўрдик. Айланма ҳаракатдаги жисмнинг ҳаракат ўлчови учун унинг кинетик моменти олинади. Жисм ҳаракатини, умумий ҳолда унинг массалар маркази билан биргаликдаги илгариланма ва массалар маркази атрофидаги айланма ҳаракатлардан ташкил топган деб қараш мумкин. У ҳолда жисмнинг массалар маркази билан биргаликдаги илгариланма ҳаракатини ўрганиш учун ҳаракат миқдори ҳақидаги теореманинг бошқа кўринишдаги ифодаси бўлган массалар марказининг ҳаракати ҳақидаги теоремани, жисмнинг массалар маркази атрофидаги айланма ҳаракатини ўрганиш учун кинетик момент ҳақидаги теоремани қўллаш мумкин. Бироқ, динамикада жисм ҳаракатини илгариланма ва айланма ҳаракатларга ажратишда кинематикадан фарқли равишда, қутб сифатида жисмнинг ихтиёрий нуқтаси олинмай, балки фақат система массалар маркази олинади.

Юқорида қайд қилинган теоремаларни қаттиқ жисмнинг оддий ҳаракатларига татбиқ этамиз.

144-§. Қаттиқ жисмнинг илгариланма ҳаракати

Қаттиқ жисмнинг илгариланма ҳаракати унинг C массалар марказининг ҳаракати билан тўлиқ аниқланади. Шунинг учун жисмнинг ҳаракати битта векторли тенглама билан ифодаланади:

$$M \bar{w}_C = \bar{R}^e$$

ёки

$$M \ddot{\bar{r}}_C = \bar{R}^e , \tag{22.1}$$

бу ерда $\bar{R}^e = \sum \bar{F}_k^e$ — жисмга таъсир этувчи ташқи кучларнинг бош вектори. (22.1) векторли тенгламани координата ўқларига проекциялаб қуйидаги учта скаляр тенгламани оламиз:

$$\left.\begin{aligned} M\ddot{x}_C &= X^e , \\ M\ddot{y}_C &= Y^e , \\ M\ddot{z}_C &= Z^e . \end{aligned}\right| \tag{22.2}$$

Шундай қилиб, қаттиқ жисмнинг илгариланма ҳаракати (22.2) тенгламалар билан аниқланадиган, массаси бутун система массасига тенг бўлган битта нуқтанинг — массалар марказининг ҳаракатини ўрганишга келтирилади.

(22.2) тенгламаларни маълум бошланғич шартларда интеграллаб, жисм массалар марказининг координаталари $\left(x_C,\ y_C,\ z_C\right)$ вақт функцияси сифатида аниқланади.

145-§. Қаттиқ жисмнинг қўзғалмас ўқ атрофидаги айланма ҳаракати

Фараз қилайлик, қаттиқ жисм қўзғалмас z ўқ атрофида $\overline{F}_k^e$ $(k = 1, N)$ ташқи кучлар таъсирида ҳаракатлансин. У ҳолда ўққа нисбатан кинетик момент ҳақидаги теоремага асосан қуйидагига эга бўламиз:

$$\frac{dL_z}{dt} = M_k^e. \tag{22.3}$$

Аммо (21.36) га кўра

$$L_z = I_z\,\omega.$$

Бундан вақт бўйича ҳосила оламиз:

$$\frac{dL_z}{dt} = I_z\,\frac{d\omega}{dt}\ I_z\,\varepsilon, \tag{22.4}$$

бунда $\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon$ жисмнинг бурчак тезланишидир.

(22.3) ва (22.4) га биноан ушбу тенгламани оламиз:

$$I_z^{\varepsilon} = M_z^e$$

ёки

$$I_z\,\varphi = M_z^e\,. \tag{22.5}$$

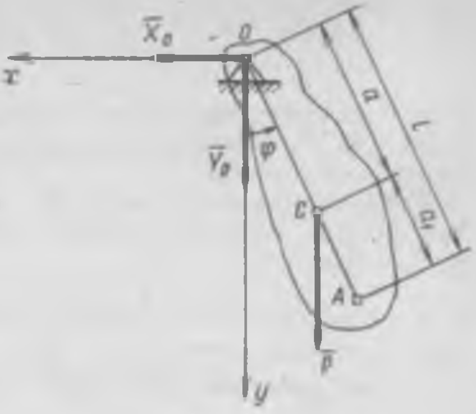
Бу тенглама *қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи қаттиқ жисм ҳаракатининг дифференциал тенгламаси* дейилади.

(22.5) дифференциал тенгламани маълум бошланғич шартларда интеграллаб қаттиқ жисмнинг қўзғалмас ўқ атрофида айланиш бурчаги φ вақт функцияси сифатида аниқланади.

(22.5) дан кўрамизки, берилган M_z^e таъсиридаги жисмнинг инерция моменти қанча катта бўлса, бурчак тезланиши шунча кичик бўлади ва аксинча. Бинобарин, қўзғалмас ўқ атрофида айланаётган жисм учун инерция моменти, худди илгариланма ҳаракатдаги жисм массаси каби функцияни ўтайди. Яъни *инерция моменти айланма ҳаракатдаги жисмнинг инертлик ўлчовини ифодалайди.*

146-§. Физик тебрангич

Ўзининг оғирлик кучи таъсирида қўзғалмас горизонтал ўқ атрофида айлана оладиган ихтиёрий шаклдаги жисм *физик тебрангич* дейилади. Физик тебрангичнинг айланиш ўқи жисмнинг оғирлик марзидан ўтмайдиган қилиб танланади ва бу ўқ тебрангичнинг осилиш ўқи дейилади.



230- расм.

Физик тебрангичнинг осилиш ўқи учун z ўқни олиб, жисмнинг оғирлик маркази Oxy текисликда ётади деб қараймиз (230- расм).

Вертикал ҳолатдан оғдирилган тебрангичга оғирлик кучи $\overline{P}$ ва O нуқтадаги цилиндрик шарнир реакция кучлари $\overline{X}_0$, $\overline{Y}_0$ таъсир этади. Шарнирда ҳосил бўладиган ишқаланиш кучини ҳисобга олмаймиз.

Физик тебрангич қўзғалмас ўқ атрофида айланма ҳаракатда бўлгани учун (22.5) тенгламадан фойдаланамиз. Шу тенгламани тузиш учун кучлар моментларини аниқлаймиз.

$\overline{X}_0$ ва $\overline{Y}_0$ реакция кучларнинг осилиш ўқига нисбатан моментлари нолга тенг. Оғирлик кучи $\overline{P}$ нинг z ўққа нисбатан моменти

$$M_z = -Pa\sin\varphi$$

бўлади.

Шундай қилиб (22.5) тенглама физик тебрангич учун қуйидагича ёзилади:

$$I_z\ddot{\varphi} = -Pa\sin\varphi,$$

бунда I_z — тебрангичнинг осилиш ўқига нисбатан инерция моменти. Бу тенгламани

$$\ddot{\varphi} + \frac{Pa}{I_z}\sin\varphi = 0 \qquad (22.6)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

(22.6) тенглама *физик тебрангичнинг ҳаракат дифференциал тенгламаси* дейилади. Бу тенглама математик тебрангичнинг 97- § даги (1) тенгламасидан фақат $\sin\varphi$ олдидаги ўзгармас коэффициент билан фарқ қилади.

Тебраниш даври берилган физик тебрангичнинг тебраниш даврига тенг бўлган математик тебрангичнинг узунлигини аниқлаймиз. Бу узунлик *физик тебрангичнинг келтирилган узунлиги* дейилади.

97- § даги (1) ва (22.6) тенгламаларда $\sin\varphi$ олдидаги ўзгармас коэффициентларни солиштириб

$$\frac{g}{l} = \frac{Pa}{I_z}$$

бўлиши учун

$$l = \frac{I_z g}{Pa} = \frac{I_z}{ma} \qquad (22.7)$$

шарт бажарилиши зарурлигини кўрамиз. Бунда m — физик тебрангич массаси. (22.7) формула ёрдамида физик тебрангичнинг келтирилган узунлиги аниқланади.

Оғирлик маркази C нуқтадан осилиш ўқи Oz га параллел C ўқни ўтказиб, Гюйгенс — Штейнер теоремасига кўра қуйидаги тенгликни ёзамиз:

$$I_z = I_{Cz'} + ma^2 = m\rho^2_{Cz'} + ma^2, \qquad (22.8)$$

бунда $\rho_{Cz'}$ — тебрангичнинг Cz' ўққа нисбатан инерция радиуси.

Iz нинг қийматини (22.8) дан (22.7) га қўямиз:

$$l = \frac{m\rho^2_{Cz'} + ma^2}{ma}.$$

Натижада физик тебрангичнинг келтирилган узунлиги учун

$$l = \frac{\rho^2_{Cz'}}{a} + a \qquad (22.9)$$

формулани оламиз.

(22.9) дан кўрамизки, доимо $l > a_1$ яъни физик тебрангичнинг келтирилган узунлиги осилиш ўқидан тебрангич оғирлик марказигача бўлган масофадан катта бўлади.

OC тўғри чизиқда $OA = l$ кесмани қўйиб, A нуқтани оламиз (230-расм). А нуқта *силкиниш маркази* дейилади. A нуқтада Oz ўққа параллел Az_1 ўқни ўтказамиз. Бу ўқ *силкиниш ўқи* дейилади.

Агар физик тебрангичнинг осилиш ўқи учун силкиниш ўқини олсак, у ҳолда физик тебрангичнинг келтирилган узунлиги (22.9) формулага кўра

$$l_1 = \frac{\rho^2_{Cz'}}{a_1} + a$$

бўлади. Бунда $a_1 = l - a = \frac{\rho^2_{Cz'}}{a} + a - a = \frac{\rho^2_{Cz'}}{a}$ бўлгани учун

$$l_1 = \frac{\rho^2_{Cz'}}{a} + \frac{\rho^2_{Cz'}}{\frac{\rho^2_{Cz'}}{a}} = \frac{\rho^2_{Cz'}}{a} + a = l,$$

яъни A ва O нуқталардан ўтувчи ўқлар учун келтирилган узунликлар l_1 ва l ўзаро тенг бўлади. Бинобарин, O нуқтадан ўтувчи ва A нуқтадан унга параллел равишда ўтувчи ўқларни ўзаро алмаштирсак, физик тебрангичнинг тебраниш даври ўзгармайди.

Инглиз олими Картер 1817 йилда физик тебрангичнинг бу хусусиятидан фойдаланиб, ер сиртининг турли нуқталарида оғирлик кучининг тезланишини аниқлайдиган тескари тебрангични ихтиро қилган.

Физик тебрангичнинг кичик тебранишлари қаралаётганда $\sin\varphi \approx \varphi$ деб олиш мумкин. Бу ҳолда (22.6) дифференциал тенглама гармоник тебранма ҳаракат тенгламаси каби бўлади:

$$\ddot{\varphi} + k_1^2\varphi = 0, \qquad (22.10)$$

бунда $k_1 = \sqrt{\frac{Pa}{I_z}}$ — тебрангичнинг тебраниш частотаси.

(22.10) тенгламанинг ечими 97-§ даги (8) формула кўринишида бўлади:

$$\varphi = \alpha \sin(k_1 t + \beta), \qquad (22.11)$$

бунда: α — радианда ўлчанадиган тебраниш амплитудаси; β — тебранишнинг бошланғич фазаси.

Физик тебрангичнинг кичик тебранишлар даври

$$T = \frac{2\pi}{k_1} = 2\pi\sqrt{\frac{I_z}{Pa}} \qquad (22.12)$$

формуладан аниқланади.

147-§. Жисмларнинг инерция моментини тажриба усули билан аниқлаш

Ихтиёрий шаклдаги, бир жинсли бўлмаган ёки бир жинсли жисмларнинг ўққа нисбатан инерция моментини ҳисоблаш анча мураккаб. Шу сабабли бундай жисмларнинг инерция моменти, одатда, тажриба усули билан аниқланади. Жисмнинг ўққа нисбатан инерция моменти унинг ўқ атрофида айланишидаги инертлигини ифодалаганлиги туфайли, қаттиқ жисмнинг қўзғалмас ўқ атрофидаги ҳаракатини турли усулларда тажрибада кузатиш йўли билан инерция моментини ҳисоблаш мумкин.

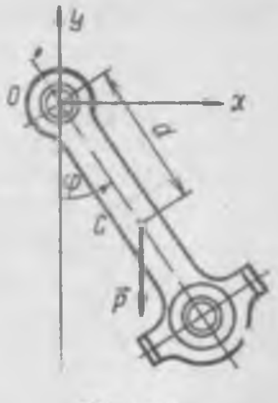
Техникада тажриба йўли билан инерция моменти аниқланадиган тебратиш усулини кўриб чиқамиз.

Фараз қилайлик, бирор жисмнинг оғирлик марказидан ўтувчи горизонтал Cz' ўққа нисбатан инерция моментини аниқлаш лозим бўлсин. Бу жисмга, физик тебрангич каби, Cz' ўққа параллел бўлган бирор ўққа нисбатан кичик тебранма ҳаракат берамиз.

Масалан, оғирлик маркази C нуқтада бўлган шатуннинг O нуқтадаги втулка орқали ўтувчи горизонтал Oz ўқ атрофида мувозанат ҳолатидан бир оз оғдириб, кичик тебранма ҳаракат берамиз (231-расм). Бу ҳаракатни кузатиб τ вақт ичидаги тебранишлар сони n ни аниқлаймиз. У ҳолда кичик тебранишлар даври

$$T = \frac{\tau}{n} \qquad (22.13)$$

формуладан топилади.



231- расм.

Бундай физик тебрангичнинг тебраниш даври (22.12) га кўра аниқланади:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_z}{Pa}}.$$

Бундан z ўққа нисбатан инерция моменти топилади:

$$I_z = \frac{T^2Pa}{4\pi^2}. \tag{22.14}$$

Шундай қилиб, тебраниш даври T, оғирлик кучи P ва осилиш ўқидан оғирлик марказигача бўлган масофа a маълум бўлганда (22.14) формула ёрдамида жисмнинг z ўққа нисбатан инерция моменти топилади.

Осилиш ўқи Oz га параллел бўлган марказий Cz' ўққа нисбатан жисмнинг инерция моментини аниқлаш учун Гюйгенс — Штейнер теоремасидан фойдаланамиз:

$$I_z = I_{Cz'} + ma^2,$$

бундан
$$I_{Cz'} = I_z - ma^2 = \frac{PaT^2}{4\pi^2} - \frac{P}{g}a^2.$$

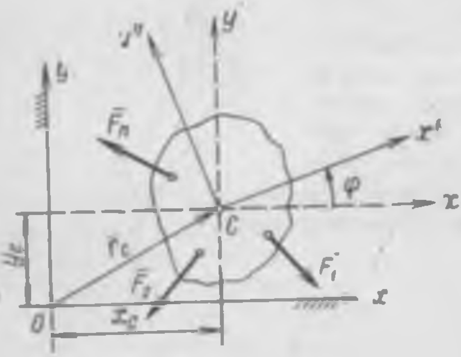
Бу ҳолда Cz' ўққа нисбатан жисмнинг инерция радиуси

$$\rho_{Cz'} = \sqrt{\frac{I_{Cz'}}{m}} = \sqrt{\frac{gaT^2}{4\pi^2} - a}$$

формуладан аниқланади.

148- §. Қаттиқ жисмнинг текис параллел ҳаракати

Айтайлик, жисмнинг массаси Oxy текисликка нисбатан симметрик равишда тақсимланган бўлиб, $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, . . . , $\overline{F}_n$ кучлар жисмга мазкур текисликда таъсир этсин ва жисмнинг бошланғич тезлиги унга параллел бўлсин. Бу шартлар бажарилса, жисм текис параллел ҳаракатда бўлади ҳамда бундай жисмнинг ҳаракатини ўрганиш ўрнига жисмни Oxy текислик билан кесиш натижасида қирқимда ҳосил бўлган текис шаклнинг ҳаракатини ўрганиш етарли бўлади (232- расм). Жисмнинг Oxy текисликдаги қирқими ҳаракатини текшириш учун жисмнинг массалар маркази C нуқтада Oxy қўзғалмас системага параллел $Cx'y'$ системани ва жисмга бириктирилган $Cx''y''$ системани ўтказамиз. У ҳолда жисмнинг ҳолати массалар марказининг радиус-



232- расм.

вектори $\overline{r}_C(x_C, y_C)$ ҳамда Cx' ва Cx'' ўқлар орасидаги φ бурчак билан аниқланади. C нуқтанинг ҳаракат тенгламаси массалар марказининг ҳаракати ҳақидаги (22.1) тенгламадан, массалар маркази атрофидаги айланма ҳаракати эса (22.5) тенгламадан аниқланади. Шундай қилиб, текис параллел ҳаракатдаги жисмнинг ҳаракат дифференциал тенгламалари қуйидагича ёзилади:

$$M\overline{w}_C = \overline{R}^e;$$

$$I_C\ddot{\varphi} = M_C^e, \qquad (22.15)$$

бунда: M — жисмнинг массаси; $\overline{w}_C = \frac{d^2\overline{r}_C}{dt^2}$ — жисм массалар марказининг тезланиши; $\overline{R}^e$ — жисмга таъсир этувчи ташқи кучларнинг бош вектори; I_C — расм текислигига перпендикуляр ва масса марказидан ўтувчи ўққа нисбатан жисмнинг инерция моменти; M_C^e — ана шу ўққа нисбатан ташқи кучларнинг бош моменти; $\ddot{\varphi} = \varepsilon$ — бурчак тезланиш.

(22.15) нинг биринчисини координата ўқлардаги проекциялари орқали ифодаласак, бу система қуйидаги тенгламалар системаси билан алмашинади:

$$\left.\begin{aligned} M\ddot{x}_C &= \sum X_k^e, \\ M\ddot{y}_C &= \sum Y_k^e \\ I_C\ddot{\varphi} &= M_C^e. \end{aligned}\right| \qquad (22.16)$$

(22.16) тенгламалар *қаттиқ жисм текис параллел ҳаракати дифференциал тенгламаларининг скаляр ифодасидир*. Бу тенгламаларнинг биринчи иккитаси жисм масса марказининг илгарилама ҳаракатини ифодалайди. Учинчиси эса қаттиқ жисмнинг масса маркази C нуқтадан ўтувчи ва расм текислигига перпендикуляр бўлган ўққа нисбатан айланма ҳаракатини ифодалайди.

Агар ҳамма ташқи кучлар маълум бўлса, (22.16) дифференциал тенгламалар системасини маълум бошланғич шартларда интеграллаб, жисмнинг текис параллел ҳаракатини аниқловчи x_C, y_C ва φ катталиклар вақт функцияси сифатида аниқланади.

Агар массалар марказининг траекторияси маълум бўлса, C нуқта ҳаракати дифференциал тенгламасининг табиий координата ўқларидаги проекцияларидан фойдаланиш қулай бўлади. У ҳолда текис параллел ҳаракат дифференциал тенгламалари ушбу кўринишда ёзилади:

$$M\frac{dv_C}{dt} = \sum F_{k\tau},$$

$$M\frac{v_C^2}{\rho} = \sum F_{kn} \qquad (22.17)$$

$$I_C\ddot{\varphi} = M_C^e,$$

бунда: v_C — массалар марказининг тезлиги; ρ — массалар маркази траекториясининг эгрилик радиуси; $F_{k\tau}$ — ташқи кучларнинг уринмадаги проекцияси; F_{kn} — ташқи кучларнинг бош нормалдаги проекцияси.

149-§. Гироскопнинг элементар назарияси

Ўзининг моддий симметрия ўқи атрофида катта бурчак тезлик билан айланадиган ва бунда ушбу ўқининг битта нуқтаси доимо қўзғалмасдан қоладиган жисм *гироскоп* дейилади. Гироскопик асбобларда гироскоплар, одатда, ҳалқали осмага ёки рамаларга ўрнатилади ва гироскоп ҳар қандай ҳаракатланганда ҳам унинг битта нуқтаси қўзғалмасдан қолади (233-расм).

Техникада қўлланиладиган гироскоплар симметрия ўқи атрофида жуда катта бурчак тезлик билан айланади. Шу сабабли биринчи яқинлашишда гироскопнинг бошқа ўқлар атрофидаги айланишини эътиборга олмай, гироскопик ҳодисаларнинг элементар назарияси билан танишамиз.

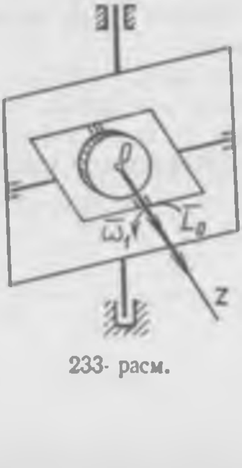
Oz ўқ атрофида айланаётган жисмнинг кинетик моменти $\overline{L_0}$ айланиш ўқи бўйлаб йўналади. Гироскопнинг элементар назариясида, гироскоп ўқи секин ҳаракатланганда исталган пайтда гироскопнинг кинетик моменти $\overline{L_0}$ гироскоп ўқи бўйлаб $\overline{\omega_1}$ вектор билан бир хил йўналган деб қаралади ва (21.36) га кўра

$$L_0 = L_z = I_z\omega_1 \tag{22.18}$$

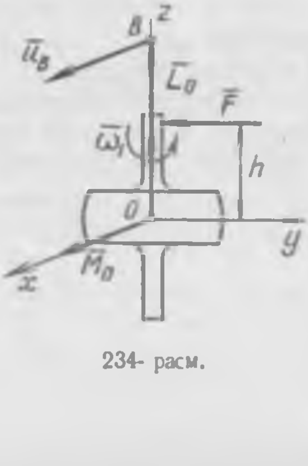
деб олинади. Бунда: I_z — гироскопнинг симметрия ўқига нисбатан инерция моменти; ω_1 — симметрия ўқи атрофида айланиш бурчак тезлиги.

Бундай гироскопнинг айрим хусусиятларини кўриб ўтамиз.

1. **Гироскоп ўқига кучнинг таъсири.** Тез айланаётган гироскоп ўқига моменти $M_0 = Fh$ га тенг бўлган $\overline{F}$ куч таъсир этсин (234-расм). У ҳолда кинетик моментнинг ўзгариши ҳақидаги теоремага кўра



233- расм.



234- расм.

$$\frac{d\overline{L_0}}{dt} = \overline{M}_0.$$

$\overline{L}_0$ дан вақт бўйича олинган ҳосила $\overline{L}_0$ вектор учининг $\overline{u}$ тезлигини ифодалайди:

$$\overline{u} = \overline{M}_0. \qquad (22.19)$$

(22.19) тенглама *Резаль теоремасини* ифодалайди: *қўзғалмас нуқтага нисбатан гироскоп кинетик моменти вектори учининг тезлиги таъсир этувчи ташқи кучларнинг мазкур нуқтага нисбатан моментига тенг.*

(22.19) дан кўрамизки, *B* нуқта ва у билан биргаликда гироскоп ўқи M_0 момент йўналишида ҳаракатланади. Шундай қилиб, тез айланаётган гироскопнинг ўқига куч таъсир этса, у ҳолда гироскоп ўқи куч таъсир этаётган йўналишда оғмай, балки таъсир этувчи кучнинг гироскоп қўзғалмас нуқтасига нисбатан момент вектори йўналишида оғади, яъни кучнинг йўналишига перпендикуляр текисликда оғади.

Агар бирор пайтдан бошлаб гироскоп ўқига $\overline{F}$ куч таъсир этмай қўйса, яъни $\overline{M}_0 = 0$ бўлса, у ҳолда (22.19) га кўра худди шу пайтдан бошлаб

$$\overline{u} = 0$$

бўлади, яъни *B* нуқта ва у билан биргаликда гироскоп ўқи шу ондаёқ оғишдан тўхтайди. Шундай килиб, гироскоп ўқи куч таъсиридаги ҳаракатини давом эттирмайди. Агар гироскоп ўқига куч жуда кичик вақт ичида таъсир этса (зарба берилса), у ҳолда гироскоп ўқи амалда деярли ўз йўналишини ўзгартирмайди. Бу ҳодиса тез айланувчи гироскопнинг асосий хусусиятларидан бири бўлиб, *гироскоп ўқининг устуворлик хусусиятини* ифодалайди.

2. Гироскоп ўқининг прецессияси. Гироскопнинг оғирлик маркази *C* қўзғалмас *O* нуқта билан устма-уст тушмаган ҳолни кўриб чиқамиз (235-расм). Бу ҳолда гироскоп ўқига доимо оғирлик кучи $\overline{P}$ таъсир этади ва юқорида исбот қилинганидек, гироскопнинг Oz ўқини α бурчак ортиб борадиган томонга эмас, балки Ozz_1 текисликка перпендикуляр йўналишда ҳаракатлантиради. Натижада гироскоп ўқи вертикал Oz_1 ўқ атрофида ω_2 бурчак тезлик билан учи қўзғалмас *O* нуқтада ётувчи конус сирти бўйлаб ҳаракатланади. Гироскоп ўқининг бундай ҳаракати *прецессия* дейилади.

Прецессия бурчак тезлиги ω_2 ни аниқлаймиз. (22.19) га кўра $u = M_C$ бўлади. Қўзғалмас *O* нуқтадан гироскопнинг оғирлик маркази *C* нуқтагача бўлган масофани $OC = a$ билан белгиласак,

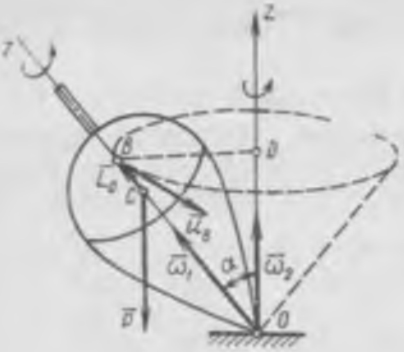
$$M_0 = Pa\sin\alpha.$$

B нуқта z_1 ўқ атрофида ω_2 бурчак тезлик билан айлангани учун

$$u = \omega_2\cdot BD = \omega_2\cdot OB\sin\alpha = \omega_2 L_0\sin\alpha$$

бўлади. (22.18) ни эътиборга олсак,

$$u = I_z\omega_1\omega_2\sin\alpha.$$



235- расм.

236- расм.

Бинобарин (22.19) ифода

$$I_z\omega_1\omega_2\sin\alpha = Pa\sin\alpha$$

кўринишни олади ва бундан

$$\omega_2 = \frac{Pa}{I_z\omega_1} \qquad (22.20)$$

прецессия бурчак тезлиги аниқланади. Бу тенгликдан кўрамизки, ω_1 бурчак тезлик жуда катта бўлгани учун прецессия бурчак тезлиги жуда кичик бўлади. Агар ω_1 бурчак тезлик пасайса, у ҳолда прецессия бурчак тезлиги ω_2 ортади. Бунга болалар ўйинчоғи — пирилдоқнинг ҳаракати мисол бўлади.

3. Гироскопик момент. Агар гироскоп *мажбурий прецессия* ҳаракатида бўлса, яъни A ва A' подшипникларда гироскоп ўқи ўрнатилган ҳалқа DD' ўқ атрофида $\overline{\omega}_2$ бурчак тезлик билан айлантирилиши натижасида прецессия ҳаракатида бўлса, у ҳолда $\overline{M}_0$ момент A ва A' нуқталарнинг реакция кучлари ($\overline{Q}$, $\overline{Q}'$) таъсирида ҳосил бўлади (236- расм). Ўз навбатида, таъсир акс таъсирга тенглиги ҳақидаги қонунга кўра, гироскоп ўқи подшипникларга миқдор жиҳатдан мазкур реакция кучларига тенг, йўналиши қарама-қарши бўлган кучлар ($\overline{N}$, $\overline{N}'$) билан таъсир этади. Бу кучлар, моменти *гироскопик момент* деб аталувчи жуфт кучни ташкил этади ҳамда

$$\overline{M}_0^{\text{гир}} = -\overline{M}_0. \qquad (22.21)$$

$\overline{OB} = \overline{L}_0 = I_z\overline{\omega}_1$ эканлигини эътиборга олиб, B нуқта тезлиги учун

$$\overline{u} = \overline{\omega}_2 \times \overline{OB} = \overline{\omega}_2 \times \overline{L}_0 = I_z\overline{\omega}_2 \times \overline{\omega}_1$$

формулани оламиз. У ҳолда (22.19) қуйидагича ёзилади:

$$I_z\overline{\omega}_2 \times \overline{\omega}_1 = \overline{M}_0.$$

Шунга асосан (22.21) дан гироскопик момент учун қуйидаги ифодани оламиз:

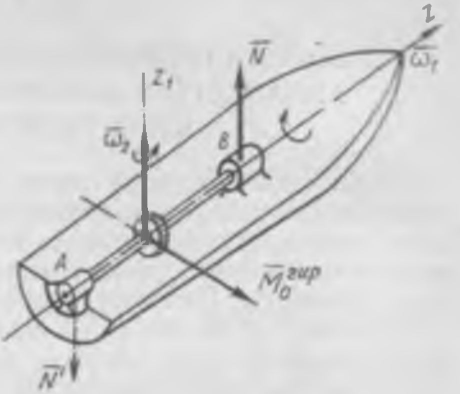
$$\overline{M}_0^{\text{гир}} = -I_z\overline{\omega}_2 \times \overline{\omega}_1$$

ёки

$$\overline{M}_0^{\text{гир}} = I\overline{\omega}_1 \times \overline{\omega}_2. \quad (22.22)$$

Бундан гироскопик момент модулини аниқлаймиз:

$$M_0^{\text{гир}} = I_z\omega_1\omega_2\sin(\widehat{\overline{\omega}_1\ \overline{\omega}_2}). \quad (22.23)$$



237- расм.

(22.22) тенглик *Н. Е. Жуковский қоидасини* ифодалайди; *агар тез айланувчи гироскопга мажбурий прецессия ҳаракати берилса, у ҳолда гироскоп ўрнатилган подшипникларга моменти гироскопик моментга тенг жуфт куч таъсир этади ва у гироскоп симметрия ўқини прецессия ўқи устига энг қисқа йўл билан устма-уст туширишга интилади.*

Гироскопик момент ва подшипникларга тушадиган гироскопик босимларни аниқлашга мисол тариқасида, кемага ўрнатилган тез айланувчи турбинани оламиз. Турбина ротори ω_1 бурчак тезлик билан айлансин. Кема ω_2 бурчак тезлик билан бурилганда A ва B подшипникларга 237- расмда кўрсатилгандек гироскопик босим кучлари таъсир этади. Жуковский қоидасига кўра $M_0^{\text{гир}}$ вектор 237- расмдагидек йўналади. Агар $AB = l$ ва турбина роторининг инерция моменти I_z маълум бўлса, у ҳолда (22.23) га кўра

$$M_0^{\text{гир}} = I_z\omega_1\omega_2.$$

Иккинчи томондан,

$$M_0^{\text{гир}} = N \cdot l$$

бўлгани учун гироскопик босим ушбу

$$N = \frac{I_z\omega_1\omega_2}{l}$$

формуладан топилади.

XXII боб

ДАЛАМБЕР ПРИНЦИПИ. ҚЎЗҒАЛМАС ЎҚ АТРОФИДА АЙЛАНАЁТГАН ЖИСМНИНГ АЙЛАНИШ ЎҚИГА КЎРСАТАДИГАН БОСИМИ

Эркин моддий нуқта ва эркин механик системанинг ҳаракатини ўрганишда Ньютон қонунларидан фойдаланилади. Техникада учрайдиган қатор масалаларни ечишда боғланишлар қўйилган системанинг ҳаракатини ўрганишга тўғри келади. Бундай системаларнинг ҳаракатини ўрганишда Петербург Академиясининг аъзолари Я. Герман (1716 йилда), Л. Эйлер (1737 йилда) ва Ж. Даламберлар (1743 йилда) томонидан кашф қилинган ва «Даламбер принципи» деб юритиладиган принципдан фойдаланилади.

Даламбер принципини Ньютоннинг иккинчи қонуни ва боғланишдан бўшатиш ҳақидаги аксиома асосида чиқариш мумкин.

150-§. Моддий нуқта учун Даламбер принципи

Эркин бўлмаган нуқта учун динамиканинг асосий қонунини

$$\overline{F}+\overline{N}+(-m\overline{w})=0$$

кўринишда ёзиб,

$$\overline{\Phi}=-m\overline{w} \tag{23.1}$$

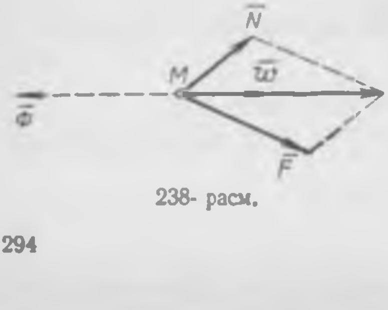
белгилаш киритсак,

$$\overline{F}+\overline{N}+\overline{\Phi}=0 \tag{23.2}$$

тенгламани оламиз.

Миқдор жиҳатдан нуқтанинг массаси билан унинг тезланиши кўпайтмасига тенг, йўналиши эса тезланиш векторига тескари бўлган вектор *инерция кучи* дейилади. (23. 2) тенглик *эркин бўлмаган нуқта учун Даламбер принципини* ифодалайди (238-расм): *актив куч ва боғланиш реакция кучи таъсиридаги нуқтага ҳар онда инерция кучини қўйсак, бу кучлар ўзаро мувозанатлашади.*

Даламбер принципини таърифлашда киритилган мувозанат тушунчаси шартли тушунчадир. Аслида $\overline{F}$ ва $\overline{N}$ кучлар таъсир этаётган нуқтага инерция кучи қўйилган бўлмайди. Даламбер принципида ҳар онда инерция кучини нуқтага қўйилган деб қараб, мувозанатни текширишдан мақсад динамика масалаларини ечишда статиканинг мувозанат тенгламаларига ўхшаш тенгламалардан фойдаланишдир. Даламбер принципининг моҳияти ана шундан иборат. Даламбер принципи ёрдамида динамика масалаларини ечиш формал равишда статика масалаларини ечишга келтирилади. Шу сабабли бу усул *кинетостатика усули* дейилади.

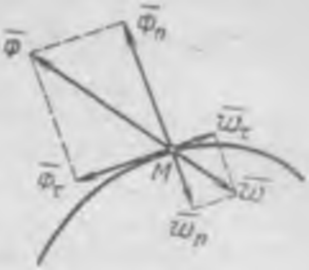


238- расм.

Динамика масалаларини ечишда Даламбер принципидан асосан номаълум реакция кучларни топишда самарали фойдаланилади.

Агар нуқта эгри чизиқли траектория бўйлаб нотекис ҳаракатда бўлса, инерция кучи $\overline{\Phi}$ траекторияга ўтказилган уринма ва бош нормаллар бўйича ташкил этувчиларга ажратилади (239-расм):

$$\overline{\Phi} = \overline{\Phi}_\tau + \overline{\Phi}_n.$$



239- расм.

бундаги $\overline{\Phi}_\tau$ ва $\overline{\Phi}_n$ мос равишда уринма ва нормал инерция кучлари дейилади. Бу кучлар уринма ва нормал тезланишларга тескари йўналади ҳамда

$$\overline{\Phi}_\tau = -m\overline{w}_\tau,$$

$$\overline{\Phi}_n = -m\overline{w}_n \qquad (23.3)$$

муносабатлар ўринли бўлади. Уринма ва нормал тезланишлар

$$w_\tau = \frac{dv}{dt}, \quad w_n = \frac{v^2}{\rho}$$

формулалардан аниқланишини эътиборга олсак, уринма ва нормал инерция кучларининг модули учун ушбу муносабатларни оламиз:

$$\Phi_\tau = m\left|\frac{dv}{dt}\right|, \quad \Phi_n = \frac{mv^2}{\rho}. \qquad (23.4)$$

Агар нуқта эгри чизиқ бўйича текис ҳаракатда бўлса, $w_n = 0$, $\Phi_\tau = 0$ ва инерция кучи $\overline{\Phi}$ фақат нормал ташкил этувчидан иборат бўлади.

Нуқта тўғри чизиқ бўйича нотекис ҳаракатланганда $w_n = 0$ ва инерция кучи фақат уринма ташкил этувчидан иборат бўлади.

Нуқта тўғри чизиқли текис ҳаракатланганда $w = 0$, бинобарин, инерция кучи $\Phi = 0$ бўлади.

Қўзғалмас ўқ атрофида айланма ҳаракатдаги қаттиқ жисм нуқтасининг тезланиши айланма ва марказга интилма тезланишлардан иборат бўлгани учун мазкур нуқтанинг уринма ва нормал инерция кучлари мос равишда айланма ва марказдан қочувчи инерция кучлари дейилади ҳамда улар

$$\Phi_\tau = mR|\varepsilon|, \quad \Phi_n = mR\omega^2 \qquad (23.5)$$

формулалардан аниқланади. (23.5) да: R — нуқтадан айланиш ўқигача бўлган масофа; ω ва ε — жисмнинг бурчак тезлиги ва бурчак тезланиши.

151-§. Механик система учун Даламбер принципи

Системанинг ҳар бир M_k нуқтаси учун Даламбер принципини ёзамиз:

$$\overline{F}_k+\overline{N}_k+\overline{\Phi}_k=0,\ (k=1, 2, \ldots, N), \tag{23.6}$$

бунда $\overline{F}_k$ — M_k нуқтага таъсир этувчи актив кучларнинг тенг таъсир этувчиси; $\overline{N}_k$—боғланиш реакция кучларининг тенг таъсир этувчиси; $\overline{\Phi}_k=-m_k\overline{w}_k$ — шу нуқтанинг инерция кучи.

(23. 6) тенгламалар *механик система учун Даламбер прнципини* ифодалайди: *актив куч ва боғланиш реакция кучлари таъсиридаги системанинг ҳар бир нуқтасига ҳар онда инерция кучини қўйсак, бу кучлар системаси мувозанатлашади.*

(23. 6) тенгламаларни қўшиб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\sum\overline{F}_k+\sum\overline{N}_k+\sum\overline{\Phi}_k=0 \tag{23.7}$$

ёки

$$\overline{R}^F+\overline{R}^N+\overline{R}^\Phi=0, \tag{23.8}$$

бунда: $\overline{R}^F=\sum\overline{F}_k$ — *актив кучларнинг бош вектори;* $\overline{R}^N=\sum\overline{N}_k$ — *реакция кучларининг бош вектори;*

$$\overline{R}^\Phi=\sum\overline{\Phi}_k \tag{23.9}$$

система нуқталари *инерция кучларининг бош векторидир.*

(23.8) тенгламадан кўрамизки, боғланишдаги механик система учун актив кучлар, реакция кучлари ва система нуқталари инерция кучлари бош векторларининг геометрик йиғиндиси ҳар онда нолга тенг бўлади.

(23.6) тенгламаларнинг ҳар бирини M_k нуқтанинг радиус-вектори $\overline{r}_k$ га векторли кўпайтириб қўшсак,

$$\sum\overline{r}_k\times\overline{F}_k+\sum\overline{r}_k\times\overline{N}_k+\sum\overline{r}_k\times\overline{\Phi}_k=0,$$

ёки

$$\sum\overline{M}_0(\overline{F}_k)+\sum\overline{M}_0(\overline{N}_k)+\sum\overline{M}_0(\overline{\Phi}_k)=0, \tag{23.10}$$

ёхуд

$$\overline{M}_O^F+\overline{M}_O^N+\overline{M}_O^\Phi=0 \tag{23.11}$$

ҳосил бўлади. Бунда $\overline{M}_O^F=\sum\overline{M}_0(\overline{F}_k)$ — актив кучларнинг O марказга нисбатан бош моменти: $\overline{M}_O^N=\sum\overline{M}_O(\overline{N}_k)$ — реакция кучларининг O марказга нисбатан бош моменти ;

$$\overline{M}_O^\Phi=\sum\overline{M}_O(\overline{\Phi}_k) \tag{23.12}$$

система нуқталари *инерция кучларининг О* марказга нисбатан *бош моментини* ифодалайди.

(23. 11) дан кўрамизки, *боғланишдаги механик система учун актив кучлар, реакция кучлари ва система нуқталари инерция кучларининг ихтиёрий қўзғалмас марказга нисбатан бош моментларининг геометрик йиғиндиси ҳар онда нолга тенг бўлади.*

(23. 7) ва (23. 10) тенгламаларни координата ўқларига проекциялаб кучлар системасининг олтита мувозанат тенгламасини оламиз:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum X_k + \sum N_{kx} + \sum \Phi_{kx} = 0,\\
&\sum Y_k + \sum N_{ky} + \sum \Phi_{ky} = 0,\\
&\sum Z_k + \sum N_{kz} + \sum \Phi_{kz} = 0,\\
&\sum M_x (\overline{F}_k) + \sum M_x (\overline{N}_k) + \sum M_x (\overline{\Phi}_k) = 0,\\
&\sum M_y (F_k) + \sum M_y (\overline{N}_k) + \sum M_y (\overline{\Phi}_k) = 0,\\
&\sum M_z (\overline{F}_k) + \sum M_z (\overline{N}_k) + \sum M_z (\overline{\Phi}_k) = 0.
\end{aligned}\right| \qquad (23.13)$$

Агар системанинг ҳар бир нуқтасига қўйилган кучларни ички ва ташқи кучларга ажратсак, ички кучларнинг бош вектори ва бирор марказга нисбатан бош моменти нолга тенг бўлгани учун (23. 7) ва (23. 10) тегламалар қуйидаги кўринишни олади:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum \overline{F}_k^e + \sum \overline{\Phi}_k = 0,\\
&\sum \overline{M}_O (\overline{F}_k^e) + \sum \overline{M}_O (\overline{\Phi}_k) = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (23.14)$$

(23.9) ва (23.12) ларга кўра (23.14) ни қуйидагича ёзамиз:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum \overline{F}_k^e + \overline{R}^\Phi = 0,\\
&\sum \overline{M}_O (\overline{F}_k^e) + \overline{M}_O^\Phi = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (23.15)$$

(23.15) тенгламаларнинг афзаллиги шундан иборатки, бу тенгламаларда ички кучлар қатнашмайди, шу сабабли система динамикасининг кўпгина масалаларини ечишда бу мувозанат шартларидан фойдаланиш қулай бўлади.

152-§. Инерция кучларининг бош вектори ва бош моменти

Инерция кучларининг бош вектори ва бош моментини ҳисоблаш учун система массалар марказининг ҳаракати ҳақидаги ва кинетик моментининг ўзгариши ҳақидаги теоремалардан фойдаланамиз:

$$\left.\begin{aligned}
&M \cdot \overline{w}_C = \sum \overline{F}_k^e,\\
&\frac{d\overline{L}_0}{dt} = \sum \overline{M}_0 (\overline{F}_k^e).
\end{aligned}\right\} \qquad (23.16)$$

бунда: M — системанинг массаси; $\overline{w}_C$ — массалар марказининг тезланиши; $\overline{L}_0$ — системанинг O марказга нисбатан кинетик моменти.

(23.16) тенгламаларни (23.15) билан солиштириб

$$\left.\begin{aligned}\overline{R}^{\Phi} &= -M\cdot\overline{w}_C\\ \overline{M}_0^{\Phi} &= -\frac{d\overline{L}_0}{dt}\end{aligned}\right\} \qquad (22.17)$$

муносабатларни оламиз.

Шундай қилиб, ихтиёрий *механик система* (ёки қаттиқ жисм) *инерция кучларининг бош вектори* миқдор жиҳатдан система массасининг мазкур система (қаттиқ жисм) массалар марказининг тезланишига кўпайтмасига тенг бўлади ва бу тезланишга тескари йўналади; *инерция кучларининг O марказга нисбатан бош моменти* эса миқдор жиҳатдан шу марказга нисбатан система (қаттиқ жисм) кинетик моментидан вақт бўйича олинган ҳосилага тенг, йўналиши унга тескари бўлади.

Қаттиқ жисм илгариланма, қўзғалмас ўқ атрофида айланма ёки текис параллел ҳаракатда бўлганда инерция кучларининг бош вектори ва бош моментини ҳисоблашни кўриб чиқамиз.

1. Илгариланма ҳаракат. Жисм илгариланма ҳаракатда бўлганда массалар маркази атрофида айланмайди. Шу сабабли $\sum\overline{M}_C\,(\overline{F}_k^e) = 0$ ва (23.15) га кўра

$$\overline{M}_C^{\Phi} = 0$$

бўлади.

Шундай қилиб, илгариланма ҳаракатдаги қаттиқ жисмнинг инерция кучлари массалар марказидан ўтувчи ва

$$\overline{R}^{\Phi} = -M\cdot\overline{w}_C \qquad (23.18)$$

бўлган битта тенг таъсир этувчига келтирилади.

2. Қўзғалмас ўқ атрофида айланма ҳаракат. Агар жисм қўзғалмас ўқ атрофида айланма ҳаракатда бўлса, у ҳолда инерция кучлари умумий ҳолда бирор ихтиёрий O нуқтага қўйилган $\overline{R}^{\Phi}$ кучга ва моменти $\overline{M}_0^{\Phi}$ га тенг бўлган битта жуфт кучга келтирилади. Дастлаб жисмнинг айланиш ўқи Oz га нисбатан инерция кучларининг бош моменти M_z^{Φ} ни ҳисоблаймиз. Бунинг учун (23. 17) нинг иккинчи тенгламасини Oz ўққа проекциялаймиз:

$$M_z^{\Phi} = -\frac{dL_z}{dt}\,.$$

Аммо кўрилаётган ҳолда $L_z = I_z\,\omega$ бўлгани учун

$$M_z^{\Phi} = -I_z\,\varepsilon \qquad (23.19)$$

тенгликни оламиз, бунда I_z—айланиш ўқига нисбатан жисмнинг инерция моменти. (23. 19) даги манфий ишора инерция кучларининг айланиш ўқига нисбатан бош моменти M_z^{Φ} жисмнинг бурчак тезланиши ε га тескари йўналганлигини ифодалайди.

Хусусий ҳолда, агар айланиш ўқи жисмнинг моддий симметрия ўқи билан устма-уст тушса, жисмнинг массалар маркази симметрия ўқида ётади ва қўзғалмас бўлади. Бунда $\overline{w}_C = 0$ бўлгани учун инерция кучларининг бош вектори $\overline{R}^{\Phi} = 0$ бўлади. Бинобарин, бу ҳолда қўзғалмас ўқ атрофида айланаётган қаттиқ жисмнинг инерция кучлари моменти (23. 19) формуладан аниқланадиган битта жуфт кучга келтирилади. Жисм симметрия ўқига эга бўлгани учун бу жуфт куч айланиш ўқига перпендикуляр текисликда ётади.

240- расм.

3. **Текис параллел ҳаракат.** Фараз қилайлик, симметрия текислигига эга бўлсин ва унга параллел равишда ҳаракатлансин. Бу ҳолда инерция кучлари жисмнинг массалар марказига қўйилган, (23. 18) формула ёрдамида аниқланадиган $\overline{R}^{\Phi}$ кучга ва жисмнинг симметрия текислигида ётувчи битта жуфт кучга келтирилади ҳамда унинг моменти ҳам (23. 19) формула ёрдамида аниқланади, бунда I_z ни жисмнинг массалар марказидан ҳаракат текислигига перпендикуляр равишда ўтувчи ўққа нисбатан инерция моменти деб қаралади.

48- масала. *Массаси* m га тенг бўлган M моддий нуқта горизонт билан α бурчак ташкил этувчи ғадир-будир қия текислик бўйлаб ҳаракатланади. Ишқаланиш коэффициенти f га тенг. Бу нуқтанинг тезланиши топилсин (240-расм).

Ечиш. Нуқтага таъсир этувчи оғирлик кучи $\overline{P}$, ишқаланиш кучи $\overline{F}_{иш}$, нормал реакция кучи $\overline{N}$ лар қаторига ҳар онда тезланишга тескари йўналган $\overline{\Phi}$ инерция кучини қўйсак, у ҳолда Даламбер принципига кўра бу кучлар системаси мувозанатлашади.

Координата ўқларини расмда кўрсатилгандек танлаб олиб, иккита мувозанат тенгламасини тузамиз. Барча кучларнинг x ва y ўқларга проекцияларининг йиғиндисини нолга тенглаб оламиз:

$$P \sin \alpha - F_{иш} - \Phi = 0, \qquad (1)$$

$$N - P \cos \alpha = 0. \qquad (2)$$

Бу тенгламаларда $P = mg$, $F_{иш} = fN$, $\Phi = mw$ эканлигини эътиборга олсак,

$$mg \sin \alpha - fN - mw = 0,$$

$$N - mg \cos \alpha = 0$$

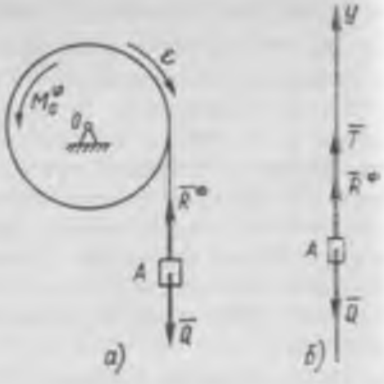
бўлади. (2) тенгламадан нормал реакция кучини аниқлаймиз:

$$N = mg \cos \alpha.$$

N нинг бу қийматини (1) тенгламага қўйиб, нуқтанинг тезланишини топамиз:

$$w = g\ (\sin \alpha - f \cos \alpha).$$

241- расм.



242- ррсм.

49-масала. Оғирлиги $Q = 10000$ Н бўлган автомобиль дўнг кўприкда $v = 10$ м/с ўзгармас тезлик билан ҳаракат қилади; кўприк ўртасининг эгрилик радиуси $\rho = 50$ м. Автомобиль кўприк ўртасидан ўтган пайтда кўприкка қанча босим кўрсатиши аниқлансин (241-расм).

Ечиш. Автомобилни моддий нуқта деб қараб, автомобиль кўприк ўртасидан ўтган пайтда унга таъсир этувчи оғирлик кучи $\overline{Q}$, кўприкнинг нормал реакция кучи $\overline{N}$ қаторига нормал тезланишга тескари йўналган $\overline{\Phi}_n$ марказдан қочирма инерция кучини қўйсак, Даламбер принципига кўра бу кучлар системаси мувозанатлашади ($v = \text{const}$ бўлгани учун уринма инерция кучи нолга тенг бўлади).

y ўқни вертикал тарзда юқорига йўналтириб, кучларни бу ўққа проекциялаймиз. Натижада мувозанат тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$-Q + N + \Phi_n = 0,$$

бунда

$$\Phi_n = mw_n = \frac{Q}{g}\,\frac{v^2}{\rho}$$

бўлгани учун

$$N = Q - \Phi_n = Q - \frac{Q}{g}\,\frac{v}{\rho} = 10000 - \frac{10000}{9{,}81}\cdot\frac{10^2}{50} = 7961\ \text{Н}.$$

Кўприкка кўрсатиладиган босим кучи миқдор жиҳатдан N га тенг, йўналиши эса унга қарама-қарши бўлади.

50-масала. Оғирлиги P, радиуси r га тенг ва O нуқтадан ўтувчи қўзғалмас Oz ўқ атрофида айланадиган барабанга ип ўралган (242-расм). Ипнинг учига оғирлиги Q га тенг A юк осилган. Юк вертикалига ҳаракатланганда, ипнинг оғирлиги ва айланиш ўқидаги ишқаланишни ҳисобга олмай, барабаннинг бурчак тезланиши ҳамда ипда ҳосил бўладиган қўшимча таранглик кучи топилсин. Барабаннинг айланиш ўқига нисбатан инерция радиуси $\rho_и$ га тенг.

Ечиш. 1. Барабан ва юкни битта механик система деб қараймиз. A юк вертикаль бўйича илгариланма ҳаракатда бўлгани учун (23.18) га кўра унинг инерция кучи битта $\overline{R}^{\Phi}$ тенг таъсир этувчига келтирилади:

$$R^{\Phi} = \frac{Q}{g}\ w_A = \frac{Q}{g}\ r\varepsilon.$$

Барабаннинг инерция кучи айланиш йўналишига тескари йўналган жуфт кучга келтирилади ва жуфт куч моментининг миқдори (29.19) га кўра қуйидагича аниқланади:

$$|\overline{M}_0^{\Phi}| = I_0\varepsilon = \frac{P}{g}\ \rho_{\text{и}}^2\varepsilon.$$

Барча кучлар учун $\sum M_0(\overline{F}_k) = 0$ кўринишдаги мувозанат тенгламаларини тузамиз:

$$|\overline{M}_0^{\Phi}| + R^{\Phi}\cdot r - Q\cdot r = 0$$

ёки

$$\frac{P}{g}\ \rho_{\text{и}}^2\ \varepsilon + \frac{Q}{g}\ r^2\varepsilon - Q\cdot r = 0.$$

Бундан барабаннинг бурчак тезланиши ε ни аниқлаймиз:

$$\varepsilon = \frac{Qrg}{P\rho_{\text{и}}^2 + Qr^2}.$$

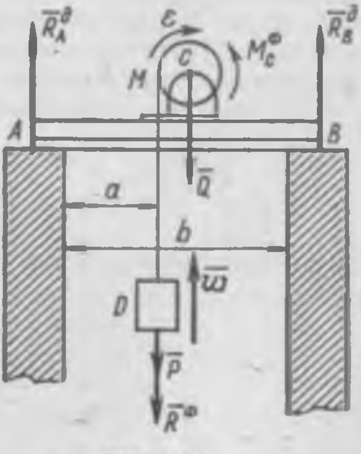
2. Ипнинг таранглик кучини аниқлаш учун A юкнинг мувозанатини алоҳида қараймиз. Унга оғирлик кучи $\overline{Q}$ ва таранглик кучи $\overline{T}$ ҳамда инерция кучи $\overline{R}^{\Phi}$ ни қўйсак, Даламбер принципига кўра бу кучлар системаси мувозанатлашади.

y ўқни вертикал тарзда юқорига йўналтириб, мувозанат тенгламасини тузамиз (242-расм, б):

$$-Q + T + R^{\Phi} = 0,$$

бундан T ни аниқлаймиз: $T =$
$= Q - R^{\Phi} = Q\left(1 - \frac{r\varepsilon}{g}\right) = \frac{Pa\rho_{\text{и}}^2}{P\rho_{\text{и}}^2 + Q\cdot r^2}.$

51-масала. Оғирлиги P га тенг бўлган D юк чиғир ёрдамида w тезланиш билан кўтарилади. Чиғир горизонтал AB тўсинга ўрнатилган; тўсин эса A ва B таянчларга эркин қўйилган (243-расм). Чиғир барабанининг оғирлиги Q, радиуси r га, айланиш ўқига нисбатан инер-



243- расм.

ция радиуси эса ρ_u га тенг. D юкнинг ва айланувчи барабан моддий зарраларининг инерция кучлари ҳисобига ҳосил бўладиган A ва B таянчлардаги қўшимча босимлар ҳамда ипнинг таранглик кучи топилсин. Ўлчамлар расмда кўрсатилган. Тўсиннинг оғирлиги ҳисобга олинмасин.

Ечиш. I. Тўсин, чиғир ва юкдан иборат механик система нуқталарига инерция кучларини қўямиз. У ҳолда динамик реакция кучлари кўтарилаётган юкнинг ва айланма ҳаракатдаги барабаннинг инерция кучлари ҳисобига ҳосил бўлади.

D юкнинг инерция кучи $\overline{R}^{\Phi}$ юкнинг тезланиши $\overline{w}$ га тескари йўналади ва (23.18) га кўра модуль жиҳатдан $R^{\Phi} = \frac{P}{g} w$ бўлади.

Чиғир барабани шакл текислигида ётувчи симметрия текислигига эга ва унинг массалар маркази C айланиш ўқида ётади деб қарайлик. У ҳолда барабан моддий зарраларининг инерция кучлари моменти $\overline{M}_C^{\Phi}$ га тенг битта жуфт кучга келтирилади ва (23. 19) га кўра унинг модули $M_C^{\Phi} = I_C \varepsilon$ бўлади. Бунда $I_C = \frac{Q}{g} \rho_u^2$ — барабанннг айланиш ўқига нисбатан инерция моменти; ε — барабанннг бурчак тезланиши.

Барабан гардишидаги нуқтанинг уринма тезланиши юкнинг тезланишига тенг: $w_M^{\tau} = w$ ҳамда $w_M^{\tau} = \varepsilon \cdot r$ бўлгани учун

$$\varepsilon = \frac{w_M^{\tau}}{r} = \frac{w}{r}$$

Шундай қилиб, $M_C^{\Phi} = \frac{I_C w}{r} = \frac{Q}{rg} \rho_u^2 w$ бўлади.

Фақат инерция кучлари ҳисобига A ва B нуқталарда ҳосил бўладиган қўшимча (динамик) реакция кучларини $\overline{R}_A^{\partial}$ билан белгилаймиз. Бундан ташқари, система нуқталарига (юқорида ҳисобланган) юкнинг инерция кучи $\overline{R}^{\Phi}$ ва моменти $\overline{M}_C^{\Phi}$ га тенг бўлган барабан нуқталарининг инерция кучини ифодаловчи жуфт кучни қўямиз. Натижада бир текисликда ётувчи параллел кучлар системасига эга бўламиз. Уларнинг мувозанат тенгламалари қуйидагича бўлади (тенглама тузишда P ва Q эътиборга олинмайди):

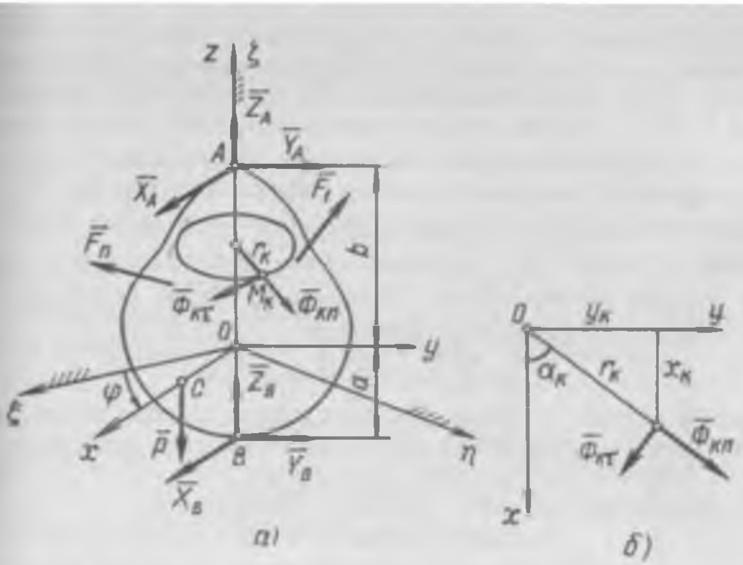
$$\sum M_A (\overline{F}_k) = 0; \quad R_B^{\partial} b + I_C \cdot \varepsilon - R^{\Phi} \cdot a = 0,$$

$$\sum M_B (\overline{F}_k) = 0; \quad -R_A^{\partial} \cdot b + I_C \cdot \varepsilon + R^{\Phi} \cdot (b - a) = 0.$$

Бу тенгламалардан динамик реакция кучлари R_A^{∂} ва R_B^{∂} ларни аниқлаймиз:

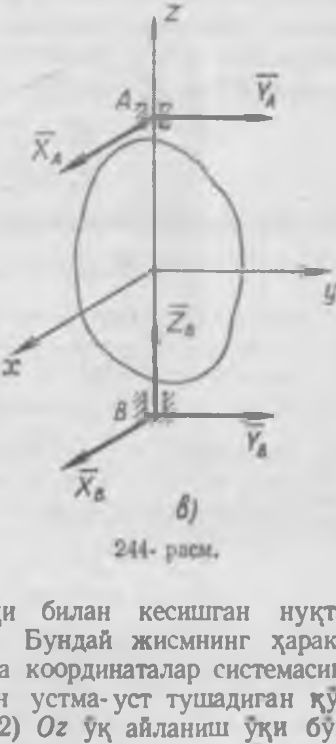
$$R_A^{\partial} = \frac{I_C \cdot \varepsilon + R^{\Phi} (b - a)}{b} = \frac{w}{rgb} [Q \cdot \rho_u^2 + rP (b - a)],$$

$$R_B^{\partial} = \frac{R^{\Phi} \cdot a - I_C \cdot \varepsilon}{b} = \frac{w}{rgb} (P \cdot ra - Q \rho_u^2) .$$



Динамик (қўшимча) босим миқдор жиҳатдан аниқланган динамик реакция кучига тенг, йўналиши эса унга қарама-қарши бўлади.

153-§. Қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи қаттиқ жисмнинг айланиш ўқига кўрсатадиган динамик босимини аниқлаш



244- расм.

Қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи қаттиқ жисмнинг таянч нуқталарида подшипникларга кўрсатадиган босимини Даламбер принципи ёрдамида аниқлаймиз.

Жисмнинг A ва B нуқталарида подшипниклар ўрнатилган бўлиб, унда ҳосил бўладиган ишқаланиш кучини ҳисобга олмаймиз.

Жисмнинг оғирлик маркази C нуқтада айланиш ўқига перпендикуляр текислик ўтказиб, унинг айланиш ўқи билан кесишган нуқтасини O билан белгилаймиз (244-расм, *а*). Бундай жисмнинг ҳаракатини аниқлаш учун O нуқта орқали 2 та координаталар системасини ўтказамиз: 1) $O\zeta$ ўқ айланиш ўқи билан устма-уст тушадиган қўзғалмас $O\xi\eta\zeta$ координаталар системаси; 2) Oz ўқ айланиш ўқи бўйлаб йўналган ва Ox ўқ жисмнинг оғирлик маркази орқали ўтадиган ҳамда жисм билан биргаликда ҳаракатланувчи $Oxyz$ координаталар системаси.

Бундай жисмнинг ҳаракати φ бурчак билан аниқланади.

Даламбер принципига асосан ҳаракатдаги жисмга таъсир этувчи берилган кучлар ва боғланиш реакция кучлари қаторига инерция кучларини қўшсак, у ҳолда кучлар системаси ҳар онда мувозанатлашади.

A ва B нуқталардаги реакция кучлари $\overline{N}_A$, $\overline{N}_B$ нинг ҳаракатланувчи координата ўқларидаги проекцияларини X_A, Y_A, Z_A, X_B, Y_B, Z_B билан белгилаймиз. Инерция кучларини қуйидагича киритамиз. Жисмнинг ихтиёрий M_k нуқтасини олиб, унинг массасини m_k билан, ундан айланиш ўқигача бўлган масофани r_k билан белгилаймиз. У ҳолда инерция кучининг бош векторини

$$\overline{R}^{\Phi} = \sum \overline{\Phi}_k = \sum (\overline{\Phi}_{k\tau} + \overline{\Phi}_{kn})$$

кўринишда оламиз. У ҳолда (23. 5) га асосан айланма ва марказдан қочувчи инерция кучларининг модуллари қуйидагича аниқланади:

$$\Phi_{k\tau} = m_k w_{k\tau} = m_k r_k \varepsilon,$$
$$\Phi_{kn} = m_k w_{kn} = m_k r_k \omega^2 .$$

Бу ифодаларда ω ва ε билан жисмнинг бирор пайтдаги бурчак тезлиги ва бурчак тезланиши белгиланган. $\varepsilon > 0$ бўлганда $\Phi_{k\tau}$, Φ_{kn} кучларнинг йўналиши 244-расм, *б* да тасвирланган. Инерция кучи бош векторининг x ва y ўқларидаги проекцияларини қуйидагича ифодалаш мумкин: $\overline{R}^{\Phi} = R_x^{\Phi}\,\overline{i} + R_y^{\Phi}\,\overline{i}$. Бунда

$$\left.\begin{aligned} R_x^{\Phi} &= \sum (\overline{\Phi}_{k\tau})_x + \sum (\overline{\Phi}_{kn})_x, \\ R_y^{\Phi} &= \sum (\overline{\Phi}_{k\tau})_y + \sum (\overline{\Phi}_{kn})_y. \end{aligned}\right\} \qquad (23.20)$$

Расмдан ушбуларни аниқлаймиз:

$$(\overline{\Phi}_{k\tau})_x = m_k r_k \varepsilon \sin\alpha_k = m_k y_k \varepsilon,$$
$$(\overline{\Phi}_{k\tau})_y = - m_k r_k \varepsilon \cos\alpha_k = - m_k x_k \varepsilon,$$
$$(\overline{\Phi}_{kn})_x = m_k r_k \omega^2 \cos\alpha_k = m_k x_k \omega^2,$$
$$(\overline{\Phi}_{kn})_y = m_k r_k \omega^2 \sin\alpha_k = m_k y_k \omega^2.$$

Бу ифодаларни ва жисмнинг оғирлик маркази Ox ўқда ётганини ($\sum m_k x_k = Mx_c$, $\sum m_k y_k = My_c = 0$) эътиборга олиб, (23.20) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\left.\begin{aligned} R_x^{\Phi} &= \varepsilon \sum m_k y_k + \omega^2 \sum m_k x_k = Mx_c\,\omega^2, \\ R_y^{\Phi} &= - \varepsilon \sum m_k x_k + \omega^2 \sum m_k y_k = - Mx_c\,\varepsilon. \end{aligned}\right\} \qquad (23.21)$$

$\overline{\Phi}_{k\tau}$ ва $\overline{\Phi}_{kn}$ кучларнинг координата ўқларига нисбатан моментларини аналитик усулда топамиз:

$$M_x(\overline{\Phi}_{k\tau}) = y_k(\overline{\Phi}_{k\tau})_z - z_k(\overline{\Phi}_{k\tau})_y = m_k x_k z_k \varepsilon,$$
$$M_y(\overline{\Phi}_{k\tau}) = z_k(\overline{\Phi}_{k\tau})_x - x_k(\overline{\Phi}_{k\tau})_z = m_k y_k z_k \varepsilon,$$
$$M_z(\overline{\Phi}_{k\tau}) = \Phi_{k\tau}\cdot r_k = - m_k r_k^2 \varepsilon,$$

$$M_x(\overline{\Phi}_{kn}) = y_k(\Phi_{kn})_z - z_k(\overline{\Phi}_{kn})_y = -m_k y_k z_k \omega^2,$$
$$M_y(\overline{\Phi}_{kn}) = z_k(\overline{\Phi}_{kn})_x - x_k(\overline{\Phi}_{kn})_z = m_k x_k z_k \omega^2,$$
$$M_z(\overline{\Phi}_{kn}) = 0.$$

Жисм барча нуқталари инерция кучларининг Ox ўққа нисбатан бош моментини ҳисоблаймиз:

$$M_x^{\Phi} = \sum M_x(\overline{\Phi}_{k\tau}) + \sum M_x(\overline{\Phi}_{kn}) =$$
$$= \varepsilon \sum m_k x_k z_k - \omega^2 \sum m_k y_k z_k = I_{xz}\varepsilon - I_{yz}\omega^2. \qquad (23.22)$$

Худди шунингдек, жисм барча нуқталари инерция кучларининг Oy ва Oz ўқларга нисбатан бош моментлари аниқланади:

$$\left.\begin{aligned} M_y^{\Phi} &= I_{yz}\varepsilon + I_{xz}\omega^2, \\ M_z^{\Phi} &= -I_z\varepsilon, \end{aligned}\right\} \qquad (23.23)$$

бунда $I_z = \sum m_k r_k^2$ — жисмнинг z ўққа нисбатан инерция моменти.

(23.21) — (23.23) ларни эътиборга олиб, Даламбер принципи асосида чиқарилган (23.13) тенгламаларни тузамиз:

$$\left.\begin{aligned} &X_A + X_B + \sum X_k + Mx_c\omega^2 = 0, \\ &Y_A + Y_B + \sum Y_k - Mx_c\varepsilon = 0, \\ &Z_A + Z_B + \sum Z_k = 0, \\ &-bY_A + aY_B + \sum M_x(\overline{F}_k) + I_{xz}\varepsilon - I_{yz}\omega^2 = 0, \\ &bX_A - aX_B + \sum M_y(\overline{F}_k) + I_{yz}\varepsilon + I_{xz}\omega^2 = 0, \\ &\sum M_z(\overline{F}_k) - I_z\varepsilon = 0, \end{aligned}\right| \qquad (23.24)$$

бунда X_k, Y_k, Z_k билан $\overline{F}_k$ кучнинг қўзғалувчи координата ўқларидаги проекциялари ($\overline{P}$ кучни ҳам шу кучлар қаторида деб қараймиз) белгиланган.

(23.24) тенгламалар системасидан A ва B подшипникларнинг реакция кучларини аниқлаш керак. Бу тенгламалар системасининг олтинчисида реакция кучлари қатнашмайди ва мазкур тенглама қаттиқ жисмнинг қўзғалмас ўқ атрофидаги айланма ҳаракати дифференциал тенгламасини ифодалайди. Z_A ва Z_B номаълумлар (23.24) нинг фақат учинчи тенгламасида қатнашади, шу сабабли X_A, Y_A, X_B, Y_B номаълумларни (23.24) нинг қолган тенгламаларидан аниқлаш мумкин. Бу номаълумлар подшипникларга тушадиган *кўндаланг реакция кучи* дейилади.

Шундай қилиб, (23.24) тенгламаларни ечиб X_A, Y_A, X_B, Y_B номаълумларини ва $Z_A + Z_B$ ни топиш мумкин. Техникада бу аниқмасликни ҳал қилишда, масалан, B нуқтада таянч подшипник, A нуқтада цилиндрсимон подшипник олинади (244-расм, *в*). У ҳолда A нуқтада реакция кучининг z ўқ бўйлаб йўналган ташкил этувчиси бўлмайди ва (23.24) нинг учинчисидан Z_B ни аниқлаш мумкин. A ва B подшипниклардаги кўндаланг реакция кучларини шартли равишда статик ва динамик реакция кучларига ажратамиз.

$\omega = 0$, $\varepsilon = 0$ бўлганда фақат берилган кучлар таъсирида подшипникларда ҳосил бўладиган реакция кучларини *статик раекция кучлари* деб атаймиз. Берилган кучлар таъсирида жисмнинг ҳаракатланиши натижасида ҳосил бўладиган инерция кучлари билан аниқланадиган реакция кучлари *динамик реакция кучлари* дейилади. Статик реакция кучларини $X_A^{ст}$, $Y_A^{ст}$, $X_B^{ст}$, $Y_B^{ст}$ билан, динамик реакция кучларини X_A^{∂}, Y_A^{∂}, X_B^{∂}, Y_B^{∂} билан белгиласак,

$$\left.\begin{aligned} X_A = X_A^{ст} + X_A^{\partial},\ X_B = X_B^{ст} + X_B^{\partial}, \\ Y_A = Y_A^{ст} + Y_A^{\partial},\ Y_B = Y_B^{ст} + Y_B^{\partial} \end{aligned}\right\} \qquad (23.25)$$

деб ёзиш мумкин.

Статик реакция кучлари

$$\left.\begin{aligned} \sum X_k + X_A^{ст} + X_B^{ст} = 0, \\ \sum Y_k + Y_A^{ст} + Y_B^{ст} = 0, \\ -bY_A^{ст} + aY_B^{ст} = 0, \\ bX_A^{ст} - aX_B^{ст} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (23.26)$$

тенгламалардан аниқланади.

(25.25) ва (23.26) ни эътиборга олиб, (28.24) дан динамик реакция кучлари аниқланадиган қуйидаги тенгламаларни оламиз:

$$\left.\begin{aligned} X_A^{\partial} + X_B^{\partial} + Mx_c\,\omega^2 = 0, \\ Y_A^{\partial} + Y_B^{\partial} - Mx_c\,\varepsilon = 0, \\ -bY_A^{\partial} + aY_B^{\partial} + I_{xz}\,\varepsilon - I_{yz}\,\omega^2 = 0, \\ bX_A^{\partial} - aX_B^{\partial} + I_{yz}\,\varepsilon + I_{xz}\,\omega^2 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (23.27)$$

Қуйидаги хусусий ҳолларни кўриб чиқамиз.

1. Жисмнинг айланиш ўқи инерция бош ўқидан иборат бўлмасин ва жисмнинг оғирлик маркази айланиш ўқида ётсин. Бу ҳолда (23.27) да $x_c = 0$, $I_{xz} \neq 0$, $I_{yz} \neq 0$ эканлигини эътиборга олсак,

$$\begin{aligned} X_A^{\partial} + X_B^{\partial} = 0, \\ Y_A^{\partial} + Y_B^{\partial} = 0, \\ -bY_A^{\partial} + aY_B^{\partial} + I_{xz} - I_{yz}\,\omega^2 = 0 \\ bX_A^{\partial} - aX_B^{\partial} + I_{yz}\,\varepsilon + I_{xz}\,\omega^2 = 0, \end{aligned}$$

бундан

$$\left.\begin{aligned} X_B^{\partial} = -X_A^{\partial} \\ Y_B^{\partial} = -Y_A^{\partial}, \\ X_A^{\partial} = \frac{-I_{yz}\,\varepsilon + I_{xz}\,\omega^2}{a+b}, \\ Y_A^{\partial} = \frac{I_{xz}\,\varepsilon - I_{yz}\,\omega^2}{a+b}. \end{aligned}\right\} \qquad (23.28)$$

(23.28) дан кўрамизки, бу ҳолда таянчларнинг динамик реакциялари миқдор жиҳатдан тенг, йўналиши эса қарама-қарши бўлади ҳамда

$$|N^\partial_A| = |N^\partial_B| = \frac{\sqrt{(I^2_{yz} + I^2_{xz})(\varepsilon^2 + \omega^4)}}{a + b},$$

бунда $a + b$ — таянч подшипниклари орасидаги масофа.

2. Жисм $\omega = \omega_0 = \text{const}$ бурчак тезлик билан текис айланма ҳаракатда бўлсин. У ҳолда $\varepsilon = 0$ ва динамик реакциялар учун қуйидаги тенгламаларни оламиз:

$$\begin{aligned}
&X^\partial_A + X^\partial_B + Mx_c\,\omega^2 = 0,\\
&Y^\partial_A + Y^\partial_A = 0,\\
&-bY^\partial_A + aY^\partial_B - I_{yz}\,\omega^2 = 0,\\
&bX^\partial_A - aX^\partial_B + I_{xz}\,\omega^2 = 0,
\end{aligned}$$

бундан

$$X^\partial_A = -\frac{(M_a x_c + I_{xz})\,\omega^2}{a + b}, \quad Y^\partial_A = -\frac{I_{yz}\,\omega^2}{a + b},$$

$$X^\partial_B = -\frac{(Mbx_c + I_{vz})\,\omega^2}{a + b}, \quad Y^\partial_B = \frac{I_{yz}\,\omega^2}{a + b}.$$

Бу ҳолда X^∂_A, X^∂_B, Y^∂_A, Y^∂_B лар ўзгармас қийматларга эга бўлади.

Агар $x_c = 0$ бўлса, яъни 1- ва 2- шартлар бир вақтда ўринли бўлса,

$$|\overline{N}^\partial_A| = |\overline{N}^\partial_B| = \sqrt{\frac{I^2_{yz} + I^2_{xz}}{a + b}\,\omega^2}. \tag{23.29}$$

Демак, бу ҳолда таянч реакциялари миқдор жиҳатдан тенг, йўналиши қарама-қарши бўлган иккита кучга келтирилади ҳамда уларнинг миқдори подшипниклар орасидаги масофага тескари мутаносиб, бурчак тезлик квадратига тўғри мутаносиб равишда ўзгаради.

3. Агар жисмнинг оғирлик маркази айланиш ўқида ётмаса ҳамда бу ўқ бош инерция ўқидан иборат бўлиб, A нуқта Q билан устма-уст тушса, яъни

$$x_c \neq 0, \; I_{yz} = 0, \; I_{xz} = 0, \; b = 0$$

бўлса, (23.27) дан $X^\partial_B = 0$, $Y^\partial_B = 0$ бўлади. Бу ҳолда B таянчда ҳеч қандай динамик реакция кучи ҳосил бўлмайди ва A нуқтадан ўтувчи инерция бош ўқи *эркин айланиш ўқи* дейилади.

4. Агар $x_c = 0$, $I_{yz} = I_{xz} = 0$ бўлса, айланиш қонуни ҳар қандай бўлганда ҳам (23.29) га кўра N^∂_A ва N^∂_B нолга тенг бўлади. Демак, *айланиш ўқи инерция бош марказий ўқидан иборат бўлса, A ва B нуқталарда динамик реакция кучлари ҳосил бўлмайди.*

Энди подшипникларда ҳосил бўладиган қўшимча динамик реакция кучи нолга тенг бўладиган зарурий шартларни аниқлаймиз. Бунинг учун (23. 24) да инерция кучларига боғлиқ бўлган ҳадлар йиғиндисини нолга тенглаймиз. Бошқача айтганда, (23.21) — (23.23) формулалар ёрдамида аниқланадиган инерция кучларининг бош вектори ва бош моментини нолга тенглаймиз:

$$\left.\begin{aligned} Mx_c\,\omega^2 = 0, \\ -Mx_c\,\varepsilon = 0, \end{aligned}\right\} \tag{23.30}$$

$$\left.\begin{aligned} I_{xz}\varepsilon - I_{yz}\,\omega^2 = 0, \\ I_{yz}\varepsilon + I_{xz}\,\omega^2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{23.31}$$

(23.30) дан $x_c = 0$ келиб чиқади. Бундан ташқари, оғирлик маркази x ўқда ётгани учун $y_c = 0$ бўлади. Бу ҳол жисмнинг массалар маркази айланиш ўқида ётишини кўрсатади.

(23.31) тенгламаларни I_{xz} ва I_{yz} га нисбатан ечсак,

$$I_{xz} = 0,\ I_{yz} = 0$$

бўлади. Бу тенгликлар z ўқ O нуқтадаги инерция бош ўқи бўлиши кераклигини ифодалайди.

Шундай қилиб, *қўзғалмас ўқ атрофида айланма ҳаракатдаги жисм таянч нуқталарига динамик босим кўрсатмаслиги учун айланиш ўқи инерция бош марказий ўқидан иборат бўлиши зарур ва етарлидир.*

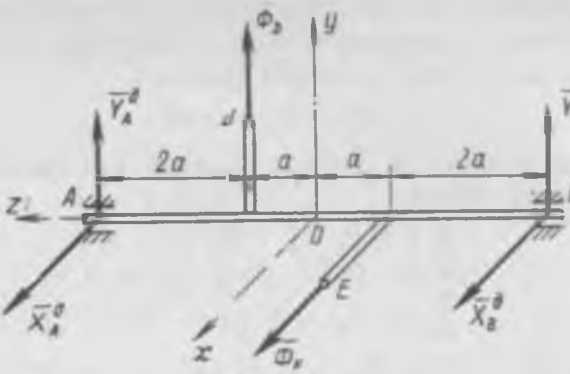
Қаттиқ жисмнинг айланиш ўқига кўрсатадиган динамик босимини аниқлашга оид масалалар ечишда (23.24) формула жисмга таъсир этаётган кучларга ва танланган координата ўқларига мослаб тузилади. Бунда қўзғалувчи координата ўқларини қандай танлаб олиш алоҳида аҳамиятга эга. Масалан, агар Oz ўқни айланиш ўқи бўйлаб, Ox ни эса массалар марказидан ўтмайдиган ўқ деб олинса, у ҳолда (23.21) да $\sum m_k y_k = My_c \neq 0$ бўлиб, (23.24) да y_c ни ўз ичига олган ҳадлар ҳам қатнашади:

$$\left.\begin{aligned} X_A + X_B + \sum X_k + My_c\,\varepsilon + Mx_c\,\omega^2 = 0, \\ Y_A + Y_B + \sum Y_k - Mx_c\,\varepsilon + My_c\,\omega^2 = 0, \\ -bY_A + aY_B + \sum M_x(\overline{F}_k) + I_{xz}\varepsilon - I_{yz}\,\omega^2 = 0, \\ bX_A - aX_B + \sum M_y(\overline{F}_k) + I_{yz}\varepsilon - I_{xz}\,\omega^2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{23.32}$$

Бунда b ва a лар таянч нуқталари A ва B дан координата боши O нуқтагача бўлган масофалардир.

154-§. Қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи жисм массаларини динамик мувозанатлаш

Қўзғалмас ўқ атрофида айланаётган *жисм массаларини динамик мувозанатлаш* масаласи (бошқача айтганда, инерция кучларини мувозанатлаш масаласи) техникада муҳим аҳамиятга эга бўлиб, бу масалани ечиш жисмнинг бош марказий инерция ўқини аниқлашга келтирилишини кўрсатамиз. Бунинг учун *жисмда ўтказилган ихтиёрий ўқни иккита қўшимча масса киритиш йўли билан инерция бош марказий ўқи қилиб танлаб олиш мумкинлигини* исботлаймиз.



245- расм.

Массаси M га тенг бўлган жисм учун x_c, y_c, I_{xz}, I_{yz} катталиклар маълум ва улар нолдан фарқли бўлсин. Жисмнинг (x_1, y_1, z_1) ва (x_2, y_2, z_2) нуқталарига массалари m_1 ва m_2 га тенг иккита қўшимча масса киритамиз. У ҳолда массалар қўшилган жисмнинг оғирлик маркази айланиш ўқида ётиши учун бу жисм оғирлик марказининг координаталари $x'_c = y'_c = 0$ бўлиши ва айланиш ўқи инерция бош ўқидан иборат бўлиши учун жисмнинг айланиш ўқига нисбатан марказдан қочувчи инерция моментлари $I'_{xz} = I'_{yz} = 0$ бўлиши зарур ва етарлидир. Бу шартларни бошқача қилиб қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\left.\begin{aligned} Mx_c + m_1x_1 + m_2x_2 = 0, \\ My_c + m_1y_1 + m_2y_2 = 0, \\ I_{xz} + m_1x_1z_1 + m_2x_2z_2 = 0, \\ I_{yz} + m_1y_1z_1 + m_2y_2z_2 = 0. \end{aligned}\right| \qquad (23.33)$$

Қўйилган масала m_1 ва m_2 массаларни ва улар қўйилган нуқталарнинг координаталарини (23. 33) тенгламалар системасини қаноатлантирадиган қилиб танлаб олиш йўли билан ечилади. Бунда баъзи катталиклар олдиндан маълум бўлиши керак. Масалан, m_1, m_2 ва z_1, z_2 ларнинг (бунда $z_1 \neq z_2$) қийматлари олдиндан берилган деб қараб, (23.33) тенгламалар системасидан x_1, y_1, x_2, y_2 ларни топиш мумкин. Бу усулдан техникада тирсакли валлар, кривошиплар, автомобиль ғилдираклари ва шу каби деталларни динамик мувозанатлашда фойдаланилади.

52-масала. Доимий ω бурчак тезлик билан айланувчи горизонтал AB валга бир-бирига перпендикуляр бўлган текисликларда ётган l узунликдаги иккита стержень тўғри бурчак остида бириктирилган. Стерженларнинг учларида ҳар қайсисининг массаси m бўлган D ва E шарлар бор. Валнинг A ва B таянчларга кўрсатадиган динамик босимлари аниқлансин. Стерженларнинг эгаллаган ҳолати расмда кўрсатилган. Шарлар моддий нуқта деб ҳисоблансин, стерженларнинг массалари ҳисобга олинмасин (245-расм).

Ечиш. Координата ўқларини расмдагидек йўналтирамиз. A ва B нуқталарда ҳосил бўладиган қўшимча динамик реакция кучларини x

ва y ўқларнинг мусбат йўналиши бўйича йўналган $\overline{X}_A^\partial$, $\overline{Y}_A^\partial$, $\overline{X}_B^\partial$, $\overline{Y}_B^\partial$ ташкил этувчиларга ажратамиз. D ва E нуқталарга $\overline{\Phi}_D$ ва $\overline{\Phi}_E$ марказдан қочувчи инерция кучларини қўямиз:

$$\Phi_D = \Phi_E = m\omega^2 l.$$

Инерция кучлари ва динамик реакция кучларининг мувозанат тенгламаларини тузамиз:

$$\sum X = 0;\ X_A^\partial + X_B^\partial + \Phi_E = 0,$$
$$\sum Y = 0;\ Y_A^\partial + Y_B^\partial + \Phi_D = 0,$$
$$\sum M_x(\overline{F}_e) = 0;\ 3a\ (-Y_A^\partial + Y_B^\partial) - a\Phi_D = 0,$$
$$\sum M_y(\overline{F}_e) = 0;\ 3a\ (X_A^\partial - X_B^\partial) - a\Phi_E = 0$$

Бу тенгламаларни биргаликда ечиб изланаётган номаълумларни топамиз:

$$X_A^\partial = -\frac{1}{3} m\,\omega^2 l,\quad X_B^\partial = -\frac{2}{3} m\,\omega^2 l,$$
$$Y_A^\partial = \frac{2}{3} m\,\omega^2 l,\quad Y_B^\partial = -\frac{1}{3} m\,\omega^2 l.$$

Ушбу ифодалардаги манфий ишора A ва B нуқталардаги қўшимча динамик реакция кучларининг ташкил этувчилари ҳақиқатда x ва y ўқларнинг мусбат йўналишига тескари йўналганлигини кўрсатади. Шундай қилиб,

$$N_A^\partial = \sqrt{(X_A^\partial)^2 + (Y_A^\partial)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3} ml\,\omega^2,$$
$$N_B^\partial = \frac{\sqrt{5}}{3} ml\,\omega^2.$$

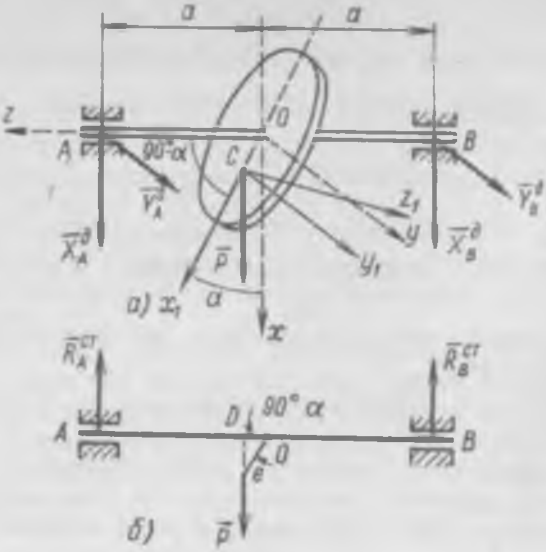
53- масала. Эксцентриситети $OC = e$ га тенг бўлган бир жинсли юпқа диск горизонтал вал ўртасига унинг ўқи билан $90° - \alpha$ бурчак ташкил қиладиган ҳолатда қўзғалмас қилиб ўрнатилган; дискнинг оғирлиги R, радиуси r га тенг. Вал ва диск ω бурчак тезлик билан бир текис айланганда ҳосил бўладиган статик ва динамик реакция кучлари аниқлансин (246- расм, *a*).

Ечиш. Статик реакцияларни топиш учун валга таъсир этувчи кучларни схема кўринишида тасвирлаймиз (246- расм, *b*). Валга дискнинг оғирлик кучи P ва подшипникнинг таянч сиртларига перпендикуляр равишда йўналган $\overline{R}_A^{\text{ст}}$ ва $R_B^{\text{ст}}$ статик реакция кучларидан иборат ташқи кучлар таъсир этади.

Расмдан AD ва DB ни аниқлаймиз:

$$AD = a - e\sin\alpha,$$
$$DB = a + e\sin\alpha.$$

$\overline{P}$, $\overline{R}_A^{\text{ст}}$, $\overline{R}_B^{\text{ст}}$ кучлар системаси текисликдаги параллел кучлар системасини ташкил этади. Бу кучларнинг мувозанат тенгламаларини тузамиз:



246- расм.

$$\left.\begin{aligned}\sum M_A(\bar{F}_k)=0;\ +R_B^{ст}\cdot 2a-P(a-e\sin\alpha)=0,\\ \sum M_B(\bar{F}_k)=0;\ -R_A^{ст}\cdot 2a+P(a+e\sin\alpha)=0.\end{aligned}\right\}$$

Бунда *A* ва *B* таянчларда ҳосил бўладиган статик реакция кучларини аниқлаймиз:

$$R_A^{ст}=P\cdot\frac{a+e\sin\alpha}{2a},$$

$$R_A^{ст}=P\cdot\frac{a-e\sin\alpha}{2a}.$$

Вал билан биргаликда ҳаракатланувчи координаталар системасининг бошини дискнинг маркази *O* да олиб, *Oz* ўқни айланиш ўқи бўйлаб, *Ox* ўқни эса дискнинг оғирлик маркази *C* нуқта ва *z* ўқ орқали ўтувчи текисликда оламиз.

Вал *AB* ўқ атрофида ўзгармас бурчак тезлик билан айлангани учун динамик реакция кучлари аниқланадиган (23.32) тенгламаларни қуйидагича ёзамиз:

$$\left.\begin{aligned}X_A^д+X_B^д+Mx_c\omega^2=0,\\ Y_A^д+Y_B^д+My_c\omega^2=0,\\ -Y_A^д\cdot a+Y_B^д\cdot a-I_{yz}\omega^2=0,\\ X_A^д\cdot a-X_B^д\cdot a+I_{xz}\omega^2=0.\end{aligned}\right| \qquad (1)$$

Oy ўқ бош инерция ўқи бўлгани учун $I_{zy}=0$.

Марказдан қочувчи I_{zx} инерция моментини ҳисоблаш учун қўзғалувчи $Cx_1y_1z_1$ бош марказий координата ўқлар системасини киритамиз. У ҳолда *Oxyz* координаталар системасидан $Cx_1y_1z_1$ координаталар системасига

$$x = (e + x_1)\cos\alpha - z_1\sin\alpha,$$
$$y = (e + x_1)\sin\alpha + z_1\cos\alpha$$

формулалар ёрдамида ўтилади. Буни эътиборга олиб, I_{zx} ни ҳисоблаймиз:

$$I_{zx} = \int\limits_{(M)} xz dm = \frac{\sin 2\alpha}{2}\left[\int\limits_{(M)}(e + x_1)^2 dm - \int\limits_{(M)} z_1^2 dm\right] +$$
$$+ \cos 2\alpha\int\limits_{(M)}(e + x_1)\, z_1 dm.$$

$Cx_1y_1z_1$ координаталар системаси боши дискнинг массалар марказига жойлашгани учун

$$\int\limits_{(M)} z_1 dm = 0, \quad \int\limits_{(M)} x_1 dm = 0$$

бўлади. Бинобарин,

$$I_{zx} = \frac{\sin 2\alpha}{2}\left[e^2M + \int\limits_{(M)}(x_1^2 + y_1^2)\, dm - \int\limits_{(M)}(z_1^2 + y_1^2) dm\right] =$$
$$= \frac{\sin 2\alpha}{2}\left(e^2M + I_{z_1} - I_{x_1}\right).$$

Массаси текис тақсимланган диск учун

$$I_{x_1} = \frac{1}{4}Mr^2, \quad I_{z_1} = \frac{Mr^2}{2},$$

шу сабабли

$$I_{zx} = \frac{P\cdot\sin 2\alpha}{2g}\left(e^2 + \frac{r^2}{4}\right).$$

Расмдан $y_c = 0$, $x_c = e\cos\alpha$ бўлгани учун (1) тенгламалар системасидан қуйидагиларни аниқлаймиз:

$$Y_A^\partial = Y_B^\partial = 0,$$
$$Me\cos\alpha\cdot\omega^2 = -(X_A^\partial + X_B^\partial),$$
$$\frac{P\cdot\sin 2\alpha}{2g}\left(e^2 + \frac{r^2}{4}\right)\omega^2 = a\left(-X_B^\partial + X_A^\partial\right).$$

Шундай қилиб, динамик реакциялар оғирлик маркази ва дискнинг айланиш ўқи билан бир текисликда ётади ва Ox ўққа тескари йўналади ҳамда

$$X_A^\partial = -\frac{P}{2g}\left[e\cos\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2g}\left(\frac{r^2}{4} + e^2\right)\right]\omega^2,$$
$$X_B^\partial = -\frac{P}{2g}\left[e\cos\alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2g}\left(\frac{r^2}{4} + e^2\right)\right]\omega^2$$

бўлади.

XXIV боб

Аналитик механикадан бошланғич маълумотлар

Аналитик механика бўлимида барча механик системаларнинг ҳаракати ва мувозанатига оид умумий принциплар баён этилади. Бу принциплардан механик система ҳаракатининг асосий дифференциал тенгламаларини чиқариш, бу тенгламаларни талқин қилиш ва интеграллаш масалалари аналитик маханиканинг асосий мавзуини ташкил этади. Аналитик механика бўлимида қўлланиладиган усулларни, механик системалардан ташқари, электр ва электромеханик ҳодисаларга ҳам қўллаш мумкин.

Статика бўлимида абсолют қаттиқ жисм мувозанатининг зарурий ва етарли шартлари чиқарилган эди. Қотиш принципига асосан исталган механик система учун бу шартлар фақат зарурий шартларни ифодалайди. Мувозанатнинг етарли шартини аниқлаш учун ҳар бир жисмнинг мувозанатини айрим текшириш керак. Бунда номаълум бўлган бир қанча ички боғланиш реакция кучларини ҳисоблашга тўғри келади. Системани ташкил қилувчи жисмлар сони ортгани сари тенгламалар сони ҳам кўпая боради.

Аналитик механикада барча механик системалар учун умумий бўлган принциплар асосида системанинг ҳаракат дифференциал тенгламалари ёки мувозанат тенгламалари аналитик усулда чиқарилади.

155-§. Боғланишлар ва уларнинг классификацияси

Ихтиёрий актив кучлар таъсиридаги N та нуқтадан ташкил топган механик система нуқталарининг координаталари ва тезликлари системанинг ҳаракати давомида маълум шартларни қаноатлантирсин. Бундай шартлар системага қўйилган боғланишлар дейилади. Боғланишлар бирор координаталар системасига нисбатан система нуқталарининг координаталари ($x_к$, $y_к$, $z_к$) ($k = 1, 2, \ldots, N$), улардан вақт бўйича олинган биринчи тартибли ҳосилалари ($\dot{x}_к$, $\dot{y}_к$, $\dot{z}_к$) орасидаги маълум муносабатлар билан ифодаланади. Бу муносабатларда t вақт ошкор равишда қатнашиши мумкин.

Система нуқталарига қўйилган боғланишларни ифодаловчи муносабатлар тенгламалар ёки тенгсизликлардан иборат бўлиши мумкин.

Боғланишлар қўйилмаган система *эркин система* дейилади. Система нуқталарига қўйилган боғланишлар актив кучлар таъсиридаги система нуқталарининг ҳаракатини худди шу кучлар таъсиридаги эркин система нуқталарининг ҳаракатига нисбатан маълум маънода чеклайди.

Бундай чеклашдан техниканинг турли соҳаларида, амалиёт учун зарур бўлган, мақсадга мувофиқ бирор йўналиш бўйича ҳаракатни таъминлашда фойдаланилади. Двигатель цилиндри ичида ҳаракатланаётган поршень бунга мисол бўла олади. Бунда цилиндр боғланиш вазифасини ўтайди.

Шундай қилиб, боғланишдаги система нуқталарининг ҳаракати фақат система нуқталарига таъсир этувчи кучлар ва бошланғич шартларгагина боғлиқ бўлмай, балки қўйилган боғланишларга ҳам боғлиқ бўлади. Бу ҳолда бошланғич шартлар боғланиш тенгламаларини қаноатлантириши керак.

Система нуқталарига қўйилган боғланишлар турига қараб система нуқталари турлича ҳаракатда бўлади. Боғланишларнинг турли хилларини кўриб ўтамиз.

Боғланишлар фақат система нуқталарининг координаталарини чекласа, бундай боғланишлар *геометрик боғланишлар* дейилади. Геометрик боғланишнинг тенгламаси

$$f(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N, t) = 0$$

ёки қисқача

$$f(x_k, y_k, z_k, t) = 0 \tag{24.1}$$

кўринишда ёзилади. Бу ерда ва бундан кейин $f(x_k, y_k, z_k)$ ифодада x_k, y_k, z_k ўрнида барча $x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_n; z_1, z_2, \dots, z_n$ лар қатнашади ҳамда f функция ва унинг ҳосилалари узлуксиз функция деб қаралади.

Агар боғланиш система нуқталарининг координаталаридан ташқари тезлигини ҳам чекласа, бундай боғланиш *кинематик* ёки *дифференциалли боғланиш* дейилади. Кинематик боғланиш тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$f(x_k, y_k, z_k, \dot{x}_k\ \dot{y}_k\ \dot{z}_k, t) = 0. \tag{24.2}$$

Геометрик боғланишлар ва интегралланадиган (24.2) кўринишдаги дифференциал боғланишлар *голоном боғланишлар* дейилади.

Интегралланмайдиган дифференциал богланишлар *ноголоном боғланишлар* дейилади. Ноголоном боғланиш тенгламаларини система нуқталари координаталарининг функциясидан иборат бўлган бирор функциянинг тўлиқ дифференциали тарзида ифодалаб бўлмайди.

Биз фақат голоном боғланишлар қўйилган механик системаларни кўриб чиқамиз.

Агар боғланиш тенгламаси вақтга ошкор равишда боғлиқ бўлса, бундай боғланиш *стационар бўлмаган боғланиш* дейилади. Бундай боғланиш тенгламаси умумий ҳолда (24.2) кўринишда ёзилади. Масалан,

$$\frac{x^2}{a^2 t^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{24.5}$$

тенглама билан ифодаланган боғланиш стационар бўлмаган боғланишдир. (24.5) нинг геометрик маъноси қуйидагичадир: нуқта ҳаракат давомида битта ярим ўқи ўзгариб турадиган эллипсоид сиртида, яъни деформацияланадиган эллипсоид сиртида қолади.

Агар боғланиш тенгламаси вақтга ошкор равишда боғлиқ бўлмаса, бундай боғланиш *стационар боғланиш* дейилади. Стационар боғланиш тенгламаси

$$f(x_k,\ y_k\ z_k,\ \dot{x}_k,\ \dot{y}_k,\ \dot{z}_k) = 0 \qquad (24.6)$$

кўринишда ёзилади.

Масалан,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (24.7)$$

тенглама билан ифодаланган боғланиш стационар боғланишдир, чунки (24.7) да t вақт ошкор равишда қатнашмайди.

Боғланишни ифодалайдиган муносабат тенглама билан ифодаланса, бундай боғланиш *бўшатмайдиган боғланиш* дейилади. (24.1) — (24.7) боғланишлар бунга мисол бўлади.

Боғланишни ифодалайдиган муносабат тенгсизлик билан ифодаланса, бундай боғланиш *бўшатадиган боғланиш* дейилади.

Шундай қилиб, бўшатадиган боғланиш

$$f(x_k,\ y_k,\ z_k,\ \dot{x}_k\ \dot{y}_k\ \dot{z}_k,\ t) \geqslant 0$$

ёки

$$\varphi(x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},,\ \dot{z}) \leqslant 0$$

тенгсизликлар билан ифодаланади. Масалан, боғланиш

$$x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$$

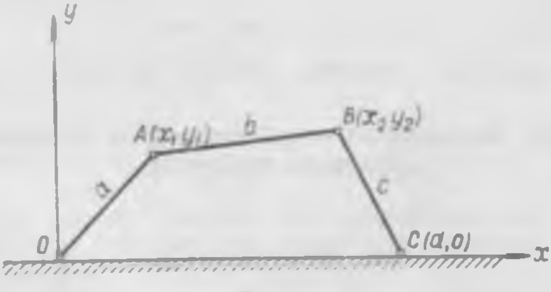
шаклида берилса, нуқта сферанинг ичида ёки сфера сиртида ҳаракатланиши мумкин.

Боғланиш тенгламаларини тузишга оид бир неча мисол келтирамиз.

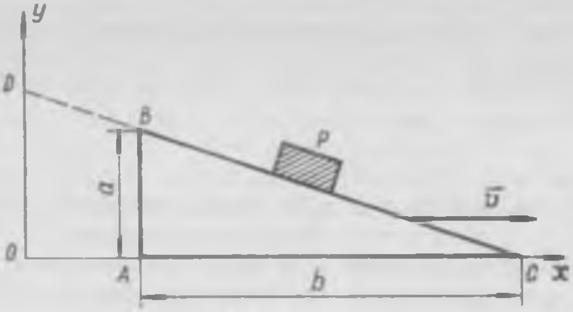
1. Бир текисликда ҳаракатланувчи ва шарнирлар воситасида бириктирилган ҳамда битта стержени доимо қўзғалмасдан қоладиган тўрт бўғинли механизмга қўйилган боғланиш тенгламасини чиқарамиз (247-расм).

Боғланиш тенгламалари $OA = a$, $AB = b$, $BC = c$ масофалар ўзгармаслигини ифодалайди:

$$x_1^2 + y_1^2 = a^2,$$
$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = b^2,$$
$$(x_2 - d)^2 + y_2^2 = c^2.$$



247- расм.



248- расм.

Бу тенгламаларда t вақт ошкор равишда қатнашмайди ва бу тенгламалар система нуқталарининг координаталарини чеклайди. Шу сабабли бу тенгламалар геометрик стационар боғланишни ифодалайди.

2. Горизонтал текисликда ўзгармас v тезлик билан ҳаракатланувчи уч бурчакли призма ABC устида P жисм сирпанади (248-расм). Жисм ҳар онда призма сиртида турганлиги сабабли у жисм учун боғланиш вазифасини ўтайди. Боғланиш тенгламасини чиқарамиз.

Oxy координаталар системасини шундай танлаймизки, $t = 0$ бўлган пайтда AB чизиқ y ўқ билан устма-уст тушсин. У ҳолда BC тўғри чизиқнинг ихтиёрий t пайтдаги тенгламасини

$$\frac{x}{OC}+\frac{y}{OD}=1$$

кўринишда ёзиш мумкин. 248-расмдан

$$OC = OA + AC = vt + b$$

$$OD = AB\cdot\frac{OC}{AC} = a\frac{vt+b}{b}.$$

Буларни олдинги тенгламага қўйсак,

$$\frac{x}{vt+b}+\frac{y}{\frac{a}{b}(vt+b)}=1$$

ёки

$$ax+by=a(vt+b).$$

бўлади. Бу стационар бўлмаган голоном боғланиш тенгламасидир.

156-§. Умумлашган координаталар ва системанинг эркинлик даражаси

Механик системанинг исталган пайтдаги ҳолати система ҳар бир нуқтасининг координаталари билан аниқланади.

Механик система N та нуқтадан ташкил топган бўлсин. У ҳолда бундай системанинг ҳолатини аниқлаш учун $3N$ та Декарт координаталари $x_1, x_2, \ldots, x_N, y_1, y_2, \ldots, y_N, z_1, z_2, \ldots, z_N$ ни билиш етарли. Агар механик система чексиз кўп нуқталар тўпламидан ташкил топган бўлса, у ҳолда бундай системанинг ҳолатини унинг координаталари воситасида чекли равишда аниқлаб бўлмайди.

Лекин кўп ҳолларда механик системанинг ҳолатини бир-бирига боғлиқ бўлмаган маълум сондаги параметрлар билан аниқлаш мумкин. Масалан, бирор мураккаб машина ёки механизмнинг ҳолатини аниқлаш учун битта ёки иккита етакчи бўғиннинг ҳолатини билиш етарли, чунки бошқа бўғинларнинг ҳолатини етакчи бўғин ҳолати орқали аниқлаш мумкин.

Аналитик механикада механик системанинг ҳаракатини ўрганиш учун «умумлашган координаталар» тушунчаси киритилади.

Системанинг фазодаги ҳолатини бир қийматли тарзда аниқлайдиган ва мақсадга мувофиқ равишда танлаб олинган, бир-бирига боғлиқ бўлмаган катталиклар *системанинг умумлашган координаталари* дейилади. Бундай координаталар учун қутб координаталари, цилиндрик координаталар, сферик координаталар ва бошқа координаталарни олиш мумкин. Умумлашган координаталар, одатда q билан белгиланади.

Умумлашган координаталарни киритишга онд бир неча мисоллар кўрайлик.

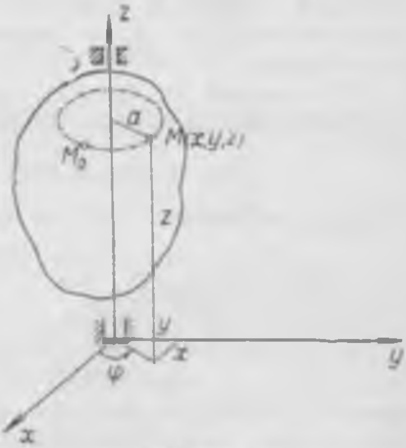
1. Қаттиқ жисмнинг қўзғалмас ўқ атрофидаги айланма ҳаракати. Айланиш ўқи сифатида z ўқни олиб, қўзғалмас координаталар системасини 249-расмдагидек киритамиз.

Қаттиқ жисмнинг фазодаги ҳолати унинг бир тўғри чизиқда ётмайдиган учта нуқтасининг ҳолати билан аниқланиши геометриядан маълум. Агар иккита нуқтани айланиш ўқида олсак, бу нуқталар қўзғалмас бўлади. Шу сабабли қўзғалмас ўқ атрофида айланаётган қаттиқ жисмнинг ҳолати айланиш ўқида ётмайдиган жисм ихтиёрий нуқтасининг ҳолати билан аниқланади. Бундай нуқта учун бошланғич пайтда xz текисликда ётган ихтиёрий M_0 нуқтани оламиз. Жисм қўзғалмас ўқ атрофида айланганда бу нуқта айланиш ўқига перпендикуляр текисликда ётувчи a радиусли айлана чизади. Ихтиёрий пайтда бу нуқтанинг эгаллаган ҳолатини M билан белгиласак унинг координаталари қуйидагича анқланади:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos\varphi, \\ y &= a\cos\varphi, \\ z &= \text{const}, \end{aligned}\right| \qquad (24.8)$$

бунда φ — айланиш бурчаги.

(24.8) да нуқтанинг координаталари фақат φ бурчакнинг ўзга-



249- расм.

ришига боғлиқ эканлигини кўрамиз. Бинобарин, φ бурчак маълум бўлса, жисмнинг исталган ҳолатини аниқлаш мумкин. Шу сабабли $q = \varphi$ бурчакни умумлашган координата учун қабул қилиш мақсадга мувофиқ бўлади.

2. Қаттиқ жисмнинг текис параллел ҳаракати. Кинематика бўлимида кўрганимиздек, қаттиқ жисмнинг текис параллел ҳаракати унда олинган қутбнинг илгариланма ҳаракати ва шу қутб атрофидаги айланма ҳаракатдан ташкил топган деб қаралади. Жисмнинг илгариланма ҳаракатини аниқлаш учун қутбнинг координаталари x, y ни аниқлаш кифоя. Қутб атрофидаги айланма ҳаракат эса айланиш бурчаги φ билан аниқланади. Шундай қилиб, текис параллел ҳаракатдаги жисм учун умумлашган координаталар сифатида учта: $q_1 = x$, $q_2 = y$, $q_3 = \varphi$ параметрларни олиш мумкин.

Умумлашган координаталар бундай танланганда q_1 ва q_2 параметрлар чизиқли катталик бўлиб, q_3 эса бурчакни ифодалайди.

Текис параллел ҳаракатдаги жисмнинг ҳаракатини аниқлашда учала умумлашган координаталарни ҳам чизиқли қилиб танлаб олиш мумкин.

Ҳақиқатан ҳам, текис шаклнинг ихтиёрий ҳолати унинг иккита нуқтасининг координаталари M_1 (x_1, y_1) ва M_2 (x_2, y_2) билан аниқланади. Лекин тўрттала координата M_1 ва M_2 нуқталар орасидаги масофанинг ўзгармаслигини ифодаловчи ушбу

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = d^2 \tag{24.9}$$

битта алгебраик тенглама билан боғланган. Шу сабабли бир-бирига боғлиқ бўлмаган координаталар фақат учта бўлади. Бинобарин, жисмнинг текис параллел ҳаракатини аниқлаш учун умумлашган координаталар сифатида унинг бирор нуқтасининг координаталарини ва бошқа нуқтасининг битта координатасини олиш мумкин.

Масаланинг қўйилишига қараб, умумлашган координаталар мақсадга мувофиқ равишда биринчи ёки иккинчи усулда танлаб олинади. Аналитик механикада жисмнинг текис параллел ҳаракатини ўрганишда кўпинча x, y, φ параметрлар умумлашган координаталар учун олинади.

N та моддий нуқталардан ташкил топган механик системага l та бўшатмайдиган голоном боғланишлар қўйилган бўлсин:

$$f_\alpha(x_k, y_k, z_k, t) = 0, \ (\alpha = 1, 2, \ldots, l). \tag{24.10}$$

У ҳолда системанинг $3N$ та координаталари x_1, x_2, ..., x_N, y_1, y_2, ..., y_N, z_1, z_2, ... z_N ўзаро l та тенгламалар билан боғланган бўлади. Бинобарин, $3N$ та координаталардан фақат $3N - l = n$ таси эркин бўлиб, қолган l таси боғланишда бўлади. $3N - l = n$ та эркин координаталарни мақсадга мувофиқ равишда танлаб олинган q_1, q_2, ..., q_n умумлашган координаталар орқали ифодалаш мумкин. (24.10) ни l та боғланишдаги координаталарга нисбатан ечиб, уларни n та эркин Декарт координаталарининг функцияси сифатида ифодалаш мумкин. Натижада система нуқталарининг барча

Декарт координаталарини умумлашган координаталар орқали ифодалаш мумкин:

$$\left.\begin{aligned} x_k &= x_k(q_1, q_2, \ldots, q_n, t), \\ y_k &= y_k(q_1, q_2, \ldots, q_n, t), \\ z_k &= z_k(q_1, q_2, \ldots, q_n, t). \end{aligned}\right\} (k = \overline{1, N}) \qquad (24.11)$$

Бинобарин, ҳар бир нуқтанинг радиус-вектори ҳам умумлашган координаталарнинг векторли функцияси тарзида аниқланади:

$$\overline{r}_k = \overline{r}_k(q_1, q_2 \ldots, q_n, t)\,(k = \overline{1, N}). \qquad (24.12)$$

Бўшатмайдиган голоном боғланишлар қўйилган механик система ҳаракатини аниқловчи бир-бирига боғлиқ бўлмаган умумлашган координаталар сони *системанинг эркинлик даражаси* дейилади.

Юқорида кўрганимиздек, қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи жисмнинг ҳаракати битта $q = \varphi$ умумлашган координата билан аниқланади. Шу сабабли бундай жисмнинг эркинлик даражаси битта бўлади. Қаттиқ жисмнинг текис параллел ҳаракати эса мос равишда танлаб олинган q_1, q_2, q_3 умумлашган координаталар билан аниқланади. Бинобарин, текис параллел ҳаракатдаги жисмнинг эркинлик даражаси 3 та бўлади.

Агар система нуқталарига боғланишлар қўйилган бўлмаса, у ҳолда барча $3N$ та координаталар эркин бўлиб, уларнинг қиймати фақат таъсир этувчи $\overline{F}_k^e$ ташқи кучларгагина боғлиқ бўлади. Бундан кўринадики, система нуқталарига боғланишлар қўйилганда, система нуқталарини боғланишни қаноатлантирган ҳолда ҳаракатлантиришга мажбур этадиган қўшимча кучлар ҳосил бўлади. Бу кучлар боғланиш реакция кучларини ифодалайди.

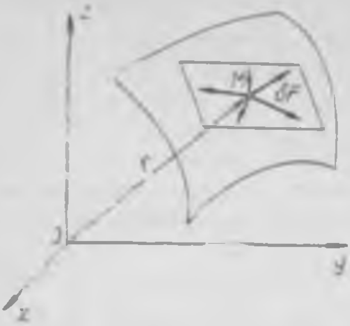
Техник жараёнларни бошқаришда боғланиш тенгламаларини тўғри танлаш муҳим аҳамиятга эга. Масалан, милтиқдан отилган ўққа айланма ҳаракат бериш учун ствол махсус равишда ўйилган бўлади.

157-§. Мумкин бўлган кўчиш

Аналитик механикада мумкин бўлган кўчиш тушунчаси асосий тушунчалардан бири ҳисобланади. Бу тушунчани голоном боғланиш қўйилган нуқта учун киритамиз. Моддий нуқтага

$$f(x, y, z) = 0 \qquad (24.13)$$

голоном стационар боғланиш қўйилган бўлсин. Бирор пайтда сирт устидаги нуқтанинг эгаллаган ҳолатидан боғланишни қаноатлантирган ҳолда фикран ҳар қандай элементар (жуда кичик) кўчишлар олиши мумкинлигини тасаввур қилайлик. Бу кўчишларни нуқта радиус-векторининг сирт устида жойлашган елпиғичсимон орттирмалари тарзида тасвирлаш мумкин. Мазкур кўчишларни биринчи тартибли кичик миқдоргача аниқлик билан олсак, у ҳолда бу кўчишлар M нуқтада сиртга ўтказилган уринма текисликда ётади (250-расм).



250- расм.

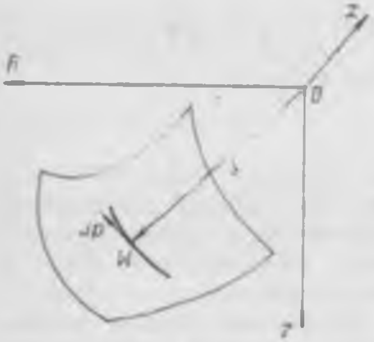
Қўйилган боғланишни берилган онда қаноатлантирувчи нуқтанинг ҳар қандай тасаввур қилинадиган чексиз кичик кўчиши *мумкин бўлган кўчиш* ёки *виртуал кўчиш* дейилади. Нуқтанинг мумкин бўлган кўчиши $\delta\bar{r}$ (δx, δy, δz), δs, $\delta\varphi$ лар билан белгиланади.

Агар нуқтага стационар бўлмаган

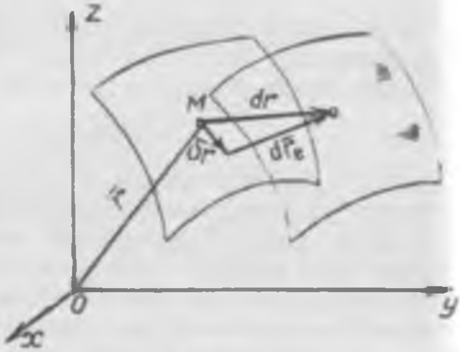
$$f(x, y, z, t) = 0 \qquad (24.14)$$

боғланиш қўйилган бўлса, у ҳолда нуқтанинг мумкин бўлган кўчиши вақтнинг берилган пайтидаги аниқ қайд қилинган қиймати учун ҳисобланади, яъни бунда $\delta t = 0$ деб қаралади. Масалан, ҳаракатдаги ёки деформацияланувчи сирт устидаги нуқтанинг мумкин бўлган кўчиши, берилган пайтда сирт эгаллаган ҳолатда нуқтанинг сирт бўйлаб элементар кўчишларидан иборат бўлади.

Боғланишни қаноатлантирган ҳолда нуқтанинг фазода dt вақт ичида элементар кўчиши *ҳақиқий кўчиш* дейилади. Агар нуқтага (24. 13) боғланиш қўйилган бўлса, у ҳолда M нуқтанинг dt вақт ичидаги ҳақиқий кўчиши $d\bar{r}$ шу пайтда траекторияга уринма бўйича йўналади (251-расм). Нуқтанинг ҳақиқий кўчиши нуқтага таъсир этувчи кучларга, унга қўйилган боғланишга ва бошланғич шартларга боғлиқ бўлади. Нуқтанинг мумкин бўлган кўчиши билан ҳақиқий кўчиши орасидаги муносабатни аниқлаймиз. Агар нуқтага стационар боғланиш қўйилган бўлса, у ҳолда нуқтанинг ҳар бир ҳақиқий кўчиши бирорта мумкин бўлган кўчиши билан устма-уст тушади. Нуқтанинг ҳар бир мумкин бўлган кўчишини голоном боғланиш билан ифодаланган сиртга нисбатан нуқтанинг нисбий кўчиши деб қараш мумкин. Агар боғланиш стационар бўлса, яъни сирт геометрик шаклини ўзгартирмаса ва фазода кўчмаса, сирт устидаги нуқта кўчирма ҳаракатда қатнашмайди ва нуқтанинг барча мумкин бўлган кўчиш-



251- расм.



252- расм.

лари абсолют кўчишлардан иборат бўлади. Бинобарин, кучлар таъсиридаги нуқтанинг исталган ҳақиқий кўчиши $d\bar{r}$ шу нуқтанинг бирор мумкин бўлган кўчиши $\delta\bar{r}$ билан устма-уст тушади.

Стационар бўлмаган боғланишлар қўйилган нуқтанинг ҳақиқий кўчиши бирорта ҳам мумкин бўлган кўчиш билан устма-уст тушмаслиги мумкин. Бу ҳолда нуқтанинг ҳақиқий кўчиши $d\bar{r}$ унинг нисбий кўчиши $\delta\bar{r}$ (бирорта мумкин бўлган кўчиш) билан сиртнинг кўчиши ёки деформацияланиши натижасида ҳосил бўладиган қўшимча $d\bar{r}_e$ кўчишнинг геометрик йиғиндисига тенг бўлади (252-расм):

$$d\bar{r} = \delta\bar{r} + d\bar{r}_e.$$

Механик система нуқталарининг мумкин бўлган кўчишлари ($\delta\bar{r}_1$, $\delta\bar{r}_2, \ldots, \delta\bar{r}_N$) тўплами *системанинг мумкин бўлган кўчиши* дейилади.

Нуқтанинг мумкин бўлган кўчиши билан ҳақиқий кўчиши орасида ўрнатилган муносабатлар система нуқталарининг кўчишига ҳам тааллуқли бўлади.

Агар система M_k нуқтасининг радиус-векторини $\bar{r}_k$ ва координаталарини x_k, y_k z_k билан белгиласак, M_k нуқтанинг мумкин бўлган кўчиши

$$\delta\bar{r}_k = \delta x_k \bar{i} + \delta y_k \bar{j} + \delta z_k \bar{k}$$

вектор билан ифодаланади. Бунда $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ лар $Oxyz$ инерциал система координата ўқларининг бирлик векторларини, δx_k, δy_k, δz_k лар эса мумкин бўлган кўчишнинг мазкур ўқлардаги проекцияларини ифодалайди ва координаталарнинг вариациялари дейилади.

M_k нуқтанинг ҳақиқий кўчиши

$$d\bar{r}_k = dx_k \bar{i} + dy_k \bar{j} + dz_k \bar{k}$$

вектор билан ифодаланади. Бунда dx_k, dy_k, dz_k лар координаталарнинг дифференциалини ифодалайди.

Системанинг ҳолати умумлашган координаталар орқали ифодаланганда (24.11) ёки (24.12) га кўра системанинг мумкин бўлган кўчишларини ҳам умумлашган координаталарнинг вариациялари орқали ифодалаш мумкин.

Юқорида кўрганимиздек, системанинг мумкин бўлган кўчишини аниқлашда боғланиш тенгламасида t ни ўзгармас деб қараш керак. Шунинг учун (24.11) ва (24.12) да мумкин бўлган кўчишни аниқлашда $\delta t = 0$ деб олинади. У ҳолда Декарт координаталарининг вариациялари δx_k, δy_k, δz_k ва мумкин бўлган кўчиш $\delta\bar{r}_k$ учун худди кўп ўзгарувчили функциянинг тўлиқ дифференциалига ўхшаш қуйидаги формулалар ўринли бўлади:

$$\delta x_k = \frac{\partial x_k}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial x_k}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{\partial x_k}{\partial q_n}\delta q_n,$$

$$\delta y_k = \frac{\partial y_k}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial y_k}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{\partial y_k}{\partial q_n}\delta q_n,$$

$$\delta z_k = \frac{\partial z_k}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial z_k}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{\partial z_k}{\partial q_n}\delta q_n,$$

$$\delta \bar{r}_k = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_n}\delta q_n$$

ёки

$$\delta x_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_k}{\partial q_i}\delta q_i,\ \delta y_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y_k}{\partial q_i}\delta q_i,\ \delta z_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial z_k}{\partial q_i}\delta q_i,$$

$$\delta \bar{r}_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}\delta q_i. \qquad (24.15)$$

Бунда $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_n$ лар умумлашган координаталарнинг вариацияларини ифодалайди.

Системанинг ҳақиқий кўчиши қаралаётганда (24.12) да t ўзгарувчи миқдор деб олинади; у қуйидагига тенг:

$$d\bar{r}_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} dq_i + \frac{d\bar{r}_k}{dt}. \qquad (24.16)$$

Бу тенгликни dt га бўлиб, система ихтиёрий нуқтасининг тезлигини умумлашган координаталар орқали ифодалаш мумкин:

$$\bar{v}_k = \frac{d\bar{r}_k}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial \bar{r}_k}{dt}, \qquad (24.17)$$

бунда $\dot{q}_i = \frac{\partial q_i}{dt}$ — умумлашган тезлик ва

$$\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} = \frac{\partial x_k}{\partial q_i}\bar{i} + \frac{\partial y_k}{\partial q_i}\bar{j} + \frac{\partial z_k}{\partial q_i}\bar{k}. \qquad (24.18)$$

158-§. Кучнинг мумкин бўлган кўчишдаги иши. Идеал боғланишлар

Аналитик механикада системанинг ҳаракати ёки мувозанатини текширишда муҳим аҳамиятга эга бўлган яна битта тушунча — *кучнинг мумкин бўлган кўчишдаги иши* тушунчаси киритилади. Кучнинг мумкин бўлган $\delta\bar{r}$ кўчишдаги элементар иши δA қуйидагича аниқланади:

$$\delta A = \bar{F}\cdot\delta\bar{r} \qquad (24.19)$$

ёки

$$\delta A = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z \qquad (24.20)$$

бунда X, Y, Z лар $\overline{F}$ кучнинг, δx, δy, δz лар эса мумкин бўлган кўчиш $\delta\overline{r}$ нинг Декарт координата ўқларидаги проекцияларини ифодалайди.

Кучнинг мумкин бўлган кўчишдаги иши учун (24.19) га кўра яна қуйидаги ифодани ёзиш мумкин:

$$\delta A = |\overline{F}|\cdot|\delta\overline{r}|\cdot\cos\alpha, \qquad (24.21)$$

253- расм.

бунда α билан $\overline{F}$ куч ва мумкин бўлган кўчиш $\delta\overline{r}$ векторлари орасидаги бурчак белгиланган.

Агар системанинг ҳар қандай мумкин бўлган кўчишида система нуқталарига қўйилган боғланиш реакция кучларининг ишлари йиғиндиси нолга тенг бўлса, бундай боғланишлар *идеал боғланишлар* дейилади; идеал богланишлар учун қуйидаги тенглик ўринли бўлади.

$$\sum \overline{N}_k\cdot\delta\overline{r}_k = 0, \qquad (24.22)$$

бунда: $\overline{N}_k$ — боғланиш реакция кучи; $\delta\overline{r}_k$ — мумкин бўлган кўчиш. Идеал боғланишга доир бир неча мисол келтирамиз.

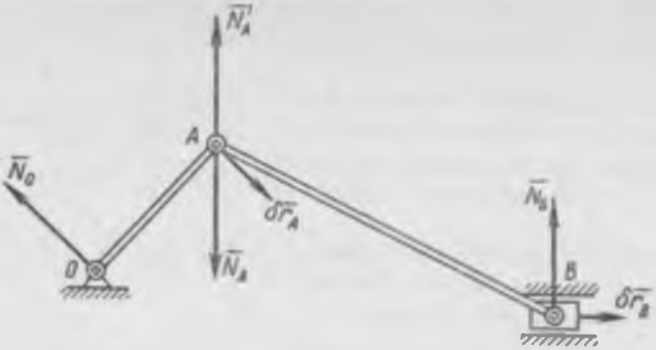
1. **Силлиқ сирт.** M нуқта силлиқ сирт устида ҳаракатланганда силлиқ сиртнинг реакция кучи фақат шу нуқтада сиртга ўтказилган нормаль бўйича йўналган ташкил этувчидан иборат бўлади (253-расм). Мумкин бўлган кўчиш эса M нуқтада сиртга ўтказилган уринма текисликда ётади. Бинобарин, силлиқ сиртнинг боғланиш реакция кучи ҳар қандай мумкин бўлган кўчишга перпендикуляр равишда йўналади. Шу сабабли $\overline{N}$ реакция кучининг ҳар қандай мумкин бўлган кўчишдаги иши нолга тенг бўлади:

$$\delta A = \overline{N}\delta\overline{r} = 0.$$

2. **Қўзғалмас нуқтага эга бўлган жисм.** Жисм ҳаракати давомида унинг битта нуқтаси қўзғалмасдан қолсин. Бундай жисмга мисол тариқасида пилдироқни олиш мумкин. Бу ҳолда ишқаланиш эътиборга олинмаса, жисмнинг ҳар қандай мумкин бўлган кўчишида қўзғалмас нуқтага қўйилган реакция кучининг иши нолга тенг бўлади.

3. **Кривошип-шатунли механизм.** O ва A ўқлардаги ишқаланиш, шунингдек B сурилгич (ползун) йўналтирувчи бўйлаб ҳаракатланганда ҳосил бўладиган ишқаланиш кучи ҳисобга олинмаса, кривошип-шатунли механизмга қўйилган богланишларни идеал боғланишлардан иборат деб қараш мумкин (254-расм).

Ҳақиқатан ҳам, механизмнинг ҳар қандай мумкин бўлган кўчишида O нуқта қўзгалмас бўлгани сабабли $\overline{N}_0$ реакция кучининг иши нолга тенг. $\overline{N}_B\perp\delta\overline{r}_B$ бўлганидан $\overline{N}_B$ реакция кучининг мумкин бўл-



254- расм.

ган кўчишдаги иши ҳам нолга тенг. A нуқтада OA кривошипнинг AB шатунга таъсир кучини $\overline{N}_A$ билан ҳамда шатуннинг кривошипга таъсир кучини $\overline{N}'_A$ билан белгиласак, бу кучлар ҳар бирининг мумкин бўлган кўчишдаги иши нолдан фарқлидир. Лекин Ньютоннинг учинчи қонунига кўра $\overline{N}_A = -\overline{N}'_A$ бўлади ва бу кучлар қўйилган A нуқта бир хил $\delta\overline{r}_A$ кўчиш олади. Бинобарин, $\overline{N}_A$ ва $\overline{N}'_A$ кучларнинг $\delta\overline{r}_A$ мумкин бўлган кўчишдаги ишларининг йиғиндиси нолга тенг бўлади:

$$\overline{N}_A\delta\overline{r}_A + \overline{N}'_A\cdot\delta\overline{r}_A = (\overline{N}_A - \overline{N}_A)\,\delta\overline{r}_A = 0.$$

Шундай қилиб, (24.22) шарт бажарилди.

159- §. Умумлашган кучлар

Система нуқталарига таъсир этувчи кучларнинг мумкин бўлган кўчишдаги ишларининг йиғиндиси

$$\sum\delta A_k = \sum\overline{F}_k\cdot\delta\overline{r}_k \qquad (24.23)$$

формуладан аниқланади. (24.15) ни эътиборга олиб (24.23) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\sum\delta A_k = \sum_{k=1}^{N}\overline{F}_k\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\overline{r}_k}{\partial q_i}\,\delta q_i,$$

ёки йиғиндиларнинг тартибини ўзгартирсак,

$$\sum\delta A_k = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{N}\overline{F}_k\,\frac{\partial\overline{r}_k}{\partial q_i}\,\delta q$$

бўлади. Бу тенгликда ушбу белгилашни киритамиз:

$$Q_i = \sum_{k=1}^{N} \bar{F}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}. \qquad (24.24)$$

у ҳолда

$$\sum \delta A_k = \sum_{k=1}^{n} Q_i \delta q_i = Q_i \delta q_1 + \ldots + Q_n \delta q_n \qquad (24.25)$$

бўлади.

Q_i катталик умумлашган координата q_i га мос келувчи *умумлашган куч* дейилади. Бошқача айтганда, берилган механик система нуқталарига таъсир этувчи актив кучларнинг мумкин бўлган кўчишдаги элементар ишлари йиғиндисидаги бирор умумлашган координатанинг орттирмаси олдидаги коэффициент системанинг ушбу умумлашган координатасига мос келувчи умумлашган кучни ифодалайди. Бу, умумлашган кучни аниқлашнинг биринчи усулидир.

Умумлашган кучни ҳисоблашда қуйидаги иккинчи усулдан ҳам фойдаланилади. Бунда Q_i умумлашган кучни ҳисоблаш учун мумкин бўлган кўчишлар шундай танланадики, фақат Q_i га мос келган умумлашган координата q_i ўзгарсин, яъни $\delta q_i \neq 0$ бўлиб, қолган барча $\delta q_1, \ldots, \delta q_{i-1}\ \delta q_{i+1}, \ldots \delta q_n$ лар нолга тенг деб қаралади.

Барча кучларнинг бундай хусусий кўчишдаги ишларининг йиғиндисини $(\sum \delta A_k)_i$ билан белгиласак, унинг миқдори (24.25) га кўра битта қўшилувчи билан ифодаланади:

$$(\sum \delta A_k)_i = Q_i \delta q_i. \qquad (24.26)$$

Бундан

$$Q_i = \frac{(\sum \delta A_k)_i}{\delta q_i}$$

Ниҳоят, учинчи усулда, берилган индексли умумлашган куч (24.24) га асосан

$$Q_i = \sum_{k=1}^{N} \left(X_k \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + Y_k \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + Z_k \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \right), \ (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n) \qquad (24.27)$$

формула ёрдамида аналитик усулда ҳисобланади.

Умумлашган куч Q_i нинг умумлашган координата орттирмаси δq_i га кўпайтмаси ишни ифодалаганлиги туфайли

$$[Q] = \frac{[A]}{[q]}$$

бўлади. Бинобарин, умумлашган кучнинг ўлчови умумлашган координатанинг ўлчовига боғлиқ бўлади. Агар умумлашган координата узунлик ўлчовига эга бўлса, у ҳолда умумлашган кучни куч бирлигида (ньютонда) ўлчанади, агар умумлашган координата учун бурчак олинса, умумлашган кучнинг бирлиги куч моментининг ўлчов бирлигида (Н·м) бўлади.

Механик система нуқталарига таъсир этувчи кучлар потенциалли бўлганда умумлашган кучни ҳисоблашни кўриб чиқамиз. Системанинг $M_k(x_k,\ y_k,\ z_k)$ $(k=\overline{1,\ N})$ нуқталарига қўйилган кучлар $U(x_k, y_k, z_k)$ потенциалга эга бўлсин. У ҳолда (21.80) га кўра кучнинг координата ўқларидаги проекциялари қуйидагича ифодаланади:

$$X_k = \frac{\partial U}{\partial x_k},\ Y_k = \frac{\partial U}{\partial y_k},\ Z_k = \frac{\partial U}{\partial z_k}\ (k=\overline{1,\ N}). \qquad (24.28)$$

(24.28) ни (24.27) га қўйиб, умумлашган кучларни аниқлаймиз:

$$Q_i = \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\partial U}{\partial x_k}\,\frac{\partial x_k}{\partial q_i} + \frac{dU}{\partial y_k}\,\frac{\partial y_k}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial z_k}\,\frac{\partial z_k}{\partial q_i}\right)\ (i=\overline{1,\ N}).$$

Бу тенгликларнинг ўнг томони, U функциянинг q_i ўзгарувчилар бўйича хусусий ҳосилаларини ифодалайди. Бинобарин, таъсир этувчи кучлар потенциалли бўлганда умумлашган кучлар

$$Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i}\ (i=\overline{1,\ N}) \qquad (24.29)$$

формула ёрдамида аниқланади.

Системанинг потенциал энергияси

$$\Pi\,(q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_n) = -U\,(q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_n)$$

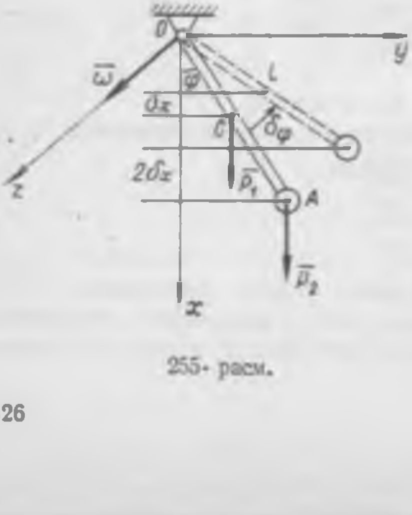
бўлгани учун умумлашган кучни яна қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i},\ (i=\overline{1,\ n}). \qquad (24.30)$$

Агар ишқаланиш кучи мавжуд бўлса, у ҳолда бу кучларни ҳам актив кучлар қаторига қўшиб, уларга мос умумлашган кучлар ҳисобланади.

Умумлашган кучларни ҳисоблашга оид бир неча мисол кўриб чиқамиз.

1. Оғирлиги P_1 ва узунлиги l га тенг стерженга оғирлиги P_2 га тенг A юк маҳкамланган. Стержень цилиндрсимон шарнир воситасида O нуқтага маҳкамланган ва z ўқ атрофида эркин айланиши мумкин. Цилиндрсимон шарнирни абсолют силлиқ деб қараб, стержень ва юкдан ташкил топган система учун умумлашган куч аниқлансин (255-расм).



255- расм.

Стержень ва юкдан ташкил топган механик системанинг ҳолатини битта умумлашган координата билан аниқлаш мумкин. Бу умумлашган координата учун стержень оғирлик маркази C нуқтанинг координатаси x ёки стерженнинг вертикалдан оғиш бурчаги φ ни олиб, уларга мос келувчи умумлашган кучни ҳисоблаймиз:

а) $q = x$ бўлсин. P_1 ва P_2 кучларнинг δx кўчишдаги ишини ҳисоблаймиз:

$$\sum \delta A_k = P_1 \delta x + P_2 \cdot 2\,\delta x = (P_1 + 2P_2)\,\delta x.$$

Бинобарин, умумлашган куч

$$Q_x = P_1 + 2P_2$$

бўлади;

б) $q = \varphi$ бўлсин. P_1 ва P_2 кучларнинг $\delta\varphi$ мумкин бўлган кўчишдаги ишини

$$\delta A = M_в \delta\varphi$$

формуладан аниқлаймиз. Бунда

$$M_в = -P_1 \frac{l}{2} \sin\varphi - P_2 l \sin\varphi$$

бўлиб, айланиш ўқига нисбатан берилган кучларнинг бош моментини ифодалайди. Шундай қилиб, бу ҳолда умумлашган куч $Q_\varphi = M_в$ бўлади.

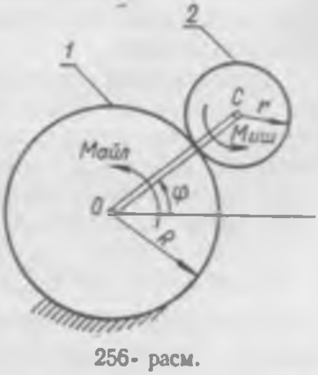
(24.27) формулада $x_1 = x = \frac{l}{2}\cos\varphi$, $x_2 = 2x = l\cos\varphi$ эканлигини назарда тутиб, Q_x ва Q_φ учун яна қуйидаги ифодаларни оламиз:

$$Q_x = \sum_{k=1}^{2} X_k \frac{\partial x_k}{\partial x} = X_1 + 2X_2 = P_1 + 2P_2,$$

$$Q_\varphi = \sum_{k=1}^{2} X_k \frac{\partial x_k}{\partial x} = P_1 \frac{\partial\left(\frac{l}{2}\cos\varphi\right)}{\partial\varphi} + P_2 \frac{\partial\,(l\,\cos\varphi)}{\partial\varphi} =$$

$$= -\frac{P_1}{2} l \sin\varphi - P_2 l \sin\varphi = M_в.$$

2. Эпициклик механизмда R радиусли қўзғалмас ғилдирак 1 бўйлаб ҳаракатланувчи r радиусли сателлит 2 ни OC кривошип ҳаракатга келтиради (256- расм). Кривошипга айлантирувчи момент $M_{айл}$ қўйилган. Ишқаланиш кучлари сателлит ўқи C да ишқаланиш моменти $M_{иш}$ ни вужудга келтиради. Механизм горизонтал текисликда жойлашган. Умумлашган координата учун кривошипнинг айланиш бурчаги φ ни олиб, унга мос умумлашган куч ҳисоблансин.



256- расм.

Механизм ҳаракатланувчи қисмларининг ҳолати кривошипнинг O нуқта атрофидаги айланиш бурчаги φ билан аниқланади. Механизмга қуйидаги актив кучлар таъсир этади: механизм қисмларининг оғирлик кучлари ва $M_{\text{айл}}$ айлантирувчи моментни вужудга келтирувчи кучлар; бу кучлар қаторига ишқаланиш моменти $M_{\text{иш}}$ ни қўшамиз. Умумлашган кучни аниқлаш учун кривошипга $\delta\varphi$ мумкин бўлган кўчиш бериб, қайд қилинган барча кучларнинг бу кўчишдаги ишларини ҳисоблаймиз. Оғирлик кучларининг иши нолга тенг бўлади. Чунки масаланинг шартига кўра, механизм горизонтал текисликда жойлашганидан механизм нуқталарининг кўчиши оғирлик кучига перпендикуляр йўналади. У ҳолда

$$\sum_{k=1}^{2}\delta A_k = \delta A\ (M_{\text{айл}}) + \delta A\ (M_{\text{иш}})$$

бўлади. Кривошип $\delta\varphi$ бурчакка бурилганда $M_{\text{айл}}$ моментнинг иши

$$\delta A\,(M_{\text{айл}}) = M_{\text{айл}}\cdot\delta\varphi$$

га, ишқаланиш моментининг иши эса $\delta A\,(M_{\text{иш}}) = M_{\text{иш}}\cdot\delta\varphi_r$ га тенг. Бунда $\delta\varphi_r$ сателлитнинг нисбий кўчиш бурчагидир:

$$\delta\varphi_r = \frac{R+r}{r}\ \delta\varphi.$$

Шундай қилиб,

$$\sum_{k=1}^{2}\delta A_k = \left(M_{\text{айл}} - \frac{R+r}{r}M_{\text{иш}}\right)\delta\varphi.$$

Бу формулада $\delta\varphi$ олдидаги φ коэффициент умумлашган координатага мос бўлган умумлашган Q_φ кучни ифодалайди, яъни

$$Q_\varphi = M_{\text{айл}} - \frac{R+r}{r}\ M_{\text{иш}}.$$

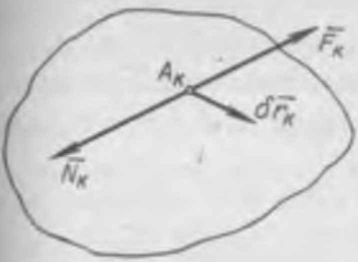
160-§. Мумкин бўлган кўчиш принципи

Мумкин бўлган кўчиш принципи берилган кучлар таъсиридаги маълум боғланишлар қўйилган механик системанинг мувозанат шартини ифодалайди.

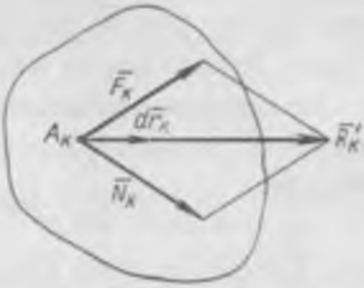
Актив кучлар таъсиридаги идеал, бўшатмайдиган ва стационар боғланишлар қўйилган механик система мувозанатда бўлиши учун система нуқталарининг ҳар қандай мумкин бўлган кўчишида барча актив кучлар элементар ишларининг йиғиндиси ҳамда система барча нуқталарининг бошланғич тезликлари нолга тенг бўлиши зарур ва етарлидир, яъни

$$\sum\delta A_k = \sum\overline{F}_k\cdot\delta\overline{r}_k = 0. \qquad (24.31)$$

Зарурлиги. N та моддий нуқталардан ташкил топган механик система мувозанатда бўлсин. Системанинг бу мувозанат ҳолатидан



257- расм.



258- расм.

ҳар қандай мумкин бўлган кўчишида барча актив кучлар элементар ишларининг йиғиндиси нолга тенг бўлишини исботлаймиз.

Системанинг бирор A_k нуқтасини олиб, унга таъсир этувчи актив кучлар ҳамда боғланиш реакция кучларининг тенг таъсир этувчиларини $\overline{F}_k$ ва $\overline{N}_k$ билан белгилаймиз (257-расм). A_k нуқтага қўйилган боғланишлар таъсири боғланиш реакция кучи билан алмаштирилганлиги туфайли бу нуқта эркин нуқта деб қаралади. Механик система мувозанатда бўлгани учун унинг ҳар бир A_k нуқтаси ҳам мувозанатда бўлади. Шу сабабли

$$\overline{F}_k + \overline{N}_k = 0, \ (k = 1, 2, \ldots, N) \qquad (24.32)$$

тенгламалар ўринли бўлади.

Системанинг ҳар бир A_k нуқтасига $\delta\overline{r}_k$ мумкин бўлган кўчиш бериб, (24.32) нинг иккала томонини $\delta\overline{r}_k$ га скаляр кўпайтирамиз:

$$\overline{F}_k\cdot\delta\overline{r}_k + \overline{N}_k\cdot\delta\overline{r}_k = 0, \ (k = 1, 2, \ldots, N).$$

Бу тенгликларни қўшиб қуйидагини оламиз:

$$\sum\overline{F}_k\cdot\delta\overline{r}_k + \sum\overline{N}_k\cdot\delta r_k = 0. \qquad (24.33)$$

Система нуқталарига қўйилган боғланишлар идеал боғланишлардан иборат бўлгани учун

$$\sum\overline{N}_k\cdot\delta r_k = 0.$$

Шу сабабли (24.33) дан исбот қилиниши талаб этилган (24.31) тенгликни оламиз.

Етарлилиги. (24.31) шарт бажарилса, система мувозанатда бўлишини исботлаш учун мулоҳазани тескаридан бошлаймиз. Дастлаб мувозанатда бўлган система нуқталарига $\overline{F}_k$ актив кучлар таъсир этиши натижасида (24.31) шарт бажарилишига қарамай, системанинг бирор A_k нуқтаси ҳаракатга келади деб қарайлик. Бошқача айтганда, A_k нуқтага таъсир этувчи $\overline{F}_k$ ва $\overline{N}_k$ кучларнинг тенг таъсир этувчиси $\overline{R}'_k$ нолга тенг бўлмасин (258-расм). Дастлаб A_k нуқта тинч ҳолатда бўлгани учун $\overline{R}'_k$ куч таъсирида A_k нуқта бу кучнинг таъсир чизиғи бўйича йўналган бирор $d\overline{r}_k$ ҳақиқий кўчиш олади. Системага қўйилган боғланишлар стационар бўлгани учун $d\overline{r}_k$ ҳақиқий кўчиш бирор $\delta\overline{r}_k$ мумкин бўлган кўчиш билан устма-уст тушади ва бу кўчиш учун

$$\overline{R}'_k\cdot\delta\overline{r}_k=(\overline{F}_k+\overline{N}_k)\,\delta\overline{r}_k>0$$

бўлади. Системанинг барча нуқталари учун бундай тенгсизликларни ёзиб, уларни қўшсак,

$$\sum\overline{F}_k\cdot\delta\overline{r}_k+\sum\overline{N}_k\cdot\delta\overline{r}_k>0$$

муносабатни оламиз.

Система нуқталарига қўйилган боғланишлар идеал боғланишлардан иборат бўлгани учун

$$\sum\overline{N}_k\cdot\delta\overline{r}_k=0.$$

Шу сабабли қуйидаги тенгсизлик ўринли бўлади: $\sum\overline{F}_k\cdot\delta\overline{r}_k>0$. Лекин бу натижа қабул қилинган (24.31) шартга зиддир. Бинобарин, бу шарт бажарилганда система мувозанатда бўлиши керак. Шундай қилиб, (24.31) шарт ҳақиқатан ҳам механик система мувозанатининг зарур ва етарли шартини ифодалашини исботладик.

(24.31) тенглама *статиканинг умумий тенгламаси* дейилади. Бу принцип *Лагранжнинг мумкин бўлган кўчиш принципи* деб ҳам юритилади.

Мумкин бўлган кўчиш принципининг Декарт координата ўқларидаги ифодаси қуйидагича ёзилади:

$$\sum(X_k\,\delta x_k+Y_k\,\delta y_k+Z_k\,\delta z_k)=0. \qquad (24.34)$$

Агар механик система нуқталарига стационар бўлмаган боғланишлар қўйилган бўлса, у ҳолда система нуқталари ҳаракатланувчи ёки деформацияланувчи сиртлар устида қолиши керак. Мумкин бўлган кўчиш эса вақтнинг ҳар бир пайтида сирт бўйлаб кўчишдан иборат. Бинобарин, стационар бўлмаган боғланишлар қўйилган системага мумкин бўлган кўчиш принципини қўллаш натижасида система нуқталарининг сиртлар устидаги нисбий мувозанати аниқланади.

161-§. Механик системанинг умумлашган координаталардаги мувозанат шартлари

Голоном боғланишлар қўйилган N та нуқтадан ташкил топган механик системанинг эркинлик даражаси n га тенг бўлсин. У ҳолда бундай системанинг ҳолатини $q_1, q_2, \ldots, q_n$ умумлашган координаталар билан аниқлаш мумкин.

(24.23) ва (24.25) га асосан системанинг мувозанат шарти (24.31) ни қуйидагича ёзамиз:

$$Q_1\delta q_1+Q_2\delta q_2+\ldots+Q_n\delta q_n=0. \qquad (23.35)$$

Бунда барча $q_1, q_2, \ldots, q_n$ умумлашган координаталар эркин бўлгани учун уларнинг δq_i ($i=1, 2, \ldots, n$) орттирмалари ҳам эркин бўлади. Шу сабабли мувозанат шартларини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$Q_1=0,\ Q_2=0,\ \ldots,\ Q_n=0. \qquad (24.36)$$

Бўшатмайдиган голоном ва идеал боғланишлар қўйилган, эркинлик даражаси n га тенг бўлган ҳамда ихтиёрий ҳолати q_1, q_2, . . . , q_n умумлашган координаталар билан аниқланадиган механик система мувозанатда бўлиши учун танланган умумлашган координаталарга мос умумлашган кучлар нолга тенг бўлиши зарур ва етарлидир.

Кучлар потенциалли бўлган ҳолда (24.30) га кўра мувозанат шартларини

$$\frac{\partial П}{\partial q_1}=0,\ \frac{\partial П}{\partial q_2}=0,\ \ldots,\ \frac{\partial П}{\partial q_n}=0 \qquad (24.37)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бу тенгламалар умумлашган координаталар орқали ифодаланган потенциал энергиянинг экстремумга эга бўлиши учун зарурий шартни ифодалайди. Шундай қилиб, *голоном системанинг мувозанат ҳолатида потенциал энергия экстремумга эришиши мумкин.*

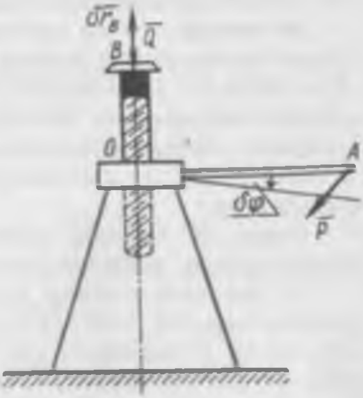
54-масала. Q юк $OA=0{,}6$ м ли даста билан ҳаракатга келтириладиган домкрат ёрдамида кўтарилади. Дастанинг учига унга перпендикуляр бўлган $P=160$ Н куч қўйилган. Домкрат винтининг қадами $h=12$ мм. Q юкнинг миқдори аниқлансин (259-расм).

Ечиш. Q юк ва OA дастани механик система деб қараб, система нуқталарига мумкин бўлган кўчиш берамиз. Бунинг учун OA дастани P куч йўналишида $\delta\varphi$ бурчакка бурамиз. У ҳолда Q юк вертикал тарзда юқорига $\delta \bar{r}_B$ га тенг миқдорга кўчади. Системанинг мувозанат шартини ифодаловчи (24.31) тенглама қуйидагича ёзилади:

$$P\cdot OA\cdot\delta\varphi - Q\cdot\delta r_B=0,$$

бундан

$$Q=\frac{P\cdot OA\cdot\delta\varphi}{\delta r_B}.$$

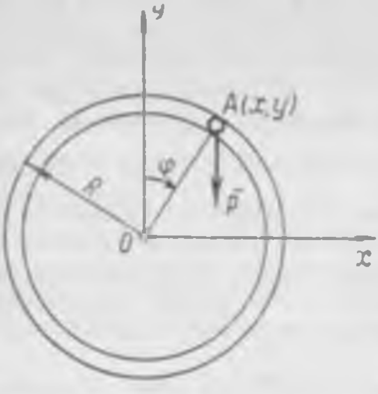


259- расм.

$\delta\varphi$ ва δr_B мумкин бўлган кўчишлар орасидаги муносабатни аниқлаймиз. Q юкнинг илгариланма ҳаракати OA дастанинг айланиш бурчагига мутаносиб бўлади ва даста 2π га тенг бурчакка айланганда Q юк вертикал бўйича винт қадами $h=12$ мм $=0{,}0012$ м га тенг масофага кўтарилади. Шу сабабли $\frac{\delta\varphi}{2\pi}=\frac{\delta r_B}{h}$, бундан $\delta\varphi=\frac{2\pi}{h}\cdot\delta r_B$. Натижада

$$Q = 2\pi \cdot P \frac{0A}{h} =$$

$$= 2 \cdot 3{,}14 \cdot 160 \cdot \frac{0{,}6}{0{,}0012} = 50200 \text{ Н}$$



260- расм.

55- масала. Вертикал текисликда жойлашган R радиусли ҳалқа (айлана) бўйлаб ҳаракатланувчи, оғирлиги P га тенг бўлган A шарчанинг мувозанат ҳолати аниқлансин (260-расм).

Ечиш. Айлананинг марказини координата боши учун олиб, Ox, Oy ўқларни расмдагидек йўналтирамиз. Нуқтага қўйилган боғланиш тенгламасини

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0$$

кўринишда ёзиш мумкин. Шарчанинг x, y координаталари орасида битта боғланиш мавжуд бўлгани учун унинг эркинлик даражаси битта бўлади. Шу сабабли шарчанинг айланадаги ҳолати битта умумлашган координата q билан аниқланади. Умумлашган координата учун $\angle y0A = \varphi$ бурчакни оламиз. Нуқта айлана бўйлаб ҳаракатлангани учун P кучнинг $\delta\varphi$ мумкин бўлган кўчишдаги элементар иши

$$\delta A = PR \sin \varphi \cdot \delta\varphi$$

формуладан ҳисобланади. Шу сабабли Q_φ қуйидагича бўлади:

$$Q\varphi = \frac{\delta A}{\delta\varphi} = PR \sin \varphi.$$

Шарча мувозанатда бўлиши учун $Q_\varphi = 0$ ёки $PR \sin \varphi = 0$ шарт бажарилиши керак. Бунда $\varphi = 0$, $\varphi = 180°$ бўлганда шарча мувозанатда бўлишини кўрамиз. Демак, шарча вертикал ўқ устига тушган ҳолатидагина мувозанатда бўлиши мумкин.

56- масала. Учта таянчда ётган AD тўсин C нуқтада шарнир билан бириктирилган иккита қисмдан иборат. Тўсиннинг AC қисмига $P_1 = 8000$ Н, $P_2 = 6000$ Н га тенг вертикал кучлар қўйилган; CD қисмига эса моменти $M = 4000a$ Н·м га тенг ва соат милининг айланишига тескари йўналишда жуфт кучлар қўйилган (261- расм, a). Ўлчамлар шаклда кўрсатилган. A, B, D лардаги таянч реакциялари аниқлансин.

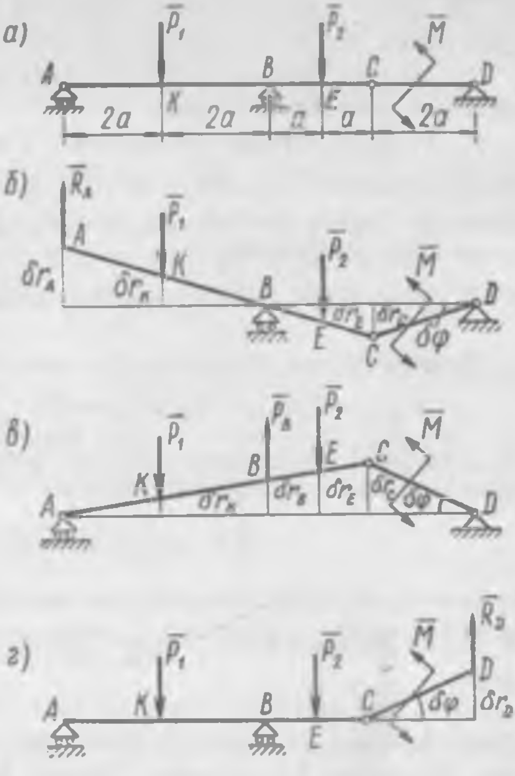
Ечиш. AD тўсинни мувозанатдаги AC ва CD тўсинлардан иборат иккита қаттиқ жисмдан ташкил топган система деб қараймиз.

Бу масалани статика усулида ечиш учун тўсиннинг AC қисмини фикран ажратиб олиб, CD қисмининг унга кўрсатадиган таъсирини куч билан алмаштириб, AC учун мувозанат тенгламасини тузиш керак. Худди шунингдек, тўсиннинг CD қисми учун ҳам мувозанат тенгламаларини тузиб, олинган тенгламалар системасини биргаликда ечиш керак. Бу усул анча машаққатли бўлиб, таянч реакциялари фақат барча мувозанат тенгламаларини тузгандан кейин топилади.

Мумкин бўлган кўчиш принципини қўллаш натижасида эса мос равишда тузилган битта тенгламадан керакли таянч реакция кучини аниқлаш мумкин. Бу усул масалани ечишни анча соддалаштиради.

Мумкин бўлган кўчиш принципини қўллаб A, B ва D таянчлардаги реакция кучларини аниқлаймиз.

Таянч реакция кучи $\overline{R}_A$ ни аниқлаш учун A таянчни фикран олиб ташлаб, унинг таъсирини шу куч билан алмаштирамиз.



261- расм.

A нуқтага вертикал юқорига йўналган $\delta\overline{r}_A$ мумкин бўлган кўчиш берамиз (261-расм, *б*). $\overline{P}_1$ ва $\overline{P}_2$ кучлар қўйилган K ва E нуқталарнинг мумкин бўлган кўчишини $\delta\overline{r}_K$ ва $\delta\overline{r}_E$ билан белгилаймиз; $\delta\varphi$ — CD тўсиннинг бурчак кўчиши. Учбурчакларнинг ўхшашлигидан фойдаланиб, мумкин бўлган кўчишлар орасидаги муносабатларни топамиз:

$$\delta r_A = 2\delta r_K = 4\delta r_E = 2\delta r_C = 4a\,\delta\varphi. \qquad (1)$$

Мумкин бўлган кўчиш принципини қўллаб берилган кучлар ва реакция кучининг мумкин бўлган кўчишдаги ишларининг йиғиндисини нолга тенглаймиз:

$$R_A\,\delta r_A - P_1\,\delta r_K + P_2\,\delta r_E + M\delta\varphi = 0. \qquad (2)$$

(1) ни эътиборга олиб, (2) даги δr_A олдидаги коэффициентни нолга тенглаштирсак, қуйидаги ифода ҳосил бўлади:

$$R_B - \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{4}P_2 + \frac{1}{1a}M = 0.$$

Бундан $R_A = 1500$ Н бўлишини аниқлаймиз.

$\overline{R}_B$ таянч реакция кучини аниқлаш учун B таянчни фикран олиб ташлаб, унинг таъсирини шу куч билан алмаштирамиз.

C шарнирга вертикал тарзда юқорига йўналган $\delta\overline{r}_c$ мумкин бўлган кўчиш берамиз (261- расм, *в*).

$\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ ва $\overline{R}_B$ кучлар қўйилган K, E ва B нуқталарнинг мумкин бўлган кўчишини $\delta\overline{r}_K$, $\delta\overline{r}_E$ ва $\delta\overline{r}_B$ билан белгилаймиз; $\delta\varphi$ — CD тўсиннинг бурчак кўчиши. Бу мумкин бўлган кўчишлар орасидаги муносабатни аниқлаймиз:

$$\delta r_c = \frac{6}{5}\delta r_E = \frac{3}{2}\delta r_B = 3\delta r_K = 2a\,\delta\varphi. \tag{3}$$

Мумкин бўлган кўчиш принципини қўллаймиз:

$$-P_1\delta r_K + R_B\,\delta r_B - P_2\,\delta r_E - M\,\delta\varphi = 0. \tag{4}$$

(4) даги барча орттирмаларни (3) дан фойдаланиб $\delta\overline{r}_c$ орқали ифодалаймиз ва унинг олдидаги коэффициентни нолга тенглаштирамиз:

$$-\frac{1}{3}P_1 + \frac{2}{3}R_B - \frac{5}{6}P_2 - \frac{M}{2a} = 0.$$

Бундан $R_B = 14500$ Н эканлигини аниқлаймиз.

$\overline{R}_D$ ни аниқлаш учун D таянч таъсирини шу куч билан алмаштирамиз.

D нуқтага вертикал тарзда юқорига йўналган δr_D мумкин бўлган кўчиш берамиз. У ҳолда CD тўсин соат милининг айланишига тескари йўналишда $\delta\varphi$ бурчакка бурилади ва

$$\delta\varphi = \frac{\delta r_D}{2a} \tag{5}$$

бўлади. AC тўсиннинг ҳолати ўзгармасдан қолади (161- расм, *г*).

Мумкин бўлган кўчиш принципини қўллаб қуйидаги тенгламани оламиз:

$$R_D\cdot\delta r_D + M\,\delta\varphi = 0, \tag{6}$$

бундан $R_D = -2000$ Н. Бунда манфий ишора $\overline{R}_D$ таянч реакция кучининг вертикал тарзда пастга йўналганлигини ифодалайди.

162- §. Динамиканинг умумий тенгламаси (Даламбер — Лагранж принципи)

Теорема. *Агар ҳаракатдаги механик система нуқталарига идеал ва бўшатмайдиган боғланишлар қўйилган бўлса, у ҳолда система нуқталарига таъсир этувчи актив кучларнинг ҳамда инерция кучларининг ҳар қандай мумкин бўлган кўчишдаги элементар ишларининг йиғиндиси ҳар онда нолга тенг бўлади, яъни:*

$$\sum(\overline{F}_k + \overline{\Phi}_k)\,\delta\overline{r}_k = 0. \tag{24.38}$$

Исбот.. Агар $\overline{F}_k$ актив кучлар ва $\overline{N}_k$ идеал боғланиш реакция кучлари таъсирида ҳаракатланаётган механик система нуқталарига мос равишда $\overline{\Phi}_k$ инерция кучларини қўйсак, у ҳолда Даламбер принципига кўра бу кучларнинг геометрик йиғиндиси ҳар онда нолга тенг бўлади:

$$\overline{F}_k + \overline{N}_k + \overline{\Phi}_k = 0 \ (k = 1,2, \ldots, N). \qquad (24.39)$$

Система нуқталарига ихтиёрий мумкин бўлган кўчиш берамиз ва (24.39) тенгламаларнинг ҳар бирини мос нуқтанинг мумкин бўлган кўчиши $\delta\overline{r}_k$ га скаляр кўпайтирамиз; олинган ифодаларни ҳадлаб қўшиб қуйидаги тенгламани оламиз:

$$\sum(\overline{F}_k + \overline{N}_k + \overline{\Phi}_k)\cdot\delta\overline{r}_k = 0. \qquad (24.40)$$

Системага қўйилган боғланишлар идеал бўлгани учун $\sum\overline{N}_k\cdot\delta\overline{r}_k = 0$. Шу сабабли (24.40) дан исбот қилиниши зарур бўлган (24.38) тенгламани ҳосил қиламиз:

$$\sum(\overline{F}_k + \overline{\Phi}_k)\cdot\delta r_k = 0.$$

Бу тенглама *динамиканинг умумий тенгламаси* дейилади. Ушбу тенглама Даламбер принципи билан Лагранжнинг мумкин бўлган кўчиш принципларининг мажмуасидан иборат.

Шунинг учун бу принцип *Даламбер — Лагранж принципи* дейилади.

(24.38) ни Декарт координата ўқларидаги проекциялари орқали ифодаласак,

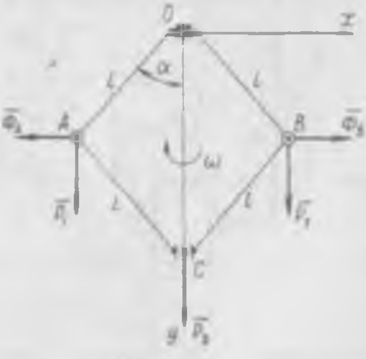
$$\sum[(X_k - m_x\ddot{x}_k)\,\delta x_k + (Y_k - m_k\ddot{y}_k)\,\delta y_k + (z_k - m_k\ddot{z}_k)\delta z_k] = 0 \qquad (24.41)$$

ҳосил бўлади.

(24.41) тенгламадан фойдаланиб механик системанинг ҳаракати дифференциал тенгламаларини чиқариш мумкин.

57-масала. Марказдан қочувчи ростлагич вертикал ўқ атрофида ўзгармас ω бурчак тезлик билан айланади. Шарларнинг ҳар қайсиси P_1 оғирликка, C муфта эса P_2 оғирликка эга эканлигини ҳисобга олиб, OA ва OB стерженларнинг вертикалдан оғиш бурчаги аниқлансин; ҳамма стерженларнинг узунлиги бир хил ва l га тенг (262-расм).

Ечиш. Координата ўқларини ўтказамиз. Системанинг эркинлик да-



262-расм.

ражаси бирга тенг. Системага $\overline{P}_1$ — шарларнинг оғирлик кучлари ва $\overline{P}_2$ — муфтанинг оғирлик кучи таъсир этади. Бу кучлар қаторига шарларнинг

$$\Phi_A = \Phi_B = \frac{P_1}{g} r\,\omega^2 = \frac{P_1}{g} l \sin\alpha\cdot\omega^2$$

марказдан қочувчи инерция кучларини қўшиб динамиканинг умумий тенгламасини тузамиз:

$$P_1\,\delta y_A + P_1\,\delta y_B + P_2\,\delta y_C + \Phi_B\,\delta x_B - \Phi_A\,\delta x_A = 0. \qquad (1)$$

Расмдан:

$$y_A = y_B = l\cos\alpha, \qquad y_c = 2\,l\cos\alpha,$$
$$x_A = -l\sin\alpha, \qquad x_B = l\sin\alpha.$$

Демак, A, B ва C нуқталар координаталарининг вариациялари қуйидагича аниқланади:

$$\delta y_A = \delta y_B = -l\sin\alpha\cdot\delta\alpha, \qquad \delta y_c = -2\,l\sin\alpha\cdot\delta\alpha,$$
$$\delta x_A = -l\cos\alpha\cdot\delta\alpha, \qquad \delta x_B = l\cos\alpha\cdot\delta\alpha.$$

Шу сабабли (1) қуйидагича ёзилади:

$$2\,l\,(-P_1\sin\alpha - P_2\sin\alpha + \Phi_B\cos\alpha)\,\delta\alpha = 0.$$

Бундан

$$\Phi_B\cos\alpha = (P_1 + P_2)\sin\alpha.$$

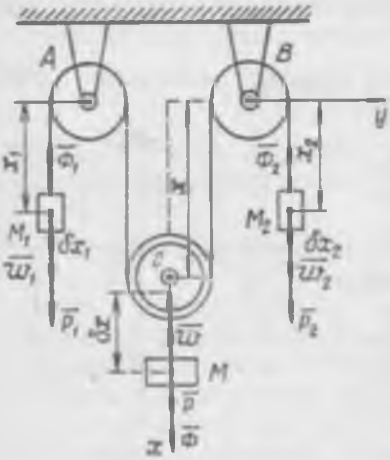
Бу тенгликка Φ_B нинг қийматини қўйиб, $\sin\alpha$ га қисқартирсак,

$$\frac{P_1}{g} l\,\omega^2\cos^2\alpha = P_1 + P_2$$

бўлади. Бундан

$$\cos\alpha = \frac{(P_1 + P_2)\,g}{P_1 l\,\omega^2}$$

эканлигини топамиз.



263- расм.

58-масала. Қўзғалувчи C блокни ушлаб турадиган ип ўқлари қўзғалмас бўлган A ва B блоклар орқали ўтган; ипнинг блоклар устида бўлмаган қисмлари вертикал тарзда осилиб туради. C блокка оғирлиги $P = 40$ Н бўлган тош осилган, ип учларига оғирлиги $P_1 = 20$ Н, $P_2 = 30$ Н бўлган юклар боғланган. Блоклар билан ип массасини ва ўқлардаги ишқаланишни ҳисобга олмай, ҳамма юкларнинг тезланиши аниқлансин (263- расм).

Ечиш. M_1, M_2 ва M юклардан ташкил топган моддий нуқталар системасининг ҳаракатини текширамиз. Системага қўйилган боғланиш (блоклар орқали ўтказилган чўзилмайдиган ип) идеал боғланишдан иборат.

x ўқни вертикал тарзда пастга йўналтирамиз. Ип чўзилмайдиган бўлгани учун юкларнинг координаталари орасида қуйидаги боғланиш мавжуд бўлади:

$$2x + x_1 + x_2 = \text{const},$$

бунда x — C блок марказининг, x_1 ва x_2 — M_1 ва M_2 юклар оғирлик марказларининг координаталари. Боғланиш тенгламасига кўра, система нуқталарининг мумкин бўлган кўчишлари орасида қуйидаги муносабат ўринли бўлади:

$$2\,\delta x + \delta x_1 + \delta x_2 = 0. \qquad (1)$$

Бундан ташқари,

$$2\ddot{x} + \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = 0. \qquad (2)$$

Бу тенгликларда: δx, δx_1, δx_2 — мумкин бўлган кўчишлар, $\ddot{x} = w$, $\ddot{x}_1 = w_1$, $\ddot{x}_2 = w_2$ — мос равишда C, M_1 ва M_2 нуқталарнинг тезланиши. $\bar{w}_1$ ва $\bar{w}_2$ ни вертикал тарзда пастга йўналган деб фараз қиламиз, у ҳолда $\bar{w}$ юқорига йўналади. Φ_1, $\bar{\Phi}_2$, $\bar{\Phi}$ инерция кучлари мос тезланишларга тескари йўналади.

Динамиканинг умумий тенгламасини тузамиз:

$$\left(P_1 - \frac{P_1}{g}\ddot{x}_1\right)\delta x_1 + \left(P_2 - \frac{P_2}{g}\cdot\ddot{x}_2\right)\delta x_2 + \left(P - \frac{P}{g}\ddot{x}\right)\delta x = 0, \qquad (3)$$

ёки (1) дан δx ни δx_1 ва δx_2 орқали ифодалаб, (3) га қўйсак,

$$[2P_1(g - \ddot{x}_1) - P(g - \ddot{x})]\,\delta x_1 +$$
$$+ [2P_2(g - \ddot{x}_2) - P(g - \ddot{x})]\,\delta x_2 = 0$$

ҳосил бўлади. Бу тенгламада δx_1 ва δx_2 лар ихтиёрий ҳамда бир-бирига боғлиқсиз бўлгани учун улар олдидаги коэффициентлар нолга тенг бўлиши керак;

$$2P_1(g - \ddot{x}_1) - P(g - \ddot{x}) = 0.$$
$$2P_2(g - \ddot{x}_2) - P(g - \ddot{x}) = 0.$$

(2) дан $\ddot{x}$ ни $\ddot{x}_1$ ва $\ddot{x}_2$ орқали ифодалаб, бу тенгламалар системасини қуйидагича ёзиш мумкин.

$$(4P_1 + P)\ddot{x}_1 + P\ddot{x}_2 = 2(2P_1 - P)g,$$
$$P\ddot{x}_1 + (4P_2 + P)\ddot{x}_2 = 2(2P_2 - P)g.$$

Бу тенгламалар системасини ечиб, изланаётган номаълумларни аниқлаймиз:

$$\ddot{x}_1 = g\,\frac{4\,P_1P_2 + (P_1 - 3\,P_2)\,P}{4\,P_1P_2 + (P_1 + P_2)\,P}\,,$$

$$\ddot{x}_2 = g\,\frac{4\,(P_1P_2 + (P_2 - 3\,P_1)\,P}{4\,P_1P_2 + (P_1 + P_2)\,P}\,,$$

$$\ddot{x} = \frac{\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2}{2} = -\,g\,\frac{4\,P_1P_2 - (P_1 + P_2)\,P}{4\,P_1P_2 + (P_1 + P_2)\,P}\,.$$

Сон қийматларини қўйсак, қуйидаги натижага эришамиз:

$$\ddot{x}_1 = -\,\frac{1}{11}\,g,\quad \ddot{x}_2 = \frac{3}{11}\,g,\quad \ddot{x} = -\,\frac{1}{11}\,g.$$

Бунда манфий ишора юклар тезланиши юқорига йўналганлигини ифодалайди. Шундай қилиб, кўрилаётган ҳолда M_2 юк пастга, M_1 ва M юклар юқорига йўналган тезланишлар билан ҳаракатланади.

163- §. Лагранжнинг иккинчи хил тенгламалари

Голоном идеал ва бўшатмайдиган боғланишлар қўйилган N та нуқтадан ташкил топган механик системанинг эркинлик даражаси n га тенг бўлиб, ҳолати $q_1, q_2, \ldots, q_n$ умумлашган координаталар билан аниқлансин:

Маълумки,

$$\overline{r} = \overline{r}_k\,(q_1, q_2, \ldots, q_n, t),\ (k = 1, 2, \ldots, N). \qquad (24.42)$$

Динамиканинг (24.38) умумий тенғламасида $\overline{\Phi}_k = -\,m_k\overline{w}_k = -\,m_k\ddot{\overline{r}}_k$ эканлигини эътиборга олиб, уни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\sum_{k=1}^{N}(\overline{F}_k - m_k\ddot{\overline{r}}_k)\,\delta\overline{r}_k = 0. \qquad (24.43)$$

(24.15) га кўра система нуқталарининг мумкин бўлган кўчиши умумлашган координаталар орқали қуйидагича ифодаланади:

$$\delta\overline{r}_k = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\overline{r}_k}{\partial q_i}\,\delta q_i\,(k = 1, 2, \ldots .\ N). \qquad (24.44)$$

(24.44) ни (24.43) га қўйиб, йиғинди тартибини ўзгартирсак,

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{N}\overline{F}_k\cdot\frac{\partial\overline{r}_k}{\partial q_i} - \sum_{k=1}^{N}m_k\ddot{\overline{r}}_k\cdot\frac{\partial\overline{r}_k}{\partial q_i}\right)\delta q_i = 0. \qquad (24.45)$$

ҳосил бўлади. (24.45) даги

$$\sum_{k=1}^{N}\overline{F}_k\cdot\frac{\partial\overline{r}_k}{\partial q_i} = Q_i \qquad (24.46)$$

умумлашган кучларнинг ифодалайди. Бундан ташқари, қуйидаги айниятдан фойдаланамиз:

$$\ddot{\bar r}_k \cdot \frac{\partial \bar r_k}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\bar r}_k \cdot \frac{\partial \bar r_k}{\partial q_i}\right) - \dot{\bar r}_k \cdot \frac{d}{dt}\frac{\partial \bar r_k}{\partial q_i}. \qquad (24.47)$$

Бу айниятдаги $\frac{\partial \bar r_k}{\partial q_i}$ ва $\frac{d}{dt}\frac{\partial r_k}{\partial q_r}$ ҳадларнинг фақат голоном системага хос бўлган бошқача ифодасини топамиз. Бунинг учун (24.42) дан вақт бўйича ҳосила оламиз:

$$\dot{\bar r}_k = \frac{\partial \bar r_k}{p q_1}\dot q_1 + \frac{\partial \bar r_k}{\partial q_2}\dot q_2 + \ldots + \frac{\partial \bar r_k}{\partial q_n}\dot q_n + \frac{\partial \bar r_k}{\partial t}. \qquad (24.48)$$

(24.48) тенгликнинг ҳар иккала томонидан $\dot q_i$ — умумлашган тезлик бўйича хусусий ҳосила оламиз:

$$\frac{\partial \dot{\bar r}_k}{\partial \dot q_i} = \frac{\partial \bar r_k}{\partial q_i}, \ (i = \overline{1,n}). \qquad (24.49)$$

(24.49) ёрдамида $\frac{\partial \bar r_k}{q \dot{\partial}_i}$ аниқланади. $\frac{d}{dt}\frac{d \bar r_k}{\partial q_i}$ ни аниқлаш учун (24.48) нинг иккала томонидан q_i бўйича хусусий ҳосила оламиз:

$$\frac{\partial \dot{\bar r}_k}{\partial q_i} = \frac{\partial^2 \bar r_k}{\partial q_1 \partial q_i}\dot q_1 + \frac{\partial^2 \bar r_k}{\partial q_2 \partial q_i}\dot q_2 + \ldots + \frac{\partial^2 \bar r_k}{\partial q_n \partial q_i}\dot q_n + \frac{\partial^2 \bar r_k}{\partial t \partial q_i}. \qquad (24.50)$$

Бундан ташқари, умумлашган координаталарга ва вақтга ошкор равишда боғлиқ бўлган $\frac{\partial \bar r_k}{\partial q_i}$ функциянинг вақт бўйича тўлиқ ҳосиласини оламиз:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \bar r_k}{\partial q_i} = \frac{\partial^2 \bar r_k}{\partial q_i \partial q_1}\dot q_1 + \frac{\partial^2 \bar r_k}{\partial q_i \partial q_2}\dot q_2 + \ldots + \frac{\partial^2 \bar r_k}{\partial q_i \partial q_n}\dot q_n + \frac{\partial_2 \bar r_k}{\partial q_i \partial t}. \qquad (24.51)$$

(24.50) ва (24.51) ларнинг ўнг томонлари иккита ўзгарувчи бўйича иккинчи тартибли хусусий ҳосилалар дифференциаллаш тартибига боғлиқ бўлмаганидан ўзаро тенгдир.

Шундай қилиб,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \bar r_k}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{\bar r}_k}{\partial q_i}. \qquad (24.52)$$

(24.49) ва (24.52) ларга асосан (24.47) айниятни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\ddot{\bar r}_k \cdot \frac{\partial \bar r_k}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\bar r}_k \cdot \frac{\partial \dot{\bar r}_k}{\partial \dot q_i}\right) - \dot r_k \cdot \frac{\partial \dot{\bar r}_k}{\partial q_i}. \qquad (24.53)$$

(24.53) ни эътиборга олиб, (24.45) даги $\sum_{k=1.}^{N} m_k \ddot{\bar{r}}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}$ учун ушбу ифодани оламиз:

$$\sum_{k=1}^{N} m_k \ddot{\bar{r}}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{N} m_k \dot{\bar{r}}_k \cdot \frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial q_i} - \sum_{k=1}^{N} m_k \dot{\bar{r}}_k \cdot \frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial q_i}. \qquad (24.54)$$

(24.54) нинг ўнг томонинн бошқача кўринишда ёзиш учун системанинг кинетик энергиясини киритамиз:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} m_k \bar{v}_k^2,$$

ёки $\bar{v}_k = \dot{\bar{r}}_k$ эканлигини ҳисобга олсак,

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} m_k \dot{\bar{r}}_k, \qquad (24.55)$$

(24.48) ва (24.42) лардан кўрамизки, $\dot{\bar{r}}_k$ функция умумий ҳолда барча $q_i, \dot{q}_i$ га (жумладан, $\dot{q}_i$ га чизиқли равишда) ва вақтга боғлиқ бўлади. Бинобарин, системанинг кинетик энергияси ҳам мазкур ўзгарувчиларга боғлиқ бўлади:

$$T = T(q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n, t). \qquad (24.56)$$

Системанинг T кинетик энергиясидан $\dot{q}_i$ ва q_i ўзгарувчилар бўйича мураккаб функцияни дифференциаллаш қоидасига кўра хусусий ҳосилалар оламиз. Бунинг учун дастлаб $\dot{\bar{r}}_k^2 = \dot{\bar{r}}_k \cdot \dot{\bar{r}}_k$ скаляр кўпайтмадан q_i ва $\dot{q}_i$ лар бўйича хусусий ҳосила оламиз:

$$\frac{\partial \dot{\bar{r}}_k^2}{\partial q_i} = 2 \dot{\bar{r}}_k \cdot \frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial \dot{\bar{r}}_k^2}{\partial \dot{q}_i} = 2 \dot{\bar{r}}_k \cdot \frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial q_i},$$

у ҳолда

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{k=1}^{N} m_k \dot{\bar{r}}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial \dot{q}_i}, \quad \frac{\partial T}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^{N} m_k \dot{\bar{r}}_k \cdot \frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial q_i}.$$

Бу муносабатларни эътиборга олиб, (24.54) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\sum_{k=1}^{N} m_k \cdot \ddot{\bar{r}}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i}. \qquad (24.57)$$

(24.46) ва (24.57) га асосан (24.45) ушбу кўринишни олади:

$$\sum_{k=1}^{n}\left[Q_i-\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i}\right)\right]\delta q_i=0. \qquad (24.58)$$

(24.58) тенглама *динамика умумий тенгламасининг умумлашган координаталардаги ифодасидир*. Бу тенгламада

$$-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i}\right)\delta q_i$$

ҳад система нуқталарининг $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_n$ мумкин бўлган кўчишдаги барча инерция кучлари ишларининг йиғиндисини ифодалайди,

(24.58) да барча умумлашган координаталарнинг орттирмалари δq_1. $\delta q_2, \ldots, \delta q_n$ эркин бўлгани учун улар олдидаги ифодаларни айрим-айрим нолга тенглаш мумкин.

Шундай қилиб, қуйидаги n та тенгламалар системасини оламиз:

$$Q_i-\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{d\dot{q}_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i}\right)=0\,(i=1,2,\ldots,n)$$

ёки

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i,\ (i=1,2,\ldots,n). \qquad (24.59)$$

(24.59) тенгламалар *Лагранжнинг иккинчи хил тенгламалари ёки механик системанинг умумлашган координаталардаги ҳаракат дифференциал тенгламалари* дейилади. Бу тенгламалар сони системанинг эркинлик даражасига тенг бўлиб, системанинг умумлашган координаталарига нисбатан иккинчи тартибли дифференциал тенгламалардан иборат. Уларни интеграллаб ва интеграллаш доимийларини ҳаракатнинг бошланғич шартлари асосида аниқлаб, системанинг умумлашган координаталар орқали ифодаланган n та ҳаракат тенгламаларини оламиз:

$$q_i=q_i(t),\ (i=1,2,\ldots,n). \qquad (24.60)$$

Лагранжнинг иккинчи хил тенгламалари аналитик механикада муҳим аҳамиятга эга ва кўпгина техника масалаларини ечишда улардан самарали фойдаланилади. Лекин бу тенгламалар таркибида боғланиш реакция кучлари қатнашмайди. Шунга кўра реакция кучларини аниқлаш лозим бўлганда Даламбер принципи қўлланилиши мумкин.

(24.60) ни (24.42) га қўйиб система нуқталарининг радиус-векторлари аниқланади:

$$\overline{r}_k=\overline{r}_k(t),\ (k=\overline{1,N})$$

Натижада система нуқталарининг ҳаракат қонуни вектор усулида аниқланади. У ҳолда инерция кучларини

$$\overline{\Phi}_k = -m_k\ddot{\overline{r}}_k$$

формуладан аниқлаш мумкин.

Даламбер принципига асосан номаълум боғланиш реакция кучларини топамиз:

$$\overline{N}_k = - \qquad - \overline{F}_k, \ (k = \overline{1, N}),$$

бунда $\overline{F}_k$ — система нуқталарига қўйилган, берилган кучлар.

Шундай қилиб, механикада голоном боғланишлар қўйилган системанинг берилган кучлар таъсиридаги ҳаракатини аниқлашга доир масалани икки қисмга бўлиб ечиш мумкин.

1. Лагранжнинг тенгламалари (24.59) ни интеграллаб ҳаракат тенгламалари топилади.

2. Даламбер принципи воситасида номаълум боғланиш реакция кучлари аниқланади.

164-§. Потенциалли кучлар таъсиридаги механик система учун Лагранжнинг иккинчи хил тенгламалари. Циклик интеграллар

Агар механик система нуқталарига фақат потенциалли кучлар таъсир этса, у ҳолда умумлашган кучлар (24.30) дан аниқланади. Бу ҳолда Лагранжнинг иккинчи хил тенгламалари (24.59) қуйидагича ёзилади:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_i}, \ (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (24.61)$$

(24.61) да $\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}$ ни тенгламанинг чап томонига ўтказамиз. Бундан ташқари, потенциал энергия Π боғланишлар стационар бўлмаган ҳолда умумлашган тезликларга боғлиқ бўлмаганлигидан $\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_i} = 0$.

Шу сабабли

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial (T - \Pi)}{\partial \dot{q}_i}$$

деб ёзиш мумкин. Натижада (24.61) ушбу кўринишга эга бўлади:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial (T - \Pi)}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial (T - \Pi)}{\partial q_i} = 0, \ (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (24.62)$$

(24.62) да $L = T - \Pi$ белгилаш киритамиз. Умумлашган координаталар ва умумлашган тезликлар функцияси бўлган L *Лагранж функцияси* ёки *кинетик потенциал* дейилади. Бу белгилашга кўра (24.62) қуйидагича ёзилади:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \ (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (24.63)$$

(24.63) тенгламалар *потенциалли кучлар таъсиридаги система учун Лагранжнинг иккинчи хил тенгламалари* дейилади.

Циклик координаталар ва циклик интеграллар. Кинетик потенциал L нинг ифодасида ошкор равишда қатнашмайдиган умумлашган координаталар *циклик координаталар* дейилади.

Агар n та умумлашган координаталар орасида s та циклик координаталар $q_1, q_2, \ldots, q_s (s < n)$ мавжуд бўлса, у ҳолда таърифга кўра

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \, (j = 1, 1, \ldots, s). \tag{24.64}$$

Бу ҳолда циклик координаталарга мос бўлган Лагранжнинг иккинчи хил тенгламалари (24.63) ушбу кўринишга эга бўлади:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots s) \tag{24.65}$$

Бу тенгламаларни интеграллаб, бир йўла s та биринчи интегралларни оламиз:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = C_j \, (j = 1, 2, \ldots, s). \tag{24.66}$$

(24.66) тengликлар билан аниқланадиган биринчи интеграллар *циклик интеграллар* дейилади.

165- §. Лагранжнинг иккинчи хил тенгламаларини қўллашга доир масалалар

Лагранжнинг иккинчи хил тенгламаларини қўллашга доир масалалар қуйидаги тартибда ечилади.

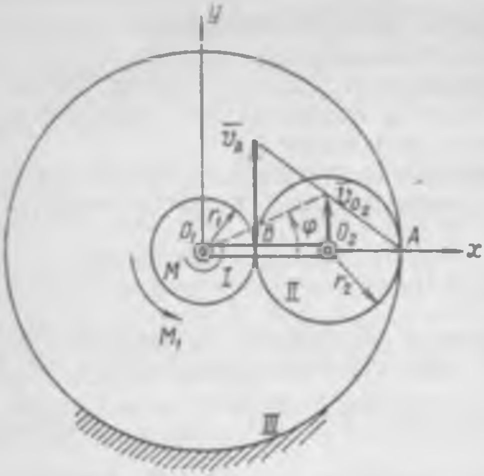
1. Системага қўйилган боғланиш тенгламаларини аниқлаб, умумлашган координаталар киритилади.

2. Умумлашган кучлар топилади. Бунинг учун система нуқталарига таъсир этувчи актив кучлар расмда тасвирланади; идеал боғланишларнинг реакция кучларини кўрсатиш шарт эмас; агар ишқаланиш кучи мавжуд бўлса, улар актив кучлар қаторига қўшилади. Сўнгра умумлашган кучлар 159- § да кўрсатилган уч усулдан биртаси бўйича ҳисобланади.

3. Система кинетик энергияси умумлашган координаталар орқали ифодаланади. Агар система нуқталарига фақат консерватив кучлар таъсир этса, кинетик потенциал ҳисобланади.

4. Лагранжнинг иккинчи хил тенгламалари тузилади ва бу тенгламаларни ечиб, изланаётган номаълумлар топилади.

59- масала. Горизонтал текисликда жойлашган механизмда $O_1 O_2$ даста билан ҳаракатга келтирилувчи ва унга эркин ўрнатилган *II* ғилдирак қўзғалмас *III* ғилдиракнинг ички сирти бўйлаб сирпанмай ғилдирайди ва *I* ғилдиракни O қўзғалмас ўқ атрофида айлантиради (264- расм). Дастага $M = \text{const}$ айлантирувчи момент, *I* ғилдиракка эса $M_1 = \text{const}$ қаршилик моменти таъсир этади. Дастанинг l узунлиги *I* ва *II* ғилдиракларнинг оғирлиги P_1 ва P_2 га тенг. *I* ғилди-



234- расм.

ракнинг O_1 нуқтадан расм текислигига перпендикуляр равишда ўтувчи ўққа нисбатан инерция радиуси kr_1 ва шу ўққа параллел равишда O_2 нуқтадан ўтувчи ўққа нисбатан II ғилдиракнинг инерция радиуси kr_2 бўлиб, $\frac{r_1}{r_2} = 1{,}5$. Дастанинг массасини ҳисобга олмай, унинг бурчак тезланиши топилсин.

Ечиш. 1. Умумлашган координаталарни аниқлаш. Системанинг ҳолати O_1O_2 дастанинг айланиш бурчаги φ билан бир қийматли аниқланади. Ҳақиқатан ҳам, агар O_1O_2 дастани қўзғалмас деб қарасак, у ҳолда система қўзғалмас бўлади. Бинобарин, системанинг эркинлик даражаси битта бўлади. O_1O_2 дастанинг айланиш бурчаги φ ни умумлашган координата учун қабул қиламиз, яъни $q = \varphi$. У ҳолда $\dot{q} = \dot{\varphi} = \omega$ бўлади. Бунда ω — дастанинг бурчак тезлиги.

Бу геометрик мулоҳазаларни аналитик жиҳатдан асослаймиз. Қаралаётган механик система I ва II ғилдираклардан иборат бўлиб, уларга қуйидаги голоном боғланишлар қўйилган:

$$x_2^2 + y_2^2 = l^2, \tag{1}$$

$$v_A = 0 \text{ ёки } r_2\dot{\varphi}_2 = l\dot{\varphi}, \tag{2}$$

$$r_1\dot{\varphi} = 2r_2\dot{\varphi}_2, \tag{3}$$

бунда: x_2, y_2 — O_2 нуқтанинг координаталари $\dot{\varphi}_1$, $\dot{\varphi}_2$ — мос равишда I ва II ғилдиракларнинг бурчак тезлиги. (1) тенглама ҳаракат давомида O_1O_2 масофа ўзгармаслигини, (2) — III ғилдиракнинг қўзғалмаслигини ёки II ғилдирак учун A нуқта тезликларнинг оний маркази эканлигини, (3) эса B нуқтада ҳаракат сирпанмасдан содир бўлишини ифодалайди.

I ғилдирак O_1 нуқтадан ўтувчи ўқ атрофида айланма ҳаракатда бўлганидан унинг ҳолати φ_1 бурчак билан аниқланади. II ғилдирак текис параллел ҳаракатда бўлганидан унинг ҳолати x_2, y_2, φ_2 билан аниқланади. Шундай қилиб, системанинг ҳолати 4 та: $\varphi_1, x_2, y_2, \varphi_2$ параметрлар билан аниқланади ва улар орасида 3 та голоном боғланишлар мавжуд. Бинобарин, системанинг эркинлик даражаси 1 га тенг бўлади.

2. Умумлашган кучни аниқлаш. Расмда айлантирувчи момент M ва қаршилик моменти M_1 ни тасвирлаймиз. Механизм горизонтал текисликда жойлашгани учун P_1 ва P_2 оғирлик кучлари иш бажарйди. Шу сабабли бу кучларни расмда кўрсатиш шарт эмас. O_1O_2 дастага соат милининг айланишига тескари йўналишда $\delta\varphi$ мумкин бўлган кўчиш берамиз. Бу мумкин бўлган кўчишда ҳаракатлантирувчи момент M ва қаршилик моменти M_1 ишларининг йиғиндисини ҳисоблаймиз:

$$\delta A_\varphi = M\delta\varphi - M_1\delta\varphi_1. \tag{4}$$

I ғилдиракнинг ва дастанинг кўчиш бурчаги уларнинг бурчак тезликларига мутаносибдир: $\frac{\delta\varphi_1}{\delta\varphi} = \frac{\dot{\varphi}_1}{\dot{\varphi}}$. (2) ва (3) ларга кўра

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{2l}{r_1}\dot{\varphi}, \tag{5}$$

ёки

$$\frac{\dot{\varphi}_1}{\dot{\varphi}} = \frac{2(r_1 + r_2)}{r_1}$$

бўлгани учун

$$\frac{\delta\varphi_1}{\delta\varphi} = \frac{2(r_1 + r_2)}{r_1} = 2\left(1 + \frac{r_2}{r_1}\right) = 5,$$

бундан $\delta\varphi_1$ ни $\delta\varphi$ орқали ифодалаб, (4) га қўямиз:

$$\delta A_\varphi = (M - 5M_1)\delta\varphi.$$

У ҳолда φ умумлашган координатага мос келувчи умумлашган куч қуйидагича аниқланади:

$$Q_\varphi = \frac{\delta A_\varphi}{\delta\varphi} = M - 5M_1. \tag{6}$$

3. Системанинг кинетик энергиясини аниқлаш. Системанинг кинетик энергияси I ғилдиракнинг кинетик энергияси T_1 билан II ғилдиракнинг кинетик энергияси T_2 нинг йиғиндисига тенг:

$$T = T_1 + T_2. \tag{7}$$

I ғилдирак O_1 нуқтадан ўтувчи ўқ атрофида $\dot{\varphi}_1$ бурчак тезлик билан айланма ҳаракатда бўлганидан

$$T_1 = \frac{1}{2} I_1 \dot{\varphi}_1^2,$$

бунда $I_1 = \frac{P_1}{g} k^2 r_1^2$ — I ғилдиракнинг O_1 нуқтадан ўтувчи айланиш ўқига нисбатан инерция моменти. (5) ни назарда тутсак,

$$T_1 = \frac{2P_1}{g} k^2 l^2 \dot{\varphi}^2. \tag{8}$$

II ғилдирак текис параллел ҳаракатда бўлгани учун унинг кинетик энергияси

$$T_2 = \frac{P_2}{2g} v_{0_2}^2 + I_2 \frac{\dot{\varphi}_2^2}{2},$$

бунда $\varphi_{0_2} = l\dot{\varphi}$; $I_2 = \frac{P_2}{g} k^2 r_2^2 - O_2$ нуқтадан ўтувчи ўққа нисбатан II ғилдиракнинг инерция моменти; (2) га асосан $\dot{\varphi}_2 = \frac{l}{r_2}\dot{\varphi}_2$ бўлгани учун

$$T_2 = \frac{P_2}{2g} l^2 (1 + k^2) \dot{\varphi}^2. \qquad (9)$$

(8) ва (9) ларни (7) га қўямиз:

$$T = \frac{l^2}{2g} [k^2 (4P_1 + P_2) + P_2] \dot{\varphi}^2. \qquad (10)$$

4. Лагранжнинг иккинчи хил тенгламаларини тузиш. Системанинг эркинлик даражаси битта бўлгани учун Лагранжнинг иккинчи хил тенгламалари ҳам битта бўлади:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_{\varphi}. \qquad (11)$$

(10) дан ушбу ҳосилаларни ҳисоблаймиз:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} &= \frac{l^2}{g} [k^2 (4P_1 + P_2) + P_2] \dot{\varphi}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} &= \frac{l^2}{g} [k^2 (4P_1 + P_2) + P_2] \ddot{\varphi}, \\ \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= 0. \end{aligned}\right| \qquad (12)$$

(6) ва (12) ларга биноан (11) тенглама

$$\frac{l^2}{5} [k^2 (4P_1 + P_2) + P_2] \ddot{\varphi} = M - 5M_1$$

кўринишни олади. Бундан дастанинг изланаётган бурчак тезланишини аниқлаймиз:

$$\varepsilon = \ddot{\varphi} = \frac{(M - 5M_1) g}{[k^2 (4P_1 + P_2) + P_2] l^2} = \text{const}.$$

Агар $M = 5M_1$ бўлса, $\varepsilon = 0$, яъни даста текис айланма ҳаракатда бўлади.

60- масала. 58- масала Лагранжнинг иккинчи хил тенгламалари ёрдамида ечилсин (263- расмга қаранг).

Ечиш. 1. Умумлашган координаталарни аниқлаш. Маълумки, кўрилаётган механик системага

$$2x + x_1 + x_2 = \text{const}$$

боғланиш қўйилган. Шу сабабли эркин координаталар сони иккита бўлади. Умумлашган координаталар учун $q_1 = x_1$ ва $q_2 = x_2$ ларни

ламиз. Бинобарин, системанинг эркинлик даражаси ҳам иккита бўади.

2. Умумлашган кучларни аниқлаш. Системанинг эркинлик даражаси иккита бўлгани учун M_1 ва M_2 юкларга вертикал тарзда пастга йўналган δx_1 ва δx_2 мумкин бўлган кўчиш берамиз. У ҳолда M юк вертикал йўналишда бирор δx мумкин бўлган кўчиш олади. Бу ўчишлардаги $\overline{P_1}, \overline{P_2}, \overline{P}$ кучлар ишларининг йиғиндисини топамиз:

$$\sum \delta A_k = P_1 \delta x_1 + P_2 \delta x_2 + P \delta x.$$

Богланишлар тенгламасига кўра, мумкин бўлган кўчишлар орасида қуйидаги муносабат мавжуд:

$$2\delta x + \delta x_1 + \delta x_2 = 0,$$

бундан δx ни топамиз:

$$\delta x = -\frac{\delta x_1 + \delta x_2}{2},$$

бундаги манфий ишора δx нинг юқорига йўналганлигини билдиради. Шу сабабли

$$\sum \delta A_k = \left(P_1 - \frac{P}{2}\right) \delta x + \left(P_2 - \frac{P}{2}\right) \delta x_2$$

бўлади. Бундан x_1 ва x_2 координаталарга мос умумлашган кучларни ҳисоблаймиз:

$$Q_1 = \frac{(\sum \delta A_k)_1}{\delta x_1} = P_1 - \frac{P}{2},$$

$$Q_2 = \frac{(\sum \delta A_k)_2}{\delta x_2} = P_2 - \frac{P}{2}.$$

3. Системанинг кинетик энергиясини аниқлаш. Системанинг кинетик энергияси уч қисмдан иборат бўлади:

$$T = T_1 + T_2 + T_3.$$

Бунда T_1, T_2, T_3 лар мос равишда M_1, M_2, ва M юкларнинг кинетик энергияларини ифодалайди. Юклар тўғри чизиқли ҳаракатда бўлгани учун

$$T_1 = \frac{1}{2}\frac{P_1}{g}\dot{x}_1^2, \; T_2 = \frac{1}{2}\frac{P_2}{g}\dot{x}_2^2, \; T_3 = \frac{1}{2}\frac{P}{g}\dot{x}^2,$$

Шундай қилиб,

$$T = \frac{1}{2g}(P_1\dot{x}_1^2 + P_2\dot{x}_2^2 + P\dot{x}^2).$$

Боғланиш тенгламасига кўра:

$$\dot{x}^2 = \frac{(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^2}{4} = \frac{\dot{x}_1^2 + 2\dot{x}_1\dot{x}_2 + \dot{x}_2^2}{4}.$$

Бинобарин, системанинг кинетик энергияси умумлашган тезликлар орқали қуйидагича ифодаланади:

$$T = \frac{1}{2g}\left[P_2\dot{x}_1^2 + P_2\dot{x}_2^2 + \frac{P}{8}(\dot{x}_1^2 + 2\,\dot{x}_1\dot{x}_2 + \dot{x}_2^2)\right].$$

4. Лагранжнинг иккинчи хил тенгламаларини тузиш. Системанинг эркинлик даражаси иккита бўлгани учун Лагранжнинг иккинчи хил тенгламалари ҳам иккита бўлади:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial T}{\partial x_1} = Q_1, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} - \frac{\partial T}{\partial x_2} = Q_2.$$

Бунга система кинетик энергиясидан олинган қуйидаги

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = \frac{1}{4g}\,[(4\,P_1 + P)\,\dot{x}_1 + P\,\dot{x}_2],$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = \frac{1}{4g}\,[(4\,P_1 + P)\,\ddot{x}_1 + P\ddot{x}_2],$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_1} = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} = \frac{1}{4g}\,[(4\,P_2 + P)\,\dot{x}_2 + P\,\dot{x}_1],$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} = \frac{1}{4g}\,[(4\,P_2 + P)\,\ddot{x}_2 + P\,\ddot{x}_1],$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_1} = 0$$

ҳосилаларни ва Q_1, Q_2 ларнинг қийматларини қўйсак,

$$\frac{1}{4g}\,[(4\,P_1 + P)\,\ddot{x}_1 + P\ddot{x}_2] = P_1 - \frac{P}{2},$$

$$\frac{1}{4g}\,[(4\,P_2 + P)\,\ddot{x}_2 + P\,\ddot{x}_1] = P_2 - \frac{P}{2}$$

тенгламалар ҳосил бўлади. Уларни

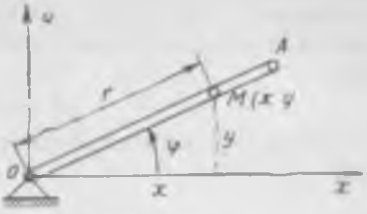
$$(4\,P_1 + P)\,\ddot{x}_1 + P\ddot{x}_2 = 2\,(2\,P_1 - P)\,g,$$

$$P\ddot{x}_1 + (4\,P_2 + P)\,\ddot{x}_2 = 2\,(2\,P_2 - P)\,g$$

кўринишда ёзиб, боғланиш тенгламалари билан биргаликда ечсак, юкларнинг тезланиши қуйидагича бўлади:

$$\ddot{x}_1 = -\frac{1}{11}\,g, \quad \ddot{x}_2 = \frac{3}{11}\,g, \quad \ddot{x} = -\frac{1}{11}\,g.$$

Шундай қилиб, бу масалани иккита усулда, динамиканинг умумий тенгламалари ва Лагранжнинг иккинчи хил тенгламалари ёрдамида ечдик. Бу иккала усулни бир-бирига солиштириб, Лагранжнинг иккинчи хил тенгламалари воситасида бу масалани ечиш бирмунча марали эканлигини кўрамиз, чунки бунда инерция кучини киритиш усулидан фойдаланилмайди.



265- расм.

61- масала. *OA* кулиса горизонтал текисликда ўзининг *O* учидан ўтувчи z ўқ атрофида айлана олади (265- расм; расмда юқоридан кўриниши тасвирланган). Массаси m га тенг M сирпанғич кулиса ичида ҳаракатлана олади. M сирпанғични моддий нуқта деб қаралсин. Кулисанинг z ўққа нисбатан инерция моменти I_z га тенг. Қаршилик кучи ҳисобга олинмасин. Умумлашган координаталар учун r ва φ қутб координаталарини қабул қилиб, Лагранжнинг иккинчи хил тенгламалари тузилсин ва уларнинг иккита биринчи интеграллари аниқлансин. φ бурчак циклик координатадан иборат бўлиши кўрсатилсин.

Ечиш. Кулиса ва сирпанғичдан ташкил топган системанинг эркинлик даражаси 2 га тенг. Масаланинг шартига кўра, умумлашган координаталар учун r ва φ қутб координаталарини оламиз (265- расмга қаранг).

Агар кулиса ва сирпанғичнинг кинетик энергияларини $T_к$ ва $T_с$ билан белгиласак, системанинг кинетик энергияси учун

$$T = T_к + T_с \tag{1}$$

муносабат ўринли бўлади.

Кулиса z ўқ атрофида айланма ҳаракатда бўлгани учун

$$T_к = \frac{1}{2} I_z \ddot{\varphi}^2. \tag{2}$$

Расмдан

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$$

бўлгани учун

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi,$$

$$\dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi.$$

Шу сабабли

$$v_м^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2.$$

$$T_с = \frac{1}{2} m (r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2). \tag{3}$$

(2) ва (3) ларни (1) га қўйсак,

$$T = \frac{1}{2}(I_z + mr^2)\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m\dot{r}^2.$$

Система нуқталарига таъсир этувчи актив кучлар кулиса ва сирпанғичнинг оғирлик кучларидан иборат бўлиб, ҳаракат горизонтал текисликда содир бўлгани туфайли потенциал энергия нолга тенг бўлади:

$$\Pi = 0. \tag{4}$$

(3) ва (4) ларни назарда тутиб, Лагранж функциясини ҳисоблаймиз:

$$L = T - \Pi = \frac{1}{2}\,(I_z + mr^2)\,\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\,m\dot{r}^2. \tag{5}$$

Система учун

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\,\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0. \\ &\frac{d}{dt}\,\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \end{aligned}\right| \tag{6}$$

кўринишдаги Лагранжнинг иккинчи хил тенгламаларини тузиш учун зарур бўлган Лагранж функциясининг ҳосилаларини ҳисоблаймиз:

$$\begin{gathered} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r},\ \frac{d}{dt}\ \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\ddot{r},\ \frac{\partial L}{\partial r} = mr\,\dot{\varphi}_2, \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = (I_z + mr^2)\,\dot{\varphi},\ \frac{d}{dt}\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 2m\dot{r}\,\dot{\varphi} + \\ + (I_z + mr^2)\ \ddot{\varphi},\ \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0. \end{gathered} \tag{7}$$

(7) ни (6) га қўйиб, берилган система учун Лагранжнинг иккинчи хил тенгламаларини қуйидагича ёзамиз:

$$\begin{gathered} m\ddot{r} - mr^2\dot{\varphi}^2 = 0, \\ 2mr\dot{r}\,\dot{\varphi} + (I_z + mr^2)\ \ddot{\varphi} = 0, \end{gathered}$$

ёки

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{r} - r\,\dot{\varphi}^2 = 0, \\ &2mr\dot{r}\,\dot{\varphi} + (I_z + mr^2)\,\ddot{\varphi} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Лагранж функцияси L да φ бурчак ошкор равишда қатнашмагани туфайли у циклик координатадан иборат бўлади. Шу сабабли (24.66) га кўра, қуйидаги муносабат ўринли бўлади:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = C_1$$

ёки

$$(I_z + mr^2)\ \dot{\varphi} = C_1. \tag{9}$$

(9) тенглик (8) тенгламанинг циклик интегралини ифодалайди.

T ва П ларнинг қийматларини (3) ва (4) дан энергия интеграли

$$T + \Pi = h$$

га қўйсак,

$$\frac{1}{2} m (r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2) = h.$$

ёки (9) ни эътиборга олсак,

$$m\dot{r}^2 + \frac{C_1^2}{I_z + mr^2} = C_2, \qquad (10)$$

бунда $C_2 = \frac{h}{2}$.

Шундай қилиб, (8) кўринишдаги Лагранж иккинчи хил тенгламаларининг иккита биринчи интеграллари (9) ва (10) тенгликлар билан ифодаланади.

XXV боб

МЕХАНИК СИСТЕМАНИНГ КИЧИК ТЕБРАНИШИ

166- §. Механик системанинг кичик тебранма ҳаракати ва устувор мувозанати

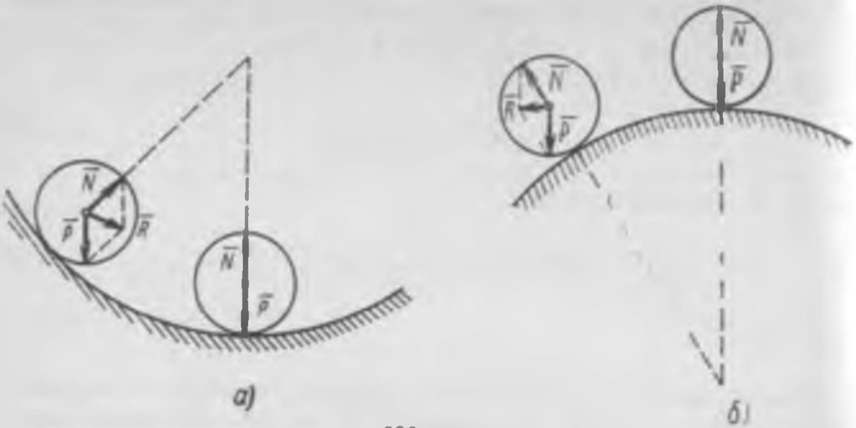
Техникада учрайдиган бир қанча масалаларда системанинг мувозанат ҳолати яқинида кичик амплитуда билан тебранишларини ҳисобга олишга тўғри келади. Бундай тебранишларга машина ва механизмлар пойдеворининг титраши, самолётларнинг титраши, ер силкинишларини ўлчайдиган сейсмометр асбобининг тебраниши мисол бўла олади.

Идеал ва голоном боғланишлар қўйилган механик системанинг ҳолати $q_1, q_2, \ldots, q_n$ умумлашган координаталар билан аниқланади.

Агар кичик тебранма ҳаракатдаги механик системанинг бошланғич мувозанат ҳолатини умумлашган координаталар системасининг боши учун қабул қилсак, у ҳолда система нуқталарининг мувозанат ҳолатидан кичик оғиши $q_1, q_2, \ldots, q_n$ ларнинг кичик қийматлари билан аниқланади.

Фараз қилайлик, механик система қўйилган кучлар таъсирида мувозанатда бўлсин. Агар система нуқталарига кичик бошланғич кўчиш ва кичик бошланғич тезлик бериш натижасида система нуқталари доимо мувозанат ҳолати яқинида қолса, системанинг бундай мувозанати *устувор мувозанат*, мувозанат ҳолатидан узоқлаша борса, *ноустувор мувозанат* дейилади.

Системанинг устувор мувозанатига аниқроқ таъриф бериш учун системанинг умумлашган координаталари ва умумлашган тезликларини номсиз катталикда оламиз. Бунинг учун уларнинг ҳар бирини мазкур координата (ёки тезлик) учун хос бўлган катталикка келтирамиз. Системанинг мувозанат ҳолатида $q_i = 0, (i = \overline{1,n})$ деб оламиз.



а) б)

266- расм.

Бирор t_0 пайтда системани мувозанат ҳолатидан оғдириб, системанинг шу пайтдаги умумлашган координата ва тезликларини q_{i0} ва $\dot{q}_{i0}$ билан белгилайлик. Агар исталганча кичик $\rho > 0$ сони учун шундай $\eta\ (\rho) > 0$ сонни топиш мумкин бўлсаки,

$$|q_{i0}| \leqslant \eta\ |\dot{q}_{i0}| \leqslant \eta,\ (i = \overline{1,n}) \qquad (25.1)$$

бўлганда $t > t_0$ учун

$$|q_i| < \rho, \quad (i = \overline{1,n}) \qquad (25.2)$$

тенгсизликни қаноатлантирадиган системанинг мувозанат ҳолати *Ляпунов таърифига кўра устувор мувозанат* дейилади. Акс ҳолда системанинг мувозанати *ноустувор мувозанат* дейилади.

$|q_i| = \rho$, $(i = \overline{1,n})$ тенгликлар n ўлчамли фазода системанинг мувозанат ҳолати яқинидаги бирор D соҳани ифодалайди. Мувозанат ҳолати устувор бўлган система мазкур ҳолатдан кичик огдирилгандан кейин ҳам D соҳада ҳаракатланади.

Сферик идиш ичидаги шарчанинг мувозанати устувор мувозанатга мисол бўла олади (266- расм, *а*): мувозанат ҳолатида шарчага оғирлик кучи $\overline{P}$ ва сферик сиртнинг нормал реакция кучи $\overline{N}$ дан иборат $(\overline{P}, \overline{N})$ мувозанатлашувчи кучлар таъсир этади. Сферик сирт ниҳоятда силлиқ бўлганда шарчани мувозанат ҳолатидан оғдирсак, унинг оғирлик кучи ва сирт нормал реакция кучларининг тенг таъсир этувчиси $\overline{R}$ шарчани мувозанат ҳолатига қайтаришга интилади.

Сферик гумбаз устида ҳам шарча мувозанатда бўлади (266- расм, *б*), лекин бу мувозанат ноустувордир. Чунки шарча мувозанат ҳолатидан оғдирилганда унинг оғирлик кучи ва сирт реакция кучларининг тенг таъсир этувчиси $\overline{R}$ шарчани мувозанат ҳолатидан узоқлаштиришга интилади.

Худди шунингдек, 55-масалада ҳам шарчанинг $\varphi = 180°$ ҳолатдаги мувозанати устувор мувозанатдир; $\varphi = 0°$ даги мувозанати эса ноустувор мувозанатдан иборат бўлади.

167- §. Системанинг мувозанати ҳақидаги Лагранж-Дирихле теоремаси

Идеал боғланишлар қўйилган механик система мувозанатда бўлиши учун, системанинг умумлашган кучлари нолга тенг бўлиши зарур ва етарли эканлиги мумкин бўлган кўчиш принципида баён этилган эди. Лекин бу теорема воситасида система мувозанатининг устуворлигини аниқлаб бўлмайди.

Механик система нуқталарига фақат потенциалли кучлар таъсир этсин. У ҳолда умумлашган кучлар потенциал энергия орқали

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}, \ (i = \overline{1,n})$$

формулалар билан ифодаланади. Шу сабабли системанинг мувозанат ҳолатида

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0, \ (i = \overline{1,n})$$

бўлади. Яъни голоном боғланишлар қўйилган потенциалли кучлар таъсиридаги механик системанинг мувозанат ҳолатида потенциал энергиянинг экстремумга эга бўлиши учун зарурий шартлар бажарилади.

Лагранж - Дирихле теоремаси воситасида система устувор мувозанатининг етарли шарти аниқланади; *агар голоном идеал ва стационар боғланишлар қўйилган, потенциалли кучлар таъсиридаги системанинг бирор ҳолатида унинг потенциал энергияси энг кичик (минимал) қийматга эришса, система бу ҳолатда устувор мувозанатда бўлади.*

Исбот. Координата бошини системанинг мувозанат ҳолатида олинса, системанинг мувозанат ҳолатида $q_i = 0$, $(i = \overline{1,n})$ бўлади. Потенциал энергиянинг қиймати ихтиёрий ўзгармасгача аниқлик билан ҳисобланади. Шу сабабли мувозанат ҳолатида уни нолга тенг деб қабул қилиш мумкин:

$$\Pi\ (0,0,\ \ldots,\ 0) = 0.$$

Агар мувозанат ҳолатида системанинг потенциал энергияси нолга тенг бўлса ва минимумга эришса, у ҳолда доимо шундай ихтиёрий кичик $\rho > 0$ сонни топиш мумкинки, $|q_i| \leqslant \rho$ тенгсизлик билан ифодаланадиган D соҳада П потенциал энергия мусбат бўлади.

Координаталардан бири D соҳанинг чегарасига тегишли $|q_i| = \rho$ қийматни қабул қиладиган, қолганлари эса ρ дан катта бўлмаган қуйидаги

$$P_1 = \Pi\ (\rho,\ q_2,\ \ldots,\ q_n),$$
$$P_2 = \Pi\ (q_1, \rho,\ \ldots,\ q_n)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$P_n = \Pi\ (q_1,\ q_2,\ \ldots,\ \rho),$$

функциялардан энг кичгини P билан белгилайлик. У ҳолда координаталардан бири миқдор жиҳатдан ρ га тенг, қолганлари ρ дан катта бўлмаганда, албатта $\Pi\ (q_1, q_2, \ldots, q_n) \geqslant P$ бўлади. Система координаталарига миқдор жиҳатдан ρ дан кичик $q_{10}, q_{20}, \ldots, q_{n0}$ қийматларни бериб, уни мувозанат ҳолатидан оғдирамиз ва система нуқталарига $\dot{q}_{10}, \dot{q}_{20}, \ldots, \dot{q}_{n0}$ бошланғич тезлик берамиз. Натижада система ҳаракатга келади ҳамда таъсир этувчи кучлар потенциалли, қўйилган боғланишлар стационар боғланишлардан иборат бўлгани учун энергиянинг сақланиш қонуни — энергия интеграли ўринли бўлади:

$$T + \Pi = T_0 + \Pi_0.$$

Бундан $T = T_0 + \Pi_0 - \Pi$. Ҳаракат давомида $T > 0$ бўлганидан

$$\Pi < T_0 + \Pi_0. \qquad (25.\ 3)$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Мувозанат ҳолатида $T_0 = 0, \Pi_0 = 0$ бўлгани учун система нуқталарига шундай бошланғич тезлик бериб мувозанат ҳолатидан оғдирамизки, $T_0 < \frac{1}{2} P$ ва $\Pi_0 < \frac{1}{2} P$ бўлсин. У ҳолда (25. 3) тенгсизликни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\Pi < P$$

ёки

$$P - \Pi > O. \qquad (25.\ 4)$$

(25. 4) дан кўрамизки, умумлашган координаталарнинг бошланғич қийматлари $|q_i| < \rho$ тенгсизлик билан ифодаланувчи D соҳа ичида ётганлиги туфайли ҳаракат давомида умумлашган координаталарнинг бирортаси ҳам ρ қийматга эриша олмайди (яъни система нуқталари D соҳадан чиқиб кетмайди), чунки акс ҳолда $P - \Pi$ манфий қийматга эга бўлиши керак; бу натижа (25. 4) га зиддир. Шундай қилиб, системанинг текширилаётган ҳолати устувор мувозанатдан иборат.

168-§. Эркинлик даражаси битта бўлган системанинг устувор мувозанат яқинидаги эркин тебраниши

Стационар боғланишлар қўйилган ва эркинлик даражаси битта бўлган механик системанинг консерватив кучлар таъсиридаги ҳаракатини текширамиз. Бундай системанинг ҳаракатини битта умумлашган q координата билан аниқлаш мумкин: Системанинг мувозанат ҳолати учун

$$q = 0$$

деб қараб, q ни шу ҳолатга нисбатан ҳисоблаймиз.

Система нуқталарига кичик кўчиш ва бошлангич тезлик бериб мувозанат ҳолатидан оғдирамиз. Системанинг бундай ҳаракати дифференциал тенгламасини Лагранжнинг иккинчи хил тенгламаси

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = Q^{П} \qquad (25.5)$$

воситасида аниқлаймиз. Бунда: T — системанинг кинетик энергияси; $Q^{П}$ — потенциалли умумлашган куч.

(25.5) ни тузиш учун T ни q ва $\dot{q}$ орқали ифодалаш керак. Системага қўйилган боғланишлар стационар боғланишдан иборат бўлгани учун система нуқталарининг x_k, y_k, z_k координаталарини ёки унинг ихтиёрий нуқтасининг $\overline{r}_k = x_k\overline{i} + y_k\overline{j} + z_k\overline{k}$ радиус-векторини умумлашган координата q орқали ифодалаш мумкин:

$$\overline{r}_k = \overline{r}_k\ (q). \qquad (25.6)$$

У ҳолда система нуқталарининг тезлиги

$$\overline{v}_k = \frac{d\overline{r}_k}{dt} = \frac{\partial \overline{r}_k}{\partial q}\dot{q} \qquad (25.7)$$

формуладан аниқланади. (25.7) ни назарда тутиб системанинг кинетик энергияси учун қуйидаги муносабатни оламиз:

$$T = \frac{1}{2}\sum m_k v_k^2 = \frac{1}{2}\left[\sum m_k\left(\frac{\partial \overline{r}_k}{\partial q}\right)^2\right]\cdot \dot{q}^2,$$

ёки (25.6) ни эътиборга олсак,

$$T = \frac{1}{2}A\ (q)\ \dot{q}^2 \qquad (25.8)$$

деб ёзиш мумкин, бунда $A\ (q) = \sum m_k\left(\frac{\partial \overline{r}_k}{\partial q}\right)^2$.

(25.8) дан $\frac{\partial T}{\partial q}$, $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}$, $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}$ ҳосилаларни ҳисоблаб, (25.5) га асосан системанинг ҳаракат дифференциал тенгламасини тузиш мумкин. $A\ (q)$ ва Q лар q нинг ихтиёрий функцияси бўлганда бундай тенглама чизиқли бўлмаган дифференциал тенгламадан иборат бўлади ва уни умумий ҳолда ечиш, бинобарин, системанинг ҳаракатини аниқлаш анча мураккабдир.

Шу сабабли системанинг мувозанат ҳолати яқинидаги кичик ҳаракатини текшириш билан чекланамиз. Системанинг мувозанат ҳолатида $q = 0$ бўлганидан системанинг мувозанат ҳолати яқинида q ва $\dot{q}$ ларни кичик миқдорлар деб қараш мумкин. (25. 5) да q ва $\dot{q}$ кичик миқдорларнинг фақат биринчи даражали ҳадларини сақлаб, бу тенгламани соддалаштирамиз. У ҳолда тенглама чизиқли тенгламадан иборат бўлади ва уни осонгина интеграллаш мумкин. Бу ҳолдаги системаларнинг тебраниши *чизиқли тебраниш* дейилади.

(25. 5) ни чизиқли тенгламага келтириш учун системанинг кинетик энергиясини тақрибий ҳисоблаймиз. Бунинг учун системанинг кинетик энергиясини ҳисоблашда иккинчи тартибли кичик миқдорлар билан

чекланамиз. У ҳолда (25. 5) га кирувчи $\frac{\partial T}{\partial q}$ ва $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}$ ҳосилалар 1-тартибли кичик миқдоргача аниқлик билан ҳисобланади.

A (q) ни $q = 0$ соҳада Тейлор қаторига ёямиз:

$$A\ (q) = A\ (0) + \frac{\partial A(0)}{\partial q} q + \ \ldots \qquad (25.9)$$

T ни 2-тартибли кичик миқдоргача аниқлик билан ҳисобланганлиги туфайли (25.9) да фақат A (0) ҳадни олиш кифоя, чунки $q \cdot \dot{q}^2$ кўпайтма 3-даражали кичик миқдорни ифодалайди.
Агар

$$A(0) = a \qquad (25.10)$$

белгилаш киритсак, (25.8) га кўра системанинг кинетик энергияси тақрибан қуйидагича ҳисобланади:

$$T = \frac{1}{2} a \dot{q}^2. \qquad (25.11)$$

Бунда a ўзгармас мусбат катталикдир, чунки кинетик энергия доимо мусбат қийматга эга бўлади. Системанинг кичик ҳаракати қаралаётганда a коэффициент физик моҳияти бўйича жисмнинг инертлик хусусиятини ифодалайди ва *инерцион доимий* дейилади.

(25.11) дан кўрамизки, агар умумлашган координата узунлик ўлчовига эга бўлса, у ҳолда q чизиқли тезликни ифодалайди, бинобарин, a коэффициент масса билан бир хил ўлчовга эга бўлади; агар q бурчак ўлчовида олинса, у ҳолда $\dot{q}$ бурчак тезликни ифодалайди ва a инерция моменти ўлчовига эга бўлади ва ҳоказо.

Система нуқталарига потенциалли кучлар таъсир этганлиги туфайли умумлашган куч

$$Q^{\Pi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q}. \qquad (25.12)$$

формуладан ҳисобланади. Бунда П — системанинг потенциал энергияси.

Потенциал энергияни $q = 0$ атрофида қаторга ёямиз:

$$\Pi = \Pi_0 + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q}\right)_0 q + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2}\right)_0 q^2 + \ldots, \qquad (25.13)$$

бунда 0 индекси билан П функция ва унинг ҳосилаларининг система мувозанат ҳолатидаги қийматлари кўрсатилган. Системанинг мувозанат ҳолатида $\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q}\right) = 0$ бўлади. Системанинг потенциал энергияси ихтиёрий ўзгармасгача аниқлик билан ҳисоблангани учун мувозанат ҳолатида $\Pi_0 = 0$ деб олиш мумкин. У ҳолда (25.13) да q кичик бўлганда учинчи тартибли ҳадларни эътиборга олмасак,

$$\Pi = \frac{1}{2} cq^2 \qquad (25.14)$$

бўлади. Бунда $c = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2}$ — ўзгармас коэффициент бўлиб, *квазиэластик доимий* дейилади.

(25.12) ва (25.14) га асосан умумлашган куч учун қуйидаги ифодани оламиз:

$$Q^{\Pi} = -cq. \qquad (25.15)$$

Бундай куч *қайтарувчи куч* дейилади. Эластиклик кучи қайтарувчи кучга мисол бўла олади. (25.11) ва (25.15) ни назарда тутиб, Лагранжнинг иккинчи хил тенгламаси (25.5) ни тузамиз. Биз текшираётган ҳол учун

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot q} = a\ddot q, \quad \frac{\partial T}{\partial q} = 0$$

бўлади. Шунга кўра ҳаракат тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$a\ddot q + cq = 0. \qquad (25.16)$$

$c = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2} > 0$ бўлсин. У ҳолда потенциал энергия системанинг мувозанат ҳолатида минимумга эришади ва системанинг ҳаракати устувор мувозанат ҳолат яқинида содир бўлади.

(25.16) да $\frac{c}{a} = k^2$ белгилаш киритсак, ҳаракат тенгламаси

$$\ddot q + k^2 q = 0 \qquad (25.17)$$

кўринишда ёзилади. Бу тарздаги тенгламалар (худди математик маятник ёки физик маятник тенгламалари каби) гармоник тебранма ҳаракатни ифодалайди. Бундай ҳаракат *эркин тебранма ҳаракат* дейилади.

Шундай қилиб, *эркинлик даражаси битта бўлган системанинг устувор мувозанат яқинидаги кичик тебраниши нуқтанинг эркин тебранма ҳаракатига келтирилар экан.*

(25.17) тенгламанинг умумий ечими

$$q = A \sin (kt + \alpha) \qquad (25.18)$$

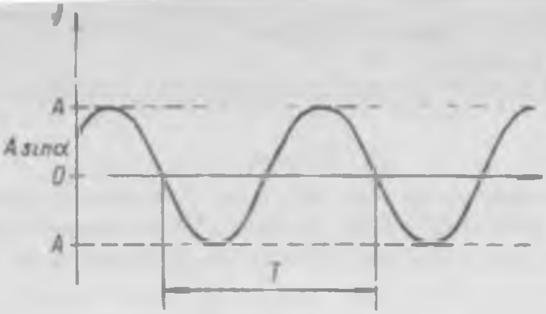
кўринишида ёзилади. Бунда: A — тебраниш амплитудаси; α — бошланғич фаза бўлиб, ҳаракатнинг бошланғич шартларидан аниқланади; $k = \sqrt{\frac{c}{a}}$ — тебраниш частотаси.

$t = 0$ бўлганда $q = q_0$, $\dot q = \dot q_0$ бўлсин. У ҳолда

$$A = \sqrt{q_0^2 + \frac{\dot q_0^2}{k^2}}, \quad \mathrm{tg}\alpha = \frac{kq_0}{\dot q_0} \qquad (25.19)$$

келиб чиқади. Тебраниш даври

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{c}{a}} \qquad (25.20)$$



267- расм.

формуладан аниқланади.

Гармоник тебранма ҳаракат графиги 267-расмдагидек бўлади.

Агар потенциал энергияни қаторга ёйганда $\frac{\partial^2\Pi}{\partial q^2} < 0$ бўлса, у ҳолда $\frac{\partial^2\Pi}{\partial q^2} = -b$ белгилаш киритсак, (25.17) тенглама ўрнига қуйидагини оламиз:

$$\ddot{q} - \omega^2 q = 0, \tag{25.21}$$

бунда

$$\omega^2 = \frac{b}{a},$$

(25.21) тенглама учун характеристик тенглама тузсак,

$$\lambda^2 - \omega^2 = 0$$

бўлади. Бу тенгламанинг $\lambda_{1,2} = \pm\omega$ илдизлари ҳақиқий бўлгани учун (25.21) нинг умумий ечими

$$q = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t} \tag{25.22}$$

кўринишда ёзилади. Бунда C_1 ва C_2 лар интеграллаш доимийлари бўлиб, ҳаракатнинг бошланғич шартларидан аниқланади.

(25.22) дан кўрамизки, бошланғич шартлар исталганча кичик бўлишига қарамай, вақт ўтиши билан q координата орта боради.

Бинобарин, бу ҳолда система бошлангич ҳолатдан исталганча кичик оғдирилганда берилган кучлар таъсирида система мувозанат ҳолатидан узоқлаша боради, яъни системанинг бундай мувозанат ҳолати ноустувор бўлади.

62-масала. Чўзилмайдиган AB ип қўзғалмас O нуқтадан ўтувчи горизонтал ўқ атрофида айлана оладиган блок орқали ўтказилган. Блокнинг оғирлиги G га тенг бўлиб, унинг массаси ғилдирак тўғини бўйлаб бир текис тақсимланган. Ипнинг B учи қаттиқлик коэффициенти C га тенг вертикал пружинага боғланган; ипнинг A учига эса оғирлиги P га тенг юк осилган (268- расм).

Бошланғич пайтда A юк пружинанинг эластиклик кучи билан мувозанатлашади деб қараб, юкка вертикал тарзда пастга йўналган кичик v_0 бошланғич тезлик берилгандаги юкнинг тебранма ҳаракати аниқлансин. Блок ўқида ва подшипникда ҳосил бўладиган ишқаланиш кучи, ипнинг оғирлиги ҳисобга олинмасин.

268- расм.

Ечиш. Юкнинг ҳаракатини аниқлаш учун Лагранжнинг иккинчи хил тенгламаларини тузамиз. Координаталар бошини юкнинг мувозанат ҳолатида олиб, x ўқни вертикал тарзда пастга йўналтирамиз. У ҳолда юкнинг ихтиёрий ҳолатини x координата орқали тўлиқ аниқлай оламиз, бинобарин, умумлашган координата учун x ни олиш мумкин.

Агар блок ва юкнинг кинетик энергияларини мос равишда T_1 ва T_2 билан белгиласак, у ҳолда блок ва юкдан ташкил топган системанинг кинетик энергияси учун

$$T = T_1 + T_2 \tag{1}$$

тенглик ўринли бўлади.

Блок қўзғалмас ўқ атрофида айланма ҳаракатда бўлгани учун

$$T_1 = \frac{I_z \dot{\varphi}^2}{2} = \frac{1}{2}\frac{Qr^2}{2g}\dot{\varphi}^2, \tag{2}$$

бунда: $I_z = \frac{Qr^2}{2g}$ — блокнинг z ўққа нисбатан инерция моменти; $\dot{\varphi}$ — блокнинг z ўқ атрофидаги айланма ҳаракати бурчак тезлиги.

Юк тўғри чизиқли ҳаракатда бўлгани учун

$$T_2 = \frac{m\dot{x}^2}{2} = \frac{P\dot{x}^2}{2g}. \tag{3}$$

Ип чўзилмагани ҳамда ип блок сирти бўйлаб сирпанмагани туфайли юкнинг тезлиги ғилдирак тўғинидаги нуқтанинг тезлигига тенг:

$$\dot{x} = r\dot{\varphi}. \tag{4}$$

(2) — (4) ларни назарда тутиб, (1) ни қуйидагича ёза оламиз:

$$T = \frac{1}{2g}\left(P + \frac{G}{2}\right)\dot{x}^2. \tag{5}$$

Умумлашган кучни ҳисоблаш учун юкка δx мумкин бўлган кўчиш берамиз ва берилган кучларнинг мазкур кўчишдаги ишларини ҳисоблаймиз:

$$\delta A = P\,\delta x - c\,(x + \lambda_{ст})\,\delta x.$$

бунда $\lambda_{ст}$ — пружинанинг статик чўзилиши. Мувозанат ҳолатида $P = c\lambda_{ст}$ бўлгани учун

$$\delta A = -cx\,\delta x.$$

Умумлашган куч учун

$$Q_x = \frac{\delta A}{\delta x} = -cx \tag{6}$$

тенглик ўринли бўлади.

Бу масалада умумлашган кучни бошқача усулда ҳам ҳисоблаш мумкин. Бунинг учун юкнинг мувозанат ҳолатида потенциал энергияни нолга тенг деб ҳисобласак, у ҳолда

$$\Pi = \frac{1}{2} cx^2.$$

(25.12) га кўра

$$Q_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} = -cx$$

бўлиб, бу натижа (6) билан мос келади.

Бу масалада $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} = c > 0$ бўлгани учун потенциал энергия мувозанат ҳолатида минимумга эришади ва системанинг ҳаракати устувор мувозанат ҳолати яқинида содир бўлади.

Система учун

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x \tag{7}$$

кўринишдаги Лагранжнинг иккинчи хил тенгламаларини тузиш учун зарур бўлган кинетик энергиянинг ҳосилаларини ҳисоблаймиз:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{1}{g}\left(P + \frac{G}{2}\right)\dot{x}, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{1}{g}\left(P + \frac{G}{2}\right)\ddot{x}, \\ &\frac{\partial T}{\partial x} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

(6) ва (8) ларни (7) га қўйиб, Лагранжнинг иккинчи хил тенгламасини

$$\frac{1}{g}\left(P + \frac{G}{2}\right)\ddot{x} = -cx$$

ёки

$$\ddot{x} + k^2 x = 0 \tag{9}$$

кўринишда ёза оламиз. Бунда

$$k^2 = \frac{cg}{P + 0,5G}.$$

(25.18) га кўра, (9) нинг умумий ечимини қуйидагича ифодалаймиз:

$$x = A \sin(kt + \alpha). \tag{10}$$

(10) даги A ва α лар интеграллаш доимийлари бўлиб, ҳаракатнинг бошланғич шартларидан аниқланади. Масаланинг шартига кўра бошланғич

$$t = 0 \text{ пайтда } \ x = 0, \ \ \dot{x} = 0. \qquad (11)$$

(10) дан вақт бўйича қосила оламиз:

$$\dot{x} = Ak\cos(kt + \alpha). \qquad (12)$$

(11) ни (10) ва (12) ларга қўйсак,

$$\left.\begin{aligned} 0 &= A\sin\alpha, \\ v_0 &= Ak\cos\alpha, \end{aligned}\right\}$$

бундан α ва k ларни аниқлаймиз:

$$\alpha = 0;$$

$$k = \frac{v_0}{A}.$$

α ва k нинг бу қийматларини (10) га қўйиб, юкнинг тебранма ҳаракат қонунини аниқлаймиз:

$$x = \frac{v_0}{k}\sin kt.$$

(25.20) га кўра, юкнинг тебранма ҳаракат даври учун

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{P + 0{,}5G}{cg}}$$

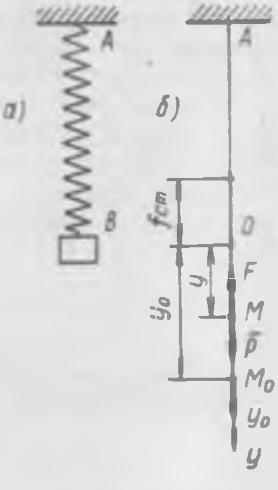
формула ўринлидир.

Изоҳ. Моддий нуқтанинг тўғри чизиқли тебранма ҳаракатига оид масалаларни ечишда Лагранжнинг иккинчи хил тенгламаларини тузиш ўрнига нуқта динамикасининг асосий қонунидан фойдаланиш ҳам мумкин.

63-масала. Оғирлиги P га тенг юк A учи қўзғалмас қилиб бириктирилган AB пружинага осилган (269-расм, *а*). Юк тинч ҳолатда турганда пружинанинг чўзилиши $f_{\text{ст}}$ га тенг. Юк бошланғич пайтда вертикал бўйича пастга y_0 масофага силжитилиб, $\dot{y}_0$ тезлик билан қўйиб юборилган. Пружинанинг массасини ҳисобга олмай юкнинг ҳаракати аниқлансин.

Ечиш. Юкни моддий нуқта деб қабул қилиб, y ўқни юкнинг тўғри чизиқли ҳаракат траекторияси бўйлаб вертикал тарзда пастга йўналтирамиз. Координата боши учун юкнинг тинч ҳолатини оламиз (269-расм, *б*).

Масаланинг шартига кўра бошланғич шартлар қуйидагича бўлади: $t = 0$ да $y = y_0$,



269- расм.

$\dot{y} = \dot{y}_0$, яъни бошланғич пайтда юк y_0 координатага мос бўлган M_0 ҳолатни эгаллайди ва $\dot{y}_0$ бошланғич тезлик билан ҳаракатланади. Юкка унинг оғирлик кучи $\overline{P}$ ва миқдор жиҳатдан пружинанинг деформациясига мутаносиб бўлган эластиклик кучи $\overline{F}$ таъсир этади.

Юк y координата билан аниқланадиган M ҳолатни эгаллагаида пружинанинг деформацияси

$$f_{ст} + y$$

га тенг ва эластиклик кучининг миқдори

$$F = c\,(f_{ст} + y)$$

формуладан аниқланади; бунда c пружинанинг *бикрлик коэффициентидир*. $\overline{F}$ кучни y ўққа проекцияласак

$$F_y = -c\,(f_{ст} + y).$$

Юк тинч ҳолатда бўлганда унинг оғирлиги, миқдори $F_{ст} = cf_{ст}$ бўлган эластиклик кучи билан мувозанатлашади:

$$P = F_{ст} = cf_{ст}, \tag{1}$$

бундан

$$c = \frac{P}{f_{ст}}. \tag{2}$$

Юкнинг ҳаракат тенгламасини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$m\ddot{y} = P - c\,(f_{ст} + y). \tag{3}$$

$P = mg$ эканлигини назарда тутиб, (2) га кўра пружинага осилган юкнинг ҳаракат дифференциал тенгламаси (3) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\ddot{y} + \frac{g}{f_{ст}}\,y = 0 \tag{4}$$

ёки

$$\ddot{y} + k^2 y = 0,$$

бунда

$$k = \sqrt{\frac{g}{f_{ст}}}$$

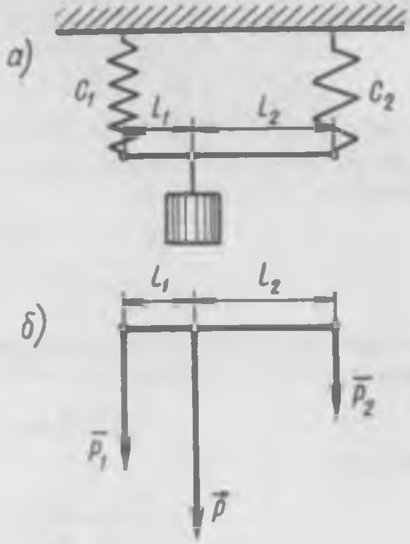
юкнинг эркин тебраниш частотасини ифодалайди.

Юкнинг тебраниш даври

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{f_{ст}}{g}}. \tag{5}$$

формуладан аниқланади.

270- расм.



271- расм.

(25.18) га асосан юкнинг ҳаракат қонунини

$$y = A\sin\left(\sqrt{\frac{g}{f_{\text{ст}}}}t + \alpha\right)$$

кўринишда ёзиш мумкин. (25.19) ва берилган бошланғич шартларга кўра

$$A = \sqrt{y_0^2 + \frac{\dot{y}_0^2}{k^2}}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{ky_0}{\dot{y}_0}$$

64-масала. Оғирлиги P га тенг бўлган юк бикрлик коэффициентлари c_1 ва c_2 бўлган пружиналарга осилган. Пружиналар кетма-кет ва параллел уланганда юкнинг эркин тебраниш даври аниқлансин (270- расм, 271- расм, *а*). Юк шундай ўрнатилганки, параллел бириктирилган иккала пружина ҳам бир хил узунликка чўзилади.

Ечиш. Юк осилган пружиналар кетма-кет уланганда уларнинг умумий статик чўзилиши иккала пружина чўзилишининг йиғиндисига тенг. Шу сабабли

$$f_{\text{ст}} = f_{1\text{ст}} + f_{2\text{ст}} = \frac{P}{c_1} + \frac{P}{c_2} = P\frac{c_1 + c_2}{c_1 \cdot c_2}.$$

Шундай қилиб, пружиналар кетма-кет уланганда уларга эквивалент бўлган пружинанинг бикрлик коэффициенти

$$c = \frac{c_1 \cdot c_2}{c_1 + c_2}$$

бўлади.

Юкнинг эркин тебраниш даврини (5) га асосан аниқлаш мумкин:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{f_{\text{ст}}}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{P(c_1 + c_2)}{g(c_1 \cdot c_2)}}. \tag{6}$$

Пружиналар параллел равишда бириктирилганда пружинани чўзувчи $\overline{P}_1$ ва $\overline{P}_2$ кучлар $\overline{P}$ кучнинг параллел ташкил этувчилари сифатида аниқланади (271-расм, *б*).

$$P_1 + P_2 = P,$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{l_2}{l_1}. \tag{7}$$

Масаланинг шартига кўра иккала пружинанинг чўзилиши бир хил бўлиши керак:

$$f_{1\text{ст}} = f_{2\text{ст}},$$

ёки (2) га кўра

$$\frac{P_1}{c_1} = \frac{P_2}{c_2}. \tag{8}$$

(7) ва (8) пропорциялардан пружиналарнинг бир хил чўзилиш шартини оламиз:

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{c_1}{c_2}.$$

(8) га кўра ҳар бир пружинанинг статик чўзилишини топамиз:

$$f_{\text{ст}} = \frac{P_1}{c_1} = \frac{P_2}{c_2} = \frac{P_1 + P_2}{c_1 + c_2} = \frac{P}{c_1 + c_2}.$$

Юкнинг тебраниш даври учун

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{f_{\text{ст}}}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{P}{q(c_1 + c_2)}} \tag{9}$$

формула ўринли бўлади.

169-§. Эркинлик даражаси битта бўлган системанинг муҳит қаршилиги таъсиридаги сўнувчи тебранма ҳаракати

Техникада учрайдиган муайян масалаларни ечишда, система нуқталарига таъсир этувчи қайтарувчи кучдан ташқари, муҳитнинг қаршилик кучини эътиборга олишга тўғри келади. Бундай системанинг мувозанат ҳолати яқинидаги кичик тебранишларини ўрганишда системанинг ҳар бир нуқтасига таъсир этувчи $\overline{R}_k$ қаршилик кучини мазкур нуқталарнинг тезликларига мутаносиб деб қараймиз:

$$\overline{R}_k = -\mu_k \overline{v}_k, \tag{25.23}$$

бунда μ_k — ўзгармас *қаршилик коэффициенти*. (25.23) даги манфий ишора қаршилик кучи тезликка тескари йўналганлигини ифодалайди. Қаршилик кучига мос бўлган умумлашган куч

$$Q^R = \sum \overline{R}_k \cdot \frac{\partial \overline{r}_k}{\partial q}.$$

формуладан аниқланади. Юқорида кўрганимиздек, $\frac{\partial r_k}{\partial q} = \frac{\partial \dot{\overline{r}}_k}{\partial \dot{q}}$ ҳамда $\overline{v}_k = \dot{\overline{r}}_k$ бўлгани учун

$$Q^R = -\sum \mu_k \overline{v}_k \cdot \frac{\partial \dot{\overline{r}}_k}{\partial \dot{q}} = -\frac{\partial}{\partial \dot{q}} \sum \frac{\mu_k \overline{v}_k^2}{2} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}},$$

бундаги $\Phi = \sum \mu_k \overline{v}_k^2$ ни *Рэлейнинг диссипатив функцияси* дейилади.

Система нуқталарига стационар боғланиш қўйилгани учун

$$\overline{r}_k = \overline{r}_k(q)$$

ва

$$\overline{v}_k = \frac{\partial \overline{r}_k}{\partial q} \dot{q}$$

бўлади. Шу сабабли бундай система учун

$$\Phi = \frac{1}{2} \dot{q}^2 \sum \mu_k \left(\frac{\partial \overline{r}_k}{\partial q} \right)^2 = \frac{1}{2} B(q)\, \dot{q}_2, \qquad (25.24)$$

бунда

$$B(q) = \sum \mu_k \left(\frac{\partial \overline{r}_k}{\partial q} \right)^2.$$

Диссипатив функциянинг физик маъносини аниқлаш мақсадида қаралаётган система учун Лагранжнинг иккинчи хил тенгламаларини ёзамиз:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}}. \qquad (25.25)$$

Бу тенгламани $\dot{q}$ га кўпайтирсак,

$$\dot{q} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} \right) = -\frac{\partial \Pi}{\partial q} \dot{q} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} \dot{q} \qquad (25.26)$$

бўлади. Бунда

$$\dot{q} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} \right) = \frac{d}{dt} \left(\dot{q} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \left(\ddot{q} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} + \dot{q} \frac{\partial T}{\partial q} \right).$$

Эйлернинг бир жинсли функциялар ҳақидаги теоремасига кўра

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \dot{q} = 2T.$$

Бундан ташқари,

$$\ddot{q}\,\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} + \dot{q}\,\frac{\partial T}{\partial q} = \frac{dT}{dt}$$

тенглик ўринли бўлади,

Худди шунингдек,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}}\,\dot{q} = 2\Phi, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}}\,\dot{q} = \frac{d\Pi}{dt}$$

бўлгани учун (25.26) ни қуйидагича ёза оламиз:

$$\frac{d(T+\Pi)}{dt} = -2\,\Phi$$

ёки

$$\frac{dE}{dt} = -2\,\Phi,$$

бунда $E = T + \Pi$ тўлиқ механик энергияни ифодалайди.

Шундай қилиб, *тўлиқ механик энергиянинг вақт бирлиги ичидаги сарфи Рэлей диссипатив функциясининг икки ҳисса қийматига тенг бўлар экан.*

Эркинлик даражаси битта бўлган система учун (25.11), (25.14) ва (25.24) ларни эътиборга олиб, унинг кичик тебранма ҳаракати дифференциал тенгламаси (25.25) га кўра қуйидагича ёзилади:

$$a\ddot{q} + \mu\dot{q} + cq = 0$$

ёки

$$\ddot{q} + 2b\dot{q} + k^2 q = 0 \qquad (25.27)$$

Бунда $\frac{c}{a} = k^2$, $\frac{\mu}{a} = 2b$ белгилаш киритилган. (25.27) учун

$$\lambda^2 + 2b\lambda + k^2 = 0$$

характеристик тенглама тузиб, унинг илдизларини аниқлаймиз:

$$\lambda_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - k^2}\,. \qquad (25.28)$$

Агар $k > b$, яъни қаршилик қайтарувчи кучга нисбатан кичик бўлса, $k^2 - b^2 = k_1^2$ белгилаш киритиб, характеристик тенгламанинг илдизларини

$$\lambda_{1,2} = -b \pm ik_1$$

кўринишда топамиз.

У ҳолда (25.27) тенгламанинг умумий ечими системанинг эркин тебранма ҳаракати ечими (25.18) дан фақат e^{-bt} ҳади билан фарқ қилади. Ҳақиқатан ҳам, кўрилаётган ҳолда

$$q = e^{-bt}(C_1 \sin k_1 t + C_2 \cos k_1 t) \qquad (25.29)$$

бўлади. Бунда C_1 ва C_2 лар интеграллаш доимийларидир.

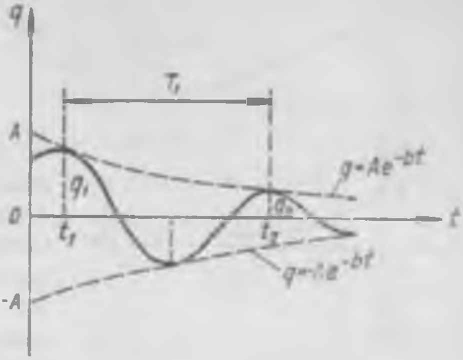
(25.29) да

$$C_1 = A\cos\alpha,\ C_2 = A\sin\alpha$$

алмаштириш киритсак (бунда A ва C ўзгармас миқдорлар),

$$q = Ae^{-bt}\sin(k_1t + \alpha) \quad (25.30)$$

муносабатни оламиз. Бунда A ва α лар ҳаракатнинг бошланғич шартларидан аниқланади.



272- расм.

(25.30) қонун асосида содир бўладиган тебранма ҳаракат сўнувчи тебранма ҳаракатни ифодалайди, чунки вақт ўтиши билан e^{-bt} ҳад туфайли q координата камая боради ва нолга интилади. Бинобарин, бу ҳолда система ўзининг мувозанат ҳолатига яқинлаша боради.

Сўнувчи тебранма ҳаракат графиги 272-расмда тасвирланган. Бу график пунктир чизиқ билан чизилган $q = Ae^{-bt}$ ва $q = -Ae^{-bt}$ чизиқлар орасида ётади, чунки $\sin(k_1t + \alpha)$ миқдор жиҳатдан бирдан катта бўла олмайди.

(25.30) дан кўрамизки, $\sin(k_1t + \alpha)$ кўпайтувчи ҳисобига система тебранма ҳаракатда бўлади ва вақт ўтиши билан бу ҳаракат амплитудаси камая боради. Сўнувчи тебранма ҳаракат даври $\sin(k_1t + \alpha)$ нинг даврига тенг бўлади ва $k_1T_1 = 2\pi$ формуладан аниқланади. Шундай қилиб,

$$T_1 = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - b^2}}. \quad (25.31)$$

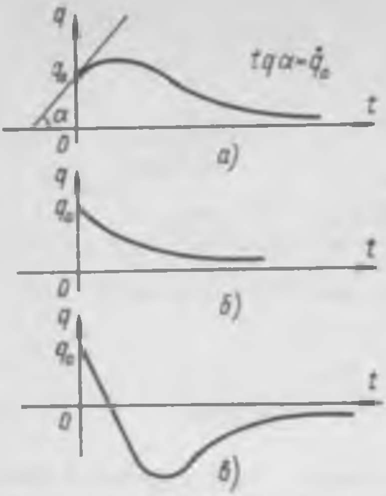
T_1 вақт ичида система бир марта тебранишини 272-расмдан яққол кўриш мумкин.

(25.31) ни эркин тебранма ҳаракат даври (25.20) билан солиштириб $T_1 > T$ бўлишини кўрамиз. $b \ll k$ бўлганда $T_1 \approx T$ деб олиш мумкин. Бинобарин, қаршилик кичик бўлганда системанинг эркин тебранма ҳаракат даври билан сўнувчи тебранма ҳаракат даври деярли бир-биридан фарқ қилмайди.

Вақт ўтиши билан сўнувчи тебранма ҳаракат амплитудаси қандай ўзгаришини аниқлаш учун системанинг мувозанат ҳолатидан биринчи энг катта оғишини $q_1(q_1 > 0)$ билан, шу ондаги вақтни t_1 билан, иккинчи энг катта оғишини $q_2(q_2 > 0)$ билан ва унга мос вақтни t_2 билан белгиласак, $t_2 = t_1 + T_1$ бўлади. Шу сабабли (25.30) да $k_1T_1 = 2\pi$ эканини назарда тутиб

$$q_1 = Ae^{-bt_1}\sin(k_1t_1 + \alpha),$$

$$q_2 = Ae^{-b(t_1+T_1)}\sin(k_1t_1 + \alpha) = q_1e^{-bT_1}$$



273- расм.

муносабатларни оламиз. Шунга ўхшаш ихтиёрий q_{n+1} учун

$$q_{n+1}=q_n e^{-bT_1}$$

тенглик ўринли бўлади.

Шундай қилиб, *сўнувчи тебранма ҳаракат амплитудаси геометрик прогрессия қонуни асосида камайиб боради*. Тебранишнинг сўнишини ифодалайдиган e^{-bT_1} катталик *тебраниш декременти* дейилади. Бу декремент модулининг логарифмига тенг бўлган bT_1 катталик *логарифмик декремент* дейилади.

Агар $b>k$, яъни қайтарувчи кучга нисбатан қаршилик кучи катта бўлса, у ҳолда

$$b^2-k^2=n^2$$

белгилаш киритамиз. Натижада характеристик тенгламанинг илдизлари қуйидагича бўлади:

$$\lambda_{1,2}=-b\pm n,$$

яъни иккала илдизи ҳам ҳақиқий ва манфий бўлади.

Бинобарин, (25.27) тенгламанинг умумий ечимини ушбу кўринишда ёзиш мумкин:

$$q=C_1e^{-(b+n)t}+C_2e^{-(b-n)t}. \qquad (25.32)$$

Бу тенглама билан ифодаланадиган ҳаракат тебранма ҳаракатдан иборат бўлмайди. q координата вақт ўтиши билан нолга интилади. Бундай ҳаракат графиги q ва $\dot{q}$ ларнинг бошланғич қийматларига қараб 272-расмда тасвирланган графикларнинг бирортаси каби бўлади.

Агар $b=k$ бўлса, $\lambda_1=\lambda_2=-b$ бўлади ва (25.27) тенгламанинг умумий ечими

$$q=e^{-bt}(C_1+C_2t).$$

кўринишда ёзилади. Бунда e^{-bt} катталик t га нисбатан тезроқ нолга интилгани учун ҳаракат графиги 273- расмдагига ўхшаш бўлади.

170- §. Эркинлик даражаси битта бўлган системанинг мажбурий тебранма ҳаракати

Эркинлик даражаси битта бўлган система нуқталарига потенциалли қайтарувчи куч, тезликнинг биринчи даражасига мутаносиб равишда ўзгарувчи муҳитнинг қаршилик кучи ва вақт функциясидан иборат *уйғотувчи куч* таъсир этсин. Уйғотувчи кучга мос бўлган умумлашган кучни

$$Q=Q_0\sin pt \qquad (25.33)$$

қонун асосида ўзгаради деб қарайлик. У ҳолда бундай кучлар таъсиридаги системанинг ҳаракати *мажбурий тебранма ҳаракат* дейилади. Мажбурий тебранма ҳаракат дифференциал тенгламасини чиқариш учун (25.11), (25.14), (25.24) ва (25.33) ларни эътиборга олиб, Лагранж тенгламасини тузамиз:

$$a\ddot{q} + \mu_0\dot{q} + cq = Q\sin pt.$$

Бу тенгламанинг иккала томонини a га бўлиб,

$$\frac{c}{a} = k^2, \quad \frac{\mu_0}{a} = 2b, \quad \frac{Q_0}{a} = P_0$$

белгилашлар киритсак,

$$\ddot{q} + 2bq + k^2q = P_0\sin pt \qquad (25.34)$$

тенгламани оламиз. (25.34) тенглама *эркинлик даражаси битта бўлган системанинг кичик мажбурий тебранма ҳаракати дифференциал тенгламасини* ифодалайди.

Дифференциал тенгламалар назариясидан маълумки, бундай ўзгармас коэффициентли, чизиқли ва бир жинслимас дифференциал тенгламаларнинг умумий ечими қуйидагича ёзилади:

$$q = q_1 + q_2,$$

бунда q_1 (25.34) га мос бўлган бир жинсли дифференциал тенглама (25.27) нинг умумий ечимини, q_2 эса (25.34) тенгламанинг бирор хусусий ечимини ифодалайди.

$k > b$ бўлганда (25.27) тенгламанинг умумий ечими

$$q_1 = Ae^{-bt}\,\mathrm{stn}(k_1t + \alpha)$$

кўринишда ифодаланиши бизга маълум.

(25.34) тенгламанинг ўнг томонида $\sin pt$ функция қатнашгани учун бу тенгламанинг хусусий ечимини

$$q_2 = B\sin(pt - \beta) \qquad (25.35)$$

кўринишда оламиз. Бунда B ва β лар ўзгармас миқдорлар бўлиб, уларни шундай танлаш керакки, (25.34) да q нинг ўрнига q_2 ни қўйганда у айниятга айлансин. Бунинг учун дастлаб қуйидаги ҳосилаларни ҳисоблаймиз:

$$\frac{dq_2}{dt} = Bp\cos(pt - \beta), \quad \frac{d^2q_2}{dt^2} = -Bp^2\sin(pt - \beta) \qquad (25.36)$$

$pt - \beta = \theta$ белгилаш киритамиз. $\sin pt = \sin(\theta + \beta)$ эканини назарда тутиб, (25.35) ва (25.36) ларни (25.34) га қўямиз:

$$B(k^2 - p^2)\sin\theta + 2bp\cos\theta = P_0(\sin\beta\cdot\cos\theta + \cos\beta\cdot\sin\theta).$$

Бу тенглик t вақтнинг ёки θ бурчакнинг ҳар қандай қийматида ўринли бўлиши учун унинг чап ва ўнг томонидаги $\sin\theta$ ва $\cos\theta$ олдидаги коэффициентлар мос равишда тенг бўлиши керак:

$$B(k^2 - p^2) = P_0\cos\beta; \quad 2bB = P_0\sin\beta. \qquad (25.37)$$

Бу тенгликларнинг иккала томонини ҳадлаб бўлиш ва квадратга ошириб қўшиш натижасида

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{2bp}{k^2-p^2}, \qquad (25.38)$$

$$B = \frac{P_0}{\sqrt{(k^2-p^2)^2+4\,b^2p^2}} \qquad (25.39)$$

ифодаларни ҳосил қиламиз.

Шундай қилиб, (25 34) тенгламанинг умумий ечимини

$$q = Ae^{-bt}\sin(k_1t+\alpha)+B\sin(pt-\beta) \qquad (25.40)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бундаги A ва α лар интеграллаш доимийлари бўлиб, ҳаракатнинг бошланғич шартларидан аниқланади; β ва B лар эса (25.38) ва (25.39) фсрмулалар ёрдамида аниқланади.

(25.40) дан кўрамизки, системанинг тебраниши мураккаб тебранма ҳаракатдан иборат бўлиб, уни системанинг сўнувчи тебранма ҳаракати ва мажбурий тебранма ҳаракатларидан ташкил топган деб қараш мумкин.

Вақт ўтиши билан (25.40) даги биринчи ҳад нолга интилади, яъни сўнувчи тебранма ҳаракат йўқолиб, ҳаракат асосан

$$q = q_2 = B\sin(pt-\beta)$$

мажбурий тебранма ҳаракатдан иборат бўлади. Бу тенгликдан кўрамизки, системанинг мажбурий тебранма ҳаракати бошлангич шартларга боғлиқ бўлмай, фақат (25.39) ёрдамида аниқланадиган B амплитуда ва уйготувчи кучнинг частотасига тенг бўлган частота билан содир бўлади. Шундай қилиб, уйғотувчи куч системани ўз частотасига мос равишда тебранишга мажбур этади.

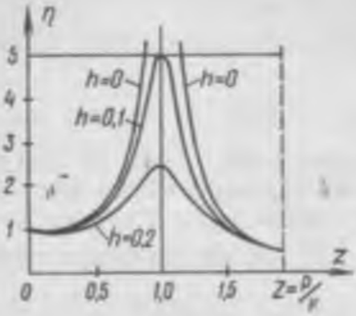
Муҳитнинг қаршилигини ҳисобга олган ҳолда уйғотувчи куч таъсиридаги системанинг мажбурий табранма ҳаракатини текшириш учун (23. 39) ва (25. 38) тенгликларнинг сурат ва махражини k^2 га бўлиб, қуйидагича ёзамиз:

$$B = \frac{\frac{P_0}{k^2}}{\sqrt{\left(1-\frac{p^2}{k^2}\right)^2+\frac{4b^2}{k^2}\cdot\frac{p^2}{k^2}}}; \qquad (25.41)$$

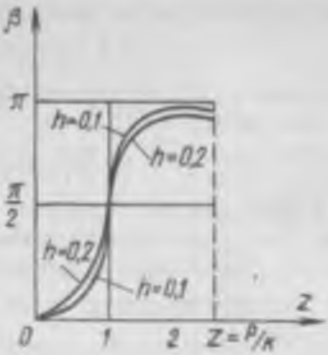
$$\operatorname{tg}\beta = \frac{2\frac{b}{k}\frac{p}{k}}{1-\frac{p^2}{k^2}}. \qquad (25.42)$$

Қуйидаги белгилашни киритамиз:

$$\frac{p}{k} = z, \ \frac{b}{k} = h. \qquad (25.43)$$



274- расм.



275- расм.

z катталик уйғотувчи куч частотасининг эркин тебраниш частотаси исбатига тенг бўлиб, *нособлик коэффициенти* дейилади, h эса номсиз катталик бўлиб, *қаршилик коэффициентини* ифодалайди

$$P_0 = \frac{Q_0}{a}, \; k^2 = \frac{c}{a} \tag{25.44}$$

бўлгани учун

$$\frac{P_0}{k^2} = \frac{Q_0}{c} = B_0. \tag{25.45}$$

B_0 катталик *статик силжиш* дейилади.

$$\eta = \frac{B}{B_0}.$$

елгилаш киритсак, бу номсиз катталик *динамик коэффициент* дейилади. Бу коэффициент мажбурий тебранма ҳаракат амплитудаси B статик силжишдан қанча катта (ёки кичик) эканлигини ифодалайди.

У ҳолда (25.41) ва (25.42) лар қуйидагича ёзилади:

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{(1-z^2)^2 + 4h^2z^2}}; \tag{25.46}$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{2hz}{1-z^2}. \tag{25.47}$$

инобарин, η катталик z ва h га боғлиқ бўлар экан.

$h = 0$; $h = 0{,}1$ $h = 0{,}2$ бўлганда η ва β ларнинг z га боғлиқ авишда ўзгариши 274 ва 275- расмларда тасвирланган.

Мажбурий тебранма ҳаракат амплитудаси энг катта қийматга эри-адиган ҳол алоҳида ўрин тутади. Бу ҳолда *резонанс* ҳодисаси рўй беради.

z нинг қандай қийматларида η экстремум қийматга эга бўлишини иқлаш учун (25. 46) да махраждаги ифодани $f(z)$ билан белгилаймиз:

$$f(z) = (1 - z^2)^2 + 4h^2z^2.$$

$f'(z)$ ҳосилани нолга тенглаб

$$4z\ (2h^2 - 1 + z^2) = 0$$

тенгламани оламиз: Бу тенгламадан бизни қизиқтирадиган қийматларни аниқлаймиз:

$$z_1 = 0,\ z_2 = \sqrt{1 - 2h^2}.$$

f функциянинг иккинчи ҳосиласини олиб, $z = z_1$ да $f(z)$ максимум, $z = z_2$ да минимум қийматга эга бўлишига ишонч ҳосил қилиш мумкин. Бинобарин, η катталик ва у билан бирга B амплитуда $z = 0$ да минимум қийматга, $z = \sqrt{1 - 2h^2}$ да эса максимум қийматга эришади.

Одатда $h << 1$ бўлгани учун амалда резонанс ҳодисаси $z = 1$ бўлганда, яъни мажбурий тебраниш частотаси ва эркин тебраниш частотаси устма-уст тушганда кузатилади.

Агар муҳитнинг қаршилиги системанинг ҳаракатига таъсир этмайдиган даражада кичик бўлса, системанинг ҳаракат дифференциал тенгламасини

$$\ddot{q} + k^2 q = P_0 \sin pt \tag{25.48}$$

кўринишда ёзиш мумкин. У ҳолда $p \neq k$ ($p = k$ ҳолни алоҳида кўрамиз) бўлганда (25. 48) тенгламанинг умумий ечими

$$q = A \sin(kt + \alpha) + B \sin(pt - \beta) \tag{25.49}$$

формуладан аниқланади.

Бинобарин, бу ҳолда системанинг ҳаракатини k ва p частотали иккита гармоник ҳаракатдан ташкил топган деб қараш мумкин.

(25. 49) да A ва α лар юқоридагидек, ҳаракатнинг бошланғич шартларидан, B эса

$$B = \frac{P_0}{|k^2 - p^2|} \tag{25.50}$$

тенглик билан аниқланади.

$b = 0$ бўлганда β нинг қийматини (25. 37) дан аниқлаш қулай. (25.49) ни назарда тутсак, $\sin\beta = 0$ ва $p < k$ бўлганда $\cos\beta = 1$; $p > k$ бўлганда $\cos\beta = -1$ бўлади. Бинобарин, муҳитнинг қаршилиги эътиборга олинмаса, $p < k$ бўлганда $\beta = 0$; $p > k$ да эса $\beta = \pi$ бўлади, яъни $p < k$ бўлганда мажбурий тебранма ҳаракат фазаси билан уйғотувчи куч фазалари устма-уст тушади, $p > k$ ҳолда эса, мажбурий тебранма ҳаракат билан уйғотувчи куч фазалари ўртасидаги силжиш π га тенг бўлади.

Агар мажбурий тебранма ҳаракат частотаси p билан эркин тебранма ҳаракат частотаси k ўзаро тенг бўлса, бундай ҳодиса ***резонанс*** дейилади.

Резонанс ҳолида (25.48) тенгламанинг

$$q_2 = \frac{P_0}{|k^2 - p^2|} \sin(pt - \beta)$$

кўринишдаги хусусий ечими мавжуд бўлмайди. Бу ҳолда (25.48) нинг хусусий ечимини

$$q_2 = \frac{P_0}{|k^2 - p^2|}\left[\sin(pt) - \sin(kt)\right] \qquad (25.51)$$

кўринишда оламиз. Бу хусусий ечимни (25. 49) да ўзгармас миқдорлар

$$A = -\frac{P_0}{|k^2 - p^2|}, \ \alpha = 0$$

шартларни қаноатлантирадиган қилиб танлаб олиш мумкин. $p = k$ бўлганда (25.51) хусусий ечим $\frac{0}{0}$ шаклидаги аниқламасликдан иборат бўлади, шу сабабли Лопиталь қоидасини қўллаб қуйидагини оламиз:

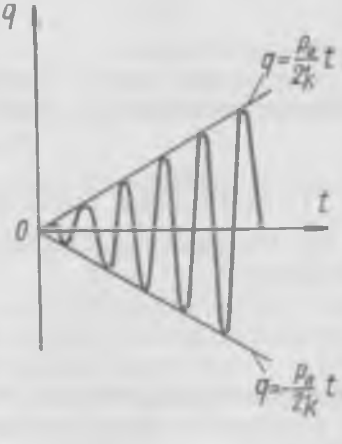
$$q_2 = P_0 \left. \left\{ \frac{\frac{d}{dp}\left[\sin(pt) - \sin(kt)\right]}{\frac{d}{dp}|k^2 - p^2|} \right\} \right|_{p=k} = -\frac{P_0 t}{2k}\cos kt. \qquad (25.52)$$

Бинобарин, $p = k$ бўлганда (25. 48) тенгламанинг умумий ечими

$$q = -\frac{P_0 t}{2k}\cos kt + a\sin(kt + \alpha) \qquad (25.53)$$

формуладан аниқланади.

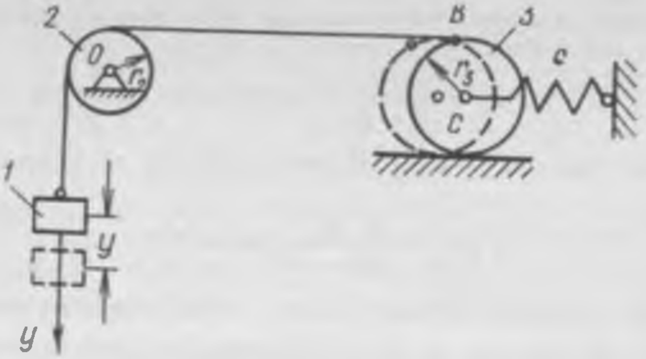
(25.53) дан кўрамизки, резонанс ҳолида мажбурий тебранма ҳаракат частотаси вақт ўтиши билан чексиз ортиб боради. Резонанс ҳолида мажбурий тебранма ҳаракат графиги 276-расмда тасвирланган. Акустика, радиотехникада ва биноларнинг лойиҳасини динамик ҳисоблашда резонанс ҳодисаси алоҳида аҳамиятга эга.



276- расм.

65- масала. Пружинанинг статик чўзилишга мос равишда юкнинг тинч ҳолатдан бошланғич оғиши y_0 бошланғич тезлиги $\bar{v}_0$ нинг y ўқдаги проекцияси $\dot{y}_0$ берилганда 277-расмда тасвирланган ва эркинлик даражаси битта бўлган механик системанинг частотаси, кичик тебранишлар даври ва *1*-юкнинг $y = y(t)$ ҳаракат тенгламаси аниқлансин.

Расмда қуйидаги белгилашлар киритилган: *1*-массаси m_1 га тенг юк; *2*-массаси m_2 ва радиуси r_2 га тенг блок (бир жинсли диск); *3*-массаси m_3 ва радиуси r_3 га тенг бир жинсли диск; c- пружинанинг бикрлик коэффициенти.



277- расм.

Юқоридаги катталикларнинг сон қиймати ушбу жадвалда берилган:

m_1	m_2	m_3	c	$t=0$ бўлгандаги бошланғич шартлар	
кг			Н/м	y_0 м	$\dot{y}_0$ м/с
1	2	3	3200	0,0003	0,06

Ечиш. Лагранжнинг иккинчи хил тенгламасидан фойдаланамиз. Системанинг умумлашган координатаси учун 1-юкнинг статик мувозанат ҳолатидан оғиши y ни оламиз. У ҳолда система ҳаракатининг дифференциал тенгламаси

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial П}{\partial y} = 0 \qquad (1)$$

кўринишда ёзилади.

Системанинг кинетик энергияси 1, 2 ва 3-жисмлар кинетик энергияларининг йиғиндисидан иборат:

$$T = T_1 + T_2 + T_3.$$

T_1, T_2 ва T_3 ларни умумлашган тезлик $\dot{y}$ орқали ифодалаймиз. $v = \dot{y}$ тезлик билан илгариланма ҳаракатланувчи 1-юкнинг кинетик энергияси

$$T_1 = \frac{m_1\dot{y}^2}{2}.$$

формуладан ҳисобланади.

О нуқтадан расм текислигига перпендикуляр равишда ўтувчи ўқ атрофида айланувчи 2-блокнинг кинетик энергияси

$$T_2 = \frac{I_{2x}\omega_2^2}{2},$$

бунда

$$I_{2x} = \frac{m_2 r_2^2}{2}, \quad \omega_2 = \frac{\dot{y}}{r_2}.$$

Демак,

$$T_2 = \frac{m_2\dot{y}^2}{4}.$$

Текис параллел ҳаракат қилувчи 3-дискнинг кинетик энергияси

$$T_3 = \frac{m_3 v_c^2}{2} + \frac{I_{cx}\omega_3^2}{2},$$

бунда

$$I_{Cx} = \frac{m_3 r_3^2}{2}.$$

3-диск массалар марказининг тезлиги $\bar{v}_C$ қуйидагича аниқланади.

Системанинг кичик тебранишлари қаралаётгани учун

$$v_B \approx \dot{y}$$

деб олиш мумкин. Диск сирпанмасдан думалагани учун

$$v_C = \frac{v_B}{2} = \frac{\dot{y}}{2}.$$

ва

$$\omega_3 = \frac{v_C}{r_3} = \frac{\dot{y}}{2r_3}.$$

Шундай қилиб,

$$T_3 = \frac{m_3\dot{y}^2}{8} + \frac{m_3\dot{y}^2}{16} = \frac{3}{16}m_3\dot{y}^2.$$

Бинобарин, кўрилаётган механик системанинг кинетик энергияси

$$T = \frac{m_1\dot{y}^2}{2} + \frac{m_2\dot{y}_2}{2} + \frac{3}{16}m_2\dot{y}^2 = \frac{1}{2}\left(m_1 + \frac{m_2}{2} + \frac{3}{8}m_3\right)\dot{y}^2.$$

Системанинг мувозанат ҳолатида $y = 0$ деб қараб, системанинг потенциал энергиясини ҳисоблаймиз. Системанинг потенциал энергияси 1-юкнинг y масофага кўчишидаги потенциал энергияси $П_1$ билан системанинг кўчишида деформацияланадиган пружинанинг потенциал энергияси $П_2$ нинг йиғиндисидан иборат:

$$П = П_1 + П_2; \quad П_1 = -m_1 g y,$$

$$\Pi_2 = \frac{c\left(f_{ст} + x_C\right)^2}{2} - \frac{c f_{ст}^2}{2},$$

бунда $f_{ст}$ — пружинанинг статик чўзилиши, $\frac{cf_{ст}}{2}$ — мувозанат ҳолатидаги пружинанинг потенциал энергияси; x_C — пружина маҳкамланган C нуқтанинг юк y масофага оғдирилгандаги кўчиши.

Системанинг кичик тебранишлари қаралаётганлиги туфайли

$$x_C = \frac{y}{2}$$

деб олиш мумкин. Натижада

$$\Pi_2 = \frac{c\left(f_{ст} + \frac{y}{2}\right)^2}{2} - \frac{cf_{ст}^2}{2} = cf_{ст}\frac{y}{2} + \frac{cy^2}{8}$$

бўлади.

Шундай қилиб, системанинг потенциал энергияси учун

$$\Pi = -m_1gy + cf_{ст}\frac{y}{2} + \frac{cy^2}{8}$$

муносабат ўринлидир.

Системанинг мувозанат ҳолатида

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)_{y=0} = 0$$

бўлгани учун

$$-m_1g + \frac{cf_{ст}}{2} = 0,$$

бундан

$$\frac{cf_{ст}}{2} = m_1g.$$

Бинобарин, системанинг потенциал энергияси $\Pi = \frac{cy^2}{8}$. (1) тенгламанинг ҳадларини ҳисоблаймиз:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = \left(m_1 + \frac{m_2}{2} + \frac{3}{8}m_3\right)\ddot{y},$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial y} = \frac{cy}{4}.$$

(1) тенглама қуйидагича ёзилади:

$$\left(m_1 + \frac{m_2}{2} + \frac{3}{8}m_3\right)\ddot{y} + \frac{cy}{4} = 0;$$

ёки

$$\ddot{y} + k^2y = 0.$$

Бунда k эркин тебраниш частотаси бўлиб,

$$k = \sqrt{\frac{c}{4\left(m_1 + \frac{m_2}{2} + \frac{3}{8}m_3\right)}} = 16{,}03 \text{ с}^{-1}.$$

га тенг. Эркин тебраниш даври қуйидагича ҳисобланади:

$$T = \frac{2\pi}{k} = \frac{2 \cdot 3{,}14}{16{,}03} = 0{,}39 \text{ с}.$$

(2) тенгламани интеграллаб 1-юкнинг ҳаракат тенгламасини оламиз:

$$y = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \qquad (3)$$

C_1 ва C_2 интеграллаш доимийларини аниқлаш учун юкнинг тезлигини аниқлаймиз:

$$\dot{y} = -kC_1 \sin kt + kC_2 \cos kt \qquad (4)$$

ва бошланғич шартлардан фойдаланамиз. (3) ва (4) тенгламаларда $t = 0$ да

$$y_0 = C_1,$$
$$\dot{y} = kC_2.$$

Демак,

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= y_0, \\ C_2 &= \frac{y_0}{k}. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

(5) ни (3) га қўйсак,

$$y = y_0 \cos kt + \frac{\dot{y}_0}{k} \sin kt,$$

$$y = 0{,}0003 \cos 16{,}03\,t + 0{,}0037 \sin 16{,}03\,t.$$

(2) ни (25. 17) билан солиштириб, унинг ечимини (25. 18) ва (25.19) ларга кўра қуйидаги кўринишда ҳам ёзиш мумкин:

$$y = a \sin(kt + \beta),$$

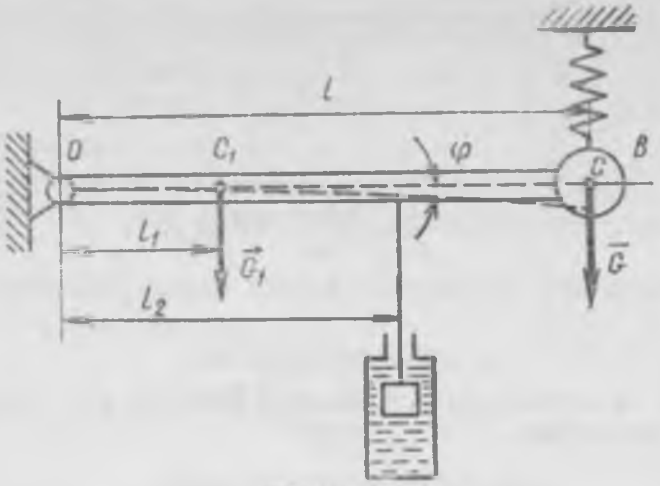
бунда

$$a = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{\dot{y}_0}{k}\right)^2} = 0{,}00001 \text{ м},$$

$$\beta = \text{arc tg}\,\frac{ky_0}{\dot{y}_0} = \text{arc tg}\,0{,}08.$$

$\sin\beta > 0\,(c_1 > 0)$ бўлгани учун

$$\beta = 4°36' = 0{,}08 \text{ рад}.$$



278- расм.

Шундай қилиб, 1-юкнинг ҳаракати

$$x = 0{,}00001 \sin (16{,}03\, t + 0{,}08)\ \text{м} \tag{6}$$

тенглама билан ифодаланади.

66-масала. Оғирлиги G_1 га тенг стерженнинг бир учи O нуқтада деворга шарнир воситасида бириктирилган; иккинчи учига оғирлиги G га тенг B юк бириктирилган. Стержень ва юк бикрлиги c га тенг пружина ва O нуқтадан l_2 масофада ўрнатилган суюқлик демпфери воситасида горизонтал ҳолатда сақлаб турилади. l ва l_1 ўлчамлар 278-расмда кўрсатилган. Суюқлик демпферида поршенга кўрсатиладиган қаршилик кучи тезликнинг биринчи даражасига мутаносиб, яъни $R = \beta v$ деб қараб, системанинг тебраниш частотаси ва тебраниш даври аниқлансин. Шунингдек, система апериодик ҳаракатда бўлиши учун β нинг қабул қиладиган қийматлари топилсин.

Ечиш. B нуқтанинг y координатасини умумлашган координата учун қабул қилсак, системанинг кинетик энергияси қуйидагича ҳисобланади:

$$T = \frac{1}{2} m\dot{y}^2 + \frac{1}{2} I_z\, \varphi^2. \tag{7}$$

$\overline{G}_1\ \overline{G}$ ва пружинанинг эластиклик кучига мос бўлган системанинг потенциал энергияси учун ушбу муносабат ўринли бўлади:

$$\Pi = -G_1 y \frac{l_1}{l} - Gy + \frac{c\,(f_{ст} + y)^2}{2} -$$

$$- \frac{cf_{ст}^2}{2} = \left(G_1 \frac{l_1}{l} + G\right) y + cf_{ст}\, y + \frac{cy^2}{2},$$

бунда $f_{ст}$ — системанинг мувозанат ҳолатидаги статик чўзилиши; $\frac{cf_{ст}^2}{2}$ — мувозанат ҳолатидаги пружинанинг потенциал энергияси.

Системанинг мувозанат ҳолатида

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)_{y=0} = -\left(G_1 \frac{l_1}{l} + G\right) + cf_{ст} = 0,$$

$$cf_{ст} = G_1 \frac{l_1}{l} + G$$

бўлгани учун

$$\Pi = \frac{1}{2} cy^2. \tag{8}$$

Умумлашган координата учун φ бурчакни олсак, (7) ва (8) ларни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{Gl^2}{g} + I_z\right)\dot{\varphi}^2, \tag{9}$$

$$\Pi = \frac{1}{2} cl^2 \varphi^2. \tag{10}$$

Демпфер қаршилигига мос бўлган умумлашган куч

$$Q^R = -\beta v - \beta l_2 \dot{\varphi} \tag{11}$$

формуладан аниқланади.

(9) ва (11) ларга асосан Лагранжнинг иккинчи хил тенгламасини тузамиз:

$$\left(\frac{Gl^2}{g} + I_z\right)\ddot{\varphi} + \beta l_2 \dot{\varphi} + cl^2 \varphi = 0$$

ёки

$$\ddot{\varphi} + \frac{\beta l_2 g}{Gl^2 + I_z g}\,\dot{\varphi} + \frac{cl^2 g}{Gl^2 + I_z g}\,\varphi = 0. \tag{12}$$

(12) ни (25.27) билан солиштириб

$$2b = \frac{\beta l_2 g}{Gl^2 + I_z g} \quad \text{ёки} \quad b = \frac{\beta l_2 g}{2\,(Gl^2 + I_z g)},$$

$$k^2 = \frac{cl^2 g}{Gl^2 + I_z g} \quad \text{ёки} \quad k = \sqrt{\frac{cl^2 g}{Gl^2 + I_z g}}$$

муносабатларни оламиз.

Эркин тебраниш частотаси k ва *сўниш коэффициенти* b ни билган ҳолда сўнувчи тебранма ҳаракат частотасини

$$k_1 = \sqrt{k^2 - b^2}$$

формуладан аниқлаймиз.

Сўнувчи тебранма ҳаракат даври

$$T_1 = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - b^2}}$$

тенгликдан топилади.

Система апериодик ҳаракатда бўлиши учун $b > k$ бўлиши, яъни

$$\frac{\beta l_1 g}{2(Gl^2 + I_z g)} > \sqrt{\frac{c l^2 g}{Gl^2 + I_z g}}$$

тенгсизлик бажарилиши керак. Бундан

$$\beta > \frac{2l}{l_1 g} \sqrt{cg(Gl^2 + I_z g)}$$

шарт бажарилганда система апериодик ҳаракатда бўлишини кўрамиз.

XXVI боб

ЗАРБА НАЗАРИЯСИ

171-§. Зарбали куч. Зарбали кучнинг моддий нуқтага таъсири

Шу пайтгача моддий нуқта, механик система ёки жисмга оғирлик кучи, муҳитнинг қаршилик кучи, тортилиш кучи каби кучлар таъсир этган ҳолларни кўриб чиқдик. Бундай кучларнинг таъсири натижасида механик система ёки жисм нуқталарининг тезлиги узлуксиз равишда ўзгаради. Лекин жуда кичик вақт ичида жисм нуқталарининг тезлиги, бинобарин, бундай жисмнинг ҳаракат миқдори чекли миқдорга ўзгарадиган ҳоллар ҳам учрайди.

Жуда кичик вақт ичида жисм нуқталарининг тезлиги чекли катталикка ўзгарса, бундай ҳодиса *зарба* дейилади. Турли тезликларга эга бўлган жисмлар бирданига тўқнашганда зарба рўй беради.

Зарба содир бўладиган вақт *зарба вақти* дейилади. Зарба вақти амалда секунднинг мингдан бир ёки ўн мингдан бир улушига тенг бўлади.

Моддий нуқтага жуда кичик вақт ичида таъсир этиб, жуда катта қийматга эришадиган ва импульси чекли бўлган куч *зарбали куч* дейилади.

Массаси m га тенг моддий нуқтага жуда кичик τ вақт ичида зарбали куч $\overline{F}$ ва одатдаги (зарбали бўлмаган) $\overline{Q}(t)$ куч таъсир этсин. Нуқтанинг зарбадан олдинги ва зарбадан кейинги тезликларини мос равишда $\overline{v}$ ва $\overline{u}$ билан белгиласак, зарба вақтида бундай нуқта учун ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теоремани қуйидагича ёзиш мумкин.

$$m\overline{u} - m\overline{v} = \int_0^\tau \overline{F}\,dt + \int_0^\tau \overline{Q}(t)\,dt, \qquad (26.1)$$

бунда

$$\int_0^\tau \overline{F}\,dt = \overline{S} \qquad (26.2)$$

зарбали куч импульсини ифодалайди. Иккинчи интеграл $\overline{Q}$ кучнинг зарба вақтидаги импульси бўлиб, Лагранжнинг ўртача қиймат ҳақидаги теоремасига кўра

$$\overline{S}_Q = \int_0^\tau \overline{Q}(t)\,dt = \overline{Q}^*\tau,$$

бунда $\overline{Q}^*$ билан $\overline{Q}$ кучнинг (0, τ) да қабул қиладиган ўртача қиймати белгиланган. $\overline{Q}^*$ чекли катталик, τ эса кичик миқдор бўлгани учун $\overline{S}_Q \approx 0$ деб олиш мумкин. У ҳолда (26.1) ни

$$m\overline{u} - m\overline{v} = \overline{S} \qquad (26.3)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Ушбу тенглама *зарба назариясининг асосий тенгламаси* дейилади. Шундай қилиб, зарбали куч импульси миқдор ва йўналиш жиҳатдан зарба вақтида нуқта ҳаракат миқдорининг ўзгариши билан ифодаланади. Агар зарбали куч импульси маълум бўлса, у ҳолда (26.3) га асосан нуқтанинг зарбадан кейинги тезлиги

$$\overline{u} = \overline{v} + \frac{\overline{S}}{m}$$

формуладан аниқланади. Бунда v, S ва m чекли бўлгани учун нуқтанинг зарбадан кейинги тезлиги u ҳам чекли катталик бўлади.

Зарба вақтида нуқтанинг кўчишини аниқлаш учун нуқтанинг бирор қўзғалмас координата системасига нисбатан радиус-векторини $\overline{r}$ билан белгилаймиз. $\overline{u} = \frac{d\overline{r}}{dt}$ эканлигини назарда тутиб (26.3) ни dt га кўпайтирамиз ва 0 дан τ гача вақт оралиғида интеграллаймиз:

$$\overline{r} = \overline{r}_0 + \overline{v}\cdot\tau + \frac{1}{m}\int_0^\tau \overline{S}dt,$$

бундан нуқтанинг зарба вақтидаги кўчиши учун қуйидагини оламиз:

$$\Delta\overline{r} = \overline{r} - \overline{r}_0 = \overline{v}\cdot\tau + \frac{1}{m}\overline{S}^*\cdot\tau.$$

Бунда $\overline{S}^*$ билан зарбали куч импульсининг τ вақтдаги ўртача қиймати белгиланган. $\overline{v}$ ва $\overline{S}^*$ чекли миқдорлар, τ эса жуда кичик бўлгани учун нуқтанинг зарба вақтидаги кўчиши $\Delta\overline{r}$ ҳам жуда кичик бўлади ва уни одатда эътиборга олинмайди.

Шундай қилиб, қуйидаги хулосага келамиз:

1) зарба вақтида зарбали бўлмаган кучларнинг таъсирини эътиборга олмаслик мумкин;

2) зарба вақтида нуқтанинг кўчиши эътиборга олинмайди;

3) зарбали кучнинг нуқтага таъсири натижасида зарба вақтида нуқта тезлигининг ўзгариши зарба назариясининг асосий тенгламаси (26.3) билан аниқланади.

172-§. Зарба назариясининг умумий теоремалари

Механик система ёки жисмга зарбали кучларнинг таъсири қуйидаги теоремалар ёрдамида аниқланади.

1. Зарбада система ҳаракат миқдорининг ўзгариши. N та моддий нуқталардан ташкил топган механик система нуқталарига ташқи ва ички зарбали кучлар таъсир этсин. Зарбали бўлмаган кучларнинг система нуқталарига таъсирини эътиборга олмаймиз. Система ихтиёрий M_k нуқтасининг зарбадан олдинги ва кейинги тезликларини $\bar{v}_k$, $\bar{u}_k$ билан белгилаймиз. Шу нуқтага таъсир этувчи ташқи ва ички зарбали куч-импульсларнинг тенг таъсир этувчиларини мос равишда $\bar{S}_k^e$ ва $\bar{S}_k^i$ билан белгилаймиз. У ҳолда (26.3) га биноан

$$m_k\left(\bar{u}_k - v_k\right) = \bar{S}_k^e + \bar{S}_k^i \tag{26.4}$$

тенглама ўринли бўлади. Системанинг барча нуқталари учун бундай тенгламаларни тузиб, уларни ҳадлаб қўшсак,

$$\sum m_k \bar{u}_k - \sum m_k \bar{v}_k = \sum \bar{S}_k^e + \sum \bar{S}_k^i .$$

Бунда $\sum m_k \bar{u}_k = \bar{K}_1$, $\sum m_k \bar{v}_k = \bar{K}_0$ лар мос равишда системанинг зарбадан олдинги ва зарбадан кейинги ҳаракат миқдорларини ифодалайди. Ички кучларнинг хусусиятига кўра ички зарбали кучлар импульсларининг йиғиндиси нолга тенг. Шу сабабли

$$\bar{K}_1 - \bar{K}_0 = \sum \bar{S}_k^e . \tag{26.5}$$

Демак, *зарба вақтида система ҳаракат миқдорининг ўзгариши система нуқталарига таъсир этувчи ташқи зарбали куч импульсларининг геометрик йиғиндисига тенг.*

(26.5) ни бирор координата ўқига проекцияласак,

$$\bar{K}_{1x} - \bar{K}_{0x} = \sum S_{kx}^e \tag{26.6}$$

бўлади. y ва z ўқлар учун шунга ўхшаш муносабатлар ўринлидир.

Системанинг ҳаракат миқдорини массалар марказининг тезлиги орқали ифодалаб, (26.5) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$M\left(\bar{u}_C - \bar{v}_C\right) = \sum \bar{S}_k^e , \tag{26.7}$$

ёки координата ўқига проекцияласак,

$$M\left(u_{Cx} - v_{Cx}\right) = \sum S'_{kx} . \tag{26.8}$$

(26.7) тенглик *зарба вақтида система массалар маркази ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теоремани ифодалайди.*

Хусусий ҳолда $\sum \overline{S}_k^e = 0$ бўлса, (26.5) ва (26.7) ларга асосан қуйидагини оламиз:

$$\overline{u}_C = \overline{v}_C .$$

Шундай қилиб, система нуқталарига таъсир этувчи ташқи зарбали куч импульсларининг геометрик йиғиндиси нолга тенг бўлса, у ҳолда зарба вақтида системанинг ҳаракат миқдори ва система массалар марказининг тезлиги ўзгармасдан қолади.

2. Зарбада система кинетик моментининг ўзгариши ҳақидаги теорема. Системанинг ихтиёрий M_k нуқтаси учун (26.4) ни

$$m_k \overline{u}_k - m_k \overline{v}_k = \overline{S}_k^e + \overline{S}_k^i$$

кўринишда ёзиб, бу тенгликни мазкур нуқтанинг бирор қўзғалмас марказга нисбатан радиус-вектори $\overline{r}_k$ га векторли кўпайтирамиз:

$$\overline{r}_k \times m_k \overline{u}_k - \overline{r}_k \times m_k \overline{v}_k = \overline{r}_k \times \overline{S}_k^e + \overline{r}_k \times \overline{S}_k^i .$$

Системанинг барча нуқталари учун шунга ўхшаш тенгликларни тузиб, уларни ҳадлаб қўшамиз:

$$\sum \overline{r}_k \times m_k \overline{u}_k - \sum \overline{r}_k \times m_k \overline{v}_k = \sum \overline{r}_k \times \overline{S}_k^e + \sum \overline{r}_k \times \overline{S}_k^i .$$

Бунда $\sum \overline{r}_k \times m_k \overline{u}_k = \overline{L}_1$, $\sum \overline{r}_k \times m_k \overline{v}_k = \overline{L}_0$ лар мос равишда системанинг O марказга нисбатан зарбадан олдинги ва зарбадан кейинги кинетик моментларини ифодалайди. Ички кучларнинг хусусиятига кўра ички зарбали кучлар импульслари моментларининг геометрик йиғиндиси нолга тенг, $\sum \overline{r}_k \times \overline{S}_k^i = 0$, Шу сабабли

$$\overline{L}_1 - \overline{L}_0 = \sum \overline{r}_k \times \overline{S}_k^e \qquad (26.9)$$

ёки

$$\overline{L}_1 - \overline{L}_0 = \sum \overline{M}_0 \left(\overline{S}_k^e \right) \qquad (26.10)$$

бўлади, *яъни зарба вақтида система ҳаракат миқдорининг бирор қўзғалмас марказга нисбатан моментининг ўзгариши система нуқталарига таъсир этувчи ташқи зарбали куч импульсларининг мазкур марказга нисбатан моментларининг геометрик йиғиндисига тенг.*

(26.10) ни қўзғалмас O нуқтадан ўтувчи бирор z ўққа проекцияласак,

$$L_{1z} - L_{0z} = \sum M_z \left(S^e \right) \qquad (26.11)$$

бўлади.

(26.10) ва (26.11) лардан кўрамизки, агар система нуқталарига таъсир этувчи ташқи зарбали куч импульсларининг бирор қўзғалмас марказга (ўққа) нисбатан моментларининг йиғиндиси нолга тенг бўлса, у ҳолда системанинг мазкур марказга (ўққа) нисбатан кинетик моменти зарба вақтида ўзгармасдан қолади. Бинобарин, зарба вақтида ички зарбали кучлар системанинг кинетик моментини ўзгартира олмайди.

173-§. Шарнинг қўзғалмас сиртга урилишидаги тўғри зарба. Тиклаш коэффициентини тажриба усули билан аниқлаш

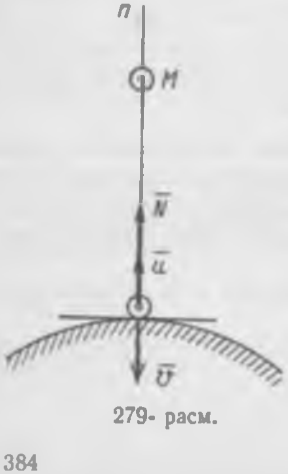
M шар берилган қўзғалмас сиртга ўтказилган нормаль бўйича пастга $\bar{v}$ тезлик билан илгариланма ҳаракатда бўлсин (279-расм). У ҳолда шар A нуқтада сиртга урилгандаги зарба *тўғри зарба* дейилади. Зарбадан кейин шар An нормаль бўйича $\bar{u}$ тезлик билан юқорига ҳаракатланади. Тажрибанинг кўрсатишича $\bar{u}$ тезлик $\bar{v}$ га нисбатан кичик ва

$$u = kv \qquad (26.12)$$

муносабат ўринли бўлади. Бунда $0 \leqslant k \leqslant 1$ бўлиб, k ни *зарбадаги тиклаш коэффициенти* дейилади. Бу коэффициент уриладиган жисмларнинг эластиклик хусусиятига боғлиқ бўлади.

Зарба вақтини τ билан белгиласак, бу вақт мобайнида шарга қўзғалмас сиртнинг зарбали реакция кучи $\bar{N}$ таъсир этади. Бу куч An бўйлаб йўналади ва унинг сон қиймати жуда катта миқдорга эришади. Зарба вақтини икки қисмдан иборат деб қараш мумкин: биринчи даврни τ_1 билан белгиласак, бу вақт мобайнида шарнинг тезлиги нолга тенг бўлгунча у деформацияланади; τ_1 дан τ гача бўлган вақт мобайнида шар эластик бўлганлиги сабабли ўз шаклини қисман (бутунлай эмас) тиклайди ва тезлиги 0 дан u гача ортади.

Ҳар иккала вақт оралиғи учун зарба назариясининг асосий тенгламаси (26.3) ни тузиб, An га проекциялаймиз:



279- расм.

$$\left.\begin{aligned} 0-(-mv) &= S_1, \\ mu-0 &= S_2, \end{aligned}\right\} \qquad (26.13)$$

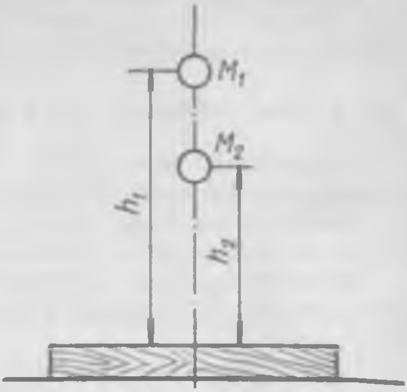
бунда $S_1 = \int\limits_0^{\tau_1} N dt$ $S_2 = \int\limits_{\tau_1}^{\tau} N dt$ лар билан мос вақт оралиқларидаги зарбали реакция кучи импульсларининг модули белгиланган. — (26.12) ва (26.13) га асосан S_1 ва S_2 зарбали импульслар орасидаги муносабатни аниқлаймиз:

$$S_2 = kS_1 \text{ ёки } k = \frac{S_2}{S_1} \qquad (26.14)$$

Бинобарин, *зарбанинг иккинчи даврда-*

ги импульсининг биринчи даврдаги импульсига нисбати тиклаш коэффициентига тенг.

Тиклаш коэффициентини қуйидаги содда тажриба ёрдамида аниқлаш мумкин. Синалаётган жисм материалидан ясалган шарча худди шу материалдан ясалган горизонтал плитага бошланғич тезликсиз h_1 баландликдан ташланади. Зарбадан кейин шарча h_2 баландликка кўтарилади (280- расм). Галилей формуласига кўра



280- расм.

$$v = \sqrt{2gh_1}\,, \quad u = \sqrt{2gh_2}$$

бўлади. У ҳолда тиклаш коэффициенти

$$k = \frac{u}{v} = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}} \qquad (26.15)$$

формуладан аниқланади. Турли материалларнинг тиклаш коэффициентлари справочникларда берилади.

Зарбали куч хусусиятини қуйидаги мисол воситасида тасаввур қилиш мумкин. Оғирлиги $P = 1$ Н бўлган пўлат шарча $h = 6$ м баландликдан тушиб, пўлат плитага v тезлик билан урилади ва зарбадан кейин u тезликка эга бўлади. Зарба даври $\tau = 0{,}001$ с ва тиклаш коэффициенти $k = \frac{u}{v} = \frac{5}{9}$ бўлса, зарбали кучнинг ўртача миқдори аниқлансин.

Дастлаб зарбали куч импульсини ҳисоблаймиз. Бунинг учун зарба назариясининг асосий тенгламаси (26.3) ни y ўққа проекциялаймиз

$$mu + mv = S$$

ёки

$$S = m(v + u) = \frac{P}{g}(v + u).$$

v ва u тезликларни аниқлаймиз:

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 6} \approx 11 \text{ м/с},$$

$$u = \frac{5}{9} v \approx 6 \text{ м/с}.$$

Бинобарин, зарбали куч импульси қуйидагича бўлади:

$$S = \frac{1}{9.8}(11 + 6) \approx 1{,}7 \text{ Н} \cdot \text{с}.$$

Зарбали кучнинг ўртача қиймати

$$F_{ўр} = \frac{S}{\tau} \approx \frac{1{,}7}{0{,}001} \approx 1700 \text{ Н}.$$

Шундай қилиб, оғирлиги 1 Н га тенг бўлган шарча плитага ўртача қиймати 1700 Н га тенг зарбали куч билан таъсир этади. Зарбали кучнинг энг катта қиймати 1700 Н дан ҳам ортиқ бўлади.

174- §. Икки жисмнинг тўғри марказий зарбаси (шарлар зарбаси)

Илгариланма ҳаракатдаги икки жисм бир-бири билан тўқнашиб урилиши олдида массалар марказларининг тезликлари шу марказларни туташтирувчи тўғри чизиқ бўйлаб йўналган бўлса, бундай зарба *тўғри марказий зарба* дейилади.

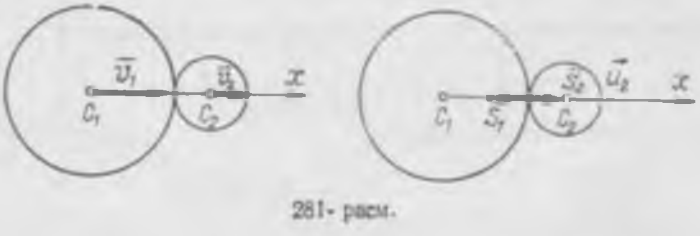
Зарбагача массалар маркази бир тўғри чизиқ бўйлаб ҳаракатланувчи иккита бир жинсли шарнинг урилишидаги зарба бунга мисол бўла олади.

Тўқнашадиган жисмларнинг массалари m_1 ва m_2, массалар марказларининг зарбадан олдинги тезликлари $\bar{v}_1$ ва $\bar{v}_2$, зарбадан кейинги тезликлари $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$ бўлсин. Массалар маркази C_1 ва C_2 орқали доимо C_1 дан C_2 га йўналган. C_1x ўқни ўтказамиз (281- расм). У ҳолда зарба содир бўлиши учун $v_{1x} > v_{2x}$ шарт бажарилиши зарур (чунки акс ҳолда биринчи жисм иккинчи жисмни қувиб ета олмайди); бундан ташқари, $u_{1x} \leqslant u_{2x}$ шарт ҳам бажарилиши зарур, чунки урилувчи жисм уриладиган жисмдан ўзиб кетмайди. Бу шарт жисмлар бир-бирига қарама-қарши ҳаракатланаётганда ҳам ўринли бўлишини таъкидлаб ўтамиз.

m_1, m_2 v_{1x}, v_{2x} лар берилган бўлса, u_{1x} ва u_{2x} ларни аниқлаймиз. Бунинг учун уриладиган жисмларни битта система деб қараб, бу система учун ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теоремани қўллаймиз. У ҳолда жисмлар урилгандаги зарбали кучлар ички кучлардан иборат бўлади. Шу сабабли $\sum S^e_{kx} = 0$ ва (26.6) га кўра $K_{1x} = K_{2x}$ бўлади ёки

$$m_1 u_{1x} + m_2 u_{2x} = m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} . \tag{26.16}$$

Иккинчи тенгламани эса тиклаш коэффициенти ифодасидан топамиз. Иккита жисм урилганда содир бўладиган зарбанинг интенсивлиги ҳар бир жисм абсолют тезликларига боғлиқ бўлмай, балки урилувчи жисм тезлигининг уриладиган жисм тезлигидан қанча ортиқлигига, яъни $v_{1x} - v_{2x}$ айирмага боғлиқ. Шу сабабли иккита жисм урилишидаги зарбада доимо $v_{1x} > v_{2x}$, $u_{1x} \leqslant u_{2x}$ шартлар бажарилишини эътиборга олсак,



281- расм.

$$k = \frac{|u_{1x} - u_{2x}|}{|v_{1x} - v_{2x}|} = -\frac{u_{1x} - u_{2x}}{v_{1x} - v_{2x}} \tag{26.17}$$

ёки

$$u_{1x} - u_{2x} = -k\left(v_{1x} - v_{2x}\right) \tag{26.18}$$

(26.16) ва (26.18) тенгламаларни биргаликда ечиб жисмларнинг зарбадан кейинги тезликлари u_{1x} ва u_{2x} ни аниқлаймиз:

$$\left.\begin{aligned} u_{1x} &= v_{1x} - (1 + k)\,\frac{m_2}{m_1 + m_2}\left(v_{1x} - v_{2x}\right), \\ u_{2x} &= v_{2x} + (1 + k)\,\frac{m_1}{m_1 + m_2}\left(v_{1x} - v_{2x}\right). \end{aligned}\right| \tag{26.19}$$

Урилаётган жисмларнинг зарбали импульсини аниқлаш учун (26.3) ни жисмларнинг бирортаси, масалан, биринчиси учун айрим тузиб аниқлаймиз:

$$S_{1x} = m_1\left(u_{1x} - v_{1x}\right).$$

Ньютоннинг учинчи қонунига кўра

$$S_{2x} = -S_{1x}.$$

Қуйидаги икки ҳолни айрим-айрим кўриб чиқамиз.

1. **Абсолют эластик бўлмаган зарба** ($k = 0$). Бу ҳолда (26.16) ва (26.18) лардан кўрамизки,

$$u_{1x} = u_{2x} = \frac{m_1\, v_{1x} + m_2\, v_{2x}}{m_1 + m_2}, \tag{26.20}$$

яъни зарбадан кейин иккала жисм бир хил тезлик билан ҳаракатланади; зарбали импульс

$$S_{2x} = -S_{1x} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\left(v_{1x} - v_{2x}\right) \tag{26.21}$$

формуладан аниқланади.

2. **Абсолют эластик зарба** ($k = 1$). Бу ҳолда (26.16) ва (26.18) лардан

$$\left.\begin{aligned} u_{1x} &= v_{1x} - \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\left(v_{1x} - v_{2x}\right), \\ u_{2x} &= v_{2x} + \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\left(v_{1x} - v_{2x}\right). \end{aligned}\right| \tag{26.22}$$

бўлади. Зарбали куч импульси қуйидагига тенг:

$$S_{2x} = -S_{1x} = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2}\left(v_{1x} - v_{2x}\right) \tag{26.23}$$

(26.21) ва (26.23) ларни солиштириб абсолют эластик зарбадаги зарбали куч импульси абсолют эластик бўлмаган зарбадагидан икки марта катта бўлишини кўрамиз. Хусусий ҳолда агар $m_1 = m_2 = m$ бўлса, (26.22) дан $u_{1x} = v_{2x}$, $u_{2x} = v_{1x}$ муносабатларни ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, бир хил массали иккита жисмнинг урилиши натижасида содир бўладиган абсолют эластик зарбада урилувчи жисмларнинг тезликлари алмашади.

67-масала. Оғирлиги $P_2 = 5$ кН бўлган шар $v_1 = 15$ м/с тезлик билан ҳаракатланади, унинг олдида худди шу йўналишда оғирлиги $P_2 = 8$ кН бўлган шар $v_2 = 2$ м/с тезлик билан ҳаракатланади. Агар тиклаш коэффициенти $k = \frac{1}{2}$ бўлса, шарларнинг зарбадан кейинги тезликлари аниқлансин.

Ечиш. Қурилаётган ҳолда шарларнинг зарбаси эластик зарбадан иборат бўлгани учун (26.19) га асосан шарларнинг зарбадан кейинги тезликларини аниқлаймиз:

$$u_1 = v_1 - (1 + k) \frac{P_2}{P_1 + P_2} (v_1 - v_2) = 15 - (1 +$$

$$+ 0{,}5) \frac{8}{5+8} (15 - 2) = 3 \text{ м/с};$$

$$u_2 = v_2 + (1 + k) \frac{P_1}{P_1 + P_2} (v_1 - v_2) = 2 + (1 +$$

$$+ 0{,}5) \frac{5}{5+8} (15 - 2) = 9{,}5 \text{ м/с}.$$

Шундай қилиб, зарбадан кейин биринчи шарнинг тезлиги камаяди, иккинчисиники эса ортади ҳамда шарлар илгариги йўналишда ҳаракатланади.

175-§. Зарба вақтида кинетик энергиянинг йўқолиши. Карно теоремаси

Бу теоремани иккита шарнинг тўғри марказий зарбаси учун чиқарамиз. Бу ҳолда ҳар қайси шарга таъсир этувчи зарбали куч импульси ва тиклаш коэффициенти (26.3) ва (26.17) ларга кўра қуйидагича аниқланади:

$$\left.\begin{aligned} & m_1 (u_1 - v_1) = -S, \\ & m_2 (u_2 - v_2) = S, \\ & k = \frac{u_2 - u_1}{v_1 - v_2}. \end{aligned}\right| \qquad (26.24)$$

Биринчи тенгламанинг иккала томонини $u_1 + kv_1$ га, иккинчисини $u_2 + kv_2$ га кўпайтирсак

$$m_1 (u_1 - v_1)(u_1 + kv_1) = -S (u_1 + kv_1),$$

$$m_2 (u_2 - v_2)(u_2 + kv_2) = S (u_2 + kv_2).$$

Бу тенгламаларни қўшиб (26.24) нинг учинчисини эътиборга олсак,

$$m_1 (u_1 - v_1) (u_1 + kv_1) + m_2 (u_2 - v_2) (u_2 + kv_2) = 0$$

тенгламани оламиз.

Олинган тенгламани бошқача кўринишда ёзиш учун қуйидаги айниятлардан фойдаланамиз:

$$u_1 (u_1 - v_1) = \frac{1}{2} (u_1^2 - v_1^2) + \frac{1}{2} (u_1 - v_1)^2,$$

$$kv_1 (u_1 - v_1) = \frac{1}{2} k (u_1^2 - v_1^2) - \frac{1}{2} k (u_1 - v_1)^2,$$

$$u_2 (u_2 - v_2) = \frac{1}{2} (u_2^2 - v_2^2) + \frac{1}{2} (u_2 - v_2)^2$$

$$kv_2 (u_2 - v_2) = \frac{1}{2} k (u_2^2 - v_2^2) - \frac{1}{2} (u_2 - v_2)^2.$$

У ҳолда

$$(u_1 - v_1) (u_1 + kv_1) = \frac{1}{2} (1 + k) (u_1^2 - v_1^2) + \\ + \frac{1}{2} (1 - k) (u_1 - v_1)^2$$

ва

$$(u_2 - v_2) (u_2 + kv_2) = \frac{1}{2} (1 + k) (u_2^2 - v_2^2) + \\ + \frac{1}{2} (1 - k) (u_2 - v_2)^2.$$

Бинобарин,

$$\frac{1}{2} (1 + k) [(m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2) - (m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2)] + \\ + \frac{1}{2} (1 - k) [m_1 (u_1 - v_1)^2 + m_2 (u_2 - v_2)^2] = 0. \quad (26.25)$$

Бу ифоданинг биринчи ўрта қавсдагиси кинетик энергиянинг зарба вақтида ўзгаришини ифодалайди.

Агар

$$T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2},$$

$$T_2 = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}$$

белгилаш киритсак, T_1 системанинг зарбадан олдинги, T_2 эса системанинг зарбадан кейинги кинетик энергиясини ифодалайди. (26.25) да иккинчи ўрта қавс ичидаги эса зарба натижасида йўқотилган тезликка мос бўлган кинетик энергия бўлиб, уни T билан белгилаймиз:

$$T = \frac{1}{2} \left[m_1 (u_1 - v_1)^2 + m_2 (u_2 - v_2)^2\right].$$

Натижада (26.25) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$T_2 - T_1 = \frac{1-k}{1+k} T. \qquad (26.26)$$

Бу муносабат иккита шарнинг тўғри марказий зарбаси учун кинетик энергия балансига оид *Карно теоремасини* ифодалайди: *эластик зарба вақтида йўқотилган кинетик энергия йўқотилган тезликка мос кинетик энергиянинг* $\frac{1-k}{1+k}$ *қисмига тенг.*

Абсолют эластик жисм учун $k = 1$ ва $T_1 = T_2$ бўлади, яъни зарбадан сўнг абсолют эластик жисмларнинг кинетик энергияси йўқолмайди. Абсолют пластик жисм учун $k = 0$ ва $T_2 - T_1 = T$ бўлади. Бу ҳолда кинетик энергия энг кўп миқдорда йўқолади.

Пластик зарба натижасида жисмлар зарбадан кейин бир хил тезликка эга бўлади:

$$u_1 = u_2.$$

Бу ҳолда $u_1 = u_2 = u$ белгилаш киритиб, (26.4) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\left.\begin{aligned} m_1 (u - v_1) &= -S, \\ m_2 (u - v_2) &= S. \end{aligned}\right\} \qquad (26.27)$$

Бу тенгламалардан u ва S ни аниқлаймиз:

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2},$$

$$S = \frac{m_1 m_2 (v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}. \qquad (26.28)$$

Зарба натижасида пластик жисмларнинг кинетик энергияси камаяди. Ҳақиқатан ҳам, пластик жисмларнинг зарбадан олдинги кинетик энергиясини T_1 билан, зарбадан кейинги кинетик энергиясини T_2 билан белгиласак, $T_2 < T_1$ эканлигини исботлаш мумкин:

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2, \; T_2 = \frac{1}{2} (m_1 u^2 + m_2 u^2).$$

Бундан

$$T_1 - T_2 = \frac{1}{2} m_1 (v_1^2 - u^2) + \frac{1}{2} m_2 (v_2^2 - u^2)$$

ёки (26.27) га асосан

$$T_1 - T_2 = \frac{1}{2} S (u + v_1) - \frac{1}{2} S (u + v_2) = \frac{1}{2} S (v_1 - v_2).$$

Бу формулага S нинг қийматини (26.28) дан келтириб қўйсак,

$$T_1 - T_2 = \frac{m_1 m_2 (v_1 - v_2)^2}{2 (m_1 + m_2)} \qquad (26.29)$$

муносабатни оламиз. Шундай қилиб, $T_1 > T_2$ бўлиши исботланди.

(26.28) ни эътиборга олиб, йўқотилган кинетик энергия $T_1 - T_2$ учун бошқача кўринишдаги ифодани ёзиш мумкин:

$$T_1 - T_2 = \frac{(m_1 + m_2) S^2}{2m_1 m_2} = \frac{S^2}{2m_1} + \frac{S^2}{2m_2}$$

ёки (26.27) га асосан

$$T_1 - T_2 = \left[\frac{1}{2} m_1 (v_1 - u)^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_2 - u)^2\right]. \qquad (26.30)$$

Бундаги $v_1 - u$, $v_2 - u$ ларни жисмларнинг «йўқотилган» тезлиги деб аташ мумкин. (26.30) *тенглик пластик жисмлар учун Карно теоремасини ифодалайди: абсолют эластик бўлмаган зарбада системанинг йўқотилган кинетик энергияси йўқотилган тезлик билан ҳаракатланувчи системанинг кинетик энергиясига тенг.*

(26.29) формулани жисмлардан бири қўзғалмас бўлган ҳол учун қўллаймиз. Масалан, $v_2 = 0$ бўлса,

$$T_1 - T_2 = \frac{m_1 m_2 v_1^2}{2(m_1 + m_2)},$$

ёки кўрилаётган ҳолда $T_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2$ бўлгани учун

$$T_1 - T_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} T_1 \qquad (26.31)$$

бўлади.

Шундай қилиб, кинетик энергиянинг сарф бўлиши урилаётган жисмлар кинетик энергияларининг маълум қисмига тенг бўлади; бу қисми ўз навбатида m_1 ва m_2 массаларга боғлиқ бўлади. Агар $m_2 \gg m_1$ бўлса, $\frac{m_2}{m_1 + m_2}$ коэффициент бирга яқин қийматни қабул қилади; аксинча $m_2 \ll m_1$ бўлса, нолга яқин қийматга эга бўлади. Масалан, ўтда қиздириб чўғ қилинган металлни тоблашда болғанинг кинетик энергияси иложи борича кўпроқ сарф бўлиши мақсадга мувофиқдир. Бунинг учун массаси болғанинг массасидан бир неча бор катта бўлган оғир сандондан фойдаланилади. Аксинча қозиқ қоқилаётганда қозиқнинг деформацияси имкони борича кичик бўлгани ёки кинетик энергия иложи борича кам сарф бўлгани маъқул. Шунинг учун бу ҳолда тўқмоқнинг массаси қозиқнинг массасига нисбатан иложи борича катта қилиб олиниши мақсадга мувофиқдир.

Карно теоремасини қўллашга оид қуйидаги масалани ечамиз.

68-масала. Оғирлиги $P = 19620$ Н бўлган болға $h = 0{,}8$ м баландликдан сандон устида тобланаётган қиздирилган металл устига оғирлик кучи таъсирида тушади. Сандон ва металлнинг оғирлиги 294300 Н га тенг. Мазкур болғанинг фойдали иш коэффициенти аниқлансин.

Ечиш. Болғанинг сандонга урилиш олдидаги кинетик энергияси P_1 кучнинг h_1 кўчишидаги иши билан аниқланади:

$$T_1 = P_1 h_1.$$

Қиздирилган металлни пластик жисм деб қараш мумкин. (26.31) га асосан эластик бўлмаган зарба вақтида йўқотилган кинетик энергияни ҳисоблаймиз:

$$T_1 - T_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\, T_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\, P_1 h_1,$$

бунда: m_1 — болғанинг массаси; m_2 — сандон ва тобланаётган металл массаси. Йўқотилган кинетик энергия асосан тобланаётган металлнинг деформацияланишига сарф бўладиган иш билан ифодаланади. Бу фойдали ишнинг болғани h_1 баландликка кўтаришдаги иш миқдори $P_1 h_1$ га нисбатини болғанинг фойдали иш коэффициенти деб аташ мумкин. Бу коэффициентни η билан белгиласак,

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{m_2}{m_1 - m_2} = \frac{P_2}{P_1 + P_2}.$$

P_1 ва P_2 нинг берилган қийматларида

$$\eta = \frac{294300}{313920} = 0{,}94$$

бўлади.

176-§. Қўзғалмас ўқ атрофида айланма ҳаракатдаги жисмга зарбали кучнинг таъсири. Зарба маркази

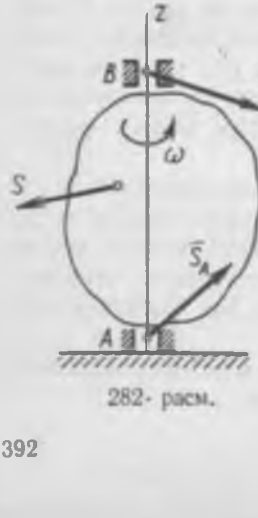
Қўзғалмас z ўқ атрофида ω_0 бурчак тезлик билан айланаётган жисмга зарбали куч таъсир этсин (282-расм). Зарбали куч импульсини $\overline{S}$ билан белгилайлик. У ҳолда A ва B таянч нуқталарида зарбали реакция кучлари ҳосил бўлади. Уларнинг зарба вақти мобайнидаги импульсларини $\overline{S}_A$ ва $\overline{S}_B$ билан белгилаб, жисм зарбадан кейин қандай ω бурчак тезлик билан айланишини топамиз. У ҳолда z ўққа нисбатан $\overline{S}_A$ ва $\overline{S}_B$ зарбали куч импульсларининг моменти нолга тенглигини назарда тутиб, мазкур ўққа нисбатан кинетик моментнинг ўзгариши ҳақидаги (26.11) теоремадан фойдаланамиз: $L_{1z} - L_{0z} = M_z(\overline{S})$. Бунда $L_{0z} = I_z\,\omega_0$; $L_{1z} = I_z\,\omega$ бўлгани учун қуйидаги муносабат ўринлидир:

$$I_z(\omega - \omega_0) = M_z(\overline{S}), \qquad (26.32)$$

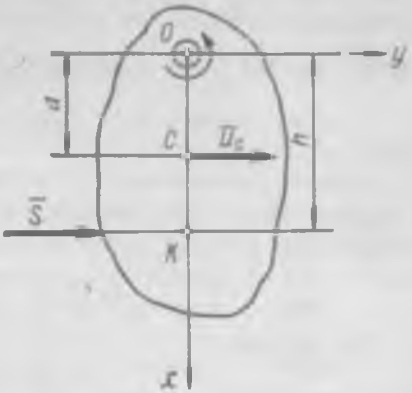
ёки

$$\omega = \omega_0 + \frac{M_z(\overline{S})}{I_z}. \qquad (26.33)$$

Бинобарин, зарба вақти мобайнида жисмнинг бурчак тезлиги зарбали куч импульсининг айланиш ўқига нисбатан моментининг жисмнинг шу ўққа нисбатан инерция моментига нисбатига тенг катталикка ортади.



282- расм.



283- расм.

Расм текислигига перпендикуляр ўқ атрофида айлана оладиган жисмга зарбали куч импульси $\overline{S}$ таъсир этсин. z ўқнинг расм текислиги билан кесишган нуқтасини O билан белгилаймиз (283-расм). Жисм симметрия текислигига эга деб қараймиз ва расм текислиги учун симметрия текислигини олиб, x ўқни жисм огирлик маркази C орқали ўтказамиз. Таянч подшипниклари расм текислигига симметрик жойлашган деб қарасак, у ҳолда таянчларда ҳосил бўладиган зарбали реакция кучлари (ёки уларнинг импульслари) O нуқтага қўйилган битта кучга (ёки $\overline{S}_0$ импульсга) келтирилади. Қандай шартлар бажарилганда зарбали куч импульси $\overline{S}$ таъсирида жисмнинг таянч нуқталарида зарбали реакция кучи ҳосил бўлмаслигини аниқлаймиз.

Жисм зарбагача тинч ҳолатда бўлсин, у ҳолда $\omega_0 = 0$. Зарбадан кейин жисм ω бурчак тезлик билан айлансин ва оғирлик марказининг тезлиги u_C га тенг бўлсин. Бу тезлик миқдор жиҳатдан $a\,\omega$ га тенг, йўналиши эса (OC) га перпендикуляр бўлади (283-расм).

Массалар марказининг ўзгариши ҳақидаги теоремани x ва y ўқларга нисбатан қўллаймиз:

$$\left.\begin{aligned} S_x + S_{0x} &= 0. \\ S_y + S_{0y} &= M\,u_C. \end{aligned}\right\} \qquad (26.34)$$

Подшипникларда зарбали реакция кучи ҳосил бўлмаслиги учун

$$S_{0x} = S_{0y} = 0$$

бўлиши керак. Шу сабабли (26.34) дан $S_y = M\,u_C$, $S_x = 0$ муносабатларни оламиз. $S_r = 0$ шартнинг бажарилиши зарбали куч импульси x ўққа, яъни оғирлик марказини айланиш ўқи билан туташтирувчи чизиққа перпендикуляр бўлишини кўрсатади.

Шундай қилиб, $S = S_y = Mu_C$ бўлади. $u_C = a\omega$ бўлгани учун зарбали куч импульси

$$S = Ma\omega$$

формуладан аниқланади. Жисмнинг зарбадан кейинги бурчак тезлиги (26.33) га биноан аниқланади. У ҳолда

$$S = Ma\frac{S\cdot h}{I_z}. \qquad (26.35)$$

деб ёзиш мумкин, бунда: I_z — жисмнинг айланиш ўқига нисбатан инерция моменти: h—мазкур ўқдан зарбали импульс S йўналган чизиққача бўлган масофа. (26.35) дан

$$h = \frac{I_z}{Ma}. \qquad (26.36)$$

бинобарин, *зарбали куч импульси таъсир этадиган тўғри чизиқ айланиш ўқидан* $\frac{I_z}{Ma}$, *масофада ётиши керак.*

Бу тўғри чизиқнинг x ўқни кесиб ўтган K нуқтаси *зарба маркази* дейлади.

Масалан, горизонтал ўқ атрофида айлана оладиган ва узунлиги l га тенг бўлган бнр жинсли стержень учун зарба марказини аниқлаймиз. Бу ҳолда

$$I_z = \frac{1}{3} Ml^2, \ a = \frac{l}{2}.$$

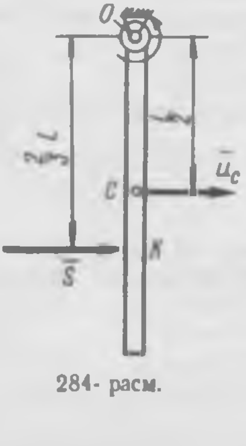
(26.36) га кўра

$$OK = \frac{2}{3} l,$$

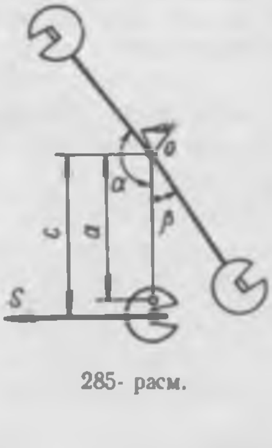
яъни зарба маркази айланиш ўқидан $\frac{2}{3} l$ масофада ётади (284-расм).

Зарба марказини аниқлаш муҳим бўлган яна бир мисол тариқасида материалларнинг зарбага қаршилигини аниқлашда қўлланиладиган асбоб — *Шарпи тебрангичини* олиш мумкин. Бу асбобнинг асосий қисми пўлат тиғ ўрнатилган ва массаси m га тенг бўлган ҳамда O нуқтадан ўтувчи горизонтал ўқ атрофида вертикал текисликда айланувчи салмоқдор тебрангичдан иборат (285-расм). Тажриба ўтказишда тебрангични бирор баландликка кўтариб вертикал ҳолатдан α бурчакка оғдирилади ва уни қўйиб юборилади. Тебрангич ўз оғирлиги таъсирида мазкур ҳолатдан бошланғич тезликсиз туша бошлайди ва вертикал ҳолатга келганда, текширилаётган материалдан ясалган нусха тўсиққа урилади ҳамда уни кесиб ўтади. Натижада тебрангичнинг бурчак тезлиги маълум даражада пасаяди. Зарбадан кейин тебрангич ўз ҳаракатини давом эттиради ва бирор β бурчакка бурилади.

Агар тебрангичнинг айланиш ўқига нисбатан инерция моментини I билан, зарбали куч импульси S қўйилган нуқтадан айланиш ўқигача бўлган масофанн c, тебрангичнинг текширилаётган материал нусхасига урилиш олдидаги бурчак тезлигини ω_0 билан, зарбадан кейин



284- расм.



285- расм.

и (нусхани кесиб ўтгандан кейинги) бурчак тезлигини ω билан белиласак, (26.32) га кўра

$$I(\omega - \omega_0) = S \cdot c,$$

ундан

$$S = \frac{I(\omega - \omega_0)}{c}.$$

Зарба даврида тебрангичга таъсир этувчи $\overline{S}$ импульс тебрангичинг айланиш ўқи ўрнатилган подшипникларда зарбали реакция куини ҳосил қилади. Агар подшипниклар O нуқтадан бир хил масоада ўрнатилган бўлса, зарбали реакция кучларини O нуқтага қўйилан битта куч билан алмаштириш мумкин.

Юқорида кўрганимиздек, подшипникларда зарбали реакция кучи ҳосил бўлмаслиги учун тебрангичда тиғ ўрнатиладиган c масофани 26.36) га кўра

$$c = \frac{I}{ma}$$

а тенг қилиб олиш керак. Бу ифодани (22.28) формула билан солишириб зарба марказидан айланиш ўқигача бўлган c масофа физик аятникнинг келтирилган узунлигига тенг бўлишини кўрамиз. Бошқача айтганда, зарба маркази тебрангичнинг силкиниш маркази билан устма-уст тушади.

177-§. Текис параллел ҳаракатдаги жисмга зарбали кучнинг таъсири

Зарбали куч таъсиридаги жисмнинг текис параллел ҳаракатини екшириш учун уни ўз оғирлик маркази орқали ўтувчи ва ҳаракат екислигига параллел бўлган П текислик билан фикран кесамиз. Бу екисликда қўзғалмас Oxy ва жисмнинг массалар маркази орқали ўтувчи ҳамда у билан биргаликда илгариланма ҳаракатланувчи Cx_1y_1 координата системаларини ўтказамиз. Жисмга шундай зарбали кучлар аъсир этадики, зарбадан кейин ҳам жисм мазкур ҳаракат текислигига араллел текисликда ҳаракатланади. Бундай куч таъсиридаги жисм ассалар маркази атрофидаги айланма ҳаракат бурчак тезлигини аниқлаймиз.

Зарбали куч таъсир этаётган кўрилаётган жисм учун массалар арказининг ҳаракати ҳақидаги теоремани x ва y ўқларга нисбатан [(26.8) кўра] қуйидагича ёзиш мумкин:

$$M(u_{Cx} - v_{Cx}) = \sum S^e_{kx},$$

$$M(u_{Cy} - v_{Cy}) = \sum S^e_{ky}.$$

Зарбали куч импульси $\overline{S}$, массалар марказининг зарбадан олдинги езлиги v_C берилганда, бу тенгламалар воситасида система массалар арказининг зарбадан кейинги тезлигини аниқлаш мумкин. Жисмнинг ассалар маркази орқали П текисликка перпендикуляр равишда ўтувчи ўқ атрофида зарбадан олдинги айланиш бурчак тезлиги берилганда системанинг бу ўққа нисбатан кинетик моментининг ўзгариши ҳақидаги

$$I_{C}z(\omega-\omega_0)=\sum M_{C}z\left(\overline{S_k^e}\right)$$

теоремадан фойдаланиб зарбадан кейинги бурчак тезлиги ω ни аниқлаш мумкин.

АДАБИЁТ

Асосий

1. Бутенин Н. В., Лунц Я. Л., Меркин Д. Р. Курс теоретической механики. Қайта ишланган ва тўлдирилган 2- нашри, 1, 2- тт. М. : Наука, 1979.

2. Воронков И. М. Курс теоретической механики. — 13- стереотип нашри. М. : Наука, 1966.

3. Добронравов В. В., Никитин В. В. Курс теоретической механики. Қайта ишланган ва тўлдирилган 4- нашри. М. : Высшая школа, 1983.

4. Лойцянский Л. Г., Лурье А. И. Курс теоретической механики. Қайта ишланган ва тўлдирилган 8- нашри, 1- т. М. : Наука, 1981; қайта ишланган ва тўлдирилган 6- нашри, 2- т. М. : Наука, 1983.

5. Мешчерский И. В. Назарий механикадан масалалар тўплами. Русча 30- нашрига мувофиқлаштирилган 3- нашри. Т. : Ўқитувчи, 1989.

6. Старжинский В. М. Теоретическая механика. М. : Наука, 1980.

7. Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики. 9- нашри, М. : Наука, 1974.

8. Яблонский А. А. Курс теоретической механики. Тузатилган 5- нашри, II қисм. М. : Высшая школа, 1977.

9. Яблонский А. А., Никифорова В. М. Курс теоретической механики. Тузатилган 5- нашри. I қисм. М. : Высшая школа, 1977.

10. Яблонский А. А., Норейко С. С., Вольфсон ва бошқалар. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике. Тузатилган 3- нашри. М. : Высшая школа, 1978.

11. Ўрозбоев М. Т. Назарий механика асосий] курси. Қайта ишланган 3- нашри. Т. : Ўқитувчи, 1966.

Қўшимча]

1. Азиз-Қориев С. Қ., Янгуразов Ш. Х. Назарий механикадан масалалар ечиш методикаси (статика ва кинематика). Қайта ишланган 2- нашри. Т. : Ўқитувчи, 1974.

2. Азиз-Қориев С. Қ., Янгуразов Ш. Х. Назарий механикадан масалалар ечиш методикаси (динамика). Т. : Ўқитувчи, 1967.

3. Айзенберг Т. Б., Воронков И. М., Осецкий В. М. Руководство к решению задач по теоретической механике. 6- стереотип нашри. М. : Высшая школа, 1968.

4. Бать М. И., Джанелидзе Г. Ю., Кельзоон А. С. Теоретическая механика в примерах и задачах. Тўлдирилган 7- нашри, 1- т. М. : Наука, 1975; тўлдирилган 6- нашри, 2- т. М. : Наука, 1975; 3- т, М. : Наука, 1973.

5. Бражниченко Н. А., Кан В. Л., Минцбург Б. Л. ва бошқалар. Сборник задач по теоретической механике. Қайта ишланган ва тўлдирилган 3- нашри. М. : Высшая школа, 1974.

6. Бутенин Н. В. Введение в аналитическую механику. М. : Высшая школа, 1973.

7. Гернет М. М. Курс теоретической механики. Қайта ишланган ва қисқартирилган 4- нашри. М. : Высшая школа, 1981.

8. Колесников К. С., Блюмин Г. Д., Дронг В. И. ва бошқалар. Сборник задач по теоретической механике. — М. : Наука, 1983.

9. Шульгин М. Ф., Шоҳайдарова П. Ш., Шозиётов Ш. Назарий механиканинг асосий тушунчалари. Т. : 1979.

АСОСИЙ ТУШУНЧАЛАРНИНГ АЛФАВИТ КЎРСАТКИЧИ

абсолют тезланиш 152
  — тезлик 152
  — эластик бўлмаган зарба 387
  — эластик зарба 387
  — қаттиқ жисм 6
  — ҳаракат 152
айлана ёйи оғирлик марказининг координатаси 80
йланиш бурчаги 111
  — оний ўқи 142
  — ўқи 111
йланма инерция кучи 222
  — тезланиш 115, 145
налитик механика 313
сосий саноқ системаси 82
бинормаль 98
бир жинсли доиравий дискнинг инерция моменти 218
  — — оғирлик кучи майдонининг куч функцияси 268
  — нуқтада кесишувчи кучлар системаси 12
ошланғич шартлар 197
ош нормаль 98
оғланиш 9
оғланишдаги жисм 9
  — нуқта ҳаракати дифференциал тенгламасининг векторли ифодаси 190
  — система 210
  — — ҳаракатининг Декарт координата ўқларидаги дифференциал тенгламалари 213
оғланишдан бўшатиш аксиомаси 10
оғланишлар 313
оғланиш реакция кучи 9
бўшатадиган боғланиш 315
бўшатмайдиган боғланиш 315
знсизлик ҳолати 209
ариньон теоремаси 47
ектор кўринишидаги марказий ўқ тенгламаси 50
иллис усули 173
инт параметри 48, 180
  — чизиғи 182
  — ўқи 48
  — қадами 181
  — ҳаракати 180
виртуал кўчиш 320
геометрик боғланишлар 314
ғироскоп 290
  — ўқига кучнинг таъсири 290
  — ўқининг прецессияси 291
  — — устуворлик хусусияти 291
гироскопик момент 292
ғолоном боғланиш 314
Гюйгенс — Штейнер теоремаси 217
Даламбер — Лагранж принципи 315
динамика 6, 183
  — умумий тенгламасининг умумлашган координаталардаги ифодаси 341
динамик винт 48
  — ишқаланиш кучи 66
  — реакция кучи 306
  — коэффициенти 371
динамиканинг асосий тенгламаси 184
  — асосий қонуни 184
  — умумий тенгламаси 315
дифференциалли боғланиш 314
  — узатма 173
доира секторининг оғирлик маркази 80
думалашдаги ишқаланиш 64
  — — жуфт кучи 70
  — — коэффициенти 70
  — — моменти 70
ёпишма текислик 89, 97
жисм массаларини динамик мувозанатлаш 308
  — нуқтасининг чизиқли тезлиги 115
жисмнинг бурчак тезланиши 113
  — — тезлиги 111
  — инертлиги 183
  — оғирлик марказининг координаталари 74
  — текис айланма ҳаракати 112
  — — — ҳаракат тенгламаси 112
  — ўққа нисбатан инерция радиуси 216
  — қўзғалмас ўқ атрофидаги айланма ҳаракат тенгламаси 111

— — — — текис ўзгарувчан айланма ҳаракат тенгламаси 114
Жуковский қоидаси 154, 293
жуфт айланиш 170
— моменти 171
— елкаси 30
— куч 30
— — моменти вектори 34
— — текислиги 30
— кучлар системаси мувозанатининг аналитик ифодаси 39
— — — мувозанат шартининг векторли ифодаси 39
зарба 380
— вақти 380
— вақтида система массалар маркази ҳаракатининг ўзгариши ҳақидаги теорема 383
— маркази 394
— назариясининг асосий тенгламаси 381
зарбада система кинетик моментининг ўзгариши ҳақидаги теорема 383
— — ҳаракат миқдорининг ўзгариши 382
зарбадаги тиклаш коэффициенти 384
зарбали куч 380
— — импульси 381
идеал боғланиш 323
илгариланма ҳаракат 109
ингичка доиравий ҳалқанинг инерция моменти 218
инерциал бўлмаган саноқ системаси 201
— система 187
инерцион доимий 356
инерция бош моментлари 223
— — ўқлари 223
— кучи 294
— марказий бош ўқлари 223
— эллипсоиди 223
— қонуни 184
ички кучлар 60, 210
иш 256
ишқаланиш бурчаги 66
— конуси 66
— кучи 10, 64
Карно теоремаси 390
квазиэластик доимий 357
кесишувчи кучлар 12
— — системаси таъсиридаги эркин жисм мувозанат тенгламасининг аналитик ифодаси 18
Кёниг теоремаси 270
кинематика 6, 82
кинематик боғланиш 314
кинетик потенциал 342
кинетостатика усули 294
классик механика 184
— механиканинг нисбийлик принципи 203
консерватив куч 265
координата ўқи бўйича система ҳаракат миқдорининг сақланиш қонуни 236
Кориолис тезланиши 157
— теоремаси 157
— тезланишининг модули 159
куч 6
— елкаси 23
— маркази 247
— функцияси 265
— қўйилган нуқта 6
кучлар кўпбурчаги 14
— системаси 7
— системасини содда ҳолга келтириш 43
— системасининг бош вектори 42
— — — моменти 43
— — инварианти 44
— — биринчи инварианти 44
— — иккинчи инварианти 46
— — тенг таъсир этувчиси 7
— таъсирининг ўзаро мустақиллик қонуни 186
— учбурчаги усули 13
кучнинг йўналиши 6
— мумкин бўлган кўчишдаги иши 322
— нуқтага нисбатан моменти 23
— — — момент вектори 24
— — — моментининг геометрик маъноси 24
— таъсир чизиғи 7
— элементар импульси 231
— ўқдаги проекцияси 15
— ўққа нисбатан моменти 26
кўндаланг реакция кучи 305
кўчирма тезланиш 152
— тезлик 152
— ҳаракат 152
кўчиш 83
Лагранж — Дирихле теоремаси 353
Лагранж функцияси 342
Лагранжнинг иккинчи хил тенгламалари 341
— мумкин бўлган кўчиш принципи 330
логарифмик декремент 368
Ляпунов таърифига кўра устувор мувозанат 352
мажбурий прецессия 292
— тебранма ҳаракат 369
марказга интилма тезланиш 115
марказдан қочувчи инерция кучлари 222
— — — моменти 222
марказий ўқ 50
— куч 247
— кучнинг иши 261
— эллипсоид 223

ассалар геометрияси 213
атематик тебрангич 192
— тебрангичнинг кичик тебранма ҳаракат тенгламаси 192
еханик система 210
— — Даламбер принципи 296
— — ҳаракатининг Декарт координата ўқларидаги дифференциал тенгламалари 212
— системанинг марказга нисбатан кинетик моменти 246, 255
— — умумлашган координаталардаги ҳаракат дифференциал тенгламалари 341
— ҳаракат 5
— ҳаракат ўлчови 281
— ҳаракатнинг скаляр ўлчови 282
ешчерский тенгламаси 243
оддий нуқта 6, 184
— — динамикасининг биринчи асосий масаласи 194
— — — иккинчи асосий масаласи 196
— — нисбий ҳаракат дифференциал тенгламасининг векторли кўриниши 202
— ҳаракат миқдори ҳақидаги теоремани дифференциалли ифодаси 231
омент маркази 23
увозанатлашган кучлар системаси 7
умкин бўлган кўчиш 320
ураккаб ҳаракат 152
азарий механика 5
исбий тезланиш 151
— тезлик 151
— траектория 151
— харакат 151
оголоном боғланиш 314
ормал инерция кучи 222
— реакция кучи 10
— тезланиш 108
озлик коэффициенти 371
оустувор мувозанат 351
утация бурчаги 139
уқта дифференциал тенгламаларининг Эйлер формаси 190
— кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақидаги теоремани дифференциалли ифодаси 272
— механик энергиясининг сақланиш қонуни 274
— тезлигининг годографи 91
— траекториясининг тенгламаси 85
— ҳаракатининг кинематик хусусиятлари 83
— ҳаракат миқдори моментининг сақланиш қонуни 248
— — миқдорининг координата ўқларига нисбатан моментлари ўзгариши ҳақидаги теорема 247
— — — марказга нисбатан моментининг ўзгариши ҳақидаги теорема 247
— — — сақланиш қонуни 232
нуқтанинг берилган пайтдаги тезланиш вектори 89
— — — тезлик вектори 88
— вектор кўчиши 87
— — шаклидаги ҳаракат тенгламаси 84
— гармоник тебранма ҳаракат тенгламаси 193
— Декарт координаталаридаги ҳаракат тенгламаси 84
— ёй координатаси 87
— кинетик энергияси 269
— оғирлиги 209
— секторли тезлиги 249
— тезлик годографи бўйича ҳаракат тенгламаси 91
— текисликдаги ҳаракат тенгламалари 85
— тўғри чизиқли ҳаракат тенгламаси 85
— эгри чизиқли текис ҳаракати тенгламаси 105
— ўртача тезланиши 89
— ўртача тезлиги 88
— ҳаракатини табиий усулда аниқлаш 86
— ҳаракат миқдори 230
— — тенгламаси 86
— — қонуни 83
оддий узатма 172
оний бурчак тезланиши 143
— — тезлик 142
— марказ 126
оғирлик кучи 204
— кучининг иши 259
параллел кучлар маркази 74
параллелограмм аксиомаси 8
планетар узатма 172
пластик жисмлар учун Карно теоремаси 391
потенциал энергия 267
потенциалли куч 264
— — майдони 265
— кучлар таъсиридаги система учун Лагранжнинг иккинчи хил тенгламалари 343
прецессия бурчаги 139
реактив куч 243
Резаль теоремаси 291
резонанс 371
Релейнинг диссипатив функцияси 365
Ривальс теоремаси 165
саноқ системаси 7
секинланувчан ҳаракат 93
— айланма ҳаракат 113

силкиниш маркази 286
— ўқи 286
сирпанишдаги ишқаланиш 64
— — коэффициенти 66
сирт оғирлик марказининг координаталари 76
система кинетик моментининг сақланиш қонуни 252
— — моментининг ўзгариши ҳақидаги теорема 251
— — энергиянинг ўзгариши ҳақидаги теорема 275
— — — — — теореманинг дифференциалли ифодаси 275
— массалар марказининг ҳаракати ҳақидаги теорема 227
— ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теорема 234
— — — сақланиш қонунини векторли ифодаси 235
системанинг кинетик энергияси 269
— массаси 213
— массалар маркази 214
— мумкин бўлган кўчиши 321
— нуқтага нисбатан инерция моменти 214
— текисликка нисбатан инерция моменти 214
— умумлашган координаталари 317
— эркинлик даражаси 319
— ўққа нисбатан инерция моменти 214
— ҳаракат миқдори 230
соф айланиш бурчаги 139
статика 6
статиканинг умумий тенгламаси 330
статик аниқ масала 60
— аниқмас масала 60
— ишқаланиш кучи 66
— реакция кучи 306
— силжиш 371
стационар боғланиш 314
— бўлмаган боғланиш 314
стержендаги зўрикнш 19
сферик харакат 139
табиий координаталар системаси 98
— координата ўқлари 98
ташқи кучлар 60, 210
таъсир ва акс таъсирнинг тенглик қонуни 185
тебраниш декременти 368
тезланишларнинг оний маркази 131
тезланувчан айланма ҳаракат 113
— ҳаракат 93
тезликлар оний маркази 126
тезликларни қўшиш теоремаси 154
тезликларнинг координата ўқларидаги проекциялари 90
— параллелограмм қоидаси 155
текис параллел ҳаракат 121
— шакл 121
— — нуқтасининг тезланиши 140
— — — тезлиги 125
— шаклнинг ҳаракат текислиги 121
— ҳаракат 91
— ўзгарувчан айланма ҳаракат 113
— — — — бурчак тезлиги 113
— ўзгарувчан ҳаракат 105
текисликда кесишувчи кучлар системасининг мувозанат тенгламалари 18
— параллел кучлар таъсиридаги эркин жисмнинг мувозанат тенгламалари 57
тенг потенциалли сирт 266
— таъсир этувчи жуфт 36
техник бирликлар системаси 188
тинч ҳолат 82
траектория 83
тугунлар чизиғи 139
тўлиқ механик энергия 274
тўхтатиш усули 173
тўғри зарба 384
— марказий зарба 386
— чизиқли текис ҳаракат 105
— — ҳаракат 105
уйғотувчи куч 368
умумлашган куч 325
уринма инерция кучи 222
— тезланиш 108
— текислик 98
устувор мувозанат 351
учбурчак юзининг оғирлик марказн 79
уч куч теоремаси 21
фазодаги кучлар системаси 40
— — — мувозанатининг аналитик шартлари 54
— — — — векторли ифодаси 54
— параллел кучлар таъсиридаги жисмнинг мувозанат тенгламалари 56
физик тебрангич 294
— тебрангичнинг келтирилган узунлиги 285
— — ҳаракат дифференциал тенгламаси 285
халқаро СИ бирликлар системаси 187
циклик интеграллар 343
— координаталар 343
Циолковский сони 244
— формуласи 244
чап винт ҳаракати 180
чекли вақт оралигида нуқта ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теорема 232
— — ичида система ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теорема 234
— кўчишдаги нуқта кинетик энер-

гиясининг ўзгариши ҳақидаги теорема 273
изиқли тебраниш 355
— эластиклик куч майдонининг куч функцияси 268
изиқнинг оғирлик маркази 76
Шаль теоремаси 148
Шарпи тебрангичи 394
грилик текислиги 89
гри чизиқнинг эгрилиги 98
— — эгрилик радиуси 98
квивалент кучлар системаси 7
— жуфт кучлар 31
Эйлер бурчаклари 140
Эйлер — Даламбер теоремаси 141
Эйлер теоремаси 241
— формуласи 118
лементар иш 257
— ишнинг аналитик ифодаси 257
энергия интеграли 274, 276
ркин айланиш ўқи 327
— бўлмаган нуқта учун Даламбер принципи 294
— жисм 7
— моддий нуқтанинг Декарт координаталаридаги ҳаракат дифференциал тенгламалари 189
— — — табиий координата ўқларидаги ҳаракат дифференциал тенгламалари 190
— моддий нуқта ҳаракат дифференциал тенгламаларининг векторли ифодаси 189
— система 313
— тебранма ҳаракат 357
— тушиш тезланиши 185
эркинлик даражаси битта бўлган системанинг кичик мажбурий тебранма ҳаракат дифференциал тенгламаси 369
эластиклик кучининг иши 260
озалар интеграли 250
— қонуни 250
ярим шарнинг оғирлик маркази 81
ўзаро механик таъсир 281
— — таъсирнинг биринчи векторли ўлчови 282
— — — иккинчи векторли ўлчови 282
— — — скаляр ўлчовлари 282
— — — ўлчовлари 282
ўзгармас механик система 210
ўзгарувчан массали жисм 242
— — нуқта 242
— — — ҳаракатининг дифференциал тенгламаси 243
ўнг винт ҳаракати 180
ўққа интилма тезланиш 145
қаттиқ жисмнинг кинетик энергияси 270
— — мураккаб ҳаракати 166
— — текис параллел ҳаракат дифференциал тенгламалари 289
— — — — — тенгламалари 123
— — қўзғалмас нуқта атрофидаги айланма ҳаракати 139
— — — — — — — тенгламалари 140
қайтарувчи куч 357
қаршилик коэффициенти 364, 371
қотиш принципи 9
қувват 256
қутбнинг ҳаракат тенгламалари 149
қўзғалмас аксоид 142
— аксоиднинг тенгламаси 144
— саноқ системаси 82
— ўқ атрофидаги айланма ҳаракат 111
— — атрофида айланувчи қаттиқ жисмнинг таянч нуқталарида подшипникларга кўрсатадиган босими 303
— — — — — — ҳаракат дифференциал тенгламаси 284
қўзғалувчи аксоид 142
— аксоиднинг тенгламаси 144
қўшилган жуфт куч 41
ҳажмга эга бўлган бир жинсли жисмнинг оғирлик марказини координаталари 75
ҳаракат 83
ҳақиқий кўчиш 320

МУНДАРИЖА

Биринчи нашрига сўз боши 3
Иккинчи нашрига сўз боши 3

I боб. **Кириш** 5
- 1- §. Умумий мулоҳазалар 5

Статика

II боб. **Қаттиқ жисм статикаси ва статиканинг асосий аксиомалари** 6
- 2- §. Асосий тушунчалар ва таърифлар 6
- 3- §. Статиканинг асосий аксиомалари 7
- 4- §. Боғланиш ва боғланиш реакциялари 9

III боб. **Бир нуқтада кесишувчи кучлар системаси** 12
- 5- §. Бир нуқтада кесишувчи кучларни геометрик усулда қўшиш 13
- 6- §. Кучнинг ўқдаги проекцияси 15
- 7- §. Тенг таъсир этувчини аналитик усулда аниқлаш 16
- 8- §. Бир нуқтада кесишувчи кучларнинг мувозанати 17
- 9- §. Уч куч мувозанатига оид теорема 20

IV боб. **Куч моменти** 23
- 10- §. Кучнинг нуқтага нисбатан моменти 23
- 11- §. Кучнинг нуқтага нисбатан моменти вектори 24
- 12- §. Кучнинг ўққа нисбатан моменти 25
- 13- §. Кучнинг ўққа нисбатан моменти билан шу ўқдаги нуқтага нисбатан моменти орасидаги муносабат 27
- 14- §. Кучнинг координата ўқларига нисбатан моментларини аналитик усулда аниқлаш 28

V боб. **Жуфт кучлар назарияси** 30
- 15- §. Жуфт куч ва жуфт кучнинг моменти 30
- 16- §. Эквивалент жуфт кучлар ҳақидаги теоремалар 31
- 17- §. Жуфт куч моментига оид теорема 34
- 18- §. Жуфт куч моментининг векторлиги 34
- 19- §. Бир текисликда ва параллел текисликларда ётувчи жуфт кучларни қўшиш 35
- 20- §. Фазода ихтиёрий вазиятда жойлашган жуфт кучларни қўшиш 36
- 21- §. Жуфт кучлар системасининг мувозанати 38

VI боб. Фазода ихтиёрий жойлашган кучлар системаси 40
22- §. Кучни ўзига параллел равишда кўчиришга оид лемма . . 40
23- §. Фазода ихтиёрий жойлашган кучларни бир нуқтага келтириш 41
24- §. Фазодаги кучлар системасининг инвариантлари 44
25- §. Фазодаги кучлар системасини жуфт кучга ёки тенг таъсир этувчига келтириш 46
26- §. Тенг таъсир этувчининг моменти ҳақидаги Вариньон теоремаси 47
27- §. Фазодаги кучлар системасини динамик винтга келтириш 48
28- §. Марказий винт ўқи 50
29- §. Кучлар системасини содда ҳолга келтиришга оид масалалар 50
30- §. Фазодаги кучлар системаси мувозанати шартларининг векторли ифодалари 54
31- §. Фазодаги кучлар системаси мувозанатининг аналитик шартлари 54
32- §. Хусусий ҳолларда кучлар системасининг мувозанати тенгламалари 55
33- §. Текисликдаги кучлар системаси мувозанати тенгламаларининг бошқача кўринишлари 57
34- §. Статик аниқ ва статик аниқмас масалалар 60
35- §. Бир неча жисмдан ташкил топган системанинг мувозанати 60
36- §. Фазодаги кучлар системасининг мувозанатига оид масала ечиш 62

VII боб. Ишқаланиш 64
37- §. Сирпанишдаги ишқаланиш қонунлари 64
38- §. Ишқаланиш бурчаги. Ишқаланиш конуси 65
39- §. Ишқаланиш бурчагини тажриба йўли билан аниқлаш . . 67
40- §. Думалашдаги ишқаланиш 69

VIII боб. Параллел кучлар маркази ва оғирлик маркази 72
41- §. Бир томонга йўналган иккита параллел кучни қўшиш . . 72
42- §. Параллел кучлар маркази 73
43- §. Қаттиқ жисмнинг оғирлик маркази координаталарининг умумий формулалари 74
44- §. Жисмларнинг оғирлик марказини аниқлаш усуллари . . 77
45- §. Оддий шаклли баъзи жисмларнинг оғирлик марказларини аниқлаш 79

Кинематика

46- §. Асосий тушунчалар 82

IX боб. Нуқта кинематикаси 83
47- §. Нуқта ҳаракатининг берилиш усуллари 83
48- §. Ҳаракати вектор усулида берилган нуқтанинг тезлиги . . 87
49- §. Ҳаракати вектор усулида берилган нуқтанинг тезланиши 88
50- §. Ҳаракати координаталар усулида берилган нуқтанинг тезлиги 89
51- §. Ҳаракати координаталар усулида берилган нуқтанинг тезланиши 92
52- §. Нуқтанинг тезлик ва тезланишларини аниқлашга оид масалалар 93
53- §. Дифференциал геометриядан баъзи маълумотлар 97
54- §. Ҳаракати табиий усулда берилган нуқтанинг тезлиги . . 99
55- §. Ҳаракати табиий усулда берилган нуқтанинг тезланиши 102

56. §. Ҳаракатнинг хусусий ҳоллари
57- §. Нуқтанинг уринма ва нормал тезланишларига оид масалалар

X боб. **Қаттиқ жисмнинг илгариланма ва қўзғалмас ўқ атрофидаги айланма ҳаракати**

58- §. Қаттиқ жисмнинг илгариланма ҳаракати
59- §. Қаттиқ жисмнинг қўзғалмас ўқ атрофидаги айланма ҳаракати тенгламаси
60- §. Айланма ҳаракатнинг бурчак тезлиги. Текис айланма ҳаракат
61- §. Айланма ҳаракатнинг бурчак тезланиши. Текис ўзгарувчан айланма ҳаракат
62- §. Қўзғалмас ўқ атрофида айланма ҳаракатдаги жисм нуқталарининг тезлиги ва тезланиши
63- §. Бурчак тезлик ва бурчак тезланишнинг векторлиги
64- §. Айланма ҳаракатдаги жисм нуқталари тезлиги ва тезланишининг векторли ифодалари

XI боб. **Қаттиқ жисмнинг текис параллел ҳаракати**

65- §. Текис параллел ҳаракатнинг хусусиятлари. Текис шаклнинг ҳаракат текислигида кўчиши
66- §. Текис шаклнинг ҳаракат тенгламаси
67- §. Текис шакл нуқтасининг тезлигини қутб усулида аниқлаш
68- §. Текис шакл икки нуқтаси тезликларининг проекцияларига оид теорема
69- §. Тезликларнинг оний маркази
70- §. Текис шакл нуқталарининг тезликларини оний марказдан фойдаланиб аниқлаш
71- §. Баъзи ҳолларда тезликларнинг оний марказини аниқлаш
72- §. Текис шакл нуқтасининг тезланиши
73- §. Тезланишларнинг оний маркази
74- §. Текис параллел ҳаракатдаги қаттиқ жисм нуқталарининг тезлик ва тезланишларини аниқлашга доир масалалар

XII боб. **Қаттиқ жисмнинг қўзғалмас нуқта атрофида айланма ҳаракати**

75- §. Эйлер бурчаклари. Сферик ҳаракат тенгламалари
76- §. Қўзғалмас нуқта атрофида айланувчи жисмнинг кўчишига оид Эйлер — Даламбер теоремаси
77- §. Сферик ҳаракатдаги жисмнинг оний бурчак тезлиги ва оний бурчак тезланиши
78- §. Қўзғалмас нуқта атрофида айланувчи жисм нуқтасининг тезлиги
79- §. Қўзғалмас нуқта атрофида айланувчи жисм нуқтасининг тезланиши

XIII боб. **Қаттиқ жисм ҳаракатининг умумий ҳоли**

80- §. Эркин қаттиқ жисмнинг ҳаракатини илгариланма ва айланма ҳаракатларга ажратиш
81- §. Эркин қаттиқ жисм нуқталарининг тезлиги ва тезланиши

XIV боб. **Нуқтанинг мураккаб ҳаракати**

82- §. Нуқтанинг нисбий, кўчирма ва мураккаб ҳаракатлари
83- §. Тезликларни қўшиш теоремаси
84- §. Тезланишларни қўшиш теоремаси (Кориолис теоремаси)
85- §. Кориолис тезланиши
86- §. Мураккаб ҳаракатдаги нуқтанинг тезлик ва тезланишларини аниқлашга доир масалалар

XV боб. Қаттиқ жисмнинг мураккаб ҳаракати 166
87- §. Иккита параллел ўқ атрофида айланувчи жисмнинг ҳаракатларини қўшиш 167
88- §. Жисмнинг параллел ўқлар атрофидаги ҳаракатларини қўшишга доир масалалар 172
89- §. Жисмнинг кесишувчи ўқлар атрофидаги айланма ҳаракатларини қўшиш 177
90- §. Қаттиқ жисмнинг илгариланма ҳаракатларини қўшиш . . 180
91- §. Винт ҳаракати 180

Динамика

XVI боб Динамикага кириш 183
92- §. Динамиканинг асосий тушунчалари 184
93- §. Динамиканинг асосий қонунлари 184
94- §. Механик ўлчов бирликлари системаси 187

XVII боб. Моддий нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламалари ва уларни ечиш 188
95- §. Моддий нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламалари 188
96- §. Боғланишдаги моддий нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламалари 190
97- §. Математик тебрангич 192
98- §. Моддий нуқта динамикасининг икки асосий масаласи . . 194
99- §. Динамиканинг иккинчи масаласини ечишга оид мисоллар 198

XVIII боб Моддий нуқтанинг нисбий ҳаракати динамикаси 201
100- §. Моддий нуқта нисбий ҳаракатининг дифференциал тенгламалари 201
101- §. Жисмларнинг мувозанати ва ҳаракатига Ер айланишининг таъсири 203
102- §. Вазнсизлик 208

XIX боб Механик система динамикасига кириш 210
103- §. Механик система. Механик системага таъсир этувчи кучларнинг тавсифи 210
104- §. Механик система ҳаракатининг дифференциал тенгламалари 212
105- §. Боғланишдаги механик система ҳаракатининг дифференциал тенгламалари 212

XX боб. Массалар геометрияси 213
106- §. Системанинг массалар маркази ва унинг координаталари 213
107- §. Системанинг инерция моментлари. Инерция моментларининг умумий формулалари 214
108- §. Жисмнинг параллел ўқларга нисбатан инерция моментларини ҳисоблаш. Гюйгенс — Штейнер теоремаси . . . 216
109- §. Баъзи оддий шаклли жисмларнинг инерция моментларини ҳисоблаш 217
110- §. Жисмнинг берилган нуқтадан ўтувчи ихтиёрий ўққа нисбатан инерция моменти 221
111- §. Инерция эллипсоиди 222
112- §. Инерция бош ўқларининг хусусиятлари 224

XXI боб. Динамиканинг умумий теоремалари 226
113- §. Система массалар марказининг ҳаракати ҳақидаги теорема 226
114- §. Система массалар маркази ҳаракатининг сақланиш қонуни 228

115- §. Моддий нуқта ва механик системанинг ҳаракат миқдори . . . 230
116- §. Моддий нуқта ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теорема . . . 231
117- §. Система ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теорема . . . 233
118- §. Система ҳаракат миқдорининг сақланиш қонуни . . . 235
119- §. Механик система ҳаракат миқдорининг ўзгариши ва система массалар марказининг ҳаракати ҳақидаги теоремаларни қўллашга оид масалалар . . . 236
120- §. Система ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теоремани суюқликнинг стационар оқимига татбиқ этиш. Эйлер теоремаси . . . 240
121- §. Ўзгарувчан массали жисм ҳақида тушунча. И. В. Мешчерский тенгламаси . . . 242
122- §. Циолковский формуласи . . . 244
123- §. Моддий нуқта ҳаракат миқдорининг моменти ва системанинг кинетик моменти . . . 245
124- §. Моддий нуқта ҳаракат миқдори моментининг ўзгариши ҳақидаги теорема . . . 246
125- §. Нуқтанинг марказий куч таъсиридаги ҳаракати. Юзалар қонуни . . . 247
126- §. Механик система кинетик моментининг ўзгариши ҳақидаги теорема . . . 250
127- §. Система кинетик моментининг сақланиш қонуни . . . 252
128- §. Механик система кинетик моментининг массалар марказига нисбатан ўзгариши ҳақидаги теорема . . . 254
129- §. Кучнинг иши. Қувват . . . 266
130- §. Тенг таъсир этувчининг иши ҳақидаги теорема . . . 258
131- §. Кучнинг ишини ҳисоблашга оид мисоллар . . . 259
132- §. Қаттиқ жисмга таъсир этувчи кучларнинг элементар иши 261
133- §. Потенциалли куч майдони . . . 264
134- §. Потенциалли куч майдонидаги иш. Потенциал энергия 267
135- §. Куч функциясини ҳисоблашга доир мисоллар . . . 268
136- §. Нуқта ва системанинг кинетик энергияси. Кёниг теоремаси . . . 269
137- §. Қаттиқ жисмнинг кинетик энергияси . . . 270
138- §. Моддий нуқта кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақидаги теорема . . . 272
139- §. Нуқта механик энергиясининг сақланиш қонуни . . . 273
140- §. Механик система кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақидаги теорема . . . 274
141- §. Система механик энергиясининг сақланиш қонуни . . . 276
142- §. Моддий нуқта ва система кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақидаги теоремаларни қўллашга оид масалалар 277
143- §. Механик ҳаракатнинг ўлчовлари ҳақида . . . 281

XXII боб. Қаттиқ жисмнинг баъзи ҳаракат ҳоллари . . . 283
144- §. Қаттиқ жисмнинг илгариланма ҳаракати . . . 283
145- §. Қаттиқ жисмнинг қўзғалмас ўқ атрофидаги айланма ҳаракати . . . 284
146- §. Физик тебрангич . . . 284
147- §. Жисмларнинг инерция моментини тажриба усули билан аниқлаш . . . 287
148- §. Қаттиқ жисмнинг текис параллел ҳаракати . . . 288
149- §. Гироскопнинг элементар назарияси . . . 290

XXIII боб. Даламбер принципи. Қўзғалмас ўқ атрофида айланаётган жисмнинг айланиш ўқига кўрсатадиған босими . . . 294
150- §. Моддий нуқта учун Даламбер принципи . . . 294
151- §. Механик система учун Даламбер принципи . . . 296

152- §. Инерция кучларининг бош вектори ва бош моменти . . 297
153- §. Қузғалмас ўқ атрофида айланувчи қаттиқ жисмнинг айланиш ўқига кўрсатадиган динамик босимини аниқлаш 303
154- §. Қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи жисм массаларини динамик мувозанатлаш 308

XXIV боб. **Аналитик механикадан бошланғич маълумотлар** 313
155- §. Боғланишлар ва уларнинг классификацияси 313
156- §. Умумлашган координаталар ва системанинг эркинлик даражаси 316
157- §. Мумкин бўлган кўчиш 319
158- §. Кучнинг мумкин бўлган кўчишдаги иши. Идеал боғланишлар 322
159- §. Умумлашган кучлар 324
160- §. Мумкин бўлган кўчиш принципи 328
161- §. Механик системанинг умумлашган координаталардаги мувозанат шартлари 330
162- §. Динамиканинг умумий тенгламаси (Даламбер — Лагранж принципи) 334
163- §. Лагранжнинг иккинчи хил тенгламалари 338
164- §. Потенциалли кучлар таъсиридаги механик система учун Лагранжнинг иккинчи хил тенгламалари. Циклик интеграллар 342
165- §. Лагранжнинг иккинчи хил тенгламаларини қўллашга доир масалалар 343

XXV боб. **Механик системанинг кичик тебраниши** 351
2√ 166- §. Механик системанинг кичик тебранма ҳаракати ва устувор мувозанати 351
167- §. Системанинг мувозанати ҳақидаги Лагранж — Дирихле теоремаси 353
168- §. Эркинлик даражаси битта бўлган системанинг устувор мувозанат яқинидаги эркин тебраниши 354
169- §. Эркинлик даражаси битта бўлган системанинг муҳит қаршилиги таъсиридаги сўнувчи тебранма ҳаракати . . 364
170- §. Эркинлик даражаси битта бўлган системанинг мажбурий тебранма ҳаракати 268

XXVI боб **Зарба назарияси** 380
171- §. Зарбали куч. Зарбали кучнинг моддий нуқтага таъсири 380
172- §. Зарба назариясининг умумий теоремалари 382
173- §. Шарнинг қўзғалмас сиртга урилишидаги тўғри зарба. Тиклаш коэффициентини тажриба усули билан аниқлаш 384
3√ 174- §. Икки жисмнинг тўғри марказий зарбаси (шарлар зарбаси) 386
175- §. Зарба вақтида кинетик энергиянинг йўқолиши. Карно теоремаси 388
176- §. Қўзғалмас ўқ атрофида айланма ҳаракатдаги жисмга зарбали кучнинг таъсири. Зарба маркази 392
177- §. Текис параллел ҳаракатдаги жисмга зарбали кучнинг таъсири 395
Адабиёт 396
Асосий тушунчаларнинг алфавит бўйича кўрсаткичи 397

22.21
Ш 82

Шоҳайдарова П. ва бошқ.

Назарий механика. Олий техника ўқув юрт. талабалари учун ўқув қўлл. / П. Шоҳайдарова, Ш. Шозиётов, Ж. Зоиров.—2-қайта ишланган ва тўлдирилган нашр.— Т.: Ўқитувчи. 1991.—408 б.

1.1.2 Автордош.

Шахайдарова П. Учебное пособие для студ. высш. техн. учеб. заведений.
техн. учеб. заведений.

ББК 22.21я73

На узбекском языке

ШАХАЙДАРОВА ПУЛАТ,
ШАЗИЯТОВ ШАМИРЗА,
ЗАИРОВ ДЖАМАЛ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Учебное пособие для студентов высших технических учебных заведений

Переработанное и дополненное 2-е издание

Ташкент «Ўқитувчи» 1991

Муҳаррир Шарипов С.
Бадиий муҳаррир Неккадамбоев Ф.
Техн. муҳаррир Скиба Т.
Мусаҳҳиҳ Содиқова З.

ИБ № 5445

Теришга берилди 10.07.90. Босишга рухсат этилди 10.01.91. Формати 60 × 90/16. Босм. қоғози № 2. Литературная гарнитураси. Кегли 10 шпонсиз. Юқори босма усулида босилди. Шартли б. л 25,5. Шартли кр.-отт. 25,69. Нашр. л 21,65. Тиражи 12000. Зак. № 2344. Баҳоси 3 с. 60 т.

«Ўқитувчи» нашриёти. Тошкент — 129. Навоий кўчаси, 30. Шартнома № 11-111-90.

ЎзССР Матбуот давлат комитетининг полиграфкомбинати. Тошкент, Навоий кўчаси, 30. 1991.

Полиграфкомбинат Государственного комитета [illegible] по печати. Ташкент, ул. Навои, 30.