Г. Н. АБРАМОВИЧ

ПРИКЛАДНАЯ ГАЗОВАЯ ДИНАМИКА

ИЗДАНИЕ ЧЕТВЕРТОЕ, ПЕРЕРАБОТАННОЕ

Допущено Министерством
высшего и среднего специального образования СССР
в качестве учебника для студентов
высших технических учебных заведений



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1976

533
А 16
УДК 533.0

Прикладная газовая динамика. Абрамович Г. Н. Издание 4-е, исправленное и дополненное. Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», М., 1976, 888 стр.

Излагаются основы газовой динамики в применении к теории реактивных двигателей и других газовых машин и аппаратов. Подробно рассмотрена теория одномерных газовых течений, на которой в значительной мере базируются современные методы расчета реактивных двигателей, лопаточных машин, эжекторов, аэродинамических труб и испытательных стендов. Отдельные главы посвящены теории пограничного слоя и теории струй, лежащих в основе определения сопротивления трения, полей скорости и температуры в соплах, диффузорах, камерах сгорания, эжекторах и т. п. В связи с бурным развитием двигателей для высотных и космических летательных аппаратов в книгу включены главы о гиперзвуковых течениях, об элементах магнитной гидродинамики и о течениях разреженных газов. Новое издание пополнено материалами, опубликованными в последние годы.

Книга является учебником для студентов авиационных втузов и пособием для студентов, инженеров и научных работников других областей техники, соприкасающихся с газовой динамикой.

Генрих Наумович Абрамович
ПРИКЛАДНАЯ ГАЗОВАЯ ДИНАМИКА

М, 1976 г., 888 стр. с илл.

Редакторы *А. А. Наседкин* и *А. Г. Мордвинцев*

Техн. редактор *К. Ф. Брудно* Корректор *Е. В. Сидоркина*

Сдано в набор 13.04. 76 Подписано к печати 06.09. 76 Бумага 60 × 90¹/₁₆ тип. № 1. Физ. печ. л. 55,5. Условн. печ. л. 55,5. Уч.-изд. л. 50,23. Тираж 12 000 экз. Т-15769. Цена книги 1 р. 92 к. Заказ № 121.

Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 198052, Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29

А $\frac{20303-128}{053(02)-76}$ 133-76

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1976, с изменениями.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к четвертому изданию 7

Предисловие к третьему изданию 7

Глава I. **Уравнения газовой динамики для единичной струйки** . . . 9

§ 1. Уравнение неразрывности 9
§ 2. Уравнение энергии 11
§ 3. Предельная скорость движения газа. Число Маха 20
§ 4. Механическая форма уравнения энергии (уравнение Бернулли) 24
§ 5. Уравнение количества движения 34
§ 6. Уравнение моментов количества движения 43
§ 7. Энтропия 46
§ 8. Расчет реактивной силы (тяги) 49
§ 9. О месте приложения реактивной силы 56

Глава II. **Элементы гидродинамики** 63

§ 1. Движение жидкой частицы 63
§ 2. Уравнение неразрывности 66
§ 3. О силах, действующих в жидкости 67
§ 4. Связь между напряжениями и деформациями 70
§ 5. Уравнения Навье — Стокса 73
§ 6. Уравнение энергии 75
§ 7. Гидродинамическое подобие 80
§ 8. Слоистые течения 92
§ 9. Уравнения движения идеальной жидкости 95
§ 10. Плоские установившиеся движения идеальной сжимаемой жидкости 100
§ 11. Циркуляция скорости 104
§ 12. Примеры плоских потенциальных установившихся течений несжимаемой жидкости 113

Глава III. **Скачки уплотнения** 117

§ 1. Прямые скачки уплотнения 117
§ 2. Косые скачки уплотнения 129
§ 3. О применении пневматического насадка в сверхзвуковом потоке 145

Глава IV. **Ускорение газового потока** 148

§ 1. Сверхзвуковое сопло 148
§ 2. Нерасчетные режимы истечения из сопла Лаваля 155
§ 3. Сверхзвуковое течение газа с непрерывным увеличением скорости (течение Прандтля — Майера) 161
§ 4. Обтекание плоской стенки 173
§ 5. Обтекание выпуклой криволинейной стенки 175
§ 6. Истечение из единичного плоского сопла с косым срезом в пространство с пониженным давлением 177

Глава V. **Одномерные течения газа** 181
§ 1. Адиабатическое течение газа с трением. Кризис течения . . . 181
§ 2. Течение в трубе постоянного сечения 184
§ 3. Движение подогреваемого газа по трубе постоянного сечения 193
§ 4. Общие условия перехода от дозвукового течения к сверхзвуковому и обратно 202
§ 5. О распространении детонации и горения в газах 218
§ 6. Расчет газовых течений с помощью газодинамических функций 233
§ 7. Течение газа с трением в цилиндрической трубе при заданной величине отношения давлений на входе и выходе 260
§ 8. Осреднение параметров неравномерного потока 267

Глава VI. **Теория пограничного слоя** 276
§ 1. Основные понятия пограничного слоя 276
§ 2. Ламинарный пограничный слой 283
§ 3. Переход от ламинарного к турбулентному режиму течения в пограничном слое 307
§ 4. Турбулентный пограничный слой 313
§ 5. Отрыв пограничного слоя 329
§ 6. Взаимодействие пограничного слоя со скачками уплотнения . . 338
§ 7. Течение жидкости в трубах 348

Глава VII. **Турбулентные струи** 361
§ 1. Общие свойства струй 361
§ 2. Изменение параметров по длине струи 373
§ 3. Дозвуковая неизотермическая струя однородного газа 381
§ 4. Сверхзвуковая изобарическая струя 389
§ 5. Истечение сверхзвуковой газовой струи из сопла на нерасчетном режиме 394
§ 6. Одномерная теория начального («газодинамического») участка нерасчетной сверхзвуковой струи 402

Глава VIII. **Течения газа в соплах и диффузорах** 421
§ 1. Сопротивление сопла 421
§ 2. Формы сопел 436
§ 3. Сопротивление дозвукового диффузора 445
§ 4. Сверхзвуковые диффузоры 456

Глава IX. **Газовые эжекторы** 484
§ 1. Назначение и схемы эжекторов 484
§ 2. Рабочий процесс эжектора 488
§ 3. Расчет газового эжектора 497
§ 4. Критические режимы работы эжектора. Запирание эжектора 511
§ 5. Характеристики эжектора 519
§ 6. О режиме течения на выходе из смесительной камеры . . . 522
§ 7. Особенности работы эжектора со сверхзвуковым соплом . . 529
§ 8. Приближенные формулы расчета эжектора 538
§ 9. Примеры расчета эжекторов 543
§ 10. Теория эжекторного увеличителя реактивной силы 548

Глава X. **Элементы газовой динамики единичного профиля и решетки профилей** 561
§ 1. Основные геометрические параметры крылового профиля и решетки профилей 561
§ 2. Теорема Жуковского о силовом воздействии потенциального потока 564
§ 3. Влияние вязкости на силовое воздействие потока 569

§ 4. Аэродинамические коэффициенты 573
§ 5. Профиль в плоском потоке несжимаемой жидкости 577
§ 6. Дозвуковое обтекание профиля 588
§ 7. Сверхзвуковое обтекание профиля 599
§ 8. Околозвуковое обтекание профиля 614
§ 9. Обтекание решетки профилей потоком несжимаемой жидкости 625
§ 10. Обтекание решетки профилей дозвуковым потоком газа . . . 639
§ 11. Обтекание решетки профилей потоком газа со сверхзвуковой осевой составляющей скорости 649
§ 12. Обтекание решетки сверхзвуковых профилей потоком газа с дозвуковой осевой составляющей скорости 669
§ 13. Некоторые сведения о пространственном обтекании единичного крыла и решетки крыльев 683

Глава XI. **Гиперзвуковые течения газа** 692

§ 1. Изменение параметров газа в изоэнтропическом гиперзвуковом потоке 692
§ 2. Гиперзвуковое течение около выпуклого тупого угла 694
§ 3. Плоская ударная волна в гиперзвуковом течении 696
§ 4. Гиперзвуковое обтекание плоской пластины при малом угле атаки 701
§ 5. О гиперзвуковом обтекании тонких заостренных спереди тел 702
§ 6. Закон сопротивления Ньютона 704
§ 7. Влияние малого затупления переднего конца тонкого тела на его обтекание при гиперзвуковых скоростях 711
§ 8. О влиянии вязкости в гиперзвуковых течениях 714

Глава XII. **Течения разреженных газов** 719

§ 1. Различные типы течений разреженных газов 719
§ 2. Скачки скорости и температуры у стенки при течении газа со скольжением 722
§ 3. Течение газа со скольжением в трубе 728
§ 4. Внешнее сопротивление тел в потоке разреженного газа при наличии скольжения 732
§ 5. Свободно-молекулярные течения газа и элементы кинетической теории газов 734
§ 6. Давление и напряжение трения при свободно-молекулярном обтекании твердого тела 741
§ 7. Расчет аэродинамических сил при свободно-молекулярном обтекании твердых тел 750
§ 8. Свободно-молекулярное течение газа в длинной трубе 757
§ 9. Молекулярное истечение газа через отверстие в стенке и через короткую трубу 763

Глава XIII. **Элементы магнитной газовой динамики** 765

§ 1. Введение 765
§ 2. Элементы электростатики и электродинамики 766
§ 3. Электромагнитные поля 780
§ 4. Уравнения магнитной газодинамики 785
§ 5. Критерии подобия в магнитной гидродинамике 792
§ 6. Течение вязкой электропроводной жидкости по плоскому каналу в поперечном магнитном поле 796

§ 7. Магнитогидродинамические насосы, ускорители, дроссели и генераторы 803
§ 8. Вход потока электропроводной жидкости в магнитное поле и выход из него 806
§ 9. Уравнения магнитной газовой динамики для единичной струйки 812
§ 10. Магнитогазодинамические ударные волны и слабые возмущения 818
§ 11. Условия обращения воздействия при течении газа в электромагнитном поле 826
§ 12. Простейшие решения уравнений одномерного течения газа в скрещенных полях 831
§ 13. Магнитогидродинамические турбулентные течения 838

Приложения I—VI 857
Литература 884
Предметный указатель 886

ПРЕДИСЛОВИЕ К ЧЕТВЕРТОМУ ИЗДАНИЮ

В четвертое издание книги внесены небольшие исправления и добавления, относящиеся главным образом к главам, посвященным теории пограничного слоя, течениям газа в соплах и диффузорах, теории газовых эжекторов, газодинамике крыла и решетки крыльев и магнитной гидрогазодинамике.

В этом издании используется система единиц СИ вместо применявшейся в предыдущих изданиях технической системы единиц.

Поправки к главам VI, IX, X вносили авторы этих глав Н. М. Белянин, А. Я. Черкез и С. И. Гинзбург. При подготовке к печати рукописи четвертого издания автору оказали большую практическую помощь В. Д. Захаров и Д. С. Ковнер. Всем указанным товарищам по работе автор выражает свою признательность.

Г. Н. Абрамович

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

В книге излагаются основы газовой динамики в применении к теории реактивных двигателей и других машин и аппаратов.

Третье издание книги существенно переработано и дополнено.

Современные методы расчета реактивных двигателей, лопаточных машин, эжекторов, аэродинамических труб и испытательных стендов основываются по преимуществу на одномерных представлениях гидрогазодинамики, поэтому одномерным течениям в книге отведено значительное место.

Вместе с тем многие вопросы, например определение сопротивления трения и полей скорости и температуры, построение картины течения в камере сгорания, эжекторе и сверхзвуковом диффузоре, выяснение силового и теплового воздействия выхлопной струи реактивного двигателя на органы управления и другие части летательного аппарата, а также на стенки испытательного стенда и т. п., не могут быть разрешены без привлечения дифференциальных уравнений гидрогазодинамики или уравнений пограничного слоя. В связи с этим в книге значительное

внимание уделено основам гидродинамики, теории пограничного слоя и теории струй.

За 15 лет, прошедших со времени выхода в свет предыдущего издания, приобрели большое значение летательные аппараты с реактивными двигателями новых типов, обеспечивающими полет с большой сверхзвуковой (гиперзвуковой) скоростью, выход в космическое пространство и возвращение в плотные слои атмосферы. Это привело к быстрому развитию разделов газовой динамики, в которых изучаются течения разреженного газа, гиперзвуковые течения и движения жидкости и газа в электромагнитных полях; в настоящем третьем издании книги изложены основы также и этих разделов современной газодинамики.

Ряд важных вопросов (теория сверхзвуковых сопел, диффузоров, эжекторов и решеток крыльев, использование газодинамических функций и др.) в новом издании излагается более обстоятельно, чем прежде. Появление специальных учебников и монографий по теории лопаточных машин и теории реактивных двигателей позволило исключить из книги эти разделы.

Книга составлена как учебник для моторных факультетов авиационных институтов по программе, утвержденной Министерством высшего и среднего специального образования СССР, и может рассматриваться как учебное пособие также для машиностроительных и энергетических институтов.

Автор стремился достигнуть возможно большей наглядности и доступности изложения и в освещении каждого вопроса искал наиболее простых средств. Поэтому некоторые задачи рассмотрены дважды: сначала в упрощенной постановке, а затем более глубоко в специальных разделах книги. Для того чтобы сделать книгу доступной инженерам и студентам, не изучавшим кинетическую теорию газов и электродинамику, даны краткие сведения из этих разделов физики.

Несколько разделов этой книги написали: Н. М. Белянин (гл. VI), А. Я. Черкез (§§ 6—8 гл. V, § 6 гл. VII и гл. IX), С. И. Гинзбург (гл. X).

Автор выражает глубокую благодарность С. О. Апельбауму, А. И. Бунимовичу, А. Б. Ватажину, А. С. Гиневскому, А. Л. Гонору, И. П. Смирновой и А. А. Степчкову за ценные замечания, сделанные ими при просмотре отдельных глав книги.

Г. Н. Абрамович

Глава I

УРАВНЕНИЯ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ ДЛЯ ЕДИНИЧНОЙ СТРУЙКИ

§ 1. Уравнение неразрывности

Основные уравнения газовой динамики мы выведем для элементарной струйки газа, поперечные размеры которой настолько малы, что в каждом ее сечении можно считать постоянными все основные параметры потока: скорость, давление, температуру и плотность газа. Именно в таком виде уравнения газовой динамики применяются обычно в теории реактивных двигателей. В тех случаях, когда в пределах поперечного сечения рабочей струи параметры потока меняются (например, неодинаковы значения скорости или температуры), вводится представление о средних по сечению значениях этих величин, и тогда при помощи соответствующих, в большинстве случаев незначительных, поправок удается использовать все уравнения, полученные для элементарной струйки. Метод элементарной струйки лежит в основе гидравлики, поэтому газовую динамику элементарной (единичной) струйки иногда называют «газовой гидравликой».

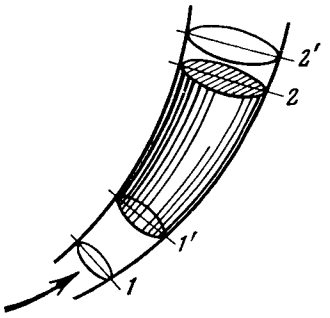


Рис. 1.1. Элементарная струйка.

Чтобы получить уравнение неразрывности, рассмотрим стационарное (установившееся) движение элементарной струйки газа (рис. 1.1). При стационарном движении в любой точке пространства сохраняются неизменными по времени скорость движения и состояние жидкости (плотность, давление, температура). Траектории частиц при таком движении называются *линиями тока* [1]). Боковая поверхность струйки, носящая название *поверхности тока*, является для жидкости (газа) непроницаемой (векторы скорости течения касательны к ней); образующие поверхности тока являются линиями тока.

---

[1]) При неустановившемся движении линии тока определяются иначе и не совпадают с траекториями частиц.

Рассмотрим некоторый участок струйки между двумя нормальными к поверхности тока сечениями *1* и *2*; заметим, что в соответствии с указанным на рис. 1.1 направлением движения в объеме *1—2* приток газа осуществляется только через поперечное сечение *1*, а расход газа — только через сечение *2*.

За бесконечно малый промежуток времени $d\tau$ выделенная часть струйки переместится в новое положение $1' — 2'$. Перемещение состоит в том, что за время $d\tau$ заштрихованный объем $1' — 2'$ вместит газ, вытесненный из области $1 — 1'$, а известное количество газа за то же время вытечет из этого объема и заполнит область $2 — 2'$. Приток газа в объем $1' — 2$ составляет

$$dG_1 = \rho_1 F_2 \, dl_1 \text{ [кг]}, \tag{1}$$

где ρ_1 — плотность газа в поперечном сечении *1*, F_1 — площадь поперечного сечения *1*. Расстояние между сечениями *1* и $1'$ равно произведению скорости движения на элементарный промежуток времени

$$dl_1 = w_1 \, d\tau,$$

где w_1 — скорость в сечении *1*, откуда

$$dG_1 = \rho_1 w_1 F_1 \, d\tau.$$

Расход газа из объема $1' — 2$ равен, очевидно,

$$dG_2 = \rho_2 w_2 F_2 \, d\tau.$$

При установившемся режиме и отсутствии разрывов сплошности в движущейся среде приток газа должен равняться расходу

$$dG_1 = dG_2 = dG.$$

Отсюда после соответствующей подстановки получаем уравнение неразрывности — закон сохранения массы — для единичной струйки сжимаемой жидкости (газа) при установившемся течении

$$\rho_1 w_1 F_1 = \rho_2 w_2 F_2. \tag{2}$$

В случае несжимаемой жидкости, т. е. при $\rho = \text{const}$, уравнение (2) принимает более простую форму:

$$w_1 F_1 = w_2 F_2, \tag{3}$$

которая применима к газовым течениям в тех случаях, когда изменениями плотности газа можно пренебречь.

На основании уравнения неразрывности (3) по расположению линий тока в несжимаемой среде можно судить о скорости движения. В местах сгущения линий тока скорость растет; если линии тока раздвигаются, то скорость падает. При движении газа не всегда можно непосредственно по расположению линий

тока определить изменение скорости, так как изменения плотности газа могут быть значительными.

В газе, как нетрудно видеть из уравнения неразрывности (2), картина линий тока однозначно определяет изменение плотности тока:

$$j = \rho w = \frac{G}{F},$$

представляющей произведение плотности газа на скорость, т. е. массовый расход газа через единицу площади поперечного сечения.

В местах сгущения линий тока плотность тока увеличивается, а в местах расхождения линий тока — убывает.

Уравнение постоянства расхода газа $G = \rho w F = \text{const}$ можно представить также в дифференциальной форме

$$dG = \rho w\, dF + w F\, d\rho + \rho F\, dw.$$

Поделив почленно это соотношение на $\rho w F$, получим

$$\frac{dG}{G} = \frac{dw}{w} + \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dF}{F}. \qquad (4)$$

§ 2. Уравнение энергии

Следуя первому началу термодинамики (закону сохранения энергии), составим баланс энергии в неподвижной системе координат (рис. 1.1), т. е. рассмотрим преобразование энергии в одной и той же массе газа, заполнявшей вначале объем $1 - 2$, а через бесконечно малый промежуток времени $d\tau$ переместившейся в положение $1' - 2'$.

Приращение любого вида энергии равно разности количеств этого вида энергии в положениях $1' - 2'$ и $1 - 2$. Ввиду того, что заштрихованный объем $1' - 2$ является общим для этих двух положений, энергия массы газа, заполняющей объем $1' - 2$, при вычитании сокращается [1]), и приращение энергии измеряется разностью количеств энергии в бесконечно малых объемах $2 - 2'$ и $1 - 1'$. Отсюда следует, что приращение кинетической энергии равно

$$dE_к = \frac{w_2^2 - w_1^2}{2}\, dG;$$

здесь dG — массовый расход газа через поперечное сечение струйки за время $d\tau$. Приращение потенциальной энергии (энергии положения)

$$dE_п = g(z_2 - z_1)\, dG,$$

[1]) Движение газа предполагается, как и в предыдущем параграфе, установившимся.

где z_2 и z_1 — высоты расположения (нивелирные уровни) сечений *2* и *1*, g — ускорение силы тяжести. Приращение внутренней (тепловой) энергии

$$dE_т = (U_2 - U_1)\, dG,$$

где $U = c_v \cdot T$ — тепловая энергия единицы массы газа (произведение теплоемкости при постоянном объеме на абсолютную температуру). Если теплоемкость газа в сечениях *1* и *2* одинакова, то прирост внутренней энергии равен

$$dE_т = c_v (T_2 - T_1)\, dG.$$

На основания выделенной части струйки газа действуют направленные внутрь и по нормали к ним внешние силы давления p. При перемещении газа внешние силы давления производят работу. Например, перенос газа из сечения *1* в сечение *1'* происходит как бы под действием поршня площадью F_1 с давлением p_1. Работа поршня за время $d\tau$ равна

$$p_1 F_1 w_1\, d\tau = \frac{p_1}{\rho_1}\, dG.$$

Точно так же можно представить себе, что давление p_2 на сечение *2* осуществляется поршнем площадью F_2. За время $d\tau$ газ переместит поршень в положение *2*, производя отрицательную работу

$$-p_2 F_2 w_2\, d\tau = -\frac{p_2}{\rho_2}\, dG.$$

Силы давления, действующие на боковую поверхность струйки (поверхность тока), никакой работы не производят, так как они нормальны к траекториям движения частиц газа. Таким образом, энергия, внесенная силами давления, равна разности между работами поршня *1* и поршня *2*:

$$dE_д = \left(\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2}\right) dG.$$

К газовой струйке на участке *1 — 2* может быть за время $d\tau$ подведено тепло в количестве dW. Далее газовая струйка за время $d\tau$ может произвести техническую работу dl, например, приводя во вращение колесо турбины, установленное между сечениями *1* и *2*. Наконец, следует учесть энергию, расходуемую газом за время $d\tau$ на преодоление сил трения $dl_{тр}$.

Согласно первому началу термодинамики подведенные к газу тепловая энергия и работа сил давления расходуются на совершение технической работы, работы сил трения, а также на повышение запасов потенциальной, внутренней и кинетической

энергии

$$dW + \left(\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2}\right) dG =$$

$$= dl + dl_{тр} + g(z_2 - z_1)\, dG + (U_2 - U_1)\, dG + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} dG.$$

Разделив все члены полученного выражения на величину dG, приходим к уравнению энергии для единицы массы (1 кг) газа

$$Q + \frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2} = L + L_{тр} + g(z_2 - z_1) + U_2 - U_1 + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2}. \quad (5)$$

Здесь введены обозначения: $Q = dW/dG$ — тепло, подводимое к 1 кг газа на участке $1-2$, $L = dl/dG$ — техническая работа, совершаемая 1 кг газа на том же участке, $L_{тр} = dl_{тр}/dG$ — работа сил трения, приходящаяся на 1 кг газа.

Приток тепла в общем случае осуществляется двумя способами: извне ($Q_{нар}$) за счет теплообмена через боковую поверхность струйки, изнутри ($Q_{вн}$) за счет преобразования в тепло работы трения. Таким образом,

$$Q = Q_{нар} + Q_{вн}. \quad (6)$$

Вторая часть теплового потока, очевидно, в точности равна энергии, расходуемой газом на совершение работы трения:

$$Q_{вн} = L_{тр}. \quad (7)$$

Из термодинамики известно уравнение состояния идеального газа

$$pv = RT, \quad (8)$$

где R — газовая постоянная, а удельный объем газа v есть величина, обратная плотности $v = 1/\rho$. Отсюда

$$\frac{p}{\rho} = RT. \quad (9)$$

Кроме того, известно соотношение, связывающее теплоемкость при постоянном объеме (c_v) и теплоемкость при постоянном давлении (c_p):

$$c_p = c_v + R. \quad (10)$$

Введем в рассмотрение *теплосодержание* (или *энтальпию*) газа, т. е. произведение теплоемкости при постоянном давлении на абсолютную температуру

$$i = c_p T. \quad (11)$$

Тогда соотношение (10) примет несколько иной вид:

$$i = U + RT \quad (12)$$

или на основании (9)

$$i = U + \frac{p}{\rho}. \tag{13}$$

Используя выражения (6), (7) и (13), можно придать уравнению энергии следующую форму:

$$Q_{\text{нар}} - L = g(z_2 - z_1) + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + i_2 - i_1. \tag{14}$$

Уравнение энергии (14) иногда называют также *уравнением теплосодержания*. Существенно то обстоятельство, что уравнение теплосодержания не содержит работы трения. В самом деле, поскольку энергия, расходуемая на преодоление трения или любого другого вида сопротивлений, преобразуется полностью в тепло, а последнее остается в газовой струе, наличие сил трения не может нарушить общий баланс энергии, а лишь приводит к преобразованию одного вида энергии в другой.

Обычно в технике приходится иметь дело с частными формами уравнения теплосодержания. Так, в большинстве случаев изменение потенциальной энергии пренебрежимо мало в сравнении с другими частями уравнения энергии, и членом $g(z_2 - z_1)$ пренебрегают. Тогда уравнение теплосодержания имеет следующий вид:

$$Q_{\text{нар}} - L = \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + i_2 - i_1. \tag{15}$$

При отсутствии технической работы и теплообмена с окружающей средой, т. е. в случае энергетически изолированного процесса в газе, имеем

$$\frac{w_2^2 - w_1^2}{2} = i_1 - i_2. \tag{16}$$

В частности, уравнение (16) определяет движение газа по трубе, если нет теплопередачи через стенки. Согласно сказанному это уравнение справедливо вне зависимости от того, действуют или нет силы трения. Иначе говоря, изменение теплосодержания (температуры) в энергетически изолированном процессе связано только с изменением скорости. Если скорость газа не меняется, то остается постоянной и температура.

Отсутствие влияния сил трения можно объяснить следующим образом. Под действием трения давление вдоль трубы падает, т. е. газ расширяется, и, следовательно, температура должна была бы уменьшаться. Однако работа сил трения преобразуется в тепло; и так как работа сил трения в точности равна теплу, подведенному за счет этой работы, то подогрев компенсирует охлаждение.

Вдоль трубы постоянного сечения под влиянием сил трения температура газа в дозвуковом течении даже убывает. Происходит это потому, что падение давления сопровождается уменьшением плотности газа, а плотность тока остается неизменной: $j = G/F = \rho w = \text{const}$. Поэтому скорость газа возрастает, и температура в соответствии с уравнением (16) понижается. При малой скорости движения температура изменяется только за счет теплообмена или в тех местах, где газ проходит через турбину (расходует энергию, $L_т > 0$) или через компрессор (получает энергию, $L_к < 0$).

Если изменением скорости и теплообменом можно пренебречь, то уравнение теплосодержания принимает следующую форму:

$$i_2 - i_1 = -L. \tag{17}$$

Иначе говоря, изменение теплосодержания газа при этом равно механической работе. В колесе турбины температура газа уменьшается:

$$i_2 = i_1 - L_т \quad (L_т > 0), \tag{18}$$

в колесе компрессора температура возрастает

$$i_2 = i_1 - L_к \qquad (L_к < 0).$$

Напомним, что здесь имеется в виду работа L, отнесенная к 1 кг газа. Таким образом, следуя уравнению теплосодержания, мы получаем простые соотношения для расчета температурных перепадов на турбине и компрессоре при малых изменениях кинетической энергии:

$$\Delta T = \frac{i_2 - i_1}{c_p} = -\frac{L}{c_p}. \tag{19}$$

Здесь c_p — среднее значение теплоемкости при постоянном давлении на данном интервале температур.

Если скорость изменяется существенно, то расчет лишь немного усложнится. Именно:

$$i_2 - i_1 + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} = -L. \tag{20}$$

Наконец, при изотермическом процессе ($i_2 = i_1 = \text{const}$) механическая работа расходуется целиком на изменение кинетической энергии

$$\frac{w_2^2 - w_1^2}{2} = -L. \tag{21}$$

Режим, близкий к изотермическому, можно получить в многоступенчатом компрессоре с промежуточным (между каждой парой ступеней) охлаждением газа.

Когда технической работы нет, уравнение теплосодержания дает

$$Q_{\text{нар}} = i_2 - i_1 + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2}; \tag{22}$$

в таком виде оно применяется к теплообменным процессам.

Возвратимся теперь к энергетически изолированным течениям газа, когда выполняются условия

$$Q_{\text{нар}} = 0, \quad L = 0, \tag{23}$$

и уравнение теплосодержания приобретает форму (16). При этом его можно записать следующим образом:

$$i_2 + \frac{w_2^2}{2} = i_1 + \frac{w_1^2}{2} = i + \frac{w^2}{2} = \text{const}. \tag{24}$$

Отсюда нетрудно видеть, что если газовую струю затормозить полностью, то теплосодержание газа достигает максимального возможного значения:

$$i^* = i + \frac{w^2}{2}. \tag{25}$$

Получающееся при этом значение теплосодержания i^* мы будем называть *полным теплосодержанием*, а соответствующую абсолютную температуру

$$T^* = \frac{i^*}{c_p} \tag{26}$$

— *температурой торможения.*

С помощью (25) из уравнения теплосодержания (15) можно исключить скорости; получаем уравнение

$$Q_{\text{нар}} - L = i_2^* - i_1^*. \tag{27}$$

Итак, температура газа получается равной температуре торможения в том случае, когда скорость течения уменьшается до нуля при отсутствии энергетического обмена с окружающей средой. Пользуясь средним значением теплоемкости, можно вычислить температуру торможения по следующей формуле:

$$T^* = T + \frac{w^2}{2c_p}. \tag{28}$$

Для воздуха ($c_p \approx 1005$) имеем приближенно

$$T^* \approx T + \frac{w^2}{2010}. \tag{29}$$

Например, в воздушном потоке нормальной температуры ($T \approx \approx 300$ К) при скорости движения $w = 100$; 350; 1000 м/с полу-

чается соответственно температура торможения: $T^* \approx 305$, 360, 800 К.

Следует подчеркнуть, что, согласно уравнению энергии (24), в энергетически изолированном потоке идеального газа существует однозначная зависимость между температурой газа T (теплосодержанием i) и скоростью течения w. Повышение скорости в таком потоке всегда сопровождается снижением температуры независимо от изменения других параметров газа. Если в двух сечениях энергетически изолированного потока одинакова скорость течения, то в них будет одинаковой и температура газа, какие бы процессы ни происходили в потоке между рассматриваемыми сечениями. При уменьшении скорости течения до нуля газ приобретает одинаковую температуру T^* независимо от особенностей процесса торможения и возникающих при этом необратимых потерь.

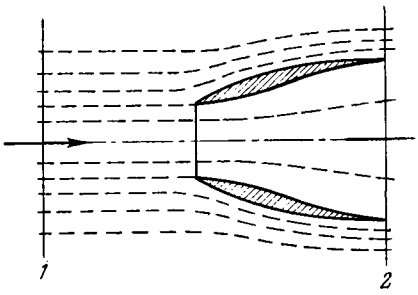


Рис. 1.2. Дуффузор воздушно-реактивного двигателя.

В конце входного диффузора (рис. 1.2) воздушно-реактивного двигателя обычно вне зависимости от скорости полета устанавливается сравнительно малая скорость потока. По этой причине температура воздуха в диффузоре двигателя получается близкой к температуре торможения. Пусть скорость воздуха в конце диффузора $w_2 = 100$ м/с. Тогда температура здесь при различной скорости полета получается из условия

$$T_2 \approx T^* - \frac{w_2^2}{2010} \approx T_1 + \frac{w_1^2 - w_2^2}{2010}.$$

В нашем случае ($w_2 = 100$ м/с, $T_1 = 300$ К)

$$T_2 \approx 295 + \frac{w_1^2}{2010}. \qquad (30)$$

Результаты подсчета температуры T_2 по формуле (30) сведены в следующую таблицу:

w_1, м/с	100	350	1000
T^*, К	305	360	800
T_2, К	300	355	795

Как видим, разогрев воздуха только за счет торможения при большой скорости потока (полета) получается весьма значительным.

Уравнение теплосодержания объясняет следующий весьма интересный факт. При течении газа возле твердой поверхности без теплообмена температура последней близка к температуре торможения в газе. Дело в том, что в связи с вязкостью газа возле твердой стенки всегда образуется тонкий пограничный слой, в котором скорость газа относительно стенки меняется от величины, равной скорости обтекающего потока, до нуля (на стенке). Но раз частицы газа непосредственно возле стенки затормаживаются, то при отсутствии теплообмена температура на стенке должна быть равна температуре торможения. Так, например, в рабочей части аэродинамической трубы сверхзвуковых скоростей (рис. 1.3), где скорость газа очень велика, его

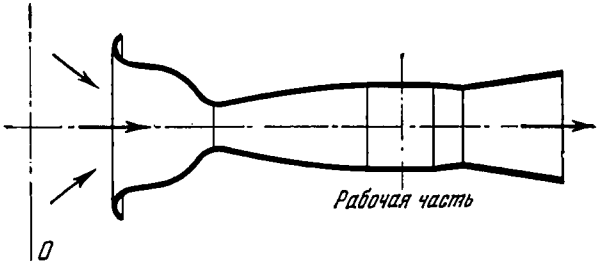


Рис. 1.3. Схема аэродинамической трубы сверхзвуковых скоростей.

температура $T_{р.\,ч}$ должна быть значительно ниже, чем в предкамере, из которой покоящийся газ (T_0) поступает в трубу. Например, при скорости в рабочей части $w_{р.\,ч} = 600$ м/с и температуре торможения в предкамере $T_0 = T_0^* = 300$K получается температура в потоке

$$T_{р.\,ч} \approx T^* - \frac{w_{р.\,ч}^2}{2010} = 120\text{K}.$$

Несмотря на это, как показывают опыты, температура стенки на всем протяжении аэродинамической трубы, включая рабочую часть, остается постоянной и приблизительно равной температуре торможения: $T_{ст} = T^* = \text{const}$.

Температура термометра, помещенного в рабочую часть, также приблизительно равна температуре торможения. Это объясняется образованием у стенок трубы и термометра пограничного слоя, в котором обтекающий газовый поток полностью затормаживается. Таким образом, неподвижный термометр не мо-

жет измерить температуру в потоке газа. По тем же причинам поверхность тел, движущихся с большой скоростью в воздухе, бывает сильно разогрета. Например, поверхность снаряда, вылетающего из орудия со скоростью $w = 1500$ м/с, за счет образования воздушного пограничного слоя, в котором относительная скорость полностью гасится, должна была бы иметь температуру (T^*), превышающую на $T^* - T = w^2/2010 = 1125$ °С температуру окружающего воздуха. В действительности температура снаряда меньше полученной здесь за счет теплоизлучения в пространство. При очень большой скорости полета делается невозможным обледенение поверхности самолета. Например, при скорости $w = 900$ км/ч (250 м/с) температура торможения на величину $\Delta T_2 = 250^2/2010 = 31$ °С выше, чем в окружающей атмосфере. Температура поверхности самолета близка к температуре торможения, поэтому в данном примере даже при морозе в 20—25 °С обледенения не получится.

Истинная температура обтекаемой газом поверхности обычно отличается от температуры торможения. Для определения температуры поверхности пользуются следующей формулой:

$$T_{\text{пов}} = T + \varphi \frac{w^2}{2c_p}, \tag{31}$$

или для воздуха

$$T_{\text{пов}} \approx T + \varphi \frac{w^2}{2010}. \tag{32}$$

Здесь φ — поправочный коэффициент, который определяется большей частью опытным, а иногда теоретическим путем. При $\varphi = 1$ выражения (31) и (32) превращаются в известные уже формулы для температуры торможения. Для дозвукового скоростного самолета приближенное значение поправочного коэффициента равно 0,8. Для сверхзвуковой высотной ракеты поправочный коэффициент может уменьшиться до значения $\varphi \approx 0{,}5$.

Остановимся еще на одном примере из практики. При обтекании выпуклой поверхности в некоторой области вне пограничного слоя скорость выше, чем в набегающем потоке, и, следовательно, температура в таких местах ниже, чем в набегающем потоке. Этим объясняется одно явление, иногда наблюдаемое летчиками при пикировании даже на дозвуковых самолетах. Оно состоит в том, что в момент пикирования с большой скоростью часть верхней поверхности крыла скрывается от глаз летчика под пеленой молочного цвета. Как только летчик выходит из пикирования, т. е. скорость резко снижается, пелена исчезает. По-видимому, при этом в слоях воздуха, имеющих повышенную скорость и пониженную температуру, происходит конденсация влаги, которая прекращается при выходе на меньшую скорость, т. е. при более высокой температуре.

§ 3. Предельная скорость движения газа. Число Маха

Рассматривая истечение газа при отсутствии энергетического обмена, нетрудно убедиться в том, что скорость истечения ни при каких условиях не может быть выше некоторой максимальной величины. В самом деле, из соотношения

$$i^* = i + \frac{w^2}{2}$$

следует, что максимальная скорость достигается в том случае, когда теплосодержание в потоке равно нулю, т. е. когда полное теплосодержание газа целиком преобразуется в кинетическую энергию

$$\frac{w_{max}^2}{2} = i^*.$$

Отсюда получим формулу для максимального значения скорости в газе

$$w_{max} = \sqrt{2i^*}. \tag{33}$$

Соответствующая приближенная формула для воздуха, выведенная в предположении постоянства теплоемкости ($c_p \approx 1005$), имеет следующий вид:

$$w_{max} \approx 44{,}8\sqrt{T^*}.$$

Если температура торможения воздуха (температура в сосуде, из которого воздух вытекает) близка к нормальной ($T^* \approx \approx 300$ К), то максимальная возможная скорость истечения $w_{max} = 776$ м/с.

Увеличение максимального значения скорости может быть достигнуто только путем повышения температуры торможения (полного теплосодержания).

Для того чтобы перевести газ из состояния покоя в движение со скоростью w, необходимо израсходовать часть его теплосодержания, равную

$$\frac{w^2}{2} = i^* - i.$$

Разделив обе части этого равенства на полное теплосодержание, получим

$$\frac{i^* - i}{i^*} = \frac{w^2}{2i^*}.$$

При постоянной теплоемкости это безразмерное выражение примет следующий вид:

$$\frac{T^* - T}{T^*} = \frac{w^2}{2c_p T^*}.$$

Если теперь умножить и разделить правую часть на газовую постоянную R, учесть соотношение $R = c_p - c_v$ и обозначить отношение теплоемкостей через $k = c_p/c_v$, то получится

$$\frac{T^* - T}{T^*} = \frac{w^2}{kRT^*} \frac{k-1}{2}.$$

Но, как известно из физики, скорость звука в газе равна [1])

$$a = \sqrt{kRT} = \sqrt{\frac{kp}{\rho}} = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}. \tag{34}$$

Поэтому степень использования теплосодержания газа для получения заданного значения скорости потока определяется отношением скорости потока к скорости звука в неподвижном газе:

$$\frac{T^* - T}{T^*} = \frac{w^2}{a^{*2}} \frac{k-1}{2}.$$

Отсюда выводится новое выражение для максимальной скорости истечения ($T = 0$):

$$w_{\max} = a^* \sqrt{\frac{2}{k-1}}. \tag{35}$$

Для воздуха ($k = 1{,}4$) получаем

$$w_{\max} = 2{,}24a^*,$$

т. е. максимальная скорость истечения воздуха не может превосходить скорости звука в неподвижном воздухе более чем в 2,24 раза; при $k = 1{,}2$ максимальная скорость газа выше:

$$w_{\max} = 3{,}16a^*.$$

Можно тепловой перепад разделить не на полное теплосодержание, а на теплосодержание в потоке; тогда получим

$$\frac{T^* - T}{T} = \frac{w^2}{kRT} \frac{k-1}{2}.$$

В этом случае скорость потока оказывается отнесенной к скорости звука в потоке, а не в неподвижном газе:

$$\frac{T^* - T}{T} = \frac{w^2}{a^2} \frac{k-1}{2}. \tag{36}$$

Отношение скорости потока к скорости звука в потоке принято называть *числом Маха* и обозначать буквой M:

$$\mathrm{M} = \frac{w}{a}. \tag{37}$$

---

[1]) Эта формула будет выведена в § 1 гл. III.

Число Маха характеризует степень преобразования теплосодержания в кинетическую энергию потока

$$\frac{T^* - T}{T} = \frac{k-1}{2} \mathbf{M}^2.$$

Число Маха является *основным критерием подобия* (см. § 7 гл. II) *для газовых течений большой скорости.*

Если $\mathbf{M} < 1$, то течение газа называется *дозвуковым*, при $\mathbf{M} > 1$ — *сверхзвуковым.*

Из последнего выражения можно получить расчетную формулу для отношения температуры торможения к температуре в потоке как функцию числа Маха:

$$\frac{T^*}{T} = 1 + \frac{k-1}{2} \mathbf{M}^2. \tag{38}$$

Нетрудно видеть, что максимальное значение числа $\mathbf{M}$ (при $T = 0$) равно бесконечности. Этот факт объясняется тем, что при достижении максимальной скорости вместе с абсолютной температурой обращается в нуль и скорость звука.

Поскольку скорость потока может быть как выше, так и ниже скорости звука, существует и такой режим, когда скорость потока равна скорости звука, т. е. $\mathbf{M} = 1$. Этот режим называется *критическим*; ему соответствует значение температуры в потоке:

$$T_{\text{кр}} = T^* \frac{2}{k+1}. \tag{39}$$

В воздухе ($k = 1{,}4$) критическая температура получается на 20% ниже температуры торможения. Само значение скорости звука для критического режима отличается от такового для заторможенного газа, но также является вполне определенным:

$$\frac{a_{\text{кр}}}{a^*} = \sqrt{\frac{T_{\text{кр}}}{T^*}}, \tag{40}$$

откуда

$$a_{\text{кр}} = a^* \sqrt{\frac{2}{k+1}} = \sqrt{\frac{2k}{k+1} RT^*}. \tag{41}$$

Для воздуха $R = 287{,}3$, поэтому имеем

$$a^* = 20{,}1\sqrt{T^*}, \quad a_{\text{кр}} = 18{,}3\sqrt{T^*}.$$

Можно характеризовать степень преобразования теплосодержания в кинетическую энергию еще одним способом, поделив тепловой перепад на теплосодержание при критическом режиме:

$$\frac{T^* - T}{T_{\text{кр}}} \approx \frac{i^* - i}{i_{\text{кр}}} = \frac{w^2}{a_{\text{кр}}^2} \frac{k-1}{2}.$$

Отсюда с помощью равенства (40) получаем новую формулу для отношения температур в энергетически изолированном газовом течении:

$$\frac{T}{T^*} = 1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2. \tag{42}$$

Здесь принято обозначение

$$\lambda = \frac{w}{a_{кр}}. \tag{43}$$

Величину λ, измеряющую отношение скорости потока к критической скорости, будем называть *приведенной скоростью*. На критическом режиме ($w = w_{кр} = a_{кр}$) приведенная скорость $\lambda_{кр} = \mathsf{M}_{кр} = 1$. Максимальной скорости потока при $T = 0$ соответствует определенное максимальное значение приведенной скорости

$$\lambda_{max} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}. \tag{44}$$

Для воздуха ($k = 1{,}4$) имеем $\lambda_{max} = 2{,}45$. Для случая $k = 1{,}2$ соответственно $\lambda_{max} = 3{,}31$.

Приведенная скорость, как и число M, может считаться критерием подобия для газовых течений, характеризующим степень преобразования теплосодержания в кинетическую энергию.

Данному значению числа M соответствует совершенно определенное значение приведенной скорости. Найдем формулу перехода от числа M к приведенной скорости:

$$\mathsf{M}^2 = \frac{w^2}{a^2} = \frac{w^2}{a_{кр}^2}\frac{a_{кр}^{*2}}{a^{*2}a^2},$$

откуда на основании (39), (40) и (42) получаем

$$\mathsf{M}^2 = \frac{\frac{2}{k+1}\lambda^2}{1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2}, \tag{45}$$

или

$$\lambda^2 = \frac{\frac{k+1}{2}\mathsf{M}^2}{1 + \frac{k-1}{2}\mathsf{M}^2}. \tag{46}$$

В газовой динамике и теории реактивных двигателей применяются оба безразмерных числа (λ; M). В одних случаях более простые соотношения получаются при использовании приведен-

ной скорости, а в других — числа Маха. На рис. 1.4 представлены кривые $\lambda = f(M)$ для случаев $k = 1{,}4$ и $k = 1{,}2$.

Иногда масштабом скоростей служит максимальная скорость газа w_{max}. В этих случаях безразмерное уравнение теплосодержания может быть представлено на основании (35) в следующем виде:

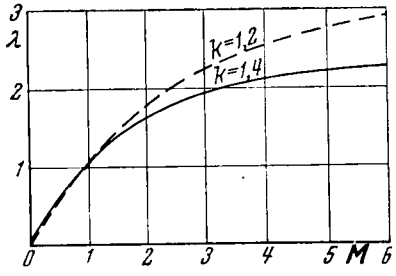


Рис. 1.4. Зависимость приведенной скорости λ от числа M.

$$\frac{T^* - T}{T^*} = \frac{w^2}{w_{max}^2} = \Lambda^2.$$

Величину

$$\Lambda = \frac{w}{w_{max}} \qquad (47)$$

называют *относительной скоростью газа.*

Зависимость отношения температуры в потоке к температуре торможения от относительной скорости выглядит так:

$$\frac{T}{T^*} = 1 - \Lambda^2.$$

Покажем в заключение, что уравнению теплосодержания для энергетически изолированной струйки можно придать чисто кинематическую форму. Для этого запишем уравнение (24) в виде

$$c_p T + \frac{w^2}{2} = \frac{w_{max}^2}{2}$$

и затем умножим все его члены на величину R/c_v

$$\frac{c_p}{c_v} RT + \frac{R}{c_v}\frac{w^2}{2} = \frac{R}{c_v}\frac{w_{max}^2}{2}.$$

Использовав выражения $c_p = kc_v$, $R = c_p - c_v$ и формулу для скорости звука (34), получим соотношение, связывающее текущие значения скорости течения и скорости звука с максимальной скоростью газа:

$$\frac{2}{k-1} a^2 + w^2 = w_{max}^2. \qquad (48)$$

§ 4. Механическая форма уравнения энергии (уравнение Бернулли)

Выше мы подробно рассмотрели уравнение теплосодержания. Оно связывало температуру газа со скоростью движения с учетом энергетических воздействий (подвода тепла, технической работы и изменением потенциальной энергии). Такие факторы,

как давление и плотность газа, в уравнение теплосодержания не входили.

Можно получить иную (механическую) форму уравнения энергии, куда, наоборот, не входит температура газа, а скорость движения связана с давлением и плотностью. В дифференциальной форме уравнение энергии (5) может быть записано в виде

$$dQ - d(pv) - dL - dL_{тр} = dU + d\frac{w^2}{2} + g\,dz. \qquad (49)$$

Согласно первому закону термодинамики тепло, подводимое к газу, может расходоваться только на повышение внутренней энергии и работу расширения (деформации), т. е.

$$dQ = dU + p\,dv. \qquad (50)$$

Вычитая из уравнения (49) равенство (50), получим

$$-dL - dL_{тр} = d\frac{w^2}{2} + g\,dz + d(pv) - p\,dv. \qquad (51)$$

Подставляя в (51) выражение удельного объема ($v = 1/\rho$), получаем

$$-dL = d\frac{w^2}{2} + g\,dz + \frac{dp}{\rho} + dL_{тр}. \qquad (52)$$

Это есть механическая форма уравнения энергии, или, что то же, *уравнение живых сил* для единичной струйки.

После интегрирования будем иметь

$$-L = \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) + \int_1^2 \frac{dp}{\rho} + L_{тр}. \qquad (53)$$

Выведенное уравнение носит название *обобщенного уравнения Бернулли.* Оно выражает скорость движения в функции от давления и плотности газа с учетом производимой газом технической работы (L), изменения потенциальной энергии $g(z_2 - z_1)$ и работы сил трения ($L_{тр}$). В газовой динамике часто пользуются упрощенной формой уравнения Бернулли, соответствующей режиму, когда отсутствует техническая работа ($L = 0$), нет гидравлических потерь ($L_{тр} = 0$) и запас потенциальной энергии не изменяется ($z_2 = z_1$). Для этого режима уравнение Бернулли запишется в следующей форме:

$$\frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + \int_1^2 \frac{dp}{\rho} = 0. \qquad (54)$$

Уравнение Бернулли иногда используется в несколько ином виде. Для этого интеграл разбивается на две части:

$$\int_1^2 \frac{dp}{\rho} = \int_1^0 \frac{dp}{\rho} + \int_0^2 \frac{dp}{\rho} = \int_0^2 \frac{dp}{\rho} - \int_0^1 \frac{dp}{\rho}. \tag{55}$$

Тогда из (54) следует

$$\frac{w_1^2}{2} + \int_0^1 \frac{dp}{\rho} = \frac{w_2^2}{2} + \int_0^2 \frac{dp}{\rho} = \frac{w^2}{2} + \int_0^p \frac{dp}{\rho} = \text{const}. \tag{56}$$

В этом случае вычисление интегралов ведется каждый раз от абсолютного вакуума до давления, соответствующего заданной скорости потока. Постоянную этого уравнения можно получить, исходя из того, что при расширении газа до абсолютного вакуума достигается максимальная скорость потока.

Поэтому уравнению Бернулли можно придать следующий вид:

$$\frac{w^2}{2} + \int_0^p \frac{dp}{\rho} = \frac{w_{\max}^2}{2}. \tag{57}$$

В тех случаях, когда плотность газа на участке *1 — 2* элементарной струйки остается практически постоянной, интеграл в уравнении Бернулли равен

$$\int_1^2 \frac{dp}{\rho} = \frac{p_2 - p_1}{\rho},$$

и уравнение Бернулли выглядит особенно просто:

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} = 0,$$

или

$$\frac{p_2}{\rho} + \frac{w_2^2}{2} = \frac{p_1}{\rho} + \frac{w_1^2}{2}. \tag{58}$$

В такой форме оно применяется в гидравлике идеальной несжимаемой жидкости. Иногда уравнение Бернулли для идеальной несжимаемой жидкости записывается так:

$$p_2 + \rho \frac{w_2^2}{2} = p_1 + \rho \frac{w_1^2}{2}. \tag{59}$$

В этом случае оно составлено для 1 м^3 жидкости. Кинетическую энергию 1 м^3 жидкости ($\rho w^2/2$) называют *скоростным напором.*

Если нельзя пренебречь технической работой, гидравлическими потерями и изменением потенциальной энергии, то обобщенное уравнение Бернулли для 1 кг несжимаемой жидкости имеет такой вид:

$$-L=\frac{w_2^2-w_1^2}{2}+g(z_2-z_1)+\frac{p_2-p_1}{\rho}+L_{\text{тр}}. \tag{60}$$

Посредством этого равенства можно вычислить, например, работу, которую отдает жидкость колесу турбины ($L>0$), стоящему между сечениями *1* и *2*, если все прочие члены этого уравнения известны.

Для того чтобы пользоваться уравнением Бернулли для сжимаемого газа, нужно заранее знать термодинамический процесс изменения состояния газа, так как без этого неизвестна зависимость плотности газа от давления и нельзя взять интеграл $\int_1^2 \frac{dp}{\rho}$, выражающий работу проталкивания. Вычислим этот интеграл для основных термодинамических процессов.

При *изохорическом процессе* (постоянный объем, т. е. постоянная плотность), типичном для гидравлики капельных жидкостей, как уже указывалось, этот интеграл равен

$$\int_1^2 \frac{dp}{\rho}=\frac{p_2-p_1}{\rho}. \tag{61}$$

В *изобарическом процессе* (постоянное давление) интеграл равен нулю:

$$\int_1^2 \frac{dp}{\rho}=0. \tag{62}$$

Если осуществляется изотермический процесс (постоянная температура), то, согласно уравнению состояния газа (8), $p/\rho=RT=\text{const}$, т. е. давление прямо пропорционально плотности газа $\rho=\rho_1 p/p_1$, откуда получается следующее выражение для интеграла:

$$\int_1^2 \frac{dp}{\rho}=\frac{p_1}{\rho_1}\int_1^2 \frac{dp}{p}=\frac{p_1}{\rho_1}\ln\frac{p_2}{p_1}. \tag{63}$$

Предположим теперь, что состояние газа изменяется по *идеальной адиабате*

$$\frac{p}{\rho^k}=\text{const};$$

тогда

$$\rho = \rho_1 \left(\frac{p}{p_1}\right)^{1/k},$$

и, следовательно, интеграл равен

$$\int_1^2 \frac{dp}{\rho} = \frac{p_1^{1/k}}{\rho_1} \int_1^2 \frac{dp}{p^{1/k}} = \frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} \left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}} - 1\right]. \qquad (64)$$

Наконец, в *политропическом* процессе с постоянным показателем политропы ($n = \text{const}$) $p/\rho^n = \text{const}$ получим следующее выражение для интеграла:

$$\int_1^2 \frac{dp}{\rho} = \frac{n}{n-1} \frac{p_1}{\rho_1} \left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}} - 1\right]. \qquad (65)$$

Следует отметить, что подводимое к газу тепло непосредственно не отражено в уравнении Бернулли. Однако оно учитывается при вычислении интеграла, так как влияет на вид функции $\rho = f(p)$, т. е. на характер процесса, по которому изменяется состояние газа.

Наибольшее значение в газовой динамике имеет *идеальный адиабатический* процесс, который предполагает отсутствие теплового воздействия и работы сил трения. По этой причине при идеальной адиабате энтропия [1]) газа остается неизменной, т. е. такой процесс является идеальным термодинамическим — *изоэнтропическим* — процессом. Напомним, что далеко не всякий адиабатический процесс является идеальным. Например, при выводе уравнения теплосодержания мы показали, что наличие трения не нарушает адиабатичности процесса, но процесс с трением уже не может быть идеальным, так как он протекает с увеличением энтропии. Иначе говоря, адиабатичность процесса требует только отсутствия теплообмена с внешней средой, а не постоянства энтропии. Таким образом, адиабатичность совмещается с постоянством энтропии только в идеальном процессе. Если изменением потенциальной энергии можно пренебречь ($z_1 \approx z_2$) и нет технической работы ($L = 0$), а процесс является идеально адиабатическим, то уравнение Бернулли на основании (54) и (64) имеет следующий вид:

$$\frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} \left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}} - 1\right] + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} = 0. \qquad (66)$$

Рассмотрим случай идеального торможения газовой струи, т. е. определим давление $p_2 = p^*$, которое получится, если ско-

[1]) См. ниже, § 7.

рость течения изоэнтропическим путем уменьшится от $w_1 = w$ (при этом $p_1 = p$, $\rho_1 = \rho$) до $w_2 = 0$. Уравнение Бернулли в этом случае дает

$$\frac{k}{k-1}\frac{p}{\rho}\left[\left(\frac{p^*}{p}\right)^{\frac{k-1}{k}} - 1\right] = \frac{w^2}{2}, \tag{67}$$

откуда

$$\frac{p^*}{p} = \left(1 + \frac{k-1}{2}\frac{w^2}{k\frac{p}{\rho}}\right)^{\frac{k}{k-1}}.$$

Используя выражение (34), связывающее скорость звука с параметрами состояния газа,

$$a = \sqrt{\frac{kp}{\rho}},$$

получим формулу для вычисления давления в идеально заторможенной газовой струе, в функции давления (p) и числа M перед торможением:

$$\frac{p^*}{p} = \left(1 + \frac{k-1}{2}\mathrm{M}^2\right)^{\frac{k}{k-1}}. \tag{68}$$

Величина p^* носит название *полного давления*. Как и температура торможения, полное давление является удобной характеристикой газового потока, так как оно связывает сразу два фактора: скорость и давление в потоке; последнее обычно называют *статическим давлением*. Итак, *отношение полного давления к статическому есть функция числа* M.

Формулу (68) можно получить непосредственно из выражения (40) для температуры торможения

$$\frac{T^*}{T} = 1 + \frac{k-1}{2}\mathrm{M}^2,$$

пользуясь соотношениями для идеальной адиабаты

$$\frac{p^*}{p} = \left(\frac{T^*}{T}\right)^{\frac{k}{k-1}}, \tag{69}$$

$$\frac{\rho^*}{\rho} = \left(\frac{T^*}{T}\right)^{\frac{1}{k-1}}. \tag{70}$$

Отсюда же получается формула для вычисления плотности в идеально заторможенной газовой струе

$$\frac{\rho^*}{\rho} = \left(1 + \frac{k-1}{2}\mathrm{M}^2\right)^{\frac{1}{k-1}}. \tag{71}$$

С помощью функции (42), связывающей температуру торможения с приведенной скоростью, находим из соотношения (69) зависимость полного давления от приведенной скорости

$$\frac{p}{p^*} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{\frac{k}{k-1}}. \tag{72}$$

Для плотности идеально заторможенного газа соответственно получим

$$\frac{\rho}{\rho^*} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}}. \tag{73}$$

Нужно отметить, что истинное давление, которое получается при торможении струи газа, может существенно отличаться от полного давления, определенного по формуле (68). Объясняется это тем, что в действительности торможение струи часто протекает не по идеальной адиабате, а с более или менее существенными гидравлическими потерями. Например, в диффузоре при дозвуковом течении газа уменьшение скорости обычно сопровождается вихреобразованиями, вносящими значительные сопротивления в газовый поток. При торможении сверхзвукового потока почти всегда образуются ударные волны, дающие специфическое «волновое» сопротивление. Итак, действительное давление в заторможенной струе газа обычно ниже полного давления набегающей струи.

Вообще, если на участке струи *1 — 2* наблюдаются потери, то это обязательно приводит к тому, что полное давление в сечении *2* будет ниже полного давления в сечении *1*:

$$p_2^* < p_1^*.$$

Если ввести безразмерную величину, носящую название *коэффициента сохранения полного давления*

$$\sigma = \frac{p_2^*}{p_1^*}, \tag{74}$$

то чем больше потери, тем ниже значение коэффициента сохранения полного давления и меньше полное давление в конце рассматриваемого участка струи:

$$p_2^* = \sigma p_1^*. \tag{75}$$

Можно оценивать потери и по разности полных давлений:

$$\Delta p^* = p_1^* - p_2^* = (1 - \sigma)\, p_1^*. \tag{76}$$

На применении уравнения Бернулли основан пневматический способ определения скорости потока, который состоит в том, что

в поток вводится насадок (рис. 1.5), состоящий из двух трубок. Открытое отверстие одной из этих трубок (*1*) размещается в носовой части насадка (перпендикулярно к потоку), а отверстия второй трубки (*2*) расположены в боковой поверхности насадка (вдоль потока); при дозвуковой скорости замедление струи газа от встречи с насадком проходит без каких-либо потерь, так как трение и вихреобразование возникают уже на боковой поверхности насадка, т. е. после того, как струя минует область своего полного торможения, размещающуюся перед самым носиком насадка. По этой причине в первой трубке создается давление, почти в точности равное полному давлению набегающего потока; во второй трубке, если ее входное отверстие достаточно удалено от носика, устанавливается давление близкое к статическому давлению потока. Трубки *1* и *2* сообщаются с манометром, измеряющим давление. Отношение измеренных давлений

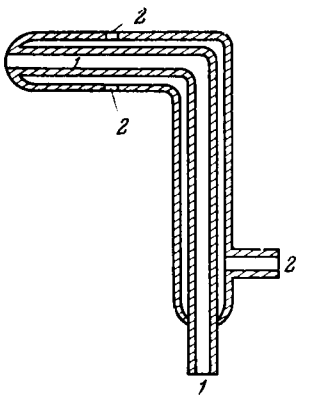


Рис. 1.5. Схема пневматического насадка.

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{p^*}{p}$$

дает возможность по формуле (68) или (72) вычислить значения числа Маха или приведенной скорости потока.

Расчеты по этим формулам достаточно точны только для дозвукового потока. Объясняется это тем, что при торможении сверхзвукового потока перед насадком возникает ударная волна, пересекая которую газовые струи претерпевают значительные гидравлические потери. Поэтому давление в трубке *1* пневматического насадка при сверхзвуковом течении существенно отличается от полного давления набегающего потока, что делает формулы (68) и (72) в этом случае неприменимыми.

Нужно заметить, что пользоваться пневматическим насадком можно и для измерения сверхзвуковой скорости, но при этом следует применять специальные расчетные формулы, учитывающие волновое сопротивление. Такие формулы мы выведем в дальнейшем.

Итак, предельное значение скорости, выше которого нельзя применять формулы (68) и (72) при торможении газового потока, равно скорости звука ($M = \lambda = 1$).

Для ускоряющегося газового потока этими формулами можно пользоваться и при сверхзвуковых скоростях, так как увеличение скорости происходит обычно без заметных потерь (изоэн-

тропически) не только в области $M < 1$, но и в области $M > 1$, т. е. полное давление в ускоряющейся газовой струе почти не меняется. В частности, по формулам (68) или (72) вычисляется *скорость истечения газа*. При этом в сосуде, где газ покоится, давление равно полному давлению вытекающей струи p^*, а в выхлопном отверстии сопла — статическому давлению p. Из формулы (68) получим

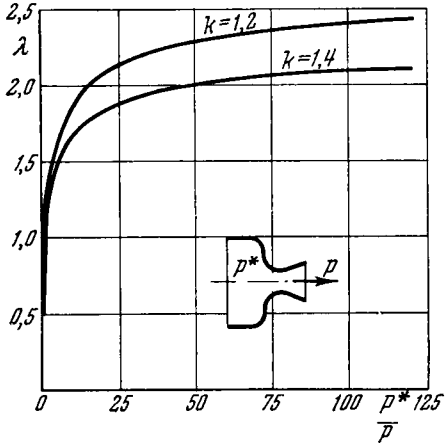


Рис. 1.6. Зависимость приведенной скорости истечения от отношения полного давления к статическому давлению в выходном сечении сопла.

$$M^2 = \frac{2}{k-1}\left[\left(\frac{p^*}{p}\right)^{\frac{k-1}{k}} - 1\right], \tag{77}$$

а из формулы (72)

$$\lambda^2 = \frac{k+1}{k-1}\left[1 - \left(\frac{p}{p^*}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]. \tag{78}$$

Отсюда определим скорость истечения w:

$$w = aM,$$

где

$$a = a^*\sqrt{\frac{T}{T^*}} = a^*\left(\frac{p}{p^*}\right)^{\frac{k-1}{2k}}, \tag{79}$$

или

$$w = a_{кр}\lambda,$$

где

$$a_{кр} = a^*\sqrt{\frac{2}{k+1}}. \tag{80}$$

Как нетрудно видеть, расчет скорости истечения более удобно вести по приведенным скоростям, чем по числам M. Истинные значения скорости истечения немного ниже определяемых по формулам (77)—(80), так как некоторых потерь трения избежать нельзя, но погрешность этих формул обычно не больше 1—5%.

Кривые зависимости $\lambda = f(p^*/p)$ для случаев $k = 1{,}4$ и $k = 1{,}2$ представлены на рис. 1.6.

Исследуем с помощью уравнения Бернулли техническую работу компрессора и турбины. В компрессоре полное давление газа увеличивается: $p_2^* > p_1^*$, а в газовой турбине падает: $p_2^* < p_1^*$. Отношение давлений p_2^*/p_1^* в компрессоре соответственно больше единицы, а в турбине — меньше единицы. Для большей наглядности предположим, что работа трения и изменение потенциальной энергии отсутствуют и изменение давления в машине идет по изоэнтропическому закону. В этом случае

уравнение Бернулли напишется так:

$$-L=\frac{w_2^2-w_1^2}{2}+\int_1^2\frac{dp}{\rho}=\frac{w_2^2-w_1^2}{2}+\frac{k}{k-1}\frac{p_1}{\rho_1}\left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}-1\right]. \quad (81)$$

Компрессор или турбина, работающие в таких условиях, носят название *идеального компрессора* или *идеальной турбины*. Используя равенство (67), введем в выражение (81) полные давления перед и за машиной, исключив из него скорости:

$$\frac{k}{k-1}\left\{\frac{p_2}{\rho_2}\left[\left(\frac{p_2^*}{p_2}\right)^{\frac{k-1}{k}}-1\right]-\frac{p_1}{\rho_1}\left[\left(\frac{p_1^*}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}-1\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{p_1}{\rho_1}\left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}-1\right]\right\}=-L,$$

откуда

$$\frac{k}{k-1}\left\{\frac{p_2^{1/k}}{\rho_2}(p_2^*)^{\frac{k-1}{k}}-\frac{p_2}{\rho_2}-\frac{p_1^{1/k}}{\rho_1}(p_1^*)^{\frac{k-1}{k}}+\frac{p_1}{\rho_1}+\right.$$
$$\left.+\frac{p_1^{1/k}}{\rho_1}(p_2)^{\frac{k-1}{k}}-\frac{p_1}{\rho_1}\right\}=-L;$$

но в идеальном адиабатическом процессе имеет место равенство

$$\frac{p_2^{1/k}}{\rho_2}=\frac{p_1^{1/k}}{\rho_1}=\frac{(p_1^*)^{1/k}}{\rho_1^*}=\frac{(p_2^*)^{1/k}}{\rho_2^*},$$

с помощью которого после несложных преобразований получается

$$-L=\frac{k}{k-1}\frac{p_1^*}{\rho_1^*}\left[\left(\frac{p_2^*}{p_1^*}\right)^{\frac{k-1}{k}}-1\right]. \quad (82)$$

Итак, в идеальном случае техническая работа может быть определена по изменению полных давлений без учета конкретных значений скорости газа до и после машины. Работа, передаваемая газовой турбине, является положительной $(p_2^*<p_1^*)$, а подводимая компрессором, — отрицательной $(p_2^*>p_1^*)$.

Отклонение от идеального изоэнтропического процесса в машине учитывается обычно с помощью дополнительного множителя, представляющего собой коэффициент полезного действия машины. В случае компрессора получим

$$L_к=\frac{L}{\eta_к^*}. \quad (83)$$

В случае турбины

$$L_т=\eta_т^* L. \quad (84)$$

Отношение значений полного давления за и перед машиной

$$\pi^* = \frac{p_2^*}{p_1^*} \tag{85}$$

будем называть в дальнейшем *степенью повышения давления* (для компрессора) или *степенью понижения давления* (для турбины). Уравнение идеальной технической работы можно записать также в следующем виде:

$$L = -\frac{k}{k-1} RT_1^* \left[(\pi^*)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right] \text{ [Дж/кг]}. \tag{86}$$

Наиболее существенной особенностью технической работы является то, что ее величина, как видно из выражения (86), прямо пропорциональна начальной температуре газа. Это свойство технической работы лежит в основе рабочего процесса любой тепловой газовой машины. Например, в двигателе внутреннего сгорания всегда рабочее тело вначале сжимается, затем подогревается и расширяется. В соответствии с изложенным работа, затраченная при сжатии холодного газа, меньше работы, которую он произведет после подогрева при расширении до первоначального давления. Из разности этих работ, собственно говоря, и получается полезная работа, совершаемая двигателем внутреннего сгорания.

§ 5. Уравнение количества движения

Согласно второму закону Ньютона элементарное изменение количества движения равно элементарному импульсу силы:

$$d(mw) = P\,d\tau. \tag{87}$$

Здесь P — сумма проекций на какую-либо ось всех сил, приложенных к телу массы m, w — проекция скорости на ту же ось, $d\tau$ — время действия силы P. В таком виде закон Ньютона используется в механике твердого тела.

Применительно к потокам жидкостей и газов более удобна несколько иная (гидродинамическая) форма уравнения для количества движения, которую получил впервые Эйлер. Выведем уравнение количества движения в гидродинамической форме. Для этого выделим элементарную струйку (рис. 1.7) и проведем два нормальных к ее оси сечения *1* и *2*. Разобьем всю массу жидкости, заключенную в объеме *1* — *2*, на большое число частей так, чтобы в пределах каждой из них, имеющей массу m, скорость движения w можно было считать постоянной, и установим связь между проекциями сил и количества движения на ось x. Согласно уравнению (87) сумма проекций импульсов всех

сил, приложенных к массе жидкости *1 — 2*, равняется изменению проекции суммарного количества движения:

$$P_x\, d\tau = d \sum m w_x. \tag{88}$$

Рассмотрим изменение суммарного количества движения $d \sum m w_x$ за время $d\tau$, в течение которого выделенная масса жидкости переместится из положения *1 — 2* в положение *1′ — 2′*. Предположим, как это мы делали в предыдущих параграфах, что жидкость находится в установившемся движении, тогда количество движения массы *1′ — 2*, входящее как в начальное, так и в конечное значение суммарного количества движения, остается неизменным и при вычитании сокращается. Иначе говоря, прирост суммарного количества движения должен быть равен разности количества движения, взятого соответственно для масс *2 — 2′* и *1 — 1′*, которые в установившемся движении одинаковы:

$$d \sum m w_x = (w_{x2} - w_{x1})\, dG.$$

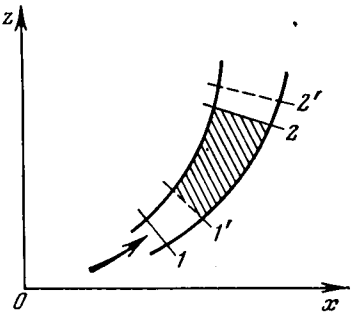


Рис. 1.7. Элементарная струйка.

Здесь dG — масса жидкости элемента *1 — 1′* (или *2 — 2′*), w_{x2}, w_{x1} — проекции на ось x скорости потока в сечениях *2* и *1*. Элементарная масса dG равна произведению секундного массового расхода жидкости на промежуток времени $d\tau$:

$$dG = G\, d\tau.$$

Отсюда

$$d \sum m w_x = (w_{x2} - w_{x1})\, G\, d\tau.$$

Величина Gw носит название *секундного количества движения*.

Подставляя полученное выражение в исходное равенство (88), приходим к уравнению количества движения в гидродинамической форме (первому уравнению Эйлера), согласно которому сумма проекций всех сил, приложенных к струе жидкости на любом ее участке, равна приращению проекции секундного количества движения на этом участке, или, что то же, произведению секундной массы на приращение проекции скорости:

$$P_x = G\,(w_{x2} - w_{x1}). \tag{89}$$

Аналогичные уравнения можно составить и для двух других осей.

Применим уравнение количества движения к прямолинейной струйке постоянного сечения F. Проведем торцовые части контрольной поверхности нормально к направлению потока, причем пусть образующая боковой поверхности струйки параллельна оси x. Скорость потока w направлена в сторону положительной оси x. Составим уравнение количества движения в направлении потока. На контрольную поверхность действуют силы давления, нормальные к ней. Поэтому проекции на ось x сил давления, приложенных к боковой поверхности, равны нулю. Изменение давления на участке между торцовыми сечениями струйки пропорционально силе, действующей на выбранный элемент жидкости. Эта сила, параллельная оси x, равна $(p_1 - p_2)F$. К боковой поверхности приложена сила трения, направленная параллельно потоку, против него: $-P_{тр}$. Кроме того, между торцовыми сечениями струйки может находиться какая-либо машина, получающая от газа техническую работу. Пусть проекция на направление движения силы, с которой действует машина на газ, равна $-P$ [1]). Итак, сумма проекций всех сил на ось x равна

$$P_x = (p_1 - p_2)F - P_{тр} - P.$$

По уравнению количества движения эта сила должна быть равна изменению количества движения:

$$(p_1 - p_2)F - P_{тр} - P = G(w_2 - w_1). \qquad (90)$$

Если расстояние между сечениями *1* и *2* бесконечно мало, то уравнение количества движения нужно записать в дифференциальной форме:

$$G\,dw + F\,dp = -dP_{тр} - dP.$$

Умножив все члены этого уравнения на скорость движения и разделив на массовый расход газа, получим уравнение работы всех сил для цилиндрической струйки, отнесенное к 1 кг газа,

$$w\,dw + \frac{dp}{\rho} = -\frac{w\,dP_{тр}}{G} - \frac{w\,dP}{G}.$$

Здесь использовано уравнение расхода в цилиндрической струйке

$$\rho w = \frac{G}{F} = \text{const}.$$

Нетрудно видеть, что стоящие в правой части члены представляют собой работу сил трения

$$\frac{w}{G}\,dP_{тр} = dL_{тр},$$

[1]) Проекция силы, приложенной газовым потоком к машине, считается положительной.

и техническую работу

$$\frac{w}{G}\,dP = dL.$$

Таким образом, уравнение количества движения для цилиндрической струйки газа легко преобразуется в уравнение Бернулли

$$-dL = d\left(\frac{w^2}{2}\right) + \frac{dp}{\rho} + dL_{\text{тр}}. \tag{91}$$

В дальнейшем уравнение количества движения для цилиндрической струи газа мы будем применять в следующей форме:

$$dp + \rho\, w\, dw = -\frac{dP_{\text{тр}}}{F} - \frac{dP}{F}. \tag{92}$$

При отсутствии трения и силового воздействия газа на какую-либо машину дифференциальное уравнение количества движения приобретает особенно простой вид:

$$dp = -\rho w\, dw. \tag{93}$$

Уравнение (93) выражает важное свойство газового потока. При отсутствии внешних сил и сил трения увеличение скорости потока может быть вызвано только уменьшением статического движения, и наоборот, торможение потока в этом случае всегда связано с увеличением давления в нем независимо от характера других процессов, происходящих в потоке, и изменения остальных параметров газа. В интегральной форме уравнение количества движения для цилиндрической струйки запишется так:

$$p_2 - p_1 + \rho_1 w_1\,(w_2 - w_1) = -\frac{P_{\text{тр}}}{F} - \frac{P}{F},$$

или при условии $P_{\text{тр}} = 0$ и $P = 0$:

$$p_2 - p_1 = \rho_1 w_1\,(w_1 - w_2), \tag{94}$$

или

$$p + \rho w^2 = \text{const}.$$

Итак, в цилиндрической струйке давление может измениться даже в том случае, когда нет трения и технической работы. Для этого достаточно, чтобы изменялась скорость течения, что может быть достигнуто при подводе или отводе тепла. Например, при подогреве газа, в связи с уменьшением его плотности, скорость растет ($\rho_1 w_1 = \rho_2 w_2$), а давление падает.

Важная особенность уравнения количества движения состоит в том, что с его помощью расчет действующих сил производится только по состоянию потока, на контрольной поверхности без проникновения в сущность процессов, происходящих внутри этой контрольной поверхности. Поэтому уравнение количества

движения позволяет во многих случаях достаточно точно рассчитать гидродинамический процесс, не вникая в его детали.

Следует отметить, что эффективность использования уравнения количества движения зависит в основном от того, насколько удачно выбрана в потоке контрольная поверхность.

Рассмотрим несколько примеров применения уравнений количества движения и энергии.

Пример 1. Определим гидравлические потери в потоке несжимаемой жидкости при внезапном расширении канала (рис. 1.8). Опыт показывает, что в этом случае струя, выходящая из узкой части канала, не заполняет вначале всего поперечного сечения широкого канала, а растекается постепенно. В углах между поверхностью струи и стенками образуются замкнутые токи жидкости, причем давление на торцовой стенке *1* по опытам оказывается почти равным статическому давлению на выходе из узкой части канала (p_1). При внезапном расширении канала наблюдается значительное гидравлическое сопротивление, т. е. происходит уменьшение полного давления в потоке. Если поместить сечение *2* в таком месте, где поток уже полностью выравнялся, т. е. статическое давление p_2 и скорость потока w_2 по сечению постоянны, то потери будут равны разности полных давлений

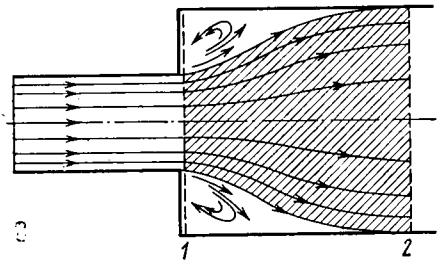


Рис. 1.8. Схема течения при внезапном расширении канала.

$$\Delta p^* = p_1^* - p_2^*.$$

Полное давление p^* в случае движения несжимаемой жидкости определяется совершенно аналогично тому, как это делалось для идеального адиабатического процесса в § 4, т. е. как давление в полностью заторможенной струе без потерь и в отсутствие технической работы; при $z = \text{const}$, согласно, уравнению Бернулли для несжимаемой жидкости (60), имеем

$$p^* = p_1 + \frac{\rho w_1^2}{2}.$$

Таким образом, для несжимаемой жидкости

$$\Delta p^* = \left(p_1 + \frac{\rho w_1^2}{2}\right) - \left(p_2 + \frac{\rho w_2^2}{2}\right).$$

Скорости w_1 и w_2 можно связать уравнением неразрывности

$$w_1 F_1 = w_2 F_2;$$

изменение статического давления $(p_1 - p_2)$ заранее неизвестно, т. е. получается одно уравнение с двумя неизвестными. Дополнительно можно использовать уравнение количества движения. Учитывая, что участок растекания струи $1-2$ имеет не слишком большую длину, силой трения обычно пренебрегают. Тогда уравнение количества движения можно применить в простейшей форме (94):

$$p_1 - p_2 = \rho w_2 (w_2 - w_1).$$

Здесь используется постоянство давления в сечении *1*, что не является самоочевидным, но, как указано выше, подтверждается опытами. В отличие от уравнения Бернулли, уравнение количества движения дает возможность сразу определить разность значений статического давления, получающихся в потоке при внезапном расширении канала. Если этот результат подставить в уравнение Бернулли, то найдутся и потери полного давления при внезапном расширении канала:

$$\Delta p^* = \rho \frac{(w_1 - w_2)^2}{2}.$$

Следует обратить внимание на то, что применение уравнения количества движения принесло в данном случае успех благодаря удачному выбору контрольной поверхности *1 — 2*, на которой оказались известными основные действующие силы.

Пример 2. Произведем расчет простейшего эжектора, состоящего из сопла *A* и цилиндрической смесительной трубы *B*, расположенных в пространстве, заполненном неподвижной жидкостью (рис. 1.9). Из сопла подается струя, которая подсасывает жидкость из окружающего пространства. Пусть на выходе из смесительной трубы скорость и плотность смеси примерно постоянны. Построим контрольную поверхность из сечений *1* и *2*, проходящих нормально к потоку по срезу сопла и срезу смесительной трубы, и боковых поверхностей, направленных параллельно потоку. На всей контрольной поверхности господствует одно и то же давление покоящейся жидкости, т. е. главный вектор сил давления равен нулю.

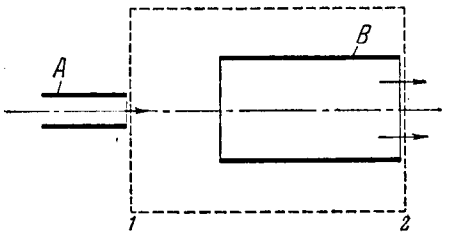


Рис. 1.9. Простейший эжектор.

Если пренебречь силой трения на стенках смесительной трубы, то окажется, что сумма проекций на ось трубы всех сил в пределах контрольной поверхности *1—2* равна нулю, а следовательно, не должно быть изменения количества движения.

Изменение количества движения у активной струи на участке *1 — 2*

$$G_1 (w_2 - w_1).$$

То же у жидкости, подсосанной из окружающего пространства, где она находилась в покое ($w = 0$):

$$(G_2 - G_1)(w_2 - 0),$$

откуда суммарное изменение количества движения

$$G_2 w_2 - G_1 w_1 = 0.$$

Здесь G_1, G_2 — секундные массовые расходы жидкости соответственно в сопле и на выходе из смесительной трубы, w_1 и w_2 — значения скорости истечения из сопла и смесительной трубы.

Отсюда получаем, что расходы жидкости в сопле и на выходе из смесительной трубы обратно пропорциональны величинам соответствующих скоростей

$$\frac{G_2}{G_1} = \frac{w_1}{w_2}.$$

С другой стороны, очевидно, что

$$\frac{G_2}{G_1} = \frac{\rho_2 w_2 F_2}{\rho_1 w_1 F_1},$$

где ρ — плотность, F — площадь сечения. Сравнивая последние два выражения, приходим к следующей расчетной формуле:

$$\frac{G_2}{G_1} = \sqrt{\frac{\rho_2 F_2}{\rho_1 F_1}}.$$

Если плотность жидкости в активной струе и в окружающем пространстве одинакова, то отношение массовых расходов жидкости равно отношению диаметров смесительной трубы и сопла:

$$\frac{G_2}{G_1} = \sqrt{\frac{F_2}{F_1}} = \frac{D_2}{D_1}.$$

Пример. 3. Вычислим силу, действующую на стенки диффузора (рис. 1.10) при отсутствии гидравлических потерь в потоке несжимаемой жидкости. Пусть давление и скорость в сечении *1* перед диффузором постоянны и равны p_1, w_1, а в сечении *2* после диффузора также постоянны и равны p_2, w_2. Уравнение Бернулли, если нет потерь, дает

$$p_1 + \frac{\rho w_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho w_2^2}{2}.$$

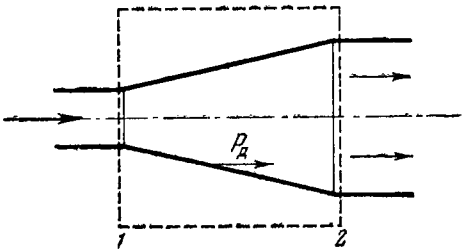


Рис. 1.10. К расчету силы давления в диффузоре.

Из уравнения неразрывности получаем

$$w_1 F_1 = w_2 F_2 = G/\rho.$$

Проведем контрольную поверхность из поперечных сечений *1* и *2* и боковых поверхностей, расположенных параллельно потоку и охватывающих диффузор. Вследствие наклона стенок диффузора сумма проекций на продольную ось сил давления, приложенных от стенок к жидкости, не равна нулю ($P_д \neq 0$).

Сумма проекций всех сил на продольную ось, которая получается путем сложения силы $P_д$ с силами давления на торцовые сечения, равна изменению количества движения

$$P_д + p_1 F_1 - p_2 F_2 = G(w_2 - w_1).$$

Производя замену величин w_1 и p_2 с помощью уравнений неразрывности и Бернулли, приходим к следующему выражению для проекции на направление потока силы, действующей на поток от стенок диффузора:

$$P_д = p_1 (F_2 - F_1) + \frac{G w_2}{2}\left(\frac{F_2 - F_1}{F_1}\right)^2.$$

Пусть внешнее давление — $p_н$, тогда проекция на продольную ось силы внешнего давления на диффузор

$$P_{нар} = p_н (F_2 - F_1).$$

В итоге получаем следующее значение проекции на продольную ось результирующей силы, которая действует на стенки диффузора

$$-P = P_{\text{д}} - P_{\text{нар}} = (p_1 - p_{\text{н}})(F_2 - F_1) + \frac{Gw_2}{2}\left(\frac{F_2 - F_1}{F_1}\right)^2.$$

В частном случае, когда внешнее давление одинаково с давлением в узком сечении диффузора, эта сила равна

$$-P = \frac{Gw_2}{2}\left(\frac{F_2}{F_1} - 1\right)^2 = \frac{\rho w_1^2}{2} F_2\left(1 - \frac{F_1}{F_2}\right)^2.$$

Последнее выражение применяется иногда при вычислении силы, действующей на входной диффузор воздушно-реактивного двигателя.

Пример 4. Установим взаимосвязь между скоростью полета и скоростью истечения из прямоточного воздушно-реактивного двигателя, схема

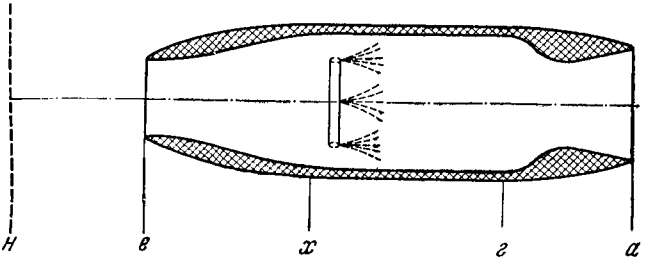


Рис. 1.11. Схема прямоточного воздушно-реактивного двигателя: $в$ — входное сечение, $х$ — начальное сечение камеры сгорания, $г$ — конечное сечение камеры сгорания, $а$ — выходное сечение сопла.

которого изображена на рис. 1.11. Во входном участке двигателя происходит преобразование скоростного напора набегающего потока в давление, т. е. динамическое сжатие воздуха. В камере сгорания подводится тепло, и образующаяся смесь сжатого воздуха с продуктами сгорания нагревается. В выходном сопле нагретые газы расширяются: здесь давление преобразуется в скоростной напор.

Основы теории прямоточного воздушно-реактивного двигателя даны впервые Б. С. Стечкиным в 1929 г. [1]).

Наиболее совершенный цикл работы прямоточного воздушно-реактивного двигателя был бы получен в том случае, если бы сжатие воздуха на участке $н - х$ (рис. 1.11) осуществлялось по идеальной адиабате и скорость потока была бы доведена до нуля, подвод тепла в камере сгорания $х - г$ происходил бы при постоянном давлении, после чего выхлопная смесь расширялась бы в сопле $г - а$ до атмосферного давления также по идеальной адиабате. Прямоточный воздушно-реактивный двигатель, работающий по указанному совершенному циклу, называют *идеальным*.

Полное давление в камере сгорания может быть найдено из уравнения Бернулли, которое интегрируется в этом случае с помощью идеальной адиабаты:

$$\frac{k}{k-1}\frac{p_{\text{н}}}{\rho_{\text{н}}}\left[\left(\frac{p^*}{p_{\text{н}}}\right)^{\frac{k-1}{k}} - 1\right] = \frac{w_{\text{н}}^2}{2}.$$

[1]) Стечкин Б. С., Теория воздушного реактивного двигателя, Техника Воздушного Флота, № 2, 1929.

Скорость истечения найдется из аналогичного выражения при $p_н = p_a$:

$$\frac{k}{k-1}\frac{p_н}{\rho_a}\left[\left(\frac{p^*}{p_н}\right)^{\frac{k-1}{k}} - 1\right] = \frac{w_a^2}{2}.$$

Отсюда мы получаем основное соотношение

$$\rho_н \frac{w_н^2}{2} = \rho_a \frac{w_a^2}{2}.$$

Итак, *в идеальном прямоточном воздушно-реактивном двигателе скоростной напор потока в выхлопном отверстии равен скоростному напору полета.*

Используя это же равенство, получим для идеального двигателя $(p_x^* = p_1^*, p_a = p_н)$ еще один важный результат:

$$\lambda_a = \lambda_н,$$

т. е. *приведенные скорости в выходном отверстии идеального двигателя и в набегающем невозмущенном потоке равны.* Отсюда вытекает также и *равенство чисел Маха полета и истечения*

$$M_a = M_н.$$

Эти соотношения справедливы для идеального двигателя как при дозвуковой, так и при сверхзвуковой скорости полета.

В реальном двигателе в связи с потерями давления во входном и выходном участках и в камере сгорания скоростной напор на выхлопе ниже скоростного напора полета:

$$\rho_a \frac{w_a^2}{2} < \rho_н \frac{w_н^2}{2}.$$

По этой же причине число Маха и приведенная скорость в выходном отверстии имеют меньшие значения, чем в набегающем потоке:

$$M_a < M_н, \quad \lambda_a < \lambda_н.$$

Таким образом, увеличение скорости истечения по сравнению со скоростью полета получается не в результате увеличения скоростного напора в двигателе, а за счет уменьшения плотности газа при подогреве.

Полученные соотношения приводят к простой расчетной формуле для скорости истечения в идеальном двигателе

$$w_a = w_н \sqrt{\frac{\rho_н}{\rho_a}} = w_н \frac{a_{кр.\,г}}{a_{кр.\,х}},$$

где $a_{кр.\,г}$, $a_{кр.\,х}$ — критическая скорость газа соответственно после и до подогрева. Из этой формулы следует, что отношение скорости истечения к скорости полета для идеального двигателя пропорционально корню квадратному из отношения температур торможения, взятых в конце и начале камеры сгорания:

$$\frac{w_a}{w_н} = \sqrt{\frac{T_г^*}{T_х^*}}.$$

Следует подчеркнуть при этом, что температура торможения в начале камеры сгорания может быть подсчитана по формуле (42) как функция

температуры в атмосфере и приведенной скорости полета

$$\frac{T_н}{T_x^*} = 1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_н^2,$$

а температура торможения в конце камеры сгорания определяется расходом горючего в двигателе и расходом воздуха.

§ 6. Уравнение моментов количества движения

Как известно из теоретической механики, изменение суммарного момента количества движения относительно какой-либо оси, например оси y, равно сумме моментов импульсов всех сил, приложенных к телу, относительно той же оси (рис. 1.12):

$$d\sum m(w_x z - w_z x) = M_y\, d\tau. \qquad (95)$$

Здесь mw_z, mw_x — проекции количества движения некоторой элементарной массы m на оси z и x; x, z — соответствующие координаты, $m(w_x z - w_z x)$ — момент количества движения элементарной массы m относительно оси y.

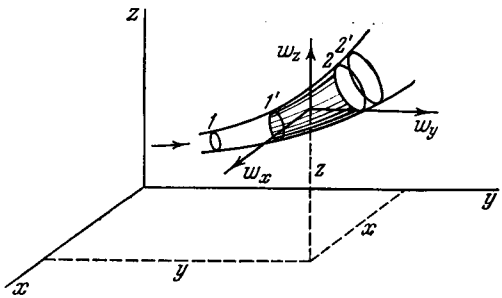


Рис. 1.12. К выводу уравнения моментов количества движения.

Если движение жидкости является установившимся, то изменение суммарного момента количества движения жидкости, перемещающейся за время $d\tau$ из объема $1-2$ в объем $1'-2'$, равно разности моментов количества движения в элементарных объемах $2-2'$ и $1-1'$

$$d\sum m(w_x z - w_z x) = G\left[(w_{x2}z_2 - w_{z2}x_2) - (w_{x1}z_1 - w_{z1}x_1)\right] d\tau, \qquad (96)$$

где G — секундный расход жидкости. Объясняется это тем, что момент количества движения заштрихованной массы $1'-2$ при вычитании сокращается, так как движение жидкости предполагается установившимся.

Подставляя (96) в левую часть равенства (95), получим второе уравнение Эйлера, т. е. уравнение моментов количества движения в гидродинамической форме

$$M_y = G\left[(w_{x2}z_2 - w_{z2}x_2) - (w_{x1}z_1 - w_{z1}x_1)\right]. \qquad (97)$$

Аналогичные уравнения могут быть составлены для осей z и x. Согласно второму уравнению Эйлера сумма моментов относительно любой оси всех сил, приложенных к жидкому объему,

равна разности моментов относительно той же оси секундных количеств движения выходящей и входящей жидкости.

Уравнение моментов количества движения приобретает более простую форму, если ввести полярные координаты [1]); в этом случае скорости раскладываются на радиальные и окружные составляющие, причем моменты радиальных составляющих количества движения равны нулю. Уравнение (97) при этом имеет вид

$$M = G(w_{u2}r_2 - w_{u1}r_1), \tag{98}$$

где M — сумма моментов всех сил, приложенных к какому-либо жидкому объему относительно начала координат, w_u — окружная составляющая скорости.

Если сумма моментов всех сил равна нулю ($M = 0$), получим известный закон площадей

$$w_u r = \text{const}. \tag{99}$$

Остановимся на одном примере приложения уравнения моментов количества движения.

Пример. Выясним влияние температуры газа перед компрессором на степень увеличения давления в нем. По уравнению моментов количества движения (98) можно найти момент сил, возникающих на колесе компрессора. Для этого нужно знать окружные составляющие скорости газа за (w_{2u}) и перед (w_{1u}) колесом, а также расстояния от оси выходящей (r_2) и входящей (r_1) массы газа. Секундная работа на валу колеса, как известно, равна произведению момента сил на угловую скорость (ω), откуда получаем для 1 кг газа

$$-L = \omega(w_{u2}r_2 - w_{u1}r_1).$$

Таким образом, работа 1 кг газа на колесе определяется кинематикой потока и угловой скоростью колеса, но не зависит от температуры и давления газа (жидкости) перед колесом. Выше было показано, что работа колеса пропорциональна разности полных теплосодержаний за и перед колесом:

$$-L = i_2^* - i_1^*.$$

Поэтому при постоянных значениях числа оборотов и объемного расхода газа, определяющих кинематику потока, перепад теплосодержаний на колесе не изменяется:

$$i_2^* - i_1^* = \text{const}.$$

Следовательно, при постоянной теплоемкости ($c_p = \text{const}$) перепад температур торможения на колесе также не изменяется:

$$\Delta T^* = T_2^* - T_1^* = \text{const}.$$

Отсюда, пользуясь уравнением работы компрессора в форме (86), замечаем, что степень повышения давления зависит от температуры газа перед колесом:

$$\Delta T^* = \frac{T_1^*}{\eta_к^*}\left(\pi_к^{*\frac{k-1}{k}} - 1\right) = -\frac{k-1}{kR}L_к = \text{const}.$$

[1]) При этом движение предполагается плоскопараллельным, т. е. траектории частиц суть плоские кривые.

Пусть, например, степень повышения давления в компрессоре на старте $\left(T_{\text{н}} = T^*_{\text{н}} = 288\ \text{K}\right)$ равна $\pi^*_{\text{к. ст}}$; при увеличении скорости полета, влекущем за собой увеличение температуры торможения перед колесом $T^*_{\text{д}}$, степень повышения давления в компрессоре при постоянных объемном расходе и числе оборотов может быть вычислена из условия постоянства работы:

$$\pi_{\text{к}}^{*\frac{k-1}{k}} - 1 = \frac{T_{\text{н}}}{T^*_{\text{д}}}\left(\pi_{\text{к. ст}}^{*\frac{k-1}{k}} - 1\right)\frac{\eta^*_{\text{к}}}{\eta^*_{\text{к. ст}}}.$$

Если в первом приближении пренебречь зависимостью коэффициента полезного действия компрессора от температуры на входе, то получится

$$\pi_{\text{к}}^{*\frac{k-1}{k}} - 1 = \frac{T_{\text{н}}}{T^*_{\text{д}}}\left(\pi_{\text{к. ст}}^{*\frac{k-1}{k}} - 1\right),$$

откуда с учетом равенства

$$\frac{T_{\text{н}}}{T^*_{\text{д}}} = 1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2_{\text{н}} = \frac{1}{1 + \frac{k-1}{2}\mathbf{M}^2_{\text{н}}}$$

имеем

$$\pi_{\text{к}}^{*\frac{k-1}{k}} - 1 = \frac{\pi_{\text{к. ст}}^{*\frac{k-1}{k}} - 1}{1 + \frac{k-1}{2}\mathbf{M}^2_{\text{н}}}.$$

Итак, в конечном счете из уравнения моментов количества движения вытекает, что степень повышения давления в компрессоре турбореактивного двигателя падает с увеличением скорости полета. Результаты расчета по этой формуле при стартовой степени повышения давления $\pi^*_{\text{к. ст}} = 4$ и $k = 1{,}4$ представлены в следующей таблице:

$\mathbf{M}_{\text{н}}$	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$\pi^*_{\text{к}}$	4	3,8	3,2	2,75	2,3	2	1,75

Проведенный расчет величины $\pi^*_{\text{к}}$ условен, так как основан на предположении о независимости величины работы от температуры даже при значительном ее изменении.

Основное назначение турбокомпрессорного устройства в турбореактивном двигателе состоит в том, чтобы создать в выходном сопле (за турбиной) большее полное давление, чем в диффузоре (перед компрессором):

$$p^*_{\text{с}} > p^*_{\text{д}};$$

на основании этого должно выполняться неравенство

$$\pi^*_{\text{к}}\pi^*_{\text{т}}\sigma_{\text{к. с}} > 1.$$

Здесь $\sigma_{\text{к. с}}$ — коэффициент сохранения полного давления в камере сгорания (при подводе тепла).

Ввиду того, что с ростом скорости полета величина $\pi_к^*$ уменьшается, а величины $\pi_т^*$ и $\sigma_{к.\,с}$ остаются практически неизменными, при некотором значении скорости полета двигатель перестает удовлетворять последнему неравенству.

В разобранном выше случае $(\pi_{к.\,ст}^* = 4)$ при $\pi_т^* = 0{,}5$ и $\sigma_{к.\,с} = 0{,}9$ это неравенство не выполняется уже при значениях

$$M_н = 2{,}5 \quad (\pi_к^* = 2,\ \pi_к^* \pi_т^* \sigma_{к.\,с} = 0{,}95)$$

и выше.

Прирост полного давления в турбокомпрессорном устройстве в целом $(p_с^* > p_д^*)$ зависит также от выбранной температуры перед турбиной, с увеличением которой уменьшается перепад давления в турбине.

Иначе говоря, при некотором значении скорости полета турбокомпрессорное устройство в целом перестает повышать давление в двигателе, т. е. становится нецелесообразным. На этих скоростях полета работа воздушно-реактивного двигателя обеспечивается сжатием воздуха только за счет скорости наддува, вследствие чего турбореактивный двигатель теряет преимущество перед прямоточным.

При дозвуковой, околозвуковой и не очень большой сверхзвуковой скорости полета, когда сжатие газа в компрессоре существенно преобладает над расширением в турбине, турбореактивный двигатель сохраняет все свои преимущества перед прямоточным реактивным двигателем.

§ 7. Энтропия

Согласно второму закону термодинамики при реальных необратимых процессах, протекающих в конечной изолированной системе, энтропия возрастает, а при обратимых — остается неизменной.

Математически прирост энтропии dS определяется так:

$$dS = \frac{dQ}{T};$$

здесь dQ — полное количество тепла, подводимое как извне, так и изнутри (например, за счет работы сил трения), T — абсолютная температура.

По первому закону термодинамики (50)

$$dQ = dU + p\,dv.$$

В случае идеального газа имеем

$$dU = c_v\,dT;$$

отсюда с помощью уравнения состояния $(pv = RT)$ получаем

$$dS = \frac{dQ}{T} = c_v \frac{dT}{T} + R\frac{dv}{v},$$

откуда после замены

$$R = c_p - c_v = (k-1)\,c_v$$

и интегрирования находим

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = c_v \ln \frac{T_2 v_2^{k-1}}{T_1 v_1^{k-1}},$$

или на основании уравнения состояния

$$S_2 - S_1 = c_v \ln \frac{p_2 v_2^k}{p_1 v_1^k}. \qquad (100)$$

Изменение энтропии в идеальном адиабатическом процессе, который является обратимым, равно нулю, так как в этом случае

$$p_2 v_2^k = p_1 v_1^k = pv^k = \text{const}.$$

Всякий реальный процесс для изолированной конечной системы протекает в таком направлении, что энтропия возрастает:

$$S_2 - S_1 > 0.$$

Для того чтобы убедиться в этом на примере идеального газа, перейдем в равенстве (100) от параметров потока к параметрам торможения, используя очевидное соотношение

$$pv^k = p^* v^{*k}.$$

Выразив удельный объем через давление и температуру

$$v^* = \frac{RT^*}{p^*},$$

получим

$$S_2 - S_1 = -c_v (k-1) \ln \frac{p_2^*}{p_1^*} \left(\frac{T_1^*}{T_2^*} \right)^{\frac{k}{k-1}}. \qquad (101)$$

В изолированной системе теплообмен с внешней средой отсутствует ($dQ_{\text{нар}} = 0$) и температура торможения не изменяется:

$$T_1^* = T_2^*.$$

Для такой системы, согласно (101), изменение энтропии

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ_{\text{вн}}}{T} = AR \ln \frac{p_1^*}{p_2^*}. \qquad (102)$$

Так как полное давление в газовом потоке вследствие потерь падает

$$p_2^* < p_1^*$$

и соответственно тепло трения имеет всегда положительный знак

$$dQ_{\text{вн}} > 0,$$

то энтропия в изолированной системе при необратимом процессе всегда увеличивается.

Вводя коэффициент сохранения полного давления, учитывающий гидравлические потери $\sigma = p_2^*/p_1^*$, получим для энергоизолированного газового потока (без теплообмена и механической работы) прямую связь между гидравлическими потерями и приростом энтропии:

$$S_2 - S_1 = -R \ln \sigma. \tag{103}$$

В теплоизолированном газовом потоке ($dQ_{\text{нар}} = 0$) без потерь ($dQ_{\text{вн}} = 0$) энтропия останется неизменной и при совершении механической работы, несмотря на то, что полное теплосодержание газа при этом изменяется:

$$-L = i_2^* - i_1^* \neq 0.$$

Это значит, что в идеальном компрессоре и в идеальной турбине

$$\frac{p_2^*}{p_1^*} = \left(\frac{T_2^*}{T_1^*}\right)^{\frac{k}{k-1}}.$$

В реальных машинах энтропия рабочего тела всегда изменяется.

Пусть отличие реального процесса от идеального учитывается некоторым множителем m

$$\frac{p_2^*}{p_1^*} = m\left(\frac{T_2^*}{T_1^*}\right)^{\frac{k}{k-1}}.$$

Тогда, согласно (101), изменение энтропии

$$S_2 - S_1 = -c_v (k-1) \ln m. \tag{104}$$

Как в компрессоре, так и в турбине при теплоизолированном процессе ($dQ_{\text{нар}} = 0$) гидравлические потери выражаются в подводе тепла к газу ($dQ_{\text{вн}} > 0$), т. е. в обоих случаях $m < 1$ [1]). Поэтому в реальных турбомашинах энтропия возрастает ($S_2 - S_1 > 0$).

---

[1]) И в компрессоре, и в турбине при заданных перепаде температур и начальном давлении конечное давление тем ниже, чем больше гидравлические потери.

§ 8. Расчет реактивной силы (тяги)

Полет реактивного аппарата осуществляется под действием реактивной силы, или, как ее часто называют, тяги, которую сообщает ему струя выходящих газов. Для нахождения величины реактивной силы P нет необходимости рассматривать детально распределение давления по внутренним и наружным стенкам реактивного аппарата. Реактивную силу можно определить в конечном виде с помощью уравнения количества движения.

Совершая полет, тело производит возмущение в окружающей среде. Всегда можно выделить некоторую, достаточно большую, например цилиндрическую, область, границы которой выходят за пределы возмущенной части потока (рис. 1.13). На

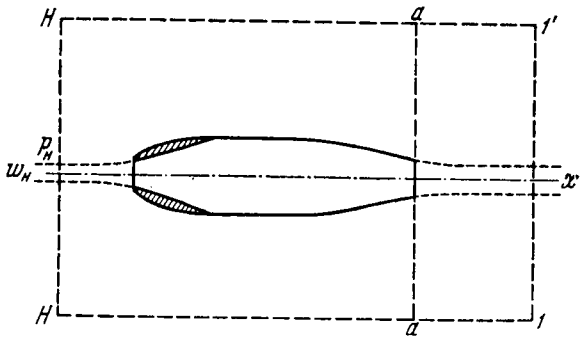


Рис. 1.13. Контур для определения реактивной силы.

боковых границах этой области давление и скорость потока (считаем двигатель неподвижным, а воздух — движущимся со скоростью полета) равны их значениям на бесконечности перед двигателем.

Пусть ось x совпадает с направлением полета и является осью симметрии двигателя; спроектируем на ось x силы, действующие на двигатель и на поверхность выделенного контура. Так как силы давления в жидкости нормальны к поверхности, то проекции на ось x сил, действующих на боковые поверхности контура, обращаются в нуль. Поэтому уравнение Эйлера (см. (90)) запишется так:

$$\int_0^\infty p_н\,dF - \int_0^\infty p_1\,dF + P = \int_0^\infty (w_1 - w_н)\,dG_в + \int_0^{G_г} w_1\,dG_г.$$

Здесь площади, на которые распространяются интегралы, и область интегрирования первого члена правой части бесконечны. Сила P берется со знаком + потому, что при выводе формулы (90) предполагалось, что машина получает от газа работу, а здесь реактивный двигатель сообщает работу газу; $G_в$ — секундная масса воздуха, втекающая в контур через сечение F; $G_г$ — дополнительная секундная масса горючего, которая подается в двигатель.

Если взять левую торцовую поверхность далеко перед двигателем, то давление на ней постоянно и равно атмосферному ($p_н$), а скорость потока равна скорости полета ($w_н$). Кроме того, можно допустить, что в поперечном направлении уже на некотором конечном расстоянии от поверхности двигателя поток является невозмущенным и площадь F, на которую распространяются интегралы левой части, считать конечной; точно так же конечной будет и область интегрирования в первом члене правой части. Тогда следует написать:

$$p_н F - \int_0^F p_1\, dF + P = \int_0^{G_в} (w_1 - w_н)\, dG_в + \int_0^{G_г} w_1\, dG_г.$$

В большом числе случаев возмущение, вызываемое летящим телом, настолько незначительно, что в плоскости среза сопла a (вне струи выхлопных газов) давление обтекающего потока мало отличается от давления на бесконечности ($p_н$). Тогда силы давления на передней и задней торцовых поверхностях контура уравновешиваются везде, кроме участка, соответствующего поперечному сечению выхлопной струи (F_a). Скорости потока во всех элементарных струйках, кроме проходящих через двигатель, одинаковы (здесь мы пренебрегаем влиянием трения, вихревых и волновых потерь на наружной поверхности двигателя). Следовательно, изменение количества движения получается только в струе, протекающей сквозь двигатель. Тогда уравнение Эйлера принимает следующий вид:

$$(p_н - p_a) F_a + P = G_в (w_a - w_н) + G_г w_a,$$

откуда получается основная формула для реактивной силы

$$P = G_в (w_a - w_н) + G_г w_a + (p_a - p_н) F_a. \qquad (105)$$

В этих выражениях w_a — средняя скорость истечения.

Следует подчеркнуть, что полученное соотношение справедливо только в том случае, если скорость и давление в плоскости a (за исключением участка рабочей струи) равны в точности их значениям на бесконечности перед двигателем. Кроме того, мы здесь пренебрегаем внешним лобовым сопротивлением двигателя, которое всегда может быть учтено отдельно.

На расчетном режиме работы реактивного двигателя давление в выхлопной струе равно давлению окружающего воздуха ($p_a = p_н$); в этом случае тяга равна изменению количества движения газа, прошедшего через двигатель:

$$P = G_в (w_a - w_н) + G_г w_a. \tag{106}$$

В воздушно-реактивных двигателях второй член правой части мал, и им часто пренебрегают [1]), т. е. принимают для воздушно-реактивных двигателей в расчетном случае [2])

$$P = G_в (w_a - w_н). \tag{107}$$

Тяга жидкостного реактивного двигателя, в котором не используется атмосферный воздух, определяется для расчетного режима по формуле

$$P = (G_г + G_о) w_a \tag{108}$$

или на нерасчетном режиме

$$P = (G_г + G_о) w_a + (p_a - p_н) F_a. \tag{109}$$

Здесь $G_о$ — секундный массовый расход окислителя.

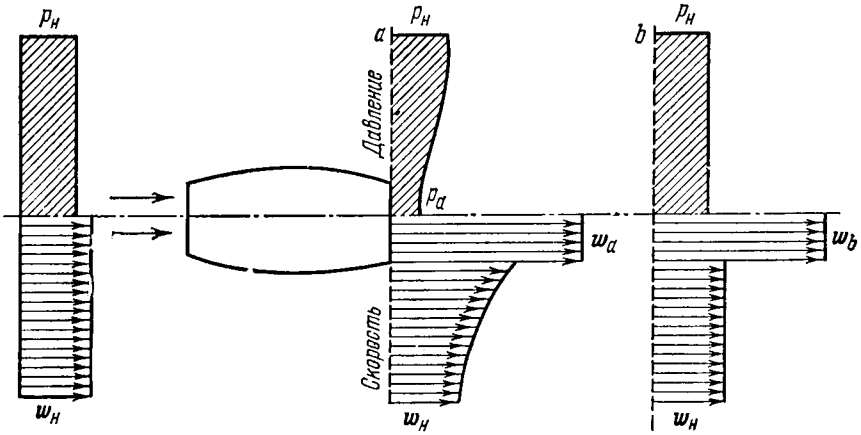


Рис. 1.14. Распределение давления и скорости потока перед и за двигателем.

Рассмотрим теперь влияние на реактивную силу непостоянства давлений в плоскости выходного среза двигателя. Построим эпюру давления и скорости на срезе сопла (рис. 1.14). Для

[1]) Весовая доля горючего в воздухе, проходящем через двигатель, не превышает одного — пяти процентов: $G_г \approx (0{,}01 \div 0{,}05) G_в$.

[2]) Следует особо подчеркнуть, что величина $w_н$ есть скорость полета, а отнюдь не скорость во входном отверстии двигателя.

простоты остановимся на случае дозвукового истечения. Можно, например, представить себе такое обтекание двигателя, при котором давление вблизи выходного среза понижено, за счет чего местная скорость во внешнем потоке увеличивается. Давление внутри дозвуковой выхлопной струи является примерно таким же, как и на ее границе.

Для подсчета реактивной силы воспользуемся основным свойством неравномерных (по величинам полного давления) потоков, заключающимся в том, что неравномерность в распределении скорости исчезает очень медленно, а давление выравнивается быстро.

Так, например, неравномерность в поле давления, возникающая при повороте потока, выравнивается на расстоянии 1,5—2 диаметров прямой трубы за местом поворота, скорость же выравнивается на расстоянии 20—30 диаметров. Этим свойством можно воспользоваться при подсчете тяги. Из опытов известно, что если плоскость b отстоит от среза сопла на расстоянии ab, большем одного диаметра среза (рис. 1.14), то поле давлений уже равномерно. Таким образом, несколько отойдя от среза сопла, мы попадаем в плоскость постоянного давления ($p_b = p_н$), в связи с чем можно определить реактивную тягу по формуле

$$P = G_в (w_b - w_н).$$

Остается только найти величину скорости w_b, которую имеет рабочая струя в плоскости b (рис. 1.14). Для этого при дозвуковом истечении можно воспользоваться уравнением Бернулли без учета гидравлических и тепловых потерь, ибо, как указывалось, участок струи, заключенный между плоскостями a и b, мал.

Рассмотрим в качестве примера случай не слишком большой дозвуковой скорости ($M \ll 1$). Тогда по уравнению Бернулли

$$p_a + \rho_a \frac{w_a^2}{2} = p_н + \rho_a \frac{w_b^2}{2}.$$

При такой скорости разность давлений $(p_a - p_н)$ бывает невелика, вследствие чего мы и приняли плотность газа неизменной.

Итак,

$$p_a - p_н = \rho_a \frac{w_b^2 - w_a^2}{2},$$

откуда

$$w_b = w_a \sqrt{\frac{p_a - p_н}{\rho_a \frac{w_a^2}{2}} + 1}.$$

В большинстве случаев при дозвуковой скорости на срезе сопла устанавливается давление, очень близкое к атмосферному, и тогда полагают $w_b = w_a$. При сверхзвуковом истечении между плоскостями a и b могут об-

разоваться скачки уплотнения. В этом случае расчет поправки несколько усложняется, но также вполне доступен.

Интересна одна особенность прямоточного воздушно-реактивного двигателя: если сохранять неизменной температуру в камере сгорания, то величина реактивной тяги (см. § 6, пример 4)

$$P = G\,(w_a - w_н) = G w_н \left(\sqrt{\frac{T_г^*}{T_х^*}} - 1 \right)$$

вначале возрастает с увеличением скорости полета, а затем, пройдя через максимум, начинает убывать и при некотором значении скорости падает до нуля. Объясняется это тем, что увеличение скорости полета вызывает рост температуры торможения в начале камеры $\left(T_х^*\right)$, но при этом для сохранения неизменной температуры торможения в конце камеры приходится уменьшать подвод тепла. В том случае, когда температура торможения в набегающем потоке становится равной предельно допустимой температуре в двигателе $\left(T_х = T_г^*\right)$, подвод тепла приходится прекратить. При этом величина тяги падает до нуля. Из формулы (42) получается следующее условие исчезновения тяги как для дозвукового, так и для сверхзвукового идеального двигателя:

$$\frac{T_н}{T_х^*} = \frac{T_н}{T_г^*} = 1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_н^2,$$

откуда приведенная скорость полета, при которой идеальный двигатель перестает развивать тягу, равна

$$\lambda_н = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}\left(1 - \frac{T_н}{T_г^*}\right)}.$$

Повышение давления в прямоточном воздушно-реактивном двигателе достигается за счет динамического сжатия воздуха перед входом в двигатель и в его диффузоре. Такой двигатель, как мы видели, эффективен только при очень большой скорости полета и вовсе не способен развивать тягу на месте. Для получения в воздушно-реактивном двигателе достаточной тяги на старте и при умеренной скорости полета приходится применять механическое сжатие

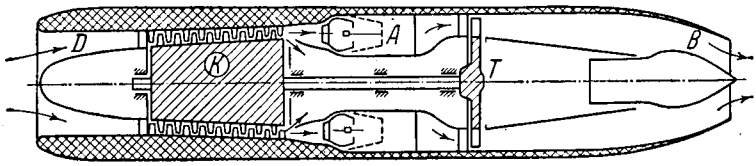


Рис. 1.15. Схема турбореактивного двигателя: D — диффузор, K — компрессор, T — газовая турбина, A — камера сгорания, B — выходное сопло.

воздуха. Воздушно-реактивный двигатель с механическим сжатием нашел широкое применение в современной авиации. Наиболее распространенным типом воздушно-реактивного двигателя с механическим сжатием является турбореактивный двигатель (рис. 1.15). В этом двигателе [1]) воздух засасывается

[1]) Подробное изложение теории турбореактивного двигателя см. в книге: «Теория воздушно-реактивных двигателей», под редакцией С. М. Шляхтенко, «Машиностроение», М., 1975.

компрессором. После сжатия в компрессоре воздух поступает в камеру сгорания, откуда смесь разогретого воздуха и продуктов горения направляется на лопатки турбины. Обычно в турбине используется только часть энергии газов (для получения механической работы, потребной на вращение компрессора). Остальная (свободная) часть энергии газов преобразуется в кинетическую энергию вытекающей струи.

В случае, если весь избыток давления, имеющийся в камере сгорания, используется на колесе турбины, двигатель перестает развивать реактивную силу, но при этом мощность турбины превосходит мощность, потребляемую компрессором; избыток мощности можно использовать, например, для вращения авиационного винта или динамомашины.

Работа, затрачиваемая на сжатие 1 кг газа в компрессоре, как показано в § 4, равна

$$L_к = \frac{k}{k-1}\frac{RT_д^*}{\eta_к^*}\left[\left(\frac{p_х^*}{p_д^*}\right)^{\frac{k-1}{k}} - 1\right].$$

Здесь $p_х^*$, $p_д^*$ — полные давления соответственно за и перед компрессором, $\eta_к^*$ — коэффициент полезного действия компрессора, $T_д^*$ — температура торможения перед компрессором.

Если пренебречь отводом тепла в диффузоре, то можно считать, что $T_д^* = T_н^*$. Условимся, как прежде, под степенью повышения давления в компрессоре понимать отношение значений полного давления газа за и перед компрессором:

$$\pi_к^* = \frac{p_х^*}{p_д^*}.$$

Под степенью уменьшения давления в турбине будем по-прежнему понимать отношение значений полного давления за и перед турбиной:

$$\pi_т^* = \frac{p_с^*}{p_г^*}.$$

Величина $\varepsilon_с^* = \pi_к^* \cdot \pi_т^*$ характеризует избыток давления в сопле.

Работа, производимая 1 кг газа в турбине, равна

$$L_т = \frac{k}{k-1} RT_с^* \eta_т^* \left[\left(\frac{p_г^*}{p_с^*}\right)^{\frac{k-1}{k}} - 1\right];$$

здесь $T_с^*$ — температура торможения за турбиной, $\eta_т^*$ — коэффициент полезного действия турбины.

В турбореактивном двигателе работа турбины используется практически целиком на привод компрессора: $L_т \approx L_к$. Если пренебречь небольшими изменениями газовой постоянной и показателя адиабаты, то будем иметь

$$T_д^*\left(\pi_к^{*\frac{k-1}{k}} - 1\right) = T_с^*\left(\frac{1}{\pi_т^{*\frac{k-1}{k}}} - 1\right)\eta_т^*\eta_к^*,$$

откуда

$$\frac{\pi_{к}^{*\frac{k-1}{k}}-1}{\left(\frac{1}{\pi_{т}^{*}}\right)^{\frac{k-1}{k}}-1}=\frac{T_{с}^{*}}{T_{д}^{*}}\eta_{т}^{*}\eta_{к}^{*}.$$

Обычно температура заторможенного газа в выходном сопле значительно выше температуры заторможенного газа в диффузоре $\left(T_{с}^{*}>T_{д}^{*}\right)$. Тогда из равенства работ компрессора и турбины вытекает, что степень увеличения давления воздуха в компрессоре выше степени уменьшения давления в турбине $\left(\pi_{к}^{*}>1/\pi_{т}^{*}\right)$, т. е. имеется избыточное давление в реактивном сопле двигателя. Это необходимо для того, чтобы скорость истечения из сопла w_a и соответственно реактивная тяга были достаточно велики (как на старте, так и в полете). Турбореактивный двигатель развивает обычно значительную стартовую тягу.

Существенной особенностью этого типа двигателя является также его нечувствительность к изменению плотности воздуха. Плотность воздуха, поступающего в двигатель, заметно повышается с увеличением скорости полета, благодаря чему растет массовый расход воздуха в компрессоре [1]). Мощность, потребляемая компрессором, изменяется пропорционально массовому расходу; однако последний возрастает одновременно и в турбине. Следовательно, мощность турбины увеличивается пропорционально мощности компрессора, т. е. баланс мощности сохраняется.

Суммарная работа газа в двигателе складывается из работ расширения в турбине и в сопле [2]):

$$\sum L=L_{т}+L_{св} \quad \text{или} \quad \sum L=L_{к}+L_{св}.$$

Таким образом, как уже отмечалось, после использования некоторой доли энергии в турбинном колесе остальная ее часть (свободная) может быть использована в выходном сопле.

Доля работы компрессора $\left(L_{к}/\sum L\right)$ обычно значительно больше половины, следовательно, на образование свободной мощности в турбореактивном двигателе тратится относительно малая часть располагаемой энергии.

Тяга турбореактивного двигателя определяется скоростью истечения из сопла

$$w_a=\lambda_a a_{кр.\,с},$$

где

$$\lambda_a=f_1\left(\frac{p_{с}^{*}}{p_{н}}\right), \quad a_{кр.\,с}=f_2\left(T_{с}^{*}\right).$$

Если давление за турбиной выше, чем перед компрессором, то приведенная скорость истечения при одинаковых условиях полета у турбореактивного двигателя выше, чем у прямоточного воздушно-реактивного двигателя. Но в последнем возможны более высокие температуры. Поэтому прямоточный воздушно-реактивный двигатель может развивать большие удельные тяги даже

---

[1]) Компрессор является «объемной» машиной, в которой с изменением плотности газа меняется массовый расход, а объемный расход остается постоянным.

[2]) Как показано выше, в турбореактивном двигателе всегда выполняется равенство $L_{т}=L_{к}$.

при меньших давлениях в реактивном сопле. Однако для увеличения тяги в турбореактивном двигателе можно поместить за турбиной вторую камеру сгорания (так называемую форсажную камеру), в которой газ может дополнительно нагреваться до такой же температуры, как и в прямоточном воздушно-реактивном двигателе. В этом случае тяга турбореактивного двигателя существенно возрастает.

Если пренебречь потерями давления во второй камере сгорания, то приведенная скорость истечения (λ_a) сохранит то же значение, что и без форсажной камеры, а величина скорости возрастет пропорционально корню квадратному из температуры.

§ 9. О месте приложения реактивной силы

Выясним вопрос о том, в каком месте двигателя приложена реактивная сила.

Рассмотрим сначала простейший случай — идеальный прямоточный воздушно-реактивный двигатель (рис. 1.16). Пусть скорость во входном отверстии равна скорости полета ($w_e = w_н$); тогда давление во входном отверстии равно атмосферному ($p_e = p_н$); кроме того, предположим, что двигатель работает на расчетном режиме, т. е. давление в выходном отверстии также равно атмосферному ($p_a = p_н$). При малой скорости движения газа в камере сгорания давление в последней можно считать постоянным ($p_x = p_г$).

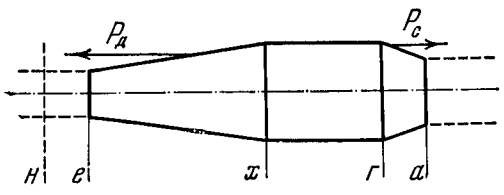


Рис. 1.16. Схема прямоточного воздушно-реактивного двигателя (к определению сил, действующих на двигатель).

В описанном идеальном двигателе перепады давлений в диффузоре и сопле одинаковы:

$$p_x - p_e = p_г - p_a.$$

Однако ввиду того, что в сопле воздух имеет более высокую температуру, чем в диффузоре, площадь выходного отверстия двигателя должна быть больше площади входного отверстия. В самом деле, в идеальном двигателе скоростной напор в выходном отверстии равен скоростному напору набегающего потока, т. е. в рассматриваемом случае скоростному напору во входном отверстии

$$\rho_н w_н^2 = \rho_a w_a^2.$$

Тогда из уравнения неразрывности (с учетом этого равенства) получаем

$$\frac{F_a}{F_e} = \frac{\rho_н w_н}{\rho_a w_a} = \frac{\rho_н w_н^2}{\rho_a w_a^2}\,\frac{w_a}{w_н} = \frac{w_a}{w_н} = \sqrt{\frac{\rho_н}{\rho_a}}.$$

Следовательно, при подводе тепла в камере сгорания ($\rho_н > \rho_a$) имеем

$$\frac{F_a}{F_e} > 1.$$

Итак, среднее давление, действующее на стенки диффузора и сопла, одно и то же, а проекция стенки диффузора на плоскость, перпендикулярную к оси двигателя, больше соответствующей проекции стенки сопла. Вследствие изложенного сила давления изнутри на диффузор ($P_д$) больше, чем на сопло ($P_с$); направления этих сил, как явствует из рис. 1.16, противоположны.

Если внешние очертания двигателя являются очень плавными, то давление воздуха на внешнюю поверхность двигателя весьма близко к атмосферному, т. е. силой давления на внешнюю поверхность можно пренебречь. В рассматриваемом идеальном случае реактивная сила, действующая на двигатель, сводится к разности сил, приложенных соответственно к диффузору и соплу:

$$P = P_д - P_с.$$

Для расшифровки этого равенства воспользуемся результатом, полученным в § 5 (пример 3), согласно которому величины сил, действующих на диффузор и сопло, соответственно равны

$$P_д = \frac{\rho_н w_н^2}{2} F_х \left(1 - \frac{F_e}{F_х}\right)^2,$$

$$P_с = \frac{\rho_a w_a^2}{2} F_г \left(1 - \frac{F_a}{F_г}\right)^2.$$

Согласно принятым выше условиям

$$F_х = F_г; \quad \rho_a w_a^2 = \rho_н w_н^2.$$

Тогда

$$P = P_д - P_с = \frac{\rho_н w_н^2}{2} F_х \left[\left(1 - \frac{F_e}{F_х}\right)^2 - \left(1 - \frac{F_a}{F_х}\right)^2\right],$$

или

$$P = \frac{\rho_н w_н^2}{2}\left[2 - \frac{F_e + F_a}{F_х}\right](F_a - F_e).$$

Рассмотрим двигатель с малыми скоростями в камере сгорания, т. е. с площадью камеры, существенно большей, чем площади входного и выходного отверстий:

$$\frac{F_e}{F_х} \ll 1, \quad \frac{F_a}{F_х} \ll 1.$$

В этом случае мы приходим к следующей простой формуле для реактивной силы, определенной в результате вычитания силы,

приложенной к соплу, из силы, приложенной к диффузору:

$$P = \rho_н w_н^2 (F_a - F_н).$$

Тот же результат можно получить непосредственно из формулы для реактивной силы

$$P = G(w_a - w_н) = \rho_н w_н^2 F_н \left(\frac{w_a}{w_н} - 1\right)$$

или, учитывая выведенное выше условие $\frac{w_a}{w_н} = \frac{F_a}{F_н}$,

$$P = \rho_н w_н^2 (F_a - F_н).$$

Итак, тяга получается за счет того, что сила давления на диффузор больше, чем на сопло. Это является следствием подогрева газа, в связи с которым площадь выходного отверстия приходится делать больше площади поперечного сечения набегающей струи.

В реальном двигателе, как указывалось выше, значения скорости и давления во входном отверстии обычно отличаются от таковых в невозмущенном набегающем потоке, что затрудняет определение реактивной силы, непосредственно по разности усилий, приложенных к диффузору и соплу; кроме того, в действительности, сила, действующая на внешнюю поверхность двигателя, обычно не равна нулю. Однако в любом случае можно доказать, что в прямоточном воздушно-реактивном двигателе реактивная сила является результирующей сил давления, приложенных к стенкам внутреннего и наружного обводов двигателя.

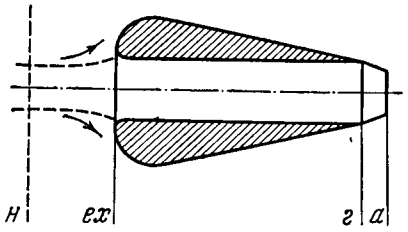


Рис. 1.17. Прямоточный воздушно-реактивный двигатель без входного диффузора.

Остановимся теперь на том, как влияет на тягу величина площади входного отверстия двигателя. Из приведенного в § 8 вывода формулы для реактивной силы следует, что скорость воздуха при входе в двигатель не сказывается на величине реактивной силы; играют роль только скорость истечения из двигателя и скорость невозмущенного набегающего потока.

Это обстоятельство имеет следующее объяснение. Если скорость входа воздуха в двигатель меньше скорости набегающего потока ($w_e < w_н$), то перед диффузором происходит торможение набегающего потока (рис. 1.17), причем струйки притекают к передней кромке диффузора под большим углом атаки. Это

приводит к тому, что вблизи входного отверстия на внутренней стенке диффузора появляется область повышенного статического давления (близкого по величине к полному давлению набегающего потока), а на наружной поверхности диффузора — разрежение; чем больше входное отверстие диффузора, тем выше давление на его внутреннюю поверхность и тем больше разрежение на его наружной поверхности (углы атаки струек воздуха возрастают). Иначе говоря, при значительном торможении воздуха перед диффузором передняя стенка последнего ведет себя, как крыло при больших углах атаки [1]).

Указанная дополнительная сила, вызванная в данном случае ($w_e < w_н$) разностью давлений на передней стенке диффузора, в точности компенсирует уменьшение силы тяги, которое должно было бы получиться за счет сокращения поверхности диффузора по сравнению со случаем $w_e = w_н$. Заметим, что на таких режимах значительная часть силы тяги приходится на долю *разрежения*, возникающего на внешней поверхности диффузора. Если полностью *раскрыть* диффузор, т. е. сделать площадь входа равной площади камеры сгорания (рис. 1.17), то тяга будет вызываться только разрежением на внешней поверхности диффузора (проекция на ось двигателя сил давления, приложенных к внутренним стенкам камеры и диффузора, в этом случае равна нулю).

Если скорость входа воздуха в двигатель больше скорости полета ($w_e > w_н$), то перед диффузором поток ускоряется, при этом струйки притекают к передней кромке диффузора под отрицательными углами; в этом случае вблизи входного отверстия на наружной поверхности диффузора возникает повышенное давление, а на внутренней — разрежение. Такая разность давлений дает дополнительную силу, которая направлена в сторону, противоположную действию реактивной силы; эта дополнительная сила компенсирует то увеличение реактивной силы, которое в случае $w_e > w_н$ можно было бы ожидать за счет увеличения поверхности диффузора (по сравнению со случаем $w_e = w_н$). Итак, скорость входа воздуха в двигатель не должна учитываться непосредственно в формуле реактивной силы; однако косвенно на величине тяги она сказывается, так как влияет на сопротивление диффузора, при росте которого падает скорость истечения из двигателя. Так, при $w_e < w_н$ появляется дополнительное внешнее лобовое сопротивление, а при $w_e > w_н$ — дополнительные гидравлические потери внутри диффузора.

Прямоточный воздушно-реактивный двигатель, имеющий форму тонкостенной трубы (рис. 1.18), вовсе не развивает тяги;

---

[1]) Приводимые здесь рассуждения вполне справедливы лишь при $M_н < 1$. Более подробно обтекание крыла рассмотрено в гл. X.

цилиндрическая форма двигателя приводит к тому, что слагающая силы давления на стенки, параллельная оси двигателя, равна нулю. Существо дела заключается в том, что за счет срыва обтекающего трубу потока с передней ее кромки возникает внешнее вихревое сопротивление, которое полностью уравновешивает реактивную тягу; эпюра скорости в следе за *трубой*

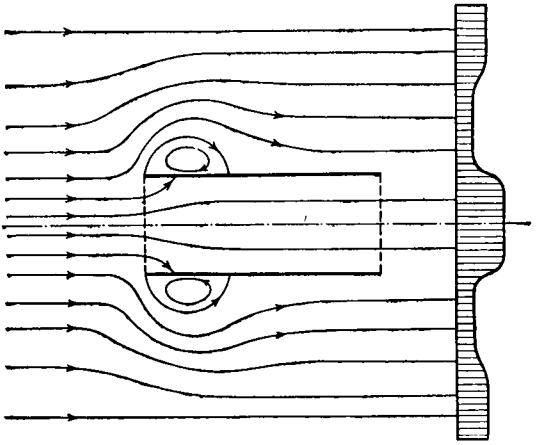


Рис. 1.18. Схема обтекания прямоточного воздушно-реактивного двигателя имеющего форму тонкостенной трубы.

в области внешнего потока имеет провалы, вызванные вихревым сопротивлением, которые компенсируют прирост скорости внутри двигателя; иначе говоря, суммарное количество движения в потоке за двигателем получается такое же, как и перед ним.

В заключение отметим, что в турбореактивном двигателе реактивная сила состоит не только из результирующей сил давления, действующей непосредственно на стенки двигателя, но также из силы, приложенной к турбокомпрессорному устройству; эта дополнительная сила приложенная к ротору, воспринимается подпятником и передается через опоры на корпус двигателя.

Выведенные выше формулы (105)—(109) дают возможность определить реактивную силу двигателя без учета внешнего сопротивления, которое он создает при установке на летательном аппарате.

Полезная часть реактивной силы, равная разности между реактивной силой и суммарным внешним сопротивлением двигательной установки, называется *эффективной тягой*:

$$P_{\text{эфф}} = P - \sum X_{\text{нар}}. \qquad (110)$$

В некоторых случаях максимальная величина эффективной тяги достигается в таких условиях, когда реактивная сила меньше максимально возможной, т. е. может оказаться выгодным допустить некоторое уменьшение реактивной силы, если при этом выигрыш в лобовом сопротивлении перекрывает проигрыш в реактивной силе.

При детальном изучении внешнего сопротивления двигателя последнее обычно разбивают на несколько составных частей (по элементам двигателя):

$$\sum X_{\text{нар}} = X_{\text{д}} + X_{\text{г}} + X_{\text{с}}, \tag{111}$$

где $X_{\text{д}}$ — внешнее сопротивление входного участка — диффузора, $X_{\text{г}}$ — внешнее сопротивление мотогондолы, в которую встроен двигатель (главную часть этого слагаемого обычно составляет сила трения на наружной поверхности двигателя); $X_{\text{с}}$ — внешнее сопротивление выходного (реактивного) сопла. Слагаемые внешнего сопротивления двигателя ($X_{\text{д}}$, $X_{\text{с}}$) рассматриваются в гл. VIII, посвященной газовой динамике элементов двигателя.

Реактивная сила двигателя, определяемая формулой (105), может рассматриваться как разность между выходным импульсом струи газов, рассчитанным по избыточному давлению на срезе сопла:

$$I_{\text{с}} = (G_{\text{в}} + G_{\text{г}})\, w_a + (p_a - p_{\text{н}})\, F_a, \tag{112}$$

и входным импульсом струи набегающего невозмущенного потока воздуха, засасываемого в двигатель:

$$I_{\text{вх}} = G_{\text{в}} w_{\text{н}}. \tag{113}$$

В случае ЖРД или ракетного двигателя твердого топлива расход воздуха $G_{\text{в}}$ в (112) заменяется расходом окислителя ($G_{\text{о}}$), как это сделано в формуле (109). Полный импульс сопла, получаемый при полном расширении газа в сопле ($p_a = p_{\text{н}}$):

$$I_{\text{с}} = G w_a. \tag{114}$$

Здесь и в дальнейшем G — это суммарный расход газов в выходном отверстии сопла ($G = G_{\text{в}} + G_{\text{г}}$ или $G = G_{\text{о}} + G_{\text{г}}$). Выходное устройство двигателя, включающее сопло, обладает внешним сопротивлением, в связи с чем вводится новое понятие — *эффективный импульс сопла*:

$$I_{\text{эфф}} = I_{\text{с}} - X_{\text{с}}. \tag{115}$$

Отношение действительного импульса сопла к его импульсу при идеальном истечении (без потерь) называется *относительным импульсом сопла*:

$$\bar{I} = \frac{I_{\text{с}}}{I_{\text{ид}}}. \tag{116}$$

Тогда относительный эффективный импульс

$$\bar{I}_{эфф} = \frac{I_{эфф}}{I_{ид}} = \bar{I} - \frac{X_с}{I_{ид}}. \tag{117}$$

Выражение для тяги двигателя при отсутствии потерь внутри сопла

$$P_{ид} = I_{ид} - I_{вх} \tag{118}$$

может быть использовано с помощью (112), (113) и (117) для представления эффективной тяги в зависимости от относительного эффективного импульса:

$$P_{эфф} = \bar{I}_{эфф} P_{ид} - (1 - \bar{I}_{эфф}) G_в w_н - (X_д + X_г). \tag{119}$$

Последний член правой части представляет собой сумму внешних сопротивлений диффузора и моногондолы:

$$X_д + X_г = \sum X_{нар} - X_с,$$

т. е. полное внешнее сопротивление двигательной установки за вычетом внешнего сопротивления сопловой ее части.

В ракетном двигателе второй член правой части (119) равен нулю, так как воздух в него не засасывается ($G_в = 0$).

Оценку внутренней тяги двигателя (без учета внешнего сопротивления) производят с помощью относительного импульса (116)

$$P = \bar{I} P_{ид} - (1 - \bar{I}) G_в w_н$$

или

$$P = (1 - \Delta\bar{I}) P_{ид} - \Delta\bar{I} G_в w_н. \tag{120}$$

Величина

$$\Delta\bar{I} = 1 - \bar{I} \tag{121}$$

называется *потерянным относительным импульсом сопла.* Влияние потерь в элементах двигателя на величину развиваемой им тяги рассматривается подробно в гл. VIII.

Глава II

ЭЛЕМЕНТЫ ГИДРОДИНАМИКИ

§ 1. Движение жидкой частицы

Рассмотрим движение бесконечно малой жидкой частицы, имеющей первоначальную форму параллелепипеда (рис. 2.1). В отличие от твердого тела жидкая частица при своем движении может сильно деформироваться.

Грани бесконечно малой частицы жидкости, имеющей в начале движения форму прямого параллелепипеда с ребрами dx, dy, dz, с течением времени могут скашиваться и растягиваться (рис. 2.2 и 2.3).

Пусть составляющие скорости движения частицы в точке a (рис. 2.1) суть u, v, w; тогда составляющие скорости в точке b равны

$$u + \frac{\partial u}{\partial y} dy, \quad v + \frac{\partial v}{\partial y} dy,$$
$$w + \frac{\partial w}{\partial y} dy,$$

в точке d

$$u + \frac{\partial u}{\partial x} dx, \quad v + \frac{\partial v}{\partial x} dx,$$
$$w + \frac{\partial w}{\partial x} dx$$

и в точке e

$$u + \frac{\partial u}{\partial z} dz, \quad v + \frac{\partial v}{\partial z} dz,$$
$$w + \frac{\partial w}{\partial z} dz.$$

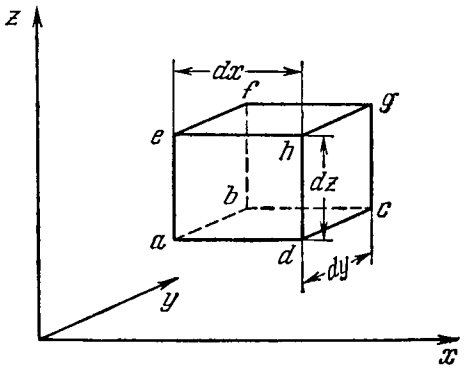


Рис. 2.1. Элементарный параллелепипед в потоке жидкости.

Скашивание ребра ab частицы за бесконечно малое время dt, которое вызывается разностью компонентов скорости в точках a и b (рис. 2.2), характеризуется смещением точки b, равным

$$bb' = \frac{\partial u}{\partial y} dy\, dt.$$

Относительное смещение или угловая деформация

$$\frac{bb'}{ab} = \frac{\partial u}{\partial y} dt.$$

Скашивание ребра ad приводит к угловой деформации

$$\frac{dd'}{ad} = \frac{\partial v}{\partial x}\,dt.$$

Ввиду того что угловые деформации за время dt незначительны, угол наклона грани можно считать равным тангенсу этого угла.

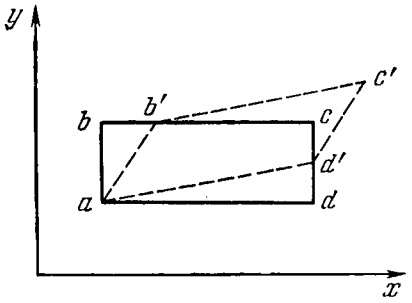


Рис. 2.2. Угловая деформация граней.

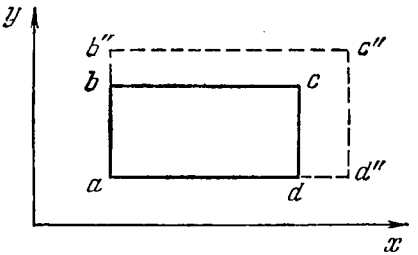


Рис. 2.3. Линейная деформация граней.

Полное скашивание первоначально прямого угла в точке a в этом случае равно

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) dt,$$

а скорость соответствующей угловой деформации

$$\gamma_z = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \tag{1а}$$

Индекс z указывает на то, что рассматривается деформация частицы в плоскости xy, перпендикулярной к оси z; в остальных двух плоскостях скорости скашивания координатных углов равны, очевидно,

$$\gamma_x = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \tag{1б}$$

$$\gamma_y = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}. \tag{1в}$$

Используя те же угловые смещения граней частицы, можно определить угловые скорости ее вращения. Поскольку направления вращения ребер ab и ad противоположны, средняя угловая скорость вращения частицы в целом около оси z составляет

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right). \tag{2а}$$

Для остальных двух осей вращения имеем соответственно

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right), \quad \omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right). \tag{2б}$$

Вектор угловой скорости вращения ω, составляющие которого суть ω_x, ω_y и ω_z, носит название *завихренности*, или *вихря скорости*, его величина определяется, очевидно, следующим равенством:

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}. \tag{2в}$$

Остановимся теперь на линейных деформациях частицы. Скорости движения точек a и d (рис. 2.3) в направлении оси x отличаются на величину

$$\left(u + \frac{\partial u}{\partial x}\,dx\right) - u = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx. \tag{3}$$

В связи с этим частица удлиняется за время dt на величину

$$dd'' = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx\,dt.$$

Относительное удлинение частицы

$$\frac{dd''}{ad} = \frac{\partial u}{\partial x}\,dt,$$

а скорость относительного удлинения частицы в направлении оси x равна

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}. \tag{4а}$$

По аналогии, скорости относительного удлинения по другим осям

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}. \tag{4б}$$

Удлинение сторон параллелепипеда, изображающего жидкую частицу (рис. 2.1), в общем случае ведет к изменению ее объема; умножая разность скоростей поступательного движения противоположных граней параллелепипеда, определенную по формуле (3), на площадь каждой из этих граней, получим скорость изменения его объема за счет линейной деформации в направлении оси абсцисс; составляя подобные выражения для скоростей изменений объема по остальным двум координатным осям и суммируя все три величины, найдем полную скорость изменения объема жидкой частицы:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx\,dy\,dz + \frac{\partial v}{\partial y}\,dy\,dz\,dx + \frac{dw}{dz}\,dz\,dx\,dy =$$

$$= (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)\,dx\,dy\,dz.$$

После деления этого выражения на первоначальный объем жидкой частицы $V = dx\,dy\,dz$, приходим к важной в газовой

динамике величине скорости относительного изменения объема жидкой частицы:

$$e = \frac{1}{V}\frac{dV}{dt} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z. \tag{5}$$

На основании (4) имеем окончательно

$$e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}. \tag{6}$$

§ 2. Уравнение неразрывности

Выражение, стоящее в правой части равенства (6), называется в теории поля *дивергенцией* (или *расхождением*) вектора скорости и обозначается так:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{W} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = e, \tag{7}$$

где $\boldsymbol{W}$ — вектор скорости.

В сплошной несжимаемой среде объем частицы не изменяется, следовательно, равенство

$$\operatorname{div} \boldsymbol{W} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{8}$$

представляет собой уравнение неразрывности жидкости.

Условие постоянства массы жидкой частицы может быть записано в следующем виде:

$$G = \rho V = \text{const}. \tag{9}$$

Здесь под плотностью жидкости ρ понимается предел отношения массы частицы к ее объему

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta G}{\Delta V} = \frac{dG}{dV}, \tag{10}$$

причем предполагается, что, стремясь к нулю, объем ΔV стягивается к некоторой внутренней точке.

Продифференцировав по времени обе части равенства (9) и поделив результат на величину G, получим

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{V}\frac{dV}{dt} = 0. \tag{11а}$$

Отсюда на основании (5) приходим к уравнению неразрывности для сжимаемой сплошной среды

$$\operatorname{div} \boldsymbol{W} = -\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}. \tag{11б}$$

Заменяя полную производную плотности жидкости по времени частными производными и используя (7), получаем

$$-\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=\frac{\partial \rho}{\partial t}+u\frac{\partial \rho}{\partial x}+v\frac{\partial \rho}{\partial y}+w\frac{\partial \rho}{\partial z}.$$

В соответствии с правилом дифференцирования произведений это уравнение неразрывности для сжимаемой среды (газа) приводится к виду

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial \rho u}{\partial x}+\frac{\partial \rho v}{\partial y}+\frac{\partial \rho w}{\partial z}=0. \tag{12а}$$

Сумма последних трех членов представляет собой дивергенцию вектора плотности тока $\rho \boldsymbol{W}$, поэтому уравнение неразрывности для газа можно записать также в форме

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho \boldsymbol{W})=0. \tag{12б}$$

При выводе дифференциального уравнения неразрывности рассматривалось движение отдельной жидкой частицы; такой метод исследования ввел в гидродинамику Лагранж. В другом методе исследования, развитом впервые Эйлером, рассматривается не поведение отдельных частиц, а изменение по времени параметров жидкости в фиксированных точках пространства; метод Эйлера во многих случаях удобнее метода Лагранжа — и в гидродинамике, и в газовой динамике им пользуются чаще.

§ 3. О силах, действующих в жидкости

Выделим некоторый объем жидкости (рис. 2.4) и рассмотрим его изолированно от окружающей жидкой среды.

Силы, действующие на заданный объем жидкости, могут быть двоякого рода: объемные и поверхностные. Объемные силы приложены ко всем материальным частицам, составляющим объем. К объемным силам относятся: сила тяжести, силы магнитные и электрические. Поверхностные силы распределены по поверхности выделенного объема. Они возникают в результате воздействия окружающей среды на данный объем.

Поверхностные силы, в зависимости от того как они направлены по отношению к данному элементу поверхности, подразделяются на нормальные и тангенциальные.

Для того чтобы характеризовать изменение от точки к точке объемной силы ΔP или поверхностной силы ΔF, вводят понятие о напряжении, подразумевая под ним предел отношения силы к объему ΔV (или соответственно к поверхности ΔS), который достигается при стягивании объема (или поверхности) к некоторой внутренней точке.

Итак, напряжение объемной силы в данной точке среды есть

$$R = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta V} = \frac{dP}{dV},$$

поверхностное напряжение

$$f = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta S} = \frac{dF}{dS}.$$

Силы нормальные действуют как в покоящейся, так и в движущейся жидкости; силы касательные возникают только при движении жидкости, да и то лишь в том случае, когда жидкие частицы деформируются.

Для большинства жидкостей, как показывает опыт, справедлива гипотеза Ньютона, согласно которой напряжения пропорциональны с к о р о с т я м деформаций. Коэффициент пропорциональности, зависящий от рода жидкости и ее состояния, носит название *коэффициента динамической вязкости* или попросту вязкости.

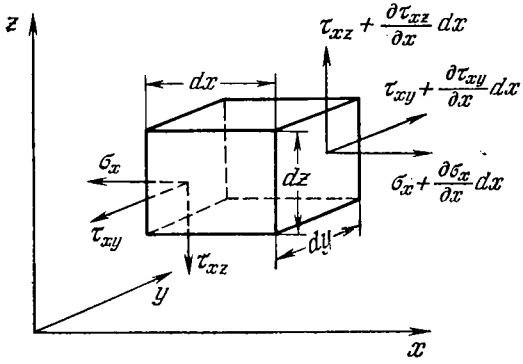


Рис. 2.4. Схема сил, действующих на две грани элементарного параллелепипеда.

Составим уравнения движения вязкой сжимаемой жидкости для элементарного параллелепипеда со сторонами dx, dy, dz.

Обозначим компоненты объемного напряжения R через X, Y, Z, компоненты нормального напряжения σ, приложенные к граням параллелепипеда и параллельные соответствующим координатным осям, — σ_x, σ_y, σ_z, компоненты тангенциальных напряжений, лежащие в плоскости каждой грани, — буквой τ с двумя индексами (первый указывает ось, перпендикулярную данной грани, а второй — ось, параллельную направлению напряжения, например τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yz}). Заметим, без доказательства, что из условия равновесия параллелепипеда следует равенство моментов сил относительно произвольной оси и равенство касательных напряжений с одинаковыми, но расположенными в обратном порядке индексами:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}. \tag{13а}$$

По закону Ньютона произведение массы параллелепипеда на его ускорение равно равнодействующей всех сил, приложенных к параллелепипеду.

Составим соответствующее уравнение для проекций ускорения и равнодействующей силы на ось x. Нормальные напряжения, приложенные к торцовым граням, дают составляющую силы:

$$\left[\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\,dx\right) - \sigma_x\right] dy\,dz = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\,dx\,dy\,dz.$$

Составляющие силы от тангенциальных напряжений, действующих на боковые и верхние грани:

$$\left[\left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\,dy\right) - \tau_{yx}\right] dz\,dx = \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\,dx\,dy\,dz$$

и

$$\left[\left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\,dz\right) - \tau_{zx}\right] dy\,dx = \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\,dx\,dy\,dz.$$

Если компоненты вектора скорости по осям x, y, z обозначить через u, v, w и учесть, что масса частицы $dG = \rho\,dx\,dy\,dz$, то уравнение движения вдоль оси x для единицы объема жидкости примет вид

$$\rho \frac{du}{dt} = X + \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right). \qquad (13б)$$

Полную производную скорости в уравнении (13б) можно выразить через частные производные:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}. \qquad (13в)$$

Тогда уравнение движения вдоль оси x можно представить в виде

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + \rho w \frac{\partial u}{\partial z} = X + \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right). \qquad (14а)$$

Таким же образом можно вывести уравнения движения в направлении осей y и z:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} + \rho w \frac{\partial v}{\partial z} = Y + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right), \qquad (14б)$$

$$\rho \frac{\partial w}{\partial t} + \rho u \frac{\partial w}{\partial x} + \rho v \frac{\partial w}{\partial y} + \rho w \frac{\partial w}{\partial z} = Z + \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}\right). \qquad (14в)$$

Среднее арифметическое трех нормальных напряжений

$$\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \qquad (15а)$$

не изменяется при преобразовании координат и для невязкой жидкости равно давлению, взятому с обратным знаком.

Для дальнейшего удобно выделить из нормальных напряжений так называемые дополнительные напряжения, определяемые из условий

$$\left.\begin{aligned} \sigma'_x &= \sigma_x - \sigma, \\ \sigma'_y &= \sigma_y - \sigma, \\ \sigma'_z &= \sigma_z - \sigma. \end{aligned}\right\} \tag{15б}$$

Используя эти соотношения, систему дифференциальных уравнений движения можно представить в виде

$$\left.\begin{aligned} \rho\frac{du}{dt} &= X + \frac{\partial\sigma}{\partial x} + \left(\frac{\partial\sigma'_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\right), \\ \rho\frac{dv}{dt} &= Y + \frac{\partial\sigma}{\partial y} + \left(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma'_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}\right), \\ \rho\frac{dw}{dt} &= Z + \frac{\partial\sigma}{\partial z} + \left(\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma'_z}{\partial z}\right). \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Разумеется, в каждом из этих уравнений можно в соответствии с (13в) в левой части полную производную составляющей скорости заменить частными ее производными, а касательные напряжения с одинаковыми, но переставленными индексами согласно (13а) считать равными.

§ 4. Связь между напряжениями и деформациями

Связь между напряжениями, действующими на параллелепипед (рис. 2.4), и скоростями деформации последнего, как уже указывалось, устанавливается законом трения Ньютона.

Касательные напряжения вызывают деформации сдвига (угловые деформации), определение которых было дано в § 1 этой главы. Так как согласно гипотезе Ньютона в жидкости напряжения пропорциональны скоростям деформаций, то в соответствии с (1) имеем

$$\tau_{xy} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = \mu\gamma_z, \tag{17а}$$

где, как уже указывалось, коэффициент пропорциональности μ есть коэффициент динамической вязкости, зависящий от рода жидкости и ее состояния (температуры, давления).

Касательные напряжения в двух других координатных плоскостях суть соответственно

$$\tau_{yz} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) = \mu\gamma_x, \tag{17б}$$

$$\tau_{zx} = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) = \mu\gamma_y. \tag{17в}$$

Сложнее обстоит дело с нормальными напряжениями.

Распространяя гипотезу Ньютона о пропорциональности напряжений скоростям деформаций на нормальные напряжения и деформации растяжения (сжатия), следует иметь в виду, что растяжение жидкой частицы сопровождается ее поперечным сжатием, т. е. объемной деформацией; иначе говоря, деформация в направлении любой оси вызывается напряжениями, как параллельными этой оси, так и перпендикулярными к ней.

Подробный анализ полей напряжений и деформаций, выполненный двумя разными методами в гидродинамике и в кинетической теории газов [1]), позволил установить связь между нормальными и касательными напряжениями, из которой следует, что добавочное нормальное напряжение равно

$$\sigma'_x = \sigma_x - \sigma = 2\mu\left(\varepsilon_x - \frac{1}{3}e\right), \tag{18}$$

где ε_x, e — относительные линейная и объемная деформации, определяемые соответственно из (4) и (6).

Кроме того, в гидродинамике вязкой сжимаемой жидкости принимается второе обобщение гипотезы Ньютона, согласно которому среднее нормальное напряжение равно сумме двух членов: первый член есть давление, взятое с отрицательным знаком, которое не зависит от скорости объемной деформации, а второй член пропорционален последней:

$$\sigma = -p + \eta e; \tag{19}$$

здесь η — коэффициент, который можно назвать второй вязкостью. Знак минус при давлении учитывает, что оно всегда направлено внутрь выделенного объема жидкости; значение σ принято считать положительным, если оно направлено наружу.

Итак, согласно (18) и (19), составляющие нормального напряжения выражаются следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= -p + 2\mu\varepsilon_x + \left(\eta - \frac{2}{3}\mu\right)e, \\ \sigma_y &= -p + 2\mu\varepsilon_y + \left(\eta - \frac{2}{3}\mu\right)e, \\ \sigma_z &= -p + 2\mu\varepsilon_z + \left(\eta - \frac{2}{3}\mu\right)e. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

В несжимаемой жидкости $e = 0$, откуда $\sigma = -p$,

$$\sigma_x = -p + 2\mu\varepsilon_x, \quad \sigma_y = -p + 2\mu\varepsilon_y, \quad \sigma_z = -p + 2\mu\varepsilon_z. \tag{21}$$

---

[1]) Паттерсон Г. Н., Молекулярное течение газов, Физматгиз, М., 1960; Лойцянский Л. Г., Механика жидкости и газа, «Наука», М., 1973.

В кинетической теории газов доказывается, что для одноатомного совершенного газа отношение η/μ должно иметь порядок квадрата отношения объема, занятого молекулами, к объему газа, т. е. является весьма малой величиной, что дает право пренебречь второй вязкостью.

Мы будем считать это справедливым для всех газов, хотя строгого обоснования такого предположения для многоатомных газов не существует. Для весьма плотного газа (при очень высоком давлении), двухфазного (газо-жидкостного) течения и в других особых случаях допущение $\eta \approx 0$ заведомо несправедливо. Следует заметить, что часто второй вязкостью называют величину $\lambda = \eta - \frac{2}{3}\mu$, которая никогда не может быть принята равной нулю, но выпадает из уравнения движения при $\operatorname{div} \boldsymbol{W} = 0$, так как является множителем при последней.

В дальнейшем мы положим $\eta = 0$, т. е. будем рассматривать газ без второй вязкости, тогда нормальные напряжения определяются следующими выражениями:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= -p + 2\mu\varepsilon_x - \frac{2}{3}\mu e, \\ \sigma_y &= -p + 2\mu\varepsilon_y - \frac{2}{3}\mu e. \\ \sigma_z &= -p + 2\mu\varepsilon_z - \frac{2}{3}\mu e. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Из (18) следует, что добавочные нормальные напряжения возникают только в вязких жидкостях, когда $\mu \neq 0$.

Подставляя в (18) значения ε_x и e из (4) и (6), получим

$$\sigma'_x = 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right), \tag{23а}$$

и соответственно для осей y и z

$$\left.\begin{aligned} \sigma'_y &= 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right), \\ \sigma'_z &= 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right). \end{aligned}\right\} \tag{23б}$$

Для несжимаемой жидкости

$$\left.\begin{aligned} \sigma'_x &= 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} = 2\mu\varepsilon_x, \\ \sigma'_y &= 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} = 2\mu\varepsilon_y, \\ \sigma'_z &= 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} = 2\mu\varepsilon_z. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

В несжимаемой жидкости добавочные нормальные напряжения связаны со скоростями линейной деформации точно такими же соотношениями, как касательные напряжения со скоростями угловых деформаций.

В этом нетрудно убедиться, сравнивая равенства (24) и (17).

§ 5. Уравнения Навье — Стокса

Пользуясь формулами (6), (17), (19) и (23), можно в дифференциальных уравнениях (14), с учетом $\eta = 0$, т. е. $\sigma = -p$, заменить напряжения скоростями деформаций. При этом мы получим так называемые дифференциальные уравнения движения вязкой жидкости Навье — Стокса.

Например, для движения параллельно оси x

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} + \rho u\frac{\partial u}{\partial x} + \rho v\frac{\partial u}{\partial y} + \rho w\frac{\partial u}{\partial z} =$$
$$= X - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left[2\mu\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right] +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right].$$

После несложных преобразований в случае неизменного значения вязкости во всей области течения ($\mu = \text{const}$) имеем

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} + \rho u\frac{\partial u}{\partial x} + \rho v\frac{\partial u}{\partial y} + \rho w\frac{\partial u}{\partial z} =$$
$$= X - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + \frac{1}{3}\mu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right). \quad (25)$$

Используя обозначения для оператора Лапласа

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

и дивергенции вектора скорости

$$\operatorname{div} \boldsymbol{W} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},$$

запишем уравнение (25) в более компактной форме:

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} + \rho u\frac{\partial u}{\partial x} + \rho v\frac{\partial u}{\partial y} + \rho w\frac{\partial u}{\partial z} =$$
$$= X - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu\Delta u + \frac{1}{3}\mu\frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{div}\boldsymbol{W}), \quad (26a)$$

и по аналогии для движения в направлении осей y и z

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t}+\rho u\frac{\partial v}{\partial x}+\rho v\frac{\partial v}{\partial y}+\rho w\frac{\partial v}{\partial z}=$$

$$=Y-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\Delta v+\frac{1}{3}\mu\frac{\partial}{\partial y}(\operatorname{div}\boldsymbol{W}). \qquad (26б)$$

$$\rho\frac{\partial w}{\partial t}+\rho u\frac{\partial w}{\partial x}+\rho v\frac{\partial w}{\partial y}+\rho w\frac{\partial w}{\partial z}=$$

$$=Z-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\Delta w+\frac{1}{3}\mu\frac{\partial}{\partial z}(\operatorname{div}\boldsymbol{W}). \qquad (26в)$$

Уравнения (26) называются *уравнениями Навье — Стокса.* В векторной форме уравнения Навье — Стокса сводятся к одному уравнению вида

$$\rho\frac{d\boldsymbol{W}}{dt}=\boldsymbol{R}-\operatorname{grad}p+\mu\Delta\boldsymbol{W}+\frac{1}{3}\mu\operatorname{grad}(\operatorname{div}\boldsymbol{W}), \qquad (27)$$

где $\boldsymbol{R}$ — вектор напряжения объемной силы.

В вязкой жидкости имеет место прилипание частиц жидкости к стенкам, ограничивающим течение, поэтому при интегрировании дифференциальных уравнений Навье — Стокса нужно использовать в качестве граничного условия равенство нулю скорости течения у стенки ($\boldsymbol{W}_w=0$).

В случае несжимаемой жидкости ($\rho=\text{const}$) последние члены в уравнениях Навье — Стокса (26) и (27) отсутствуют ($\operatorname{div}\boldsymbol{W}=0$), вследствие чего эти уравнения принимают более простой вид:

$$\left.\begin{aligned}\rho\frac{du}{dt}&=X-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\Delta u,\\ \rho\frac{\partial v}{\partial t}&=Y-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\Delta v,\\ \rho\frac{\partial w}{\partial t}&=Z-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\Delta w;\end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

$$\rho\frac{d\boldsymbol{W}}{dt}=\boldsymbol{R}-\operatorname{grad}p+\mu\Delta\boldsymbol{W}. \qquad (29)$$

Решение уравнений Навье — Стокса даже для несжимаемой жидкости представляет собой очень сложную задачу.

До сих пор удалось решить эти уравнения точно лишь в некоторых простейших случаях, например для течения вязкой жидкости по прямой трубе — задача Пуазейля; для течения между двумя параллельными плоскими стенками, из которых одна неподвижна, а другая движется, — задача Куэтта; для течения вблизи критической точки — задача Хименца — Хоуарта и др.

Задачи гидродинамики вязкой жидкости решаются обычно приближенно путем отбрасывания некоторых членов в уравнениях Навье — Стокса, которые в тех или иных конкретных условиях могут быть малы по сравнению с другими членами.

§ 6. Уравнение энергии

Составим дифференциальное уравнение сохранения энергии для движущейся частицы сжимаемой среды. Согласно первому закону термодинамики подведенное к телу тепло идет на повышение его внутренней энергии и на совершение работы деформации

$$dQ = c_v\, dT + p\, dv. \tag{30}$$

Здесь $dQ = dQ_{\text{н}} + dQ_{\text{тр}}$ — суммарное количество тепла, подведенное к 1 кг вещества за счет теплообмена частицы с окружающей средой ($dQ_{\text{н}}$) и работы сил трения ($dQ_{\text{тр}}$), $p\, dv$ — работа сжатия (деформации), $dU = c_v dT$ — внутренняя энергия газа.

Для частицы с объемом $V = dx\, dy\, dz$ и массой $G = \rho V$ условие сохранения энергии запишется в следующем виде:

$$dq = dq_{\text{н}} + dq_{\text{тр}} = Gc_v\, dT + p\, dV. \tag{31}$$

Здесь $dq_{\text{н}}$ — тепло, полученное частицей извне, $dq_{\text{тр}}$ — тепло трения, выделяющееся на ее гранях.

Тогда секундный поток тепла, приходящийся на единицу объема частицы, равен

$$\frac{1}{V}\frac{dq}{dt} = \rho c_v \frac{dT}{dt} + p\frac{dV}{V\,dt}. \tag{32}$$

Если подвод тепла из окружающей среды осуществляется только путем теплопроводности, то через единицу поверхности, согласно гипотезе Фурье, проходит в единицу времени поток тепла

$$\frac{dq_F}{F\,dt} = -\lambda\frac{\partial T}{\partial n}. \tag{33}$$

Здесь λ — коэффициент теплопроводности, зависящий от свойств жидкости (температуры, давления), $\partial T/\partial n$ — градиент температуры по нормали к поверхности, dq_F/dt — секундный поток тепла, F — поверхность частицы.

Возвращаясь к элементарному параллелепипеду dx, dy, dz (рис. 2.4), запишем секундный расход тепла через грань площадью $dy\, dz$ в направлении оси x

$$-\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\, dy\, dz.$$

Секундный приток тепла через противоположную грань составляет

$$\left[\lambda \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) dx\right] dy\, dz.$$

Таким образом, увеличение запаса тепла в объеме $dx\, dy\, dz$ вследствие притока тепла через указанную пару граней в течение промежутка времени dt составляет

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) dx\, dy\, dz\, dt.$$

Аналогично, приток тепла в направлении осей y и z составляет соответственно

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\right) dy\, dz\, dx\, dt, \quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z}\right) dz\, dx\, dy\, dt.$$

Общее количество тепла, подведенное к частице путем теплообмена с внешней средой за время dt,

$$dq_{\text{т}} = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z}\right)\right] dx\, dy\, dz\, dt. \qquad (34)$$

Найдем теперь количество тепла, поступающее в объем $dx\, dy\, dz$ вследствие работы сил трения.

Силы вязкости, приложенные к противоположным граням параллелепипеда, имеют противоположные направления. Секундная работа равна произведению силы на проекцию скорости на направление силы. Например, дополнительные нормальные напряжения σ'_x, действующие на гранях площадью $dy\, dz$, совершают за одну секунду работу (при учете только членов 1-го порядка малости)

$$\left[-\sigma'_x u + \left(\sigma'_x + \frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} dx\right)\left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right)\right] dy\, dz =$$

$$= \left(\sigma'_x \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \sigma'_x}{\partial x}\right) dx\, dy\, dz = \frac{\partial\left(\sigma'_x u\right)}{\partial x} dx\, dy\, dz.$$

Таким же способом определяется работа, которую производят касательные напряжения τ_{xy} и τ_{xz}, приложенные к тем же граням, в направлении двух других составляющих скорости (v и w):

$$\frac{\partial\left(\tau_{xy} v\right)}{\partial x} dx\, dy\, dz, \quad \frac{\partial\left(\tau_{xz} w\right)}{\partial x} dx\, dy\, dz.$$

Работа нормальных и тангенциальных напряжений, действующих на остальных двух парах граней, рассчитывается аналогичным образом. В итоге получается следующее выражение для

суммарной секундной работы сил трения, действующих на поверхности параллелепипеда:

$$\frac{dL_\Sigma}{dt}=\left[\frac{\partial}{\partial x}(\sigma'_x u+\tau_{xy}v+\tau_{xz}w)+\frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yx}u+\sigma'_y v+\tau_{yz}w)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zx}u+\tau_{zy}v+\sigma'_z w)\right]dx\,dy\,dz. \quad (35)$$

Однако не вся работа вязких сил превращается в тепло.

Часть этой работы, соответствующая равнодействующей вязких сил, которая вызывает ускорение частицы, расходуется на приращение механической энергии частицы.

Компоненты равнодействующей вязких сил в направлении осей x, y, z были определены в § 4 при выводе уравнений движений; работа, совершаемая этими компонентами равнодействующей сил в единицу времени, очевидно, равна

$$\frac{dL_W}{dt}=\left[u\left(\frac{\partial\sigma'_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\right)+v\left(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma'_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}\right)+\right.$$
$$\left.+w\left(\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma'_z}{\partial z}\right)\right]dx\,dy\,dz. \quad (36)$$

Вычтя из полной работы (35) работу перемещения частицы (36), получим искомую часть секундной работы вязких сил, трансформирующуюся в тепло:

$$\frac{dL_Q}{dt}=\left[\left(\sigma'_x\frac{\partial u}{\partial x}+\tau_{xy}\frac{\partial v}{\partial x}+\tau_{xz}\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\left(\tau_{yx}\frac{\partial u}{\partial y}+\sigma'_y\frac{\partial v}{\partial y}+\tau_{yz}\frac{\partial w}{\partial y}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\tau_{zx}\frac{\partial u}{\partial z}+\tau_{zy}\frac{\partial v}{\partial z}+\sigma'_z\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right]dx\,dy\,dz=\frac{dq_{\text{тр}}}{dt}. \quad (37)$$

Если теперь в уравнении (32) величину суммарного секундного притока тепла $dq=dq_{\text{н}}+dq_{\text{тр}}$ заменить с помощью (34) и (37), то получим уравнение энергии

$$\rho c_v\frac{dT}{dt}+p\frac{1}{V}\frac{dV}{dt}=\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial z}\right)\right]+$$
$$+\left[\left(\sigma'_x\frac{\partial u}{\partial x}+\tau_{xy}\frac{\partial v}{\partial x}+\tau_{xz}\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\left(\tau_{yx}\frac{\partial u}{\partial y}+\sigma'_y\frac{\partial v}{\partial y}+\tau_{yz}\frac{\partial w}{\partial y}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\tau_{zx}\frac{\partial u}{\partial z}+\tau_{zy}\frac{\partial v}{\partial z}+\sigma'_z\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right]. \quad (38)$$

После замены в (37) вязких напряжений их значениями согласно (17) и (24) получим тепло трения, выделяющееся за одну секунду в элементарном параллелепипеде:

$$\frac{dq_{\text{тр}}}{dt}=\mu\Phi V, \quad (39)$$

где множитель

$$\Phi = \frac{1}{\mu}\left[\left(\sigma'_x \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{xy}\frac{\partial v}{\partial x} + \tau_{xz}\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \left(\tau_{yx}\frac{\partial u}{\partial y} + \sigma'_y \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{yz}\frac{\partial w}{\partial y}\right) + \right.$$
$$\left. + \left(\tau_{zx}\frac{\partial u}{\partial z} + \tau_{zy}\frac{\partial v}{\partial z} + \sigma'_z \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right] = 2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right] +$$
$$+ \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 -$$
$$- \frac{2}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 \quad (40)$$

носит название *диссипативной функции.*

Используя определение функции Φ (39) и (40), получаем уравнение сохранения энергии в виде

$$\rho c_v \frac{dT}{dt} + p\frac{1}{V}\frac{dV}{dt} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z}\right) + \mu\Phi. \quad (41а)$$

Преобразуем второй член левой части этого уравнения с помощью условия сохранения массы (11а):

$$p\frac{1}{V}\frac{dV}{dt} = -\frac{p}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = -\left[\frac{dp}{dt} - \rho\frac{d\left(\frac{p}{\rho}\right)}{dt}\right].$$

Тогда уравнение энергии можно представить также в следующем виде [1]):

$$\rho\frac{d}{dt}\left[C_v T + \frac{p}{\rho}\right] = \frac{dp}{dt} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right) +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial z}\right) + \mu\Phi. \quad (41б)$$

Для идеального газа, подчиняющегося уравнению состояния $p/\rho = RT$, уравнение энергии упрощается, так как

$$C_v T + \frac{p}{\rho} = (C_v + R)T = C_p T = i.$$

Отсюда

$$\rho\frac{di}{dt} = \frac{dp}{dt} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial z}\right) + \mu\Phi. \quad (41в)$$

Если коэффициент теплопроводности не изменяется во всей области течения, то имеем уравнение энергии в следующей форме:

$$\rho\frac{di}{dt} = \rho c_p \frac{dT}{dt} = \frac{dp}{dt} + \lambda\Delta T + \mu\Phi. \quad (42)$$

---

[1]) Здесь $U = \int_0^T c_v dT = C_v T$, где C_v — среднее значение теплоемкости.

В несжимаемой жидкости второй член левой части уравнения энергии (41а) равен нулю и, кроме того, $c_p = c_v = c$, поэтому уравнение энергии получается в следующем виде:

$$\rho c \frac{dT}{dt} = \lambda \Delta T + \mu \Phi. \tag{43}$$

Диссипативная функция Φ в этом случае также принимает более простую форму, так как последний член правой части (40) равен нулю.

Для стационарного двумерного (плоскопараллельного) течения уравнение энергий (42) примет следующий вид:

$$\rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y}\right) = \left(u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y}\right) + \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) +$$
$$+ \mu \left\{2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right] + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 - \frac{2}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right\}. \tag{44}$$

В некоторых случаях в газовой динамике удобнее пользоваться другой формой уравнения энергии, которую можно получить с помощью уравнений Навье — Стокса.

Умножим первое из уравнений Навье — Стокса (16) на составляющую скорости u, второе — на v, третье — на w и сложим почленно все три уравнения. Тогда будем иметь

$$\rho \frac{d\left(\frac{W^2}{2}\right)}{dt} = -\left(\frac{dp}{dt} - \frac{\partial p}{\partial t}\right) + u\left(\frac{\partial \sigma_x'}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}\right) +$$
$$+ v\left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y'}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}\right) + w\left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z'}{\partial z}\right). \tag{45}$$

Здесь для простоты отброшена работа объемных сил как не играющих роли в газовой динамике и среднее нормальное напряжение заменено давлением ($\sigma = -p$).

Складывая уравнение (45), отражающее изменение кинетической энергии, с уравнением (42), учитывающим изменение энтальпии, и используя выражение (40), получаем после некоторых преобразований

$$\rho \frac{d}{dt}\left[i + \frac{W^2}{2}\right] = \frac{\partial p}{\partial t} + \lambda \Delta T + \frac{\partial}{\partial x}(\sigma_x' u + \tau_{xy} v + \tau_{xz} w) +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yx} u + \sigma_y' v + \tau_{yz} w) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zx} u + \tau_{zy} v + \sigma_z' w). \tag{46}$$

Как известно из § 2 гл. I, сумма энтальпии и кинетической энергии называется полной энтальпией (полным теплосодержанием)

$$i + \frac{W^2}{2} = i^*. \tag{47}$$

Подставляя (47) в левую часть уравнения (46) и заменяя с помощью (8), (17) и (24) напряжения скоростями деформаций,

получаем после преобразований уравнение энергии в таком виде:

$$\rho\frac{di^*}{dt}=\frac{\partial p}{\partial t}+\lambda\,\Delta T+\mu\Delta\left(\frac{W^2}{2}\right)+$$
$$+\frac{1}{3}\mu\,(\boldsymbol{W}\cdot\nabla)\operatorname{div}\boldsymbol{W}+\frac{1}{3}\mu\,(\operatorname{div}\boldsymbol{W})^2+2\mu\Omega, \quad (48)$$

где

$$\Omega=\left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial z}\right)+$$
$$+\left(\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z}\right).$$

В газовой динамике имеет большое значение (см. следующий параграф) безразмерная величина

$$\frac{c_p\mu}{\lambda}=\mathrm{Pr},$$

носящая название *числа Прандтля*. Введем это число в правую часть уравнения (48). Для этого прибавим и вычтем член

$$\frac{\lambda}{c_p}\Delta\left(\frac{W^2}{2}\right),$$

используем (47) и учтем, что при $c_p=\text{const}$

$$\lambda\,\Delta T=\frac{\lambda}{c_p}\Delta i^*.$$

Итак, имеем

$$\rho\frac{di^*}{dt}=\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\lambda}{c_p}\Delta i^*+\mu\left(1-\frac{1}{\mathrm{Pr}}\right)\Delta\left(\frac{W^2}{2}\right)+\frac{1}{3}\mu(\boldsymbol{W}\cdot\nabla)\operatorname{div}\boldsymbol{W}+$$
$$+\frac{1}{3}\mu\,(\operatorname{div}\boldsymbol{W})^2+2\mu\Omega. \quad (49)$$

Значение числа Прандтля зависит от физических свойств среды. Для газов число Прандтля близко к единице (например, для воздуха $\mathrm{Pr}=0{,}72$). При $\mathrm{Pr}=1$ третий член правой части равен нулю и уравнение энергии упрощается:

$$\rho\frac{di^*}{dt}=\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\lambda}{c_p}\Delta i^*+\frac{1}{3}\mu\,(\boldsymbol{W}\cdot\nabla)\operatorname{div}\boldsymbol{W}+\frac{1}{3}\mu\,(\operatorname{div}\boldsymbol{W})^2+2\mu\Omega. \quad (50)$$

§ 7. Гидродинамическое подобие

Ввиду невозможности получить точное решение уравнений Навье — Стокса и уравнения энергии для подавляющего большинства задач гидродинамики и газовой динамики прибегают либо к приближенным решениям, либо к экспериментам на моделях. В последнем случае возникает вопрос об условиях подобия для обтекания натурного объекта и его модели.

Первым условием такого подобия является геометрическое подобие, которое выполняется, если размеры всех сходственных элементов модели и натуры отличаются в одно и то же число раз и, кроме того, если сходственные элементы расположены под одинаковыми углами к вектору скорости набегающего потока.

Пусть любой характерный размер модели $r_м$ отличается от соответствующего характерного размера натуры $r_н$ в k_l раз. Тогда величина

$$\frac{r_м}{r_н} = k_l \qquad (51)$$

есть *линейный масштаб моделирования* (рис. 2.5). Кинематическое подобие течений около модели и натуры выполняется, если в сходственных точках, координаты которых пропорциональны:

$$\frac{x_м}{x_н} = \frac{y_м}{y_н} = \frac{z_м}{z_н} = \frac{r_м}{r_н} = k_l, \qquad (52)$$

компоненты векторов скорости удовлетворяют условию

$$\frac{u_м}{u_н} = \frac{v_м}{v_н} = \frac{w_м}{w_н} = \frac{u_{\infty м}}{u_{\infty н}} = k_u, \qquad (53)$$

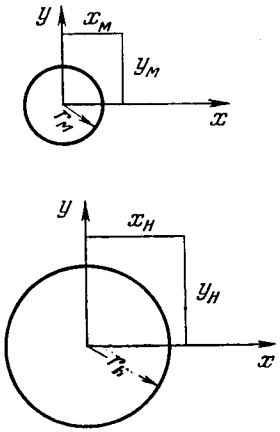


Рис. 2.5. Иллюстрация геометрического подобия.

где $u_{\infty м}$, $u_{\infty н}$ — скорости невозмущенного набегающего потока соответственно у модели и у натуры на большом расстоянии («на бесконечности») от тела. Величина k_u называется *кинематическим масштабом моделирования.*

Из условия (52) вытекает, что сходственные точки двух течений можно определить следующим образом:

$$\frac{x_м}{r_м} = \frac{x_н}{r_н}; \quad \frac{y_м}{r_м} = \frac{y_н}{r_н}; \quad \frac{z_м}{r_м} = \frac{z_н}{r_н}, \qquad (54)$$

т. е. как точки с одинаковыми относительными значениями координат.

Точно так же из условия (53) получаем, что в сходственных точках двух кинематически подобных течений, вне зависимости от кинематического масштаба моделирования, безразмерные значения соответственных составляющих скорости одинаковы:

$$\frac{u_м}{u_{\infty м}} = \frac{u_н}{u_{\infty н}}; \quad \frac{v_м}{u_{\infty м}} = \frac{v_н}{u_{\infty н}}; \quad \frac{w_м}{u_{\infty м}} = \frac{w_н}{u_{\infty н}}. \qquad (55)$$

Условие динамического подобия двух течений, очевидно, выполняется в том случае, когда значения соответственных сил,

приложенных к модели и натуре, отличаются в одно и то же число раз:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\rho_м \frac{du_м}{dt}}{\rho_н \frac{du_н}{dt}} = \frac{\rho_м \frac{dv_м}{dt}}{\rho_н \frac{dv_н}{dt}} = \frac{\rho_м \frac{dw_м}{dt}}{\rho_н \frac{dw_н}{dt}} = k_R \\
&\frac{X_м}{X_н} = \frac{Y_м}{Y_н} = \frac{Z_м}{Z_н} = k_R, \\
&\frac{P_{xм}}{P_{xн}} = \frac{P_{yм}}{P_{yн}} = \frac{P_{zм}}{P_{zн}} = k_R, \\
&\frac{R_{xм}}{R_{xн}} = \frac{R_{yм}}{R_{yн}} = \frac{R_{zм}}{R_{zн}} = k_R.
\end{aligned}\right\} \qquad (56)$$

Первое из приведенных равенств содержит проекции сил инерции, стоящие в левой части уравнений Навье — Стокса, второе — сил объемных, третье — сил гидродинамического давления и четвертое — сил трения, сгруппированных в правой части уравнений Навье — Стокса.

Коэффициент k_R характеризует *динамический масштаб моделирования*. Из равенств (56) видно, что вне зависимости от величины масштаба k_R динамическое подобие имеет место в случае, если безразмерные значения соответствующих сил, приложенных к модели и натурному объекту, одинаковы:

$$\frac{X_м}{\rho_м \frac{du_м}{dt}} = \frac{X_н}{\rho_н \frac{du_н}{dt}}; \quad \frac{Y_м}{\rho_м \frac{du_м}{dt}} = \frac{Y_н}{\rho_н \frac{du_н}{dt}} \text{ и т. д.}$$

$$\frac{P_{xм}}{\rho_м \frac{du_м}{dt}} = \frac{P_{xн}}{\rho_н \frac{du_н}{dt}} \text{ и т. д.}$$

$$\frac{R_{xм}}{\rho_м \frac{du_м}{dt}} = \frac{R_{xн}}{\rho_н \frac{du_н}{dt}} \text{ и т. д.}$$

Гидродинамически подобными являются течения, в которых выполняются одновременно условия геометрического, кинематического и динамического подобия.

Если записать уравнения Навье — Стокса в безразмерном виде, то для двух гидродинамически подобных течений эти уравнения окажутся совершенно идентичными.

Приведем к безразмерному виду уравнение Навье — Стокса (25), для чего сначала все величины, входящие в уравнения, выразим в долях соответствующих величин для невозмущенного течения вдали от тела (u_∞, ρ_∞, p_∞) и также характерных

значений времени (t_0) и размера (l):

$$\frac{u_\infty}{t_0}\frac{\partial\frac{u}{u_\infty}}{\partial\frac{t}{t_0}}+\frac{u_\infty^2}{l}\left(\frac{u}{u_\infty}\frac{\partial\frac{u}{u_\infty}}{\partial\frac{x}{l}}+\frac{v}{u_\infty}\frac{\partial\frac{u}{u_\infty}}{\partial\frac{y}{l}}+\frac{w}{u_\infty}\frac{\partial\frac{u}{u_\infty}}{\partial\frac{z}{l}}\right)=$$

$$=\frac{X}{\rho}-\frac{p_\infty}{l\rho_\infty}\frac{\rho_\infty}{\rho}\frac{\partial\frac{p}{p_\infty}}{\partial\frac{x}{l}}+\frac{\mu u_\infty}{\rho_\infty l^2}\frac{\rho_\infty}{\rho}\left\{\left[\frac{\partial^2\frac{u}{u_\infty}}{\partial\left(\frac{x}{l}\right)^2}+\frac{\partial^2\frac{u}{u_\infty}}{\partial\left(\frac{y}{l}\right)^2}+\frac{\partial^2\frac{u}{u_\infty}}{\partial\left(\frac{z}{l}\right)^2}\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial\frac{x}{l}}\left(\frac{\partial\frac{u}{u_\infty}}{\partial\frac{x}{l}}+\frac{\partial\frac{v}{u_\infty}}{\partial\frac{y}{l}}+\frac{\partial\frac{w}{u_\infty}}{\partial\frac{z}{l}}\right)\right\}, \qquad (57)$$

а затем разделим на величину u_∞^2/l, пропорциональную силе инерции для единицы массы:

$$\frac{l}{t_0u_\infty}\frac{\partial\frac{u}{u_\infty}}{\partial\frac{t}{t_0}}+\frac{u}{u_\infty}\frac{\partial\frac{u}{u_\infty}}{\partial\frac{x}{l}}+\frac{v}{u_\infty}\frac{\partial\frac{u}{u_\infty}}{\partial\frac{y}{l}}+\frac{w}{u_\infty}\frac{\partial\frac{u}{u_\infty}}{\partial\frac{z}{l}}=$$

$$=\frac{gl}{u_\infty^2}-\frac{p_\infty}{\rho_\infty u_\infty^2}\frac{\rho_\infty}{\rho}\frac{\partial\frac{p}{p_\infty}}{\partial\frac{x}{l}}+\frac{\mu}{\rho_\infty lu_\infty}\frac{\rho_\infty}{\rho}\left\{\left[\frac{\partial^2\frac{u}{u_\infty}}{\partial\left(\frac{x}{l}\right)^2}+\frac{\partial^2\frac{u}{u_\infty}}{\partial\left(\frac{y}{l}\right)^2}+\frac{\partial^2\frac{u}{u_\infty}}{\partial\left(\frac{z}{l}\right)^2}\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial\frac{x}{l}}\left(\frac{\partial\frac{u}{u_\infty}}{\partial\frac{x}{l}}+\frac{\partial\frac{v}{u_\infty}}{\partial\frac{y}{l}}+\frac{\partial\frac{w}{u_\infty}}{\partial\frac{z}{l}}\right)\right\}. \qquad (58)$$

Здесь принято, что массовая сила X представляет собой силу земного тяготения, т. е. $X/\rho = g$.

Безразмерное уравнение Навье — Стокса (58) содержит следующие безразмерные комплексы:

$$\frac{l}{t_0u_\infty},\quad \frac{gl}{u_\infty^2},\quad \frac{p_\infty}{\rho_\infty u_\infty^2},\quad \frac{\mu}{\rho_\infty lu_\infty}.$$

Очевидно, что для геометрически и кинематически подобных течений безразмерные уравнения движения (58) будут одинаковыми в том случае, если каждый из этих комплексов имеет одно и то же значение для натурного объекта и модели и если в сходственных точках этих потоков относительные значения

плотности и вязкости одинаковы ($\rho/\rho_\infty = \text{idem}$, $\mu = \text{const}$)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{l_м}{t_{0м}u_{\infty м}} = \frac{l_н}{t_{0н}u_{\infty н}} = \mathrm{Sh}, && \frac{gl_м}{u^2_{\infty м}} = \frac{gl_н}{u^2_{\infty н}} = \frac{1}{\mathrm{Fr}}, \\ &\frac{p_{\infty м}}{\rho_{\infty м}u^2_{\infty м}} = \frac{p_{\infty н}}{\rho_{\infty н}u^2_{\infty н}} = \mathrm{Eu}, && \frac{\mu_м}{\rho_{\infty м}l_м u_{\infty м}} = \frac{\mu_н}{\rho_{\infty н}l_н u_{\infty н}} = \frac{1}{\mathrm{R}}. \end{aligned}\right\} \quad (59)$$

Безразмерные комплексы (59) являются, таким образом, критериями динамического подобия для геометрически и кинематически подобных систем.

Этим критериям подобия присвоены следующие обозначения и названия:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{l}{ut} = \mathrm{Sh} \text{ — число Струхаля}, \\ &\frac{u^2}{gl} = \mathrm{Fr} \text{ — число Фруда}, \\ &\frac{p}{\rho u^2} = \mathrm{Eu} \text{ — число Эйлера}, \\ &\frac{\rho l u}{\mu} = \mathrm{R} \text{ — число Рейнольдса}. \end{aligned}\right\} \quad (60)$$

В выражениях (60) индексы опущены, так как в них следует подставлять некоторые характерные значения параметров, которые не обязательно соответствуют их значениям на «бесконечности».

Вспомним, что каждый из критериев динамического подобия был образован делением соответствующей силы на величину, пропорциональную силе инерции; поэтому число Фруда определяет по существу отношение силы веса (объемной силы) к силе инерции, число Рейнольдса — отношение силы вязкости к силе инерции, число Струхаля — отношение дополнительной (локальной) силы, вызванной неустановившимся характером движения, к силе инерции, число Эйлера — отношение силы гидродинамического давления к силе инерции.

В несжимаемой жидкости критерий Эйлера не является определяющим, так как в качестве характерного давления p можно взять динамическое давление $\rho u^2/2$, и тогда Eu — есть постоянное число.

В сжимаемой среде критерий Eu можно представить с помощью известного выражения для скорости звука $a^2 = kp/\rho$ в виде

$$\mathrm{Eu} = \frac{1}{k\mathrm{M}^2};$$

это значит, что в случае газовых течений появляются два дополнительных критерия подобия:

число Пуассона

$$k = \frac{c_p}{c_v}$$

и число Маха

$$\mathrm{M} = \frac{u}{a},$$

значения которых при подобии течений около модели и натуры должны быть соответственно одинаковыми

$$k_{\text{м}} = k_{\text{н}}, \qquad \mathrm{M}_{\text{м}} = \mathrm{M}_{\text{н}}.$$

Выполнить условия полного динамического подобия при моделировании в общем случае весьма затруднительно. Если модель испытывается в той же среде (вода, воздух и т. д.), в которой работает натуральный объект, и при одинаковом ее состоянии ($\rho = \text{idem}$, $\mu = \text{idem}$, $a = \text{idem}$), то для обеспечения одинаковых значений каждого из критериев динамического подобия необходимо из условия $\mathrm{Fr} = \text{idem}$ при переходе к модели изменить скорость прямо пропорционально корню квадратному из линейного размера ($u \sim \sqrt{l}$ или $k_u = \sqrt{k_l}$), из условия $\mathrm{R} = \text{idem}$ следует скорость изменить обратно пропорционально линейному размеру ($u \sim 1/l$ или $k_u = 1/k_l$), а из условия $\mathrm{M} = \text{idem}$ скорость на модели должна быть такой же, как и для натуры. Нетрудно видеть, что одновременное выполнение этих условий невозможно. Впрочем, в большинстве случаев добиваться полного динамического подобия и не нужно. Обычно в каждой конкретной гидродинамической задаче часть членов уравнения Навье — Стокса либо равны нулю, либо представляют собой пренебрежимо малые величины. Например, для самолета число Фруда не имеет значения, так как сила тяжести на частицы воздуха, обтекающего самолет, не действует (воздух в воздухе невесом, $X = 0$); если к тому же моделируется самолет малой скорости ($\mathrm{M} \ll 1$), то сжимаемость воздуха не проявляется, т. е. нет необходимости в выполнении условия $\mathrm{M} = \text{idem}$; наконец, в случае установившегося движения самолета ($t = \infty$, $\mathrm{Sh} = 0$) отпадает и условие $\mathrm{Sh} = \text{idem}$.

В рассматриваемом примере достаточно удовлетворить условиям геометрического и кинематического подобий и единственному условию динамического подобия: $\mathrm{R} = \frac{\rho u l}{\mu} = \text{idem}$. В таком случае число R является *определяющим* критерием подобия. В частности, при испытании модели такого самолета в аэродинамической трубе (при $\rho = \text{idem}$, $\mu = \text{idem}$) необходимо вести работу при скорости потока во столько раз большей скорости полета, во сколько раз натура больше модели ($u_{\text{м}} l_{\text{м}} = u_{\text{н}} l_{\text{н}}$, $k_u = 1/k_l$). При этом будет реализовано так называемое *прибли-*

женное подобие (по определяющему критерию подобия). Естественно, что масштаб модели не должен быть очень мал, так как потребуется слишком большая скорость потока в аэродинамической трубе, что может привести к таким значениям числа Маха в модельном эксперименте ($M_м \approx 1$), при которых начнет сказываться сжимаемость газа, т. е. нарушиться одно из принятых условий ($M \ll 1$). Из-за этого хорошая дозвуковая аэродинамическая труба должна иметь относительно большие размеры. Известен способ обойти эту трудность: построить аэродинамическую трубу с высоким давлением воздуха, в которой малый размер модели $\left(\text{при } R = \frac{\rho u l}{\mu} = \text{idem}\right)$ компенсируется частично или полностью повышенной плотностью воздуха.

Выполнения условия $R = \text{idem}$ можно также добиться путем перехода к среде с другими физическими свойствами: в некоторых случаях модель испытывают не в воздухе, а во фреоне, используя малую вязкость последнего.

Вторым примером реализации приближенного подобия может служить экспериментальное исследование сверхзвукового летательного аппарата с большим сопротивлением давления. В этом примере сопротивление трения (вязкость) играет второстепенную роль, т. е. не обязательно выдерживать условие $R = \text{idem}$. По тем же причинам, что и в предыдущем примере, не нужно выполнять условия $Fr = \text{idem}$, $Sh = \text{idem}$, и остается основным определяющим критерием (условием приближенного подобия): $M = \text{idem}$ (при $k = \text{idem}$). Это во многих случаях позволяет осуществлять моделирование в сверхзвуковой аэродинамической трубе относительно малых размеров.

Остановимся еще на одном примере корабля не очень обтекаемой формы, который при своем движении порождает большие волны на поверхности воды. В этом случае сопротивление трения играет второстепенную роль по сравнению с волновым сопротивлением (затратой энергии на преодоление силы тяжести воды), и для обеспечения приближенного динамического подобия становится определяющим критерием число Фруда $Fr = \frac{u^2}{gl} = \text{idem}$. При испытании модели корабля в гидроканале скорость ее движения следует принять меньше, чем у натуры, в корень квадратный раз из отношения линейных размеров.

В ряде случаев нельзя добиться приближенного динамического подобия, выдерживая постоянство одного критерия подобия. Например, при моделировании хорошо обтекаемого сверхзвукового летательного аппарата необходимо выдержать постоянство по крайней мере двух определяющих критериев подобия ($M = \text{idem}$, $R = \text{idem}$), так как сопротивления давления и трения у такого аппарата соизмеримы. Для этого приходится

создавать сверхзвуковую аэродинамическую трубу сравнительно больших размеров, а иногда и с переменным давлением воздуха в ней. Для приближенного моделирования судна обтекаемой формы требуется выполнить условия: $\mathrm{Fr} = \mathrm{idem}$, $\mathrm{R} = \mathrm{idem}$. Можно привести большое число примеров, в которых условия приближенного динамического моделирования не сводятся к постоянству одного какого-либо критерия подобия.

Перейдем теперь к рассмотрению уравнения энергии. Для приведения уравнения энергии (42) к безразмерному виду отнесем, как и раньше, все значения скоростей к скорости невозмущенного набегающего потока u_∞, все линейные величины — к характерному линейному размеру объекта l, все давления — к давлению в набегающем потоке p_∞, все температуры — к разности температур набегающего потока (вдали от тела) и стенки тела $\Delta T_0 = T_\infty - T_w$. Для простоты исследуем уравнение энергии для установившегося режима течения (нетрудно показать, что учет нестационарных членов в уравнении энергии приводит к числу Струхаля, т. е. к критерию, полученному ранее из уравнений Навье — Стокса).

Тогда из (42) и (40) имеем

$$\frac{\rho c_p \Delta T_0 u_\infty}{l}\left[\frac{u}{u_\infty}\frac{\partial\frac{\Delta T}{\Delta T_0}}{\partial\frac{x}{l}}+\frac{v}{u_\infty}\frac{\partial\frac{\Delta T}{\Delta T_0}}{\partial\frac{y}{l}}+\frac{w}{u_\infty}\frac{\partial\frac{\Delta T}{\Delta T_0}}{\partial\frac{z}{l}}\right]=$$

$$=\frac{u_\infty p_\infty}{l}\left[\frac{u}{u_\infty}\frac{\partial\frac{p}{p_\infty}}{\partial\frac{x}{l}}+\frac{u}{u_\infty}\frac{\partial\frac{p}{p_\infty}}{\partial\frac{y}{l}}+\frac{w}{u_\infty}\frac{\partial\frac{p}{p_\infty}}{\partial\frac{z}{l}}\right]+$$

$$+\frac{\lambda\Delta T_0}{l^2}\left[\frac{\partial^2\frac{\Delta T}{\Delta T_0}}{\partial\left(\frac{x}{l}\right)^2}+\frac{\partial^2\frac{\Delta T}{\Delta T_0}}{\partial\left(\frac{y}{l}\right)^2}+\frac{\partial^2\frac{\Delta T}{\Delta T_0}}{\partial\left(\frac{z}{l}\right)^2}\right]+$$

$$+\mu\frac{u_\infty^2}{l^2}\left\{2\left[\left(\frac{\partial\frac{u}{u_\infty}}{\partial\frac{x}{l}}\right)^2+\left(\frac{\partial\frac{v}{u_\infty}}{\partial\frac{y}{l}}\right)^2+\left(\frac{\partial\frac{w}{u_\infty}}{\partial\frac{z}{l}}\right)^2\right]+\right.$$

$$+\left(\frac{\partial\frac{u}{u_\infty}}{\partial\frac{y}{l}}+\frac{\partial\frac{v}{u_\infty}}{\partial\frac{x}{l}}\right)^2+\left(\frac{\partial\frac{w}{u_\infty}}{\partial\frac{y}{l}}+\frac{\partial\frac{v}{u_\infty}}{\partial\frac{z}{l}}\right)^2+$$

$$\left.+\left(\frac{\partial\frac{u}{u_\infty}}{\partial\frac{z}{l}}+\frac{\partial\frac{w}{u_\infty}}{\partial\frac{x}{l}}\right)^2-\frac{2}{3}\left(\frac{\partial\frac{u}{u_\infty}}{\partial\frac{x}{l}}+\frac{\partial\frac{v}{u_\infty}}{\partial\frac{y}{l}}+\frac{\partial\frac{w}{u_\infty}}{\partial\frac{z}{l}}\right)^2\right\}$$

и далее, после деления всех членов на общий множитель левой части:

$$\frac{u}{u_\infty}\frac{\partial\frac{\Delta T}{\Delta T_0}}{\partial\frac{x}{l}}+\frac{v}{u_\infty}\frac{\partial\frac{\Delta T}{\Delta T_0}}{\partial\frac{y}{l}}+\frac{w}{u_\infty}\frac{\partial\frac{\Delta T}{\Delta T_0}}{\partial\frac{z}{l}}=$$

$$=\frac{p_\infty}{\rho_\infty u_\infty^2}\frac{\rho_\infty}{\rho}\frac{u_\infty^2}{c_p\Delta T_0}\left[\frac{u}{u_\infty}\frac{\partial\frac{p}{p_\infty}}{\partial\frac{x}{l}}+\frac{v}{u_\infty}\frac{\partial\frac{p}{p_\infty}}{\partial\frac{y}{l}}+\frac{w}{u_\infty}\frac{\partial\frac{p}{p_\infty}}{\partial\frac{z}{l}}\right]+$$

$$+\frac{\lambda}{\rho c_p u_\infty l}\left[\frac{\partial^2\frac{\Delta T}{\Delta T_0}}{\partial\left(\frac{x}{l}\right)^2}+\frac{\partial^2\frac{\Delta T}{\Delta T_0}}{\partial\left(\frac{y}{l}\right)^2}+\frac{\partial^2\frac{\Delta T}{\Delta T_0}}{\partial\left(\frac{z}{l}\right)^2}\right]+$$

$$+\frac{\mu u_\infty}{l\rho c_p\Delta T_0}\left\{2\left[\left(\frac{\partial\frac{u}{u_\infty}}{\partial\frac{x}{l}}\right)^2+\left(\frac{\partial\frac{v}{u_\infty}}{\partial\frac{y}{l}}\right)^2+\left(\frac{\partial\frac{w}{u_\infty}}{\partial\frac{z}{l}}\right)^2\right]+\right.$$

$$+\left(\frac{\partial\frac{u}{u_\infty}}{\partial\frac{y}{l}}+\frac{\partial\frac{v}{u_\infty}}{\partial\frac{x}{l}}\right)^2+\left(\frac{\partial\frac{w}{u_\infty}}{\partial\frac{y}{l}}+\frac{\partial\frac{v}{u_\infty}}{\partial\frac{z}{l}}\right)^2+\left(\frac{\partial\frac{u}{u_\infty}}{\partial\frac{z}{l}}+\frac{\partial\frac{w}{u_\infty}}{\partial\frac{x}{l}}\right)^2-$$

$$\left.-\frac{2}{3}\left(\frac{\partial\frac{u}{u_\infty}}{\partial\frac{x}{l}}+\frac{\partial\frac{v}{u_\infty}}{\partial\frac{y}{l}}+\frac{\partial\frac{w}{u_\infty}}{\partial\frac{z}{l}}\right)^2\right\}. \qquad (61)$$

Здесь $\Delta T = T - T_w$ — избыточная местная температура (по сравнению с температурой стенки), причем $dT = d(\Delta T)$. Левая часть уравнения энергии отражает конвективный перенос тепла, поэтому деление всех членов на размерный множитель левой части означает, что все виды тепловых потоков выражены в долях от конвективного.

Тепловое подобие двух процессов осуществляется в том случае, когда оба они описываются одним и тем же безразмерным уравнением энергии. Это условие выполняется при соблюдении:

1) гидродинамического подобия;

2) подобия полей температуры, т. е. равенства безразмерных значений избыточной температуры в сходственных точках двух течений $\Delta T/\Delta T_\infty = \text{idem}$ при $x/l = \text{idem}$, $y/l = \text{idem}$, $z/l = \text{idem}$;

3) равенства в обоих течениях значений каждого из следующих безразмерных комплексов уравнения (61):

$$\frac{p_\infty}{\rho u_\infty^2}\frac{u_\infty^2}{c_p\Delta T_0};\qquad \frac{\lambda}{\rho c_p u_\infty l};\qquad \frac{\mu u_\infty}{l\rho c_p\Delta T_0}.$$

Эти комплексы целесообразно несколько преобразовать. Так, первый из них представляет собой произведение известного уже критерия Эйлера на так называемый *температурный критерий*

$$\theta = \frac{u_\infty^2}{c_p \Delta T_0} = \frac{kR}{c_p} \frac{T_\infty}{\Delta T_0} \frac{u_\infty^2}{kRT_\infty}.$$

Так как $R = c_p - c_v$; $k = c_p/c_v$, $kRT_\infty = a_\infty^2$, то

$$\theta = \frac{u_\infty^2}{c_p \Delta T_0} = (k-1) \frac{T_\infty}{\Delta T_0} \mathrm{M}_\infty^2. \tag{62}$$

Следовательно, температурный критерий, учитывающий отношение работы сжатия, осуществляемой динамическим давлением, к конвективному тепловому потоку, пропорционален квадрату числа Маха и отношению полной температуры набегающего потока к избыточной его температуре. Величина

$$\frac{u^2}{2c_p} = T^* - T = \Delta T^*$$

есть прирост температуры при адиабатическом торможении потока, поэтому имеем также

$$\theta = 2 \frac{\Delta T^*}{\Delta T_0} = 2 \frac{T_\infty^* - T_\infty}{T_\infty - T_w}. \tag{63}$$

Таким образом, температурный критерий равен удвоенному отношению прироста температуры при торможении потока к избыточной температуре газа; отсюда ясно, что этот критерий имеет значение лишь при больших скоростях потока.

Множитель при втором члене правой части уравнения (61), выражающий отношение тепла, переносимого теплопроводностью, к конвективному тепловому потоку, преобразуем так:

$$\frac{\lambda}{c_p \mu} \frac{\mu}{\rho u_\infty l} = \frac{1}{\mathrm{Pr}} \frac{1}{\mathrm{R}}. \tag{63а}$$

Один из его безразмерных сомножителей есть обратная величина известного нам числа Рейнольдса, второй безразмерный сомножитель, обратно пропорциональный величине числа Прандтля

$$\mathrm{Pr} = \frac{c_p \mu}{\lambda} = \frac{\nu}{\varepsilon}, \tag{64}$$

зависит лишь, как указывалось, от физических свойств среды. Величина $\varepsilon = \dfrac{\lambda}{\rho c_p}$, которая называется *коэффициентом температуропроводности*, имеет размерность коэффициента кинематической вязкости ν.

Произведение чисел Прандтля и Рейнольдса называют *числом* или *критерием Пекле*

$$\mathrm{Pe} = \frac{ul}{\varepsilon} = \mathrm{PrR}. \tag{65}$$

Этот критерий широко используется при моделировании процессов теплообмена. Множитель при третьем члене правой части уравнения (61), представляющий собой отношение рассеиваемого тепла к конвективному тепловому потоку, не приводит к новым критериям, так как равен отношению температурного критерия к числу Рейнольдса:

$$\frac{\mu u_\infty}{c_p \Delta T_0 \rho l} = \frac{u_\infty^2}{c_p \Delta T_0} \frac{\mu}{\rho l u_\infty} = \frac{\theta}{\mathrm{R}}. \tag{66}$$

К сказанному следует добавить, что для среды переменной плотности в уравнения Навье — Стокса следует включить объемные силы Архимеда, так как по закону Архимеда «частица, окруженная жидкостью отличной плотности, теряет в своем весе столько, сколько весит вытесненный ею объем жидкости». Таким образом, сила Архимеда, приложенная к частице, имеющей объем V, равна

$$(\gamma - \gamma_\infty) V = g (\rho - \rho_\infty) V.$$

Проекции силы Архимеда, отнесенной к единице объема, которые должны быть подставлены в уравнения Навье — Стокса, можно представить в виде

$$X = g_x (\rho - \rho_\infty), \quad Y = g_y (\rho - \rho_\infty), \quad Z = g_z (\rho - \rho_\infty),$$

где g_x, g_y, g_z — проекции ускорения силы тяжести на координатные оси.

Отношение силы Архимеда к инерционной силе, которое должно стоять в этом случае в правой части уравнения Навье — Стокса для оси x, запишется в виде

$$\frac{Xl}{\rho u_\infty^2} = \frac{g_x (\rho - \rho_\infty) l}{\rho u_\infty^2}.$$

Относительное изменение объема, а следовательно и плотности, пропорционально изменению температуры:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\rho - \rho_\infty}{\rho} = \beta (T_\infty - T),$$

где β — коэффициент объемного расширения.

В идеальном газе при постоянном давлении $\rho/\rho_\infty = T_\infty/T$, т. е. $\beta = 1/T_\infty$, поэтому

$$\frac{Xl}{\rho u_\infty^2} = \frac{g_x l}{u_\infty^2}\frac{\Delta T_0}{T_\infty}\frac{\Delta T}{\Delta T_0} = \frac{\Delta T_0}{T_\infty}\frac{1}{\mathrm{Fr}}\frac{\Delta T}{\Delta T_0}.$$

Безразмерный множитель

$$\mathrm{Ar} = \frac{\Delta T_0}{T_\infty}\frac{1}{\mathrm{Fr}} \tag{67}$$

называют числом Архимеда; оно имеет значение для гидродинамического подобия в том случае, когда перепады температур в газовом потоке велики, а скорости малы.

Как видим, критерий Архимеда получается от деления относительного перепада температур на число Фруда.

В общем случае ($\beta \neq 1/T_\infty$)

$$\mathrm{Ar} = \frac{gl}{u_\infty^2}\beta\Delta T_0 = \frac{g\beta\Delta T_0 l^3}{\nu^2}\frac{\nu^2}{u_\infty^2 l^2} = \frac{\mathrm{Gr}}{\mathrm{R}^2}. \tag{68}$$

Безразмерную величину

$$\mathrm{Gr} = \frac{gl^3\beta\Delta T_0}{\nu^2}, \tag{69}$$

выражающую отношение силы Архимеда к силе вязкости, называют числом Грасгофа.

Итак, для выполнения условий гидродинамического и теплового подобия нужно, чтобы в модели значения критериев подобия:

$$\left.\begin{aligned} &\text{числа Рейнольдса:} && \mathrm{R} = \frac{u_\infty l}{\nu},\\ &\text{числа Прандтля:} && \mathrm{Pr} = \frac{\nu}{\varepsilon} = \frac{\mu c_p}{\lambda},\\ &\text{числа Грасгофа:} && \mathrm{Gr} = \frac{g\beta\Delta T_0 l^3}{\nu^2},\\ &\text{температурного критерия:} && \theta = \frac{u_\infty^2}{c_p\Delta T_0}, \end{aligned}\right\} \tag{70}$$

были такими же, как и в натурном объекте.

Для газов должно соблюдаться также равенство значений числа Маха

$$\mathrm{M} = \frac{u_\infty}{a_\infty}$$

и отношения теплоемкостей

$$k = \frac{c_p}{c_v}.$$

§ 8. Слоистые течения

К одному из простых частных случаев точного решения уравнений Навье — Стокса мы приходим в случае так называемых слоистых течений, когда сохраняется лишь одна составляющая скорости, а остальные две всюду равны нулю:

$$u = u(x, y, z, t), \quad v = 0, \quad w = 0.$$

Если массовые силы пренебрежимо малы, то в этом случае уравнения движения имеют следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + \frac{1}{3}\nu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{3}\nu\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad 0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{3}\nu\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

а уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0.$$

Если, кроме того, ограничиться случаем установившегося течения несжимаемой жидкости $\left(\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \rho = \text{const}\right)$, то из уравнения неразрывности вытекает неизменность скорости в направлении течения $\partial u/\partial x = 0$, а из последних двух уравнений движения — постоянство давления в поперечных направлениях: $\partial p/\partial y = 0$, $\partial p/\partial z = 0$. Тогда из первого уравнения движения получим

$$\frac{dp}{dx} = \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right).$$

Пусть слоистое течение вязкой несжимаемой жидкости является плоскопараллельным, причем скорости течения в направлении оси z не изменяются: $\partial u/\partial z = 0$. Тогда в первом уравнении движения сохранятся только тангенциальные вязкие напряжения, действующие в плоскости (x, y):

$$\sigma'_x = 0, \quad \tau_{zx} = 0 \quad \text{и} \quad \tau_{yx} = \mu\frac{du}{dy}. \tag{71}$$

Соотношение (71) выражает закон вязкого трения Ньютона в простейшем виде; дифференцируя (71), получим

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} = \frac{d\tau_{yx}}{dy} = \mu\frac{d^2 u}{dy^2}.$$

Тогда первое из уравнений движения примет вид

$$\frac{dp}{dx} = \mu\frac{d^2 u}{dy^2}. \tag{72a}$$

Рассмотрим плоскопараллельное слоистое течение вязкой несжимаемой жидкости в канале, образуемом двумя бесконечными параллельными пластинами.

Если расстояние между пластинами равно $2b$ и начало координат лежит на оси канала (рис. 2.6), то в качестве граничного условия задачи можно принять условие прилипания жидкости к стенке

$$u = 0 \quad \text{при} \quad y = \pm b. \tag{72б}$$

Интегрируя дифференциальное уравнение (72а), имеем

$$\frac{dp}{dx} y + C_1 = \mu \frac{du}{dy}. \tag{72в}$$

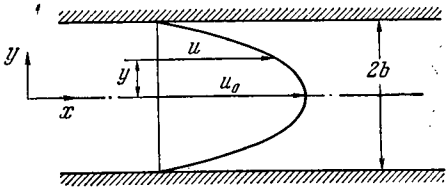


Рис. 2.6. Плоскопараллельное течение в канале.

Из условия симметрии следует, что в средней плоскости ($y = 0$) $\frac{du}{dy} = 0$, и, значит, $C_1 = 0$.

Интегрируя теперь уравнение (72в), получим

$$\frac{1}{2} \frac{dp}{dx} y^2 + C_2 = \mu u,$$

откуда на основании (72б) имеем

$$C_2 = -\frac{1}{2} \frac{dp}{dx} b^2,$$

и, следовательно,

$$u = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} (y^2 - b^2). \tag{72г}$$

Скорость течения на оси канала (при $y = 0$)

$$u_0 = -\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} b^2. \tag{72д}$$

Поделив почленно равенство (72г) на (72д), получим

$$\frac{u}{u_0} = 1 - \frac{y^2}{b^2}. \tag{73а}$$

Из (73а) следует, что безразмерный профиль скорости при слоистом движении жидкости в плоском канале не зависит ни от величины вязкости, ни от величины продольного градиента давления и представляет собой квадратичную параболу.

Пользуясь условием постоянства расхода жидкости, можно, исходя из (73а), определить так называемую среднюю скорость

течения в канале

$$u_{\text{ср}} = \frac{\int_0^b u\,dy}{b} = u_0 \int_0^1 \frac{u}{u_0}\,d\left(\frac{y}{b}\right) = u_0 \int_0^1 \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) d\,\frac{y}{b} = \frac{2}{3}u_0. \quad (73б)$$

Вычислим градиент давления вдоль канала. Для этого определим из (73а) вторую производную скорости в поперечном направлении

$$\frac{d^2u}{dy^2} = -\frac{2u_0}{b^2}$$

и подставим ее значение в (72а)

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{2\mu u_0}{b^2}.$$

Итак, потери давления при слоистом течении жидкости в плоском канале пропорциональны скорости и обратно пропорциональны квадрату высоты канала. Изменение давления на участке конечной длины $x = l$ равно

$$\Delta p = -\frac{2\mu u_0 l}{b^2}, \quad (74)$$

или в безразмерном виде

$$\frac{\Delta p}{\rho\frac{u_0^2}{2}} = -\frac{16\mu}{\rho u_0 h}\,\frac{l}{h}.$$

Здесь $h = 2b$ — полная высота канала. Заменяя с помощью (73б) максимальную скорость на среднюю, получаем известную формулу Дарси

$$\Delta p = -\lambda\,\frac{l}{h}\,\rho\,\frac{u_{\text{ср}}^2}{2}, \quad (75)$$

в которой коэффициент потерь на трение

$$\lambda = \frac{24}{\mathrm{R}_h} \quad (76)$$

выражается через число Рейнольдса, определяемое по средней скорости и высоте канала

$$\mathrm{R}_h = \frac{\rho u_{\text{ср}} h}{\mu}. \quad (77)$$

Знак минус в формуле (75) указывает на то, что давление вдоль канала убывает.

Вычислив с помощью (73а) значение поперечного градиента скорости у стенки ($y = b$), найдем из (71) напряжение трения у стенки

$$\tau_w = -\frac{2\mu u_0}{b} = -\frac{6\mu u_{ср}}{h} \tag{78}$$

или в безразмерном виде

$$c_f = \frac{\tau_w}{\rho \frac{u_{ср}^2}{2}} = -\frac{12\mu}{\rho u_{ср} h} = -\frac{12}{R_h}. \tag{79}$$

Величина c_f называется *коэффициентом поверхностного трения.* Значения τ_w и c_f можно определить и непосредственно из (75), если учесть, что сила разности давлений, действующая на столбик жидкости высотой h и длиной l, должна уравновешиваться силой трения, приложенной к стенкам [1]):

$$\tau_w 2l = \Delta p h.$$

Отсюда

$$\tau_w = \frac{1}{2}\Delta p \frac{h}{l} = -\frac{\lambda}{2}\rho\frac{u_{ср}^2}{2}, \tag{80}$$

т. е.

$$c_f = \frac{\lambda}{2}.$$

Дифференциальное уравнение (72а) описывает также слоистое течение между двумя параллельными стенками, из которых одна движется в своей плоскости со скоростью U, а другая неподвижна (течение Куэтта).

§ 9. Уравнение движения идеальной жидкости

Анализ уравнений движения Навье — Стокса, проделанный Прандтлем еще в 1904 г., показал, что в случае жидкости малой вязкости (вода, воздух и т. п.) при достаточно больших значениях числа Рейнольдса влияние вязкости сказывается лишь в тонком слое, прилегающем к поверхности обтекаемого тела, — пограничном слое [2]). Вне этого слоя роль вязкостных сил оказывается настолько малой, что соответствующими членами в уравнениях Навье — Стокса (26) или (27) можно пренебречь.

---

[1]) Профиль скорости в поперечном сечении стабилен и плотность жидкости неизменна, а следовательно, суммарное количество движения вдоль щели постоянно.

[2]) Подробнее о пограничном слое см. гл. VI.

В таком случае получим уравнения движения идеальной сжимаемой жидкости

$$\rho \frac{du}{dt} = X - \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \rho \frac{dv}{dt} = Y - \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \rho \frac{dw}{dt} = Z - \frac{\partial p}{\partial z}, \tag{81}$$

или

$$\rho \frac{d\boldsymbol{W}}{dt} = \boldsymbol{R} - \operatorname{grad} p. \tag{82}$$

Так как во многих случаях при этих условиях теплопередача существенно проявляется тоже лишь в пограничном слое, то в остальной части газового потока согласно уравнению энергии (50)

$$\rho \frac{di^*}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} \tag{83}$$

и, в частности, при установившемся движении

$$i^* = \text{const}. \tag{84}$$

Но в отсутствие трения и теплообмена в газе осуществляется идеальный адиабатический процесс, в связи с чем вместо уравнения энергий можно использовать уравнение идеальной адиабаты

$$\frac{p}{\rho^k} = \text{const}. \tag{85}$$

В случае, если жидкость является идеальной и несжимаемой ($\rho = \text{const}$), задача интегрирования уравнений движения (81) сильно упрощается. На это указал впервые еще Эйлер, чье имя носят уравнения движения (81). Аналитические методы решения уравнений движения идеальной жидкости получили большое развитие, и в настоящее время изучено множество случаев обтекания тел (крылья, решетки крыльев, тела осесимметричной формы, всевозможные каналы и т. п.). Из совокупности работ этого направления образовалось важное направление современной механики — классическая гидродинамика.

В сочетании с теорией пограничного слоя гидродинамика идеальной жидкости стала мощным средством решения задач аэродинамики самолета, гидродинамики корабля, механики движения жидкости по трубам и многих других.

Например, в случае обтекания тела плавной формы при больших значениях числа Рейнольдса пограничный слой настолько тонок, что распределение давлений по поверхности тела определяется в первом приближении из уравнений движения идеальной жидкости. Далее, как будет показано в гл. VI, по известному распределению давлений можно рассчитать пограничный слой и найти напряжения трения у поверхности. При необходимости можно во втором приближении рассчитать влияние

пограничного слоя на внешнее обтекание тела (за пределами слоя) и затем определить более точно напряжения трения. Но часто к расчету второго приближения не прибегают, так как первое приближение дает удовлетворительные результаты.

Особенно простой вид имеет решение уравнений движения (81) в случае безвихревого движения идеальной жидкости, когда завихренность равна нулю (см. выражения (2)), т. е.

$$\left.\begin{aligned} \omega_x &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) = 0, \\ \omega_y &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) = 0, \\ \omega_z &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{86}$$

Из условий (86) следует, что существует некоторая функция φ, частные производные которой по координатам x, y, z равны соответствующим компонентам скорости, т. е.

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Действительно, подставляя эти значения в (86), получаем тождества

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z\, \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y\, \partial z} \equiv 0 \quad \text{и т. д.}$$

Функцию φ принято называть *потенциалом скорости*, а безвихревое движение — *потенциальным*.

Заменим в левой части первого из уравнений (81) полную производную скорости суммой ее частных производных и прибавим к ней равную нулю сумму

$$v\frac{\partial v}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial x} - v\frac{\partial v}{\partial x} - w\frac{\partial w}{\partial x}.$$

Тогда это уравнение приводится к виду

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial W^2}{\partial x} - 2(v\omega_z - w\omega_y) = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{87а}$$

где $W = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$ — полная скорость течения жидкости.

Аналогичным путем можно преобразовать уравнения движения по остальным двум координатным осям:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial W^2}{\partial y} - 2(w\omega_x - u\omega_z) &= Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial W^2}{\partial z} - 2(u\omega_y - v\omega_x) &= Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{87б}$$

Система уравнений (87) называется уравнениями Ламба — Громеко. Если существуют потенциал скорости φ, потенциал

объемных сил ϑ

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=u,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=v,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial z}=w,$$
$$\frac{\partial\vartheta}{\partial x}=X,\quad \frac{\partial\vartheta}{\partial y}=Y,\quad \frac{\partial\vartheta}{\partial z}=Z,$$

а также некоторая функция $P(x, y, z, t)$, удовлетворяющая условиям

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},\quad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},\quad \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z};$$

то уравнения (87) записываются так:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial W^2}{\partial x}&=\frac{\partial\vartheta}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial x},\\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial W^2}{\partial y}&=\frac{\partial\vartheta}{\partial y}-\frac{\partial P}{\partial y},\\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial W^2}{\partial z}&=\frac{\partial\vartheta}{\partial z}-\frac{\partial P}{\partial z}.\end{aligned}\right\}\qquad(88)$$

Здесь использовано условие независимости смешанной производной от порядка дифференцирования

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\quad\text{и т. д.}$$

Если умножить первое из уравнений (88) на dx, второе — на dy, третье — на dz и затем почленно сложить их, то получим

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)dx+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)dy+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)dz\right]+$$
$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial W^2}{\partial x}dx+\frac{\partial W^2}{\partial y}dy+\frac{\partial W^2}{\partial z}dz\right]=$$
$$=\left[\frac{\partial\vartheta}{\partial x}dx+\frac{\partial\vartheta}{\partial y}dy+\frac{\partial\vartheta}{\partial z}dz\right]-\left[\frac{\partial P}{\partial x}dx+\frac{\partial P}{\partial y}dy+\frac{\partial P}{\partial z}dz\right].\qquad(89)$$

Каждая из квадратных скобок в этом выражении является полным дифференциалом, поэтому вместо (89) имеем

$$d\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)+d\left(\frac{W^2}{2}\right)+dP=d\vartheta.\qquad(90)$$

Это приводит нас к так называемому интегралу Лагранжа:

$$P+\frac{W^2}{2}+\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\vartheta+C(t),\qquad(90а)$$

где $C(t)$ — произвольная функция времени.

Так как по определению

$$P=\int\frac{dp}{\rho},\qquad(90б)$$

то интеграл Лагранжа можно представить в следующем виде:

$$\int \frac{dp}{\rho} + \frac{W^2}{2} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \vartheta + C(t). \qquad (90в)$$

В случае установившегося движения $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0,\ C(t) = \text{const}\right)$ имеем

$$\int \frac{dp}{\rho} + \frac{W^2}{2} = \vartheta + \text{const}.$$

Если жидкость баротропна, т. е. плотность является однозначной функцией от давления, то интеграл (90б) всегда может быть вычислен; при установившемся движении несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$) интеграл Лагранжа выглядит так:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{W^2}{2} = \vartheta + \text{const}.$$

Важной особенностью интеграла Лагранжа является то, что он справедлив во всем пространстве, заполненном жидкостью.

Если потенциала скорости не существует, т. е. движение является вихревым, то уравнения движения идеальной жидкости (81) также можно проинтегрировать, но только вдоль линии тока и при условии установившегося движения.

При установившемся движении элементарное перемещение частицы вдоль линии тока $ds = W\,dt$ или в проекциях на координатные оси x, y, z

$$dx = u\,dt, \quad dy = v\,dt, \quad dz = w\,dt.$$

Умножим теперь каждое из уравнений (81) на соответствующую проекцию элементарного перемещения вдоль линии тока и сложим эти три уравнения:

$$u\,du + v\,dv + w\,dw = \\ = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz - \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}dz\right).$$

Левая часть данного уравнения есть полный дифференциал от $(W^2/2)$. Если существует потенциал силовой функции ($d\vartheta = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$) и жидкость баротропна $\left(\frac{dp}{\rho} = dP\right)$, то это уравнение можно записать в виде

$$d\left(\frac{W^2}{2}\right) = d\vartheta - dP.$$

Интегрируя, приходим к известному интегралу Бернулли:

$$P + \frac{W^2}{2} = \vartheta + \text{const}$$

или

$$\int \frac{dp}{\rho} + \frac{W^2}{2} - \vartheta = \text{const}.$$

Если силовое поле обусловлено только земным притяжением и ось z направлена вертикально вверх, то проекции силы, действующей на единицу массы

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = -g = \frac{d\vartheta}{dz}.$$

В таком случае интеграл Бернулли принимает уже известную из гл. I форму

$$\int \frac{dp}{\rho} + \frac{W^2}{2} + gz = \text{const} \tag{91}$$

или для несжимаемой жидкости

$$\frac{p}{\rho} + \frac{W^2}{2} + gz = \text{const}. \tag{91a}$$

Напомним еще раз, что в отличие от интеграла Лагранжа интеграл Бернулли справедлив только вдоль линии тока, т. е. значение константы в правой части (91) для разных линий тока неодинаково. Лишь в случае *установившегося потенциального* течения интеграл Бернулли переходит в интеграл Лагранжа и делается пригодным для любой точки пространства.

§ 10. Плоские установившиеся движения идеальной сжимаемой жидкости

Плоские (двумерные) установившиеся движения идеальной сжимаемой жидкости описываются следующей системой дифференциальных уравнений:

Уравнениями движения

$$\left.\begin{aligned} \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x}, \\ \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial y} \end{aligned}\right\} \tag{92}$$

(здесь объемные силы опущены).

Уравнением неразрывности

$$\frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} = 0. \tag{93}$$

Уравнением идеального адиабатического процесса (вместо уравнения энергии)

$$\frac{p}{\rho^k} = \text{const}. \tag{94}$$

В несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$) уравнение (94) отпадает, а уравнение неразрывности упрощается:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \tag{95}$$

Если существует потенциал скорости φ, то

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = u, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = v. \tag{95а}$$

Подставляя (95а) в (95), получаем для потенциала скорости уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \tag{95б}$$

к решению которого и сводится задача о построении плоскопараллельного потенциального потока идеальной несжимаемой жидкости. При этом используется граничное условие непроницаемости для жидкости твердой границы обтекаемого тела $W_{nw} = 0$, т. е. равенство нулю около стенки нормальной к ней составляющей вектора скорости.

При движении вдоль линии тока частица жидкости за время dt проходит путь $dS = W\,dt$ или в проекциях на координатные оси $dx = u\,dt$, $dy = v\,dt$. Исключая отсюда время, получаем уравнение линии тока

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v},$$

или

$$u\,dy - v\,dx = 0. \tag{96}$$

Как известно из математики, если выполняется равенство

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x},$$

то левая часть уравнения (96) представляет собой полный дифференциал некоторой функции $\psi(x, y)$. Для потенциальных течений несжимаемой жидкости это условие, как следует из уравнения неразрывности (95), всегда выполняется.

Таким образом, дифференциальное уравнение линии тока можно записать следующим образом:

$$d\psi = u\,dy - v\,dx = 0,$$

или

$$\psi(x, y) = \text{const}. \tag{96а}$$

Функция ψ, значение которой вдоль линии тока сохраняется постоянным, называется *функцией тока.*

Составляющие скорости можно, согласно (96а), выразить как частные производные от функции тока

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{97}$$

Если подставить (97) в уравнение неразрывности (95), то оно обратится в тождество

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x\, \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y\, \partial x} = 0.$$

Физический смысл функции тока очень прост. Проведем в потоке две близкие линии тока через произвольные точки *1* и *2* (рис. 2.7). Нетрудно видеть, что объемный расход жидкости в плоском течении между соседними линиями тока равен

$$dV = u\,dy - v\,dx = d\psi.$$

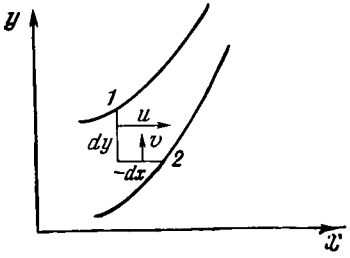


Рис. 2.7. К определению расхода жидкости между соседними линиями тока.

Таким образом,

$$V = \int_1^2 (u\,dy - v\,dx) = \psi(x_2, y_2) - \psi(x_1, y_1),$$

т. е. секундный объемный расход жидкости, протекающей между линиями тока *1* и *2*, равен разности значений функции тока на этих линиях.

Ввиду непроницаемости линий тока для жидкости значение функции тока на каждой линии тока постоянно.

Сравнивая (97) и (95а), мы видим, что семейства линий тока ($\psi = \text{const}$) и линий равного значения потенциала скорости ($\varphi = \text{const}$) образуют ортогональную сетку кривых.

Если известны два каких-либо плоскопараллельных установившихся течения идеальной несжимаемой жидкости, т. е. для каждого из этих течений известны величина и направление скорости в каждой точке плоскости, то можно построить новое результирующее течение, которое возникнет в результате *наложения* этих двух известных течений. Для этого в каждой точке плоскости нужно построить векторы скорости каждого из двух известных течений. Сумма этих векторов представляет собой вектор скорости нового результирующего течения.

Дадим простой способ графического определения линий тока результирующего потока по линиям тока накладываемых потоков. Для этого нанесем на чертеж линии тока двух каких-либо плоских потоков (рис. 2.8). Пересечение этих линий тока образует *сетку*. Линии тока надо вычертить так, чтобы стороны кле-

ток этой сетки изображали в определенном масштабе векторы скорости накладываемых потоков в данной точке [1]). Тогда для получения линий тока результирующего потока достаточно соединить между собой последовательные точки пересечения линий тока накладываемых потоков т. е. провести *диагональ* в каждой клетке сетки. Эти диагонали изображают в том же масштабе векторы скорости результирующего потока в соответствующих точках (рис. 2.8).

В случае сжимаемой жидкости (газа) уравнения (92)—(94) удобно преобразовать, вводя в них скорость звука $a = \sqrt{dp/d\rho}$. Для этого уравнение неразрывности (93) представим в виде

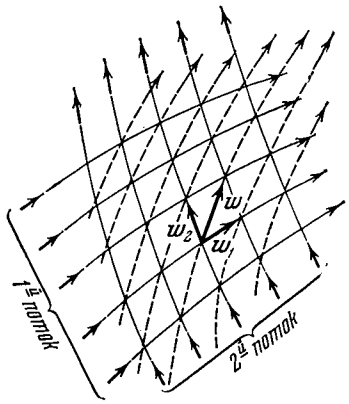
$$u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0 \tag{98}$$

и выразим градиенты плотности через градиенты давления и скорость звука:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{d\rho}{dp}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial p}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{d\rho}{dp}\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial p}{\partial y}. \tag{99}$$

Выражая в (99) градиенты давления с помощью (92) через скорости, получим

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = -\frac{\rho}{a^2}\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial \rho}{\partial y} = -\frac{\rho}{a^2}\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right). \tag{99а}$$



---- Результирующий поток

Рис. 2.8. Графическое сложение потоков.

Подставляя (99а) и (95а) в уравнение неразрывности (98), имеем

$$(a^2 - u^2)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - 2uv\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\,\partial y} + (a^2 - v^2)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \tag{100}$$

Мы вывели основное дифференциальное уравнение газовой динамики для плоского потенциального установившегося течения.

В частном случае малых скоростей движения газа ($u \ll a$, $v \ll a$) уравнение (100) переходит в уравнение Лапласа (95б), определяющее движение несжимаемой жидкости.

Для построения поля скоростей в сверхзвуковом потоке обычно решают уравнение (100) методом характеристик.

---

[1]) Легко показать, что для выполнения этого условия достаточно провести линии тока так, чтобы расход между любыми двумя соседними линиями тока для обоих потоков был одинаковым.

При исследовании обтекания тонких тел на малых углах атаки как в дозвуковом, так и сверхзвуковом потоке уравнение (100) решают методом малых возмущений (метод линеаризации).

§ 11. Циркуляция скорости

В установившемся плоском движении скорость частицы w является функцией двух координат

$$w = w(x, y).$$

Эта векторная функция определяет *поле скоростей.*

При исследовании различных случаев газовых течений, в частности обтекания крыльев и иных тел, полезно ввести некоторую величину, связанную с полем скоростей рассматриваемого течения и называемую *циркуляцией скорости.*

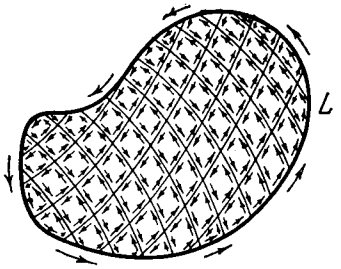


Рис. 2.9. К суммированию циркуляции.

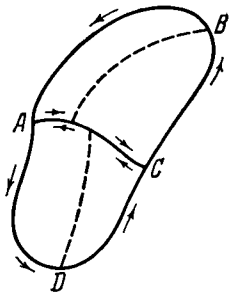


Рис. 2.10. К суммированию циркуляции.

Под циркуляцией скорости Г по замкнутому контуру L понимают интеграл

$$\oint_L w \cos(\widehat{w, l})\, dl. \qquad (101)$$

Здесь w — величина вектора скорости, $(\widehat{w, l})$ — угол между вектором скорости и направлением контура в данной точке, dl — элемент длины дуги контура. Знак $\oint$ показывает, что интеграл берется по замкнутому контуру.

Таким образом, циркуляция скорости представляет собой предел суммы произведений тангенциальной к контуру проекции скорости на соответствующий элемент длины контура. Положи-

тельным направлением обхода на контуре будем считать направление обхода против часовой стрелки [1]).

Из самого определения циркуляции следует, что циркуляция по любому контуру L может быть выражена в виде суммы циркуляций по отдельным клеткам произвольной сетки, покрывающей площадь, ограниченную контуром L (рис. 2.9). В самом деле, рассмотрим некоторый замкнутый контур $ADCBA$. Пусть произвольная дуга AC разбивает область, ограниченную этим контуром, на две *клетки*: $ACBA$ и $ADCA$ (рис. 2.10). Выразим циркуляцию для каждой клетки. Для первой клетки

$$\Gamma_{ACBA} = \oint\limits_{(ACBA)} w \cos(\widehat{w, l})\, dl.$$

При этом интеграл по контуру $ACBA$ может быть разбит на два интеграла: интеграл по дуге CBA и по дуге AC. Для второй клетки

$$\Gamma_{ADCA} = \oint\limits_{(ADCA)} w \cos(\widehat{w, l})\, dl.$$

Интеграл по этому контуру составляется из интегралов по дуге ADC и по дуге CA. Сумма циркуляций по контурам $ACBA$ и $ADCA$ равна сумме четырех интегралов, причем интеграл по дуге AC, входящий в первую циркуляцию, и интеграл по дуге CA, входящий во вторую циркуляцию, взаимно уничтожаются, ибо они представляют интеграл по одной и той же дуге, проходимой в противоположных направлениях (подынтегральная функция в обоих интегралах одна и та же). Поэтому сумма циркуляций по контурам $ACBA$ и $ADCA$ равна сумме интегралов по дугам CBA и ADC, т. е. интегралу по контуру $ADCBA$. Итак,

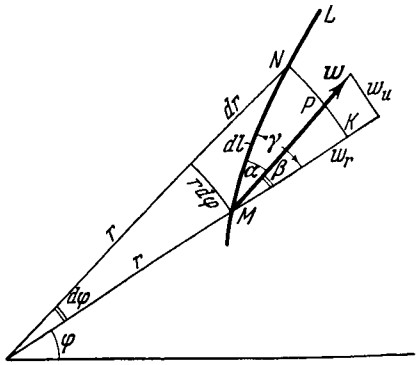


Рис. 2.11. К определению связи между вихрем и циркуляцией.

$$\Gamma_{ACBA} + \Gamma_{ADCA} = \Gamma_{ADCBA}.$$

Таким образом, *сумма циркуляций по контурам двух смежных клеток равна циркуляции по всему контуру L.* Если каждую из клеток $ABCA$ и $ACDA$ разбить еще на две клетки, то для каждой из них можно полностью повторить приведенное выше рассуждение. Продолжая процесс разбиения дальше и повторяя

[1]) Иногда удобнее считать положительным противоположное направление.

каждый раз такие же рассуждения, мы приходим к высказанному выше положению о суммировании циркуляций (см. рис. 2.9).

Выразим теперь подынтегральное выражение в формуле (101) с помощью полярных координат (r, φ). Для этого рассмотрим рис. 2.11. Пусть $M(r, \varphi)$ — точка произвольного контура L, $dl = MN$ — элемент дуги этого контура, w — вектор скорости в точке M с проекциями w_r и w_u. Обозначим угол $(\widehat{w, l}) = \angle NMP = \alpha$, $\angle PMK = \beta$, $\angle NMK = \gamma$. Из рисунка видно, что

$$\alpha = \gamma - \beta.$$

Поэтому

$$\cos(\widehat{w, l}) = \cos\alpha = \cos(\gamma - \beta) = \cos\gamma\cos\beta + \sin\gamma\sin\beta.$$

Но из малого криволинейного прямоугольного треугольника MNK получаем

$$\cos\gamma = \frac{MK}{MN} = \frac{dr}{dl}, \qquad \sin\gamma = \frac{NK}{MN} = r\,\frac{d\varphi}{dl}.$$

Далее, очевидно, что

$$\cos\beta = \frac{w_r}{w}, \qquad \sin\beta = \frac{w_u}{w}.$$

Подставляя эти значения в выражение для $\cos(\widehat{w, l})$, найдем

$$\cos(\widehat{w, l}) = \frac{dr}{dl}\,\frac{w_r}{w} + \frac{r\,d\varphi}{dl}\,\frac{w_u}{w}.$$

Тогда подынтегральное выражение в формуле (101) принимает вид

$$w\cos(\widehat{w, l})\,dl = w\,dl\,\frac{w_r\,dr + w_u r\,d\varphi}{w\,dl} = w_r\,dr + w_u r\,d\varphi.$$

Таким образом, в полярных координатах получаем следующую формулу для циркуляции скорости:

$$\Gamma = \oint_L w_r\,dr + w_u r\,d\varphi. \tag{102}$$

Элементарное перемещение частицы жидкости или газа в общем случае, как указывалось, состоит из трех частей: поступательного перемещения, вращения и деформации частицы. Движения, в которых вращение частиц отсутствует, называются *безвихревыми*, движения с вращением — *вихревыми*.

При движении жидкой частицы $MKNR$ (рис. 2.12) с вращением форма ее в общем случае изменяется. Пусть через малый промежуток времени $d\tau$ грани MR и MK займут положение MR' и MK'. Перемещение частицы в целом, определяемое поступательной скоростью, в данном вопросе не имеет значения. Опре-

делим угловые скорости вращения точек R и K относительно точки M. Если составляющие скорости в точке M обозначить через w_r и w_u, то составляющие скорости в точке K равны

$$w_r + \frac{\partial w_r}{\partial r}\Delta r \quad \text{и} \quad w_u + \frac{\partial w_u}{\partial r}\Delta r,$$

а составляющие относительной скорости точки K (относительно точки M) $\frac{\partial w_r}{\partial r}\Delta r$ и $\frac{\partial w_u}{\partial r}\Delta r$. Очевидно, вращение точки K относительно точки M создает только вторая из этих составляющих, так как первая перпендикулярна к направлению вращения (направлена по MK). Таким образом, окружная скорость вращения точки K относительно M, за счет которой проделывается путь KK', равна $\frac{\partial w_u}{\partial r}\Delta r$, а относительная угловая скорость вращения точки K около центра M равна

$$\omega_K = \frac{\frac{\partial w_u}{\partial r}\Delta r}{\Delta r} = \frac{\partial w_u}{\partial r}.$$

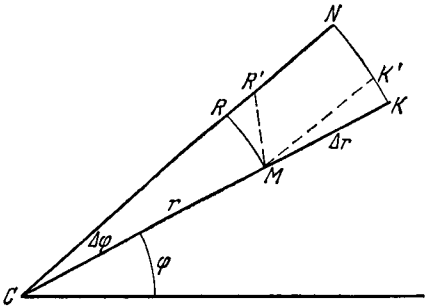


Рис. 2.12. К определению завихренности в полярных координатах.

Составляющие скорости в точке R равны (рис. 2.13)

$$w_r + \frac{\partial w_r}{\partial \varphi}\Delta\varphi \quad \text{и} \quad w_u + \frac{\partial w_u}{\partial \varphi}\Delta\varphi.$$

Вращение точки R относительно M происходит по направлению, перпендикулярному к хорде MR. В силу малости угла $\Delta\varphi$ можно считать хорду MR перпендикулярной к радиусу CM, а длину хорды MR — равной длине дуги MR. Тогда направление вращения точки R относительно M параллельно радиусу CM. Найдем проекции обеих составляющих скорости точки R по направлению вращения. Из рис. 2.13 видно, что эти проекции соответственно равны

$$-\left(w_r + \frac{\partial w_r}{\partial \varphi}\Delta\varphi\right)\cos\Delta\varphi \quad \text{и} \quad \left(w_u + \frac{\partial w_u}{\partial \varphi}\Delta\varphi\right)\sin\Delta\varphi.$$

Знак минус у первой проекции принят потому, что эта проекция создает вращение по часовой стрелке, а положительным считается вращение против часовой стрелки. Считая приближенно $\cos\Delta\varphi \approx 1$ и $\sin\Delta\varphi \approx \Delta\varphi$ и отбрасывая член второго порядка малости, имеющий множителем $(\Delta\varphi)^2$, получим следующие значения рассматриваемых проекций:

$$-\left(w_r + \frac{\partial w_r}{\partial \varphi}\Delta\varphi\right) \quad \text{и} \quad w_u\Delta\varphi.$$

Чтобы получить окружную скорость вращения точки R относительно M, из полученных выражений нужно, очевидно, вычесть проекции составляющих скорости в самой точке M на то же направление CM. Но проекция w_r на CM равна самой величине w_r, а проекция w_u на CM равна нулю. Таким образом, окружная скорость точки R относительно M, которая обусловливает перемещение RR' (рис. 2.12), выражается так:

$$w_u \Delta\varphi - \left(w_r + \frac{\partial w_r}{\partial \varphi}\Delta\varphi - w_r\right).$$

Тогда относительная угловая скорость вращения точки R около центра M равна

$$\omega_R = \frac{w_u \Delta\varphi - \frac{\partial w_r}{\partial \varphi}\Delta\varphi}{MR} = \frac{w_u}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial w_r}{\partial \varphi},$$

так как

$$MR \approx r\,\Delta\varphi.$$

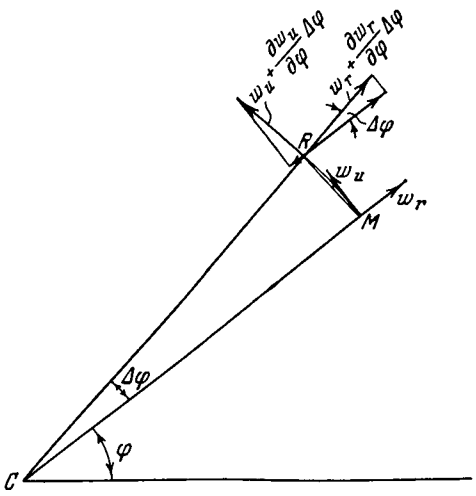


Рис. 2.13. К определению приращений скорости в полярных координатах.

За среднюю угловую скорость частицы относительно точки M принимают среднюю арифметическую угловых скоростей *крайних* точек R и K:

$$\omega_{ср} = \frac{\omega_R + \omega_K}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_u}{\partial r} + \frac{w_u}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial w_r}{\partial \varphi}\right).$$

Это выражение удобно преобразовать к виду

$$\omega_{ср} = \frac{1}{2r}\left(r\frac{\partial w_u}{\partial r} + w_u - \frac{\partial w_r}{\partial \varphi}\right) = \frac{1}{2r}\left[\frac{\partial (w_u r)}{\partial r} - \frac{\partial w_r}{\partial \varphi}\right]. \quad (103)$$

Формула (103) определяет величину *завихренности* или *вихря скорости* (см. § 1) *в полярных координатах.*

В гидродинамике доказывается, что движения идеальной жидкости, бывшие безвихревыми в некоторый момент времени, всегда остаются безвихревыми. Если же движение было в некоторый момент вихревым, оно всегда будет вихревым. Возникновение вихрей должно быть вызвано специальными причинами, например вязкостью газа или жидкости.

Условием отсутствия вихрей является

$$\omega_c = 0 \quad (104)$$

или в полярных координатах

$$\frac{\partial (w_u r)}{\partial r} - \frac{\partial w_r}{\partial \varphi} = 0. \qquad (105)$$

Чтобы выяснить связь между понятиями вихря и циркуляции скорости, преобразуем подынтегральное выражение в формуле (102). Рассмотрим элементарную площадку $MKNR$, ограниченную координатными линиями MK, MR и RN, KN (рис. 2.14).

Составим подынтегральное выражение для циркуляции по контуру $MKNR$. Очевидно, получим

$$d\Gamma = w_r\, dr + \left(w_u + \frac{\partial w_u}{\partial r} dr\right)(r + dr)\, d\varphi - \left(w_r + \frac{\partial w_r}{\partial \varphi} d\varphi\right) dr - w_u r\, d\varphi.$$

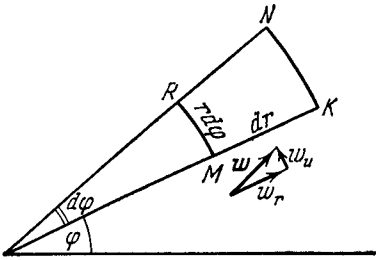


Рис. 2.14. К определению циркуляции в полярных координатах.

Здесь w_r — тангенциальная проекция скорости на отрезке $MK = dr$, $w_u + \frac{\partial w_u}{\partial r} dr$ — тангенциальная проекция скорости на дуге $KN = (r + dr)\, d\varphi$, $w_r + \frac{\partial w_r}{\partial \varphi} d\varphi$ — тангенциальная проекция скорости на отрезке $NR = dr$ и w_u — тангенциальная проекция скорости на дуге $RM = r\, d\varphi$.

У последних двух членов принят знак минус потому, что положительное направление скорости на отрезке NR и на дуге RM противоположно направлению обхода по контуру $MKNR$. Производя выкладки и отбрасывая член третьего порядка малости $\frac{\partial w_u}{\partial r} (dr)^2 d\varphi$, получим

$$d\Gamma = \left(r \frac{\partial w_u}{\partial r} + w_u - \frac{\partial w_r}{\partial \varphi}\right) dr\, d\varphi = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial (r w_u)}{\partial r} - \frac{\partial w_r}{\partial \varphi}\right] r\, d\varphi\, dr.$$

Сравнивая это выражение с выражением (103) для вихря скорости ω и замечая, что произведение $r\, d\varphi\, dr$ представляет собой элементарную площадь dF, охватываемую контуром $MKNR$, запишем последнее выражение в такой форме:

$$d\Gamma = 2\omega\, dF.$$

Если теперь разбить площадь, охватываемую произвольным контуром L, на элементарные площадки, образованные сеткой координатных линий (рис. 2.15), и использовать правило

суммирования циркуляций, то получим

$$\Gamma_L = \sum d\Gamma_i = \sum 2\omega_i\, dF_i,$$

или, если перейти от сумм к интегралам:

$$\Gamma = \oint_L w_r\, dr + w_u r\, d\varphi = 2 \int_{(F)} \omega\, dF. \qquad (106)$$

Полученный результат и выражает искомую связь между вихрем скорости и циркуляцией [1]). Если величина вихря одинакова во всех точках: $\omega = \omega_0 = \text{const}$, то

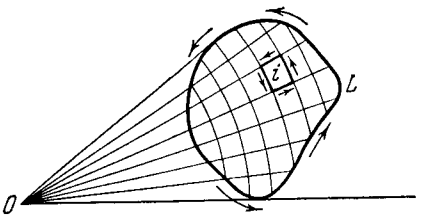


Рис. 2.15. К суммированию циркуляции и завихренности.

$$\Gamma = 2\omega_0 \int_{(F)} dF = 2\omega_0 F,$$

т. е. в этом случае *величина циркуляции по некоторому контуру равна удвоенному произведению величины вихря на площадь, охватываемую контуром.*

Рассмотрим установившееся движение жидкости. Циркуляция Γ при установившемся движении сохраняет постоянное значение по всякому неподвижному замкнутому контуру [2]).

Предположим далее, что движение является установившимся и безвихревым ($\omega = 0$). В этом случае циркуляция по любому неподвижному контуру равна нулю. Последнее заключение, однако, верно лишь в том случае, если внутри неподвижного контура находятся только частицы жидкости, совершающие безвихревое движение. Циркуляция по неподвижному замкнутому контуру отлична от нуля, если контур охватывает область, внутри которой находится, например, одиночный вихрь [3]) или обтекаемое тело [4]).

---

[1]) Формула (106) выражает для плоского движения теорему Стокса (см., например, Фабрикант Н. Я., Аэродинамика, «Наука», М., 1964).

[2]) В гидродинамике доказывается для весьма широкого класса практически важных движений, что и в случае неустановившегося движения циркуляция по замкнутому контуру постоянна, однако в этом случае рассматривается так называемый жидкий контур, т. е. контур, состоящий из одних и тех же частиц. Последнее утверждение называется *теоремой Томпсона.* Из этой теоремы следует, что если некоторая масса жидкости в начальный момент времени имела безвихревое движение или покоилась, то и впредь в этой части жидкости не возникнет вихрей, о чем уже упоминалось выше (см. также учебник Н. Я. Фабриканта, цитированный выше, в первой сноске).

[3]) Об одиночном вихре см. ниже — пример 2.

[4]) Как будет показано ниже, при обтекании тела вязкой жидкостью в потоке образуются вихри.

Таким образом, мы видим, что возникновение циркуляции всегда связано с образованием вихрей в потоке жидкости или газа.

Рассмотрим теперь некоторые простейшие примеры движения жидкости, которые позволяют выяснить физический смысл понятий вихря и циркуляции.

Пример 1. **Вращение жидкости как твердого тела.** Пусть жидкость вращается как твердое тело вокруг начала координат с постоянной угловой скоростью ε. Тогда величина скорости в каждой точке $w = \varepsilon r$, где r — расстояние точки от начала координат. Найдем радиальную и окружную составляющие скорости. Ясно, что в данном случае

$$w_r = 0, \qquad w_u = w = \varepsilon r.$$

Составим выражение для вихря скорости. По формуле (103)

$$\omega = \frac{1}{2r}\left[\frac{\partial (rw_u)}{\partial r} - \frac{\partial w_r}{\partial \varphi}\right] = \frac{1}{2r}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\varepsilon) = \varepsilon.$$

Величина вихря скорости во всех точках одинакова и равна постоянной угловой скорости вращения частиц жидкости. Этот результат был заранее очевиден, ибо он непосредственно следует из самого определения вихря.

Найдем теперь величину циркуляции по контуру, окружающему начало координат. В качестве такого контура возьмем окружность радиуса r. Из формулы (102) получим

$$\Gamma = \oint_L w_r\, dr + w_u r\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \varepsilon r r\, d\varphi = 2\pi\varepsilon r^2.$$

Величина циркуляции пропорциональна квадрату радиуса. Разделив ее на площадь круга F, найдем

$$\frac{\Gamma}{F} = \frac{2\pi\varepsilon r^2}{\pi r^2} = 2\varepsilon = 2\omega,$$

или

$$\Gamma = 2\omega F.$$

Это равенство иллюстрирует теорему Стокса (106); в данном случае величина циркуляции по окружности равна удвоенному произведению постоянной величины вихря ω на площадь круга.

Пример 2. **Безвихревое циркуляционное движение.** В качестве второго примера рассмотрим такое плоское движение жидкости, когда частицы жидкости движутся по концентрическим окружностям вокруг начала координат со скоростями, обратно пропорциональными расстояниям частиц от начала координат, так что скорость в каждой точке $w = c/r$, где c — постоянная. Здесь радиальная и окружная составляющие скорости равны $w_r = 0$, $w_u = w = c/r$. Найдем величину вихря:

$$\omega = \frac{1}{2r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rw_u) - \frac{\partial w_r}{\partial \varphi}\right] = \frac{1}{2r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{c}{r}\right) = 0.$$

Таким образом, величина вихря во всех точках, кроме начала координат, равна нулю. В начале координат ($r = 0$) скорость равна бесконечности, т. е. начало координат математически является особой точкой. Физически такое движение возможно лишь вне некоторого ядра конечного радиуса r_0. Ядро может состоять из твердого тела или из жидкости той же или другой

плотности. Вне ядра течение является безвихревым. На поверхности ядра скорость имеет некоторую конечную величину $w_0 = c/r_0$.

Найдем значение циркуляции по окружности с центром в начале координат:

$$\Gamma = \int_0^{2\pi} \frac{c}{r} r\, d\varphi = 2\pi c = \text{const};$$

в данном случае циркуляция по любой окружности есть величина постоянная. Так как $w = c/r$, то можно записать

$$\Gamma = 2\pi c = 2\pi r w = \text{const} = 2\pi r_0 w_0,$$

где r_0 — радиус ядра, а w_0 — скорость на его поверхности [1]). Таким образом, скорость в любой точке

$$w = \frac{r_0 w_0}{r} = \frac{\Gamma}{2\pi r}.$$

Рассмотренное движение жидкости носит название *безвихревого циркуляционного движения*, а соответствующее ему поле скоростей называется *полем скоростей плоского изолированного вихря*. Если считать жидкость несжимаемой, то давление

$$p = \text{const} - \frac{\rho w^2}{2} = \text{const} - \rho \frac{r_0^2 w_0^2}{2r^2}$$

убывает с уменьшением расстояния от начала координат, т. е. от центра вихря.

При $r_0 \to 0$ ядро переходит в точку. Эту точку называют *точечным изолированным вихрем*. Поэтому безвихревое циркуляционное движение можно связать с точечным вихрем; последний индуцирует в каждой точке плоскости скорость, перпендикулярную к отрезку, соединяющему эту точку с вихрем, и равную по величине $\Gamma/2\pi r$, где r — длина указанного отрезка, т. е. индуцирует безвихревое циркуляционное движение с циркуляцией Γ.

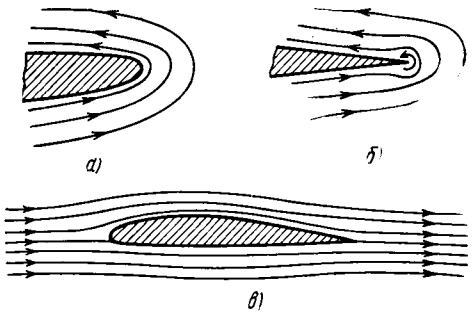


Рис. 2.16. Схема обтекания закругленных и острых кромок.

Отметим теперь одно важное явление, относящееся к обтеканию тел потоком идеальной жидкости. Если контур обтекаемого тела имеет участок, представляющий собой дугу с малым радиусом закругления (рис. 2.16, *а*), то часть потока вблизи этой дуги походит на циркуляционное движение: скорость увеличивается по мере приближения к контуру дуги и при достаточно малых радиусах закругления может стать очень большой. При некотором (достаточно малом) радиусе

[1]) Как нетрудно показать, циркуляция по любому замкнутому контуру, не охватывающему ядро, равна нулю, т. е. ядро играет роль вихря.

закругления скорость должна быть столь велика, что давление (вычисляемое по уравнению Бернулли для несжимаемой жидкости) должно стать отрицательным, что невозможно. Когда радиус закругления равен нулю, т. е. когда жидкость обтекает острую кромку (угловую точку контура рис. 2.16,б), скорость обращается в бесконечность точно так же, как в центре вихря, индуцирующего циркуляционное движение. Но бесконечно большая скорость требует нереального бесконечного отрицательного давления. Поэтому бесконечно большая скорость невозможна, следовательно, невозможно безотрывное обтекание острых кромок, и происходит срыв струй [1]). Единственно возможным случаем безотрывного обтекания тела с острой кромкой (крылового профиля) потоком идеальной несжимаемой жидкости является случай, изображенный на рис. 2.16, *в*; здесь острая кромка лежит на линии раздела потоков, обтекающих верхнюю и нижнюю стороны профиля, и струи жидкости плавно сходят с контура тела.

В реальной жидкости, обладающей вязкостью, при срыве струй из завихренных частиц пограничного слоя образуется вихрь, который как бы «округляет» острую кромку, и струи жидкости обтекают уже не острую кромку, а этот вихрь.

§ 12. Примеры плоских потенциальных установившихся течений несжимаемой жидкости

Определим потенциальную функцию $\varphi(x, y)$ и функцию тока $\psi(x, y)$ для некоторых простейших случаев безвихревого течения несжимаемой жидкости.

Пример 1. **Плоскопараллельный поток.** Выберем систему координат так, чтобы ось x была направлена по скорости потока W_1; тогда (рис. 2.17)

$$u = W_1, \qquad v = 0.$$

Подставляя значения этих составляющих скорости в (95а) и (97), получим после интегрирования следующие выражения для потенциальной функции и функции тока:

$$\varphi = W_1 x, \tag{107}$$

$$\psi = W_1 y, \tag{108}$$

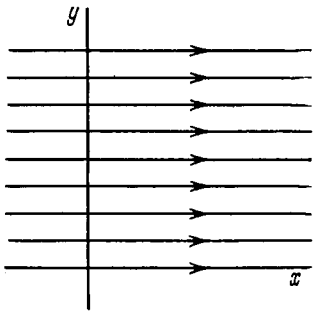


Рис. 2.17. Плоскопараллельный поток.

Пример 2. **Источник и сток.** В случае источника жидкость движется по прямым, исходящим во все стороны из начала координат как из центра. Мощность источника характеризуется секундным расходом жидкости Q, зная который легко определить зависимость радиальной

[1]) В дальнейшем будет показано, что в сверхзвуковом потоке газа возможно безотрывное обтекание острой кромки; при этом скорость нигде не обращается в бесконечность.

и окружной составляющих скорости потока от расстояния r до центра источника (рис. 2.18):

$$w = w_r = \frac{Q}{2\pi r}, \qquad w_u = 0. \tag{109}$$

Соответственно

$$u = w_r \cos\theta = \frac{Q}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2}$$

и

$$v = w_r \sin\theta = \frac{Q}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Производя интегрирование согласно (96а), находим уравнение линий тока

$$\psi = \frac{Q}{2\pi}\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \frac{Q}{2\pi}\theta, \tag{110}$$

которые представляют собой семейство лучей, исходящих из начала координат.

В полярной системе координат выражение для производной потенциальной функции (95а) записывается так:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = w_r, \tag{111}$$

где w_r определяется формулой (109). В соответствии с этим получаем после интегрирования следующее выражение для потенциала:

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi}\ln r. \tag{112}$$

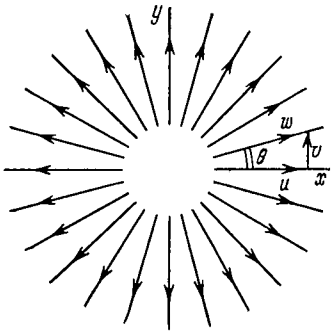


Рис. 2.18. Источник на плоскости.

Линии равного потенциала представляют собой семейство концентрических окружностей, центры которых совпадают с центром источника.

В приведенных выше выражениях расход Q можно рассматривать как алгебраическую величину. Положительные значения Q соответствуют источнику, отрицательные — стоку. В последнем случае жидкость движется к центру по тем же линиям тока, что и в случае источника.

Пример 3. **Точечный вихрь.** В предыдущем параграфе было показано, что в случае точечного вихря

$$w_u = \frac{\Gamma}{2\pi r}, \qquad w_r = 0.$$

В соответствии с этими значениями проекций скорости, индуцируемой вихрем интенсивности Γ, получаем следующие выражения искомых функций:

$$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi}\theta, \qquad \psi = \frac{\Gamma}{2\pi}\ln r.$$

Выше уже указывался (см. § 10) графический способ построения некоторого результирующего течения, образующегося в результате наложения двух известных плоскопараллельных установившихся течений идеальной несжимаемой жидкости. Эту же операцию можно провести и аналитическим путем, используя известное свойство линейных функций (к которым принад-

лежат и потенциальная функция (95б), и функция тока), что сумма любого числа частных решений так же является решением.

Таким образом, если имеются два течения с потенциалами φ_1 и φ_2 и с функциями тока ψ_1 и ψ_2, то соответствующие функции результирующего течения будут равны их суммам:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2, \qquad \psi = \psi_1 + \psi_2.$$

В качестве примера рассмотрим поток, который получается от наложения источника и стока равных расходов.

Поместим начало координат посредине расстояния между центром источника и центром стока и за ось x примем прямую, соединяющую эти центры. Пусть абсцисса источника $-\varepsilon$, абсцисса стока $+\varepsilon$. При таком расположении системы координат потенциал скоростей и функция тока для источника и стока определяются, согласно (110) и (112), следующими формулами:

$$\varphi_{ист} = \frac{Q}{2\pi} \ln \sqrt{(x+\varepsilon)^2 + y^2},$$

$$\psi_{ист} = \frac{Q}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x+\varepsilon}$$

и

$$\varphi_{ст} = -\frac{Q}{2\pi} \ln \sqrt{(x-\varepsilon)^2 + y^2},$$

$$\psi_{ст} = -\frac{Q}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x-\varepsilon}.$$

Для результирующего потока

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi} \left[\ln \sqrt{(x+\varepsilon)^2 + y^2} - \ln \sqrt{(x-\varepsilon)^2 + y^2}\right],$$

$$\psi = \frac{Q}{2\pi} \left[\operatorname{arctg} \frac{y}{x+\varepsilon} - \operatorname{arctg} \frac{y}{x-\varepsilon}\right].$$

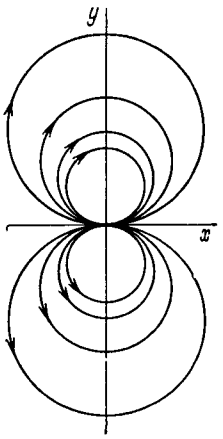


Рис. 2.19. Линии тока плоского диполя.

Рассмотрим предельный случай, когда расстояние между центрами источника и стока, равное 2ε, стремится к нулевому значению и одновременно расход каждого из них Q стремится к бесконечности, но так, что произведение $2\varepsilon Q$ остается все время постоянной величиной

$$2\varepsilon Q = M = \text{const}.$$

Поток, который получается в пределе, называется *диполем*, постоянная M, его характеризующая, — *моментом диполя*, а ось x (в данном случае) — *осью диполя*. Вычислим потенциал скоростей и функцию тока диполя.

По определению имеем

$$\varphi_{дип} = \frac{M}{2\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln \sqrt{(x+\varepsilon)^2 + y^2} - \ln \sqrt{(x-\varepsilon)^2 + y^2}}{2\varepsilon},$$

$$\psi_{дип} = \frac{M}{2\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\operatorname{arctg} \frac{y}{x+\varepsilon} - \operatorname{arctg} \frac{y}{x-\varepsilon}}{2\varepsilon}.$$

Заметим, что знаменатель каждого из выражений, которые стоят здесь под знаком предела, можно рассматривать как приращение независимого переменного, а числитель — как соответствующее приращение функции. В соответствии

с этим по определению производной мы можем написать:

$$\varphi_{\text{дип}} = \frac{M}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\left(\ln \sqrt{x^2+y^2}\right),$$
$$\psi_{\text{дип}} = \frac{M}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right). \tag{113}$$

После дифференцирования получаем

$$\varphi_{\text{дип}} = \frac{M}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2} = \frac{M}{2\pi}\frac{\cos\theta}{r},$$
$$\psi_{\text{дип}} = -\frac{M}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{M}{2\pi}\frac{\sin\theta}{r}. \tag{114}$$

Анализ выражения (114) показывает, что линии тока суть окружности, проходящие через начало координат и имеющие центры на оси y. Жидкость по указанным окружностям вытекает из начала координат и вновь в него втекает. Очевидно, что в этом случае расход жидкости через произвольный замкнутый контур, окружающий диполь, равен нулю (рис. 2.19).

Согласно (114) линии равного потенциала также являются окружностями, проходящими через начало координат, но с центрами, расположенными на оси x.

Глава III

СКАЧКИ УПЛОТНЕНИЯ

§ 1. Прямые скачки уплотнения

В случае полета тела со сверхзвуковой скоростью ($w_н > a_н$) перед ним возникает ударная волна (скачок уплотнения), вызывающая значительное сопротивление.

Если рассматриваемое тело представляет собой летательный аппарат, снабженный воздушно-реактивным двигателем, то в сверхзвуковой струе воздуха, которая тормозится при втекании в двигатель, также происходит скачок уплотнения. Принципиально можно представить себе и плавный переход сверхзвукового потока в дозвуковой, осуществляемый посредством специального обратного сопла, установленного на входе в двигатель. При этом не было бы потерь полного давления. Однако торможение сверхзвукового потока таким способом осуществить в полной мере не удается, в силу чего приходится мириться с существованием ударных волн и наличием соответствующего волнового сопротивления.

Многочисленные опыты показывают, что всякое повышение давления, возникшее в каком-либо месте газовой среды, распространяется в ней с большой скоростью во все стороны в виде волн давления. Слабые волны давления движутся со скоростью звука; их изучением занимаются в акустике. Сильные волны давления, как видно из опытов, распространяются со скоростями, значительно большими, чем скорость звука. Основная особенность сильной волны давления заключается в том, что фронт волны очень узок, в связи с чем состояние газа (давление, плотность, температура) изменяется скачком [1]).

Можно дать следующее качественное объяснение этому факту. Пусть в некоторой области (рис. 3.1) произошло изменение давления, и вначале волна получила плавную форму *1AB2*. На отдельных бесконечно узких участках волны величина давления возрастает незначительно, поэтому распространение такой волны происходит со скоростью звука. В области высоких сжатий (*A*) наблюдаются, естественно, более высокие температуры,

[1]) Приближенная теория гласит, что толщина области, в которой умещается сильная волна давления, должна быть порядка длины свободного пробега молекул.

чем в области малых сжатий (B), в силу чего «вершина» волны давления движется быстрее, чем ее «подножие». В сторону меньших давлений (вправо) волна распространяется как волна сжатия, в сторону высоких давлений (влево) — как волна разрежения. Таким образом, если даже вначале волна сжатия является пологой, то со временем она делается все круче и круче; процесс этот остановится и волна приобретет устойчивую форму только в тот момент, когда фронт волны станет совсем плоским ($1'-2'$). Итак, волны сжатия распространяются как скачки давления (разрывы), в связи с чем их называют *ударными волнами.*

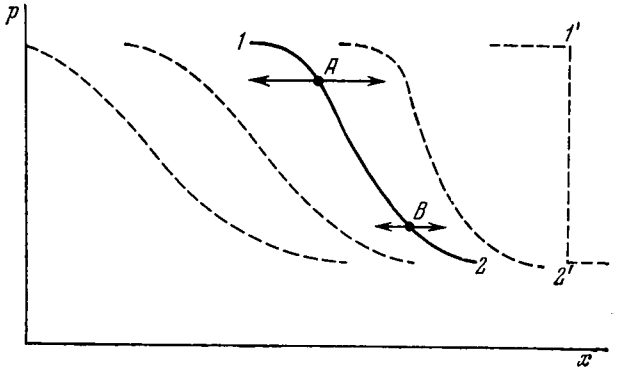


Рис. 3.1. Схема образования волн сжатия и разрежения.

По тем же причинам, т. е. вследствие того, что в точке A волна разрежения движется быстрее, чем в точке B, фронт волны разрежения со временем растягивается. Иначе говоря, возникновение волны разрежения не должно приводить к образованию скачков разрежения.

Ниже будет показано, что в адиабатических (без подвода тепла) скачках сжатия происходит увеличение энтропии газа, а в адиабатических скачках разрежения, если бы они существовали, энтропия должна была бы уменьшаться. Этим доказывается законность существования адиабатических скачков давления и одновременно невозможность возникновения адиабатических скачков разрежения (как известно из термодинамики, в конечной замкнутой системе энтропия убывать не может). В полном соответствии с этим находится тот известный факт, что наблюдаемые иногда в действительности скачки разрежения (скачок конденсации, фронт пламени) получаются только при подводе тепла в область скачка, т. е. в таких условиях, когда и при скачке разрежения энтропия газа растет. Нужно заметить, что возникновение скачков разрежения при подводе тепла к газу

отнюдь не противоречит процессу, изображенному на рис. 3.1. В самом деле, если в области пониженных давлений B за счет подвода тепла получается температура выше, чем в области высоких давлений A, то скорость звука у подножия волны выше, чем у вершины; в связи с этим со временем должна усилиться крутизна фронта волны разрежения, что приведет к образованию теплового скачка разрежения.

Остановимся теперь на теории ударных волн. Представим себе, например, что под влиянием резкого смещения поршня (рис. 3.2) в трубе возникла и распространяется слева направо сильная волна сжатия. Пусть за бесконечно малый промежуток

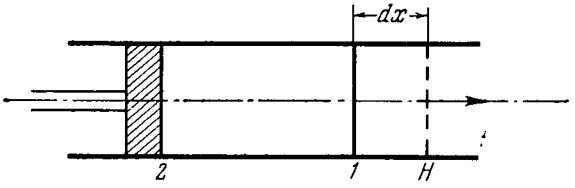


Рис. 3.2. Схема распространения ударной волны.

времени фронт волны переместился на расстояние dx. Это значит, что в области $1 - H$ за время $d\tau$ произошло повышение давления от величины $p_н$ (давление невозмущенного газа) до величины p_1 (давление за фронтом волны сжатия), в соответствии с чем в области $1 - H$ должно наблюдаться повышение плотности газа на величину

$$\Delta\rho = \rho_1 - \rho_н.$$

Однако это может произойти только в том случае, если некоторое количество газа, равное

$$dG = (\rho_1 - \rho_н) F\, dx,$$

перетечет из объема $1 - 2$ в объем $H - 1$ (здесь F — площадь поперечного сечения). Итак, при распространении сильной волны сжатия газ позади фронта волны должен находиться в движении, следуя в том же направлении, что и волна. Из уравнения неразрывности можно определить скорость газового потока ($w_п$):

$$dG = \rho_1 F w_п\, d\tau,$$

откуда

$$w_п = \frac{\rho_1 - \rho_н}{\rho_1} \frac{dx}{d\tau}. \qquad (1)$$

Но производная пути по времени есть не что иное, как скорость движения волны:

$$w_в = \frac{dx}{d\tau}. \qquad (2)$$

Отсюда получаем равенство, связывающее *скорость распространения волны со скоростью газа, движущегося за фронтом волны* в том же направлении:

$$w_в = w_п \frac{\rho_1}{\rho_1 - \rho_н}. \tag{3}$$

Применяя к области $H - 1$ уравнение количества движения, можно получить другое соотношение между теми же величинами. В самом деле, за время $d\tau$ масса газа, заполнявшая объем $H - 1$, $\Delta G_н = \rho_н F\, dx$ перейдет из состояния покоя в движение со скоростью $w_п$. Соответствующее изменение количества движения должно быть равно импульсу силы, вызванной разностью давлений, действующих в сечениях *1* и *H*:

$$(p_1 - p_н)\, F\, d\tau = \rho_н F\, (w_п - 0)\, dx,$$

откуда скорость волны равна

$$w_в = \frac{dx}{d\tau} = \frac{p_1 - p_н}{\rho_н w_п}. \tag{4}$$

Подставив выражение для скорости газа (3) в уравнение (4), получим скорость распространения волны сжатия как функцию прироста давления и прироста плотности

$$w_в = \sqrt{\frac{p_1 - p_н}{\rho_1 - \rho_н} \frac{\rho_1}{\rho_н}}. \tag{5}$$

В случае *слабой волны*, когда повышение давления (и плотности) получается незначительным: $\rho_1 \approx \rho_н$, $p_1 \approx p_н$, имеем

$$w_в = a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}. \tag{6}$$

Слабая волна является не чем иным, как *акустической волной*, поэтому выражение (6) представляет собой определение *скорости звука*.

Из сравнения равенств (5) и (6) видно, что *скорость распространения сильной волны сжатия всегда выше скорости звука*. Обычно распространение звука сопровождается столь незначительным изменением состояния газа, что энтропию можно считать практически постоянной, т. е. полагать, что при этом имеет место идеальный адиабатический процесс $p/\rho^k = \text{const}$. Но в этом случае

$$\frac{dp}{d\rho} = k \frac{p}{\rho},$$

или на основании уравнения состояния для идеального газа

$$\frac{dp}{d\rho} = kRT.$$

Отсюда получается уже применявшаяся выше формула [(34) гл. I] для скорости звука в идеальном газе

$$a = \sqrt{\frac{kp}{\rho}} = \sqrt{kRT}.$$

Подставляя выражение (5) в равенство (3), найдем формулу для *скорости газового потока за фронтом волны сжатия*

$$w_{\text{п}} = \sqrt{\frac{(p_1 - p_{\text{н}})(\rho_1 - \rho_{\text{н}})}{\rho_1 \rho_{\text{н}}}}. \qquad (7)$$

Нетрудно видеть, что с ослаблением волны сжатия скорость движения газа падает. В случае слабой звуковой волны газ за ее фронтом неподвижен, так как согласно равенству (7) при $p_1 \approx p_{\text{н}}$ и $\rho_1 \approx \rho_{\text{н}}$ получается $w_{\text{п}} \approx 0$. В действительности, как известно, звуковая волна состоит из правильно чередующихся областей сжатия и разрежения, причем газ за ее фронтом находится в очень слабом колебательном движении; средняя поступательная скорость газовых частиц равна нулю.

Заметим теперь, что вследствие истечения газа из области *1 — 2* (рис. 3.2), расположенной позади фронта сильной волны сжатия, давление в этой области со временем убывает. По указанной причине ударная волна, возникшая в неподвижном газе под влиянием единичного сжатия (например, взрыва или смещения поршня), всегда более или менее быстро затухает. И только в том случае, когда источник возмущения не прекращает своего действия, можно получить незатухающую ударную волну. Обнаруженное выше свойство ударных волн распространяться со скоростью, большей, чем скорость звука, приводит к тому, что незатухающие ударные волны образуются перед телом только в тех случаях, когда движение происходит со сверхзвуковой скоростью. Например, при движении в газе с постоянной сверхзвуковой скоростью твердого тела перед последним образуется ударная волна постоянной интенсивности, которая движется с той же скоростью, что и тело.

Исследуем более детально изменение состояния газа, получающееся при прохождении в нем стационарной ударной волны. Обратимся сначала к простейшей схеме, когда фронт волны составляет прямой угол с направлением распространения. Такая волна называется *прямой ударной волной.*

Ради удобств расчета выгодно обратить движение, т. е. остановить фронт волны, направив поток навстречу волне со скоростью, равной скорости распространения волны (рис. 3.3):

$$w_{\text{н}} = -w_{\text{в}};$$

тогда относительная скорость газа за фронтом волны

$$w_1 = w_п - w_в. \tag{8}$$

Остановив ударную волну встречным потоком газа, мы получили некоторую неподвижную поверхность, пересекая которую все элементарные струйки газа одновременно претерпевают скачкообразные изменения скорости движения, плотности, давления и температуры. По этой причине ударную волну называют также *скачком уплотнения*. Скачки уплотнения удобно наблюдать в сверхзвуковых аэродинамических трубах при обтекании воздухом неподвижных твердых тел.

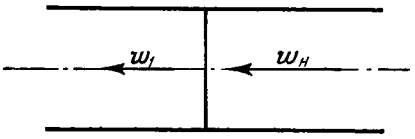


Рис. 3.3. Схема прямого скачка уплотнения.

Примем площадь поперечного сечения струи равной единице ($F = 1$ м^2) и, пользуясь известными уравнениями газовой динамики, найдем связь между значениями скорости газа до и после скачка уплотнения (рис. 3.3). Уравнение неразрывности дает

$$\rho_1 w_1 = \rho_н w_н.$$

Пренебрегая силой трения ввиду малой толщины скачка уплотнения из уравнения количества движения получим

$$p_1 - p_н = \rho_н w_н (w_н - w_1).$$

Сопоставляя эти уравнения, найдем

$$p_1 - p_н = \rho_н w_н^2 - \rho_1 w_1^2 = w_1 w_н (\rho_1 - \rho_н), \tag{9}$$

откуда

$$\frac{p_1 - p_н}{\rho_1 - \rho_н} = w_1 w_н. \tag{10}$$

Если извне тепло не подводится, то полное теплосодержание газа остается постоянным. Теплоотдачей можно пренебречь, так как боковые поверхности струи в области скачка ничтожно малы. Поэтому из уравнения теплосодержания следует

$$i^* = c_p T^* = c_p T_н + \frac{w_н^2}{2} = c_p T_1 + \frac{w_1^2}{2} = \text{const};$$

здесь T^* — температура торможения. Из этого уравнения имеем

$$T_н = T^* - \frac{w_н^2}{2c}.$$

Согласно уравнению состояния газа

$$\frac{p_1}{\rho_1 T_1} = \frac{p_н}{\rho_н T_н} = R,$$

следовательно,

$$T^* = \frac{p^*_н}{R\rho^*_н} = \frac{p^*_1}{R\rho^*_1};$$

здесь p^*_1, $p^*_н$ — полное давление соответственно за и перед скачком уплотнения, ρ^*_1, $\rho^*_н$ — плотность газа, соответствующая полному торможению, в тех же сечениях. Следовательно,

$$p_н = \rho_н\left(\frac{p^*_н}{\rho^*_н} - \frac{Rw^2_н}{2c_p}\right).$$

Из термодинамики известно соотношение

$$R = c_p\frac{k-1}{k},$$

поэтому

$$p_н = \rho_н\left(\frac{p^*_н}{\rho^*_н} - \frac{k-1}{2k}w^2_н\right). \tag{11}$$

По аналогии получаем

$$p_1 = \rho_1\left(\frac{p^*_н}{\rho^*_н} - \frac{k-1}{2k}w^2_1\right). \tag{12}$$

Вычтя равенство (11) из равенства (12), имеем

$$p_1 - p_н = (\rho_1 - \rho_н)\frac{p^*_н}{\rho^*_н} + \frac{k-1}{2k}(\rho_н w^2_н - \rho_1 w^2_1),$$

откуда на основании (9) выводится

$$\frac{p_1 - p_н}{\rho_1 - \rho_н} = \frac{2k}{k+1}\frac{p^*_н}{\rho^*_н}. \tag{13}$$

Используя выражение [(41) гл. I] для критической скорости

$$a^2_{кр} = \frac{2k}{k+1}RT^* = \frac{2k}{k+1}\frac{p^*_н}{\rho^*_н},$$

найдем

$$\frac{p_1 - p_н}{\rho_1 - \rho_н} = \frac{2k}{k+1}RT^* = a^2_{кр}. \tag{14}$$

Наконец, сопоставляя равенства (10) и (14), приходим к следующему простому соотношению между величинами скорости

газа до и после прямого скачка:

$$w_н w_1 = a_{кр}^2. \tag{15}$$

Это кинематическое соотношение можно привести к безразмерному виду, вводя приведенные скорости ($\lambda = w/a_{кр}$):

$$\frac{w_н}{a_{кр}} \frac{w_1}{a_{кр}} = 1,$$

или

$$\lambda_н \lambda_1 = 1, \tag{16}$$

откуда видно, что *в прямом скачке уплотнения всегда сверхзвуковая скорость газа переходит в дозвуковую*, так как если $w_н > a_{кр}$, то $w_1 < a_{кр}$. Одновременно можно заметить, что чем больше значение приведенной скорости перед скачком, тем меньше ее значение после скачка, т. е. чем выше начальная скорость $w_н$, тем сильнее получается скачок уплотнения. С уменьшением начальной скорости скачок ослабевает и исчезает совсем при $w_н \approx w_1 \approx a$.

Установим теперь связь между давлением и плотностью газа в скачке уплотнения. Для этого сложим равенства (11) и (12):

$$p_1 + p_н = (\rho_1 + \rho_н) \frac{p_н^*}{\rho_н^*} - \frac{k-1}{2k} (\rho_н w_н^2 + \rho_1 w_1^2).$$

Из уравнения неразрывности следует

$$\rho_н w_н^2 + \rho_1 w_1^2 = w_н w_1 (\rho_1 + \rho_н).$$

Подставляя этот результат в предыдущее выражение, имеем

$$\frac{p_1 + p_н}{\rho_1 + \rho_н} = \frac{p_н^*}{\rho_н^*} - \frac{k-1}{2k} w_н w_1,$$

откуда на основании (10) и (13) получаем основное динамическое соотношение

$$\frac{p_1 - p_н}{\rho_1 - \rho_н} = k \frac{p_1 + p_н}{\rho_1 + \rho_н}, \tag{17}$$

согласно которому отношение прироста давления к приросту плотности в скачке уплотнения пропорционально отношению среднего давления к средней плотности. Отсюда, между прочим, следует уже известный нам результат, что при бесконечно малом скачке уплотнения ($p_1 \approx p_н$, $\rho_1 \approx \rho_н$) получается

$$\frac{dp}{d\rho} = k \frac{p}{\rho},$$

Это подтверждает сделанное выше предположение, *что звуковой волне отвечает идеальный адиабатический процесс.*

Рассмотрим более детально термодинамический процесс изменения состояния газа в скачке уплотнения. Для этого представим динамическое соотношение (17) в несколько ином виде:

$$\frac{\rho_1+\rho_н}{\rho_1-\rho_н}=k\,\frac{p_1+p_н}{p_1-p_н}.$$

Разделим числитель и знаменатель в левой части этого равенства на величину $\rho_н$, а в правой на p_1:

$$\frac{\frac{\rho_1}{\rho_н}+1}{\frac{\rho_1}{\rho_н}-1}=k\,\frac{1+\frac{p_н}{p_1}}{1-\frac{p_н}{p_1}}.$$

Отсюда после несложных преобразований получается зависимость отношения $\rho_1/\rho_н$ от отношения $p_1/p_н$ в скачке уплотнения, носящая название *ударной адиабаты*:

$$\frac{\rho_1}{\rho_н}=\frac{\frac{k+1}{k-1}+\frac{p_н}{p_1}}{1+\frac{k+1}{k-1}\frac{p_н}{p_1}}. \tag{18}$$

Существенной особенностью ударной адиабаты является то, что при неограниченном возрастании давления в скачке уплотнения ($p_1\to\infty$) увеличение плотности имеет определенный предел, который как это видно из уравнения (18), равен

$$\left|\frac{\rho_1}{\rho_н}\right|_{max}=\frac{k+1}{k-1}. \tag{19}$$

Например, для воздуха ($k=1{,}4$) увеличение плотности в скачке уплотнения не может быть более шестикратного:

$$\left|\frac{\rho_1}{\rho_н}\right|_{max}=6.$$

При скачке уплотнения в газе с меньшим значением показателя k может наблюдаться более сильное, но также ограниченное возрастание плотности; например, при $k=1{,}2$

$$\left|\frac{\rho_1}{\rho_н}\right|_{max}=11.$$

Следует подчеркнуть, что в отличие от ударной адиабаты в случае идеального адиабатического процесса, в котором имеет место зависимость

$$\frac{\rho_1}{\rho_н}=\left(\frac{p_1}{p_н}\right)^{1/k},$$

увеличение плотности с ростом давления является неограниченным ($\rho_1\to\infty$ при $p_1\to\infty$).

Сравнение адиабат ударной и идеальной произведено на рис. 3.4.

Изменение давления и плотности газа в прямом скачке уплотнения можно представить в функции числа M перед скачком. Из уравнения количества движения с учетом формулы для скорости звука [(34) гл. I] и уравнения неразрывности найдем

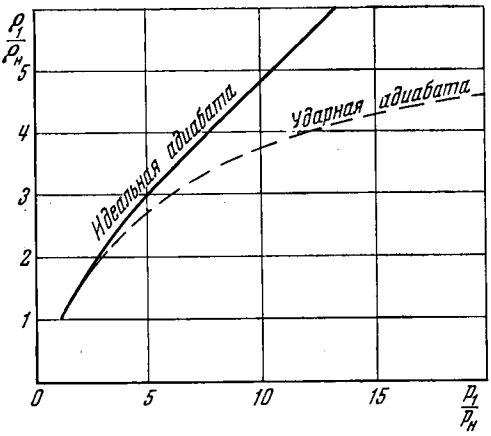


Рис. 3.4. Сравнение ударной и идеальной адиабат.

$$\frac{p_1}{p_н} - 1 = kM_н^2\left(1 - \frac{\rho_н}{\rho_1}\right).$$

Если с помощью ударной адиабаты заменить отношение $\rho_н/\rho_1$ его выражением через отношение $p_1/p_н$, то после некоторых преобразований получим

$$\frac{p_1}{p_н} = \frac{2k}{k+1}M_н^2 - \frac{k-1}{k+1}. \quad (20)$$

В частности, для воздуха ($k = 1{,}4$)

$$\frac{p_1}{p_н} = \frac{7}{6}M_н^2 - \frac{1}{6}.$$

Можно выразить отношение давлений в прямом скачке уплотнения и в функции приведенной скорости перед скачком $\lambda_н$; для этого следует в равенстве (20) произвести замену переменных по формуле (45) из гл. I:

$$\frac{p_1}{p_н} = \frac{\lambda_н^2 - \frac{k-1}{k+1}}{1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_н^2}. \quad (21)$$

При уменьшении скорости набегающего потока до критического значения ($M_н = 1$) скачок уплотнения вырождается ($p_1 = p_н$). В дозвуковом потоке, как уже указывалось выше, скачки уплотнения невозможны. В прямом скачке уплотнения повышение давления зависит только от значения числа M в набегающем потоке, причем с возрастанием M давление увеличивается неограниченно ($p_1 \to \infty$ при $M_н \to \infty$). Подставив результат (20) в уравнение (18), нетрудно вывести зависимость плотности за прямым скачком уплотнения непосредственно от числа M или с помощью (45) гл. I от приведенной скорости $\lambda_н$ в набегающем

потоке:

$$\frac{\rho_1}{\rho_н} = \frac{w_н}{w_1} = \frac{\frac{k+1}{k-1}}{1 + \frac{1}{M_н^2}\frac{2}{k-1}} = \lambda_н^2. \qquad (22)$$

Из равенства (22) еще раз заключаем, что даже при бесконечно большом значении числа M плотность газа увеличивается в скачке не более чем в $\frac{k+1}{k-1}$ раз.

Определим потери полного давления в прямом скачке уплотнения.

Полное давление в струе после скачка, очевидно, равно

$$p_1^* = \frac{p_1}{\left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_1^2\right)^{\frac{k}{k-1}}} = \frac{p_1}{\left(1 - \frac{k-1}{k+1}\frac{1}{\lambda_н^2}\right)^{\frac{k}{k-1}}}. \qquad (23)$$

Полное давление перед скачком равно

$$p_н^* = \frac{p_н}{\left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_н^2\right)^{\frac{k}{k-1}}},$$

поэтому коэффициент сохранения полного давления, учитывающий волновое сопротивление (потери в прямом скачке), можно представить, если использовать выражение (21), следующим образом:

$$\sigma_п = \frac{p_1^*}{p_н^*} = \lambda_н^2\left[\frac{1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_н^2}{1 - \frac{k-1}{k+1}\frac{1}{\lambda_н^2}}\right]^{\frac{1}{k-1}}. \qquad (24)$$

При скорости полета, равной или меньшей скорости звука ($\lambda_н \leqslant 1$), волновое сопротивление исчезает

$$\sigma_п = 1;$$

формула (24) справедлива только при $\lambda_н \geqslant 1$. При бесконечно большой скорости полета $\left(\lambda_н^2 = \frac{k+1}{k-1}\right)$ получается $\sigma_п = 0$, однако при этом потери не поглотят всего первоначального запаса полного давления, так как другой множитель $(p_н^*)$ стремится к бесконечности. Кривая зависимости $\sigma_п = f(\lambda)$ для воздуха ($k = 1{,}4$) приведена на рис. 3.5.

Из равенств (73) гл. I и (22) можно получить формулу для определения плотности заторможенного газа после прямого

скачка уплотнения

$$\frac{\rho_1^*}{\rho_н} = \frac{\lambda_н^2}{\left(1 - \frac{k-1}{k+1}\frac{1}{\lambda_н^2}\right)^{\frac{1}{k-1}}}. \qquad (25)$$

В заключение заметим, что выведенное выше равенство (10) и уравнение неразрывности дают возможность представить скорость потока перед скачком как следующую функцию возрастания давления и плотности:

$$w_н = \sqrt{\frac{p_1 - p_н}{\rho_1 - \rho_н}\frac{\rho_1}{\rho_н}}.$$

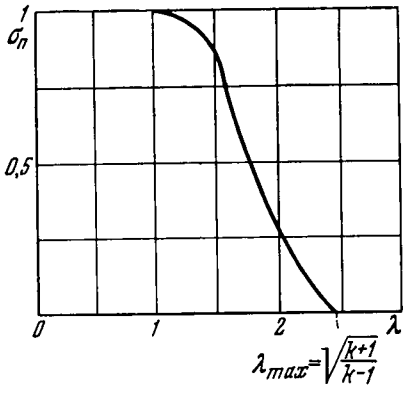


Рис. 3.5. Зависимость коэффициента сохранения полного давления за прямым скачком уплотнения от приведенной скорости.

Но это есть уже известное выражение (5) для скорости распространения прямой ударной волны в неподвижном воздухе. Такой результат является вполне естественным, так как для того, чтобы остановить ударную волну, следует направить газовый поток навстречу волне и сообщить ему скорость, равную скорости волны.

Подставляя выражение (22) в соотношение (15), получаем новую формулу для относительной скорости газа за фронтом скачка

$$w_1 = a_{кр}\sqrt{\frac{\rho_н}{\rho_1}}.$$

Отсюда с помощью (19) обнаруживается, что относительная приведенная скорость газа за скачком не может быть меньше некоторого определенного значения:

$$|\lambda_{1\,min}| = \sqrt{\frac{k-1}{k+1}}. \qquad (26)$$

Если перейти от неподвижного скачка уплотнения к скачку, распространяющемуся в неподвижном газе со скоростью $w_в = -w_н$, то с помощью полученных равенств можно определить абсолютную скорость, которую приобретает газ в следе за скачком:

$$w_п = w_н - w_1 = a_{кр}\left(\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_н}} - \sqrt{\frac{\rho_н}{\rho_1}}\right) \qquad (27)$$

или на основании (22)

$$w_{\text{п}} = w_{\text{н}}\left(1 - \frac{1}{\lambda_{\text{н}}^2}\right) \tag{28}$$

и в безразмерном виде

$$\lambda_{\text{п}} = \lambda_{\text{н}} - \frac{1}{\lambda_{\text{н}}}. \tag{29}$$

Согласно закону (16) за ударной волной скорость газа относительно фронта волны получается всегда меньше звуковой ($\lambda_1 < 1$); на основании этого становится ясным, почему всякое изменение давления, происходящее позади волны и распространяющееся со скоростью звука, может догнать фронт волны. Именно по этой причине описанное выше (рис. 3.2) падение давления в следе за ударной волной, возникшей в неподвижном газе, приводит к ослаблению перепада давления на фронте волны и вызывает ее затухание.

§ 2. Косые скачки уплотнения

Характерной особенностью прямого скачка уплотнения, как можно было заметить, является то, что, пересекая его фронт, газовый поток не меняет своего направления, причем фронт прямого скачка располагается нормально к направлению потока. Помимо прямых скачков уплотнения, встречаются и так называемые *косые скачки уплотнения*. Фронт косого скачка располагается наклонно к направлению потока (рис. 3.6). Косой скачок получается в том случае, когда, пересекая фронт скачка, газовый поток должен изменить свое направление. Например, при сверхзвуковом обтекании газом клиновидного тела (рис. 3.7, *а*), которое отклоняет поток от начального направления на угол ω, перед телом образуются косые скачки уплотнения, сходящиеся на его носике (рис. 3.8). Косой скачок уплотнения образуется и при обтекании конуса (рис. 3.7, *б*). Поверхностью разрыва в этом случае будет конус с вершиной в носике обтекаемого тела. Таким образом, если до встречи струи с фронтом косого скачка вектор скорости $w_{\text{н}}$ составлял с ним угол α (рис. 3.6), то после пересечения фронта струя отклоняется на угол ω,

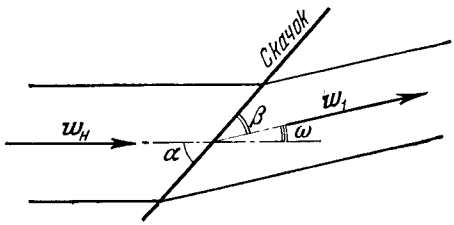


Рис. 3.6. Схема косого скачка уплотнения.

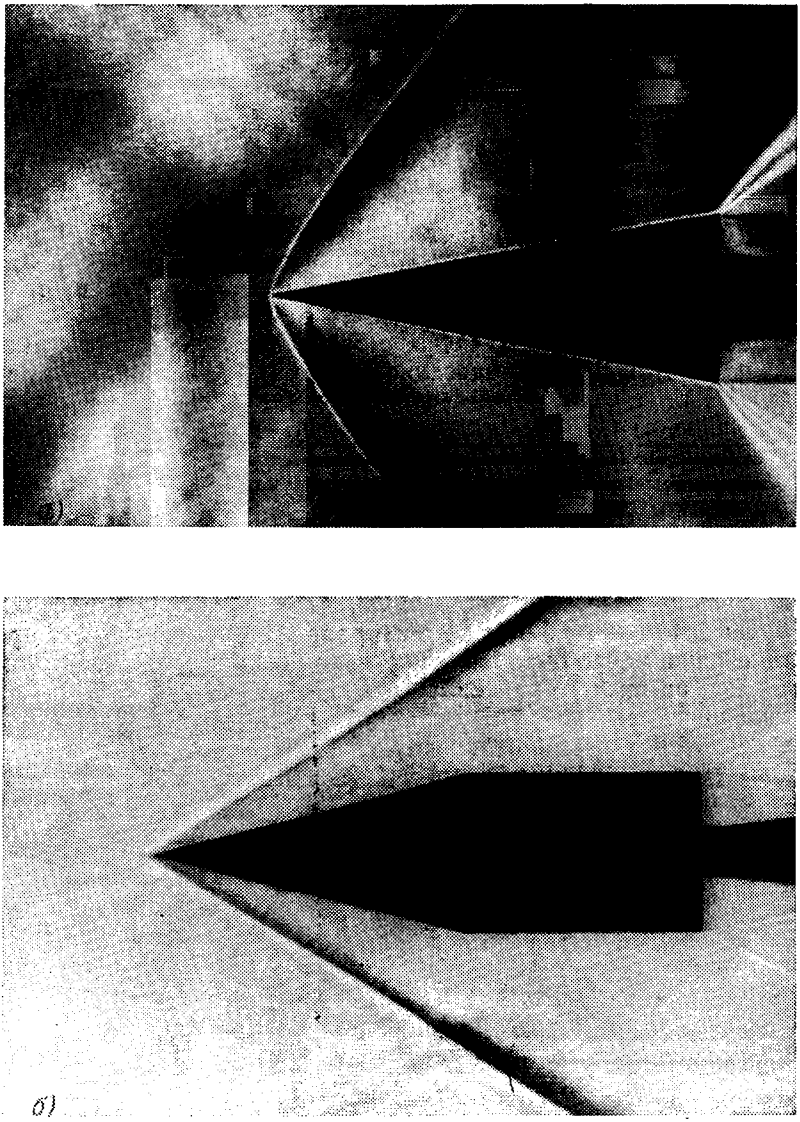


Рис. 3.7. Теневые фотографии косых скачков уплотнения при сверхзвуковом обтекании клина (*а*) и конуса (*б*).

а угол между вектором скорости и фронтом скачка становится равным

$$\beta = \alpha - \omega. \tag{30}$$

Разложим вектор скорости на два компонента, из которых один нормален (w_n), а другой параллелен (w_t) фронту скачка

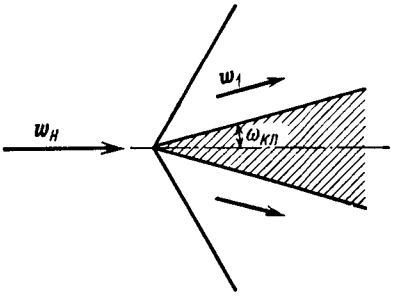


Рис. 3.8. Образование косого скачка уплотнения при обтекании клина.

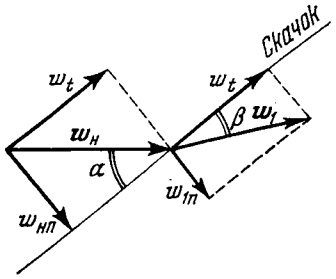


Рис. 3.9. Кинематика потока при косом скачке уплотнения.

(рис. 3.9). Нетрудно показать, что при пересечении струей фронта косого скачка нормальный компонент скорости уменьшается:

$$w_{1n} < w_{нп}, \tag{31}$$

а тангенциальный компонент остается неизменным:

$$w_t = \text{const}. \tag{32}$$

Обратимся для этого к рис. 3.10, на котором нанесен прямоугольный контур $H11H$, охватывающий часть фронта косого скачка. Боковые участки контура ($H - 1$) проведены перпендикулярно к фронту, а торцовые ($H - H$ и $1 - 1$) — параллельно ему. Составим баланс количества движения для этого контура сначала в проекции на направление фронта. Ввиду того что силы давления на обеих боковых поверхностях ($H - 1$) одинаковы, соответствующая проекция количества движения остается неизменной, откуда и вытекает условие (32), указывающее на постоянство тангенциального компонента скорости. Если теперь составить уравнение количества движения в направлении $H - 1$, перпендикулярном к фронту, то ввиду того, что на поверхностях $H - H$ и $1 - 1$ действуют

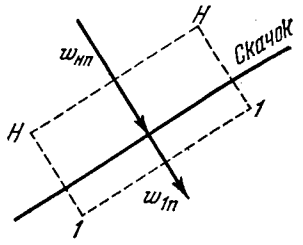


Рис. 3.10. Расчетная схема косого скачка уплотнения.

существенно разные давления, получится

$$p_1 - p_н = \rho_н w_{нn}(w_{нn} - w_{1n}).$$

Давление в скачке уплотнения возрастает ($p_1 > p_н$), откуда следует условие (31), согласно которому нормальный компонент скорости в скачке уменьшается.

Приведенные соображения показывают, что *косой скачок уплотнения сводится к прямому скачку, который сносится вместе с потоком газа вбок со скоростью* w_t. В отличие от прямого скачка в косом скачке претерпевает разрыв (скачкообразное уменьшение) не полная скорость газового потока, а только ее компонент, нормальный к фронту скачка. В самом деле, согласно уравнению неразрывности,

$$\rho_1 w_{1n} = \rho_н w_{нn}.$$

Уравнение теплосодержания в адиабатическом случае (нет теплообмена) дает

$$T^* = T_н + \frac{w_н^2}{2c_p} = T_1 + \frac{w_1^2}{2c_p}.$$

Далее мы имеем

$$w_н^2 = w_{нn}^2 + w_t^2,\ w_1^2 = w_{1n}^2 + w_t^2,$$

откуда

$$c_pT^* - \frac{w_t^2}{2} = c_pT_н + \frac{w_{нn}^2}{2} = c_pT_1 + \frac{w_{1n}^2}{2}.$$

Введем в рассмотрение *температуру частичного торможения*, понимая под этим следующую величину:

$$T_n^* = T_н + \frac{w_{нn}^2}{2c_p} = T_1 + \frac{w_{1n}^2}{2c_p} = T^* - \frac{w_t^2}{2c_p},$$

т. е. температуру, которая получится не при полном торможении потока, а лишь при погашении нормальных к фронту скачка компонентов скорости. Как показывает это равенство, температура частичного торможения имеет одно и то же значение перед и за фронтом скачка, что вытекает из условия $w_t = \text{const}$. Если присоединить к этим уравнениям еще и уравнение состояния

$$\frac{p_1}{\rho_1 T_1} = \frac{p_н}{\rho_н T_н},$$

то окажется, как и следовало ожидать, что косой скачок уплотнения описывается в точности теми же соотношениями, что и прямой скачок уплотнения (см. стр. 122), с той лишь разницей,

что в первом случае вместо полной скорости фигурируют нормальные к фронту скачка ее компоненты, а вместо температуры полного торможения T^* — температура частичного торможения T_n^*.

По этой причине, не повторяя всех выкладок, которые были подробно приведены в теории прямого скачка, можем написать сразу ряд готовых выражений. Например, вместо равенства (10) имеем

$$\frac{p_1 - p_н}{\rho_1 - \rho_н} = w_{1n} w_{нn}. \tag{33}$$

Соответственно вместо равенства (14) получим

$$\frac{p_1 - p_н}{\rho_1 - \rho_н} = \frac{2k}{k+1} RT_n^* = a_{кр\,n}^2. \tag{34}$$

Здесь $a_{кр\,n}$ — условная критическая скорость, которая соответствует температуре частичного торможения T_n^*. Основное кинематическое соотношение для косого скачка принимает следующую форму:

$$w_{1n} w_{нn} = a_{кр\,n}^2. \tag{35}$$

Равенство (34) дает возможность связать полную критическую скорость с условной критической скоростью:

$$a_{кр}^2 = \frac{2k}{k+1} RT^* = a_{кр\,n}^2 + \frac{k-1}{k+1} w_t^2. \tag{36}$$

Пользуясь этим выражением, можно получить вторую часто встречающуюся форму основного кинематического соотношения для косого скачка уплотнения:

$$w_{1n} w_{нn} + \frac{k-1}{k+1} w_t^2 = a_{кр}^2. \tag{37}$$

В частном случае, когда косой скачок переходит в прямой ($\alpha = 90°$, $w_t = 0$, $w_{нn} = w_н$, $w_{1n} = w_1$), из соотношений (35) и (37) получаем уже известное соотношение (15). Переходя к приведенным скоростям $\lambda_{1n} = w_{1n}/a_{кр\,n}$, $\lambda_{нn} = w_{нn}/a_{кр\,n}$, получим в случае косого скачка безразмерное кинематическое соотношение

$$\lambda_{1n} \lambda_{нn} = 1, \tag{38}$$

которое соответствует равенству (16) для прямого скачка. Естественно, что динамическое соотношение (17) пригодно для косого скачка уплотнения без каких-либо изменений, и ударная адиабата применима к косому скачку уплотнения точно в таком же виде (18), как и к прямому скачку.

Изменения статического и полного давлений в косом скачке находятся соответственно из зависимостей (21) и (24), если

вставить в эти формулы вместо $\lambda_н$ величину $\lambda_{нп}$:

$$\frac{p_1}{p_н} = \frac{\lambda_{нп}^2 - \frac{k-1}{k+1}}{1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_{нп}^2}, \tag{39}$$

$$\sigma_к = \frac{p_1^*}{p_н^*} = \lambda_{нп}^2 \left[\frac{1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_{нп}^2}{1 - \frac{k-1}{k+1}\frac{1}{\lambda_{нп}^2}}\right]^{\frac{1}{k-1}}, \tag{40}$$

причем приведенная скорость $\lambda_{нп}$ подсчитана здесь по нормальной составляющей скорости и условной критической скорости:

$$\lambda_{нп} = \frac{w_{нп}}{a_{крп}}.$$

Можно, разумеется, получить и такие формулы, которые связывают изменение давления в косом скачке непосредственно с абсолютной скоростью набегающего потока.

Согласно уравнению импульсов прирост статического давления в косом скачке равен

$$p_1 - p_н = \rho_н w_{нп}(w_{нп} - w_{1n}).$$

Подставляя уравнение (37) в это уравнение импульсов и переходя к приведенным скоростям λ, получим

$$p_1 - p_н = \rho_н a_{кр}^2 \left(\lambda_н^2 \sin^2\alpha - 1 + \frac{k-1}{k+1}\lambda_н^2 \cos^2\alpha\right).$$

Однако из (42) и (41) гл. I следует

$$\frac{\rho_н}{p_н} = \frac{\frac{2k}{k+1}}{1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_н^2}\frac{1}{a_{кр}^2}.$$

Отсюда отношение значений статического давления за и перед косым скачком уплотнения равно

$$\frac{p_1}{p_н} = \frac{\lambda_н^2\left[1 - \frac{4k}{(k+1)^2}\cos^2\alpha\right] - \frac{k-1}{k+1}}{1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_н^2}. \tag{41}$$

Выражение (41) при увеличении угла косого скачка до значения $\alpha = 90°$ переходит в известное выражение (21), полученное выше для прямого скачка. Вычислим значение $p_1/p_н$ для воздуха ($k = 1{,}4$):

$$\frac{p_1}{p_н} = \frac{\lambda_н^2(1 - 0{,}972\cos^2\alpha) - 0{,}167}{1 - 0{,}167\lambda_н^2}.$$

Отношение значений полного давления за и перед косым скачком является функцией приведенных скоростей и может быть определено следующим образом:

$$\sigma_k = \frac{p_1^*}{p_н^*} = \frac{p_1^*}{p_1}\frac{p_1}{p_н}\frac{p_н}{p_н^*}, \tag{42}$$

где

$$\frac{p_н}{p_н^*} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_н^2\right)^{\frac{k}{k-1}}, \quad \frac{p_1}{p_1^*} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_1^2\right)^{\frac{k}{k-1}},$$

а отношение значений статического давления $p_1/p_н$ берется по формуле (41).

Таким образом, для определения σ_k в косом скачке уплотнения нужно знать приведенную скорость λ_1. Из треугольников скоростей за и перед косым скачком (рис. 3.9) следует

$$w_1^2 = w_{1n}^2 + w_t^2, \quad w_{нn} = w_н \sin\alpha, \quad w_t = w_н \cos\alpha. \tag{43}$$

Используя эти соотношения, а также (37), выведем расчетную формулу для приведенной скорости за косым скачком уплотнения:

$$\lambda_1^2 = \frac{w_1^2}{a_{кр}^2} = \frac{w_{1n}^2}{a_{кр}^2} + \frac{w_t^2}{a_{кр}^2},$$

$$w_{1n} = \frac{a_{кр}^2 - \frac{k-1}{k+1}w_t^2}{w_{нn}} = \frac{a_{кр}^2 - \frac{k-1}{k+1}w_н^2\cos^2\alpha}{w_н \sin\alpha}.$$

Вставляя значения w_{1n} и w_t в выражения для λ_1, получим

$$\lambda_1^2 = \lambda_н^2\cos^2\alpha + \frac{\left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_н^2\cos^2\alpha\right)^2}{\lambda_н^2(1-\cos^2\alpha)}. \tag{44}$$

Увеличение угла скачка до прямого ($\alpha = 90°$) приводит к известному соотношению (16) для прямого скачка.

Увеличение давления в косом скачке уплотнения можно также представить в функции числа $\mathbf{M}$ набегающего потока и угла α, который образует вектор скорости $w_н$ с фронтом скачка. Подставим в уравнение импульсов

$$p_1 - p_н = w_{нn}\rho_н(w_{нn} - w_{1n})$$

значение $w_{нn}$ из (43) и разделим обе части последнего на величину $p_н$. Тогда, используя уравнение неразрывности и формулу для скорости звука [(34) гл. I], получим

$$\frac{p_1}{p_н} = 1 + k\mathbf{M}_н^2\sin^2\alpha\left(1 - \frac{\rho_н}{\rho_1}\right).$$

Выразив с помощью уравнения ударной адиабаты (18) отношение плотностей $\rho_н/\rho_1$ через отношение давлений и подставив его в последнее уравнение, приходим к искомой зависимости:

$$\frac{p_1}{p_н} = \frac{2k}{k+1} M_н^2 \sin^2 \alpha - \frac{k-1}{k+1}. \qquad (45)$$

При одной и той же скорости набегающего потока косой скачок, как это следует из (45), *всегда бывает слабее прямого.*

Интенсивность косого скачка уплотнения изменяется с изменением угла наклона его фронта к направлению набегающего потока. В предельном случае, когда косой скачок переходит в прямой ($\alpha = 90°$), увеличение давления получается максимальным. При этом равенство (45) переходит в равенство (20), известное из теории прямого скачка уплотнения.

В другом предельном случае, *когда угол наклона скачка к направлению потока перед ним определяется условием*

$$\sin \alpha_0 = \frac{1}{M_н}, \qquad (46)$$

косой скачок вырождает в бесконечно слабую волну ($p_1 \approx p_н$). Разъясним этот факт несколько подробнее. Пусть в некоторой точке O сверхзвукового газового потока возникло бесконечно малое возмущение (рис. 3.11) давления. Слабая волна сжатия

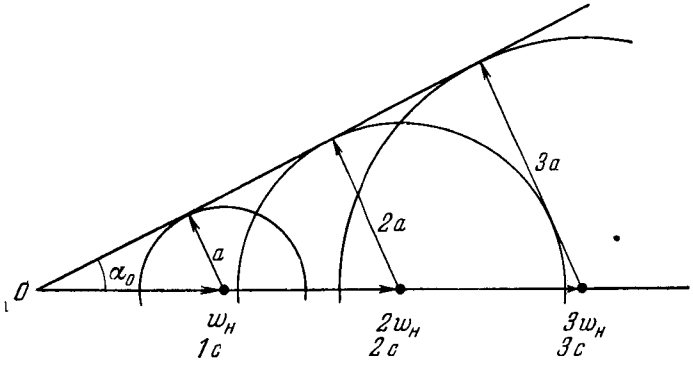


Рис. 3.11. Образование волны слабых возмущений.

(или разрежения) побежит из центра возмущения во все стороны со скоростью звука a. Через единицу времени ($\tau = 1$ с) фронт волны будет представлять собой сферу радиуса $r = a$. Однако вся масса газа, в которой возникла волна, сносится по потоку со сверхзвуковой скоростью $w_н > a$. По этой причине слабые волны давления никогда не выйдут за пределы конуса, поверхность которого является огибающей для сферических волн. Образующая такого конуса носит название *волны Маха*

или *характеристики*. Угол α_0 между образующей и осью называется *углом Маха* или *углом распространения слабых возмущений*. Этот угол, как видно из рис. 3.11, определяется равенством

$$\sin\alpha_0 = \frac{a}{w_н} = \frac{1}{M_н}.$$

Итак, фронт очень слабого косого скачка уплотнения располагается по отношению к набегающему потоку под углом α_0, который определяется равенством (46). Сильные возмущения, как было показано выше, распространяются со сверхзвуковой скоростью, в связи с чем фронт сильного скачка образует с набегающим потоком больший угол, чем характеристика: $\alpha > \alpha_0$.

Диапазон изменения угла α для косого скачка уплотнения определяется, таким образом, следующими пределами:

$$90° \geqslant \alpha \geqslant \alpha_0.$$

Подставив выражение (45) в уравнение ударной адиабаты (18), получим равенство, связывающее отношение $\rho_1/\rho_н$ в случае косого скачка уплотнения с числом M набегающего потока и углом наклона скачка:

$$\frac{\rho_1}{\rho_н} = \frac{\dfrac{k+1}{k-1}}{1 + \dfrac{1}{M_н^2 \sin^2\alpha}\dfrac{2}{k-1}} = \lambda_{нn}^2. \qquad (47)$$

Это равенство при $M \approx 1/\sin\alpha$ дает $\rho_1 \approx \rho_н$, а в случае $\alpha = 90°$ переходит в соответствующее равенство (22) для прямого скачка уплотнения.

Зная отношение плотностей газа за и перед косым скачком, можно вычислить угол ω, на который отклоняется поток в скачке (рис. 3.6). Из уравнения неразрывности имеем

$$\frac{w_{1n}}{w_{нn}} = \frac{\rho_н}{\rho_1}.$$

В то же время из треугольников скоростей (рис. 3.9) следует

$$\frac{w_{1n}}{w_{нn}} = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}. \qquad (48)$$

Отсюда получаем

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\rho_н}{\rho_1}\operatorname{tg}\alpha \qquad (49)$$

или на основании равенств (47) и (38)

$$\operatorname{tg}\beta = \lambda_{1n}^2 \operatorname{tg}\alpha = \frac{1 + \dfrac{k-1}{2} M_н^2 \sin^2\alpha}{\dfrac{k+1}{2} M_н^2 \sin^2\alpha} \operatorname{tg}\alpha = \frac{k-1}{k+1}\left(1 + \frac{2}{k-1}\frac{1}{M_н^2 \sin^2\alpha}\right)\operatorname{tg}\alpha \qquad (50)$$

Но если известен угол β между вектором скорости за скачком и фронтом последнего, то угол отклонения потока определяется соотношением (30).

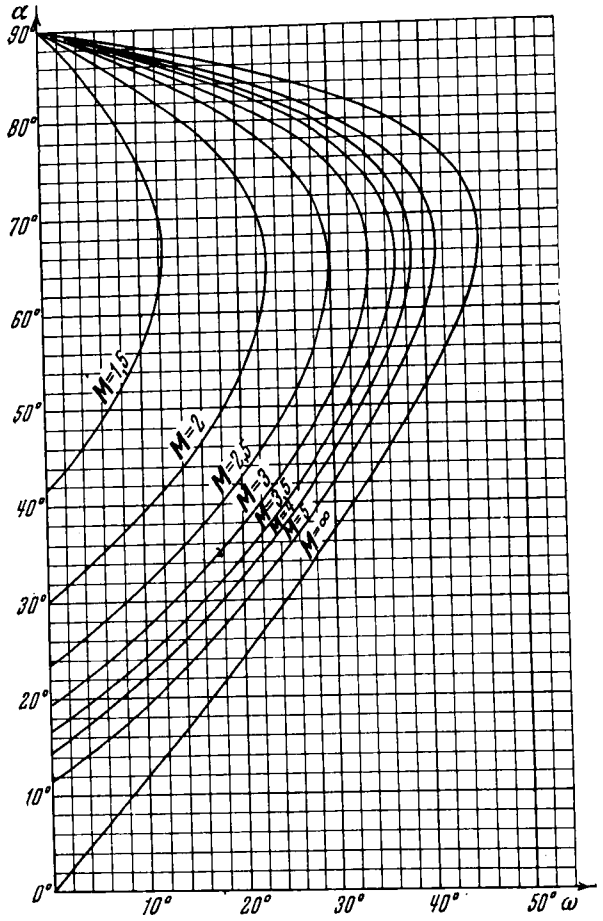


Рис. 3.12. Зависимость направления косого скачка от угла отклонения потока.

Мы указали способ определения угла, на который отклоняется поток в скачке, когда положение фронта известно. Если, наоборот, задано определенное отклонение сверхзвукового потока, то в тех случаях, когда в результате отклонения величина скорости должна уменьшиться (например, при сверхзвуковом обтекании клина, изображенного на рис. 3.7, *а*), возникает ко-

сой скачок уплотнения; при этом по формулам (30) и (50) может быть вычислен угол α, под которым расположится фронт скачка по отношению к потоку.

На рис. 3.12 представлены кривые $\alpha = f(\omega)$, соответствующие различным значениям числа M набегающего потока, построенные для воздуха ($k = 1{,}4$). Как видим, каждому значению числа M отвечает некоторое предельное отклонение потока ($\omega = \omega_{max}$). Так, при $M = 2$ поток может быть отклонен не более чем на угол $\omega_{max} = 23°$, при $M = 3$ — на $\omega_{max} = 34°$, при $M = 4$ — на $\omega_{max} = 39°$. Даже при бесконечно большой скорости ($M = \infty$) поток можно отклонить максимум на угол $\omega_{max} = 46°$. Наличие такого ограничения в отклонении потока после скачков уплотнения является вполне естественным фактом, ибо как при бесконечно слабом скачке, т. е. когда угол α равен углу распространения слабых возмущений, а образующая конуса возмущения является *характеристикой*, так и при наиболее сильном — прямом скачке угол отклонения потока становится равным нулю, следовательно, кривые $\omega = f(\alpha)$ имеют максимумы.

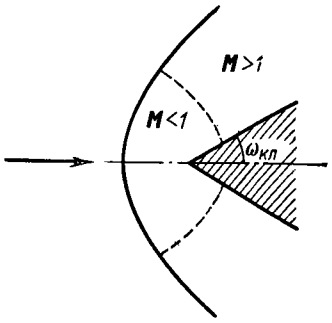


Рис. 3.13. Скачок уплотнения при сверхзвуковом обтекании клина со слишком большим углом при вершине ($\omega_{кл} > \omega_{max}$).

На кривых рис. 3.12 видно также, что одному и тому же отклонению потока отвечают два положения фронта скачка. Косой скачок с бóльшим углом наклона (верхнее значение на кривой $\alpha(\omega)$) называют *сильным* скачком, косой скачок с меньшим углом наклона — *слабым* скачком. Опыты показывают, что из двух возможных положений плоского косого скачка более устойчивым является то, при котором угол между направлением потока и фронтом скачка меньше. Таким образом, на рис. 3.12 более важны нижние ветви кривых, лежащие под точками максимумов. Нижнее пересечение каждой из кривых $\alpha = f(\omega)$ с осью ординат соответствует перерождению скачка в слабую волну, а получающийся при этом угол α_0 представляет собой угол слабых возмущений.

При сверхзвуковом обтекании клина, у которого угол при вершине больше, чем допускается по рис. 3.12, образование плоского косого скачка уплотнения невозможно. Опыт показывает, что в этом случае образуется скачок уплотнения с криволинейным фронтом (рис. 3.13), причем поверхность скачка размещается впереди, не соприкасаясь с носиком клина. В центральной своей части скачок получается прямым, но при удалении от

оси симметрии переходит в косой скачок, который на больших расстояниях вырождается в слабую волну. Такая же форма скачка уплотнения наблюдается при сверхзвуковом обтекании тела, имеющего закругленную носовую часть (рис. 3.14). В криволинейной ударной волне реализуются полностью обе ветви кривой $\alpha(\omega)$, начиная от прямой ударной волны (на оси симметрии) и кончая волной Маха (на периферии). Каждый

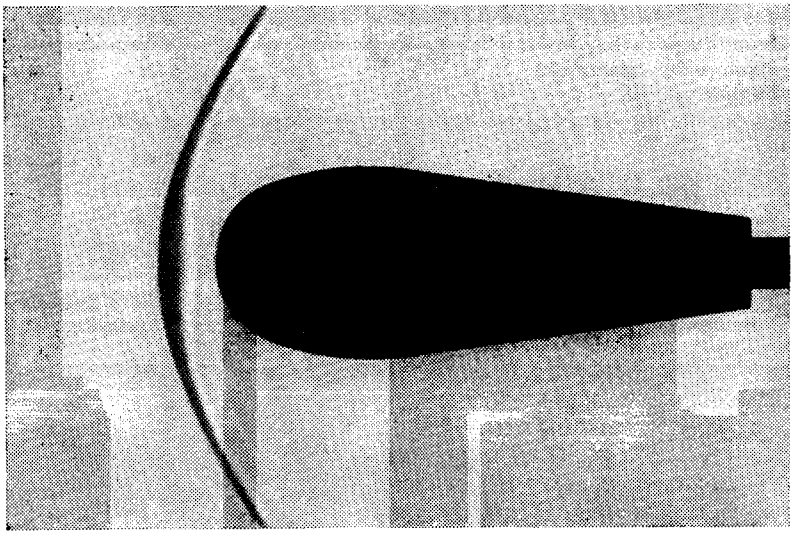


Рис. 3.14. Теневая фотография скачков уплотнения при сверхзвуковом обтекании тела вращения.

элементарный участок криволинейной ударной волны отвечает касательной к этому участку плоской волне.

Иногда необходимо вычислить скорость потока после косого скачка уплотнения. Проще всего это сделать, пользуясь треугольниками скоростей (рис. 3.9), из которых следует

$$w_1 = \frac{w_t}{\cos\beta}, \quad w_t = w_н \cos\alpha.$$

Отсюда получаем

$$w_1 = w_н \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} \tag{51}$$

или в безразмерных обозначениях

$$\lambda_1 = \lambda_н \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}. \tag{52}$$

Используя формулу (45) гл. I, можно найти соответствующее значение числа Маха за косым скачком:

$$M_1^2 = \frac{\frac{2}{k+1}\lambda_1^2}{1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_1^2}.$$

На рис. 3.15 приведены кривые зависимости числа M_1 за скачком уплотнения от положения фронта $M_1 = f(\alpha)$ для трех значений числа M в набегающем потоке ($M = 2, 3, 4$). Как видим, во всех трех случаях при углах наклона фронта $\alpha \leqslant 60°$ скорость потока после косого скачка уплотнения оказывается сверхзвуковой. Крайняя левая точка каждой кривой отвечает режиму перехода косого скачка уплотнения в слабую волну, крайняя правая точка — в прямой скачок уплотнения, скорость за которым меньше скорости звука.

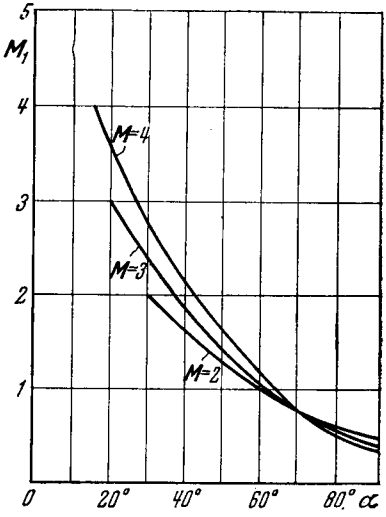


Рис. 3.15. Зависимость числа M_1 за скачком уплотнения от угла наклона скачка.

В соответствии с результатами, представленными на рис. 3.15, находится тот факт, что позади центральной части криволинейной ударной волны (рис. 3.13) течение газа является дозвуковым, а за пределами этой зоны — сверхзвуковым. В точке, разделяющей эти две зоны на линии ударной волны, угол ее наклона α соответствует максимальному углу поворота потока ω.

Случай, когда образуется прямой скачок, является наиболее простым, так как при этом сразу получается дозвуковое течение. *После косого скачка поток замедляется, но*, как мы видели, *может оставаться сверхзвуковым.* В таком случае последующее торможение должно сопровождаться вторым скачком, который может быть как прямым, так и косым. В последнем случае может понадобиться еще один скачок. Итак, полное торможение сверхзвукового потока требует либо одного прямого скачка, либо системы из нескольких косых скачков, обычно завершаемой слабым прямым скачком. Можно представить себе такую систему

скачков, в которой потери меньше, нежели в одном прямом скачке [1]).

Остановимся теперь на сверхзвуковом обтекании конуса. При симметричном сверхзвуковом обтекании конуса (рис. 3.16) перед последним устанавливается коническая ударная волна (рис. 3.7, *б*), причем вершины конуса и ударной волны (поверхности скачка) практически совпадают. Ввиду того что толщина скачка всегда очень мала, приведенные выше формулы для расчета плоскопараллельного косого скачка применимы и к осесимметричному скачку. В частности, если известны угол между фронтом и направлением потока α и скорость перед скачком (рис. 3.16), то по формулам (50) и (30) можно отыскать направление потока $\omega_{кл}$, по формуле (51) — скорость и по формуле (45) — статическое давление непосредственно за скачком. Однако, в отличие от плоского в осесимметричном потоке направление струй газа непосредственно за скачком ($\omega_{кл}$) не параллельно поверхности тела ($\omega_{кл} \neq \omega_{кон}$). В связи с этим угол отклонения струй за скачком постепенно изменяется, приближаясь асимптотически к полууглу при вершине конуса. Непосредственно за скачком угол отклонения имеет наименьшее значение $\omega_{кл} < \omega_{кон}$ и, как упоминалось, получается таким же, как для плоского потока, т. е. может быть определен с помощью рис. 3.12.

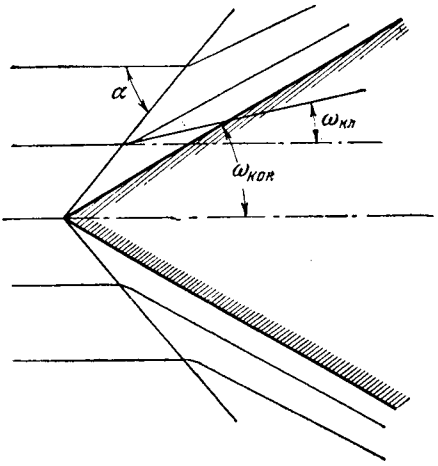


Рис. 3.16. Схема сверхзвукового обтекания конуса.

Зависимость угла α между фронтом скачка и направлением потока от полуугла при вершине конуса ($\omega_{кон}$) для случая $\lambda_п = 2$ ($M_н = 3{,}16$) приведена на рис. 3.17 (сплошная). Здесь же нанесена кривая $\alpha = f(\omega_{кл})$, дающая углы отклонения потока непосредственно за скачком (пунктир), т. е. отвечающая плоскому потоку (обтеканию клина). Как видим, *при одинаковых*

---

[1]) Петров Г. И. и Ухов Е. П., Расчет восстановления давления при переходе от сверхзвукового потока к дозвуковому при различных системах плоских скачков уплотнения, М., 1947.

углах конуса и клина на конусе скачок получается слабее (более наклонным).

Выше было указано, что изменения направления потока, скорости и состояния газа в самом скачке не зависят от формы поверхности скачка; при заданной скорости потока ($\lambda_н$) и угле скачка α эти изменения получаются одинаковыми в плоскопараллельном и осесимметричном течениях. Различие этих двух случаев состоит только в том, что при одинаковых углах раствора конуса и клина получаются разные углы наклона скачка. Иначе говоря, при сравнении осесимметричного и плоского косых скачков целесообразно выражать все факторы в функции угла скачка, а не угла при вершине обтекаемого тела. В этом случае результаты расчета осесимметричного и плоского скачков получатся одинаковыми.

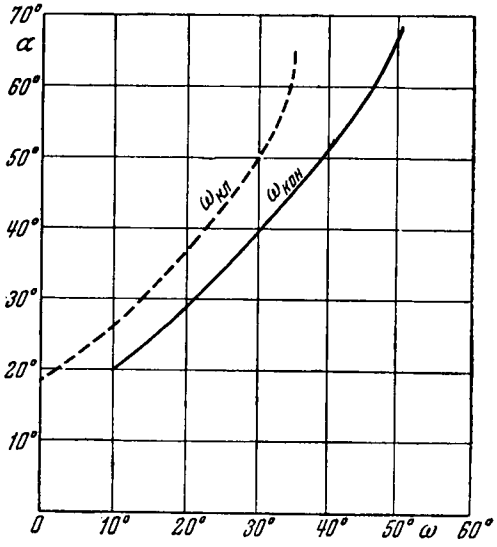


Рис. 3.17. Сравнение углов косого скачка на конусе и на клине.

Течение газа за скачком в осесимметричном случае отличается от плоского: скорость потока, статическое давление и плотность газа с удалением от скачка немного изменяются, а углы поворота потока в скачке (угол клина) и на бесконечности (угол конуса) существенно различны. На рис. 3.18 приведены кривые $\omega_{кон} = f(\omega_{кл})$ для различных значений чисел Маха. На рис. 3.19 изображены кривые значений числа M_1 за скачком (пунктир) и M_2 на поверхности конуса (сплошная) в функции угла скачка при различных значениях скорости. Как видим, уменьшение скорости между областью, лежащей непосредственно за скачком (соответствует плоскому течению), и поверхностью конуса получается незначительным; так как числа M за скачком и на поверхности конуса близки, то близки и соответственные числа λ. Для практических расчетов скорость за коническим скачком можно принимать равной средней арифметической величине

$$\lambda_1 \approx \frac{\lambda_{1пл} + \lambda_{1кон}}{2} \qquad (53)$$

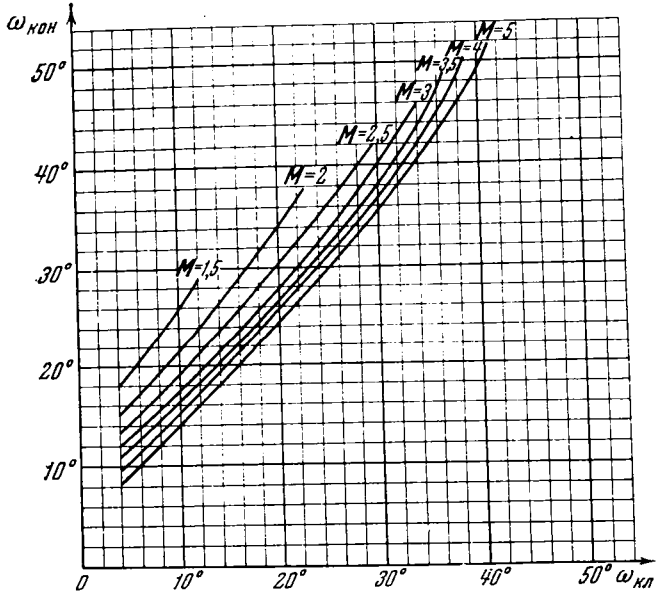


Рис. 3.18. Зависимость полуугла при вершине конуса от угла поворота потока в скачке для различных скоростей потока.

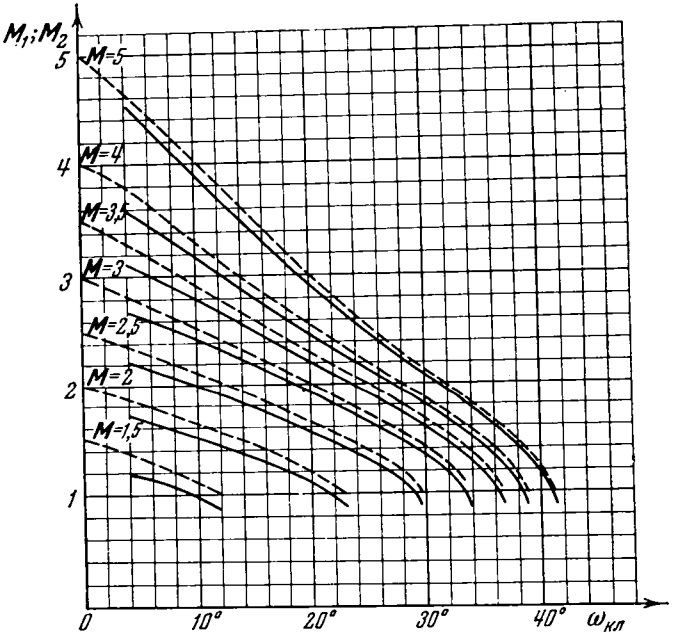


Рис. 3.19. Значения чисел **M** за скачком (пунктир) и на поверхности конуса в зависимости от угла скачка.

или даже скорости за плоским скачком

$$\lambda_1 \approx \lambda_{1\text{пл}}. \tag{54}$$

При этом для осесимметричного течения оказываются пригодными формулы, полученные выше для плоскопараллельного течения, с той лишь разницей, что одним и тем же углам скачка соответствуют разные углы при вершине тела (рис. 3.17).

§ 3. О применении пневматического насадка в сверхзвуковом потоке

Для измерения скорости сверхзвукового газового течения можно пользоваться обычным пневматическим насадком (рис. 3.20). Нужно только учесть, что при сверхзвуковом обтекании насадка перед ним возникает ударная волна. Если ось симметрии насадка параллельна направлению потока, то центральная газовая струйка, претерпевающая полное торможение, сначала проходит через прямую часть ударной волны, где ее скорость становится дозвуковой, затем при подходе к отверстию *1* скорость плавно уменьшается до нуля.

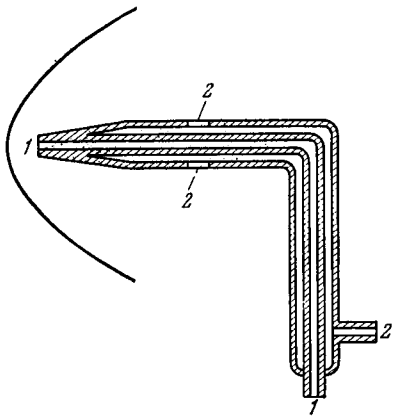


Рис. 3.20. Пневматический насадок в сверхзвуковом потоке.

Давление в трубке *1* (p_1^*) может быть вычислено следующим способом. Из выражения (68) гл. I имеем

$$\frac{p_1^*}{p_1} = \left(1 + \frac{k-1}{2}\mathsf{M}_1^2\right)^{\frac{k}{k-1}},$$

где p_1 и M_1 — статическое давление и число Маха непосредственно за ударной волной. Используя формулы (45), (46) гл. I и формулу (16) данной главы, переходим к числу M в набегающем потоке:

$$\mathsf{M}_1^2 = \frac{\frac{2}{k+1}\lambda_1^2}{1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_1^2} = \frac{\frac{2}{k+1}\frac{1}{\lambda_\text{н}^2}}{1 - \frac{k-1}{k+1}\frac{1}{\lambda_\text{н}^2}} = \frac{1 + \frac{k-1}{2}\mathsf{M}_\text{н}^2}{k\mathsf{M}_\text{н}^2 - \frac{k-1}{2}},$$

или

$$1+\frac{k-1}{2}\mathbf{M}_1^2=\frac{\left(\frac{k+1}{2}\right)^2\mathbf{M}_н^2}{\frac{k-1}{2}\left(\frac{2k}{k-1}\mathbf{M}_н^2-1\right)}.$$

Отсюда на основании равенства (20) получаем общеизвестную формулу Релея, выражающую отношение давления p_1^* в трубке *1* к статическому давлению в набегающем потоке ($p_н$) как функцию числа $\mathbf{M}$ в набегающем потоке:

$$\frac{p_1^*}{p_н}=\left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{k+1}{k-1}}\left(\frac{2}{k-1}\right)^{\frac{1}{k-1}}\frac{\mathbf{M}_н^{\frac{2k}{k-1}}}{\left(\frac{2k}{k-1}\mathbf{M}_н^2-1\right)^{\frac{1}{k-1}}}. \tag{55}$$

Для воздуха ($k=1{,}4$) эта формула приводится к следующему виду:

$$\frac{p_1^*}{p_н}=\frac{166{,}7\mathbf{M}_н^7}{\left(7\mathbf{M}_н^2-1\right)^{2{,}5}}. \tag{56}$$

Если боковые отверстия *2* находятся на расстоянии, равном не менее 4—6 диаметрам насадка от переднего его края, то, как показывает опыт, давление в трубке *2* равно статическому давлению набегающего потока ($p_н$). Таким образом, величины p_1^* и $p_н$ измеряются непосредственно на манометрах, присоединенных соответственно к трубкам *1* и *2* насадка.

Для вычисления скорости потока по формулам (55) или (56) нужно еще знать скорость звука, или, что то же, температуру набегающего потока:

$$w_н=\mathbf{M}_н a_н,\quad a_н=\sqrt{kRT_н}.$$

В некоторых случаях удобнее пользоваться формулой, выражающей отношение давлений в трубках насадка в функции приведенной скорости набегающего потока ($\lambda_н$). Эту формулу можно получить из выражений (21) и (23) данной главы:

$$\frac{p_1^*}{p_н}=\frac{1}{\left(\frac{1}{\lambda_н^2}-\frac{k-1}{k+1}\right)\left(1-\frac{k-1}{k+1}\frac{1}{\lambda_н^2}\right)^{\frac{1}{k-1}}}. \tag{57}$$

Для воздуха ($k = 1{,}4$)

$$\frac{p_1^*}{p_н} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\lambda_н^2} - 0{,}167\right)\left(1 - \frac{0{,}167}{\lambda_н^2}\right)^{2{,}5}}. \tag{58}$$

Вычисление скорости набегающего потока по формуле (57) можно выполнить, если известно значение критической скорости:

$$w_н = \lambda_н a_{кр},$$

где

$$a_{кр} = \sqrt{\frac{2k}{k+1} RT_н^*},$$

причем

$$T_н^* = \frac{T_н}{1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_н^2}.$$

Заметим, что, например, в аэродинамической трубе всегда известна именно температура торможения, т. е. температура всасываемого в трубу воздуха.

Глава IV

УСКОРЕНИЕ ГАЗОВОГО ПОТОКА

§ 1. Сверхзвуковое сопло

В сверхзвуковом сопле, называемом *соплом Лаваля*, газовый поток преобразуется таким образом, что скорость истечения становится больше скорости звука:

$$M > 1, \quad w_a > a.$$

Рассмотрим случай одномерного течения газа по сверхзвуковому соплу. Уравнение неразрывности дает

$$G = \rho w F = \text{const}.$$

Газ движется по соплу с ускорением, поэтому при малой скорости, когда плотность газа можно считать неизменной, необходимо уменьшать сечения. Этим обусловлено сужение начальной части сопла. При дальнейшем расширении газа увеличение скорости сопровождается заметным уменьшением давления и, следовательно, плотности газа, что частично компенсирует рост скорости, и поэтому сужать сечение канала нужно уже не так быстро. Наконец, процесс проходит через такую стадию, когда плотность расширяющегося газа уменьшается обратно пропорционально скорости. Как известно, в этом сечении канала скорость потока равна скорости звука. Дальнейшее увеличение скорости сопровождается еще более быстрым падением плотности, вследствие чего, как это следует из уравнения неразрывности, сечение сопла должно увеличиваться.

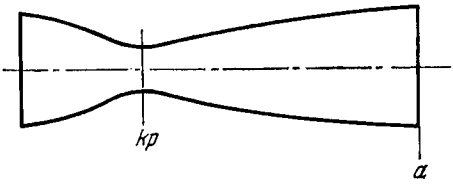


Рис. 4.1. Сопло Лаваля.

Таким образом, *сверхзвуковое сопло, предназначаемое для получения сверхзвукового потока, должно состоять из сужающейся (дозвуковой) и расширяющейся (сверхзвуковой) частей* (рис. 4.1). *В самом узком сечении сверхзвукового сопла (критическом сечении) скорость потока равна звуковой.*

Рассмотрим совместно уравнения неразрывности и Бернулли (без учета трения) в дифференциальной форме:

$$d(\rho w F) = 0, \quad dp + \rho w\, dw = 0.$$

Разделим второе уравнение на ρw^2 и умножим и разделим первый его член на $d\rho$. Тогда получим

$$\frac{1}{w^2}\frac{dp}{d\rho}\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dw}{w} = 0.$$

Из первого уравнения имеем, согласно (4) гл. I, при $dG = 0$

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dF}{F} - \frac{dw}{w}.$$

Подставляя этот результат во второе уравнение и учитывая, что согласно равенству (34) гл. I производная давления по плотности в идеальном адиабатическом процессе равна квадрату скорости звука в газе, получим

$$\left(\frac{w^2}{a^2} - 1\right)\frac{dw}{w} = \frac{dF}{F}. \tag{1}$$

Анализируя это равенство, можно заметить, что при расширении (ускорении) газа, когда $dw/w > 0$, сечение сопла должно изменяться так, как указывалось выше, а именно:

если $w < a$, то $\frac{dF}{F} < 0$ (сужение),

если $w = a$, то $\frac{dF}{F} = 0$ (кризис),

если $w > a$, то $\frac{dF}{F} > 0$ (расширение).

Таким образом, наблюдаются три режима: *дозвуковой* $w < a_{кр}$, *критический* $w = a_{кр}$, *сверхзвуковой* $w > a_{кр}$.

Следует отметить, что около критического сечения поток очень чувствителен к изменению поперечного сечения канала. Так, например, для изменения числа M на 10% (от $M = 0{,}9$ до $M = 1$) достаточно изменить площадь сечения на 1%, а для перехода от $M = 0{,}95$ к $M = 1$ — на 0,25%. По этой причине нельзя поддержать критический режим на достаточно протяженном участке прямой трубы (пограничный слой, образующийся за счет торможения газа у стенок, как бы сужает сечение струи).

Плотность, как уже отмечалось, с ростом скорости уменьшается. В критическом сечении сопла $dF/F = 0$, это значит, что площадь поперечного сечения проходит через экстремум (минимум). Из соотношения (1) следует, что именно в узком сечении сопла Лаваля получается скорость потока, равная местной скорости звука.

Рассмотрим зависимость скорости от площади поперечного сечения сопла. Для этого, пользуясь уравнением неразрывности, свяжем произвольное сечение сверхзвукового сопла с его минимальным сечением:

$$\rho w F = \rho_{кр} w_{кр} F_{кр};$$

отсюда

$$\frac{F}{F_{кр}} = \frac{\rho_{кр} w_{кр}}{\rho w}.$$

Однако $w = a\mathbf{M}$ и $\mathbf{M}_{кр} = 1$, поэтому

$$\frac{F}{F_{кр}} = \frac{\rho_{кр} a_{кр}}{\rho a \mathbf{M}}.$$

Но, как известно,

$$\frac{a_{кр}}{a} = \left(\frac{T_{кр}}{T}\right)^{1/2}$$

и при идеальном процессе

$$\frac{\rho_{кр}}{\rho} = \left(\frac{T_{кр}}{T}\right)^{\frac{1}{k-1}},$$

следовательно,

$$\frac{F}{F_{кр}} = \left(\frac{T_{кр}}{T}\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \frac{1}{\mathbf{M}}.$$

На основании равенств (38) и (39) гл. I имеем

$$\frac{T_{кр}}{T} = \frac{1 + \frac{k-1}{2}\mathbf{M}^2}{1 + \frac{k-1}{2}}.$$

Отсюда следует

$$\frac{F}{F_{кр}} = \frac{\left(1 + \frac{k-1}{2}\mathbf{M}^2\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}}{\mathbf{M}\left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}}. \qquad (2)$$

Для воздуха $k = 1{,}4$, поэтому имеем

$$\frac{F}{F_{кр}} = \frac{(1 + 0{,}2\mathbf{M}^2)^3}{1{,}73\mathbf{M}}. \qquad (3)$$

Из этих формул видно, что безразмерное значение площади сечения сопла является функцией только числа $\mathbf{M}$. Следует подчеркнуть, что все приведенные выражения справедливы при отсутствии тепловых и гидравлических потерь, т. е. при изменении состояния газа по идеальной адиабате.

Если задается конфигурация сверхзвукового сопла, то можно указать, какое число M получается в любом сечении. Каждому значению числа M соответствует определенная величина отношения $F/F_{кр}$. Кривая $F/F_{кр} = f(M)$, построенная по формуле (3), приведена на рис. 4.2. При этом, как видно из кривой, уравнение (3), и значит уравнение (2), имеет два решения; одному и тому же $F/F_{кр}$ отвечают два значения числа M: одно при дозвуковой скорости и другое при сверхзвуковой скорости. Для входной части сопла, предшествующей критическому сечению, годны все *дозвуковые* решения, а для выходной части — все *сверхзвуковые*. Однозначное решение получается только в критическом сечении ($F/F_{кр} = 1$).

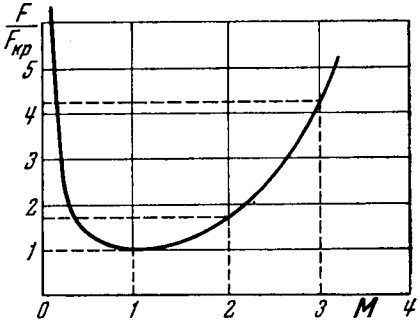


Рис. 4.2. Зависимость безразмерной площади сопла Лаваля от числа M ($k = 1{,}4$).

Давление и плотность газа при идеальном процессе зависят однозначно от числа M и определяются формулами (68) и (71) гл. I. Отсюда следует, что, выбрав произвольное сечение, мы получим в этом сечении определенное значение числа M, которому соответствуют определенные значения температуры, давления и плотности газа (с точностью до влияния пограничного слоя).

Величина скорости в данном сечении сверхзвукового сопла зависит только от температуры торможения T^*. Изменение полного давления p^* на скорость не влияет, так как пропорционально ему изменяется и местное давление p, а их отношение остается неизменным, также остается неизменным и отношение температур

$$\frac{T^*}{T_н} = \left(\frac{p^*}{p_н}\right)^{\frac{k-1}{k}}.$$

Для получения на срезе сверхзвукового сопла определенного значения числа M необходимо соответствующим образом подобрать площадь сечения и, кроме того, надо иметь достаточный запас давления в камере перед соплом. Другими словами, для достижения требуемого числа M на срезе сопла давление в камере должно в известное число раз превосходить давление окружающей среды.

Предположим, что давление в камере p^* возросло, тогда на срезе сопла давление также увеличивается и газ истекает с

избыточным давлением. Где-то за срезом сопла давление уравняется с атмосферным, избыток давления израсходуется в струе на увеличение скорости, а так как для сверхзвукового потока увеличение скорости требует увеличения поперечного сечения струи, то струя как бы образует в пространстве расширяющееся сверхзвуковое сопло. Если же давление в камере по какой-либо причине понизится, то на срезе произойдет понижение давления, причем давление в некоторых случаях может получиться ниже атмосферного; скорость истечения при этом не изменится, так как она является функцией только отношения площадей выходного и критического сечений сопла. Изменение давления в атмосфере не сказывается на истечении из сопла, так как волна давления, распространяющаяся со скоростью звука, сносится сверхзвуковым газовым потоком. По выходе газовой струи из сопла давление в ней в конце концов должно сравняться с атмосферным, т. е. повыситься за счет торможения сверхзвукового потока; этот процесс сопровождается возникновением ударных волн и будет ниже разобран более подробно.

Таким образом, *давление на срезе данного сверхзвукового сопла не связано с давлением атмосферы, а зависит только от давления в камере и формы сопла.*

Лишь в случае так называемого расчетного режима давление на срезе сопла равно атмосферному давлению: $p_a = p_н$. На нерасчетных режимах, когда давление на срезе больше или меньше атмосферного, должно происходить изменение давления в струе вне сопла.

Уже отмечалось, что процесс преобразования давления в скорость в сверхзвуковом и в дозвуковом потоках протекает без существенных потерь, т. е. примерно при постоянной энтропии и, следовательно, очень близок к идеальной адиабате. Именно поэтому приведенные выше формулы расчета идеального сверхзвукового сопла дают хорошие результаты для реальных сопел.

Во многих случаях расчетные формулы упрощаются, если параметры состояния газа определяются в функции не от числа M, а от приведенной скорости. Удобство оперирования приведенной скоростью связано с тем, что ее знаменатель (критическая скорость) зависит только от температуры торможения, которая постоянна для любого участка потока с изолированным процессом. Законы изменения температуры, давления и плотности газа в функции λ выражаются формулами (42), (72) и (73) гл. I.

Выведем выражение, связывающее площадь сечения сверхзвукового сопла с приведенной скоростью. Обратимся к уравнению неразрывности

$$\frac{F}{F_{кр}} = \frac{\rho_{кр} a_{кр}}{\rho w},$$

Подставляя сюда

$$w = \lambda a_{кр}, \quad \frac{\rho_{кр}}{\rho} = \left(\frac{T_{кр}}{T}\right)^{\frac{1}{k-1}},$$

получим

$$f = \frac{F}{F_{кр}} = \frac{1}{\lambda}\left[\frac{\frac{2}{k+1}}{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2}\right]^{\frac{1}{k-1}}. \tag{4}$$

Выведем в заключение формулу для расчета секундного расхода газа в сверхзвуковом сопле. Удобно находить расход газа по критическому сечению сопла:

$$G = \rho_{кр} a_{кр} F_{кр}, \tag{5}$$

так как из выражений (42), (72), (73) гл. I легче всего определить состояние газа в критическом сечении ($\lambda = 1$):

$$\left.\begin{aligned} &\frac{T^*}{T_{кр}} = \frac{k+1}{2}, \quad \frac{\rho^*}{\rho_{кр}} = \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}}, \\ &\frac{p^*}{p_{кр}} = \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{k}{k-1}}, \quad \frac{a^*}{a_{кр}} = \left(\frac{T^*}{T_{кр}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

В частности, для воздуха ($k = 1,4$) имеет место

$$T^* = 1,2T_{кр}, \quad \rho^* = 1,58\rho_{кр}, \quad p^* = 1,89p_{кр}, \quad a^* = 1,1a_{кр}. \tag{7}$$

Заменяя с помощью соотношений (6) критические значения плотности и скорости звука в выражении (5) значениями, соответствующими состоянию торможения, т. е. состоянию в камере перед соплом, получим

$$G = \rho^* a^* F_{кр}\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}},$$

или, используя уравнение состояния и формулу (34) гл. I:

$$G = \frac{p^* F_{кр}}{\sqrt{T^*}}\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}\left(\frac{k}{R}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{8}$$

Итак, расход газа через сверхзвуковое сопло зависит только от состояния газа в камере перед соплом. Для воздуха ($k = 1,4$, $R = 287,3$) имеем следующую упрощенную формулу расхода:

$$G = 0,0404\frac{p^* F_{кр}}{\sqrt{T^*}}\ [кг/с]. \tag{8а}$$

По формулам (8) определяют размер критического сечения сверхзвукового сопла для заданного расхода и известного состояния газа перед соплом.

В тех случаях, когда скорость истечения меньше критической, в качестве сопла применяют простой сходящийся насадок — конфузор. Состояние газа и скорость течения в различных сечениях конфузора можно определять по тем же формулам, что и в случае сверхзвукового сопла. Однако поток в конфузоре имеет ряд особенностей, которые нельзя не учитывать.

Наиболее важно, что при дозвуковом режиме истечения давление в струе на срезе сопла p_a практически равно давлению в окружающей среде $p_н$, так как при этом режиме любое изменение давления в атмосфере в виде волны давления проникает внутрь сопла, вызывая изменение давления перед соплом и соответствующее изменение скорости истечения; перестройка потока продолжается до тех пор, пока давление в струе на срезе сопла не сравняется с атмосферным. Поэтому в отличие от сверхзвукового сопла в простом конфузоре скорость истечения определяется не его формой, а только давлением в камере перед конфузором. Таким образом, если известно давление в камере p^*, то при заданном давлении в плоскости выходного среза $p_н$ приведенная скорость истечения находится непосредственно по формуле (78) гл. I:

$$\lambda_a^2 = \frac{k+1}{k-1}\left[1 - \left(\frac{p_н}{p^*}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]. \qquad (9)$$

Величина скорости истечения равна $w_a = \lambda_a a_{кр}$, где критическая скорость зависит согласно (41) гл. I только от температуры в камере перед соплом (температуры торможения):

$$a_{кр} = a^*\sqrt{\frac{2}{k+1}} = \sqrt{\frac{2k}{k+1}RT^*}.$$

Расход газа в конфузоре найдем по уравнению неразрывности, применив его к выходному сечению:

$$G = \rho_a w_a F_a.$$

Если использовать известные уже зависимости

$$\frac{\rho_a}{\rho^*} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_a^2\right)^{\frac{1}{k-1}}, \quad \frac{a_{кр}}{a^*} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{2}},$$

то получится

$$G = \rho^* a^* F_a \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_a^2\right)^{\frac{1}{k-1}} \lambda_a$$

или

$$G = \frac{p^* F_a}{\sqrt{T^*}} \lambda_a \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_a^2\right)^{\frac{1}{k-1}} \left[\frac{2k}{(k+1)R}\right]^{\frac{1}{2}}. \qquad (10)$$

Формулу (10) можно использовать и для определения расхода газа в сверхзвуковом сопле на расчетном режиме истечения, когда давление в выходном сечении сопла F_a равно давлению в окружающей среде $p_a = p_н$. Необходимо, однако, иметь в виду, что при $F_a = \text{const}$ и $p^* = \text{const}$ из формулы (10) следует, что с понижением давления $p_a = p_н$, т. е. с ростом скорости истечения λ_a в области значений $\lambda_a > 1$, расход газа через сопло уменьшается $G \to 0$. Это объясняется тем, что одновременно с увеличением λ_a должно расти отношение площади F_a к площади критического сечения $F_{кр}$, величина которой не зависит от $p_a = p_н$; иначе говоря, при увеличении p^* для поддержания условия $p_a = p_н$ при $F_a = \text{const}$ следует уменьшать площадь критического сечения сопла, что и вызовет уменьшение расхода газа через сопло.

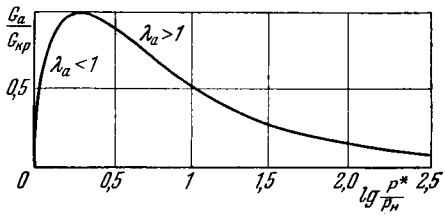


Рис. 4.3. Зависимость расхода газа от отношения давлений в камере и окружающей среде.

На рис. 4.3 представлен график функции

$$\bar{G}_a = \frac{G_a}{G_{кр}} = \lambda_a \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_a^2\right)^{\frac{1}{k-1}} \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}} =$$

$$= \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}} \sqrt{\left(\frac{k+1}{k-1}\right)\left[1 - \left(\frac{p_н}{p^*}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]} \left(\frac{p_н}{p^*}\right)^{\frac{1}{k}},$$

которая описывает изменение отношения расхода газа через выходное сечение расчетного сопла к расходу газа через критическое сечение той же площади в зависимости от перепада давлений $p^*/p_н$. Как видим, при $p^*/p_н \to \infty$ расход газа в выходном сечении $\bar{G}_a \to 0$.

§ 2. Нерасчетные режимы истечения из сопла Лаваля

Рассмотрим сверхзвуковое нерасчетное истечение из сопла Лаваля, когда $p_a > p_н$. На значительном удалении от сопла давление в струе и в атмосфере должны уравняться. В связи с этим давление в струе по мере удаления от выходного отверстия сопла постепенно уменьшается, скорость газа возрастает и

поперечное сечение сверхзвуковой струи увеличивается (рис. 4.4). Опыт показывает, что при этом происходит перерасширение струи, т. е. в некотором наиболее широком сечении струи устанавливается давление ниже атмосферного $p_{a1} < p_н$. После этого струя начинает сужаться, так как давление должно приблизиться к атмосферному, а скорость соответственно уменьшиться.

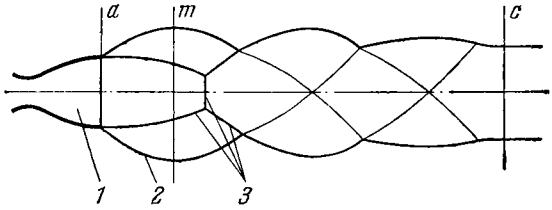


Рис. 4.4. Схема сверхзвукового истечения с избытком давления: *1* — сопло, *2* — граница струи, *3* — скачки уплотнения.

Торможение сверхзвукового потока приводит, естественно, к возникновению скачков уплотнения. В результате этого в некоторой части сечения струи скорость становится дозвуковой, а давление выше атмосферного. Затем давление вновь уменьшается, сближаясь с атмосферным. При достаточно большом избытке давления скорость вновь достигает критического, а затем и сверхзвукового значения, т. е. появляется второй сверхзвуковой участок, на котором струя расширяется. В результате второго перерасширения и последующего увеличения давления возникает вторая группа скачков уплотнения. Естественно, что вследствие потерь в первой группе скачков второе перерасширение струи и вторая группа скачков уплотнения получаются слабее первой. Таким образом, постепенно струя рассеивает свою энергию (подробнее об этом см. § 6 гл. VII). При небольшом избытке давления на срезе сопла также получаются колебания скорости и давления вдоль оси струи, но без скачков уплотнения.

Сверхзвуковое истечение из сопла в том случае, когда на срезе господствует давление меньше окружающего, осуществляется посредством сложной системы скачков. Рассмотрим, например, плоскопараллельную струю газа [1]), вытекающую в среду большего давления (рис. 4.5). От краев сопла отходят косые скачки уплотнения, встречающиеся на оси струи в точке O. Элементарные струйки газа, пересекая фронт косого скачка ($a — O$), переходят в область атмосферного давления $p_н > p_a$. Отклонение струек от первоначального направления, происхо-

[1]) Речь идет о сопле, поперечное сечение которого имеет форму вытянутого прямоугольника. Сверхзвуковое истечение из осесимметричного сопла сложнее, и мы его здесь рассматривать не будем (см. гл. VII).

дящее при скачке, должно было бы привести к их столкновению на оси симметрии. В действительности происходит второй поворот струек, возвращающий их к первоначальному направлению, но это приводит к возникновению второй группы скачков (Ob). Естественно, что если в областях aOb господствует атмосферное давление, то правее линий $O-b$ (рис. 4.5) получится давление

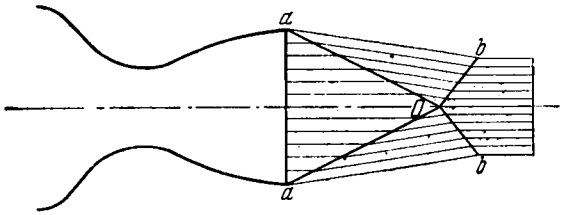


Рис. 4.5. Схема истечения из плоскопараллельного сопла Лаваля на режиме перерасширения.

выше атмосферного. Поэтому за второй группой скачков устанавливается такой же режим, как при истечении с избытком давления ($p_a > p_н$). Чем меньше давление p_a на срезе сопла, тем больше получится угол между фронтом косого скачка и направлением потока; при этом увеличивается угол, на который должен повернуться поток во второй группе скачков Ob. Одновременно уменьшается скорость потока за первой группой скачков (в области aOb), поэтому в конце концов наступает такой режим, при котором нужный угол поворота (ω) потока в скачках Ob не может быть осуществлен, т. е. $\omega > \omega_{max}$. С этого момента в центральной части струи образуется ударная волна, а вся схема скачков принимает мостообразную форму (рис. 4.6). С увеличением противодавления участок ударной волны $c-c$ увеличивается. При большом противодавлении сверхзвуковое истечение оказывается невозможным, и скачки давления перемещаются внутрь сопла, т. е. осуществляются в меньшем сечении, на меньшей скорости для данного сверхзвукового течения. В таком случае выходная часть сопла за фронтом скачка работает как обыкновенный дозвуковой диффузор. Если внутри сопла возникает отрыв потока от стенок, сопровождающийся

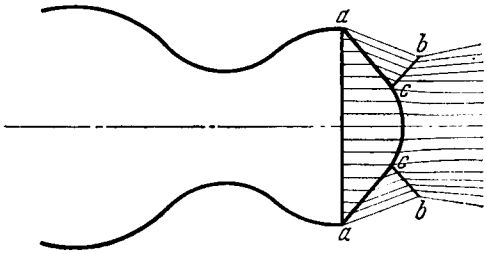


Рис. 4.6. Мостообразный скачок при нерасчетном истечении из сопла Лаваля.

обычно сложной системой скачков (§ 6, гл. VI), то истечение в атмосферу происходит со сверхзвуковой скоростью, меньшей, чем на расчетном режиме.

С падением давления в камере скачок все ближе подходит к критическому сечению, одновременно становясь более слабым. Приблизившись вплотную к критическому сечению, скачок исчезнет, сверхзвуковое сопло при этом превратится в трубку Вентури (рис. 4.7).

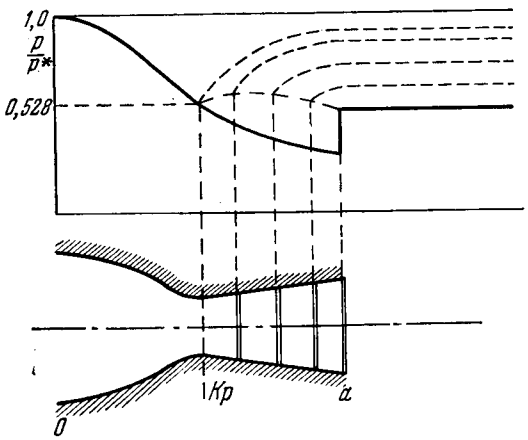


Рис. 4.7. Кривые давлений при скачке уплотнения внутри сопла Лаваля.

Местоположение плоскости скачка определяется отношением давления в камере (перед соплом) к давлению в той среде, куда истекает газ. Следует отметить, что режимы, при которых скачки получаются внутри сверхзвукового сопла, встречаются в двигателях редко. Обычно газ расширяется до выходного сечения сопла и вытекает со сверхзвуковой скоростью.

Более детальное рассмотрение сверхзвуковой струи, вытекающей из сопла на нерасчетном режиме, дается в гл. VII, а вопрос об истечении с образованием скачков внутри сопла — в гл. VIII.

Остановимся на работе двигателя в нерасчетных условиях истечения газа из сопла.

При работе двигателя на расчетном режиме давление в плоскости выходного среза сопла как в рабочей струе, так и во внешнем потоке равно атмосферному. Однако такое условие выполняется лишь при одном значении отношения давлений p_a/p^*.

С изменением скорости полета давление на срезе сопла в воздушно-реактивном двигателе изменяется. По этой причине неизменное выходное сечение становится не соответствующим расчетному режиму. Можно выделить две области нерасчетных условий: первая — при недостаточной, вторая — при слишком большой площади выходного отверстия сопла.

В первом случае на срезе сопла Лаваля поддерживается постоянное давление, величина которого выше атмосферного, ибо выходное сечение меньше расчетного, вследствие чего газ в сопле расширяется не полностью. Величина давления на срезе

равна

$$p_a = p^*\left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_a^2\right)^{\frac{k}{k-1}}.$$

Чем меньше безразмерная площадь выходного отверстия (f_a), тем ниже приведенная скорость (λ_a) и, следовательно, тем выше давление на срезе (p_a). Выходя из сопла, струя, продолжает расширяться в атмосфере, а скорость потока растет. На рис. 4.8 показаны границы области в струе, внутри которых среднее давление остается избыточным.

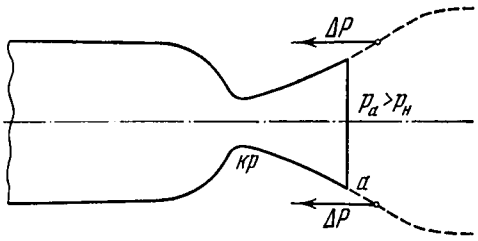


Рис. 4.8. Истечение из сопла с избытком давления.

Если достроить сопло до расчетных размеров, то из-за того, что внутри дополнительной части сопла господствует повышенное давление, получится прирост тяги ΔP. Следовательно, *при недостаточной площади выходного отверстия тяга двигателя меньше, нежели на расчетном режиме.*

Другая область работы сопла Лаваля отвечает тому случаю, когда площадь выходного отверстия превосходит расчетную, т. е. когда величина полного давления недостаточна для того, чтобы получить на выходе атмосферное давление. На этом режиме сопло Лаваля заполнено сверхзвуковым потоком до самого среза, а давление на срезе получается ниже атмосферного, т. е. сопло работает с перерасширением. При выходе струи в атмосферу в ней устанавливается сложная система скачков уплотнения, которая поддерживает разрежение на срезе сопла.

Работа на режиме перерасширения возможна лишь до давлений $p_a \geqslant p_{a\min}$. В ином случае, как указывалось, скачок уплотнения переместится внутрь сопла Лаваля, давление на срезе сравняется с атмосферным и скорость истечения станет дозвуковой. Этот режим работы, как уже упоминалось, в двигателях почти никогда не встречается и практического значения не имеет.

Иначе говоря, при слишком широком сопле скорость на выходе обычно такая же, как и на расчетном режиме, а давление здесь согласно приведенной формуле ниже атмосферного; при этом в выходной части сопла Лаваля получается участок перерасширения, на котором к стенкам приложена сила ΔP, направленная по потоку (рис. 4.9). Итак, *на режиме перерасширения*

реактивная тяга ниже расчетной. Для увеличения тяги выгодно *отбросить* участок перерасширения, укоротив сопло до расчетных размеров.

Таким образом, во всех случаях отклонения от расчетного режима истечения при $p^* = \text{const}$ реактивная сила меньше, нежели на расчетном режиме. Как следует из формулы (105) гл. I, реактивная тяга

$$P = G_в (w_a - w_н) + G_г w_a + (p_a - p_н) F_a.$$

На режиме перерасширения третий член в правой части этого равенства отрицателен ($p_a < p_н$), а первые два члена больше, чем на расчетном режиме (из-за увеличения w_a); на режиме избытка давления ($p_a > p_н$) третий член положителен, а первые два члена вследствие уменьшения w_a меньше, чем на расчетном режиме.

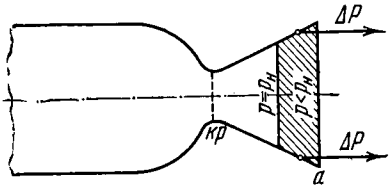


Рис. 4.9. Истечение из сопла с перерасширением.

Вычисления показывают, что некоторый отход от расчетных условий не влечет за собой значительного уменьшения реактивной тяги. Получается это потому, что изменение третьего члена в формуле тяги компенсируется в значительной мере изменением первых двух членов. По этой причине в тех случаях, когда выходное сечение сопла больше, чем сечение камеры сгорания, в целях снижения лобового сопротивления можно без особого ущерба для тяги укоротить сопло, приняв $F_a = F_г$, т. е. работая на нерасчетном режиме. Можно доказать теоретически, на чем мы здесь не останавливаемся, что в ВРД величина P/F_a достигает максимума при условии, что скорость истечения в точности равна скорости полета ($w_a = w_н$), а давление на выходном срезе значительно выше расчетного ($p_a > p_н$). На таком режиме тяга образуется только вследствие избытка давления на срезе сопла:

$$P = (p_a - p_н) F_a.$$

Выше установлено, что при постоянных значениях полного давления и температуры торможения в двигателе наибольшая тяга получается на расчетном режиме истечения.

Естественно, что в случае нерегулируемого выхлопного сопла, т. е. сопла с постоянными сечениями, тяга возрастает при увеличении полного давления, так как при этом давление на срезе сопла растет, а приведенная скорость истечения не изменяется.

§ 3. Сверхзвуковое течение газа с непрерывным увеличением скорости (течение Прандтля — Майера)

Рассмотрим сначала простейший вид сверхзвукового течения газа — поступательный равномерный поток. При таком течении все частицы газа движутся по параллельным траекториям с постоянной по величине скоростью. Траектории частиц являются одновременно линиями тока, непроницаемыми для газа.

Если поток не встречает никаких препятствий в виде твердых тел или границ (стенок), то газ не испытывает никаких возмущений. Простейшей границей, могущей изменить характер равномерного поступательного течения газа, является прямолинейная твердая стенка. Рассмотрим сначала случай, когда такая стенка расположена параллельно направлению течения, т. е. совпадает с одной из линий тока. Если движущийся газ занимает всю бесконечную область над стенкой и сама стенка тоже бесконечна по длине, то ясно, что в этом случае стенка не окажет никакого влияния на течение газа [1]). Отметим, что это положение справедливо и в общем случае для кривых линий тока: если стенка совпадает с линией тока, то она не оказывает воздействия на движущийся газ.

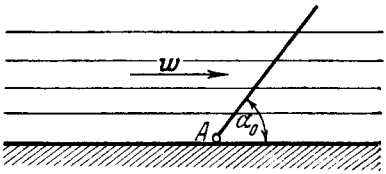


Рис. 4.10. Параллельный равномерный поток над плоской стенкой.

Если бы в некоторой точке A стенки (рис. 4.10) имелось какое-либо малое препятствие, то оно вызвало бы слабое возмущение равномерного потока. Такое возмущение распространилось бы в равномерном сверхзвуковом потоке по прямой линии — характеристике, составляющей с направлением скорости угол α_0, определяемый из условия

$$\sin \alpha_0 = \frac{1}{M}.$$

Этот угол, как нам уже известно, называется углом распространения слабых возмущений.

Теперь мы можем дать картину обтекания внешнего тупого угла. Пусть в некоторой точке C стенка поворачивает, образуя с первоначальным направлением угол δ_0 (рис. 4.11). При сверхзвуковом обтекании внешнего тупого угла ACB газ расширяется, ибо область, занятая газом, увеличивается; при расширении газ ускоряется. Вдоль участка стенки AC скорость газа постоянна.

[1]) Влияние вязкости газа здесь не учитывается.

Угловая точка C при обтекании ее газом является препятствием, которое служит источником возникновения слабых возмущений в газовом потоке. Эти возмущения, как было показано, распространяются в равномерном потоке по прямой линии — характеристике CK, которая отделяет невозмущенный газовый поток от возмущенного. Вдоль участка стенки CB скорость газа снова принимает постоянное значение, большее, чем в исходном потоке вдоль AC. Это значит, что возмущение, возникшее вследствие обтекания угловой точки C, закончится на другой характеристике CL, которая также прямолинейна. Таким образом, поворот потока к новому направлению осуществляется внутри угла KCL между двумя прямолинейными характеристиками. Для большей наглядности разобьем участок непрерывного расширения газа внутри угла KCL на большое число участков с незначительными, но прерывными изменениями параметров.

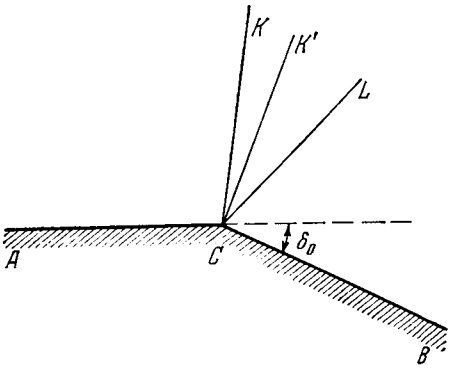


Рис. 4.11. Поворот сверхзвукового потока газа при обтекании угла ACB.

Первый малый скачок скорости и давления произойдет на плоскости, следом которой является прямая CK; так как давление при этом падает, то согласно теории скачков нормальная к плоскости CK составляющая скорости увеличивается; ввиду неизменности тангенциальной составляющей скорости поток немного изменяет свое направление, отклоняясь от плоскости скачка разрежения в сторону, противоположную той, в которую он отклонился бы в скачке сжатия. Итак, за плоскостью CK слабого скачка разрежения поток получил несколько бо́льшую скорость, немного отклонился в соответствующем направлении, а давление, плотность и температура газа слегка уменьшились. Возмущение, распространяющееся из области более низких давлений, теперь уже должно быть ограничено новой характеристикой CK', которая вследствие отклонения потока и увеличения числа M располагается правее прежней характеристики CK. Левее характеристики CK' никакие возмущения не проникают, поэтому вдоль линии CK', так же как перед этим вдоль линии CK, параметры газа и скорость движения неизменны.

Если скорость потока, которая несколько увеличилась в первом скачке, спроектировать на направления, нормальное и тангенциальное ко второй характеристике CK', то окажется, что

нормальная составляющая скорости здесь меньше ($w'_u < w_u$), а радиальная — больше ($w'_r > w_r$), чем на линии CK.

Второй слабый скачок разрежения, который мы совместим с плоскостью CK', вызывает новое отклонение потока в сторону CB и дальнейшее расширение газа, сопровождающееся увеличением скорости.

Поворот потока, очевидно, завершится, если струйка, прилегающая к стенке, станет параллельной направлению CB (рис. 4.11). Следовательно, у самой стенки вектор скорости параллелен CB.

Но в силу того, что все характеристики, исходящие из точки C, прямолинейны, т. е. скорость (и остальные параметры газа) вдоль них не изменяется, то и вдоль *последней* характеристики CL вектор скорости сохраняет постоянное (по величине и направлению) значение w_k [1]). Таким образом, за *последней* характеристикой CL поток снова становится поступательным. Но за точкой C поток не испытывает более никаких возмущений. Следовательно, после поворота около угла поток будет над стенкой CB таким же, каким был поток над стенкой AC, т. е. равномерным и параллельным потоком с постоянной скоростью $w_к > w_н$. Последняя характеристика CL, на которой завершается поворот газового потока около точки C, располагается под углом α_k к стенке CB, соответствующим равенству

$$\sin\alpha_k = \frac{1}{M_k},$$

тогда как первая характеристика располагается под углом $\alpha_н$ к стенке AC в соответствии с равенством

$$\sin\alpha_н = \frac{1}{M_н};$$

здесь $M_н$, M_k — значения чисел M до и после поворота потока.

Как известно, конечные адиабатические скачки разрежения невозможны. Однако если разбить угол KCL на бесконечно большое число бесконечно малых углов, то мы перейдем от рассмотренной выше условной схемы с малыми скачками разрежения к непрерывному расширению газа; вместо конечного числа слабых скачков получается бесконечное число характеристик — *пучок характеристик*.

Таким образом, поворот потока около тупого угла и связанное с этим расширение газа (уменьшение давления) можно рассматривать как последовательность слабых возмущений

[1]) Точка C является *особой точкой*, так как в этой точке сходятся лучи, на каждом из которых значения скорости и давления постоянны. Эти постоянные значения скорости и давления различны для разных лучей.

источником которых служит вершина угла; эти возмущения распространяются в потоке по прямолинейным характеристикам, исходящим из вершины.

Приведенные рассуждения показывают, что при повороте сверхзвукового газового потока около внешнего тупого угла значения скорости, давления и плотности остаются постоянными вдоль лучей, исходящих из угловой точки и являющихся характеристиками. Поэтому при аналитическом исследовании обтекания тупого угла удобно воспользоваться полярными координатами, поместив начало координат в этой угловой точке. Координатными линиями тогда служат лучи, исходящие из угловой точки, и концентрические окружности с центром в этой угловой точке. Координатами точки на плоскости являются радиус-вектор r этой точки и угол φ, составляемый радиусом-вектором с лучом, имеющим фиксированное направление, которое мы определим позже. Все параметры газа будем рассматривать как функции от r и φ: $w = w(r, \varphi)$, $p = p(r, \varphi)$, $\rho = \rho(r, \varphi)$. В силу того, что параметры газа вдоль лучей в нашей задаче сохраняются постоянными, частные производные от w, p и ρ по r равны нулю (при перемещении вдоль луча не происходит изменения параметров газа). Таким образом,

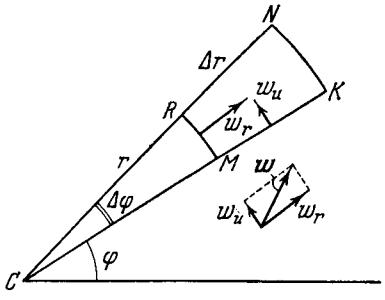


Рис. 4.12. К выводу условия отсутствия завихренности.

$$\frac{\partial w}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial r} = 0. \tag{11}$$

Составляющие скорости по радиусу-вектору и по направлению, перпендикулярному к нему, обозначим соответственно через w_r и w_u. Тогда величина скорости $w = \sqrt{w_r^2 + w_u^2}$. В силу того, что $\partial w/\partial r = 0$, имеем также

$$\frac{\partial w_r}{\partial r} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial w_u}{\partial r} = 0. \tag{12}$$

Основное свойство характеристики, как уже известно, состоит в том, что нормальная к ней составляющая скорости равна скорости звука a, но характеристика совпадает с радиусом-вектором, поэтому в выбранной нами полярной системе координат нормальная составляющая скорости может быть найдена из условия

$$w_u = a. \tag{13}$$

Течение газа около внешнего тупого угла является плавным и ускоренным, поэтому его можно считать безвихревым. Но тогда циркуляция по любому замкнутому контуру равна нулю. Составим выражение для циркуляции по контуру $MRNK$, ограниченному отрезками двух радиусов-векторов, проведенных из вершины угла, и двух дуг, обходя этот контур по часовой стрелке (рис. 4.12):

$$\Delta\Gamma = w_u r\,\Delta\varphi + \left(w_r + \frac{\partial w_r}{\partial\varphi}\Delta\varphi\right)\Delta r - \\ - \left(w_u + \frac{\partial w_u}{\partial r}\Delta r\right)(r + \Delta r)\,\Delta\varphi - w_r\,\Delta r = 0;$$

учитывая постоянство скорости по радиусу-вектору, являющемуся характеристикой, имеем

$$\frac{\partial w_r}{\partial\varphi} - w_u = 0. \tag{14}$$

Это и есть условие отсутствия завихренности в сверхзвуковом газовом потоке, обтекающем внешний тупой угол. Его можно было бы получить также непосредственно из выражения (103) гл. II. Каждую струйку рассматриваемого течения можно считать энергетически изолированной, причем уравнение энергии целесообразно использовать в кинематической форме (48) из гл. I:

$$\frac{2}{k-1}a^2 + w^2 = w_{\max}^2. \tag{15}$$

В плавно ускоряющемся газовом потоке, который мы рассматриваем в данном случае, потери полного давления обычно незначительны, поэтому термодинамический процесс обтекания угла мы будем считать изоэнтропическим, т. е. подчиняющимся уравнению идеальной адиабаты:

$$\frac{p}{\rho^k} = \text{const}. \tag{16}$$

четыре уравнения (13)—(16) составляют систему, к решению которой сводится задача об обтекании внешнего тупого угла сверхзвуковым потоком газа.

Из уравнений (13) и (15) следует

$$\frac{w_u^2}{k-1} + \frac{w_r^2 + w_u^2}{2} = \frac{w_{\max}^2}{2},$$

или

$$w_u^2 + \frac{k-1}{k+1}w_r^2 = \frac{k-1}{k+1}w_{\max}^2. \tag{17}$$

Используя теперь уравнение (14), приходим к следующему дифференциальному [1]) уравнению:

$$\left(\frac{dw_r}{d\varphi}\right)^2 + \frac{k-1}{k+1} w_r^2 = \frac{k-1}{k+1} w_{\max}^2. \qquad (18)$$

Разделяя в этом уравнении переменные w_r и φ получим

$$\frac{dw_r}{\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\sqrt{w_{\max}^2 - w_r^2}} = d\varphi,$$

или

$$\sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \frac{d\left(\frac{w_r}{w_{\max}}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{w_r}{w_{\max}}\right)^2}} = d\varphi.$$

Производя интегрирование, получаем

$$\sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \arcsin\frac{w_r}{w_{\max}} = \varphi + c_1,$$

где c_1 — постоянная интегрирования. Разрешая это выражение относительно искомой величины w_r, найдем

$$w_r = w_{\max} \sin\left[\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\,(\varphi + c_1)\right].$$

Тогда из уравнения (14) сразу следует

$$w_u = w_{\max}\sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \cos\left[\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\,(\varphi + c_1)\right].$$

Определим теперь постоянную интегрирования c_1. Рассмотрим случай, когда скорость невозмущенного потока (до поворота) равна скорости звука ($M_н = 1$). Это значит, что начальная характеристика KC (рис. 4.11) перпендикулярна к стенке AC, так как

$$\sin\alpha_н = \frac{1}{M_н} = 1,$$

т. е. полярные углы φ нужно отсчитывать от перпендикуляра к направлению скорости невозмущенного потока. Тогда при $\varphi = 0$ имеем $w_r = 0$, $w_u = w$, и выражение для w_r превращается в уравнение для определения c_1:

$$0 = w_{\max} \sin\left[\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\,(0 + c_1)\right].$$

---

[1]) Так как параметры газа вдоль линий $\varphi = \text{const}$ при обтекании внешнего угла не изменяются, то они являются функциями лишь одного переменного — полярного угла φ. Поэтому в уравнении (18) и далее частные производные по φ заменены полными.

Отсюда ясно, что $c_1 = 0$. Таким образом, получаем следующие выражения для составляющих скорости w_r и w_u:

$$w_r = w_{\max} \sin\left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\,\varphi\right),$$

$$w_u = w_{\max} \sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \cos\left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\,\varphi\right).$$

Пользуясь выражениями (35) и (41) гл. I, можно перейти от максимальной скорости газа к критической

$$w_{\max} = a_{\text{кр}} \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$$

и выражения для w_r и w_u записать в следующем виде:

$$w_r = a_{\text{кр}} \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \sin\left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\,\varphi\right), \tag{19}$$

$$w_u = a_{\text{кр}} \cos\left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\,\varphi\right). \tag{20}$$

При $\varphi = 0$ получим $w_r = 0$, $w_u = w = a_{\text{кр}}$, т. е. скорость невозмущенного потока равна критической скорости звука.

Найдем теперь величину полной скорости на каждом из лучей: $w = \sqrt{w_r^2 + w_u^2}$. Из уравнений (19) и (20) получим

$$w^2 = a_{\text{кр}}^2 \left[\frac{k+1}{k-1} \sin^2\left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\,\varphi\right) + \cos^2\left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\,\varphi\right)\right] =$$

$$= a_{\text{кр}}^2 \left[1 + \frac{2}{k-1} \sin^2\left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\,\varphi\right)\right].$$

Отсюда определяется приведенная скорость

$$\lambda^2 = \frac{w^2}{a_{\text{кр}}^2} = 1 + \frac{2}{k-1} \sin^2\left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\,\varphi\right). \tag{21}$$

Все остальные параметры газа выражаются через приведенную скорость по формулам, полученным в гл. I:

$$\frac{p}{p^*} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{\frac{k}{k-1}}, \tag{22}$$

$$\frac{\rho}{\rho^*} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}}, \tag{23}$$

$$\frac{T}{T^*} = 1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2, \tag{24}$$

$$\mathrm{M} = \sqrt{\frac{\frac{2}{k+1}\lambda^2}{1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2}}. \tag{25}$$

Таким образом, определив по формуле (21) величину λ^2 для соответствующих значений φ, мы сможем по формулам (22)—(25) полностью рассчитать состояние газа на каждом из лучей, проходящих через вершину угла. При $\varphi = 0$ получается $\lambda = 1$, при $\varphi > 0$ имеем $\lambda > 1$. По мере увеличения полярного угла скорость газа возрастает, а давление, плотность и температура уменьшаются.

Как видно из выражения (21), при некотором значении полярного угла приведенная скорость может достигнуть максимального значения

$$\lambda^2_{\max} = \frac{k+1}{k-1},$$

когда давление, температура и плотность газа равны нулю. Очевидно, что дальнейшее возрастание скорости невозможно, а следовательно, прекратится и поворот потока. Иначе говоря, существует предельное значение полярного угла, определяемое из условия

$$\sin^2\left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\,\varphi_{\max}\right) = 1.$$

Отсюда следует

$$\varphi_{\max} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}. \qquad (26)$$

Заметим, что полученное решение пригодно для всех значений скорости сверхзвукового невозмущенного потока, а не только в случае $\lambda_н = 1$. Если скорость невозмущенного потока больше скорости звука, то отсчет по формуле (21) следует начинать не от нулевого полярного угла ($\varphi = 0$), а от того значения угла ($\varphi_н$), которое соответствует заданной скорости невозмущенного потока ($\lambda_н$). Из формулы (21) следует

$$\varphi_н = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\arcsin\sqrt{\frac{k-1}{2}\left(\lambda^2_н - 1\right)}. \qquad (27)$$

Пригодность полученного решения для любого значения скорости основывается на том, что в данной задаче вдоль любой характеристики скорость и остальные параметры газа не изменяются, т. е. на любой характеристике поток является равномерным и параллельным. И поэтому для поворота потока, происходящего правее данной характеристики, не может иметь значения предыстории потока, т. е. достигнуто ли данное значение $\lambda_н$ в результате ускорения газа при предварительном повороте от $\lambda = 1$ и $\varphi = 0$ до $\lambda = \lambda_н$ и $\varphi = \varphi_н$ или поворот начинается сразу при значении приведенной скорости $\lambda = \lambda_н$. Итак, в случае $\lambda_н > 1$ при $\varphi \leqslant \varphi_н$ поток остается невозмущенным, т. е. все параметры газа сохраняют свое значение. При $\varphi > \varphi_н$ параметры

газа вычисляются по полученным выше формулам (22)—(25). Надо только помнить, что при скорости невозмущенного потока, большей скорости звука, углы φ нужно отсчитывать не от перпендикуляра к направлению невозмущенного потока, а от прямой, составляющей угол $\varphi_н + \alpha_н$ с направлением невозмущенного потока, где $\alpha_н = \arcsin\frac{1}{M_н}$ (рис. 4.13) является углом слабого возмущения, т. е. углом между характеристикой и направлением заданного невозмущенного потока.

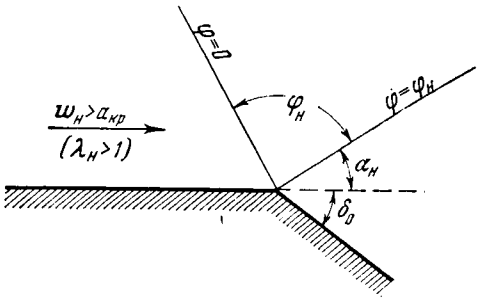


Рис. 4.13. Схема отсчета углов φ при $w_н > a_{кр}$.

Чтобы получить наглядную картину обтекания внешнего тупого угла, найдем форму линий тока. Для этого составим дифференциальное уравнение линий тока в полярных координатах. Вспомним, что направление касательной к линии тока в каждой ее точке совпадает с направлением вектора скорости в этой точке. Возьмем два бесконечно близких радиуса-вектора, составляющих друг с другом угол $d\varphi$, и проведем в точке A первого радиуса отрезок линии тока AC, вектор скорости $w = AE$, направленный по касательной к линии тока в точке A и дугу окружности AB радиуса r (рис. 4.14). Рассмотрим бесконечно малый прямоугольный криволинейный треугольник ABC. Тангенс угла A этого треугольника равен отношению

$$\frac{BC}{AB} = \frac{dr}{r\,d\varphi}.$$

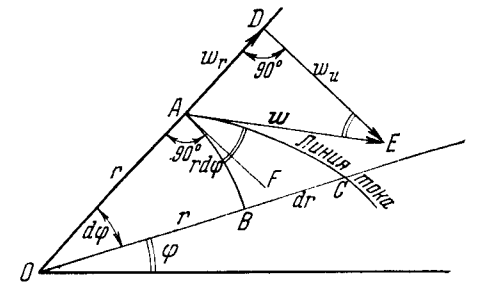


Рис. 4.14. К определению линии тока при обтекании внешнего тупого угла.

Но угол между кривыми AB и AC равен углу между их касательными AF и AE, т. е. $\operatorname{tg}(\angle EAF) = dr/rd\varphi$. Вектор скорости w разложим на составляющие w_r и w_u. Из треугольника ADE видно, что $\operatorname{tg}(\angle DEA) = w_r/w_u$. Но из построения ясно, что $\angle DEA = \angle EAF$. Таким образом,

$$\frac{dr}{r\,d\varphi} = \frac{w_r}{w_u}. \qquad (28)$$

Уравнение (28) представляет собой дифференциальное уравнение линий тока в полярных координатах.

В случае обтекания угла w_r и w_u определяются формулами (19) и (20), поэтому дифференциальное уравнение (28) примет вид

$$\frac{dr}{r} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \frac{\sin\left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\,\varphi\right)}{\cos\left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\,\varphi\right)} d\varphi.$$

Его можно переписать также в таком виде:

$$\frac{dr}{r} = -\frac{\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}}{\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}} \frac{d\left[\cos\left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\,\varphi\right)\right]}{\cos\left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\,\varphi\right)}.$$

Интегрируя это дифференциальное уравнение, найдем

$$\ln r = -\frac{k+1}{k-1} \ln\cos\left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\,\varphi\right) + \ln r_0,$$

где через $\ln r_0$ обозначена произвольная постоянная интегрирования. После потенцирования получим

$$r = r_0 \left[\cos\left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\,\varphi\right)\right]^{-\frac{k+1}{k-1}}. \qquad (29)$$

Уравнение (29) есть уравнение линий тока в полярных координатах. Здесь r_0 — длина радиуса-вектора линии тока при $\varphi = 0$, т. е. в невозмущенном потоке. Из уравнения (29) видно, что все линии тока представляют собой подобные кривые с центром подобия в вершине угла. Расстояние по нормали между двумя соседними линиями тока увеличивается в направлении течения.

Найдем теперь угол δ, между касательной к линии тока и направлением невозмущенного потока, движущегося со скоростью звука, т. е. угол, на который поворачивается поток, дойдя до соответствующего луча, составляющего угол φ с перпендикуляром к направлению скорости невозмущенного потока (при $\lambda_н = 1$). Для этого рассмотрим рис. 4.15. Здесь w — вектор скорости в точке B, направленный по касательной к линии тока. Угол α — местный угол распространения слабых возмущений. Этот угол равен, как известно, углу между направлением скорости w и характеристикой BE в данной точке. Угол δ — искомый угол поворота потока. Из рисунка ясно, что $\angle ABD = \delta$, а угол $ABC = \alpha$. Тогда из треугольников ABC и ABD имеем

$$\angle A = \pi - \varphi - \alpha \quad \text{и} \quad \angle A = \frac{\pi}{2} - \delta.$$

Таким образом,

$$\pi - \varphi - \alpha = \frac{\pi}{2} - \delta,$$

или

$$\delta = \alpha + \varphi - \frac{\pi}{2}. \tag{30}$$

Угол распространения слабых возмущений

$$\alpha = \arcsin \frac{1}{M}. \tag{31}$$

Поэтому для вычисления угла поворота потока δ, соответствующего заданному значению угла φ, нужно проделать следующие операции:

1) определить по формуле (21) приведенную скорость λ для заданного значения φ,

2) по формуле (25) определить число M,

3) по формуле (31) определить угол α и, наконец,

4) вычислить угол δ по формуле (30) для заданного значения φ. Таким образом, мы получим угол поворота потока δ в функции от полярного угла φ.

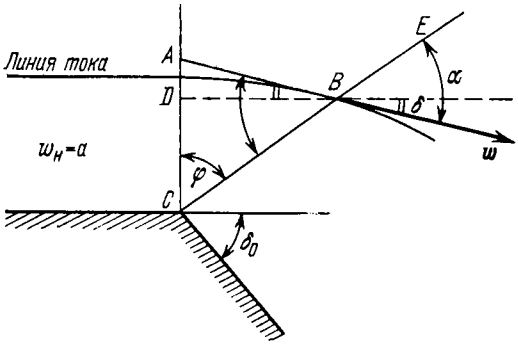


Рис. 4.15. Связь между углами α, φ и δ при обтекании тупого угла.

До сих пор независимым переменным являлся полярный угол φ и все параметры газа вычислялись в функции от этого угла. В действительности же обычно бывают известны величина обтекаемого тупого угла, т. е. величина угла поворота потока δ_0 и значение скорости набегающего потока. По этим данным нужно определить все параметры газа (скорость, давление, температуру и т. д.) после поворота потока около заданного тупого угла. Поэтому для практических расчетов удобно составить

таблицу, где за основной параметр принят угол поворота потока δ, а все остальные параметры газа вычислены в функции этого угла. Такая таблица, рассчитанная по формулам (21)—(25), (30) и (31), приводится в Приложении I на страницах 857—859. Пользоваться этой таблицей нужно следующим образом: по заданной скорости невозмущенного потока $w_н$ определяется приведенная скорость $\lambda_н$. Далее отыскивается *фиктивный* угол поворота потока $\delta_н$, соответствующий значению $\lambda_н$ (угол, на который должен повернуться поток, текущий со скоростью

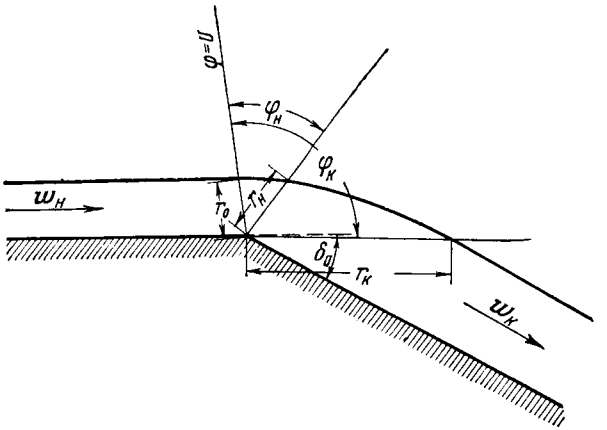


Рис. 4.16. Линия тока сверхзвукового потока, обтекающего внешний тупой угол.

звука, чтобы достичь заданной скорости $w_н$). Затем находится угол $\delta_к = \delta_н + \delta_0$, где δ_0 — заданный угол поворота потока (рис. 4.16). Для значения $\delta_к$ из таблицы выписываются величины $\lambda_к$, $\frac{p_к}{p_0}$, $\frac{\rho_к}{\rho_0}$, $\frac{T_к}{T_0}$ и $\mathbf{M}_к$, которые определяют соответственно приведенную скорость, давление, плотность, температуру и число $\mathbf{M}$ после поворота потока около заданного тупого угла. Кривые $\varphi(\delta)$, $\mathbf{M}(\delta)$, $\alpha(\delta)$ и $\frac{p}{p^*} = f(\delta)$ изображены на рис. 4.17.

При желании можно найти форму линии тока по формуле (29), задавшись величиной r_0 и рядом значений φ от $\varphi = \varphi_н$ до $\varphi = \varphi_к$ (рис. 4.16).

Для определения угла поворота потока δ_0 в зависимости от начальной и конечной скорости можно пользоваться предложенной А. Я. Черкезом простой формулой, хорошо аппроксимирующей точные соотношения и табличные данные при $k = 1{,}4$:

$$\delta_0 = 7{,}6\,(\lambda_к^3 - \lambda_н^3). \qquad (32)$$

Здесь $\lambda_н$ и $\lambda_к$ — соответственно приведенные скорости потока до и после поворота. При $\lambda < 2{,}3\left(\frac{p}{p^*} > 0{,}0005\right)$ погрешность определения угла δ_0 по этой формуле обычно не превосходит 1°.

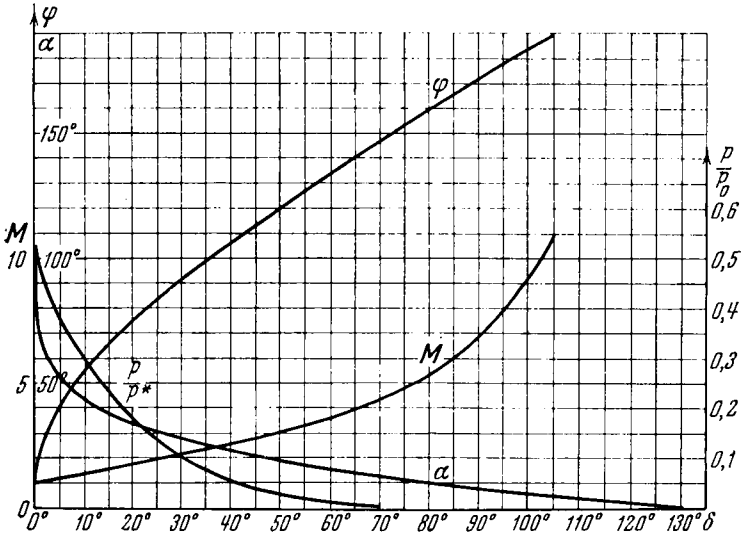


Рис. 4.17. Вспомогательные кривые к расчету сверхзвукового обтекания внешнего тупого угла.

Изложенная теория обтекания внешнего тупого угла сверхзвуковым потоком газа применяется для решения большого числа конкретных задач газовой динамики; некоторые из них мы рассмотрим ниже.

§ 4. Обтекание плоской стенки

Пусть сверхзвуковой поток газа течет с заданной скоростью над плоской неподвижной стенкой. В точке C (рис. 4.18) стенка обрывается, а давление в пространстве за точкой C меньше, чем давление в невозмущенном потоке вдоль стенки. Тогда точно так же, как в случае обтекания внешнего тупого угла, точка C явится источником возмущений. Поток, обтекая точку C, повернется на некоторый угол δ. Скорость его увеличится, а давление в потоке упадет до величины давления, существующего в пространстве за точкой C. Картина течения при этом совершенно аналогична обтеканию внешнего тупого угла. Различие заключается лишь в том, что в случае обтекания тупого угла задан

угол поворота потока δ и требуется найти все параметры газа после поворота, а в рассматриваемом нами случае обтекания полубесконечной плоской стенки задано давление в потоке после поворота и требуется найти угол поворота потока и все остальные параметры газа. Угол δ определяет границу, отделяющую повернутый поток газа от неподвижного газа *под* стенкой (пунктир на рис. 4.18).

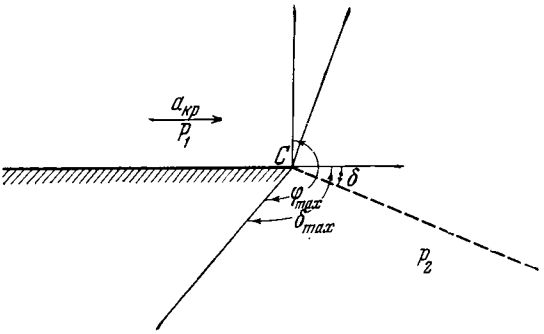


Рис. 4.18. Схема сверхзвукового обтекания стенки.

Для расчета обтекания плоской полубесконечной стенки можно воспользоваться таблицей приложения I на стр. 857—859. По заданной величине давления находят угол поворота потока и все остальные параметры газа.

Легко вычислить *максимальный угол* δ_{max}, *на который может повернуться газовый поток, сходящий с плоской стенки.* Этот угол представляет собой угол поворота потока, начальная скорость которого равна скорости звука, при истечении в вакуум.

Положим в формуле (22) $p = 0$. Тогда

$$\lambda^2 = \frac{k+1}{k-1} = \lambda_{max}^2.$$

Подставляя $\lambda = \lambda_{max}$ в формулу (27), найдем

$$\varphi_{max} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}.$$

Так как при $\lambda = \lambda_{max}$ из (25) имеем $M = \infty$, то $\alpha = \arcsin\frac{1}{M} = 0$. Тогда из формулы (30) получаем

$$\delta_{max} = \left(\sqrt{\frac{k+1}{k-1}} - 1\right)\frac{\pi}{2}.$$

При $k = 1{,}4$ значения φ_{max} и δ_{max} будут $\varphi_{max} = 220°\,27'$, $\delta_{max} = 130°\,27'$. Отсюда следует, что поток, стекающий с плоской

стенки в вакуум, не заполняет всего свободного пространства под стенкой. Луч $\varphi = \varphi_{max}$ отделяет этот поток от пустоты под стенкой. Ясно, что это положение справедливо не только для случая $\lambda_н = 1$, но также при $\lambda_н > 1$. Угол поворота такого потока при истечении в вакуум равен $\delta_{max} - \delta_н$, где $\delta_н$ — фиктивный угол поворота потока, соответствующий заданному значению $\lambda_н$. Этот предельный угол, на который может повернуться сверхзвуковой поток заданной скорости, обозначим $\delta_{пр}$. Таким образом,

$$\delta_{пр} = \delta_{max} - \delta_н.$$

Зависимость $\delta_{пр}$ от числа M невозмущенного потока (при $k = 1{,}4$) представлена на графике рис. 4.19. При $M = 1$ имеем $\delta_н = 0$ и $\delta_{пр} = \delta_{max}$. При $M = \infty$

$$\delta_н = \delta_{max} \quad \text{и} \quad \delta_{пр} = 0.$$

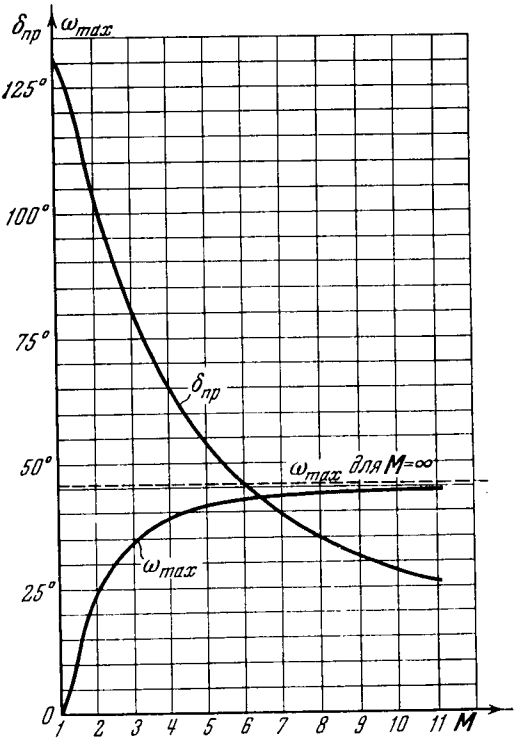


Рис. 4.19. Предельные углы поворота потока в скачке уплотнения и при обтекании внешнего тупого угла.

Если сверхзвуковой поток должен обтекать тупой угол, для которого $\delta > \delta_{пр}$, то после поворота около вершины угла поток отрывается и следует не по стенке, а по лучу, соответствующему $\delta = \delta_{пр}$; между лучом и стенкой образуется область вакуума. Это явление можно назвать *срывом сверхзвукового потока.*

§ 5. Обтекание выпуклой криволинейной стенки

Чтобы составить себе представление о картине, возникающей при обтекании выпуклой криволинейной стенки, рассмотрим вначале одну из линий тока, полученных при обтекании тупого угла и примем ее за проекцию твердой стенки (рис. 4.20). Над этой стенкой параметры потока известны, ибо они

останутся такими же, какими они были над соответствующей (теперь *отвердевшей*) линией тока при обтекании угла.

Через каждую точку обтекаемой кривой линии проходит прямолинейная характеристика, вдоль которой все параметры

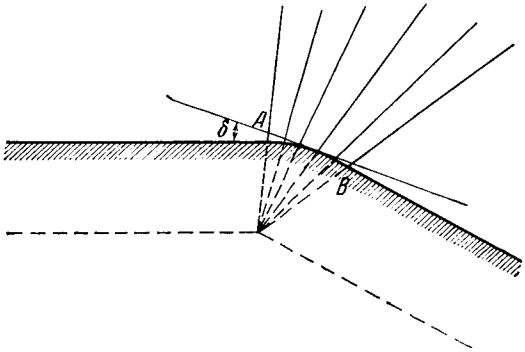


Рис. 4.20. Схема сверхзвукового обтекания выпуклой кривой.

газа остаются неизменными. Состояние газа на каждой характеристике определяется по углу поворота потока δ, соответствующему этой характеристике и равному углу, между касательной к стенке в *начальной точке* характеристики и направлением невозмущенного потока. При расчете параметров газа

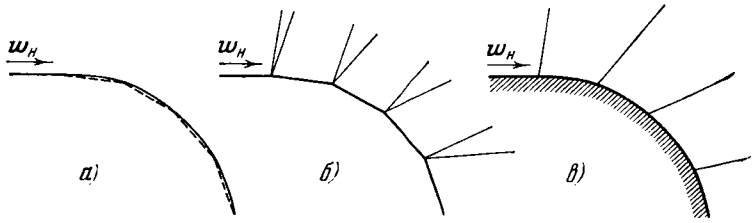


Рис. 4.21. Переход от обтекания ломаной стенки к обтеканию выпуклой кривой.

нужно воспользоваться выведенными ранее формулами или таблицей приложения I к книге на стр. 857—859.

Заметим, что *такая же точно качественная картина имеет место при обтекании выпуклой криволинейной стенки любой формы.* Необходимо только, чтобы выпуклость стенки была направлена всегда в сторону газа. Чтобы показать это, заменим произвольную кривую стенку вписанной ломаной линией, состоящей из последовательности прямолинейных отрезков (рис. 4.21, *а*). Обтекание такой ломаной сводится к обтеканию

последовательности внешних тупых углов и, следовательно, может быть полностью рассчитано. Картина обтекания показана на рис. 4.21, *б*. Если теперь безгранично увеличивать число вершин ломаной, вписанной в данную кривую, то в пределе мы получим обтекание кривой, причем ясно, что через каждую точку кривой проходит прямолинейная характеристика, вдоль которой параметры газа не меняются (рис. 4.21, *в*).

Чтобы рассчитать обтекание произвольной кривой выпуклой стенки, нужно знать лишь угол поворота, т. е. направление касательной для каждой точки стенки. Если, например, форма стенки задана уравнением в виде $y = y(x)$ (ось x направлена по вектору скорости невозмущенного потока), то, дифференцируя это уравнение, мы найдем угол касательной с осью x для каждого значения абсциссы x, равный углу поворота потока δ.

Таким образом,

$$\delta = \operatorname{arctg}[y'(x)].$$

Зная δ, легко определить все параметры газа, действуя точно так же, как в случае обтекания тупого угла. В частности, можно найти распределение скоростей и давлений вдоль стенки. При обтекании кривой выпуклой стенки, так же как и при обтекании угла, газ разгоняется. Скорость газа непрерывно увеличивается, а давление падает.

Если окажется, что в какой-либо точке стенки

$$\delta > \delta_{\text{пр}},$$

то произойдет срыв потока.

Нахождение формы линий тока при обтекании выпуклой стенки произвольного вида является более трудной задачей, и мы ее здесь рассматривать не будем. Строгая теория обтекания кривой стенки создана И. А. Кибелем и С. А. Христиановичем.

§ 6. Истечение из единичного плоского сопла с косым срезом в пространство с пониженным давлением

Рассмотрим истечение сверхзвукового потока газа из плоского сопла. Пусть сопло обеспечивает равномерную скорость на его срезе, а давление в свободном пространстве, в которое вытекает газ, меньше, чем давление в плоскости среза сопла. Изложенная выше теория обтекания плоской стенки позволяет определить направление границ струи непосредственно после среза сопла.

Поведение газа вблизи кромок сопла A и B (рис. 4.22, *а*) точно такое же, как при обтекании одной плоской стенки. Около каждой из кромок поток повернется на такой угол δ, чтобы

давление в потоке стало равным заданному давлению в свободном пространстве. Следовательно, струя в целом при истечении расширяется. Угол поворота потока δ около каждой из кромок можно найти по заданным величинам скорости и давления на срезе сопла и давлению в свободном пространстве так же, как при обтекании одной плоской стенки. Этот угол δ определяет направление границ струи за срезом сопла. Вдоль всей свободной границы струи существует постоянное значение скорости, которое соответствует внешнему давлению и легко может быть вычислено по приведенным выше формулам и таблице.

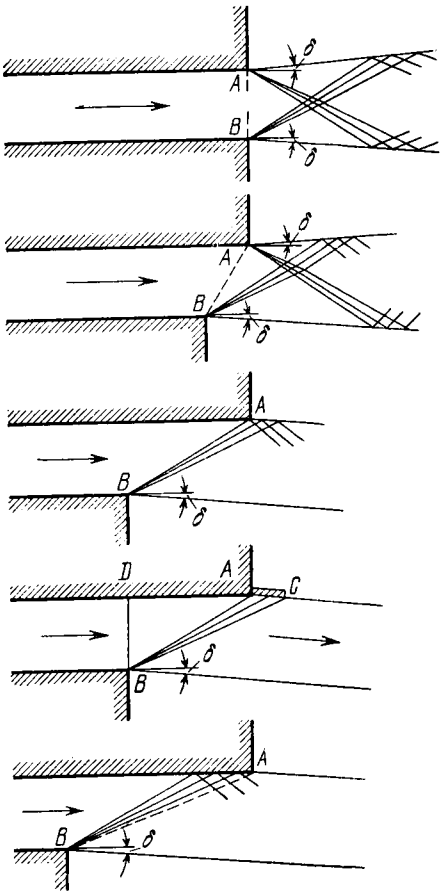


Рис. 4.22. Различные схемы истечения из сопла с косым срезом.

Пучки прямолинейных характеристик, исходящих из точек A и B, пересекаются, как показано на рисунке. После пересечения характеристик скорость потока изменяется, и, как это следует из § 2 гл. III, характеристики перестают быть прямолинейными. Это обстоятельство значительно усложняет расчет дальнейших участков струи.

Если плоскость среза сопла не перпендикулярна к оси потока, то такое сопло называют *соплом с косым срезом*. Наличие косого среза нарушает симметрию потока и значительно усложняет расчет возникающего при этом течения. Изучение истечения из каналов с косым срезом имеет важное практическое значение, так как такое истечение имеет место при работе паровых и газовых турбин, где обычно сопловые аппараты представляют собой каналы с косым срезом.

Рассмотрим сверхзвуковое истечение газа из плоского сопла с косым срезом в пространство, в котором давление меньше, чем давление в потоке внутри сопла [1]). Косой срез образуется при смещении кромки B сопла относительно кромки A назад, против потока. При небольшом смещении кромки B, т. е. при небольшом наклоне плоскости среза AB (рис. 4.22, *б*), получится, очевидно, несимметричная свободная струя. При этом область пересечения пучков характеристик, исходящих из кромок A и B, перемещается к точке A.

Следовательно, прямолинейные характеристики, исходящие из кромки A, начинают искривляться раньше, чем в случае прямого среза. За плоскостью среза AB струя расширяется. Углы поворота потока около каждой из кромок A и B, очевидно, такие же, как и в случае прямого среза.

Предельным положением кромки B для течения такого вида является то ее положение, при котором «первая» характеристика, проведенная из кромки B, проходит точно через кромку A. Такой случай изображен на рис. 4.22, *в*. Картина течения вблизи кромки B по-прежнему аналогична обтеканию одной плоской стенки. Поэтому направление границы струи за кромкой B сохраняется прежним и его легко можно определить. Характеристики, исходящие из кромки A, начнут искривляться сразу за точкой A. Это усложняет определение второй границы струи за точкой A.

Если за кромкой A сделать направляющий козырек, выполненный по линии тока, соответствующей повороту потока около кромки B (рис. 4.22, *г*), то течение можно рассчитать полностью. Обтекание кромки B при заданном внешнем давлении аналогично обтеканию внешнего тупого угла. Поэтому форму линии тока можно определить по формуле (29).

Таким образом, мы получаем профиль направляющего козырька AC. Давление на луче BC равно заданному внешнему давлению, вследствие чего за лучом BC струя опять становится параллельной и равномерной. Скорость в этой струе больше, чем скорость внутри сопла в сечении BD. Струя отклоняется от оси сопла на угол δ, определяемый отношением внешнего давления к давлению внутри сопла в сечении BD.

Смещая кромку B еще дальше назад, мы получим случай истечения из косого среза, изображенный на рис. 4.22, *д*. Здесь «первая» характеристика, исходящая из кромки B, приходит на противоположную стенку внутри сопла в некоторой точке левее A. Точный расчет течения вблизи участка стенки между

---

[1]) Излагаемые ниже соображения несправедливы в случае истечения из бесконечной решетки сопел (образуемой лопатками соплового аппарата турбины). Этот случай изучается в гл. X.

указанной точкой и точкой A и определение границы струи за кромкой A составляют довольно сложную задачу. Если, как и в предыдущем случае, сделать направляющий козырек, поместив начало его в точку встречи первой характеристики со стенкой A, то мы сведем рассматриваемый случай к предыдущему.

Практически применимыми случаями истечения из косого среза являются случаи *в*, *г* и *д*. В случаях *в* и *д* пользуются приближенным расчетом, определяя скорость истечения и угол поворота струи в целом так же, как в случае *г*, т. е. пренебрегают небольшим изменением параметров потока, связанным с нарушением принятой при расчете картины течения вблизи кромки A.

Подчеркнем еще раз, что во всех практически применимых случаях истечения из плоского канала с косым срезом в пространство с пониженным давлением поток в косом срезе испытывает расширение, а струя получает добавочное отклонение; при этом скорость истечения увеличивается по сравнению со скоростью, которую может обеспечить то же самое сопло с прямым срезом.

Глава V

ОДНОМЕРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА

§ 1. Адиабатическое течение газа с трением. Кризис течения

Рассмотрим установившееся течение газа в трубе постоянного сечения при наличии трения, но без теплообмена с внешней средой.

Уравнение неразрывности в этом случае ($G = \text{const}$, $F = \text{const}$) имеет следующий вид:

$$\rho w = \text{const},$$

или в дифференциальной форме

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dw}{w}. \tag{1}$$

Дифференциальное уравнение состояния

$$dp = R(\rho\, dT + T\, d\rho). \tag{2}$$

Из уравнений (1) и (2) получаем

$$\frac{dp}{\rho} = R\, dT - RT\frac{dw}{w}. \tag{3}$$

Используя уравнение Бернулли в дифференциальной форме

$$\frac{dp}{\rho} + w^2\frac{dw}{w} + dL_{\text{тр}} = 0$$

и известное выражение для скорости звука

$$a^2 = kRT,$$

преобразуем выражение (3) к новому виду

$$R\, dT + \left(w^2 - \frac{a^2}{k}\right)\frac{dw}{w} + dL_{\text{тр}} = 0. \tag{4}$$

Ввиду того что рассматриваемый процесс является энергетически изолированным, температура торможения вдоль трубы не изменяется $T^* = \text{const}$. Это эквивалентно условию

$$dT^* = dT + \frac{w^2}{c_p}\frac{dw}{w} = 0,$$

или, принимая во внимание известные равенства $R = c_p - c_v$, $c_p = kc_v$,

$$R\,dT = -\frac{k-1}{k} w^2 \frac{dw}{w}. \tag{5}$$

Подставляя (5) в (4), приходим к соотношению, связывающему изменение скорости вдоль трубы постоянного сечения с работой сил трения:

$$(\mathrm{M}^2 - 1)\frac{dw}{w} = -\frac{k}{a^2} dL_{\text{тр}}. \tag{6}$$

Существенно, что трение является односторонним воздействием: работа сил трения всегда положительна ($dL_{\text{тр}} > 0$). Поэтому согласно соотношению (6) *под влиянием трения дозвуковой поток* ($\mathrm{M} < 1$) *ускоряется* ($dw > 0$), *а сверхзвуковой* ($\mathrm{M} > 1$) — *замедляется* ($dw < 0$). Непрерывный переход через скорость звука при воздействии только трением невозможен.

Выведем формулы, определяющие изменение параметров газа вдоль изолированной трубы при наличии трения.

Ввиду того что процесс в газе энергетически изолирован, температура торможения не меняется:

$$T_1^* = T_2^* = \text{const}. \tag{7}$$

Термодинамическая температура, если воспользоваться уравнениями (42) гл. I и (7), определяется из соотношения

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_2^2}{1 - \frac{k-1}{1+k}\lambda_1^2}. \tag{8}$$

Вследствие постоянства температуры торможения критическая скорость вдоль трубы также не изменяется; отсюда отношение приведенных скоростей равно отношению скоростей и на основании уравнения неразрывности — обратному отношению плотностей

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{w_1}{w_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}. \tag{9}$$

Подставив равенства (8) и (9) в уравнение состояния, получим зависимость давления от приведенной скорости:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \frac{1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_2^2}{1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_1^2}. \tag{10}$$

Ввиду постоянства температуры торможения полное давление пропорционально плотности заторможенного газа [1])

$$\frac{p_2^*}{p_1^*} = \frac{\rho_2^*}{\rho_1^*} = \frac{p_2}{p_1}\left(\frac{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda_1^2}{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda_2^2}\right)^{\frac{k}{k-1}}.$$

Отсюда на основании (10) получаем

$$\frac{p_2^*}{p_1^*} = \frac{\rho_2^*}{\rho_1^*} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\left(\frac{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda_1^2}{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda_2^2}\right)^{\frac{1}{k-1}}. \qquad (11)$$

Дадим λ_1 какое-либо постоянное значение и будем рассматривать λ_2 как переменную величину, а параметры T_2, ρ_2, p_2, p_2^*, ρ_2^* — как функции переменного λ_2. Выше было установлено на основании соотношения (6), что трение ускоряет дозвуковой и замедляет сверхзвуковой поток. Тогда нужно считать λ_2 возрастающим при дозвуковом и убывающим при сверхзвуковом потоке. Поэтому согласно зависимостям (8), (9) и (10) термодинамическая температура, плотность и статическое давление вдоль изолированной трубы под влиянием трения падают в дозвуковом и растут в сверхзвуковом течении. Из равенства (11) следует, что в критическом сечении при $\lambda_2 = 1$ полное давление p_2^* имеет минимальное значение [2]), но тогда из выражения (102)

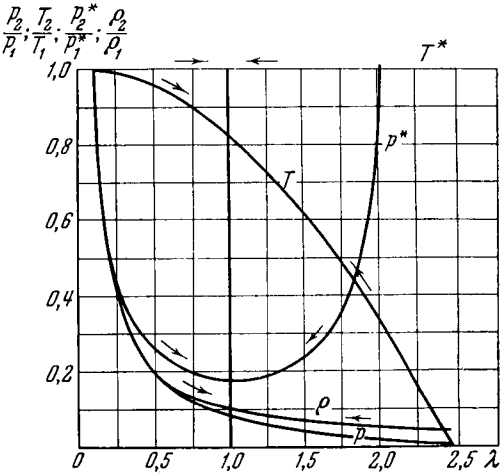


Рис. 5.1. Зависимость параметров газа от приведенной скорости в трубе постоянного сечения.

[1]) Это вытекает из уравнения состояния и формулы (72) гл. I.

[2]) В этом можно убедиться, дифференцируя равенство (11) по λ_2. Подставляя в выражение производной вместо λ_2 единицу, получим

$$\frac{d}{d\lambda_2}\left(\frac{p_2^*}{p_1^*}\right)_{\lambda_2=1} = 0.$$

Вторая производная положительна при $\lambda_2 = 1$.

гл. I вытекает, что в критическом сечении энтропия достигает максимального значения. Полное давление и плотность заторможенного газа в соответствии с равенством (11) как в дозвуковом, так и в сверхзвуковом потоке вдоль трубы убывают, и только один параметр — температура торможения — не меняется.

То обстоятельство, что энтропия достигает максимума в критическом сечении, как раз и обусловливает существование кризиса течения в изолированной трубе, делающего невозможным плавный переход через скорость звука под влиянием трения; при таком переходе энтропия должна была бы уменьшаться, а это противоречит второму началу термодинамики.

На рис. 5.1 изображены кривые температуры, плотности, давления, температуры торможения и полного давления в изолированной трубе в функции приведенной скорости λ_2 при $\lambda_1 = 0{,}1$ для дозвукового потока, $\lambda_1 = 2{,}3$ для сверхзвукового потока и $k = 1{,}4$. Стрелки на фигурах указывают направление протекания процесса.

Подчеркнем, что значительное ускорение дозвукового и торможение сверхзвукового потоков под действием силы трения сопряжено с существенным расходованием полного давления.

§ 2. Течение в трубе постоянного сечения

Исследуем влияние трения на изменение параметров турбулентного газового потока в трубах постоянного диаметра. Для этого заменим работу силы трения в соотношении (6) общепринятым в гидравлике выражением

$$dL_{\text{тр}} = \zeta \frac{w^2}{2} \frac{dx}{D}; \tag{12}$$

здесь ζ — коэффициент трения в трубе, D — диаметр трубы, dx — длина бесконечно малого участка трубы. Тогда получим

$$(\mathbf{M}^2 - 1) \frac{dw}{w} = -\zeta k \frac{\mathbf{M}^2}{2} \frac{dx}{D}.$$

Пользуясь выражением (45) гл. I и постоянством критической скорости в трубе, из которого следует равенство

$$\frac{dw}{w} = \frac{d\lambda}{\lambda},$$

перейдем в соотношении (6) от числа $\mathbf{M}$ к приведенной скорости λ:

$$\left(\frac{1}{\lambda^2} - 1\right) \frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{k}{k+1} \zeta \frac{dx}{D}. \tag{13}$$

Допустим в первом приближении, что коэффициент трения в трубе как в дозвуковых, так и в сверхзвуковых потоках не

зависит от числа M, а следовательно, и от приведенной скорости λ.

В шероховатых трубах величина ζ для несжимаемой жидкости не зависит также от числа Рейнольдса R и определяется по формуле [1])

$$\zeta = \frac{1}{\left(1{,}74 + 2\lg\frac{1}{\varepsilon}\right)^2}, \tag{14}$$

где $\varepsilon = 2h/D = h/r$ — относительная шероховатость трубы (h — высота выступов шероховатости).

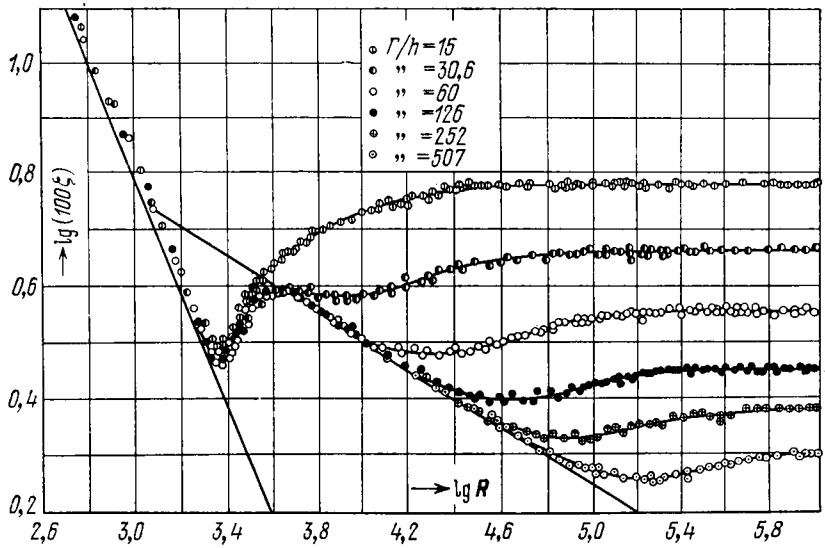


Рис. 5.2. Зависимость коэффициента трения ζ от R в трубах с различной шероховатостью по опытам Никурадзе.

Рассмотрим далее трение в так называемых технически гладких трубах. Технически гладкая труба характеризуется тем, что выступы шероховатости в ней покрываются ламинарным подслоем [2]). Толщина подслоя уменьшается с ростом числа R; поэтому одна и та же труба при малых R является гладкой, а при больших R шероховатой (рис. 5.2).

В технически гладких трубах для турбулентного потока несжимаемой жидкости коэффициент трения зависит от числа R

[1]) См. «Проблемы турбулентности», стр. 29, ОНТИ, 1936.
[2]) Подоробнее о ламинарном подслое см. гл. VI.

и может быть определен по формуле

$$\zeta = 0{,}0032 + \frac{0{,}221}{\mathrm{R}^{0{,}237}}, \tag{15}$$

где $\mathrm{R} = \frac{\rho w D}{\mu}$.

Поскольку в трубе постоянного сечения согласно уравнению неразрывности $\rho w = \text{const}$, то число R по длине трубы изменяется незначительно (только за счет изменения вязкости).

Итак, приближенно полагаем коэффициент трения в трубе постоянной величиной

$$\zeta \approx \text{const}.$$

В этом случае уравнение (13) легко интегрируется:

$$\frac{1}{\lambda_1^2} - \frac{1}{\lambda_2^2} - \ln\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} = \frac{2k}{k+1}\zeta\frac{x_2}{D}; \tag{16}$$

здесь λ_1 — значение приведенной скорости в начале трубы при $x = 0$, λ_2 — значение приведенной скорости в произвольном сечении трубы на расстоянии $x = x_2$ от начала. С помощью выражения (16) можно определить значение приведенной скорости в произвольном сечении трубы, если известны приведенная скорость в начале трубы λ_1, диаметр трубы D, коэффициент трения ζ и показатель идеальной адиабаты k.

Введем функцию $\varphi(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2} + 2\ln\lambda$ и назовем безразмерную величину, находящуюся в правой части уравнения (16)

$$\frac{2k}{k+1}\zeta\frac{x}{D} = \chi,$$

приведенной длиной трубы. Тогда уравнение (16) можно представить в виде

$$\varphi(\lambda_1) - \varphi(\lambda_2) = \chi. \tag{17}$$

Таким образом, изменение скорости потока между двумя сечениями трубы таково, что разность функций $\varphi(\lambda)$ в них равна приведенной длине данного участка трубы. Пользуясь графиком функции $\varphi(\lambda)$ (рис. 5.3), можно определить изменение приведенной скорости потока по длине трубы в зависимости от значений λ и ξ. Функция $\varphi(\lambda)$ имеет при $\lambda = 1$ минимум, равный $\varphi(\lambda) = 1$. Поэтому при заданном значении λ_1 величина разности в левой части уравнения (17), а следовательно, и приведенная длина трубы χ не могут быть больше некоторой критической величины, определяемой из условия $\lambda_2 = 1$:

$$\chi_{\text{кр}} = \varphi(\lambda_1) - 1. \tag{18}$$

Действительно, приравняем нулю производную приведенной длины χ по λ_2 при $\lambda_1 = \text{const}$:

$$\frac{d\chi}{d\lambda_2} = -\frac{d}{d\lambda_2}\varphi(\lambda_2) = \frac{2}{\lambda_2^3} - \frac{2}{\lambda_2} = 0.$$

Отсюда находим

$$\lambda_2 = 1.$$

Так как при $\lambda_2 = 1$

$$\frac{d^2\chi}{d\lambda_2^2} = -\frac{6}{\lambda_2^4} + \frac{2}{\lambda_2^2} = -4,$$

то условие $\lambda_2 = 1$ определяет максимум величины приведенной длины трубы для заданного значения приведенной скорости на входе в трубу λ_1. Поскольку уравнение (17) справедливо не только для всей трубы, но и для любого ее участка, то из него следует, что скорость, равная скорости звука, может быть достигнута только в выходном сечении трубы. Действительно, если представить, что приведенная скорость λ равна единице в каком-либо промежуточном сечении цилиндрической трубы, то из уравнения (17), записанного для последующего участка трубы, получится

$$\varphi(\lambda_2) = 1 - \chi < 1.$$

Так как, по определению, функция $\varphi(\lambda) \geqslant 1$ (рис. 5.3), то этот случай нереален.

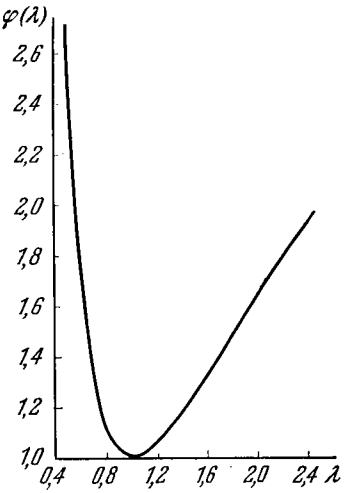


Рис. 5.3. График функции $\varphi(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2} + 2\ln\lambda$.

Выше было показано, что при течении в цилиндрической трубе с трением дозвуковой поток ускоряется, а сверхзвуковой тормозится, причем предельно возможным состоянием в обоих случаях при непрерывном изменении параметров является критический режим, т. е. достижение потоком скорости звука в выходном сечении трубы. Уравнение (17) позволяет установить количественную связь между изменением скорости и приведенной длиной трубы χ. Если на входе в трубу поток дозвуковой и приведенная скорость его равна λ_1 и если приведенная длина трубы меньше критического значения, определяемого формулой (18), то на выходе из трубы поток будет также дозвуковым, причем из уравнения (17) следует, что приведенная скорость

$\lambda_2 > \lambda_1$. Если поток на входе дозвуковой и приведенная длина трубы равна критической (максимальной) для данного λ_1 величине, то на выходе из трубы скорость потока равна скорости звука и $\lambda_2 = 1$.

Если, наконец, приведенная длина трубы больше максимальной, определяемой из формулы (18), то уравнение (17) не имеет решения для $\lambda_2(\varphi(\lambda_2) < 1)$. Это означает, что принятое начальное значение приведенной скорости λ_1 не может быть реализовано. В начале трубы с заданной приведенной длиной χ скорость потока не может превышать величины, получаемой из формулы

$$\varphi(\lambda_1) = \chi + 1, \tag{19}$$

так как при этом скорость на выходе из трубы равна критической, и через трубу протекает максимально возможный секундный расход газа.

На рис. 5.4 представлена зависимость предельного значения приведенной скорости на входе в трубу $\lambda_{1пр}$ от безразмерной

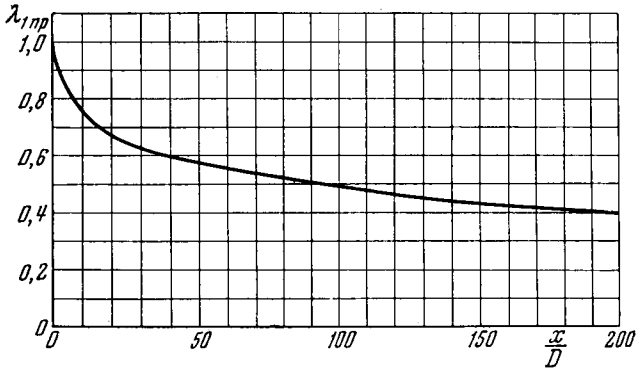


Рис. 5.4. Зависимость предельного значения приведенной скорости в начале трубы от ее длины.

длины трубы x/D для дозвукового потока при $\zeta = 0{,}015$ и $k = 1{,}4$. При этих значениях ζ и k

$$\frac{x}{D} = \frac{k+1}{2k}\frac{1}{\zeta}\chi \approx 57\chi.$$

Следует отметить, что полученному изменению приведенной скорости (формула (16)) как при $\lambda_1 < 1$, так и при $\lambda_1 > 1$ соответствует вполне определенное изменение полного и статического давления газа (см. формулы (10) и (11) § 1). Выше мы везде полагали, что такое изменение давления может быть всегда осуществлено: это являлось условием сохранения постоян-

ного значения λ_1 при изменении приведенной длины трубы вплоть до получения $\lambda_2 = 1$. Если почему-либо указанное изменение давления невозможно, например при заданной величине перепада давлений на входе и выходе, то рассматриваемое течение с заданной начальной приведенной скоростью может оказаться нереальным. Подробнее этот вопрос рассмотрен ниже, в § 7.

При сверхзвуковом течении, для которого формула (16) также пригодна, возможны следующие режимы. Если при заданной начальной скорости λ_1 приведенная длина меньше максимальной ($\chi < \chi_{кр}$), то в конце трубы получается сверхзвуковое течение ($\lambda_2 > 1$). Если приведенная длина равна максимальной ($\chi = \chi_{кр}$), то скорость в конце трубы равна критической ($\lambda_2 = 1$). Если же приведенная длина, вычисленная по формуле (17), получается больше максимальной, определенной по формуле (18) при заданном значении приведенной скорости в начале трубы λ_1, то плавное торможение сверхзвукового потока на протяжении всей трубы невозможно; в некотором сечении трубы произойдет скачок уплотнения, за которым установится ускоренное дозвуковое течение.

Определение положения этого скачка уплотнения можно произвести следующим образом. Пусть задана сверхзвуковая скорость в начале трубы λ_1, длина трубы x, диаметр трубы D, коэффициент трения ζ и показатель идеальной адиабаты k. Вычисляем по формуле (17) приведенную длину трубы χ. По формуле (18) определяем максимальную приведенную длину $\chi_{кр}$ и убеждаемся в том, что истинная приведенная длина больше максимальной ($\chi > \chi_{кр}$). В этом случае, как было указано, в некотором сечении, отстоящем на расстоянии $x_{ск}$ от начала трубы, возникает скачок уплотнения. Для простоты допустим, что скачок уплотнения прямой, тогда приведенные скорости до скачка (λ') и после скачка (λ'') связаны соотношением (16) гл. III

$$\lambda'\lambda'' = 1.$$

Приведенную скорость перед скачком (λ') можно найти из формулы (16):

$$\frac{1}{\lambda_1^2} - \frac{1}{\lambda'^2} - \ln\frac{\lambda'^2}{\lambda_1^2} = \frac{2k}{k+1}\zeta\frac{x_{ск}}{D} = \chi_{ск}. \qquad (20)$$

Приведенная скорость за скачком, где устанавливается ускоренное дозвуковое течение ($\lambda'' < 1$), связана с длиной дозвукового участка трубы, в конце которого имеет место кризис ($\lambda_2 = 1$), формулой (18):

$$\frac{1}{\lambda''^2} - 1 - \ln\frac{1}{\lambda''^2} = \frac{2k}{k+1}\zeta\frac{x - x_{ск}}{D} = \chi - \chi_{ск},$$

откуда

$$\lambda'^2 - 1 - \ln \lambda'^2 = \chi - \chi_{ск}. \qquad (21)$$

Решая совместно два уравнения (20) и (21) с двумя неизвестными ($\chi_{ск}$, λ'), приходим к уравнению с одним неизвестным, по по которому вычисляется скорость перед скачком:

$$\lambda'^2 + \frac{1}{\lambda_1^2} - 1 - \frac{1}{\lambda'^2} - \ln \frac{\lambda'^4}{\lambda_1^2} = \chi, \qquad (22)$$

после чего по формуле (21) определяется местоположение скачка.

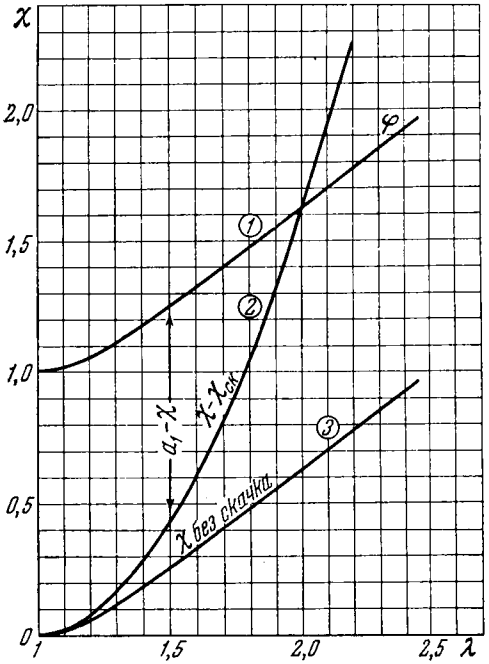


Рис. 5.5. Вспомогательные кривые для расчета сверхзвукового потока в трубе постоянного сечения.

Формулы (20)—(22) для определения местоположения скачка уплотнения неудобны, так как по ним приходится вести расчеты методом последовательных приближений. Можно рекомендовать вспомогательные графики (рис. 5.5), существенно упрощающие расчеты. Кривая *1* отвечает вспомогательной зависимости

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2} + \ln \lambda^2, \qquad (23)$$

изображенной на рис. 5.3. Кривая *2* изображает функцию (21)

$$\chi - \chi_{ск} = \lambda'^2 - 1 - \ln \lambda'^2.$$

Кривая *3* соответствует функции (18)

$$\chi_{кр} = \frac{1}{\lambda_1^2} - 1 - \ln \frac{1}{\lambda_1^2}.$$

Поясним способ пользования этими кривыми на конкретном примере. Пусть дана труба с приведенной длиной $\chi = 0{,}6$. По кривой *3* видно, что в этой трубе установится критический режим ($\lambda_2 = 1$) при значении приведенной скорости на входе $\lambda_1 = 1{,}95$. Проверим сначала характер течения в трубе в случае

$\lambda_1 > 1{,}95$, например для $\lambda_1 = 2{,}2$. По формуле (16) можно вычислить скорость в конце трубы

$$\frac{1}{\lambda_2^2} + \ln \lambda_2^2 = \frac{1}{\lambda_1^2} + \ln \lambda_1^2 - \chi$$

или в соответствии с обозначением (23)

$$\varphi_2 = \varphi_1 - \chi. \tag{24}$$

На кривой *1* при $\lambda_1 = 2{,}2$ находим точку $\varphi_1 = 1{,}78$, откуда

$$\varphi_2 = 1{,}78 - 0{,}60 = 1{,}18,$$

чему на кривой *1* отвечает значение приведенной скорости в конце трубы $\lambda_2 = 1{,}4$. Итак, в трубе, имеющей приведенную длину $\chi = 0{,}6$, при начальном значении приведенной скорости $\lambda_1 = 2{,}2$ происходит плавное торможение сверхзвукового потока до значения приведенной скорости $\lambda_2 = 1{,}4$.

Пусть теперь труба имеет приведенную длину больше максимальной ($\chi > \chi_{кр}$), т. е. в данном примере $\lambda_1 < 1{,}95$. Положим $\lambda_1 = 1{,}8$. Тогда, согласно кривой *3*,

$$\chi_{кр} = 0{,}48, \text{ т. е. } \chi_{кр} < \chi.$$

В этом случае в трубе возникает скачок уплотнения, в результате чего на участке трубы длиной $\chi - \chi_{ск}$ установится дозвуковое течение, причем, как видно из сравнения кривых *2* и *3*, критическая длина трубы существенно увеличивается. Для отыскания местоположения скачка уплотнения преобразуем формулу (20) с помощью обозначений (23). Тогда расстояние от начала трубы до сечения, в котором происходит скачок уплотнения, равно

$$\chi_{ск} = \varphi_1 - \varphi'. \tag{25}$$

Но, с другой стороны,

$$\chi = (\chi - \chi_{ск}) + \chi_{ск};$$

заменяя последнее слагаемое в правой части этой формулы по (25), получаем

$$\varphi_1 - \chi = \varphi' - (\chi - \chi_{ск}). \tag{26}$$

Теперь, пользуясь кривыми рис. 5.5, определим местоположение скачка уплотнения в трубе при $\lambda_1 = 1{,}8$. По кривой *1* находим

$$\varphi_1 = 1{,}148.$$

откуда

$$\varphi_1 - \chi = 1{,}48 - 0{,}60 = 0{,}88.$$

Остается найти значение λ', при котором расстояние между кривыми *1* и *2* равно согласно (26)

$$\varphi' - (\chi - \chi_{ск}) = 0{,}88.$$

Получается по рис. 5.5

$$\lambda' = 1{,}4, \quad \varphi' = 1{,}18,$$

чему соответствует по формуле (24) приведенное расстояние от начала трубы до скачка уплотнения:

$$\chi_{ск} = \varphi_1 - \varphi' = 0{,}3.$$

Описанным способом по кривым рис. 5.5 вычислены и нанесены на рис. 5.6 кривые изменения приведенной скорости

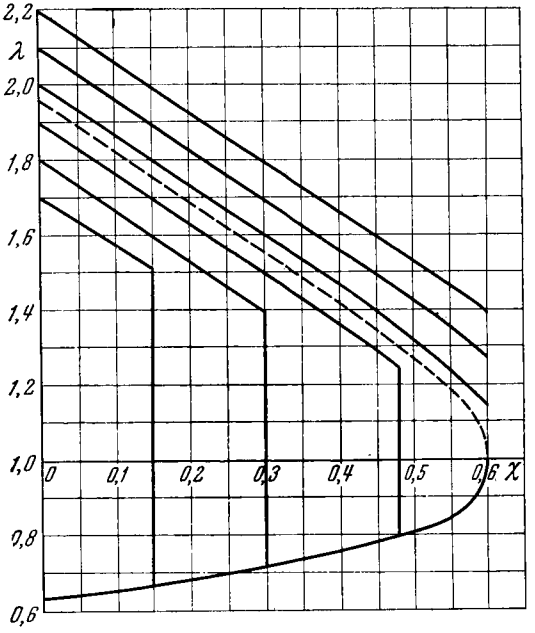


Рис. 5.6. Кривые распределения значений приведенной скорости по трубе с приведенной длиной $\chi = 0{,}6$ при различных начальных скоростях.

$\lambda = f(\chi)$ в трубе с приведенной длиной $\chi = 0{,}6$, получающиеся при различных значениях приведенной скорости λ_1 в начале трубы (при $\chi = 0$). Как видим, скачок уплотнения располагается тем ближе к началу трубы, чем меньше начальная сверхзвуковая скорость газа. Значения дозвуковой скорости после скачка уплотнения лежат во всех случаях на универсальной кривой, соответствующей формуле

$$\chi = \frac{1}{\lambda''^2} - 1 - \ln \frac{1}{\lambda''^2}.$$

При $\lambda_1 = 1{,}6$ скачок помещается в начале трубы ($\lambda_1 = \lambda'$), т. е. участок сверхзвукового течения вовсе ликвидируется. Течение газа в трубе при заданном перепаде давлений рассмотрено в § 7.

§ 3. Движение подогреваемого газа по трубе постоянного сечения [1])

Процесс подвода тепла вносит особый вид сопротивления: при подогреве движущегося газа полное давление падает.

Будем рассматривать движение газа в трубе, изображенной на рис. 5.7. Обозначим λ_x и $\lambda_г$ приведенные скорости в соответственных сечениях. Пусть скорость в трубе мала:

$$\lambda_x \ll 1 \quad \text{и} \quad \lambda_г \ll 1.$$

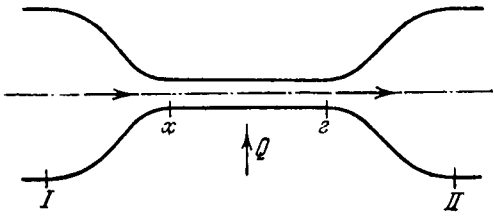


Рис. 5.7. К определению теплового сопротивления.

Прибегнем к следующей идеализированной схеме. Газ поступает в трубу $x - г$ из канала с большим поперечным сечением I (рис. 5.7). На участке $I - x$ реализуется течение без потерь и теплообмена. Подвод тепла осуществляется только в цилиндрической трубе $x - г$. После этого газ без потерь и теплообмена вытекает в широкий канал II. Несмотря на то, что в каналах I и II скорость мала, а гидравлическими потерями можно пренебречь, значения полного давления в сечениях I и II неодинаковы; как мы покажем сейчас, вследствие подогрева полное давление во втором канале меньше.

Согласно уравнению Бернулли

$$p_x = p_1^* - \rho_x \frac{w_x^2}{2}, \quad p_г = p_2^* - \rho_г \frac{w_г^2}{2}.$$

Отсюда изменение полного давления

$$p_1^* - p_2^* = (p_x - p_г) + \left(\rho_x \frac{w_x^2}{2} - \rho_г \frac{w_г^2}{2}\right). \tag{27}$$

Из уравнения неразрывности $\rho_x w_x = \rho_г w_г$ следует, что если вследствие подогрева плотность газа уменьшается, то скорость его растет и, следовательно, статическое давление падает.

[1]) См. Абрамович Г. Н., О тепловом кризисе в газовом течении, Доклады Академии наук СССР, № 7, т. 54, 1946.

Из уравнения импульсов можно определить падение статического давления при подогреве на участке $x-г$ (пренебрегая трением):

$$p_x - p_г = \rho_x w_x (w_г - w_x)$$

или

$$p_x - p_г = 2\left(\rho_г \frac{w_г^2}{2} - \rho_x \frac{w_x^2}{2}\right).$$

Подставив эту разность в уравнение (27), имеем

$$p_1^* - p_2^* = \rho_г \frac{w_г^2}{2} - \rho_x \frac{w_x^2}{2}. \qquad (28)$$

Отсюда видно, что при подогреве медленно движущегося газа величина потерь мала. При значительной же скорости ими пренебрегать уже нельзя.

Обнаруженное «тепловое» сопротивление нетрудно объяснить с точки зрения термодинамики. В рассмотренном примере имеет место расширение газа в конфузоре, затем подогрев его при пониженном давлении и, наконец, сжатие в диффузоре. Но такой цикл противоположен обычному циклу тепловой машины, в котором подвод тепла идет при повышенном давлении. По этой причине рассматриваемый процесс связан с поглощением, а не выделением энергии.

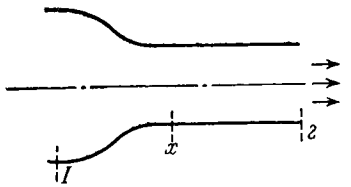


Рис. 5.8. К учету влияния подогрева на расход газа в трубе.

Можно предложить и другой способ термодинамического истолкования «теплового сопротивления». Как известно, повышение энтропии в газе зависит как от количества подведенного тепла, так и от температурного уровня:

$$\Delta S_{1-2} = \int_1^2 \frac{dQ}{T}.$$

При одном и том же количестве тепла прирост энтропии, а следовательно, и потери тем больше, чем ниже средняя температура процесса, т. е. чем выше скорость потока.

Оценим влияние подвода тепла на расход газа в трубе. Пусть истечение газа происходит через трубу постоянного сечения (рис. 5.8), в которой температура газа увеличивается от значения T_x до $T_г$. Ограничиваясь случаем малых скоростей ($\lambda_г \ll 1$), при котором абсолютная величина давления меняется

незначительно, получим

$$\frac{w_x}{w_г} = \frac{\rho_г}{\rho_x} \approx \frac{T_x}{T_г} \approx \frac{T_x^*}{T_г^*}.$$

Из уравнения импульсов, пренебрегая сопротивлением трения, имеем

$$p_x - p_г = \rho_x w_x^2 \left[\frac{T_г}{T_x} - 1\right]$$

и по определению

$$p_x^* - p_x = \frac{1}{2}\rho_x w_x^2.$$

Тогда

$$p_x^* - p_г = (p_x - p_г) + (p_x^* - p_x) = \frac{1}{2}\rho_x w_x^2 \left[2\frac{T_г}{T_x} - 1\right]. \quad (29)$$

Здесь $p_x^* = p^*$ есть полное давление в сосуде, из которого газ вытекает, а $p_г = p_н$ — статическое давление в выходном сечении трубы.

Расход газа при заданном перепаде давлений $H = (p^* - p_н)$ равен

$$G = \rho_x w_x F,$$

где F — поперечное сечение трубы. Так как из (29) следует, что

$$w_x = \sqrt{\frac{2H}{\rho_x\left(2\frac{T_г}{T_x} - 1\right)}},$$

то отношение расходов газа при отсутствии и наличии подогрева в трубе

$$\frac{G_x}{G_г} = \sqrt{2\frac{T_г}{T_x} - 1}. \quad (30)$$

Как видим, подвод тепла при заданном перепаде давлений ведет к уменьшению расхода газа при одновременном увеличении скорости истечения.

Исследуем теперь падение давления на участке $x - г$ трубы при большой дозвуковой скорости движения газа.

При значительных скоростях течения плотность газа при подогреве уменьшается не только из-за повышения температуры, но и вследствие понижения статического давления. В связи с этим скорость газа увеличивается вдоль трубы быстрее, чем температура. Скорость звука, которая пропорциональна корню квадратному из абсолютной температуры, увеличивается вдоль трубы значительно медленнее, чем скорость потока. По этой причине число $M = w/a$ по длине трубы растет.

Поток, имеющий любую начальную скорость, можно за счет соответствующего подогрева довести до критической скорости ($M_г = 1$). При большом начальном значении числа M понадобится незначительный подогрев. Чем ниже скорость, тем более сильный *критический* подогрев необходим. Но никаким подогревом нельзя перевести поток в цилиндрической трубе в сверхзвуковую область. Это явление носит название *теплового кризиса* [1]).

Естественно, что после того, как в конце трубы достигнут кризис, скорость потока в начале трубы не может быть увеличена никакими способами. Если по достижении кризиса продолжать подогрев газа, то величина критической скорости в конце трубы растет, а скорость в начале трубы падает. Иначе говоря, заданному количеству тепла соответствует совершенно определенное предельное значение числа M в начале трубы.

Теплосодержание заторможенного газа складывается из теплосодержания в потоке и кинетической энергии:

$$i_x^* = i_x + \frac{w_x^2}{2}, \quad i_г^* = i_г + \frac{w_г^2}{2}.$$

Вследствие подвода тепла теплосодержание в конце трубы больше, чем в начале, на величину подведенного количества тепла

$$Q = i_г^* - i_x^*.$$

Отсюда получаем

$$Q = c_p(T_г^* - T_x^*) = c_p(T_г - T_x) + \frac{1}{2}(w_г^2 - w_x^2). \qquad (31)$$

Уравнение (31) вместе с уравнениями неразрывности, количества движения и состояния образуют систему, достаточную для определения четырех неизвестных параметров газа — $p_г$, $\rho_г$, $T_г$, $w_г$ — в конце трубы.

Из уравнения количества движения имеем

$$p_г\left(\frac{p_x}{p_г} - 1\right) = \rho_г w_г (w_г - w_x).$$

Вставляя в это уравнение значения p_x и $p_г$ из уравнения состояния

$$\frac{\rho_x}{\rho_г}\frac{T_x}{T_г} - 1 = \frac{\rho_г}{p_г} w_г^2\left(1 - \frac{\rho_г}{\rho_x}\right)$$

и учитывая, что по формуле (34) гл. I $kp_г/\rho_г = a_г^2$, получим

$$\frac{\rho_x}{\rho_г}\frac{T_x}{T_г} - 1 = k\mathsf{M}_г^2\left(1 - \frac{\rho_г}{\rho_x}\right). \qquad (32)$$

[1]) Более подробное обоснование явления теплового кризиса дается в следующем параграфе.

Отношение температур T_x и $T_г$ можно представить в виде

$$\frac{T_x}{T_г} = \frac{T_x^* - \frac{w_x^2}{2c_p}}{T_г^* - \frac{w_г^2}{2c_p}} = \frac{\frac{T_x^*}{T_г^*} - \frac{w_x^2}{2c_p T_г^*}}{1 - \frac{w_г^2}{2c_p T_г^*}}.$$

Вводя критическую скорость $a_{кр.\,г}$, получим

$$\frac{T_x}{T_г} = \frac{\frac{T_x^*}{T_г^*} - \frac{k-1}{k+1}\left(\frac{\rho_г}{\rho_x}\right)^2 \lambda_г^2}{1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_г^2}.$$

Вставляя в (32) это выражение для $T_x/T_г$ и заменяя $M_г^2$ по формуле (45) гл. I, приходим к квадратному уравнению

$$\left(\frac{\rho_г}{\rho_x}\right)^2 \frac{\lambda_г^2}{1+\lambda_г^2} - \frac{\rho_г}{\rho_x} + \frac{T_x^*}{T_г^*}\frac{1}{1+\lambda_г^2} = 0, \tag{33}$$

решая которое, находим [1])

$$\frac{\rho_г}{\rho_x} = \frac{1+\lambda_г^2}{2\lambda_г^2}\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\lambda_г^2}{(1+\lambda_г^2)^2}\frac{T_x^*}{T_г^*}}\right], \tag{34}$$

или

$$\frac{\rho_x}{\rho_г} = \frac{1+\lambda_x^2}{2\lambda_x^2}\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\lambda_x^2}{(1+\lambda_x^2)^2}\frac{T_г^*}{T_x^*}}\right]. \tag{35}$$

Уравнение (35) используется в тех случаях, когда известно состояние газа в начале трубы. Если же скорость газа в конце трубы доводится до критической, то удобнее применять уравнение (34).

При отсутствии подогрева $(T_x^* = T_г^*)$: $\rho_г = \rho_x$.

Если в конце трубы имеет место тепловой кризис $(\lambda_г = 1)$, то уравнение (34) примет следующий вид:

$$\frac{\rho_г}{\rho_x} = \frac{w_x}{w_г} = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{T_x^*}{T_г^*}}. \tag{36}$$

При этом

$$w_г = a_{кр.\,г} = \sqrt{\frac{2k}{k+1} RT_г^*}.$$

---

[1]) Один из корней уравнения, отвечающий дозвуковой скорости течения, получается при знаке —, второй корень (при знаке +) дает решение для сверхзвуковой скорости течения.

Предельное значение скорости в начале трубы в этом случае равно

$$|w_x|_{пр} = a_{кр.г}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{T_x^*}{T_г^*}}\right). \qquad (37)$$

Разделив обе части равенства (37) на $a_{кр.x}$, можно перейти к приведенной скорости:

$$|\lambda_x|_{пр} = \frac{a_{кр.г}}{a_{кр.x}}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{T_x^*}{T_г^*}}\right).$$

Так как

$$\frac{a_{кр.г}}{a_{кр.x}} = \sqrt{\frac{T_г^*}{T_x^*}},$$

то

$$|\lambda_x|_{пр} = \sqrt{\frac{T_г^*}{T_x^*}} \pm \sqrt{\frac{T_г^*}{T_x^*} - 1}. \qquad (38)$$

Данные об изменении максимальной дозвуковой скорости на входе в трубу при варьировании подогрева приведены в нижеследующей таблице:

$T_г^*/T_x^*$	1	2	4	6	8
$\lvert\lambda_x\rvert_{пр}$	1	0,41	0,27	0,22	0,17

Уменьшение скорости в начале трубы (при $\lambda_x < 1$) с усилением подогрева в условиях теплового кризиса объясняется сокращением расхода газа. В самом деле, при тепловом кризисе скорость газа увеличивается пропорционально корню квадратному из температуры:

$$w_г = a_г \sim \sqrt{T_г},$$

а плотность газа падает быстрее, чем величина $1/T_г$ (ввиду уменьшения давления):

$$\rho_г \sim \frac{p_г}{T_г},$$

поэтому расход газа

$$G = \rho_г w_г F \sim \frac{p_г}{\sqrt{T_г}}.$$

Так как плотность в начале трубы не зависит от подогрева, то падение расхода газа приводит к уменьшению скорости в начале трубы. Малые значения приведенной скорости на входе

в камеру сгорания, получающиеся при сильном подогреве, приводят к большим габаритам двигателя. С увеличением скорости полета растут начальная температура T_x^* и предельное значение скорости на входе в камеру сгорания.

Согласно уравнению импульсов перепад давления в трубе равен

$$\frac{p_x}{p_г} - 1 = \frac{\rho_г w_г^2}{p_г}\left(1 - \frac{w_x}{w_г}\right).$$

На основании формул (34) и (45) гл. I имеем

$$k\frac{p_г}{\rho_г} = a_г^2 = \frac{1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_г^2}{\frac{2}{k+1}} a_{кр.\,г}^2,$$

поэтому

$$\frac{p_x}{p_г} = 1 + \frac{\frac{2k}{k+1}\lambda_г^2}{1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_г^2}\left(1 - \frac{w_x}{w_г}\right). \qquad (39)$$

Предельное изменение давления получается при достижении теплового кризиса ($\lambda_г = 1$). В этом случае на основании (36)

$$\left|\frac{p_x}{p_г}\right|_{пр} = 1 \pm k\sqrt{1 - \frac{T_x^*}{T_г^*}}. \qquad (40)$$

Здесь знак — отвечает $\lambda_x > 1$, знак + отвечает $\lambda_x < 1$. Осуществляя при $\lambda_x < 1$ [1]) очень сильный подогрев $\left(\frac{T_x^*}{T_г^*} \to 0\right)$, можно довести падение давления до следующей величины:

$$\left|\frac{p_x}{p_г}\right|_{пр} = k + 1,$$

или при $k = 1{,}4$

$$\left|\frac{p_x}{p_г}\right|_{пр} = 2{,}4.$$

Напомним, что падение давления, необходимое для получения критической скорости в сопле, составляет

$$\frac{p^*}{p_{кр}} = \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{k}{k-1}},$$

т. е. при $k = 1{,}4$

$$\frac{p^*}{p_{кр}} = 1{,}89.$$

[1]) О случае $\lambda_x > 1$ будет сказано ниже.

Определим теперь падение полного давления в цилиндрической трубе. В начале и в конце трубы имеем соответственно

$$\frac{p_x}{p_x^*}=\left(1-\frac{k-1}{k+1}\lambda_x^2\right)^{\frac{k}{k-1}}, \qquad \frac{p_г}{p_г^*}=\left(1-\frac{k-1}{k+1}\lambda_г^2\right)^{\frac{k}{k-1}}.$$

Разделив первое уравнение на второе, получим

$$\frac{p_x}{p_x^*}\frac{p_г^*}{p_г}=\left(\frac{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda_x^2}{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda_г^2}\right)^{\frac{k}{k-1}}.$$

Отсюда коэффициент сохранения полного давления в трубе равен

$$\sigma_т=\frac{p_г^*}{p_x^*}=\frac{p_г}{p_x}\left(\frac{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda_x^2}{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda_г^2}\right)^{\frac{k}{k-1}}. \tag{41}$$

Наибольшее падение полного давления получается при тепловом кризисе. Подставляя выражения (38) и (40) в равенство (41), получим для этого режима течения

$$\sigma_{кр}=\frac{\left[k-(k-1)\left(1\pm\sqrt{1-\frac{T_x^*}{T_г^*}}\right)\frac{T_г^*}{T_x^*}\right]^{\frac{k}{k-1}}}{1\pm k\sqrt{1-\frac{T_x^*}{T_г^*}}}. \tag{42}$$

Здесь верхние знаки соответствуют режиму $\lambda_x>1$. Зависимость изменения полного давления при тепловом кризисе в трубе от отношения температур торможения, вычисленная для $\lambda_x<1$ по формуле (42), представлена в нижеследующей таблице ($k=1{,}4$):

$T_г^*/T_x^*$	1	1,5	2	4	6	8	∞
$\sigma_{кр}$	1	0,89	0,86	0,82	0,81	0,80	0,79

Как видим, при $\lambda_x<1$ потери полного давления при реальном подогреве $\left(\frac{T_г^*}{T_x^*}\approx 4-8\right)$ получаются такого же порядка, как и при бесконечно сильном подогреве.

Итак, при $\lambda_x<1$ и $k=1{,}4$ *полное давление в конце подогрева составляет не меньше* 80% *от полного давления в начале подогрева.*

Для большей наглядности результатов несколько преобразуем выражение (42). Для этого из (38) получим связь между критическим подогревом газа ($\lambda_г = 1$) и соответствующим значением начальной скорости до подогрева:

$$\left(\frac{T_г^*}{T_х^*}\right)_{кр} = \frac{(1+\lambda_х^2)^2}{4\lambda_х^2}. \quad (42а)$$

Отсюда следует, что при максимально возможной скорости газа до подогрева $\left(\lambda_х^2 = \frac{k+1}{k-1}\right)$ критический подогрев не превосходит значения

$$\left(\frac{T_г^*}{T_х^*}\right)_{кр.\ max} = \frac{k^2}{(k-1)(k+1)},$$

что при

$k = 1{,}4$ дает $\left(\frac{T_г^*}{T_х^*}\right)_{кр.\ max} = 2{,}04.$

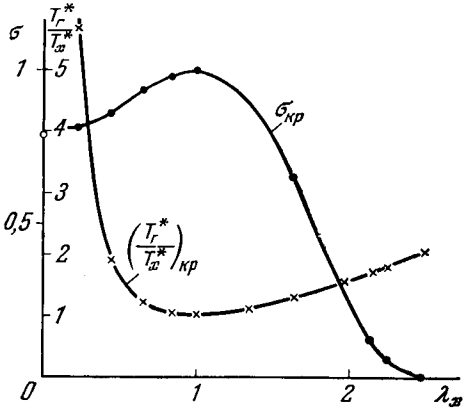


Рис. 5.9. Зависимость степени подогрева и коэффициента сохранения полного давления от приведенной скорости потока при кризисе ($\lambda_г = 1$).

Подставляя (42а) в (42) и отбирая знаки по физическому смыслу задачи, имеем

$$\sigma_{кр} = \frac{1+\lambda_х^2}{2}\left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}}\left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_х^2\right)^{\frac{1}{k-1}}. \quad (42б)$$

Отсюда следует: при $\lambda_х = 0$, т. е. $\frac{T_г^*}{T_х^*} = \infty$, $\sigma_{кр} = \frac{1}{2}\left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}}$; при $\lambda_х = 1$, т. е. $\frac{T_г^*}{T_х^*} = 1$, $\sigma_{кр} = 1$, и при $\lambda_х^2 = \frac{k+1}{k-1}$, т. е. $\frac{T_г^*}{T_х^*} = \frac{k^2}{k^2-1}$, $\sigma_{кр} = 0$.

Кривые $\sigma_{кр}(\lambda_х)$ и $\left(\frac{T_г^*}{T_х^*}\right)_{кр} = f(\lambda_х)$, полученные с помощью формул (42а) и (42б), нанесены на рис. 5.9.

Выше было показано, что при малых скоростях течения газа по трубе с подводом тепла в случае постоянного перепада давлений усиление подогрева ведет к снижению расхода газа.

В § 6 будет показано, что при постоянном перепаде давлений подогрев вызывает уменьшение расхода газа и при больших скоростях течения,

§ 4. Общие условия перехода от дозвукового течения к сверхзвуковому и обратно

В предыдущих параграфах было показано, что при подводе тепла или совершении работы трения в движущемся по цилиндрической трубе с дозвуковой скоростью газе происходит увеличение числа M; то же явление наблюдается в дозвуковом потоке при течении без теплообмена и трения в суживающейся трубе.

Ниже будет доказано, что изменение числа M в газовом потоке происходит не только под влиянием трения, теплового и геометрического воздействий, но также при изменении расхода газа в канале и при совершении механической работы. Указанные воздействия вызывают изменение числа M как в дозвуковом, так и в сверхзвуковом потоке газа.

Рассмотрим в общем виде влияние этих воздействий на скорость движения газа. Для простоты будем считать газ идеальным. Расход газа равен $G = \rho w F$.

Отсюда после дифференцирования и почленного деления на G имеем

$$\frac{dG}{G} = \frac{dF}{F} + \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dw}{w}. \tag{43}$$

Дифференцируя уравнение состояния для идеального газа ($p = \rho RT$), получаем

$$dp = R(\rho dT + T d\rho),$$

или

$$\frac{dp}{\rho} = R\left(dT + T\frac{d\rho}{\rho}\right). \tag{44}$$

Сопоставление выражений (43) и (44) дает

$$\frac{dp}{\rho} = RdT + RT\left(\frac{dG}{G} - \frac{dF}{F} - \frac{dw}{w}\right). \tag{45}$$

С другой стороны, из уравнения Бернулли в дифференциальной форме (формула (91) гл. I) имеем

$$\frac{dp}{\rho} = -wdw - dL - dL_{тр}, \tag{46}$$

где L — техническая работа, $L_{тр}$ — работа трения. Сопоставляя (45) и (46), а также освобождаясь от членов, содержащих плотность и давление, получим

$$RdT + \frac{a^2}{k}\left(\frac{dG}{G} - \frac{dF}{F}\right) + \left(w^2 - \frac{a^2}{k}\right)\frac{dw}{w} + dL + dL_{тр} = 0. \tag{47}$$

Здесь используется выражение для скорости звука ($a^2 = kRT$). От члена, содержащего температуру (RdT), можно избавиться с помощью дифференциального уравнения энергии

$$dQ_{\text{нар}} = di + d\left(\frac{w^2}{2}\right) + dL = \frac{k}{(k-1)} RdT + wdw + dL, \quad (48)$$

где $Q_{\text{нар}}$ — тепло, подводимое к газу извне, $di = c_p\, dT = R\frac{k}{k-1} dT$ — прирост теплосодержания. Подставляя (48) в (47) и производя элементарные преобразования, приходим к соотношению, связывающему изменение скорости газового потока с внешними воздействиями (геометрическим, расходным, механическим, тепловым и трением):

$$(\mathsf{M}^2 - 1)\frac{dw}{w} = \frac{dF}{F} - \frac{dG}{G} - \frac{1}{a^2} dL - \frac{k-1}{a^2} dQ_{\text{нар}} - \frac{k}{a^2} dL_{\text{тр}}. \quad (49)$$

Это соотношение было установлено Л. А. Вулисом [1]) и получило название *условия обращения воздействия*. Особенность этого соотношения состоит в том, что знак его левой части изменяется при переходе значения скорости через критическое. Поэтому *характер влияния отдельных физических воздействий на газовое течение противоположен при дозвуковом и сверхзвуковом режимах*. Воздействия, вызывающие ускорение в дозвуковом потоке (сужение канала, подвод дополнительной массы газа, совершение газом работы, трение и подвод тепла: $dF < 0$, $dG > 0$, $dL > 0$, $dQ_{\text{нар}} > 0$), приводят к замедлению сверхзвукового потока; воздействия обратного знака (расширение канала, отсос газа, сообщение газу механической энергии и отвод тепла: $dF > 0$, $dG < 0$, $dL < 0$, $dQ_{\text{нар}} < 0$) приводят к замедлению дозвукового и ускорению сверхзвукового потоков. Отсюда следует важный вывод, что *под влиянием одностороннего воздействия величину скорости газового потока можно довести только до критической, но нельзя перевести через нее*. Например, путем подвода тепла можно ускорять дозвуковой поток, но только до тех пор, пока не получится $\mathsf{M} = 1$. Для того, чтобы перевести дозвуковой поток в сверхзвуковой, нужно переменить знак воздействия, т. е. в зоне $\mathsf{M} = 1$ начать отводить тепло. Таково обоснование описанного в предыдущем параграфе явления теплового кризиса в камере сгорания. Подогрев газа в сверхзвуковом течении вызывает торможение потока, но переход к дозвуковому течению и дальнейшее торможение станут возможными только в том случае, если, начиная с $\mathsf{M} = 1$, мы переключимся на охлаждение газа.

---

[1]) Вулис Л. А., Доклады Академии наук СССР № 8, т. 54, 1946; Вулис Л. А., Термодинамика газовых потоков. Энергоиздат, М., 1950.

Разумеется, что ускорение газового потока в сопле при любой комбинации воздействий требует достаточного перепада давлений между сечениями, расположенными перед и за соплом.

Рассмотрим раздельно каждое из четырех воздействий.

При этом получим в дополнение к известному *соплу Лаваля* (геометрическое воздействие) еще три указанных Л. А. Вулисом способа перехода через скорость звука, т. е. *расходное, механическое и тепловое сопла.*

Геометрическое сопло, т. е. известное *сопло Лаваля*, представляет собой канал, в котором только за счет придания ему соответствующей формы можно осуществить переход от дозвуковой скорости к сверхзвуковой. В этом частном случае *чисто геометрического воздействия на поток* ($dF \neq 0$) отсутствуют прочие воздействия, т. е. не меняется расход газа ($dG = 0$), нет обмена теплом и работой с внешней средой ($dQ_{\text{нар}} = 0$, $dL = 0$) и нет трения ($dL_{\text{тр}} = 0$).

Но тогда соотношение (49) переходит в полученное ранее равенство (1) гл. IV:

$$(\mathbf{M}^2 - 1)\frac{dw}{w} = \frac{dF}{F}.$$

Не останавливаясь вторично на исследовании течения в сопле Лаваля, напомним только, что ускорение потока в дозвуковой части сопла Лаваля ($\mathbf{M} < 1$) получается путем сужения канала ($dF < 0$), но, начиная с критического сечения ($\mathbf{M} = 1$), для получения сверхзвукового потока и дальнейшего его ускорения приходится изменять знак воздействия, т. е. расширять канал ($dF > 0$).

Течение идеального газа в геометрическом сопле (рис. 4.1) при отсутствии трения является изоэнтропическим. В критическом сечении ($\mathbf{M} = 1$) сопла воздействие проходит через минимум ($dF = 0$).

Расходное сопло дает возможность получить переход через скорость звука за счет изменения расхода газа в трубе постоянного сечения ($dF = 0$) при отсутствии обмена с внешней средой работы ($dL = 0$) и тепла ($dQ_{\text{нар}} = 0$) и без трения ($dL_{\text{тр}} = 0$). В этом случае соотношение (49) принимает следующую форму:

$$(\mathbf{M}^2 - 1)\frac{dw}{w} = -\frac{dG}{G}.$$

Ускорение движения ($dw > 0$) достигается здесь за счет подвода дополнительной массы газа в дозвуковой части канала и отсоса газа в сверхзвуковой его части. В критическом сечении ($\mathbf{M} = 1$) расход газа и, следовательно, плотность тока проходят через максимум.

Расходное сопло в принципе аналогично геометрическому. Если разбить поток в расходном сопле на отдельные струйки постоянного расхода, то каждая из них представляет собой геометрическое сопло с наиболее узким сечением в области кризиса ($M = 1$); однако сужение элементарных струек в нем осуществляется не путем сужения общего канала, а за счет подвода и отвода дополнительных количеств газа (рис. 5.10).

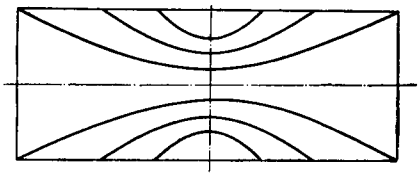


Рис. 5.10. Схема течения в расходном сопле.

Естественно, что изменение состояния идеального газа в расходном сопле (без трения) идет по изоэнтропическому закону.

Механическое сопло дает еще один принципиально возможный путь перехода через скорость звука: за счет технической работы при отсутствии других воздействий ($dF = 0$, $dG = 0$, $dQ_{\text{нар}} = 0$, $dL_{\text{тр}} = 0$).

В этом случае основное соотношение (49) выглядит так:

$$(M^2 - 1)\frac{dw}{w} = -\frac{1}{a^2}dL,$$

из чего следует, что если газовый поток совершает работу ($dL > 0$), например, на колесе турбины, то в дозвуковом режиме ($M < 1$) он ускоряется ($dw > 0$), а в сверхзвуковом ($M > 1$) замедляется ($dw < 0$). При подводе работы к газу ($dL < 0$), т. е. на лопатках компрессора, в дозвуковом течении наблюдается замедление, а в сверхзвуковом — ускорение.

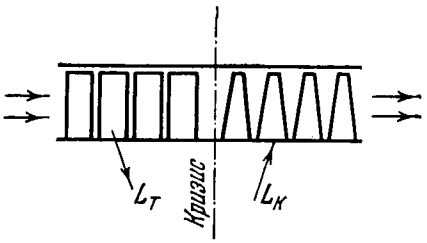


Рис. 5.11. Схема механического сопла.

Непрерывный переход через скорость звука в механическом сопле получается при изменении знака воздействия в критическом сечении. В принципе, пропуская дозвуковой поток газа через турбину, можно разогнать его до критической скорости; после этого нужно пустить его через компрессор, и тогда получится ускоряющийся сверхзвуковой поток (рис. 5.11).

Таким образом, сверхзвуковое механическое сопло должно состоять из последовательно включенных турбины (в области $M < 1$) и компрессора (в области $M > 1$), между которыми располагается критическое сечение ($M = 1$).

Особенностью механического сопла является то, что параметры торможения проходят в его критическом сечении через минимум. В самом деле, уравнение теплосодержания для механического сопла можно записать следующим образом:

$$i_{\text{н}}^{*} = i^{*} + L.$$

Здесь $i_{\text{н}}^{*}$, i^{*} — значения полного теплосодержания газа соответственно в начальном и произвольном сечениях сопла, L — техническая работа, совершенная газом между начальным и произвольным сечениями сопла. Поэтому в дозвуковой части механического сопла, где газ совершает работу $L_{\text{т}}$ (на турбине), т. е. $L > 0$, полное теплосодержание (и температура торможения) убывает $i^{*} < i_{\text{н}}^{*}$.

В сверхзвуковой области, где к газу подводится компрессором механическая энергия $L_{\text{к}}(L < 0)$, происходит увеличение полного теплосодержания по сравнению с его значением в критическом сечении:

$$i^{*} > i_{\text{кр}}^{*} \text{ или } T^{*} > T_{\text{кр}}^{*}.$$

В том, что полное давление и плотность заторможенного газа проходят вместе с температурой торможения в критическом сечении механического сопла через минимумы, можно убедиться и иным способом. Для двух произвольных сечений идеального механического сопла, представляющего собой, по определению, канал постоянного сечения имеем

$$\frac{\mathsf{M}_2}{\mathsf{M}_1} = \frac{w_2}{w_1}\frac{a_1}{a_2} = \frac{\rho_1 a_1}{\rho_2 a_2}.$$

Ввиду отсутствия трения и теплоотдачи параметры газа в таком сопле изменяются как при идеальном адиабатическом процессе:

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{k}} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{1}{k-1}}.$$

Учитывая, что отношение значений скорости звука

$$\frac{a_1}{a_2} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{1/2},$$

получим следующие простые зависимости между значением числа M и параметрами газа в идеальном механическом сопле:

$$\frac{\mathsf{M}_2}{\mathsf{M}_1} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{k+1}{2k}} = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{\frac{k+1}{2}}. \qquad (50)$$

Итак, *монотонное возрастание значения числа* M *в механическом сопле сопровождается монотонным падением температуры, давления и плотности.*

Кривые изменения параметров потока и торможения в сверхзвуковом механическом сопле при $M_1 = 0{,}1$ представлены на рис. 5.12 и 5.13.

Из выражения (50) следует, что максимальная скорость истечения из механического сопла ничем не ограничена

$$\frac{w_2}{w_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \left(\frac{M_2}{M_1}\right)^{\frac{2}{k+1}},$$

так как при $M_2 \to \infty$ имеем $w_2 \to \infty$. Этот результат не должен вызывать удивления, так как в сверхзвуковом участке механического сопла к газу подводится энергия ($dL < 0$).

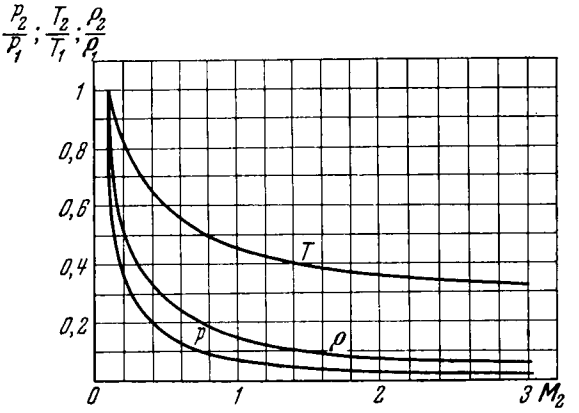


Рис. 5.12. Зависимость параметров газа от числа M_2 в механическом сопле при $M_1 = 0{,}1$; $k = 1{,}4$.

Тепловое сопло, пока еще не осуществленное, дает принципиальную возможность перехода газового потока через скорость звука за счет еще одного — чисто теплового — воздействия при отсутствии других воздействий, т. е. в цилиндрической трубе ($dF = 0$), при постоянном расходе газа ($dG = 0$), без совершения механической работы ($dL = 0$) и без трения ($dL_{тр} = 0$). Основное соотношение (49) применительно к тепловому соплу имеет следующий вид:

$$(M^2 - 1)\frac{dw}{w} = -\frac{(k-1)}{a^2} dQ_{нар}.$$

Ускорение газа ($dw > 0$) в дозвуковом потоке ($M < 1$) здесь связано с подводом тепла ($dQ_{нар} > 0$), а в сверхзвуковом — с его отводом ($dQ_{нар} < 0$). Подвод тепла при сверхзвуковом и отвод тепла при дозвуковом режиме вызывают замедление потока ($dw \leq 0$). Таким образом, для того чтобы преобразовать

дозвуковой поток в сверхзвуковой посредством теплового сопла, в дозвуковом участке последнего нужно повышать теплосодержание газа, а в сверхзвуковом — понижать его, т. е. в критическом сечении теплового сопла, где количество подведенного к газу тепла проходит через максимум ($dQ_{\text{нар. кр}} = 0$), следует изменить знак воздействия.

Темгература торможения в критическом сечении теплового сопла (в противоположность случаю механического сопла)

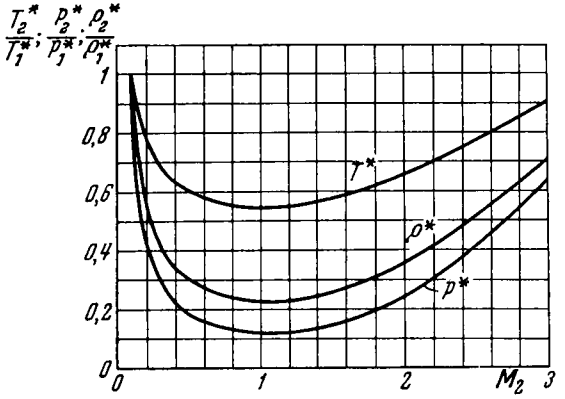


Рис. 5.13. Зависимость параметров торможения от числа $\mathbf{M}_2$ в механическом сопле при $\mathbf{M}_1 = 0{,}1$; $k = 1{,}4$.

достигает максимального значения; это вытекает из уравнения теплосодержания, которое применительно к тепловому соплу имеет следующий вид:

$$i_{\text{н}}^* = i^* - Q_{\text{нар}}.$$

Из предыдущего параграфа, содержащего теорию *теплового сопротивления*, следует, что при подводе тепла к газовому потоку полное давление в нем падает, а при отводе тепла — растет. Формулы теплового сопротивления были выведены применительно к случаю движения газа без трения по трубе постоянного сечения, т. е. именно к случаю теплового сопла.

Из этой теории следует, что полное давление в критическом сечении теплового сопла, как и в механическом сопле, проходит через минимум. Плотность заторможенного газа, прямо пропорциональная полному давлению и обратно пропорциональная температуре торможения, достигает в критическом сечении минимального значения.

В рассмотренных выше идеальных соплах: геометрическом, расходном и механическом, изменение состояния газа было изо-

энтропическим, т. е. описывалось уравнением идеальной адиабаты $p/\rho^k = \text{const}$.

В тепловом сопле в связи с подводом и отводом тепла энтропия изменяется.

Исследуем термодинамический процесс, который имеет место в тепловом сопле [1]). Дифференциальная форма уравнения количества движения применительно к цилиндрической трубе при отсутствии трения имеет следующий вид:

$$dp = -\rho w dw.$$

Уравнение неразрывности в этом случае ($dF = 0$, $dG = 0$) дает

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dw}{w};$$

отсюда

$$\frac{dp}{d\rho} = w^2. \tag{51}$$

Для политропического процесса при постоянном показателе политропы $p/\rho^n = \text{const}$, после дифференцирования [2]) имеем

$$\frac{dp}{d\rho} = n\frac{p}{\rho} = n\frac{a^2}{k}, \tag{52}$$

так как скорость звука в газе $a^2 = kp/\rho$. Приравнивая правые части выражений (51) и (52), замечаем, что показатель политропы в тепловом сопле является существенно переменной величиной

$$n = k\mathsf{M}^2. \tag{53}$$

Формула (53) показывает наличие двух характерных сечений в тепловом сопле.

В сечении, где $\mathsf{M} = 1/\sqrt{k}$, местное значение показателя политропы равно единице: $n = 1$, т. е. элементарный термодинамический процесс в этом сечении — изотермический ($dT = 0$), и, следовательно, температура газа здесь проходит через максимум.

В критическом сечении теплового сопла, т. е. при $\mathsf{M} = 1$, показатель политропы на основании формулы (53) равен показателю идеальной адиабаты: $n = k$, т. е. здесь имеет место элементарный изоэнтропический процесс, при котором, как уже указывалось выше, количество подведенного к газу тепла и

---

[1]) См. Вулис Л. А., О переходе через скорость звука в газовом течении. Доклады Академии наук СССР, № 8, т. 54, 1946.

[2]) При плавном протекании термодинамического процесса на любом участке малого изменения параметров состояния можно допустить, что локальное значение показателя n постоянно, хотя в целом процесс протекает с изменением показателя политропы.

температура торможения проходят через максимум ($dQ_{\text{пар}} = 0$, $dT^* = 0$).

От изотермического до критического сечений теплового сопла наблюдается интересное явление: понижение температуры газа ($dT < 0$) при подводе тепла ($dQ_{\text{нар}} > 0$). На этом участке сопла прирост кинетической энергии газа больше прироста полного теплосодержания.

Для отыскания зависимости давления газа от числа M в тепловом сопле без трения используем уравнение количества движения в следующей форме:

$$p_1 + \rho_1 w_1^2 = p_2 + \rho_2 w_2^2; \tag{54}$$

отсюда

$$p_1(1 + k\mathbf{M}_1^2) = p_2(1 + k\mathbf{M}_2^2),$$

или

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1 + k\mathbf{M}_1^2}{1 + k\mathbf{M}_2^2}. \tag{55}$$

Иначе говоря, *давление газа в тепловом сопле с ростом числа* M *монотонно падает, несмотря на увеличение полного давления в сверхзвуковой части.*

Зависимость плотности газа и скорости течения в тепловом сопле от числа M можно найти следующим способом:

$$\frac{\mathbf{M}_2^2}{\mathbf{M}_1^2} = \frac{w_2^2}{w_1^2}\frac{a_1^2}{a_2^2} = \frac{w_2^2}{T_2}\frac{T_1}{w_1^2},$$

но из уравнений состояния и неразрывности имеем

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{p_1}{p_2}\frac{\rho_2}{\rho_1}, \qquad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{w_1}{w_2},$$

поэтому

$$\frac{\mathbf{M}_2^2}{\mathbf{M}_1^2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{p_1}{p_2}.$$

Используя зависимость (55), получаем

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{w_1}{w_2} = \frac{\mathbf{M}_1^2}{\mathbf{M}_2^2}\frac{1 + k\mathbf{M}_2^2}{1 + k\mathbf{M}_1^2}, \tag{56}$$

откуда видно, что *плотность газа вдоль теплового сопла монотонно падает с ростом числа* M.

Температура газа в тепловом сопле как функция числа M может быть получена делением равенства (55) на равенство (56):

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\mathbf{M}_2^2}{\mathbf{M}_1^2}\left[\frac{1 + k\mathbf{M}_1^2}{1 + k\mathbf{M}_2^2}\right]^2. \tag{57}$$

Как нетрудно убедиться из выражения (57), кривая температуры имеет максимум в точке [1])

$$\mathbf{M}_2^2 = \frac{1}{k}.$$

В любых двух сечениях теплового сопла с одинаковой температурой ($T_2 = T_1$) значения числа $\mathbf{M}$, как это явствует из выражения (57), связаны следующей зависимостью:

$$\mathbf{M}_2\mathbf{M}_1 = \frac{1}{k}.$$

Выведем формулы для параметров торможения в тепловом сопле. Эти формулы приобретают более простой вид, если в них число $\mathbf{M}$ заменить приведенной скоростью λ, для чего можно воспользоваться известным соотношением (45) гл. I.

Температуру торможения найдем, пользуясь формулой (42) гл. I, из равенства

$$\frac{T_2^*}{T_1^*} = \frac{T_2}{T_1}\,\frac{1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_1^2}{1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_2^2};$$

подставив сюда (57), предварительно заменив $\mathbf{M}$ на λ по формуле (45) гл. I, получаем

$$\frac{T_2^*}{T_1^*} = \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\left(\frac{1+\lambda_1^2}{1+\lambda_2^2}\right)^2. \tag{58}$$

Полное давление в тепловом сопле может быть получено с помощью формулы (72) гл. I из выражения

$$\frac{p_2^*}{p_1^*} = \frac{p_2}{p_1}\left[\frac{1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_1^2}{1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_2^2}\right]^{\frac{k}{k-1}};$$

отсюда, используя равенство (55), приходим к следующей зависимости:

$$\frac{p_2^*}{p_1^*} = \frac{1+\lambda_1^2}{1+\lambda_2^2}\left[\frac{1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_1^2}{1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_2^2}\right]^{\frac{1}{k-1}}. \tag{59}$$

---

[1]) Для этого в равенстве (57) будем рассматривать $\mathbf{M}_1$ и T_1 как постоянные величины. Приравнивая нулю производную $\frac{dT_2}{d\mathbf{M}_2}$, находим $\mathbf{M}_2^2 = \frac{1}{k}$.

Плотность заторможенного газа в тепловом сопле можно определить путем деления выражения (59) на выражение (58):

$$\frac{\rho_2^*}{\rho_1^*} = \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2}\,\frac{1+\lambda_2^2}{1+\lambda_1^2}\left[\frac{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda_1^2}{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda_2^2}\right]^{\frac{1}{k-1}}. \qquad (60)$$

Кривые изменения параметров потока в тепловом сопле в зависимости от числа M_2 при $M_1 = 0{,}1$ даны на рис. 5.14 и 5.15.

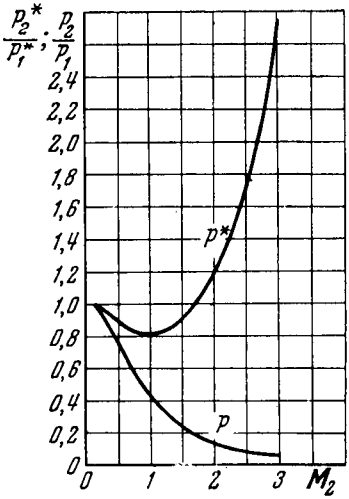


Рис. 5.14. Зависимость статического и полного давлений от числа M_2 в тепловом сопле при $M_1 = 0{,}1$; $k = 1{,}4$.

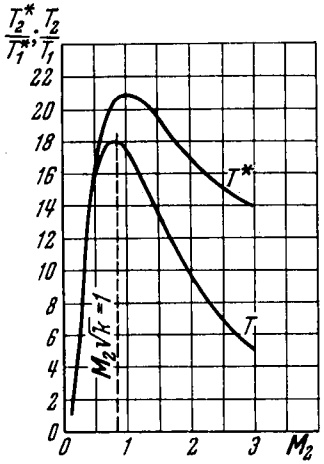


Рис. 5.15. Зависимость температур потока и торможения от числа M_2 в тепловом сопле при $M_1 = 0{,}1$; $k = 1{,}4$.

Определим количество тепла (Q), которое нужно подвести в тепловом сопле, чтобы изменить скорость газа от какого-либо одного значения (λ_1) до другого (λ_2). При постоянной теплоемкости имеем:

$$Q = c_p (T_2^* - T_1^*),$$

или в безразмерном виде

$$q = \frac{Q}{c_p T_1^*} = \frac{T_2^*}{T_1^*} - 1;$$

подставляя сюда отношение температур торможения из равенства (58), находим

$$q = \frac{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(1 - \lambda_1^2\lambda_2^2)}{\lambda_1^2(1 + \lambda_2^2)^2}.$$

Максимальное количество тепла, отвечающее критическому подогреву (до $\lambda_2 = 1$), равно

$$q_{\max} = \left(\frac{1 - \lambda_1^2}{2\lambda_1}\right)^2. \qquad (61)$$

Оно резко уменьшается с ростом начальной скорости газа (λ_1), о чем свидетельствует график рис. 5.16. Предельно возможная скорость истечения из теплового сопла (при $M_2 = \infty$) согласно равенству (56) зависит от начального значения числа M_1.

$$\frac{w_{\max}}{w_1} = 1 + \frac{1}{kM_1^2}.$$

В частности, если вести отсчет от критического сечения, т. е. положить [1])

$$M_1 = 1, \quad w_1 = a^*_{\text{кр}},$$

то получится

$$\frac{w_{\max}}{a^*_{\text{кр}}} = \frac{k+1}{k}.$$

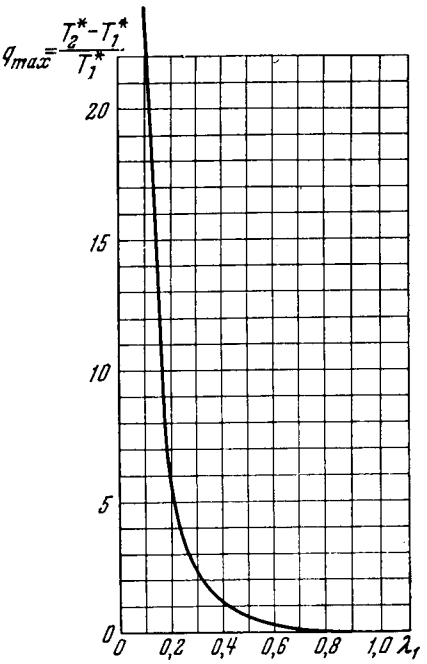


Рис. 5.16. Зависимость критического подогрева в трубе постоянного сечения от начального значения приведенной скорости.

Помимо четырех описанных «чистых» схем сверхзвуковых сопел, принципиально возможны комбинированные схемы. Наиболее реальным комбинированным соплом является так называемое полутепловое сопло, в котором дозвуковой участок является тепловым, а сверхзвуковой — геометрическим (рис. 5.17). В таком сопле газ ускоряется от некоторого начального дозвукового значения

[1]) Следует учитывать, что в связи с подводом тепла значение критической скорости по длине сопла меняется.

скорости до критического в цилиндрической трубе *1—2* за счет подвода тепла, а переход к сверхзвуковой скорости и дальнейшее ускорение потока осуществляются без теплообмена в расширяющейся трубе *2—3*. Расчет дозвукового участка полутеплового сопла ведется по формулам теплового сопла, а сверхзвукового участка — по формулам геометрического сопла.

Сравним полутепловое сопло с геометрическим при одинаковом конечном значении полного теплосодержания (i_3^*), имея в виду, что в полутепловом сопле подогрев газа совершается в цилиндрической трубе *1—2*, а в геометрическом сопле то же количество тепла подводится к газу до его входа в сопло. Значения скорости истечения из обоих сопел одинаковы, так как в критических сечениях величина температуры торможения одна и та же. Полное давление на выходе из полутеплового сопла ниже в связи с наличием теплового сопротивления в его дозвуковом участке, поэтому ниже и статическое давление на выходе из полутеплового сопла.

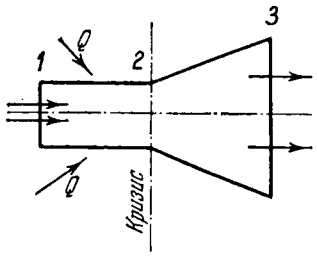


Рис. 5.17. Схема полутеплового сопла.

Рассмотрим пример полутеплового сопла с начальной скоростью газа, соответствующей значению приведенной скорости $\lambda_1 = 0{,}2$. При этом безразмерная величина подогрева газа в дозвуковом участке сопла согласно выражению (61) должна быть равна

$$q_{\max} = \left(\frac{1-\lambda_1^2}{2\lambda_1}\right)^2 = 5{,}75.$$

Потери полного давления в полутепловом сопле ($\lambda_2 = 1$) можно вычислить по формуле (59):

$$\left(\frac{p_3^*}{p_1^*}\right)_{\text{пт}} = \left(\frac{p_2^*}{p_1^*}\right)_{\text{пт}} = \frac{1+\lambda_1^2}{2}\left[\frac{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda_1^2}{\frac{2}{k+1}}\right]^{\frac{1}{k-1}}.$$

При $\lambda_1 = 0{,}2$ и $k = 1{,}4$ имеем

$$\left(\frac{p_3^*}{p_1^*}\right)_{\text{пт}} = \sigma_{\text{пт}} = 0{,}82.$$

Полное давление в геометрическом сопле сохраняет постоянное значение:

$$\left(\frac{p_3^*}{p_1^*}\right)_{\text{г}} = 1.$$

Поэтому статическое давление на выходе из полутеплового сопла при одной и той же скорости истечения в $\sigma_{пт}$ раз отличается от статического давления на выходе из геометрического сопла:

$$p_{3пт} = \sigma_{пт} p_{3г};$$

далее

$$\left(\frac{p_3}{p_1^*}\right)_{пт} = \frac{p_3}{p_3^*}\frac{p_3^*}{p_1^*} = \sigma_{пт}\left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_3^2\right)^{\frac{k}{k-1}},$$

где λ_3 — приведенная скорость истечения из сопла, p_1^* — полное давление в начальном сечении сопла. При равных перепадах давления

$$\left(\frac{p_3}{p_1^*}\right)_{пт} = \left(\frac{p_3}{p_1^*}\right)_{г}$$

скорость истечения из полутеплового сопла меньше, чем из геометрического сопла ($\lambda_{3пт} < \lambda_{3г}$); это вытекает из равенства

$$\sigma_{пт}\left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_{3пт}^2\right)^{\frac{k}{k-1}} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_{3г}^2\right)^{\frac{k}{k-1}},$$

связывающего отношение статического давления к полному с приведенной скоростью. Например, при $\sigma_{пт} = 0{,}82$ и $\lambda_{3г} = 2$ приведенная скорость истечения из полутеплового сопла $\lambda_{3пт} = 1{,}97$, т. е. на 1,5% меньше приведенной скорости истечения из геометрического сопла.

Рассматривая различные типы сопел, предназначаемых для перехода через скорость звука, мы во всех случаях имели в виду переход от дозвуковой к сверхзвуковой скорости. Полученные формулы принципиально пригодны и для обратного случая, т. е. плавного преобразования сверхзвукового потока в дозвуковой, однако при торможении сверхзвукового потока могут возникнуть скачки уплотнения, которые усложняют явление.

Остановимся теперь кратко на совместном проявлении двух или нескольких воздействий. В качестве первого примера разберем случай геометрического сопла с трением. Основное соотношение (49) имеет в этом случае вид

$$(\mathsf{M}^2 - 1)\frac{dw}{w} = \frac{dF}{F} - \frac{k}{a^2}dL_{тр}.$$

Наиболее интересной особенностью этого сопла является то, что критическая скорость получается в его расходящейся части, так как при $\mathsf{M} = 1$

$$\frac{dF}{F} = \frac{k}{a^2}dL_{тр} > 0,$$

а в узком сечении ($dF = 0$ при $dw > 0$) имеет место дозвуковая скорость и $M < 1$.

Выясним теперь главные особенности геометрического сопла с теплообменом. Из основного соотношения (49) в этом случае имеем

$$(M^2 - 1)\frac{dw}{w} = \frac{dF}{F} - \frac{k-1}{a^2}dQ_{\text{нар}}.$$

Местоположение критического сечения ($M = 1$) определяется равенством

$$\frac{dF}{F} = \frac{k-1}{a^2}dQ_{\text{нар}}.$$

При подводе тепла ($dQ_{\text{нар}} > 0$) — например, при догорании газов в сопле — критическая скорость достигается в расходящейся части сопла ($dF > 0$), при отводе тепла ($dQ_{\text{нар}} < 0$), т. е. теплоотдаче через стенки сопла, критическая скорость достигается в сходящейся части сопла ($dF < 0$). В первом случае в узком сечении сопла ($dF = 0$) имеет место дозвуковая, а во втором случае — сверхзвуковая скорость.

Таким же путем можно исследовать совместное влияние в газовом течении любых других воздействий. При этом важно подчеркнуть, что в соответствии с уравнением (49) переход от $M < 1$ к $M > 1$ требует в любом случае изменения знака суммарного воздействия.

В заключение отметим одно обстоятельство, приводящее иногда к недоразумениям при качественном анализе закономерностей некоторых течений. В связи с этим вновь вернемся к уравнению (49).

Выше при анализе уравнения количества движения (92) гл. I мы отмечали, что независимо от процессов, происходящих в потоке, изменение скорости течения всегда вызывается действием силы трения, внешних сил, а также разности сил давления на выделенный элемент газового потока. Различные виды внешнего воздействия по разному влияют на статическое давление в потоке. Смысл совместного решения уравнений (43)—(47), в результате которого было получено соотношение (49), сводился к тому, чтобы величину градиента давлений в потоке выразить через внешние воздействия; величина dp при этом исключалась из уравнения импульсов или уравнения Бернулли (46).

При анализе уравнения (49) выявлено, что: а) изменение скорости газа вызывается и такими факторами, которые не связаны с непосредственным силовым воздействием на поток (например, подвод тепла), б) суммарный эффект в ряде случаев оказывается обратным тому, который можно ожидать, исходя из анализа действия внешних сил. Действительно, например, сила трения, всегда действующая против направления движения,

в дозвуковом потоке приводит не к торможению, а к ускорению потока. Последнее означает, что при течении с трением происходит такое снижение статического давления, что действующая по потоку сила давления превышает силу трения.

Точно так же при подводе механической энергии к дозвуковому газовому потоку давление его повышается настолько, что сила давления, действующая навстречу потоку, превышает вызвавшую ее внешнюю силу. В результате поток, к которому приложена внешняя сила в направлении движения, при $M < 1$ не ускоряется, а тормозится.

Таким образом, выше, при анализе внешних воздействий на газовый поток, везде предполагалось, что в потоке возникают соответствующие градиенты давления, которые в конечном итоге и определяют изменение скорости течения. Так, например, для ускорения дозвукового газового потока в тепловом сопле (т. е. при $F = \text{const}$) давление на входе в сопло должно превышать давление на выходе на величину, определяющуюся начальным и конечным числами M (см. формулу (55)).

Такой же смысл имеют полученные выше соотношения между статическими давлениями газа при течении с трением (50), при течении с подводом механической энергии и т. п. Во многих случаях, однако, заранее известно, что в рассматриваемом потоке нет продольного градиента давления. Изменение скорости газа в этом случае ($dp = 0$) полностью определяется уравнением количества движения в виде

$$\rho w dw = -\frac{1}{F}(dP + dP_{\text{тр}}),$$

где $dP_{\text{тр}}$ — сила трения, а dP — внешняя сила. Отсюда следует, что в изобарическом потоке как при дозвуковых, так и при сверхзвуковых скоростях трение приводит к уменьшению скорости; внешние силы, действующие по потоку, или подводимая внешняя механическая энергия ($dP < 0$) всегда ускоряют газовый поток; подвод тепла при $dp = 0$ вообще не изменяет скорости направленного движения газа, так как при этом нет внешних сил.

Примером изобарического течения может быть, в частности, сверхзвуковое течение у твердой стенки. Пограничный слой вблизи такой стенки образуется в результате непрерывного торможения потока силами внешнего воздействия (трения). В итоге величина скорости течения в нем уменьшается при $p = \text{const}$ от сверхзвукового до небольшого дозвукового значения.

Точно так же изобарическая сверхзвуковая струя, смешиваясь с неподвижным атмосферным воздухом, разгоняет его частицы до сверхзвуковой скорости путем одностороннего

механического воздействия — подвода количества движения при соударении частиц газа и воздуха.

При дальнейшем течении в любой струйке тока внутри изобарической сверхзвуковой струи происходит непрерывное торможение — с переходом через скорость звука — до малых скоростей, также за счет одностороннего внешнего воздействия — передачи количества движения во внешнюю среду.

Эти примеры не противоречат установленным выше закономерностям и уравнению обращения воздействий (49). Дело в том, что при наличии какого-либо внешнего воздействия условие изобаричности ($p = \text{const}$) может быть выполнено только при вполне определенном *изменении площади сечения* F.

Так, например, при дозвуковом течении в цилиндрической трубе с трением скорость газа увеличивается, а статическое давление падает. Чтобы давление в потоке было постоянным, канал надо сделать расширяющимся, т. е. к воздействию трения добавить геометрическое воздействие $dF > 0$. Так как независимо от формы канала при течении с трением полное давление снижается, то в таком изобарическом потоке скорость газа уменьшается.

§ 5. О распространении детонации и горения в газах [1])

Творцом теории распространения детонации в газах является известный русский физик В. А. Михельсон, посвятивший в 1889 г. этому вопросу работу «О нормальной скорости воспламенения гремучих газовых смесей» [2]).

Выдающиеся теоретические и экспериментальные исследования в области горения и детонации принадлежат Н. Н. Семенову, Я. Б. Зельдовичу, Д. А. Франк-Каменецкому, К. И. Щелкину и другим советским ученым [3]).

Распространение пламени в горючей газовой смеси вне зависимости от механизма воспламенения (теплопроводностью при медленном горении или ударной волной при детонации) подчиняется основным законам газовой динамики и, следовательно, может быть описано уравнениями сохранения массы, количества движения и энергии.

Фронт пламени представляет собой тонкий слой газа практически постоянного сечения, по обе стороны которого значения скорости движения (относительно фронта волны), температуры,

---

[1]) В этом параграфе дается расширенное изложение работы: Абрамович Г. Н. и Вулис Л. А., К механике распространения детонации и горения. Доклады Академии наук СССР, т. 55, вып. 2, 1947.

[2]) Михельсон В. А., Полное собрание сочинений, т. 1, М., 1930.

[3]) См., например, Зельдович Я. Б., Теория горения и детонации газов, Изд. Академии наук СССР, 1944.

давления и других параметров различны. В соответствии с этим фронт пламени можно трактовать как поверхность сильного разрыва (теплового скачка).

В современном представлении детонационная волна, распространяющаяся в горючей газовой среде, является двухслойной. Первый слой представляет собой адиабатическую ударную волну, при прохождении через которую газ сильно разогревается. В химически активном газе разогрев этот, если он достаточно интенсивен, может вызвать воспламенение. В связи с тем что толщина ударной волны ничтожно мала (порядка длины свободного пробега молекулы), в пределах ее процесс горения, по-видимому, развиться не в состоянии. Поэтому область, в которой протекает горение, образует второй, более протяженный, но практически также весьма тонкий слой, примыкающий непосредственно к ударной волне (рис. 5.18).

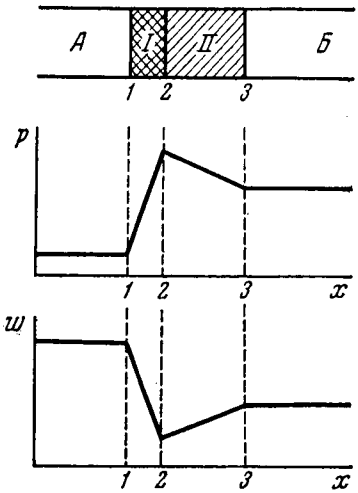


Рис. 5.18. Схема детонационной волны: $А$ — свежая смесь, $Б$ — продукты сгорания: I — скачок уплотнения, II — зона горения.

Разогрев газа при прохождении его через ударную волну в детонационном горении заменяет собой в сущности подогрев его теплопроводностью в нормальном горении.

Рассмотрим явление детонации в условиях одноразмерной задачи. В этом случае для плоской ударной волны по известному соотношению (15) гл. III произведение скоростей газа относительно фронта волны (взятых соответственно перед и за фронтом) равно квадрату критической скорости

$$w_1 w_2 = a_{кр}^2.$$

Величина w_1 является скоростью распространения ударной волны (в нашем случае волны детонации в неподвижном газе). Для исследования процесса удобнее считать, что газ притекает со скоростью w_1 к области детонации, а фронт волны неподвижен. Эта обращенная схема явления принята нами в последующем изложении.

Ударная волна (скачок уплотнения), как известно, распространяется со сверхкритической скоростью ($w_1 > a_{кр}$), поэтому скорость газа за фронтом волны всегда ниже критической ($w_2 < a_{кр}$). Иначе говоря, процесс горения при детонации, как

и при медленном горении, протекает в дозвуковой части газового потока.

В конце второго слоя детонационной волны вследствие подвода тепла при горении скорость газа выше, чем вначале, а давление соответственно ниже. Таким образом, первый слой детонационной волны представляет собой скачок сжатия, а второй слой, где происходит горение, — скачок разрежения. Примерный характер распределения давления и скорости газа в детонационной волне показан на рис. 5.18.

Перейдем к расчету скачка уплотнения.

При расчете изменения состояния газа в первом слое плоской детонационной волны мы можем воспользоваться соотношениями для прямого скачка уплотнения.

Для рассматриваемого случая существенно, что в первом слое детонационной волны (адиабатическом скачке уплотнения) температура торможения остается неизменной $T_1^* = T_2^*$. Следовательно, критическая скорость в первом слое не изменяется $a_{1кр} = a_{2кр}$, тогда как в продуктах сгорания значение ее увеличивается $T_3^* > T_1^*$ и соответственно $a_{3кр} > a_{1кр}$. Это обстоятельство необходимо учесть в дальнейшем при вычислении приведенных скоростей:

$$\lambda_1 = \frac{w_1}{a_{1кр}}, \quad \lambda_2 = \frac{w_2}{a_{2кр}}, \quad \lambda_3 = \frac{w_3}{a_{3кр}}.$$

Из уравнения неразрывности $\rho_1 w_1 = \rho_2 w_2$ и выражения (16) гл. III найдем для изменения плотности и скорости соотношения

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{w_1}{w_2} = \lambda_1^2. \tag{62}$$

Закон изменения давления в прямом скачке уплотнения может быть получен из уравнения импульсов в виде известного равенства (21) гл. III

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\lambda_1^2 - \frac{k-1}{k+1}}{1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_1^2}. \tag{63}$$

Из (62) и (63) следует, что изменение температуры газа в скачке уплотнения

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 - \frac{k-1}{k+1}\frac{1}{\lambda_1^2}}{1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_1^2}. \tag{64}$$

Например, при скорости распространения ударной волны $w_1 = 2000$ м/с, начальной температуре газа $T_1 = 400$ К, $R =$

$= 300$ Дж/(кг·К) и $k = 1{,}4$ имеем $T_1^* \approx 2340$ К, $a_{1\,кр} \approx 900$ м/с, $\lambda_1 \approx 2{,}2$, $\lambda_2 \approx 0{,}45$, чему соответствует $T_2 \approx 2260$ К.

Нет сомнений, что в данном случае ударная волна может вызвать воспламенение горючей газовой смеси.

Займемся теперь расчетом зоны горения.

Естественно, что все формулы, выведенные в §§ 3 и 4 для случая подогрева газа в цилиндрической трубе, пригодны и для расчета второго (теплового) слоя детонационной волны, так как при выводе указанных формул длина трубы не имела значения (трением и теплоотдачей через боковую поверхность мы пренебрегали).

Для расчета состояния газа во втором (дозвуковом) слое детонационной волны — в области горения — проще всего прибегнуть к соотношению (58) между температурой торможения и приведенной скоростью

$$\frac{T_3^*}{T_2^*} = \frac{\lambda_3^2(1+\lambda_2^2)^2}{\lambda_2^2(1+\lambda_3^2)^2} = \frac{\lambda_3^2(\lambda_1^2+1)^2}{\lambda_1^2(1+\lambda_3^2)^2}, \tag{65}$$

откуда после решения биквадратного уравнения получим следующее выражение:

$$\lambda_2 = \frac{1}{\lambda_1} = \frac{1+\lambda_3^2}{2\lambda_3}\left[1 - \sqrt{1 - \frac{4\lambda_3^2}{(1+\lambda_3^2)^2}\frac{T_1^*}{T_3^*}}\right]\sqrt{\frac{T_3^*}{T_1^*}}, \tag{66}$$

или

$$\lambda_3 = \frac{1+\lambda_2^2}{2\lambda_2}\left[1 - \sqrt{1 - \frac{4\lambda_2^2}{(1+\lambda_2^2)^2}\frac{T_3^*}{T_1^*}}\right]\sqrt{\frac{T_1^*}{T_3^*}}. \tag{67}$$

Здесь отброшены корни, дающие сверхзвуковые решения, так как рассматривается зона горения, где относительные скорости ниже скорости звука ($\lambda_2 < 1$); кроме того, принято $T_1^* = T_2^*$. Приведенная скорость λ_2 — непосредственно за скачком уплотнения — обычно значительно меньше единицы; если при этом и относительный прирост температуры торможения в области горения невелик ($T_3^*/T_1^* \approx 1$), то формулу (67) можно существенно упростить:

$$\lambda_3 \approx \frac{\lambda_2}{1+\lambda_2^2}\sqrt{\frac{T_3^*}{T_1^*}} \approx \lambda_2\sqrt{\frac{T_3^*}{T_1^*}}$$

(так как при сделанных предположениях $\lambda_2^2 \ll 1$). Таким образом,

$$\lambda_3 \approx \lambda_2\sqrt{1 + \frac{\Delta T^*}{T_1^*}}. \tag{68}$$

где $\Delta T^* = Q/c_p$, если Q — количество теплоты, выделяющейся при сгорании единицы массы смеси. Из формулы (68) видно, что при слабом разогреве ($\Delta T^*/T_1^* \approx 0$) приведенная скорость для продуктов сгорания близка к приведенной скорости за скачком уплотнения.

С усилением скачка уплотнения, т. е. с увеличением скорости распространения ударной волны, температура торможения исходной смеси $T_1^* = T_2^*$ резко возрастает согласно известному равенству (42) гл. I:

$$T_1^* = \frac{T_1}{1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_1^2}; \tag{69}$$

при этом резко увеличивается и температура в потоке перед областью горения T_2. В пределе при $M_1 = \infty$ и $\lambda_1 = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$ имеем $T_1^* = T_2^* = \infty$ и $T_2 = \infty$. С увеличением температуры T_2 в связи с возрастающей ролью термической диссоциации [1]) несколько уменьшается абсолютная разность температур торможения:

$$\Delta T^* = T_3^* - T_1^*.$$

Следовательно, с усилением ударной волны уменьшается как относительный разогрев газа $\Delta T^*/T_1^*$, так и приведенная скорость продуктов сгорания λ_3.

Наиболее отчетливо это видно, если в формулу (68) вместо переменной температуры торможения ввести постоянную температуру холодного газа:

$$\lambda_3 \approx \frac{1}{\lambda_1}\sqrt{1 + \frac{\Delta T^*}{T_1}\left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_1^2\right)}. \tag{70}$$

Горение, протекающее за фронтом очень сильной ударной волны, начинается на столь высоком тепловом уровне, что может вызвать лишь относительно небольшой прирост температуры торможения. Поэтому в пределе

$$(\lambda_3)_{\text{пр}} \approx \lambda_2 = \frac{1}{\lambda_1},$$

т. е. детонационная волна сближается с обычным скачком уплотнения.

Изучим стационарный режим детонации.

Изложенные соображения позволяют представить себе процесс образования стационарной волны детонации в следующем

---

[1]) Термической диссоциацией называется наблюдающееся при высоких температурах, а также при низких давлениях явление частичного разложения продуктов горения; реакция идет в обратном направлении и сопровождается поглощением теплоты.

виде. Обычно детонационная волна возникает как результат местного взрыва в горючей смеси. В области взрыва развиваются весьма высокие давления и от нее устремляется очень сильная ударная волна. При прохождении через холодную горючую смесь эта волна, как указывалось выше, вызывает значительный разогрев газа и может довести его до воспламенения. Именно в этом случае за фронтом ударной волны следует область горения, образующая в совокупности с ударной волной волну детонационную. Так как вблизи центра взрыва скорость распространения волны и интенсивность ее очень велики, то относительные скорости газа в начале области горения и в конце ее близки между собой и существенно ниже критической скорости:

$$\lambda_2 \approx \lambda_3 \ll 1.$$

Однако с удалением от центра взрыва волна детонации ослабляется и скорость распространения ее λ_1 падает. В связи с этим происходит снижение температуры торможения в начале области горения (T_2^*) и рост приведенной скорости газа (λ_2). При этом увеличиваются относительный разогрев газа ($\Delta T^*/T_1^*$) и скорость движения (68) продуктов сгорания (λ_3). Очевидно, что, когда детонационная волна ослабится настолько, что λ_3 поднимется до критического значения ($\lambda_{3\,кр} = 1$), дальнейшее снижение скорости детонации окажется невозможным [1]).

Следовательно, процесс детонации, начавшийся со взрыва, непрерывно ослабевает до тех пор, пока скорость распространения не снизится до минимального значения, отвечающего наступлению теплового кризиса в зоне горения. С этого момента распространение детонационной волны приобретает устойчивый стационарный характер.

Как было указано в § 4, дальнейшее ускорение и переход в сверхзвуковую область возможны единственно при перемене знака воздействия — в данном случае при переходе от выделения тепла в зоне горения к отводу его, начиная от критического сечения (*тепловое сопло*). Таким образом, наступление *теплового кризиса* в зоне горения приводит к установлению стационарных значений λ_1, λ_2 и λ_3.

Мы можем определить приведенную скорость распространения установившейся детонационной волны, подставив в уравнение (60) значение $\lambda_3 = 1$. При этом

$$\frac{1}{\lambda_1} = \lambda_2 = \sqrt{\frac{T_3^*}{T_1^*}} - \sqrt{\frac{T_3^*}{T_1^*} - 1}, \qquad (71)$$

[1]) В отличие от этого простая ударная волна, образовавшаяся в результате взрыва и распространяющаяся в инертной среде, по мере удаления от центра взрыва полностью вырождается в волну акустическую.

или после освобождения от радикалов

$$\frac{T_3^*}{T_1^*}=\left(\frac{\lambda_1^2+1}{2\lambda_1}\right)^2=\left(\frac{1+\lambda_2^2}{2\lambda_2}\right)^2. \tag{72}$$

Заменяя $T_3^*=T_1^*+\Delta T^*$, получим также

$$\frac{\Delta T^*}{T_1^*}=\left(\frac{\lambda_1^2-1}{2\lambda_1}\right)^2=\left(\frac{1-\lambda_2^2}{2\lambda_2}\right)^2. \tag{73}$$

Последние два выражения, так же как и уравнение (65), сохраняют одинаковый вид при подстановке в них приведенных скоростей λ_1 и λ_2. Тем самым изменение температуры торможения связывается здесь или со скоростью распространения детонации (λ_1), или с максимальной скоростью распространения зоны горения (λ_2). Существенно, что максимальное значение λ_2 сохраняется вне зависимости от механизма зажигания, т. е. относится как к детонационному, так и к нормальному распространению пламени.

Перейдем к вычислению скорости распространения волны. Обозначим для краткости тепловую характеристику горючей смеси ϑ [1])

$$\frac{T_3^*-T_1^*}{T_1}=\frac{\Delta T^*}{T_1}=\vartheta.$$

Из формул (69), (72) имеем

$$\vartheta\left(1-\frac{k-1}{k+1}\lambda_1^2\right)=\left(\frac{\lambda_1^2-1}{2\lambda_1}\right)^2,$$

откуда квадрат приведенной скорости распространения волны равен

$$\lambda_1^2=\frac{1+2\vartheta}{1+4\vartheta\dfrac{k-1}{k+1}}\left[1\pm\sqrt{1-\frac{1+4\vartheta\dfrac{k-1}{k+1}}{(1+2\vartheta)^2}}\right]. \tag{74}$$

В уравнении (74) оба знака перед корнем отвечают реальным значениям приведенной скорости. Положительный знак соответствует детонационному горению ($\lambda_1>1$), т. е. скорости распространения ударной волны. Отрицательный знак отвечает распространению медленного горения. Следует заметить, что формула (74) также и при отрицательном знаке пригодна для детонации. В этом случае она связывает приведенную скорость

[1]) По смыслу эта величина равна отношению количества выделившегося тепла к начальной энтальпии газа $\vartheta=Q/c_pT_1$. Например, для холодной ($T_1\approx 300$ K) смеси бензина с воздухом (при $\alpha\approx 1$) $\vartheta\approx 6{,}5$.

непосредственно за фронтом скачка уплотнения λ_2 (вместо λ_1) с величиной

$$\vartheta' = \Delta T^*/T_2$$

(вместо $\vartheta = \Delta T^*/T_1$).

В практически интересных случаях, когда $\vartheta > 1$, вместо выражения (74) можно с ошибкой менее 2% принять приближенно:

а) для скорости распространения стационарной волны детонации

$$\lambda_1^2 = \frac{2 + 4\vartheta}{1 + 4\vartheta \dfrac{k-1}{k+1}}; \quad (75)$$

б) для предельной скорости распространения волны горения

$$\lambda_1^2 = \frac{1}{2 + 4\vartheta}. \quad (76)$$

Пользуясь известной связью между приведенной скоростью и числом M, можно получить также аналогичные зависимости числа M для волн детонации и горения от тепловой характеристики газовой смеси.

На рис. 5.19а и 5.19б изображены графики зависимостей

$$\lambda_1 = f(\vartheta) \quad \text{и} \quad \mathrm{M}_1 = F(\vartheta)$$

для газовой смеси (при $k = 1{,}4$). Верхние ветви обеих кривых (в сверхзвуковой области движения $\lambda_1 > 1$, $\mathrm{M}_1 > 1$) отвечают установившейся минимальной скорости распространения детонации, нижние ветви (в дозвуковой области $\lambda_1 < 1$,

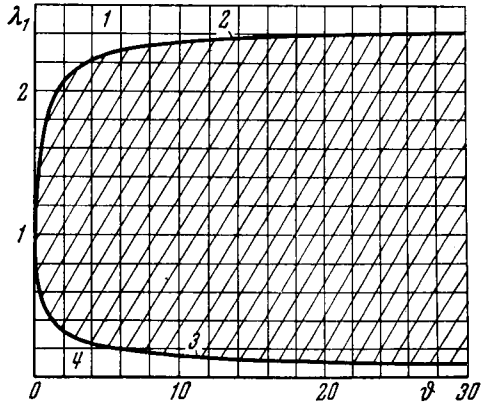


Рис. 5.19а. Зависимость экстремальной величины приведенной скорости распространения волны горения от тепловой характеристики смеси: *1* — область нестационарной детонации; *2* — стационарный режим детонации, *3* — максимальная скорость горения, *4* — область нормального горения.

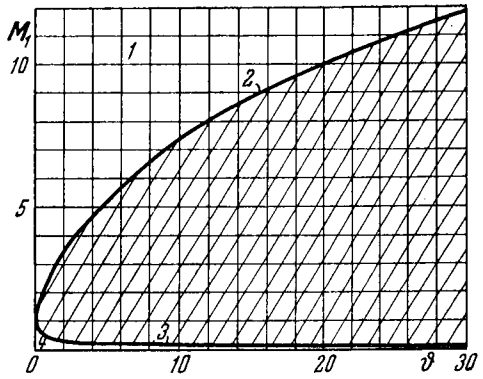


Рис. 5.19б. Зависимость экстремальной величины числа M_1 для распространения волны горения от тепловой характеристики смеси: *1* — область нестационарной детонации, *2* — стационарный режим детонации; *3* — максимальная скорость горения, *4* — область нормального горения.

$M_1 < 1$) — максимальной скорости горения, т. е. предельно возможной скорости нормального распространения пламени.

Мы приходим, таким образом, к единому представлению о скорости распространения горения. При этом в сверхзвуковой области (выше кривой) лежат значения, соответствующие неустановившемуся режиму детонации, тогда как в дозвуковой (ниже кривой) — бесчисленное множество значений, отвечающих стационарному нормальному распространению горения при малых скоростях движения газа. Наконец, режимы, отвечающие заштрихованной области (рис. 5.19а и 5.19б), не могут быть реализованы в связи с явлением теплового кризиса (т. е. невозможностью перейти через скорость звука при подводе тепла).

Именно этим, по-видимому, следует объяснить тот факт, что переход от медленного горения к детонации, как показывают опыты в трубах, всегда осуществляется скачкообразно.

Следует отметить одну интересную особенность полученных кривых. Как видно из графиков, достаточно самого незначительного теплового воздействия, чтобы предельная скорость горения стала существенно ниже, а скорость детонации существенно выше звуковой.

Дадим расчет давлений при детонации и горении.

Расчет предельного скачка разрежения во фронте пламени, достигаемого при тепловом кризисе, можно произвести посредством уравнения импульсов. В случае $\lambda_3 = M_3 = 1$ имеем [1])

$$\frac{p_2}{p_3} = 1 + k\left(1 - \frac{w_2}{w_3}\right),$$

но на этом режиме

$$\frac{w_2}{w_3} = \lambda_2 \sqrt{\frac{T_1^*}{T_3^*}},$$

откуда на основании зависимости (71) получается

$$\frac{w_2}{w_3} = 1 - \sqrt{1 - \frac{T_1^*}{T_3^*}}. \qquad (77)$$

---

[1]) Чтобы получить это выражение, напишем уравнение импульсов (94) гл. I для нашего случая:

$$p_2 - p_3 = \rho_3 w_3 (w_3 - w_2),$$

или

$$\frac{p_2}{p_3} - 1 = k \frac{\rho_3 w_3^2}{k p_3}\left(1 - \frac{w_2}{w_3}\right),$$

но

$$\frac{\rho_3 w_3^2}{k p_3} = \frac{w_3^2}{a_3^2} = M_3^2 = 1.$$

Таким образом, предельное падение давления в газовом потоке в области горения равно

$$\frac{p_2}{p_3} = 1 + k\sqrt{1 - \frac{T_1^*}{T_3^*}}, \tag{78}$$

или на основании выражения (72)

$$\frac{p_2}{p_3} = 1 + k\frac{1-\lambda_2^2}{1+\lambda_2^2} = 1 + k\frac{\lambda_1^2 - 1}{\lambda_1^2 + 1}. \tag{79}$$

При этом значение приведенной скорости как в детонационном, так и в предельном случае нормального горения берется из соотношения (74).

Если воспользоваться равенством (75), то найдется следующая приближенная формула падения давления во второй области волны детонации (для $\vartheta > 1$):

$$\frac{p_2}{p_3} \approx 1 + \frac{1 + 8\vartheta + k}{1 + 8\vartheta + 1/k}. \tag{80}$$

Соответственно равенство (76) приведет к приближенному выражению перепада давлений для предельной скорости нормального горения:

$$\frac{p_2}{p_3} \approx 1 + k\frac{1 + 4\vartheta}{3 + 4\vartheta}. \tag{81}$$

Изменение давления при прохождении через всю область детонации, состоящую из адиабатического скачка уплотнения и зоны горения, получится при делении равенства (63) на (79):

$$\frac{p_3}{p_1} = \frac{p_3}{p_2}\frac{p_2}{p_1} = \frac{\lambda_1^2 + 1}{k + 1 - (k-1)\lambda_1^2}. \tag{82}$$

Весьма простые зависимости получаются для изменения плотности газа. При предельной скорости нормального горения на основании уравнения неразрывности и выражений (77) и (72) получаем

$$\frac{\rho_3}{\rho_2} = \frac{w_2}{w_3} = \frac{2}{\lambda_1^2 + 1} = \frac{2\lambda_2^2}{\lambda_2^2 + 1}. \tag{83}$$

При стационарном режиме детонационного горения, используя равенства (16) гл. III и (62), имеем

$$\frac{\rho_3}{\rho_1} = \frac{\rho_3}{\rho_2}\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{2\lambda_1^2}{\lambda_1^2 + 1}. \tag{84}$$

Остановимся более подробно на некоторых общих свойствах одноразмерных неадиабатических волн и дадим, в частности,

расчетные формулы для определения абсолютной скорости распространения волны. Из уравнений импульсов и неразрывности следует, что в любом случае ударной волны (в пренебрежении силами трения) справедливо следующее соотношение:

$$\frac{p_3 - p_1}{\rho_3 - \rho_1} = w_1 w_3. \tag{85}$$

С другой стороны, уравнение теплосодержания с учетом уравнения состояния идеального газа дает для скачка давления при любом подводе (или отводе) тепла [1])

$$\frac{p_3 - p_1}{\rho_3 - \rho_1} = a^2_{3\text{кр}} + \frac{\rho_1}{\rho_3 - \rho_1}\left(a^2_{3\text{кр}} - a^2_{1\text{кр}}\right). \tag{86}$$

Из уравнений (85), (86) и неразрывности нетрудно вывести соотношение между скоростями для произвольного скачка давлений:

$$w_1 w_3 (w_1 - w_3) = a^2_{3\text{кр}} w_1 - a^2_{1\text{кр}} w_3. \tag{87}$$

В частном случае, когда подвод тепла отсутствует и $a^2_{1\text{кр}} = a^2_{\text{с кр}}$, мы снова получаем соотношение (16) гл. III для адиабатического скачка уплотнения.

В интересующем нас случае установившейся детонации (или распространения горения с предельной скоростью), когда наступает тепловой кризис, т. е. $\lambda_3 = 1$ и $w_3 = a_{3\text{кр}}$, уравнение (87) принимает вид

$$(w_1 - a_{3\text{кр}})^2 = a^2_{3\text{кр}} - a^2_{1\text{кр}}, \tag{88}$$

причем для детонации

$$w_1 > a_{3\text{кр}},$$

для медленного горения

$$w_1 < a_{3\text{кр}}.$$

---

[1]) Напишем уравнение теплосодержания (25) гл. I для газа до и после ударной волны

$$c_p\left(T_1^* - T_1\right) = \frac{w_1^2}{2}, \quad c_p\left(T_3^* - T_3\right) = \frac{w_3^2}{2},$$

или, заменяя из уравнения состояния $T = \frac{p}{R\rho}$

$$p_1 = \rho_1 R T_1^* - \frac{R}{2c_p}\rho_1 w_1^2, \quad p_3 = \rho_3 R T_3^* - \frac{R}{2c_p}\rho_3 w_3^2.$$

Вычитая из второго уравнения первое, с учетом равенств

$$\frac{R}{2c_p} = \frac{k-1}{2k}, \quad a^2_{\text{кр}} = \frac{2k}{k+1} R T^*$$

и закона импульсов, получим (86).

Как и в приведенных ранее безразмерных уравнениях, мы имеем здесь два решения:

$$w_1 = a_{3кр} \pm \sqrt{a_{3кр}^2 - a_{1кр}^2}, \qquad (89)$$

отвечающих минимальной скорости распространения детонации (при знаке +) и максимальной скорости медленного горения (при знаке —).

Полученные общие соотношения применимы к любым неадиабатическим скачкам давления вне зависимости от механизма выделения тепла. Мы видели, что в рассмотренных выше двух случаях распространения фронта пламени непосредственно тепловой скачок (т. е. зона горения) представлял как при детонации, так и при нормальном горении скачок разрежения в дозвуковом течении. Нетрудно указать и случай теплового скачка сжатия в сверхзвуковом потоке. Мы имеем в виду хорошо известные скачки конденсации, сопровождающейся переходом от большей сверхзвуковой скорости к меньшей, но все еще сверхзвуковой скорости. И в этом случае приведенные выше уравнения и выводы остаются справедливыми.

В заключение исследуем движение газов за фронтом волны.

Выше были получены основные соотношения, характеризующие газовый поток, проходящий через область скачка детонации или пламени с неподвижным фронтом, т. е. в обращенной схеме. Рассмотрим теперь, какой вид приобретут все соотношения, если перейти к нормальной схеме, когда газ неподвижен, а в нем распространяется волна детонации или горения со скоростью w_1. В этом случае за фронтом ударной волны следуют еще не воспламенившиеся частицы газа со скоростью

$$w_x = w_1 - w_2,$$

а позади области горения движутся продукты горения со скоростью

$$w_г = w_1 - w_3,$$

где под w_x и $w_г$ мы понимаем абсолютные скорости. Нетрудно видеть, что в случае детонации

$$w_1 > w_3 > w_2,$$

т. е. фронт пламени и продукты горения движутся в том же направлении, что и фронт ударной волны, но только скорость частиц во фронте пламени выше, чем в продуктах горения:

$$w_x > w_г.$$

В случае нормального горения, когда

$$w_1 = w_2 < w_3,$$

величина $w_г$ получается отрицательной, т. е. направления движения продуктов горения и фронта пламени противоположны.

Как было установлено, при стационарном режиме детонации и при предельной скорости нормального горения имеет место

$$w_3 = a_{3кр} \quad \text{или} \quad \lambda_3 = 1,$$

вследствие чего в этих режимах скорость движения продуктов горения равна

$$w_г = w_1 - a_{3кр},$$

где согласно полученной выше зависимости (89)

$$w_1 = a_{3кр} \pm \sqrt{a_{3кр}^2 - a_{1кр}^2}.$$

Отсюда приходим к следующему выражению для скорости распространения продуктов горения в случаях стационарной детонации и предельного режима нормального горения:

$$w_г = \pm \sqrt{a_{3кр}^2 - a_{1кр}^2}. \tag{90}$$

Знак плюс отвечает детонации, знак минус — нормальному горению.

Найдем теперь значения приведенных скоростей. Для фронта ударной волны получим $\lambda_1 = w_1/a_{1кр}$. Для частиц, следующих непосредственно за фронтом ударной волны,

$$\lambda_x = \frac{w_x}{a_{1кр}} = \lambda_1 - \lambda_2 = \lambda_1 - \frac{1}{\lambda_1}, \tag{91}$$

так как $a_{1кр} = a_{2кр}$. Наконец, для продуктов горения согласно (90) имеем

$$\lambda_г = \frac{w_г}{a_{3кр}} = \pm \sqrt{1 - \frac{T_1^*}{T_3^*}}.$$

Отсюда с помощью (72) находим

$$\lambda_г = \frac{\lambda_1^2 - 1}{\lambda_1^2 + 1}. \tag{92}$$

Положительные значения $\lambda_г$ получаются при детонации ($\lambda_1 > 1$), отрицательные — при нормальном горении ($\lambda_1 < 1$). В случае $\lambda_1 = 1$ имеем $\lambda_г = 0$, т. е. при движении волны со скоростью звука газ остается неподвижным, что вполне соответствует физической природе явления [1]).

[1]) Выше [см. (74)] было показано, что $\lambda_1 = 1$ получается только при нулевой калорийности смеси, когда детонация и горение вырождаются в обычные звуковые волны.

Наибольшее значение скорости продуктов нормального горения $\lambda_г = -1$ получается, естественно, в неподвижной смеси бесконечно большой калорийности [$\vartheta = \infty$, т. е. $\lambda_1 = 0$, см. (76)].

Максимум скорости продуктов детонации достигается также при бесконечно большой калорийности $\left[\text{по (75) } \vartheta = \infty,\ \lambda_1^2 = \frac{k+1}{k-1}\right]$, но в этом случае, как нетрудно видеть из (92), он равен

$$\lambda_г = \frac{1}{k}.$$

Итак, *абсолютная скорость движения сгоревших частиц всегда меньше скорости звука.* Этот результат справедлив как при нормальном горении, так и при детонации.

Между тем, как нетрудно видеть из (91), скорость несгоревших частиц (в начале зоны горения) в случае детонации может быть больше звуковой; получается это на режиме

$$\lambda_x = \lambda_1 - \frac{1}{\lambda_1} > 1, \quad \text{т. е. при} \quad \lambda_1^2 - \lambda_1 - 1 > 0.$$

Решая это неравенство, получаем

$$\lambda_1 > \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}62 \text{ и } M_1 > 2.$$

Максимальное значение этой скорости, очевидно, получается на режиме $M_1 = \infty$ и $\lambda_1^2 = \frac{k+1}{k-1}$, оно равно

$$\lambda_{x\,max} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} - \sqrt{\frac{k-1}{k+1}}.$$

Если $k = 1{,}4$, то $\lambda_{x\,max} = 2{,}04$ и $M_{x\,max} = 3{,}4$.

Интересный результат получится, если связать абсолютные скорости газа в начале и в конце зоны детонационного горения:

$$\frac{w_x}{w_г} = \frac{\lambda_x}{\lambda_г}\frac{a_{1кр}}{a_{3кр}}.$$

Отсюда, используя зависимости (91), (92) и (72), находим следующее простое соотношение:

$$w_x = 2w_г, \tag{93}$$

т. е. *при детонации скорость частиц перед фронтом пламени всегда вдвое выше скорости сгоревших частиц.*

Давления как за фронтом ударной волны (p_2), так и в конце зоны горения (p_3), очевидно, не изменяются от того, что мы обратили движение, т. е. могут быть определены по формулам (63)

и (79). Можно, однако, посредством (92) придать формуле (79) следующий особенно простой вид:

$$\frac{p_2}{p_3} = 1 \pm k\lambda_\text{г}. \tag{94}$$

Здесь минус берется при нормальном горении, знак плюс — при детонации. В предельных случаях нормального горения ($\lambda_\text{г} = -1$) и детонации $\left(\lambda_\text{г} = \frac{1}{k}\right)$ получаем соответственно для максимальной скорости нормального горения

$$\frac{p_2}{p_3} = 1 + k \tag{95}$$

и для минимальной скорости детонации

$$\frac{p_2}{p_3} = 2. \tag{96}$$

При встрече продуктов горения с плохообтекаемым телом произойдет повышение давления до величины p_3^*, которая для обоих этих режимов найдется из одного и того же выражения, соответствующего изоэнтропийному процессу сжатия:

$$\frac{p_3}{p_3^*} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_\text{г}^2\right)^{\frac{k}{k-1}}. \tag{97}$$

Более значительное повышение давления произойдет при остановке частиц еще не загоревшегося газа, движущихся со скоростью w_x. На режимах $\lambda_\text{x} < 1$ действует та же изоэнтропическая зависимость:

$$\frac{p_2}{p_2^*} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_\text{x}^2\right)^{\frac{k}{k-1}}. \tag{98}$$

Для сверхзвуковых режимов ($\lambda_\text{x} > 1$), когда торможение начинается с прямого скачка уплотнения, переводящего поток к дозвуковой скорости $\lambda_\text{x}' = 1/\lambda_\text{x}$ и давлению, определяемому формулой (63),

$$\frac{p_2'}{p_2} = \frac{\lambda_\text{x}^2 - \frac{k-1}{k+1}}{1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_\text{x}^2}, \tag{99}$$

имеем при полном торможении

$$\frac{p_2'}{p_2^*} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\frac{1}{\lambda_\text{x}^2}\right)^{\frac{k}{k-1}}, \tag{100}$$

или окончательно

$$\frac{p_2}{p_2^*}=\frac{1}{\lambda_x^2}\left(1-\frac{k-1}{k+1}\lambda_x^2\right)\left(1-\frac{k-1}{k+1}\frac{1}{\lambda_x^2}\right)^{\frac{1}{k-1}}.$$

В предельном случае $\lambda_1^2=\frac{k+1}{k-1}$, т. е. $\lambda_x=2{,}04$ (при $k=1{,}4$), получим предельное повышение давления при торможении

$$\frac{p_2^*}{p_2}\approx 15,$$

или по сравнению с давлением в продуктах горения

$$\frac{p_2^*}{p_3}\approx 30.$$

При встрече газов, следующих непосредственно за фронтом детонационной волны, с остроносым препятствием может возникнуть вместо прямого косой скачок уплотнения. В последнем случае повышение давления при торможении газов оказывается меньшим.

§ 6. Расчет газовых течений с помощью газодинамических функций

Выше были установлены количественные соотношения между давлением, плотностью, температурой и приведенной скоростью газового потока, а также параметрами торможения для некоторых течений газа. Эти уравнения содержат параметры газа, в частности приведенную скорость λ, в высоких и дробных степенях, поэтому преобразование их, получение явных зависимостей между параметрами в общем виде и решение численных задач часто представляют значительные трудности. Вместе с тем, рассматривая различные уравнения газового потока, выведенные, например, в § 4 гл. I и § 4 гл. V, можно заметить, что величина приведенной скорости λ входит в них в виде нескольких часто встречающихся комбинаций или выражений, которые получили название *газодинамических функций*. Этим функциям присвоены сокращенные обозначения, и значения их в зависимости от величины λ и показателя адиабаты k вычислены и сведены в таблицы.

Расчет газовых потоков при помощи таблиц газодинамических функций получил широкое распространение и является в настоящее время общепринятым. Помимо сокращения вычислительной работы, преимуществом расчета с использованием газодинамических функций является значительное упрощение преобразований при совместном решении основных уравнений,

что позволяет получать в общем виде решения весьма сложных задач. При таком расчете более четко выявляются основные качественные закономерности течения и связи между параметрами газового потока. Как можно будет видеть ниже, использование газодинамических функций позволяет вести расчет одномерных газовых течений с учетом сжимаемости практически так же просто, как ведется расчет течений несжимаемой жидкости.

Рассмотрим основные из применяющихся в настоящее время газодинамических функций и на ряде примеров проиллюстрируем использование их для решения различных задач.

Первая, простейшая группа газодинамических функций введена для упрощения записи соотношений между параметрами в потоке, параметрами торможения и приведенной скоростью газа. В § 3 гл. I путем преобразования уравнения теплосодержания была получена формула (42)

$$\frac{T}{T^*} = 1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2,$$

связывающая температуру торможения T^* с температурой в потоке T и приведенной скоростью λ. Обозначим

$$1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2 = \tau(\lambda). \tag{101}$$

В § 4 гл. I были получены выражения (72) и (73) для отношения давления и плотности в потоке к полному давлению и плотности изоэнтропически заторможенного газа. Введем для них обозначения

$$\pi(\lambda) = \frac{p}{p^*} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{\frac{k}{k-1}}, \tag{102}$$

$$\varepsilon(\lambda) = \frac{\rho}{\rho^*} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}}. \tag{103}$$

Связь между газодинамическими функциями $\tau(\lambda)$, $\pi(\lambda)$ и $\varepsilon(\lambda)$ вытекает из очевидного соотношения между величинами ρ, p и T:

$$\varepsilon(\lambda) = \frac{\pi(\lambda)}{\tau(\lambda)}. \tag{104}$$

Следует заметить, что уравнения (101), (102), (103) связывают параметры газа *в одном и том же сечении потока* и справедливы независимо от характера течения и происходящих в газе процессов: переход от параметров в потоке к параметрам заторможенного газа по определению происходит по идеальной адиабате. Характер изменения газодинамических функций $\tau(\lambda)$, $\pi(\lambda)$ и $\varepsilon(\lambda)$ в зависимости от λ показан на рис. 5.20: с увеличением λ от нуля до максимального значения $\lambda_{max} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$

функции $\tau(\lambda)$, $\pi(\lambda)$ и $\varepsilon(\lambda)$ монотонно уменьшаются от единицы до нуля. Это вполне соответствует и их физическому смыслу: при весьма малых скоростях ($\lambda \to 0$) параметры в потоке практически не отличаются от параметров полностью заторможенного газа; с увеличением скорости до предельного значения ($M \to \infty$, $\lambda \to \lambda_{max}$) температура, давление и плотность газа при конечном значении параметров торможения стремятся к нулю.

Располагая графиками или таблицами, в которых для каждого значения λ приведены значения функций $\pi(\lambda)$, $\varepsilon(\lambda)$, $\tau(\lambda)$,

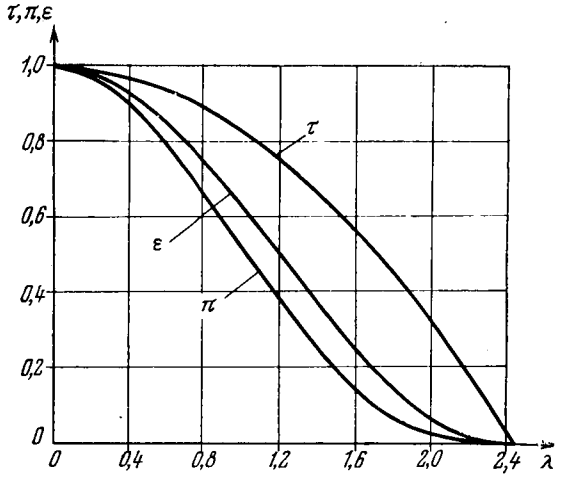


Рис. 5.20. Графики газодинамических функций $\tau(\lambda)$, $\varepsilon(\lambda)$, $\pi(\lambda)$ при $k = 1{,}4$

можно быстро определять параметры торможения по параметрам в потоке и наоборот. Такие таблицы для значений $k = 1{,}40$ и 1,33 приведены в конце книги. Там же приведены вспомогательные графики, которыми можно пользоваться вместо таблиц, если не требуется высокая точность вычислений.

Пример 1. В сечении *1* дозвуковой части идеального сопла Лаваля известны: давление в потоке $p_1 = 16 \cdot 10^5$ Н/м^2, температура торможения $T_1^* = 400$ К, приведенная скорость $\lambda_1 = 0{,}6$. Требуется определить приведенную скорость λ_2 и давление газа в сечении *2*, где температура T_2 равна 273 К.

Поскольку температура торможения и полное давление газа в рассматриваемом идеальном сопле не меняются, то $T_2^* = T_1^*$ и $p_2^* = p_1^*$. Используя первое равенство и соотношение (101), записываем

$$\tau(\lambda_2) = \frac{T_2}{T_2^*} = \frac{T_2}{T_1^*}.$$

Подставив заданные значения T_2 и T_1^*, находим $\tau(\lambda_2) = 0{,}6825$ и по таблицам определяем (при $k = 1{,}40$) $\lambda_2 = 1{,}38$. Таким образом, искомое сечение

находится в сверхзвуковой части сопла. Далее используем условие постоянства полного давления в сопле. Выражая полное давление через давление в потоке и функцию $\pi(\lambda)$ согласно (102), получаем

$$\frac{p_1}{\pi(\lambda_1)} = \frac{p_2}{\pi(\lambda_2)}, \quad \text{или} \quad p_2 = p_1 \frac{\pi(\lambda_2)}{\pi(\lambda_1)}.$$

Для $\lambda_1 = 0{,}6$ и $\lambda_2 = 1{,}38$ в таблицах находим значения функций $\pi(\lambda)$ и определяем

$$p_2 = 16 \cdot 10^5 \cdot \frac{0{,}2628}{0{,}8053} = 5{,}23 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2.$$

Найдем теперь, какова при тех же исходных данных будет температура газа в сечении сопла *3*, где давление газа равно атмосферному $p_3 = 1{,}01 \cdot 10^5$ Н/м^2. Записываем

$$\pi(\lambda_3) = \frac{p_3}{p_3^*} = \frac{p_3}{p_1^*}, \quad \text{или} \quad \pi(\lambda_3) = p_3 \frac{\pi(\lambda_1)}{p_1^*}.$$

Отсюда находим

$$\pi(\lambda_3) = \frac{1{,}01 \cdot 10^5}{16 \cdot 10^5} 0{,}8053 = 0{,}0508,$$

а затем из таблиц определяем величину $\lambda_3 = 1{,}855$. Этому значению приведенной скорости в таблице соответствует $\tau(\lambda_3) = 0{,}4265$. Далее легко находим температуру газа в сечении *3*

$$T_3 = T_3^* \tau(\lambda_3) = 400 \cdot 0{,}4265 = 170{,}6 \text{ К}.$$

Таким же образом решаются и другие задачи, связанные с нахождением зависимости между параметрами газа в различных сечениях потока.

Рассмотрим далее две газодинамические функции, которые используются *в уравнениях неразрывности потока.* Подставим в выражение секундного расхода газа $G = \rho w F$ через сечение площади F соотношения, выражающие плотность газа ρ и скорость потока w через параметры торможения p^* и T^* и приведенную скорость λ:

$$\rho = \rho^* \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}} = \frac{p^*}{RT^*}\left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}},$$

$$w = \lambda a_{\text{кр}} = \lambda \sqrt{\frac{2k}{k+1} RT^*}.$$

Тогда получим

$$G = \frac{p^*}{RT^*} F\lambda \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}} \sqrt{\frac{2k}{k+1} RT^*}. \qquad (105)$$

Умножив обе части этого выражения на $a_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{2k}{k+1} RT^*}$, после сокращения имеем

$$Ga_{\text{кр}} = \frac{2k}{k+1} p^* F\lambda \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}}. \qquad (106)$$

Это уравнение связывает расход газа в данном сечении с полным давлением, критической скоростью звука и некоторой функцией приведенной скорости

$$\lambda\left(1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}}=\lambda\varepsilon(\lambda),$$

где $\varepsilon(\lambda)$ — введенная выше газодинамическая функция (103). Новая газодинамическая функция $q(\lambda)$ определяется как величина, пропорциональная произведению $\lambda\varepsilon(\lambda)$:

$$q(\lambda)=\left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}}\lambda\left(1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}}. \qquad (107)$$

Коэффициент пропорциональности выбран так, чтобы при $\lambda=1$ иметь $q(\lambda)=1$. Вследствие этого газодинамическая функция

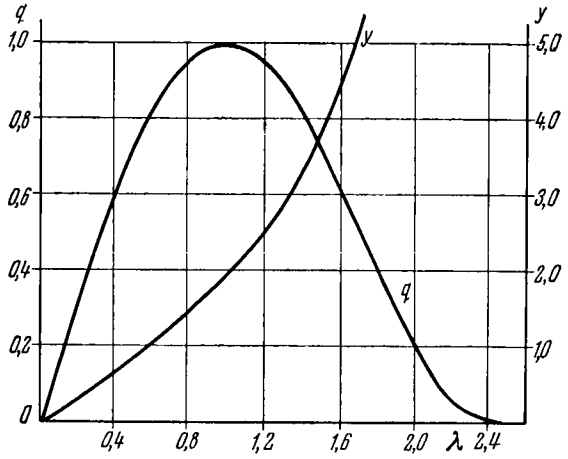


Рис. 5.21. Графики газодинамических функций $q(\lambda)$, $y(\lambda)$ при $k=1{,}4$.

$q(\lambda)$ приобретает физический смысл безразмерной плотности тока:

$$q(\lambda)=\frac{\rho w}{(\rho w)_{кр}},$$

где $(\rho w)_{кр}$ — максимальное значение плотности тока (при заданных параметрах торможения), соответствующее течению со скоростью звука. Действительно,

$$\frac{\rho w}{(\rho w)_{кр}}=\frac{\rho}{\rho^*}\frac{\rho^*}{\rho_{кр}}\frac{w}{w_{кр}}=\frac{\varepsilon(\lambda)}{\varepsilon(1)}\lambda=\left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}}\lambda\varepsilon(\lambda).$$

График функции $q(\lambda)$ приведен на рис. 5.21. При увеличении приведенной скорости λ от нуля до единицы величина $q(\lambda)$

растет от нуля до своего максимального значения $q(\lambda) = 1$, а далее вновь снижается до нуля при значении $\lambda = \lambda_{max}$. Таким образом, плотность тока максимальна при $q(\lambda) = 1$ и снижается как с уменьшением, так и с увеличением скорости по сравнению с критическим значением. Одно и то же значение функции $q(\lambda)$ соответствует двум возможным значениям приведенной скорости, одно из которых больше, а другое меньше единицы.

Подставляя в выражение (106) функцию $q(\lambda)$, имеем

$$Ga_{кр} = \frac{2k}{k+1}\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}} p^* F q(\lambda). \qquad (108)$$

Заменяя в (108) величину $a_{кр}$ ее значением, получаем следующую формулу для вычисления расхода газа (см. также § 1 гл. IV):

$$G = m\frac{p^* F q(\lambda)}{\sqrt{T^*}}, \qquad (109)$$

где

$$m = \sqrt{k\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{k-1}}}\sqrt{\frac{1}{R}} = N\sqrt{\frac{1}{R}}.$$

В нижеследующей таблице приведены значения N для различных значений k:

k	1,67	1,4	1,35	1,33	1,30	1,25	1,10
N	0,725	0,685	0,676	0,673	0,667	0,658	0,628

Для воздуха ($k = 1{,}4$, $R = 287{,}3$ Дж/(кг·К)) численный коэффициент в уравнении (109) $m = 0{,}0404$ [$м^{-1} \cdot с \cdot К^{0,5}$]. Для выхлопных газов в турбореактивных двигателях ($k = 1{,}33$, $R = 288{,}3$ Дж/(кг·К)) $m = 0{,}0396$. Для пороховых газов в среднем можно считать $m = 0{,}035$.

При течении со скоростью звука $q(\lambda) = 1$ и уравнение (109) сводится к полученному в гл. IV выражению (8) для вычисления расхода газа через сопло Лаваля по параметрам газа в критическом сечении сопла.

При решении ряда задач требуется связать расход газа не с полным, а со статическим давлением в потоке. Такую связь легко получить из выражений (108) или (109), если заменить в их правых частях величину полного давления согласно выражению

$$p^* = \frac{p}{\pi(\lambda)} = \frac{p}{\left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{\frac{k}{k-1}}}.$$

Тогда получаем соотношения

$$Ga_{\text{кр}} = \frac{2k}{k+1}\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}} pFy(\lambda), \tag{110}$$

и

$$G = m\frac{pFy(\lambda)}{\sqrt{T^*}}, \tag{111}$$

где функция

$$y(\lambda) = \frac{q(\lambda)}{\pi(\lambda)} = \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}} \frac{\lambda}{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2} \tag{112}$$

является второй газодинамической функцией, с помощью которой можно вычислять расход газа (см. рис. 5.21). Значения ее, так же как и значения функции $q(\lambda)$ для различных значений k приведены в таблицах и на вспомогательных графиках в конце книги. С увеличением λ функция $y(\lambda)$ монотонно возрастает, причем при $\lambda \to \lambda_{\max}$ $y(\lambda) \to \infty$. Как формула (109), так и формула (111) выражают расход газа через параметры его состояния *в рассматриваемом сечении* потока, и потому справедливы независимо от характера процессов, происходящих в потоке газа. Формулами (109) и (111) удобно пользоваться при составлении уравнений неразрывности для газового потока, причем для каждого сечения может быть выбрана та из формул, которая лучше соответствует заданным или искомым величинам.

Выражения (109), (111) и составленные при их помощи уравнения неразрывности непосредственно приводят к ряду зависимостей, выведенных ранее более сложным путем, а также позволяют достаточно просто решать разнообразные задачи. Приведем несколько примеров расчета.

Пример 2. Определить зависимость между площадью какого-либо сечения идеального сопла Лаваля и приведенной скоростью потока в этом сечении, т. е. найти закон изменения площади в сопле Лаваля. Так как для любого сечения идеального сопла расход, полное давление и температура торможения одинаковы, то из (109) следует $Fq(\lambda) = \text{const}$. Так как для критического сечения $q(\lambda)_{\text{кр}} = 1$, то $Fq(\lambda) = F_{\text{кр}}$ или $\frac{F}{F_{\text{кр}}} = \frac{1}{q(\lambda)}$, т. е. площадь сечения сопла изменяется обратно пропорционально значению функции $q(\lambda)$. В соответствии с графиком функции $q(\lambda)$ это означает, что с увеличением скорости площадь уменьшается при дозвуковых скоростях и увеличивается при сверхзвуковых скоростях, имея минимум при $\lambda = 1$.

Пример 3. На участке цилиндрической трубы между двумя сечениями *1* и *2* в результате гидравлических потерь (трение, местные сопротивления) снижается полное давление движущегося газа. Потери полного давления между сечениями *1* и *2* оцениваются величиной коэффициента сохранения полного давления $\sigma = p_2^*/p_1^* < 1$. Определить характер изменения скорости и статического давления газа в трубе при отсутствии теплообмена с внешней средой. Запишем, воспользовавшись формулой (109), условие равенства

расходов газа в сечениях *1* и *2*:

$$\frac{p_1^* F_1 q(\lambda_1)}{\sqrt{T_1^*}} = \frac{p_2^* F_2 q(\lambda_2)}{\sqrt{T_2^*}}.$$

Поскольку в данном случае $F_1 = F_2$ и $T_1^* = T_2^*$, то

$$q(\lambda_2) = \frac{p_1^*}{p_2^*} q(\lambda_1) \quad \text{или} \quad q(\lambda_2) = \frac{1}{\sigma} q(\lambda_1).$$

Отсюда по заданным значениям λ_1 и σ можно с помощью таблиц газодинамических функций определить λ_2. Полученный результат справедлив как для дозвуковых, так и для сверхзвуковых скоростей потока. Так как $\sigma < 1$, то $q(\lambda_2) > q(\lambda_1)$.

Из этого неравенства следует (см. график функции $q(\lambda)$ на рис. 5.21), что при наличии гидравлических сопротивлений (при $G = \text{const}$, $F = \text{const}$, $T^* = \text{const}$) скорость дозвукового потока по длине трубы возрастает, а скорость сверхзвукового потока уменьшается.

Чтобы определить изменение статического давления, можно сравнить между собой величины $p_1 = p_1^* \pi(\lambda_1)$ и $p_2 = p_2^* \pi(\lambda_2)$. Однако более наглядно искомый результат может быть получен из условия равенства расходов газа, если воспользоваться при этом выражением (111):

$$\frac{p_1 F_1 y(\lambda_1)}{\sqrt{T_1^*}} = \frac{p_2 F_2 y(\lambda_2)}{\sqrt{T_2^*}} \quad \text{или} \quad \frac{p_2}{p_1} = \frac{y(\lambda_1)}{y(\lambda_2)}.$$

Так как функция $y(\lambda)$ возрастающая, то отсюда заключаем, что при наличии сопротивления, в соответствии с найденным выше изменением приведенной скорости, статическое давление будет уменьшаться, если скорость потока дозвуковая, и увеличиваться, если скорость сверхзвуковая.

Пример 4. Определить приведенную скорость λ_2 и статическое давление воздуха p_2 на выходе из диффузора, если известно, что на входе в диффузор полное давление $p_1^* = 3 \cdot 10^5$ Н/м^2, приведенная скорость $\lambda_1 = 0{,}85$, отношение площадей выходного и входного сечений $F_2/F_1 = 2{,}5$ и коэффициент сохранения полного давления $\sigma = p_2^*/p_1^* = 0{,}94$. Для решения задачи записываем уравнение неразрывности, пользуясь формулой (109):

$$\frac{p_1^* F_1 q(\lambda_1)}{\sqrt{T_1^*}} = \frac{p_2^* F_2 q(\lambda_2)}{\sqrt{T_2^*}}.$$

Пренебрегая теплообменом через стенки диффузора, имеем $T_2^* = T_1^*$ и, следовательно, $q(\lambda_2) = \frac{1}{\sigma} \frac{F_1}{F_2} q(\lambda_1)$. По таблицам для $\lambda_1 = 0{,}85$ находим $q(\lambda_1) = 0{,}9729$. Тогда $q(\lambda_2) = 0{,}425 \cdot 0{,}9729 = 0{,}413$, чему соответствует $\lambda_2 = 0{,}27$ и $\pi(\lambda_2) = 0{,}9581$. Из соотношения (102) имеем $p_2 = p_2^* \pi(\lambda_2) = \sigma p_1^* \pi(\lambda_2)$ или

$$p_2 = 0{,}94 \cdot 3 \cdot 10^5 0{,}9581 = 2{,}7 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2.$$

Пример 5. При испытании компрессора в выходном его сечении, площадь которого $F = 0{,}1$ м^2, измерены статическое давление $p = 4{,}2 \cdot 10^5$ Н/м^2 и температура торможения воздуха $T^* = 480$ К. Определить полное давление воздуха, если его расход $G = 50$ кг/с.

Из выражения расхода (111) определяем функцию $y(\lambda)$ по известному значению статического давления воздуха:

$$y(\lambda) = \frac{G\sqrt{T^*}}{mpF} = \frac{50\sqrt{480}}{0{,}0404 \cdot 4{,}2 \cdot 10^5 \cdot 0{,}1} = 0{,}6455.$$

По таблицам газодинамических функций находим, что этому значению $y(\lambda)$ соответствуют величины $\lambda = 0{,}399$ и $\pi(\lambda) = 0{,}9101$. Отсюда полное давление воздуха $p^* = p/\pi(\lambda) = 4{,}2 \cdot 10^5/0{,}9101 = 4{,}61 \cdot 10^5$ Н/м².

Если не пользоваться газодинамическими функциями, то подобные вычисления, которые часто делают при обработке экспериментальных данных, приходится проводить более сложным методом, путем последовательных приближений.

Рассмотрим газодинамические функции, которые используются в *уравнении количества движения газа*. Сумму секундного количества движения и силы давления газа в рассматриваемом поперечном сечении потока принято называть полным импульсом потока I

$$I = Gw + pF = G\left(w + \frac{p}{\rho w}\right). \tag{113}$$

Если в (113) подставить соотношения

$$w = \lambda a_{кр}; \quad \frac{p}{\rho} = RT = RT^*\left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right) =$$

$$= \frac{k+1}{2k} a_{кр}^2 \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right),$$

то получим

$$Gw + pF = G\left[\lambda a_{кр} + \frac{k+1}{2k}\frac{a_{кр}}{\lambda}\left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)\right]. \tag{114}$$

После раскрытия скобок и упрощений приводим выражение (114) к виду

$$Gw + pF = \frac{k+1}{2k} G a_{кр} z(\lambda), \tag{115}$$

где

$$z(\lambda) = \lambda + \frac{1}{\lambda}. \tag{116}$$

График газодинамической функции $z(\lambda)$ приведен на рис. 5.22. Минимальное значение функции $z(\lambda) = 2$ соответствует критической скорости течения ($\lambda = 1$). Как в дозвуковых, так и в сверхзвуковых потоках $z(\lambda) > 2$; значениям $z(\lambda) < 2$ не соответствуют какие-либо реальные режимы течения. Легко видеть, что при замене величины λ обратной ей величиной $\lambda' = 1/\lambda$ значение функции $z(\lambda)$ не изменяется. Таким образом, одному значению $z(\lambda)$ могут соответствовать *два взаимно обратных значения приведенной скорости* λ — одно из них определяет дозвуковое, а другое — сверхзвуковое течение газа. Отметим также, что

функция $z(\lambda)$, в отличие от всех остальных газодинамических функций, не зависит от величины показателя адиабаты k.

Выражение (115) для импульса потока значительно упрощает запись и преобразования уравнения количества движения газа. Оно оказывается чрезвычайно полезным при решении широкого круга задач газовой динамики, как, например, в расчете течений с ударными волнами, подводом тепла и охлаждением, течений с трением, с ударом при внезапном расширении канала, при расчете процесса смешения потоков, при определении сил,

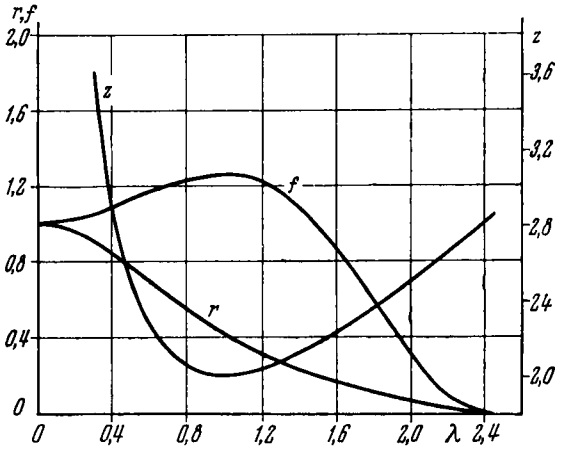


Рис. 5.22. Графики газодинамических функций $z(\lambda)$, $f(\lambda)$, $r(\lambda)$ при $k = 1{,}4$.

действующих на стенки канала, при вычислении реактивной тяги и др.

Следующие два примера позволяют наглядно показать, насколько упрощается решение задач при использовании соотношения (115). В первом из них рассмотрена ранее решенная задача (гл. III, § 1) о прямом скачке уплотнения, во втором — задача о течении подогреваемого газа в цилиндрической трубе (гл. V, § 3).

Пример 6. Определить соотношения между параметрами газа до и после прямого скачка уплотнения.

Связь между параметрами газа в скачке уплотнения мы выше устанавливали, исходя из того, что при переходе через прямой скачок сохраняются неизменными полная энергия, расход и импульс потока. Запишем те же уравнения с использованием газодинамических функций.

Уравнение количества движения или импульса потока

$$G_1 w_1 + p_1 F_1 = G_2 w_2 + p_2 F_2$$

с учетом выражения (115) принимает вид

$$G_1 a_{кр_1} z(\lambda_1) = G_2 a_{кр_2} z(\lambda_2).$$

Из уравнений сохранения расхода и полной энергии имеем

$$G_1 = G_2; \quad T_1^* = T_2^* \quad \text{или} \quad a_{кр_1} = a_{кр_2}.$$

Учитывая это и сокращая соответствующие величины расхода и скорости звука в уравнении импульсов, получаем

$$z(\lambda_1) = z(\lambda_2).$$

Это уравнение имеет два решения: либо $\lambda_2 = \lambda_1$, что соответствует безударному течению с неизменными параметрами газа, либо

$$\lambda_2 = \frac{1}{\lambda_1},$$

что соответствует прямому скачку. Такое же выражение — основное кинематическое соотношение теории ударных волн — было получено выше, см. формулу (16) гл. III.

По известному значению приведенной скорости с помощью уравнения неразрывности легко определяем изменение полного и статического давлений в скачке уплотнения. Так как $F_2 = F_1$ и $T_2^* = T_1^*$, то, используя формулы (109) и (111), можно уравнение неразрывности для потока газа до и после скачка представить в виде

$$p_2^* q(\lambda_2) = p_1^* q(\lambda_1) \quad \text{или} \quad p_2 y(\lambda_2) = p_1 y(\lambda_1).$$

Отсюда, учитывая, что $\lambda_2 = 1/\lambda_1$, получаем $p_2^*/p_1^* = q(\lambda_1)/q(1/\lambda_1)$; $p_2/p_1 = y(\lambda_1)/y(1/\lambda_1)$. Эти соотношения эквивалентны уравнениям (24) и (21) гл. III, но получены значительно более простым путем.

Пример 7. Газ, движущийся в цилиндрической трубе, подогревается от 400 К на входе в трубу до 800 К на выходе из нее. Приведенная скорость потока на входе в трубу $\lambda_1 = 0{,}4$. Требуется определить, пренебрегая трением, приведенную скорость потока после подогрева, а также изменение полного и статического давлений в потоке.

Основное соотношение, определяющее закономерности течения газа в цилиндрической трубе с подводом тепла, получим из уравнения количества движения. В данном случае оно имеет вид

$$Gw_1 + p_1 F = Gw_2 + p_2 F,$$

так как подвод тепла не связан с силовым воздействием на поток и силы давления в начальном и конечном сечении являются единственными силами, вызывающими изменение количества движения газа. Заменив выражения для импульсов потока газа согласно соотношению (115) и считая, что теплоемкость газа и показатель адиабаты при подогреве не изменяются, получим

$$a_{кр_1} z(\lambda_1) = a_{кр_2} z(\lambda_2) \quad \text{или} \quad z(\lambda_2) = z(\lambda_1)\sqrt{\frac{T_1^*}{T_2^*}}.$$

Так как при $\lambda_1 = 0{,}4$ $z(\lambda_1) = 2{,}9$, то

$$z(\lambda_2) = 2{,}9\sqrt{\frac{400}{800}} = 2{,}05.$$

С помощью таблиц функции $z(\lambda)$ или непосредственным вычислением из квадратного уравнения $\lambda_2 + 1/\lambda_2 = 2{,}05$ определяем два возможных значения приведенной скорости на выходе: $\lambda_2' = 0{,}8$, $\lambda_2'' = 1/\lambda_2' = 1{,}25$. Реальным будет

только первое решение, поскольку подогревом невозможно перевести дозвуковой поток в сверхзвуковой (см. § 4).

Зная приведенную скорость потока $\lambda_2 = 0{,}8$, легко определить изменение полного и статического давлений в процессе подогрева. Для этого, как и в предыдущем примере, можно воспользоваться уравнением неразрывности, из которого для данного случая ($G = \text{const}$, $F = \text{const}$) следует

$$\frac{p_2^*}{p_1^*} = \frac{q(\lambda_1)}{q(\lambda_2)}\sqrt{\frac{T_2^*}{T_1^*}} = \frac{0{,}5897}{0{,}9518}\sqrt{\frac{800}{400}} = 0{,}875,$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{y(\lambda_1)}{y(\lambda_2)}\sqrt{\frac{T_2^*}{T_1^*}} = \frac{0{,}6482}{1{,}4126}\sqrt{\frac{800}{400}} = 0{,}648.$$

Таким образом, как полное, так и статическое давления в результате подогрева газа уменьшаются. Полученное значение $p_2/p_1 = 0{,}648$ и есть то соотношение статических давлений газа в начальном и конечном сечениях рассматриваемого участка трубы, которое необходимо создать, чтобы поддержать при данном подогреве заданную величину приведенной скорости на входе $\lambda = 0{,}4$.

Уравнение сохранения количества движения позволяет установить некоторые общие закономерности течения в цилиндрической трубе с подогревом или охлаждением. Так, например, легко видеть, что с увеличением отношения T_2^*/T_1^* величина функции $z(\lambda_2)$ (при $z(\lambda_1) = \text{const}$) всегда уменьшается. В соответствии с характером протекания функции $z(\lambda)$ (рис. 5.22) это означает, что с ростом подогрева в дозвуковом потоке приведенная скорость увеличивается, а в сверхзвуковом — уменьшается. В обоих случаях скорость потока будет приближаться к критическому значению $\lambda_2 = 1$, при котором функция $z(\lambda)$ принимает минимально возможное значение $z(\lambda_2) = 2$. Этим обусловлена величина предельно возможного подогрева для заданной начальной скорости $\left(\frac{T_2^*}{T_1^*}\right)_{\max} = \frac{z^2(\lambda_1)}{4}$. Для принятых в данном примере значений параметров предельная величина подогрева соответствует $T_2^* = 840$ К. Из уравнений расхода можно определить отношение давлений p_2/p_1, необходимое для реализации такого режима при сохранении $\lambda_1 = \text{const}$. При увеличении подогрева сверх найденного значения получим $z(\lambda_2) < 2$, что указывает на физическую невозможность такого подогрева при заданной скорости течения на входе.

Заменив в соотношении (115) произведение $Ga_{\text{кр}}$ его значением согласно (108) или (110), получим выражение для импульса газового потока в первом случае через полное давление, а во втором случае через статическое давление:

$$Gw + pF = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}} p^* F q(\lambda) z(\lambda)$$

и

$$Gw + pF = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}} pF y(\lambda) z(\lambda).$$

Введем обозначения для двух новых функций приведенной скорости λ, входящих в правые части этих выражений:

$$f(\lambda)=\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}} q(\lambda) z(\lambda)=(\lambda^2+1)\left(1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}}, \quad (117)$$

$$r(\lambda)=\left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}} \frac{1}{y(\lambda) z(\lambda)}=\frac{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2}{1+\lambda^2}. \quad (118)$$

Подставляя эти обозначения, получаем окончательно

$$G w+pF=p^* F f(\lambda), \quad (119)$$

$$G w+pF=\frac{pF}{r(\lambda)}. \quad (120)$$

Функция $r(\lambda)$ введена как величина, обратная произведению $y(\lambda)z(\lambda)$ с тем, чтобы облегчить пользование таблицами (произведение $y(\lambda)z(\lambda)$ быстро возрастает с увеличением λ, стремясь к бесконечности при $\lambda \to \lambda_{max}$; величина же $r(\lambda)$ изменяется в пределах от единицы до нуля). Графики функций $f(\lambda)$ и $r(\lambda)$ приведены на рис. 5.22.

Уравнения (119) и (120) показывают ряд свойств импульса газового потока. Обратим внимание на то, что в правой части этих уравнений отсутствуют величины расхода газа и температуры или критической скорости. Из этого следует, что если *при заданной площади сечения F и приведенной скорости λ полное или статическое давление в потоке постоянно, то импульс сохраняет постоянное значение независимо от температуры и расхода газа.*

Физический смысл этого состоит в том, что при изменении температуры (или температуры торможения) газа при $\lambda = \text{const}$ скорость течения изменяется прямо пропорционально, а расход — обратно пропорционально корню квадратному из температуры, так что произведение Gw остается постоянным. Отметим, что функция $f(\lambda)$ в области дозвуковых и небольших сверхзвуковых скоростей изменяется очень мало (приблизительно на 10% в интервале $\lambda = 0{,}55 \div 1{,}35$). Отсюда согласно (119) следует, что импульс газового потока при постоянных полном давлении и площади сечения слабо зависит от величины λ в широком диапазоне ее изменения и определяется в основном величиной произведения p^*F.

Выражения (119) и (120) для импульса газа очень удобны при решении задач, связанных с определением сил, действующих со стороны газа на стенки канала, что необходимо, в частности, при вычислении реактивной тяги различных двигательных установок.

Для реактивной тяги ракетного двигателя выше (§ 8 гл. I) было получено выражение

$$P = Gw_a + (p_a - p_н) F_a.$$

Эта же формула определяет тягу воздушно-реактивного двигателя любого типа при работе на месте, когда начальное количество движения воздуха, поступающего в двигатель, равно нулю. Преобразуем эту формулу при помощи полученных выше соотношений, для чего в ее правой части заменим выражение импульса газа в выходном сечении сопла согласно формулам (119) и (120). В первом случае получаем

$$P = p_a^* F_a f(\lambda_a) - p_н F_a \quad \text{или} \quad P = p_н F_a [\pi_c f(\lambda_a) - 1], \qquad (121)$$

где $\pi_c = p_a^*/p_н$ — располагаемое отношение давлений в сопле. Точно так же можно получить второе выражение

$$P = p_н F_a \left[\frac{p_a}{p_н} \frac{1}{r(\lambda_a)} - 1\right] \quad \text{или} \quad P = p_н F_a \left[\frac{n}{r(\lambda_a)} - 1\right], \qquad (122)$$

где $n = p_a/p_н$ — так называемая *степень нерасчетности сопла*, т. е. отношение статического давления газа на срезе сопла к атмосферному давлению.

Формула (121) весьма удобна для вычисления реактивной тяги и широко применяется в расчете двигателей. Приведенная скорость λ_a определяется типом реактивного сопла и располагаемым отношением давлений. Если сопло выполнено нерасширяющимся и отношение давлений превышает критическое значение, то $\lambda_a = 1$; для сверхзвукового сопла $\lambda_a = \lambda_{расч}$ при всех значениях π_c, бóльших расчетного значения, и в значительной части диапазона $\pi_c < \pi_{c\,расч}$. Отсюда следует, что в широком диапазоне режимов современных двигателей $\lambda_a = \text{const}$, и формулой (121) определяется линейная зависимость реактивной тяги от величины располагаемого отношения давлений π_c, так как $f(\lambda_a) = \text{const}$. Напомним, что и при $\lambda_a \neq \text{const}$ величина функции $f(\lambda)$ весьма мало изменяется в значительной области до- и сверхзвуковых скоростей.

Формула (122) удобна для вычисления тяги на режимах, когда статическое давление на срезе сопла равно атмосферному и $n = 1$. Такие условия существуют, в частности, при дозвуковой скорости истечения газа из сопла, а также при работе сверхзвуковых сопел на расчетном режиме.

Отметим, что для вычисления реактивной тяги согласно (121) и (122) не требуется знать расход газа и его температуру. *Изменение температуры, как видно из* (121) *и* (122), *при* $p_н = \text{const}$, $p^* = \text{const}$ и $F_a = \text{const}$ *вообще не влияет на величину*

тяги, что связано с взаимно обратной зависимостью скорости истечения и расхода газа от температуры.

Выражения (121) и (122) могут быть применены также для вычисления тяги воздушно-реактивных двигателей в полете; при этом в правой части необходимо вычесть так называемый входной импульс потока воздуха $G_в w_н$, где $G_в$ — расход воздуха, а $w_н$ — скорость полета (см. § 8 гл. I).

Рассмотрим примеры использования приведенных выражений реактивной тяги.

Пример 8. Определить, как зависит величина реактивной тяги от приведенной скорости газа на выходе из сопла при $\pi_c = \text{const}$.

Из формулы (121) непосредственно следует, что если $F_a = \text{const}$ и $\pi_c = \text{const}$, то зависимость тяги от приведенной скорости λ_a определяется изменением функции $f(\lambda)$. При этих условиях, однако, с изменением λ изменяется и расход газа.

Больший практический интерес представляет другой случай изменения приведенной скорости λ_a, когда секундный расход и начальные параметры газа сохраняются постоянными. Это условие может быть реализовано, если при постоянной площади критического сечения сверхзвукового сопла $F_{кр}$ изменять площадь выходного сечения F_a. Характер зависимости тяги от величины λ_a в этом случае позволит определить рациональную степень расширения сопла для двигателя с заданными параметрами и расходом газа. Уравнения (120) и (121) не вполне удобны для такого расчета, так как включают две переменные величины λ_a и F_a. Поэтому преобразуем уравнение (121), заменив в нем величину F_a с помощью выражения расхода (109)

$$F_a = \frac{G\sqrt{T_a^*}}{mp_a^* q(\lambda_a)} = \frac{F_{кр}}{q(\lambda_a)}.$$

Учитывая соотношение между функциями $f(\lambda)$, $q(\lambda)$ и $z(\lambda)$, получаем

$$P = p_a^* F_{кр}\left[\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}} z(\lambda_a) - \frac{1}{\pi_c \cdot q(\lambda_a)}\right].$$

На расчетном режиме истечения газа, т. е. при расширении до атмосферного давления, приведенная скорость определяется из соотношения

$$\pi(\lambda_a) = \frac{1}{\pi_c}.$$

По этому значению λ_a отыскивается расчетная степень расширения сопла $F_a/F_{кр} = 1/q(\lambda_a)$ и величина реактивной тяги на расчетном режиме. В данном расчете потери полного давления между сечениями $F_{кр}$ и F_a не учитываются.

Пусть $k = 1{,}33$ и $\pi_c = 25$; тогда на расчетном режиме работы сопла

$$\pi(\lambda_a) = \frac{1}{25} = 0{,}04, \quad \lambda_a = 1{,}97, \quad q(\lambda_a) = 0{,}279,$$

$$z(\lambda_a) = 2{,}477.$$

Площадь выходного сечения такого сопла равна $F_{кр}/q(\lambda_a) = 3{,}58\,F_{кр}$, а тяга $P = 1{,}417 p_a^* F_{кр}$. Величины P при других значениях λ_a, т. е. других значениях F_a, определяются с помощью таблиц. Результаты таких расчетов при-

ведены на рис. 5.23. Там же показаны значения $F_a/F_{кр}$ для каждого значения λ_a. Из графика видно, что наибольшая величина тяги получается при полном расширении газа в сопле, т. е. при расчетном режиме истечения. Однако характер функциональной зависимости тяги от приведенной скорости таков, что даже при заметном снижении величины λ_a и $F_a/F_{кр}$ по сравнению с их значениями на расчетном режиме величина тяги уменьшается незначительно. Это позволяет в некоторых случаях применять сопла с неполным расширением газа, а при небольших сверхкритических отношениях давлений $p^*/p_н$ использовать даже простые нерасширяющиеся сопла, в которых $\lambda_a = 1{,}0$. Если учесть, что в сопле с неполным расширением будут меньшими потери трения, то снижение тяги по сравнению с расчетным режимом будет еще меньшим.

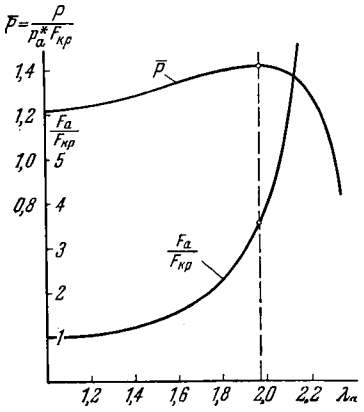


Рис. 5.23. Изменение тяги двигателя в зависимости от приведенной скорости на выходе из сопла при постоянных начальных параметрах и расходе газа (к примеру 8).

Наряду с этим, как видно из рис. 5.23, при $\lambda_a > \lambda_{расч}$ тяга резко уменьшается, т. е. сопло с перерасширением газа применять нецелесообразно, если даже не учитывать повышенных потерь трения в нем и возможности образования скачков уплотнения при уменьшении величины π_c.

При истечении газа в пустоту ($p_н = 0$) величина тяги изменяется порпорционально значению функции $z(\lambda)$, т. е. монотонно увеличивается с ростом $\lambda_a > 1$. Действительно, в этом случае расчетным режимом является

$$\pi(\lambda_a) = \frac{p_н}{p_a^*} = 0; \quad \lambda_a = \lambda_{max};$$

$$\frac{F_a}{F_{кр}} = \frac{1}{q(\lambda_a)} = \infty.$$

Поскольку площадь выходного сечения сопла нельзя сделать бесконечно большой, то такой расчетный режим не может быть реализован. При любом конечном значении $F_a/F_{кр}$ тяга двигателя, работающего в пустоте, будет меньше теоретически возможного значения. Однако из графиков функций $z(\lambda)$ и $q(\lambda)$ видно, что при значительном уменьшении $F_a/F_{кр}$ снижение тяги получается не очень большим. Так, если вместо $F_a/F_{кр} = \infty$ принять (при $k = 1{,}33$) $F_a/F_{кр} = 10$, $q(\lambda_a) = 0{,}1$, $\lambda_a = 2{,}208$, то величина тяги по отношению к максимальному теоретическому значению (при $\lambda_a = \lambda_{max} = 2{,}657$) составит

$$\frac{P}{P_{max}} = \frac{z(\lambda_a)}{z(\lambda_{max})} = \frac{2{,}661}{3{,}033} = 0{,}88;$$

при $F_a/F_{кр} = 20$, т. е. при $q(\lambda_a) = 0{,}05$ и $\lambda_a = 2{,}313$, $P/P_{max} = 2{,}745/3{,}033 = 0{,}905$.

В следующем примере рассматривается задача о течении сжимаемого газа при внезапном расширении канала, встречающаяся в ряде практических вопросов. Выше (§ 5 гл. I) мы решили эту задачу для потока с малыми скоростями, когда можно было пренебречь изменением плотности газа.

Пример 9. Для измерения расхода воздуха в трубопроводе на прямом его участке установлено мерное сопло с площадью проходного сечения F_2, равной 0,45 площади трубопровода $F_1 = F_3$ (рис. 5.24). Требуется определить потери полного давления, возникающие в потоке за соплом вследствие внезапного расширения канала, а также приведенную скорость λ_3 после выра-

нивания поля скоростей, если по результатам измерения давлений p_1 и Δp известна приведенная скорость потока в сопле $\lambda_2 = 0{,}52$. Определить также снижение статического давления в трубопроводе, вызванное установкой сопла.

Запишем уравнение количества движения для участка потока между сечениями *2* и *3*, пренебрегая трением о стенки и учитывая, что при дозвуковых скоростях воздуха в сопле статическое давление постоянно во всем сечении *2*:

$$G(w_2 - w_3) = p_3F_3 - p_2F_3,$$

или

$$Gw_3 + p_3F_3 - Gw_2 - p_2F_2 = p_2(F_3 - F_2).$$

Заменим теперь выражения импульсов согласно (115), а статическое давление p_2 выразим с помощью уравнения (110). Уравнение количества движения принимает вид

$$\frac{k+1}{2k} Ga_{\text{кр}} [z(\lambda_3) - z(\lambda_2)] =$$

$$= \frac{k+1}{2k}\left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}} \times$$

$$\times Ga_{\text{кр}} \frac{1}{y(\lambda_2)}\left(\frac{F_3}{F_2} - 1\right).$$

После сокращения получаем

$$z(\lambda_3) =$$

$$= z(\lambda_2) + \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}} \times$$

$$\times \frac{1}{y(\lambda_2)}\left(\frac{F_3}{F_2} - 1\right).$$

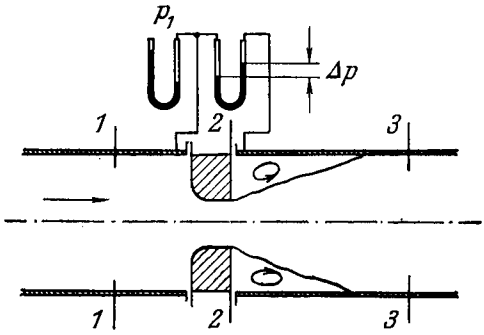


Рис. 5.24. Схема сопла для измерения расхода газа в трубопроводе (к примеру 9).

Из этого уравнения по величинам λ_2 и F_3/F_2 определяется приведенная скорость λ_3 после расширения трубы. Отметим, что результат не зависит от значений давления и температуры газа и мало меняется в зависимости от показателя адиабаты k. Подставив в последнее уравнение заданные величины $\lambda_2 = 0{,}52$, $z(\lambda_2) = 2{,}44$, $y(\lambda_2) = 0{,}859$, $F_2/F_3 = 0{,}45$, получаем $z(\lambda_3) = 2{,}44 + 1{,}577\frac{1}{0{,}859}1{,}22 = 4{,}68$; отсюда по таблицам находим $\lambda_3 = 0{,}225$, $q(\lambda_3) = 0{,}3475$, $y(\lambda_3) = 0{,}358$.

Потери полного давления воздуха между сечениями *2* и *3* определяем из уравнения неразрывности

$$\frac{p_2^* F_2 q(\lambda_2)}{\sqrt{T_2^*}} = \frac{p_3^* F_3 q(\lambda_3)}{\sqrt{T_3^*}}.$$

С помощью таблиц отсюда находим

$$\sigma = \frac{p_3^*}{p_2^*} = \frac{F_2}{F_3}\frac{q(\lambda_2)}{q(\lambda_3)} = \frac{0{,}45 \cdot 0{,}7309}{0{,}3475} = 0{,}948.$$

Чтобы определить изменение статического давления, необходимо предварительно найти величину приведенной скорости потока в трубе перед соплом. Запишем уравнение равенства расхода воздуха в сечениях *1* и *2*, причем, учитывая, что длина участка *1—2* невелика, очертания сопла плавные и поток

течет с ускорением, считаем полное давление воздуха в сечениях *1* и *2* одинаковым. В этом случае уравнение неразрывности принимает вид $F_1 q(\lambda_1) = F_2 q(\lambda_2)$. Отсюда находим $q(\lambda_1) = 0{,}45 \cdot 0{,}7309 = 0{,}329$, $\lambda_1 = 0{,}213$, $y(\lambda_1) = 0{,}338$. Легко видеть, что аналогично может быть получен результат в случае, если между сечениями *1* и *2* существуют потери полного давления, оцениваемые коэффициентом $\sigma_1 = p_2^*/p_1^*$, величина которого известна. При этом получим

$$q(\lambda_1) = \frac{F_2}{F_1}\sigma_1 q(\lambda_2).$$

Изменение статического давления на всем участке между сечениями *1* и *3* можно определить из уравнения неразрывности

$$\frac{p_1 F_1 y(\lambda_1)}{\sqrt{T_1^*}} = \frac{p_3 F_3 y(\lambda_3)}{\sqrt{T_3^*}}.$$

Так как $T_1^* = T_3^*$ и $F_1 = F_3$, имеем $p_3/p_1 = y(\lambda_1)/y(\lambda_3) = 0{,}338/0{,}358 = 0{,}944$.

Такой результат можно получить также из соотношения

$$\frac{p_3}{p_1} = \frac{p_3^*}{p_1^*}\frac{\pi(\lambda_3)}{\pi(\lambda_1)} = \sigma\frac{\pi(\lambda_3)}{\pi(\lambda_1)}.$$

Так как $\lambda_3 > \lambda_1$, т. е. $\pi(\lambda_3) < \pi(\lambda_1)$, то отсюда видно, что вследствие увеличения скорости потока в трубе снижение статического давления здесь, как и в других местных сопротивлениях при $\lambda < 1$ и $F_3 = F_1$, получается несколько большим, чем снижение полного давления. В данном случае ввиду малости приведенных скоростей в трубе λ_1 и λ_3 это различие невелико.

В следующем примере мы вновь вернемся к рассмотрению течения подогреваемого газа в цилиндрическом канале. В отличие от анализа, проведенного в § 3 гл. V и в примере 7 данного раздела, будет рассмотрен случай, когда *задан перепад давлений в потоке*. Это определяет ряд особенностей течения, которые не могли быть выявлены выше, когда предполагалось, что перепад давлений всегда достаточен для поддержания заданных приведенных скоростей в начале и в конце трубы.

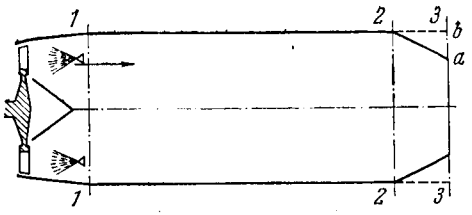


Рис. 5.25. Схема форсажной камеры турбореактивного двигателя: *а* — исходное положение сопла, *б* — раскрытое сопло (к примеру 10).

Пример 10. Форсажная камера турбореактивного двигателя представляет собой установленную за турбиной цилиндрическую трубу с соплом регулируемого сечения на выходе. В камере происходит горение дополнительно впрыскиваемого топлива, вследствие чего повышается температура газа. Пусть параметры потока газа на входе в камеру $p_1^* = 1{,}94 \cdot 10^5$ Н/м^2, $T_1^* = 880$ К, $\lambda_1 = 0{,}4$. Эти величины должны сохраняться постоянными независимо от величины подогрева газа, иначе будет изменен режим работы турбины и компрессора.

Определим максимально возможное увеличение температуры газа и величину потерь полного давления в камере на этом режиме.

Заданными начальными параметрами потока определен расход газа. Как можно видеть из выражения расхода (109), чем больше температура торможения на выходе из камеры, тем большей — при прочих равных условиях — должна быть площадь сечения сопла. Поэтому максимально возможный подогрев газа соответствует полному раскрытию сопла.

Допустим, что сопло выполнено таким образом, что при полном раскрытии площадь его выходного сечения равна площади камеры, т. е. $F_3 = F_2 = F_1$ (положение b на рис. 5.25). Отношение полного давления на входе в камеру к атмосферному давлению у земли $\Pi = p_1^*/p_н = 1{,}94 \cdot 10^5/1{,}01 \cdot 10^5 = 1{,}92$. Эта величина несколько превышает критическое значение (при $k = 1{,}33$): $\left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{k}{k-1}} = 1{,}85$. Поэтому если бы полное давление потока при подогреве газа сохранялось постоянным, то в выходном сечении скорость течения была равна скорости звука и $\lambda_3 = 1$. Однако, как мы видели выше (см. пример 7), при подводе тепла к потоку полное давление его снижается, поэтому в данном случае может оказаться, что $p_3^*/p_н < 1{,}85$ и скорость истечения будет дозвуковой.

Чтобы выяснить это, записываем уравнение количества движения потока, выражая импульс в сечении *1* через известное полное давление p_1^* по формуле (119), а в сечении *3* — через статическое давление p_3 (120), причем пока полагаем, что давление p_3 равно атмосферному давлению $p_н$, т. е. режим истечения дозвуковой. Трением о стенки и изменением показателя адиабаты пренебрегаем:

$$p_1^* F_1 f(\lambda_1) = p_н F_3 \frac{1}{r(\lambda_3)}.$$

Отсюда (при $k = 1{,}33$) находим

$$r(\lambda_3) = \frac{p_н}{p_1^* f(\lambda_1)} = \frac{1{,}01 \cdot 10^5}{1{,}94 \cdot 10^5 \cdot 1{,}0822} = 0{,}483,$$

и далее по таблицам $\lambda_3 = 0{,}91$, т. е. $\pi(\lambda_3) = 0{,}6048$, $f(\lambda_3) = 1{,}2525$, $z(\lambda_3) = 2{,}01$.

Режим истечения газа действительно будет дозвуковым, сколь бы велик ни был подогрев в камере: заданное полное давление газа, снижающееся в процессе подвода тепла, недостаточно для создания звуковой скорости истечения в атмосферу. Если бы полное давление p_1^* было бóльшим, например $p_1^* = 2{,}4 \cdot 10^5$ Н/м^2, то из последней формулы следовало бы $r(\lambda_3) = 0{,}390$; это значение меньше критического, так как $r(1) = 0{,}429$. Следовательно, при таком давлении режим истечения был бы критическим и $\lambda_3 = 1{,}0$.

Найденное значение приведенной скорости потока на выходе из сопла ($\lambda_3 < 1$ или $\lambda_3 = 1$) позволяет найти все параметры течения. Для определения температуры газа удобно воспользоваться, например, уравнением импульсов (115), из которого следует

$$T_3^* = T_1^* \left[\frac{z(\lambda_1)}{z(\lambda_3)}\right]^2 = 880 \left(\frac{2{,}9}{2{,}01}\right)^2 = 1835 \text{ К}.$$

Это и есть *предельное значение температуры торможения* на выходе из сопла. Если увеличить подогрев газа сверх этой величины, то снизится скорость потока на входе в камеру.

Чтобы определить полное давление газа в выходном сечении, в данном случае можно воспользоваться соотношением $p_3^* = p_н/\pi(\lambda_3) = 1{,}01 \cdot 10^5/0{,}6048 = 1{,}68 \cdot 10^5$ Н/м^2, которое справедливо при $\lambda_3 < 1$, т. е. при $p_3 = p_н$.

Зная p_3^*, вычисляем коэффициент сохранения полного давления $\sigma = p_3^*/p_1^* = 1{,}68 \cdot 10^5/1{,}94 \cdot 10^5 = 0{,}865$.

Для определения изменений полного и статического давлений в процессе подогрева можно получить простые соотношения, если записать равенство импульсов газа в начальном и конечном сечении в виде

$$p_3^* F_3 f(\lambda_3) = p_1^* F_1 f(\lambda_1) \quad \text{и} \quad p_3 F_3 \frac{1}{r(\lambda_3)} = p_1 F_1 \frac{1}{r(\lambda_1)}.$$

Отсюда получаем

$$\sigma = \frac{p_3^*}{p_1^*} = \frac{f(\lambda_1)}{f(\lambda_3)}, \quad \frac{p_3}{p_1} = \frac{r(\lambda_3)}{r(\lambda_1)}.$$

Эти соотношения справедливы при любом режиме течения газа. В частности для условий данного примера определяем $\sigma = 1{,}0822/1{,}2525 = 0{,}865$.

Полученные для σ и p_3/p_1 выражения удобны для анализа характера изменения давления, определения предельных потерь полного давления и для получения некоторых других результатов, найденных более сложным путем в § 3 гл. V.

Так, например, из уравнения для определения σ следует, что подогрев газа приводит к снижению полного давления как в дозвуковом, так и в сверхзвуковом потоках. Действительно, поскольку при подогреве величина приведенной скорости всегда приближается к единице (растет при $\lambda < 1$ и уменьшается при $\lambda > 1$), то, согласно рис. 5.22, величина функции $f(\lambda)$ в процессе подогрева всегда увеличивается, $f(\lambda_3) > f(\lambda_1)$ и $\sigma < 1$. Так как в области дозвуковых скоростей пределы изменения величины $f(\lambda)$ невелики ($\sim 25\%$), то коэффициент сохранения полного давления σ при $\lambda < 1$ не может быть ниже некоторой предельной величины

$$\sigma_{\min} = \frac{f(0)}{f(1)} = \frac{1{,}00}{1{,}2591} = 0{,}795 \quad (k = 1{,}33).$$

В сверхзвуковом потоке, согласно рис. 5.22, возможны любые значения коэффициента сохранения полного давления ($0 < \sigma < 1$).

С другой стороны, по изменению величины функции $r(\lambda)$ можно установить характер изменения статического давления в потоке подогреваемого газа. При дозвуковой скорости, когда приведенная скорость при подогреве газа возрастает, имеем (см. рис. 5.22) $r(\lambda_3) < r(\lambda_1)$ или $p_3 < p_1$, т. е. статическое давление в потоке уменьшается. Предельное изменение статического давления, очевидно, равно

$$\frac{r(1)}{r(0)} = \frac{1}{k+1}.$$

В сверхзвуковом потоке, когда $\lambda_3 < \lambda_1$, имеем $r(\lambda_3) > r(\lambda_1)$ или $p_3 > p_1$.

Таким образом, при подогреве сверхзвукового потока, несмотря на снижение полного давления, статическое давление возрастает вследствие уменьшения приведенной скорости потока.

Что будет, если при сохранении заданного отношения давлений $p_1^*/p_н$ повысить температуру газа сверх полученного выше значения $T_3^* = 1835$ К, т. е. увеличить подогрев?

Отвлекаясь от рассмотрения действующего перепада давлений, на основании формулы, выведенной в примере 7, можно было бы прийти к выводу, что поскольку $\lambda_1 < 1$ и $\lambda_3 < 1$, то с увеличением подогрева приведенная скорость λ_3 будет возрастать, приближаясь к $\lambda = 1$. Однако это неправильно, так как при использовании этой формулы всегда следует иметь в виду, что

полученные из нее результаты справедливы только *при условии достаточности действующих на поток перепадов давления*; чем больше подогрев, тем большим должно быть отношение давлений $p_1^*/p_н$. На это неоднократно указывалось выше при решении задач.

Действительно, в данном случае при $p_1^* = \text{const}$ с ростом подогрева увеличиваются потери полного давления газа и снижается полное давление газа в выходном сечении трубы, вследствие чего уменьшается приведенная скорость λ_3, зависящая только от отношения полного и статического давлений в потоке

$$\pi(\lambda_3) = p_3/p_3^* = p_н/\sigma p_1^*.$$

Таким образом, если $p_1^*/p_н = \text{const}$, то с увеличением подогрева, когда величина σ снижается, величина приведенной скорости на выходе из камеры (трубы) не возрастает, а уменьшается. Одновременно уменьшается приведенная скорость потока на входе в трубу.

Чтобы определить действительные значения приведенных скоростей на входе и выходе при заданных величинах подогрева T_3^*/T_1^* и перепада давлений между входным и выходным сечением, необходимо найти *совместные решения* уравнения (см. пример 7)

$$z(\lambda_3) = z(\lambda_1)\sqrt{\frac{T_1^*}{T_3^*}}$$

с одним из следующих уравнений, выражающих постоянство заданного перепада давлений, например:

$$\frac{p_3^*}{p_1^*} = \frac{f(\lambda_1)}{f(\lambda_3)} = \text{const} \quad \text{или} \quad \frac{p_3^*}{p_1^*} = \frac{q(\lambda_1)}{q(\lambda_3)}\sqrt{\frac{T_3^*}{T_1^*}} = \text{const},$$

если задано отношение полных давлений;

$$\frac{p_3}{p_1} = \frac{r(\lambda_3)}{r(\lambda_1)} = \text{const} \quad \text{или} \quad \frac{p_3}{p_1} = \frac{y(\lambda_1)}{y(\lambda_3)}\sqrt{\frac{T_3^*}{T_1^*}} = \text{const},$$

если задано отношение статических давлений;

$$\frac{p_1^*}{p_3} = \frac{1}{r(\lambda_3)\cdot f(\lambda_1)} = \text{const} \quad \text{или} \quad \frac{p_1^*}{p_3} = \frac{y(\lambda_3)}{q(\lambda_1)}\sqrt{\frac{T_1^*}{T_3^*}} = \text{const},$$

если задано отношение полного давления на входе к статическому давлению на выходе из трубы (располагаемое отношение давлений). Последний случай встречается наиболее часто. Совместное решение уравнений удобнее всего проводить графическим способом с помощью таблиц газодинамических функций.

Общим в рассмотренных выше примерах течения газа являлось то, что скорость потока была направлена по оси канала.

В ряде задач прикладной газовой динамики приходится рассчитывать такие течения, в которых *вектор абсолютной скорости газа составляет некоторый угол с осью потока.* Помимо

осевой скорости w_a, определяющей расход газа и количество движения вдоль оси потока, здесь имеются составляющие скорости в плоскости, перпендикулярной к оси, — радиальная w_r или окружная w_τ скорость частиц газа. Примером может служить течение закрученного газа в кольцевом канале, встречающееся в различных вихревых аппаратах (окружная составляющая), или расширение сверхзвуковой струи газа, вытекающей в атмосферу с большим избыточным давлением (радиальная составляющая).

Если параметры газа в поперечном сечении потока можно полагать постоянными, то для расчета таких течений могут быть использованы методы и формулы, изложенные в данном параграфе.

На первый взгляд может показаться, что для этого достаточно во всех выведенных соотношениях принимать во внимание лишь осевую составляющую скорости. Это, однако, не так, поскольку при заданных параметрах торможения величина температуры, статического давления, плотности газа будет зависеть также от величины окружной (радиальной) составляющей скорости; изменения последней будут влиять на величину расхода и импульса потока. Дело в том, что, согласно уравнению энергии и полученным из него соотношениям (101)—(103), связь между параметрами в потоке и параметрами торможения определяется изменением абсолютной скорости (или приведенной скорости, вычисленной по абсолютной скорости и полной температуре торможения), независимо от угла, составляемого вектором скорости с осью.

Покажем, как обобщить полученные выше соотношения на случай движения с тангенциальной (радиальной) составляющей скорости. Рассмотрим одномерный поток газа с параметрами торможения p^* и T^* и абсолютной скоростью w, составляющей угол α с осью течения. Секундный расход газа через поперечное сечение площади F, перпендикулярное оси, равен

$$G = \rho F w_a = \rho F w \cos\alpha,$$

где w_a — осевая составляющая скорости газа. Таким же путем, как при выводе формулы (109), отсюда можно получить

$$G = \frac{p^*}{RT^*}\left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}} F\lambda a_{\text{кр}} \cos\alpha = m\frac{p^* F q(\lambda)}{\sqrt{T^*}}\cos\alpha,$$

где

$$\lambda = \frac{w}{a_{\text{кр}}} = \frac{w}{\sqrt{2\frac{k}{k+1}RT^*}}.$$

Последнее соотношение можно переписать в виде

$$G = m\frac{p^*Fq(\lambda, \alpha)}{\sqrt{T^*}}, \tag{123}$$

где

$$q(\lambda, \alpha) = q(\lambda)\cos\alpha \tag{124}$$

— газодинамическая функция $q(\lambda)$, обобщенная на случай движения газа с составляющей скорости в плоскости, перпендикулярной оси. Точно так же можно получить формулу, аналогичную (111),

$$G = m\frac{pFy(\lambda, \alpha)}{\sqrt{T^*}}, \tag{125}$$

где

$$y(\lambda, \alpha) = y(\lambda)\cos\alpha. \tag{126}$$

Таким образом, если угол α задан, то для вычисления расхода газа и составления уравнений неразрывности используются те же формулы, что и при $\alpha = 0$, так как обобщенные функции $q(\lambda, \alpha)$ и $y(\lambda, \alpha)$ определяются по углу α и по значениям $q(\lambda)$ и $y(\lambda)$ для приведенной скорости в абсолютном движении газа.

Импульс потока газа в направлении оси равен

$$I = Gw_a + pF = Gw\cos\alpha + pF.$$

Преобразуя это выражение подобно тому, как это было сделано при выводе формулы (115), имеем

$$I = G\left(w\cos\alpha + \frac{p}{\rho w\cos\alpha}\right) =$$

$$= G\left[\lambda a_{кр}\cos\alpha + \frac{RT^*}{\lambda a_{кр}\cos\alpha}\left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)\right]$$

или после упрощений

$$I = \frac{k+1}{2k}Ga_{кр}z(\lambda, \alpha), \tag{127}$$

где

$$z(\lambda, \alpha) = \frac{1}{\cos\alpha}\left[\left(\frac{2k}{k+1}\cos^2\alpha - \frac{k-1}{k+1}\right)\lambda + \frac{1}{\lambda}\right]. \tag{128}$$

Выражение (127) аналогично выражению, полученному при $\alpha = 0$, но содержит вместо $z(\lambda)$ обобщенную функцию $z(\lambda, \alpha)$, график которой приведен на рис. 5.26. При $\alpha = 0$ функция $z(\lambda, \alpha)$ сводится к $z(\lambda) = \lambda + 1/\lambda$; минимальное значение ее $z(\lambda) = 2$ соответствует $\lambda = 1$. При $\alpha \neq 0$ минимальные значения функции $z(\lambda, \alpha)$ меньше двух, причем с увеличением угла α минимумы кривых смещаются в область сверхзвуковых скоростей.

Для проведения численных расчетов можно составить таблицы функции $z(\lambda, \alpha)$ или более подробную, чем на рис. 5.26,

сетку кривых при различных значениях α (см. график в приложении).

Формулы (123) и (127) позволяют установить характер изменения плотности тока, площади сечения, удельного импульса и других величин, характеризующих газовый поток, в зависимости от приведенной скорости λ и угла α между вектором скорости и осью. На этом, однако, мы здесь останавливаться не будем.

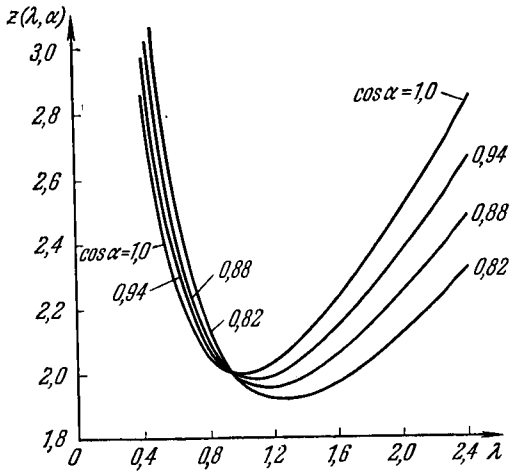


Рис. 5.26. График функции $z(\lambda, \alpha)$.

При использовании обобщенных функций $q(\lambda, \alpha)$, $y(\lambda, \alpha)$, $z(\lambda, \alpha)$ и их комбинаций все полученные в данном разделе уравнения можно применять для расчета течений с окружной или радиальной составляющей скорости.

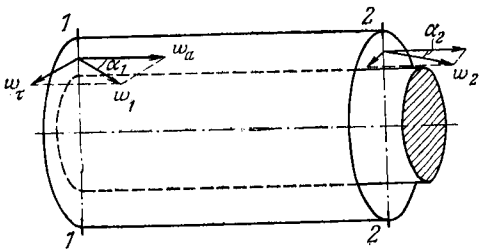


Рис. 5.27. Закрученный газовый поток в кольцевом канале (к примеру 11).

Пример 11. Закрученный поток газа движется в кольцевом канале между двумя цилиндрическими поверхностями (рис. 5.27). Приведенная скорость потока на входе в канал $\lambda_1 = 0{,}85$, направление абсолютной скорости задано углом $\alpha_1 = 30°$ к оси канала. При течении в канале температура торможения газа понижается от 900 до 700 К. Пренебрегая трением, а также изменением параметров по радиусу канала, определить параметры газа на выходе из канала. Показатель адиабаты $k = 1{,}40$.

Как и выше, при рассмотрении потока в цилиндрическом канале с подводом тепла, основное уравнение получаем из условия постоянства импульса газа в поперечных сечениях канала. В данном случае это условие имеет вид

$$Ga_{\text{кр}_2} z(\lambda_2, \alpha_2) = Ga_{\text{кр}_1} z(\lambda_1, \alpha_1) \quad \text{или} \quad z(\lambda_2, \alpha_2) = z(\lambda_1, \alpha_1) \sqrt{\frac{T_1^*}{T_2^*}}.$$

Подставляя заданные значения температур торможения и величину функции $z(\lambda_1, \alpha_1) = 2{,}055$ (см. рис. 5.26), получаем

$$z(\lambda_2, \alpha_2) = 2{,}33.$$

Данному значению функции могут соответствовать, вообще говоря, различные комбинации значений λ_2 и α_2, поэтому для определения этих величин используем условие постоянства момента количества движения (см. § 6 гл. I). Поскольку средний радиус канала не изменяется и отсутствуют моменты внешних сил, то в потоке независимо от происходящих процессов должна быть постоянной окружная составляющая скорости. Поэтому

$$w_{\tau 2} = w_{\tau 1} \quad \text{или} \quad \lambda_2 a_{\text{кр}_2} \sin\alpha_2 = \lambda_1 a_{\text{кр}_1} \sin\alpha_1.$$

Отсюда определяем

$$\lambda_2 \sin\alpha_2 = \lambda_1 \sin\alpha_1 \sqrt{\frac{T_1^*}{T_2^*}} = 0{,}85 \cdot 0{,}5 \sqrt{\frac{900}{700}} = 0{,}482.$$

Совместное решение двух полученных уравнений удобнее всего проводить графически. Задаваясь рядом значений угла α_2, находим соответствующие им значения приведенной скорости $\lambda_2 = 0{,}482/\sin\alpha_2$; подставляя эти значения α_2 и λ_2 в $z(\lambda, \alpha)$, строим график этой функции. Точке кривой, где $z(\lambda, \alpha) = 2{,}33$, соответствуют значения параметров в выходном сечении канала, в данном случае находим $\lambda_2 = 0{,}72$, $\alpha_2 = 42°$. При расчетах можно также воспользоваться вспомогательным графиком или таблицами функции $z(\lambda, \alpha)$.

Условие сохранения расхода газа в сечениях *1* и *2* при использовании выражения (123) позволяет определить отношение полных давлений газа — коэффициент сохранения полного давления

$$\sigma = \frac{p_2^*}{p_1^*} = \frac{q(\lambda_1)\cos\alpha_1}{q(\lambda_2)\cos\alpha_2} \sqrt{\frac{T_2^*}{T_1^*}} = \frac{0{,}9729 \cdot 0{,}865}{0{,}9061 \cdot 0{,}743} \sqrt{\frac{900}{700}} = 1{,}10$$

(охлаждение потока сопровождается увеличением полного давления).

Изменение статического давления легко определить из соотношения

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{p_2^*}{p_1^*} \frac{\pi(\lambda_2)}{\pi(\lambda_1)} = 1{,}10 \cdot \frac{0{,}7289}{0{,}6382} = 1{,}255$$

или из условия равенства расходов, записанных в форме (125).

В заключение перечислим введенные газодинамические функции и соотношения между ними:

1. Простейшие функции, которые выражают связь между параметрами газа в потоке и параметрами торможения:

$$\tau(\lambda) = 1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2; \quad \pi(\lambda) = \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{\frac{k}{k-1}};$$

$$\varepsilon(\lambda) = \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}};$$

при этом

$$\pi(\lambda) = \tau(\lambda)\,\varepsilon(\lambda).$$

2. Функции, позволяющие выразить расход газа через полное давление

$$q(\lambda) = C\lambda\varepsilon(\lambda)$$

или через статическое давление

$$y(\lambda) = \frac{q(\lambda)}{\pi(\lambda)} = C\frac{\lambda}{\tau(\lambda)}.$$

С помощью этих функций получаем два выражения для расхода газа

$$G = m\frac{p^*Fq(\lambda)}{\sqrt{T^*}} = m\frac{pFy(\lambda)}{\sqrt{T^*}}.$$

3. Функция

$$z(\lambda) = \lambda + \frac{1}{\lambda},$$

с помощью которой импульс газового потока можно представить в виде произведения температуры торможения (критической скорости звука) на расход газа

$$I = Gw + pF = \frac{k+1}{2k} Ga_{кр} z(\lambda).$$

4. Функции $f(\lambda)$, $r(\lambda)$, при помощи которых импульс газового потока выражается через полное или статическое давление:

$$f(\lambda) = \frac{1}{C} q(\lambda) z(\lambda), \qquad r(\lambda) = C\frac{1}{y(\lambda) z(\lambda)}.$$

Соответственно получаем два выражения для импульса газового потока:

$$I = p^*Ff(\lambda) = \frac{pF}{r(\lambda)}.$$

Константа, входящая в выражения для функций $q(\lambda)$, $y(\lambda)$, $f(\lambda)$, $r(\lambda)$

$$C = \frac{1}{\varepsilon(1)} = \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}},$$

равна 1,577 для $k = 1{,}4$ и 1,588 для $k = 1{,}33$.

5. Функции $q(\lambda, \alpha)$, $y(\lambda, \alpha)$ и $z(\lambda, \alpha)$, позволяющие распространить рассмотренные выше методы и расчетные формулы на случай течения газа с окружной или радиальной составляющей скорости.

6. При решении некоторых задач используются также производные от различных газодинамических функций. Путем дифференцирования и несложных преобразований можно получить их выражения через исходные функции.

Например,

$$\frac{d\pi(\lambda)}{d\lambda} = -k\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}} q(\lambda),$$

$$\frac{dq(\lambda)}{d\lambda} = q(\lambda)\left[\frac{1}{\lambda} - \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}} y(\lambda)\right] \text{ и т. д.}$$

В чем смысл упрощений, получаемых при записи основных уравнений с помощью газодинамических функций?

Как можно видеть из приведенных выше примеров, основное преимущество полученных здесь выражений заключается в том, что они *содержат такие параметры потока, характер изменения которых может быть легко установлен из условий задачи*, например постоянство температуры торможения T^* в адиабатических течениях и рост T^* при подводе тепла, сохранение полного давления p^* в изоэнтропическом течении и падение p^* при наличии потерь и т. д. Выбором соответствующего выражения для расхода или импульса можно свести к минимуму число неизвестных параметров в основных уравнениях. При этом часто удается найти неизвестные величины непосредственно из исходных уравнений, минуя громоздкие преобразования.

Отметим некоторые общие правила, полезные при решении уравнений в общем виде и вычислениях с помощью таблиц газодинамических функций.

Во всех случаях, когда получено общее или численное выражение величины приведенной скорости λ или какой-либо одной из его функций, можно считать, что известны все газодинамические функции и λ (из таблиц или графиков). Это является основным условием упрощения выкладок, так как исключает необходимость получения в явном виде зависимостей между λ и его функциями. При численных расчетах следует учитывать, что функции $\tau(\lambda)$, $\pi(\lambda)$, $\varepsilon(\lambda)$ в области малых скоростей и функции $q(\lambda)$, $z(\lambda)$, $f(\lambda)$ при околозвуковых скоростях очень мало изменяются с изменением величины λ. Поэтому в указанных областях незначительная погрешность в величине функций может привести к большой ошибке при вычислении приведенной скорости λ. Таких вычислений следует избегать и по возможности использовать в этих случаях другие уравнения, включающие, например, функции $y(\lambda)$, $r(\lambda)$. Если это по каким-либо причинам невозможно, то надо вести все предварительные подсчеты с высокой степенью точности. Понятно, что в этих областях не рекомендуется определять λ по указанным функциям с помощью графиков. В особенности это относится к функции $z(\lambda)$, которая в широких пределах изменения λ (от 0,65 до 1,55) изменяется по величине всего на 10%. Поэтому для нахождения λ по значению функции $z(\lambda)$ в области околозвуковых скоростей можно вычислять возможные значения λ непосредственно из уравнения

$$\lambda + \frac{1}{\lambda} = z(\lambda),$$

откуда

$$\lambda = \frac{z(\lambda) \pm \sqrt{z^2(\lambda) - 4}}{2} = \frac{2}{z(\lambda) \mp \sqrt{z^2(\lambda) - 4}}.$$

Для того чтобы избежать погрешности, связанной с вычитанием близких величин, сверхзвуковое решение находится по первому, а дозвуковое решение — по второму из этих выражений.

Из примеров, рассмотренных в данном разделе, можно видеть эффективность метода расчета с использованием газодинамических функций при решении достаточно сложных задач, имеющих практическое значение.

§ 7. Течение газа с трением в цилиндрической трубе при заданной величине отношения давлений на входе и выходе

Используя соотношения, выведенные в предыдущем параграфе, дополнительно выясним некоторые закономерности одномерного течения газа в цилиндрической трубе с трением. В §§ 1 и 2 было установлено, что трение приводит к увеличению скорости дозвукового потока и уменьшению скорости сверхзвукового потока, причем в обоих случаях предельный режим соответствует критической скорости в выходном сечении трубы.

Полученные в § 2 результаты справедливы, однако, только в том случае, когда приведенная скорость на входе в трубу λ_1 поддерживается постоянной, что требует создания *вполне определенного перепада давлений в потоке* для каждого режима и каждого значения приведенной длины трубы. В действительности чаще всего бывает наоборот: заданной величиной является перепад давлений между входным и выходным сечениями трубы, а величины скорости, расхода и других параметров течения определяются действующим перепадом давлений и сопротивлением на рассматриваемом участке трубы. Для потока во входном сечении трубы наиболее характерной величиной, которая обычно известна или может быть легко определена, является полное давление p_1^*; для характеристики потока на выходе из трубы важно знать статическое давление во внешней среде или резервуаре, куда вытекает газ из трубы $p_н$. Если скорость потока в выходном сечении меньше скорости звука, то статическое давление потока, как известно, равно внешнему давлению, то есть $p_2 = p_н$. Если $\lambda_2 = 1$, то в выходном сечении трубы $p_2 \geqslant p_н$. Наконец, при $\lambda_2 > 1$ возможны также режимы, когда $p_2 < p_н$.

Назовем величину $\Pi = p_1^*/p_н$ располагаемым отношением давлений. Параметры потока в цилиндрической трубе в основном определяются величиной располагаемого отношения давлений Π: процесс по существу является как бы *истечением газа из сосуда с давлением* p_1^* *в среду с давлением* $p_н$ *через канал с заданным сопротивлением.* Поэтому при рассмотрении закономерностей течения с трением необходимо учитывать величину располагае-

мого отношения давлений в потоке; без этого полученные результаты могут оказаться нереальными.

Пусть, например, при дозвуковой скорости на входе в трубу располагаемое отношение давлений Π меньше критического отношения давлений

$$\Pi_{кр} = \frac{1}{\pi(1)} = \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{k}{k-1}};$$

для воздуха $\Pi_{кр} = 1{,}893$. Вследствие трения полное давление потока по длине трубы уменьшается, поэтому в выходном сечении трубы $p_2^*/p_н < p_1^*/p_н < 1{,}893$. Это значит, что поток вытекает из трубы под действием докритического отношения давлений, следовательно, скорость такого потока всегда будет дозвуковой. Сколько бы не увеличивать приведенную длину трубы, получить величину $\lambda_2 = 1$ не удастся: действующий в потоке перепад давлений недостаточен для создания звуковой скорости истечения на выходе из трубы.

Таким образом, полученный ранее вывод о том, что при увеличении приведенной длины трубы до максимального (критического) значения скорость потока на выходе из трубы достигает скорости звука, справедлив только в том случае, если обеспечивается достаточное (зависящее от величин λ_1 и χ) отношение давлений Π.

Покажем, как проводится расчет параметров потока при течении в трубе с трением, если $\lambda_1 < 1$ и задана величина располагаемого отношения давлений.

Запишем уравнение неразрывности для потока в трубе, причем расход во входном сечении выразим с помощью формулы (109) через полное давление, а расход в выходном сечении — через статическое давление с помощью формулы (111)

$$\frac{p_1^* F_1 q(\lambda_1)}{\sqrt{T_1^*}} = \frac{p_2 F_2 y(\lambda_2)}{\sqrt{T_2^*}}.$$

Так как для адиабатического течения в цилиндрической трубе $T_2^* = T_1^*$ и $F_2 = F_1$, то отсюда следует

$$y(\lambda_2) = \frac{p_1^*}{p_2} q(\lambda_1).$$

Если $\lambda_2 < 1$, то, как указывалось, $p_2 = p_н$ или

$$y(\lambda_2) = \Pi q(\lambda_1). \qquad (129)$$

Уравнение (129), связывающее между собой значения приведенных скоростей во входном и выходном сечениях трубы при заданном значении Π и $\lambda_1 \leq 1$, справедливо вне зависимости от

характера течения и длины трубы. С другой стороны, изменение параметров газа в трубе определяется величиной коэффициента трения и длиной трубы. Ранее в § 2 была получена формула, описывающая изменение параметров потока вследствие трения:

$$\varphi(\lambda_1) - \varphi(\lambda_2) = \chi, \tag{130}$$

где $\chi = \frac{2k}{k+1}\zeta\frac{x}{D}$ — приведенная длина трубы. Уравнение (130) устанавливает зависимость между приведенными скоростями λ_1 и λ_2 при заданном значении χ. Уравнения (129) и (130) можно рассматривать как систему двух уравнений с двумя неизвестными, совместное решение определяет значения λ_1 и λ_2 в функции заданных величин Π и χ. Этими значениями приведенных скоростей определяется реальный режим течения газа через трубу с заданным сопротивлением (приведенной длиной) под действием располагаемого перепада давлений Π.

Рассмотрим некоторые из следующих отсюда свойств течения при дозвуковой скорости потока на входе в трубу. В первую очередь сравним одномерное дозвуковое течение газа в трубе при наличии трения с идеальным течением при одинаковом располагаемом отношении давлений Π. Изменение параметров газа по длине трубы связано с трением, поэтому в идеальном течении, когда $p_2^* = p_1^*$, параметры газа постоянны во всех сечениях трубы. Приведенная скорость в выходном сечении $\lambda_2 = \lambda_1 < 1$, которая в идеальном случае определяется величиной располагаемого отношения давлений $\pi(\lambda_2) = 1/\Pi$, больше, чем при течении с трением, когда $p_2^* < p_1^*$, и $\pi(\lambda_2) = 1/\sigma\Pi$. Чем больше приведенная длина трубы, тем большими будут потери полного давления и тем меньше будет скорость потока на выходе из трубы по сравнению со скоростью в идеальном случае течения. Таким образом, следует иметь в виду, что, хотя при течении в трубе с трением *скорость потока по длине трубы возрастает*, наибольшая ее величина — скорость на выходе — всегда *остается меньшей, чем при том же отношении давлений* Π *в случае течения без трения* (например, при очень короткой трубе, когда $\chi \approx 0$). Чем больше приведенная длина трубы, тем меньше (при данном Π) скорость потока как на выходе, так и на входе.

Интересно отметить, что если $\Pi = \text{const}$, то при $\lambda_2 < 1$ изменение приведенной длины трубы χ всегда приводит к изменению скорости на входе в трубу, независимо от того больше или меньше величина χ ее критического значения для данного $\lambda_1 < 1$. Сохранение $\lambda_1 = \text{const}$ при изменении приведенной длины трубы и $\lambda_2 < 1$ требует соответственного изменения величины располагаемого отношения давлений: чем длиннее труба, тем большее значение Π необходимо для поддержания заданного режима на входе, т. е. сохранения расхода газа.

С другой стороны, если при заданной длине трубы ($\chi = \text{const}$) увеличивать отношение давлений Π, то будут возрастать скорости как на входе, так и на выходе, пока величина λ_2 не достигнет критического значения $\lambda_2 = 1$. Дальнейшее увеличение Π не изменяет ни λ_1, ни λ_2, однако в выходном сечении трубы установится избыточное по сравнению с окружающей средой (резервуаром) давление. Для этого режима уравнение (129) несправедливо, так как при выводе его предполагалось $p_2 = p_н$; связь между параметрами потока определяется только уравнением (130). Из условия неразрывности можно лишь найти минимальное потребное значение Π, при котором установится режим с $\lambda_2 = 1$ и заданным значением λ_1, так как, согласно уравнению (129),

$$\Pi_{min} = \frac{y(1)}{q(\lambda_1)} = \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{k}{k-1}} \frac{1}{q(\lambda_1)} = \frac{\Pi_{кр}}{q(\lambda_1)}.$$

Так как $q(\lambda_1) < 1$, то из последнего соотношения видно, что при течении в трубе с трением критическая скорость на выходе устанавливается при отношении давлений $\Pi > \Pi_{кр}$, где $\Pi_{кр}$ — отношение давлений, необходимое для получения $\lambda = 1$ при течении без трения. Режим $\lambda_2 = 1$ для данного значения λ_1 наступает при увеличении приведенной длины χ до значения

$$\chi = \chi_{кр} = \varphi(\lambda_1) - 1; \quad (131)$$

при этом должно соблюдаться условие $\Pi \geqslant \Pi_{min}$.

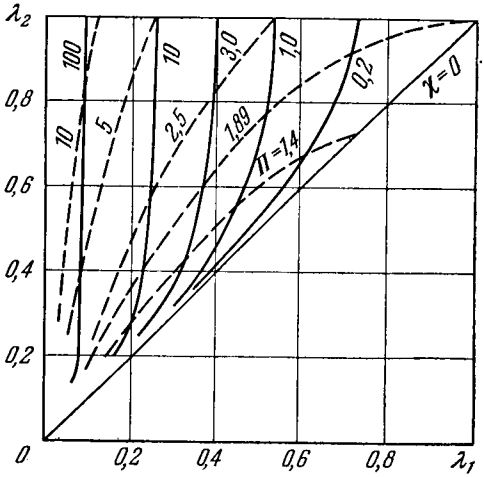


Рис. 5.28. Зависимость между параметрами дозвукового потока в начальном и конечном сечениях цилиндрического канала при наличии трения.

На рис. 5.28 приведены результаты расчетов дозвукового течения в трубе с трением. График иллюстрирует изложенные выше основные закономерности течения и, в частности, показывает, что

а) при $\lambda_1 = \text{const}$ с ростом приведенной длины χ величина λ_2 растет, причем всегда $\lambda_1 < \lambda_2 \leqslant 1$;

б) при постоянном располагаемом отношении давлений Π с ростом χ величина λ_1 всегда снижается; уменьшается также и λ_2, если $\lambda_2 \leqslant 1$;

в) для каждого значения приведенной длины χ существует вполне определенное значение отношения давлений $p_1^*/p_н = П$, которому соответствует заданная скорость потока на выходе и соответственно на входе в трубу;

г) предельное значение λ_1, соответствующее $\lambda_2 = 1$, для каждого значения χ устанавливается при определенном, увеличивающемся с ростом χ значении отношения давлений и не растет при дальнейшем возрастании П.

Рассмотрим теперь особенности течения с трением при сверхзвуковой скорости на входе в трубу. Из формулы (130) следует, что если приведенная длина трубы меньше критического значения, определяемого для данного значения $\lambda_1 > 1$ формулой (131), то по длине трубы скорость потока будет уменьшаться, оставаясь сверхзвуковой. На выходе из трубы при непрерывном торможении потока будет получено $\lambda_2 > 1$. При некотором значении приведенной длины трубы, называемом критическим, из уравнения (130) следует $\varphi(\lambda_2) = 1$, т. е. $\lambda_2 = 1$. Этой длине соответствует предельно возможный режим течения с непрерывным изменением скорости от заданного значения $\lambda_1 > 1$ до $\lambda_2 = 1$. Если $\chi > \chi_{кр}$, то непрерывное торможение потока в трубе невозможно. В этом случае уравнение (130), описывающее течение с непрерывным изменением скорости, не имеет решений для λ_2, так как из него следует $\varphi(\lambda_2) < 1$. В действительности при этом в начальном участке трубы сверхзвуковой поток тормозится до некоторого значения $\lambda' > 1$, затем в трубе возникает скачок уплотнения, за которым устанавливается дозвуковое течение с увеличением скорости по длине трубы от значения λ'' (за скачком) до $\lambda_2 \leqslant 1$, как указывалось выше.

Местоположение скачка и относительную длину сверхзвукового и дозвукового участков течения в зависимости от заданных параметров можно определить следующим образом. Обозначим приведенную длину трубы от начала ее до скачка уплотнения (сверхзвуковой участок течения)

$$\chi_1 = \frac{2k}{k+1}\zeta\frac{x_1}{D}.$$

Запишем уравнение (130) для участков с непрерывным изменением скорости, т. е. раздельно для сверхзвукового и дозвукового участков:

$$\varphi(\lambda_1) - \varphi(\lambda') = \chi_1, \tag{132}$$

$$\varphi(\lambda'') - \varphi(\lambda_2) = \chi - \chi_1. \tag{133}$$

Произведем почленное сложение уравнений (132) и (133), предполагая при этом, что скачок уплотнения является прямым, и поэтому справедливо соотношение $\lambda'' = 1/\lambda'$. В результате

получаем

$$\varphi(\lambda_1) - \varphi(\lambda_2) + \varphi\left(\frac{1}{\lambda'}\right) - \varphi(\lambda') = \chi.$$

Обозначим

$$\Phi(\lambda) = \varphi\left(\frac{1}{\lambda}\right) - \varphi(\lambda) = \lambda^2 - \frac{1}{\lambda^2} - 4\ln\lambda. \qquad (134)$$

Тогда последнее уравнение можно записать в виде

$$\Phi(\lambda') = \chi - \varphi(\lambda_1) + \varphi(\lambda_2). \qquad (135)$$

На рис. 5.29 приведен вспомогательный график для определения функции $\Phi(\lambda)$ по величине λ. Соотношение (135) устанавливает связь между параметрами потока, движущегося с трением в трубе с приведенной длиной χ, при условии, что в трубе возникает прямой скачок уплотнения.

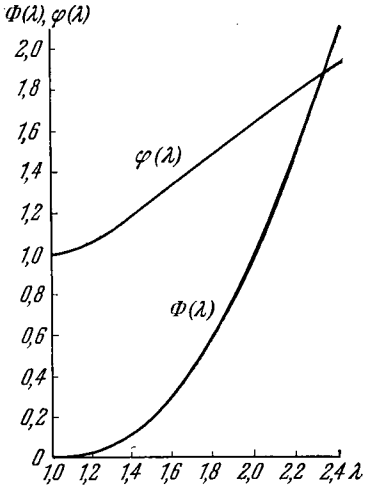


Рис. 5.29. Графики функций $\varphi(\lambda)$ и $\Phi(\lambda)$ для расчета сверхзвукового течения в цилиндрическом канале при наличии трения, $\varphi(\lambda) = \frac{1}{\lambda} + 2\ln\lambda$, $\Phi(\lambda) = \lambda^2 - \frac{1}{\lambda^2} - 4\ln\lambda$.

В формулу (135), помимо известных величин χ и λ_1, входит также неизвестное пока значение приведенной скорости на выходе из трубы λ_2. Так как за скачком течение дозвуковое, то для определения λ_2 воспользуемся уравнением неразрывности

$$y(\lambda_2) = \Pi q(\lambda_1),$$

которое справедливо как при $\lambda_1 < 1$, так и при $\lambda_1 > 1$. Если из этого уравнения следует $y(\lambda_2) \geqslant y(1)$, то $\lambda_2 = 1$, при $y(\lambda_2) < y(1)$, $\lambda_2 < 1$. Подставляя найденное таким образом значение $\lambda_2 \leqslant 1$ в уравнение (135), определяем $\Phi(\lambda')$. Далее по графику (рис. 5.29) находим значения λ' и $\varphi(\lambda')$, и, воспользовавшись уравнением (132), вычисляем величину χ_1 — приведенную длину трубы, необходимую для безударного торможения сверхзвукового потока от λ_1 до λ'. Величина χ_1 и определяет расположение скачка по длине трубы, так как при $\zeta = \text{const}$ имеем $x_1/x = \chi_1/\chi$.

При критическом режиме течения на выходе из трубы, когда $\lambda_2 = 1$, результат вычисления, как легко видеть, не зависит от Π: скачок возникает в определенном сечении трубы независимо от величины располагаемого отношения давлений. Расчет по

формулам (129), (132), (135) показывает, что при $\lambda_2 < 1$ скачок уплотнения с уменьшением П будет перемещаться от своего предельного положения, соответствующего $\lambda_2 = 1$, к входному сечению трубы. Минимальное значение располагаемого отношения давлений, при котором возможно течение с заданной начальной приведенной скоростью $\lambda_1 > 1$, определяется тем, что скачок уплотнения, продвигаясь вверх по потоку, подходит непосредственно ко входному сечению.

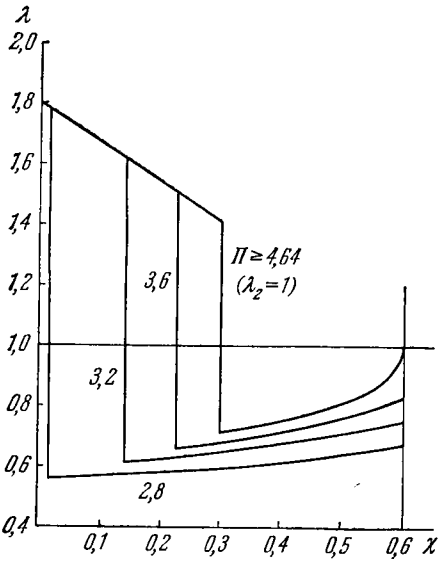


Рис. 5.30. Возможные режимы сверхзвукового течения в цилиндрической трубе с трением при сверхкритической длине трубы, $\lambda_1 = 1{,}8$; $\chi = 0{,}6$ (к примеру расчета).

Приведем пример расчета течения со скачком уплотнения внутри трубы. Пусть заданы приведенная скорость на входе в трубу $\lambda = 1{,}8$ и общая приведенная длина трубы $\chi = 0{,}6$ (при обычных значениях коэффициента трения это соответствует примерно 30 калибрам трубы). Располагаемое отношение полного давления потока на входе в трубу к статическому давлению в резервуаре, куда вытекает газ из трубы, $П = 3{,}0$.

Определяем критическое значение приведенной длины трубы для заданного значения λ_1:

$$\chi_{кр} = \varphi(\lambda_1) - 1 = 0{,}485$$

(величину $\varphi(\lambda_1)$ находим по вспомогательному графику рис. 5.29). Так как заданная приведенная длина трубы $\chi = 0{,}6$ больше критического значения, то, как указывалось, непрерывное торможение потока невозможно, и в трубе возникает скачок уплотнения.

Определяем приведенную скорость потока на выходе из трубы при помощи уравнения (129)

$$y(\lambda_2) = П q(\lambda_1) = 3 \cdot 0{,}4075 = 1{,}222 \text{ или } \lambda_2 = 0{,}71.$$

Далее подставляем полученное значение λ_2 и заданные величины λ_1 и χ в уравнение (135), определяющее приведенную скорость потока перед скачком $\Phi(\lambda') = 0{,}6 + 1{,}25 - 1{,}485 = 0{,}365$. По графику на рис. 5.29 находим, что этому значению $\Phi(\lambda')$ соответствует $\lambda' = 1{,}66$ и $\varphi(\lambda') = 1{,}375$. Определяем приведенную длину сверхзвукового участка течения по формуле (132)

$$\chi_1 = \varphi(\lambda_1) - \varphi(\lambda') = 1{,}485 - 1{,}375 = 0{,}11$$

и находим расстояние от входа в трубу до сечения, где возникает скачок уплотнения (при $\zeta = \text{const}$)

$$\frac{x_1}{x} = \frac{\chi_1}{\chi} = \frac{0{,}11}{0{,}6} = 0{,}184.$$

Итак, на длине около 18% общей длины трубы сверхзвуковой поток под действием трения замедляется от $\lambda_1 = 1{,}8$ до $\lambda' = 1{,}66$, затем в скачке скорость падает до $\lambda'' = 0{,}6$; на остальной части трубы дозвуковой поток ускоряется до $\lambda_2 = 0{,}71$ и вытекает из трубы, имея статическое давление, равное давлению в резервуаре $p_н$.

При других значениях располагаемого отношения давлений положение скачка будет иным. На рис. 5.30 приведены результаты расчета по изложенному методу при различных значениях П. Предельно возможные режимы определяются, с одной стороны, достижением критической скорости на выходе из трубы (при расчете полагаем $\lambda_2 = 1$ и находим наиболее удаленное от входа положение скачка уплотнения), а с другой стороны, возникновением скачка непосредственно за входным сечением трубы. В данном случае ($\lambda_1 = 1{,}8$, $\chi = 0{,}6$) критический режим течения на выходе получается при $П = y(1)/q(\lambda_1) = 1{,}893/0{,}4075 = 4{,}64$.

По формулам (135) и (132) с помощью графика на рис. 5.29 находим: $\Phi(\lambda') = 0{,}6 + 1 - 1{,}485 = 0{,}115$, $\lambda' = 1{,}41$, $\varphi(\lambda') = 1{,}185$. Далее имеем: $\chi_1 = 1{,}485 - 1{,}185 = 0{,}3$ и, следовательно, $x_1/x = \dfrac{0{,}3}{0{,}6} = 0{,}5$.

Минимальному значению П, при котором возможно сверхзвуковое течение на входе в трубу, соответствует $\varphi(\lambda_2) = \varphi\left(\dfrac{1}{\lambda_1}\right) - 0{,}6 = 2{,}07 - 0{,}6 = 1{,}47$ или $\lambda_2 = 0{,}66$. Поэтому имеем

$$П = \frac{y(\lambda_2)}{q(\lambda_1)} = \frac{1{,}117}{0{,}4075} = 2{,}74.$$

Для определения полного и статического давления по величине приведенных скоростей на входе и на выходе достаточно записать условия равенства расходов газа во входном и выходном сечениях, воспользовавшись выражениями (109) или (111).

Выше указывалось, что если приведенная длина трубы меньше критической для данного значения λ_1, то закономерности течения с трением допускают существование потока с непрерывным изменением (снижением) сверхзвуковой скорости на всей длине. Можно показать, однако, что наряду с полностью сверхзвуковым течением здесь также возможно течение со скачком уплотнения внутри трубы и с дозвуковой скоростью на выходе. Такой режим течения в случае $\chi < \chi_{кр}$ может существовать только в определенном интервале значений $p_1^*/p_н^* = П$, который находят из условия, что в выходном сечении трубы статическое давление дозвукового потока должно равняться давлению внешней среды.

§ 8. Осреднение параметров неравномерного потока

На практике часто приходится рассчитывать газовые потоки с переменными по сечению параметрами. В ряде случаев эти потоки можно рассматривать как одномерные с некоторыми средними значениями параметров в каждом сечении. При этом возникает задача об осреднении параметров газа в поперечном сечении неравномерного потока.

Иногда принимают в качестве средних значений параметров средние по площади величины скорости, давления, температуры и т. д. Можно показать, однако, что такое простейшее осреднение является, вообще говоря, неправильным и может привести

к ошибочным результатам: отношение средних значений полного и статического давлений не будет соответствовать среднему значению приведенной скорости, расход газа, вычисленный по средним параметрам, будет больше или меньше действительного и т. п. Если исходная неравномерность потока невелика, то количественно эти погрешности незначительны; при большой неравномерности параметров ошибка может быть существенной. Поэтому к решению поставленной задачи в общем случае подходят иным путем.

Заданный неравномерный поток характеризуется рядом суммарных (интегральных) величин, как-то: расходом газа, энергией, импульсом, теплосодержанием, энтропией и т. д. Заменяя этот поток одномерным — осредненным, — следует стремиться к тому, чтобы сохранить неизменными суммарные характеристики (свойства) потока. Поскольку состояние одномерного газового потока определяется тремя независимыми параметрами (например, полным давлением $\bar{p}^*$, температурой торможения $\bar{T}^*$ и приведенной скоростью $\bar{\lambda}$), то при осреднении одновременно можно сохранить постоянным только три суммарные физические характеристики исходного течения.

Наиболее распространенным является метод нахождения средних значений параметров $\bar{p}^*$, $\bar{T}^*$ и $\bar{\lambda}$ при сохранении *в исходном и осредненном потоках одинаковыми величин расхода газа G, полной энергии E и импульса I.* Условия $G = \text{const}$, $E = \text{const}$ и $I = \text{const}$ дают необходимые для решения задачи три уравнения с тремя неизвестными. Пусть в поперечном сечении исходного неравномерного потока известны (заданы или измерены) поля температуры, полного и статического давлений. Тогда можно считать в каждой точке сечения известными величины полного давления p^*, температуры торможения T^* и приведенной скорости λ. По величине λ для каждой точки сечения могут быть найдены газодинамические функции $q(\lambda)$, $z(\lambda)$ и др. Для потока в целом величины расхода, импульса и энергии определяются путем интегрирования соответствующих элементарных выражений по всему сечению. Так, например, расход газа равен

$$G = \int_{(F)} dG = \int_{(F)} m \frac{p^* q(\lambda)}{\sqrt{T^*}} dF. \qquad (136)$$

Если поле параметров задано в виде графика или таблицы, расход газа можно вычислить графическим или численным интегрированием.

Аналогичным образом определяются суммарные значения энергии E и импульса I.

Переходим к решению задачи об осреднении параметров p^*, T^*, λ. Приравняем величины полной энергии газа, вычисленные в одном случае по истинным, а в другом — по средним значениям параметров газа:

$$Gc_p\overline{T}^* = \int\limits_{(G)} c_pT^*\,dG = E. \tag{137}$$

Теплоемкость газа c_p считаем постоянной по всему сечению. Подставим в это уравнение выражение для элементарного расхода газа и записанное выше выражение для суммарного расхода газа в потоке. Отсюда получаем первую искомую величину — среднюю температуру торможения газа:

$$\overline{T}^* = \frac{E}{c_pG} = \frac{\int\limits_{(F)} p^*q(\lambda)\sqrt{T^*}\,dF}{\int\limits_{(F)} \frac{p^*q(\lambda)}{\sqrt{T^*}}\,dF}. \tag{138}$$

Из формулы (138) видно, что $\overline{T}^*$ является среднемассовым значением температуры торможения. Воспользуемся полученной средней величиной температуры торможения для вычисления среднего значения критической скорости звука

$$\bar{a}_{\text{кр}} = \sqrt{2\frac{k}{k+1}R\overline{T}^*}.$$

Среднее значение приведенной скорости потока $\bar{\lambda}$ найдем из условия равенства действительного импульса потока и импульса, вычисленного по средним значениям параметров. Для упрощения расчета выразим полный импульс посредством формулы (115) через функцию $z(\lambda)$, а элементарный импульс представим по формуле (119) через полное давление и функцию $f(\lambda)$. В результате получим

$$\frac{k+1}{2k}G\bar{a}_{\text{кр}}z(\bar{\lambda}) = \int\limits_{(F)} p^*f(\lambda)\,dF,$$

откуда

$$z(\bar{\lambda}) = \frac{2k}{k+1}\frac{I}{G\bar{a}_{\text{кр}}} = \frac{2k}{k+1}\frac{1}{G\bar{a}_{\text{кр}}}\int\limits_{(F)} p^*f(\lambda)\,dF. \tag{139}$$

В соответствии с заданным режимом течения газа из двух значений приведенной скорости $\bar{\lambda}$, определяемых функцией $z(\bar{\lambda})$, выбираем реальное значение $\lambda > 1$ или $\lambda < 1$. Причина неоднозначности решения задачи в данном случае вполне очевидна: заданное условие сохранения расхода, импульса и полной энергии не нарушится, если в осредненном потоке возникнет скачок уплотнения; приведенная скорость при этом приобретает новое,

обратное по величине значение, так что функция $z(\lambda)$ будет постоянной величиной (см. § 6, пример 6).

Определив температуру торможения и приведенную скорость в осредненном потоке, найдем среднюю величину полного давления $\bar{p}^*$ из выражения для расхода газа:

$$\bar{p}^* = \frac{G\sqrt{\bar{T}^*}}{mFq(\bar{\lambda})}. \tag{140}$$

Интересное соотношение можно получить, если использовать для определения среднего полного давления уравнение импульсов:

$$\bar{p}^* F f(\bar{\lambda}) = \int_{(F)} p^* f(\lambda)\, dF.$$

Отсюда имеем

$$\bar{p}^* = \frac{\int_{(F)} p^* f(\lambda)\, dF}{F f(\bar{\lambda})}.$$

Величина $f(\bar{\lambda})$ представляет собой значение функции $f(\lambda)$ для найденной выше средней по сечению величины приведенной скорости $\bar{\lambda}$. На основании известной из интегрального исчисления теоремы о среднем последнее соотношение можно представить в виде

$$\bar{p}^* = \frac{\bar{f}(\lambda)}{f(\bar{\lambda})} \frac{\int p^* dF}{F}.$$

Здесь $\bar{f}(\lambda)$ — значение функции $f(\lambda)$ в некоторой точке области интегрирования, т. е. в некоторой точке сечения F. Как уже указывалось, величина функции $f(\lambda)$ изменяется очень мало в широких пределах изменения λ (при дозвуковых и небольших сверхзвуковых скоростях). Поэтому два средних значения функции $f(\lambda)$ в данном сечении потока $f(\bar{\lambda})$ и $\bar{f}(\lambda)$ будут близки по величине. Отсюда следует

$$\bar{p}^* \approx \frac{\int_{(F)} p^* dF}{F}. \tag{141}$$

Полученное соотношение означает, что величина полного давления $\bar{p}^*$ мало отличается от *средней по площади величины полного давления*. Расчеты показывают, что если приведенная скорость λ по сечению изменяется в пределах $0{,}4 \div 1{,}0$ или $1 \div 1{,}4$, то погрешность вычисления $\bar{p}^*$ по формуле (141) обычно не превышает $2 \div 3\%$.

По найденным значениям $\bar{T}^*$, $\bar{\lambda}$ и $\bar{p}^*$ однозначно определяются все остальные параметры осредненного потока: скорость $\bar{w}$, плотность $\bar{\rho}$ и т. д. Отметим, что средние значения параметров, удовлетворяющие поставленным в задаче условиям, получаются вполне определенными независимо от способа и порядка решения основных уравнений, хотя при этом могут быть получены различные по внешнему виду выражения.

Остановимся на физическом смысле полученных осредненных параметров потока. Легко видеть, что значения параметров $\bar{T}^*$, $\bar{p}^*$ и $\bar{\lambda}$ и др. равны соответствующим параметрам такого газового потока, который может образоваться при выравнивании (например, за счет турбулентного перемешивания) исходного неоднородного потока в теплоизолированной трубе постоянного сечения без трения о стенки; при этом расход, импульс и полная энергия газа также сохранят постоянные значения. Другими словами, найденный эквивалентный (осредненный) поток может быть действительно получен при течении исходного газа без внешних воздействий. Если вычислить и сопоставить энтропию газа в неравномерном и осредненном потоке, то окажется, что осредненным параметрам соответствует большее значение энтропии. Это объясняется тем, что при перемешивании частиц газа с разными скоростями возникают потери на удар, уменьшается суммарная кинетическая энергия и возрастает тепловая.

В связи с этим изложенный способ осреднения в некоторых случаях может оказаться неприемлемым. Так, например, если по найденным таким способом средним значениям параметров потока в выходном сечении компрессора вычислить его к. п. д., то будет получена величина, меньшая действительной, так как к реальным потерям (возрастанию энтропии) в процессе сжатия газа будут добавлены фиктивные потери, появляющиеся в результате указанной выше замены действительных параметров потока средними значениями. Поэтому в тех случаях, когда по смыслу задачи требуется оценить работоспособность исходного потока газа, целесообразно проводить осреднение так, чтобы сохранить постоянной суммарную величину энтропии газа [1]).

Для определения трех параметров осредненного потока, помимо условия сохранения энтропии, используем также уравнения постоянства расхода и полной энергии.

Средние значения параметров вычисляем следующим путем. Из уравнения (136) находим суммарный расход газа. Далее, как и выше, из уравнения энергии (138) определяем температуру торможения $\bar{T}^*$. Условие постоянства энтропии (см. § 8 гл. I)

---

[1]) Седов Л. И., Черный Г. Г., Об осреднении неравномерных потоков газа в каналах, Теор. гидромех., сб. статей, № 12, вып. 4. Оборонгиз, М., 1954.

в осредненном и действительном потоке записываем в виде

$$GR \ln \frac{(\bar{T}^*)^{\frac{k}{k-1}}}{\bar{p}^*} = R \int_{(G)} \ln \frac{(T^*)^{\frac{k}{k-1}}}{p^*} dG.$$

В это уравнение входит только один неизвестный параметр — среднее полное давление $\bar{p}^*$. Для определения $\bar{p}^*$ подставляем вместо dG его значение, полученное выше, а затем преобразуем уравнение к виду

$$\ln \bar{p}^* = \frac{m}{G} \int_F \left(\ln p^* - \frac{k}{k-1} \ln \frac{T^*}{\bar{T}^*} \right) \frac{p^* q(\lambda)}{\sqrt{T^*}} dF. \qquad (142)$$

Часто температуру торможения T_0^* можно считать одинаковой во всех точках сечения, т. е. полагать $\bar{T}^* = T^*$. В этом случае уравнение (142) принимает вид

$$\ln \bar{p}^* = \frac{1}{G} \int_{(G)} \ln p^* dG. \qquad (143)$$

Следовательно, средняя величина полного давления находится осреднением логарифма полного давления в исходном потоке по расходу.

Интегралы правой части уравнений (142), (143) вычисляются обычно путем графического или численного интегрирования. Если величина скорости в исходном потоке переменна по сечению, то вычисленные по формулам (142), (143) значения $\bar{p}^*$ всегда будут больше значений $\bar{p}^*$, определенных для тех же условий по формуле (140) (при $I = \text{const}$).

Приведенную скорость потока находим из выражения для расхода газа

$$q(\bar{\lambda}) = \frac{G\sqrt{\bar{T}^*}}{m\bar{p}^* F}. \qquad (144)$$

В связи с указанным увеличением полного давления $\bar{p}^*$ это значение $q(\bar{\lambda})$ оказывается меньшим по величине, чем ранее найденное. Это значит, что средняя скорость в дозвуковом потоке будет меньшей, а в сверхзвуковом — большей соответствующих величин, полученных при первом способе осреднения. В обоих случаях это означает, что импульс осредненного по энтропии потока, пропорциональный значению функции $z(\lambda)$, будет большим, чем суммарный импульс исходного неравномерного потока.

Возможны и другие способы осреднения параметров неравномерного потока. Однако, очевидно, что при любом способе осреднения параметров неравномерного потока сохраняется только часть его суммарных характеристик и неизбежно утрачиваются

некоторые свойства потока. Мы видели, что в первом случае при осреднении изменялась энтропия, во втором — импульс потока. Можно указать и на другие условности, связанные с процессом осреднения параметров. Так, пусть в исходном потоке статическое давление p одинаково по всему сечению. После замены действительных параметров средними вычисленное по $\bar{p}^*$ и $\bar{\lambda}$ статическое давление $\bar{p}$ окажется иным, чем в исходном потоке. То же возможно и в отношении величины приведенной скорости, полного давления и др., если они постоянны по сечению исходного потока. Отсюда следует, что в каждом реальном случае необходимо выбирать такой способ осреднения, который наиболее полно отражал бы особенности поставленной задачи. Так, например, при вычислении потерь или к. п. д. рационально пользоваться осреднением параметров потока, при котором выполняется условие сохранения энтропии. При осреднении параметров потока, вытекающего из реактивного сопла, такой способ будет неприемлемым, так как в этом случае наиболее существенным является сохранение действительной величины импульса потока, которая характеризует реактивную тягу.

Отметим далее одну особенность нахождения средних параметров газа в сверхзвуковом потоке.

Пусть во всех точках поперечного сечения сверхзвукового потока постоянна величина температуры торможения T^*. Определим средние значения параметров в таком потоке, пользуясь вторым из рассмотренных выше способов осреднения, при котором в осредненном потоке сохраняются действительные значения полной энергии, энтропии и расхода газа. Из уравнения энергии получаем очевидный результат $\bar{T}^* = T^*$. Из уравнения (143) найдем величину $\bar{p}^*$. Третий параметр — среднюю приведенную скорость $\bar{\lambda}$ — находим из выражения для расхода

$$q(\bar{\lambda}) = \frac{\sqrt{\bar{T}^*}}{\bar{p}^* F} \int\limits_{(F)} \frac{p^* q(\lambda)\, dF}{\sqrt{T^*}};$$

отсюда при $T^* = \bar{T}^*$ имеем

$$q(\bar{\lambda}) = \frac{1}{\bar{p}^* F} \int\limits_{(F)} p^* q(\lambda)\, dF. \qquad (145)$$

Полный импульс исходного неравномерного потока равен, согласно (119),

$$\int\limits_{(F)} p^* f(\lambda)\, dF.$$

Для того чтобы осредненный поток при найденном выше значении полного давления $\bar{p}^*$ имел такой же импульс, приведенная

скорость в нем $\tilde{\lambda}$ должна удовлетворять соотношению

$$f(\tilde{\lambda}) = \frac{1}{\bar{\sigma}^* F} \int_{(F)} p^* f(\lambda)\, dF. \tag{146}$$

В общем случае величина $\tilde{\lambda}$ будет отличаться от $\bar{\lambda}$. Действительно, условие сохранения импульса дает четвертое уравнение для определения трех неизвестных величин; такая система уравнений будет несовместной. Однако в данном случае осреднения имеются некоторые особенности. Заменим в выражении (146) величину функции $f(\lambda)$ по (117) и, воспользовавшись теоремой о среднем, вынесем за знак интеграла некоторое среднее значение функции $\bar{z}(\lambda)$. В результате получим

$$\bar{p}^* F z(\tilde{\lambda})\, q(\tilde{\lambda}) = \bar{z}(\lambda) \int_{(F)} p^* q(\lambda)\, dF,$$

или

$$q(\tilde{\lambda}) = \frac{\bar{z}(\lambda)}{z(\tilde{\lambda})} \cdot \frac{1}{\bar{p}^* F} \int_{(F)} p^* q(\lambda)\, dF.$$

Сравнивая это выражение с уравнением (145), отмечаем, что они отличаются только множителем в правой части, поэтому

$$q(\tilde{\lambda}) = \frac{\bar{z}(\lambda)}{z(\tilde{\lambda})}\, q(\bar{\lambda}). \tag{147}$$

В области сверхзвуковых скоростей функция $z(\lambda)$ (рис. 5.22) изменяется весьма мало: при возрастании скорости от звуковой до предельной (от $\lambda = 1$ до $\lambda = \lambda_{max}$) величина $z(\lambda)$ возрастает всего на $\sim 40\%$ ($k = 1{,}40$), при этом величина отношения давлений p/p^* падает от 0,528 до нуля. Если рассматривать реально встречающуюся степень неравномерности потоков, то величина $z(\lambda)$ в пределах сечения обычно изменяется не более чем на 15—20%. Поэтому два средних значения функции в этом интервале $z(\tilde{\lambda})$ и $\bar{z}(\lambda)$ будут мало отличаться одно от другого.

Расчеты, проведенные для сверхзвуковых потоков при различных законах изменения приведенной скорости по сечению, показывают, что даже при весьма большой неравномерности потока — например, при изменении полного давления p^* в 5—10 раз при $p = \text{const}$ — множитель правой части уравнения (147) отличается от единицы всего на 0,5—1,5%. Поэтому можно считать, что $q(\tilde{\lambda}) \approx q(\bar{\lambda})$, т. е. результаты определения средней приведенной скорости из уравнения расхода и уравнения импульсов практически совпадают. Точность этого приближенного соотношения тем выше, чем больше значения λ в потоке, однако

и при умеренных сверхзвуковых скоростях ($\lambda > 1{,}2 \div 1{,}3$) различие между значениями $\tilde{\lambda}$ и $\bar{\lambda}$ составляет доли процента [1]).

Таким образом, при осреднении указанным способом параметров потока с большими сверхзвуковыми скоростями и постоянной по сечению температурой торможения *одновременно с высокой степенью точности удовлетворяются четыре интегральных соотношения*, выражающих равенство полной энергии, расхода, импульса и энтропии в исходном и осредненном потоке. Условие $T^* = \text{const}$ является в данном случае весьма существенным, так как иначе величина $q(\tilde{\lambda})$, полученная из уравнения расхода, будет зависеть от закона распределения температуры торможения и может сколь угодно отличаться от величины $q(\tilde{\lambda})$, найденной из уравнения импульсов, в которое величина T^* не входит. Физический смысл полученного результата заключается в том, что при больших сверхзвуковых скоростях и $T^* = \text{const}$ существенные изменения давлений, плотностей и других параметров потока незначительно изменяют величину скорости. Еще меньше изменяется пропорциональная значению функции $z(\lambda)$ величина импульса газа при заданном его расходе: увеличение количества движения в значительной степени компенсируется снижением статического давления, так что

$$Gw + pF = \frac{k+1}{2k} G a_{\text{кр}} z(\lambda) \approx \text{const} \cdot G.$$

Указанное свойство сверхзвуковых потоков означает возможность одномерного рассмотрения и применения изложенных в данной главе методов для расчета потоков с весьма большой неравномерностью.

Так, например, в гл. VII показана высокая точность такого расчета применительно к потоку, в поперечном сечении которого статическое давление изменяется в 10—20 раз (начальный участок сверхзвуковой струи).

---

[1]) См. Черкез А. Я., О некоторых особенностях осреднения параметров в сверхзвуковом газовом потоке, Изв. Академии наук СССР, ОТН, № 4, 1962.

Глава VI

ТЕОРИЯ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

§ 1. Основные понятия пограничного слоя

Широко разработанная теория движения идеальной жидкости обычно дает вполне удовлетворительную картину действительных течений, за исключением областей, расположенных в непосредственной близости от поверхности обтекаемого тела. В этих областях существенное значение приобретают силы внутреннего трения или силы вязкости, которые являются определяющими в возникновении сопротивления тел при движении в жидкости. Пренебрежение этими силами приводит к тому, что сопротивление тела, равномерно движущегося в неограниченном пространстве, оказывается равным нулю, что противоречит данным опытов.

Величина силы трения, действующей на единицу площади, т. е. напряжение трения, обозначается обычно через τ. Напряжение трения в пограничном слое, согласно гипотезе Ньютона, пропорционально градиенту скорости в направлении нормали к поверхности тела (§ 4 гл. II), т. е.

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}; \tag{1}$$

коэффициент пропорциональности μ характеризует вязкие свойства жидкости и носит название *коэффициента динамической вязкости.*

Теоретическое истолкование закона Ньютона (1) можно получить для газов на основании кинетической теории. Согласно предположению, лежащему в основе кинетической теории, молекулы газа находятся в беспрерывном, но беспорядочном движении, так что газ в целом остается неподвижным. Кинетическая энергия этого беспорядочного движения молекул представляет тепловую энергию газа. Предположим теперь, что наряду с беспорядочным движением молекул имеется упорядоченное перемещение конечных, очень больших по сравнению с отдельными молекулами масс газа параллельно некоторой плоскости F_0, причем скорость этого движения u пропорциональна расстоянию y от рассматриваемой плоскости (рис. 6.1). На произвольном расстоянии y_1 проведем плоскость F_1, параллельную F_0,

и рассмотрим перенос количества движения за счет беспорядочного движения молекул через эту плоскость. Молекулы, которые проходят через плоскость снизу вверх, обладают меньшим количеством движения в направлении скорости u, чем молекулы, проходящие сверху вниз, вследствие этого скорость слоя газа, лежащего выше плоскости F_1, будет уменьшаться, а скорость слоя газа, лежащего ниже плоскости F_1, — увеличиваться. Для получения количественной характеристики этого взаимодействия проведем следующие упрощенные вычисления. Пусть в единице объема в среднем находится N молекул, которые имеют среднюю скорость беспорядочного движения c. В направлении, перпендикулярном плоскости F_1, движется $N/3$ молекул, причем из них $N/6$ движется сверху вниз и столько же снизу вверх. За время dt через площадку dF на плоскости F_1 в каждом направлении пройдет $1/6NcdFdt$ молекул. Введем еще понятие длины свободного пробега. Под длиной свободного пробега l подразумевается такое среднее расстояние, которое молекулы проходят между столкновениями друг с другом. Молекула, которая находилась на расстоянии l ниже плоскости F_1, обладала количеством движения

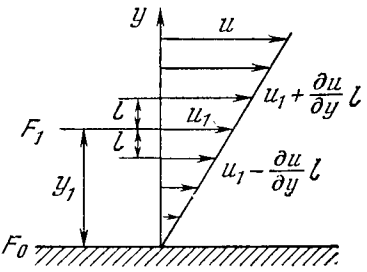


Рис. 6.1. К истолкованию закона Ньютона на основании кинетической теории.

$$m\left(u_1-\frac{\partial u}{\partial y}\,l\right)$$

(m — масса молекулы, u_1 — скорость упорядоченного движения в плоскости F_1). Так как на длине свободного пробега количество движения сохраняется, то молекулы, движущиеся снизу вверх, переносят количество движения, равное

$$\frac{1}{6}\,Ncm\left(u_1-\frac{\partial u}{\partial y}\,l\right)dF\,dt.$$

Соответственно сверху вниз переносится количество движения

$$\frac{1}{6}\,Ncm\left(u_1+\frac{\partial u}{\partial y}\,l\right)dF\,dt.$$

Этот перенос количества движения обусловливает появление касательного напряжения τ вдоль плоскости F_1. Так как изменение количества движения равно импульсу действующей силы

$$\tau\,dF\,dt=\frac{1}{6}\,Ncm\left(u_1+\frac{\partial u}{\partial y}\,l\right)dF\,dt-\frac{1}{6}\,Ncm\left(u_1-\frac{\partial u}{\partial y}\,l\right)dF\,dt,$$

то для касательного напряжения получим выражение

$$\tau = \frac{1}{3}\rho c l \frac{\partial u}{\partial y}, \tag{2}$$

которое представляет собой не что иное, как закон Ньютона, причем $\mu = 1/3\rho cl$.

Более точные расчеты, сделанные Энскогом и Чапменом, учитывающие влияние скорости u на распределение скоростей молекул, приводят к несколько иному числовому множителю $\mu = 0{,}499\rho cl$.

В соответствии с кинетической теорией коэффициент динамической вязкости газов не должен зависеть от давления — его величина должна изменяться пропорционально квадратному корню из абсолютной температуры (так как $\rho \sim p/T$, $c \sim \sqrt{T}$, $l \sim T/p$). Первый вывод приблизительно оправдывается на опыте в довольно широких пределах. Что же касается увеличения значений μ с возрастанием температуры, то оно происходит быстрее, чем это следует из кинетической теории. Более точный подсчет с учетом молекулярных сил притяжения и отталкивания приводит к формуле Сатерленда, которая удовлетворительно согласуется с опытными данными

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T}{273}\right)^{3/2} \frac{273 + C}{T + C}, \tag{3}$$

где T выражено в К.

Значения μ_0 и C для различных газов приведены в таблице 1.

Таблица 1

Газ	C, К	$\mu_0 \cdot 10^5$ $\frac{\text{Н}\cdot\text{с}}{\text{м}^2}$	Газ	C, К	$\mu_0 \cdot 10^5$ $\frac{\text{Н}\cdot\text{с}}{\text{м}^2}$
Воздух . . .	122	1,72	Водород . . .	83	0,83
Азот	107	1,67	Гелий	80	1,84
Кислород . .	138	1,92	Аммиак . . .	626	0,94

При практических расчетах, однако, удобнее пользоваться степенной зависимостью μ от температуры

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T}{273}\right)^{\omega}. \tag{4}$$

Результаты расчета коэффициента вязкости воздуха по формулам (3) и (4) (при $\omega = 0{,}75$) в диапазоне температур от 100 до 1000 К приведены на рис. 6.2. Сплошная кривая соответствует формуле Сатерленда, а пунктирная — степенной фор-

муле. На этом же рисунке точками показаны экспериментальные значения μ.

Коэффициент динамической вязкости для капельных жидкостей очень слабо зависит от давления и довольно быстро убывает при увеличении температуры. Так как в капельной жидкости длина свободного пробега молекулы соизмерима с размером молекулы, то кинетическая теория в этом случае непригодна. Большое значение в этих условиях приобретают силы сцепления молекул. Ввиду сложности взаимодействия отдельных молекул

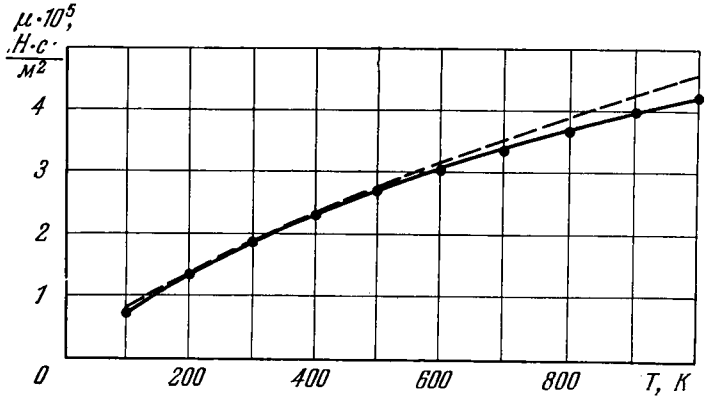


Рис. 6.2. Зависимость коэффициента динамической вязкости воздуха от температуры.

в капельной жидкости в настоящее время нет полной теории жидкости и, следовательно, нет теории вязкости.

Рассмотрим ламинарное слоистое движение вязкой жидкости около неподвижной твердой стенки. На самой стенке скорость жидкости равна нулю, а вблизи стенки жидкость подтормаживается под действием сил вязкости. Эта область течения вязкой жидкости, расположенная около обтекаемого тела, называется *пограничным слоем*. Вне пограничного слоя влияние вязкости обычно проявляется слабо и картина течения близка к той, которую дает теория идеальной жидкости. Поэтому для теоретического исследования течения вязких жидкостей все поле течения можно разбить на две области: на область пограничного слоя вблизи стенки, где следует учитывать силы трения, и на область течения вне пограничного слоя, в которой можно пренебречь силами трения и поэтому применять закономерности теории идеальной жидкости. Следовательно, пограничный слой представляет собой такую область течения вязкой жидкости, в которой величины сил трения и инерции имеют одинаковый

порядок. На основании этого можно оценить толщину пограничного слоя.

Для простоты рассмотрим течение жидкости вдоль плоской пластины. Ось x направим вдоль пластины, ось y — перпендикулярно к ней. Для движения, происходящего в основном в направлении оси x, сила инерции, отнесенная к элементарному объему $dx\,dy\,dz$, равна $\rho\frac{du}{dt}dx\,dy\,dz$, где u — скорость движения жидкости в направлении оси x. Для установившегося движения

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt}=u\frac{\partial u}{\partial x},$$

следовательно, сила инерции равна $\rho u\frac{\partial u}{\partial x}dx\,dy\,dz$.

Равнодействующая сил трения, параллельных направлению движения, как легко видеть из рис. 6.3, равна

$$\left(\tau+\frac{\partial\tau}{\partial y}dy\right)dx\,dz-\tau\,dx\,dz=\frac{\partial\tau}{\partial y}dx\,dy\,dz.$$

Приравнивая силу инерции силе трения, получим соотношение

$$\rho u\frac{\partial u}{\partial x}\sim\frac{\partial\tau}{\partial y},$$

или, используя закон Ньютона (1),

$$\rho u\frac{\partial u}{\partial x}\sim\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \tag{5}$$

Для пластины длиной l величина $\partial u/\partial x$ пропорциональна u_0/l, где u_0 — скорость внешнего течения. Следовательно, сила инерции имеет величину порядка $\rho u_0^2/l$. Градиент скорости в направлении, перпендикулярном к стенке, т. е. величина $\partial u/\partial y$, имеет порядок u_0/δ, где δ — толщина пограничного слоя. Поэтому сила трения пропорциональна $\mu u_0^2/\delta^2$. Подставляя эти значения сил в соотношение (5), получим для толщины пограничного слоя выражение

$$\delta\sim\sqrt{\frac{\mu l}{\rho u_0}},\quad\text{или}\quad\frac{\delta}{l}\sim\frac{1}{\sqrt{\frac{\rho u_0 l}{\mu}}}=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{R}_l}}. \tag{6}$$

Безразмерная величина $\rho u_0 l/\mu=\mathrm{R}_l$ представляет собой число Рейнольдса, подсчитанное по длине пластины.

Аналогичным образом можно оценить величину напряжения трения на стенке $\tau_w=\mu(\partial u/\partial y)_w$. Используя полученные выше оценки $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_w\sim u_0/\delta$, $\delta\sim\sqrt{\mu l/\rho u_0}$, находим выражение для

величины напряжения трения

$$\tau_w \sim \mu \frac{u_0}{\delta} \sqrt{\frac{\rho u_0^3}{l}}.$$

Разделив напряжение трения τ_w на ρu_0^2, получим связь между безразмерной величиной $\tau_w/\rho u_0^2$ и числом Рейнольдса

$$\frac{\tau_w}{\rho u_0^2} \sim \frac{1}{\sqrt{R_l}}. \qquad (7)$$

Соотношения (6) и (7) показывают, что число Рейнольдса является основной характеристикой ламинарного пограничного слоя. Как толщина пограничного слоя, т. е. размеры области, где существенное влияние оказывают силы трения, так и сама величина этих сил трения определяются в основном значением числа Рейнольдса. Аналогичный результат можно получить также из теории размерностей.

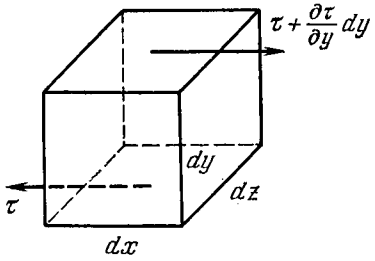


Рис. 6.3. Силы трения, приложенные к элементарному объему.

Для газов коэффициенты динамической вязкости малы (рис. 6.2), поэтому числа Рейнольдса будут довольно большими даже при относительно низких значениях скорости течения. Как следует из соотношения (6), толщина пограничного слоя вследствие этого мала по отношению к длине пластины, т. е. все влияние вязкости сосредоточено в тонком слое вблизи обтекаемой поверхности. Этот вывод находится в хорошем согласии с результатами опытов по исследованию течений маловязких жидкостей.

Поясним эти качественные соображения численным примером. Оценим порядок толщины пограничного слоя на конце пластины длиной $l = 1$ м, обтекаемой воздухом при температуре $T = 300$ К со скоростью $u_0 = 15$ м/с. Плотность воздуха при этой температуре и атмосферном давлении равна $\rho = 1{,}18$ кг/м^3, а коэффициент динамической вязкости $\mu = 1{,}82 \cdot 10^{-5}$ Н·с/м^2 (рис. 6.2). Этим параметрам соответствует число Рейнольдса $R_l = \rho u_0 l/\mu \approx \approx 10^5$. Согласно формуле (6) относительная толщина пограничного слоя имеет порядок $\delta/l \sim 10^{-3}$.

Число Рейнольдса является определяющим параметром не только для количественных характеристик пограничного слоя, но и для самого характера течения. При небольших числах Рейнольдса движение частиц газа имеет упорядоченный слоистый характер, такое течение называется *ламинарным*. При больших числах Рейнольдса движение частиц газа становится беспорядочным, возникают неравномерные пульсации скорости

в продольном и поперечном направлениях, такое течение называется *турбулентным*. Переход ламинарного течения в турбулентное происходит при определенном значении числа Рейнольдса, называемом *критическим*. Критическое число Рейнольдса не постоянно и в очень сильной степени зависит от величины начальных возмущений, т. е. от интенсивности турбулентности набегающего потока.

Экспериментальные исследования перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный на плоской пластине показали, что критическое значение числа Рейнольдса

$$R_{кр} = \left(\frac{\rho u_0 x}{\mu}\right)_{кр} = 10^5 \div 10^6.$$

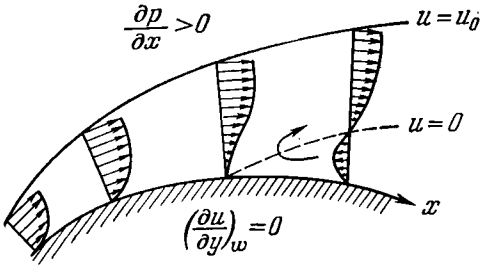


Рис. 6.4. Схема образования отрыва пограничного слоя.

(Здесь x — расстояние от передней кромки пластины.) Наиболее характерным признаком такого перехода на пластине является резкое увеличение толщины пограничного слоя и напряжения трения на стенке. Одной из особенностей пограничного слоя на пластинке является то, что вблизи передней кромки он всегда ламинарен и только на некотором расстоянии $x_{кр}$ начинается переход в турбулентный режим течения. Ввиду сложности движения в переходной области и небольшой ее протяженности обычно пренебрегают конечными размерами этой области, т. е. считают, что переход ламинарного пограничного слоя в турбулентный происходит при $x = x_{кр}$ скачком.

Исследования течений в круглой трубе с острыми кромками входного сечения показали, что критическое значение числа Рейнольдса

$$R_{кр} = \left(\frac{\rho u_{ср} d}{\mu}\right)_{кр} \approx 2300. \qquad (8)$$

(Здесь $u_{ср}$ — средняя скорость, d — диаметр трубы.) Это значение является нижней границей критического числа Рейнольдса. При меньших значениях R турбулентное течение не может существовать даже при сильных начальных возмущениях. Если обеспечить вход жидкости в трубу с малыми начальными возмущениями, то критическое число Рейнольдса может превышать величину 100 000.

Жидкость, заторможенная в пограничном слое, в некоторых случаях не прилегает по всей обтекаемой поверхности тела

в виде тонкого слоя. Таким особым случаем является движение вязкой жидкости вдоль стенки против нарастающего давления во внешнем потоке (течение в диффузоре). Как показывают результаты многочисленных опытов и теоретические оценки (§ 2), давление остается постоянным поперек пограничного слоя, следовательно, продольный градиент давления, который имеется во внешнем потоке, оказывает влияние на весь пограничный слой. Если положительный градиент давления достаточно велик, то слои жидкости, прилегающие непосредственно к поверхности тела и обладающие незначительным количеством движения, могут остановиться и даже начать двигаться в обратном направлении. Это явление, носящее название отрыва пограничного слоя, схематически изображено на рис. 6.4. В области течения с отрывом основные понятия пограничного слоя несправедливы.

§ 2. Ламинарный пограничный слой

Существует два способа расчета параметров жидкости в пограничном слое. Первый способ заключается в решении системы дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих течение в пограничном слое и впервые полученных Прандтлем. Такой подход связан с весьма большими математическими трудностями даже при использовании вычислительных машин. Необходимо также иметь в виду, что при этом результаты получаются в виде таблиц и поэтому их обобщение затруднительно. Второй путь состоит в нахождении методов приближенного расчета, которые позволяли бы быстро определять необходимые параметры. Такие простые приближенные методы можно получить, если отказаться от нахождения решений, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям для каждой частицы, и вместо этого ограничиться отысканием решений, удовлетворяющих некоторым основным уравнениям для всего пограничного слоя и некоторым наиболее важным граничным условиям на стенке и на внешней границе пограничного слоя. Основными уравнениями, которые обычно используются в этих методах, являются уравнения количества движения и энергии для всего пограничного слоя. При этом, однако, необходимо еще задаваться профилями скорости и температуры. От того, насколько удачно выбрана форма этих профилей, в значительной степени зависит точность получаемых результатов. Поэтому в последнее время широкое распространение получили методы расчета параметров пограничного слоя, в которых для получения формы профилей скорости и температуры используются дифференциальные уравнения Прандтля или их частные решения; далее расчет производится с помощью интегрального уравнения количества движения.

Выведем дифференциальные уравнения для ламинарного пограничного слоя при установившемся плоскопараллельном течении вязкого сжимаемого совершенного газа. В этом случае уравнения Навье-Стокса, уравнение энергии и уравнение неразрывности имеют вид (§§ 5 и 6 гл. II)

$$\rho u\frac{\partial u}{\partial x}+\rho v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{4}{3}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{2}{3}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]+$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right], \quad (9)$$

$$\rho u\frac{\partial v}{\partial x}+\rho v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{4}{3}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{2}{3}\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]+$$
$$+\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right], \quad (10)$$

$$\rho u\frac{\partial}{\partial x}(c_pT)+\rho v\frac{\partial}{\partial y}(c_pT)=$$
$$=u\frac{\partial p}{\partial x}+v\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right)+$$
$$+\mu\left[2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2-\frac{2}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right], \quad (11)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}=0, \quad (12)$$

причем ось x направлена вдоль обтекаемой поверхности, а ось y — перпендикулярно к ней; u, v — проекции вектора скорости на оси x и y; T, ρ, p — температура, плотность и давление; μ, λ, c_p — коэффициенты вязкости и теплопроводности и удельная теплоемкость при постоянном давлении.

Упрощение этих уравнений основано на использовании отмеченного ранее факта, что для маловязких жидкостей (при больших числах Рейнольдса) влияние вязкости и теплопроводности сосредоточено в тонком слое вблизи обтекаемой поверхности, т. е.

$$\frac{\delta}{l}\ll 1, \quad \frac{\delta_T}{l}\ll 1,$$

где l — характерная длина обтекаемой поверхности, δ — толщина динамического пограничного слоя, δ_T — толщина теплового пограничного слоя.

Приведем уравнения (9)—(12) к безразмерному виду, вводя безразмерные величины следующим образом:

$$\bar{u}=\frac{u}{u_0}, \quad \bar{v}=\frac{v}{u_0}, \quad \bar{x}=\frac{x}{l}, \quad \bar{y}=\frac{y}{l}, \quad \bar{\delta}=\frac{\delta}{l}, \quad \bar{\delta}_T=\frac{\delta_T}{l},$$

$$\bar{\rho}=\frac{\rho}{\rho_0}, \quad \bar{p}=\frac{p}{p_0}, \quad \bar{T}=\frac{T}{T_0}, \quad \bar{\mu}=\frac{\mu}{\mu_0}, \quad \bar{\lambda}=\frac{\lambda}{\lambda_0}, \quad \bar{c}_p=\frac{c_p}{c_{p0}}.$$

Здесь величины с индексом 0 представляют собой параметры потока в некоторой точке вне пограничного слоя (например, в невозмущенном потоке). Тогда

$$\bar{\rho}\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}+\bar{\rho}\bar{v}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}}=-\frac{p_0}{\rho_0u_0^2}\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{x}}+$$

$$+\frac{\mu_0}{\rho_0u_0l}\left\{\frac{\partial}{\partial\bar{x}}\left[\bar{\mu}\left(\frac{4}{3}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}-\frac{2}{3}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{y}}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial\bar{y}}\left[\bar{\mu}\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}}+\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{x}}\right)\right]\right\},$$

$$\bar{\rho}\bar{u}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{x}}+\rho\bar{v}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{y}}=-\frac{p_0}{\rho_0u_0^2}\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{y}}+$$

$$+\frac{\mu_0}{\rho_0u_0l}\left\{\frac{\partial}{\partial\bar{y}}\left[\bar{\mu}\left(\frac{4}{3}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{y}}-\frac{2}{3}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial\bar{x}}\left[\bar{\mu}\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}}+\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{x}}\right)\right]\right\},$$

$$\bar{\rho}\bar{u}\frac{\partial}{\partial\bar{x}}(\bar{c}_p\overline{T})+\bar{\rho}\bar{v}\frac{\partial}{\partial\bar{y}}(\bar{c}_p\overline{T})=$$

$$=\frac{p_0}{\rho_0c_{p0}T_0}\left(\bar{u}\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{x}}+\bar{v}\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{y}}\right)+\frac{\lambda_0}{\rho_0u_0c_{p0}l}\left[\frac{\partial}{\partial\bar{x}}\left(\bar{\lambda}\frac{\partial\overline{T}}{\partial\bar{x}}\right)+\frac{\partial}{\partial\bar{y}}\left(\bar{\lambda}\frac{\partial\overline{T}}{\partial\bar{y}}\right)\right]+$$

$$+\frac{\mu_0u_0}{\rho_0c_{p0}T_0l}\bar{\mu}\left[2\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}\right)^2+2\left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{y}}\right)^2+\left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{x}}+\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}}\right)^2-\right.$$

$$\left.-\frac{2}{3}\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}+\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{y}}\right)^2\right],$$

$$\frac{\partial(\bar{\rho}\bar{u})}{\partial\bar{x}}+\frac{\partial(\bar{\rho}\bar{v})}{\partial\bar{y}}=0.$$

Безразмерные величины

$$\frac{p_0}{\rho_0u_0^2}=\frac{1}{k\mathsf{M}_0^2},\quad\frac{p_0}{\rho_0c_{p0}T_0}=\frac{k-1}{k}$$

не зависят от числа Рейнольдса, тогда как остальные обратно пропорциональны числу Рейнольдса R_0:

$$\frac{\mu_0}{\rho_0u_0l}=\frac{1}{\mathsf{R}_0},\quad\frac{\lambda_0}{\rho_0u_0c_{p0}l}=\frac{1}{\mathsf{R}_0\mathsf{Pr}},$$

$$\frac{\mu_0u_0}{\rho_0c_{p0}T_0l}=\frac{\mu_0}{\rho_0u_0l}\frac{u_0^2}{c_{p0}T_0}=\frac{(k-1)\,\mathsf{M}_0^2}{\mathsf{R}_0}.$$

Здесь k — отношение теплоемкостей; M_0 — число M невозмущенного потока; Pr — число Прандтля, подсчитанное по параметрам вне пограничного слоя.

Приступим теперь к оценке отдельных членов уравнений. Величины $\bar{u}$, $\bar{\rho}$, $\bar{p}$, $\overline{T}$, $\bar{\mu}$, $\bar{\lambda}$ $\bar{c}_p$ имеют порядок единицы. При изменении $\bar{x}$ от 0 до 1 значения $\bar{u}$, $\bar{p}$, $\overline{T}$ могут изменяться на величину порядка единицы, поэтому производные $\partial\bar{u}/\partial\bar{x}$, $\partial\bar{p}/\partial\bar{x}$, $\partial\overline{T}/\partial\bar{x}$ также имеют порядок единицы. Из уравнения неразрывности следует, что, поскольку величина $\partial\bar{u}/\partial\bar{x}$ имеет порядок единицы, такой же порядок имеет и величина $\partial\bar{v}/\partial\bar{y}$. Так как при $\bar{y}=0$,

$\bar{v} = 0$, то $\bar{v}$ будет порядка $\bar{\delta}$. Такой же порядок $\bar{\delta}$ имеет величина $\partial\bar{v}/\partial\bar{x}$. При $\bar{y} = 0$, $\bar{u} = 0$, а при $\bar{y} = \bar{\delta}$, $\bar{u} = 1$, потому $\partial\bar{u}/\partial\bar{y} \sim 1/\bar{\delta}$. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial\bar{x}}\left[\bar{\mu}\left(\frac{4}{3}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}} - \frac{2}{3}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{y}}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial\bar{y}}\left(\bar{\mu}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{x}}\right) \sim 1,$$

$$\frac{\partial}{\partial\bar{y}}\left(\bar{\mu}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}}\right) \sim \frac{1}{\bar{\delta}^2}, \quad \bar{\rho}\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}} \sim 1, \quad \bar{\rho}\bar{v}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}} \sim 1.$$

Так как в пограничном слое члены, зависящие от вязкости, имеют одинаковый порядок с инерционными членами, то из первого уравнения движения следует, что

$$\frac{1}{R_0\bar{\delta}^2} \sim 1, \quad \text{или} \quad \bar{\delta} \sim \frac{1}{\sqrt{R_0}}. \tag{13}$$

Эта оценка толщины пограничного слоя подтверждает более грубый подсчет, сделанный в § 1. Сохраняя в первом уравнении движения лишь члены, имеющие порядок единицы, получим

$$\bar{\rho}\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}} + \bar{\rho}\bar{v}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}} = -\frac{1}{kM_0^2}\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{x}} + \frac{1}{R_0}\frac{\partial}{\partial\bar{y}}\left(\bar{\mu}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}}\right). \tag{14}$$

Во втором уравнении движения члены, зависящие от вязкости, и инерционные члены имеют порядок $\bar{\delta}$, следовательно, $\partial\bar{p}/\partial\bar{y} \sim \sim\bar{\delta}$. Полное изменение давления на протяжении толщины пограничного слоя по нормали к стенке может быть вычислено путем интегрирования этого соотношения и имеет порядок $\bar{\delta}^2$, т. е. очень мало. Поэтому можно считать, что давление в поперечном сечении пограничного слоя остается практически постоянным и равным давлению во внешнем потоке. Таким образом, второе уравнение движения может быть записано в виде

$$\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{y}} = 0. \tag{15}$$

Произведем аналогичную оценку для отдельных членов уравнения энергии. Так как число Прандтля для газов близко к единице, а для капельных жидкостей имеет порядок 10—1000, то множитель $1/PrR_0$, стоящий перед членами, зависящими от теплопроводности, будет малым при больших числах Рейнольдса. Следовательно, члены, зависящие от теплопроводности, будут иметь одинаковый порядок с членами, зависящими от конвекции тепла, только в том случае, если градиент температуры $\partial\bar{T}/\partial\bar{y}$ велик, т. е. вблизи обтекаемой поверхности имеется тонкий слой жидкости, в котором происходит резкое изменение температуры в направлении, перпендикулярном стенке. Пусть толщина этого

теплового пограничного слоя будет $\bar{\delta}_T$, тогда

$$\frac{\partial}{\partial \bar{y}}\left(\bar{\lambda}\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}}\right) \sim \frac{1}{\bar{\delta}_T^2}.$$

Для того чтобы перенос тепла вследствие теплопроводности был одного порядка с переносом тепла вследствие конвекции, толщина теплового пограничного слоя должна удовлетворять соотношению

$$\frac{1}{\mathrm{Pr}\mathrm{R}_0\bar{\delta}_T^2} \sim 1, \quad \text{или} \quad \bar{\delta}_T \sim \frac{1}{\sqrt{\mathrm{R}_0\mathrm{Pr}}}. \tag{16}$$

Учитывая оценку для $\bar{\delta}$ (13), получим соотношение

$$\frac{\bar{\delta}_T}{\bar{\delta}} \sim \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Pr}}}, \tag{17}$$

которое показывает, что при $\mathrm{Pr} \sim 1$, т. е. для газов, толщина динамического пограничного слоя будет одного порядка с толщиной теплового пограничного слоя. Так как

$$\bar{u}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} \sim 1, \quad \bar{v}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} \sim \bar{\delta}^2, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{x}}\left(\bar{\lambda}\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}}\right) \sim 1,$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{y}}\left(\bar{\lambda}\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}}\right) \sim \frac{1}{\bar{\delta}^2}\left[2\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}}\right)^2 - \frac{2}{3}\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}}\right)^2\right] \sim 1,$$

$$\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}}\right)^2 \sim \bar{\delta}^2, \quad 2\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \sim 1, \quad \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}\right)^2 \sim \frac{1}{\bar{\delta}^2},$$

то, оставляя в уравнении энергии члены порядка единицы, получим

$$\bar{\rho}\bar{u}\frac{\partial}{\partial \bar{x}}(\bar{c}_p\bar{T}) + \bar{\rho}\bar{v}\frac{\partial}{\partial \bar{y}}(\bar{c}_p\bar{T}) =$$

$$= \frac{k-1}{k}\bar{u}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{\mathrm{Pr}\mathrm{R}_0}\frac{\partial}{\partial \bar{y}}\left(\bar{\lambda}\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}}\right) + \frac{1}{\mathrm{R}_0}(k-1)\,\mathrm{M}_0^2\bar{\mu}\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}\right)^2. \tag{18}$$

Возвращаясь в уравнениях (14), (15), (18) к размерным переменным и присоединяя уравнение неразрывности (12), получим дифференциальные уравнения ламинарного пограничного слоя для установившегося плоскопараллельного течения сжимаемого совершенного газа:

$$\rho u\frac{\partial u}{\partial x} + \rho v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right), \tag{19}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \tag{20}$$

$$\rho u\frac{\partial}{\partial x}(c_pT) + \rho v\frac{\partial}{\partial y}(c_pT) = u\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2, \tag{21}$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0. \tag{22}$$

Чтобы замкнуть данную систему, к уравнениям (19)—(22) нужно присоединить уравнение состояния

$$p = \rho RT, \tag{23}$$

а также определить зависимости коэффициентов вязкости и теплопроводности от температуры.

Необходимо еще сформулировать граничные условия. Для непроницаемой стенки скорость должна удовлетворять условию $u = v = 0$ при $y = 0$.

Для проницаемой стенки при подаче газа по нормали к поверхности со скоростью v_w граничные условия записываются в виде $u = 0$, $v = v_w$ при $y = 0$. Температура может удовлетворять условию отсутствия теплоотдачи на стенке (обтекание теплоизолированной поверхности)— в этом случае $\partial T/\partial y = 0$ при $y = 0$; в другом случае температура стенки T_w может быть задана. Возможны и другие граничные условия, например может быть задан тепловой поток на стенке.

При $y = \infty$ задаются значения $u = u_0$, $T = T_0$, где u_0 и T_0 — скорость и температура внешнего потока.

Так как толщина пограничного слоя мала, то уже на небольшом расстоянии от обтекаемой поверхности параметры потока практически совпадают с параметрами при $y = \infty$. Поэтому граничные условия можно задавать не при $y = \infty$, а при $y = \delta$, где δ — толщина пограничного слоя, т. е. такое расстояние от стенки, на котором, например, скорость отличается от скорости при $y = \infty$ меньше чем на 1%.

Уравнение энергии (21) при $c_p = \text{const}$ удобнее преобразовать, вводя вместо температуры T температуру торможения $T^* = T + u^2/2c_p$. Для этого умножим уравнение движения (19) на u и сложим с уравнением (21):

$$c_p \rho u \frac{\partial T^*}{\partial x} + c_p \rho v \frac{\partial T^*}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u^2}{2}\right)\right]. \tag{24}$$

Прибавляя и вычитая в правой части этого соотношения член

$$\frac{1}{c_p}\frac{\partial}{\partial y}\left[\lambda \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u^2}{2}\right)\right]$$

и деля обе части равенства на c_p, получим

$$\rho u \frac{\partial T^*}{\partial x} + \rho v \frac{\partial T^*}{\partial y} = \\ = \frac{1}{c_p}\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\mu}{\mathrm{Pr}}(\mathrm{Pr} - 1)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u^2}{2}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial T^*}{\partial y}\right), \tag{25}$$

где Pr — число Прандтля, которое характеризует отношение тепла, выделяющегося за счет трения, к теплу, передаваемому за счет теплопроводности. Число Прандтля для газов обычно

незначительно отличается от единицы. Так, при $T = 300$ К для гелия $\mathrm{Pr} = 0{,}68$, для аргона $\mathrm{Pr} = 0{,}66$, для воздуха $\mathrm{Pr} = 0{,}70$, для углекислого газа $\mathrm{Pr} = 0{,}77$, для водорода $\mathrm{Pr} = 0{,}69$. Температура и давление слабо влияют на величину числа Прандтля. Поэтому очень часто при построении метода расчета параметров пограничного слоя предполагают, что $\mathrm{Pr} = 1$. Это приводит к упрощению уравнения энергии, так как первый член в правой части пропадает.

Систему уравнений (19), (22), (25) целесообразно преобразовать к виду, который является более удобным для исследования частных случаев течения, допускающих получение автомодельных решений. Преобразованные уравнения также широко используются при применении численных методов расчета пограничного слоя.

Как следует из соотношения (20), давление поперек пограничного слоя остается постоянным. Поэтому продольные градиенты давления в пограничном слое и во внешнем потоке совпадают. Дифференцируя по x интеграл Бернулли (§ 4 гл. I), который связывает значения давления и скорости при течении идеального газа, получим

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_0 u_0 \frac{du_0}{dx}.$$

Здесь и дальше индексом 0 обозначены параметры внешнего потока.

С помощью полученного соотношения можно исключить давление из уравнения движения (19):

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \rho_0 u_0 \frac{du_0}{dx} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right). \tag{26}$$

Уравнение неразрывности (22) проинтегрируем от 0 до y, учитывая граничное условие для непроницаемой стенки $v = 0$ при $y = 0$:

$$\rho v = -\int_0^y \frac{\partial (\rho u)}{\partial x}\, dy = -\frac{\partial}{\partial x}\int_0^y \rho u\, du. \tag{27}$$

Введем новые независимые переменные Лиза — Дородницына

$$\xi(x) = \int_0^x \rho_0 \mu_0 u_0\, dx, \quad \eta(x, y) = \frac{u_0}{\sqrt{2\xi}} \int_0^y \rho\, dy. \tag{28}$$

При этом производные произвольной величины Q в различных системах координат связаны соотношениями

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \rho_0 \mu_0 u_0 \frac{\partial Q}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial Q}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\rho u_0}{\sqrt{2\xi}}\frac{\partial Q}{\partial \eta}.$$

В качестве зависимых переменных введем безразмерные величины

$$f(\xi, \eta) = \int_0^\eta \frac{u}{u_0}\, d\eta, \quad \frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{u}{u_0}, \quad g(\xi, \eta) = \frac{T^*}{T_0^*}. \tag{29}$$

Преобразуем к новым переменным соотношение (27)

$$\rho v = -\rho_0 \mu_0 u_0 \frac{\partial (f \sqrt{2\xi})}{\partial \xi} - \sqrt{2\xi}\, \frac{\partial \eta}{\partial x}\, \frac{\partial f}{\partial \eta} \tag{30}$$

и дифференциальные операторы в уравнениях (25) и (26)

$$\rho u \frac{\partial Q}{\partial x} + \rho v \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\rho \rho_0 \mu_0 u_0^2}{2\xi} \left[2\xi \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial Q}{\partial \xi} - \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial Q}{\partial \eta} \right) - f \frac{\partial Q}{\partial \eta} \right],$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial Q}{\partial y} \right) = \frac{\rho \rho_0 \mu_0 u_0^2}{2\xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(N \frac{\partial Q}{\partial \eta} \right), \quad N = \frac{\rho \mu}{\rho_0 \mu_0}.$$

Используя полученные формулы перехода к новым переменным, преобразуем уравнения движения (26) и энергии (25)

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left(N \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) + f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \beta \left[\frac{\rho_0}{\rho} - \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 \right] =$$

$$= 2\xi \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial \xi\, \partial \eta} - \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right), \tag{31}$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left(N \frac{\partial g}{\partial \eta} \right) + f \frac{\partial g}{\partial \eta} - \Lambda_0^2 \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{N}{\mathrm{Pr}} (1 - \mathrm{Pr}) \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial f}{\partial \eta^2} \right] =$$

$$= 2\xi \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial g}{\partial \xi} - \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial g}{\partial \eta} \right), \quad \Lambda_0^2 = \frac{u_0^2}{2 c_p T_0^*}. \tag{32}$$

Величина β определяется распределением скорости внешнего потока

$$\beta = \frac{2\xi}{u_0} \frac{du_0}{d\xi},$$

Λ_0 — относительная скорость внешнего потока (§ 4 гл. I), а параметр N характеризует зависимость коэффициента вязкости от температуры.

Так как $\eta = 0$ при $y = 0$, $\eta \to \infty$ при $y \to \infty$, то граничные условия имеют вид

$$f = \frac{\partial f}{\partial \eta} = 0, \quad g = g_w \quad \text{или} \quad \frac{\partial g}{\partial \eta} = 0 \quad \text{при} \quad \eta = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = 1, \quad g = 1 \quad \text{при} \quad \eta \to \infty.$$

Для решения системы уравнений в частных производных (31), (32) в общем случае необходимо знать начальные профили скорости и температуры.

После того, как решение уравнений (31), (32) найдено, могут быть определены напряжение трения на стенке

$$\tau_w = \mu_w \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_w = \frac{\rho_w \mu_w u_0^2}{\sqrt{2\xi}} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\right)_{\eta=0}, \tag{33}$$

тепловой поток к стенке

$$q_w = \lambda_w \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_w = \frac{c_p \rho_w \mu_w u_0 T_0^*}{\mathrm{Pr}\sqrt{2\xi}} \left(\frac{\partial g}{\partial \eta}\right)_{\eta=0}, \tag{34}$$

расстояние об обтекаемой поверхности

$$y = \frac{\sqrt{2\xi}}{u_0} \int_0^\eta \frac{d\eta}{\rho}. \tag{35}$$

Индексом w обозначены параметры на поверхности обтекаемого тела.

Для некоторых практически важных случаев течение в пограничном слое является автомодельным, т. е. не зависит от переменной ξ.

Рассмотрим продольное обтекание плоской непроницаемой пластины потоком сжимаемого газа при $\mathrm{Pr} = 1$ и степенной зависимости коэффициента вязкости от температуры (4). В этом случае $du_0/dx = 0$, $\beta = 0$. Температура и величина N могут быть выражены через искомые величины и параметры внешнего потока (штрихом обозначено дифференцирование по η)

$$T = T^* - \frac{u^2}{2c_p} = T^* - T_0 \frac{k-1}{2} \mathrm{M}_0^2 \left(\frac{u}{u_0}\right)^2 =$$

$$= T_0 \left[g + \frac{k-1}{2} \mathrm{M}_0^2 (g - f'^2)\right],$$

$$N = \left[g + \frac{k-1}{2} \mathrm{M}_0^2 (g - f'^2)\right]^{\omega - 1}.$$

Граничные условия для рассматриваемой задачи имеют вид

$$f(0) = f'(0) = 0, \quad f'(\infty) = 1, \tag{36}$$

$$g(0) = g_w \quad \text{или} \quad g'(0) = 0, \quad g(\infty) = 1. \tag{37}$$

Так как граничные условия и коэффициенты в левых частях уравнений (31), (32) не зависят от ξ, то существует автомодельное решение рассматриваемой системы уравнений, зависящее лишь от переменной η. При этом уравнения в частных производных (31), (32) становятся обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$(Nf'')' + ff'' = 0, \tag{38}$$

$$(Ng')' + fg' = 0. \tag{39}$$

Из сравнения уравнения (38), (39) следует, что искомые функции g и f' связаны линейной зависимостью $g = a + bf'$, причем неизвестные коэффициенты a и b могут быть определены из граничных условий (36) и (37). Если обтекаемая поверхность теплоизолирована, то $g'(0) = bf''(0) = 0$, $b = 0$, $g(\infty) = a = 1$. Следовательно, в этом случае температура торможения остается постоянной в поперечном сечении пограничного слоя, а температура поверхности равна температуре торможения внешнего потока

$$T_w = T_0^* = T_0\left(1 + \frac{k-1}{2}\mathrm{M}_0^2\right). \tag{40}$$

Для определения профиля скорости и напряжения трения на стенке необходимо решать одно обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка (38)

$$\left\{\left[1 + \frac{k-1}{2}\mathrm{M}_0^2(1 - f'^2)\right]^{\omega-1} f''\right\}' + ff'' = 0 \tag{41}$$

с граничными условиями (36).

Если функция $f(\eta)$ при заданных значениях M_0 и ω найдена, то можно определить профили скорости и температуры в параметрическом виде

$$\frac{u}{u_0} = f'(\eta), \quad y = \sqrt{\frac{2\mu_0 x}{\rho_0 u_0}} \int_0^\eta \left[1 + \frac{k-1}{2}\mathrm{M}_0^2(1 - f'^2)\right] d\eta, \tag{42}$$

$$\frac{T}{T_0} = \frac{\rho_0}{\rho} = 1 + \frac{k-1}{2}\mathrm{M}_0^2(1 - f'^2), \tag{43}$$

так как при обтекании плоской пластины $\xi = \rho_0\mu_0 u_0 x$.

Соотношение (33) для определения трения в рассматриваемом случае принимает вид $\tau_w = \rho_w\mu_w u_0 \sqrt{\frac{u_0}{2\rho_0\mu_0 x}} f''(0)$. Тогда для коэффициента трения c_f в данной точке имеем

$$c_f = \frac{2\tau_w}{\rho_0 u_0^2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\mathrm{R}_x}}\left(\frac{T_w}{T_0}\right)^{\omega-1} f''(0), \quad \mathrm{R}_x = \frac{\rho_0 u_0 x}{\mu_0}. \tag{44}$$

Выражая отношение температур T_w/T_0 с помощью соотношения (40), окончательно получим

$$c_f = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\mathrm{R}_x}}\left(1 + \frac{k-1}{2}\mathrm{M}_0^2\right)^{\omega-1} f''(0). \tag{45}$$

Величина $f''(0)$ зависит от числа M_0 и показателя ω в степенной зависимости коэффициента вязкости от температуры. Расчеты профилей скорости и температуры, а также напряжения трения на стенке для сжимаемого газа при $\omega = 0{,}76$ были про-

ведены Карманом и Цзяном. Результаты этих расчетов приведены на рис. 6.5, 6.6 и 6.7.

Рассмотрим теперь ламинарный пограничный слой сжимаемого газа при наличии теплоотдачи. Как и раньше, ограничимся случаем $\mathrm{Pr} = 1$. При этом уравнения (38) и (39) сохраняются,

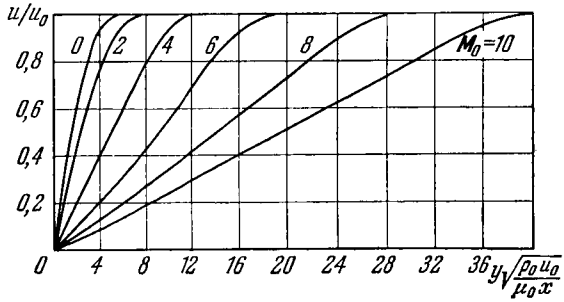


Рис. 6.5. Распределение скоростей в ламинарном пограничном слое на теплоизолированной пластине при $\mathrm{Pr} = 1$, $\omega = 0{,}76$, $k = 1{,}4$.

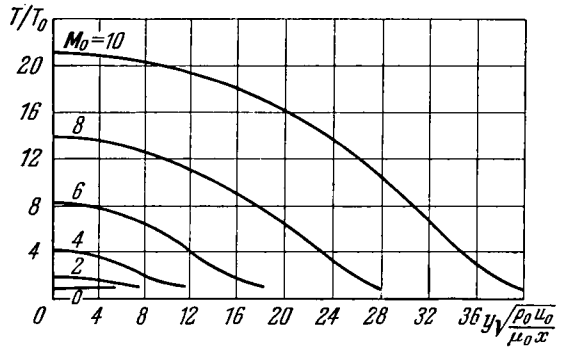


Рис. 6.6. Распределение температур в ламинарном пограничном слое на теплоизолированной пластине при $\mathrm{Pr} = 1$, $\omega = 0{,}76$, $k = 1{,}4$.

а изменяются лишь значения коэффициентов в линейной зависимости искомых функций g и f'. В этом случае из граничных условий (36), (37) следует $g(0) = a = g_w$, $g(\infty) = g_w + b = 1$. Поэтому $g = g_w + (1 - g_w) f'$ и распределение температуры торможения в пограничном слое описывается формулой

$$T^* = (T_0^* - T_w)\frac{u}{u_0} + T_w.$$

Тогда

$$\frac{T}{T_0} = \left(1 + \frac{k-1}{2}\,\mathrm{M}_0^2 - \frac{T_w}{T_0}\right) f' + \frac{T_w}{T_0} - \frac{k-1}{2}\,\mathrm{M}_0^2 f'^2, \qquad (46)$$

и вместо уравнения (41) получим новое уравнение

$$\left\{\left[\left(1+\frac{k-1}{2}\mathrm{M}_0^2-\frac{T_w}{T_0}\right)f'+\frac{T_w}{T_0}-\frac{k-1}{2}\mathrm{M}_0^2 f'^2\right]^{\omega-1}f''\right\}'+ff''=0. \tag{47}$$

Граничные условия (36) при этом остаются справедливыми.

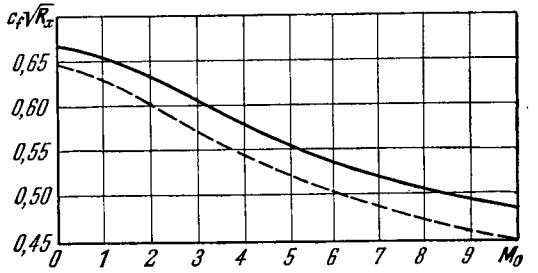


Рис. 6.7. Коэффициент трения для ламинарного пограничного слоя на теплоизолированной пластине при $\mathrm{Pr}=1$, $\omega=0{,}76$, $k=1{,}4$.

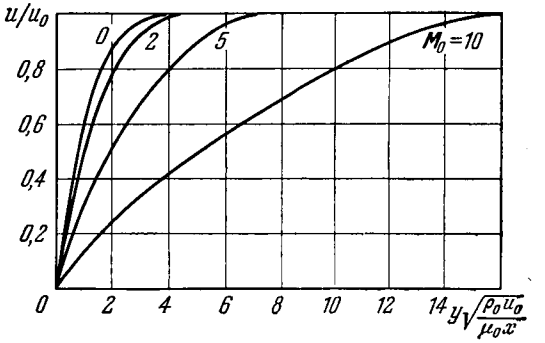


Рис. 6.8. Распределение скоростей в ламинарном пограничном слое на пластине при наличии теплоотдачи и $T_w/T_0=0{,}25$, $\mathrm{Pr}=1$, $\omega=0{,}76$, $k=1{,}4$.

Расчет профилей скорости и температуры по уравнению (47) для различных чисел M_0 при $\omega=0{,}76$ и $T_w/T_0=0{,}25$ также был проведен Карманом и Цзяном. Результаты расчета показаны на рис. 6.8, 6.9.

Коэффициент трения может быть подсчитан по формуле (44), причем величина $f''(0)$ будет в этом случае зависеть от числа M_0, отношения температур T_w/T_0 и показателя степени ω.

Для определения удельного теплового потока q_w используем соотношение (34). Так как $g'(0) = (1 - g_w) f''(0)$, то при $\mathrm{Pr} = 1$

$$q_w = \frac{c_p (T_0^* - T_w)}{u_0} \tau_w. \tag{48}$$

Вводя безразмерный коэффициент теплоотдачи (число Стантона St) и выражая напряжение трения τ_w через коэффициент трения c_f (44) получаем

$$\mathrm{St} = \frac{q_w}{\rho_0 u_0 c_p (T_0^* - T_w)} = \frac{c_f}{2}. \tag{49}$$

Таким образом, если коэффициент трения c_f найден, то легко определяется число Стантона.

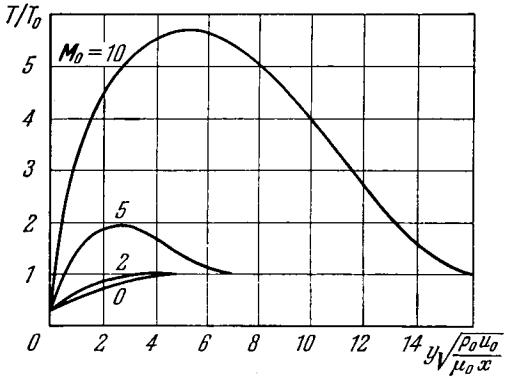


Рис. 6.9. Распределение температур в ламинарном пограничном слое на пластине при наличии теплоотдачи и $T_w/T_0 = 0{,}25$, $\mathrm{Pr} = 1$, $\omega = 0{,}76$, $k = 1{,}4$.

При линейной зависимости коэффициента вязкости от температуры ($\omega = 1$) уравнения (41) и (47) принимают особенно простой вид

$$f''' + ff'' = 0. \tag{50}$$

Уравнение (50) впервые было получено при исследовании ламинарного пограничного слоя несжимаемой жидкости на плоской пластине и решено Блазиусом. Полученное решение может быть использовано и для определения параметров пограничного слоя в сжимаемом газе при $\mathrm{Pr} = 1$, $\omega = 1$. В этом случае функция $f(\eta)$ и, следовательно, величина $f''(0)$ не зависят от числа M_0 и температурных условий на обтекаемой поверхности. Как следует из результатов численных расчетов, $f''(0) = 0{,}4696$, и формулы для определения коэффициента трения (44)

и коэффициента теплоотдачи (49) принимают вид

$$c_f = 0{,}664/\sqrt{\mathrm{R}_x}, \qquad \mathrm{St} = 0{,}332/\sqrt{\mathrm{R}_x}. \tag{51}$$

Сопротивление пластины шириной b и длиной l, которая обтекается с одной стороны потоком, равно

$$W = b\int_0^l \tau_w\, dx.$$

Выражая τ_w через коэффициент трения (51) и интегрируя, получим

$$W = 0{,}664 b l \rho_0 u_0^2/\sqrt{\mathrm{R}_l}, \quad \mathrm{R}_l = \rho_0 u_0 l/\mu_0.$$

Следовательно, коэффициент сопротивления пластины, обтекаемой несжимаемой жидкостью или сжимаемым газом при $\mathrm{Pr} = 1$, $\omega = 1$, будет равен

$$C_W = \frac{2W}{\rho_0 u_0^2 b l} = 1{,}328/\sqrt{\mathrm{R}_l}.$$

Влияние сжимаемости газа проявляется лишь в том, что профили скорости, температуры и плотности зависят от числа M_0 и интенсивности теплообмена, как следует из формул (42) и (43) или (46).

Для выяснения влияния числа Pr на параметры пограничного слоя рассмотрим обтекание пластины потоком сжимаемого газа при $\omega = 1$. Число Прандтля будем считать постоянным, но отличным от единицы. Уравнение движения (50) при этом не изменяется, а уравнение энергии (32) принимает вид

$$g'' + \mathrm{Pr}\, f g' = \Lambda^2 (1 - \mathrm{Pr})(f' f'')'.$$

Интегрируя это линейное уравнение с учетом граничных условий (36), (37) и преобразуя интегрированием по частям с использованием уравнения (50), получим

$$g = g_w + \{1 - g_w - \Lambda^2 [1 - \vartheta_2(\infty)]\}\, \vartheta_1(\eta)/\vartheta_1(\infty) + \Lambda^2 [f'^2 - \vartheta_2(\eta)],$$

где

$$\vartheta_1(\eta) = \int_0^\eta [f''(\eta)/f''(0)]^{\mathrm{Pr}}\, d\eta, \quad \vartheta_2(\eta) = 2\mathrm{Pr}\int_0^\eta [f''(\eta)]^{\mathrm{Pr}} \int_0^\eta [f''(\eta)]^{2-\mathrm{Pr}}\, d\eta\, d\eta.$$

Так как $\vartheta_1'(0)=1$, $\vartheta_2'(0)=0$, то

$$g'(0)=\{1-g_w-\Lambda^2[1-\vartheta_2(\infty)]\}/\vartheta_1(\infty).$$

Согласно численным расчетам в широком диапазоне изменения числа Pr справедливы приближенные формулы

$$1/\vartheta_1(\infty)=0{,}4696\,\mathrm{Pr}^{1/3},\quad \vartheta_2(\infty)=\sqrt{\mathrm{Pr}}.$$

Тогда выражение (34) для величины теплового потока к стенке преобразуется следующим образом:

$$q_w=0{,}332c_p\rho_0\mu_0T_0^*\left[1-g_w-\Lambda^2\left(1-\sqrt{\mathrm{Pr}}\right)\right]\mathrm{Pr}^{-2/3}\mathrm{R}_x^{-1/2}.$$

При обтекании теплоизолированной поверхности ($q_w=0$) из этого соотношения следует, что безразмерная равновесная температура стенки равна

$$g_{w0}=1-\Lambda^2\left(1-\sqrt{\mathrm{Pr}}\right).$$

Полученное выражение может быть представлено в размерном виде

$$T_{w0}=T_0\left(1+\frac{k-1}{2}r\mathrm{M}_0^2\right), \tag{52}$$

где $r=\sqrt{\mathrm{Pr}}$—коэффициент восстановления температуры. Следовательно, равновесная температура при обтекании пластины отличается от температуры торможения внешнего потока, если число Прандтля не равно единице. Например, равновесная температура пластины при $\mathrm{M}_0=5$, $T=100$ К для воздуха ($k=1{,}4$, $\mathrm{Pr}=0{,}7$) будет равна 518 К, т. е. на 13% ниже, чем температура торможения ($T_0^*=600$К).

Таким образом, в этом случае тепловой поток пропорционален разности равновесной температуры и температуры стенки. Вводя безразмерный коэффициент теплоотдачи, получим

$$\mathrm{St}=q_w/c_p\rho_0\mu_0(T_{w0}-T_w)=0{,}332\mathrm{Pr}^{-2/3}\mathrm{R}_x^{-1/2}.$$

Коэффициент трения не зависит от величины Pr и может быть найден по формуле (51). Число Стантона и коэффициент трения связаны соотношением

$$\mathrm{St}=1/2c_f\,\mathrm{Pr}^{-2/3}. \tag{53}$$

Пограничный слой на плоской пластине является автомодельным и в том случае, когда число Прандтля и показатель степени ω отличны от единицы. Однако уравнения движения и энергии оказываются взаимосвязанными и совместное решение возможно лишь численными методами. Результаты расчетов Брайнерда и Эммонса, Крокко, Копа и Хартри показывают, что и в общем случае равновесная температура определяется

соотношением (52). Коэффициент трения на пластине хорошо описывается приближенной формулой Янга

$$c_f \sqrt{\mathrm{R}_x} = 0{,}664\left[0{,}45 + 0{,}55\,\frac{T_w}{T_0} + 0{,}09\,(k-1)\,\mathrm{M}_0^2\sqrt{\mathrm{Pr}}\right]^{(\omega-1)/2}, \quad (54)$$

а коэффициент теплоотдачи может быть вычислен по формуле (53) после определения величины c_f.

В качестве второго примера реальных течений, для которых пограничный слой является автомодельным, рассмотрим течение вблизи критической точки для несжимаемой жидкости при $\omega = 1$. Так как скорость внешнего течения в этом случае линейно изменяется вдоль обтекаемой поверхности $u_0 = cx$, то $\beta = 1$, $u_0^2 \ll p_p T_0$. Тогда уравнения (31) и (32) принимают вид

$$f''' + ff'' + (1 - f'^2) = 0, \quad T'' + \mathrm{Pr}\, fg' = 0.$$

В этом случае численные расчеты позволяют найти значение функции $f(\eta)$, причем $f''(0) = 1{,}233$. Используя соотношение (33), можно определить величину коэффициента трения вблизи критической точки

$$c_f = 1{,}233/\sqrt{\mathrm{R}_x}.$$

Решение уравнения энергии записывается в следующем виде:

$$g = g_w + (1 - g_w)\,\vartheta_1(\eta)/\vartheta_1(\infty),$$

где

$$\vartheta_1(\eta) = \int_0^\eta e^{-\mathrm{Pr}\int_0^\eta f\,d\eta}\,d\eta.$$

Тогда

$$g'(0) = (1 - g_w)/\vartheta_1(\infty),$$

причем результаты численных расчетов аппроксимируются приближенной формулой

$$1/\vartheta_1(\infty) = 0{,}57\mathrm{Pr}^{0{,}4}.$$

В этом случае коэффициент теплоотдачи может быть найден по формуле

$$\mathrm{St} = 0{,}57\mathrm{Pr}^{-0{,}6}\mathrm{R}_x^{-0{,}5}.$$

Выражения для коэффициентов трения и теплоотдачи имеют особенность, так как $u_0 \to 0$ при $x \to 0$. Поэтому удобнее в качестве характерной скорости использовать скорость невозмущенного потока. При обтекании круглого цилиндра диаметром d вблизи критической точки справедливо соотношение

$$u_0 = 4u_\infty x/d,$$

с помощью которого можно представить формулы для коэффициентов трения и теплоотдачи в следующем виде:

$$c_{f\infty} = \frac{2\tau_w}{\rho u_\infty^2} = \frac{9{,}86}{\sqrt{\mathrm{R}_\infty}} \frac{x}{d}, \quad \mathrm{St} = \frac{q_w}{c_p \rho u_\infty (T_\infty - T_w)} = \frac{1{,}14}{\mathrm{Pr}^{0,6}\sqrt{\mathrm{R}_\infty}},$$

где $\mathrm{R}_\infty = \rho u_\infty d/\mu$ — число Рейнольдса, подсчитанное по скорости невозмущенного потока и диаметру цилиндра. Отличительной особенностью рассмотренного течения является то, что коэффициент трения линейно растет по мере удаления от критической точки, а коэффициент теплоотдачи сохраняется постоянным вблизи критической точки.

Описанные результаты относятся к наиболее простым случаям течения в ламинарном пограничном слое. При более сложной форме обтекаемой поверхности и произвольном распределении параметров внешнего потока необходимо решать систему уравнений в частных производных (31), (32) численными методами. Наряду с разработкой численных методов были сделаны попытки создать приближенные методы расчета, основанные на решении интегральных соотношений, составленных для всего пограничного слоя. Составим интегральное соотношение импульсов при установившемся течении в пограничном слое сжимаемой жидкости. Применяя уравнение количества движения к элементу пограничного слоя длины dx и единичной ширины, получим (§ 5 гл. I)

$$P_x = \Delta\left(\sum mu\right),$$

где $\Delta\left(\sum mu\right)$ есть изменение проекции на ось x количества движения жидкости, протекающей за единицу времени через поверхность, ограничивающую рассматриваемый объем (рис. 6.10), а P_x — проекция на ось x равнодействующей всех сил, приложенных к выделенному объему. Подсчитаем сначала изменение количества движения. Через элемент площади dy в сечении *1* протекает в единицу времени масса жидкости $\rho u\, dy$, переносящая количество движения $\rho u^2\, dy$. Поэтому количество движения, переносимое жидкостью, втекающей через сечение *1*, равно

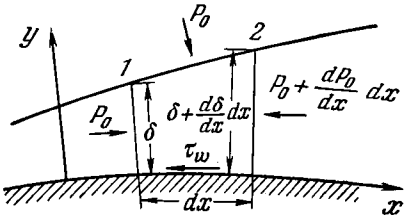


Рис. 6.10. Силы, приложенные к элементу пограничного слоя.

$$\left(\sum mu\right)_1 = \int_0^\delta \rho u^2\, dy.$$

Количество движения жидкости, вытекающей через сечение 2:

$$(\sum mu)_2 = \int_0^\delta \rho u^2\, dy + \left(\frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho u^2\, dy\right) dx.$$

Масса жидкости, втекающей через границу пограничного слоя на участке *1—2*, равна разности расходов через сечения *2* и *1*, т. е.

$$(\sum m)_{1-2} = \frac{d}{dx}\left(\int_0^\delta \rho u\, dy\right) dx.$$

Так как скорость на границе пограничного слоя равна скорости внешнего потока u_0, то количество движения, вносимое этой массой жидкости в рассматриваемый объем, будет

$$(\sum mu)_{1-2} = u_0 \frac{d}{dx}\left(\int_0^\delta \rho u\, dy\right) dx.$$

Следовательно, изменение проекции на ось x количества движения равно

$$\Delta(\sum mu) = (\sum mu)_2 - (\sum mu)_1 - (\sum mu)_{1-2} =$$
$$= \left(\frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho u^2\, dy - u_0 \frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho u\, dy\right) dx.$$

Теперь найдем равнодействующую всех сил, приложенных к рассматриваемому объему. При этом массовыми силами можно пренебречь. Силы трения в сечениях *1* и *2* не дают составляющей на ось x. Сила трения на границе пограничного слоя равна нулю, так как $\partial u/\partial y = 0$ при $y = \delta$. Сила трения, действующая со стороны стенки на рассматриваемый объем, равна $P_{xw} = -\tau_w\, dx$.

Проекции сил давления на ось x равны: в сечении *1* $P_{x1} = p_0\delta$, в сечении *2* $P_{x2} = -\left[p_0\delta + \frac{d(p_0\delta)}{dx} dx\right]$, на границе пограничного слоя $P_{x1-2} = p_0 \frac{d\delta}{dx} dx$. Сумма проекций сил давления

$$P_{x1} + P_{x2} + P_{x1-2} = p_0\delta - p_0\delta - \frac{d(p_0\delta)}{dx} dx + p_0 \frac{d\delta}{dx} dx = -\delta \frac{dp_0}{dx}.$$

Тогда проекция равнодействующей всех сил, приложенных к выделенному объему, будет

$$P_x = -\left(\delta \frac{dp_0}{dx} + \tau_w\right) dx.$$

Подставляя найденные значения $\Delta(\Sigma mu)$ и P_x в уравнение количества движения, получим интегральное соотношение импульсов в пограничном слое

$$-\frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho u^2\,dy + u_0\frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho u\,dy = \delta\frac{dp_0}{dx} + \tau_w. \qquad (55)$$

В этом уравнении u_0 и p_0 являются известными функциями x и определяются при расчете внешнего потока. Если внешний поток изоэнтропический, то из уравнения движения следует

$$\frac{dp_0}{dx} = -\rho_0 u_0\frac{du_0}{dx}.$$

Записав также очевидное равенство

$$u_0\frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho u\,dy = \frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho u u_0\,dy - \frac{du_0}{dx}\int_0^\delta \rho u\,dy,$$

подставим эти выражения в соотношение (55). В результате имеем

$$\frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho u(u_0-u)\,dy + \frac{du_0}{dx}\int_0^\delta (\rho_0 u_0 - \rho u)\,dy = \tau_w. \qquad (56)$$

Это уравнение можно получить и непосредственно из дифференциальных уравнений пограничного слоя. Для этого необходимо сложить почленно уравнение движения (19) с уравнением неразрывности (22), умноженным на $(u-u_0)$, а затем прибавить и вычесть $\rho u\,\partial u_0/\partial x$ в правой части полученного соотношения

$$\frac{\partial}{\partial x}[\rho u(u-u_0)] + \rho u\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}[\rho v(u-u_0)] = \rho_0 u_0\frac{du_0}{dx} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

и проинтегрировать в пределах пограничного слоя от 0 до δ с учетом граничных условий.

Введем теперь понятия о толщине вытеснения δ^* и толщине потери импульса δ^{**}, которые определяются соответственно следующими выражениями:

$$\delta^* = \frac{\int_0^\delta (\rho_0 u_0 - \rho u)\,dy}{\rho_0 u_0} = \int_0^\delta \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_0 u_0}\right) dy, \qquad (57)$$

$$\delta^{**} = \frac{\int_0^\delta \rho u(u_0-u)\,dy}{\rho_0 u_0^2} = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{u_0}\right)\frac{\rho u}{\rho_0 u_0}\,dy. \qquad (58)$$

Эти величины имеют определенный физический смысл. Толщина вытеснения есть расстояние, на которое отодвигаются от тела линии тока внешнего течения вследствие уменьшения скорости и изменения плотности в пограничном слое. Толщина потери импульса есть толщина слоя газа с постоянными параметрами и импульсом, равным разности импульсов потока газа с неравномерной плотностью тока, но постоянной скоростью u_0 и потока с переменными значениями скорости и плотности.

Используя введенные величины δ^* и δ^{**}, интегральное соотношение количества движения (56) можно представить в виде

$$\frac{d}{dx}\left(\rho_0 u_0^2 \delta^{**}\right) + \rho_0 u_0 \delta^* \frac{du_0}{dx} = \tau_w,$$

или

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + \delta^{**}\left[\frac{1}{\rho_0 u_0^2}\frac{d\left(\rho_0 u_0^2\right)}{dx} + \frac{H}{u_0}\frac{du_0}{dx}\right] = \frac{\tau_w}{\rho_0 u_0^2}, \tag{59}$$

где $H = \delta^*/\delta^{**}$. Если задать законы распределения скорости и температуры, то напряжение трения будет выражаться через толщину потери импульса δ^{**}. Тогда соотношение (59), которое является обыкновенным дифференциальным уравнением, может быть использовано для нахождения распределения величины δ^{**} вдоль обтекаемой поверхности.

Рассмотрим обтекание плоской пластины потоком сжимаемого газа. Интегральное соотношение импульсов (59) при отсутствии градиента давления во внешнем потоке принимает вид

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho_0 u_0^2}. \tag{60}$$

Как показано выше, дифференциальные уравнения пограничного слоя сжимаемого газа в переменных Лиза — Дородницына имеют почти такой же вид, как для пограничного слоя несжимаемой жидкости. Поэтому следует ожидать, что зависимость скорости от переменной η в пограничном слое сжимаемого газа будет близка к зависимости скорости от физической переменной y для несжимаемой жидкости.

Для ламинарного пограничного слоя несжимаемой жидкости распределение скоростей обычно задают в виде полинома

$$\frac{u}{u_0} = \sum_{k=0}^{n} A_k \left(\frac{y}{\delta}\right)^k,$$

причем значения коэффициентов A_k определяются из граничных условий на стенке и на границе пограничного слоя. Обычно при решении ограничиваются полиномами третьей или четвертой

степени. При обтекании плоской пластины для отыскания коэффициентов A_k используем следующие граничные условия:

$$u=0,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \quad \text{при} \quad y=0;\quad u=u_0,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=0 \quad \text{при} \quad y=\delta.$$

Второе условие при $y=0$ вытекает из уравнения движения (19) и граничных условий на непроницаемой поверхности.

Используя эти условия, находим значения A_k (при $n=3$)

$$A_0=0,\quad A_1=\frac{3}{2},\quad A_2=0,\quad A_3=-\frac{1}{2}.$$

Профиль скорости в пограничном слое сжимаемого газа тогда может быть задан в виде

$$\frac{u}{u_0}=\frac{3}{2}\frac{\eta}{\Delta}-\frac{1}{2}\left(\frac{\eta}{\Delta}\right)^3, \tag{61}$$

где η — переменная Дородницына, а Δ — значение этой переменной при $y=\delta$,

$$\eta=\int_0^y \rho/\rho_0\, dy,\quad \Delta=\int_0^\delta \rho/\rho_0\, dy. \tag{62}$$

Используя (61) и (62), находим напряжение трения на стенке

$$\tau_w=\mu_w\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_w=\mu_w\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)_{\eta=0}\frac{\rho_w}{\rho_0}=A_1\mu_w\frac{\rho_w}{\rho_0}\frac{u_0}{\Delta},$$

и толщину потери импульса

$$\delta^{**}=\int_0^\delta\left(1-\frac{u}{u_0}\right)\frac{\rho u}{\rho_0 u_0}\,dy=\int_0^\Delta\left(1-\frac{u}{u_0}\right)\frac{u}{u_0}\,d\eta=N\Delta.$$

Здесь

$$N=\int_0^1\left(1-\frac{u}{u_0}\right)\frac{u}{u_0}\,d\frac{\eta}{\Delta}=\frac{39}{280}.$$

Полученные выражения позволяют установить связь между τ_w и δ^{**}:

$$\tau_w=A_1 N\frac{\mu_w}{\delta^{**}}\frac{\rho_w}{\rho_0}u_0. \tag{63}$$

Подставляя выражение для τ_w из (63) в интегральное соотношение количества движения (60) и интегрируя, получим распределение толщины потери импульса вдоль пластины

$$\delta^{**}=\sqrt{2A_1 N\frac{\rho_w}{\rho_0}\frac{\mu_w x}{\rho_0 u_0}}\quad \text{или}\quad \frac{\delta^{**}}{x}=\sqrt{2A_1 N\frac{\rho_w}{\rho_0}\frac{\mu_w}{\mu_0}\frac{1}{\sqrt{R_x}}}, \tag{64}$$

где

$$\mathrm{R}_x = \frac{\rho_0 u_0 x}{\mu_0}.$$

Заменяя в соотношении (63) величину δ^{**} согласно выражению (64) получим формулу для коэффициента трения

$$c_f = \frac{\tau_w}{\frac{\rho_0 u_0^2}{2}} = \sqrt{2A_1 N \frac{\rho_w}{\rho_0}\frac{\mu_w}{\mu_0}}\frac{1}{\sqrt{\mathrm{R}_x}}. \tag{65}$$

Подставляя численные значения коэффициентов A_1 и N и используя степенной закон для зависимости вязкости от температуры (4), окончательно получим

$$c_f = \frac{\delta^{**}}{x} = \frac{0{,}647}{\sqrt{\mathrm{R}_x}}\left(\frac{T_w}{T_0}\right)^{\frac{\omega-1}{2}}. \tag{66}$$

Для определения профиля скорости в физических координатах x, y и вычисления толщины пограничного слоя δ и толщины вытеснения δ^* необходимо знать распределение температур. Если ограничиться случаем $\mathrm{Pr} = 1$, то температура торможения согласно (46) будет пропорциональна скорости. Тогда

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \frac{T}{T_0} = \left(1 + \frac{k-1}{2}\mathrm{M}_0^2 - \frac{T_w}{T_0}\right)\frac{u}{u_0} + \frac{T_w}{T_0} - \frac{k-1}{2}\mathrm{M}_0^2\left(\frac{u}{u_0}\right)^2 =$$
$$= \left(1 + \frac{k-1}{2}\mathrm{M}_0^2 - \frac{T_w}{T_0}\right)\left[\frac{3}{2}\frac{\eta}{\Delta} - \frac{1}{2}\left(\frac{\eta}{\Delta}\right)^3\right] + \frac{T_w}{T_0} -$$
$$- \frac{k-1}{2}\mathrm{M}_0^2\left[\frac{3}{2}\frac{\eta}{\Delta} - \frac{1}{2}\left(\frac{\eta}{\Delta}\right)^3\right]^2,$$

и поэтому

$$y = \int_0^{\eta}\frac{\rho_0}{\rho}d\eta = \Delta\int_0^{\frac{\eta}{\Delta}}\frac{\rho_0}{\rho}d\left(\frac{\eta}{\Delta}\right) =$$
$$= \Delta\left\{\frac{T_w}{T_0}\frac{\eta}{\Delta} + \left(1 + \frac{k-1}{2}\mathrm{M}_0^2 - \frac{T_w}{T_0}\right)\left[\frac{3}{4}\left(\frac{\eta}{\Delta}\right)^2 - \frac{1}{8}\left(\frac{\eta}{\Delta}\right)^4\right] -\right.$$
$$\left. - \frac{k-1}{2}\mathrm{M}_0^2\left[\frac{3}{4}\left(\frac{\eta}{\Delta}\right)^3 - \frac{3}{10}\left(\frac{\eta}{\Delta}\right)^5 + \frac{1}{28}\left(\frac{\eta}{\Delta}\right)^7\right]\right\}.$$

Так как $y = \delta$ при $\eta = \Delta$, то

$$\delta = \Delta\left[\frac{T_w}{T_0} + \frac{5}{8}\left(1 + \frac{k-1}{2}\mathrm{M}_0^2 - \frac{T_w}{T_0}\right) - \frac{17}{35}\frac{k-1}{2}\mathrm{M}_0^2\right].$$

Теперь легко найти связь между y/δ и η/Δ

$$\frac{y}{\delta}=\frac{\frac{T_w}{T_0}\frac{\eta}{\Delta}+\left(1+\frac{k-1}{2}M_0^2-\frac{T_w}{T_0}\right)\left[\frac{3}{4}\left(\frac{\eta}{\Delta}\right)^2-\frac{1}{8}\left(\frac{\eta}{\Delta}\right)^4\right]}{\frac{T_w}{T_0}+\frac{5}{8}\left(1+\frac{k-1}{2}M_0^2-\frac{T_w}{T_0}\right)-\frac{17}{35}\frac{k-1}{2}M_0^2}-$$
$$-\frac{\frac{k-1}{2}M_0^2\left[\frac{3}{4}\left(\frac{\eta}{\Delta}\right)^3-\frac{3}{10}\left(\frac{\eta}{\Delta}\right)^5+\frac{1}{28}\left(\frac{\eta}{\Delta}\right)^7\right]}{\frac{T_w}{T_0}+\frac{5}{8}\left(1+\frac{k-1}{2}M_0^2-\frac{T_w}{T_0}\right)-\frac{17}{35}\frac{k-1}{2}M_0^2}. \quad (67)$$

Соотношения (61) и (67) дают в параметрической форме распределение скоростей в пограничном слое на плоской пластине.

Так как $\Delta=\delta^{**}/N$, а δ^{**} связано с числом Рейнольдса формулой (66), то для толщины пограничного слоя получим выражение

$$\frac{\delta}{x}=\frac{4{,}64}{\sqrt{R_x}}\left(\frac{T_w}{T_0}\right)^{\frac{\omega-1}{2}}\left[\frac{T_w}{T_0}+\frac{5}{8}\left(1+\frac{k-1}{2}M_0^2-\frac{T_w}{T_0}\right)-\frac{17}{35}\frac{k-1}{2}M_0^2\right]. \quad (68)$$

Произведя несложные вычисления, найдем для толщины вытеснения

$$\delta^*=\int_0^\delta\left(1-\frac{\rho u}{\rho_0 u_0}\right)dy=\delta\left(1-\frac{5}{8}\frac{\Delta}{\delta}\right),$$

или после подстановки значений Δ/δ и δ/x

$$\frac{\delta^*}{x}=\frac{1{,}74}{\sqrt{R_x}}\left(\frac{T_w}{T_0}\right)^{\frac{\omega-1}{2}}\left(\frac{T_w}{T_0}+\frac{13}{35}\frac{k-1}{2}M_0^2\right). \quad (69)$$

При отсутствии теплоотдачи $T_w=T_0\left(1+\frac{k-1}{2}M_0^2\right)$, как это следует из уравнения энергии (40). Тогда

$$c_f=\frac{\delta^{**}}{x}=\frac{0{,}647}{\sqrt{R_x}}\left(1+\frac{k-1}{2}M_0^2\right)^{\frac{\omega-1}{2}}, \quad (70)$$

$$\frac{\delta}{x}=\frac{4{,}64}{\sqrt{R_x}}\left(1+\frac{18}{35}\frac{k-1}{2}M_0^2\right)\left(1+\frac{k-1}{2}M_0^2\right)^{\frac{\omega-1}{2}}, \quad (71)$$

$$\frac{\delta^*}{x}=\frac{1{,}74}{\sqrt{R_x}}\left(1+\frac{48}{35}\frac{k-1}{2}M_0^2\right)\left(1+\frac{k-1}{2}M_0^2\right)^{\frac{\omega-1}{2}}. \quad (72)$$

Для несжимаемой жидкости ($M_0=0$) или для сжимаемого газа при линейной зависимости коэффициента вязкости от температуры ($\omega=1$) приближенные значения коэффициента

трения, толщины пограничного слоя δ, толщины вытеснения δ^* и толщины потери импульса δ^{**} будут равны

$$c_f = \frac{\delta^{**}}{x} = \frac{0{,}647}{\sqrt{R_x}}, \quad \frac{\delta}{x} = \frac{4{,}64}{\sqrt{R_x}}, \quad \frac{\delta^*}{x} = \frac{1{,}74}{\sqrt{R_x}}.$$

Эти значения близки к значениям, найденным при численном интегрировании уравнений пограничного слоя

$$c_f = \frac{\delta^{**}}{x} = \frac{0{,}664}{\sqrt{R_x}}, \quad \frac{\delta^*}{x} = \frac{1{,}72}{\sqrt{R_x}}. \tag{73}$$

На рис. 6.11 показаны профили скорости в пограничном слое на плоской пластине при $M_0 = 10$, $k = 1{,}4$, $\omega = 0{,}76$, вычисленные по формулам (61) и (67) для двух значений отношений температур $T_w/T_0 = 0{,}25$, $T_w/T_0 = 21$ (пунктирные кривые). Там же

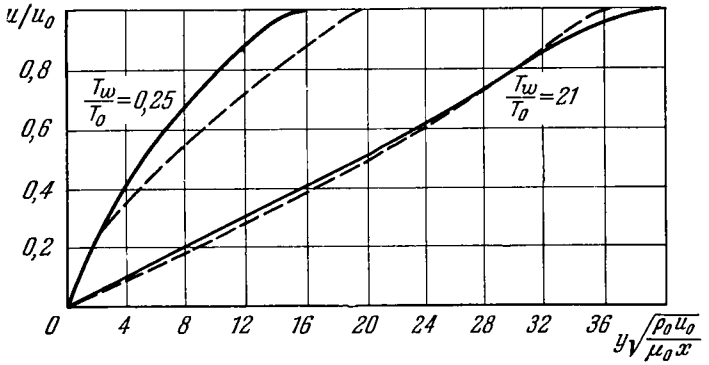


Рис. 6.11. Распределение скоростей в пограничном слое на плоской пластине: по приближенной формуле (пунктирная кривая), точные значения (сплошная кривая), $M_0 = 10$, $\omega = 0{,}76$, $k = 1{,}4$.

приведены распределения скоростей, полученные Карманом и Цзяном интегрированием уравнений пограничного слоя (сплошные кривые). Результаты расчета коэффициента трения на теплоизолированной пластине для сжимаемого газа по формуле (70) при $\omega = 0{,}76$ показаны на рис. 6.7 пунктирной линией. Сплошная линия соответствует точным значениям.

Таким образом, простой метод расчета, основанный на решении интегрального соотношения количества движения, при использовании профиля скорости в виде полинома позволяет определять параметры пограничного слоя с достаточной для практики точностью.

В качестве примера на рис. 6.12 приведены значения толщины пограничного слоя, толщины вытеснения и толщины потери импульса на плоской теплоизолированной пластине для различных чисел M_0 при $\omega = 0{,}76$, $k = 1{,}4$. Величины $\delta_н$, $\delta_н^*$ и $\delta_н^{**}$ представляют собой характерные толщины в несжимаемой жидкости, вычисленные при том же числе Рейнольдса, что

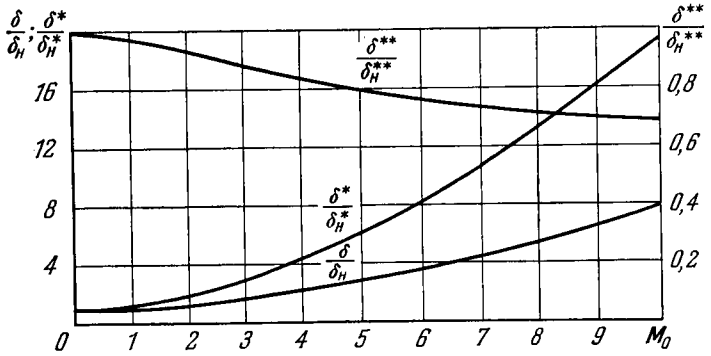


Рис. 6.12. Зависимость толщины пограничного слоя, толщины вытеснения и толщины потери импульса на плоской теплоизолированной пластине от числа M_0 ($Pr = 1$, $\omega = 0{,}76$, $k = 1{,}4$).

и для сжимаемого газа. Величина числа M_0 существенно влияет на характерные толщины пограничного слоя; так, при $M_0 = 10$ толщина пограничного слоя увеличивается в 8 раз, а толщина вытеснения — в 20 раз по сравнению с их значениями в несжимаемой жидкости.

§ 3. Переход от ламинарного к турбулентному режиму течения в пограничном слое

Ламинарное течение, как показывает опыт, устойчиво только при некоторых условиях, определяемых значением критического числа Рейнольдса. При числах Рейнольдса, больших критического, ламинарное течение становится неустойчивым и переходит в турбулентное. Этот переход связан с возникновением в потоке незатухающих возмущений. Если образующиеся вследствие каких-либо внешних причин возмущения скорости и давления с течением времени затухают, то основное течение считается устойчивым, если же с течением времени они нарастают, то это свидетельствует о неустойчивости основного течения и возможном переходе ламинарного режима в турбулентный. Исходя из

такого предположения о природе перехода, можно попытаться определить значение критического числа Рейнольдса с помощью теории устойчивости.

Рассмотрим плоскопараллельное течение несжимаемой жидкости, причем будем для простоты считать, что составляющая скорости U зависит только от координаты y, а составляющая скорости V всюду равна нулю. Давление жидкости P в основном движении есть функция координат x и y. Течение в пограничном слое можно приближенно считать именно таким течением, так как изменение продольной составляющей U в направлении координаты x значительно слабее, чем в направлении координаты y, а поперечная составляющая V мала по сравнению с величиной U.

Наложим на это основное течение двумерное возмущающее движение, скорости и давление в котором зависят от времени t:

$$u'(x, y, t), \quad v'(x, y, t), \quad p'(x, y, t).$$

Тогда давление и скорости результирующего движения будут равны

$$p = P + p', \quad u = U + u', \quad v = v'. \tag{74}$$

Основное ламинарное течение должно удовлетворять уравнениям Навье — Стокса. Будем предполагать, что результирующее движение также удовлетворяет уравнениям Навье — Стокса, а наложенные возмущения малы так, что можно пренебрегать квадратами возмущающих скоростей. В зависимости от того, затухает или нарастает с течением времени возмущающее движение, основное течение будет либо устойчивым, либо неустойчивым. Подставляя значения (74) в уравнения Навье — Стокса и отбрасывая квадраты малых величин, получим

$$\begin{gathered}\frac{\partial u'}{\partial t} + U\frac{\partial u'}{\partial x} + v\frac{dU}{dy} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x} = \nu\left(\frac{d^2U}{dy^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2}\right).\\ \frac{\partial v'}{\partial t} + U\frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial y} = \nu\left(\frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y^2}\right), \qquad (75)\\ \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0, \quad \nu = \frac{\mu}{\rho}.\end{gathered}$$

Учитывая, что основное движение подчиняется уравнением Навье — Стокса, которые для рассматриваемого случая принимают вид

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = \nu\frac{d^2U}{dy^2}, \quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} = 0, \tag{76}$$

получим для возмущающего движения следующую систему уравнений:

$$\begin{gathered}\frac{\partial u'}{\partial t}+U\frac{\partial u'}{\partial x}+v'\frac{dU}{dy}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x}=\nu\left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u'}{\partial y^2}\right),\\ \frac{\partial v'}{\partial t}+U\frac{\partial v'}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial y}=\nu\left(\frac{\partial^2 v'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v'}{\partial y^2}\right),\\ \frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}=0.\end{gathered}\tag{77}$$

Дифференцируя первое уравнение системы (77) по y, а второе уравнение — по x и исключая из полученных таким образом соотношений величину $\partial^2 p'/\partial x\,\partial y$, т. е. давление, получим уравнение, связывающее составляющие скорости возмущающего движения u' и v'. Это уравнение движения вместе с уравнением неразрывности служит для определения u' и v'. Граничные условия для течения в пограничном слое заключаются в том, что скорости возмущающего движения u' и v' должны быть равны нулю на стенке и на большом расстоянии от стенки, т. е.

$$u'=v'=0 \quad \text{при} \quad y=0; \quad u'=v'=0 \quad \text{при} \quad y=\infty. \tag{78}$$

Предположим, что на ламинарное течение налагается возмущение, состоящее из отдельных колебаний, каждое из которых представляет собой волну, распространяющуюся в направлении x. Введем функцию тока для отдельного колебания в виде следующего комплексного выражения:

$$\psi(x, y, t)=\varphi(y)\,e^{i\alpha(x-ct)}, \tag{79}$$

где $\varphi=\varphi_r+i\varphi_i$ есть комплексная амплитуда, α — действительная величина, связанная с длиной волны возмущения соотношением $\lambda=2\pi/\alpha$. Комплексная величина $c=c_r+ic_i$, причем c_r — есть скорость распространения волн в направлении x, а c_i — коэффициент нарастания, от знака которого зависит нарастают колебания или затухают. Если $c_i<0$, то колебания затухают и ламинарное течение устойчиво, если же $c_i>0$, то колебания нарастают и ламинарное течение неустойчиво.

Физический смысл, конечно, имеет только действительная часть функции тока, т. е. величина

$$\operatorname{Re}(\psi)=e^{\alpha c_i}\left[\varphi_r\cos\alpha(x-c_r t)-\varphi_i\sin\alpha(x-c_r t)\right].$$

Составляя производные от функции тока, найдем для составляющих скоростей возмущающего движения значения

$$\begin{aligned}u'&=\frac{\partial\psi}{\partial y}=\varphi'(y)\,e^{i\alpha(x-ct)},\\ v'&=-\frac{\partial\psi}{\partial x}=-i\alpha\varphi(y)\,e^{i\alpha(x-ct)}.\end{aligned}\tag{80}$$

Уравнение неразрывности при этом будет удовлетворяться, а уравнение движения, которое получается после исключения давления, принимает вид

$$(U-c)(\varphi''-\alpha^2\varphi)-U''\varphi=-\frac{i\nu}{\alpha}(\varphi^{IV}-2\alpha^2\varphi''+\alpha^4\varphi).$$

Перейдем в этом уравнении к безразмерным величинам, для чего разделим все скорости на скорость вне пограничного слоя u_0, а все длины — на толщину потери импульса δ^{**}:

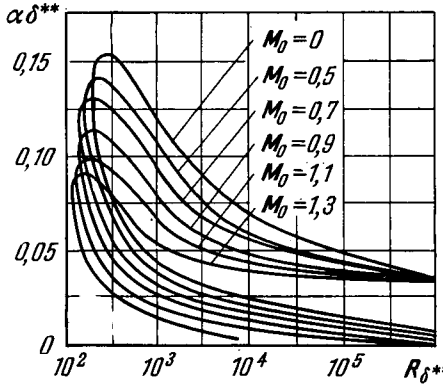


Рис. 6.13. Нейтральные кривые для обтекания плоской теплоизолированной пластины.

$$\bar{U}=\frac{U}{u_0},\quad \bar{c}=\frac{c}{u_0},$$

$$\bar{\alpha}=\alpha\delta^{**},\quad \bar{\varphi}=\frac{\varphi}{u_0\delta^{**}}.$$

Тогда получим

$$(\bar{U}-\bar{c})(\bar{\varphi}''-\bar{\alpha}^2\bar{\varphi})-\bar{U}''\bar{\varphi}=$$
$$=-\frac{i}{\bar{\alpha}R}(\bar{\varphi}^{IV}-2\bar{\alpha}^2\bar{\varphi}''+\bar{\alpha}^4\bar{\varphi}), \qquad (81)$$

где $R=U\delta^{**}/\nu$ есть число Рейнольдса для основного ламинарного течения, а дифференцирование ведется по переменной (y/δ^{**}).

Уравнение (81) называется дифференциальным уравнением возмущающего движения. Исследование устойчивости решения этого уравнения представляет собой задачу о собственных значениях дифференциального уравнения (81) при граничных условиях (78). Предположим, что основное течение задано, то есть известно распределение скоростей в ламинарном пограничном слое $U(y)$. Тогда уравнение (81) будет содержать четыре параметра: R, $\bar{\alpha}$, $\bar{c}_r$, $\bar{c}_i$. Для каждой выбранной пары R и $\bar{\alpha}$ можно найти собственную функцию $\bar{\varphi}$ и комплексное собственное значение $\bar{c}=\bar{c}_r+i\bar{c}_i$, причем здесь $\bar{c}_r$ — безразмерная скорость распространения возмущений, а $\bar{c}_i$ — безразмерный коэффициент нарастания:

$$\bar{c}_r=c_r(\bar{\alpha},R),\quad \bar{c}_i=c_i(\bar{\alpha},R). \qquad (82)$$

При $\bar{c}_i<0$ рассматриваемое движение устойчиво по отношению к возмущениям рассматриваемой длины волны, а при $\bar{c}_i>0$ — неустойчиво.

Случай $\bar{c}_i=0$ соответствует нейтральным колебаниям и кривая $\bar{c}_i(\bar{\alpha},R)=0$ в плоскости $\bar{\alpha}$, R отделяет область неустойчивости ламинарного пограничного слоя от области устойчиво-

сти. Эта кривая называется нейтральной. Наименьшее число Рейнольдса на нейтральной кривой является критическим числом Рейнольдса для данного течения. При числах Рейнольдса, меньших критического, возмущения любой длины волны затухают. При числах Рейнольдса, больших критического, имеются возмущения с определенной длиной волны, которые нарастают.

Расчет нейтральной кривой для случая обтекания плоской теплоизолированной пластины потоком несжимаемой жидкости выполнен В. Толлминым и проверен Ц. Линем. При расчетах было принято, что распределение скоростей в ламинарном пограничном слое описывается законом Блазиуса.

Аналогичный метод малых возмущений был использован Ц. Линем и П. Лисом при исследовании устойчивости ламинарного пограничного слоя на плоской пластине, обтекаемой потоком сжимаемого газа. В этом случае уравнение нейтральной кривой может быть записано в виде

$$\bar{c}_i\left(\bar{\alpha}, R, M_0, \frac{T_w}{T_0^*}\right) = 0. \tag{83}$$

Результаты расчета нейтральных кривых представлены на рис. 6.13 и 6.14.

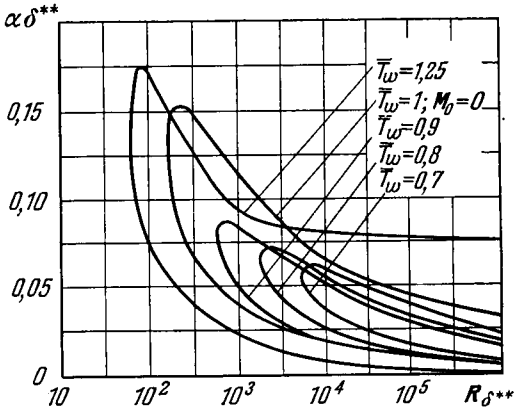


Рис. 6.14. Нейтральные кривые для обтекания плоской пластины потоком газа $M_0 = 0{,}7$.

Эти расчеты показали, что критическое число Рейнольдса уменьшается при увеличении числа M_0 внешнего потока при отсутствии теплоотдачи от пластины. Охлаждение пластины приводит к увеличению критического числа Рейнольдса при постоянном значении числа M_0, т. е. оказывает стабилизирующее влияние на пограничный слой.

Таким образом, с помощью метода малых возмущений можно получить значение критического числа Рейнольдса. Начиная с того места на пластине, где число Рейнольдса достигает своего критического значения, начинают нарастать возмущения с определенной длиной волны. Далее вниз по потоку становятся неустойчивыми возмущения и с другими длинами волн. Наконец, на некотором расстоянии от начала потери устойчивости ламинарное течение переходит в турбулентное. Критическое число Рейнольдса, определенное экспериментальным путем из наблю-

дения перехода ламинарного режима течения в турбулентный, соответствует тому месту пластины, где турбулентность потока приводит к перестройке всего течения. Поэтому найденные из экспериментов критические числа Рейнольдса обычно превышают по величине их теоретические значения.

Таким образом, метод малых возмущений позволяет определить лишь нижнюю границу значений критических чисел Рейнольдса, то есть дает те значения чисел Рейнольдса, меньших $R_{кр}$, при которых ламинарное течение всегда устойчиво. Кроме того, с помощью этого метода можно выяснить влияние на устойчивость ламинарного пограничного слоя таких параметров, как M_0 и T_w/T_0^*.

Второй важной задачей, связанной с переходом ламинарного пограничного слоя в турбулентный, является вычисление основных параметров течения в переходной области. В настоящее время нет строгой теории переходной области в силу сложности происходящих процессов, поэтому при проведении количественных оценок в переходной области приходится использовать различные эмпирические и полуэмпирические методы.

Рассмотрим один полуэмпирический подход к определению параметров в переходной области. Область перехода заменим одной точкой, а в качестве условия сращивания решений для ламинарного и турбулентного режимов течения используем непрерывность изменения толщины потери импульса. Это условие является наиболее оправданным с физической точки зрения, так как изменение толщины потери импульса характеризует воздействие вязких сил и тесно связано с величиной сопротивления. В качестве примера рассмотрим обтекание плоской теплоизолированной пластины потоком несжимаемой жидкости. Интегрируя уравнение импульсов (60) от 0 до l, получим соотношение между коэффициентом сопротивления пластины длиной l и значением толщины потери импульса в конце пластины

$$C_W = 2\delta^{**}/l. \tag{84}$$

Это соотношение справедливо для любого режима течения, в том числе и для течения при наличии области перехода от ламинарного к турбулентному пограничному слою. Таким образом, для определения коэффициента сопротивления C_W достаточно определить толщину потери импульса в конце пластины. Как показано выше, при ламинарном течении величина δ^{**} определяется формулой (73). Если через $x_{кр}$ обозначить расстояние от кромки пластины до начала области перехода, а через $R_{кр}$ — соответствующее число Рейнольдса, то толщина потери импульса в начале области перехода будет равна

$$\delta^{**}_{кр} = 0{,}664 x_{кр}/\sqrt{R_{кр}}. \tag{85}$$

При турбулентном режиме течения в пограничном слое, как будет показано дальше (§ 4), напряжение трения может быть выражено через толщину потери импульса. Для этого заменим число R_δ в уравнении (131) через величину $R_{\delta^{**}} = \rho_0 u_0 \delta^{**}/\mu_0$:

$$\frac{\tau_w}{\rho_0 u_0^2} = 0{,}0226\left(\frac{\delta^{**}}{\delta}\right)^{0,25} R_{\delta^{**}}^{-0,25} = 0{,}0126 R_{\delta^{**}}^{-0,25}.$$

Подставляя полученное выражение для напряжения трения в уравнение импульсов (60) и интегрируя в области турбулентного течения (от $x_{кр}$ до l), получим

$$\delta^{**} = [\delta_{кр}^{1,25} + 0{,}0158 \times \times (l^{1,25} R^{-0,25} - x_{кр}^{1,25} R_{кр}^{-0,25})]^{0,8}, \quad (86)$$

где $R = \rho_0 u_0 l/\mu_0$ — число Рейнольдса, подсчитанное по длине пластины. Используя соотношения (85), (86), преобразуем формулу (84) следующим образом:

$$C_W = 0{,}073 R^{-0,2} \times \times \left(1 - \frac{R_{кр}}{R} + 38\,\frac{R_{кр}^{0,625}}{R}\right)^{0,8}. \quad (87)$$

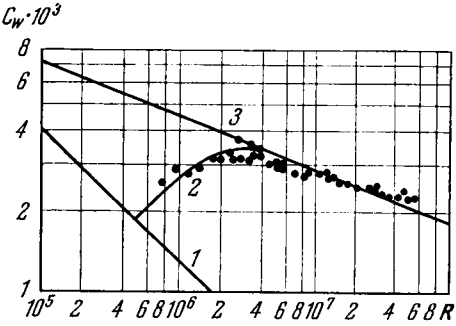


Рис. 6.15. Коэффициент сопротивления плоской пластины в переходной области.

Эта формула справедлива при $R > R_{кр}$ и позволяет определить коэффициент сопротивления пластины в переходной и турбулентной области течения.

Значения C_W, рассчитанные по формуле (87) при $R_{кр} = 5 \cdot 10^5$, приведены на рис. 6.15 (кривая 2). На этом же рисунке показаны значения C_W для ламинарного режима течения в пограничном слое (кривая 1), для турбулентного (кривая 3) и экспериментальные данные, полученные для переходной области Геберсом.

При этом следует иметь в виду, что величина $R_{кр}$ зависит от начальной турбулентности основного потока и может быть определена в настоящее время только экспериментально.

§ 4. Турбулентный пограничный слой

Уравнения движения, энергии и неразрывности для турбулентного пограничного слоя могут быть получены путем осреднения по времени исходных уравнений пограничного слоя (19)—(22). Для простоты рассмотрим сначала несжимаемую

жидкость. Разложим турбулентное течение на осредненное движение и на пульсационное движение. Обозначив осредненное по времени значение составляющей скорости u через $\bar{u}$, а пульсационную скорость — через u' и т. д., получим следующие выражения для составляющих скорости, для давления и для температуры:

$$u=\bar{u}+u',\quad v=\bar{v}+v',\quad p=\bar{p}+p',\quad T=\bar{T}+T'. \tag{88}$$

Под средним значением здесь и далее мы имеем в виду средние значения по времени в фиксированной точке пространства, например:

$$\bar{u}=\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t_0+t} u\,dt. \tag{89}$$

Для осреднения необходимо брать такой большой промежуток времени t, чтобы осредненное значение не зависело от времени. Тогда осредненные по времени значения пульсационных величин будут равны нулю:

$$\bar{u}'=\bar{v}'=\bar{p}'=\bar{T}'=0.$$

Из определения (89) вытекают следующие правила осреднения:

а) $$\overline{u+v}=\bar{u}+\bar{v}. \tag{90}$$

Действительно,

$$\overline{u+v}=\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t_0+t}(u+v)\,dt=\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t_0+t}u\,dt+\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t_0+t}v\,dt=\bar{u}+\bar{v}.$$

б) $$\bar{\bar{u}}=\bar{u}. \tag{91}$$

Действительно,

$$\bar{\bar{u}}=\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t_0+t}\bar{u}\,dt=\bar{u},$$

так как, по определению, $\bar{u}$ не зависит от времени.

в) $$\overline{\bar{u}v}=\bar{u}\bar{v}. \tag{92}$$

Действительно,

$$\overline{\bar{u}v}=\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t_0+t}\bar{u}v\,dt=\bar{u}\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t_0+t}v\,dt=\bar{u}\bar{v}.$$

г) $$\overline{\frac{\partial u}{\partial x}}=\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}. \tag{93}$$

Действительно,

$$\overline{\frac{\partial u}{\partial x}} = \frac{1}{t}\int_{t_0}^{t_0+t}\frac{\partial u}{\partial x}\,dt = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t_0+t} u\,dt\right) = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x},$$

так как пределы интегрирования не зависят от x.

Теперь перейдем к выводу уравнений турбулентного пограничного слоя. Для случая несжимаемой жидкости с постоянными физическими свойствами уравнения (19), (20), (22), (24) принимают вид

$$\rho u\frac{\partial u}{\partial x} + \rho v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \tag{94}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \tag{95}$$

$$c\rho u\frac{\partial T^*}{\partial x} + c\rho v\frac{\partial T^*}{\partial y} = \lambda\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{u^2}{2}\right), \tag{96}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \tag{97}$$

Умножим обе части уравнения неразрывности (97) на ρu и сложим его почленно с уравнением движения (94)

$$\rho\frac{\partial (u^2)}{\partial x} + \rho\frac{\partial (uv)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \tag{98}$$

Умножая обе части уравнения неразрывности на $c\rho T^*$ и складывая его почленно с уравнением энергии, имеем

$$c\rho\frac{\partial (uT^*)}{\partial x} + c\rho\frac{\partial (vT^*)}{\partial y} = \lambda\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{u^2}{2}\right). \tag{99}$$

Подставим в уравнения (95), (97), (98), (99) вместо u, v, p, T их значения из (88) и произведем осреднение по времени. Используя правило осреднения (93), из (95) получим

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} = 0. \tag{100}$$

Используя правила осреднения (90) и (93), уравнение неразрывности (97) преобразуем к виду

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0. \tag{101}$$

Перейдем к осреднению преобразованного уравнения движения (98). На основании правил осреднения (90)—(93) получим

$$\overline{\frac{\partial(u^2)}{\partial x}} = \frac{\partial}{\partial x}\overline{(\bar{u}^2 + 2\bar{u}u' + u'^2)} = \frac{\partial(\bar{u})^2}{\partial x} + \frac{\partial\overline{u'^2}}{\partial x},$$

$$\overline{\frac{\partial(uv)}{\partial y}} = \frac{\partial}{\partial y}\overline{(\bar{u}\bar{v} + \bar{u}v' + u'\bar{v} + u'v')} = \frac{\partial(\bar{u}\bar{v})}{\partial y} + \frac{\partial\overline{u'v'}}{\partial y},$$

$$\overline{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}} = \frac{\partial^2\bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\overline{u'}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2\bar{u}}{\partial y^2}, \quad \overline{\frac{\partial p}{\partial x}} = \frac{\partial\bar{p}}{\partial x},$$

поэтому уравнение движения (98) после осреднения принимает вид

$$\rho\frac{\partial(\bar{u}^2)}{\partial x} + \rho\frac{\partial(\bar{u}\bar{v})}{\partial y} = -\frac{\partial\bar{p}}{\partial x} - \rho\frac{\partial\overline{u'^2}}{\partial x} - \rho\frac{\partial\overline{u'v'}}{\partial y} + \mu\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial y^2}.$$

Вычитая почленно из этого соотношения уравнение неразрывности (101), умноженное на $\rho\bar{u}$, и пренебрегая производной по x от пульсационных составляющих по сравнению с производной по y, как это делается при выводе уравнений пограничного слоя, окончательно получим дифференциальное уравнение движения для турбулентного пограничного слоя

$$\rho\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial x} + \rho\bar{v}\frac{\partial\bar{u}}{\partial y} = -\frac{\partial\bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial\bar{u}}{\partial y} - \rho\overline{u'v'}\right). \qquad (102)$$

Аналогичные преобразования проделаем с уравнением энергии (99). Так как

$$\overline{\frac{\partial(uT^*)}{\partial x}} = \frac{\partial(\bar{u}\bar{T}^*)}{\partial x} + \frac{\partial\overline{u'T^{*\prime}}}{\partial x}, \quad \overline{\frac{\partial(vT^*)}{\partial y}} = \frac{\partial(\bar{v}\bar{T}^*)}{\partial y} + \frac{\partial\overline{v'T^{*\prime}}}{\partial y}, \quad \overline{\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}} = \frac{\partial^2\bar{T}}{\partial y^2},$$

$$\overline{u'^2} \ll \bar{u}^2, \quad \frac{\partial\overline{u'T^{*\prime}}}{\partial x} \ll \frac{\partial\overline{v'T^{*\prime}}}{\partial y}, \quad T^{*\prime} = T' + \frac{\bar{u}u'}{c},$$

то уравнение энергии (99) после почленного вычитания соотношения (101), умноженного на $c\rho\bar{T}^*$, принимает вид

$$c\rho\bar{u}\frac{\partial\bar{T}^*}{\partial x} + c\rho\bar{v}\frac{\partial\bar{T}^*}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial\bar{T}}{\partial y} - c\rho\overline{v'T'}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\bar{u}\left(\mu\frac{\partial\bar{u}}{\partial y} - \rho\overline{u'v'}\right), \qquad (103)$$

причем

$$\bar{T}^* = \bar{T} + \frac{\bar{u}^2}{2c}.$$

Сравнивая уравнения для турбулентного пограничного слоя (100)—(103) с уравнениями для ламинарного пограничного слоя (94)—(97), можно отметить следующее. Уравнение неразрывности и второе уравнение движения имеют одинаковый вид. Первое уравнение движения и уравнение энергии для осреднен-

ных параметров турбулентного пограничного слоя отличаются от соответствующих уравнений для ламинарного пограничного слоя наличием дополнительных касательных напряжений и дополнительных тепловых потоков.

Простое истолкование этих дополнительных членов было дано Прандтлем. Для изложения идеи Прандтля рассмотрим плоскопараллельное течение, скорость которого по направлению совпадает с осью x, а величина скорости зависит лишь от координаты y. Следовательно, $\bar{u} = \bar{u}(y)$, $\bar{v} = 0$, причем пусть $\partial\bar{u}/\partial y > 0$.

Механизм турбулентного течения можно представить следующим упрощенным образом. В процессе турбулентного течения возникают жидкие объемы, каждый из которых на некотором расстоянии движется в любом направлении как целое с определенной скоростью. Предположим, что такой жидкий объем, возникший в слое с координатой $y_1 - l$ и обладающий скоростью $\bar{u}(y_1 - l)$, перемещается на расстояние l как целое в направлении оси y. Когда этот жидкий объем попадает в слой с координатой y_1, то скорость в этом слое изменится на величину

$$u' = \bar{u}(y_1 - l) - \bar{u}(l) = -\left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)_1 l,$$

которая представляет собой пульсационную составляющую. При этом $v' > 0$. Аналогично жидкий объем, попадающий в слой y_1 из слоя $y_1 + l$, имеет большую скорость, чем окружающая его среда. Следовательно, пульсационная составляющая u' будет равна

$$u' = \bar{u}(y_1 + l) - \bar{u}(y_1) = \left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)_1 l,$$

при этом $v' < 0$.

Путь перемешивания l в известной степени аналогичен пути свободного пробега молекул в кинетической теории газов с той лишь разницей, что там происходят микроскопические движения молекул, а здесь — макроскопические движения турбулентных объемов. В общем случае длина пути перемешивания зависит от времени и может принимать положительные или отрицательные значения. Поэтому пульсационная составляющая также зависит от времени

$$u' = l' \frac{d\bar{u}}{dy}. \tag{104}$$

Возникновение пульсаций скорости в поперечном направлении можно представить следующим образом. В слое с координатой y_1 за счет каких-либо причин происходит увеличение скорости, т. е. появляется положительная пульсационная составляющая $u' > 0$. Жидкий объем, имеющий эту скорость $\bar{u}(y_1) + u'$,

сталкивается с находящимся впереди объемом, имеющим скорость $\bar{u}(y_1)$, и поэтому возникает поперечное движение, направленное в обе стороны от слоя y_1. Если в слое с координатой y_1 происходит уменьшение скорости ($u' < 0$), то жидкий объем, имеющий эту скорость, отстает от объема, имеющего скорость $\bar{u}(y_1)$, и возникает поперечное движение, направленное с обеих сторон к слою y_1. На основании этих рассуждений можно сделать вывод, что величина поперечной пульсационной скорости v' имеет такой же порядок, как и величина продольной пульсационной скорости u'. Как показано выше, объем жидкости, приходящий в слой y_1 с положительным значением v', вызывает обычно отрицательную пульсационную скорость u'. Объем жидкости, приходящий в слой y_1 с отрицательным значением v', вызывает обычно положительную пульсационную скорость u', т. е.

$$v' = -ku', \tag{105}$$

где k — коэффициент пропорциональности, имеющий порядок единицы.

Тогда произведение $u'v'$ будет обычно отрицательным, и поэтому осредненное по времени значение $\overline{u'v'}$ будет отличным от нуля и отрицательным

$$\overline{u'v'} = -k\overline{u'^2} = -k\overline{l'^2}\left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)^2.$$

Ввиду некоторой неопределенности пути перемешивания можно включить коэффициент k в эту величину. Тогда получим

$$\overline{u'v'} = -l^2\left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)^2, \quad \text{где } l^2 = k\overline{l'^2}. \tag{106}$$

Следует отметить, что все проведенные выше рассуждения относились к случаю положительного значения производной $d\bar{u}/dy$. Аналогичные рассуждения для $d\bar{u}/dy < 0$ показывают, что в этом случае произведение $u'v'$ обычно положительно. Тогда

$$\overline{u'v'} = l^2\left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)^2. \tag{107}$$

Формулы (106) и (107) можно, следовательно, представить одной формулой

$$\overline{u'v'} = -l^2\left|\frac{d\bar{u}}{dy}\right|\frac{d\bar{u}}{dy}. \tag{108}$$

Совершенно также можно вывести формулу для осредненного значения произведения $\overline{v'T'}$, если предположить, что механизм переноса тепла подобен механизму переноса количества

движения. В этом случае $T' = l'd\bar{T}/dy$, и поэтому

$$\overline{v'T'} = -l^2 \left|\frac{du}{dy}\right| \frac{d\bar{T}}{dy}. \tag{109}$$

Выражения (108) и (109) получены для частного случая течения, когда $\bar{u} = \bar{u}(y)$, однако они могут применяться и в общем случае распределения скоростей в пограничном слое.

Используя соотношения (108) и (109), уравнение движения (102) и уравнение энергии (103) преобразуем к виду

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left[(\mu + \mu_T)\frac{\partial u}{\partial y}\right], \tag{110}$$

$$c\rho u \frac{\partial T}{\partial x} + c\rho v \frac{\partial T}{\partial y} = u\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left[(\lambda + \lambda_T)\frac{\partial T}{\partial y}\right] + (\mu + \mu_T)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2, \tag{111}$$

где $\mu_т = \rho l^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$ есть коэффициент турбулентной вязкости, $\lambda_т = c\rho l^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$ — коэффициент турбулентной теплопроводности. Здесь и далее черта над осредненными параметрами опускается.

Гипотеза Прандтля о пути перемешивания оказалась весьма плодотворной, так как открыла реальные возможности для расчета турбулентных течений. Хотя длина пути перемешивания и не является физической постоянной для каждой жидкости в отличие от молекулярных коэффициентов вязкости и теплопроводности, однако, она, как показывают опытные данные, не зависит от параметров потока. Длина пути перемешивания в основном является функцией координаты y. Так как при течении вдоль гладкой стенки в непосредственной близости от ее поверхности пульсации скорости равны нулю, то $l = 0$ при $y = 0$. Принимая простейшую гипотезу, что вблизи стенки длина пути перемешивания пропорциональна расстоянию от стенки

$$l = ky, \tag{112}$$

можно получить, следуя Прандтлю, профиль скорости в турбулентном пограничном слое при течении несжимаемой жидкости вдоль плоской пластины ($\partial p/\partial x = 0$). В этом случае из уравнения (110) следует, что при $y = 0$, когда $u = v = 0$,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[(\mu + \mu_т)\frac{\partial u}{\partial y}\right] = \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0.$$

Дифференцируя по y уравнение (110) и учитывая уравнение неразрывности (101), получим $\frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2} = 0$ при $y = 0$, т. е. вблизи стенки напряжение трения остается постоянным

$$\tau = \tau_w. \tag{113}$$

Пренебрегая коэффициентом молекулярной вязкости μ по сравнению с коэффициентом турбулентной вязкости $\mu_т$ и подставляя вместо $\mu_т$ его выражение через длину пути перемешивания, получим соотношение

$$\tau = \rho l^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2,$$

которое при замене величины l выражением (112) принимает вид

$$\tau = \rho k^2 y^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2.$$

Проинтегрировав это уравнение, с учетом равенства (113) получим

$$u = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}\ln y + C. \tag{114}$$

Это соотношение можно записать в следующем безразмерном виде:

$$\frac{u}{v_*} = \frac{1}{k}\ln\frac{v_* y}{\nu} + C_1, \tag{115}$$

где $v_* = \sqrt{\tau_w/\rho}$, $\nu = \mu/\rho$.

Величина k, согласно результатам измерений, является универсальной постоянной турбулентного течения и равна 0,4. Вторая постоянная C_1 зависит от свойств обтекаемой поверхности. Универсальный закон распределения скоростей (115), выведенный для течения вдоль плоской стенки, оказывается справедливым и при течении жидкости в круглой трубе. На рис. 6.16 проведено сравнение результатов расчета по формуле (115) при $C_1 = 5{,}5$ с опытными данными для труб, полученными Никурадзе при различных числах Рейнольдса.

Следует отметить, что универсальный закон распределения скоростей выведен в предположении, что в основной части турбулентного пограничного слоя коэффициент молекулярной вязкости мал по сравнению с турбулентным коэффициентом вязкости. Такое допущение оправдано лишь при очень больших числах Рейнольдса, поэтому универсальный закон распределения скоростей следует рассматривать как асимптотический закон для очень больших чисел Рейнольдса. Опыты, проведенные при обтекании плоской пластины потоком несжимаемой жидкости, показывают, что при умеренных числах Рейнольдса распределение скоростей хорошо описывается степенным законом

$$\frac{u}{u_0} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/n}, \tag{116}$$

причем величина n слабо зависит от числа Рейнольдса. При $R_x = 10^6 \div 10^8$ можно принимать $n = 7$.

Уравнения движения, энергии и неразрывности для турбулентного пограничного слоя сжимаемого газа могут быть также получены путем осреднения по времени исходных уравнений пограничного слоя (19)—(22). Для осредненных параметров эти уравнения принимают вид (при постоянной теплоемкости)

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left[(\mu + \mu_т)\frac{\partial u}{\partial y}\right], \tag{117}$$

$$c_p \rho u \frac{\partial T}{\partial x} + c_p \rho v \frac{\partial T}{\partial y} = $$

$$= u\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left[(\lambda + \lambda_т)\frac{\partial T}{\partial y}\right] + (\mu + \mu_т)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2, \tag{118}$$

$$\frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} = 0. \tag{119}$$

Здесь $\mu_т$ и $\lambda_т$ — коэффициенты турбулентной вязкости и турбулентной теплопроводности, которые характеризуют перенос количества движения и тепла за счет поперечных пульсаций скорости.

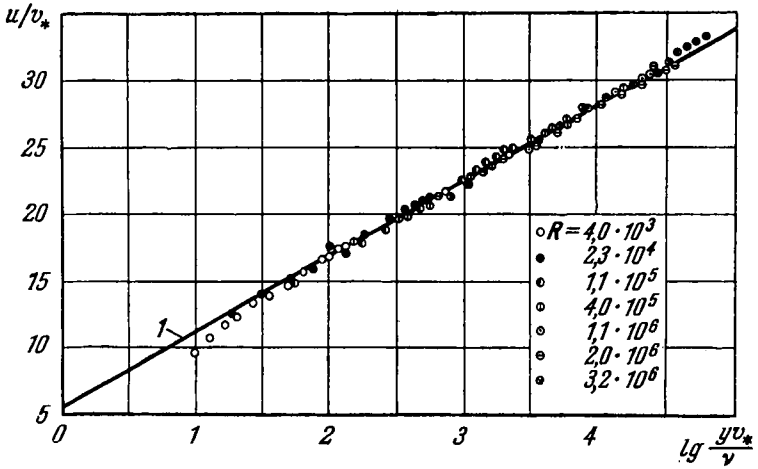


Рис. 6.16. Распределение скоростей в гладкой трубе. Кривая *1* соответствует универсальному логарифмическому закону.

Граничные условия этой системы уравнений имеют такой же вид, как и для ламинарного пограничного слоя:

$$\left.\begin{aligned} u = v = 0, \quad T = T_w \text{ при } y = 0, \\ u = u_0, \quad T = T_0 \text{ при } y = \delta. \end{aligned}\right\} \tag{120}$$

Для решения уравнений (117)—(119), кроме уравнения состояния и зависимостей коэффициентов μ и λ от температуры,

необходимо знать величину коэффициентов турбулентного переноса $\mu_т$ и $\lambda_т$. Ввиду отсутствия в настоящее время законченной теории турбулентности определение этих коэффициентов носит полуэмпирический характер и основывается на ряде гипотез.

Поэтому при расчете турбулентного пограничного слоя обычно используют приближенный метод, основанный на решении интегрального уравнения количества движения (59). При этом необходимо задавать распределение скоростей и температур в пограничном слое.

Рассмотрим случай обтекания плоской пластины при числе Прандтля, равном единице. Сначала преобразуем уравнение энергии. Умножая (117) на u, складывая с (118) и вводя температуру торможения

$$T^* = T + \frac{u^2}{2c_p},$$

получим

$$\rho u \frac{\partial T^*}{\partial x} + \rho v \frac{\partial T^*}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[(\mu + \mu_т)\frac{\partial T^*}{\partial y}\right] + \\ + \frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{1}{Pr} - 1\right)\mu \frac{\partial T}{\partial y}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{1}{Pr_т} - 1\right)\mu_т \frac{\partial T}{\partial y}\right]. \quad (121)$$

Величина $Pr_т = (c_p\mu_т)/\lambda_т$ есть число Прандтля для турбулентных параметров. Согласно имеющимся в настоящее время данным число $Pr_т$ близко к единице. Поэтому в дальнейшем будем принимать $Pr_т = 1$. При $Pr = Pr_т = 1$ соотношение (121) упрощается и принимает вид

$$\rho u \frac{\partial T^*}{\partial x} + \rho v \frac{\partial T^*}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[(\mu + \mu_т)\frac{\partial T^*}{\partial y}\right]. \quad (122)$$

Так как при продольном обтекании плоской пластины $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$, то из уравнения (117) получим

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[(\mu + \mu_т)\frac{\partial u}{\partial y}\right]. \quad (123)$$

Вследствие подобия уравнений (122) и (123) решение уравнения энергии (122) может быть представлено в виде

$$T^* = au + b,$$

где неизвестные коэффициенты a и b определяются из граничных условий (120):

$$u = 0,\ T^* = T_w = b;\ u = u_0;\ T^* = T_0^* = au_0 + T_w,\ a = (T_0^* - T_w)/u_0.$$

Следовательно,

$$T^* = (T_0^* - T_w)\frac{u}{u_0} + T_w. \quad (124)$$

Прежде чем переходить к нахождению профиля скорости, необходимо отметить следующее обстоятельство. Вблизи обтекаемого тела число Рейнольдса, определенное по местным параметрам жидкости, может быть сколь угодно малым. Поэтому в этой области должно существовать ламинарное течение, где трение и теплообмен определяются молекулярным переносом, т. е. $\mu \gg \mu_т$, $\lambda \gg \lambda_т$. Эта часть пограничного слоя называется *ламинарным подслоем*. В остальной, основной части пограничного слоя определяющую роль играет перенос посредством турбулентных пульсаций, т. е. $\mu \ll \mu_т$, $\lambda \ll \lambda_т$. Будем считать, что число Рейнольдса на границе ламинарного подслоя не зависит от числа Маха M_0 и интенсивности теплообмена

$$\frac{\rho_л u_л \delta_л}{\mu_л} = \alpha^2; \tag{125}$$

согласно опытным данным коэффициент $\alpha = 12{,}5$.

Распределение скоростей в ламинарном подслое можно считать линейным

$$\frac{u}{u_л} = \frac{y}{\delta_л}. \tag{126}$$

Закон распределения скоростей в основной части турбулентного пограничного слоя может быть получен на основании анализа экспериментальных данных.

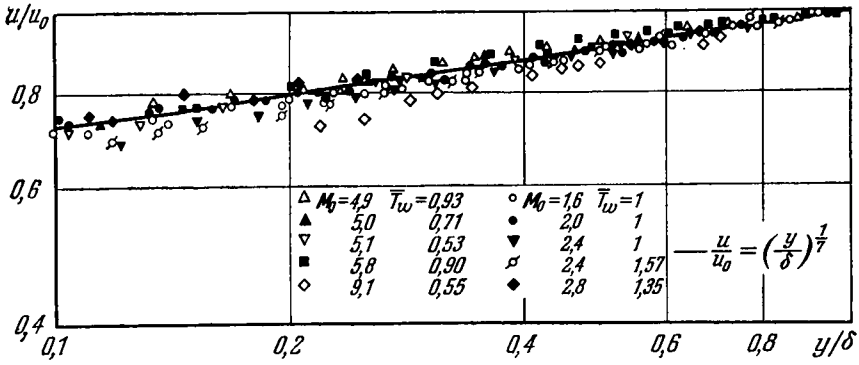


Рис. 6.17. Профиль скоростей в турбулентном пограничном слое сжимаемого газа на плоской пластине.

Результаты экспериментального исследования профиля скоростей в основной части турбулентного пограничного слоя сжимаемого газа на пластине представлены на рис. 6.17. Оказывается, что число Маха M_0 и температурный фактор $\bar{T}_w = T_w/T_0^*$ мало влияют на форму распределения скоростей. Поэтому

степенной закон (116) будем считать справедливым и для сжимаемого газа.

Найдем выражение для напряжения трения на стенке, используя (126):

$$\tau_w = \mu_w \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_w = \mu_w \frac{u_л}{\delta_л}. \qquad (127)$$

Так как на границе ламинарного подслоя значения скорости, вычисленные по формулам (126) и (116), должны совпадать, то $\frac{u_л}{u_0} = (\delta_л/\delta)^{1/n}$. Принимая для зависимости коэффициента вязкости от температуры степенной закон (4), получим

$$\tau_w = \frac{\rho_0 u_0^2}{R_\delta} \left(\frac{u_л}{u_0}\right)^{1-n} \left(\frac{T_w}{T_0}\right)^{\omega}. \qquad (128)$$

Здесь $R_\delta = \rho_0 u_0 \delta/\mu_0$ — число Рейнольдса, подсчитанное по толщине пограничного слоя, а величина $u_л/u_0$ должна быть определена из условия (125).

Разрешая соотношение (125) относительно $\delta_л$, получим

$$\frac{\delta_л}{\delta} = \frac{\alpha^2}{R_\delta} \left(\frac{T_л}{T_0}\right)^{1+\omega} \frac{u_0}{u_л}.$$

С другой стороны, $\delta_л/\delta = (u_л/u_0)^n$, поэтому

$$\left(\frac{u_л}{u_0}\right)^{n+1} = \frac{\alpha^2}{R_\delta} \left(\frac{T_л}{T_0}\right)^{1+\omega}.$$

Используя связь между температурой торможения и скоростью (124), найдем следующее алгебраическое уравнение для определения относительной скорости на границе ламинарного подслоя:

$$\left(\frac{u_л}{u_0}\right)^{n+1} = \frac{\alpha^2}{R_\delta} \left\{1 + \frac{k-1}{2} M_0^2 \left[1 - \left(\frac{u_л}{u_0}\right)^2\right]\right\}^{1+\omega} \times$$
$$\times \left\{1 + (\bar{T}_w - 1) \frac{\left(1 + \frac{k-1}{2} M_0^2\right)\left(1 - \frac{u_л}{u_0}\right)}{1 + \frac{k-1}{2} M_0^2 \left[1 - \left(\frac{u_л}{u_0}\right)^2\right]}\right\}^{1+\omega}. \qquad (129)$$

Это уравнение надо решить методом последовательных приближений, то есть задавать произвольно величину $u_л/u_0$, подставлять это значение в правую часть соотношения (129), находить новое значение $u_л/u_0$ и т. д. Так как величина $u_л/u_0$ обычно равна 0,3—0,7, то в качестве первого приближения возьмем $u_л/u_0 = 0{,}5$. Тогда во втором приближении получим

$$\left(\frac{u_л}{u_0}\right)^{n+1} = \frac{\alpha^2}{R_\delta}\left(1 + 0{,}75 \frac{k-1}{2} M_0^2\right)^{1+\omega} \left[1 + \frac{\bar{T}_w - 1}{2} \frac{1 + \frac{k-1}{2} M_0^2}{1 + 0{,}75 \frac{k-1}{2} M_0^2}\right]^{1+\omega}.$$

Величина, стоящая в квадратных скобках, слабо меняется при изменении числа M_0. Так, при $\bar{T}_w = 0{,}5$ она изменяется от 0,750 до 0,672 при изменении числа Маха от 0 до 10. Ограничиваясь первыми двумя приближениями, окончательно получим

$$\frac{u_л}{u_0} = \left(\frac{\alpha^2}{R_\delta}\right)^{\frac{1}{n+1}} \left(1 + 0{,}75\,\frac{k-1}{2}\,M_0^2\right)^{\frac{1+\omega}{1+n}} \left(\frac{1+\bar{T}_w}{2}\right)^{\frac{1+\omega}{1+n}}. \quad (130)$$

Тогда выражение для напряжения трения (128) при $n = 7$, $\omega = 0{,}75$ принимает вид

$$\frac{\tau_w}{\rho_0 u_0^2} = \frac{0{,}0226}{R_\delta^{0,25}} \frac{\left(1 + \frac{k-1}{2}\,M_0^2\right)^{0,75}}{\left(1 + 0{,}75\,\frac{k-1}{2}\,M_0^2\right)^{1,31}} \bar{T}_w^{0,75} \left(\frac{2}{1+\bar{T}_w}\right)^{1,31}. \quad (131)$$

Прежде чем переходить к интегрированию уравнения количества движения (59), которое в случае пластины выглядит так:

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho_0 u_0^2}, \quad (132)$$

необходимо еще найти связь между δ^{**} и δ. Используя профиль скорости (116) и профиль температуры (124), получим

$$\frac{\delta^{**}}{\delta} = 1 - \frac{\delta^*}{\delta} - n\int_0^1 \frac{z^{n+1}\,dz}{\left(1 + \frac{k-1}{2}\,M_0^2\right)[(1-\bar{T}_w)\,z + \bar{T}_w] - \frac{k-1}{2}\,M_0^2 z^2},$$

$$\frac{\delta^*}{\delta} = 1 - n\int_0^1 \frac{z^n\,dz}{\left(1 + \frac{k-1}{2}\,M_0^2\right)[(1-\bar{T}_w)\,z + \bar{T}_w] - \frac{k-1}{2}\,M_0^2 z^2}.$$

Результаты расчета величин δ^*/δ и δ^{**}/δ для $n = 7$, $k = 1{,}4$ приведены на рис. 6.18, 6.19.

Для несжимаемой жидкости (при $M_0 = 0$, $\bar{T}_w = 1$)

$$\frac{\delta^{**}}{\delta} = \frac{n}{(n+1)(n+2)}, \quad \frac{\delta^*}{\delta} = \frac{1}{n+1}.$$

Интегрируя соотношение (132) с начальным условием $\delta = 0$ при $x = 0$, получим распределение толщины пограничного слоя вдоль пластины

$$\frac{\delta}{x} = \frac{0{,}0575}{R_x^{0,2}} \left(\frac{\delta^{**}}{\delta}\right)^{-0,8} \frac{\left(1 + \frac{k-1}{2}\,M_0^2\right)^{0.6}}{\left(1 + 0{,}75\,\frac{k-1}{2}\,M_0^2\right)^{1,05}} \bar{T}_w^{0,6} \left(\frac{2}{1+\bar{T}_w}\right)^{1,05}. \quad (133)$$

Подставляя найденное значение δ из (133) в (131), получим выражение для коэффициента трения

$$c_f = \frac{\tau_w}{\frac{\rho_0 u_0^2}{2}} = \frac{0{,}0922}{R_x^{0,2}} \left(\frac{\delta^{**}}{\delta}\right)^{0,2} \frac{\left(1 + \frac{k-1}{2} M_0^2\right)^{0,6}}{\left(1 + 0{,}75 \frac{k-1}{2} M_0^2\right)^{1,05}} \bar{T}_w^{0,6} \left(\frac{2}{1+\bar{T}_w}\right)^{1,05}. \quad (134)$$

После того как толщина пограничного слоя найдена, толщина вытеснения и толщина потери импульса находятся по известным отношениям δ^*/δ и δ^{**}/δ.

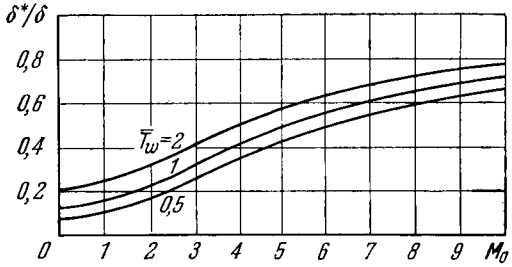


Рис. 6.18. Относительная толщина вытеснения для турбулентного пограничного слоя.

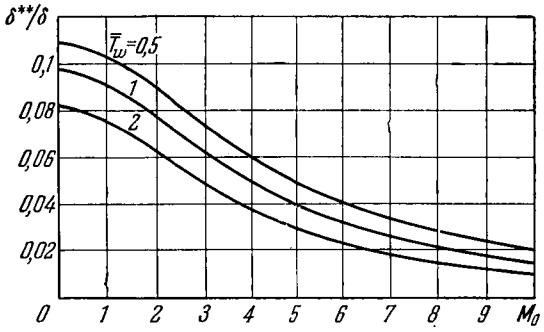


Рис. 6.19. Относительная толщина потери импульса для турбулентного пограничного слоя.

Коэффициент сопротивления пластины длиной l и шириной b равен

$$C_W = \frac{b \int_0^l \tau_w dx}{\frac{\rho_0 u_0^2}{2} bl}.$$

После подстановки значения τ_w из соотношения (134) и интегрирования получим

$$C_W = \frac{0{,}116}{R_l^{0,2}} \left(\frac{\delta^{**}}{\delta}\right)^{0,2} \frac{\left(1 + \frac{k-1}{2} M_0^2\right)^{0,6}}{\left(1 + 0{,}75 \frac{k-1}{2} M_0^2\right)^{1,05}} \bar{T}_w^{0,6} \left(\frac{2}{1+T_w}\right)^{1,05}. \quad (135)$$

Результаты расчета коэффициента сопротивления по формуле (135) для случая $\bar{T}_w = 1$ (отсутствия теплоотдачи) представлены на рис. 6.20.

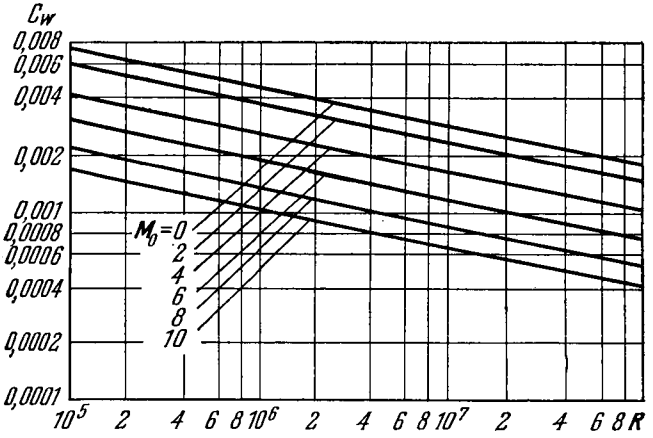


Рис. 6.20. Коэффициент сопротивления пластины при $\bar{T}_w = 1$.

Для несжимаемой жидкости при $M_0 = 0$, $\bar{T}_w = 1$ величина $\frac{\delta^{**}}{\delta} = \frac{7}{72}$, и поэтому

$$\frac{\delta_н}{x} = \frac{0{,}37}{R_x^{0,2}}, \quad c_{fн} = \frac{0{,}058}{R_x^{0,2}}, \quad C_{Wн} = \frac{0{,}073}{R_l^{0,2}}.$$

Для определения теплового потока воспользуемся интегралом (124) уравнения энергии

$$q_w = \lambda_w \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_w = \frac{\lambda_w}{\mu_w} \frac{T_0^* - T_w}{u_0} \tau_w.$$

Это выражение совпадает с формулой (48) для ламинарного пограничного слоя. Поэтому для безразмерного теплового

потока имеем (при $\mathrm{Pr}_w = 1$)

$$\mathrm{St} = \frac{q_w}{c_p \rho_0 u_0 (T_0^* - T_w)} = \frac{c_f}{2}. \qquad (136)$$

Соотношение (136) является следствием предположения о наличии аналогии между процессами переноса количества движения и тепла при $\mathrm{Pr} = \mathrm{Pr}_т = 1$ (аналогия Рейнольдса).

Изложенный метод расчета турбулентного пограничного слоя сжимаемого газа подтверждается результатами экспериментальных исследований. На рис. 6.21 приведены расчетные значения относительной скорости на границе ламинарного подслоя (по формуле (130)) и опытные значения Лобба, Винклера и Перча. Сравнение экспериментальных и вычисленных коэффициентов трения для плоской пластины показано на рис. 6.22. Сплошная кривая представляет собой расчетное отношение $c_f/c_{fн}$, вычисленное при

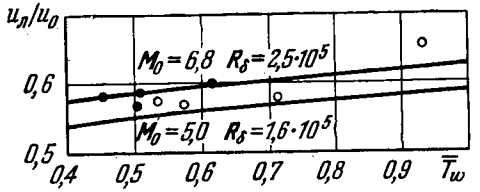


Рис. 6.21. Относительная скорость на границе ламинарного подслоя.

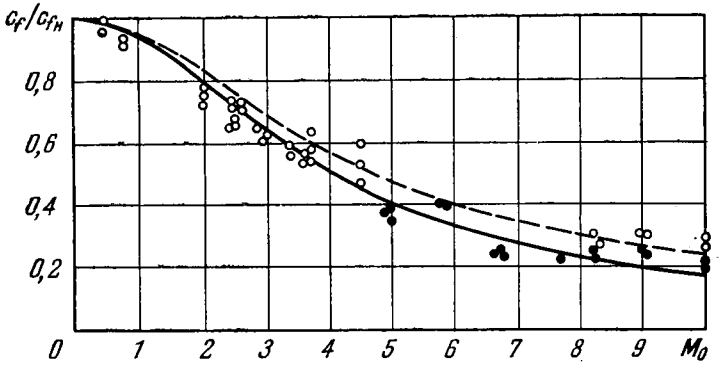


Рис. 6.22. Коэффициент трения для турбулентного пограничного слоя сжимаемого газа.

одинаковых числах Рейнольдса, отнесенных к толщине потери импульса. Черными точками обозначены экспериментальные значения этого отношения. Пунктирная кривая соответствует отношению $c_f/c_{fн}$, подсчитанному при одинаковых R_x. Опытные значения для этого случая показаны светлыми точками.

§ 5. Отрыв пограничного слоя

При наличии градиента давления во внешнем потоке течение в пограничном слое становится более сложным, чем при обтекании плоской пластины. Так как давление остается постоянным поперек пограничного слоя, то влияние градиента давления во внешнем потоке распространяется на весь пограничный слой. Это влияние в основном сводится к изменению профиля скорости в пограничном слое.

Причину такого изменения профиля скорости можно понять, если рассмотреть следующую упрощенную схему течения. Пусть в некотором сечении пограничного слоя имеется профиль скорости $u(y)$, причем на границе пограничного слоя $u(\delta) = u_0$. На некотором малом расстоянии Δx от этого сечения давление во внешнем потоке, а следовательно, и во всем пограничном слое изменится на Δp. Пренебрегая силами трения и считая, что течение происходит параллельно стенке, для каждой струйки жидкости можно написать уравнение Бернулли

$$\rho u \Delta u = -\Delta p, \quad \text{или} \quad \frac{\Delta u}{u} = -\frac{\Delta p}{\rho u^2}.$$

Следовательно, в сечении, расположенном на расстоянии Δx от начального сечения, скорость u_1 будет равна

$$u_1 = u + \Delta u = u\left(1 + \frac{\Delta u}{u}\right) = u\left(1 - \frac{\Delta p}{\rho u^2}\right).$$

Соответственно во внешнем потоке

$$u_{01} = u_0\left(1 - \frac{\Delta p}{\rho u_0^2}\right).$$

Тогда окончательно имеем

$$\frac{u_1}{u_{01}} = \frac{u}{u_0}\left\{\frac{1 - \Delta p/\rho u^2}{1 - \Delta p/\rho u_0^2}\right\}.$$

Если течение происходит против нарастающего давления, то $\Delta p > 0$, и при $u < u_0$ множитель в скобках будет меньше единицы. Следовательно, профиль скорости в этом случае становится менее наполненным. Если давление вдоль потока уменьшается, то $\Delta p < 0$, и при $u < u_0$ множитель в скобках будет больше единицы. В этом случае профиль скорости становится более наполненным. Результаты экспериментального исследования пограничного слоя при наличии градиента давления во внешнем потоке качественно подтверждают полученные выводы. На рис. 6.23 приведены профили скорости в турбулентном по-

граничном слое несжимаемой жидкости при наличии как положительного, так и отрицательного градиента давления. Опыты проводились в суживающихся плоских каналах (течение с отрицательным градиентом давления: $\alpha < 0$) и в расширяющихся каналах (течение с положительным градиентом давления: $\alpha > 0$). Половина угла раствора α характеризует величину градиента давления.

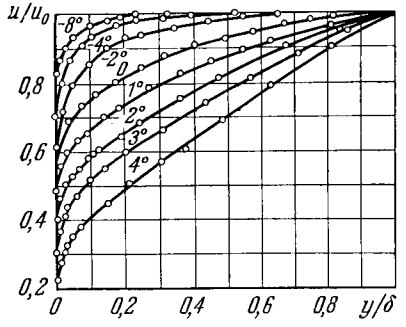


Рис. 6.23. Профили скорости при наличии градиента давления (по опытам Никурадзе).

При достаточно большом положительном градиенте давления во внешнем потоке слои жидкости вблизи стенки могут остановиться и даже начать двигаться в обратном направлении, т. е. происходит отрыв пограничного слоя (рис. 6.4). Сечение пограничного слоя, начиная с которого возникает обратное движение жидкости, носит название точки отрыва пограничного слоя. В этой точке выполняется соотношение

$$(\partial u/\partial y)_w = 0, \quad \text{то есть} \quad \tau_w = 0. \tag{137}$$

Отрыв пограничного слоя всегда связан с образованием вихрей, которые проникают во внешний поток и существенно искажают картину течения, полученную по теории идеальной жидкости, даже вдали от тела. Для пояснения приведем некоторые сведения об обтекании круглого цилиндра несжимаемой жидкостью. На рис. 6.24 показаны две кривые распределения давления вдоль окружности цилиндра; пунктирная кривая построена по теории идеальной жидкости, сплошная кривая получена экспериментально Флаксбартом при числе Рейнольдса

$$\mathrm{R} = \rho_\infty u_\infty d/\mu_\infty = 6{,}7 \cdot 10^5,$$

т. е. при турбулентном пограничном слое. Индексом ∞ здесь обозначены параметры в невозмущенном потоке. На передней стороне цилиндра измеренное распределение давления более или менее совпадает с теоретическим распределением для идеальной жидкости. На задней стороне цилиндра измеренные значения давления существенно отличаются от теоретических. Это объясняется тем, что при $\varphi = 125°$ происходит отрыв пограничного слоя. Вследствие отличия распределения давления от теоретического возникает сопротивление давления. Аналогичная картина наблюдается и при обтекании крыловых профилей. Таким образом, отрыв пограничного слоя оказывает существенное

влияние на картину обтекания различных тел, а следовательно, и на такие основные характеристики, как сопротивление и подъемная сила. В связи с этим становится очевидной необходимость уметь рассчитывать положение точки отрыва пограничного слоя. В наиболее общем виде условия отрыва пограничного слоя были получены Г. М. Бам-Зеликовичем на основании теории размерности.

Течение в произвольном сечении пограничного слоя будет определено, если задать:

а) профиль скорости в некотором начальном сечении пограничного слоя;

б) распределение давления на границе пограничного слоя;

в) значение скорости u_0 и плотности ρ_0 внешнего потока в какой-либо одной точке;

г) характерный линейный размер, соответствующий рассматриваемому сечению (например, расстояние x этого сечения от начального).

Распределение давления на границе пограничного слоя может быть задано значением самого давления p_0 и всех его производных (p_0', p_0'' и т. д.) в рассматриваемом сечении.

Основное предположение, на котором основываются все дальнейшие выводы, заключается в следующем: на течение в некотором сечении пограничного слоя существенное влияние оказывает внешний поток только в близкой окрестности этого сечения.

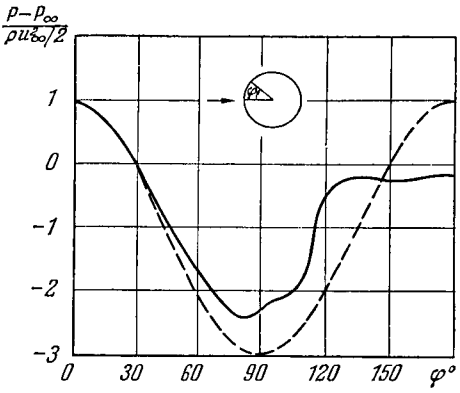


Рис. 6.24. Распределение давления на круглом цилиндре.

Это предположение подтверждается следующими экспериментальными фактами. Во-первых, профиль скорости в пограничном слое на стенках прямолинейных участков цилиндрических труб такой же, как и профиль скорости на плоской пластине, независимо от того, какое течение — ускоренное или замедленное — предшествовало течению около прямолинейного участка трубы. Во-вторых, профиль скорости над точкой отрыва в турбулентном пограничном слое несжимаемой жидкости не зависит от параметров течения во внешнем потоке до точки отрыва. Универсальность отрывного профиля при различном характере течения до сечения отрыва также говорит о том, что

можно пренебречь влиянием внешнего потока вне небольшой окрестности рассматриваемого сечения. Наконец, опыты по исследованию взаимодействия скачка уплотнения с пограничным слоем непосредственно показывают, что заметные изменения в пограничном слое происходят лишь на расстоянии, равном всего нескольким толщинам пограничного слоя. Следовательно, даже очень сильное изменение давления во внешнем потоке, вызванное скачком уплотнения, влияет на характер течения в пограничном слое впереди скачка уплотнения лишь в малой окрестности.

Итак, эксперименты показывают, что на течение в некотором сечении пограничного слоя влияют лишь параметры внешнего потока вблизи этого сечения. Отсюда следует, что влиянием профиля скорости в начальном сечении можно пренебречь. Вследствие этого за характерный линейный размер целесообразно брать не расстояние x от начального сечения, а какую-либо линейную характеристику z пограничного слоя в рассматриваемом сечении (например, толщину вытеснения δ^* или толщину потери импульса δ^{**}). Из основного предположения следует также, что если во внешнем потоке все производные давления p_0 по x в данной точке конечны, то в разложении давления p_0 по x можно ограничиться первой производной p_0.

При сделанных предположениях получаем следующую систему параметров, определяющих течение в произвольном сечении ламинарного или турбулентного пограничного слоя:

u_0 — скорость, ρ_0 — плотность, p_0 — давление внешнего потока в рассматриваемом сечении, p_0' — первая производная давления по x, z — характерный размер пограничного слоя, μ_0 — коэффициент динамической вязкости, λ_0 — коэффициент теплопроводности, k — отношение теплоемкостей.

По основной теореме теории размерностей любой безразмерный комплекс является функцией только безразмерных комбинаций определяющих параметров.

Тогда, например, для безразмерного напряжения трения на стенке имеем

$$\frac{\tau_w}{\rho_0 u_0^2} = \Phi_1\left(\mathbf{M}_0, \frac{p_0' z}{\rho_0 u_0^2}, \frac{\rho_0 u_0 z}{\mu_0}\right), \tag{138}$$

где $\mathbf{M}_0$ — число Маха внешнего потока.

Функция Φ_1 должна, очевидно, зависеть еще от чисел $\mathbf{Pr}$ и k, но эти аргументы опущены, так как для данного газа их можно считать постоянными.

В точке отрыва пограничного слоя $\tau_w = 0$. Разрешая уравнение (138) относительно $(p_0' z)/(\rho_0 u_0^2)$ и разлагая в ряд по

степеням $\mu_0/(\rho_0 u_0 z)$, получаем

$$\frac{p_0' z}{\rho_0 u_0^2} = \Phi_2\left(M_0, \frac{\mu_0}{\rho_0 u_0 z}\right) = \varphi_0(M_0) + \varphi_1(M_0)\frac{\mu_0}{\rho_0 u_0 z} + \ldots \quad (139)$$

Совершим теперь в равенстве (139) тот предельный переход, который делается при выводе уравнений пограничного слоя, т. е. предположим, что вязкость стремится к нулю ($\mu_0 \to 0$).

В ламинарном пограничном слое при стремлении коэффициента вязкости к нулю (число Рейнольдса $R \to \infty$) характерный размер пограничного слоя также стремится к нулю $\left(z/l \sim \sim 1/\sqrt{R} \to 0\right.$, где l — характерный размер обтекаемого тела). Следовательно, $(p_0' z)/(\rho_0 u_0^2)$ стремится к нулю, как $1/\sqrt{R}$.

Кроме того, имеем

$$\frac{\mu_0}{\rho_0 u_0 z} = \frac{\mu_0}{\rho_0 u_0 l}\frac{l}{z} = \frac{1}{R}\frac{l}{z}.$$

Отсюда получаем, что $\mu_0/(\rho_0 u_0 z)$ стремится к нулю (при $\mu_0 \to 0$) так же, как $1/\sqrt{R}$. Вследствие этого в формуле (139) члены, пропорциональные $(\mu_0/\rho_0 u_0 z)^n (n \geqslant 0)$, стремятся к нулю, как $\left(1/\sqrt{R}\right)^n$. Так как $\varphi_0(M_0)$ не стремится к нулю (при $\mu_0 \to \to 0$), то для ламинарного пограничного слоя величина $\varphi_0(M_0)$ должна тождественно равняться нулю. Умножая обе части равенства (139) на $(\rho_0 u_0 z)/\mu_0$ и переходя к пределу при $R \to \infty$, получим, что в точке отрыва ламинарного пограничного слоя справедливо соотношение

$$\frac{p_0' z^2}{\mu_0 u_0} = \varphi_1(M_0). \quad (140)$$

В случае турбулентного пограничного слоя характерный размер пограничного слоя при $\mu_0 \to 0$ не стремится к нулю, так как толщина пограничного слоя определяется турбулентным перемешиванием. Следовательно, не стремится к нулю и величина $p_0' z/\rho_0 u_0^2$. В этом случае $\varphi_0(M_0) \neq 0$, все же остальные члены в равенстве (139) стремятся к нулю при $\mu_0 \to 0$. Поэтому для турбулентного пограничного слоя в точке отрыва должно выполняться соотношение

$$\frac{p' z}{\rho_0 u_0^2} = \varphi_0(M_0). \quad (141)$$

Функции $\varphi_0(M_0)$ и $\varphi_1(M_0)$ могут быть определены теоретически и экспериментально. Их значения, конечно, зависят от того, какой из параметров принимается за характерный размер пограничного слоя z. Для турбулентного пограничного слоя в несжимаемой жидкости ($M_0 = 0$) величина $\varphi_0(0)$ равна примерно

0,015, если за характерный размер z принять толщину вытеснения δ^*. Если за характерный размер принять толщину потери импульса δ^{**}, то $\varphi_0(0) = 0{,}005$.

Для ламинарного пограничного слоя в несжимаемой жидкости ($M_0 = 0$) величина $\varphi_1(0)$ зависит от предыстории течения. Согласно расчетам, проведенным с использованием профилей скорости в виде полиномов (по методу Польгаузена), величина $\varphi_1(0)$ равна 1,92, если за характерный размер принята толщина вытеснения δ^*, и 0,157, если за характерный размер принята толщина потери импульса δ^{**}. Если использовать автомодельные решения уравнений пограничного слоя при постоянном значении параметра β, то величина $\varphi_1(0)$ будет соответственно равна 1,11 и 0,068.

Для турбулентного пограничного слоя при $M_0 \neq 0$ величина $\varphi_0(M_0)$ может быть определена следующим образом. Будем искать распределение напряжения трения поперек пограничного слоя в точке отрыва в виде многочлена от y/δ

$$\frac{\tau}{\rho_0 u_0^2} = a_0 + a_1 \frac{y}{\delta} + a_2 \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 + a_3 \left(\frac{y}{\delta}\right)^3, \tag{142}$$

причем для нахождения коэффициентов a_0, a_1, a_2, a_3 используем следующие условия:

$$\left.\begin{array}{ll} y = 0, & \tau_w = 0 \quad \text{(в точке отрыва)}, \\ y = 0, & \left(\frac{\partial \tau}{\partial y}\right)_w = \frac{dp_0}{dx} \quad \text{(следует из уравнения движения (117))} \\ y = \delta, & \tau = 0 \quad \text{(на границе пограничного слоя)}. \end{array}\right\}$$

Еще одно необходимое условие может быть получено дифференцированием по y уравнения движения (117):

$$\rho u \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \rho \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial \rho}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2}.$$

Отсюда при $y = 0$ имеем ($u = v = 0$, $\partial u/\partial y = 0$) $\partial^2\tau/\partial y^2 = 0$. Тогда, для коэффициентов полинома (142) получаем

$$a_0 = a_2 = 0, \quad a_1 = -a_3 = \frac{\delta}{\rho_0 u_0^2}\frac{dp_0}{dx},$$

и соотношение (142) принимает вид

$$\frac{\tau}{\rho_0 u_0^2} = \left[\frac{y}{\delta} - \left(\frac{y}{\delta}\right)^3\right] \frac{\delta}{\rho_0 u_0^2}\frac{dp_0}{dx}. \tag{143}$$

Напряжение трения в турбулентном пограничном слое можно представить в виде суммы

$$\tau = \tau_м + \tau_т,$$

где $\tau_м = \mu \partial u/\partial y$ — напряжение трения, обусловленное молекулярным переносом, а $\tau_т$ — касательное напряжение, вызванное турбулентными пульсациями.

Согласно гипотезе Прандтля

$$\tau_т = \rho l^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2,$$

причем l — длина пути смешения. Поэтому соотношение (143) можно переписать в виде

$$\mu \frac{\partial u}{\partial y} + \rho l^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \delta \frac{dp_0}{dx}\left[\frac{y}{\delta} - \left(\frac{y}{\delta}\right)^3\right]. \qquad (144)$$

Вдали от точки отрыва напряжения вязкого трения пренебрежимо мало по сравнению с напряжением турбулентного трения для всех расстояний от стенки, превышающих некоторую определенную величину, которая называется толщиной ламинарного подслоя. Внутри этого подслоя напряжение вязкого трения достигает больших значений, так как производная $\partial u/\partial y$ здесь велика. Однако в точке отрыва $(\partial u/\partial y)_w = 0$ (при $y = 0$) и напряжение вязкого трения будет малым даже у стенки. Поэтому вязким трением можно пренебречь во всем сечении. Тогда из (144) получим

$$\rho l^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \delta \frac{dp_0}{dx}\left[\frac{y}{\delta} - \left(\frac{y}{\delta}\right)^3\right]. \qquad (145)$$

Это уравнение может служить для определения профиля скорости в точке отрыва.

Так как начиная с точки отрыва поток ведет себя приблизительно как свободная турбулентная струя, то можно предположить, что путь смешения в сечении отрыва постоянен и равен по величине пути смешения для свободных турбулентных струй. Как известно, из теории струй (§ 1 гл. VII) отношение пути смешения к ширине струи, которой в нашем случае эквивалентна толщина пограничного слоя δ, есть постоянная величина, т. е. $\bar{l} = l/\delta = \text{const}$. Вводя безразмерные величины $\bar{\rho} = \rho/\rho_0$, $\bar{u} = u/u_0$, $\bar{y} = y/\delta$, из соотношения (145) получим

$$\bar{\rho}\bar{l}^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}\right)^2 = \frac{\delta}{\rho_0 u_0^2} \frac{dp_0}{dx}(\bar{y} - \bar{y}^3). \qquad (146)$$

В случае отсутствия теплообмена и $\mathrm{Pr} = 1$ температура торможения постоянна, и поэтому

$$\bar{\rho} = \frac{1}{1 + \frac{k-1}{2} \mathrm{M}_0^2 (1 - \bar{u}^2)}.$$

Интегрируя уравнение (146) по пограничному слою от $\bar{y}=0$ до $\bar{y}$, получим

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{k-1}{2}\mathrm{M}_0^2}}\arcsin\frac{\bar{u}}{\sqrt{1+\frac{2}{k-1}\frac{1}{\mathrm{M}_0^2}}}=$$

$$=\frac{1}{\bar{l}}\sqrt{\frac{\delta}{\rho_0 u_0^2}\frac{dp_0}{dx}}\int_0^{\bar{y}}\sqrt{\bar{y}-\bar{y}^3}\,d\bar{y},$$

или

$$\bar{u}=\sqrt{1+\frac{2}{k-1}\frac{1}{\mathrm{M}_0^2}}\sin\left(\frac{1}{\bar{l}}\sqrt{\frac{k-1}{2}\mathrm{M}_0^2\frac{\delta}{\rho_0 u_0^2}\frac{dp_0}{dx}}\int_0^{\bar{y}}\sqrt{\bar{y}-y^3}\,d\bar{y}\right). \tag{147}$$

При $\bar{y}=1$ $\bar{u}=1$, поэтому из соотношения (147) следует

$$\frac{\delta}{\rho_0 u_0^2}\frac{dp_0}{dx}=\frac{2}{k-1}\frac{1}{\mathrm{M}_0^2}\left(\frac{\bar{l}}{A}\arcsin\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{k-1}\frac{1}{\mathrm{M}_0^2}}}\right)^2, \tag{148}$$

где

$$A=\int_0^1\sqrt{\bar{y}-\bar{y}^3}\,d\bar{y}=0{,}478.$$

Подставляя (148) в (147), получим окончательно для распределения скоростей в точке отрыва

$$\bar{u}=\sqrt{1+\frac{2}{k-1}\frac{1}{\mathrm{M}_0^2}}\sin\left(\frac{\bar{l}}{A}\arcsin\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{k-1}\frac{1}{\mathrm{M}_0^2}}}\int_0^{\bar{y}}\sqrt{\bar{y}-\bar{y}^3}\,d\bar{y}\right). \tag{149}$$

Из (141) и (148) следует, что если за характерный размер принять толщину вытеснения δ^*, то

$$\varphi_0(\mathrm{M}_0)=\frac{2}{k-1}\frac{1}{\mathrm{M}_0^2}\left(\frac{\bar{l}}{A}\arcsin\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{k-1}\frac{1}{\mathrm{M}_0^2}}}\right)^2\frac{\delta^*}{\delta}.$$

Для несжимаемой жидкости ($\mathrm{M}_0=0$) имеем

$$\varphi_0(0)=\left(\frac{\delta^*}{\delta}\right)_{\text{н}}\left(\frac{\bar{l}}{A}\right)^2.$$

Исключая из этих двух соотношений неизвестную величину l, окончательно получим

$$\varphi_0(M_0) = \frac{2}{k-1}\frac{1}{M_0^2}\frac{\delta^*/\delta}{(\delta^*/\delta)_н}\varphi(0)\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{k-1}\frac{1}{M_0^2}}}\right)^2. \quad (150)$$

Отношение δ^*/δ определяется выражением (57), так как профили скорости и температуры в пограничном слое известны.

Изменение $\varphi_0(M_0)$ в зависимости от числа M_0, рассчитанное по формуле (150), показано на рис. 6.25 сплошной кривой. Там

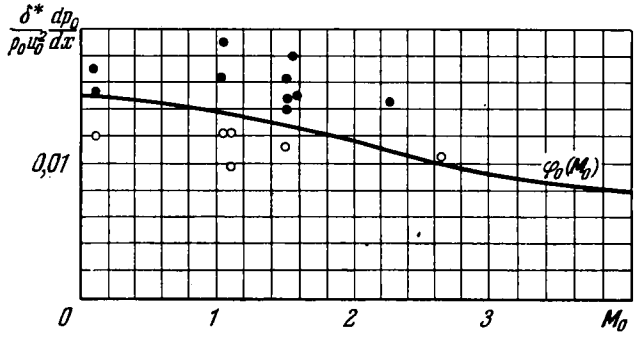


Рис. 6.25. Зависимость параметра отрыва турбулентного пограничного слоя от числа Маха M_0.

же нанесены результаты опытов. Светлые точки соответствуют безотрывному течению, темные точки относятся к течению с отрывом пограничного слоя.

Таким образом, отрыв пограничного слоя возникает в том случае, когда величина параметра

$$\xi = \frac{\delta^*}{\rho_0 u_0^2}\frac{dp_0}{dx}$$

достигает некоторого критического значения, которое зависит от числа M_0 и определяется формулой (150). Поэтому для обеспечения безотрывного течения при торможении потока газа ($dp_0/dx > 0$) необходимо осуществлять торможение таким образом, чтобы параметр ξ нигде не достигал своего критического значения.

Для определения распределения параметра ξ вдоль обтекаемой поверхности, кроме параметров внешнего потока, необходимо знать характерный размер пограничного слоя (например, толщину вытеснения). Расчет пограничного слоя при наличии градиента давления во внешнем потоке является довольно

сложной задачей, так как в этом случае профили скорости (и температуры) будут зависеть от градиента давления и изменяться от сечения к сечению.

Для ламинарного пограничного слоя как несжимаемой жидкости, так и сжимаемого газа при переменном давлении во внешнем потоке существуют различные методы расчета. Наиболее точные методы основываются на численном интегрировании дифференциальных уравнений и требуют применения вычислительных машин. Для турбулентного пограничного слоя несжимаемой жидкости разработаны приближенные, полуэмпирические методы расчета. В случае небольшого градиента давления во внешнем потоке расчет турбулентного пограничного слоя сжимаемой жидкости может быть произведен при условии, что влияние градиента давления учитывается лишь в интегральном соотношении количества движения (59). При этом считается, что профили скорости и температуры, а также зависимость напряжения трения от характерной толщины пограничного слоя имеют такой же вид, как и в случае обтекания плоской пластины.

§ 6. Взаимодействие пограничного слоя со скачками уплотнения

Нарастание пограничного слоя на обтекаемой поверхности всегда оказывает влияние на внешний поток. При отсутствии скачков уплотнения это влияние сводится к следующему. Утолщение пограничного слоя в направлении течения связано с увеличением толщины вытеснения δ^*, что приводит к отклонению линий тока внешнего потока. Поэтому течение во внешнем потоке будет таким же, как при обтекании фиктивного контура, смещенного по отношению к действительному на толщину вытеснения. Следовательно, при расчете течения нужно применять метод последовательных приближений: сначала рассчитывается обтекание тела потоком идеальной жидкости, затем по найденному распределению давления вдоль поверхности тела находятся параметры пограничного слоя (в том числе толщина вытеснения), далее рассчитывается обтекание фиктивного тела, контур которого смещен на величину δ^* и т. д. Однако обычно толщина вытеснения мала по сравнению с размерами тела и поэтому можно ограничиться первым приближением.

При наличии скачков уплотнения пограничный слой обычно оказывает более сильное влияние на внешний поток, в некоторых случаях существенно изменяя картину всего течения. Дело в том, что в скачке уплотнения изменения скорости и температуры по направлению нормали к фронту скачка, которое обычно мало отличается от направления потока, велики по сравнению с изменениями этих величин вдоль скачка. В пограничном слое

изменения скорости и температуры в направлении потока обычно незначительны, в то время как изменения этих величин поперек пограничного слоя велики. Следовательно, в области взаимодействия скачка уплотнения с пограничным слоем скорость и температура существенно изменяются как вдоль, так и поперек потока. Поэтому основные допущения теории пограничного слоя и теории скачков в этом случае перестают быть справедливыми и теоретическое исследование области взаимодействия скачков уплотнения с пограничным слоем представляет чрезвычайно сложную задачу. Экспериментальные исследования этой области течения тоже являются не простым делом, однако полученные данные позволяют представить физическую картину взаимодействия и определить некоторые количественные закономерности.

Наличие даже слабого скачка уплотнения приводит к резкому увеличению давления во внешнем потоке. Рост давления передается навстречу потоку по дозвуковой части пограничного слоя. Линии тока отклоняются от стенки, порождая в сверхзвуковой части пограничного слоя семейство волн сжатия, которые распространяются во внешний поток и оказывают влияние на форму и интенсивность скачка уплотнения вблизи области взаимодействия. Продольный градиент давления в пограничном слое оказывается значительно меньше, чем во внешнем потоке. Если скачок слабый, то движение в пограничном слое происходит под воздействием небольшого положительного градиента давления и отрыв потока не происходит. С увеличением интенсивности скачка уплотнения во внешнем потоке возрастает градиент давления вблизи стенки и возникает отрыв пограничного слоя. При этом увеличивается отклонение линий тока в сверхзвуковой части течения, благодаря чему поддерживается необходимое распределение давления, соответствующее данной интенсивности скачка уплотнения. В зависимости от условий во внешнем потоке (интенсивности скачка уплотнения, местного числа M, ускоренного или замедленного характера течения) и формы обтекаемого тела возможны два случая. В первом случае поток после отрыва присоединяется снова к стенке. Сразу за скачком уплотнения возникают волны разрежения, как при обтекании внешнего тупого угла. В месте присоединения поток направлен под некоторым углом к стенке, поэтому здесь возникает новый скачок уплотнения, который может вызвать иногда новый отрыв пограничного слоя. Таким образом, могут появиться несколько последовательных скачков уплотнения, что наблюдается при обтекании крыловых профилей с образованием местных сверхзвуковых зон и при течении в каналах с замыкающим скачком уплотнения. Во втором случае возникает развившийся отрыв, основные закономерности которого определяются условиями

смешения и в очень сильной степени зависят от характера течения за точкой отрыва. Развившийся отрыв наблюдается, например, при обтекании кругового цилиндра, сферы, крылового профиля под углом атаки, при течении перед уступом.

Таким образом, при малой интенсивности скачка уплотнения картина течения во внешнем потоке мало отличается от картины, предсказанной теорией идеальной жидкости. Это отличие заключается в небольшом искривлении скачков уплотнения в области взаимодействия. Развитие пограничного слоя в этой области происходит под воздействием плавного повышения давления и описывается обычными уравнениями пограничного слоя. Однако в большинстве случаев на практике приходится иметь дело со скачками уплотнения, интенсивность которых такова, что возникает отрыв пограничного слоя. Хотя качественная картина взаимодействия скачка уплотнения с ламинарным и турбулентным пограничными слоями принципиально одинакова, количественные характеристики взаимодействия различны из-за существенного отличия в профилях скорости при ламинарном и турбулентном течениях.

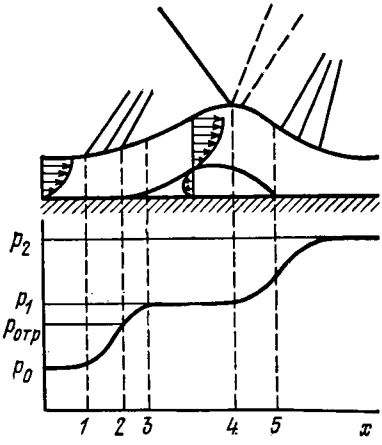


Рис. 6.26. Схема течения и характерное распределение давления при взаимодействии скачка уплотнения с ламинарным пограничным слоем: *1* — начало повышения давления, *2* — точка отрыва, *3* — начало области постоянного давления, *4* — место падения скачка уплотнения, *5* — точка присоединения.

Типичная схема взаимодействия падающего скачка уплотнения с ламинарным пограничным слоем на плоской поверхности и соответствующее распределение давления на стенке показаны на рис. 6.26. В невозмущенном потоке давление p_0 постоянно. При приближении к точке отрыва давление начинает повышаться и продолжает расти за точкой отрыва, достигая некоторого постоянного значения p_1 в отрывной зоне. Затем давление повышается до значения p_2, соответствующего давлению за падающим и отраженным скачками. В этой области повышения давления располагается точка присоединения. Таким образом, при отрыве пограничного слоя, вызванном взаимодействием со скачком уплотнения, существуют два важных параметра, связанных с давлением. Первый параметр представляет собой отношение давления в точке отрыва $p_{отр}$ к давлению в невозму-

щенном потоке p_0, второй — отношение давления в зоне отрыва p_1 к давлению p_0. Второй параметр носит название *критического отношения давлений* и характеризует перепад давлений в косом скачке, возникающем перед точкой отрыва.

Замечательная особенность явления взаимодействия заключается в том, что параметры потока вблизи точки отрыва не зависят от причины, вызвавшей отрыв, а зависят лишь от чисел Маха и Рейнольдса в невозмущенном потоке. Если числа M_0 и R совпадают, то распределение давления вблизи точки отрыва оказывается одинаковым при взаимодействии пограничного слоя с падающим извне скачком уплотнения, со скачком уплотнения, образующимся при обтекании вогнутой криволинейной стенки, внутреннего тупого или прямого угла, со скачком уплотнения в сопле на режимах истечения с большим перерасширением (рис. 6.27). При этом относительное давление в точке отрыва

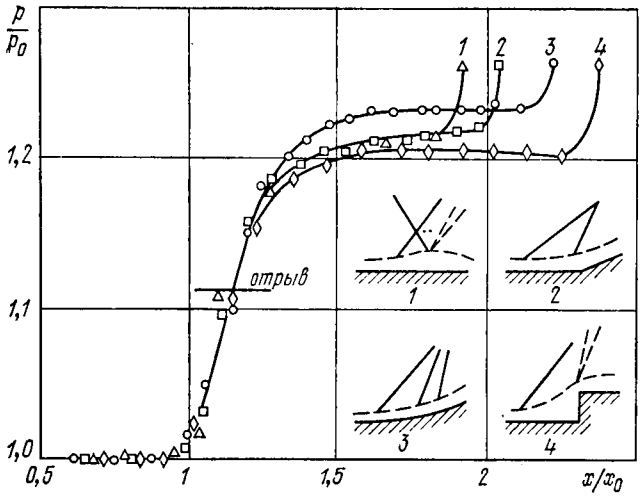


Рис. 6.27. Распределение давления в зоне отрыва при различных условиях взаимодействия при $M_0 = 2$, $R_x = 2 \cdot 10^5$: *1* — падающий скачок уплотнения, *2* — обтекание тупого угла, *3* — обтекание вогнутой стенки, *4* — течение перед уступом, x_0 — расстояние от передней кромки до начала взаимодействия.

$p_{отр}/p_0$ и критическое отношение давления p_1/p_0 также являются универсальными функциями чисел Маха и Рейнольдса. Согласно приближенным теориям Г. Гэдда и Р. Хаккинена относительное давление в точке отрыва при $M_0 > 1{,}2$ может быть найдено по формуле

$$\frac{p_{отр}}{p_0} = 1 + 0{,}57 \frac{kM_0^2}{[(M_0^2 - 1)R_x]^{1/4}}. \qquad (151)$$

Критическое отношение давления определяется по аналогичной формуле, отличающейся лишь величиной численного коэффициента,

$$\frac{p_1}{p_0} = 1 + 0{,}94\frac{kM_0^2}{[(M_0^2-1)R_x]^{1/4}}. \qquad (152)$$

Значения $p_{отр}/p_0$ и p_1/p_0 для $M_0 = 2$, рассчитанные по формулам (151) и (152) (сплошные кривые) и полученные экспериментально различными авторами при исследовании обтекания внутреннего тупого угла и при исследовании отражения косого скачка от плоской стенки, приведены на рис. 6.28. Сравнение

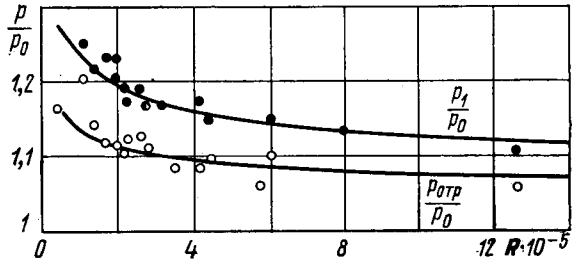


Рис. 6.28. Зависимость характерных отношений давлений от числа Рейнольдса для $M_0 = 2$ при взаимодействии скачка уплотнения с ламинарным пограничным слоем.

расчетных и экспериментальных значений $p_{отр}/p_0$ и p_1/p_0 при различных M_0 показано на рис. 6.29. Сплошная кривая соответствует расчету по формулам (151) и (152) при $R_x = 10^6$, экспериментальные данные приведены к тому же значению R_x с использованием установленной зависимости от числа Рейнольдса. Учитывая сложность измерений и приближенный характер теории, следует считать совпадение расчетных и экспериментальных результатов удовлетворительным.

Как следует из формул (151) и (152), относительное давление в точке отрыва и критическое отношение давлений увеличиваются при уменьшении числа R_x или увеличении числа M_0. Физически это означает, что чем меньше число R_x, тем больше силы вязкости, препятствующие отрыву. Увеличение числа M_0 ведет к увеличению количества движения массы газа в пограничном слое, что затрудняет отрыв.

Отношение давлений в косом скачке, возникающем из-за утолщения пограничного слоя вблизи точки отрыва, практически совпадает с критическим отношением давлений. По известному числу M_0 и перепаду давлений на косом скачке можно определить угол наклона скачка относительно набегающего потока.

Для полного построения картины течения необходимо еще уметь определять расстояние b, на которое отходит косой скачок уплотнения навстречу потоку. Согласно имеющимся в настоящее время экспериментальным данным это расстояние пропорционально толщине вытеснения невозмущенного пограничного слоя и увеличивается при увеличении интенсивности скачка уплотнения во внешнем потоке. Значения величины b, найденные Г. И. Петровым и его сотрудниками при исследовании обтекания внутреннего тупого угла потоком с числом $M_0 = 2{,}0$, в зависимости от интенсивности основного скачка приведены на рис. 6.30. Светлые кружки соответствуют $R_x = 3{,}5 \cdot 10^5$, а темные — $R_x = 5{,}3 \cdot 10^5$.

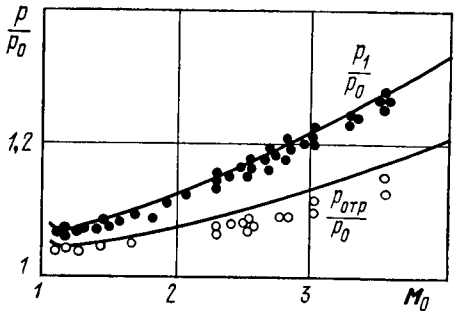


Рис. 6.29. Зависимость характерных отношений давлений от числа M_0 для $R_x = 10^6$ при взаимодействии скачка уплотнения с ламинарным пограничным слоем.

Большое количество экспериментальных исследований посвящено изучению взаимодействия скачка уплотнения с турбулентным пограничным слоем. Теоретическое рассмотрение этого вопроса затруднительно вследствие сложности явления, в то же время на практике этот случай встречается очень часто. Схема взаимодействия скачка уплотнения с турбулентным пограничным слоем при обтекании внутреннего тупого угла и соответствующее распределение давления на стенке показаны на рис. 6.31. Давление непрерывно увеличивается от значения p_0 в невозмущенном потоке до значения p_2, которое обычно совпадает с давлением за скачком уплотнения во внешнем потоке. Характерной особенностью распределения давления является наличие точки перегиба, причем значение давления в этой точке p_1 оказывается таким же, как за первым косым скачком уплотнения. Отноше-

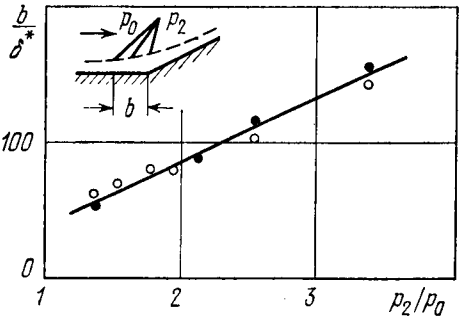


Рис. 6.30. Величина отхода косого скачка в зависимости от интенсивности основного скачка при ламинарном пограничном слое.

ние p_1/p_0 — критическое отношение давлений — является одним из основных параметров при взаимодействии скачка уплотнения с турбулентным пограничным слоем. Относительное давление в точке отрыва $p_{отр}/p_0$ несколько меньше, чем критическое отношение давлений. Различие в величинах этих двух

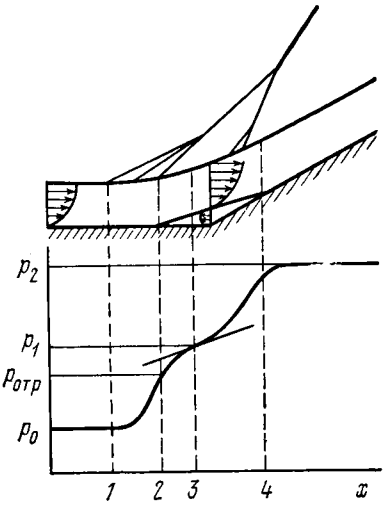


Рис. 6.31. Схема течения и характерное распределение давления при взаимодействии скачка уплотнения с турбулентным пограничным слоем: *1* — начало повышения давления, *2* — точка отрыва, *3* — точка перегиба в распределении давления, *4* — точка присоединения.

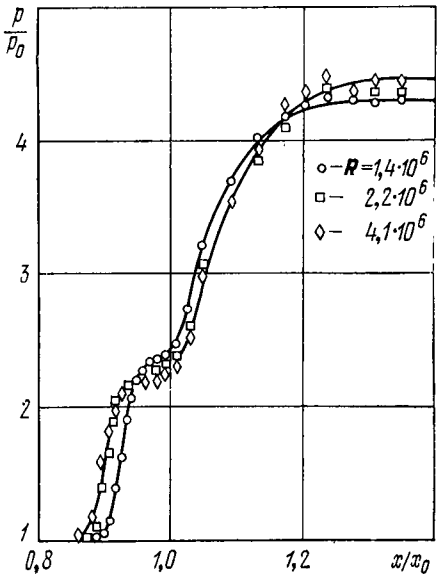


Рис. 6.32. Влияние числа Рейнольдса на распределение давления в области взаимодействия при обтекании тупого угла сверхзвуковым потоком, $M_0 = 2{,}7$; x_0 — расстояние от передней кромки до точки излома контура.

параметров менее значительно при взаимодействии скачка уплотнения с турбулентным пограничным слоем, чем при взаимодействии с ламинарным пограничным слоем.

Если перед скачком пограничный слой турбулентный, то распределение давления в области взаимодействия практически не зависит от числа Рейнольдса (рис. 6.32). Это объясняется слабым влиянием числа Рейнольдса на основные характеристики турбулентного течения (толщину пограничного слоя, профиль скорости, напряжение трения на стенке).

Аналогичная картина взаимодействия имеет место при наличии во внешнем потоке косого скачка уплотнения, при возник-

новении скачка уплотнения в местной сверхзвуковой зоне на крыловом профиле, при нерасчетном истечении из сопла.

Такое же распределение давления вплоть до точки отрыва наблюдается при обтекании уступа сверхзвуковым потоком. Однако в этом случае обычно не возникает точки перегиба в распределении давления, а происходит дальнейший монотонный рост давления за точкой отрыва до некоторого максимального значения, соответствующего давлению в отрывной зоне (рис. 6.33). Это связано с особенностью течения при наличии фиксированной точки присоединения на кромке уступа. На распределение давления за точкой отрыва сильно влияет высота уступа, если она соизмерима с толщиной пограничного слоя. Протяженность зоны отрыва при турбулентном пограничном слое значительно меньше, чем при ламинарном. Это вызывает более сильное отклонение линий тока внешнего потока и более значительное повышение давления (рис. 6.33).

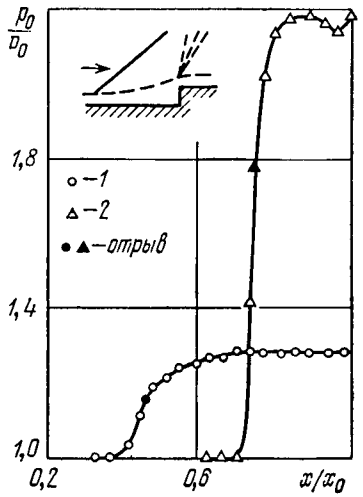


Рис. 6.33. Распределение давления при обтекании уступа сверхзвуковым потоком $M_0 = 2{,}3$: *1* — ламинарный пограничный слой $R_x = 2 \cdot 10^5$, *2* — турбулентный пограничный слой $R_x = 1{,}5 \cdot 10^6$, x_0 — расстояние от передней кромки до уступа.

Опытные данные показывают, что отношение давлений в отошедшем косом скачке p_1/p_0 (критическое отношение давлений) не зависит от способа осуществления и интенсивности основного скачка уплотнения и от числа Рейнольдса, а определяется значением числа M_0 внешнего невозмущенного потока. На рис. 6.34 приведены значения отношения давлений в отошедшем косом скачке, полученные И. П Некрасовым при исследовании взаимодействии падающего извне скачка уплотнения с пограничным слоем на пластине при различных числах Рейнольдса. Экспериментальные значения критического отношения давления при различных случаях взаимодействия в зависимости от числа M_0 приведены на рис. 6.35. На этом же рисунке сплошной линией обозначены значения этого отношения, вычисленные по формуле

$$\frac{p_1}{p_0} = 1 + 0{,}2\frac{kM_0^2}{(M_0^2-1)^{1/4}}, \qquad (153)$$

а пунктирной — по формуле Г. Гедда при $k = 1{,}4$

$$\frac{p_1}{p_0} = \left[\left(1 + \frac{k-1}{2}\mathrm{M}_0^2\right)\Big/\left(1 + 0{,}64\,\frac{k-1}{2}\mathrm{M}_0^2\right)\right]^{\frac{k}{k-1}}.$$

Экспериментальные значения относительного давления в точке отрыва $p_{\text{отр}}/p_0$ в зависимости от числа M_0 приведены на рис. 6.36. Сплошная кривая рассчитана по формуле

$$\frac{p_{\text{отр}}}{p_0} = 1 + 0{,}15\,\frac{k\mathrm{M}_0^2}{(\mathrm{M}_0^2 - 1)^{1/4}}.$$

Величина отхода косого скачка от точки пересечения падающего скачка со стенкой зависит от интенсивности падающего

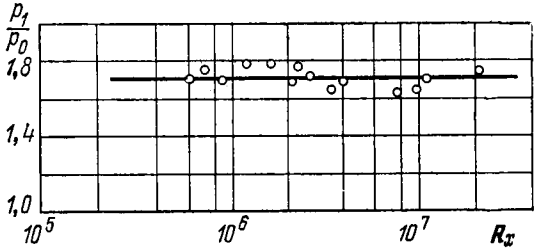


Рис. 6.34. Зависимость критического отношения давлений от числа Рейнольдса при турбулентном пограничном слое при $\mathrm{M}_0 = 1{,}95$.

скачка, от числа M_0 и от местных параметров пограничного слоя. На рис. 6.37 приведены результаты опытного определения этого линейного размера. Величина δ^* представляет собой толщину вытеснения пограничного слоя при отсутствии скачка уплотнения во внешнем потоке.

Следует иметь в виду, что наличие скачков уплотнения во внешнем потоке оказывает влияние на распределение скорости и давления в пограничном слое. При небольшой интенсивности падающего скачка это влияние сводится к некоторому утолщению пограничного слоя; профиль скорости при этом изменяется мало. При большой интенсивности падающего скачка уплотнения возникает отрыв пограничного слоя и образуется вихревая зона. Вниз по потоку от точки отрыва начинается перемешивание оторвавшихся струек и нарастание нового пограничного слоя на стенке. Благодаря передаче давления по дозвуковой части пограничного слоя вверх по потоку давление перестает быть постоянным поперек пограничного слоя, т. е. $\partial p/\partial y \neq 0$. Поэтому все методы расчета, разработанные в предположении постоян-

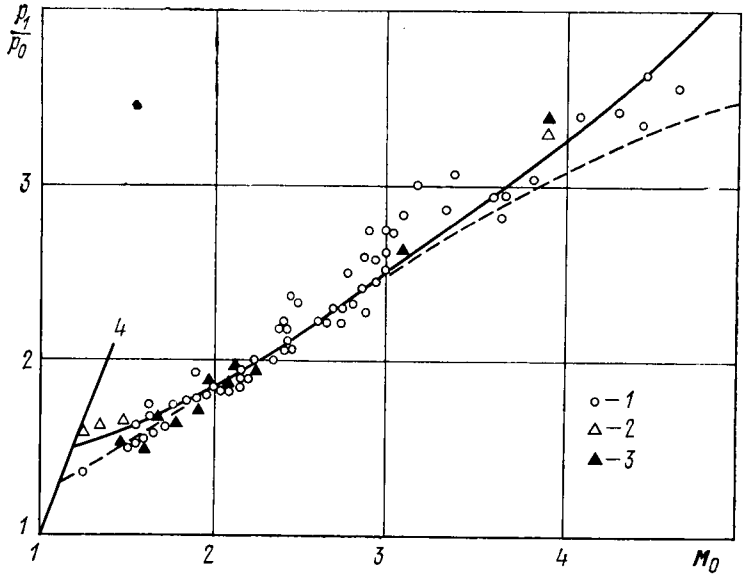


Рис. 6.35. Зависимость критического отношения давлений от числа M_0 при турбулентном пограничном слое: *1* — нерасчетное истечение из сопла, *2* — обтекание тупого угла, *3* — падающий извне скачок уплотнения, *4* — отношение давлений в прямом скачке.

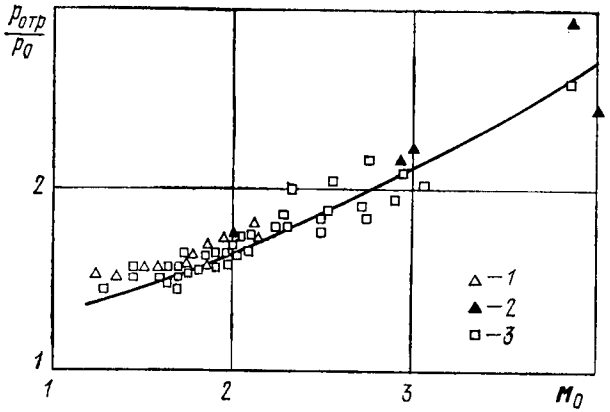


Рис. 6.36. Зависимость относительного давления в точке отрыва от числа M_0 при турбулентном пограничном слое: *1* — обтекание тупого угла; *2* — падающий извне скачок уплотнения, *3* — обтекание уступа.

ства статического давления в поперечном сечении пограничного слоя, могут быть использованы лишь в достаточном удалении от места взаимодействия. Сравнение приведенных выше данных показывает, что отрыв ламинарного пограничного слоя возникает при небольшой интенсивности скачка уплотнения, в то время как при турбулентном режиме течения величина критического перепада значительно больше. Более того, при $M_0 < 1{,}3$ величина критического перепада для турбулентного пограничного слоя больше отношения давлений в прямом скачке уплотнения. Следовательно, при $M_0 < 1{,}3$ отрыв турбулентного пограничного слоя не может возникнуть. Это объясняется тем, что профиль скорости при турбулентном режиме течения в пограничном слое значительно более наполненный, чем при ламинарном, т. е. соответствует большему количеству движения. Поэтому для отрыва турбулентного пограничного слоя необходим более интенсивный скачок уплотнения, чем для отрыва ламинарного. По этой же причине повышение давления вблизи стенки, вызванное скачком уплотнения одинаковой интенсивности, передается навстречу потоку в турбулентном пограничном слое на меньшее расстояние, чем в ламинарном. Вследствие этого величина отхода первого косого скачка уплотнения при турбулентном режиме течения меньше, чем при ламинарном (рис. 6.30, 6.37).

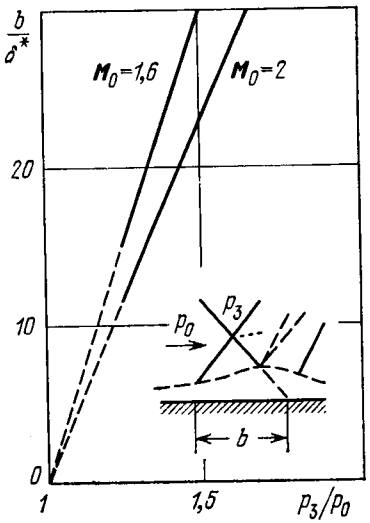


Рис. 6.37. Величина отхода косого скачка в зависимости от интенсивности падающего скачка при турбулентном пограничном слое.

§ 7. Течение жидкости в трубах

Течение жидкости в каналах различного сечения очень часто встречается на практике. При этом обычно скорость движения в канале значительно меньше скорости звука, и поэтому жидкость считается несжимаемой. Рассмотрим установившееся ламинарное осесимметричное течение в круглой цилиндрической трубе диаметра d. Пусть жидкость втекает в трубу с равномерной скоростью. На стенках образуется пограничный слой, толщина которого увеличивается вдоль трубы. Так как плот-

ность и расход через каждое сечение остаются постоянными, то сохраняется и средняя скорость. Поэтому уменьшение скорости вблизи стенки, вызванное наличием трения, приводит к увеличению скорости вне пограничного слоя (в ядре потока). Эта область течения называется *начальным участком*. На некотором расстоянии от входа толщина пограничного слоя становится равной радиусу трубы, т. е. происходит смыкание пограничных слоев. Эта область течения называется *основным участком* и характеризуется неизменным профилем скорости. Длина начального участка приближенно может быть определена по формуле

$$l_н = 0{,}03 d\mathrm{R}, \tag{154}$$

которая была получена теоретически Шиллером. Так, при $\mathrm{R} = 1000$ и $\mathrm{R} = 5000$ величина $l_н$ составляет соответственно 30 и 150 диаметров трубы. В дальнейшем мы будем рассматривать только течение в основном участке. Направим ось x вдоль оси трубы, а координату y будем отсчитывать от оси трубы. Считая, что течение во всех сечениях одинаково (составляющая скорости в осевом направлении не зависит от x), из уравнения неразрывности в цилиндрических координатах получим

$$\frac{d(yv)}{dy} = 0, \quad \text{или} \quad yv = \text{const},$$

где v — составляющая скорости в радиальном направлении. Так как $v = 0$, при $y = r$ (где r — радиус трубы), то, следовательно, $v = 0$ во всем потоке. Тогда уравнение Навье — Стокса в цилиндрических координатах принимает вид

$$\mu\left(\frac{d^2u}{dy^2} + \frac{1}{y}\frac{du}{dy}\right) = \frac{dp}{dx}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \tag{155}$$

причем граничным условием является $u = 0$ при $y = r$. Интегрируя уравнение (155), получим распределение скоростей в сечении трубы

$$u = -\frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dx}(r^2 - y^2). \tag{156}$$

Максимальная скорость достигается на оси трубы при $y = 0$

$$u_m = \frac{r^2}{4\mu}\left(-\frac{dp}{dx}\right). \tag{157}$$

Величина градиента давления dp/dx связана с расходом жидкости через трубу. Действительно,

$$Q = 2\pi\int_0^r uy\,dy = \frac{\pi r^4}{8\mu}\left(-\frac{dp}{dx}\right). \tag{158}$$

откуда средняя скорость течения будет

$$u_{ср} = \frac{r^2}{8\mu}\left(-\frac{dp}{dx}\right). \tag{159}$$

В технических расчетах принято вводить коэффициент сопротивления ζ

$$-\frac{dp}{dx} = \frac{\zeta}{d}\frac{\rho u_{ср}^2}{2}, \tag{160}$$

где d — диаметр трубы. Подставляя в соотношение (160) значение $\frac{dp}{dx}$ из равенства (159), получим

$$\zeta = \frac{2d}{\rho u_{ср}^2}\frac{8\mu u_{ср}}{r^2} = \frac{32\mu}{\rho u_{ср} r}. \tag{161}$$

Если ввести число Рейнольдса $\mathrm{R} = \frac{\rho u_{ср} d}{\mu}$, то закон сопротивления в круглой трубе при ламинарном течении будет иметь вид

$$\zeta = \frac{64}{\mathrm{R}}. \tag{162}$$

Этот закон хорошо подтверждается результатами экспериментальных исследований (рис. 6.38). Сплошная кривая рассчитана по формуле (162), а точки соответствуют опытным данным, полученным Гагеном.

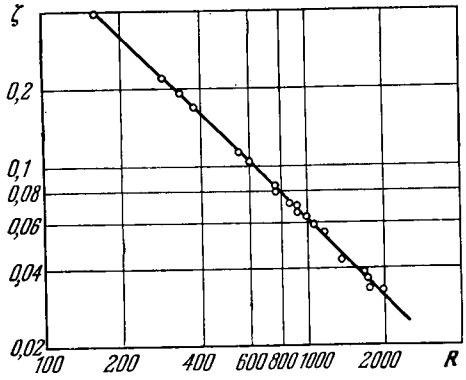


Рис. 6.38. Коэффициент сопротивления для гладких круглых труб при ламинарном течении.

Ламинарный режим течения имеет место только при числах Рейнольдса, меньших своего критического значения. Согласно опытам в трубах критическое число Рейнольдса приближенно равно $\mathrm{R}_{кр} = 2300$. Однако необходимо иметь в виду, что величина $\mathrm{R}_{кр}$ в значительной мере зависит от условий течения и в первую очередь от начальной турбулентности втекающего потока. В специальных экспериментах, где турбулентность внешнего потока была незначительной, удалось сохранить ламинарный режим течения до значительно больших, чем критическое, значений чисел Рейнольдса.

В общем случае при $R > R_{кр}$ возникает турбулентный режим течения в пограничном слое, причем так же, как и при ламинарном режиме, течение в трубе можно подразделить на входной начальный и основной участки. Длина начального участка составляет по измерениям Кирстена от 50 до 100 диаметров трубы, а по опытам Никурадзе — от 25 до 40 диаметров.

Рассмотрим течение в основном участке цилиндрической круглой трубы. Выделим в жидкости цилиндр, имеющий длину l и радиус y. В основном участке трубы распределения скоростей в различных сечениях одинаковы, поэтому силы инерции отсутствуют и цилиндр будет находиться в равновесии под действием касательных напряжений, приложенных к его боковой поверхности, и разности давлений $p_1 - p_2$, действующих на его основания, т. е.

$$\tau = \frac{p_1 - p_2}{l} \frac{y}{2}. \tag{163}$$

Согласно этой формуле касательное напряжение пропорционально расстоянию от оси трубы и достигает наибольшего значения на стенке

$$\tau_w = \frac{p_1 - p_2}{l} \frac{r}{2}. \tag{164}$$

Коэффициент сопротивления ζ, определяемый соотношением (160), будет в этом случае при замене градиента давления его значением из формулы (164) равен

$$\zeta = 4 \frac{\tau_w}{{}^1/_2 \rho u_{ср}^2}. \tag{165}$$

В отличие от ламинарного течения, для которого связь между коэффициентом сопротивления (или перепадом давления) и расходом жидкости определяется теоретически из решения уравнений Навье — Стокса, при турбулентном режиме такая связь может быть найдена только в том случае, если профиль скорости известен из эксперимента. Как уже указывалось в § 4, профиль скорости в пограничном слое на плоской пластине при $R_x = 10^6 \div 10^8$ ($R_\delta = 2 \cdot 10^4 \div 10^6$) хорошо описывается степенной формулой с показателем 1/7, которая в выбранной системе координат имеет вид

$$\frac{u}{u_0} = \left(\frac{r - y}{r}\right)^{1/7}.$$

Тогда выражение для коэффициента сопротивления ζ может быть сразу получено из соотношения (131) при $\bar{T}_w = 1$, $M_0 = 0$

и замене R_δ через $R = (\rho u_{ср} d/\mu)$ (считая $\delta = r$), а u_0 через $u_{ср}$:

$$u_{ср} = \frac{2\pi \int_0^r uy\,dy}{\pi r^2} = 2u_0 \int_0^1 \left(1 - \frac{y}{r}\right)^{1/7} \frac{y}{r} d\left(\frac{y}{r}\right) = 0{,}817\, u_0,$$

$$R_\delta = \frac{\rho u_0 \delta}{\mu} = \frac{1}{2} \frac{u_0}{u_{ср}} R.$$

Тогда, согласно (165), имеем

$$\zeta = 8\frac{\tau_w}{\rho u_{ср}^2} = 8\frac{\tau_w}{\rho u_0^2}\left(\frac{u_0}{u_{ср}}\right)^2 = 8\frac{0{,}0226}{R^{0,25}} 2^{0,25} \left(\frac{u_0}{u_{ср}}\right)^{1,75} = \frac{0{,}306}{R^{0,25}}. \quad (166)$$

Эта формула близка к формуле Блазиуса

$$\zeta = \frac{0{,}316}{R^{0,25}},$$

полученной на основании обработки обширного экспериментального материала при $R = 4 \cdot 10^3 \div 10^5$.

При больших числах Рейнольдса опытные значения коэффициента ζ оказываются выше рассчитанных по формуле Блазиуса или по формуле (166).

Для устранения этого расхождения следует при вычислении коэффициента сопротивления использовать логарифмический профиль скорости, который является асимптотическим при $R \to \infty$, так как при выводе этого профиля пренебрегается молекулярной вязкостью по сравнению с турбулентной (§ 4). Для выбранной системы координат логарифмический закон распределения скорости (115) имеет вид

$$\frac{u}{v_*} = 2{,}5 \ln \frac{v_*}{\nu}(r - y) + 5{,}5 \quad (167)$$

и хорошо подтверждается опытными данными Никурадзе для больших чисел Рейнольдса (рис. 6.16). На оси трубы $y = 0$, поэтому из равенства (167) имеем

$$\frac{u_0}{v_*} = 2{,}5 \ln \frac{v_* r}{\nu} + 5{,}5. \quad (168)$$

Зная профиль скорости (167), легко найти среднюю по сечению трубы скорость течения

$$\frac{u_{ср}}{v_*} = 2{,}5 \ln \frac{v_* r}{\nu} + 1{,}75. \quad (169)$$

Выразим величину ζ через v_* и $u_{ср}$, подставляя в равенство (165) значение $\tau_w = \rho v_*^2$ (согласно определению (115)):

$$\zeta = 8\left(\frac{v_*}{u_{ср}}\right)^2, \quad \text{или} \quad \frac{v_*}{u_{ср}} = \frac{\sqrt{\zeta}}{2\sqrt{2}}. \tag{170}$$

Кроме того, преобразуем величину $v_* r/\nu$:

$$\frac{v_* r}{\nu} = \frac{1}{2}\frac{u_{ср} d}{\nu}\frac{v_*}{u_{ср}} = \frac{1}{4\sqrt{2}} R\sqrt{\zeta}.$$

Тогда соотношение (169) можно записать в виде

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\zeta}} = 2{,}5 \ln\left(\frac{1}{4\sqrt{2}} R\sqrt{\zeta}\right) + 1{,}75,$$

или

$$\frac{1}{\sqrt{\zeta}} = 2{,}03 \lg\left(R\sqrt{\zeta}\right) - 0{,}91. \tag{171}$$

Эта формула качественно хорошо описывает характер изменения коэффициента сопротивления для гладких труб при больших числах Рейнольдса. Лучшее количественное совпадение

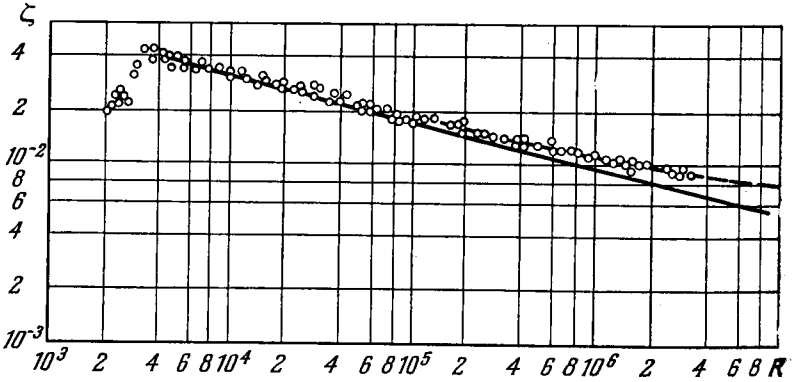


Рис. 6.39. Коэффициент сопротивления для гладких круглых труб при турбулентном течении.

получается, однако, если несколько изменить теоретические числовые множители и принять

$$\frac{1}{\sqrt{\zeta}} = 2 \lg\left(R\sqrt{\zeta}\right) - 0{,}8. \tag{172}$$

На рис. 6.39 приведено сравнение значений величины ζ, рассчитанных по формуле Блазиуса (сплошная кривая) и по формуле (172) (пунктирная кривая), с экспериментальными значениями коэффициента сопротивления труб, полученными различными авторами. Как видим, для определения коэффициента

сопротивления гладких круглых труб при $R = 4 \cdot 10^3 \div 10^5$ можно использовать формулу (166), а при $R > 10^5$ — формулу (172).

Исследования течения жидкости в трубах с некруглым поперечным сечением показали, что законы сопротивления как для ламинарного, так и для турбулентного режимов имеют такой же вид, как и для круглых труб, если вместо диаметра ввести гидравлический диаметр, равный отношению учетверенной площади сечения к периметру. На рис. 6.40 приведены экспериментальные значения ζ, полученные Шиллером и Никурадзе, и значения ζ, рассчитанные по формулам (162) (кривая *1*) и (172)

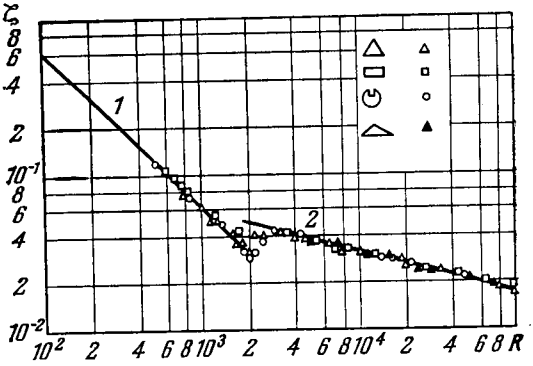


Рис. 6.40. Коэффициент сопротивления для труб с некруглым поперечным сечением.

(кривая *2*). Здесь в качестве характерного размера использовалась величина гидравлического диаметра ($d_h = 4d$).

Наконец, рассмотрим движение совершенного газа с постоянной теплоемкостью в канале постоянного сечения при наличии трения и теплообмена. Температуру стенок будем считать постоянной. Уравнения неразрывности, количества движения и энергии для средних параметров имеют вид

$$\rho u F = G, \quad F \frac{d}{dx}(\rho u^2 + p) = -U\tau_w, \quad c_p F \frac{d}{dx}(\rho u T^*) = -U q_w, \qquad (173)$$

где F — площадь поперечного сечения канала, U — его периметр, G — массовый расход газа, q_w — поток тепла через 1 м^2 поверхности стенки.

Вводя безразмерные коэффициенты трения c_f и теплоотдачи St в последние два уравнения и учитывая, что $\rho u = \text{const}$, как следует из уравнения неразрывности (173), получим

$$F \frac{d}{dx}(\rho u^2 + p) = -U c_f \frac{\rho u^2}{2}, \qquad (174)$$

$$F \frac{dT^*}{dx} = -U\,\mathrm{St}\,(T^* - T_w), \qquad (175)$$

причем величины c_f и St зависят от режима течения (ламинарного или турбулентного) и от следующих безразмерных параметров:

$$c_f = c_f\left(\mathrm{R}, \lambda, \frac{T_w}{T^*}\right), \tag{176}$$

$$\mathrm{St} = \mathrm{St}\left(\mathrm{R}, \mathrm{Pr}, \lambda, \frac{T_w}{T^*}\right), \tag{177}$$

где λ — приведенная скорость, представляющая собой отношение скорости течения к критической скорости звука.

При небольших скоростях течения ($\lambda \ll 1$) величина λ не является определяющим параметром. В этом случае коэффициент теплоотдачи будет изменяться лишь за счет изменения температуры газа вдоль канала. Тогда уравнение энергии (175) интегрируется и определяется распределение температуры торможения вдоль канала. Распределение скорости находится из уравнения количества движения (174). Именно такой подход обычно используется при рассмотрении движения несжимаемой жидкости в канале постоянного сечения. При изучении движения сжимаемого газа раздельное интегрирование уравнений энергии и количества движения невозможно, так как коэффициент теплоотдачи в этом случае зависит от скорости газа. Вводя газодинамические функции и безразмерную температуру торможения $\theta = T^*/T_w$, получим

$$G = m\frac{p^* F q(\lambda)}{\sqrt{T^*}}, \qquad m = \mathrm{const}, \tag{178}$$

$$\frac{k+1}{2k}\frac{d}{dx}\left[\sqrt{\theta}\, z(\lambda)\right] = -\frac{U}{F}\frac{c_f}{2}\sqrt{\theta}\,\lambda, \tag{179}$$

$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{U}{F}\mathrm{St}(\theta - 1). \tag{180}$$

Разделив соотношение (179) почленно на соотношение (180), исключим переменную x

$$\frac{k+1}{2k}\frac{d\left[\sqrt{\theta}\, z(\lambda)\right]}{d\theta} = \frac{c_f \lambda \sqrt{\theta}}{2\,\mathrm{St}(\theta - 1)}.$$

Выполняя дифференцирование в левой части, получим дифференциальное уравнение первого порядка, связывающее безразмерную температуру торможения θ и приведенную скорость λ:

$$\left(1 - \frac{1}{\lambda^2}\right)\frac{d\lambda}{d\theta} = \frac{c_f}{2\,\mathrm{St}}\frac{2k}{k+1}\frac{\lambda}{\theta - 1} - \frac{1}{2\theta}\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right). \tag{181}$$

Для простоты дальнейших выкладок предположим, что выполняется аналогия Рейнольдса как при ламинарном, так и при турбулентном режиме течения, т. е. $c_f = 2\mathrm{St}$. Тогда

уравнение (181) примет вид

$$\left(1-\frac{1}{\lambda^2}\right)\frac{d\lambda}{d\theta}=\frac{2k}{k+1}\,\frac{\lambda}{\theta-1}-\frac{1}{2\theta}\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right). \qquad (182)$$

Интегральные кривые этого уравнения показаны на рис. 6.41 для $k=1{,}4$. Для определения направления процесса при течении газа в канале используем уравнение энергии (180). Если в канал поступает газ, температура торможения которого ниже температуры стенки ($\theta<1$), то газ будет нагреваться ($d\theta/dx>0$) и $\theta\to 1$. Если в канал поступает газ, температура торможения которого выше температуры стенки ($\theta>1$), то газ будет охлаждаться ($d\theta/dx<0$) и $\theta\to 1$. Следовательно, течению газа в канале соответствует движение вдоль интегральных кривых к $\theta=1$. В области $\theta<1$ оба воздействия (подвод тепла и трения) влияют в одном направлении: при дозвуковом течении ($\lambda<1$) происходит ускорение потока, а при сверхзвуковом — торможение. В области $\theta>1$ совместное влияние отвода тепла и трения более сложно, так как трение оказывает ускоряющее действие, а отвод тепла — тормозящее.

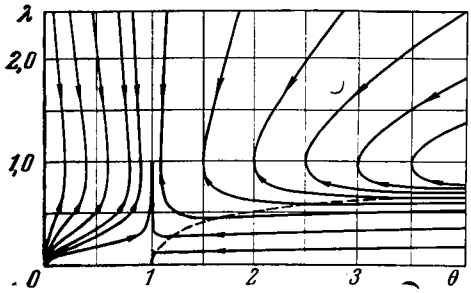


Рис. 6.41. Интегральные кривые дифференциального уравнения, описывающего течение сжимаемого газа в канале постоянного сечения с трением и теплообменом при $k=1{,}4$. Пунктирная линия — $d\lambda/d\theta=0$.

Рассмотрим сначала дозвуковое течение ($\lambda<1$). При больших разностях температур газа и стенки (при больших θ) и малых скоростях (малых λ) влияние теплообмена оказывается более существенным и происходит торможение потока ($d\lambda/d\theta>0$). При больших λ и малых θ преобладает влияние трения и поток ускоряется ($d\lambda/d\theta<0$). Вдоль линии перехода от торможения к ускорению $d\lambda/d\theta=0$. Тогда из уравнения (182) получим уравнение этой линии в следующем виде:

$$\lambda=\sqrt{\frac{\theta-1}{\frac{3k-1}{k+1}\theta+1}}\,.$$

Эта кривая показана на рис. 6.41 пунктирной линией. При сверхзвуковом течении нагретого газа ($\theta>1$, $\lambda>1$) преобладающее влияние оказывает трение и происходит торможение потока.

После того как зависимость λ от θ найдена, можно определить остальные параметры потока. Из уравнения неразрывности (178) следует

$$\frac{p^*}{p^*_н} = \sqrt{\frac{\theta}{\theta_н}}\,\frac{\lambda_н}{\lambda}\,\frac{\left(1-\frac{k-1}{k+1}\lambda_н^2\right)^{\frac{1}{k-1}}}{\left(1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}}},$$

индексом «н» обозначены параметры в начале канала.

Используя основные соотношения между параметрами торможения и статическими параметрами, получим

$$\frac{p}{p_н} = \sqrt{\frac{\theta}{\theta_н}}\,\frac{\lambda_н}{\lambda}\,\frac{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2}{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda_н^2},$$

$$\frac{T}{T_н} = \frac{\theta}{\theta_н}\,\frac{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2}{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda_н^2}.$$

Так как $u = a\lambda$, то

$$\frac{u}{u_н} = \frac{\rho_н}{\rho} = \frac{\lambda}{\lambda_н}\sqrt{\frac{\theta}{\theta_н}}.$$

Наконец, интегрируя соотношение (180), найдем связь между x и θ

$$x = \frac{F}{U}\int\limits_{\theta}^{\theta_н}\frac{d\theta}{\mathrm{St}\,(\theta-1)},$$

так как зависимость λ от θ уже известна и, следовательно, известна зависимость St от θ.

Большинство используемых в технике труб являются шероховатыми. Шероховатость стенки обычно характеризуется средней высотой бугорков h, которая называется *абсолютной шероховатостью*. Используя величину абсолютной шероховатости в качестве характерного линейного размера для течения вблизи стенки, представим универсальный логарифмический закон распределения скоростей (114) в безразмерном виде

$$\frac{u}{v_*} = 2{,}5\ln\frac{y}{h} + B. \qquad (183)$$

Это соотношение хорошо описывает результаты многочисленных экспериментальных исследований турбулентного течения в шероховатых трубах. В этом случае величина B является функцией безразмерной величины hv_*/ν, которая может рассматриваться

как число Рейнольдса, составленное из абсолютной шероховатости и динамической скорости (рис. 6.42). Так как по определению $v_* = \sqrt{\tau_w/\rho}$, то, используя условие постоянства числа Рейнольдса на границе ламинарного подслоя (125) и линейный

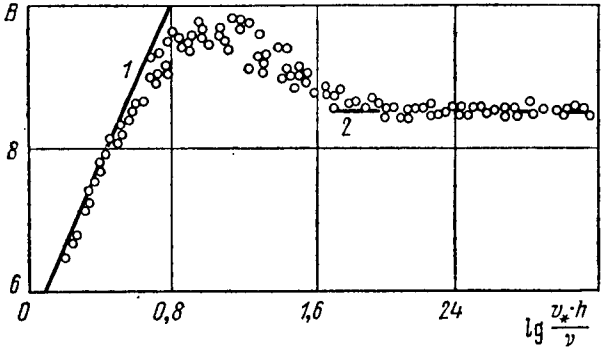


Рис. 6.42. Зависимость величины B от параметра v_*h/ν: *1* — режим без проявления шероховатости, *2* — режим с полным проявлением шероховатости.

характер распределения скорости в ламинарном подслое (126), получим

$$\frac{hv_*}{\nu} = \alpha \frac{h}{\delta_л}.$$

Таким образом, величина hv_*/ν пропорциональна отношению абсолютной шероховатости к толщине ламинарного подслоя. Если

$$h < 0{,}25\delta_л, \quad \frac{hv_*}{\nu} < 3,$$

то все элементы шероховатости расположены внутри ламинарного подслоя, их обтекание происходит без вихреобразований и шероховатость не оказывает влияние на характеристики турбулентного течения. При этом, как следует из рис. 6.42,

$$B = 5{,}5 + 2{,}5 \ln \frac{v_* h}{\nu},$$

и соотношение (183) принимает вид

$$\frac{u}{v_*} = 2{,}5 \ln \frac{v_* y}{\nu} + 5{,}5,$$

т. е. совпадает с универсальным логарифмическим распределением скоростей при течении в гладких трубах. Такой случай течения получил название *режима без проявления шероховатости.* Как и для гладких труб, коэффициент сопротивления зависит лишь от числа Рейнольдса, причем эта зависимость описывается

формулой (172). Если

$$0{,}25 < \frac{h}{\delta_л} < 5, \quad 3 < \frac{hv_*}{\nu} < 60,$$

то элементы шероховатости выступают из ламинарного подслоя и вызывают дополнительное сопротивление. Профиль скорости (183) можно использовать для получения закона сопротивления таким же способом, как это было сделано для гладких труб. Определив из уравнения (183) среднюю по сечению трубы скорость течения, получим (r — радиус трубы)

$$\frac{u_{ср}}{v_*} = 2{,}5 \ln \frac{r}{h} + B\left(\frac{v_* r}{\nu}\right) - 3{,}75. \qquad (184)$$

Выразим отношение $u_{ср}/v_*$ через коэффициент сопротивления в соответствии с уравнением (170) и преобразуем величину $v_* r/\nu$ следующим образом:

$$\frac{v_* r}{\nu} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \mathrm{R}\sqrt{\zeta},$$

где $\mathrm{R} = u_{ср} d/\nu$ — число Рейнольдса, подсчитанное по средней скорости и диаметру трубы. Тогда соотношение (184) может быть записано в следующем виде:

$$\frac{\sqrt{\zeta}}{2\sqrt{2}} = B\left(\frac{\mathrm{R}\sqrt{\zeta}}{4\sqrt{2}}\right) - 2{,}5 \ln \frac{h}{r} - 3{,}75. \qquad (185)$$

Таким образом, коэффициент сопротивления при переходном режиме течения зависит как от числа Рейнольдса, так и от величины относительной шероховатости h/r, причем эта зависимость задается в неявном виде. Значения функции B определяются на основании данных рис. 6.42.

Если

$$\frac{h}{\delta_л} > 5, \quad \frac{hv_*}{\nu} > 60,$$

то элементы шероховатости значительно выступают из ламинарного подслоя и сопротивление в основном вызывается обтеканием элементов шероховатости турбулентным потоком. Этот случай течения называется *режимом с полным проявлением шероховатости* и характеризуется постоянным значением величины $B = 8{,}5$. Формула для коэффициента сопротивления (185) при этом принимает простой вид

$$\zeta = 1/\left(2 \lg \frac{r}{h} + 1{,}68\right)^2. \qquad (186)$$

Коэффициент сопротивления не зависит от числа Рейнольдса, а определяется только величиной относительной шероховатости.

Результаты экспериментального исследования коэффициента сопротивления в шероховатых трубах при различных значениях относительной шероховатости приведены на рис. 6.43. Эти дан-

ные свидетельствуют о том, что относительная шероховатость не влияет на критическое число Рейнольдса, характеризующее начало перехода ламинарного к турбулентному режиму течения. Зависимость коэффициента сопротивления от числа Рейнольдса в области перехода оказывается одинаковой при различных значениях h/r. Для режима течения с полным проявлением шероховатости величина ζ может быть определена по формуле (186).

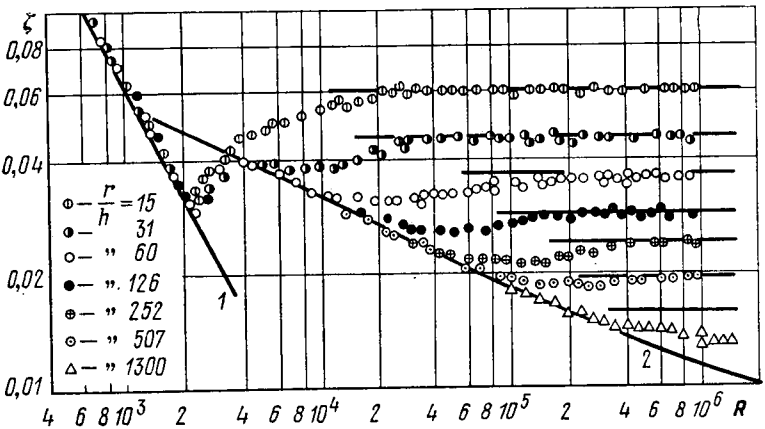


Рис. 6.43. Коэффициент сопротивления для шероховатых труб: *1* — по формуле (162) для ламинарного течения, *2* — по формуле (172) для турбулентного течения без проявления шероховатости, сплошные горизонтальные прямые — по формуле (186) для турбулентного течения с полным проявлением шероховатости.

Приведенные результаты получены при условии, что элементы шероховатости имеют примерно одинаковый размер и располагаются плотно друг к другу. Соотношения, полученные для такой идеализированной шероховатости, могут применяться для практических расчетов течения в технических трубах при условии, что установлена величина эквивалентной шероховатости данной поверхности. Эквивалентная шероховатость для многих типов реальной шероховатости найдена экспериментальным путем.

В заключение отметим, что вопросам теории пограничного слоя посвящена многочисленная специальная литература [1]).

[1]) Лойцянский Л. Г., Ламинарный пограничный слой, Физматгиз, М., 1962; Шлихтинг Г., Теория пограничного слоя, «Наука», М., 1974; Хейз У. Д., Пробстин Р. Ф., Теория гиперзвуковых течений ИЛ, М., 1962; Дорренс У. Х., Гиперзвуковые течения вязкого газа, «Мир», М., 1966; Лапин Ю. В., Турбулентный пограничный слой в сверхзвуковых потоках газа, «Наука», М., 1970; Чжен П. К., Отрывные течения, «Мир», М., 1972.

Глава VII

ТУРБУЛЕНТНЫЕ СТРУИ

§ 1. Общие свойства струй

Во многих случаях движения жидкости и газа в потоке возникают так называемые поверхности тангенциального разрыва; течения жидкости по обе стороны такой поверхности называются струйными. В зависимости от относительного направления движения струй они могут быть спутными или встречными. Характерной особенностью струйных течений является то, что тангенциальный разрыв на поверхности раздела терпят такие, например, величины, как скорость течения, температура, концентрация примеси, тогда как распределение статического давления оказывается непрерывным.

На поверхности тангенциального разрыва в связи с ее неустойчивостью возникают вихри, беспорядочно движущиеся вдоль и поперек потока; вследствие этого между соседними струями происходит обмен конечными массами (молями) вещества, т. е. поперечный перенос количества движения, тепла и примесей. В результате на границе двух струй сформировывается область конечной толщины с непрерывным распределением скорости, температуры и концентрации примеси; эта область называется *струйным турбулентным пограничным слоем.* При очень малых значениях числа Рейнольдса струйный пограничный слой может быть ламинарным, но на этом сравнительно редком случае течения мы не останавливаемся.

Наиболее простой случай струйного пограничного слоя имеет место при истечении жидкости с равномерным начальным полем скорости (u_0) в среду, движущуюся с постоянной скоростью ($u_н$), так как при этом в начальном сечении струи толщина пограничного слоя равна нулю. Утолщение струйного пограничного слоя, состоящего из увлеченных частиц окружающей среды и заторможенных частиц самой струи, приводит, с одной стороны, к увеличению поперечного сечения, а с другой стороны, к постепенному «съеданию» потенциального ядра струи — области, лежащей между внутренними границами пограничного слоя. Принципиальная схема такого струйного течения изображена на рис. 7.1. Часть струи, в которой имеется потенциальное ядро течения, называют *начальным* участком.

Как показывают многочисленные опыты, одним из основных свойств такой струи является постоянство статического давления во всей области течения [1]), вследствие чего скорость в потенциальном ядре струи остается постоянной. Размывание струи за пределами начального участка выражается не только в ее утолщении, но также и в изменении скорости вдоль ее оси.

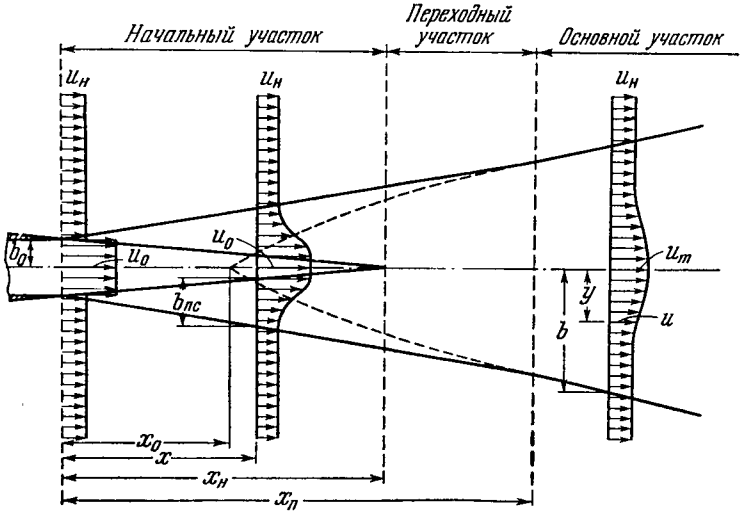


Рис. 7.1. Схема течения в струе.

На некотором расстоянии от конца начального участка струйное течение приобретает такой же вид, как течение жидкости из источника бесконечно малой толщины (в осесимметричном случае источником служит точка, в плоскопараллельном случае — прямая линия, перпендикулярная к плоскости растекания струи); соответствующий участок струи называют *основным*. Между *основным* и *начальным* участками струи располагается так называемый *переходный* участок.

Часто пользуются упрощенной схемой струи и полагают длину переходного участка равной нулю; в этом случае сечение, в котором сопрягаются основной и начальный участки, называют *переходным сечением* струи. Если в расчетах переходный участок учитывают, то переходное сечение считают совпадающим с началом основного участка.

[1]) В некоторых случаях (при взаимодействии струи с каким-либо препятствием) условие постоянства давления может нарушиться, но на этих особых случаях мы остановимся отдельно.

Наиболее изученным видом турбулентного струйного течения является струя, распространяющаяся в покоящейся среде; такая струя называется *затопленной*.

В описанной схеме струи предполагается, что пограничный слой имеет конечную толщину; в некоторых теориях затопленной струи принимается пограничный слой бесконечной толщины с асимптотическими профилями скорости, температуры и других величин. Оба эти представления о пограничном слое удается практически примирить между собой, так как асимптотический пограничный слой можно всегда приближенно заменить слоем конечной толщины [1]).

Характерной особенностью турбулентной струи, как показывают теория и многочисленные опыты, является малость поперечных составляющих скорости в любом сечении струи по сравнению с продольной скоростью. Следовательно, если ось x совместить с осью симметрии струи, то составляющие скорости по оси y окажутся настолько малыми, что в инженерных приложениях теории струи ими можно пренебречь.

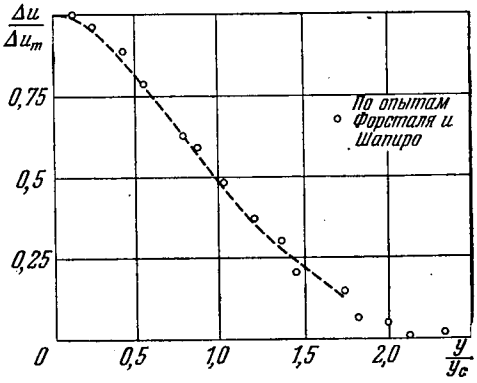


Рис. 7.2. Профиль безразмерной избыточной скорости в основном участке осесимметричной воздушной струи, распространяющейся в спутном потоке воздуха.

Опыты показывают, что профили избыточных значений скорости, температуры и концентрации примеси как в затопленной турбулентной струе, так и в струе, распространяющейся в спутном потоке, имеют одинаковую универсальную форму. На рис. 7.2 приведен универсальный профиль скорости, полученный в опытах Форсталя и Шапиро [2]) в основном участке осесимметричной струи воздуха, вытекающей в воздушный поток того же направления и той же температуры, причем безразмерные избыточные

[1]) В этом случае «границами» асимптотического слоя считают поверхности, на которых значения скорости (или, например, температуры) отличаются от краевых на некоторую наперед заданную малую величину, например, на 1%.

[2]) Почти все используемые в данной главе литературные источники содержатся в списке литературы, приложенном к монографии автора (Г. Н. Абрамович, Теория турбулентных струй, Физматгиз, М., 1960). Приводятся ссылки только на источники более позднего времени.

значения скорости $\Delta u/\Delta u_m$ построены в зависимости от безразмерных ординат y/y_c:

$$\frac{\Delta u}{\Delta u_m} = \frac{u - u_н}{u_m - u_н} = f\left(\frac{y}{y_c}\right). \quad (1)$$

Здесь u — скорость на расстоянии y от оси струи, u_m — скорость на оси струи, $u_н$ — скорость спутного потока, y_c — расстояние от оси струи до места, в котором избыточная скорость вдвое меньше своего максимального значения: $u_c - u_н = 0{,}5(u_m - u_н)$.

Эти опыты проводились при разных отношениях скорости спутного потока к скорости истечения: $m = u_н/u_0 = 0{,}2;\ 0{,}25;\ 0{,}46$. На рис. 7.2 изображен также профиль скорости в затопленной струе (пунктир), взятый из опытов Трюпеля; универсальные профили скорости при наличии спутного потока и в его отсутствии оказались практически одинаковыми.

Согласно опытам Вайнштейна, Остерле и Форсталя, а также Фертмана профили безразмерных избыточных скоростей в плоских спутных и затопленных струях описываются той же универсальной зависимостью, что и в осесимметричных струях.

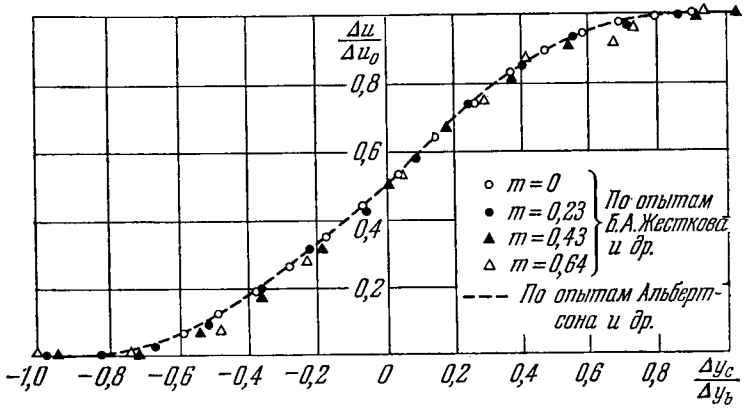


Рис. 7.3. Профиль безразмерной избыточной скорости в пограничном слое двух плоских спутных струй воздуха (начальный участок).

Исследованные в работах Б. А. Жесткова, В. В. Глазкова и М. Д. Гусевой поля скорости в зоне смешения двух плоскопараллельных турбулентных струй одного направления при различных соотношениях скоростей ($m = 0,\ 0{,}23,\ 0{,}43,\ 0{,}64$) представлены на рис. 7.3 в следующих безразмерных координатах:

$$\frac{\Delta u}{\Delta u_0} = f\left(\frac{\Delta y_c}{\Delta y_b}\right). \quad (2)$$

Здесь $\Delta u = u - u_н$ — избыточная скорость в струе, $\Delta u_0 = u_0 - u_н$ — начальная разность скоростей в струях, $\Delta y_c = y - y_{0,5}$ — поперечное расстояние от места измерения до точки, в которой скорость $\Delta u_c = 0{,}5\ \Delta u_0$, $\Delta y_b = y_{0,9} - y_{0,1}$ — расстояние между точками, в которых избыточные значения скорости равны соответственно $\Delta u_1 = 0{,}9\ \Delta u_0$ и $\Delta u_2 = 0{,}1\ \Delta u_0$.

На тот же рисунок нанесена кривая скорости в пограничном слое начального участка затопленной плоской струи, полученная в опытах Альбертсона и др. И в этом случае профиль скорости является универсальным, но несколько отличается от такового для основного участка.

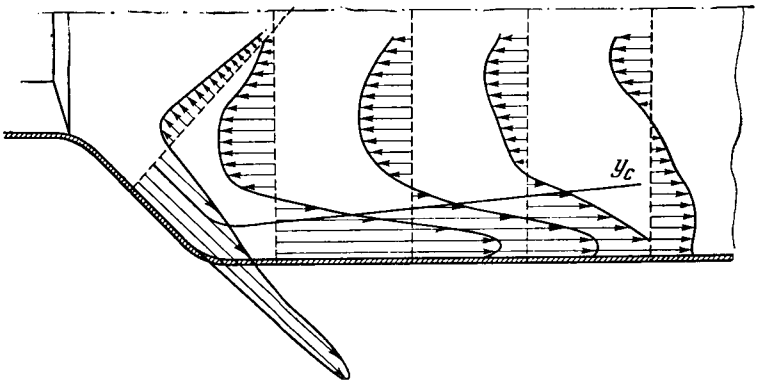


Рис. 7.4. Профили скорости в камере сгорания турбореактивного двигателя (при холодной продувке) по опытным данным А. И. Михайлова.

Измерения, проведенные автором совместно с Ф. М. Вафиным в начальной области течения за кормой плохообтекаемого тела, установленного на оси канала постоянного сечения (в плоском и осесимметричном случаях), показали, что, несмотря на существование зоны обратных токов, профили безразмерной скорости (2), при построении которых принималось во внимание, что скорость обратного тока ($u_н < 0$) изменяется с удалением от кормы тела, оказались такими же, как в пограничном слое обычной струи.

Подобные же результаты получаются и в камере сгорания газотурбинного двигателя. В начале камеры обычно создается большая область обратных токов, примыкающая к оси симметрии. Типичные профили скорости в различных сечениях такой камеры, полученные при «холодной продувке» (без горения) в работе А. И. Михайлова, нанесены на рис. 7.4. Эти же профили, но в безразмерных координатах типа (2) совпадают с приведенными на рис. 7.3.

Опыты Л. А. Вулиса, Е. В. Иванова и других исследователей показывают, что профили безразмерных избыточных значений скорости в струе, охватываемой встречным потоком, также универсальны и близки к таковым для затопленной струи.

Для описания универсальных профилей скорости могут быть подобраны приближенные аналитические зависимости.

В дальнейшем для описания профилей скорости в основном участке струи любой формы будем пользоваться функцией $f(\eta)$, которую теоретически получил впервые Шлихтинг:

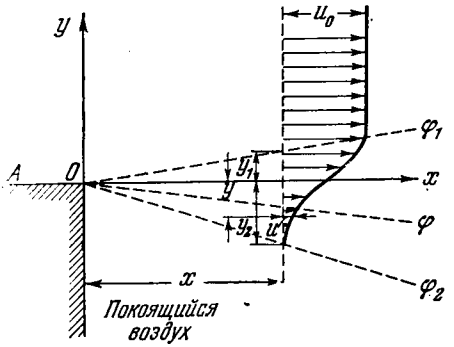


Рис. 7.5. Схема пограничного слоя затопленной струи.

$$\frac{u-u_н}{u_m-u_н}=f(\eta)=(1-\eta^{3/2})^2. \tag{3}$$

Здесь $\eta = y/b$ — расстояние от точки со скоростью u до оси струи, выраженное в долях от полутолщины (или радиуса) данного сечения струи.

Относительное расстояние до точки, в которой избыточная скорость вдвое меньше, чем на оси струи $\left(\frac{u_c-u_н}{u_m-u_н}=0{,}5\right)$, легко определяется из (3):

$$\eta_c=\frac{y_c}{b}=0{,}441. \tag{4}$$

Профили скорости, рассчитанные по формуле (3), хорошо согласуются с экспериментальными профилями скорости.

В начальном участке струи ($u_m = u_0$) хорошо совмещается с опытными данными (рис. 7.3) кривая универсальной скорости

$$\frac{u_0-u}{u_0-u_н}=f(\eta_н)=(1-\eta_н^{3/2})^2, \tag{5}$$

где безразмерная ордината $\eta_н$ отсчитывается от наружной границы струи (рис. 7.5):

$$\eta_н=\frac{y-y_2}{b}=\frac{y-y_2}{y_1-y_2}. \tag{6}$$

Кривая (5) вследствие изменения начала отсчета отличается от кривой (3). Координаты точек $y_{0,5}$, $y_{0,9}$, $y_{0,1}$, которыми мы пользовались для сравнения теоретической кривой с опытными данными, находились из (5) с помощью определения (6).

Описанные результаты получены при умеренных скоростях струй ($M_0 \ll 1$) и мало отличающихся значениях плотности ве-

щества струи ρ_0 и окружающей среды $\rho_н$, т. е. при $n=\rho_н/\rho_0 \approx 1$. Опыты, однако, показывают, что универсальность профилей скорости не нарушается и при значительном изменении отношения плотностей ($0{,}25 \leqslant n \leqslant 4$).

Если параметр сжимаемости n отличается от единицы не более чем в 4 раза, то профили температуры в струях при $c_p = \text{const}$ также универсальны [1]), причем для начального участка можно воспользоваться линейной зависимостью

$$\frac{T-T_н}{T_0-T_н}=\eta_в \quad \text{или} \quad \frac{T_0-T}{T_0-T_н}=1-\eta_н, \tag{7}$$

где $\eta_н$ определяется в соответствии с (6), а индексы при значениях температуры те же, что и в (5) при значениях скорости. Зависимость (7) сопоставлена с опытными данными на рис. 7.6.

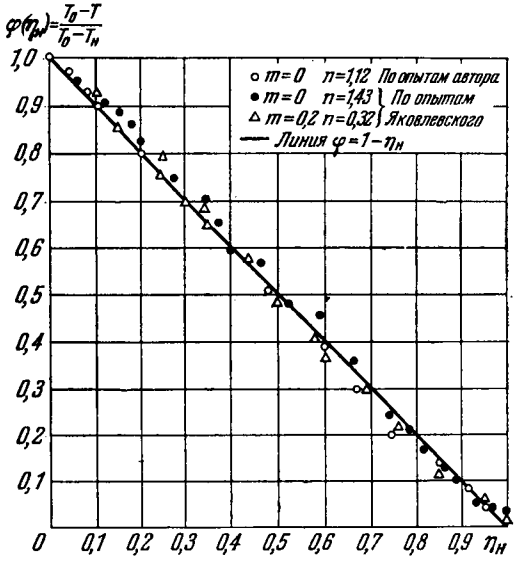


Рис. 7.6. Профиль температуры в пограничном слое струи.

В поперечных сечениях основного участка справедлива следующая зависимость избыточной температуры от избыточной скорости:

$$\frac{T-T_н}{T_m-T_н}=\left(\frac{u-u_н}{u_m-u_н}\right)^{\mathrm{Pr_т}}. \tag{8}$$

Здесь $\mathrm{Pr_т}$ — «турбулентное» число Прандтля, пропорциональное отношению тепла, выделяющегося вследствие турбулентного

[1]) При переменной теплоемкости универсальны профили теплосодержания.

трения, к теплу, отводимому путем турбулентного перемешивания.

Опыты, проведенные при значениях $n = 0{,}03 \div 300$, показывают, что для осесимметричных струй можно принять $Pr_т = 0{,}8$, а для плоских струй $Pr_т = 0{,}5$.

Сопоставление профиля температуры (8) в основном участке с опытными данными демонстрируется на рис. 7.7.

Согласно опытным данным Б. А. Жесткова, М. М. Максимова и др. зависимости (7) и (8) справедливы и для струй с большей начальной скоростью истечения ($M_0 > 1$). Однако в этом случае вместо термодинамических температур в эти зависимости следует подставлять температуры заторможенного потока.

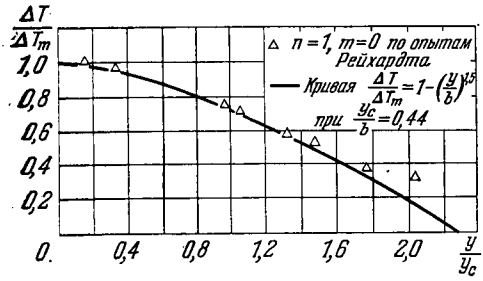


Рис. 7.7. Профиль избыточной температуры в основном участке плоской струи ($Pr=0{,}5$).

Распределение примеси в поперечных сечениях турбулентной струи, если концентрация примеси не настолько велика, чтобы существенно повлиять на поле плотности, подчиняется той же закономерности, что и распределение температуры:

$$\frac{\varkappa - \varkappa_н}{\varkappa_m - \varkappa_н} = \frac{T - T_н}{T_m - T_н}. \tag{8а}$$

Здесь $\varkappa = \frac{G_п}{G + G_п}$ — массовая концентрация примеси, представляющая собой отношение массы примеси к массе всей смеси в том же объеме.

Справедливость равенства (8а) подтверждена многочисленными опытными данными.

Рассмотрим вопрос о расширении границ турбулентной струи. Предположим, что скорость нарастания толщины пограничного слоя пропорциональна пульсационной составляющей поперечной скорости

$$\frac{db}{dt} \sim v',$$

которая в свою очередь пропорциональна поперечному градиенту продольной (главной) скорости потока:

$$v' \sim l \frac{du}{dy}.$$

Здесь l — путь турбулентного смешения.

Ввиду подобия профилей скорости в различных сечениях пограничного слоя поперечный градиент продольной скорости пропорционален разности скоростей на границах

$$\frac{du}{dy} \sim \frac{u_1 - u_2}{b}.$$

Вследствие этого имеем

$$v' \sim \frac{l}{b}(u_1 - u_2).$$

Из подобия профилей следует также, что отношение характерных линейных размеров есть величина постоянная

$$\frac{l}{b} = \text{const},$$

поэтому пульсационная составляющая поперечной скорости пропорциональна разности скоростей на границах слоя

$$v' \sim (u_1 - u_2).$$

Так как, по предположению,

$$v' \sim \frac{db}{dt} = \frac{db}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{db}{dx}u,$$

то закон нарастания толщины пограничного слоя по длине струи можно представить в следующем виде:

$$\frac{db}{dx} \sim \frac{|v'|}{u} \sim \frac{|u_1 - u_2|}{|u|}. \tag{9}$$

Величина $\varepsilon = |v'|/|u|$, называемая *степенью турбулентности потока*, всегда положительна, так как вычисляется по средним абсолютным значениям поперечной пульсационной скорости $|v'|$ и продольной скорости потока $|u|$, в связи с чем во всех случаях $db/dx > 0$. Остается выяснить, какое значение поступательной скорости следует подставить в знаменатель выражения (9).

Характерное значение средней скорости можно определить различными способами. Осреднение, однако, следует вести по толщине (а не площади поперечного сечения) струи; это вытекает из того экспериментального факта, что законы нарастания толщины плоской и осесимметричной струй приблизительно одинаковы. Судя по опытным данным, целесообразно пользоваться значением средней массовой скорости:

$$u = \frac{\int_1^2 \rho u\, dy}{\int_1^2 \rho\, dy}, \tag{10}$$

которая в случае несжимаемой жидкости близка к средней арифметической [1]) из ее абсолютных величин на границах слоя:

$$u = \frac{\int_1^2 u\,dy}{b} \approx 0{,}5\,[|u_1| + |u_2|]. \tag{11}$$

В таком случае получим следующий закон увеличения толщины пограничного слоя:

$$\frac{db}{dx} \sim \frac{|u_1 - u_2|}{|u_1| + |u_2|}. \tag{12}$$

Выражение (12) приводит к интересным выводам. В пограничном слое, возникающем на границе двух беспредельных струй ($u_1 = \text{const}$, $u_2 = \text{const}$), толщина пропорциональна удалению от начала смешения

$$\frac{db}{dx} = \text{const}, \quad \text{или} \quad b = \text{const} \cdot x,$$

где

$$\text{const} = c\,\frac{|u_1 - u_2|}{|u_1| + |u_2|}. \tag{13}$$

Значение коэффициента c должно быть определено экспериментально, например по результатам исследования струи, распространяющейся в неподвижной среде (затопленная струя: $u_2 = 0$), когда имеет место равенство

$$b_з = cx. \tag{14}$$

В общем случае ($u_2 \neq 0$) толщину пограничного слоя найдем на основании (12), (13) и (14):

$$\frac{b}{b_з} = \frac{|u_1 - u_2|}{|u_1| + |u_2|}. \tag{15}$$

В частном случае спутного движения двух беспредельных струй скорости на границах слоя имеют одинаковые знаки, вследствие чего угол утолщения пограничного слоя уменьшается с ростом скорости спутного потока u_2:

$$\frac{b_д}{b_з} = \pm\frac{u_1 - u_2}{u_1 + u_2}, \tag{16}$$

причем знак минус берется при $u_2 < u_1$.

При распространении струи во встречном потоке скорости на границах слоя имеют разные знаки, т. е. геометрическая разность скоростей равна сумме их абсолютных значений, поэтому

$$\frac{b_г}{b_з} = \frac{u_1 + u_2}{u_1 + u_2} = 1. \tag{17}$$

[1]) Для профиля скорости (3).

Иначе говоря, при встречном движении струй ($u_2 < 0$) угол утолщения пограничного слоя не зависит от соотношения скоростей на границах, т. е. получается во всех случаях таким же, как и при распространении струи в неподвижной среде.

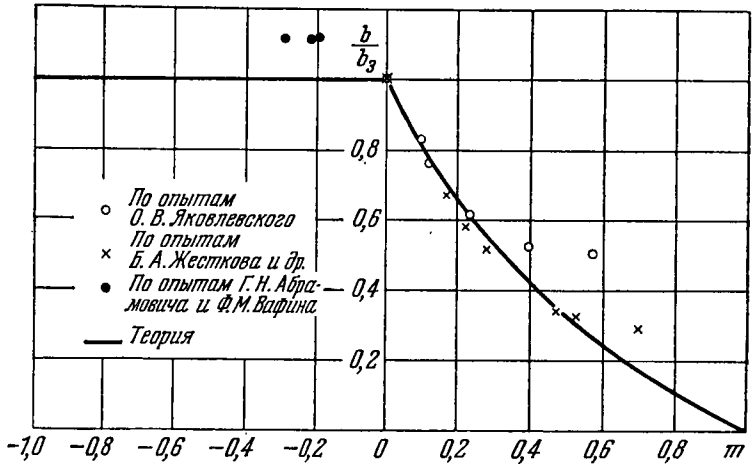


Рис. 7.8. Зависимость толщины пограничного слоя струи несжимаемой жидкости от скорости внешнего потока.

На рис. 7.8 изображена теоретическая кривая, соответствующая формуле (15) для интервалов значений m от -1 до 0 и от 0 до $+1$:

$$\frac{\frac{1}{c}\frac{db}{dx}}{\frac{1}{c_з}\frac{db_з}{dx}} = 1 \qquad \text{при} \quad m \leqslant 0,$$

$$\frac{\frac{1}{c}\frac{db}{dx}}{\frac{1}{c_з}\frac{db_з}{dx}} = \frac{1-m}{1+m} \qquad \text{при} \quad m \geqslant 0.$$

Ввиду сложности определения из опытов истинного значения b здесь в качестве толщины пограничного слоя было принято расстояние Δy_b между точками со значениями избыточной скорости $\Delta u_1 = 0{,}9\,\Delta u_0$ и $\Delta u_2 = 0{,}1\,\Delta u_0$. При универсальном профиле скорости величина Δy_b составляет во всех случаях одну и ту же долю от толщины пограничного слоя

$$\frac{\Delta y_b}{\Delta y_{b_з}} = \frac{b}{b_з},$$

где $b_з$ — толщина пограничного слоя затопленной струи, $\Delta y_{b_з}$ — величина Δy_b для затопленной струи.

Для сравнения на рис. 7.8 приведены экспериментальные точки, которые при одном и том же значении опытной постоянной ($c = c_з$) располагаются близко к теоретической кривой в области значений $-0{,}4 \leqslant m \leqslant 0{,}4$, но отходят от нее при $m > 0{,}5$. Этот результат, обнаруживаемый также и на теневых фотографиях струи, можно объяснить следующим образом. При выводе формулы (12) мы предполагали, что турбулентность в пограничном слое порождается только разностью скоростей на его границах, а вне этих границ вовсе отсутствует, т. е. $v' \to 0$ при $m \to 1$. В действительности же и в «невозмущенном» потоке имеется некоторая начальная турбулентность, поэтому в тех случаях, когда скорости u_1 и u_2 близки между собой, т. е. интенсивность турбулентности, порождаемой в струе, меньше исходной интенсивности турбулентности невозмущенного потока, влияние первой прекращается и перемешивание определяется турбулентностью невозмущенного потока, которая не зависит от величины m. Естественно, что в этой области угол утолщения пограничного слоя почти не связан с соотношением скоростей на границах слоя.

Результаты, полученные для зоны смешения двух беспредельных струй, справедливы также и для начального участка струи конечной толщины, распространяющейся в спутном или встречном потоке, поскольку в начальном участке на обеих границах зоны смешения скорости остаются неизменными.

Очертания основного участка струи конечной толщины при встречном движении окружающей струю жидкости, ввиду того что скорость встречного движения, согласно (17), не влияет на угол утолщения зоны смешения, остаются примерно такими же, как и в затопленной струе.

Более сложной задачей является определение очертаний основного участка струи в спутном потоке жидкости. В этом случае формула (12) приобретает следующий вид:

$$\frac{db}{dx} = \pm c \frac{u_m - u_н}{u_m + u_н}, \tag{18}$$

где u_m — скорость на оси основного участка струи, $u_н$ — скорость спутного потока (знак минус берется при $u_н > u_m$). В связи с тем что величина u_m на оси струи изменяется, т. е. $u_m = u_m(x)$, граница струи в спутном потоке должна быть криволинейной

$$\frac{db}{dx} = \text{var}.$$

Для ее определения необходимо знать вид зависимости $u_m(x)$, которую можно получить из условия сохранения количества движения; решение этой задачи приводится ниже.

В формулах (12)—(18) использовано выражение (11) для средней скорости, справедливое в случае несжимаемой жидкости. При величинах $n = \rho_н/\rho_0$, существенно отличающихся от единицы, необходимо учитывать влияние сжимаемости, для чего в знаменатели формул (12)—(18) следует вместо суммы $(u_m + u_н)$ подставить величину $2|u|$, которую можно определить из зависимости (10). Тогда (18) примет следующий вид:

$$\pm c\frac{dx}{db} = \frac{2|u|}{u_m - u_н} = \frac{2}{\Delta u_m}\frac{\int_0^b \rho u\, dy}{\int_0^b \rho\, dy}. \tag{19}$$

Избыточная скорость ($\Delta u_m = u_m - u_н$) и избыточная температура ($\Delta T_m = T_m - T_н$) по длине основного участка струи быстро изменяются, в связи с чем сильное влияние сжимаемости газа на форму границы струи проявляется лишь в переходном участке и начальной части основного участка струи.

Почти на всей длине основного участка, как показывают опыты со сверхзвуковыми и сильно подогретыми дозвуковыми струями, граница струи слабо изогнута, и вместо сложной зависимости (10) для средней скорости можно использовать упрощенное выражение

$$u = \frac{\rho_m u_m + \rho_н u_н}{\rho_m + \rho_н}.$$

При этом вместо (19) имеем

$$\pm c\frac{dx}{db} = \frac{2}{u_m - u_н}\frac{u_m + u_н\frac{\rho_н}{\rho_m}}{1 + \frac{\rho_н}{\rho_m}}. \tag{20}$$

Отношение плотностей в изобарической струе с помощью уравнения состояния заменяется отношением температур

$$\frac{\rho_m}{\rho_н} = \frac{T_н}{T_m}. \tag{21}$$

Основываясь на многочисленных опытах, принимаем значения коэффициента c в (19) для начального участка $c = 0{,}27$ и для основного участка $c = 0{,}22$.

§ 2. Изменение параметров по длине струи

Для отыскания закономерностей изменения скорости, температуры и концентрации примеси по длине турбулентной струи газа или жидкости, а также для определения границ струи можно воспользоваться условиями сохранения количества

движения, теплосодержания и массы примеси, а также законом нарастания толщины струи (20), который напишем в следующем виде:

$$\pm c\frac{dx}{db}=\frac{2m}{1-m}\frac{1}{\Delta\bar{u}_m}+\frac{1}{1+\frac{\theta-1}{2}\Delta\bar{T}_m}, \tag{22}$$

где

$$m=\frac{u_н}{u_{0m}},\quad \theta=\frac{T_{0m}}{T_н},\quad \Delta\bar{u}_m=\frac{u_m-u_н}{u_{0m}-u_н},\quad \Delta\bar{T}_m=\frac{T_m-T_н}{T_{0m}-T_н},$$

причем u_{0m}, T_{0m} — значения скорости и температуры на оси начального сечения струи.

Из сравнения первого и второго слагаемых в правой части уравнения (22) следует, что при $m\neq 0$ первое слагаемое, неограниченно возрастая при уменьшении осевой скорости, обычно превышает по величине второе слагаемое (которое при этом стремится к единице) и, таким образом, является определяющим. Следовательно, и для случая неизотермической струи в спутном потоке можно в первом приближении пользоваться тем же законом нарастания толщины струи, или, как его иногда называют, уравнением распространения, что и для изотермической струи, а именно:

$$c\frac{d\bar{x}}{d\bar{b}}=1+\frac{2m}{1-m}\frac{1}{\Delta\bar{u}_m}. \tag{22а}$$

Наиболее рельефно влияние параметра θ на характеристики струи проявляется в случае затопленной неизотермической струи ($u_н=0$), для которой уравнение распространения запишется так (сохраняется второй член правой части равенства (22)):

$$c\frac{d\bar{x}}{d\bar{b}}=\frac{2}{1+\frac{\rho_н}{\rho_m}}=\frac{1}{1+\frac{\theta-1}{2}k_т\bar{u}_m}. \tag{22б}$$

Это уравнение справедливо как для плоской, так и для осесимметричной струи; в последнем случае нужно только заменить полутолщину b радиусом струи r.

Для установления из уравнения (22) вида функции $b(x)$ нужно знать закон изменения скорости по оси струи $\Delta u_m(x)$, который может быть найден с помощью уравнения сохранения количества движения. Для изобарической струи это уравнение имеет следующий вид:

$$\Delta I=\int_0^G (u-u_н)\,dG=\int_0^{G_0}(u_0-u_н)\,dG. \tag{23}$$

Здесь G — секундная масса газа (или жидкости), протекающая через произвольное поперечное сечение струи; G_0 — то же в начальном сечении струи, $dG = \rho u\, dF$ — секундная масса элементарной струйки в произвольном сечении. Из уравнения (23) получаем

$$\left(\frac{\Delta u_m}{\Delta u_{0m}}\right)^2 \int_0^1 \frac{\rho}{\rho_m} \frac{\Delta u}{\Delta u_m} \frac{u}{\Delta u_m} \frac{dF}{F} =$$

$$= \frac{F_0}{F}\left(\frac{u_{0m}}{\Delta u_{0m}}\right)^2 \left[\int_0^1 \frac{\rho_0 u_0^2}{\rho_{0m} u_{0m}^2} \frac{dF_0}{F_0} - \frac{u_н}{u_{0m}} \int_0^1 \frac{\rho_0 u_0}{\rho_{0m} u_{0m}} \frac{dF_0}{F_0}\right].$$

Используя принятые выше обозначения

$$m = \frac{u_н}{u_{0m}}, \quad \frac{u_{0m}}{\Delta u_{0m}} = \frac{1}{1-m},$$

применение которых удобно при равномерном поле скорости внешнего потока и неравномерном начальном поле скорости в струе (здесь u_{0m} — скорость на оси струи в начальном сечении, $\Delta u_{0m} = u_{0m} - u_н$), а также величины

$$A_1 = \int_0^1 \frac{\rho}{\rho_{0m}} \frac{\Delta u}{\Delta u_m} \frac{dF}{F}, \qquad A_2 = \int_0^1 \frac{\rho}{\rho_{0m}} \left(\frac{\Delta u}{\Delta u_m}\right)^2 \frac{dF}{F}, \tag{24}$$

$$n_{1u} = \int_0^1 \frac{\rho_0 u_0}{\rho_{0m} u_{0m}} \frac{dF_0}{F_0}, \qquad n_{2u} = \int_0^1 \frac{\rho_0 u_0^2}{\rho_{0m} u_{0m}^2} \frac{dF_0}{F_0}, \tag{25}$$

$$\Delta\bar{u}_m = \frac{\Delta u_m}{\Delta u_{0m}}, \tag{26}$$

приходим к следующему уравнению, выражающему закон сохранения количества движения в струе:

$$\Delta\bar{u}_m^2 A_2 (1-m) + \Delta\bar{u}_m A_1 m = \frac{F_0}{F} \frac{n_{2u} - m n_{1u}}{1-m}. \tag{27}$$

Отсюда получим зависимость скорости на оси основного участка струи от относительной площади поперечного сечения

$$\Delta\bar{u}_m = \frac{\sqrt{m^2 A_1^2 + 4 \frac{F_0}{F} A_2 (n_{2u} - m n_{1u})} - m A_1}{2 A_2 (1-m)},$$

или

$$\Delta\bar{u}_m = \frac{m A_1}{2(1-m) A_2}\left(\sqrt{1 + P^2 \frac{F_0}{F}} - 1\right), \tag{28}$$

где параметр

$$P^2 = \frac{4A_2(n_{2u} - mn_{1u})}{m^2 A_1^2}. \tag{29}$$

При равномерных полях скорости и плотности в начальном сечении струи ($u_0 = u_{0m} = \text{const}$, $\rho_0 = \rho_{0m} = \text{const}$) $n_{1u} = 1$, $n_{2u} = 1$, в связи с чем правая часть выражения (27) существенно упрощается.

Составим теперь уравнение сохранения избыточного теплосодержания при неравномерных полях скорости и температуры в начальном сечении струи

$$\Delta Q = \int_0^G c_p (T - T_н)\, dG = \int_0^{G_0} c_{p0} (T_0 - T_н)\, dG, \tag{30}$$

или в безразмерном виде

$$(1-m)\frac{\Delta T_m}{\Delta T_{0m}} \frac{\Delta u_m}{\Delta u_{0m}} \int_0^1 \frac{c_p}{c_{pom}} \frac{\rho}{\rho_{0m}} \frac{\Delta u}{\Delta u_m} \frac{\Delta T}{\Delta T_m} \frac{dF}{F} +$$

$$+ m \frac{\Delta T_m}{\Delta T_{0m}} \int_0^1 \frac{c_p}{c_{pom}} \frac{\rho}{\rho_{0m}} \frac{\Delta T}{\Delta T_m} \frac{dF}{F} = \frac{F_0}{F} \int_0^1 \frac{c_{p0}}{c_{pom}} \frac{\rho_0}{\rho_{0m}} \frac{\Delta T_0}{\Delta T_{0m}} \frac{u_0}{u_{0m}} \frac{dF_0}{F_0}.$$

Вводя обозначения

$$B_1 = \int_0^1 \frac{\rho}{\rho_{0m}} \frac{c_p}{c_{pom}} \frac{\Delta T}{\Delta T_m} \frac{dF}{F}, \tag{31}$$

$$B_2 = \int_0^1 \frac{\rho}{\rho_{0m}} \frac{c_p}{c_{pom}} \frac{\Delta u}{\Delta u_m} \frac{\Delta T}{\Delta T_m} \frac{dF}{F}, \tag{32}$$

$$n_т = \int_0^1 \frac{\rho_0}{\rho_{0m}} \frac{c_{p0}}{c_{pom}} \frac{u_0}{u_{0m}} \frac{\Delta T_0}{\Delta T_{0m}} \frac{dF_0}{F_0}, \tag{33}$$

$$\Delta \bar{T}_m = \frac{\Delta T_m}{\Delta T_{0m}}, \tag{34}$$

приводим уравнение сохранения избыточного теплосодержания к следующему виду:

$$\Delta \bar{u}_m \Delta \bar{T}_m B_2 (1-m) + \Delta \bar{T}_m B_1 m = \frac{F_0}{F} n_т. \tag{35}$$

Если смешиваются газовые струи с равномерными полями скорости, плотности и температуры в начальном сечении, то $n_т = 1$.

Поделив левую и правую части уравнения (27) на соответствующие части уравнения (35), можно установить связь между безразмерными избыточными значениями температуры и скорости на оси основного участка струи:

$$\Delta\bar{T}_m = k_т \Delta\bar{u}_m, \tag{36}$$

где

$$k_т = \frac{n_т(1-m)}{n_{2u} - m n_{1u}} \frac{\Delta\bar{u}_m A_2 (1-m) + A_1 m}{\Delta\bar{u}_m B_2 (1-m) + B_1 m}. \tag{37}$$

В случае затопленной струи ($\Delta u_m = u_m$, $m = 0$) с равномерными начальными полями скорости и температуры ($n_{1u} = n_{2u} = n_т = 1$)

$$k_{зт} = \frac{\Delta\bar{T}_m}{\bar{u}_m} = \frac{A_2}{B_2} = \text{const}, \tag{38}$$

где

$$\bar{u}_m = u_m/u_0. \tag{39}$$

В случае смешения струй одинаковой скорости ($m = 1$) с равномерными начальными полями

$$k_{ст} = \frac{A_1}{B_1} = \text{const}. \tag{40}$$

При смешении струй разных газов (или жидкостей) распределение плотности зависит также от поля концентраций каждого из газов (или жидкостей), составляющих смесь. Поле безразмерной избыточной концентрации любого из газов в поперечном сечении струи подчиняется зависимости (8а). Распределение избыточной концентрации примеси по оси струи устанавливают с помощью уравнения сохранения избыточного количества примеси в струе

$$\Delta G = \int_0^G (\varkappa - \varkappa_п)\, dG = \int_0^{G_0} (\varkappa_0 - \varkappa_п)\, dG, \tag{41}$$

которое после приведения к безразмерному виду можно представить так:

$$(1-m)\frac{\Delta\varkappa_m}{\Delta\varkappa_{0m}}\frac{\Delta u_m}{\Delta u_{0m}}\int_0^1 \frac{\rho}{\rho_{0m}}\frac{\Delta u}{\Delta u_m}\frac{\Delta\varkappa}{\Delta\varkappa_m}\frac{dF}{F} + m\frac{\Delta\varkappa_m}{\Delta\varkappa_{0m}}\int_0^1 \frac{\rho}{\rho_{0m}}\frac{\Delta\varkappa}{\Delta\varkappa_m}\frac{dF}{F} = \frac{F_0}{F}\int_0^1 \frac{\rho}{\rho_{0m}}\frac{u_0}{u_{0m}}\frac{\Delta\varkappa_0}{\Delta\varkappa_{0m}}\frac{dF_0}{F_0}. \tag{42}$$

Обозначим

$$D_1 = \int_0^1 \frac{\rho}{\rho_{0m}} \frac{\Delta\varkappa}{\Delta\varkappa_m} \frac{dF}{F}, \tag{43}$$

$$D_2 = \int_0^1 \frac{\rho}{\rho_{0m}} \frac{\Delta u}{\Delta u_m} \frac{\Delta\varkappa}{\Delta\varkappa_m} \frac{dF}{F}, \tag{44}$$

$$n_\varkappa = \int_0^1 \frac{\rho_0}{\rho_{0m}} \frac{u_0}{u_{0m}} \frac{\Delta\varkappa_0}{\Delta\varkappa_{0m}} \frac{dF_0}{F_0}, \tag{45}$$

$$\Delta\bar{\varkappa}_m = \frac{\Delta\varkappa_m}{\Delta\varkappa_{0m}}. \tag{46}$$

Тогда уравнение сохранения избыточного содержания примеси запишется так:

$$\Delta\bar{\varkappa}_m \Delta\bar{u}_m D_2 (1 - m) + \Delta\bar{\varkappa}_m D_1 m = \frac{F_0}{F} n_\varkappa. \tag{47}$$

Поделив левую и правую части уравнения (27) на соответствующие части уравнения (47), устанавливаем связь между концентрацией примеси и скоростью на оси струи:

$$\Delta\bar{\varkappa}_m = k_\varkappa \Delta\bar{u}_m, \tag{48}$$

где

$$k_\varkappa = \frac{n_\varkappa (1 - m)}{n_{2u} - m n_{1u}} \frac{\Delta\bar{u}_m A_2 (1 - m) + A_1 m}{\Delta\bar{u}_m D_2 (1 - m) + D_1 m}. \tag{49}$$

В случае затопленной струи ($m = 0$) с равномерными начальными полями скорости и концентрации примеси ($n_{2u} = n_\varkappa = 1$)

$$k_{\text{зх}} = \frac{\Delta\bar{\varkappa} m}{\bar{u}_m} = \frac{A_2}{D_2} = \text{const}. \tag{50}$$

В случае смешения струй одинаковой скорости ($m = 1$) с равномерными начальными полями имеем

$$k_{\text{сх}} = \frac{A_1}{D_1} = \text{const}. \tag{51}$$

Решая совместно уравнения (20), (27), (35) и (47), можно найти зависимости изменения толщины струи, а также скорости, температуры и концентрации примеси вдоль оси основного участка струи. Для вычисления коэффициентов начальной неравномерности n_{1u}, n_{2u}, $n_\text{т}$, $n_\varkappa$ нужно знать поля скорости, плотности, температуры и других параметров жидкости (или газа) в начальном сечении струи. Используя поля скорости (3), температуры (8) и концентрации примеси (8а) в поперечных сечениях основного участка, можно вычислить определенные инте-

гралы A_1, A_2, B_1, B_2, D_1 и D_2, которые являются коэффициентами уравнений (27), (35) и (37).

При равномерных полях скорости, температуры и концентрации примеси в начальном сечении струи семейство кривых, описывающих изменение относительной избыточной скорости $\Delta\bar{u}_m$ (а также температуры $\Delta\bar{T}_m$ и концентрации $\Delta\bar{x}_m$) по безразмерной длине струи [1]) $\bar{x} = (x/b_0)$, имеет параметром величину $m = u_н/u_0$ при $n = \rho_н/\rho_0 = \text{const}$ или величину n при $m = \text{const}$. С уменьшением m и ростом n «затухание» струи ускоряется.

Начальная неравномерность потока существенно искажает влияние параметра m на характер зависимости $\Delta\bar{u}_m(\bar{x})$. При значительной начальной неравномерности (например, при истечении из длинной цилиндрической трубы в неравномерный поток) влияние m перестает ощущаться. Об этом можно судить по экспериментальным данным для дозвуковой струи (рис. 7.9) и

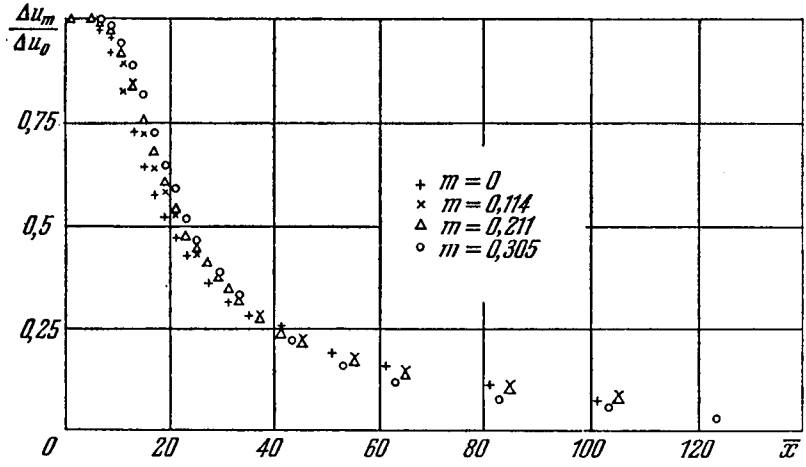


Рис. 7.9. Избыточная осевая скорость в неизотермической ($\theta = 1{,}85$) осесимметричной струе газа, распространяющейся в спутном потоке ($m = \text{var}$); опытные данные О. В. Яковлевского и В. К. Печенкина.

для сверхзвуковой струи при $M_0 = 3$ (рис. 7.10). Степень подогрева струй θ в этих опытах [2]) была примерно одинаковой (соответственно $\theta = 1{,}85$ и $\theta = 2$).

Расчеты и эксперименты показывают, что переходные коэффициенты $k_т$ и $k_ж$, определяемые равенствами (37) и (49), почти

[1]) b_0 — полуширина начального сечения плоской струи (или начальный радиус осесимметричной струи).

[2]) Для сверхзвуковых струй под θ понимается отношение температур торможения в начальном сечении струи и в окружающей среде.

не изменяются по длине струи и не зависят от параметра сжимаемости n.

Таким образом, если установлена зависимость $\Delta\bar{u}_m(\bar{x})$, то от нее легко перейти с помощью (36), (37), (48) и (49) к зависимостям $\Delta\bar{T}_m(\bar{x})$ и $\Delta\bar{\varkappa}_m(\bar{x})$; для этого нужно знать, однако, коэффициенты неравномерности в начальном сечении струи n_{1u}, n_{2u}, $n_т$ и $n_\varkappa$.

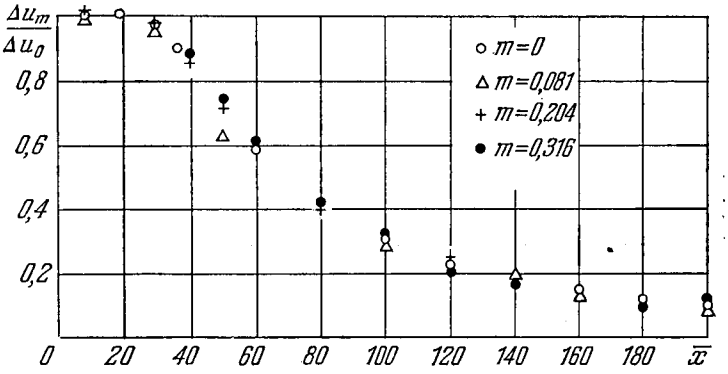


Рис. 7.10. Избыточная осевая скорость в сверхзвуковой осесимметричной струе газа ($\mathbf{M}_0 = 3$), распространяющейся в спутном потоке ($m = \text{var}$); опытные данные Б. А. Жесткова и др.

Если в (37) пренебречь влиянием Δu_m по сравнению с m, то для случая равномерных начальных полей ($n_{1u} = n_{2u} = n_т = n_\varkappa = 1$) получим следующие приближенные зависимости:

для плоской струи

$$k_т = k_\varkappa = 0{,}86\,\frac{1 + 1{,}84m}{1 + 2{,}26m} \tag{52}$$

и для осесимметричной струи

$$k_т = k_\varkappa = 0{,}745\,\frac{1 + 2{,}86m}{1 + 3{,}76m}. \tag{53}$$

Более детальное изложение теории струи в потоке можно найти в монографии автора, ссылки на которую приведены выше, а также в книге, вышедшей под редакцией автора [1]), где показано, что при большой начальной неравномерности струи (толстых пограничных слоях на срезе сопла) при изменении относительной скорости спутного потока в интервале $0{,}5 \leqslant m \leqslant 2$ влияние величины m на законы изменения основных параметров

[1]) Абрамович Г. Н. и др., Турбулентное смешение газовых струй, «Наука», М., 1974.

по длине струи ($b(x)$, $\Delta u_m(x)$, $\Delta T_m(x)$ и т. п.) невелико, причем минимальная интенсивность изменения осевых параметров в основном участке струи имеет место при таком режиме течения (таком соотношении скоростей и плотностей спутного потока), когда величина избыточного импульса ΔI обращается в нуль (см. выражение (23)). Это условие может выполняться лишь при $m \leqslant 1$. Чем тоньше начальные пограничные слои, тем ближе к единице значение параметра $m = m_*$, соответствующего $\Delta I = 0$, т. е. при неограниченном уменьшении толщины пограничных слоев минимальный уровень смешения реализуется при $m = 1$. С ростом толщины пограничных слоев и уменьшением относительной плотности струи ($\rho_0/\rho_\text{п} = 1/n$) величина m_* все больше отличается от единицы и при малой плотности центрального потока для выполнения условия $\Delta I = 0$ необходимо, чтобы он имел значительно бо́льшую скорость, чем наружный поток ($m_* \ll 1$).

§ 3. Дозвуковая неизотермическая струя однородного газа

Рассмотрим дозвуковую струю газа, распространяющуюся в покоящемся газе того же состава. В этом случае ($m = 0$) уравнение количества движения (27) упрощается и принимает вид

$$\bar{u}_m^2 = \frac{F_0}{F}\frac{n_{2u}}{A_2}. \tag{54}$$

Здесь $\bar{u}_m = u_m/u_0$ — отношение скорости на оси в текущем сечении струи к скорости на оси начального сечения, F — площадь текущего сечения, F_0 — площадь начального сечения.

Коэффициенты A_2 и n_{2u} определяются из (24) и (25) с помощью зависимостей (3), (8), (21) и (36). Для вычисления A_2 можно также воспользоваться следующими приближенными зависимостями, которые при $0{,}2 \leqslant \theta \leqslant 5$ и $\mathrm{Pr}_\text{т} = 0{,}5$ дают погрешности не более 3%:

в случае плоской струи:

$$A_2 = \frac{0{,}316\theta}{1 + 0{,}86(\theta - 1)\, k_\text{т}\bar{u}_m}, \tag{55}$$

в случае осесимметричной струи

$$A_2 = \frac{0{,}134\theta}{1 + 0{,}745\,(\theta - 1)\, k_\text{т}\bar{u}_m}. \tag{56}$$

Из (54) на основании (55) и (56) имеем для плоской затопленной струи ($m = 0$)

$$\frac{0{,}316\bar{u}_m^2\theta}{1 + 0{,}86\,(\theta - 1)\, k_\text{т}\bar{u}_m} = \frac{n_{2u}}{\bar{b}}, \tag{57}$$

где, согласно (37),

$$k_т = 0{,}86\,\frac{n_т}{n_{2u}}, \tag{58}$$

и для осесимметричной струи

$$\frac{0{,}134\bar{u}_m^2\theta}{1 + 0{,}745\,(\theta - 1)\,k_т\bar{u}_m} = \frac{n_{2u}}{\bar{r}^2}, \tag{59}$$

где

$$k_т = 0{,}745\,\frac{n_т}{n_{2u}}. \tag{60}$$

В этих формулах для отношений текущего значения полутолщины b или радиуса r струи к их значениям в начальном сечении (b_0, r_0) введено обозначение

$$\bar{b} = \frac{b}{b_0}, \quad \bar{r} = \frac{r}{r_0}.$$

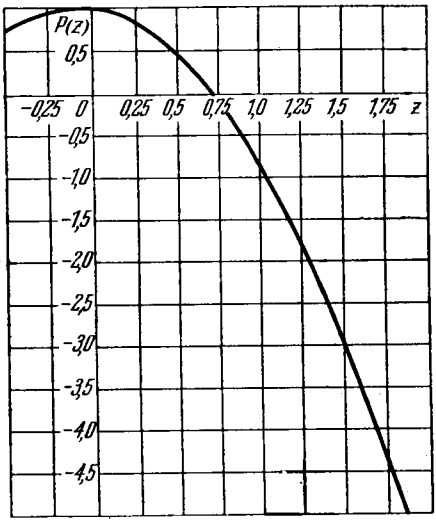


Рис. 7.11. Вспомогательная функция $P(z)$.

Выражения, подобные равенствам (55)—(60), получены и для случая очень большого подогрева ($\theta \to \infty$), но мы здесь на этом не останавливаемся.

Найдем теперь изменение скорости по длине струи. Разделяя переменные в уравнении (22б) и интегрируя по частям (с учетом граничного условия $\bar{x} = \bar{x}_п$[1]), $\bar{b} = \bar{b}_п$, $\bar{u}_m = 1$), имеем

$$c\,(\bar{x} - \bar{x}_п) = \frac{\bar{b}}{1 + \frac{\theta - 1}{2}\,k_т\bar{u}_m} + \int_1^{\bar{u}_m} \frac{\frac{\theta - 1}{2}\,k_т\bar{b}\,d\bar{u}_m}{\left(1 + \frac{\theta - 1}{2}\,k_т\bar{u}_m\right)^2}.$$

Подставляя сюда $\bar{b}$ и $k_т$ из уравнений (57) и (58), после интегрирования получим для плоской неизотермической струи

$$c\,(\bar{x} - \bar{x}_п) = \frac{n_{2u}}{0{,}316\theta}\left[\frac{P(z)}{\bar{u}_m^2} - P(z_0)\right], \tag{61}$$

---

[1]) $\bar{x}_п$ — относительное расстояние от начала струи до начала основного участка.

где

$$z = \frac{\theta - 1}{2} k_т \bar{u}_m, \quad z_0 = \frac{\theta - 1}{2} k_т,$$

$$P(z) = 1 - 0{,}28z - 1{,}72z^2 + 0{,}28z^2 \ln\left|1 + \frac{1}{z}\right|. \qquad (62)$$

График зависимости $P(z)$ изображен на рис. 7.11. Вследствие того что $\lim_{z \to 0} P(z) = 1$, формула (61) при $\theta = 1$ переходит в соотношение для изотермической затопленной струи

$$c(\bar{x} - \bar{x}_п) = 3{,}16 n_{2u} \left[\frac{1}{\bar{u}_m^2} - 1\right]. \qquad (63)$$

Определив из (61) $u_m(x)$, нетрудно найти из (36) зависимость $\Delta T_m(x)$ для изменения осевой температуры, а из (57) — толщину струи в произвольном ее сечении.

Результаты расчетов осевой скорости и толщины струи по формулам (61) и (57) при различных значениях параметра θ и равномерных профилях скорости и температуры в начальном сечении струи ($n_{2u} = n_т = 1$) представлены на рис. 7.12 и 7.13.

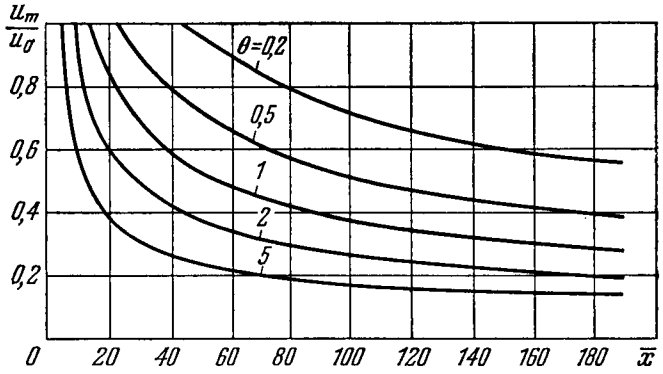


Рис. 7.12. Изменение осевой скорости в затопленных неизотермических плоскопараллельных струях газа (влияние параметра θ).

Из рассмотрения этих фигур следует, что характеристики распространения неизотермической и изотермической струй существенно различны. Нагретая струя размывается значительно быстрее, чем охлажденная: на фиксированном расстоянии от сопла она толще, а скорость на ее оси меньше. Интересно отметить, что искривление границ струи при $\theta = 1$ заметно лишь на близких расстояниях от сопла; при рассмотрении же удаленных участков струйного потока его границы можно считать практически прямолинейными, а угол раствора струи (или коэф-

фициент углового расширения) слабо зависящим от значения параметра θ. На рис. 7.12 и 7.13 дано изменение осевой скорости и толщины струи в зависимости от координаты $\bar{x}$, отсчитываемой от среза сопла, из которого вытекает струя, в то время как в приведенных выше формулах начало отсчета совпадает с переходным сечением струи ($\bar{x} - \bar{x}_{\text{п}}$). Величина $\bar{x}_{\text{п}}$ определяется конфигурацией начального участка струи, которая рассмотрена ниже.

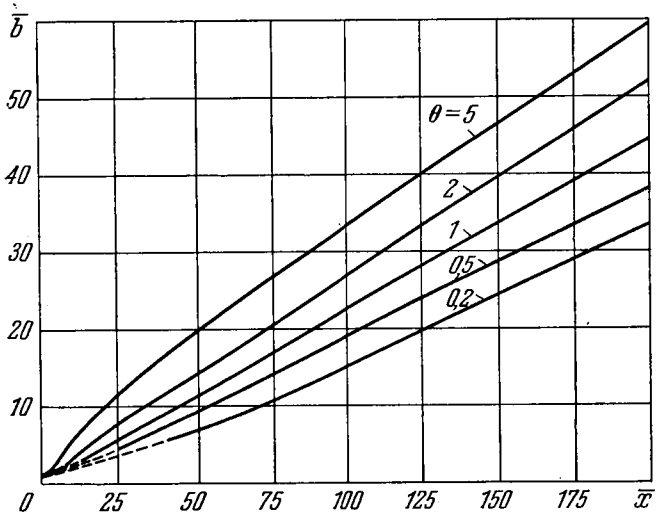


Рис. 7.13. Нарастание толщины в затопленной неизотермической плоскопараллельной струе газа (влияние параметра θ).

Интегрируя уравнение (22б) применительно к случаю осесимметричной струи, получим, принимая во внимание граничное условие $\bar{x} = \bar{x}_{\text{п}}$, $\bar{r} = \bar{r}_{\text{п}}$, $\bar{u}_m = 1$:

$$c(\bar{x} - \bar{x}_{\text{п}}) = -\frac{\bar{r}}{1 + \frac{\theta - 1}{2} k_{\text{т}} \bar{u}_m} + \int_0^{\bar{u}_m} \frac{\frac{\theta - 1}{2} k_{\text{т}} \bar{r}\, d\bar{u}_m}{\left(1 + \frac{\theta - 1}{2} k_{\text{т}} \bar{u}_m\right)^2}.$$

Подставив сюда вместо $\bar{r}$ его выражение через $\bar{u}_m$ по формуле (59) и заменив $k_{\text{т}}$ на основании (60), после интегрирования найдем в неявном виде закон изменения осевой скорости по длине осесимметричной неизотермической струи

$$c(\bar{x} - \bar{x}_{\text{п}}) = \sqrt{\frac{n_{2u}}{0{,}134\theta}} \left[\frac{R(z)}{\bar{u}_m} - R(z_0)\right]. \qquad (64)$$

Здесь

$$z = \frac{\theta - 1}{2} k_т \bar{u}_m, \quad z_0 = \frac{\theta - 1}{2} k_т,$$

$$R(z) = \sqrt{1 + 1{,}49z} - 0{,}73z \operatorname{arctg}\left(1{,}47\sqrt{1 + 1{,}49z}\right) - z \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 + 1{,}49z}}{1 - \sqrt{1 + 1{,}49z}}\right). \quad (65)$$

Вспомогательная функция $R(z)$ изображена на рис. 7.14. Отметим, что формула (64) при $\theta = 1$ переходит в соответствующее соотношение для изотермической осесимметричной струи

$$c(\bar{x} - \bar{x}_п) = 2{,}73\sqrt{n_{2u}}\left[\frac{1}{\bar{u}_m} - 1\right]. \quad (66)$$

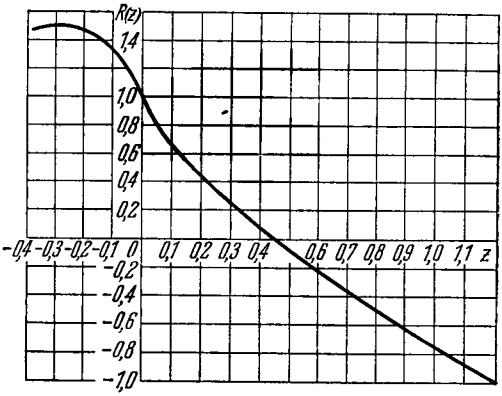


Рис. 7.14. Вспомогательная функция $R(z)$.

Зная $u_m(x)$, можно по формулам (36) и (59) определить температуру на оси струи и радиус струи в ее произвольном сечении.

Для иллюстрации полученных результатов на рис. 7.15 и 7.16 изображены кривые изменения осевой скорости, относительного радиуса осесимметричной струи с равномерными начальными профилями скорости и температуры ($n_{2u} = n_т = 1$) при различных значениях параметра θ. Как и в случае плоской струи, скорость на оси нагретой осесимметричной струи ($\theta > 1$) затухает быстрее, чем в изотермической, а охлажденная струя ($\theta < 1$) обладает значительно большей дальнобойностью [1]), чем изотермическая. Отметим, что искривленность границ неизотермической струи заметна лишь на близких расстояниях от переходного сечения и проявляется тем сильнее, чем больше величина θ отличается от единицы. С увеличением расстояния от сопла границы струи становятся практически прямолинейными, а угол наклона границ к оси струи при $\theta = \text{var}$ стремится к постоянному значению, равному величине угла наклона для струи несжимаемой жидкости.

[1]) Под дальнобойностью струи подразумевается расстояние от сопла, на котором осевая скорость струи падает до определенного заданного значения, например $\bar{u}_m = 0{,}5$.

Нарастание толщины как плоской, так и осесимметричной неизотермической струи при $\theta \approx 1$ и $m = 0$ происходит по линейному закону:

$$\bar{b} = \frac{n_{2u}}{0{,}316\theta} + c\,(\bar{x} - \bar{x}_{\text{п}}), \tag{67}$$

$$\bar{r} = \sqrt{\frac{n_{2u}}{0{,}134\theta}} + c\,(\bar{x} - \bar{x}_{\text{п}}). \tag{68}$$

Уже упоминалось, что величина абсциссы переходного сечения, в котором начинается основной участок струи, зависит от конфигурации начального участка.

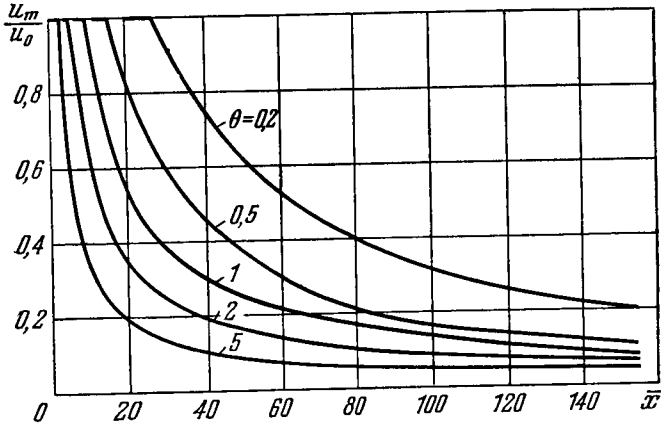


Рис. 7.15. Изменение осевой скорости в неизотермической осесимметричной затопленной струе газа (влияние параметра θ).

Изменение отношения плотностей в начальном сечении струи и окружающей среде ($\rho_0/\rho_{\text{н}}$) ведет к изменению длины начального участка по сравнению с изотермическим случаем; при распространении струи в более плотной среде ядро постоянной скорости (рис. 7.1) укорачивается, а в менее плотной — удлиняется. Это свойство начального участка объясняется следующим образом. Пусть, например, плоскопараллельная струя воздуха с плотностью ρ_0 вытекает со скоростью u_0 в неподвижную воздушную среду с плотностью $\rho_{\text{н}}$ (рис. 7.17). Тогда в зоне турбулентного смешения устанавливается некоторое распределение скоростей, температуры и плотности, которое описывается зависимостями (5), (8) и (21).

Ввиду постоянства давления секундные количества движения на входе и выходе из контура, изображенного на рис. 7.17, одинаковы:

$$\rho_0 u_0^2 y_1 = \int_{y_2}^{y_1} \rho u^2 \, dy. \tag{69}$$

Через пунктирную линию a — *1* притока массы в контур нет, так как вектор скорости u_0 параллелен этой линии; через внешнюю границу затопленной струи 0 — *2* струйки воздуха втекают

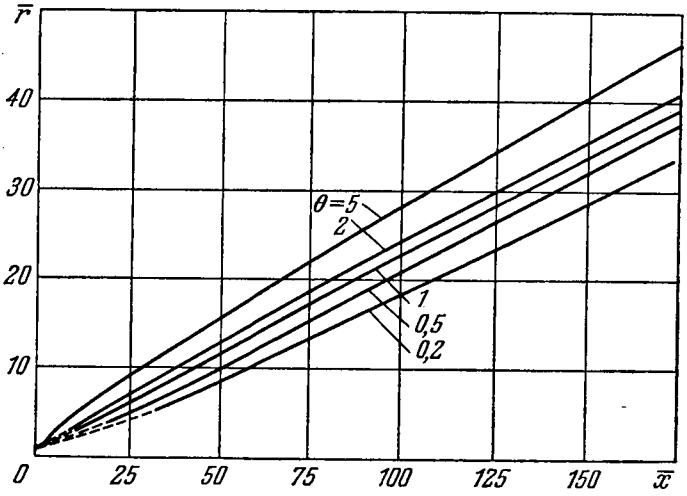


Рис. 7.16. Нарастание толщины затопленной неизотермической осесимметричной струи газа (влияние параметра θ).

перпендикулярно к направлению распространения струи, поэтому их количество движения в проекции на направление струи равно нулю.

Из (69) с учетом (5), (6), (7) и (21) следует

$$\frac{y_1}{y_1 - y_2} = \frac{x_1}{b} = \theta \int_0^1 \frac{2\eta_н^{1,5} - \eta_н^3}{1 + (\theta - 1)\eta_н} d\eta_н = \varphi(\theta). \tag{70}$$

После интегрирования имеем

$$\varphi(\theta) = \frac{1}{\theta - 1} - \frac{1}{2(\theta - 1)^2} - \frac{1}{(\theta - 1)^3} + \frac{\ln \theta}{(\theta - 1)^4} - \frac{4 \operatorname{arctg} \sqrt{\theta - 1}}{(\theta - 1)^{2,5}} \tag{71}$$

или приближенно

$$\varphi(\theta) = \frac{\ln\theta}{\theta - 1} - \frac{0{,}45}{1 + 0{,}375\,(\theta^{0{,}75} - 1)}. \qquad (72)$$

Ввиду прямолинейности границы зоны смешения в начальном участке струи величина y_1/b является постоянной и зависит только от θ. В конце начального участка ($x = x_н$) внутренние границы зоны смешения смыкаются ($y_1 = b_0$), поэтому относительную длину начального участка ($\bar{x}_н = x_н/b_0$) можно получить с помощью (70) из условия подобия треугольников, образованных лучами $0-1$ и $0-2$ и сечениями, параллельными линии $1-2$:

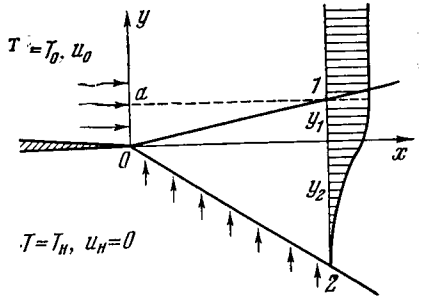


Рис. 7.17. Схема пограничного слоя неизотермической струи.

$$\frac{b_0}{x_н}\frac{x}{b} = \varphi(\theta). \qquad (73)$$

Согласно (20) относительная толщина зоны смешения в начальном участке затопленной струи

$$\frac{db}{dx} = \frac{b}{x} = 0{,}5c\left(1 + \frac{\rho_н}{\rho_0}\right) = 0{,}5c\,(1 + \theta). \qquad (74)$$

График зависимости длины начального участка струи от θ, рассчитанный по формулам (71), (73) и (74), нанесен на рис. 7.18.

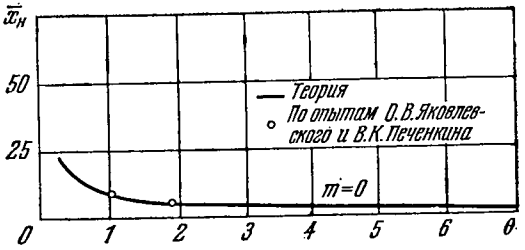


Рис. 7.18. Зависимость длины начального участка неизотермической струи газа от параметра θ.

Абсцисса переходного участка может быть найдена из (74), если подставить вместо b начальную полутолщину основного

участка $b_п$, которая определяется из (67) при $x = x_п$. На рис. 7.19 представлены результаты расчетов величины $\bar{x}_п$ для плоской и осесимметричной струй.

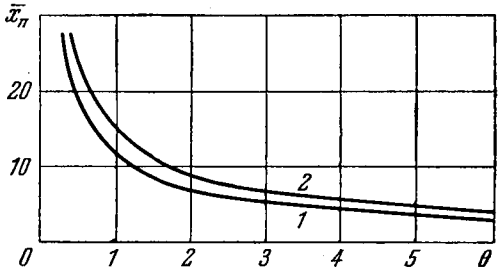


Рис. 7.19. Влияние степени предварительного подогрева θ на абсциссу переходного сечения для осесимметричной (*1*) и плоской (*2*) струй.

Эти значения $\bar{x}_п$ были использованы при построении кривых $\bar{u}_m(\bar{x})$ и $\bar{b}(\bar{x})$ или $\bar{r}(\bar{x})$ на рис. 7.12, 7.13, 7.15 и 7.16.

§ 4. Сверхзвуковая изобарическая струя

Выясним основные свойства сверхзвуковой струи, вытекающей в неподвижный газ того же состава, считая давление в струе и окружающей среде одинаковым. Воспользуемся для этого, как и для дозвуковой струи, уравнением количества движения (54) и уравнением распространения струи (22б).

Согласно опытным данным Б. А. Жесткова и др. в сверхзвуковой струе справедливы профили скорости (3) и(5), а также профили температур (7) и (8), если в них вместо температуры потока T подставить температуру торможения T^*. Следовательно, в начальном участке затопленной сверхзвуковой струи имеем при $c_p = \text{const}$

$$\frac{\Delta T^*}{\Delta T_0^*} = \frac{T^* - T_н^*}{T_0^* - T_н^*} = \eta_н, \tag{75}$$

$$\frac{u}{u_0} = 1 - f(\eta_н), \tag{76}$$

в основном участке соответственно

$$\frac{\Delta T^*}{\Delta T_m^*} = \frac{T^* - T_н^*}{T_m^* - T_н^*} = \left(\frac{u}{u_m}\right)^{\mathrm{Pr_т}}, \tag{77}$$

$$\frac{u}{u_m} = f(\eta), \tag{78}$$

где

$$f(\eta) = (1 - \eta^{1,5})^2. \tag{79}$$

В начальном участке ордината $\eta_н = y/b$ отсчитывается от наружной границы, а в основном участке $\eta = (y/b)$ — от оси струи.

В дальнейшем принимаем, как и в неизотермической струе, $Pr_т = 0{,}5$. Выразим отношение плотностей через температуры торможения:

$$\frac{\rho_н}{\rho_m} = \frac{T_m}{T_н} = \frac{T_m^* - \dfrac{u_m^2}{2c_p}}{T_н^*}. \tag{80}$$

Здесь учтено, что в окружающем струю неподвижном газе температура статическая равна температуре торможения ($T_н = T_н^*$.) Принимая во внимание равенство $R = c_p - c_v$ и вводя обозначения

$$\lambda = \frac{u}{a_{кр}}, \quad \theta^* = \frac{T_0^*}{T_н^*}, \quad \frac{c_p}{c_v} = k, \quad \frac{k-1}{k+1} = a,$$

представим (80) в следующем виде:

$$\frac{\rho_н}{\rho_m} = \frac{\Delta T_m^*}{\Delta T_0^*}(\theta^* - 1) + 1 - a\lambda_0^2\theta^*\bar{u}_m^2. \tag{81}$$

В частном случае для начального участка ($\Delta T_m^* = \Delta T_0^*$, $\bar{u}_m = 1$)

$$\frac{\rho_н}{\rho_0} = \theta^*(1 - a\lambda_0^2). \tag{82}$$

Для осесимметричной сверхзвуковой струи при $\theta^* = 1$ имеем

$$\frac{\rho_н}{\rho_m} = 1 - a\lambda_0^2\bar{u}_m^2, \tag{83}$$

$$\frac{\rho_н}{\rho_0} = 1 - a\lambda_0^2. \tag{83а}$$

Подставляя равенство (83) в (24), можно найти значение коэффициента A_2 как функцию приведенной скорости λ_0. В связи с громоздкостью получающегося выражения удобнее пользоваться приближенной формулой

$$A_2 = 0{,}134(1 - a\lambda_0^2)[1 + 0{,}448a\lambda_0^2\bar{u}_m^2]. \tag{84}$$

Подставив выражение (83) в уравнение распространения струи (22б), получим

$$c\frac{dx}{db} = \frac{2}{1 - a\lambda_0^2\bar{u}_m^2} \tag{85}$$

или для начального участка ($\bar{u}_m = 1$)

$$c\frac{dx}{db} = \frac{2}{1 - a\lambda_0^2}. \tag{86}$$

Из совместного решения уравнений (85), (54) и (84) устанавливаем связь между осевой скоростью и расстоянием для основного участка сверхзвуковой струи

$$c(\bar{x} - \bar{x}_\text{п}) = \sqrt{\frac{n_{2u}}{0{,}134\left(1 - a\lambda_0^2\right)}}\left[\frac{F(z)}{\bar{u}_m} - F(z_0)\right]. \tag{87}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$z = \bar{u}_m\sqrt{\frac{a\lambda_0^2}{2}}, \qquad z_0 = \sqrt{\frac{a\lambda_0^2}{2}}$$

и

$$F(z) = \frac{1}{(1 - z^2)\sqrt{1 + 0{,}9z^2}} - \frac{0{,}53z^2\sqrt{1 + 0{,}9z^2}}{1 - z^2} - 1{,}07z\ln\frac{\sqrt{1 + 0{,}9z^2} + 1{,}38z}{\sqrt{1 - z^2}}. \tag{88}$$

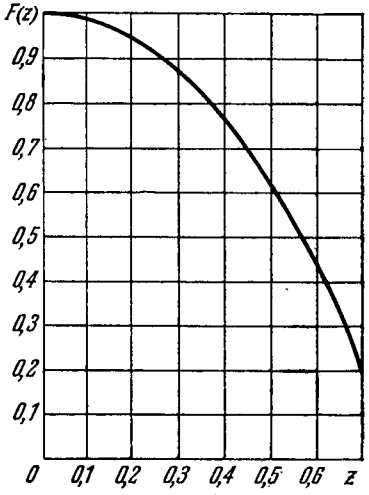


Рис. 7.20. Вспомогательная функция $F(z)$.

Функция $F(z)$, рассчитанная по уравнению (88), изображена на рис. 7.20.

При $\lambda_0 \to 0$ имеем $z \to 0$ и $F(z) \to 1$, поэтому формула (87) переходит в соотношение (66), полученное для струи несжимаемой жидкости. Следует отметить, что влияние сжимаемости газа на изменение скорости вдоль оси осесимметричной струи определяется главным образом первым сомножителем в правой части уравнения (87).

Кривые изменения осевой скорости и нарастания толщины струи по ее длине, рассчитанные соответственно по уравнениям (87) и (85) при значении константы $c = 0{,}22$ и $n_{2u} = 1$ для нескольких значений параметра $a\lambda_0^2$, представлены на рис. 7.21 и 7.22. Из анализа этих кривых следует, что если начальная скорость струи превышает скорость звука, то падение скорости вдоль оси струи становится менее резким, чем в случае струи малой скорости; при этом с ростом приведенной скорости λ_0 указанное отличие проявляется все более и более заметно.

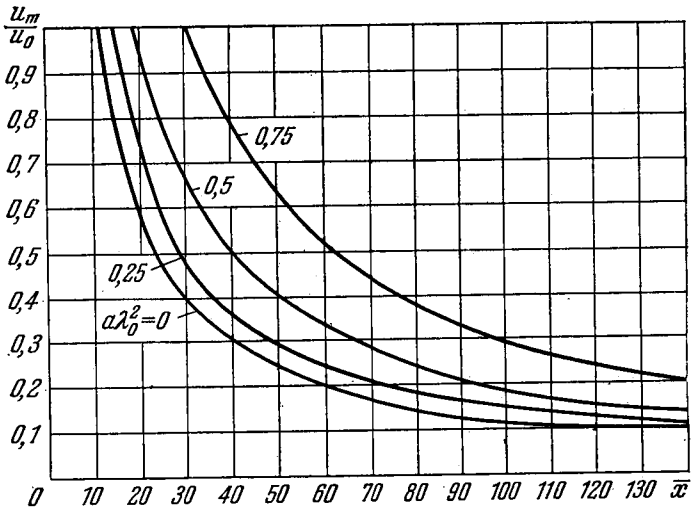


Рис. 7.21. Изменение осевой скорости в осесимметричной сверхзвуковой струе газа в неподвижной среде (влияние параметра $a\lambda_0^2$).

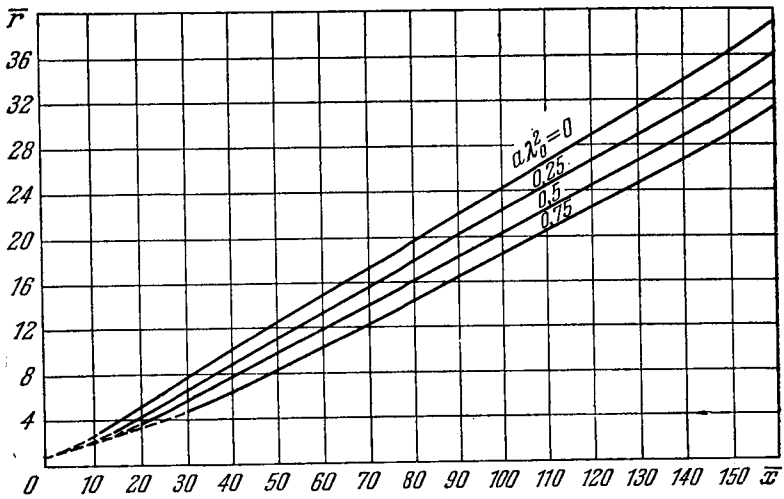


Рис. 7.22. Нарастание толщины затопленной осесимметричной сверхзвуковой струи газа (влияние параметра $a\lambda_0^2$).

Что касается границ сверхзвуковой струи, то они, вообще говоря, являются криволинейными. На практике, однако, этой криволинейностью можно (рис. 7.22) пренебречь и аппроксимировать границы струи на некотором удалении от переходного сечения прямыми линиями, наклоненными к оси струи под тем же углом, что и в несжимаемой жидкости. Необходимая для расчетов величина $\bar{x}_п$ (абсцисса переходного сечения) определяется по той же методике, что и в случае неизотермической

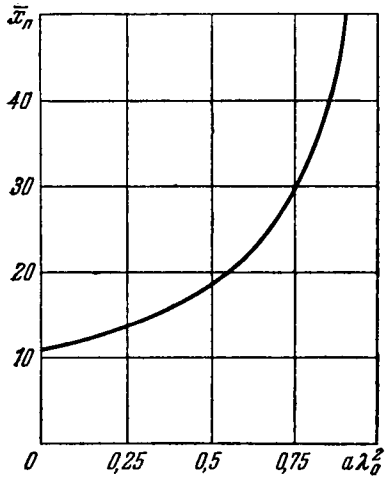


Рис. 7.23. Влияние скорости истечения $(a\lambda_0^2)$ на абсциссу переходного сечения в осесимметричной струе.

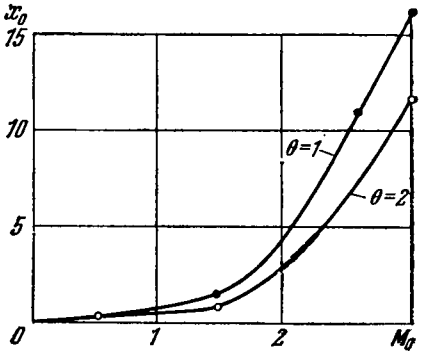


Рис. 7.24. Влияние скорости истечения M_0 и степени предварительного подогрева θ на положение полюса осесимметричной струи по опытным данным Б. А. Жесткова, М. М. Максимова и др.

струи (с использованием уравнения (83а) для отношения плотностей). Зависимость $\bar{x}_п(a\lambda_0^2)$ изображена на рис. 7.23.

Заканчивая рассмотрение свойств затопленных сверхзвуковых струй, отметим, что если их криволинейные границы аппроксимировать прямыми линиями, то углы наклона к оси x этих линий оказываются независящими от параметра сжимаемости $a\lambda_0^2$, а точка пересечения этих прямых с осью x (полюс струи) изменяет свое положение относительно среза сопла в зависимости от значения $a\lambda_0^2$. Влияние числа M_0 на величину полюсного расстояния $\bar{x}_0$ показано на рис. 7.24. Величина $\bar{x}_0 = x_0/b$ характеризует дальнобойность струи; результаты, представленные на рис. 7.24, указывают на значительное увеличение дальнобойности с ростом параметра $a\lambda_0^2$.

Рассмотрение одновременного влияния подогрева и начальной скорости на характеристики струи связано с определенными

расчетными трудностями. Укажем, однако, что подогретая сверхзвуковая струя размывается значительно быстрее изотермической струи при том же значении $a\lambda_0^2$, причем влияние подогрева усиливается с увеличением значения $a\lambda_0^2$.

§ 5. Истечение сверхзвуковой газовой струи из сопла на нерасчетном режиме

При работе реактивных двигателей, различных струйных аппаратов, например эжекторов, и в некоторых других практически важных случаях истечение сверхзвуковой струи из сопла происходит в условиях нерасчетного режима, когда давление в потоке газа на выходе из сопла отличается от давления в среде, в которую вытекает струя. При этом возможны как недорасширение газа в сопле ($p_a > p_н$), так и перерасширение его ($p_a < p_н$). Вследствие этого на участке струи, прилегающем к соплу, возникает система волн расширения и сжатия, а также скачков уплотнения, благодаря которым и осуществляется постепенное уравнивание давления в струе с давлением, господствующим в окружающей среде.

На некотором расстоянии от сопла давление в струе становится равным давлению в окружающей среде, и струя уже ничем не отличается от обычной расчетной струи, которую мы рассматривали выше.

Условия нерасчетного истечения сверхзвуковой струи принято характеризовать степенью нерасчетности, представляющей собой отношение действительного давления торможения в ресивере к расчетному [1]), которое может быть приближенно заменено отношением давления на выходе из сопла к давлению в окружающей среде:

$$n = \frac{p_a}{p_н}.$$

Остановимся на некоторых экспериментальных данных, относящихся к сверхзвуковым струям при нерасчетном истечении из сопел. На рис. 7.25 внизу сплошной линией изображено изменение полного давления p_x^*, отнесенного к давлению в ресивере, вдоль оси сверхзвуковой ($M_a = 1{,}5$) нерасчетной ($n = 5$) струи, а пунктиром — максимальное полное давление в струе; в верхней части рис. 7.25 показаны результаты экспериментального изучения картины течения в сверхзвуковой струе при нерасчет-

[1]) Расчетным называют давление, соответствующее расчетному числу Маха истечения, величина которого определяется заданным отношением площадей критического и выходного сечений сопла.

ном режиме истечения: профили полного давления в поперечных сечениях струи и области дозвуковых (заштриховано) и сверхзвуковых скоростей. Как видим, в начальном участке струи максимальное значение давления имеет место не на оси струи.

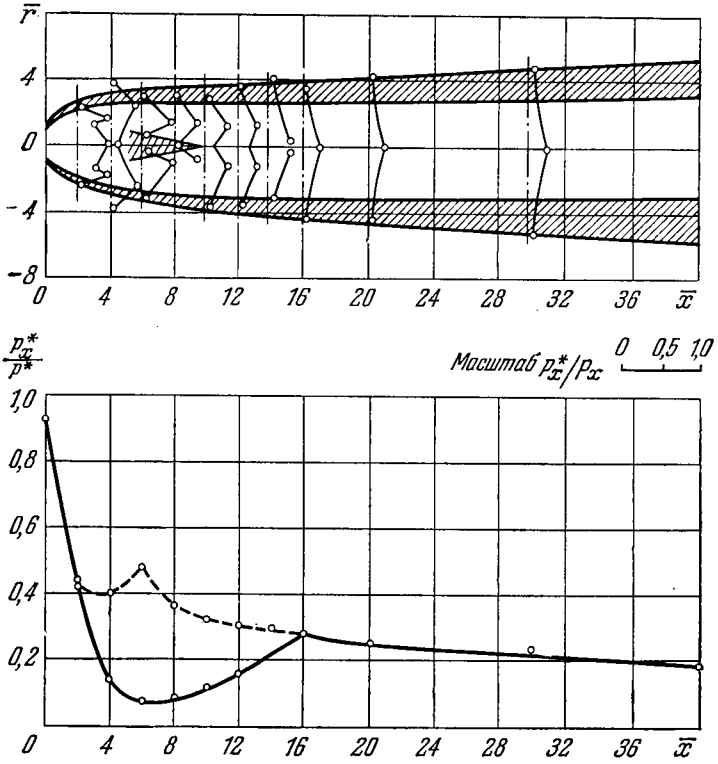


Рис. 7.25. Картина течения и распределение полного давления в сверхзвуковой нерасчетной струе газа ($M_a = 1{,}5$; $n = 5$) по опытам Б. А. Жесткова, М. М. Максимова и др.

Опыты показывают, что на некотором расстоянии от того сечения, где струя становится изобарической («изобарическое сечение»), максимальная скорость наблюдается на оси струи (начиная с места слияния сплошной и пунктирной линий в нижней части рис. 7.25).

Используя условия сохранения импульса между плоскостью среза сопла (индекс «a») и «изобарическим сечением» (индекс «c»), имеем

$$G_a u_a + (p_a - p_н) F_a = G_c u_c, \qquad (89)$$

где G_a и G_c — массовые расходы воздуха в струе в сечениях a и c; u_a, u_c — средние значения скорости в этих сечениях; F_a — площадь сопла в сечении a.

Переходя к безразмерным величинам

$$\lambda = \frac{u}{a_{кр}}, \quad G\frac{u_a}{p_a F_a} = \frac{\rho_a u_a^2}{p_a} = \frac{2k}{k+1}\,\frac{\lambda_a^2}{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda_a^2},$$

из (89) получаем (при постоянном значении критической скорости)

$$\lambda_c = \frac{G_a}{G_c}\left[1+\lambda_a^2-\frac{1}{n}\left(1-\frac{k-1}{k+1}\lambda_a^2\right)\right]\frac{k+1}{2k\lambda_a}. \qquad (90)$$

Площадь изобарического сечения струи F_c рассчитывают с помощью уравнений расхода и состояния[1]):

$$\frac{F_c}{F_a} = \frac{G_c}{G_a}\,\frac{\rho_a u_a}{\rho_c u_c} = \frac{G_c}{G_a}\,\frac{\lambda_a}{\lambda_c}\,\frac{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda_c^2}{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda_a^2}\,n. \qquad (91)$$

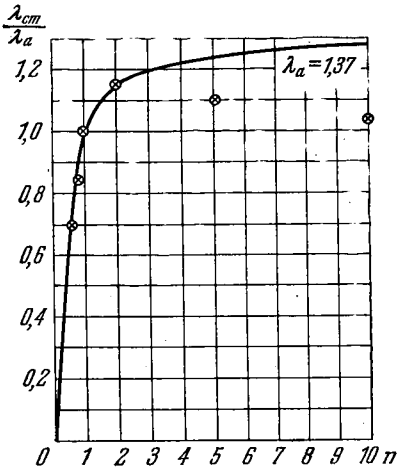


Рис. 7.26. Влияние степени нерасчетности n на величину приведенной осевой скорости в изобарическом сечении по опытам Б. А. Жесткова, М. М. Максимова и др. ($M_a = 1{,}5$).

Перемешивание приводит к увеличению массы струи и резкому возрастанию неравномерности профиля скорости, который в изобарическом сечении носит типично струйный характер. Вследствие подсасывания струей вещества из окружающей среды величина λ_c всегда должна быть несколько ниже, чем в случае $G_a = G_c$. При этом с ростом параметра n отмеченный эффект проявляется слабее.

Неравномерность профиля скорости в изобарическом сечении струи выражается в значительном возрастании осевой скорости ($\lambda_{ст}$) по сравнению со средним ее значением $\lambda_{ст} > \lambda_c$.

Скачки уплотнения в неизобарической части струи создают зону пониженной скорости (рис. 7.25).

---

[1]) Более детальный анализ изменения параметров газа по длине начального участка нерасчетной сверхзвуковой струи в одномерной постановке дается в § 6.

Действие отмеченных выше факторов всегда происходит одновременно и, как мы видели, оказывает противоположное влияние на величину λ_{cm}. На рис. 7.26 приведена кривая, рассчитанная с помощью (90) в предположении об отсутствии смешения ($G_a = G_c$) для $\lambda_a = 1{,}37$ и $k = 1{,}4$. Опытные данные, взятые из экспериментов Б. А. Жесткова и др. (при $\lambda_a = 1{,}37$), показывают, что при больших степенях нерасчетности ($n > 3$) получаются завышенные расчетные значения скорости в изобарическом сечении. При $n \approx 10$ воздействие всех факторов на величину λ_{cm} взаимно уравновешивается, и скорость на оси струи в изобарическом сечении становится очень близкой к λ_a.

Вычисление скорости на оси потока, после того как струя становится изобарической, может быть произведено на основании уравнения импульса (с учетом неравенства давления в сопле и в окружающей среде) и уравнения распространения струи (85). В случае осесимметричной струи имеем

$$I = \int_F \rho u^2 2\pi r\, dr = \rho_a u_a^2 \pi r_a^2 + (p_a - p_н)\, \pi r_a^2. \qquad (92)$$

Параметры газового потока на выходе из сопла (обозначенные в уравнении (92) индексом «a») могут быть определены по известным параметрам газа в ресивере и геометрическим размерам сопла в предположении о том, что при любом значении $n > 1$ в сопле срабатывается тот же относительный перепад давлений, как и при расчетном режиме истечения.

Приведем уравнение (92) к безразмерному виду путем деления обеих его частей на величину $\pi r^2 p_н \frac{2k}{k-1}$. После некоторых преобразований получим

$$\bar{u}_m^2 A_2 = \frac{1}{\bar{r}^2}\left[n_{2u} n + \frac{1 - a\lambda_a^2}{a\lambda_a^2}\,\frac{a}{1+a}\,(n-1)\right], \qquad (93)$$

где $\bar{r} = r/r_a$, $a = (k-1)/(k+1)$, r — радиус струи. Сравнивая (93) с выражением (54), видим, что уравнение импульсов для нерасчетной струи отличается от соответствующего выражения в случае расчетного истечения множителем

$$N = n + \frac{1 - a\lambda_a^2}{n_{2u} a\lambda_a^2}\,\frac{a}{1+a}\,(n-1), \qquad (94)$$

который зависит только от условий в начальном сечении струи и не изменяется по координате x. Это обстоятельство позволяет использовать в качестве решения системы уравнений (85) и (93) полученное выше решение (87) для сверхзвуковой струи газа при расчетном режиме истечения. Окончательная формула

для определения осевой скорости нерасчетной струи имеет вид

$$c(\bar{x}-\bar{x}_{\text{п}})=\sqrt{\frac{Nn_{2u}}{0{,}134\left(1-a\lambda_a^2\right)}}\left[\frac{F(z)}{\bar{u}_m}-F(z_0)\right], \qquad (95)$$

причем функция $F(z)$ определяется формулой (88). Нарастание толщины струи в данном случае определяется из уравнений (93) и (95).

Из формулы (95), а также равенства (94) следует, что нерасчетная струя при $n > 1$ обладает значительно большей дальнобойностью, чем соответствующая (при том же значении $a\lambda_a^2$) изобарическая сверхзвуковая струя; при этом дальнобойность струи, определяемая, например, как расстояние от сопла, на котором осевая скорость составляет половину начальной, возрастает примерно пропорционально $\sqrt{N}$ или при больших значениях величины $a\lambda_a^2$ пропорционально $\sqrt{n}$. Из выражения (94) следует, кроме того, что когда скорость истечения незначительно отличается от звуковой (параметр $a\lambda_a^2$ мал), то даже небольшая нерасчетность струи может приводить к заметному увеличению ее дальнобойности. Например, при $a\lambda_a^2=0{,}2$ ($\mathbf{M}_a=1{,}11$) и $n=1{,}2$ величина N составляет 1,36, т. е. дальнобойность нерасчетной струи оказывается на 17% больше расчетной.

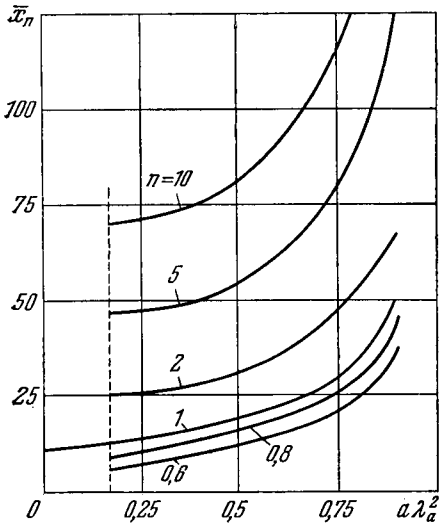


Рис. 7.27. Зависимость абсциссы переходного сечения сверхзвуковых нерасчетных струй от параметров $a\lambda_a^2$ и n.

Для отыскания значения абсциссы переходного сечения $\bar{x}_{\text{п}}$, которое необходимо для расчета струи, нужно знать характеристики турбулентного расширения струи в начальном ее участке. Ввиду сложности теории начального участка нерасчетной струи обычно используют для вычисления либо зависимости, полученные для соответствующей расчетной струи, либо экспериментальные данные. Зависимость $\bar{x}_{\text{п}}(a\lambda_a^2, n)$, определенная в предположении о справедливости соотношений для начального участка расчетной струи и в случае нерасчетного истечения, изображена на рис. 7.27.

Сравнение значений осевой скорости, вычисленных по формуле (95), с результатами измерений скорости в сверхзвуковых нерасчетных струях газа представлено на рис. 7.28 и 7.29.

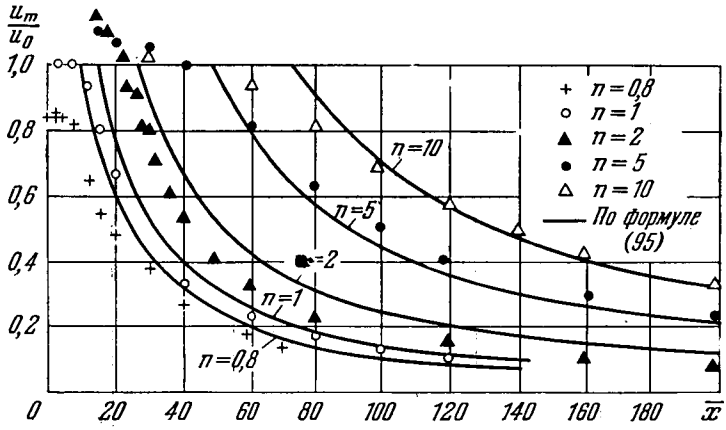


Рис. 7.28. Сравнение расчетных и экспериментальных значений осевой скорости в сверхзвуковой осесимметричной струе газа ($M_a = 1{,}5$) на расчетном ($n = 1$) и нерасчетных ($n = \text{var}$) режимах истечения по опытам Б. А. Жесткова, М. М. Максимова и др.

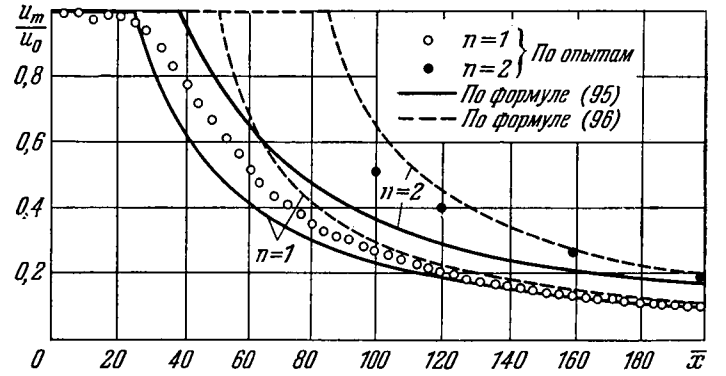


Рис. 7.29. Сравнение расчетных и экспериментальных значений осевой скорости в сверхзвуковой осесимметричной струе газа ($M_a = 3$) на расчетном ($n = 1$) и нерасчетном ($n = 2$) режимах истечения по опытам Б. А. Жесткова, М. М. Максимова и др.

Экспериментальные данные, приведенные на рис. 7.28, получены для сопла, рассчитанного на число Маха $M_a = 1{,}5$ ($\lambda_a = 1{,}37$), при следующих значениях параметра нерасчетности n: 0,8; 1; 2; 5; 10. Опытные значения скорости на рис. 7.29 соответствуют

истечению из сопла, рассчитанного на число Маха $M_a = 3$, при $n = 1$ и $n = 2$. Из рассмотрения этих фигур следует, что теоретические результаты в первом приближении удовлетворительно согласуются с опытными данными, хотя в отдельных случаях наблюдается заметное количественное расхождение между ними. Отмеченное несоответствие может являться следствием использования в начальном участке нерасчетной струи зависимостей для струи при расчетном истечении.

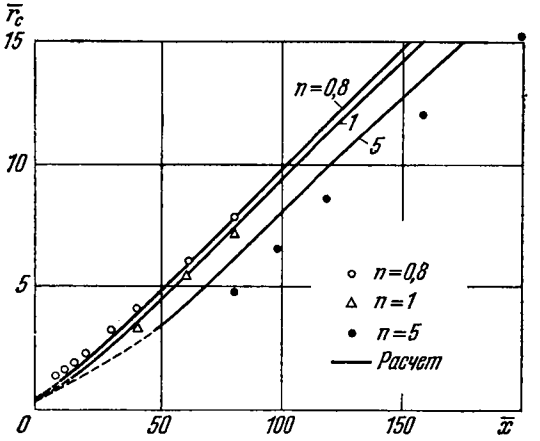


Рис. 7.30. Сравнение расчетных и экспериментальных значений половинного радиуса $\bar{r}_c$ в сверхзвуковых ($M_a = 1{,}5$) струях газа при расчетном и нерасчетных режимах по опытам Б. А. Жесткова, М. М. Максимова и др.

Аналогичные выводы следуют и из анализа рис. 7.30 и 7.31, на которых представлены опытные данные о расположении линий половинной скорости в сверхзвуковых струях при различных значениях расчетного числа Маха M_a и параметра нерасчетности n, а также результаты соответствующих расчетов по формулам (93)—(95). Как видно из рассмотрения рис. 7.30 и 7.31, линии половинной скорости (и соответствующие им границы) в сверхзвуковых нерасчетных струях, вообще говоря, криволинейны, особенно вблизи переходного сечения, но кривизна границ мала, и поэтому они могут быть в первом приближении заменены прямыми линиями. Угол наклона этих линий не зависит от параметров $a\lambda_a^2$ и n (тангенс этого угла равен, как и в струе несжимаемой жидкости, 0,22), а положение точек пересечения их с осью x относительно среза сопла (полюсное расстояние $\bar{x}_0$) изменяется в зависимости от значений

$a\lambda_a^2$ и n. Экспериментальная зависимость величины $\bar{x}_0$ от n для двух значений чисел $\mathbf{M}_a$ (или параметра $a\lambda_a^2$) приведена на рис. 7.32.

Как видим, полюс струи с увеличением как параметра нерасчетности n, так и значения $a\lambda_a^2$ смещается вниз по потоку. Если использовать понятие полюса струи, предполагая границы основного участка струи прямолинейными, то формула для

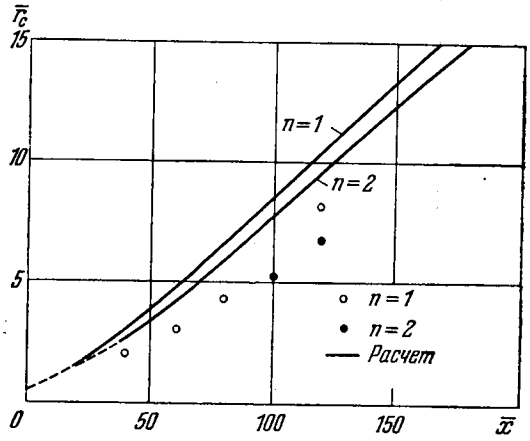


Рис. 7.31. Сравнение расчетных и экспериментальных значений половинного радиуса $\bar{r}_c$ в сверхзвуковых ($\mathbf{M}_a = 3$) струях газа при расчетном и нерасчетном режимах по опытам Б. А. Жесткова, М. М. Максимова и др.

определения осевой скорости и толщины осесимметричной струи принимает вид

$$c(\bar{x} - \bar{x}_0) = \frac{1}{\bar{u}_m} \sqrt{\frac{n_{2u} n + \dfrac{1 - a\lambda_a^2}{a\lambda_a^2} \dfrac{a}{1+a} (n-1)}{0{,}134 \left(1 - a\lambda_a^2\right)\left(1 + 0{,}45 a\lambda_a^2 \bar{u}_m^2\right)}}, \qquad (96)$$

$$\bar{r} = c(\bar{x} - \bar{x}_0). \qquad (97)$$

Кривые затухания осевой скорости, рассчитанные по уравнению (96) для двух значений параметра n: 1,0 и 2,0 при $\mathbf{M}_a = 3$ нанесены пунктирными линиями на рис. 7.29; при этом $\bar{x}_0$ определяется по опытным данным, представленным на рис. 7.32. Анализируя ход расчетных кривых и сравнивая их с экспериментальными точками, можно сделать вывод о том, что кривые, соответствующие уравнению (96) в области переходного и в

начале основного участка, сильнее отклоняются от опытных значений осевой скорости, чем кривые, рассчитанные по формуле (95).

Метод расчета сверхзвуковой струи при $n \neq 1$, изложенный в настоящем параграфе, следует рассматривать как грубо приближенный. В нем не учитываются конкретные условия развития струи в «газодинамическом» участке, примыкающем к соплу, на котором давление (при $n \neq 1$) существенно отличается от атмосферного. Наиболее слабым местом этого метода является способ определения абсциссы переходного сечения, а также то, что он пригоден лишь для той части изобарического течения, в которой скорость на оси струи является максимальной; в действительности между газодинамическим участком (где $p \neq p_н$) и этой частью изобарического течения расположена изобарическая зона с пониженной скоростью на оси. Приближенная теория газодинамического участка струи излагается ниже.

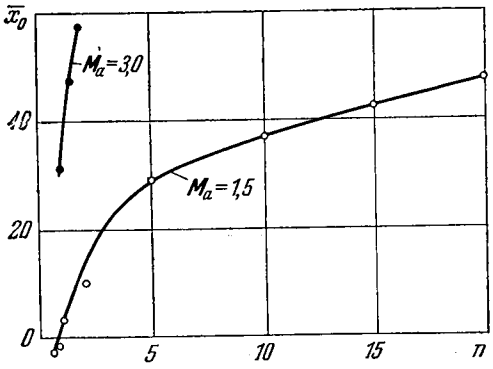


Рис. 7.32. Влияние степени нерасчетности на положение полюса сверхзвуковой струи газа по опытам Б. А. Жесткова, М. М. Максимова и др.

§ 6. Одномерная теория начального («газодинамического») участка нерасчетной сверхзвуковой струи

Характерной особенностью нерасчетной сверхзвуковой струи является существенная неравномерность потока: параметры газа значительно изменяются как по длине струи, так и по радиусу поперечных сечений. Для расчета такого потока обычно применяется метод характеристик, позволяющий по исходным значениям параметров на срезе сопла найти параметры газа во всей сверхзвуковой части потока, примыкающей к соплу. В ряде случаев, однако, необходимо знать только некоторые суммарные характеристики потока, например полный импульс, суммарные потери давления, площадь сечения, и не требуется определения внутренней структуры струи. Для решения таких задач вместо громоздкого и трудоемкого метода характеристик было бы желательно применить более простые расчетные методы.

Ниже излагается один из таких методов, базирующийся на осреднении параметров струи в поперечном сечении и приближенном рассмотрении ее как одномерного газового потока [1]).

Выясним прежде всего, насколько допустимо пользоваться осреднением параметров в потоке столь большой неравномерности, как нерасчетная сверхзвуковая струя, где, например, статическое давление может уменьшаться от периферии к оси в 10—20 раз, соответственно с этим изменяется и скорость течения.

При расчете струи используются уравнения энергии, неразрывности и количества движения. Поэтому необходимо, чтобы значения полной энергии, расхода и импульса газа в поперечном сечении, вычисленные по средним значениям параметров, были равны их действительной величине в исходном неравномерном потоке. Кроме того, для расчета важно правильно оценить энтропию потока: это дает возможность использовать условие сохранения величины полного давления на участках, где отсутствуют потери, а также определять действительную величину суммарных потерь по изменению среднего полного давления.

Как известно (гл. V), при осреднении неравномерного потока в общем случае могут быть сохранены неизменными только три его суммарные характеристики. Однако для сверхзвукового потока с постоянной по сечению температурой торможения, каким является начальный участок нерасчетной струи идеального газа при отсутствии смешения, можно найти такие средние значения параметров в поперечном сечении, при переходе к которым одновременно с высокой степенью точности сохраняются величины расхода, полной энергии, импульса и энтропии при неизменной площади сечения. Эти средние значения параметров газа в поперечных сечениях начального участка струи и будем вводить в уравнения неразрывности, энергии, импульсов. Совместные решения этих уравнений поэтому будут также относиться к средним значениям параметров, а определяемая отсюда площадь сечения будет равна действительной площади соответствующих сечений струи. Почти все основные свойства потока при таком одномерном рассмотрении не изменяются и оцениваются правильно. Утрачивается лишь одно существенное свойство течения, а именно равенство статического давления на границах струи и во внешней среде; поэтому приходится условно полагать, что в каждом поперечном сечении потока существует некоторое постоянное среднее статическое давление p, в общем случае отличное от давления внешней среды $p_н$.

---

[1]) Черкез А. Я., Об одномерной теории нерасчетной сверхзвуковой струи газа, Изв. АН СССР, ОТН, № 5, 1962.

Остановимся на случае сверхзвуковой струи, вытекающей из недорасширенного сопла, т. е. имеющей на срезе сопла избыточное давление $p_a > p_н$ (рис. 7.33). Схематическая картина такого течения описана в § 2 гл. IV; более детальное рассмотрение выявляет следующие особенности недорасширенной сверхзвуковой струи. Около кромки сопла a возникает пучок характеристик (волн разрежения), обеспечивающий расширение газа

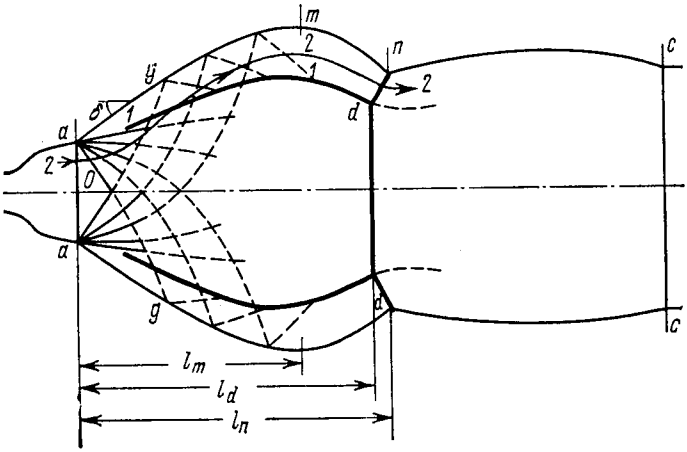


Рис. 7.33. Схема струи, вытекающей из сопла с избыточным статическим давлением: *1* — висячий скачок, *2* — линия тока, $d - d$ — диск Маха, $d - n$ — отраженный скачок, *agmnc* — граница струи.

в струе от давления на срезе сопла p_a до давления окружающего газа $p_н$. Ускорение потока сопровождается отклонением линий тока от первоначального направления, в связи с чем поперечное сечение струи возрастает. Угол δ, который составляет граница струи с направлением потока на срезе сопла, можно определить по таблице плоского течения Прандтля — Майера (приложение 1). До точки пересечения первой характеристики aOg с границей струи последняя остается прямолинейной.

Правее точки g граница струи искривляется (вследствие уменьшения давления в пучке характеристик). Заметим, что любая характеристика, выходящая из данной точки на кромке сопла, является отрезком прямой только до пересечения с первой характеристикой, выходящей из диаметрально противоположной точки. Участки характеристик, лежащие правее (ниже по потоку) этого пересечения должны быть криволинейными, так как они проходят в области ускоряющегося течения газа. Отраженные от поверхности струи характеристики образуют сходящийся пучок, который постепенно формирует сверхзвуковое течение сжатия, вызывающее сужение и торможение струи, со-

провождаемое появлением криволинейной ударной волны $1-d$ (огибающей волн сжатия).

Как показывают расчеты и эксперименты, в наибольшем поперечном сечении струи m среднее давление ниже давления окружающей среды ($p_m < p_н$), хотя на поверхности струи $agmn$ давление равно окружающему.

Около оси струи на участке торможения криволинейный скачок переходит в прямой скачок уплотнения, получивший название *диска Маха*, за которым скорость течения становится дозвуковой. Периферийные линии тока образуют сверхзвуковое течение, которое, как следует из теоретических расчетов [1]) и экспериментов [2]), дважды пересекает криволинейный скачок $1-1-d$ и отраженный скачок $d-n$. Одна из линий тока ($2-2$) этой зоны течения изображена на рис. 7.33. Поверхность $1-1$ (часть криволинейного скачка) представляет собой так называемый *висячий скачок уплотнения*, постепенно ослабляющийся с приближением к кромке сопла и полностью вырождающийся немного не доходя до последней.

Причиной возникновения висячего скачка в осесимметричной струе является сверхзвуковое радиальное растекание газа, при котором происходит перерасширение ($p < p_н$), завершаемое ударной волной, выводящей линии тока в зону давления, близкого к окружающему. Ослабление висячего скачка с приближением к началу струи объясняется тем, что при этом уменьшается радиальное смещение линий тока, а следовательно, ослабляется и перерасширение.

За отраженным скачком $d-n$, который возникает в месте пересечения криволинейного скачка $1-d$ с диском Маха, так же как и за центральным прямым скачком, давление обычно выше окружающего, из-за чего газовый поток вновь ускоряется: в центральной части струи осуществляется переход к сверхзвуковой скорости, в периферийной части, где линии тока пересекли два косых скачка, сохраняется сверхзвуковая скорость, которая за отраженным скачком $d-n$ возрастает.

В итоге за так называемой первой «бочкой» недорасширенной сверхзвуковой струи формируется вторая, а затем третья

---

[1]) Ашратов Э. А., Расчет осесимметричной струи, вытекающей из сопла при давлении в струе, большем давления в окружающей среде, Изв. АН СССР, МЖГ, № 1, 1966.

Аверенкова Г. И., Ашратов Э. А. и др., Сверхзвуковые струи идеального газа, ч. 1. Труды В. Ц. МГУ, 1970.

Иванов М. Я., Крайко А. Н., Михайлов Н. В., Метод сквозного счета для двумерных и пространственных сверхзвуковых течений, ч. 17. Журнал вычисл. мат. и мат. физ., т. XII, № 2, 1972, стр. 441—463.

[2]) Бондарев Е. Н., Лисичко И. Д., О влиянии вязкости на течение недорасширенной струи, распространяющейся в спутном сверхзвуковом потоке, Изв. АН СССР, МЖГ, № 2, 1973.

и т. д. «бочки». Потери полного давления в системе скачков уплотнения первой бочки приводят к тому, что вторая бочка всегда слабее первой (меньше избыток давления в начале, меньше перерасширение в средней ее части и меньше площадь максимального сечения). При большой степени нерасчетности струи ($p_a/p_н > 5$) потери в первой «бочке» настолько велики, что давление во второй «бочке» практически равно окружающему и, следовательно, струя за первой «бочкой» становится изобарической, т. е. последующие «бочки» можно не принимать во внимание.

Наряду с более строгими теориями, позволяющими построить всю картину течения в недорасширенной сверхзвуковой струе, получила практическое применение простая теория, основанная на одномерном представлении.

Несмотря на значительную неравномерность полей скорости и давления в поперечных сечениях нерасчетной сверхзвуковой струи, одномерная теория дает правильное приближенное представление об истинных размерах и форме начальной части такой струи. Одномерная теория нерасчетной сверхзвуковой струи приводится ниже. Газ полагаем идеальным, параметры газа на срезе сопла считаем постоянными по сечению, векторы скорости газа на срезе сопла — параллельными оси сопла. Смешением газа в начальном участке с газом окружающей неподвижной среды пренебрегаем.

Запишем основные уравнения, связывающие параметры газа в свободной струе с параметрами в выходном сечении сопла. В первую очередь в качестве характерного сечения начального участка струи выберем максимальное сечение первой «бочки» (рис. 7.33).

Уравнение равенства расходов записываем в виде

$$G = G_a, \tag{98}$$

или, использовав известное выражение расхода через параметры торможения p^* и T^* и приведенную скорость λ:

$$\frac{p^* F q(\lambda)}{\sqrt{T^*}} = \frac{p_a^* F_a q(\lambda_a)}{\sqrt{T_a^*}}, \tag{99}$$

где индекс a относится к параметрам в выходном сечении сопла. Величины p^* и λ представляют собой средние значения полного давления и приведенной скорости в рассматриваемом сечении свободной струи.

Согласно уравнению сохранения энергии

$$G c_p T^* = G_a c_{p_a} T_a^* \tag{100}$$

при $G = G_a$ и $c_p = c_{p_a}$ температура торможения в струе остает-

ся постоянной. Поэтому уравнение неразрывности (99) принимает вид

$$q(\lambda) = \frac{1}{\sigma}\frac{1}{f}\,q(\lambda_a). \tag{101}$$

Здесь $f = F/F_a$, а $\sigma = p^*/p_a^*$ — коэффициент сохранения полного давления, оценивающий суммарные потери полного давления на участке между начальным и рассматриваемым сечениями струи. Для того чтобы из уравнения (101) получить зависимость между относительной площадью сечения f и приведенной скоростью λ в этом сечении, необходимо оценить величину коэффициента сохранения полного давления σ. Для передней части «бочки» недорасширенной струи потерями полного давления можно пренебречь, так как в плоской струе между начальным и максимальным сечением висячие скачки отсутствуют, а в осесимметричной недорасширенной струе интенсивность висячего скачка вблизи сопла невелика. Будем считать, что и в осесимметричной струе для первой «бочки» $\sigma = 1$.

Уравнение количества движения для рассматриваемого участка струи запишем в виде

$$Gu - G_a u_a = p_a F_a - pF + p_{\text{н}}(F - F_a), \tag{102}$$

где последний член правой части представляет собой осевую составляющую силы внешнего давления $p_{\text{н}}$ на боковую поверхность струи. Заменим выражения импульса газа в обоих рассматриваемых сечениях согласно формуле (115) гл. V, учитывая при этом, что $G = G_a$ и $a_{\text{кр}} = a_{\text{кр}_a}$. В результате получаем

$$\frac{k+1}{2k}\,Ga_{\text{кр}}[z(\lambda) - z(\lambda_a)] = p_{\text{н}}F_a(f-1). \tag{103}$$

Выразим в (103) произведение $Ga_{\text{кр}}$ согласно формулам (108) и (110) гл. V

$$\frac{k+1}{2k}\,Ga_{\text{кр}} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}} p^*Fq(\lambda) = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}} pF\pi(\lambda)$$

через параметры газа в выходном сечении сопла. В результате имеем

$$z(\lambda) = z(\lambda_a) + \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}} \frac{f-1}{\Pi_0 q(\lambda_a)}, \tag{104}$$

или

$$z(\lambda) = z(\lambda_a) + \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}} \frac{f-1}{n y(\lambda_a)}, \tag{105}$$

где $\Pi_0 = p_a^*/p_{\text{н}}$ — располагаемое отношение давлений в струе, $n = p_a/p_{\text{н}}$ — степень нерасчетности струи, $q(\lambda)$ и $y(\lambda)$ — известные газодинамические функции.

Отметим, что, согласно уравнению (102) или уравнениям (104) и (105), импульс газа в струе не остается постоянным, а возрастает по мере увеличения площади струи за счет действия силы внешнего давления.

Таким образом, мы получили два уравнения (101) и (104), содержащие две неизвестные величины: относительную площадь сечения f и среднюю величину приведенной скорости в этом сечении λ. Совместное решение уравнений, а также качественное исследование закономерностей течения наиболее удобно проводить графически. Получающийся график называют диаграммой

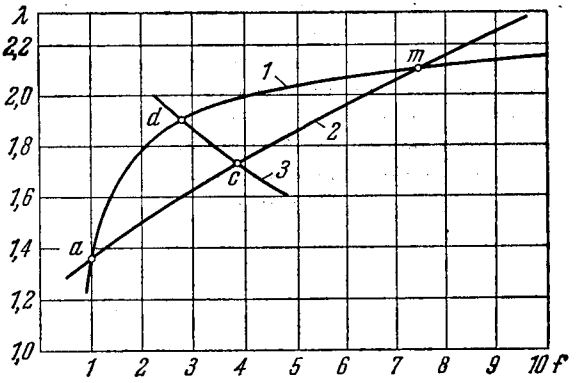


Рис. 7.34. Диаграмма состояния недорасширенной ($n > 1$) сверхзвуковой струи: *1* — уравнение неразрывности (101), *2* — уравнение количества движения (104), *3* — уравнение неразрывности (109), *a* — выходное сечение сопла, *m* — максимальное сечение первой «бочки», *d* — выходное сечение идеального расчетного сопла, *c* — изобарическое сечение.

состояния нерасчетной струи. На рис. 7.34 для начальных параметров струи $M_a = 1{,}5$ ($\lambda_a = 1{,}365$) и $n = 6{,}8$ ($\Pi_0 = 25$) построена зависимость $\lambda = \lambda(f)$ по уравнению расхода (101) при $\sigma = 1$ (кривая *1*) и та же зависимость по уравнению количества движения (104) (кривая *2*). Пересечение полученных кривых *1* и *2* дает две пары значений переменных f и λ, удовлетворяющих обоим уравнениям. Первая точка пересечения $f = 1$ и $\lambda = \lambda_a$ соответствует исходным параметрам газа на срезе сопла и интереса не представляет. Вторая точка пересечения, как показано ниже, дает значения f_m и λ_m в максимальном сечении первой «бочки». Обе точки пересечения соответствуют сверхзвуковой скорости потока. По величине функций $q(\lambda)$ и $z(\lambda)$, определенных из уравнений (101) и (104), можно найти и вторые, дозвуковые значения приведенной скорости λ. Однако совместных решений в дозвуковой области эти уравнения не имеют.

Рассмотрим подробнее смысл полученного решения. На первый взгляд представляется странным, что условие постоянства расхода и уравнение количества движения одновременно удовлетворяются только в двух сечениях начального участка струи, тогда как эти условия должны выполняться для любого сечения потока. Однако следует учесть, что в уравнениях (101) и (104) при выражении расхода и количества движения газа через параметры торможения и приведенную скорость предполагалось, что скорость, соответствующая расширению от полного давления p^* до статического давления p в этом сечении, направлена по оси струи, так что расход газа и количество движения его в осевом направлении определяются абсолютной скоростью газа. Уравнения расхода и количества движения (101) и (104) справедливы только для таких сечений потока, в которых скорость газа можно полагать осевой. Таким сечением, помимо выходного сечения сопла, в рассматриваемой части струи является максимальное сечение первой «бочки». Поэтому из совместного решения получаем $f = f_m$ и $\lambda = \lambda_m$. Во всех остальных промежуточных сечениях расширяющейся части первой «бочки» имеются радиальные составляющие скорости, вследствие чего уравнения одномерного потока (101) и (104), как видно из рис. 7.34, здесь одновременно не выполняются.

Это означает, что не существует потока с осевым направлением скорости, который при заданных начальных параметрах на срезе сопла и $p^* = \text{const}$ ($\sigma = 1$) мог бы иметь площадь поперечного сечения, равную площади какого-либо промежуточного сечения первой «бочки».

Для определения параметров газа в этих промежуточных сечениях выражения расхода и импульса следует записать с учетом радиальной составляющей скорости. Пользуясь, как и выше, средними значениями параметров газа в каждом сечении, допустим, что средняя величина радиальной скорости такова, что вектор средней абсолютной скорости составляет некоторый угол α с осью потока.

Выше в § 6 гл. V были получены выражения для расхода (123) и (125) и для импульса газа (127) в одномерном потоке, имеющем составляющую скорости в плоскости, перпендикулярной оси.

При помощи этих выражений для расхода и импульса можно составить уравнения неразрывности и количества движения для любых сечений начального участка струи. Уравнения эти имеют вид

$$q(\lambda, \alpha) = \frac{1}{\sigma f} q(\lambda_a), \tag{106}$$

$$z(\lambda, \alpha) = z(\lambda_a) + \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}} \frac{f-1}{\Pi_0 q(\lambda_a)}. \tag{107}$$

Для каждого выбранного сечения струи с относительной площадью $f = F/F_a$ при заданных начальных параметрах потока и величине σ (в частности, для первой «бочки» при $\sigma = 1$) полученные уравнения содержат две неизвестные величины λ и α. Совместное решение уравнений проводится графически с использованием таблиц газодинамических функций и графика функции $z(\lambda, \alpha)$ (см. § 6 гл. V), где λ — приведенная абсолютная скорость.

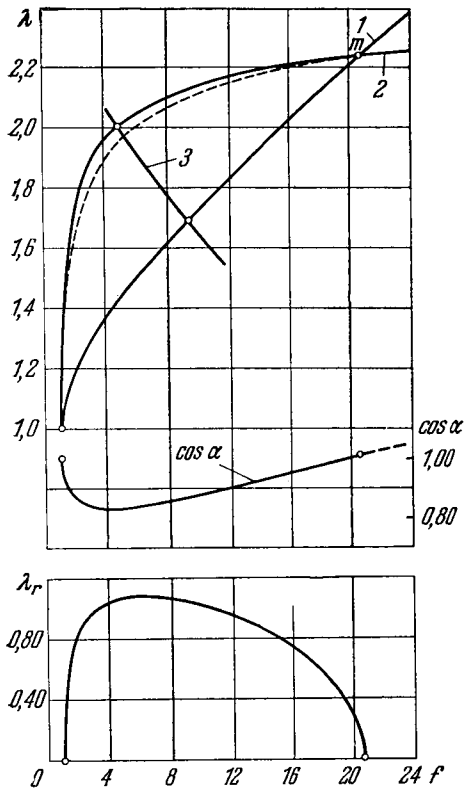


Рис. 7.35. Параметры газа в промежуточных сечениях первой «бочки» нерасчетной струи: *1* — уравнение количества движения (104), *2* — уравнение неразрывности (101), *3* — уравнение неразрывности (109), пунктир — приведенная абсолютная скорость газа с учетом радиальной составляющей скорости ($M_a = 1{,}0$; $\Pi_0 = 46{,}5$; $n = 24{,}6$).

На рис. 7.35 приведены результаты такого расчета. Как можно видеть, во всех промежуточных сечениях определяется некоторое действительное значение угла α, как бы компенсирующее несовместность уравнений одномерного параллельного потока (101) и (104) для промежуточных сечений бочек. Естественно, что в сечениях $f = 1$ и $f = f_m$, для которых уравнения (101) и (104) одновременно удовлетворяются, имеем $\alpha = 0$ и приведенная радиальная скорость $\lambda_r = 0$.

Отметим, что абсолютная скорость или приведенная скорость λ в промежуточных сечениях (см. пунктирную кривую на графике рис. 7.35), а следовательно, и величина статического давления $p = p^* \pi(\lambda)$, полученные при расчете с учетом радиальных составляющих скорости, очень близки к соответствующим величинам, получаемым из обычного уравнения расхода (101) (сплошная кривая) без поправки на угол α.

Если попытаться определить величину угла α, принимая площадь сечений больше F_m или меньше F_a, то окажется, что $\cos \alpha > 1$, а радиальная составляющая скорости — мнимая ве-

личина. Это указывает на физическую невозможность такого течения и, следовательно, на то, что в начальном участке недорасширенной струи площадь поперечного сечения не может стать меньшей площади выходного сечения сопла F_a или большей площади F_m, найденной из совместного решения уравнений (101) и (104); величина f_m поэтому, действительно, является максимальной относительной площадью первой «бочки» струи.

Для определения параметров струи в сечениях, следующих за максимальным сечением первой «бочки», можно воспользоваться теми же уравнениями, которые были выведены выше для

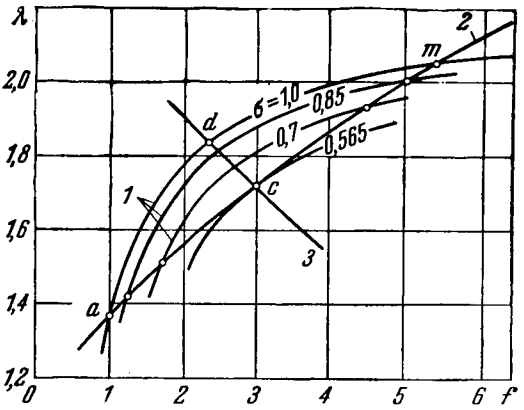


Рис. 7.36. Диаграмма состояния нерасчетной сверхзвуковой струи с учетом потерь полного давления: *1* — уравнение неразрывности (101), *2* — уравнение количества движения (104), *3* — уравнение неразрывности (109).

первой «бочки» с тем отличием, что величину σ — коэффициент сохранения полного давления — в уравнениях (101) или (106) уже нельзя полагать равной единице. Потери полного давления в скачках уплотнения при торможении газа после перерасширения приводят к тому, что в конце сужающейся части первой «бочки» и во всех последующих сечениях $p^* < p_a^*$ и $\sigma < 1$. На рис. 7.36 приведено семейство кривых $\lambda = \lambda(f)$, полученное из уравнения неразрывности при $\sigma < 1$. Пересечение этих кривых с кривой *2*, рассчитанной по уравнению количества движения (104), дает возможные параметры газа в максимальных и минимальных сечениях последующих «бочек» начального участка струи. Из диаграммы состояния очевидно, что в каждой последующей «бочке» максимальные значения площади и приведенной скорости меньше, а минимальные значения больше, чем

в предыдущей; снижение полного давления приводит к уменьшению диапазона изменения параметров газа в «бочках». При некотором значении $\sigma = \sigma_{min}$ получается $F_{min} = F_{max}$; это показывает, что в потоке, если не учитывать смешения с внешней средой, устанавливаются постоянные значения параметров, соответствующие точке c диаграммы состояния. Это и есть предельное состояние газа, достигаемое в начальном участке нерасчетной струи, если не учитывать смешения с внешней средой.

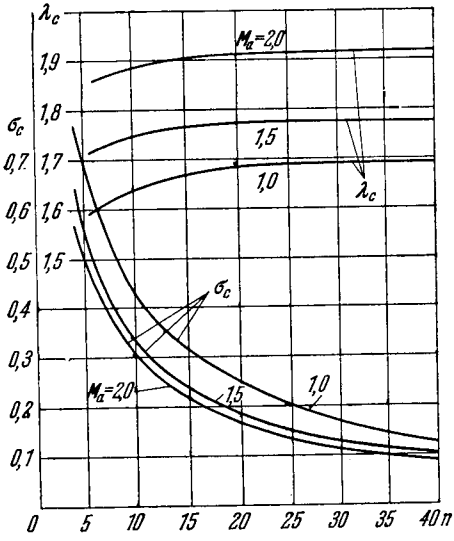


Рис. 7.37. Приведенная скорость газа в изобарическом сечении и суммарные потери полного давления в начальном участке нерасчетной сверхзвуковой струи.

Можно показать, что статическое давление в этом сечении, называемом *изобарическим*, равно внешнему давлению, вследствие чего и прекращается дальнейшее изменение параметров потока. Для определения параметров газа в изобарическом сечении запишем условие постоянства расхода, выразив расход газа через статическое давление ($p_c = p_н$):

$$\frac{p_н F_c y(\lambda_c)}{\sqrt{T_c^*}} = \frac{p_a^* F_a q(\lambda_a)}{\sqrt{T_a^*}}, \quad (108)$$

или

$$y(\lambda_c) = \Pi_0 \frac{1}{f_c} q(\lambda_a). \quad (109)$$

Совместное решение этого уравнения с уравнением количества движения в виде (104) позволяет найти величины λ_c и $f_c = F_c/F_a$.

Отметим, что во всех случаях из расчета получается $\lambda_c > 1$, т. е. при $G = \text{const}$ струя в конце начального участка всегда остается сверхзвуковой; переход через скорость звука становится возможным только в результате смешения с внешней средой, которое здесь не учитывается.

По величине λ_c легко определить полное давление $p_c^* = p_н/\pi(\lambda_c)$ и вычислить величину суммарных потерь полного давления газа в начальном участке

$$\sigma_c = \frac{p_c^*}{p_a^*} = \frac{1}{\Pi_0 \pi(\lambda_c)}. \quad (110)$$

Таким образом, величина суммарных потерь полного давления во всех «бочках» начального участка может быть определена без детального рассмотрения процессов, происходящих в струе. Расчеты показывают, что эти потери весьма велики и определяются главным образом степенью нерасчетности n (рис. 7.37).

На диаграмме состояния (рис. 7.34, 7.36) кривая *3*, построенная по уравнению (109), указывает возможные состояния газового потока (с заданными начальными параметрами), при которых среднее статическое давление равно $p_н$; выше этой кривой $p < p_н$, ниже $p > p_н$. Легко видеть, что точка пересечения d кривой *3* с кривой *1* $(p^* = p_a^*)$ указывает параметры газа при идеальном расширении от p_a^* до $p_н$ в сопле Лаваля; точка c дает параметры свободной струи в изобарическом сечении. Диаграмма состояния непосредственно показывает качественные соотношения между параметрами газа в точках c, m, d и a. В частности, отметим, что площадь максимального и изобарического сечений свободной струи при $n > 1$ получается всегда большей, чем площадь выходного сечения расчетного сопла Лаваля. Чем меньше участок свободного расширения газа, тем ближе между собой параметры газа в состояниях c, d, m и a.

Влияние степени нерасчетности сопла можно связать с изменением внешнего силового воздействия на струю. В самом деле при увеличении степени расширения сопла (уменьшении n) часть свободного течения заменяется дополнительной частью сопла. Вместо внешнего давления $p_н$ на границах струи теперь действует переменное давление $p > p_н$, так как $n > 1$. Увеличение силы, действующей на струю в направлении движения

$$P = \int\limits_{(\Delta F)} (p - p_н)\, dF, \tag{111}$$

равно силе избыточного давления на стенки дополнительной части сопла. Величина P войдет дополнительным слагаемым в правую часть уравнения количества движения (102), записанного для участка потока от исходной выходной площади сопла до произвольного сечения струи, вследствие этого импульс газа в сечении с площадью F увеличивается. Уравнение (104) для этого случая имеет вид

$$z(\lambda) = z(\lambda_a) + \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}} \frac{f-1}{\Pi_0 q(\lambda_a)} + KP, \tag{112}$$

где

$$K = \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}} \frac{1}{p_a^* F_a q(\lambda_a)}.$$

Уравнение неразрывности не зависит от величины силы P. С помощью диаграммы состояния (рис. 7.38) легко установить качественное влияние силового воздействия на струю. Параметры газа в максимальном и изобарическом сечениях определяются точками пересечения неизменных кривых *1* и *3* с кривой *2'*, построенной по уравнению (112). При $P > 0$ кривая *2'* всегда лежит выше исходной кривой *2*. Поэтому площади максимального и изобарического сечений получаются меньшими, чем в свободной струе; приведенная скорость λ_m в максимальном сечении уменьшается, а приведенная скорость λ_c в изобарическом сечении возрастает. Таким образом, увеличение силы, действующей на поток в направлении движения (или увеличение реакции на стенках сопла), приводит к уменьшению перерасширения газа в «бочках» и к уменьшению суммарных потерь полного давления газа в начальном участке струи. Полученный при помощи диаграммы состояния результат не является очевидным. Действительно, несмотря на то, что дополнительная сила P направлена по потоку, импульс газа в максимальном сечении струи

$$I_m = Gu_m + p_m F_m = \text{const}\, z(\lambda_m),$$

как показывает совместное решение уравнений импульсов и неразрывности, не увеличивается, а уменьшается, что связано с уменьшением площади этого сечения.

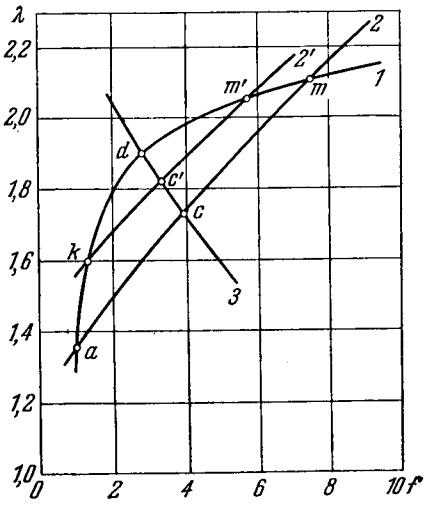


Рис. 7.38. Изменение параметров газа в максимальном (m) и изобарическом (c) сечениях начального участка в зависимости от величины силы, действующей на границах струи: *1* — уравнение неразрывности (101), *2* — уравнение количества движения при $P = 0$, *2'* — уравнение (112) при $P > 0$, *3* — уравнение неразрывности (109). $\mathbf{M}_a = 1{,}5$, $n = 6{,}8$.

Указанный метод анализа силового воздействия на струю оказывается полезным и при рассмотрении более сложных случаев течения газа. Задаваясь различными начальными параметрами струи, по указанным выше соотношениям можно определить зависимость параметров газа в характерных сечениях струи от степени нерасчетности и числа $\mathbf{M}$ на срезе сопла (рис. 7.39, 7.40).

Из проведенных расчетов следует, что во всех случаях при $n > 1$ средняя величина статического давления в максимальном

сечении струи

$$p_m = p_a^* \pi(\lambda_m)$$

значительно ниже внешнего давления $p_н$. Результаты расчета, полученные в широком диапазоне начальных параметров струи, близко соответствуют приближенной зависимости (для $n > 2{,}5$; $k = 1{,}4$)

$$\frac{p_m}{p_н} = \frac{1}{n} + 0{,}07. \qquad (113)$$

Из рис. 7.41, 7.42 можно видеть, что результаты расчета площади (диаметра) максимального и изобарического сечений струи по изложенному методу хорошо соответствуют экспериментальным данным различных авторов. Отметим, что при заданных начальных параметрах струи соответствие рассчитанной и измеренной площади сечения одновременно означает, что совпадают также средние значения скорости в этом сечении (см. уравнение (104)) и величина полного давления — коэффициент σ (см. уравнение (101)).

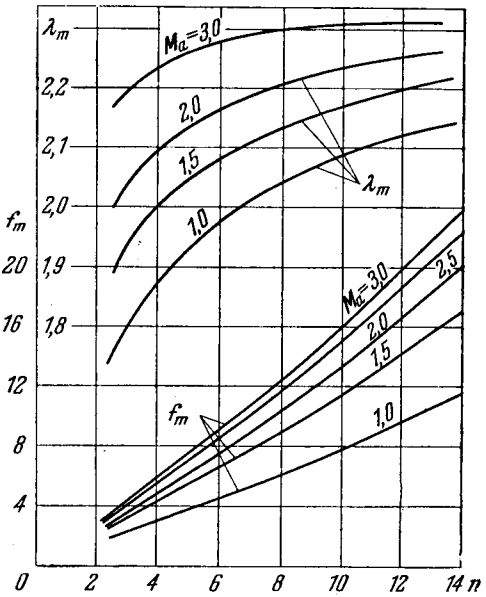


Рис. 7.39. Параметры газа в максимальном сечении струи в зависимости от степени нерасчетности $n = p_a/p_н$.

Из рассмотрения диаграммы состояния можно получить качественные результаты для ряда предельных условий истечения. В частности, при истечении газа в пустоту через сопло конечных размеров ($p_н = 0$, $\Pi_0 = \infty$, $q(\lambda_a) \neq 0$) в уравнении количества движения (104) исчезает второе слагаемое правой части, вследствие чего оно принимает вид

$$z(\lambda) = z(\lambda_a) \quad \text{или} \quad \lambda = \lambda_a.$$

Кривая *2* на диаграмме состояния (см. рис. 7.34) при этом превращается в прямую, параллельную оси абсцисс, и точка пересечения ее с неизменной кривой *1*, выражающей уравнение неразрывности, уходит в бесконечность $\left(f_m \to \infty,\ \lambda_m \to \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\right)$. Это означает, что струя, вытекающая в пустоту, не образует

«бочек», а беспредельно увеличивается в сечении, сохраняя везде радиальную составляющую скорости.

Если профилировка сопла не обеспечивает получения параллельного равномерного потока газа в выходном сечении, как принималось выше, то в уравнениях (101) и (104) следует учесть наличие радиальной составляющей скорости в сечении a. Для этого, как делалось при выводе уравнений (106) и (107), следует заменить функции $q(\lambda_a)$ и $z(\lambda_a)$ обобщенными функциями $q(\lambda_a, \alpha_a)$ и $z(\lambda_a, \alpha_a)$, где α_a — среднее значение угла между вектором абсолютной скорости газа на выходе из сопла и осью сопла. Для конического сопла легко получить следующее выражение для среднего значения угла α:

$$\cos \alpha_a = \frac{2 \cos \beta}{1 + \cos \beta}, \qquad (114)$$

которое при $\beta < 30°$ с достаточной степенью точности аппроксимируется формулой

$$\alpha_a \approx 0{,}7\beta.$$

Здесь β — угол между образующей конуса и осью.

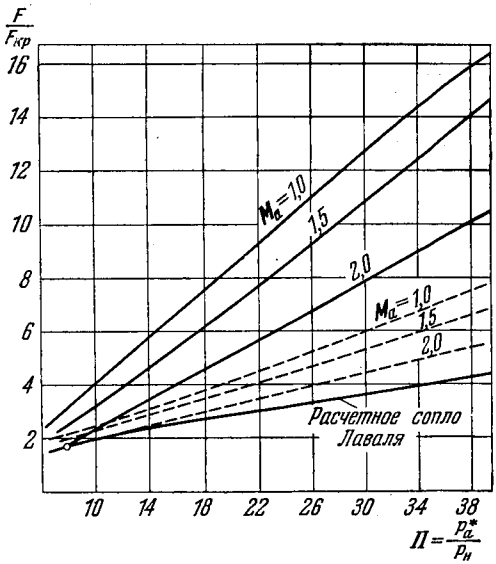


Рис. 7.40. Отношение площадей максимального и изобарического (пунктир) сечений нерасчетной сверхзвуковой струи к площади критического сечения сопла Лаваля, $k = 1{,}4$.

Решение системы уравнений после подстановки в правую часть (101) и (104) величин $q(\lambda_a, \alpha_a)$ и $z(\lambda_a, \alpha_a)$ проводится, как и для случая $\alpha_a = 0$. Расчеты показывают, что с увеличением угла конусности сопла увеличивается площадь максимального сечения струи, увеличивается перерасширение газа в струе и растут суммарные потери полного давления при данных значениях Π_0 и λ_a.

При решении ряда задач необходимо знать конфигурацию начальной части струи и расстояние между соплом и максимальным сечением первой «бочки». Одномерное рассмотрение газовых потоков обычно не позволяет получить такого рода данные. Здесь, однако, можно указать способ, позволяющий приближенно определить контур расширяющейся начальной части

струи на основании результатов, полученных из одномерного расчета.

При определении параметров газа в промежуточных сечениях первой «бочки» для каждого сечения площадью $F < F_m$ с помощью уравнений (106) и (107) может быть найдено, как указывалось выше, некоторое значение угла α, характеризующего величину радиальных составляющих скорости газа в этом

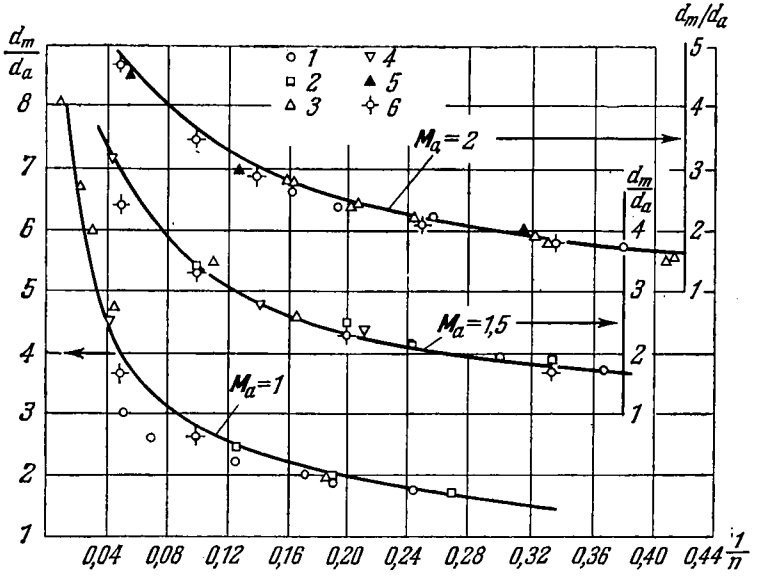


Рис. 7.41. Диаметр максимального сечения недорасширенной сверхзвуковой струи по экспериментальным и расчетным данным: *1* — опыты Л. П. Волковой, *2* — опыты Цзян Чже-синя, *3* — опыты Г. А. Акимова, *4*—опыты Е. Лава, *5* — опыты Т. Адамсона, *6* — расчет по методу характеристик. Кривые — расчет по одномерной теории, $k = 1{,}4$.

сечении. Угол α составляют между собой вектор абсолютной среднемассовой скорости газа и ось струи. В действительном неравномерном потоке углы отклонения векторов скорости от оси различны в различных точках сечения и увеличиваются от оси к периферии, поэтому найденное выше значение угла α будет некоторым средним. Однако, учитывая, что основная часть расхода газа проходит через периферийную зону сечений как из-за большей площади ее, так и из-за малой плотности тока в центральной перерасширенной части струи, можно полагать, что эта средняя величина угла будет близка к величине угла расширения $\alpha_г$ у границы струи. Условно полагая $\alpha_г \approx \alpha$, получаем возможность приближенного построения границ струи.

Начальный угол отклонения границы струи у среза сопла, где из-за наличия ядра невозмущенного потока указанные соображения неприемлемы, определяется аналогично углу поворота сверхзвукового потока, обтекающего тупой угол (см. § 4 гл. IV), по формуле

$$\alpha_0 = \beta + \delta. \tag{115}$$

Здесь β — угол между касательной к образующей сопла в выходном сечении и осью, а δ — угол поворота потока от первоначального направления, который находится из таблиц (см.

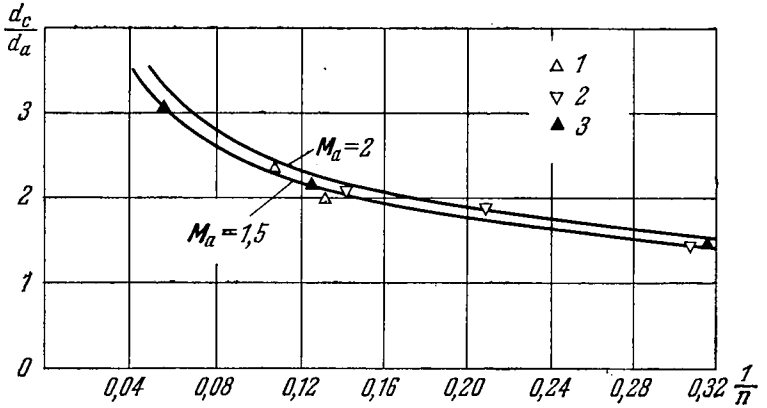


Рис. 7.42. Диаметр изобарического сечения струи по экспериментальным и расчетным данным. Кривые — расчет по одномерной теории: *1* — опыты Г. А. Акимова, *2* — опыты Е. Лава, *3* — опыты Т. Адамсона.

приложение 1) по заданным значениям числа M на срезе сопла и отношения давлений $p_a^*/p_н$ или $p_a/p_н$. Вместо таблиц для нахождения δ при $k = 1{,}40$ может быть рекомендована приближенная формула (для $\lambda < 2{,}3$)

$$\delta = 7{,}6\,(\lambda_0^3 - \lambda_a^3), \tag{116}$$

где $\lambda_0 = \lambda(\Pi_0)$ — приведенная скорость на границе струи (т. е. при полном расширении газа до внешнего давления).

По величине начального угла α_0 и значениям угла α, найденным из уравнений (106) и (107) для нескольких (5 ÷ 6) значений относительной площади сечения $f < f_m$, можно построить приближенные очертания расширяющейся части первой «бочки». Для этого к прямой, проведенной через кромку сопла под углом α_0, в точках, соответствующих радиусам выбранных промежуточных сечений r_1, r_2, r_3 и т. д., последовательно достраиваются отрезки под углами α_1, α_2, α_3 и т. д. до пересечения с прямой $r = r_m$; полученная ломаная линия скругляется.

Несмотря на условность изложенного построения, полученный таким образом контур близко соответствует видимой на фотографии форме струи, а также результату расчета по методу характеристик, если степень нерасчетности струи не превышает значений $n = 100 \div 150$ (рис. 7.43). Расстояние от среза сопла до максимального поперечного сечения начального участка струи

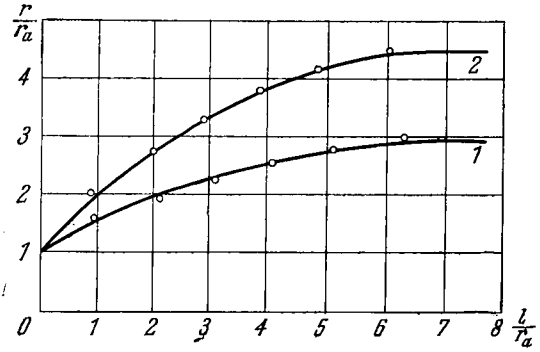


Рис. 7.43. Контур расширяющейся части первой бочки сверхзвуковой струи. Кривые — по теневой фотографии струи, точки — расчет по шести сечениям: *1* — $\mathbf{M} = 2{,}5$, $n = 6{,}43$, $\beta = 5°$; 2 — $\mathbf{M} = 1{,}0$, $n = 24{,}6$.

при $n > 1$ удовлетворительно аппроксимируется следующей формулой:

$$\frac{x_m}{D_a} = 0{,}7\mathbf{M}_a\sqrt{kn}. \qquad (117)$$

Длину первой бочки l_n и расстояние от среза сопла до диска Маха l_d можно приближенно определить из соотношений

$$l_n = 1{,}6x_m, \quad l_d = 0{,}8l_n.$$

Все приведенные выше результаты получены в предположении о том, что в начальном участке струи отсутствует смешение с внешней средой. Это имеет смысл постольку, поскольку позволяет выявить закономерности, присущие самой струе, и определить потери, возникающие в процессе стабилизации параметров нерасчетной струи. При большой степени нерасчетности, когда начальный участок ограничен одной-двумя «бочками», указанное допущение не вызывает значительной погрешности. При большой длине участка увеличение массы струи может стать заметным, что изменит параметры потока в изобарическом сечении. Действительные средние значения параметров можно получить из расчета, аналогичного изложенному выше, если при выводе

основных уравнений учесть различие расхода газа в начальном и конечном сечениях. Величина ΔG или G/G_a должна при этом быть задана или определена из рассмотрения турбулентного смешения струи с внешней средой.

Изложенная методика расчета по средним значениям параметров в основных сечениях нерасчетной струи может быть распространена также и на случай истечения с перерасширением ($n < 1$).

В заключение напомним, что приведенная одномерная теория не позволяет получить данных о внутренней структуре струи и распределении параметров по ее сечению; для этой цели необходимо применение более сложных методов, например метода характеристик. В то же время некоторые полученные выше результаты, например значения параметров в изобарическом сечении, не могут быть найдены методом характеристик без дополнительных предположений.

Глава VIII

ТЕЧЕНИЯ ГАЗА В СОПЛАХ И ДИФФУЗОРАХ

§ 1. Сопротивление сопла

Потери полного давления в правильно спрофилированном сопле сводятся главным образом к потерям на трение. В идеальном случае при отсутствии потерь скорость истечения из сопла связана с отношением статического давления в выходном сечении p_a к полному давлению в сопле p_c^* известным равенством

$$\frac{p_a}{p_c^*} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_{a\,\text{ид}}^2\right)^{\frac{k}{k-1}}.$$

При наличии потерь истинная скорость истечения меньше идеальной:

$$\lambda_a = \varphi_c \lambda_{a\,\text{ид}}, \qquad (1)$$

где φ_c — коэффициент скорости сопла; его значение равно обычно $\varphi_c = 0{,}97 - 0{,}99$. Вводя коэффициент сохранения полного давления, учитывающий потери полного давления в сопле $\sigma_c = p_a^*/p_c^*$, получим

$$\frac{p_a}{p_a^*} = \frac{p_a}{\sigma_c p_c^*} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_a^2\right)^{\frac{k}{k-1}};$$

отсюда устанавливается зависимость коэффициента сохранения полного давления от коэффициента скорости:

$$\sigma_c = \left[\frac{1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_{a\,\text{ид}}^2}{1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_{a\,\text{ид}}^2\varphi_c^2}\right]^{\frac{k}{k-1}}. \qquad (2)$$

Например, при $\lambda_{a\,\text{ид}} = 1$ и $\varphi_c = 0{,}98$ получаем $\sigma_c = 0{,}975$.

Зависимость $\sigma_c = f(\varphi_c)$ при различных значениях числа $M_{\text{ид}}$ в выходном сечении представлена на рис. 8.1; кривые рассчитаны по формуле (2) с использованием выражения (46) из гл. I. Рис. 8.1 показывает, что при скоростях истечения, значительно превосходящих скорость звука ($M > 1{,}5$), даже умеренным

потерям скорости ($\varphi_c > 0{,}97$) соответствуют большие потери полного давления.

Для вычисления расхода газа в сопле с учетом потерь в формулы (8) и (10) гл. IV добавляют множитель $\mu < 1$, носящий

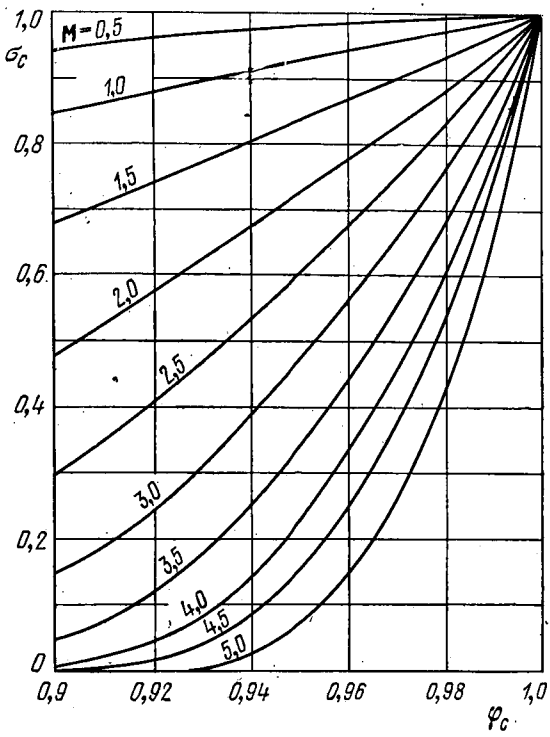


Рис. 8.1. Зависимость коэффициента сохранения полного давления от коэффициента скорости.

название *коэффициента расхода*; тогда, например, при сверхзвуковом истечении

$$G = \mu m \frac{p^* F_{кр}}{\sqrt{T^*}},$$

где $m = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \left(\frac{k}{R}\right)^{1/2}$ — множитель, зависящий от свойств газа; p^*, T^* — значения полного давления и температуры торможения перед соплом.

Коэффициент расхода можно представить как произведение двух коэффициентов: $\mu = \sigma_{кр} f$, из которых первый учитывает потери полного давления в сужающейся части сопла (до крити-

ческого сечения): $\sigma_{кр} = p^*_{кр}/p^*$, а второй — неравномерность поля плотности тока (ρw) в узком сечении. Потери полного давления в дозвуковой части сопла всегда относительно невелики ($\sigma_{кр} = 0{,}98$—$0{,}998$).

В случае простого сужающегося сопла с круто сходящимися стенками струя газа продолжает сужаться за пределами сопла,

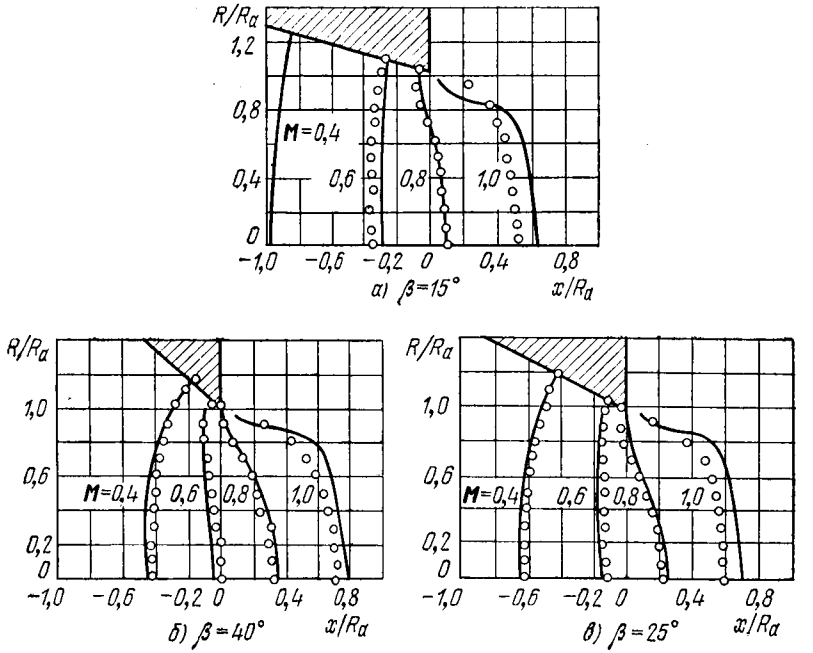


Рис. 8.2. Линии равных значений числа **M** в конических сужающихся соплах.

т. е. фактическое узкое сечение струи меньше узкого сечения сопла. Теоретические и экспериментальные исследования показывают, что при этом на срезе сопла скорость потока меньше скорости звука и распределена по сечению неравномерно. Если при истечении газа в неподвижную среду отношение полного давления перед соплом p^* к давлению вне сопла $p_н$ превышает критическое ($\pi^*_c = p^*/p_н \geqslant 2$), то в узком сечении струи (за пределами сопла) поле скорости относительно равномерное и скорость равна скорости звука. Иначе говоря, при истечении из сужающегося сопла коэффициент f отражает дополнительное сужение струи за пределами среза сопла ($f = F'_{кр}/F_{кр}$).

На рис. 8.2 приведены линии, соединяющие точки с равными значениями числа Маха в конических сужающихся соплах с раз-

ными углами наклона стенки ($\beta = 15°, 25°, 40°$) для значения $\pi_c^* = 2$; данные заимствованы из работы Вихофера и Могора [1]) (кружками изображены опытные данные, линиями — результаты расчета авторов на ЭВМ). Чем больше давление перед соплом, тем меньше дополнительное сжатие струи, равномернее поле скорости на срезе сопла и выше коэффициент расхода.

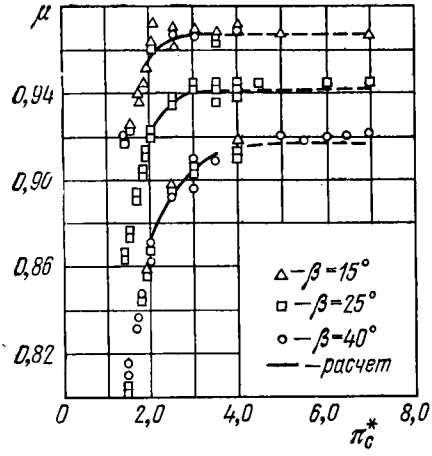


Рис. 8.3. Зависимость коэффициента расхода от отношения полного давления перед коническим сужающимся соплом к статическому давлению на срезе.

Зависимость μ от величины π_c^* для тех же трех сопел представлена на рис. 8.3. Структура потока газа в узкой части сверхзвукового сопла Лаваля зависит от формы сопла и в первую очередь от двух факторов: угла конусности сужающейся части и относительной кривизны стенок в области узкого сечения.

Известны теоретические и экспериментальные исследования, которые позволяют достаточно надежно определять параметры потока в соплах различной формы для идеального невязкого газа, а также с учетом сопротивления трения, теплоотдачи и реальных свойств газа (диссоциация, химические реакции, конденсация и др.). В частности, можно рассчитать поле плотности тока в узком сечении сопла, что позволяет вычислить коэффициент расхода, который для сопла Лаваля хорошей формы может достигать очень высокого значения ($\mu = 0{,}998$).

Для расчета реактивной силы, кроме расхода газа, нужно знать давление на срезе и скорость истечения, которые зависят от потерь как в дозвуковой, так и в сверхзвуковой части сопла. Выше предполагалось, что потери распределяются равномерно по сечению сопла, однако истинная картина течения газа внутри сопла не отвечает этому простейшему предположению. При большой кривизне стенок в области горловины сопла возможен местный отрыв пограничного слоя от стенок, кроме того, в начале расширяющейся части такого сопла некоторые линии тока

[1]) Wehofer S., Mogor W. S., Transsonic Flow in Conical Convergent and Convergent-Divergent Nozzles with Nonuniform Inlet Conditions, AIAA paper, № 70, 1970, p. 635.

сверхзвукового течения сужаются, что приводит к образованию местных косых скачков уплотнения.

На рис. 8.4 представлена кривая зависимости коэффициента расхода от отношения радиуса закругления стенки r в узкой части сопла Лаваля к радиусу поперечного сечения его горловины $R_{кр}$ для сопел с различными углами наклона стенки сужающейся части ($\beta = 30°, 45°, 75—90°$) и постоянным углом наклона стенки расширяющейся части (15°). Сопла представляют

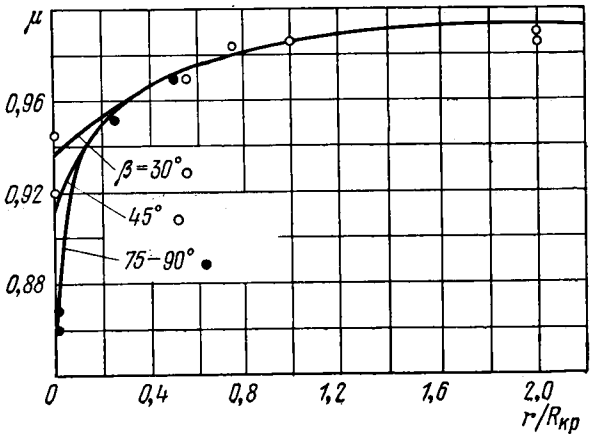


Рис. 8.4. Коэффициенты расхода в сверхзвуковых конических соплах со скругленной стенкой в окрестности критического сечения при разных углах конусности дозвуковой части ($\beta = 30°, 45°, 75—90°$) и постоянном угле конусности сверхзвуковой части ($\alpha = 15°$)

собой конусы, сопряженные в области горловины дугой круга (см. схему на рис. 8.7). Кривые проведены по опытным данным Бекка и Куффеля [1]), точками различной формы нанесены опытные данные Бекка, Массира и Гира, а также Дюрхама и Нортона и Шелтона [2]).

Все значения μ взяты в автомодельной области (для чисел Рейнольдса, подсчитанных по параметрам потока перед соплом и диаметру горловины сопла, порядка $R_D = 10^6 \div 10^7$), когда они перестают зависеть от величины числа Рейнольдса.

---

[1]) Back L. H., Cuffel P. F., Flow Coefficient for Suppersonic Nozzles with Comparatively Small Radius of Curvature Throat, J. of Spacecraft and Rocketes, v. 8, № 2, 1971, p. 196—198.

[2]) Back L. H., Massier P. F., Gier H. L., Comparison of Messured and Predicted Flows through Conical Suppersonic Nozzles with Emphasis on the Transonic Regions, AIAA J., v. 3, № 9, 1965, p. 1606—1614.

Характерно, что при $r/R_{кр} \geqslant 0{,}3$ кривые $\mu(r/R_{кр})$ сливаются, а при $r/R_{кр} = 2$ выходят на почти горизонтальный участок с очень высоким значением $\mu > 0{,}98$; при столь большом радиусе скругления стенки горловины вихревые и ударные потери практически отсутствуют и остается только сопротивление трения. Дальнейшее увеличение радиуса скругления нецелесообразно, так как удлиняет околозвуковую часть сопла и приводит к увеличению сопротивления трения. На рис. 8.5 показана зависимость коэффициента расхода конического сопла Лаваля

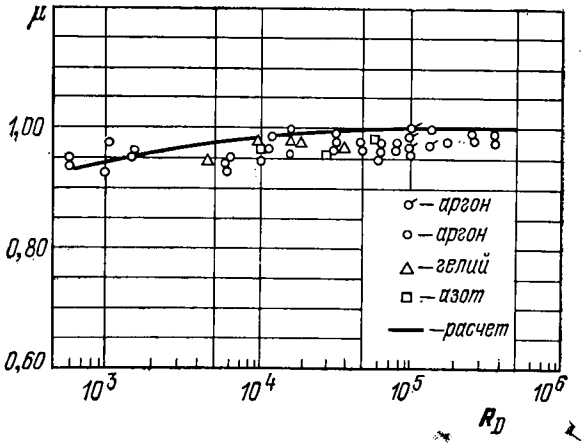


Рис. 8.5. Зависимость от числа Рейнольдса коэффициента расхода конического сверхзвукового сопла со скругленной стенкой в окрестности критического сечения ($\beta = 30°$, $\alpha = 15°$, $r/R_{кр} = 4$).

с большим скруглением горловины от числа Рейнольдса R_D, полученная в опытах с различными газами; число Рейнольдса варьировалось изменением давления перед соплом.

В тех случаях, когда поле полных давлений во входном сечении сопла равномерно, а очертания сопла настолько плавны, что в нем нет вихревых областей и скачков уплотнения, сопротивление сопла сводится к сопротивлению трения в пограничном слое. Ввиду того что длина сопла обычно не больше нескольких диаметров сопла, толщина пограничного слоя составляет малую долю радиуса сопла, т. е. бóльшая часть поперечного сечения сопла заполнена ядром потока, состоящим из струй постоянного полного давления, в которых параметры газа изменяются по законам идеальной адиабаты. В таком случае полные давления в ядре потока в выходном и входном сечениях сопла одинаковы, но из-за существования пограничного слоя точное значение ско-

рости истечения не может быть определено непосредственно по формулам (2) и (3) или (4) гл. IV. Однако можно воспользоваться этими формулами, если внести поправку в величину площади поперечного сечения сопла, применяя понятие о толщине вытеснения пограничного слоя (см. § 2 гл. VI).

Как известно, смещение стенки от ее истинного положения в сторону от оси сопла на расстояние, равное толщине вытеснения (рис. 8.6), ведет к тому, что распределение статического давления и скорости по отклоненной стенке при обтекании ее вязкой жидкостью получается таким же, как по истинной стенке, обтекаемой идеальной жидкостью. Иначе говоря, соответствующим увеличением поперечных сечений сопла можно компенсировать влияние пограничного слоя на распределение скорости и давления по оси сопла. Наоборот, если заменить заданное сопло фиктивным, контур которого в каждом сечении смещен к оси сопла на расстояние, равное толщине вытеснения δ^*, то распределение скорости по длине фиктивного сопла можно определять по изоэнтропическим формулам (2), (3) или (4) гл. IV, причем оно получается таким же, как в заданном сопле.

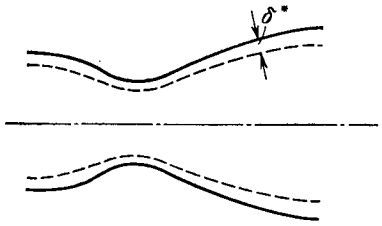


Рис. 8.6. Схема изменения толщины вытеснения δ^* по длине сопла.

В плоскопараллельном сопле площадь фиктивного сечения F_Φ найдется из условия

$$\frac{F_\Phi}{F} = 1 - \frac{2\delta^*}{b}, \tag{3}$$

где b — ширина поперечного сечения заданного сопла.

В осесимметричном сопле

$$\frac{F_\Phi}{F} = \left(1 - \frac{\delta^*}{R}\right)^2 \approx 1 - \frac{2\delta^*}{R}; \tag{4}$$

здесь R — радиус заданного сопла.

Тогда скорость истечения из заданного сопла определяется по формуле

$$\frac{F_{\Phi\,\text{кр}}}{F_{\Phi a}} = \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}} \lambda_a \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_a^2\right)^{\frac{1}{k-1}} = q(\lambda_a). \tag{5}$$

В этой формуле $F_{\Phi a}$ — площадь выходного сечения фиктивного сопла, $F_{\Phi\,\text{кр}}$ — площадь критического сечения фиктивного сопла.

В ядре постоянного полного давления, заполняющем бо́льшую часть поперечного сечения заданного сопла, скорость газа

определяется уравнением (5). По этому значению скорости, пользуясь известной формулой (72) гл. I, отвечающей идеальному адиабатическому процессу в газовом потоке, можно найти статическое давление в соответствующем поперечном сечении заданного сопла:

$$\frac{p}{p^*} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{\frac{k}{k-1}}; \qquad (6)$$

здесь p^* — полное давление на оси сопла, величина которого во всех сечениях одинакова.

Учет влияния пограничного слоя путем замены истинного контура сопла фиктивным контуром приводит к сужению сопла, поэтому в дозвуковом течении пограничный слой вызывает увеличение, а в сверхзвуковом — уменьшение скорости (по сравнению со случаем течения невязкого газа в сопле истинного контура).

Итак, несмотря на сохранение полного давления в ядре течения, скорость в ядре в дозвуковом сопле получается больше, чем в идеальном случае: $\lambda_a > \lambda_{a\,\text{ид}}$, а в сверхзвуковом сопле — меньше, чем в идеальном случае: $\lambda_a < \lambda_{a\,\text{ид}}$. В соответствии с этим статическое давление в любом сечении истинного сопла при дозвуковом потоке понижается, а при сверхзвуковом потоке повышается по сравнению с давлением в таком же сечении идеального сопла.

Ввиду малости поправок, учитывающих влияние пограничного слоя на скорость и давление, их величину можно получить путем разложения формулы (5) в ряд. Опуская в (5) индексы, имеем

$$\frac{F}{F_{\text{кр}}} = \frac{\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}}}{\lambda\left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}}}.$$

Если изменение площади поперечного сечения на малую величину ΔF вызывает изменение скорости также на малую величину $\Delta\lambda$, то при $k = \text{const}$

$$\frac{F+\Delta F}{F} = \frac{\lambda\left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}}}{(\lambda+\Delta\lambda)\left[1 - \frac{k-1}{k+1}(\lambda+\Delta\lambda)^2\right]^{\frac{1}{k-1}}}.$$

После разложения в биномиальный ряд и отбрасывания вследствие малости всех членов с множителями порядка $\Delta\lambda^3$ и выше

получим

$$\frac{\Delta F}{F}=\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\frac{\lambda^2-1}{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2}+\frac{\Delta\lambda^2(3-\lambda^2)}{(k+1)\left(1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^2}. \tag{7}$$

Во всех случаях, кроме $\lambda\approx 1$, эту формулу можно упростить, отбросив также член с множителем $\Delta\lambda^2$. Тогда имеем

$$\frac{\Delta F}{F}=\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\frac{\lambda^2-1}{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2}. \tag{8}$$

В случае $\lambda=1$, т. е. в окрестности критического сечения сверхзвукового сопла формула (7) приобретает особенно простой вид:

$$\frac{\Delta F}{F}=\frac{k+1}{2}(\Delta\lambda)^2. \tag{9}$$

Отсюда следует, что незначительное изменение площади сечения сопла вблизи критического сечения вызывает заметное изменение скорости. Например, изменение площади сопла около критического сечения на 1% $\left(\frac{\Delta F}{F}=0{,}01\right)$ дает изменение скорости на 9% ($\Delta\lambda=0{,}09$).

Формула (8) устанавливает связь между малыми отклонениями площади сечения и соответствующими малыми изменениями скорости газового потока. При учете влияния пограничного слоя на скорость потока можно вместо изменения площади сечения ввести толщину вытеснения; для осесимметричного сопла согласно (4) имеем

$$\frac{\Delta F}{F}\approx\frac{2\delta^*}{R}=2\bar{\delta}^*.$$

Отсюда связь между толщиной вытеснения и изменением скорости приобретает следующий вид (при $\lambda\neq 1$):

$$\bar{\delta}^*=\frac{1}{2}\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\frac{\lambda^2-1}{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2}. \tag{10}$$

Например, изменение приведенной скорости на 3% при $k=1{,}4$ и $\lambda=1{,}5$ ($M=1{,}73$) достигается за счет толщины вытеснения δ^*, составляющей $\sim 3\%$ от радиуса сопла.

Малые изменения давления, вызываемые малым изменениями скорости, можно также вычислить по формуле, полученной путем разложения равенства (72) гл. I в биномиальный ряд и отбрасывания всех членов с множителями порядка $\Delta\lambda^2$ и

выше. В самом деле,

$$\frac{p}{p^*} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{\frac{k}{k-1}};$$

отсюда

$$\frac{p+\Delta p}{p} = \left[\frac{1 - \frac{k-1}{k+1}(\lambda+\Delta\lambda)^2}{1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2}\right]^{\frac{k}{k-1}}$$

и далее

$$\frac{\Delta p}{p} = -\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \cdot \frac{\frac{2k}{k+1}\lambda^2}{1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2}. \tag{11}$$

Для рассмотренного выше примера ($\Delta\lambda/\lambda = 0{,}03$, $\lambda = 1{,}5$) из (11) получим $\Delta p/p \approx 0{,}12$. В случае $\lambda = 1$ для зависимости прироста давления от прироста скорости получаем следующую простую формулу:

$$\frac{\Delta p}{p} = k\,\Delta\lambda, \tag{12}$$

т. е. в окрестности критического сечения изменение давления пропорционально изменению скорости.

Ввиду наличия пограничного слоя средняя скорость газа в поперечном сечении меньше скорости в ядре течения: $\lambda_{ср} < \lambda_a$. Для вычисления средней по массе газа скорости

$$\lambda_{ср} = \frac{1}{G}\int_0^G \lambda_a\, dG$$

можно использовать понятие толщины потери импульса в пограничном слое δ^{**} (см. гл. VI). Эта величина показывает, на какое расстояние δ^{**} нужно сместить контур сопла (в сторону к его оси) для того, чтобы равномерный поток в фиктивном сопле при той же скорости, что и в ядре течения истинного сопла, имел бы такое же секундное количество движения, как и в истинном сопле. Тогда

$$\lambda G_ф = \lambda_{ср} G.$$

Отсюда коэффициент скорости, учитывающий влияние пограничного слоя, равен

$$\varphi_c = \frac{\lambda_{ср}}{\lambda_a} = \frac{G_ф}{G} = \frac{F_ф}{F} = 1 - 2\bar{\delta}^{**}, \tag{13}$$

где

$$\bar{\delta}^{**} = \frac{\delta^{**}}{R}.$$

Отметим, что величина φ_c в формуле (13) выражает отношение средней по массе газа скорости к скорости в ядре течения, а не к скорости в идеальном сопле. Переход к величине

$$\varphi' = \frac{\lambda_{ср}}{\lambda_{a\,ид}}$$

может быть осуществлен следующим путем:

$$\varphi' = \varphi_c \frac{\lambda_{a\,ид}}{\lambda_a} = (1 - 2\bar{\delta}^{**}) \frac{\lambda_{a\,ид}}{\lambda_a},$$

где, согласно (10),

$$\bar{\delta}^* = \frac{\lambda_{a\,ид} - \lambda_a}{2\lambda_{a\,ид}} \frac{\lambda_{a\,ид}^2 - 1}{1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_{a\,ид}^2}.$$

Опыты Кинана и Неймана [1]) дают возможность оценить отношение фиктивного диаметра выхода из сопла $D_ф$ к истинному диаметру выхода (D_a) при различных значениях чисел R и M. Результаты этих опытов сведены в таблицу.

№ сопла	$D_{кр}$	D_a	M_a	R_a	$M_{a\,ид}$	$\frac{D_ф}{D_a}$
1	0,562″	0,945″	2,06	$3{,}9 \cdot 10^5$	2,58	0,79
2	0,186″	0,498″	3,14	$3{,}9 \cdot 10^5$	3,56	0,82
3	0,175″	0,438″	—	$3{,}8 \cdot 10^5$	—	—
4	0,107″	0,498″	3,87	$1{,}2 \cdot 10^5$	4,80	0,67
5	0,186″	0,498″	2,84	$0{,}27 \cdot 10^5$	3,58	0,71

Диаметры критических $D_{кр}$ и выходных D_a сечений даны в этой таблице в дюймах, числа R_a рассчитаны по выходному диаметру сопла. Как видим, истинные значения числа M_a в выходном сечении ниже расчетных ($M_a < M_{a\,ид}$) и фиктивный диаметр выходного отверстия меньше истинного на 18—33%, т. е. безразмерная толщина вытеснения

$$\bar{\delta}^* = 0{,}18 \div 0{,}33,$$

причем меньшие значения толщины вытеснения соответствуют более высоким значениям числа R_a.

Наличие больших градиентов давления крайне осложняет расчет пограничного слоя в соплах, особенно при сверхзвуковых скоростях. Приближенная методика расчета турбулентного

[1]) Keenan I., Nauman E., Journal of Applied Mechanics, № 2, т. 13, June, 1946.

пограничного слоя в сопле Лаваля, разработанная Бартцем [1]), основана на следующих предположениях: профили скорости и избыточной температуры во всех сечениях сопла подчиняются «закону 1/7», местные значения коэффициента трения на стенке и толщины пограничного слоя связаны такой же зависимостью, как в случае пластины, число Нуссельта является функцией числа Рейнольдса, поток вне пограничного слоя рассчитывается как одномерный (без учета влияния пограничного слоя). Результаты такого расчета для сопла, изображенного на рис. 8.7, приведены на рис. 8.8, где по оси ординат отложены толщины динамического пограничного слоя δ (в дюймах), а по оси абсцисс — расстояние от начала сопла до текущего сечения, выраженное в долях от приведенной длины сопла $x_п$ (в данном примере $x_п = 8{,}02''$). Расчет производится для двух случаев, когда

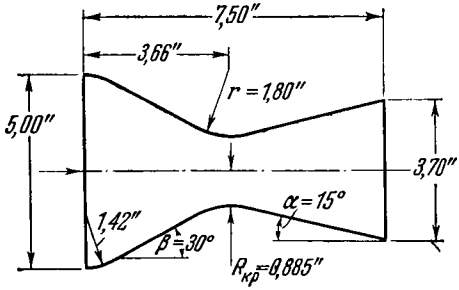


Рис. 8.7. Сопло Лаваля (из работы Бартца).

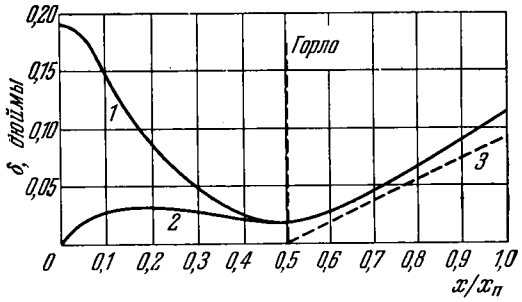


Рис. 8.8. Изменение толщины пограничного слоя δ по длине конического сопла Лаваля (см. рис. 8.7: *1* — толщина слоя в начальном сечении $\delta_0 = 0{,}188''$, *2* — то же при $\delta_0 = 0$, *3* — толщина слоя в горле $\delta_{кр} = 0$.

в начале сопла толщина пограничного слоя $\delta_0 = 0{,}188''$ и когда $\delta_0 = 0$. Важнейший результат этого расчета, подтверждаемый опытными данными, заключается в том, что толщина погранич-

[1]) Bartz D. R., An Approximate Solution of Compressible Turbulent Boundary Layer Development, ASME Paper, N54—A—153, 1954; Trans. ASME, v. 77, № 2, 1955, p. 1235—1245,

ного слоя в критическом сечении очень мала ($\delta_{кр} = 0{,}028$; $\bar{\delta}^*_{кр} = 0{,}0035$) и практически не зависит от толщины пограничного слоя в начальном сечении сопла. Это значит, что толщину пограничного слоя в выходном сечении сопла Лаваля можно приближенно определить в предположении, что в критическом сечении она равна нулю ($\delta_{кр} \approx 0$). Этот случай показан на рис. 8.8 пунктирной кривой.

Величины полного давления (с учетом пограничного слоя) в выходном сечении конического сверхзвукового сопла можно оценить приближенно по следующей формуле [1]):

$$\left(\frac{p^*}{p^*_{кр}}\right)^{-\frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{k c_f}} = \left[\frac{1 + \frac{k-1}{2} \mathrm{M}^2}{\frac{k+1}{2}}\right]^{-\frac{k+1}{(k-1)^2}} e^{\frac{\mathrm{M}^2-1}{k-1}}, \qquad (14)$$

здесь p^* — среднее по сечению полное давление на выходе, $p^*_{кр}$ — то же в критическом сечении сопла, M — расчетное значение числа Маха, α — полуугол раствора сопла, c_f — значение коэффициента трения. Кривые, рассчитанные по формуле (14) при $k = 1{,}4$, изображены на рис. 8.9.

Для расчета величины коэффициента трения в сопле можно пользоваться приближенной зависимостью [2]), которая находится в хорошем соответствии с данными гл. VI:

$$c_f = 0{,}003 \times \left[1 + 0{,}72 \frac{k-1}{2} \mathrm{M}^2\right]^{-0{,}578}. \qquad (15)$$

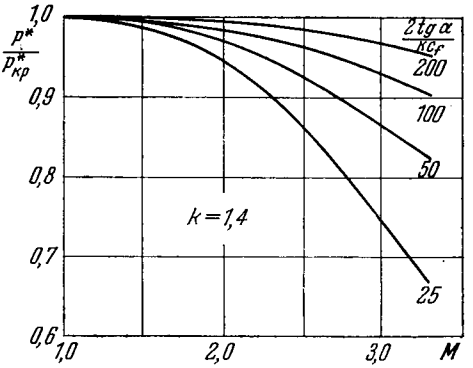


Рис. 8.9. Изменение полного давления по длине сопла, представленное в зависимости от местного значения числа Маха.

Помимо сопротивления трения, имеют значение потери, связанные с неравномерностью потока в зоне критического сечения и отклонением потока от осевого направления на выходе из сопла.

---

[1]) Evvard J., Diffusers and Nozzels — в сборнике High Speed Aerodynamics and Jet Propulsion, v. VII, 1957, p. 638—654. Русский перевод ИЛ, 1959.

[2]) Ahlberg J., Hamilton S., Migdal D., Nilson E., Truncated Perfect Nozzles in optimum Nozzles Design, ARS J., № 5, 1961, p. 614—620.

Полный коэффициент скорости сопла φ_c можно представить в виде произведения трех коэффициентов, учитывающих потери на трение (φ_f), потери от неравномерности потока и наличия местных скачков уплотнения в горле сопла (φ_p) и потери вследствие отклонения потока в выходном сечении от осевого направления (φ_α):

$$\varphi_c = \varphi_f \varphi_p \varphi_\alpha. \tag{16}$$

Величина φ_f рассчитывается с помощью методов теории пограничного слоя сжимаемого газа (см. гл. VI).

Величина φ_p в конических соплах зависит главным образом от относительного радиуса кривизны стенки сопла в области горла; соответствующие опытные данные Рао [1]) хорошо аппроксимируются степенной формулой

$$\varphi_p = 1 - 0{,}032k\left(\frac{R_{кр}}{r}\right)^{2{,}6}; \tag{17}$$

здесь k — показатель адиабаты (в опытах $k = 1{,}23$ и $1{,}4$), $R_{кр}$ — радиус критического сечения сопла (горла), r — радиус кривизны стенки сопла в области горла. В опытах Рао отношение $R_{кр}/r$ изменялось от 0 до 1.

Коэффициент φ_α для равномерного конического потока на среде сопла определяется по среднему значению проекции вектора скорости на ось сопла

$$\varphi_\alpha = \frac{1 + \cos\alpha}{2}. \tag{18}$$

Здесь α — полуугол раствора сопла.

Уменьшая α, т. е. удлиняя сопло (при неизменной величине $F_a/F_{кр}$), можно уменьшить значение φ_α; при этом растет поверхность трения, т. е. увеличивается значение φ_f; оптимальное коническое сопло, в котором суммарный коэффициент скорости φ_c достигает максимума, получается при $\alpha = 8$—$12°$.

Если имеются потери, то максимальная тяга достигается не при расчетной форме сопла, а при некотором недорасширении газа, так как небольшое сокращение выходного импульса в этом случае с избытком компенсируется выигрышем за счет уменьшения потерь.

В хорошем соответствии с опытными данными находится следующая аналитическая зависимость оптимальной степени расши-

---

[1]) Rao G. V., Evaluation of Conical Nozzle Thurst Coefficient. ARS J., № 8, 1959, p. 606—607.

рения сопла от коэффициента скорости [1]):

$$\frac{F_a}{F_{кр}} = \sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \frac{1-\varphi_c^2\left[1-\left(\frac{p_a}{p^*}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]}{\frac{2}{k+1}\varphi_c \frac{p_a}{p^*}\sqrt{1-\left(\frac{p_a}{p^*}\right)^{\frac{k-1}{k}}}} \left[1-\frac{1}{\varphi_{кр}^2}\frac{k-1}{k+1}\right]^{\frac{k}{k-1}}, \tag{19}$$

где F_a, $F_{кр}$ — площади выходного и критического сечений, p_a — давление на срезе сопла, p^* — полное давление на входе в сопло, φ_c — коэффициент скорости сопла, $\varphi_{кр}$ — коэффициент скорости с учетом потерь только в сужающейся части сопла. При $\varphi_c = \varphi_{кр} = 1$ формула (19) тождественна с формулой (4) гл. IV, полученной для идеального сопла, в чем можно убедиться, подставив в (19) зависимость (6).

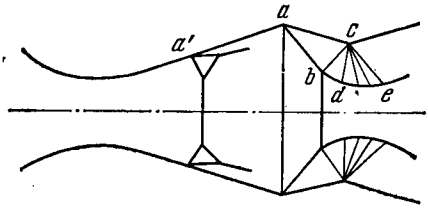


Рис. 8.10. Истечение из сопла Лаваля при сильном недорасширении, abc — мостообразный скачок на срезе, a' — скачок внутри сопла, вызывающий отрыв потока.

На режимах истечения из сопла с большим перерасширением, когда на срезе сопла устанавливается мостообразный скачок (рис. 8.10), отношение давлений на срезе $p_н/p_a$ может оказаться выше критического для пограничного слоя сопла при его взаимодействии с косым скачком уплотнения ab. В этом случае возникает отрыв пограничного слоя от стенки и система скачков смещается внутрь сопла в сечение a', где скорость меньше ($\lambda_s < \lambda_a$) и давление перед скачками выше ($p_s > p_a$), чем в сечении a; при надлежащем уменьшении отношения давлений в косом скачке

$$\frac{p_н}{p_s} = \bar{p}_{кр}(M) < \frac{p_н}{p_a}$$

система стабилизируется и происходит истечение с отрывом от стенки со сверхзвуковой скоростью, меньшей, чем на расчетном режиме. За местом отрыва давление на стенке внутри сопла увеличивается, приближаясь у среза сопла к атмосферному, в связи с чем тяга получается выше, чем на режиме полного перерасширения, когда в выходном участке сопла господствует разрежение (см. § 2 гл. IV). Расчет отрыва потока в соплах представляет собой трудную задачу. Экспериментальное изучение этого

[1]) Durham F. P., Thrust characteristics of underexpanded Nozzles, Jet Prop., № 12, 1955, п. 696—700.

явления позволило получить следующую обобщенную зависимость [1]):

$$\frac{p^*_{\text{отр}}}{p^*_{\text{расч}}} = \left(\frac{p_a}{p^*}\right)^{0{,}396}_{\text{расч}}. \qquad (20)$$

Здесь $p^*_{\text{отр}}$ — полное давление, при котором происходит отрыв, $p^*_{\text{расч}}$ — полное давление на расчетном режиме. Только при смещении системы скачков к зоне с числом Маха $M \leqslant 1{,}3$ (см. § 8 гл. VI) отрыв пограничного слоя прекращается и система вырождается в скачок, близкий к прямому, за которым устанавливается дозвуковое диффузорное течение вплоть до среза сопла.

§ 2. Формы сопел

На рис. 8.7 показано сопло Лаваля, составленное из двух конусов, соединенных горловиной, которая описана дугой окружности. Такие сопла применяются при не очень больших сверхзвуковых скоростях истечения ($M < 3$). Рекомендуется боковые

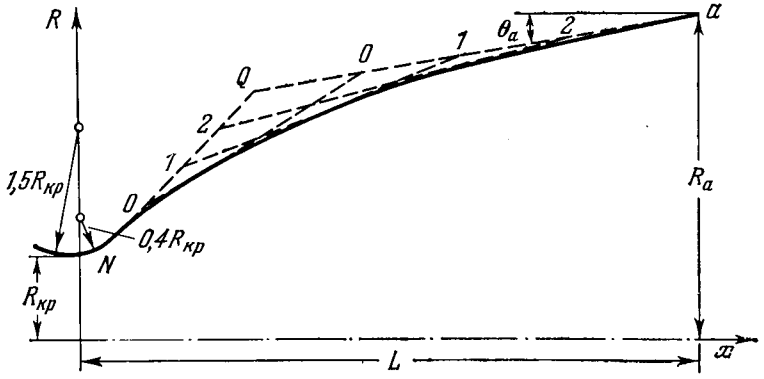


Рис. 8.11. Схема построения контура сопла.

углы сужающейся части сопла брать в пределах 15—30°, расширяющейся части — в пределах 5—8°; радиус кривизны стенки горловины должен быть не меньше диаметра критического сечения. При этих условиях такое конусное сопло дает (по экспериментальным данным) уменьшение импульса в сравнении с соплами специального профиля не более чем на 1—2%.

---

[1]) Ashwood P. F., Higgins D. G., The Influence of Design Pressure Ratio and Divergence Angle on the Thrust of Convergent-Divergent Propelling Nozzles. ARC CP, № 325, 1957.

Для получения равномерного параллельного потока (применительно к сверхзвуковым аэродинамическим трубам и реактивным аппаратам с очень большой скоростью истечения) пользуются соплами со специально профилированными стенками, для построения которых применяются методы характеристик или функциональных рядов [1]).

Приведем простой геометрический метод расчета сопла [2]), дающий контуры, очень близкие к оптимальным. Горловина такого сопла описывается двумя окружностями: дозвуковая часть — радиусом 1,5 $R_{кр}$ и сверхзвуковая часть — радиусом 0,4 $R_{кр}$, где $R_{кр}$ — радиус критического сечения (рис. 8.11). К отрезку дуги радиуса 0,4 $R_{кр}$ под заданным углом θ_N к оси сопла проводится касательная NQ до пересечения с отрезком Qa, проходящим через срез сопла и наклоненным к оси под заданным углом θ_a (в случае аэродинамической трубы $\theta_a = 0$). Отрезки NQ и Qa разбиваются на равное число участков, причем точки деления линии Qa соединяются с одноименными точками деления линии NQ; огибающая полученной сетки прямых образует искомый контур сопла.

На рис. 8.12 приведены графики для определения углов наклона θ_N (сплошные линии) и θ_a (пунктир) по заданным величинам относительной длины сопла $L/R_{кр}$ и относительного радиуса выходного сечения $R_a/R_{кр}$. О качестве описанного геометрического способа построения сопел можно судить по такому примеру: максимальное линейное отклонение контура от оптимального, рассчитанного по точной методике, для сопла $R_a = 5R_{кр}$, $L = 12R_{кр}$ составляет 0,03 $R_{кр}$.

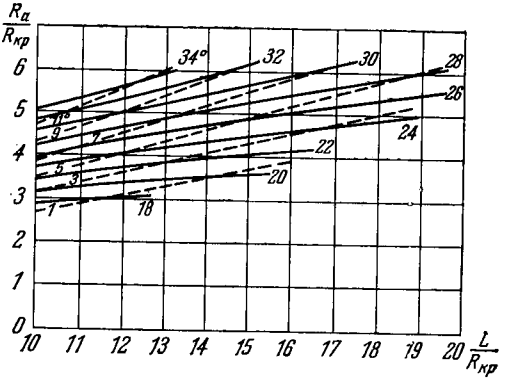


Рис. 8.12. Зависимость углов θ_N (сплошные линии) и θ_a (пунктир) от относительных значений длины и радиуса на срезе сопла.

Контур предельно короткого сопла определяется путем смещения точки N (рис. 8.11) в критическое сечение («угловое

[1]) Кацкова О. Н., Наумова И. Н., Шмыглевский Ю. Д., Шулишина Н. П., Опыт расчета плоских и осесимметричных сверхзвуковых течений газа методом характеристик. Вычислительный центр АН СССР, 1961.

[2]) Rao G., Approximation of Optimum Thrust Nozzle contour. A. R. S. J., № 6, 1960, p. 561.

сопло»); угол θ_N выбирается так, чтобы увеличение числа Маха в течении Прандтля — Майера (около точки N) происходило до значения числа Маха на срезе сопла.

Большой практический интерес представляет сопло с центральным телом, принципиальная схема которого дана на рис. 8.13. В таком сопле газ течет по кольцевому каналу (между центральным телом и обечайкой); критическое сечение может регулироваться либо продольным перемещением центрального тела, либо поворотом створок на обечайке. На рис. 8.14 представлены два типа сопла с центральным телом: *а*) с частичным внутренним и *б*) с чисто внешним расширением газа. В первом случае от критического сечения до сечения A сверхзвуковая струя расширяется в канале, а начиная от точки A, внешняя граница расширяющейся струи является свободной. Если угловая точка O сверхзвуковой части сопла помещается в критическом сечении, то отходящие от нее в виде пучка характеристики (первое семейство) отражаются от обечайки, а отраженные характеристики (второе семейство) падают на стенки центрального тела.

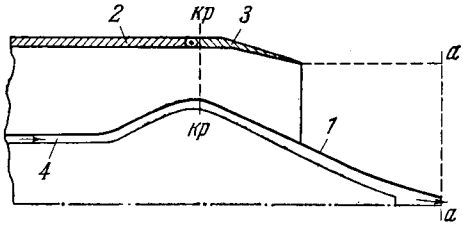
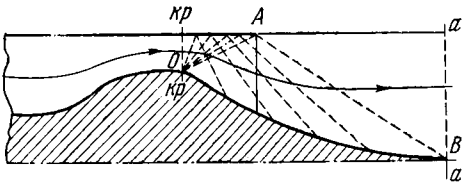
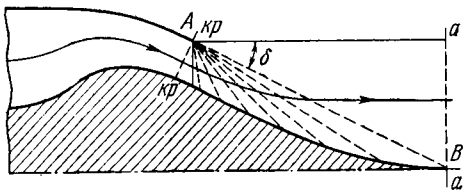


Рис. 8.13. Схема сопла с центральным телом: *1* — центральное тело, *2* — обечайка, *3* — регулируемые створки, *4* — охлаждающий воздух.



а)



б)

Рис. 8.14. Схемы сопел с центральным телом: *а*) с угловой точкой при смешанном расширении, *б*) с чисто внешним расширением.

Поток поворачивается к оси симметрии, пересекая характеристики первого семейства, а затем возвращается к первоначальному направлению, пересекая характеристики второго семейства.

Профиль центрального тела подбирается таким образом, чтобы в точке падения любой характеристики направление потока за ней совпадало с направлением стенки; в этом случае характеристики второго семейства от центрального тела не от-

ражаются (затухают). За крайней характеристикой AB газ течет равномерно и прямолинейно.

В сопле с чисто внешним расширением (рис. 8.14, *б*) критическое сечение и угловая точка течения расположены на срезе A обечайки.

Расширение газа при этом является односторонним, а критическое сечение наклонено к оси на угол δ, равный углу поворота газового потока около точки A при разгоне от критической скорости ($M = 1$) до расчетного значения числа Маха (M_a) для

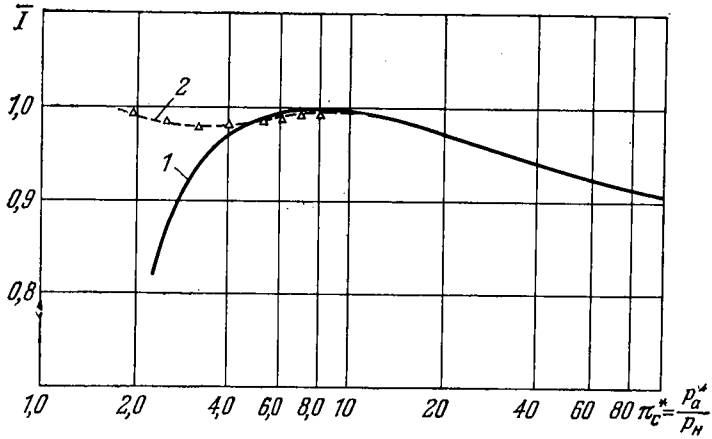


Рис. 8.15. Сравнение характеристик сопла Лаваля (*1*) и сопла с центральным телом (*2*).

данного отношения давлений. Полная длина выступающей за обечайку (хвостовой) части центрального тела определяется точкой пересечения последней характеристики AB с осью. Опыты показывают, однако, что хвостовая часть центрального тела может быть без заметного снижения тяги укорочена на $30 \div 50\%$.

В критическом сечении сопла, выполненного по второй схеме (рис. 8.14, *б*), обечайка должна быть параллельна стенке центрального тела; это приводит к дополнительному лобовому сопротивлению в связи с потерями на внешнее обтекание сходящейся части обечайки.

При не очень больших расчетных значениях числа Маха ($M_a \leqslant 2$) центральное тело можно делать коническим.

Сопла с центральным телом получаются значительно короче обычных сопел Лаваля и в отличие от последних дают очень небольшие снижения относительного импульса при давлениях значительно ниже расчетного (из-за отсутствия стенок в сверхзвуковой части не происходит перерасширения газа).

На рис. 8.15 приведены опытные данные Пирсона [1]) об изменении относительной величины выходного импульса I при отклонении от расчетного режима $(p_a^*/p_н = 8)$ для сопла Лаваля и сопла с центральным телом (пунктир).

Расчетную степень расширения сопла с центральным телом можно определять по отношению площади сечения $a-a$

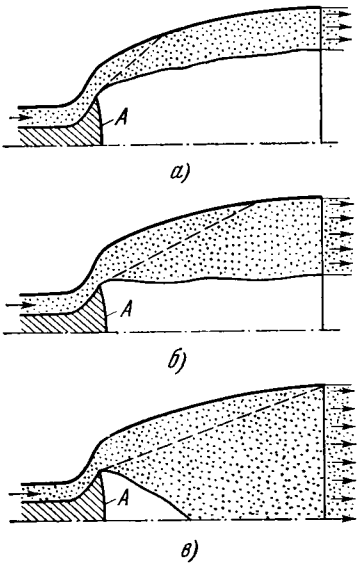


Рис. 8.16. Режимы течения в сопле с центральной вставкой: *а*) у земли, *б*) на средних высотах, *в*) на больших высотах.

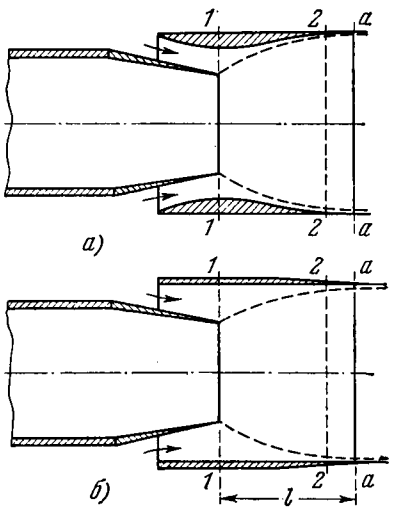


Рис. 8.17. Схемы эжекторных сопел: *а*) с профилированной обечайкой, *б*) с цилиндрической обечайкой.

(рис. 8.14) цилиндрической поверхности, имеющей диаметр выходного сечения обечайки, к площади критического сечения.

В случае плоского сопла контуром центрального тела является линия тока течения Прандтля — Майера (около выпуклого угла).

В случае осесимметричного сопла контур центрального тела отыскивается по методу характеристик. Однако при укороченной хвостовой части контур осесимметричного центрального тела близок к линии тока плоского течения.

Известна схема сопла с центральной вставкой (рис. 8.16), у которого критическое сечение также кольцевое, но расшире-

[1]) Krase W. H., Performance analisysis of plug nozzles for turbojet and rocket exhaustes, Paper A. S. M. E., № 58, A. 248, 1958.

ние сверхзвукового потока происходит в нем с поворотом около наружной стенки, а не центрального тела. За центральной вставкой *А* образуется полость со свободной границей, размеры которой зависят от числа Маха на выходе из сопла (с увеличением числа **M** полость сокращается).

Большое практическое значение, особенно для ТРД, имеет эжекторное сопло (рис. 8.17), в котором продукты сгорания из двигателя вытекают через простое сужающееся сопло, помещенное внутрь соосной с ним наружной обечайки, имеющей специальный профиль (рис. 8.17, *а*) или форму цилиндрического кольца (рис. 8.17, *б*). На срезе внутреннего сопла (сечение *1—1*) устанавливается критическая скорость, и если давление здесь

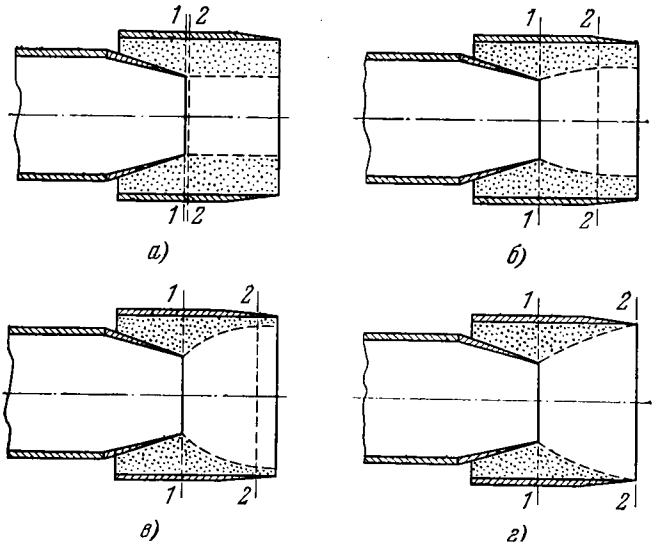


Рис. 8.18. Схемы течения в эжекторном сопле на нерасчетных режимах *а*) давление на срезе внутреннего сопла равно атмосферному, *б*) небольшой избыток давления на срезе внутреннего сопла, *в*) критический режим эжектора, *г*) режим запирания эжектора.

выше окружающего, то центральная струя внутри эжектора расширяется, стесняя проходные сечения эжектируемого ею потока воздуха, который попадает в кольцевой канал из промежуточной ступени компрессора или из атмосферы.

Скорость эжектируемого потока обычно меньше звуковой, поэтому он в выходном участке эжектора ускоряется. В некотором сечении *2 — 2* (рис. 8.18) граница двух потоков становится параллельной оси сопла; это сечение расположено тем дальше

от среза внутреннего сопла, чем больше избыток давления в нем. Поперечный размер внутренней струи увеличивается, а эжектируемой — уменьшается с ростом избытка давления во внутреннем сопле. Конфигурации двух потоков при разных величинах

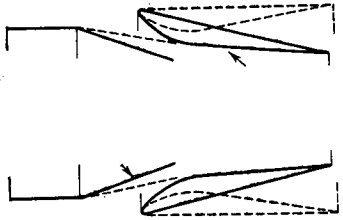


Рис. 8.19. Эжекторное сопло с регулируемыми сечениями горловины и среза.

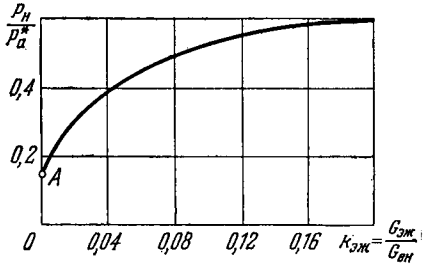


Рис. 8.20. Характеристика эжекторного сопла.

избытка давления показаны на рис. 8.18. Режим работы эжектора, при котором вторичный поток разгоняется (в сечении *2—2*) до звуковой скорости, называется *критическим* (рис. 8.18, *в*); если центральная струя расширяется настолько, что заполняет все выходное сечение эжектора (рис. 81.8, *г*), то наступает режим *запирания*, когда расход эжектируемого газа равен нулю.

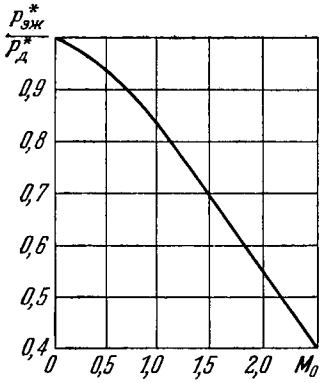


Рис. 8.21. Отношение полного давления вторичного воздуха к полному давлению во входном канале двигателя для оптимальных условий в эжекторном сопле.

Для регулирования эжекторного сопла можно установить поворотные створки как на внутреннем сопле, так и на внешней обечайки (рис. 8.19).

Тяга эжекторного сопла больше, чем у простого сужающегося сопла, так как давление со стороны эжектируемого газа на стенку внутреннего сопла выше атмосферного. Сечение обечайки эжекторного сопла должно быть таким, чтобы на расчетном режиме расход эжектируемого газа уменьшался до минимально необходимого для целей охлаждения стенки.

Снижение избытка давления в эжекторном сопле ведет к уменьшению скорости внутренней струи в сечении *2—2*, чем предотвращается возможность перерасширения газа и соответствующей потери тяги (по сравнению с соплом Лаваля).

Типичная характеристика эжекторного сопла ТРД, т. е. зависимость между коэффициентом эжекции $k_{эж} = (G_{эж}/G_{вн})$ и отношением полного давления внутренней струи к атмосферному, изображена на рис. 8.20. Для того чтобы эжекторное сопло работало в наивыгоднейших условиях, необходимо регулировать расход вторичного воздуха (увеличивая при малых скоростях полета коэффициент эжекции до значений порядка $k_{эж} = 0{,}1$ и снижая его при больших скоростях до минимума порядка $k_{эж} = 0{,}01—0{,}02$).

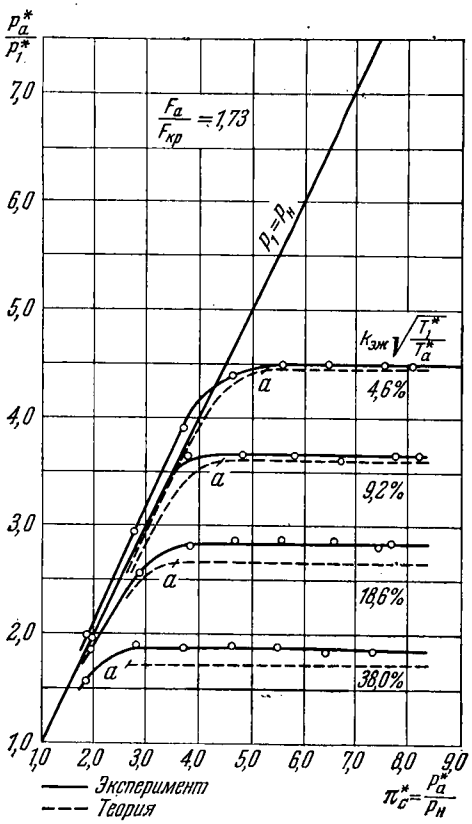


Рис. 8.22. Характеристики эжекторного сопла (при $\bar{F}_a = 1{,}73$ и $\bar{l} = 0{,}6$).

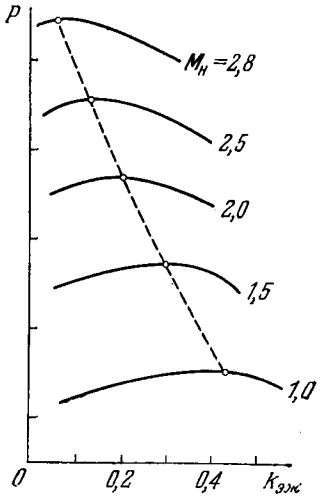


Рис. 8.23. К определению оптимальных значений коэффициента эжекции.

Отношения полного давления эжектируемого воздуха в сопле к полному давлению во входном канале двигателя $(p^*_{эж}/p^*_{д})$, которые можно рекомендовать для получения оптимальных режимов работы эжекторного сопла при разных скоростях полета (или M_0), приведены на рис. 8.21.

Оптимальная относительная длина эжекторного сопла, обеспечивающая наименьшие потери тяги на расчетном

режиме [1]),

$$\bar{l} = \frac{l}{R_т} \approx 1 \div 1{,}2,$$

где l — расстояние от среза внутреннего сопла до среза обечайки, $R_т$ — радиус критического (выходного) сечения внутреннего сопла.

Тяга эжекторного сопла равна суммарному импульсу двух струй на срезе обечайки. Параметры струй при цилиндрической обечайке определяются из условий сохранения расхода и импульса (без учета трения) между сечениями *1* и *2* срезов внутреннего сопла и обечайки (см. § 6 гл. VII и § 10 гл. IX) в предположении об отсутствии смешения струй. Эта задача имеет два решения, из которых выбирают то, при котором внутренняя струя в сечении *2* является сверхзвуковой, а эжектируемая — дозвуковой или звуковой. О том, в какой мере данные такого расчета соответствуют экспериментальным, можно судить по рис. 8.22, где по оси ординат отложено отношение полных давлений двух потоков, а по оси абсцисс — отношение полного давления внутренней струи к атмосферному. Приведенные данные относятся к случаю, когда отношение площадей на срезе обечайки F_a и внутреннего сопла $F_{кр}$ составляет 1,73. Переменным параметром для кривых служит произведение $k_{эж}\sqrt{(T_1^*/T_a^*)}$, где T_1^* и T_a^* — температуры торможения наружной и внутренней струй. Горизонтальные участки кривых отвечают критическим режимам сопла.

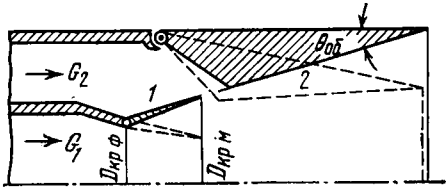


Рис. 8.24. Эжекторное сопло с регулируемыми створками внутреннего сопла и обечайки: *1* — створка центрального сопла, *2* — створка обечайки.

Потери в эжекторном сопле достигают минимума, когда отношение скоростей двух струй на срезе внутреннего сопла равно отношению их полных энтальпий [2]).

Примерный характер зависимостей тяги ТРД от коэффициента эжекции при разных значениях числа $M_н$ полета показан на рис. 8.23. Пунктир соединяет режимы максимумов тяги. Ввиду пологости кривых $P(k_{эж})$ можно выбирать величины коэффициентов эжекции значительно ниже оптимальных, что позволяет уменьшить расход вторичного воздуха.

---

[1]) Person H., Holliday J., Smith S., A theory of the Cylindrical Ejector Supersonic Propelling Nozzle, R. A. S., v. 62, №№ 573, 574, 1958.

[2]) Knox R., The optimized Ejector Nozzle Thrust Augmenter JASS, № 4, 1962, p. 470—471.

На рис. 8.24 изображена схема эжекторного сопла с регулируемыми створками центрального сопла, обеспечивающими плавный переход сужающегося канала к соплу Лаваля, и соответствующим регулированием створок профилированной обечайки. Такое сопло позволяет осуществить широкий диапазон регулирования расхода газа при относительно малых потерях тяги.

В последнее время появились сопла, названные «ирисовыми» (рис. 8.25). Регулируемые створки ирисового сопла перемещаются в продольных направляющих, расположенных в конце форсажной камеры двигателя. В крайнем выдвинутом положении (рис. 8.25, *а*) створки создают сужающийся канал плавной

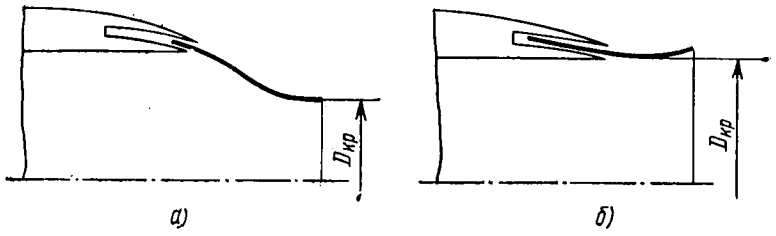


Рис. 8.25. Ирисовое сопло. Режимы форсажный (*а*) и крейсерский (*б*).

формы. В убранном положении рис. 8.25, *б* они образуют сопло Лаваля с относительно небольшим расширением на выходе ($F_a/F_{кр} \approx 1{,}3 - 1{,}4$). При дозвуковых режимах полета потери тяги в ирисовом сопле вдвое меньше, чем в эжекторном, а на максимальной сверхзвуковой скорости полета (при включенной форсажной камере) вдвое больше (из-за недостаточного расширения сверхзвуковой части сопла).

§ 3. Сопротивление дозвукового диффузора

Рассмотрим диффузор двигателя, установленного на движущемся самолете. Пусть скорость самолета $w_н$, а скорость звука, отвечающая температуре атмосферы, $a_н$. Введем обозначения: $F_н$ — площадь поперечного сечения струи на бесконечности перед двигателем, $\rho_н$ — плотность воздуха вдалеке перед двигателем, $p_н$ — давление в атмосфере. Величины площади, скорости, давления во входном отверстии диффузора обозначим F_e, w_e, p_e. Значения тех же величин в конце диффузора $F_д$, $w_д$, $p_д$.

Работа диффузора зависит от отношения скорости полета к скорости во входном его отверстии. Рассмотрим сначала режим $w_н < a_н$, т. е. полет с дозвуковой скоростью. Расход воздуха через двигатель и, следовательно, через диффузор $G_в$ кг/с.

Можно представить себе такой случай, когда струя входит в диффузор без изменения своей конфигурации. Площадь поперечного сечения струи на бесконечности перед двигателем $F_н$ при этом равна площади входного отверстия диффузора $F_в$:

$$F_н = \frac{G_в}{\rho_н w_н} = F_в.$$

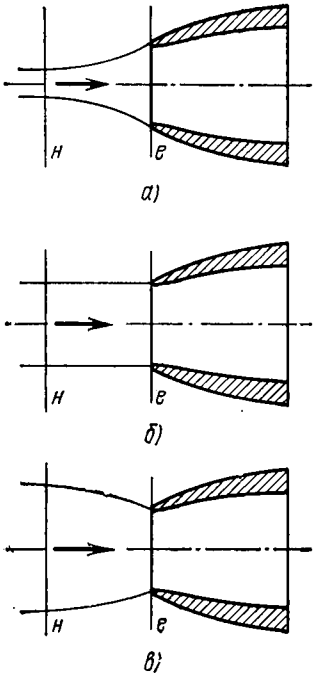


Рис. 8.26. Возможные конфигурации струй перед диффузором.

Вообще же форма струи на входе в двигатель определяется отношением $F_н/F_в$. В приведенном выше случае $F_н = F_в$, следовательно, преобразования скорости и давления перед диффузором нет (рис. 8.26, *б*):

$$w_в = w_н \quad \text{и} \quad p_в = p_н.$$

Если расход воздуха через диффузор будет увеличиваться, то струя изменит свою форму, как показано на рис. 8.26, *в*. Изменение формы струи сопровождается преобразованием скорости и давления:

$$w_в > w_н, \qquad p_в < p_н.$$

При уменьшении расхода воздуха струя как бы образует диффузор еще в атмосфере (перед двигателем) в связи с уменьшением скорости и повышением давления (рис. 8.26, *а*).

При постоянном расходе воздуха форма струи перед двигателем зависит от величины входного отверстия диффузора. Изменяя размеры диффузора, мы можем получить любой из трех приведенных режимов работы. Для рабочего процесса двигателя выгоден такой случай, когда поток подтормаживается еще перед диффузором, так как торможение струи перед диффузором идет без каких-либо потерь, и собственное сопротивление диффузора уменьшается вследствие понижения скорости на входе. Необходимо, однако, заметить, что, кроме внутренних потерь, следует учитывать также внешнее лобовое сопротивление двигателя, увеличивающееся с укорочением диффузора. Объясняется это тем, что при растекании потока перед носком двигателя струи подходят к его поверхности под большими углами атаки и может образоваться срыв на внешней поверхности носка (рис. 8.27). Для удовлетворения этим противоречивым требованиям необхо-

димо отыскать оптимальные условия работы входного участка двигателя.

Опыты показывают, что для дозвукового воздушно-реактивного двигателя оптимум лежит вблизи режима

$$w_e \approx 0{,}5w_н.$$

Если бы в диффузоре потери отсутствовали, газ в любом его сечении имел бы одно и то же полное давление, равное (при дозвуковых скоростях полета) полному давлению в набегающей струе воздуха. Наличие потерь нарушает это равенство, и полное давление в конце диффузора всегда ниже, чем в начале:

$$p^*_д < p^*_e.$$

Статическое давление вдоль диффузора, наоборот, увеличивается за счет уменьшения скорости.

Величину гидравлических потерь в диффузоре удобно выразить в долях скоростного напора в широком его сечении:

$$\Delta p^*_д = p^*_e - p^*_д = \zeta_д \rho^*_д \frac{w^2_д}{2}, \quad (21)$$

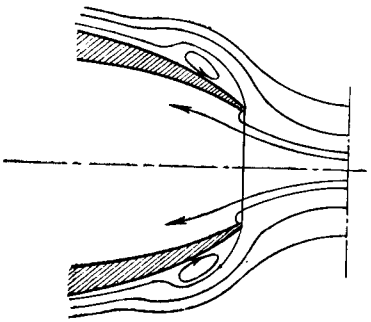


Рис. 8.27. Срыв струи при большом входном отверстии диффузора.

где $\zeta_д$ — коэффициент гидравлического сопротивления диффузора. Обычно потери в диффузоре относительно невелики: $\frac{\Delta p^*_д}{p^*_e} \ll 1$. Поэтому плотность заторможенного газа в диффузоре можно считать практически постоянной $\rho^*_д \approx \rho^*_н$. Приведем формулу (21) к безразмерному виду:

$$1 - \frac{p^*_д}{p^*_e} = \zeta_д \frac{k}{k\dfrac{p^*_e}{\rho^*_н}} \frac{w^2_д}{2};$$

здесь

$$\frac{kp^*_e}{\rho^*_н} = a^{*2}_н = \frac{k+1}{2} a^2_{кр}.$$

После соответствующих преобразований имеем

$$\sigma_д = \frac{p^*_д}{p^*_e} = 1 - \frac{k}{k+1} \zeta_д \frac{w^2_д}{a^2_{кр}}.$$

Заметим, что $w_д/a_{кр} = \lambda_д$ представляет собой приведенную скорость в конце диффузора. В результате получим следующее выражение для коэффициента сохранения полного давления в диффузоре:

$$\sigma_д = 1 - \frac{k}{k+1}\zeta_д\lambda_д^2. \qquad (22)$$

Сопротивление диффузора слагается из потерь на трение и на вихреобразования. Вихревые потери вызываются отрывом пограничного слоя от стенок диффузора, причины которого объяснены в гл. VI; они зависят от угла раствора диффузора и играют главную роль. При малых углах раствора диффузора гидравлические потери невелики, но по мере увеличения угла они возрастают. С ростом угла раствора зона вихрей перемещается от конца диффузора к его началу и при больших углах вся стенка покрыта вихревой областью.

Многочисленные эксперименты приводят к заключению, что вихревые потери в диффузоре можно оценивать как смягченное сопротивление удара (в сравнении с внезапным расширением канала)

$$\Delta p_д^* = \psi \Delta p_{уд}, \qquad (23а)$$

где потери удара

$$\Delta p_{уд} = \rho \frac{(w_e - w_д)^2}{2}.$$

Здесь ψ — коэффициент полноты удара ($\psi < 1$). Опыты показали [1]), что коэффициент полноты удара ψ является функцией одного только угла раствора диффузора α.

Соответствующая зависимость для прямолинейного диффузора с круглым поперечным сечением дана на рис. 8.28. Большим углам раствора ($\alpha > 40°$) соответствует $\psi \geqslant 1$, т. е. смягчения удара нет. При угле $\alpha = 0$ имеем $\psi = 0$, т. е. удара нет. Максимальное значение коэффициента полноты удара ($\psi = 1{,}2$) достигается при угле $\alpha = 60°$. В этом случае потери даже больше, чем при внезапном раскрытии канала, когда $\psi = 1$. Объясняется это тем, что вихревая зона в прямом угле устойчива, в то время как при наклонной стенке ($\alpha \approx 60°$) вихревая зона периодически уносится потоком. Таким образом, дополнительные потери при таких углах обуславливаются затратами энергии на возобновление вихревой зоны.

Обычно применяют диффузоры с углами $\alpha = 6 - 8°$. Таким значениям углов раствора соответствуют величины $\psi = 0{,}11 - 0{,}15$. В этой области не наблюдается видимого отрыва струй от стенки диффузора.

---

[1]) Абрамович Г. Н., Аэродинамика местных сопротивлений, Труды ЦАГИ, вып. 211, 1935.

Если пренебречь изменением плотности воздуха в пределах диффузора, то имеем

$$\frac{w_e}{w_д} = \frac{F_д}{F_e};$$

подставляя это равенство в (23а), получим

$$\zeta_д = \frac{\Delta p^*_д}{\rho^*_н \frac{w^2_д}{2}} = \psi\left(\frac{F_д}{F_e} - 1\right)^2. \qquad (23б)$$

В качестве примера вычислим коэффициент потерь для диффузора с соотношением поперечных сечений $\frac{F_д}{F_e} = 3$ при угле

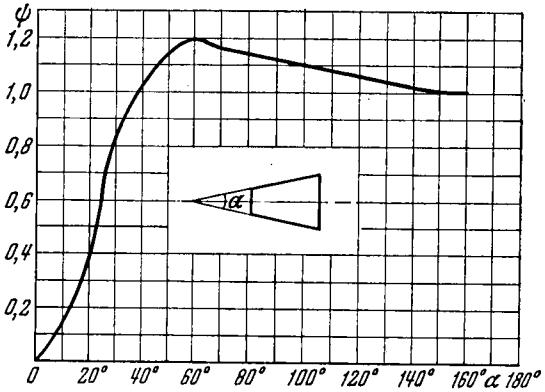


Рис. 8.28. Зависимость коэффициента полноты удара от угла раствора диффузора круглого сечения.

раствора $\alpha = 8°$. Можно принять для этого случая (с учетом трения) $\psi = 0{,}2$. Тогда $\zeta_д = 0{,}2 \cdot 4 = 0{,}8$, $\sigma_д = 1 - 0{,}44\lambda^2_д$. Приведенная скорость в конце диффузора дозвукового воздушно-реактивного двигателя обычно бывает порядка $\lambda_д = 0{,}2 - 0{,}4$. Тогда

$$\sigma_д = 0{,}98 - 0{,}94.$$

На расчете сопротивления трения мы не останавливаемся, так как он достаточно подробно освещается в гл. VI.

Сопротивление безотрывного диффузора можно заметно снизить, если его стенке придать колоколообразную форму (рис. 8.29) вместо прямолинейной. Теоретические и экспериментальные исследования показали, что наиболее эффективен диффузор с «предотрывным» состоянием пограничного слоя во всех

поперечных сечениях. Идея предотрывного диффузора высказывалась Л. Г. Лойцянским еще в тридцатых годах. Теоретическое выражение для контура плоского предотрывного диффузора получил впервые Г. М. Бам-Зеликович, детальное теоретическое и экспериментальное исследование предотрывных диффузоров различной формы (плоских, осесимметричных, кольцевых, радиальных) выполнено А. С. Гиневским и Л. А. Бычковой [1]). Форма стенки предотрывного диффузора подбирается исходя из того, чтобы в каждой ее точке состояние пограничного слоя было близким к отрывному, при котором напряжение трения на стенке равно нулю. В случае турбулентного пограничного слоя (см. § 6 гл. VI) несжимаемой жидкости это означает, что величина параметра

$$\varphi = \left(\frac{k}{2}\right)^2 = \frac{\delta}{\rho u_\delta^2}\frac{dp}{dx}$$

должна быть немного меньшей, отвечающей отрыву ($\varphi < \varphi_{отр}$). Из работы Л. А. Бычковой следует, что для плоского диффузора можно принять $k = 0{,}225$, а для осесимметричного диффузора $k = 0{,}325$. Расчет скорости потока и давления по длине диффузора ведется из условий сохранения массы и импульса при постоянном давлении в каждом поперечном сечении. Профиль скорости в пограничном слое при предотрывном режиме ($\tau_w = 0$) получается в форме $u/u_\delta = (y/\delta)^{0{,}5}$, где δ — толщина пограничного слоя, u_δ — скорость на его границе; толщина вытеснения для данного профиля скорости $\delta^* = 0{,}333\,\delta$; толщина потери импульса $\delta^{**} = 0{,}167\,\delta$, т. е. формпараметр $H = \delta^*/\delta^{**} = 2$.

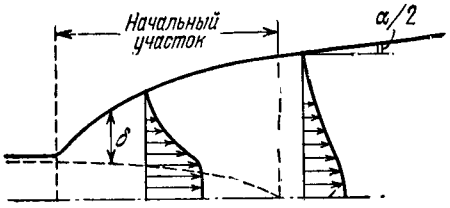


Рис. 8.29. Колоколообразный «предотрывный» диффузор. δ — толщина пограничного слоя.

Расчет пограничного слоя ведется по уравнению (59) гл. VI при $\tau_w = 0$.

В начальном участке диффузора, где имеется невозмущенное ядро течения, очерченное пунктиром на рис. 8.29, пограничный слой не заполняет всего сечения канала ($\Delta = 2\delta/h < 1$).

---

[1]) Гиневский А. С., Бычкова Л. А., Аэродинамические характеристики плоских и осесимметричных диффузоров с предотрывным состоянием турбулентного пограничного слоя, Сб. «Тепло- и массоперенос», т. 1, «Энергия», М., 1968; Бычкова Л. А., Экспериментальное исследование диффузорных каналов с предотрывным турбулентным течением, Ученые записки ЦАГИ, т. 1, № 5, 1970; Бычкова Л. А., Аэродинамические характеристики плоских и радиальных диффузоров с предотрывным турбулентным пограничным слоем, Сб. «Промышленная аэродинамика» , вып. 30, «Машиностроение», 1973.

На этом участке и получается колоколообразная форма стенки предотрывного диффузора.

Для расчета начального участка вводится безразмерное расстояние от начального сечения диффузора $\xi = k^2 \frac{x}{h_0}$; скорость в ядре в долях от начальной получается

$$\bar{u}_\delta = \frac{u_\delta}{u_{\delta_0}} = \left(1 + \frac{2}{3}\frac{\xi}{\Delta_0^*}\right)^{-0{,}25},$$

где $\Delta_0^* = 2\delta_0^*/h_0$, а ширина поперечного сечения

$$\frac{h}{h_0} = \left[1 - \Delta_0^*\left(1 - \frac{1}{\bar{u}_0^4}\right)\right]\frac{1}{\bar{u}_\delta}.$$

В основном участке предотрывного диффузора осуществляется течение со стабилизированным профилем скорости, так как здесь пограничный слой заполняет все поперечное сечение канала. Угол раскрытия канала в основном участке остается постоянным и равным $\alpha = 2 \operatorname{arctg} 0{,}5\,k^2$ или $\alpha \approx 6°$ при $k = 0{,}225$.

Для расчета куполообразного начального участка осесимметричного предотрывного диффузора в цитированной работе также получены соответствующие аналитические зависимости. Угол раскрытия основного участка предотрывного осесимметричного диффузора получается равным $\alpha = 4°$ при $k = 0{,}325$.

Предотрывные диффузоры имеют значительно меньшую длину, чем безотрывные диффузоры с прямолинейной формой (на всей длине), и при этом потери в первых получаются заметно ниже.

Остановимся теперь на диффузорах с заведомо отрывным течением жидкости.

Опыты показывают, что в диффузорах с вогнутыми криволинейными боковыми стенками при больших углах раскрытия гидравлические потери могут быть существенно меньше [1]), чем в диффузорах с прямолинейными стенками.

Результаты экспериментального определения потерь (включая трение) в плоских диффузорах одной и той же длины при постоянном среднем угле раскрытия $\alpha = 38°\,40'$, но с разными очертаниями боковых стенок, приводятся ниже. На рис. 8.30 представлены контуры испытывавшихся диффузоров. Первый контур — прямая, второй — дуга окружности, третий — соответствует постоянному градиенту давления по длине диффузора $dp/dx = \text{const}$, четвертый — постоянному градиенту скорости

[1]) Идельчик И. Е., Аэродинамика потока и потери напора в диффузорах, Сборник статей по промышленной аэродинамике под редакцией К. А. Ушакова, М., 1947.

$dw/dx = \text{const}$, пятый — построен по формуле

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{d(1-\bar{p})}{dx}\,\frac{x}{1-\bar{p}}\right] = \text{const} > 0,$$

где $\bar{p}$ — безразмерное давление, определяемое из соотношения

$$\bar{p} = \frac{p - p_1}{\rho\,\frac{w_1^2}{2}}.$$

Наименьшее значение коэффициента сопротивления $\zeta_д = 0{,}24$ получено для диффузоров 3 и 4 с постоянным градиентом давления и постоянным градиентом скорости. Для диффузора 5 $\zeta_д = 0{,}26$, для диффузора 2 со стенками, выполненными по дуге окружности, получен коэффициент сопротивления $\zeta_д = 0{,}27$, а для диффузора 1 с прямыми стенками $\zeta_д = 0{,}32$.

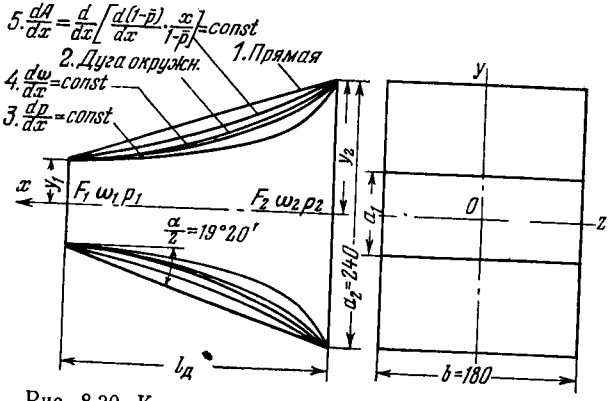


Рис. 8.30. Контуры испытывавшихся диффузоров.

Таким образом, в диффузорах с постоянными градиентами давления или скорости достигнуто снижение потерь примерно на 25% по сравнению с прямым диффузором.

На рис. 8.31 представлены графики зависимости коэффициента потерь от длины (т. е. от угла α) для диффузоров типа 1 и 3. У достаточно длинных (близких к оптимальным) диффузоров этих типов разница в потерях становится малой.

Мы рассматривали сопротивление диффузора в таких условиях, когда можно пренебрегать влиянием сжимаемости воздуха, которая, как показывают опыты, начинает сказываться на величине коэффициента потерь лишь в том случае, если скорость во входном отверстии диффузора близка к скорости звука ($\lambda_e > 0{,}7$).

На рис. 8.32 даны графики экспериментальных зависимостей отношения полных давлений в конце и начале диффузора $\sigma_д = p^*_д/p^*_e$ от числа M_e во входном отверстии диффузора [1]) (при центральных углах раскрытия $\alpha = 4, 6, 8, 10°$, диаметре входного сечения 100 мм и диаметре выходного сечения 222 мм). Резкое падение значений $\sigma_д$, наступающее при значениях числа M_e около 0,9, объясняется тем, что на этих режимах в начальной части диффузора развивается зона сверхзвуковых скоростей, замыкающаяся скачком уплотнения, который вносит большое волновое сопротивление.

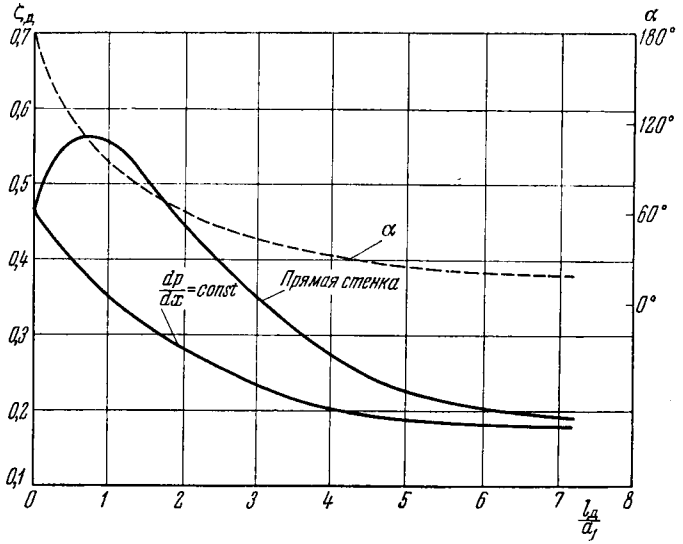


Рис. 8.31. Зависимость коэффициента потерь от длины диффузора.

Для оценки влияния числа R на сопротивление диффузора К. С. Сциллард испытывал также геометрически подобные диффузоры меньшего размера (с диаметром входного отверстия 18 мм). Результаты испытаний диффузоров увеличенного и малого размеров оказались близкими, что свидетельствует о слабом влиянии числа R на потери в диффузоре.

Зависимость $\sigma_д = f(M_e)$ не дает наглядного представления о влиянии сжимаемости на сопротивление, так как величина $\sigma_д$ изменяется со скоростью даже при постоянном значении коэффициента потерь.

---

[1]) Сциллард К. С., Исследование диффузоров при больших скоростях, Технические заметки ЦАГИ, 1938.

Удобной характеристикой потерь при течении сжимаемого газа в диффузоре является коэффициент

$$\zeta_{сж} = \frac{L}{\frac{w_e^2}{2}} = \frac{\frac{k}{k-1} RT_д^* \left[\left(\frac{p_e^*}{p_д^*} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right]}{\frac{w_e^2}{2}}. \qquad (24)$$

Здесь числитель представляет собой адиабатическую работу, которую надо затратить, чтобы поднять в идеальном компрессоре

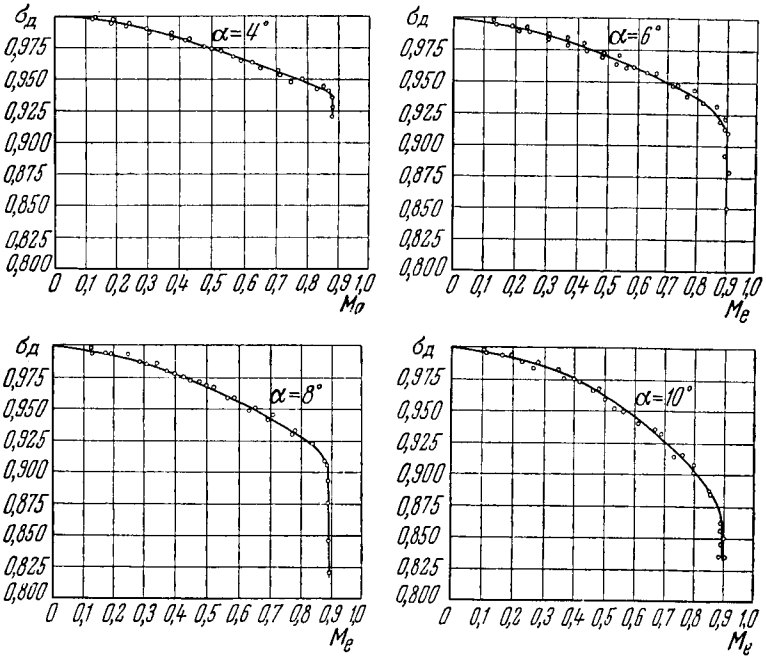


Рис. 8.32. Зависимость коэффициента сохранения полного давления в диффузоре от числа M_e перед диффузором при углах раскрытия $\alpha = 4$, 6, 8 и 10° (по опытам К. С. Сцилларда).

полное давление в конце диффузора до величины полного давления в начале диффузора, а знаменатель выражает кинетическую энергию струи газа во входном отверстии диффузора.

Зависимости $\zeta_{сж} = f(M_e)$ для четырех диффузоров К. С. Сцилларда, пересчитанные по кривым рис. 8.32, изображены на рис. 8.33. Как видим, влияние сжимаемости газа на значение коэффициента потерь начинает сказываться лишь при околозву-

ковых скоростях ($M_e > 0{,}7$). Некоторое падение кривых $\zeta_{сж} = f(M_e)$ в области $M_e < 0{,}3$, где заведомо немыслимо влияние сжимаемости, можно объяснить только влиянием числа R, которое возрастает с увеличением числа M_e.

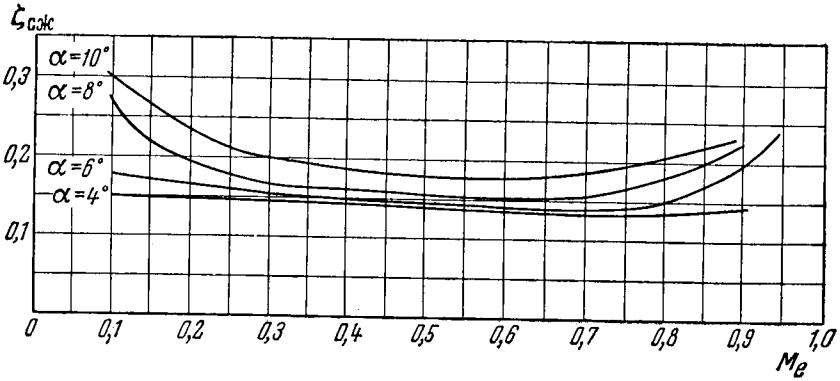


Рис. 8.33. Зависимость коэффициента сопротивления диффузора от числа M_e на входе при углах раскрытия $\alpha = 4$, 6, 8 и 10° (по опытам К. С. Сцилларда).

Рассмотрим теперь работу диффузора ВРД, имеющего обычную («дозвуковую») форму, при сверхзвуковой скорости потока на входе. Перед входом в такой диффузор образуется скачок

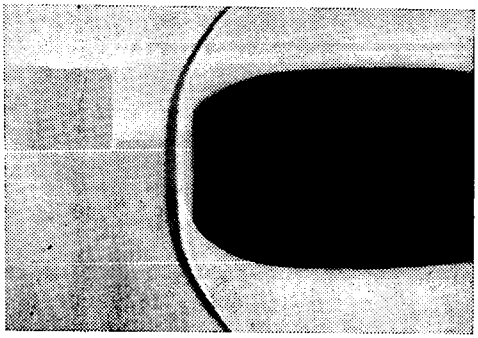


Рис. 8.34. Теневая фотография сверхзвукового потока перед простым диффузором.

уплотнения с криволинейным фронтом (рис. 8.34). В центральной части, т. е. в той, которую пересекает рабочая струя воздуха, поступающая внутрь двигателя, скачок должен быть прямым. Последнее вытекает из того, что рабочая струя сохраняет

после скачка свое первоначальное направление. Таким образом, скорость в рабочей струе после скачка дозвуковая.

В зависимости от величины входного отверстия диффузора (F_e) имеет место то или иное соотношение между значениями скорости после скачка (w_1) и на входе в диффузор (w_e). Принципиально возможны два случая:

а) $w_1 > w_e$, т. е. поток между фронтом скачка и входом в диффузор тормозится;

б) $w_1 = w_e$, т. е. скорость после скачка и скорость на входе в диффузор одинаковы.

Возможен и такой случай, когда рабочая струя входит в диффузор со сверхзвуковой скоростью, тогда скачок уплотнения получится не перед диффузором, а внутри него. Режим $w_1 < w_e$, т. е. ускорение потока между фронтом скачка и входом в диффузор, на практике не реализуется.

Итак, в двигателе с простым диффузором торможение входящей струи при сверхзвуковой начальной скорости начинается с прямого скачка уплотнения. Потери в скачке и параметры потока за скачком определяются по формулам, приведенным в гл. III.

Поскольку поток в простом диффузоре является дозвуковым даже при сверхзвуковой скорости полета ($\lambda_1 < 1$, $\lambda_e < 1$), гидравлические потери в канале такого диффузора можно рассчитывать по формулам (22) и (23) настоящей главы.

Если для случая дозвуковой скорости полета потери полного давления при торможении рабочей струи определялись только внутренним сопротивлением диффузора $\sigma_д$, то для случая сверхзвуковой скорости эти потери включают также волновое сопротивление $\sigma_п$, т. е. определяются произведением коэффициентов сохранения полного давления в прямом скачке и в диффузоре ($\sigma_п\sigma_д$).

§ 4. Сверхзвуковые диффузоры

Применяя диффузоры специальной формы, можно осуществлять ступенчатое торможение сверхзвукового потока посредством различных систем косых скачков уплотнения. Так как за обычным плоским косым скачком скорость остается сверхзвуковой, то для полного торможения потока нужно за последним косым скачком поместить прямой скачок или особый («сильный») косой скачок, который дает переход к дозвуковой скорости течения. На рис. 3.12 сильные косые скачки отвечают верхним ветвям кривых $\alpha = f(\omega)$, лежащим выше максимумов, причем фронт сильного косого скачка располагается по отношению к набегающему потому под углом не менее 60°. Только при этом

условии ($\alpha > 60°$) можно получить за фронтом косого скачка дозвуковую скорость потока ($M_1 < 1$).

Различные комбинации скачков исследованы в работе Г. И. Петрова и Е. П. Ухова [1]). Рассмотрим вопрос о сверхзвуковом диффузоре, используя результаты этой работы. Обратимся сначала к наиболее простой схеме сверхзвукового диффузора, в которой торможение потока осуществляется посредством двух скачков: косого и прямого. В косом скачке происходит уменьшение сверхзвуковой скорости, а в прямом скачке — пониженная сверхзвуковая скорость переводится в дозвуковую.

Обозначим приведенную скорость невозмущенного потока через $\lambda_н$, приведенную скорость за косым скачком через λ_1 и приведенную скорость за прямым скачком через $\lambda_п = (1/\lambda_1)$. Как было установлено выше, косой скачок уплотнения представляет собой прямой скачок в отношении нормальных к его фронту составляющих скорости. Поэтому расчет первого косого скачка системы можно произвести по формулам для прямого скачка. Формулы (38), (40) и (43) гл. III дают возможность рассчитать изменение полного давления в косом скачке уплотнения.

Теперь, пользуясь выражениями (21) и (24) гл. III, нетрудно определить изменение статического и полного давлений в прямом скачке, расположенном за косым скачком. Для этого нужно только учесть, что приведенная скорость перед прямым скачком есть λ_1, тогда

$$\frac{p_п}{p_1} = \frac{\lambda_1^2 - \frac{k-1}{k+1}}{1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_1^2}, \qquad \sigma_п = \frac{p_п^*}{p_1^*} = \lambda_1^2 \left(\frac{1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_1^2}{1 - \frac{k-1}{k+1}\frac{1}{\lambda_1^2}} \right)^{\frac{1}{k-1}}. \qquad (25)$$

Общее изменение полного давления в сверхзвуковом диффузоре, содержащем косой и прямой скачки, определяется произведением коэффициентов сохранения полного давления:

$$\sigma_к \sigma_п = \frac{p_п^*}{p_н^*}. \qquad (26)$$

При изменении угла α между фронтом косого скачка и направлением невозмущенного потока отношения значений полного и статического давлений за и перед системой скачков изменяются.

На рис. 8.35 изображены графики зависимости отношения полных давлений за и перед системой скачков от угла косого скачка при различных значениях скорости невозмущенного

[1]) Петров Г. И. и Ухов Е. П., Расчет восстановления давления при переходе от сверхзвукового потока к дозвуковому при различных системах плоских скачков уплотнения, М., 1947.

потока (т. е. при различных значениях $M_н$ или $\lambda_н$), вычисленные для диффузора с двумя скачками: косым и следующим за ним прямым. Каждому значению числа $M_н$ (рис. 8.35) отвечает некоторый угол косого скачка ($\alpha_{опт}$), при котором восстановление полного давления в диффузоре достигает максимума; чем меньше скорость потока, тем ближе оптимальный угол к прямому. Пунктирной линией A соединены точки ($\alpha = \alpha_0$), в которых косой скачок вырождается в слабую волну; в этом случае система состоит из одного прямого скачка. Пунктирной линией B соединены точки, правее которых скорость за косым скачком дозвуковая. Иначе говоря, ветвь каждой кривой, лежащая правее линии B, отвечает сильному косому скачку, позади которого нет прямого скачка. При $\alpha = 90°$ сильный косой скачок переходит в прямой скачок. В силу изложенного на каждой из кривых коэффициенты сохранения полного давления $\sigma_к\sigma_п$ при $\alpha = 90°$ и при $\alpha = \alpha_0$ (угол слабых возмущений) получаются одинаковыми.

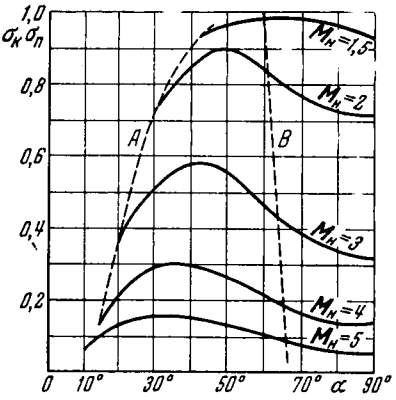


Рис. 8.35. Зависимость отношения полных давлений за и перед системой из двух скачков (косой + + прямой) от угла косого скачка.

На рис. 8.35 видно, что превосходство системы — косой скачок с последующим прямым скачком перед одним прямым скачком, становится существенным только при $M \geqslant 1{,}5$. В случае $M_п = 2$ оптимальное восстановление полного давления в системе двух скачков составляет $\sigma_к\sigma_п = 0{,}91$ (при $\alpha_{опт} = 50°$), тогда как один скачок дает 0,72, т. е. на 27% меньше. При $M_п = 3$ получается соответственно для системы из двух скачков $\sigma_к\sigma_п = 0{,}58$ ($\alpha_{опт} = 43°$) и для одного прямого скачка $\sigma_п = 0{,}33$ ($\alpha = 90°$), т. е. два скачка дают выигрыш в полном давлении около 70%. При дальнейшем увеличении скорости набегающего потока преимущество двух скачков становится еще более значительным.

Мы рассмотрели подробно систему из двух скачков. Применяя сложные системы, состоящие из трех, четырех и большего числа скачков, можно получить лучшие результаты, чем в двухскачковой системе. Расчет любой системы плоских скачков уплотнения производится с помощью формул (38)—(52) гл. III и формул (25), (26). Можно отыскать оптимальные режимы для сложной системы скачков путем последовательного расчета. Укажем сначала, как рассчитывается система из трех скачков

(два косых и завершающий прямой). При этом сначала определяются приведенная скорость (или число M) и давление за первым косым скачком при различных углах наклона его фронта, и на основе уже имеющихся данных для каждого значения приведенной скорости за первым скачком подбирается оптимальная система из остальных двух скачков (косой с последующим прямым). В результате получаются кривые $\sigma_д = f(\alpha)$, аналогичные приведенным на рис. 8.35; по ним устанавливаются оптимальные соотношения для системы из трех скачков. Далее можно найти оптимальные соотношения для системы из четырех скачков (три косых с последующим прямым). Для этого нужно вести расчет при различных положениях первого косого скачка, подбирая к каждому его положению (по значению скорости за первым скачком) оптимальную систему из трех скачков. Таким же последовательным расчетом можно определить оптимальные режимы для любого заданного числа скачков.

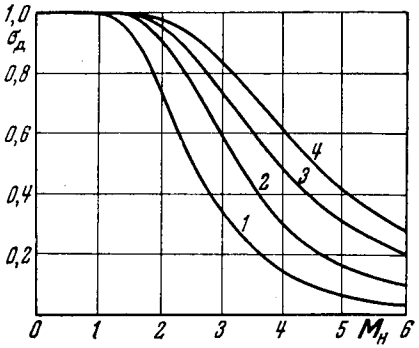


Рис. 8.36. Зависимость оптимального коэффициента сохранения полного давления в различных системах скачков уплотнения от числа M в набегающем потоке.

На рис. 8.36 приведены кривые оптимальных значений $\sigma_д$ — отношений полного давления за системой скачков к полному давлению перед ней в зависимости от числа $M_н$ перед диффузором для случаев:

1) прямой скачок,
2) косой скачок с последующим прямым скачком,
3) два косых скачка с последующим прямым скачком,
4) три косых скачка с последующим прямым скачком.

Оптимальные режимы получены описанным способом и соответствуют максимальному восстановлению полного давления. Из рис. 8.36 видно, что сложные системы скачков могут дать большой эффект лишь при очень высокой скорости. Так, при $M < 1{,}5$ хорошие результаты дает один прямой скачок, и более сложные системы в этой области скоростей не требуются. При $M \geqslant 1{,}5$ целесообразно применять двухскачковую систему (косой с последующим прямым). Преимущества четырехскачковой системы (три косых с последующим прямым) становятся существенными только при $M \geqslant 3$.

Выше рассматривались различные системы скачков уплотнения вне зависимости от конфигурации диффузора, которая необ-

ходима для того, чтобы осуществить нужную систему. Полученные результаты применимы непосредственно к плоским диффузорам и с незначительными изменениями к диффузорам осесимметричным.

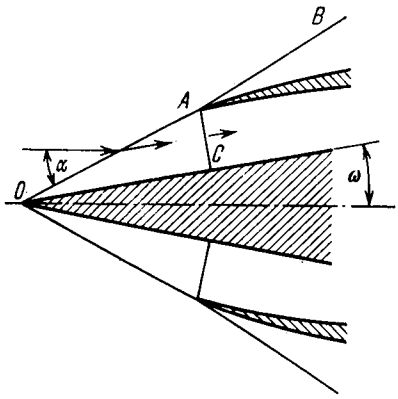


Рис. 8.37. Схема плоского диффузора с двумя скачками: OA — первый косой скачок, CA — прямой скачок, AB — косой скачок внешнего обтекания.

Принципиальная схема плоского диффузора с двумя скачками уплотнения изображена на рис. 8.37. Для того чтобы получить первый косой скачок с нужным углом наклона α, следует устроить клинообразный выступ, отклоняющий поток на угол ω, который для заданного значения $M_н$ подбирается по рис. 3.12. Наличие клина не нарушает внешнего обтекания диффузора, если расстояние OC выбрано из условия встречи фронта скачка OA с кромкой входного отверстия. Площадь входного отверстия диффузора должна быть рассчитана так, чтобы скорость потока в нем равнялась скорости за прямым скачком. В этом случае прямой скачок помещается в плоскости CA и не влияет на внешнее обтекание диффузора.

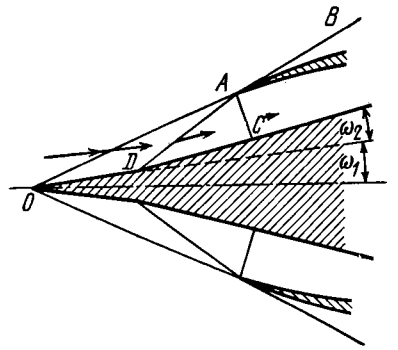


Рис. 8.38. Схема плоского диффузора с тремя скачками: OA — первый косой скачок, DA — второй косой скачок, CA — прямой скачок, AB — косой скачок внешнего обтекания.

На рис. 8.38 изображена принципиальная схема диффузора с тремя скачками уплотнения. В этом случае поверхность клина должна иметь излом. Угол отклонения невозмущенного потока ω_1 и угол вторичного отклонения ω_2 подбираются по-прежнему по кривым рис. 3.12 в соответствии с заданными углами наклона первого (α_1) и второго (α_2) косых скачков и с учетом скоростей перед первым ($M_н$) и перед вторым (M_1) скачками. Площадь входного отверстия CA подбирается по скорости за прямым скачком ($M_п$). Расстояния OD и DC вычисляются из условия пересечения скачков CA и DA на кромке входного отверстия. При данных условиях через систему из трех скачков проходит только воздух, поступающий

внутрь диффузора; внешнее же обтекание не возмущается этой системой скачков.

Принципиальная схема осесимметричного сверхзвукового диффузора ничем не отличается от схемы плоского диффузора.

Состояния газа за сложными системами осесимметричных и плоских скачков (при равных углах наклона скачков с одинаковыми порядковыми номерами) должны быть близки между собой. В этом можно убедиться на рис. 8,39, на котором представлены отношения значений полных давлений за и перед системами из двух скачков (косой с последующим прямым) при оптимальных углах наклона косого скачка в зависимости от числа $M_н$ набегающего потока. Одна из кривых рис. 8.39 соответствует осесимметричному, другая (пунктир) — плоскому течению. При расчете замыкающего прямого скачка в осесимметричном случае скорость перед ним (λ_1) определялась по формуле (52) гл. III. В сложном осесимметричном диффузоре все скачки, кроме первого, можно считать практически плоскими ввиду того, что они размещаются в относительно узких кольцевых каналах.

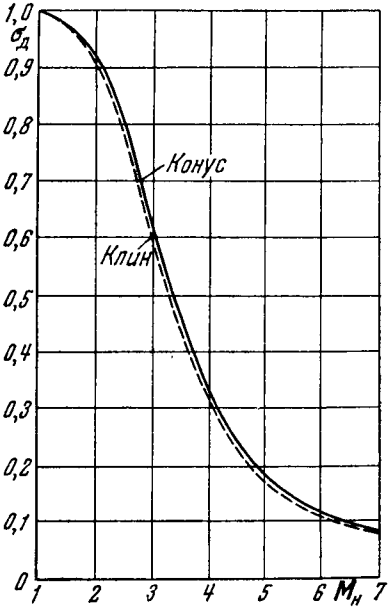


Рис. 8.39. Коэффициент сохранения полного давления за системой из двух скачков (косой + прямой) при оптимальных углах косого скачка в зависимости от скорости потока для осесимметричного и плоского (пунктир) течений.

Аналитические исследования, проведенные Г. И. Петровым и Е. П. Уховым [1]), а также К. Осватичем [2]), показали, что максимальное отношение полных давлений (минимум потерь) в системе из нескольких плоских косых скачков уплотнения и замыкающего прямого скачка, равное

$$(\sigma_д)_{max} = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \ldots \sigma_п, \qquad (27)$$

---

[1]) См. сноску на стр. 457.

[2]) Oswatisch K., Der Druckruckgewinn bei Geshossen mit Rueckstossantrieb bei hohen Ueberschallgeschwindigkeiten. Forschungen und Entwicklungen des Heerswaffenamtes. Bericht № 2, 1005, Göttingen, January 1944.

Герман Р., Сверхзвуковые входные диффузоры, Физматгиз, 1960.

получается в том случае, когда косые скачки имеют одинаковую интенсивность:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \ldots = \sigma_к. \tag{28}$$

При этом условии из (27) имеем

$$(\sigma_д)_{max} = \sigma_к^{m-1}\sigma_п. \tag{29}$$

Здесь m — общее число скачков, $(m-1)$ — число косых скачков, $\sigma_к$ — отношение полных давлений за и перед единичным косым скачком, $\sigma_п$ — то же для прямого скачка.

Из формулы (40) гл. III следует, что при равных потерях полного давления ($\sigma_к = \text{idem}$) приведенные нормальные составляющие скорости перед скачком должны быть одинаковыми ($\lambda_{нn} = \lambda_{1n} = \ldots = \text{idem}$, т. е. $M_{нn} = M_{1n} = \ldots = \text{idem}$ или $M_н \sin\alpha_н = M_1 \sin\alpha_1 = \ldots = \text{idem}$); вследствие этого отношение статических давлений, плотностей и других параметров во всех косых скачках одни и те же $\left(\frac{p_1}{p_н} = \frac{p_2}{p_1} = \ldots = \text{idem}, \frac{\rho_1}{\rho_н} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \ldots = \text{idem}, \frac{T_1}{T_н} = \frac{T_2}{T_1} = \ldots = \text{idem}, \frac{a_1}{a_н} = \frac{a_2}{a_1} = \ldots = \text{idem}\right)$ и приросты энтропии в них равны $(s_1 - s_н = s_2 - s_1 = \ldots = \text{idem})$. Аналитическое исследование показывает, что все параметры замыкающего прямого скачка в оптимальной системе лишь немного отличаются от параметров единичного косого скачка этой системы. Так, в диапазоне значений числа Маха набегающего невозмущающего потока $1{,}5 \leqslant M_н \leqslant 5$ относительная величина числа Маха перед прямым скачком практически постоянна и равна

$$M_{m-1} = 0{,}94 M_н \sin\alpha_1. \tag{30}$$

Зная величину M_{m-1}, можно вычислить приведенную скорость перед прямым скачком, отношение полных и статических давлений, а также всех прочих параметров за и перед скачком.

Для приближенных предварительных расчетов можно определить число Маха перед прямым скачком по нормальной составляющей скорости перед единичным косым скачком ($M_{m-1} \approx \approx M_н \sin\alpha_1$). Тогда оптимальное отношение полных давлений в системе скачков равно

$$(\sigma_д)_{max} = \sigma_к^m. \tag{31}$$

Это выражение дает тем лучшее приближение к точному выражению (29), чем больше число скачков m в системе. При использовании многоскачковой системы интенсивность каждого скачка относительно невелика, а это означает, что скорость дозвукового течения за замыкающим прямым скачком близка

к скорости звука ($M_п \approx 1$). Но при этом достаточно небольшого сужения струи, обычно происходящего перед входным отверстием диффузора, для того чтобы в этом отверстии установилась критическая скорость ($M_{вх} = 1$). Опыты показывают, что данное условие реализуется на практике на основных режимах работы многоскачкового диффузора в системе двигателя.

В таком случае расход воздуха через диффузор определяется по формуле (8а) гл. IV:

$$G_в \approx 0{,}04 \frac{p_д^* F_{вх}}{\sqrt{T_д^*}} \text{ кг/с.} \qquad (32)$$

Здесь $p_д^* = \sigma_д p_н^*$ — полное давление во входном сечении диффузора (за системой скачков); $T_д^* = T_н^*$ — температура торможения во входном сечении диффузора, равная температуре торможения в набегающем невозмущенном потоке; $F_{вх} = F_{кр}$ — площадь входного сечения диффузора.

Скорость течения в каналах двигателя (в частности, перед компрессором и перед камерой сгорания) обычно должна быть значительно ниже скорости звука, вследствие чего внутренний канал сверхзвукового диффузора, куда воздух попадает из входного отверстия, делается расширяющимся. Но если во входном отверстии скорость равна критической, то такой канал может работать и как расширяющаяся часть сопла Лаваля с образованием сверхзвукового течения, завершаемого дополнительным скачком уплотнения.

Форму внутреннего канала и условия работы диффузора стараются выбрать такими, чтобы потери в дополнительном скачке, по крайней мере на основном (расчетном) режиме, были как можно меньше, а это достигается предельно возможным сокращением дополнительной сверхзвуковой зоны течения.

При плавной форме и малых углах раскрытия начальной части (горловины) внутреннего канала диффузора удается избежать отрыва пограничного слоя в скачке (при $M_н < 3{,}5$), замыкающем дополнительную сверхзвуковую зону, и свести потери полного давления во внутреннем канале до 3—5% ($\sigma_{вн} = 0{,}97 - 0{,}95$).

Описанные выше сверхзвуковые диффузоры, в которых основная система скачков уплотнения расположена перед входным отверстием (перед обечайкой), относят к категории диффузоров с внешним сжатием (несмотря на наличие дополнительного сжатия во внутреннем канале). Если в таком диффузоре все скачки пересекаются на кромке A обечайки (рис. 8.38), то, как уже отмечалось, система скачков не нарушает внешнего обтекания обечайки. Однако внутренняя стенка обечайки должна быть ориентирована по направлению потока в замыкающем прямом

скачке, которое тем сильнее отклонено от направления набегающего невозмущенного потока, чем больше косых скачков имеется на центральном теле диффузора.

В свою очередь наружная стенка обечайки составляет с внутренней угол $\Delta\omega = 3—5°$, поэтому угол встречи наружной стороны обечайки с набегающим невозмущенным потоком равен

$$\omega_н = \sum_1^{m-1} \omega_k + \Delta\omega = \omega'_н + \Delta\omega, \qquad (33)$$

где ω_k — отклонение потока в единичном косом скачке, $\omega'_н = \sum_1^{m-1} \omega_k$ — суммарное отклонение потока в системе косых скачков.

В многоскачковом диффузоре с внешним сжатием угол $\omega'_н$ велик и скачок AB на наружной стороне обечайки (рис. 8.38) оказывается интенсивным. Возможны и такие случаи, когда угол $\omega'_н$ больше предельного угла поворота потока в плоском косом скачке уплотнения. При этом вместо плоского скачка AB

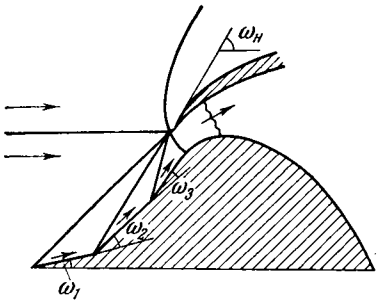


Рис. 8.40. Система скачков при угле наклона обечайки, превышающем предельное значение (для косого скачка).

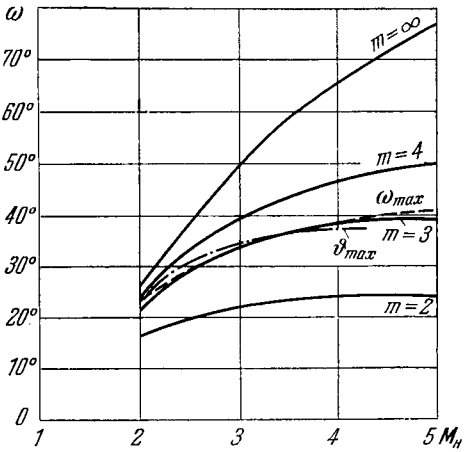


Рис. 8.41. Зависимость суммарного угла поворота потока в оптимальной системе скачков от числа Маха при разном количестве m скачков: ω_{max} — предельный угол поворота в косом скачке, ϑ_{max} — поворот потока при изоэнтропическом сжатии около центрального тела.

образуется отошедшая криволинейная ударная волна, которая объединяется в одно целое с замыкающим прямым скачком системы (рис. 8.40) и приводит к большому внешнему сопротивлению обечайки.

На рис. 8.41 пунктиром изображена зависимость предельного угла поворота потока в присоединенном плоском скачке от числа

Маха $\omega_{max}(M_н)$ при $k = 1{,}4$. Здесь же нанесены кривые значений суммарного угла поворота потока $\omega'_н$ в оптимальной системе плоских скачков (для диффузора с внешним сжатием), состоящей из различного числа скачков ($m = 2, 3, 4$). Как видно из рис. 8.41, суммарный угол поворота потока в оптимальной системе из трех скачков приблизительно равен предельному углу поворота невозмущенного потока у обечайки, а в случае четырех скачков — больше предельного. Иначе говоря, при $m > 3$ (для $k = 1{,}4$) в оптимальном диффузоре с внешним сжатием неизбежно образование отошедшей ударной волны на наружной стороне обечайки.

Как показывает рис. 8.36, увеличение числа скачков ведет к уменьшению суммарных потерь полного давления в системе. При увеличении числа скачков до бесконечности потери в системе должны упасть до нуля ($\sigma_д \to 1$), т. е. осуществляется переход к изоэнтропическому торможению. Форма центрального тела плоского «изоэнтропического» сверхзвукового диффузора с внешним сжатием изображена на рис. 8.42.

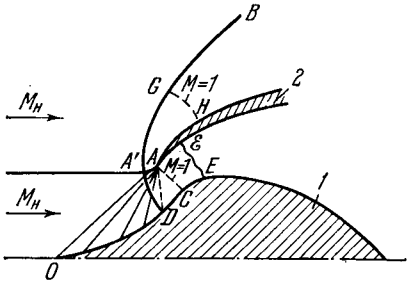


Рис. 8.42. Изоэнтропическое внешнее сжатие в сверхзвуковом диффузоре: *1* — центральное тело, *2* — обечайка, $DA'GB$ — отошедшая ударная волна, $OA'D$ — область изоэнтропического внешнего сжатия, GH и AC — линии звуковых скоростей.

Полный угол поворота потока около такого центрального тела рассчитывается по формулам и таблицам течения Прандтля — Майера (см. § 3 гл. IV), так как изоэнтропическое сжатие представляет собой обращенное изоэнтропическое расширение.

Иначе говоря, угол поворота потока у плоского изоэнтропического центрального тела при торможении от значения числа $M_н$ до $M = 1$ равен углу поворота в течении Прандтля — Майера с расширением от $M = 1$ до $M = M_н(\omega_н = \delta_н)$. Кривая $\omega(M_н)$ для $k = 1{,}4$ приведена на рис. 8.41 ($m = \infty$). Если бы пучок характеристик изоэнтропического течения сжатия сходился на кромке обечайки диффузора, то струя, входящая в диффузор, не возмущала бы внешнего обтекания обечайки.

В действительности полное изоэнтропическое торможение потока газа осуществить не удается, так как на поверхности центрального тела происходит увеличение давления, которое вызывает деформацию профиля скорости в пограничном слое, приводящую к отрыву последнего. В точке отрыва пограничного слоя возникает сильное возмущение сверхзвукового потока,

вследствие чего образуется скачок уплотнения (рис. 8.42) переходящий в ударную волну внешнего обтекания обечайки.

Все же выбор соответствующей формы центрального тела, особенно при осуществлении отсоса пограничного слоя, дает возможность частично использовать изоэнтропическое торможение потока в диффузоре внешнего сжатия и получить восстановление давления несколько более высокое, чем в трех-, четырехскачковом диффузоре.

Если точка пересечения скачков (или волн Маха в изоэнтропическом диффузоре) не совпадает с кромкой обечайки, то от этой точки в сторону внешнего потока отходит скачок уплотнения, интенсивность которого определяется двумя условиями:

1) совпадением направления внешнего потока и внутренней струи;

2) равенством давления по обе стороны поверхности, отделяющей внешний поток от внутренней струи.

Кривая значений угла поворота потока ϑ_{max}, определяемого данными условиями, приведена на рис. 8.41 (для изоэнтропического сжатия).

Если угол поворота струек в скачке оказывается больше максимального возможного при данной скорости набегающего потока, то скачок преобразуется в криволинейную ударную волну, которая проникает во внутреннее течение и дотягивается до стенки центрального тела (рис. 8.40). За криволинейной волной сверхзвуковое течение разрушается как вблизи внешней, так и внутренней стороны обечайки.

Для уменьшения внешнего сопротивления применяют диффузоры с неполным (частичным) внешним сжатием (рис. 8.43). В таком диффузоре обечайка составляет с направлением невозмущенного потока меньший угол, чем последняя грань центрального тела. Поэтому поток встречает внутреннюю поверхность обечайки под некоторым углом и вынужден отклониться с образованием косого скачка AC, идущего от кромки обечайки к той части центрального тела, которая расположена во внутреннем канале диффузора; замыкающий прямой скачок EF помещается около узкого сечения внутреннего канала. Обечайка диффузора с частичным внешним сжатием может иметь малое внешнее сопротивление. Если обечайка направлена параллельно вектору скорости невозмущенного потока, то ее внешнее волновое сопротивление близко к нулю.

Сверхзвуковой диффузор с полным внутренним сжатием может быть осуществлен без центрального тела (рис. 8.44). В таком диффузоре косой скачок отходит от кромки обечайки A и пересекается в точке O на оси диффузора со скачком, идущим от противоположной кромки. Поток газа в скачке AO отклоняется от первоначального направления и становится параллель-

ным стенке AC. В точке O линии тока вынуждены возвратиться к первоначальному направлению, в связи с чем возникает отраженный скачок OD. В точке D поток вновь отклоняется от осевого направления и становится параллельным стенке диффузора; это вызывает новый скачок, который отражается от оси диффузора, образуя следующий скачок и т. д. Так как в скачках уплотнения поток тормозится, то предельный угол поворота в каждом последующем скачке меньше, чем в предыдущем. Описанный процесс продолжается до тех пор, пока требуемый угол отклонения потока не оказывается больше предельного ($\omega > \omega_{max}$); с наступлением этого режима вместо очередного плоского скачка образуется криволинейная ударная волна EF, за

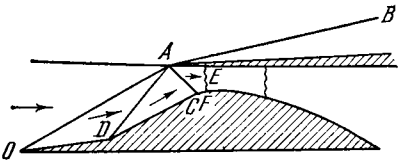


Рис. 8.43. Сверхзвуковой диффузор с частичным внешним сжатием.

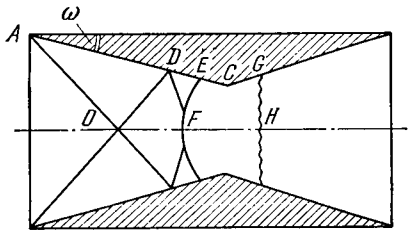


Рис. 8.44. Сверхзвуковой диффузор с внутренним сжатием.

которой поток становится дозвуковым. Дальнейшее течение в сужающем канале идет с увеличением скорости, причем в узком сечении скорость должна быть ниже или равна критической; в последнем случае за узким сечением может возникнуть дополнительная сверхзвуковая зона, завершаемая скачком уплотнения GH.

При очень малом угле наклона боковой стенки диффузора с полным внутренним сжатием ($\omega < 1°$) возможно частичное изоэнтропическое торможение; оно осуществимо до места отрыва пограничного слоя, вызывающего скачок уплотнения.

Сверхзвуковой диффузор с полным внутренним сжатием используется в аэродинамических трубах. Вследствие частичного изоэнтропического сжатия в диффузоре малого угла удается вдвое уменьшить потери по сравнению с таковыми в прямом скачке (подсчитанными по числу Маха перед диффузором).

Пограничный слой влияет на работу диффузора не только в случае изоэнтропического сжатия. В диффузорах других схем влияние пограничного слоя также весьма ощутимо; оно не сказывается только на первом скачке, который устанавливается при встрече невозмущенного потока с передней кромкой центрального тела или обечайки.

Все последующие скачки возникают или отражаются в местах взаимодействия пограничного слоя со скачком (при перепаде давлений на скачке выше «критического», см. § 6 гл. VI). В результате этого взаимодействия потери давления увеличиваются, а скачки уплотнения деформируются и смещаются. Если последнее обстоятельство не учтено при выборе формы центрального тела диффузора с внешним сжатием, то не будет обеспечено пересечение всех скачков на кромке обечайки (рис. 8.45), из-за чего нарушится и внешнее обтекание диффузора. Следует принять во внимание также влияние вязкости при выборе поперечных размеров канала диффузора (путем увеличения проходных сечений в соответствии с нарастанием по длине канала толщины вытеснения пограничного слоя, как это было показано на примере сопла в § 1 настоящей главы).

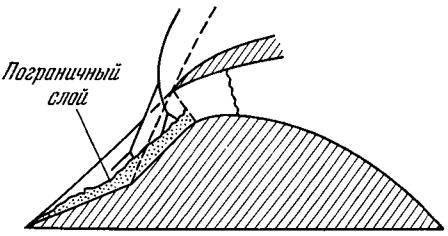


Рис. 8.45. Искажение системы скачков при взаимодействии их с пограничным слоем. Пунктирная линия — скачки в идеальном газе, сплошные линии — скачки в вязком газе.

В частности, площадь узкого сечения диффузора (горла) с учетом влияния пограничного слоя приходиться увеличить на 5—15% по сравнению с определенной без поправки на его влияние. Чтобы обеспечить безотрывное течение газа в расширяющейся дозвуковой части канала, следующей за горлом диффузора, ее сопряжение с концом сверхзвуковой части осуществляют с помощью специального переходного канала, имеющего весьма плавные очертания с участком постоянного сечения (в зоне горла). Иногда для улучшения характеристик диффузора применяют слив или отсос пограничного слоя через специальные отверстия или щели в стенках диффузора.

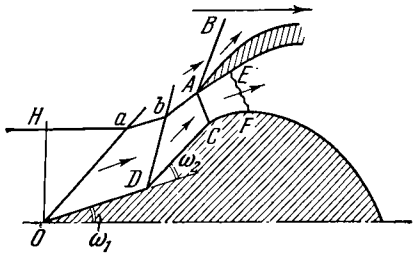


Рис. 8.46. Форма струи, входящей в диффузор, при скорости полета ниже расчетной.

До сих пор мы рассматривали сверхзвуковые диффузоры, работающие на основном, расчетном значении скорости набегающего потока. При отклонении от расчетного режима форма системы скачков изменяется, в связи с чем некоторые из задан-

ных условий нарушаются. В частности, в нерегулируемом диффузоре с внешним сжатием при уменьшении числа Маха набегающего потока скачки уплотнения становятся более крутыми (рис. 8.46); из-за этого крайняя линия тока внутренней струи (попадающей в диффузор) проходит через точки abA, отклоняясь в каждом скачке системы. Но тогда сечение струи $F_{он}$, захватываемой диффузором, оказывается меньше, чем на расчетном режиме, для которого оно равно полному сечению F_{0A} (от кромки A обечайки до оси диффузора, см. например, рис. 8.43).

Отношение

$$\varphi = \frac{F_{он}}{F_{0A}}$$

называется коэффициентом расхода. Потери во внутренней струе, как видно из рис. 8.46 [1]), не должны зависеть от того, пересекаются ли скачки на кромке A обечайки или нет; внешнее же сопротивление диффузора под действием сместившихся скачков возрастает, так как часть потока, обтекающего диффузор, вынуждена пересечь эти скачки до встречи с обечайкой.

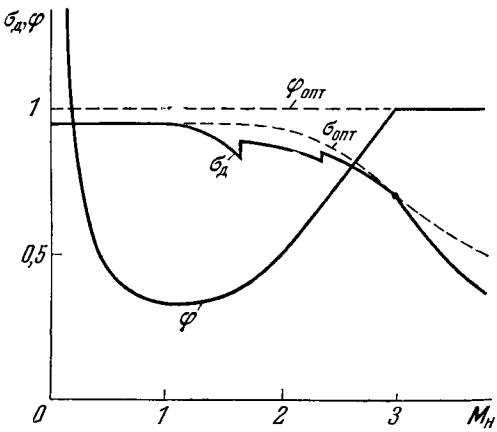


Рис. 8.47. Зависимость от скорости полета коэффициентов сохранения полного давления и расхода для трехскачкового сверхзвукового диффузора с внешним сжатием, имеющего оптимальные характеристики при $M_н = 3$.

Характер зависимости коэффициента сохранения полного давления $\sigma_д$ и коэффициента расхода φ от числа Маха в трехскачковом диффузоре постоянной формы (с внешним сжатием) показан на рис. 8.47 (расчетное значение $M_н = 3$). Здесь же нанесены кривые $\sigma_{опт}(M_н)$ и $\varphi_{опт}(M_н)$ для оптимального диффузора (пунктир), геометрическая форма которого с изменением величины $M_н$ должна изменяться (идеально регулируемый диффузор). На всех режимах, кроме расчетного, нерегулируемый диффузор имеет значения $\sigma_д$ ниже оптимальных; величины $\varphi < 1$ получаются только в области значений $M_н$ ниже расчетного.

[1]) Скачки на рис. 8.46 построены без учета влияния пограничного слоя.

Расчет кривых на рис. 8.47 произведен следующим образом. По данным рис. 8.36 берется значение $(\sigma_д)_{max} = 0{,}73$ для оптимальной системы из трех скачков при $M_н = 3$ и умножается на коэффициент сохранения полного давления внутренней части диффузора (принимаем $\sigma_{вн} = 0{,}95$); произведение этих коэффициентов характеризует полные потери внутри диффузора на расчетном режиме ($\sigma_д = 0{,}7$), для которого коэффициент расхода близок к единице $\varphi = 0{,}98$—1. Приближенное значение $\sigma_к$ для единичного косого скачка оптимальной трехскачковой системы, согласно (31), $\sigma_к = \sqrt[3]{\sigma_д} = 0{,}89$. Этому значению $\sigma_к$ отвечает на основании (25) нормальная составляющая приведенной скорости (при $k = 1{,}4$) $\lambda_{нп} = 1{,}43$ и число Маха, подсчитанное по нормальной составляющей скорости набегающего потока:

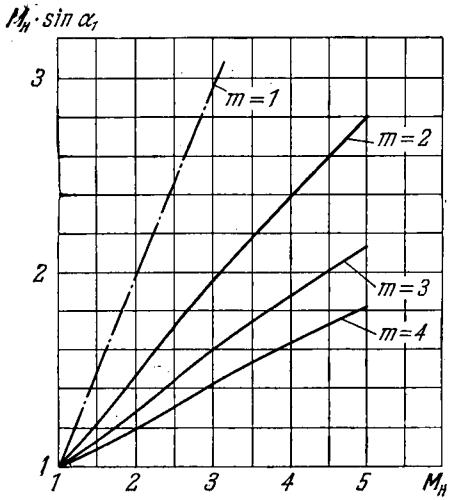


Рис. 8.48. Нормальная составляющая $M_н \sin\alpha_1$ в зависимости от $M_н$ для оптимальной системы m скачков.

$$M_{нп} = \sqrt{\frac{\frac{2}{k+1}\lambda_{нп}^2}{1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_{нп}^2}} = M_н \sin\alpha_1 = 1{,}6.$$

Отсюда угол наклона первого скачка $\alpha_1 = \arcsin(1{,}6/3) = 32°$. По кривым на рис. 3.12 гл. III отыскиваем угол первого клина центрального тела (при $M_н = 3$ и $\alpha_1 = 32°$) $\omega_1 = 15°$ и по рис. 3.19 гл. III — число Маха за первым скачком $M_1 = 2{,}3$.

Значение числа Маха для нормальной составляющей скорости перед вторым скачком в оптимальной системе должно быть таким же, как и перед первым скачком $M_{нп} = M_{1n} = M_1 \sin\alpha_2 = 1{,}6$. Отсюда угол наклона второго скачка к направлению потока за первым скачком

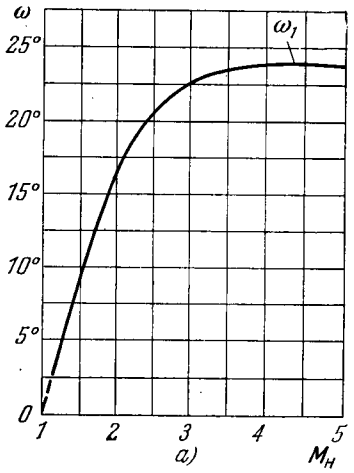
$$\alpha_2 = \arcsin\frac{1{,}6}{2{,}3} = 44°,$$

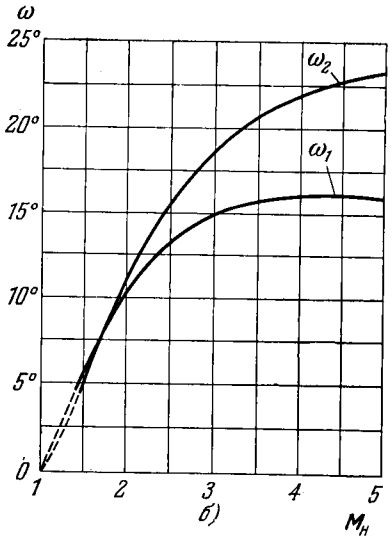
чему соответствует угол отклонения потока на втором уступе клина $\omega_2 = 18°$. Полный угол поворота потока в рассматриваемой оптимальной системе скачков $(\omega_1 + \omega_2) = 33°$, а число Маха за вторым скачком $M_2 = 1{,}6$. Уточненное значение числа Маха перед замыкающим прямым скачком, согласно (30), $M_{m-1} = 0{,}94\, M_{нп} = 1{,}5$.

Теперь можно уточнить расчет системы скачков, для чего следует определить значение $\sigma_п$ в прямом скачке при $M = 1{,}5$, величину $\sigma'_к$ в каждом из двух одинаковых косых скачков

$$\sigma'_к = \sqrt{\frac{\sigma_{д\ max}}{\sigma_п}},$$

приведенную скорость и число Маха для нормальной составляющей скорости в косых скачках $\lambda'_{нп}$ и $M'_{нп}$, углы наклона косых скачков α'_1 и α'_2 и углы уступов на центральном теле диффузора $\omega'_н$, ω'_1. После этого можно уточнить значения числа Маха M_{m-1} перед замыкающим прямым скачком. Ввиду того что уточненные величины мало отличаются от полученных в первом приближении, мы их не приводим.





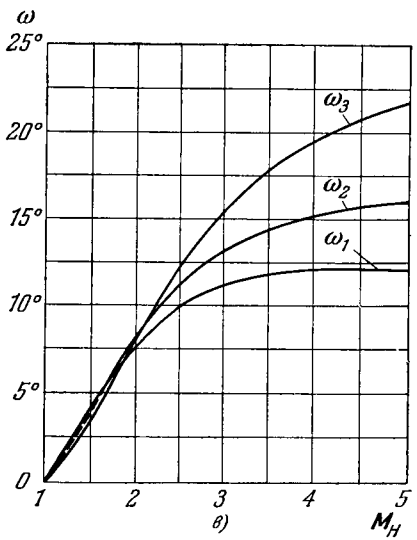


Рис. 8.49. Зависимость углов отклонения потока в скачках оптимальной системы от $M_н$: *а*) при $m = 2$, *б*) при $m = 3$, *в*) при $m = 4$.

Для облегчения расчетов можно воспользоваться рис. 8.48, на котором приведены кривые $M_н \sin \alpha_1 = f(M_н)$, отвечающие данным оптимального диффузора с системами из двух, трех и

четырех скачков. На рис. 8.49, *а*, *б*, *в* изображены графики углов отклонения потока в косых скачках $\omega(M_н)$ для тех же трех систем, на рис. 8.50, *а*, *б* — значения чисел Маха за косыми скачками, а на рис. 8.51, *а*, *б*, *в* — значения углов наклона скачков в этих системах.

Описанная методика относится к расчету плоского сверхзвукового диффузора с внешним сжатием и оптимальной системой

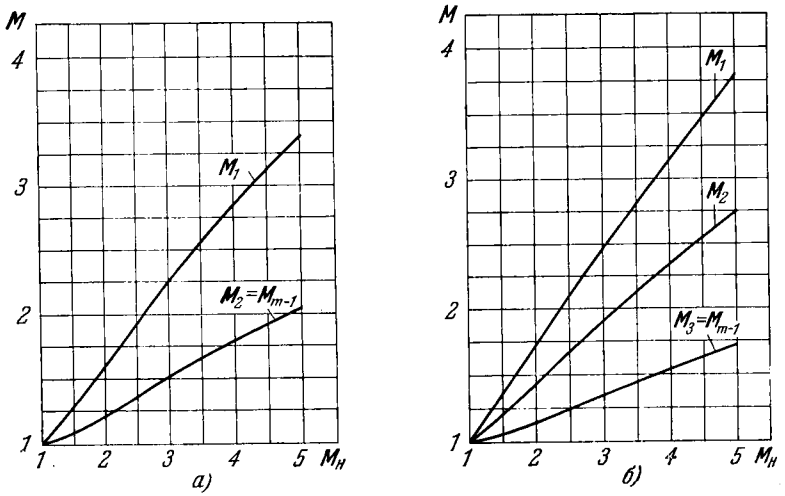


Рис. 8.50. Зависимость числа Маха за косыми скачками оптимальной системы от $M_н$; *а*) при $m = 3$, *б*) при $m = 4$.

скачков уплотнения на расчетном режиме, при котором все скачки пересекаются на кромке обечайки.

При скорости полета ниже расчетной и неизменной форме диффузора, как уже говорилось, углы наклона скачков уплотнения станут больше. Например, если $M_н = 2{,}5$, то для описанного диффузора получим угол наклона первого скачка $\alpha_1 = 36°$ (при $\omega_1 = 15°$), число Маха для нормальной составляющей скорости перед первым скачком $M_{1n} = M_н \sin \alpha_1 = 1{,}48$ и соответствующее значение приведенной скорости $\lambda_{1n} = 1{,}35$. Коэффициент сохранения полного давления в первом скачке составляет при этом $\sigma_{к1} = 0{,}936$, число Маха за первым скачком $M_1 = 1{,}9$, угол наклона к потоку второго скачка $\alpha_1 = \arcsin \frac{1{,}48}{1{,}9} = 53°$ (при $\omega_2 = 18°$), коэффициент сохранения полного давления во втором скачке $\sigma_{к2} = 0{,}929$, число Маха перед замыкающим прямым

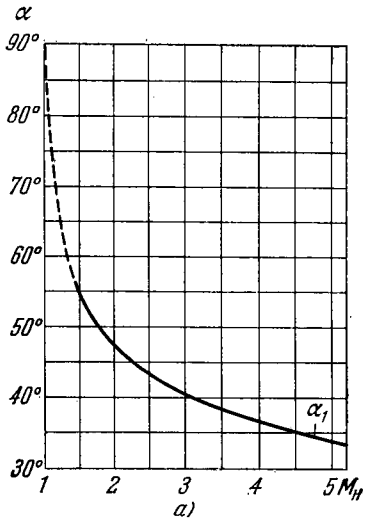
скачком $M_{m-1} = 1{,}2$, коэффициент сохранения полного давления в прямом скачке $\sigma_п = 0{,}993$ и суммарное значение этого коэффициента

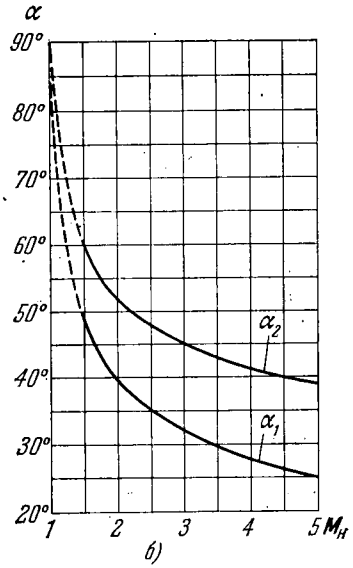
$$\sigma_д = \sigma_{к1}\sigma_{к2}\sigma_п\sigma_{вн} = 0{,}825.$$

Если угол поворота потока во втором косом скачке оказывается больше максимального возможного ($\omega_2 > \omega_{max}$) при полученном значении M_1, то вместо трехскачковой системы реализуется двухскачковая ($\sigma_{к2} \approx 1$); приближенное значение коэффициента сохранения полного давления при этом равно

$$\sigma_д = \sigma_{к1}\sigma_п\sigma_{вн},$$

причем $\sigma_п$ вычисляется по значению числа Маха за первым скачком.





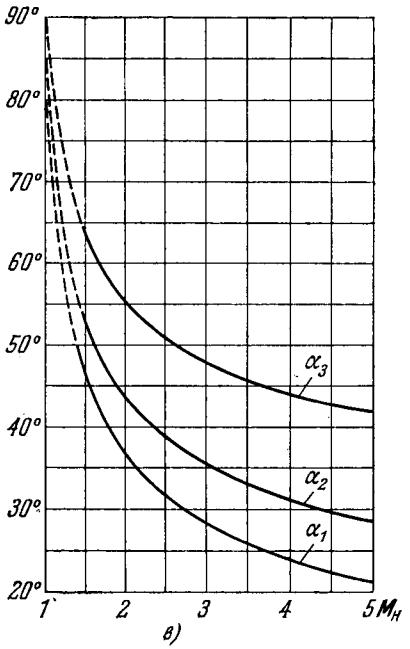


Рис. 8.51. Углы наклона скачков: *а*) при $m = 2$, *б*) при $m = 3$, *в*) при $m = 4$.

Коэффициент расхода $\varphi = \frac{F_н}{F_{0A}}$ при скорости, равной или больше расчетной, близок к единице. При пониженных значениях

$M_н$ зависимость $\varphi(M_н)$ для диффузора с внешним сжатием определяется из условия равенства расходов во входном (критическом) сечении и перед системой скачков

$$\sigma'_д \rho_{кр} a_{кр} F_{кр} = \rho_н w_н F_н.$$

Здесь $(\sigma'_д \rho_{кр})$ — плотность воздуха в критическом сечении, вычисленная с учетом потерь полного давления в системе скачков (без учета потерь во внутренней части диффузора: $\sigma'_д = \sigma_д / \sigma_{вн}$). Отсюда, используя выражение (109) гл. V, имеем

$$\frac{F_н}{F_{кр}} = \frac{\sigma'_д \rho_{кр} a_{кр}}{\rho_н w_н} = \frac{\sigma'_д}{q(\lambda_н)}. \tag{34}$$

На расчетном режиме сечение струи, захватываемой в диффузор, равно полному сечению последнего в плоскости входа ($F_н = F_A$), поэтому

$$\frac{F_A}{F_{кр}} = \frac{\sigma'_д}{q(\lambda_{нр})}, \tag{35}$$

где $\lambda_{нр}$ — расчетная приведенная скорость набегающего потока. Разделив почленно (34) и (35), получаем выражение для коэффициента расхода диффузора

$$\varphi = \frac{F_н}{F_A} = \frac{\sigma'_д}{\sigma'_{нр}} \frac{q(\lambda_{нр})}{q(\lambda_н)}. \tag{36}$$

Для любого диффузора имеем

$\sigma'_д = \sigma'_{нр}$ и $\varphi \approx 1$ при $\lambda_н = \lambda_{нр}$,

$\sigma'_д = 1$, $q(\lambda_н) = 1$ и $\varphi = \dfrac{q(\lambda_{нр})}{\sigma'_{нр}}$ при $\lambda_н = 1$,

$\sigma'_д = 1$, $q(\lambda_н) \to 0$ и $\varphi \to \infty$ при $\lambda_н \to 0$.

Для $1 < \lambda_н < \lambda_{нр}$ по заданному значению $\lambda_н$ находим с помощью таблицы газодинамических функций величину $q(\lambda_н)$ и рассчитываем коэффициент сохранения полного давления в системе скачков $\sigma'_д$, получающейся на центральном теле диффузора заданной формы. Например, для оптимального диффузора с внешним сжатием при расчетном режиме $\lambda_{нр} = 1{,}97$ ($M_{нр} = 3$) выше было получено $\sigma'_д = 0{,}73$; для того же диффузора при $M_н = 2{,}5$ ($\lambda_н = 1{,}825$, $q(\lambda_н) = 0{,}38$) было найдено $\sigma'_д = 0{,}825$, чему соответствует, согласно (36), $\varphi = 0{,}76$. Рассчитанные по такому методу кривые $\varphi(M_н)$ и $\sigma_д(M_н)$ приведены на рис. 8.47. Ступеньки на кривой $\sigma_д(M_н)$ соответствуют переходам от трехскачковой системы к двухскачковой и от последней к одному прямому скачку.

Пунктиром, как указывалось ранее, нанесены кривые, отвечающие идеально регулируемому трехскачковому диффузору, у которого формы центрального тела и обечайки, а также проходное сечение горла изменяются по такому закону, что для каждого значения скорости устанавливается оптимальная система из трех скачков, пересекающихся на кромке обечайки.

При значениях скорости выше расчетной ($M_н > M_{нр}$) можно полагать $\varphi = 1$ и $\sigma'_д < \sigma'_{д\,опт}$. Первое из этих условий связано с тем, что скачки на данном режиме не фокусируются на кромке обечайки, а заходят внутрь диффузора (рис. 8.52), вследствие чего во входное отверстие диффузора попадает струя невозмущенного потока, сечение которой равно сечению диффузора.

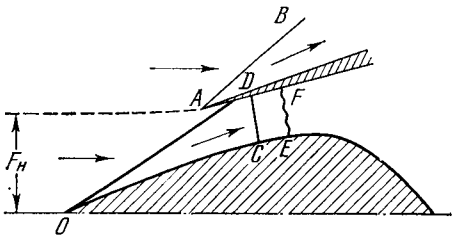


Рис. 8.52. Течение на входе в диффузор при скорости полета выше расчетной.

Второе условие ($\sigma'_д < \sigma'_{д\,опт}$) предопределяется тем, что при $M_н > M_{нр}$ плотность газа в критическом сечении выше, чем на расчетном режиме (несмотря на рост потерь, полное давление за системой скачков при увеличении скорости возрастает). Из-за этого горло (D) нерегулируемого диффузора при $M_н > M_{нр}$ оказывается перерасширенным и скорость в нем получается выше критической. Но тогда за горлом происходит дальнейшее ускорение сверхзвукового потока, что приводит к повышенной интенсивности прямого скачка EF, замыкающего сверхзвуковую зону (величина $\sigma_п$ уменьшается вследствие роста значения числа Маха M_{m-1} перед прямым скачком).

При работе входного диффузора на скорости ниже расчетной, когда в диффузор захватывается струя неполного сечения ($\varphi < 1$), возникает (как уже указывалось при обсуждении схемы обтекания, изображенной на рис. 8.46) сила дополнительного внешнего сопротивления, равная проекции на направление потока силы избыточного давления, действующего на поверхность abA:

$$X_{доп} = (p_1 - p_н) l_1 \sin \omega_1 + (p_2 - p_н) l_2 \sin \omega_2. \qquad (37)$$

Здесь l_1, l_2 — длины отрезков ab, bA; ω_1, ω_2 — углы наклона этих отрезков, которые параллельны соответствующим участкам центрального тела; p_1, p_2 — давления за первым и вторым косыми скачками. Разделив силу $X_{доп}$ на скоростной напор набегающего потока и площадь лобового сечения обечайки F_A, получим коэффициент дополнительного сопротивления «жидкого

контура» abA:

$$c_{xж} = \frac{X_{доп}}{\rho_н \frac{w_н^2}{2} F_A}. \qquad (38)$$

Наибольшее значение коэффициента $c_{xж}$ имеет место в случае образования перед диффузором криволинейной ударной волны (рис. 8.53), когда на границе внутренней струи aA давление приблизительно такое же, как за прямым скачком уплотнения:

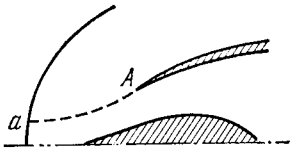


Рис. 8.53. Обтекание диффузора с криволинейной волной перед ним.

$$(c_{xж})_{max} = \frac{X_{доп}}{\rho_н \frac{w_н^2}{2} F_A} = \frac{1}{\frac{\rho_н w_н^2}{2} F_A} \times$$

$$\times (p_п - p_н)(F_A - F_a) =$$

$$= \frac{p_п - p_н}{\frac{1}{2}\rho_н w_н^2} (1 - \varphi). \qquad (39)$$

Здесь $p_п$ — давление за прямым скачком при скорости, соответствующей числу Маха $M_н$; F_a — площадь сечения струи в точке a, F_A — площадь сечения диффузора в плоскости входного отверстия.

Подставляя в (39) выражение (45) из гл. III для давления за прямым скачком, получим

$$(c_{xж})_{max} = \frac{4}{k+1} \frac{M_н^2 - 1}{M_н^2} (1 - \varphi). \qquad (40)$$

При $M_н \leqslant 1$ дополнительное сопротивление исчезает в связи с отсутствием ударных волн.

На рис. 8.54*а*, *б* изображены результаты расчета зависимостей $\varphi(M_н)$ и $c_{xж}(M_н)$ для сверхзвуковых диффузоров с одноступенчатым и двухступенчатым центральным телом, имеющим различные суммарные углы поворота потока $\omega_н = \omega_1 + \omega_2$. Как видим, при одном и том же значении суммарного угла поворота потока кривые $\varphi(M_н)$ и $c_{xж}(M_н)$ для двухступенчатого и одноступенчатого клиньев мало отличаются.

Для предварительной оценки работы диффузора на расчетном режиме (при проектировании двигателя и летательного аппарата) в США рекомендуется так называемая «стандартная» кривая зависимости коэффициента сохранения полного давления от числа Маха полета, изображенная на рис. 8.55 [1]); эта

[1]) Gregory T. J., Petersen R. H., Wyss J. A., Performance Tradoffs and Research Problems for Hypersonic Aerodynamics, J. Aircraft № 4, 1965, p. 266—271.

кривая получена в результате обобщения обширных экспериментальных исследований.

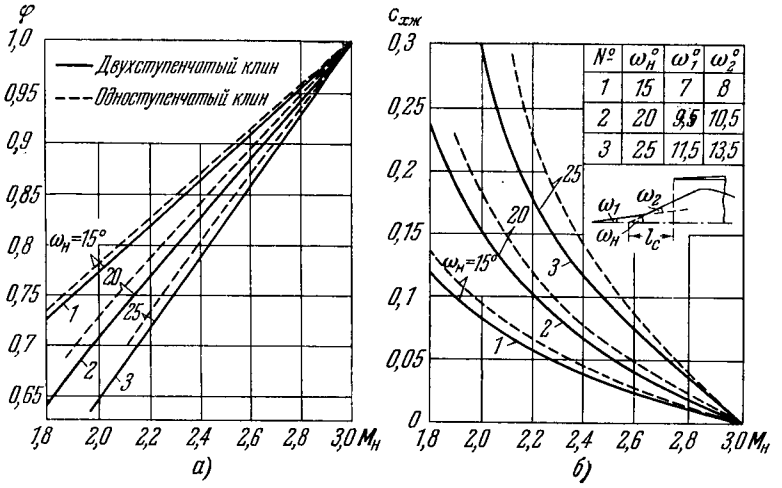


Рис. 8.54. Сравнение величин φ и $c_{x\,ж}$ для одно- и двухступенчатого клина

На работу диффузора оказывает влияние угол атаки γ (угол между осью диффузора и направлением набегающего потока), с увеличением которого уменьшаются коэффициенты сохранения полного давления σ и расхода φ и возрастает дополнительное лобовое сопротивление $c_{xж}$. Характер зависимостей σ(γ), φ(γ) и $c_{xж}(\gamma)$ для различных типов воздухозаборников неодинаков.

До сих пор мы приводили данные о работе плоских сверхзвуковых диффузоров. Основные зависимости для осесимметричных, а также боковых [1]) и других типов диффузоров имеют тот же характер, но их расчет представляет большие трудности.

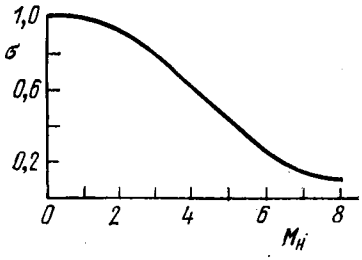


Рис. 8.55. «Стандартная» кривая (США) зависимости коэффициента сохранения полного давления в сверхзвуковом диффузоре от числа Маха полета.

При рассмотрении диффузоров предполагалось, что в горле диффузора скорость равна критической, а за горлом имеется

[1]) Боковыми называются диффузоры, пристроенные к фюзеляжу или поверхности крыла летательного аппарата, т. е. имеющие общую стенку с какой-либо частью последнего.

небольшая сверхзвуковая зона, завершаемая дополнительным скачком уплотнения. В таком случае система скачков и расход воздуха на входе в диффузор не зависят от режима работы двигателя.

Однако при глубоком дросселировании двигателя (значительном изменении числа оборотов или проходного сечения сопла и т. п.) указанный режим работы диффузора — воздухозаборника нарушается. Так, при уменьшении объемного расхода через двигатель противодавление за диффузором увеличивается, в связи с чем дополнительная сверхзвуковая зона сокращается и потери в дополнительном скачке падают ($\sigma_д$ растет). При некотором дроссельном режиме дополнительная сверхзвуковая зона в диффузоре исчезает. Дальнейшее сокращение расхода приводит к тому, что в горле диффузора устанавливается дозвуковая скорость, после чего дросселирование начинает воздействовать на интенсивность замыкающего скачка входной системы: из-за уменьшения расхода уменьшается скорость за скачком, что заставляет его смещаться в область бóльших значений скорости перед ним, но при этом система скачков не будет фокусироваться на кромке обечайки.

Начиная с данного режима, наблюдается рост потерь полного давления и внешнего сопротивления и снижение коэффициента расхода в диффузоре. Увеличение интенсивности замыкающего скачка уплотнения может привести к тому, что перепад давлений на нем станет выше критического для пограничного слоя и возникнет отрыв последнего, причем вихреобразования вызовут колебания расхода воздуха и местоположения системы скачков.

В момент наибольшего сокращения расхода система скачков превращается в криволинейную ударную волну, выбитую вперед за пределы центрального тела. Это приводит к устранению отрыва пограничного слоя и увеличению расхода воздуха, вследствие чего система скачков восстанавливается, а замыкающий ее скачок подходит к тому месту, где вновь происходит отрыв пограничного слоя и т. д. На этом режиме наблюдается сильная тряска («помпаж») двигателя — низкочастотные пульсации давления, связанные с колебанием расхода воздуха. Ввиду возможного разрушения двигателя работать на режиме помпажа нельзя.

При увеличении объемного расхода воздуха в двигателе (выше расчетного) дополнительная сверхзвуковая зона (за горлом диффузора) расширяется и дополнительный скачок смещается в область бóльших скоростей, из-за чего потери полного давления в нем растут, а плотность воздуха перед двигателем падает (это и обеспечивает рост объемного расхода при постоянном массовом расходе через диффузор).

При некотором увеличении объемного расхода дополнительный скачок становится столь интенсивным, что вызывает отрыв пограничного слоя (во внутреннем канале за горлом диффузора). Для этого режима характерны высокочастотные пульсации давления, сопровождаемые высоким неприятным звуком — «зудом». Помпаж и «зуд» ограничивают дроссельные режимы двигателя, снабженного диффузором.

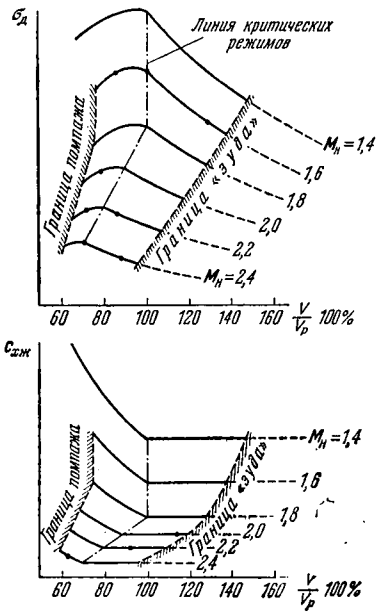


Рис. 8.56. Характеристики нерегулируемого входного сверхзвукового диффузора.

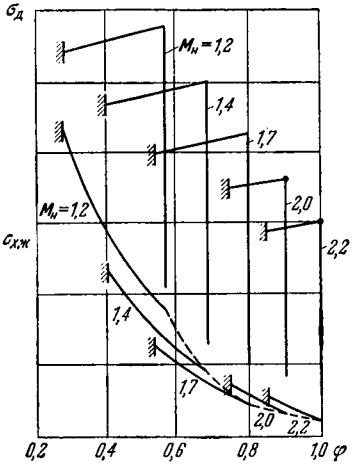


Рис. 8.57. Дроссельная характеристика нерегулируемого сверхзвукового диффузора.

Источником сильных пульсаций может быть также поверхность тангенциального разрыва скорости (от точки пересечения скачков), если она заходит внутрь диффузора. Типичные кривые зависимости величин $\sigma_д$ и $c_{хж}$ от относительного объемного расхода воздуха $V/V_р$ (отношение действительного расхода V к расчетному $V_р$) при разных значениях числа Маха $M_н$ приведены на рис. 8.56. Применяют также дроссельные характеристики диффузоров в виде зависимостей $\sigma_д(\varphi)$ и $c_{хж}(\varphi)$ при $M_н = \text{const}$ (рис. 8.57).

Для расширения рабочего диапазона дроссельных режимов и улучшения характеристик диффузора на нерасчетных скоростях полета прибегают к различным методам регулирования диффузоров (изменение проходного сечения горла и взаимного положения центрального тела и обечайки, выпуск воздуха через отверстия в стенке диффузора, слив или отсос пограничного

слоя на центральном теле или на обечайке и др.), описанным в специальной литературе[1]). Регулирование расхода воздуха через горло сверхзвукового диффузора необходимо также для вывода последнего на рабочий режим («запуска»). Дело в том, что расчетная скорость потока устанавливается не внезапно, а путем перехода от положения покоя к движению с постепенно нарастающей скоростью. Рассмотрим этот процесс на примере работы диффузора аэродинамической трубы (рис. 8.58). Разгон потока воздуха в аэродинамической трубе происходит следующим образом. Вначале — при пуске трубы — скорость в ее канале всюду ниже звуковой и имеет наибольшее значение в самом узком месте — горле сопла (г. с.). Постепенно увеличивая расход воздуха, приходят к режиму, на котором скорость в горле сопла становится критической, а во всех остальных сечениях остается дозвуковой.

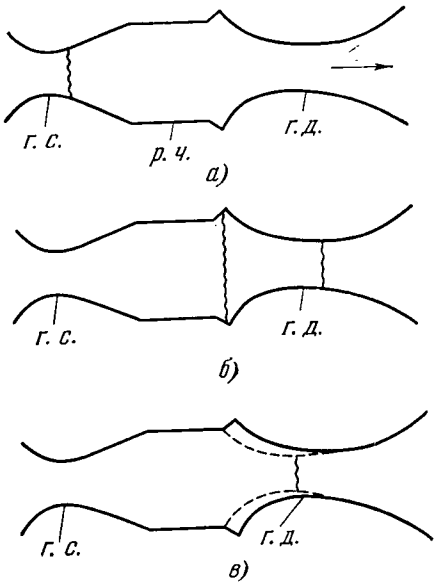


Рис. 8.58. Различные режимы течения газа в аэродинамической трубе: *а*) скачок помещается в сопле Лаваля (недостаточное разрежение перед эксгаустером); *б*) течение в рабочей части трубы сверхзвуковое (режим после «запуска»); *в*) рабочий режим (при суженном горле диффузора).

Дальнейшее увеличение объемного расхода на выходе из трубы (в эксгаустере) не сопровождается ростом массового расхода в горле сопла, однако приводит к появлению сверхзвуковой зоны за горлом сопла, завершаемой скачком уплотнения (рис. 8.58, *а*); в последнем полное давление и плотность заторможенного газа уменьшаются, вызывая относительный рост объемного расхода в диффузоре трубы, горло которого (г. д.) поэтому должно иметь площадь большую, чем горло сопла: $F_{\text{г. д}} > F_{\text{г. с}}$.

При некотором режиме работы эксгаустера плотность заторможенного воздуха за счет потерь в скачке может уменьшиться настолько, что скорость в горле диффузора станет критической При одинаковых значениях температуры торможения ($T^* =$

[1]) См. книги Р. Германа и Ю. Н. Нечаева, указанные в списке литературы.

$=$ const) одинаковая критическая скорость устанавливается как в горле сопла, так и диффузора ($a_{кр} = \text{idem}$). Тогда из уравнения неразрывности имеем

$$\rho_{г.\,д} F_{г.\,д} = \rho_{г.\,с} F_{г.\,с}.$$

Плотность газа в критическом сечении при $T^* = \text{const}$ пропорциональна полному давлению

$$\frac{\rho_{г.\,д}}{\rho_{г.\,с}} = \frac{p^*_д}{p^*_с} = \sigma(M), \tag{41}$$

которое изменяется за счет потерь в скачке. Таким образом, площади двух горловин при критических режимах в них связаны соотношением

$$f = \frac{F_{г.\,д}}{F_{г.\,с}} = \frac{\rho_{г.\,с}}{\rho_{г.\,д}} = \frac{1}{\sigma}. \tag{42}$$

Для того чтобы в рабочей части (р. ч.) аэродинамической трубы получилась нужная сверхзвуковая скорость ($M_н$), скачок уплотнения следует поместить в конце рабочей части. За скачком (в сужающемся канале диффузора) дозвуковой поток ускоряется и только в горле диффузора скорость вновь становится критической. За горлом диффузора образуется дополнительная сверхзвуковая зона, завершаемая скачком, интенсивность которого тем больше, чем сильнее разрежение, создаваемое эксгаустером трубы.

Итак, величина $\sigma(M)$, от которой согласно (42) зависит относительный размер «критического» горла диффузора, в свою очередь определяется интенсивностью скачка, соответствующего числу Маха в рабочей части. Если считать, что возникает прямой скачок, то, согласно формуле (24) гл. III,

$$\sigma = \lambda_н^2 \left[\frac{1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_н^2}{1 - \frac{k-1}{k+1}\frac{1}{\lambda_н^2}} \right]^{\frac{1}{k-1}},$$

где $\lambda_н$ — приведенная скорость в рабочей части трубы. Переходя к газодинамическим функциям из гл. V, находим

$$\sigma = \frac{q(\lambda_н)}{q\left(\frac{1}{\lambda_н}\right)}. \tag{43}$$

Из (42) и (43) следует, что для выхода аэродинамической трубы на заданное значение сверхзвуковой скорости относительное

сечение горла диффузора должно быть не меньше следующей величины:

$$f = \frac{F_{г.\,д}}{F_{г.\,с}} = \frac{q\left(\frac{1}{\lambda_н}\right)}{q(\lambda_н)}. \qquad (44)$$

Если сделать относительное сечение горла диффузора немного больше, чем по формуле (44), то можно «вытянуть» скачок уплотнения из рабочей части в расширяющуюся часть диффузора (рис. 8.58, *в*), тогда в суженной части диффузора установится замедляющееся (за рабочей частью) сверхзвуковое течение газа, причем в горле диффузора приведенная скорость $\lambda_{г.\,д} > 1$; согласно формуле (4) гл. IV имеем

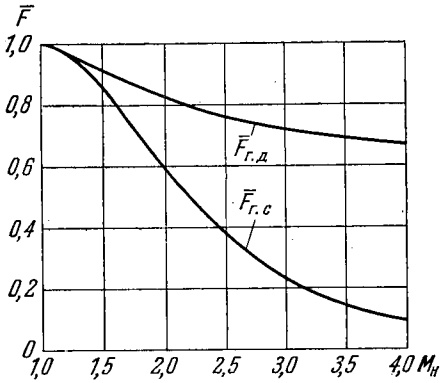


Рис. 8.59. Относительные величины площадей горловин диффузора (при «запуске») и сопла аэродинамической трубы.

$$f = \frac{1}{\lambda_{г.\,д}}\left[\frac{\frac{2}{k+1}}{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2_{г.\,д}}\right]^{\frac{1}{k-1}},$$

или

$$f = \frac{1}{q(\lambda_{г.\,д})}. \qquad (45)$$

После того как скачок перешел в расширенную часть диффузора, можно, плавно сужая (регулируя) горло диффузора, постепенно уменьшить скорость в нем до критического значения, а затем, ослабляя разрежение эксгаустера, подвести скачок уплотнения в расширяющейся части диффузора почти к его горлу (пунктир на рис. 8.58, *в*). На таком рабочем режиме горло диффузора должно быть лишь немного больше горла сопла (за счет толщины вытеснения пограничного слоя, т. е. только в связи с потерями трения), а потери полного давления в диффузоре (в скачке) становятся значительно меньше, чем на режиме запуска.

Отношение площади сечения горла диффузора на режиме запуска к площади сечения струи новозмущенного потока $F_н$ (рабочей части трубы), согласно (42), (44) и (45),

$$\bar{F}_{г.\,д} = \frac{F_{г.\,д}}{F_н} = \frac{F_{г.\,д}}{F_{г.\,с}}\frac{F_{г.\,с}}{F_н} = \frac{q(\lambda_н)}{\sigma(\lambda_н)} = q\left(\frac{1}{\lambda_н}\right). \qquad (46)$$

Величины относительной площади горла диффузора $\bar{F}_{г.\,д}(M_н)$, необходимой для запуска последнего, и относительной площади

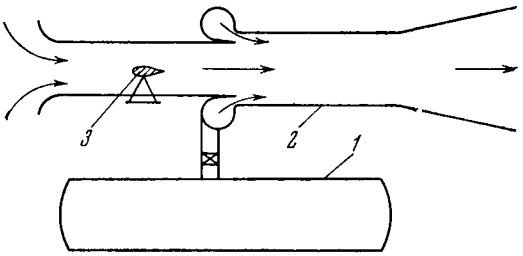
горла сопла $\bar{F}_{г.с}(M_н) = \frac{F_{г.с}}{F_н}$ при $k = 1{,}4$ приведены рис. 8.59. Интересно отметить, что число Маха в горле диффузора $M_{г.д}$, нужное для «проскока» сквозь него прямого скачка уплотнения (до сужения горла диффузора), составляет около 0,875 от значения числа Маха в набегающем потоке $M_н$ (для $M_н = 1{,}5 - 5$ при $k = 1{,}4$). Описанные особенности запуска диффузора аэродинамической трубы относятся и к запуску входного диффузора двигателя. Для того чтобы, переходя от малых скоростей полета к расчетной скорости, осуществить расчетную систему скачков, следует при малых скоростях горло диффузора расширить (или лишнюю часть воздуха перепустить перед горлом наружу), а по выходе на расчетную скорость сузить горло (до расчетного размера) или прекратить перепуск воздуха (прикрыть отверстие для перепуска). Без этого запуск сверхзвукового диффузора на расчетный режим невозможен.

Глава IX

ГАЗОВЫЕ ЭЖЕКТОРЫ

§ 1. Назначение и схемы эжекторов

Газовым эжектором называется аппарат, в котором полное давление газового потока увеличивается под действием струи другого, более высоконапорного потока. Передача энергии от одного потока к другому происходит путем их турбулентного смешения. Эжектор прост по конструкции, может работать в широком диапазоне изменения параметров газов, позволяет легко регулировать рабочий процесс и переходить с одного режима работы на другой. Поэтому эжекторы широко применяются в различных областях техники. В зависимости от назначения эжекторы выполняются различным образом.



Рич. 9.1. Схема аэродинамической трубы с эжектором: *1* — баллон со сжатым воздухом, *2* — эжектор, *3* — рабочая часть трубы.

Так, в показанной на рис. 9.1 схеме аэродинамической трубы эжектор выполняет роль насоса, позволяющего подать большое количество газа сравнительно невысокого давления за счет энергии небольшого количества газа высокого давления. В баллоне *1* содержится воздух более высокого давления, чем необходимо для работы трубы. Однако количество сжатого воздуха невелико, и для обеспечения достаточно продолжительной работы трубы сжатый воздух выпускают в эжектор *2*, где к нему примешивается атмосферный воздух, который засасывается эжектором через рабочую часть трубы *3*. Чем больше давление сжатого воздуха, тем большее количество атмосферного воздуха можно привести в движение с заданной скоростью.

Часто эжектор используется для поддержания непрерывного тока воздуха в канале или помещении и выполняет, таким образом, роль вентилятора. Примером может служить изображенная на рис. 9.2 схема стенда для испытания реактивных двигателей. Струя выхлопных газов, вытекающая из реактивного сопла, подсасывает в эжектор *3* воздух из шахты *1*, обеспечивая тем самым вентиляцию помещения и охлаждение двигателя *2*. При этом горячие газы смешиваются с атмосферным воздухом, что снижает температуру газа в выхлопной шахте *4*

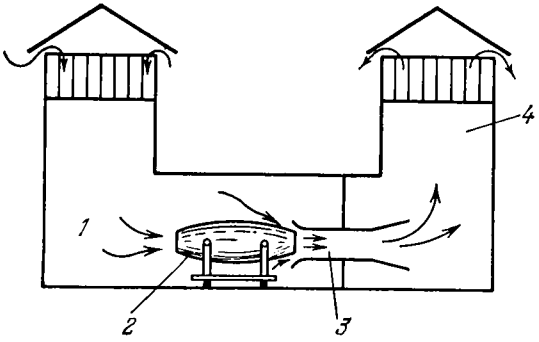


Рис. 9.2. Схема стенда для испытания турбореактивных двигателей: *1*—входная шахта, *2*—двигатель на балансирном станке, *3* — эжектор, *4* — выхлопная шахта.

и улучшает условия работы выхлопных устройств (шумоглушителей и др.).

Во многих случаях эжектор используют в качестве эксгаустера для создания пониженного давления в некотором объеме. Таково, например, назначение эжектора в конденсационных системах паросиловых установок. Для увеличения мощности паровой машины или турбины требуется поддерживать возможно меньшее давление в конденсаторе, куда выпускается отработанный пар. Эжектор (рис. 9.3) создает необходимое разрежение вследствие того, что находящиеся в конденсаторе частицы пара и воздуха подхватываются и уносятся высоконапорной струей пара или воды. В вакуумной технике эжекторы аналогичной схемы, работающие на парах ртути, используются для создания глубокого разрежения порядка миллионных долей атмосферы.

Примером удачного использования свойств эжекторов является применение их в газосборных сетях. Источники (скважины) природного газа, расположенные в одном районе, могут давать газ различного давления. Если просто подключить их в общую магистраль, то давление в магистрали необходимо

уменьшить несколько ниже давления самого низконапорного источника. Расход газа из низконапорных скважин будет в этом случае невелик из-за малого перепада давлений, а энергия давления газа из высоконапорных скважин будет бесполезно тратиться при расширении (дросселировании) его до давления в общей магистрали. Для эффективного использования всех источников низконапорные скважины целесообразно подключить в магистраль при помощи эжектора, в котором давление низконапорного газа повышается за счет энергии некоторой части газа высоконапорных скважин. Эжектор в этом случае является компрессором. Таким путем удается одновременно повысить давление газа в магистрали, увеличить производительность

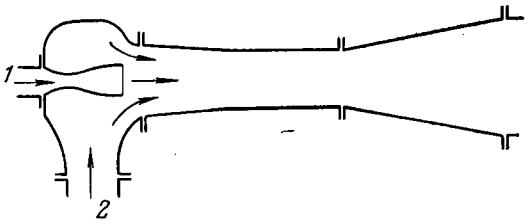


Рис. 9.3. Схема эжектора паровой конденсационной установки: *1* — пар высокого давления, *2*—пар из конденсатора.

низконапорных скважин и подключить в сеть такие источники газа, которые из-за низкого напора невыгодно использовать при простом объединении в общую сеть.

Ниже будет рассмотрена еще одна возможная область использования свойств эжектора, а именно увеличение реактивной тяги путем подмешивания внешнего воздуха к струе газа, вытекающего из сопла реактивного двигателя.

Независимо от назначения эжектора в нем всегда имеются следующие конструктивные элементы: сопло высоконапорного (эжектирующего) газа *1*, сопло низконапорного (эжектируемого) газа *2*, смесительная камера *3* и, обычно, диффузор *4* (рис. 9.4).

Назначение сопел — с минимальными потерями подвести газы к входу в смесительную камеру. Расположение сопел может быть таким, как на рис. 9.4 (эжектирующий поток внутри, а эжектируемый — по периферии камеры), и обратным (рис. 9.1), когда эжектирующий газ подается в камеру по внешнему кольцевому соплу. Для сокращения длины камеры смешения один или оба потока могут быть разделены на несколько струй, что требует соответствующего увеличения количества сопел.

Взаимное расположение, число и форма сопел не оказывают, однако, существенного влияния на конечные параметры смеси газов. Важным является лишь соотношение между величинами поперечных сечений потоков эжектируемого и эжектирующего газов на входе в камеру, т. е. отношение суммарных площадей сопел.

Если перепад давления в сопле эжектирующего газа значительно превышает критическую величину, то в ряде случаев оказывается выгодным применение сверхзвукового сопла. При этом могут быть улучшены параметры эжектора на расчетном режиме.

Однако и при больших сверхкритических отношениях давлений можно использовать эжектор с нерасширяющимся соплом, в котором скорость истечения эжектирующего газа не превышает скорости звука. Такой эжектор принято называть *звуковым*. Это наиболее распространенный тип эжектора, эффективно работающий в широком диапазоне изменения параметров газов.

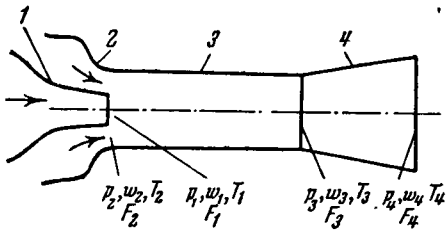


Рис. 9.4. Принципиальная схема эжектора: *1* — сопло эжектирующего газа, *2* — сопло эжектируемого газа, *3* — камера смешения, *4* — диффузор.

Камера смешения может быть цилиндрической или иметь переменную по длине площадь сечения. Форма камеры оказывает заметное влияние на смешение газов. Поэтому, хотя ниже будут рассматриваться в основном эжекторы с цилиндрической смесительной камерой, мы расскажем также о принципе расчета эжекторов с камерой переменного сечения.

Длина камеры выбирается такой, чтобы в ней практически успел закончиться процесс смешения потоков, однако по возможности короткой, с тем чтобы не увеличивать гидравлических потерь и сократить общие габариты эжектора.

В эжекторе, показанном на рис. 9.4, выходное сечение сопел совпадает с входным сечением цилиндрической смесительной камеры. Существующие методы расчета эжектора составлены именно для такой схемы, поэтому она и будет рассматриваться в дальнейшем. Однако на практике сопла часто располагают на некотором расстоянии от входного сечения камеры. Так, например, сопло двигателя на стенде (рис. 9.2) нельзя поместить во входное сечение цилиндрической камеры эжектора, так как существующее в этом сечении разрежение изменит распределение давлений на внешней поверхности сопла, что внесет погрешность в величину измеряемой реактивной тяги.

Диффузор устанавливается на выходе из смесительной камеры в тех случаях, когда желательно повысить статическое давление смеси газов на выходе из эжектора или когда при заданном давлении на выходе желательно получить низкое статическое давление в камере смешения и во входном сечении эжектора.

Следует отметить, что эжектор может работать и без диффузора. В этом случае конечное сечение смесительной камеры одновременно является выходным сечением эжектора. Иногда вместо диффузора на выходе из смесительной камеры устанавливается сужающееся сопло или сопло Лаваля. Это бывает целесообразным тогда, когда конечной задачей является ускорение потока газа после смешения. Так, например, в различных схемах двухконтурных реактивных двигателей газовые потоки, выходящие из контуров, смешиваются в общей камере, а затем вытекают в атмосферу через общее реактивное сопло дозвукового или сверхзвукового типа.

§ 2. Рабочий процесс эжектора

Рабочий процесс эжектора сводится к следующему. Высоконапорный (эжектирующий) газ, имеющий полное давление p_1^*, вытекает из сопла в смесительную камеру. При стационарном режиме работы эжектора во входном сечении смесительной камеры устанавливается статическое давление p_2, которое всегда ниже полного давления низконапорного (эжектируемого) газа p_2^*.

Под действием разности давлений низконапорный газ устремляется в камеру. Относительный расход этого газа, называемый *коэффициентом эжекции* $n = G_2/G_1$, зависит от площадей сопел, от плотности газов и их начальных давлений, от режима работы эжектора. Несмотря на то, что скорость эжектируемого газа во входном сечении w_2 обычно меньше скорости эжектирующего газа w_1, надлежащим выбором площадей сопел F_1 и F_2 можно получить сколь угодно большое значение коэффициента эжекции n.

В камеру смешения эжектирующий и эжектируемый газы входят в виде двух раздельных потоков: в общем случае они могут различаться по химическому составу, скорости, температуре и давлению. Смешение потоков означает, в конечном счете, выравнивание параметров газов по всему сечению камеры.

Весь процесс смешения можно условно разделить на два этапа — начальный и основной. Соответственно выделяются два участка смесительной камеры (рис. 9.5). Течение в начальном участке камеры смешения с известным приближением можно уподобить турбулентной струе, движущейся в спутном потоке.

Ввиду наличия поперечных пульсационных компонентов скорости, свойственных турбулентному движению, потоки внедряются друг в друга, образуя постепенно уширяющуюся зону смешения — пограничный слой струи. В пределах пограничного слоя происходит плавное изменение параметров газовой смеси от значений их в эжектирующем газе до значений в эжектируемом газе. Вне пограничного слоя в начальном участке камеры смешения имеются невозмущенные потоки эжектируемого и эжектирующего газов.

В начальном участке камеры частицы эжектируемого газа непрерывно захватываются высоконапорной струей и увлекаются ею в зону смешения. Благодаря этому и поддерживается разрежение на входе в смесительную камеру, которое обеспечивает

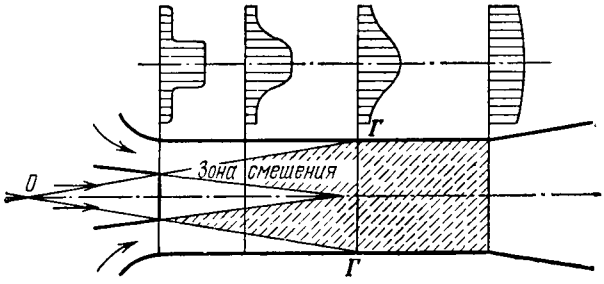


Рис. 9.5. Изменение поля скоростей по длине камеры смешения.

втекание низконапорного газа в эжектор. В зависимости от относительных размеров эжектора с удалением от сопла последовательно исчезают обе зоны невозмущенного течения газов; так, на рис. 9.5 первым ликвидируется ядро эжектирующей струи.

На некотором расстоянии от сопла, в сечении $Г-Г$, называемом *граничным сечением*, пограничный слой струи заполняет все сечение смесительной камеры. В этом сечении уже нет областей невозмущенных течений, однако параметры газа существенно различны по радиусу камеры. Поэтому и после граничного сечения в основном участке смесительной камеры продолжается выравнивание параметров потока по сечению. В конечном сечении камеры, отстоящем в среднем на расстоянии 8—12 диаметров камеры от начального сечения, получается достаточно однородная смесь газов, полное давление которой p_3^* тем больше превышает полное давление эжектируемого газа p_2^*, чем меньше коэффициент эжекции n. Рациональное проектирование эжектора сводится к выбору таких его геометрических размеров, чтобы при заданных начальных параметрах и соотношении расходов газов получить наивысшее значение полного давления

смеси, либо при заданных начальных и конечном давлениях получить наибольший коэффициент эжекции.

Описанная выше схема процесса смешения газов в эжекторе при дозвуковых скоростях принципиально ничем не отличается от процесса смешения несжимаемых жидкостей в жидкостном эжекторе. Как будет показано ниже, даже при больших докритических отношениях давлений не только качественные закономерности, но и многие количественные зависимости между параметрами газового эжектора практически не отличаются от соответствующих данных жидкостного эжектора.

Качественно новая картина течения наблюдается при сверхкритических отношениях давлений в сопле. При дозвуковом истечении давление газа на выходе из сопла равно давлению в окружающей среде, другими словами, статические давления газов на входе в камеру смешения p_1 и p_2 одинаковы. При звуковом или сверхзвуковом истечении эжектирующего газа давление на срезе сопла может существенно отличаться от давления эжектируемого газа.

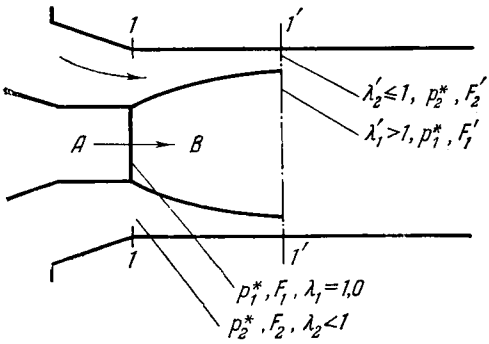


Рис. 9.6. Схема течения в начальном участке камеры смешения при сверхкритическом отношении давлений в сопле.

Если сопло эжектирующего газа выполнено нерасширяющимся, то при сверхкритическом отношении давлений статическое давление на срезе сопла превышает давление в окружающей среде — эжектируемом газе. Поэтому после выхода из сопла A струя эжектирующего газа B (рис. 9.6), движущаяся со скоростью звука ($\lambda_1 = 1$), продолжает расширяться, скорость ее становится сверхзвуковой, а площадь сечения — большей, чем площадь выходного сечения сопла.

Точно так же ведет себя сверхзвуковая эжектирующая струя, вытекающая из сопла Лаваля, если в эжекторе применено сверхзвуковое сопло с неполным расширением. В этом случае скорость газа на срезе сопла соответствует $\lambda_1 = \lambda_{1p} > 1$, где λ_{1p} — расчетная величина скорости для данного сопла Лаваля, определяющаяся отношением площадей выходного и критического сечений.

Таким образом, при отношениях давлений, больших расчетного для данного сопла, эжектирующий газ в начальном участке смесительной камеры представляет собой расширяющуюся

сверхзвуковую струю. Поток эжектируемого газа на этом участке движется между границей струи и стенками камеры. Так как скорость эжектируемого потока в начальном участке дозвуковая, то при течении по суживающемуся «каналу» поток ускоряется и статическое давление в нем падает.

При дозвуковом истечении эжектирующей струи наибольшее разрежение и максимальные скорости потоков достигались во входном сечении камеры. В данном случае минимальная величина статического давления и максимальная скорость эжектируемого потока достигаются в сечении *1'*, находящемся на некотором расстоянии от сопла, там, где площадь расширяющейся сверхзвуковой струи становится наибольшей. Это сечение принято называть *сечением запирания*.

Особенностью сверхзвуковой струи является то, что смешение ее с окружающим потоком на этом участке проходит значительно менее интенсивно, чем смешение дозвуковых потоков. Это связано с тем, что сверхзвуковая струя обладает повышенной устойчивостью по сравнению с дозвуковой струей, и размывание границ такой струи происходит слабее. Физические основы этого явления легко уяснить на следующем примере (рис. 9.7).

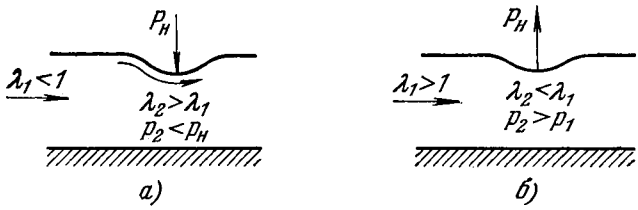


Рис. 9.7. Схема силового воздействия газа на тело, искривляющее границу дозвукового (*а*) и сверхзвукового (*б*) потоков.

Если граница дозвукового потока в силу какой-либо причины (например, воздействия частиц газа спутного потока) искривлена, то в этом месте из-за уменьшения площади сечения уменьшается статическое давление и возникает сила внешнего давления, увеличивающая начальную деформацию границы: при взаимодействии с окружающей средой дозвуковая струя «втягивает» частицы внешнего потока и граница ее быстро размывается. В сверхзвуковом (относительно внешней среды) потоке аналогичное искривление границы и уменьшение сечения приводит к росту давления; возникающая сила направлена не внутрь, а наружу потока и стремится восстановить исходное положение границы струи, выталкивая частицы внешней среды.

Интересно отметить, что это различие в свойствах дозвуковой и сверхзвуковой струй можно наблюдать буквально на ощупь. Дозвуковая струя втягивает внутрь поднесенный

к границе легкий предмет, сверхзвуковая струя на расстоянии нескольких калибров от сопла имеет «жесткую» границу; при попытке ввести в струю извне какой-либо предмет ощущается заметное сопротивление резко выраженной границы струи.

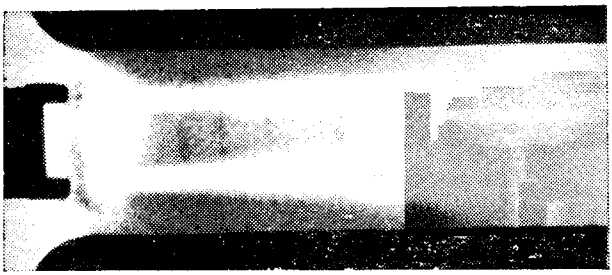


Рис. 9.8. Шлирен-фотография потока в камере смешения плоского эжектора при дозвуковом режиме истечения газа из сопла; $\alpha = F_1/F_2 \approx 1$, $\Pi_0 = p_1^*/p_2^* = 1{,}5$, $p_1 = p_2$.

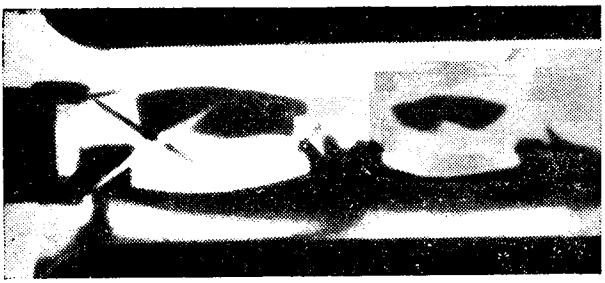


Рис. 9.9. Шлирен-фотография потока в камере смешения плоского эжектора при сверхкритическом отношении давлений в сопле $\Pi_0 = 3{,}4$.

На рис. 9.8 и 9.9 приведены фотографии течения в начальном участке смесительной камеры при дозвуковом и сверхзвуковом истечении эжектирующей струи. Фотографии получены на плоской модели эжектора, режим изменялся путем увеличения полного давления эжектирующего газа перед соплом p_1^* при постоянном давлении эжектируемого газа и постоянном давлении на выходе из камеры.

На фотографиях видно различие между двумя рассмотренными режимами течения в начальном участке камеры.

При анализе процессов и расчете параметров эжектора на сверхкритических отношениях давлений в сопле будем полагать, что до сечения запирания $1'$ (рис. 9.6) эжектирующий и эжектируемый потоки текут раздельно, не смешиваясь, а интенсивное смешение происходит за этим сечением. Это весьма близко к действительной картине явления.

Сечение запирания является характерным сечением начального участка смешения, а параметры потоков в нем, как будет показано ниже, существенно влияют на рабочий процесс и параметры эжектора.

С удалением от сопла граница между потоками размывается, сверхзвуковое ядро эжектирующей струи уменьшается, происходит постепенное выравнивание параметров газа по сечению камеры.

Характер смешения газов в основном участке смесительной камеры практически такой же, как и при докритических отношениях давлений в сопле, скорость смеси газов w_3 в широком диапазоне начальных параметров газов остается меньшей скорости звука. Однако при увеличении отношения начальных давлений газов сверх некоторой определенной для каждого эжектора величины поток смеси в основном участке камеры становится сверхзвуковым и может остаться сверхзвуковым до конца смесительной камеры. Условия перехода от дозвукового к сверхзвуковому режиму течения смеси газов, как будет показано ниже, тесно связаны с режимом течения газов в сечении запирания.

Таковы особенности протекания процесса смешения газов при сверхкритических отношениях давлений газов в эжектирующем сопле. Заметим, что под отношением давлений в сопле мы подразумеваем отношение полного давления эжектирующего газа p_1^* к статическому давлению эжектируемого потока во входном сечении смесительной камеры p_2, которое зависит от полного давления p_2^* и приведенной скорости λ_2.

Чем больше λ_2, тем больше (при постоянном отношении полных давлений газов) отношение давлений в сопле:

$$\frac{p_1^*}{p_2} = \frac{p_1^*}{p_2^* \pi(\lambda_2)} = \frac{\Pi_0}{\pi(\lambda_2)}.$$

Здесь $\pi(\lambda) < 1$ — известная газодинамическая функция, см. § 6 гл. V.

Таким образом, сверхкритический режим истечения эжектирующего газа из сопла может существовать и тогда, когда отношение начальных полных давлений газов $\frac{p_1^*}{p_2^*} = \Pi_0$ ниже критического значения.

Независимо от особенностей течения газов при смешении происходит выравнивание скорости газов по сечению камеры путем обмена импульсами между частицами, движущимися с большей и меньшей скоростью. Этот процесс сопровождается потерями. Помимо обычных гидравлических потерь на трение о стенки сопел и камеры смешения, для рабочего процесса эжектора характерны потери, связанные с самим существом процесса смешения.

Определим изменение кинетической энергии, происходящее при смешении двух газовых потоков, секундный массовый расход и начальная скорость которых равны соответственно G_1, G_2, w_1 и w_2. Если предположить, что смешение потоков происходит при постоянном давлении (это возможно либо при специальной профилировке камеры, либо при смешении свободных струй), то количество движения смеси должно быть равно сумме начальных количеств движения потоков:

$$(G_1 + G_2)\, w_3 = G_1 w_1 + G_2 w_2, \tag{1}$$

откуда

$$w_3 = \frac{G_1 w_1 + G_2 w_2}{G_1 + G_2}.$$

Кинетическая энергия смеси газов равна

$$E_3 = \frac{G_1 + G_2}{2} w_3^2 = \frac{1}{2} \frac{(G_1 w_1 + G_2 w_2)^2}{G_1 + G_2}.$$

Легко убедиться, что эта величина меньше суммы кинетических энергий потоков до смешения, равной

$$E_1 + E_2 = \frac{1}{2}(G_1 w_1^2 + G_2 w_2^2),$$

на величину

$$\Delta E = E_1 + E_2 - E_3 = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2} \frac{(w_1 - w_2)^2}{2}. \tag{2}$$

Величина ΔE представляет собой потери кинетической энергии, связанные с процессом смешения потоков. Эти потери аналогичны потерям энергии при ударе неупругих тел. Независимо от температуры, плотности и других параметров потоков потери, как показывает формула (2), тем больше, чем больше разность скоростей смешивающихся потоков. Отсюда можно сделать вывод, что при заданной скорости эжектирующего газа и заданном относительном расходе эжектируемого газа G_2/G_1 (коэффициенте эжекции) для получения наименьших потерь, т. е. наибольшей величины полного давления смеси газов, желательно увеличивать w_2 так, чтобы возможно более приблизить скорость эжектируемого газа к скорости эжектирующего газа при входе в камеру смешения. Как увидим ниже, это действительно приводит к наивыгоднейшему протеканию процесса смешения.

При смешении газов в цилиндрической смесительной камере эжектора статическое давление газов не остается постоянным. Для того чтобы определить характер изменения статического давления в цилиндрической смесительной камере, сравним параметры потока в двух произвольных сечениях камеры *1* и *2*, находящихся на различном расстоянии от начала камеры (рис. 9.10). Очевидно, что в сечении *2*, находящемся на большем расстоянии от входного сечения камеры, поле скоростей более равномерно, чем в сечении *1*. Если принять, что для обоих сечений $\rho = \text{const}$ (для основного участка камеры, где статическое давление изменяется незначительно, это приближенно соответствует действительности), то из условия равенства секундных расходов газа

$$\rho \int\limits_{(1)} w\,dF = \rho \int\limits_{(2)} w\,dF = \rho \bar{w} F$$

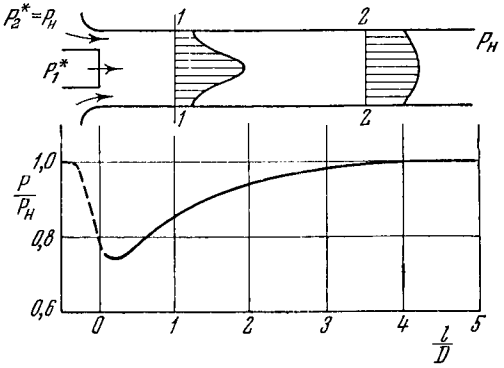


Рис. 9.10. Изменение статического давления по длине камеры смешения при дозвуковом течении газов.

следует, что в сечениях *1* и *2* сохраняет постоянное значение средняя по площади величина скорости потока

$$\bar{w} = \frac{1}{F} \int\limits_{(F)} w\,dF = \frac{G}{\rho F}. \tag{3}$$

Рассмотрим далее величину

$$\tau = F \frac{\int w^2\,dF}{\left(\int w\,dF\right)^2}. \tag{4}$$

Легко убедиться, что при $w = \text{const}$, т. е. в случае равномерного поля скорости в сечении F, величина τ равна единице. Во всех других случаях числитель в (4) больше знаменателя и $\tau > 1$.

Значение величины τ может служить характеристикой степени неравномерности поля скоростей в данном сечении: чем более неравномерно поле w, тем больше τ. Будем называть величину τ *коэффициентом поля*.

Возвращаясь к рис. 9.10, теперь нетрудно заключить, что величина коэффициента поля τ в сечении *1* больше, чем в

сечении *2*. Количества движения в сечениях *1* и *2* определяются интегралами

$$\int\limits_{(1)} w^2\,dF = \tau_1 \frac{1}{F}\left(\int\limits_{(1)} w\,dF\right)^2 = \tau_1 \frac{G^2}{\rho^2 F}; \qquad \int\limits_{(2)} w^2\,dF = \tau_2 \frac{G^2}{\rho^2 F}.$$

Так как $\tau_1 > \tau_2$, то отсюда следует

$$\int\limits_{(1)} w^2\,dF > \int\limits_{(2)} w^2\,dF. \tag{5}$$

Итак, количество движения в потоке при выравнивании поля скоростей в процессе смешения уменьшается, несмотря на то, что суммарный расход и средняя по площади скорость $\bar{w}$ остаются постоянными.

Запишем теперь уравнение импульсов для потока между сечениями *1* и *2*:

$$\rho \int\limits_{(1)} w^2\,dF - \rho \int\limits_{(2)} w^2\,dF = (p_2 - p_1)\,F.$$

На основании неравенства (5) левая часть данного уравнения всегда положительна. Отсюда следует, что $p_2 > p_1$, т. е. *выравнивание поля скоростей в цилиндрической смесительной камере сопровождается возрастанием статического давления*; во входном сечении камеры существует пониженное давление по сравнению с давлением на выходе из камеры. Это свойство процесса непосредственно используется в простейших эжекторах, состоящих из сопла и одной цилиндрической камеры смешения, как, например, показано на рис. 9.10. Благодаря наличию разрежения на входе в камеру, этот эжектор подсасывает из атмосферы воздух, а затем смесь выбрасывается вновь в атмосферу. На рис. 9.10 также показано изменение статического давления по длине камеры эжектора.

Полученный качественный вывод справедлив в тех случаях, когда изменение плотности газа в рассматриваемом участке процесса смешения незначительно, вследствие чего можно приближенно считать $\rho = \text{const}$. Однако в некоторых случаях при смешении газов существенно различной температуры, когда имеется большая неравномерность плотности по сечению, а также при сверхзвуковых скоростях в основном участке смешения, когда плотность заметно изменяется по длине камеры, возможны режимы работы эжектора, при которых статическое давление газа в процессе смешения не возрастает, а снижается.

Если смесительная камера не цилиндрическая, как предполагалось выше, а имеет переменную по длине площадь сечения,

то можно получить произвольное изменение статического давления по длине.

Основным геометрическим параметром эжектора с цилиндрической смесительной камерой является отношение площадей выходных сечений сопел для эжектирующего и эжектируемого газов

$$\alpha = \frac{F_1}{F_2} = \frac{F_1}{F_3 - F_1},$$

где F_3 — площадь сечения цилиндрической смесительной камеры.

Эжектор с большим значением α, т. е. с относительно малой площадью камеры, является *высоконапорным*, но не может работать с большими коэффициентами эжекции; эжектор с малым α позволяет подсосать *большое количество газа*, но мало повышает его напор.

Вторым характерным геометрическим параметром эжектора является степень расширения диффузора $f = (F_4/F_3$ — отношение площади сечения на выходе из диффузора к площади на входе в него. Если эжектор работает при заданном статическом давлении на выходе из диффузора, например при выхлопе в атмосферу или в резервуар с постоянным давлением газа, то степень расширения диффузора f существенно влияет на все параметры эжектора. С увеличением f в этом случае снижается статическое давление в камере смешения, растет скорость эжектирования и коэффициент эжекции при не очень значительном изменении полного давления смеси. Разумеется, это справедливо лишь до того момента, когда в каком-либо сечении эжектора будет достигнута скорость звука.

Третий геометрический параметр эжектора — относительная длина камеры смешения l_3/d_3 — в обычные методы расчета эжектора не входит, хотя и существенно влияет на параметры эжектора, определяя полноту выравнивания параметров смеси по сечению. Ниже будем полагать, что длина камеры достаточно велика ($l_3/d_3 > 8 \div 10$) и коэффициент поля τ в ее выходном сечении близок к единице.

§ 3. Расчет газового эжектора

Сопла и диффузор эжектора ничем не отличаются от обычных сопел и диффузоров, расчет которых изложен в гл. VIII. При определении параметров эжектора существенны лишь коэффициенты сохранения полного давления газа в этих устройствах, позволяющие по начальным давлениям смешивающихся газов найти полные давления на срезе сопел p_1^* и p_2^* и по полному давлению смеси p_3^* — полное давление на выходе из

диффузора p_4^*. Эти коэффициенты выбираются по экспериментальным данным в зависимости от формы сопел и диффузора и величины скорости потока.

Основная задача и основные трудности при расчете эжектора заключаются в определении параметров смеси газов на выходе из смесительной камеры по параметрам газов до смешения. Замечательным является тот факт, что для определения параметров потока на выходе из камеры рассмотрение самого процесса смешения не обязательно. Нет необходимости также предварительно вычислять потери, возникающие в процессе смешения, и анализировать механизм процесса передачи энергии.

Течение газа в любом участке смесительной камеры описывается тремя уравнениями сохранения: энергии, массы и количества движения. Если поток газа в выходном сечении камеры считать одномерным, т. е. полагать процесс выравнивания параметров смеси по сечению полностью закончившимся, то указанных трех уравнений достаточно для определения трех параметров потока в выходном сечении по заданным начальным параметрам газов на входе в камеру. Три параметра, как известно, полностью характеризуют состояние потока газа и позволяют найти любые другие его параметры. В частности, если это требуется, по величине полного давления смеси p_3^* можно определить потери в процессе смешения потоков. Таким образом, при составлении основных уравнений мы не вводим никаких условий о необратимости процессов, однако после решения уравнений приходим к результату, который свидетельствует о том, что в рассматриваемом процессе есть потери полного давления, т. е. рост энтропии. Аналогичное положение возникало при решении задачи о параметрах газа за скачком уплотнения, которые, кстати сказать, определялись по начальным параметрам потока теми же тремя уравнениями.

Такой подход к решению задачи приводит к правильному конечному результату независимо от того, какие процессы происходят между рассматриваемыми начальным и конечным сечениями камеры, насколько интенсивно идет процесс смешения, возникают ли скачки уплотнения, имеется ли отрыв потока, вихри, встречные токи и т. д. Принятое допущение об одномерности потока в конечном сечении является весьма существенным, так как очевидно, что никаких сведений о характере поля скоростей в конце смешения такой расчет дать не может; они должны быть заданы дополнительно, если $\tau \neq 1$.

Запишем основные уравнения, связывающие параметры потока во входном и выходном сечениях цилиндрической смесительной камеры. Параметры эжектирующего газа во входном сечении будем отмечать индексом 1, параметры эжектируемого

газа — индексом 2, параметры смеси в выходном сечении — индексом 3. Будем считать заданными все параметры потоков во входном сечении камеры и построим решение таким образом, чтобы из уравнений сохранения массы, энергии и импульса потока определить температуру торможения, приведенную скорость и полное давление смеси газов в выходном сечении камеры.

Закон сохранения массы записываем в виде

$$G_3 = G_1 + G_2 \quad \text{или} \quad \frac{G_3}{G_1} = n + 1, \tag{6}$$

где $n = G_2/G_1$ — коэффициент эжекции.

На основании закона сохранения энергии имеем

$$G_3\left(c_{p3}T_3 + \frac{w_3^2}{2}\right) = G_1\left(c_{p1}T_1 + \frac{w_1^2}{2}\right) + G_2\left(c_{p2}T_2 + \frac{w_2^2}{2}\right) + Q,$$

где Q — общее количество тепла, подводимое за 1 с к газу в смесительной камере путем теплопередачи через стенки камеры или выделяющееся вследствие химических реакций в потоке.

Переходя к параметрам торможения, получаем

$$G_3 c_{p3} T_3^* = G_1 c_{p1} T_1^* + G_2 c_{p2} T_2^* + Q, \tag{7}$$

т. е. суммарное теплосодержание смеси, отвечающее состоянию полного торможения, отличается от суммы полных теплосодержаний газов перед смешением лишь на величину тепла, подведенного в процессе смешения. Если пренебречь различием в теплоемкостях смешивающихся газов и смеси, то, разделив обе части уравнения (7) на $G_1 c_{p1} T_1^*$ и подставив в него соотношение (6), получим

$$(n+1)\frac{T_3^*}{T_1^*} = 1 + n\frac{T_2^*}{T_1^*} + \frac{Q}{c_p T_1^* G_1}.$$

Введем обозначения

$$\frac{T_2^*}{T_1^*} = \theta, \qquad \frac{Q}{c_p T_1^* G_1} = \vartheta.$$

Тогда из последнего уравнения получаем

$$\frac{T_3^*}{T_1^*} = \frac{1 + n\theta + \vartheta}{n+1}, \tag{8}$$

где ϑ — отношение подведенного секундного количества тепла к теплосодержанию секундного расхода эжектирующего газа. Если при смешении газов не происходит горения или какой-либо иной реакции, сопровождающейся выделением или поглощением

тепла, а теплопередачей через стенки смесительной камеры пренебречь, то величина относительного теплоподвода $\vartheta = 0$. При расчете обычных эжекторов принимаем $\vartheta = 0$ и получаем

$$\frac{T_3^*}{T_1^*} = \frac{n\theta + 1}{n + 1}; \qquad \frac{a_{кр3}}{a_{кр1}} = \sqrt{\frac{n\theta + 1}{n + 1}}. \tag{9}$$

Уравнения (8) или (9) позволяют по заданным величинам непосредственно определить первый искомый параметр смеси газов — температуру торможения (или критическую скорость звука) в выходном сечении смесительной камеры.

Составим уравнение количества движения. Внешние силы, действующие на боковую поверхность потока со стороны стенок цилиндрической камеры смешения, не дают составляющих, параллельных оси камеры (если не учитывать трения о стенки камеры). Поэтому изменение секундного количества движения потоков в цилиндрической камере смешения равно разности сил давления в граничных сечениях камеры. В общем случае, когда во входном сечении камеры статические давления эжектирующего и эжектируемого газов различны (но постоянны по сечению каждого потока), уравнение количества движения записывается в виде

$$G_3 w_3 - G_1 w_1 - G_2 w_2 = p_1 F_1 + p_2 F_2 - p_3 F_3,$$

или

$$G_3 w_3 + p_3 F_3 = G_1 w_1 + p_1 F_1 + G_2 w_2 + p_2 F_2. \tag{10}$$

Преобразуем это уравнение при помощи газодинамических функций. Заменим в (10) выражения импульсов согласно формуле (115) гл. V:

$$Gw + pF = \frac{k+1}{2k} G a_{кр} z(\lambda).$$

Пренебрегая пока различием в величинах $\frac{k+1}{k}$ для газов и смеси, из (10) получим

$$G_3 a_{кр3} z(\lambda_3) = G_1 a_{кр1} z(\lambda_1) + G_2 a_{кр2} z(\lambda_2). \tag{11}$$

Это уравнение имеет такой же вид, как уравнение (1), записанное без учета сжимаемости газа и изменения давления в потоке, причем величина

$$a_{кр} z(\lambda) = a_{кр}\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)$$

играет ту же роль, что и величина скорости w в уравнении (1). Так как величина $a_{кр3}$ уже определена, то решение уравнения (11) по существу не отличается от решения уравнения (1).

Разделим обе части уравнения (11) на $G_1 a_{кр1}$:

$$\frac{G_3}{G_1}\frac{a_{кр3}}{a_{кр1}} z(\lambda_3) = z(\lambda_1) + \frac{G_2}{G_1}\frac{a_{кр2}}{a_{кр1}} z(\lambda_2).$$

Заменяя в этом уравнении отношения расходов и критических скоростей введенными выше безразмерными величинами

$$\frac{G_2}{G_1} = n, \quad \frac{a_{кр2}}{a_{кр1}} = \sqrt{\frac{T_2^*}{T_1^*}} = \sqrt{\theta},$$

а также используя уравнения (6) и (8), получим окончательно

$$\sqrt{(n+1)(1+n\theta+\vartheta)}\, z(\lambda_3) = z(\lambda_1) + n\sqrt{\theta}\, z(\lambda_2). \qquad (12)$$

Это уравнение называют *основным уравнением эжекции*. По начальным параметрам газов и коэффициенту эжекции из него можно определить газодинамическую функцию $z(\lambda_3) = \lambda_3 + \frac{1}{\lambda_3}$ и приведенную скорость смеси λ_3.

Для нахождения полного давления смеси p_3^* воспользуемся уравнением (6).

Заменив в (6) величины расхода газа G_3 и G_1 при помощи соотношения (109) гл. V, получим

$$\frac{p_3^*}{p_1^*}\sqrt{\frac{T_1^*}{T_3^*}}\frac{F_3}{F_1}\frac{q(\lambda_3)}{q(\lambda_1)} = n+1.$$

Здесь предполагается, что величина коэффициента m в (109) гл. V, зависящая от k и R, одинакова для обоих газов и смеси. Заменим в этом уравнении отношение температур T_1^*/T_3^* согласно (8) и учтем, что при цилиндрической камере смешения $F_3 = F_1 + F_2$ или $\frac{F_3}{F_1} = 1 + \frac{1}{\alpha}$. Тогда получаем окончательно

$$\frac{p_3^*}{p_1^*} = \frac{\sqrt{(n+1)(1+n\theta+\vartheta)}}{1+\frac{1}{\alpha}}\frac{q(\lambda_1)}{q(\lambda_3)}. \qquad (13)$$

Так как λ_3 известно из уравнения (12), то, определив из таблиц значение функции $q(\lambda_3)$, по уравнению (13) можно найти полное давление газа на выходе из камеры смешения p_3^*.

В уравнениях (8), (12) и (13), помимо параметров эжектирующего и эжектируемого газов перед смешением, фигурирует безразмерная величина n — коэффициент эжекции. Эта величина может быть выражена через параметры потоков во входном сечении камеры и не является, таким образом, независимой. Подставляя в выражение для коэффициента эжекции величины

расходов смешивающихся газов, записанные при помощи соотношения (109) гл. V, получаем

$$n = \frac{G_2}{G_1} = \frac{p_2^* F_2 q(\lambda_2)\sqrt{T_1^*}}{p_1^* F_1 q(\lambda_1)\sqrt{T_2^*}}$$

или

$$n = \frac{1}{\Pi_0 \alpha \sqrt{\theta}} \frac{q(\lambda_2)}{q(\lambda_1)}. \qquad (14)$$

Соотношение (14) связывает коэффициент эжекции n с геометрическим параметром эжектора α и параметрами газов на входе в камеру. Полученные уравнения (8), (12) и (13) вместе с соотношением (14) достаточны для определения состояния потока в выходном сечении по заданным начальным параметрам потоков и коэффициенту эжекции (или геометрическому параметру α).

Рассмотрим теперь некоторые возможные уточнения изложенного метода расчета эжектора.

а) *Учет сил трения о стенки камеры.* Напомним, что в этом простейшем расчете цилиндрической смесительной камеры учитываются лишь основные потери, свойственные процессу смешения — потери на удар при обмене количеством движения между частицами, движущимися с разной скоростью, а также потери в скачках уплотнения, если они имеют место. В ряде задач, однако, существенную роль играют потери на трение о стенки камеры. Чтобы учесть влияние трения, необходимо изменить вид уравнения импульсов (10).

Действительно, при наличии трения количество движения потока в смесительной камере изменяется не только под действием сил давления в граничных сечениях камеры, но и под действием суммарной силы трения $P_{тр}$ о стенки смесительной камеры:

$$P_{тр} = \zeta \frac{l_3}{d_3} \frac{\rho_3 w_3^2}{2} F_3.$$

После несложных преобразований представим эту формулу в виде

$$P_{тр} = \frac{\zeta}{2} \frac{l_3}{d_3} G_3 \lambda_3 a_{кр3}.$$

Прибавляя в (10) силу трения $P_{кр}$ к действующим на поток силам давления, после преобразований получаем следующее основное уравнение для расчета эжектора с учетом трения:

$$\left[z(\lambda_3) + \frac{1}{2}\chi\lambda_3\right]\sqrt{(n+1)(1+n\theta+\theta)} = z(\lambda_1) + n\sqrt{\theta}\, z(\lambda_2). \qquad (15)$$

Здесь величина $\chi = \frac{2k}{k+1}\zeta\frac{l_3}{d_3}$ называется *приведенной длиной смесительной камеры*. Коэффициент трения ζ выбирается в зависимости от числа Рейнольдса и числа M потока, как указано в § 2 гл. V. При расчете звуковых эжекторов обычно хорошее соответствие с экспериментальными данными получается при $\zeta = 0{,}015 - 0{,}025$.

Что касается остальных уравнений, использованных в расчете смесительной камеры, то при наличии трения вид их не изменяется — равенство суммарного расхода и полной энергии газов во входном и выходном сечениях камеры сохраняется независимо от величины силы трения.

Для учета трения о стенки камеры смешения можно также воспользоваться результатами, полученными в § 2 гл. V. Определив величину приведенной скорости смеси при отсутствии трения по формуле (12) (назовем ее λ_3^0), находим изменение этой величины, связанное с трением, по формуле (17) гл. V

$$\varphi(\lambda_3^0) - \varphi(\lambda_3) = \chi,$$

где

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2} + 2\ln\lambda, \quad \chi = \frac{2k}{k+1}\zeta\frac{l_3}{d_3}.$$

Отсюда с помощью графика функции $\varphi(\lambda)$ (рис. 5.3) получаем λ_3 — приведенную скорость смеси на выходе из камеры с приведенной длиной χ. Далее по формуле (13) находим полное давление смеси с учетом трения.

б) *Расчет камеры при смешении разнородных газов.* При выводе уравнений для расчета камеры смешения было принято, что для обоих смешивающихся газов и для смеси значения удельных теплоемкостей c_p и газовых постоянных R одинаковы; отсюда следовало и равенство показателей адиабаты k. Это упрощает вид уравнений и их решение без заметной погрешности в результатах численных расчетов. Если в эжекторе смешиваются газы с существенно различными значениями физических констант, то можно провести расчет с учетом этого различия. Для этого по заданным значениям c_p, R и k для смешивающихся газов и коэффициенту эжекции n необходимо вычислить значения этих величин для смеси в выходном сечении камеры. Обозначив

$$\frac{c_{p2}}{c_{p1}} = \bar{c}, \quad \frac{k_2}{k_1} = \bar{k}, \quad \frac{R_2}{R_1} = \frac{\bar{c}}{\bar{k}}\frac{k_2 - 1}{k_1 - 1} = \bar{R},$$

получаем

$$c_{p3} = c_{p1}\frac{1 + n\bar{c}}{1+n}, \quad k_3 = k_2\frac{1 + n\bar{c}}{\bar{k} + n\bar{c}}, \quad R_3 = R_1\frac{1 + n\bar{R}}{1+n}.$$

Далее, из исходных уравнений сохранения массы, энергии и количества движения надо вывести уравнения, подобные (8), (12), (13) и (14), не пренебрегая разницей в c_p, R и k и не сокращая численных коэффициентов, зависящих от k. Значения газодинамических функций $q(\lambda)$ также надо определять из таблиц, вычисленных для соответствующих значений k. Следует обратить внимание на то, что при таком расчете различие связанных между собой физических констант следует учитывать в е з д е, так как иначе вместо уменьшения можно получить значительное увеличение погрешности по сравнению с приведенными выше расчетными формулами (8)—(14). Это объясняется тем, что влияние c_p, R и k на конечные результаты меньше, чем на некоторые промежуточные расчетные величины.

Путем несложных преобразований можно привести уравнения энергии, количества движения и расхода для общего случая смешения различных газов к виду

$$\frac{T_3^*}{T_1^*} = \frac{1 + n\bar{c}\theta + \vartheta}{1 + n\bar{c}}, \tag{16}$$

$$B_3 \sqrt{(n+1)(1 + n\bar{c}\theta + \vartheta)}\, z(\lambda_3) = B_1 z(\lambda_1) + B_2 n \sqrt{\bar{c}\theta}\, z(\lambda_2), \tag{17}$$

$$\frac{p_3^*}{p_1^*} = \frac{A_1}{A_3} \frac{\sqrt{(n+1)(1 + n\bar{c}\theta + \vartheta)}}{1 + \frac{1}{\alpha}} \frac{q(\lambda_1)}{q(\lambda_3)}, \tag{18}$$

где величины

$$B = \sqrt{1 - \frac{1}{k^2}} \quad \text{и} \quad A = k\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}} \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$$

определяются для газов и смеси по известным значениям показателя адиабаты. Вместо соотношения (14) получим

$$n = \frac{A_2}{A_1} \frac{1}{\Pi_0 \alpha \sqrt{\bar{c}\theta}} \frac{q(\lambda_2)}{q(\lambda_1)}. \tag{19}$$

Расчет по формулам (16)—(19) дает возможность определить влияние величин k и c_p смешивающихся газов на параметры смеси в выходном сечении цилиндрической камеры.

в) *Расчет камеры смешения переменной площади.* В отличие от течения в цилиндрической камере при смешении в камере переменного сечения на поток действует дополнительная сила — осевая составляющая силы реакции стенок. Это существенно усложняет расчет, так как сила реакции, входящая в уравнение количества движения:

$$P = \int_{F_1+F_2}^{F_3} p\, dF,$$

не может быть просто выражена через параметры газов в начальном и конечном сечениях камеры. В общем случае для определения этой силы необходимо знать закон изменения статического давления по длине смесительной камеры, что требует специального рассмотрения протекания процесса смешения. Только в некоторых частных случаях здесь возможно достаточно простое решение.

Так, камера смешения может быть спроектирована таким образом, что статическое давление в ней сохраняется постоянным (изобарический процесс смешения). Осевая составляющая всех сил давления, действующих на газовый поток между входным и выходным сечениями такой камеры, равна нулю. Поэтому количество движения потока в камере, если не учитывать действия силы трения, остается неизменным. Уравнение количества движения

$$G_3 w_3 = G_1 w_1 + G_2 w_2$$

в этом случае приводится к виду

$$\lambda_3 = \frac{\lambda_1 + n\sqrt{\theta}\,\lambda_2}{\sqrt{(n+1)(1+n\theta+\vartheta)}}.$$

Это уравнение используется в расчете вместо уравнения (12). Полное давление смеси газов p_3^* может быть найдено из условия изобаричности процесса

$$p_3^* \pi(\lambda_3) = p_2^* \pi(\lambda_2).$$

Из уравнения неразрывности (6) для $F_3 \neq F_1 + F_2$ легко получить выражение, аналогичное формуле (13):

$$\frac{F_3}{F_1 + F_2} = \frac{\alpha}{\alpha + 1}\sqrt{(n+1)(1+n\theta+\vartheta)}\,\frac{p_1^* q(\lambda_1)}{p_3^* q(\lambda_3)}.$$

Отсюда определяется величина площади выходного сечения камеры, обеспечивающая равенство статического давления потока на входе и выходе.

Подобным же образом можно рассчитать камеру смешения в случае, когда статическое давление эжектирующего потока на входе в камеру p_1 не равно давлению эжектируемого газа $p_2 = p_3$. Полагая, что давление на стенки постоянно по длине камеры, получим

$$G_3 w_3 - G_1 w_1 - G_2 w_2 = F_1 (p_1 - p_2),$$

или после преобразований

$$\lambda_3\sqrt{(n+1)(1+n\theta+\vartheta)} = \lambda_1 + n\sqrt{\theta}\,\lambda_2 + \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{k}{k-1}}\frac{1}{k y(\lambda_1)}\left(1 - \frac{p_2}{p_1}\right).$$

В других случаях ($p \neq \text{const}$) расчет камеры переменного сечения может быть проведен приближенно, если принять упрощающие предположения о законе изменения давления в камере. Так, иногда полагают, что давление изменяется по линейному закону в зависимости от площади сечения камеры, так что средняя величина давления $\bar{p}$ равна полусумме значений p_2 и p_3 в начальном и конечном сечениях.

В этом случае сила реакции стенок равна

$$P = \frac{p_2 + p_3}{2}(F_3 - F_1 - F_2)$$

и может быть учтена при составлении уравнения количества движения, которое после соответствующих преобразований принимает вид

$$z(\lambda_3)\sqrt{(n+1)(1+n\theta+\vartheta)} = \\ = z(\lambda_1) + n\sqrt{\theta}\, z(\lambda_2) + \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}} \frac{P}{p_1^* F_1 q(\lambda_1)}.$$

Расчеты и эксперименты показывают, что при смешении потоков в сужающейся камере (частным случаем которой является изобарическая камера) полное давление смеси может быть более высоким, чем на выходе из цилиндрической камеры при тех же начальных параметрах газов.

Основной причиной несколько большей эффективности сужающихся камер при дозвуковых скоростях является уменьшение разности скоростей потоков и снижение ударных потерь при смешении, так как процесс смешения происходит в ускоряющемся потоке. При этом, однако, следует учитывать, что увеличение выходной скорости w_3 может привести к возрастанию потерь в диффузоре.

При сверхзвуковой скорости потока сужение камеры смешения приводит к уменьшению скорости течения и к снижению потерь полного давления в прямом скачке, если он возникает вблизи выходного сечения камеры (см. § 7), или в системе скачков, переводящих поток в дозвуковой. В результате как при дозвуковых, так и при сверхзвуковых скоростях отмечается возрастание полного давления смеси, в ряде случаев составляющее до 15—20%. В связи с этим эжекторы с камерой смешения переменной площади, чаще всего с конической сужающейся камерой, находят применение в технике.

Рассмотрим теперь основные особенности расчета диффузора эжекторного устройства. Температура торможения потока при течении в диффузоре не изменяется, поэтому $T_4^* = T_3^*$ и $a_{кр4} = a_{кр3}$. Вследствие возникающих в диффузоре потерь полное давление в выходном сечении диффузора меньше, чем во

входном сечении:

$$p_4^* = \sigma_д p_3^*, \tag{20}$$

где $\sigma_д$ — коэффициент сохранения полного давления.

Коэффициент $\sigma_д$ зависит от конфигурации диффузора и приведенной скорости потока на входе в него λ_3. Зависимость $\sigma_д$ от λ для конических диффузоров с несколькими углами уширения приведена на рис. 8.32.

Следует иметь в виду, что при работе диффузора в эжекторе со сравнительно короткой камерой смешения поле скоростей на входе в диффузор обладает заметной неравномерностью, и это несколько снижает величину коэффициента полного давления по сравнению с данными, полученными в условиях равномерного поля скоростей.

Для определения приведенной скорости λ_4 на выходе из диффузора воспользуемся уравнением неразрывности потока в диффузоре

$$\frac{p_4^* F_4 q(\lambda_4)}{\sqrt{T_4^*}} = \frac{p_3^* F_3 q(\lambda_3)}{\sqrt{T_3^*}}.$$

Учитывая условие $T_4^* = T_3^*$ и соотношение (20), приводим это уравнение к виду

$$q(\lambda_4) = \frac{1}{\sigma_д f} q(\lambda_3), \tag{21}$$

где $f = F_4/F_3$ — геометрическая степень расширения диффузора. При помощи таблиц газодинамических функций по значению $q(\lambda_4)$ находим λ_4 и значения функций $\pi(\lambda)$ и $\varepsilon(\lambda)$, а затем определяем все параметры потока в выходном сечении диффузора

$$p_4 = p_4^* \pi(\lambda_4), \quad \rho_4 = \frac{p_4^*}{RT_4^*} \varepsilon(\lambda_4), \quad w_4 = \lambda_4 a_{кр4} \quad \text{и т. д.}$$

Часто бывает заданным статическое давление на выходе из диффузора p_4 (например, при выходе газа из эжектора с дозвуковой скоростью в атмосферу или в резервуар с постоянным давлением). В этом случае удобно выразить расход газа в выходном сечении диффузора через статическое давление p_4 и газодинамическую функцию $y(\lambda)$ (см. гл. V). При этом вместо уравнения неразрывности (21) получим

$$y(\lambda_4) = \frac{1}{f} \frac{p_3^*}{p_4} q(\lambda_3). \tag{22}$$

Пользуясь таблицами газодинамических функций, по значению $y(\lambda_4)$ можно найти λ_4 и $\pi(\lambda_4)$ и, далее, полное давление

в выходном сечении

$$p_4^* = \frac{p_4}{\pi(\lambda_4)}. \tag{23}$$

В зависимости от заданных величин и условий работы эжектора приведенными соотношениями пользуются различным образом. Если поток на выходе из смесительной камеры дозвуковой и параметры его λ_3 и p_3^* определены, а также известен коэффициент $\sigma_д$, то из соотношения (20) определяем p_4^*, из соотношения (23) $\pi(\lambda_4)$ и λ_4, а из уравнения неразрывности (21) или (22) — необходимую степень расширения диффузора f, обеспечивающую при заданных начальных параметрах газа торможение потока до заданного статического давления p_4. Если сделать диффузор с другой степенью расширения, то при заданном давлении на выходе p_4 изменятся параметры λ_3 и p_3 в выходном сечении смесительной камеры и соответственно на входе в нее, т. е. эжектор будет работать на другом режиме.

Если скорость потока на выходе из смесительной камеры больше скорости звука ($\lambda_3 > 1$), то при заданном статическом давлении p_4 определяем из соотношения (22) величины $y(\lambda_4)$ и λ_4, из соотношения (23) — величину p_4^*, а из (20) — величину коэффициента сохранения полного давления $\sigma_д$. Физически это означает следующее. При сверхзвуковой скорости потока на выходе из смесительной камеры эжектор может работать на данном режиме при любой степени расширения диффузора f. Соответственно изменению степени расширения диффузора изменяется скорость потока в выходном сечении и перемещается скачок (или система скачков) уплотнения, возникающий в диффузоре из-за перерасширения потока. Скачки уплотнения перестраиваются таким образом, что суммарное изменение давления на участке перерасширения, в скачках и при торможении дозвукового потока после скачка обеспечивает получение в выходном сечении статического давления p_4; при этом суммарные потери полного давления оцениваются величиной коэффициента $\sigma_д$, найденной, как указывалось, из соотношений (22), (23) и (20). Если давление p_4 достаточно низко, то поток на выходе из диффузора, представляющего в этом случае расширяющуюся часть сопла Лаваля, может быть сверхзвуковым.

Таким образом, если считать известными полные давления, температуры торможения и коэффициенты скорости газовых потоков во входном сечении цилиндрической камеры смешения, а также соотношение расходов $n = G_2/G_1$ или площадей $\alpha = F_1/F_2$, то, пользуясь уравнениями, выведенными в этом параграфе, можно определить конечные параметры смеси газов на выходе из эжектора.

Рассмотрим, какими условиями связаны между собой величины, которые должны быть заданы для расчета. Температуры торможения эжектирующего и эжектируемого газов обычно известны; полные давления известны или легко определяются по параметрам газов перед соплами эжектора и коэффициентам сохранения полного давления в соплах. Что касается величин приведенной скорости газов λ_1 и λ_2, то они до расчета камеры смешения и диффузора, вообще говоря, неизвестны и могут быть различными на различных режимах работы одного и того же эжектора. Поэтому в большинстве случаев для расчета эжектора приходится задаваться рядом значений λ_1 и λ_2 и находить зависимость конечных параметров эжектора и его размеров от скоростей газов во входном сечении камеры. По этой зависимости и выбирают оптимальный режим или режим, соответствующий условиям данной конкретной задачи. Такими условиями могут быть, например, получение данного статического давления смеси на выходе, получение заданного коэффициента эжекции при наивысшем полном давлении смеси или минимальном диаметре камеры смешения, получение максимальной реактивной тяги и т. п. Так, на рис. 9.11 приведена полученная таким способом сетка кривых $p_4^*/p_2^* = f(\lambda_2, n)$ для заданного отношения полных давлений газов $p_1^*/p_2^* = 5$.

Из графика видно, что полное давление смеси газов увеличивается с уменьшением коэффициента эжекции n — при этом увеличивается энергия эжектирующего газа, приходящаяся на единицу расхода эжектируемого газа. Кроме того, при данном значении n полное давление возрастает с увеличением начальной скорости эжектируемого газа, что объясняется согласно (2) уменьшением потерь при смешении потоков.

Следует иметь в виду, что при различных значениях λ_2 для получения данного коэффициента эжекции необходимо выбирать согласно формуле (14) различные величины геометрического параметра α. Поэтому точки кривых $n = \text{const}$ на рис. 9.11 соответствуют различным эжекторам: чем больше λ_2, тем меньше относительная площадь камеры смешения (больше величина α).

Выбирая значения приведенной скорости λ_1 и λ_2 для расчета эжектора, необходимо учитывать, что эти величины не являются независимыми. На любом режиме работы эжектора при заданных полных давлениях газов величины λ_1 и λ_2 связаны дополнительными условиями, ограничивающими область возможных скоростей потоков. Эти условия различны в зависимости от того, являются потоки дозвуковыми или сверхзвуковыми.

Если оба потока во входном сечении камеры смешения дозвуковые, т. е. $\lambda_1 < 1$ и $\lambda_2 < 1$, то можно считать, что

статическое давление постоянно по всей площади входного сечения камеры. Это условие связывает между собой значения λ_1 и λ_2, так как при $p_1 = p_2$ имеем

$$p_1^* \pi(\lambda_1) = p_2^* \pi(\lambda_2), \quad \text{или} \quad \pi(\lambda_2) = \Pi_0 \pi(\lambda_1). \tag{24}$$

Таким образом, при дозвуковой скорости потоков произвольно можно задать приведенную скорость только одного из

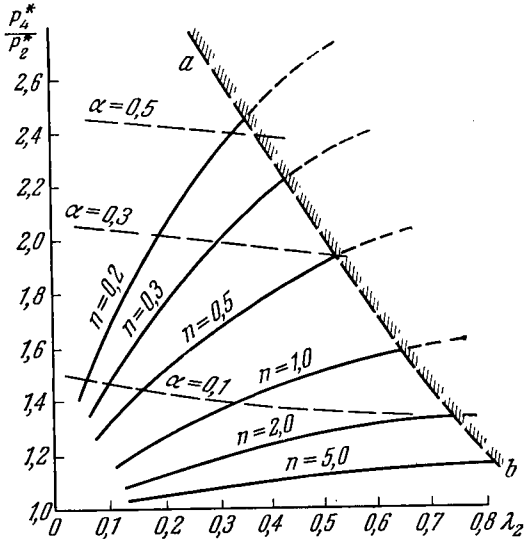


Рис. 9.11. Зависимость степени повышения полного давления p_4^*/p_2^* в эжекторе от приведенной скорости эжектируемого газа на входе в камеру смешения; $\Pi_0 = 5$, $\lambda_1 = 1{,}0$, $\theta = 1$, $k = 1{,}4$. ab — линия предельных значений λ_2.

них, скорость другого при этом определяется отношением полных давлений газов.

Для каждого значения $\Pi_0 = p_1^*/p_2^*$ можно выбрать такое значение коэффициента скорости λ_2, при котором, как следует из уравнения (24),

$$\pi(\lambda_1) = \frac{\pi(\lambda_2)}{\Pi_0} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}}.$$

Это значение λ_2 ограничивает область докритического истечения эжектирующего газа из сопла: при всех бо́льших значениях λ_2 истечение газа будет происходить под сверхкритическим пере-

падом давлений p_1^*/p_2. Если в сопле эжектирующего газа отношение давлений превышает критическое значение, то скорость истечения газа из сужающегося сопла достигает скорости звука ($\lambda_1 = 1$), и струя покидает сопло со статическим давлением, более высоким, чем давление окружающего сопло потока эжектируемого газа. При этом равенство давлений p_1 и p_2 и вытекающее из него соотношение (24) между возможными значениями λ_1 и λ_2 не соблюдаются. То же будет и в случае применения в эжекторе сопла Лаваля с неполным расширением; при этом с некоторого значения Π_0 на срезе установится постоянная скорость ($\lambda_1 = \lambda_{p1}$), не зависящая от статического давления в эжектируемом потоке. При постоянном значении $\lambda_1 = 1$ (нерасширяющееся сопло) или $\lambda_1 = \lambda_{p1} > 1$ приведенная скорость эжектируемого газа λ_2 может иметь различные значения. Однако, произвольно выбирая значение λ_2 для подстановки в расчетные уравнения, нельзя заранее быть уверенным, что такой режим работы эжектора реально осуществим. Имеется предельное значение λ_{2max}, ограничивающее область возможных режимов; реальны лишь режимы, соответствующие $\lambda_2 \leqslant \lambda_{2max}$. Ниже в § 4 этот вопрос рассмотрен подробнее.

§ 4. Критические режимы работы эжектора. Запирание эжектора

Эксперименты показывают, что для каждого эжектора при заданных начальных параметрах газов имеется некоторое максимальное значение коэффициента эжекции n и соответствующие ему максимально возможные значения расхода и скорости эжектируемого газа. Никаким снижением давления на выходе из эжектора не удается превысить эти предельные значения. Явление это напоминает работу сопла Лаваля на режимах, когда в минимальном сечении его достигнута скорость звука; скорости газа во всех сечениях дозвуковой части при этом принимают предельно возможные значения и не зависят от давления на выходе из сопла.

Режим работы эжектора, при котором коэффициент эжекции не зависит от давления на выходе из диффузора, называется *критическим*. Особенности работы эжектора на критическом режиме связаны с характером течения в начальном участке смесительной камеры — между входным сечением и сечением запирания $1'$ (рис. 9.6). Как уже указывалось, дозвуковой поток эжектируемого газа движется здесь по каналу с уменьшающимся сечением, ограниченному стенками камеры и границей сверхзвуковой эжектирующей струи. Скорость эжектируемого потока в минимальном сечении — оно совпадает с сечением

запирания — не может превысить скорости звука; этим и определяются предельные значения скорости во входном сечении и максимального расхода эжектируемого газа. Для того чтобы определить эти максимально возможные величины, необходимо найти соотношения между параметрами потоков во входном сечении и в сечении запирания.

Из приведенного выше описания физической картины течения следует, что на рассматриваемых режимах оба потока между указанными сечениями движутся с ускорением, практически не смешиваясь между собой.

Поток эжектируемого газа на этом участке можно считать одномерным, т. е. параметры его полагать постоянными по сечению. Что касается течения эжектирующего газа — сверхзвуковой недорасширенной струи, то, как указывалось в гл. VII, § 6, этот поток характеризуется существенной неодномерностью, параметры газа в нем сильно меняются от оси к периферии.

Детальный расчет такого течения проводится с помощью специальных методов, которые в данной книге не рассматриваются.

Для расчета эжектора, однако, внутренняя структура потока несущественна, важны только некоторые его интегральные характеристики, и потому можно воспользоваться более простыми методами, основанными на осреднении параметров неодномерного газового потока (см. гл. V, § 8). Так же, как при рассмотрении свободной недорасширенной сверхзвуковой струи (см. гл. VII, § 6), будем характеризовать эжектирующий поток в сечении запирания некоторыми средними, постоянными по всему сечению значениями скорости, давления, температуры; полное давление, температура торможения и расход, как и для потока эжектируемого газа, сохраняются такими же, как на входе в камеру смешения [1]).

При этом условии из уравнений неразрывности каждого из потоков между входным сечением камеры и сечением запирания (рис. 9.6) легко получить соотношения

$$F_1 q(\lambda_1) = F_1' q(\lambda_1'), \qquad F_2 q(\lambda_2) = F_2' q(\lambda_2'). \tag{25}$$

Поскольку суммарная площадь потоков в обоих сечениях одинакова, т. е.

$$F_1 + F_2 = F_1' + F_2',$$

или

$$\frac{F_1}{F_2} + 1 = \frac{F_1'}{F_1} \cdot \frac{F_1}{F_2} + \frac{F_2'}{F_2}, \tag{26}$$

[1]) Васильев Ю. Н., Теория сверхзвукового эжектора с цилиндрической камерой смешения, Сб. «Лопаточные машины и струйные аппараты», вып. 2, «Машиностроение», 1967.

то, заменив отношения площадей отношениями соответствующих величин $q(\lambda)$ согласно уравнениям (25), можно получить

$$\alpha + 1 = \frac{q(\lambda_1)}{q(\lambda_1')}\alpha + \frac{q(\lambda_2)}{q(\lambda_2')},$$

или

$$q(\lambda_2) = q(\lambda_2')\left\{1 - \alpha\left[\frac{q(\lambda_1)}{q(\lambda_1')} - 1\right]\right\}. \qquad (27)$$

Для критического режима работы эжектора, когда $\lambda_2' = 1$, отсюда следует

$$q(\lambda_2) = 1 - \alpha\left[\frac{q(\lambda_1)}{q(\lambda_1')} - 1\right]. \qquad (28)$$

Из последнего уравнения видно, что при $\alpha = \text{const}$ и увеличении приведенной скорости λ_1' ($\lambda_1' > 1$), когда $q(\lambda_1')$ уменьшается, величина $q(\lambda_2)$, а следовательно, и скорость эжектируемого потока на входе в камеру смешения уменьшаются. Если

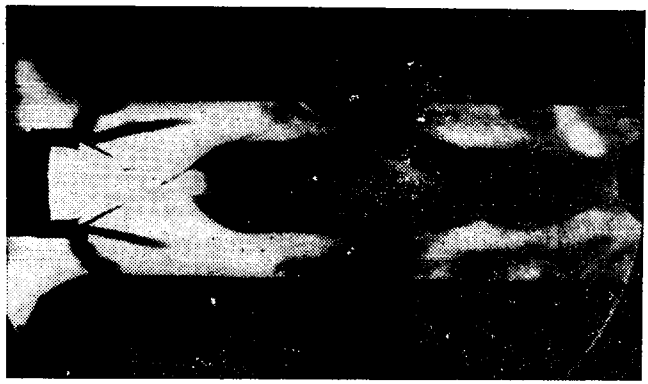


Рис. 9.12. Шлирен-фотография потока в камере смешения на критическом режиме работы эжектора; $\Pi_0 = 3{,}6$.

величина λ_1' увеличится настолько, что значение функции $q(\lambda_1')$ станет равным

$$q(\lambda_1') = \frac{\alpha}{\alpha + 1} q(\lambda_1) = \frac{F_1}{F_3} q(\lambda_1), \qquad (29)$$

то из уравнения (27) получим $q(\lambda_2) = 0$, т. е. $\lambda_2 = 0$. При этом втекание эжектируемого газа в камеру прекращается, эжектирование не происходит. Физически это означает, что при таком значении λ_1' расширяющаяся эжектирующая струя в максимальном сечении заполняет всю площадь камеры смешения и для

прохода эжектируемого газа не остается места. Это явление называется *запиранием эжектора*. На рис. 9.12 и 9.13 показаны теневые фотографии течения в камере смешения на критическом режиме и режиме, близком к запиранию.

Если в уравнении (27) величина α неизвестна (например, при проектировании эжектора по заданным значениям Π_0, θ и n),

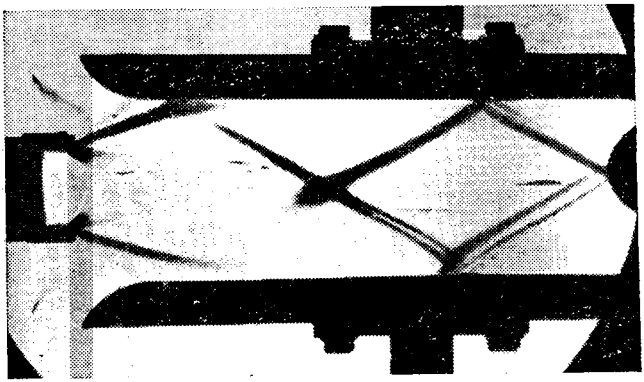


Рис. 9.13. Шлирен-фотография потока в эжекторе на режиме, близком к запиранию; $\Pi_0 = 5{,}5$, $\alpha \approx 1$.

то ее следует предварительно выразить из уравнения (14). Уравнение (27) в этом случае принимает вид

$$q(\lambda_2) = q(\lambda_2')\left\{1 - \frac{1}{\Pi_0 n \sqrt{\theta}} \frac{q(\lambda_2)}{q(\lambda_1)}\left[\frac{q(\lambda_1)}{q(\lambda_1')} - 1\right]\right\},$$

или

$$n\sqrt{\theta} = \frac{1}{\Pi_0} \frac{\dfrac{1}{q(\lambda_1')} - \dfrac{1}{q(\lambda_1)}}{\dfrac{1}{q(\lambda_2)} - \dfrac{1}{q(\lambda_2')}}. \qquad (30)$$

Для критического режима работы эжектора аналогично получается

$$n\sqrt{\theta} = \frac{1}{\Pi_0} \frac{\dfrac{1}{q(\lambda_1')} - \dfrac{1}{q(\lambda_1)}}{\dfrac{1}{q(\lambda_2)} - 1}. \qquad (31)$$

В уравнения (27) или (30), полученные из условия неразрывности потока в цилиндрической камере смешения, помимо искомой величины λ_2, входят величины приведенных скоростей

потока λ_1, λ_1' и λ_2'. Величина λ_1 представляет собой приведенную скорость эжектирующего газа на срезе сопла; для рассматриваемых здесь режимов она известна: $\lambda_1 = 1$ в случае истечения из нерасширяющегося сопла или $\lambda_1 = \lambda_{p1} > 1$ для сверхзвукового сопла.

Величиной $\lambda_2' \leqslant 1$ в расчете надо задаваться, она определяет режим работы эжектора и ограничивает область реальных значений λ_2 и n максимальными величинами, соответствующими $\lambda_2' = 1$; собственно для нахождения этих максимальных величин и проводится расчет начального участка течения.

Приведенная скорость λ_1' в уравнениях (27) или (30) неизвестна, и для того чтобы исключить ее, надо составить еще одно уравнение, связывающее между собой параметры потоков во входном сечении камеры и сечении запирания.

Взаимодействие потока со стенками цилиндрической камеры смешения (без учета трения) не дает сил, направленных вдоль оси течения. Поэтому изменение количества движения газа происходит только под действием разности сил давления на границах выделенного участка потока.

Уравнение количества движения, записанное для обоих потоков между входным сечением цилиндрической смесительной камеры и сечением запирания

$$G_1(w_1 - w_1') + G_2(w_2 - w_2') = p_1'F_1' + p_2'F_2' - p_1F_1 - p_2F_2, \qquad (32)$$

позволяет исключить неизвестную по величине силу давления на границе эжектирующего и эжектируемого потоков, которая вошла бы в уравнения импульсов для каждого потока в отдельности. Группируя члены, относящиеся к одному сечению, и применяя соотношение (115) гл. V

$$Gw + pF = \frac{k+1}{2k} Ga_{\text{кр}} z(\lambda),$$

приводим уравнение количества движения к виду

$$G_1 a_{\text{кр1}} [z(\lambda_1') - z(\lambda_1)] = G_2 a_{\text{кр2}} [z(\lambda_2) - z(\lambda_2')],$$

или

$$n\sqrt{\theta} = \frac{z(\lambda_1') - z(\lambda_1)}{z(\lambda_2) - z(\lambda_2')}. \qquad (33)$$

Для критического режима работы эжектора, когда $\lambda_2' = 1$, уравнение (33) принимает вид

$$n\sqrt{\theta} = \frac{z(\lambda_1') - z(\lambda_1)}{z(\lambda_2) - 2}, \qquad (34)$$

Вместе с уравнением (30) уравнение (33) позволяет для заданного значения λ_2' и $n\sqrt{\theta}$ определить λ_1' и λ_2; для критиче-

ского режима из уравнений (31) и (34) можно определить максимальные значения λ_1' и λ_2. Решение в обоих случаях проводится методом последовательных приближений или графически.

На режиме запирания, когда расширяющаяся сверхзвуковая струя заполняет все сечение смесительной камеры, $q(\lambda_2)=0$, поэтому из уравнения (28) следует

$$q(\lambda_1')=\frac{\alpha}{\alpha+1}q(\lambda_1) \qquad (35)$$

или для звукового эжектора

$$q(\lambda_1')=\frac{\alpha}{\alpha+1}.$$

По найденной отсюда величине λ_1' можно определить величину отношения давления Π_0, при которой запирается эжектор с данным геометрическим параметром α.

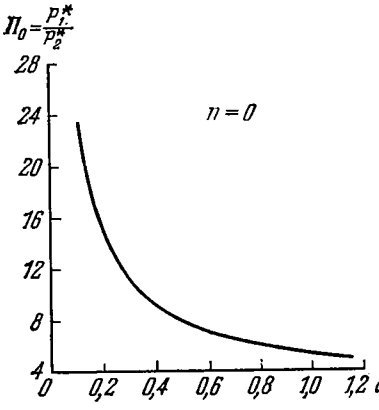


Рис. 9.14. Зависимость отношения полных давлений газов Π_0, при котором происходит запирание эжектора, от отношения площадей F_1/F_2; $\lambda_1=1$.

Непосредственное применение уравнения (34) для расчета эжектора на режиме запирания ($n=0$, $\lambda_2=0$, $z(\lambda_2)=\infty$) затруднительно, так как оно обращается в неопределенность. Преобразуем уравнение (34), заменив в нем

$$n\sqrt{\theta}=\frac{1}{\Pi_0\alpha}\frac{q(\lambda_2)}{q(\lambda_1)}, \quad q(\lambda_2)=\left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}}\lambda_2\left(1-\frac{k-1}{k+1}\lambda_2^2\right)^{\frac{1}{k-1}},$$

$$z(\lambda_2)=\lambda_2+\frac{1}{\lambda_2}.$$

Предельным переходом $\lambda_2\to 0$ приводим уравнение к виду

$$\Pi_0=\left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}}\frac{1}{\alpha q(\lambda_1)}\frac{1}{z(\lambda_1')-z(\lambda_1)} \qquad (36)$$

или для звукового эжектора ($\lambda_1=1$)

$$\Pi_0=\left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}}\frac{1}{\alpha}\frac{1}{z(\lambda_1')-2}.$$

Подставив в последнее уравнение величину λ_1', найденную из (35), определяем предельное значение отношения полных давлений газов, сверх которого эжектор становится неработоспо-

собным. На рис. 9.14 приведены предельные значения Π_0, вычисленные по формулам (35) и (36).

Рассмотрение критических режимов работы эжектора, помимо теоретического интереса, имеет важное практическое значение. Расчеты показывают, что критические режимы работы являются не только предельными, но и в большинстве случаев наивыгоднейшими режимами эжектора. Работая на критическом режиме, эжектор при данном значении коэффициента эжекции обеспечивает наибольшее полное давление смеси газов, а при заданном полном давлении имеет наибольший коэффициент эжекции. Это связано с тем, что при критическом режиме разность скоростей газов на входе в камеру смешения $w_1 - w_2$ становится минимально возможной; наименьшей величины достигают и потери при смешении (см. (2)). Одновременно эжектор, рассчитанный для работы на критическом режиме, будет при заданном значении n иметь наименьшие относительные размеры смесительной камеры, т. е. наибольшее значение α.

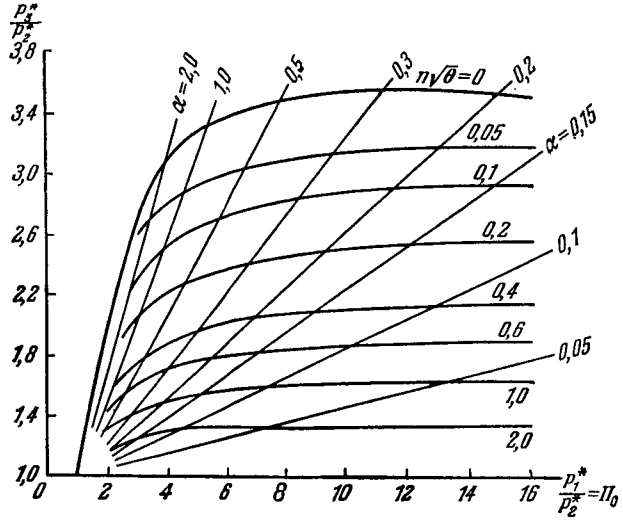


Рис. 9.15. График для определения параметров звукового эжектора на критическом режиме; $\lambda_I = 1$, $\lambda_2' = 1$, $k = 1{,}4$.

На рис. 9.15 приведен график для определения параметров звукового эжектора на критическом режиме. График этот рассчитан по уравнениям (12), (13) и (14) путем подстановки в них для заданных значений $n\sqrt{\theta}$ и Π_0, величины $\lambda_1 = 1$ и предельного (критического) значения λ_2 согласно (31) и (34). При

определении p_3^* в уравнение (13) подставлялось дозвуковое значение λ_3, найденное из уравнения (12). По рис. 9.15 можно графически определить наивыгоднейшие параметры звукового эжектора и решать другие задачи расчета эжекторов.

График рис. 9.15 применим только для $0{,}6 < \theta < 1{,}7$; при большем различии в температурах газов пользование графиком приводит к заметной погрешности в величине p_3^*/p_2^*. Что касается величин α, $n\sqrt{\theta}$, Π_0, то соотношения между ними на критическом режиме можно определять по рис. 9.15 при любом значении θ [1]). Семейство линий $\alpha = \text{const}$ показывает, что при постоянном отношении начальных полных давлений Π_0 и $\lambda_3 < 1$ степень повышения давления p_3^*/p_2^* тем больше, чем больше величина α. Другими словами, для увеличения напорности эжектора следует выполнять эжектор с возможно меньшей относительной площадью камеры.

Верхняя кривая на рис. 9.15 соответствует режиму запирания ($n=0$). Эта предельная кривая показывает, какие максимальные значения степени повышения давления p_3^*/p_2^* можно получить в эжекторе с заданным геометрическим параметром α или заданным отношением полных давлений газов Π_0. Отметим, что этот предельный режим для каждого заданного отношения давлений Π_0 соответствует своему значению α, т. е. режим запирания в камере заданных относительных размеров наступает при вполне определенном отношении полных давлений газов.

График на рис. 9.15 показывает также, что в звуковом эжекторе существует *предельная степень повышения полного давления* $p_3^*/p_2^* \approx 3{,}55$, которая достигается при отношении начальных полных давлений $\Pi_0 \approx 12$ и не возрастает более даже при беспредельном увеличении полного давления эжектирующего газа. Физический смысл этого состоит в следующем. При повышении начального отношения полных давлений газов Π_0 увеличивается степень сжатия низконапорного газа, однако одновременно увеличивается и площадь максимального сечения эжектирующей струи в сечении запирания. Вследствие этого даже при весьма малом расходе эжектируемого газа ($n \to 0$) необходимо увеличивать относительную площадь камеры смешения. Перерасширение газа повышает потери в струе и потери при смешении и, начиная со значений $\Pi_0 = 10—11$, сводит на нет увеличение степени сжатия, получающееся вследствие возрастания энергии эжектирующего газа.

Следует иметь в виду, что при определении параметров эжектора на режимах, близких к запиранию, и при очень малых зна-

[1]) При этом, однако, следует учитывать ограничения, накладываемые условием запирания в выходном сечении камеры, см. ниже § 6 и рис. 9.19.

чениях коэффициента эжекции ($n = 0{,}01$—$0{,}05$) возможны погрешности, связанные с условностью допущения об отсутствии смешения потоков в начальном участке камеры (до сечения запирания). Незначительное количество эжектируемого газа, подмешиваемое к струе на этом участке, при малых значениях n становится соизмеримым с расходом эжектируемого газа через кольцевую площадь F_2' в сечении запирания.

В частности, при $F_2' = 0$, когда из расчета следует, что $n = 0$, в начальном участке эжектирующей струи будет подсасываться некоторое, хотя и весьма малое, количество газа. Действительно, в некоторых экспериментах при малых значениях α (т. е. при большой длине начального участка) наблюдалось отклонение предельных значений Π_0, соответствующих режиму запирания, от расчетных значений; в соответствии с этим увеличиваются по сравнению с данными рис. 9.15 предельно возможные значения степени сжатия p_3^*/p_2^*. Однако уже при $n > 0{,}05$—$0{,}1$ этот эффект становится слабым, и расчетные данные хорошо согласуются с результатами экспериментов.

§ 5. Характеристики эжектора

Один и тот же эжектор может работать на различных режимах и при различных соотношениях между начальными параметрами газов. Характеристикой эжектора называется зависимость между параметрами эжектора и условиями его работы. Экспериментально или в результате расчета можно получить разнообразные характеристики эжектора, однако наибольший интерес представляют обобщенные характеристики, позволяющие одним графиком охватить всю область возможных режимов работы эжектора.

Из расчета эжектора следует, что его параметры определяются несколькими безразмерными величинами, как, например, коэффициентом эжекции n, отношением начальных полных давлений газов Π_0, степенью сжатия эжектируемого газа p_4^*/p_2^*. Характеристику эжектора поэтому рационально строить в виде зависимости между этими безразмерными параметрами.

На рис. 9.16 приведена типовая сетка характеристик, построенная для эжектора с нерасширяющимся соплом эжектирующего газа и цилиндрической смесительной камерой с геометрическим параметром $\alpha = 0{,}5$. Эта характеристика показывает зависимость степени сжатия эжектируемого газа p_4^*/p_2^* от коэффициента эжекции при нескольких значениях $\Pi_0 = p_1^*/p_2^*$. На рис. 9.17 показана сетка таких же характеристик, полученных экспериментально для звукового эжектора при $T_1^* = T_2^*$.

Рассмотрим, как практически получить характеристику $(p_4^*/p_2^*) = f(n)$ при $\Pi_0 = \text{const}$. Будем снижать статическое давление на выходе из диффузора, поддерживая постоянными полные давления газов p_1^* и p_2^*. При этом будет уменьшаться статическое давление на входе в смесительную камеру, что приведет к увеличению скорости и расхода эжектируемого газа G_2 при незначительном увеличении расхода эжектирующего газа G_1, если $\lambda_2 < \lambda_1 < 1$, и без изменения G_1, если $\lambda_1 \geqslant 1$. В результате увеличивается коэффициент эжекции n. Как бы мало ни было отношение полных давлений газов Π_0, при некотором значении статического давления p_4 в сопле эжектирующего газа будет достигнута скорость звука. Дальнейшее снижение давления на выходе из диффузора приводит к сверхкритическому режиму течения в начальном участке камеры. Коэффициент эжекции при этом продолжает расти вследствие возрастания скорости эжектируемого газа на входе в смесительную камеру.

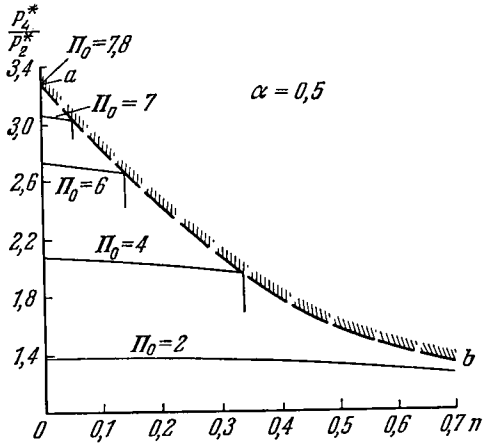


Рис. 9.16. Расчетная характеристика эжектора: ab — критические режимы работы, a — запирание эжектора, $\theta = 1$.

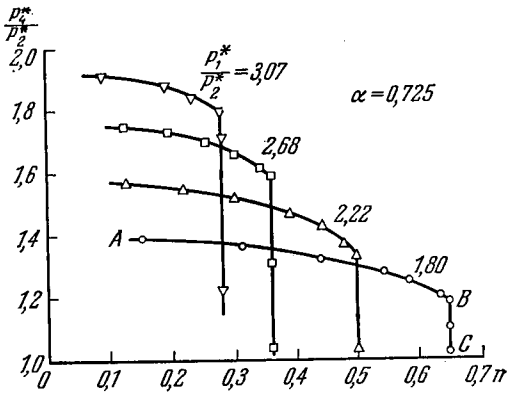


Рис. 9.17. Экспериментальная характеристика эжектора: AB — докритические режимы, BC — критические режимы.

Когда скорость эжектируемого потока в сечении запирания достигнет скорости звука, наступает критический режим работы эжектора: коэффициент эжекции принимает предельно возможное (для данного отношения полных давлений) значение и не изменяется при дальнейшем снижении давления на выходе из эжектора.

Степень повышения полного давления p_4^*/p_2^* вдоль кривых $\Pi_0 = \text{const}$ с увеличением коэффициента эжекции несколько уменьшается вследствие увеличения расхода эжектируемого газа и увеличения потерь в диффузоре, связанного с ростом скорости потока на входе в диффузор. Чем больше отношение полных давлений Π_0, тем выше проходит характеристика $(p_4^*/p_2^*) = f(n)$, т. е. тем большую напорность имеет эжектор. Однако предельные (критические) значения коэффициента эжекции с ростом Π_0 уменьшаются, протяженность характеристики становится меньшей. Это связано с тем, что с увеличением перепада давлений растет площадь сверхзвуковой эжектирующей струи в сечении запирания и уменьшается критическое сечение эжектируемого потока.

Кривая, соединяющая предельные точки кривых $\Pi_0 = \text{const}$, является *линией критических режимов*. Реальными являются лишь режимы, соответствующие области характеристики между этой линией и осями координат. С увеличением отношения давлений Π_0 критическая линия приближается к оси ординат и при некотором значении $\Pi_{0\,max}$ пересекается с ней. Эта точка, в которой коэффициент эжекции равен нулю, а степень повышения давления достигает максимально возможной для данного эжектора величины, соответствует режиму запирания эжектора. Изменение режима работы реального эжектора может происходить более сложным образом, с одновременным изменением как полных давлений газов на входе, так и давления на выходе, и определяется выбранным способом регулирования режима. Смещение точки, соответствующей рабочему режиму, на поле характеристик эжектора в каждом случае может быть определено расчетом по методу, изложенному в § 3.

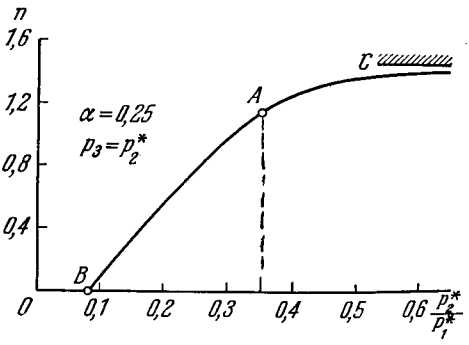


Рис. 9.18. Характеристика эжектора: AB — критические режимы, C — коэффициент эжекции при $\Pi_0 \to 1$.

На рис. 9.18 приведена расчетная характеристика другого типа, связывающая коэффициент эжекции с полным давлением эжектирующего газа p_1^* при постоянных значениях полного давления эжектируемого газа и статического давления на выходе из эжектора. При расчете принято $p_3 = p_2^*$; такая характеристика представляет интерес при оценке параметров эжектора, работающего по схеме рис. 9.2 или рис. 9.10, т. е. когда воздух

засасывается из атмосферы и после смешения с эжектирующим газом вновь подается в атмосферу. При малых значениях Π_0 величина коэффициента эжекции n совпадает с соответствующим значением n для эжектора несжимаемой жидкости и может быть оценена (см. § 8) по формуле

$$n\sqrt{\theta} \approx \frac{\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\sqrt{2\alpha}-2}{1+\alpha^2}.$$

С увеличением отношения давлений величина n для эжектора с данной величиной геометрического параметра $\alpha = F_1/F_2$ уменьшается. Причиной является то, что расход эжектирующего газа с ростом p_1^* увеличивается пропорционально $p_1^* q(\lambda_1)$, тогда как возрастание расхода эжектируемого газа происходит менее интенсивно и связано лишь с понижением давления на входе в камеру и ростом $q(\lambda_2)$. При докритических режимах работы эжектора уменьшение коэффициента эжекции невелико. По мере увеличения отношения давлений Π_0, когда камера смешения все более заполняется расширяющейся сверхзвуковой струей, расход эжектируемого газа начинает уменьшаться, коэффициент эжекции резко снижается; в точке B характеристики $G_2 = 0$, $n = 0$.

§ 6. О режиме течения на выходе из смесительной камеры

Согласно изложенному в § 3 методу расчета величина приведенной скорости потока в выходном сечении цилиндрической смесительной камеры определяется, как указывалось, из уравнения количества движения

$$z(\lambda_3) = \frac{z(\lambda_1) + n\sqrt{\theta}\, z(\lambda_2)}{\sqrt{(n+1)(n\theta+1)}}. \tag{37}$$

При этом обычно возникает затруднение, связанное с неоднозначностью решения относительно величины λ_3, так как каждому значению $z(\lambda_3) > 2$ соответствуют два возможных значения λ_3:

$$\lambda_3' = \frac{z(\lambda_3) + \sqrt{z(\lambda_3)^2 - 4}}{2} \quad \text{и} \quad \lambda_3'' = \frac{z(\lambda_3) - \sqrt{z(\lambda_3)^2 - 4}}{2},$$

Первое значение соответствует сверхзвуковому, а второе — дозвуковому режиму течения, причем $\lambda_3'' = 1/\lambda_3'$. Такая же зависимость была получена в § 1 гл. III для величин λ до и после прямого скачка уплотнения. Параметры смеси газов, вычисленные по сверхзвуковому и дозвуковому значениям λ_3, будут различными. Из аналогии со скачком уплотнения следует, что полное давление при $\lambda_3 > 1$ будет большим, а статическое давление — меньшим, чем для $\lambda_3 < 1$. Диффузор, установленный на

выходе из камеры, будет работать в различных условиях при $\lambda_3 > 1$ и $\lambda_3 < 1$.

Рассмотрим соображения, позволяющие установить, какой из двух возможных режимов течения на выходе из цилиндрической смесительной камеры будет реальным. Очевидно, что если при $T_1^* = T_2^*$ оба потока на входе в камеру дозвуковые, то выравнивание скоростей при смешении также приведет только к дозвуковой скорости на выходе из камеры, т. е. $\lambda_3 < 1$. Сверхзвуковое решение уравнения (37) в этом случае соответствует физически невозможному скачку разрежения.

При сверхкритическом отношении давлений в сопле ($\lambda_1 \geqslant 1$) эжектирующий газ в начальном участке камеры движется со сверхзвуковой скоростью. Чтобы на выходе из камеры получить $\lambda_3 > 1$, необходимо дозвуковой поток эжектируемого газа ($\lambda_2 < 1$) в процессе смешения также перевести в сверхзвуковой. Необходимые для этого условия можно качественно установить на основании рассмотренных в § 4 гл. V закономерностей перехода через скорость звука под влиянием внешних воздействий на газовый поток.

Введем условную поверхность раздела, ограничивающую ядро постоянного расхода эжектирующей струи. В кольцевом канале вне этой поверхности, очевидно, $G = G_2 = \text{const}$. Взаимодействие потоков можно в этом случае свести к переносу количества движения через поверхность раздела, а течение эжектируемого газа в первом приближении рассматривать как движение одномерного газового потока, на который оказывают влияние внешние воздействия: геометрическое — вследствие изменения площади сечения и механическое — связанное с переносом количества движения из эжектирующего потока.

Между сечением запирания и выходным сечением камеры площадь сечения выделенной трубки тока эжектируемого газа увеличивается — это следует из закономерностей течения нерасчетной сверхзвуковой струи, согласно которым максимальное сечение первой «бочки» является наибольшим сечением струи, возможным при $G = \text{const}$ (§ 6 гл. VII).

Уравнение (49) гл. V, определяющее изменение скорости потока под влиянием внешних воздействий, в данном случае можно записать в виде

$$(M^2 - 1)\frac{dw}{w} = \frac{dF}{F} - \frac{1}{a^2}dL.$$

Согласно этому уравнению, увеличение площади сечения ($dF > 0$) и подвод механической энергии ($dL < 0$) качественно одинаковым образом влияют на скорость течения: оба эти вида внешнего воздействия вызывают торможение ($dw < 0$) дозвукового потока и ускорение сверхзвукового потока.

Если скорость эжектируемого газа в сечении запирания дозвуковая (докритические режимы эжектора, $\lambda_2' < 1$), то при дальнейшем течении скорость потока в камере будет уменьшаться, оставаясь дозвуковой.

Таким образом, при докритических режимах работы эжектора, несмотря на наличие сверхзвуковой скорости в эжектирующей струе, эжектируемый газ в результате смешения не может приобрести сверхзвуковой скорости. Скорость смеси в камере будет дозвуковой, т. е. $\lambda_3 < 1$.

Если скорость эжектируемого газа в сечении запирания равна скорости звука (критические режимы работы эжектора), то увеличение площади сечения приводит к тому, что поток эжектируемого газа становится сверхзвуковым, и скорость его продолжает увеличиваться. В результате переноса механической энергии из сверхзвукового эжектирующего потока в сверхзвуковой эжектируемый первый поток тормозится, второй ускоряется, скорости потоков сравниваются по величине и могут остаться сверхзвуковыми в выходном сечении камеры, если не возникнет скачок уплотнения. Таким образом, сверхзвуковой режим течения смеси становится возможным только при критическом режиме работы эжектора.

Приведенный выше анализ усложняется, если температуры торможения газов различны, т. е. $\theta \neq 1$. В этом случае к рассмотренным двум видам воздействия на эжектируемый поток добавляется существенное тепловое воздействие; здесь могут быть получены качественно новые результаты.

С приближением к критическому режиму увеличение скорости течения на выходе из камеры не происходит непрерывно; при достижении $\lambda_2' = 1$ скорость смеси изменяется скачкообразно от дозвуковой (λ_3) до сверхзвуковой ($1/\lambda_3$), минуя некоторую область околозвуковых режимов, подобно тому как изменяется скорость потока на выходе из сопла Лаваля при постепенном увеличении перепада давлений. Это можно видеть на фотографиях потока в начальной части смесительной камеры (рис. 9.9 и 9.12). На рис. 9.9 режим работы эжектора докритический. Ядро сверхзвуковых скоростей в эжектирующем потоке уменьшается, на выходе из эжектора скорость дозвуковая. При незначительном увеличении давления перед соплом режим работы становится критическим, причем картина течения резко изменяется (рис. 9.12): характеристики, пересекающие поток, свидетельствуют о наличии сверхзвуковых скоростей, соответствующих $\lambda \approx 1{,}6$. Поток смеси при этом эксперименте оставался сверхзвуковым и на выходе из камеры.

К выводам, полученным выше из качественного рассмотрения упрощенной схемы течения в камере, можно прийти и иным

путем, анализируя обычную характеристику эжектора $\frac{p_1^*}{p_2^*} = f(n)$, представленную на рис. 9.17. Как указывалось, изменение рабочего режима эжектора при снятии такой характеристики достигается изменением статического давления на выходе из эжектора при постоянных условиях на входе. Пологая ветвь характеристики (AB) соответствует докритическим режимам. Уменьшение противодавления здесь приводит к увеличению коэффициента эжекции, т. е. к росту скорости эжектируемого газа и разрежения на входе в эжектор. Отсюда можно заключить, что в смесительной камере нет таких сечений, где оба потока (или поток смеси в целом) сверхзвуковые, так как в этом случае передача возмущений вверх по течению невозможна.

Следовательно, на режимах, соответствующих пологой ветви характеристики, реализуется дозвуковое течение в выходном сечении камеры и $\lambda_3 < 1$.

Точка B характеристики соответствует такому режиму, когда в сечении запирания эжектируемый поток становится звуковым ($\lambda_2' = 1$). После этого, действительно, дальнейшее снижение противодавления не изменяет расхода газов через эжектор. Постоянные предельные значения, не зависящие от противодавления, принимают коэффициент эжекции n и параметры смеси газов — приведенная скорость λ_3 и полное давление p_3^*. В случае дозвукового течения ($\lambda_3 < 1$) при этом была бы постоянной величина коэффициента сохранения полного давления в диффузоре $\sigma_д = f(\lambda_3)$, а следовательно, и величина полного давления газа на выходе из диффузора $p_4^* = \sigma_д p_3^*$. Другими словами, все режимы работы эжектора, соответствующие величине противодавления, меньшей критического значения, при $\lambda_3 < 1$ выражались бы одной точкой характеристики B ($p_4^* = \text{const}$, $n = \text{const}$). Однако экспериментальные данные показывают, что характеристика эжектора не обрывается в точке B; снижение противодавления на критическом режиме всегда приводит к падению полного давления смеси при постоянном значении коэффициента эжекции (ветвь BC). Легко убедиться, что это возможно только при сверхзвуковой скорости потока на входе в диффузор. Действительно, при $\lambda_3 > 1$ диффузор работает как расширяющаяся часть сопла Лаваля на нерасчетном режиме (§ 2 гл. IV). С уменьшением противодавления скачок уплотнения приближается к выходному сечению диффузора, коэффициент скорости перед скачком и потери полного давления в скачке возрастают, что приводит к снижению величины $\sigma_д$ и уменьшению p_4^* при $\lambda_3 = \text{const}$, $p_3^* = \text{const}$ и $n = \text{const}$. Таким образом, наличие вертикального участка BC на характеристике эжектор-

свидетельствует о том, что при критических режимах работы эжектора реальным является сверхзвуковое течение на выходе из смесительной камеры.

При достаточно низком противодавлении на критическом режиме поток смеси может остаться сверхзвуковым и на выходе из диффузора. Это может представлять интерес в тех случаях, когда используется скоростной напор потока смеси или возникающая при истечении реактивная сила; полное давление смеси при этом будет значительно выше, чем при $\lambda_4 < 1$. Однако в обычных схемах работы эжектора требуется получить возможно большее статическое давление газа на выходе из эжектора. Для этого сверхзвуковой поток, полученный на выходе из камеры смешения при критических режимах работы эжектора, необходимо перевести в дозвуковой. Принципиально здесь возможно применение сверхзвукового диффузора, где торможение будет происходить без скачков или в системе скачков с небольшими потерями. Обычно, однако, в эжекторах применяются конические диффузоры дозвукового типа, в которых сверхзвуковой поток тормозится с образованием скачка уплотнения. Если считать скачок уплотнения прямым, то легко видеть, что минимальные потери полного давления в нем будут тогда, когда скачок располагается непосредственно перед входным сечением диффузора, т. е. возникает в сверхзвуковом потоке с приведенной скоростью λ_3.

За скачком приведенная скорость потока в этом случае будет равна $1/\lambda_3 < 1$, что соответствует дозвуковому решению уравнения (37) λ_3''. Точно так же величины полного и статического давлений за скачком — на входе в диффузор — в этом случае получаются такими, как при дозвуковом режиме течения смеси для заданных начальных параметров газа.

Таким образом, при проектировании эжектора, который при работе на критическом режиме должен давать дозвуковой поток смеси, коэффициент скорости λ_3 следует находить из *дозвукового* решения уравнения (37), т. е. так же, как и на докритических режимах. Это соответствует оптимальному режиму торможения полученного сверхзвукового потока. В выходном сечении диффузора на этом режиме получается максимально достижимое при $n = n_{\max}$ значение полного и статического давления смеси. При любом увеличении давления на выходе (например, при дросселировании выходной магистрали) эжектор должен перейти на докритический режим с понижением λ_2 и n. Однако анализ процесса с учетом трения о стенки камеры смешения показывает, что изменение режима от оптимального к докритическому происходит не сразу, а постепенно, и требует некоторого конечного приращения величины p_4. При достаточно длинной камере смешения возможна область режимов эжектора с кри-

тическими условиями течения в начальном участке, т. е.

$$\lambda_2' = 1; \quad \lambda_2 = \lambda_{2\,\max}; \quad n = n_{\max},$$

и дозвуковым потоком на выходе из камеры. При этом скачок уплотнения образуется в некотором промежуточном сечении основного участка камеры и с ростом противодавления постепенно перемещается к сечению запирания. В камере возникает течение, аналогичное движению одномерного сверхзвукового потока в трубе с трением, когда располагаемый перепад давлений недостаточен для поддержания на выходе $\lambda > 1$ (см. § 7 гл. V).

Выше были рассмотрены условия, при которых реализуется дозвуковой или сверхзвуковой режим течения на выходе из смесительной камеры. С помощью уравнения количества движения можно определить условия, когда на выходе из камеры будет получен звуковой режим течения ($\lambda_3 = 1$). Для случая равных температур торможения смешивающихся газов ($\theta = 1$) и без учета трения уравнение (37) преобразуется к виду

$$z(\lambda_3) = \frac{z(\lambda_1) + nz(\lambda_2)}{1+n}.$$

Отсюда легко получить выражения

$$z(\lambda_3) = z(\lambda_1) + \frac{n}{n+1}\Delta z \quad \text{и} \quad z(\lambda_3) = z(\lambda_2) - \frac{1}{n+1}\Delta z,$$

где $\Delta z = z(\lambda_2) - z(\lambda_1)$.

Независимо от знака величины Δz из двух последних соотношений видно, что численное значение функции $z(\lambda_3)$ будет лежать между величинами $z(\lambda_1) \geqslant 2$ и $z(\lambda_2) \geqslant 2$. Исключая как не представляющий интереса случай $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ($w_1 = w_2 = w_3$), устанавливаем, что для любых начальных условий при $\theta = 1$ из уравнения (37) определяется значение $z(\lambda_3) > 2$, которое соответствует двум действительным значениям λ_3, отличающимся от единицы. Таким образом, при равных температурах торможения газов звуковой режим течения смеси на выходе из камеры невозможен. Если температуры торможения смешивающихся газов различны ($\theta \neq 1$), то из уравнения количества движения, наряду с действительными решениями $z(\lambda_3) > 2$, при определенных сочетаниях начальных параметров газов могут быть найдены решения $z(\lambda_3) < 2$, соответствующие *физически невозможным* режимам течения и указывающие на то, что принятые значения скорости и расхода эжектируемого газа не могут быть реализованы. Область реальных режимов ограничивается звуковой скоростью течения на выходе из камеры. Из уравнения (37) легко определить, при какой скорости эжектируемого газа наступает этот режим. Положив $z(\lambda_3) = 2$,

находим

$$z(\lambda_2) = z(\lambda_2)_{\min} = \frac{2\sqrt{(n+1)(n\theta+1)} - z(\lambda_1)}{n\sqrt{\theta}}.$$

В области дозвуковых скоростей минимальной величине $z(\lambda_2)$ соответствует максимально возможное значение приведенной скорости эжектируемого газа λ_2. Это значение λ_2 может оказаться меньшим предельной величины $\lambda_{2пр}$, которую мы выше находили из условий достижения скорости звука в сечении запирания ($\lambda_2' = 1$). Таким образом, здесь реально возможные режимы работы эжектора ограничены кризисом течения смеси в выходном сечении камеры смешения ($\lambda_3 = 1$). Это возможно

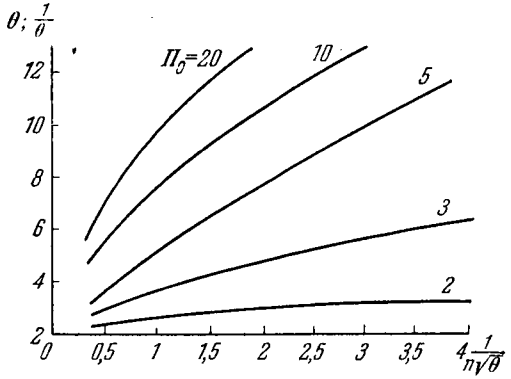


Рис. 9.19. Предельные режимы работы эжектора, соответствующие звуковой скорости смеси в выходном сечении камеры; $k = 1{,}4$.

только при значительном различии начальных температур торможения газов как при $\theta > 1$, так и при $\theta < 1$, причем свидетельством выхода в область нового ограничения режима является получение из уравнения (37) величины $z(\lambda_3) < 2$.

На рис. 9.19 приведены результаты расчета предельных режимов звуковых эжекторов с различными начальными параметрами. Ниже каждой из кривых, показанных на графике, находится область, в которой предельный режим определяется сечением запирания, и звуковое течение на выходе из камеры не реализуется. При большем различии в температурах торможения скорость эжектирования лимитируется звуковым режимом в выходном сечении камеры. Чем больше отношение давлений газов $p_1^*/p_2^* = \Pi_0$, тем большим должно быть различие температур, при котором возможен кризис течения на выходе из камеры. Отметим, что кризис течения на выходе из цилиндрической

смесительной камеры возможен в ряде случаев и при равных температурах торможения газов, если в процессе смешения к газу подводится тепло или если в камере имеются значительные потери, связанные с трением о стенки.

§ 7. Особенности работы эжектора со сверхзвуковым соплом

При выводе основных уравнений для расчета смесительной камеры, а также при рассмотрении условий существования режима не вводилось каких-либо ограничений величины приведенной скорости эжектирующего газа в выходном сечении сопла λ_1. Поэтому изложенный выше метод расчета смесительной камеры по конечным сечениям в равной степени применим к эжекторам как с нерасширяющимся, так и со сверхзвуковым соплом эжектирующего газа. Однако протекание процессов в начальном участке камеры в случае применения сверхзвукового сопла имеет некоторые особенности.

При сверхкритических отношениях давлений эжектирующий газ покидает нерасширяющееся сопло со звуковой скоростью, причем статическое давление в нем превышает давление в окружающем его эжектируемом газе; дальнейшее расширение и разгон газа до сверхзвуковых скоростей происходит в начальном участке свободной струи. Если применить расчетное сверхзвуковое сопло, то расширение газа произойдет полностью внутри сопла, на срезе сопла давление газа p_1 сравняется с давлением эжектируемого потока p_2; рассмотренного выше начального участка не будет.

Различие между этими процессами состоит в том, что течение газов в начальном участке свободной струи происходит без воздействия внешних сил, т. е. при сохранении суммарного импульса потоков, в то время как при ускорении в сверхзвуковом сопле вследствии силового взаимодействия с его стенками суммарный импульс потока может измениться. В первом случае сверхзвуковой поток в сечении запирания существенно перерасширен: в центральной части потока статическое давление значительно ниже, а скорость соответственно выше, чем на границе струи.

Во втором случае при надлежащей профилировке сопла можно на выходе из него получить сверхзвуковой поток с постоянными по всей площади параметрами и статическим давлением, равным давлению в окружающем его эжектируемом потоке.

Осредняя в звуковом эжекторе параметры эжектирующего потока в сечении запирания так, чтобы сохранить величину расхода, импульса и энергии, получаем, как указывалось выше, некоторый эквивалентный одномерный поток, статическое давление в котором p_1' меньше, а приведенная скорость λ_1' больше,

чем при расширении газа от начального полного давления p_1^* до статического давления p_2 в идеальном сверхзвуковом сопле. Скорость же эжектируемого потока в сечении запирания при данной величине p_2 будет в обоих случаях одинаковой и, в частности, на критическом режиме равной скорости звука.

Таким образом, разность средних скоростей эжектирующего и эжектируемого газов перед смешением в случае нерасширяющегося сопла будет большей, чем для расчетного сверхзвукового сопла, где отсутствует перерасширение газа в сечении запирания. Бóльшими будут и потери на удар при смешении потоков. Другим следствием перерасширения потока и увеличения средней величины λ_1' для эжектора с нерасширяющимся соплом является увеличение площади эжектирующей струи в сечении запирания F_1' по сравнению с площадью выходного сечения расчетного сверхзвукового сопла. Поскольку при заданном расходе эжектируемого газа площадь критического сечения F_2' одинакова в обоих случаях, то суммарная площадь потоков в сечении запирания $F_1' + F_2'$ для эжектора с нерасширяющимся соплом будет большей, чем для эжектора с расчетным сверхзвуковым соплом. Иными словами, применение сверхзвукового сопла позволяет при заданных начальных параметрах и расходах газов получить эжектор с меньшей площадью камеры смешения.

Очевидно, что различие в площади камеры будет тем больше, чем больше отношение давлений Π_0, т. е. чем больше увеличение площади потока в сечении запирания, и чем меньше коэффициент эжекции. С уменьшением относительной площади камеры, как уже указывалось, можно при тех же начальных параметрах газов и $\lambda_3 < 1$ получить эжектор с большей напорностью. Поэтому в случае больших отношений давлений ($\Pi_0 > 6$—7) и при малых значениях коэффициента эжекции ($n < 0{,}4$—$0{,}5$) может быть целесообразным применение в эжекторе сверхзвукового сопла для эжектирующего газа.

Результаты расчетов эжектора для различных сочетаний начальных параметров и расходов газов показывают следующее: если эжектор работает на критическом (т. е. наивыгоднейшем) режиме и скорость смеси превышает скорость звука ($\lambda_3 > 1$), то полное давление смеси на выходе из камеры p_3 практически одинаково для эжекторов с нерасширяющимся и сверхзвуковым соплом даже при весьма больших значениях отношения давлений ($\Pi_0 = 20$—100) и при любых коэффициентах эжекции; процесс смешения происходит в ускоряющемся потоке, потери на удар невелики и различие между ними в различных эжекторах несущественно. Однако поскольку потребная площадь камеры смешения при сверхзвуковом сопле получается меньшей, то меньше и величина λ_3 сверхзвукового потока, так как при

$G = \text{const}$, $T_3^* = \text{const}$ и $p_3^* = \text{const}$

$$q(\lambda_3) = \frac{\text{const}}{F_3}.$$

Если в выходном сечении камеры возникает скачок уплотнения (как указывалось, это соответствует наивыгоднейшему критическому режиму работы эжектора с дозвуковым потоком на выходе из диффузора), то потери полного давления в нем будут меньшими в случае сверхзвукового сопла, при котором меньше скорость сверхзвукового потока перед скачком. Таким образом, при работе эжектора на критическом режиме с дозвуковым потоком смеси применение сверхзвукового сопла позволяет получить бóльшую величину полного давления p_3^*. Это преимущество сохраняется также и при работе на докритических режимах ($\lambda_2' < 1$), следовательно, во всех случаях, когда в выходном сечении камеры поток дозвуковой.

Возникает вопрос, на какое отношение давлений должно быть рассчитано сверхзвуковое сопло, чтобы полное давление смеси газов было наивысшим? Это можно установить исходя из того, что при оптимальном сопле площадь эжектирующей струи в сечении запирания будет наименьшей для заданного расхода и начальных параметров газов. Из теоретических и экспериментальных исследований нерасчетных сверхзвуковых струй известно, что максимальная площадь первой «бочки» струи будет тем меньше, чем меньше избыточное статическое давление на срезе сопла, т. е. чем меньше *степень нерасчетности*. Поскольку максимальная площадь первой «бочки» свободной струи всегда больше площади выходного сечения идеального сопла Лаваля, то естественным был бы вывод о том, что площадь струи в сечении запирания будет наименьшей, если степень расширения сверхзвукового сопла эжектирующего газа будет соответствовать располагаемому отношению давлений

$$\frac{p_1^*}{p_2'} = \frac{\Pi_0}{\pi(\lambda_2')}.$$

Расчеты, однако, показывают, что наивыгоднейшие параметры эжектора получаются при степени расширения сопла, заметно меньшей расчетного значения. На рис. 9.20, 9.21 приведены расчетные кривые показывающие изменение полного давления смеси газов ($\lambda_3 < 1$) в зависимости от выбранной величины приведенной скорости эжектирующего газа в выходном сечении сопла λ_1 при постоянных значениях коэффициента эжекции и отношения полных давлений газов. Кривые $n = \text{const}$ соответствуют, таким образом, эжекторам с одинаковыми начальными параметрами и расходами газов, но с различной степенью рас-

ширения сверхзвукового сопла эжектирующего газа. Значение $\lambda_1 = \lambda_{p1}$ соответствует расчетному сверхзвуковому соплу (для $\Pi_0 = 10$, $\lambda_{p1} = 1{,}85$; для $\Pi_0 = 50$, $\lambda_{p1} = 2{,}09$).

Из графиков на рис. 9.20 и 9.21 видно, что степень расширения сверхзвукового сопла существенно влияет на эффективность эжектора, в особенности при малых значениях коэффициента эжекции. Максимальное значение полного давления газов получается при $\lambda_1 = \lambda_0 < \lambda_{p1}$, т. е. соответствует соплу с *неполным расширением*. Из изложенных выше соображений следует, что при этом значении λ_1 площадь эжектирующего потока в сечении запирания будет минимальной, т. е. меньшей, чем площадь выходного сечения расчетного сопла Лаваля. Физический смысл этого результата, на первый взгляд противоречащего известным свойствам нерасчетной сверхзвуковой струи, можно выяснить при помощи данных, полученных в § 6 гл. VII [1]). При рассмотрении закономерностей начального участка недорасширенной сверхзвуковой струи было доказано следующее положение: площадь максимального сечения первой «бочки» струи, перерасширение газа в этом сечении и суммарные потери полного давления в системах скачков в начальном участке струи уменьшаются, если увеличить силу, действующую на струю со стороны ее границ в направлении движения газа. Это означает, что для уменьшения максимальной площади струи и снижения потерь целесообразно увеличивать степень расширения сопла лишь до таких значений, при которых сила реакции, действующая на стенки сопла в направлении, обратном движению газа, будет увеличиваться.

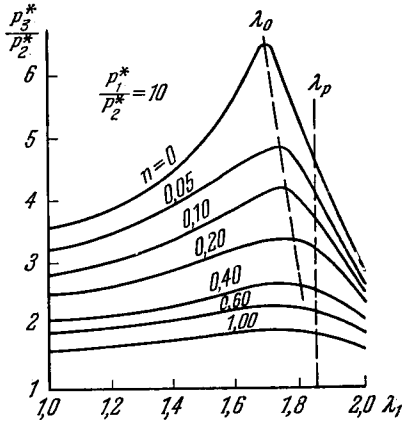


Рис. 9.20. Параметры эжекторов со сверхзвуковым соплом в зависимости от приведенной скорости в выходном сечении сопла; $\Pi_0 = 10$, $k = 1{,}4$.

Статическое давление в эжектируемом потоке переменно и обычно уменьшается по длине камеры, поэтому эффективность каждого дополнительного участка сверхзвуковой части сопла ΔF (в отношении влияния на максимальную площадь струи и потери полного давления) может быть оценена по величине

[1]) Черкез А. Я., О некоторых свойствах сверхзвукового течения в начальном участке газового эжектора, Изв. Академии наук СССР, ОТН, № 6. 1962.

и знаку силы реакции на стенках этого участка

$$\Delta P = \int\limits_{(\Delta F)} (p_1 - p_2)\, dF,$$

где p_1 и p_2 — давление внутри и снаружи сопла соответственно. Пусть сопло выполнено с расчетной степенью расширения, т. е. в выходном его сечении статические давления эжектирующего и эжектируемого газов равны. Чтобы установить, является ли такое сопло (рис. 9.22) оптимальным в указанном выше смысле, определим как меняется статическое давление в каждом из потоков на небольшом участке $c - c'$ вблизи выходного сечения сопла.

Из уравнения неразрывности потока при $G = \text{const}$, $p^* = \text{const}$ и $T^* = \text{const}$ следует

$$Fq(\lambda) = \text{const},$$

причем статическое давление в любом сечении равно

$$p = p^* \pi(\lambda).$$

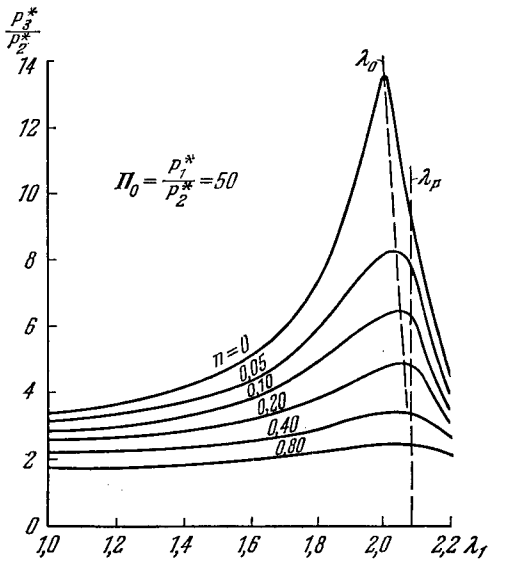


Рис. 9.21. Параметры эжекторов со сверхзвуковым соплом в зависимости от приведенной скорости в выходном сечении сопла; $\Pi_0 = 50$, $k = 1{,}4$.

Логарифмированием и дифференцированием этих соотношений получаем

$$\frac{dF}{F} = -\frac{dq(\lambda)}{q(\lambda)}; \quad \frac{dp}{p} = \frac{d\pi(\lambda)}{\pi(\lambda)}.$$

Записав последние соотношения в виде

$$\delta F = -\delta q(\lambda) \quad \text{и} \quad \delta p = \delta\pi(\lambda)$$

или

$$\frac{\delta p}{\delta F} = -\frac{\delta\pi(\lambda)}{\delta q(\lambda)}, \tag{38}$$

будем считать их приближенно справедливыми и для малых конечных приращений параметров, связанных с переходом от сечения c к сечению c' и соответствующим изменением площади сопла F_1 на величину $\Delta F_1 = F_1' - F_1$ и площади F_2 на величину $\Delta F_2 = -\Delta F_1$.

Записав выражения вида (38) для каждого из потоков на участке $c-c'$ и обозначив логарифмическую производную

$$\frac{\delta\pi(\lambda)}{\delta q(\lambda)}=\frac{\delta\pi(\lambda)}{\delta\lambda}\cdot\frac{\delta\lambda}{\delta q(\lambda)}=\frac{2k}{k+1}\,\frac{\lambda^2}{\lambda^2-1}=b(\lambda),$$

можно получить

$$\frac{\delta p_2}{\delta p_1}=\frac{\delta F_2}{\delta F_1}\cdot\frac{b(\lambda_2)}{b(\lambda_1)}. \tag{39}$$

Поскольку абсолютные значения p_1 и p_2 в сечении c одинаковы и

$$\frac{\delta F_2}{\delta F_1}=\frac{\Delta F_2}{F_2}\cdot\frac{F_1}{\Delta F_1}=-\alpha,$$

то из выражения (39) можно получить соотношение между приращениями статических давлений в потоках на участке $c-c'$ в виде

$$\frac{\Delta p_2}{\Delta p_1}=-\alpha\,\frac{b(\lambda_2)}{b(\lambda_1)}.$$

На рис. 9.23 приведен график функции $b(\lambda)$ для $k=1{,}4$. В области дозвуковых скоростей $b(\lambda)<0$, при $\lambda>1$ $b(\lambda)>0$, при

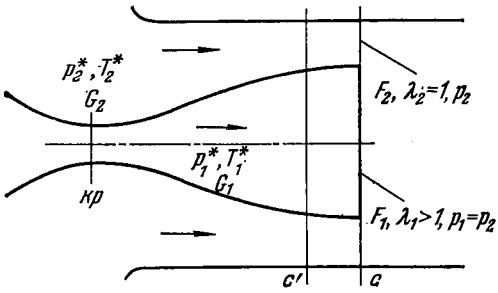


Рис. 9.22. Схема эжектора с расчетным сверхзвуковым соплом.

$\lambda\to 1$ $|b(\lambda)|\to\infty$. Последнее означает, что в околозвуковом эжектируемом потоке абсолютная величина $b(\lambda)$ будет значительно больше, чем в сверхзвуковом эжектирующем потоке, и при любом конечном значении α для критического режима работы эжектора ($\lambda_2=1$) получается $\Delta p_2\gg\Delta p_1$. Другими словами, давление с внешней стороны сопла будет при уменьшении F_1 возрастать значительно быстрее, чем давление газа внутри сопла; поскольку в сечении c $p_1=p_2$, то вблизи среза расчетного сопла всегда будет участок, на котором давление p_2 будет больше, чем p_1.

Расчеты показывают (рис. 9.24), что действительно на конечном участке расчетного сверхзвукового сопла при всех зна-

чениях Π_0, n и α давление во внешнем потоке выше, чем во внутреннем. Сила реакции ΔP, действующая на стенки этой части сопла, направлена в сторону движения струи, т. е. $\Delta P < 0$. Как было установлено выше, действие этой силы приводит к увеличению площади максимального сечения струи. Если отбросить концевую часть сопла от сечения, где $p_1 = p_2$, то суммарная сила избыточного давления, действующая на поток со-

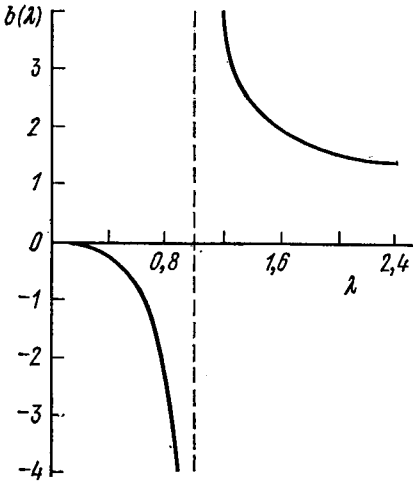


Рис. 9.23. График функции $b(\lambda) = \delta\pi(\lambda)/\delta q(\lambda)$, $k = 1{,}4$.

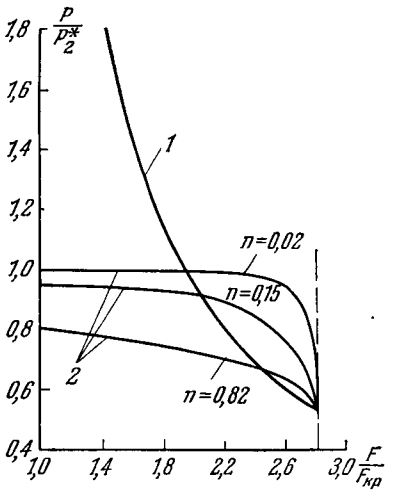


Рис. 9.24. Изменение статического давления внутри (*1*) и вне (*2*) расчетного сверхзвукового сопла эжектора на критическом режиме; $\Pi_0 = 10$.

стороны стенок сверхзвуковой части сопла [1]), возрастет и площадь максимального сечения струи уменьшится. При этом появляется возможность уменьшить суммарную площадь канала, если заданы параметры и расход внешнего потока и, следовательно, площадь его критического сечения $F_{кр2}$.

Если сохранить постоянной площадь канала, то увеличится расход внешнего газа — режим работы отдалится от режима запирания.

---

[1]) Эта сила, равная $P = \int_{F_{кр}}^{F_1} (p_1 - p_2)\, dF$, пропорциональна площади, заключенной между кривыми p_1 и p_2 на рис. 9.24. В «петле» перерасширения между точками пересечения кривых сила отрицательна.

Одновременно из-за уменьшения перерасширения газа снизятся суммарные внутренние потери в скачках уплотнения на начальном участке струи и повысится полный напор полученной смеси газов.

Заметим, что при $\Pi_0 < 5$ и малых значениях коэффициента эжекции участок местного перерасширения велик, и суммарная сила реакции на сверхзвуковой части расчетного сопла Лаваля оказывается направленной по потоку. Переходя в этом случае к нерасширяющемуся соплу, т. е. отбросив всю сверхзвуковую часть сопла Лаваля, можно получить указанный выше полезный эффект. Действительно, расчеты и опыты показывают, что при малых значениях Π_0 звуковой эжектор обеспечивает большее полное давление газа и запирается при бóльших значениях Π_0 и α (рис. 9.25), чем эжектор с расчетным сверхзвуковым соплом. При $\Pi_0 > 5$ имеем всегда $P > 0$, поэтому эжектор с расчетным сверхзвуковым соплом эффективнее звукового эжектора,

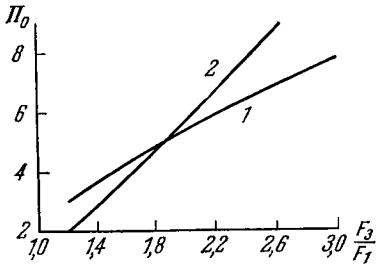


Рис. 9.25. Предельное отношение полных давлений газов (режим запирания) для эжекторов со звуковым (*1*) и расчетным сверхзвуковым (*2*) соплом.

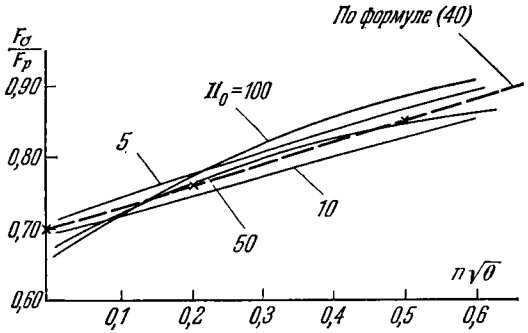


Рис. 9.26. Соотношение между площадью выходного сечения оптимального и расчетного сверхзвукового сопла.

хотя и уступает в эффективности эжектору с оптимальной степенью расширения сопла.

На рис. 9.26 приведены зависимости $F_0/F_p = f(n\sqrt{\theta})$, где F_p — расчетная, F_0 — оптимальная площадь выходного сечения сопла.

Эти зависимости апроксимируются формулой

$$\frac{F_0}{F_p} = 0{,}7 + 0{,}3n\sqrt{\theta}\,, \qquad (40)$$

справедливой для $\Pi_0 = 5$—300 при $n\sqrt{\theta} = 0 - 0{,}6$. Если сравнить результаты расчета по формуле (40) с данными, приведенными выше (рис. 9.20, 9.21), то можно отметить хорошее соответствие полученных оптимальных значений степени расширения сопла.

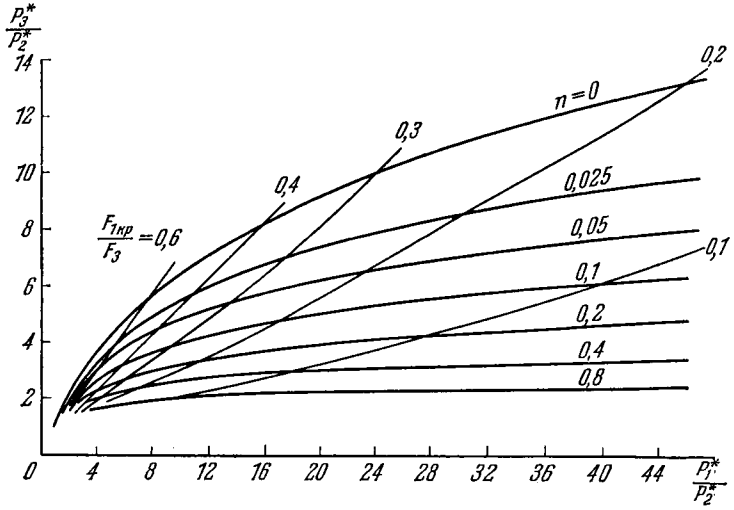


Рис. 9.27. График для определения параметров эжектора с оптимальным сверхзвуковым соплом на критическом режиме ($k = 1{,}4$).

Таким образом, физический смысл существования оптимальной степени расширения сопла, величина которой меньше расчетного значения, заключается в том, что вследствие различного градиента давлений в эжектирующем и эжектируемом потоках вблизи выходного сечения расчетного сопла всегда имеется участок перерасширения, которое отрицательно сказывается на параметрах системы.

Принципиальным преимуществом эжектора со сверхзвуковым соплом перед эжектором с нерасширяющимся соплом является возможность получения бóльших степеней повышения давления эжектируемого газа. На рис. 9.15 было показано, что максимальная степень увеличения давления $p_3^*/p_2^* = 3{,}55$ в эжекторе с нерасширяющимся соплом получается при $\Pi_0 = 11$—13. В эжекторе со сверхзвуковым (расчетным или оптимальным) соплом при возрастании Π_0 потребная площадь

сечения камеры смешения растет медленнее и полное давление p_3^* непрерывно увеличивается с увеличением Π_0 (рис. 9.27). Теоретически и экспериментально показана возможность получения в таком эжекторе степени повышения давления эжектируемого газа $p_3^*/p_2^* = 10 - 20$ и более, разумеется, при очень малых значениях коэффициента эжекции. С увеличением коэффициента эжекции до 0,5—0,6 преимущества эжектора со сверхзвуковым соплом уменьшаются, даже при достаточно больших значениях Π_0.

Следует учитывать, что при уменьшении отношения давлений по сравнению с расчетной величиной сопло начинает работать с перерасширением газа, характеристики эжектора со сверхзвуковым соплом значительно ухудшаются и, начиная с некоторого значения Π_0, становятся по всем показателям хуже характеристик эжектора с нерасширяющимся соплом. На рис. 9.20, 9.21 это видно по резкому снижению кривых $p_3^*/p_2^* = f(\lambda_1)$ при $\lambda_1 > \lambda$ и особенно при $\lambda_1 > \lambda_{p1}$. Поэтому если эжектор должен работать в широком диапазоне режимов, то, несмотря на некоторое ухудшение данных на расчетном режиме, целесообразно значительно уменьшить по сравнению с оптимальной степень расширения в сверхзвуковом сопле или применять нерасширяющееся сопло.

§ 8. Приближенные формулы расчета эжектора

Изложенный метод расчета эжектора позволяет разрешать любые задачи, связанные с определением размеров, параметров и характеристик эжектора.

Недостатком этого метода является отсутствие явных аналитических зависимостей искомых величин от заданных и необходимость при вычислениях применять метод последовательных приближений. Поэтому влияние того или иного фактора на параметры эжектора обнаруживается лишь после детальных расчетов. Существуют, однако, некоторые приближенные соотношения, позволяющие более просто и наглядно оценивать связь между различными параметрами эжектора и их взаимное влияние.

Рассмотрим некоторые из таких соотношений. В уравнения для расчета эжектора (12) и (13) входит выражение

$$\frac{G_3 a_{\text{кр3}}}{G_1 a_{\text{кр1}}} = \sqrt{(n+1)(n\theta+1)}\,.$$

Можно показать, что погрешность приближенного равенства

$$\sqrt{(n+1)(n\theta+1)} \approx n\sqrt{\theta} + 1 \qquad (41)$$

в широком диапазоне изменения величин n и θ не превосходит 3—5%. Поэтому заменим радикалы $\sqrt{(n+1)(n\theta+1)}$ в формулах (12) и (13) их приближенным значением (41). Рассматривая теперь систему основных уравнений эжектора, отметим, что величины коэффициента эжекции n и отношения температур торможения θ в уравнения входят только совместно, в виде комплекса $n\sqrt{\theta}$. Если величины n и θ изменять таким образом, чтобы $n\sqrt{\theta}=\text{const}$, то эти уравнения будут удовлетворяться при одних и тех же значениях всех параметров потока как на входе, так и на выходе из эжектора.

Представим теперь, что для заданного эжектора (для фиксированных значений геометрических параметров α и f) при сохранении полных давлений газов p_1^*, p_2^* и давления на выходе p_4 изменится отношение температур торможения θ. Согласно основным уравнениям при этом произойдет изменение коэффициента эжекции

$$n = n_0\sqrt{\frac{\theta_0}{\theta}}, \qquad (42)$$

где n_0 и θ_0 — значения величин на исходном режиме. Равенство (42) является первым приближенным соотношением, позволяющим оценить параметры эжектора при изменении θ; оно хорошо подтверждается экспериментом.

Рассмотрим, например, что происходит с эжектором при повышении температуры торможения эжектирующего газа T_1^* при $T_2^*=\text{const}$. Если $F_1=\text{const}$ и $p_1^*=\text{const}$, то расход газа через сопло G_1 изменяется обратно пропорционально корню квадратному из T_1^*, так что $G_1\sqrt{T_1^*}=\text{const}$. Из приближенной формулы (42) в данном случае следует

$$n\sqrt{\theta}=\frac{G_2}{G_1}\sqrt{\frac{T_2^*}{T_1^*}}=\text{const}, \quad \text{или} \quad \frac{G_2}{G_1\sqrt{T_1^*}}=\text{const}.$$

Сравнивая это выражение с предыдущим, получаем $G_2=\text{const}$. Таким образом, увеличение коэффициента эжекции при повышении температуры торможения эжектирующего газа связано лишь со снижением расхода этого газа G_1; расход G_2 эжектируемого газа при изменении T_1^* не изменяется. Так как p_2^*, F_2 и T_2^* постоянны по условию, то последнее возможно только в том случае, если статическое давление p_2 во входном сечении смесительной камеры не зависит от температуры торможения T_1^*. Таким образом, из приближенной зависимости (42) следует практически важный вывод: *при изменении температуры одного*

из газов расход и скорость другого, а также статическое давление на входе в камеру смешения остаются неизменными. На рис. 9.28 приведены экспериментальные данные, подтверждающие эту приближенную зависимость.

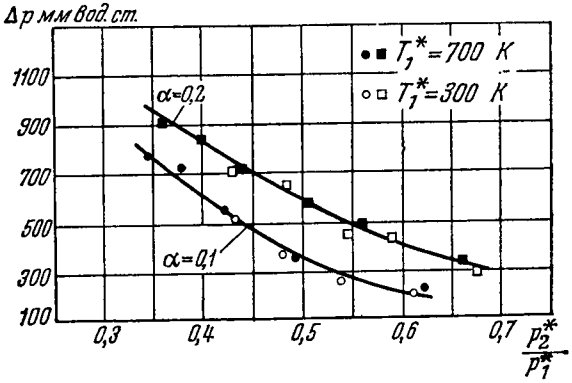


Рис. 9.28. Зависимость разрежения на входе в камеру смешения от отношения полных давлений газов; $p_2^* = p_3$, $\Delta p = p_2^* - p_2$.

Из общих уравнений процесса смешения потоков можно получить еще одну важную приближенную зависимость. Заменим в уравнении (10) полные импульсы потоков согласно (119) гл. V:

$$Gw + pF = p^* F f(\lambda).$$

Тогда уравнение (10) примет вид

$$p_3^* F_3 f(\lambda_3) = p_1^* F_1 f(\lambda_1) + p_2^* F_2 f(\lambda_2). \qquad (43)$$

Учитывая, что при дозвуковой скорости на выходе из камеры обычно $\lambda_2 < \lambda_3 < \lambda_1$, т. е. $f(\lambda_2) < f(\lambda_3) < f(\lambda_1)$, а также принимая во внимание пологость функции $f(\lambda)$ в области дозвуковых скоростей, можно без заметной погрешности отбросить множители $f(\lambda)$ при всех членах уравнения (43) и записать следующее приближенное выражение:

$$p_3^* F_3 \approx p_1^* F_1 + p_2^* F_2.$$

Используя здесь условие $F_3 = F_1 + F_2$, получим после деления правой и левой части на F_2 приближенную формулу для определения полного давления в потоке после смешения

$$p_3^* = \frac{\alpha p_1^* + p_2^*}{1 + \alpha}. \qquad (44)$$

Формула (44) показывает, что в процессе смешения газовых потоков происходит осреднение полного давления по сечению, т. е. полное давление потока на выходе из цилиндрической смесительной камеры равно среднему по площади значению полного давления во входном сечении камеры.

Расчеты по формуле (44) показывают также, что точность ее вполне удовлетворительна, если величины λ_1, λ_2 и λ_3 лежат в области значений 0,15—1,1 и отношение температур торможения $0{,}3 < \theta < 3$, причем погрешность незначительно увеличивается с ростом отношения давлений p_1^*/p_2^*. Если обратиться к рис. 9.15, на котором приведены результаты расчетов звуковых эжекторов с различными геометрическими параметрами, то можно заметить, что сетка прямых $\alpha = \text{const}$ устанавливает связь между полными давлениями p_1^*, p_2^* и p_3^*, соответствующую формуле (44), которую можно представить в виде линейной зависимости

$$\frac{p_3^*}{p_2^*} = \frac{\alpha}{\alpha+1}\Pi_0 + \frac{1}{\alpha+1}.$$

Значения p_3^*/p_2^* по формуле (44) всего на 2—4% меньше величин, приведенных на рис. 9.15.

Согласно приближенной формуле (44) полное давление смеси при заданных начальных давлениях газов и постоянных размерах эжектора не зависит от относительного расхода эжектируемого газа. Это практически совпадает с данными точной характеристики эжектора (рис. 9.16), которая показывает, что полное давление смеси весьма мало изменяется с увеличением коэффициента эжекции n, несмотря на то, что количество энергии эжектирующего газа, приходящееся на единицу расхода эжектируемого газа, при этом уменьшается во много раз.

Сохранение величины полного давления смеси является следствием того, что одновременно с ростом коэффициента эжекции увеличивается скорость эжектируемого газа и уменьшаются ударные потери при смешении потоков.

Формула (44) удобна тем, что позволяет по заданным величинам p_1^*, p_2^* и α непосредственно определять полное давление смеси p_3^*, которое почти всегда является конечным искомым параметром. Это значительно уменьшает объем вычислительной работы по сравнению с точным методом расчета, согласно которому полное давление смеси определяется лишь после нахождения всех коэффициентов скорости и коэффициента эжекции. Следует, однако, иметь в виду, что при таком упрощенном расчете нельзя выяснить, будет ли реальным рассматриваемый

режим работы эжектора; это устанавливается изложенными в § 4 условиями существования.

Из формулы (44) вытекает следующее практически важное правило, справедливое не только для звуковых, но и для сверхзвуковых эжекторов: для получения большей величины полного давления смеси на выходе из эжектора следует, сколько возможно, уменьшать относительную площадь камеры смешения, т. е. увеличивать α. При сверхкритическом отношении давлений в сопле эжектирующего газа наименьшая возможная площадь сечения смесительной камеры соответствует разгону эжектируемого потока в сечении запирания до скорости звука, т. е. критическому режиму работы эжектора. Таким образом, согласно изложенному правилу критический режим работы эжектора оказывается наивыгоднейшим, что соответствует данным расчетов и экспериментов. Следует, однако, учитывать, что чем меньше площадь смесительной камеры, тем больше при данных расходах газов скорость на входе в диффузор, т. е. больше потери в диффузоре.

Приближенные формулы (42) и (44) позволяют установить простую зависимость между температурой газов и полным давлением потока после смешения. Здесь надо различать два случая вычисления полного давления смеси:

а) при изменении температуры одного или обоих газов и условии $\alpha = \text{const}$,

б) при изменении температуры газов и условии $n = \text{const}$.

В обоих случаях предполагается $p_1^* = \text{const}$ и $p_2^* = \text{const}$. Согласно приближенной формуле (44) в первом случае полное давление смеси p_3^* при изменении θ не изменяется и не зависит от начальных температур торможения газов. Однако при этом, согласно (42), изменится коэффициент эжекции, так как чем больше θ, тем меньше величина n. Чтобы сохранить прежнее значение коэффициента эжекции, необходимо увеличить относительную площадь сопла, расход через которое уменьшился. Соответственно при $n = \text{const}$ среднее по площади входного сечения полное давление и равное ему полное давление смеси p_3^* приблизятся к полному давлению более нагретого газа. Поэтому, например, повышая температуру эжектирующего газа и изменяя отношение площадей F_1/F_2 таким образом, чтобы сохранить постоянным коэффициент эжекции, можно получить большее значение полного давления смеси газов.

Приближенные соотношения (42) и (44) весьма полезны при качественном анализе параметров эжектора. Если же допустима погрешность в 3—5%, то этими соотношениями можно пользоваться и для предварительного количественного расчета.

§ 9. Примеры расчета эжектора

Пример 1. Для испытательного стенда, показанного на рис. 9.2, требуется подобрать эжектор, обеспечивающий поток воздуха для вентиляции помещения и охлаждения испытуемого двигателя. Расход воздуха нужно выбрать так, чтобы температура газов в выхлопной шахте была не выше 600 К. Параметры газа на выходе из реактивного сопла двигателя $p_1^* = 2 \cdot 10^5$ Н/м^2, $T_1^* = 900$ К. Параметры воздуха в боксе: $p_2^* = 1{,}03 \cdot 10^5$ Н/м^2, $T_2^* = 300$ К. Статическое давление в выхлопной шахте $1{,}05 \cdot 10^5$ Н/м^2.

Расчет начнем с определения потребного коэффициента эжекции. Пренебрегая различием в теплоемкостях газа и воздуха, из формулы (7) получаем

$$\frac{T_3^*}{T_1^*} = \frac{1}{n+1}\left(1 + n\frac{T_2^*}{T_1^*}\right)$$

или

$$n = \frac{G_2}{G_1} = \frac{T_1^* - T_3^*}{T_3^* - T_2^*} = \frac{900 - 600}{600 - 300} = 1.$$

Таким образом, требуемое по условию задачи снижение температуры газов может быть достигнуто путем подмешивания воздуха в количестве, равном расходу газа через двигатель.

Определяем безразмерные параметры

$$\Pi_0 = \frac{p_1^*}{p_2^*} = \frac{2}{1{,}03} = 1{,}94, \quad \theta = \frac{T_2^*}{T_1^*} = \frac{300}{900} = 0{,}333.$$

Так как предполагается, что отношение давлений в сопле двигателя выше критического значения, а сопло выполнено нерасширяющимся, то $\lambda_1 = 1$. Как указывалось, для расчета эжектора необходимо задать λ_2 и воспользоваться последовательно уравнениями (8), (12) и (13). Легко убедиться, что решение поставленной задачи неоднозначно. Заданным условиям удовлетворяет ряд эжекторов, отличающихся геометрическими параметрами α и f.

Найдем критическую величину λ_2 — предельно возможное значение λ_2, при котором в сечении запирания скорость эжектируемого воздуха достигнет скорости звука, т. е. $\lambda_2' = 1$. Для этого подставляем в уравнения (31) и (34) величины $n\sqrt{\theta} = 0{,}577$, $\Pi_0 = 1{,}94$, $\lambda_1 = 1$ и, задавшись рядом значений $\lambda_1' > 1$, определяем из каждого уравнения соответствующее значение $\lambda_2 < 1$. Пересечение двух полученных кривых $\lambda_2 = f(\lambda_1')$ дает совместное решение уравнений — предельные значения приведенных скоростей на критическом режиме

$$\lambda_1' = 1{,}351 \quad \text{и} \quad \lambda_2 = 0{,}674.$$

Однако подставив такую величину λ_2 и $\lambda_1 = 1$ в уравнение количества движения (12), находим $z(\lambda_3) = 1{,}982$, т. е. $z(\lambda_3) < 2$, что нереально и указывает на физическую невозможность режима: при заданных значениях n, Π_0 и θ расход эжектируемого газа ограничен кризисом течения в выходном сечении камеры смешения (см. § и рис. 9.19). Поэтому принимаем $\lambda_3 = 1$, т. е. $z(\lambda_3) = 2$, и из уравнения (12) находим

$$z(\lambda_2)_{\min} = \frac{2\sqrt{2{,}666} - 2}{\sqrt{0{,}333}} = 2{,}20.$$

Этому соответствует максимально возможное значение $\lambda_2 = 0{,}643$, что несколько меньше, чем было определено из рассмотрения потоков в сечении запирания.

Теперь можно задаться несколькими значениями $\lambda_2 \leqslant 0{,}643$ и провести расчет по изложенному выше методу. Выберем, например, $\lambda_2 = 0{,}6$. Из формулы (14) находим, что для заданного коэффициента эжекции $n = 1$ геометрический параметр α должен быть равным

$$\alpha = \frac{1}{\Pi_0 n \sqrt{\theta}} \frac{q(\lambda_2)}{q(\lambda_1)} = \frac{1}{1{,}94\sqrt{0{,}333}} \frac{0{,}8109}{1} = 0{,}723.$$

Подставляя значения $z(\lambda_1) = 2{,}0$ и $z(\lambda_2) = 2{,}267$ в уравнение (12) и полагая $\theta = 0$, определяем

$$z(\lambda_3) = \frac{2 + 2{,}267\sqrt{0{,}333}}{\sqrt{2{,}666}} = 2{,}026.$$

Так как $\lambda_2 < \lambda_{2кр} = 0{,}674$, то реальным будет только дозвуковой режим течения на выходе из камеры. Чтобы повысить точность вычисления величины λ_3 по функции $z(\lambda_3)$, рекомендуется дозвуковое решение квадратного уравнения

$$\lambda_3 + \frac{1}{\lambda_3} = 2{,}026$$

представить в виде

$$\lambda_3 = \frac{z(\lambda_3) - \sqrt{z(\lambda_3)^2 - 4}}{2} = \frac{2}{z(\lambda_3) + \sqrt{z(\lambda_3)^2 - 4}} = 0{,}854;$$

отсюда следует

$$q(\lambda_3) = 0{,}974, \quad \pi(\lambda_3) = 0{,}635.$$

При пользовании таблицами значений функции $z(\lambda)$ следует иметь в виду, что в некоторых таблицах через $z(\lambda)$ обозначают функцию

$$\frac{1}{2}\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right).$$

Теперь по формуле (13) можно вычислить полное давление газа после смешения:

$$p_3^* = p_1^* \frac{\sqrt{(n+1)(n\theta+1)}}{1 + 1/\alpha} \frac{q(\lambda_1)}{q(\lambda_3)} = \frac{2\sqrt{2{,}666}}{2{,}38} \cdot \frac{10^5}{0{,}974} = 1{,}405 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2.$$

Статическое давление смеси в выходном сечении камеры

$$p_3 = p_3^* \pi(\lambda_3) = 1{,}405 \cdot 0{,}635 \cdot 10^5 = 0{,}895 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$$

на выбранном режиме ниже заданного давления в выхлопной шахте $p_4 = 1{,}05 \cdot 10^5$ Н/м^2. Поэтому на выходе из камеры необходимо установить диффузор. Легко убедиться, что необходимое увеличение площади потока в диффузоре $F_4/F_3 = f$ и соответственно потери полного давления будут небольшими. Примем $\sigma_д = 0{,}98$. Тогда по формулам (20)—(23) получаем

$$p_4^* = \sigma_д p_3^* = 1{,}377 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2, \quad \pi(\lambda_4) = \frac{p_4}{p_4^*} = 0{,}764; \quad \lambda_4 = 0{,}667,$$

$$q(\lambda_4) = 0{,}868, \quad f = \frac{q(\lambda_3)}{q(\lambda_4)} \frac{1}{\sigma_д} = \frac{0{,}974}{0{,}868} \cdot \frac{1}{0{,}98} = 1{,}14.$$

Таким образом, один из возможных вариантов эжектора, обеспечивающий заданные значения коэффициента эжекции и статического давления потока на выходе, определяется геометрическими параметрами

$$\alpha = \frac{F_1}{F_2} = 0{,}723; \quad f = \frac{F_4}{F_3} = 1{,}14.$$

Точно так же, задаваясь другими значениями λ_2, определяем ряд возможных сочетаний α и f. Результаты расчета приведены на рис. 9.29. Поскольку требуемое изменение площади диффузора во всех случаях невелико, целесообразно выполнить эжектор без диффузора, т. е. в виде одной цилиндрической трубы. Для этого, согласно рис. 9.29, достаточно выбрать $\alpha = 0{,}575$, $f = 1$, что соответствует $\lambda_2 = 0{,}445$.

Заметим, что для всех вариантов эжекторов, удовлетворяющих условиям задачи, получается примерно одинаковая величина отношения площади выходного сечения F_4 к площади сопла F_1. В данном случае, как можно видеть из рис. 9.29,

$$\frac{F_4}{F_1} = f\,\frac{\alpha+1}{\alpha} \approx 2{,}72.$$

Эту приближенную закономерность полезно иметь в виду при подборе размеров эжектора, работающего по схеме рис. 9.2 в выходных системах различных установок.

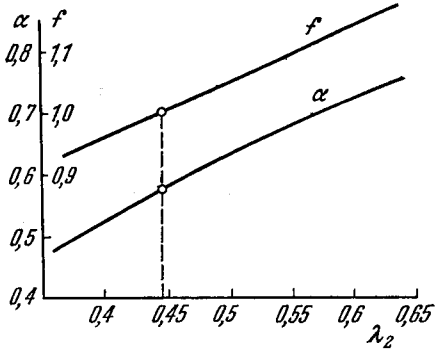


Рис. 9.29. Геометрические параметры эжекторов α и f в зависимости от выбранного в расчете значения λ_2 (к примеру 1).

Пример 2. Эжектирующий газ имеет полное давление $p_1^* = 12 \cdot 10^5$ Н/м², полное давление эжектируемого газа $p_2^* = 10^5$ Н/м²; температуры торможения газов равны. Требуется определить геометрические параметры эжектора, обеспечивающего на выходе из диффузора дозвуковой поток смеси газов с возможно большим полным давлением при работе с коэффициентом эжекции $n = 0{,}2$. Диффузор эжектора — обычного дозвукового типа.

Будем рассчитывать эжектор для работы на наивыгоднейшем критическом режиме. Ввиду того, что отношение полных давлений газов $\Pi_0 = 12$ достаточно высокое, а коэффициент эжекции небольшой, здесь целесообразно подобрать оптимальное сверхзвуковое сопло для эжектирующего газа. Для полного расширения эжектирующего газа сопло должно быть спроектировано на отношение давлений

$$\frac{p_1^*}{p_2} = \frac{\Pi_0}{\pi(1)} = \frac{12}{0{,}5283} = 22{,}75,$$

так как выходное сечение его совпадает с сечением запирания, где эжектируемый газ движется с критической скоростью. Определяем приведенную скорость λ_1 на выходе из такого сопла

$$\pi(\lambda_1) = \frac{p_2}{p_1^*} = 0{,}044; \quad \lambda_{1p} = 1{,}88; \quad q(\lambda_1)_p = 0{,}3211$$

и площадь его выходного сечения

$$F_р = \frac{F_{кр}}{q(\lambda_1)} = 3{,}12F_{кр}$$

(потерями полного давления в сопле пренебрегаем).

Для получения наибольшей величины полного давления смеси сопло должно быть выполнено с неполным расширением газа, так что площадь выходного сечения его меньше площади расчетного сопла; в данном случае, согласно формуле (40),

$$\frac{F_о}{F_р} = 0{,}7 + 0{,}3n\sqrt{\theta} = 0{,}76; \quad F_о = 2{,}37F_{кр}.$$

Приведенную скорость эжектирующего газа на выходе из оптимального сверхзвукового сопла находим из уравнения неразрывности

$$q(\lambda_1)_о = \frac{F_{кр}}{F_о} = \frac{1}{2{,}37} = 0{,}422; \quad \lambda_1 = 1{,}787, \quad z(\lambda_1) = 2{,}346.$$

Далее с помощью уравнений (30) и (33) определим величину приведенной скорости λ_2 на критическом режиме $\left(\lambda_2' = 1\right)$.

Совместное решение этих уравнений находим подбором. Задаемся рядом значений λ_1', причем в первом приближении ориентируемся на полученное выше для расчетного сопла значение $\lambda_{1р} = 1{,}88$, и учитываем, что для оптимального сопла $\lambda_1' < \lambda_{1р}$.

Поскольку параметры газа на срезе оптимального сопла мало отличаются от параметров в сечении запирания, то в правых частях выражений (30) и (33) образуются малые разности. Поэтому вычисления по этим формулам необходимо вести с высокой степенью точности.

В данном случае, задавшись значениями $\lambda_1' = 1{,}88$; 1,84; 1,82, указанным выше способом определяем

$$\lambda_1' = 1{,}85; \quad \lambda_2 = 0{,}636; \quad q(\lambda_2) = 0{,}842; \quad z(\lambda_2) = 2{,}205.$$

Находим требуемую величину геометрического параметра эжектора α по формуле (14)

$$\alpha = \frac{1}{12 \cdot 0{,}2}\frac{0{,}842}{0{,}422} = 0{,}83,$$

что дает для отношения площади сечения камеры к площади выходного сечения сопла

$$\frac{F_3}{F_1} = \frac{\alpha + 1}{\alpha} = 2{,}203$$

и к площади критического сечения сопла

$$\frac{F_3}{F_{кр\,1}} = \frac{2{,}203}{q(\lambda_1)} = \frac{2{,}203}{0{,}422} = 5{,}23.$$

Подставляя величины λ_1, λ_2 и n в уравнение количества движения (12), находим

$$z(\lambda_3) = \frac{2{,}346 + 0{,}2 \cdot 2{,}205}{1{,}2} = 2{,}322.$$

Несмотря на то, что в данном случае $\left(\lambda_2' = 1\right)$ поток в смесительной камере будет сверхзвуковым, ищем дозвуковое решение уравнения. Как указыва-

лось, это решение соответствует наивыгоднейшему режиму торможения потока смеси в скачке, расположенном непосредственно в выходном сечении камеры (на входе в диффузор):

$$\lambda_3 = \frac{2}{2{,}322 + \sqrt{5{,}40 - 4}} = 0{,}571, \quad q(\lambda_3) = 0{,}783.$$

Определяем полное давление потока смеси на входе в диффузор из (13)

$$p_3^* = 12\,\frac{1{,}2 \cdot 0{,}422 \cdot 10^5}{2{,}203 \cdot 0{,}783} = 3{,}52 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2.$$

По рис. 8.26 находим для данного значения λ_3 величину коэффициента сохранения полного давления в диффузоре $\sigma_д = 0{,}96$. Полное давление потока на выходе из диффузора составляет

$$p_4^* = 3{,}52 \cdot 0{,}96 \cdot 10^5 = 3{,}38 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2,$$

а максимально возможное статическое давление в резервуаре, куда выбрасывается смесь из эжектора при $\lambda_4 \approx 0{,}2$,

$$p_4 = p_4^* \pi(\lambda_4) = 3{,}3 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2.$$

Для этого степень расширения диффузора необходимо выбрать равной

$$f = \frac{q(\lambda_3)}{\sigma_д q(\lambda_4)} = \frac{0{,}783}{0{,}96 \cdot 0{,}310} = 2{,}63.$$

Если такой же расчет произвести для эжектора с нерасширяющимся соплом, т. е. принять $\lambda_1 = 1$, то необходимая площадь сечения смесительной камеры будет больше площади критического сечения сопла не в 5,23, а в 7,45 раза, и полное давление на выходе из диффузора будет на 35% меньше величины, полученной выше. Как видим, в данном случае применение сверхзвукового сопла дает заметный выигрыш в величине полного давления. Выбор рациональной степени расширения в сопле также дает некоторый эффект. Если вместо выбранного выше оптимального сопла с неполным расширением применить расчетное сверхзвуковое сопло ($\lambda_1 = 1{,}88$), то, как показывает расчет, пришлось бы площадь камеры смешения увеличить на 5,5% ($F_3/F_{кр} = 5{,}52$), в результате чего полное давление смеси снизилось бы на 4%.

Отметим, что все эти результаты получены при условии, что диффузор эжектора дозвуковой и перед диффузором возникает прямой скачок уплотнения, который переводит полученную при смешении потоков сверхзвуковую скорость в дозвуковую. Приведенная скорость потока смеси перед скачком может быть определена из соотношения

$$\lambda_3' = \frac{1}{\lambda_3} = \frac{1}{0{,}571} = 1{,}75.$$

При такой скорости потери полного давления в прямом скачке весьма велики (согласно рис. 3.5 коэффициент сохранения полного давления $\sigma_п \approx 0{,}6$) и составляют большую часть общих потерь в эжекторе. Действительно, полное давление сверхзвукового потока смеси значительно выше полученного для $\lambda_3 < 1$ значения и равно

$$p_3^* = p_1^*\,\frac{n+1}{1+\frac{1}{\alpha}}\,\frac{q(\lambda_1)}{q(\lambda_3')} = \frac{12 \cdot 1{,}2}{2{,}205}\,\frac{0{,}422}{0{,}463} = 5{,}95 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2.$$

Поэтому в данном случае применение сверхзвукового диффузора с торможением потока в системе скачков может дать заметный эффект.

§ 10. Теория эжекторного увеличителя реактивной силы

Рассмотрим величину реактивной силы, возникающей при истечении газа из эжектора, схема которого приведена на рис. 9.30. Эжектирующим газом является выхлопная струя реактивного двигателя. Эжектируемый газ (воздух) поступает в смесительную камеру непосредственно из атмосферы, поток смеси выбрасывается также в атмосферу.

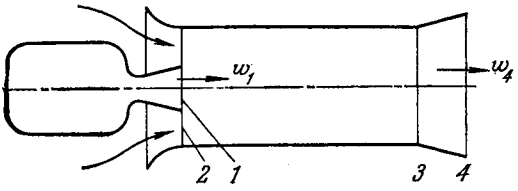


Рис. 9.30. Схема эжектора, установленного на сопле ракетного двигателя.

Предположим пока, что сопло и диффузор эжектора спроектированы так, что статические давления газа в выходном сечении сопла и потока смеси на выходе из диффузора равны давлению внешней среды $p_н$. В этом случае суммарная реактивная сила, действующая на все элементы эжектора, неподвижного относительно внешней среды,

$$P = (G_1 + G_2) w_4,$$

где G_1 и G_2 — секундные расходы эжектирующего газа и воздуха, а w_4 — скорость истечения смеси из диффузора эжектора.

Реактивная сила (тяга) одного сопла при тех же начальных параметрах газа, но без подмешивания внешнего воздуха, равна

$$P_0 = G_1 w_1,$$

где w_1 — скорость истечения газа из сопла.

Поскольку процесс смешения в эжекторе сопровождается потерями на удар, то кинетическая энергия смеси газов $(G_1 + G_2) w_4^2/2$ будет меньше начальной кинетической энергии струи $G_1 w_1^2/2$, так что

$$\frac{G_1 + G_2}{G_1} \frac{w_4^2}{w_1^2} = \eta < 1.$$

Величину η можно считать условным коэффициентом полезного действия эжектора, оценивающим совершенство процесса смешения. Из последнего соотношения легко получить

$$\frac{G_1 + G_2}{G_1} \frac{w_4}{w_1} = \sqrt{\frac{G_1 + G_2}{G_1} \eta}$$

или

$$\frac{P}{P_0} = \sqrt{(n+1)\,\eta}, \tag{45}$$

где $n = G_2/G_1$ — коэффициент эжекции.

Если при данном значении η присоединить к струе газа достаточное количество внешнего воздуха так, чтобы $n + 1 > \frac{1}{\eta}$, то $\frac{P}{P_0} > 1$. Другими словами, путем распределения первоначальной энергии эжектирующего потока на бóльшую массу газа можно увеличить реактивную тягу без затраты дополнительной энергии. Приведенное рассуждение носит качественный характер. Количественные зависимости можно определить, рассчитав эжектор по изложенным выше методам. Расчеты, а также эксперименты показывают, что с помощью эжектора можно реализовать такие значения коэффициента эжекции n и к. п. д. η, что выигрыш в величине тяги достигает в определенных условиях значительной величины.

Увеличение тяги при подсасывании внешнего воздуха к эжектирующей струе объясняется тем, что на элементах эжектора возникают дополнительные силы, равнодействующая которых, направленная по оси потока, суммируется с реактивной тягой сопла. Основной из этих сил, определяющей выигрыш в тяге, является неуравновешенная сила внешнего давления, действующая на входной раструб (заборник) эжектора. Ее появление обусловлено понижением давления на стенках раструба при втекании в него эжектируемого воздуха.

Для выяснения принципиальных свойств эжектора как элемента реактивной системы пренебрежем сжимаемостью газа, которая в данном случае оказывает не очень существенное влияние на конечные параметры системы.

Составим систему основных уравнений для эжектора, который перемещается вместе с соплом (двигателем) относительно внешней среды со скоростью $w_н$. Предположим пока, что плотности смешивающихся жидкостей (газов) одинаковы, камера смешения — цилиндрическая, а гидравлические потери во всех элементах эжектора отсутствуют (учитываются лишь потери на смешение). Уравнение энергии для втекающего в эжектор потока внешней среды

$$\frac{p_н}{\rho} + \frac{w_н^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + \frac{w_2^2}{2}. \tag{46}$$

Уравнение неразрывности для потоков в смесительной камере

$$\rho F_1 w_1 + \rho F_2 w_2 = \rho\,(F_1 + F_2)\,w_3. \tag{47}$$

Уравнение количества движения для потоков в смесительной камере (при $p_1 = p_2$)

$$G_1 w_1 + G_2 w_2 - (G_1 + G_2) w_3 = (p_3 - p_2)(F_1 + F_2). \qquad (48)$$

Уравнения неразрывности и энергии для потока в диффузоре

$$\rho (F_1 + F_2) w_3 = \rho F_4 w_4; \qquad (49)$$

$$\frac{p_3}{\rho} + \frac{w_3^2}{2} = \frac{p_н}{\rho} + \frac{w_4^2}{2}. \qquad (50)$$

Здесь и ниже предполагается, что в конце смесительной камеры скорость потока постоянна по сечению.

Решение этой системы строим таким образом, чтобы по известным параметрам газа (жидкости) в сопле и геометрическим параметрам эжектора определить относительный расход эжектируемой внешней среды (коэффициент эжекции) и скорость истечения смеси из эжектора, необходимые для вычисления реактивной силы. Для этого при помощи первого и последнего уравнений системы исключаем величину $(p_3 - p_2)$ из уравнения количества движения. Подставив в полученное выражение безразмерные величины

$$\alpha = \frac{F_1}{F_2}, \quad f = \frac{F_4}{F_1 + F_2}, \quad \omega = \frac{w_н}{w_1},$$

а также полученные из уравнений неразрывности соотношения

$$\frac{w_2}{w_1} = \alpha n, \quad \frac{w_3}{w_1} = \frac{\alpha}{\alpha + 1}(n + 1), \quad \frac{w_4}{w_1} = \frac{1}{f}\frac{\alpha}{\alpha + 1}(n + 1), \qquad (51)$$

приходим к квадратному уравнению относительно величины n

$$\alpha (1 + \alpha^2 f^2) n^2 + 2\alpha (1 + f^2) n - \alpha f^2 - 2f^2 + \alpha - \frac{1}{\alpha} f^2 (\alpha + 1)^2 \omega^2 = 0.$$

Положительный корень этого уравнения

$$n = \frac{f(1 + 1/\alpha)\sqrt{2\alpha + \alpha^2(^2 - 1) + (1 + \alpha^2 f^2)\omega^2} - 1 - f^2}{1 + \alpha^2 f^2} \qquad (52)$$

показывает, какое относительное количество газа подсасывает эжектор с геометрическими параметрами α и f, движущийся относительно внешней среды со скоростью $w_н = \omega w_1$, при условии полного использования скоростного напора $\rho w_н^2/2$.

Заметим, что величина ω^2 здесь характеризует превышение полного давления эжектируемого газа над статическим давлением на выходе из эжектора:

$$\omega^2 = 2\frac{p_2^* - p_н}{\rho w_1^2}.$$

Скорость истечения смеси из эжектора w_4 можно определить, подставив найденное значение n в уравнение неразрывности (см. (51)).

Из уравнения энергии определим необходимую для дальнейшего величину разрежения во входном сечении смесительной камеры

$$p_н - p_2 = p_н - p_1 = \frac{\rho w_1^2}{2}\left(\frac{w_2^2}{w_1^2} - \frac{w_н^2}{w_1^2}\right),$$

или

$$p_н - p_1 = \frac{\rho w_1^2}{2}(\alpha^2 n^2 - \omega^2). \tag{53}$$

Реактивная тяга системы вычисляется по формуле

$$P = (G_1 + G_2) w_4 - G_2 w_н,$$

или

$$P = G_1 w_1 \left[\frac{1}{f}\frac{\alpha}{\alpha+1}(n+1)^2 - n\omega\right] \tag{54}$$

(полагаем, что направления векторов w_4 и $w_н$ совпадают).

При составлении выражения (54) предполагалось, что из внешней среды поступает в систему только эжектируемый газ, а эжектирующий газ (жидкость) первоначально движется вместе с системой со скоростью $w_н$ (схема работы ракетного двигателя).

Если эжектирующий газ поступает из внешней среды (как, например, в воздушно-реактивных двигателях), то следует дополнительно вычесть «входной импульс» $G_1 w_н$. Тогда для реактивной тяги получим выражение

$$P = G_1 w_1 \left[\frac{1}{f}\frac{\alpha}{\alpha+1}(n+1)^2 - (n+1)\omega\right]. \tag{55}$$

Для того чтобы правильно записать выражение для исходной тяги сопла (двигателя) без эжектора, по отношению к которой будем оценивать эффективность системы, следует учесть, что при работе сопла в эжекторе скорость истечения эжектирующего газа (жидкости) при заданных начальных параметрах увеличивается вследствие разрежения, образующегося при входе в камеру. Если эжектор отсутствует, то скорость истечения w_1' получится меньшей, так что

$$w_1' = \sqrt{w_1^2 - 2\frac{p_н - p_1}{\rho}}$$

или с учетом соотношения (53)

$$w_1' = w_1\sqrt{1 - \alpha^2 n^2 + \omega^2}.$$

Отсюда получаем выражение для исходной тяги без эжектора

$$P_0' = G_1' w_1' = \rho F_1 w_1'^2 = G_1 w_1 (1 - \alpha^2 n^2 + \omega^2). \qquad (56)$$

Для определения эффективности процесса с точки зрения увеличения тяги целесообразно сравнить полученную реактивную тягу с исходной при равных расходах газа через сопло. При этом получим для ракетного двигателя

$$\delta = \frac{P}{G_1}\frac{G_1'}{P_0'} = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2 n^2+\omega^2}}\left[\frac{1}{f}\frac{\alpha}{\alpha+1}(n+1)^2 - n\omega\right], \qquad (57)$$

для воздушно-реактивного двигателя

$$\delta = \frac{P}{G_1}\frac{G_1'}{G_1'(w_1'-w_н)} = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2 n^2+\omega^2}-\omega}\left[\frac{1}{f}\frac{\alpha}{\alpha+1}(n+1)^2 - (n+1)\omega\right]. \qquad (58)$$

Величину δ назовем *коэффициентом увеличения тяги*. В дальнейшем будем пользоваться только формулой (58), имея в виду, что для малых относительных скоростей движения $\omega = w_н/w_1$ обе последние формулы дают близкие результаты. Заметим, что поскольку $n = n(\alpha, f, \omega)$, то для заданной относительной скорости движения системы ω выигрыш в тяге определяется только геометрическими параметрами α и f.

При работе эжектора на месте ($\omega = 0$), когда формулы (52) и (58) принимают вид

$$n = \frac{f(1+1/\alpha)\sqrt{2\alpha+\alpha^2(f^2-1)} - 1 - f^2}{1+\alpha^2 f^2}, \qquad (59)$$

$$\delta = \frac{\alpha}{\alpha+1}\frac{(n+1)^2}{f\sqrt{1-\alpha^2 n^2}}, \qquad (60)$$

коэффициент эжекции n, отношение скоростей w_4/w_1 и коэффициент увеличения тяги δ являются монотонными функциями геометрических параметров α и f (рис. 9.31, 9.32).

При этом оказывается, что для эжекторов с любыми значениями геометрических параметров α и f коэффициент увеличения тяги δ больше единицы, и выигрыш в тяге может достигать значительной величины. Таким образом, в неподвижном эжекторе подмешивание дополнительной массы к струе, вытекающей из сопла, происходит достаточно эффективно, вследствие чего при полном смешении потоков всегда образуется выигрыш в реактивной тяге. Напомним, что этот результат получен без учета потерь на трение.

Уменьшение α, т. е. увеличение относительной площади камеры смешения, приводит к увеличению коэффициента эжекции n и уменьшению относительной скорости потока на выходе из

эжектора w_4/w_1. Величина выигрыша в тяге (коэффициента δ) при этом возрастает (рис. 9.31). Если беспредельно увеличивать относительную площадь камеры ($\alpha \to 0$), то коэффициент эжекции n, согласно уравнению (59), неограниченно возрастает, а скорость потока после смешения стремится к нулю. Коэффициент увеличения тяги, величина которого в основном определяется произведением $(n+1)w_4/w_1$, при $\alpha \to 0$ возрастает до

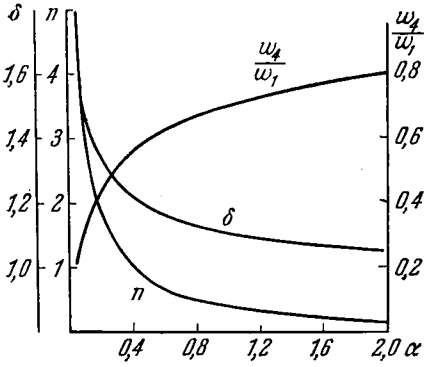


Рис. 9.31. Зависимость параметров реактивной системы с эжектором от геометрического параметра эжектора α; $f = 1$.

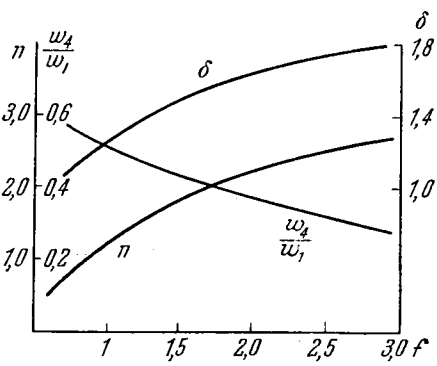


Рис. 9.32. Зависимость параметров реактивной системы с эжектором от степени расширения диффузора f; $\alpha = 0{,}3$.

максимального значения. Подставив (59) в уравнение (60), получим

$$\delta = \frac{f(1+\alpha)}{\sqrt{1-\alpha^2 n^2}\,(1+\alpha^2 f^2)^2}\,[2-\alpha(1-f^2)+\alpha f^2(1-\alpha)^2 - \\ - 2f(1-\alpha)\sqrt{2\alpha+\alpha^2(f^2-1)}\,].$$

Найдем предел этой величины при $\alpha \to 0$. С помощью уравнения (59) легко установить, что при $\alpha \to 0$, $\alpha n \to 0$ (что вполне очевидно по существу, так как согласно (51), $\alpha n = \omega_2/\omega_1$). Учитывая это, из последнего выражения определяем

$$\lim_{\alpha \to 0} \delta = 2f.$$

Это значит, что коэффициент увеличения тяги неподвижного эжектора даже при отсутствии потерь на трение не может превысить некоторого *конечного* значения, зависящего от степени уширения диффузора f. Так, например, эжектор без диффузора ($f = 1$) даже при беспредельном увеличении его размеров и отсутствии грения не может увеличить тягу более чем в 2 раза.

Влияние скорости движения (полета) на параметры реактивного двигателя с эжектором сводится к следующему. Разрежение во входном сечении смесительной камеры (53) с увеличением скорости движения уменьшается, однако благодаря увеличению скоростного напора эжектируемого газа расход его G_2 возрастает. Скорость эжектируемого потока на входе в камеру растет, разность скоростей потоков уменьшается — это снижает потери при смешении потоков.

«Выходной импульс» системы $(G_1 + G_2)w_4$ растет вследствие увеличения как расхода G_2, так и скорости w_4. Одновременно увеличивается «входной импульс» эжектируемого потока $G_2 w_н$, а в схеме ВРД также и эжектирующего потока $(G_1 w_н)$. В результате этого с возрастанием относительной скорости движения ω выигрыш в тяге уменьшается, несмотря на увеличение коэффициента эжекции и снижение потерь при смешении. Можно показать, что падение выигрыша в тяге с ростом скорости движения является свойством не только эжектора, но и *любого*, даже идеального, аппарата, в котором к основной струе прибавляется дополнительная масса без подвода дополнительной энергии. Уже при сравнительно небольших относительных скоростях движения (полета) ω коэффициент увеличения тяги для идеального смесителя, а следовательно, и для любой эжекторной системы приближается к единице. Поэтому анализ влияния ω на коэффициент увеличения тяги можно ограничить рассмотрением области малых скоростей движения.

При выводе соотношений (52)—(60) предполагалось, что плотности смешивающихся газов одинаковы. Точно так же можно выразить коэффициент эжекции, скорость истечения смеси и выигрыш в тяге для случая смешения газов различных плотностей $(\rho_1/\rho_2 = \bar{\rho} \neq 1)$.

При этом получаются следующие выражения для коэффициента эжекции и выигрыша в реактивной тяге:

$$n = \frac{f\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\sqrt{2\alpha\bar{\rho} + \alpha^2(f^2-1)\bar{\rho} + B^2 + (1+\alpha^2 f^2)\omega^2} - \frac{1}{2}(\bar{\rho}+1)(f^2+1)}{\bar{\rho}(1+\alpha^2 f^2)}, \tag{61}$$

где

$$B = \frac{1}{4}\frac{\alpha}{1+\alpha}\frac{f+1}{f}(\bar{\rho}-1),$$

и

$$\delta = \frac{n+1}{\sqrt{1-\alpha^2 n^2\bar{\rho} + \frac{1}{\bar{\rho}}\omega^2} - \omega}\left[\frac{1}{f}\frac{\alpha}{\alpha+1}(n\bar{\rho}+1) - \omega\right]. \tag{62}$$

Расчеты показывают, что формула (61) приближенно соответствует зависимости

$$n = n_0 \sqrt{\frac{1}{\bar{\rho}}},$$

где n_0 — значение коэффициента эжекции при $\bar{\rho} = 1$.

Различие в плотностях газов, существенно изменяющее коэффициент эжекции, мало сказывается на величине выигрыша в тяге, так как одновременно с ростом коэффициента эжекции уменьшается скорость истечения газа, и наоборот. Наибольшая для данного эжектора величина выигрыша получается при равной плотности смешивающихся газов, т. е. при $\bar{\rho} = 1$.

Для подмешивания внешнего воздуха к струе газа можно применить многоступенчатый аппарат, состоящий из нескольких эжекторов, причем поток смеси, вытекающий из предыдущей ступени, является эжектирующим потоком последующей ступени. Хотя принципиально в такой конструкции смешение в каждой ступени происходит при меньшей разности скоростей, чем в одноступенчатом эжекторе, и потери на удар будут меньшими, количественный эффект — выигрыш в реактивной тяге — оказывается примерно таким же, как в одноступенчатом эжекторе с равной площадью выходного сечения.

Все рассмотренные выше результаты получены в предположении, что потери трения в элементах эжектора пренебрежимо малы, и эффективность эжектора зависит только от ударных потерь, возникающих в процессе смешения. В действительности, помимо потерь при смешении, в элементах эжектора имеются дополнительные, вторичные потери, не связанные с самим существом процесса подмешивания дополнительной массы. Это в первую очередь гидравлические потери в соплах (потери полного давления газов до входа в камеру), потери на трение в смесительной камере и потери при торможении потока в диффузоре.

Для того чтобы определить параметры эжекторной реактивной системы с учетом этих потерь, необходимо ввести соответствующие коэффициенты потерь в уравнения энергии и силу трения в уравнение количества движения.

Решение основной системы уравнений позволяет определить коэффициент эжекции, скорость истечения потока из эжектора и коэффициент увеличения тяги в зависимости от геометрических параметров эжектора и потерь в его элементах.

Расчеты показывают, что гидравлические потери в элементах эжектора уменьшают разрежение на входе в камеру и приводят к снижению коэффициента эжекции и скорости истечения смеси w_4. В результате значительно уменьшается выигрыш в реактивной тяге. Тем не менее при реальных значениях коэффициентов потерь возможный выигрыш в тяге на месте ($\omega = 0$) составляет

заметную величину. Так, например, эжектор с геометрическими параметрами $\alpha = 0{,}05 - 0{,}1$ и $f = 1{,}5 - 2$ позволяет увеличить тягу на месте на 25—35% без затраты дополнительной энергии.

Влияние вторичных потерь на реактивную тягу в полете более существенно, чем при работе на месте. Дело в том, что с увеличением скорости движения аппарата увеличиваются расход и скорость эжектируемого газа и соответственно возрастают потери на трение, примерно пропорциональные количеству движения $G_3 w_3$. Поскольку ударные потери в процессе смешения при этом уменьшаются, то вторичные потери, связанные с трением, становятся преобладающими и в основном определяют совершенство процесса. Если без учета этих потерь выигрыш в тяге лишь снижается с ростом ω, то при реальных значениях коэффициентов потерь уже при $\omega = 0{,}2 - 0{,}3$ выигрыш в тяге исчезает, а для бóльших значений скорости движения вместо прироста получится снижение тяги.

Этот результат, качественно справедливый для эжекторной системы с любыми начальными параметрами смешивающихся газов, указывает на то, что такого рода системы могут быть полезны только в тех случаях, когда скорость перемещения аппарата мала по сравнению со скоростью истечения газа из сопла.

Эти условия соответствуют, например, старту и начальному периоду движения ракеты, а также различным режимам полета аппаратов, использующих реактивную тягу для создания подъемной силы при небольшой вертикальной скорости (вертикальный взлет самолета, режим «висения» и т. п.).

Приведенный в § 3 метод расчета газового эжектора позволяет определить параметры эжектора — увеличителя тяги с учетом сжимаемости при больших отношениях давлений смешивающихся газов, больших скоростях и температурах в эжектирующей струе и тем самым уточнить полученные выше результаты. Расчет проводится для эжектора с заданными геометрическими размерами, т. е. параметрами α и f. Полное давление и температура эжектирующего газа p_1^* и T_1^* для данного режима работы двигателя известны. Полное давление и температура торможения эжектируемого воздуха p_2^* и T_2^* определяются по параметрам атмосферы $p_н$ и $T_н$ и скорости полета с учетом потерь полного давления в воздухозаборнике. Далее, последовательно задаваясь различными значениями λ_2, определяем параметры смеси газа и воздуха на выходе из диффузора. Реальным будет такой режим (такие значения коэффициента эжекции n и скорости истечения w_4), при котором давление дозвукового потока в выходном сечении диффузора получается равным атмосферному давлению $p_н$.

Реактивная тяга системы P, а также исходная тяга двигателя P_0 определяются по параметрам газа в выходном сечении эжектора и сопла [1]). Коэффициент увеличения тяги для воздушно-реактивного двигателя вычисляется по формуле

$$\delta = \frac{P}{P_0} = \frac{p_4^* F_4 f(\lambda_4) - p_н F_4 - (G_1 + G_2) w_н}{p_1^* F_1 f(\lambda_1) - p_н F_1 - G_1 w_н},$$

где $w_н$ — составляющая скорости полета в направлении истечения газа из эжектора. Для ракетного двигателя эта формула имеет вид

$$\delta = \frac{P}{P_0} = \frac{p_4^* F_4 f(\lambda_4) - p_н F_4 - G_2 w_н}{p_1^* F_1 f(\lambda_1) - p_н F_1}.$$

Результаты расчета для различных соотношений начальных параметров газов и размеров эжектора позволяют в первую очередь сделать вывод о слабом влиянии сжимаемости газа на эффективность эжекторного увеличителя тяги. Изменение отношения полных давлений газов от весьма малых значений, при которых сжимаемостью газа можно пренебречь, до значений $p_1^*/p_н = 3 - 3{,}5$, когда режим истечения эжектирующей струи сверхкритический, практически не влияет на величину выигрыша в тяге при фиксированных значениях α и f.

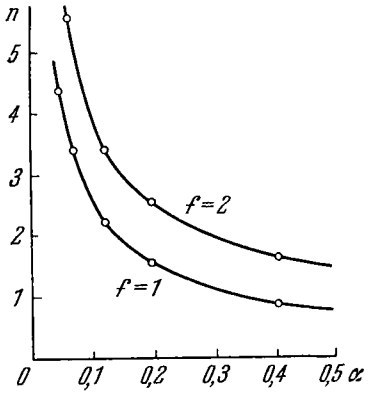


Рис. 9.33. Коэффициент эжекции модельных эжекторных реактивных систем при работе на месте; $\theta = 1$, $\Pi_0 = 1{,}6$—$2{,}4$.

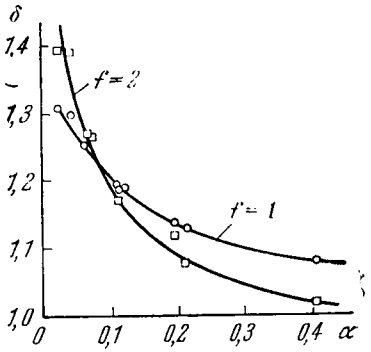


Рис. 9.34. Величина выигрыша в тяге при работе на месте (по экспериментальным данным); $\theta = 1$, $\Pi_0 = 1{,}6 - 2{,}4$.

[1]) При докритическом режиме истечения газа из сопла необходимо учитывать изменение режима работы двигателя и расхода газа G_1, обусловленное разрежением на входе в камеру смешения.

Как показывают расчеты, изменение отношения температур газов в пределах $0{,}25 < \theta < 4$ оказывает незначительное влияние на коэффициент увеличения тяги эжектора с данными геометрическими параметрами, хотя при этом сильно изменяется коэффициент эжекции. Максимальной величины коэффициент δ достигает при $\theta = 1$, так же как в случае несжимаемой жидкости при равных плотностях ρ_1 и ρ_2.

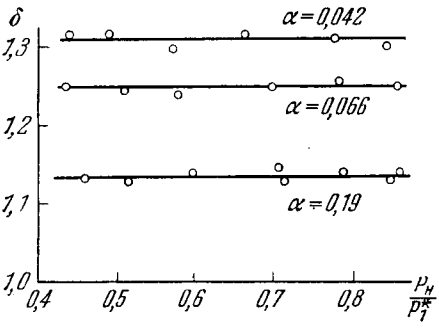


Рис. 9.35. Величина выигрыша в тяге для эжекторов без диффузора по экспериментальным данным при изменении полного давления газа перед соплом.

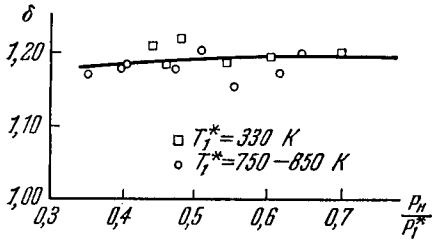


Рис. 9.36. Величина выигрыша в тяге при различной температуре эжектирующего газа; $\alpha = 0{,}11$, $f = 1$.

Наконец, расчет скоростных характеристик эжекторного увеличителя тяги с учетом сжимаемости также дает результаты, мало отличающиеся от приведенных выше данных, полученных без учета сжимаемости.

На рис. 9.33—9.37 приведены некоторые результаты испытания моделей эжекторных реактивных систем на установке с непосредственным измерением реактивной тяги. Из этих графиков видно, что эжектор действительно позволяет заметно увеличить реактивную тягу при работе на месте. В соответствии с данными теоретического анализа выигрыш в тяге оказывается главным образом функцией геометрических параметров эжектора α и f, причем если с уменьшением α (увеличением относительного диаметра камеры) выигрыш в тяге монотонно возрастает, то по величине f имеются оптимальные значения, зависящие от потерь в диффузоре.

Отметим, что как по экспериментальным данным, так и по результатам расчетов выигрыш в тяге резко снижается при дросселировании эжектируемого потока, т. е. при уменьшении его полного давления по сравнению с давлением внешней среды. При значительном дросселировании тяга системы оказывается меньше тяги сопла без эжектора, т. е. $\delta < 1$. Изменение полного давления эжектирующего газа в пределах, реальных для ВРД, практически не изменяет коэффициента увеличения тяги эжек-

тора без диффузора, что указывает на слабое влияние сжимаемости газа (рис. 9.35). Изменение температуры эжектирующего газа почти в 3 раза (рис. 9.36) вызывает очень небольшое снижение выигрыша в тяге. Испытания эжекторов в условиях, соответствующих условиям полета, показывают, что выигрыш в тяге быстро уменьшается с увеличением относительной скорости полета, причем изменение начальных параметров газа не оказывает заметного влияния на характер снижения выигрыша в тяге.

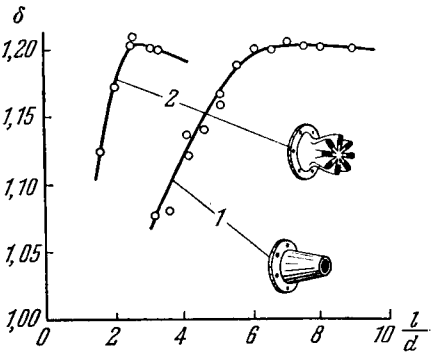


Рис. 9.37. Влияние относительной длины камеры смешения на величину выигрыша в тяге на месте ($\alpha = 0{,}11$, $f = 1$). *1* — эжектор с одним центральным соплом, *2* — эжектор с 8-секционным соплом.

При проектировании эжектора важно правильно выбрать длину камеры смешения, обеспечивающую достаточно полное выравнивание поля скорости в поперечном сечении потока. Расчет показывает, что при неполном смешении, когда коэффициент поля на выходе из камеры $\tau > 1$ (см. § 2), эффективность эжектора ухудшается: при заданном давлении на выходе p_4 снижается разрежение на входе в камеру, падает коэффициент эжекции и выигрыш в тяге. Если не учитывать трения о стенки, то максимальный эффект соответствует $\tau \to 1$, т. е. неограниченному увеличению длины камеры. В действительности, однако, существует конечное оптимальное значение длины камеры, так как при малой неравномерности поля скоростей полезный эффект, получаемый за счет дальнейшего выравнивания, не компенсирует возрастающих гидравлических потерь. Экспериментально это определяется по наличию максимума статического давления смеси на некотором конечном расстоянии от входа в камеру. Анализ основных уравнений процесса смешения показывает, что эта длина камеры соответствует минимальному значению суммы $\tau + {}^1/_2\zeta l_3/d_3$, где ζ — коэффициент трения.

Чтобы теоретически определить оптимальную длину камеры смешения, надо знать закон изменения коэффициента поля $\tau = f(l_3/d_3)$. Такой метод расчета, разработанный на основании обнаруженного нами экспериментально подобия профилей скорости в различных сечениях камеры, изложен во втором издании этой книги (Гостехиздат, 1953 г.).

Можно показать, что для эжекторного увеличителя тяги потребная длина камеры смешения меньше величины, определяе-

мой по максимуму разрежения на входе или максимуму коэффициента эжекции n. Дело в том, что при данном расходе смеси количество движения ее пропорционально величине коэффициента поля $\tau > 1$ (см. § 2); это смещает оптимум тяги в сторону больших значений τ, т. е. меньших l_3/d_3. Эксперименты, действительно, показывают, что наибольшее приращение тяги получается при длине камеры смешения 6—7 калибров, в то время как обычно для эжекторов оптимальная длина камеры равна 8—12 ее калибрам.

Потребную длину камеры можно существенно сократить, если раздробить эжектирующую струю на несколько струй; для этого применяют многосопловую конструкцию или специальное секционное сопло (рис. 9.37). С помощью такого эжектора принципиально можно получить выигрыш в реактивной силе, несколько больший указанных выше величин, поскольку в результате уменьшения длины камеры смешения снижаются потери на трение о ее стенки, сильно влияющие на эффективность эжекторной реактивной системы.

Многосопловые эжекторы различной конструкции с укороченной камерой смешения установлены на ряде современных самолетов вертикального взлета и посадки с целью увеличения реактивной тяги подъемных или подъемно-маршевых двигателей.

Глава X

ЭЛЕМЕНТЫ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ ЕДИНИЧНОГО ПРОФИЛЯ И РЕШЕТКИ ПРОФИЛЕЙ

§ 1. Основные геометрические параметры крылового профиля и решетки профилей

Для обычного дозвукового крылового профиля характерны округленная передняя часть (носок) и заостренная задняя кромка (рис. 10.1). Сверхзвуковой профиль, в отличие от дозвукового, имеет острую (клиновидную) переднюю кромку. В ряде

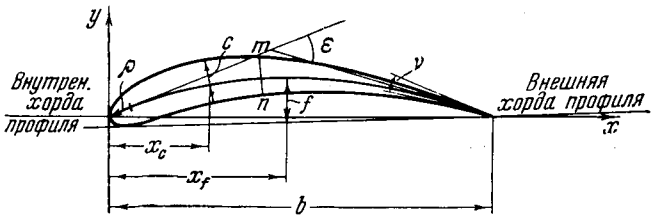


Рис. 10.1. Дозвуковой профиль.

случаев контур такого профиля составляется из прямолинейных отрезков (рис. 10.2).

Средней линией или *дугой (дужкой) профиля* называется геометрическое место центров, вписанных в профиль окружностей.

Любой профиль может быть получен в результате изгиба некоторого симметричного профиля.

Для определения положения профиля по отношению к потоку, а также в качестве характерного размера вводится понятие о хорде профиля. *Хордой профиля* называют отрезок прямой, соединяющей две самые удаленные точки осевой дуги профиля. Для слабо изогнутых профилей определенная таким образом хорда практически совпадает с отрезком прямой, соединяющей две самые удаленные точки профиля. Координаты точек профиля задаются обычно в долях длины хорды, которая принимается за ось абсцисс.

Конфигурация профиля определяется рядом геометрических параметров. Приведем главнейшие из них. *Относительной толщиной профиля* $\bar{c}$ называется частное от деления максимальной

толщины профиля c (рис. 10.1) на длину хорды b: $\bar{c}=c/b$. *Относительной вогнутостью* $\bar{f}$, или *относительной кривизной профиля*, называется отношение максимальной стрелы прогиба осевой дуги f к длине хорды: $\bar{f}=f/b$. Положения максимальной толщины профиля и максимальной стрелы прогиба осевой дуги являются важными параметрами и определяются соответственно величинами относительных абсцисс

$$\bar{x}_c=x_c/b \quad \text{и} \quad \bar{x}_f=x_f/b.$$

Кривизна профиля может также характеризоваться углом изгиба средней линии ε, т. е. углом между касательными к осевой дуге в носике и задней точке, называемыми соответственно *передней и задней касательными профиля* (рис. 10.1).

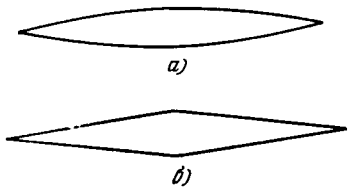


Рис. 10.2. Сверхзвуковые профили: *а*) чечевицеобразный, *б*) ромбовидный.

Выбрав определенный вид осевой дужки и форму исходного симметричного профиля, можно получить семейство (серию) профилей с непрерывным изменением относительных вогнутостей и толщин.

Прямолинейной решеткой профилей называют совокупность бесконечного числа одинаково расположенных идентичных крыловых профилей, находящихся друг от друга на одном и том же расстоянии. Линия, соединяющая соответственные точки профилей в решетке, называется *фронтом решетки,* а нормаль к ней — *осью решетки* (рис. 10.3).

С задачей обтекания прямолинейной решетки мы сталкиваемся в осевых компрессорах и турбинах при изучении течения через неподвижные и вращающиеся лопаточные венцы с цилиндрическими поверхностями тока. В этом случае элементарный венец, т. е. лопаточный венец, ограниченный двумя близкими поверхностями тока, можно превратить в прямолинейную решетку, развернув его на плоскости; для того чтобы обтекание всех профилей было одинаковым (как в лопаточном венце), решетка должна состоять из бесконечного числа профилей.

Взаимное расположение профилей в прямолинейной решетке однозначно определяется двумя параметрами: расстоянием между соседними профилями, называемым *шагом решетки* t, и углом между хордой профиля и фронтом, который называется *установочным углом* ϑ. Вместо установочного угла ϑ иногда применяют понятие *выноса*, подразумевая под ним расстояние a между нормалями к хордам двух соседних профилей, проведенными в подобных точках.

Как видно из чертежа, $a/t = \bar{a} = -\cos\vartheta$, и, следовательно, положительный вынос соответствует значениям $\vartheta > \pi/2$, а отрицательный вынос — значениям $\vartheta < \pi/2$. Положение данного профиля в решетке можно охарактеризовать также одним из углов φ_1 или φ_2 (рис. 10.3), образованных соответственно передней и задней касательными профиля с фронтом решетки. Разность этих углов определяет изгиб профиля $\varepsilon = \varphi_2 - \varphi_1$.

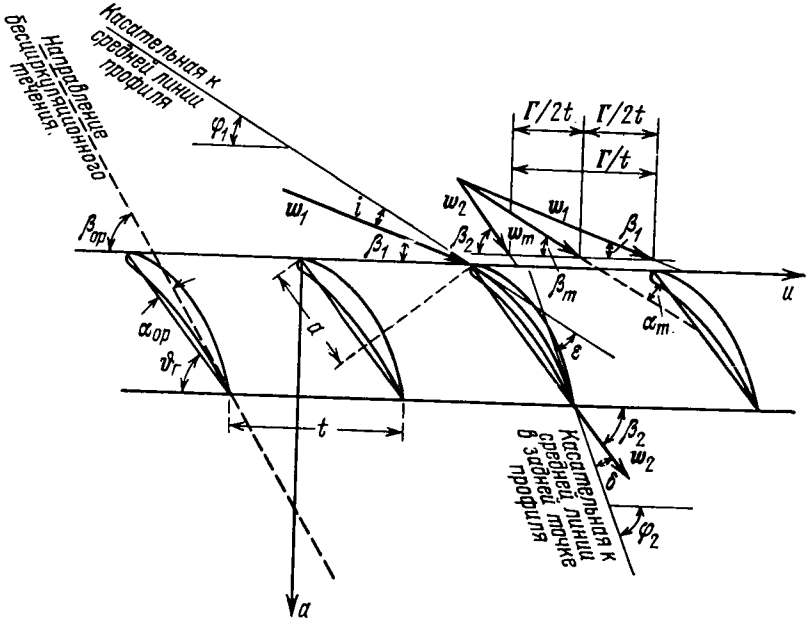


Рис. 10.3. Решетка профилей.

Величина шага решетки, отнесенная к длине хорды профиля, называется *относительным шагом решетки* $\bar{t} = t/b$; обратная величина называется *густотой решетки* $\tau = b/t$. Таким образом, решетка может быть однозначно определена формой профиля, густотой и значением установочного угла.

Положение профиля и решетки профилей по отношению к набегающему потоку характеризуется *углом атаки*; в случае единичного профиля — это угол α между направлением скорости на бесконечности и хордой; в случае решетки профилей — это угол i между скоростью w_1 и передней касательной к дуге профиля. Угол между w_2 и задней касательной называется *углом отставания потока* δ (рис. 10.3). Угол β_1 между направлением скорости на входе w_1 и фронтом решетки называется *углом входа*;

соответственно угол β_2 между скоростью на выходе w_2 и фронтом решетки называется *углом выхода*. Разность этих углов $\Delta\beta = \beta_2 - \beta_1 = \varepsilon - \delta + i$ определяет поворот потока в решетке.

В аэродинамике различают прямую и обратную задачи об обтекании единичного профиля или решетки профилей.

Под *прямой задачей* для единичного профиля обычно понимают нахождение распределения давления по поверхности данного профиля при заданном вдалеке перед профилем поле скорости. Нахождение геометрии профиля, обеспечивающего заданное по его поверхности распределение давления, называется *обратной задачей*.

В аэродинамике решетки профилей обе эти задачи обычно рассматриваются применительно к суммарным параметрам решетки. Здесь под прямой задачей понимается определение аэродинамических сил и нахождение угла выхода потока при заданном поле скоростей перед решеткой заданной конфигурации. В случае потока вязкой жидкости или газа возникает также необходимость в определении потерь полного давления.

Соответственно под обратной задачей понимается нахождение конфигурации решетки, которая поворачивает на угол $\Delta\beta$ заданный поток, образующий с фронтом решетки угол β_1. Обычно в такой постановке однозначного решения обратной задачи не имеется. Существует бесконечное множество решеток, отличающихся друг от друга геометрическими параметрами и формами профилей, которые удовлетворяют поставленным условиям. Задача становится однозначной при наложении дополнительных условий. В случае потенциального потока эти условия обычно налагаются на геометрию решетки или на распределение давления по профилю, или, наконец, на комбинацию из указанных факторов. В случае вязкого потока из всего множества решеток, осуществляющих заданный угол поворота, находится оптимальная (с минимальными потерями).

§ 2. Теорема Жуковского о силовом воздействии потенциального потока

Рассмотрим обтекание прямолинейной бесконечной решетки крыловых профилей установившимся потоком газа. Будем предполагать, что профили, образующие решетку, имеют бесконечный размах, и течение является плоскопараллельным.

Определим силу, с которой поток воздействует на поверхность крыла единичной длины. Проведем сечения *1—1* и *2—2*, параллельные фронту решетки (рис. 10.4) и настолько удаленные от нее, что можно считать скорость и давление в каждом из этих сечений постоянными. Выберем любую линию тока A_1A_2 и проведем другую линию тока B_1B_2 на расстоянии одного шага

от первой линии тока. Очевидно, что эти линии тока конгруэнтны, т. е. совпадают при наложении. Применяя к объему жидкости, ограниченному отрезками прямых a_1b_1 и a_2b_2 и отрезками линий тока a_1a_2 и b_1b_2, уравнение количества движения, получим (см. § 5 гл. I) следующие выражения для проекций на фронт

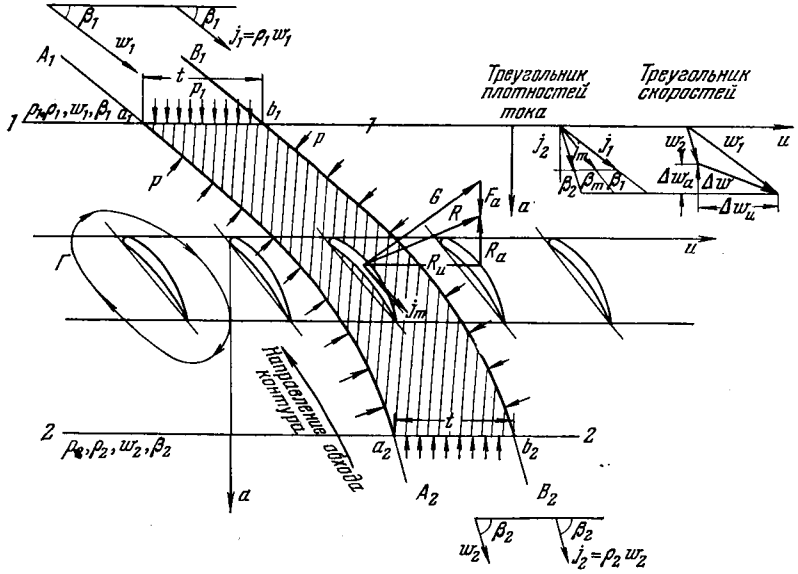


Рис. 10.4. К выводу теоремы Н. Е. Жуковского о равнодействующей аэродинамических сил, приложенных к профилю решетки.

и на ось решетки равнодействующей всех сил, приложенных к объему жидкости:

$$P_u = G\,(w_{2u} - w_{1u}), \tag{1}$$

$$P_a = G\,(w_{2a} - w_{1a}), \tag{2}$$

где G — масса жидкости, проходящая через сечение, равное одному шагу решетки [1]), в единицу времени и определяемая уравнением неразрывности

$$G = \rho_1 w_{1a} t = \rho_2 w_{2a} t. \tag{3}$$

С другой стороны, силы можно определить сложением проекций всех сил, действующих на объем $a_1b_1b_2a_2$, т. е. силы давления по контуру $a_1b_1b_2a_2$ и реакции от силы, приложенной к поверхности крыла (гравитационными силами пренебрегаем). Обозначая со-

[1]) Здесь и далее толщина струи в направлении перпендикуляра к плоскости чертежа равна единице.

ставляющие силы, приложенной к крылу, через R_u и R_a и замечая, что равнодействующие силы давления, приложенные к отрезкам линий тока a_1a_2 и b_1b_2, равны по величине и направлены в противоположные стороны, имеем

$$P_u = -R_u \quad \text{и} \quad P_a = -R_a + (p_1 - p_2)t.$$

Подставляя последние равенства в выражения (1) и (2), получим

$$R_u = G(w_{1u} - w_{2u}), \tag{4}$$

$$R_a = G(w_{1a} - w_{2a}) + t(p_1 - p_2). \tag{5}$$

Определим значение циркуляции $\Gamma_{ок}$ по контуру $a_1b_1b_2a_2$. Обходя контур по положительному направлению, т. е. по часовой стрелке, имеем следующие величины циркуляции для фронтальных участков контура:

$$\Gamma_{a_1b_1} = tw_1 \cos\beta_1 = tw_{1u}, \quad \Gamma_{b_2a_2} = tw_2 \cos\beta_2 = -tw_{2u}.$$

Так как отрезки линий тока a_1a_2 и b_1b_2 равны и имеют одно и то же распределение скорости, то в силу разного направления при обходе их

$$\Gamma_{b_1b_2} = -\Gamma_{a_2a_1}.$$

Таким образом, суммарная величина циркуляции по контуру $a_1b_1b_2a_2$

$$\Gamma_{ок} = \Gamma_{a_1b_1} + \Gamma_{b_1b_2} + \Gamma_{b_2a_2} + \Gamma_{a_2a_1} = t(w_{1u} - w_{2u}) \tag{6}$$

и, следовательно, согласно (4)

$$R_u = G\frac{\Gamma_{ок}}{t}. \tag{7}$$

Формулы (4), (5) или (4), (7) позволяют определить суммарное силовое воздействие любого потока жидкости и газа на произвольную решетку профилей, т. е. определить величину и направление равнодействующих всех сил, приложенных к профилю в решетке.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением потенциального потока. Как было доказано в § 11 гл. II, в случае потенциального — безвихревого — потока циркуляция $\Gamma_{ок}$ по определенному контуру $a_1b_1b_2a_2$ равна циркуляции Γ по любому контуру, охватывающему профиль, в том числе и по поверхности самого профиля, т. е. $\Gamma_{ок} = \Gamma$, и, следовательно, в потенциальном потоке

$$R_u = G\frac{\Gamma}{t}. \tag{8}$$

В потоке несжимаемой жидкости имеем

$$w_{1a} = w_{2a} = w_a, \quad G = \rho t w_a.$$

При отсутствии потерь имеем также

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2}\left[w_2^2 - w_1^2\right].$$

Согласно (4) и (8) для потенциального потока несжимаемой жидкости получим

$$R_a = \frac{t\rho}{2}\left[w_{2u}^2 - w_{1u}^2\right] = t\rho\,\frac{w_{2u} + w_{1u}}{2}\,(w_{2u} - w_{1u}),$$

$$R_u = \rho w_a \Gamma.$$

Введем вектор среднегеометрической скорости

$$\boldsymbol{w}_m = \frac{\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2}{2}.$$

Из рассмотрения треугольника скоростей на рис. 10.3 следует

$$\frac{w_{1u} + w_{2u}}{2} = w_{mu}, \tag{9}$$

$$w_{1a} = w_{2a} = w_{ma}. \tag{10}$$

Направление среднегеометрической скорости определяется из очевидного выражения

$$\operatorname{ctg}\beta_m = \frac{1}{2}\left(\operatorname{ctg}\beta_1 + \operatorname{ctg}\beta_2\right). \tag{11}$$

В соответствии с (6), (9) и (10) имеем

$$R_a = -\rho\Gamma w_{mu}, \tag{12}$$

$$R_u = \rho\Gamma w_{ma}. \tag{13}$$

Из этих выражений для составляющих сил давления следует, что в потенциальном потоке несжимаемой жидкости величина равнодействующей всех аэродинамических сил, приложенных к профилю в решетке, равна произведению плотности жидкости на величину геометрической полусуммы скоростей и на значение циркуляции вокруг профиля

$$R = \rho w_m \Gamma. \tag{14}$$

Сила R направлена перпендикулярно к геометрической полусумме скоростей. Для того чтобы получить направление этой силы, нужно геометрическую полусумму повернуть на угол $\pi/2$ в сторону, противоположную направлению циркуляции. Эта теорема для решетки профилей была впервые получена Н. Е. Жуковским в 1912 г.

При дозвуковых скоростях изоэнтропического потока газа можно пользоваться уравнением равнодействующей в форме

(14), определяя только величину плотности $\rho = \rho'_m$ по формуле

$$\frac{1}{\rho'_m} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right).$$

В этом случае теорема Жуковского для решетки в изоэнтропическом потоке сжимаемого газа выполняется точно, если заменить истинную кривую изоэнтропического процесса касательной к ней прямой в точке $(p_0, 1/\rho_0)$[1]). При этом направление равнодействующей при не очень больших дозвуковых скоростях оказывается весьма близким к нормали к геометрической полусумме плотностей тока

$$j_m = (\rho w)_m = \frac{\rho_1 w_1 + \rho_2 w_2}{2}.$$

В общем случае течения газа равнодействующую можно представить как сумму двух составляющих — силы Жуковского, равной по величине $(\rho w)_m \Gamma$ и направленной по нормали к геометрической полусумме плотностей тока и некоторой добавочной силы, направленной по оси[2]).

Определим силовое воздействие потенциального потока несжимаемой жидкости на единичный профиль. Для этого устремим шаг решетки t к бесконечности. В пределе получим единичный профиль. Очевидно, что если параметры потока перед решеткой считать фиксированными, то при $t \to \infty$ имеем

$$w_{2u} \to w_{1u}, \quad \beta_2 \to \beta_1, \quad w_m \to w_1$$

и, следовательно, согласно (14)

$$R = \rho w_1 \Gamma. \tag{15}$$

Здесь Γ — по-прежнему циркуляция скорости, взятая по любому контуру, охватывающему данный единичный профиль. Таким образом, можем сформулировать следующую теорему: при обтекании единичного профиля потенциальным потоком равнодействующая сил, приложенных к профилю, равна произведению

---

[1]) Берзон Э. М., О силе, действующей на профиль в решетке, Труды Ленинградской военно-воздушной инженерной академии, вып. 27, 1949; Лойцянский Л. Г., Обобщение формулы Жуковского на случай профиля в решетке, обтекаемой сжимаемым газом при дозвуковых скоростях, Прикл. матем. и механ., № 2, т. XIII, 1949; Лойцянский Л. Г., Механика жидкости и газа, Гостехиздат, 1950; Блох Э. Л., Балтер А. Е. и Довжик С. А., Теорема Н. Е. Жуковского о подъемной силе профиля в решетке, обтекаемого сжимаемым газом. В сб. «Промышленная аэродинамика», вып. 4, 1953.

[2]) Седов Л. И., Гидроаэродинамические силы при обтекании профилей сжимаемой жидкостью, Доклады Академии наук СССР, № 6, т. LXIII, 1948 (см. также статью Г. Ю. Степанова в обзорном бюллетене «Авиамоторостроение» № 4, 1949).

плотности и скорости набегающего потока на величину циркуляции Г вокруг профиля. Для отыскания направления равнодействующей, являющейся в этом случае подъемной силой, нужно вектор скорости повернуть на угол $\pi/2$ в сторону, противоположную направлению циркуляции.

Эта важная теорема впервые была получена Н. Е. Жуковским в 1906 г. В дальнейшем М. В. Келдыш и Ф. И. Франкль в 1934 г. доказали эту теорему для газового потока, ограничиваясь достаточно малыми числами **M**. Вывод теоремы Жуковского для газа путем предельного перехода от решетки к единичному профилю был дан Л. И. Седовым в 1948 г.

§ 3. Влияние вязкости на силовое воздействие потока

При обтекании потоком вязкой жидкости за каждым из профилей образуется след — область пониженного полного давления, где и сосредоточены все потери, возникающие в пограничном слое. Как показывают эксперименты, выравнивание статического давления осуществляется в непосредственной близости за решеткой (на расстоянии долей хорды профиля от среза решетки) в сечении z—z (рис. 10.5). Приближенно примем, что при безотрывном обтекании решетки направление скоростей в сечении $z-z$ для вязкого и потенциального потоков одинаково, т. е. положим, что

$$\beta_z = \beta_{z\,\text{пот}} = \beta_{2\,\text{пот}}.$$

В этом случае влияние вязкости будет проявляться только в неравномерном распределении скоростей на выходе из решетки.

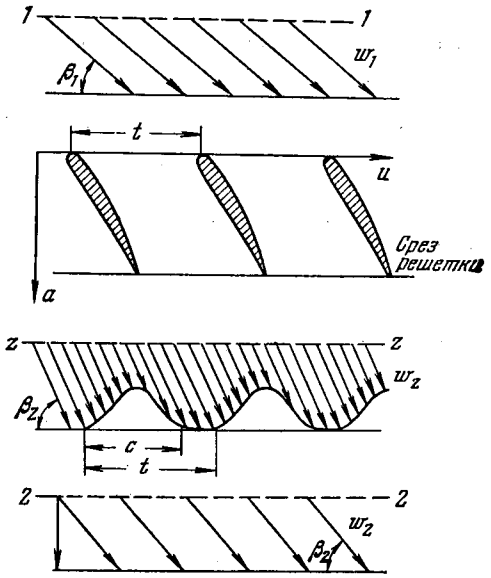


Рис. 10.5. Обтекание решетки профилей потоком вязкой жидкости.

Обычно решетки различают в зависимости от расчетного отношения скоростей на входе и выходе.

Конфузорной решеткой называют решетку, у которой $p_z < p_1$. Поток, проходя через такую решетку, увеличивает свою скорость; при этом статическое давление в нем падает. При одних

и тех же углах β_1 [1]) конфузорные решетки могут быть двух типов: с углом $\beta_z > \beta_1$ и с углом $\beta_z > \pi - \beta_1$.

Решетку, в которой происходит торможение потока, называют *диффузорной решеткой*. Торможение потока сопровождается, естественно, ростом статического давления ($p_z > p_1$). Диффузорные решетки охватывают область углов

$$\pi - \beta_1 > \beta_z > \beta_1.$$

Решетка, в которой изменяется только направление скорости, а ее величина остается неизменной ($p_z \approx p_1$), называется *активной решеткой*. В этой решетке $\beta_z = \pi - \beta_1$.

При течении вязкой жидкости в пространстве за решеткой вследствие перемешивания происходит постепенное выравнивание полей скорости. В результате, начиная с некоторого достаточно удаленного от решетки сечения $2-2$, уже имеется однородный поток, параметры которого могут быть определены с помощью уравнений неразрывности и импульсов. Из этих уравнений следует [2]), что всегда направление выравненного потока ближе к направлению фронта решетки, чем направление исходного, неравномерного потока, т. е. что

$$\beta_2 < \beta_z.$$

Это значит, что в конфузорной и активной решетках влияние вязкости приводит как бы к увеличению угла поворота потока решеткой, т. е. к уменьшению первоначального угла отставания и к возникновению в отдельных случаях даже угла «опережения» потока.

Такой же эффект влияния вязкости проявляется и в диффузорных решетках, у которых $\beta_z > \pi/2$. В диффузорных решетках, имеющих $\beta_z < \pi/2$, влияние вязкости обратное — оно приводит к уменьшению эффективного угла поворота потока решеткой, т. е. к появлению как бы дополнительного угла отставания.

По известным параметрам выравненного потока силовое воздействие на решетку может быть непосредственно определено по формулам (4), (5), полученным для однородного потока.

Для вязкого потока несжимаемой жидкости имеем

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2}\left(w_2^2 - w_1^2\right) + h_w = -\rho \frac{\Gamma_{ок}}{t} w_{mn} + h_w$$

и, согласно (5),

$$R_a = -\rho \Gamma_{ок} w_{mn} + h_w t.$$

---

[1]) Не нарушая общности, будем всегда принимать $\beta_1 \leqslant \pi/2$

[2]) См., например, гл. X предыдущего издания этой книги.

Здесь h_w — суммарные потери полного давления, отнесенные к 1 м^3 жидкости, перетекающему из сечения *1 — 1* в сечение *2 — 2*. Суммарные потери включают в себя как потери, возникающие при непосредственном обтекании решетки, так и потери, связанные с полным выравниванием потока в пространстве за решеткой.

Окружная составляющая силы находится из формулы (7)

$$R_u = \rho w_{ma} \Gamma_{ок}.$$

Последние два выражения позволяют следующим образом обобщить теорему Жуковского: равнодействующая всех сил, приложенных к профилю решетки при обтекании ее потоком вязкой несжимаемой жидкости, равна геометрической сумме циркуляционной силы Жуковского $G = \rho w_m \Gamma_{ок}$, направленной по нормали к геометрической полусумме скоростей, и некоторой добавочной силы $F_a = h_w t$, направленной всегда по оси решетки.

Проекцию равнодействующей на направление нормали к средней геометрической скорости w_m называют *подъемной силой* профиля в решетке R_y. При потенциальном обтекании решетки подъемная сила равна циркуляционной силе Жуковского $R_y = G$.

Другую проекцию равнодействующей на направление среднегеометрической скорости R_x будем называть *вязкой силой*, характеризуя этим самым причину ее возникновения, поскольку в потенциальном потоке несжимаемой жидкости она равна нулю.

Сравнивая обтекание данной решетки вязким и потенциальным потоками несжимаемой жидкости при одной и той же (по величине и направлению) скорости набегающего потока, замечаем, что влияние вязкости двояко: оно приводит как к изменению величины циркуляционной силы Жуковского G, так и к появлению добавочной осевой силы F_a. В результате возникает вязкая сила (сопротивление) R_x, а также изменяется величина подъемной силы R_y.

Если в межлопаточных каналах густой решетки в результате турбулентного перемешивания осуществляется полное выравнивание полей скорости и на срезе решетки поток однороден [1]), то влияние вязкости ограничивается только возникновением осевой силы F_a; сила Жуковского остается такой же, так как величина циркуляции $\Gamma_{ок}$ не изменяется. В этом частном случае

$$\Delta R_y = -F_a \cos \beta_m = -h_w t \cos \beta_m,$$

[1]) Такой случай, строго говоря, является гипотетическим. В действительности, при достаточной протяженности канала устанавливается некоторое неизменяющееся далее распределение скоростей (см. гл. VI).

и, следовательно, в вязком потоке подъемная сила профиля в конфузорной решетке больше, а в диффузорной решетке меньше

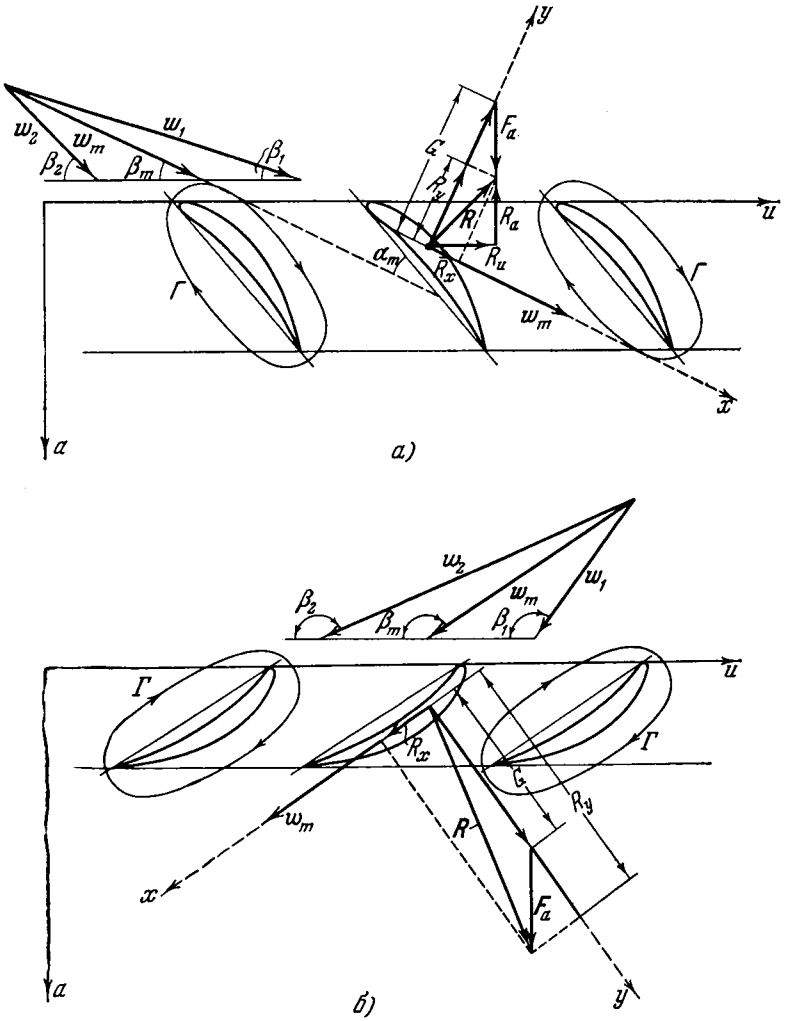


Рис. 10.6. Влияние вязкости на силовое воздействие потока несжимаемой жидкости на густую решетку в предположении полного выравнивания в ее межлопаточных каналах: *а*) диффузорная решетка; *б*) конфузорная решетка.

циркуляционной силы Жуковского (рис. 10.6). В активной решетке, так же как и в потенциальном потоке, подъемная сила равна циркуляционной.

Проекция равнодействующей на направление, нормальное набегающему потоку, называется подъемной силой единичного профиля R_y. Другая, нормальная к ней проекция равнодействующей силы называется силой сопротивления профиля R_x.

В потенциальном потоке на профиль действуют только силы давления, равнодействующая которых, согласно теореме Жуковского, равна подъемной силе профиля $R = R_y$. Сопротивление отсутствует $R_x = 0$. Влияние вязкости сказывается как в появлении на поверхности профиля касательных сил — трения, так и в перераспределении сил давления. В результате в вязком потоке изменяется величина подъемной силы и возникает сила профильного сопротивления, состоящая из силы сопротивления давления R_{xn} и сопротивления трения R_{xf}. Эти составляющие общей силы профильного сопротивления

$$R_x = R_{xn} + R_{xf} \tag{16}$$

равны проекции на направление движения равнодействующей соответственно нормальных и касательных сил, действующих на поверхность профиля.

Отношение величины подъемной силы профиля к его сопротивлению называется *качеством профиля*

$$K = \frac{R_y}{R_x}.$$

Обратная величина — *обратное качество профиля*

$$\mu = \frac{1}{K} = \frac{R_x}{R_y} = \operatorname{tg} \varepsilon.$$

Здесь ε — угол между направлением подъемной и равнодействующей сил. В потенциальном потоке $\varepsilon = 0$.

§ 4. Аэродинамические коэффициенты

Для удобства анализа и пользования данными экспериментов вводят безразмерные коэффициенты характерных сил, деля их значение, приходящееся на единицу длины размаха, на произведение хорды профиля на скоростной напор набегающего потока.

Безразмерные коэффициенты сил профиля или решетки профилей заданной геометрии зависят от угла атаки и от критериев подобия: чисел Маха, Рейнольдса и др.

Для единичного профиля характерными силами являются подъемная сила R_y и лобовое или профильное сопротивление R_x.

Безразмерные коэффициенты этих сил

$$c_y = \frac{R_y}{\frac{\rho_1 w_1^2}{2} b}, \tag{17}$$

$$c_x = \frac{R_x}{\frac{\rho_1 w_1^2}{2} b} \tag{18}$$

называются соответственно *коэффициентом подъемной силы* и *коэффициентом профильного сопротивления*. Согласно (16) коэффициент профильного сопротивления можно представить как сумму коэффициента сопротивления давления c_{xn} и коэффициента сопротивления трения c_{xf}:

$$c_x = \frac{R_{xn}}{\frac{\rho_1 w_1^2}{2} b} + \frac{R_{xf}}{\frac{\rho_1 w_1^2}{2} b} = c_{xn} + c_{xf}.$$

Здесь, в отличие от коэффициента трения пластины c_f, коэффициент сопротивления трения профиля обозначается c_{xf}. Иногда еще вводят понятие о сопротивлении формы. Под *коэффициентом сопротивления формы* понимают разность между коэффициентом профильного сопротивления и коэффициентом трения плоской пластины, имеющей ту же поверхность, что и данное крыло [1]):

$$c_{x\,\text{фор}} = c_{x\,\text{пр}} - 2c_f = c_{xn} + (c_{xf} - 2c_f).$$

Для решетки профилей характерными силами являются фронтальная и осевая. Фронтальная составляющая R_u равнодействующей силы определяет энергетическое воздействие рабочего колеса компрессора или турбины, а осевая R_a характеризует то усилие, которое должны воспринимать подшипники или специальные устройства.

Безразмерные коэффициенты этих составляющих определяются по известным параметрам потока на бесконечности перед решеткой

$$c_u = \frac{R_u}{\rho_1 \frac{w_1^2}{2} F}, \quad c_a = \frac{R_a}{\rho_1 \frac{w_1^2}{2} F}.$$

---

[1]) Множитель 2 при c_f учитывает трение на обеих сторонах пластины.

Согласно (3), (4) и (5) в решетке для крыла единичной длины ($l = 1$) имеем

$$c_u = \frac{R_u}{\rho_1 \frac{w_1^2}{2} b} = -\frac{2}{b/t} \frac{\Delta w_u}{w_1} \sin \beta_1,$$

$$c_a = \frac{R_a}{\rho_1 \frac{w_1^2}{2} b} = -\frac{1}{b/t} \left(\frac{\Delta p}{\rho_1 \frac{w_1^2}{2}} + 2 \frac{\Delta w_a}{w_1} \sin \beta_1 \right).$$

Безразмерный перепад давления

$$\frac{\Delta p}{\rho_1 \frac{w_1^2}{2}} = \frac{2p_1}{\rho_1 w_1^2} \left(\frac{p_2}{p_1} - 1 \right) = \frac{2RT}{w_1^2} \left(\frac{p_2}{p_1} - 1 \right) = \frac{2}{k M_1^2} \left(\frac{p_2}{p_1} - 1 \right) \quad (19)$$

можно представить при использовании газодинамических функций (§ 6 гл. V) в следующем виде:

$$\frac{\Delta p}{\rho_1 \frac{w_1^2}{2}} = \frac{k+1}{k} \frac{\tau(\lambda_1)}{\lambda_1^2} \left[\frac{\pi(\lambda_2)}{\pi(\lambda_1)} \sigma - 1 \right] \quad (20)$$

или так:

$$\frac{\Delta p}{\rho_1 \frac{w_1^2}{2}} = \frac{2}{k M_1^2} \left[\frac{\pi(M_2)}{\pi(M_1)} \sigma - 1 \right]. \quad (21)$$

При этом предполагается, что все потери сосредоточены в пространстве между сечениями *1—1* и *2—2* и могут быть учтены величиной коэффициента сохранения полного давления σ. При отсутствии теплообмена с внешней средой

$$T_1^* = T_2^*; \qquad a_{кр1} = a_{кр2} = a_{кр}$$

и, следовательно,

$$c_u = -\frac{2}{b/t} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cos \beta_2 - \cos \beta_1 \right) \sin \beta_1, \quad (22)$$

$$c_a = -\frac{1}{b/t} \left[\frac{k+1}{k} \frac{\tau(\lambda_1)}{\lambda_1^2} \left(\frac{\pi(\lambda_2)}{\pi(\lambda_1)} \sigma - 1 \right) + 2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \sin \beta_2 - \sin \beta_1 \right) \sin \beta_1 \right]. \quad (23)$$

Из уравнения состояния при $T^* = \text{const}$ имеем

$$\frac{p_2^*}{p_1^*} = \frac{\rho_2^*}{\rho_1^*} = \frac{\rho_{кр2}}{\rho_{кр1}}.$$

Поэтому уравнение неразрывности

$$\frac{\rho_1 w_1}{\rho_{кр1} a_{кр1}} \sin\beta_1 = \frac{\rho_2 w_2}{\rho_{кр2} a_{кр2}} \frac{\rho_{кр2}}{\rho_{кр1}} \frac{a_{кр2}}{a_{кр1}} \sin\beta_2$$

можно записать в следующем безразмерном виде:

$$q(\lambda_1)\sin\beta_1 = \sigma q(\lambda_2)\sin\beta_2. \qquad (24)$$

В соответствии с (24) выражение (20) для безразмерного перепада давлений записываем в следующем виде:

$$\frac{\Delta p}{\rho_1 \frac{w_1^2}{2}} = \frac{k+1}{k} \frac{\tau(\lambda_1)}{\pi(\lambda_1)} \frac{1}{\lambda_1^2} \left[\frac{\pi(\lambda_2)\, q(\lambda_1)\sin\beta_1}{q(\lambda_2)\sin\beta_2} - \pi(\lambda_1) \right],$$

или, согласно определению газодинамических функций (см. гл. V),

$$\frac{\Delta p}{\rho_1 \frac{w_1^2}{2}} = \frac{k+1}{k} \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}} \frac{1}{\lambda_1} \left[\frac{\sin\beta_1}{y(\lambda_2)\sin\beta_2} - \frac{1}{y(\lambda_1)} \right].$$

Таким образом, из (23) имеем

$$c_a = -\frac{1}{b/t} \left[\frac{m}{\lambda_1} \left(\frac{\sin\beta_1}{y(\lambda_2)\sin\beta_2} - \frac{1}{y(\lambda_1)} \right) + 2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\sin\beta_2 - \sin\beta_1 \right)\sin\beta_1 \right], \qquad (25)$$

где

$$m = \frac{k+1}{k} \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}}.$$

В случае несжимаемой жидкости выражения для коэффициентов окружной и осевой составляющих равнодействующей принимают следующий вид:

$$c_u = \frac{2}{b/t} \frac{\sin\beta_1 \sin(\beta_2 - \beta_1)}{\sin\beta_2} = -\frac{2}{b/t}\sin^2\beta_1 (\operatorname{ctg}\beta_2 - \operatorname{ctg}\beta_1), \qquad (26)$$

$$c_a = \frac{1}{b/t}\left(\frac{\sin^2\beta_1}{\sin^2\beta_2} + \zeta - 1 \right), \qquad (27)$$

где

$$\zeta = \frac{p_1^* - p_2^*}{\rho_1 \frac{w_1^2}{2}}.$$

В ряде случаев при обтекании решетки профилей потоком несжимаемой жидкости в качестве характерных принимают подъемную силу — силу, направленную по нормали к среднегеометрической скорости w_m, и силу, вызванную наличием вязкости и направленную вдоль w_m. При этом для образования без-

размерных коэффициентов делят соответствующие составляющие равнодействующей на скоростной напор, рассчитанный по среднегеометрической скорости. Таким образом, имеем

$$c_y = \frac{R_y}{\rho \frac{w_m^2}{2} b}, \quad c_x = \frac{R_x}{\rho \frac{w_m^2}{2} b}.$$

§ 5. Профиль в плоском потоке несжимаемой жидкости

Рассмотрим сначала потенциальный поток несжимаемой жидкости. Тогда задача обтекания тела данной формы сводится к нахождению функции тока $\psi(x, y)$ и потенциала скорости $\varphi(x, y)$.

Покажем, что при бесциркуляционном обтекании кругового цилиндра потенциал может быть определен как потенциал некоторого результирующего течения, образованного наложением двух течений — плоскопараллельного и диполя. Согласно формулам (108) и (114) § 12 гл. II функция тока такого течения

$$\psi = w_1 y - \frac{G}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Приравнивая ψ постоянной величине c, получим уравнение семейства линий тока

$$y\left[w_1 (x^2 + y^2) - \frac{G}{2\pi}\right] = c (x^2 + y^2).$$

При $c = 0$ (рис. 10.7, a)

$$y\left[w_1 (x^2 + y^2) - \frac{G}{2\pi}\right] = 0.$$

Это уравнение распадается на два:

$$y = 0 \quad \text{и} \quad x^2 + y^2 = \frac{G}{2\pi w_1}.$$

Первое изображает собой ось x, а второе — окружность с центром в начале координат и радиусом

$$r_0 = \sqrt{\frac{G}{2\pi w_1}}.$$

Согласно (107) и (113) § 12 гл. II потенциал скоростей рассматриваемого течения

$$\varphi = w_1 x + \frac{G}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} = w_1 \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2}\right) r \cos\theta.$$

Для круга единичного радиуса

$$\varphi = w_1 \left(1 + \frac{1}{r^2}\right) r \cos\theta \qquad (28)$$

и соответственно

$$w_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = w_1\left(1 - \frac{1}{r^2}\right)\cos\theta,$$
$$w_s = \frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -w_1\left(1 + \frac{1}{r^2}\right)\sin\theta, \qquad (29)$$

где $s = r\theta$ — дуга окружности.

Отсюда видно, что на бесконечном удалении от окружности течение однородно и происходит со скоростью w_1, направленной вдоль оси x.

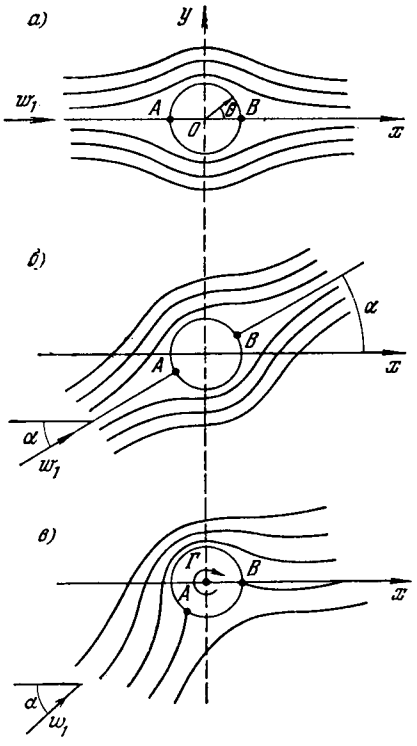


Рис. 10.7. Обтекание круга потенциальным потоком несжимаемой жидкости: *а*) без циркуляции при нулевом угле атаки ($\alpha = 0$); *б*) без циркуляции при $\alpha \neq 0$; *в*) обтекание с циркуляцией.

Согласно (29) величина циркуляции относительно окружности составляет

$$\Gamma = \int_s w_s\, ds = \int_0^{2\pi} w_s r\, d\theta =$$
$$= -w_1\left(1 + \frac{1}{r^2}\right) r \int_0^{2\pi} \sin\theta\, d\theta = 0.$$

Таким образом, выражение (28) есть потенциал скоростей бесциркуляционного обтекания круга единичного радиуса однородным потоком, имеющим скорость w_1, направленную вдоль оси x.

Так как на самой окружности ($r = 1$) радиальная составляющая скорости равна нулю, то $w = w_s = 2w_1 \sin\theta$. Отсюда следует, что максимальная скорость обтекания, которая наблюдается при $\theta = \pi/2$ и $\theta = 3\pi/2$, равна удвоенной величине скорости набегающего потока. При $\theta = 0$ и $\theta = \pi$ скорости равны нулю и соответствующие точки являются критическими. Последнее очевидно, так как является следствием симметрии течения. При обтекании окружности под некоторым углом α к оси x критические точки переместятся по окружности на тот же угол (рис. 10.7, *б*).

Для получения циркуляционного обтекания окружности наложим на рассмотренный выше поток чисто циркуляционное течение от единичного вихря, поместив его в начало координат, т. е. в центр окружности. Скорость, индуцированная точечным вихрем с циркуляцией Γ по величине, равна $\Gamma/2\pi r$ и направлена всегда по нормали к радиусу-вектору.

Суммируя эти скорости со скоростями бесциркуляционного обтекания окружности, получаем искомое выражение для распределения скоростей по контуру окружности при ее циркуляционном обтекании

$$\tilde{w} = 2w_1 \sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi}.$$

Последнее выражение позволяет легко определить необходимую величину циркуляции, при которой одна из критических точек, например B, сохраняет неизменное положение при изменении направления набегающего на окружность потока. Пусть, например, при нулевом угле атаки (который будем условно отсчитывать от диаметра AB) окружность обтекалась бесциркуляционным потоком. В этом случае одной из критических точек будет точка B. Для того чтобы эта точка продолжала оставаться критической и при обтекании окружности под некоторым углом атаки $\alpha = -\theta$, необходимо, как это следует из (61), наложить циркуляцию $\Gamma = 2\pi w_1 \sin\alpha$.

Зная течение вокруг окружности единичного радиуса, можно с помощью конформного отображения области, внешней данному профилю, на область, внешнюю кругу, построить течение и вокруг произвольного профиля. При этом используется свойство неизменности циркуляции при конформном преобразовании [1]). Однако в этом случае задача об обтекании профиля потоком, у которого на бесконечности заданы величина и направление скорости, имеет бесчисленное множество решений, зависящих от выбора величины циркуляции Γ. Необходимо дополнительное условие, определяющее величину циркуляции.

С целью выяснения этого условия рассмотрим обтекание потоком несжимаемой жидкости профиля, имеющего острую заднюю кромку, наличие которой характерно для современных аэродинамических профилей. Предположим сначала, что циркуляция скорости отсутствует ($\Gamma = 0$), т. е. нет подъемной силы. Получающаяся в этом гипотетическом случае картина так называемого бесциркуляционного обтекания профиля может быть построена известными методами теоретической гидродинамики.

Картина бесциркуляционного обтекания профиля обладает следующими основными особенностями. Набегающий поток раз-

[1]) Л. Г. Лойцянский, Механика жидкости и газа, «Наука», 1973.

деляется у профиля на две части, обтекающие соответственно его верхнюю и нижнюю поверхности (рис. 10.8, *а*). Точка *A*, в которой струи разделяются и поток имеет нулевую скорость, называется *передней критической точкой* или *точкой раздела струй*. Точка *C*, где струи вновь сходятся, называется *точкой слияния струй* или *задней критической точкой*.

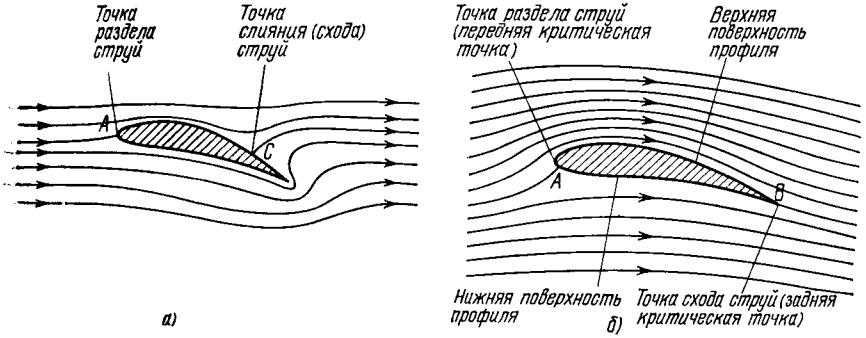


Рис. 10.8. Обтекание профиля потенциальным потоком несжимаемой жидкости: *а*) обтекание без циркуляции; *б*) обтекание с циркуляцией.

Изменение угла атаки приводит к изменению положения передней и задней критических точек. Например, в случае, изображенном на рис. 10,8, при увеличении угла атаки передняя критическая точка движется по нижней поверхности, приближаясь к задней кромке профиля, а задняя критическая точка, перемещаясь по верхней поверхности, приближается к лобовой части профиля; уменьшение угла атаки приводит к перемещению точки разветвления струй в сторону носика, а точки слияния струй — в хвостовую часть профиля.

В общем случае ввиду невозможности обтекания острой задней кромки (гл. II, § 11) такое течение сопровождается отрывом потока от поверхности профиля. Только при некотором частном значении угла атаки (обычно отрицательном) точка схода струй совпадает с задней кромкой профиля, т. е. получается безотрывное бесциркуляционное течение; соответствующий угол атаки α_0 называется *углом нулевой подъемной силы*.

Рассмотрим теперь другой крайний случай обтекания крыла — чисто циркуляционное обтекание. Под чисто циркуляционным течением будем понимать течение, обусловленное только наличием циркуляции вокруг профиля при отсутствии набегающего потока, когда $w_1=0$, $\Gamma\neq 0$. Примером чисто циркуляционного течения является рассмотренное в гл. II круговое течение, поле скоростей которого вызвано одиночным вихрем.

В случае чисто циркуляционного течения отсутствуют передняя и задняя критические точки, и линии тока представляют собой замкнутые кривые, огибающие профиль. Такое течение независимо от величины циркуляции требует наличия бесконечной скорости в точке, лежащей на задней кромке профиля и, следовательно, так же как бесциркуляционное течение, не может быть реализовано без отрыва потока.

Общий случай плоскопараллельного обтекания крыла может быть получен наложением этих двух предельных случаев течения: бесциркуляционного и чисто циркуляционного. Как можно убедиться из построения картины обтекания, в результате наложения на бесциркуляционное течение чисто циркуляционного течения задняя критическая точка при положительном значении циркуляции ($\Gamma > 0$) сдвигается к хвостовой, а при отрицательном ($\Gamma < 0$) — к лобовой части профиля [1]).

Задавая величину Γ, мы однозначным образом определяем положение задней критической точки при данном направлении бесциркуляционного течения, т. е. заданном направлении скорости вдалеке от профиля.

Очевидно, что при некотором вполне определенном значении циркуляции Γ вокруг крыла задняя критическая точка совпадет с задней острой кромкой профиля (рис. 10.8). В этом единственном случае циркуляционное течение может быть физически реализовано безотрывным образом. При всех других значениях циркуляции требуется обтекание задней кромки, что, как указывалось, невозможно без отрыва потока.

Это условие называется *постулатом Чаплыгина — Жуковского* и может быть сформулировано следующим образом: при безотрывном обтекании профиля вокруг него возникает циркуляция Γ такой величины, при которой задняя острая кромка является точкой схода струй. Постулат Чаплыгина — Жуковского дает возможность вычислить величину циркуляции вокруг профиля, а следовательно, при помощи теоремы Жуковского и подъемную силу крыла.

Рассмотрим физическую схему обтекания крыла, при которой появляется подъемная сила, т. е. сила давления жидкости на крыло, направленная перпендикулярно к скорости невозмущенного потока. Как мы видели, в потоке около крыла возникает циркуляция, в результате наложения которой на набегающий поток скорости над крылом становятся больше, а под крылом меньше скорости невозмущенного потока. Вследствие этого давление над крылом понижается, а под крылом повышается, что приводит к появлению подъемной силы. Возникновение цир-

[1]) Напоминаем, что положительным считается вращение по часовой стрелке.

куляции жидкости вокруг крыла в свою очередь объясняется следующими причинами. В начальный момент движения крыла у его задней острой кромки образуется жидкая поверхность раздела (поверхность тангенциального разрыва скорости), сворачивающаяся в вихрь, который увлекается потоком. Однако в набегающем потоке не было завихренности, следовательно, циркуляция по контуру, охватывающему крыло и вихрь, равна нулю. Если же этот контур рассечь линией, отделяющей крыло от вихря, то в каждом из новых двух контуров циркуляция не равна нулю. Очевидно, что эти циркуляции должны быть равны по величине, но противоположны по направлению.

Итак, начальный вихрь, срывающийся с задней кромки крыла, вызывает возникновение циркуляции вокруг крыла, которая и порождает подъемную силу. На фотографии обтекания крыла (рис. 10.9) видны как начальный вихрь, так и циркуляционное течение около крыла.

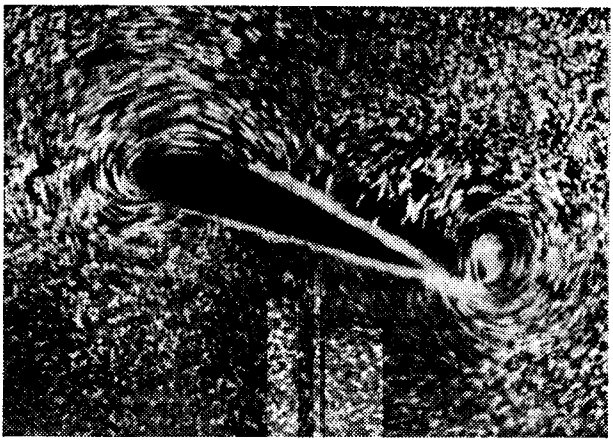


Рис. 10.9. Фотография начального вихря.

Заметим, что рассмотренный выше частный случай безотрывного бесциркуляционного обтекания представляет собой пример выполнения условия Чаплыгина — Жуковского для режима $\Gamma = 0$.

Такое безотрывное бесциркуляционное течение (при $\Gamma = 0$) является единственно возможным случаем, при котором бесциркуляционное течение реализуется в действительности; в прочих случаях оно является лишь мысленной составляющей частью истинного течения, включающего также и циркуляционный поток.

Пусть теперь при конформном преобразовании данного произвольного профиля на круг единичного радиуса задняя кромка профиля B_1 переходит в точку B окружности (рис. 10.10). Это значит, что бесциркуляционное направление обтекания окружности, соответствующее бесциркуляционному обтеканию профиля, параллельно диаметру окружности, проходящему через

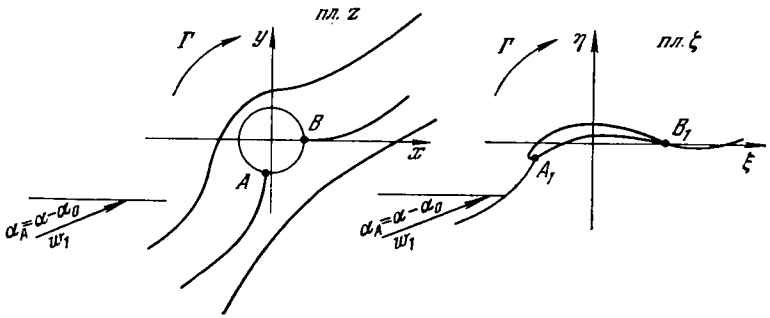


Рис. 10.10. Конформное отображение внешности профиля на внешность окружности единичного радиуса.

точку B. Если профиль и соответственно окружность обтекаются теперь под углом $(\alpha - \alpha_0)$ к этому бесциркуляционному направлению, то для того, чтобы точки B_1 и B по-прежнему совпадали с точкой схода струй, необходимо в соответствии со сказанным выше наложить циркуляцию

$$\Gamma = m_u b w_1 \sin(\alpha - \alpha_0), \tag{30}$$

где m_u — коэффициент пропорциональности, зависящий только от формы профиля, α_0 — угол нулевой подъемной силы, т. е. безотрывного бесциркуляционного обтекания.

Коэффициент подъемной силы, согласно (15), (17) и (30), составляет

$$c_y = \frac{2\Gamma}{b w_1} = 2 m_u \sin(\alpha - \alpha_0).$$

Отсюда имеем

$$\left(\frac{dc_y}{d\alpha}\right)_{\alpha=\alpha_0} = 2 m_u.$$

Так как обычно применяемые углы атаки невелики, то можно положить $\sin(\alpha - \alpha_0) \approx \alpha - \alpha_0$. Используя это приближение, имеем

$$c_y = 2 m_u (\alpha - \alpha_0).$$

Вводя так называемый *аэродинамический угол атаки*

$$\alpha_A = \alpha - \alpha_0,$$

т. е. угол между направлением скорости на бесконечности и направлением нулевой подъемной силы, получим

$$c_y = 2m_u\alpha_A.$$

У симметричных профилей хорда совпадает с осью симметрии, вследствие чего угол нулевой подъемной силы $\alpha_0 = 0$. Для дужки круга направление бесциркуляционного обтекания соответствует прямой, проходящей через заднюю кромку и середину профиля.

Пользуясь данными по профилю Жуковского, можно получить следующую приближенную формулу для определения величины $dc_y/d\alpha$ произвольного профиля [1]):

$$\frac{dc_y}{d\alpha} = 2\pi(1 + 0{,}77\bar{c})\sqrt{1 + \left(\frac{\bar{f}}{2}\right)^2}.$$

В этой формуле один из множителей учитывает кривизну профиля, а другой множитель — его толщину.

В обычных крыловых профилях величина $(\bar{f}/2)^2$ пренебрежимо мала, и поэтому для них принимают

$$\frac{dc_y}{d\alpha} = 2\pi(1 + 0{,}77\bar{c}).$$

Полагая в последнем выражении $\bar{c} = 0$, получаем для плоской пластинки

$$\frac{dc_y}{d\alpha} = 2\pi,$$

и, следовательно,

$$c_y = 2\pi\alpha.$$

В потенциальном потоке касательные силы отсутствуют, и поэтому, казалось бы, равнодействующая всех сил давления, приложенных к пластине, должна быть направлена по нормали к ней, а не перпендикулярно скорости набегающего потока, как это следует из теоремы Жуковского. Этот кажущийся парадокс объясняется тем, что, кроме нормальных сил, действующих на верхнюю и нижнюю поверхности пластины, у ее передней кромки возникает направленная по пластине тянущая сила такой величины, при которой равнодействующая оказывается направленной по нормали к скорости набегающего потока. Возникновение этой тянущей силы связано с появлением у передней кромки бесконечно большого отрицательного давления, принципиально допускаемого в рассматриваемой математической модели идеальной жидкости.

---

[1]) См. «Аэродинамика», т. II, под ред. В. Ф. Дюренда, Оборонгиз, М.—Л., 1939.

Заметим, что, как уже указывалось (гл. II), вследствие нереальности такого давления безотрывное обтекание становится невозможным, и с передней острой кромки пластины происходит срыв струй.

Поэтому применение описанных выше математических методов для определения обтекания невязким потоком пластины или других профилей с острыми передней и задней кромками, строго говоря, носит несколько условный характер.

Исключение составляет только случай обтекания профиля под таким углом атаки, при котором точка разветвления струй

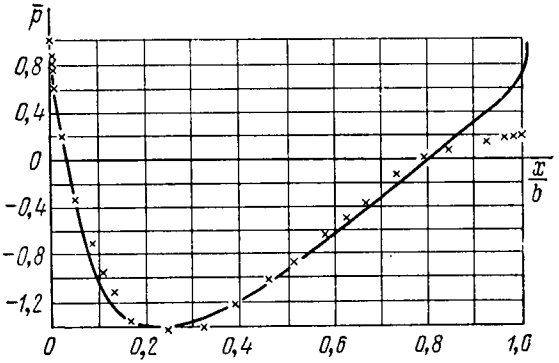


Рис. 10.11. Сравнение экспериментальной и теоретической эпюр давления для симметричного профиля Жуковского с относительной толщиной $\bar{c} = 0{,}1506$ при нулевом угле атаки: кривая — расчет, крестики — эксперимент.

совпадает с острой передней кромкой [1]). В этом случае обе острые кромки, передняя и задняя, лежат на линии раздела потоков, обтекающих верхнюю и нижнюю стороны профиля, и струи жидкости плавно входят и сходят с него.

До сих пор мы рассматривали обтекание профиля идеальной жидкостью. Изложим некоторые соображения о влиянии вязкости. Вязкость жидкости вносит изменения в картину течения и приводит к различию между выводами теории потенциального обтекания профиля и экспериментальными данными. Влияние вязкости в случае хорошо обтекаемых тел сказывается лишь в тонком пограничном слое, вне которого движение можно считать потенциальным, т. е. безвихревым.

В гл. VI рассмотрено подробно обтекание с трением плоской пластины, расположенной параллельно направлению потока; в этом случае давление в потоке практически не изменяется.

[1]) Иногда этот угол называют углом атаки безударного обтекания.

При обтекании же вязкой жидкостью профиля давление около его поверхности существенно изменяется. Исходя из этого, все течение вблизи профиля следует разделить на два основных участка: конфузорный участок, в котором скорость возрастает, а давление соответственно падает, т. е. градиент давления отрицателен ($dp/dx < 0$), и диффузорный участок, в котором скорость падает, а давление возрастает, т. е. градиент давления положителен ($dp/dx > 0$).

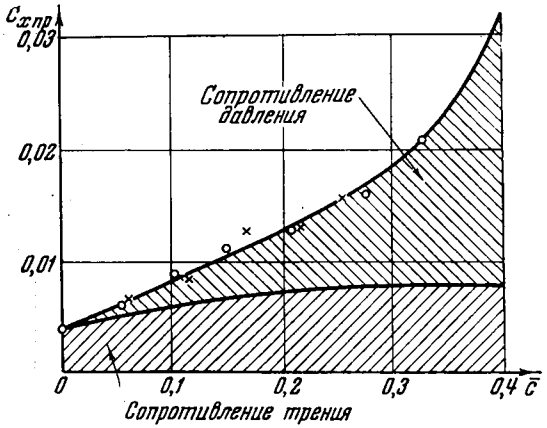


Рис. 10.12. Соотношение между сопротивлением трения и сопротивлением давления в зависимости от относительной толщины профиля $\bar{c}$ для симметричного профиля Жуковского по данным продувки при нулевом угле атаки.

К конфузорному участку относятся нижняя поверхность и передняя часть верхней поверхности профиля (до точки минимума давлений $p_{\min}$). К диффузорному участку относится задняя часть верхней поверхности (от точки минимума давления до задней кромки). В конфузорном участке течение совершается в сторону падения давления, и поэтому не возникает опасности отрыва пограничного слоя от поверхности крыла. В диффузорном участке движение направлено в сторону роста давлений, что, как указывалось в гл. VI, при больших градиентах давления приводит к возможности отрыва пограничного слоя.

Эти соображения подтверждаются многочисленными экспериментами с диффузорами, конфузорами и крыловыми профилями.

На рис. 10.11 проводится сравнение эпюр безразмерных величин давления $\bar{p} = (p - p_1)/0{,}5\rho w_1^2$ по поверхности, полученных из эксперимента, с данными теории потенциального обте-

кания на нулевом угле атаки для симметричного профиля Жуковского.

Как видим, разница между теоретическими и экспериментальными данными в распределении давления имеется только в кормовой части профиля. Этот результат справедлив не только при нулевом угле, но также и при малых углах атаки.

Для иллюстрации соотношения между сопротивлением давления и сопротивлением трения на рис. 10.12 приведены результаты экспериментальных исследований при нулевом угле атаки серии из семи симметричных профилей Жуковского с относительной толщиной $\bar{c}=0{,}05$; 0,10; 0,15; 0,21; 0,27; 0,33; 0,40.

Как видим, у тонких профилей подавляющую часть профильного сопротивления составляет сопротивление трения; например, в случае $\bar{c}=0{,}1$ на долю трения падает до 75% профильного сопротивления. С увеличением относительной толщины профиля за счет возрастания градиента давления в диффузорной части крыла растет общее профильное сопротивление и уменьшается доля сопротивления трения; при $\bar{c}>0{,}25$ сопротивление давления преобладает над сопротивлением трения; при $\bar{c}=0{,}4$ первое составляет $\sim 70\%$ общего профильного сопротивления.

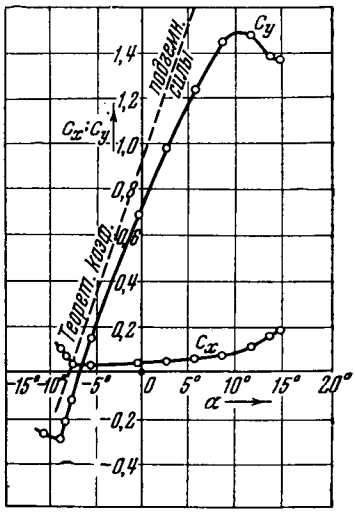


Рис. 10.13. Экспериментальные кривые $c_y(\alpha)$ и $c_x(\alpha)$ для единичного профиля.

Перейдем к вопросу о влиянии вязкости на подъемную силу. Типичная экспериментальная кривая $c_y(\alpha)$ для аэродинамического профиля изображена на рис. 10.13. Сначала у экспериментальной кривой $c_y(\alpha)$ имеется значительный прямолинейный участок, как это следует из теории потенциального обтекания, однако экспериментальные значения $(dc_y/d\alpha)_{\alpha=\alpha_0}$ получаются меньше теоретических.

С увеличением угла атаки усиливается диффузорность течения на верхней поверхности, что увеличивает расхождение между экспериментом и теорией. При критическом значении угла атаки $\alpha_{кр}$ коэффициент подъемной силы достигает максимума ($c_y = c_{y\,max}$), после чего наблюдается падение величины c_y с увеличением угла атаки. Резкое отклонение зависимости $c_y(\alpha)$ от линейной при больших углах атаки вызывается отрывом

пограничного слоя, который с увеличением угла атаки распространяется на все большую часть верхней поверхности профиля и одновременно приводит к интенсивному возрастанию коэффициента лобового сопротивления c_x.

§ 6. Дозвуковое обтекание профиля

При малых значениях числа Маха ($M_1 < 0{,}3$) величина скорости набегающего потока газа не оказывает заметного влияния на характер распределения давления по профилю. Коэффициенты давления $\bar{p}$ на профиле остаются практически такими же, как в несжимаемой жидкости. Увеличение скорости приводит к уменьшению минимального давления и соответственно к росту максимального числа Маха на профиле. Хотя при больших значениях M_1 ($M_1 > 0{,}3$) эпюра коэффициентов давления и величина $\bar{p}_{\max раз}$ изменяются, но по-прежнему увеличение скорости набегающего потока приводит к росту максимального числа Маха. В результате при некотором критическом значении числа Маха набегающего потока ($M_1 = M_{1\,кр}$) максимальная скорость на профиле становится равной местной скорости звука, т. е. $M_{max} = 1{,}0$. При этом величина минимального давления достигает своего критического значения

$$p_{min} = p_{кр} = p^* \pi(1) = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}} p^*.$$

Здесь p^* есть полное давление набегающего потока.

При $M_1 > M_{кр}$ около поверхности крыла возникает зона течения со сверхзвуковыми скоростями, в связи с чем течение приобретает новые качества. Величина $M_{1\,кр}$ является границей двух основных режимов обтекания профиля при дозвуковой скорости набегающего потока: докритического ($M_1 < M_{1\,кр}$) и закритического ($M_1 > M_{1\,кр}$).

Рассмотрим обтекание профиля невязким дозвуковым потоком газа, направленным по оси при докритических скоростях, т. е. при $M_1 < M_{1\,кр}$.

В общем случае составляющие вектора скорости любой точки потока могут быть выражены так:

$$u = w_1 + u', \quad v = v'. \tag{31}$$

Здесь u' и v' — величины, характеризующие возмущение скоростей однородного потока данным профилем.

Подставляя (31) в уравнение (100) гл. II, которое мы предварительно переписываем так:

$$(a^2 - u^2)\frac{\partial u}{\partial x} - uv\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) + (a^2 - v^2)\frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

получаем следующее уравнение относительно скоростей возмущения:

$$a^2\left(\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}\right)=$$
$$=(w_1+u')^2\frac{\partial u'}{\partial x}+v'^2\frac{\partial v'}{\partial y}+(w_1+u')\left(\frac{\partial u'}{\partial y}+\frac{\partial v'}{\partial x}\right)v'. \qquad (32)$$

Из уравнения теплосодержания (формула (48) гл. I) следует, что

$$\frac{w_1^2}{2}+\frac{a_1^2}{k-1}=\frac{w^2}{2}+\frac{a^2}{k-1}, \qquad (33)$$

откуда

$$a^2=a_1^2+\frac{k-1}{2}\left[w_1^2-(w_1+u')^2-v'^2\right]=$$
$$=a_1^2-\frac{k-1}{2}(2u'w_1+u'^2+v'^2).$$

Используя последнее выражение, приводим уравнение (32) к следующему виду:

$$(1-\mathsf{M}_1^2)\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}=$$
$$=\mathsf{M}_1^2\left[(k+1)\frac{u'}{w_1}+\frac{k+1}{2}\left(\frac{u'}{w_1}\right)^2+\frac{k-1}{2}\left(\frac{v'}{w_1}\right)^2\right]\frac{\partial u'}{\partial x}+$$
$$+\mathsf{M}_1^2\left[(k-1)\frac{u'}{w_1}+\frac{k+1}{2}\left(\frac{v'}{w_1}\right)^2+\frac{k-1}{2}\left(\frac{u'}{w_1}\right)^2\right]\frac{\partial v'}{\partial y}+$$
$$+\mathsf{M}_1^2\left[\frac{v'}{w_1}\left(1+\frac{u'}{w_1}\right)\left(\frac{\partial u'}{\partial y}+\frac{\partial v'}{\partial x}\right)\right]. \qquad (34)$$

Последнее уравнение представляет собой точное уравнение для скоростей возмущения при изоэнтропическом обтекании профиля потоком с любым числом Маха. В левой части этого уравнения имеются только линейные члены.

В изоэнтропическом потоке газа коэффициент давления

$$\bar{p}=\frac{p-p_1}{\rho_1\frac{w_1^2}{2}}=\frac{2}{k\mathsf{M}_1^2}\left(\frac{p}{p_1}-1\right)=\frac{2}{k\mathsf{M}_1^2}\left[\frac{\pi(\mathsf{M})}{\pi(\mathsf{M}_1)}-1\right], \qquad (35)$$

где в соответствии с определением функции $\pi(\mathsf{M})$ и числа Маха

$$\frac{\pi(\mathsf{M})}{\pi(\mathsf{M}_1)}=\left(\frac{1+\frac{k-1}{2}\mathsf{M}_1^2}{1+\frac{k-1}{2}\mathsf{M}^2}\right)^{\frac{k}{k-1}}=\left(\frac{a_1^2+\frac{k-1}{2}w_1^2}{a^2+\frac{k-1}{2}w^2}\cdot\frac{a^2}{a_1^2}\right)^{\frac{k}{k-1}}.$$

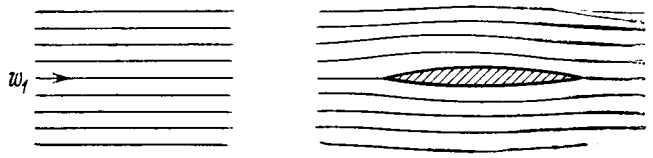
С учетом выражения (48) гл. I формулу (35) можно записать в следующем виде:

$$\bar{p} = \frac{2}{k\mathrm{M}_1^2}\left\{\left[1 + \frac{k-1}{2}\mathrm{M}_1^2\left(1 - \frac{w^2}{w_1^2}\right)\right]^{\frac{k}{k-1}} - 1\right\}. \qquad (36)$$

Подстановка (31) в (36) дает следующую зависимость коэффициента давления от скоростей возмущенного течения:

$$\bar{p} = \frac{2}{k\mathrm{M}_1^2}\left\{\left[1 - \frac{k-1}{2}\mathrm{M}_1^2\left(2\frac{u'}{w_1} + \frac{u'^2}{w_1^2} + \frac{v'^2}{w_1^2}\right)\right]^{\frac{k}{k-1}} - 1\right\}. \qquad (37)$$

Ограничимся случаем обтекания тонкого профиля под такими малыми углами атаки (рис. 10.14), когда возмущения



а) *б)*

Рис. 10.14. Возмущение, создаваемое тонким профилем в однородном потоке: *а*) однородный поток; *б*) возмущенный поток.

скорости относительно невелики:

$$\frac{u'}{w_1},\ \frac{v'}{w_1} \ll 1.$$

Удерживая только члены первого порядка малости, получаем

$$\left[1 - \frac{k-1}{2}\mathrm{M}_1^2\left(2\frac{u'}{w_1} + \frac{u'^2}{w_1^2} + \frac{v'^2}{w_1^2}\right)\right]^{\frac{k}{k-1}} \cong 1 - k\mathrm{M}_1^2\frac{u'}{w_1},$$

и, согласно (37),

$$\bar{p} = -\frac{2u'}{w_1}. \qquad (38)$$

Пренебрегая в уравнении (34) малыми величинами выше первого порядка и считая, что M_1 настолько отличается от единицы, что разность $(1 - \mathrm{M}_1^2)$ не является малой величиной, т. е. $(1 - \mathrm{M}_1^2) \gg u'/w_1$, приходим к следующему приближенному уравнению для скорости возмущения при обтекании тонкого про-

филя дозвуковым потоком газа при докритических скоростях:

$$(1 - M_1^2)\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0. \tag{39}$$

Введем потенциал φ скоростей возмущений

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = u', \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = v'. \tag{40}$$

Дифференцируя обе части последних двух выражений

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial u'}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial v'}{\partial y},$$

после подстановки в (39) получим следующее линеаризованное уравнение потенциала скоростей возмущений $\varphi(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{1}{1 - M_1^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \tag{41}$$

У поверхности крыла скорость направлена по касательной к его контуру. Это значит, что если уравнение профиля $y_{\text{пр}} = y(x)$, то в каждой его точке должно соблюдаться следующее граничное условие:

$$\frac{v'_{\text{пр}}}{w_1} = \frac{dy_{\text{пр}}}{dx}. \tag{42}$$

Здесь под $v'_{\text{пр}}$ понимается значение функции $v'(x, y)$ на профиле. Разложим эту функцию при фиксированном значении $x = x_0$ в ряд Тейлора

$$v'(x_0, y) = v'(x_0, 0) + \left(\frac{\partial v'}{\partial y}\right)_{y=0} y + \ldots$$

Для получения значения $v'_{\text{пр}}$ достаточно положить $y = y_{\text{пр}}$. В рассматриваемом случае тонкого крыла величина $y_{\text{пр}}$ мала, поэтому с точностью до малых второго порядка

$$v'_{\text{пр}} = v'(x_0, y_{\text{пр}}) = v'(x_0, 0),$$

и, согласно (40), условие (42) записывается так:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_{y=0} = w_1\left(\frac{dy_{\text{пр}}}{dx}\right). \tag{43}$$

Таким образом, решение задачи об обтекании дозвуковым потоком газа при докритических скоростях тонкого профиля при малых углах атаки сводится к отысканию функции $\varphi(x, y)$, удовлетворяющей дифференциальному уравнению (41) и граничному условию (43).

Рассмотрим совокупность таких решений для фиксированного семейства профилей, задаваемого ординатами эпюрного профиля, с помощью которого безразмерные ординаты любого профиля данного семейства однозначно определяются по его относительной толщине $\bar{c}$ согласно формуле

$$\bar{y} = \frac{y}{b} = f\left(\frac{x}{b}\right)\bar{c} = f(\bar{x})\,\bar{c}.$$

Соответственно граничное условие (43) записывается так:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_{y=0} = w_1 \bar{c}\,\frac{df(x)}{dx} = w_1 \bar{c} f'(x). \tag{44}$$

Наряду с потоком газа в плоскости (x, y), обтекающим вдоль оси x со скоростью w_1, с числом Маха на бесконечности M_1 профиль данного семейства, характеризуемый относительной толщиной $\bar{c}$, рассмотрим второй поток в плоскости

$$\xi = x \quad \text{и} \quad \eta = \sqrt{\frac{1 - M_1^2}{1 - M_1^{*2}}}\, y,$$

направленный вдоль оси ξ со скоростью w_1^* с числом Маха M_1^* и обтекающий другой профиль этого же семейства. Функции потенциала возмущений $\varphi(x, y)$ и $\Phi(\xi, \eta)$ связаны между собой следующим соотношением:

$$\varphi(x, y) = A\,\frac{w_1}{w_1^*}\,\Phi(\xi, \eta), \tag{45}$$

где A — некоторая постоянная величина. Легко убедиться непосредственной подстановкой, что если функция $\varphi(x, y)$ удовлетворяет уравнению (41), то функция

$$\Phi(\xi, \eta) = \Phi\left(x_1, \sqrt{\frac{1 - M_1^2}{1 - M_1^*}}\, y\right)$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + \frac{1}{1 - M_1^{*2}}\,\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} = 0.$$

Для определения единственного параметра — относительной толщины $\bar{c}^*$, профиля, обтекаемого вторым потоком в плоскости (ξ, η), воспользуемся следующим граничным условием, которому, согласно (44) и (45), должна удовлетворять функция потенциала возмущений $\Phi(\xi, \eta)$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}\right)_{=0} = w_1^* \bar{c}^* f'\left(\frac{\xi}{b}\right). \tag{46}$$

Дифференцируя обе части формулы (45)

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_{y=0} = A\frac{w_1}{w_1^*}\sqrt{\frac{1-M_1^2}{1-M_1^{*2}}}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}\right)_{\eta=0},$$

после подстановки (46) получим

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_{y=0} = A\sqrt{\frac{1-M_1^2}{1-M_1^{*2}}}\, w_1 \bar{c}^* f'\left(\frac{\xi}{b}\right). \tag{47}$$

Приравнивая правые части выражений (43) и (47), находим

$$\bar{c}^* = \frac{1}{A}\sqrt{\frac{1-M_1^{*2}}{1-M_1^2}}\,\bar{c}. \tag{48}$$

Согласно (38) коэффициент давления на профиле

$$\bar{p} = -\frac{2u'_{\text{пр}}}{w_1} = -\frac{2u'_{\text{пр}}(x, y_{\text{пр}})}{w_1}.$$

При вычислении скорости на профиле $u'_{\text{пр}}$ можно так же, как при вычислении $v'_{\text{пр}}$ считать, что

$$u'_{\text{пр}} = u'(x, y_{\text{пр}}) = u'(x, 0) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{y=0}.$$

Таким образом,

$$\bar{p} = -\frac{2}{w_1}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{y=0}. \tag{49}$$

Аналогично [1])

$$\bar{p}^* = -\frac{2}{w_1^*}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}\right)_{\eta=0}. \tag{50}$$

Дифференцируя по x обе части выражения (45), получим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = A\frac{w_1}{w_1^*}\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}.$$

Так как при $y = 0$ величина η тоже обращается в нуль, то, согласно последней формуле,

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{y=0} = A\frac{w_1}{w_1^*}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}\right)_{\eta=0}. \tag{51}$$

Из (49), (50) и (51) следует, что

$$\bar{p} = A\bar{p}^*. \tag{52}$$

---

[1]) Здесь и всюду далее в этом параграфе и в § 8 под $\bar{p}^*$ понимается коэффициент статического давления на профиле данного семейства с относительной толщиной $\bar{c}^*$, обтекаемого потоком с числом Маха, равным M_1^*.

Таким образом, два потока с числом Маха M_1 и M_1^*, обтекающие под одним и тем же углом атаки профили одного и того же семейства с относительными толщинами соответственно $\bar{c}$ и $\bar{c}_*$, связаны между собой соотношениями (48) и (52), где A является произвольной величиной. Возможность такого произвола обусловлена тем, что линейное уравнение (41) однородно относительно потенциала скоростей возмущений φ и все его члены могут быть умножены на любое постоянное число без изменения вида самого уравнения.

Исключая величину A из (48) и (52), получаем следующее соотношение между коэффициентами давления, относительными толщинами профилей и числами Маха потоков, обтекающих профили данного семейства под одним и тем же углом атаки:

$$\bar{p} = \frac{\bar{c}}{\bar{c}^*} \sqrt{\frac{1 - M_1^{*2}}{1 - M_1^2}}\, \bar{p}^*. \tag{53}$$

Пропорциональное (в рамках линейной теории) изменение давления во всех точках данного профиля позволяет и для интегральной величины — коэффициента подъемной силы — записать следующее выражение, аналогичное (53):

$$c_y = \frac{\bar{c}}{\bar{c}^*} \sqrt{\frac{1 - M_1^*}{1 - M_1}}\, c_y^*. \tag{54}$$

Формулы (53) и (54) выражают собой приближенные правила подобия Прандтля — Гляуэрта. Полагая $M_1^* = M_1$, получаем, что при данном числе Маха набегающего потока коэффициенты давления и подъемной силы пропорциональны относительной толщине профиля. Полагая $\bar{c}_1^* = \bar{c}$, получаем, что при обтекании данного профиля потоком при разных числах Маха

$$\frac{\bar{p}}{\bar{p}^*} = \sqrt{\frac{1 - M_1^{*2}}{1 - M_1^2}}, \tag{55}$$

$$\frac{c_y}{c_y^*} = \sqrt{\frac{1 - M_1^{*2}}{1 - M_1^2}}. \tag{56}$$

На рис. 10.15 приведены экспериментальные кривые распределения давления по профилю NACA 0012 при $M_1 = 0{,}4$; 0,6; 0,7 и 0,8. Там же для $M_1 = 0{,}6$; 0,7 и 0,8 нанесены расчетные кривые, полученные с помощью формулы (55) по результатам эксперимента при $M_1 = 0{,}4$. Видно, что соответствие расчетов с экспериментальными данными становится все менее удовлетворительным по мере приближения к критическим скоростям.

Полагая в (55) и (56) число Маха M_1^* равным нулю, получаем следующие приближенные формулы Прандтля — Гляуэрта, позволяющие определить величины коэффициентов давления и подъемной силы данного профиля в потоке газа по известным

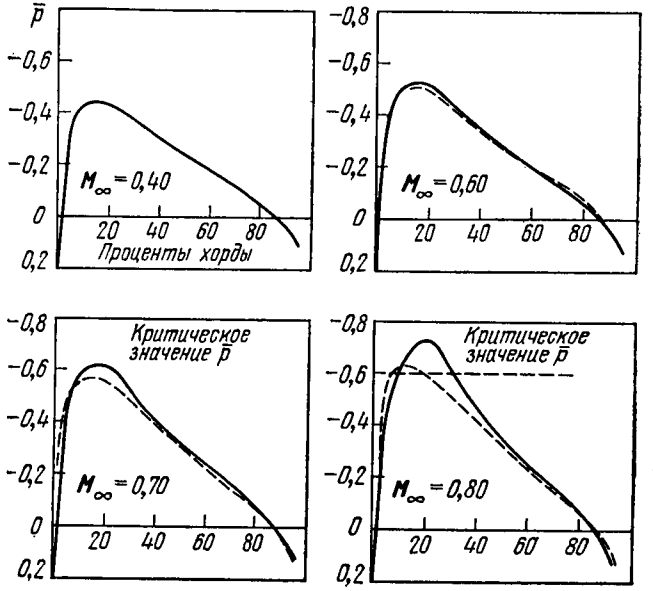


Рис. 10.15. Распределение давления по крыловому профилю при разных числах Маха набегающего потока и постоянном угле атаки: сплошная линия — эксперимент (Amick *I. L.*, NACA T № 2174), пунктир — расчет по теории Прандтля — Гляуэрта.

их значениям для этого профиля в потоке несжимаемой жидкости:

$$\bar{p} = \frac{\bar{p}_{\text{несж}}}{\sqrt{1 - M_1^2}}, \tag{57}$$

$$c_y = \frac{c_{y\,\text{несж}}}{\sqrt{1 - M_1^2}}. \tag{58}$$

Сравнение формулы (57) с результатами эксперимента [1]) (рис. 10.16) показывает, что с ростом числа Маха ее точность падает и соответственно заметной становится ошибка. Меньшие

[1]) Stack G., Linsey W. E. and Littel R. E., Report NACA, № 646, 1938.

расхождения с опытными данными дают расчеты по Седову [1]) и Карману — Цзяну [2]).

Следует отметить, что формула Кармана — Цзяна

$$\bar{p} = \frac{\bar{p}_{\text{несж}}}{\sqrt{1-\mathbf{M}_1^2} + \dfrac{\mathbf{M}_1^2 \bar{p}_{\text{несж}}}{2\left(1+\sqrt{1+\mathbf{M}_1^2}\right)}}$$

при малых числах Маха переходит в формулу Прандтля — Гляуэрта (57).

Используя формулу (57) для определения коэффициента минимального давления на профиле при обтекании его потоком газа по значению этой величины в несжимаемой жидкости, получим, согласно (35), следующую приближенную зависимость между $\bar{p}_{\text{несж min}}$ и критическим числом Маха:

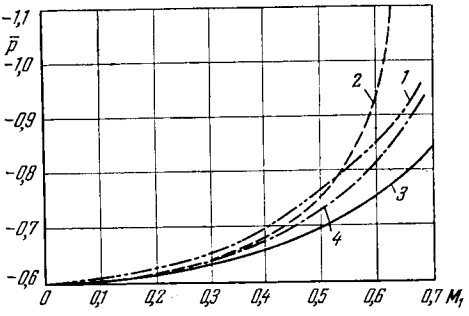


Рис. 10.16. Сравнение различных способов приближенного определения коэффициентов давления для сжимаемой жидкости: *1* — эксперимент; *2* — по Карману — Тзяну; *3* — по Прандтлю — Гляуэрту; *4* — по Седову.

$$\bar{p}_{\text{несж. min}} = -\frac{2}{k}\frac{\sqrt{1-\mathbf{M}_{\text{кр}}^2}}{\mathbf{M}_{1\text{кр}}^2} \times \left[1-\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}} \times \left(1+\frac{k-1}{2}\mathbf{M}_{\text{кр}}^2\right)^{\frac{k}{k-1}}\right]. \quad (59)$$

Для определения влияния сжимаемости при докритических скоростях на распределение скоростей и давления по профилю можно воспользоваться также другой приближенной теорией, основанной на гипотезе «затвердевания» линий тока при обтекании данного тела потенциальными потоками несжимаемой жидкости и сжимаемого газа [3]). Согласно уравнению неразрыв-

---

[1]) Седов Л. И., Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, «Наука», 1966.

[2]) Karman Th. and Tsien J. of Aeronautical Siences № 12, 1939. В этой работе использован указанный Чаплыгиным приближенный прием замены действительной изоэнтропы касательной к ней прямой.

[3]) С. Р. Нужин показал («К теории обтекания тел газом при больших дозвуковых скоростях», Прикл. матем. и механ., т. 10, вып. 5—6, 1945), что задача о безотрывном обтекании данного тела безвихревым потоком сжимаемой жидкостью может быть сведена к задаче обтекания данного тела вихре-

ности для элементарной струйки тока, прилегающей к профилю, в изоэнтропическом потоке газа справедливо следующее соотношение:

$$\frac{\Delta F_1}{\Delta F} = \frac{\rho w}{\rho_1 w_1} = \frac{q(\lambda)}{q(\lambda_1)}.$$

Здесь индексом «1» обозначаются параметры элементарной струйки далеко перед профилем, ΔF, ΔF_1 — поперечные сечения струйки.

Так как в несжимаемой жидкости

$$\frac{\Delta F_1}{\Delta F} = \left(\frac{w}{w_1}\right)_{\text{несж}},$$

то из предыдущего выражения следует, что при условии неизменности линий тока в потоках несжимаемой и сжимаемой жидкостей справедливо равенство

$$\left(\frac{w}{w_1}\right)_{\text{несж}} = \frac{q(\lambda)}{q(\lambda_1)}. \tag{60}$$

Если в потоке несжимаемой жидкости скорость в некоторой точке на профиле достигает максимального значения, то критическое значение приведенной скорости набегающего потока $\lambda_{\text{кр}}$ определяется из (60) при условии, что в этой точке $q(\lambda) = 1$. Тогда имеем

$$q(\lambda_{\text{кр}}) = \frac{1}{\left(\frac{w}{w_1}\right)_{\max \text{ несж}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \bar{p}_{\min \text{ несж}}}}.$$

Вычисленная по этой формуле зависимость критического числа $M_{1\,\text{кр}}$ от минимального давления на профиле в потоке несжимаемой жидкости приведена на рис. 10.17 (пунктир). Там же нанесена другая приближенная зависимость (59) и зависимость, рассчитанная по методу С. А. Христиановича [1]). Гипотеза затвердевания дает более низкие значения $M_{1\,\text{кр}}$, причем разница несколько увеличивается с увеличением разрежения на профиле, т. е. с увеличением толщины профиля при фиксированном значении угла атаки. Теория Прандтля — Гляуэрта дает завышенные значения $M_{1\,\text{кр}}$.

Значение $\lambda_{\text{кр}}$, а следовательно, и $M_{\text{кр}}$ зависит от тех же факторов, что и величина $\bar{p}_{\min}$, т. е. от конфигурации профиля и угла атаки.

вым потоком несжимаемой жидкости. При этом оказывается, что линии тока в обоих течениях останутся неизменными. При пренебрежении завихренностью мы приходим к подтверждению гипотезы затвердевания линий тока.

[1]) Христианович С. А., Обтекание тел газом при больших дозвуковых скоростях, Труды ЦАГИ, вып. 481, 1940.

Тонким и слабо изогнутым профилям соответствуют большие значения $M_{кр}$. Как установлено на основании эксперимента с обычными авиационными профилями, уменьшение толщины профиля на 5% приводит к повышению $M_{кр}$ на величину от

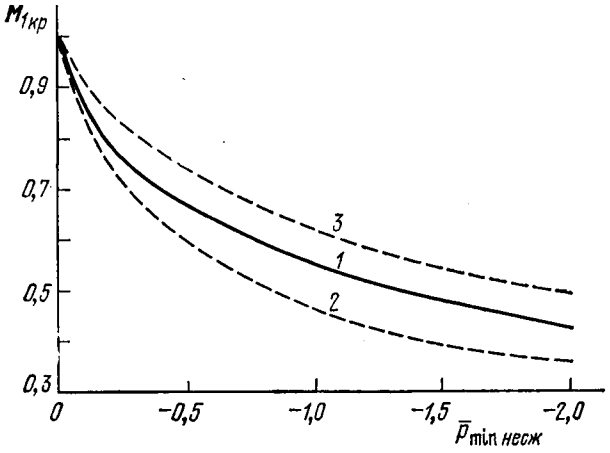


Рис. 10.17. Зависимость критического числа Маха набегающего потока $M_{кр}$ от минимального давления на профиле в потоке несжимаемой жидкости $\bar{p}_{min\ несж}$: *1* — по Христиановичу, *2* — по гипотезе затвердевания, *3* — по Прандтлю — Гляуэрту.

0,03 до 0,05, а уменьшение кривизны $f = f/b$ от 5% до 0 вызывает повышение $M_{кр}$ примерно на величину от 0,1 до 0,12. Для увеличения $M_{кр}$ выгодно располагать места наибольшей кривизны и наибольшей толщины профиля на расстоянии, равном 0,4—0,5 хорды от передней кромки профиля.

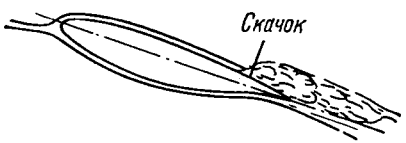


Рис. 10.18. К возможности увеличения критического числа Маха дозвукового профиля.

Увеличение критического значения числа Маха при фиксированных значениях относительной толщины и кривизны может быть достигнуто путем соответствующего изменения формы профиля. Сделав, например, плоской верхнюю поверхность, можно уменьшить местные значения числа Маха на ней, а также сдвинуть вниз по потоку место расположения скачка (рис. 10.18). Увеличение вогнутости профиля у задней кромки и деформация нижней поверхности вблизи кормовой части профиля компенсирует в значительной степени уменьшение подъем-

ной силы профиля из-за деформации его верхней поверхности. Величина прироста критического числа Маха при такой трансформации может составлять $\Delta M_{кр} \approx 0{,}1$ [1]).

Увеличение угла атаки приводит к увеличению разрежения на верхней поверхности профиля и, следовательно, к уменьшению величины $M_{кр}$.

Так как сравнение различных режимов обтекания профилей производится при одинаковых углах атаки, то для линейной части зависимости $c_y(\alpha)$ можно получить, согласно (58), следующую формулу:

$$\frac{dc_y}{d\alpha} = \frac{(dc_y/d\alpha)_{несж}}{\sqrt{1 - M_1^2}}. \qquad (61)$$

На рис. 10.19 построена кривая, соответствующая формуле (61), и нанесены экспериментальные точки для крыльев разной относительной толщины (α — в радианах). Эксперимент [2]) дает хорошее совпадение с теоретической кривой вплоть до критического значения M_1 тем большего, чем тоньше профиль. При дальнейшем возрастании числа M_1 обтекание становится закритическим и наблюдается резкое падение величины $dc_y/d\alpha$.

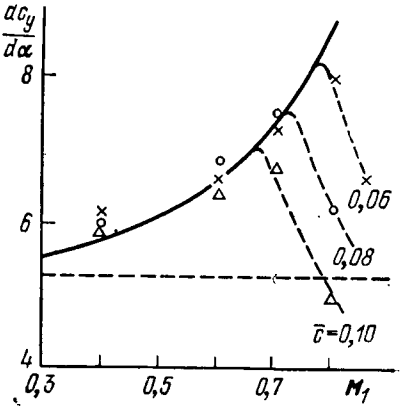


Рис. 10.19. Влияние числа M_1 на величину $dc_y/d\alpha$ для крыловых профилей с различной относительной толщиной. Сплошная кривая — расчет по Прандтлю — Гляуэрту, кружки, крестики, треугольники — эксперимент.

§ 7. Сверхзвуковое обтекание профиля

При $M_1 > 1$ обычно применяют специальные сверхзвуковые профили с острой, как правило, клинообразной, передней кромкой, наличие которой существенно уменьшает величину сопротивления при сверхзвуковых скоростях по сравнению с закругленной передней кромкой.

Покажем, что обтекание сверхзвуковых профилей в некотором достаточно широком диапазоне сверхзвуковых скоростей и углов атаки можно полностью рассчитывать, пользуясь теорией косых скачков уплотнения и теорией внешнего тупого угла.

---

[1]) Мартынов А. К., Прикладная аэродинамика, «Машиностроение», М., 1972.

[2]) Справочник авиаконструктора, ЦАГИ, М., 1937.

Рассмотрим сначала простейший случай — обтекание симметричных сверхзвуковых профилей под нулевым углом атаки. Выберем в качестве первого примера ромбовидный профиль.

Пусть на неподвижный ромбовидный профиль натекает равномерный сверхзвуковой поток под углом атаки $i = 0$ (рис. 10.20). В силу симметрии достаточно рассмотреть лишь

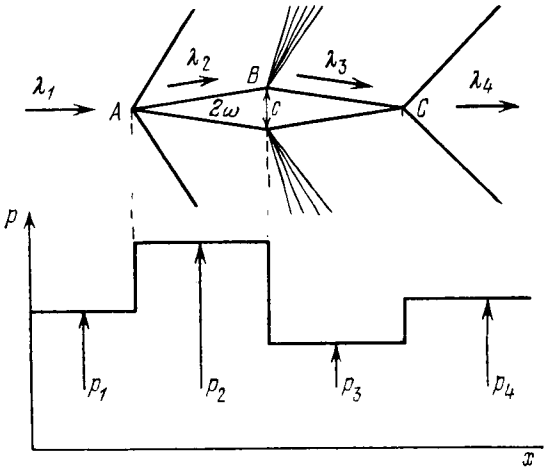


Рис. 10.20. Схема сверхзвукового обтекания ромбовидного профиля под нулевым углом атаки.

обтекание верхней стороны профиля. У передней кромки профиля в точке A возникает косой скачок уплотнения, так как поток набегает на клин с углом 2ω при вершине. Пройдя через этот косой скачок, поток поворачивается на угол ω и становится параллельным отрезку AB. Статическое давление p_2 и приведенную скорость в потоке λ_2 вдоль отрезка AB можно определить по формулам для косого скачка уплотнения (см. гл. III). Далее поток, обтекая внешний угол ABC, отклоняется на угол 2ω и становится параллельным отрезку BC. Давление p_3 и приведенную скорость этого потока λ_3 можно рассчитать по определенной выше величине λ_2 по формулам (см. гл. IV) или с помощью таблицы обтекания внешнего тупого угла (см. стр. 857).

У задней кромки профиля в точке C снова образуется косой скачок уплотнения, пройдя через который поток отклоняется в обратную сторону до направления набегающего потока, а давление в нем вновь повышается до величины p_4, близкой к давлению p_1.

Приведенные на рис. 10.21 фотографии сверхзвукового обтекания в аэродинамической трубе ромбовидных профилей раз-

ной толщины при нулевом угле атаки подтверждают описанную выше картину течения. На каждой из этих фотографий отчетливо видны скачки уплотнения у носка профиля, пучки волн Маха у верхнего и нижнего выпуклых углов профиля и волны Маха, отходящие от неровностей на стенках аэродинамической трубы, по наклону которых можно судить о скорости потока в трубе.

На ромбовидный профиль при нулевом угле атаки действует сила лобового сопротивления, обусловленная наличием избыточного давления на его передней поверхности AB и разрежения на задней поверхности BC (рис. 10.20):

$$R_x = 2(p_2 AB \sin\omega - p_3 BC \sin\omega) = (p_2 - p_3)c. \quad (62)$$

Таким образом, при движении профиля со сверхзвуковой скоростью сопротивление не равно нулю даже в случае невязкого газа. Это сопротивление, называемое *волновым сопротивлением*, существенно отличается от сопротивления трения и сопротивления давления, которые связаны с наличием пограничного слоя в вязкой жидкости.

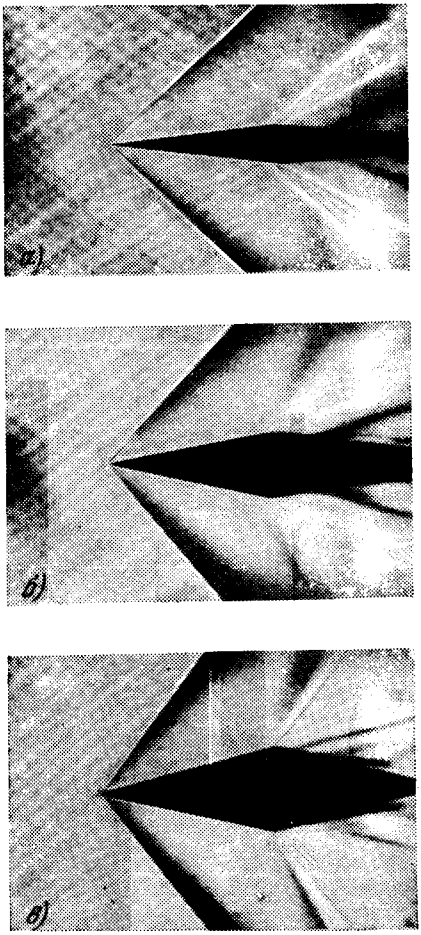


Рис. 10.21. Теневые фотографии сверхзвукового обтекания ромбовидного профиля под нулевым углом атаки при $M_1 = 1{,}7$. Полуугол при вершине ромба: *а*) $\omega = 7°$; *б*) $\omega = 12°$; *в*) $\omega = 14°$.

Согласно (19) и (62) коэффициент лобового сопротивления ромбовидного профиля

$$c_x = \frac{R_x}{\rho_1 \frac{w_1^2}{2} b} = \frac{2}{kM_1^2}\frac{p_2}{p_1}\left(1 - \frac{p_1}{p_1}\right)\bar{c} = \frac{2}{kM_1^2}\frac{p_2}{p_1}\left(1 - \frac{p_3}{p_2}\right)\operatorname{tg}\omega.$$

Изложенная схема расчета обтекания ромбовидного профиля пригодна только в определенном диапазоне чисел Маха

$$M_{1\,min} \leqslant M_1 \leqslant M_{1\,max}.$$

M_{1min} — это то значение числа Маха, при котором еще возможен у передней кромки профиля плоский косой скачок (см. рис. 3.12). При меньших числах Маха образуется отделившийся скачок уплотнения с криволинейным фронтом. $M_{1\,max}$ — отвечает такому значению числа Маха после первого косого скачка M_2, при котором угол 2ω становится равным предельному углу поворота потока в течении Прандтля — Майера; при числах Маха $M_1 > M_{1\,max}$ возникает отрыв потока при обтекании стороны профиля BC.

В качестве второго примера рассмотрим обтекание сверхзвуковым потоком под нулевым углом атаки симметричного профиля, составленного из клина длиной l и сопряженных с его сторонами двух симметричных криволинейных поверхностей (рис. 10.22). Различие между обтеканиями такого профиля и ромбовидного заключается в том, что здесь после косого

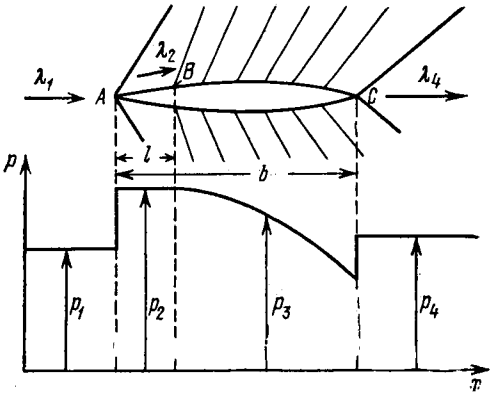


Рис. 10.22. Схема сверхзвукового обтекания под нулевым углом атаки симметричного профиля, составленного из клина и криволинейных дужек.

скачка, начиная от точки сопряжения B, происходит обтекание некоторой криволинейной стенки, сопровождаемое непрерывным расширением потока. В этом случае лобовое сопротивление профиля

$$R_x = 2\left[p_2 AB\sin\omega - \int_0^{S_{BC}} p\,(S)\sin(\varphi - \varphi_B)\,dS\right]. \qquad (63)$$

Если образующая криволинейной поверхности представляет

собой дужку окружности радиуса r, то выражение (63) может быть записано так:

$$R_x = 2\left[p_2 AB\sin\omega - r\int_0^{\varphi_C} p(\varphi)\sin(\varphi-\varphi_B)\,d\varphi\right]$$

и соответственно

$$c_x = \frac{2}{k\mathsf{M}_1^2}\frac{p_2}{p_1}\left[\bar{c} - \frac{r}{b}\int_0^{\varphi_C}\frac{p}{p_2}\sin(\varphi-\varphi_B)\,d\varphi\right].$$

Рассмотрим теперь обтекание простейшего сверхзвукового профиля — плоской пластинки под заданным ненулевым углом атаки (рис. 10.23), приближенно полагая, что поток непосредственно за пластинкой снова принимает направление набегающего потока.

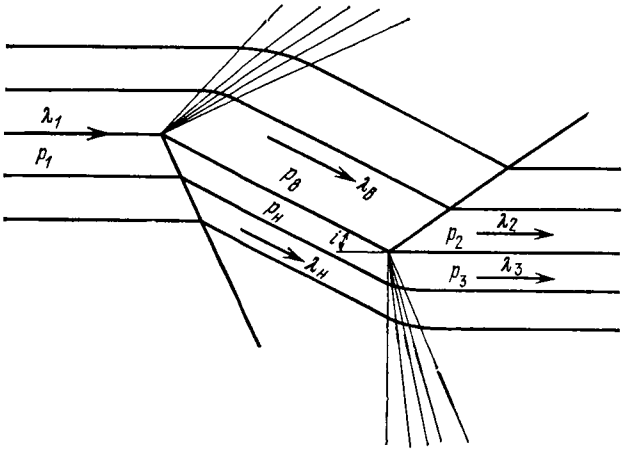


Рис. 10.23. Схема сверхзвукового обтекания пластинки под углом атаки i.

При обтекании верхней стороны пластинки у передней кромки поток отклоняется на угол i и становится параллельным направлению пластинки, т. е. возникает обтекание внешнего тупого угла, которое мы уже наблюдали у вершины B ромбовидного профиля (рис. 10.20). Давление понижается до $p_в$ и число Маха возрастает до $\mathsf{M}_в$. У задней кромки пластинки поток должен снова повернуть на угол i в обратном направлении, в связи с чем образуется косой скачок уплотнения, как при обтекании клина с углом $2i$ при вершине.

С нижней стороны пластинки у передней кромки образуется косой скачок уплотнения, пройдя через который поток повер-

нется на угол i и давление возрастет в $p_н/p_1$ раз, а число Маха уменьшится до $M_н$. У задней кромки с нижней стороны пластинки поток повернется на угол i в обратном направлении. Давление в потоке, сбегающем с верхней стороны, должно быть равно давлению в потоке, сбегающем с нижней стороны $p_2 = p_3$. Скорости этих двух потоков могут быть различными по величине, но направление их одинаково. Значения M_2 и M_3 могут различаться.

Подъемная сила плоской пластинки на единицу длины размаха равна

$$R_y = (p_н - p_в)\, b \cos i = p_1 \left(\frac{p_н}{p_1} - \frac{p_в}{p_1}\right) b \cos i, \tag{64}$$

а лобовое сопротивление

$$R_x = (p_н - p_в)\, b \sin i = p_1 \left(\frac{p_н}{p_1} - \frac{p_в}{p_1}\right) b \sin i. \tag{65}$$

Здесь индексы «н» и «в» относятся соответственно к верхней и нижней поверхностям пластинки.

Согласно (19)

$$c_y = \frac{2}{kM_1^2}\left(\frac{p_н}{p_1} - \frac{p_в}{p_1}\right)\cos i, \tag{66}$$

$$c_x = \frac{2}{kM_1^2}\left(\frac{p_н}{p_1} - \frac{p_в}{p_1}\right)\sin i. \tag{67}$$

Более точное исследование показывает, что принятое здесь предположение об одинаковости направлений набегающего и сбегающего с пластинки потоков не соблюдается [1]), однако учет этого обстоятельства никак не может сказаться на величинах давлений на самой пластинке, а следовательно, и на справедливости формул (66) и (67). Изложенная схема расчета обтекания плоской пластинки становится непригодной в двух следующих случаях.

Во-первых, если угол атаки $i > i_{пр}$ для заданного числа M_1 набегающего потока, когда при обтекании верхней стороны пластинки происходит отрыв потока. Этот случай имеет малое практическое значение, так как при $M_1 \leqslant 10$ предельный угол атаки $i_{пр} \geqslant 25°$.

Во-вторых, если угол атаки i превысит максимальный угол отклонения потока в косом скачке уплотнения ω_{max} для заданного числа M_1 набегающего потока (см. рис. 3.12); при $i > \omega_{max}$ перед нижней стороной пластинки образуется отделившийся ска-

[1]) Это направление определяется из условия равенства давлений и одинаковости направления скоростей в потоках, сбегающих с верхней и нижней стороны пластинки. Расчеты показывают, что при $M_1 < 3$ отклонение потока, сбегающего с пластинки, от направления набегающего потока не превышает 1°.

чок уплотнения. Случай, когда $i > \omega_{max}$, может иметь место при не очень больших числах M_1 (например для $M_1 = 1{,}5$ угол $i_{пр} = 12°$). Важно отметить, что при $M_1 < 6{,}4$ всегда $\omega_{max} < i_{пр}$, и поэтому причиной неприменимости изложенной схемы расчета является образование перед пластинкой отделившегося криволинейного скачка уплотнения. При очень больших числах M_1 наоборот, $i_{пр} < \omega_{max}$, и причиной неприменимости расчетной схемы является срыв с верхней стороны пластинки.

Как следует из выражений (66) и (67), отношение коэффициента подъемной силы к лобовому сопротивлению, определяющее качество пластинки, равно

$$K_{пл} = \frac{c_y}{c_x} = \operatorname{ctg} i.$$

Таким образом, качество пластинки зависит только от угла атаки; с увеличением угла атаки качество пластинки монотонно уменьшается. Заметим, что последний вывод справедлив в тех случаях, когда можно пренебречь поверхностными силами трения.

В разобранных выше случаях обтекания профилей сверхзвуковым потоком мы не рассматривали возможное взаимодействие

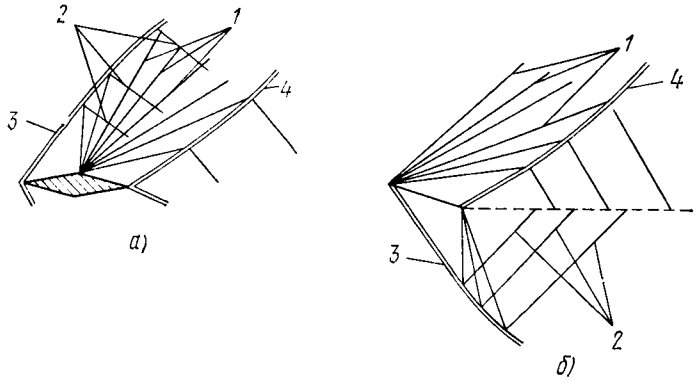


Рис. 10.24. К взаимодействию волн расширения и косых скачков при обтекании ромбовидного профиля (*а*) и пластинки (*б*): *1* — волны Маха, *2* — отраженные волны Маха, *3* — присоединенная ударная волна, *4* — ударная волна за профилем.

между отходящими от профиля скачками и волнами Маха. Для установления этого взаимодействия необходимо рассмотреть значительную часть поля течения (рис. 10.24 и 10.25). Видно, что волны Маха, «падая» на косые скачки, искривляют и ослабляют их. На больших расстояниях от профиля скачки вырождаются в волны Маха невозмущенного потока.

В результате взаимодействия отходящих от профиля волн Маха и косых скачков возникают отраженные волны, и хотя их влияние невелико, оно должно учитываться. В случае ромбовидного профиля и плоской пластинки (рис. 10.24) отраженные волны Маха нигде не достигают поверхности профиля и, таким образом, никак не могут влиять на распределение давления по нему. Иное дело при обтекании профиля, участки которого имеют криволинейную поверхность (рис. 10.25). Здесь возмож-

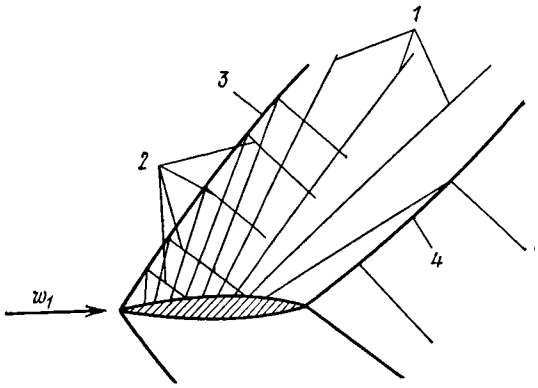


Рис. 10.25. К взаимодействию волн расширения и косых скачков при обтекании симметричного профиля, составленного из клина и криволинейных дужек. (Обозначения такие же, как на рис. 10.24.)

ность достижения поверхности профиля отраженными волнами Маха определяется относительной длиной переднего клиновидного участка $\bar{l} = l/b$. При достаточной его величине, так же, как и в случае ромбовидного профиля, отраженные волны Маха не попадают на профиль.

При малой относительной протяженности клиновидного участка отраженные волны Маха пересекаются с поверхностью профиля у его задней кромки. По мере дальнейшего уменьшения $\bar{l}$ все большая поверхность профиля оказывается под воздействием отраженных волн Маха и при $\bar{l}=0$, т. е. в случае чечевицеобразного профиля уже нет такого элемента поверхности, на который не приходила бы соответствующая отраженная волна.

В результате воздействия волн Маха, распространяющихся на очень большие расстояния, интенсивность возмущений вдалеке от профиля оказывается весьма малой.

Способ расчета обтекания профиля сверхзвуковым потоком, основанный на последовательном применении теории косых скачков и теории обтекания тупого угла, и проиллюстрирован-

ный выше на простейших примерах, может быть применен и в общем случае для произвольных сверхзвуковых профилей, контур которых или составлен только из прямолинейных отрезков [1]), или включает в себя и криволинейные участки [2]). Однако результаты такого метода не выражаются в аналитической форме, и поэтому он применяется в основном для получения численных решений.

Если профиль тонкий и наклонен под малым углом атаки, то указанный метод расчета можно упростить, прибегая к простым аналитическим выражениям для коэффициентов подъемной силы и сопротивления тонкого сверхзвукового профиля произвольной формы.

Пусть где-то на профиле возник косой скачок. Повышение давления в этом месте потока Δp может быть, согласно формулам (45) и (50) гл. III, определено из следующего выражения:

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{\sin\alpha \sin\omega}{\cos(\alpha - \omega)} k\mathbf{M}^2,$$

где p и $\mathbf{M}$ есть местные значения статического давления и числа Маха (до косого скачка), а α — угол между вектором скорости и фронтом скачка. При малых отклонениях потока $\sin\omega \approx \omega$, $\alpha - \omega \approx \alpha$, и направление фронта косого скачка весьма близко к направлению волны Маха, т. е.

$$\alpha \approx \alpha_0.$$

Здесь α_0 — угол Маха, для которого $\sin\alpha_0 = 1/\mathbf{M}$ и, следовательно,

$$\operatorname{tg}\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{M}^2 - 1}}.$$

Таким образом, в случае малых углов поворота потока имеем следующее приближенное выражение для повышения давления в косом скачке:

$$\frac{\Delta p}{p} \approx \frac{k\mathbf{M}^2}{\sqrt{\mathbf{M}^2 - 1}}\omega. \tag{68}$$

К такому же выражению мы приходим при приближенной оценке понижения давления при внешнем обтекании угла $2\pi - \omega$, где ω — малая величина. Разница заключается только в том, что в последнем случае следует в выражении (68) под ω понимать отрицательную величину.

---

[1]) См., например, гл. VIII 2-го издания настоящей книги, Гостехиздат, М., 1953.

[2]) Исключение составляют только ограничения, связанные с наличием запредельных значений поворота потока в течении расширения, или с невозможностью образования плоского косого скачка уплотнения.

В условиях применимости рассматриваемой сейчас приближенной теории местные значения давления p и числа M никогда не будут сильно отличаться от соответствующих значений p_1 и M_1, и поэтому можно сделать, с точностью до малых первого порядка, дальнейшие упрощения и полагать, что

$$\frac{p-p_1}{p_1} \approx \frac{kM_1^2}{\sqrt{M_1^2-1}}\,\omega.$$

При этом, с точностью до сделанных предположений, все углы наклона ω отсчитываются от направления невозмущенного потока. В соответствии с последним выражением коэффициент давления (19) записывается так:

$$\bar{p} = \frac{p-p_1}{\rho_1 \frac{w_1^2}{2}} = \frac{2}{kM_1^2}\,\frac{p-p_1}{p_1} = \frac{2\omega}{\sqrt{M_1^2-1}}. \tag{69}$$

Таким образом, в теории тонкого профиля коэффициент давления пропорционален углу наклона линии тока.

Пользуясь выражением (69), можно получить приближенные формулы для коэффициентов подъемной силы и сопротивления различных профилей. Так, например, для ромбовидного профиля с не очень большим раствором угла клиновидной передней кромки, равным 2ω, и при нулевом угле атаки коэффициенты давления на передней (AB) и задней (BC) поверхностях профиля равны соответственно

$$\bar{p}_{AB} = \frac{p_2-p_1}{\rho_1 \frac{w_1^2}{2}} = \frac{2\omega}{\sqrt{M_1^2-1}};$$

$$\bar{p}_{BC} = \frac{p_3-p_1}{\rho_1 \frac{w_1^2}{2}} = -\frac{2\omega}{\sqrt{M_1^2-1}}.$$

Согласно (62) и последних выражений

$$c_x = \frac{R_x}{\rho_1 \frac{w_1^2}{2} b} = \frac{(p_2-p_3)}{\rho_1 \frac{w_1^2}{2}}\,\bar{c} = \left[\frac{p_2-p_1}{\rho_1 \frac{w_1^2}{2}} - \frac{p_3-p_1}{\rho_1 \frac{w_1^2}{2}}\right]\bar{c} = \frac{4\omega\bar{c}}{\sqrt{M_1^2-1}}.$$

Для малых углов $\omega \approx \operatorname{tg}\omega = \bar{c}$, и коэффициент сопротивления ромбовидного профиля

$$c_x = \frac{4\bar{c}^2}{\sqrt{M_1^2-1}}. \tag{70}$$

В качестве второго примера определим коэффициенты подъемной силы и сопротивления плоской пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком под малым углом атаки i (рис. 10.23). В этом случае, согласно (69), коэффициенты давления на верхней и нижней поверхностях пластинок будут соответственно следующими:

$$\bar{p}_{\text{в}} = \frac{p_{\text{в}} - p_1}{\rho_1 \frac{w_1^2}{2}} = -\frac{2i}{\sqrt{M_1^2 - 1}}, \quad \bar{p}_{\text{н}} = \frac{p_{\text{н}} - p_1}{\rho_1 \frac{w_1^2}{2}} = +\frac{2i}{\sqrt{M_1^2 - 1}}.$$

Таким образом, согласно (64) и (65),

$$c_y = \frac{p_{\text{н}} - p_{\text{в}}}{\rho_1 \frac{w_1^2}{2}} \cos i = \left[\frac{p_{\text{н}} - p_1}{\rho_1 \frac{w_1^2}{2}} - \frac{p_{\text{в}} - p_1}{\rho_1 \frac{w_1^2}{2}} \right] \cos i = \frac{4i \cos i}{\sqrt{M_1^2 - 1}},$$

$$c_x = \frac{p_{\text{н}} - p_{\text{в}}}{\rho_1 \frac{w_1^2}{2}} \sin i = \left[\frac{p_{\text{н}} - p_1}{\rho_1 \frac{w_1^2}{2}} - \frac{p_{\text{в}} - p_1}{\rho_1 \frac{w_1^2}{2}} \right] \sin i = \frac{4i \sin i}{\sqrt{M_1^2 - 1}}.$$

При малых углах атаки $\cos i \approx 1$, $\sin i \approx i$ и, следовательно, в этом случае

$$c_y = \frac{4i}{\sqrt{M_1^2 - 1}}, \tag{71}$$

$$c_x = \frac{4i^2}{\sqrt{M_1^2 - 1}}. \tag{72}$$

При углах атаки $i < 15°$ расчет коэффициентов c_y и c_x для плоской пластинки по приближенным формулам (71) и (72) дает удовлетворительное совпадение с изложенным выше в этом параграфе точным расчетом.

Для произвольных профиля и угла атаки (рис. 10.26)

$$R_y = \frac{\rho_1 w_1^2}{2} \int_0^{b \cos i} (\bar{p}_{\text{н}} - \bar{p}_{\text{в}})\, dx,$$

$$R_x = \frac{\rho_1 w_1^2}{2} \int_0^{b \cos i} \left(\bar{p}_{\text{в}} \frac{dy_{\text{в}}}{dx} - \bar{p}_{\text{н}} \frac{dy_{\text{н}}}{dx} \right) dx.$$

Здесь индексы «в» и «н» относятся соответственно к верхней и нижней поверхностям крыла.

При малых углах атаки величины местных коэффициентов давления для тонких слабо изогнутых профилей могут быть вычислены с помощью выражения (69), согласно которому в принятой системе координат (рис. 10.26)

$$\bar{p}_{\text{в}} = \frac{2}{\sqrt{M_1^2 - 1}} \frac{dy_{\text{в}}}{dx}, \quad \bar{p}_{\text{н}} = -\frac{2}{\sqrt{M_1^2 - 1}} \frac{dy_{\text{н}}}{dx}.$$

Учитывая также, что для рассматриваемого класса профилей

$$y_{\text{в}} = y_{\text{с}} + h, \quad y_{\text{н}} = y_{\text{с}} - h,$$

где $y_{\text{с}}(x)$ — уравнение средней линии (дужка профиля), а $h(x)$ — функция, характеризующая симметричное распределение

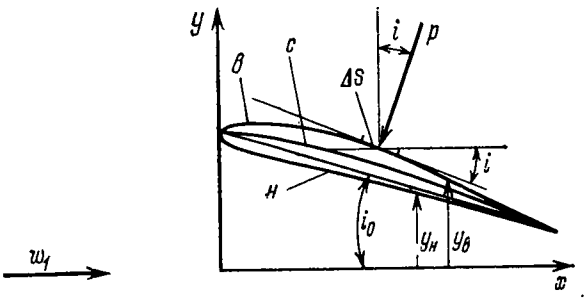


Рис. 10.26. К определению составляющих равнодействующей сил давления приложенных к крыловому профилю: *в* — верхняя поверхность крылового профиля («спинка»), *н* — нижняя поверхность крылового профиля («корытце») *с* — средняя линия крылового профиля («дужка»).

толщины, получаем следующие приближенные выражения [1]) для коэффициентов подъемной силы и сопротивления:

$$c_y = \frac{4i}{\sqrt{M_1^2 - 1}}, \tag{73}$$

$$c_x = ic_y + \frac{4}{b\sqrt{M_1^2 - 1}} \int_0^b \left[i_{\text{с}}'^2 + \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 \right] dx. \tag{74}$$

Здесь $i_{\text{с}}$ — угол между касательной к средней линии и хордой.

Коэффициент подъемной силы, так же как и при дозвуковых скоростях, является линейной функцией угла атаки. Наклон за-

[1]) Аналогичные формулы могут быть получены и с помощью уравнения (41), которое при сверхзвуковых течениях ($M_1 > 1$) представляет собой волновое уравнение и соответственно может быть решено методом характеристик (см., например, гл. X предыдущего издания этой книги).

висимости $c_y(i)$ не зависит от формы профиля и определяется, согласно (73), только числом Маха набегающего потока

$$\frac{dc_y}{di} = \frac{4}{\sqrt{M_1^2 - 1}}$$

и значительно меньше соответствующей величины для дозвуковых потоков, значение которой в случае несжимаемой жидкости имеет порядок 2π. При возрастании числа M_1 наклон зависимости $c_y(i)$ уменьшается. Так, при $M_1 = 1{,}5$ $dc_y/di = 3{,}58$; при $M_1 = 2$ это значение равно 2,3 и при $M_1 = 4$ оно составляет всего 1,03.

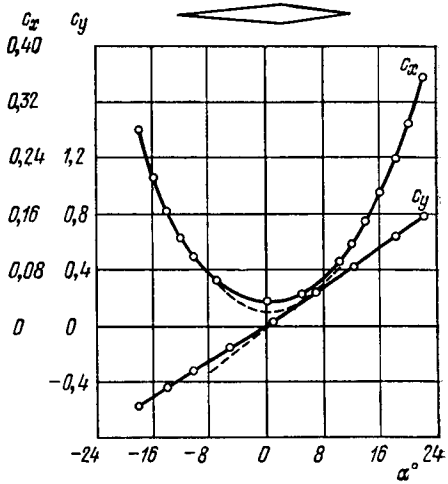


Рис. 10.27. Зависимости от угла атаки коэффициентов подъемной силы c_y и лобового сопротивления c_x несимметричного ромбовидного профиля; $\bar{c} = 10\%$, $\bar{c} = \bar{c}_в + \bar{c}_н$, $\bar{c}_в = 0{,}06$, $\bar{c}_н = 0{,}04$ при $M_1 = 2{,}13$. Сплошная линия — эксперимент, пунктирная — теория.

Влияние формы тонкого сверхзвукового профиля сказывается только на величине его коэффициента сопротивления, который, согласно (74), можно разбить на три части: сопротивление за счет подъемной силы, сопротивление за счет кривизны и сопротивление за счет толщины.

Для ромбовидного профиля $dy_c/dx = 0$, что означает равенство нулю части сопротивления, связанного с кривизной профиля. Производная $\frac{dh}{dx} = \pm \operatorname{tg} \omega = \pm \bar{c}$ и, следовательно, часть сопротивления, вызванная толщиной профиля, равна

$$c_{xh} = \frac{4\bar{c}^2}{\sqrt{M_1^2 - 1}}.$$

Согласно (74) суммарное сопротивление ромбовидного профиля

$$c_x = \frac{4i^2}{\sqrt{M_1^2 - 1}} + \frac{4\bar{c}^2}{\sqrt{M_1^2 - 1}}. \qquad (75)$$

Полагая здесь $i = 0$, получаем выведенную ранее формулу (70) для коэффициента сопротивления ромбовидного профиля при нулевом угле атаки.

Для профиля, образованного из двух дуг круга одинакового радиуса (чечевица),

$$c_x = \frac{4i^2}{\sqrt{M_1^2 - 1}} + \frac{16\bar{c}^2}{3\sqrt{M_1^2 - 1}}. \qquad (76)$$

При $\bar{c} = 0$ выражения (75) и (76) представляют собой формулы для коэффициента сопротивления плоской пластинки, полностью совпадающие с полученной ранее формулой (72). Поэтому выражения для коэффициента сопротивления ромбовидного профиля и чечевицы можно записать соответственно так:

$$c_{x\,\text{ромб}} = c_{x\,\text{пл}} + \frac{4\bar{c}^2}{\sqrt{M_1^2 - 1}},$$

$$c_{x\,\text{чеч}} = c_{x\,\text{пл}} + \frac{16\bar{c}^2}{3\sqrt{M_1^2 - 1}}.$$

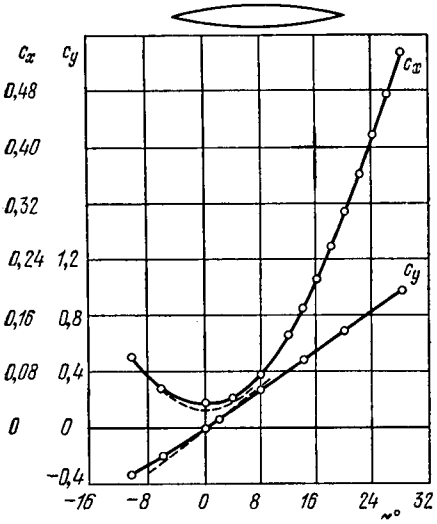


Рис. 10.28. Зависимости от угла атаки коэффициентов подъемной силы c_y и лобового сопротивления c_x симметричного чечевицеобразного профиля; $\bar{c} = 10\%$ при $M_1 = 2{,}13$. Сплошная линия — эксперимент, пунктирная — теория.

Пластинка по сравнению с другими тонкими сверхзвуковыми профилями при том же угле атаки имеет наименьший коэффициент волнового сопротивления. В общем случае добавочное слагаемое к коэффициенту волнового сопротивления пластинки для данного профиля зависит от его относительной толщины $\bar{c} = c/b$ и его кривизны.

Результаты экспериментального исследования [1]) ромбовидного несимметричного профиля с относительной толщиной $\bar{c} = 10\%$ в сверхзвуковом потоке с числом $M_1 = 2{,}13$ (рис. 10.27) подтверждают наличие во всем исследованном диапазоне углов атаки, линейного характера зависимости $c_y(\alpha)$. При этом экспериментальная зависимость коэффициента подъемной силы от угла атаки оказывается несколько более пологой, чем теоретическая, посчитанная по формуле (73).

Экспериментально подтвержден также и полученный теоретически, в соответствии с формулой (74), квадратичный харак-

[1]) Ферри А., Аэродинамика сверхзвуковых течений, перев. с англ. Гостехиздат, М. — Л., 1952.

тер зависимости коэффициента сопротивления от угла атаки. Сами величины коэффициентов c_x оказываются при этом весьма близкими к их расчетным значениям.

Аналогичное сравнение результатов расчета и эксперимента для чечевицеобразного профиля с тем же значением относительной толщины $\bar{c} = 10\%$ и при том же числе Маха набегающего потока приведено на рис. 10.28 и целиком подтверждает общность сделанных выводов о соответствии между теоретическими и опытными данными. Так же, как и при продувках ромбовидного профиля, экспериментальная зависимость $c_y(\alpha)$ для чечевицеобразного профиля остается практически линейной во всем исследованном диапазоне углов атаки, вплоть до $\alpha \approx 30°$.

В этой связи чрезвычайно интересно отметить, что линейный характер зависимости $c_y(\alpha)$ для симметричного дозвукового профиля той же относительной толщины ($\bar{c} = 10\%$) при обтекании его при малых числах $M_1 < 1$, остается справедливым только до $\alpha \approx 10°$, а при $\alpha = 12°$ коэффициент подъемной силы дозвукового профиля достигает максимального ($dc_y/d\alpha = 0$) значения.

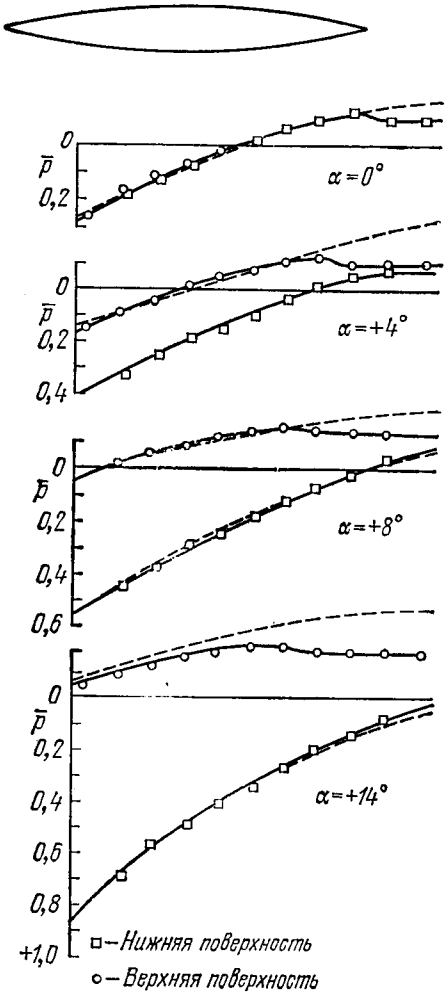


Рис. 10.29. Распределение давлений по симметричному чечевицеобразному профилю; $\bar{c} = 10\%$ при $M_1 = 2{,}13$ и различных углах атаки. Сплошная линия — эксперимент, пунктирная — теория.

Сравнение расчетного и экспериментального распределения давлений по чечевицеобразному профилю при различных углах атаки и $M_1 = 2{,}13$ приведено на рис. 10.29. На нижней поверхности профиля теоретические и опытные

данные по распределению давления практически полностью совпадают между собой при всех углах атаки. Это связано с относительно небольшим влиянием вязкости на косой скачок, поскольку он здесь возникает у передней кромки профиля, где толщина пограничного слоя еще очень мала.

Иначе обстоит дело на верхней поверхности, где взаимодействие образующегося вблизи задней кромки косого скачка происходит уже с максимально развитым пограничным слоем. В результате этого взаимодействия и возникающего здесь отрыва пограничного слоя экспериментальное разрежение у задней кромки профиля становится меньше теоретического. С увеличением угла атаки скорость перед косым скачком увеличивается, соответственно увеличивается и разница между расчетной и экспериментальной эпюрой давлений на верхней части профиля и расширяется вверх по потоку область поверхности, где эта разница наблюдается.

Однако даже существенное изменение в распределении давления по верхней поверхности профиля весьма слабо сказывается на величинах c_y и c_x. Это является следствием того, что в сверхзвуковом потоке, в отличие от дозвукового, интегральная величина равнодействующей сил давления определяется в основном, не разрежением на верхней поверхности профиля, а повышением давления на его нижней поверхности.

§ 8. Околозвуковое обтекание профиля

В описанных выше двух случаях обтекания неподвижного профиля потоком газа предполагалось, что во всей плоскости течения имеются соответственно или только дозвуковые (дозвуковое обтекание) или только сверхзвуковые (сверхзвуковое обтекание) скорости.

Рассмотрим теперь околозвуковое «смешанное» обтекание профиля, когда имеются одновременно области течения с дозвуковыми и со сверхзвуковыми скоростями.

При непрерывном увеличении числа Маха набегающего потока от нуля можно считать, что режим околозвукового течения начинается тогда, когда наибольшее из местных значений числа Маха достигает единицы, и кончается тогда, когда наименьшее из местных значений числа Маха достигает единицы.

Число Маха набегающего потока в первом случае будем называть *дозвуковым критическим числом Маха* ($M_{1\,кр.\,д} < 1$) и соответственно во втором случае — *сверхзвуковым критическим числом Маха* ($M_{1\,кр.\,с} > 1$).

Таким образом, при фиксированном угле атаки околозвуковое обтекание данного профиля осуществляется, как при сверх-

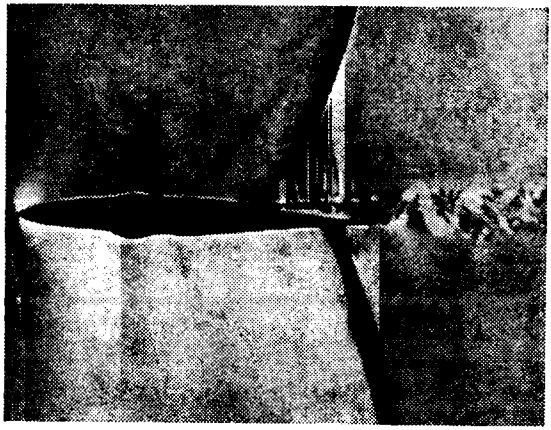


Рис. 10.30. Теневая фотография околозвукового обтекания единичного профиля при $M_1 < 1{,}0$ ($M_1 = 0{,}87$).

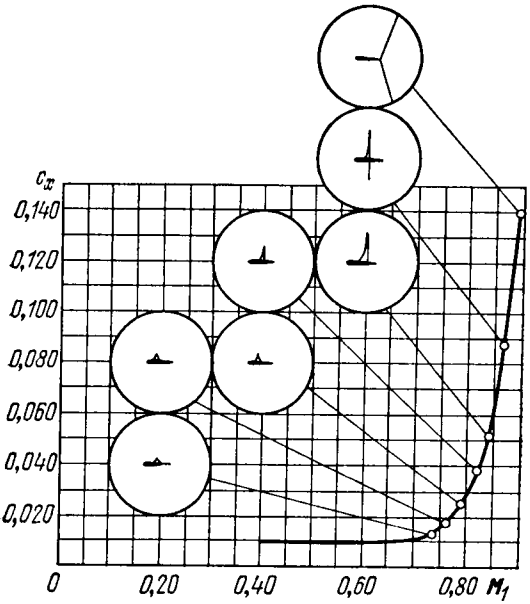


Рис. 10.31. Зависимость коэффициента сопротивления симметричного профиля от числа M_1 при нулевом угле атаки (в кружках изображены соответствующие схемы скачков).

критических дозвуковых скоростях, т. е. при

$$M_{1\,кр.\,д} < M_{1\,ок} < 1,$$

так и при докритических сверхзвуковых скоростях, т. е. при

$$1 < M_{1\,ок} < M_{1\,кр.\,с}.$$

При обтекании дозвукового профиля потоком со сверхкритическими дозвуковыми скоростями ($M_1 > M_{1\,кр.\,д}$) вначале вблизи максимальной его толщины образуется зона сверхзвуковой скорости, которая завершается скачками уплотнения. Это

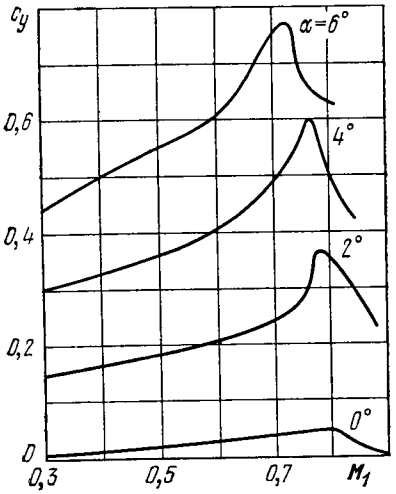


Рис. 10.32. Зависимость коэффициента подъемной силы профиля от числа M_1 при различных углах атаки.

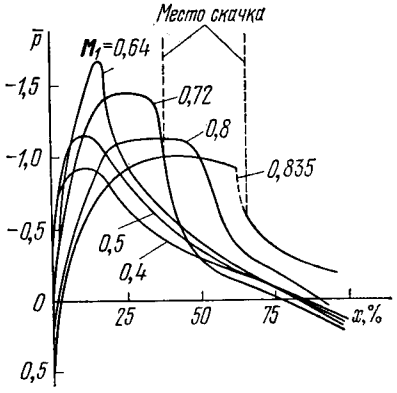


Рис. 10.33. Эпюры давления на верхней поверхности профиля при различных значениях числа M_1 (на большом угле атаки).

хорошо видно на рис. 10.30, где представлена фотография, соответствующей картины обтекания авиационного профиля. За системой скачков виден отрыв потока от крыла, происходящий в результате взаимодействия скачка с пограничным слоем. Наличие скачков и отрыва приводит к возрастанию лобового сопротивления профиля (рис. 10.31), уменьшению подъемной силы (рис. 10.32) и резкому изменению в характере распределения давления по профилю; последнее обстоятельство иллюстрируется рис. 10.33, где значительная деформация кривой давления при обтекании профиля под большим углом атаки наблюдается, начиная с $M_1 = 0{,}64$.

По мере дальнейшего увеличения числа M_1 сверхзвуковая зона расширяется и система скачков уплотнения продвигается к задней кромке профиля. При этом сопротивление круто растет

(рис. 10.31). При сверхзвуковых скоростях набегающего потока перед профилем возникает отсоединенная ударная волна — не

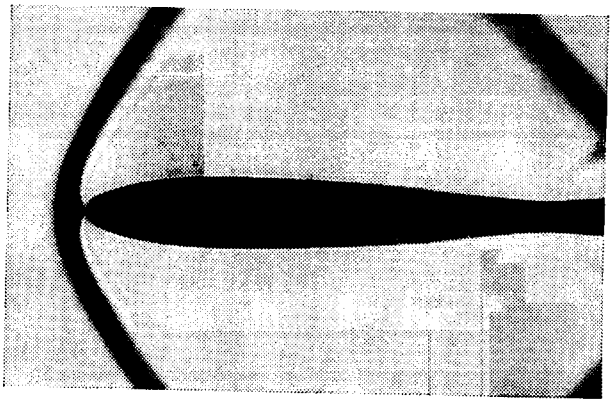


Рис. 10.34. Теневая фотография околозвукового обтекания единичного профиля при $M_1 > 1{,}0$.

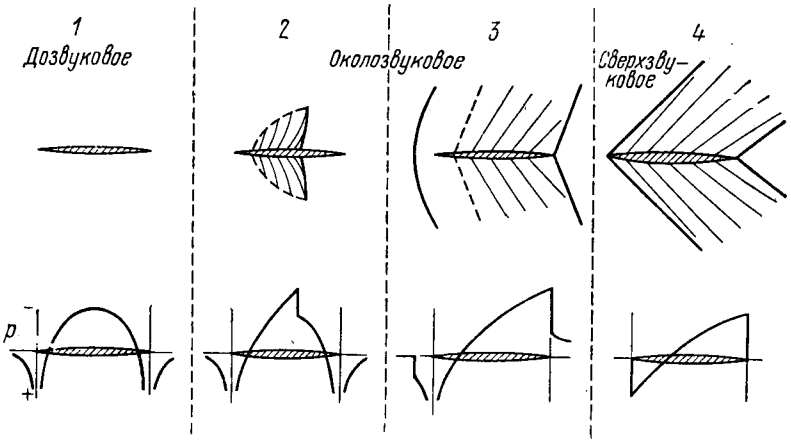


Рис. 10.35. Характерные режимы обтекания чечевицеобразного профиля на нулевом угле атаки: *1* — дозвуковое обтекание, *2* — околозвуковое обтекание при дозвуковых сверхкритических скоростях ($M_1 > M_{1\,кр} < 1{,}0$), *3* — околозвуковое обтекание при сверхзвуковых докритических скоростях ($1{,}0 < M_1 < M_{min}$), *4* — сверхзвуковое обтекание.

соприкасающийся с передней кромкой профиля скачок уплотнения с криволинейным фронтом (рис. 10.34).

Характерные режимы обтекания чечевицеобразного сверхзвукового профиля с острой передней кромкой изображены на рис. 10.35.

Картины течения при дозвуковом и околозвуковом режимах течения принципиально не отличаются от соответствующих картин обтекания обычного дозвукового профиля. В обоих случаях в околозвуковом течении при $M_1 > 1$, как перед дозвуковым профилем с закругленной передней кромкой, так и перед сверхзвуковым профилем с острой передней кромкой, возникает отсоединенная ударная волна. Последнее связано с тем, что клин,

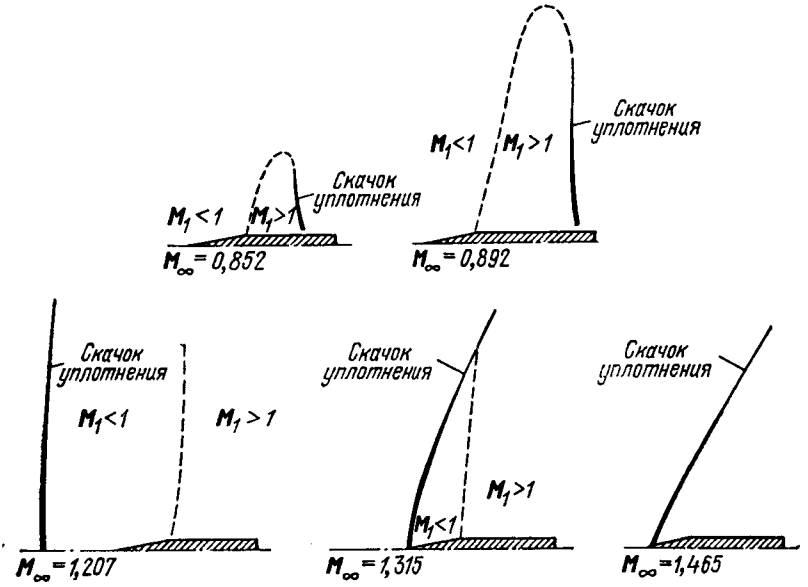


Рис. 10.36. Изменение характера обтекания клина в околозвуковом диапазоне скоростей набегающего потока; M_∞, M_1 — значения числа Маха в набегающем потоке и местное.

половина угла при вершине которого $\omega > \omega_{max}$, является «тупоносым» телом по отношению к набегающему на него сверхзвуковому потоку. При данном значении числа M_1 влияние контура носовой части профиля сказывается на форме самой ударной волны и на удалении ее от передней кромки крыла.

Действительные картины обтекания клиновидного профиля с углом раствора 20° ($\omega = 10°$) в околозвуковом диапазоне скоростей при нулевом угле атаки приведены на рис. 10.36 [1]). Видно, что при сверхзвуковых скоростях набегающего потока увеличение числа M_1 приводит к смещению отсоединенной удар-

[1]) Липман Г. В. и Рошко А., Элементы газовой динамики, перев. с англ., М., 1960.

ной волны вниз по потоку. При значении $M_1 = M_{1\,кр.\,с}$, при котором данный угол клина становится равным его предельному значению (в рассматриваемом случае при $M_1 = 1{,}465$), ударная волна достигает передней кромки профиля, одновременно трансформируясь в прямолинейный косой скачок.

Эта трансформация отсоединенной ударной волны в присоединенный косой скачок и является специфической особенностью обтекания остроносого сверхзвукового профиля, в отличие от тупоносого дозвукового, где при любых числах $M_1 > 1$ ударная волна остается отсоединенной.

При сверхкритических дозвуковых скоростях зависимость коэффициента сопротивления от числа Маха набегающего потока для сверхзвукового чечевицеобразного профиля [1]) (рис. 10.37) оказывается менее крутой, чем в случае обычного

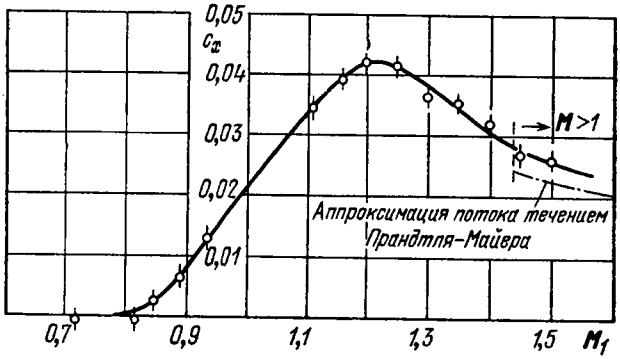


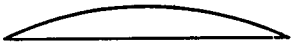
Рис. 10.37. Зависимость коэффициента сопротивления от числа M_1 для чечевицеобразного сверхзвукового профиля ($\bar{c} = 8{,}8\%$) на нулевом угле атаки.

дозвукового профиля (см. рис. 10.31). Значение c_x продолжает монотонно увеличиваться и при сверхзвуковых скоростях набегающего потока, достигая максимального значения при $M_1 = 1{,}2$. Дальнейшее увеличение M_1 приводит к уменьшению коэффициента сопротивления вследствие приближения ударной волны к профилю. При $M_1 = 1{,}44$ (на рисунке отмечено штрих-пунктирной линией) ударная волна достигает носика профиля, превращаясь при этом в два симметричных косых скачка (см. рис. 10.22). Начиная с этого момента профиль уже обтекается чисто сверхзвуковым потоком. Это позволяет при числах $M_1 \geqslant 1{,}44$ точно рассчитать волновое сопротивление данного чечевицеобразного профиля. Результаты такого расчета хорошо

[1]) Bryson A. E., NACA T. № 2560.

согласуются с экспериментами. Некоторое уменьшение расчетной величины c_x по сравнению с его опытным значением связано с неучитываемым в расчете сопротивлением трения.

На рис. 10.38 приведены экспериментальные зависимости коэффициента подъемной силы плоско-выпуклого профиля от



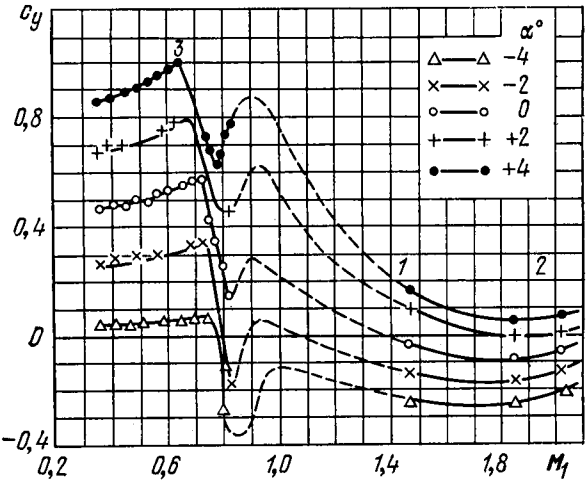


Рис. 10.38. Экспериментальные зависимости коэффициента подъемной силы плоско-выпуклого профиля с относительной толщиной $\bar{c} = 10\%$ от числа Маха при различных углах атаки.

числа M_1 при нескольких значениях угла атаки. Сложный характер этих зависимостей в околозвуковом диапазоне скоростей качественно подтверждается также и более подробными экспериментальными данными, полученными для другого профиля, для которого приводятся также и расчетные значения c_y (рис. 10.39) [1]). При малых дозвуковых скоростях увеличение c_y происходит в соответствии с формулой (58), т. е. пропорционально $1/\sqrt{1 - M_1^2}$. Затем интенсивность роста c_y увеличивается, и экспериментальные значения коэффициента подъемной силы несколько превосходят расчетные данные; это объясняется возникновением на верхней поверхности профиля сверхзвуковых зон с повышенным разрежением. Возрастание кривой $c_y(M_1)$

[1]) Мартынов А. К., Прикладная аэродинамика, «Машиностроение», М., 1972.

продолжается далее вплоть до появления сверхзвуковых скоростей на нижней поверхности, когда соответствующее разрежение на этой поверхности создает силу, направленную в обратную сторону. Это падение c_y усугубляется еще и отрывом потока на верхней поверхности.

При сверхзвуковых скоростях наблюдается монотонное падение коэффициента подъемной силы с ростом скорости набегающего потока. По мере увеличения числа M_1 разница между расчетом и экспериментом уменьшается и практически исчезает, начиная с некоторого числа $M_1 = M_1^* > 1{,}0$, при котором ударная волна достигает передней кромки и профиль начинает обтекаться чисто сверхзвуковым потоком. При числах M_1 больших M_1^* величина коэффициента подъемной силы с ростом скорости уменьшается в соответствии с формулой (73) пропорционально $1/\sqrt{M_1^2 - 1}$.

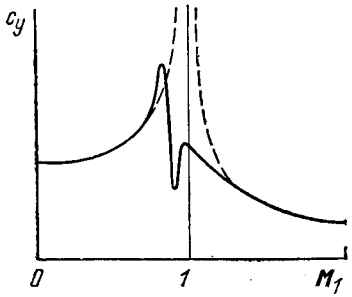


Рис. 10.39. Сравнение экспериментальной и теоретической зависимостей коэффициента подъемной силы сверхзвукового профиля от числа M_1. Сплошная линия — эксперимент, пунктирная — теория.

Наибольшие расхождения между экспериментальными и расчетными данными возникают при числах Маха, близких к единице (в этом случае как при дозвуковых, так и при сверхзвуковых скоростях значение c_y по линейной теории стремится к бесконечности).

Рассмотрим околозвуковое обтекание тонких сверхзвуковых профилей под малыми углами атаки [1]). В этом случае возмущение однородного потока, направленного по оси x, невелико

$$\frac{u'}{w_1}, \quad \frac{v'}{w_1} \ll 1{,}0$$

и возможно существенное упрощение точного уравнения (34), описывающего обтекание данного профиля потоком газа со скоростью на бесконечности, равной по величине w_1 и направленной вдоль оси x.

При околозвуковом течении, когда число Маха набегающего потока близко к единице коэффициент у производной $\partial u'/\partial x$ в левой части уравнения (34) становится по порядку малости сравнимым с величиной u'/w_1; это обстоятельство не позволяет

[1]) Липман Г. В., Рошко А., Элементы газовой динамики, перев. с англ., М., 1960.

отбрасывать член

$$M_1^2 (k+1) \frac{u'}{w_1} \frac{\partial u'}{\partial x}$$

в правой части, подобно всем другим членам этой части уравнения (34). В результате получаем следующее уравнение относительно потенциала малых возмущений, справедливое для любого течения, в том числе и околозвукового:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{1}{1 - M_1^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{(k+1) M_1^2}{1 - M_1^2} \cdot \frac{1}{w_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}. \tag{77}$$

Подобно тому, как это делалось ранее (см. § 6), наряду с потоком газа в плоскости (x, y), обтекающим с околозвуковой скоростью w_1 сверхзвуковой профиль данного семейства профилей, характеризуемый относительной толщиной $\bar{c}$, рассмотрим второй поток газа с числом Пуассона k^*, числом Маха на бесконечности M_1^*, скоростью на бесконечности, направленной по оси ξ и по величине, равной w_1^*, обтекающий в плоскости

$$\xi = x, \quad \eta = \sqrt{\frac{1 - M_1^2}{1 - M_1^{*2}}} \cdot y$$

некоторый другой сверхзвуковой профиль этого же семейства с относительной толщиной $\bar{c}^*$ и с потенциалом

$$\Phi(\xi, \eta) = \frac{w_1^*}{w_1} \frac{\varphi(x, y)}{A}, \tag{78}$$

где A — некоторая постоянная величина. Выражая с помощью дифференцирования формул (77) и (78) значения частных производных от потенциала φ по x и y через соответствующие производные от потенциала Φ по ξ и η, получаем после подстановки в (77) следующее уравнение:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + \frac{1}{1 - M_1^{*2}} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} = \frac{(k+1) M_1}{1 - M_1^2} \frac{A}{w_1^*} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2}. \tag{79}$$

Для того чтобы функция $\Phi(\xi, \eta)$ была потенциалом возмущений обтекания профиля с относительной толщиной $\bar{c}^*$, потоком газа с числом Пуассона k^*, со скоростью w_1^* числом Маха M_1^*, она, во-первых, согласно (77), должна быть решением уравнения

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + \frac{1}{1 - M_1^{*2}} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} = \frac{(k^*+1) M_1^*}{1 - M_1^{*2}} \frac{1}{w_1^*} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} \tag{80}$$

и, во-вторых, удовлетворять граничному условию (46), выполнение которого сводится к соблюдению соотношения (48).

Из сравнения уравнений (79) и (80) легко видеть, что первое требование выполняется, если

$$A = \frac{k^* + 1}{k + 1} \frac{M_1^{*2}}{M_1^2} \frac{1 - M_1^2}{1 - M_1^{*2}}. \tag{81}$$

Подстановка этого значения постоянной A в (48) и (52) приводит к следующим двум выражениям:

$$\frac{\bar{c}^* (k^* + 1) M_1^{*2}}{\left(1 - M_1^{*2}\right)^{3/2}} = \frac{\bar{c} (k + 1) M_1^2}{\left(1 - M_1^2\right)^{3/2}},$$

$$\frac{\bar{p}^* (k^* + 1) M_1^{*2}}{1 - M_1^{*2}} = \frac{\bar{p} (k + 1) M_1^2}{1 - M_1^2},$$

из которых следует, что

$$\frac{\bar{p} (k + 1) M_1^2}{M_1^2 - 1} = f\left[\frac{\bar{c} (k + 1) M_1^2}{\left(M_1^2 - 1\right)^{3/2}}\right]. \tag{82}$$

Важно заметить, что если для докритических дозвуковых и сверхкритических сверхзвуковых течений постоянная A может быть произвольной величиной (см. § 6), то в рассматриваемом случае она определяется единственным образом согласно формуле (81). Это обстоятельство не дает возможности в случае околозвукового течения сравнивать обтекание данного профиля при различных числах Маха, или обтекание различных профилей одного и того же семейства при фиксированном числе M_1, как это делалось, например, при применении формул Прандтля — Гляуэрта в § 6 настоящей главы.

При околозвуковом течении можно сравнивать обтекание профилей данного семейства с различными относительными толщинами только при различных числах Маха или в газах с различными числами Пуассона. В этих случаях удобно с помощью вновь вводимого параметра

$$\chi = \frac{M_1^2 - 1}{\left[\bar{c} (k + 1) M_1^2\right]^{2/3}} \tag{83}$$

представить зависимость (82) в следующем виде:

$$\bar{p}\beta = F_p(\chi), \tag{84}$$

где

$$\beta = \left[\frac{(k + 1) M_1^2}{\bar{c}^2}\right]^{1/3}.$$

Это правило околозвукового подобия Кармана, записанное в той форме, как его представил Спрайтер. Соотношение (84) справедливо при дозвуковых, околозвуковых и сверхзвуковых скоростях. Как частный случай из него получается правило Прандтля — Гляуэрта, справедливое при тех значениях скоростей, где могут применяться линеаризированные уравнения.

Формула околозвукового подобия для коэффициента давления (84) не зависит от местоположения точки на профиле, и поэтому она может быть распространена и на интегральные величины коэффициента сопротивления и подъемной силы. Таким образом, можно записать, что

$$\bar{c}_x = F_x(\chi) \quad \text{и} \quad \bar{c}_y = F_y(\chi), \tag{85}$$

где

$$\bar{c}_x = c_x\beta, \tag{86}$$

$$c_y = c_y\beta. \tag{87}$$

На рис. 10.40 приведены экспериментальные кривые коэффициентов сопротивления различных клиньев, построенные по их продувкам при нулевом угле атаки. Для каждого клина есть своя кривая, лежащая тем выше, чем больше угол раствора

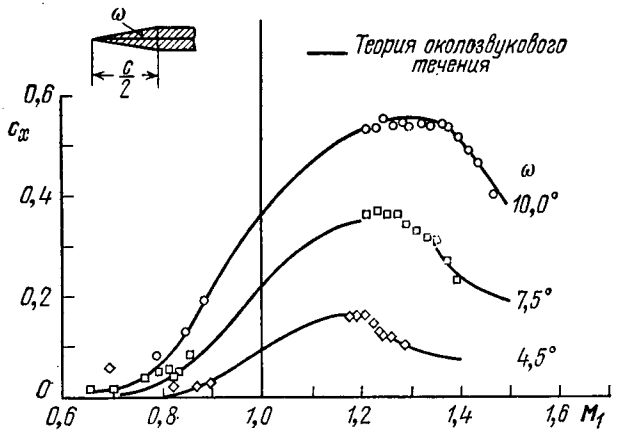


Рис. 10.40. Экспериментальные зависимости коэффициента сопротивления c_x от числа M_1 для пластин различной относительной толщины с различным углом ω заострения клиновидной передней кромки.

клина. Если же данные этих испытаний представить в виде зависимости $\bar{c}_x(\chi)$, где $\bar{c}_x$ и χ определяются соответственно согласно формулам (86) и (83), то все экспериментальные точки, полученные для различных клиньев действительно в соответст-

вии с выражением (85), образуют общую универсальную зависимость (рис. 10.41).

На рис. 10.41 для сверхзвуковых скоростей построена также зависимость $\bar{c}_x(\chi)$ по линейной теории. Видно, что при

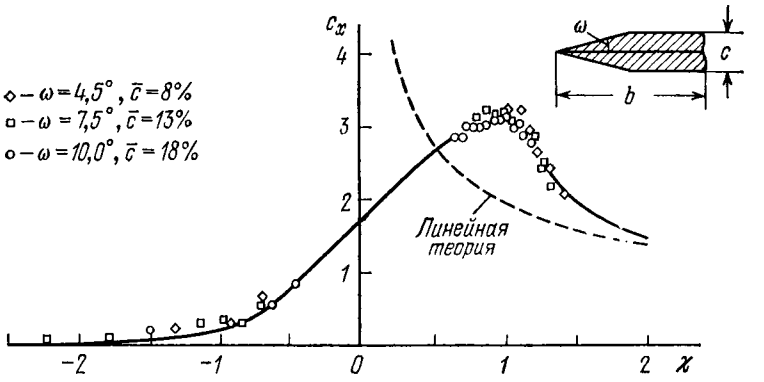


Рис. 10.41. Зависимость $\bar{c}_x(\chi)$ по результатам продувок различных пластин с клиновидной передней кромкой.

достаточно большом числе Маха $M_1 > M_{кр.с.} > 1$, т. е. за пределами диапазона околозвуковых скоростей эта кривая приближается к экспериментальной.

§ 9. Обтекание решетки профилей потоком несжимаемой жидкости

Рассмотрим обтекание потенциальным потоком несжимаемой жидкости прямолинейной решетки, составленной из профилей, имеющих острую заднюю кромку. Так же как и для случая единичного крыла, можно найти такое направление бесциркуляционного течения, при котором острая кромка является точкой схода струй; соответствующий угол между направлением бесциркуляционного течения и фронтом решетки обозначим β_0.

Величина циркуляции для профиля, установленного в решетке, обтекаемой идеальной несжимаемой жидкостью, определяется из того же выражения, что и для единичного профиля, но только вместо скорости набегающего потока, как это делалось в случае изолированного крыла, следует в соответствии с теоремой Н. Е. Жуковского подставить величину геометрической полусуммы скоростей перед и за решеткой w_m. Угол атаки α_m определяется как угол между хордой профиля и направлением скорости w_m.

Таким образом, мы можем написать

$$\Gamma_p = m_p b w_m \sin(\alpha_m - \alpha_{0p}),$$

где m_p — коэффициент пропорциональности, зависящий от формы профиля и параметров решетки, α_{0p} — угол между направлением нулевой подъемной силы и хордой профиля.

Подставляя это значение циркуляции в (14), получим

$$c_{yp} = 2m_p \sin(\alpha_m - \alpha_{0p}),$$

или

$$c_{yp} = \left(\frac{dc_y}{d\alpha}\right)_{\alpha=\alpha_{0p}} \sin(\alpha_m - \alpha_{0p}) = \left(\frac{dc_y}{d\alpha}\right)_{\alpha=\alpha_{0p}} \sin(\beta_0 - \beta_m), \quad (88)$$

где β_0 — угол между направлением нулевой подъемной силы и фронтом решетки.

Для углов, обычно применяемых на практике, можно положить

$$\sin(\alpha_m - \alpha_{0p}) \approx \alpha_m - \alpha_{0p}.$$

Тогда из (88) имеем

$$c_{yp} = \frac{dc_y}{d\alpha}(\alpha_m - \alpha_{0p}) = \frac{dc_y}{d\alpha}\alpha_{Ap},$$

где

$$\alpha_{Ap} = \alpha_m - \alpha_{0p}.$$

Заметим, что если для изолированного крыла величина $dc_y/d\alpha$ и угол нулевой подъемной силы α_0 зависят только от формы профиля, то в случае решетки эти величины зависят, кроме того, и от параметров решетки: густоты $\tau = b/t$ и установочного угла θ.

Очевидно, что при стремлении шага решетки к бесконечности ($\tau \to 0$) значения $dc_y/d\alpha$ и α_{0p} стремятся соответственно к их значениям для изолированного профиля.

Из (11) и (88) после элементарных преобразований приходим к следующей зависимости между углами входа и выхода [1]):

$$\operatorname{ctg}\beta_2 = A \operatorname{ctg}\beta_1 + B, \quad (89)$$

где A и B — постоянные для заданной решетки профилей величины

$$A = \frac{1 - \frac{\tau}{4}\frac{dc_y}{d\alpha}\sin\beta_0}{1 + \frac{\tau}{4}\frac{dc_y}{d\alpha}\sin\beta_0}, \quad B = \frac{\frac{\tau}{2}\frac{dc_y}{d\alpha}\cos\beta_0}{1 + \frac{\tau}{4}\frac{dc_y}{d\alpha}\sin\beta_0}.$$

[1]) Подробный вывод см. в гл. VIII второго издания этой книги, Гостехиздат, М., 1953.

Если соблюдается условие постоянства угла выхода $\beta_2 = \text{const}$, то направление потока на выходе совпадает с направлением нулевой подъемной силы $\beta_2 = \beta_0$, так как при этом $\beta_1 = \beta_2$, т. е.

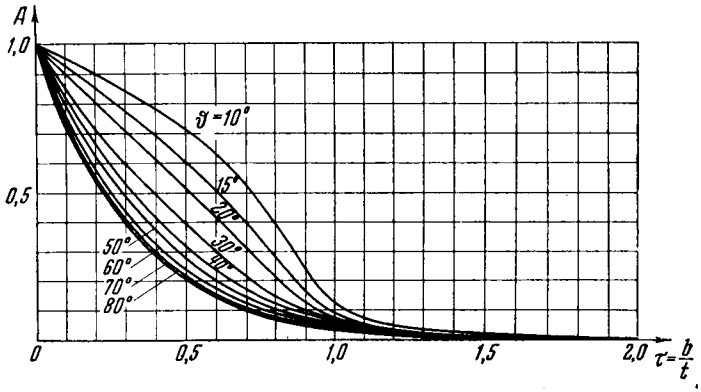


Рис. 10.42. Коэффициент A для решетки пластин.

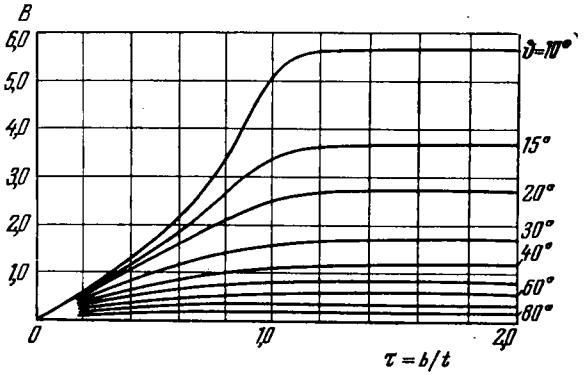


Рис. 10.43. Коэффициент B для решетки пластин.

поток в решетке не отклоняется. В общем случае выражение для угла β_0 находится из формулы (89), записываемой для режима бесциркуляционного обтекания решетки в виде

$$\operatorname{ctg}\beta_0 = \frac{B}{1-A}.$$

На рис. 10.42 и 10.43 представлены графики функций A и B для решетки плоских пластин[1]) в зависимости от густоты

[1]) Впервые задача обтекания решеток плоских пластин была решена С. А. Чаплыгиным в 1912 г.; затем более простое решение получил Н. Е. Жуковский в 1915 г.

τ, при различных углах установки ϑ. Как следует из рассмотрения этих графиков, величина A при $\tau > 1$ становится порядка $A < 0{,}1$, величина же B асимптотически приближается к $\operatorname{ctg}\vartheta$ и при $\tau \geqslant 1{,}2$ может считаться постоянной.

Коэффициент A с возрастанием густоты уменьшается, поэтому, начиная с некоторой густоты τ, первым членом в правой части выражения (89) можно пренебречь. Следовательно, при больших значениях τ угол выхода перестает зависеть от угла входа, становясь для данных значений параметров решетки постоянной величиной

$$\operatorname{ctg}\beta_2 \approx B = \text{const}.$$

В этом случае течение на выходе определяется только выходной частью межлопаточного канала, т. е. не зависит от условий на входе.

С помощью ЭВМ были проведены подробные расчеты коэффициентов A и B решеток тонких профилей в широком диапазоне изменения геометрических параметров решетки и профиля [1]). Используя эти материалы, можно легко решать прямую и обратную задачи аэродинамики решетки профилей в потенциальном потоке несжимаемой жидкости.

Располагая значениями коэффициентов A и B для данной решетки, в соответствии с (26), (27) и (89) находим

$$c_u\tau = 2\left[(1 - A)\operatorname{ctg}\beta_1 - B\right]\sin^2\beta_1,$$

$$c_a\tau = -\left[(1 - A^2)\operatorname{ctg}^2\beta_1 + 2AB\operatorname{ctg}\beta_1 - B^2\right]\sin^2\beta_1,$$

а следовательно, и

$$c_R = \sqrt{c_u^2 + c_a^2}.$$

На рис. 10.44 для густой диффузорной решетки тонких сильно искривленных профилей приведены зависимости коэффициентов равнодействующей силы от угла атаки

$$c_R = \frac{R}{\rho\dfrac{w_1^2}{2}b} \quad \text{и} \quad c_y = \frac{R}{\rho\dfrac{w_m^2}{2}b}.$$

При фиксированной величине скорости набегающего потока w_1 значение коэффициента c_R, а следовательно, и равнодействующей аэродинамических сил, приложенных к профилю в решетке при некотором относительно небольшом угле атаки, достигает максимального значения.

Ранее уже указывалось, что для единичного профиля наличие максимума равнодействующей всегда предполагает образо-

---

[1]) Белоцерковский С. М., Гиневский А. С., Полонский Я. Е., Силовые и моментные аэродинамические характеристики решеток тонких профилей. В сб. «Промышленная аэродинамика», № 22, Оборонгиз, М., 1962.

вание интенсивного срыва потока с верхней поверхности профиля. Вот почему такой критический угол атаки изолированного профиля часто называют *срывным углом атаки.* Иное дело в решетке. Здесь достижение равнодействующей максимума не обязательно связано со срывом потока, а возникает и при бессрывном потенциальном обтекании решетки профилей.

Это объясняется тем, что решетки, составленные из профилей большой кривизны, работают при очень больших аэродинамических углах атаки, отсчитываемых от направления бесциркуляционного обтекания.

Так, например, в приведенном на рис. 10.44 случае направление бесциркуляционного обтекания (рис. 10.3) составляет угол

$$\beta_0 = \beta_2 = \varphi_2 = \vartheta + \frac{\varepsilon}{2} = 67{,}5°,$$

и при нулевом угле атаки ($i = 0$) аэродинамический угол атаки равен 45°. Равнодействующая сила достигает максимального значения при $i = 7°$, что соответствует аэродинамическому углу атаки $\alpha_A = 52°$. Возможность бессрывного обтекания профилей при таких углах атаки связана со спецификой течения в очень густых решетках.

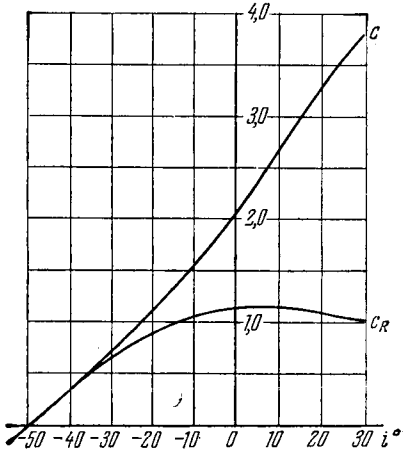


Рис. 10.44. Зависимость безразмерных коэффициентов от угла атаки для густой решетки тонких дужек: $\vartheta = 65°$, $\varepsilon = 50°$.

Следует заметить, что использование коэффициента подъемной силы c_y затрудняет нахождение критического угла атаки; в этом случае величина равнодействующей относится к скоростному напору, рассчитанному по среднегеометрической скорости $\rho\frac{w_m^2}{2}$, который не остается постоянным при изменении угла атаки и фиксированном значении w_1.

Выше уже указывалось (см. § 5), что безотрывное обтекание тонких дужек, даже без учета вязкости становится невозможным, и с их передних острых кромок происходит отрыв потока.

В качестве примера рассмотрим обтекание невязким потоком несжимаемой жидкости решетки бесконечно тонких пластин со срывом струй с острых передних кромок[1]). Ограничимся

[1]) Гинзбург С. И., Суммарное силовое воздействие стационарного плоского потока на прямолинейную решетку профилей. В сб. «Лопаточные машины и струйные аппараты», вып. 3, «Машиностроение», 1968.

случаем решеток такой большой густоты, при которой на их срезе имеется однородный поток, направленный по пластине, и таким образом выполняется условие Жуковского — Чаплыгина о сходе струй с задней острой кромки (рис. 10.45). Скорости и давление на границах струй постоянны. Линия тока, идущая вдоль пластины в точке нулевой скорости, разделяется на идущие вверх bc_1 и вниз по потоку bc_2. Из теоремы импульсов для объема $a_1b_1b_2a_2$ имеем в проекциях на пластинку и нормаль к ней

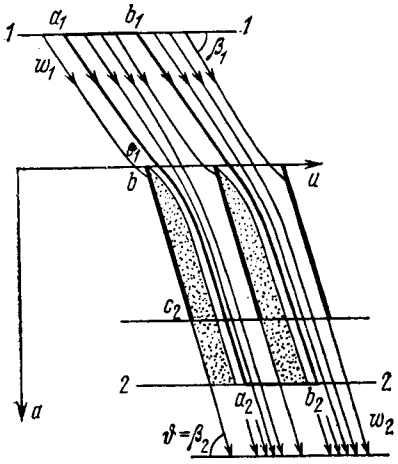


Рис. 10.45. Схема обтекания густой решетки пластин идеальным потоком несжимаемой жидкости со срывом струй с острых передних кромок.

$$G(w_2 - w_1\cos i) = (p_1 - p_2)t\sin\vartheta, \tag{90}$$

$$-Gw_1\sin i = -(p_1 - p_2)t\cos\vartheta - R_n. \tag{91}$$

Преобразуя равенство (90) с помощью уравнений неразрывности и Бернулли, получим

$$\left(\frac{w_2}{w_1}\right)^2 - 2\frac{\sin(\vartheta - i)}{\sin\vartheta}\frac{w_2}{w_1} + 2\frac{\cos i\sin(\vartheta - i)}{\sin\vartheta} - 1 = 0. \tag{92}$$

Один из корней этого квадратного уравнения можно отбросить, так как по условию $\bar{h} = h/t \leqslant 1$. Тогда из уравнения (92) при $i > 0$ имеем

$$\frac{w_2}{w_1} = \frac{\sin(\vartheta - i) + \sin i}{\sin\vartheta}, \tag{93}$$

а из уравнения расхода

$$\bar{h} = \frac{\sin(\vartheta - i)}{\sin(\vartheta - i) + \sin i}. \tag{94}$$

Из равенства (93) следует, что с ростом угла атаки скорость потока за решеткой при $w_1 = \text{const}$ сначала увеличивается, достигает максимума при $i = \vartheta/2$, а затем уменьшается (рис. 10.46). Это является следствием двух противоположных тенденций, возникающих при увеличении угла атаки и фиксированной величине скорости потока, набегающего на решетку. С одной стороны, согласно (94) относительная ширина $\bar{h}$ струи в межлопаточном канале монотонно уменьшается, и это должно привести к увеличению скорости w_2, с другой стороны, при увеличении угла атаки происходит монотонное уменьшение массового рас-

хода через решетку, приводящее в свою очередь к уменьшению скорости на выходе из нее.

После преобразования равенства (91) получаем следующее выражение для коэффициента равнодействующей, направленной по нормали к пластине:

$$c_n \frac{b}{t} = \frac{\sin(\vartheta - i)\sin i}{\cos^2 \vartheta/2}, \tag{95}$$

из которого следует, что при угле атаки $i_{кр} = \vartheta/2$ величина равнодействующей достигает максимума.

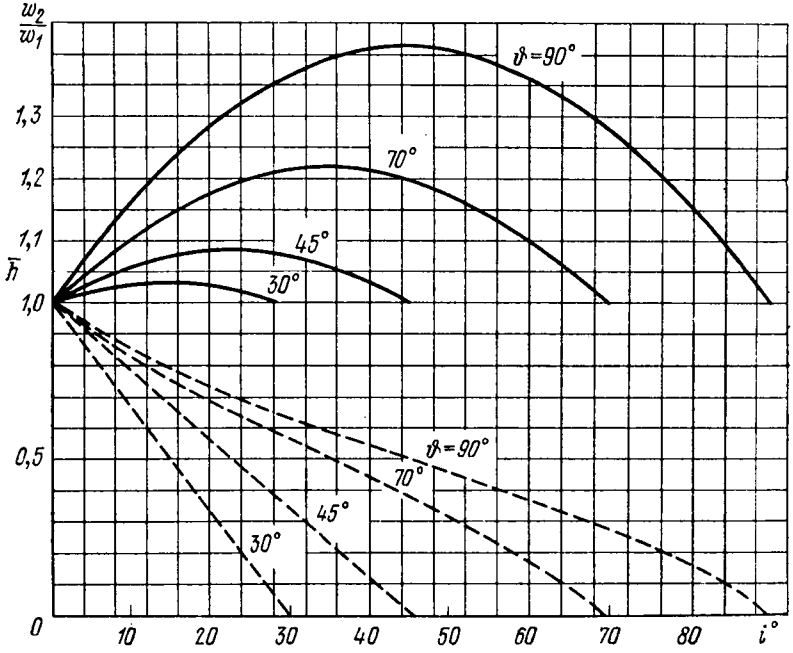


Рис. 10.46. Зависимость от угла атаки относительной ширины струи $\bar{h} = \bar{h}/t$ (пунктир) и безразмерной скорости w_2/w_1 (сплошная линия) за густой решеткой плоских пластин при обтекании ее идеальным потоком несжимаемой жидкости со срывом струй с острых передних кромок.

При безотрывном обтекании выражения для нормальной и касательной составляющих равнодействующей, приложенной к пластине в решетке, могут быть непосредственно получены с помощью выражений (26) и (27), которые в рассматриваемом случае невязкой жидкости ($\xi = 0$) и густой решетки пластин ($\beta_2 = \vartheta$, $\beta_1 = \vartheta - i$) записываются так:

$$c_u \frac{b}{t} = \frac{2\sin(\vartheta - i)\sin i}{\sin \vartheta}, \qquad c_a \frac{b}{t} = \frac{\sin^2(\vartheta - i)}{\sin^2 \vartheta} - 1.$$

Соответственно

$$c_n\frac{b}{t}=c_u\frac{b}{t}\sin\vartheta-c_a\frac{b}{t}\cos\vartheta=$$
$$=2\sin(\vartheta-i)\sin i+\left[1-\frac{\sin^2(\vartheta-i)}{\sin^2\vartheta}\right]\cos\vartheta. \qquad (96)$$

Сравнение зависимостей $c_nb/t(i)$, построенных согласно формулам (95) и (96) для двух режимов обтекания густой решетки пластин (рис. 10.47), показывает, что наличие срывного течения приводит не только к ликвидации касательной (тянущей) силы, имеющей место при бессрывном течении, но и к резкому падению величины нормальной составляющей равнодействующей.

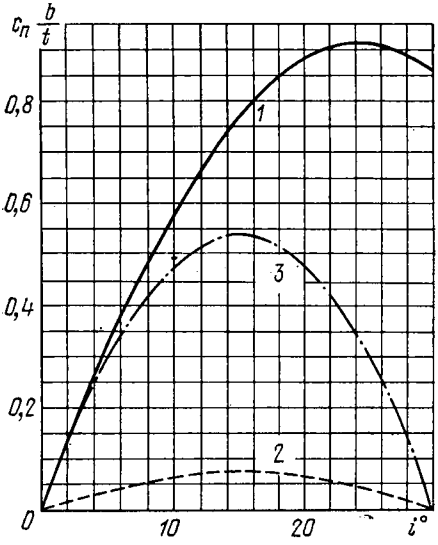


Рис. 10.47. Зависимость c_nb/t от угла атаки для густой решетки пластин с $\vartheta=30°$ при различных режимах обтекания ее несжимаемой жидкостью: *1* — непрерывное обтекание потенциальным потоком, *2* — обтекание потенциальным потоком со срывом струй с передней кромки, *3* — обтекание турбулентным потоком при полном его выравнивании в межлопаточных каналах.

Рассмотрим теперь некоторые вопросы, относящиеся к обтеканию решеток профилей потоком вязкой несжимаемой жидкости, на примере диффузорных решеток. Заметим, что в замедляющемся потоке, характерном для диффузорной решетки, создаются условия, способствующие более раннему отрыву пограничного слоя. Эти обстоятельства приводят к большим потерям полного давления в диффузорных решетках по сравнению с конфузорными, в которых ускоряющийся поток препятствует отрыву пограничного слоя.

Впервые экспериментальное исследование обтекания решеток воздушным потоком при малых скоростях произвел Н. Е. Жуковский в 1902 г. в лаборатории Московского университета. Испытуемая решетка пластин соединялась с аэродинамическими весами, по показаниям которых определялся коэффициент подъемной силы пластины в решетке.

В настоящее время имеется много экспериментальных данных, полученных в результате систематического исследования

диффузорных решеток[1]), которые позволяют успешно решать как прямую, так и обратную задачи аэродинамики решетки. В этих экспериментах обычно производилось измерение скоростей и углов соответственно перед и за решеткой и непосредственно измерялась разность полных давлений. В ряде случаев определялось также распределение давлений по поверхности профиля.

Следует иметь в виду, что в этих экспериментах, как и в большинстве других, направление потока за решеткой определялось в непосредственной близости от ее среза, где он еще неравномерен. Поэтому для определения эффективного поворота потока решеткой следует по измеренному распределению скоростей найти направление выравненного потока[2]). В случае бессрывных углов атаки это направление может быть определено по параметрам пограничного слоя на задних кромках профилей[3]).

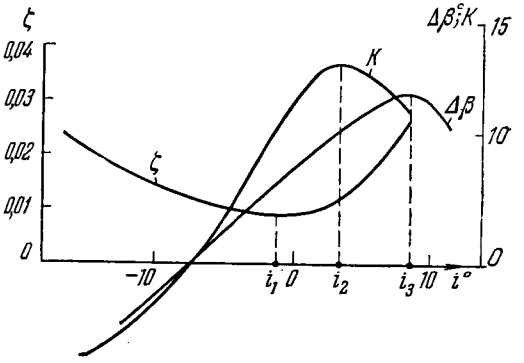


Рис. 10.48. Зависимость коэффициента потерь ζ, угла поворота потока $\Delta\beta$ и качества решетки K от угла атаки для решетки профилей с $\varepsilon = 10°$, $b/t = 1{,}0$ и $\vartheta = 50°$; i_1 — угол атаки при минимальном сопротивлении; i_2 — угол атаки при максимальном качестве решетки, i_3 — угол атаки при максимальном повороте потока решеткой (срывной угол атаки).

На рис. 10.48 приведены полученные А. П. Комаровым экспериментальные зависимости для потерь ζ и угла поворота $\Delta\beta$ потока в решетке от угла атаки. Видно, что сначала зависимость угла поворота потока от угла атаки линейная. Затем при некотором значении угла атаки, обычно называемом срывным, величина угла поворота потока решеткой дости-

---

[1]) Хоуэлл А. Р., Гидродинамика осевого компрессора. В сб. «Развитие газовых турбин», под ред. В. Л. Александрова. БНТ, МАП, 1947. Бунимович А. И., Святогоров А. А., Обобщение результатов исследования плоских компрессорных решеток при дозвуковой скорости. В сб. «Лопаточные машины и струйные аппараты», вып. 2, «Машиностроение», М., 1967. Комаров А. П., Исследование плоских компрессорных решеток. В сб. «Лопаточные машины и струйные аппараты», вып. 2, «Машиностроение», М., 1967.

[2]) См., например, гл. X предыдущего издания этой книги, «Наука», М., 1969.

[3]) Гиневский А. С., Исследование аэродинамических характеристик решеток профилей осевого компрессора. Автореферат диссертации, 1956.

гает максимального значения. При этом угле атаки начинается интенсивный срыв потока с верхней поверхности профилей и потери значительно возрастают. Дальнейшее увеличение угла атаки приводит к падению угла поворота, сопровождаемому интенсивным ростом потерь.

Другим характерным углом атаки является угол атаки, при котором потери полного давления в решетке становятся минимальными. В этом случае направление потока далеко перед решеткой близко к безударному, т. е. к такому направлению, при котором точка разветвления струй при обтекании профиля совпадает с точкой его максимальной кривизны.

Для оценки аэродинамического совершенства решетки профилей можно воспользоваться [1]) понятием о *качестве решетки* K (не путать с качеством профиля в решетке)

$$K = \frac{R_u}{F_a}.$$

Здесь R_u есть то полезное фронтальное усилие, ради получения которого и применяется данная решетка, а F_a есть осевая сила, возникновение которой связано только с необратимыми потерями полного давления в решетке. Чем больше величина K, тем совершеннее решетка. В невязком потоке потери отсутствуют, осевая добавочная сила обращается в нуль и $K = \infty$.

В некоторых случаях удобно пользоваться величиной, называемой *обратным качеством решетки*:

$$\nu = \frac{1}{K} = \frac{F_a}{R_u}.$$

Качество решетки предопределяет коэффициент полезного действия элементарного сечения рабочего колеса осевой ступени, в котором использована данная решетка. Максимум качества решетки соответствует максимуму коэффициента полезного действия.

Согласно (4) и (7) качество решетки

$$K = \frac{\rho w_a \Delta w_u}{h_w}$$

и соответственно обратное качество следующим образом выражается через величину коэффициента сопротивления и значения углов входа и выхода:

$$\nu = \frac{2 \sin^2 \beta_1 (\operatorname{ctg} \beta_1 - \operatorname{ctg} \beta_2)}{\zeta}.$$

При некотором значении угла атаки $i = i_2$ величина качества данной решетки достигает максимума. Такой режим обтекания

[1]) С. И. Гинзбург, Элементы газовой динамики осевых компрессоров и турбин, гл. IX в первом издании настоящей книги. Гостехиздат, М.—Л., 1951.

решетки называется оптимальным. В общем случае режим минимума потерь и оптимальный режим не совпадают между собой.

Наблюдаемое на рис. 10.48 увеличение оптимального угла атаки i_2 по сравнению с углом атаки i_1 минимальных потерь связано с достаточно пологим характером зависимости $\zeta(i)$. Вследствие этого увеличение угла атаки, приводящее к росту Δw_u, а следовательно, и увеличение окружного усилия R_u слабо скажется на увеличении потерь, а значит, и на добавочной осевой силе F_a. В результате числитель выражения для ν будет до некоторого угла атаки расти быстрее, чем знаменатель, и соответственно точка максимального значения качества решетки переместится в сторону больших величин углов атаки.

При увеличении кривизны профиля зависимость коэффициента потерь от угла атаки становится более крутой и в результате происходит сближение обеих экстремальных точек. Начиная с угла изгиба профиля $\varepsilon = 60°$, угол атаки, соответствующий минимуму потерь, практически совпадает с оптимальным углом атаки.

При малых бессрывных углах атаки потери в решетке возникают в основном на выпуклой, наиболее диффузорной поверхности профиля, где имеется относительно более толстый пограничный слой. В соответствии с этим одним из наиболее эффективных параметров, характеризующих потери при указанных режимах обтекания, является *коэффициент диффузорности*

$$D_e = \frac{w_{\max \text{ вып}} - w_2}{w_1},$$

который оценивает степень торможения потока от максимальной скорости $w_{\max \text{ вып}}$ на выпуклой стенке профиля до скорости потока w_2 на выходе из решетки.

В ряде случаев диффузорность решеток характеризуется также коэффициентом D, называемым *общим коэффициентом диффузорности*[1]):

$$D = \left(1 - \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2}\right) + \frac{\sin \beta_1}{2b/t} (\operatorname{ctg} \beta_1 - \operatorname{ctg} \beta_2).$$

На рис. 10.49 приведена экспериментальная зависимость относительной толщины потери импульса в следе за решеткой (величина, пропорциональная потерям полного давления) от коэффициента диффузорности, определенного по распределению давления на верхней поверхности профиля. Эти данные получены на основании результатов экспериментального иссследования

---

[1]) Lieblein S., Schwenk F. I. and Broderick R. L., Diffusion Factor for Estimating Losses and Limiting Blade Loadings in Axial-Flowcompressor Blade Elements, NACA RM 53D01, 1953.

решеток, составленных из профилей NACA в широком диапазоне изменения густоты, угла изгиба и угла входа [1]). Видно, что имеется универсальная зависимость между относительной толщиной потери импульса и коэффициентом диффузорности. С увеличением коэффициента диффузорности наблюдается рост потерь — вначале очень медленный, а затем более интенсивный. При высоких значениях коэффициента диффузорности (более чем 0,5) отрыв пограничного слоя на выпуклой поверхности обусловливает быстрое увеличение относительной толщины потери импульса. При нулевом значении коэффициента диффузорности толщина потери импульса не равна нулю. Это связано с наличием потерь на трение, а также в меньшей степени с влиянием конечной толщины задней кромки.

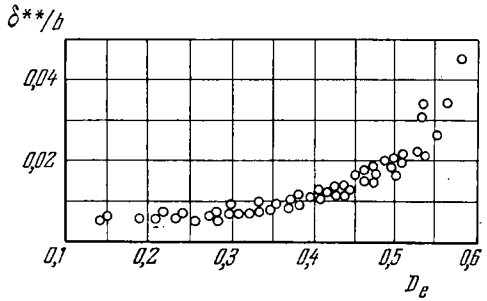


Рис. 10.49. Зависимость относительной толщины потери импульса в следе за профилем в решетке при оптимальном угле атаки от коэффициента диффузорности D_e (вычисленного по распределению давлений по профилю).

Результаты экспериментов, проведенных с решетками, составленными из различного рода профилей, указывают также на наличие универсальной зависимости между потерями при оптимальном угле атаки и величиной общего коэффициента диффузорности D.

Специфическое влияние вязкости при обтекании решеток пластин со срывом струй с острых передних кромок сказывается, во-первых в том, что у этих кромок образуется вихрь, который их как бы округляет. В результате вязкий поток обтекает уже не острую переднюю кромку профиля, а этот вихрь; однако при малых углах атаки течение на выходе мало отличается от безотрывного (рис. 10.50). Во-вторых, влияние вязкости сказывается в том, что, когда при достаточно больших углах атаки возникает срывное течение, оно вследствие турбулентного перемешивания будет постепенно размываться, и при достаточно большой протяженности межлопаточного канала, т. е. при достаточно густой решетке, область срыва замыкается и на выходе из решетки поток будет равномерно заполнять все сечение канала.

---

[1]) Herrig L. Y., Emery J. C. and Erwin J. R., Sistematic Two-Dimensional Cascade Tests of NACA 65 — Series Compresor Blades at Low Speeds, NACA RML 51031, 1951.

При наличии равномерного течения на срезе решетки силовое воздействие потока несжимаемой жидкости на нее может быть определено с помощью формул (26) и (27), в которых применительно к густой решетке пластин следует положить

$$\beta_2 = \vartheta; \quad \beta_1 = \vartheta - i.$$

Соответственно получаем следующее выражение для коэффициента касательной составляющей равнодействующей:

$$c_\tau \frac{b}{t} = \frac{R_\tau}{\rho \frac{w_1^2}{2} t} = \frac{b}{t} c_u \cos\vartheta + \frac{b}{t} c_a \sin\vartheta =$$

$$= 2\sin(\vartheta - i)\sin i \operatorname{ctg}\vartheta - \left(1 - \frac{\sin^2(\vartheta - i)}{\sin^2\vartheta} - \xi\right)\sin\vartheta. \qquad (97)$$

Пренебрегая силами трения жидкости о пластину, которые при не очень малых углах атаки вносят незначительный вклад

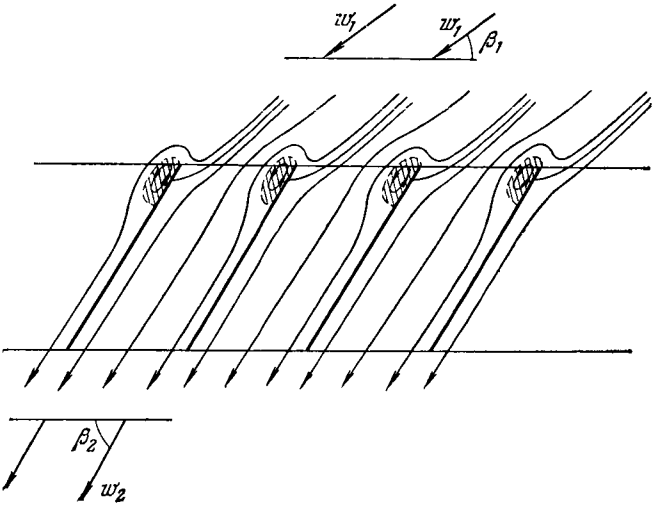


Рис. 10.50. Схема обтекания густой решетки пластин вязким потоком с образованием вихря у острых передних кромок.

в общий эффект силового воздействия потока, т. е. полагая в (97) $c_\tau = 0$, находим, что коэффициент суммарных потерь ξ, включающий в себя потери и на вихреобразование и на выравнивание, определяется следующей простой формулой:

$$\xi = \frac{\sin^2 i}{\sin^2\vartheta}. \qquad (98)$$

Если пренебречь процессом вихреобразования у острой передней кромки, то схематически течение в межлопаточном

канале может быть разбито на два последовательных участка (рис. 10.51).

В первом входном участке течение считается потенциальным и происходит со срывом струй с передней кромки, подобно тому, как это уже описывалось выше (рис. 10.45). Соответственно ширина струи h в конце первого участка (рис. 10.51) определяется согласно выражению (94). В дальнейшем струя размывается вследствие турбулентного перемешивания. В результате в выходном сечении межлопаточного канала, т. е. на срезе решетки, имеется полностью однородный поток, направленный по пластине (рис. 10.51). Возникающие при этом потери могут быть определены по формуле Борда (см. § 5 гл. I) как потери на удар при внезапном расширении струи от ширины $f_1 = h \sin \vartheta$ до $f_2 = t \sin \vartheta$. Легко показать, что если при вычислении коэффициента этих потерь относить их к скоростному напору потока, набегающего на решетку, т. е. к величине $\rho w_1^2/2$, то получим формулу, в точности совпадающую с выражением (92). Из этого выражения следует, что чем меньше угол установки ϑ, тем при фиксированном угле атаки потери больше. Этот вывод полностью согласуется с тем, что, согласно (94) и рис. 10.46, относительная ширина оторвавшейся от передней кромки струи уменьшается с уменьшением угла установки и, следовательно, в соответствии с формулой Борда должны возрастать потери на выравнивание потока в межлопаточных каналах решетки.

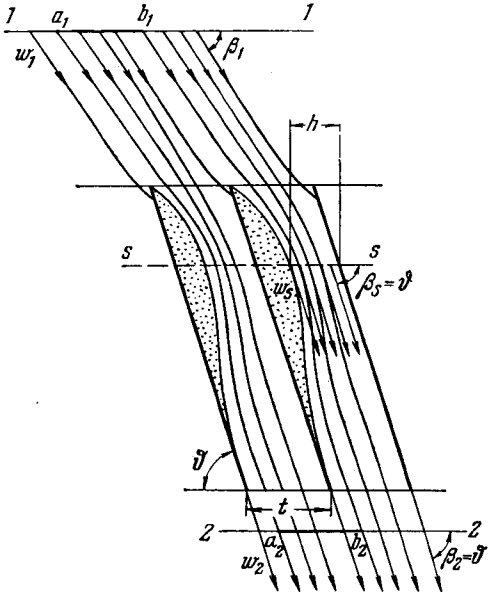


Рис. 10.51. Схема обтекания густой решетки пластин со срывом струй с передних кромок и полным выравниванием потока в межлопаточных каналах.

Используя формулу (92) для коэффициента потерь, находим, согласно (26) и (27), следующее выражение для нормальной составляющей равнодействующей:

$$c_n \frac{b}{t} = 2 [1 + \operatorname{ctg}^2 \vartheta] \sin (\vartheta - i) \sin i. \qquad (99)$$

Из сравнения зависимостей $c_n \frac{b}{t}(i)$, построенных для трех режимов обтекания одной и той же густой решетки пластин (рис. 10.47), видно, что выравнивание потока в межлопаточных каналах в результате турбулентного перемешивания в значительной степени компенсировало резкое падение величины нормальной силы, приложенной к пластине в решетке в случае срывного обтекания потенциальным потоком, по сравнению с непрерывным обтеканием идеальной жидкостью. В линейной области зависимостей $c_n \frac{b}{t}(i)$ имеется полное совпадение между силовым воздействием идеального и вязкого потоков несжимаемой жидкости. Это является следствием одинакового значения производной $\left(\frac{\partial c_n}{\partial i}\right)_{i=0}$ для этих двух режимов, в чем легко убедиться непосредственным дифференцированием выражений (96) и (99).

При этом нужно иметь в виду, что совпадение нормальных сил еще не означает совпадения величин равнодействующей, поскольку, как уже указывалось выше, при непрерывном обтекании решеток идеальной жидкостью имеется еще и тянущая сила, направленная вдоль пластины.

§ 10. Обтекание решетки профилей дозвуковым потоком газа

Дозвуковое обтекание решетки, составленной из дозвуковых профилей, как и рассмотренное выше дозвуковое обтекание единичного профиля, подразделяется на два вида — докритическое и закритическое.

Величина критического значения числа Маха набегающего на решетку потока газа $M_{кр}$, при котором где-то на профиле возникает скорость, равная местной скорости звука, может быть приближенно определена по распределению давления на профиле в данной решетке при обтекании ее потоком несжимаемой жидкости, или согласно упомянутой уже ранее гипотезе «затвердевания», в соответствии с которой

$$q(M_{1кр}) = \frac{1}{\sqrt{1 - \bar{p}_{min\ несж}}},$$

где, так же как и для единичного профиля,

$$\bar{p}_{min\ несж} = \frac{p_{min} - p_1}{\rho \frac{w_1^2}{2}},$$

или более точной зависимости $M_{1кр}(\bar{p}_{min\ несж})$, полученной С. А. Христиановичем для единичного профиля и представленной на рис. 10.17. В последнем случае в качестве коэффициента

давления в точке максимального разрежения на профиле следует брать

$$(\bar{p}_m)_{\min \text{ несж}} = \frac{p - p_m}{\rho \frac{w_m^2}{2}},$$

где

$$p_m = p_1 + \rho \frac{w_1^2}{2} - \rho \frac{w_m^2}{2}.$$

Следует заметить, что применение гипотезы «затвердевания» в решетке профилей, особенно в густой решетке, более обоснованно, чем в случае единичного профиля. В предельном случае решетки тонких дужек бесконечно большой густоты эта гипотеза точно согласуется с картиной течения газа.

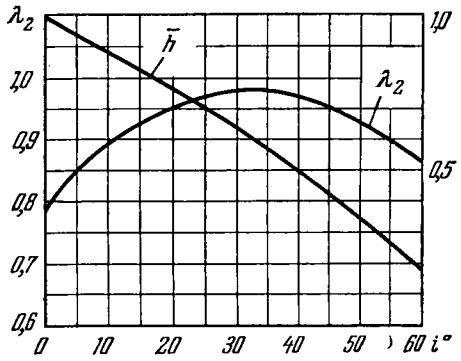


Рис. 10.52. Зависимость λ_2 и $\bar{h}$ от i^0 при $M_1 = 0{,}75$ для густой решетки пластин с $\vartheta = 70°$.

Определим в качестве примера критическое число Маха из непосредственного рассмотрения обтекания густой решетки пластин изоэнтропическим потоком газа со срывом струй с передних кромок [1]).

Используя выражение (19) для перепада давлений в изоэнтропическом потоке ($\sigma = 1{,}0$), преобразуем уравнение импульсов (90) к следующему виду:

$$\lambda_2 = \frac{k+1}{k} \frac{\tau(\lambda_1)}{\lambda_1} \left[1 - \frac{\pi(\lambda_2)}{\pi(\lambda_1)}\right] \frac{\sin \vartheta}{2 \sin(\vartheta - i)} + \lambda_1 \cos i. \qquad (100)$$

Зависимости λ_2 и

$$\bar{h} = \frac{q(\lambda_1) \sin(\vartheta - i)}{q(\lambda_2)}$$

от угла атаки при значениях $M_1 = 0{,}75$ и $\vartheta = 70°$ приведены на рис. 10.52. Так же как и в потоке несжимаемой жидкости (рис. 10.46), приведенная скорость струи на выходе из решетки λ_2 с ростом угла атаки сначала увеличивается, а затем при очень больших углах атаки и соответственно малых расходах,

---

[1]) Гинзбург С. И., Суммарное силовое воздействие потока газа на решетку пластин. В сб. «Прочность и динамика авиационных двигателей», вып. 3, «Машиностроение», М., 1966.

уменьшается, несмотря на продолжающееся монотонное уменьшение относительной ширины струи $\bar{h}$.

С помощью уравнения (100) можно определить значение $\lambda_1 = \lambda_{1кр}$ при $\lambda_2 = 1$. Имеем

$$1 = \frac{k+1}{k}\frac{\tau(\lambda_{1кр})}{\lambda_{1кр}}\left[1 - \frac{\pi(1)}{\pi(\lambda_{1кр})}\right]\frac{\sin\vartheta}{2\sin(\vartheta - i)} + \lambda_{1кр}\cos i.$$

Результаты расчета (рис. 10.53) показывают, что в соответствии с приведенной на рис. 10.52 кривой $\lambda_2(i)$ вначале с ростом углов атаки число $M_{1кр}$ уменьшается, а затем, начиная с достаточно большого угла атаки, характер зависимости $M_{1кр}(i)$ меняется на обратный.

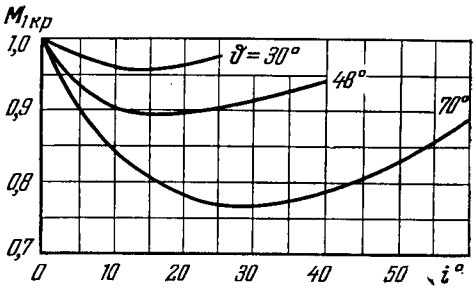


Рис. 10.53. Зависимость $M_{1\,кр}$ от угла атаки для густой решетки пластин, обтекаемых изоэнтропическим потоком газа со срывом струй с передних кромок.

В общем случае решение задачи об обтекании заданной решетки профилей изоэнтропическим потоком газа представляет собой значительные трудности [1]). Один из простых приближенных способов оценки влияния сжимаемости при докритических течениях основан на предположении, что при фиксированном угле β_1 направление потока за решеткой не должно зависеть от числа $M_1 < M_{1кр}$ [2]). Иначе говоря, зависимость $\beta_2(\beta_1)$ остается такой же, как и при обтекании данной решетки потоком несжимаемой жидкости. Такое предположение не налагает никаких ограничений на возможную трансформацию линий тока в непосредственной близости у профиля и соответственно не позволяет оценить возможное влияние сжимаемости на эпюру распределения давления по профилю; однако это предположение о неизменности угла позволяет определить влияние сжимаемости на интегральные характеристики, а именно на величину и направление равнодействующей сил давления, приложенных к профилю в решетке.

Заметим, что допущение о неизменности величины β_2 при изменении числа Маха набегающего потока, очевидное для густых решеток, практически выполняется, как показывают точные

[1]) Седов Л. И., Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, Гостехиздат, 1950.

[2]) См. ссылку на стр. 629.

расчеты и результаты эксперимента при докритических числах M_1 [1]) (рис. 10.54), и для не очень густых решеток.

При неизменном направлении потока за решеткой влияние сжимаемости на величину окружного усилия связано с изменением осевой скорости.

При фиксированном значении окружной составляющей скорости перед решеткой под влиянием сжимаемости изменяется величина закрутки потока $\Delta w_u = w_2 \cos \beta_2 - w_1 \cos \beta_1$, пропорциональная, согласно (4), окружному усилию R_u. Сказанное может быть наглядно продемонстрировано с помощью кривых (рис. 10.55).

$$q(\lambda) \sin \beta = \text{const},$$

выражающих условие неразрывности в случае изоэнтропического течения ($\sigma = 1$) при фиксированных параметрах перед решеткой, т. е. при $M_1 = \text{const}$ и $\beta_1 = \text{const}$. Каждая кривая представляет собой кривую годографа скорости потока за решеткой. При $\beta_1 < \beta_2 < \pi/2$ (рис. 10.55, *а*) влияние сжимаемости приводит к увеличению значения Δw_u и, следовательно, к возрастанию абсолютной величины окружного усилия. При $\beta_2 = \pi/2$ величина R_u остается неизменной, так как в этом случае она определяется только параметрами потока перед решеткой. При дальнейшем увеличении $\beta_2 < \pi - \beta_1$ (рис. 10.55, *б*) влияние сжимаемости приводит к уменьшению R_u. В случае активной решетки ($\beta_1 = \pi - \beta_2$) скорости перед решеткой и за ней равны и, следовательно, сжимаемость не оказывает никакого влияния на величину окружного усилия.

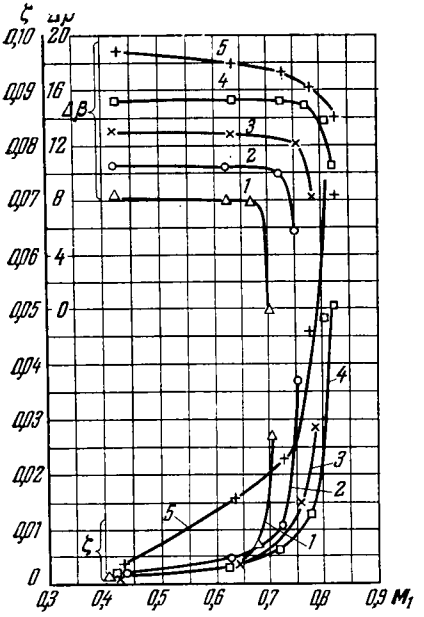


Рис. 10.54. Зависимость коэффициента потерь ζ и угла поворота потока $\Delta\beta$ от числа M_1 при различных углах атаки для диффузорной решетки ($\varepsilon = 15°$, $b/t = 1{,}3$, $\vartheta = 62{,}6°$): *1* — $i = -2{,}5°$; *2* — $i = 0°$; *3* — $i = +2{,}5°$; *4* — $i = i = +5°$; *5* — $i = +10°$.

[1]) Бунимович А. П., Святогоров А. А., Аэродинамические характеристики плоских компрессорных решеток при большой дозвуковой скорости. В сб. «Лопаточные машины и струйные аппараты», вып. 2, «Машиностроение», 1967.

При $\beta_2 > \pi - \beta_1$ (рис. 10.55, *в*) влияние сжимаемости опять приводит к увеличению окружного усилия.

При фиксированных значениях β_1 и β_2 уравнение неразрывности (24) и выражение для коэффициента окружной составляющей равнодействующей (22) позволяют получить для изоэнтропического потока зависимость $c_u(\lambda_1)$. Результаты такого рода

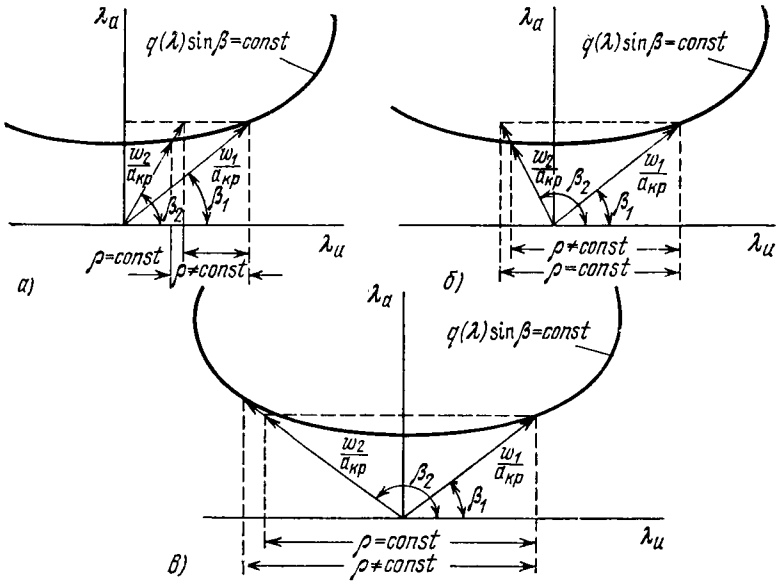


Рис. 10.55. Влияние сжимаемости на величину Δw_u при постоянном $\beta_1 < \pi/2$ в зависимости от β_2: *а*) $\beta_1 < \beta_2 < \pi/2$; *б*) $\beta_2 < \pi - \beta_1$; *в*) $\beta_2 > \pi - \beta_1$.

расчетов величины коэффициентов окружного усилия в диффузорной решетке, отнесенных к соответствующим значениям коэффициента c_u в потоке несжимаемой жидкости, приведены на рис. 10.56, подтверждают высказанные выше общие соображения и указывают на довольно существенное относительное изменение окружной составляющей равнодействующей с изменением числа M_1, особенно в решетке с малым поворотом потока.

Более сложен анализ влияния сжимаемости на величину осевой силы R_a, которая состоит, согласно (5), из двух составляющих: R_{ap} и R_{aw}. Первая составляющая

$$R_{ap} = t(p_1 - p_2) = -t\,\Delta p$$

определяется перепадом статического давления, а вторая составляющая

$$R_{aw} = G(w_{1a} - w_{2a}) = -G\,\Delta w_a$$

— изменением количества движения в осевом направлении.

Влияние сжимаемости газа на эти составляющие осевой силы противоположно.

В диффузорной решетке наличие сжимаемости приводит к увеличению перепада статических давлений и, следовательно, к увеличению составляющей R_{ap} по ее абсолютному значению. В то же время уменьшение осевой скорости за решеткой уменьшает абсолютную величину другой составляющей R_{aw}.

По-разному влияет сжимаемость на составляющие осевого усилия R_{ap} и R_{aw} и в конфузорной решетке.

На рис. 10.57 представлены зависимости коэффициентов составляющих осевого усилия, которые, согласно (20) и (21), в рассматриваемом случае изоэнтропического потока, могут быть записаны следующим образом:

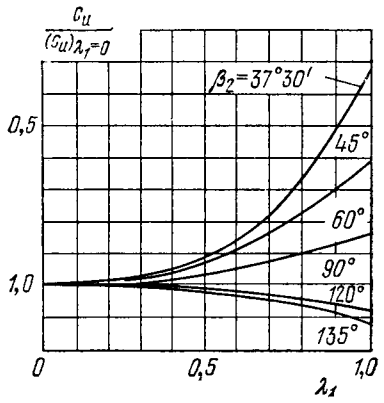


Рис. 10.56. Зависимость коэффициента c_u от λ_1 для диффузорной решетки, отнесенного к его величине в несжимаемой жидкости, при постоянном значении $\beta_1 = 30°$ и различных β_2.

$$c_{ap} = -\frac{t\,\Delta p}{\rho_1 \frac{w_1^2}{2} b} =$$

$$= \frac{t}{b}\frac{k+1}{k}\frac{\tau(\lambda_1)}{\lambda_1^2}\left[\frac{\Pi(\lambda_2)}{\Pi(\lambda_1)} - 1\right] =$$

$$= \frac{t}{b}\frac{2}{k\mathbf{M}_1^2}\left[\frac{\Pi(\mathbf{M}_2)}{\Pi(\mathbf{M}_1)} - 1\right],$$

$$c_{aw} = -\frac{G\,\Delta w_a}{\rho_1 \frac{w_1^2}{2} b} =$$

$$= -2\frac{t}{b}\left[\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\sin\beta_1 - \sin\beta_1\right]\sin\beta_1.$$

Видно, что приращение составляющей осевого усилия R_{ap} — другого знака и по абсолютной величине заметно превосходит соответствующее приращение другой составляющей R_{aw}.

В результате увеличение числа Маха $\mathbf{M}_1$ набегающего на решетку потока приводит к монотонному увеличению осевого усилия (рис. 10.58). При этом эффект сжимаемости при углах выхода β_2 и $\pi - \beta_2$ оказывается одинаковым.

Последнее связано с тем, что, согласно (24) и (25), осевое усилие в изоэнтропическом потоке газа при фиксированном числе $\mathbf{M}_1$ определяется только соотношением между площадями входного сечения струи $F_1 = t \sin\beta_1$ и выходного ее сечения $F_2 = t \sin\beta_2$.

Различное влияние числа $\mathbf{M}_1$ на окружную и осевую составляющую равнодействующей приводит к изменению направления равнодействующей по мере роста скорости набегающего на дан-

ную решетку потока (рис. 10.59). В зависимости от угла поворота потока в решетке наличие сжимаемости может привести или к увеличению, или к уменьшению величины равнодействующей по сравнению с ее значением в потоке несжимаемой жидкости. Так, в диффузорной решетке с $\beta_2 < \pi/2$ величина равнодействующей должна возрастать с увеличением числа M_1 (рис. 10.58). Результаты эксперимента, проведенного А. И. Бунимовичем и

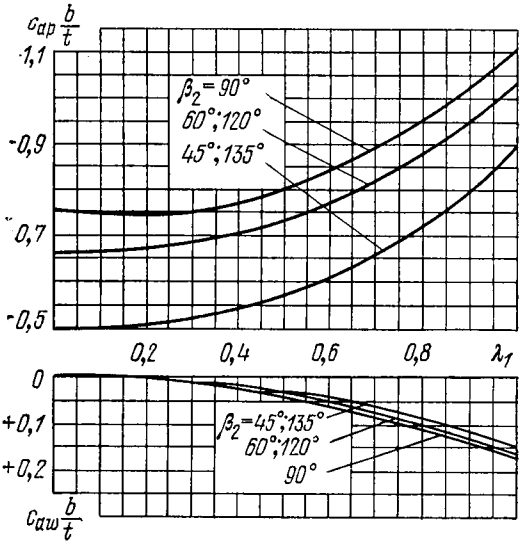


Рис. 10.57. Зависимость коэффициентов составляющих осевого усилия c_{ap} и c_{aw} от λ_1 для решеток с различными углами β_2 при постоянном значении $\beta_1 = 30°$.

Г. С. Орловой по непосредственным измерениям статического давления в среднем сечении лопатки плоской решетки, целиком подтверждают этот вывод.

При обтекании решетки потоком несжимаемой жидкости при больших как положительных, так и отрицательных углах атаки на поверхности профиля возникают значительные местные разрежения $p_{\min\,несж}$, что должно приводить к малым критическим значениям числа Маха при обтекании данной решетки потоком сжимаемого газа. Именно такой характер присущ экспериментальной зависимости $M_{1кр}(i)$ для типичной диффузорной решетки, приведенной на рис. 10.60. Видно, что максимальное значение критического числа Маха равно 0,7 при нулевом угле атаки. При $i = 10°$ оно уменьшается до 0,4, а при $i = 10°$ оно составляет близкую величину — 0,44.

При $M_1 > M_{1кр}$ в межлопаточных каналах решетки образуется сверхзвуковая зона, увеличивающаяся по мере роста числа M_1 и завершаемая гораздо более сложной системой скачков, чем у единичного профиля, вследствие отражения их от соседних поверхностей (рис. 10.61). Соответственно наблюдается, как показывает эксперимент, быстрое увеличение коэффициента потерь с ростом числа $M_1 > M_{1кр}$ (рис. 10.54). Сопоставляя последнее обстоятельство с описанной уже выше экспериментальной зависимостью критического числа Маха от угла атаки, приходим к заключению, что чем больше число Маха набегающего потока, тем круче должна быть зависимость коэффициента потерь от абсолютного значения угла атаки. Этот вывод подтверждается результатами соответствующих экспериментальных исследований, представленных на рис. 10.62.

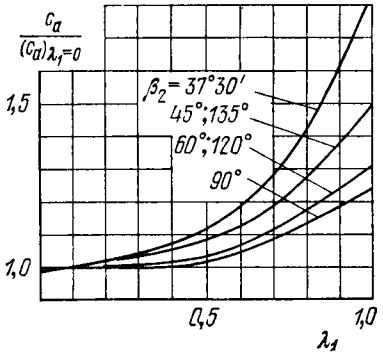


Рис. 10.58. Зависимость от λ_1 коэффициента осевого усилия для диффузорной решетки, отнесенного к его величине в несжимаемой жидкости, при постоянном значении $\beta_1 = 30°$ и различных β_2.

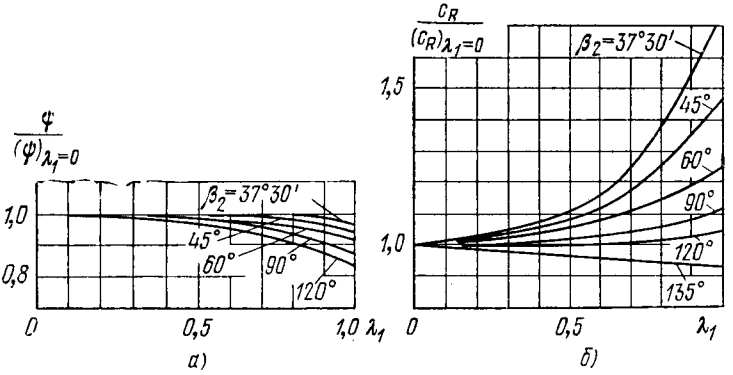


Рис. 10.59. Влияние сжимаемости на направление (*а*) и величину (*б*) равнодействующей, приложенной к профилю густой диффузорной решетки при постоянном значении $\beta_1 = 30°$ и различных углах β_2. φ — угол между равнодействующей силой и осью решетки, c_R — коэффициент равнодействующей силы.

В отличие от единичного профиля, для которого скорость набегающего потока может быть сколь угодно большой, обтекание решеток дозвуковым потоком ограничено некоторым

максимальным числом Маха $\mathbf{M}_{1кр} \leqslant \mathbf{M}_{1\,max} < 1{,}0$, при котором возникает так называемое «запирание» решетки.

Определим число Маха набегающего потока $\mathbf{M}_{1max}$, при котором происходит запирание данной решетки, в предположении, что в узком сечении межлопаточного канала — горле — поток однороден и его направление не зависит от угла атаки. В этом случае, согласно уравнению неразрывности, имеем

$$q(\lambda_1) t \sin\beta_1 = \sigma_{вх} q(\lambda_г) F_г.$$

Здесь $\sigma_{вх}$ — коэффициент сохранения полного давления, определяющей потери во входном участке до критического сечения, ширина которого $F_г$, а приведенная скорость потока $\lambda_г$. Полагая $\lambda_г = 1$ из уравнения неразрывности, получаем следующее выражение для определения максимальной приведенной скорости потока перед решеткой:

$$q(\lambda_{1\,max}) = \sigma_{вх} \frac{F_г}{t} \frac{1}{\sin\beta_1} = \sigma_{вх} \frac{F_г}{F_1}.$$

Для изоэнтропического потока ($\sigma_{вх} = 1{,}0$) имеем

$$q(\lambda_{1\,max}) = \frac{F_г}{F_1}.$$

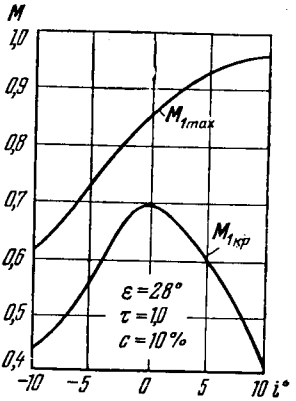


Рис. 10.60. Экспериментальные зависимости $\mathbf{M}_{1\,кр}$ и $\mathbf{M}_{1\,max}$ от угла атаки i для типичной диффузорной решетки дозвуковых профилей.

На рис. 10.63 приведена экспериментальная зависимость $\mathbf{M}_{1max}$ от $F_г/F_1$, построенная по данным испытания решеток при различных углах атаки[1]). Там же нанесена подобная зависимость для изоэнтропического течения, построенная в предположении постоянства по ширине канала всех параметров потока в его узком сечении. Разница между этими двумя зависимостями и выражает собой влияние всех неучитываемых факторов. Под влиянием потерь и неоднородности потока в горле запирание решетки наблюдается и в том случае, когда ширина сечения потока, поступающего в данный межлопаточный канал, на 30% превосходит ширину его самого узкого сечения.

При запирании решетки число Маха уже не определяет однозначно величину потерь — характеристика решетки становится вертикальной ($d\xi/d\mathbf{M}_1 \to \infty$); уменьшается также угол поворота в решетке (рис. 10.54). Для этого режима течения определяющим параметром становится отношение статического давления за решеткой к его величине перед ней p_2/p_1.

[1]) Хауэлл А. Р., Гидродинамика осевого компрессора. В сб. «Развитие газовых турбин», под ред. В. Л. Александрова, БНТ, МАП, 1947.

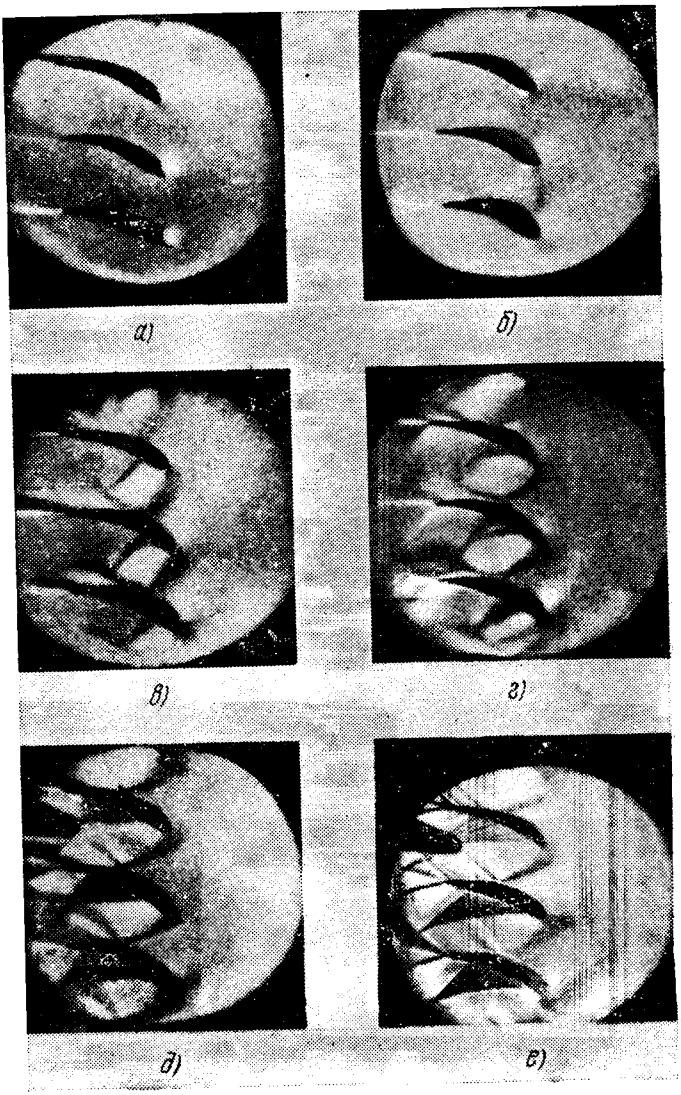


Рис. 10.61. Последовательные снимки спектров обтекания диффузорной решетки при значениях числа M_1 набегающего потока от 0,6 до 0,7.

По мере уменьшения противодавления увеличивается разгон сверхзвукового потока, а следовательно, и интенсивность его торможения, результатом чего является рост потерь. Обратное явление наблюдается при увеличении противодавления.

Мы рассматривали результаты экспериментального исследования диффузорных решеток, имеющих применение главным образом в осевых компрессорах.

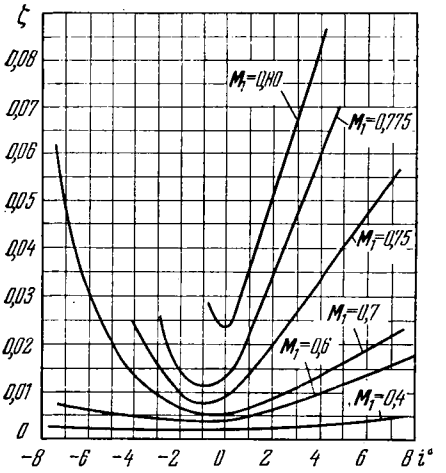


Рис. 10.62. Зависимость коэффициента потерь ζ от угла атаки при различных значениях числа M_1 для диффузорной решетки ($\varepsilon = 27{,}6°$, $b/t = 1{,}3$, $\vartheta = 62{,}6°$).

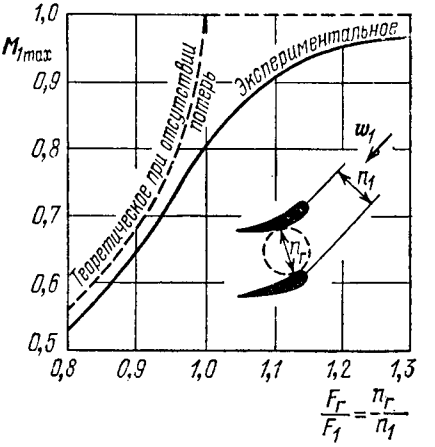


Рис. 10.63. Зависимость максимального значения числа Маха набегающего на решетку потока газа от степени сужения струи в решетке $F_г/F_1$.

Как показывают эксперименты, конфузорный характер течения в решетках осевых турбин позволяет при правильном выборе параметров решетки и профиля обеспечить в некотором диапазоне углов атаки безотрывное обтекание и в результате получить плавное ускорение потока вплоть до скорости звука на выходе из решетки.

§ 11. Обтекание решетки профилей потоком газа со сверхзвуковой осевой составляющей скорости

При анализе сверхзвукового обтекания решеток профилей различают случаи, когда осевая составляющая скорости набегающего потока $w_{1a} = w_1 \sin \beta_1$ больше и меньше скорости звука.

При положительных углах атаки ($i > 0$) [1]) косые скачки, отходящие «вниз» от передних кромок сверхзвуковых профилей, всегда [2]), независимо от величины осевой составляющей скорости набегающего потока, располагаются за фронтом решетки (рис. 10.64). «Вверх» от профиля отходят волны Маха. При дозвуковой осевой составляющей, т. е. при $M_{1a} = M_1 \sin\beta_1 < 1$ волны Маха распространяются в пространстве перед решеткой

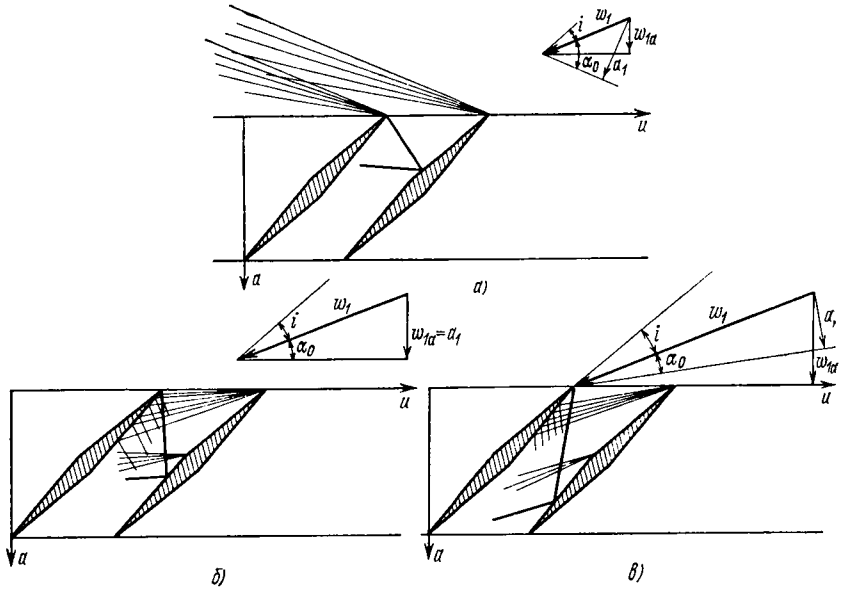


Рис. 10.64. К обтеканию решеток сверхзвуковых профилей сверхзвуковым потоком при положительных углах атаки. *а*) $M_{1a} < 1$; *б*) $M_{1a} = 1$; *в*) $M_1 > 1{,}0$.

(рис. 10.64, *а*). Их интерференция, как это будет показано ниже, приводит к образованию сильных возмущений — бесконечной системы отсоединенных ударных волн. Если же осевая составляющая набегающего сверхзвукового потока равна скорости звука или его превосходит, т. е. если $M_{1a} \geqslant 1{,}0$, то весь пучок характеристик, исходящих от передней кромки, направлен внутрь решетки (рис. 10.64, *б*), и в этом случае во всем течении перед

[1]) Имеется в виду угол между направлением скорости набегающего потока и касательной к верхней поверхности профиля в передней кромке.

[2]) Здесь и далее исключаются такие сочетания чисел M_1 и углов атаки i, при которых в соответствии с кривыми, приведенными на рис. 3.12 гл. III, невозможно образование косого скачка уплотнения у острой передней кромки профиля.

решеткой отсутствует интерференция между ней и набегающим потоком.

При небольших отрицательных углах атаки, когда $|i| < \nu$, от передней кромки сверхзвукового профиля отходят два косых

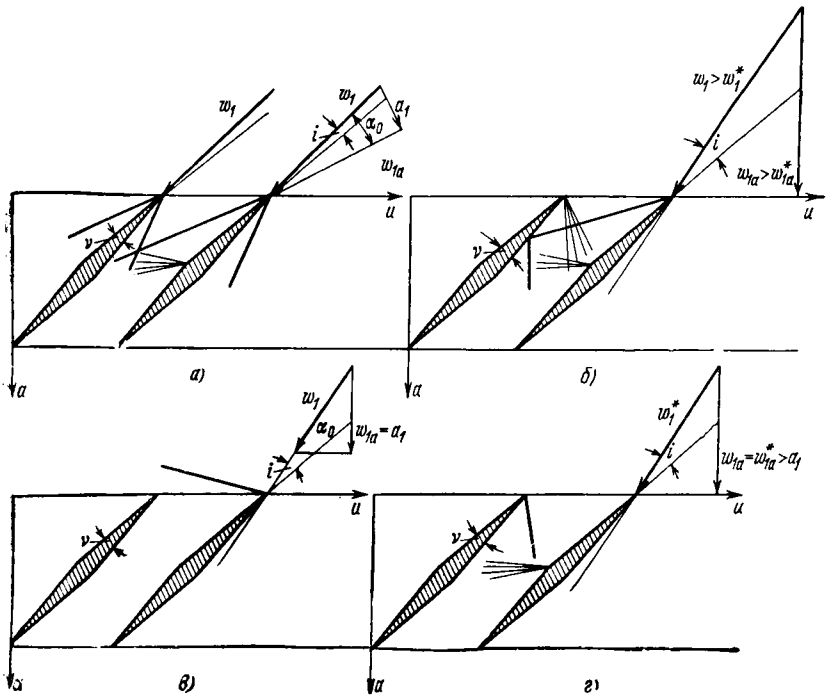


Рис. 10.65. К обтеканию решеток сверхзвуковых профилей при отрицательных углах атаки потоком со сверхзвуковой осевой составляющей скорости. *а*) $M_1 > 1$, $|i| < \nu$; *б*) $M_{1a} > M_{1a}^* > 1$, $|i| > \nu$; *в*) $M_{1a} = 1$, $|i| > \nu$; *г*) $M_{1a} = M_{1a}^* > 1$, $|i| > \nu$.

скачка (рис. 10.65, *а*), один из которых располагается над профилем (верхний скачок), а другой под ним (нижний скачок). При больших по абсолютной величине отрицательных углах атаки ($|i| > \nu$) возникает только один — верхний скачок. Вместо другого скачка за фронтом решетки образуется течение разрежения Прандтля — Майера (рис. 10.65, *б*). Так как волны Маха этого течения и нижний скачок всегда, независимо от величины осевой скорости, направлены внутрь межлопаточного канала, то поэтому возможность распространения возмущений в потоке перед решеткой определяется только расположением

верхних скачков. Эти скачки при дозвуковой осевой составляющей скорости, т. е. при $M_{1a} < 1{,}0$, располагаются перед фронтом решетки, возмущая, таким образом, набегающий однородный поток. Возмущения имеют место и при $M_{1a} = 1$, так как косые скачки, будучи всегда направлены круче соответствующих характеристик, и в этом случае проникают в области перед решеткой (рис. 10.65, *в*). По мере дальнейшего увеличения осевой составляющей скорости (при фиксированном направлении набегающего потока) косые скачки приближаются к решетке и при некотором значении [1]) $M_{1a} = M^*_{1a} > 1{,}0$ сливаются в один общий косой скачок, располагающийся вдоль передних кромок профилей [2]) (рис. 10.65, *г*). Начиная с этого момента, влияние решетки на течение перед ней при отрицательных углах атаки исчезает.

При отсутствии интерференции между решеткой и набегающим сверхзвуковым потоком достаточно рассматривать течение только в межлопаточных каналах и в непосредственной близости за срезом решетки.

Течение во входной части межлопаточного канала определяется взаимодействием или между косым скачком и пучком характеристик или между двумя косыми скачками (рис. 10.64 и 10.65).

Участки профиля, прилегающие к его передней кромке и находящиеся до точки пересечения двух скачков или скачка и пучка характеристик набегающего потока, расположены вне зоны возмущений от соседних профилей, и поэтому давление здесь такое же, как и на изолированном профиле. Распределение давления на остальной части профиля определяется взаимодействием косых скачков и волн Маха и их последовательным отражением от поверхности двух соседних профилей. Применение известного графоаналитического способа [3]) позволяет в общем случае больших возмущений построить распределение давлений по профилю и найти путем интегрирования величину и направление равнодействующей силы.

Задача существенно упрощается при наличии малых возмущений, например при обтекании решеток слабо изогнутых профилей под малыми углами атаки. В этом случае удается пока-

---

[1]) Условия, при которых вдоль фронта решетки образуется косой скачок, подробно рассмотрены в гл. X предыдущего издания этой книги.

[2]) При этом у передней кромки возникает еще один дополнительный косой скачок, направленный внутрь межлопаточного канала. Интенсивность этого скачка убывает по мере уменьшения угла клина носика профиля ν, и он вообще исчезает при $\nu = 0$, т. е. в случае решетки бесконечно тонких пластин.

[3]) Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В., Теоретическая гидромеханика, т. II, Гостехиздат, М., 1948.

зать[1]), что интерференция пластин в решетке всегда приводит к уменьшению коэффициента подъемной силы по сравнению с изолированной пластиной. Аналогичный вывод может быть сделан и для коэффициента волнового сопротивления, так как

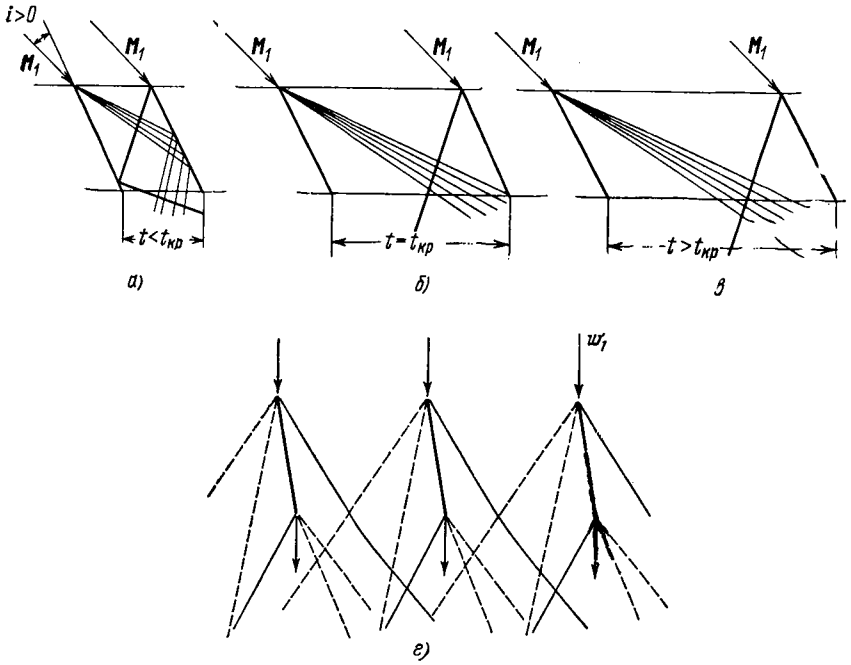


Рис. 10.66. К определению критической густоты решетки пластин при обтекании ее потоком со сверхзвуковой осевой составляющей скорости. *а*) Густая решетка $(b/t > (b/t)_{кр}$, $i > 0)$; *б*) решетка критической густоты $(b/t) = (b/t)_{кр}$, $i > 0$; *в*) редкая решетка $(b/t) < (b/t)_{кр}$, $i > 0$; *г*) интерференция между волнами в течении за срезом редкой решетки ($i = -10°$, $M_1 = 2{,}6$). Пунктирные линии — волны Маха, сплошные линии — скачки.

качество пластины, как уже указывалось выше (без учета поверхностных сил трения), определяется только углом атаки

$$K_{пл} = \frac{c_x}{c_y} = \operatorname{ctg} i.$$

По мере увеличения шага данной решетки t, т. е. по мере уменьшения ее густоты, интерференция между профилями

[1]) Келдыш В. В., Решетки профилей в сверхзвуковом потоке. В сборнике теоретических работ по аэродинамике, Оборонгиз, 1957. См. также гл. X в предыдущем издании этой книги.

ослабляется и, начиная с некоторого, достаточно малого (критического) значения густоты $(b/t)_{кр}$, она вообще исчезает и профили обтекаются как единичные (рис. 10.66).

При положительных углах атаки критическая густота решетки пластин определяется пересечением волны Маха, идущей от передней кромки с соседним профилем. Аналогично при отрицательных углах атаки критическая густота решетки пластин определяется точкой пересечения с соседним профилем фронта косого скачка.

Интерференция между волнами Маха и скачками уплотнения возникает в этом случае только за решеткой и приводит к существенной неравномерности потока по шагу за решеткой (рис. 10.66, *г*).

В дальнейшем течении вследствие турбулентного перемешивания происходит выравнивание потока и в некотором достаточно удаленном от решетки сечении *2 — 2* имеется полностью равномерный поток. Приведенная скорость этого потока λ_2 и ее направление, характеризуемое углом β_2, могут быть найдены по значениям коэффициентов подъемной силы и лобового сопротивления данного единичного профиля (см. § 8); коэффициенты осевой и окружной составляющей равнодействующей R (рис. 10.67) соответственно равны

$$c_a = c_x \sin\beta_1 - c_y \cos\beta_1,$$

$$c_u = c_x \cos\beta_1 + c_y \sin\beta_1.$$

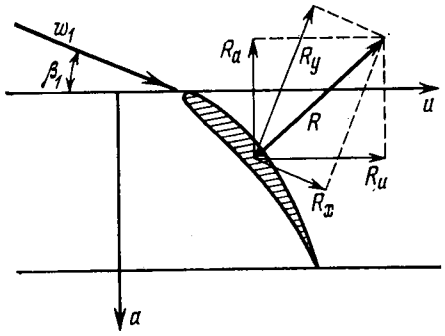


Рис. 10.67. К определению окружной и осевой составляющих равнодействующей силы.

После их подстановки в (22) и (25) получаем систему двух уравнений относительно двух искомых величин λ_2 и β_2 [1]). Знание этих величин позволяет, согласно уравнению неразрывности (24), найти величину σ, т. е. определить суммарные потери, включающие в себя как собственно потери, возникающие при обтекании данной достаточно редкой решетки сверхзвуковым потоком, так и потери, связанные с выравниванием потока газа в зарешеточном пространстве.

Отсутствие интерференции между решеткой и потоком со сверхзвуковой осевой составляющей скорости и главным обра-

[1]) В некоторых случаях может оказаться, что решения не существует. Это значит, что такие режимы обтекания решеток пластин докритической густоты неосуществимы при условии полного выравнивания потока за ними.

зом возможность «склеивания» сверхзвуковых течений по линиям слабых и сильных разрывов послужили основой для разработки различных способов решения обратной задачи — построения сверхзвуковой решетки, поворачивающей поток на заданный угол. Один из методов построения таких решеток, указанный

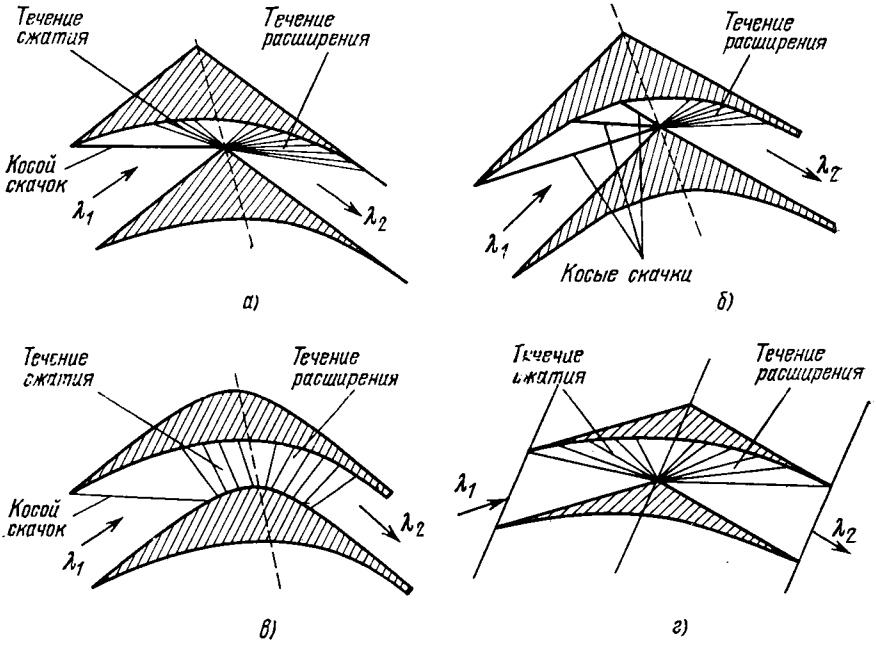


Рис. 10.68. К построению чисто сверхзвуковой решетки с диффузорными и конфузорными участками течения. *а*) Односкачковая решетка с частичным торможением потока косым скачком; *б*) трехскачковая решетка с конечной толщиной задней кромки; *в*) односкачковая решетка, составленная из профилей без угловой точки; *г*) решетка без волнового сопротивления (изоэнтропическая решетка).

С. И. Гинзбургом в 1950 г., основан на использовании в общем случае системы косых скачков на входе и последующих течений Прандтля — Майера [1]). Примеры такого типа решеток представлены на рис. 10.68.

В первом случае (рис. 10.68, *а*) сверхзвуковой поток, набегающий на решетку под нулевым углом атаки, частично тормозится в косом скачке с последующим торможением в течении

[1]) Гинзбург С. И., Элементы газовой динамики крылового профиля и прямолинейной решетки профилей. См. также гл. X в предыдущем издании настоящей книги, «Наука», М., 1969.

сжатия при обтекании вершины профиля. В дальнейшем течении расширения происходит разгон потока с одновременным его поворотом.

Во втором случае (рис. 10.68, *б*) все торможение осуществляется в системе из трех косых скачков и задняя кромка имеет конечную толщину. Характерной особенностью третьей решетки (рис. 10.68, *в*) является отсутствие угловой точки в средней части профиля. Здесь течение расширения происходит при обтекании плавной кривой, являющейся или дугой окружности или некоторой кривой, форма которой соответствует линии тока в обтекании тупого угла (см. стр. 158).

При отсутствии косого скачка на входе и использовании только изоэнтропических течений сжатия и расширения Прандтля — Майера получаем сверхзвуковую изоэнтропическую решетку без волнового сопротивления (рис. 10.68, *г*).

Известен и другой способ построения сверхзвуковых изоэнтропических решеток, предложенный в 1950 г. М. Ф. Жуковым и позже Осватичем [1]) и основанный на использовании потока от потенциального вихря (см. § 12)

$$\lambda = \frac{\text{const}}{r}$$

и соответствующих спрямляющих течений. Этот способ заключается в следующем. По известным величинам приведенных скоростей перед и за решеткой λ_1 и λ_2 находят в сверхзвуковой части потока потенциального вихря соответствующие точки A и B на радиусах *1—0* и *2—0*, образующих между собой угол, равный углу поворота потока решеткой $\Delta\beta$ (рис. 10.69, *а*). Через точки A и B проводятся волны Маха, ограничивающие используемую часть течения от потенциального вихря. Далее, слева от этих волн Маха, проходящих через точку A, с помощью характеристик строится течение, переводящее однородный поток с приведенной скоростью λ_1 в неоднородный с распределением скоростей по радиусу, отвечающим закону вихря (рис. 10.69, *б*).

Аналогично правее волн Маха, проходящих через точку B, строится спрямляющее течение, трансформирующее заданный неравномерный поток в равномерный с приведенной скоростью λ_2. Совмещая теперь прямолинейные участки двух произвольных линий тока, получаем некоторый криволинейный профиль с бесконечно тонкими передней и задней кромками. В результате последовательного проведения подобного рода операций приходим к решетке, составленной из таких профилей. Густота решетки, направление ее фронта и соответственно направление потока,

[1]) Oswatitsch K., Potential-Gitter für Überschallgeschwindigkeiten, Zeitschrift für Flugwiss 4, № 1—2, 1956.

набегающего на решетку (характеризуемое углом β_1), непосредственно находятся в процессе построения. Путем подбора

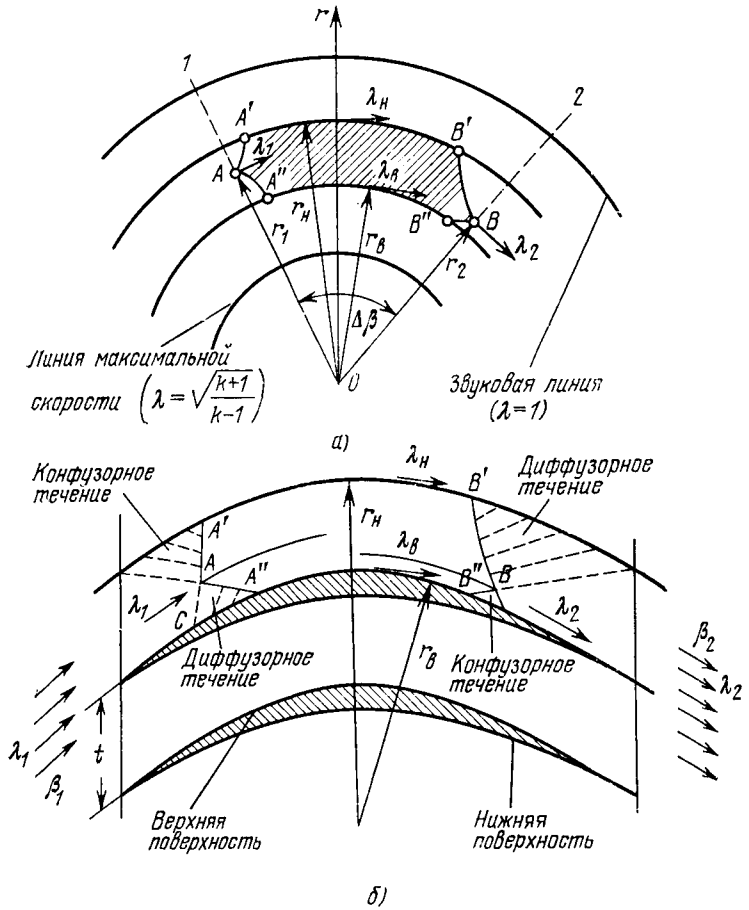


Рис. 10.69. К построению изоэнтропической сверхзвуковой решетки с помощью течения от потенциального вихря. *а*) Потенциальный вихрь в потоке сжимаемого газа. Область течения, используемого для построения решеток, заштрихована; *б*) сопряжение выделенной области вихревого течения с поступательным потоком и построение сверхзвуковой изоэнтропической решетки.

соответствующих величин $\lambda_в$ и $\lambda_п$ можно в ряде случаев построить решетку и при наперед заданном значении угла β_1.

Недостатком такого метода построения изоэнтропической сверхзвуковой решетки по сравнению с описанным выше способом, основанным на использовании двух течений Прандтля —

Майера, является наличие диффузорного течения в выходном участке межлопаточного канала (у его вогнутой стенки), где имеется уже максимально развитый пограничный слой.

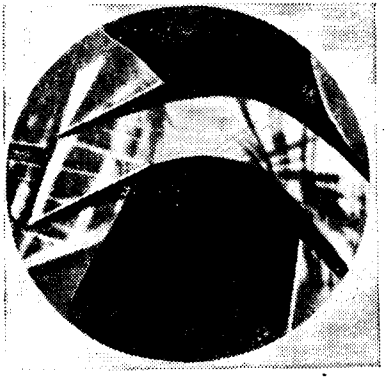


Рис. 10.70. Шлирен-фотография течения в межлопаточном канале активной сверхзвуковой решетки при $i = 0$ и $M_1 = 1{,}7$.

Результаты экспериментального исследования межлопаточного канала активной сверхзвуковой решетки, построенной по методу «вихря» с косым скачком на входе, полученные А. М. Домашенко, М. Ф. Жуковым и Ю. Б. Елисеевым в 1952 г., приведены на рис. 10.70 и 10.71 при расчетном числе Маха $M_1 = 1{,}7$ ($\lambda_1 = 1{,}48$). Клиновидная передняя кромка имела угол $\nu = 5°$ и соответственно расчетное значение числа M_1' после косого скачка составляло 1,488 ($\lambda_1' = 1{,}357$). Фотография течения (рис. 10.70) показывает наличие во входной части канала косого скачка, положение которого близко к расчетному. Линии слабых разрывов в последующем течении внутри межлопаточного канала по форме близки к характеристикам потенциального вихря. Расчетные кривые распределения давления (рис. 10.71) удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными и особенно непосредственно на входе в решетку, где повышение давления по сравнению с давлением набегающего потока вызывается косым скачком уплотнения. Имеющееся заметное расхождение между теоретическими и экспериментальными величинами давлений в средней части канала в основном связано с весьма малым значением удлинения лопаток, образующих канал, которое составляет всего $\bar{h} = h/b = 0{,}23$.

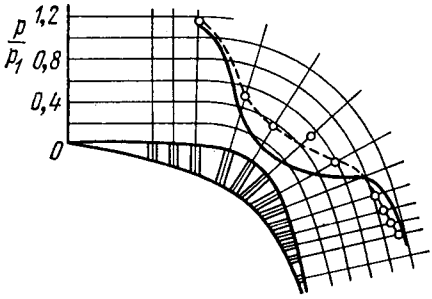


Рис. 10.71. Сравнение расчетного (сплошная линия) и экспериментального (пунктир) распределения давлений по верхней поверхности профиля активной сверхзвуковой решетки при $i = 0$ и $M = 1{,}7$ (см. рис. 10.70).

Можно представить себе также сверхзвуковую решетку, в межлопаточных каналах которой отсутствует конфузорный уча-

сток, а сжатие газа происходит только в скачках уплотнения. Для построения такой диффузорной решетки используем профили в форме треугольников, направив поток с заданным числом M_1 параллельно стороне треугольника $A'O'$ (рис. 10.72, *а*), угол треугольника в точке A' выбираем меньше предельного угла для косого скачка при данном значении M_1. В области $A'O''B'$ ниже

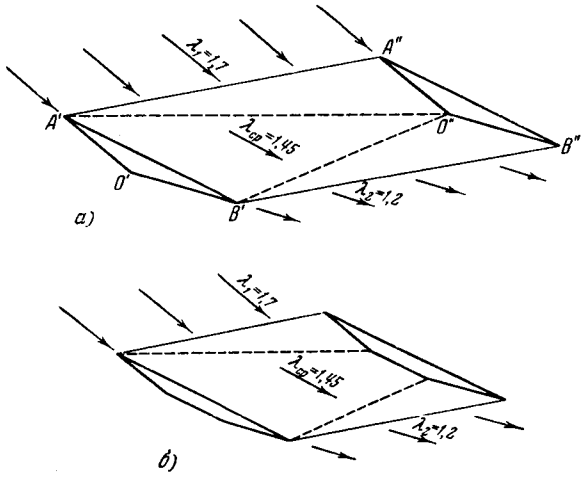


Рис. 10.72. Чисто скачковая сверхзвуковая диффузорная решетка. *а*) Решетка треугольников; *б*) решетка трапеций.

скачка уплотнения $A'O''$ осуществляется равномерное течение газа, параллельное стенке $A'B'$, со скоростью $\lambda_{ср} < \lambda_1$ и давлением $p_{ср} > p_1$. За точкой B' частицы газа попадают в область повышенного давления ($p_2 > p_{ср}$), в связи с чем возникает второй скачок уплотнения, в котором поток снова изменяет свое направление. Вершину следующего профиля решетки помещают в точку пересечения скачков O'', а грани $O''B''$ и $O'B'$ проводят параллельно направлению потока после второго скачка. Таким образом, треугольные профили $A'B'O'$ и $A''B''O''$ располагаются параллельно.

Продолжая процесс построения этих профилей, получим бесконечную прямолинейную решетку треугольников [1]). Эта решетка обладает волновым сопротивлением, определяемым по известным формулам для потерь полного давления в системе из двух косых скачков. Заметим, что аналогичным путем можно получить решетку, состоящую из трапеций (рис. 10.72, *б*),

[1]) E. Straus. Schaufelgitter für Überschallgeschwindigkeit ohne Wellenwiderstand. Technische Berichte ZWB, Berlin — Adlershof, 1944, Bd. 11, Heft 10.

которая имеет бóльшую густоту, чем соответствующая решетка из треугольников.

Возможные режимы обтекания решетки потоком со сверхзвуковой осевой составляющей скорости при наличии сильных возмущений покажем на примере густых решеток из простейших сверхзвуковых профилей — плоских пластин.

Эти течения, в общем случае, определяются не только параметрами набегающего потока — числом M_1 и углом атаки i, как это, например, имеет место при дозвуковом обтекании решетки [1]), но также и величиной давления p_2 в сечении далеко за решеткой. Безразмерная величина отношения давления перед решеткой и за ней $\varepsilon = p_2/p_1$ имеет определенный диапазон возможных значений, зависящий для данной решетки от параметров набегающего потока.

Значение ε_{min} определяется тем минимальным значением противодавления $p_{2\,min}$, при превышении величины которого возмущения начинают сказываться на течении в выходной части межлопаточных каналов решетки.

Максимальное значение ε_{max} определяется достижением такого $p_{2\,max}$, при котором дальнейшее повышение давления приводит к разрушению течения на бесконечности перед решеткой.

Таким образом, течение в межлопаточных каналах, а следовательно, и распределение давления по профилю, определяются не только параметрами набегающего потока, но и заданной величиной

$$\varepsilon_{min} \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_{max}.$$

Остановимся сначала на обтекании решетки пластин при нулевом угле атаки.

Если осевая составляющая скорости потока, набегающего на решетку пластин при нулевом угле атаки, больше или равна скорости звука, то при уменьшении давления за решеткой, по сравнению с его значением перед ней, силового воздействия потока на пластину не будет. Это связано с тем, что при $M_{1a} = M_1 \sin\vartheta \geqslant 1{,}0$ характеристика на выходе или совпадает с фронтом (при $M_{1a} = 1{,}0$) или выходит за пределы решетки (при $M_{1a} > 1{,}0$) и, следовательно, любое уменьшение давления p_2 вверх по пластине не передается.

При повышении давления за решеткой до некоторого значения $p_{2\,min}$ силовое воздействие также отсутствует. Соответствующие значения $p_{2\,min}$ и ε_{min} определяются из условия образования на срезе решетки косого скачка уплотнения (рис. 10.73,*а*). При этом угол отставания положителен и равен углу поворота потока в косом скачке.

[1]) Исключая режимы их запирания.

При дальнейшем увеличении давления, т. е. при $p_2 > p_{2\,min}$ или $\varepsilon > \varepsilon_{min}$, фронт косого скачка проходит выше фронта решетки, и это приводит к перераспределению давления на участке

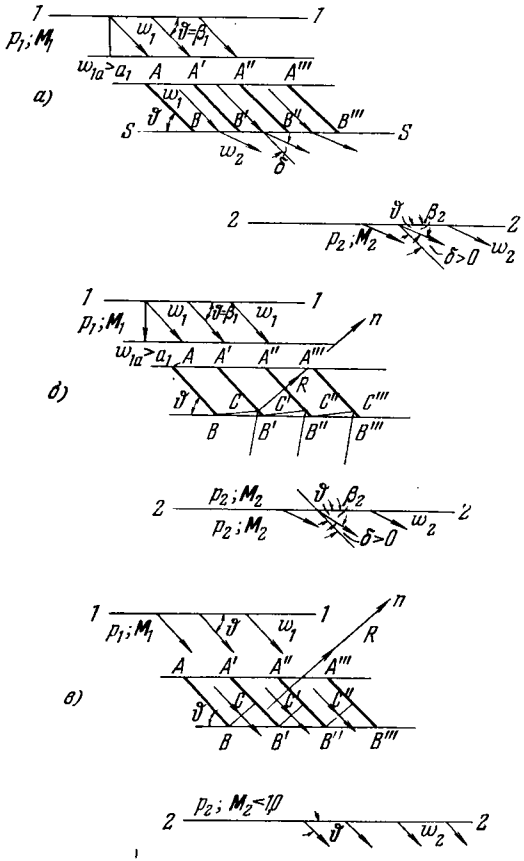


Рис. 10.73. Обтекание решетки пластин потоком со сверхзвуковой осевой составляющей скорости при нулевом угле атаки и при различных значениях давления p_2 за решеткой: *а*) при давлении p_2, равном давлению за косым скачком; *б*) при большем давлении; *в*) при максимальном давлении p_2, равном давлению за прямым скачком.

CB нижней поверхности, примыкающем к задней кромке пластины (рис. 10.73, *б*). Следовательно, в этом случае возникает силовое воздействие потока на пластину. Равнодействующая сил давления направлена в сторону положительного направления

оси n. По мере дросселирования, т. е. по мере увеличения давления p_2, точка C движется вверх по потоку и увеличивается силовое воздействие; угол отставания δ и угол поворота потока в косом скачке уменьшаются и косой скачок приближается к прямому.

При некотором значении $p_2 = p_{2\max}$ скачок становится прямым и непосредственно за решеткой имеется равномерный дозвуковой поток[1]) (рис. 10.73, *в*), направленный по пластинке, т. е. с нулевым углом отставания; дальнейшее повышение противодавления (по сравнению с прямым скачком) оказывается невозможным — течение становится неустойчивым, и прямой скачок, перемещаясь вверх по потоку, делает невозможным заданное течение на бесконечности перед решеткой. Поэтому значение ε, соответствующее прямому скачку, является максимально возможным, отвечающим режиму предельного дросселирования решетки при заданном числе M_1.

При положительных углах атаки у верхней поверхности около передней точки профиля A' возникает течение Прандтля — Майера, в котором часть потока, набегающего на данный межлопаточный канал, поворачивается на угол, равный углу атаки i (рис. 10.74, *а*). Направление остальной части потока изменяется на такой же угол в косом скачке, идущем от передней кромки у нижней поверхности лопатки.

Соответствующая картина наблюдается и при отрицательных углах атаки (рис. 10.74, *б*). В обоих случаях поток выше ломаной линии $A'C'A''$, составленной из отрезка фронта косого скачка и отрезка характеристики набегающего потока, остается невозмущенным и равномерным. Это положение сохраняется, однако, не при всех углах атаки.

Если положительный угол атаки становится настолько большим, что превышает предельный угол поворота потока в косом скачке уплотнения для данного числа M_1, то перед решеткой возникает криволинейная ударная волна.

С возрастанием отрицательного угла атаки характеристики $A''C'$ удаляются от фронта решетки, а плоскость косого скачка приближается к нему, и при некотором угле атаки фронт косого скачка совпадает с фронтом решетки (рис. 10.74, *в*). В этом случае на входе в межлопаточный канал имеется равномерный поток. Абсолютная величина угла атаки $|i_к|$, при котором для заданных значений числа M_1 и установочного угла решетки ϑ

---

[1]) Напомним, что настоящее рассмотрение проводится в упрощающем предположении отсутствия сил вязкости. В действительном течении в результате взаимодействия скачка с пограничным слоем на стенках межлопаточного канала (при достаточном росте давления в скачке) возникает отрыв и поток за решеткой становится неравномерным.

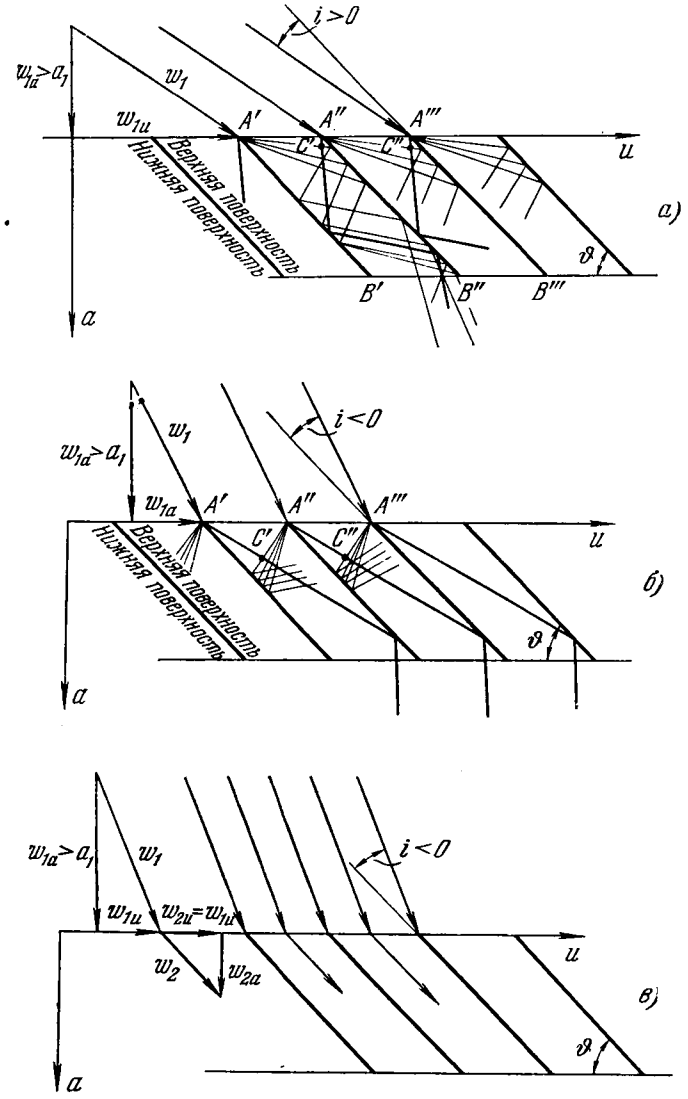


Рис. 10.74. Обтекание решетки пластин со сверхзвуковой осевой составляющей скорости под различными углами атаки: *а*) при положительных углах атаки; *б*) при отрицательных углах атаки; *в*) при таком отрицательном угле атаки, когда фронт косого скачка совпадает с фронтом решетки.

образуется косой скачок, совпадающий с фронтом решетки, определяется из следующего очевидного соотношения:

$$\gamma - |i_к| = \vartheta.$$

Здесь γ — угол между плоскостью косого скачка и направлением потока, натекающего на плоский клин с углом при вершине $\nu = |i_к|$.

Рассмотренные выше случаи обтекания решетки пластин при углах атаки, отличных от нулевого, имеют место при минимальном противодавлении, когда внутри межлопаточных каналов и в пространстве за решеткой течение сверхзвуковое.

При повышении давления за решеткой расчетная картина течения в выходной части межлопаточного канала начинает разрушаться — появляется область дозвуковых течений, и изменяется распределение давления по части поверхности пластины, в результате чего изменяется величина равнодействующей силы, приложенной к пластине. По мере увеличения дросселирования область дозвуковых течений увеличивается, продвигаясь вверх по потоку. При некотором значении p_2 возмущения начинают проникать за фронт решетки. При дальнейшем повышении давления, хотя и происходит последующая перестройка течения непосредственно перед решеткой, поток на бесконечности перед ней остается еще невозмущенным. Наконец, при некотором давлении p_2' возмущения начинают распространяться на всю область потока. Это и есть максимальное давление, при котором еще возможно заданное сверхзвуковое течение на бесконечности перед решеткой.

Перейдем теперь непосредственно к определению силового воздействия сверхзвукового потока на решетку.

Если ограничиваться только отысканием величины равнодействующей, то такая задача для решетки пластин при $\mathbf{M}_{1a} \geqslant 1$ имеет простое решение при любых параметрах набегающего потока и заданном противодавлении[1]). Для решения этой задачи достаточно определить параметры равномерного потока далеко за решеткой по известным значениям $\mathbf{M}_1$ и $\varepsilon = p_2/p_1$.

При этом предполагается, что влияние вязкости при обтекании собственно решетки пренебрежимо мало и соответственно трение на пластинах может быть принято равным нулю. Влияние вязкости начинает сказываться только за решеткой, где в результате турбулентного перемешивания поток полностью выравнивается. Выравнивание потока приводит к появлению дополнительных потерь (по сравнению с потерями, возникающими

---

[1]) Гинзбург С. И., Суммарное силовое воздействие потока газа на решетку пластин. В сб. «Прочность и динамика авиационных двигателей», вып. 3, «Машиностроение», М., 1966.

при обтекании данной решетки невязким потоком газа), однако не влияет на обтекание самой решетки, а следовательно, и на силовое воздействие потока. Наличие дополнительных потерь скажется только на величине статического давления выравненного потока p_2 в сечении далеко за решеткой. Величина равнодействующей силы, приложенной к профилю, при этом не изменится.

Отсутствие трения на пластине тождественно равенству нулю касательной составляющей равнодействующей силы

$$R_\tau = R_u \cos\vartheta + R_a \sin\vartheta = 0,$$

которое с учетом выражений (22) и (25) можно записать в виде

$$\frac{b}{t} c_\tau = \frac{R_\tau}{\rho_1 \frac{w_1^2}{2} t} = 2\left[\cos i - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\cos\delta\right]\sin(\vartheta - i) - \\ - \frac{m \sin\vartheta}{\lambda_1}\left[\frac{\sin(\vartheta - i)}{y(\lambda_2)\sin(\vartheta - \delta)} - \frac{1}{y(\lambda_1)}\right] = 0. \quad (101)$$

Это выражение представляет собой дополнительное уравнение, позволяющее, как будет показано позже, замкнуть систему уравнений для решетки пластин, определить параметры выравненного потока далеко за ней и в конечном счете найти величину равнодействующей, приложенной к профилю.

Используя газодинамические функции (см. гл. V), имеем

$$\varepsilon = \frac{p_2}{p_1} = \frac{p_2^*}{p_1^*}\frac{p_2}{p_2^*}\frac{p_1^*}{p_1} = \frac{\pi(\lambda_2)}{\pi(\lambda_1)}\sigma.$$

Условие неразрывности дает

$$\frac{q(\lambda_1)}{\pi(\lambda_1)}\sin\beta_1 = \varepsilon\frac{q(\lambda_2)}{\pi(\lambda_2)}\sin\beta_2$$

или

$$y(\lambda_2)\sin(\vartheta - \delta) = \frac{y(\lambda_1)\sin(\vartheta - i)}{\varepsilon}. \quad (102)$$

После подстановки в (102) выражения для $y(\lambda_2)$ получим

$$\frac{k-1}{k+1}\lambda_2^2 d + \lambda_2 \sin(\vartheta - \delta) - d = 0, \quad (103)$$

где

$$d = \frac{y(\lambda_1)\sin(\vartheta - i)}{\left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}}\varepsilon}.$$

В соответствии с (102) условие равенства нулю тангенциальной составляющей силы запишется следующим образом:

$$\lambda_2 \cos\delta = \lambda_1 \cos i - \frac{\sin\vartheta}{2\sin(\vartheta - i)}\frac{m}{y(\lambda_1)}[\varepsilon - 1], \quad (104)$$

или

$$\lambda_2 \cos\delta = e,$$

где через e обозначена правая часть выражения (104), которая может быть определена по заданным величинам λ, i, ε и ϑ.

Исключая λ_2 из (104) и (103), получаем квадратное уравнение относительно тангенса угла отставания δ

$$\operatorname{tg}^2\delta - 2b\operatorname{tg}\delta + c = 0. \tag{105}$$

Здесь

$$b = \frac{k+1}{2(k-1)}\frac{\cos\vartheta}{ed}, \quad c = 1 + \frac{k+1}{k-1}\frac{\sin\vartheta}{ed} - \frac{k+1}{k-1}\frac{1}{e^2}.$$

В случае нулевого угла атаки

$$b = \frac{k+1}{k-1}\left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}} \frac{\varepsilon \operatorname{ctg}\vartheta}{2\lambda_1 y(\lambda_1) - m(\varepsilon-1)}$$

и

$$c = 1 + \frac{2b}{\operatorname{ctg}\vartheta} - \frac{k+1}{k-1}\frac{4[y(\lambda_1)]^2}{[2\lambda_1 y(\lambda_1) - m(\varepsilon-1)]}.$$

Если, кроме того, положить $\lambda_1 = 1$, то

$$b = \frac{2k}{k-1}\frac{\varepsilon \operatorname{ctg}\vartheta}{k+1-\varepsilon},$$

$$c = 1 + \frac{2k}{k-1}\frac{\varepsilon}{1+k-\varepsilon} - \frac{k+1}{k-1}\frac{k^2}{(1+k-\varepsilon)^2},$$

и уравнение (105) совпадает с уравнением, полученным ранее Г. Ю. Степановым.

Таким образом, зависимость силового воздействия потока со сверхзвуковой осевой составляющей скорости от перепада давлений может быть определена, если для каждого ряда произвольно задаваемых значений ε из (105) и (103) найти соответствующие величины угла отставаний δ и приведенной скорости потока λ_2 далеко за решеткой. Так как равнодействующая сил, приложенных к пластине, направлена по нормали к ней, то

$$R = R_n = \frac{R_u}{\sin\vartheta},$$

и, согласно (22), коэффициент равнодействующей силы запишется так:

$$\frac{b}{t}c_n = \frac{Rb/t}{\rho_1 \frac{w_1^2}{2} b} = 2\frac{\sin(\vartheta - i)}{\sin\vartheta}\left[\cos(\vartheta - i) - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\cos(\vartheta - \delta)\right]. \tag{106}$$

Весьма важным является вопрос об определении диапазона возможных значений перепада давлений, при которых рассматриваемое течение может быть реализовано. Минимальное

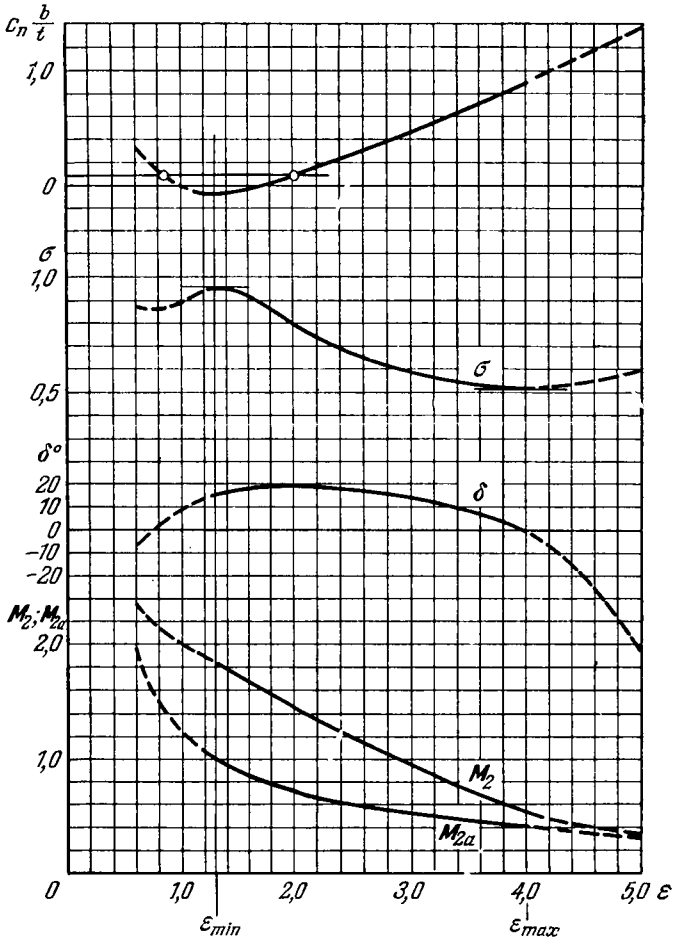


Рис. 10.75. Зависимость коэффициента равнодействующей силы и параметров потока за решеткой пластин от $\varepsilon = p_2/p_1$ при $\vartheta = 45°$, $i = 9°$ и $M_1 = 2{,}0$.

значение ε определяется из условия, что осевая скорость потока за решеткой достигает скорости звука, т. е. $M_{2a} = 1$. При дальнейшем уменьшении ε течение невозможно, так как оно требует

для своей реализации образования скачков разрежения [1]). В соответствии с этим режим ε_{min} характеризуется минимальным значением потерь (т. е. $d\sigma/d\varepsilon = 0$).

Некоторую особенность представляет собой случай нулевого угла атаки. В этом случае величина ε_{min} определяется из условия, что противодавление достигает такой величины, при которой на срезе решетки устанавливается косой скачок, направленный по фронту решетки.

Наибольшие трудности возникают при определении максимально возможного противодавления. Как уже указывалось, в случае нулевого угла атаки максимальное значение ε соответствует такому давлению за решеткой, при котором в ее межлопаточных каналах получается прямой скачок. При этом величина потерь достигает наибольшего значения; это означает, что и в данном предельном случае $d\sigma/d\varepsilon = 0$.

Дальнейшее повышение давления невозможно: скачок перемещается вверх по потоку и разрушает течение на бесконечности.

Величину ε_{max} в общем случае обтекания будем определять по аналогии с нулевым углом атаки из условия минимального значения коэффициента $\sigma(d\sigma/d\varepsilon = 0)$. Как показывают расчеты, такой предельный режим противодавления при $i \neq 0$ соответствует нулевому углу отставания и наличию прямого скачка в выходном сечении межлопаточного канала решетки.

Таким образом, диапазон возможных значений ε для данной решетки пластин, при фиксированных значениях числа M_1 и угла атаки i, может быть определен как интервал между двумя экстремальными значениями зависимости $\sigma(\varepsilon)$.

В качестве примера на рис. 10.75 приведены зависимости коэффициентов равнодействующей силы и параметров потока за решеткой пластин от ε при сверхзвуковом обтекании ее под положительным углом атаки. Здесь предельные значения равнодействующей определялись в точках экстремального значения потерь полного давления. Минимальные потери соответствуют равенству осевой скорости за решеткой скорости звука, а максимальные потери — наличию прямого скачка внутри межлопаточного канала.

Напомним, что все рассмотренные выше случаи обтекания решетки пластин потоком со сверхзвуковой осевой составляющей скорости возможны, только начиная с определенной критической густоты. Например, течение при нулевом угле атаки с прямым скачком (рис. 10.73, *в*) возможно только при $b/t \geqslant \cos\vartheta$. В этом случае критическая густота не зависит от M_1 и численно равна $\cos\vartheta$.

---

[1]) Степанов Г. Ю., Гидродинамика турбомашин, Физматгиз, М., 1962

§ 12. Обтекание решетки сверхзвуковых профилей потоком газа с дозвуковой осевой составляющей скорости

Остановимся на обтекании решеток сверхзвуковым потоком с дозвуковой осевой составляющей скорости. Если при фиксированном числе M_1 уменьшить осевую составляющую скорости набегающего потока, то направление характеристики приблизится к направлению фронта решетки и при $M_{1a} = 1$ оба направления совпадут между собой. При $w_{1a} < a_1$ характеристики направлены выше фронта решетки, и в этом случае, так же как и при дозвуковом обтекании решетки, происходит интерференция между набегающим сверхзвуковым потоком и решеткой. Возмущения, исходящие от передних кромок дужек, и возмущения, создаваемые за решеткой, распространяются вверх по потоку. Давление за решеткой уже не может являться задаваемым параметром: оно однозначно зависит от числа M_1 и угла атаки набегающего на решетку потока. Таким образом, несмотря на сверхзвуковую скорость на бесконечности, такое обтекание решетки без «горла» в некотором смысле аналогично дозвуковому.

Исключение составляет случай обтекания решеток пластин под нулевым углом атаки, при котором направление потока совпадает с направлением пластин. В этом случае возмущения перед решеткой бесконечно тонких пластин отсутствуют, и во входной части межлопаточных каналов имеется однородный сверхзвуковой поток, препятствующий независимо от величины осевой скорости распространению возмущений за решеткой на область течения перед ней.

Заметим, что рассмотренное здесь свойство обтекания решеток тонких пластин при нулевом угле атаки распространяется и на случай решеток бесконечно тонких изогнутых профилей, составленных из прямолинейного отрезка достаточной длины l и сопряженной с ним дужки (рис. 10.76). Минимальная длина прямолинейного отрезка определяется требованием, чтобы волна Маха, распространяющаяся от точки сопряжения, не выходила за фронт решетки. При несоблюдении этого условия слабые возмущения, вызываемые течением вокруг сопряженной дужки, нарушат однородность потока перед решеткой.

При дальнейшем рассмотрении ограничимся только решеткой пластин [1]). В соответствии со сказанным выше обтекание такой решетки при нулевом угле атаки становится неоднозначным и определяется, кроме числа M_1 набегающего потока, еще и величиной $\varepsilon = p_2/p_1$, т. е. отношением давлений на бесконечности за решеткой и перед ней. В случае равенства давлений

[1]) См. сноску на стр. 664.

($\varepsilon = 1{,}0$) поток проходит через решетку пластин невозмущенным, и силовое воздействие на решетку, естественно, отсутствует.

При осевой составляющей скорости набегающего потока, меньшей скорости звука ($M_{1a} < 1$), любое нарушение условия

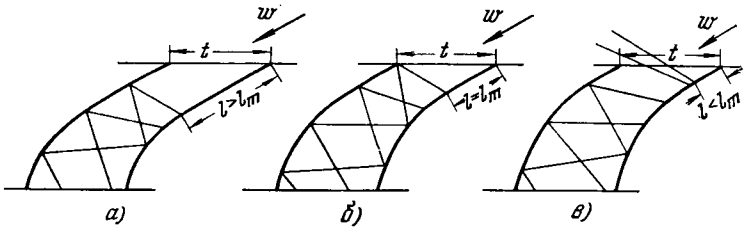


Рис. 10.76. К определению минимальной длины l_m прямолинейного отрезка бесконечно тонкого профиля, при котором возмущения поред решеткой отсутствуют, при нулевом угле атаки и при $w_{1a} < a_1$.

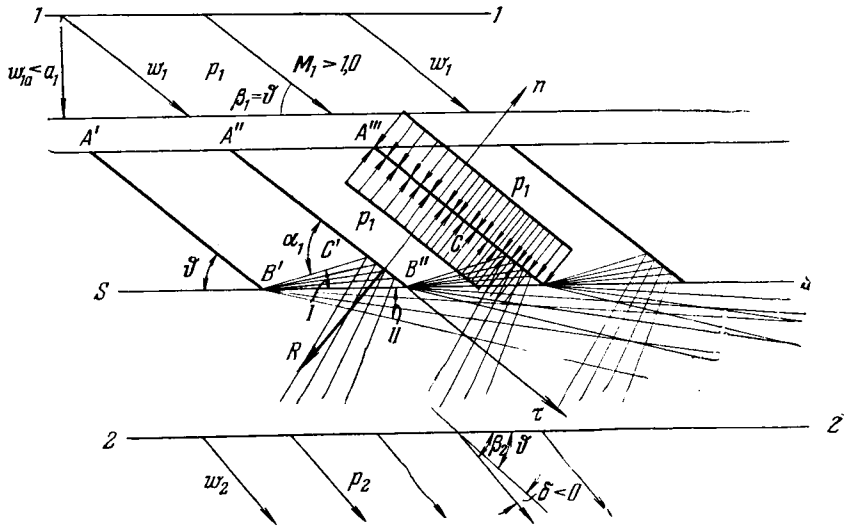


Рис. 10.77. Обтекание решетки пластин сверхзвуковым потоком с дозвуковой осевой составляющей скорости при нулевом угле атаки и $p_2 < p_1$.

$\varepsilon = 1$ приведет к возникновению силового воздействия потока на решетку пластин. Если $\varepsilon < 1$, т. е. если давление за решеткой меньше, чем перед ней, то на выходе из межлопаточного канала образуется течение с расширением около задней кромки B пластины (рис. 10.77), т. е. происходит ускорение потока с одновременным его поворотом в сторону бо́льших углов. В результате

угол отставания потока далеко за решеткой становится отрицательным.

Во всей области потока выше характеристики $B'C'$, наклоненной к пластине под углом $\alpha_1 = \arcsin\frac{1}{M_1}$, течение остается невозмущенным. Это значит, что по всей верхней поверхности пластины и по части ее нижней поверхности $A''C'$ давление такое же, как в набегающем потоке p_1. Изменение в распределении давления будет наблюдаться только на участке пластины

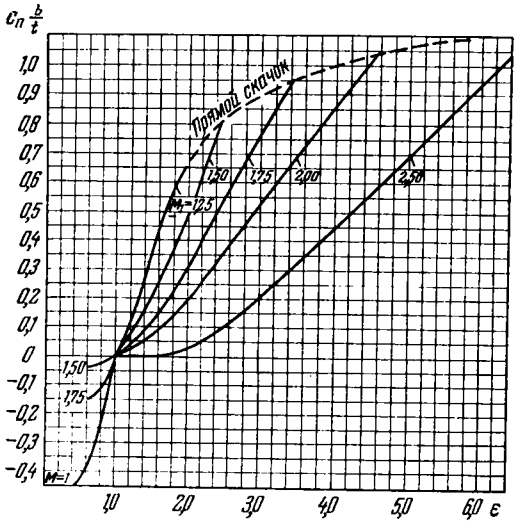


Рис. 10.78. Зависимость от $\varepsilon = p_2/p_1$ коэффициента равнодействующей для густой решетки пластин с $\vartheta = 30°$ при $i = 0$ и различных числах M_1.

$C'B''$, где происходит отражение характеристик. На этом отрезке господствует разрежение, и, следовательно, равнодействующая всегда направлена в сторону, противоположную положительному направлению оси n. Величина равнодействующей зависит от числа M_1, длины отрезка $C'B''$ и степени разрежения ε. Очевидно, что при фиксированных значениях первых двух величин равнодействующая возрастает с уменьшением ε. При некотором значении ε осевая скорость далеко за решеткой достигает скорости звука, и характеристика становится параллельной фронту решетки. В этом случае имеющиеся возмущения (за решеткой) не распространяются вверх по потоку. При повышении давления за решеткой ($\varepsilon > 1$) в выходной части межлопаточного канала образуется система скачков, приводящая

к повышению давления на нижней поверхности и возникновению силы, действующей в положительном направлении оси n. С возрастанием p_2 эта сила увеличивается, а угол отставания уменьшается. При некотором значении $p_2 = p_{2\max}$ и соответственно $\varepsilon = \varepsilon_{\max}$ в межлопаточном канале образуется прямой скачок, и на выходе из решетки устанавливается дозвуковой поток с нулевым углом отставания (рис. 10.73, *в*).

В качестве примера на рис. 10.78 приведена зависимость $c_n b/t$ от ε при различных числах Маха сверхзвукового потока, набегающего на решетку пластин ($\vartheta = 30°$) под нулевым углом атаки.

При $M_1 < 2$ величина $M_{1a} < 1$ и соответственно силовое воздействие потока имеется и при повышении, и при понижении давления за решеткой. При $M_1 = 2$ осевая составляющая скорости набегающего потока становится равной скорости звука, и в соответствии с этим силовое воздействие потока при $M_1 \geqslant 2$ возникает только при повышении давления за решеткой. Предельные значения равнодействующей силы при данном числе M_1 определялись соответственно или из условия возникновения прямого скачка, или из условия равенства осевой скорости за решеткой скорости звука.

При положительных углах атаки перед решеткой образуется система отсоединенных ударных волн (рис. 10.79); около передней кромки каждой пластины возникает течение Прандтля — Майера, в котором поток разгоняется от скорости звука до некоторой сверхзвуковой скорости, превышающей величину скорости на бесконечности перед решеткой. Отходящие от передней кромки волны разрежения падают на соседние ударные волны и ослабляют их, однако вблизи пластины ударные волны сохраняют значительную интенсивность.

По таблицам для течения Прандтля — Майера можно найти необходимое значение угла поворота потока для ускорения его от $M = 1$ до значения M потока на бесконечности перед решеткой. Этот угол определяет направление потока, обтекающего со звуковой скоростью передние кромки пластин. Максимальная скорость, до которой разгоняется поток, отвечает в этом случае углу поворота его от заданного направления на бесконечности до направления пластин, т. е. углу атаки.

Таким образом, сверхзвуковой поток, прежде чем попасть в межлопаточный канал, проходит через бесконечную систему ударных волн с постепенно увеличивающейся интенсивностью; в области между соседними ударными волнами поток разгоняется до все больших скоростей (по мере приближения его к фронту решетки). Перед участком ударной волны, расположенным у входа в межлопаточный канал, газ движется поступательно с числом Маха, равным $M_{\max}$. На этом участке проис-

ходит наиболее интенсивное торможение потока, в результате которого на выходе из межлопаточного канала устанавливается дозвуковое течение. При этом величина потерь полного давления в различных элементарных струйках, прошедших через систему ударных волн, будет различна, так как интенсивность волн падает слева направо. Следовательно, при рассматриваемом обтекании решетки идеальным невязким потоком газа в достаточно

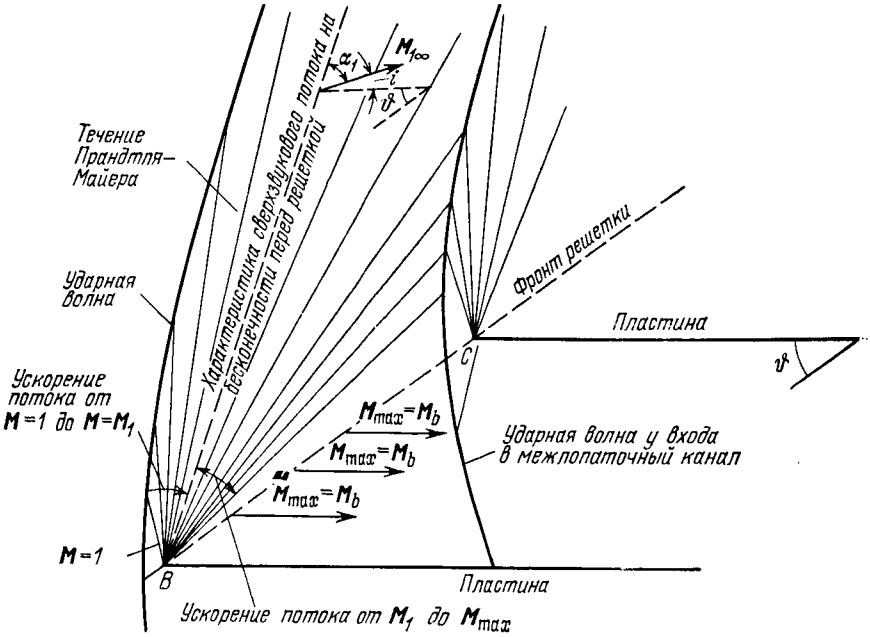


Рис. 10.79. Схема обтекания густой решетки пластин сверхзвуковым потоком с дозвуковой осевой составляющей скорости при положительном угле атаки ($i > 0$).

удаленном от входа сечении межлопаточного канала, где статическое давление, а значит, и направление скорости уже постоянны по его ширине, величина скорости останется переменной. С целью упрощения задачи будем предполагать, что в результате турбулентного обмена между струйками поток внутри межлопаточных каналов полностью выравнивается и в соответствии с этим за решеткой устанавливается равномерный по шагу поток с постоянными статическим и полным давлениями, причем направление этого потока совпадает с направлением пластин (угол отставания δ равен нулю). Важно отметить, что сделанное здесь предположение о выравнивании потока в меж-

лопаточных каналах существенно отличается от сделанного в предыдущем параграфе предположения о выравнивании потока в сечении далеко за решеткой. В этом последнем случае мы только несколько завышаем потери по сравнению с теми потерями, которые имеются в невязком потоке газа, оставляя при этом неизменным течение в самой решетке, а следовательно, неизменным и силовое воздействие потока на нее. Иное дело при выравнивании потока в лопаточных каналах, при котором вследствие изменения течения в самой решетке происходит не только увеличение потерь, но и изменение величины равнодействующей по сравнению с ее значением в идеальном — невязком потоке газа. Конечно, можно предположить, что выравнивание потока происходит также и за решеткой. Однако все равно это не позволило бы до конца решить задачу, так как величина возникающего при таком выравнивании угла отставания сама определяется распределением скоростей в выходном сечении межлопаточного канала.

Принимая во внимание сказанное, из условия равенства нулю коэффициента тангенциальной силы (101) получаем выражение для приведенной скорости потока за решеткой

$$z(\lambda_2) = \frac{2k}{k+1}\lambda_1 \cos i + \frac{\sin\vartheta}{\sin(\vartheta - i)}\frac{\tau(\lambda_1)}{\lambda_1}. \qquad (107)$$

Заменяя в (107)

$$\frac{\tau(\lambda_1)}{\lambda_1} = \frac{1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_1^2}{\lambda_1^2} = z(\lambda_1) - \frac{2k}{k+1}\lambda_1,$$

$$\vartheta = \beta_2, \quad i = \vartheta - \beta_1 = \beta_2 - \beta_1,$$

получим следующее выражение, выведенное Г. И. Тагановым в 1952 г. [1]):

$$z(\lambda_2) = \left[z(\lambda_1) - \frac{2k}{k+1}\lambda_1\right]\frac{\sin\beta_2}{\sin\beta_1} + 2\frac{k}{k+1}\lambda_1\cos(\beta_2 - \beta_1). \qquad (108)$$

Полное давление за решеткой и коэффициент потерь отыскиваются из уравнения неразрывности

$$\frac{p_2^*}{p_1^*} = \sigma = \frac{q(\lambda_1)\sin\beta_1}{q(\lambda_2)\sin\beta_2}.$$

Расчеты показывают, что относительная доля потерь на выравнивание потока в межлопаточных каналах весьма мала, поэтому с достаточной для практики точностью можно найденные, со-

[1]) Таганов Г. И., Потери полного давления в системе криволинейных ударных волн, расположенных перед решеткой, составленной из плоских пластин. Сборник теоретических работ по аэродинамике, Оборонгиз, М., 1957.

гласно (107), суммарные потери приписать только потерям в системе ударных волн. Статическое давление определится с помощью соответствующей газодинамической функции

$$p_2 = p_2^* \pi(\lambda_2).$$

При отыскании λ_2 из (107) следует иметь в виду, что газодинамическая функция $z(\lambda)$, величина которой

$$z < \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} + \sqrt{\frac{k-1}{k+1}},$$

двузначна: один корень уравнения

$$z(\lambda_2) = \lambda_2 + \frac{1}{\lambda_2} = \text{const}$$

соответствует дозвуковой ($\lambda_2' < 1$), а другой — сверхзвуковой скорости ($\lambda_2'' > 1$). Эти скорости связаны между собой соотношением

$$\lambda_2'' \lambda_2' = 1.$$

На рис. 10.80 для решетки с $\vartheta = 48°$ при $i = 9°$ дана зависимость $\sigma(M_1)$, полученная для обоих значений корней уравнения (107). Видно, что при осевой составляющей скорости набегающего потока, меньшей скорости звука, условие $\sigma < 1$ соблюдается только при дозвуковой скорости за решеткой. Это значит, что только такое течение является возможным. Общность полученного вывода подтверждается тем, что только при дозвуковой скорости и при отсутствии критического сечения в межлопаточном канале возмущения за решеткой распространяются в область течения перед ней.

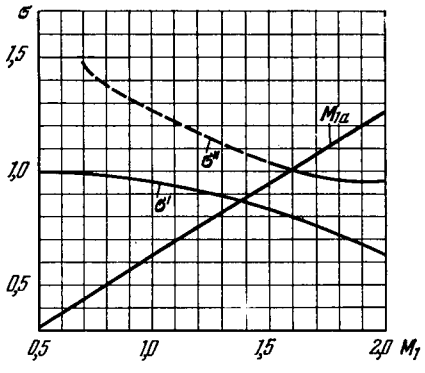


Рис. 10.80. Зависимость от числа M_1 коэффициента сохранения полного давления для густой решетки пластин с $\vartheta = 48°$ при $i = 9°$ для дозвукового (σ') и сверхзвукового (σ'') корней уравнения (107).

На рис. 10.81 приведена зависимость относительных потерь полного давления от угла атаки для густой решетки пластин с различными значениями углов установки, но при одной и той же скорости набегающего потока. При нулевом угле атаки потери не зависят от угла установки ϑ и равны по величине потерям в прямом скачке. С ростом угла атаки возникает различие в потерях. Чем больше установочный угол, тем меньше потери в системе ударных волн. При $i = 10°$ потери в решетке с $\vartheta = 30°$

в два раза больше, чем с $\vartheta = 70°$. На этом же рисунке пунктиром нанесены потери в прямом скачке при числе Маха $M = M_{max}$. Определенные таким образом потери не зависят от угла установки пластин, а зависят только от угла атаки. При больших углах установки эти потери больше истинных потерь в системе ударных волн.

Важно подчеркнуть общий характер выражения (107), представляющего собой не что иное, как запись теоремы импульсов. В соответствии с этим формула (107) может быть использована для определения потерь полного давления как в описанной выше системе ударных волн, так и, с точностью до пренебрежения поверхностными силами трения на пластине, во всех тех случаях, когда на срезе решетки пластин имеется однородный поток. Разница будет заключаться только в природе и физическом истолковании вычисленных потерь.

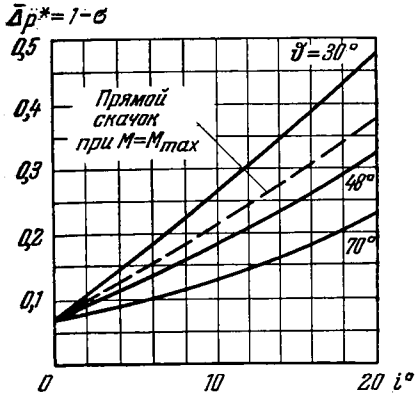


Рис. 10.81. Зависимость от угла атаки относительных потерь полного давления в густых решетках пластин с различными углами установки при $M_1 = 1{,}5$.

Так, например, если в результате взаимодействия пограничного слоя на пластине и падающей на нее ударной волны (при «критическом» отношении давления в ней) возникает λ-образный скачок, сопровождаемый срывом пограничного слоя (рис. 10.82), то, кроме потерь в системе ударных волн, возникают принципиально новые потери, связанные с наличием оторвавшегося потока. Если густота решетки пластин столь велика, что оторвавшийся поток внутри межлопаточного канала полностью выравнивается, то, согласно уравнению (107), суммарная величина потерь остается такой же, как и для рассмотренного выше случая, когда влияние взаимодействия пограничного слоя и скачка не учитывалось; произойдет только перераспределение потерь между зоной ударных волн и областью выравнивания потока. Увеличение потерь на выравнивание полностью компенсируется уменьшением потерь в ударных волнах, связанных с образованием системы косых скачков.

При обтекании решетки пластин со сверхзвуковой осевой составляющей скорости набегающего потока ($M_{1a} > 1$) с помощью уравнения (107) мы определяем суммарные потери, происходящие только в межлопаточных каналах. В этом случае физи-

ческий смысл имеют оба корня уравнения (107), причем реализация одного из двух режимов, связанных условием $\lambda_2''\lambda_2' = 1$, определяется значением статического давления p_2 за решеткой. При меньшем давлении $p_2 = p_{\min}$ поток за решеткой будет сверхзвуковым $(\lambda_2 = \lambda_2'' > 1)$, а при большем давлении $p_2 = p_{2\max}$ — дозвуковым $(\lambda_2 = \lambda_2' < 1)$. Эти значения p_2 отличаются друг от друга на величину прироста статического давления в прямом скачке.

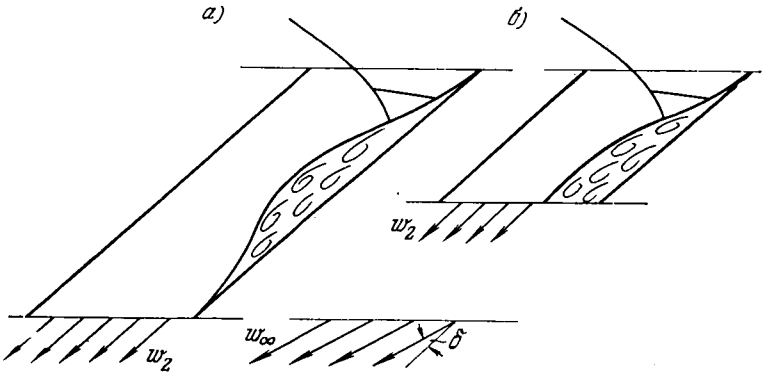


Рис. 10.82. Схема обтекания решетки пластин сверхзвуковым потоком вязкого газа с дозвуковой осевой составляющей скорости ($M_{1a} < 1$) и со сверхкритическим перепадом давления в ударной волне. а) Густая решетка; б) редкая решетка.

При обтекании решетки пластин дозвуковым невязким потоком газа при докритических скоростях потери, вычисляемые с помощью уравнения (107), оказываются в точности равными потерям на удар, возникающим при расширении оторвавшегося с передней кромки потока (рис. 10.43), ширина которого определяется, согласно уравнению неразрывности и формуле (100), до ширины межлопаточного канала, равной $t \sin \vartheta$. Если в действительности, как это уже указывалось выше, при срыве струй с передних кромок образуется вихревое течение (рис. 10.48), то в этом случае суммарные потери, определяемые согласно (107), включают в себя как потери, связанные с поддержанием вихревого течения у передней кромки, так и потери на последующее выравнивание потока в межлопаточных каналах решетки.

По известной величине λ_2 коэффициент равнодействующей силы может быть найден из уравнения (106), которое в рассматриваемом случае $\delta = 0$ запишется так:

$$c_n \frac{b}{t} = 2 \sin(\vartheta - i)\left[\left(\cos i - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) \operatorname{ctg} \vartheta - \sin i\right]. \qquad (109)$$

На рис. 10.83 для густой решетки пластин, в межлопаточных каналах которой поток полностью выравнивается, представлены зависимости произведения $c_n \frac{b}{t}$ от угла атаки при различных числах Маха, полученные с помощью формул (107) и (109)[1].

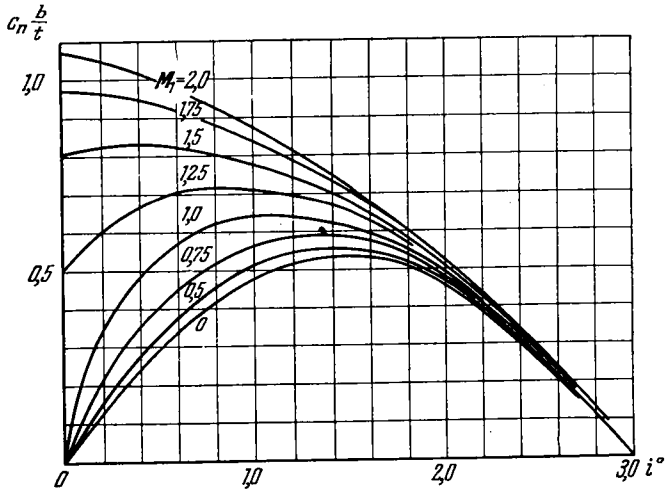


Рис. 10.83. Зависимость $c_n b/t$ от угла атаки для густой решетки пластин при обтекании ее турбулентным потоком газа ($\vartheta = 30°$).

В соответствии со сказанным выше эти кривые не зависят от характера обтекания. Последнее будет приводить только к перераспределению давления при сохранении неизменным его интеграла по поверхности профиля. Иначе говоря, изменение характера течения приводит только к смещению линий действия равнодействующей при сохранении ее величины.

С увеличением угла атаки до $i_{кр}$ равнодействующая сила сначала возрастает от нулевого значения до максимального, а затем монотонно уменьшается. С увеличением числа M_1 точка максимума силы сдвигается в сторону меньших углов атаки с одновременным увеличением коэффициента силы; при некотором значении числа $M_1 > 1$ величина $i_{кр}$ достигает нулевого значения.

---

[1]) В тех случаях, когда силовое воздействие неоднозначное ($i = 0$ или $M_{1a} > 1$), бралось значение коэффициента c_n, соответствующее максимально возможному давлению за решеткой. На нулевом угле атаки и при сверхзвуковой скорости этот режим реализуется при возникновении прямого скачка в межлопаточных каналах решетки.

Следует особо отметить, что в случае густой решетки пластин, в отличие от единичной пластины, зависимости коэффициентов силового воздействия потока газа от числа Маха в дозвуковом, околозвуковом и сверхзвуковом диапазонах имеют монотонный характер.

Рассмотрим теперь некоторые результаты экспериментального исследования сверхзвуковых диффузорных решеток, рассчитанных на торможение сверхзвукового потока с дозвуковой осевой составляющей скорости. Остановимся на опытах с изолированным межлопаточным каналом, проведенных С. И. Гинзбургом и Л. А. Сусленниковым. При дозвуковой осевой составляющей скорости такая замена бесконечной решетки единичным каналом, имеющим такие же передние кромки, как и у профиля решетки, справедлива только при нулевом угле атаки и при условии, что длина l_1 прямолинейного участка выпуклой поверхности такова, что характеристика, идущая из конца этого отрезка, не выходит за фронт решетки (рис. 10.76).

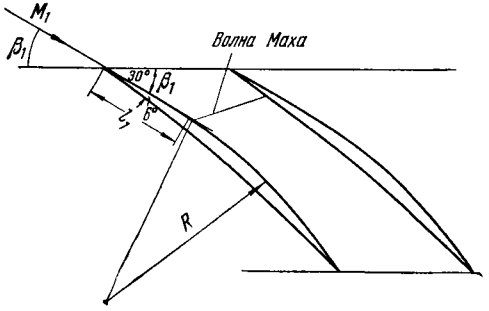


Рис. 10.84. Сверхзвуковая решетка клиновидных профилей, межлопаточный канал которой испытывался в изолированных условиях.

На рис. 10.84 изображена решетка, межлопаточный канал которой испытывался при нулевом угле атаки, при нескольких значениях чисел M_1 и различных противодавлениях. Решетка рассчитана на $M_1 = 1{,}5$ и имеет угол заострения передней кромки $\nu = 6°$. Выпуклая поверхность профиля состоит из прямолинейного отрезка и сопряженной с ним дуги окружности. Результаты эксперимента приведены на рис. 10.85, на котором показано распределение по сечению за каналом коэффициента $\sigma = p_2^*/p_1^*$ при значениях числа $M_1 = 1{,}36$; 1,5; 1,65. Эти данные относятся к расчетному положению замыкающего скачка, расположенного непосредственно за первым скачком. На рис. 10.85 показано, что при всех скоростях набегающего потока потери полного давления в ядре потока сравнительно невелики и близки к потерям в расчетной системе скачков. С приближением к выпуклой стенке потери резко возрастают, что объясняется отрывом пограничного слоя за λ-образной частью замыкающего скачка и дальнейшим развитием отрыва в дозвуковой диффузорной части канала. Последнее обстоятельство подтверждается тем, что при

испытании другого канала с такой же сверхзвуковой частью, но с существенно меньшей диффузорностью дозвукового участка ($\alpha_э = 1{,}5°$ вместо $\alpha_э = 7°$) падение полного давления начинается значительно ближе к выпуклой стенке и происходит значительно слабее, чем у исходного канала (рис. 10.86б). Осреднение экспериментальных данных (рис. 10.85) дает следующие средние значения коэффициента потерь ($\Delta\bar{p}^*_{ср} = 1 - \sigma_{ср}$):

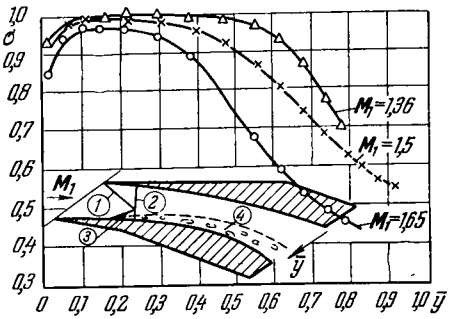


Рис. 10.85. Распределение относительного полного давления $\sigma = p^*_2/p^*_1$ по шагу за межлопаточным каналом при расчетном положении замыкающего скачка и различных числах Маха набегающего потока: *1* — косой скачок, *2* — замыкающий прямой скачок, *3* — λ-образный скачок; *4* — зона отрыва потока.

M_1	1,36	1,50	1,65
$\Delta\bar{p}^*_{ср}$	0,12	0,165	0,280

Увеличение потерь полного давления с ростом скорости набегающего потока обусловлено как увеличением потерь в центральной части потока (связанных непосредственно с потерями в системе скачков), так и ростом интенсивности отрыва пограничного слоя вследствие увеличения скорости перед замыкающим скачком и перемещением его вниз по потоку вместе с точкой падения косого скачка. Последнее характеризуется смещением к выпуклой стороне канала точки крутого падения кривой распределения полного давления по шагу за каналом (рис. 10.85).

Результаты исследования другого близкого по конфигурации канала при том же расчетном числе $M_1 = 1{,}5$, но при различных положениях замыкающего скачка приведены на рис. 10.87. Наименьшие потери, как показывают графики, наблюдаются при расчетном положении скачков, когда на входе в межлопаточный канал располагаются один косой скачок и следующий непосредственно за ним прямой замыкающий скачок (кривая *1*). При уменьшении давления по сравнению с расчетным скачок движется вниз по потоку и потери начинают увеличиваться (кривая *2*) сначала несущественно, а затем очень резко и доходят до значения $\Delta\bar{p}^*_{ср} = 0{,}24$ в крайнем положении замыкающего скачка (кривая *3*) вместо $\Delta\bar{p}^*_{ср} = 0{,}10$ при расчетном его положении. Такой рост потерь связан с увеличивающейся интенсивностью отрыва при движении скачка в диффузорном канале.

При этом отрыв, возникающий и развивающийся у выпуклой стенки канала, приводит к ускорению потока у противоположной — вогнутой стенки и как следствие этого к уменьшению потерь в этой области течения (кривая *3*). При некотором повышенном противодавлении на входе в канал возникает один прямой скачок вместо расчетной системы двух скачков. Замена двух скачков одним скачком большей интенсивности вызывает увеличение потерь и в центральной, и в пристеночной частях потока (кривая *4*, рис. 10.87). Последнее обстоятельство является результатом взаимодействия скачка большей интенсивности с пограничным слоем.

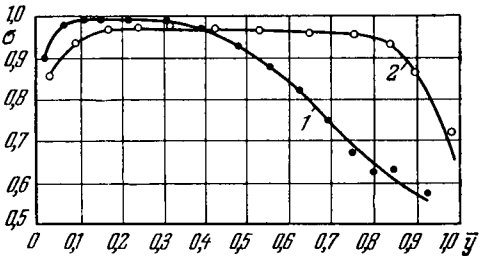


Рис. 10.86. Распределение относительного полного давления $\sigma = p_2^*/p_1^*$ по шагу за межлопаточными каналами двух сверхзвуковых решеток, отличающихся только углом эквивалентного плоского диффузора для дозвуковой части межлопаточных каналов, при $M_1 = 1{,}5$, $i = 0$ и максимальном противодавлении: *1* — исходный канал, *2* — канал с уменьшенной диффузорностью дозвуковой части.

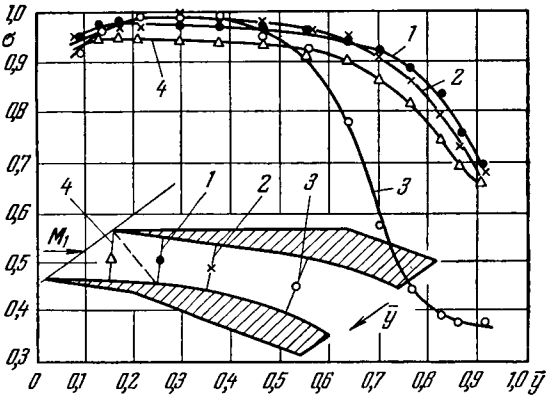


Рис. 10.87. Распределение относительного полного давления $\sigma = p_2^*/p_1^*$ по шагу за межлопаточным каналом при $M_1 = 1{,}5$ и различных положениях замыкающего скачка (значки и цифры на кривых показывают примерное месторасположение замыкающего скачка).

Экспериментальное исследование исходной сверхзвуковой решетки (рис. 10.84) при углах атаки $i \neq 0$ проводилось

Л. А. Сусленниковым [1]) на рабочем колесе с цилиндрической формой проточной части и с высотой лопаток, составлявших

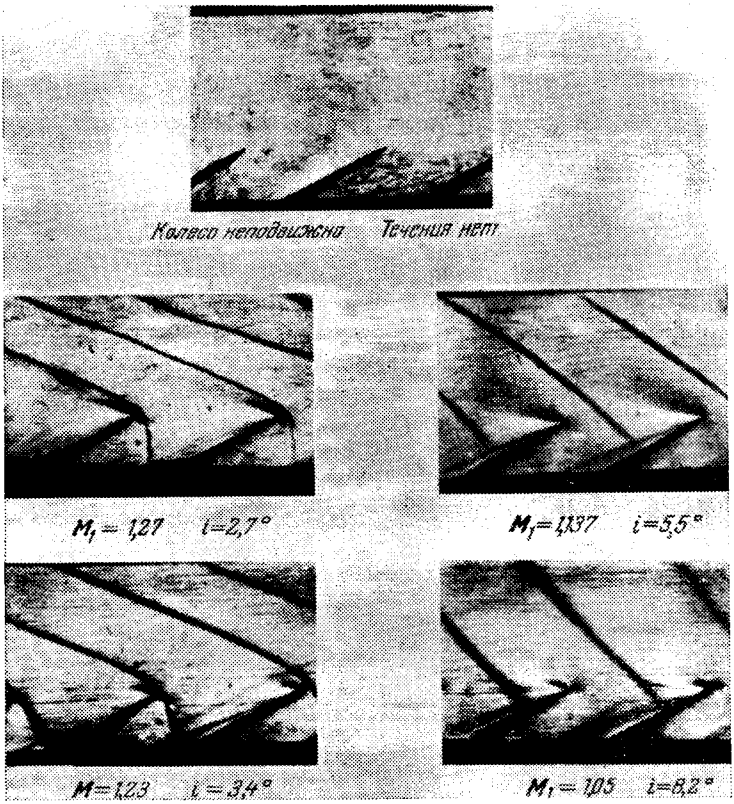


Рис. 10.88. Мгновенные шлирен-фотографии обтекания вращающегося колеса с клиновидными лопатками (вращающаяся сверхзвуковая решетка) сверхзвуковым относительным потоком.

всего 0,1 части диаметра. Для таких лопаток изменение параметров потока по радиусу столь незначительно, что им можно пренебречь и рассматривать рабочее колесо как вращающуюся решетку с постоянными по радиусу параметрами потока.

---

[1]) Сусленников Л. А., О применении оптических методов для изучения течения в лопаточных венцах осевого компрессора. В сб. «Лопаточные машины и струйные аппараты», вып. 1, «Машиностроение», М., 1966.

Мгновенные фотографии течения в решетке, полученные на приборе Теплера — Фуко с помощью цилиндрической оптики, приведены на рис. 10.88.

Из этих фотографий отчетливо видно, что перед решеткой имеется периодическая система ударных волн. Перед носком каждой лопатки устанавливается криволинейная ударная волна, одна из ветвей которой уходит вперед, возмущая поток перед решеткой, а другая ветвь падает на профиль соседней лопатки. Форма и положение ударных волн зависят от угла атаки.

При малых углах атаки ударная волна состоит из двух ветвей — одна расположена перед решеткой, а вторая входит в межлопаточный канал и представляет собой по существу косой скачок уплотнения. По мере увеличения угла атаки ударная волна выпрямляется, одновременно перемещаясь вверх по потоку. При наибольшем угле атаки ударная волна близка к прямому скачку, расположенному на заметном расстоянии от передней кромки профиля.

§ 13. Некоторые сведения о пространственном обтекании единичного крыла и решетки крыльев

В предыдущих параграфах рассматривалось обтекание крыла плоскопараллельным потоком жидкости. Такое течение может быть осуществлено только на крыле бесконечного размаха.

Остановимся теперь на основных вопросах теории крыла конечного размаха. Бесконечное крыло воздействует на обтекающий его поток жидкости, как бесконечная вихревая нить. Иначе говоря, можно считать, что в крыло как бы помещен так называемый присоединенный вихрь. Как известно из гидродинамики, вихрь может оканчиваться только на границах потока или быть замкнутым. Поэтому присоединенный вихрь не может внезапно оборваться на торцах крыла конечного размаха (рис. 10.89); его свободные концы, называемые *вихревыми усами*, выходят за пределы размаха l и, будучи подхвачены общим течением жидкости, вытягиваются по линиям тока в бесконечность.

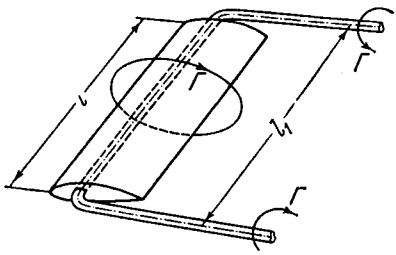


Рис. 10.89. Аэродинамическая схема крыла конечного размаха с П-образным вихрем постоянной циркуляции.

Если циркуляция вокруг крыла постоянна, то такое крыло конечного размаха можно заменить П-образным вихрем. В действительности циркуляция по крылу конечного размаха обычно

изменяется, и в общем случае крыло можно заменить системой из бесконечного числа П-образных вихрей, образующих непрерывную вихревую пелену (рис. 10.90), которая, как показывают исследования, неустойчива и за крылом сворачивается в два вихревых уса (рис. 10.91). У крыла прямоугольной формы вихревые усы сбегают главным образом с концов, поэтому такое крыло может быть заменено приближенно одним П-образным вихрем с постоянной циркуляцией.

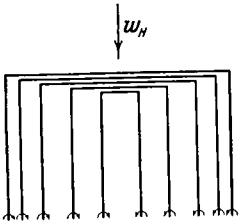


Рис. 10.90. Схема П-образных вихрей для крыла с переменной циркуляцией по размаху.

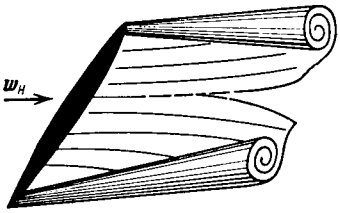


Рис. 10.91. Схема сворачивания вихревой пелены за крылом в два вихревых уса.

Опыты хорошо подтверждают описанную гидродинамическую схему крыла конечного размаха. Принимая во внимание действие сбегающих с концов крыла вихрей, удается установить влияние размаха крыла на его аэродинамические свойства.

Для этого определяется средняя по размаху крыла индуктивная скорость, вызываемая вихревыми усами и обычно называемая *скоростью скоса потока* w_{y0}. Можно показать, что

$$w_{y0} = -\frac{c_y}{\pi}\frac{b}{l} w_н = -\frac{c_y}{\pi\lambda} w_н;$$

здесь величина $\lambda = l/b$ обозначает *относительный размах*, или *удлинение* крыла.

Соответственно для угла скоса потока $\Delta\alpha$ имеем следующую важную формулу теории крыла конечного размаха [1]):

$$\Delta\alpha = \frac{c_y}{\pi\lambda}.$$

Если крыло стоит в потоке под углом атаки α, то истинный (аэродинамический) угол атаки составляет (рис. 10.92)

$$\alpha_i = \alpha - \Delta\alpha.$$

[1]) См. подробное изложение теории крыла конечного размаха в книге: Юрьев Б. Н., Экспериментальная аэродинамика, ч. II, Оборонгиз, М., 1938.

Для крыла бесконечного размаха ($\lambda = \infty$) угол скоса равен нулю ($\Delta\alpha = 0$), т. е. истинный угол атаки равен кажущемуся (α). Чем меньше относительный размах крыла λ, тем больше угол скоса потока и, следовательно, меньше истинный угол атаки.

В связи со скосом потока вектор подъемной силы крыла поворачивается на тот же угол $\Delta\alpha$, так как его направление всегда перпендикулярно к истинному направлению потока (рис. 10.92). Проекция подъемной силы крыла конечного размаха[1]) на направление невозмущенного потока представляет собой силу так называемого *индуктивного сопротивления*:

$$R_{xi} = R'_y \sin\Delta\alpha.$$

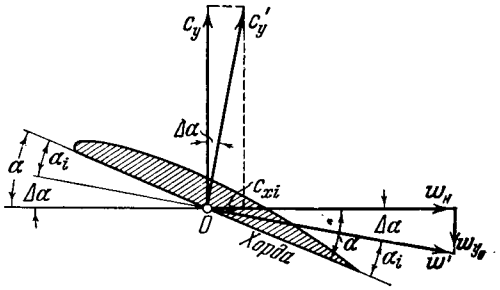


Рис. 10.92. Скос потока за крылом конечного размаха.

Переходя к безразмерным величинам и учитывая малость угла скоса ($\sin\Delta\alpha \approx \Delta\alpha$), получаем формулу для определения так называемого *коэффициента индуктивного сопротивления крыла конечного размаха*

$$c_{xi} = c_y \Delta\alpha = \frac{c_y^2}{\pi\lambda}.$$

Таким образом, влияние конечного размаха крыла сказывается в появлении особого рода (индуктивного) сопротивления даже в случае обтекания крыла идеальной жидкостью.

Ввиду того что коэффициент подъемной силы пропорционален аэродинамическому углу атаки, выражение для коэффициента индуктивного сопротивления в дозвуковом потоке сжимаемого газа остается таким же, как в несжимаемой жидкости (при дозвуковой скорости вихри, сбегающие с концов крыла, попрежнему оказывают влияние на поток вдоль всего размаха крыла).

При сверхзвуковом же обтекании возмущающее действие концевого сечения крыла распространяется только внутри конуса слабых возмущений с вершиной в передней кромке концевого сечения. Это приводит к существенному уменьшению индуктивного сопротивления, которое, вообще говоря, может быть сведено к нулю, если концы крыла срезать так, чтобы конусы

[1]) Ввиду того что углы скоса малы, подъемная сила при скосе потока почти не меняется $(c'_y \approx c_y)$.

возмущений, исходящие из передних кромок концевых сечений, не заключали внутри себя элементов крыла. В этом случае при сверхзвуковой скорости полета все сечения крыла будут обтекаться так же, как крыло бесконечного размаха.

Ранее при рассмотрении крыла бесконечного размаха предполагалось, что течение остается плоским и что направление скорости набегающего потока нормально к передней кромке крыла. Рассмотрим теперь крыло бесконечного размаха, обдуваемое под углом к передней кромке или эквивалентное ему крыло, перемещающееся в воздухе с некоторым скольжением, характеризуемым углом β (рис. 10.93). При этом по-прежнему будем считать, что хорда и профиль крыла постоянны вдоль размаха.

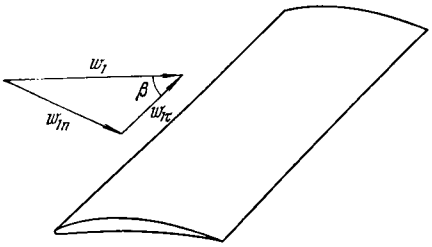


Рис. 10.93. Косое обтекание крыла.

Разложим полную скорость потока w_1 на две составляющие: параллельно передней кромке и нормально к ней. Параллельная размаху крыла составляющая скорости $w_1 \cos\beta$ при обтекании крыла не изменяется и поэтому не влияет на распределение давления по крылу, которое определяется только нормальной составляющей скорости $w_1 \sin\beta$.

Итак, скольжение крыла бесконечного размаха не влияет на распределение давления по его поверхности. Следовательно, числом Маха, определяющим характер обтекания крыла, является уже не число $M_1 = \frac{w_1}{a_1}$, а эффективное число Маха

$$M_{1эф} = \frac{w_1 \sin\beta}{a_1} = M_1 \sin\beta.$$

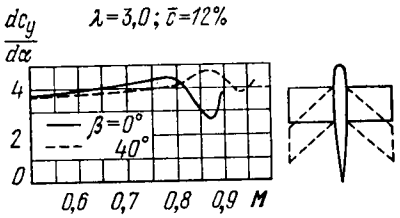


Рис. 10.94. Влияние стреловидности крыла с дозвуковым профилем на зависимость производной $dc_y/d\alpha$ от числа $M_1 < 1$.

Результаты эксперимента (рис. 10.94) действительно показывают, что при сохранении формы профиля крыла и его удлинения удается путем расположения крыла под углом $\beta = 40°$ к набегающему потоку существенно увеличить значение $dc_y/d\alpha$ в диапазоне чисел Маха 0,8—0,9.

Таким образом, придавая крылу стреловидную форму, можно, например, затянуть момент возникновения волнового

кризиса у крыла с данным профилем на большие числа M_1. Этот способ уменьшения сопротивления нашел широкое применение в практике современного самолетостроения.

Наличие составляющей скорости вдоль размаха стреловидного крыла вызывает перемещение в этом же направлении пограничного слоя. Это приводит к ухудшению обтекания и к уменьшению критического угла атаки у концевых профилей. На практике для устранения этого вредного влияния вязкости применяют «гребешки» — выступы, располагаемые вдоль хорды и препятствующие перетеканию пограничного слоя.

Рассмотрим теперь некоторые вопросы пространственного течения жидкости в лопаточных машинах.

В тех лопаточных машинах, венцы которых работают в практически безграничном потоке (воздушные и водяные винты, ветряки), с концов их лопаток, так же как и в единичном крыле конечного удлинения, сбегают присоединенные вихри. В результате возникает дополнительное индуктивное сопротивление, вычисление которого по сравнению с единичным крылом осложняется наличием взаимной интерференции между сбегающими с конца каждой лопасти вихревыми усами [1]).

Такого рода вихревые усы не могут возникнуть в турбомашинах других типов (осевые компрессоры и вентиляторы, осевые турбины), отличающихся тем, что их лопатки ограничены с торцов поверхностью кольцевого канала [2]). В результате этого индуктивное сопротивление или совсем не возникает, или оно имеет второстепенное значение.

Пространственный характер течения в лопаточных машинах рассматриваемого типа сказывается в основном в тех ограничениях возможного распределения параметров потока по высоте лопатки, которые налагаются, например, той или иной принятой формой поверхностей тока [3]). Трение на стенках кольцевого канала, особенно в области межлопаточных каналов, приводит к усилению влияния вязкости на характер пространственного течения.

В качестве наиболее простого примера, имеющего непосредственное отношение к явлениям, происходящим при обтекании потоком вязкой жидкости неподвижных лопаточных каналов, рассмотрим обтекание решетки прямых крыльев постоянного

---

[1]) Жуковский Н. Е., Вихревая теория гребного винта, Гостехиздат, М., 1950.

[2]) Весьма малыми радиальными зазорами между поверхностью кольцевого канала и торцами лопаток рабочих колес — вращающихся лопаточных венцов — можно пренебречь.

[3]) Подробнее см., например, Гинзбург С. И., Элементы газовой динамики компрессоров и турбин, гл. IX во втором издании настоящей книги, Гостехиздат, 1953.

профиля, ограниченных двумя параллельными плоскостями, нормальными к образующим крыльев (рис. 10.95).

В случае идеальной невязкой жидкости рассматриваемое течение является плоским. Это означает, что по всей высоте лопатки, в том числе и по плоскостям, ограничивающим решетку, имеется один и тот же двумерный поток, не зависящий от величины удлинения $\lambda = l/b$ крыльев, составляющих данную решетку.

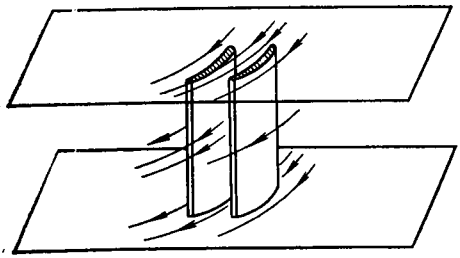


Рис. 10.95. Обтекание потенциальным потоком решетки крыльев конечного удлинения, расположенных между двумя параллельными плоскостями.

При обычных углах атаки давление на выпуклой стенке профиля всегда меньше, чем на вогнутой. В результате в межлопаточном канале силы давления увеличиваются в направлении от выпуклой к вогнутой поверхностям профилей. В потоке невязкой жидкости и газа этот градиент давления полностью уравновешивается центробежной силой, возникающей при движении частиц по криволинейным траекториям (рис. 10.96):

$$\frac{\partial p}{\partial n}\Delta n\,\Delta F = \Delta m\frac{w^2}{R}.$$

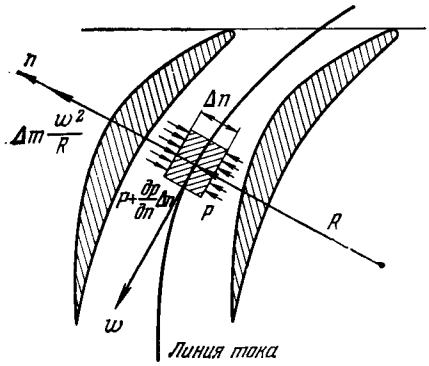


Рис. 10.96. Течение в плоском криволинейном межлопаточном канале.

Здесь R — радиус кривизны линии тока в данной точке. С учетом того, что $\Delta m = \rho\Delta n\Delta F$, имеем

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{w^2}{R}.$$

Как уже указывалось при безотрывном обтекании влияние вязкости ограничивается тонким поверхностным слоем. Вне этого слоя течение мало отличается от течения идеальной жидкости. Отсюда следует, что влияние вязкости почти не сказывается на течении в средних сечениях — оно остается практически невозмущенным.

Наибольшие нарушения течения произойдут в пограничном слое плоских стенок, ограничивающих поток. Уменьшение скорости в этом слое приведет к тому, что градиент давления, который в пограничном слое остается таким же, как в ядре течения,

уже не будет больше уравновешиваться центробежной силой. Вследствие этого в пограничном слое начнется перетекание жидкости в направлении градиента давления от вогнутой стенки к выпуклой. Интенсивность этого перетекания возрастает по мере приближения к стенке. Действительное наличие такого перетекания газа по боковым стенкам межлопаточного канала подтверждается фотографией (рис. 10.97), полученной А. М. Домашенко, Ю. Б. Елисеевым и М. Ф. Жуковым при продувке активной сверхзвуковой решетки (см. § 11 настоящей главы). Этот

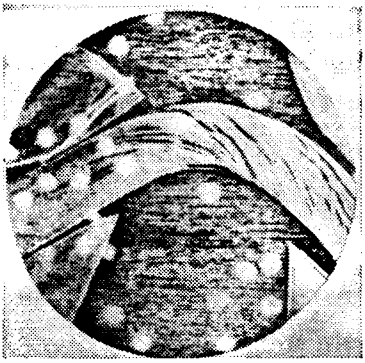


Рис. 10.97. Шлирен-фотография течения в пограничном слое на боковых оптических стеклах, ограничивающих межлопаточный канал активной сверхзвуковой решетки.

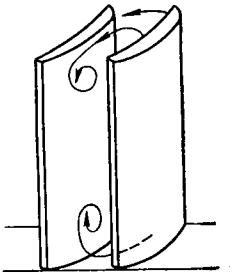


Рис. 10.98. К образованию парного вихря при обтекании вязким потоком решетки крыльев, расположенных между двумя параллельными плоскостями.

снимок сделан непосредственно после окончания работы аэродинамической трубы. На снимке видны следы влаги, сконденсировавшейся на боковых стенках — оптических стеклах — и представляющие собой линии тока в пограничном слое.

Попадая по плоским стенкам, ограничивающим межлопаточный канал, на выпуклую сторону профиля, часть жидкости или газа будет уноситься основным потоком. В результате у верхней и нижней поверхностей возникнут два вихря одинаковой интенсивности, но с противоположным вращением (рис. 10.98). Такая система вихрей называется *парным вихрем*. Затрата энергии на вихреобразование приводит к потерям полного давления, т. е. к возникновению дополнительных так называемых вторичных потерь. На рис. 10.99 приведено распределение коэффициента потерь по высоте лопатки для активной и конфузорной

решеток [1]). В средней части лопатки потери связаны только с обтеканием профиля и поэтому постоянны по высоте. Они называются профильными. Потери, связанные с вихреобразованием,

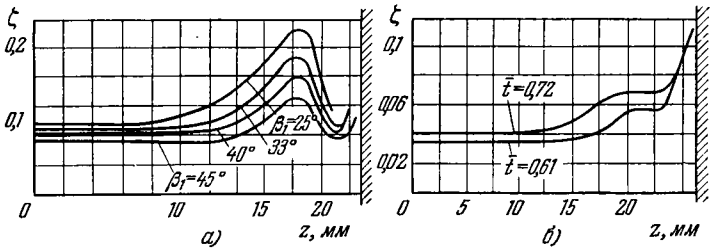


Рис. 10.99. Распределение потерь по размаху крыла в решетке: *а*) активная решетка с $\lambda = 2{,}25$; *б*) конфузорная решетка с $\lambda = 1{,}2$; z — расстояние от среднего сечения.

и течение у стенок имеют локальный характер и до некоторого минимального значения удлинения не зависят от него. Иначе говоря, относительная доля концевых потерь линейно уменьшается с ростом удлинения. По мере уменьшения удлинения

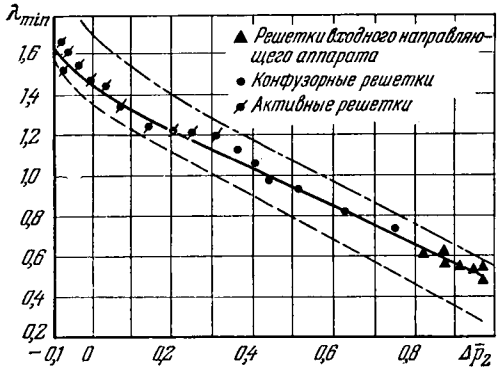


Рис. 10.100. Зависимость от $\Delta\bar{p}_2$ минимального удлинения крыльев решетки λ_{min}, при котором происходит смыкание вторичных течений.

вихревые области сближаются и при некотором λ_{min} обнаруживается только одна область повышенных потерь, расположенная в средних сечениях лопатки. На рис. 10.100 приведена [1])

[1]) Дейч М. Е., Самойлович Г. С., Основы аэродинамики осевых турбомашин, Машгиз, М., 1959.

зависимость λ_{min} от величины

$$\overline{\Delta p_2} = \frac{p_1 - p_2}{\rho \frac{w_2^2}{2}}.$$

График на рис. 10.100 показывает, что с увеличением $\overline{\Delta p_2}$ происходит падение λ_{min}, что косвенно свидетельствует об уменьшении интенсивности вихреобразования. Это связано с возрастанием конфузорного эффекта, т. е. с общим ускорением потока, приводящим к уменьшению толщины пограничного слоя и, таким образом, к ослаблению влияния вязкости. При уменьшении $\overline{\Delta p_2}$, особенно когда эта величина становится отрицательной и течение становится диффузорным, наблюдается обратный эффект.

Глава XI

ГИПЕРЗВУКОВЫЕ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА

§ 1. Изменение параметров газа в изоэнтропическом гиперзвуковом потоке

Течения газа со скоростью, значительно превосходящей скорость звука, называемые иногда гиперзвуковыми течениями, обладают рядом отличительных особенностей.

Выразим в явном виде влияние изменения скорости течения на основные параметры газа.

В единичной струйке газа при отсутствии потерь и внешней работы, согласно уравнению Бернулли (52) гл. I, имеем

$$dp = -\rho w\, dw.$$

Отсюда с помощью известного выражения для скорости звука (34) гл. I получаем соотношение, связывающее изменение давления с изменением скорости,

$$\frac{dp}{p} = -kM^2 \frac{dw}{w}. \tag{1}$$

Уравнение сохранения теплосодержания струйки при адиабатическом течении можно представить в виде

$$dT = -\frac{k-1}{kR} w\, dw.$$

После несложных преобразований отсюда следует

$$\frac{dT}{T} = 2\frac{da}{a} = -(k-1)\, M^2 \frac{dw}{w}. \tag{2}$$

Дифференцируя уравнение состояния идеального газа и используя соотношения (1) и (2), получаем аналогичную зависимость для изменения плотности

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dp}{p} - \frac{dT}{T} = -M^2 \frac{dw}{w}. \tag{3}$$

Дифференцируя равенство $w = Ma$ и выражая скорость звука через температуру газа, находим с помощью (2) соотношение

$$\frac{dM}{M} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right) \frac{dw}{w}. \tag{4}$$

Соотношения (1)—(4) показывают, что при дозвуковых скоростях ($M < 1$) происходит незначительное изменение давления, плотности и температуры газа с изменением скорости, а число Маха зависит от скорости линейно. Наоборот, при гиперзвуковых скоростях ($M \gg 1$) даже небольшое изменение скорости течения ведет к заметному изменению состояния газа и числа Маха.

При $M \gg 1$ в правой части выражения (4) можно пренебречь единицей, тогда имеем

$$\frac{dM}{M} \approx \frac{k-1}{2} M^2 \frac{dw}{w}. \tag{5}$$

Исключая из (1) и (5) множитель dw/w и выполняя интегрирование, получаем характерную для гиперзвуковых течений зависимость давления от числа Маха

$$\frac{p}{p_н} = \left(\frac{M_н}{M}\right)^{\frac{2k}{k-1}}. \tag{6}$$

Из (2) и (5) аналогичным путем выводится зависимость температуры от числа Маха

$$\frac{T}{T_н} = \left(\frac{M_н}{M}\right)^2, \tag{7}$$

откуда следуют соответствующие выражения для скорости звука

$$\frac{a}{a_н} = \frac{M_н}{M} \tag{8}$$

и плотности газа

$$\frac{\rho}{\rho_н} = \left(\frac{M_н}{M}\right)^{\frac{2}{k-1}}. \tag{9}$$

Интегрируя выражение (5), устанавливаем связь между скоростью потока и числом Маха

$$\frac{w}{w_н} \approx 1 + \left(\frac{1}{M_н^2} - \frac{1}{M^2}\right) \frac{1}{k-1}. \tag{10}$$

При выводе уравнения (10) функция $\ln \frac{w}{w_н}$ была разложена в ряд по степеням $\left(\frac{w}{w_н} - 1\right)$, причем ввиду близости отношения $\frac{w}{w_н}$ к единице все нелинейные члены этого ряда были отброшены.

В выражениях (6)—(10) величины без индексов соответствуют текущим значениям параметров газа, а величины с индексом «н» — их начальным значениям.

§ 2. Гиперзвуковое течение около выпуклого тупого угла

Рассмотрим особенности течения с очень большой скоростью около выпуклого тупого угла — гиперзвукового течения Прандтля — Майера (рис. 11.1). Секундная масса газа между произвольной линией тока и полюсом течения 0 постоянна и может быть вычислена по нормальной к характеристике составляющей скорости, которая равна скорости звука

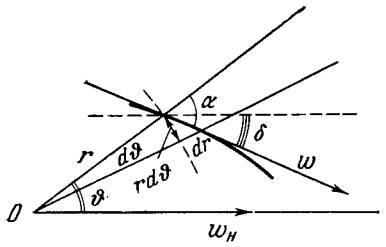


Рис. 11.1. Схема отклонения потока около выпуклого угла.

$$\rho a r = \text{const}.$$

Отсюда после дифференцирования имеем

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{da}{a} + \frac{dr}{r} = 0. \qquad (11)$$

Угол Маха (между линией тока и характеристикой) в случае гиперзвуковой скорости ($\mathbf{M} \gg 1$) определяется следующей приближенной зависимостью:

$$\alpha = \arcsin \frac{1}{\mathbf{M}} \approx \frac{1}{\mathbf{M}}. \qquad (12)$$

Если δ — угол отклонения потока от первоначального направления, а ϑ — угол между заданной характеристикой и первоначальным направлением потока, то, очевидно,

$$\vartheta = \alpha + \delta = \frac{1}{\mathbf{M}} + \delta. \qquad (13)$$

Здесь принимается во внимание, что направления отсчета углов α и δ противоположны ($\alpha > 0$, $\delta < 0$, так как отсчет ведется против часовой стрелки).

Из рис. 11.1 видно, что

$$\frac{1}{r}\frac{dr}{d\vartheta} = \frac{w_r}{a} = -\operatorname{ctg}\alpha = -\mathbf{M}, \qquad (14)$$

так как при $\mathbf{M} \gg 1$, согласно (12),

$$\operatorname{ctg}\alpha \approx \frac{1}{\sin\alpha} = \mathbf{M}.$$

Подставляя (14) в (11), имеем

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{da}{a} - \mathbf{M}\, d\vartheta = 0,$$

откуда на основании (2), (3) и (5) получаем

$$d\vartheta = -\frac{k+1}{k-1}\frac{d\mathbf{M}}{\mathbf{M}^2}.$$

Интегрируя это уравнение и учитывая соотношения (12) и (13) при условии, что начальному значению $\alpha = \alpha_н$ отвечает $\delta_н = 0$, получаем для гиперзвукового течения следующую связь между числом Маха и углом отклонения потока:

$$\delta = \frac{2}{k-1}\left(\frac{1}{M} - \frac{1}{M_н}\right); \tag{15}$$

здесь M и $M_н$ — текущее и начальное значения числа Маха. Разрешая уравнение (15) относительно текущего значения числа Маха

$$\frac{M_н}{M} = 1 + \frac{k-1}{2}\delta M_н \tag{15а}$$

и подставляя это значение в выражения (6)—(10), получим формулы для определения текущих значений давления, плотности, температуры, скорости звука и скорости потока при гиперзвуковом обтекании выпуклого тупого угла.

В частности, для давления имеем

$$\frac{p}{p_н} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M_н\delta\right)^{\frac{2k}{k-1}}. \tag{16}$$

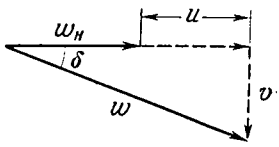


Рис. 11.2. Схема векторов скорости и возмущений при отклонении потока около выпуклого угла.

Расчеты показывают, что все полученные таким образом формулы точны при $M_н > 5$.

Предельный угол отклонения потока $\delta_{пр}$ соответствует расширению газа до полного вакуума ($p = 0$). Тогда из (16) имеем

$$\delta_{пр} = -\frac{2}{(k-1)M_н}. \tag{17}$$

Напомним, что при отклонении потока по часовой стрелке угол считается отрицательным ($\delta < 0$).

Как видим, произведение угла отклонения потока на начальное значение числа Маха $M_н\delta$, которое входит во все расчетные формулы как слитная величина, является основным параметром, определяющим данное течение.

Если ограничиться случаем малого отклонения потока около выпуклого тупого угла и представить изменение полной скорости как возмущение, характеризуемое появлением двух дополнительных составляющих скорости u и v, то, как следует из рис. 11.2,

$$w_н + u = w\cos\delta, \qquad v = w\sin\delta. \tag{18}$$

При малых углах отклонения потока

$$\cos\delta \approx 1 - \frac{\delta^2}{2}, \quad \sin\delta \approx \delta,$$

поэтому

$$u = w\left(1 - \frac{\delta^2}{2}\right) - w_н, \qquad v = w\delta. \tag{19}$$

Отсюда с помощью (10) и (15а) получаем

$$\frac{u}{w_н} = -\left(\frac{1}{M_н\delta} + \frac{k+1}{4}\right)\delta^2, \quad \frac{v}{w_н} = \delta. \tag{20}$$

В первом из этих выражений отброшены вследствие малости члены с множителями δ^3 и δ^4, во втором — с множителями δ^2 и δ^3.

Как видим, в гиперзвуковом течении около выпуклого угла поперечное возмущение скорости потока по крайней мере на порядок превосходит продольное возмущение ($v \gg u$). Это значит, что при течении происходит как бы смещение частиц по нормали к направлению невозмущенного потока, величина же продольной скорости практически не изменяется.

§ 3. Плоская ударная волна в гиперзвуковом течении

Остановимся теперь на соотношениях, характеризующих плоскую ударную волну, возникающую при обтекании с гиперзвуковой скоростью вогнутого тупого угла. В плоской косой ударной волне изменение плотности, согласно (47) гл. III, будет

$$\frac{\rho}{\rho_н} = \frac{\dfrac{k+1}{k-1}}{1 + \dfrac{2}{k-1}\dfrac{1}{M_н^2\sin^2\alpha}}. \tag{21}$$

Здесь α — угол наклона фронта ударной волны к вектору скорости $w_н$.

Изменение давления в такой волне, согласно (45) гл. III,

или

$$\left.\begin{aligned} \frac{p}{p_н} &= \frac{2k}{k+1}M_н^2\sin^2\alpha - \frac{k-1}{k+1} \\ \frac{p-p_н}{\rho_н w_н^2} &= \frac{2}{k+1}\left(\sin^2\alpha - \frac{1}{M_н^2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Зависимость угла отклонения потока в ударной волне от угла наклона фронта α определяется из (50) гл. III

$$\omega = \alpha - \beta, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{k-1}{k+1}\left(1 + \frac{2}{k-1}\frac{1}{M_н^2\sin^2\alpha}\right)\operatorname{tg}\alpha, \tag{23}$$

где β — угол между вектором скорости за ударной волной и фронтом последней.

Отсюда получаем после элементарных преобразований

$$\operatorname{tg}\omega = \operatorname{ctg}\alpha \frac{\sin^2\alpha - \dfrac{1}{M_н^2}}{\dfrac{k+1}{2} - \left(\sin^2\alpha - \dfrac{1}{M_н^2}\right)}. \tag{24}$$

Из (21) и (22) с помощью уравнения состояния можно вывести соответствующие зависимости для отношения температур и значений скорости звука в ударной волне.

Возмущения скорости в ударной волне (u, v) найдем из очевидных соотношений

$$u = w\cos\omega - w_н, \qquad v = w\sin\omega, \tag{25}$$

причем в соответствии со схемой отклонения скоростей в ударной волне (рис. 11.3) имеем

$$u = w_н\left(\frac{\cos\alpha\cos\omega}{\cos\beta} - 1\right), \qquad v = w_н\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\sin\omega. \tag{26}$$

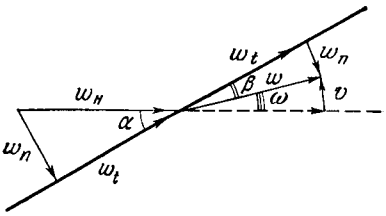


Рис. 11.3. Схема отклонения потока в ударной волне.

Заменяя $\cos\beta = \cos(\alpha - \omega)$, после элементарных преобразований получаем

$$v = w_н\frac{2}{k+1}\operatorname{ctg}\alpha\left(\sin^2\alpha - \frac{1}{M_н^2}\right), \qquad u = -w_н\frac{2}{k+1}\left(\sin^2\alpha - \frac{1}{M_н^2}\right). \tag{27}$$

Из соотношения (24) следует, что при гиперзвуковых скоростях ($M_н > 5$) угол наклона фронта скачка α близок к углу отклонения потока в скачке ω, в связи с чем слой уплотненного газа, расположенный между фронтом скачка и поверхностью тела, оказывается очень тонким.

В достаточно интенсивных скачках уплотнения $\left(\frac{p}{p_н} \gg 10\right)$ всегда имеет место неравенство

$$\sin\alpha \gg \frac{1}{M_н}. \tag{28}$$

При любом сколь угодно малом фиксированном значении угла отклонения потока ω можно достичь такого значения числа Маха, при котором условие (28) будет выполнено. Следова-

тельно, в соотношениях (21)—(27) можно пренебречь членами $1/M_н^2$, и тогда окажется, что безразмерные значения возмущений скорости $u/w_н$, $v/w_н$, безразмерная плотность $\rho/\rho_н$ и угол наклона фронта скачка α не зависят от $M_н$, а безразмерные значения давления $p/p_н$ (и температуры $T/T_н$) пропорциональны величине $M_н^2$:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{u}{w_н} = -\frac{2}{k+1}\sin^2\alpha, \qquad \frac{v}{w_н} = \frac{2}{k+1}\sin\alpha\cos\alpha, \\ &\frac{p-p_н}{\rho_н w_н^2} = \frac{2}{k+1}\sin^2\alpha \quad \text{или} \quad \frac{p}{p_н} = \frac{2k}{k+1}M_н^2\sin^2\alpha, \\ &\frac{\rho}{\rho_н} = \frac{k+1}{k-1}, \qquad \operatorname{tg}\omega = \frac{\frac{2}{k+1}\sin\alpha\cos\alpha}{1-\frac{2}{k+1}\sin^2\alpha}. \end{aligned}\right\} \quad (29)$$

Таким образом, при больших гиперзвуковых скоростях в области за интенсивными скачками уплотнения наблюдается

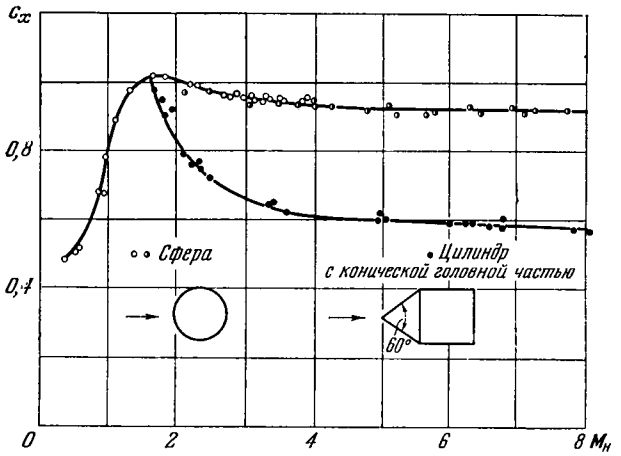


Рис. 11.4. Зависимость коэффициентов сопротивления сферы и цилиндра с конической передней частью от числа Маха.

некоторое предельное состояние газового течения, при котором характеризующие его безразмерные параметры и аэродинамические коэффициенты не зависят от значения числа $M_н$. Аналогичные особенности газового течения мы наблюдали при очень малых — дозвуковых — скоростях ($M_н \infty 0$), когда также свойства потока не зависят от значения $M_н$ (несжимаемая жидкость).

Опыты показывают, что указанное предельное состояние газового течения (при $M_н \to \infty$) достигается практически при сравнительно умеренных значениях числа $M_н$.

Об этом свидетельствуют, например, экспериментальные зависимости коэффициентов сопротивления $c_x(M_н)$ сферы и цилиндра с конической головной частью, изображенные на рис. 11.4; как видим, уже при $M_н = 3-4$ значения c_x весьма близки к асимптотическим, соответствующим $M_н \to \infty$; стабильность значений аэродинамических коэффициентов свидетельствует о неизменности всей картины течения газа вблизи тела.

Общее строгое доказательство указанной автомодельности течений с большой сверхзвуковой скоростью было дано впервые С. В. Валандером в 1949 г.[1]).

Если ударная волна недостаточно интенсивна, т. е. угол отклонения потока ω в ней мал, то при гиперзвуковой скорости угол α также мал; производя замены

$$\sin\alpha \approx \alpha, \quad \sin\omega \approx \omega, \quad \cos\alpha \approx 1, \quad \cos\omega \approx 1,$$

и обозначая $\alpha M_н = K_\alpha$, $\omega M_н = K_\omega$, получим из (24)

$$\omega = \alpha \frac{1 - \frac{1}{K_\alpha^2}}{\frac{k+1}{2} - \alpha^2\left(1 - \frac{1}{K_\alpha^2}\right)}, \tag{30}$$

откуда при $\alpha \ll 1$

$$K_\alpha = \frac{k+1}{4} K_\omega + \sqrt{\left(\frac{k+1}{4} K_\omega\right)^2 + 1}. \tag{31}$$

Соответственно из равенства (21) получаем

$$\frac{\rho}{\rho_н} = \frac{\frac{k+1}{k-1}}{1 + \frac{2}{k-1}\frac{1}{K_\alpha^2}}, \tag{32}$$

из равенства (22)

$$\frac{p}{p_н} = 1 + \frac{2k}{k+1}(K_\alpha^2 - 1), \tag{33}$$

из равенств (27)

$$\frac{u}{w_н \omega^2} = -\frac{2}{k+1}\frac{K_\alpha^2 - 1}{K_\alpha^2} \quad \text{и} \quad \frac{v}{w_н \omega} = 1. \tag{34}$$

Найдем теперь число Маха за скачком уплотнения

$$M^2 = M_н^2 \frac{w^2}{w_н^2}\frac{p_н}{p}\frac{\rho}{\rho_н}. \tag{35}$$

---

[1]) См. Черный Г. Г., Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью, Физматгиз, М., 1960.

Как следует из (34), в случае гиперзвукового течения относительная скорость газа на скачке при малом угле последнего почти не изменяется ($w \approx w_н$). Тогда из (35) с помощью (32) и (33) получаем

$$\frac{M_н^2}{M^2} \approx \left[\frac{2k}{k+1} M_н^2\alpha^2 - \frac{k-1}{k+1}\right]\left[\frac{k-1}{k+1} + \frac{2}{k+1}\frac{1}{M_н^2\alpha^2}\right]. \quad (36)$$

В предельном случае, когда $M_н \to \infty$, имеем

$$M \to \frac{k+1}{\alpha}\frac{1}{\sqrt{2k(k-1)}}.$$

При $M_н \to \infty$, согласно (31), $\alpha = \omega(k+1)/2$, поэтому

$$M \to \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2}{k(k-1)}}. \quad (37)$$

Иначе говоря, в случае $M_н \to \infty$ при малых углах наклона скачка α число Маха за скачком будет очень большим. Если скачок имеет небольшую интенсивность, то числа Маха перед и за скачком при гиперзвуковой скорости имеют значения одного и того же порядка.

При рассмотрении течения Прандтля — Майера (§ 2) мы представили все параметры в функции угла отклонения потока, тогда как для течения за ударной волной найдены зависимости, содержащие угол самой ударной волны.

Пользуясь выражениями (30) и (31), получаем

$$M_н^2\alpha^2 - 1 = \frac{k+1}{2}(M_н\alpha)(M_н\omega) =$$

$$= \frac{k+1}{2}(M_н\omega)\left[\frac{k+1}{4}M_н\omega + \sqrt{\left(\frac{k+1}{4}M_н\omega\right)^2 + 1}\right] \quad (38)$$

или для сильных возмущений ($M_н\omega \gg 1$)

$$M_н^2\alpha^2 - 1 = 2\left(\frac{k+1}{4}M_н\omega\right)^2\left[1 + \sqrt{1 + \frac{1}{\left(\frac{k+1}{4}M_н\omega\right)^2}}\right] \approx$$

$$\approx \left(\frac{k+1}{2}M_н\omega\right)^2. \quad (39)$$

Подставляя (39) в формулы (31)—(34), можно представить изменения давления и плотности в ударной волне, а также величины возмущений скорости в функции угла отклонения потока (угла встречи потока с поверхностью тела).

Из этих зависимостей следует, что при гиперзвуковых скоростях в плоской косой ударной волне изменение параметров определяется (как и в течении Прандтля — Майера) одним критерием $K_\omega = M_н\omega$ — произведением числа Маха на угол отклонения потока.

§ 4. Гиперзвуковое обтекание плоской пластины при малом угле атаки

Полученные в §§ 2 и 3 выражения дают возможность вывести простые формулы для коэффициентов подъемной силы и лобового сопротивления пластины, обтекаемой газовым потоком большой сверхзвуковой скорости при малом угле атаки.

Коэффициент полной аэродинамической силы, направленной перпендикулярно к пластине, равен

$$c = \frac{p' - p''}{\rho_н \frac{w_н^2}{2}} = \left(\frac{p'}{p_н} - \frac{p''}{p_н}\right)\frac{2}{k\mathsf{M}_н^2}. \tag{40}$$

Здесь уменьшаемое есть безразмерное давление на нижней стороне пластины (за скачком), равное, согласно (33),

$$\frac{p'}{p_н} = 1 + \frac{2k}{k+1}(\mathsf{M}_н^2\alpha^2 - 1).$$

Вычитаемое в правой части равенства (40) представляет собой безразмерное давление на верхней стороне пластины (как при обтекании выпуклого тупого угла), которое на основании (16) при $\delta = -\omega$ имеет вид

$$\frac{p''}{p_н} = \left(1 - \frac{k-1}{2}\mathsf{M}_н\omega\right)^{\frac{2k}{k-1}}.$$

Преобразуя с помощью полученных выражений равенство (40) и используя (38), получим

$$c = \left\{\frac{k+1}{2} + \sqrt{\frac{(k+1)^2}{2} + \frac{4}{\mathsf{M}_н^2\omega^2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{k\mathsf{M}_н^2\omega^2}\left[1 - \left(1 - \frac{k-1}{2}\mathsf{M}_н\omega\right)^{\frac{2k}{k-1}}\right]\right\}\omega^2. \tag{41}$$

Если угол атаки пластины ω равен или больше предельного угла поворота потока в течении Прандтля — Майера, который определяется (17), то на верхней стороне пластины устанавливается полный вакуум. В этом случае величина, стоящая в квадратной скобке выражения (41), равна нулю.

При малых углах атаки коэффициенты подъемной силы c_y и лобового сопротивления c_x связаны с коэффициентом полной аэродинамической силы следующим образом:

$$c_y = c\cos\omega \approx c, \quad c_x = c\sin\omega \approx c\omega \approx c_y\omega. \tag{42}$$

При $\mathsf{M}_н \to \infty$ имеем

$$c_y = (k+1)\omega^2, \quad c_x = (k+1)\omega^3.$$

Как видим, аэродинамические коэффициенты при очень больших значениях $M_н$ и при малых углах атаки весьма малы и, кроме того, не зависят от величины $M_н$; в общем случае эти коэффициенты зависят от критерия K_ω.

§ 5. О гиперзвуковом обтекании тонких заостренных спереди тел

Результаты, полученные в §§ 2—4, могут быть применены непосредственно к расчету гиперзвукового обтекания тонкого заостренного спереди тела, так как течение у поверхности такого тела представляет собой либо течение за косой ударной волной (при положительном угле отклонения потока), либо течение Прандтля — Майера (при отрицательном угле отклонения потока).

Как уже было показано выше, в таких случаях при малых углах заострения тела и малых углах атаки основной критерий подобия представляет собой произведения числа Маха набегающего потока $M_н$ на некоторый характерный угол τ. Под τ может подразумеваться угол отклонения потока $\tau = \omega$ (угол наклона поверхности тела к набегающему потоку) или относительная толщина тела $\tau = d/l$ (отношение максимального поперечного размера к длине тела), так как в случае тонкого тела эти величины пропорциональны. Тонкие заостренные тела, у которых критерий $K_\tau = M_н\tau = \text{idem}$, будем в дальнейшем называть аффинно-подобными. Ясно, что сохранение аффинноподобного обтекания тела при изменении угла атаки δ достигается в том случае, если последний пропорционален характерному углу тела, т. е. при условии $\delta/\tau = \text{idem}$. Итак, относительные величины скоростей, коэффициенты аэродинамических сил и другие факторы, характеризующие гиперзвуковое обтекание тонкого тела, сохраняют свои значения, если не изменяются величины $M_н\tau$ и δ/τ.

Это подтверждается опытными данными, приведенными на рис. 11.5, на котором изображены кривые безразмерных значений избыточного давления на поверхности цилиндра с оживальной головной частью, полученные при разных значениях числа Маха и для различных величин относительной толщины оживальной части (при нулевом угле атаки). Как видим кривые распределения давлений универсальны при $M_н = \text{var}$ и $\tau = \text{var}$, если выдерживается условие аффинного подобия: $M_\tau = \text{idem}$.

В монографии Г. Г. Черного показано, что область действия закона подобия для гиперзвукового обтекания тонкого тела оживальной формы приблизительно определяется следующими границами:

$$M_н > 2, \quad \tau = \frac{d}{l} < 0{,}5.$$

Заметим, что область применимости закона подобия значительно расширяется, если в качестве критерия подобия вместо величины $M_н\tau$ взять величину $\tau\sqrt{M_н^2 - 1}$. Выше было показано, что при гиперзвуковом обтекании тонкого тела продольное возмущение скорости ничтожно $|u \ll w|$, а поперечная скорость пропорциональна углу наклона поверхности тела

$$v = \tau w.$$

Иначе говоря, тонкое тело раздвигает слои обтекающего его газа таким образом, как будто в каждом слое (независимо от соседних слоев) происходит вытеснение газа непроницаемым подвижным поршнем в направлении, перпендикулярном к направлению движения тела. Если всю область обтекания разбить плоскостями, перпендикулярными к скорости набегающего потока на множество слоев, то в каждом из них будет наблюдаться неустановившееся движение, направленное только параллельно этим плоскостям.

Эта особенность гиперзвуковых течений получила название закона плоских сечений, с помощью которого нетрудно определить лобовое сопротивление тела, равное работе расширения соответствующей формы эквивалентного поршня, совершаемой над газом в слое за время прохождения

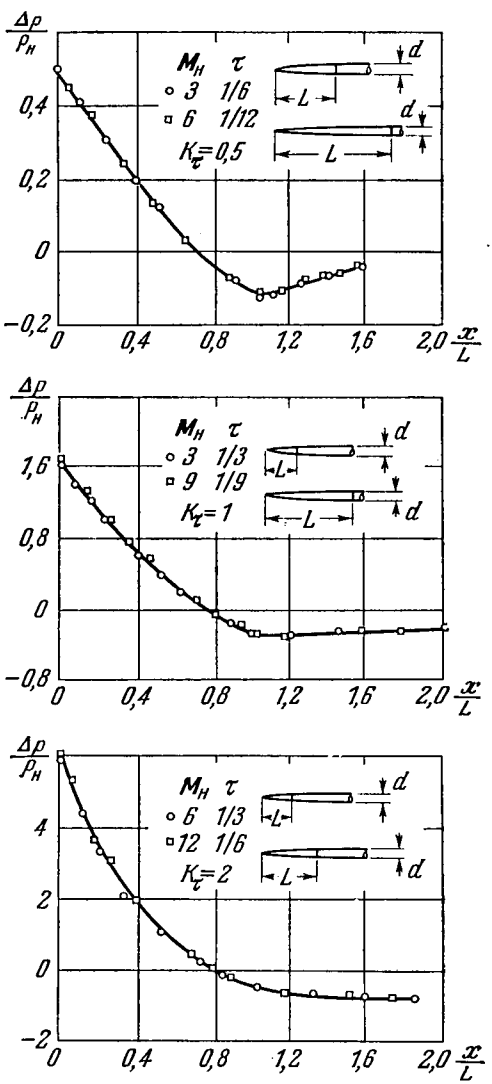


Рис. 11.5. Распределение давлений при обтекании потоком с большой сверхзвуковой скоростью аффинноподобных тел.

тела сквозь этот слой. Контур поршня в каждый момент времени и нормальная скорость его точек определяются формой тела, а давление на его поверхности отыскивается из решения соответствующей задачи о неустановившемся движении газа [1]).

§ 6. Закон сопротивления Ньютона

Значительный накопленный опыт показывает, что для расчета сопротивления тела при гиперзвуковом обтекании можно использовать закон сопротивления Ньютона, полагавшего, что движущаяся жидкость состоит из одинаковых частиц, заполняющих равномерно пространство и не взаимодействующих друг с другом; при столкновении с телом частицы теряют нормальную к поверхности тела составляющую количества движения (неупругий удар), вследствие чего появляется сила давления потока на тело. Избыточное давление жидкости на участки тела, расположенные позади его наибольшего поперечного сечения, т. е. в аэродинамической тени (рис 11.6), Ньютон считал равным нулю.

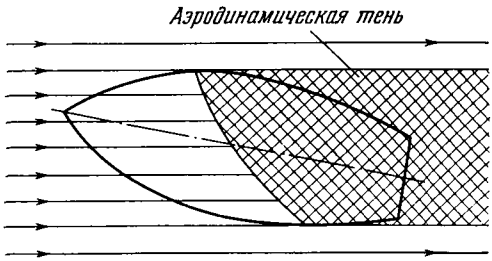


Рис. 11.6. Обтекание тела, соответствующее модели Ньютона.

Если элемент поверхности тела площадью dF наклонен к набегающему потоку под углом ω, то масса газа, в которой происходит потеря количества движения, равна $\rho w \sin\omega\, dF$, а нормальная («потерянная») составляющая скорость есть $w \sin\omega$, поэтому нормальная составляющая силы давления по закону Ньютона

$$dP = \rho w^2 \sin^2\omega\, dF, \tag{43}$$

а величина местного увеличения давления газа

$$p - p_н = \frac{dP}{dF} = \rho w^2 \sin^2\omega. \tag{44}$$

В общем случае обтекания тела предположение Ньютона, разумеется, не оправдывается в связи с тем, что возмущение, вызванное телом в потоке, распространяется на большое расстояние от тела и постепенно с удалением от тела ослабляется, т. е. соседние струйки газа имеют разные направления и вели-

[1]) Подробнее о применении закона плоских сечений см. в монографии Г. Г. Черного.

чины скоростей. Однако при обтекании тела с большой сверхзвуковой скоростью закон Ньютона становится справедливым, так как в этом случае ударная волна располагается близко к поверхности тела и все струйки до ударной волны имеют одинаковые направление и величину скорости (невозмущенного потока), а за ударной волной движутся в тонком слое между нею и телом и приобретают почти одинаковые скорости, параллельные поверхности тела. Чем больше число Маха и тоньше тело, тем ближе к действительности теория Ньютона. Вместе с тем следует отметить, что даже в предельном случае $M \to \infty$ закон Ньютона отвечает точному решению задачи только при $k = 1$.

Если $k \neq 1$, то закон Ньютона неточен даже при $M \to \infty$, так как при этом из точного решения (29) имеем

$$p - p_н = \frac{2}{k+1} \rho_н w_н^2 \sin^2 \alpha, \quad \operatorname{tg} \omega = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\frac{k-1}{2\cos^2 \alpha} + 1}. \tag{45}$$

Однако практический расчет распределения давлений по поверхности тела, обтекаемого гиперзвуковым потоком, с помощью

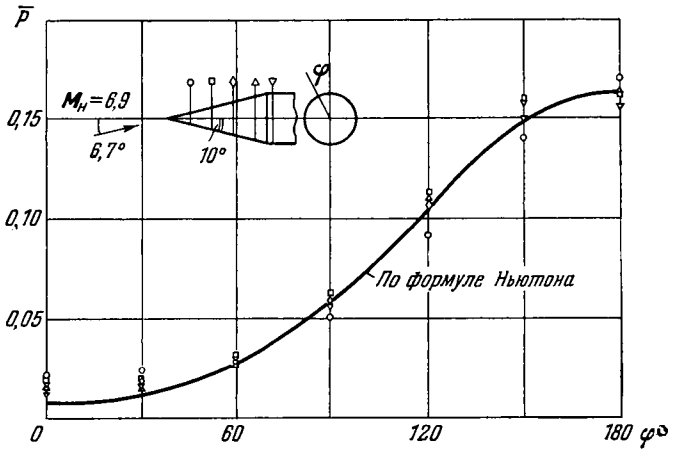


Рис. 11.7. Распределение давления по окружности конуса, обтекаемого потоком под углом атаки. Сравнение формулы Ньютона и экспериментальных данных.

закона Ньютона дает во многих случаях удовлетворительные результаты несмотря на то, что влияние вязкости в теории Ньютона не учитывается.

На рис. 11.7 показано безразмерное давление $\left(\bar{p} = \frac{p - p_н}{\rho_н w_н^2}\right)$ в различных точках поверхности конуса с центральным углом

20° ($\omega = 10°$), обтекаемого потоком воздуха с $M_н = 6{,}9$ под углом атаки $\delta = 6{,}7°$. Кривая на рис. 11.7 рассчитана по формуле Ньютона (44). Как видим, экспериментальные точки лежат достаточно близко к теоретической кривой.

Пригодность формулы Ньютона для расчета давления на теле, свидетельствующая о том, что локальная картина обтекания определяется местным «углом встречи» поверхности тела с невозмущенным потоком, привела к мысли о возможности расчета гиперзвукового обтекания заостренного тела по методу касательных клиньев (для осесимметричного тела — касательных

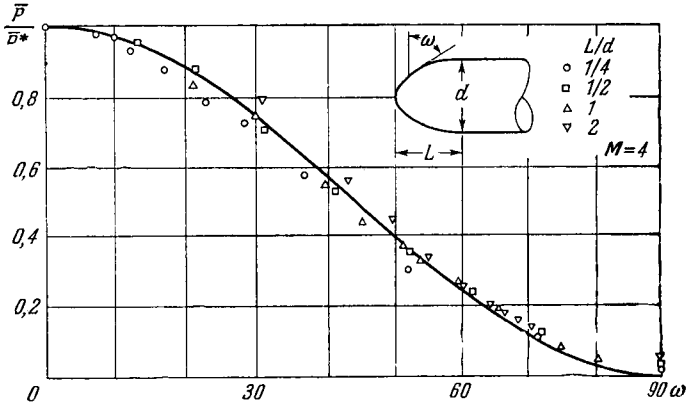


Рис. 11.8. Распределение давления по поверхности обтекаемых в продольном направлении цилиндров с головной частью в виде эллипсоидов вращения.

конусов). В этом методе, предложенном С. В. Валандером в 1949 г., предполагается, что местное давление в любой точке на поверхности произвольного тела такое же, как на клине (конусе), касательном к поверхности в этой точке,

Метод касательных клиньев (конусов) менее удобен, чем формула Ньютона, так как в общем случае зависимость давления на клине от его угла представляется в неявной форме, а на конусе она определяется лишь численными методами.

Однако в гиперзвуковом приближении эти зависимости, как было показано в § 3, удается получить в явной аналитической форме.

Было замечено, что можно добиться значительно лучшего совпадения расчетных и экспериментальных данных, если следующим образом видоизменить формулу Ньютона:

$$\bar{p} = \bar{p}^* \frac{\sin^2 \omega}{\sin^2 \omega^*}; \qquad (46)$$

здесь $\bar{p}^*$ — безразмерное давление в передней точке тела, которое легко вычислить по теории сверхзвуковых течений идеального газа при заданном ω^* — угле между касательной к контуру тела в этой точке и направлением набегающего потока; ω — аналогичный угол в произвольной точке контура.

На рис. 11.8 дано распределение давления по поверхности симметричных продольно-обтекаемых цилиндров различной длины с эллипсоидной головной частью при $M = 4$; сплошная линия, рассчитанная по уточненной формуле Ньютона (46), проходит близко к экспериментальным точкам.

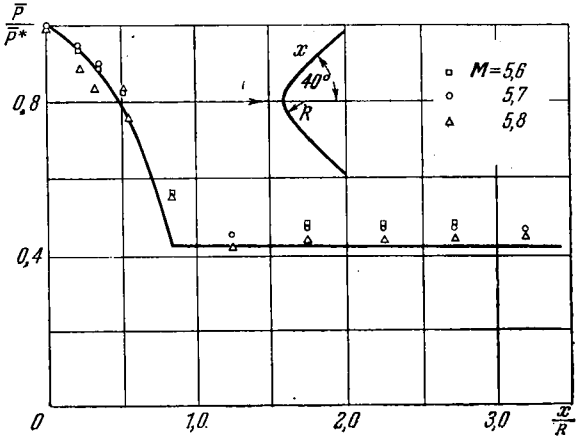


Рис. 11.9. Распределение давления по поверхности конуса со сферической головной частью.

На рис. 11.9 представлена картина распределения давлений по длине конуса со сферической головной частью радиуса R (центральный угол раскрытия конуса $2\omega = 80°$) при значениях числа Маха $M = 5{,}6 - 5{,}8$; кривая, рассчитанная по формуле (46), проходит близко к экспериментальным точкам.

Заметим, что расчеты по формуле Ньютона дают хорошие результаты для тел выпуклой формы; в случае тел вогнутой формы расчетные значения сил давления получаются заниженными. Это объясняется тем, что в действительности слой газа, заключенный между ударной волной и поверхностью тела, не бесконечно тонок, поэтому при криволинейной форме этого слоя возникает градиент давления по его толщине; разность давлений на поверхностях тела и ударной волны порождена центробежной силой, учтя которую, можно получить поправку к формуле Ньютона, которую впервые ввел Буземан.

С помощью формулы Ньютона удается решить задачу о форме тела наименьшего сопротивления при некоторых заданных условиях (при заданных объеме и длине тела или при заданных площади наибольшего сечения и длине и т. д.).

Для решения такой задачи нужно прежде всего составить выражения для сил, действующих на тело.

Проекция элементарной силы давления на направление движения — лобовое сопротивление, согласно (43),

$$dP_x = dP \sin\omega = \rho_н w_н^2 \sin^3\omega\, dF,$$

откуда полная сила сопротивления

$$P_x = \rho_н w_н^2 \int_0^F \sin^3\omega\, dF = \rho_н w_н^2 \int_0^{F_y} \sin^2\omega\, dF_y, \qquad (47)$$

где F — поверхность тела, F_y — ее проекция на плоскость, нормальную к направлению движения.

Поперечная составляющая элементарной силы давления — подъемная сила

$$dP_y = -\rho_ω w_н^2 \sin^2\omega \cos\omega\, dF.$$

Отсюда полная величина подъемной силы

$$P_y = -\rho_н w_н^2 \int_0^F \sin^2\omega \cos\omega\, dF = -\rho_н w_н^2 \int_0^{F_y} \sin\omega \cos\omega\, dF_y. \qquad (48)$$

Задаваясь той или иной формой зависимости угла наклона поверхности от длины, можно произвести интегрирование (47) и (48) и получить аналитические зависимости, которые затем использовать, в частности, для отыскания оптимальных значений геометрических параметров тела при каких-либо заданных условиях путем решения задачи на минимум величины P_x.

С помощью формулы Ньютона нетрудно, например, показать, что при гиперзвуковом обтекании затупленный конус с меньшим боковым углом может иметь меньшее сопротивление, чем заостренный конус с бóльшим углом (рис. 11.10).

Если «площадка» в носовой части затупленного конуса имеет радиус r и его боковой угол ω_2, а у «острого» конуса той же длины и того же максимального радиуса R боковой угол ω_1, то согласно (47) отношение сил лобового сопротивления этих тел составляет

$$f = \frac{P_{x2}}{P_{x1}} = \frac{r^2 + (R^2 - r^2)\sin^2\omega_2}{R^2 \sin^2\omega_1},$$

где

$$\sin^2\omega_2 = \frac{(R-r)^2}{(R-r)^2 + x^2}, \quad \sin^2\omega_1 = \frac{R^2}{R^2 + x^2}.$$

Подставляя эти выражения и вводя безразмерные обозначения $\bar{x} = x/R$, $\bar{r} = r/R$, получим окончательно

$$f = (1 + \bar{x}^2)\frac{(1-\bar{r})^2 + \bar{r}^2\bar{x}^2}{(1-\bar{r})^2 + \bar{x}^2}.$$

Приравнивая нулю первую производную функции f, найдем оптимальную величину радиуса $\bar{r}_{\text{опт}}$, которому соответствует минимум значения этой функции, т. е. минимум сопротивления

$$\bar{r}_{\text{опт}} = 1 + 0{,}5\bar{x}^2 - \sqrt{\bar{x}^2 + 0{,}25\bar{x}^4}.$$

Например, при $\bar{x} = 1$ имеем $r_{\text{опт}} = 0{,}38$ и $f_{\min} = 0{,}76$, т. е. сопротивление оптимального усеченного конуса оказывается на 24% меньше, чем у обычного конуса той же длины.

Решая тем же методом эту задачу для клина, можно убедиться в том, что по расчету «оптимальный» усеченный клин получается лишь при $\bar{x} < 1$ ($\omega > 45°$), т. е. при столь большом центральном угле раскрытия, что, по-видимому, теряется практическая значимость решения.

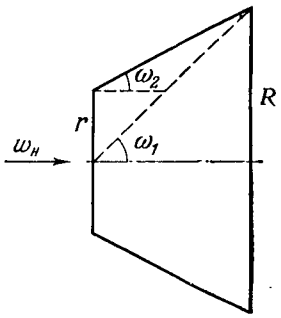


Рис. 11.10. Усеченный и полный конусы равной длины с одинаковыми мидельными сечениями.

Остановимся теперь на упоминавшейся выше поправке Буземана к формуле Ньютона для случая обтекания криволинейной поверхности. Ввиду того что слой газа, состоящий из частиц, заключенных между поверхностью тела и ударной волной, не бесконечно тонок, давление непосредственно за волной при криволинейной траектории частиц не равно давлению на поверхности; разность этих давлений вызвана действием центробежной силы.

В элементарном слое толщиной $d\delta$ эта разность давлений, очевидно, равна

$$dp = \rho w^2 \frac{d\delta}{R},$$

где R — радиус кривизны слоя, ρ, w — значения плотности газа и скорости движения в слое (вдоль линии тока).

Из условия неразрывности имеем

$$\rho w l\, d\delta = \rho_н w_н\, dF_y.$$

Здесь l — ширина слоя по нормали к плоскости чертежа, F_y — площадь сечения тела плоскостью, нормальной к направлению набегающего потока. Подставляя значение $d\delta$ из этого

равенства в предыдущее, имеем

$$dp = \frac{\rho_н w_н}{lR} w\, dF_y.$$

После интегрирования получаем изменение давления поперек слоя за счет центробежной силы

$$p - p_w = \frac{\rho_н w_н}{lR} \int_{F_{0y}}^{F_y} w\, dF_y.$$

Составляющая скорости, касательная к поверхности тела, при встрече частиц с телом не изменяется, следовательно, $w = w_н \cos \omega$. Поскольку радиус кривизны поверхности

$$R = -\frac{ds}{d\omega} = -\frac{dF}{l \sin \alpha\, d\alpha},$$

где s — длина, измеренная по обводу тела, то разность давлений на стенке и на границе слоя

$$p_w - p = \rho_н w_н^2 \sin \alpha \frac{d\alpha}{dF} \int_{F_{0y}}^{F_y} \cos \alpha\, dF_y.$$

Давление на границе слоя определяется по формуле Ньютона (46), поэтому избыточное давление на стенке с учетом центробежной силы равно

$$p_w - p_н = \rho_н w_н^2 \left(\sin^2 \alpha + \sin \alpha \frac{d\alpha}{dF} \int_{F_{0y}}^{F_y} \cos \alpha\, dF_y \right). \qquad (49)$$

Эта зависимость впервые была получена Буземаном и названа формулой Ньютона — Буземана. Для тел выпуклой формы расчет по исходному закону Ньютона (44) дает результаты, более близкие к опытным данным, чем расчет по уточненной формуле (49). Это объясняется тем, что по формуле Ньютона давление получается ниже истинного (так как угол встречи потока с ударной волной α больше угла встречи с телом ω, который фигурирует в формуле Ньютона), а для выпуклого тела поправка на центробежную силу дополнительно уменьшает давление. Наоборот, в случае вогнутого тела поправка на центробежную силу положительна, т. е. компенсирует заниженное давление, которое дает закон Ньютона. Сопоставление расчетов с опытными данными показывает, что для вогнутого тела формула (49) дает лучшие результаты, чем формула (44).

§ 7. Влияние малого затупления переднего конца тонкого тела на его обтекание при гиперзвуковых скоростях

При гиперзвуковом обтекании тонкого тела с затупленной носовой частью образуется отошедшая ударная волна, в передней части которой давление возрастает настолько сильно, что даже при малых размерах затупления аэродинамическое сопротивление может существенно увеличиться. Мимо этого факта нельзя пройти в связи с тем, что реальные тела (крылья, фюзеляжи, корпуса ракет) всегда бывают затуплены. Осуществить полет идеально заостренного тела нельзя хотя бы потому, что при больших скоростях полета нагревание воздуха около носовой части тела настолько значительно, что заостренный конец неизбежно должен оплавиться.

Положим в первом приближении, что сопротивление затупленного тонкого тела равно сумме сопротивления затупления P_{x1} и сопротивления остальной части тела P_{x2}, давление на которую определяется по теории гиперзвукового обтекания заостренного тела (§ 5). Отношение этих сопротивлений, согласно (29), (33) и (39):

$$\frac{P_{x1}}{P_{x2}} \sim \frac{F_{y1}}{\omega^2 F_{y2}}. \tag{50}$$

Здесь ω — угол между боковой поверхностью тела и направлением набегающего потока, F_{y1}, F_{y2} — проекции на плоскость, перпендикулярную к направлению набегающего потока, поверхностей соответственно затупленной части и всего остального тела.

Отсюда видно, что дополнительное сопротивление, вызванное затуплением тонкого тела, сравнимо с сопротивлением исходного заостренного тела при весьма малой относительной площади затупления

$$\frac{F_{y1}}{F_{y2}} \sim \omega^2. \tag{51}$$

Например, при угле отклонения потока $\omega = 5^\circ = 0{,}087$ рад сопротивление затупленного тела при относительной площади затупления $F_{y1}/F_{y2} \approx 0{,}0075$ примерно удваивается. Заменим отношение площадей отношением линейных размеров

$$\frac{F_{y1}}{F_{y2}} = \left(\frac{d}{D}\right)^{\nu}. \tag{52}$$

Здесь d — поперечный размер затупленной части, $D = \omega L$ — линейный размер максимального поперечного сечения тела, L —

длина тела, ν — показатель степени, равный единице для плоских тел и двум для осесимметричных тел.

Таким образом, имеем для клина

$$\frac{F_{y1}}{F_{y2}} = \frac{d}{D},$$

а для конуса

$$\frac{F_{y1}}{F_{y2}} = \left(\frac{d}{D}\right)^2.$$

Относительный линейный размер затупленной части тонкого тела, у которого сопротивление при гиперзвуковом обтекании

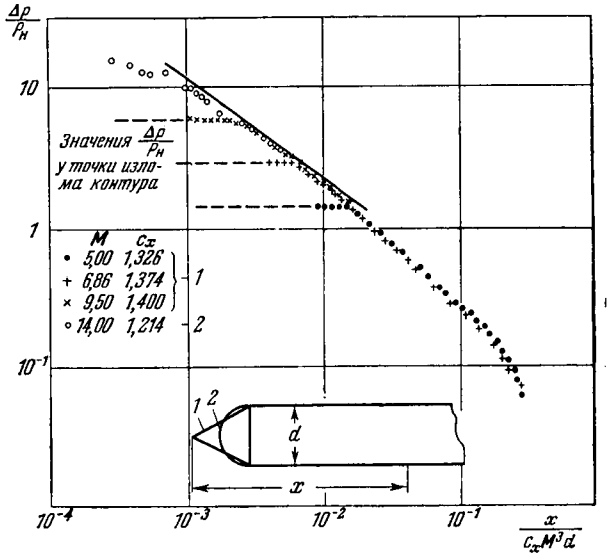


Рис. 11.11. Распределение давления на пластине с клиновидной (*1*) и закругленной (*2*) кромками.

в два раза больше, чем у такого же заостренного тела, связан с углом отклонения потока соотношением

$$\frac{d}{D} \sim \omega^{\frac{2}{\nu}} \quad \text{или} \quad \frac{d}{L} \sim \omega^{\frac{2+\nu}{\nu}}.$$

В рассмотренном выше примере ($\omega = 0{,}087$ радиана) относительные размеры затупления у клина $(d/D) \sim \omega^2 \approx 0{,}0075$, у конуса $(d/D) \approx 0{,}087$.

Детальное рассмотрение задачи о гиперзвуковом обтекании тонкого тела показывает, что затупление носовой части тела вы-

зывает существенное искажение картины распределения давлений на значительной части боковой поверхности тела. На рис. 11.11 представлено безразмерное распределение избыточного давления по длине пластины с клиновидной и полукруглой передними кромками. Угол раскрытия переднего клина подбирался для каждого значения числа Маха в набегающем потоке ($M_н = 5{,}00$; 6,86; 9,50) так, чтобы скорость за головным присоединенным скачком равнялась скорости звука ($M_1 = 1$), а пластина с полукруглой кромкой испытывалась при $M_н = 14$.

Безразмерные кривые

$$\frac{\Delta p}{p_н} = \frac{p - p_н}{p_н} = f\left(\frac{x}{c_x M^3 d}\right)$$

отходят от некоторой универсальной зависимости лишь вблизи точки излома контура; значение c_x для носовой части тела клиновидной формы определялось по теории косого скачка уплотнения, а для полукруглой формы — по уточненной формуле

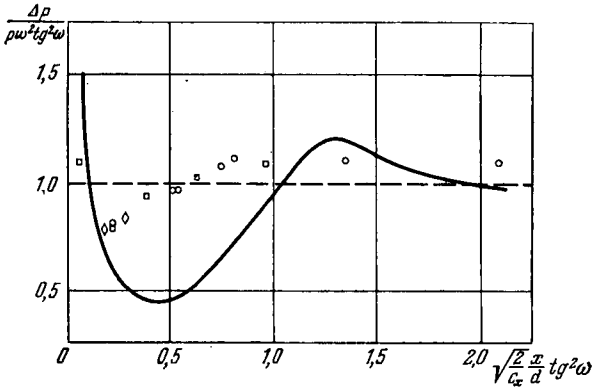


Рис. 11.12. Давление на поверхности затупленного конуса.

Ньютона ($c_x = 2/3\bar{p}^*$). Расчетная зависимость (сплошная линия)

$$\frac{\Delta p}{p_н} = 0{,}12\left(c_x M^3 \frac{d}{x}\right)^{2/3}$$

удовлетворительно согласуется с экспериментальными данными.

Это приближенная зависимость получена с помощью теории точечного взрыва и гипотезы плоских сечений, причем сила, действующая на затупленный носок тела, рассматривается как дополнительная сосредоточенная сила. Не останавливаясь подробнее на теории гиперзвукового обтекания затупленных тонких

тел, отошлем интересующихся этим вопросом к специальным монографиям [1]).

Отметим в заключение только одну интересную особенность обтекания тонкого затупленного конуса, обнаруженную и теоретическим, и экспериментальным путем, которая состоит в том, что избыточное давление (рис. 11.12) на части поверхности затупленного конуса оказывается ниже, чем у заостренного конуса. Иначе говоря, воздействие обтекания затупленного носка на соседние области потока может привести к тому, что при известной «степени затупленности» конуса его сопротивление окажется ниже, чем у остроносого (на рис. 11.12 сплошная кривая — расчетная; здесь же для сравнения приведена кривая распределения давления по образующей остроносого конуса (пунктир)).

§ 8. О влиянии вязкости в гиперзвуковых течениях

Влияние вязкости в гиперзвуковых течениях, на котором мы не останавливались в предыдущих параграфах главы, представляет собой сложную проблему.

В тех случаях, когда пограничный слой намного тоньше ударного слоя (зоны между ударной волной и поверхностью тела), расчет напряжений трения и теплообмена ведется обычными методами, разработанными в теории пограничного слоя (гл. VI).

Правда, при гиперзвуковых скоростях температура газа вследствие торможения потока в ударных волнах и пограничном слое может оказаться очень высокой и тогда придется учитывать не только сжимаемость газа, но также диссоциацию, а при температурах выше 5000° и ионизацию газа. Кроме того, в гиперзвуковом пограничном слое при обтекании остроносого тонкого тела (или даже поставленной по потоку плоской пластины) появляется продольный градиент давления, ибо, как известно, пограничный слой воздействует на внешний поток так же, как утолщение тела (на величину толщины вытеснения пограничного слоя), вызывая образование ударных волн (рис. 11.13). Иначе говоря, пограничный слой может породить во внешнем потоке у остроносого тела «собственный» ударный слой, начинающийся от передней кромки тела; при обтекании тела с затупленным носком обычно этого не наблюдают, в связи с тем что в пограничном слое за отошедшей ударной волной скорости бывают дозвуковыми или ненамного превосходят скорость звука.

[1]) Черный Г. Г., Течение газа с большой сверхзвуковой скоростью, Физматгиз, М., 1960; Хейз У. Д. и Пробстин Р. Ф., Теория гиперзвуковых течений, ИЛ, М., 1962.

Теоретическое и экспериментальное исследования гиперзвукового пограничного слоя, вызывающего на пластине и на тонком теле (клин, конус) появление ударного слоя с продольным градиентом давлений, проводились в работах Беккера, Лиза и Пробстина, Бертрама, Кендалла и др. (см. монографию Хейза и Пробстина).

Сущность теоретического подхода к решению этой задачи состоит в следующем. Давление в каждом поперечном сечении пограничного слоя считается постоянным и зависящим от полного угла поворота потока

$$\omega = \omega_0 + \frac{d\delta^*}{dx};$$

здесь ω_0 — местный угол отклонения поверхности тела от направления невозмущенного потока, $\Delta\omega = d\delta^*/dx$ — дополнительное отклонение потока, соответствующее толщине вытеснения δ^* пограничного слоя (ввиду малости углов тангенс угла

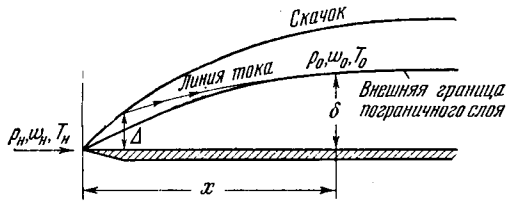


Рис. 11.13. Схема пограничного слоя и индуцированного им ударного слоя.

считаем равным самому углу, измеренному в радианах). Величину δ^* можно определить приближенно, используя известные методы расчета пограничного слоя без градиента давления; при вычислении δ^* давление принимается в первом приближении таким же, как в потоке без пограничного слоя, зависимость вязкости от температуры аппроксимируется линейной функцией

$$\frac{\mu_w}{\mu_0} = c\frac{T_w}{T_0},$$

где индекс «w» относится к значениям на стенке, а индекс «о» — к границе слоя; c — множитель, зависящий от интервала температур.

В свою очередь изменение давления, вызванное отклонением внешнего потока под воздействием тела увеличенной вследствие нарастания пограничного слоя толщины, можно вычислить с помощью уточненной формулы Ньютона (46) или по методу касательных клиньев или конусов.

В итоге, например, для плоской пластины получается следующая приближенная формула для безразмерного давления в ламинарном пограничном слое (при $k = 1{,}4$ и $\mathrm{Pr} = 0{,}725$):

$$\frac{p}{p_н} = 1 + 0{,}31\bar{\chi} + 0{,}05\bar{\chi}^2, \tag{53}$$

где фактор взаимодействия слоя с потоком

$$\bar{\chi} = \frac{\mathrm{M}^3\sqrt{c}}{\sqrt{\mathrm{R}_x}}.$$

Здесь $\mathrm{R}_x = \omega x/\nu$ — число Рейнольдса.

Сравнение расчетных данных с экспериментальными данными Бертрама и Кендалла, приводимое на рис. 11.14, дает

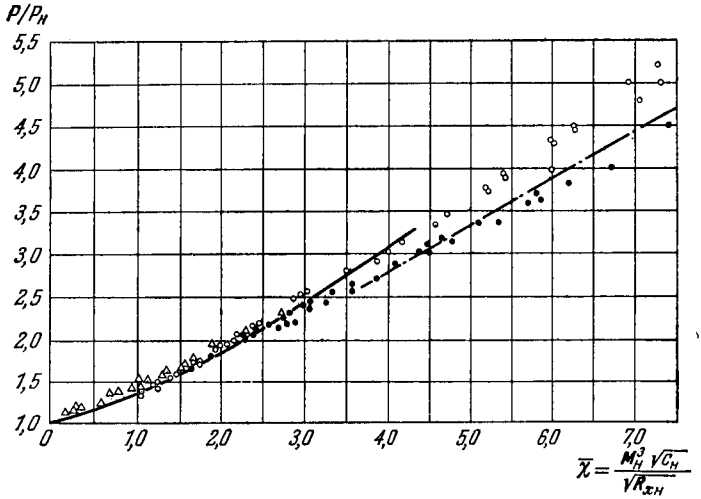


Рис. 11.14. Давление на теплоизолированной пластине при слабом и сильном (штрих-пунктир) взаимодействиях.

удовлетворительные результаты при $\bar{\chi} \leqslant 4$; числа Рейнольдса, вычисленные по толщине передней кромки пластины, были равны соответственно в опытах Бертрама около 50, в опытах Кендалла около 100.

На рис. 11.15 изображена картина течения у теплоизолированной пластины при $\mathrm{M} = 5{,}8$, рассчитанная и определенная экспериментально в работе Кендалла; на рисунке даны внешняя граница пограничного слоя и вызванная им ударная волна, а также линии тока и волны Маха. Экспериментальные и расчетные данные Кендалла практически совпадают во всей области течения.

Заметим, что продольный градиент давлений сказывается на величине напряжения трения на стенке, но слабо влияет на теплообмен, в чем можно убедиться, производя расчет пограничного слоя во втором приближении с учетом определенного ранее градиента давлений.

Рассмотренный тип взаимодействия пограничного слоя с внешним гиперзвуковым потоком принято называть слабым взаимодействием, так как при этом наблюдается возмущение гиперзвуковым пограничным слоем только части ударного слоя.

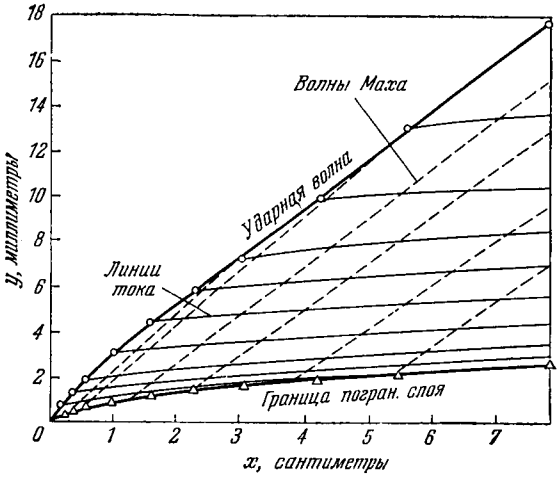


Рис. 11.15. Поле течения около теплоизолированной пластины (по Кендаллу) при $\mathsf{M} = 5{,}8$ $\mathsf{R}_x = 7000$ (для $x = 1$ *см*).

Со слабым взаимодействием мы имеем дело, когда интенсивность нарастания толщины вытеснения пограничного слоя мала по сравнению с углом встречи потока с поверхностью тела

$$\frac{d\delta^*}{dx} < \omega$$

или при условии

$$K = \mathsf{M}\left(\omega_0 + \frac{d\delta^*}{dx}\right) \ll 1.$$

Если же

$$\frac{d\delta^*}{dx} > \omega_0 \quad \text{или} \quad K \gg 1,$$

то говорят о сильном взаимодействии, при котором вся область ударного слоя, включая вязкостный пограничный слой, должна рассматриваться в теоретическом решении как единое целое.

Приближенный расчет, основанный на использовании метода касательных клиньев, дает для давления в ударном слое

при сильном взаимодействии линейную зависимость

$$\frac{p}{p_н} = 0{,}514\bar{\chi} + 0{,}759, \tag{54}$$

изображенную на рис. 11.14 штрих-пунктирной линией, которая проходит сравнительно близко к экспериментальным точкам при значениях $\bar{\chi} \geqslant 4$. Подробности теоретического расчета сильного взаимодействия можно найти в цитированной книге Хейза и Пробстина.

Следует подчеркнуть, что рассмотренная нами картина взаимодействия пограничного слоя с набегающим равномерным потоком ограничивалась случаем тела с заостренной передней частью. Затупление носовой части тела, а также неравномерность внешнего потока (например, при сильно искривленной головной ударной волне) вносят дополнительные изменения в распределении давления. Эти виды взаимодействия рассмотрены в монографии Хейза и Пробстина.

Глава XII

ТЕЧЕНИЯ РАЗРЕЖЕННЫХ ГАЗОВ

§ 1. Различные типы течений разреженных газов

До сих пор мы рассматривали газовые течения, в которых газ представлял собой сплошную среду; это справедливо, когда длина среднего свободного пробега молекул газа l весьма мала по сравнению с характерным размером газового течения L.

В одних задачах газовой динамики характерным размером является толщина пограничного слоя, в других — толщина или длина обтекаемого тела. Безразмерное отношение

$$\mathrm{K} = \frac{l}{L}, \tag{1}$$

определяющее характер среды, называется *числом Кнудсена.*

При нормальном давлении величина свободного пробега молекул составляет миллионные доли сантиметра. При понижении плотности газа свободный пробег молекул возрастает обратно пропорционально плотности, и если он становится соизмеримым с характерными размерами потока, то дискретная структура газа начинает сказываться на законах газовой динамики и теплообмена.

Число Кнудсена можно выразить через известные критерии подобия — числа Маха M и Рейнольдса R; для этого следует использовать формулу Чепмена из кинетической теории газов, связывающую кинематическую вязкость со свободным пробегом и средней скоростью движения молекул $\bar{c}$:

$$\nu = 0{,}499 l\bar{c} \approx \frac{1}{2} l\bar{c}. \tag{2}$$

Средняя скорость молекул выражается через скорость звука a

$$\bar{c} = a\sqrt{\frac{8}{\pi k}}, \quad \text{где} \quad k = \frac{c_p}{c_v}. \tag{3}$$

Тогда из (2) и (3) имеем

$$l = 1{,}26\frac{\nu}{a}\sqrt{k}. \tag{4}$$

Подставляя (4) в (1), получаем зависимость числа Кнудсена от отношения числа Маха к числу Рейнольдса

$$\mathrm{K} = \frac{l}{L} = 1{,}26\,\frac{\nu}{a}\,\frac{w}{wL}\,\sqrt{k} = 1{,}26\,\frac{\mathrm{M}\sqrt{k}}{\mathrm{R}_L}. \qquad (5)$$

Из теории пограничного слоя следует, что при больших значениях числа Рейнольдса ($\mathrm{R}_L \gg 1$) толщина пограничного слоя δ обратно пропорциональна корню квадратному из числа Рейнольдса

$$\frac{\delta}{x} \sim \frac{1}{\sqrt{\mathrm{R}_x}},$$

где x — длина тела. Поэтому если речь идет о гидродинамическом трении или теплообмене, когда характерным размером является толщина пограничного слоя ($L = \delta$), то при $\mathrm{R}_x \gg 1$, согласно (5), число Кнудсена становится пропорциональным отношению числа Маха к корню квадратному из числа Рейнольдса

$$\mathrm{K} \sim \frac{\mathrm{M}}{\sqrt{\mathrm{R}_x}}. \qquad (6)$$

При малых значениях числа Рейнольдса ($\mathrm{R}_x \leqslant 1$) толщина пограничного слоя сравнима с длиной тела ($\delta \approx x$), поэтому

$$\mathrm{K} \sim \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{R}_x}. \qquad (7)$$

Имеющиеся теоретические и экспериментальные данные свидетельствуют о том, что при очень малых значениях числа Кнудсена ($\mathrm{K} < 0{,}01$) газ ведет себя как сплошная среда. В интервале значений числа Кнудсена $0{,}01 < \mathrm{K} < 0{,}1$ можно также пользоваться уравнениями газовой динамики сплошной среды, однако при этом, как будет показано ниже, следует в граничные условия на твердой поверхности вводить поправку на так называемые «скольжение» и «скачок температуры».

При очень больших значениях числа Кнудсена ($\mathrm{K} > 1$) пограничный слой у поверхности тела не образуется, так как реэмитированные (отраженные) поверхностью тела молекулы сталкиваются с молекулами внешнего потока на далеком от него расстоянии, т. е. тело не вносит искажений в поле скоростей внешнего потока. Для этого режима «свободно-молекулярного течения газа», который по имеющимся данным наблюдается при $\mathrm{M}/\mathrm{R}_x > 3$, трение и теплообмен на поверхности обтекаемого тела рассчитываются из условия однократного столкновения молекул газа с поверхностью.

Переходная область между режимом со скольжением и свободно-молекулярным режимом остается до сих пор мало изучен-

ной, так как в ней приходится учитывать как столкновения молекул между собой, так и неоднократные столкновения их с телом, а это создает большие теоретические трудности.

На рис. 12.1 нанесены границы различных режимов течения газа в координатах $M = f(R_x)$, включающих: 1) нижнюю границу свободномолекулярного течения, соответствующую значению $M/R_x = 3$; 2) верхнюю границу течения со скольжением, которая отвечает значению $M/\sqrt{R_x} = 0{,}1$; 3) верхнюю границу

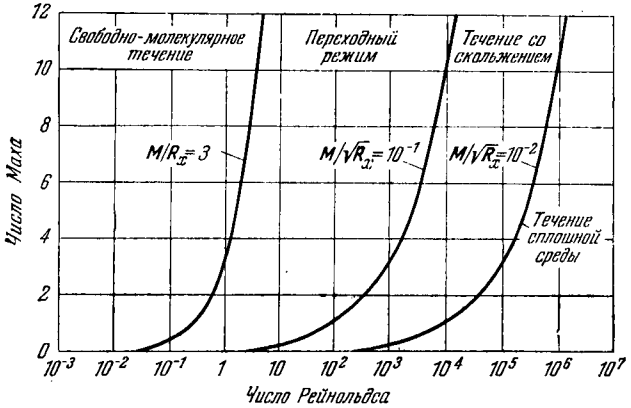


Рис. 12.1. Границы различных режимов течения разреженного газа.

течений для сплошной среды, где $M/\sqrt{R_x} = 0{,}01$. В таблице 1 представлена приближенная зависимость свободного пробега молекул от высоты, рассчитанная по формуле (4) для стандартной атмосферы.

Таблица 1

Высота H, км	0	25	50	75	100	125	150	175	200
Длина свободного пробега l, м	$6{,}9 \cdot 10^{-8}$	$2{,}2 \cdot 10^{-6}$	$7{,}8 \cdot 10^{-5}$	$2{,}0 \cdot 10^{-3}$	$9{,}5 \cdot 10^{-2}$	2,3	18	80	300

Сопоставляя данные рис. 12.1 и таблицы 1, можно получить представление о связи между высотой полета и границами различных режимов.

Для ракеты длиной 3 м влияние скольжения начинает проявляться с высоты 50 км при $M = 1$ и 30 км при $M = 4$. Свободно-молекулярное течение устанавливается при любой скорости полета, начиная с высоты 140 км.

§ 2. Скачки скорости и температуры у стенки при течении газа со скольжением

Если свободный пробег молекул l не пренебрежимо мал по сравнению с толщиной пограничного слоя δ, но значительно меньше последней: $l < \delta$, то профиль скорости направленного движения газа у стенки имеет форму, изображенную на рис. 12.2. Разность скоростей в слоях, отстоящих друг от друга на расстоянии свободного пробега, очевидно, равна

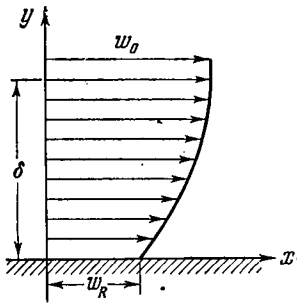


Рис. 12.2. Профиль скорости у стенки при течении со скольжением.

$$\Delta w \approx l \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Следовательно, молекулы, находящиеся на расстоянии l от стенки, имеют относительно нее направленную скорость

$$w_l = l\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_R + w_R = \\ = \frac{l}{\delta} w_0 \frac{\partial\left(\frac{w}{w_0}\right)}{\partial\left(\frac{y}{\delta}\right)} + w_0 \frac{w_R}{w_0}, \quad (8)$$

где w_R — скачок скорости у стенки, т. е. величина скорости в слое газа, непосредственно примыкающем к стенке, w_0 — скорость невозмущенного потока газа. Совершая свободный пробег l, молекулы сохраняют свою скорость, т. е. попадают на стенку с конечной скоростью w_l. Как показали опыты Милликена [1]) и других исследователей, значительная часть молекул при ударе о стенку абсорбируется ею и затем реэмитируется (испускается), потеряв полностью скорость направленного движения w_l. Обозначим долю этих «диффузно» отраженных молекул буквой σ; остальные молекулы, относительное число которых равно $1 - \sigma$, отражаются «зеркально», т. е. после отражения сохраняют скорость w_l, которую они имели до удара о стенку.

Учитывая изложенное, можно определить среднюю направленную скорость слоя газа непосредственно у стенки, исходя из того, что этот слой состоит наполовину из молекул, приходящих к стенке, и наполовину из отраженных от нее

$$w_R = \frac{1}{2}\left[w_R + l\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_R\right] + \frac{1}{2}(1-\sigma)\left[w_R + l\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_R\right] + \frac{1}{2}\sigma \cdot 0.$$

[1]) Milliken R. A., The isolation of an ion, a precision measurement of it charge, and the correction of Stokes's law. Phys. Rev. XXXII, № 4, p. 349—397 (1911).

Итак, скорость «скольжения» газа у стенки равна

$$w_R = \frac{2-\sigma}{\sigma} l \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_R. \tag{9}$$

Нижеприведенная таблица 2 содержит значения коэффициента σ, найденные различными экспериментаторами для случаев взаимодействия разных газов с поверхностями различной природы.

Таблица 2

Газ / Поверхность	Воздух	Углекислый газ	Водород	Гелий
Латунь	1	—	—	—
Лак старый	1	—	—	—
Лак свежий	0,79	—	—	—
Масляная краска . . .	0,895	0,92	0,93	0,87
Стекло	0,89	—	—	—

Ввиду того что доля диффузно отраженных молекул близка к единице ($\sigma \approx 1$), имеем приблизительно

$$w_R \approx l \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_R = \frac{l}{\delta} w_0 \left[\frac{\partial\left(\frac{w}{w_0}\right)}{\partial\left(\frac{y}{\delta}\right)}\right]_R. \tag{10}$$

Отсюда следует, что в плотном газе ($l \ll \delta$) скольжение практически отсутствует ($w_R = 0$), т. е. молекулы «прилипают» к стенке, как это и принято в обычной газодинамике; в сильно разреженном газе ($l > \delta$) скорость скольжения близка к скорости невозмущенного потока газа вне пограничного слоя ($w_R \approx w_0$). При течении со скольжением скорость у стенки подчиняется условию (9), которое обычно заменяют приближенным условием (10).

Следует отметить, что условие скольжения (9) не является вполне точным в том случае, когда при малом абсолютном давлении газа имеется существенное изменение температуры по длине стенки, так как продольный градиент температуры вызывает «термодиффузионный» направленный поток молекул в сторону возрастающей температуры (см., например, § 8). Такое индуцируемое разностью температур течение получило название «температурный крип».

Кеннард [1]) показал, что скорость температурного крипа у стенки равна

$$w_{RT} = \frac{3}{4} \frac{\mu}{\rho T} \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_R; \tag{11}$$

[1]) Kennard J. C., Kinetic theory of gases, McGraw-Hill, 1938.

здесь ρ, T — плотность газа и температура у стенки, μ — коэффициент вязкости, x — расстояние, отсчитываемое вдоль стенки. Таким образом, уточненное граничное условие, характеризующее скачок скорости у стенки, должно иметь следующий вид:

$$w_R = \frac{2-\sigma}{\sigma} l \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_R + \frac{3}{4}\frac{\mu}{\rho T}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_R. \qquad (12)$$

Вторым членом соотношения (12), учитывающим температурный крип, чаще всего можно пренебречь, так как при высоких продольных градиентах температуры и очень больших разрежениях, когда этот член особенно существен, обычно реализуется свободно-молекулярное течение газа без гидродинамического пограничного слоя. Однако в некоторых специальных случаях (например, обтекание головной части ракеты во время входа ее в сравнительно плотные слои атмосферы) условие (12) используется в полном виде.

Остановимся теперь на вопросе о скачке температуры у стенки при режиме течения со скольжением.

Захват молекул стенкой и последующая реэмиссия приводят к тому, что отраженные молекулы имеют температуру, близкую к температуре стенки. Введем так называемый коэффициент аккомодации

$$\alpha = \frac{dE_l - dE_R}{dE_l - dE_w}; \qquad (13)$$

здесь dE_l и dE_R — соответственно потоки энергии, приносимые молекулами, падающими на бесконечно малый элемент поверхности и уносимые реэмитированными молекулами, dE_w — поток энергии, который уносили бы реэмитированные молекулы, если бы они обладали максвелловским распределением скоростей при температуре стенки. При полной аккомодации ($\alpha = 1$): $dE_R = dE_w$, при отсутствии аккомодации ($\alpha = 0$): $dE_l = dE_R$. Опыты показывают, что часто величина коэффициента α близка

Таблица 3

Поверхность	α	Поверхность	α
Ровный лак на бронзе	0,88—0,89	Литая сталь машинной обработки . . .	0,87—0,88
Бронза полированная	0,91—0,94	Литая сталь травленая	0,89—0,93
Бронза машинной обработки	0,89—0,93	Алюминий полированный	0,87—0,95
Бронза травленая . .	0,93—0,95	Алюминий машинной обработки	0,95—0,97
Литая сталь полированная	0,87—0,93	Алюминий травленый	0,89—0,97

к единице, о чем можно судить по прилагаемой таблице 3 экспериментальных значений α для воздуха, найденных Уидманом [1]).

Из таблицы следует, что характер обработки поверхности металла практически не оказывает влияния на величину коэффициента аккомодации.

Дикинс [2]) определил следующие значения коэффициентов аккомодации для различных газов при их взаимодействии с поверхностью из платины (таблица 4):

Таблица 4

Род газа	α	Род газа	α
Водород	0,35	Закись азота	0,90
Гелий	0,51	Воздух	0,91
Аргон	0,88	Окись углерода	0,91
Аммиак	0,88	Двуокись углерода	0,92
Азот	0,90	Сернистый газ	0,95
Кислород	0,90		

Как видим, газы очень малого молекулярного веса (водород и гелий) слабо аккомодируются стенкой; все остальные газы имеют коэффициент аккомодации около 0,9 и выше.

Если влияние диссоциации несущественно, то при дозвуковых скоростях движения газа, когда кинетическая энергия потока относительно мала, коэффициент аккомодации может быть выражен через соответствующие значения температуры

$$\alpha = \frac{T_l - T_R}{T_l - T_w}, \tag{14}$$

где T_l — температура молекул, попадающих из слоя, отстоящего от стенки на расстоянии свободного пробега молекул, T_R — температура, соответствующая суммарной энергии реэмиттированных стенкой молекул, T_{Rw} — температура в пристенном слое, $\Delta T_{Rw} = T_{Rw} - T_w$ — скачок температуры у стенки.

Определим скачок температуры у стенки в течении со скольжением. Эта задача сложнее, чем определение скачка скорости, так как на изменение температуры в направлении нормали к стенке влияет не только молекулярный тепловой поток, но также и тепло, выделяющееся в процессе молекулярного трения. Вносит осложнения и тот факт, что в толще пограничного слоя

[1]) Wiedmann M. L., Trans. Am. Soc. Mech. Eng. v. 68, p. 57, 1946. (Русский перевод в сб. «Механика», № 4, 1951.)

[2]) Dickins B. G., Proc. Roy. Soc. A143, p. 517, 1933.

течения со скольжением теплообмен и трение близки к таковым в сплошной среде, а обмен тепловой и механической энергией между пристенным слоем и стенкой совершается по видоизмененным законам молекулярных течений газа, в которых должно учитываться влияние реэмиттированных молекул на характер хаотического движения газа.

Существует несколько теорий поведения газа в пристенном слое течения со скольжением.

Мы рассмотрим сравнительно простой вариант расчета скачков температуры у стенки, причем ограничимся случаем скорости потока малой по сравнению со скоростью хаотического движения молекул.

Приток тепла по нормали к пристенному слою газа со стороны пограничного слоя равен

$$q_\lambda = \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_R = c_p \frac{\mu}{\mathrm{Pr}} \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_R. \tag{15}$$

Тепло трения в пристенном слое определим приближенно по законам молекулярного течения газа. На основании (71) и (99) из § 6 и (2) из § 1 напряжение трения на стенке при скорости w_l (имеющейся на расстоянии l от стенки) и значительно меньшей, чем скорость молекулярного движения, имеем

$$\tau = \frac{\sigma}{2\sqrt{\pi}} \rho c_m w_l = \frac{\sigma}{4} \rho \bar{c} w_l = \frac{\sigma \mu w_l}{2l}.$$

Тепло, отвечающее секундной работе трения,

$$q_\tau = \tau w_l = \frac{\sigma \mu w_l^2}{2l}. \tag{16}$$

Отсюда суммарный приток тепла в пристенный слой газа

$$q_l = q_\tau + q_\lambda = \frac{\sigma \mu w_l^2}{2l} + \frac{c_p \mu}{\mathrm{Pr}} \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_R.$$

Отвод тепла из пристенного слоя осуществляется реэмиттированными стенкой молекулами и, очевидно, равен

$$q_R = c_p G_x (T_{Rw} - T_R).$$

Секундную массу молекул, попадающую на стенку и отражаемую при числе Маха $\mathrm{M} \ll 1$, можно определить приближенно по формулам (71) из § 6 и (2) из § 1

$$G_x = \frac{1}{4} \rho \bar{c} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \rho c_m = \frac{\mu}{2l},$$

где $\bar{c}$ — средняя скорость хаотического движения молекул, c_m — наиболее вероятная скорость молекул.

Температура реэмиттированных молекул, в состав которых входят как диффузно, так и зеркально отраженные молекулы, согласно (14) равна

$$T_R = \alpha T_w + (1-\alpha) T_l,$$

откуда

$$q_R = \frac{1}{2} c_p \frac{\mu}{l} \{T_{Rw} - [\alpha T_w + (1-\alpha) T_l]\}. \qquad (17)$$

Из баланса тепла ($q_l = q_R$) имеем при $R = c_p - c_v$ и $k = c_p/c_v$

$$\Delta T_{Rw} = \frac{\sigma (k-1) w_l^2}{\alpha k R} + \left[\frac{2}{\alpha \mathrm{Pr}} + \frac{1-\alpha}{\alpha}\right] l \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_R,$$

или в безразмерном виде

$$\frac{\Delta T_{Rw}}{T_l} = \frac{\sigma (k-1)}{\alpha} \mathrm{M}_l^2 + \left[\frac{2}{\alpha \mathrm{Pr}} + \frac{1-\alpha}{\alpha}\right] \frac{l}{T_l} \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_R, \qquad (18)$$

где $\mathrm{M}_l = w_l/a_l$ — число Маха, определенное по скорости звука, соответствующей температуре T_l.

При $\mathrm{M}_l \ll 1$ первый член правой части относительно мал и, следовательно, можно положить

$$\Delta T_{Rw} \approx \left(\frac{2}{\alpha \mathrm{Pr}} + \frac{1-\alpha}{\alpha}\right) l \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_R; \qquad (19)$$

при $\alpha = 1$ и $\mathrm{Pr} = 1$ имеем

$$\Delta T_{Rw} = 2l \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_R.$$

Вебер [1]) вывел из других соображений следующую формулу для скачка температуры при течении со скольжением:

$$\Delta T_{Rw} = \frac{15}{8} \frac{2-\alpha}{\alpha} l \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_R,$$

которая дает результаты, близкие к определенным по формулам (18), (19). Формулы (17)—(19) для скачка температуры у стенки справедливы лишь при умеренных скоростях потока ($\mathrm{M} = 0$, $T \approx T^*$). В случае сверхзвуковых скоростей их следует уточнить. Формула (12) для скачка скорости справедлива и при больших скоростях.

Как следует из рис. 12.1, режим течения со скольжением наблюдается при таких умеренных значениях числа Рейнольдса, для которых реальным является существование лишь ламинарного пограничного слоя, поэтому ниже рассматриваются только ламинарные течения со скольжением.

---

[1]) Weber S., Det. kgl. Danske Videns Selsk., Math-Fys. Medd. **16**, № 9.

§ 3. Течение газа со скольжением в трубе

Для установления закономерностей ламинарного течения газа со скольжением в трубе круглого сечения следует прежде всего составить баланс сил, приложенных к цилиндрическому жидкому элементу с текущим радиусом r и длиной dx (рис. 12.3)

$$-\pi r^2\, dp = -\tau 2\pi r\, dx, \tag{20}$$

где τ — напряжение трения на боковой поверхности элемента, dp — разность давлений на его торцы.

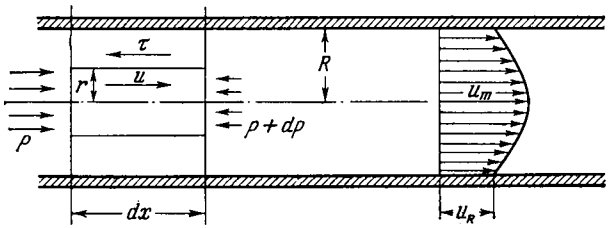


Рис. 12.3. Ламинарное течение газа со скольжением в трубе.

Здесь мы пренебрегли малой величиной изменения количества движения в направлении оси трубы, которое вызывается изменением плотности газа, обусловленным в свою очередь изменением давления. Выражая напряжения трения по формуле Ньютона, из (20) имеем

$$\frac{dp}{dx} = \frac{2}{r}\mu\frac{du}{dr}. \tag{21}$$

Отсюда после интегрирования в граничных условиях, учитывающих скорость скольжения на стенке ($u = u_R$ при $r = R$), получаем

$$u - u_R = -\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}\frac{R^2 - r^2}{4}.$$

На оси трубы (при $r = 0$) имеем

$$u_m - u_R = -\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}\frac{R^2}{4}.$$

Это дает следующую окончательную зависимость для безразмерного профиля скорости в трубе при скольжении:

$$\frac{u - u_R}{u_m - u_R} = 1 - \frac{r^2}{R^2}, \tag{22}$$

Градиент скорости у стенки в таком течении

$$\left(\frac{du}{dr}\right)_R = -\frac{2(u_m - u_R)}{R}, \tag{23}$$

напряжение трения на стенке

$$\tau_R = -\frac{2\mu(u_m - u_R)}{R}. \tag{24}$$

Средняя скорость течения в трубе оказывается равной среднему арифметическому между скоростями на оси и у стенки

$$U = \frac{\int_0^R u 2\pi r\, dr}{\pi R^2} = (u_m - u_R)\int_0^R \frac{2}{R^2}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) r\, dr + u_R =$$

$$= \frac{1}{2}(u_m + u_R). \tag{25}$$

Уравнение (21) приводит к следующей формуле для определения падения давления по длине трубы:

$$dp = \frac{2\tau_R}{R}\, dx = -\frac{4(u_m - u_R)\mu}{R^2}\, dx$$

или в безразмерном виде после замены $D = 2R$

$$\frac{dp}{\frac{1}{2}\rho U^2} = -\frac{64\mu}{\rho U D}\,\frac{dx}{D}\,\frac{u_m - u_R}{u_m + u_R}. \tag{26}$$

Исключим из полученных выражений скорость скольжения, для чего воспользуемся граничным условием (9), установленным в § 2

$$u_R = -cl\left(\frac{du}{dR}\right)_R, \quad \text{где } c = \frac{2-\sigma}{\sigma}. \tag{9а}$$

Здесь перед производной взят знак минус для того, чтобы значение скорости на стенке было положительным ($u_R > 0$) при отрицательном значении (23) градиента скорости. Подставляя в (9а) значение производной из (23), находим

$$u_R = \frac{u_m}{1 + \frac{R}{2cl}} = \frac{u_m}{1 + \frac{D}{4cl}}. \tag{27}$$

Используя формулы (25), (27), (22) и (26), приходим к следующим выражениям для максимальной скорости:

$$u_m = U\,\frac{1 + 4c\frac{l}{D}}{0{,}5 + 4c\frac{l}{D}}; \tag{28}$$

для скорости у стенки

$$u_R = U \frac{4c\frac{l}{D}}{0{,}5 + 4c\frac{l}{D}}; \tag{29}$$

для текущего значения скорости

$$u = U \frac{1 + 4c\frac{l}{D} - 4\frac{r^2}{D^2}}{0{,}5 + 4c\frac{l}{D}}; \tag{30}$$

для падения давления по длине трубы

$$\frac{dp}{\frac{1}{2}\rho U^2} = -\frac{64\mu}{\rho U D}\frac{1}{1 + 8c\frac{l}{D}}\frac{dx}{D} \tag{31}$$

или в соответствии с формулой Дарси

$$\frac{dp}{\frac{1}{2}\rho U^2} = -\zeta\frac{dx}{D}, \quad \text{где} \quad \zeta = \frac{64}{R_D\left(1 + 8c\frac{l}{D}\right)}. \tag{32}$$

В (32) число Рейнольдса определено по диаметру трубы и средней скорости течения

$$R_D = \frac{\rho U D}{\mu}.$$

Из условия неразрывности следует, что вдоль трубы постоянного сечения плотность тока не изменяется ($\rho U = \rho_0 U_0 =$ $=$ const); если температура газа постоянна, то число Рейнольдса для всех сечений имеет одно и то же значение. В этом случае коэффициент трения ζ по длине трубы изменяется только вследствие изменения величины свободного пробега молекулы, который зависит от местного значения плотности $l = l_0\rho_0/\rho$ (индекс «0» соответствует начальному сечению трубы) Подставляя это значение в (31), получаем при T=const

$$dp = -\frac{\zeta_0}{2D}\frac{\left(1 + 8c\frac{l_0}{D}\right)dx}{\frac{\rho}{\rho_0}\left(1 + 8c\frac{l_0\rho_0}{D\rho}\right)}\rho_0 U_0^2, \tag{33}$$

где

$$\zeta_0 = \frac{64}{R_D\left(1 + 8c\frac{l_0}{D}\right)}$$

— значение коэффициента трения в начале трубы. Используя уравнение состояния для идеального газа, из (33) получаем

дифференциальное уравнение

$$\frac{p\,dp}{p_0} + 8c\,\frac{l_0}{D}\,dp = -\frac{\zeta_0}{2D}\,\rho_0 U_0^2\left(1 + 8c\,\frac{l_0}{D}\right)dx,$$

которое после интегрирования с учетом граничного условия

$$p = p_0 \quad \text{при} \quad x = 0$$

и некоторых элементарных преобразований дает (при $\Delta p = p - p_0$)

$$\left(\frac{\Delta p}{p_0}\right)^2 + 2\,\frac{\Delta p}{p_0}\left(1 + 8c\,\frac{l_0}{D}\right) + \frac{\zeta_0}{D}\,\frac{\rho_0 U_0^2}{p_0}\left(1 + 8c\,\frac{l_0}{D}\right)x = 0.$$

Отсюда следует

$$\frac{\Delta p}{p_0} = \left[\sqrt{1 - \frac{\zeta_0 \rho_0 U_0^2 x}{D p_0\left(1 + 8c\,\frac{l_0}{D}\right)}} - 1\right]\left(1 + 8c\,\frac{l_0}{D}\right), \qquad (34)$$

где x — полная длина трубы. В этом решении один корень отброшен (с отрицательным знаком) как не отвечающий физическим условиям задачи ($\Delta p = -2p_0$ при $x = 0$). Если вычитаемое под корнем значительно меньше единицы, то справедливо приближенное решение, позволяющее определить падение давления в трубе без учета сжимаемости газа

$$\frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho_0 U_0^2} = -\frac{\zeta_0}{D}x. \qquad (35)$$

Подставим в (34) $c = (2 - \sigma)/\sigma$, а также на основании (5) значение

$$\frac{l}{D} = 1{,}26\sqrt{k}\,\frac{\mu}{\rho\, Da} = 1{,}26\sqrt{k}\,\frac{\mathrm{M}_0}{\mathrm{R}_D}.$$

Имея в виду, что

$$\frac{\rho_0 U_0^2}{p_0} = k\mathrm{M}_0^2,$$

получим при $\sigma = 1$

$$\frac{\Delta p}{p_0} = \left[\sqrt{1 - \frac{\zeta_0 k \mathrm{M}_0^2 x}{D\left(1 + 10\sqrt{k}\,\frac{\mathrm{M}_0}{\mathrm{R}_D}\right)}} - 1\right]\left(1 + 10\sqrt{k}\,\frac{\mathrm{M}_0}{\mathrm{R}_D}\right), \qquad (36)$$

где

$$\zeta_0 = \frac{64}{\mathrm{R}_D\left(1 + 10\sqrt{k}\,\frac{\mathrm{M}_0}{\mathrm{R}_D}\right)}.$$

Напомним, что решение (36) справедливо лишь при $M_0 \ll 1$. Зависимость коэффициента трения ζ от числа Рейнольдса при различных значениях числа Маха представлена на рис. 12.4.

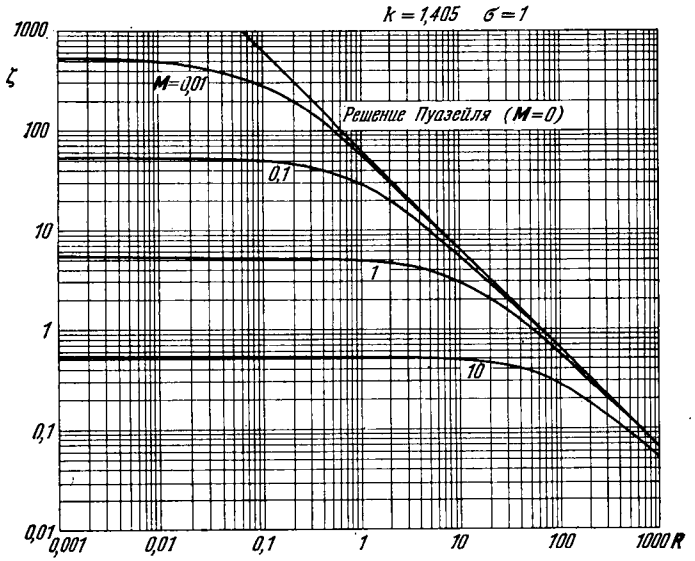


Рис. 12.4. Зависимость коэффициента трения при течении со скольжением в трубе от числа R при разных значениях числа Маха.

Она хорошо согласуется с опытными данными Кнудсена и других исследователей. Горизонтальные участки кривых $\zeta(R)$ отвечают переходу к свободно-молекулярному течению ($R \approx 1$).

§ 4. Внешнее сопротивление тел в потоке разреженного газа при наличии скольжения

Впервые влияние скольжения на сопротивление тела было обнаружено Милликеном [1]) в 1911 г. при исследовании скорости падения мелких масляных капель в воздухе под действием силы тяжести, а также скорости подъема против силы тяжести заряженных капель, находящихся в вертикально направленном электростатическом поле.

Эти исследования Милликена позволили определить гидродинамический эффект скольжения, а также измерить с большой точностью величину заряда электрона.

[1]) См. «Газовая динамика», стр. 260, ИЛ, М., 1950.

Мелкие капли, движущиеся с малой скоростью в сплошной среде, имеют форму сферы, сила сопротивления которой при малых значениях числа Рейнольдса $\mathrm{R}_a = \frac{\rho u_0 a}{\mu} \leqslant 1$, определяется по формуле Стокса

$$x = 6\pi\mu a u_0, \tag{37}$$

где a — радиус сферы, μ — вязкость воздуха, u_0 — скорость невозмущенного набегающего потока.

Формула (37) получена из точного решения уравнения Навье — Стокса для медленного течения несжимаемой жидкости, когда инерционными членами, стоящими в левой части уравнения, можно пренебречь; граничным условием является равенство нулю скорости течения на поверхности сферы.

Если учесть скольжение, т. е. принять, согласно (9), что скорость скольжения на стенке пропорциональна числу Кнудсена, то, как показал Бассет [1]) еще в 1888 г., справедлив видоизмененный закон сопротивления сферы

$$X = 6\pi a\mu u_0 \frac{1 + 2A\frac{l}{a}}{1 + 3A\frac{l}{a}}, \tag{38}$$

где A — коэффициент пропорциональности (по опытам Милликена [2]) $A = 1{,}22$, что, согласно (9), отвечает значению $\sigma = 0{,}9$). Разложение в ряд последнего дополнительного множителя по степеням параметра $A\frac{l}{a}$ приводит к следующей приближенной формуле сопротивления сферы при скольжении:

$$X = 6\pi\mu a u_0 \left(1 + A\frac{l}{a}\right)^{-1}, \tag{39}$$

справедливой при $\frac{l}{a} \leqslant 0{,}5$, дозвуковых скоростях и малых значениях числа Рейнольдса.

Безразмерный коэффициент сопротивления сферы по Милликену при $\mathrm{M} < 1$

$$c_x = \frac{X}{\frac{1}{2}\rho u_0^2 \pi a^2} = \frac{12}{\mathrm{R}_a\left(1 + 1{,}2\frac{l}{a}\right)}. \tag{40}$$

---

[1]) Basset A. B., A treatise on hydrodynamics, v. II, p. 271, 1888.

[2]) Милликен приводит значение $A = 0{,}864$, однако при вычислении свободного пробега по значению коэффициента вязкости он пользовался устаревшей зависимостью Максвелла $\mu = 0{,}35\ \rho\bar{c}l$, тогда как в настоящее время наиболее точной считается формула Чепмена $\mu = 0{,}499\ \rho\bar{c}l$, что и дает $A = 1{,}22$.

Опыты Кейна [1]), проведенные в интервале $2{,}05 \leqslant \mathsf{M} \leqslant 2{,}81$ и $15 \leqslant \mathsf{R}_a \leqslant 786$ не обнаружили влияния числа Маха и привели к следующей эмпирической формуле:

$$c_x = \left(0{,}97 + \frac{1{,}32}{\sqrt{\mathsf{R}_a}}\right)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{\mathsf{R}_a}}\right)^2. \qquad (41)$$

Значения R_a Кейн определял по скорости и плотности воздуха за прямым скачком. При $\mathsf{R}_a < 80$ сопротивление сферы по Милликену выше, чем по Кейну (при малых R_a относительно велика роль трения, но оно уменьшается за счет усиления скольжения при росте M); при $\mathsf{R}_a > 80$ сопротивление по Милликену меньше, чем по Кейну (при больших R_a превалирует волновое сопротивление, которое проявляется сильнее при больших значениях числа M).

Сопротивление цилиндра при поперечном обтекании его со скольжением рассмотрено Цзяном [2]), который получил следующую теоретическую формулу для коэффициента сопротивления цилиндра, отнесенного к поперечному сечению $2aL$ (длина цилиндра L, радиус a):

$$c_x = \frac{X}{\frac{1}{2}\rho u_0^2 2aL} = \frac{4\pi}{\mathsf{R}_a\left[\ln\frac{4}{\mathsf{R}_a} - 1{,}28 + 1{,}25\sqrt{k}\,\frac{2-\sigma}{\sigma}\frac{\mathsf{M}}{\mathsf{R}_a}\right]}, \qquad (42)$$

где

$$\mathsf{R}_a = \frac{\rho u_0 a}{\mu}.$$

Опытных данных о сопротивлении цилиндра при скольжении в настоящее время нет.

§ 5. Свободно-молекулярные течения газа и элементы кинетической теории газов

Свободно-молекулярный режим течения наблюдается в сильно разреженном газе, когда число Кнудсена значительно больше единицы ($\mathsf{M}/\mathsf{R}_x \geqslant 3$).

Несмотря на то, что частота столкновений молекул в элементарном объеме при этом режиме пренебрежимо мала, число молекул в единице объема достаточно велико для того, чтобы можно было определять средние макроскопические свойства газа. Например, на высоте 150 км, когда свободный пробег $l = 18$ м, число молекул в 1 см^3 составляет $\sim 2{,}5 \cdot 10^{11}$.

---

[1]) Kane E. D., J. Aeron. Sci., 18, p. 259, 1951. Русский перевод в сб. «Вопросы ракетной техники», № 2, стр. 54—69, ИЛ, М., 1953.

[2]) Сб. «Газовая динамика», стр. 341, ИЛ, М., 1950.

Установим свойства газа, определяющиеся особенностями движения его молекул. Рассмотрим для этого элементарный объем $d\tau = dx\,dy\,dz$, заполненный большим числом движущихся и изредка сталкивающихся молекул $nd\tau$, где n — местная концентрация молекул в физическом объеме, т. е. количество молекул в единице объема.

Мгновенные значения проекций скорости u, v, w отдельных молекул в объеме $d\tau$ различаются очень сильно. Можно рассортировать молекулы по скоростям движения, имея в виду, что величины скоростей зависят от координат x, y, z и времени t. Представление о распределении молекул в объеме $d\tau$ по скоростям движения дает введенная Максвеллом функция распределения скоростей

$$f(u, v, w),$$

которая оценивает долю общего числа молекул (в объеме $d\tau$), обладающих скоростями u, v, w.

Иначе говоря, если все молекулы физического объема $d\tau$ расположить в пространстве скоростей u, v, w, то в элементарной области пространства скоростей

$$d\omega = du\,dv\,dw$$

будет сосредоточено $(n f d\tau)\,d\omega$ молекул, скорости которых заключены в указанных интервалах; величина, стоящая в скобке, представляет собой концентрацию молекул в пространстве скоростей.

Общее число молекул в физическом объеме можно получить путем интегрирования по пространству скоростей

$$n\,d\tau = \int (nf\,d\tau)\,d\omega.$$

Так как общее число молекул зависит только от координат и времени, то его можно вынести из-под знака интеграла и сократить.

Таким образом, функция распределения скоростей должна удовлетворять следующему условию:

$$\int f\,d\omega = 1. \tag{43}$$

Важная роль функции распределения скоростей выявляется, например, при определении среднего значения любой величины Q, зависящей только от компонентов скоростей молекул.

Количество Q, которым обладают все молекулы элемента $d\tau$, равно [1]) $\sum Q$, но число молекул в этом элементе есть $nd\tau$,

[1]) Паттерсон Г. Н., Молекулярное течение газов, Физматгиз, М., 1960.

поэтому среднее значение величины Q составляет

$$\bar{Q} = \frac{\int Q\,(nf\,d\tau)\,d\omega}{n\,d\tau} = \int Qf\,d\omega. \tag{44}$$

В частности, среднее значение компонента скорости u

$$\bar{u} = \int uf\,d\omega. \tag{45}$$

Максвелл нашел для функции распределения скоростей покоящегося газа следующее выражение:

$$f = a\exp\left(-\frac{E}{\theta}\right), \tag{46}$$

где a, θ — постоянные, определяемые ниже, а величина

$$E = \frac{1}{2}mc^2 = \frac{m}{2}(u^2 + v^2 + w^2)$$

— кинетическая энергия молекулы, отвечающая мгновенному значению полной скорости ее хаотического движения c. Постоянную a мы определим, исходя из условия (43)

$$\int f\,d\omega = a\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{E}{\theta}\right)d\omega = 1.$$

Данный интеграл можно представить как произведение трех одинаковых интегралов

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{mu^2}{2\theta}\right)du\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{mv^2}{2\theta}\right)dv\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{mw^2}{2\theta}\right)dw =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{2\pi\theta}{m}\right)^3};$$

таким образом, имеем

$$a = \left(\frac{m}{2\pi\theta}\right)^{3/2}. \tag{47}$$

Для того чтобы определить параметр θ, вычислим среднее значение квадрата каждого компонента скорости движения молекулы по способу (45)

$$\bar{u}^2 = \bar{v}^2 = \bar{w}^2 = \frac{\bar{c}^2}{3} = a\int u^2\exp\left[-\frac{m(u^2+v^2+w^2)}{2\theta}\right]d\omega = \frac{\theta}{m}.$$

Отсюда имеем

$$\theta = m\frac{\overline{u^2}+\overline{v^2}+\overline{w^2}}{3} = m\frac{\bar{c}^2}{3}, \tag{48}$$

где $m\bar{c}^2/2$ — внутренняя энергия молекулы, определяемая по среднему значению квадрата ее полной скорости. Подставляя (47) и (48) в (46), получим функцию распределения скоростей молекул Максвелла в окончательном виде

$$f = \left(\frac{3}{2\pi\bar{c}^2}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{3c^2}{2\bar{c}^2}\right). \tag{49}$$

Иногда бывает удобно при выкладках перейти от составляющих скорости u, v, w к полной скорости c; для этого вводят полярные (сферические) координаты: c, φ, θ, где φ — угол между вектором скорости и полярной осью Oz, θ — угол между плоскостями zOc и zOx (рис. 12.5).

В сферических координатах элемент пространства скоростей равен

$$d\omega = c^2 \sin\varphi \, d\varphi \, d\theta \, dc. \tag{50}$$

Поэтому число молекул в элементе объема $d\tau$, скорости которых лежат в интервале c и $c + dc$, а направления движения — в интервалах φ, $\varphi + d\varphi$ и θ, $\theta + d\theta$, составляет

$$nc^2 f \sin\varphi \, d\varphi \, d\theta \, dc \, d\tau. \tag{51}$$

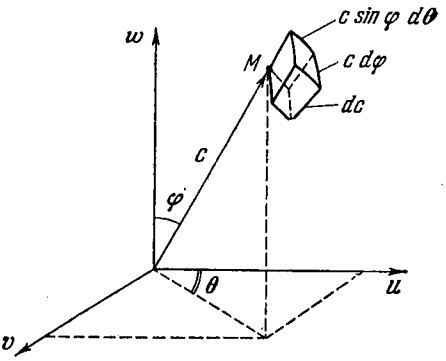


Рис. 12.5. Элементарный объем в пространстве скоростей (к переходу от прямоугольных к сферическим координатам).

Интегрируя это выражение по φ и θ для всех возможных направлений ($0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$), получим общее число молекул, имеющих скорости в интервале c и $c + dc$:

$$nc^2 f \left[\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi} \sin\varphi \, d\varphi\right) d\theta\right] dc \, d\tau = 4\pi n c^2 f \, dc \, d\tau. \tag{52}$$

Суммарное число молекул в элементарном объеме $d\tau$ для всего диапазона скоростей ($0 \leqslant c \leqslant \infty$) определяется, очевидно, следующим образом:

$$n \, d\tau = \left[\int_0^{\infty} 4\pi n c^2 f \, dc\right] d\tau. \tag{53}$$

Вследствие этого условие (43) в полярных координатах принимает вид

$$4\pi \int_0^{\infty} c^2 f \, dc = 1 \tag{54}$$

и, следовательно, среднее значение любой величины Q, зависящей только от компонентов скорости, найдется из выражения

$$\overline{Q} = 4\pi \int_0^\infty Qc^2 f\, dc. \tag{55}$$

Запишем среднее значение квадрата скорости в полярных координатах

$$\overline{c^2} = 4\pi \int_0^\infty c^4 f\, dc. \tag{56}$$

Легко убедиться в том, что, подставляя в уравнения (54) и (56) выражение (49) для f, мы обращаем их в тождества; это значит, что параметры a и θ в декартовой и сферической системах координат одинаковы.

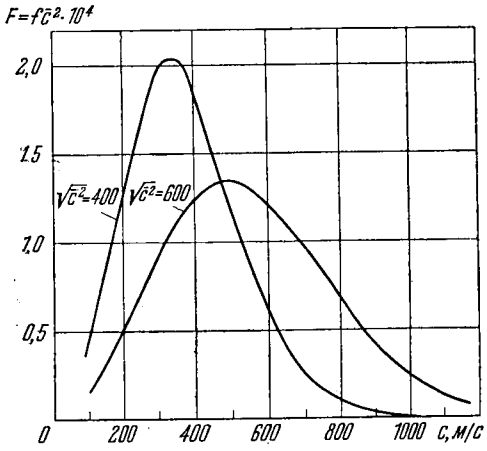


Рис. 12.6. Функции распределения для двух значений средней квадратичной скорости молекул.

На рис. 12.6 представлено изменение функции $F = fc^2$ в зависимости от c для двух значений параметра $\overline{c^2}$. Как видно, при некотором значении скорости $c = c_m$ функция F имеет максимум.

Решая элементарную задачу на отыскание максимума функции (fc^2), находим величину наиболее вероятной скорости молекул

$$c_m = \sqrt{\frac{2\overline{c^2}}{3}} = 0{,}816\sqrt{\overline{c^2}}. \tag{57}$$

Выразим с помощью (49) и (56) среднюю арифметическую скорость молекул через среднюю квадратичную скорость

$$\bar{c} = 4\pi \int_0^\infty c^3 f\, dc = 2\sqrt{\frac{2\overline{c^2}}{3\pi}} = 0{,}922\sqrt{\overline{c^2}}. \tag{57а}$$

Подставляя (57) в (49), получаем более удобное выражение для функции распределения Максвелла

$$f = \left(\frac{1}{\pi c_m^2}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{c^2}{c_m^2}\right). \tag{58}$$

Как видно из рис. 12.6, с ростом величины наиболее вероятной скорости c_m (или средней квадратичной $\overline{c^2}$) увеличивается относительное число молекул, имеющих высокие скорости.

Движение молекул сказывается на макроскопических свойствах газа. Давление газа на стенку можно определить как силу, которая возникает в результате изменения нормальной к стенке составляющей суммарного количества движения молекул при их соударении со стенкой; при этом молекулу и стенку считают абсолютно упругими твердыми телами.

Расположим стенку по нормали к оси абсцисс (рис. 12.7) и определим количество молекул, которое встретится с элементарной площадкой размером dF за единицу времени. Рассмотрим сначала молекулы со скоростью движения c; в течение одной секунды об эту площадку ударится половина от всего количества молекул данной скорости, заполняющих цилиндр с образующей c и площадью основания dF (вторая половина молекул данной скорости в виду хаотичности их движения в этот же промежуток времени движется в противоположном направлении, т. е. удаляется от стенки). Это количество составляет

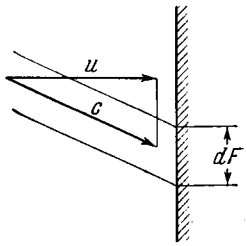


Рис. 12.7. К определению числа молекул, встречающихся со стенкой за единицу времени.

$$\frac{1}{2} nfu\, dF\, d\omega, \tag{59}$$

где n — полное число молекул в единице объема, f — значение функции, соответствующее скорости c, $u\, dF$ — объем элементарного цилиндра, $d\omega = du\, dv\, dw$ — элемент пространства скоростей.

Суммарная масса молекул, соударяющихся с площадкой dF за одну секунду, равна

$$\frac{1}{2} nmfu\, dF\, d\omega = \frac{1}{2} \rho f u\, dF\, d\omega.$$

Здесь $\rho = nm$ — плотность газа, m — масса одной молекулы. При упругом ударе о стенку нормальная составляющая скорости молекулы изменяется на обратную величину, чему отвечает изменение соответствующей проекции количества движения за одну секунду на величину

$$\frac{1}{2} \rho f\, 2u^2\, dF\, d\omega = \rho u^2 f\, dF\, d\omega. \tag{60}$$

Суммируя изменения количества движения молекул во всем диапазоне скоростей ($0 \leqslant c \leqslant \infty$), получим полное изменение нормальной проекции количества движения за одну секунду,

равное осредненной силе давления молекул на площадку dF:

$$dP = \left[\int_0^\infty u^2 f\, d\omega\right] \rho\, dF;$$

здесь величины ρ и dF, как не зависящие от распределения молекул по скоростям, вынесены из-под знака интеграла.

Переходя, как и в формулах (50)—(55), к полярным координатам и относя силу давления к площади, получим следующую формулу для определения величины давления:

$$p = \frac{dP}{dF} = 4\pi\rho \int_0^\infty u^2 c^2 f\, dc$$

или

$$p = \rho \overline{u^2},$$

где $\overline{u^2}$ — средняя квадратичная скорость движения молекул в направлении нормали к стенке, равная, согласно (44) и (55),

$$\overline{u^2} = 4\pi \int_0^\infty u^2 c^2 f\, dc = \int_0^\infty u^2 f\, d\omega.$$

Так как при хаотическом движении все направления равнозначны

$$\overline{u^2} = \overline{v^2} = \overline{w^2} = \frac{\overline{c^2}}{3},$$

то давление газа на стенку равно

$$p = \frac{1}{3}\rho \overline{c^2} \tag{61}$$

или в соответствии с (57)

$$p = \frac{1}{2}\rho c_m^2.$$

Так как было принято, что импульс ударяющихся о стенку молекул равен импульсу отраженных молекул, то полученная величина давления складывается из двух равных частей: давления ударяющихся и давления отраженных молекул

$$p = p_1 + p_2,$$

где

$$p_1 = p_2 = \frac{1}{4}\rho c_m^2.$$

Из (61) получаем выражение для средней квадратичной скорости движения молекул

$$\sqrt{\overline{c^2}} = \sqrt{\frac{3p}{\rho}}. \tag{62}$$

Сравнивая (62) с известным выражением для скорости звука в газе

$$a=\sqrt{\frac{kp}{\rho}},$$

можем связать среднюю квадратичную скорость молекул со скоростью звука

$$\sqrt{\overline{c^2}}=a\sqrt{\frac{3}{k}}. \tag{63}$$

§ 6. Давление и напряжение трения при свободно-молекулярном обтекании твердого тела

При изучении свободно-молекулярного потока газа следует учитывать то, что наряду с хаотическим движением молекул имеется упорядоченное перемещение конечных масс газа.

В первых работах Эпштейна [1]) и Смолуховского [2]), посвященных свободно-молекулярному течению газа около твердого тела, предполагалось, что скорость упорядоченного движения газа мала по сравнению со средней скоростью хаотического движения молекул. Мы не станем пользоваться этим ограничением и приведем решение задачи для произвольного значения числа Маха в набегающем на тело газовом потоке. Как показал Цзян [3]), такое общее решение имеет достаточно простой вид.

Обтекание тела разреженным газом целесообразно рассматривать в прямоугольной системе координат, так как при этом удобно группируются одноименные составляющие скоростей хаотического и упорядоченного движений.

Если газ сильно разрежен, то столкновения молекул между собой и с поверхностью тела настолько редки, что реэмитируемые поверхностью молекулы практически не возмущают набегающий на тело невозмущенный поток газа и не нарушают максвелловского распределения хаотических скоростей (u, v, w) молекул в этом газе. Функция распределения Максвелла согласно (58) может быть представлена в виде

$$f=\left(\frac{1}{\pi c_m^2}\right)^{3/2}\exp\left[-\frac{u^2+v^2+w^2}{c_m^2}\right]. \tag{64}$$

---

[1]) Эпштейн П. С., О сопротивлении сфер при движении в газах. В сб. «Газовая динамика», ИЛ, М., 1950.

[2]) Smoluchowski M., Zur kinetische Theorie der Transpiration und Diffusion verdünnter Gase, Annal. der Physik., v. 33, 1559—70, 1910.

[3]) Цзян Х. Ш., Аэродинамика разреженных газов. В сб. «Газовая динамика», ИЛ, М., 1950.

Если упорядоченное движение газа происходит со скоростью

$$C = \sqrt{U^2 + V^2 + W^2}, \tag{65}$$

то полные скорости молекул соответственно равны

$$u_1 = U + u, \quad v_1 = V + v, \quad w_1 = W + w. \tag{66}$$

Расположим прямоугольную систему координат таким образом, чтобы ось x была перпендикулярна к элементу поверхности тела dF (рис. 12.8), и определим силу давления движущегося газа на площадку dF, следуя тем же рассуждениям, что и в предыдущем параграфе (при определении давления на стенку неподвижного газа).

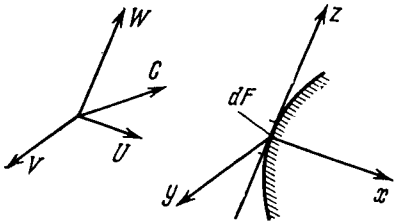


Рис. 12.8. К определению силы давления газа на стенку при молекулярном течении.

В неподвижной системе координат число молекул в единичном объеме, имеющих скорости хаотического движения в интервале u и $u + du$, v и $v + dv$, w и $w + dw$, равно $nf d\omega$; за одну секунду о площадку dF успевают удариться те молекулы, которые заполняют цилиндр с основанием dF и образующей

$$c_1 = \sqrt{u_1^2 + v_1^2 + w_1^2}.$$

Объем этого цилиндра равен $u_1 dF$. Поэтому общее число молекул со скоростью u_1, передающих импульс площадке dF, составляет

$$nf u_1\, dF\, du\, dv\, dw = nf u_1\, dF\, du_1\, dv_1\, dw_1.$$

Здесь использовано предположение о постоянстве скорости направленного движения газа.

Полное число молекул N, ударяющихся о единичный элемент площади, получим путем интегрирования последнего выражения по всей области изменения скоростей молекул. Учитывая (64), имеем

$$N = n\left(\frac{1}{\pi c_m^2}\right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} dv_1 \int_{-\infty}^{\infty} dw_1 \int_0^{\infty} u_1 \times$$

$$\times \exp\left[-\frac{(u_1 - U)^2 + (v_1 - V)^2 + (w_1 - W)^2}{c_m^2}\right] du_1. \tag{67}$$

Нижний предел у последнего интеграла равен нулю, а не $-\infty$, так как молекулы с отрицательными значениями нормальной

составляющей скорости ($u_1 < 0$) с поверхностью тела не встретятся.

Нетрудно показать, что тройной интеграл в (67) сводится к произведению следующих трех интегралов:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(v_1 - V)^2}{c_m^2}\right] dv_1 = c_m \sqrt{\pi}, \tag{68а}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(w_1 - W)^2}{c_m^2}\right] dw_1 = c_m \sqrt{\pi}, \tag{68б}$$

$$\int_0^{\infty} u_1 \exp\left[-\frac{(u_1 - U)^2}{c_m^2}\right] du_1 = \frac{c_m^2}{2}\left\{\exp\left[-\frac{U^2}{c_m^2}\right] + \frac{U\sqrt{\pi}}{c_m}\left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{U}{c_m}\right)\right]\right\}. \tag{68в}$$

В этой записи использовано общепринятое обозначение для интеграла вероятностей

$$\operatorname{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-x^2} dx,$$

значения которого берутся из таблиц (заметим, что при $t = \infty$ $\operatorname{erf}(\infty) = 1$). Подставляя выражения (68) в (67), получаем следующую формулу для определения числа молекул, ударяющихся в единицу времени о единичную площадку поверхности тела:

$$N = \frac{nc_m}{2}\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{U^2}{c_m^2}\right) + \frac{U}{c_m}\left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{U}{c_m}\right)\right]\right\}. \tag{69}$$

В частном случае неподвижного газа ($U = 0$) получаем

$$N_0 = \frac{nc_m}{2\sqrt{\pi}}. \tag{69а}$$

Секундный поток массы молекул, падающих на единичную площадку поверхности тела:

$$G_x = mN = \frac{1}{2}\rho c_m\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left[-\frac{U^2}{c_m^2}\right] + \frac{U}{c_m}\left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{U}{c_m}\right)\right]\right\}. \tag{70}$$

Для неподвижного газа ($U = 0$) имеем, согласно (57) и (57а),

$$G_x = \rho \frac{c_m}{2\sqrt{\pi}} = \frac{1}{4}\rho\bar{c}. \tag{71}$$

Определяя аэродинамические силы, которые возникают на единичной площадке тела при свободно-молекулярном обтекании, следует иметь в виду, что проекция аэродинамической силы равна разности проекций на ту же ось количеств движения секундной массы молекул, падающих на площадку и отраженных от нее.

Проекция на ось x секундного количества движения молекул со скоростями в интервале u, $u+du$; v, $v+dv$; w, $w+dw$, падающих на поверхность единичной площади, очевидно, равна

$$\rho f u_1^2\, du_1\, dv_1\, dw_1.$$

Проекция на нормаль секундного количества движения всех молекул составляет, учитывая (64),

$$I_{x1} = \rho \left(\frac{1}{\pi c_m^2}\right)^{\frac{3}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} dv_1 \int_{-\infty}^{\infty} dw_1 \int_0^{\infty} u_1^2 \times$$

$$\times \exp\left[-\frac{(u_1-U)^2+(v_1-V)^2+(w_1-W)^2}{c_m^2}\right] du_1. \quad (72)$$

Как и при определении числа ударяющихся о поверхность молекул (см. формулы (67) и (68)), заменим тройной интеграл в (72) произведением трех интегралов. Два из них, (68а) и (68б), были найдены ранее

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(v_1-V)^2}{c_m^2}\right] dv_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(w_1-W)^2}{c_m^2}\right] dw_1 = c_m\sqrt{\pi},$$

третий в данном случае имеет вид

$$\int_0^{\infty} u_1^2 \exp\left[-\frac{(u_1-U)^2}{c_m^2}\right] du_1 =$$

$$= \left(\frac{c_m^3}{2} + c_m U^2\right)\left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{U}{c_m}\right)\right] + \frac{1}{2} c_m^2 U \exp\left[-\frac{U^2}{c_m^2}\right]. \quad (73)$$

Отметим, что при интегрировании (73) принимались во внимание следующие известные соотношения:

$$\int x^2 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\left(\int e^{-x^2} dx - x e^{-x^2}\right), \quad (74)$$

$$\int x e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\int e^{-x^2} dx^2 = -\frac{1}{2} e^{-x^2}.$$

Подставляя в (72) найденные значения интегралов, определяем проекцию на нормаль (ось x) секундного количества движения

молекул, падающих на единицу площади поверхности тела:

$$I_{x1} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \rho c_m U \exp\left(-\frac{U^2}{c_m^2}\right) + \rho\left(\frac{c_m^2}{4} + \frac{U^2}{2}\right)\left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{U}{c_m}\right)\right]. \quad (75)$$

В двух крайних случаях, $U = 0$ и $U \gg c_m$, выражение (75) сильно упрощается. При $U = 0$ (упорядоченное течение газа отсутствует)

$$I_{x1} = \frac{1}{4} \rho c_m^2. \quad (76)$$

При $U \gg c_m$ (скорость потока значительно больше вероятной скорости хаотического движения молекул)

$$I_{x1} = \rho\left(\frac{1}{2} c_m^2 + U^2\right), \quad (77)$$

так как в этом случае

$$\exp\left[-\frac{U^2}{c_m^2}\right] \approx 0, \quad \operatorname{erf}\left(\frac{U}{c_m}\right) \approx 1.$$

Найдем теперь тангенциальную к поверхности тела составляющую секундного количества движения молекул, падающих на единичную площадку (проекцию на ось z).

Для молекул, скорости которых лежат в узком интервале значений

$$u,\ u + du;\ v,\ v + dv;\ w,\ w + dw,$$

тангенциальная проекция секундного количества движения равна

$$-\rho f u_1 w_1\, du_1\, dv_1\, dw_1. \quad (78)$$

Для всех молекул имеем по аналогии с (67) или (72)

$$I_{z1} = \rho\left(\frac{1}{\pi c_m^2}\right)^{\frac{3}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} dv_1 \int_{-\infty}^{\infty} w_1\, dw_1 \int_0^{\infty} u_1 \times$$

$$\times \exp\left[-\frac{(u_1 - U)^2 + (v_1 - V)^2 + (w_1 - W)^2}{c_m^2}\right] du_1. \quad (79)$$

Заменим, как и прежде, тройной интеграл в (79) произведением трех интегралов. Значения двух из них уже известны (см. (68а) и (68в)), а третий легко определяется по аналогии с (68б)

$$\int_{-\infty}^{\infty} w_1 \exp\left[-\frac{(w_1 - W)^2}{c_m^2}\right] dw_1 = W c_m \sqrt{\pi}. \quad (80)$$

Подставляя (68а), (68в) и (80) в выражение (79), находим тангенциальную к поверхности тела составляющую секундного количества движения молекул, ударяющихся о поверхность единичной площади:

$$I_{z1}=\frac{1}{2}\rho c_m W\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{U^2}{c_m^2}\right)+\frac{U}{c_m}\left[1+\operatorname{erf}\left(\frac{U}{c_m}\right)\right]\right\}. \quad (81)$$

В случае покоящегося газа ($U=W=0$), как и следовало ожидать, тангенциальная составляющая количества движения молекул равна нулю, так как импульсы молекул противоположного направления взаимно уничтожаются.

Если скорость потока газа значительно превосходит вероятную скорость движения молекул ($U\gg c_m$), то, как уже указывалось при выводе выражения (77),

$$\exp\left(-\frac{U^2}{c_m^2}\right)=0,\quad \operatorname{erf}\left(\frac{U}{c_m}\right)=1;$$

поэтому, согласно (81), тангенциальная составляющая секундного количества движения молекул, ударяющихся о пластину,

$$I_{z1}=\rho UW. \quad (82)$$

Отыщем теперь секундное количество движения для молекул, реэмитированных (отраженных) поверхностью тела.

Если молекулы отражаются зеркально, то мы имеем дело с обращенной реэмиссией, когда для падающих и отраженных молекул нормальные составляющие количества движения равны по величине, но обратны по знаку (нормальная скорость при отражении меняет знак на противоположный)

$$I_{x1}=-I_{x3}, \quad (83)$$

а тангенциальные составляющие количества движения до и после отражения одинаковы и по величине, и по направлению (тангенциальная скорость при отражении сохраняется)

$$I_{z2}=I_{z3}=I_{z1}. \quad (84)$$

Если молекулы испускаются поверхностью диффузно (с нормальным максвелловским распределением скоростей хаотического движения), то ввиду отсутствия преимущественного направления у молекул тангенциальная составляющая количества движения после отражения равна нулю

$$I_{z2}=I_{z\text{д}}=0, \quad (85)$$

Нормальная составляющая секундного количества движения при диффузном отражении может быть найдена с помощью следующих соображений. Так как после диффузного отражения

молекулы газа утрачивают среднюю поступательную скорость газа ($c = 0$), то секундная масса молекул, отбрасываемых единичной площадкой поверхности тела, определяется выражением (71)

$$G_{хд} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \rho c_{тд}. \tag{86}$$

Здесь $c_{тд}$ — вероятная скорость молекул при температуре реэмиссии, не равной температуре набегающего потока.

Нормальная составляющая секундного количества движения диффузно отраженных стенкой молекул (при $U = 0$) определяется из (76)

$$I_{хд} = \frac{1}{4} \rho c_{тд}^2. \tag{87}$$

Сопоставляя (86) и (87), имеем

$$I_{хд} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} G_{хд} c_{тд}. \tag{88}$$

Величину $I_{хд}$ нетрудно найти, исходя из того, что масса отраженных от стенки молекул равна массе ударяющихся об нее молекул ($G_{хд} = G_x$), но тогда, подставив (70) в (88), имеем

$$I_{хд} = \frac{1}{4} \rho c_m c_{тд} \left\{ \exp\left[-\frac{U^2}{c_m^2}\right] + \frac{U\sqrt{\pi}}{c_m}\left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{U}{c_m}\right)\right]\right\}. \tag{89}$$

Так как скорость хаотического движения молекул пропорциональна корню квадратному из температуры, то вероятная скорость отраженных молекул может быть выражена через вероятную скорость молекул набегающего потока и отношение температур

$$c_{тд} = c_m \sqrt{\frac{T_д}{T_н}}. \tag{90}$$

Здесь $T_н$ — температура в невозмущенном набегающем потоке, $T_д$ — температура молекул после отражения от стенки, которая зависит от температуры стенки T_w и коэффициента аккомодации α.

Пусть доля диффузно отраженных молекул составляет σ, тогда энергия этих молекул пропорциональна величине $\sigma T_д$, а энергия зеркально отраженных молекул пропорциональна $(1 - \sigma) T_н^*$. Суммарная энергия отраженных поверхностью молекул пропорциональна величине

$$\sigma T_д + (1 - \sigma) T_н^*.$$

Как было указано в § 2, коэффициентом аккомодации называется отношение фактического изменения энергии молекул при их отражении от стенки к предельно возможному ее изменению,

которое имеет место при полной аккомодации молекул, когда температура отраженных молекул равна температуре стенки T_w. Поэтому имеем

$$\alpha = \frac{T_н^* - [\sigma T_д + (1-\sigma) T_н^*]}{T_н^* - T_w} = \frac{\sigma (T_н^* - T_д)}{T_н^* - T_w}. \tag{91}$$

Пользуясь этой формулой, можно по известным значениям коэффициентов α и σ найти температуру диффузно отраженных молекул $T_д$ и затем по формуле (90) — вероятную скорость молекул $c_{mд}$. Полученных сведений достаточно для определения аэродинамических сил, возникающих на теле при различных условиях свободно-молекулярного обтекания.

Проекция силы равна изменению соответствующей проекции секундного количества движения молекул (при ударе и отражении)

$$P_x = I_{x1} - I_{x2}, \quad P_z = I_{z1} - I_{z2}. \tag{92}$$

Если доля диффузно отраженных молекул есть σ, а зеркально отраженных молекул $(1 - \sigma)$, то

$$\left.\begin{aligned} P_x &= I_{x1} - [-\sigma I_{xд} + (1-\sigma) I_{x3}], \\ P_z &= I_{z1} - [-\sigma I_{zд} + (1-\sigma) I_{z3}] \end{aligned}\right\} \tag{93}$$

или на основании (83) и (84)

$$P_x = (2-\sigma) I_{x1} + \sigma I_{xд}, \quad P_z = \sigma I_{z1}. \tag{94}$$

Используя выражения (94), (75) и (90), получаем окончательное выражение для давления, которое оказывает свободно-молекулярное течение газа на элемент поверхности, ориентированный по нормали к составляющей скорости невозмущенного потока газа:

$$p = P_x = \frac{1}{2}\rho c_m^2 \left\{ \left[\frac{2-\sigma}{\sqrt{\pi}} \frac{U}{c_m} + \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{T_д}{T_н}} \right] \exp\left(-\frac{U^2}{c_m^2}\right) + \right.$$
$$\left. + \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{U^2}{c_m^2}\right)(2-\sigma) + \frac{\sigma\sqrt{\pi}}{2} \frac{U}{c_m} \sqrt{\frac{T_д}{T_н}} \right] \left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{U}{c_m}\right) \right] \right\}. \tag{95}$$

Аналогичным образом из (94), (80), (85) и (90) выводим общую формулу для напряжения трения на элементе поверхности при свободно-молекулярном течении

$$\tau = P_z = \frac{1}{2}\sigma\rho c_m W \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{U^2}{c_m^2}\right) + \frac{U}{c_m} \left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{U}{c_m}\right) \right] \right\}. \tag{96}$$

В частном случае невозмущенного потока, перпендикулярного к поверхности тела ($C = U$, $V = 0$, $W = 0$), касательное напряжение (трение) равно нулю

$$\tau_n = 0. \tag{97}$$

В частном случае потока, параллельного поверхности тела ($C = W$, $U = 0$, $V = 0$), давление

$$p = \frac{1}{4}\rho c_m^2\left[2 + \sigma\left(\sqrt{\frac{T_д}{T_н}} - 1\right)\right] \tag{98}$$

и напряжение трения

$$\tau = \frac{\sigma}{2\sqrt{\pi}}\rho c_m C = \frac{\sigma}{4}\rho\bar{c}C. \tag{99}$$

При полностью диффузном отражении молекул от стенки ($\sigma = 1$) имеем

$$p = \frac{1}{4}\rho c_m^2\left(1 + \sqrt{\frac{T_д}{T_н}}\right),$$

$$\tau = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\rho c_m C. \tag{100}$$

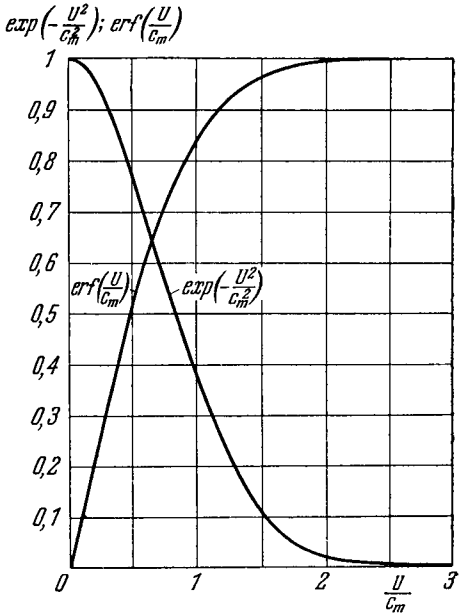


Рис. 12.9. Вспомогательные функции: $\exp\left(-\frac{U^2}{c_m^2}\right)$ и $\operatorname{erf}\left(\frac{U}{c_m}\right)$.

В формулах (95) и (96) скорость набегающего потока считается положительной, если вектор U направлен к обтекаемой поверхности, и отрицательной, если этот вектор направлен от поверхности. Иначе говоря, при расчете сил, возникающих на передней стороне тела (обращенной к набегающему потоку), нужно считать скорость положительной ($U > 0$), а на задней стороне тела — отрицательной ($U < 0$).

Так как здесь под U понимается абсолютная величина скорости, то для передней части тела ($U > 0$) формулы (95) и (96) пригодны без изменений ($p_п = p$, $\tau_п = \tau$); для задней стороны тела ($U < 0$) формулы (95) и (96) нужно записать в следующем виде:

$$p_э = \frac{1}{2}\rho c_m^2\left\{\left[-\frac{2-\sigma}{\sqrt{\pi}}\frac{U}{c_m} + \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{T_д}{T_н}}\right]\exp\left(-\frac{U^2}{c_m^2}\right) + \right.$$

$$\left. + \left[(2-\sigma)\left(\frac{1}{2} + \frac{U^2}{c_m^2}\right) - \frac{\sigma\sqrt{\pi}}{2}\frac{U}{c_m}\sqrt{\frac{T_д}{T_н}}\right]\left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{U}{c_m}\right)\right]\right\}, \tag{101}$$

$$\tau_э = \frac{1}{2}\sigma\rho c_m W\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{U^2}{c_m^2}\right) - \frac{U}{c_m}\left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{U}{c_m}\right)\right]\right\}. \tag{102}$$

Таблица 5

$\frac{U}{c_m}$	$\frac{U^2}{c_m^2}$	$\exp\left(-\frac{U^2}{c_m^2}\right)$	$\operatorname{erf}\left(\frac{U}{c_m}\right)$
0	0	1	0
0,1	0,01	0,9900	0,1125
0,2	0,04	0,9608	0,2227
0,3	0,09	0,9139	0,3286
0,4	0,16	0,8521	0,4284
0,5	0,25	0,7788	0,5205
0,6	0,36	0,6977	0,6039
0,7	0,49	0,6026	0,6778
0,8	0,64	0,5274	0,7421
0,9	0,81	0,4449	0,7961
1	1	0,3679	0,8427
1,1	1,21	0,2982	0,8802
1,2	1,44	0,2369	0,9103
1,3	1,69	0,1845	0,9340
1,4	1,96	0,1409	0,9523
1,5	2,25	0,1054	0,9661
1,6	2,56	0,0773	0,9763
1,7	2,89	0,0556	0,9838
1,8	3,24	0,0392	0,9891
1,9	3,61	0,0271	0,9928
2	4	0,0183	0,9953
3	9	0	1

Для облегчения расчетов по формулам (95), (96), (101) и (102) в таблице 5 приведены значения функций $\exp\left(-\frac{U^2}{c_m^2}\right)$ и $\operatorname{erf}\left(\frac{U}{c_m}\right)$ для различных величин $\frac{U}{c_m}$. По этим данным построены также кривые на рис. 12.9.

§ 7. Расчет аэродинамических сил при свободно-молекулярном обтекании твердых тел

В предыдущем параграфе указаны методы определения нормальных и тангенциальных напряжений, возникающих на элементарной площадке поверхности тела при свободно-молекулярном обтекании.

Найдем аэродинамические силы, действующие на тело в целом.

Пусть вектор скорости невозмущенного потока $\boldsymbol{C}$ составляет угол β с элементом поверхности тела (местный угол атаки), тогда угол φ между вектором $\boldsymbol{C}$ и нормалью к поверхности (рис. 12.10)

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \beta.$$

Следовательно, проекции скорости на нормаль и касательную к поверхности составляют соответственно

$$U = C\cos\varphi = C\sin\beta,$$
$$W = C\sin\varphi = C\cos\beta. \qquad (103)$$

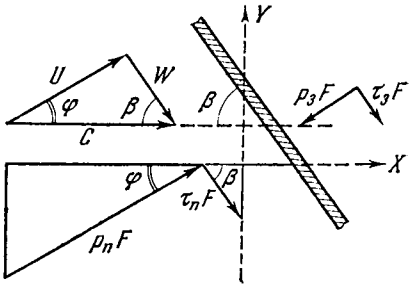


Рис. 12.10. К определению аэродинамических сил на пластине при молекулярном течении газа.

Определим силы, действующие на пластину. Нормальная к пластине составляющая аэродинамической силы равна произведению площади пластины на разность давлений, приложенных к передней и задней ее сторонам

$$P_n = (p_п - p_з)\,F. \qquad (104)$$

Тангенциальная сила равна произведению площади пластины на сумму напряжений трения, возникающих на обеих ее сторонах:

$$P_t = (\tau_п + \tau_з)\,F. \qquad (105)$$

Подставляя (103), (95) и (101) в (104) и принимая для простоты $\sigma = 1$, $T_{дп} = T_{дз} = T_н$, найдем величину нормальной силы

$$P_n = \frac{1}{2}\rho c_m^2 F\left\{\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{C\sin\beta}{c_m}\exp\left(-\frac{C^2\sin^2\beta}{c_m^2}\right) + \right.$$
$$\left. + \sqrt{\pi}\frac{C\sin\beta}{c_m} + \left[1 + 2\frac{C^2\sin^2\beta}{c_m^2}\right]\operatorname{erf}\left(\frac{C\sin\beta}{c_m}\right)\right\}. \qquad (106)$$

На основании (103), (96) и (102) получим из (105) величину тангенциальной силы

$$P_t = \rho c_m C\cos\beta F\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{C^2\sin^2\beta}{c_m^2}\right) + \frac{C\sin\beta}{c_m}\operatorname{erf}\left(\frac{C\sin\beta}{c_m}\right)\right\}. \qquad (107)$$

Теперь нетрудно определить суммарную аэродинамическую силу, направленную перпендикулярно к скорости набегающего

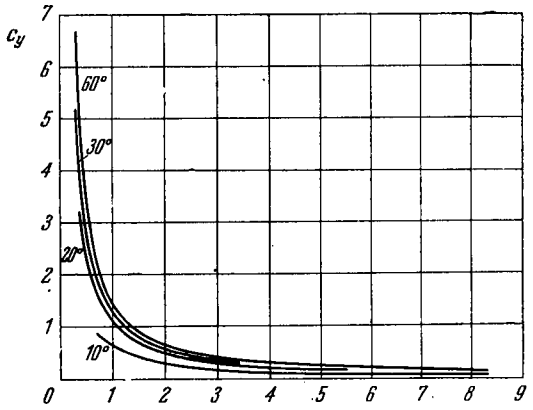


Рис. 12.11. Зависимость коэффициента подъемной силы пластины от числа Маха при молекулярном течении газа.

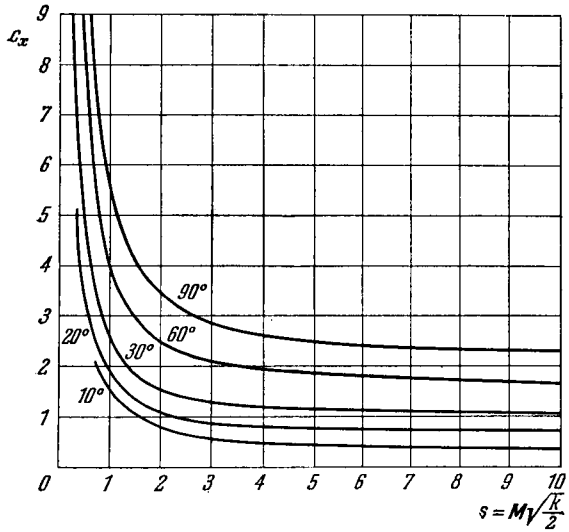


Рис. 12.12. Зависимость коэффициента лобового сопротивления пластины от числа Маха при молекулярном течении газа.

потока, т. е. подъемную силу на пластине

$$P_y = P_n \cos\beta - P_t \sin\beta = \\ = \frac{1}{2} F\rho c_m^2 \cos\beta \left[\frac{C\sin\beta}{c_m}\sqrt{\pi} + \operatorname{erf}\left(\frac{C\sin\beta}{c_m}\right)\right] \quad (108)$$

и суммарную аэродинамическую силу, направленную по скоро-

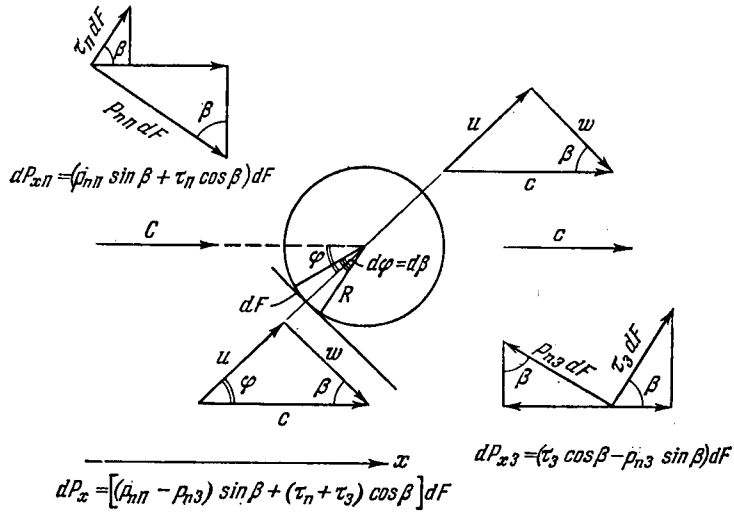


Рис. 12.13. К определению проекций на направление потока сил давления и трения при поперечном обтекании цилиндра.

сти набегающего потока, т. е. силу сопротивления пластины

$$P_x = P_n \sin\beta + P_t \cos\beta = \frac{1}{2}\rho c_m^2 F \left\{\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{C}{c_m}\exp\left(-\frac{C^2\sin^2\beta}{c_m^2}\right) + \right. \\ \left. + \sqrt{\pi}\frac{C\sin^2\beta}{c_m} + \left[1 + 2\frac{C^2}{c_m^2}\right]\sin\beta\operatorname{erf}\left(\frac{C\sin\beta}{c_m}\right)\right\}. \quad (109)$$

Найдем из (108) и (109) аэродинамические коэффициенты пластины при свободно-молекулярном обтекании

$$c_y = \frac{P_y}{\frac{1}{2}\rho C^2 F} = \cos\beta\sin^2\beta\left[\sqrt{\pi}\frac{c_m}{C\sin\beta} + \frac{c_m^2}{C^2\sin^2\beta}\operatorname{erf}\left(\frac{C\sin\beta}{c_m}\right)\right], \quad (110)$$

$$c_x = \frac{P_x}{\frac{1}{2}\rho C^2 F} = \sin\beta\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{c_m}{C\sin\beta}\exp\left(-\frac{C^2\sin^2\beta}{c_m^2}\right) + \right. \\ \left. + \frac{c_m}{C}\sqrt{\pi}\sin\beta + \left(\frac{c_m^2}{C^2} + 2\right)\operatorname{erf}\left(\frac{C\sin\beta}{c_m}\right)\right]. \quad (111)$$

Коэффициенты c_y и c_x можно выразить в функции числа Маха, если с помощью (57) и (63) вероятную скорость хаотического движения молекул c_m заменить скоростью звука. В соответствии с этим имеем

$$s = \frac{C}{c_m} = \mathrm{M}\sqrt{\frac{k}{2}}. \qquad (112)$$

Зависимости $c_y(\mathrm{M})$, $c_x(\mathrm{M})$ для нескольких значений угла атаки пластины представлены на рис. 12.11 и рис. 12.12.

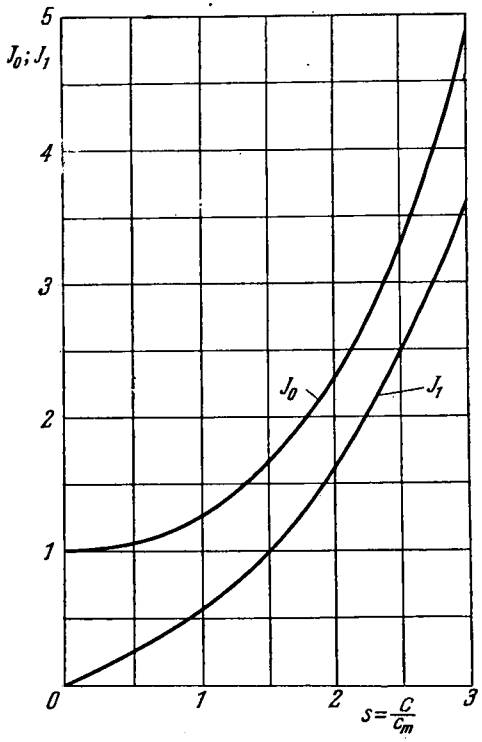


Рис. 12.14. Модифицированные функции Бесселя нулевого и первого порядка.

Аэродинамические силы при свободно-молекулярном обтекании можно рассчитать и для тел более сложной формы, чем плоские пластины, но при этом расчет целесообразно проделать для передней и тыльной сторон тела порознь, пользуясь соответствующими выражениями (95) и (96) или (101) и (102) для нормальных и тангенциальных напряжений.

Выполним расчет аэродинамических сил при свободно-молекулярном поперечном обтекании кругового цилиндра бесконечной длины.

Проекция аэродинамической силы, приложенной к элементарной площадке dF, на направление невозмущенного потока (лобовое сопротивление) в соответствии с рис. 12.13 равна

$$dP_{x\text{п}} = (p\sin\beta + \tau\cos\beta)\,dF, \quad dP_{x\text{з}} = (-p\sin\beta + \tau\cos\beta)\,dF. \qquad (113)$$

Проекция той же силы на перпендикуляр к направлению невозмущенного потока

$$dP_{y\text{п}} = (p\cos\beta - \tau\sin\beta)\,dF, \quad dP_{y\text{з}} = (p\cos\beta + \tau\sin\beta)\,dF. \qquad (114)$$

Проинтегрировав эти выражения в пределах от β_1 (нижний край поверхности тела) до β_2 (верхний край), получим значе-

ния силы лобового сопротивления P_x и подъемной силы P_y, действующих на заданный участок поверхности тела. В частном случае цилиндра (рис. 12.13) подъемной силы нет ($P_y = 0$), а сила лобового сопротивления может быть получена из (113) с помощью (95) и (96) для передней стороны цилиндра (единичной длины)

$$P_{x\text{п}} = \frac{1}{2}\rho c_m^2 2R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{C}{c_m} + \frac{1}{2}\sin\beta \right) \exp\left(-\frac{C^2 \sin^2\beta}{c_m^2} \right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{2} + \frac{C^2}{c_m^2} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{C\sin\beta}{c_m} \right) \sin\beta \left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{C\sin\beta}{c_m} \right) \right] \right\} d\beta, \quad (115)$$

где $dF = -R\,d\varphi = R\,d\beta$. Аналогичным путем с помощью (101) и (102) для задней стороны цилиндра получим

$$P_{x\text{з}} = \frac{1}{2}\rho c_m^2 2R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{C}{c_m} - \frac{1}{2}\sin\beta \right) \exp\left(-\frac{C^2 \sin^2\beta}{c_m^2} \right) + \right.$$

$$\left. + \left(-\frac{1}{2} - \frac{C^2}{c_m^2} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{C\sin\beta}{c_m} \right) \sin\beta \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{C\sin\beta}{c_m} \right) \right] \right\} d\beta. \quad (116)$$

Коэффициент сопротивления цилиндра

$$c_x = \frac{P_{x\text{п}} + P_{x\text{з}}}{\frac{1}{2}\rho C^2 2R}.$$

Используя соотношения (115) и (116) и вводя обозначение $s = \frac{C}{c_m}$, имеем [1])

$$c_x = \frac{2}{s\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-s^2\sin^2\beta}\, d\beta + \left(\frac{1}{s^2} + 2 \right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\beta \operatorname{erf}(s\sin\beta)\, d\beta +$$

$$+ \frac{\sqrt{\pi}}{s} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\beta\, d\beta. \quad (117)$$

[1]) Очевидно (см. рис. 12.13), что выражение для c_x можно получить (как и для пластины) по формуле

$$c_x = \frac{1}{\frac{1}{2}\rho C^2 2R} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{(P_{x\text{п}} - P_{x\text{з}})\sin\beta + (\tau_\text{п} + \tau_\text{з})\cos\beta\}\, d\beta.$$

Значения интегралов, входящих в выражения (117), будут

$$F_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-s^2 \sin^2\beta}\, d\beta = \frac{\pi}{2} e^{-\frac{s^2}{2}} I_0,$$

$$F_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\beta \operatorname{erf}(s\sin\beta)\, d\beta = \frac{s\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{s^2}{2}} (I_0 + I_1),$$

$$F_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\beta\, d\beta = \frac{\pi}{4}.$$

Здесь величины

$$J_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{e^{\frac{s^2}{2}x}\, dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad J_1 = \frac{1}{2\pi} s^2 \int_{-1}^{1} e^{\frac{s^2 x}{2}} \sqrt{1-x^2}\, dx$$

представляют собой так называемые модифицированные функции Бесселя соответственно нулевого и первого порядков. Значения функций $J_0(s)$ и $J_1(s)$ приведены на рис. 12.14.

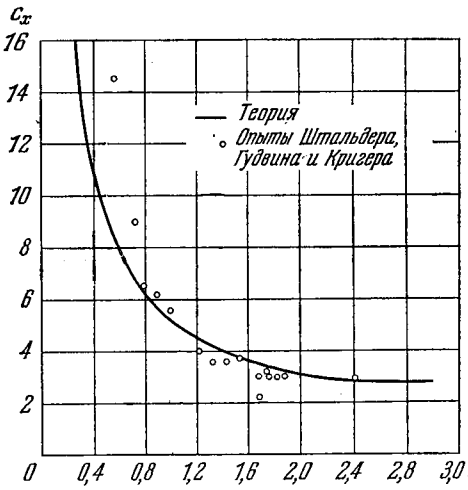


Рис. 12.15. Зависимость коэффициента лобового сопротивления от числа s при поперечном обтекании цилиндра: сплошная линия — теория, кружочки — опыты Штальдера, Гудвина и Кригера.

Подставляя значения F_1, F_2, F_3 в уравнение (117), получим окончательно

$$c_x = \frac{\sqrt{\pi}}{s} \left\{ e^{-\frac{1}{2}s^2} \left[J_0 + \left(\frac{1}{2} + s^2\right)(J_0 + J_1) \right] + \frac{\pi}{4} \right\}.$$

На рис. 12.15 изображена рассчитанная по формуле (117) зависимость коэффициента лобового сопротивления цилиндра от числа $s = C/c_m$ при свободно-молекулярном его обтекании гелием. Для сравнения на этом графике приведены также экспериментальные точки, полученные Штальдером, Гудвином и Кригером [1]) в аэродинамической трубе.

[1]) Stalder J. R., Goodwin G., Creager M. O., NACA Reprt 1037, 1951.

При отыскании аэродинамических сил, возникающих при свободно-молекулярном обтекании пластины и цилиндра, предполагалось, что температура поверхности тела равна температуре невозмущенного набегающего потока. Определение истинной температуры тела в свободно-молекулярном потоке представляет самостоятельную задачу [1]), на которой мы здесь не останавливаемся.

§ 8. Свободно-молекулярное течение газа в длинной трубе

Под свободно-молекулярным течением в длинной трубе понимают такое течение, в котором свободный пробег молекул l много больше диаметра трубы d. В этом случае необходимо учитывать столкновения молекул со стенками, но можно пренебречь столкновениями молекул между собой, следовательно, максвелловское распределение скоростей хаотического движения молекул, устанавливающееся при отражении от стенок, внутри труб не нарушается.

Найдем массу молекул, проходящих в единицу времени через поперечное сечение трубы (рис. 12.16). Для этой цели

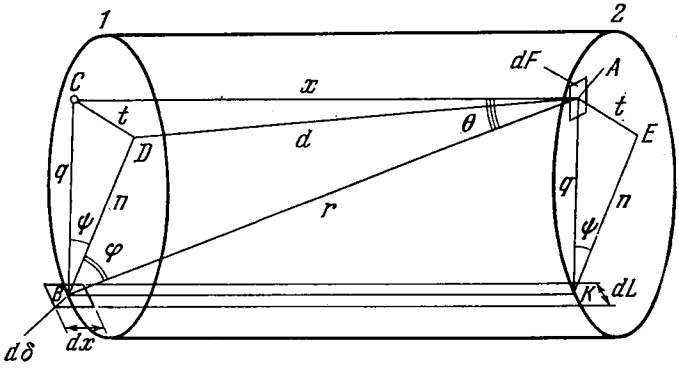


Рис. 12.16. К определению расхода газа в трубе при молекулярном течении.

вырежем в поперечном сечении 2 трубы элементарную площадку dF и определим число молекул, отраженных стенками трубы, которое пересечет эту площадку.

Пусть отражающий молекулы элемент поверхности трубы площадью $d\delta$ и длиной dx находится в сечении 1, отстоящем от сечения 2 на расстоянии x, а радиус-вектор BA, соединяющий площадки dF и $d\delta$, имеет длину r и составляет угол θ с осью трубы.

---

[1]) Паттерсон Г. Н., Молекулярное течение газов, Физматгиз, М., 1960.

Секундная масса молекул, отраженных площадкой $d\delta$ в направлении нормали к стенке, согласно (71), равна

$$dG_{n1} = \frac{1}{4}\rho_1 \bar{c}\, d\delta,$$

где ρ_1 — плотность газа в сечении *1* (в окрестности площадки $d\delta$), $\bar{c}$ — средняя скорость молекул. Проекция площадки $d\delta$ на плоскость, нормальную к радиусу-вектору r, составляет $\cos\varphi\, d\delta$, где φ — угол между радиусом-вектором r и нормалью к площадке $d\delta$ (т. е. направлением радиуса трубы). Секундный расход молекул, попадающих с площадки $d\delta$ на площадку dF, определяется, таким образом, выражением

$$dG_{r1} = \frac{1}{4}\rho_1 \bar{c} \cos\varphi\, d\delta \frac{d\chi}{\pi}. \qquad (118)$$

Здесь $d\chi$ — телесный угол, под которым площадка dF видна из центра площадки $d\delta$, а отношение $d\chi/\pi$ равно доле общего числа молекул, отражаемых площадкой $d\delta$ во всю охватывающую ее внутреннюю полусферу, которая попадает на площадку dF.

По определению, телесный угол $d\chi$, охватывающий площадку dF, равен отношению проекции этой площадки на плоскость, нормальную к радиусу-вектору r, к квадрату величины радиуса-вектора

$$d\chi = \frac{\cos\theta\, dF}{r^2}. \qquad (119)$$

Обозначим через ψ угол между отрезком прямой, соединяющим центр площадки dF с точкой пересечения образующей трубы, проведенной из центра площадки $d\delta$, с плоскостью сечения *2*, и опустим перпендикуляр t из центра площадки dF на нормаль к стенке трубы n. Из сравнения (рис. 12.16) двух прямоугольных треугольников BCD и ACD с треугольником ABD, имеющим с ними общие стороны, следует, что $\triangle ABD$ прямоугольный, и поэтому имеют место равенства

$$r\cos\varphi = q\cos\psi, \quad r\cos\theta = x. \qquad (120)$$

Подставляя (119), (120) в (118), приходим к следующему выражению для элементарной массы молекул, отражаемых элементом поверхности трубы $d\delta$ (в сечении *1*) на элемент dF поперечного сечения *2*:

$$dG_{r1} = \frac{1}{4\pi r^2}\rho_1 \bar{c}\cos\varphi\cos\theta\, d\delta\, dF = \frac{1}{4\pi r^4}\rho_1 \bar{c}\, dF q\cos\psi x\, dL\, dx. \qquad (121)$$

Здесь элементарная дуга периметра трубы

$$dL = r_0\, d\psi = \frac{d\delta}{dx},$$

причем $d\psi$ — угол, стягиваемый элементарной дугой dL, r_0 — радиус трубы. Так как $r^2 = x^2 + q^2$, то из (121) имеем

$$dG_{r1} = \frac{\bar{c}\,dF}{4\pi} \frac{\rho_1 x\,dx}{(q^2+x^2)^2} q\cos\psi\,dL.$$

Естественно, что и от элемента dF сечения *2* идет поток молекул на элемент поверхности трубы $d\delta$, расположенный в сечении *1*; этот «обратный» поток отличается от рассмотренного выше потока знаком, а также тем, что плотность газа в сечении *2* имеет другое значение; таким образом, секундная масса «обратного» потока составляет

$$dG_{r2} = -\frac{\bar{c}\,dF}{4\pi} \frac{\rho_2 x\,dx}{(q^2+x^2)^2} q\cos\psi\,dL.$$

Здесь средняя скорость $\bar{c}$ принята такой же, как и для dG_{r1} ввиду постоянства температуры.

Результативный поток молекул в направлении падения плотности имеет секундную массу

$$dG = dG_{r1} + dG_{r2} = \frac{\bar{c}\,dF}{4\pi} \frac{(\rho_1-\rho_2)\,x\,dx}{(q^2+x^2)^2} q\cos\psi\,dL. \tag{122}$$

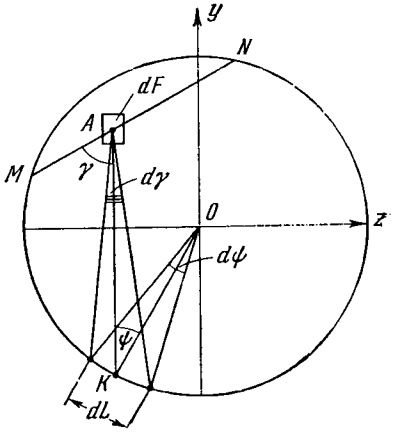


Рис. 12.17. К определению расхода газа через элементарную площадку поперечного сечения трубы при молекулярном течении.

Рассмотрим случай течения, при котором градиент плотности по длине трубы невелик, и поэтому можно принять

$$\rho_1 - \rho_2 = x\frac{d\rho}{dx}. \tag{123}$$

Подставляя (123) в (122), приходим к окончательному виду выражения для результативной секундной массы молекул, приходящих от элемента поверхности трубы $d\delta$ к элементу поперечного сечения dF:

$$dG = -\frac{\bar{c}\,dF}{4\pi} \frac{x^2\,dx}{(q^2+x^2)^2} \frac{d\rho}{dx} q\cos\psi\,dL. \tag{124}$$

Проведем в сечении *2* через точку A — центр площадки dF — произвольную линию отсчета MN (рис. 12.17), составляющую с отрезком $\overline{AK}=q$ угол γ. Так как элемент периметра трубы dL в окрестности K виден из dF под углом $d\gamma$, то проекция дуги dL на нормаль к отрезку $\overline{AK}$

$$q\,d\gamma = \cos\psi\,dL. \tag{125}$$

Если подставить соотношение (125) в (124) и проинтегрировать полученное выражение в пределах $-\infty \leqslant x \leqslant \infty$, $0 \leqslant \gamma \leqslant 2\pi$, т. е. решить задачу для бесконечно длинной круглой трубы, то получится следующее выражение для секундного массового расхода газа через единичную площадку сечения:

$$\frac{dG}{dF} = -\frac{\bar{c}}{4\pi}\frac{d\rho}{dx}\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{q^2x^2\,dx}{(q^2+x^2)^2}\,d\gamma. \tag{126}$$

Градиент плотности газа по длине трубы принят в (126) постоянным в связи с тем, что массовый расход газа из условия стационарности течения должен быть постоянным.

Вычисляя предварительно интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2\,dx}{(q^2+x^2)^2} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{q^2+x^2} = \frac{1}{2q}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{q}\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2q} \tag{127}$$

и подставляя значение (127) в (126), имеем

$$\frac{dG}{dF} = -\frac{\bar{c}}{8}\frac{d\rho}{dx}\int_0^{2\pi} q\,d\gamma \tag{128}$$

и далее

$$G = -\frac{\bar{c}}{8}\frac{d\rho}{dx}\int_F dF\int_0^{2\pi} q\,d\gamma. \tag{129}$$

Для трубы круглого сечения этот двойной интеграл можно преобразовать следующим образом (так как величина интеграла $\int_0^{2\pi} q\,d\gamma$ для круга не зависит от начального положения луча q):

$$\int_F dF\int_0^{2\pi} q\,d\gamma = \int_0^{2\pi} d\gamma\int_F q\,dF = 2\pi\int_F q\,dF. \tag{130}$$

В прямоугольной системе координат, если выбрать для q направление оси y (рис. 12.17), получим

$$\int_F q\,dF = \int_{-r_0}^{r_0} dz\int_{-\sqrt{r_0^2-z^2}}^{\sqrt{r_0^2-z^2}}\left(\sqrt{r_0^2-z^2}-y\right)dy = \frac{8}{3}r_0^3. \tag{131}$$

Подставляя (131) в (130) и затем в (125), получаем следующее выражение для секундного массового расхода газа по

длинной круглой трубе:

$$G = -\frac{2\pi}{3} r_0^3 \bar{c} \frac{d\rho}{dx}. \tag{132}$$

При постоянном градиенте плотности и постоянной температуре из уравнения состояния имеем

$$\frac{d\rho}{dx} = \frac{dp}{RT\,dx} = \frac{p_2 - p_1}{RTl} = -\frac{\rho_1}{l}\left(1 - \frac{p_2}{p_1}\right),$$

где l — длина трубы, по которой давление изменяется от p_1 до p_2.

Окончательная формула для секундного расхода газа при свободно-молекулярном течении по длинной круглой трубе имеет следующий вид:

$$G = \frac{2}{3}\frac{r_0}{l}\rho_1 \bar{c}\pi r_0^2\left(1 - \frac{p_2}{p_1}\right). \tag{133}$$

Отсюда средняя скорость в произвольном сечении трубы

$$U = \frac{G}{\pi r_0^2 \rho} = \frac{2}{3}\frac{r_0}{l}\frac{p_1}{p}\left(1 - \frac{p_2}{p_1}\right)\bar{c}, \tag{134}$$

средняя скорость в начальном сечении трубы

$$U_1 = \frac{2}{3}\frac{r_0}{l}\left(1 - \frac{p_2}{p_1}\right)\bar{c} \tag{135}$$

и в конечном сечении трубы

$$U_2 = \frac{2}{3}\frac{r_0}{l}\left(\frac{p_1}{p_2} - 1\right)\bar{c}. \tag{136}$$

Величина $\bar{c}$ — средняя скорость хаотического движения молекул согласно (57а)

$$\bar{c} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi}}.$$

При очень большом падении давления в трубе ($p_2 \ll p_1$) имеем соответственно

$$U = \frac{2}{3}\frac{r_0}{l}\frac{p_1}{p}\bar{c}, \quad U_1 = \frac{2}{3}\frac{r_0}{l}\bar{c}, \quad U_2 = \frac{2}{3}\frac{r_0}{l}\frac{p_1}{p_2}\bar{c}. \tag{137}$$

Из выражений (134)—(137) видно, что величина средней скорости течения газа при свободно-молекулярном режиме не зависит от плотности (или давления) газа.

Соотношение (133) позволяет найти время, необходимое для заданного понижения давления в сосуде, находящемся под большим разрежением. Например, Кеннард [1]) рассчитал, что

[1]) Kennard E. H., Kinetic theory of gases, McGraw-Hill B. C., New York — London, 1938.

в колбе объемом в 1 дм^3 с начальным давлением 0,01 мм рт. ст. при соединении ее с высоким вакуумом ($p_2/p_1 \approx 0$) посредством трубки длиной 30 *см* и диаметром 2 мм давление понизится вдвое за 3 минуты.

Как видим, откачка газа из сосуда при большом разрежении является весьма медленным процессом.

Однако если бы течение в трубке в указанном примере Кеннарда происходило по закону Пуазейля (как для сплошной среды), то для снижения давления в колбе вдвое понадобилось бы не 3 минуты, а 2 часа.

Мы определили выше расход газа в длинной трубе при полностью диффузном отражении молекул стенками если часть молекул σ отражается диффузно, а остальные молекулы отражаются зеркально, то расход газа по трубе возрастает (скорость движения вдоль трубы зеркально отраженных молекул после ударов о стенку не изменяется). Смолуховский [1]) показал, что увеличение расхода газа в этом случае происходит в отношении

$$\frac{G}{G_д} = \frac{2-\sigma}{\sigma}, \tag{138}$$

где $G_д$ — секундный расход при полностью диффузном отражении, который определяется по формуле (133).

Опыты Кнудсена [2]), в которых различные газы (водород, кислород и углекислый газ) отсасывались через стеклянную капиллярную трубку длиной 12 см и диаметром в свету около 0,3 мм, подтверждают приведенные выше формулы (для $\sigma = 1$). Гэде [3]), проделавший позднее и более тщательно подобные опыты с водородом и азотом (отсос производился с помощью стеклянной трубки диаметром около 0,2 мм), также подтвердил расчетную формулу, но обнаружил, что при давлении выше 0,01 мм рт. ст. опытное значение расхода газа становится на несколько процентов ниже теоретического (при $\sigma = 1$).

Девиен и др. изучали молекулярное течение сухого воздуха по металлической трубке длиной 80 см и диаметром 4 см; в опытах измерялся расход газа и величины давления на расстояниях 10, 30, 50 и 70 см от конца трубки; в результате были подтверждены следующие факты: постоянство градиента давления

---

[1]) Smoluchowski M., Zur kinetischen Theorie der Transpiration und Diffusion verdünnter Gase, Annalen der Physik, v. 33, p. 1559, 1910.

[2]) Knudsen M., a) Die Gesetze der Molekularströmung und der innere Reibungsströmung der Gase durch Rohren, Ann. d. Phys., Bd. 28, s. 75, 1908; б) Molekularströmung des Wasserstoffs durch Rohren, Ann. d. Phys., Bd. 35, S. 389, 1911.

[3]) Gaede W., Die aussere Reibung der Gase, Ann. d. Phys., Bd. 41, S. 289, 1913.

по длине трубки и линейная связь между разностью давлений на концах и секундным расходом газа; оказалось, что при малых скоростях течения $\sigma \approx 1$, при переходе к большим скоростям значение σ уменьшалось.

§ 9. Молекулярное истечение газа через отверстие в стенке и через короткую трубу

Рассмотрим свободно-молекулярное перетекание газа через отверстие радиуса r_0 в стенке (рис. 12.18), по обе стороны которой давления, температуры и плотности газа неодинаковы.

Пусть толщина стенки δ сравнима с длиной свободного пробега молекул, вследствие чего возможно лишь однократное столкновение молекулы с внутренней поверхностью, ограничивающей отверстие.

Секундная масса молекул, попадающая в отверстие из зоны *1* в зону *2*, согласно (71) составляет

$$G_{1x} = \frac{1}{4}\rho_1 \bar{c}_1 \pi r_0^2.$$

Секундная масса молекул, которые ударяются о внутреннюю поверхность отверстия, приблизительно равна

$$G_\delta = \frac{1}{4}\rho_1 \bar{c}_1 2\pi r_0 \delta.$$

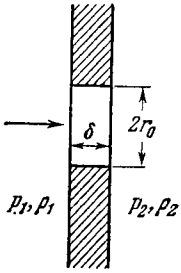


Рис. 12.18. К расчету молекулярного истечения через отверстие в стенке.

Последнее выражение не является точным, так как состояния газа внутри отверстия и в зоне *1* отличаются. Около половины массы G_δ приходит из зоны *1* и после отражения от стенки делится на две равные части, из которых одна отражается в зону *1*; в итоге из зоны *1* вытекает в отверстие секундная масса

$$G_1 = G_{1x} - \frac{1}{4}G_\delta = \frac{1}{4}\rho_1 \bar{c}_1 \pi r_0^2 \left(1 - \frac{\delta}{2r_0}\right).$$

Аналогичным образом определяется масса, вытекающая в отверстие из зоны *2*:

$$G_2 = \frac{1}{4}\rho_2 \bar{c}_2 \pi r_0^2 \left(1 - \frac{\delta}{2r_0}\right).$$

Суммарный расход газа, устанавливающийся в направлении к зоне *2*, в которой величина $\rho\bar{c}$ имеет меньшее значение, очевидно, равен

$$G = G_1 - G_2 = \frac{1}{4}(\rho_1 \bar{c}_1 - \rho_2 \bar{c}_2)\left(1 - \frac{\delta}{2r_0}\right)\pi r_0^2 \qquad (139)$$

или на основании уравнения состояния и соотношений (3)

$$G = r_0^2\left(1 - \frac{\delta}{2r_0}\right)\left(\frac{p_1}{\sqrt{T_1}} - \frac{p_2}{\sqrt{T_2}}\right)\sqrt{\frac{\pi}{2R}}. \qquad (140)$$

Мы получили для свободно-молекулярного истечения через отверстие в стенке выражение (140) более общего вида, чем в § 8 для длинной трубы, так как (140) учитывает не только разность давлений, но и разность температур по обе стороны стенки.

В случае очень тонкой стенки ($\delta = 0$) секундный расход через отверстие определяется следующей формулой:

$$G = r_0^2\left(\frac{p_1}{\sqrt{T_1}} - \frac{p_2}{\sqrt{T_2}}\right)\sqrt{\frac{\pi}{2R}}. \qquad (141)$$

Из формул (140) и (141) следует, что молекулярное истечение возможно даже в сторону более высокого давления (если корень квадратный из температуры увеличивается сильнее, чем давления); при равных давлениях истечение происходит в сторону более высокой температуры (термодиффузия); равновесие (нулевой расход) устанавливается при условии

$$\frac{p_1}{\sqrt{T_1}} = \frac{p_2}{\sqrt{T_2}}.$$

Формулы (133) и (140) не пригодны для короткой трубы, если ее длина l значительно больше свободного пробега молекулы. Для этого случая Клаузинг [1]) получил численное решение, которое с точностью до 1,5% аппроксимируется (при $T = \text{const}$) формулой

$$G = \frac{20 + \frac{8l}{r_0}}{20 + \frac{19l}{r_0} + 3\left(\frac{l}{r_0}\right)^2} r_0^2 (p_1 - p_2)\sqrt{\frac{\pi}{2RT}}. \qquad (142)$$

[1]) Clausing P., Über die Strömung sehr verdünnter gases durch Rohren. Ann. d. Phys., Bd. 2, S, 961, 1932.

Глава XIII

ЭЛЕМЕНТЫ МАГНИТНОЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

§ 1. Введение

При движении электропроводной жидкости в электрическом и магнитном полях возникает электромагнитная объемная сила (э. о. с.), иногда называемая *пондеромоторной силой*, которая действует на все частицы жидкости. Кроме того, при прохождении через жидкость электрического тока выделяется джоулево тепло.

При исследовании движения электропроводной жидкости в электрическом и магнитном полях приходится учитывать эти два новых воздействия, внося в уравнения движения и энергии соответствующие дополнительные члены. Это обстоятельство приводит к увеличению числа переменных и к необходимости соответствующего увеличения числа уравнений; такими дополнительными уравнениями являются уравнения электродинамики Максвелла. Совокупность уравнений Максвелла, уравнений Навье — Стокса, в которые внесены электромагнитные объемные силы, уравнения энергии, включающего джоулево тепло, и уравнения состояния представляет собой систему дифференциальных уравнений магнитной гидрогазодинамики.

При высоких температурах порядка нескольких тысяч градусов, а также при очень низких давлениях газы находятся в ионизированном состоянии и поэтому электропроводны, подобно жидким металлам и некоторым другим капельным жидкостям-электролитам; сказанное выше о воздействии электрического и магнитного полей на электропроводную жидкость и об учете этого воздействия относится и к ионизированному газу.

В развитии магнитной гидрогазодинамики нуждаются астрофизика, авиационная и ракетная техника, а также энергетика.

Астрофизики изучают строение Солнца и других звезд, в которых газ находится в сильно ионизированном состоянии под действием очень высоких температур, а также «холодного» межзвездного газа, ионизированного при весьма малой его плотности.

Современная авиационная и ракетная техника создает аппараты, летящие в атмосфере со скоростью порядка нескольких километров в секунду. Температура воздуха у поверхности тела,

имеющего такую скорость, приближается к температуре электрической дуги, вследствие чего воздух заметно ионизируется. Если на такой воздушный поток наложить электрическое и магнитное поля, то возникнет электромагнитная объемная сила, которая при определенных условиях окажется сравнимой по величине с аэродинамическими силами.

Особенностью электромагнитной объемной силы является то, что в отличие от других объемных сил (силы тяжести, инерционных сил) ею можно управлять, воздействуя на вызывающие ее электрическое и магнитное поля. Изменяя величину электромагнитной силы, можно влиять на интенсивность и форму ударных волн, увеличивать критическое значение числа Рейнольдса при переходе ламинарного режима течения в турбулентный, замедлять или ускорять поток электропроводной жидкости (или газа), вызвать деформацию профиля скорости и отрыв пограничного слоя.

Используя электропроводную жидкость или газ, можно создать генератор электрического тока, в котором осуществляется прямой переход тепловой энергии в электрическую; находят применение магнитные дозаторы, расходомеры и насосы для перекачки ртути и жидких металлов; известны и другие области применения магнитной гидрогазодинамики в технике, например в приборостроении.

В настоящее время четко вырисовываются две области магнитной гидродинамики: в первой — считается, что среда обладает бесконечной проводимостью (астрофизика), во второй — имеют дело со средой конечной проводимости (магнитная газовая динамика различных технических аппаратов).

В одном из параграфов настоящей главы рассматриваются некоторые свойства магнитогазодинамических волн, которые возможны лишь в бесконечнопроводящей среде; в остальных параграфах речь идет только о средах конечной проводимости.

§ 2. Элементы электростатики и электродинамики

Взаимодействие между двумя точечными электрическими зарядами q_1 и q_2, находящимися на расстоянии r друг от друга, описывается законом Кулона

$$f = \pm \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}. \tag{1}$$

Здесь f измеряется в ньютонах, r — в метрах, q — в кулонах.

Величина ε_0 называется *электрической постоянной*. Она равна

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \approx 8{,}856 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м} = 8{,}856 \cdot 10^{-12} \text{ А}^2\text{с}^4/(\text{кг} \cdot \text{м}^3).$$

Безразмерная величина ε называется *диэлектрической проницаемостью среды* и указывает, во сколько раз сила взаимодействия в изотропной непроводящей среде меньше силы взаимодействия в вакууме.

Произведение диэлектрической проницаемости ε и электрической постоянной ε_0 обозначают ε_a и называют *абсолютной диэлектрической проницаемостью.*

Из закона Кулона (1) следует, что вокруг неподвижного электрического заряда образуется силовое поле, называемое *электростатическим полем.* Помещая в электростатическое поле заряда q_1 положительный заряд q_2 и измеряя силу f, приложенную к нему, мы получаем вектор напряженности электрического поля в данной его точке

$$E_r = \frac{1}{q_2} f. \tag{2}$$

Если поле создается несколькими точечными зарядами, то напряженность его равна векторной сумме напряженностей полей отдельных зарядов.

Если провести в данном поле линию, во всех точках которой вектор напряженности касателен к ней, то мы получим линию напряженности, которая аналогична линии тока в стационарном поле скоростей.

Линии напряженности проводят обычно так, чтобы через единицу площади любой площадки ΔS_n, нормальной к ним, проходило число линий ΔN_E, равное значению местной напряженности поля:

$$\frac{\Delta N_E}{\Delta S_n} = E.$$

Тогда число линий, проходящих через произвольно расположенную площадку ΔS, очевидно, составит

$$\Delta N_E = E_n \Delta S, \quad \text{или} \quad N_E = \int_S E_n \, dS. \tag{3}$$

Здесь E_n — проекция напряженности на нормаль к площадке.

Большинство тел разделяется на два класса: на проводники, передающие заряды (электризацию), и диэлектрики, не передающие зарядов.

В диэлектрике, в отличие от пустоты, где линии напряженности тянутся от одних свободных зарядов до других или уходят в бесконечность, часть линий напряженности должна обрываться на связанных зарядах, возникающих вследствие поляризации.

Для того чтобы избежать разрыва силовых линий, вводят дополнительное понятие — *вектор электрической индукции*

$$D = \varepsilon_a E, \tag{4}$$

который параллелен вектору напряженности.

Нетрудно показать, что линии вектора индукции (в отличие от линии напряженности) в направлении нормали к незаряженной поверхности раздела двух сред [1]) сохраняются, обрываясь только на свободных зарядах, а тангенциальные составляющие терпят разрыв

$$D_{1n} = D_{2n}, \qquad \frac{D_{1t}}{\varepsilon_{a1}} = \frac{D_{2t}}{\varepsilon_{a2}}. \tag{4а}$$

Составляющие вектора электростатической напряженности ведут себя противоположным образом, поэтому для них справедливы соотношения

$$\varepsilon_{a1} E_{1n} = \varepsilon_{a2} E_{2n}, \qquad E_{1t} = E_{2t}.$$

[1]) Имеется в виду поверхность, на которой нет свободных зарядов.

Примем число линий потока вектора индукции, пересекающих единицу площади элементарной площадки ΔS_n, перпендикулярной вектору индукции, равным величине вектора индукции

$$\frac{\Delta N_D}{\Delta S_n} = D.$$

Для произвольно ориентированной площадки ΔS получим

$$\Delta N_D = D\,\Delta S \cos\alpha = D_n\,\Delta S,$$

где D_n — проекция вектора индукции на нормаль к площадке ΔS, α — угол между нормалями к площадкам ΔS и ΔS_n. Поток вектора индукции через конечную поверхность равен

$$N_D = \int_S D_n\,dS. \tag{5}$$

По теореме Остроградского — Гаусса поток вектора электрической индукции D через любую замкнутую поверхность равен алгебраической сумме охватываемых ею зарядов.

$$N_D = \sum_n q. \tag{6}$$

Введем функцию V, называемую *потенциалом точечного заряда* q:

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_a r} + \text{const}. \tag{7}$$

Разность потенциалов в двух точках поля измеряет работу перемещения единичного положительного заряда из одной точки в другую

$$V_1 - V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_a}\left(\frac{q_1}{r_1} - \frac{q_1}{r_2}\right) = \frac{A}{q_2}. \tag{8}$$

Потенциал точки поля равен работе перемещения единичного положительного заряда из этой точки в бесконечность $\left(V_2 = \frac{q_1}{\infty} = 0\right)$.

Из (2) и (5) следует, что между работой перемещения заряда A и напряженностью поля E_r существует следующая связь:

$$A = q_2 \int_1^2 E_r\,dr \quad \text{или} \quad \int_1^2 E_r\,dr = V_1 - V_2. \tag{9}$$

При перемещении заряда по замкнутому контуру ($V_1 = V_2$) работа равна нулю

$$\oint E_r\,dr = 0. \tag{10}$$

Как известно из теории поля, левая часть выражения (10) представляет собой циркуляцию вектора E_r по замкнутому контуру. Равенство циркуляции нулю свидетельствует о том, что электростатическое поле является потенциальным.

Семейство эквипотенциальных поверхностей ортогонально к семейству линий напряженности.

Дифференцируя второе из выражений (9) вдоль линии напряженности, имеем

$$E_r = -\frac{dV}{dr}. \tag{11}$$

Таким образом, напряженность электрического поля численно равна градиенту потенциала по нормали к поверхности уровня.

В трехмерном электростатическом поле

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}. \tag{12}$$

или в векторной форме

$$\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} V. \tag{12a}$$

В системе СИ единицей разности потенциалов служит вольт.

Если заряд q не сосредоточен в точке, а распределен равномерно по поверхности S или по объему v, то обычно пользуются понятиями о поверхностной или объемной плотности заряда

$$\rho_S = \frac{q}{S}, \quad \rho_v = \frac{q}{v}. \tag{13}$$

Из теоремы Остроградского — Гаусса (6) следует соотношение, связывающее суммарный поток индукции электрического поля на поверхности с плотностью зарядов в объеме v, охватываемом этой поверхностью

$$\int_S D_n \, dS = \int_v \rho_v \, dv \tag{14}$$

(здесь n — внешняя нормаль к поверхности S). Установим связь между напряженностью, потенциалом и объемной плотностью зарядов для сред с постоянной диэлектрической проницаемостью. Для этого выделим в прямоугольной системе координат элементарный параллелепипед объемом $dv = dx\,dy\,dz$ с зарядом $dq = \rho_v dx\,dy\,dz$. Разность напряжений на противоположных гранях, параллельных плоскости yz, равна $\frac{\partial E_x}{\partial x} dx$, на остальных двух парах граней соответственно $\frac{\partial E_y}{\partial y} dy$ и $\frac{\partial E_z}{\partial z} dz$.

С помощью (3) определим разность суммарных потоков напряженности на противоположных гранях параллелепипеда

$$dN_x = \left[\left(E_x + \frac{\partial E_x}{\partial x} dx\right) - E_x\right] dy\,dz = \frac{\partial E_x}{\partial x} dx\,dy\,dz,$$

$$dN_y = \frac{\partial E_y}{\partial y} dx\,dy\,dz, \quad dN_z = \frac{\partial E_z}{\partial z} dx\,dy\,dz.$$

Следовательно, изменение потока напряженности на всей поверхности параллелепипеда

$$dN_E = dN_x + dN_y + dN_z = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz.$$

Из теоремы Остроградского — Гаусса (6) имеем

$$dN_E = dq = \rho_v \, dx\,dy\,dz$$

или, заменяя dN_E,

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=\frac{\rho_v}{\varepsilon_a}. \tag{15}$$

В векторной форме уравнение (15) можно записать в виде

$$\operatorname{div} E=\frac{\rho_v}{\varepsilon_a}. \tag{15а}$$

Согласно теории поля это уравнение вытекает непосредственно из (14). Составляющие вектора напряженности электрического поля E_x, E_y, E_z можно на основании (12) заменить производными потенциала, тогда (15) принимает следующий вид:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=-\frac{\rho_v}{\varepsilon_a}$$

или

$$\Delta V=-\frac{\rho_v}{\varepsilon_a}. \tag{16}$$

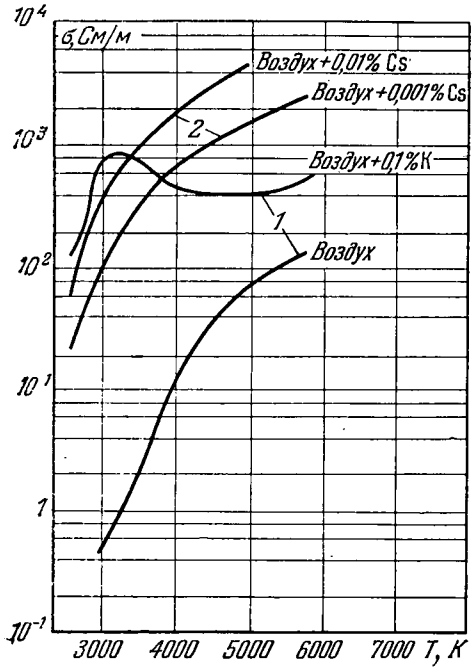


Рис. 13.1. Электрическая проводимость чистого воздуха с присадками калия и цезия при $p=100$ Н/м².

Зависимости (15) и (16) играют в электростатике такую же роль, как уравнение неразрывности в гидродинамике. Соотношение (15) можно распространить на вектор индукции, если в правую часть подставить плотность свободных зарядов ρ_0:

$$\frac{\partial D_x}{\partial x}+\frac{\partial D_y}{\partial y}+\frac{\partial D_z}{\partial z}=\rho_0 \tag{17}$$

или в векторной форме

$$\operatorname{div} \boldsymbol{D}=\rho_0. \tag{17а}$$

В качестве основной единицы электромагнитных величин принята сила тока в один ампер.

«Ампер есть сила неизменяющегося тока, который, будучи поддерживаем в двух параллельных прямолинейных проводниках бесконечной длины и ничтожно малого кругового сечения, расположенных на расстоянии 1 метра один от другого в вакууме, вызвал бы между этими проводниками силу, равную $2\cdot10^{-7}$ единицы силы МКС на метр длины» (ГОСТ 9867—61) (т. е. $2\cdot10^{-7}$ Н/м).

Согласно установленному опытным путем закону Ома имеем

$$I=\frac{V_1-V_2}{R}, \tag{18}$$

где V_1-V_2 — разность потенциалов на концах проводника, R — сопротивление проводника.

У проводника постоянного сечения S и длины l сопротивление равно

$$R = \nu_R \frac{l}{S}, \tag{19}$$

где ν_R — удельное сопротивление материала. В системе СИ сопротивление измеряется в омах, причем

$$1\ \text{Ом} = \frac{1\ \text{вольт}}{1\ \text{ампер}} = 1\ \text{В/А}. \tag{20}$$

За единицу удельного сопротивления в практической системе обычно принимают сопротивление проводника длиной в 1 м и сечением в 1 мм^2

$$1\ \text{техн. ед. сопр.} = 1\ \text{Ом}\ \frac{10^{-6}\ \text{м}^2}{1\ \text{м}} = 10^{-6}\ \text{Ом}\cdot\text{м}.$$

Пользуются также удельной проводимостью (или электропроводимостью)

$$\sigma_R = \frac{1}{\nu_R}\ \frac{\text{См}}{\text{м}}\ ^1). \tag{21}$$

Значения удельного сопротивления и электропроводимости некоторых веществ при $t = 0°$ приведены в таблице.

Проводник	ν_R, Ом·м	σ_R, $\frac{\text{См}}{\text{м}}$
Алюминий	$2{,}53 \cdot 10^{-8}$	$39{,}50 \cdot 10^6$
Графит	$39{,}20 \cdot 10^{-8}$	$2{,}55 \cdot 10^6$
Железо чистое	$8{,}69 \cdot 10^{-8}$	$11{,}48 \cdot 10^6$
Медь чистая	$1{,}55 \cdot 10^{-8}$	$64{,}50 \cdot 10^6$
Ртуть	$94{,}30 \cdot 10^{-8}$	$1{,}06 \cdot 10^6$
Вода чистая	$0{,}50 \cdot 10^5$	$2 \cdot 10^{-5}$
Вода соленая (насыщенная при 25 °С)	0,04	25

Данные о проводимости термически ионизированного чистого воздуха можно заимствовать из работ Лина, Сирса, а также Хинитца, Эйзена и Грасса [2]), измерявших ее за ударной волной в ударной аэродинамической трубе; начальное давление перед скачком уплотнения составляло 1 мм рт. ст., начальная температура воздуха была близка к 300 К, температура за ударной волной определялась по значениям числа Маха. На рис. 13.1 приведены кривые проводимости чистого воздуха и воздуха, содержащего в качестве примеси 0,1% по весу паров калия и 0,01 и 0,001% паров цезия. Расчетные кривые зависимости проводимости воздуха от температуры при разных давлениях даны на рис. 13.2.

Сила тока является величиной скалярной. Для определения не только количества переносимого электричества, но и направления переноса пользуются вектором плотности тока, величина которого

$$j = \frac{\Delta I}{\Delta S_n} = \frac{\Delta I}{\Delta S \cos\alpha}. \tag{22}$$

[1]) Единица проводимости сименс равна 1 См = 1/Ом.

[2]) Lin S. C., Electrical conductivity of thermaly ionized air producted in a shock tube, AVCO Res. Note 26, 1957; Sears W. R., ARS J., № 6, v. 29, 1959; Chinitz L., Eisen C., Grass R., ARS J., № 8, v. 29, 1959.

Здесь ΔS_n — поверхность площадки, ориентированной по нормали к направлению тока ΔI, причем положительным считается ток положительных зарядов; в выражении (22) величина α есть угол между нормалью к площадке ΔS и вектором плотности тока.

Ток течет в сторону падения потенциала, т. е. вектор плотности тока параллелен вектору напряженности E. В связи с этим формулу закона Ома можно видоизменить, представив ее в векторной форме.

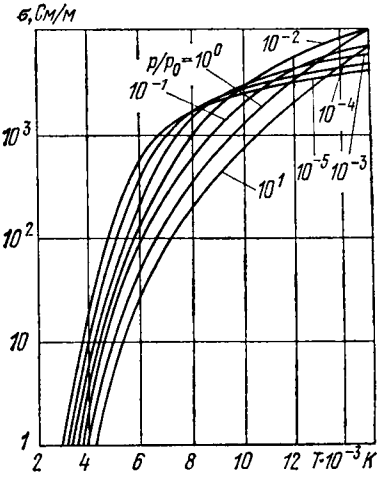


Рис. 13.2. Электропроводность воздуха при разных давлениях $p_0 = 10^5$ Н/м.

В самом деле,

$$\Delta I = -\frac{\Delta V}{R} = -\sigma_R \frac{\Delta S_n}{\Delta l}\,\Delta V,$$

откуда

$$\frac{\Delta I}{\Delta S_n} = -\sigma_R \frac{\Delta V}{\Delta l}.$$

Так как $j \parallel E$, то, согласно (11) и (22),

$$j = \sigma_R E. \qquad (23)$$

Если ток течет через замкнутую поверхность ΔS, то положительному направлению тока соответствуют внешние нормали к этой поверхности. Убыль зарядов внутри замкнутой поверхности ΔS, обозначаемая через Δq, равна сумме элементарных токов, протекающих сквозь эту поверхность:

$$I\,\Delta t = \sum j_n\,\Delta S\,\Delta t = -\Delta q$$

или

$$I = \int_S j_n\,dS = -\frac{\partial q}{\partial t}. \qquad (24)$$

Распределение электрического тока принято представлять с помощью линий тока; в каждой точке поля направление вектора плотности тока касательно к линии тока.

Если заряд внутри замкнутой поверхности не изменяется, то все линии тока пересекают эту поверхность или замыкаются внутри нее. Линии тока обрываются лишь в тех местах, где имеется убыль (или накопление) зарядов.

Составим уравнение сохранения заряда в дифференциальной форме. В элементарном параллелепипеде со сторонами $dx\,dy\,dz$ при объемной плотности зарядов ρ_v за время dt происходит изменение заряда на величину

$$dq = \left(\frac{\partial \rho_v}{\partial t}\,dt\right) dx\,dy\,dz.$$

Это изменение обусловлено разностью сил токов на противоположных гранях

$$\left[\left(j_x + \frac{\partial j_x}{\partial x}\,dx\right) - j_x\right] dy\,dz\,dt = \frac{\partial j_x}{\partial x}\,dx\,dy\,dz\,dt,$$

$$\left[\left(j_y + \frac{\partial j_y}{\partial y}\,dy\right) - j_y\right] dx\,dz\,dt = \frac{\partial j_y}{\partial y}\,dx\,dy\,dz\,dt,$$

$$\left[\left(j_z + \frac{\partial j_z}{\partial z}\,dz\right) - j_z\right] dx\,dy\,dt = \frac{\partial j_z}{\partial z}\,dx\,dy\,dz\,dt,$$

Таким образом, имеем

$$\frac{\partial j_x}{\partial x}+\frac{\partial j_y}{\partial y}+\frac{\partial j_z}{\partial z}=-\frac{\partial \rho_v}{\partial t} \tag{25}$$

или в векторной форме

$$\operatorname{div} j=-\frac{\partial \rho_v}{\partial t}. \tag{25а}$$

Если в цепи $V_1 > V_2$, то ток всегда течет от V_1 к V_2; для того чтобы цепь была замкнутой, ток внутри электрической батареи — источника тока — должен течь в обратную сторону, т. е. от отрицательного электрода к положительному. Это осуществляется за счет так называемой электродвижущей силы $\mathscr{E}$ (э. д. с.), уравновешивающей разность потенциалов во внешней цепи и падение потенциала на внутреннем сопротивлении R_0 батареи:

$$\mathscr{E}=V_1-V_2+IR_0. \tag{26}$$

Источниками э. д. с. могут быть химические реакции (в батарее), электромагнитная индукция (в генераторе) и др.

Остановимся на тепловом действии электрического тока. Количество электричества, переносимое от одного конца проводника к другому за время t, равное It, производит работу, пропорциональную разности потенциалов

$$A=It(V_1-V_2). \tag{27}$$

Отсюда на основании закона Ома имеем

$$A=I^2Rt. \tag{27а}$$

Работа идет на нагревание проводника. При силе тока $I=1$ А за время $t=1$ с переносится количество электричества $q=1$ кулон (Кл).

При разности потенциалов в 1 В в этом случае совершается работа

$$1\ \text{Кл}\times 1\ \text{В}=1\ \text{Дж}.$$

Отношение тепловой мощности A/t к объему проводника Sl называется *плотностью тепловой мощности*

$$w=\frac{A}{Slt}.$$

Отсюда на основании (22), (27а) и (21) имеем

$$w=\frac{j^2}{\sigma_R}\ \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3\cdot\text{с}},\quad \text{или}\quad \frac{\text{Вт}}{\text{м}^3}. \tag{28}$$

или с учетом (23)

$$w=\sigma_R E^2=jE. \tag{28а}$$

При сверхпроводимости ($\sigma_R\to\infty$), согласно (28), плотность тепловыделения стремится к нулю.

Полная мощность, выделяемая в цепи, слагается из мощностей внешней и внутренней частей цепи: $W=I\mathscr{E}$, т. е. полная мощность равна произведению силы тока на электродвижущую силу.

Вокруг проводника, по которому течет электрический ток, возникает магнитное поле, характеризуемое линиями магнитной напряженности; касательная в любой точке такой линии совпадает с направлением вектора напряженности $\boldsymbol{H}$ магнитного поля.

Вокруг длинного прямого проводника линии магнитной напряженности имеют форму концентрических кругов; их направление определяется так называемым правилом буравчика: если поступательное движение буравчика

совпадает с направлением тока, то направление вращения его рукоятки совпадает с направлением магнитных линий напряженности.

Магнитное поле соленоида, т. е. системы одинаковых круговых токов (витков) с общей прямолинейной осью, представлено на рис. 13.3. В средней части внутренней полости соленоида магнитные линии параллельны оси соленоида; у концов соленоида магнитные линии искривляются и выходят наружу, замыкаясь вне соленоида, где поле становится очень слабым.

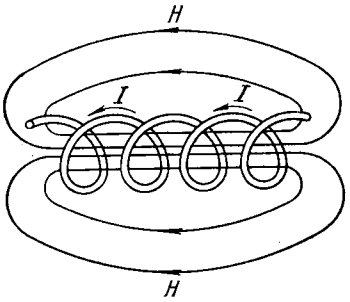


Рис. 13.3. Магнитное поле соленоида.

Через единицу поверхности ΔS_n, нормальной к линиям магнитной напряженности, проводят, как это принято в теории поля, число линий, равное значению напряженности. Если нормаль к площадке ΔS расположена под углом α к линиям напряженности, то имеем $\Delta S_n = \Delta S \cos\alpha$, откуда общее число линий

$$\Delta N = H\,\Delta S\cos\alpha.$$

Так как $H\cos\alpha = H_n$ есть проекция вектора напряженности на нормаль к площадке, то

$$\Delta N = H_n\,\Delta S. \tag{29}$$

Положительным обычно считают направление внешней нормали.

В отличие от линий электростатической напряженности, которые обрываются на зарядах, линии магнитной напряженности всегда замкнуты, так как магнитные заряды в природе не обнаружены. Поэтому полный поток магнитной напряженности через замкнутую поверхность S всегда равен нулю

$$\int_S H_n\,dS = 0. \tag{30}$$

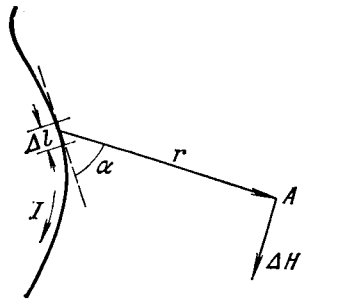


Рис. 13.4. К определению поля магнитной напряженности вокруг проводника с током.

Условие неразрывности магнитного поля можно по аналогии с гидродинамическим записать так:

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0$$

или

$$\operatorname{div}\boldsymbol{H} = 0. \tag{31}$$

Напряженность магнитного поля $\boldsymbol{H}$ в данной точке определяется действием всех отдельных участков проводника. Согласно основанному на опыте закону Лапласа и Био — Савара элемент контура Δl, по которому течет ток силой I, создает в точке A пространства (рис. 13.4), находящейся на расстоянии r от элемента Δl, магнитное поле напряженностью

$$\Delta H = \frac{I\,\Delta l\sin\alpha}{4\pi r^2}, \tag{32}$$

где α — угол между Δl и r (положительным считается направление тока I).

В векторной форме магнитная напряженность в точке A

$$\Delta H = \frac{I\,[\Delta l \times r]}{4\pi r^3}. \tag{32a}$$

Здесь $[\Delta l \times r]$ — векторное произведение, причем элементу длины Δl приписывается направление тока, а радиусу-вектору r — направление от элемента Δl к точке A.

Полная напряженность H в точке A есть векторная сумма

$$H = \sum_n \Delta H. \tag{33}$$

образуемая напряженностями, которые создаются всеми n элементами контура (проводника).

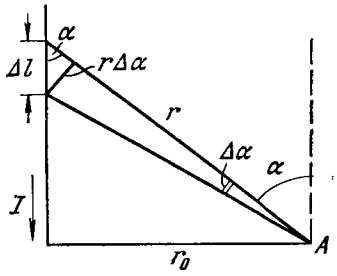


Рис. 13.5. К определению магнитного поля прямолинейного проводника с током.

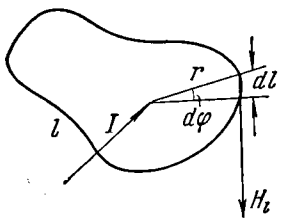


Рис. 13.6. К определению циркуляции вектора магнитной напряженности по замкнутому контуру l.

В случае прямолинейного проводника (рис. 13.5) напряженности от всех его участков направлены одинаково, вследствие чего

$$\Delta l = \frac{r\,\Delta\alpha}{\sin\alpha} \quad \text{или} \quad \frac{\Delta l}{r^2} = \frac{\Delta\alpha}{r\sin\alpha} = \frac{\Delta\alpha}{r_0},$$

где r_0 — кратчайшее расстояние от Δl до точки A. Тогда на основании (32) и (33) для бесконечно длинного прямого проводника имеем

$$H = \int_0^{\pi} \frac{I\sin\alpha\, d\alpha}{4\pi r_0} = \frac{I}{2\pi r_0}.$$

Проекции вектора напряженности (32а) на оси прямоугольной системы координат xyz составляют

$$\left.\begin{aligned} \Delta H_x &= \frac{I(\Delta l_y r_z - \Delta l_z r_y)}{4\pi r^3}, \\ \Delta H_y &= \frac{I(\Delta l_z r_x - \Delta l_x r_z)}{4\pi r^3}, \\ \Delta H_z &= \frac{I(\Delta l_x r_y - \Delta l_y r_x)}{4\pi r^3}; \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

здесь индексы обозначают проекции векторов Δl и r на соответствующие оси координат. Аналогичные соотношения определяют в гидродинамике поле скоростей, индуцируемых вихревой нитью.

Составим выражение для циркуляции вектора напряженности магнитного поля по замкнутому контуру l. Если проводник расположен от элемента контура на расстоянии r (рис. 13.6), то длину элемента контура можно

выразить через угол, под которым он виден с линии электрического тока: $dl = r\,d\varphi$. Произведение длины элемента контура на тангенциальную к нему составляющую вектора напряженности составляет

$$H_l\,dl = \frac{I}{2\pi r}\,r\,d\varphi = \frac{I}{2\pi}\,d\varphi.$$

Величина циркуляции вектора H по замкнутому контуру l равна поэтому

$$\oint H_l\,dl = \frac{I}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi = I. \tag{35}$$

Таким образом, в отличие от электростатического поля, которое, согласно (10), является потенциальным, магнитное поле оказывается вихревым (циркуляция вектора $\boldsymbol{H}$ по замкнутому контуру не равна нулю).

Опыты Фарадея и Ампера показали, что на всякий проводник с током, помещенный в магнитное поле, действует электромагнитная сила. Ампер установил, что эта сила в вакууме

$$\Delta f = \mu_0 I H_n\,\Delta l = \mu_0 I H\,\Delta l \sin\alpha. \tag{36}$$

Направление Δf перпендикулярно к плоскости векторов $\Delta\boldsymbol{l}$ и $\boldsymbol{H}$ и определяется правилом левой руки: если ладонь левой руки расположить так, чтобы перпендикулярная к $\Delta\boldsymbol{l}$ составляющая напряженности H_n была направлена к ладони, а четыре вытянутые пальца были направлены вдоль тока I, то отставленный большой палец укажет направление силы Δf.

В векторной форме закон Ампера имеет вид

$$\Delta\boldsymbol{f} = \mu_0 I\,[\Delta\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{H}], \tag{37}$$

где направление Δl совпадает с направлением тока.

Приведенные сведения, строго говоря, справедливы лишь в случае образования магнитного поля в пустоте. Опыт показывает, что свойства среды, в которой размещены проводники с током, влияют на напряженность поля.

Если поместить проводник с током в среду, которая намагничивается (магнетик), то возникает дополнительная напряженность магнитного поля $\boldsymbol{H}'$, суммирующаяся с напряженностью внешнего поля $\boldsymbol{H}_0$; результирующую напряженность $\boldsymbol{B}$ называют *вектором магнитной индукции*

$$\boldsymbol{B} = \mu_B \boldsymbol{H}_0 = \boldsymbol{H}_0 + \boldsymbol{H}', \tag{38}$$

где μ_B — *абсолютная магнитная проницаемость среды.*

Абсолютная магнитная проницаемость записывается в виде произведения магнитной постоянной μ_0 $\left(\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\ \text{Г/м} = 4\pi\cdot 10^{-7}\ \frac{\text{м}\cdot\text{кг}}{\text{А}^2\cdot\text{с}^2}\right)$ и безразмерной магнитной проницаемости μ, указывающей, во сколько раз магнитная индукция в данной среде $B = \mu_B H_0$ отличается от магнитной индукции в вакууме $B_0 = \mu_0 H_0$ (при одной и той же напряженности магнитного поля). Единицей измерения магнитной индукции служит тесла (Т). В магнетике сила Ампера зависит от суммарной напряженности, т. е. от вектора магнитной индукции $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{H}_0 + \boldsymbol{H}'$:

$$\Delta f = IB\,\Delta l \sin\alpha = jB\,\Delta v \sin\alpha, \tag{39}$$

где $\Delta v = \Delta l S$ — объем участка Δl проводника, имеющего поперечное сечение S. В векторной форме сила Ампера

$$\Delta\boldsymbol{f} = [\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B}]\,\Delta v. \tag{40}$$

Проекции силы Ампера на оси прямоугольной системы координат

$$\left.\begin{aligned} \Delta f_x &= \Delta v\,(j_y B_z - j_z B_y), \\ \Delta f_y &= \Delta v\,(j_z B_x - j_x B_z), \\ \Delta f_z &= \Delta v\,(j_x B_y - j_y B_x). \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

У газов и плазмы (ионизированный газ) абсолютная диэлектрическая и магнитная проницаемость имеет практически такое же значение, как в пустоте ($\varepsilon_a \approx \varepsilon_0$; $\mu_B \approx \mu_0$), поэтому в уравнениях магнитной газовой динамики можно обойтись без векторов электрической индукции и напряженности магнитного поля, т. е. можно не учитывать явлений поляризации и намагничения среды.

Аналогично линиям напряженности, которые характеризуют магнитное поле в пустоте, можно построить линии магнитной индукции. Через единицу поверхности, нормальной к линиям индукции, проводят число линий, равное местному значению вектора индукции; полное число линий индукции, пересекающих нормальную к ним элементарную площадку ΔS_n, составляет элементарный поток магнитной индукции

$$\Delta\Phi = B\,\Delta S_n = B_n\,\Delta S. \tag{42}$$

Линии индукции, выходящие из объема, ограниченного данной поверхностью, дают положительный поток, а входящие в этот объем — отрицательный поток; линии магнитной индукции всегда замкнуты, следовательно, для них должно выполняться условие неразрывности

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0. \tag{43}$$

Полный поток индукции через поверхность S

$$\Phi = \int_S B_n\,dS. \tag{44}$$

Для замкнутой поверхности всегда имеем $\Phi = 0$. В системе СИ поток индукции измеряется в веберах (Вб): 1 Вб = 1 Т $\times$ 1 м^2.

Можно показать, что при пересечении границы двух сред с разными значениями магнитной проницаемости μ_1 и μ_2 нормальная составляющая магнитной индукции сохраняется (если на границе нет поверхностных токов), а тангенциальная составляющая претерпевает разрыв

$$B_{1n} = B_{2n}, \qquad \frac{B_{1t}}{\mu_1} = \frac{B_{2t}}{\mu_2}. \tag{45}$$

Составляющие магнитной напряженности ведут себя противоположным образом:

$$H_{1t} = H_{2t}, \qquad \mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}. \tag{46}$$

Иначе говоря, при потоке индукции, направленном по нормали к поверхности раздела магнетиков, и отсутствии поверхностных токов вектор индукции не изменяется, а вектор напряженности испытывает скачок. Магнитный поток в некоторых случаях переходит целиком из одной среды в другую (последовательное соединение), а в других — разветвляется на отдельные части, которые затем сливаются (параллельное соединение).

Электрический ток представляет собой поток заряженных частиц: электронов, ионов. Поэтому сила Ампера, действующая на проводник, слагается из сил, приложенных к движущимся зарядам.

Если заряженные частицы движутся внутри твердого или жидкого тела, то благодаря их столкновениям с молекулами или атомами тела сила Ампера

передается на тело. Например, если боковые стенки кольцевого сосуда, наполненного проводящей жидкостью, являются электродами, к которым подведен ток, а дно представляет собой изолятор, установленный на полюсе прямого магнита, то ток течет по радиусам, а вектор магнитной напряженности параллелен стенкам. В этом случае жидкость в сосуде приходит в круговое движение (сила действует в одном и том же направлении на положительные и отрицательные заряды, так как они движутся в противоположных направлениях).

Сила тока I равна суммарному заряду, перенесенному в единицу времени через поперечное сечение проводника:

$$I = en_0WS = \rho_v WS. \tag{47}$$

Здесь e — величина отдельного заряда, n_0 — число движущихся зарядов в единице объема, W — скорость их движения, S — площадь поперечного сечения проводника.

Подставляя это выражение в (37), получаем силу, приложенную к суммарному заряду на участке длиной Δl:

$$\Delta f = en_0W\,\Delta lSB\sin\alpha.$$

Число зарядов, движущихся по участку проводника Δl,

$$n' = n_0S\,\Delta l,$$

поэтому сила, действующая на один движущийся заряд,

$$\Delta f' = \frac{\Delta f}{n'} = eWB\sin\alpha. \tag{48}$$

$\Delta f'$, называемая *силой Лоренца*, перпендикулярна к плоскости, в которой лежат векторы $\boldsymbol{W}$ и $\boldsymbol{B}$; для положительного заряда она определяется по правилу левой руки. Если $\boldsymbol{W} \perp \boldsymbol{B}$, то сила имеет наибольшее значение ($\sin\alpha = 1$), если $\boldsymbol{W} \parallel \boldsymbol{B}$, то сила равна нулю ($\sin\alpha = 0$).

В векторной форме закон Лоренца имеет вид

$$\Delta\boldsymbol{f}' = e\,[\boldsymbol{W} \times \boldsymbol{B}], \tag{49}$$

а в проекциях на прямоугольные координатные оси

$$\left.\begin{aligned} \Delta f'_x &= e\,(vB_z - wB_y),\\ \Delta f'_y &= e\,(wB_x - uB_z),\\ \Delta f'_z &= e\,(uB_y - vB_x). \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

Здесь u, v, w — компоненты вектора скорости $\boldsymbol{W}$. Если на заряды действует также электрическое поле, то к силе Лоренца добавится сила Кулона, которая, согласно (2), равна $e\boldsymbol{E}$. Полная электромагнитная сила, действующая на заряд, будет в этом случае

$$\Delta\boldsymbol{f} = e\,\{\boldsymbol{E} + [\boldsymbol{W} \times \boldsymbol{B}]\}. \tag{51}$$

Электромагнитная сила, приложенная к единичному заряду, очень мала, но следует иметь в виду, что при обычных токах переносится очень большое число зарядов, вследствие чего сила, приложенная к проводящему телу, может оказаться значительной.

Если электрическое и магнитное поля взаимно перпендикулярны ($\boldsymbol{E} \perp \boldsymbol{B}$), то при условии

$$\boldsymbol{E} = -[\boldsymbol{W} \times \boldsymbol{B}]$$

силы Кулона и Лоренца уравновешиваются, т. е. результирующая электромагнитная сила равна нулю ($\Delta f = 0$). В этом случае заряд движется по

инерции с постоянной скоростью, которая называется *скоростью дрейфа* и равна по величине

$$W_д = \frac{E}{B}. \tag{52}$$

При $E = E_x$, $B = B_y$ и $\Delta f_x = 0$ имеем $w = W_д$. Сопоставление (51) с (2) приводит к выводу, что наличие электромагнитной силы Δf, действующей на движущийся заряд, эквивалентно существованию в неподвижной системе координат электрического поля напряженностью

$$\boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{E} + [\boldsymbol{W} \times \boldsymbol{B}]. \tag{53}$$

Это выражение справедливо и для движущейся проводящей жидкости. Подставляя (53) в правую часть (23), получаем выражение, носящее название *обобщенного закона Ома* для потока изотропной проводящей жидкости

$$\boldsymbol{j} = \sigma_R \{\boldsymbol{E} + [\boldsymbol{W} \times \boldsymbol{B}]\}. \tag{54}$$

Здесь $\boldsymbol{W}$ — вектор скорости потока жидкости (а не скорости движения зарядов в ней).

В (54) слагаемое $\boldsymbol{E}$ соответствует полю в неподвижной системе координат, слагаемое $\boldsymbol{E}' = [\boldsymbol{W} \times \boldsymbol{B}]$ — дополнительному полю, индуцированному магнитным полем в движущейся жидкости.

В 1831 г. Фарадей открыл явление *электромагнитной индукции*, заключающееся в том, что при изменении потока индукции сквозь всякий замкнутый контур в нем возникает электрический ток, вызываемый электродвижущей силой индукции; этот индукционный ток появляется при приближении магнита или проводника с током к замкнутому проводнику, при повороте замкнутого проводника в постоянном магнитном поле и т. п.

Направление и сила индукционного тока таковы, что создаваемый им собственный поток магнитной индукции компенсирует то изменение внешнего потока индукции, которое его вызывает; в результате возникают силы, противодействующие относительному перемещению этих двух потоков магнитной индукции.

Исходя из закона сохранения энергии, Фарадей установил связь между электродвижущей силой индукции $\mathscr{E}_i$ и скоростью изменения потока индукции через контур $\partial\Phi/\partial t$

$$\mathscr{E}_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}. \tag{55}$$

Зависимость (55), называемая *законом электромагнитной индукции Фарадея*, устанавливает и величину, и направление э. д. с. индукции.

В системе СИ поток индукции измеряют в веберах. В этом случае зависимость (55) дает

$$\mathscr{E}_i\,(\text{В}) = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}\,\frac{\text{Вб}}{\text{с}}. \tag{56}$$

Если проводник неподвижен, а изменяется величина магнитной индукции, то для объяснения электромагнитной индукции нужно предположить, что при этом в каждой точке пространства возникает электрическое поле. Эта подтвержденная опытами гипотеза была положена Максвеллом в основу теории электрического поля.

Изменяющееся по времени электрическое поле порождает магнитное поле; при равномерно изменяющемся электрическом поле $\left(\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \text{const}\right)$ получается постоянное магнитное поле.

Если в переменное магнитное поле помещен неподвижный проводник, то поток магнитной индукции сквозь сечение контура, охватываемого проводни-

ком, изменяется, в связи с чем в проводнике по закону Фарадея возникает э. д. с. индукции

$$|\mathscr{E}_i| = \frac{\partial \Phi}{\partial t} \tag{57}$$

и по нему течет ток. Таким образом, переменное магнитное поле порождает *электрическое поле.*

Оба переменных поля — электрическое и магнитное, — связанные между собой, образуют *электромагнитное поле.*

Электрическое поле, порожденное переменным магнитным полем, имеет вихревой характер, т. е. существенно отличается от потенциального электростатического поля неподвижных зарядов.

Вихревой характер магнитного поля вытекает из соотношения (35).

Учитывая (22), из (35) получаем для постоянного тока [1])

$$\oint H_l \, dl = \int_S j_n \, dS. \tag{58}$$

Аналогичное соотношение можно получить и для электрического вихревого поля. Согласно (55) э. д. с. индукции

$$\mathscr{E}_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial t},$$

где поток магнитной индукции

$$\Phi = \int_S B_n \, dS.$$

Таким образом, имеем

$$\mathscr{E}_i = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S B_n \, dS = -\int_S \frac{\partial B_n}{\partial t} \, dS.$$

На основании (9) и (26) э. д. с. выражается через напряженность электрического поля (при $R_0 = 0$)

$$\mathscr{E}_i = \oint E_l \, dl,$$

поэтому

$$\oint E_l \, dl = -\int_S \frac{\partial B_n}{\partial t} \, dS. \tag{59}$$

Электрическое поле является вихревым (электромагнитным), если правая часть выражения (59) отлична от нуля, и становится потенциальным, если правая часть равна нулю ($\partial B_n/\partial t = 0$), т. е. если магнитное поле постоянно или отсутствует.

§ 3. Электромагнитные поля

В предыдущем параграфе показано, что электромагнитные поля описываются в общем случае следующей системой интегральных соотношений Максвелла:

1. Соотношением (58), которое связывает циркуляцию вектора напряженности магнитного поля H по замкнутому контуру

[1]) Ниже мы ограничимся рассмотрением постоянного тока.

l с суммарной силой постоянного тока, протекающего через площадь S, охватываемую этим контуром:

$$\oint H_l\, dl = \int\limits_S j_n\, dS.$$

2. Соотношением (14), связывающим суммарный поток электростатической индукции через замкнутую поверхность площадью S с суммарным свободным зарядом в объеме v, охватываемым этой поверхностью:

$$\int\limits_S D_n\, dS = \int\limits_V \rho_{v0}\, dv.$$

3. Соотношением (59), связывающим циркуляцию вектора напряженности электрического поля E по замкнутому контуру l со скоростью изменения по времени потока вектора магнитной индукции через площадь, охватываемую этим контуром:

$$\oint E_l\, dl = -\int\limits_S \frac{\partial B_n}{\partial t}\, dS.$$

4. Соотношением (44), свидетельствующим о неразрывности потока магнитной индукции B через замкнутую поверхность:

$$\int\limits_S B_n\, dS = 0.$$

К этим интегральным соотношениям нужно добавить выражения (4) и (38), с помощью которых можно перейти от векторов напряженности электромагнитных полей к векторам индукции

$$D = \varepsilon_a E, \qquad B = \mu_B H,$$

и обобщенный закон Ома (54)

$$j = \sigma_R \{E + [W \times B]\}.$$

Выведем теперь уравнения Максвелла в дифференциальной форме, причем разобьем их на две системы. Первую систему получим для магнитного поля постоянного тока.

Так как линии напряженности магнитного поля лежат в плоскости, перпендикулярной к направлению тока, то проекция плотности тока j_z (рис. 13.7) связана только с проекциями H_x и H_y напряженностей магнитного поля в той же точке пространства. Циркуляция вектора напряженности по бесконечно малому контуру $abcd$ состоит из следующих слагаемых (обход

против часовой стрелки):

$$\Gamma_{abcd} = -H_y\,dy + H_x\,dx + \left(H_y + \frac{\partial H_y}{\partial x}dx\right)dy - \left(H_x + \frac{\partial H_x}{\partial y}dy\right)dx = \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)dx\,dy.$$

С другой стороны, согласно (58) циркуляция вектора $\boldsymbol{H}$ должна равняться силе тока, протекающего через эту площадку

$$\Gamma_{abcd} = I_z = j_z\,dx\,dy.$$

Итак, имеем

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = j_z. \tag{60}$$

Аналогично для составляющих плотности тока по другим осям найдем

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = j_x, \qquad \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = j_y. \tag{60а}$$

Уравнения (60) связывают плотность тока проводимости j с пространственными производными от напряженности магнитного поля $\boldsymbol{H}$. Если к уравнениям (60) добавить уравнение (17), связывающее вектор электростатической индукции $\boldsymbol{D}$ с распределением плотности свободных зарядов в объеме ρ_{v0}

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho_{v0},$$

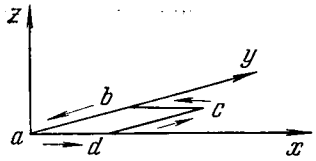


Рис. 13.7. Система координат (к выводу уравнений Максвелла).

то мы и получим первую систему уравнений Максвелла, которая в векторной форме может быть представлена так:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{j}, \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{D} = \rho_{v0}. \tag{61}$$

Эта система справедлива для однородных магнетиков, целиком заполняющих все поле, так как в таком случае напряженность магнитного поля токов не зависит от магнитной проницаемости среды.

Вторую систему уравнений Максвелла получим, используя данное им обобщение закона индукции Фарадея.

Составим выражение для циркуляции напряженности электрического поля $\boldsymbol{E}$ по бесконечно малому контуру $abcd$ (рис. 13.7), вызванного изменением по времени вектора магнитной индукции $\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$, перпендикулярного вектору $\boldsymbol{E}$:

$$\Gamma_{abcd} = -E_y\,dy + E_x\,dx + \left(E_y + \frac{\partial E_y}{\partial x}dx\right)dy - \left(E_x + \frac{\partial E_x}{\partial y}dy\right)dx = \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)dy\,dx.$$

Циркуляция вектора $\boldsymbol{E}$ по замкнутому контуру равна производной потока магнитной индукции через площадь, охватываемую этим контуром, взятую со знаком минус

$$\Gamma = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}\, dx\, dy.$$

Отсюда имеем

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}. \tag{62}$$

По аналогии имеем также

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t}, \qquad \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}. \tag{62a}$$

Добавляя к уравнениям (62) уравнение неразрывности линий магнитной индукции (43)

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0,$$

получим вторую систему уравнений Максвелла, которая в векторной форме имеет вид

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0. \tag{63}$$

В случае неоднородной среды на границах отдельных ее участков при отсутствии поверхностных зарядов и токов должны быть выполнены условия (4а) и (45)

$$D_{1n} = D_{2n}, \qquad \frac{D_{1t}}{\varepsilon_{a1}} = \frac{D_{2t}}{\varepsilon_{a2}};$$

$$B_{1n} = B_{2n}, \qquad \frac{B_{1t}}{\mu_1} = \frac{B_{2t}}{\mu_2}.$$

Исключим из дифференциальных уравнений Максвелла векторы плотности тока $\boldsymbol{j}$ и напряженность электрического тока $\boldsymbol{E}$. Для этого воспользуемся законом Ома (54), преобразовав его в уравнение завихренности поля плотности тока:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{j} = \sigma_R \{\operatorname{rot} \boldsymbol{E} + \operatorname{rot} [\boldsymbol{W} \times \boldsymbol{B}]\}. \tag{64}$$

Уравнение для завихренности вектора напряженности магнитного поля (61) с помощью (38) заменим уравнением завихренности вектора магнитной индукции

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{B} = \mu_B \boldsymbol{j}. \tag{65}$$

Как известно из теории поля,

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{B} = -\Delta \boldsymbol{B} = -\left(\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial z^2}\right). \tag{66}$$

Из (64), (65) и (66) находим при $\sigma_R = \text{const}$

$$-\Delta \boldsymbol{B} = \mu_B \operatorname{rot} \boldsymbol{j} = \mu_B \sigma_R \{\operatorname{rot} \boldsymbol{E} + \operatorname{rot} [\boldsymbol{W} \times \boldsymbol{B}]\}. \tag{67}$$

Из уравнения (63) имеем

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}.$$

Подставляя этот результат в (67), получим

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \operatorname{rot} [\boldsymbol{W} \times \boldsymbol{B}] + \frac{1}{\mu_B \sigma_R} \Delta \boldsymbol{B}. \tag{68}$$

Это уравнение, связывающее магнитное поле с полем скоростей в электропроводной жидкости, называется *уравнением магнитной индукции.*

В случае очень большой электропроводимости среды ($\sigma_R \to \infty$) вторым членом правой части уравнения (68) можно пренебречь, в связи с чем оно приобретает следующий вид:

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \operatorname{rot} [\boldsymbol{W} \times \boldsymbol{B}]. \tag{68а}$$

Это уравнение тождественно уравнению вихря скорости в гидродинамике идеальной жидкости, которое означает, что линии вихря движутся вместе с жидкостью. Но в данном случае речь идет о линиях магнитного поля, которые оказываются жестко связанными с веществом — «вмороженными», и если частицы жидкости движутся, то линии магнитной индукции перемещаются вместе с ними (частицы не могут пересечь линий индукции).

«Вмороженность» магнитных линий связана с тем, что при изменении потока вектора магнитной индукции через контур в нем появляются электрические токи, препятствующие изменению этого потока, причем тем большие, чем выше σ_R; при $\sigma_R \to \infty$ изменение потока индукции становится невозможным. Движение вдоль силовых линий не сказывается на поле; при движении в поперечном направлении силовые линии полностью увлекаются вместе с веществом (если $\sigma_R \to \infty$).

В случае неподвижной среды ($\boldsymbol{W} = 0$) уравнение индукции имеет вид уравнения диффузии или нестационарной теплопроводности (уравнения Фурье)

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_B \sigma_R} \Delta \boldsymbol{B}. \tag{68б}$$

Оно показывает, что в теле, находящемся в магнитном поле внешних источников, магнитное поле исчезает не сразу после их выключения; магнитные силовые линии постепенно «просачиваются» через тело и ослабляются.

Например, в медной сфере радиусом 1 м магнитное поле затухает в течение приблизительно 10 с: чем выше проводимость, тем затухание поля слабее.

Величина

$$\frac{1}{\mu_B \sigma_R} = \nu_н, \tag{69}$$

аналогичная коэффициенту переноса в уравнениях диффузии и теплопроводности и имеющая размерность кинематической вязкости, получила название *магнитной вязкости*. Численные значения магнитной вязкости обычно намного больше значений кинематической вязкости. В общем случае, когда ни одним из членов в правой части уравнения магнитной индукции пренебречь нельзя, силовые линии стремятся двигаться вместе с веществом и одновременно просачиваются сквозь вещество.

В приложении V приводится таблица основных единиц, используемых в электродинамике, в разных системах измерений, причем каждая величина сопоставлена с соответствующим ей числом единиц системы СИ. Из этой таблицы видно, что недостатком системы СИ является то, что в ней магнитная проницаемость и электрическая постоянная вакуума являются размерными величинами, отличными от единицы.

§ 4. Уравнения магнитной газодинамики

Уравнения гидродинамики (и газовой динамики) электропроводной жидкости при наличии электрического и магнитного полей должны в отличие от уравнений гидродинамики непроводящей жидкости содержать дополнительный член, учитывающий электромагнитную объемную силу.

На элемент объема проводника (или проводящей жидкости) dv, если по нему протекает ток плотностью j, со стороны магнитного поля действует сила Ампера (40)

$$df_H = [j \times B]\, dv,$$

а со стороны электрического поля — сила Кулона (2)

$$df_e = E\rho_{v0}\, dv,$$

где ρ_{v0} — плотность зарядов в объеме dv ($\rho_{v0} dv = dq$).

Таким образом, полная объемная электромагнитная сила, приложенная к объему dv:

$$df = df_e + df_H = \{\rho_{v0} E + [j \times B]\}\, dv, \tag{70}$$

сила, действующая на единицу объема

$$F = \frac{df}{dv} = F_e + F_H = \rho_{v0} E + [j \times B]. \tag{71}$$

Оценка порядка членов в соотношении (70) показывает, что силой Кулона часто можно пренебречь [1]). Тогда с учетом (65) получаем для электромагнитной силы, приложенной к единице объема, выражение

$$\boldsymbol{F} = [\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B}] = \frac{1}{\mu_B}[\operatorname{rot} \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{B}]. \tag{72}$$

Проекции вектора электромагнитной силы на оси прямоугольной системы координат составляют

$$\left.\begin{aligned} F_x &= (j_y B_z - j_z B_y), \\ F_y &= (j_z B_x - j_x B_z), \\ F_z &= (j_x B_y - j_y B_x) \end{aligned}\right\} \tag{72а}$$

или в другой форме (при замене согласно (65) вектора плотности тока ротором вектора магнитной индукции)

$$\left.\begin{aligned} \mu_B F_x &= a_y B_z - a_z B_y = B_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + B_y \frac{\partial B_x}{\partial y} + B_z \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{1}{2}\frac{\partial B^2}{\partial x}, \\ \mu_B F_y &= a_z B_x - a_x B_z = B_x \frac{\partial B_y}{\partial x} + B_y \frac{\partial B_y}{\partial y} + B_z \frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{1}{2}\frac{\partial B^2}{\partial y}, \\ \mu_B F_z &= a_x B_y - a_y B_x = B_x \frac{\partial B_z}{\partial x} + B_y \frac{\partial B_z}{\partial y} + B_z \frac{\partial B_z}{\partial z} - \frac{1}{2}\frac{\partial B^2}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{72б}$$

Здесь $B^2 = B_x^2 + B_y^2 + B_z^2$ — величина вектора магнитной индукции, $\boldsymbol{a} = \operatorname{rot} \boldsymbol{B}$. При выводе выражений (72б) было использовано также условие неразрывности магнитных силовых линий (63).

Добавляя силу F (72) в правую часть уравнения (28) из гл. II, получим уравнение движения электропроводной жидкости в электрическом и магнитном полях в векторной форме

---

[1]) Относительная величина силы Кулона оценивается следующим образом:

$$\frac{|\rho_{v0}\boldsymbol{E}|}{|[\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B}]|} \sim \frac{\rho_{v0} E}{\sigma_R W B^2},$$

где

$$\rho_{v0} = \operatorname{div} \boldsymbol{D} \sim \frac{1}{L}\varepsilon_a E.$$

Отсюда

$$\frac{|\rho_{v0}\boldsymbol{E}|}{|[\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B}]|} \sim \frac{E^2}{B^2 W^2}\frac{\varepsilon_a W}{L\sigma_R}.$$

Согласно (52) $E/B = W_д$ есть скорость дрейфа, которая, как известно, является величиной порядка скорости потока, в системе СИ $\varepsilon_a \sim 10^{-11}$, линейный размер L — порядка 1 м, σ_R — порядка См/м.

Таким образом, даже при скоростях потока W порядка 10^2 км/с относительная величина силы Кулона имеет порядок 10^{-6}.

(при $\mu = \text{const}$)

$$\rho \frac{d\boldsymbol{W}}{dt} = \boldsymbol{R} - \operatorname{grad} p + \mu \Delta \boldsymbol{W} + \frac{1}{3}\mu \operatorname{grad}(\operatorname{div} \boldsymbol{W}) + [\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B}] \tag{73}$$

или

$$\rho \frac{d\boldsymbol{W}}{dt} = \boldsymbol{R} - \operatorname{grad} p + \mu \Delta \boldsymbol{W} + \\ + \frac{1}{3}\mu \operatorname{grad}(\operatorname{div} \boldsymbol{W}) + \frac{1}{\mu_B}[\operatorname{rot} \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{B}]. \tag{73a}$$

Для газа система дифференциальных уравнений должна включать уравнение энергии. В случае электропроводной жидкости, находящейся в магнитном и электрическом полях, правая часть уравнения энергии (42) из гл. II должна содержать дополнительный член (28), выражающий плотность джоулева тепловыделения (тепловыделение на единицу объема). Тогда уравнение энергии для электропроводной жидкости примет следующий вид (при $\lambda = \text{const}$, $\mu = \text{const}$):

$$\rho \frac{di}{dt} = \frac{dp}{dt} + \lambda \Delta T + \mu \Phi + \frac{j^2}{\sigma_R} \tag{74}$$

или с учетом (65)

$$\rho \frac{di}{dt} = \frac{dp}{dt} + \lambda \Delta T + \mu \Phi + \frac{1}{\sigma_R (\mu_B)^2}[\operatorname{rot} \boldsymbol{B}]^2. \tag{74a}$$

К уравнениям (73) и (74) следует добавить уравнение магнитной индукции (68)

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \operatorname{rot}[\boldsymbol{W} \times \boldsymbol{B}] + \frac{1}{\mu_B \sigma_R} \Delta \boldsymbol{B}, \tag{75}$$

гидродинамическое уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \boldsymbol{W} = 0 \tag{76}$$

и уравнение состояния

$$p = f(\rho, T), \tag{77}$$

которое в случае идеального газа заменяется уравнением Клапейрона. Система уравнений (73а)—(77) является полной системой дифференциальных уравнений магнитной газовой динамики.

Если уравнение движения используется в форме (73), то в систему уравнений необходимо ввести уравнение закона Ома (54), уравнения Максвелла (61), (63), а также уравнения (65) и (68).

В этих уравнениях мы пренебрегаем электростатической силой Кулона; если принять во внимание силу Кулона, то получится система уравнений электромагнитной газодинамики.

Для несжимаемой жидкости система уравнений (73)—(77) упрощается, так как уравнения движения решаются независимо от уравнения энергии, отпадает надобность в уравнении состояния (77) и более простой вид имеют уравнения неразрывности (76) и движения (73).

Таким образом, полная система уравнений магнитной гидродинамики несжимаемой жидкости в векторной форме состоит из уравнения движения

$$\rho \frac{d\boldsymbol{W}}{dt} = \boldsymbol{R} - \operatorname{grad} p + \mu \Delta \boldsymbol{W} + [\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B}] \tag{78}$$

или

$$\rho \frac{d\boldsymbol{W}}{dt} = \boldsymbol{R} - \operatorname{grad} p + \mu \Delta \boldsymbol{W} + \frac{1}{\mu_B} [\operatorname{rot} \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{B}], \tag{78a}$$

уравнения энергии (43) из гл. II, которое разрешается независимо от остальных уравнений,

$$\rho c \frac{dT}{dt} = \lambda \Delta T + \mu \Phi + \frac{j^2}{\sigma_R}, \tag{79}$$

уравнения магнитной индукции

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \operatorname{rot} [\boldsymbol{W} \times \boldsymbol{B}] + \frac{1}{\mu_B \sigma_R} \Delta \boldsymbol{B}, \tag{80}$$

уравнения неразрывности

$$\operatorname{div} \boldsymbol{W} = 0. \tag{81}$$

Если уравнения движения и энергии используются в форме (78) и (79), то для получения замкнутой системы нужно добавить уравнение закона Ома (54), уравнения Максвелла (61), (63) и уравнение (65).

Если перейти к проекциям на оси прямоугольной системы координат xyz, то векторное уравнение движения (78) распадается на три уравнения движения:

$$\left.\begin{aligned}
&\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \\
&\quad = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + (j_y B_z - j_z B_y), \\
&\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) = \\
&\quad = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) + (j_z B_x - j_x B_z), \\
&\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = \\
&\quad = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) + (j_x B_y - j_y B_x).
\end{aligned}\right\} \tag{82}$$

Используя зависимости (72а) и (72б), систему уравнений движения можно привести к следующему виду:

$$\left.\begin{aligned}
&\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p_c}{\partial x}+\\
&+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+\frac{1}{\mu_B}\left(B_x\frac{\partial B_x}{\partial x}+B_y\frac{\partial B_x}{\partial y}+B_z\frac{\partial B_x}{\partial z}\right),\\
&\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p_c}{\partial y}+\\
&+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)+\frac{1}{\mu_B}\left(B_x\frac{\partial B_y}{\partial x}+B_y\frac{\partial B_y}{\partial y}+B_z\frac{\partial B_y}{\partial z}\right),\\
&\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p_c}{\partial z}+\\
&+\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)+\frac{1}{\mu_B}\left(B_x\frac{\partial B_z}{\partial x}+B_y\frac{\partial B_z}{\partial y}+B_z\frac{\partial B_z}{\partial z}\right).
\end{aligned}\right\}\quad(82а)$$

В эти уравнения входит величина

$$p_c=p+\frac{B^2}{2\mu_B},\quad(83)$$

называемая *эффективным давлением*, которая представляет собой сумму гидродинамического (p) и магнитного $\left(p_m=\frac{B^2}{2\mu_B}\right)$ давлений.

Отметим, что в уравнениях (82) неэлектромагнитные силы (сила тяжести и др.) для краткости опущены.

Векторное уравнение индукции (80) в прямоугольной системе координат также распадается на три уравнения:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial B_x}{\partial t}=\frac{1}{\mu_B\sigma_R}\left[\frac{\partial^2 B_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 B_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 B_x}{\partial z^2}\right]+\frac{\partial uB_x}{\partial x}+\\
&\qquad+\frac{\partial uB_y}{\partial y}+\frac{\partial uB_z}{\partial z}-B_x\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right),\\
&\frac{\partial B_y}{\partial t}=\frac{1}{\mu_B\sigma_R}\left[\frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 B_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2}\right]+\frac{\partial vB_x}{\partial x}+\\
&\qquad+\frac{\partial vB_y}{\partial y}+\frac{\partial vB_z}{\partial z}-B_y\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right),\\
&\frac{\partial B_z}{\partial t}=\frac{1}{\mu_B\sigma_R}\left[\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 B_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2}\right]+\frac{\partial wB_x}{\partial x}+\\
&\qquad+\frac{\partial wB_y}{\partial y}+\frac{\partial wB_z}{\partial z}-B_z\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right).
\end{aligned}\right\}\quad(84)$$

В уравнении энергии (74) член, учитывающий джоулево тепло, можно выразить через магнитную индукцию. Для этого

следует использовать уравнение Максвелла (65). В результате получим

$$\rho \frac{di}{dt} = \frac{dp}{dt} + \lambda \Delta T + \mu\Phi + \frac{1}{(\mu_B)^2 \sigma_R} (\mathrm{rot}\, \boldsymbol{B})^2, \tag{85}$$

где в соответствии с теорией поля величина

$$(\mathrm{rot}\, \boldsymbol{B})^2 = \left(\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial z}\right)^2. \tag{86}$$

Уравнение закона Ома (54) в проекциях на оси координат имеет вид

$$\left.\begin{aligned} j_x &= \sigma_R [E_x + (vB_z - wB_y)], \\ j_y &= \sigma_R [E_y + (wB_x - uB_z)], \\ j_z &= \sigma_R [E_z + (uB_y - vB_x)]. \end{aligned}\right\} \tag{87}$$

При $\rho = \mathrm{const}$ гидродинамическое уравнение неразрывности имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

поэтому уравнения магнитной индукции (84) упрощаются, так как последние члены в их правых частях равны нулю.

Во многих конкретных случаях уравнения движения и индукции можно существенно упростить, отбрасывая те или иные относительно малые члены.

В гл. II представлено несколько вариантов уравнения энергии для газового потока. Часто уравнение энергии используют в такой форме, в которой энтальпия и кинетическая энергия объединены в полную энтальпию; таким является уравнение (49) из § 6 гл. II. Для того чтобы прийти к соответствующей форме уравнения энергии магнитной гидродинамики, следует дополнительный член уравнения движения — электромагнитную силу

$$\boldsymbol{f} = [\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B}]$$

спроектировать на оси прямоугольной системы координат и затем каждую проекцию этого вектора умножить на соответствующую проекцию скорости; сложив три полученных произведения, находим дополнительный электромагнитный член к уравнению (45) гл. II

$$f_x u + f_y v + f_z w = [u(j_y B_z - j_z B_y) + v(j_z B_x - j_x B_z) + w(j_x B_y - j_y B_x)] = [j_x(wB_y - vB_z) + j_y(uB_z - wB_x) + j_z(vB_x - uB_y)].$$

При составлении этого выражения были использованы выражения (72а) для составляющих электромагнитной силы. Иначе го-

воря, скалярное произведение вектора скорости на вектор электромагнитной силы было представлено в виде

$$\boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{f} = -\boldsymbol{j} \cdot [\boldsymbol{W} \times \boldsymbol{B}].$$

Из закона Ома (54) следует

$$\frac{\boldsymbol{j}}{\sigma_R} - \boldsymbol{E} = [\boldsymbol{W} \times \boldsymbol{B}].$$

Подставляя этот результат в предыдущее равенство, находим

$$\boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{f} = -\frac{j^2}{\sigma_R} + \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{E}.$$

Если этот дополнительный член, выражающий работу электромагнитной силы, сложить с джоулевым теплом

$$Q_e = \frac{j^2}{\sigma_R}, \tag{88}$$

то получим окончательные выражения для дополнительного «электромагнитного» члена уравнения энергии

$$Q_H = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{E}. \tag{89}$$

Эту величину нужно добавить к правой части уравнения (49) гл. II, тогда уравнение энергии газа при наличии электромагнитного поля записывается в следующей форме:

$$\rho \frac{di^*}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \lambda \Delta T + \mu \Delta \left(\frac{W^2}{2}\right) + \\ + \frac{1}{3} \mu (\boldsymbol{W} \nabla) \operatorname{div} \boldsymbol{W} + \frac{1}{3} \mu (\operatorname{div} \boldsymbol{W})^2 + 2\mu\Omega + j\boldsymbol{E}. \tag{90}$$

В ряде случаев работу электромагнитных сил представляют в другой форме, которую можно получить, если заменить с помощью (65) плотность тока в скалярном произведении (89) магнитной индукцией

$$Q_H = \frac{\boldsymbol{E}}{\mu_B} \operatorname{rot} \boldsymbol{B} \tag{91}$$

и использовать известную формулу теории поля

$$\operatorname{div} [\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}] = \boldsymbol{B} \operatorname{rot} \boldsymbol{E} - \boldsymbol{E} \operatorname{rot} \boldsymbol{B}.$$

В случае стационарного магнитного поля $\left(\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0\right)$ из (63) имеем $\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0$, и, следовательно,

$$\boldsymbol{E} \operatorname{rot} \boldsymbol{B} = -\operatorname{div} [\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}].$$

Подставляя этот результат в (91), приходим к следующему выражению для дополнительного электромагнитного члена

в уравнении энергии:

$$Q_H = -\frac{1}{\mu_B}\operatorname{div}[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}]. \tag{92}$$

После замены в (90) последнего члена выражением (92) получаем еще одну форму уравнения энергии магнитной газовой динамики:

$$\rho\frac{di^*}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \lambda\Delta T + \mu\Delta\left(\frac{\boldsymbol{W}^2}{2}\right) + \\ + \frac{1}{3}\mu(\boldsymbol{W}\nabla)\operatorname{div}\boldsymbol{W} + \frac{1}{3}\mu(\operatorname{div}\boldsymbol{W})^2 + 2\mu\Omega - \frac{1}{\mu_B}\operatorname{div}[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}]. \tag{93}$$

В стационарном случае и при отсутствии вязкости и теплопроводности уравнение энергии (93) принимает вид

$$\rho\frac{di^*}{dt} = -\frac{1}{\mu_B}\operatorname{div}[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}]. \tag{94}$$

§ 5. Критерии подобия в магнитной гидродинамике [1])

С появлением дополнительного члена в уравнении движения электропроводной жидкости в магнитном поле (82) возникает необходимость ввести новый критерий подобия, учитывающий отношение магнитной силы к силе инерции. Следуя методу, изложенному в § 7 гл. II, приведем последний член правой части уравнения (82) к безразмерному виду путем деления его на величину $\frac{\rho_0 U_0^2}{l}$. В результате получим

$$\frac{j_0 B_0 l}{\rho_0 U_0^2}\left(\frac{j_y B_z}{j_0 B_0} - \frac{j_z B_y}{j_0 B_0}\right).$$

Здесь l — характерный размер, ρ_0, U_0, j_0, B_0 — значения плотности жидкости, скорости, плотности тока и магнитной индукции в некоторой характерной точке потока. Если электромагнитная сила записана так, как это сделано в уравнении движения (82а), то в безразмерном виде соответствующий член этого уравнения можно представить в виде

$$\frac{B_0^2}{\mu_B\rho_0 U_0^2}\left[\frac{B_x}{B_0}\frac{\partial\frac{B_x}{B_0}}{\partial\frac{x}{l}} + \frac{B_y}{B_0}\frac{\partial\frac{B_x}{B_0}}{\partial\frac{y}{l}} + \frac{B_z}{B_0}\frac{\partial\frac{B_x}{B_0}}{\partial\frac{z}{l}} - \frac{1}{2}\frac{\partial\left(\frac{B}{B_0}\right)^2}{\partial\frac{x}{l}}\right].$$

Динамическое подобие обтекания модели и натурного объекта (см. § 7 гл. II) в электропроводной жидкости при наличии

[1]) Бай Ши-и, Магнитная газовая динамика и динамика плазмы, «Мир», М., 1964.

внешнего магнитного поля, очевидно, требует того, чтобы у модели и натуры были одинаковые значения множителя

$$\frac{j_0 B_0 l}{\rho_0 U_0^2} = \mathrm{S}_l = \mathrm{idem} \tag{95}$$

или с учетом того, что, согласно (65), $j_0 \approx \frac{1}{\mu_B}\frac{B_0}{l}$, имеем

$$\frac{B_0^2}{\mu_B \rho_0 U_0^2} = \mathrm{S}_B = \mathrm{const}. \tag{96}$$

Этот множитель характеризует отношение магнитной и кинетической энергий единицы объема. Величина $\mathrm{A} = \sqrt{\mathrm{S}_B}$ называется *числом Альфвена*. Разумеется, необходимо, чтобы остальные гидродинамические критерии подобия (числа Струхаля, Фруда, Маха и Рейнольдса) также были соответственно одинаковыми.

Учитывая, что при конечной проводимости согласно закону Ома (54) плотность тока, индуцированного магнитным полем, пропорциональна отношению

$$\sigma_{R0} U_0 B_0 \sim j_0,$$

можно из (95) получить критерий магнитогидродинамического взаимодействия, выражающий отношение магнитной силы от индуцированных токов к силе инерции

$$\mathrm{S}_0 = \frac{\sigma_{R0} B_0^2 l}{\rho_0 U_0} = \mathrm{idem}. \tag{97}$$

Критерий S_0 называют *параметром магнитогидродинамического взаимодействия.*

Приведем к безразмерному виду члены уравнения закона Ома (54)

$$\frac{j_x}{j_0} = \frac{\sigma_{R0} E_0}{j_0}\frac{\sigma_R}{\sigma_{R0}}\left[\frac{E_x}{E_0} + \frac{U_0 B_0}{E_0}\left(\frac{vB_z}{U_0 B_0} - \frac{wB_y}{U_0 B_0}\right)\right].$$

Если j_0 — ток проводимости в характерной точке, то, согласно (23), $j_0 = \sigma_{R0} E_0$. Отсюда следует

$$\frac{j_x}{j_0} = \frac{\sigma_R}{\sigma_{R0}}\left[\frac{E_x}{E_0} + \frac{U_0 B_0}{E_0}\left(\frac{vB_z}{U_0 B_0} - \frac{wB_y}{U_0 B_0}\right)\right].$$

Здесь отношение индуцированного магнитным полем тока к току внешнего электрического поля определяется при $\sigma_R = \sigma_{R0}$ безразмерным критерием

$$\Pi = \frac{U_0 B_0}{E_0} = \frac{U_0}{E_0/B_0} = \frac{U_0}{W_д}. \tag{98}$$

Здесь $W_д$ — скорость дрейфа (52), определенная ранее в § 2. Величина

$$Э = \frac{S_0}{П}, \tag{99}$$

характеризующая отношение электромагнитной силы от наложенного извне тока к силе инерции, является критерием электрогидродинамического взаимодействия.

Приведем к безразмерному виду уравнение магнитной индукции (84)

$$\frac{l}{t_0 U_0}\frac{\partial \frac{B_x}{B_0}}{\partial \frac{t}{t_0}} = \frac{1}{\mu_B \sigma_R l U_0}\left[\frac{\partial^2 \frac{B_x}{B_0}}{\partial\left(\frac{x}{l}\right)^2} + \frac{\partial^2 \frac{B_x}{B_0}}{\partial\left(\frac{y}{l}\right)^2} + \frac{\partial^2 \frac{B_x}{B_0}}{\partial\left(\frac{z}{l}\right)^2}\right] +$$

$$+ \frac{\partial \frac{uB_x}{U_0 B_0}}{\partial \frac{x}{l}} + \frac{\partial \frac{uB_y}{U_0 B_0}}{\partial \frac{y}{l}} + \frac{\partial \frac{uB_z}{U_0 B_0}}{\partial \frac{z}{l}} - \frac{B_x}{B_0}\left[\frac{\partial \frac{u}{U_0}}{\partial \frac{x}{l}} + \frac{\partial \frac{v}{U_0}}{\partial \frac{y}{l}} + \frac{\partial \frac{w}{U_0}}{\partial \frac{z}{l}}\right]. \tag{100}$$

В левой части (100) стоит уже известный безразмерный множитель — число Струхаля ($Sh = l/U_0 t_0$). В правой части появился новый безразмерный множитель, обратную величину которого называют *магнитным числом Рейнольдса*

$$R_H = \mu_Б \sigma_R l U_0 = \frac{l U_0}{\nu_H}. \tag{101}$$

Этот критерий характеризует отношение магнитного поля от индуцированных токов к наложенному внешнему магнитному полю [1]). Иногда пользуются отношением магнитного числа Рейнольдса к обычному числу Рейнольдса, т. е. *магнитным числом Прандтля*

$$Pr_m = \frac{R_H}{R} = \mu_B \sigma_R \nu = \frac{\nu}{\nu_H}, \tag{102}$$

которое представляет собой отношение обычной вязкости к магнитной вязкости. Если умножить критерий магнитогидродинами-

---

[1]) Магнитное поле от индуцированных токов определяется из известного соотношения

$$|\operatorname{rot} \mathbf{B}_i| = \mu_B |j| \sim \mu_B \sigma_R U_0 B_e,$$

где $|\operatorname{rot} \mathbf{B}_i| \sim \frac{B_i}{l}$, B_e — напряженность внешнего поля. Отсюда имеем

$$\frac{B_i}{B_e} \sim \mu_B \sigma_R l U_0 = R_H.$$

ческого взаимодействия (97) на число Рейнольдса, то получим отношение магнитной силы от индуцированного магнитным током поля к силе вязкости

$$S_0R=\frac{\sigma_R B_0^2 l}{\rho_0 U_0}\frac{U_0 l}{\nu}=\frac{\sigma_R B_0^2 l^2}{\rho_0 \nu}.$$

Корень квадратный из этой величины получил название *числа Гартмана*

$$Ha=B_0 l\sqrt{\frac{\sigma_R}{\mu}}. \qquad (103)$$

Здесь $\mu=\rho_0\nu$ — коэффициент динамической вязкости. При определении величины числа Гартмана в качестве характерного l берется поперечный размер канала. Число Гартмана является основным критерием подобия в таких магнитогидродинамических задачах, в которых существенную роль играют силы вязкости.

Из перечисленных дополнительных критериев магнитной гидродинамики взаимно независимыми являются только три (например, числа П, Ha и R_H). Остальные параметры (S, Э, Pr_m) можно получить из приведенных соотношений как производные.

При некоторых значениях отдельных критериев подобия система уравнений магнитной гидродинамики допускает упрощения. Так, при $R_H \ll 1$ можно пренебречь магнитными полями от индуцированных токов и считать, что течение происходит только под действием внешнего магнитного поля. С такого рода течениями имеют дело в магнитной гидрогазодинамике каналов (движение при наличии электромагнитных полей технической плазмы или жидкого металла в трубах, каналах магнитных насосов и магнитогазодинамических генераторов электрического тока) и в случае обтекания тела, когда электропроводность среды не очень велика.

При $R_H \gg 1$ магнитное поле оказывается «вмороженным» в вещество и перемещается вместе с ним; эта область магнитной газовой динамики находит применение в астрофизике, где имеют дело с очень протяженными областями сильно разреженного межзвездного газа достаточной проводимости или с разогретым до миллионов градусов весьма проводящим звездным веществом (например, протуберанцы солнца).

При лабораторных опытах с жидкими металлами обычно $R_H = 0{,}01—0{,}1$, а число Гартмана может достигать нескольких сотен; в опытах с технической плазмой (температуры порядка 10^4 К) возможно значение $R_H = 1$, тогда как число П может быть как меньше, так и больше единицы.

§ 6. Течение вязкой электропроводной жидкости по плоскому каналу в поперечном магнитном поле

Рассмотрим так называемое течение Гартмана [1]) — ламинарное течение несжимаемой электропроводной жидкости по плоскому каналу постоянного сечения (рис. 13.8) при наличии постоянного внешнего поперечного магнитного поля с магнитной индукцией

$$B_y = B_0.$$

По длине канала — на участке стабилизированного течения — изменяется только давление ($\partial p/\partial x \neq 0$); остальные параметры остаются неизменными $\left(\frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial x} = \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial x} = 0\right)$. При достаточно большой относительной ширине канала ($a \gg b$) течение

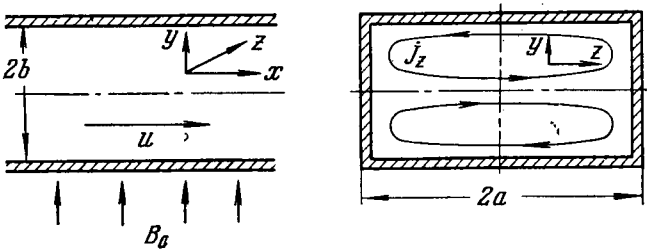


Рис. 13.8. Плоское течение вязкой жидкости в поперечном магнитном поле.

можно считать плоскопараллельным, при котором скорость и индукция не изменяются в направлении оси z $\left(\frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial z} = \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial z} = 0\right)$, а поперечные составляющие скорости отсутствуют ($v = 0$, $w = 0$).

Из уравнения неразрывности линий магнитной индукции (43) имеем

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0.$$

Вследствие условия $\frac{\partial B_x}{\partial x} = \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$ имеем также $\frac{\partial B_y}{\partial y} = 0$ или $B_y = \text{const} = B_0$, т. е. магнитная индукция внутри канала в направлении оси y не изменяется.

Из уравнения (63) при постоянном магнитном поле следует $\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0$. Отсюда, в предположении что $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$, получаем $E_z = \text{const}$, $E_x = \text{const}$. Из условия отсутствия тока в на-

[1]) Harthmann, Theory of the laminar flow in a homogeneous magnetic field, Kgl. Danske Videnskab, Math.-fys., Meddl, 15, № 6, 1937.

правлении x необходимо принять $E_x = 0$. Из уравнения $\operatorname{div} j = 0$ имеем $j_y = \text{const}$. Предполагая стенки $y = \pm b$ непроводящими, имеем $j_y = 0$. Тогда из закона Ома следует $E_y = \frac{1}{\sigma_R} j_y = 0$.

По закону Ома плотность тока в проекции на ось z равна

$$j_z = \sigma_R [E_z + uB_0]. \tag{104}$$

Если боковые стенки $z = \pm a$ также являются изоляторами, то суммарный ток в направлении оси z

$$I_z = \int_{-b}^{b} j_z \, dy = \sigma_R \left[E_z 2b + B_0 \int_{-b}^{b} u \, dy \right] = 0.$$

Так как величина

$$\frac{1}{2b} \int_{-b}^{b} u \, dy = u_{\text{ср}}$$

есть средняя скорость потока, то напряженность электрического поля

$$E_z = -B_0 u_{\text{ср}}. \tag{105}$$

Подставляя (105) в (104), приходим к окончательному выражению для плотности тока

$$j_z = \sigma_R B_0 (u - u_{\text{ср}}). \tag{106}$$

Как видим, несмотря на то, что суммарная сила тока равна нулю, ток в направлении оси z течет, причем в слоях с малой скоростью ($u < u_{\text{ср}}$) плотность тока отрицательна, а в слоях большой скорости ($u > u_{\text{ср}}$) — положительна.

Электромагнитная сила — последний член в правой части уравнения (82) — в данном случае составляет

$$F_x = -j_z B_0 = -\sigma_R B_0^2 (u - u_{\text{ср}}). \tag{107}$$

Из (107) следует, что в средней части сечения канала электромагнитная сила отрицательна (тормозит поток), а у стенок — положительна (ускоряет поток). Так как $I_z = 0$, то суммарная электромагнитная сила, приложенная ко всему потоку, также равна нулю. В связи с изложенным уравнение движения (82) вдоль оси x запишется так:

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - j_z B_0. \tag{108}$$

Отсюда на основании (106) имеем

$$A = \frac{\partial p}{\partial x} - u_{\text{ср}} \sigma_R B_0^2 = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \sigma_R B_0^2 u. \tag{108а}$$

Из уравнения движения (82а) для оси y имеем

$$\frac{\partial p_c}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(p + \frac{B_x^2}{2\mu_B}\right) = 0,$$

откуда следует, что величина $\partial p/\partial x$ не зависит от y.

Левая часть уравнения (108а) зависит только от x, а правая только от y, поэтому A должно быть величиной постоянной ($A = \text{const}$). После приведения к безразмерному виду имеем

$$n = \frac{Ab^2}{\mu u_{\text{ср}}} = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} - \text{Ha}^2 \bar{u}. \tag{109}$$

Здесь $\text{Ha} = B_0 b \sqrt{\frac{\sigma_R}{\mu}}$ — число Гартмана, n — безразмерный коэффициент, $\bar{u} = \frac{u}{u_{\text{ср}}}$, $\bar{y} = \frac{y}{b}$ — безразмерные значения скорости и расстояния от оси канала.

Интеграл этого неоднородного линейного уравнения с постоянными коэффициентами есть

$$\bar{u} = C_1 \operatorname{ch}(\bar{y}\,\text{Ha}) + C_2 \operatorname{sh}(\bar{y}\text{Ha}) + \frac{n}{\text{Ha}^2}.$$

Из граничных условий $\bar{u} = 0$ при $\bar{y} = \pm 1$ определяются постоянные интегрирования

$$C_1 = -\frac{n}{\text{Ha}^2 \operatorname{ch} \text{Ha}}, \quad C_2 = 0.$$

Таким образом, скорость течения жидкости в канале

$$\bar{u} = \frac{n}{\text{Ha}^2}\left[1 - \frac{\operatorname{ch}(\bar{y}\text{Ha})}{\operatorname{ch} \text{Ha}}\right]. \tag{110}$$

Из определения средней скорости (для половины канала)

$$u_{\text{ср}} = \frac{1}{b}\int_0^b u\, dy = u_{\text{ср}} \int_0^1 \bar{u}\, d\bar{y}$$

следует

$$\int_0^1 \bar{u}\, d\bar{y} = 1.$$

Подставляя в этот интеграл значение $\bar{u}$ из (110), имеем

$$1 = \frac{n}{\text{Ha}^2}\left[1 - \frac{\operatorname{th} \text{Ha}}{\text{Ha}}\right] \quad \text{или} \quad \frac{n}{\text{Ha}^2} = \frac{\text{Ha}}{\text{Ha} - \operatorname{th} \text{Ha}}.$$

Подставляя этот результат в (110), приходим к окончательному выражению для скорости потока

$$\bar{u} = \text{Ha}\,\frac{\operatorname{ch} \text{Ha} - \operatorname{ch}(\bar{y}\text{Ha})}{\text{Ha} \operatorname{ch} \text{Ha} - \operatorname{sh} \text{Ha}}. \tag{111}$$

При $\mathrm{Ha} \to 0$ имеем

$$\bar{u} = \frac{3}{2}(1 - \bar{y}^2),$$

т. е. предельным профилем скорости в канале для неэлектропроводной жидкости, как и следовало ожидать, является профиль Пуазейля (см. гл. II). Максимальное значение скорости на оси канала (при $\bar{y} = 0$) согласно (111) равно

$$\bar{u}_m = \frac{\mathrm{Ha}\,(\mathrm{ch}\,\mathrm{Ha} - 1)}{\mathrm{Ha}\,\mathrm{ch}\,\mathrm{Ha} - \mathrm{sh}\,\mathrm{Ha}}. \quad (111а)$$

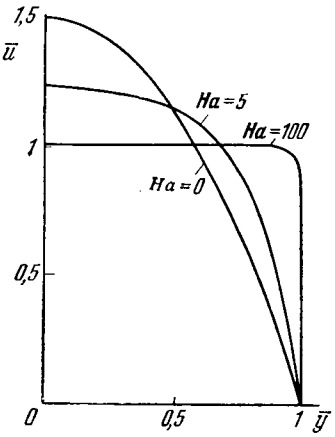


Рис. 13.9. Профили скорости при различных значениях числа Гартмана.

Профили скорости в поперечном сечении канала при различных значениях чисел Ha, вычисленные с помощью (111), изображены на рис. 13.9. Усиление магнитного поля приводит к выравниванию (уплощению) профиля скорости. При $\mathrm{Ha} = \infty$ имеем $\bar{u} = \bar{u}_m = 1$. Как видно на рис. 13.9, при больших значениях числа Гартмана течение состоит из ядра постоянной скорости и сравнительно тонкого пограничного слоя.

Выравнивание профиля скорости с увеличением числа Гартмана ведет к возрастанию градиента скорости у стенки, что вызывает рост силы трения.

Градиент скорости, согласно (111),

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u_{\mathrm{ср}}}{b}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = -\frac{u_{\mathrm{ср}}}{b}\frac{\mathrm{Ha}^2\,\mathrm{sh}\,(\bar{y}\,\mathrm{Ha})}{\mathrm{Ha}\,\mathrm{ch}\,\mathrm{Ha} - \mathrm{sh}\,\mathrm{Ha}}.$$

Отсюда по формуле Ньютона находим напряжение трения у стенки (при $y = b$, т. е. $\bar{y} = 1$)

$$\tau_W = -\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_W = \frac{u_{\mathrm{ср}}\mu}{b}\frac{\mathrm{Ha}^2\,\mathrm{sh}\,\mathrm{Ha}}{\mathrm{Ha}\,\mathrm{ch}\,\mathrm{Ha} - \mathrm{sh}\,\mathrm{Ha}}$$

или в безразмерном виде

$$c_f = \frac{\tau_W}{\rho\frac{u_{\mathrm{ср}}^2}{2}} = \frac{2}{\mathrm{R}}\frac{\mathrm{Ha}^2\,\mathrm{ch}\,\mathrm{Ha}}{\mathrm{Ha}\,\mathrm{ch}\,\mathrm{Ha} - \mathrm{sh}\,\mathrm{Ha}}. \quad (112)$$

Здесь $\mathrm{R} = \rho u_{\mathrm{ср}} b/\mu$ — число Рейнольдса. При $\mathrm{Ha} \to \infty$ имеем $c_f \to \infty$; при $\mathrm{Ha} \to 0$ из (112) получаем известную формулу Пуазейля

$$c_{f_0} = \frac{6}{\mathrm{R}}. \quad (112а)$$

Поделив почленно (112) и (112а), найдем отношение коэффициентов трения при наличии и отсутствии магнитного поля

$$\bar{c}_f = \frac{c_f}{c_{f_0}} = \frac{\mathrm{Ha}^2}{3} \frac{\mathrm{th\,Ha}}{\mathrm{Ha} - \mathrm{th\,Ha}}. \qquad (113)$$

При больших значениях числа Гартмана ($\mathrm{Ha} \geqslant 3$) $\mathrm{th\ Ha} \approx 1$, поэтому в случае сильного магнитного поля формула (113) принимает следующий вид:

$$\bar{c}_f = \frac{1}{3}\mathrm{Ha}. \qquad (113а)$$

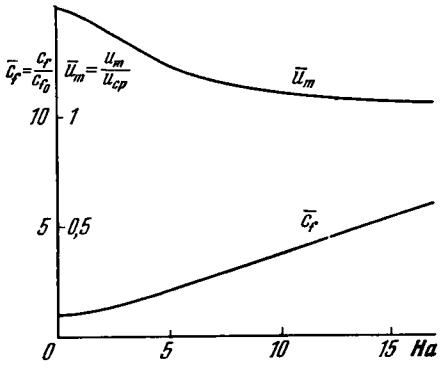


Рис. 13.10. Зависимость максимальной скорости и коэффициента трения от числа Гартмана.

Функции (111а) и (113) изображены графически на рис. 13.10. Опыты Гартмана, Лазаруса и Маргетройта [1]) подтверждают справедливость найденных выше закономерностей течения Гартмана.

Изменение давления по длине канала можно найти из равенства (108), при условии что на стенке $u = u_w = 0$:

$$A = \frac{\partial p}{\partial x} - u_{cp}\sigma_R B_0^2 = \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_w.$$

Согласно (111)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u_{cp}}{b}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} = -\frac{u_{cp}}{b^2}\frac{\mathrm{Ha}^3 \,\mathrm{ch}(\bar{y}\mathrm{Ha})}{\mathrm{Ha\,ch\,Ha} - \mathrm{sh\,Ha}}.$$

У стенки при $\bar{y} = 1$ имеем

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_w = -\frac{u_{cp}}{b^2}\frac{\mathrm{Ha}^3}{\mathrm{Ha} - \mathrm{th\,Ha}}.$$

Следовательно,

$$A = \frac{\partial p}{\partial x} - u_{cp}\sigma_R B_0^2 = -\frac{\mu u_{cp}}{b^2}\frac{\mathrm{Ha}^3}{\mathrm{Ha} - \mathrm{th\,Ha}}$$

или в безразмерном виде при $\bar{x} = x/b$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = \frac{2b}{\rho u_{cp}^2}\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{2}{\mathrm{R}}\frac{\mathrm{Ha}^2\,\mathrm{th\,Ha}}{\mathrm{Ha} - \mathrm{th\,Ha}}. \qquad (114)$$

[1]) Гаррис Л., Магнитогидродинамические течения в каналах, ИЛ, М., 1963.

Из сопоставления (114) с выражением (112) имеем

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = -c_f. \tag{114a}$$

Этот результат можно получить также исходя из того отмеченного выше факта, что в течении Гартмана суммарная электромагнитная сила равна нулю, вследствие чего изменение давления уравновешивается силой трения на стенке

$$2\tau_w\, dx = -2b\frac{\partial p}{\partial x}\, dx, \quad \text{т. е.} \quad \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = -c_f.$$

При наличии суммарной электромагнитной силы условие $I_z = 0$ не выполняется и равенство (114а) несправедливо.

Остановимся теперь на электромагнитных особенностях течения Гартмана. Из закона Максвелла (60) и формулы (106) получаем в проекции на ось z

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = \mu_B \sigma_R B_0 (u - u_{\text{ср}}).$$

Так как по условию $\dfrac{\partial B_y}{\partial x} = 0$, то

$$\frac{\partial \dfrac{B_x}{B_0}}{\partial \bar{y}} = \mu_B \sigma_R b (u_{\text{ср}} - u)$$

или в соответствии с (101)

$$\frac{\partial \dfrac{B_x}{B_0}}{\partial \bar{y}} = \mathrm{R}_H (1 - \bar{u}).$$

Отсюда с учетом (111) имеем

$$\frac{B_x}{B_0} = \mathrm{R}_H \left[\bar{y} - \frac{\mathrm{Ha}\,\bar{y}\,\mathrm{ch}\,\mathrm{Ha}}{\mathrm{Ha}\,\mathrm{ch}\,\mathrm{Ha} - \mathrm{sh}\,\mathrm{Ha}} + \frac{\mathrm{sh}\,(\bar{y}\mathrm{Ha})}{\mathrm{Ha}\,\mathrm{ch}\,\mathrm{Ha} - \mathrm{sh}\,\mathrm{Ha}}\right] + C.$$

Учитывая граничные условия $B_x = 0$ при $\bar{y} = 1$ и $\bar{y} = 0$ (при отсутствии суммарного тока индуцируемое магнитное поле вне канала отсутствует), находим, что постоянная $C = 0$. В результате получаем

$$\frac{B_x}{B_0} = \mathrm{R}_H \frac{\mathrm{sh}\,(\bar{y}\mathrm{Ha}) - \bar{y}\,\mathrm{sh}\,\mathrm{Ha}}{\mathrm{Ha}\,\mathrm{ch}\,\mathrm{Ha} - \mathrm{sh}\,\mathrm{Ha}}. \tag{115}$$

Итак, в течении Гартмана возникает магнитная индукция в направлении оси x, относительная величина которой пропорциональна значению магнитного числа Рейнольдса.

В связи с наличием магнитной индукции B_x давление по сечению канала переменно. Изменение давления в поперечном направлении можно определить из уравнения движения (82) в направлении оси y.

В условиях данной задачи $\left(v=0,\ w=0,\ \text{а также } \frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial z}=0\right.$ для всех величин, кроме давления$\left.\right)$ уравнение движения в проекции на ось y имеет следующий вид:

$$0=-\frac{\partial p}{\partial y}+j_z B_x$$

или

$$0=-\frac{\partial p}{\partial y}+\sigma_R B_0^2 u_{\text{ср}}\frac{B_x}{B_0}(\bar{u}-1).$$

Отсюда получаем

$$\frac{\partial p}{\partial y}=-\sigma_R B_0^2 u_{\text{ср}}\frac{B_x}{B_0}(1-\bar{u})$$

или в безразмерном виде для $\bar{p}=2p/\rho u_{\text{ср}}^2$, $\bar{y}=y/b$ и S_0, определяемого из (97),

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}}=-2S_0\frac{B_x}{B_0}(1-\bar{u}). \tag{116}$$

Итак, градиент давления в поперечном направлении пропорционален величине критерия магнитогазодинамического взаимодействия S_0.

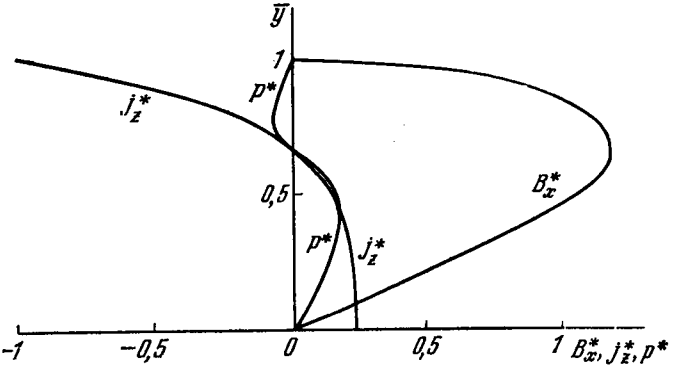


Рис. 13.11. Кривые распределения плотности тока, магнитной индукции и градиента давления в поперечном сечении канала при $\mathrm{Ha}=5$.

Расчеты, проведенные по формулам (116), (115) и (111), показывают, что поперечный градиент давления значительно меньше продольного $\frac{\partial p}{\partial y}\ll\frac{\partial p}{\partial x}$.

На рис. 13.11 изображены кривые распределения безразмерных величин плотности электрического тока j_z^*, магнитной индукции (B_x^*) и градиента давления p^* по высоте канала, рассчи-

танные соответственно по формулам (106), (111), (115) и (116), при $\mathrm{Ha} = 5$

$$j_z^* = \frac{1}{\sigma_R B_0 u_{\text{ср}}} j_z = \bar{u} - 1, \quad B_x^* = \frac{1}{R_H}\frac{B_x}{B_0} = \frac{\operatorname{sh}\bar{y}\mathrm{Ha} - \bar{y}\operatorname{sh}\mathrm{Ha}}{\mathrm{Ha}\operatorname{ch}\mathrm{Ha} - \operatorname{sh}\mathrm{Ha}},$$

$$p^* = \frac{1}{2S_0 R_H}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} = B_x^* j_z^*.$$

Здесь

$$R_H = \mu_B \sigma_R b u_{\text{ср}}, \quad S_0 = \frac{\sigma_R b B_0^2}{\rho u_{\text{ср}}}.$$

§ 7. Магнитогидродинамические насосы, ускорители, дроссели и генераторы

Электромагнитная сила, которая вызывается электрическим и магнитным полями, приложенными к потоку электропроводящей жидкости, может быть направлена по потоку или против потока. В первом случае электромагнитную силу можно использовать как средство для повышения давления (электромагнитный насос) или как средство для увеличения скорости течения (реактивный двигатель). Во втором случае электромагнитная сила тормозит поток (электромагнитный дроссель)[1]).

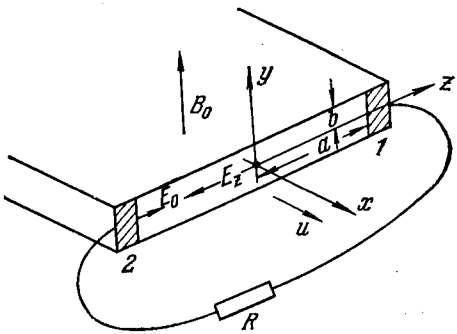


Рис. 13.12. Схема канала с боковыми стенками-электродами.

Если электрический ток, индуцируемый магнитным полем в потоке жидкости, направить во внешнюю цепь, то получится магнитогидродинамический генератор тока (МГД-генератор).

Зависимость индуцируемой разности потенциалов от средней скорости потока используется для измерения расхода жидкости (магнитогидродинамический расходомер).

Все эти способы использования электромагнитогидродинамических эффектов можно рассмотреть на примере течения электропроводной жидкости в плоском канале, который помещен в электромагнитное поле; один случай такого течения разобран в предыдущем параграфе (задача Гартмана).

---

[1]) Шерклиф Д. А., Теория электромагнитного измерения расхода, «Мир», М., 1965.

В течении Гартмана предполагалось, что стенки канала являются изоляторами, и суммарный электрический ток, возникающий в направлении, перпендикулярном как к вектору скорости, так и к вектору индукции наложенного магнитного поля, равен нулю, вследствие чего полная электромагнитная сила также равна нулю.

Если боковые стенки канала ($z = \pm a$) представляют собой электроды, соединенные с внешней электрической цепью, то электродвижущая сила поддерживает разность потенциалов на этих электродах.

Внутри канала (рис. 13.12) ток течет от электрода *1* к электроду *2*, во внешней цепи — в обратном направлении. Средняя плотность тока в канале согласно (104)

$$j_{z\text{ср}} = \frac{1}{2b}\int_{-b}^{b} j_z\,dy = \sigma_R(-E_0 + u_{\text{ср}}B_0), \tag{117}$$

а местная плотность тока

$$j_z = \sigma_R(-E_0 + uB_0). \tag{117а}$$

Для течения Гартмана ($j_{z\text{ср}} = 0$) из сопоставления (104) и (117) получаем известное уже равенство (105)

$$-E_z = E_0 = u_{\text{ср}}B_0.$$

Если электроды замкнуты накоротко (сопротивление внешней цепи $R = 0$), то напряженность электрического тока равна нулю ($E_0 = 0$) и плотность тока

$$j_{z\text{ср}} = \sigma_R B_0 u_{\text{ср}}.$$

В этом случае к потоку согласно (107) приложена тормозящая электромагнитная сила

$$F_x = -j_{z\text{ср}}B_0 = -\sigma_R B_0^2 u_{\text{ср}}.$$

В общем случае выражение (117) удобно представить в следующем виде:

$$j_{z\text{ср}} = \sigma_R B_0 (u_{\text{ср}} - W_{\text{д}}), \tag{118}$$

где вычитаемое $W_{\text{д}} = E_0/B_0$ есть скорость дрейфа.

Для того чтобы канал работал на режиме МГД-генератора ($j_z > 0$), нужно, чтобы средняя скорость потока была больше скорости дрейфа; в случае работы канала на режиме насоса или ускорителя ($j_z < 0$) средняя скорость в канале меньше скорости дрейфа. Знак плотности тока определяет и направление электромагнитной силы. На основании (107) заключаем, что в МГД-генераторе электромагнитная сила направлена против по-

тока ($F_x < 0$), а в насосе и ускорителе — по потоку ($F_x > 0$); градиент давления по длине канала (без учета трения) в МГД-генераторе должен быть отрицательным ($\partial p/\partial x < 0$), а в насосе или ускорителе — положительным ($\partial p/\partial x > 0$) [1]).

Во всех рассматриваемых в данном параграфе аппаратах, использующих движение несжимаемой жидкости по плоскому каналу постоянного сечения, пригодно уравнение движения (108), которому с помощью (105) можно придать следующий вид:

$$A = \frac{\partial p}{\partial x} - \sigma_R E_0 B_0 = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \sigma_R B_0^2 u. \qquad (119)$$

Уравнение (119) тождественно уравнению (108а), решение которого получено в предыдущем параграфе. В связи с этим профиль относительной скорости в поперечном сечении канала $\bar{u}(\bar{y})$ и относительное значение коэффициента трения $\bar{c}_f$ не зависят от величины E_0 и описываются во всех случаях соответственно уравнениями (111) и (113).

Подставляя в (119) значение A, найденное в § 6 для течения Гартмана, приходим к выражению для градиента давления в направлении течения

$$\frac{\partial p}{\partial x} = A + \sigma_R E_0 B_0 = -\frac{\mu u_{\text{ср}}}{b^2} \frac{\mathrm{Ha}^3}{\mathrm{Ha} - \operatorname{th} \mathrm{Ha}} + \sigma_R E_0 B_0. \qquad (120)$$

Как видим, в случае электромагнитного насоса ($\partial p/\partial x > 0$) напряженность электрического поля должна быть достаточно велика для того, чтобы правая часть (120) оказалась положительной.

В МГД-генераторе ($\partial p/\partial x < 0$) напряженность электрического поля должна быть такой, чтобы знак правой части (120) был отрицательным.

При постоянных электрическом и магнитном полях во всех электромагнитогидродинамических аппаратах, в которых жидкость течет по каналу постоянного сечения, градиент давления по длине канала не изменяется, следовательно, перепад давления в канале длиной x

$$\Delta p = x \frac{\partial p}{\partial x} = x\left(\sigma_R E_0 B_0 - \frac{\mu u_{\text{ср}}}{b^2} \frac{\mathrm{Ha}^3}{\mathrm{Ha} - \operatorname{th} \mathrm{Ha}}\right). \qquad (121)$$

Используя выражения (97) и (98), получаем из (121) безразмерную величину перепада давления

$$\frac{2\Delta p}{\rho u_{\text{ср}}^2} = 2\frac{x}{b} \mathrm{S}_0\left(\frac{1}{\mathrm{П}} - \frac{\mathrm{Ha}}{\mathrm{Ha} - \operatorname{th} \mathrm{Ha}}\right). \qquad (122)$$

---

[1]) Указанные неравенства для $\partial p/\partial x$ справедливы в случае жидкого металла; в газе они могут не выполняться.

Здесь

$$\Pi = \frac{u_{ср}}{W_д}, \quad S_0 = \frac{\sigma_R B_0^2 b}{\rho u_{ср}} = \frac{Ha^2}{R}.$$

В насосе или ускорителе ($\Pi < 1$) вычитаемое в скобке меньше уменьшаемого, а в МГД-генераторе ($\Pi > 1$) — наоборот.

Для течения Гартмана ($\Pi = 1$) имеем с учетом (112)

$$\frac{2\Delta p}{\rho u_{ср}^2} = \frac{x}{b} c_f.$$

§ 8. Вход потока электропроводной жидкости в магнитное поле и выход из него

Около концов электродов электрическое поле неоднородно, в связи с чем плотность электрического тока в этих местах изменяется по величине и направлению.

Рассмотрим поток электропроводной жидкости в зоне входа в участок канала с магнитным полем (рис. 13.13). Обозначим высоту канала (расстояние между электродами) $2a$, а ширину канала $2b$. Течение в канале будем считать двумерным, что допустимо при условии $b \gg a$. Начало электродов находится в плоскости $x=0$; при $x<0$ стенки канала неэлектропроводны.

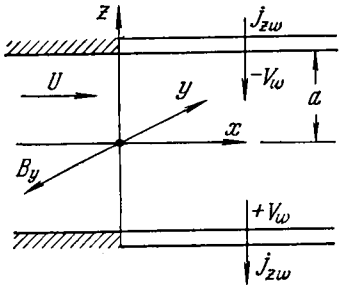


Рис. 13.13. Схема течения при входе в участок канала с магнитным полем.

Магнитное поле в области $x<0$ отсутствует ($B = 0$), а в области $x > 0$ оно постоянно и ориентировано по оси y в отрицательном направлении ($B_x = 0$, $B_y = B < 0$, $B_z = 0$), т. е. перпендикулярно к плоскости чертежа на рис. 13.13.

Вязкость жидкости не принимается во внимание, так что поток при $x = -\infty$ является равномерным (скорость W постоянна и направлена вдоль оси x). Магнитное число Рейнольдса полагаем малым ($R_H \ll 1$)[1]).

Жидкость для простоты считаем несжимаемой ($\rho = \text{const}$), а течение установившимся.

---

[1]) Sutton G. W., Carlson A. W., End effects in inviscid flow in a magnetohydrodynamics channel, Journal of Fluid Mech., v. 11, p. 1, 123—131, 1961.

Около концов электродов линии электрического тока деформируются и вызывают возмущение поля скорости

$$u = U + u', \quad w = w'. \tag{123}$$

Дополнительные скорости (возмущения) u', w' по осям x и z считаем малыми относительно начальной скорости W, т. е. $u' \ll W$, $w' \ll W$.

Данную задачу можно решить методом последовательных приближений. В первом приближении уравнения движения (82) вдоль осей x и z имеют следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} \rho W \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} &= -j_z B, \\ \rho W \frac{\partial w'}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial z} &= j_x B. \end{aligned}\right\} \tag{124}$$

Составляющие плотности электрического тока в первом приближении (при $W = \text{const}$) согласно (87) определяются как

$$j_x = \sigma_R E_x, \quad j_z = \sigma_R (E_z + WB). \tag{125}$$

Здесь $B = 0$ при $x < 0$, $B = \text{const} < 0$ при $x > 0$.

Если на участке $x > 0$ в достаточном удалении от сечения $x = 0$ стенки ($z = \pm a$) электроизолировать, то поперечная составляющая тока у стенок будет равна нулю

$$j_{zw} = \sigma_R (E_{zw} + WB) = 0.$$

Отсюда имеем

$$E_{zw} = -\frac{\partial V}{\partial z} = -WB > 0$$

или в случае $B < 0$

$$\frac{\partial V}{\partial z} < 0.$$

Следовательно, положительные заряды скапливаются у нижней стенки канала, а отрицательные — у верхней стенки. Если изолированные стенки заменить электродами, то нижний электрод будет положительным, а верхний — отрицательным. Соединив электроды внешней цепью, мы получим в ней электрический ток, идущий от положительного электрода к отрицательному.

В случае стационарного двумерного электрического поля, согласно (25), имеем

$$\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_z}{\partial z} = 0. \tag{126}$$

Отсюда в нулевом приближении получаем с помощью (125) уравнение для поля электрической напряженности

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0, \tag{127}$$

справедливое при $W = \text{const}$ и $B = B(x)$ во всей области течения $(-\infty < x < \infty)$.

Вводя в (127), согласно (12), электрический потенциал V

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z},$$

получаем уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0. \tag{128}$$

Граничные условия в зоне расположения электродов $(x > 0)$

$$z = \pm a, \quad V_a = \pm V_w. \tag{129}$$

Значение потенциала на электроде (V_w) при высокой проводимости последнего практически постоянно.

В зоне изолированных стенок $(x < 0)$ граничные условия записываются в виде

$$z = \pm a, \quad E_{zw} = j_{zw} = 0, \quad \text{т. е.} \quad \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_w = 0. \tag{130}$$

Решение уравнения Лапласа (128), удовлетворяющее граничным условиям (129) и (130), может быть представлено в виде

$$V = V_w \frac{\bar{x}'}{a} \frac{2}{\pi}, \tag{131}$$

где

$$\bar{x}' = \arcsin\left[\mp \sqrt{\frac{e^{2\bar{x}}+1}{2} - \sqrt{\frac{(e^{2\bar{x}}+1)^2}{4} - e^{2\bar{x}}\cos^2\eta}}\right], \tag{132}$$

$$\bar{x} = \frac{x}{2a}\pi, \quad \eta = \frac{z+a}{2a}\pi. \tag{133}$$

Знак плюс в (132) соответствует значениям $\pi > \eta > \pi/2$, минус — значениям $\pi/2 > \eta > 0$.

В справедливости решения (132) можно убедиться, подставив его в уравнение Лапласа (128), которое в переменных (133) приводится к виду

$$\frac{\partial^2 \bar{x}'}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{x}'}{\partial \eta^2} = 0. \tag{134}$$

Заменим в выражениях (125) для составляющих плотности тока компоненты напряженности электрического поля (E_x, E_z) производными электрического потенциала $(\partial V/\partial x,\ \partial V/\partial z)$, воспользовавшись выражениями (131) и (133):

$$\left.\begin{aligned} j_x &= -\sigma_R \frac{\partial V}{\partial x} = \pm \frac{\sigma_R V_w}{a} \frac{\partial \bar{x}'}{\partial \bar{x}}, \\ j_z &= \sigma_R\left[-\frac{\partial V}{\partial z} + WB\right] = \sigma_R\left[\frac{V_w}{a}\left(\mp \frac{\partial \bar{x}'}{\partial \eta}\right) + WB\right]. \end{aligned}\right\} \tag{135}$$

При выбранных знаках поперечная составляющая плотности тока j_z, обусловленная электрическим полем, как было указано, направлена снизу вверх ($\partial V/\partial z < 0$). Продольная составляющая плотности тока j_x в верхней части канала положительна, а в нижней отрицательна; на оси канала $j_x = 0$.

Поперечный компонент плотности тока j_z внутри канала на участке с электродами в зоне $x \to \infty$ (где $B < 0$) направлен от отрицательного электрода к положительному (сверху вниз), так как здесь доминирует ток, индуцируемый магнитным полем; на участке изолированных стенок ($B = 0$) индуцируемого магнитным полем тока нет, и поэтому здесь вектор j_z имеет противоположное направление (снизу вверх). Таким образом, при входе

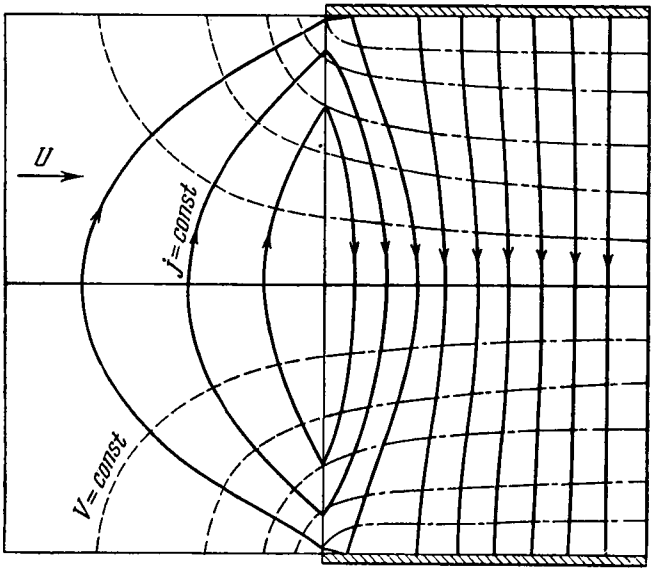


Рис. 13.14. Линии равных значений потенциала и плотности тока при входе потока в магнитное поле.

жидкости в магнитное поле возникает зона замкнутой циркуляции электрического тока, в которой последний меняет свое направление на противоположное.

Поле плотности электрического тока $\left(j = \sqrt{j_x^2 + j_z^2}\right)$, рассчитанное с помощью формул (135) для случая $aWB/V_w = 2$, изображено на рис. 13.14.

Используя уравнения движения (124), можно найти изменение среднего по площади статического давления по длине канала. Интегрируя первое из уравнений (124) в пределах от $-a$

до $+a$ и деля все его члены на $2a$, получаем

$$\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}\rho W\frac{\partial u'}{\partial x}dz=-\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}\frac{\partial p}{\partial x}dz-\frac{B}{2a}\int_{-a}^{a}j_z\,dz. \qquad (136)$$

Перепишем уравнение (136) в виде

$$\frac{\rho W}{2a}\frac{\partial}{\partial x}\int_{-a}^{a}u'\,dz=-\frac{1}{2a}\frac{\partial}{\partial x}\int_{-a}^{a}p\,dz-\frac{B}{2a}\int_{-a}^{a}j_z\,dz. \qquad (136а)$$

Введем обозначения

$$\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}p\,dz=p_{\text{ср}},\quad \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}j_z\,dz=j_{z\text{ср}}. \qquad (137)$$

Учитывая, что из условия неразрывности следует

$$\int_{-a}^{a}u'\,dz=0,$$

из уравнения (136а) имеем

$$\frac{\partial p_{\text{ср}}}{\partial x}=-Bj_{z\text{ср}}. \qquad (138)$$

При $x<0$ $B=0$, поэтому $p_{\text{ср}}$ на участке $-\infty<x<0$ по длине не изменяется. Вычислим $\partial p_{\text{ср}}/\partial x$ на участке расположения электродов ($x>0$).

Используя соотношения (135) и (132), найдем среднее по сечению значение составляющей плотности тока $j_{z\text{ ср}}$

$$j_{z\text{ср}}=\sigma_R\left[\mp\frac{V_w}{\pi a}\int_0^{\pi}\frac{\partial\bar{x}'}{\partial\eta}d\eta+WB\right].$$

Очевидно, что интеграл $\int_0^{\pi}\frac{\partial\bar{x}'}{\partial\eta}d\eta$ равен разности значений функции $\bar{x}'$ в точках π и 0, т. е.

$$\mp\int_0^{\pi}\frac{\partial\bar{x}'}{\partial\eta}d\eta=\pi.$$

Следовательно,

$$j_{z\text{ср}}=\sigma_R\left[\frac{V_w}{a}+WB\right], \qquad (139)$$

т. е. среднее по сечению значение составляющей тока $j_{z\,\text{ср}}$ на участке расположения электродов не изменяется. Используя соотношение (139), из уравнения (138) находим

$$\frac{\partial p_{\text{ср}}}{\partial x} = -\sigma_R B\left[\frac{V_w}{a} + WB\right].$$

Итак, оказывается, что градиент среднего давления $\partial p_{\text{ср}}/\partial x$ по длине канала (при $x > 0$) является постоянной величиной. Обозначив среднее значение статического давления в сечении $x = 0$ через p_0, окончательно имеем при $x > 0$

$$p_{\text{ср}} - p_0 = -\sigma_R B\left[\frac{V_w}{a} + WB\right]x. \tag{140}$$

Используя электрическое поле первого приближения, можно определить поле скорости первого приближения, для чего следует обратиться к уравнениям движения (124) [1]).

Мы рассмотрели вопрос о течении жидкости на участке, расположенном непосредственно перед входом в канал с магнитным полем.

Аналогичным образом решается задача о выходе потока жидкости из магнитного поля, однако в этом случае при использовании тех же уравнений следует изменить на обратный знак переменной $\bar{x}$.

Решение уравнения Лапласа (134) для случая выхода из поля представим в виде

$$V = V_w \frac{x''}{a}, \tag{141}$$

где $\bar{x}'' = \frac{x''}{a}$ определяется по (132) путем замены знака перед $\bar{x}$

$$\bar{x}'' = \arcsin\left(\mp\sqrt{\frac{e^{-2\bar{x}}+1}{2} - \sqrt{\frac{(e^{-2\bar{x}}+1)^2}{4} - e^{-2\bar{x}}\cos^2\eta}}\right). \tag{142}$$

При этом в качестве граничных применяются условия

$$\bar{x} < 0; \quad V = \mp V_w \quad \text{для} \quad \eta = 0;\ \pi;$$

$$\bar{x} > 0; \quad \frac{\partial \bar{x}''}{\partial \eta} = 0 \quad \text{для} \quad \eta = 0;\ \pi.$$

Учитывая связь между производными функций $\bar{x}''$ и $\bar{x}'$

$$\frac{\partial \bar{x}''}{\partial \bar{x}} = -\frac{\partial \bar{x}'}{\partial \bar{x}}, \quad \frac{\partial \bar{x}''}{\partial \eta} = \frac{\partial \bar{x}'}{\partial \eta},$$

находим, что направление поперечной составляющей плотности тока остается таким же, как и на участке входа в поле, а направление продольной составляющей плотности тока изменяется

[1]) См. сноску на стр. 806.

на обратное

$$j_x < 0 \quad \text{при} \quad \eta > \frac{\pi}{2}, \quad j_x > 0 \quad \text{при} \quad \eta < \frac{\pi}{2}.$$

Знак продольного градиента давления остается прежним (отрицательным), иначе говоря, как выход потока из магнитного поля, так и вход в него сопровождаются падением давления (сопротивления). Направления поперечных градиентов давления при выходе и входе потока жидкости в магнитное поле противоположны.

§ 9. Уравнения магнитной газовой динамики для единичной струйки

Понятие «единичная струйка» в магнитной гидрогазодинамике не имеет такого универсального применения, как в обычной газовой динамике, ибо лишь в немногих случаях можно считать неизменными в поперечном сечении струйки величины и направления векторов электрической напряженности и магнитной индукции, а вместе с ними и векторов плотности тока и электромагнитной силы.

Приведем два примера магнитогазодинамических течений, в которых концепция единичной струйки строго справедлива:

1. Канал постоянного сечения $z = \pm a$, образованный двумя параллельными стенками, по которому в направлении x движется электропроводный газ; стенки канала являются разноименными электродами бесконечной проводимости, вязкость и теплопроводность не учитываются.

Если на стенках поддерживается разность потенциалов, то возникает электрический ток j_z, индуцирующий «собственное» магнитное поле, линии напряженности которого по правилу буравчика направлены перпендикулярно к плоскости течения (по оси y).

Течение в таком канале эквивалентно течению единичной струйки, находящейся в постоянных скрещенных электромагнитных полях $\boldsymbol{W}(u, 0, 0)$, $\boldsymbol{E}(0, 0, E_z)$, $\boldsymbol{B}(0, B_y, 0)$, $\boldsymbol{f}(f_x, 0, 0)$.

2. Равномерное течение газа перед и за прямой магнитогазодинамической волной (с линиями магнитной индукции, перпендикулярными к направлению течения). Этот случай подробно рассматривается в § 10.

Запишем уравнения магнитной газовой динамики для единичной струйки газа, пренебрегая вязкостью и теплопроводностью жидкости. Будем считать движение жидкости установившимся, магнитное поле — стационарным, а вектор $[\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}]$, определяющий работу электромагнитной силы (см. (94)), — направленным параллельно вектору скорости $\boldsymbol{W}$. В этом случае

поток вектора $[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}]$ направлен по нормали к поперечному сечению струйки.

Как известно из теории поля,

$$\operatorname{div}[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}]=\lim_{\Delta v\to 0}\frac{1}{\Delta v}\int\limits_S[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}]_n\,dS,$$

где Δv — объем, охватываемый замкнутой поверхностью S, сквозь которую проходит поток вектора $[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}]_n$, n — внешняя нормаль к поверхности S. В нашем случае, при малой протяженности объема Δv, имеем

$$\int\limits_S[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}]\,dS=\Delta([\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}]_l F).$$

Здесь F — площадь поперечного сечения трубки тока, индекс l указывает на то, что берется проекция вектора $[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}]$ на линию тока. Объем участка трубки тока длиной dl равен $dv = Fdl$, поэтому

$$\operatorname{div}[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}]=\frac{1}{F}\frac{d}{dl}([\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}]_l F).$$

Подставляя это выражение в уравнение энергии (94) и учитывая, что $W = dl/dt$, получаем

$$\rho W F\frac{di^*}{dl}=-\frac{1}{\mu_B}\frac{d}{dl}([\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}]_l F).$$

Так как секундный расход жидкости

$$\rho W F=G_{\text{сек}}=\text{const}$$

вдоль трубки тока не изменяется, то после интегрирования имеем

$$\rho W F i^*+\frac{1}{\mu_B}[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}]_l F=\text{const}.$$

Отсюда получаем эффективное значение полного теплосодержания

$$i_c^*=i^*+\frac{[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}]_l}{\mu_B\rho W}=\text{const}$$

или

$$i_c^*=i+\frac{W^2}{2}+\frac{[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}]_l}{\mu_B\rho W}. \tag{143}$$

Итак, эффективное значение полного теплосодержания i_c^*, включающего электромагнитную энергию, остается вдоль трубки тока постоянным, если поток электромагнитной энергии направлен вдоль вектора скорости.

В случае $\boldsymbol{E}=0$ или при параллельности векторов напряженностей электрического и магнитного полей ($\boldsymbol{E} \parallel \boldsymbol{B}$) уравнение (143) выражает условие постоянства полного теплосодержания для энергетически изолированной струйки $i^*=\text{const}$. С помощью уравнений (54) и (61) можно исключить вектор $\boldsymbol{E}$ из уравнения энергии. В самом деле,

$$\boldsymbol{E}=(\nu_H \operatorname{rot}\boldsymbol{B}-[\boldsymbol{W}\times\boldsymbol{B}]),$$

откуда

$$[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}]=(\nu_H[\operatorname{rot}\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{B}]-\{[\boldsymbol{W}\times\boldsymbol{B}]\times\boldsymbol{B}\}).$$

В проекции на направление линии тока получаем

$$[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}]_x=\{\nu_H[\operatorname{rot}\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{B}]_x+u(B_y^2+B_z^2)\}.$$

Здесь предполагается, что ось x направлена вдоль струйки ($v=w=0$). Подставляя последнее выражение в (143), получаем уравнение энергии для струйки при условии $\boldsymbol{E}\perp\boldsymbol{W}$, $\boldsymbol{B}\perp\boldsymbol{W}$

$$i_c^*=i^*+\frac{B^2}{\mu_B\rho}+\frac{\nu_H}{\mu_B\rho W}[\operatorname{rot}\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{B}]_x=\text{const}. \qquad (144)$$

Ввиду того что в поперечном сечении единичной струйки все параметры принимаются постоянными $\left(\frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial z}=0\right)$, выражение (144) можно упростить.

В самом деле, в данном случае ($v=w=B_x=B_z=E_x=E_y=0$, т. е. $W=u$, $B=B_y$, $E=E_z$) составляющие ротора магнитной индукции

$$\operatorname{rot}_x\boldsymbol{B}=\frac{\partial B_z}{\partial y}-\frac{\partial B_y}{\partial z}=0,$$

$$\operatorname{rot}_y\boldsymbol{B}=\frac{\partial B_x}{\partial z}-\frac{\partial B_z}{\partial x}=0,$$

$$\operatorname{rot}_z\boldsymbol{B}=\frac{\partial B_y}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial y}=\frac{dB}{dx}$$

и составляющая векторного произведения

$$[\operatorname{rot}\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{B}]_x=(\operatorname{rot}_y B)B_z-(\operatorname{rot}_z B)B_y=-B\frac{dB}{dx}=-\frac{1}{2}\frac{dB^2}{dx}. \qquad (145)$$

Подставляя это выражение в (144), приходим к следующему виду уравнения энергии для струйки, находящейся в перпендикулярных (скрещенных) электромагнитных полях

$$i_c^*=i^*+\frac{B^2}{\mu_B\rho}-\frac{\nu_H B}{\mu_B\rho W}\frac{dB}{dx}=\text{const}. \qquad (146)$$

Если газ обладает очень высокой проводимостью ($\sigma_R\to\infty$, $\nu_H\to 0$), последним членом в уравнении (146) можно прене-

бречь, и тогда условие сохранения эффективного полного теплосодержания для струйки в скрещенных полях запишется так:

$$i_c^* = i^* + \frac{B^2}{\mu_B \rho} = \text{const}. \tag{146a}$$

Уравнение магнитной индукции (84) применительно к единичной струйке также существенно упрощается.

При поперечных электромагнитных полях ($B_x = B_z = E_x = E_y = v = w = \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} = 0$, $W = u$, $B = B_y$, $E = E_z$, $j = j_z$) в рассматриваемом случае в уравнении (54) сохраняется только одна составляющая плотности тока

$$j_z = \sigma_R (E_z + uB_y);$$

из уравнения Максвелла (68а) для стационарного поля $\left(\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0\right)$ следует

$$E = E_z = \text{const},$$

а из уравнения Максвелла (65), как уже было показано, имеем

$$j_z = \frac{1}{\mu_B} \operatorname{rot}_z \boldsymbol{B} = \frac{1}{\mu_B} \frac{dB_y}{dx}.$$

Отсюда получаем уравнение индукции для струйки в поперечных скрещенных полях

$$uB_y = \frac{1}{\mu_B \sigma_R} \frac{dB_y}{dx} + \text{const}, \tag{147}$$

где

$$\text{const} = -E_z.$$

Если проводимость газа очень велика ($\sigma_R \to \infty$), то уравнение магнитной индукции для единичной струйки, находящейся в поперечном магнитном поле, приобретает особенно простой вид

$$uB_y = \text{const}. \tag{147a}$$

В случае невязкой несжимаемой жидкости ($\mu = 0$, $\rho = \text{const}$) можно вместо (90) получить другую форму уравнения энергии для единичной струйки. Используем для этой цели уравнение движения (82а), которое в проекции на направление струйки ($W = u$, $v = w = 0$) при поперечном магнитном поле ($B = B_y$, $B_x = B_z = 0$) имеет следующий вид:

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(p + \frac{B^2}{2\mu_B}\right). \tag{148}$$

Интегрируя (148), получаем

$$p_c^* = p + \rho \frac{u^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_B} = \text{const} \tag{149}$$

или

$$p_c^* = p^* + \frac{B^2}{2\mu_B} = \text{const}. \tag{149a}$$

Уравнение (149) представляет собой уравнение Бернулли для струйки несжимаемой электропроводной жидкости, находящейся в поперечном магнитном поле. Третий член этого уравнения называется *магнитным давлением* $\left(p_m = \frac{B^2}{2\mu_B}\right)$. При сложении p_m с полным давлением p^* получается эффективное полное давление p_c^*, сохраняющее в данном случае постоянное значение по длине струйки.

При действии на струйку продольного магнитного поля ($B = B_x$, $B_y = B_z = 0$) интегрирование уравнения (82а) приводит к уравнению Бернулли обычного (гидравлического) вида

$$p + \rho \frac{u^2}{2} = p^* = \text{const},$$

так как при этом

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{B^2}{2\mu_B}\right) + \frac{1}{\mu_B} B_x \frac{\partial B_x}{\partial x} = 0.$$

Составим уравнение количества движения для струйки, находящейся в электромагнитных полях. В гл. I была получена общая форма уравнения количества движения для единичной струйки, справедливая для всех случаев движения:

$$P_x = G(u_2 - u_1).$$

Учет воздействия магнитного поля состоит в том, что проекцию равнодействующей всех сил P_x мы разбиваем на две части:

$$P_x = P_{xp} + P_{xm},$$

где P_{xp} — проекция равнодействующей всех гидродинамических сил; P_{xm} — проекция электромагнитной объемной силы, приложенной на участке струйки *1 — 2*.

Проекция электромагнитной силы, приложенной к единице объема согласно (72),

$$f_x = [\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B}]_x = \frac{1}{\mu_B} [\operatorname{rot} \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{B}]_x.$$

Проекция на ось x силы, действующей на элементарный объем, составляет

$$dP_{xm} = f_x F\, dx.$$

Здесь F — площадь поперечного сечения струйки, dx — длина ее элементарного участка (в направлении вектора скорости u).

Проекция электромагнитной силы, действующей на участок струйки *1 — 2*,

$$P_{xm} = \int_1^2 \frac{F}{\mu_B} [\mathrm{rot}\, \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{B}]_x \, dx.$$

В случае поперечного магнитного поля этот интеграл можно преобразовать с помощью (145)

$$P_{xm} = -\frac{1}{2\mu_B} \int_1^2 F \, dB^2. \tag{150}$$

Электромагнитная сила, приложенная к конечному участку элементарной струйки постоянного сечения при поперечном магнитном поле, равна

$$P_{xm} = \frac{F}{2\mu_B} (B_1^2 - B_2^2). \tag{150а}$$

Сила гидродинамического давления в этом случае составляет

$$P_{xp} = F(p_1 - p_2).$$

Поэтому уравнение количества движения для элементарной струйки постоянного сечения при поперечном магнитном поле имеет следующий вид:

$$P_{xp} + P_{xm} = G(u_2 - u_1).$$

Отсюда согласно уравнению неразрывности ($G = \rho u F = \mathrm{const}$) имеем

$$p_1 - p_2 + \frac{B_1^2 - B_2^2}{2\mu_B} = \rho_1 u_1 (u_2 - u_1) = \rho_2 u_2^2 - \rho_1 u_1^2. \tag{151}$$

Вводя в уравнение (151) эффективное давление, равное сумме гидродинамического и магнитного давлений

$$p_c = p + p_m = p + \frac{B^2}{2\mu_B}, \tag{152}$$

приводим уравнение количества движения для единичной струйки постоянного сечения при поперечном магнитном поле к следующему простейшему виду:

$$p_{c1} + \rho_1 u_1^2 = p_{c2} + \rho_2 u_2^2. \tag{153}$$

Иногда удобно уравнение количества движения для струйки постоянного сечения при поперечном магнитном поле

представлять в следующем виде:

$$p + \frac{B^2}{2\mu_B} + \rho u^2 = \text{const}. \qquad (154)$$

Уравнение количества движения (154) в отличие от уравнения Бернулли (149) пригодно не только для несжимаемых жидкостей, но также и для газов, т. е. для сред переменной плотности.

§ 10. Магнитогазодинамические ударные волны и слабые возмущения

Если в пространстве, заполненном газом бесконечно большой проводимости, возникла волна магнитной индукции ab (рис. 13.15), то, как будет показано далее, скорость ее распространения выше в тех местах, где больше значение магнитной индукции B.

Поэтому зона a у «вершины» волны перемещается быстрее, чем зона b, расположенная у «подножия» волны. Это приводит к тому, что при перемещении в сторону меньшей напряженности поля (вправо на рис. 13.15), куда данная волна распространяется как волна сгущения, она со временем приобретает все более крутую форму, пока не превратится в скачок магнитной индукции.

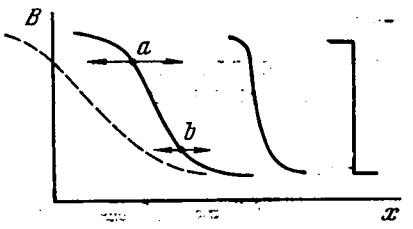


Рис. 13.15. Образование скачка сгущения и плавной волны разрежения пунктир) в поле магнитной индукции.

При распространении в сторону большей напряженности поля (влево на рис. 13.15) волна ab является волной «разрежения магнитного поля», причем по-прежнему скорость ее продвижения в зоне a выше, чем в зоне b, отчего волна разрежения постепенно сглаживается и ослабляется.

Исследуем особенности скачка сгущения — ударной волны — магнитного поля. Ввиду сложности теории магнитогазодинамических волн мы ограничимся простейшим примером — прямой магнитогазодинамической ударной волной.

Пусть фронт скачка магнитной индукции B расположен перпендикулярно к направлению газового потока (рис. 13.16).

Сообщим невозмущенному потоку газа скорость $u_н$, равную по величине скорости распространения скачка w_b, но противоположную по знаку:

$$u_н = -w_b.$$

В этом случае фронт скачка будет неподвижен, а поток невозмущенного газа будет натекать на плоскость фронта со скоростью $u_н$.

Пусть (рис. 13.16) вектор магнитной индукции перпендикулярен к направлению течения $\boldsymbol{B} = (0, B_y, 0)$, т. е. фронт скачка представляет собой тангенциальный разрыв потока магнитной индукции. Будем также считать, что до и после скачка значения магнитной индукции постоянны ($B_н = \text{const}$, $B_1 = \text{const}$). Так как проводимость среды бесконечна, то к струйке жидкости применима зависимость (147а), найденная в § 8:

$$u_н B_н = u_1 B_1 = \text{const}. \qquad (155)$$

Иначе говоря, скачкообразное возрастание магнитной индукции ($B_1 > B_н$) требует скачкообразного уменьшения скорости течения ($u_1 < u_н$).

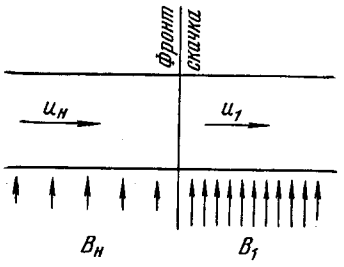


Рис. 13.16. Магнитогазодинамическая прямая ударная волна.

При этом, согласно уравнению неразрывности, произойдет также скачок плотности газа ($\rho_1 > \rho_н$)

$$\frac{\rho_1}{\rho_н} = \frac{u_н}{u_1} \qquad (156)$$

и в соответствии с уравнением количества движения (151) скачок эффективного давления

$$p_{c1} - p_{cн} = \rho_н u_н (u_н - u_1). \qquad (157)$$

Поэтому согласно (155) и (156) плотность в скачке должна возрастать.

Итак, скачок магнитной индукции в газовом потоке, пересекающем линии индукции, обязательно совместится со скачком уплотнения, т. е. мы имеем дело с магнитогазодинамической ударной волной.

Для замыкания системы уравнений (155)—(157) добавим условие сохранения эффективного полного теплосодержания (146а), которое согласно (155) и (156) запишем в виде

$$i_c^* = i + \frac{u^2}{2} + \frac{B_н^2 u_н}{\mu_в \rho_н u} = \text{const}, \qquad (158)$$

и уравнение состояния

$$\frac{p_н}{\rho_н T_н} = \frac{p_1}{\rho_1 T_1} = R. \qquad (159)$$

Решая совместно систему из пяти уравнений (155)—(159), можно по заданным значениям скорости распространения прямой магнитогазодинамической волны ($w_b = -u_н$) и параметров состояния газа и магнитного поля перед фронтом волны ($\rho_н$, $p_н$, $T_н$, $B_н$) найти значения относительной скорости газа (u_1) и параметров газа и поля (ρ_1, p_1, T_1, B_1) за фронтом волны.

Если известны параметры состояния невозмущенного газа и прирост давления в скачке, то нетрудно определить скорость распространения магнитогазодинамической волны.

Из уравнений (157) и (156) получаем

$$p_{c1} - p_{cн} = u_н^2 (\rho_1 - \rho_н) \frac{\rho_н}{\rho_1}, \tag{160}$$

откуда следует, что скорость распространения ударной магнитогазодинамической волны в покоящемся газе (w_b) или равная ей по величине скорость потока, которая останавливает встречную волну ($u_н$), составляет

$$w_b^2 = u_н^2 = \frac{p_{c1} - p_{cн}}{\rho_1 - \rho_н} \frac{\rho_1}{\rho_н}. \tag{160а}$$

Из (160а) следует также

$$u_н u_1 = \frac{p_{c1} - p_{cн}}{\rho_1 - \rho_н}. \tag{161}$$

Формулы (160а) и (161) отличаются от соответствующих формул (5) и (10) гл. III для обычной ударной волны только тем, что в них давление (p) газа заменено эффективным давлением (p_c).

Представим на основании (83) эффективное давление в виде суммы гидродинамического и магнитного давлений

$$p_c = p + p_m = p + \frac{B^2}{2\mu_в}.$$

Тогда формулы (160а) и (161) примут вид

$$w_b^2 = u_н^2 = \frac{p_1 - p_н}{\rho_1 - \rho_н} \frac{\rho_1}{\rho_н} + \frac{B_1^2 - B_н^2}{2\mu_в (\rho_1 - \rho_н)} \frac{\rho_1}{\rho_н}, \tag{162}$$

$$u_н u_1 = \frac{p_1 - p_н}{\rho_1 - \rho_н} + \frac{B_1^2 - B_н^2}{2\mu_в (\rho_1 - \rho_н)}. \tag{163}$$

Магнитная индукция за фронтом волны больше, чем перед ним ($B_1 > B_н$), поэтому магнитогазодинамическая волна (162) распространяется быстрее, чем обычная волна сжатия той же интенсивности.

Из уравнений магнитной индукции (155) и неразрывности (156) имеем

$$\frac{B_1}{\rho_1} = \frac{B_н}{\rho_н}. \tag{164}$$

Подставляя это отношение в (162), приходим к следующему выражению для скорости магнитогазодинамической ударной волны:

$$w_b^2 = \frac{p_1 - p_н}{\rho_1 - \rho_н}\frac{\rho_1}{\rho_н} + \frac{B_н^2}{2\mu_в\rho_н}\left(\frac{\rho_1}{\rho_н} + 1\right)\frac{\rho_1}{\rho_н}. \qquad (165)$$

В предельном случае очень слабого разрыва ($p_1 \approx p_н$, $\rho_1 \approx \rho_н$, $B_1 \approx B_н$) получаем скорость его распространения в направлении, перпендикулярном к линиям напряженности магнитного поля:

$$w_b^2 = c_\perp^2 = \frac{dp}{d\rho} + \frac{B^2}{\mu_в\rho} = k\frac{p}{\rho} + 2\frac{p_m}{\rho}. \qquad (166)$$

Здесь первое слагаемое правой части есть квадрат скорости звука в газе [1])

$$a_н^2 = \frac{dp}{d\rho} = k\frac{p}{\rho}, \qquad (167)$$

а второе слагаемое — квадрат скорости распространения волны Альфвена

$$b_н^2 = \frac{B_н^2}{\mu_в\rho_н} = 2\frac{p_m}{\rho}. \qquad (168)$$

Отношение скорости волны Альфвена к скорости газа равно введенному в § 5 числу Альфвена (см. (96))

$$\mathsf{A} = \frac{b_н}{u_н} = \frac{B_н}{u_н\sqrt{\mu_в\rho_н}}. \qquad (169)$$

Из (167) — (169) получаем

$$q = \frac{p_m}{p} = \frac{k}{2}\mathsf{M}^2\mathsf{A}^2. \qquad (170)$$

В магнитной газодинамике доказывается, что волна Альфвена распространяется со скоростью $b_н$ вдоль силовых линий магнитного поля ($b_н \parallel B_н$) в газе бесконечно большой проводимости ($\sigma_R \to \infty$) и представляет собой слабую вращательную волну (составляющие скорости и магнитной индукции, касательные к ее плоскости, поворачиваются, не изменяя своей величины); существование таких волн было открыто Альфвеном в 1942 г. В волне Альфвена плотность и давление не изменяются, и она имеет конечную скорость распространения в несжимаемой жидкости.

Итак, скорость (166) распространения слабой магнитогазодинамической волны (слабого разрыва) в направлении, перпендикулярном к линиям магнитной индукции, превышает скорость

[1]) Ниже будет доказано, что в слабых магнитогазодинамических волнах осуществляется идеальный адиабатический процесс, для которого $\frac{dp}{d\rho} = \frac{kp}{\rho}$.

звука и составляет

$$c_\perp = \sqrt{a_н^2 + b_н^2}. \tag{171}$$

Можно показать, что вдоль силовых линий магнитного поля слабые магнитогазодинамические волны распространяются либо со скоростью звука $a_н$, либо со скоростью Альфвена $b_н$.

Из магнитной газодинамики известно, что в общем случае скорости распространения слабых магнитогазодинамических волн, которые подразделяются на быстрые (c) и медленные (c'), а также скорость распространения альфвеновской волны (b) зависят от угла ϑ между выбранным направлением и вектором магнитной индукции $\boldsymbol{B}$

$$\left.\begin{aligned} b &= b_н \cos\vartheta, \\ c &= b_н \sqrt{\frac{r+1+\sqrt{(r+1)^2 - 4r\cos\vartheta}}{2}}, \\ c' &= b_н \sqrt{\frac{r+1-\sqrt{(r+1)^2 - 4r\cos\vartheta}}{2}}. \end{aligned}\right\} \tag{172}$$

Здесь $r = a_н^2/b_н^2$.

В частном случае, когда $\vartheta = 0$ (распространение волн вдоль силовых линий), имеем

$$b = b_н, \quad c = c_\parallel = a_н, \quad c' = c'_\parallel = b_н \qquad (\text{при } r > 1),$$

$$b = b_н, \quad c = c_\parallel = b_н, \quad c' = c'_\parallel = a_н \qquad (\text{при } r < 1).$$

В другом частном случае $\vartheta = \pi/2$ (распространение волн в направлении нормали к силовым линиям) имеем

$$b = 0, \quad c = c_\perp = \sqrt{a_н^2 + b_н^2}, \quad c' = c'_\perp = 0 \qquad (\text{при } r \gtrless 1).$$

В отличие от слабых (акустических) волн обычной газовой динамики, которые изотропны (распространяются во всех направлениях с одной скоростью), магнитогазодинамические слабые волны анизотропны и, кроме того, подразделяются на быстрые и медленные.

Перейдем к отысканию основных соотношений между параметрами газа и поля в магнитогазодинамической ударной волне.

Из (155), (156), (168) и (169) имеем

$$m = \frac{\rho_1}{\rho_н} = \frac{u_н}{u_1} = \frac{B_1}{B_н} = \frac{b_1^2}{b_н^2} = \frac{A_1^2}{A_н^2}. \tag{173}$$

Если обозначить отношение давлений за и перед фронтом ударной волны

$$n = \frac{p_1}{p_н}, \tag{174}$$

то отношение температур, согласно уравнению состояния, мож-

но представить в виде

$$\frac{T_1}{T_н} = \frac{n}{m}. \tag{175}$$

Используя известные соотношения $c_p - c_v = R$, $c_p = kc_v$, выражение (164) и уравнение неразрывности (156), преобразуем уравнение энергии (146а) к виду

$$T = T_c^* - \frac{k-1}{2kR} u^2 - \frac{k-1}{kR} \frac{B^2}{\mu_в \rho}. \tag{176}$$

Из уравнения состояния (159) и формулы (176) находим величину давления газа

$$p = \rho R T_c^* - \frac{k-1}{2k} \rho u^2 - \frac{k-1}{k} \frac{B^2}{\mu_в}. \tag{177}$$

Из (177) получаем величину перепада давлений в ударной волне

$$p_1 - p_н = (\rho_1 - \rho_н) RT_c^* + \frac{k-1}{2k} u_н u_1 (\rho_1 - \rho_н) - \frac{k-1}{k} \frac{B_н^2}{\mu_в} \frac{\rho_1^2 - \rho_н^2}{\rho_н^2}. \tag{178}$$

Здесь приняты во внимание постоянство эффективной температуры торможения ($T_c^* = \text{idem}$) и следующие из уравнения индукции (164) и уравнения неразрывности (156) равенства:

$$\left.\begin{aligned} &\rho_н u_н^2 - \rho_1 u_1^2 = u_н u_1 (\rho_1 - \rho_н), \\ &\rho_н u_н^2 + \rho_1 u_1^2 = u_н u_1 (\rho_1 + \rho_н), \\ &B_1^2 - B_н^2 = B_н^2 \frac{\rho_1^2 - \rho_н^2}{\rho_н^2}, \\ &B_1^2 + B_н^2 = B_н^2 \frac{\rho_1^2 + \rho_н^2}{\rho_н^2}. \end{aligned}\right\} \tag{179}$$

Подставляя (163) и (173) в (178) и выполняя элементарные преобразования, получаем основное кинематическое соотношение для прямой магнитогазодинамической ударной волны

$$u_н u_1 = \frac{2k}{k+1} RT_c^* + \frac{2-k}{k+1} \frac{B_н^2 (m+1)}{\mu_в \rho_н}. \tag{180}$$

Здесь первый член правой части представляет собой квадрат критической скорости, соответствующей эффективной температуре торможения:

$$a_{кр.\,с} = \sqrt{\frac{2k}{k+1} RT_c^*}. \tag{181}$$

В этом случае отличие (180) от кинематического соотношения (15) гл. III для обычной ударной волны заключается в дополнительном члене, учитывающем влияние магнитного поля.

Складывая давления перед и за ударной волной, имеем из (177)

$$p_1 + p_н = (\rho_1 + \rho_н) RT_c^* - \frac{k-1}{2k} u_н u_1 (\rho_1 + \rho_н) - \frac{k-1}{k} \frac{B_н^2}{\mu_в} \frac{\rho_1^2 + \rho_н^2}{\rho_н^2}.$$

Исключая отсюда с помощью (163) произведение скоростей, получим основное динамическое соотношение для прямой магнитогазодинамической ударной волны

$$\frac{p_1 - p_н}{\rho_1 - \rho_н} = k \frac{p_1 + p_н}{\rho_1 + \rho_н} + \frac{B_н^2 (m-1)^2 (k-1)}{2\mu_в \rho_н (m+1)}, \qquad (182)$$

которое отличается от аналогичного соотношения (17) гл. III (для простой ударной волны) дополнительным («магнитным») членом в правой части.

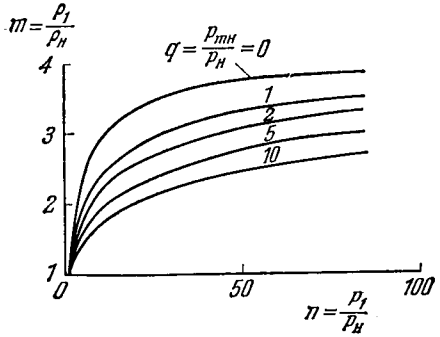


Рис. 13.17. Ударные адиабаты магнитогазодинамической волны при разных величинах параметра магнитного давления ($k = 5/3$).

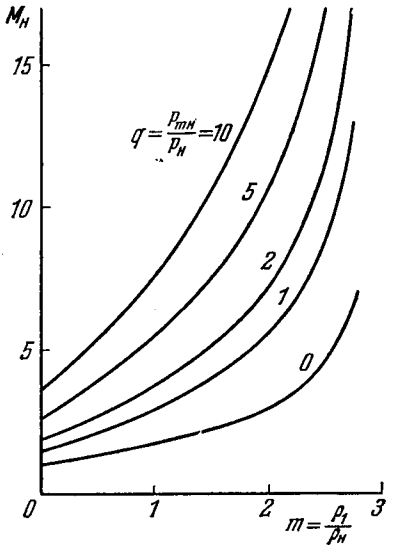


Рис. 13.18. Зависимость скорости магнитогазодинамической ударной волны от степени сжатия газа при разных величинах параметра магнитного давления ($k = 5/3$).

В частном случае слабого разрыва ($p_1 \approx p_н$, $\rho_1 \approx \rho_н$, $m \approx 1$) из (182) имеем

$$\frac{dp}{d\rho} = k \frac{p}{\rho}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{p}{\rho^k} = \text{const},$$

что доказывает постоянство энтропии в слабой магнитогазодинамической волне. Поделив все члены уравнения (182) на величину $p_н/\rho_н$ и решая его относительно величины $p_1/p_н$, приходим к уравнению ударной магнитогазодинамической адиабаты

$$n = \frac{\theta m - 1 + q(m-1)^3}{\theta - m}. \qquad (183)$$

Здесь приняты обозначения

$$m = \frac{\rho_1}{\rho_н}, \quad n = \frac{p_1}{p_н}, \quad q = \frac{p_m}{p_н},$$

$$\theta = \frac{k+1}{k-1}.$$

При отсутствии магнитного поля ($q = 0$) уравнение (183) совпадает с уравнением (18) гл. III для обычной ударной адиабаты. В случае очень сильной ударной волны ($p_1 \to \infty$) получаем из (183) такое же предельное значение плотности

$$(\rho_1)_{max} = \frac{k+1}{k-1}\rho_н,$$

как и в простой ударной волне (см. выражение (19) гл. III). При $\rho_1 \to p_н$ имеем $p_1 \to p_н$.

Степень отклонения магнитогазодинамической ударной адиабаты от простой ударной адиабаты показана на рис. 13.17, где нанесены кривые $m(n)$ при разных величинах относительного магнитного давления q для $k = 1{,}67$ (одноатомный газ).

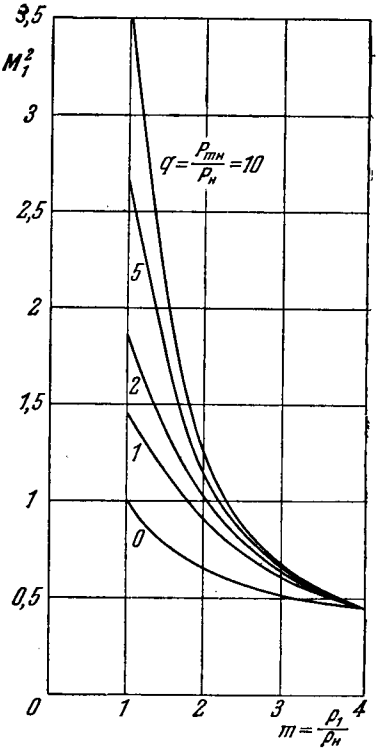


Рис. 13.19. Зависимость скорости за магнитогазодинамической ударной волной от степени сжатия газа при разных величинах параметра магнитного давления ($k = 5/3$).

С помощью (162) и (183) можно выразить число Маха, соответствующее скорости распространения магнитогазодинамической волны, через отношения плотностей на ее фронте

$$M_н^2 = \frac{m}{k}\frac{\theta + 1 + q[(\theta+1)(m+1) - 4m]}{\theta - m}. \qquad (184)$$

Зависимости $M_н(m)$, рассчитанные по формуле (184) при $\theta = 4$ ($k = 1{,}67$), нанесены на рис. 13.18.

Остается определить число Маха в газовом потоке за магнитогазодинамической волной, для чего используем выражения

(156) и (175)

$$\mathbf{M}_1^2 = \frac{u_1^2}{a_1^2} = \frac{u_н^2}{a_н^2}\frac{\rho_н^2}{\rho_1^2}\frac{T_н}{T_1} = \frac{\mathbf{M}_н^2}{mn}. \qquad (185)$$

Кривые $\mathbf{M}_1(m)$ при разных значениях параметра магнитного давления q приведены на рис. 13.19.

При вырождении магнитогазодинамической ударной волны в слабый разрыв ($m \to 1$, $n \to 1$) скорость ее распространения, как было установлено выше, оказывается больше скорости звука; в этом предельном случае из (184) и (185) получаем

$$\mathbf{M}_{н0}^2 = \frac{1}{k}\left(\frac{\theta+1}{\theta-1} + 2q\right) = 1 + \frac{2q}{k}, \qquad \mathbf{M}_{10} = \mathbf{M}_{н0}.$$

В другом предельном случае — бесконечно сильной магнитогазодинамической волны ($m \to \theta$, $n \to \infty$) — имеем из (184), (185) и (183)

$$\mathbf{M}_{нm}^2 \to \infty, \quad \mathbf{M}_{1m}^2 \to \frac{k-1}{2k}.$$

§ 11. Условие обращения воздействия при течении газа в электромагнитном поле

Рассмотрим стационарное одномерное течение ($\boldsymbol{W}(x) = (u, 0, 0)$) невязкого и нетеплопроводного газа конечной проводимости в поперечных скрещенных магнитном и электрическом полях.

Предполагая, что можно пренебречь индуцированным магнитным полем, зададим распределение средних по сечению значений электрической напряженности и магнитной индукции по длине канала переменного сечения $\boldsymbol{E}(x) = (0, E_y, 0)$, $\boldsymbol{B}(x) = (0, 0, B_z)$. Это позволяет решать задачу, не привлекая уравнений Максвелла.

Продифференцировав уравнение расхода

$$\rho u F = \text{const} = G$$

по направлению движения, получим

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dx} + \frac{1}{u}\frac{du}{dx} + \frac{1}{F}\frac{dF}{dx} = 0. \qquad (186)$$

Аналогичным образом из уравнения состояния для идеального газа имеем

$$\frac{dp}{dx} = R\rho\frac{dT}{dx} + \frac{a^2}{k}\frac{d\rho}{dx}. \qquad (187)$$

Уравнение движения (82) для одномерного течения невязкого и нетеплопроводного газа при поперечных электромагнитных

полях может быть приведено к виду

$$\rho u \frac{du}{dx} + \frac{dp}{dx} = \sigma_R [E - uB] B. \qquad (188)$$

Уравнение энергии такого одномерного течения получим из (90) и (87)

$$\rho u \frac{di^*}{dx} = \sigma_R [E - uB] E. \qquad (189)$$

Учитывая, что $i^* = i + \frac{u^2}{2}$, $R = c_p - c_v$ и $c_p = kc_v$, уравнение энергии (189) при $c_p = \text{const}$ примет следующий вид:

$$\frac{k}{k-1} R\rho u \frac{dT}{dx} + \rho u^2 \frac{du}{dx} = \sigma_R E [E - uB]. \qquad (189а)$$

В этих уравнениях все параметры зависят только от x, причем скорость $u(x)$ направлена по оси x, а напряженности магнитного и электрического полей перпендикулярны между собой и к направлению движения $B_z = B(x)$, $E_y = E(x)$; будем считать функции B_z и E_y, а также функцию $F(x)$, описывающую изменение площади поперечного сечения канала, заданными.

Систему уравнений (186)—(189) в общем случае нельзя решить в явном виде, но с ее помощью можно определить, как зависят производные скорости и числа Маха от основных параметров задачи.

Исключая из (187) и (189а) градиент температуры, получим

$$\frac{k}{k-1}\left(\frac{dp}{dx} - \frac{a^2}{k}\frac{d\rho}{dx}\right) + \rho u \frac{du}{dx} = \frac{\sigma_R E}{u} [E - uB]. \qquad (190)$$

Исключая из (188) и (190) градиент давления, имеем

$$-\frac{1}{k-1} \rho u \frac{du}{dx} = \sigma_R \left[\frac{E}{u} - \frac{k}{k-1} B\right][E - uB] + \frac{a^2}{k-1}\frac{d\rho}{dx}.$$

Заменяя в этом выражении градиент плотности с помощью (186), приходим к выражению

$$(M^2 - 1)\frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \frac{1}{F}\frac{dF}{dx} - \frac{k}{\rho a^2}\frac{\sigma_R B^2}{u}\left(\frac{E}{B} - u\right)\left(\frac{E}{B}\frac{k-1}{k} - u\right), \qquad (191)$$

которое показывает, как влияет изменение площади сечения и фактора, отражающего характер электромагнитного поля (второй член правой части), на изменение скорости по длине канала.

Если электромагнитное поле отсутствует, то уравнение (191) переходит в известное соотношение для сопла Лаваля (гл. IV, (1)). Если добавить в исходные уравнения члены, характеризующие изменение расхода газа, работы трения, технической работы и подвода тепла извне, то путем элементарных преоб-

разований можно уравнение (191) превратить в условие обращения воздействия еще более общего вида, чем условие (49) гл. V:

$$(\mathbf{M}^2-1)\frac{1}{u}\frac{du}{dx}=\frac{1}{F}\frac{dF}{dx}-\frac{1}{G}\frac{dG}{dx}-\frac{1}{a^2}\frac{dL}{dx}-\frac{k-1}{a^2}\frac{dQ_{\text{нар}}}{dx}-$$
$$-\frac{k}{a^2}\frac{dL_{\text{тр}}}{dx}-\frac{k}{\rho a^2}\frac{\sigma_R B^2}{u}\left(\frac{E}{B}-u\right)\left(\frac{E}{B}\frac{k-1}{k}-u\right). \quad (192)$$

Член, учитывающий электромагнитное воздействие в уравнении (192), отличается от всех остальных членов этого выражения тем, что в него входят значения действующих параметров, а не их производные и, кроме того, его величина зависит от абсолютных значений скорости и давления газа, а знак определяется произведением двух разностей, одна из которых есть разность между скоростью газа u и скоростью дрейфа $W_д = E/B$, а другая — разность между скоростью газа и некоторой скоростью $U_1 = \frac{E}{B}\frac{k-1}{k} = W_д\frac{k-1}{k}$.

Таким образом, если отбросить все воздействия, кроме электромагнитного, т. е. рассматривать одномерное движение идеального газа в теплоизолированном канале постоянного сечения при наличии скрещенных электромагнитных полей, то условие обращения воздействия для производной скорости запишется так:

$$(\mathbf{M}^2-1)\frac{du}{dx}=-\sigma_R B^2\frac{k}{\rho a^2}(u-U_1)(u-W_д)=$$
$$=-\frac{\sigma_R B^2}{p}(u-U_1)(u-W_д). \quad (193)$$

Напомним, что при движении газа со скоростью дрейфа (см. § 5) индуцированное электрическое поле равно и противоположно наложенному, в результате чего ток через газ не идет и никакого магнитогидродинамического воздействия нет. Как видим, при неизменной величине электромагнитного воздействия знак производной скорости изменяется на противоположный при переходе от дозвукового течения ($\mathbf{M}<1$) к сверхзвуковому ($\mathbf{M}>1$) и наоборот.

Таким же путем, как (193), можно вывести условие обращения воздействия для производной числа Маха по длине канала. В случае $\frac{dF}{dx}\neq 0$ имеем сходное с (191) выражение

$$(\mathbf{M}^2-1)\frac{1}{\mathbf{M}\left(1+\frac{k-1}{2}\mathbf{M}^2\right)}\frac{d\mathbf{M}}{dx}=$$
$$=\frac{1}{F}\frac{dF}{dx}-\frac{k}{\rho a^2}\frac{\sigma_R B^2}{u}\left(\frac{E}{B}-u\right)\left(\frac{E}{B}\frac{1+k\mathbf{M}^2}{\frac{2k}{k-1}+k\mathbf{M}^2}-u\right). \quad (194)$$

Для канала постоянного сечения $\left(\frac{dF}{dx}=0\right)$ получаем

$$(\mathbf{M}^2-1)\frac{1}{1+\frac{k-1}{2}\mathbf{M}^2}\frac{d\mathbf{M}}{dx}=-\frac{k}{\rho a^2}\sigma_R B^2(u-W_д)(u-U_2)=$$

$$=-\frac{\sigma_R B^2}{ap}(u-W_д)(u-U_2), \quad (195)$$

где

$$U_2=U_1\frac{1+k\mathbf{M}^2}{2+(k-1)\mathbf{M}^2}=W_д\frac{1+k\mathbf{M}^2}{\frac{2k}{k-1}+k\mathbf{M}^2}.$$

Таким образом, в выражении для $d\mathbf{M}/dx$ появляется новая характерная скорость U_2, величина которой зависит от числа Маха.

С помощью (194) и (195) на рис. 13.20 построена диаграмма возможных режимов одномерного течения газа в скрещенных электрическом и магнитном полях. По оси ординат отложены значения скорости, по оси абсцисс — числа Маха.

Прямые линии $u=U_1$, $u=W_д$, $\mathbf{M}=1$ и кривая $U_2(\mathbf{M})$ разбивают плоскость $(u; \mathbf{M})$ на области

I. $\mathbf{M}>1$	II. $\mathbf{M}<1$
$A_1 \cdot W_д < u$	$A_2 \cdot W_д < u$
$B_1 \cdot U_2 < u < W_д$	$B_2 \cdot U_1 < u < W_д$
$C_1 \cdot U_1 < u < U_2$	$C_2 \cdot U_2 < u < U_1$
$D_1 \cdot u < U_1$	$D_2 \cdot u < U_2$

Пусть u и $\mathbf{M}$ известны в некотором сечении x. Тогда при смещении вдоль оси x эти параметры изменяются так, что в областях A_1, B_2 и D_1 происходит смещение налево вниз, в областях A_2, B_1, D_2 — направо вверх, как и указывают стрелки, и в областях C_1 и C_2 — налево вверх.

Из уравнения (194) ясно, что на линиях $u=W_д$ и $u=U_1$ возможен плавный переход через значение $\mathbf{M}=1$ в первой точке в сторону возрастания $\mathbf{M}$, а во второй — убывания.

В областях C_1 и C_2 происходит ускорение потока при уменьшении числа Маха; здесь скорость звука растет быстрее скорости потока.

Полученные результаты легко объяснить, если вспомнить, что воздействие электромагнитного поля на течение газа сводится к механической работе электромагнитной силы, приложенной к единице объема [1]),

$$-\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{W}=-\boldsymbol{W}\cdot[\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B}]$$

[1]) Знак минус означает, что при $F>0$ энергия сообщается газу; выше мы всегда считали положительной работу, совершаемую газом.

и к выделению джоулева тепла, с учетом которого полная подводимая энергия на единицу объема

$$Q_H = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{j}.$$

В рассматриваемом одномерном случае отношение механической работы к полной энергии

$$\Pi = \frac{\sigma_R [E - uB] uB}{\sigma_R [E - uB] E} = \frac{u}{W_д}. \qquad (196)$$

Если $u > W_д$, то механическая работа электромагнитной силы превосходит изменение полного запаса энергии газа, т. е. механическая энергия частично переходит в энергию электромагнитного поля в виде тока, который может совершать работу во внешней цепи МГД-генератора. Если $u < W_д$, то энергия электромагнитного поля передается газу в виде механической работы или тепла (насос или ускоритель).

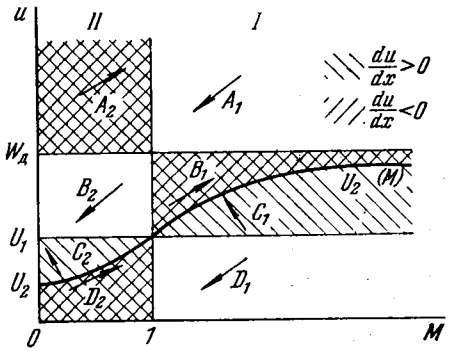


Рис. 13.20. Возможные режимы одномерного течения в скрещенных электромагнитных полях.

В первом случае электромагнитная сила направлена против движения газа, а во втором — по движению. Во втором случае при Π, близких к единице, воздействие поля выражается в основном в виде работы электромагнитных сил, а при Π, близких к нулю, — в основном в виде подвода тепла.

При $u = U_1$, т. е. $\Pi = U_1/W_д$, тепловое и механическое действия электромагнитного поля компенсируются, вследствие чего скорость газа не изменяется ($du/dx = 0$), при $u = W_д$ оба воздействия равны нулю [1]), из-за чего также $du/dx = 0$. Особенность линии $u = U_2$ состоит в том, что в точках пересечения с ней кривых $u(\mathrm{M})$ изменение значения скорости звука пропорционально изменению значения скорости газа, в силу чего производная от числа Маха по длине канала при $u = U_2$ всегда равна нулю. Переход через линию $u = U_2$ возможен на диаграмме рис. 13.20 только по вертикали (при $\mathrm{M} = \mathrm{const}$).

[1]) Такой режим получается при отсутствии джоулева тепла, но это возможно лишь при отсутствии электрического тока, а следовательно, и электромагнитной силы.

§ 12. Простейшие решения уравнений одномерного течения газа в скрещенных полях

Простейшее решение уравнения одномерного течения идеального газа в скрещенных электрическом и магнитном полях получается для канала постоянного сечения при $B = \text{const}$ и $E = \text{const}$; последние два условия можно реализовать лишь при малых значениях магнитного числа Рейнольдса ($R_H \ll 1$), когда индуцируемые в потоке газа поля значительно слабее наложенных полей [1]).

Поделив почленно уравнение (193) на уравнение (195), найдем

$$\frac{du}{d\mathbf{M}} = \frac{a}{1 + \frac{k-1}{2}\mathbf{M}^2} \frac{u - U_1}{u - U_2}. \tag{197}$$

При $B = \text{const}$ и $E = \text{const}$ имеем $W_д = \text{const}$ и $U_1 = \text{const}$; кроме того в соответствии с обозначением, принятым в (195), имеем

$$2\frac{U_2}{U_1} = \frac{1 + k\mathbf{M}^2}{1 + \frac{k-1}{2}\mathbf{M}^2} = 1 + \frac{\frac{k+1}{2}\mathbf{M}^2}{1 + \frac{k-1}{2}\mathbf{M}^2}.$$

Подставляя это выражение в (197), приводим последнее к виду

$$2\left(\frac{u}{U_1} - 1\right)\left(\frac{1}{\mathbf{M}^2} + \frac{k-1}{2}\right) d\frac{u}{U_1} - \frac{u}{U_1}\left(\frac{u}{U_1} - 1\right)\frac{d\mathbf{M}^2}{\mathbf{M}^4} = \\ = \frac{k+1}{2} d\frac{u}{U_1}. \tag{198}$$

Нетрудно показать, что левая часть (198) есть дифференциал произведения, поэтому

$$d\left[\frac{u}{U_1}\left(\frac{u}{U_1} - 1\right)\left(\frac{1}{\mathbf{M}^2} + \frac{k-1}{2}\right)\right] = \frac{k+1}{2} d\frac{u}{U_1},$$

откуда

$$\frac{1}{\mathbf{M}^2} + \frac{k-1}{2} = \frac{k+1}{2} \frac{\frac{u}{U_1} + \text{const}}{\frac{u}{U_1}\left(\frac{u}{U_1} - 1\right)}. \tag{199}$$

Постоянную интегрирования выбирают по какому-либо начальному условию. Например, если принять $u = U_1$ при $\mathbf{M} = 1$,

---

[1]) Реслер Е. Л., Сирс В. Р., Механика. В сб. переводов и обзоров иностранной литературы, т. 6, вып. 3, 1959.

то получим const $= -1$. Тогда имеем

$$\frac{u}{U_1} = \frac{\frac{k+1}{2}\mathbf{M}^2}{1+\frac{k-1}{2}\mathbf{M}^2} \quad \text{или} \quad \mathbf{M}^2 - 1 = \frac{\frac{u}{U_1} - 1}{1 - \frac{k-1}{k+1}\frac{u}{U_1}}. \qquad (200)$$

Найдем теперь изменение скорости по длине канала. Для этого воспользуемся уравнением неразрывности течения

$$\rho u = \frac{G}{F} = \text{const} = m.$$

Подставляя значение ρu в (193), находим

$$(\mathbf{M}^2 - 1)\frac{du}{dx} = -\frac{\sigma_R B^2}{m}\frac{k\mathbf{M}^2}{u}(u - U_1)(u - W_д).$$

Это выражение с помощью (200) приводится к следующему виду:

$$\frac{d\frac{u}{W_д}}{d\bar{x}} = \frac{2k}{k+1}\frac{\sigma_R B^2 h}{m}\left(1 - \frac{u}{W_д}\right) = \frac{2k}{k+1}\mathbf{S}_0\left(1 - \frac{u}{W_д}\right), \qquad (201)$$

где $\bar{x} = \frac{x}{h}$, h — высота канала, отсчитываемая по нормали к x, а $\mathbf{S}_0 = \sigma_R B^2 h/m$ — параметр магнитогидродинамического взаимодействия, определяемый соотношением (97).

Интегрируя (201), получаем закон изменения скорости по длине канала

$$\bar{u} = \frac{u}{W_д} = 1 - \frac{1}{k}e^{-\frac{\sigma_R B^2 x}{m}\frac{2k}{k+1}} = 1 - \frac{1}{k}e^{-\mathbf{S}_1\bar{x}}, \qquad (202)$$

где

$$\mathbf{S}_1 = \frac{2k}{k+1}\mathbf{S}_0.$$

Как видим, $\bar{u} = 0$ получается при $x = -\ln k/\mathbf{S}_1$, $\bar{u} = -1$ при $\bar{x} = -\infty$. Для определения постоянной интегрирования длину отсчитывают от критического сечения, т. е. принимают $x = 0$ при $\mathbf{M} = 1$, где по условию $u = U_1 = W_д\frac{k-1}{k}$.

Изменение плотности по длине канала находится из уравнения неразрывности и зависимости (202)

$$\frac{1}{\bar{\rho}} = \frac{\rho_1}{\rho} = \frac{u}{u_1} = \frac{k}{k-1}\frac{u}{W_д} = \frac{k}{k-1}\left(1 - \frac{1}{k}e^{-\mathbf{S}_1\bar{x}}\right). \qquad (203)$$

Здесь ρ_1 — плотность газа в критическом сечении канала.

Градиент давления вдоль канала находим с помощью уравнения движения (188) и выражений (201) и (202)

$$\frac{dp}{dx} = \sigma_R B^2 (W_д - u) - m\frac{du}{dx} = -\frac{k-1}{2k} m\frac{du}{dx} = -\frac{U_1 \sigma_R B^2}{(k+1)} e^{-s_1 \bar{x}}. \tag{204}$$

Интегрируя (204), имеем

$$p_1 = \frac{\rho_1 U_1^2}{2k} e^{-s_1 \bar{x}} + \text{const}.$$

В критическом сечении ($M = 1$, $u = a = U_1$, $\rho = \rho_1$, $p = p_1$), т. е. при $x = 0$,

$$p_1 = \frac{\rho_1 U_1^2}{2k} + \text{const}.$$

Но, с другой стороны, из формулы для скорости звука следует

$$p_1 = \frac{\rho_1 U_1^2}{k} = \frac{\rho_1 a_1^2}{k},$$

поэтому

$$\text{const} = \frac{\rho_1 U_1^2}{2k}.$$

Итак, изменение давления по длине канала

$$\bar{p} = \frac{p}{p_1} = \frac{1}{2}(1 + e^{-s_1 \bar{x}}). \tag{205}$$

При $\bar{u} = 0 \left(\bar{x} = -\frac{\ln k}{S_1}\right)$ имеем $\bar{p} = 1{,}2$, при $\bar{u} = 1$ $(\bar{x} = -\infty)$ $\bar{p} = 0{,}5$.

Теперь с помощью (204) и (205) нетрудно отыскать изменение температуры вдоль канала, так как из уравнения состояния

$$\bar{T} = \frac{T}{T_1} = \frac{p}{p_1}\frac{\rho_1}{\rho}. \tag{206}$$

Плотность электрического тока в произвольном сечении канала

$$j = \sigma_R (E - uB) = \sigma_R E \left(1 - \frac{u}{W_д}\right) = \frac{\sigma_R E}{k} e^{-s_1 \bar{x}}.$$

Отсюда для плотности тока в критическом сечении ($x = 0$) имеем

$$j_1 = \frac{\sigma_R E}{k}.$$

Безразмерное значение плотности тока

$$\bar{j} = \frac{j}{j_1} = e^{-s_1 x}. \tag{207}$$

Результаты расчета по формулам (164)—(207) не зависят от системы единиц, так как величина $S = \frac{\sigma_R B^2 h}{m}$ — безразмерная. Кривые, показывающие изменение величин u, ρ, p, T в зависимости от безразмерной длины $\bar{x} = x/h$, выраженной в долях от высоты канала h, приведены на рис. 13.21; при расчете этих зависимостей использовались следующие значения параметров:

$\sigma_R = 10^2$ См/м; $k = 1{,}4$;

$T_1 = 2000$ К;

$p_1 = 9{,}8 \cdot 10^4$ Н/м^2;

$B_1 = 1$ Т.

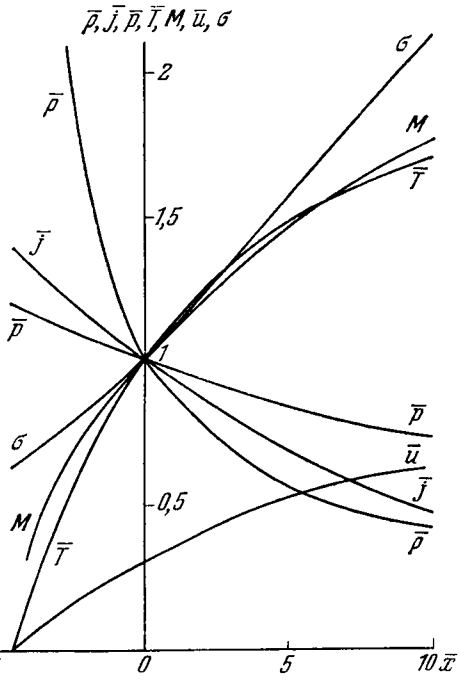


Рис. 13.21. Изменение основных параметров по длине плоского канала постоянного сечения при $E = E_y = \text{const}$; $B = B_z = \text{const}$; $\delta_R = \text{const}$; $k = 1{,}4$; $S_1 = \frac{\sigma_R B^2 h}{\rho_1 U_1 c^2} \frac{2k}{k+1} = 0{,}075$.

Этим значениям соответствуют величины

$\rho_1 = 0{,}167$ кг/м^3;

$U_1 = a_1 = 9{,}4 \cdot 10^2$ м/с;

$W_д = 32{,}1 \cdot 10^2$ м/с;

$E = U_1 B = 9{,}4 \cdot 10^2$ В/м;

$j_1 = 2{,}23$ А/м^2.

При высоте канала $h = 10$ см разность потенциалов на его стенках составляет $\Delta V = Eh = 94$ В, а универсальный показатель степени $S_1 = \frac{\sigma_K B_1^2 h}{\rho_1 U_1} \frac{2k}{k+1} = 0{,}075$.

На рис. 13.21 приведены также кривые изменения по длине канала числа Маха (при $k = 1{,}4$)

$$M = \frac{u}{a} = \frac{u}{a_1} \frac{a_1}{a} = \frac{k}{k-1} \frac{u}{W_д} \frac{1}{\sqrt{\bar{T}}} = 3{,}5 \frac{\bar{u}}{\sqrt{\bar{T}}} \qquad (208)$$

и относительной величины полного давления

$$\sigma = \frac{p^*}{p_1^*} = \frac{p^*}{p} \frac{p}{p_1} \frac{p_1}{p_1^*} = 0{,}528 (1 + 0{,}2M^2)^{3{,}5} \bar{p}. \qquad (209)$$

Разумеется, проведенный расчет носит условный характер, так как не все принятые при выводе формул (202)—(209) усло-

вия можно реализовать на практике. В частности, проводимость газа σ_R существенно зависит от температуры, которая по длине канала изменяется. При переменных значениях основных параметров можно вести расчет численными или графическими методами непосредственно по дифференциальным уравнениям (201) и (204) и соответствующим соотношениям для плотности газа, температуры и плотности электрического тока.

Другой вид одномерного течения газа в скрещенных электромагнитных полях получается при постоянной температуре, но переменном сечении канала. В этом случае вывод расчетных формул основывается на следующих исходных уравнениях:

уравнении неразрывности

$$\rho u F = \text{const} = G;$$

уравнении состояния

$$p = R\rho T;$$

уравнении движения (188)

$$\rho u \frac{du}{dx} + \frac{dp}{dx} = jB = \sigma_R [E - uB] B;$$

уравнении энергии (189а), которое при $T = \text{const}$ имеет вид

$$\rho u^2 \frac{du}{dx} = jE = \sigma_R E [E - uB]. \tag{210}$$

Подставляя (210) в уравнение движения (188), получим

$$u \frac{dp}{dx} = -\frac{j^2}{\sigma_R}. \tag{211}$$

Исключая из (210) плотность, имеем

$$\frac{p}{RT} u^2 \frac{du}{dx} = j\vec{E},$$

откуда

$$p = RTE \frac{j}{u^2 u'} = RTE\xi. \tag{212}$$

где

$$u' = \frac{du}{dx}, \quad \xi = \frac{j}{u^2 u'}, \quad \xi' = \frac{d\xi}{dx}.$$

Отсюда при постоянной напряженности электрического тока ($E = \text{const}$) $\frac{dp}{dx} = RTE\xi'$. Подставляя это выражение в (211), получаем $RTE\xi' = -\frac{j^2}{\sigma_R u} = -\frac{j^2}{u^4 u'^2} \frac{u^3 u'^2}{\sigma_R}$ и, следовательно, $\sigma_R RTE \frac{\xi'}{\xi^2} = -u^3 (u')^2$. Интегрируя от $x = 0$ ($\xi = \xi_0$) до теку-

щего значения x, имеем

$$\sigma_R RTE\left(\frac{1}{\xi}-\frac{1}{\xi_0}\right)=\int_0^x u^3(u')^2\,dx. \tag{213}$$

Зададимся степенным распределением скорости по длине канала (при $E=\text{const}$ и $B=B(x)$)

$$u=bx^n,\quad u'=bnx^{n-1}. \tag{214}$$

Подставляя (214) в (213) после интегрирования (при $n>1/5$), получим

$$\frac{1}{\xi}=\frac{b^5n^2}{\sigma_R RTE}\,\frac{x^{5n-1}}{5n-1}. \tag{215}$$

Здесь принято во внимание, что при $x=0$, $u=0$, $u'=0$, т. е. при $j\neq 0$, $\frac{1}{\xi_0}=0$.

В случае $n=1/5$ интеграл (213) дает логарифмическую функцию, что изменяет вид всех расчетных формул. В рассматриваемом примере плотность электрического тока в канале

$$j=\xi u^2u'=\frac{\sigma_R RTE}{b^2n}\,\frac{5n-1}{x^{2n}} \tag{216}$$

и напряженность магнитного поля

$$B=\frac{E}{bx^n}\left[1-\frac{RT(5n-1)}{b^2nx^{2n}}\right]. \tag{217}$$

Давление находим из (212) и (215)

$$p=\frac{\sigma_R(RTE)^2}{b^5n^2}\,\frac{5n-1}{x^{5n-1}}. \tag{218}$$

Площадь сечения канала находится из уравнения неразрывности

$$F=\frac{Gb^4n^2}{\sigma_R RT(E)^2}\,\frac{x^{4n-1}}{5n-1}. \tag{219}$$

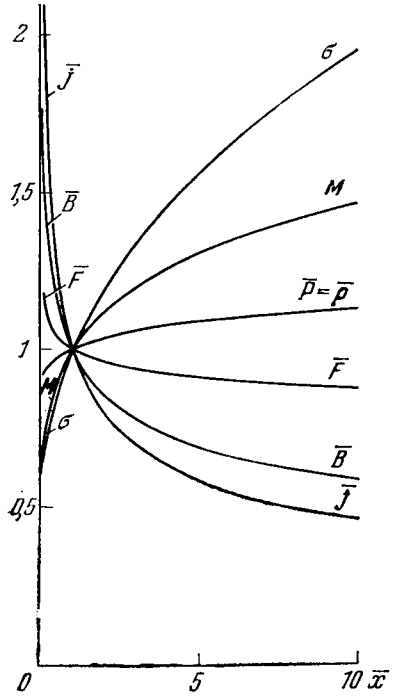


Рис. 13.22. Изменение параметров по длине канала при $E=E_y=$ $=\text{const}$; $\sigma_R=\text{const}$; $k=1{,}4$; $T=\text{const}$; $n=1/6$.

Число Маха согласно (214) составляет

$$\mathsf{M}=\frac{u}{a}=\frac{bx^n}{\sqrt{kRT}}. \tag{220}$$

В критическом сечении ($x=x_1$) $\mathsf{M}=1$, поэтому

$$b=\frac{\sqrt{kRT}}{x_1^n}. \tag{221}$$

Подставляя значение b в полученные формулы, окончательно имеем

$$\left.\begin{aligned}
&\mathsf{M}=\left(\frac{x}{x_1}\right)^n,\\
&u=\sqrt{kRT}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n,\\
&j=\frac{\sigma_R E(5n-1)}{kn}\left(\frac{x_1}{x}\right)^{2n},\\
&B=\frac{E}{\sqrt{kRT}}\left[\left(\frac{x_1}{x}\right)^n-\frac{5n-1}{kn}\left(\frac{x_1}{x}\right)^{2n}\right],\\
&p=\frac{\sigma_R E^2(5n-1)\,x_1}{n^2k^2\sqrt{kRT}}\left(\frac{x_1}{x}\right)^{5n-1},\\
&F=\frac{Gk^2n^2}{\sigma_R E^2 x_1}\frac{RT}{5n-1}\left(\frac{x}{x_1}\right)^{4n-1}.
\end{aligned}\right\} \qquad (222)$$

В критическом сечении ($x=x_1$):

$$\left.\begin{aligned}
&\mathsf{M}_1=1,\quad j_1=\frac{\sigma_R E(5n-1)}{kn},\\
&u_1=\sqrt{kRT},\\
&B_1=\frac{E}{\sqrt{kRT}}\left[1-\frac{5n-1}{kn}\right],\\
&p_1=\frac{\sigma_R E^2 x_1(5n-1)}{n^2k^2\sqrt{kRT}},\\
&F_1=\frac{Gk^2n^2}{\sigma_R E^2 x_1}\frac{RT}{5n-1}.
\end{aligned}\right\} \qquad (223)$$

Величину абсциссы критического сечения можно найти по заданному значению давления p_1 в критическом сечении. В безразмерном виде основные расчетные формулы выглядят так:

$$\left.\begin{aligned}
&\mathsf{M}=\left(\frac{x}{x_1}\right)^n=\bar{x}^n,\\
&\bar{j}=\frac{j}{j_1}=\frac{1}{\mathsf{M}^2},\\
&\bar{B}=\frac{B}{B_1}=\frac{1+kn\mathsf{M}-5n}{\mathsf{M}^2(1+kn-5n)},\\
&\bar{p}=\frac{\rho}{\rho_1}=\frac{p}{p_1}=\frac{1}{\mathsf{M}^{5n-1}},\\
&\bar{F}_1=\frac{F}{F_1}=\mathsf{M}^{4n-1}.
\end{aligned}\right\} \qquad (224)$$

Из (224) следует, что при $n = 1/4$ канал имеет постоянное сечение.

На рис. 13.22 изображены кривые $\mathsf{M}(\bar{x})$, $\bar{j}(\bar{x})$, $\bar{B}(\bar{x})$, $\bar{p}(\bar{x})$ и $\bar{F}(\bar{x})$ для рассматриваемого изотермического течения в канале при $n = 1/6$ и $k = 1{,}4$. Кривая изменения полного давления по длине канала была рассчитана по формуле (209), в которую подставлялись значения $\bar{p}$, отыскиваемые с помощью (224). При выбранном законе изменения скорости по длине канала ($n = 1/6$) площадь сечения канала изменяется не очень сильно. При больших значениях n все параметры будут изменяться более заметно.

§ 13. Магнитогидродинамические турбулентные течения

При рассмотрении турбулентного пограничного слоя в § 4 гл. VI мгновенные значения скорости, давления и тепературы в уравнениях пограничного слоя несжимаемой жидкости заменяются суммами средних по времени и пульсационных составляющих.

При последующем осреднении по времени преобразованных уравнений в них появляются дополнительные члены, представляющие собой турбулентные напряжения трения, турбулентный поток тепла и дополнительную диссипацию энергии, отвечающую рассеиванию работы турбулентного трения.

Окончательный вид системы уравнений турбулентного пограничного слоя представлен выражениями (101), (102) и (103) из гл. VI.

Аналогичные преобразования можно произвести с основными уравнениями магнитной гидродинамики, выведенными в § 2 настоящей главы.

Применительно к магнитогидродинамическому турбулентному пограничному слою несжимаемой жидкости в случае малых значений магнитного числа Рейнольдса ($\mathsf{R}_H < 1$), когда влиянием пульсаций магнитной индукции можно пренебречь ($B' \approx 0$), уравнение установившегося осредненного движения отличается от уравнения (102) гл. VI, используемого при отсутствии магнитного поля, только одним дополнительным членом — осредненной электромагнитной объемной силой:

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} - \rho \overline{u'v'}\right) + (j_y B_z - j_z B_y). \tag{225}$$

где, согласно (87), компоненты вектора плотности электрического тока имеют вид

$$\begin{aligned} j_y &= \sigma_R [E_y + (wB_x - uB_z)], \\ j_z &= \sigma_R [E_z + (uB_y - vB_x)]. \end{aligned} \tag{226}$$

В случае продольного магнитного поля ($B_x \neq 0$, $B_y = 0$, $B_z = 0$) продольная электромагнитная объемная сила отсутствует; в поперечном магнитном поле ($B_x = 0$, $B_y \neq 0$, $B_z = 0$) электромагнитная сила равна

$$f_x = -j_z B_y; \tag{227}$$

при наличии так называемого «окружного» магнитного поля ($B_x = 0$, $B_y = 0$, $B_z \neq 0$), силовые линии которого направлены параллельно поверхности стенки и вдоль составляющей скорости w:

$$f_x = j_y B_z. \tag{228}$$

Из сказанного следует, что магнитное поле не вносит в уравнение осредненного движения никаких дополнительных напряжений, связанных с пульсационными величинами скорости (u', v', w'), плотности электрического тока (j'_x, j'_y, j'_z) и напряженности электрического поля (E'_x, E'_y, E'_z). Однако опыты показывают, что магнитное поле сильно влияет на напряжение трения и профиль скорости.

Ниже излагается сравнительно простая полуэмпирическая теория, позволяющая учитывать влияние напряженности и направления магнитного поля на пульсационные составляющие скорости потока, что в свою очередь сказывается на напряжении трения и профиле осредненной скорости.

Основная идея этой теории [1]) состоит в том, что на единицу объема турбулентной частицы жидкости (турбулентного моля) действует возникающая при ее дискретном движении пульсационная величина вектора электромагнитной силы, равная, согласно (225) и (226),

$$\boldsymbol{f}' = \sigma_R [(\boldsymbol{E}' + [\boldsymbol{w}' \times \boldsymbol{B}]) \times \boldsymbol{B}]. \tag{229}$$

Эта сила изменяет величину пульсационной скорости в процессе движения моля, т. е. приводит к тому, что конечная величина пульсационной скорости в момент слияния моля с новым слоем жидкости u'_k отличается от ее начальной величины в момент зарождения моля u'_0.

В течении со сдвигом обычно принято считать все составляющие пульсационной скорости одинаковыми (локальная изотропия) и равными разности осредненных скоростей на расстоянии пути смешения:

$$u'_0 \approx v'_0 \approx w'_0 \approx l \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{230}$$

[1]) Г. Н. Абрамович, Д. С. Ковнер, В. Г. Лущик, О воздействии магнитного поля на турбулентность в течении со сдвигом, ДАН СССР, т. 202, № 4, 1972, стр. 783—786.

При отсутствии объемной силы эти значения пульсационной скорости сохраняются на длине пути смешения и в момент слияния моля с новым слоем жидкости скачкообразно (пульсационно) исчезают, образуя напряжение турбулентного трения за счет потери соответствующего количества движения:

$$\tau = -\rho\overline{u'v'} = -\rho l^2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2. \tag{231}$$

Этот процесс подробно рассмотрен в § 4 гл. VI.

При действии пульсационной электромагнитной силы на единицу объема турбулентного моля жидкости величина пульсационной скорости за время дискретного движения моля изменяется согласно второму закону Ньютона:

$$\rho\frac{dw'}{dt} = f'. \tag{232}$$

В выражение для напряжения турбулентного трения (231) следует подставлять конечную величину пульсационной скорости моля $(u'_к, v'_к)$, которая может сильно отличаться от начальной (u'_0, v'_0). При разных направлениях магнитного поля отдельные составляющие пульсационной скорости изменяются неодинаково, т. е. возникает анизотропия турбулентного потока $(v'_к \neq u'_к)$.

Примем, что пульсация напряженности электрического тока пропорциональна индуцированному электрическому полю и направлена ему навстречу:

$$\boldsymbol{E}' = -\beta[\boldsymbol{w}' \times \boldsymbol{B}]. \tag{233}$$

Коэффициент β учитывает сопротивление цепи, по которой замыкается электродвижущая сила $[\boldsymbol{w}' \times \boldsymbol{B}]$; для β можно провести оценку: при движении моля конечной проводимости в бесконечно проводящей среде $\beta = 0$, а при движении в непроводящей среде $\beta = 1$. Подставляя (233) в (229), получаем следующее выражение для вектора пульсационной электромагнитной силы:

$$\boldsymbol{f}' = \alpha\sigma_R[[\boldsymbol{w}' \times \boldsymbol{B}] \times \boldsymbol{B}]. \tag{234}$$

где $\alpha = 1 - \beta$.

Составляющие пульсационной силы при различных ориентациях магнитного поля:

$$f'_x = \begin{cases} 0, \\ -\alpha\sigma u B_y^2, \\ -\alpha\sigma u B_z^2, \end{cases} \quad f'_y = \begin{cases} -\alpha\sigma v B_x^2 \ (B_x, 0, 0), \\ 0 \qquad (0, B_y, 0), \\ -\alpha\sigma v B_z^2 \ (0, 0, B_z). \end{cases} \tag{235}$$

Видно, что объемные силы, действующие на турбулентный моль в магнитном поле, всегда направлены против движения, т. е. вызывают уменьшение пульсационных скоростей, причем составляющая пульсационной силы в направлении магнитного поля равна нулю. Подставляя в уравнение движения моля (232) выражение для пульсационной силы (234), можно определить конечное значение пульсационной скорости. Решая задачу для каждой составляющей пульсационной скорости, получаем, например, для пульсации продольной скорости в поперечном магнитном поле $(0, B_y, 0)$, согласно (232) и (235),

$$\rho \frac{du'}{dt} = f'_x = -\alpha\sigma B_y^2 u',$$

откуда с учетом условия $u' = u'_0$ при $t = 0$

$$u' = u'_0 \cdot e^{-\frac{\alpha\sigma B_y^2 t}{\rho}}. \tag{236}$$

Разлагая экспоненту в ряд, ограничиваясь первыми членами разложения и полагая, согласно (230), $u'_0 \approx l\frac{du}{dy}$, а также $t_к \approx \frac{l}{u'_0}$, имеем

$$u'_к = u'_0(1 - \alpha S_l). \tag{237}$$

Константа α определяется из экспериментов. Здесь введен локальный критерий магнитогидродинамического взаимодействия

$$S_l = \frac{\sigma B^2}{\rho \frac{du}{dy}}. \tag{238}$$

Поперечная составляющая пульсационной скорости v' при поперечном магнитном поле $(0, B_y, 0)$ не испытывает воздействия поля, так как, согласно (235), в этом случае $f'_y = 0$, т. е. $v'_к = v'_0$.

В продольном магнитном поле $(B_x, 0, 0)$ из тех же соображений получаем

$$u'_к = u'_0, \quad v'_к = v'_0(1 - \alpha S_l).$$

В окружном магнитном поле $(0, 0, B_z)$, согласно (235), две составляющие пульсационной электромагнитной силы отличны от нуля $(f'_x \neq 0,\ f'_y \neq 0)$, поэтому в данном случае две состав-

ляющие пульсационной скорости при дискретном движении моля уменьшаются: $u'_к = u'_0(1 - \alpha S_l)$, $v'_к = v'_0(1 - \alpha S_l)$.

При определении величины критерия МГД-взаимодействия S_l для заданной ориентации магнитного поля в (238) подставляется соответствующая величина магнитной индукции.

Подставляя полученные зависимости для конечных значений компонентов пульсационной скорости в выражение (231) для напряжения турбулентного трения, получим с учетом (230) следующие формулы, отвечающие различной ориентации магнитного поля:

$$\tau_{xy} = \begin{cases} -\rho l^2 \left(\frac{du}{dy}\right)^2 (1 - \alpha S_l) & (B_x,\ 0,\ 0), \\ -\rho l^2 \left(\frac{du}{dy}\right)^2 (1 - \alpha S_l) & (0,\ B_y,\ 0), \\ -\rho l^2 \left(\frac{du}{dy}\right)^2 (1 - \alpha S_l)^2 & (0,\ 0,\ B_z). \end{cases} \tag{239}$$

Видно, что наиболее сильное воздействие на величину турбулентного трения в плоском пограничном слое оказывает окружное магнитное поле, что объясняется его влиянием на две составляющие пульсационной скорости, входящие в выражение для напряжения трения. Описанный метод учета влияния магнитного поля на турбулентность можно применять и в том случае, если направление магнитного поля не совпадает с направлением одной из составляющих пульсационной скорости; при этом вектор магнитной индукции следует разложить на компоненты, параллельные составляющим скорости, и затем вести расчет по приведенным выше формулам, учитывая воздействие на турбулентность каждого компонента вектора магнитной индукции.

Рассмотрим несколько примеров турбулентных магнитогидродинамических течений.

В случае течения около безграничной плоской стенки, как было показано ранее (см. формулу (113) § 4 гл. VI), вблизи стенки напряжение трения является постоянным, и уравнение движения принимает наиболее простой вид

$$\tau_{xy} = \tau_w = \text{const} \quad \text{для} \quad (B_x,\ 0,\ 0) \quad \text{и} \quad (0,\ 0,\ B_z). \tag{240}$$

При этом предполагается, что градиент давления отсутствует ($dp/dx = 0$), а внешнее электрическое поле не создает осредненного электрического тока.

Из (238)—(240) для пограничного слоя в продольном магнитном поле $(B_x, 0, 0)$ имеем

$$\tau_{xy} = \rho l \frac{du}{dy}\left(\frac{du}{dy} - \frac{\alpha\sigma B_x^2}{\rho}\right) = \text{const}. \tag{241}$$

Принимая прандтлевское распределение пути смешения (формула (112) гл. VI)

$$l = ky,$$

вводя скорость на границе слоя ($u = u_0$ при $y = \delta$) в критерий МГД-взаимодействия

$$S_0 = \frac{\sigma B^2 \delta}{\rho u_0}$$

и переходя к безразмерным величинам $\left(\bar{y} = \frac{y}{\delta},\ \bar{u} = \frac{u}{u_0}\right)$, получим из (241)

$$\frac{\tau_{xy}}{\rho u_0^2} = c^2 = k^2 \bar{y}^2 \left[\left(\frac{d\bar{u}}{d\bar{y}}\right)^2 - \alpha S_0 \frac{d\bar{u}}{d\bar{y}}\right]. \tag{242}$$

Решим это уравнение относительно производной

$$\frac{d\bar{u}}{d\bar{y}} = \frac{\alpha S_0}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^2 S_0^2}{4} + \frac{c^2}{k^2 y^2}}$$

и выполним интегрирование

$$\bar{u} = \frac{\alpha S_0}{2}\left(\bar{y} + \sqrt{\bar{y}^2 + \frac{4c^2}{k^2\alpha^2 S_0^2}} - \right.$$
$$\left. - \frac{2c}{k\alpha S_0} \ln \frac{\frac{2c}{k\alpha S_0} + \sqrt{\bar{y}^2 + \frac{4c^2}{k^2\alpha^2 S_0^2}}}{\bar{y}}\right) + \text{const}. \tag{243}$$

При граничном условии $\bar{u} = 1$ при $\bar{y} = 1$ получим следующий профиль скорости в пограничном слое при продольном магнитном поле:

$$\bar{u} = 1 - \frac{\alpha S_0}{2}\left[1 - \bar{y} + \sqrt{1 + \frac{4c^2}{k^2\alpha^2 S_0^2}} - \sqrt{\bar{y}^2 + \frac{4c^2}{k^2\alpha^2 S_0^2}} + \right.$$
$$\left. + \frac{2c}{k\alpha S_0} \ln \frac{\frac{2c}{k\alpha S_0} + \sqrt{\bar{y}^2 + \frac{4c^2}{k^2\alpha^2 S_0^2}}}{\bar{y}\left(\frac{2c}{k\alpha S_0} + \sqrt{1 + \frac{4c^2}{k^2\alpha^2 S_0^2}}\right)}\right]. \tag{244}$$

В частном случае $S_0 = 0$ (244) переходит в известный логарифмический профиль обычного турбулентного слоя (формула (114) гл. VI):

$$\bar{u} = 1 + \frac{c}{k} \ln \bar{y}. \tag{245}$$

В непосредственной близости от стенки, т. е. в ламинарном подслое, данное решение непригодно; здесь, как и при отсутствии магнитного поля, можно предположить, что границе перехода ламинарного подслоя в турбулентный слой отвечает постоянное значение локального числа Рейнольдса (см. формулу (125) гл. VI), в первом приближении такое же, как и при отсутствии поля:

$$\mathrm{R}_{л} = \frac{\rho u_{л} \delta_{л}}{\mu} = \text{const} = 156, \tag{246}$$

а профиль скорости в подслое линейный ($u/u_{л} = y/\delta_{л}$). Сшивая турбулентный профиль скорости с линейным на границе подслоя, найдем с учетом (246) толщину последнего $\delta_{л}$ и значение скорости в точке $y = \delta_{л}$, после чего по закону Ньютона определим напряжение трения на стенке

$$\tau_{w} = \tau_{xy} = \mu \frac{du}{dy} = \mu \frac{u_{л}}{\delta_{л}} \tag{247}$$

и константу c в формулах (242) и (243).

Для турбулентного пограничного слоя в окружном магнитном поле $(0, 0, B_z)$ уравнение движения, согласно (238)—(240), принимает вид

$$\tau_{xy} = \rho l^2 \left(\frac{du}{dy} - \frac{\alpha \sigma B_z^2}{\rho} \right)^2 = \text{const}, \tag{248}$$

или в безразмерном виде

$$\frac{\tau_{xy}}{\rho u_0^2} = c^2 = k^2 \bar{y}^2 \left(\frac{d\bar{u}}{d\bar{y}} - \alpha \mathrm{S}_0 \right)^2, \tag{249}$$

откуда

$$\frac{d\bar{u}}{d\bar{y}} = \alpha \mathrm{S}_0 + \frac{c}{k\bar{y}}$$

и

$$\bar{u} = \alpha \mathrm{S}_0 \bar{y} + \frac{c}{k} \ln \bar{y} + \text{const}.$$

При граничном условии $\bar{u} = 1$ для $\bar{y} = 1$ имеем

$$\bar{u} = 1 + \frac{c}{k} \ln \bar{y} - \alpha \mathrm{S}_0 (1 - \bar{y}). \tag{250}$$

Расчет ламинарного подслоя и трения на стенке производится из тех же соображений, что и в предыдущем случае. При действии поперечного магнитного поля $(0, B_y, 0)$ профиль скорости в пограничном слое нельзя получить, основываясь на предположении о постоянстве напряжения трения, так как при этом

направлении магнитного поля в потоке действуют осредненные электромагнитные силы, соизмеримые с силами трения.

Рассмотрим теперь турбулентное течение проводящей жидкости в плоском канале при наличии магнитного поля. Для течения в канале обычно задается средняя скорость, а максимальная скорость, величина которой зависит от профиля скорости, определяется решением задачи.

Уравнение движения в канале при действии магнитных полей $(B_x, 0, 0)$ и $(0, 0, B_z)$, когда в осредненном течении электромагнитная объемная сила отсутствует, согласно (225) и (231), имеет следующий вид:

$$\mu \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d\tau_{xy}}{dy} = \frac{dp}{dx} = \text{const}. \tag{251}$$

Используя выражения (239) для τ_{xy}, можно из (251) получить профиль скорости.

В случае поперечного магнитного поля $(0, B_y, 0)$ получаем турбулентный аналог задачи Гартмана, рассмотренный в § 6 настоящей главы.

Как и в задаче Гартмана, при $E_y = -u_{\text{ср}}B_y$ в направлении течения действует электромагнитная сила

$$F_x = \sigma B_y^2 (u_{\text{ср}} - u),$$

где

$$u_{\text{ср}} = \frac{1}{b}\int_0^b u\, dy,$$

b — полуширина канала.

Уравнение движения в этом случае выглядит так:

$$\mu \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d\tau_{xy}}{dy} - \sigma B_y^2 u = \frac{dp}{dx} - \sigma B_y^2 u_{\text{ср}} = \text{const}. \tag{252}$$

Задачу о турбулентном магнитогидродинамическом течении в канале удобно решать в безразмерных переменных:

$$\varphi = \frac{u}{v_*}, \quad \eta = \frac{y}{l_*},$$

где

$$l_* = \frac{\mu}{\rho v_*}, \quad v_* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}, \quad \mathrm{R}_* = \frac{\rho v_* b}{\mu}.$$

т. е.

$$\eta = \frac{y}{b}\mathrm{R}_*. \tag{253}$$

Заметим, что для поля $(0, B_y, 0)$ суммарная электромагнитная сила в поперечном сечении канала с электроизолированными стенками равна нулю (см. § 6):

$$\int_0^b F_x\, dy = 0,$$

поскольку $\int_0^b u\, dy = u_{\text{ср}} b$. Таким образом, градиент давления уравновешивается силой трения на стенке

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\tau_w}{b} = \frac{\rho v_*^2}{b}. \tag{254}$$

Преобразуем уравнение движения с использованием безразмерных универсальных координат (253).

Для продольного поля $(B_x, 0, 0)$ при $l = ky$ имеем

$$\frac{d^2\varphi}{d\eta^2} + \frac{d}{d\eta}\left[k^2\eta^2 \frac{d\varphi}{d\eta}\left(\frac{d\varphi}{d\eta} - \alpha \mathrm{S}_*\right)\right] = -\frac{1}{\mathrm{R}_*}, \tag{255}$$

где

$$\mathrm{S}_* = \frac{\sigma B^2 l_*}{\rho v_*} = \left(\frac{\mathrm{Ha}}{\mathrm{R}_*}\right)^2, \qquad \mathrm{Ha} = Bb\sqrt{\frac{\sigma}{\mu}}. \tag{256}$$

Первый интеграл уравнения (255):

$$\frac{d\varphi}{d\eta} + k^2\eta^2 \frac{d\varphi}{d\eta}\left(\frac{d\varphi}{d\eta} - \alpha \mathrm{S}_*\right) = 1 - \frac{\eta}{\mathrm{R}_*}. \tag{257}$$

Для окружного поля $(0, 0, B_z)$ уравнение движения имеет вид

$$\frac{d^2\varphi}{d\eta^2} + \frac{d}{d\eta}\left[k^2\eta^2\left(\frac{d\varphi}{d\eta} - \alpha \mathrm{S}_*\right)^2\right] = -\frac{1}{\mathrm{R}_*}, \tag{258}$$

а его первый интеграл

$$\frac{d\varphi}{d\eta} + k^2\eta^2\left(\frac{d\varphi}{d\eta} - \alpha \mathrm{S}_*\right)^2 = 1 - \frac{\eta}{\mathrm{R}_*}. \tag{259}$$

Для поперечного поля $(0, B_y, 0)$ уравнение движения

$$\frac{d^2\varphi}{d\eta^2} + \frac{d}{d\eta}\left[k^2\eta^2 \frac{d\varphi}{d\eta}\left(\frac{d\varphi}{d\eta} - \alpha \mathrm{S}_*\right)\right] - \mathrm{S}_*\varphi = -\frac{1}{\mathrm{R}_*} - \mathrm{S}_*\varphi_{\text{ср}}. \tag{260}$$

где в соответствии с (253) $\varphi_{ср} = \int_0^{R_*} \varphi \, d\eta$. Интегрирование уравнения (260) выполняется с помощью ЭВМ.

Принимая во внимание наличие ламинарного подслоя с линейным профилем скорости и полагая, что в канале, как и в случае турбулентного пограничного слоя, параметры подслоя, согласно (246), (247) и (253), отвечают постоянному значению локального числа Рейнольдса на его границе

$$R_л = \sigma u_л \delta_л / \mu = \eta_л^2 = 156.$$

т. е. $\eta_л = \delta_л / l_* = 12{,}5$, получим (в пределах «двухслойной» модели течения) с помощью уравнений (255), (258) и (260) напряжения трения на стенке канала и профили скорости при соответствующих ориентациях магнитного поля.

Из сопоставления расчетных и экспериментальных данных было подобрано постоянное значение коэффициента α в формулах (239): $\alpha = 0{,}22$.

Решение уравнений проводится следующим образом:

а) задаются значениями числа Гартмана Ha и числа Рейнольдса R_*;

б) проводится интегрирование уравнения движения от стенки ($\eta = 0$) до оси канала ($\eta = R_*$) с использованием начальных условий $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 1$;

в) при $\varphi = \frac{d\varphi}{d\eta} < \alpha S_*$ решение несправедливо, так как, согласно (239), при $\frac{d\varphi}{d\eta} = \alpha S_*$ напряжение турбулентного трения равно нулю ($\tau = 0$).

Получив профиль скорости $\varphi(\eta)$ и определив среднюю скорость $\varphi_{ср} = \int_0^{R_*} \varphi \, d\eta$, найдем напряжение трения на стенке канала τ_w и коэффициент трения

$$\lambda = 8\tau_w / \rho u_{ср}^2 = 8/\varphi_{ср}^2. \qquad (261)$$

Зависимость $\lambda(R)$ получается в параметрической форме, поскольку

$$R = 4\rho u_{ср} b / \mu = 4 R_* \varphi_{ср}.$$

Объем вычислений существенно сокращается при использовании логарифмического шага по аргументу η.

На рис. 13.23 показан результат расчета по двухслойной схеме течения в плоском канале в окружном магнитном поле $(0, 0, B_z)$, направленном параллельно длиной стороне поперечного сечения (пунктир), и в продольном поле $(B_x, 0, 0)$ (штрих-пунктир) при одном значении числа Гартмана $\mathrm{Ha} = 112{,}4$.

Для сравнения нанесена экспериментальная кривая, полученная при окружном магнитном поле. Сопоставление пунктирной и штрих-пунктирной линий характеризует влияние ориентации поля на величину коэффициента трения в канале.

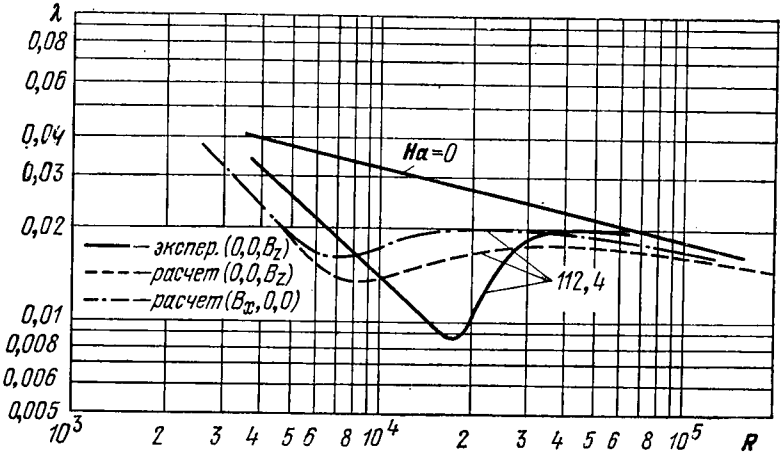


Рис. 13.23. Зависимость коэффициента трения в плоском канале от числа Рейнольдса при поперечном (окружном) магнитном поле, параллельном длинной стороне прямоугольного сечения канала (0, 0, B_z), и продольном магнитном поле (B_x, 0, 0).

На рис. 13.24 представлена зависимость коэффициента трения от числа Рейнольдса для течения в плоском канале при наличии поперечного магнитного поля $(0, B_y, 0)$. Расчетные кривые даны пунктиром, экспериментальные — сплошными линиями.

На рис. 13.25 изображены расчетные профили скорости в плоском канале, полученные при продольном $(B_x, 0, 0)$ и окружном $(0, 0, B_z)$ магнитных полях и при отсутствии поля ($\mathrm{Ha} = 0$) для одних и тех же значений чисел Гартмана ($\mathrm{Ha} = 112$) и Рейнольдса ($\mathrm{R} = 15\,000$). Как видим, при таких ориентациях поля последнее способствует уменьшению наполненности профиля скорости.

На рис. 13.26 представлены профили скорости при наличии поперечного магнитного поля $(0, B_y, 0)$ и при отсутствии поля (На = 0); поперечное магнитное поле вызывает увеличение наполненности профиля скорости, что объясняется влиянием осредненных электромагнитных сил, направленных параллельно течению жидкости.

Описанный способ решения задачи (двухслойная модель) пригоден только в условиях развитого турбулентного течения.

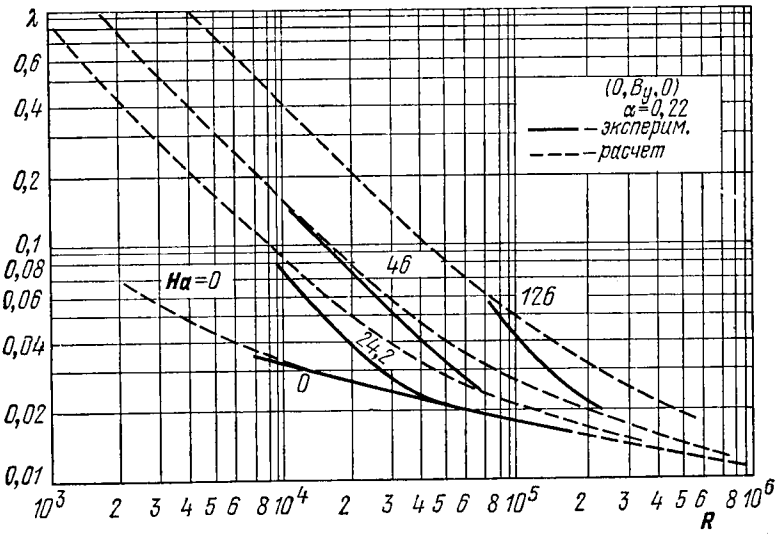


Рис. 13.24. Зависимость коэффициента трения в плоском канале от числа Рейнольдса при поперечном магнитном поле, параллельном короткой стороне поперечного сечения канала (0, B_y, 0).

Для учета роли вязкости в пристенной области и с целью получения результатов, справедливых в широком диапазоне чисел Рейнольдса, вплоть до ламинарного режима течения), можно использовать формулу для пути смешения, предложенную в работе И. Г. Васецкой и В. А. Иоселевича [1]) в развитие идей Л. Г. Лойцянского, Ван-Дриста, М. Д. Миллионщикова, Л. А. Вулиса [2]):

$$l = ky\left(1 - \exp\frac{-AF}{\varphi'}\right), \qquad (262)$$

[1]) Васецкая И. Г., Иоселевич В. А., О построении полуэмпирической теории турбулентности слабых растворов полимеров, Изв. АН СССР, МЖГ, № 2, 1970.

[2]) Миллионщиков М. Д., Турбулентные течения в пограничном слое и трубах», «Наука», М., 1969.

где выражение в скобках обеспечивает резкое убывание пути смешения при приближении к стенке (за счет больших значений градиента скорости $\varphi' = d\varphi/d\eta$) и при приближении режима течения в целом к критическому в связи с убыванием функции F, имеющей вид

$$F = n\left(1 - \frac{R_{0*}}{R_*}\right)^{0,6}(R_* - R_{0*}). \qquad (263)$$

Здесь R_{0*} — значение числа Рейнольдса при переходе ламинарного режима в турбулентный, зависящее от магнитного поля

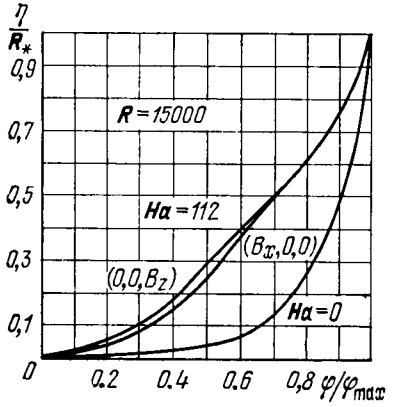


Рис. 13.25. Профили скорости в плоском канале при продольном (B_x, 0, 0) и окружном (0, 0, B_z) магнитных полях.

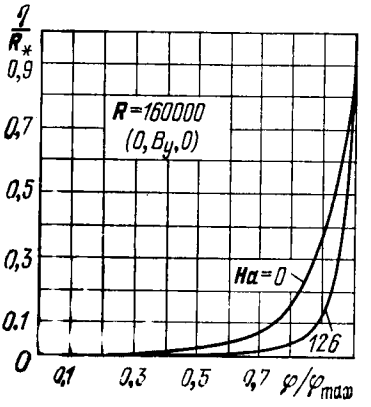


Рис. 13.26. Профиль скорости в плоском канале при поперечном магнитном поле (0, B_y, 0).

(берется по данным эксперимента); $n = 1$ при $R_* > R_{0*}$ и $n = 0$ при $R_* < R_{0*}$; коэффициент $A = 0{,}168$.

Интегрирование уравнения движения с учетом выражений (262) и (263) и эмпирической зависимости [1]) критического числа Рейнольдса от числа Гартмана $R_{0*}(Ha)$, выполненное численным методом на ЭВМ, позволяет найти профиль скорости и установить зависимость величины коэффициента трения от значений чисел Гартмана и Рейнольдса, которая лучше согласуется с опытными данными, чем при использовании «двухслойной» модели и, что особенно важно, справедлива вплоть до перехода к ламинарному режиму течения.

---

[1]) Брановер Г. Г., Цинобер А. Б., Магнитная гидродинамика несжимаемых сред, «Наука», М., 1970.

На рис. 13.27 и 13.28 представлены зависимости $\lambda(R)$ для широкого диапазона значений Ha и R, соответственно при продольной $(B_x, 0, 0)$ и окружной $(0, 0, B_z)$ ориентациях магнитного поля. Сплошными линиями даны расчетные кривые, точками — экспериментальные данные, которые для всех рисунков этого параграфа заимствованы из монографии, ссылка на которую приведена на стр. 850.

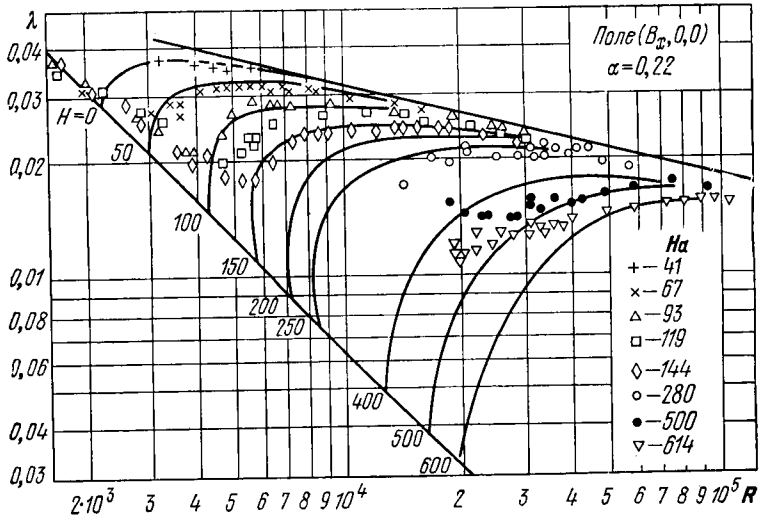


Рис. 13.27. Сравнение с экспериментом теоретической зависимости коэффициента трения от числа Рейнольдса в плоском канале при продольном магнитном поле $(B_x, 0, 0)$.

В 1967—1973 гг. опубликовано несколько экспериментальных и теоретических работ, посвященных исследованию магнитогидродинамических свободных струй, которые привели к построению полуэмпирической теории турбулентной струи, находящейся в магнитном поле [1]).

Опыт показывает, что в продольном магнитном поле форма профиля продольной составляющей скорости в струе остается практически такой же, как и при отсутствии магнитного поля. Это и естественно, так как остаются неизменными граничные условия, которые на обоих краях пограничного слоя струи требуют равенства нулю поперечного градиента скорости $(\partial u/\partial y = 0)$.

---

[1]) Абрамович Г. Н., Ковнер Д. С., Колпаков А. Я., Лущик В. Г., О влиянии магнитного поля на турбулентное течение со сдвигом, Магнитная гидродинамика, № 1, 1973.

Ввиду того, что в большей своей части струйный профиль скорости близок к линейному, локальный критерий МГД-взаимодействия (238) можно считать приблизительно постоянным в поперечном сечении струи и равным

$$S_l \approx \frac{\sigma B^2 b}{\rho \Delta u}; \tag{264}$$

здесь b — толщина слоя смешения, $\Delta u = u_1 - u_2$ разность скоростей на его границах. Но тогда, согласно (239), относительное

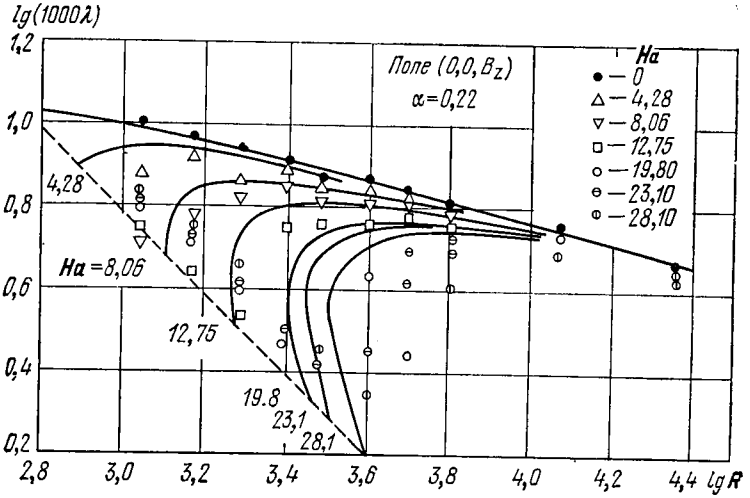


Рис. 13.28. Сравнение с экспериментом теоретической зависимости коэффициента трения от числа Рейнольдса в плоском канале при окружном магнитном поле (0, 0, B_z).

уменьшение напряжения трения под действием магнитного поля во всех точках поперечного сечения струи одинаково:

$$\frac{\tau}{\tau_{B=0}} = \psi(S_l). \tag{265}$$

Если ввести следующие переменные:

$$\tilde{x} = \int_0^x \psi\, dx, \quad \tilde{v} = \frac{v}{\psi}, \tag{266}$$

то уравнение плоского турбулентного движения (225) при действии продольного $(B_x, 0, 0)$ или окружного $(0, 0, B_z)$ магнит-

ных полей, когда электромагнитная сила в осредненном движении отсутствует, имеет такой же вид, как и при отсутствии магнитного поля

$$u\frac{\partial u}{\partial \tilde{x}}+\tilde{v}\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{B=0}}{\partial y}. \tag{267}$$

Здесь давление принято постоянным ($\partial p/\partial x = 0$) и молекулярное трение опущено, так как оно мало по сравнению с турбулентным трением.

Уравнение (267) для различных случаев свободной струи решено, поэтому остается осуществить переход из плоскости $(\tilde{x}, y)$ в физическую плоскость (x, y) в каждом конкретном случае.

В слое смешения двух полубесконечных струй в отсутствие магнитного поля толщина зоны смешения изменяется линейно с расстоянием ($b = cx$):

$$b = c\tilde{x}, \tag{268}$$

где c — эмпирическая постоянная в теории струи.

Установим связь между переменными x и $\tilde{x}$, для чего подставим зависимость напряжения турбулентного трения от магнитного поля (239) в (265).

В случае продольного магнитного поля $(B_x, 0, 0)$ получим

$$\psi_x = 1 - \alpha S_l \tag{269}$$

или, согласно (264) и (268),

$$\psi_x = 1 - \frac{\alpha\sigma B_x^2 c\tilde{x}}{\rho\Delta u}. \tag{270}$$

Из (270) и (266) имеем

$$\frac{d\tilde{x}}{1-\dfrac{\alpha\sigma B_x^2 c\tilde{x}}{\rho\,\Delta u}}=\frac{d\tilde{x}}{dx},$$

откуда

$$-\frac{\rho\,\Delta u}{\alpha\sigma B_x^2 c}\ln\left(1-\frac{\alpha\sigma B_x^2 c\tilde{x}}{\rho\,\Delta u}\right)=x+C_1.$$

Но $\tilde{x} = 0$ при $x = 0$, поэтому $C_1 = 0$ и, следовательно, при действии продольного магнитного поля на слой смешения

$$\frac{\tilde{x}}{x}=\frac{1-e^{-S_{xx}}}{S_{xx}}, \tag{271}$$

где

$$S_{xx} = \frac{\alpha c \sigma B_x^2 x}{\rho \Delta u}. \tag{272}$$

Если слой смешения проводящей жидкости находится в окружном магнитном поле $(0, 0, B_z)$, то, согласно (239), (264), (265) и (268),

$$\psi_z = (1 - \alpha S_l)^2 = \left(1 - \frac{\alpha \sigma B_z^2 c \tilde{x}}{\rho \Delta u}\right)^2, \tag{273}$$

или с учетом (266)

$$\frac{d\tilde{x}}{\left(1 - \frac{\alpha \sigma B_z^2 c \tilde{x}}{\rho \Delta u}\right)^2} = dx;$$

отсюда

$$\frac{1}{1 - \frac{\alpha c \sigma B_z^2 \tilde{x}}{\rho \Delta u}} = \frac{\alpha c \sigma B_z^2 x}{\rho \Delta u} + C_1.$$

Однако $\tilde{x} = 0$ при $x = 0$, т. е. $C_1 = 1$; поэтому при действии окружного магнитного поля на слой смешения

$$\frac{\tilde{x}}{x} = \frac{1}{1 + S_{xz}}; \tag{274}$$

здесь

$$S_{xz} = \frac{\alpha c \sigma B_z^2 x}{\rho \Delta u}. \tag{275}$$

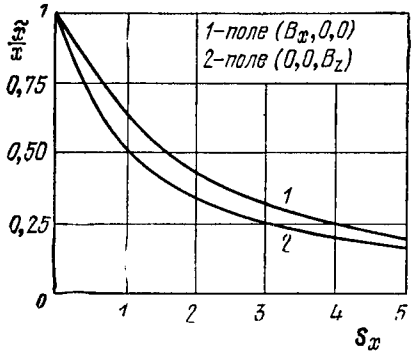


Рис. 13.29. Зависимость отношения приведенной длины к истинной длине плоского слоя смешения турбулентной струи от параметра МГД-взаимодействия при продольном магнитном поле.

Сопоставление кривых $\frac{\tilde{x}}{x}(S_x)$ для продольного и окружного магнитных полей приведено на рис. 13.29. В обоих случаях с усилением магнитного поля толщина зоны смешения в фиксированном сечении уменьшается ($\tilde{x} < x$), причем воздействие окружного поля сильнее, чем продольного.

Имеющиеся экспериментальные данные о воздействии продольного магнитного поля на слой смешения (в начальном участке струи) относятся к случаю, когда начальная толщина слоя

смешения не равна нулю, так как спутные потоки стекают с разделяющей стенки, по обе стороны которой имеются пограничные слои. Если считать, что начальная толщина зоны смешения равна δ, то вместо (268) получаем

$$b = \delta + c\tilde{x}. \tag{276}$$

Подставив (276) в (264) и используя последовательно (269) и

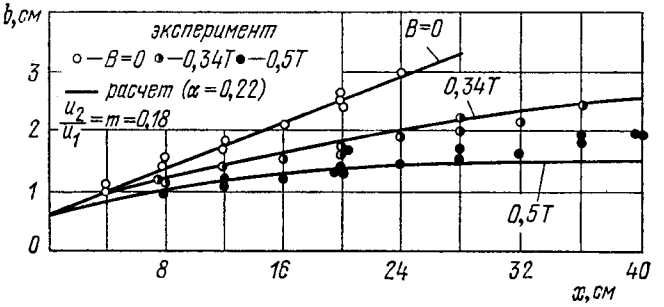


Рис. 13.30. Сравнение расчетных и экспериментальных толщин слоя смешения турбулентной струи при продольном магнитном поле.

(266), после соответствующих преобразований имеем

$$\frac{\tilde{x}}{x} = \frac{(1 - S_\delta)\left(1 - e^{-S_x}\right)}{S_x}, \tag{277}$$

где

$$S_\delta = \frac{\alpha\sigma B_x^2 \delta}{\rho\, \Delta u}. \tag{278}$$

В экспериментах [1]) получены следующие значения параметров:

$$\delta = 6{,}5 \text{ мм}, \quad \Delta u = 0{,}48 \text{ м/с}, \quad \sigma \approx 3{,}33 \cdot 10^6 \text{ См/м},$$

$$\rho = 6{,}4 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$$

(сплав индий—галлий—олово). При отсутствии поля получено значение константы $c = 0{,}095$ (толщина слоя смешения b опре-

[1]) Баушев Б. Н., Красильников Е. Ю., Лущик В. Г., Паневин И. Г., Смешение спутных струй в продольном магнитном поле. Изв. АН СССР, МЖГ, № 5, 1972, стр. 33—44.

делялась как расстояние между точками поперечного сечения, в которых $u - u_2 = 0{,}9\Delta u$, $u - u_2 = 0{,}1\Delta u$) и принято $\alpha = 0{,}22$.

Расчетные зависимости $b(x)$ для двух значений магнитной индукции продольного поля $B_{x1} = 0{,}34$Т и $B_{x2} = 0{,}5$Т, а также при отсутствии поля ($B_x = 0$) изображены на рис. 13.30 сплошными линиями, экспериментальные данные — точками трех типов. Как видим, получилось хорошее согласие расчета с экспериментом.

Аналогичным образом можно произвести теоретический расчет влияния магнитного поля на основные параметры осесимметричной струи проводящей жидкости, причем результаты экспериментов подтверждают расчетные данные [1]).

---

[1]) Saiben M., Fay I. A., Measurement of the growth of a turbulent mercury jet in a coaxial magnetic field, J. Fluid Mech., 1967, v. 27, p. 1, pp. 81; Преображенский С. С., Чиненков И. А., Экспериментальное исследование влияния магнитного поля на турбулентные струи проводящей жидкости, Магнитная гидродинамика, 1970, № 2, стр. 65.

ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Таблица для расчета сверхзвуковых течений газа с непрерывным увеличением скорости ($k = 1{,}4$)

$\delta°$	$\varphi°$	M	λ	p/p_0	ρ/ρ_0	T/T_0	$\alpha°$	r/r_*
0° 00′	0° 00′	1,000	1,000	0,528	0,634	0,833	90° 00′	1
0° 10′	13° 08′	1,026	1,022	0,512	0,620	0,826	77° 02′	1,027
0° 20′	16° 05′	1,039	1,032	0,504	0,613	0,822	74° 15′	1,041
0° 30′	18° 24′	1,051	1,042	0,497	0,607	0,819	72° 06′	1,049
0° 40′	20° 25′	1,062	1,051	0,490	0,601	0,816	70° 15′	1,065
0° 50′	22° 06′	1,073	1,060	0,484	0,596	0,813	68° 44′	1,077
1° 00′	23° 32′	1,083	1,067	0,479	0.591	0,810	67° 28′	1,087
1° 30′	27° 06′	1,109	1,088	0,463	0.577	0,803	64° 24′	1,108
2° 00′	30° 00′	1,133	1,107	0,450	0.565	0,796	62° 00′	1,147
2° 30′	32° 33′	1,155	1,125	0,464	0.553	0,789	59° 57′	1,176
3° 00′	34° 54′	1,178	1,142	0,424	0,542	0,783	58° 06′	1,205
3° 30′	37° 00′	1,199	1,157	0,413	0.532	0,777	56° 30′	1,234
4° 00′	38° 52′	1,219	1,172	0,402	0.522	0,771	55° 08′	1,262
4° 30′	40° 39′	1,238	1,186	0,392	0,513	0,766	53° 51′	1,290
5°	42° 18′	1,257	1,200	0,383	0.504	0,760	52° 42′	1,312
6°	45° 24′	1,294	1,227	0,364	0.497	0,749	50° 36′	1,372
7°	48° 18′	1,331	1,253	0,346	0.468	0,738	48° 42′	1,437
8°	51° 00′	1,367	1,277	0,330	0.452	0,728	47° 00′	1,498
9°	53° 28′	1,401	1,300	0,314	0.437	0,718	45° 32′	1,559
10°	55° 50′	1,435	1,323	0,299	0.422	0,708	44° 10′	1,626
11°	58° 06′	1,469	1,345	0,285	0.408	0,698	42° 54′	1,690
12°	60° 20′	1,504	1,367	0,271	0,393	0,688	41° 40′	1,772
13°	62° 24′	1,536	1,388	0,258	0.380	0,679	40° 36′	1,845
14°	64° 25′	1,569	1,408	0,246	0.367	0,670	39° 35′	1,923
15°	66° 24′	1,603	1,428	0,234	0.354	0,660	38° 36′	2,005
16°	68° 24′	1,639	1,448	0,222	0,341	0,650	37° 36′	2,094
17°	70° 18′	1,673	1,467	0,211	0,329	0,641	36° 42′	2,183
18°	72° 06′	1,705	1,486	0,201	0.318	0,632	35° 54′	2,291
19°	73° 57′	1,741	1,505	0,190	0,306	0,622	35° 03′	2,394

Продолжение

δ°	φ°	M	λ	p/p_0	ρ/ρ_0	T/T_0	α°	r/r_0
20°	75° 42′	1,775	1,523	0,181	0,295	0,613	34° 18′	2,500
21°	77° 27′	1,809	1,542	0,171	0,284	0,604	33° 33′	2,612
22°	79° 12′	1,846	1,559	0,162	0,273	0,595	32° 48′	2,735
23°	80° 52′	1,880	1,576	0,154	0,263	0,586	32° 08′	2,858
24°	82° 30′	1,914	1,594	0,146	0,253	0,576	31° 30′	2,993
25°	84° 10′	1,951	1,610	0,138	0,243	0,568	30° 50′	3,163
26°	85° 48′	1,988	1,628	0,130	0,233	0,558	30° 12′	3,319
27°	87° 24′	2,028	1,644	0,123	0,224	0,550	29° 33′	3,476
28°	89° 00′	2,063	1,660	0,116	0,215	0,541	29° 00′	3,647
29°	90° 30′	2,096	1,675	0,1100	0,207	0,532	28° 30′	3,820
30°	92° 00′	2,130	1,691	0,1040	0,198	0,523	28° 00′	4,046
31°	93° 36′	2,173	1,706	0,0980	0,190	0,515	27° 24′	4,256
32°	95° 05′	2,209	1,722	0,0920	0,182	0,506	26° 55′	4,436
33°	96° 33′	2,245	1,737	0,0867	0,174	0,497	26° 27′	4,710
34°	98° 03′	2,285	1,752	0,0814	0,167	0,488	25° 57′	4,955
35°	99° 33′	2,327	1,767	0,0764	0,159	0,480	25° 27′	5,236
36°	101° 00′	2,366	1,782	0,0717	0,152	0,471	25° 00′	5,521
37°	102° 30′	2,411	1,796	0,0672	0,145	0,462	24° 30′	5,741
38°	103° 57′	2,454	1,810	0,0630	0,139	0,454	24° 03′	6,166
39°	105° 24′	2,498	1,824	0,0590	0,132	0,446	23° 36′	6,472
40°	106° 48′	2,539	1,838	0,0552	0,126	0,437	23° 12′	6,919
41°	108° 12′	2,581	1,852	0,0514	0,120	0,428	22° 48′	7,362
42°	109° 36′	2,624	1,865	0,0481	0,114	0,420	22° 24′	7,758
43°	111° 00′	2,670	1,878	0,0450	0,109	0,412	22° 00′	8,260
44°	112° 21′	2,717	1,891	0,0419	0,104	0,404	21° 36′	8,710
45°	113° 48′	2,765	1,905	0,0388	0,098	0,395	21° 12′	9,184
46°	115° 12′	2,816	1,918	0,0360	0,093	0,387	20° 48′	9,954
47°	116° 36′	2,869	1,930	0,0334	0,088	0,379	20° 24′	10,57
48°	117° 54′	2,910	1,943	0,0310	0,084	0,371	20° 06′	11,20
49°	119° 15′	2,959	1,955	0,0288	0,079	0,363	19° 45′	11,97
50°	120° 36′	3,010	1,967	0,0267	0,075	0,355	19° 24′	12,94
51°	121° 57′	3,064	1,978	0,0249	0,071	0,348	19° 03′	13,62
52°	123° 18′	3,119	1,990	0,0229	0,067	0,340	18° 42′	14,72
53°	124° 38′	3,174	2,002	0,0211	0,063	0,332	18° 22′	15,78
54°	126° 00′	3,236	2,014	0,0194	0,060	0,324	18° 00′	16,90
55°	127° 18′	3,289	2,025	0,0178	0,056	0,316	17° 42′	18,62
56°	128° 36′	3,344	2,036	0,0164	0,053	0,309	17° 24′	19,49
57°	129° 55′	3,404	2,047	0,0151	0,050	0,302	17° 05′	20,89
58°	131° 15′	3,470	2,058	0,0138	0,047	0,294	16° 45′	22,49
59°	132° 36′	3,542	2,069	0,0126	0,044	0,286	16° 24′	24,38
60°	133° 54′	3,606	2,080	0,0115	0,041	0,279	16° 06′	26,30
61°	135° 10′	3,666	2,090	0,0105	0,039	0,272	15° 50′	28,32
62°	136° 30′	3,742	2,100	$0{,}954 \cdot 10^{-2}$	0,036	0,265	15° 30′	30,55
63°	137° 48′	3,814	2,111	$0{,}869 \cdot 10^{-2}$	0,034	0,258	15° 12′	33,89
64°	139° 03′	3,876	2,121	$0{,}784 \cdot 10^{-2}$	0,031	0,250	14° 57′	36,40

Продолжение

$\delta°$	$\varphi°$	M	λ	p/p_0	ρ/ρ_0	T/T_0	$\alpha°$	r/r_0
65°	140° 20′	3,949	2,130	$0{,}712 \cdot 10^{-2}$	0,029	0,244	14° 40′	39,63
66°	141° 36′	4,021	2,140	$0{,}645 \cdot 10^{-2}$	0,027	0,237	14° 24′	43,15
67°	142° 54′	4,124	2,150	$0{,}584 \cdot 10^{-2}$	0,025	0,230	14° 02′	47,85
68°	144° 12′	4,193	2,159	$0{,}525 \cdot 10^{-2}$	0,0235	0,223	13° 48′	51,62
69°	145° 27′	4,268	2,168	$0{,}474 \cdot 10^{-2}$	0,0219	0,217	13° 33′	56,00
70°	146° 42′	4,348	2,177	$0{,}426 \cdot 10^{-2}$	0,0203	0,210	13° 18′	62,50
71°	147° 57′	4,429	2,186	$0{,}380 \cdot 10^{-2}$	0,0187	0,204	13° 03′	68,50
72°	149° 12′	4,515	2,195	$0{,}339 \cdot 10^{-2}$	0,0172	0,197	12° 48′	75,00
73°	150° 30′	4,621	2,204	$0{,}301 \cdot 10^{-2}$	0,0158	0,190	12° 30′	82,75
74°	151° 42′	4,695	2,212	$0{,}270 \cdot 10^{-2}$	0,0146	0,184	12° 18′	91,20
75°	153° 00′	4,810	2,220	$0{,}241 \cdot 10^{-2}$	0,0135	0,179	12° 00′	101,4
76°	154° 15′	4,912	2,228	$0{,}214 \cdot 10^{-2}$	0,0124	0,173	11° 45′	111,7
77°	155° 30′	5,015	2,237	$0{,}186 \cdot 10^{-2}$	0,0112	0,166	11° 30′	123,5
78°	156° 45′	5,126	2,244	$0{,}165 \cdot 10^{-2}$	0,0103	0,160	11° 15′	143,3
79°	158° 00′	5,241	2,252	$0{,}145 \cdot 10^{-2}$	$0{,}940 \cdot 10^{-2}$	0,155	11° 00′	154,8
80°	159° 15′	5,362	2,260	$0{,}126 \cdot 10^{-2}$	$0{,}851 \cdot 10^{-2}$	0,149	10° 45′	177,0
81°	160° 30′	5,488	2,267	$0{,}112 \cdot 10^{-2}$	$0{,}780 \cdot 10^{-2}$	0,144	10° 30′	196,8
82°	161° 42′	5,593	2,274	$0{,}971 \cdot 10^{-3}$	$0{,}705 \cdot 10^{-2}$	0,138	10° 18′	219,8
83°	162° 57′	5,731	2,282	$0{,}836 \cdot 10^{-3}$	$0{,}633 \cdot 10^{-2}$	0,132	10° 03′	247,0
84°	164° 12′	5,875	2,289	$0{,}722 \cdot 10^{-3}$	$0{,}570 \cdot 10^{-2}$	0,127	9° 48′	279,3
85°	165° 27′	6,028	2,296	$0{,}631 \cdot 10^{-3}$	$0{,}518 \cdot 10^{-2}$	0,122	9° 33′	316,2
86°	166° 42′	6,188	2,302	$0{,}545 \cdot 10^{-3}$	$0{,}466 \cdot 10^{-2}$	0,117	9° 18′	361,0
87°	167° 54′	6,321	2,309	$0{,}460 \cdot 10^{-3}$	$0{,}413 \cdot 10^{-2}$	0,111	9° 06′	409,0
88°	169° 06′	6,464	2,315	$0{,}398 \cdot 10^{-3}$	$0{,}373 \cdot 10^{-2}$	0,107	8° 54′	466,0
89°	170° 21′	6,649	2,321	$0{,}340 \cdot 10^{-3}$	$0{,}333 \cdot 10^{-2}$	0,102	8° 39′	537,0
90°	171° 36′	6,845	2,328	$0{,}285 \cdot 10^{-3}$	$0{,}294 \cdot 10^{-2}$	0,097	8° 24′	631,0
91°	172° 48′	7,013	2,334	$0{,}236 \cdot 10^{-3}$	$0{,}257 \cdot 10^{-2}$	0,092	8° 12′	724,5
92°	174° 00′	7,184	2,340	$0{,}197 \cdot 10^{-3}$	$0{,}226 \cdot 10^{-2}$	0,087	8° 00′	841,2
93°	175° 15′	7,413	2,345	$0{,}168 \cdot 10^{-3}$	$0{,}202 \cdot 10^{-2}$	0,083	7° 45′	977,0
94°	176° 27′	7,610	2,350	$0{,}139 \cdot 10^{-3}$	$0{,}176 \cdot 10^{-2}$	0,079	7° 33′	1135
95°	177° 40′	7,837	2,356	$0{,}114 \cdot 10^{-3}$	$0{,}153 \cdot 10^{-2}$	0,075	7° 20′	1334
96°	178° 54′	8,091	2,361	$0{,}954 \cdot 10^{-4}$	$0{,}134 \cdot 10^{-2}$	0,071	7° 06′	1478
97°	179° 06′	8,326	2,366	$0{,}778 \cdot 10^{-4}$	$0{,}116 \cdot 10^{-2}$	0,067	6° 54′	1622
98°	181° 21′	8,636	2,371	$0{,}628 \cdot 10^{-4}$	$0{,}996 \cdot 10^{-3}$	0,063	6° 39′	2240
99°	182° 34′	8,928	2,376	$0{,}502 \cdot 10^{-4}$	$0{,}849 \cdot 10^{-3}$	0,059	6° 26′	2680
100°	183° 48′	9,259	2,380	$0{,}403 \cdot 10^{-4}$	$0{,}726 \cdot 10^{-3}$	0,055	6° 12′	3092
101°	185° 00′	9,569	2,385	$0{,}321 \cdot 10^{-4}$	$0{,}617 \cdot 10^{-3}$	0,052	6° 00′	3890
102°	186° 12′	9,891	2,389	$0{,}257 \cdot 10^{-4}$	$0{,}526 \cdot 10^{-3}$	0,049	5° 48′	4730
103°	187° 24′	10,245	2,393	$0{,}202 \cdot 10^{-4}$	$0{,}444 \cdot 10^{-3}$	0,046	5° 36′	6080
104°	188° 36′	10,626	2,397	$0{,}156 \cdot 10^{-4}$	$0{,}368 \cdot 10^{-3}$	0,042	5° 24′	7440
105°	189° 48′	11,037	2,401	$0{,}118 \cdot 10^{-4}$	$0{,}302 \cdot 10^{-3}$	0,039	5° 12′	9360
130° 27′	220° 27′	∞	2,449	0	0	0	0° 00′	∞

ПРИЛОЖЕНИЕ II

$k = 1{,}4$

Таблица газодинамических функций

λ	τ	π	ε	q	y	f	r	M
0,00	1,0000	1,0000	1,0000	0,0000	0,0000	1,0000	1,0000	0,0000
0,01	1,0000	0,9999	0,9999	0,0158	0,0158	1,0000	0,9999	0,0091
0,02	0,9999	0,9998	0,9998	0,0315	0,0316	1,0002	0,9996	0,0183
0,03	0,9998	0,9995	0,9996	0,0473	0,0473	1,0006	0,9989	0,0274
0,04	0,9997	0,9990	0,9993	0,0631	0,0631	1,0009	0,9981	0,0365
0,05	0,9996	0,9986	0,9990	0,0788	0,0789	1,0015	0,9971	0,0457
0,06	0,9994	0,9979	0,9985	0,0945	0,0947	1,0021	0,9958	0,0548
0,07	0,9992	0,9971	0,9979	0,1102	0,1105	1,0028	0,9943	0,0639
0,08	0,9989	0,9963	0,9974	0,1259	0,1263	1,0038	0,9925	0,0731
0,09	0,9986	0,9953	0,9967	0,1415	0,1422	1,0047	0,9906	0,0822
0,10	0,9983	0,9942	0,9959	0,1571	0,1580	1,0058	0,9885	0,0914
0,11	0,9980	0,9929	0,9949	0,1726	0,1739	1,0070	0,9860	0,1005
0,12	0,9976	0,9916	0,9940	0,1882	0,1897	1,0083	0,9834	0,1097
0,13	0,9972	0,9901	0,9929	0,2036	0,2056	1,0100	0,9806	0,1190
0,14	0,9967	0,9886	0,9918	0,2190	0,2216	1,0113	0,9776	0,1280
0,15	0,9963	0,9870	0,9907	0,2344	0,2375	1,0129	0,9744	0,1372
0,16	0,9957	0,9851	0,9893	0,2497	0,2535	1,0147	0,9709	0,1460
0,17	0,9952	0,9832	0,9880	0,2649	0,2695	1,0165	0,9673	0,1560
0,18	0,9946	0,9812	0,9866	0,2801	0,2855	1,0185	0,9634	0,1650
0,19	0,9940	0,9791	0,9850	0,2952	0,3015	1,0206	0,9594	0,1740
0,20	0,9933	0,9768	0,9834	0,3102	0,3176	1,0227	0,9551	0,1830
0,21	0,9927	0,9745	0,9817	0,3252	0,3337	1,0250	0,9507	0,1920
0,22	0,9919	0,9720	0,9799	0,3401	0,3499	1,0274	0,9461	0,2020
0,23	0,9912	0,9695	0,9781	0,3549	0,3660	1,0298	0,9414	0,2109
0,24	0,9904	0,9668	0,9762	0,3696	0,3823	1,0315	0,9373	0,2202

0,25	0,9896	0,9640	0,9742	0,3842	0,3985	1,0350	0,9314	0,2290
0,26	0,9887	0,9611	0,9721	0,3987	0,4148	1,0378	0,9261	0,2387
0,27	0,9879	0,9581	0,9699	0,4131	0,4311	1,0406	0,9207	0,2480
0,28	0,9869	0,9550	0,9677	0,4274	0,4475	1,0435	0,9152	0,2573
0,29	0,9860	0,9518	0,9653	0,4416	0,4640	1,0465	0,9095	0,2670
0,30	0,9850	0,9485	0,9630	0,4557	0,4804	1,0496	0,9037	0,2760
0,31	0,9840	0,9451	0,9605	0,4697	0,4970	1,0528	0,8977	0,2850
0,32	0,9829	0,9415	0,9579	0,4835	0,5135	1,0559	0,8917	0,2947
0,33	0,9819	0,9379	0,9552	0,4972	0,5302	1,0593	0,8854	0,3040
0,34	0,9807	0,9342	0,9525	0,5109	0,5469	1,0626	0,8791	0,3134
0,35	0,9796	0,9303	0,9497	0,5243	0,5636	1,0661	0,8727	0,3228
0,36	0,9784	0,9265	0,9469	0,5377	0,5804	1,0696	0,8662	0,3322
0,37	0,9772	0,9224	0,9439	0,5509	0,5973	1,0732	0,8595	0,3417
0,38	0,9759	0,9183	0,9409	0,5640	0,6142	1,0768	0,8528	0,3511
0,39	0,9747	0,9141	0,9378	0,5769	0,6312	1,0805	0,8460	0,3606
0,40	0,9733	0,9097	0,9346	0,5897	0,6482	1,0842	0,8391	0,3701
0,41	0,9720	0,9053	0,9314	0,6024	0,6654	1,0880	0,8321	0,3796
0,42	0,9706	0,9008	0,9281	0,6149	0,6826	1,0918	0,8251	0,3892
0,43	0,9692	0,8962	0,9247	0,6272	0,6998	1,0957	0,8179	0,3987
0,44	0,9677	0,8915	0,9212	0,6394	0,7172	1,0996	0,8108	0,4083
0,45	0,9663	0,8868	0,9178	0,6515	0,7346	1,1036	0,8035	0,4179
0,46	0,9647	0,8819	0,9142	0,6633	0,7521	1,1076	0,7963	0,4275
0,47	0,9632	0,8770	0,9105	0,6750	0,7697	1,1116	0,7889	0,4372
0,48	0,9616	0,8719	0,9067	0,6865	0,7874	1,1156	0,7816	0,4468
0,49	0,9600	0,8668	0,9029	0,6979	0,8052	1,1197	0,7741	0,4565
0,50	0,9583	0,8616	0,8991	0,7091	0,8230	1,1239	0,7666	0,4663
0,51	0,9567	0,8563	0,8951	0,7201	0,8409	1,1279	0,7592	0,4760
0,52	0,9549	0,8509	0,8911	0,7309	0,8590	1,1320	0,7517	0,4858
0,53	0,9532	0,8455	0,8871	0,7416	0,8771	1,1362	0,7442	0,4956
0,54	0,9514	0,8400	0,8829	0,7520	0,8953	1,1403	0,7366	0,5054

$k = 1{,}4$ *Продолжение*

λ	τ	π	ε	q	y	f	r	M
0,55	0,9496	0,8344	0,8787	0,7623	0,9136	1,1445	0,7290	0,5152
0,56	0,9477	0,8287	0,8744	0,7724	0,9321	1,1486	0,7215	0,5251
0,57	0,9459	0,8230	0,8701	0,7823	0,9506	1,1528	0,7139	0,5350
0,58	0,9439	0,8172	0,8657	0,7920	0,9692	1,1569	0,7064	0,5450
0,59	0,9420	0,8112	0,8612	0,8015	0,9880	1,1610	0,6987	0,5549
0,60	0,9400	0,8053	0,8567	0,8109	1,0069	1,1651	0,6912	0,5649
0,61	0,9380	0,7992	0,8521	0,8198	1,0258	1,1691	0,6836	0,5750
0,62	0,9359	0,7932	0,8475	0,8288	1,0449	1,1733	0,6760	0,5850
0,63	0,9339	0,7870	0,8428	0,8375	1,0641	1,1772	0,6685	0,5951
0,64	0,9317	0,7808	0,8380	0,8459	1,0842	1,1812	0,6610	0,6053
0,65	0,9296	0,7745	0,8332	0,8543	1,1030	1,1852	0,6535	0,6154
0,66	0,9274	0,7681	0,8283	0,8623	1,1226	1,1891	0,6460	0,6256
0,67	0,9252	0,7617	0,8233	0,8701	1,1423	1,1929	0,6386	0,6359
0,68	0,9229	0,7553	0,8183	0,8778	1,1622	1,1967	0,6311	0,6461
0,69	0,9207	0,7488	0,8133	0,8852	1,1822	1,2005	0,6237	0,6565
0,70	0,9183	0,7422	0,8082	0,8924	1,2024	1,2042	0,6163	0,6668
0,71	0,9160	0,7356	0,8030	0,8993	1,2227	1,2078	0,6090	0,6772
0,72	0,9136	0,7289	0,7978	0,9061	1,2431	1,2114	0,6017	0,6876
0,73	0,9112	0,7221	0,7925	0,9126	1,2637	1,2148	0,5944	0,6981
0,74	0,9087	0,7154	0,7872	0,9189	1,2845	1,2183	0,5872	0,7086
0,75	0,9063	0,7086	0,7819	0,9250	1,3054	1,2216	0,5800	0,7192
0,76	0,9037	0,7017	0,7764	0,9308	1,3265	1,2249	0,5729	0,7298
0,77	0,9012	0,6948	0,7710	0,9364	1,3478	1,2280	0,5658	0,7404
0,78	0,8986	0,6878	0,7655	0,9418	1,3692	1,2311	0,5587	0,7511
0,79	0,8960	0,6809	0,7599	0,9469	1,3908	1,2341	0,5517	0,7619
0,80	0,8933	0,6738	0,7543	0,9518	1,4126	1,2370	0,5447	0,7727
0,81	0,8907	0,6668	0,7486	0,9565	1,4346	1,2398	0,5378	0,7835
0,82	0,8879	0,6597	0,7429	0,9610	1,4567	1,2425	0,5309	0,7944
0,83	0,8852	0,6526	0,7372	0,9652	1,4790	1,2451	0,5241	0,8053
0,84	0,8724	0,6454	0,7314	0,9691	1,5016	1,2475	0,5174	0,8163

0,85	0,8796	0,6382	0,7256	0,9729	1,5243	1,2498	0,5107	0,8274
0,86	0,8767	0,6310	0,7197	0,9764	1,5473	1,2520	0,5040	0,8384
0,87	0,8739	0,6238	0,7138	0,9796	1,5704	1,2541	0,4974	0,8496
0,88	0,8709	0,6165	0,7079	0,9826	1,5938	1,2560	0,4908	0,8608
0,89	0,8680	0,6092	0,7019	0,9854	1,6174	1,2579	0,4843	0,8721
0,90	0,8650	0,6019	0,6959	0,9879	1,6412	1,2595	0,4779	0,8833
0,91	0,8620	0,5946	0,6898	0,9902	1,6652	1,2611	0,4715	0,8947
0,92	0,8589	0,5873	0,6838	0,9923	1,6895	1,2625	0,4652	0,9062
0,93	0,8559	0,5800	0,6776	0,9941	1,7140	1,2637	0,4589	0,9177
0,94	0,8527	0,5726	0,6715	0,9957	1,7388	1,2648	0,4527	0,9292
0,95	0,8496	0,5653	0,6653	0,9970	1,7638	1,2658	0,4466	0,9409
0,96	0,8464	0,5579	0,6591	0,9981	1,7891	1,2666	0,4405	0,9526
0,97	0,8432	0,5505	0,6528	0,9989	1,8146	1,2671	0,4344	0,9644
0,98	0,8399	0,5431	0,6466	0,9953	1,8404	1,2676	0,4285	0,9761
0,99	0,8367	0,5357	0,6403	0,9999	1,8665	1,2678	0,4225	0,9880
1,00	0,8333	0,5283	0,6340	1,0000	1,8929	1,2679	0,4167	1,0000
1,01	0,8300	0,5209	0,6276	0,9999	1,9195	1,2678	0,4109	1,0120
1,02	0,8266	0,5135	0,6212	0,9995	1,9464	1,2675	0,4051	1,0241
1,03	0,8232	0,5061	0,6148	0,9989	1,9737	1,2671	0,3994	1,0363
1,04	0,8197	0,4987	0,6084	0,9980	2,0013	1,2664	0,3938	1,0486
1,05	0,8163	0,4913	0,6019	0,9969	2,0291	1,2655	0,3882	1,0609
1,06	0,8127	0,4840	0,5955	0,9957	2,0573	1,2646	0,3827	1,0733
1,07	0,8092	0,4766	0,5890	0,9941	2,0858	1,2633	0,3773	1,0858
1,08	0,8056	0,4693	0,5826	0,9924	2,1147	1,2620	0,3719	1,0985
1,09	0,8020	0,4619	0,5760	0,9903	2,1439	1,2602	0,3665	1,1111
1,10	0,7983	0,4546	0,5694	0,9880	2,1734	1,2584	0,3613	1,1239
1,11	0,7947	0,4473	0,5629	0,9856	2,2034	1,2564	0,3560	1,1367
1,12	0,7909	0,4400	0,5564	0,9829	2,2337	1,2543	0,3508	1,1496
1,13	0,7872	0,4328	0,5498	0,9800	2,2643	1,2519	0,3457	1,1627
1,14	0,7834	0,4255	0,5432	0,9768	2,2954	1,2491	0,3407	1,1758
1,15	0,7796	0,4184	0,5366	0,9735	2,3269	1,2463	0,3357	1,1890
1,16	0,7757	0,4111	0,5300	0,9698	2,3588	1,2432	0,3307	1,2023
1,17	0,7719	0,4040	0,5234	0,9659	2,3911	1,2398	0,3258	1,2157
1,18	0,7679	0,3969	0,5168	0,9620	2,4238	1,2364	0,3210	1,2292
1,19	0,7640	0,3898	0,5102	0,9577	2,4570	1,2326	0,3162	1,2428

$k = 1{,}4$ *Продолжение*

λ	τ	π	ε	q	y	l	r	M
1,20	0,7600	0,3827	0,5035	0,9531	2,4906	1,2283	0,3115	1,2566
1,21	0,7560	0,3757	0,4969	0,9484	2,5247	1,2244	0,3068	1,2708
1,22	0,7519	0,3687	0,4903	0,9435	2,5593	1,2200	0,3022	1,2843
1,23	0,7478	0,3617	0,4837	0,9384	2,5944	1,2154	0,2976	1,2974
1,24	0,7437	0,3548	0,4770	0,9331	2,6300	1,2105	0,2931	1,3126
1,25	0,7396	0,3479	0,4704	0,9275	2,6660	1,2054	0,2886	1,3268
1,26	0,7354	0,3411	0,4638	0,9217	2,7026	1,2000	0,2842	1,3413
1,27	0,7312	0,3343	0,4572	0,9159	2,7398	1,1946	0,2798	1,3558
1,28	0,7269	0,3275	0,4505	0,9096	2,7775	1,1887	0,2755	1,3705
1,29	0,7227	0,3208	0,4439	0,9033	2,8158	1,1826	0,2713	1,3853
1,30	0,7183	0,3142	0,4374	0,8969	2,8547	1,1765	0,2670	1,4002
1,31	0,7140	0,3075	0,4307	0,8901	2,8941	1,1699	0 2629	1,4153
1,32	0,7096	0,3010	0,4241	0,8831	2,9343	1,1632	0,2574	1,4305
1,33	0,7052	0,2945	0,4176	0,8761	2,9750	1,1562	0,2547	1,4458
1,34	0,7007	0,2880	0,4110	0,8688	3,0164	1,1490	0,2507	1,4613
1,35	0,6962	0,2816	0,4045	0,8614	3,0586	1,1417	0,2467	1,4769
1,36	0,6917	0,2753	0,3980	0,8538	3,1013	1,1341	0,2427	1,4927
1,37	0,6872	0,2690	0,3914	0,8459	3,1448	1,1261	0,2389	1,5087
1,38	0,6826	0,2628	0,3850	0,8380	3,1889	1,1180	0,2350	1,5248
1,39	0,6780	0,2566	0,3785	0,8299	3,2340	1,1098	0,2312	1,5410
1,40	0,6733	0,2505	0,3720	0,8216	3,2798	1,1012	0,2275	1,5575
1,41	0,6687	0,2445	0,3656	0,8131	3,3263	1,0924	0,2238	1,5741
1,42	0,6639	0,2385	0,3592	0,8046	3,3737	1,0835	0,2201	1,5909
1,43	0,6592	0,2326	0,3528	0,7958	3,4219	1,0742	0,2165	1,6078
1,44	0,6544	0,2267	0,3464	0,7869	3,4710	1,0648	0,2129	1,6250
1,45	0,6496	0,2209	0,3401	0,7778	3,5211	1,0551	0,2094	1,6423
1,46	0,6447	0,2152	0,3338	0,7687	3,5720	1,0453	0,2059	1,6598
1,47	0,6398	0,2095	0,3275	0,7593	3,6240	1,0351	0,2024	1,6776
1,48	0,6349	0,2040	0,3212	0,7499	3,6768	1,0249	0,1990	1,6955
1,49	0,6300	0,1985	0,3150	0,7404	3,7308	1,0144	0,1956	1,7137

1,50	0,6250	0,1930	0,3088	0,7307	3,7858	1,0037	0,1923	1,7321
1,51	0,6200	0,1876	0,3027	0,7209	3,8418	0,9927	0,1890	1,7506
1,52	0,6149	0,1824	0,2965	0,7110	3,8990	0,9816	0,1858	1,7694
1,53	0,6099	0,1771	0,2904	0,7009	3,9574	0,9703	0,1825	1,7885
1,54	0,6047	0,1720	0,2844	0,6909	4,0172	0,9590	0,1794	1,8078
1,55	0,5996	0,1669	0,2784	0,6807	4,0778	0,9472	0,1762	1,8273
1,56	0,5944	0,1619	0,2724	0,6703	4,1398	0,9353	0,1731	1,8471
1,57	0,5892	0,1570	0,2665	0,6599	4,2034	0,9233	0,1700	1,8672
1,58	0,5839	0,1522	0,2606	0,6494	4,2680	0,9111	0,1670	1,8875
1,59	0,5786	0,1474	0,2547	0,6389	4,3345	0,8988	0,1640	1,9081
1,60	0,5733	0,1427	0,2489	0,6282	4,4020	0,8861	0,1611	1,9290
1,61	0,5680	0,1381	0,2431	0,6175	4,4713	0,8734	0,1581	1,9501
1,62	0,5626	0,1336	0,2374	0,6067	4,5422	0,8604	0,1552	1,9716
1,63	0,5572	0,1291	0,2317	0,5958	4,6144	0,8474	0,1524	1,9934
1,64	0,5517	0,1248	0,2261	0,5850	4,6887	0,8343	0,1495	2,0155
1,65	0,5463	0,1205	0,2205	0,5740	4,7647	0,8210	0,1467	2,0380
1,66	0,5407	0,1163	0,2150	0,5630	4,8424	0,8075	0,1440	2,0607
1,67	0,5352	0,1121	0,2095	0,5520	4,9221	0,7939	0,1413	2,0839
1,68	0,5296	0,1081	0,2041	0,5409	5,0037	0,7802	0,1386	2,1073
1,69	0,5240	0,1041	0,1988	0,5298	5,0877	0,7664	0,1359	2,1313
1,70	0,5183	0,1003	0,1934	0,5187	5,1735	0,7524	0,1333	2,1555
1,71	0,5126	0,0965	0,1881	0,5075	5,3167	0,7383	0,1306	2,1802
1,72	0,5069	0,0928	0,1830	0,4965	5,3520	0,7243	0,1281	2,2053
1,73	0,5012	0,0891	0,1778	0,4852	5,4449	0,7100	0,1255	2,2308
1,74	0,4954	0,0856	0,1727	0,4741	5,5403	0,6957	0,1230	2,2567
1,75	0,4896	0,0821	0,1647	0,4630	5,6383	0,6813	0,1205	2,2831
1,76	0,4837	0,0787	0,1628	0,4520	5,7390	0,6669	0,1181	2,3100
1,77	0,4779	0,0754	0,1578	0,4407	5,8427	0,6523	0,1156	2,3374
1,78	0,4719	0,0722	0,1530	0,4296	5,9495	0,6378	0,1132	2,3653
1,79	0,4660	0,0691	0,1482	0,4185	6,0593	0,6232	0,1108	2,3937
1,80	0,4600	0,0660	0,1435	0,4075	6,1723	0,6085	0,1085	2,4227
1,81	0,4540	0,0630	0,1389	0,3965	6,2893	0,5938	0,1062	2,4523
1,82	0,4479	0,0602	0,1343	0,3855	6,4091	0,5791	0,1039	2,4824
1,83	0,4418	0,0573	0,1298	0,3746	6,5335	0,5644	0,1016	2,5132
1,84	0,4357	0,0546	0,1253	0,3638	6,6607	0,5497	0,0994	2,5449

$k = 1{,}4$

Продолжение

λ	τ	π	ε	q	y	f	r	M
1,85	0,4296	0,0520	0,1210	0,3530	6,7934	0,5349	0,0971	2,5766
1,86	0,4234	0,0494	0,1167	0,3423	6,9298	0,5202	0,0949	2,6094
1,87	0,4172	0,0469	0,1124	0,3316	7,0707	0,5055	0,0928	2,6429
1,88	0,4109	0,0445	0,1083	0,3211	7,2162	0,4909	0,0906	2,6772
1,89	0,4047	0,0422	0,1042	0,3105	7,3673	0,4762	0,0885	2,7123
1,90	0,3983	0,0399	0,1002	0,3002	7,5243	0,4617	0,0864	2,7481
1,91	0,3920	0,0377	0,0962	0,2898	7,6858	0,4472	0,0843	2,7849
1,92	0,3856	0,0356	0,0923	0,2797	7,8540	0,4327	0,0823	2,8225
1,93	0,3792	0,0336	0,0885	0,2695	8,0289	0,4183	0,0803	2,8612
1,94	0,3727	0,0316	0,0848	0,2596	8,2098	0,4041	0,0782	2,9007
1,95	0,3662	0,0297	0,0812	0,2497	8,3985	0,3899	0,0763	2,9414
1,96	0,3597	0,0279	0,0776	0,2400	8,5943	0,3758	0,0743	2,9831
1,97	0,3532	0,0262	0,0741	0,2304	8,7984	0,3618	0,0724	3,0301
1,98	0,3466	0,0245	0,0707	0,2209	9,0112	0,3480	0,0704	3,0701
1,99	0,3400	0,0229	0,0674	0,2116	9,2329	0,3343	0,0685	3,1155
2,00	0,3333	0,0214	0,0642	0,2024	9,464	0,3203	0,0668	3,1622
2,01	0,3267	0,0199	0,0610	0,1934	9,706	0,3074	0,0648	3,2104
2,02	0,3199	0,0185	0,0579	0,1845	9,961	0,2942	0,0630	3,2603
2,03	0,3132	0,0172	0,0549	0,1758	10,224	0,2811	0,0612	3,3113
2,04	0,3064	0,0159	0,0520	0,1672	10,502	0,2683	0,0594	3,3642
2,05	0,2996	0,0147	0,0491	0,1588	10,794	0,2556	0,0576	3,4190
2,06	0,2927	0,0136	0,0464	0,1507	11,102	0,2431	0,0558	3,4759
2,07	0,2859	0,0125	0,0437	0,1427	11,422	0,2309	0,0541	3,5343
2,08	0,2789	0,0115	0,0411	0,1348	11,762	0,2189	0,0524	3,5951
2,09	0,2720	0,0105	0,0386	0,1272	12,121	0,2070	0,0507	3,6583
2,10	0,2650	0,0096	0,0361	0,1198	12,500	0,1956	0,0490	3,7240
2,11	0,2580	0,0087	0,0338	0,1125	12,901	0,1843	0,0473	3,7922
2,12	0,2509	0,0079	0,0315	0,1055	13,326	0,1733	0,0457	3,8633
2,13	0,2439	0,0072	0,0294	0,0986	13,778	0,1626	0,0440	3,9376
2,14	0,2367	0,0065	0,0273	0,0921	14,259	0,1522	0,0424	4,0150

2,15	0,2296	0,0058	0,0253	0,0857	14,772	0,1420	0,0408	4,0961
2,16	0,2224	0,0052	0,0233	0,0795	15,319	0,1322	0,0393	4,1791
2,17	0,2152	0,0046	0,0215	0,0735	15,906	0,1226	0,0377	4,2702
2,18	0,2079	0,0041	0,0197	0,0678	16,537	0,1134	0,0361	4,3642
2,19	0,2006	0,0036	0,0180	0,0623	17,218	0,1045	0,0346	4,4633
2,20	0,1933	0,0032	0,0164	0,0570	17,949	0,0960	0,0331	4,5674
2,21	0,1860	0,0028	0,0149	0,0520	18,742	0,0878	0,0316	4,6778
2,22	0,1786	0,0024	0,0135	0,0472	19,607	0,0799	0,0301	4,7954
2,23	0,1712	0,0021	0,0121	0,0427	20,548	0,0724	0,0287	4,9201
2,24	0,1637	0,0018	0,0116	0,0408	21,983	0,0695	0,0255	5,0533
2,25	0,1563	0,00151	0,00966	0,0343	22,712	0,0585	0,0258	5,1958
2,26	0,1487	0,00127	0,00813	0,0290	23,968	0,0496	0,0256	5,3494
2,27	0,1412	0,00106	0,00749	0,0268	25,361	0,0461	0,0229	5,5147
2,28	0,1336	0,00087	0,00652	0,0234	26,893	0,0404	0,0216	5,6940
2,29	0,1260	0,00071	0,00564	0,0204	28,669	0,0352	0,0202	5,8891
2,30	0,1183	0,00057	0,00482	0,0175	30,658	0,0302	0,0189	6,1033
2,31	0,1106	0,00045	0,00407	0,0148	32,937	0,0258	0,0175	6,3399
2,32	0,1029	0,00035	0,00340	0,0124	35,551	0,0217	0,0161	6,6008
2,33	0,0952	0,00027	0,00280	0,0103	38,606	0,0180	0,0148	6,8935
2,34	0,0874	0,00020	0,00226	0,0083	42,233	0,0146	0,0135	7,2254
2,35	0,0796	$0{,}00014$	0,00170	0,0063	46,593	0,0111	0,0122	7,6053
2,36	0,0717	$0{,}988 \cdot 10^{-4}$	0,00138	0,0051	51,914	0,0090	0,0109	8,0450
2,37	0,0638	$0{,}657 \cdot 10^{-4}$	0,00103	0,0038	58,569	0,0068	0,0096	8,5619
2,38	0,0559	$0{,}413 \cdot 10^{-4}$	0,00074	0,0028	67,144	0,0049	0,0084	9,1882
2,39	0,0480	$0{,}242 \cdot 10^{-4}$	0,00050	0,0019	78,613	0,0034	0,0071	9,9624
2,40	0,0400	$0{,}128 \cdot 10^{-4}$	0,00032	0,0012	94,703	0,0022	0,0059	10,957
2,41	0,0320	$0{,}584 \cdot 10^{-5}$	0,00018	0,0007	118,94	0,0012	0,0047	12,306
2,42	0,0239	$0{,}211 \cdot 10^{-5}$	$0{,}884 \cdot 10^{-4}$	0,0003	159,65	0,0006	0,0035	14,287
2,43	0,0158	$0{,}499 \cdot 10^{-6}$	$0{,}315 \cdot 10^{-4}$	0,0001	242,16	0,0002	0,0025	17,631
2,44	0,0077	$0{,}316 \cdot 10^{-7}$	$0{,}410 \cdot 10^{-5}$	$0{,}058 \cdot 10^{-4}$	499,16	$0{,}285 \cdot 10^{-4}$	0,0011	25,367
2,449	0	0	0	0	∞	0	0	∞

$k = 1{,}33$

Продолжение

λ	τ	π	ε	q	y	f	r	M
0,00	1,0000	1,0000	1,0000	0,0000	0,0000	1,0000	1,0000	0,0000
0,01	1,0000	0,9999	0,9999	0,0159	0,0159	1,0000	1,0000	0,0093
0,02	0,9999	0,9998	0,9999	0,0318	0,0318	1,0003	0,9995	0,0185
0,03	0,9999	0,9995	0,9997	0,0476	0,0477	1,0006	0,9990	0,0278
0,04	0,9998	0,9991	0,9993	0,0635	0,0636	1,0009	0,9982	0,0371
0,05	0,9997	0,9986	0,9990	0,0793	0,0795	1,0015	0,9972	0,0463
0,06	0,9995	0,9980	0,9985	0,0952	0,0954	1,0021	0,9959	0,0556
0,07	0,9993	0,9972	0,9979	0,1110	0,1113	1,0028	0,9944	0,0649
0,08	0,9991	0,9964	0,9973	0,1267	0,1272	1,0037	0,9928	0,0742
0,09	0,9989	0,9954	0,9965	0,1425	0,1431	1,0046	0,9908	0,0834
0,10	0,9986	0,9944	0,9958	0,1582	0,1591	1,0057	0,9887	0,0927
0,11	0,9983	0,9932	0,9949	0,1738	0,1750	1,0069	0,9864	0,1020
0,12	0,9980	0,9918	0,9938	0,1894	0,1910	1,0081	0,9838	0,1113
0,13	0,9976	0,9904	0,9928	0,2052	0,2072	1,0096	0,9810	0,1206
0,14	0,9972	0,9889	0,9917	0,2205	0,2220	1,0111	0,9781	0,1299
0,15	0,9968	0,9872	0,9903	0,2360	0,2390	1,0126	0,9749	0,1392
0,16	0,9964	0,9854	0,9890	0,2514	0,2551	1,0143	0,9715	0,1485
0,17	0,9959	0,9836	0,9877	0,2667	0,2712	1,0162	0,9679	0,1578
0,18	0,9954	0,9816	0,9862	0,2820	0,2873	1,0181	0,9642	0,1672
0,19	0,9949	0,9796	0,9846	0,2972	0,3034	1,0202	0,9602	0,1765
0,20	0,9943	0,9774	0,9830	0,3123	0,3195	1,0223	0,9561	0,1858
0,21	0,9938	0,9751	0,9812	0,3273	0,3357	1,0245	0,9518	0,1952
0,22	0,9932	0,9728	0,9795	0,3423	0,3519	1,0269	0,9473	0,2045
0,23	0,9925	0,9702	0,9775	0,3571	0,3681	1,0292	0,9427	0,2139
0,24	0,9918	0,9675	0,9755	0,3719	0,3844	1,0317	0,9378	0,2233

0,25	0,9912	0,9648	0,9734	0,3866	0,4007	1,0343	0,9329	0,2327
0,26	0,9904	0,9619	0,9712	0,4011	0,4170	1,0369	0,9277	0,2420
0,27	0,9897	0,9590	0,9690	0,4156	0,4334	1,0396	0,9224	0,2515
0,28	0,9889	0,9560	0,9667	0,4300	0,4498	1,0425	0,9170	0,2609
0,29	0,9881	0,9529	0,9644	0,4443	0,4662	1,0455	0,9114	0,2703
0,30	0,9873	0,9496	0,9619	0,4584	0,4827	1,0485	0,9057	0,2797
0,31	0,9864	0,9463	0,9594	0,4724	0,4992	1,0516	0,8999	0,2892
0,32	0,9855	0,9428	0,9567	0,4863	0,5158	1,0547	0,8940	0,2986
0,33	0,9846	0,9393	0,9540	0,5001	0,5324	1 0579	0,8879	0,3081
0,34	0,9836	0,9356	0,9512	0,5137	0,5491	1,0612	0,8817	0,3176
0,35	0,9827	0,9319	0,9484	0,5273	0,5658	1,0645	0,8754	0,3271
0,36	0,9817	0,9281	0,9455	0,5407	0,5826	1,0680	0,8690	0,3366
0,37	0,9806	0,9241	0,9424	0,5539	0,5994	1,0714	0,8625	0,3462
0,38	0,9796	0,9201	0,9363	0,5670	0,6162	1,0750	0,8560	0,3557
0,39	0,9785	0,9159	0,9361	0,5799	0,6332	1,0785	0,8493	0,3653
0,40	0,9773	0,9118	0,9329	0,5928	0,6501	1,0822	0,8425	0,3749
0,41	0,9762	0,9075	0,9296	0,6055	0,6672	1,0859	0,8357	0,3845
0,42	0,9750	0,9030	0,9262	0,6179	0,6843	1,0896	0,8288	0,3941
0,43	0,9738	0,8985	0,9227	0,6303	0,7014	1,0933	0,8218	0,4037
0,44	0,9726	0,8940	0,9192	0,6425	0,7187	1,0972	0,8148	0,4134
0,45	0,9713	0,8893	0,9156	0,6545	0,7359	1,1010	0,8078	0,4230
0,46	0,9700	0,8850	0,9123	0,6666	0,7533	1,1053	0,8006	0,4305
0,47	0,9687	0,8797	0,9081	0,6780	0,7707	1,1088	0,7934	0,4424
0,48	0,9674	0,8749	0,9044	0,6896	0,7882	1,1128	0,7862	0,4522
0,49	0,9660	0,8699	0,9005	0,7009	0,8058	1,1167	0,7790	0,4619
0,50	0,9646	0,8648	0,8966	0,7121	0,8234	1,1207	0,7717	0,4717
0,51	0,9632	0,8596	0,8925	0,7230	0,8411	1,1246	0,7644	0,4815
0,52	0,9617	0,8544	0,8884	0,7339	0,8589	1,1287	0,7570	0,4913
0,53	0,9602	0,8491	0,8843	0,7445	0,8768	1,1327	0,7496	0,5011
0,54	0,9587	0,8436	0,8799	0,7548	0,8947	1,1365	0,7423	0,5110

$k = 1{,}33$ *Продолжение*

λ	τ	π	e	q	y	l	r	M
0,55	0,9572	0,8382	0,8757	0,7651	0,9128	1,1406	0,7349	0,5208
0,56	0,9556	0,8327	0,8714	0,7752	0,9309	1,1447	0,7275	0,5308
0,57	0,9540	0,8271	0,8670	0,7850	0,9491	1,1487	0,7200	0,5407
0,58	0,9524	0,8214	0,8625	0,7946	0,9674	1,1526	0,7126	0,5506
0,59	0,9507	0,8156	0,8579	0,8040	0,9858	1,1565	0,7052	0,5606
0,60	0,9490	0,8098	0,8533	0,8133	1,0043	1,1605	0,6978	0,5706
0,61	0,9473	0,8040	0,8487	0,8224	1,0229	1,1645	0,6904	0,5807
0,62	0,9456	0,7980	0,8439	0,8312	1,0416	1,1684	0,6830	0,5907
0,63	0,9438	0,7921	0,8393	0,8399	1,0604	1,1724	0,6756	0,6008
0,64	0,9420	0,7860	0,8344	0,8483	1,0792	1,1762	0,6683	0,6109
0,65	0,9402	0,7798	0,8294	0,8564	1,0982	1,1799	0,6609	0,6211
0,66	0,9383	0,7737	0,8246	0,8645	1,1173	1,1838	0,6536	0,6313
0,67	0,9364	0,7674	0,8195	0,8722	1,1366	1,1874	0,6463	0,6415
0,68	0,9345	0,7612	0,8145	0,8798	1,1559	1,1911	0,6390	0,6517
0,69	0,9326	0,7548	0,8094	0,8871	1,1753	1,1947	0,6318	0,6620
0,70	0,9306	0,7483	0,8041	0,8941	1,1949	1,1981	0,6246	0,6723
0,71	0,9286	0,7419	0,7989	0,9011	1,2146	1,2017	0,6174	0,6826
0,72	0,9266	0,7354	0,7937	0,9077	1,2343	1,2051	0,6102	0,6934
0,73	0,9245	0,7289	0,7884	0,9143	1,2543	1,2086	0,6031	0,7034
0,74	0,9224	0,7223	0,7830	0,9204	1,2743	1,2118	0,5961	0,7139
0,75	0,9203	0,7157	0,7777	0,9265	1,2945	1,2151	0,5890	0,7243
0,76	0,9182	0,7090	0,7722	0,9322	1,3148	1,2182	0,5820	0,7348
0,77	0,9160	0,7023	0,7666	0,9377	1,3353	1,2212	0,5751	0,7454
0,78	0,9138	0,6955	0,7611	0,9430	1,3559	1,2241	0,5682	0,7561
0,79	0,9116	0,6887	0,7555	0,9481	1,3766	1,2270	0,5613	0,7666

0,80	0,9091	0,6819	0,7499	0,9529	1,3975	1,2298	0,5545	0,7772
0,81	0,9071	0,6750	0,7442	0,9575	1,4185	1,2324	0,5477	0,7880
0,82	0,9048	0,6681	0,7384	0,9618	1,4397	1,2349	0,5410	0,7987
0,83	0,9024	0,6612	0,7326	0,9660	1,4610	1,2374	0,5343	0,8095
0,84	0,9001	0,6542	0,7268	0,9698	1,4825	1,2397	0,5277	0,8203
0,85	0,8977	0,6472	0,7210	0,9735	1,5042	1,2419	0,5211	0,8312
0,86	0,8953	0,6402	0,7151	0,9769	1,5260	1,2440	0,5146	0,8421
0,87	0,8928	0,6332	0,7092	0,9802	1,5479	1,2461	0,5082	0,8531
0,88	0,8903	0,6261	0,7032	0,9830	1,5701	1,2478	0,5018	0,8641
0,89	0,8878	0,6191	0,6973	0,9859	1,5924	1,2497	0,4954	0,8751
0,90	0,8853	0,6120	0,6913	0,9883	1,6149	1,2512	0,4891	0,8862
0,91	0,8827	0,6048	0,6852	0,9904	1,6376	1,2525	0,4829	0,8974
0,92	0,8801	0,5977	0,6791	0,9925	1,6605	1,2539	0,4767	0,9086
0,93	0,8775	0,5906	0,6730	0,9943	1,6835	1,2552	0,4705	0,9198
0,94	0,8749	0,5834	0,6669	0,9957	1,7068	1,2561	0,4645	0,9311
0,95	0,8722	0,5763	0,6608	0,9972	1,7302	1,2572	0,4584	0,9424
0,96	0,8695	0,5691	0,6545	0,9981	1,7539	1,2577	0,4525	0,9538
0,97	0,8667	0,5619	0,6483	0,9989	1,7778	1,2583	0,4466	0,9653
0,98	0,8640	0,5547	0,6420	0,9995	1,8018	1,2586	0,4407	0,9768
0,99	0,8612	0,5476	0,6359	1,0000	1,8261	1,2591	0,4349	0,9884
1,00	0,8584	0,5404	0,6296	1,0000	1,8506	1,2591	0,4292	1,0000
1,01	0,8555	0,5332	0,6233	1,0000	1,8754	1,2590	0,4235	1,0117
1,02	0,8527	0,5260	0,6169	0,9995	1,9003	1,2587	0,4179	1,0234
1,03	0,8497	0,5188	0,6105	0,9989	1,9255	1,2583	0,4123	1,0352
1,04	0,8468	0,5116	0,6042	0,9981	1,9509	1,2576	0,4068	1,0471
1,05	0,8439	0,5045	0,5979	0,9972	1,9766	1,2570	0,4014	1,0590
1,06	0,8409	0,4973	0,5914	0,9958	2,0025	1,2559	0,3960	1,0710
1,07	0,8379	0,4902	0,5850	0,9944	2,0286	1,2548	0,3906	1,0830
1,08	0,8348	0,4830	0,5785	0,9926	2,0550	1,2534	0,3854	1,0951
1.09	0,8317	0,4759	0,5722	0,9907	2,0818	1,2520	0,3801	1,1073

$k = 1{,}33$ *Продолжение*

λ	τ	π	ε	q	u	f	r	M
1,10	0,8286	0,4688	0,5658	0,9886	2,1087	1,2503	0,3750	1,1196
1,11	0,8255	0,4617	0,5593	0,9862	2,1360	1,2484	0,3698	1,1319
1,12	0,8223	0,4546	0,5528	0,9835	2,1635	1,2463	0,3648	1,1443
1,13	0,8192	0,4475	0,5463	0,9806	2,1913	1,2439	0,3598	1,1567
1,14	0,8159	0,4405	0,5399	0,9777	2,2194	1,2415	0,3548	1,1693
1,15	0,8127	0,4335	0,5334	0,9744	2,2478	1,2388	0,3499	1,1819
1,16	0,8094	0,4265	0,5269	0,9709	2,2765	1,2359	0,3451	1,1946
1,17	0,8061	0,4196	0,5205	0,9674	2,3055	1,2330	0,3403	1,2073
1,18	0,8028	0,4126	0,5140	0,9634	2,3349	1,2296	0,3356	1,2202
1,19	0,7994	0,4057	0,5075	0,9593	2,3646	1,2261	0,3309	1,2331
1,20	0,7961	0,3986	0,5007	0,9545	2,3940	1,2218	0,3263	1,2461
1,21	0,7926	0,3920	0,4946	0,9506	2,4249	1,2186	0,3217	1,2592
1,22	0,7892	0,3852	0,4881	0,9459	2,4556	1,2146	0,3172	1,2723
1,23	0,7857	0,3784	0,4816	0,9410	2,4867	1,2102	0,3127	1,2856
1,24	0,7822	0,3716	0,4751	0,9357	2,5181	1,2055	0,3083	1,2990
1,25	0,7787	0,3649	0,4686	0,9305	2,5500	1,2008	0,3039	1,3124
1,26	0,7752	0,3583	0,4622	0,9252	2,5821	1,1961	0,2996	1,3259
1,27	0,7716	0,3516	0,4557	0,9193	2,6147	1,1907	0,2953	1,3396
1,28	0,7680	0,3450	0,4493	0,9135	2,6477	1,1853	0,2911	1,3533
1,29	0,7643	0,3385	0,4429	0,9075	2,6811	1,1799	0,2869	1,3671
1,30	0,7606	0,3320	0,4365	0,9014	2,7149	1,1741	0,2828	1,3820
1,31	0,7570	0,3255	0,4300	0,8949	2,7492	1,1680	0,2787	1,3950
1,32	0,7532	0,3191	0,4236	0,8883	2,7838	1,1618	0,2747	1,4091
1,33	0,7495	0,3128	0,4173	0,8816	2,8190	1,1555	0,2707	1,4234
1,34	0,7457	0,3065	0,4110	0,8749	2,8545	1,1491	0,2667	1,4377

1,35	0,7419	0,3002	0,4046	0,8677	2,8905	1,1421	0,2629	1,4521
1,36	0,7380	0,2940	0,3984	0,8606	2,9271	1,1351	0,2590	1,4667
1,37	0,7342	0,2878	0,3920	0,8531	2,9642	1,1277	0,2552	1,4814
1,38	0,7303	0,2817	0,3857	0,8455	3,0017	1,1202	0,2515	1,4960
1,39	0,7264	0,2757	0,3796	0,8381	3,0398	1,1129	0,2477	1,5110
1,40	0,7224	0,2697	0,3733	0,8303	3,0784	1,1051	0,2441	1,5290
1,41	0,7184	0,2637	0,3671	0,8221	3,1176	1,0968	0,2404	1,5412
1,42	0,7144	0,2578	0,3609	0,8140	3,1573	1,0885	0,2368	1,5564
1,43	0,7104	0,2520	0,3548	0,8060	3,1977	1,0803	0,2333	1,5719
1,44	0,7063	0,2463	0,3487	0,7976	3,2386	1,0717	0,2298	1,5875
1,45	0,7022	0,2406	0,3426	0,7891	3,2802	1,0629	0,2263	1,6031
1,46	0,6981	0,2349	0,3365	0,7805	3,3222	1,0539	0,2229	1,6188
1,47	0,6940	0,2294	0,3305	0,7718	3,3649	1,0447	0,2195	1,6349
1,48	0,6898	0,2238	0,3245	0,7629	3,4083	1,0353	0,2162	1,6510
1,49	0,6856	0,2184	0,3186	0,7540	3,4524	1,0258	0,2129	1,6672
1,50	0,6813	0,2138	0,3126	0,7449	3,4972	1,0160	0,2097	1,6836
1,51	0,6771	0,2077	0,3067	0,7357	3,5426	1,0061	0,2064	1,7002
1,52	0,6728	0,2024	0,3009	0,7265	3,5890	0,9961	0,2032	1,7169
1,53	0,6685	0,1973	0,2951	0,7172	3,6358	0,9858	0,2001	1,7338
1,54	0,6641	0,1921	0,2893	0,7077	3,6836	0,9754	0,1970	1,7508
1,55	0,6597	0,1871	0,2836	0,6982	3,7321	0,9649	0,1939	1,7680
1,56	0,6553	0,1821	0,2779	0,6886	3,7813	0,9541	0,1909	1,7854
1,57	0,6509	0,1772	0,2722	0,6789	3,8316	0,9432	0,1879	1,8029
1,58	0,6464	0,1723	0,2666	0,6691	3,8825	0,9321	0,1849	1,8207
1,59	0,6420	0,1676	0,2610	0,6593	3,9345	0,9209	0,1820	1,8386
1,60	0,6374	0,1628	0,2554	0,6492	3,9874	0,9093	0,1791	1,8567
1,61	0,6329	0,1582	0,2500	0,6394	4,0410	0,8981	0,1762	1,8750
1,62	0,6283	0,1537	0,2446	0,6294	4,0957	0,8865	0,1734	1,8935
1,63	0,6237	0,1492	0,2392	0,6193	4,1514	0,8746	0,1706	1,9122
1,64	0,6191	0,1448	0,2338	0,6092	4,2080	0,8628	0,1678	1,9311

$k = 1{,}33$ *Продолжение*

λ	τ	π	ε	q	y	i	r	M
1,65	0,6144	0,1404	0,2286	0,5991	4,2659	0,8508	0,1651	1,9503
1,66	0,6097	0,1362	0,2233	0,5889	4,3250	0,8387	0,1623	1,9696
1,67	0,6050	0,1320	0,2181	0,5783	4,3849	0,8264	0,1597	1,9892
1,68	0,6003	0,1278	0,2130	0,5684	4,4458	0,8141	0,1570	2,0089
1,69	0,5955	0,1238	0,2079	0,5561	4,5082	0,8016	0,1544	2,0290
1,70	0,5907	0,1198	0,2029	0,5478	4,5718	0,7890	0,1519	2,0493
1,71	0,5859	0,1159	0,1979	0,5374	4,6362	0,7764	0,1493	2,0698
1,72	0,5810	0,1121	0,1929	0,5271	4,7027	0,7637	0,1468	2,0906
1,73	0,5761	0,1083	0,1881	0,5168	4,7703	0,7509	0,1443	2,1112
1,74	0,5712	0,1047	0,1833	0,5065	4,8390	0,7381	0,1418	2,1330
1,75	0,5663	0,1011	0,1785	0,4961	4,9090	0,7250	0,1394	2,1546
1,76	0,5613	0,0975	0,1738	0,4858	4,9808	0,7120	0,1370	2,1765
1,77	0,5563	0,0941	0,1691	0,4755	5,0543	0,6990	0,1346	2,1987
1,78	0,5513	0,0907	0,1645	0,4652	5,1291	0,6858	0,1323	2,2211
1,79	0,5462	0,0874	0,1620	0,4550	5,2057	0,6727	0,1299	2,2439
1,80	0,5411	0,0842	0,1555	0,4447	5,2839	0,6595	0,1276	2,2670
1,81	0,5360	0,0810	0,1511	0,4345	5,3642	0,6462	0,1254	2,2905
1,82	0,5309	0,0779	0,1468	0,4243	5,4459	0,6329	0,1231	2,3143
1,83	0,5257	0,0749	0,1425	0,4142	5,5297	0,6197	0,1209	2,3384
1,84	0,5205	0,0720	0,1383	0,4041	5,6153	0,6063	0,1187	2,3629
1,85	0,5153	0,0691	0,1341	0,3927	5,6835	0,5930	0,1165	2,3877
1,86	0,5100	0,0663	0,1300	0,3841	5,7928	0,5797	0,1144	2,4130
1,87	0,5047	0,0636	0,1260	0,3741	5,8850	0,5664	0,1122	2,4386
1,88	0,4994	0,0609	0,1220	0,3643	5,9795	0,5531	0,1101	2,4647
1,89	0,4941	0,0583	0,1181	0,3545	6,0764	0,5398	0,1081	2,4911

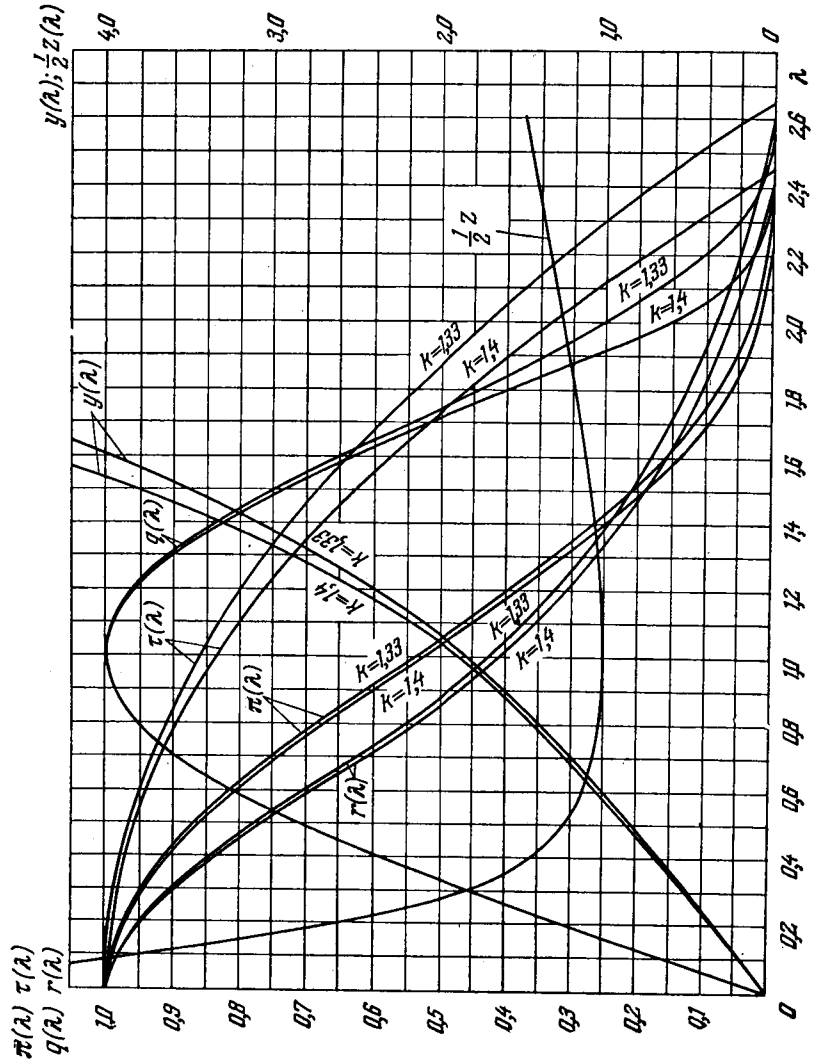
1,90	0,4887	0,0558	0,1142	0,3447	6,1757	0,5266	0,1060	2,5180
1,91	0,4833	0,0534	0,1105	0,3351	6,2779	0,5134	0,1040	2,5454
1,92	0,4779	0,0510	0,1067	0,3256	6,3820	0,5002	0,1020	2,5731
1,93	0,4724	0,0487	0,1031	0,3161	6,4899	0,4871	0,1000	2,6015
1,94	0,4670	0,0465	0,0995	0,3064	6,5949	0,4740	0,0980	2,6302
1,95	0,4615	0,0443	0,0960	0,2973	6,7128	0,4609	0,0961	2,6596
1,96	0,4559	0,0422	0,0925	0,2881	6,8289	0,4480	0,0942	2,6894
1,97	0,4504	0,0402	0,0892	0,2790	6,9487	0,4352	0,0923	2,7198
1,98	0,4448	0,0382	0,0858	0,2700	7,0720	0,4224	0,0904	2,7507
1,99	0,4391	0,0363	0,0826	0,2611	7,1985	0,4097	0,0885	2,7822
2,00	0,4335	0,0344	0,0794	0,2523	7,3288	0,3971	0,0867	2,8143
2,01	0,4278	0,0326	0,0763	0,2436	7,4635	0,3845	0,0849	2,8471
2,02	0,4221	0,0309	0,0733	0,2351	7,6020	0,3723	0,0831	2,8806
2,03	0,4164	0,0293	0,0703	0,2267	7,7448	0,3600	0,0813	2,9147
2,04	0,4106	0,0277	0,0674	0,2183	7,8923	0,3477	0,0795	2,9496
2,05	0,4048	0,0261	0,0645	0,2101	8,0444	0,3357	0,0778	2,9852
2,06	0,3990	0,0247	0,0618	0,2022	8,2016	0,3240	0,0761	3,0215
2,07	0,3931	0,0232	0,0591	0,1942	8,3639	0,3122	0,0744	3,0587
2,08	0,3873	0,0219	0,0564	0,1864	8,5323	0,3005	0,0727	3,0967
2,09	0,3814	0,0205	0,0539	0,1788	8,7059	0,2891	0,0710	3,1356
2,10	0,3754	0,0193	0,0514	0,1713	8,8854	0,2778	0,0694	3,1754
2,11	0,3695	0,0181	0,0489	0,1640	9,0725	0,2668	0,0678	3,2162
2,12	0,3635	0,0169	0,0466	0,1569	9,2652	0,2559	0,0662	3,2579
2,13	0,3574	0,0158	0,0443	0,1500	9,4829	0,2451	0,0646	3,3007
2,14	0,3514	0,0148	0,0420	0,1429	9,6737	0,2345	0,0630	3,3446
2,15	0,3453	0,0138	0,0399	0,1362	9,8903	0,2242	0,0614	3,3897
2,16	0,3392	0,0128	0,0378	0,1296	10,116	0,2140	0,0599	3,4360
2,17	0,3331	0,0119	0,0357	0,1232	10,349	0,2041	0,0583	3,4836
2,18	0,3269	0,0110	0,0338	0,1170	10,592	0,1943	0,0568	3,5324
2,19	0,3207	0,0102	0,0319	0,1109	10,847	0,1847	0,0553	3,5828

$k = 1{,}33$ *Продолжение*

λ	τ	π	ε	q	y	i	r	M
2,20	0,3145	0,0091	0,0300	0,1050	11,111	0,1755	0,0539	3,6344
2,21	0,3083	0,0087	0,0282	0,0993	11,388	0,1664	0,0524	3,6877
2,22	0,3020	0,0080	0,0266	0,0937	11,678	0,1575	0,0509	3,7428
2,23	0,2957	0,0074	0,0249	0,0883	11,980	0,1488	0,0495	3,7995
2,24	0,2894	0,0068	0,0233	0,0830	12,297	0,1404	0,0481	3,8579
2,25	0,2830	0,00620	0,0218	0,0780	12,629	0,1323	0,0467	3,9185
2,26	0,2766	0,00560	0,0204	0,0731	12,978	0,1243	0,0453	3,9811
2,27	0,2702	0,00512	0,0190	0,0684	13,345	0,1167	0,0439	4,0458
2,28	0,2638	0,00465	0,0176	0,0638	13,732	0,1092	0,0426	4,1131
2,29	0,2573	0,00421	0,0163	0,0595	14,139	0,1021	0,0412	4,1828
2,30	0,2508	0,00379	0,0151	0,0553	14,568	0,0951	0,0399	4,2551
2,31	0,2443	0,00341	0,0140	0,0512	15,023	0,0885	0,0385	4,3304
2,32	0,2377	0,00306	0,0129	0,0474	15,505	0,0821	0,0372	4,4086
2,33	0,2311	0,00273	0,0118	0,0437	16,014	0,0759	0,0360	4,4903
2,34	0,2245	0,00243	0,0108	0,0402	16,557	0,0700	0,0347	4,5756
2,35	0,2179	0,00215	0,0099	0,0369	17,136	0,0644	0,0334	4,6647
2,36	0,2112	0,00190	0,0090	0,0337	17,751	0,0590	0,0321	4,7578
2,37	0,2045	0,00167	0,0081	0,0307	18,411	0,0539	0,0309	4,8557
2,38	0,1978	0,00146	0,0074	0,0278	19,118	0,0491	0,0297	4,9586
2,39	0,1910	0,00127	0,0066	0,0252	19,876	0,0445	0,0285	5,0665

2,40	0,1842	0,00109	0,0059	0,0226	20,696	0,0402	0,0272	5,1807
2,41	0,1774	0,00095	0,0053	0,0205	21,579	0,0364	0,0261	5,3011
2,42	0,1706	0,00080	0,0047	0,0181	22,536	0,0323	0,0249	5,4288
2,43	0,1637	0,00068	0,0041	0,0160	23,581	0,0287	0,0237	5,5645
2,44	0,1568	0,00057	0,0036	0,0141	24,719	0,0254	0,0225	5,7089
2,45	0,1499	0,00048	0,0032	0,0124	26,050	0,0223	0,0214	5,8630
2,46	0,1429	0,00039	0,0027	0,0108	27,345	0,0194	0,0203	6,0288
2,47	0,1359	0,00032	0,0024	0,0093	28,863	0,0168	0,0191	6,2067
2,48	0,1289	0,00026	0,0020	0,0079	30,556	0,0144	0,0180	6,3990
2,49	0,1219	0,00021	0,0017	0,0067	32,459	0,0122	0,0169	6,6079
2,50	0,1148	0,000163	0,001420	0,00503	34,587	0,01030	0,01580	6,8355
2,51	0,1077	0,000126	0,001169	0,00466	37,012	0,00853	0,01480	7,0851
2,52	0,1006	$0{,}955 \cdot 10^{-4}$	0,000949	0,00380	36,796	0,00698	0,01370	7,3614
2,53	0,0934	$0{,}710 \cdot 10^{-4}$	0,000759	0,00305	43,011	0,00562	0,01273	7,6681
2,54	0,0863	$0{,}514 \cdot 10^{-4}$	0,000596	0,00240	46,774	0,00444	0,01160	8,0125
2,55	0,0791	$0{,}362 \cdot 10^{-4}$	0,000457	0,00185	51,242	0,00343	0,01050	8,4028
2,56	0,0718	$0{,}240 \cdot 10^{-4}$	0,000342	0,00139	56,629	0,00258	0,00952	8,8506
2,57	0,0646	$0{,}160 \cdot 10^{-4}$	0,000248	0,00101	63,248	0,00188	0,00850	9,3716
2,58	0,0573	$0{,}986 \cdot 10^{-5}$	0,000172	0,00070	71,572	0,00132	0,00748	9,9892
2,59	0,0499	$0{,}568 \cdot 10^{-5}$	0,000114	0,00047	82,393	0,00088	0,00648	10,7387
2,60	0,0426	$0{,}299 \cdot 10^{-5}$	$0{,}702 \cdot 10^{-4}$	0,00029	96,998	0,00054	0,00548	11,6736
2,61	0,0352	$0{,}139 \cdot 10^{-5}$	$0{,}394 \cdot 10^{-4}$	0,00016	117,79	0,00031	0,00450	12,8883
2,62	0,0278	$0{,}536 \cdot 10^{-6}$	$0{,}193 \cdot 10^{-4}$	$0{,}802 \cdot 10^{-4}$	149,68	$0{,}152 \cdot 10^{-4}$	0,00353	14,5579
2,63	0,0204	$0{,}153 \cdot 10^{-6}$	$0{,}750 \cdot 10^{-5}$	$0{,}313 \cdot 10^{-4}$	205,17	$0{,}594 \cdot 10^{-4}$	0,00257	17,0777
2,64	0,0129	$0{,}243 \cdot 10^{-7}$	$0{,}188 \cdot 10^{-5}$	$0{,}782 \cdot 10^{-5}$	322,26	$0{,}150 \cdot 10^{-4}$	0,00162	21,5366
2,65	0,0054	$0{,}728 \cdot 10^{-9}$	$0{,}135 \cdot 10^{-6}$	$0{,}567 \cdot 10^{-6}$	779,12	$0{,}108 \cdot 10^{-5}$	0,00067	33,3991
2,657	0	0	0	0	∞	0	0	∞

ПРИЛОЖЕНИЕ III



ПРИЛОЖЕНИЕ IV

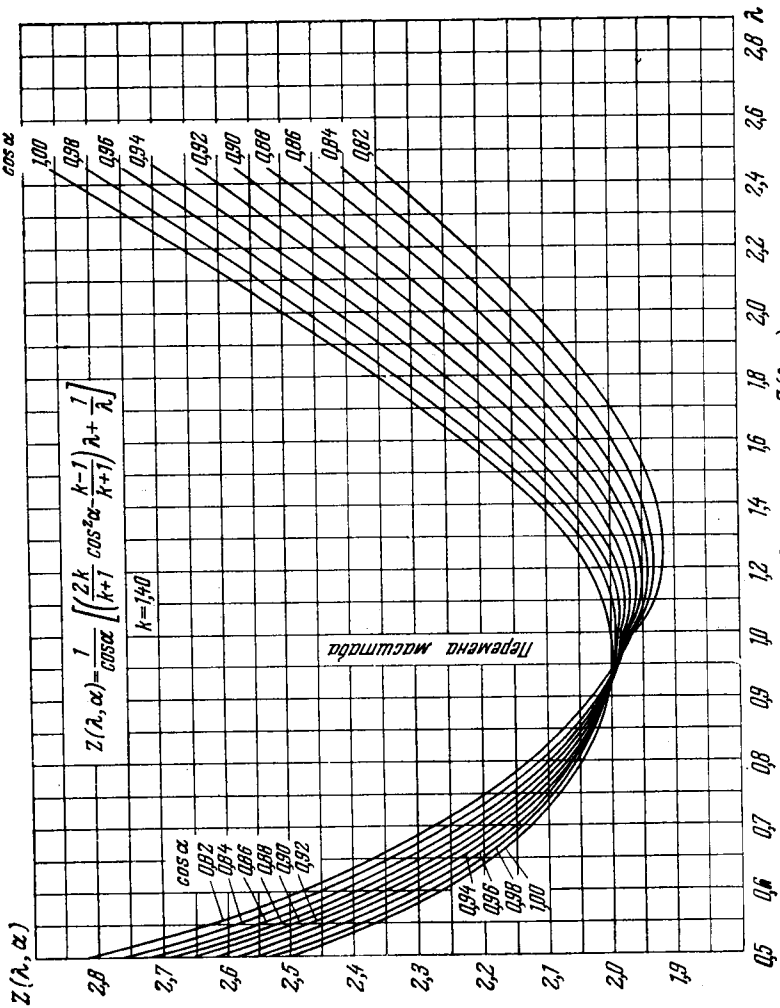


График функции $Z(\lambda, \alpha)$

ПРИЛОЖЕНИЕ V

Таблица единиц [1])

Наименование величин	Единицы				
	СИ	Техническая	CGSM	CGSE	Гаусса
Время t	с (секунда)	с	с	с	с
Длина, l	м (метр)	м	см $= 10^{-2}$	см	см
Масса, m	кг (килограмм)	$\frac{\text{кГ} \cdot \text{см}^2}{\text{м}} \approx 9{,}81$	г $= 10^{-3}$	г	г
Плотность, ρ	$\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$	$\frac{\text{кГ} \cdot \text{с}^2}{\text{м}^4} \approx 9{,}81$	$\frac{\text{г}}{\text{см}^3} = 10^3$	$\frac{\text{г}}{\text{см}^3}$	$\frac{\text{г}}{\text{см}^3}$
Сила, F	Н (ньютон) $= \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2}$	кГ $\approx 9{,}81$	дина $= \frac{\text{г} \cdot \text{см}}{\text{с}^2} = 10^{-5}$	дина	дина
Скорость, W	$\frac{\text{м}}{\text{с}}$	$\frac{\text{м}}{\text{с}}$	$\frac{\text{см}}{\text{с}} = 10^{-2}$	$\frac{\text{см}}{\text{с}}$	$\frac{\text{см}}{\text{с}}$
Работа, A	Дж (джоуль) $= \text{Н} \cdot \text{м} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2}$	кГ $\cdot$ м $\approx 9{,}81$	эрг $= \frac{\text{г} \cdot \text{см}^2}{\text{с}} = 10^{-7}$	эрг	эрг
Тепло Q	Дж (джоуль)	кал $\approx 4{,}187$	эрг	эрг	эрг
Мощность, Q_m	Вт (ватт) $= \frac{\text{Дж}}{\text{с}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^3}$	$\frac{\text{кГ} \cdot \text{м}}{\text{с}} \approx 9{,}81$	$\frac{\text{эрг}}{\text{с}}$	$\frac{\text{эрг}}{\text{с}}$	$\frac{\text{эрг}}{\text{с}}$

Электрический заряд, q	Кл (кулон) $= A \cdot c$	Кл	10	$\frac{10}{c}$	$\frac{10}{c}$
Сила тока, I	А (ампер)	А	10	$\frac{10}{c}$	$\frac{10}{c}$
Потенциал, V	В (вольт) $= \frac{кг \cdot м^2}{А \cdot с^3}$	В	10^{-8}	$c \cdot 10^{-8}$	$c \cdot 10^{-8}$
Напряженность электрического поля, E	$\frac{В}{м}$ (вольт на метр) $= \frac{кг \cdot м}{А \cdot с^3}$	$\frac{В}{м}$	10^{-6}	$c \cdot 10^{-6}$	$c \cdot 10^{-6}$
Индукция электрического поля, D	$\frac{А \cdot с}{м^2}$		$\frac{10^5}{4\pi} \approx 7{,}96 \cdot 10^3$	$\frac{10^5}{4\pi c}$	$\frac{10^5}{4\pi c}$
Сопротивление, R	Ом (ом) $= \frac{кг \cdot м^2}{А^2 \cdot с^3}$	Ом	10^{-9}	$c^2 \cdot 10^{-9}$	$c^2 \cdot 10^{-9}$
Удельная электрическая проводимость, σ_R	$\frac{См}{м}$ (сименс на метр) $= \frac{А^2 \cdot с^3}{кг \cdot м^3}$	$\frac{См}{м}$	10^{11}	$\frac{10^{11}}{c^2}$	$\frac{10^{11}}{c^2}$
Емкость, C	Ф (фарада) $= \frac{А^2 \cdot с^4}{кг \cdot м^2}$	Ф	10^9	$\frac{10^9}{c^2}$	$\frac{10^9}{c^2}$
Электрическая постоянная, ε_0	$\frac{10^7}{4\pi \cdot c^2} \approx 8{,}856 \cdot 10^{-12}$, $\frac{А^2 \cdot с^4}{кг \cdot м^3}$, $\frac{Ф}{м}$		$\frac{10^{11}}{4\pi} \approx 7{,}96 \cdot 10^9$	$\frac{10^{11}}{4\pi c^2}$	$\frac{10^{11}}{4\pi c^2}$
Напряженность магнитного поля, H	$\frac{А}{м}$ (ампер на метр)	$\frac{А}{м}$	Э (эрстед) $= \frac{10^3}{4\pi} \approx 79{,}6$	$\frac{10^3}{4\pi c}$	Э (эрстед) $= \frac{10^3}{4\pi}$

Продолжение

Наименование величин	Единицы				
	СИ	Техническая	CGSM	CGSE	Гаусса
Поток магнитной индукции, Φ	Вб (вебер) $= \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{А} \cdot \text{с}^2}$	Вб	10^{-8}	$c \cdot 10^{-8}$	Мкс (максвелл) $= 10^{-8}$
Магнитная постоянная, μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Г}}{\text{м}}$ (генри на метр), $\frac{\text{Г}}{\text{м}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{А}^2 \cdot \text{с}^2}$		$4\pi \cdot 10^{-7} \approx 1{,}26 \cdot 10^{-6}$	$4\pi \cdot c^2 \cdot 10^{-7}$	$4\pi \cdot 10^{-7}$
Магнитная индукция, B	Т (тесла) $= \frac{\text{кг}}{\text{А} \cdot \text{с}^2}$	$\frac{\text{Вб}}{\text{см}^2} = 10^4$	Гс (гаусс) $= 10^{-4}$	$c \cdot 10^{-4}$	Гс (гаусс) $= 10^{-4}$
Индуктивность, L	Г (генри) $= \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{А}^2 \cdot \text{с}^2}$		10^{-9}	$c^2 \cdot 10^{-9}$	10^{-9}

Числа без указания размерности равны отношению единицы измерения к единице в системе СИ, $c \approx 3 \cdot 10^{10} \frac{\text{см}}{\text{с}}$

[1]) Богуславский М. Г. и др., Таблицы перевода единиц измерений, Стандартгиз, М., 1963.

ПРИЛОЖЕНИЕ VI

Стандартная атмосфера

Высота H, м	Температура T, К	Давление p, Н/м²	Плотность ρ, кг/м³	Вязкость $\mu \cdot 10^5$, Н·с/м²
0	288,2	101 330	1,23	1,79
1 000	281,7	89 880	1,11	1,76
2 000	275,1	79 490	1,01	1,73
3 000	268,6	70 130	$9{,}09 \cdot 10^{-1}$	1,69
4 000	262,1	61 660	$8{,}19 \cdot 10^{-1}$	1,66
5 000	255,6	54 050	$7{,}37 \cdot 10^{-1}$	1,63
6 000	249,1	47 210	$6{,}60 \cdot 10^{-1}$	1,60
7 000	242,6	41 090	$5{,}90 \cdot 10^{-1}$	1,56
8 000	236,1	35 650	$5{,}26 \cdot 10^{-1}$	1,53
9 000	229,6	30 790	$4{,}67 \cdot 10^{-1}$	1,49
10 000	223,2	26 490	$4{,}14 \cdot 10^{-1}$	1,46
11 000	216,7	22 690	$3{,}65 \cdot 10^{-1}$	1,42
12 000	216,7	19 390	$3{,}12 \cdot 10^{-1}$	1,42
13 000	216,7	16 570	$2{,}67 \cdot 10^{-1}$	1,42
14 000	216,7	14 160	$2{,}28 \cdot 10^{-1}$	1,42
15 000	216,7	12 110	$1{,}95 \cdot 10^{-1}$	1,42
16 000	216,7	10 350	$1{,}67 \cdot 10^{-1}$	1,42
17 000	216,7	8 850	$1{,}42 \cdot 10^{-1}$	1,42
18 000	216,7	7 560	$1{,}22 \cdot 10^{-1}$	1,42
19 000	216,7	6 470	$1{,}04 \cdot 10^{-1}$	1,42
20 000	216,7	5 530	$8{,}89 \cdot 10^{-2}$	1,42
21 000	216,7	4 730	$7{,}60 \cdot 10^{-2}$	1,42
22 000	216,7	4 040	$6{,}50 \cdot 10^{-2}$	1,42
23 000	216,7	3 460	$5{,}56 \cdot 10^{-2}$	1,42
24 000	216,7	2 950	$4{,}75 \cdot 10^{-2}$	1,42
25 000	216,7	2 530	$4{,}06 \cdot 10^{-2}$	1,42
26 000	219,4	2 160	$3{,}43 \cdot 10^{-2}$	1,44
27 000	222,1	1 860	$2{,}91 \cdot 10^{-2}$	1,45
28 000	224,9	1 590	$2{,}47 \cdot 10^{-2}$	1,47
29 000	227,6	1 370	$2{,}10 \cdot 10^{-2}$	1,48
30 000	230,4	1200	$1{,}79 \cdot 10^{-2}$	1,49
40 000	257,7	296	$4{,}00 \cdot 10^{-3}$	1,57
50 000	274,0	84,6	$1{,}08 \cdot 10^{-3}$	1,72
60 000	253,4	44,1	$3{,}32 \cdot 10^{-4}$	1,62
70 000	219,2	5,83	$9{,}27 \cdot 10^{-5}$	1,44
80 000	185,0	1,11	$2{,}09 \cdot 10^{-5}$	1,24
90 000	185,0	$1{,}84 \cdot 10^{-1}$	$3{,}47 \cdot 10^{-6}$	1,24
100 000	209,2	$3{,}24 \cdot 10^{-2}$	$5{,}39 \cdot 10^{-7}$	1,39
120 000	446,2	$3{,}01 \cdot 10^{-3}$	$2{,}33 \cdot 10^{-8}$	
140 000	826,3	$1{,}05 \cdot 10^{-3}$	$4{,}38 \cdot 10^{-9}$	
160 000	1096,8	$5{,}45 \cdot 10^{-4}$	$1{,}69 \cdot 10^{-9}$	
180 000	1305,3	$3{,}21 \cdot 10^{-4}$	$8.24 \cdot 10^{-10}$	
200 000	1536,4	$2{,}09 \cdot 10^{-4}$	$4{,}43 \cdot 10^{-10}$	

ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамович Г. Н., Теория турбулентных струй, Физматгиз, М., 1960.
2. Абрамович Г. Н., Крашенинников С. Ю., Секундов А. Н., Турбулентные течения при наличии объемных сил и неавтомодельности, «Машиностроение», М., 1975.
3. Альтшуль А. Д., Киселев П. Г., Гидравлика и аэродинамика, Изд. литературы по строительству, М., 1965.
4. Аржанников Н. С., Саддекова Г. С., Аэродинамика больших скоростей, «Высшая школа», М., 1965.
5. Бай Ши-и, Магнитная газодинамика и динамика плазмы, «Мир», М., 1964.
6. Борисенко А. И., Газовая динамика двигателей, Оборонгиз, М., 1962.
7. Бетчелор Ж. К., Введение в динамику вязкой жидкости, «Мир», М., 1974.
8. Ватажин А. В., Любимов Г. А., Регирер С. А., Магнитогидродинамические течения в каналах, «Наука», М., 1970.
9. Вулис Л. А., Термодинамика газовых потоков, Госэнергоиздат, М., 1950.
10. Вулис Л. А., Теория струй вязкой жидкости, «Наука», М., 1965.
11. Газодинамика разреженных газов, под ред. М. Девиена, ИЛ, М., 1963.
12. Газовая динамика, Сборник переводов, ИЛ, М., 1963.
13. Гаррис Л., Магнитогидродинамические течения в каналах, ИЛ, М., 1963.
14. Герман Р., Сверхзвуковые входные диффузоры, Физматгиз, М., 1960.
15. Гинзбург И. П., Прикладная гидрогазодинамика, Изд-во Ленинградского университета, М. — Л., 1958.
16. Гиро Ж., Основные вопросы теории гиперзвуковых течений, «Мир», М., 1965.
17. Дейч М. Е., Техническая газодинамика, Госэнергоиздат, М., 1974.
18. Жуковский В. С., Техническая термодинамика, Гостехиздат, М., 1952.
19. Зауэр Р., Течения сжимаемой жидкости, ИЛ, М., 1954.
20. Зельдович Я. Б., Теория ударных волн и введение в газодинамику, Изд-во АН СССР, М., 1946.
21. Идельчик И. Е., Гидравлические сопротивления, Госэнергоиздат, М., 1954.
22. Идельчик И. Е., Справочник по гидравлическим сопротивлениям, Госэнергоиздат, М., 1960.
23. Идельчик И. Е., Аэродинамика промышленных аппаратов, «Энергия», М., 1964.
24. Калихман Л. Е., Элементы магнитной газодинамики, Атомиздат, М., 1964.
25. Коган М. Н., Динамика разреженного газа, «Наука», М., 1967.
26. Кочин Н. Е., Кибель И. А. и Розе И. В., Теоретическая гидромеханика, ч. I, II, Гостехиздат, М., 1955, 1956.
27. Куликовский А. Г., Любимов Г. А., Магнитная гидродинамика, Физматгиз, М., 1962.
28. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М., Механика сплошных сред, Гостехиздат, М., 1950.

29. Левинсон Я. И., Аэродинамика больших скоростей, Оборонгиз, М., 1950.
30. Липман Г. В., Рошко А., Элементы газовой динамики, ИЛ, М., 1960.
31. Лойцянский Л. Г., Механика жидкости и газа, «Наука», М., 1973.
32. Лойцянский Л. Г., Аэродинамика пограничного слоя, Гостехиздат, Л., 1941.
33. Лойцянский Л. Г., Ламинарный пограничный слой, Физматгиз, М., 1962.
34. Магнитная гидродинамика (Труды симпозиума), Атомиздат, М., 1960.
35. Паттерсон Г. Н., Молекулярное течение газов, Физматгиз, М., 1960.
36. Прикладная магнитная гидродинамика, Изд-во АН Латвийской ССР, Рига, 1961.
37. Прикладная магнитная гидродинамика, Сборник переводов, «Мир», М., 1965.
38. Прандтль Л., Гидроаэродинамика, т. I, II, ИЛ, М., 1949.
39. Рахматулин Х. А. и др., Газовая динамика, «Высшая школа», М., 1965.
40. Сергель О. С., Прикладная гидрогазодинамика, т. I, II, Изд-во МАИ, М., 1968.
41. Современное состояние гидроаэродинамики вязкой жидкости, т. I, II, под ред. С. Гольдштейна, ИЛ, М., 1948.
42. Современное состояние аэродинамики больших скоростей, под ред. Хоуарта, ИЛ, М., 1955.
43. Седов Л. И., Методы подобия и размерности в механике, «Наука», М., 1967.
44. Седов Л. И., Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, «Наука», М., 1966.
45. Седов Л. И., Механика сплошной среды, т. I, II, «Наука», М., 1976.
46. Степанов Г. Ю., Гидромеханика решеток турбомашин, Физматгиз, М., 1962.
47. Степанов Г. Ю., Основы теории лопаточных машин комбинированных и газотурбинных двигателей, «Машиностроение», М., 1958.
48. Степчков А. А., Задачи по гидрогазодинамике, Изд-во МАИ, М., 1974.
49. Теория воздушно-реактивных двигателей, под ред. Шляхтенко С. М., «Машиностроение», М., 1975.
50. Турбулентное смешение газовых струй, под ред. Абрамовича Г. Н., «Наука», М., 1974.
51. Фабрикант Н. Я., Аэродинамика, «Наука», М., 1964.
52. Ферри А., Аэродинамика сверхзвуковых скоростей, Гостехиздат, М., 1952.
53. Франк-Каменецкий Д. А., Лекции по физике плазмы, Атомиздат, М., 1964.
54. Франкль Ф. И., Христианович С. А., Алексеева Р. Н., Основы газовой динамики, Труды ЦАГИ, вып. 364, М., 1938.
55. Хейз У. Д., Пробстин Р. Ф., Теория гиперзвуковых течений, ИЛ, М., 1962.
56. Хинце И. О., Турбулентность, Физматгиз, М., 1963.
57. Чарный И. А., Основы газовой динамики, Гостоптехиздат, М., 1961.
58. Черный Г. Г., Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью, Физматгиз, М., 1959.
59. Шидловский В. П., Введение в динамику разреженного газа, «Наука», М., 1965.
60. Шерклиф Д., Теория электромагнитного измерения расхода, «Мир», М., 1965.
61. Шлихтинг Г., Теория пограничного слоя, «Наука», М., 1974.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Адиабата идеальная 27, 96, 126
— ударная 125, 126

Вихрь изолированный 112
— начальный 582
— парный 689
— П-образный 683
— присоединенный 683
— скорости 65
— точечный изолированный 112, 113
Вогнутость профиля относительная 561
Волна акустическая 120
— давления 117
— детонационная 219
— Маха 136
— сжатия бесконечно слабая 136
— — сильная 119
— — слабая 120
— ударная 119, 696
— — адиабатическая 219
— — магнитогазодинамическая 818
— — прямая 121
Вязкость 68
— вторая 71, 72
— магнитная 785

Гидравлика газовая 9
Гидравлические потери 38, 48
Гипотеза затвердевания линий тока 596
— Ньютона 68, 70, 276
— Прандтля 317, 319
— Фурье 75
Густота решетки 563
— — критическая 653

Давление истинное 30
— магнитное 816
— полное 29, 30
— расчетное 394
— статическое 29, 495, 496
— эффективное 789
Двигатель воздушно-реактивный 51, 53, 56
— жидкостно-реактивный 51
— турбореактивный 53
Движение — см. Течение
Дивергенция 66
Диполь 115
Диск Маха 405
Диффузор 40
—дозвуковой 445
— колоколообразный 449, 450
— плоский 460
— сверхзвуковой 456, 467
Длина приведенная смесительной камеры 503
— — трубы 186

Завихренность 65, 107, 108
Закон вязкого трения Ньютона 92
— плоских сечений 703
Закон распределения скоростей универсальный 320
— сопротивления Ньютона 704
— сохранения массы 10
«Зуд» двигателя 479

Импульс сопла относительный 61
— — эффективный 61
Интеграл Бернулли 99, 100
— Лагранжа 98, 99
Истечение из сопла Лаваля на нерасчетном режиме 155
— — — — на режиме перерасширения 157, 160
— — — — при сильном недорасширении 435
— — — с косым срезом 178

Камера смешения 500—505
— форсажная 56, 250
Качество профиля 573
— решетки профилей 634
Компрессор 33, 45, 54
Конфузор 154
Коэффициент аккомодации 724
— гидравлического сопротивления диффузора 447
— динамической вязкости 68, 277, 279, 795
— диффузорности 635
— индуктивного сопротивления крыла 685
— поверхностного трения 95
— подъемной силы 574
— полезного действия эжектора 548
— полноты удара 448, 449
— поля 495
— профильного сопротивления 574
— расхода 422, 469
— скорости реактивного сопла 421, 434
— сопротивления формы 574
— сохранения полного давления 30, 421
— температуропроводности 89
— теплоотдачи безразмерный 297
— теплопроводности 89
— турбулентной вязкости 319
— — теплопроводности 319
— увеличения тяги 552
— эжекции 444, 488, 501, 549, 557
Коэффициенты аэродинамические 573
Кривая нейтральная 311
Кривизна профиля относительная 561
Кризис тепловой 196, 203, 223
Крип температурный 723
Критерий температурный 89, 91
— электрогидродинамического взаимодействия 794
Критическое отношение давлений 341

Линия критических режимов 521
— профиля средняя 561
— тока 9, 102, 169, 172
— — плоского диполя 115

Масштаб моделирования 81
Метод последовательных приближений 324
— характеристик 103, 402

Наложение течений 102
Напор скоростной 26, 42, 56
Напряжение 67, 68
— трения 276, 281
Напряжения дополнительные 70
— нормальные 67, 71
— тангенциальные 67, 68
Насадок пневматический 31, 145

Обтекание внешнего тупого угла 161—164
— выпуклой криволинейной стенки 175—177
— клина сверхзвуковое 129, 139, 143
— конуса сверхзвуковое 130, 142, 143
— крыла косое 686
— пластины 302, 310, 311, 322, 603
— — гиперзвуковое 701
— плоской стенки 173—175
— профиля дозвуковое 580, 588
— — околозвуковое 614
— — пространственное 683
— — сверхзвуковое 599
— решетки пластин 629, 630
— — профилей 625, 639, 649, 650, 669
— твердого тела свободно-молекулярное 741
— тела вращения 140
— — тонкого заостренного гиперзвуковое 702
Отношение давлений критическое 341
Отрыв пограничного слоя 282, 283, 329

Параметр магнитогидродинамического взаимодействия 793, 832
Плотность тепловой мощности 773
Поверхность тангенциального разрыва 361
— тока 9
Подобие геометрическое 81
— гидродинамическое 82, 91
— динамическое 81, 82, 85
— кинематическое 81
— приближенное 85, 86
— тепловое 83, 91
Подслой ламинарный 323
Поле скоростей 104
— электромагнитное 780
— электростатическое 767
Помпаж двигателя 478
Постоянная газовая 13, 123
Постулат Чаплыгина — Жуковского 581
Потенциал скорости 97
— точечного заряда 768
Профиль крыловой 561
Процесс адиабатический идеальный 27, 47, 100
— изобарический 27
— изотермический 27
— изоэнтропический 28
— политропический 28
Путь перемешивания 317

Размывание струи 362
Режим критический 22, 149, 442
Решетка профилей 563
— — активная 570
— — диффузорная 570
— — — сверхзвуковая 655—657
— — — — чисто скачковая 659
— — конфузорная 569
— — прямолинейная 562

Сечение запирания струи 491
— сопла фиктивное 427
— струи изобарическое 412
— — переходное 362
— эжектора граничное 489
Сила объемная 67
— поверхностная 67
— подъемная 571, 604
— пондеромоторная 765
— реактивная 49, 548
— сопротивления профиля 571
Скачок разрежения 118
— сгущения магнитного поля 818
— скорости при течении газа со скольжением 722
— температуры при течении газа со скольжением 727
— тепловой 219, 229
— уплотнения 120, 219
— — висячий 405
— — косой 129
— — мостообразный 157
— — прямой 122, 124
— — сильный 139
— — слабый 139
Скорость газа относительная 24
— дрейфа 779
— звука в газе 21, 121
— истечения газа 32
— — — максимальная 21
— критическая 22, 123, 133, 154
— — условная 133
— приведенная 23, 42, 189
Сложение потоков 102, 103
Слой пограничный 18, 96, 276, 279, 338
— — ламинарный 283, 334
— — тепловой 287
— — турбулентный 313, 333
— — струйный 371
— ударный 714
Сопло геометрическое 204
— ирисовое 445
— Лаваля 148, 155 — 160, 239, 426, 432
— полутепловое 214
— расходное 204
— с косым срезом 178
— — центральной вставкой 440
— — центральным телом 438
— сверхзвуковое 148
— тепловое 207 — 214
— фиктивное 427
— эжекторное 441, 442
Сопротивление волновое 30, 601
— — диффузора дозвукового 445, 452
— индуктивное 685
— сопла 420
— тепловое 193
— формы 574
Срыв сверхзвукового потока 175
Степень нерасчетности сопла 246, 394
— повышения давления 34
— турбулентности потока 369
Струя дозвуковая 381, 491
— затопленная 362
— сверхзвуковая 389, 394, 491

Температура критическая 22
— торможения 19, 22, 53, 122, 251, 292
— — частичного 132
Теорема Жуковского 564 — 569, 571
— Стокса 110, 111
— Томпсона 110
Течение адиабатическое с трением 181
— безвихревое 97, 106
— — циркуляционное 111, 112

Течение вихревое 106
— в трубе 184, 260, 348, 757
— — — подогреваемого газа 193
— Гартмана 796
— гиперзвуковое 692
— дозвуковое 22, 126
— Куэтта 95
— ламинарное 281
— магнитогидродинамическое 838
— потенциальное 97
— Прандтля — Майера 161, 404
— разреженного газа 719
— сверхзвуковое 22
— свободно-молекулярное 720
— слоистое 92
— со скольжением 722, 728
— струйное 361
— турбулентное 282
— установившееся 9, 99, 110, 181
— чисто циркуляционное 581
— энергетически изолированное 14, 16
Толщина вытеснения 301, 305, 307, 427
— пограничного слоя 280, 287, 305, 369, 432
— потери импульса 301, 326, 430
— профиля относительная 561
Точка критическая профиля 580
— отрыва пограничного слоя 330
— слияния струй 580
Трубка Вентури 158
Турбина идеальная 33
Турбокомпрессорное устройство 45
Тяга 49
— реактивная 246, 548
— эжекторного сопла 442, 444
— эффективная 60

Угол атаки аэродинамический 583
— Маха 137, 607
— наклона скачка 135, 141
— нулевой подъемной силы 580
— отставания потока 563
— распространения слабых возмущений 137
— установочный решетки 562
Удлинение крыла 684
Уравнение Бернулли 25 — 27, 33, 37, 181
— количества движения 34 — 37
— ламинарного пограничного слоя 287
— Лапласа 101
— магнитной индукции 784, 794
— моментов количества движения 43, 44
— неразрывности 10, 66, 92, 100, 181
— постоянства расхода массы 11
— состояния идеального газа 13, 120
— теплосодержания 14, 15, 16, 24
— турбулентного пограничного слоя 315
— Фурье 784
— эжекции 501
— энергии 11, 13, 75, 78, 87, 288, 316
Уравнения движения вязкой жидкости 73
— Ламба — Громеко 97
— магнитной газовой динамики 765, 785, 812
— — гидродинамики 788
— Максвелла 765, 782, 783
— Навье — Стокса 74, 82, 92, 284, 308, 765
— Эйлера 35, 43, 49, 50

Ус вихревой 683
Условие обращения воздействия 203, 826
— отсутствия завихренности 164 — 165
Участок начальный 349, 361, 402
— основной 349
— переходной 362
— профиля диффузорный 586
— — конфузорный 586

Формула Блазиуса 352
— Дарси 94
— Кармана — Цзяна 596
— Ньютона — Буземана 710
— Прандтля — Глауэрта 595
— Сатерленда 278
— Стокса 733
— Янга 298
Функции газодинамические 233, 235, 242, 257, 860
Функция диссипативная 78
— распределения Максвелла 738, 741
— тока 101, 115

Хорда профиля 561

Циркуляция скорости 104—106, 566

Число Альфвена 793
— Архимеда 91
— Гартмана 795, 798
— Грасгофа 91
— Кнудсена 719, 720
— Маха 20, 85, 91
— — критическое 597, 614
— Пекле 90
— Прандтля 80, 89, 288, 322
— — магнитное 794
— — турбулентное 367
— Пуассона 85
— Рейнольдса 84, 85, 91, 280, 324
— — критическое 282, 311
— — магнитное 794
— Стантона 297
— Струхаля 84
— Фруда 84
— Эйлера 84

Шаг решетки 561
— — относительный 563

Эжектор 39, 442, 487, 511, 543—547
— газовый 484
— звуковой 487
— со сверхзвуковым соплом 529 — 531
Энтальпия 13
— полная 16, 79
Энтропия 46

Ядро вихря 111, 112
— струи 361