Н.М.БЕЛЯЕВ

ОСНОВЫ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ

Н. М. БЕЛЯЕВ

ОСНОВЫ ТЕПЛО-ПЕРЕДАЧИ

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования УССР в качестве учебника для студентов университетов и втузов

Киев
Головное издательство
издательского объединения
«Выща школа»
1989

ББК 31.31я73
Б44
УДК 536(075.8)

Рецензенты: д-р техн. наук *В. К. Кошкин* (Московский авиационный институт), д-р техн. наук *Б. Н. Юдаев* (Московский институт химического машиностроения)

Редакция литературы по математике и физике
Редактор *Л. И. Гринь*

Беляев Н. М.

Б44 Основы теплопередачи: Учебник.— К.: Выща шк. Головное изд-во, 1989.— 343 с.: ил.
ISBN 5-11-000186-3.

Изложены физические основы учения о теплопередаче. Рассмотрены перенос теплоты с помощью теплопроводности, излучения и конвективный тепломассообмен. Включены разделы теплообмена, получившие развитие в последнее время (естественная конвекция, задачи теплообмена). Изложены актуальные прикладные задачи теплофизики. Учебник содержит большое количество задач, которые снабжены ответами и указаниями, а также приведены программы для ЭВМ, позволяющие решать многие прикладные задачи теплообмена.
Для студентов университетов и втузов.

Б $\frac{2203020000-014}{М211(04)-89}$ 174—89 ББК 31.31я73

ISBN 5-11-000186-3

Глава 1 ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

§ 1.1. ВИДЫ ПЕРЕДАЧИ ТЕПЛОТЫ. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ТВЕРДЫХ ТЕЛ, ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ

Процессы передачи теплоты (теплообмена) широко распространены в природе и во многом определяют практическую деятельность человека. Понятие теплообмена охватывает весь комплекс явлений переноса теплоты в пространстве, обусловленных разностью температур отдельных элементов рассматриваемой среды. В общем случае перенос теплоты — сложный процесс, связанный с разнообразными физическими явлениями, однако можно выделить три основных вида (механизма) теплообмена: теплопроводность, конвективный теплообмен, теплообмен излучением.

Теплопередача — процесс теплообмена между двумя теплоносителями, разделенными твердой стенкой.

Теплопроводность — молекулярный перенос теплоты в телах (или между ними), обусловленный неоднородностью температуры в рассматриваемом пространстве.

Теплопроводность не связана с макродвижением тел и осуществляется передачей энергии от одних микрочастиц тела к другим при их взаимодействии. Для газов, например, такими частицами являются молекулы. Известно, что молекулы более нагретой части любого газа обладают большей средней кинетической энергией по сравнению с молекулами холодной его части. При столкновении молекул происходит обмен кинетической энергией, в результате чего осуществляется передача теплоты от нагретой части газа к холодной.

Процесс теплопроводности в металлах аналогичен процессу электропроводности и связан с движением свободных электронов. В простейшем случае можно считать, что свободные электроны ведут себя как молекулы газа, то есть перемещаются между атомами и осуществляют передачу теплоты. Таким образом, в газах и металлах процесс передачи теплоты определяется диффузией молекул и свободных электронов соответственно.

В жидкостях и твердых телах-диэлектриках перенос тепловой энергии осуществляется упругими волнами, возникающими в результате колебаний кристаллической решетки. Отметим, что в металлах некоторая часть энергии также передается упругими волнами, однако она незначительна по сравнению с диффузионным переносом теплоты свободными электронами.

Конвекция — перенос теплоты при перемещении объемов жидкости (газа) в пространстве. Конвекция возможна только в текущей среде, при этом перенос теплоты неразрывно связан с переносом самой среды. В жидкостях конвекция всегда сопровождается теплопроводностью.

Конвективный теплообмен — совместный перенос теплоты конвекцией и теплопроводностью.

Теплообмен между жидкостью (газом) и поверхностью твердого тела называют *конвективной теплоотдачей* или *теплоотдачей*.

Тепловое излучение — процесс распространения теплоты электромагнитными волнами. При таком виде передачи теплоты происходит превращение внутренней энергии вещества в энергию излучения, перенос излучения и его поглощение веществом.

Тепловое излучение обусловлено только температурой и оптическими свойствами излучающего тела. Оно подчиняется основным законам распространения света, то есть законам отражения преломления и поглощения. В чистом виде (то есть без других видов теплообмена) лучистый теплообмен имеет место лишь в условиях глубокого вакуума, например, между космическим летательным аппаратом и окружающим его безвоздушным пространством.

В процессах, с которыми нам приходится сталкиваться в природе и технике, теплообмен излучением сопровождается конвекцией и теплопроводностью. В этом случае теплообмен называют *сложным* или *радиационно-конвективным*. Однако комплексное математическое изучение сложного теплообмена затруднено, поэтому часто предварительно изучают каждый вид теплообмена в отдельности, а затем переходят к расчету сложного теплообмена. Кроме того, при решении конкретных задач один из видов теплопередачи, как правило, является преобладающим, так что количество теплоты, передаваемое другими видами теплообмена, незначительно и им можно пренебречь. В этой связи представляет интерес изучение каждого из видов теплообмена в отдельности. Рассмотрим подробнее процесс переноса теплоты теплопроводностью.

Теплопроводность в чистом виде большей частью имеет место в твердых телах. В жидкостях и газах теплота передается конвекцией, то есть чистая теплопроводность возможна лишь при условии, что они абсолютно неподвижны и полностью исключена возможность возникновения в них конвективных токов.

При теоретическом исследовании теплообмена необходимо учитывать среду, в которой происходит теплообмен. Все тела, в которых рассматриваются процессы теплопроводности, будем считать сплошной средой, то есть будем пренебрегать ее дискретным строением. Такой феноменологический подход к исследованию процессов теплообмена вообще и теплопроводности в частности правомочен, если размеры объектов исследования достаточно велики по сравнению с расстояниями эффективного межмолекулярного взаимодействия.

В дальнейшем будем рассматривать лишь однородные сплошные среды, для которых свойства в различных точках одинаковы при одних и тех же значениях температуры и давления (в неоднородных средах различны). Различают *изотропные* и *анизотропные* сплошные среды. В первых средах физические свойства не зависят от выбранного направления, во-вторых, наоборот, некоторые свойства в данной точке могут быть функцией направления. На практике чаще всего встречаются изотропные тела.

Под термином «сплошная среда» мы понимаем не только чистое вещество, но и смеси (газовые смеси, растворы и т. п.). В смесях различных веществ перенос теплоты теплопроводностью связан с переносом массы и в общем случае определяется не только наличием градиента температур, но и неоднородностью распределения полей других физических величин. Например, неоднородность поля концентраций приводит к диффузии вещества и дополнительному молекулярному переносу теплоты, называемому *диффузионной теплопроводностью* (эффект Дюфо). Обычно перенос теплоты, обусловленный подобными эффектами, невелик и им почти всегда можно пренебречь.

Таким образом, в дальнейшем, за исключением специально оговоренных случаев, будут рассматриваться процессы теплопроводности в однородных, изотропных, однофазных сплошных средах.

§ 1.2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Температурное поле. Всякое физическое явление происходит в пространстве и во времени, поэтому изучение его сводится к нахождению пространственно-временных характеристик величин, определяющих этот процесс. Совокупность мгновенных значений физической величины во всех точках рассматриваемой области называют полем этой физической величины.

В процессах теплопроводности основной физической величиной, характерной для данных процессов, является температура. Задача теории теплопроводности состоит в нахождении *поля температур* рассматриваемого объекта, то есть в определении зависимости

$$T = f\ (\tau,\ x,\ y,\ z), \tag{1.1}$$

где T — температура; τ — время; x, y, z — пространственные координаты в декартовой системе.

Температура есть величина *скалярная*, поэтому температурное поле — также скалярная величина. Отметим, что приведенное выше определение поля справедливо и для векторных величин, показывающих и величину и направление (сила, скорость, ускорение и т. п.). Такие поля называют *векторными полями физических величин*.

Различают стационарное и нестационарное температурные поля.

Нестационарным температурным полем называют поле, температура которого изменяется и в пространстве, и с течением времени. В этом случае говорят, что температура есть функция пространства и времени. Примером математической записи нестационарного температурного поля является уравнение (1.1).

Стационарным температурным полем называют поле, температура которого в любой его точке не изменяется с течением времени, то есть является функцией только координат

$$T = f_1(x, y, z), \quad \frac{\partial T}{\partial \tau} = 0. \tag{1.2}$$

Тепловые режимы, характеризующиеся нестационарными температурными полями, называются *неустановившимися*. В случае, когда температурные поля стационарны, тепловые режимы называют *установившимися*.

В соответствии с числом пространственных координат, от которых зависит температура, температурное поле может быть трехмерным (его запись имеет вид равенств (1.1), (1.2)), двухмерным

$$T = f_2(x, y, \tau), \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 0$$

и одномерным

$$T = f_3(x, \tau), \quad \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0.$$

Во многих задачах теплопроводности удобнее пользоваться не декартовой, а криволинейной системой координат. В этом случае уравнение (1.1) имеет вид

$$T = f(x_1, x_2, x_3, \tau),$$

где x_1, x_2, x_3 — координаты выбранной криволинейной системы координат. Например, в цилиндрической системе координат $x_1 = r$ — расстояние от начала координат (полюса) до проекции данной точки на плоскость $z = 0$ (полярный радиус); $x_2 = \varphi$ — угол поворота радиуса r от выбранного начального направления в плоскости $z = 0$; $x_3 = z$ — расстояние от точки до плоскости отсчета ($z = 0$). Для сферической системы координат $x_1 = r$ — полярный радиус; $x_2 = \varphi$ — полярный угол; $x_3 = \psi$ — азимутальный угол.

Перемещение из какой-либо точки тела в произвольном направлении сопровождается некоторым изменением температуры. Если бесконечно малым приращениям пространственных координат соответствуют бесконечно малые изменения температуры, то такое температурное поле называют *непрерывным*. В противном случае температурное поле называют *разрывным*. Для непрерывного температурного поля производная от температуры по любому направлению имеет конечную величину. В дальнейшем ограничимся рассмотрением лишь непрерывных температурных полей.

Температурный градиент. Если соединить точки тела, имеющие одинаковую температуру, то получим поверхность равных температур, называемую *изотермической*. Изотермические поверхности являются поверхностями уровня температурного поля и описываются уравнением

$$T = f(x, y, z, \tau) = C, \tag{1.3}$$

где $C = \text{const}$.

При пересечении изотермической поверхности плоскостью получим семейство *изотерм* (линий, соответствующих одинаковой температуре).

Если температурное поле непрерывное, изотермические поверхности и изотермические линии для данных температур не пересекаются между собой и не обрываются внутри него, так как в одной и той же точке тела не может быть двух различных значений температуры. Рассмотрим две близкие изотермические поверхности с температурами T и $T + \Delta T$ (рис. 1.1). Вдоль изотермической поверхности T изменения температуры не происходит, так как изотермическая поверхность — геометрическое место точек с одинаковой температурой, а вдоль произвольно выбранного направления l, пересекающего изотерму $T + \Delta T$, наблюдается изменение температуры. При этом наибольший перепад температуры на единицу длины будет, очевидно, наблюдаться при перемещении по направлению нормали $\vec{n}$ к изотермической поверхности.

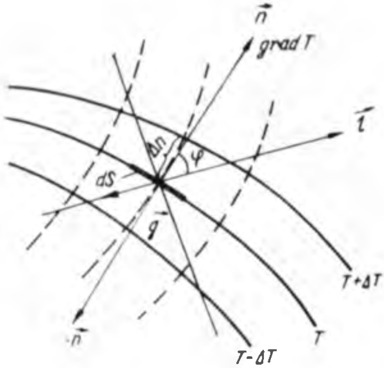


Рис. 1.1. Температурное поле и его характеристики

Предел отношения изменения температуры ΔT к расстоянию между изотермами T и $T + \Delta T$ по нормали Δn при $\Delta n \to 0$ называют *градиентом температуры*, то есть

$$|\mathrm{grad}\, T| = \lim_{\Delta n \to 0} \left(\frac{\Delta T}{\Delta n} \right). \qquad (1.4)$$

Градиент температуры есть вектор, направленный по нормали к изотермической поверхности, причем за положительное направление этого вектора принимается направление в сторону возрастания температуры:

$$\mathrm{grad}\, T = \vec{1}_n \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right),$$

где $\vec{1}_n$ — единичный вектор нормали к изотермической поверхности, направленный в сторону возрастания температуры; $\partial T/\partial n$ — производная от температуры по нормали n. Производная $\partial T/\partial n$ в направлении убывания температуры отрицательна.

Для вектора градиента используется еще обозначение

$$\mathrm{grad}\ T = \nabla T. \qquad (1.5)$$

В соответствии с обозначением (1.5) вектор ∇ в декартовой системе координат может быть представлен следующим образом:

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z},$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — единичные векторы выбранной системы координат. Проекции вектора $\operatorname{grad} T$ на оси Ox, Oy, Oz, очевидно, равны

$$\begin{aligned}(\operatorname{grad} T)_x &= (\nabla T)_x = \frac{\partial T}{\partial n}\cos(\vec{1}_n, \vec{i}) = \frac{\partial T}{\partial x},\\(\operatorname{grad} T)_y &= (\nabla T)_y = \frac{\partial T}{\partial n}\cos(\vec{1}_n, \vec{j}) = \frac{\partial T}{\partial y},\\(\operatorname{grad} T)_z &= (\nabla T)_z = \frac{\partial T}{\partial n}\cos(\vec{1}_n, \vec{k}) = \frac{\partial T}{\partial z}.\end{aligned} \tag{1.6}$$

Тепловой поток. Основной закон теплопроводности Фурье. Перенос теплоты в теле с помощью теплопроводности может осуществляться только при неоднородном распределении в нем температуры, то есть необходимым условием возникновения внутри тела теплового потока является отличный от нуля градиент температуры. Как показывает опыт, теплота передается от точек с большей температурой к точкам с меньшей температурой, поэтому тепловой поток в отличие от температуры, которая является скалярной величиной, имеет определенное направление.

Обозначим полное количество теплоты, прошедшее через изотермическую поверхность S за время τ, через Q_τ.

Тогда в единицу времени $d\tau$ через эту поверхность проходит количество теплоты $Q = \frac{dQ_\tau}{d\tau}$, называемое *тепловым потоком*.

Полное количество теплоты Q_τ может быть выражено через тепловой поток Q: $Q_\tau = \int_0^\tau Q\,d\tau$.

Для характеристики тепловых потоков вводится *вектор плотности теплового потока* $\vec{q}$, значение которого равно количеству теплоты dQ_τ, проходящему в единицу времени $d\tau$ через единицу площади изотермической поверхности dS, а направление в любой точке изотропного тела противоположно направлению градиента температуры

$$q = |\vec{q}| = \frac{d^2Q_\tau}{d\tau\,dS} = \frac{dQ}{dS}, \tag{1.7}$$

откуда

$$Q = \int_S q\,dS, \quad Q_\tau = \int_0^\tau \int_S q\,dS.$$

Вектор плотности теплового потока $\vec{q}$ направлен в сторону переноса теплоты (см. рис. 1.1.) Линии, касательные к которым совпадают с направлением $\vec{q}$, называют линиями *теплового потока*. Линии теплового потока перпендикулярны к изотермическим поверхностям в точках пересечения с ними.

Согласно предположению Фурье, тепловой поток через элемент изотермической поверхности определяется значением температурного градиента в рассматриваемой точке. Многочисленные опытные данные позволили установить прямо пропорциональную зависимость между плотностью теплового потока и градиентом температур

$$\vec{q} = -\lambda \operatorname{grad} T, \text{ или } q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n}, \qquad (1.8)$$

где λ — коэффициент пропорциональности, называемый *коэффициентом теплопроводности*, или *теплопроводностью*.

Основной закон теплопроводности Фурье описывается равенством (1.8) и формулируется следующим образом: *плотность теплового потока прямо пропорциональна градиенту температуры.*

Проекции вектора $\vec{q}$ на оси декартовой системы координат имеют вид

$$\begin{aligned} q_x &= q\cos(\vec{1}_n, \vec{i}) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n}\cos(\vec{1}_n, \vec{i}) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}, \\ q_y &= q\cos(\vec{1}_n, \vec{j}) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n}\cos(\vec{1}_n, \vec{j}) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y}, \\ q_z &= q\cos(\vec{1}_n, \vec{k}) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n}\cos(\vec{1}_n, \vec{k}) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z}, \end{aligned} \qquad (1.9)$$

где $q = \sqrt{q_x^2 + q_y^2 + q_z^2} = |\vec{q}| = -\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)$ — модуль вектора теплового потока.

Теплопроводность λ является физическим параметром и в общем случае зависит от температуры, давления и свойств вещества. Теплопроводность измеряется в Вт/(м · К) и в большинстве случаев определяется экспериментально. При этом используется соотношение

$$\lambda = \frac{q}{|\operatorname{grad} T|},$$

являющееся следствием равенства (1.8), из которого более ясно виден физический смысл λ: теплопроводность численно равна количеству теплоты, которое проходит в единицу времени через единицу изотермической поверхности при градиенте температуры, равном единице, то есть при перепаде температур в один градус на единицу длины нормали.

Теплопроводность различных веществ изменяется в широком диапазоне: например, для четыреххлористого углерода при 373 К $\lambda =$ = 0,0086 Вт/(м · К), а для серебра при 273 К $\lambda =$ 416 Вт/(м · К). Для газов и паров значения λ малы (0,006 — 0,6 Вт/(м · К)), однако они увеличиваются с повышением температуры. Изменение давления практически не влияет на теплопроводность газов, за исключением очень высоких и очень низких давлений. Для жидкостей коэффициент теплопроводности изменяется в пределах 0,070—0,1 Вт/(м · К) и возрастает с повышением температуры. Исключение составляют вода и глицерин.

Существенно зависит от температуры теплопроводность твердых тел, причем характер ее изменения во многом определяется химическим составом вещества. Так, для чистых металлов с повышением

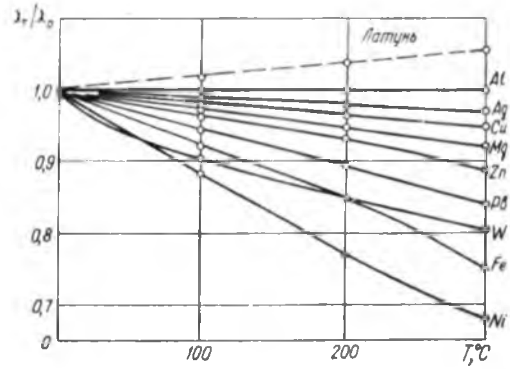


Рис. 1.2. Зависимость теплопроводности от температуры для некоторых чистых металлов

температуры теплопроводность уменьшается (рис. 1.2), а для сплавов — увеличивается (рис. 1.3). На теплопроводность металлов сильно влияют примеси. Например, добавление в медь небольшого количества мышьяка снижает ее теплопроводность от 396 до 142 Вт/(м · К).

Строительные материалы имеют, как правило, небольшую теплопроводность. Она изменяется от 0,023 до 2,9 Вт/(м · К). Материалы с теплопроводностью меньше 0,25 Вт/(м · К), применяемые для тепловой изоляции, называются *теплоизоляционными*. Многие из строительных материалов имеют порошкообразное или пористое строение. На теплопроводность тел такого рода наряду с температурой существенное влияние оказывает пористость материала. Например, при

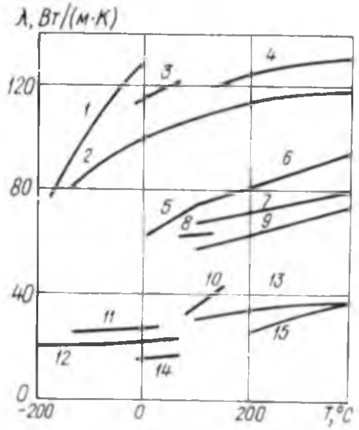


Рис. 1.3. Зависимость теплопроводности от температуры для различных сплавов:

1 — латунь-18; *2* — латунь-30; *3* — латунь-12; *4* — нихром; *5* — бронза; *6* — марганцовистая бронза; *7* — орудийная бронза; *8* — сплав олова и цинка; *9* — фосфористая бронза, *10* — белый металл; *11* — константин; *12* — монель-металл; *13* — манганин; *14* — никелевая сталь; *15* — жидкий сплав олова с цинком

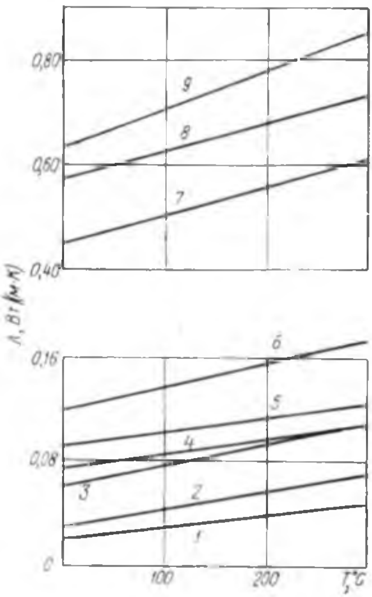


Рис. 1.4. Зависимость теплопроводности от температуры для строительных теплоизоляционных материалов:

1 — воздух; *2* — минеральная шерсть; *3* — шлаковая вата; *4* — ньювель; *5* — совелит; *6* — диатомитовый кирпич; *7* — красный кирпич; *8* — шлакобетонный кирпич; *9* — шамотный кирпич возрастании плотности от 400 до 800 кг/м^3 теплопроводность асбеста увеличивается от 0,105 до 0,248 Вт/(м · К). Это объясняется тем, что теплопроводность заполняющего поры воздуха значительно меньше, чем компонентов пористого материала. Теплопроводность пористых материалов зависит также от влажности. Например, для сухого кирпича $\lambda = 0{,}35$ Вт/(м · К), а для влажного — $\lambda = 1{,}0$ Вт/(м · К). Зависимость теплопроводности некоторых теплоизоляционных материалов от температуры показана на рис. 1.4 [7].

Большинство применяемых в технике материалов можно приближенно считать изотропными, а зависимость коэффициента теплопроводности от температуры в узком интервале температур можно принять линейной: $\lambda = \lambda_0 [1 + b(T - T_0)]$, где λ_0 — теплопроводность при $T = T_0$; b — коэффициент пропорциональности, определяемый из эксперимента.

Часто встречаются материалы, для которых теплопроводность существенно зависит от направления передачи теплоты, то есть обладающие *анизотропными свойствами*. Например, теплопроводность древесины вдоль волокон может отличаться от теплопроводности поперек волокон в 3—4 раза. В анизотропных телах векторы $\vec{q}$ и grad T уже не лежат на одной прямой, и соотношения (1.9) для них не справедливы. Коэффициент теплопроводности анизотропных тел в общем случае является тензором второго ранга

$$\vec{\vec{\lambda}} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{pmatrix}.$$

Используя формулу умножения тензора на вектор справа [33], запишем закон Фурье в проекциях на оси криволинейной ортогональной системы координат $(x_1,\ x_2,\ x_3)$

$$q_i = -\sum_{j=1}^{3} \lambda_{ij} \frac{1}{H_j} \frac{\partial T}{\partial x_j}, \quad i = 1,\ 2,\ 3, \tag{1.10}$$

где H_j — коэффициенты Лямэ [33].

В случае декартовой прямоугольной системы координат уравнения (1.10) имеют вид

$$-q_x = \lambda_{xx} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{xy} \frac{\partial T}{\partial y} + \lambda_{xz} \frac{\partial T}{\partial z},$$

$$-q_y = \lambda_{yx} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{yy} \frac{\partial T}{\partial y} + \lambda_{yz} \frac{\partial T}{\partial z},$$

$$-q_z = \lambda_{zx} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{zy} \frac{\partial T}{\partial y} + \lambda_{zz} \frac{\partial T}{\partial z}.$$

Компоненты тензора теплопроводности λ_{ij} с неповторяющимися индексами $(i \neq j)$ должны удовлетворять соотношению

$$\lambda_{ij} = \lambda_{ji}, \tag{1.11}$$

то есть тензор $\vec{\vec{\lambda}}$ должен быть симметричным.

Если перейти от координат $(x_1,\ x_2,\ x_3)$ к координатам $(\bar{x}_1,\ \bar{x}_2,\ \bar{x}_3)$, направленным по главным осям кристалла (анизотропного тела), то уравнения (1.10) можно записать так:

$$q_i = -\lambda_{ii} \frac{\partial T}{\partial \bar{x}_i} \frac{1}{H_i} = -\lambda_i \frac{\partial T}{\partial \bar{x}_i}, \quad i = 1,\ 2,\ 3. \tag{1.12}$$

Аналогичную форму записи имеет закон Фурье для ортотропных твердых тел с различной теплопроводностью в трех взаимноперпендикулярных направлениях (теплопроводность является вектором):

$$q_x = -\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x}, \quad q_y = -\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y}, \quad q_z = -\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \qquad (1.13)$$

в случае прямоугольной системы координат Ox, Oy, Oz;

$$q_r = -\lambda_r \frac{\partial T}{\partial r}, \quad q_\Theta = -\lambda_\Theta \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \Theta}, \quad q_z = -\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z}$$

в случае цилиндрической системы координат (r, Θ, z).

Следовательно, уравнения (1.9) для изотропного тела являются частным случаем уравнений (1.13), когда тензор теплопроводности вырождается в скаляр и векторы $\vec{q}$ и grad T лежат на одной прямой, но направлены в противоположные стороны.

§ 1.3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Аналитическое изучение процессов теплопроводности (как, впрочем, и любого другого физического явления) невозможно без установления зависимости между физическими величинами, характеризующими эти процессы и являющимися функциями пространственных координат и времени. Математическое выражение этой зависимости, имеющей форму дифференциального уравнения, называют *основным дифференциальным уравнением теплопроводности*. Оно характеризует протекание процесса теплопроводности в любой точке тела в любой момент времени и дает зависимость между температурой, временем и координатами произвольного элементарного объема. Дифференциальное уравнение теплопроводности является следствием закона сохранения энергии и закона теплопроводности Фурье.

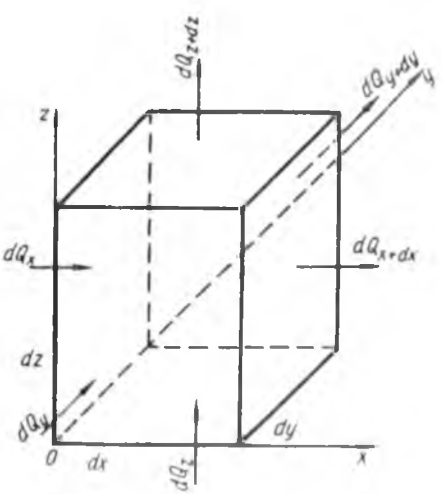


Рис. 1.5. К выводу дифференциального уравнения теплопроводности

Вывод уравнения теплопроводности для изотропных тел. Предположим, что рассматриваемое тело неподвижно, изотропно, процесс теплопроводности нестационарный, а температурные деформации элементарного объема пренебрежимо малы по сравнению с объемом.

Рассмотрим бесконечно малый объем $dxdydz$ в прямоугольной системе координат $Oxyz$ (рис. 1.5). Через грань $dydz$ к поверхности элементарного объема за время $d\tau$ вдоль оси Ox подводится количество теплоты dQ_x, которое в соответствии с законом Фурье определяется равенством

$$dQ_x = q_x \, dy \, dz \, d\tau = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} dy \, dz \, d\tau. \tag{1.14}$$

Через противоположную грань $x + dx$ отводится количество теплоты dQ_{x+dx}. Разложим функцию dQ_{x+dx} в ряд Тейлора, сохранив только два первых члена разложения:

$$dQ_{x+dx} = dQ_x + \frac{\partial}{\partial x}(dQ_x) \, dx + \cdots \tag{1.15}$$

Подсчитаем разницу между количеством теплоты, подведенной за счет теплопроводности к элементарному объему за время $d\tau$ вдоль оси Ox и количеством теплоты, отведенной от него за это же время вдоль оси Ox:

$$dQ_x - dQ_{x+dx} = -\frac{\partial}{\partial x}(q_x) \, dx \, dy \, dz \, d\tau. \tag{1.16}$$

Аналогичным образом записывается изменение количества теплоты вдоль осей Oy и Oz:

$$\left.\begin{aligned} dQ_y - dQ_{y+dy} &= -\frac{\partial}{\partial y}(q_y) \, dx \, dy \, dz \, d\tau, \\ dQ_z - dQ_{z+dz} &= -\frac{\partial}{\partial z}(q_z) \, dx \, dy \, dz \, d\tau. \end{aligned}\right. \tag{1.17}$$

Складывая равенства (1.16), (1.17), получим разницу между общим количеством подведенной и отведенной теплопроводностью теплоты за время $d\tau$ через поверхность элементарного объема:

$$dQ_1 = -\left[\frac{\partial}{\partial x}(q_x) + \frac{\partial}{\partial y}(q_y) + \frac{\partial}{\partial z}(q_z)\right] dx \, dy \, dz \, d\tau. \tag{1.18}$$

Итак, к элементарному объему за время $d\tau$ в конечном счете подведено за счет теплопроводности количество теплоты dQ_1, определяемое равенством (1.18).

Внутри тела может выделяться или поглощаться теплота в результате, например, химических превращений, испарения влаги, действия электрического тока и проч. То есть в теле возможно наличие объемных источников (стоков) теплоты. Обозначим q_v *мощность внутренних источников теплоты* (ее еще называют *объемной плотностью теплового потока*), которая определяется как количество теплоты, выделяемое (поглощаемое) внутренними источниками (стоками) за единицу времени в единице элементарного объема среды.

Предположим, что q_v есть известная функция координат и времени $q_v = q_v(x, y, z, \tau)$. Количество теплоты, выделяемое в элементарном объеме внутренними источниками теплоты за время $d\tau$,

$$dQ_2 = q_v dx dy dz d\tau. \tag{1.19}$$

Аккумулированная в элементарном объеме за счет теплопроводности теплота dQ_1, а также выделенная объемными источниками теплота dQ_2, согласно закону сохранения энергии, идет на увеличение внутренней энергии U, если процесс протекает при постоянном объеме, или на увеличение энтальпии H, если процесс протекает при постоянном давлении. Составим уравнения теплового баланса за время $d\tau$ для элементарного объема $dxdydz$ в каждом из этих случаев.

при изохорном процессе ($V = \text{const}$)

$$dQ_1 + dQ_2 = dU, \tag{1.20}$$

при изобарном процессе ($p = \text{const}$)

$$dQ_1 + dQ_2 = dH. \tag{1.21}$$

Считая внутреннюю энергию единицы объема функцией объема и температуры, получаем

$$dU = C_V \frac{\partial T}{\partial \tau} d\tau\, dx\, dy\, dz = c_V \rho \frac{\partial T}{\partial \tau} d\tau\, dx\, dy\, dz, \tag{1.22}$$

где c_V — изохорная теплоемкость единицы массы, Дж/(кг · К); ρ — плотность вещества, кг/м^3; $C_V = \rho c_V$ — изохорная теплоемкость единицы объема, Дж/(м^3 · К).

Подставляя выражения для dU из (1.22) в равенство (1.20) и учитывая (1.18), (1.19), находим

$$\rho c_V \frac{\partial T}{\partial \tau} = -\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right) + q_v. \tag{1.23}$$

Поскольку $\partial q_x/\partial x + \partial q_y/\partial y + \partial q_z/\partial z = \operatorname{div} \vec{q}$, перепишем (1.23) в виде

$$\rho c_V = \frac{\partial T}{\partial \tau} = -\operatorname{div} \vec{q} + q_v. \tag{1.24}$$

В случае изобарного процесса, рассматривая энтальпию единицы объема h как функцию температуры и давления, можно получить

$$dH = C_p \frac{\partial T}{\partial \tau} d\tau\, dx\, dy\, dz = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial \tau} d\tau\, dx\, dy\, dz, \tag{1.25}$$

где c_p — изобарная теплоемкость единицы массы, Дж/(кг · К); C_p — изобарная теплоемкость единицы объема, Дж/(м^3 · К).

Подставляя (1.25) в (1.20) и используя равенства (1.18), (1.19), получаем

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial \tau} = -\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right) + q_v = -\operatorname{div} \vec{q} + q_v. \tag{1.26}$$

Выражения (1.24), (1.26) являются дифференциальными уравнениями энергии для изохорного и изобарного процессов соответственно.

Для твердых тел значения c_p и c_V близки, поэтому можно принять $c_p = c_V = c$. Величину c называют еще *удельной теплоемкостью*.

Используя закон Фурье, запишем уравнение (1.26) в виде (индекс «p» у теплоемкости опускаем)

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z}\right) + q_v,$$

или при $\lambda = \text{const}$

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial \tau} = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + q_v. \qquad (1.27)$$

Уравнение (1.27) называют *дифференциальным уравнением теплопроводности*. Оно устанавливает связь между изменением температуры любой точки тела в пространстве и времени.

При выводе уравнения (1.27) была использована декартовая система координат, а элементарный объем выбирали в форме параллелепипеда. Однако можно получить дифференциальное уравнение теплопроводности более общим способом в произвольной системе координат, используя формулу Остроградского — Гаусса.

Выделим в некоторой среде, где осуществляется процесс теплопроводности, произвольный объем V, ограниченный поверхностью S. Количество теплоты, которое проходит в единицу времени через поверхность S, в соответствии с законом Фурье

$$dQ_1 = \int_{(S)} \lambda \operatorname{grad} T \, d\vec{S} = \lambda \vec{1}_n \operatorname{grad} T \, dS.$$

За счет внутренних источников выделится количество теплоты

$$dQ_2 = \int_{(V)} q_v \, dV.$$

Теплота, аккумулированная теплопроводностью и выделенная внутренними источниками в единицу времени, вызовет изменение внутренней энергии объема V на величину

$$dU = \frac{\partial}{\partial \tau} \int_{(V)} \rho u \, dV = \frac{\partial}{\partial \tau} \int_{(V)} \rho c T \, dV = \int_{(V)} c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} dV.$$

Согласно закону сохранения энергии

$$dQ_1 + dQ_2 = dU$$

или

$$\int_{(V)} c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} dV = \int_{(S)} \vec{1}_n \lambda \operatorname{grad} T \, dS + \int_{(V)} q_v \, dV. \qquad (1.28)$$

Преобразуем поверхностный интеграл в правой части равенства (1.28) в объемный, используя формулу Остроградского — Гаусса:

$$\int_{(S)} \vec{1}_n \lambda \operatorname{grad} T \, dS = \int_{(V)} \operatorname{div} (\lambda \operatorname{grad} T) \, dV.$$

Тогда равенство (1.28) примет вид

$$\int_{(V)} c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} dV = \int_{(V)} [\operatorname{div} (\lambda \operatorname{grad} T) + q_v] \, dV. \qquad (1.29)$$

В силу произвольности выбора объема V, из (1.29) следует уравнение

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} = \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + q_v, \tag{1.30}$$

которое является наиболее общей формой записи основного дифференциального уравнения теплопроводности. При этом предполагается, что λ, ρ, c, q_v могут быть произвольными функциями температуры или координат и времени.

Выражения (1.29), (1.30) записаны в векторной форме, одинаковой во всех системах координат. Чтобы получить уравнение теплопроводности в какой-либо конкретной системе координат, достаточно записать выражения для $\operatorname{div} \vec{q}$ или $\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T)$ в этой системе координат. Запишем формулу для вектора плотности теплового потока в произвольной ортогональной системе координат (x_1, x_2, x_3):

$$\operatorname{div} \vec{q} = \nabla \vec{q} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{H_1 H_2 H_3}{H_i} q_i \right), \tag{1.31}$$

где q_i — проекция вектора $\vec{q}$ на направление единичного вектора $\vec{e}_i$ вдоль кривой x_i системы координат (x_1, x_2, x_3); H_i — коэффициенты Лямэ, определяемые равенством

$$H_i^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_i} \right)^2, \quad i = 1, 2, 3. \tag{1.32}$$

С учетом выражения для вектора $\operatorname{grad} T$ в ортогональной криволинейной системе координат

$$\operatorname{grad} T = \nabla T(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^{3} \vec{e}_i \frac{1}{H_i} \frac{\partial T}{\partial x_i} \tag{1.33}$$

получим из (1.31) следующее равенство:

$$\operatorname{div} \vec{q} = \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{H_1 H_2 H_3}{H_i^2} \lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \right). \tag{1.34}$$

В прямоугольной системе координат (x, y, z) коэффициенты Лямэ $H_i = 1$, $i = 1, 2, 3$, и уравнение теплопроводности имеет вид (1.27). Найдем уравнение теплопроводности, например, в цилиндрической системе координат (r, Θ, z):

$$x = r\cos\Theta, \quad y = r\sin\Theta, \quad z = z,$$

$$H_1^2 = H_r^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r} \right)^2 = \cos^2\Theta + \sin^2\Theta = 1,$$

$$H_2^2 = H_\Theta^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \Theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \Theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \Theta} \right)^2 = (-r\sin\Theta)^2 + (r\cos\Theta)^2 = r^2,$$

$$H_3^2 = H_z^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z} \right)^2 = 1.$$

Следовательно, $H_r = H_z = 1$, $H_\Theta = r$;

$$\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\Theta}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial\Theta}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial z}\right). \qquad (1.35)$$

Таким образом, уравнение теплопроводности в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial\tau} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\Theta}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial\Theta}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial z}\right) + q_v. \qquad (1.36)$$

В сферической системе координат (r, φ, ψ), которая связана с прямоугольной декартовой системой соотношениями $x = r\cos\varphi\sin\psi$, $y = r\sin\varphi\sin\psi$, $z = r\cos\psi$, аналогично можно получить

$$H_r = 1, \quad H_\varphi = r\sin\psi, \quad H_\psi = 1. \qquad (1.37)$$

Тогда уравнение теплопроводности запишется следующим образом:

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial\tau} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\psi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial\varphi}\right) + \frac{1}{r^2\sin\psi}\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\lambda\sin\psi\frac{\partial T}{\partial\psi}\right) + q_v. \qquad (1.38)$$

Во многих практических случаях теплопроводность слабо зависит от температуры и ее можно считать постоянной. Тогда уравнение (1.30) значительно упростится

$$\frac{\partial T}{\partial\tau} = a\operatorname{div}(\operatorname{grad} T) + \frac{q_v}{c\rho} = \nabla^2 T + \frac{q_v}{c\rho}, \qquad (1.39)$$

где $\nabla^2 = \Delta$ — оператор Лапласа, который в ортогональной криволинейной системе координат задается соотношением

$$\nabla^2 = \frac{1}{H_1H_2H_3}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{H_1H_2H_3}{H_i^2}\frac{\partial T}{\partial x_i}\right), \quad i = 1,\ 2,\ 3. \qquad (1.40)$$

Коэффициент пропорциональности в уравнении (1.39) $a = \lambda/(\rho c)$ называется *температуропроводностью* и измеряется в м²/с. Остановимся на физическом смысле температуропроводности. Можно показать, что a равен количеству теплоты, протекающей в единицу времени через единицу поверхности при перепаде объемной концентрации внутренней энергии или энтальпии в 1 Дж/м³ на единицу длины нормали, то есть температуропроводность является коэффициентом диффузии внутренней энергии при V — const или энтальпии при p — const. В этой связи различают температуропроводность при постоянном объеме a_V и температуропроводность при постоянном давлении a_p. Для твердых тел $a_V = a_p = a$.

Можно придать температуропроводности a и другой физический смысл. Из уравнения (1.39) видно, что при $q_v = 0$ скорость изменения температурного поля зависит только от одной физической величины — температуропроводности a, а именно производная $\partial T/\partial\tau$ прямо пропорциональна величине a. Величина, обратная температуропроводности $1/a$, характеризует инерционные свойства тела в отношении распространения температурного поля.

Одним из наиболее теплоинерционных тел является вода, ее температуропроводность при 363 К и давлении 0,1 МПа равна $a = 1{,}39 \times 10^{-8}$ м²/с ($1/a = 0{,}67 \cdot 10^{8}$ с/м²). Газы обладают малой тепловой инерцией, например для воздуха при тех же условиях $a = 2{,}58 \times 10^{-5}$ м²/с ($1/a = 0{,}39 \cdot 10^{5}$ с/м²).

Температуропроводность, так же как λ, c и ρ, зависит от температуры, а температуропроводность пористых и порошкообразных тел — от плотности и влажности. Однако для ряда задач в первом приближении можно считать a постоянной величиной.

Для стационарных процессов теплопроводности, то есть при $\partial T/\partial \tau = 0$, уравнение (1.30) имеет вид

$$\mathrm{div}(\mathrm{grad}\, T) + q_v = 0 \tag{1.41}$$

или при $\lambda = \mathrm{const}$

$$\nabla^2 T + \frac{q_v}{\lambda} = 0, \tag{1.42}$$

или

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = -\frac{q_v}{\lambda}.$$

Выражение (1.42) называют *уравнением Пуассона*. При $q_v = 0$ уравнение Пуассона переходит в *уравнение Лапласа*.

Воспользовавшись формулой (1.40), запишем уравнение Пуассона в различных системах координат:

прямоугольной

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0,$$

цилиндрической

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \Theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{q_v}{\lambda} = 0,$$

сферической

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2\psi}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin\psi}\frac{\partial}{\partial \psi}\left(\sin\psi \frac{\partial T}{\partial \psi}\right) + \frac{q_v}{\partial \lambda} = 0.$$

В курсах математической физики показано, что уравнение теплопроводности (1.30) является дифференциальным уравнением в частных производных *параболического типа*, а уравнения Пуассона и Лапласа — дифференциальными уравнениями *эллиптического типа*.

Уравнение теплопроводности для анизотропных сред. Как уже отмечалось, многие материалы отличаются анизотропией физических свойств, в частности имеют теплопроводность, которая существенно меняется в зависимости от направления потока теплоты, который проходит через тела. В этом случае теплопроводность представляет собой тензор второго ранга, а закон Фурье в криволинейной ортогональной системе координат имеет вид равенства (1.10). Найдем уравнение теплопроводности для анизотропной среды, воспользовавшись векторной формой записи уравнения (1.30).

Согласно правилам умножения тензора $(\vec{\vec{\lambda}})$ на вектор (grad T), получим следующее выражение для члена div (λ grad T) в правой части уравнения (1.30):

$$\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) = \operatorname{div}\left|\begin{pmatrix} \lambda_{xx} & \lambda_{xy} & \lambda_{xz} \\ \lambda_{yx} & \lambda_{yy} & \lambda_{yz} \\ \lambda_{zx} & \lambda_{zy} & \lambda_{zz} \end{pmatrix} \operatorname{grad} T\right| =$$

$$= \operatorname{div}\left[\left(\lambda_{xx}\frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{xy}\frac{\partial T}{\partial y} + \lambda_{xz}\frac{\partial T}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\lambda_{yx}\frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{yy}\frac{\partial T}{\partial y} + \lambda_{yz}\frac{\partial T}{\partial z}\right)\vec{j} + \right.$$

$$\left. + \left(\lambda_{zx}\frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{zy}\frac{\partial T}{\partial y} + \lambda_{zz}\frac{\partial T}{\partial z}\right)\vec{k}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_{xx}\frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{xy}\frac{\partial T}{\partial y} + \lambda_{xz}\frac{\partial T}{\partial z}\right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_{yx}\frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{yy}\frac{\partial T}{\partial y} + \lambda_{yz}\frac{\partial T}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_{zx}\frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{zy}\frac{\partial T}{\partial y} + \lambda_{zz}\frac{\partial T}{\partial z}\right), \tag{1.43}$$

где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ — орты декартовой системы координат.

Если компоненты тензора теплопроводности не зависят от координат и он является симметричным тензором, выражение (1.43) можно упростить

$$\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) = \lambda_{xx}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda_{yy}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} +$$

$$+ \lambda_{zz}\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + 2\lambda_{xy}\frac{\partial^2 T}{\partial x\,\partial y} + 2\lambda_{yz}\frac{\partial^2 T}{\partial y\,\partial z} + 2\lambda_{xz}\frac{\partial^2 T}{\partial x\,\partial z}. \tag{1.44}$$

Тогда уравнение теплопроводности для анизотропного твердого тела в декартовой системе координат запишется в виде

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial \tau} = \lambda_{xx}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda_{yy}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \lambda_{zz}\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} +$$

$$+ 2\left(\lambda_{xy}\frac{\partial^2 T}{\partial x\,\partial y} + \lambda_{yz}\frac{\partial^2 T}{\partial y\,\partial z} + \lambda_{xz}\frac{\partial^2 T}{\partial x\,\partial z}\right) + q_v = 0. \tag{1.45}$$

Вводя новую прямоугольную систему координат (ξ, η, ζ), можно привести уравнение (1.45) к виду, не содержащему смешанных производных:

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial \tau} = \lambda_1\frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + \lambda_2\frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} + \lambda_3\frac{\partial^2 T}{\partial \zeta^2} + q_v.$$

В этом случае координатные оси ξ, η, ζ направлены вдоль главных осей теплопроводности, а коэффициенты λ_1, λ_2, λ_3 называют главными коэффициентами теплопроводности.

Если сделать еще одно преобразование координат

$$\bar{\xi} = \xi\,(\lambda/\lambda_1)^{1/2}, \quad \bar{\eta} = \eta\,(\lambda/\lambda_1)^{1/2}, \quad \bar{\zeta} = \zeta\,(\lambda/\lambda_3)^{1/2},$$

то последнее уравнение можно привести к виду, аналогичному уравнению теплопроводности для изотропного тела

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial \tau} = \lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial \bar{\xi}^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \bar{\eta}^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \bar{\zeta}^2}\right) + q_v,$$

где λ — произвольно выбранная постоянная.

Следует, однако, отметить, что такое преобразование координат при всей кажущейся целесообразности оказывается полезным лишь в отдельных случаях. Это объясняется тем, что введение новых переменных существенно усложняет вид граничных условий, и решение задачи становится, как правило, более трудоемким и сложным.

В произвольных криволинейных ортогональных координатах уравнение теплопроводности для анизотропного тела в соответствии с выражением (1.10) для плотности теплового потока $\vec{q}$ и формулой (1.31) запишется следующим образом:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{H_1 H_2 H_3}{H_i} \left(\sum_{j=1}^{3} \lambda_{ij} \left(\frac{1}{H_j} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) \right) \right] + q_v. \tag{1.46}$$

Из уравнения (1.46) нетрудно получить уравнения теплопроводности в прямоугольной, цилиндрической и сферической системах координат. Например, в декартовой системе координат оно имеет вид выражения (1.43), а в цилиндрических координатах запишется в виде

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r\lambda_{rr} \frac{\partial T}{\partial r} + \lambda_{r\Theta} \frac{\partial T}{\partial \Theta} + r\lambda_{rz} \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(\lambda_{\Theta r} \frac{\partial T}{\partial r} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{r} \lambda_{\Theta\Theta} \frac{\partial T}{\partial \Theta} + \lambda_{\Theta z} \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_{zr} \frac{\partial T}{\partial r} + \lambda_{z\Theta} \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \Theta} + \lambda_{zz} \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q_v.$$

Для ортотропных однородных тел $\lambda_{ij} = 0$ при $i \neq j$ уравнение (1.46) в соответствии с соотношением (1.13) имеет более простой вид:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{H_1 H_2 H_3}{H_i^2} \right) \lambda_i \frac{\partial T}{\partial x_i} \Bigg) + q_v. \tag{1.47}$$

Гиперболическое уравнение теплопроводности. В феноменологической теории теплопроводности предполагается, что скорость распространения теплоты в теле бесконечно велика. При выводе основного уравнения теплопроводности Фурье (1.31) мы неявно использовали это обстоятельство, считая, что градиент температуры и плотность теплового потока для любого момента времени τ соответствуют друг другу. Абсолютное большинство встречающихся на практике процессов теплопереноса являются процессами умеренной интенсивности, для которых предположение о бесконечной скорости распространения теплоты подтверждается многочисленными теоретическими и экспериментальными исследованиями. Однако при рассмотрении высокоинтенсивных нестационарных процессов в разреженных средах (например, тепловой взрыв, обтекание тела сверхзвуковым потоком газа и проч.) использование этого предположения приводит к ошибкам, поэтому необходимо учитывать, что теплота распространяется хоть и с очень большой, но все же с конечной скоростью.

Применительно к процессам тепло- и влагопереноса в капиллярно-пористых средах гипотезу о конечных скоростях распространения теплоты и массы предложил А. В. Лыков [41, 42]. Действительно, при резком изменении теплового потока на поверхности тела изменения температурного поля и градиента температуры происходят медленнее, чем если бы скорость распространения теплоты $w_r \to \infty$. Таким образом, вследствие тепловой инерции происходит запаздывание во времени изменения градиента температуры. Это время запаздывания называют *временем релаксации*. Скорость распространения теплоты w_r связана с временем релаксации τ_r соотношением

$$w_r = \sqrt{\frac{\lambda}{c\rho\tau_r}} = \sqrt{\frac{a}{\tau_r}}. \tag{1.48}$$

Следовательно, время релаксации увеличивается с увеличением тепловой инерции тела и уменьшается с увеличением скорости распространения теплоты. Величина τ_r очень мала, поэтому экспериментальное ее определение затруднительно. Можно, однако, теоретически оценить порядок величины τ_r. Например, для азота $\tau_r \approx 10^{-9}$ с ($w_r \approx 150$ м/с). Для металлов время релаксации τ_r меньше на несколько порядков, чем для газов. Так, для алюминия $\tau_r \approx 10^{-11}$ с ($w_r \approx 3000$ м/с).

С учетом конечности скорости распространения теплоты зависимость между плотностью теплового потока и градиентом температуры для высокоинтенсивных процессов можно представить в виде [41, 42]

$$\vec{q} = -\lambda \nabla T - \tau_r \frac{\partial \vec{q}}{\partial \tau}. \tag{1.49}$$

Для стационарных процессов $\left(\frac{\partial \vec{q}}{\partial \tau} = 0\right)$ и при стремлении скорости распространения теплоты к бесконечности ($\tau_r \to 0$) уравнение (1.49) совпадает с классическим законом теплопроводности Фурье

$$\vec{q} = -\lambda \nabla T.$$

Для высокоинтенсивных нестационарных процессов второй член в уравнении (1.49) становится сравнимым с первым.

Воспользовавшись уравнением баланса теплоты (1.24) для случая $q_V = 0$ и учитывая выражение (1.49), получим уравнение теплопроводности

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} = -\nabla \vec{q} = -\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right). \tag{1.50}$$

Подставляя сюда значения для теплового потока из (1.49), находим при постоянных τ_r и λ

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) + \tau_r \left(\frac{\partial^2 q_x}{\partial x\, \partial \tau} + \frac{\partial^2 q_y}{\partial y\, \partial \tau} + \frac{\partial^2 q_z}{\partial z\, \partial \tau}\right) =$$
$$= \lambda \nabla^2 T + \tau_r \frac{\partial}{\partial \tau}(\nabla \vec{q}). \tag{1.51}$$

Продифференцировав уравнение (1.50) по τ, получим

$$c\rho \frac{\partial^2 T}{\partial \tau^2} = -\frac{\partial}{\partial \tau}(\nabla \vec{q}) = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x\, \partial \tau} + \frac{\partial^2 T}{\partial y\, \partial \tau} + \frac{\partial^2 T}{\partial z\, \partial \tau}\right).$$

С учетом последнего равенства выражение (1.51) преобразуется к виду

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} + \tau_r c\rho \frac{\partial^2 T}{\partial \tau^2} = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right),$$

или

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} + \tau_r \frac{\partial^2 T}{\partial \tau^2} = a \nabla^2 T. \tag{1.52}$$

Полученное уравнение теплопроводности является гиперболическим в отличие от полученного ранее параболического уравнения (1.31).

Следует отметить, что справедливость уравнения (1.52) доказана лишь для одномерного случая, распространение его на многомерный случай является формальным. Вопрос о возможности обобщения гиперболического уравнения теплопроводности на случай трехмерного пространства рассмотрен в работе [42].

§ 1.4. ПОСТАНОВКА КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Условия однозначности. Дифференциальное уравнение теплопроводности выведено на основе общих законов физики и описывает целый класс явлений. В общем случае дифференциальное уравнение теплопроводности имеет бесконечное множество решений. Чтобы из этого множества выделить решение, соответствующее рассматриваемому процессу, необходимо к дифференциальному уравнению присоединить условия, которые дают математическое описание всех специфических особенностей процесса. Эти условия в совокупности с дифференциальным уравнением дают полное математическое описание конкретной задачи теплопроводности и называются *условиями однозначности*.

Условия однозначности подразделяются на геометрические, физические и краевые.

Геометрические условия задают форму и размеры тела, в котором протекает процесс.

Физические условия задают теплофизические параметры среды: λ — теплопроводность, ρ — плотность, c — удельную теплоемкость, q_v — объемную плотность теплового потока.

Краевыми условиями называют совокупность начальных и граничных условий. *Начальные условия* (временные краевые условия) состоят в задании распределения температуры в теле в начальный момент времени и необходимы лишь при рассмотрении нестационарных задач. Начальное условие считается заданным, если для некоторого момента времени τ_0 (обычно выбирают $\tau_0 = 0$) температура тела является известной функцией пространственных координат. В общем случае начальное условие имеет вид

$$T = f(x, y, z) \text{ при } \tau = \tau_0. \qquad (1.53)$$

При равномерном распределении температуры в теле начальное условие имеет простейший вид: $T = T_0 = \mathrm{const}$ при $\tau = \tau_0 = 0$.

Встречаются процессы, в которых можно пренебречь начальными условиями. Например, при нагреве (охлаждении) тел конечной формы с неизменяющимися внешними условиями, начиная с некоторого момента τ^*, наступает такой режим теплопроводности, при котором распределение температур в теле полностью определяется граничными условиями, а начальные условия влияют на температуру тела лишь на промежутке $(0 < \tau < \tau^*)$.

Граничные условия могут быть заданы несколькими способами. Основные из них в теории теплопроводности называются граничными условиями I—IV родов.

Граничные условия I—IV родов. ***Граничные условия I рода*** задаются распределением температуры по поверхности S тела в любой момент времени

$$T(x, y, z, \tau)|_S = T_S = \varphi(x, y, z, \tau), \; x, y, z \in S. \qquad (1.54)$$

Граничные условия I рода реализуются в задачах теплопроводности, если на поверхности тела поддерживается заданный режим изменения температуры, или при интенсивном теплообмене с окружающей средой, когда температура поверхности тела близка к температуре среды. Круг практических задач, в которых можно использовать условия I рода, крайне ограничен, они являются, по сути дела, математической идеализацией реальных физических условий и поэтому применяются в основном при оценочных расчетах.

Отметим, что для стационарных процессов теплопроводности соотношение (1.54) называют *условием Дирихле*.

Граничные условия II рода задаются плотностью теплового потока на поверхности тела как функции координат точек поверхности и времени, то есть

$$q(x, y, z, \tau)|_S = q_S = \psi(x, y, z, \tau), \quad x, y, z \in S. \qquad (1.55)$$

В соответствии с законом Фурье условие (1.55) можно переписать в виде

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n}\bigg|_S = \psi(x, y, z, \tau), \quad x, y, z \in S, \qquad (1.56)$$

где n — внутренняя нормаль к поверхности S.

При рассмотрении процессов стационарной теплопроводности соотношения (1.55), (1.56) называют *условиями Неймана*.

Если функция ψ тождественно равна нулю, соотношение (1.56) называют *условием теплоизоляции*: $\frac{\partial T}{\partial n}\Big|_S = 0$.

На практике условия теплообмена второго рода имеют место при нагревании тел высокотемпературными источниками теплоты, например в муфельных печах, когда теплообмен в основном происходит при помощи излучения по закону Стефана — Больцмана, а температура нагреваемого тела значительно меньше температуры излучающих поверхностей.

Граничные условия III рода задаются плотностью теплового потока на поверхности тела как функции температур поверхности тела и окружающей среды.

В случае конвективного охлаждения (нагревания) поверхности тела некоторой жидкостью плотность теплового потока определяется в соответствии с законом Ньютона:

$$q_S = \pm\alpha(T_S - T_c), \qquad (1.57)$$

где α — коэффициент пропорциональности, называемый *коэффициентом теплоотдачи* и измеряемый в Вт/(м^2 · К).

Коэффициент теплоотдачи численно равен количеству теплоты, отдаваемой (получаемой) единицей площади поверхности тела в единицу времени при разности температур между поверхностью и средой в один градус, и характеризует интенсивность теплового взаимодействия среды с поверхностью тела.

Условия III рода используются в многочисленных задачах исследования теплообмена в твердых телах, обтекаемых жидкостью или газом.

Однако граничные условия III рода в виде (1.57) могут быть использованы и при рассмотрении нагревания или охлаждения тел излучением.

Плотность теплового потока излучающего тела определяется по закону Стефана — Больцмана. В условиях термодинамического равновесия для абсолютно черного тела при излучении в вакууме поверхностная плотность потока излучения $E_0 = \sigma_0 T^4$, где $\sigma_0 = 5{,}67 \times 10^{-8}$ Вт/(м^2 · К^4) — постоянная Стефана — Больцмана.

Для неабсолютно черного тела $E = \varepsilon\sigma_0 T^4$, где ε — интегральная степень черноты излучающей поверхности (коэффициент черноты), который изменяется в пределах 0—1.

В соответствии с законом Стефана — Больцмана плотность теплового потока между двумя поверхностями

$$q_S = \varepsilon_{пр}\sigma_0 (T_S^4 - T_a^4),$$

где $\varepsilon_{пр}$ — приведенный коэффициент черноты, T_a — температура поверхности.

Последнее равенство преобразуем следующим образом:

$$q_S = (\varepsilon_{пр}\sigma_0 (T_S + T_a)(T_S^2 + T_a^2))(T_S - T_a) = \alpha_л (T_S - T_a), \tag{1.58}$$

где

$$\alpha_л = \sigma_0 \varepsilon (T_a^2 + T_S^2)(T_a + T_S) \tag{1.59}$$

— коэффициент лучистого теплообмена.

Если температура поверхности тела T_S изменяется незначительно, коэффициент лучистого теплообмена приближенно можно считать постоянным.

Форма записи граничного условия (1.58) совпадает с (1.57). Если температура тепловоспринимающего тела T_a совпадает с температурой окружающей среды T_c, соотношение для плотности теплового потока, учитывающее возможный конвективный перенос теплоты, имеет вид

$$q_S = \alpha (T_S - T_c),$$

где $\alpha = \alpha_л + \alpha_к$ — суммарный коэффициент теплообмена ($\alpha_к$ — коэффициент конвективного теплообмена).

Используя закон Фурье, последнее равенство можно переписать в следующем виде:

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n}\bigg|_S = \alpha (T_S - T_c). \tag{1.60}$$

Соотношение (1.60) является наиболее часто употребляемым аналитическим выражением граничных условий III рода. Коэффициент теплоотдачи α в этом условии не является физической постоянной, характерной для того или иного вещества. В общем случае, как это было показано, он отражает совместное действие теплопроводности, конвекции и радиации, причем каждое из слагаемых α, соответствующее данному способу теплообмена, зависит от многих факторов. Например, конвективная часть $\alpha_к$ зависит от геометрии и размеров тела, режима обтекания, физических свойств среды, распределения скоростей в обтекающем тело потоке, температуры среды. В отдельных случаях $\alpha_к$, так же как и коэффициент лучистого теплообмена $\alpha_л$, зависит и от температуры поверхности тела. Тогда граничные условия (1.60) становятся нелинейными и при решении задач с такими граничными условиями возникают дополнительные трудности.

Во многих (сравнительно простых) случаях коэффициент теплоотдачи в первом приближении можно считать постоянным. Однако для большинства более сложных задач такое допущение уже не верно. Поэтому при использовании граничных условий (1.60) для решения задач о теплообмене между телом и окружающей средой возникает вопрос: как определить коэффициент α применительно к конкретным условиям рассматриваемого процесса? Ответить на этот вопрос зачастую бывает гораздо труднее, чем решить исходную задачу об определении температурного поля при известном α. Вся сложность исследования теплообмена в этом случае сосредотачивается на методе определения коэффициента теплоотдачи.

При рассмотрении некоторых нестационарных задач конвективного теплообмена использование закона Ньютона при постановке граничных условий вообще неприемлемо [42, 66]. В этом случае приходится рассматривать температурные поля тела и жидкости совместно, то есть формулировать задачу как сопряженную. Такой подход приводит к постановке на границе между телом и жидкостью условий сопряжения, называемых граничными условиями IV рода, которые будут рассмотрены ниже. Отметим, что сопряженная постановка задачи с использованием граничных условий IV рода отвечает реально происходящим процессам теплообмена на границе тело — жидкость в гораздо большей степени, чем закон Ньютона, то есть физически более обоснована.

Из граничных условий III рода путем предельных переходов можно получить граничные условия I и II родов. Если, например, в равенстве (1.60) устремить α к бесконечности при $\lambda = \text{const}$, получим граничные условия I рода:

$$T_S - T_c = \frac{1}{\lambda} \lim_{\alpha \to \infty} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial n} \right) \Big|_S \right] = 0, \text{ то есть } T_S = T_c.$$

Физически это соответствует неограниченному возрастанию интенсивности теплообмена на границе с окружающей средой; естественно, что при этом температура поверхности тела T_S как угодно близко приближается к температуре среды T_c.

Аналогичный результат можно получить, устремив λ к нулю при $\alpha = \text{const}$.

При $\alpha \to 0$ получаем частный случай граничных условий II рода (условия теплоизоляции):

$$-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right) \Big|_{S=0} = 0.$$

Заметим, что при λ и α, не зависящих от температуры поверхности, и $T_c = 0$ граничные условия (1.60) будут однородными относительно температуры поверхности.

Граничные условия IV рода (сопряжения) задаются на границе между телом и окружающей средой (при конвективном теплообмене) или на границе соприкасающихся твердых тел и отражают равенство температур и плотностей тепловых потоков на границе раздела. В общем случае граничные условия IV рода можно записать в виде

$$\begin{cases} -\lambda_1 \dfrac{\partial T_1}{\partial n}\Big|_S = -\lambda_2 \dfrac{\partial T_2}{\partial n}\Big|_S + q(x,\ y,\ z,\ \tau), \\ T_1(x,\ y,\ z,\ \tau) = T_2(x, y, z,\ \tau),\ x, y,\ z\ \in S, \end{cases} \tag{1.61}$$

где $q = q(x,\ y,\ z,\ \tau)$ — поверхностная плотность источников теплоты на границе S; T_1, T_2, λ_1, λ_2 — соответственно температуры и теплопроводности соприкасающихся сред; $\partial/\partial n$ означает дифференцирование вдоль нормали к поверхности раздела.

Если на границе раздела сред отсутствуют процессы, протекающие с выделением или поглощением теплоты ($q = 0$), граничные условия (1.61) упростятся:

$$\begin{cases} \lambda_1 \dfrac{\partial T_1}{\partial n}\Big|_S = \lambda_2 \dfrac{\partial T_2}{\partial n}\Big|_S, \\ T_1\,|_S = T_2\,|_S. \end{cases} \tag{1.62}$$

Первое из равенств (1.62) выражает закон сохранения энергии на поверхности соприкосновения двух сред, второе — непрерывность температурного поля.

Условия (1.62) называют еще условиями *идеального теплового контакта*. Однако во многих практических случаях контакт на границе двух тел не является идеальным, например, если соприкасающиеся поверхности покрыты окисными пленками, тонким слоем краски, теплоизоляции, или когда между ними существует газовая прослойка, смазка и проч. Теплофизические свойства таких покрытий и прослоек, как правило, сильно отличаются от свойств самих тел, что приводит к скачку температур на границе раздела. В этом случае граничные условия IV рода должны быть записаны с учетом термического сопротивления контакта R:

$$-\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial n}\Big|_S = -\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial n}\Big|_S = \frac{1}{R}(T_1 - T_2). \tag{1.63}$$

Граничные условия (1.63) еще называют *условиями сопряжения при неидеальном контакте*.

Граничные условия IV рода широко применяются при решении задач металлургии, авиационной и космической техники, расчете различных многослойных конструкций. Отметим, что в реальных условиях теплообмен между контактирующими телами может осуществляться не только теплопроводностью, но и конвекцией, тепловым излучением, что требует использования более сложных условий сопряжения, учитывающих эти явления.

Другие виды граничных условий. Рассмотрим граничные условия, которые используются при решении задач с фазовыми переходами. Такие задачи возникают при изучении процессов кристаллизации, плавления, горения и проч.

Пусть S — движущаяся граница раздела фаз, L — удельная теплота фазовых превращений, которая выделяется на границе S. Индексами 1 и 2 обозначим параметры, относящиеся к жидкой и твердой фазам. Тогда граничные условия на подвижной границе запишутся следующим образом:

$$\begin{cases} \lambda_1 \dfrac{\partial T_1}{\partial n}\Big|_S - \lambda_2 \dfrac{\partial T_2}{\partial n}\Big|_S = L\rho \dfrac{\partial S}{\partial \tau}, \\ T_1|_S = T_2|_S = T_ф, \end{cases} \tag{1.64}$$

где S — движущаяся граница раздела фаз (1 — твердая, 2 — жидкая); L — удельная теплота фазовых превращений; n — нормаль к поверхности S; $T_ф = T_ф(x, y, z, \tau)$ — температура фазовых превращений. Под значением функций, относящихся к жидкой и твердой фазам на поверхности S, здесь понимаются пределы этих функций, когда при неизменном τ точка с координатами x, y, z стремится к некоторой граничной точке $p \in S$, оставаясь соответственно в жидкой ($T > T_ф$) и твердой ($T < T_ф$) фазах.

В случае, когда скорость движения границы $S = S(x, y, z, \tau)$ неизвестна, рассматриваемая задача теплопроводности становится существенно нелинейной и для ее решения необходимо использовать специальные методы, главным образом численные.

Задачи теплопроводности с нелинейными граничными условиями (типа (1.64) или (1.60), когда α является функцией температуры) обычно называют задачами с *внешней нелинейностью*. Если в рассматриваемой задаче теплофизические свойства зависят от температуры, то ее называют задачей с *внутренней нелинейностью*.

§ 1.5. КЛАССИФИКАЦИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ И МЕТОДОВ ИХ РЕШЕНИЯ

Совокупность дифференциального уравнения теплопроводности и условий однозначности (начальные и граничные условия, физические характеристики материала, геометрические размеры тела), описывающих данный процесс, называют *математической моделью процесса*.

Задача об определении неизвестной функции из системы уравнений, описывающих процесс теплообмена, называется *краевой задачей теории теплопроводности*.

В зависимости от того, какие величины, входящие в математическую модель, неизвестны, можно выделить два вида задач:

1) *Прямая задача*. Определить температурное поле, если известно дифференциальное уравнение процесса и заданы дополнительные условия, полностью определяющие краевую задачу.

2) *Обратная задача*. Определить граничные условия или коэффициенты, входящие в основное дифференциальное уравнение, если известны математическое описание процесса и температурное поле.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением только прямых задач. Методы решения обратных задач изложены, например, в [2, 29].

Краевые задачи можно также разделить на *линейные* и *нелинейные*. К первым относятся задачи, математическое описание которых состоит только из линейных уравнений, то есть уравнений, линейных относительно неизвестной функции (температуры) и ее производных.

Если хотя бы одно уравнение математической модели нелинейно, то и краевая задача становится нелинейной. Нелинейность может быть сосредоточена в различных членах уравнения и краевых условий. В работе [29], например, в зависимости от этого нелинейные краевые задачи классифицированы следующим образом:

1) краевая задача с нелинейностью I рода — от температуры зависят теплопроводность $\lambda(T)$ или удельная объемная теплоемкость $C_V(T) = c(T)\rho(T)$;

2) краевая задача с нелинейностью II рода — от температуры нелинейно зависит плотность теплового потока на поверхности тела $q_S(T_S)$;

3) краевая задача с нелинейностью III рода — от температуры нелинейно зависит объемная плотность теплового потока $q_V(T)$.

Такая классификация в известной степени условна, так как, например, задачи с фазовыми переходами можно отнести к задачам с нелинейностью как I, так II и III родов — в зависимости от способа учета выделения теплоты фазовых превращений.

Решение нелинейных задач представляет гораздо большие математические трудности, чем решение линейных и требует использования, как правило, более громоздких и трудоемких методов. Методы, разработанные для решения нелинейных задач, могут применяться и для решения линейных задач, но не наоборот.

Существующие методы решения краевых задач теплопроводности можно классифицировать различными способами и по различным признакам [7]. Исходя из формы, в которой получаются результаты решения, методы разделяют на две большие группы: аналитические и численные. К первой группе относятся методы, позволяющие найти решение в виде формулы, подставив в которую заданное значение аргумента, можно определить соответствующее значение искомой функции. Ко второй — методы, позволяющие получить численное значение искомой функции для некоторых заданных заранее значений аргумента, то есть дискретное решение.

Аналитические методы могут быть точными, если формулу решения удается раскрыть и довести до числа без потерь, и приближенными, если такие потери есть (например, отбрасываются какие-то члены ряда, приближенно вычисляется интеграл). Численные методы всегда приближенные, так как основаны на замене исходных дифференциальных уравнений алгебраическими.

Аналитические методы предпочтительнее численных в том смысле, что позволяют получать более наглядные решения, удобные для проведения анализа влияния различных параметров на результаты.

Численные решения хотя и менее наглядны, но зато могут быть получены для более широкого класса задач, включая те сложные задачи, которые аналитическими методами решить невозможно.

Для решения линейных краевых задач теории теплопроводности используются:

I. *Классические методы*: разделения переменных (метод Фурье), функций источников (функций Грина), тепловых потенциалов.

II. *Интегральные преобразования* в конечных пределах (конечные косинус- и синус-преобразования Фурье, преобразования Лежандра и проч.), в бесконечных пределах (Фурье, Лапласа, Ханкеля, Меллина, Бесселя, Канторовича — Лебедева, Мейера и др.).

Для решения нелинейных задач применяются:

III. *Вариационные методы* (Ритца, Канторовича, Лейбензона, Треффтца, Био).

IV. *Методы линеаризации* (сведения нелинейной краевой задачи к линейной), подстановок (алгебраические и интегральные) последовательных приближений, возмущений (метод малого параметра), итераций, приемы линеаризации.

V. *Методы взвешенных вычетов* (проекционные методы) коллокаций, Бубнова — Галеркина, моментов, интегральные.

VI. *Методы сведения краевой задачи к уравнениям и задачам других типов* (интегральным уравнениям, уравнениям в частных производных, но отличных от исходного, обыкновенным дифференциальным уравнениям): подстановки (алгебраические и интегральные), подстановки готовых форм решения, анализ размерностей (метод подобия).

Из численных методов для решения нелинейных краевых задач теории теплопроводности применяются следующие:

VII. *Метод конечных разностей* (метод сеток).

VIII. *Вариационно-разностные* (локальных вариаций, конечных элементов).

IX. *Метод прямых.*

X. *Статистические* (вероятностные).

Приведенная классификация является далеко не полной и весьма условна, так как многие методы можно отнести сразу к нескольким группам. Например, методы группы VI в частном случае могут оказаться методами линеаризации. Кроме того, для решения некоторых задач применяются последовательно два и более методов. Методы конечных разностей часто сочетают с итерациями на каждом временном слое, а методы линеаризации и сведения к уравнениям других типов (группы IV и VI) по своей сути являются методами, с помощью которых изменяется исходная математическая модель и которые предполагают дальнейшее использование каких-либо методов для решения измененной задачи. То же самое можно сказать о методе прямых, который основан на замене всех производных, кроме одной (например, времени), конечными разностями. В результате получается система дифференциальных уравнений, для решения которой можно использовать методы Рунге — Кутта, Адамса и других.

Отметим, что наибольшее распространение для решения нелинейных задач теплопроводности получили методы конечных разностей [7, 16, 29, 30, 43, 61—63, 83], что объясняется их универсальностью, алгоритмичностью, удобством реализации решения на электронно-цифровых вычислительных машинах (ЭЦВМ) или аналоговых вычислительных машинах (АВМ).

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1.1. Записать закон Фурье для ортотропного твердого тела в сферической системе координат.

1.2. Записать закон Фурье для ортотропного твердого тела в цилиндрической системе координат.

1.3. Вывести уравнение теплопроводности в сферических координатах для анизотропной однородной среды.

1.4. Вывести уравнение теплопроводности для ортотропного однородного твердого тела в декартовой, цилиндрической, сферической системах координат.

1.5. Записать гиперболическое уравнение теплопроводности для трехмерного пространства с зависящим от температуры коэффициентом теплопроводности.

1.6. Сформулировать задачу об определении температуры неограниченной пластины $0 \leqslant x \leqslant l$ с произвольным начальным распределением температуры и постоянными теплофизическими коэффициентами; рассмотреть случаи, когда: а) на ограничивающих поверхностях поддерживается постоянная температура; б) поверхность $x = 0$ теплоизолирована и на поверхности $x = l$ осуществляется конвективный теплообмен с окружающей средой по закону Ньютона. Температура среды и коэффициент теплоотдачи заданы.

1.7. Цилиндр длиной l и радиусом R нагревается в муфельной печи высокотемпературным источником излучения с температурой $T_{п}$. Торцы цилиндра теплоизолированы. В начальный момент времени цилиндр имел температуру $T_0 = T_0(z)$. Сформулировать краевую задачу об определении температуры цилиндра, считая его боковую поверхность абсолютно черной.

1.8. Две неограниченные пластины $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $l_1 \leqslant x \leqslant l_2$, выполненные из различных материалов, имеют температуры T_{0_1} и T_{0_2} соответственно. Теплофизические коэффициенты материалов пластин различны и зависят от температуры. В момент времени $\tau = 0^+$ пластины соединяются, причем термическое сопротивление контакта R известно. Сформулировать задачу об определении температур в системе, если на ограничивающих поверхностях выполняются следующие условия:

а) поверхность $x = 0$ нагревается тепловым потоком $q_0 = \text{const}$, поверхность $x = l_2$ теплоизолирована;

б) обе поверхности охлаждаются движущейся средой с температурой $T_с$ и коэффициентом теплоотдачи α;

в) одна из поверхностей ($x = 0$) нагревается источником излучения с температурой $T_и$, другая охлаждается за счет конвективного и лучистого теплообмена со средой при температуре $T_с$. Коэффициенты лучистого и конвективного теплообмена принимаются постоянными.

1.9. Шар радиуса R до половины опущен в кипящую воду. Несмоченная водой поверхность теплоизолирована, внутри шара действует источник теплоты $q_V = \text{const}$. Эффективный коэффициент теплоотдачи от поверхности шара к воде $\alpha_{эф}$ известен. Сформулировать краевую задачу для определения температуры шара, если его начальная температура $T_0 = f(r)$.

Глава 2 СТАЦИОНАРНАЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ

Краевые задачи стационарной теплопроводности интересны с точки зрения развития аналитической теории теплопроводности и имеют большое практическое значение.

В настоящей главе рассматриваются в основном одномерные стационарные задачи для тел простейшей геометрической формы — плоской, цилиндрической и шаровой стенок. Решение более сложных многомерных задач можно найти в монографиях [7, 22, 34, 44, 59 и др.].

§ 2.1. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ТЕЛ ПРОСТЕЙШЕЙ ФОРМЫ

Рассмотрим обобщенный метод решения одномерных краевых задач стационарной теплопроводности применительно к плоской, цилиндрической и шаровой стенкам.

Пусть геометрические размеры тела и условия теплообмена на ограничивающих его поверхностях таковы, что температура изменяется лишь в одном направлении, то есть является функцией только одной координаты. В этом случае распределение температуры описывается одномерным стационарным уравнением теплопроводности с соответствующими граничными условиями. Предположим также, что внутренние источники теплоты в рассматриваемых телах отсутствуют и изотермические поверхности замкнуты (для цилиндра и шара последнее требование очевидно, а плоскую стенку можно рассматривать как предельный случай, когда изотермы замыкаются на бесконечности). Тогда температура будет функцией одной координаты n-нормали к изотермическим поверхностям.

Вследствие замкнутости изотермических поверхностей, тепловой поток для любой из них будет постоянным и, согласно закону Фурье, определяется по формуле

$$Q = -\lambda(T)\frac{dT}{dn}S(n), \qquad (2.1)$$

где $S = S(n)$ — площадь поверхности.

Пусть S_1 — внутренняя, а S_2 — внешняя поверхности рассматриваемого тела с нормалями n_1 и n_2 соответственно. Температуры тела на этих поверхностях обозначим T_{S_1} и T_{S_2}.

Проинтегрируем уравнение (2.1) в пределах по n ($n_1 - n_2$), по T ($T_{S_1} - T_{S_2}$), предварительно разделив переменные:

$$Q \int_{n_1}^{n_2} \frac{dn}{S(n)} = -\int_{T_{S_1}}^{T_{S_2}} \lambda(T)\, dT, \quad Q = -\frac{\int_{T_{S_1}}^{T_{S_2}} \lambda(T)\, dt}{\int_{n_1}^{n_2} \frac{dn}{S(n)}}. \tag{2.2}$$

Величину $\int_{n_1}^{n_2} \frac{dn}{S(n)}$, которая, очевидно, определяется только геометрической формой тела, называют *приведенной толщиной стенки* и обозначают

$$N_{n_1}^{n_2} = \int_{n_1}^{n_2} \frac{dn}{S(n)}. \tag{2.3}$$

С учетом (2.3) для теплового потока Q имеем

$$Q = -\int_{T_{S_1}}^{T_{S_2}} \lambda(T)\, dT / N_{n_1}^{n_2}. \tag{2.4}$$

Чтобы проинтегрировать последнее равенство, необходимо задаться зависимостью от температуры коэффициента теплопроводности λ. Для определенности будем считать, что λ является линейной функцией температуры, что допустимо в первом приближении для большинства применяемых в технике материалов. Итак, пусть

$$\lambda = \lambda_0 (1 + bT), \tag{2.5}$$

где λ — теплопроводность при 0 °С, Вт/(м · К); b — постоянная, зависящая от природы материала, определяется опытным путем, $К^{-1}$.

С учетом выражения (2.5) уравнение (2.4) примет вид

$$Q = \frac{-\int_{T_{S_1}}^{T_{S_2}} \lambda_0 (1 + bT)\, dT}{N_{n_1}^{n_2}} = \frac{\lambda_0 \left(T_{S_1} - T_{S_2} + \frac{b}{2} T_{S_1}^2 - T_{S_2}^2\right)}{N_{n_1}^{n_2}} =$$

$$= \frac{\lambda_0 (T_{S_1} - T_{S_2}) \left[1 + \frac{b}{2} (T_{S_1} + T_{S_2})\right]}{N_{n_1}^{n_2}}. \tag{2.6}$$

В частном случае при $\lambda = \lambda_0 = \mathrm{const}$ из (2.6) получаем

$$Q = \frac{\lambda (T_{S_1} - T_{S_2})}{N_{n_1}^{n_2}}. \tag{2.7}$$

К аналогичной форме можно привести и выражение (2.6), если ввести среднеинтегральное значение теплопроводности

$$\lambda_{\text{ср}} = \frac{1}{T_{S_1} - T_{S_2}} \int\limits_{T_{S_1}}^{T_{S_2}} \lambda(T)\, dT = \lambda_0 \left(1 + b\, \frac{T_{S_1} + T_{S_2}}{2}\right).$$

Тогда формула для определения теплового потока имеет вид

$$Q = \frac{\lambda_{\text{ср}} (T_{S_1} - T_{S_2})}{N_{n_1}^{n_2}}. \tag{2.8}$$

Чтобы получить распределение температур в стенке, проинтегрируем уравнение (2.1) в пределах от n_1 до n и от T_{S_1} до T:

$$QN_{n_1}^{n} = -\lambda_0 \left| T - T_{S_1} + \frac{b}{2} (T^2 - T_{S_1}^2) \right|,$$

откуда

$$\frac{b}{2} T^2 + T + \left(\frac{QN_{n_1}^{n}}{\lambda_0} - \frac{b}{2} T_{S_1}^2 - T_{S_1} \right) = 0.$$

Решая это квадратное уравнение относительно T, получаем

$$T_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 2b\left(\frac{b}{2} T_{S_1}^2 + T_{S_1} - QN_{n_1}^{n}/\lambda_0\right)}}{b}.$$

Физическому смыслу задачи удовлетворяет решение, где перед корнем необходимо взять плюс. Таким образом, распределение температур в теле задается выражением

$$T = \sqrt{\left(\frac{1}{b} + T_{S_1}\right)^2 - \frac{2QN_{n_1}^{n}}{\lambda_0 b}} - \frac{1}{b}, \tag{2.9}$$

где Q определяется по формуле (2.8).

Определенный практический интерес представляют задачи, в которых теплопроводность слабо зависит от температуры и ее можно считать постоянной. Получим распределение температур в теле для этого случая, интегрируя равенство (2.1) при $\lambda = \text{const}$ в пределах от n_1 до n и от T_{S_1} до T:

$$\frac{Q}{\lambda} \int\limits_{n_1}^{n} \frac{dn}{S(n)} = -\int\limits_{T_{S_1}}^{T} dT; \quad \frac{Q}{\lambda} N_{n_1}^{n} = T_S - T; \quad T = T_S - \frac{Q}{\lambda} N_{n_1}^{n}$$

или, подставляя значение для Q_n из соотношения (2.7),

$$T = T_{S_1} - (T_{S_1} - T_{S_2}) \frac{N_{n_1}^{n}}{N_{n_1}^{n_2}}. \tag{2.10}$$

Введем безразмерную температуру

$$\Theta = \frac{T - T_{S_2}}{T_{S_1} - T_{S_2}} \tag{2.11}$$

и безразмерную координату

$$X = N_{n_1}^{n} N_{n_1}^{n_2}. \tag{2.12}$$

Тогда соотношение (2.10) примет вид:

$$\Theta = 1 - X. \tag{2.13}$$

Последнее уравнение является универсальным, так как распределение температур в плоской, цилиндрической, шаровой стенках можно представить единой зависимостью (в данном случае это будет прямая) при заданных значениях T_{S_1}, T_{S_2} и размерах стенок.

Аналогичную обобщенную зависимость можно получить и для случая, когда теплопроводность λ является функцией температуры.

Отметим, что пока остается открытым вопрос об определении температур T_{S_1} и T_{S_2}. Эти температуры нетрудно определить из граничных условий, причем техника их вычисления зависит от вида граничных условий на поверхностях S_1 и S_2.

Если заданы условия I рода, вопрос решен, так как значения T_{S_1} и T_{S_2} известны. Найдем температуры поверхностей T_{S_1} и T_{S_2} для случая задания граничных условий III рода.

Пусть на поверхности S_1 осуществляется конвективный теплообмен по закону Ньютона со средой, имеющей температуру T_{c_1}. Коэффициент теплоотдачи α_1 считаем постоянным. На поверхности S_2 также осуществляется конвективный теплообмен и заданы аналогичные параметры T_{c_2} и α_2. Для определенности предположим, что $T_{c_1} > T_{c_2}$. Таким образом, на границах S_1 и S_2 выполняются граничные условия

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n}\bigg|_{S_1} = \alpha_1 (T_{c_1} - T_{S_1}),$$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n}\bigg|_{S_2} = \alpha_2 (T_{S_2} - T_{c_2}).$$

В соответствии с этими условиями тепловой поток от горячей среды к стенке

$$Q = \alpha_1 S_1 (T_{c_1} - T_{S_1}), \tag{2.14}$$

а от стенки к холодной среде соответственно

$$Q = \alpha_2 S_2 (T_{S_2} - T_{c_2}). \tag{2.15}$$

Учитывая постоянство теплового потока при стационарном режиме, получим, что такой же тепловой поток передается через твердую стенку и определяется при постоянном λ равенством (2.7).

Объединив равенства (2.7), (2.13), (2.14), получим систему двух линейных уравнений для определения T_{S_1} и T_{S_2}:

$$\begin{cases} \lambda (T_{S_1} - T_{S_2}) = N_{n_1}^{n_2} \alpha_1 S_1 (T_{c_1} - T_{S_1}), \\ \lambda (T_{S_1} - T_{S_2}) = N_{n_1}^{n_2} \alpha_2 S_2 (T_{S_2} - T_{c_2}). \end{cases} \tag{2.16}$$

Решение этой системы уравнений следующее [7]:

$$T_{S_i} = \left(\frac{\lambda}{N_{n_i}^{n_s}} \sum_{j=1}^{2} \alpha_j S_j T_j + \alpha_1 \alpha_2 S_1 S_2 T_{c_i}\right) \times$$

$$\times \left(\frac{\lambda}{N_{n_i}^{n_s}} \sum_{k=1}^{2} \alpha_k S_k + \alpha_1 \alpha_2 S_1 S_2\right)^{-1}, \quad i = 1,\ 2. \qquad (2.17)$$

Таким образом, для случая задания граничных условий III рода температуры граничных поверхностей T_{S_i} определяются по формулам (2.17).

Аналогичные формулы можно получить и для случая, когда теплопроводность λ линейно зависит от температуры. Тогда система уравнений для определения температур T_{S_1} и T_{S_2} с учетом равенства (2.6) имеет вид

$$\begin{cases} \lambda_0 \left[T_{S_1} - T_{S_2} + \frac{b}{2}\left(T_{S_1}^2 - T_{S_2}^2\right)\right] = N_{n_1}^{n_s} \alpha_1 S_1 \left(T_{c_1} - T_{S_1}\right), \\ \lambda_0 \left[T_{S_1} - T_{S_2} + \frac{b}{2}\left(T_{S_1}^2 - T_{S_2}^2\right)\right] = N_{n_1}^{n_s} \alpha_2 S_2 \left(T_{S_2} - T_{c_2}\right). \end{cases} \qquad (2.18)$$

Вводя обозначения

$$K_1 = N_{n_1}^{n_s} \alpha_1 S_1 / \lambda_0,$$
$$K_2 = N_{n_1}^{n_s} \alpha_2 S_2 / \lambda_0,$$

после несложных преобразований получаем

$$\begin{cases} T_{S_1} - T_{S_2} + \frac{b}{2}\left(T_{S_1}^2 - T_{S_2}^2\right) = K_2 \left(T_{S_2} - T_{c_2}\right), \\ T_{S_1} = -\frac{K_2}{K_1} T_{S_2} + T_{c_1} + \frac{K_2}{K_1} T_{c_2}. \end{cases} \qquad (2.19)$$

Подставляя выражение для T_{S_1} из второго уравнения (2.19) в первое, приходим к квадратному уравнению относительно T_{S_2}:

$$A T_{S_2}^2 + B T_{S_2} + C = 0, \qquad (2.20)$$

где введены обозначения

$$A = \frac{b}{2}\left(\frac{K_2^2}{K_1^2} - 1\right); \quad B = -\frac{K_2}{K_1} - 1 - b\,\frac{K_2}{K_1}\left(T_{c_1} + \frac{K_2}{K_1} T_{c_2}\right) - K_2,$$

$$C = T_{c_1} + \frac{K_2}{K_1} T_{c_2} + \frac{b}{2}\left(T_{c_1} + \frac{K_2}{K_1} T_{c_2}\right)^2 + K_2 T_{c_2}. \qquad (2.21)$$

Физическому смыслу задачи соответствует то решение квадратного уравнения, где перед корнем взят знак плюс:

$$T_{S_2} = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}. \qquad (2.22)$$

Подставив (2.22) в выражение для T_{S_1}, второе соотношение (2.19), получим

$$T_{S_1} = -\frac{K_2}{K_1}\left(\frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}\right) + T_{c_1} + \frac{K_2}{K_1} T_{c_2}. \qquad (2.23)$$

Аналогично можно получить формулы для T_{S_1} и T_{S_2}, когда на граничных поверхностях заданы разные по типу граничные условия.

Рассмотрим два таких случая.

Граничные условия I и III родов. Пусть, например, на поверхности S_1 заданы условия I рода, а на поверхности S — III рода. Воспользуемся формулами (2.21), (2.22), рассматривая этот случай как предельный при $\alpha \to \infty$ ($K_1 \to \infty$). Из (2.23) при $K_1 \to \infty$ получаем $T_{S_1} = T_{c_1}$, коэффициенты A, B и C из равенств (2.21) имеют вид

$$A = -\frac{b}{2}, \quad B = -1 - K_2, \quad C = T_{c_1}\left(1 + \frac{b}{2} T_{c_1}\right) + K_2 T_{c_2},$$

а температура T_{S_2} определяется по формуле (2.22)

$$T_{S_2} = -\frac{1 + K_2 + \sqrt{(1 + K_2)^2 + 2b\left[T_{c_1}\left(1 + \frac{b}{2} T_{c_1}\right) + K_2 T_{c_2}\right]}}{b}.$$

Чтобы определить температуры T_{S_1} и T_{S_2} в случае, когда на поверхности S_1 заданы условия III рода, а на поверхности S_2 — I рода, достаточно в первом из уравнений (2.19) положить $T_{S_2} = T_{c_2}$ и решить квадратное уравнение относительно T_{S_1}.

Граничные условия II и III родов. Пусть на поверхности S_1 задан постоянный тепловой поток с плотностью $q_{S_1} = q_0$, а на поверхности S_2 — граничные условия III рода. Тогда запишем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} Q = q_0 S_1, & (2.24) \\ Q = \dfrac{\lambda_0 (T_{S_1} - T_{S_2})\left[1 + \frac{b}{2}(T_{S_1} + T_{S_2})\right]}{N_{n_1}^{n_2}}, & \\ Q = S_2 \alpha_2 (T_{S_2} - T_{c_2}). & (2.25) \end{cases}$$

Приравнивая правые части уравнений (2.24), (2.25), определяем

$$T_{S_2} = \frac{q_0}{\alpha_2} \frac{S_1}{S_2} + T_{c_2}. \qquad (2.26)$$

Приравнивая правые части уравнений (2.6) и (2.24), получим квадратное уравнение

$$T_{S_1}^2 + \frac{2}{b} T_{S_1} - \left(T_{S_2}^2 + \frac{2}{b} T_{S_2} + \frac{2q_0 S_1 N_{n_1}^{n_2}}{b\lambda_0}\right) = 0,$$

решение которого

$$T_{S_1} = -\frac{1}{b} \pm \sqrt{\frac{1}{b^2} + T_{S_2}^2 + \frac{2}{b} T_{S_2} + \frac{2q_0 S_1 N_{n_1}^{n_2}}{b\lambda_0}}. \qquad (2.27)$$

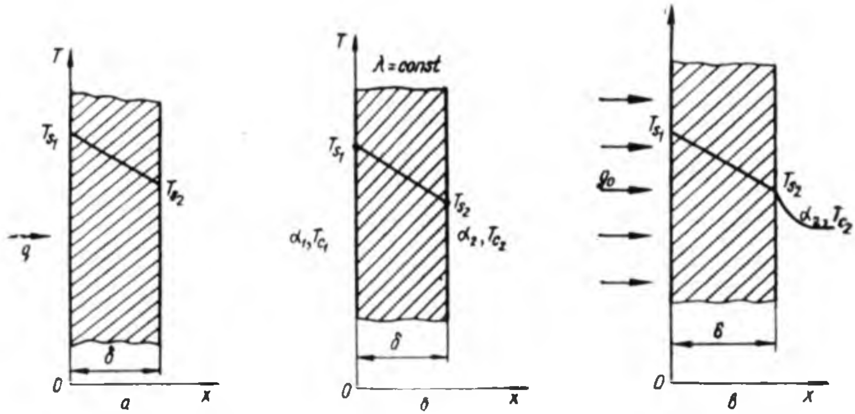


Рис. 2.1. Теплопроводность плоской однородной стенки при граничных условиях I рода (*а*), III — (*б*) и смешанных граничных условиях (*в*)

Отметим, что температуры граничных поверхностей T_{S_1} и T_{S_2} для задач с независящим от температуры коэффициентом теплопроводности λ определяются аналогично, однако конечные формулы имеют более простой вид.

Ниже будут рассмотрены несколько частных случаев использования обобщенного метода для решения конкретных задач теплопроводности.

Плоская стенка. Рассмотрим процесс стационарной теплопроводности в однородной плоской стенке толщиной δ с постоянной теплопроводностью λ. На внутренней S_1 и внешней S_2 поверхностях стенки заданы граничные условия:

I рода (рис. 2.1, *а*)

$$T|_{x=0} = T_{S_1}, \quad T|_{x=\delta} = T_{S_2};$$

III рода (рис. 2.1, *б*)

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n}\Big|_{S_1} = \alpha_1 (T_{S_1} - T_{c_1}) = \lambda \frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=0},$$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n}\Big|_{S_2} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=\delta} = \alpha_2 (T_{S_2} - T_{c_2});$$

II и III родов (рис. 2.1, *в*)

$$q|_{x=0} = q|_{S_1} = q_0 = \text{const},$$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n}\Big|_{S_2} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=\delta} = \alpha_2 (T_{S_2} - T_{c_2}).$$

Получим решение задачи для этих трех случаев. Определяем параметры обобщенного решения $n = x$, $n_1 = 0$, $n_2 = \delta$, $S(n) = S = \text{const}$,

$$N_{n_1}^{n} = \int_{n_1}^{n} \frac{dn}{S(n)} = \int_{0}^{x} \frac{dx}{S} = \frac{x}{S}, \quad N_{n_1}^{n_2} = \delta/S. \qquad (2.28)$$

В соответствии с формулой (2.7) тепловой поток в плоской стенке определяется равенством

$$Q = \lambda (T_{S_1} - T_{S_2}) \frac{S}{\delta} . \tag{2.29}$$

В последнее уравнение входит величина δ/λ, называемая *тепловым* или *термическим сопротивлением стенки*. Обратная ей величина λ/δ называется *тепловой проводимостью*. Получим распределение температур в стенке.

Граничные условия I рода. Так как температуры T_{S_1} и T_{S_2} известны, воспользовавшись формулой (2.10), получаем

$$T = T_{S_1} - (T_{S_1} - T_{S_2}) \frac{N_{n_1}^{n}}{N_{n_1}^{n_2}} = T_{S_1} - (T_{S_1} - T_{S_2}) \frac{x}{\delta} \tag{2.30}$$

или

$$\Theta = 1 - X, \quad \Theta|_{X=0} = 1, \quad \Theta|_{X=1} = 0, \tag{2.31}$$

где Θ и $X = x/\delta$ — безразмерные температура и координата, определяемые равенствами (2.11) и (2.12) соответственно.

Граничные условия III рода. Температуры T_{S_1} и T_{S_2} определяются по формулам (2.17). Подставляя выражения для температур T_{S_1} и T_{S_2} из (2.17) в (2.30), получим, что распределение температур в стенке задается равенством

$$T = T_{c_2} + (T_{c_1} - T_{c_2}) \frac{\left(1 + \dfrac{\lambda}{\alpha_2 S_2 N_{n_1}^{n_2}} - \dfrac{N_{n_1}^{n}}{N_{n_1}^{n_2}}\right)}{\left(1 + \dfrac{\lambda}{\alpha_1 S_1 N_{n_1}^{n_2}} + \dfrac{\lambda}{\alpha_2 S_2 N_{n_1}^{n_2}}\right)}, \tag{2.32}$$

которое записано в общем виде и, очевидно, справедливо не только для плоской, но и для цилиндрической и шаровой стенок. В рассматриваемом частном случае плоской стенки с учетом равенства (2.28) имеем

$$T = \frac{T_{c_2} + (T_{c_1} - T_{c_2}) \left(1 + \dfrac{\lambda}{\alpha_2 \delta} - \dfrac{x}{\delta}\right)}{1 + \dfrac{\lambda}{\alpha_1 \delta} + \dfrac{\lambda}{\alpha_2 \delta}}. \tag{2.33}$$

Подставив значения для T_{S_1} и T_{S_2} из (2.17) в равенство (2.7), получим формулу для теплового потока в стенке простой формы

$$Q = \alpha_1 \alpha_2 S_1 S_2 (T_{c_1} - T_{c_2}) \left(\sum_{j=1}^{2} \alpha_j S_j + \frac{N_{n_1}^{n_2}}{\lambda} \alpha_1 \alpha_2 S_1 S_2 \right)^{-1}, \tag{2.34}$$

которая в случае плоской стенки примет вид

$$Q = (T_{c_1} - T_{c_2}) S \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{\delta}{\lambda} \right)^{-1}. \tag{2.35}$$

Величину $k = (1/\alpha_1 + 1/\alpha_2 + \delta/\lambda)^{-1}$ называют *коэффициентом теплопередачи*. Коэффициент k характеризует интенсивность передачи теплоты от одной жидкости к другой через разделяющую их твердую стенку, численно равен плотности теплового потока на стенке при перепаде температур между жидкостями в один градус и измеряется в Вт/(м^2 · К).

Величину, обратную коэффициенту теплопередачи

$$R = \frac{1}{k} = R_1 + R_c + R_2, \tag{2.36}$$

называют *термическим сопротивлением теплопередачи*. Из формулы (2.36) видно, что полное термическое сопротивление R складывается из частных термических сопротивлений: теплоотдачи от горячей среды к поверхности стенки $R_1 = 1/\alpha_1$, теплопроводности стенки $R_c = \delta/\lambda$ и теплоотдачи от поверхности стенки к холодной среде $R_2 = 1/\alpha_2$.

Граничные условия II и III родов. Определим температуры T_{S_1} и T_{S_2}. Система уравнений (2.6), (2.24), (2.25) для случая плоской стенки и при $\lambda = \mathrm{const}$ имеет вид

$$\begin{cases} q_0 = \dfrac{S_2}{S_1}\alpha_2 (T_{S_2} - T_{c_2}) = \alpha_2 (T_{S_2} - T_{c_2}), \\ q_0 = \dfrac{\lambda (T_{S_1} - T_{S_2})}{N_{n_1}^{n_2} S_1} = \dfrac{\lambda}{\delta} (T_{S_1} - T_{S_2}). \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений относительно T_{S_1} и T_{S_2}, получаем

$$T_{S_2} = \frac{q_0}{\alpha_2} + T_{c_2}, \tag{2.37}$$

$$T_{S_1} = \frac{q_0 \delta}{\lambda} + T_{S_2} = q_0 \left(\frac{1}{\alpha_2} + \frac{\delta}{\lambda} \right) + T_{c_2}. \tag{2.38}$$

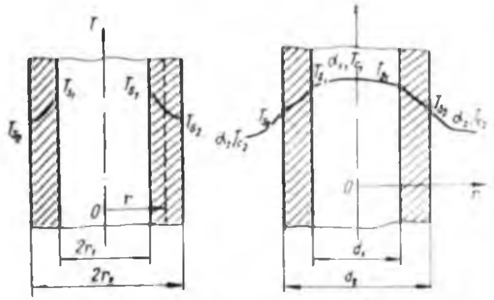
Тогда температура определится по формуле

$$T = T_{S_1} - (T_{S_1} - T_{S_2}) \frac{N_{n_1}^{n}}{N_{n_1}^{n_2}} = T_{S_1} - (T_{S_1} - T_{S_2}) \frac{x}{\delta} =$$

$$= q_0 \left(\frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} - \frac{x}{\lambda} \right) + T_{c_2}. \tag{2.39}$$

Задачи стационарной теплопроводности для тел простой геометрической формы могут быть решены с помощью интегрирования дифференциального уравнения теплопроводности, записанного соответственно в декартовых, цилиндрических, сферических координатах, то есть без использования обобщенного метода. Проиллюстрируем этот способ на примере расчета температурного поля плоской стенки при граничных условиях I рода.

При сделанных выше предположениях уравнение теплопроводности в декартовых координатах для рассматриваемого случая имеет вид $\dfrac{d^2T}{dx^2} = 0$. Проинтегрировав это уравнение, находим $\dfrac{dT}{dx} = C_1$. После



а *б*

Рис. 2.2. Теплопроводность однородной цилиндрической стенки при граничных условиях I рода (*а*), III — (*б*)

повторного интегрирования получаем общее решение $T = C_1 x + C_2$. Удовлетворяя последнее соотношение граничным условиям I рода, получаем окончательное решение сформулированной задачи

$$T = T_{S_1} - \frac{T_{S_1} - T_{S_2}}{\delta} x,$$

тождественное решению (2.30), полученному обобщенным методом. Аналогично можно получить решения задач теплопроводности с другими граничными условиями.

Цилиндрическая стенка. Пусть процесс стационарной теплопроводности осуществляется в цилиндрической трубе с внутренним радиусом r_1 и наружным — r_2 (рис. 2.2). Как и для плоской стенки, рассмотрим три вида граничных условий:

I рода (рис. 2.2, *а*)

$$T|_{r=r_1} = T_{S_1}, \quad T|_{r=r_2} = T_{S_2}$$

или

$$\Theta|_{r=r_1} = 1, \quad \Theta|_{r=r_2} = 0,$$

где $\Theta = \dfrac{T - T_{S_2}}{T_{S_1} - T_{S_2}}$ — безразмерная температура;

III рода (рис. 2.2, *б*)

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n}\Big|_{S_1} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r}\Big|_{r=r_1} = \alpha_1 (T_{S_1} - T_{c_1}),$$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n}\Big|_{S_2} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r}\Big|_{r=r_2} = \alpha_2 (T_{S_2} - T_{c_2});$$

II и III родов

$$q|_{S_1} = q|_{r=r_1} = q_0 = \mathrm{const},$$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n}\Big|_{S_2} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r}\Big|_{r=r_2} = \alpha_2 (T_{S_2} - T_{c_2}).$$

Вычислим параметры обобщенного решения:

$$n = r, \; n_1 = r_1, \; n_2 = r_2, \; S(n) = 2\pi r l,$$

$$N_{n_1}^{n} = \int_{r_1}^{r} \frac{dr}{2\pi r l} = \frac{1}{2\pi l} \ln \frac{r}{r_1}; \quad N_{n_1}^{n_2} = \frac{1}{2\pi l} \ln \frac{r_2}{r_1}. \tag{2.40}$$

Граничные условия I рода. Подставив значения параметров (2.40) в формулу (2.7), для теплового потока получим

$$Q = \frac{2\pi l \lambda (T_{S_1} - T_{S_2})}{\ln \frac{r_2}{r_1}}. \tag{2.41}$$

Тепловой поток (2.41) может быть отнесен к единице длины трубы:

$$q_l = \frac{Q}{l} = \frac{2\pi\lambda}{\ln\dfrac{r_2}{r_1}}(T_{S_1} - T_{S_2}). \tag{2.42}$$

В этом случае он измеряется в Вт/м и называется *линейной плотностью теплового потока*.

Введем обозначение $k_R = r_2/r_1$ и перепишем (2.42) в виде

$$q_l = \pi(T_{S_1} - T_{S_2}) \Big/ \left(\frac{\ln k_R}{2\lambda}\right).$$

Величину $\ln k_R/2\lambda$ называют *линейным термическим сопротивлением цилиндрической стенки*.

С учетом выражений (2.40) для параметров обобщенного решения и в соответствии с равенством (2.10) температура цилиндрической стенки определяется равенством

$$T = T_{S_1} - (T_{S_1} - T_{S_2}) \ln\frac{r}{r_1} \Big/ \ln\frac{r_2}{r_1} \tag{2.43}$$

или в безразмерном виде

$$\Theta = 1 - \frac{\ln R}{\ln k_R}, \quad R = \frac{r}{r_1}. \tag{2.44}$$

Равенства (2.43), (2.44) представляют собой уравнения логарифмической кривой. Таким образом, распределение температур в цилиндрической стенке в отличие от плоской стенки не является линейным.

Граничные условия III рода. Для определения теплового потока воспользуемся формулой (2.34):

$$Q = (T_{c_1} - T_{c_2})\left(\frac{1}{\alpha_1 S_1} + \frac{1}{\alpha_2 S_2} + \frac{N_{n_1}^{n_2}}{\lambda}\right)^{-1} =$$

$$= (T_{c_1} - T_{c_2})\left(\frac{1}{2\pi r_1 l \alpha_1} + \frac{1}{2\pi r_2 l \alpha_2} + \frac{1}{2\pi l\lambda}\ln\frac{r_2}{r_1}\right)^{-1} =$$

$$= \pi l (T_{c_1} - T_{c_2})\left(\frac{1}{2\alpha_1 r_1} + \frac{1}{2\alpha_2 r_2} + \frac{1}{2 r_1 \lambda}\ln\frac{r_2}{r_1}\right)^{-1} =$$

$$= \pi l (T_{c_1} - T_{c_2})\left(\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2} + \frac{1}{2\lambda}\ln k_R\right)^{-1}, \tag{2.45}$$

где $d_1 = 2r_1$, $d_2 = 2r_2$ — внутренний и внешний диаметры цилиндра соответственно.

Величину

$$k_l = \left(\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2} + \frac{1}{2\lambda}\ln k_R\right)^{-1} \tag{2.46}$$

называют *линейным коэффициентом теплопередачи цилиндрической стенки*. Линейный коэффициент теплопередачи измеряется в Вт/(м·К) и численно равен количеству теплоты, которое проходит через стенку длиной 1 м за 1 с от одной жидкости к другой при разности температур между жидкостями в 1 градус.

Величину $R_l = 1/k_l$, обратную k_l, называют *линейным термическим сопротивлением теплопередачи цилиндрической стенки*

$$R_l = \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}.$$

Для определения температуры любой точки стенки воспользуемся формулой (2.32). С учетом выражения (2.40), для параметров обобщенного решения получим следующее выражение:

$$T = T_{c_2} + (T_{c_1} - T_{c_2}) \frac{\ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{\lambda}{\alpha_2 r_2} - \ln \frac{r}{r_1}}{\ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{\lambda}{\alpha_1 r_1} + \frac{\lambda}{\alpha_2 r_2}} =$$

$$= T_{c_2} + (T_{c_1} - T_{c_2}) R_l \left(\frac{\ln k_R}{2\lambda} - \ln \frac{r}{r_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2} \right).$$

Граничные условия II и III рода. Система уравнений (2.6), (2.24), (2.25) для определения температур T_{S_1} и T_{S_2} имеет вид

$$\begin{cases} q_0 = \frac{r_2}{r_1} \alpha_2 (T_{S_2} - T_{c_2}) = k_R \alpha_2 (T_{S_2} - T_{c_2}), \\ q_0 = \frac{\lambda (T_{S_1} - T_{S_2})}{r_1 \ln (r_2/r_1)} = \lambda (T_{S_1} - T_{S_2}) (r_1 \ln k_R)^{-1}, \end{cases}$$

откуда после несложных преобразований получаем

$$\begin{cases} T_{S_2} = \frac{q_0}{k_R \alpha_2} + T_{c_2}, \\ T_{S_1} = \frac{q_0 r_1 \ln k_R}{\lambda} + T_{S_2} = T_{c_2} + q_0 r_1 \left(\frac{\ln k_R}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2 r_2} \right). \end{cases} \tag{2.47}$$

Таким образом, распределение температур в стенке

$$T = \frac{q_0 r_1}{\lambda} \left(\ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{\lambda}{\alpha_2 r_2} - \ln \frac{r}{r_1} \right) + T_{c_2}. \tag{2.48}$$

Рассчитаем температурное поле цилиндрической стенки при граничных условиях I рода. Уравнение теплопроводности в цилиндрических координатах в этом случае имеет вид

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} = 0.$$

Введем новую переменную $u = dT/dr$. Тогда уравнение теплопроводности перепишем следующим образом:

$$\frac{du}{dr} + \frac{u}{r} = 0.$$

Разделив переменные и проинтегрировав это уравнение, находим $u = \frac{C_1}{r}$. Возвращаясь к неизвестной функции T, получаем уравнение $\frac{dT}{dr} = \frac{C_1}{r}$, после интегрирования которого находим общее решение уравнения теплопроводности $T = C_1 \ln r + C_2$. Подставляя значения констант C_1, C_2, найденные с помощью граничных условий, приходим к окончательному решению задачи

$$T = T_{S_1} - (T_{S_1} - T_{S_2}) \frac{\ln\left(\frac{r}{r_1}\right)}{\ln \frac{r_2}{r_1}},$$

которое тождественно решению (2.43), полученному с помощью обобщенного метода. Аналогично решаются задачи стационарной теплопроводности при других граничных условиях.

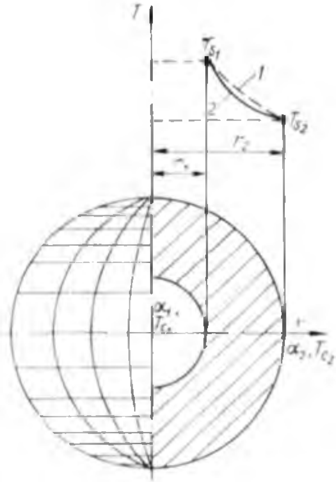


Рис. 2.3. Теплопроводность однородной шаровой стенки при граничных условиях I рода (кривая 1), III — (кривая 2)

Шаровая стенка. Рассмотрим однородный полый шар с внутренним диаметром $d_1 = 2r_1$ и внешним — $d_2 = 2r_2$. Теплопроводность λ считаем постоянной. На поверхностях шара заданы граничные условия I, III или II и III родов (рис. 2.3), математическая запись которых совпадает с аналогичными граничными условиями, приведенными для цилиндрической стенки.

Определим параметры обобщенного решения:

$$n = r,\ n_1 = r_1,\ n_2 = r_2,\ S(n) = 4\pi r^2,$$

$$N_{n_1}^{n} = \int_{r_1}^{r} \frac{dr}{4\pi r^2} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right), \tag{2.49}$$

$$N_{n_1}^{n_2} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Граничные условия I рода. Подставляя параметры (2.49) в обобщенные зависимости (2.7) и (2.10), получаем:

для теплового потока

$$Q = 4\pi\lambda (T_{S_1} - T_{S_2}) \Big/ \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right); \tag{2.50}$$

для температуры

$$T = T_{c_1} - \frac{T_{c_1} - T_{c_2}}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right) \tag{2.51}$$

или

$$\Theta = \left(1 - \frac{1}{R}\right)\left(1 - \frac{1}{k_R}\right), \tag{2.52}$$

где $k_R = r_2/r_1$, $R = r/r_1$, $\Theta = (T - T_{c_1})/(T_{c_1} - T_{c_2})$ — безразмерные величины. Из равенств (2.51), (2.52) видно, что в шаровой стенке при постоянном λ температура изменяется по гиперболическому закону.

Граничные условия III рода. Согласно равенству (2.34) тепловой поток имеет вид

$$Q = \frac{\pi (T_{c_1} - T_{c_2})}{\frac{1}{\alpha_1 d_1^2} + \frac{1}{2\lambda}\left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}\right) + \frac{1}{\alpha_2 d_2^2}}.$$

Введем обозначение

$$k_{\text{ш}} = \left[\frac{1}{\alpha_1 d_1^2} + \frac{1}{2\lambda}\left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}\right) + \frac{1}{\alpha_2 d_2^2}\right]^{-1}, \tag{2.53}$$

тогда

$$Q = \pi k_{\text{ш}} (T_{c_1} - T_{c_2}).$$

Величина $k_{\text{ш}}$ измеряется в Вт/К и называется *коэффициентом теплопередачи шаровой стенки*. Обратная ей величина $R_{\text{ш}} = 1/k_{\text{ш}}$ называется *термическим сопротивлением теплопередачи шаровой стенки*.

Распределение температур задается соотношением

$$T = T_{c_2} + (T_{c_1} - T_{c_2}) \frac{1 + \frac{1}{\alpha_2 r_2 (r_2/r_1 - 1)} - \frac{1/r_1 - 1/r}{1/r_1 - 1/r_2}}{1 + \frac{\lambda}{\alpha_1 r_1 (1 - r_1/r_2)} + \frac{\lambda}{\alpha_2 r_2 (r_2/r_1 - 1)}}. \tag{2.54}$$

Граничные условия II и III родов. Запишем систему уравнений для определения T_{S_1} и T_{S_2}:

$$\begin{cases} q_0 = \dfrac{S_2}{S_1} \alpha_2 (T_{S_2} - T_{c_2}) = \dfrac{r_2^2}{r_1^2} \alpha_2 (T_{S_2} - T_{c_2}), \\ q_0 = \dfrac{\lambda}{S_1 N_{n_1}^{n_1}} (T_{S_1} - T_{S_2}) = \dfrac{\lambda}{r_1^2 \left(\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2}\right)} (T_{S_1} - T_{S_2}). \end{cases}$$

Решение этой системы уравнений имеет вид

$$\begin{gathered} T_{S_2} = T_{c_2} + \frac{q_0 r_1^2}{\alpha_2 r_2^2}, \\ T_{S_1} = \frac{q_0}{\lambda} r_1^2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) + T_{S_2} = T_{c_2} + \frac{q_0}{\lambda} r_1^2 \left(\frac{\lambda}{\alpha_2 r_2^2} + \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right), \end{gathered} \tag{2.55}$$

откуда получаем следующие выражения для температуры:

$$T = T_{c_2} + \frac{q_0 r_1^2}{\lambda} \left[\frac{\lambda}{\alpha_2 r_2^2} + \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2}\right)\right]. \tag{2.56}$$

Все рассмотренные в § 2.1 задачи иллюстрируют применение обобщенного метода для расчета температур в плоских, цилиндрических и шаровых стенках при постоянной теплопроводности λ. Однако с помощью обобщенного метода можно решать эти или подобные им задачи и в тех случаях, когда теплопроводность зависит от температуры. Рассмотрим в качестве примера теплопроводность шаровой стенки с граничными условиями I рода на внутренней и III рода на внешней поверхностях при линейной зависимости коэффициента теплопроводности от температуры.

Итак, пусть на внутренней поверхности малого шара $r = r_1$ поддерживается постоянная температура T_{S_1}, а на внешней поверхности $r = r_2$ осуществляется конвективный теплообмен по закону Ньютона с постоянным коэффициентом теплоотдачи α_2. Температура среды T_{c_1} задана. Требуется найти распределение температур в стенке, если $\lambda = \lambda_0 (1 + bT)$.

Чтобы получить распределение температур в стенке, необходимо знать значение T_{S_1} и T_{S_2}. Температура T_{S_1} известна, определим T_{S_2}. Для этого воспользуемся формулами (2.21) при $K \to \infty$ и (2.22).

$$T_{S_2} = -\frac{1}{b}\left[1 + K_2 + \sqrt{(1 + K_2)^2 + 2b\left[T_{c_1}\left(1 + \frac{b}{2} T_{c_1}\right) + K_2 T_{c_1}\right]}\right]. \tag{2.57}$$

Значение коэффициента K_2 для шаровой стенки будет следующим:

$$K_2 = N_{n_1}^{n_2} \alpha_2 S_2 / \lambda_0 = \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) r_2^2 \alpha_2 / \lambda_0.$$

Подставляя последнее соотношение и формулу (2.57) в соотношение (2.10), получим зависимость для температуры:

$$T = T_{S_1} - (T_{S_1} - T_{S_2}) \frac{N_{n_1}^{n}}{N_{n_1}^{n_2}} =$$

$$= T_{S_1}\left(1 - \frac{1/r_1 - 1/r}{1/r_1 - 1/r_2}\right) - \frac{1 + K_2}{b} \frac{1/r_1 - 1/r}{1/r_1 - 1/r_2} -$$

$$- \frac{1}{b} \sqrt{(1 + K_2)^2 + 2b\left[T_{c_1}\left(1 + \frac{b}{2} T_{c_1}\right) + K_2 T_{c_1}\right]}\, \frac{1/r_1 - 1/r}{1/r_1 - 1/r_2} =$$

$$= T_{S_1}\left(1 - \frac{1/r_1 - 1/r}{1/r_1 - 1/r_2}\right) - \frac{1}{b}\left\{\frac{1/r_1 - 1/r}{1/r_1 - 1/r_2} + \frac{(1/r_1 - 1/r)\, r_2^2 \alpha_2}{\lambda_0} + \right.$$

$$+ \frac{1/r_1 - 1/r}{1/r_1 - 1/r_2}\left[\left(1 + \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) r_2^2 \alpha_2 / \lambda_0\right)\right]^2 + 2b\left[T_{c_1}\left(1 + \frac{b}{2} T_{c_1}\right) + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{(1/r_1 - 1/r_2)\, r_2^2 \alpha_2}{\lambda_0}\right]^{1/2}\right\}. \tag{2.58}$$

Решим задачу стационарной теплопроводности для шаровой стенки, проинтегрировав уравнение теплопроводности, записанное в сферических координатах. Рассмотрим граничные условия I рода (остальные условия рассматриваются аналогично). Уравнение теплопроводности в случае сферической симметрии имеет следующий вид:

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dT}{dr} = 0.$$

Вводя новую неизвестную функцию $u = dT/dr$ и подставляя ее в уравнение, получаем $\frac{du}{dr} = \frac{2u}{r}$. Проинтегрировав последнее соотношение, находим $u = \frac{C_1}{r^2}$. Делая обратную подстановку, приходим к $\frac{dT}{dr} = \frac{C_1}{r^2}$, после интегрирования которого получаем $T = -\frac{C_1}{r} + C_2$. Удовлетворяя граничным условиям I рода, получаем окончательное решение

$$T = T_{S_1} - \frac{T_{S_1} - T_{S_2}}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right),$$

совпадающее с решением (2.51), найденным при помощи обобщенного метода.

Для расчета теплового потока и температуры в пластине, цилиндрической и шаровой стенках при граничных условиях I рода для $\lambda = \text{const}$ и $\lambda = \lambda_0(1 + bT)$ составлена программа на алгоритмическом языке ФОРТРАН для ЕС ЭВМ.

ПРОГРАММА 1

```
C         ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ПЕРВОГО РОДА
          READ 100, N, K, M
  100     FORMAT (3I2)
          READ 111, TS1, TS2, R1, R2, BLO, B,
        * DL1, DL, F
  111     FORMAT (5E15.7)
          PRINT 111, TS1, TS2, D1, D2, R1, R2, BLO, B,
        * DL1, DL, F
        * PI = 3.1416
          BL = BLO * (1. + B * (TS1 + TS2)/2)
          IF (N — 2) 3, 4, 5
    3     H — DL/(M — 1)
          IF (K — 1) 7, 7, 8
    7     PRINT 112
  112     FORMAT (20X, 'ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ ПЛОСКОЙ',
        * 'СТЕНКИ С ПОСТОЯННОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬЮ')
          DO 9 I = 1, M
          X = (I — 1) * H
          T = TS1 — X/DL * (TS1 — TS2)
          PRINT 10, X, T
   10     FORMAT (50X, 2 (E15.7, 3X))
    9     CONTINUE
          Q = BLO/DL * (TS1 — TS2) * F
          PRINT 11, Q
   11     FORMAT (20X, 'ТЕПЛОВОЙ ПОТОК ПЛОСКОЙ',
        * 'СТЕНКИ Q = ', E 15.7)
          GO TO 1000
    8     CONTINUE
          PRINT 12
```

```
12   FORMAT (20X, 'ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ ПЛОСКОЙ',
   * 'СТЕНКИ С ПЕРЕМЕННОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬЮ'/)
     DO 13 I = 1, M
     X = (I — 1) * H
     T = SQRT ((1/B + TS1) * (1/B + TS1) —
   * 2 * BL/BLO/B * (TS1 — TS2) * X/DL) — 1/B
     PRINT 10, X, T
13   CONTINUE
     Q = BL/DL * (TS1 — TS2 ) * F
     PRINT 11, Q
     GO TO 1000
 4   CONTINUE
     H = (R2 — R1) / (M — 1)
     IF (K — 1)  14, 14, 15
14   CONTINUE
     PRINT 16
16   FORMAT (20X,'ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ',
   * 'ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СТЕНКИ С ПОСТОЯННОЙ',
   * 'ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬЮ')
     DO 17 I = 1, M
     R = H * (I — 1) + R1
     T = TC1—ALOG(R/R1)/ALOG(R2/R1) * (TS1 — TS2)
     PRINT 10, R, T
17   CONTINUE
     Q = 2 * PI * DLI * BLO * (TS1—TS2)/ALOG (R2/R1)
     PRINT 18, Q
18   FORMAT (20X, 'ТЕПЛОВОЙ ПОТОК ЦИЛИНДРИ'
   * 'ЧЕСКОЙ'
   * 'СТЕНКИ Q = ', E15.7)
     GO TO 1000
15   CONTINUE
     PRINT 19
19   FORMAT (20X,'ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ',
   * 'ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СТЕНКИ С ПЕРЕМЕННОЙ',
   * 'ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬЮ'/)
     DO 20 I = 1, M
     R = (I — 1) * H + R1
     T = SQRT ((1/B + TS1) * (1/B + TS1)—2 * BL/BLO/B *
   * (TS1 — TS2) * ALOG (R/R1)/ALOG (R2/R1) — 1/B
     PRINT 10, R, T
20   CONTINUE
     Q = 2*PI*DLI*BL*(TS1—TS2)/ALOG(R2/R1)
     PRINT 18, Q
     GO TO 1000
 5   CONTINUE
     H = (R2 — R1)/(M — 1)
     IF (K — 1)  21, 21, 22
21   CONTINUE
     PRINT 23
```

```
23    FORMAT (20X,'ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ ШАРОВОЙ',
     * 'СТЕНКИ С ПОСТОЯННОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬЮ'/)
      DO 24 I = 1, M
      R = R1 + H * (I - 1)
      T = TCI - (TS1 - TS2) * (1/R1 - 1/R)/(1/R1 - 1/R2)
      PRINT 10, R, T
24    CONTINUE
      Q = 4 * PI * BLO * (TS1 - TS2)/(1/R1-1/R2)
      PRINT 25, Q
25    FORMAT (20X,'ТЕПЛОВОЙ ПОТОК ШАРОВОЙ',
     * 'СТЕНКИ Q = ', E15.7)
      GO TO 1000
22    CONTINUE
      PRINT 26
26    FORMAT (20X,'ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ ШАРОВОЙ',
     * 'СТЕНКИ С ПЕРЕМЕННОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬЮ'/)
      DO 27 I = 1, M
      R = R1 + (I - 1) * H
      T = SQRT ((1/B + TS1) * (1/B + TS1) - 2 * BL/B/BLO*
     * (TS1-TS2) * (1/R1-1/R)/(1/R1-1/R2)) - 1/B
      PRINT 10, R, T
27    CONTINUE
      Q = 4 * PI * BL * (TS1-TS2)/(1/R1-1/R2)
      PRINT 25, Q
1000  CONTINUE
      STOP
      END
```

СПИСОК ИДЕНТИФИКАТОРОВ

N — параметр формы, может принимать значения 1, 2, 3, что соответствует плоской, цилиндрической и сферической симметрии задачи; K — параметр: если K = 1, $\lambda = \text{const}$, если K = 2, $\lambda = \lambda_0(1 + bT)$; TS1 и TS2 — заданные температуры на поверхностях стенки; DL — толщина плоской стенки; R1, R2 — радиусы цилиндрической или шаровой стенок; BLO — $\lambda = \text{const}$; B — коэффициент в выражении $\lambda = \lambda_0(1 + bT)$; DL1 — длина цилиндрической стенки; F — площадь поверхности плоской стенки; BL — среднее значение $\lambda(T)$; M — число точек разбиения отрезка; X — текущая координата в плоской задаче; R — текущая координата в задачах с цилиндрической и сферической симметрией; T — температура; Q — тепловой поток через стенку; H — шаг по координате.

Результаты расчета поля температур с помощью программы 1 показаны на рис. 2.4. Из рисунка видно, какое влияние на распределение

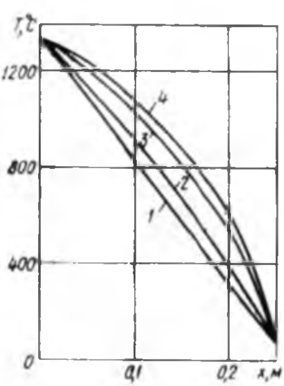


Рис. 2.4. Температурное поле пластины при граничных условиях I рода ($\lambda = 0{,}72$ Вт/(м·К), $T_{S_1} = 1350$°С, $T_{S_2} = 50$°С, $\delta = 0{,}25$м):

1 — $b = 1\cdot10^{-4}$ К$^{-1}$; 2 — $b = 8\cdot10^{-4}$ К$^{-1}$; 3 — $b = 0{,}01$ К$^{-1}$; 4 — $b = 9\cdot10^{0}$ К$^{-1}$

температуры в плоской стенке оказывает изменение коэффициента b. Поля температур определялись при толщине стенки 0,25 м, $\lambda_0 = 0{,}72$ Вт/(м · К) и заданных температурах на граничных поверхностях $T_{S_1} = 1350°$С, $T_{S_2} = 50$ °С.

Для расчета тепловых потоков и температурных полей в плоской, цилиндрической, сферической стенках при граничных условиях III рода составлена программа, позволяющая исследовать задачи как при $\lambda = \text{const}$, так и при $\lambda = \lambda_0 (1 + bT)$.

ПРОГРАММА 2

```
C       ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ТРЕТЬЕГО РОДА
        READ 100, N, K, M
  100   FORMAT (3I3)
        READ 111, TC1, TC2, AL1, AL2, BLO, B, DL,
     *  R1, R2, F, DL1
  111   FORMAT (5E15.7)
        PI = 3.1416
        IF (N — 2) 3, 4, 5
    3   H = DL/(M — 1)
        IF (K — 1) 31, 31, 32
   31   CONTINUE
        PRINT 311
  311   FORMAT (20X,'ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ ПЛОСКОЙ',
     *  'СТЕНКИ С ПОСТОЯННОЙ  ТЕПЛОПРОВОД',
     *  НОСТЬЮ')
        DO 312 I = 1, M
        X = ( I — 1) * H
        T = TC2 + (TC1—TC2) * (1 + BLO/AL2/DL — X/DL)/
     *  (1 + BLO/AL1/DL + BLO/AL2/DL)
        PRINT 7, X, T
    7   FORMAT(50X, 2 (E15.7, 3X))
  312   CONTINUE
        Q = (TC1—TC2) * F/(1/AL1 + DL/BLO + 1/AL2)
        PRINT  313, Q
  313   FORMAT (20X,'ТЕПЛОВОЙ ПОТОК ПЛОСКОЙ',
     *  'СТЕНКИ Q =', E15.7)
        GO TO 1000
   32   A1 = (AL1 * AL2—BLO * (AL1/DL+AL2/DL) —
     *  B * BLO * (AL1/DL * TC1+AL2/DL * TC2))/(AL1/
     *  DL + AL2/DL)
        A2 = (BLO*AL1*AL2 + B * BLO/2 * AL1 * AL2 *
     *  (TC1 + TC2)) / (AL1/DL + AL2/DL)
        BL = —A1/2 + SQRT (A1 * A1/4 + A2)
        TS1 = (BL * AL1/DL * TC1 + BL * AL2/DL *
     *  TC2+AL1 * AL2 * TC1)/(BL/DL*(AL1+AL2)+AL1*AL2)
        TS2 = (BL/DL * (AL1*TC1 +AL2*TC2) +
     *  AL1 * AL2 * TC2)BL/DL * (AL1 + AL2) + AL1 * AL2)
        PRINT 321
  321   FORMAT (20X,'ТЕМПЕРАТУРНОЕ  ПОЛЕ  ПЛОСКОЙ',
```

```
     * 'СТЕНКИ С ПЕРЕМЕННОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬЮ'/)
       DO 322 I = 1, M
       X = (I — 1) * H
       T = SQRT ((1/B + TS1) * (1/B + TS1) — 2 * BL/
     * BLO/B * (TS1 — TS2) * X/DL) — 1/B
       PRINT 7, X, T
 322   CONTINUE
       Q = BL/DL * (TS1 — TS2) * F
       PRINT 313, Q
       GO TO 1000
   4   CONTINUE
       H = (R2 — R1)/(M — 1)
       IF (K — 1) 41, 41, 42
  41   PRINT 411
 411   FORMAT (20X,'ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ ЦИЛИНДРИ'
     * 'ЧЕСКОЙ СТЕНКИ С ПОСТОЯННОЙ ТЕПЛОПРОВОД-',
       НОСТЬЮ'/)
       DO 412 I = 1, M
       R = R1 + (I — 1) * H
       T = TC2 + (TC1 — TC2) * (ALOG (R2/R1 + BLO/AL2)/
     * R2 — ALOG (R/R1))/(ALOG (R2/R1) + BLO * (1/
     * AL1/R1 + 1/AL2/R2))
       PRINT 7, R, T
 412   CONTINUE
       Q = PI * DLI * (TC1—TC2) (1/AL1/R1 + 1/AL2/R2 +
     * 1/BLO * ALOG (R2/R1)) * 2
       PRINT 413, Q
 413   FORMAT (20X,'ТЕПЛОВОЙ ПОТОК ЦИЛИНДРИЧЕ',
     * 'СКОЙ СТЕНКИ Q =', E15.7)
       GO TO 1000
  42   CONTINUE
       A1 = (AL1 * AL2 * R1 * R2—BLO * ((AL1*R1+AL2 *
     * R2)/ALOG (R2/R1))—B * BLO/ALOG (R2/R1) *
     * (AL1 * R1 * TC1 + AL2 * R2 * TC2))/((AL1 * R1 +
     * AL2 * R2)/ALOG (R2/R1)
       A2 = (BLO * AL1 * AL2 * R1 * R2 + B * BLO/2 *
     * AL1 + AL2 * R1 * R2 * (TC1 — TC2))/(AL1 * R1 +
     * AL2 * R2) * ALOG (R2/R1)
       BL = —A1/2 + SQRT (A1 * A1/4 + A2)
       TS1 = (BL/ALOG (R2/R1) * (AL1 * R1 * TC1 +
     * AL2 * R2 * TC2) + AL1 * AL2 * R1 * R2 * TC1)/
     * (BL/ALOG (R2/R1) * (AL1 * R1 + AL2 * R2) +
     * AL1 * AL2 * R1 * R2)
       TS2 = (BL/ALOG(R2/R1) * (AL1 * R1 * TC1 +
     * AL2 * R2 * TC2) + AL1 * AL2 * R1 * R2 * TC2)/(BL/
     * ALOG (R2/R1) + (AL1 * R1 + AL2 * R2) + AL1 * AL2*
     * R1 * R2)
       PRINT 421
```

```
421   FORMAT (20X,'ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ ЦИЛИНДРИ'
    * 'ЧЕСКОЙ СТЕНКИ С ПЕРЕМЕННОЙ ТЕПЛОПРОВОД',
    * 'НОСТЬЮ'/)
      DO 422 I = 1, M
      R = R1 + (I — 1) * H
      T = SQRT ((1/B+TS1) * (1/B+TS1) — 2 * BL/BLO/
    * B * (TS1—TS2) * ALOG (R/R1)/ALOG(R2/R1)) — 1/B
      PRINT 7, R, T
422   CONTINUE
      Q = 2 * PI * DLI *BL *(TS1 — TS2)/ALOG(R2/R1)
      PRINT 413, Q
      GO TO 1000
  5   CONTINUE
      H = (R2 — R1)/(M — 1)
      IF (K — 1) 51, 51, 52
 51   PRINT 511
511   FORMAT (20X,'ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ ШАРОВОЙ',
    * 'СТЕНКИ С ПОСТОЯННОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬЮ'/)
      DO 512 I = 1, M
      R = R1 + (I — 1) * H
      T = TC2 + (TC1—TC2) * (1 + BLO/AL2/R2+ 1/(R2/
    * R1— 1) — (1/R1—1/R)/(1/R1 — 1/R2))/(1 + BLO/
    * AL2/R2/(R2/R1 — 1) + BLO/AL1/R1/ (1 — R1/R2))
      PRINT 7, R, T
512   CONTINUE
      Q = 4 * PI * (TC1—TC2)/(1/AL1/R1/R1 + 1/AL2/
    * R2/R2 + (1/R1 — 1/R2)/2/BLO)
      PRINT 513, Q
513 FORMAT (20X,'ТЕПЛОВОЙ ПОТОК ШАРОВОЙ СТЕН',
      'КИ Q = ', E15.7)
      GO TO 1000
 52   CONTINUE
      A1 = (BLO * AL1 * AL2 * R1*R1*R2*R2 — BLO *
    * (AL1 * R1 * R1 + AL2 * R2 * R2)/(1/R1 — 1/R2) — B*
    * BLO/(1/R1 — 1/R2) * (AL1 * R1 * R1*TC1 + AL2*R2*
    * R2*TC2))/(AL1 *R1*R1 + AL2 * R2*R2)*(1/R1—1/R2)
      A2 = BLO * AL1 * AL2 * R1 * R1 * R2*R2*(1+B/2*
    * (TC1+TC2))/(AL1*R1*R1+ AL2*R2 * R2)*(1/R1—1/R2)
      BL = —A1/2 + SQRT (A1 * A1/4 + A2)
      TS1 = (BL/(1/R1 — 1/R2) * (AL1 * R1 * R1 * TC1 +
    * AL2 * R2 * R2 * TC2) + AL1*AL2*R1*R2*R1*R2*
    * TC1)/(BL/(1/R1—1/R2)*(AL1*R1*R1+AL2 *
    * R2*R2)+ AL1 * AL2 * R1 * R1 * R2 * R2)
      TS2 = (BL/(1/R1—1/R2)*(AL1*R1*R1 *TC1 + AL2 *
    * R2 *R2 * TC2) + AL1*AL2*R1*R1*R2 * R2 * TC2)/
    * (BL/(1/R1—1/R2)*(AL1*R1* R1*AL2*R2*R2)+
    * AL1 * AL2 * R1 * R1 * R2 * R2)
      PRINT 521
```

```
521   FORMAT (20X,'ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ ШАРОВОЙ',
     * 'СТЕНКИ С ПЕРЕМЕННОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬЮ'/)
      DO 522 I = 1, M
      R = R1 + H * (I — 1)
      T = SQRT ((1/B + TS1) * (1/B + TS1) — 2/B/BLO *
     * BL * (TS1 — TS2) * (1/R1 — 1/R)/(1/R1 — 1/R2)) — 1/B
      PRINT 7, R, T
522   CONTINUE
      Q = 4 * PI * BL * (TS1 — TS2)/(1/R1 — 1/R2)
      PRINT 513, Q
1000  CONTINUE
      STOP
      END
```

СПИСОК ИДЕНТИФИКАТОРОВ

TC1, TC2 — заданные температуры окружающих сред; *AL*1, *AL*2 — заданные значения коэффициентов теплоотдачи. Остальные идентификаторы имеют тот же смысл, что и в программе 1 (позволяющей рассчитывать характеристики теплообмена при граничных условиях I рода). С помощью этой программы просчитаны некоторые задачи стационарной теплопроводности. По данным рис. 2.5 можно проанализировать влияние изменения теплопроводности на температурное поле стенки.

На рис. 2.6 показано распределение температуры для цилиндрических стенок различной толщины при различных значениях коэффициента теплопроводности.

Для расчета тепловых потоков и температурных полей в плоской, цилиндрической, сферической стенках при граничных условиях II и III родов составлена программа, позволяющая исследовать задачи при $\lambda = \text{const}$ и при $\lambda = \lambda_0 (1 + bT)$

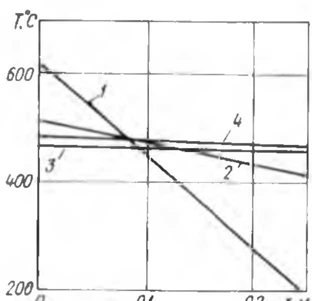


Рис. 2.5. Влияние теплопроводности материала на распределение температуры в пластине при граничных условиях III рода ($T_{c_1} = 700$ °C; $T_{c_2} = 30$ °C; $\alpha_1 = 20$ Вт / (м²·К); $\alpha_2 = 10$ Вт/ / (м²·К); $\delta = 0{,}25$ м):

1 — $\lambda = 1$ Вт/(м · К); 2 — $\lambda = 10$ Вт/(м · К); 3 — $\lambda = 10^2$ Вт×(м · К); 4 — $\lambda = 10^3$ Вт (м · К)

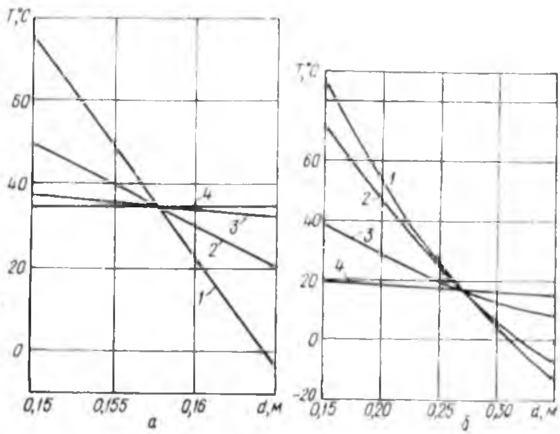


Рис. 2.6. Влияние теплопроводности материала на распределение температуры в цилиндрической стенке при граничных условиях III рода ($T_{c_1} = 90$ °C; $T_{c_2} = -15$ °C; $\alpha_1 = \alpha_2 = 1000$ Вт/(м² · К)):

а — $d_1 = 0{,}15$ м, $d_2 = 0{,}165$ м; б — $d_1 = 0{,}15$ м, $d_2 = 0{,}35$ м; 1 — $\lambda = 1$ Вт/(м · К); 2 — $\lambda = 10$ Вт / (м · К); 3 — $\lambda = 10^2$ Вт/(м · К), 4 — $\lambda = 10^3$ Вт/(м · К)

ПРОГРАММА 3

```
C          ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ВТОРОГО И ТРЕТЬЕГО РОДОВ:
C          НА ВНУТРЕННЕЙ ПОВЕРХНОСТИ ЗАДАНА
C          ПЛОТНОСТЬ ТЕПЛОВОГО ПОТОКА Q0,
C          НА ВНЕШНЕЙ — КОНВЕКТИВНЫЙ ТЕПЛООБМЕН
           READ 100, N, K, M
   100     FORMAT (3I2)
           READ 111, Q0, TC2, AL2, DL, R1, R2, BLO, B,
         * DL1, F
   111     FORMAT (10(F6.2))
           PI = 3.1416
           IF (K — 1), 1, 1, 2
     1     CONTINUE
C          ПОСТОЯННАЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ
           IF (N — 2) 4, 5, 6
     4     CONTINUE
C          ПЛОСКАЯ СТЕНКА
           H = DL/(M — 1)
           TS2 = Q0/AL2 + TC2
           TS1 = Q0/BLO * DL + TS2
           PRINT 401
   401     FORMAT (20X, 'ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ ПЛОСКОЙ',
         * 'СТЕНКИ С ПОСТОЯННОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬЮ'/)
           DO 41 I = 1, M
           X = H * (I — 1)
           T = TS1 — (TS1 — TS2) * X/DL
           PRINT 402, X, T
   402     FORMAT (50X, 2(E15.7, 3X))
    41     CONTINUE
           Q = Q0 * F
           PRINT 403, Q
   403     FORMAT (20X,'ТЕПЛОВОЙ ПОТОК ПЛОСКОЙ СТЕНКИ',
         * 'Q = ', E15.7)
           GO TO 1000
     5     CONTINUE
C          ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ СТЕНКА
           H = (R2 — R1)/(M — 1)
           FKR = R2/R1
           TS2 = Q0/FKR/AL2 + TC2
           TS1 = Q0 * R1 * ALOG (FKR)/BLO + TS2
           PRINT 501
   501     FORMAT (20X,'ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ ЦИЛИНДРИ',
         * 'ЧЕСКОЙ СТЕНКИ С ПОСТОЯННОЙ ТЕПЛОПРОВОД',
         * 'НОСТЬЮ'/)
           DO 51 I = 1, M
           R = R1 + H * (I — 1)
           T = TS1 — (TS1 — TS2) * ALOG (R/R1)/ALOG(FKR)
           PRINT 402, R, T
```

```
   51 CONTINUE
      Q = Q0 * 2 * PI * R1 * DL1
      PRINT 403, Q
      GO TO 1000
    6 CONTINUE
C     ШАРОВАЯ СТЕНКА
      H = (R2— R1)/(M — 1)
      FKR = R2/R1
      TS2 = TC2 + Q0/AL2/FKR/FKR
      TS1 = Q0/BLO * R1 * R1 * (1/R1/R1 — 1/R2/R2) +
     * TS2
      PRINT 601
  601 FORMAT (20X,'ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ ШАРОВОЙ',
     * 'СТЕНКИ С ПОСТОЯННОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬЮ'/)
      DO 61 I = 1, M
      R = H * (I — 1) + R1
      T = TS1 — (TS1 — TS2) * (1/R1 — 1/R)(/(1/R1 — 1/R2)
      PRINT 402, R, T
   61 CONTINUE
      Q = Q0 * R1 * R1 * PI * 4
      PRINT 403, Q
      GO TO 1000
    2 CONTINUE
C     ПЕРЕМЕННАЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ
      IF (N — 2) 7, 8, 9
    7 CONTINUE
C     ПЛОСКАЯ СТЕНКА
      TS2 = Q0/AL2 + TC2
      TS1 = — 1/B + SQRT (1/B/B + TS2 * TS2 + 2/B *
     * TS2 + 2 * Q0 * DL/B/BLO)
      H = DL/(M — 1)
      PRINT 701
  701 FORMAT (20X,'ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ ПЛОСКОЙ',
     * 'СТЕНКИ С ПЕРЕМЕННОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬЮ'/)
      DO 71 I = 1, M
      X = H * (I — 1)
      FSN = DL
      T = SQRT ((1/B + TS1) * (1/B + TS1) — 2 * Q0*
     * X/BLO/B) — 1/B
      PRINT 402, X, T
   71 CONTINUE
      Q = Q0 * F
      PRINT 403, Q
      GO TO 1000
    8 CONTINUE
C     ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ СТЕНКА
      H = (R2 — R1)/(M — 1)
      FKR = R2/R1
      TS2 = Q0/FKR/AL2 + TC2
```

```
      TS1 = —1/B + SQRT (1/B/B + TS2 * TS2 +
     * 2/B * TS2 + 2 * Q0 * R1 * ALOG (FKR)/B/BLO)
      PRINT 801
 801  FORMAT (20X, 'ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ ЦИЛИНД',
     * 'РИЧЕСКОЙ СТЕНКИ С ПЕРЕМЕННОЙ ТЕПЛО',
     * 'ПРОВОДНОСТЬЮ'/)
      DO 80 I = 1, M
      R = R1 + H * (I — 1)
      FSN = R * ALOG (FKR )
      T = SQRT ((1/B + TS1) * (1/B + TS1) —
     * 2 * Q0 * FSN/BLO/B) — 1/B
      PRINT 402, R, T
  81  CONTINUE
      Q = Q0 * 2 * PI * R1 * DLI
      PRINT 403, Q
      GO TO 1000
   9  CONTINUE
C     ШАРОВАЯ СТЕНКА
      H = (R2 — R1)/(M — 1)
      TS2 = Q0/AL2/R2/R2 * R1 * R1
      TS1 = —1/B + SQRT (1/B/B + TS2 * TS2 + 2 * TS2/
     * B + 2 * Q0 * R1 * R1 * (1/R1 — 1/R2)/B/BLO)
      PRINT 901
 901  FORMAT (20X,'ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ ШАРОВОЙ',
     * 'СТЕНКИ С ПЕРЕМЕННОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬЮ'/)
      DO 91 I = 1, M
      R = R1 + H * (I — 1)
      FSN = R1 * R1 * (1/R — 1/R2)
      T = SQRT ((1/B + TS1) * (1/B + TS1)  — 2 * Q0 *
     * FSN/BLO/B) — 1/B
      PRINT 402, R, T
  91  CONTINUE
      Q = Q0 * 4 * PI * R1 * R1
      PRINT 403, Q
1000  CONTINUE
      STOP
      END
```

СПИСОК ИДЕНТИФИКАТОРОВ

Q0 — плотность теплового потока на внутренней поверхности стенки. Остальные идентификаторы выполняют те же функции, что и их аналоги в программах 1,2.

Задача 2.1. Определить часовую потерю теплоты Q через стенку из красного кирпича длиной $l = 5$ м, высотой $h = 4$ м и толщиной $\delta = 0{,}25$ м, если температуры на поверхностях стенки поддерживаются $T_{c_1} = 110$ °С, $T_{c_2} = 40$ °С. Коэффициент теплопроводности красного кирпича $\lambda = 0{,}7$ Вт/(м · К). Потерями теплоты через торцы стенки можно пренебречь.

Р е ш е н и е. Плотность теплового потока для плоской стенки при граничных условиях I рода определяется по формуле

$$q = \frac{\lambda}{\delta}(T_{c_1} - T_{c_2}) = \frac{0{,}7 \cdot 70}{0{,}25} = 196 \ \frac{Вт}{м^2};$$

$$Q = qF\Delta T = 196 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 3600 = 14{,}112 \ кДж.$$

§ 2.2. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ МНОГОСЛОЙНЫХ СТЕНОК

Рассмотрим многослойное тело простой формы, состоящее из m однородных слоев, между которыми имеет место идеальный тепловой контакт. Будем считать, что температура рассматриваемого тела изменяется вдоль одной координаты, а теплопроводность λ_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ каждого из слоев постоянна. В этом случае тепловой поток, проходящий через любую изотермическую поверхность тела, одинаковый: $Q = Q_i = \text{const}$.

Пусть на ограничивающих тело поверхностях заданы граничные условия III рода (случай граничных условий I рода будет получен из конечных формул предельным переходом при $\alpha_1 \to \infty$, $\alpha_2 \to \infty$).

Обозначим температуры граничных слоев T_{S_i}, размеры каждого слоя считаем заданными. Очевидно, что температуры внешних поверхностей тела имеют индексы «1» и «$(m+1)$».

В силу постоянства тепловых потоков на изотермических поверхностях для внешних границ тела можно записать

$$\begin{gathered} Q = \alpha_1 S_1 (T_{c_1} - T_{S_1}), \\ Q = \alpha_2 S_{m+1} (T_{S_{m+1}} - T_{c_2}). \end{gathered} \tag{2.59}$$

Такой же тепловой поток передается через каждый из слоев многослойного тела. Тогда в соответствии с законом Фурье получим

$$Q = \frac{\lambda_i (T_{S_i} - T_{S_{i+1}})}{\int\limits_{n_i}^{n_{i+1}} \frac{dn}{S(n)}}, \quad i = 1, 2, \ldots, m-1. \tag{2.60}$$

Обозначим

$$\int\limits_{n_i}^{n_{i+1}} \frac{dn}{S(n)} = N_{n_i}^{n_{i+1}} = F_i \tag{2.61}$$

и объединим равенства (2.59), (2.60) в систему уравнений

$$\begin{cases} Q = \alpha_1 S_1 (T_{c_1} - T_{S_1}), \\ Q = \lambda_1 (T_{S_1} - T_{S_2}) / F_1, \\ Q = \lambda_2 (T_{S_2} - T_{S_3}) / F_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Q = \lambda_m (T_{S_m} - T_{S_{m+1}}) / F_m, \\ Q = \alpha_2 S_{m+1} (T_{S_{m+1}} - T_{c_2}). \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} T_{c_1} - T_{S_1} = \dfrac{Q}{\alpha_1 S_1}, \\ T_{S_1} - T_{S_2} = \dfrac{Q}{\lambda_1} F_1, \\ T_{S_2} - T_{S_3} = \dfrac{Q}{\lambda_2} F_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ T_{S_m} - T_{S_{m+1}} \dfrac{Q}{\lambda_m} F_m, \\ T_{S_{m+1}} - T_{c_2} = \dfrac{Q}{\alpha_2 S_{m+1}}. \end{cases} \tag{2.62}$$

Сложив почленно правые и левые части уравнений (2.62), получим следующее выражение для теплового потока:

$$Q = (T_{c_1} - T_{c_2}) \Bigg/ \left(\frac{1}{\alpha_1 S_1} + \sum_{i=1}^{m} \frac{F_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2 S_{m+1}}\right). \tag{2.63}$$

Величину $\left(\dfrac{1}{\alpha_1 S_1} + \sum\limits_{i=1}^{m} \dfrac{F_i}{\lambda_i} + \dfrac{1}{\alpha_2 S_{m+1}}\right)^{-1}$ называют *полным коэффициентом теплопередачи многослойной стенки.* Выражение для теплового потока через многослойную стенку (2.63) подобно аналогичному выражению для однослойной стенки (2.34). Различие заключается лишь в формулах для коэффициента теплопередачи, причем равенство (2.34) есть частный случай (2.63) при $m = 1$. Для удобства сравнения процессов теплопроводности многослойной и однородной стенок вводят эквивалентную теплопроводность многослойной стенки

$$\lambda_{\text{экв}} = \sum_{i=1}^{m} F_i \Bigg/ \sum_{i=1}^{m} F_i/\lambda_i = \int_{n_1}^{n_{m+1}} \frac{dn}{S(n)} \Bigg/ \sum_{i=1}^{m} F_i/\lambda_i. \tag{2.64}$$

Используя это обозначение, равенство (2.63) можно записать в виде, формально совпадающем с выражением (2.34) для однородной стенки:

$$Q = (T_{c_1} - T_{c_2}) \Bigg/ \left(\frac{1}{\alpha_1 S_1} + \frac{N_{n_1}^{n_{m+1}}}{\lambda_{\text{экв}}} + \frac{1}{\alpha_2 S_{m+1}}\right).$$

Однако коэффициент $\lambda_{\text{экв}}$ здесь уже не является константой, а зависит, как это следует из (2.64), от числа слоев, теплопроводности и размеров каждого слоя, а также от геометрической формы стенки.

Решая систему уравнений (2.62), получаем, что температуры на границах слоев и на поверхности тел определяются выражениями

$$\begin{cases} T_{S_1} = T_{c_1} - Q\dfrac{1}{\alpha_1 S_1}, \\ T_{S_2} = T_{c_1} - Q\left(\dfrac{1}{\alpha_1 S_1} + \dfrac{F_1}{\lambda_1}\right), \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ T_{S_{i+1}} = T_{c_1} - Q\left(\dfrac{1}{\alpha_1 S_1} + \sum\limits_{k=1}^{i} \dfrac{F_k}{\lambda_k}\right), \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ T_{S_{m+1}} = T_{c_2} + \dfrac{Q}{\alpha_2 S_{m+1}}. \end{cases} \tag{2.65}$$

Таким образом, задача решена. Рассмотрим теперь случай, когда на поверхности тела заданы условия I рода. Для этого достаточно во всех полученных формулах совершить предельный переход при $\alpha_1 \to \infty$ и $\alpha_2 \to \infty$. Тогда из первого и последнего уравнений системы (2.62) получаем

$$T_{S_1} = T_{c_1},\quad T_{S_{m+1}} = T_{c_2},$$

то есть температуры поверхностей S_1 и S_{m+1} известны. Уравнение для теплового потока (2.63) примет вид

$$Q = (T_{S_1} - T_{S_2}) \Big/ \sum_{i=1}^{m} \frac{F_i}{\lambda_i}, \tag{2.66}$$

а температуры границ слоев можно определить из равенства

$$T_{S_{i+1}} = T_{S_1} - Q\sum_{i} F_i/\lambda_i,\quad i = 1,\ 2,\ \dots,\ m-1. \tag{2.67}$$

Из равенства (2.66) видно, что полное термическое сопротивление $\sum\limits_{i=1}^{m} F_i/\lambda_i$ многослойной стенки складывается из термических сопротивлений каждого слоя.

Если на одной поверхности стенки, например внутренней, заданы граничные условия II рода в виде $q_{S_1} = q_0$, а на другой заданы коэффициент теплоотдачи α_2 и температура среды T_{C_2}, то есть граничные условия III рода, то выражения для теплового потока и температуры могут быть получены аналогичным образом. Приведем окончательные формулы:

$$Q = q_0 S_1,\quad T_{S_{m+1}} = T_{c_2} + \frac{q_0}{\alpha_2}\frac{S_1}{S_{m+1}},$$

$$T_{S_1} = T_{c_2} + q_0 S_1\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{F_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2 S_{m+1}}\right),$$

$$T_{S_i} = T_{c_2} + q_0 S_1\left(\frac{1}{\alpha_2 S_{m+1}} + \sum_{k=i}^{m}\frac{F_k}{\lambda_k}\right).$$

Рассмотрим частные случаи полученных решений.

Плоская стенка. Пусть заданы толщины δ_i и теплопроводности слоев многослойной плоской стенки, на поверхности которой выполняются условия III рода. Так как для плоской стенки $S(n) = S = \text{const}$, то с учетом (2.61) $F_i = \delta_i/S$ и выражения (2.63)—(2.65) примут вид

$$qS = Q = S\frac{T_{c_1} - T_{c_2}}{\frac{1}{\alpha} + \sum_i \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}} = S\frac{T_{c_1} - T_{c_2}}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda_{\text{экв}}} + \frac{1}{\alpha_2}} = S\frac{T_{c_1} - T_{c_2}}{R},$$

$$T s_{i+1} = T_{c_1} - q\left(\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{k=1}^{i}\frac{\delta_k}{\lambda_k}\right),$$

где $\delta = \sum_{i=1}^{m}\delta_i$ — толщина стенки; $R = \frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda_{\text{экв}}} + \frac{1}{\alpha_2}$ — *полное термическое сопротивление плоской многослойной стенки.* На примере плоской стенки видно, что введение эквивалентной теплопроводности $\lambda_{\text{экв}} = \delta/\left(\sum_{i=1}^{m}\delta_i/\lambda_i\right)$ (формула (2.64) при $F_i = \delta_i/\delta$) равносильно замене многослойной стенки некоторой фиктивной однослойной стенкой такой же толщины $\delta = \sum_{i=1}^{m}\delta_i$, причем разности температур на границах однослойной и многослойной стенок, а также количество теплоты, которое проходит через них в единицу времени, совпадают.

Цилиндрическая стенка. Для цилиндрической стенки

$$F_i = \frac{1}{2\pi\lambda}\ln(r_{i+1}/r_i),\quad S_i = 2\pi r_i l.$$

Подставляя эти значения в равенства (2.63), (2.65), получим следующие расчетные формулы:

для потока теплоты, которая проходит через единицу длины цилиндрической стенки,

$$q_l = \frac{Q}{l} = \pi k_l(T_{c_1} - T_{c_2}) = \frac{1}{R_l}\pi(T_{c_1} - T_{c_2}),$$

где $R_l = k_l^{-1} = \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \sum_{i=1}^{m}\frac{1}{2\lambda_i}\ln\frac{d_{i+1}}{d_i} + \frac{1}{\alpha_2 d_{m+1}}$ — *полное термическое сопротивление теплопередачи цилиндрической стенки;*

для температур на границах слоев

$$T s_{i+1} = T_{c_1} - \frac{q_l}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \sum_{k=1}^{i}\frac{1}{2\lambda_k}\ln\frac{d_{k+1}}{d_k}\right) =$$

$$= T_{c_1} - \frac{q_l}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda_{\text{экв}}}\ln\frac{d_{m+1}}{d_1}\right),$$

где $\lambda_{экв} = \ln \frac{d_{m+1}}{d_1} \Big/ \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i}$ — *эквивалентная теплопроводность цилиндрической стенки.*

Шаровая стенка. Для шаровой стенки

$$F_i = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_{i+1}}\right), \quad S_i = 4\pi r_i^2.$$

В соответствии с равенством (2.63) тепловой поток через произвольную изотермическую поверхность может быть определен по формуле

$$Q = \frac{\pi (T_{c_1} - T_{c_2})}{\frac{1}{\alpha_1 d_1^2} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{\lambda_i}\left(\frac{1}{d_i} - \frac{1}{d_{i+1}}\right) + \frac{1}{\alpha_2 d_{m+1}^2}} = k_{ш}(T_{c_1} - T_{c_2})\pi,$$

где $k_{ш}$ — *полный коэффициент теплопередачи шаровой стенки.*

Температура на границе i-го и $(i+1)$-го слоев определяется из выражения

$$Ts_{i+1} = T_{c_1} - \frac{Q}{\pi}\left[\frac{1}{\alpha_1 d_1^2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{i}\frac{1}{\lambda_k}\left(\frac{1}{d_k} - \frac{1}{d_{k+1}}\right)\right].$$

Для расчета тепловых потоков и полей температур в многослойных плоских, цилиндрических, сферических стенках составлена программа 4, позволяющая решать задачи стационарной теплопроводности при граничных условиях I и III родов, а также при смешанных граничных условиях (II и III родов).

ПРОГРАММА 4

```
C       ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ МНОГОСЛОЙНОЙ СТЕНКИ
        DIMENSION TS (100), BLO (100), D (100), DL (100)
        READ 400, M, N, K
  400   FORMAT (3I3)
        READ 401, TG1, TG2, AL1, AL2, Q0, S, DL1
  401   FORMAT(5E16.7)
        M1 = M + 1
        READ 401, (DL(I), I = 1, M), (BLO(I), I = 1, M),
     *  (D(I), I = 1, M1)
        PI = 3.1416
        IF (N — 2) 1, 2, 3
    1   CONTINUE
        PRINT 100
  100   FORMAT (50X,'ПЛОСКАЯ СТЕНКА'/)
        A = 0
        DO 12 I = 1, M
        A = A + DL (I)/ BLO (I)
```

```
   12   CONTINUE
C       ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ 1 РОДА
        PRINT 441
  441   FORMAT (50X,'ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ПЕРВОГО',
     *  'РОДА'/)
        Q = (TC1 — TC2) /A * S
        PRINT 446, Q
  446   FORMAT (50X,'ТЕПЛОВОЙ ПОТОК Q =', E16.7)
        QP = Q/S
        PRINT 447, QP
  447   FORMAT (50X,'ПЛОТНОСТЬ ТЕПЛОВОГО ПОТОКА',
     *  'QP =', E15.7)
        PRINT 444
  444   FORMAT (50X,'ТЕМПЕРАТУРЫ НА ГРАНИЦЕ',
     *  'СЛОЕВ'/)
        TS(1) = TC1
        J = 1
        PRINT 445, J, TS (J)
  445   FORMAT (50X, 'TS', I2, 2X,'=',E15.7)
        T1 = 0
        DO 111 I = 1, M
        T1 = T1 + DL (I)/BLO (I)
        TS (I + 1) = TS (1) — QP * T1
        J = I + 1
        PRINT 445, J, TS (J)
  111   CONTINUE
        GO TO 1000
   13   CONTINUE
C       ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ 3 РОДА
        PRINT 443
  443   FORMAT (50X,'ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ',
     *  'ТРЕТЬЕГО РОДА'/)
        QP = (TC1 — TC2)/(1/AL1 + A + 1/AL2)
        PRINT 447, QP
        Q = QP * S
        PRINT 446, Q
        TS (1) = TC1 — QP/AL1
        J = 1
        PRINT 444
        PRINT 445, J, TS (J)
        T1 = 0
        DO 131 I = 1, M
        T1 = T1 + DL (I)/BLO (I)
        TS (I + 1) = TC1 — QP * (1/AL1 + T1)
        J = I + 1
        PRINT 445, J, TS (J)
  131   CONTINUE
        GO TO 1000
   14   CONTINUE
```

```
      PRINT 442
C     СМЕШАННЫЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ: ВТОРОГО
C     РОДА НА ПОВЕРХНОСТИ S1 И ТРЕТЬЕГО
C     РОДА НА ПОВЕРХНОСТИ S2
      QP = Q0
      PRINT 447, QP
      Q = QP * S
      PRINT 446, Q
      TS (M + 1) = TC2 + Q0/AL2
      T1 = 0
      DO 141 I = 1, M
      I1 = M - I + 1
      T1 = T1 + DL (I1)/BLO (I1)
      TS (I1) = TC2 + (T1 + 1/AL2) * Q0
  141 CONTINUE
      PRINT 444
      M1 = M + 1
      DO 142 I = 1, M1
      PRINT 445, I, TS  (I)
  142 CONTINUE
      GO TO 1000
    2 CONTINUE
      PRINT 200
  200 FORMAT (50X,'ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ СТЕНКА'/)
      A = 0
      DO 22 I = 1, M
      A = A + ALOG (D (I + 1)/D (I))/2/BLO(I)
   22 CONTINUE
      IF (K - 1) 21, 23, 24
   21 CONTINUE
C     ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ 1 РОДА
      PRINT 441
      QL = PI * (TC1 - TC2)/A
      PRINT 447, QL
      Q = QP * DL1
      PRINT 446, Q
      PRINT 444
      TS (1) = TC1
      J = 1
      PRINT 445, J, TS (J)
      T1 = 0
      DO  211  I =1, M
      T1 = T1 + ALOG (D(I + 1)/D (I))/2/BLO(I)
      TS (I + 1) = TS (I) - QL/PI * T1
      J = I + 1
      PRINT 445, J, TS (J)
  221 CONTINUE
      GO TO 1000
   23 CONTINUE
```

```
C     ГРАНИЧНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ 3 РОДА
      PRINT 4447, QL
      Q = QL * DLI
      PRINT 446, Q
      PRINT 444
      TS (1) = TC1 — QL/PI/AL1/D (1)
      J = 1
      PRINT 447, J, TS (J)
      T1 = 0.
      DO 231 I = 1, M
      T1 = T1 + ALOG (D (I + 1)/D (I))/2/BLO (I)
      TS (I + 1) = TC1 — QL/PI * (1/AL1/D (1) + T1)
      J = I + 1
      PRINT 445, J, TS (J)
  231 CONTINUE
      GO TO 1000
   24 CONTINUE
      PRINT 442
C     СМЕШАННЫЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ:
C     ВТОРОГО РОДА НА ПОВЕРХНОСТИ S1 И
C     ТРЕТЬЕГО РОДА НА ПОВЕРХНОСТИ S2
      QL = Q0 * PI * D (1)
 4447 FORMAT (40X,'ТЕПЛОВОЙ ПОТОК НА ЕДИНИЦУ',
     * 'ДЛИНЫ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СТЕНКИ QL =', E15.7)
      PRINT 4447, QP
      IQ = QL * DLI
      PRINT 446, Q
      TS (M + 1) = TC2 + Q0/AL2 * D (1)/D (M + 1)
      T1 = 0
      DO 241 I = 1, M
      I1 = M — I + 1
      T1 = T1 + ALOG (D (I1 + 1)/D (I1))/2/BLO (I1)
      TS (I1) = TC2 + (T1 + 1/AL2/D (M + 1)) * Q0 * D (1)
  241 CONTINUE
      PRINT 444
      M1 = M + 1
      DO 242 I = 1, M1
      PRINT 445, I, TS (I)
  242 CONTINUE
      GO TO 1000
    3 CONTINUE
C     ШАРОВАЯ СТЕНКА
      PRINT 300
  300 FORMAT (50X,'ШАРОВАЯ СТЕНКА'/)
      A = 0
      DO 32 I = 1, M
      A = A + (1/D(I) — 1/(D (I + 1))/2/BLO (I)
   32 CONTINUE
      IF (K — 1) 31, 31, 34
```

```
   31   CONTINUE
C       ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ 1 РОДА
        PRINT 441
        Q = (TC1 — TC2) * PI/A
        PRINT 446, Q
        PRINT 444
        TS (1) = TC1 — Q/PI/AL1/D (1)/D (1)
        J = 1
        PRINT 445, J, TS (J)
        T1 = 0
        DO 331 I = 1, M
        T1 = T1 + (1/D (I) — 1/D (I + 1))/2/BLO (I)
        TS (I + 1) = TC1 — Q/PI * (1/AL1/D (1)/D (1) + T1)
        J = I + 1
        PRINT 445, J, TS (J)
  331   CONTINUE
        GO TO 1000
   34   CONTINUE
        PRINT 442
C       СМЕШАННЫЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ
        Q = Q0 * 4 * PI * D (1) * D (1)
        PRINT 446, Q
        TS (M + 1) = TC2 + Q0/AL2 * D (1) * D (1)/D (M + 1)/
     *  D (M + 1)
        T1 = 0
        DO 341 I = 1, M
        I1 = M — I + 1
        T1 = T1 + (1/D (I1) — 1/(D(I1 + 1))/2/BLO (I1)
        TS (I1) = TC2 + Q 0 * D(1) * D(1) * (T1 + 1/AL2/
     *  D (M + 1)/D (M + 1))
  341   CONTINUE
        M1 = M + 1
        DO 342 I = 1, M1
        PRINT 445, I, TS (I)
  342   CONTINUE
 4447   FORMAT (20X,'НА ВНУТРЕННЕЙ ПОВЕРХНОСТИ',
     *  'СТЕНКИ ЗАДАН ПОСТОЯННЫЙ ТЕПЛОВОЙ ПОТОК,',
     *  'НА ВНЕШНЕЙ — УСЛОВИЯ 3 РОДА'/)
 1000   CONTINUE
        STOP
        END
```

СПИСОК ИДЕНТИФИКАТОРОВ

N — параметр, равный 1, 2, 3 при плоской, цилиндрической и сферической симметрии соответственно; M — число слоев в стенке; K — параметр, задающий вид граничных условий, K принимает значения 0, 1, 2 при условиях первого рода, третьего рода и смешанных граничных условиях (II и III родов) соответственно; TS — массив значений вычисленных температур на границах слоев; BLO — массив значений коэффициентов теплопроводности для слоев; D — мас-

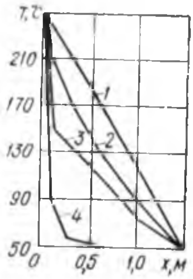


Рис. 2.7. Температурное поле пятислойной плоской стенки при граничных условиях I рода (T_{S_1} = 250 °C: T_{S_2} = 50 °C) (δ_1 = 0,1 м, δ_2 = 0,2 м, δ_3 = 0,3 м, δ_4 = 0,4 м, δ_5 = 0,5 м):

1 — λ_i = 1 Вт/(м · К), i = 1, 2,..., 5; *2* — λ_i = 10 i Вт/(м × × К); *3* — λ_1 = 5 Вт/(м · К), λ_2 = 50 Вт/(м · К), λ_3 = = 60 Вт/(м · К), λ_4 = 70 Вт/(м · К), λ_5 = 100 Вт/(м · К); *4* — 1 = 1 Вт/(м · К), λ_2 = 10 Вт/(м · К), λ_3 = 10^2 Вт/(м × × К), $\lambda_4 = \lambda_5 = 10^3$ Вт/(м · К)

сив диаметров слоев цилиндрической и сферической стенок; DL — массив толщин слоев плоской стенки; AL1, AL2 — значения коэффициентов теплоотдачи α_1, α_2 при граничных условиях III рода; TC1, TC2 — температуры окружающих сред при граничных условиях III рода или заданные температуры на поверхностях 1-го и M-го слоев при граничных условиях I рода; Q — тепловой поток через стенку; QP — плотность теплового потока для плоской стенки; QL — тепловой поток на единицу длины цилиндрической стенки; QQ — плотность теплового потока на внутренней поверхности стенки при смешанных граничных условиях; S — площадь поверхности плоской стенки; DL1 — длина цилиндрической стенки; A, T1, M1, I1, J — рабочие переменные.

На рис. 2.7 показано полученное с помощью данной программы распределение температуры в плоской пятислойной стенке при граничных условиях I рода (T_{S_1} = 250 °C; T_{S_2} = 30 °C).

Критический диаметр изоляции. Изучим, как влияет изменение наружного диаметра на термическое сопротивление однородной цилиндрической стенки. Согласно формуле (2.46) имеем

$$R_l = \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}.$$

Если α_1, d_1, λ, α_2 зафиксированы, то R_l становится функцией только внешнего диаметра d_2, то есть $R_l = R_l\,(d_2)$. Такая постановка задачи является вполне закономерной, поскольку значения α_1, α_2, λ должны быть заданы при расчете любого теплообменного аппарата, а величина d_1 определяется требованиями к пропускной способности трубопровода.

Дифференцируя функцию $R_l = R_l\,(d_2)$ и приравнивая результат к нулю, получаем

$$\frac{d\,(R_l)}{d\,(d_2)} = \frac{1}{2\lambda d_2} - \frac{1}{\alpha_2 d_2^2} = 0,$$

откуда

$$d_2 = \frac{2\lambda}{\alpha_2} = d_{\text{кр}}.$$

Величину $d_{\text{кр}}$ называют *критическим диаметром*.

Вычислим вторую производную от функции $R_l = R_l\,(d_2)$ в точке $d_{\text{кр}}$:

$$\left.\frac{d^2\,(R_l)}{d\,(d_2)^2}\right|_{d_2 = d_{\text{кр}}} = \frac{\alpha_2^2}{8\lambda^3}.$$

Поскольку вторая производная от R_l положительна, критический диаметр соответствует минимальному термическому сопротивлению.

Полученная формула может быть использована для простейшего расчета толщины теплоизоляционного покрытия.

Тепловая изоляция представляет собой слой специального материала, наносимый на поверхность тела с целью увеличения его полного термического сопротивления. Теплоизоляционные покрытия применяются в двух случаях:

1) когда необходимо защитить конструкцию от слишком высоких тепловых нагрузок;

2) для уменьшения тепловых потерь в окружающую среду.

В качестве тепловой изоляции применяют материалы, имеющие малый коэффициент теплопроводности. Из материалов органического происхождения используются шерсть, хлопок, древесина. Из неорганических материалов — асбест, шлак, глина, песок. В судостроении широко используются пробка, стекловойлок, стеклянная и шлаковая вата, пенопласты, асбодревесные плиты, пенополиуретаны.

Исследуем влияние материала и толщины наружного диаметра изоляции на полное линейное термическое сопротивление и тепловые потери изолированного трубопровода. Полное термическое сопротивление цилиндрической трубы, покрытой слоем теплоизоляции, определяется по формуле

$$R_l = \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{2\lambda_{из}} \ln \frac{d_{из}}{d_2} + \frac{1}{\alpha_2 d_{из}}.$$

Будем считать заданными внутренний и внешний диаметры трубы, коэффициенты теплопроводности материалов трубы и изоляции. В этом случае величина $d_{кр}$ определяет толщину изоляции. Критический диаметр изоляции определяем из условия

$$\frac{d(R_l)}{d(d_{из})} = 0.$$

После очевидных преобразований получим

$$d_{кр_{из}} = \frac{2\lambda_{из}}{\alpha_2}.$$

Таким образом, $d_{кр_{из}}$, а следовательно, и толщина слоя изоляции зависят только от теплопроводности изоляции и коэффициента теплоотдачи от внешней поверхности изоляции к окружающей среде.

Выясним, как зависят тепловые потери трубопровода от толщины изоляции ($d_{из}$) и ее теплопроводности ($\lambda_{из}$).

Если $d_2 < d_{из} < d_{кр_{из}}$, то с увеличением толщины изоляции до значения $d_{кр_{из}}$ тепловые потери возрастают, превышая потери неизолированной трубы. При дальнейшем росте толщины изоляции ($d_{из} > d_{кр_{из}}$) тепловые потери будут уменьшаться.

Если $d_2 > d_{кр_{из}}$, то всегда $d_{из} > d_{кр_{из}}$. В этом случае изоляционное покрытие любой толщины обеспечит уменьшение тепловых потерь.

Достигнуть выполнения последнего неравенства можно путем варьирования различных теплоизоляционных материалов, то есть за счет подбора $\lambda_{из}$.

В работе [3] рекомендуется рассчитывать коэффициенты теплоотдачи для трубопроводов, проложенных в закрытых помещениях ($0 \leqslant T \leqslant 150\,°C$), по формуле $\alpha_2 = 9{,}8 + 0{,}07(T_{S_2} - T_{c_2})$, Вт/(м$^2 \cdot$К), где T_{S_2}, T_{c_2} — соответственно температуры внешней поверхности трубы и среды, омывающей поверхность.

Определим $d_{кр_{из}}$ для трубопровода, покрытого различными теплоизоляционными материалами [3]:

при $\alpha_2 = 10$ Вт/(м$^2 \cdot$К)

для бетона ($\lambda_{из} = 1{,}28$ Вт/(м$\cdot$К))

$$d_{кр_{из}} = 2\lambda_{из}/\alpha_2 = 2 \cdot 1{,}28/10 = 0{,}256 \text{ м},$$

для асбеста ($\lambda_{из} = 0{,}11$ Вт/(м$\cdot$К))

$$d_{кр_{из}} = 2 \cdot 0{,}11/10 = 0{,}022 \text{ м},$$

для совелита ($\lambda_{из} = 0{,}098$ Вт/(м$\cdot$К))

$$d_{кр_{из}} = 2 \cdot 0{,}098/10 = 0{,}0196 \text{ м}.$$

Таким образом, бетонная изоляция эффективна для изолируемых труб с внешним диаметром, превышающим 256 мм, при асбестовом покрытии внешний диаметр должен превышать 22 мм, для совелитовой изоляции — 19,6 мм.

Задача 2.2. В алюминиевой трубе ($\lambda_1 = 185$ Вт/(м $\cdot$ К)), покрытой слоем изоляции ($\lambda_2 = 0{,}2$ Вт/(м $\cdot$ К)) толщиной 5 см, проходит водяной пар при температуре $T_S = 110\,°C$. Внутренний диаметр трубы 10 см, наружный — 12 см. Труба находится в помещении с температурой 30 °C, коэффициент конвективной теплоотдачи от изоляции к воздуху $\alpha_2 = 15$ Вт/ (м^2 $\cdot$ К). Найти линейный тепловой поток.

Решение.

$$q_l = \frac{T_{ж_2} - T_{C_1}}{\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{\lambda_1}\ln\frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\lambda_2}\ln\frac{d_3}{d_2}\right) + \frac{1}{\pi d_3 \alpha_2}} =$$

$$= \frac{110-30}{\frac{1}{2 \cdot 3{,}14}\left(\frac{1}{185}\ln\frac{6}{5} + \frac{1}{0{,}2}\ln\frac{11}{6}\right) + \frac{1}{3{,}14 \cdot 0{,}22 \cdot 15}} \approx 138 \text{ Вт/м}.$$

§ 2.3. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ОДНОРОДНЫХ ТЕЛ ПРОСТЕЙШЕЙ ФОРМЫ ПРИ НАЛИЧИИ ВНУТРЕННИХ ИСТОЧНИКОВ ТЕПЛОТЫ

Многие процессы теплопроводности в различных веществах сопровождаются выделением или поглощением теплоты, обусловленными физико-химическими превращениями. В этой связи возникает необходимость решения задач теплопроводности с внутренними источниками теплоты.

Пусть в однородной стенке простейшей формы равномерно распределены источники теплоты с объемной плотностью q_v, измеряемой в Вт/м³. Будем считать, что температура изменяется только вдоль одной пространственной координаты, которую обозначим x, а теплопроводность стенки постоянна. В этом случае уравнение теплопроводности имеет вид

$$\frac{d^2T}{dx^2}+\frac{\nu}{x}\frac{dT}{dx}+\frac{q_v(x)}{\lambda}=0,\quad x_1<x<x_2, \tag{2.68}$$

где $\nu = 0, 1, 2$ — коэффициент формы тела.

Уравнение (2.68) описывает распределение температур в плоской ($\nu = 0$), цилиндрической ($\nu = 1$), сферической ($\nu = 2$) стенках и относится к классу линейных неоднородных обыкновенных уравнений второго порядка. Общее решение таких уравнений может быть получено в результате двукратного интегрирования (2.69). Действительно, интегрируя уравнение (2.68) один раз, получаем

$$u(x)=\frac{dT}{dx}=C_1\left(\frac{x_1}{x}\right)^{\nu}-\frac{1}{\lambda x^{\nu}}\int\limits_{x_1}^{x} q_v(y)\,y^{\nu}dy. \tag{2.69}$$

После интегрирования (2.69) по x приходим к следующему общему решению уравнения (2.68):

$$T(x)=C_1x_1^{\nu}\frac{1}{\nu-1}\left(\frac{1}{x_1^{\nu-1}}-\frac{1}{x^{\nu-1}}\right)-\frac{1}{\lambda}\int\limits_{x_1}^{x}\left(\frac{1}{y^{\nu}}\int\limits_{x_1}^{y} q_v(x)\,x^{\nu}dx\right)dy+C_2,\ \nu\neq 1, \tag{2.70}$$

$$T(x)=C_1x_1\ln\frac{x}{x_1}-\frac{1}{\lambda}\int\limits_{x_1}^{x}\left(\frac{1}{y}\int\limits_{x_1}^{y} xq_v(x)\,dx\right)dy+C_2,\ \ \nu=1, \tag{2.71}$$

где постоянные C_1 и C_2 определяются из граничных условий.

Предположим, что на поверхности тела заданы граничные условия III рода:

$$\begin{aligned}\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=x_1}&=-\frac{\alpha_1}{\lambda}(T_{c_1}-T_{S_1}),\\ \left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=x_2}&=-\frac{\alpha_2}{\lambda}(T_{S_2}-T_{c_2}),\end{aligned} \tag{2.72}$$

где коэффициенты теплоотдачи α_i и температуры T_{c_i} ($i = 1,2$) известны и имеют постоянные значения.

Подставляя выражения для температуры и ее производной в граничные условия (2.72), получим систему двух алгебраических уравнений для определения постоянных C_1 и C_2, решение которой будет следующим ($\nu \neq 1$):

$$C_1=\frac{\alpha_1}{\lambda}(C_2-T_{c_1}),$$

$$C_2=\frac{\alpha_2T_{c_2}+W(x_2)+\alpha_2/\lambda\int\limits_{x_1}^{x_2}W(y)\,dy+F(\nu)\,T_{c_1}}{\alpha_2+F(\nu)}, \tag{2.73}$$

где

$$F(\nu)=\frac{\alpha_1\alpha_2}{\lambda}\frac{x_1}{\nu-1}(x_1^{1-\nu}-x_2^{1-\nu})+\alpha_1\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\nu},$$

$$W(y)=\frac{1}{y^{\nu}}\int\limits_{x_1}^{y} q_v(x)\,x^{\nu}\,dx.$$

При $\nu=1$ соотношения (2.73) принимают вид

$$C_1=(\alpha_1/\lambda)(C_2-T_{c_1}),$$

$$C_2=\left(\alpha_2T_{c_2}+W(x_2)+\frac{\alpha_2}{\lambda}\int\limits_{x_1}^{x_2}W(y)\,dy+FT_{c_1}\right)(\alpha_2+F)^{-1},\qquad(2.74)$$

где

$$F=\alpha_1\frac{x_1}{x_2}+\frac{\alpha_1\alpha_2}{\lambda}x_1\ln\frac{x_2}{x_1},$$

$$W(y)=\frac{1}{y}\int\limits_{x_1}^{y}xq_v(x)\,dx.$$

Из найденных решений можно получить расчетные зависимости и для случаев задания на поверхности тела граничных условий I рода. Для этого достаточно, чтобы в равенствах (2.73), (2.74) соответствующий коэффициент теплоотдачи α_i стремился к бесконечности.

Рассмотрим теплопроводность цилиндрической стенки. Пусть в бесконечной цилиндрической трубе с внутренним радиусом r_1 и наружным r_2 равномерно распределены источники теплоты мощностью $q_v=\mathrm{const}$. На поверхностях $x=r_i$ заданы коэффициенты теплоотдачи α_i и температуры среды T_{c_i} $(i=1,\ 2)$.

Вычислим параметры, входящие в равенства (2.74):

$$x_1=r_1,\ x_2=r_2,\ F=\alpha_1\frac{r_1}{r_2}+\frac{\alpha_1\alpha_2}{\lambda}r_1\ln\frac{r_2}{r_1},$$

$$W(y)=\frac{q_v}{y}\frac{(y^2-r_1^2)}{2}.$$

Коэффициенты C_1 и C_2 находим из соотношений

$$C_2=\left[\alpha_2T_{c_2}+\frac{q_v}{2r_2}(r_2^2-r_1^2)+\frac{\alpha_2}{\lambda}\int\limits_{r_1}^{r_2}W(y)\,dy+FT_{c_1}\right]\times$$

$$\times(\alpha_2+F)^{-1}=\left[\alpha_2T_{c_2}+\frac{q_v}{2r_2}(r_2^2-r_1^2)+\frac{\alpha_2}{4\lambda}q_v(r_2^2-r_1^2)-\right.$$

$$\left.-\frac{\alpha_2}{2\lambda}q_vr_1^2\ln\frac{r_2}{r_1}+T_{c_1}\left(\alpha_1\frac{r_1}{r_2}+\frac{\alpha_1\alpha_2}{\lambda}r_1\ln\frac{r_2}{r_1}\right)\right]\times$$

$$\times\left(\alpha_1\frac{r_1}{r_2}+\frac{\alpha_1\alpha_2}{\lambda}r_1\ln\frac{r_2}{r_1}+\alpha_2\right),\qquad(2.75)$$

$$C_1=\frac{\alpha_1}{\lambda}(C_2-T_{c_1}).$$

Подставляя значения постоянных C_1 и C_2 из (2.75) в общее решение (2.71), нетрудно получить частное решение уравнения (2.68) при $\nu = 1$ с граничными условиями (2.72).

Практический интерес представляют два частных случая рассмотренной задачи: одна из поверхностей трубы теплоизолирована, а на другой осуществляется конвективный теплообмен. Пусть на внутренней поверхности трубы $r = r_1$ тепловой поток равен нулю

$$\left.\frac{dT}{dr}\right|_{r=r_1} = 0$$

и теплота отводится только через внешнюю поверхность. Чтобы получить выражения для C_1 и C_2 в этом случае, достаточно в равенствах (2.75) положить $\alpha_1 = 0$. Тогда для температурного поля получим выражение

$$T = T_{c_2} + \frac{q_v r_2}{2\alpha_2}\left[1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right] + \frac{q_v r_2^2}{4\lambda} \times \\ \times \left[1 + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 2\ln\frac{r}{r_2} - \left(\frac{r}{r_2}\right)^2\right]. \qquad (2.76)$$

Плотность теплового потока на теплоотдающей поверхности $(r = r_2)$

$$q = \alpha\,(T_{S_2} - T_{c_2}) = \frac{q_v r_2}{2\alpha_2}\left[1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right]. \qquad (2.77)$$

Выражения (2.76), (2.77) используются и в случае, когда на теплоотдающей поверхности заданы граничные условия I рода, то есть когда температура поверхности $T_{S_2} = T_{c_2}$. Устремляя в (2.76) α_2 к бесконечности, получаем

$$T - T_{c_2} = T - T_{S_2} = \frac{q_v r_2^2}{4\lambda}\left[1 + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 2\ln\frac{r}{r_2} - \frac{r}{r_2}\right]. \qquad (2.78)$$

Кроме этого, равенства (2.76), (2.77) можно использовать для определения поля температур и плотности теплового потока на теплоотдающей поверхности однородного цилиндрического стержня. Покажем это. Пусть в однородном цилиндрическом стержне равномерно распределены источники теплоты, а на поверхности $r = r_2 = r_0$ задан коэффициент теплоотдачи $\alpha_2 = \alpha$. Температурное поле стержня описывается уравнением (2.70) при $\nu = 1$ с граничными условиями

$$\left.\frac{dT}{dr}\right|_{r=0} = 0,$$

$$-\lambda\left.\frac{dT}{dr}\right|_{r=r_2} = \alpha\,(T_{S_2} - T_c).$$

Математические записи краевых задач для стержня и для цилиндрической стенки аналогичны, поэтому воспользуемся конечными формулами (2.76), (2.77), выполнив в них предельный переход при $r_1 \to 0$. Тогда получим следующие выражения для температурного поля стержня и плотности теплового потока на теплоотдающих поверхностях:

$$T = T_0 + \frac{q_v r_0}{2\alpha} + \frac{q_v}{4\lambda}(r_0^2 - r^2),$$

$$q = \alpha(T_{S_1} - T_c) = \frac{q_v r_0}{2}.$$

Рассмотрим случай, когда теплота отводится только через внутреннюю поверхность цилиндрической трубы ($\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 = 0$). По аналогии с предыдущим случаем, используя соотношения (2.76), находим температурное поле стержня

$$T = T_{c_1} + \frac{q_v r_1}{2\alpha_1}\left[\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 - 1\right] + \frac{q_v r_2^2}{4\lambda}\left[2\ln\frac{r}{r_1} + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 - \left(\frac{r}{r_2}\right)^2\right] \quad (2.79)$$

и плотность теплового потока на поверхности $r = r_1$

$$q = \alpha_1(T_{c_1} - T_{S_1}) = \frac{q_v r_1}{2}\left[1 - \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2\right].$$

Если задана температура теплоотдающей поверхности T_{S_1}, что соответствует случаю $\alpha_1 \to \infty$, соотношение (2.79) примет вид

$$T = T_{c_1} + \frac{q_v r_2^2}{4\lambda}\left[2\ln\frac{r}{r_1} + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 - \left(\frac{r}{r_2}\right)^2\right].$$

Следует отметить, что выражение для распределения температуры в цилиндрической стенке для случая, когда теплота отводится через обе поверхности, можно получить не только с использованием выражений (2.75) для постоянных C_1 и C_2, но и непосредственно из равенств (2.76), (2.79), которые отвечают случаю отвода теплоты только через внешнюю или только через внутреннюю поверхности соответственно. Действительно, если теплота отводится как с внутренней, так и с внешней поверхности стенки, должен существовать максимум температуры внутри стенки. Обозначим r_0 координату изотермической поверхности с максимальной по толщине стенки температурой T_0. Тогда, очевидно,

$$\left.\frac{dT}{dr}\right|_{r=r_0} = 0, \quad q|_{r=r_0} = 0.$$

Таким образом, изотерма $T = T_0$ делит стенку на два слоя: во внутреннем слое теплота отводится только через его внутреннюю поверхность, во внешнем — только через внешнюю. Следовательно, для каждого слоя можно воспользоваться уже полученными решениями (2.76), (2.79). Согласно равенству (2.76) при $r = r_0$ максимальный перепад температур во внешнем слое будет следующим ($r_1 = r_0$, $T_{S_1} = T_0$):

$$T_0 - T_{c_2} = \frac{q_v r_2}{2\alpha_2}\left[1 - \left(\frac{r_0}{r_2}\right)^2\right] + \frac{q_v r_0^2}{4\lambda}\left[\left(\frac{r_2}{r_0}\right)^2 - 2\ln\frac{r_2}{r_0} - 1\right]. \quad (2.80)$$

Максимальный перепад во внутреннем слое определяем из равенства (2.79) при $r = r_0 (r_2 = r_0, T_S = T_0)$:

$$T_0 - T_{c_1} = \frac{q_v r_1}{2\alpha_1}\left[\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^2 - 1\right] + \frac{q_v r_0^2}{4\lambda}\left[\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^2 + 2\ln\frac{r_0}{r_1} - 1\right]. \quad (2.81)$$

Равенства (2.80), (2.81) образуют систему уравнений, из которых определяют сначала r_0, затем T_0. Подставляя полученные значения в равенство (2.79), получим распределение температуры во внутреннем слое $(r_1 < r < r_0)$. Для нахождения распределения температур во внешнем слое необходимо полученные выражения для r_0 и T_0 подставить в равенство (2.76) (предлагаем читателям проделать это самостоятельно).

Теплопроводность плоской и шаровой стенок может быть рассмотрена аналогичным образом.

Приведенная ниже программа 5 позволяет рассчитывать тепловые потоки и температурные поля в плоской, цилиндрической, сферической стенках при наличии источника с произвольной объемной плотностью теплового потока и граничных условиях III рода.

ПРОГРАММА 5

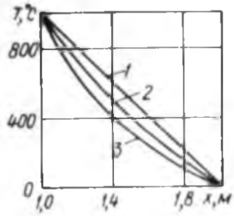
```
      COMMON BLO, BK, B, R1, R2, TG1, TG2, DL, AL1,
    * AL2, H, BI
      COMMON/A/X
      EXTERNAL F1, F2, F3, F5, F6, QV, F7
      READ 44, N
44    FORMAT (I3)
      READ 48, TG1, TG2, DL, R1, R2, AL1, AL2, BLO, H
48    FORMAT (6F10.5)
      BI = AL1/BLO
      B = 0.5
      BK = 0.5
      PRINT 46, N, TG1, TG2, DL, R1, R2, AL1, AL2, BLO, H
46    FORMAT (50X,'N=', I2/50X, 'TG1=', E20.8/50X,
    * 'TG2 =', E20.8/50X,'DL=', E20.8/50X,'R1=',E20.8/
    * 50X,'R2=',E20.8/50X,'AL1=',E20.8/50X,'AL2=',
    * E20.8/50X, 2BLO=',E20.8/50X, 'H=',E20.8)
4     FORMAT (50X, 'ПЛОСКАЯ СТЕНКА' /)
41    FORMAT (50X, 'ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ СТЕНКА'/)
42    FORMAT (50X,'ШАРОВАЯ СТЕНКА'/)
43    FORMAT (50X, 'КООРДИНАТА',20X, 'ТЕМПЕРАТУРА',
    * 20X, 'ТЕПЛОВОЙ ПОТОК ')
45    FORMAT (20X, E20.8, 20X, E20.8, 20X, E20.8)
      IF (N — 2) 1, 2, 3
1     CONTINUE
      PRINT 4
      CALL QG10 (0., DL, F5, T1)
      CALL QG10 (0., DL, QV, T2)
```

```
      C2 = (AL2 * T1/BLO/BLO + T2/BLO + AL1 * TG1/BLO +
     * AL2 * TG2/BLO + AL1 * AL2 * DL * TG1/BLO/BLO)/
     * (AL1/BLO + AL2/BLO + AL1 * AL2 * DL/BLO/BLO)
      C1 = AL1 * (C2 - TG1)/BLO
      M = DL/H + 1
      PRINT 43
      DO 11 I = 1, M
      X = (I - 1) * H
      CALL QG10 (0.,X, F3, T1)
      T = -T1/BLO + C1 * X + C2
      CALL QG10 (0., X, QV, T1)
      Q = T1 - C1 * BLO
      PRINT 45, X, T, Q
   11 CONTINUE
      GO TO 1000
    3 CONTINUE
      PRINT 42
      CALL QG10 (R1, R2, F6, T1)
      CALL QG10 (R1, R2, F7, T2)
      C2 = (AL2/BLO/BLO * T2 + T1/R2/R2/BLO + AL1/
     * BLO * R1 * R1/R2/R2 * TG1 + AL1 * AL2/BLO/BLO *
     * R1 * R1 * (1./R1 - 1./R2) * TG1 + AL2/BLO * TG2)/
     * (AL1/BLO * R1 * R1/R2/R2 + AL1 * AL2/BLO/BLO *
     * R1 * (1./R1 - 1./R2) + AL2/BLO)
      C1 = AL1/BLO * (C2 - TG1)
      M = (R2 - R1)/H + 1
      PRINT 43
      DO 31 I = 1, M
      R = R1 + (I - 1) * H
      CALL QG10 (R1, R, F7, T1)
      T = C1 * R1 * R1 * (1./R1 - 1./R) - T1/BLO + C2
      CALL QG10 (R1, R, F6, T1)
      Q = T1/R/R - C1 * BLO * R1/R/R
      PRINT 45, R, T, Q
   31 CONTINUE
      GO TO 1000
    2 CONTINUE
      PRINT 41
      CALL QG10 (R1, R2, F1, T2)
      CALL QG10 (R1, R2, F2, T1)
      C2 = (AL2/BLO/BLO * T1 + T2/R2/BLO + AL2/
     * BLO * TG2 + AL1/BLO/R2 * R1 * TG1 + AL1 * AL2/
     * BLO/BLO * R1 * ALOG (R2/R1) * TG1)/(AL1/
     * BLO * R1/R2 + AL1 * AL2/BLO/BLO * R1 * ALOG
     * (R2/R1) + AL2/BLO)
      C1 = AL1/BLO * (C2 - TG1)
      M = (R2 - R1)/H + 1
      PRINT 43
      DO 21 I = 1, M
```

```
      R = R1 + (I — 1) * H
      CALL QG10 (R1, R, F2, T1)
      T = C1 * R1 * ALOG (R/R1) — T1/BLO + C2
      CALL QG10 (R1, R, F1, Q1)
      Q = Q1/R — C1 * BLO * R1/R
      WRITE (3, 45), R, T, Q
   21 CONTINUE
 1000 CONTINUE
      STOP
      END

      FUNCTION F7(X)
      COMMON BLO, BK, B, R1, R2, TG1, TG2, DL, AL1, AL2,
    * H, BI
      EXTERNAL F6
      CALL QG8 (R1, X, F6, F71)
      F7 = F71/X/X
      RETURN
      END

      FUNCTION F6 (X)
      F6 = QV (X) * X * X
      RETURN
      END

      FUNCTION F3 (X)
      COMMON /A/X
      F3 = QV (T) * (X — T)
      RETURN
      END

      FUNCTION F5 (X)
      COMMON BLO, BK, B, R1, R2, TG1, TG2, DL, AL1, AL2,
    * H, BI
      F5 = QV (X) * (DL — X)
      RETURN
      END

      FUNCTION F1(X)
      F1 = QV (X) * X
      RETURN
      END

      FUNCTION QV (X)
      COMMON BLO, BK, B, R1, R2, TG1, TG2, DL, AL1, AL2,
    * H, BI
      QV = BLO * BK * EXP (—B * X)
      RETURN
      END
```

Рис. 2.8. Температурное поле при наличии источника в стенках различной геометрии с граничными условиями III рода на поверхностях ($T_{c_1} = 1000\,°C$; $T_{c_2} = 0\,°C$; $\alpha_1 = \alpha_2 = 1000$ Вт/(м² · К); $\lambda = 1$ Вт/(м · К)):

1 — плоская стенка; 2 — цилиндрическая стенка; 3 — шаровая стенка




```
FUNCTION F2(X)
COMMON BLO, BK, B, R1, R2, TG1, TG2, DL, AL1, AL2,
H, B1
EXTERNAL F1
CALL QG8 (R1, X, F1, F22)
F2 = 1./X * F22
RETURN
END
```

СПИСОК ИДЕНТИФИКАТОРОВ

N — параметр геометрической формы, равный 1, 2, 3, в задачах с плоской, цилиндрической и шаровой симметрией соответственно; BLO — значение теплопроводности стенки; R1, R2 — радиусы стенок; DL — толщина плоской стенки; H — шаг по координате; M — число точек, в которых вычисляются температура и поток; TG1, TG2 — температуры окружающих сред; T — температура; Q — тепловой поток; X, R — координаты точки в задачах с плоской, цилиндрической (или сферической) симметрией соответственно; F1, F2, F3, F4, F5, F6, F7 — рабочие подпрограммы; C1, C2, T1, T2, Q1 — рабочие переменные; QV — подпрограмма-функция, задающая вид функции объемной плотности теплового потока внутреннего источника теплоты. Остальные обозначения соответствуют принятым в программах 1—4.

В данной программе описан источник $q_V/\lambda = \gamma \exp(-\beta x)$. В программе BK отвечает γ, а B — β. На рис. 2.8 показаны результаты расчетов температурного поля в стенках различной геометрии ($T_{c_1} = 1000\,°C$; $T_{c_2} = 0\,°C$; $\alpha_1 = \alpha_2 = 1000$ Вт/(м² · К); $\lambda = 1$ Вт/(м · К); $\beta = 10\,м^{-1}$; $\gamma = 0{,}5$ К/м²).

§ 2.4. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ ОДНОРОДНОЙ ПЛАСТИНЫ

Предположим, что температурное поле пластины не изменяется по ее толщине. На торце пластины ($y = 0$) задано распределение температуры $T = f(x)$. На остальных граничных поверхностях $x = 0$, $x = \delta$, $y \to \infty$ задана постоянная температура T_c.

Краевая задача стационарной теплопроводности в данном случае имеет вид

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0, \qquad (2.82)$$

$$T|_{y=\delta} = f(x), \qquad (2.83)$$

$$T|_{x=0} = T|_{x=\delta} = T|_{y\to\infty} = T_c. \qquad (2.84)$$

С помощью замены $\Theta = T - T_0$ приведем задачу (2.82)—(2.84) к однородному виду:

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2} = 0, \tag{2.85}$$

$$\Theta|_{y=0} = F(x) = f(x) - T_c, \tag{2.86}$$

$$\Theta|_{x=0} = \Theta|_{x=\delta} = \Theta|_{y\to\infty} = 0. \tag{2.87}$$

Решение задачи (2.85)—(2.87) будем искать методом разделения переменных (подробно этот метод рассмотрен в гл. 3 при изложении нестационарных задач теплопроводности). Полагая $\Theta = \varphi(x)\psi(y)$, подставляем это соотношение в уравнение (2.85) и приходим к следующему выражению:

$$\frac{\varphi''(x)}{\varphi} = -\frac{\psi''(y)}{\psi} = \text{const}.$$

Полагая константу отрицательной (см. гл. 3), приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varphi''(x) + k^2\varphi(x) = 0, \tag{2.88}$$

$$\psi''(y) - k^2\psi(y) = 0, \tag{2.89}$$

имеющих следующие общие решения:

$$\varphi(x) = C_1\cos(kx) + C_2\sin(kx), \tag{2.90}$$

$$\psi(y) = C_3e^{ky} + C_4e^{-ky}. \tag{2.91}$$

Из граничного условия $\Theta|_{x=0} = 0$ следует $C_1 = 0$. Из условия $\Theta|_{y\to\infty} = 0$ следует $C_3 = 0$. Таким образом, после подстановки (2.90), (2.91) в частное решение уравнения (2.85) получим

$$\Theta = Ce^{-ky}\sin(kx).$$

Из условия $\Theta|_{x=\delta} = 0$ получаем

$$\sin(k\delta) = 0, \text{ или } k = \frac{n\pi}{\delta}, \ n = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.92}$$

Общее решение уравнения (2.85) ищем в виде суммы частных решений

$$\Theta = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\frac{n\pi}{\delta}y}\sin\left(\frac{n\pi}{\delta}x\right). \tag{2.93}$$

Постоянные C_n можно определить из условия (2.86):

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\sin\left(\frac{n\pi}{\delta}x\right). \tag{2.94}$$

Выражение (2.94) представляет собой разложение функции в ряд Фурье по синусам. Коэффициенты разложения определяются по формуле

$$C_n = \frac{2}{\delta} \int_0^{\delta} F(x) \sin\left(\frac{n\pi}{\delta} x\right) dx.$$

Подставляя последнее соотношение в выражение (2.93), получаем окончательное решение поставленной задачи:

$$\Theta = \frac{2}{\delta} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n\pi}{\delta} y} \sin\left(\frac{n\pi}{\delta} x\right) \int_0^{\delta} F(x) \sin\left(\frac{n\pi}{\delta} x\right) dx. \qquad (2.95)$$

Таким образом, определение двухмерного стационарного температурного поля даже в рассмотренном наиболее простом случае сводится к решению достаточно сложной задачи математической физики.

§ 2.5. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ТЕЛ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

Полученные в § 2.1, 2.2 решения задач стационарной теплопроводности применимы лишь для стенок, имеющих простейшую геометрическую форму. Любое отклонение формы интересующего нас объекта от канонической требует, вообще говоря, решения задачи теплопроводности в более общей и сложной, как правило трехмерной, постановке с применением сложных методов решения уравнений математической физики. Такой путь является неизбежным, если форма интересующего нас объекта отличается от канонической настолько, что это вызывает значительные изменения в тепловом режиме конструкции. В инженерной практике нередко возникает необходимость рассчитать температурное поле конструктивных элементов, форма которых достаточно близка к канонической, а имеющиеся отклонения не определяют режим теплообмена. В этих случаях наиболее рациональным является распространение имеющихся результатов для тел канонической формы на исследуемые тела. При этом вносятся определенные поправки на изменение геометрии исследуемого объекта, сводящиеся, главным образом, к учету изменения площади его поверхности по сравнению с площадью поверхности прототипа — объекта, имеющего каноническую форму (пластина, шар, цилиндр).

Количество теплоты, проходящее через стенки тел неправильной формы (например, пологая оболочка, ограниченная кривыми поверхностями, или пруток металла, имеющий в поперечном сечении форму овала, а не круга), можно определить по следующему уравнению:

$$Q = \frac{\lambda}{\delta} F_{\text{ср}} (T_{\text{ст}_1} - T_{\text{ст}_2}),$$

где $F_{\text{ср}}$ — поверхность, зависящая от формы тела; $T_{\text{ст}_1}$, $T_{\text{ст}_2}$ — температуры граничных поверхностей; δ — толщина тела, которую, как и $F_{\text{ср}}$, находят в зависимости от формы тела. Например, если F_1, F_2 — внутренняя и внешняя поверхности тела, то для объектов канонической формы имеем:

а) при $F_2/F_1<2$ для плоской, цилиндрической и шаровой стенок расчетная поверхность определяется как среднее арифметическое

$$F_{\text{ср}}=\frac{F_2+F_1}{2};$$

б) при $F_2>F_1>2$ для цилиндрической стенки

$$F_{\text{ср}}=\frac{F_2-F_1}{\ln\frac{F_2}{F_1}};$$

в) для шаровой стенки

$$F_{\text{ср}}=\sqrt{F_1F_2}.$$

При приближенном расчете температурных полей тел неканонической формы можно при определении $F_{\text{ср}}$ задавать истинные площади их граничных поверхностей F_1, F_2.

Еще более сложной является задача расчета теплового режима тела, образованного комбинацией различных конструктивных элементов. Следует отметить, что большинство узлов и агрегатов машиностроения, требующих оценки теплового состояния, относится именно к таким сложным телам. Систематический температурный расчет такой сложной конструкции возможен с помощью численных методов (методы конечных разностей и конечных элементов) с использованием быстродействующих ЭВМ или экспериментальным путем. Для применения приближенных формул расчета теплового потока необходимо учитывать, что тела сложной конфигурации на граничных поверхностях имеют неоднородную температуру. В этом случае следует предварительно провести осреднение температуры. Если граничные поверхности состоят из набора участков с заданными площадями и температурами, то средняя температура

$$T_{\text{ср}}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}T_iF_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}F_i},$$

где $F_i\,(i=\overline{1,n})$ — отдельные участки поверхности; $T_i\,(i=\overline{1,n})$ — их температуры.

Если известно уравнение граничной поверхности тела и распределение температуры по этой поверхности, то

$$T_{\text{ср}}=\frac{1}{F}\int\limits_F T\,dF.$$

Применение таких приемов осреднения допустимо лишь при относительно плавном изменении температуры поверхности, когда можно выделить участки, имеющие примерно постоянную температуру.

Если температура поверхности тела изменяется резко, то возможны два подхода: 1) значительное увеличение участков разбиения, позволяющее наверняка выделить участки с относительно постоянной температурой; 2) предварительное выделение участков с наиболее неоднородным распределением, разбиение их на более мелкие и определение средних температур, а затем вычисление средней температуры по всем участкам.

Очевидно, что изложенная процедура вычисления средней температуры тела является приближенной. Точность результата определяется характером изменения температуры и количеством участков разбиения. Для получения распределения температуры по всей поверхности необходимо решать соответствующую краевую задачу теплопроводности или проводить эксперимент.

§ 2.6. ИНТЕНСИФИКАЦИЯ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ

В § 2.1, 2.2 было показано, что для тел канонической и близкой к канонической форм справедлива следующая формула расчета теплопередачи:

$$Q = kF\Delta T. \tag{2.96}$$

Одним из основных путей совершенствования и развития теплообменных аппаратов является интенсификация процессов теплопереноса, то есть увеличение количества теплоты, передаваемой через теплообменные поверхности (разумеется, не в ущерб прочности конструкции).

Из формулы (2.96) видно, что увеличение Q может быть достигнуто за счет увеличения сомножителей, входящих в правую часть данного соотношения.

Однако следует отметить, что величина ΔT (перепад или температурный напор через стенку теплообменника) близка, как правило, к постоянной. Это обусловлено тем, что температуры теплоносителей, омывающих граничные поверхности аппарата, определяются требованиями технологического процесса и изменениям не подлежат. Таким образом, увеличение Q может быть достигнуто за счет соответствующих изменений коэффициента теплопередачи k или площади поверхности теплообмена F. Рассмотрим влияние этих двух факторов.

Влияние коэффициента теплопередачи. Рассмотрим в качестве примера плоскую стенку. Коэффициент теплопередачи в этом случае

$$k = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}. \tag{2.97}$$

Из формулы (2.97) следует, что увеличение k может быть достигнуто за счет любого из трех термических сопротивлений $1/\alpha_1$, δ/λ, $1/\alpha_2$.

Рассмотрим влияние внутреннего термического сопротивления δ/λ. Поскольку материал, из которого изготовлен теплообменник, определяется техническими условиями на данное изделие, коэффициент теплопроводности λ является величиной фиксированной. Таким образом, увеличение коэффициента теплопередачи возможно (при $\alpha_1 = \text{const}$, $\alpha_2 = \text{const}$) только за счет уменьшения толщины стенки δ. Однако возможности уменьшения δ крайне ограничены, так как уменьшение толщины стенок теплообменника резко отрицательно влияет на его прочностные характеристики. Большего можно добиться, изменяя коэффициенты теплоотдачи. Полагая $\delta/\lambda \to 0$, упростим формулу (2.97), которая примет в этом случае вид

$$k = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}.$$

Последнее соотношение может быть преобразовано так:

$$k = \frac{\alpha_1}{1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}} = \frac{\alpha_2}{\frac{\alpha_2}{\alpha_1} + 1}. \tag{2.98}$$

Из равенств (2.98) следует, что при $\alpha_2 \to \infty$, $k \to \alpha_1$ и наоборот, при $\alpha_1 \to \infty$, $k \to \alpha_2$. Таким образом, предельное значение коэффициента теплопередачи не может превышать значения наименьшего из коэффициентов теплопередачи. Соотношения (2.98) позволяют сделать еще один практически важный вывод. Пусть $\alpha_2/\alpha_1 = k_\alpha \gg 1$. Тогда

$$k = \frac{\alpha_1}{1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_1 k_\alpha}} = \frac{\alpha_1}{1 + \frac{1}{k_\alpha}}.$$

Увеличим теперь α_2 еще в k_{α_2} раз:

$$\alpha_2' = \alpha_2 k_{\alpha_2}, \quad k_{\alpha_2} > 1.$$

Тогда новое значение коэффициента теплопередачи

$$k' = \frac{\alpha_1}{1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2'}} = \frac{\alpha_1}{1 + \frac{1}{k_\alpha k_{\alpha_2}}}.$$

Рассмотрим соотношение

$$\frac{k'}{k} = \frac{1 + \frac{1}{k_\alpha}}{1 + \frac{1}{k_\alpha k_{\alpha_2}}} = 1 + \frac{k_{\alpha_2} - 1}{k_\alpha k_{\alpha_2} + 1} = 1 + \varepsilon,$$

где $\varepsilon = (k_{\alpha_2} - 1)/(k_\alpha k_{\alpha_2} + 1)$.

Очевидно, что величина ε будет достаточно малой. Подтвердим это на примере. Пусть $k_\alpha = 100$ и мы увеличили α_2 вдвое, то есть $k_{\alpha_2} = 2$. Тогда $\varepsilon \approx 0{,}5\ \%$.

Итак, увеличение большего коэффициента теплоотдачи α_2 в два раза приводит к увеличению коэффициента теплопередачи всего на 0,5 %. Отсюда следует, что при $\alpha_2 \gg \alpha_1$ дальнейшее увеличение α_2, сопряженное со значительными трудностями (повышение чистоты поверхности, интенсификация теплоотдачи за счет изменения режима течения теплоносителя и проч.), является нецелесообразным, так как не оправдывается очень малым ростом коэффициента теплопередачи. С практической точки зрения важным является определить (с достаточной степенью точности) то пороговое значение α_2, начиная с которого дальнейшее увеличение коэффициента теплоотдачи не имеет смысла.

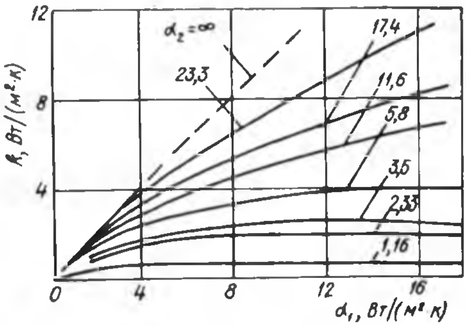


Рис. 2.9. Зависимость $k = f(\alpha_1, \alpha_2)$

На рис. 2.9 показана зависимость $k = f(\alpha_1, \alpha_2)$, определяемая формулой (2.98). Из графика видно, что увеличение k происходит быстро с ростом α_1 до тех пор, пока α_1 и α_2 не станут примерно равными. При дальнейшем увеличении α_1 рост k замедляется и затем практически прекращается. Таким образом, при $\alpha_1 \ll \alpha_2$ для увеличения k необходимо увеличивать α_1, что равносильно уменьшению большего из термических сопротивлений $1/\alpha_1$. После достижения равенства $\alpha_1 \approx \alpha_2$ для интенсификации теплопередачи можно увеличивать любой из коэффициентов теплоотдачи.

Оребрение стенок. Второй путь, позволяющий интенсифицировать теплопередачу, — это увеличение площади поверхностей теплообмена. Наиболее наглядно это видно на примере любой криволинейной стенки, в частности цилиндрической или шаровой, где термические сопротивления определяются соответственно величинами диаметров и площадей поверхностей теплообмена (см. формулы (2.46) и (2.53)). Очевидно, что увеличение этих размеров приводит к уменьшению соответствующих термических сопротивлений. Тот же самый результат справедлив и для плоской стенки. Он следует, например, из уравнения (2.96). Если за счет оребрения увеличить площадь поверхности теплообмена F, то соответственно возрастает и передаваемый тепловой поток. Термические сопротивления теплоотдачи оребренной стенки пропорциональны величинам $\frac{1}{\alpha_1 F_1}$ и $\frac{1}{\alpha_2 F_2}$.

Критерий, которым обычно руководствуются при оребрении поверхностей, состоит в том, чтобы добиться примерного равенства обоих термических сопротивлений теплоотдачи, то есть $\alpha_1 F_1 \approx \alpha_2 F_2$. Таким образом, если $\alpha_1 \ll \alpha_2$, то следует оребрять поверхность «1» до тех пор, пока не будет выполняться соотношение $F_1/F_2 = \alpha_2/\alpha_1$. Дальнейшее увеличение F_1 малоэффективно, поскольку при малом росте теплового потока значительно возрастает вес конструкции, затраты на ее изготовление и так далее.

Форма ребер может быть достаточно разнообразной. Расчет температурных полей в ребрах довольно сложен, несмотря на некоторые упрощающие предположения. Более подробно этот класс практически важных задач теплопереноса будет рассмотрен в гл. 8.

Задача 2.3. Найти общее решение уравнения стационарной теплопроводности плоской стенки при наличии постоянного внутреннего источника.

Р е ш е н и е. Уравнение теплопроводности для данного случая имеет вид

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{q_v}{\lambda} = 0.$$

Его решение ищем в виде суммы общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения

$$T = T_{\text{общ (одн)}} + T_{\text{част (неодн)}}.$$

Как известно, $T_{\text{общ (одн)}} = C_1x + C_2$, а $T_{\text{част (неодн)}}$ будем искать в виде $T_{\text{част (неодн)}} = Ax^2$. Подставляя это выражение в исходное уравнение, получаем $A = -q_v/2\lambda$. Таким образом,

$$T = -\frac{q_v}{2\lambda}x^2 + C_1x + C_2.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

2.1. Найти распределение температур в а) пластине; б) цилиндрической стенке; в) шаровой стенке, если теплопроводность линейно зависит от температуры и заданы граничные условия I рода.

2.2. Решить задачу 2.1 для случая, когда на ограничивающих поверхностях заданы граничные условия III рода с постоянными коэффициентами теплоотдачи α_1, α_2 и известными температурами сред T_{c_1}, T_{c_2}.

2.3. В алюминиевой трубе (λ = 185 Вт/(м · К) течет водяной пар при температуре T_{c_1} = 110 °С. Внутренний диаметр трубы d_1 = 0,1 м, наружный — d_2= 0,12 м. Труба расположена в помещении с температурой 30 °С, коэффициент конвективного теплообмена с воздухом α_2 = 15 Вт/ (м² · К). Найти тепловой поток на единицу длины, если труба не теплоизолирована.

2.4. Большая плоская стенка имеет толщину 0,35 м. Температура одной поверхности 35 °С, другой — 115 °С. Известно лишь два значения коэффициента теплопроводности материала стенки: λ = 26 Вт/ (м · К) при T = 0 °С и λ = = 32 Вт / (м · К) при T = 100 °С. Найти плотность теплового потока через стенку, предполагая, что коэффициент теплопроводности линейно зависит от температуры.

2.5. Получить в общем виде решение задачи об определении поля температур в стенке простой формы (плоской, цилиндрической, сферической) с постоянной теплопроводностью λ = const и линейно зависящей от температуры теплопроводностью $\lambda = \lambda_0(1 + bT)$. На внутренней поверхности стенки заданы граничные условия III рода с известными α_1 и T_{c_1}. На внешней поверхности выполняются условия:

а) I рода $(T|_{S_2} = T_{S_2})$;

б) II рода $(q|_{S_2} = q_{S_2} = q_0 = \text{const})$.

2.6. Найти распределение температуры в плоской стенке толщиной 2δ с равномерно распределенными источниками теплоты. На поверхности $x = 0$ и $x = \delta$ заданы коэффициент теплоотдачи α и температура окружающей среды T_c.

2.7. Решить задачу о распределении температур в однородном цилиндрическом стержне радиусом r_0, который охлаждается средой, имеющей температуру T_c. Коэффициент теплоотдачи $\alpha_2 = \alpha$ и мощность внутренних источников теплоты q_v = const заданы, теплопроводность линейно зависит от температуры ($\lambda = \lambda_0(1 + bT)$).

2.8. Определить максимальный перепад температур в шаровой стенке с внешним радиусом r_2 и внутренним радиусом r_1, если теплопроводность материала стенки постоянна, а внутренние источники теплоты распределены равномерно (q_v=const). Рассмотреть случаи, когда: а) внутренняя поверхность теплоизолирована, теплота отводится только через внешнюю поверхность (α_2, T_{c_2} заданы); б) внешняя поверхность теплоизолирована, теплота отводится только через внутреннюю поверхность (α_1, T_{c_1} заданы).

2.9. Найти распределение температур в однородном шаре радиусом r_0 с равномерно распределенными по объему источниками теплоты. На поверхности шара заданы граничные условия III рода. Рассмотреть случаи, когда: а) $\lambda = \text{const}$; б) $\lambda = \lambda_0 (1 + bT)$.

2.10. Найти максимальную силу тока, которую можно пропускать по алюминиевой проволоке ($\lambda = 204$ Вт / (м · К) диаметром $1 \cdot 10^{-3}$ м, чтобы ее температура не превышала значение $T_{\text{макс}} = 200$ °С. Проволока подвешена в воздухе с температурой 25 °С, коэффициент конвективной теплоотдачи от проволоки к воздуху $\alpha = 10$ Вт/ (м^2 · К). Электрическое сопротивление на единицу длины проволоки $R_l = 0{,}037$ Ом/м.

Глава 3 НЕСТАЦИОНАРНАЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ

При решении многих практических задач расчета температурных полей конструкций приходится исследовать нестационарный процесс теплопроводности в телах различной формы. Такой процесс возникает в теле при изменении условий его теплообмена с окружающей средой или мощности энерговыделения внутренних источников теплоты, которые могут действовать в объеме тела. В этой главе рассматриваются некоторые аналитические и численные методы решения задач нестационарной теплопроводности.

§ 3.1. МЕТОД ФУРЬЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Общая формулировка. Метод Фурье является одним из наиболее типичных классических методов решения задач теплопроводности. Он основан на разделении переменных в уравнении теплопроводности и учитывает ряд свойств входящего в уравнение теплопроводности оператора $\nabla(\lambda \nabla T)$. Рассмотрим метод Фурье (метод разделения переменных).

Пусть в конечной пространственной области $\Omega = \Omega(x_1, x_2, x_3)$ справедливо уравнение теплопроводности

$$c(\tau)\rho(\tau)\frac{\partial T}{\partial \tau} = \nabla(\lambda(p)\nabla T), \; \tau > 0, \; p \in \Omega, \tag{3.1}$$

где $p = \{x_1, x_2, x_3\}$ — точка, принадлежащая области Ω; x_1, x_2, x_3 — выбранная система координат (криволинейная); теплопроводность в уравнении (3.1) считается функцией координат, плотность и теплоемкость — функциями времени, объемные источники теплоты отсутствуют. Будем считать также, что граничные условия для уравнения (3.1) приведены к однородным, то есть

$$T(p, \tau) = 0 \text{ при } p \in S, \tag{3.2}$$

где S — граница области.

Предположим, что частное решение задачи (3.1), (3.2) можно представить в виде

$$T(x_1,\ x_2,\ x_3,\ \tau) = A\Theta(\tau)\,\vartheta(x_1,\ x_2,\ x_3), \tag{3.3}$$

то есть как произведение двух функций, одна из которых зависит только от времени $\Theta(\tau)$, другая — только от пространственных координат $\vartheta(x_1,\ x_2,\ x_3)$. Подставляя выражение (3.3) в уравнение (3.1), приходим к уравнению с разделяющимися переменными

$$c(\tau)\rho(\tau)\frac{1}{\Theta}\frac{d\Theta}{d\tau} = \nabla(\lambda(p)\nabla\vartheta)\frac{1}{\vartheta}, \tag{3.4}$$

которое с учетом начального условия

$$T(p,\ 0) = \Theta(0) = \varphi(p),\ \ p \in \Omega \tag{3.5}$$

сводится к двум дифференциальным уравнениям относительно $\Theta(\tau)$

$$c(\tau)\rho(\tau)\frac{d\Theta}{d\tau} = -\mu^2\Theta(\tau) \tag{3.6}$$

и относительно $\vartheta(x_1,\ x_2,\ x_3)$

$$\nabla(\lambda(x_1,\ x_2,\ x_3)\nabla\vartheta(x_1,\ x_2,\ x_3)) = -\mu^2\vartheta(x_1,\ x_2,\ x_3), \tag{3.7}$$

где μ^2 — постоянная разделения переменных.

Задача нахождения тех значений постоянной μ_k^2, для которых существуют нетривиальные (ненулевые) решения уравнения (3.7), удовлетворяющие однородным граничным условиям (3.2), называется *задачей Штурма—Лиувилля*. При этом найденные числа μ_k^2 называют *собственными числами оператора* $\nabla(\lambda\nabla)$, а соответствующие им функции, являющиеся решением задачи Штурма — Лиувилля, — *собственными функциями оператора* $\nabla(\lambda\nabla)$.

Решение задачи Штурма — Лиувилля при постоянном λ для тел, образованных пересечением ортогональных координатных поверхностей различных систем координат, можно найти в монографиях [26, 41, 34, 56]. Вид использованных при этом собственных функций приведен в табл. 3.1.

Например, в случае прямоугольной системы координат собственные функции имеют вид

$$\vartheta_k(x_1,\ x_2,\ x_3) = A_k\sin\frac{n_1\pi x_1}{d_1}\sin\frac{n_2\pi x_2}{d_2}\sin\frac{n_3\pi x_3}{d_3},$$
$$A_k - \text{const},\ n_k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \tag{3.8}$$

Функции (3.8) удовлетворяют однородному граничному условию $\vartheta|_s = 0$ и дифференциальному уравнению

$$\Delta\vartheta_k + \mu_k^2\vartheta_k = 0,\ \mu_k^2 = \pi^2\sum_{k=1}^{3}\frac{n_k^2}{d_k^2},$$

Таблица 3.1

Система координат	Вид функции, которая входит в решение
Декартова	Экспоненциальная, тригонометрическая, гиперболическая
Круговая цилиндрическая	Экспоненциальная, Бесселя, тригонометрическая
Параболоцилиндрическая	Тригонометрическая, Вебера
Эллиптико-цилиндрическая	Тригонометрическая, Матье
Сферическая	Лежандра, тригонометрическая, степенная
Вытянутого сфероида	Тригонометрическая, Лежандра
Параболическая	Тригонометрическая, Бесселя
Коническая	Лямэ, степенная
Эллипсоидальная	Лямэ
Параболоидальная	Бэра

то есть являются собственными функциями оператора Лапласа в параллелепипеде, образованном плоскостями $x_k = 0$, $x_k = d_k$, $k = 1, 2, 3$. Соответствующие собственные числа этого оператора

$$\mu_k^2 = \pi^2 \sum_{k=1}^{3} \frac{n_k^2}{d_k^2} > 0, \quad n_k = 1,\ 2,\ 3. \tag{3.9}$$

Система функций (3.8) ортонормированна в параллелепипеде Ω, если положить

$$A_k = 2^{3/2} \prod_{k=1}^{3} d_k^{1/2} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{d_1 d_2 d_3}},$$

а также ортогональна в метрике $L_2(\Omega)$ и полна в ней. Доказательство этих фактов можно найти в работе [7].

Приведем общие решения задач Штурма — Лиувилля в сферических и цилиндрических координатах (одномерный случай):

сферические координаты

$$\frac{d^2\vartheta}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\vartheta}{dr} + \mu_k^2\vartheta = 0,$$

$$\vartheta_k(r) = A_k\left(\frac{1}{r}\sin\mu_k r\right) + B_k\left(\frac{1}{r}\cos\mu_k r\right), \qquad (3.10)$$

цилиндрические координаты

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\vartheta}{dr}\right) + \mu_k^2 r\vartheta = 0,$$

$$\vartheta_k(r) = A_k I_0(\mu_k r) + B_k Y_0(\mu_k r), \qquad (3.11)$$

где A_k, B_k — произвольные постоянные; μ_k — собственные числа; $I_0(\mu_k r)$ — функции Бесселя I рода нулевого порядка; $Y_0(\mu_k r)$ — функции Бесселя II рода нулевого порядка.

Решение уравнения (3.6), которое является обыкновенным дифференциальным уравнением, находим непосредственным интегрированием

$$\Theta_k(\tau) = \exp\left[-\mu_k^2\int_0^\tau \frac{1}{\rho(\tau)c(\tau)}d\tau\right].$$

Тогда общее решение уравнения (3.1) представим в виде

$$T = \sum_{k=1}^{\infty} A_k\vartheta_k(p)\exp\left(-\mu_k^2\int_0^\tau \frac{1}{\rho(\tau)c(\tau)}d\tau\right),$$

где $\vartheta_k(p)$ — собственные функции, отвечающие собственным числам μ_k; коэффициенты A_k определяются из начального условия уравнения (3.1) (при $\tau = 0$ $T(p, \tau) = \varphi(p)$):

$$A_k = \frac{1}{N_k^2}\int_\Omega \vartheta_k(p)\varphi(p)\,d\Omega, \ p \in \Omega,$$

где Ω — рассматриваемая область; N_k — норма собственной функции $\vartheta_k(p)$, определяемая в соответствии с равенством

$$N_k^2 = \|\vartheta_k\|^2 = \int_\Omega \vartheta_k^2(p)\,d\Omega.$$

Итак, решение краевой задачи (3.1), (3.2), (3.6) методом Фурье имеет следующий окончательный вид:

$$T(p, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{N_k^2}\vartheta_k(p)(\varphi, \vartheta_k)\exp\left[-\mu_k^2\int_0^\tau\frac{d\tau}{\rho(\tau)c(\tau)}\right], \qquad (3.12)$$

где $(\varphi, \vartheta_k) = \int_\Omega \varphi\vartheta_k d\Omega$.

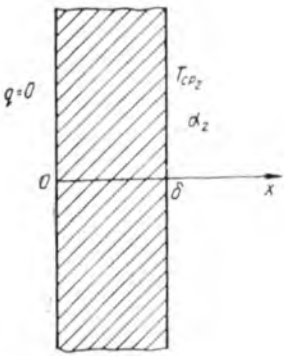


Рис. 3.1. К задаче об охлаждении плоской неограниченной пластины

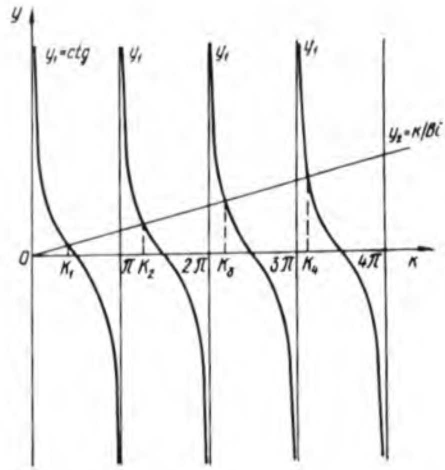


Рис. 3.2. Графическое решение уравнения (3.27)

Ряд (3.12) является классическим (сильным) решением рассматриваемой задачи, если он допускает почленное дифференцирование дважды по пространственным координатам и один раз — по времени. Решение более общего вида, чем (3.1), (3.2), (3.6), а именно решение краевой задачи

$$c(\tau)\rho(\tau)\frac{\partial T}{\partial \tau} - \nabla(\lambda(p)\nabla T) = q_V(p,\ \tau),\ \tau > 0,\ p \in \Omega,$$

$$T(p,\ 0) = \varphi(p),\ \lambda(p)\left.\frac{\partial T}{\partial n}\right|_S + N(p)\,T(p,\ \tau)|_S = 0, \qquad (3.13)$$

а также вопросы обоснования метода Фурье, сильного и слабого решения подробно рассмотрены в работах [7, 71].

Применение метода Фурье для решения задачи об охлаждении неограниченной пластины. Пусть кирпичная стена заводского цеха толщиной 0,1 м обдувается холодным ветром с температурой $T_{ср_2} = 270$ К при коэффициенте конвективного теплообмена $\alpha_2 = 40$ Вт/(м^2 · К), а температура неподвижного воздуха внутри цеха $T_{ср_1} = 330$ К при коэффициенте конвективной теплоотдачи $\alpha_1 = 0$ Вт/(м^2 · К) (теплоизоляция). В начальный момент времени температура стенки была постоянной и равной $T(p,\ 0) = \varphi(p) = 330$ К. Определить температуру стенки через 2 ч, если объемные источники теплоты отсутствуют ($q_v = 0$), а теплопроводность кирпича $\lambda = 0{,}7$ Вт/(м · К) = const ($\rho = 1800$ кг/м^3, $c = 0{,}88$ кДж/(кг · К)).

Нетрудно видеть, что математическая формулировка задачи сводится к уравнению теплопроводности для неограниченной пластины с граничными условиями III рода (рис. 3.1):

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2},\ 0 < x < \delta, \qquad (3.14)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \; x = 0, \tag{3.15}$$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha_2 (T - T_{\text{ср}_2}), \; x = \delta, \tag{3.16}$$

$$T(x, 0) = \varphi(x) = T_0 = \text{const}. \tag{3.17}$$

Введем функцию $\Theta = T - T_{\text{ср}_2}$, для которой из (3.14) — (3.17) получим

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2}, \; 0 < x < \delta, \; \tau > 0, \tag{3.18}$$

$$\Theta|_{\tau=0} = \Theta_0 = T_0 - T_{\text{ср}_2} = F(x), \tag{3.19}$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x} = 0 \; \text{при} \; x = 0, \tag{3.20}$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x} = -\frac{\alpha}{\lambda} \Theta \; \text{при} \; x = \delta. \tag{3.21}$$

Частное решение задачи (3.18) — (3.21) в соответствии с методом Фурье ищем в виде

$$\Theta = A\varphi(\tau)\psi(x). \tag{3.22}$$

После подстановки (3.22) в уравнение (3.18) получаем соотношение

$$\frac{d\varphi}{d\tau} \psi(x) = a \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} \varphi(\tau),$$

которое приводится к уравнению с разделяющимися переменными

$$\frac{1}{a} \frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{\psi''}{\psi} = -\mu^2, \; \mu = \text{const}.$$

Отсюда приходим к двум уравнениям

$$\varphi'(\tau) + a\mu^2\varphi(\tau) = 0, \tag{3.23}$$

$$\psi''(x) + \mu^2\psi(x) = 0. \tag{3.24}$$

Знак минус перед постоянной μ^2 означает, что протекающие процессы стремятся к тепловому равновесию.

Уравнению (3.23) удовлетворяет функция

$$\varphi(\tau) = C_1 e^{-a\mu^2\tau},$$

а уравнению (3.24) — функция

$$\psi(x) = C_2 \sin(\mu x) + C_3 \cos(\mu x),$$

поэтому частное решение уравнения (3.17) имеет вид

$$\Theta = [C_2 \sin(\mu x) + C_3 \cos(\mu x)] C_1 e^{-a\mu^2\tau}, \tag{3.25}$$

где C_i, $i = 1, 2, 3$ — неизвестные постоянные. Отметим, что выражение (3.25) удовлетворяет уравнению (3.17) при любых значениях C_1, C_2, C_3, μ. Чтобы выражение (3.25) было решением задачи (3.17) — (3.21), нужно подчинить его начальному и граничным условиям.

При $x = 0$ получим

$$\left.\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right|_{x=0} = C_1 e^{-a\mu^2\tau}\mu\left[C_2\cos\mu x - C_3\sin\mu x\right]|_{x=0} = 0,$$

или $C_2\cos 0 = C_3\sin 0 = 0$, то есть $C_2 = 0$. Обозначим $C_1C_3 = A$ и перепишем уравнение (3.25) в виде

$$\Theta = Ae^{-a\mu^2\tau}\cos(\mu x). \tag{3.26}$$

Подчиняя (3.26) граничному условию (3.19), получим

$$-\mu Ae^{-a\mu^2\tau}\sin(\mu\delta) = -\frac{\alpha_2}{\lambda}Ae^{-a\mu^2\tau}\cos(\mu\delta),$$

откуда после несложных преобразований находим

$$\operatorname{ctg}\mu\delta = \frac{\mu\delta}{\frac{\alpha_2\delta}{\lambda}},$$

где $\alpha_2\delta/\lambda = \mathrm{Bi}$ — *число Био*, представляющее собой безразмерный коэффициент теплоотдачи (подробнее см. гл. 4). Если обозначить $k = \mu\delta$, то последнее равенство можно переписать в виде

$$\operatorname{ctg} k = k/\mathrm{Bi}. \tag{3.27}$$

Это уравнение имеет бесчисленное множество решений. Обозначим $y_1 = \operatorname{ctg} k$, $y_2 = k/\mathrm{Bi}$. Пересечение котангенсоиды y_1 с прямой y_2 дает нам значения корней характеристического уравнения (3.27).

Из рис. 3.2 видно, что мы имеем бесчисленное множество решений этого уравнения, причем каждый последующий член больше предыдущего: $k_1 < k_2 < \ldots < k_i < \ldots$

Таким образом, каждому значению корня соответствует свое частное решение о распределении температуры:

$$\left\{\begin{array}{l} \Theta_1 = A_1\cos\left(k_1\frac{x}{\delta}\right)e^{-k_1^2\frac{a\tau}{\delta^2}}, \\ \Theta_2 = A_2\cos\left(k_2\frac{x}{\delta}\right)e^{-k_2^2\frac{a\tau}{\delta^2}}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \Theta_i = A_i\cos\left(k_i\frac{x}{\delta}\right)e^{-k_i^2\frac{a\tau}{\delta}}. \end{array}\right. \tag{3.28}$$

Итак, общее решение задачи представим в виде суммы бесконечного ряда

$$\Theta = \sum_{i=1}^{\infty}A_i\cos\left(k_i\frac{x}{\delta}\right)e^{-k_i^2\frac{a\tau}{\delta^2}}. \tag{3.29}$$

Постоянную A_i находим из начальных условий

$$\Theta_0 = F(x) = \sum_{i=1}^{\infty}A_i\cos\left(k_i\frac{x}{\delta}\right). \tag{3.30}$$

Уравнение (3.30) есть разложение функции Θ_0 в ряд Фурье с заданными параметрами, поэтому A_i можно определить, используя выражение

$$\int_{-\delta}^{\delta} \cos\left(k_i \frac{x}{\delta}\right) \cos\left(k_m \frac{x}{\delta}\right) dx = \begin{cases} = 0, & i \neq m, \\ \neq 0, & i = m. \end{cases}$$

Тогда

$$\int_{-\delta}^{\delta} F(x) \cos\left(k_i \frac{x}{\delta}\right) dx = A_i \int_{-\delta}^{\delta} \cos^2\left(k_i \frac{x}{\delta}\right) dx.$$

Отсюда

$$A_i = \frac{k_i}{\delta(k_i + \sin k_i \cos k_i)} \int_{-\delta}^{\delta} F(x) \cos\left(k_i \frac{x}{\delta}\right) dx. \qquad (3.31)$$

Подставляя найденное выражение для A_i в решение, получаем

$$\Theta = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{k_i}{\delta(k_i + \cos k_i \sin k_i)} \left[\int_{-\delta}^{\delta} F(x) \cos\left(k_i \frac{x}{\delta}\right) dx\right] \times$$
$$\times \cos\left(k_i \frac{x}{\delta}\right) e^{-k_i^2 \frac{a\tau}{\delta^2}}. \qquad (3.32)$$

В частном случае равномерного распределения температуры в начальный момент времени $F(x) = T_0 - T_{\text{ср}} = \text{const}$ выражения для A_i будут следующие:

$$A_i = \Theta_0 \frac{2 \sin k_i}{k_i + \sin k_i \cos k_i},$$

откуда общее решение имеет вид

$$\Theta = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\Theta_0 \, 2 \sin k_i}{k_i + \sin k_i \cos k_i} \cos\left(k_i \frac{x}{\delta}\right) e^{-k_i^2 \frac{a\tau}{\delta^2}}. \qquad (3.33)$$

Этому выражению целесообразно придать безразмерную форму:

$$\frac{\Theta}{\Theta_0} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2 \sin k_i}{k_i + \sin k_i \cos k_i} \cos\left(k_i \frac{x}{\delta}\right) e^{-k^2 \frac{a\tau}{\delta^2}},$$

или

$$\overline{\Theta} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2 \sin k_i}{k_i + \sin k_i \cos k_i} \cos(k_i X) \exp(-k^2 \, \text{Fo}), \qquad (3.34)$$

где $X = x/\delta$, $\overline{\Theta} = \Theta/\Theta_0$ — безразмерные координата и температура; $\text{Fo} = a\tau/\delta^2$ — *число Фурье*, представляющее собой безразмерное время (более подробно см. гл. 4).

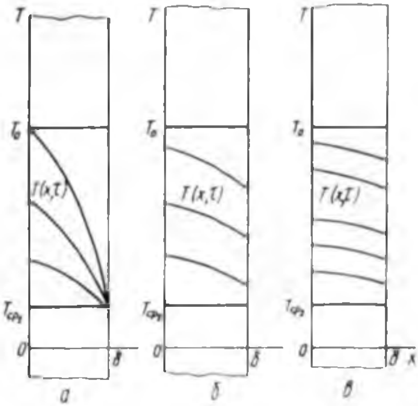


Рис. 3.3. Распределение температуры в неограниченной охлаждаемой пластине для различных значений критерия Био:
a — ($\mathrm{Bi} \to \infty$); $б$ — ($0 < \mathrm{Bi} < \infty$); $в$ — ($\mathrm{Bi} \to 0$)

Подставляя в выражение (3.34) числовые значения параметров рассматриваемой задачи, получим распределение температур в стенке через 2 ч после начала охлаждения (предлагаем читателю проделать это самостоятельно).

На рис. 3.3 схематически показано распределение температур в неограниченной пластине при различных значениях критерия Био. Из рисунка видно, что в случае а) температура наружной поверхности ($x = \delta$) пластины равна температуре среды, начиная с самого начала процесса (то есть имеют место граничные условия первого рода). В случае в) температура наружной поверхности почти совпадает с температурой внутренней поверхности ($x = 0$), а в случае б) кривые температуры занимают промежуточное положение по отношению к случаям а), в).

Корни характеристического уравнения (3.27) $k_1, k_2, \ldots, k_i$ ($i \to \infty$) образуют бесконечный ряд возрастающих чисел. Отсюда следует, что чем больше k, тем меньше роль последующего члена ряда (3.34) по сравнению с предыдущим. Из соотношения (3.34) также видно, что чем больше число Fo, тем быстрее убывают члены ряда с увеличением номера i.

Многочисленные исследования по изучению скорости сходимости рядов, получаемых при решении задач нестационарной теплопроводности методом Фурье (см., например, [8]), показали, что подобные ряды являются быстросходящимися. Для получения приемлемого по точности результата, как правило, достаточно взять 4—6 членов ряда. Например, согласно работе [24] уже при Fo $\geqslant$ 0,3 ряд (3.34) становится настолько быстросходящимся, что распределение температуры можно достаточно точно описать первым членом ряда.

Метод Фурье для задач с неоднородными граничными условиями. Нестационарный нагрев шара постоянным тепловым потоком. Напомним, что метод разделения переменных применим лишь к линейным однородным уравнениям с однородными граничными условиями. Однако и в случае неоднородных граничных условий можно получить решение задачи методом Фурье, если воспользоваться разработанным в [26, 35] подходом и привести неоднородные граничные условия к однородным.

Рассмотрим применение этого подхода на примере решения задачи о нестационарном нагреве шара радиуса R постоянным тепловым потоком q_S. Начальная температура шара T_0 = const известна.

Математическая формулировка задачи следующая:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial T}{\partial r}\right),\ \tau > 0,\ 0 < r < R; \tag{3.35}$$

$$T(r,\ 0) = T_0; \tag{3.36}$$

$$\lambda \frac{\partial T(R,\ \tau)}{\partial r} = qs; \tag{3.37}$$

$$\frac{\partial T(0,\ \tau)}{\partial r} = 0; \tag{3.38}$$

$$T(0,\ \tau) \neq \infty. \tag{3.39}$$

Представим решение исходной краевой задачи в виде

$$T(r,\ \tau) = T_0 + \beta\tau + T_{\text{ст}}(r) + \overline{T}(r,\ \tau), \tag{3.40}$$

где $T_{\text{ст}}(r)$ — решение стационарной задачи с краевыми условиями, аналогичными условиям (3.37), (3.38). Функция $\overline{T}(r,\ \tau)$ определяется как решение следующей задачи:

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial \tau} = a\left(\frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \overline{T}}{\partial r}\right),\ 0 < r < R,\ \tau > 0, \tag{3.41}$$

$$\overline{T}(r,\ 0) = -T_{\text{ст}}(r), \tag{3.42}$$

$$\frac{\partial \overline{T}(R,\ \tau)}{\partial r} = 0, \tag{3.43}$$

$$\frac{\partial \overline{T}(0,\ \tau)}{\partial r} = 0, \tag{3.44}$$

$$\overline{T}(0,\ \tau) \neq \infty, \tag{3.45}$$

которая имеет однородные граничные условия и поэтому может быть решена методом Фурье. Отметим, что введение члена $\beta\tau$ в решение (3.40) необходимо, когда во всех точках границы тела заданы граничные условия II рода.

Для определения $T_{\text{ст}}(r)$ решаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$a\left(\frac{d^2 T_{\text{ст}}}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dT_{\text{ст}}}{dr}\right) = \beta \tag{3.46}$$

с условиями (3.37), (3.38). Не останавливаясь подробно на решении краевой задачи (3.46), (3.37), (3.38), запишем сразу конечный результат [7]:

$$T_{\text{ст}} = \frac{\beta(5r^2 - 3R^2)}{30a}. \tag{3.47}$$

Для определения постоянной β проинтегрируем уравнение (3.46) по объему шара

$$a\int\limits_{(V)} \nabla^2 T_{\text{ст}}\, dV = \frac{4}{3}\pi R^3 \beta.$$

Применяя к левой части последнего выражения формулу Остроградского — Гаусса, получим

$$a\int\limits_{V} \nabla^2 T_{\text{ст}}\, dV = a\int\limits_{S} \frac{dT_{\text{ст}}}{dr}\, dS,$$

откуда, используя граничное условие (3.37), имеем

$$\frac{aq_S}{\lambda} 4\pi R^2 = \frac{4}{3} \pi R^3 \beta,$$

$$\beta = \frac{3aq_S}{\lambda R}.$$

Подставляя выражение для β в (3.47), получим окончательно

$$T_{\text{ст}}(r) = \frac{q_S}{\lambda} \frac{5r^2 - 3R^2}{10R}. \tag{3.48}$$

Частное решение уравнения (3.41) (как и в случае задачи для неограниченной пластины) имеет вид

$$\bar{T}(r, \tau) = Bu(r)v(\tau) \quad (B = \text{const}), \tag{3.49}$$

откуда приходим к уравнениям

$$\frac{v'}{v} = -ak^2, \tag{3.50}$$

$$u'' + \frac{2}{r} u' + k^2 u = 0.$$

Проинтегрировав первое из них, получим

$$v(\tau) = A \exp(-ak^2\tau),$$

а общее решение второго уравнения имеет вид

$$u(r) = C \frac{\sin kr}{r} + D \frac{\cos kr}{r}.$$

Используя метод Фурье (предлагаем читателю сделать это самостоятельно), получим выражение для искомой функции:

$$\bar{T}(r, \tau) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2q_S R}{\lambda \mu_n^2 \cos \mu_n} \frac{R \sin \mu_n r}{r \mu_n} \exp\left(-\mu_n^2 \frac{a\tau}{R^2}\right), \tag{3.51}$$

где μ_n — корни характеристического уравнения $\mu = \operatorname{tg}(\mu)$ $(\mu = kR)$.

Первые шесть корней этого уравнения [7]: $\mu_1 = 0{,}0000$; $\mu_2 = 4{,}4934$; $\mu_3 = 7{,}7253$; $\mu_4 = 10{,}9041$; $\mu_5 = 14{,}0662$; $\mu_6 = 17{,}2208$.

Возвращаясь к представлению решения задачи (3.35)—(3.39) в форме (3.40), учитывая равенство (3.48) и выражение для постоянной β, получим искомое распределение температур в шаре:

$$T(r, \tau) = T_0 + \frac{q_S R}{\lambda} \left[\frac{3a}{R^2}\tau - \frac{3R^2 - 5r^2}{10R^2} - \right.$$

$$\left. - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\mu_n^2 \cos \mu_n} \frac{R \sin \mu_n \frac{r}{R}}{r \mu_n} \exp\left(-\mu_n^2 \frac{a\tau}{R^2}\right)\right]. \tag{3.52}$$

Подробное решение задачи о нестационарном нагреве шара постоянным тепловым потоком приведено в работе [7].

Для расчета нестационарных температурных полей в бесконечной пластине, бесконечном цилиндре и шаре при граничных условиях I—III родов составлены подпрограммы PLANE, POL и SPHEAR. Они предназначены для решения краевых задач нестационарной теплопроводности, записанных в безразмерном виде. Начальное распределение температуры задается функцией координаты x и r. Обращения к подпрограммам однотипны и осуществляются при помощи операторов

```
CALL  PLANE (TEMP, T, X, R, TC, A1, A2, A3, QC, NC, EPS),
   CALL  POL (TEMP, X, R, TC, A1, A2, A3, QC, NC, EPS),
CALL   SPHEAR (TEMP, X, R, TC, A1, A2, A3, QC, NC, EPS).
```

Ниже приведены тексты подпрограмм.

ПОДПРОГРАММА 6

```
C        НЕСТАЦИОНАРНОЕ ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ
C        НЕОГРАНИЧЕННОЙ ПЛАСТИНЫ
         SUBROUTINE PLANE (TEMP, T, X, R, TC, A1, A2, A3, QC.
       * NC, EPS)
         EXTERNAL FCT1, FCT2
         COMMON/A/A, RC
         COMMON/BI / BI
         CE (U, V) = COS (U) * EXP (—V)
         BI = A3 * R/A2
         TF = T * A / R / R
         P = 3.141593
         RC = R
         IF (NC.EQ.1.OR.NC.EQ.3) TEMP = TC
         IF (NC.EQ.2) GO TO 1
         GO TO 2
    1    A = 0.0
         CALL QG10 (0., R, FCT1, V)
         TEMP = Y/R * QC/A2 * (TR * R — (R*R — 3*X*X)/
         6/R)
    2    N = 1
    9    IF (NC.EQ.1) A = (2 * N — 1) * P/2
         IF (NC.EQ.2) A = N * P
         IF (NC.EQ.3) GO TO 3
         GO TO 4
    3    IEND = 20
         XL = P * (N — 1) + 1.E — 4
         XR = P * N — 1.E — 4
         XLL = XL
         XRR = XR
    6    CALL MREGF (A, PM, FCT2, XL, XR, 1.E—4, IEND, IER)
         IF (IER—1) 4, 5, 4
    5    IEND = IEND * 20
```

```
      XL = XLL
      XR = XRR
      GO TO 6
  4   CALL QG10 (0., R, FCT1, Y)
      CUV = CE (A *X/R, A * A * TF)
      M = (—1) ** (N + 1)
      IF (NC.EQ.1)  TS = 2./R*CUV*(Y — TC* M * R/A)
      IF (NC.EQ.2) GO TO 10
      GO TO 11
 10   CONTINUE
      TS = 2.* (Y/R + QC * R/A2 * M/A/A) * CUV
      GO TO 14
 11   IF (NC.EQ.3) TS = 2./R * A/(A + SIN (2.*A)/2)*
     * (Y — TC * R/A * SIN (A)) * CUV
 14   IF (ABS (TS) — EPS) 7, 7, 8
  8   TEMP = TEMP * TS
      N = N + 1
      GO TO 9
  7   TEMP = TEMP * TS
      RETURN
      END

      FUNCTION FCT1 (Y)
      COMMON / A/ A, RC
      FCT1 = F (Y) * COS (A * Y / RC)
      RETURN
      END

      FUNCTION FCT2 (Y)
      COMMON / BI / BI
      FCT2 = COS (Y) * SIN (Y) — Y/B
      RETURN
      END
```

ПОДПРОГРАММА 7

```
C       НЕСТАЦИОНАРНОЕ ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ
C       НЕОГРАНИЧЕННОГО ЦИЛИНДРА
      SUBROUTINE POL (TEMP,T,X,R,TC,A1,A2,A3,QC, NC,
      EPS)
      EXTERNAL F1, F2
      COMMON / A / A, RC, AK
      COMMON / BI / BI, NN
      P = 1.E — 7
      IF(X.LE.0.0) X = P
      BI = A3 * R/A2
      NN = NC
      TN = T * A1 / R / R
```

```
      RC = R
      ND = 5
      ND1 = ND - 1
      HR = (R - P) / ND
      IF(NC.EQ.1.OR.NC.EQ.3) TEMP = TC
      IF(NC.EQ.2) GO TO 1
      GO TO 2
    1 AK = P
      A = 0.0
      RN = P
      Y = 0.
    2 DO 100 I = 1, ND1
      PV = RN + HR
      CALL QG10(RN, RV, FI, S)
      Y = Y + S
  100 RN = RV
      TEMP =2 * Y/R/R+QC * R/A2 * (2*TF-(1-2.*(X/R) +
     * (X/R))/4.)
      N = 1
      IF(NC.EQ.1) GO TO 3
      GO TO 4
    3 XL = 3. * N - 1
      XR = XL * 2
      XLL = XL
      XRR = XR
      GO TO 7
    4 IF(NC.EG.2) GO TO 5
      GO TO 6
    5 XL = 3. * N
      XR = XL + 2.
      XLL = XL
      XRR = XR
      GO TO 7
    6 XL = 3. * N - 3
      IF (N.EQ.1) XL = R
      XR = 3. * N
   10 XLL = XL
      XRR = XR
    7 IEND = 20
      CALL WREGF (AK,FM,F2, XL, XR, 1.E-4, IEND, IER)
      IF (IER - 1) 9, 8, 9
    8 IEND = IEND + 20
      XL = XLL
      XR = XRR
      GO TO 10
    9 IF(NC.NQ.1.OR.NC.EQ.3) A = TC
      IF (NC.EQ.2) A = 0.0
      RN = P
      Y = 0
```

```
      DO 101 I = 1, ND1
      RV = RN + HR
      CALL QG10 (RN, RV, F1, S)
      Y = Y + S
101   RN = RV
      CALL BESJ (AK * X/R, 0, BJ, 1.E — 4, IER)
      EP = EXP (—AK * AK * TF)
      IF (NC.EQ.1) GO TO 11
      GO TO 12
11    CALL BESJ (AK, 1, BJ1, 1.E—4, IER)
      TS = 2./R/R * Y * BJ * EP/BJ1/BJ1
      GO TO 13
12    IF(NC.EQ.2) GO TO 13
      GO TO 14
13    CONTINUE
      CALL BESJ (AK, Q, BJ0, 1.E—4, IER)
      TS = 2. * BJ/BJ0 * (Y/R/ /R/BJ0—R * QC/A2/AK/
     * AK) * EP
      GO TO 15
14    CALL BESJ (AK, 0, BJ0, 1.E—4, IER)
      CALL BESJ (AK, 1, BJ1, 1.E—4, IER)
      TS = 2./R/R * Y * BJ * EP/(BJ0* BJ0 + BJ1 + BJ1)
15    IF (ABS (TS) — EPS) 16, 16, 17
16    TEMP = TEMP + TS
      N = N + 1
      GO TO 18
17    TEMP = TEMP + TS
18    RETURN
      END

      FUNCTION F1 (Y)
      COMMON /A/ A, RC, AK
      CALL BESJ (AK * Y/RC, 0, BJY, 1.E—4, IER)
      F1 = Y * (F (Y) — A) * BJY
      RETURN
      END

      FUNCTION F2 (Y)
      COMMON/BI/BI, NN
      IF (NN.LT.3) CALL BESJ (Y, NN—1, FF, 1.E—4, IER)
      IF (NN.EQ.3) GO TO 1
      GO TO 2
1     CALL BESJ(Y, 0, B0, 1.E—4, IER)
      CALL BESJ(Y, 1, B1, 1.E—4, IER)
      FF = B0 — Y * B0/BI
2     F2 = FF
      RETURN
      END
```

ПОДПРОГРАММА 8

```
C       НЕСТАЦИОНАРНОЕ ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ
C       ШАРА
        SUBROUTINE SPHEAR (TEMP, T, X, R. TC, A1, A2, A3,
      * QC, NC, EPS)
        EXTERNAL F1, F2
        COMMON/N1/A, RC, NN, CT, NI
        COMMON/ B /B
        P = 3.141593
        RX = 1.E—5
        RC = R
        NN = NC
        CT = TC
        ND = 51
        ND1 = ND — 1
        HR = R/ND1
        IF(NC.NE.2) TEMP = TC
        IF(NC.EQ.2) GO TO 1
        GO TO 2
    1   NI = 0
        A = 0.0
        RN = 0
        Y = 0
    2   DO 100 I = 1, ND1
        RV = RN + HR
        CALL QG10 (RN, RV, F1, S)
        Y = Y + S
  100   RN = RN
        TEMP = 3. * (Y/R/R + QC * A1 * T/A2)/R — QC * R/
      * A2 * (3.— 5. * (X/R) ** 2)/10.
        N = 1
   17   IF(NC.EQ.1) A = N * P
        IF(NC.EQ.2) GO TO 3
        GO TO 4
    3   B = 0
        XL = N + P + PX
        XR = XL + P/2.— 2. * PX
        XLL = XL
        XRR = XR
        GO TO 5
    4   IF (NC.EQ.3) GO TO 6
    6   B = A3 + R/A2
        IF (B—1.) 7, 8, 9
    7   XR = N + P — PX
        XL = XR — P/2.+ 2. * PX
        XLL = XL
        XRR = XR
```

```
      GO TO 5
 8    XL = (N — 1) * P + PX
      XR = XL + P/2.— 2. * PX
      XLL = XL
      XRR = XR
      GO TO 5
 9    A = (2 * N — 1) * P/2
      GO TO 10
 5    ID = 20
12    CALL WREGF (A, FM, F2, XL, XR, 1.E—4, ID,  IER)
      IF (IER — 1) 11, 10, 11
11    ID = ID + 20
      XL = XLL
      XR = XRR
      GO TO 12
10    EP = EXP (—A * A * A1 * T/R/R)
      IF (X.EQ.0.0) X = PX
      N1 = 1
      RN = 0
      Y = 0
      DO 101 I = 1, ND1
      RV = RN + HR
      CALL QG10 (RN, RV,F1, S)
      Y = Y + 0.1
101   RN = RV
      RM = A * X/R
      SN = SIN (RM)
      IF (NC.EQ.1) TS = 2./R * SN/X * Y * EP
      IF (NC.EC.2) GO TO 13
      GO TO 14
13    CS = COS (A)
      TS = 2. * (Y/R/R * SN/RM/CS/C3 — RC * R/A2 * SN/
     * RM/CS / A / A / EP)
14    IF (NC.EQ.3)
     * TS = 2./R/R * A * A/(A — SIN(2.*A)/2.) * SN/RN *
     * Y * EP
      IF (ABS (TS) — EPS) 15, 15, 16
16    TEMP = TEMP * TS
      N = N + 1
      GO TO 17
15    TEMP = TEMP + TS
      RETURN
      END

      FUNCTION F1 (Y)
      COMMON / N1 / A, RC, NN, CT, N1
      FF = Y * SIN (A * Y/RC)
      IF (NN. EQ. 1) FF = F(Y) * FF
```

```
      IF (NN.EQ.2) GO TO 1
      GO TO 2
1     IF (NI.EQ.0) FF = Y * Y + F (Y)
      IF (NI.EQ.1) FF = F (Y) * FF/A
      GO TO 3
2     IF (NN.EQ.3) FF = (F (Y) — CT) * FF
3     F1 = FF
      RETURN
      END

      FUNCTION F2 (Y)
      COMMON / B/ B
      F2 = SIN (Y) * (B — 1.) + Y * COS (Y)
      RETURN
      END
```

СПИСОК ИДЕНТИФИКАТОРОВ

TEMP — вычисляемая температура тела в точке x (или r) для момента времени τ; T — значение времени τ; X — координата x (или r) точки тела; R — половина толщины пластины или радиус цилиндра, сферы; TC — температура T_c на поверхности тела, окружающей среды (в зависимости от граничного условия); A1 — температура тела; A2 — теплопроводность тела; A3 — коэффициент теплоотдачи на поверхности тела; QC — удельная плотность потока теплоты на поверхности тела; NC — переменная, принимающая значения 1, 2, 3 соответственно; EPS — точность вычисления значения температуры.

Для работы описанных здесь программных модулей необходимы вспомогательные подпрограммы-функции, текст которых дан одновременно с текстом основных подпрограмм. При пользовании подпрограммами необходимо самостоятельно составить подпрограмму-функцию (F (X) — для модуля PLANE или F1(R) — для модулей POL и SPHEAR) расчета начального распределения температуры в теле.

Графоаналитический метод определения параметров нагревания (охлаждения) тел. При проведении большого количества инженерных расчетов бывает достаточно вычислить крайние значения температуры (минимальное и максимальное), поскольку все остальные значения температур промежуточные. Применительно к задаче об охлаждении неограниченной пластины расчет состоит в следующем. Вычисляем значения температуры на граничных поверхностях стенки, то есть по соотношению (3.34) определяем

$$\bar{\Theta}|_{X=1} = \bar{\Theta}_{S,\,\mathrm{Fo}} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin 2k_i}{k_i + \sin k_i \cos k_i} e^{-k_i^2 \mathrm{Fo}}, \qquad (3.53)$$

$$\bar{\Theta}|_{X=0} = \bar{\Theta}_{m,\mathrm{Fo}} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2 \sin k_i}{k_i + \sin k_i \operatorname{sos} k_i} e^{-k_i^2 \mathrm{Fo}}. \qquad (3.54)$$

При $\mathrm{Fo} \geqslant 0{,}3$ ряд (3.34) можно заменить его первым членом, и соотношения (3.53), (3.54) принимают вид

$$\bar{\Theta}_{S,\,\mathrm{Fo}} = P(\mathrm{Bi})\, e^{-k_1^2 \mathrm{Fo}} = f_S(\mathrm{Bi},\ \mathrm{Fo}), \qquad (3.55)$$

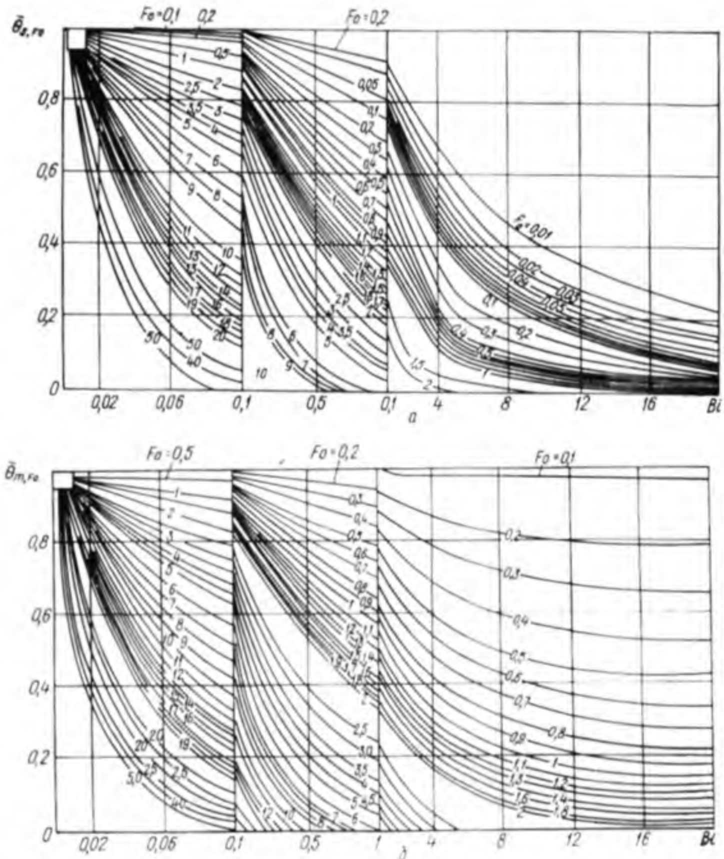


Рис. 3.4. Зависимости $\bar\Theta_{s\,\mathrm{Fo}} = f_s(\mathrm{Bi},\ \mathrm{Fo})$ (*а*), $\bar\Theta_{m,\mathrm{Fo}} = f_m(\mathrm{Bi},\ \mathrm{Fo})$ (*б*) для пластины

где

$$P(\mathrm{Bi}) = \frac{\sin 2k_1}{k_1 + \sin k_1 \cos k_1},$$

$$\bar\Theta_{m,\,\mathrm{Fo}} = N(\mathrm{Bi})\, e^{-k_1^2 \mathrm{Fo}} = f_m(\mathrm{Bi},\ \mathrm{Fo}), \tag{3.56}$$

$$N(\mathrm{Bi}) = \frac{2\sin k_1}{k_1 + \sin k_1 \cos k_1}.$$

Логарифмируя соотношения (3.55), (3.56), получаем

$$\ln f_s = \ln P(\mathrm{Bi}) - k_1^2\,\mathrm{Fo},\quad \ln f_m = \ln N(\mathrm{Bi}) - k_1^2\,\mathrm{Fo}. \tag{3.57}$$

На рис. 3.4 изображены графики уравнений (3.57) в полулогарифмических координатах [39]. По оси ординат отложены натуральные логарифмы величин f_s, f_m, а по оси абсцисс — число Фурье. Эти графики охватывают широкий диапазон изменения критериев Bi и Fo, поэтому с их помощью можно рассчитать практически все возможные случаи охлаждения или нагревания стенки. Аналогично применяется графоаналитический метод для расчета температур цилиндра, шара (соответствующие графики можно найти в работе [39]).

Таким образом, пользуясь графоаналитическим методом, можно выполнять следующие расчеты [70]:

1) при заданной продолжительности нагревания пластины (то есть задано число Fo) и интенсивности теплоотдачи с его поверхности (задано число Bi) определяются $\overline{\Theta}_{m,\,\mathrm{Fo}}$; $\overline{\Theta}_{S,\,\mathrm{Fo}}$;

2) при заданных $\overline{\Theta}_{S,\,\mathrm{Fo}}$ или $\overline{\Theta}_{m,\,\mathrm{Fo}}$ и Bi определяется продолжительность нагревания, то есть число Fo;

3) при заданных Fo и $\overline{\Theta}_{S,\,\mathrm{Fo}}$ (или $\overline{\Theta}_{m,\,\mathrm{Fo}}$) определяется интенсивность теплоотдачи на поверхности пластины, то есть число Bi.

Задача 3.1. Стена печи толщиной 510 мм имеет температуру 200 °C. С некоторого момента времени стена охлаждается с одной стороны воздухом, температура которого 20 °C. Требуется определить температуру на поверхности стены через 1 ч охлаждения, если коэффициент теплоотдачи $\alpha = 10$ Вт/(м^2 · К), коэффициент теплопроводности кирпича $\lambda = 1{,}1$ Вт/(м · К), теплоемкость $c = 0{,}85$ кДж/(кг · К) и плотность $\rho = 1500$ кг/м^3. Теплообменом с другой стороны стены пренебречь.

Решение. Вычисляем критерии Bi и Fo:

$$\mathrm{Bi} = \frac{\alpha\delta}{\lambda} = \frac{10 \cdot 0{,}51}{1{,}1} \approx 4{,}65, \quad \mathrm{Fo} = \frac{a\tau}{\delta^2},$$

$$a = \frac{\lambda}{c\rho} = \frac{1{,}1 \cdot 10^{-3}}{0{,}85 \cdot 1500} \approx 0{,}086 \cdot 10^{-5}\ \text{м}^2/\text{с},$$

$$\mathrm{Fo} = \frac{0{,}086 \cdot 10^{-5} \cdot 3600}{0{,}51^2} \approx 0{,}012.$$

Из графика (рис. 3.4) получаем $\mathrm{Fo} = 0{,}012$, $\Theta_{S,\,\mathrm{Fo}} = 0{,}61$, откуда $(T - T_c)/(T_0 - T_c) = 0{,}61$ и $T = T_c + 0{,}61\,(T_0 - T_c) = 20 + 0{,}61\,(200 - 20) \approx 130$ °C.

§ 3.2. О ДРУГИХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Наряду с методом Фурье для решения линейных задач нестационарной теплопроводности достаточно широко применяются другие аналитические методы. Рассмотрим некоторые из них.

Метод функций источников (функций Грина). Сущность данного метода заключается в том, что любой процесс распространения теплоты в теле можно представить в виде суммы процессов выравнивания температур, вызываемых действием множества точечных источников теплоты, распределенных в пространстве и времени.

Элементарные решения метода функций источников:

для одномерного пространства функция точечного мгновенного источника Q'

$$G_0(x,\ x',\ \tau,\ \tau') = \frac{Q'}{2c\rho\sqrt{\pi a(\tau - \tau')}} \exp\left[-\frac{(x - x')^2}{4a(\tau - \tau')}\right], \qquad (3.58)$$

функция точечного мгновенного диполя Q''

$$\frac{\partial G_0(x,\ x',\ \tau,\ \tau')}{\partial x'} = \frac{Q''(x-x')}{4c\rho(\tau-\tau')\,a\sqrt{\pi a(\tau-\tau')}}\exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4a(\tau-\tau')}\right]; \quad (3.59)$$

для пространства m измерений функция точечного мгновенного источника Q'

$$G_0(p,\ p',\ \tau,\ \tau') = \frac{Q'}{c\rho}\left(\frac{1}{2\sqrt{a\pi(\tau-\tau')}}\right)^m \exp\left[-\frac{r^2}{4a(\tau-\tau')}\right], \quad (3.60)$$

где $p = \{x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_m\}$, $p' = \{x_1',\ x_2',\ \dots,\ x_m'\}$,

$$r = \sqrt{(x_1-x_1')^2 + (x_2-x_2')^2 + \dots + (x_m-x_m')^2}.$$

Функция точечного мгновенного диполя Q'' с осью $\bar{n}'$

$$\frac{\partial G_0(p,\ p',\ \tau,\ \tau')}{\partial n'} = \frac{Q''}{c\rho}\left(\frac{1}{2\sqrt{a\pi(\tau-\tau')}}\right)^m \frac{r\cos\varphi'}{2a(\tau-\tau')}\exp\left[-\frac{r^2}{4a(\tau-\tau')}\right], \quad (3.61)$$

где φ' — угол между векторами $\bar{n}'$ и $\overline{p'p}$ (рис. 3.5) в одномерной задаче $\cos\varphi' = \pm 1$.

Функцию $G_0(p,\ p',\ \tau,\ \tau')$, определяемую формулами (3.58), (3.60) и удовлетворяющую уравнению теплопроводности по переменным p, τ, называют *фундаментальным решением уравнения теплопроводности*. Применение фундаментального решения позволяет определить температуру в точке p неограниченного пространства в момент времени τ, вызываемую действием точечного мгновенного источника (диполя) теплоты мощностью Q', помещенного в точку p' в момент времени τ'. Предполагается, что в момент времени $\tau = 0$ в пространстве Ω температура $T = 0$.

Решение задачи теплопроводности методом источников заключается в правильном выборе и распределении этих источников. Существуют три основных способа задания источников: *метод выравнивания*, *метод непрерывно действующих источников*, *метод отражения*.

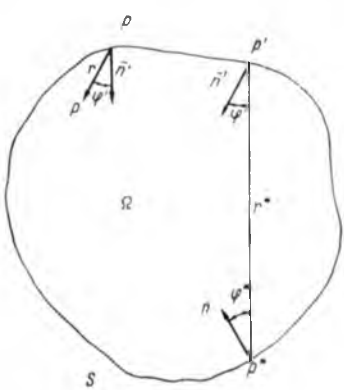


Рис. 3.5. К методу функций источников

Остановимся на методе непрерывно действующих источников (другие способы задания источников, а также весь метод функций источников подробно изложены в работах [7, 8]). При непрерывно действующих источниках (диполях) можно выразить заданные условия нагрева в виде суммы мгновенно действующих источников (диполей) $q(\tau)$, распределенных во времени. Температурное поле, вызываемое непрерывно действующим источником (диполем), для одномерного пространства определяется формулами

$$T(x,\ \tau)=\int_0^{\tau}\frac{q(\tau')}{2c\rho\sqrt{\pi a(\tau-\tau')}}\exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4a(\tau-\tau')}\right]d\tau',$$

$$T(x,\ \tau)=\int_0^{\tau}\frac{(x-x')\,q(\tau')}{4\lambda(\tau-\tau')\sqrt{\pi a(\tau-\tau')}}\exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4a(\tau-\tau')}\right]d\tau'. \qquad (3.62)$$

Для многомерного пространства формулы имеют аналогичный вид.

Использование метода функций источников позволяет получить решения задач в наиболее простом виде в случае неограниченных размеров тела для начальных периодов распространения теплоты.

Метод тепловых потенциалов. Тепловыми потенциалами простого и двойного слоя называются интегралы [56]

$$U(p,\ \tau)=\int_0^{\tau}d\tau'\int_S\chi_1(p',\ \tau')\,a\delta_0(p,\ p',\ \tau,\ \tau')\,dS', \qquad (3.63)$$

$$V(p,\ \tau)=\int_0^{\tau}d\tau'\int_S\chi_2(p',\ \tau')\,a\,[\partial\delta_0(p,\ p',\ \tau,\ \tau')/\partial n']\,dS', \qquad (3.64)$$

где S — граница m-мерной пространственной области Ω; $\bar{n}'$ — внутренняя нормаль к S; $\chi_1(p',\ \tau')$, $\chi_2(p',\ \tau')$ — непрерывные функции, называемые *плотностями тепловых потенциалов*; $\delta_0(p,\ p',\ \tau,\ \tau')$ — функция точечного мгновенного источника единичной мощности $[Q'/(c\rho)=1]$.

В одномерном случае ($m=1$) формулы (3.63), (3.64) принимают вид

$$U(x,\ \tau)=\int_0^{\tau}\frac{a}{2\sqrt{\pi a(\tau-\tau')}}\Big[\chi_1(x_1,\ \tau')\,e^{-\frac{r_1^2}{4a(\tau-\tau')}}+$$

$$+\chi_1(x_2,\ \tau')\,e^{-\frac{r_2^2}{4a(\tau-\tau')}}\Big]d\tau', \qquad (3.65)$$

$$V(x,\ \tau)=\int_0^{\tau}\frac{1}{4\sqrt{\pi a(\tau-\tau')}}\Big[\chi_1(x_1,\ \tau')\,e^{-\frac{r_1^2}{4a(\tau-\tau')}}\,r_1\cos\varphi_1'+$$

$$+\chi_1(x_2,\ \tau')\,r_2\cos\varphi_2'\,e^{-\frac{r_2^2}{4a(\tau-\tau')}}\Big]\frac{d\tau'}{(\tau-\tau')}, \qquad (3.66)$$

где x_1, x_2 — левый и правый концы отрезка Ω; $\overline{r_1}=|x-x_1|$; $r_2=|x-x_2|$; φ_1', φ_2' — углы между векторами $\bar{n}'$, $\overline{x_1x}$ и соответственно $\bar{n}'$, $\overline{x_2x}$ (если $x_1<x<x_2$, то $\cos\varphi_1'=\cos\varphi_2'=1$, если $x<x_1$, то $\cos\varphi_1'=-1$, $\cos\varphi_2=1$, если $x>x_2$, то $\cos\varphi_1'=1$, $\cos\varphi_2'=-1$).

Аналогично могут быть представлены двух- и трехмерные тепловые потенциалы (см., например, [7, 8]).

Суть метода тепловых потенциалов состоит в переходе от исходной краевой задачи к эквивалентному интегральному уравнению, для решения которого может быть применен соответствующий математический аппарат. Интегральные уравнения получаются после подстановки потенциалов простого и двойного слоя в соответствующие граничные условия. Результатом решения интегральных уравнений является определение плотностей тепловых потенциалов $\chi_1(p', \tau')$, $\chi_2(p', \tau')$.

Метод тепловых потенциалов применим к решению краевых задач теплопроводности при граничных условиях I—IV родов, а также к краевым задачам с нелинейными граничными условиями. Достоинством метода тепловых потенциалов является то, что интегральное уравнение Вольтерра II рода, к которому сводится краевая задача, удобно для проведения численных расчетов на ЭВМ. Подробно этот метод изложен в работах [7, 8].

Методы интегральных преобразований. Интегральные преобразования, применяемые к решению краевых задач теплопроводности, делятся на два класса: интегральные преобразования с конечными пределами и интегральные преобразования с бесконечными пределами интегрирования.

Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — функция n переменных, определенная в конечной области Ω. Выражение

$$\bar{f}(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m; x_{m+1}, \ldots, x_n) =$$

$$= \int\limits_{\Omega_m} f(x_1, \ldots, x_n) K(x_1, \ldots, x_m; \gamma_1, \ldots, \gamma_m)\, dx_1, \ldots, dx_m \quad (m < n), \tag{3.67}$$

где $\bar{f}(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m; x_{m+1}, \ldots, x_n)$ — функция m переменных γ_1, $\gamma_2, \ldots, \gamma_m$ и $n-m$ переменных $x_{m+1}, \ldots, x_n$, называется ***конечным интегральным преобразованием*** функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ по переменным $x_1, x_2, \ldots, x_m$ с ядром $K(x_1, x_2, \ldots, x_m; \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m)$.

Интеграл (3.67) называют также *изображением* (по переменным $x_1, x_2, \ldots, x_m$) функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, которую в этом случае называют *оригиналом*.

Преобразование, с помощью которого функция $\bar{f}(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m;$ $x_{m+1}, \ldots, x_n)$ снова преобразуется в функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, называется *обратным преобразованием*. При этом само преобразование (3.67) называют *прямым*.

Примерами конечных интегральных преобразований являются: конечные синус- и косинус-преобразования Фурье

$$\bar{f}(\gamma) = \int\limits_0^\pi \sin\gamma x\, f(x)\, dx; \quad \bar{f}(\gamma) = \int\limits_0^\pi \cos\gamma x f(x)\, dx;$$

конечное преобразование Лежандра

$$\bar{f}(\gamma) = \int\limits_{-1}^{1} P_\gamma(x) f(x)\, dx,$$

где $P_\gamma(x)^{-1}$ — полином Лежандра степени $\gamma (\gamma = 0, 1, 2, \ldots)$.

Среди интегральных преобразований с бесконечными пределами, применяемых в теории теплопроводности, наиболее распространено *одностороннее интегральное преобразование Лапласа*

$$\bar{f}(s) = \int_0^\infty f(\tau) \exp(-s\tau)\, d\tau,$$

которое ставит в соответствие каждой однозначной функции (оригиналу) $f(\tau)$ (τ — действительная переменная) единственную функцию $\bar{f}(s)$ (изображение) комплексной переменной $s = \sigma \pm i\alpha$.

После решения краевой задачи в изображениях переход к оригиналам осуществляется по формуле

$$f(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \bar{f}(s) \exp(s\tau)\, ds.$$

Общая схема применения интегральных преобразований по одной переменной для решения краевых задач состоит в следующем

Используя интегральное преобразование, исключают дифференцирование по одной из переменных и приходят к более простой задаче относительно преобразованной функции. Определив эту функцию, с помощью обратного преобразования находят неизвестную функцию, дающую решение первоначальной задачи. В случае необходимости интегральные преобразования применяют повторно, последовательно исключая дифференциальные операции по ряду переменных.

Методы интегральных преобразований имеют ряд преимуществ перед методом Фурье: стандартность методик применения; получение решений в удобном для расчетов виде; наличие таблиц соответствий между оригиналами и изображениями функций и прочие.

Подробно вопросы и примеры применения интегральных преобразований в теории теплопроводности рассмотрены в работах [7, 8, 34, 56].

§ 3.3. ИССЛЕДОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ МЕТОДОМ СЕТОК

Рассмотренные в § 3.1, 3.2 методы решения задач теплопроводности относятся к разряду аналитических методов, позволяющих найти решение непосредственно из дифференциального уравнения в виде формулы, раскрыв которую можно для каждого значения аргумента получить значение искомой функции. При этом решение получается в общей форме, которая дает возможность в любой точке тела в любой момент времени отразить влияние всех факторов, влияющих на процесс, оценить их значимость. К сожалению, при исследовании реальных процессов получить аналитическое решение очень трудно. Как правило, это удается сделать лишь для тел простой формы и при исследовании линейных задач. Иногда решение оказывается настолько громоздким, что получение конкретных результатов для заданного набора параметров вызывает серьезные математические трудности и требует в конце концов приближенных вычислений с использованием ЭВМ.

Нелинейные задачи, как правило, не удается решить аналитическим методом даже в простейших одномерных случаях. В этой ситуации обычно применяют численные методы, позволяющие во всех случаях решить краевую задачу теплопроводности с определенной точностью и степенью достоверности, зависящими главным образом от оперативной памяти и быстродействия используемых ЭВМ. При численном решении задачи значения искомой функции (температуры) определяются не во всех точках области, а лишь в отдельных, то есть решение дискретно. Это создает некоторые неудобства при исследовании задачи по сравнению с применением аналитических методов, так как каждый раз решается одна конкретная задача, и любое изменение параметров требует совершенно нового решения. Однако этот способ необходим при решении тех задач, для которых аналитические методы неприменимы.

Из всех численных методов наиболее широкое распространение для решения краевых задач теплопроводности получил *метод конечных разностей (метод сеток)*. Это объясняется, в первую очередь, универсальностью метода (он применим как для линейных, так и для нелинейных задач с различными видами граничных условий, для различных форм тела) и его высокой алгоритмичностью, что открывает широкие возможности для использования современных ЭВМ. Метод сетки не требует задания аналитических выражений для уравнений границ тела, краевых условий, коэффициентов переноса и т. п., дает возможность в математической формулировке задачи максимально отразить специфику протекания реального процесса, так как практически не налагает ограничений на условия задачи.

Идея метода конечных разностей состоит в следующем. Область непрерывного изменения аргументов заменяется конечным множеством точек (узлов) — расчетной сеткой. Вместо функций непрерывного аргумента рассматриваются функции дискретного аргумента, определяемые в узлах сетки — *сеточные функции*. Частные производные, входящие в дифференциальное уравнение, начальные и граничные условия заменяются (аппроксимируются) разностными соотношениями, представляющими собой линейную комбинацию значений сеточной функции в нескольких узлах.

В результате краевая задача в частных производных сводится к системе алгебраических уравнений относительно значений сеточных функций в узлах. Если решение полученной системы дифференциальных уравнений существует и при измельчении сетки стремится к решению исходной дифференциальной задачи, то это решение и является искомым приближенным решением краевой задачи.

Подробно метод конечных разностей освещен в работах [16, 25, 61, 63, 83].

Основные понятия метода сеток. Применению метода сеток и решению дифференциальных краевых задач предшествует дискретизация расчетной области, то есть выбор *разностной сетки*. Расположение узлов сетки может быть произвольным и определяется спецификой решаемой задачи. Например, в случае одномерной задачи в области

Рис. 3.6. Равномерная сетка

$\Omega = \{0 \leqslant x \leqslant l\}$ можно ввести сетку, разбив отрезок $[0, l]$ на N равных частей точками $x_i = ih$, $i = 0, 1, \ldots, N$. Расстояние между узлами $x_{i+1} - x_i = h$ называется *шагом сетки*. В данном случае $h = l/N = \mathrm{const}$, поэтому множество точек x_i, $i = 0, 1, \ldots, N$, представляет собой равномерную сетку и обозначается $\Omega_h = (x_i = ih$, $i = 0, 1, \ldots, N)$. Такая сетка представлена на рис. 3.6.

Аналогичным образом может быть построена разностная сетка на плоскости для прямоугольной области $\Omega = \{0 \leqslant x \leqslant a\ 0 \leqslant y \leqslant b\}$. Для этого разобъем отрезки $[0, a]$ и $[0, b]$ соответственно на M и N равных частей и через точки x_i, $i = 0, 1, \ldots, M$; $j = 0, 1, \ldots, N$, проведем прямые, параллельные осям координат (рис. 3.7). В результате получим множество точек (x_i, y_j), образующих сетку в прямоугольнике. В данном случае шаги сетки по каждой из переменных постоянны $(h = a/M,\ p = l/N)$ и полученная сетка является равномерной. Если хотя бы по одной из переменных шаг неравномерен, сетку называют *неравномерной*.

По аналогии с разностной сеткой для пространственных областей вводится сетка по временной переменной τ.

Например, для решения одномерной по пространству нестационарной задачи в области $\Omega = \{0 \leqslant x \leqslant l,\ 0 \leqslant \tau \leqslant \tau_k\}$ вводится сетка

$$\overline{\Omega}_{h\tau} = \overline{\Omega}_h \times \overline{\Omega}_\tau = \{(x_k, \tau_i),\ x_{k+1} = x_k + h_k,$$
$$\tau_{i+1} = \tau_i + h_{\tau_i},\ k = 0, 1, \ldots, N;\ i = 0, 1, \ldots, M.$$
$$x_0 = 0,\ x_N = l,\ \tau_0 = 0,\ \tau_M = \tau_k\},$$

которая называется *пространственно-временной разностной сеткой* (рис. 3.8).

Совокупность узлов, лежащих на линии $\tau = \tau_i$, называют i-м временным слоем.

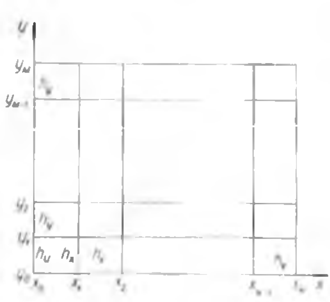


Рис. 3.7. Прямоугольная равномерная сетка

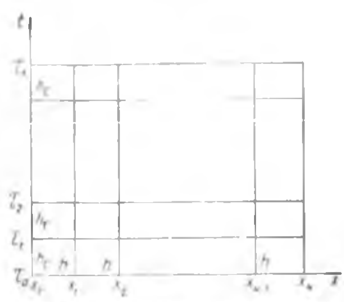


Рис. 3.8. Пространственно-временная сетка

Для обозначений сеточной функции на i-м и $(i+1)$-м временных слоях используют обозначения

$$T(x_k,\ \tau_i) = T_k^i = T_k;\ T(x_k,\ \tau_{i+1}) = T_k^{i+1} = \hat{T}_k.$$

Наиболее важными вопросами, возникающими при решении задач методом сеток, являются *аппроксимация, сходимость* и *устойчивость* используемой разностной схемы. При этом под разностной схемой понимается форма записи разностных уравнений и дополнительных условий, то есть разностного аналога системы уравнений, описывающих процесс.

При замене некоторого оператора краевой задачи, заданного на множестве непрерывного аргумента, разностным оператором A_h, заданным на множестве сеточных функций, естественно, допускается некоторая погрешность, которую называют *погрешностью аппроксимации*. Если эта погрешность представляет собой бесконечно малую величину p-го порядка относительно шага сетки по одной из переменных, то разностный оператор аппроксимирует соответствующий дифференциальный оператор с p-м порядком точности по этой переменной.

Например, разностный оператор

$$A_h = T_{\bar{x},k} = (T_{k+1} - T_k)/h$$

аппроксимирует дифференциальный оператор

$$A[T] = dT/dx$$

с первым порядком точности в точке x_k, в чем легко убедиться, разлагая функцию $T(x)$ в окрестности x_k в ряд Тейлора по степеням h. В то же время разностное отношение $T_{\mathring{x},k} = (T_{k+1} - T_{k-1})/2h$ для оператора dT/dx имеет второй порядок аппроксимации.

Заметим, что порядок аппроксимации разностной схемы в целом определяется не только порядком аппроксимации дифференциального уравнения во внутренних узлах сетки (локальная аппроксимация), но и порядком аппроксимации каждого из граничных условий.

Если погрешность аппроксимации стремится к нулю при любом законе стремления шагов к нулю, то такая аппроксимация называется *абсолютной*, или *безусловной*. В противном случае аппроксимация называется *условной*.

Схема называется *устойчивой*, если ошибки округления, неизбежные при всяком счете, при измельчении сетки не возрастают. Иными словами, схема устойчива, если решение непрерывно зависит от выходных данных (правых частей уравнения, краевых условий) при уменьшении шагов разностной сетки.

Рассмотрим три разностные схемы для одномерного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a(x,\ \tau)\frac{\partial^2 T}{\partial x^2},\ \tau > 0,\ 0 \leqslant x \leqslant b.$$

С этой целью введем разностный оператор $\Delta_{x\bar{x}}$ для разностной функции $u(x_k, \tau_l) = u_k$,

$$\Delta_{x\bar{x}} u_k = a_k (u_{l+1} - 2u_l + u_{l-1})/h^2,$$

где $h = b/N$ — шаг сетки.

Схема 1

$$\frac{\bar{u}_k - u_k}{h_\tau} = \Delta_{x\bar{x}} u_k, \quad i = 1, 2, \ldots, M-1; \ N = 1, 2, \ldots \tag{3.68}$$

Схема 2

$$\frac{u - u}{h_\tau} = \Delta_{x\bar{x}} \hat{u}, \quad i = 1, 2, \ldots, M-1, \ N = 1, 2, \ldots \tag{3.69}$$

Схема 3

$$\frac{u - u}{h_\tau} = \Delta_{x\bar{x}} u, \quad i = 1, 2, \ldots, M-1, \ N = 1, 2, \ldots \tag{3.70}$$

Нетрудно показать, что уравнения (3.68), (3.69) аппроксимируют одномерное уравнение теплопроводности с порядком о $(h_\tau + h^2)$, а уравнения (3.70) — с порядком о $(h_\tau^2 + h^2)$. Казалось бы, с точки зрения вычислительного процесса наиболее целесообразно использовать схему 1 или схему 3, так как они относятся к разряду *явных* схем, то есть позволяют вычислить значение искомой сеточной функции на $(i+1)$-м временном слое $\hat{u}_k = u_k^{i+1}$ непосредственно по известным значениям сеточной функции на слоях с номерами $j \leqslant i$. При нахождении решения по схеме 2 на каждом временном слое необходимо решать систему алгебраических уравнений относительно искомых сеточных функций, что требует, конечно, значительно больших затрат. Такие схемы называют *неявными.*

Однако, как показано, например в [61], использование схемы 2 предпочтительнее, так как она является *безусловно (абсолютно) устойчивой*, то есть устойчивой при любом соотношении шагов по различным переменным, лишь бы они были достаточно малы.

Схема 1, как показано в [25, 61], устойчива при $ah^2/h_\tau \leqslant 1/2$. Такая устойчивость называется *условной.*

Опыт использования схемы 3 в расчетах показывает, что погрешности в вычислительном процессе быстро возрастают и приводят к абсурдным результатам. Такого рода схемы, которые при любых достаточно малых шагах по независимым переменным неустойчивы, называются *абсолютно неустойчивыми.*

При решении разностной задачи необходимо, чтобы разностная схема обладала свойством сходимости.

Сходимость схемы означает, что при сгущении сетки решение разностной задачи приближается к решению дифференциальной краевой задачи, то есть при $h \to 0$, $h_\tau \to 0$, $\| T - u \| \to 0$, где $x_i = ih$, $\tau_j = jh_\tau$, $u_i = u(x_i, \tau_j)$, $i = 0, 1, \ldots, N$, $j = 0, 1, \ldots, M$; T —

искомая функция; u — сеточная функция; $\| \|$ — норма функций в соответствующем пространстве, например $\|u_i\|_C = \max u_i$.

Схема сходится со скоростью $0(h^m + h_\tau^n)$, $m > 0$, $n > 0$, или имеет точность $0(h^m + h_\tau^n)$ порядка m по h и n по h_τ, если при достаточно малых $h \leqslant h_0$ и $h_\tau \leqslant h_{\tau_0}$

$$\|T - u\|_h \leqslant M\,(h^m + h_\tau^n),\ 0 \leqslant \tau_j \leqslant \tau_k,$$

где $M = \mathrm{const}$, не зависит от h и h_τ.

Рассмотренная выше схема 2 сходится в норме $\|u - T\|_C$ с первым порядком точности по времени и со вторым — по пространству. Ее сходимость следует из теоремы, доказываемой в теории разностных схем, согласно которой для линейной краевой задачи теплопроводности из аппроксимации и устойчивости схемы при корректно сформулированной задаче (то есть когда решение существует и единственно) следует сходимость к точному решению.

Подробно вопросы устойчивости, сходимости и аппроксимации рассмотрены в монографиях [16, 25, 61].

Очень важным вопросом при решении краевых задач методом сеток является построение разностной схемы. Существует много способов получения разностных аналогов дифференциальных операторов: метод формальной замены производных конечно-разностными выражениями, *метод интегральных тождеств (интегро-интерполяционный метод), метод неопределенных коэффициентов, вариационные методы построения разностных схем* и проч. [16, 25, 43, 61].

Выбор метода построения разностной схемы определяется, в первую очередь, требованием получения такого разностного аналога дифференциальной краевой задачи, который обеспечивал бы даже на грубых сетках необходимый уровень точности для получаемого приближенного решения. Поэтому разностные аналоги должны сохранять важнейшие свойства исходных дифференциальных уравнений.

Краевые задачи, описывающие процессы переноса, являются следствием основных законов сохранения субстанции (теплоты, энергии, массы и проч.). Поэтому естественно потребовать, чтобы и для построенной разностной схемы выполнялись законы сохранения. Такие разностные схемы называются *консервативными*. Схемы, в которых нарушаются законы сохранения, называются *неконсервативными*.

Одними из наиболее эффективных методов построения разностных схем является *интегро-интерполяционный* [61]. Рассмотрим этот метод.

Напомним, что разностная схема для дифференциального уравнения содержит значения сеточной функции в нескольких соседних узлах, образующих определенную конфигурацию. Такая совокупность узлов называется *шаблоном*. Например, для схем (*1*—*3*) шаблоны имеют вид, показанный на рис. 3.9.

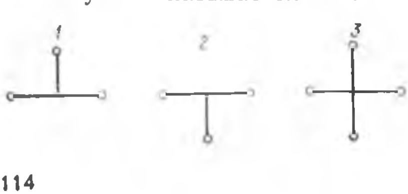


Рис. 3.9. Разностные шаблоны для уравнений: *1* — (3.53), *2* — (3.54), *3* — (3.55)

Суть интегро-интерполяционного метода состоит в следующем. После выбора шаблона область изменения независимых переменных разбивается на элементарные ячейки, связанные с шаблоном. Затем исходное дифференциальное уравнение интегрируют по ячейке и приходят с помощью формул векторного анализа к интегральным соотношениям, выражающим закон сохранения энергии для этой элементарной ячейки. Интегралы и производные, входящие в соотношения, заменяются затем разностными соотношениями так, чтобы не нарушались законы сохранения. Поскольку разностные соотношения могут быть взяты не единственным образом, можно получить различные разностные схемы.

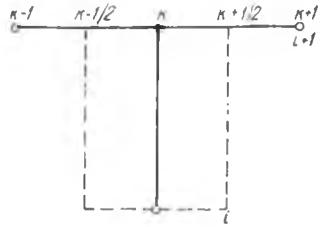


Рис. 3.10. Шаблон для неявной двухслойной разностной схемы

В качестве примера рассмотрим уравнение нестационарной теплопроводности с переменной теплопроводностью

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right). \tag{3.71}$$

На шаблоне, изображенном на рис. 3.10, выберем ячейку $\Omega_{k_i} = (x_{k-1/2} \leqslant x \leqslant x_{k+1/2},\ \tau_i \leqslant \tau \leqslant \tau_{i+1})$, показанную штриховой линией, и составим уравнение теплового баланса для этой ячейки:

$$\iint\limits_{\Omega_{k_i}} c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau}\, d\tau dx = \iint\limits_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(x,\ \tau)\frac{\partial T}{\partial x}\right) dx d\tau.$$

Используя формулу Грина [61]

$$\iint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial f_1}{\partial \tau} - \frac{\partial f_2}{\partial x}\right) d\Omega = \oint\limits_{\Gamma}(f_1 dx + f_2 d\tau),$$

преобразуем уравнение баланса к виду

$$c\rho \int\limits_{x_{k-1/2}}^{x_{k+1/2}} [T(x,\ \tau_{i+1}) - T(x,\ \tau_i)]\, dx = \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \Big[\lambda(x_{k+1/2},\ \tau) \times$$
$$\times \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{k+1/2} - \lambda(x_{k-1/2},\ \tau)\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{k-1/2}\Big] d\tau. \tag{3.72}$$

Обозначив

$$q(x,\ \tau) = -\lambda(x,\ \tau)\frac{\partial T}{\partial x}, \tag{3.73}$$

вычислим приближенно интегралы в равенстве (3.72):

$$\int\limits_{x_{k-1/2}}^{x_{k+1/2}} [T(x,\ \tau_{i+1}) - T(x,\ \tau_i)]\, dx \approx h\,[T(x_k,\ \tau_{i+1}) - T(x_k,\ \tau_i)], \tag{3.74}$$

$$\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} [q(x_{k-1/2}, \tau) - q(x_{k+1/2}, \tau)]\, d\tau \approx \frac{h_\tau}{2}[q(x_{k-1/2}, \tau_{i+1}) -$$

$$- q(x_{k+1/2}, \tau_{i+1}) - q(x_{k+1/2}, \tau_i) + q(x_{k-1/2}, \tau_i)]. \qquad (3.75)$$

С учетом (3.73), (3.74), заменяя в правой части (3.75) плотности тепловых потоков разностями, получим разностную аппроксимацию уравнения (3.71):

$$\frac{u_k^{i+1} - u_k^i}{h_\tau} = \frac{1}{2\rho c h}\left[\lambda_{k+1/2}^{i+1}\frac{u_{k+1}^{i+1} - u_k^{i+1}}{h} - \lambda_{k-1/2}^{i+1}\frac{u_k^{i+1} - u_{k-1}^{i+1}}{h} + \right.$$

$$\left. + \lambda_{k+1/2}^{i}\frac{u_{k+1}^{i} - u_k^{i}}{h} - \lambda_{k-1/2}^{i}\frac{u_k^{i} - u_{k-1}^{i}}{h}\right]. \qquad (3.76)$$

Половинные индексы означают, что значение коэффициента теплопроводности вычислено в полуцелых точках или как полусумма значений теплопроводности в соответствующих целых узлах.

Отметим, что схема (3.76) может быть применена в случае, когда коэффициент теплопроводности является непрерывной функцией, а также к задачам с разрывными λ.

§ 3.4. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СЕТОК ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ЗАТВЕРДЕВАНИИ МЕТАЛЛА В ФОРМЕ

В качестве примера, иллюстрирующего возможности метода конечных разностей, рассмотрим задачу о затвердевании металла в форме, которая относится к ряду весьма часто встречающихся (в металлургии, химической технологии и т. д.) и интересных практических задач.

Рассмотрим длинную цилиндрическую изложницу с внутренним радиусом R_2 и внешним радиусом R_3, которая в начальный момент времени заполняется некоторым расплавом.

Внешняя поверхность изложницы охлаждается, в результате чего в расплаве начинается направленный процесс кристаллизации.

Иногда, чтобы сохранить изложницу от сильных температурных воздействий, ее внутреннюю (рабочую) поверхность покрывают слоем изоляции *2*. Кроме этого, в результате термического расширения изложницы и усадочных явлений в затвердевшем металле *4* между изложницей и металлом может возникнуть газовый зазор *3*, влияющий на условия теплообмена в системе.

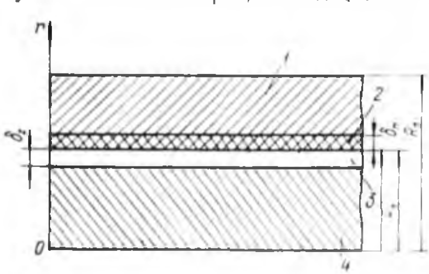


Рис. 3.11. Расчетная область для задачи о затвердевании металла:

1 — отливка; *2* — теплоизоляция; *3* — газовый зазор; *4* — изложница

Поскольку изложница достаточно длинная, мы ограничимся рассмотрением процесса в некотором ее поперечном сечении, пренебрегая торцевыми эффектами. Кроме этого, будем считать задачу симметричной и не учитывать термоконвективные токи в расплаве. Расчетная схема задачи показана на рис. 3.11.

С учетом сделанных предположений теплоперенос в затвердевающем расплаве описывается уравнением теплопроводности

$$c(T)\,\rho(T)\frac{\partial T}{\partial \tau}=\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial r}\right),\quad \tau>0,\quad 0<r<R_2 \tag{3.77}$$

с условиями на подвижной границе фазового перехода $r=\xi(\tau)$:

$$\left(\lambda_т\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{\xi-0}-\left(\lambda_ж\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{\xi+0}=L\rho_\infty\frac{d\xi}{d\tau},\quad r=\xi,\quad T(\xi,\ \tau)=T_ф, \tag{3.78}$$

где ξ — координата фронта затвердевания, разделяющая жидкую и твердую фазы металла (параметры, относящиеся к жидкой и твердой фазам, обозначаются соответственно индексами «ж» и «т»); L — удельная теплота кристаллизации; $T_ф$ — температура фазового перехода.

Задачу теплопроводности с нелинейным условием типа (3.78) на подвижной неизвестной границе фаз обычно называют задачей Стефана. Решение ее представляет серьезные математические трудности. Одним из конструктивных подходов в этом вопросе является учет тепловыделений на фронте кристаллизации в эффективной теплоемкости [62]. С этой целью вводится в рассмотрение δ-функция Дирака:

$$\delta(T,\ T_ф)=\begin{cases}1, & T=T_ф,\\ 0, & T\neq T_ф.\end{cases}$$

Теперь условия на фронте кристаллизации (3.78) будут учтены, если уравнение (3.77) заменить уравнением

$$[c(T)+L\delta(T-T_ф)]\,\rho(T)\frac{\partial T}{\partial \tau}=\frac{1}{r}\left(r\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial r}\right). \tag{3.79}$$

Произведя сглаживание коэффициентов на некотором интервале температур $[T_ф-\Delta,\ T_ф+\Delta]$ и заменяя δ-функцию Дирака δ-образной функцией, удовлетворяющей условию нормировки

$$\int\limits_{T_ф-\Delta}^{T_ф+\Delta}\delta(T-T_ф,\ \Delta)\,dT=1,$$

приходим к уравнению

$$c_{эф}(T)\,\rho(T)\frac{\partial T}{\partial \tau}=\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial r}\right),$$

формально совпадающему с (3.77), где, однако, введена эффективная теплоемкость:

$$c_{эф}=\begin{cases}c_т, & T<T_ф-\Delta,\\ c+L\delta(T-T_ф,\ \Delta), & T_ф-\Delta<T<T_ф+\Delta,\\ c_ж.\end{cases} \tag{3.80}$$

К аналогичной математической формулировке задачи можно прийти, если учитывать тепловыделение в затвердевающем расплаве при наличии двухфазной зоны кристаллизации, определяемой температурами солидуса (T_S) и ликвидуса (T_L) в соответствии с диаграммой состояния расплава. В этом случае можно считать $T_ф-\Delta=T_S$, $T_ф+\Delta=T_L$ и задаться вполне определенным видом δ-образной функции, исходя из аналитических зависимостей для линий солидуса и ликвидуса расплава.

При произвольном выборе интервала «размазывания» $[T_ф - \Delta,\ T_ф + \Delta]$ вид δ-образной функции определяется произвольно, например в виде «ступеньки», «пика» и т. п.

Перейдем к формулировке краевой задачи для системы тел «затвердевающий расплав» — «изложница». Условимся в дальнейшем параметры, относящиеся к расплаву, обозначать индексом «1», а параметры, относящиеся к изложнице, — «2».

Распределение температур в системе описывается одномерными нестационарными уравнениями теплопроводности

$$\rho_j(T_j)\, c_j(T_j)\, \frac{\partial T_j}{\partial \tau} = \frac{1}{r}\, \frac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda_j(T_j)\, \frac{\partial T_j}{\partial \tau}\right), \tag{3.81}$$
$$j = 1,\ 2, \quad c_1 = c_{эф}$$

с начальными условиями

$$T_j(r,\ 0) = T_{0_j}(r), \quad j = 1,\ 2, \tag{3.82}$$

условием симметрии температурного поля на оси цилиндра

$$\frac{\partial T_1}{\partial r} = 0 \text{ при } r = 0, \tag{3.83}$$

условием конвективного теплообмена на внешней поверхности цилиндра с некоторой охлаждающей жидкостью, имеющей температуру T_0:

$$-\lambda_2\, \frac{\partial T_2}{\partial r} = \alpha_2 (T_2 - T_0) \text{ при } r = R_3, \tag{3.84}$$

а также условиями сопряжения на внутренней поверхности изложницы, которые можно получить следующим образом.

Теплообмен между изложницей и расплавом осуществляется через двухслойную «контактную зону», состоящую из слоя теплоизоляции толщиной $\delta_п$ и зазора толщиной $\delta_z = \delta_z(\tau)$, которую мы считаем заданной функцией времени. Считая процесс теплопереноса через двухслойную зону квазистационарным, для плотностей тепловых потоков, проходящих через покрытие и зазор, можно записать

$$q_1 = \frac{\lambda_п}{\delta_п}(T_п - T_2), \tag{3.85}$$

$$q_2 = \frac{\lambda_z}{\delta_z}(T_1 - T_п) + \varepsilon_{1/2}\sigma_0 (T_1^4 - T_п^4), \tag{3.86}$$

где $\lambda_п$, λ_z — теплопроводности покрытия и зазора соответственно; $\varepsilon_{1/2}$ — интегральная степень черноты поверхности материала; σ_0 — постоянная Больцмана. Равенство (3.86) записано, очевидно, в предположении, что теплоперенос в зазоре осуществляется механизмами теплопроводности и радиации.

Приравнивая правые части в (3.85) и (3.86), получим

$$T_п = \frac{T_2 \dfrac{\lambda_п}{\delta_п} + T_1\left(\dfrac{\lambda_z}{\delta_z} + \alpha_л\right)}{\dfrac{\lambda_п}{\delta_п} + \dfrac{\lambda_z}{\delta_z} + \alpha_л}, \tag{3.87}$$

где

$$\alpha_л = \varepsilon_{1/2}\sigma_0 (T_1 + T_п)(T_1^2 + T_п^2) \tag{3.88}$$

— коэффициент лучистого теплообмена в зазоре.

Условия сопряжения имеют вид

$$-\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial r} = -\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial r} = G(T_1 - T_2) \text{ при } r = R_2, \tag{3.89}$$

где

$$G = \begin{cases} \dfrac{\lambda_п}{\delta_п}, \text{ если } \delta_z = 0,\ \delta_п \neq 0, \\ \dfrac{\lambda_п}{\delta_п}\left(\dfrac{\lambda_z}{\delta_z} + \alpha_л\right), \text{ если } \delta_z \neq 0,\ \delta_п \neq 0, \\ \dfrac{\lambda_z}{\delta_z} + \alpha_л, \text{ если } \delta_п = 0,\ \delta_z \neq 0. \end{cases} \tag{3.90}$$

Если теплоизоляционное покрытие отсутствует и $\delta_z = 0$, условия (3.89) заменяются условиями идеального теплового контакта

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial r} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial r}, \quad T_1 = T_2 \text{ при } r = R_2. \tag{3.91}$$

Итак, рассматриваемый процесс описывается системой уравнений (3.81)—(3.84), (3.89). Для ее решения воспользуемся конечно-разностным методом.

Введем в рассмотрение две неравномерные координатные сетки, состоящие соответственно из N_1 и N_2 узлов и покрывающие область решения задачи так, как показано на рис. 3.12. Сетки сдвинуты относительно геометрических границ расплава и изложницы таким образом, что эти границы находятся посредине между соответствующими координатными узлами. Это дает возможность повысить порядок аппроксимации граничных условий [25, 37, 61].

Для удобства вычислений введем безразмерные координаты $r' = r/a$, $a = R_S$ и температуру $u_j = (T_j - T_0)/T_0$, $j = 1,2$.

В новых безразмерных переменных краевая задача (3.81)—(3.84), (3.89) выглядит следующим образом (штрихи опускаем):

$$a^2 \rho_j(u_j)\, c_j(u_j) \frac{\partial u_j}{\partial \tau} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \lambda_j(u_j) \frac{\partial u_j}{\partial r}\right), \quad j = 1,\ 2, \tag{3.92}$$

$$-\lambda_2 \frac{\partial u_2}{\partial r} = a\alpha_2 u_2 \text{ при } r = 1, \tag{3.93}$$

$$-\lambda_2 \frac{\partial u_2}{\partial r} = -\lambda_1 \frac{\partial u_1}{\partial r} = \bar{G}(u_1 - u_2) \text{ при } r = R_2/R_3, \tag{3.94}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial r} = 0 \text{ при } r = 0, \tag{3.95}$$

$$u_j(r,\ 0) = u_{0_j}(r) \text{ при } \tau = 0, \tag{3.96}$$

где $\bar{G} = Ga$.

Безразмерная температура покрытия определяется из равенства

$$u_п = \frac{u_2 \dfrac{\lambda_п}{\delta_п} + u_1\left(\dfrac{\lambda_z}{\delta_z} + \alpha_л\right)}{\dfrac{\lambda_п}{\delta_п} + \dfrac{\lambda_z}{\delta_z} + \alpha_л}, \tag{3.97}$$

где

$$\alpha_л = \varepsilon_{1/2}\sigma_0 T_0^3 [(u_1 + 1)^2 + (u_п + 1)^2](u_1 + u_п + \alpha). \tag{3.98}$$

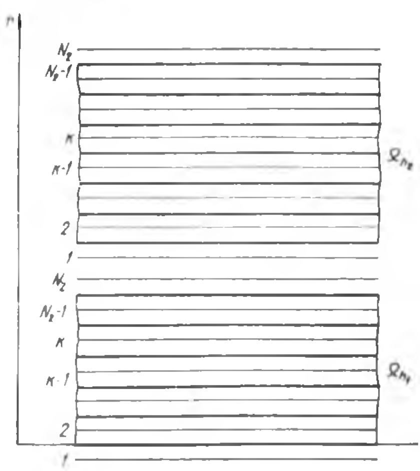


Рис. 3.12. Разностные сетки для отливки (Ω_{h_1}) и изложницы (Ω_{h_2})

Воспользовавшись интегро-интерполяционным методом, получим систему разностных уравнений, аналогичных уравнениям (3.92):

$$a^2\rho_i^{l+1}c_i\frac{u_i^{l+1}-u_i^l}{h_\tau}=\lambda_{i+1/2}^{l+1}\frac{u_{i+1}^{l+1}-u_i^{l+1}}{\bar{h}h_{i+1}}\left(1+\frac{1}{2}\frac{h_{i+1}}{r_i}\right)-$$

$$-\lambda_{i-1/2}^{l+1}\frac{u_i^{l+1}-u_{i-1}^{l+1}}{\bar{h}h_i}\left(1-\frac{1}{2}\frac{h_i}{r_i}\right), \tag{3.99}$$

$$h_i=r_i-r_{i-1},\quad h_{i+1}=r_{i+1}-r_i,\quad \bar{h}=(h_i+h_{i+1})/2,$$

которая описывает распределение температур во внутренних узлах расплава (сетка Ω_{h_1}, $i=2,\ 3,\ \ldots,\ N_1-1$) и изложницы (сетка Ω_{h_2}, $i=2,3,\ldots,N_2-1$).

Напомним, что уравнения (3.99) нелинейные, так как коэффициенты λ, ρ, c зависят от температуры, и на каждом временном слое должны решаться итерационными методами.

Наиболее удобен метод простой итерации [25, 63].

Вводя обозначения

$$a_i=\frac{\lambda_{i-1/2}^{l+1}}{\bar{h}h_i}\left(1-\frac{1}{2}\frac{h_i}{r_i}\right),\quad c_i=\frac{\lambda_{i+1/2}^{l+1}}{\bar{h}h_{i+1}}\left(1+\frac{1}{2}\frac{h_{i+1}}{r_i}\right),$$

$$b_i=a_i+c_i+\frac{a^2\rho_i^{l+1}c_i^{l+1}}{h_\tau},\quad d_i=-\frac{a^2\rho_i^{l+1}c_i^{l+1}u_i^l}{h_\tau}, \tag{3.100}$$

получим из (3.99) следующую систему для определения $(s+1)$-й итерации температурной сеточной функции на $(l+1)$-м временном слое:

$$a_i^{(s)}u_{i-1}^{(s+1)}-b_i^{(s)}u_i^{(s+1)}+c_i^{(s)}u_{i+1}^{(s+1)}=d_i^{(s)},$$
$$s=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ s_0. \tag{3.101}$$

Таким образом, значения коэффициентов a_i, b_i, c_i и d_i вычисляются по значениям температур на предыдущей итерации. В качестве нулевого приближения принимаются значения параметров с предыдущего временного слоя. При $s_0=0$ получаем безытерационную схему, представляющую собой линейный аналог схемы (3.99). Итерации прекращают, когда разность между последовательными приближениями становится меньше некоторого наперед заданного числа $\varepsilon_{\text{ит}}$, или когда число итераций превысит определенное заранее максимальное число итераций s_0.

Проведем аппроксимацию граничных условий (3.93)—(3.95):

$$-\lambda_{N_1-1/2}\frac{u_{N_1}-u_{N_1-1}}{h_{N_1}}=\frac{a\alpha_2}{2}(u_{N_1}+u_{N_1-1}), \tag{3.102}$$

$$-\frac{\lambda_{N_1-1/2}}{h_{N_1}}(u_{N_1}-u_{N_1-1})=-\frac{\lambda_{2-1/2}}{h_2}(u_2^{(2)}-u_1^{(2)})=\bar{G}\left(\frac{u_{N_1}+u_{N_1-1}}{2}-\frac{u_2^{(2)}-u_1^{(2)}}{2}\right), \tag{3.103}$$

$$u_1^{(1)}=u_2^{(1)}, \tag{3.104}$$

где индекс в круглых скобках указывает на принадлежность сеточной функции расплаву (1) и изложнице (2).

Итак, получили систему (N_1+N_2) линейных уравнений (3.101)—(3.104) для определения (N_1+N_2) сеточных функций, которую будем решать методом прогонки [16, 25, 63] (в сочетании с итерациями). Этот метод дает возможность решать систему алгебраических уравнений с трехдиагональной (как в данном случае) матрицей и устойчив, если выполняются условия преобладания диагональных элементов $|b_i|\geqslant|a_i|+|c_i|$, которые, как легко заметить, следуют из равенств (3.100).

Реализуем метод прогонки. Предположим, что зависимость между сеточными температурами в i-м и $(i+1)$-м узлах может быть выражена соотношениями

$$u_i = x_{i+1}u_{i+1} + y_{i+1}, \tag{3.105}$$
$$i = 1,\ 2,\ \ldots,\ N_1 - 1 \text{ на сетке } \Omega_{h_1} \times \Omega_\tau,$$
$$i = 1,\ 2,\ \ldots,\ N_2 - 1 \text{ на сетке } \Omega_{h_2} \times \Omega_\tau,$$

где x_i, y_i — некоторые пока неизвестные коэффициенты, которые называются *прогоночными*. Подставляя выражения для u_i из (3.105) в уравнения (3.100), получим, что прогоночные коэффициенты должны удовлетворять рекуррентным соотношениям

$$x_{i+1} = \frac{c_i}{b_i - a_i x_i}, \quad y_{i+1} = \frac{a_i y_i - d_i}{b_i - a_i x_i}, \tag{3.106}$$
$$i = 2,\ 3,\ \ldots,\ N_1 - 1 \text{ для сетки } \Omega_{h_1} \times \Omega_\tau,$$
$$i = 2,\ 3,\ \ldots,\ N_2 - 1 \text{ для сетки } \Omega_{h_2} \times \Omega_\tau.$$

По формулам (3.106) определим значения первых прогоночных коэффициентов $x_2^{(1)}$, $y_2^{(1)}$ и $x_2^{(2)}$, $y_2^{(2)}$ для расплава и изложницы соответственно. Это можно сделать, используя граничные условия (3.103) и (3.104). Действительно, чтобы выполнялось равенство $u_1^{(1)} = x_2^{(1)}u_2^{(1)} + y_2^{(1)}$ и удовлетворялось условие (3.103), необходимо положить

$$x_2^{(1)} = 0, \quad y_2^{(1)} = 0. \tag{3.107}$$

Теперь обратимся к равенствам (3.104), которые перепишем в виде

$$u_{N_1}^{(1)} - u_{N_1-1}^{(1)} = k\,(u_2^{(2)} - u_1^{(2)}), \tag{3.108}$$

$$u_2^{(2)} - u_1^{(2)} = -g\,(u_{N_1}^{(1)} + u_{N_1-1}^{(1)} - u_2^{(2)} - u_1^{(2)}), \tag{3.109}$$

где введены обозначения

$$k = \left[\frac{g_1}{g_2}\right]^{-1}, \quad g = \frac{\bar{G}}{2g}, \quad g_1 = \frac{\lambda_{N_1-1/2}^{(1)}}{h_{N_1}}, \quad g_2 = \frac{\lambda_{1/2}^{(2)}}{h_2}. \tag{3.110}$$

Из (3.108) с учетом рекуррентных соотношений (3.110) для $i = N_1 - 1$ имеем

$$u_{N_1}^{(1)} = \frac{k\,(u_1^{(2)} - u_2^{(2)}) - y_{N_1}^{(1)}}{x_{N_1-1}^{(1)}}. \tag{3.111}$$

Подставляя выражение для u_{N_1} в уравнение (3.109) и избавляясь при помощи разностного соотношения от члена u_{N_1-1}, получаем

$$u_2^{(2)} = u_1 \frac{1 - g\left(\dfrac{x_{N_1+1}}{x_{N_1-1}}k + 1\right)}{1 - g\left(\dfrac{x_{N_1+1}}{x_{N_1-1}}k - 1\right)} - \frac{y_{N_1}g\left(\dfrac{x_{N_1+1}}{x_{N_1-1}}\right)}{1 - g\left(\dfrac{x_{N_1+1}}{x_{N_1-1}}k - 1\right)}.$$

Отсюда, в силу соотношений (3.105), получаем

$$x_2^{(2)} = \frac{1 - g\left(\dfrac{x_{N_1+1}^{(1)}}{x_{N_1-1}^{(1)}}k + 1\right)}{1 - g\left(\dfrac{x_{N_1+1}^{(1)}}{x_{N_1-1}^{(1)}}k - 1\right)},$$

$$y_2^{(2)} = \frac{y_{N_1} g \dfrac{x^{(1)}_{N_1+1}}{x^{(1)}_{N_1-1}}}{1 - g\left(\dfrac{x^{(1)}_{N_1+1}}{x^{(1)}_{N_1-1}} k - 1\right)}. \qquad (3.112)$$

Таким образом, все прогоночные коэффициенты определены.

Вычисление сеточных температур осуществляется так называемой *обратной прогонкой*. Из граничного условия (3.102) с учетом соотношения $u_{N_2-1} = x_{N_2} u_{N_2} + y_{N_2}$ получаем

$$u_{N_2} = \frac{y_{N_2}}{\dfrac{f_1 + f_2}{f_1 - f_2} - x_{N_2}}, \qquad (3.113)$$

где

$$f_1 = \frac{\lambda_{N_2-1/2}}{h_{N_2}}, \quad f_2 = \frac{a\alpha_2}{2}.$$

Теперь по формулам (3.105) определяем $u^{(2)}_{N_2-1}, u^{(2)}_{N_2-2}, \ldots, u^{(2)}_1$, а затем из равенства (3.106) находим значение $u^{(1)}_{N_1}$. Сеточные функции $u^{(1)}_{N_1-1}, u^{(1)}_{N_1-2}, \ldots u^{(1)}_1$ определяются последовательно также из соотношений (3.105) для расплава. Итак, сеточные функции определены. Далее по известному температурному полю расплава определяется координата фронта затвердевания:

$$\xi = r_{l-1} + \frac{u_l - u_ф}{u_l - u_{l-1}}, \quad u_l < u_ф < u_{l-1}.$$

Для нахождения решения на следующем временном слое (следующей итерации) всю описанную выше процедуру повторяют, используя значения теплофизических коэффициентов, рассчитанных по вновь определенному полю температур.

Следует отметить, что уравнение теплопроводности (3.77) в точке $r = 0$ имеет особенность, которую необходимо учитывать при построении разностной схемы. Обычно в узлах, близких к точке $r = 0$, переходят к разностной схеме для уравнения теплопроводности в декартовых координатах

$$\rho_i c_i \frac{\hat{u}_i - u_i}{h_\tau} = \frac{2}{h}\left(\frac{\hat{u}_{i+1} - \hat{u}_i}{h_{i+1}} \lambda_{i+1/2} - \frac{\hat{u}_i - \hat{u}_{i-1}}{h_i} \lambda_{i-1/2}\right). \qquad (3.114)$$

Нетрудно показать, что такой переход вполне закономерен. Действительно, используя граничное условие (3.95) и правило Лопиталя при $r \to 0$, правую часть уравнения (3.92) можно представить в виде

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda \frac{\partial \bar{u}}{\partial r}\right) = \lim_{r\to 0}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda \frac{\partial \bar{u}}{\partial r}\right)\right] + \lim_{r\to 0} \frac{\lambda \dfrac{\partial u}{\partial r}}{r} = 2 \frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda \frac{\partial \bar{u}}{\partial r}\right)\Bigg|_{r=0}. \qquad (3.115)$$

Соотношение (3.115) представляет собой удвоенную правую часть уравнения теплопроводности в декартовых координатах. Таким образом, при $r \to 0$ исходное уравнение теплопроводности (3.77), записанное в цилиндрических координатах, преобразуется в уравнение, аналогичное уравнению теплопроводности в декартовых координатах, и аппроксимируется разностной схемой (3.114).

Изложенный в настоящем параграфе алгоритм расчета затвердевания металла реализован в виде подпрограммы MEST. Эта подпрограмма позволяет решать сопряженную нелинейную краевую задачу теплопроводности о затвердевании в изложнице плоского или цилиндрического слитка, а также полой цилиндрической заготовки с граничными условиями III рода на внутренней поверхности.

Обращение к подпрограмме осуществляется при помощи оператора

```
      CALL MEST (R1, R2, R3, D1, LKR, TQ, TG, TS, TL, TF,
     * RF, RR1, RR2, U1, U2, U1Q, U2Q, U1 IT, U2IT, PR1,
     * PR2, PU1, PU2, XXS, PN1, PN2, L1, L2, N1, N2, NB, N5,
     * N4, NR1, NR2, JIT, JR, NL, EIT, A, TAU, FTAU, P,
     * EPS, LB, X1, X2, Y1, Y2).
```

Ниже приведены тексты подпрограммы MEST и необходимых для ее выполнения вспомогательных модулей.

ПОДПРОГРАММА 9

```
      SUBROUTINE MEST (R1, R2, R3, D1, LKR, T0, TG, TS,
     * TL, TF, RF,
     * RR1, RR2, U1, U2, U10, U20, U1IT, U2IT, PR1, PR2,
     * PU1, PU2,
     * XXS, RN1, RN2, L1, L2, N1, N2, N3, N5, N4, NR1, NR2,
      JIT, JR,
     * NL, EIT, A, TAU, FTAU, D, EPS, LB, X1, X2, Y1, Y2)
C     ПОДПРОГРАММА ДЛЯ РАСЧЕТА ПОЛЕЙ ТЕМПЕРАТУР
C     В ЗАТВЕРДЕВАЮЩЕМ МЕТАЛЛЕ И СТЕКЛЕ
C     ОПИСАНИЯ
      REAL RR1 (N1), U1 (N1), U10 (N1), U1IT (N1), PN1 (N1),
     * L1 (N1)
      REAL RR2 (N2), U2 (N2), U20 (N2), U2IT (N2), PN2 (N2),
     * L2 (N2)
      REAL PR1(NR1), PU1(N4, NR1), XXS(N4), X1(N1), Y1(N1)
      REAL PR2(NR2), PU2(N4, NR2), X2(N2), Y2 (N2)
      REAL LKR, LB
      J1 = 0
      JN5 = 0
      JN4 = 0
      UG = (TG — T0)/T0
      US = (TS — T0)/T0
      UL = (TL — T0)/T0
      UF = (TF — T0)/T0
      XS = R2/A
      I1 = N1 — 1
      I2 = N2 — 1
      ALL = 0
C     ФОРМИРОВАНИЕ МАССИВОВ БЕЗРАЗМЕРНЫХ
      КООРДИНАТ
      IF (JR.LT.0) GO TO 3
      H1 = (R2 — R1)/A / (N1 — 2)
      RR1 (1) = R1/A — H1/2
      DO 1 I = 1, I1
    1 RR1 (I + 1) = RR1 (I) + H1
      H2 = (R3— R2)/A/(N2 — 2)
      RR2 (1) = R2/A — H2/2
```

```
      DO 2 I = 1, 12
   2  RR2 (I + 1) = RR2 (I) + H2
   3  CONTINUE
      PRINT 400, N1, (RR1 (I), I = 1, N1)
 400  FORMAT (20X,'ЧИСЛО КООРДИНАТНЫХ УЗЛОВ ПО',
     * 'МЕТАЛЛУ N1=', I4/
     * 20X,'БЕЗРАЗМЕРНЫЕ КООРДИНАТЫ УЗЛОВ ПО
     * МЕТАЛЛУ'
     * /8 (3X, F10.6))
      PRINT 401, N2, (RR2 (I), I = 1, N2)
 401  FORMAT (20X,'ЧИСЛО КООРДИНАТНЫХ УЗЛОВ ПО',
     * 'СТЕКЛУ N2=', I4/20X,'БЕЗРАЗМЕРНЫЕ КООРДИ',
     * 'НАТЫ УЗЛОВ ПО СТЕКЛУ'/8 (3X, F10.6))
C     НАЧАЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ
      DO 90 I = 1, N1
  90  U1 (I) = U10 (I)
      DO 91 I = 1, N2
  91  U2 (I) = U20 (I)
      PRINT 110
 110  FORMAT (10X,'НАЧАЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ БЕЗРАЗМЕР',
     * 'НЫХ ТЕМПЕРАТУР МЕТАЛЛА И СТЕКЛА'/)
      PRINT 100, (U1 (I), I = 1, N1)
      PRINT 100, (U2 (I), I = 1, N2)
 100 FORMAT (8 (3X, F10.6))
      H1 = RR1 (2) — RR1 (1)
      H2 = RR2 (2) — RR2 (1)
      UKR = (U1 (N1) + U1 (N1 — 1)) * 0.5
   9  CONTINUE
C     ИТЕРАЦИИ
      DO 30 J1 = 1, JIT
  83  CONTINUE
      DO 92 I = 1, N1
  92  U1IT (I) = U1 (I)
      DO 93 I = 1, N2
  93  U2IT (I) = U2 (I)
      CALL COEF (N1, N2, U1, U2, PN1, PN2, L1, L2, AL1, AL2,
     * TS, TL, RF, T0, LKR, D, LB, T, UG, UKR)
      A4 = AL1 * A * 0.5
      A5 = AL2 * A * 0.5
C     ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОГОНОЧНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ
C     ПО МЕТАЛЛУ
      F1 = L1 (2) / H1
      X1 (2) = (F1 — A4) / (F1 + A4)
      Y1 (2) = 2. * A4/ (F1 + A4) * UG
      DO 10 I = 2, 11
      HP = RR1 (I + 1) — RR1 (I)
      HM = RR1 (I) — RR1 (I — 1)
      H = (HM + HP) * 0.5
      IF (I — NL) 11, 11, 12
```

```
   11   CONTINUE
C       ДЕКАРТОВЫ  КООРДИНАТЫ
        AI = L1 (I) * HP/HM
        CI = L1 (I + 1)
        GO TO 13
   12   CONTINUE
C       ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ  КООРДИНАТЫ
        AI = (1 — 0.5 * HM/RR1 (I)) * L1 (I) * HM/HP
        CI = (1 + 0.5 * HP/RR1 (I)) * L1 (I + 1)
   13   CONTINUE
        BI = A * A * PN1 (I) / TAU * HP * H * AI + CI
        DI = —A * A * PN1 (I)/TAU * HP * H * UIG (I)
        X1 (I + 1) = CI/ (BI — AI * X1 (I))
        Y1 (I + 1) = (AI * Y1 (I) — DI) / CI * X1 (I + 1)
   10   CONTINUE
C       ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОГОНОЧНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПО
C       СТЕКЛУ
        IF (D1.EQ.0.AND.D.EQ.0) GO TO 53
        GO TO 44
   53   CONTINUE
C       ИДЕАЛЬНЫЙ  КОНТАКТ
        F1 = L2 (2) / L1 (N1) * HP/H2
        F2 = (1 — X1 (N1)) / (1 + X1 (N1))
        X2 (2) = (F1 — F2) / (F1 + F2)
        Y2 (2) = (1 + F2/ (F1 + F2) * Y1 (N1)
        GO TO 45
   44   CONTINUE
C       НЕИДЕАЛЬНЫЙ  КОНТАКТ
C       ВЫЧИСЛЕНИЕ  GK  И  ALL
        F1 = (U1 (N1) + U1 (N1 — 1)) * 0.5
        IF (D.GT.0) ALL = ((F1 + 1) ** 2 * (UKR + 1)** 2)*
      * (F1 + UKR + 2) * EPS * SI * T0 ** 3
        IF (D.EQ.0) GK = LKR/D1 * A
        IF (D1.EQ.0) GK = (LB/D1 + ALL) * A
        IF (D1.GT.0.AND.D.GT.0) GK = LKR/D1 * A * (LB/D +
      * ALL) / (LKR/D1 + LB/D + ALL)
C       — — — — — — — — — — — — — —
        F1 = L1 (N1)/ HP
        F2 = L2 (2) / H2
        A3 = (X1 (N1) + 1) / (X1 (N1) — 1) * F2/F1
        A2 = 2 * F2 — GK * (A3 — 1)
        X2 (2) = (2 * F2 — GK * (AK + 1)) / A2
        Y2 (2) = —Y1 (N1) * A3 * F1/F2 * GK/A2
   45   CONTINUE
        DO 20 I = 2, I2
        HP = RR2 (I + 1) — RR2 (I)
        HM = RR2 (I) — RR2 (I — 1)
        H = (HP + HM) / 2
        IF (N1.EQ.NL) GO TO 21
```

```
      GO TO 22
   21 CONTINUE
C     ДЕКАРТОВЫ КООРДИНАТЫ
      AI = L2 (I) * HP / HM
      CI = L2 (I + 1)
      GO TO 23
   22 CONTINUE
C     ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ
      AI = (1 — 0.5 * HM/RR2 (I)) * L2 (I) * HM / HP
      CI = (1 + 0.5 * HP/RR2 (I)) * L2 (I + 1)
   23 CONTINUE
      BI = A * A * PN2 (I) / TAU * HP * H + AI * CI
      DI = —A * A * PN2 (I) / TAU * HP * H * U20 (I)
      X2 (I + 1) = CI / (BI — AI * X2 (I))
      Y2 (I + 1) = (AI * Y2 (I) — DI) / CI * X2 (I + 1)
   20 CONTINUE
C     ВЫЧИСЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУР
C     СТЕКЛО
      F1 = L2 (N2) / HP
      U2 (N2) = Y2 (N2) / ((F1 + A5) / (F1 — A5) — X2 (N2))
      DO 25 I = 1, I2
      II = N2 — I
   25 U2 (II) = U2 (II + 1) * X2 (II + 1) + Y2 (II + 1)
C     МЕТАЛЛ
      IF (D.EQ.0.AND.D1.EQ.0.) GO TO 47
      GO TO 48
   47 F1 = L1 (N1) / (RR1 (N1) — RR1 (N1 — 1))
      U1 (N1) = (U2 (1) + U2 (2) — Y1 (N1)) / (1 + X1 (N1))
      GO TO 49
   48 CONTINUE
      HM = RR1 (N1) — RR1 (N1 — 1)
      F1 = L1 (N1) / HM
      F2 = L2 (2) / H2
      U1 (N1) = (F2/F1*(U2 (1) — U2 (2)) — Y1 (N1)) / (X1(N1)
     * —1)
   49 CONTINUE
      DO 15 I = 1, I1
      II = N1 — I
      U1 (II) = U1 (II + 1) * X1 (II + 1) + Y1 ( II + 1)
   15 CONTINUE
C     ВЫЧИСЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ ПОКРЫТИЯ
      F1 = (U1 (N1) + U1 (N1 — 1)) * 0.5
      F2 = (U2(1) + U2(2)) * 05
      UKR = F1
      IF (D.GT.0.) UKR = (F1*(LB/D + ALL) + F2* LKR/D1)/
     * (LB/D + ALL + LKR/D1)
      DO 80 I = 1, N1
      F1 = ABS (1 — U1IT (I)/U2 (I))
      IF (F1.GE.EIT) GO TO 83
```

```
   80  CONTINUE
       DO 81 I = 1, N2
       FI = ABS(1 — U2IT (I) / U2 (I))
       IF (FI.GE.EIT) 60 TO 83
   81  CONTINUE
   30  CONTINUE
       DO 85 I = 1, N1
   85  U10 (I) = U1 (I)
       DO 86 I = 1, N2
   86  U20 (I) = U2 (I)
C      ВЫЧИСЛЕНИЕ  КООРДИНАТЫ  ФРОНТА  ЗАТВЕРДЕ-
C      ВАНИЯ
       DO 61 I = 1, I1
       IF (UF.GE.U1 (I + 1).AND.U1 (I).GE.UF) XS = RR1(I)
     * + (RR1 (I + 1) — RR1 (I)) / (U1 (I + 1) — U1 (I))
     * (UF — U1   (I))
   61  CONTINUE
       IF (XS.GT.R2/A) XS = R2/A
       IF (XS.LT.R1/A) XS = R1 / A
        JN5 = JN5 + 1
C      ЗАПОЛНЕНИЕ МАССИВОВ ПЕЧАТИ
       JN4 = JN4 + 1
       XXS (JN4) = XS * A
       DO 71 I = 1, NR1
   71  CALL LLN (PR1 (I), PU1 (JN4, I), RR1, U1, N1)
       DO 72 I = 1, NR2
   72  CALL LLN (PR2 (I), PU2 (JN4, I), RR2, U2, N2)
       DO 73 I = 1, NR1
   73  PU1 (JN4, I) = PU1 (JN4, I) * T0 + T0
       DO 74 I = 1, NR2
   74  PU2 (JN4, I) = PU2 (JN4, I) * T0 + T0
       JN5 = 0
   70  CONTINUE
       J1 = J1 + 1
       IF (J1.GT.NB) GO TO 50
       GO TO 9
   50  CONTINUE
       CALL MAP (PU1, PU2, XXS, N1, N2, N4, N5, NR1, NR2,
     * FTAU, TAU)
       RETURN
       END

       SUBROUTINE COEF (N1, N2, U1, U2, PN1, PN2, L1, L2,
     * AL1, AL2, TS, TL, RF, T0, LKR, D, LB, T, UG, UKR)
C      ПОДПРОГРАММА ВЫЧИСЛЕНИЯ ЗНАЧЕНИЙ ТЕПЛО
C      ФИЗИЧЕСКИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ НА КАЖДОМ ВРЕ
C      МЕННОМ СЛОЕ
C      КОНКРЕТНЫЙ ВИД ПРОГРАММЫ ДЛЯ СЛУЧАЯ,
C      КОГДА ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ
```

```
C       ПОСТОЯННЫ ИЛИ ЯВЛЯЮТСЯ ФУНКЦИЯМИ
C       БЕЗРАЗМЕРНЫХ ТЕМПЕРАТУР
C       ОПИСАНИЯ
        REAL U1 (N1), U2 (N2), L1 (N1), L2 (N2), PN1 (N1), PN2(N2)
        REAL LKR, LB
C       В МАССИВАХ TT1, TT2, TLB, НАХОДЯТСЯ БЕЗРАЗ-
        МЕРНЫЕ ТЕМПЕРАТУРЫ
        COMMON / TT1 / TT1, TT2, PC1, PC2, LOT1, LOT2, NT1,
        NT2, TTL, LLB, NLB
        REAL TT1 (20), TT2 (20), PC1 (20), PC2 (20), LOT1 (20),
      * LOT2 (20), TTL (20), LLB (20)
C       ЗНАЧЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ТЕПЛООТДАЧИ
        AL1 =0
        AL2 = 5800.
C       ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ МЕТАЛЛА
        DO 1 I = 2, N1
        F1 = (U1 (I) + U1 (I) (I — 1))  0.5
        CALL LLN (F1, L1 (I), TT1, LOT1, NT1)
    1   CONTINUE
C       ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ СТЕКЛА
        DO 2 I= 2, N2
        F2 = (U2 (I) + U2 (I — 1)) * 0.5
        CALL LLN (F2, L2 (I), TT2, LOT2, NT2)
      2 CONTINUE
C       ТЕПЛОЕМКОСТЬ И ПЛОТНОСТЬ МЕТАЛЛА
        DEL = TL — TS
        DO 3 I = 1, N1
        CALL LLN (U1 (I), PN1 (I), TT1, PC1, NT1)
        F1 = U1 (I) * T0 + T0
        IF (F1.LE.TL.AND.F1.GE.TS) PN1 (I) = PN1 (I) + RF *
      * DE (TS, TL, DEL, 0., 0., F1)
        PN1 (I) = PN1 (I) * RO1 (U1 (I))
    3   CONTINUE
C       ТЕПЛОЕМКОСТЬ И ПЛОТНОСТЬ СТЕКЛА
        DO 4 I = 1, N2
        CALL LLN (U2 (I), PN2 (I), TT2, PC2, NT2)
        PN2 (I) = PN2 (I) * RO2 (U2 (I))
    4   CONTINUE
C       ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ЗАЗОРА
        IF (D.EQ.0.) GO TO 5
        F1 = (U1 (N1) + U2 (1)) * 0.5
        CALL LLN (F1, LB, TTL, LLB, NLB)
    5   CONTINUE
C       ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ПОКРЫТИЯ
        LKR = FLKR (UKR)
        RETURN
        END

        REAL FUNCTION DE (TS, TL, D1, D2, D3, F1)
```

```
      H = 1./(0.5 * D1 + D3 + 0.5 * D2)
      IF (F1.LT.TS.OR.F1.GT.TL) GO TO 4
      IF (F1.LE.(TS + D1)) DE = (F1 — TS) / D1 * H
      IF (F1.GT.(TS + D1).AND.F1.LE(TS+D1+D3)) DE = H
      IF (F1.GT.(TL — D2)) DE = H — ((F1—TL) / D2 + 1) * H
    4 RETURN
      END

      REAL FUNCTION RO1 (T)
C     БЕЗРАЗМЕРНЫЕ ТЕМПЕРАТУРЫ
      IF (T — 3.34) 1, 1, 2
    1 RO1 = 8960
      GO TO 3
    2 RO1 = 8960 — 2812.8 * (T — 3.34)
      IF (T.GT.3.69) RO1 = 8000
    3 CONTINUE
      RETURN
      END

      REAL FUNCTION RO2 (T)
      RO2 = 2580
      RETURN
      END

      REAL FUNCTION FLKR (U)
      FLKR = 0.3
      RETURN
      END

      SUBROUTINE MAP (PU1, PU2, XXS, N1, N2, N4, N5,
     * NR1, NR2, FTAU, TAU)
C     ПОДПРОГРАММА ПЕЧАТИ
C     ОПИСАНИЯ
      REAL PU1 (N4, NR1), PU2 (N4, NR2), XXS (N4)
C     — — — — — — — — — — — — — — — —
      PRINT 500, FTAU
  500 FORMAT (20X,'ВРЕМЯ ИЗМЕРЯЕТСЯ В СЕКУНДАХ',
     * 'УМНОЖЕННЫХ НА', E12.6/)
      PRINT 302
      DO 18 I = 1, N4
      JJ = I * N5 * TAU / FTAU + 1.E — 6
   18 PRINT 303, JJ, XXS (I), (PU1 (I, J), J = 1,11)
      PRINT 304
      DO 31 I = 1, N4
      JJ = I * N5 * TAU / FTAU + 1.E — 6
   31 PRINT 305, JJ, (PU2, (I, J), J = 1, 11)
  302 FORMAT (/50X,'ОТЛИВКА'// 3X, 'ВРЕМЯ', 3X, XSOL',
     * 6X, 'T1', 6X, 'T2', 6X, 'T3', 6X, 'T4', 6X, 'T5', 6X,'T6',
     * 6X, 'T7', 6X, 'T8', 6X, 'T9', 6X, 'T10', 5X, 'T11'/)
  304 FORMAT (/50X,'ИЗЛОЖНИЦА'// 12X, 'ВРЕМЯ',
     * 6X, 'T1', 6X, 'T2', 6X, 'T3', 6X, 'T4', 6X, 'T5', 6X, 'T6',
```

```
     * 6X,  'T7', 6X, 'T8', 6X, 'T9', 6X, 'T10', 5X, 'T11)'/)
 303   FORMAT (3X, I5, 1X, F10.8, 1X, 11 (F6.1, 2X))
 305   FORMAT (12X, I5, 3X, 11 (F6.1, 2X))
       RETURN
       END

       SUBROUTINE LIN (X, Y, AX, AY, N)
C      ПОДПРОГРАММА ЛИНЕЙНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ
       DIMENSION AX (N), AY (N)
       DO 1 J = 2, N
       IF (AX (J). GE.X) GO TO 2
   1   CONTINUE
   2   Y = AY(J—1) + (X—AX (J—1)) / (AX(J)—AX (J—1)) *
     * (AY (J) — AY (J — 1))
       RETURN
       END
```

СПИСОК ИДЕНТИФИКАТОРОВ

R1 — внутренний радиус цилиндрической отливки (если отливка сплошная, R1 = 0); R2, R3 — внутренний и внешний радиусы изложницы; D1, LKR — толщина и теплопроводность покрытия; D1, LTQ — температура охлаждающей среды T_0; TG — температура газов над внутренней поверхностью полой цилиндрической отливки; TS, TL, TF — температуры солидуса, ликвидуса и фазового перехода соответственно; RF — удельная теплота кристаллизации; RR1, RR2 — массивы размерности N1 и N2 соответственно, где хранятся значения координатных узлов сеток Ω_{h_1}, и Ω_{h_2}; U1, U2 — массивы размерностей N1 и N2 значений сеточных функций в узлах на данном временном слое; U1Q, U2Q — аналогичные массивы для хранения сеточных температур на предыдущем временном слое или начальных значений; U1IT, U2IT — массивы сеточных функций на предыдущей итерации; PR1, PR2 — массивы размерности NR1 и NR2 координат точек отливки и изложницы, в которых необходимо получить и вывести на печать значения температур; PU1, PU2 — двухмерные массивы размерности N4 $\times$ $\times$ NR1 и N4 $\times$ NR2, в которых содержатся таблицы температур, выводимых на печать; (j, k)-й элемент массивов PU1, PU2 содержит значение температуры на $j \times$ N5 шаге по времени в точке соответственно отливки, имеющей координату PR1 (K), и изложницы, имеющей координату PR2 (K); XXS — массив размерности N4 для хранения значений координат фронта затвердевания в N4-х моментах времени через каждые N5 временных шагов; PN1, PN2 — значения произведения плотности и теплоемкости отливки и изложницы соответственно в узлах сеток Ω_{h_1} и Ω_{h_2}. Размерности массивов N1 и N2; L1, L2 — массивы значений теплопроводности отливки и изложницы в полученных узлах сеток Ω_{h_1} и Ω_{h_2} соответственно; N1, N2 — число узлов в координатных сетках Ω_{h_1} и Ω_{h_2}; NB — количество необходимых шагов по времени; N5 — число шагов по времени, через которое происходит заполнение таблиц печати результатов (N5 = = NB/N4); JIT — максимальное число итераций на каждом временном слое; JR — параметр, задающий вид координатной сетки: если JR > 0, то используются равномерные координатные сетки и массивы значений координатных узлов PR1, PR2 определяются в теле подпрограммы; в противном случае (JR < < 0) массивы PR1 и PR2 должны быть заданы пользователем; NL — параметр, задающий количество узлов по отливке вблизи начала координат, в которых используется разностная схема для уравнения теплопроводности в декартовых координатах. При $NL = 0$ получаем задачу о полой цилиндрической заготовке, при $NL = N1$ — плоскую задачу; EIT — относительная точность проведения итераций; Λ — параметр обезразмеривания; TAU — временной шаг; FTAU — масштаб времени (используется только при печати результатов); P — величина газового зазора (в данный момент времени); EPS — интегральная степень черноты $\varepsilon_{1/2}$; LB — теплопроводность зазора; X1, Y1, X2, Y2 — массивы прогоночных коэффициентов размерности N1 и N2 соответственно.

Для работы подпрограммы необходимо наличие подпрограмм COEF, LLN, MAP, а также подпрограмм-функций RO1, RO2, DE.

В подпрограмме COEF, вызов которой осуществляется оператором

```
CALL COEF (N1, N2, U1, U2, PN1, PN2, L1, L2, AL1, AL2,
* TS, TL, RF, TQ, LKR, D, LB, T, UG, UKR),
```

вычисляются текущие значения теплофизических коэффициентов λ, ρ, C в узлах сетки на данном временном слое (итерации) по известному полю температур (массивы U1, U2). Кроме того, вычисляются текущие значения коэффициентов теплоотдачи на внутренней поверхности отливки (AL1) и внешней поверхности изложницы (AL2), величина (D) и теплопроводность (LB) зазора. Для варианта подпрограммы COEF, приведенного в приложении, зависимость плотностей от температуры задается при помощи подпрограмм-функций RO1 и RO2, а таблицы значений теплоемкости и теплопроводности содержатся в массивах PC1, LOT1 для отливки и PC2, LOT2 для изложницы, причем эти значения соответствуют температурам, помещенным в массивы TT1 и TT2. Размерности массивов: NT1 — для отливки, NT2 — для изложницы. Значения теплопроводности зазора при температурах, содержащихся в массиве TTL, хранятся в массиве LLB размерности NLB. Для обеспечения работы программы необходимо наличие в главной программе операторов

```
COMMON/TT1/TT1, TT2, PC1, PC2, LOT1, LOT2, NT1,
* NT2, TTL, LLB, NLB,
DIMENSION TT1 (20), TT2 (20), PC1 (20), PC2 (20),
* LOT1(20), LOT2 (20), LLB (20), TTL (20).
```

При необходимости размерности TT1, TT2, ... могут быть изменены. Вид δ-образной функции задается при помощи подпрограммы-функции DE, текст которой приведен. LLN — подпрограмма линейной интерполяции, MAP — подпрограмма печати результатов. Подпрограмма MEST может быть использована для решения конкретных практических задач теплопроводности с произвольными зависимостями теплофизических характеристик от температуры.

Задача 3.2. Дана неограниченная пластина толщиной $2l$ с заданным начальным распределением температуры в виде функции $f(x)$. В момент времени $\tau = 0^+$ пластина помещается в среду, температура которой изменяется по известному закону $T_c(\tau) > T(x, 0)$. Между поверхностями пластины и окружающей средой происходит теплообмен по закону Ньютона. Сформулировать краевую задачу для определения температуры пластины и составить неявную разностную схему, имеющую погрешность аппроксимации $O(h_\tau + h^2)$, где h_τ, h — шаги сетки по временной и пространственной переменным. При аппроксимации граничных условий использовать разностные аналоги первого порядка точности.

Р е ш е н и е. С учетом симметричности условий теплообмена на граничных поверхностях пластины краевая задача теплопроводности принимает следующий вид:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad T(x, 0) = f(x),$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \lambda\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=l} = \alpha\left(T_c(\tau) - T(l, \tau)\right).$$

Соответствующая разностная задача имеет вид

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{h_\tau} = a\left(\frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{h^2}\right), \quad n = 0, 1, \ldots,$$

$$T_i^0 = f(x_i), \quad x_i = ih, \quad i = 0, 1, \ldots, I, \quad I = l/h,$$

$$\frac{T_1^{n+1} - T_0^{n+1}}{h} = 0, \quad \lambda\frac{T_I^{n+1} - T_{I-1}^{n+1}}{h} = \alpha\left(T_c(\tau_{n+1}) - T_I^{n+1}\right).$$

§ 3.5. МЕТОД АНАЛОГИЙ

В последнее десятилетие довольно широкое распространение для решения задач теплопроводности получил метод аналогии. Если классифицировать этот метод на принадлежность к той или иной группе методов решения задач теплопроводности, то метод аналогий можно отнести, с одной стороны, к методам математического моделирования, с другой — к экспериментальным методам. Сходство с методами математического моделирования определяется тем,что расчету процесса теплопроводности предшествует составление математической модели рассматриваемого процесса, сводящейся к системе дифференциальных уравнений в частных производных с соответствующими начальными и граничными условиями. С экспериментальными методами метод аналогий (в частности, метод электрического моделирования) объединяет то, что для расчета значений искомой функции создается специальный прибор — модель, на которой производятся все необходимые измерения.

В основе метода аналогий лежит понятие аналогичных явлений. *Аналогичными* называют явления различной физической природы, описывающиеся одинаковыми по форме дифференциальными уравнениями. Известно, что такие различные по своей природе физические процессы, как перенос теплоты теплопроводностью, распределение электрического потенциала, стабилизированное течение жидкости, диффузия, описываются сходными дифференциальными уравнениями математической физики. При этом меняется лишь физический смысл величин, входящих в уравнения. Это обстоятельство в значительной мере облегчает разработку и применение математических методов решения всех этих физически разных задач. Так, методы, разработанные для решения задач теплопроводности, могут с успехом применяться для расчета процессов массопереноса и наоборот. Если же два аналогичных процесса описываются одинаковыми по типу граничными условиями, то они имеют совершенно одинаковые решения с учетом взаимной замены входящих в эти уравнения физических величин. Тем самым, получив, например, аналитическое решение какой-либо задачи теплопроводности, мы имеем готовое решение для аналогичных задач диффузии, гидродинамики со сходными граничными условиями.

Наибольшее распространение для решения задач теплопроводности получил *метод электрического моделирования*, основанный на принципе электротепловой аналогии [31, 44]. Достоинствами этого метода являются относительно низкая стоимость моделирующих установок и в то же время возможность получения результатов с высокой точностью. Электрические моделирующие установки отличаются надежностью, простотой устройства и обслуживания, что позволяет эффективно использовать их при решении всех видов задач теории теплопроводности.

Проиллюстрируем более подробно аналогию между процессами переноса теплоты, распределением электрического потенциала и диффузией.

Запишем уравнение, описывающее нестационарное распределение электрического потенциала V в некотором пространстве при постоянных электрических сопротивлении $R_э$ и емкости $C_э$ на единицу длины:

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = \frac{1}{R_э C_э} \nabla^2 V,$$

а также уравнение нестационарного переноса массы диффузией:

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = D\nabla^2 C.$$

Таблица 3.2

Теплопроводность	Диффузия	Электропроводность
T — температура, К	c — концентрация, кг/м³	V — напряжение, В
λ — коэффициент теплопроводности, Вт/(м · К)	D — коэффициент диффузии, м²/с	g — удельная проводимость, 1/(Ом · м)
$R_т$ — тепловое сопротивление, К/Вт	—	$R_э$ — сопротивление, Ом
Q_τ — количество теплоты, Дж	M_τ — масса, кг	$q_э$ — количество электричества, Кл
$C_t = c\rho v$ — теплоемкость, Дж/К, (v — объем, м³, ρ — плотность, кг/м³)	—	$C_э$ — емкость, Ф
Q — тепловой поток, Вт ($Q = dQ_\tau/d\tau = c\rho\, dT/d\tau$)	M — секундный расход массы, кг/с ($M = dM_\tau/d\tau$)	I — сила тока, А ($I = dq_э/d\tau = C_э\, dV/d\tau$)
q — плотность теплового потока, Вт/м² ($q = dQ/dS$, S — площадь, м²)	m — плотность потока массы, кг/с · м² ($m = dM/dS$)	i — плотность тока, А/м² ($i = dI/dS$)
$\vec{q} = -\lambda \operatorname{grad} T$ — закон Фурье	$\vec{m} = -D \operatorname{grad} C$ — закон Фика	$\vec{i} = -\operatorname{grad} U$ — закон Ома
α — коэффициент теплоотдачи, Вт/(м² · К)	β — коэффициент массоотдачи, м/с	—

Математическая аналогия между теплопроводностью, электропроводностью и диффузией ясно видна из сравнения этих уравнений с уравнением нестационарной теплопроводности. Выполнение же равенств (возможный частный случай)

$$a = \frac{1}{R_э C_э};\ a = D;\ \frac{1}{R_э C_э} = D$$

делает эту аналогию еще более наглядной. В случае стационарного распределения все три уравнения (теплопроводности, электрического потенциала, диффузии) вырождаются в одно — уравнение Лапласа.

Достаточно полное представление об аналогии трех рассматриваемых физических процессов дает табл. 3.2.

В заключение отметим, что применение в современных электромоделирующих установках специальных нелинейных сопротивлений, позволяющих моделировать различные типы граничных условий (тепловое излучение, конвективная теплоотдача и проч.), делает возможным применение метода аналогии для решения самых сложных и практически важных задач теории теплопроводности.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

3.1. Найти распределение температуры в стержне прямоугольного сечения, температура боковых поверхностей которого в начальный момент времени принимает значение T_c и поддерживается постоянной на протяжении всего процесса теплопроводности. Начальное распределение температуры стержня задано функцией $f(x, y)$.

3.2. Дан неограниченный полый цилиндр с радиусами R_1 и R_2 ($R_2 > R_1$). В начальный момент времени ($\tau = 0$) температура внешней и внутренней поверхностей цилиндра принимает значения T_1 и T_2 соответственно, которые поддерживаются постоянными на протяжении всего процесса теплопроводности. Начальное распределение температуры задано функцией $f(r)$. Найти поле температур в цилиндре.

3.3. Решить задачу об остывании сферической оболочки $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, на внутренней и внешней поверхностях которой происходит конвективный теплообмен со средой, имеющей нулевую температуру. Начальная температура оболочки задана $T(r, 0) = f(r)$.

3.4. Большая плита из нержавеющей стали ($\lambda = 30$ Вт/(м · К), $a = 1{,}5 \cdot 10^{-5}$ м²/с) толщиной 0,3 м выходит из прокатного стана, имея постоянную температуру $T_0 = 1073$ К. Плита охлаждается с обеих сторон высокоскоростными воздушными струями. Температура воздуха $T_c = 303$ К, коэффициент конвективной теплоотдачи $\alpha = 500$ Вт/(м² · К). На поверхность плиты нужно положить слой пластиковой теплоизоляции, но температура поверхности стальной плиты при этом не должна превышать 200 °С. Определить минимальное время, в течение которого нужно обдувать плиту, чтобы можно было положить слой теплоизоляции.

3.5. Длинный чугунный цилиндр диаметром $d = 0{,}2$ м ($\lambda = 70$ Вт/(м · К), $a = 2 \cdot 10^{-5}$ м²/с) имеет начальную постоянную температуру $T_0 = 673$ К. Наружная поверхность цилиндра охлаждается воздухом с температурой $T_c = 323$ К при коэффициенте теплоотдачи $\alpha = 420$ Вт/(м² · К). Найти температуру поверхности и температуру на оси цилиндра после его охлаждения воздухом в течение 20 мин.

3.6. Начальная температура хлорвинилового шарика ($\lambda = 0{,}15$ Вт/(м · К), $a = 8 \cdot 10^{-8}$ м²/с) диаметром $d = 0{,}5$ м равна 363 К. Он погружается в бак с водой, имеющей температуру 293 К. Коэффициент теплоотдачи от шарика к воде

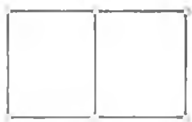


Рис. 13. Разностный шаблон для решения задачи 3.8

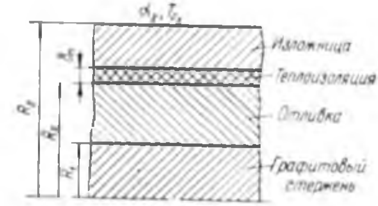


Рис. 14. Разностная схема к задаче 3.11

$\alpha = 20$ Вт (м^2 · К). Найти температуру шарика через 10 мин его пребывания в воде.

3.7. Используя интегро-интерполяционный метод, построить консервативную разностную схему для нестационарного уравнения теплопроводности в цилиндрических и сферических координатах.

3.8. Решить предыдущую задачу, используя шеститочечный шаблон, показанный на рис. 3.13.

3.9. Составить неявную разностную схему на четырехточечном шаблоне для одномерного нестационарного уравнения теплопроводности в сферических и декартовых координатах, используя интегро-интерполяционный метод.

3.10. В длинную плоскую стальную изложницу толщиной 0,05 м заливается расплавленный чугун при температуре 1473 К. Составить неявную разностную схему и программу на языке ФОРТРАН-4 для определения температурных полей чугунной отливки изложницы. Толщина жидкого слоя чугуна 0,30 м, значение теплофизических характеристик выбирать по данным работ [58, 79] для серого чугуна и стали — 45.

3.11. Составить программу на языке ФОРТРАН-4 для решения неявным итерационным конечно-разностным методом нелинейной краевой задачи о затвердевании полой цилиндрической заготовки в изложнице с центральным стержнем. Расчетная схема задачи представлена на рис. 3.14. Провести расчет затвердевания отливки из стали — 30 в чугунной изложнице. Теплофизические характеристики отливки и изложницы выбрать по данным работы [79], теплофизические свойства стержня считать постоянными ($a = 0{,}031 \cdot 10^{-6}$ м^2/с). Геометрические размеры: $R_1 = 0{,}3$ м, $R_2 = 0{,}4$ м, $R_3 = 0{,}45$ м, $\delta_{п} = 0{,}0003$ м ($\lambda_{п} = 0{,}5$ Вт/(м · К)).

Глава 4

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА

§ 4.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Конвективный теплообмен — передача теплоты при движении жидкости или газа. Конвективный перенос теплоты всегда сопровождается теплопроводностью, поэтому одна из проблем, с которыми приходится сталкиваться при решении задач конвективного теплообмена, это проблема оценки влияния каждого из двух механизмов передачи теплоты. Определение вклада теплопроводности и конвекции в общий процесс теплообмена в значительной степени облегчает построение математической модели исследуемого процесса.

Конвективная теплоотдача (теплоотдача) — конвективный теплообмен между поверхностью твердого тела и жидкостью.

Закон Ньютона — Рихмана. Расчет процесса теплоотдачи базируется на соотношении закона Ньютона — Рихмана

$$dQ_c = \alpha (T_c - T_ж)\, dF, \qquad (4.1)$$

согласно которому тепловой поток dQ_c от жидкости к элементу поверхности тела dF прямо пропорционален площади элемента dF и разности температур между поверхностью тела T_c и температурой жидкости $T_ж$. Разность температур $\Delta T = T_c - T_ж$ называют *температурным напором*, а поверхность тела, через которую переносится теплота, — *поверхностью теплообмена* или *теплоотдающей поверхностью*.

Коэффициент пропорциональности α называется *коэффициентом теплоотдачи* (измеряется в Вт/(м^2 · К)). Преобразуя соотношение (4.1), получаем

$$\alpha = \frac{dQ_c}{(T_c - T_ж)\, dF} = \frac{q_c}{\Delta T}. \qquad (4.2)$$

Соотношение (4.2) позволяет определить коэффициент теплоотдачи как плотность теплового потока q_c на границе жидкости (газа) и омываемого тела, отнесенную к разности температур поверхности этого тела и окружающей среды.

Численно коэффициент теплоотдачи равен плотности теплового потока, передаваемого через омываемую поверхность при единичном температурном напоре $\Delta T = 1$. Коэффициент α характеризует интенсивность процесса теплоотдачи и зависит от большого числа различных факторов.

В общем случае на коэффициент теплоотдачи α оказывают влияние геометрические размеры и форма омываемого тела, температура его поверхности, природа возникновения и режим движения жидкости, скорость, температура и физические параметры жидкости и многие другие факторы. Коэффициент теплоотдачи α может быть различным в разных точках поверхности, поэтому различают средний по поверхности теплообмена и местный (локальный) коэффициенты теплоотдачи. Для упрощения тепловых расчетов обычно пользуются средним по поверхности коэффициентом теплоотдачи α.

Природа возникновения движения жидкости. Различают два вида движения: свободное и вынужденное. *Свободным* называется движение, которое возникает вследствие разности плотностей нагретых и холодных частиц жидкости, находящихся в поле действия сил тяжести. Теплообмен при таком виде движения жидкости называется *свободной (естественной) конвекцией.*

Интенсивность свободного движения зависит от рода жидкости, разности температур между отдельными частицами жидкости, объема пространства, в котором протекает процесс.

Вынужденное движение (вынужденная конвекция) жидкости возникает под действием посторонних возбудителей (например, насоса, вентилятора, ветра)

В общем случае вынужденная конвекция может сопровождаться свободной конвекцией. Такой теплообмен называют *смешанной конвекцией.* Нетрудно видеть, что относительное влияние свободной конвекции возрастает с уменьшением скорости вынужденного движения и, наоборот, при больших скоростях вынужденного движения влияние свободной конвекции становится пренебрежимо мало.

Режим движения жидкости. Большое влияние на процесс теплообмена оказывает режим движения жидкости. Движение жидкости может быть *ламинарным* или *турбулентным*. При ламинарном режиме отдельные струйки жидкости не перемешиваются друг с другом, то есть каждая частица жидкости движется параллельно стенке твердого тела. При турбулентном режиме каждая частица жидкости участвует в поступательном движении и совершает различные поперечные движения, то есть режим движения характеризуется непрерывным перемешиванием всех слоев жидкости.

Режим движения жидкости предопределяет механизм переноса теплоты. При ламинарном режиме перенос теплоты к поверхности тела (или от нее) осуществляется в основном теплопроводностью и определяется коэффициентом теплопроводности жидкости. Так как теплопроводность жидкостей (газов) невелика, то и распространение теплоты по всей массе жидкости при ламинарном режиме движения происходит медленно. При турбулентном режиме перенос теплоты в направлении нормальном к поверхности тела, осуществляется как теплопроводностью, так и конвекцией. Интенсивность переноса теплоты при турбулентном режиме движения жидкости в несколько тысяч раз выше, чем при ламинарном режиме.

Необходимо отметить, что при турбулентном режиме не вся масса жидкости имеет неупорядоченный (хаотический) характер движения. Всегда на поверхности твердой стенки имеется слой жидкости, в котором вследствие вязкости жидкости сохраняется ламинарный характер движения.

Физические параметры жидкости. В настоящее время в технике в качестве теплоносителей используются самые разнообразные вещества: воздух, различные газы, вода, масла, бензол, нефть, бензин, спирты, жидкие металлы, специальные смеси. В зависимости от физических свойств жидкостей (газов) процесс теплоотдачи протекает различно и своеобразно.

Наиболее распространенным жидким теплоносителем является вода. Процессы теплообмена в воде проходят достаточно интенсивно, использование воды не требует больших затрат. Следует, однако, отметить, что вода вызывает коррозию металлов, дает солевые отложения на обтекаемых поверхностях.

Распространенным газообразным теплоносителем является воздух. Он всегда имеется в необходимом количестве, его применение позволяет уменьшить массу теплообменных устройств и систем. Кроме того, воздух не оставляет солевых отложений на теплообменных поверхностях. К недостаткам воздуха как теплоносителя следует отнести невысокий коэффициент теплоотдачи, а также окислительную способность по отношению к конструкционным материалам, используемым в теплообменных системах.

В атомной энергетике используются жидкометаллические теплоносители. Они отличаются высокой теплопроводностью и температуропроводностью, относительно низкой вязкостью и высокой электропроводностью. Типичными жидкометаллическими теплоносителями являются натрий, литий, ртуть и сплавы: натрий — калий, свинец — висмут и др.

К основным свойствам теплоносителей, определяющим процесс теплообмена в однофазной химически однородной среде, относятся вязкость, коэффициент теплопроводности, удельная теплоемкость, плотность и температуропроводность. Для каждого вещества эти параметры имеют определенные значения и являются функциями параметров состояния (в основном температуры и давления). Поскольку во многих практически важных случаях давление не достигает больших величин, зависимость физических свойств от давления можно не учитывать. Таким образом, основное влияние на физические свойства теплоносителей оказывает температура.

Коэффициент теплопроводности λ характеризует способность жидкости (газа) проводить теплоту (см. также главу I) и является физическим параметром (измеряется в Вт/(м · К)). Диапазон изменения коэффициентов теплопроводности различных жидкостей достаточно широк (0,07 ÷ 0,7 Вт/(м · К) [79]). Для учета зависимости коэффициентов теплопроводности от температуры получен ряд эмпирических формул [14, 79], наиболее простыми и распространенными из которых являются линейные. Например, для жидких теплоносителей

$$\lambda = 0{,}111 - (T - 20)\,\frac{5{,}47 \cdot 10^{5}}{\rho_{20}^{5}}\,, \qquad (4.3)$$

где $\rho_{20} = 750 - 850$ кг/м^3, индекс «20» соответствует температуре 20 °С.

Соотношение, связывающее коэффициент теплопроводности жидкости с другими ее физическими параметрами, имеет вид

$$\lambda_0 = A \frac{c_{p_0} \rho_0^{4/3}}{m^{1/3}}, \tag{4.4}$$

где m — молекулярная масса, A — коэффициент, определяемый из эксперимента, индекс 0 соответствует температуре 0 °С.

Из соотношения (4.4) следует, что с повышением температуры, то есть с уменьшением плотности, коэффициенты теплопроводности жидкостей уменьшаются. Исключение составляют вода и глицерин, для которых в формулу (4.4) вводятся поправочные коэффициенты.

Плотностью теплоносителя ρ называют отношение его массы к объему (измеряется в кг/м³). Большой интерес представляет изменение плотности жидкостей с температурой, которая характеризуется *температурным коэффициентом объемного расширения*

$$\beta = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p. \tag{4.5}$$

Коэффициент β измеряют в $К^{-1}$.

При теоретических расчетах используют линейные зависимости плотности жидкости от температуры вида

$$\rho/\rho_0 = 1 - \beta_p (T - T_0),$$

где ρ_0 — плотность жидкости при температуре T_0; $\beta_p = -\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p$ — коэффициент, зависящий от рода жидкости, интервала температур и определяемый с помощью эксперимента.

Температурный коэффициент объемного расширения β для газов можно получить методом подстановки в соотношение (4.5) значения ρ из соответствующего уравнения состояния. Так, для газов, находящихся в состоянии, близком к идеальному, подстановка ρ из уравнения Клапейрона — Менделеева дает значение коэффициента объемного расширения

$$\beta = \frac{1}{T}. \tag{4.6}$$

Заметим, что для жидкостей значение β меньше, чем для газов.

На теплоотдачу оказывает влияние и сжимаемость жидкости, которая характеризуется *коэффициентом сжатия (изотермической сжимаемостью)*

$$\varepsilon = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T, \tag{4.7}$$

коэффициент сжатия ε — относительное изменение плотности вещества при изменении давления, измеряется в $Па^{-1}$. Для капельных жидкостей значения ε очень малы, что при расчетах позволяет изотермической сжимаемостью пренебречь. Для воздуха в нормальном состоянии $\varepsilon = 10^{-5}$ $Па^{-1}$, что в $2 \cdot 10^4$ раз больше сжимаемости воды. Аналогичные значения ε имеют и другие газы.

Удельной теплоемкостью называют количество теплоты, необходимое для нагревания 1 кг жидкости (газа) на 1 К. Различают удельную теплоемкость при постоянном давлении — c_p (изобарная теплоемкость) и при постоянном объеме — c_V (изохорная теплоемкость). Для жидкостей разница между c_p и c_V очень незначительна, поэтому при расчетах теплообмена в условиях переменного давления также пользуются значениями c_p. Измеряют удельную теплоемкость в Дж/(кг·К).

Коэффициент температуропроводности $a = \lambda/(c_p\rho)$ характеризует скорость изменения температуры теплоносителя. Измеряют его в м²/с.

Вязкость жидкости. Реальные жидкости обладают вязкостью. Между слоями, движущимися с различной скоростью, всегда возникает сила внутреннего трения (касательное усилие), которая противодействует движению. Сила трения τ между слоями, отнесенная к единице поверхности, согласно закону Ньютона, пропорциональна градиенту скорости du/dn по нормали к направлению движения жидкости

$$\tau = \mu \frac{du}{dn}. \qquad (4.8)$$

Коэффициент пропорциональности μ зависит от природы жидкости и ее температуры и называется *коэффициентом динамической вязкости*, *или коэффициентом внутреннего трения* (измеряется в Па · с). При $\frac{du}{dn} = 1$ $\tau = \mu$. Чем больше μ, тем меньше текучесть жидкости. Вязкость обусловливает разницу между идеальной ($\mu = 0$) и реальной жидкостью ($\mu \neq 0$). Вязкость капельных жидкостей практически не зависит от давления и уменьшается с увеличением температуры. Вязкость газов с увеличением температуры и давления увеличивается. Коэффициент вязкости идеальных газов не зависит от давления.

В уравнения гидродинамики и теплопередачи часто входит отношение вязкости μ к плотности ρ:

$$\nu = \mu/\rho, \qquad (4.9)$$

где ν — *коэффициент кинематической вязкости*, м²/с.

Коэффициенты μ и ν являются физическими параметрами жидкости (газа) и определяются экспериментально.

Зависимость вязкости жидкостей от температуры описывается соотношением

$$\mu_0/\mu = 1 + \beta_{\mu_1}(T - T_0) + \beta_{\mu_2}(T - T_0)^2 + \cdots, \qquad (4.10)$$

где $\mu_0 = \mu|_{T=T_0}$; β_{μ_1}, β_{μ_2} — эмпирические коэффициенты.

Для практических расчетов процессов теплообмена в газах можно использовать степенную зависимость

$$\mu/\mu_0 = (T/T_0)^n, \qquad (4.11)$$

где n зависит от природы газа и его температуры. В диапазоне температур от 300 до 2000 К принимают $n = 0{,}75$.

Для газов, находящихся в состоянии, близком к идеальному, зависимость μ от T описывается формулой Сазерленда

$$\mu = C \frac{T^{3/2}}{T + 111}, \qquad (4.12)$$

где C — константа, зависящая от природы газа, в частности, для воздуха $C = 14{,}65$. Физические свойства жидкостей и газов приведены в приложении.

Форма и размеры теплоотдающей поверхности. Экспериментально установлено, что на теплоотдачу большое влияние оказывают форма и размеры тела, в зависимости от них изменяются характер движения жидкости и толщина пограничного слоя (см. § 5.1).

Таким образом, коэффициент теплоотдачи можно представить следующей функциональной зависимостью:

$$\alpha = f(T_{ст}, T_ж, \Delta T, \rho, \mu, \lambda, c_p, u, Ф, l, X),$$

где Ф — форма тела, l — геометрические размеры тела, X — характер движения тела, u — скорость.

Коэффициент теплоотдачи зависит от многих факторов и для его определения невозможно дать общую формулу.

Процесс конвективного теплообмена характеризуется совокупностью гидродинамических и тепловых явлений и может быть описан системой дифференциальных уравнений.

§ 4.2. УРАВНЕНИЯ КОНВЕКТИВНОГО ПЕРЕНОСА. КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ

Изучение процессов конвективного теплопереноса сводится к установлению функциональных зависимостей между переменными, характеризующими эти процессы. В общем случае установить связь хотя бы между основными физическими параметрами, определяющими исследуемый процесс теплопереноса, очень трудно. Это объясняется тем, что при конвективном теплообмене поля температур и скоростей тесно взаимосвязаны. С одной стороны, температурное поле движущейся жидкости во многом определяется динамикой течения, то есть зависит от поля скоростей и его изменений. С другой стороны, теплофизические свойства жидкости (прежде всего вязкость) существенно зависят от температуры, что, в свою очередь, вызывает изменение в поле скоростей.

Конвективный теплоперенос описывается с помощью основных законов сохранения массы, количества движения и энергии. Чтобы получить дифференциальные уравнения конвективного теплообмена, законы сохранения применяют к выделенному элементарному объему, через границы которого в течение малого промежутка времени переносятся определенные масса, количество движения и энергия, изменяющиеся внутри этого объема. Интегрирование составленных таким образом дифференциальных уравнений позволяет определить (в том или ином виде) зависимость между искомыми величинами для всей области интегрирования и рассматриваемого промежутка времени.

Поскольку в курсе теплопередачи жидкость рассматривается как сплошная среда, то теоретическое изучение конвективного теплообмена сводится в основном к определению зависимостей для поля скоростей, давления, температуры и физических свойств.

Основные дифференциальные уравнения, описывающие процесс конвективного теплообмена, выведем из обобщенного уравнения переноса субстанции (*уравнение Умова* [42]).

Уравнение переноса субстанции. Составим уравнение переноса субстанции (массы, импульса, энергии и т. п.) в движущейся сплошной среде. Обозначим C — концентрацию субстанции (то есть ее плотность — количество в единице объема).

Рассмотрим некоторый неподвижный произвольный объем V, ограниченный поверхностью S. Изменение количества субстанции в данном объеме $\frac{d}{d\tau}\left(\int CdV\right)$ происходит в результате ее переноса через поверхность S и производства субстанции источниками, действующими в указанном объеме.

Перенос субстанции осуществляется молекулярным и конвективным путем: в первом случае — в результате хаотического движения молекул, во втором — за счет видимого движения всей среды. Молекулярный перенос обусловлен перемешиванием молекул и приводит к выравниванию концентрации субстанции в различных точках сплошной среды. Он характеризуется вектором плотности молекулярного потока субстанции $\vec{j}_C$, который чаще всего направлен по нормали к изоконцентрационной поверхности. Конвективный перенос характеризуется вектором плотности конвективного потока субстанции $\vec{W}C$, где $\vec{W}\{u, v, w\}$ — линейная скорость движения среды.

Введем единичный вектор $\vec{n}$ внешней нормали к границе объема V. Тогда через элементарную площадку dS в объем вносится количество субстанции: $-C(\vec{W}\cdot\vec{n})\,dS$ — конвективным и $-\vec{j}_C\cdot\vec{n}dS$ — молекулярным путем. Суммарное ее изменение в объеме V в результате процессов переноса составит $\int\limits_S C(\vec{W}\cdot\vec{n})\,dS - \int\limits_S \vec{j}_C\cdot\vec{n}dS$, а в результате действия внутренних источников $-\int\limits_V I_C dV$, где I_C — мощность источников субстанции. На основе закона сохранения количества субстанции получим интегральное уравнение ее переноса (уравнение баланса)

$$\frac{d}{d\tau}\int\limits_V C dV = -\int\limits_S C(\vec{W}\cdot\vec{n})\,dS - \int\limits_S \vec{j}_C\cdot\vec{n}dS + \int\limits_S I_C dV. \qquad (4.13)$$

Если концентрация субстанции — вектор (например, при переносе импульса), то плотность конвективного потока представляет собой диадное произведение $\vec{C}\vec{W}$, а молекулярного — тензор второго ранга (диадик). В этом случае мощность источников — также вектор.

Запишем дифференциальное уравнение переноса субстанции, для чего в уравнении (4.13) перейдем от поверхностных интегралов к объемным. На основании теоремы Остроградского — Гаусса

$$\int\limits_S C(\vec{W}\cdot\vec{n})\,dS + \int\limits_S \vec{j}_C\cdot\vec{n}dS = \int\limits_V \nabla\cdot(C\vec{W})\,dV + \int\limits_V \nabla\cdot\vec{j}_C dV, \qquad (4.14)$$

где $\nabla\cdot\vec{W}$ — дивергенция вектора $\vec{W}$ и т. д. Подставляя выражение (4.14) в (4.13), получаем

$$\frac{d}{d\tau}\int\limits_V C dV = -\int\limits_V \nabla\cdot(C\vec{W})\,dV - \int\limits_V \nabla\cdot\vec{j}_C dV + \int\limits_V I_C dV. \qquad (4.15)$$

Меняя порядок дифференцирования и интегрирования, а также перенося все члены уравнения (4.15) в левую часть, придем к равенству

$$\int\limits_V \left(\frac{\partial C}{\partial\tau} + \nabla\cdot(C\vec{W}) + \nabla\cdot\vec{j}_C - I_C\right) dV = 0. \qquad (4.16)$$

В этом равенстве объем V выбран произвольно, в связи с чем его выполнение возможно только тогда, когда выражение под знаком интеграла обращается в нуль во всех точках рассматриваемого пространства, то есть

$$\frac{\partial C}{\partial\tau} + \nabla\cdot(C\vec{W}) + \nabla\cdot\vec{j}_C - I_C = 0. \qquad (4.17)$$

В дифференциальном уравнении переноса субстанции (4.17) первое слагаемое характеризует локальное изменение ее концентрации, второе и третье — конвективный и молекулярный (диффузионный) переносы, а четвертое — действие источников. Уравнение (4.17) называют *уравнением Умова* [42] и окончательно записывают в следующем виде:

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} + \nabla \cdot (C\vec{W}) = -\nabla \cdot \vec{J}_C + I_C. \tag{4.18}$$

Уравнение переноса массы. Дифференциальное *уравнение переноса массы (уравнение непрерывности, неразрывности или сплошности)* выражает закон сохранения массы движущейся сплошной среды, то есть вещество непрерывно заполняет пространство.

Уравнение неразрывности однокомпонентной сплошной среды получим из уравнения переноса субстанции (4.18), полагая $C = \rho$, где ρ — плотность среды:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \nabla \cdot (\rho\vec{W}) = 0 \tag{4.19}$$

или в декартовых координатах

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0.$$

Для установившегося процесса локальная производная равна нулю и уравнение неразрывности упрощается:

$$\nabla \cdot (\rho\vec{W}) = 0. \tag{4.20}$$

В декартовых координатах уравнение (4.20) имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} = 0.$$

При течении несжимаемой жидкости плотность среды не зависит от времени и пространственных координат, то есть уравнение неразрывности для стационарных и нестационарных процессов имеет один и тот же вид

$$\nabla \cdot \vec{W} = 0 \tag{4.21}$$

или в декартовых координатах

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Уравнение (4.21) справедливо для течений жидкости с малыми изменениями температуры и давления.

Уравнение переноса импульса. Дифференциальное уравнение переноса импульса (количества движения) выражает закон сохранения количества движения в сплошной среде. Его называют также уравнением движения.

Уравнение движения однокомпонентной сплошной среды может быть получено из выражения (4.18), если в качестве переносимой субстанции принять количество движения, отнесенное к единице объема ($\vec{C} \equiv \rho\vec{W}$). В основе уравнений движения лежит второй закон Ньютона, согласно которому результирующая сила, действующая на контрольный объем, равна общему изменению количества движения в этом объеме. Результирующая сила, действующая на контрольный объем, может быть обусловлена поверхностными и объемными силами. Таким образом, скорость изменения импульса для произвольного объема равна сумме следующих слагаемых: поверхностного интеграла от плотности конвективного потока импульса через границу объема, поверхностного интеграла от тензора напряжений и объемного интеграла от полного вектора массовых сил. Массовая сила, приходящаяся на единицу массы вещества, может быть результатом воздействия гравитационного, магнитного, электрического и других силовых полей. Поверхностным силам, возникающим при воздействии соседних элементов жидкости на контрольный объем, соответствуют напряжения на шести граничных поверхностях этого объема.

Обозначим $\vec{\vec{p}}$ — тензор напряжений, $\vec{F}$ — вектор массовых сил, действующий на единицу массы вещества. Тогда в выражении (4.18) положим $\vec{j} = \vec{\vec{p}}$, $\vec{I} = \rho\vec{F}$ и получим уравнение переноса импульса

$$\frac{\partial(\rho\vec{W})}{\partial\tau} + \nabla \cdot (\rho\vec{W}\vec{W}) = -\nabla \cdot \vec{\vec{p}} + \rho\vec{F}. \tag{4.22}$$

Представим тензор напряжений $\vec{\vec{p}}$ в виде суммы шарового тензора и девиатора напряжений

$$\vec{\vec{p}} = p\vec{\vec{\delta}} + \vec{\vec{\sigma}}. \tag{4.23}$$

Шаровой тензор с точностью до величины, определяемой объемной вязкостью, равен произведению давления p на дельта-тензор Кронекера $\vec{\vec{\delta}}$, а девиатор представляет собой тензор, обусловленный сдвиговой вязкостью (тензор вязких напряжений). С учетом (4.23) уравнение (4.22) принимает вид

$$\frac{\partial(\rho\vec{W})}{\partial\tau} + \nabla \cdot (\rho\vec{W} \cdot \vec{W}) = -\nabla p - \nabla \cdot \vec{\vec{\sigma}} + \rho\vec{F}. \tag{4.24}$$

Здесь левая часть представляет собой сумму локального изменения количества движения в единицу времени и его изменения за счет конвективного переноса. Первое и второе слагаемые правой части — изменение количества движения в единицу времени за счет давления и внутреннего трения, третье — суммарное действие внешних сил.

Если поле внешних сил сводится к гравитационному ($\vec{F} \equiv \vec{g}$), то уравнение движения запишется так:

$$\frac{\partial(\rho\vec{W})}{\partial\tau} + \nabla \cdot (\rho\vec{W} \cdot \vec{W}) = -\nabla p - \nabla \cdot \vec{\vec{\sigma}} + \rho\vec{g}. \tag{4.25}$$

При течении несжимаемой жидкости (ρ = const) его можно преобразовать следующим образом:

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial \tau} + \nabla \cdot (\vec{W} \cdot \vec{W}) = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \frac{1}{\rho}\nabla \cdot \vec{\vec{\sigma}} + \vec{g}. \qquad (4.26)$$

Уравнение Навье — Стокса. Полученное уравнение переноса импульса не является замкнутым, поскольку наряду с неизвестной величиной (вектором скорости) содержит плотность ее молекулярного потока (тензор напряжений). Чтобы уменьшить количество неизвестных функций, необходимо установить связь между вектором скорости и тензором напряжений, то есть определить реологические уравнения для рассматриваемой жидкости. Мы будем рассматривать только изотропные жидкости с линейными законами переноса.

Реологическими уравнениями (законами) сред называют уравнения, устанавливающие связь между компонентами тензоров напряжений, деформаций и скоростей деформаций. Тензор напряжений представляют в виде двух частей: изотропной $p'\vec{\vec{\delta}}$, имеющей такую же форму, как и в покоящейся жидкости, хотя величина p' не обязательно совпадает со статическим давлением p в жидкости, и неизотропной (девиатора напряжений) $\vec{\vec{\sigma}}$, содержащей касательные и некоторые диагональные члены, в сумме равные нулю

$$\vec{\vec{P}} = p'\vec{\vec{\delta}} + \vec{\vec{\sigma}}. \qquad (4.27)$$

Изотропная часть равна одной третьей суммы диагональных членов (первого инварианта тензора напряжений). Наличие девиатора связано исключительно с движением жидкости.

Реологическое уравнение текучести обычной (ньютоновской) вязкой жидкости устанавливает линейную связь между девиатором напряжений и тензором скоростей деформаций. При прямолинейном слоистом течении жидкости закон Ньютона описывается равенством

$$\sigma = -\mu \frac{\partial u}{\partial n}, \qquad (4.28)$$

где μ — динамическая вязкость жидкости, u — скорость в направлении движения жидкости, n — нормаль к этому направлению. В общем случае реологическое уравнение ньютоновской жидкости имеет вид [12]

$$\vec{\vec{\sigma}} = -\mu[\nabla \cdot \vec{W} + (\nabla \vec{W})_c] + \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \vec{W})\vec{\vec{\delta}}, \qquad (4.29)$$

где $(\nabla \cdot \vec{W})_c$ — тензор, сопряженный с тензором $\nabla \cdot \vec{W}$. Величина p' в равенстве (4.29) связана с термодинамическим давлением зависимостью [12]

$$p' = p - \varkappa(\nabla \cdot \vec{W}), \qquad (4.30)$$

где $\varkappa$ — объемная вязкость. Следовательно,

$$\vec{\vec{P}} = p\vec{\vec{\delta}} - \mu[\nabla\vec{W} + (\nabla\vec{W})_c] + \left(\frac{2}{3}\mu - \varkappa\right)(\nabla \cdot \vec{W})\vec{\vec{\delta}}. \qquad (4.31)$$

Объемная вязкость $\varkappa$ является малой величиной и обычно ее не учитывают. Обобщенный закон Ньютона (1.29) или (4.31) справедлив, если тензор напряжений линейно зависит от тензора скоростей деформаций и среда изотропна. Он хорошо описывает реологические свойства газов и многих практически важных капельных жидкостей, в том числе и воды. Теплоносители (жидкости, газы), для которых справедлив закон Ньютона, называют ньютоновскими.

Дифференциальное уравнение Навье — Стокса следует из уравнения переноса импульса (4.24), если в него подставить выражение для тензора вязких напряжений (4.29) с учетом объемной вязкости (4.30):

$$\frac{\partial(\rho\vec{W})}{\partial\tau} + \nabla \cdot (\rho\vec{W}\vec{W}) = -\nabla p + \nabla \cdot \{\mu[\nabla\vec{W} + (\nabla\vec{W})_c]\} + \nabla\left[\left(\varkappa - \frac{2}{3}\mu\right)(\nabla \cdot \vec{W})\right] + \rho\vec{F}. \qquad (4.32)$$

В случае несжимаемой жидкости ($\rho = \mathrm{const}$, $\nabla \cdot \vec{W} = 0$) оно упростится и примет вид

$$\frac{\partial\vec{W}}{\partial\tau} + \nabla \cdot (\vec{W}\vec{W}) = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nabla \cdot \{\nu[\nabla\vec{W} + (\nabla\vec{W})_c]\} + \vec{F}, \qquad (4.33)$$

где $\nu = \mu/\rho$ — кинематическая вязкость, м²/с. Если к тому же динамическая вязкость постоянна $\mu = \mathrm{const}$, то с учетом соотношения $\nabla \times [(\nabla\vec{W})_c] = \nabla(\nabla \cdot \vec{W}) = 0$ уравнение (4.33) примет вид

$$\frac{\partial\vec{W}}{\partial\tau} + \nabla \cdot (\vec{W}\vec{W}) = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\vec{W} + \vec{F}. \qquad (4.34)$$

Соотношение (4.34) является классической формой уравнения Навье—Стокса, которая используется в теории конвективного теплообмена.

Следует отметить, что динамическая вязкость постоянна для изотермических потоков однокомпонентных жидкостей. В общем случае она зависит от температуры и состава. Несжимаемыми жидкостями можно считать однокомпонентные жидкости или газы, движущиеся с малыми дозвуковыми скоростями при слабой неизотермичности потока.

Уравнение Навье — Стокса для сжимаемой жидкости при $\mu = \mathrm{const}$, $\varkappa = \mathrm{const}$ записывается следующим образом:

$$\frac{\partial(\rho\vec{W})}{\partial\tau} + \nabla \cdot (\rho\vec{W}\vec{W}) = -\nabla p + \mu\nabla^2\vec{W} + \left(\varkappa + \frac{1}{3}\mu\right)\nabla(\nabla\vec{W}) + \rho\vec{F}. \qquad (4.35)$$

С учетом (4.19) левую часть этого уравнения можно выразить через субстанциональную производную

$$\frac{\partial(\rho\vec{W})}{\partial\tau} + \nabla(\rho\vec{W}\vec{W}) = \rho\left[\frac{\partial\vec{W}}{\partial\tau} + (\vec{W} \cdot \nabla)\vec{W}\right] = \rho\frac{d\vec{W}}{d\tau}.$$

Тогда получим

$$\rho \frac{d\vec{W}}{d\tau} = -\nabla p + \nabla \{\mu [\nabla \vec{W} + (\nabla \vec{W})_c]\} + \nabla \left[\left(\varkappa - \frac{2}{3} \mu \right) (\nabla \cdot \vec{W}) \right] + \rho \vec{F} \tag{4.36}$$

или

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{W}}{\partial \tau} + \vec{W} \cdot \nabla \vec{W} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \{\mu [\nabla \vec{W} + (\nabla \vec{W})_c]\} + \\ + \nabla \left[\left(\varkappa - \frac{2}{3} \mu \right) (\nabla \cdot \vec{W}) \right] + \rho \vec{F}. \tag{4.37}$$

Для случая, когда коэффициенты вязкости постоянны, уравнения (4.36), (4.37) примут вид

$$\rho \frac{\partial \vec{W}}{\partial \tau} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{W} + \left(\varkappa + \frac{1}{3} \mu \right) \nabla (\nabla \cdot \vec{W}) + \rho \vec{F}, \tag{4.38}$$

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{W}}{\partial \tau} + \vec{W} \cdot \nabla \vec{W} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{W} + \left(\varkappa + \frac{1}{3} \mu \right) \nabla (\nabla \cdot \vec{W}) + \rho \vec{F}. \tag{4.39}$$

Для случая несжимаемой жидкости ($\nabla \vec{W} = 0$) уравнения (4.39) в декартовой системе координат имеют следующий вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \rho F_x,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \rho F_y,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \rho F_z.$$

Уравнение переноса энергии. Дифференциальное уравнение переноса энергии выражает закон ее сохранения в сплошной среде. Закон сохранения энергии требует, чтобы результирующая энергия, прошедшая через поверхности, ограничивающие контрольный объем, была равна изменению энергии внутри объема. Таким образом, скорость изменения полной (внутренней и кинетической) энергии произвольного объема среды равна сумме мощностей массовых и поверхностных сил, приложенных к выделенному объему и его поверхности, а также молекулярного и молярного потоков энергии.

Уравнение энергии однокомпонентной сплошной среды можно определить из (4.18), приняв в нем в качестве переносимой субстанции полную энергию единицы объема среды ($C \equiv E$). Обозначив внутреннюю и $U = \rho u_{уд}$ и кинематическую $K = \rho k = \rho \vec{W}^2/2$ энергии единицы объема среды, получим $E = \rho e = U + K = \rho (u_{уд} + \vec{W}^2/2)$. Так как энергообмен с окружающей средой происходит через поверхность выделенного объема конвективным и диффузионным путем, а также за счет работы поверхностных сил, то $\vec{J}_E = \vec{J} + \vec{\vec{p}} \cdot \vec{W}$. Источником энергии внутри объема является работа массовых сил $I = \rho\vec{F} \cdot \vec{W}$. Следовательно, дифференциальное уравнение переноса полной энергии в однокомпонентной сплошной среде записывается так:

$$\frac{\partial E}{\partial \tau} + \nabla \cdot (\vec{W}E) = -\nabla \cdot \vec{J}_E + \rho\vec{F} \cdot \vec{W} \qquad (4.40)$$

или

$$\frac{\partial (\rho e)}{\partial \tau} + \nabla \cdot (\rho\vec{W}e) = -\nabla \cdot \vec{J}_e - \nabla \cdot (\vec{\vec{P}} \cdot \vec{W}) + \rho\vec{F} \cdot \vec{W}. \qquad (4.41)$$

Поток внутренней энергии однокомпонентной среды равен тепловому потоку $\vec{J}_U = \vec{q}$, возникающему вследствие неизотермичности, то есть уравнение (4.41) можно представить в виде

$$\frac{\partial (\rho e)}{\partial \tau} + \nabla \cdot (\rho\vec{W}e) = -\nabla \cdot \vec{q} - \nabla \cdot (\vec{\vec{P}} \cdot \vec{W}) + \rho\vec{F}\vec{W}. \qquad (4.42)$$

В теории конвективного теплообмена уравнение энергии используется в различных формах или для отдельных составляющих энергии в зависимости от удобства их применения.

Дифференциальное уравнение переноса кинетической энергии однокомпонентной среды может быть получено в результате скалярного умножения уравнения движения (4.22) на вектор скорости $\vec{W}$:

$$\left[\frac{\partial (\rho\vec{W})}{\partial \tau} + \nabla \cdot (\rho\vec{W}\vec{W})\right] \cdot \vec{W} = -(\nabla \cdot \vec{\vec{P}}) \cdot \vec{W} + \rho\vec{F} \cdot \vec{W}. \qquad (4.43)$$

Левую часть равенства (4.43) преобразуем следующим образом:

$$\left[\frac{\partial (\rho\vec{W})}{\partial \tau} + \nabla \cdot (\rho\vec{W}\vec{W})\right] \cdot \vec{W} = \left[\rho\frac{\partial \vec{W}}{\partial \tau} + (\rho\vec{W} \cdot \nabla)\vec{W}\right] \cdot \vec{W} =$$

$$= \rho\frac{\partial (\vec{W}^2/2)}{\partial \tau} + (\rho\vec{W} \cdot \nabla)\vec{W}^2/2 = \frac{\partial (\rho\vec{W}^2/2)}{\partial \tau} +$$

$$+ \nabla \cdot [\rho\vec{W}(\vec{W}^2/2)] = \frac{\partial K}{\partial \tau} + \nabla \cdot (\vec{W}K), \qquad (4.44)$$

где $K = \rho\vec{W}^2/2$ — кинетическая энергия единицы объема. Подставляя выражение (4.44) в уравнение (4.43) с учетом равенства $(\nabla \cdot \vec{\vec{P}})\vec{W} = \nabla \cdot (\vec{\vec{P}}\vec{W}) - \vec{\vec{P}} : (\nabla\vec{W})$ (знак: означает двойное скалярное произведение), запишем уравнение кинетической энергии

$$\frac{\partial K}{\partial \tau} + \nabla \cdot (\vec{W}K) = -\nabla \cdot (\vec{\vec{P}} \cdot \vec{W}) + \rho\vec{F} \cdot \vec{W} + \vec{\vec{P}} : (\nabla\vec{W}). \qquad (4.45)$$

Слагаемые в левой части соотношения (4.45) характеризуют соответственно скорости локального и конвективного изменений кинетической энергии, слагаемые в правой части — мощности массовых, внешних и внутренних поверхностных сил. Представляя тензор напряжения в виде суммы шарового тензора и девиатора, уравнение (4.45) можно преобразовать к виду

$$\frac{\partial K}{\partial \tau} + \nabla \cdot (\vec{W} K) = -\nabla \cdot (p\vec{W}) - \nabla \cdot (\vec{\vec{\sigma}} \cdot \vec{W}) + \\ + \rho\vec{F} \cdot \vec{W} + p(\nabla \cdot \vec{W}) + \vec{\vec{\sigma}} : (\nabla \vec{W}). \tag{4.46}$$

Вычитая почленно равенство (4.46) из уравнения переноса полной энергии (4.42), получаем уравнение переноса внутренней энергии однокомпонентной среды

$$\frac{\partial (\rho u_{\text{уд}})}{\partial \tau} + \nabla \cdot (\rho \vec{W} u_{\text{уд}}) = -\nabla \cdot \vec{q} - \vec{\vec{P}} : (\nabla \vec{W}) \tag{4.47}$$

или

$$\frac{\partial (\rho u_{\text{уд}})}{\partial \tau} + \nabla \cdot (\rho \vec{W} u_{\text{уд}}) = -\nabla \cdot \vec{q} - p\nabla \cdot \vec{W} - \vec{\vec{\sigma}} : (\nabla \vec{W}). \tag{4.48}$$

Из уравнения (4.48) с помощью известного из термодинамики соотношения $h = u_{\text{уд}} + p/\rho$ можно получить уравнение переноса энтальпии

$$\frac{\partial (\rho h)}{\partial \tau} + \nabla \cdot (\rho \vec{W} h) = -\nabla \cdot \vec{q} + \frac{\partial p}{\partial \tau} + \nabla \cdot (p\vec{W}) - p(\nabla \cdot \vec{W}) - \vec{\vec{\sigma}} : (\nabla \vec{W}) \tag{4.49}$$

или

$$\frac{\partial (\rho h)}{\partial \tau} + \nabla \cdot (\rho \vec{W} h) = -\nabla \cdot \vec{q} + \frac{\partial p}{\partial \tau} + (\vec{W} \cdot \nabla) p - \vec{\vec{\sigma}} : (\nabla \cdot \vec{W}), \tag{4.50}$$

где h — энтальпия единицы массы вещества.

При исследовании теплообмена в изобарических течениях несжимаемых жидкостей уравнение (4.50) существенно упрощается:

$$\frac{\partial h}{\partial \tau} + \nabla \cdot (\vec{W} h) = -\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \vec{q} - \frac{1}{\rho} \vec{\vec{\sigma}} : (\nabla \vec{W}). \tag{4.51}$$

Отсюда, учитывая, что в данном случае $dh = c_p dT$, а также привлекая соотношение закона Фурье $\vec{q} = -\lambda \nabla T$, согласно которому тепловой поток пропорционален градиенту температуры, при постоянной теплоемкости жидкости ($c_p = c_V = c$) и теплопроводности получим уравнение энергии в наиболее распространенном виде:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} + \nabla \cdot (\vec{W} T) = a\nabla^2 T + \frac{\mu}{c\rho} \Phi_V, \tag{4.52}$$

где член Φ_V определяет вязкую диссипацию и описывает необратимую часть переноса энергии, обусловленного компонентами напряжений. В декартовых координатах функция Φ_V имеет следующий вид:

$$\Phi_V = 2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right] + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \\ + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \vec{W})^2. \qquad (4.53)$$

Эта функция всегда положительна и, следовательно, является диссипативной.

В декартовых координатах уравнение энергии (4.52) имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} + u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} + w\frac{\partial T}{\partial z} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) + \frac{\mu}{c\rho}\Phi_V,$$

где Φ_V определяется по формуле (4.53). Приведенный вывод дифференциальных уравнений конвективного теплообмена, основанный на выполнении закона сохранения произвольной субстанции для выделенного контрольного объема, предложил А. В. Лыков [42]. В других пособиях по теплопередаче (например, [24, 46]) уравнения конвективного теплообмена выводятся на основе записи баланса отдельно для массы, энергии и количества движения в выделенном контрольном объеме. Оба эти способа вполне равноправны. Мы выбрали первый, поскольку он наиболее четко и кратко показывает общность происхождения уравнений конвективного теплообмена. Кроме того, использование соотношений векторного анализа делает их запись инвариантной относительно системы координат. Для перехода от векторной записи к скалярным уравнениям в выбранной системе координат достаточно взять из справочника (например, [33]) соответствующие метрические коэффициенты.

Вывод уравнений конвективного теплообмена вторым способом в большинстве работ проведен для декартовой системы координат и непосредственный переход к другим системам координат невозможен. Следует также отметить определенную нестрогость при выводе уравнений движения, связанную главным образом с громоздкостью и сложностью математических выкладок, необходимых для общего вывода.

Уравнения осредненного турбулентного потока. Турбулентное течение отличается от ламинарного наличием пульсаций — отклонений мгновенных значений характеристик переноса (скорость, температура, давление и т. д.) от их некоторых средних значений. Таким образом, турбулентное течение состоит из течения, описываемого усредненными характеристиками, и наложенного на него хаотического пульсационного течения.

Обозначим осредненное по времени значение величины Φ через $\bar{\Phi}$, а пульсационное — Φ', тогда мгновенное значение величины Φ выразится суммой

$$\Phi = \bar{\Phi} + \Phi'. \qquad (4.54)$$

Под осредненным значением понимают среднее значение по времени в фиксированной точке пространства, то есть

$$\bar{\Phi} = \frac{1}{\tau_1} \int\limits_{\tau_1}^{\tau+\tau_1} \Phi \, d\tau. \qquad (4.55)$$

Следует отметить, что интервал времени τ_1, по которому проводится осреднение, должен быть выбран достаточно большим, чтобы осредненное значение величины от него не зависело. Тогда, согласно определению, осредненное значение пульсационной величины

$$\bar{\Phi'} = 0. \qquad (4.56)$$

Уравнения осредненного потока получают следующим образом: в уравнения конвективного теплообмена вместо зависимых переменных (составляющих вектора скорости, давления, температуры) представляют их выражения через осредненные значения и пульсации (соотношения вида (4.54)), а затем производят осреднение по времени каждого полученного члена.

Опуская довольно громоздкие выкладки, которые можно найти в работах [77, 80], запишем систему уравнений конвективного теплообмена для осредненного турбулентного потока (без учета массовых сил, внутренних источников теплоты и диссипативной функции) в декартовых координатах:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0, \qquad (4.57)$$

$$\rho\left(\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \mu\Delta\bar{u} + \left(\frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau'_{xz}}{\partial z}\right),$$

$$\rho\left(\bar{u}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w}\frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \mu\Delta\bar{v} + \left(\frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau'_{yz}}{\partial z}\right), \qquad (4.58)$$

$$\rho\left(\bar{u}\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w}\frac{\partial \bar{w}}{\partial z}\right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \mu\Delta\bar{w} + \left(\frac{\partial \tau'_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma'_z}{\partial z}\right),$$

$$\bar{u}\frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \bar{T}}{\partial y} + \bar{w}\frac{\partial \bar{T}}{\partial z} = a\Delta\bar{T}\left(\frac{\partial \overline{u'T'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'T'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w'T'}}{\partial z}\right). \qquad (4.59)$$

Уравнения (4.58) отличаются от уравнений для ламинарного потока наличием дополнительных членов, определяемых тензором напряжения $\vec{\vec{\sigma}}'$ вида

$$\begin{pmatrix} \sigma'_x & \tau'_{xy} & \tau'_{xz} \\ \tau'_{xy} & \sigma'_y & \tau'_{yz} \\ \tau'_{xz} & \tau'_{yz} & \sigma'_z \end{pmatrix} = -\rho \begin{pmatrix} \overline{u'^2} & \overline{u'v'} & \overline{u'w'} \\ \overline{u'v'} & \overline{v'^2} & \overline{v'w'} \\ \overline{u'w'} & \overline{v'w'} & \overline{w'^2} \end{pmatrix}. \qquad (4.60)$$

Тензор $\vec{\vec{\sigma}}'$ называют тензором кажущихся напряжений турбулентного течения.

Чтобы выяснить физический смысл дополнительных членов в уравнении энергии (4.59), представим его в виде

$$\rho c\vec{W} \cdot \nabla T = -\nabla \cdot \vec{q} - \rho c\nabla(\overline{\vec{W}'T}). \qquad (4.61)$$

Вводя обозначение $\vec{q}_т = \rho c\overline{\vec{W}'T}$, перепишем (4.61) следующим образом:

$$\rho c\vec{W} \cdot \nabla T = -\nabla \cdot (\vec{q} + \vec{q}_т). \qquad (4.62)$$

Из соотношения (4.62) видно, что добавочный член в уравнении энергии (4.59) характеризует дополнительный перенос теплоты за счет турбулентных пульсаций, которые осуществляются наряду с молекулярным (ламинарным) переносом теплоты теплопроводностью.

Основная сложность при решении уравнений осредненного турбулентного потока состоит в том, чтобы правильно дополнить эти уравнения необходимыми замыкающими соотношениями, связывающими турбулентные напряжения и тепловой поток с усредненными значениями скоростей и температуры. Рассмотрение этого весьма сложного и объемного вопроса выходит за рамки настоящей книги, поэтому мы отсылаем читателя к работам [73, 77].

Уравнение теплоотдачи. Для теплотехнических расчетов обычно основной интерес представляет коэффициент теплоотдачи, который определяется с помощью законов Ньютона — Рихмана и Фурье.

С одной стороны, количество теплоты, передаваемое от жидкости к стенке через слой жидкости, прилегающей к элементу поверхности dF, путем теплопроводности может быть определено по закону Фурье

$$dQ = -\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_{n=0} dF. \qquad (4.63)$$

С другой стороны, для этого элемента поверхности справедлив закон Ньютона — Рихмана

$$dQ = \alpha(T_с - T_ж)\, dF. \qquad (4.64)$$

Приравнивая правые части соотношений (4.63), (4.64), получаем

$$\alpha = -\frac{\lambda}{T_с - T_ж}\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_{n=0}. \qquad (4.65)$$

Соотношение (4.65), позволяющее по известному полю температур в жидкости определить коэффициент теплоотдачи, называется уравнением теплоотдачи.

Условия однозначности. Для полной определенности задач конвективного теплообмена систему дифференциальных уравнений необходимо дополнить условиями однозначности. Эти условия, дающие математическое описание всех частных особенностей исследуемого процесса, были подробно рассмотрены при изложении теории теплопроводности, поэтому ограничимся их перечислением. Условия однозначности включают: 1) *геометрические*, характеризующие форму и размеры области, в которой проходит исследуемый процесс теплообмена; 2) *физические*, характеризующие теплофизические свойства среды и тела; 3) *начальные*, характеризующие процесс в начальный момент времени (если процесс стационарный, эти условия отпадают); 4) *граничные*, характеризующие особенности протекания процесса на границах области.

Большинство граничных условий можно отнести к одному из следующих типов: граничные условия первого, второго, третьего и четвертого родов. Они определяют соответственно значение искомой функции на границе, величину градиента искомой функции по нормали к границе, связь между значением искомой функции на границе и ее градиентом по нормали к ней, соотношения между значениями искомой функции и нормальных составляющих ее градиента при переходе через внутреннюю границу.

Краевые задачи с внутренними границами и существенно отличающимися свойствами среды по разные стороны этих границ называются *сопряженными* (более подробно они рассмотрены в § 5.6).

Итак, математическое описание процессов конвективного теплообмена состоит из уравнений движения, неразрывности, энергии, теплоотдачи и условий однозначности. В ряде случаев в эту систему включают дополнительные соотношения (уравнение состояния и другие).

§ 4.3. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ И РАЗМЕРНОСТЕЙ

Теория подобия — это наука о подобных явлениях, которая используется для изучения физических процессов по двум основным направлениям: как средство обобщения результатов эксперимента; как теоретическая основа для моделирования различных устройств.

Свое начало теория подобия берет из геометрии, где изучается подобие геометрических фигур. *Геометрически подобными* называют фигуры, имеющие пропорциональные сходственные линейные элементы. Примером таких фигур служат приведенные на рис. 4.1 многоугольники, для которых справедливы следующие соотношения:

$$\frac{l''_1}{l'_1} = \frac{l''_2}{l'_2} = \frac{l''_3}{l'_3} = \frac{l''_4}{l'_4} = C_l,$$

где l'_1, l'_2 и l'_3 — линейные размеры одной фигуры, l''_1, l''_2 и l''_3 — сходные линейные размеры другой фигуры, C_l — константа геометрического подобия (коэффициент пропорциональности).

Данное условие является математической формулировкой геометрического подобия.

Понятие поообия может быть распространено на любое физическое явление. Физические явления называют *подобными*, если они относятся к одному и тому же классу, протекают в геометрически подобных системах и у них во всех сходственных точках в сходственные моменты времени отношения одноименных величин постоянные числа — это

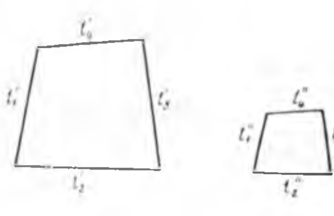


Рис. 4.1. Подобные четырехугольники

константы подобия. Связь между различными константами подобия может быть выявлена с помощью дифференциального уравнения, описывающего изучаемый физический процесс. Покажем эту связь на примере наиболее простого уравнения конвективного теплообмена — уравнения теплоотдачи.

Для двух подобных явлений уравнения теплоотдачи могут быть записаны таким образом:

$$\alpha' = -\frac{\lambda'}{\Delta T'}\left(\frac{\partial T'}{\partial n'}\right)_{n'=0}, \tag{4.66}$$

$$\alpha'' = -\frac{\lambda''}{\Delta T''}\left(\frac{\partial T''}{\partial n''}\right)_{n''=0}. \tag{4.67}$$

Согласно определению подобных физических явлений, имеем:

$$C_\alpha = \frac{\alpha''}{\alpha'},\ C_\lambda = \frac{\lambda''}{\lambda'},\ C_T = \frac{\Delta T''}{\Delta T'} = \frac{T''}{T'},\ C_l = \frac{n''}{n'} = \frac{l''}{l'}, \tag{4.68}$$

где l — характерный размер системы.

Подставляя (4.68) в (4.67), после очевидных преобразований получаем

$$\alpha' = -\frac{C_\lambda}{C_\alpha C_l}\frac{\lambda'}{\Delta T'}\left(\frac{\partial T'}{\partial n'}\right)_{n'=0}. \tag{4.69}$$

Уравнения (4.66) и (4.69) тождественны, так как описывают процесс теплоотдачи в одной и той же точке первой системы, поэтому

$$\frac{C_\lambda}{C_\alpha C_l} = 1. \tag{4.70}$$

Соотношение (4.70) есть искомая связь между константами подобия, которая с учетом (4.68) принимает вид

$$\frac{\alpha' l'}{\lambda'} = \frac{\alpha'' l''}{\lambda''}$$

или

$$\frac{\alpha \cdot l}{\lambda} = \mathrm{Nu} = \mathrm{idem}. \tag{4.71}$$

Критерии (числа) подобия — безразмерные комплексы, составленные из величин, характеризующих явление. Нулевая размерность — основное свойство критериев подобия и служит проверкой правильности их составления.

Таким образом, помимо излагаемого далее метода приведения уравнений к безразмерному виду числа подобия могут быть получены и методом констант подобия.

Отношение двух однородных величин называют *симплексом*. Однородными являются физические величины одинаковой природы, имеющие одну и ту же размерность.

Произведения чисел подобия и частное от их деления также представляют собой числа подобия. Формулы связи между числами подобия называются *уравнениями подобия*.

Числа подобия могут быть получены двумя способами. Согласно первому способу, числа подобия получают из уравнений связи между величинами, характеризующими явление. Если же исследуемое явление изучено недостаточно и нет таких уравнений, то числа подобия получают на основе анализа размерностей.

Основу теории подобия физических явлений составляют три теоремы.

Первая теорема. *У подобных явлений одноименные числа подобия одинаковы.*

Данная теорема дает обоснование методу моделирования, поскольку указывает условия, при которых результаты, полученные при исследовании модели, могут быть перенесены на натурный образец.

Вторая теорема. *Если физическое явление описывается системой дифференциальных уравнений, то всегда существует возможность представления их в виде уравнений подобия, или интеграл дифференциального уравнения (системы уравнений) может быть представлен как функция чисел подобия дифференциального уравнения.*

Таким образом, эта теорема указывает путь получения чисел подобия. Они могут быть получены из дифференциальных уравнений, описывающих исследуемое явление.

Третья теорема. *Подобны те явления, условия однозначности которых подобны.*

Числа подобия, составленные из величин, входящих в условия однозначности, называют *критериями подобия*. С учетом этого определения можно дать еще одну формулировку третьей теоремы: *подобны те явления, критерии подобия которых одинаковы.*

Приведение уравнений конвективного теплообмена к безразмерному виду. Система дифференциальных уравнений в частных производных, описывающая процесс конвективного тепломассообмена, очень сложна. Ее аналитическое решение получено лишь в немногих, наиболее простых, частных случаях. Серьезные трудности, связанные с ограниченными возможностями современных ЭВМ, возникают и при численном решении. В связи с этим большое значение приобретают экспериментальные методы исследования процессов конвективного теплообмена. Одной из основных трудностей этого пути исследования является большое количество переменных, которое резко усложняет выяснение влияния каждой величины на весь процесс в целом. При проведении экспериментов необходимо также знать условия, выполнение которых позволит перенести результаты, полученные на какой-либо конкретной установке, на другие аналогичные процессы.

Решением этих вопросов занимается теория подобия. С ее помощью исходная система размерных физических величин может быть преобразована в совокупность безразмерных комплексов, число которых будет меньше числа исходных размерных величин. Это позволяет не только формально сократить число переменных, что уже само по себе упрощает исследование, но и выявить влияние совокупностей факторов, определяющих физические связи в изучаемом процессе.

Для использования выводов теории подобия систему дифференциальных уравнений конвективного тепломассообмена необходимо привести к безразмерному виду.

Рассмотрим нестационарное течение несжимаемой жидкости с учетом диссипации и внутренних источников теплоты, физические свойства жидкости λ, c, ρ, μ принимаются постоянными.

В этом случае система дифференциальных уравнений конвективного теплообмена может быть записана следующим образом:

$$\alpha (T|_{n=0} - T_ж) = -\lambda (\partial T/\partial n)|_{n=0}, \tag{4.72}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} + (\vec{W}, \operatorname{grad} T) = a\nabla^2 T + \frac{q_v}{c\rho} + \frac{\mu}{c\rho}\Phi_V, \tag{4.73}$$

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial \tau} + (\vec{W}, \operatorname{grad}) \vec{W} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu\nabla^2 \vec{W}, \tag{4.74}$$

$$\operatorname{div} \vec{W} = 0. \tag{4.75}$$

Введем характерные величины процесса: длину l_0, размерность температур ΔT (в данном случае удобно положить $\Delta T = T|_{n=0} - T_ж$), скорость w_0, перепад давления.

Обозначим безразмерные величины

$$\Theta = \frac{T}{\Delta T}; \; \vec{W} = \frac{\vec{W}}{w_0}; \; X = \frac{x}{l_0}; \; Y = \frac{y}{l_0}; \; Z = \frac{z}{l_0};$$

$$\bar{\Phi}_V = \left(\frac{w_0^2}{l_0^2}\right)^{-1} \Phi_V, \; \bar{n} = \frac{n}{l_0}. \tag{4.76}$$

Подставляя соотношение (4.76) в систему (4.72)—(4.75), получаем

$$\frac{\alpha l_0}{\lambda} = -(\partial\Theta/\partial\bar{n})|_{n=0}, \tag{4.77}$$

$$\Delta T \frac{\partial\Theta}{\partial\tau} + \frac{w_0 \Delta T}{l_0} (\vec{W}, \operatorname{grad} \Theta) = \frac{a\Delta T}{l^2} \nabla^2\Theta + \frac{q_v}{c\rho} + \frac{\mu w_0^2}{c\rho l_0^2} \Phi_V, \tag{4.78}$$

$$w_0 \frac{\partial \vec{W}}{\partial \tau} + \frac{w_0^2}{l_0} (\vec{W}, \operatorname{grad}) \vec{W} = \vec{f} - \frac{1}{\rho l_0} \operatorname{grad} p + \nu \frac{w_0}{l_0^2} \nabla^2 \vec{W}, \tag{4.79}$$

$$\operatorname{div} \vec{W} = 0. \tag{4.80}$$

Разделим уравнения (4.78), (4.79) соответственно на $\frac{a\Delta T}{l_0^2}$ и на $\frac{w_0^2}{l_0}$:

$$\frac{\partial\Theta}{\partial(a\tau/l_0^2)} + \frac{w_0 l_0}{a} (\vec{W}, \operatorname{grad} \Theta) = \nabla^2\Theta + \frac{q_v l_0^2}{\lambda\Delta T} + \frac{w_0^2}{c\Delta T} \frac{\mu}{\rho a} \Phi_V, \tag{4.81}$$

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial (w_0\tau/l_0)} + (\vec{W}, \operatorname{grad}) \vec{W} = \frac{\vec{f} l_0}{w_0^2} - \operatorname{grad}\left(\frac{\Delta p}{\rho w_0^2}\right) + \frac{\nu}{w_0 l_0} \nabla^2 \vec{W}. \tag{4.82}$$

Замена p на Δp в уравнении (4.82) допустима, поскольку p входит в уравнения движения под знаком производной, то есть определяется с точностью до произвольной постоянной.

Безразмерные комплексы, входящие в соотношения (4.77), (4.81), (4.82), обозначим следующим образом:

$$\frac{\alpha l_0}{\lambda} = \mathrm{Nu}; \quad \frac{a\tau}{l_0^2} = \mathrm{Fo}; \quad \frac{w_0 l_0}{a} = \mathrm{Pe}; \frac{q_v l_0^2}{\lambda \Delta T} = \mathrm{Os},$$

$$\frac{w_0^2}{c\Delta T} = \mathrm{E}, \quad \frac{\mu}{\rho a} = \frac{\nu}{a} = \mathrm{Pr}; \quad \frac{w_0 \tau}{l_0} = \mathrm{Ho}; \quad \frac{\Delta p}{\rho w_0^2} = \mathrm{Eu}; \quad \frac{w_0 l_0}{\nu} = \mathrm{Re}. \tag{4.83}$$

Учитывая соотношение (4.83) и разделив уравнение (4.81) на Pe, получаем систему дифференциальных уравнений конвективного теплообмена в безразмерном виде:

уравнение теплоотдачи

$$\mathrm{Nu} = -(\partial \Theta / \partial \bar{n})|_{n=0}, \tag{4.84}$$

уравнение энергии

$$\frac{1}{\mathrm{Pe}} \frac{\partial \Theta}{\partial \mathrm{Fo}} + (\vec{W}, \operatorname{grad} \Theta) = \frac{1}{\mathrm{Pe}} \nabla^2 \Theta + \frac{\mathrm{Os}}{\mathrm{Pe}} + \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{Re}} \Phi, \tag{4.85}$$

уравнение движения

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial \mathrm{Ho}} + (\vec{W}, \operatorname{grad}) \vec{W} = \frac{\vec{j} l_0}{w_0^2} - \operatorname{grad} \mathrm{Eu} + \frac{1}{\mathrm{Re}} \nabla^2 \vec{W}, \tag{4.86}$$

уравнение неразрывности

$$\operatorname{div} \vec{W} = 0. \tag{4.87}$$

Член $\frac{\vec{j} l_0}{w_0^2}$ в уравнении движения (4.86) описывает влияние массовых сил, природа которых может быть различна.

Рассмотрим два наиболее часто встречающихся в практике случая.

1. Движение под действием сил тяжести. В этом случае

$$\vec{j} = \vec{g} = g\,[\cos(\vec{g}, x)\,\vec{i} + \cos(\vec{g}, y)\,\vec{j} + \cos(\vec{g}, z)\,\vec{k}\,] = g\,\vec{e}.$$

Тогда $\frac{\vec{j} l_0}{w_0^2} = \frac{\vec{g} l_0}{w_0^2} = \vec{e} \frac{g l_0}{w_0^2} = \frac{\vec{e}}{\mathrm{Fr}}$, где $\mathrm{Fr} = \frac{w_0^2}{g l_0}$.

2. Движение под действием подъемной силы. Здесь $\vec{j} = \vec{g} \beta T = \vec{g} \beta \Delta T \Theta$. Тогда $\frac{\vec{j} l_0}{w_0^2} = \vec{e} \frac{\mathrm{Gr}}{\mathrm{Re}^2} \Theta$, где $\mathrm{Gr} = \frac{g \beta \Delta T l_0^3}{\nu^2}$.

В частном случае из уравнения энергии (4.81) при $\vec{W} = 0$ нетрудно получить уравнение нестационарной теплопроводности в безразмерной форме:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \mathrm{Fo}} = \nabla^2 \Theta + \mathrm{Os}.$$

Аналогично приводятся к безразмерному виду и условия однозначности. Ограничимся рассмотрением граничных условий II, III родов, в результате представления которых в безразмерной форме появляются широко используемые в теории теплопроводности критерии Кирпичева и Био.

Граничное условие II рода имеет вид

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n}\bigg|_S = q_S.$$

Используя характерные величины процесса, запишем

$$N = \frac{n}{l_0}, \quad \Theta = \frac{T}{\Delta T}.$$

Подставляя эти формулы в граничное условие II рода, получим это граничное условие в безразмерном виде:

$$-\frac{\partial \Theta}{\partial N}\bigg|_S = \mathrm{Ki},$$

где $\mathrm{Ki} = \frac{q_S l_0}{\lambda \Delta T}$ — число Кирпичева.

Аналогично из граничного условия III рода имеем

$$-\frac{\partial \Theta}{\partial N}\bigg|_S = \mathrm{Bi}\,\Theta|_S,$$

где $\mathrm{Bi} = \frac{\alpha l_0}{\lambda}$ — число Био.

Физический смысл критериев подобия. Полученные безразмерные комплексы называют критериями подобия, из которых критерии Ho, Fr, Eu, Re называют *критериями гидродинамического подобия*, а Ki, Bi, Nu, Pe, Fo, Gr, Os, E — *критериями теплового подобия*. Рассмотрим физический смысл полученных критериев.

Критерий Кирпичева $\mathrm{Ki} = q_S l_0 / \lambda \Delta T$ — безразмерный тепловой поток на границе тела. Преобразовав формулу числа очевидным образом, получим

$$\mathrm{Ki} = \frac{q_S}{\lambda \frac{\Delta T}{l}}.$$

Таким образом, Ki представляет собой отношение теплового потока, подводимого (или отводимого) к телу, к тепловому потоку, передаваемому через тело за счет теплопроводности.

Критерий Био $\mathrm{Bi} = \alpha l_0 / \lambda$ представляет собой отношение внутреннего и внешнего термических сопротивлений

$$\mathrm{Bi} = \frac{\frac{l_0}{\lambda}}{\frac{1}{\alpha}}$$

и является безразмерной характеристикой теплообмена на поверхности тела (в формулу для Bi входит коэффициент теплопроводности стенки).

Критерии Ki, Bi задаются при постановке задачи и являются определяющими.

Критерий Нуссельта $\mathrm{Nu} = \alpha l_0/\lambda$ — безразмерный коэффициент теплоотдачи, характеризует теплообмен на границе стенка — жидкость. Чтобы выяснить его физический смысл, умножим и разделим выражения для Nu на некоторый температурный напор:

$$\mathrm{Nu} = \frac{\alpha \Delta T}{\Delta T \lambda / l_0}.$$

Данное выражение представляет собой отношение величины плотности теплового потока, переданного в процессе теплоотдачи, к величине плотности теплового потока, переданного через слой толщиной l_0 теплопроводностью. Помимо данного определения Nu может рассматриваться как отношение коэффициента теплоотдачи к термической проводимости слоя жидкости толщиной l_0.

В задачах конвективного теплообмена критерий Nu является определяемым, так как в него входит искомая величина. Теоретическое определение значений критерия Nu довольно сложная проблема, поскольку требует решения сопряженных задач конвективного теплообмена.

Следует отметить, что по форме записи критерий Нуссельта сходен с рассматриваемым в теории теплопроводности критерием Био (Bi). Однако сходство это чисто внешнее. Во-первых, в критерий Bi входит теплопроводность твердого тела, в критерий Нуссельта — теплопроводность жидкости. Во-вторых, критерий Bi входит в условие однозначности (граничные условия III рода в теории теплопроводности) и является величиной заданной, в то время как коэффициент теплоотдачи, входящий в формулу для Nu, есть величина искомая.

Критерий Пекле $\mathrm{Pe} = w_0 l_0/a$ характеризует отношение конвективного (молярного) теплопереноса к молекулярному. Это видно после преобразования

$$\mathrm{Pe} = \frac{w_0 c_p \rho \Delta T}{\lambda \Delta T / l_0}.$$

В числителе данного выражения стоит величина теплового потока, который переносится через единицу площади жидкостью, движущейся со скоростью w_0. В знаменателе — величина теплового потока, передаваемого через слой толщиной l_0 теплопроводностью. Таким образом, критерий Pe можно рассматривать как меру относительной роли теплоты, переносимой конвекцией, и теплоты, передаваемой теплопроводностью. Эта интерпретация критерия Pe очень важна, так как в случае доминирования конвективного теплопереноса над кондуктивным (большие значения Pe) диффузионный и источниковый члены в уравнении энергии (4.85) могут быть опущены, что меняет тип уравнения и возможные методы его решения.

Критерий Фурье $a\tau/l_0^2$ называют еще *критерием тепловой гомохронности.* Его физический смысл становится ясен после преобразования

$$\mathrm{Fo} = \frac{a\tau}{l_0^2} = \frac{\left(\frac{\lambda}{l_0}\,\Delta T\right) l_0^2 \tau}{c\,(\rho l_0^3)\,\Delta T}\,.$$

Таким образом, критерий Fo представляет собой отношение количества теплоты, протекающего за счет теплопроводности за время τ, к количеству теплоты, пошедшему на изменение температуры тела, то есть является мерой скорости изменения температуры тела при неустановившемся тепловом состоянии. Критерий Fo входит в число определяющих при исследовании нестационарных процессов теплообмена.

Критерий Грасгофа $\mathrm{Gr} = g l_0^3 \beta\,\Delta T/\nu^2$ характеризует отношение подъемной силы, возникающей в потоке за счет разности плотностей, к силам молекулярного трения.

Предполагая коэффициент объемного расширения в заданном интервале температур постоянным, запишем известную модификацию Gr, называемую *критерием Архимеда*:

$$\mathrm{Ar} = \frac{g l_0^3}{\nu^2}\,\frac{\rho_0 - \rho}{\rho}\,.$$

Этот критерий обычно используется при исследовании процессов конвективного теплообмена в двухфазных жидкостях. В этом случае ρ_0 и ρ представляют собой плотности фаз.

Критерий Остроградского $\mathrm{Os} = q_V l_0^2/(\lambda\Delta T)$. Для выяснения физического смысла критерия Os приведем его к виду

$$\mathrm{Os} = \frac{q_V l_0^2}{\lambda\Delta T} = \frac{q_V l_0^3}{(\lambda\Delta T/l_0)\,l_0^2}\,.$$

Из полученного выражения следует, что критерий Os представляет собой отношение количества теплоты $q_V l_0^3$, выделившегося в теле, к количеству теплоты $(\lambda\Delta T/l_0)\,l_0^2$, прошедшему через тело за счет теплопроводности.

Критерий Эккерта $\mathrm{E} = w_0^2/(c\Delta T)$. Умножим числитель и знаменатель выражения для критерия E на ρ:

$$\mathrm{E} = \frac{w_0^2}{c\Delta T} = \frac{\rho w_0^2}{\rho c\Delta T}\,.$$

Таким образом, критерий E представляет собой отношение кинетической энергии потока к количеству теплоты, пошедшему на изменение температуры (в данном случае нагревание жидкости). Критерий Эккерта является количественной характеристикой процесса диссипации, так как устанавливает связь между механической энергией движущегося потока и тепловой энергией, в которую переходит энергия механическая, вызывая нагревание жидкости.

В некоторых случаях при исследовании процессов конвективного теплообмена вводят *критерий Стантона* St, который может быть получен делением критерия Нуссельта на критерий Пекле:

$$\mathrm{St} = \frac{\mathrm{Nu}}{\mathrm{Pe}}.$$

С учетом выражений для критериев Nu и Pe получим

$$\mathrm{St} = \frac{\alpha}{\rho w_0 c},$$

то есть *критерий Стантона* выражает отношение интенсивности теплоотдачи к удельному теплосодержанию потока.

Критерий гомохронности (временной однородности) $\mathrm{Ho} = w_0\tau/l_0$ (или *критерий Струхаля* $\mathrm{Sh} = w_0\tau/l_0$) представляет собой отношение времени протекания процесса к времени перемещения рассматриваемого элемента жидкости со скоростью w_0 на расстояние l_0. Критерий Ho является определяющим при исследовании нестационарных или периодических процессов гидродинамики (например, отрыв вихрей).

Критерий Рейнольдса $\mathrm{Re} = w_0 l_0/\nu$. Умножим числитель и знаменатель выражения для Re на w_0. С учетом того, что критерий Рейнольдса может быть представлен в виде

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho w_0^2}{\mu\,(w_0/l_0)},$$

следует, что он характеризует отношение сил инерции к силам молекулярного трения. Его величина определяет характер течения жидкости.

Входящие в критерий Re силы вязкого трения и инерционные силы оказывают противоположное воздействие. Характер течения определяется удельным вкладом этих факторов в гидродинамику процесса. В том случае, если преобладают силы вязкого трения, оказывающие тормозящее воздействие на движение жидкости, течение носит ламинарный упорядоченный характер; если преобладают инерционные силы, возникают местные пульсации скорости, приводящие к пульсациям температуры, давления и других параметров процесса, то есть течение становится неупорядоченным, турбулентным.

В основе каждого из режимов течения (ламинарного или турбулентного) лежит физический механизм переноса количества движения, теплоты и массы. При ламинарном режиме течение слоистое, жидкость движется параллельно поверхности, перенос между слоями происходит на микроскопическом, молекулярном уровне. При турбулентном режиме интенсивность обмена между слоями резко возрастает, перенос становится макроскопическим, молярным, так как смешиваются отдельные массы жидкости, моли.

Итак, малым значениям критерия Re (преобладают силы вязкого трения) соответствует устойчивое ламинарное течение. С ростом Re упорядоченность движения постепенно нарушается и течение становится турбулентным. Некоторый промежуточный диапазон чисел Re соответствует переходному режиму течения.

При достаточно больших значениях критерия Re лапласиан в уравнении движения (4.86) (член, учитывающий действие сил вязкого трения), а также диссипативный член в уравнении энергии могут быть опущены. При этом, однако, необходимо учитывать, что дифференциальные уравнения движения меняют тип (становятся гиперболическими) и требуют других методов решения.

Критерий Эйлера $Eu = \Delta p/(\rho w_0^2)$ является мерой отношения перепада статических давлений в потоке к его динамическому напору. При исследовании гидродинамических процессов в каналах критерий Эйлера является определяемым. При вычислении давления в потоке в качестве точки отсчета принимается какое-либо фиксированное значение давления, например давление на входе в канал.

Критерий Фруда $Fr = w_0^2/(gl_0)$. Для выяснения физического смысла Fr умножим и разделим этот комплекс на плотность жидкости ρ. Тогда $Fr = \rho w_0^2/(\rho g l)$, то есть критерий Фруда представляет собой отношение кинетической энергии потока к работе силы тяжести. При исследовании гидродинамических процессов, происходящих под действием гравитационных сил, этот критерий является определяющим. При расчете горизонтальных течений жидкости действием сил тяжести можно пренебречь. В этом случае критерий Fr выпадает из числа определяющих. При исследовании процессов свободной конвекции вместо критерия Fr в число определяющих вводится критерий $Gr = g\beta\,\Delta T/\nu^2$, учитывающий влияние подъемных сил, возникших из-за разности плотностей нагретых и холодных частиц жидкости.

Критерий Прандтля $Pr = \nu/a$ связан с критериями Пекле и Рейнольдса соотношением

$$Pr = Pe/Re = \mu c/\lambda.$$

Критерий Прандтля является комбинацией физических параметров жидкости и поэтому может рассматриваться как некоторый безразмерный физический параметр, значение которого зависит от температуры. Изменение числа Pr с изменением температуры определяется зависимостью от температуры вязкости жидкости, поскольку ее теплопроводность и другие параметры, входящие в Pr, зависят от температуры гораздо слабее.

Следуя работе [24], можно привести классификацию жидкостей в зависимости от величины числа Pr:

$Pr \ll 1$ — жидкие металлы;

$Pr \approx 1$ — газы и неметаллические капельные жидкости при больших температурах;

$Pr > 1$ — неметаллические капельные жидкости.

Для газов критерий Pr слабо зависит от температуры, является практически величиной постоянной, определяемой количеством атомов газа в молекуле.

Для идеальных газов по молекулярно-кинетической теории получены значения критерия Pr (табл. 4.1).

Следует отметить, что для реальных газов значения критерия Pr несколько отличаются от приведенных значений.

Если рассмотреть уравнение энергии без учета внутренних источников теплоты, а также пренебречь эффектом диссипации, то соотношение (1.85) запишется в виде

Таблица 4.1

Газ	Pr
Одноатомный	0,67
Двухатомный	0,73
Трехатомный	0,80
Четырехатомный и более	1,00

$$\frac{d\Theta}{d\mathrm{Fo}} = \frac{1}{\mathrm{Pe}}\nabla^2\Theta. \qquad (4.88)$$

Рассмотрим также уравнение движения газа для безнапорного течения в предположении, что массовые силы пренебрежимо малы, тогда (1.86) примет вид

$$\frac{d\vec{W}}{d\mathrm{Ho}} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2\vec{W}. \qquad (4.89)$$

По форме записи уравнения (4.88), (4.89) аналогичны $d\vec{W}/d\mathrm{Ho}$ и $d\Theta/d\mathrm{Fo}$ — полные (субстанциональные) производные. Отсюда следует, что при Pe = Re, то есть при Pr = 1, расчетные поля температур и скоростей подобны, если аналогичны условия однозначности. Таким образом, в некоторых случаях (например, теплообмен при течении в безградиентном пограничном слое) критерий Прандтля можно рассматривать как меру подобия полей температур и скоростей.

Критерии конвективного массообмена. Если вывести дифференциальные уравнения конвективного тепло- и массопереноса из соответствующих законов сохранения, то эти уравнения будут подобны. При этом массовая концентрация соответствует температуре, а коэффициент диффузии аналогичен коэффициенту температуропроводности. Эта аналогия позволяет определить коэффициент массообмена (найти решения задачи конвективного массообмена) наиболее простым способом: используется соответствующее безразмерное соотношение для конвективного теплообмена с подстановкой соответствующих безразмерных комплексов, описывающих процесс массообмена. Так, критерию Nu в теории конвективного массообмена соответствует безразмерный комплекс, называемый *числом Шервуда*:

$$\mathrm{Sh} = \frac{\beta l_0}{D},$$

где β, D — соответственно коэффициенты конвективного массообмена и диффузии.

По аналогии с критерием Pr в конвективном массообмене вводится *число Шмидта*

$$\mathrm{Sc} = \nu/D,$$

характеризующее подобие скоростных и концентрационных полей в потоке.

Сходство дифференциальных уравнений конвективного тепло- и массопереноса при аналогичных условиях однозначности отражает *критерий Льюиса*

$$\mathrm{Le} = D/a,$$

который характеризует подобие концентрационных и температурных полей в потоке жидкости.

Пусть в результате решения задачи конвективного теплообмена для критерия Нуссельта получена какая-то функциональная зависимость, например

$$\mathrm{Nu} = f\,(\mathrm{Re},\ \mathrm{Pr}).$$

Подобие между процессами конвективного тепло- и массообмена позволяет искать число Шервуда в аналогичном виде, заменив при этом критерий Прандтля критерием Шмидта:

$$\mathrm{Sh} = f\,(\mathrm{Re},\ \mathrm{Sc}),$$

то есть в данном случае отпадает необходимость отдельного решения задачи конвективного массообмена.

Уравнения подобия. Конечным результатом решения задачи конвективного теплообмена является определение коэффициента теплоотдачи, который связан с остальными параметрами какой-то функциональной зависимостью.

Уравнением подобия называется функциональная зависимость определяемого критерия от других критериев, характеризующих рассматриваемое явление — определяющих критериев. Поскольку искомая величина — коэффициент теплоотдачи — входит в критерий Nu, его выбирают в качестве определяемого. В общем случае эта критериальная зависимость очень сложна, содержит большое количество переменных и определить ее практически невозможно. Анализ сложных процессов конвективного теплообмена во многом облегчают теоремы подобия [65], с помощью которых уменьшается число определяющих критериев, а также устанавливаются условия подобия различных явлений теплообмена. Использование теорем подобия позволяет отдельно рассматривать стационарные и нестационарные процессы, исследовать явления конвективного теплообмена, различающиеся по характеру движения среды, и т. д.

Рассмотрим некоторые наиболее распространенные виды критериальных зависимостей.

При экспериментальном исследовании нестационарного конвективного теплообмена составление уравнения подобия сводится к отысканию функциональной зависимости вида $\mathrm{Nu} = f\,(\mathrm{Fo},\ \mathrm{Ho},\ \mathrm{Re},\ \mathrm{Gr},\ \mathrm{Pr})$.

Критерий гомохронности Ho и критерий Фурье Fo являются определяющими критериями для нестационарных процессов.

При исследовании стационарных процессов конвективного теплообмена критерий Ho и критерий Fo выпадают из числа определяющих и уравнение подобия упрощается:

$$\mathrm{Nu} = f\,(\mathrm{Re},\ \mathrm{Gr},\ \mathrm{Pe}).$$

Учитывая, что $\mathrm{Pe} = \mathrm{Re} \cdot \mathrm{Pr}$, тогда

$$\mathrm{Nu} = f\,(\mathrm{Re},\ \mathrm{Gr},\ \mathrm{Pr}).$$

При вынужденном движении жидкости и при развитом турбулентном режиме свободная конвекция в сравнении с вынужденной мала, то есть можно пренебречь числом Грасгофа, а уравнение подобия принимает вид

$$\mathrm{Nu} = f\,(\mathrm{Re},\ \mathrm{Pr}).$$

При свободном движении жидкости, когда вынужденная конвекция отсутствует, в критериальное уравнение не входит число Рейнольдса:

$$\mathrm{Nu} = f\,(\mathrm{Gr},\ \mathrm{Pr}).$$

Для некоторых газов величина числа Pr в процессе конвективного теплообмена практически не изменяется с температурой ($\mathrm{Pr} = \mathrm{const}$), поэтому уравнение подобия принимает очень простой вид:

$$\mathrm{Nu} = f\,(\mathrm{Re}).$$

Одной из наиболее распространенных функциональных зависимостей между критериями подобия является степенная. Например, при стационарном вынужденном течении теплоносителя уравнение подобия для числа Nu имеет следующий вид:

$$\mathrm{Nu} = c\mathrm{Re}^m\mathrm{Pr}^n,$$

где c, m, n — постоянные, определяемые путем обработки экспериментальных данных.

Приведенные уравнения подобия, безусловно, не описывают всего многообразия процессов конвективного теплообмена.

Метод анализа размерностей. Сущность метода анализа размерностей состоит в определении числа и структуры безразмерных комплексов, составленных из величин, характеризующих исследуемый процесс в том случае, если описывающая его система дифференциальных уравнений неполная или не составлена из-за отсутствия информации.

Если перечислить существенные для исследуемого процесса теплообмена физические величины, то на основании анализа размерностей можно найти числа подобия, которые войдут в критериальное уравнение данного процесса.

Различают два вида физических величин: первичные (основные) и вторичные (производные).

Первичные величины определяют какой-либо физический процесс без связи с другими параметрами. *Вторичные величины* выражаются через первичные с помощью определенных соотношений.

В СИ за первичные величины выбраны длина L, масса M, время T, температура Θ, сила тока I, сила света J.

В задачах конвективного теплообмена последние две величины практически не встречаются (только в связи с характеристикой соответствующего теплового источника).

Размерностью называют выражение вторичной величины через первичные. Формула размерности в общем случае имеет вид степенной зависимости

$$[\varphi] = L^{n_1} M^{n_2} T^{n_3} \Theta^{n_4} I^{n_5} J^{n_6},$$

где $[\varphi]$ — произвольная вторичная величина; n — действительные числа.

Все многообразие вторичных величин определяется различными вариантами наборов n_i $(i = \overline{1,6})$.

В теории размерности получена *π-теорема*, позволяющая точно определить число безразмерных переменных, характеризующих исследуемый физический процесс: физическое уравнение, содержащее $n \geqslant 2$ размерных величин, из которых $k \geqslant 1$ имеют независимую размерность, после приведения к безразмерному виду будет содержать $n - k$ безразмерных величин. Таким образом, π-теорема является простым, но эффективным средством контроля за числом получающихся в процессах приведения переменных к безразмерному виду.

Проиллюстрируем применение метода анализа размерностей на примере расчета теплоотдачи при обтекании нагретой поверхности жидкостью с постоянными физическими свойствами.

Размерное уравнение подобия, содержащее все существенные для данного случая физические величины, имеет вид

$$F\,(x,\; u,\; \rho,\; \mu,\; c_p,\; \lambda,\; \alpha) = 0. \qquad (4.90)$$

Перепишем это уравнение, представив коэффициент α в виде степенной функции от остальных величин:

$$\alpha = A x^l u^r \rho^m \mu^k \lambda^p c_p^n. \qquad (4.91)$$

Согласно π-теореме, из семи размерных величин, входящих в уравнение (4.91), можно составить три безразмерных комплекса, так как все размерные величины содержат четыре первичных (м, кг, с, К).

Приравнивая единицы физических величин в левой и правой частях уравнения (4.91), получаем

$$\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}} = \text{м}^l \left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right)^r \left(\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}\right)^m \left(\frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}}\right)^k \left(\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}\right)^p \left(\frac{\text{Вт} \cdot \text{с}}{\text{кг} \cdot \text{К}}\right)^n.$$

Приравнивая степенные показатели при соответствующих единицах измерения, приходим к системе:

$$\begin{aligned} 1 &= p + n, \\ 0 &= m + k - n, \\ -2 &= l + r - 3m - k - p, \\ 0 &= -r - k + n, \end{aligned}$$

откуда находим $p = 1 - n$, $k = n - m$, $r = m$, $l = m - 1$. Подставляя найденные значения степенных показателей в (4.91), получаем

$$\alpha = A \frac{\lambda}{x} \left(\frac{\rho u x}{\mu}\right)^m \left(\frac{\mu c_p}{\lambda}\right)^n,$$

или, переходя к безразмерным величинам,

$$\mathrm{Nu} = A\mathrm{Re}^m\mathrm{Pr}^n. \qquad (4.92)$$

Таким образом, методом анализа размерностей получили известное критериальное уравнение теплоотдачи (см. гл. 5).

Моделирование — метод экспериментального исследования, в котором изучение какого-либо физического явления производится на уменьшенной модели образца. Чтобы процессы в модели и образце были подобны, необходимо выполнить условия подобия:

1) моделировать можно только качественно одинаковые процессы, то есть имеющие одинаковую физическую природу и описываемые одинаковыми дифференциальными уравнениями;

2) условия однозначности должны быть одинаковы во всем, кроме численных значений постоянных, содержащихся в этих условиях, в частности, необходимо: геометрическое подобие образца и модели, подобие условий движения жидкости во входных сечениях образца и модели, подобие физических параметров в сходных точках образца и модели, подобие температурных полей на границах жидкой среды;

3) одинаковые критерии подобия для модели и образца должны иметь одинаковые численные значения.

Рассмотрим, например, моделирование теплоотдачи при вынужденном движении жидкости, характер которого определяется критерием Рейнольдса. По условиям подобия числа Рейнольдса натурного объекта Re' и модели Re'' должны быть равны:

$$\frac{W'd'}{\nu'} = \frac{W''d''}{\nu''}.$$

Если в образце и модели используется одна и та же жидкость, то $\nu' = \nu''$. Пусть геометрические размеры модели в 10 раз меньше размеров образца. Следовательно, средняя скорость в модели должна быть в 10 раз больше.

В ряде случаев добиться полного подобия в образце и модели практически невозможно. Тогда применяют приближенное моделирование. В его основе лежит принцип автомодельности, согласно которому изменение какого-либо критерия в определенных пределах не оказывает влияния на протекание процесса, поэтому отпадает необходимость соблюдения равенства этого критерия для модели и образца.

В настоящее время моделирование широко используется при усовершенствовании конструкций проточных частей теплообменников, турбин, реактивных двигателей, при оценке эффективности технических устройств и аппаратов различного назначения.

Задача 4.1. Найти опытным путем распределение температур в длинном стальном вале диаметром $d = 400$ мм через $\tau = 2,5$ ч после загрузки его в печь. Для стали коэффициенты теплопроводности и температуропроводности равны соответственно $\lambda = 42$ Вт/(м · К), $a_в = 1,2 \cdot 10^{-5}$ м²/с. Коэффициент теплоотдачи к валу в печи $\alpha_в = 116,7$ Вт/(м² · К).

Исследование проводилось на геометрически подобной модели вала, выполненной из легированной стали в небольшой печи. Для модели $\lambda_м = 16,3$ Вт/(м · К)

$a_м = 5{,}3 \cdot 10^{-6}$ м²/с; $\alpha_м = 151{,}6$ Вт/(м² · К). Определить диаметр $d_м$ модели вала и промежуток времени $\tau_м$, через который после загрузки модели в печь необходимо измерить распределение температур в модели.

Р е ш е н и е. Подобие температурных полей вала и модели существует при идентичности критериев для образца и модели:

$$\mathrm{Bi}_в = \mathrm{Bi}_м, \quad \mathrm{Fo}_м = \mathrm{Fo}_в,$$

$$\mathrm{Bi}_в = \frac{\alpha_в d_в}{2\lambda_в} = \frac{116{,}7 \cdot 0{,}4}{2 \cdot 42} \approx 0{,}556,$$

$$\mathrm{Fo}_в = \frac{4a_в\tau_в}{d_в^2} = \frac{4 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-5} \cdot 2{,}5 \cdot 3600}{0{,}4^2} \approx 2{,}66.$$

Из условия $\mathrm{Bi}_м = \mathrm{Bi}_в$ находим диаметр модели вала:

$$d_м = 2\frac{\lambda_м}{\alpha_м}\mathrm{Bi}_в = 2 \cdot \frac{16{,}3}{151{,}6} \cdot 0{,}556 \approx 0{,}12 \text{ м}.$$

Из условия $\mathrm{Fo}_м = \mathrm{Fo}_в$ находим искомый промежуток времени:

$$\tau_м = \frac{d_м^2}{4a_м}\mathrm{Fo}_в = \frac{0{,}12^2}{4 \cdot 5{,}3 \cdot 10^{-6}} \cdot 2{,}66 \approx 1800 \text{ с} = 0{,}54 \text{ ч}.$$

§ 4.4. ОБЩИЕ ВОПРОСЫ РАСЧЕТА КОНВЕКТИВНОЙ ТЕПЛООТДАЧИ

Средняя температура. При расчете коэффициента теплоотдачи необходимо задавать температуру жидкости, омывающей поверхность тела. В общем случае эта температура является функцией координат и времени. Таким образом, необходимо уточнить, какое значение температуры жидкости следует использовать при расчете коэффициента теплоотдачи. В технических расчетах в качестве температуры жидкости принимают среднюю по сечению потока, омывающего тело, температуру. Формула для средней температуры может быть получена следующим образом.

Осреднение по сечению. Пусть через элементарную площадку dF в единицу времени поток жидкости переносит количество теплоты

$$dQ = c_p\rho T u\,dF. \tag{4.93}$$

Тогда количество теплоты, переносимое через все поперечное сечение в единицу времени, определится как

$$Q = \int_F c_p\rho T u\,dF.$$

Разделив это выражение на $\int_F c_p\rho u\,dF$, получим

$$T_{ср} = \frac{\int_F c_p\rho T u\,dF}{\int_F c_p\rho u\,dF}. \tag{4.94}$$

Величину $T_{ср}$ называют *средней* (по энтальпии) *температурой жидкости*. При постоянстве свойств жидкости соотношение (4.94) упростится:

$$T_{ср}=\frac{\int\limits_F TudF}{\int\limits_F udF}=\frac{1}{V}\int\limits_F uTdF, \tag{4.95}$$

где F — площадь поперечного сечения канала, м^2; T — температура в каждом элементе сечения, град; V — объемный расход жидкости, м^3/с; u — скорость жидкости в каждом элементе dF.

Если скорость жидкости по сечению потока постоянна или равна нулю, то

$$T_{ср}=\frac{1}{F}\int\limits_F TdF.$$

Осреднение по длине. Температура жидкости в отдельных точках канала по сечению измеряется с помощью термопар. Если температура жидкости изменяется не только по поперечному сечению потока, но и по его длине, то необходимо производить ее осреднение также и вдоль потока жидкости. Пусть $T_{ст}$ — средняя температура стенки, $T'_{ср}$ — средняя температура жидкости у входа в канал, $T''_{ср}$ — у выхода из канала, тогда средняя температура потока по длине канала $T_ж$ может быть определена по выражению

$$T_ж=T_{ст}\pm(T'_{ср}-T''_{ср})/\ln\frac{T'_{ср}-T_{ст}}{T''_{ср}-T_{ст}},$$

где знак плюс берется при охлаждении жидкости, а знак минус — при ее нагревании. Если температура потока изменяется в небольших пределах, то среднюю температуру определяют как среднее арифметическое средних по сечению температур во входном $T'_{ср}$ и выходном $T''_{ср}$ сечениях потока:

$$T_{ср}=\frac{T'_{ср}+T''_{ср}}{2}.$$

Определяющая температура. Входящие в числа подобия физические параметры жидкости в общем случае зависят от температуры. Поэтому при обработке опытных данных очень важным является правильный выбор определяющей температуры, по которой определяются значения физических параметров, входящих в критерии подобия. Чаще всего в качестве определяющей температуры принимают среднюю температуру жидкости при расчете конвективного теплообмена в трубах и каналах или среднюю температуру стенки или среднюю температуру пограничного слоя (для задач внешнего обтекания):

$$T_{п.сл}=T_ж=0{,}5\,(T_{ст}+T_ж),$$

а также различные комбинации из этих температур.

Определяющий размер. В числа подобия входит характерный размер l, который принимается как масштаб всех линейных размеров. Универсальных рекомендаций по выбору определяющего размера нет. Обычно в качестве определяющего выбирают тот размер, который оказывает наибольшее влияние на развитие исследуемого физического процесса. Для наиболее простого случая (процесса теплообмена в круглой трубе) выбор определяющего размера очевиден — это внутренний диаметр трубы. Для каналов некруглого сечения вместо диаметра берут так называемый *эквивалентный диаметр*

$$d_{\text{экв}} = \frac{4F}{\Pi},$$

где F — площадь поперечного сечения, Π — полный (смоченный) периметр поперечного сечения канала.

При поперечном обтекании трубы и пучка труб за определяющий размер берется наружный диаметр трубы, при обтекании пластины — ее длина по направлению движения потока. Таким образом, при использовании критериальных уравнений конвективного теплообмена (см. гл. 5) всегда нужно обращать внимание на то, какие из величин, входящих в эти уравнения, являются определяющими.

Задача 4.2. Найти формулу для определения средней температуры жидкости при ее течении со скоростью $u(r)$ в трубе с внутренним радиусом R.

Р е ш е н и е. Элемент площади в цилиндрических координатах $dF = 2\pi r dr$, откуда

$$T_{\text{ср}} = \frac{\int_0^R \rho(r) c_p(r) u(r) T(r) 2\pi\rho\, dr}{\int_0^R \rho(r) c_p(r) u(r) 2\pi r\, dr} = \frac{\int_0^R \rho c_p u T r\, dr}{\int_0^R \rho c_p u r\, dr}.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

4.1. Вода с температурой 300 К омывает одну сторону пластины с размерами 1×2 м, температура которой поддерживается 400 К. Рассчитать конвективный тепловой поток от пластины к воде, если коэффициент конвективной теплоотдачи составляет 200 Вт/(м^2 · К).

4.2. В безветренный день коэффициент конвективной теплоотдачи крыши здания 6 Вт/(м^2 · К). Найти конвективный тепловой поток от крыши, если температура внутренней поверхности крыши 15 °С, а температура окружающего воздуха — 5 °С. Площадь поверхности крыши 400 м^2. Рассчитать тепловой поток, если подул ветер и значение α возросло до 85 Вт/(м^2 · К).

4.3. Электрический нагреватель мощностью 100 Вт находится в воздухе с температурой 20 °С, $\alpha = 5$ Вт/(м^2 · К). Какова должна быть минимальная площадь поверхности нагревателя, чтобы температура его поверхности не превышала 60 °С?

4.4. Одна поверхность плоской пластины омывается жидкостью с температурой 20 °С. С этой стороны поверхность стенки покрыта слоем теплоизоляции толщиной 4 см с коэффициентом теплопроводности 0,5 Вт/(м · К). Температура поверхности под изоляцией поддерживается 500 °С. Рассчитать коэффициент конвективной теплоотдачи на внешней поверхности изоляции, при которой температура этой поверхности не будет превышать 50 °С. Рассчитать плотность теплового потока через изоляцию.

4.5. Машинное масло при температуре 40 °С течет в круглой трубе диаметром 15 см. Средняя скорость жидкости 2 м/с. Рассчитать число Рейнольдса. Определить, каким является течение: ламинарным, переходным или турбулентным? (При температуре масла 40 °С, $\nu = 0{,}24 \cdot 10^{-6}$ м²/с, $\rho = 576{,}1$ кг/м³).

4.6. Рассчитать среднюю температуру жидкости, имеющей постоянные физические свойства и движущейся по трубе диаметром 6 см, при изменении ее температуры по радиусу по закону

$$\frac{T-50}{100} = 1 - \left(\frac{r}{3}\right)^2,$$

где T — в градусах Цельсия, r — в сантиметрах. Принять равномерный профиль скоростей и использовать результаты, приведенные в задаче 4.1.

4.7. Температурное поле в длинном цилиндре диаметром 200 мм исследуется по истечении времени 30 и 60 мин с помощью модели. Теплопроводность и температуропроводность материала цилиндра 15 Вт/(м · К) и $20 \cdot 10^{-4}$ м²/с, материала модели — 4 Вт/(м · К) и $8 \cdot 10^{-4}$ м²/с. Найти диаметр модели и время, когда в модели следует измерять распределение температур. Коэффициенты теплоотдачи для цилиндра 9,8 Вт/(м² · К) и модели 35 Вт/(м² · К).

4.8. Найти кинематическую вязкость для жидкости в модели, где изучается теплообмен при вынужденной конвекции, если коэффициент температуропроводности жидкости $0{,}8 \cdot 10^{-6}$ м²/с. В образце в виде трубы движется воздух с температурой 180 °С и абсолютным давлением 10^5 Па.

4.9. Модель вала изготовлена из материала, для которого $\lambda = 27{,}2$ Вт/(м · К), $c_p = 4$ кДж/(кг · К), $\rho = 510$ кг/м³. После 22,4 мин нагревания измеряется температура модели, по этим замерам определяется распределение температур в образце (стальном вале) после 2 ч нагревания в печи. Стальной вал имеет диаметр 400 мм, $a = 11 \cdot 10^{-6}$ м²/с, коэффициент теплоотдачи в печи 110 Вт(м² · К). Найти диаметр модели и коэффициент теплоотдачи на ее поверхности.

4.10. По трубе диаметром $d = 16$ мм и длиной $l = 2{,}1$ м течет горячая вода, отдающая теплоту через стенку трубы среде и омывающая трубу снаружи. Расход воды через трубу $G = 32{,}7$ кг/ч; температуры на входе $T_{ж_1} = 87{,}2$ °С, на выходе $T_{ж_2} = 29$ °С; средняя температура стенки трубы $T_c = 15{,}3$ °С. Вычислить значения критериев Nu, Re, Pe, приняв в качестве определяющей температуры среднюю арифметическую температуру жидкости. Коэффициент теплоотдачи отнести к средней арифметической разности температур между водой и стенкой.

Глава 5 КОНВЕКТИВНЫЙ ТЕПЛООБМЕН В ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

§ 5.1. ТЕПЛООБМЕН ПРИ ОБТЕКАНИИ ПЛОСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ. ДИНАМИЧЕСКИЙ И ТЕПЛОВОЙ ПОГРАНИЧНЫЕ СЛОИ

Практический интерес представляет теплообмен между жидкостью и омываемой ею поверхностью. Рассмотрим особенности течения и переноса теплоты в пристеночном слое жидкости.

Условия «прилипания». В гидромеханике вязкой жидкости известна гипотеза о том, что частицы жидкости, непосредственно прилегающие к твердой поверхности, адсорбируются (прилипают к ней) и имеют скорость, равную скорости тела, а если тело неподвижно, то скорость равна нулю. Слой «прилипшей» жидкости имеет бесконечно малую толщину. Гипотеза о равенстве нулю скоростей жидкости на твердой поверхности нашла косвенное подтверждение. Равенство нулю скорости на твердой поверхности справедливо до тех пор, пока газ можно считать сплошной средой. При малых давлениях ослабляется взаимодействие газа с твердой поверхностью и разреженный газ вблизи твердой поверхности начинает проскальзывать. Степень разрежения газа характеризуется величиной *параметра Кнудсена*: $\bar{l}/l_0$ — отношение средней длины свободного пробега молекул газа $\bar{l}$ к характерному размеру твердого тела. При $\bar{l}/l_0 > 0{,}001$ газ нельзя рассматривать как сплошную среду.

Ниже рассматриваются в основном сплошные среды.

Динамический пограничный слой. Рассмотрим процесс образования пограничного слоя при продольном обтекании плоской поверхности (пластины) безграничным потоком жидкости. Скорость и температура потока жидкости постоянны, то есть $u_0 = \text{const}$ и $T_0 = \text{const}$.

Как уже отмечалось, частицы жидкости, непосредственно соприкасающиеся с твердой поверхностью, адсорбируются (прилипают) к ней. В результате около обтекаемой поверхности вследствие действия сил вязкости образуется тонкий слой заторможенной жидкости. Таким образом, весь поток жидкости может быть разделен (условно) на пристеночный (пограничный) слой и внешний поток, который называют *невозмущенным* или *потенциальным*. Во внешнем потоке силы вязкости пренебрежимо малы по сравнению с силами инерции, и жидкость (газ) можно рассматривать в качестве невязкой. Внутри пограничного слоя силы инерции и силы вязкости соизмеримы по величине. Тонкий слой жидкости около поверхности, в котором скорость жидкости (газа) изменяется от нуля до скорости невозмущенного потока u_0 (вдали от поверхности тела), называется *динамическим пограничным слоем*.

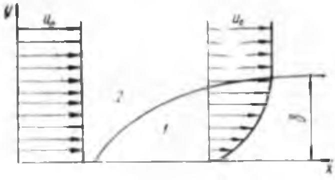


Рис. 5.1. Изменение скорости в гидродинамическом пограничном слое

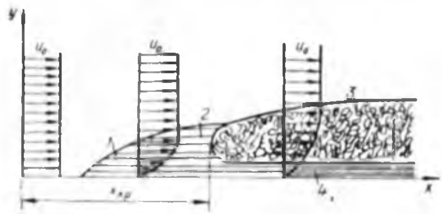


Рис. 5.2. Схема гидродинамического пограничного слоя:

1 — ламинарный; 2 — переходный; 3 — турбулентный; 4 — ламинарный подслой

На рис. 5.1 показана схема динамического пограничного слоя при продольном обтекании пластины потоком жидкости с постоянной скоростью u_0. Из рисунка видно, что толщина пограничного слоя возрастает вдоль по потоку. В лобовой точке пластины с координатой $x = 0$ его толщина равна нулю. При малых значениях x динамический пограничный слой очень тонкий и течение в нем может быть ламинарным.

Установлено, что толщина динамического пограничного слоя зависит от расстояния x от передней кромки пластины, вязкости и скорости движения жидкости. За толщину пограничного слоя условно принимают расстояние по нормали от пластины, на котором скорость достигает значения, равного 99 % скорости невозмущенного потока.

Для течения жидкости внутри пограничного слоя выполняется условие $\frac{\partial u}{\partial y} \neq 0$; а вне пограничного слоя и на его границе $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, $u = u_0$.

Движение жидкости в динамическом пограничном слое может быть как турбулентным, так и ламинарным (рис. 5.2). Характер течения и толщины ламинарного и турбулентного пограничных слоев (δ и $\delta_{турб}$) определяются в основном числом Re. При малых значениях x течение в динамическом пограничном слое чаще всего ламинарное. В турбулентном динамическом пограничном слое около поверхности тела существует тонкий слой жидкости, движение в котором имеет ламинарный характер. Этот слой называют *ламинарным* или *вязким подслоем*, в котором скорость является линейной функцией расстояния от поверхности тела. Эксперименты показывают, что переход от ламинарного режима течения к турбулентному осуществляется при $10^4 < Re_{x_{кр}} < 10^5$.

Для тонкой пластины такой переход имеет место при

$$Re_{x_{кр}} = \frac{u_0 x_{кр}}{\nu} = 5 \cdot 10^5.$$

Расстояние $x_{кр}$ показано на рис. 5.2.

Необходимо отметить, что пограничный слой возникает не только при внешнем обтекании тел различной геометрии, но и при внутренних течениях жидкости в трубах и каналах.

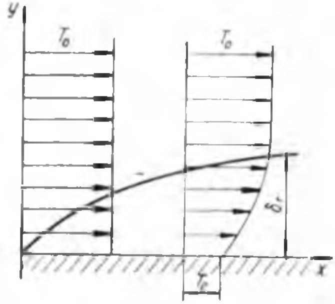


Рис. 5.3. Изменение температуры в тепловом пограничном слое

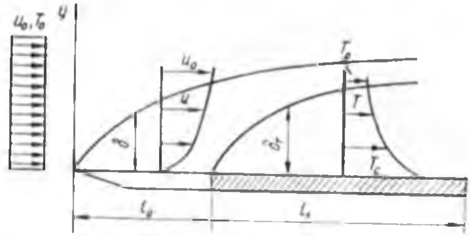


Рис. 5.4. Динамический и тепловой пограничные слои при продольном ламинарном обтекании пластины

Аналогично образованию динамического пограничного слоя около поверхности, имеющей температуру, отличную от температуры набегающего потока, образуется тепловой пограничный слой. *Тепловой пограничный слой* — пристенный слой жидкости, в пределах которого ее температура изменяется от значения, равного температуре стенки T_c, до значения, равного температуре невозмущенного потока T_0. Изменение температуры в тепловом пограничном слое (рис. 5.3) зависит от режима течения жидкости в динамическом пограничном слое. Толщины динамического и теплового пограничных слоев в общем случае не совпадают (рис. 5.4). При ламинарном пограничном слое соотношение толщин динамического и теплового пограничных слоев определяется числом Pr, то есть зависит от рода жидкости. Для вязких жидкостей с малой теплопроводностью (масла) $\mathrm{Pr} > 1$ и толщина динамического пограничного слоя больше толщины теплового пограничного слоя. Для газов $\mathrm{Pr} \approx 1$ и толщины слоев приблизительно одинаковы. Для жидких металлов $\mathrm{Pr} > 1$ и тепловой пограничный слой проникает в область потенциального течения.

Механизм и интенсивность переноса теплоты зависят от режима движения жидкости в пограничном слое. В ламинарном пограничном слое перенос теплоты между слоями движущейся вдоль пластины жидкости осуществляется теплопроводностью. В турбулентном пограничном слое основное изменение температуры происходит в тонком слое жидкости (вязкий или ламинарный подслой), где теплота передается теплопроводностью. В турбулентном динамическом пограничном слое изменение температуры весьма незначительно, что объясняется интенсивным перемешиванием жидкости и качественно сходно с изменением скорости.

Рассмотрим задачу расчета коэффициента теплоотдачи α при ламинарном обтекании тела наиболее простой геометрии — пластины (тело с плоской поверхностью).

С математической точки зрения задача расчета характеристик теплообмена при обтекании плоской поверхности сводится к решению системы уравнений энергии, движения, неразрывности (эти уравнения могут быть дополнены и другими соотношениями) для пограничного слоя с соответствующими граничными условиями. Приведем эту систему для наиболее простого случая стационарного безградиентного ламинарного пограничного слоя при постоянных теплофизических характеристиках жидкости:

уравнение теплоотдачи

$$\alpha = -\frac{\lambda}{T_0 - T_c}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0}; \tag{5.1}$$

уравнение энергии

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = a\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}; \tag{5.2}$$

уравнение движения

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; \tag{5.3}$$

уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \tag{5.4}$$

граничные условия:

$$\begin{aligned} &\text{при } y = 0 \quad u = v = 0, \quad T = T_c; \\ &\text{при } y = \infty \quad u = u_0, \quad\quad T = T_0. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Система (5.1)—(5.5) показывает, что даже в рассматриваемом простом случае течения и теплообмена в пограничном слое определение коэффициента теплоотдачи является довольно сложной задачей математической физики.

Интегральные уравнения пограничного слоя. Рассмотрим элементарный объем, примыкающий к стенке и простирающийся в направлении нормали к поверхности за пределы пограничного слоя (рис. 5.5). Пусть он имеет толщину dx в направлении оси x и единичную ширину в направлении оси z.

Через поверхность AB (рис. 5.5) в контрольный объем передается поток количества движения $\int_0^\delta \rho u^2 dy$. Аналогично через поверхность CD передается поток количества движения $\int_0^\delta \rho u^2 dy + (d/dx)\int_0^\delta \rho u^2 dy dx$. Тогда разность между потоком количества движения, выходящим из контрольного объема в направлении оси x, и входящим в него в этом направлении равна $(d/dx)\int_0^\delta \rho u^2 dy dx$.

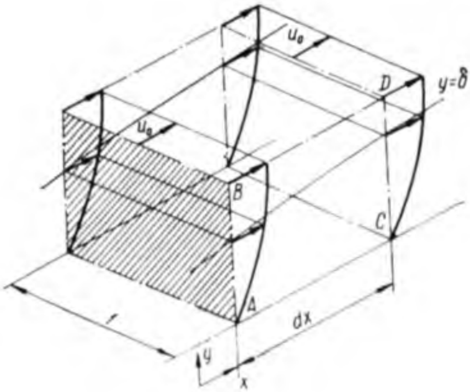


Рис. 5.5. Элементарный объем в ламинарном пограничном слое

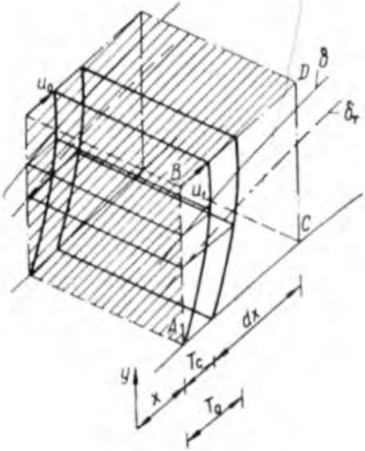


Рис. 5.6. Элементарный объем в динамическом и тепловом пограничных слоях

Эта величина численно равна расходу жидкости, поступающей в контрольный объем через поверхность BD, то есть

$$\frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho u dy dx.$$

Так как жидкость, втекающая в контрольный объем через поверхность BD в направлении оси x, имеет составляющую скорости, равную скорости внешнего потока ($u = u_0$), то через эту поверхность поступит поток количества движения

$$u_0 \frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho u dy dx.$$

Суммируя все составляющие потока количества движения в направлении оси x, получаем

$$\frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho u^2 dy dx - u_0 \frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho u dy dx = -\frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho u (u_0 - u) dy dx.$$

Поскольку внешняя (по нормали к поверхности) граница контрольного объема находится за пределами пограничного слоя, то касательное напряжение на поверхности BD отсутствует, так как $du/dy = 0$. Однако на поверхности раздела жидкости и твердой стенки ($y = 0$) существует касательная сила трения τ_w, кроме того, на поверхностях AB и CD действуют силы давления. Записывая баланс сил, действующих на элементарный объем, приходим к соотношению

$$p_x\delta - \left(p_x + \frac{dp_x}{dx}dx\right)\delta - \tau_w dx = -\delta\frac{dp_x}{dx}dx - \tau_w dx. \qquad (5.6)$$

Пренебрегая градиентом давления в направлении оси x, получаем уравнение количества движения

$$\frac{d}{dx}\int_0^{\delta} \rho u (u_0 - u)\, dy = \tau_w. \qquad (5.7)$$

Соотношение (5.7) называют *интегральным уравнением импульсов для гидродинамического слоя.*

Интегральное уравнение энергии можно получить аналогичным способом. Отличительной особенностью этого вывода является то, что используемый здесь элементарный объем должен выходить за пределы как теплового, так и динамического пограничных слоев (рис. 5.6). В соответствии с первым законом термодинамики энергию следует рассматривать в виде внутренней энергии (энтальпии), кинетической энергии и теплоты, а также работы сил трения. При низких скоростях члены, учитывающие кинетическую энергию и работу сил трения, малы по сравнению с другими членами и ими можно пренебречь.

Рассмотрим изменение энтальпии в контрольном объеме. За счет втекания жидкости через поверхность AB увеличение энтальпии составит $\int_0^{y_s} c_p \rho u T dy$. За счет вытекания жидкости через поверхность CD уменьшение энтальпии составит $\int_0^{y_s} c_p \rho u T dy + \frac{d}{dx}\int_0^{y_s} c_p \rho u T dy dx$. Кроме того, за счет втекания жидкости через поверхность BD энтальпия возрастет на величину $c_p T_0 \frac{d}{dx}\int_0^{y_s} \rho u dy dx$.

Помимо рассмотренных факторов в тепловой баланс контрольного объема входит теплота, подводимая вследствие теплопроводности через поверхность раздела жидкости и твердой стенки, $\lambda dx \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0}$. Суммируя все эти величины, получаем интегральное уравнение сохранения энергии

$$c_p T_0 \frac{d}{dx}\int_0^{y_s} \rho u dy dx - \frac{d}{dx}\int_0^{y_s} \rho c_p T u dy dx - \lambda dx \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = 0. \qquad (5.8)$$

Отметим, что за пределами теплового пограничного слоя температура равна температуре внешнего потока T_0, и поэтому интегрирование следует проводить только до $y = \delta_т$. Уравнение (5.8) при этом упрощается и принимает вид

$$\frac{d}{dx}\int_0^{\delta_т} (T_0 - T)\, u dy - a \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = 0. \qquad (5.9)$$

Это соотношение называют *интегральным уравнением теплового потока для ламинарного пограничного слоя*. Напомним, что оно справедливо при низких скоростях течения. Интегральное уравнение теплового потока получил Г. Н. Кружилин в 1936 г.

Трение и теплоотдача в ламинарном пограничном слое. Чтобы рассчитать коэффициенты трения и теплоотдачи в ламинарном пограничном слое, необходимо знать распределение скорости и температуры. Представим распределения скорости и температуры в ламинарном пограничном слое в виде полиномов третьей степени. Степень аппроксимирующих полиномов определяется количеством соотношений, используемых для определения входящих в полином неизвестных коэффициентов.

Таким образом, распределение скоростей описывается степенным рядом из четырех членов:

$$u\,(y) = a + by + cy^2 + dy^3. \tag{5.10}$$

Это соотношение должно удовлетворять следующим граничным условиям: при $y = 0$, $u = 0$ (условие прилипания) $u = v = 0$, поэтому из уравнения (5.3) получаем $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, при $y = \delta$, $u = u_0$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$.

Удовлетворяя этим условиям, получаем следующие значения для коэффициентов полинома (5.10):

$$a = 0,\ b = \frac{3}{2}\,\frac{u_0}{\delta},\ c = 0,\ d = -\frac{u_0}{2\delta^3}.$$

Подставляя их в уравнение (5.10) и приводя его к безразмерному виду, получаем

$$\bar{u} = \frac{u}{u_0} = \frac{3}{2}\,\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 = \frac{3}{2}\,Y - \frac{1}{2}\,Y^3, \tag{5.11}$$

где $Y = y/\delta$.

При подстановке выражения (5.11) для распределения скоростей в интегральное уравнение импульсов (5.7) находим

$$\frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho u_0^2\left[\frac{3}{2}\,\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3\right]\left[1 - \frac{3}{2}\,\frac{y}{\delta} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3\right]dy = \tau_w = \mu\left(\frac{du}{dy}\right)_{y=0}. \tag{5.12}$$

Из соотношения (5.11) имеем

$$\tau_w = \mu\left(\frac{du}{dy}\right)_{y=0} = \frac{3}{2}\,\mu\,\frac{u_0}{\delta}. \tag{5.13}$$

После подстановки равенства (5.13) в (5.12) и интегрирования последнего получаем

$$\frac{d}{dx}\left(\rho u_0^2\,\frac{396}{280}\right) = \frac{3}{2}\,\mu\,\frac{u_0}{\delta}. \tag{5.14}$$

Интегрируя это выражение, находим зависимость толщины пограничного слоя от вязкости, расстояния от передней кромки и скорости невозмущенного потока в виде

$$\frac{\delta^2}{2} = \frac{140\nu x}{13u_0} + C. \tag{5.15}$$

Для определения константы C используем условие $\delta|_{x=0} = 0$, из которого следует, что $C = 0$. Тогда $\delta^2 = \frac{280\nu x}{13u_0}$ или

$$\frac{\delta}{x} = \frac{4{,}64}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}. \tag{5.16}$$

Отсюда видно, что при x = idem с увеличением Re толщина теплового и динамического пограничных слоев уменьшается.

Подставляя выражение (5.16) в (5.13), определим касательное напряжение на стенке

$$\tau_w = \frac{3}{9{,}28}\frac{\mu u_0}{x}\sqrt{\mathrm{Re}_x}, \tag{5.17}$$

откуда нетрудно вычислить коэффициент трения

$$c_{f_x} = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho u_0^2} = \frac{0{,}647}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}.$$

Для решения интегрального уравнения теплового потока допустим, что распределение температур в пограничном слое имеет такой же вид, как и распределение скоростей

$$T(y) = e + fy + gy^2 + hy^3. \tag{5.18}$$

Это соотношение должно удовлетворять следующим граничным условиям: при $y = 0$ $T = T_с$, $\frac{d^2T}{dy^2} = 0$ (это следует из уравнения энергии (5.2) и условий прилипания); при $y = \delta_т$ $T = T_0$, $\frac{dT}{dy} = 0$. Удовлетворяя этим условиям, получаем следующие значения неизвестных коэффициентов:

$$e = T_с,\ f = \frac{3}{2}\frac{T_0}{\delta_т},\ g = 0,\ h = -\frac{T_0}{2\delta_т^3}.$$

Подставляя их в уравнение (5.18) и приводя его к безразмерному виду, находим

$$\frac{T - T_с}{T_0 - T_с} = \frac{3}{2}\frac{y}{\delta_т} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta_т}\right)^3. \tag{5.19}$$

Подставляя выражение $T - T_с$ из (5.19) и u из (5.11) в интеграл уравнения (5.9), преобразуем его к виду

$$\int_0^{\delta_т} (T_0 - T)u\,dy = \int_0^{\delta_т} [(T_0 - T_с) - (T - T_с)]\,u\,dy =$$

$$= (T_0 - T_c) u_0 \int_0^{\delta_т} \left[1 - \frac{3}{2}\frac{y}{\delta_т} + \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta_т}\right)^3\right]\left[\frac{3}{2}\frac{y}{\delta} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3\right] dy = (T_0 - T_c) u_0 \delta \left(\frac{3}{20}\beta^2 - \frac{3}{280}\beta^4\right),$$

где $\beta = \delta_т / \delta$.

Для жидкостей с $Pr \geqslant 1$ $\beta \leqslant 1$, и тогда вторым членом в скобках по сравнению с первым можно пренебречь. Подставляя это приближенное выражение для интеграла в уравнение (5.9), получаем

$$\frac{3}{20} u_0 (T_c - T_0) \beta^2 \frac{\partial \delta}{\partial x} = a \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0} = \frac{3}{2} a \frac{T_0 - T_c}{\delta \beta},$$

или

$$\frac{1}{10} u_0 \beta^3 \delta \frac{\partial \delta}{\partial x} = a.$$

Из соотношения (5.16) получаем $\delta \frac{\partial \delta}{\partial x} = 10{,}75 \frac{\nu}{u_0}$, откуда $\beta^3 = \frac{10}{10{,}75} \frac{a}{\nu}$ или

$$\delta_т = 0{,}976 \delta Pr^{-1/3}. \tag{5.20}$$

Выражение (5.20) устанавливает связь между δ и $\delta_т$ (толщинами динамического и теплового пограничных слоев) при ламинарном режиме течения. При $Pr = 1$ толщины динамического и теплового слоев одинаковы, при $Pr < 1$ (для газов) тепловой пограничный слой толще динамического, а при $Pr > 1$ — наоборот.

Опуская знак минус в уравнении (5.1) и учитывая (5.19), получаем

$$\alpha = \frac{\lambda}{T_0 - T_c} \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{3}{2} \frac{\lambda}{\delta_т}, \tag{5.21}$$

откуда следует, что коэффициент теплоотдачи обратно пропорционален толщине теплового пограничного слоя.

Умножая обе части соотношения (5.21) на x/λ и подставляя в него $\delta_т$ из (5.20), получаем

$$Nu_x = 0{,}33 \sqrt{Re_x} \sqrt[3]{Pr}. \tag{5.22}$$

Эта формула получена в предположении, что температура поверхности пластины постоянна, теплофизические свойства жидкости не зависят от температуры и в начале пластины нет обогреваемого участка. Учет влияния указанных факторов на теплоотдачу делает практически невозможным аналитическое решение задачи об определении числа Nu. Поэтому основным путем решения этой задачи остается экспериментальный: учет тех или иных факторов осуществляется введением в формулы типа (5.22) различных поправочных множителей. Например, зависимость теплоотдачи капельных жидкостей от направления теплового потока и температурного напора приближенно учитывают с помощью дополнительного множителя $(Pr_ж / Pr_c)^{0,25}$.

Большое влияние на теплоотдачу оказывает и переменность температуры обтекаемой поверхности. Этот фактор во многих случаях учитывают с помощью зависимости

$$\vartheta_c(x) = Ax^m, \tag{5.23}$$

где $\vartheta_c(x) = T_c(x) - T_0$; $T_0 = \text{const}$; $T_c(x)$ — местное значение температуры поверхности; A, m — постоянные, определяемые экспериментально.

При $m = 0$ $\vartheta_c = A = T_c - T_0$, то есть из зависимости (5.23) следует частный случай изотермической поверхности.

Влияние необогреваемого начального участка на теплообмен заключается в том, что в данном случае имеет место неодновременное развитие динамического и теплового пограничных слоев. Для расчета местных коэффициентов теплоотдачи при наличии необогреваемого участка было получено уравнение [46]

$$\mathrm{Nu}_{ж x_1} = 0{,}33\varepsilon \mathrm{Re}_{ж x_1}^{0,5} \mathrm{Pr}_ж^{0,33} \left(\frac{x_1}{x}\right)^{0,2} \left(\frac{\mathrm{Pr}_ж}{\mathrm{Pr}_c}\right)^{0,25}, \tag{5.24}$$

где $\varepsilon = \dfrac{\mathrm{Nu}_x\,(m \neq 0)}{\mathrm{Nu}_x\,(m = 0)}$; $x_1 = x - x_0$ — координата, по которой рассчитываются критерии подобия. Физические параметры выбираются по температуре внешнего потока T_0 (индекс «ж»). Исключение составляет число Pr_c, вычисляемое по температуре стенки в данном сечении.

Трение и теплоотдача в турбулентном пограничном слое. Уравнения турбулентного пограничного слоя, соответствующие уравнениям (5.2) — (5.4) для ламинарного пограничного слоя, имеют следующий вид:

$$\rho c_p \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \rho c_p \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[(\lambda + \lambda_т) \frac{\partial \bar{T}}{\partial y}\right]; \tag{5.25}$$

$$\rho \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \rho \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[(\mu + \mu_т) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right]; \tag{5.26}$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0. \tag{5.27}$$

Сопоставляя уравнения движения и энергии для ламинарного и турбулентного пограничных слоев, отмечаем, что в последних появились дополнительные члены: *турбулентное касательное напряжение*

$$\mu_т \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right) = -\rho \overline{v'u'} = \tau_т \tag{5.28}$$

и *тепловой поток, обусловленный действием турбулентной теплопроводности:*

$$\lambda_т \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial y}\right) = -c_p \rho \overline{v'T'} = q_т. \tag{5.29}$$

Величины $\mu_т$, $\lambda_т$, являющиеся турбулентными аналогами динамического коэффициента вязкости и коэффициента теплопроводности, имеют сложные зависимости от скорости и температуры в пограничном

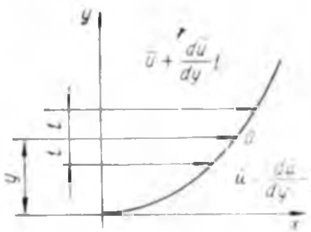


Рис. 5.7. К определению касательного напряжения $\tau_т$ в турбулентном пограничном слое

слое. В отличие от ламинарных коэффициентов переноса, являющихся функциями состояния жидкости, турбулентные характеристики зависят от режима течения теплоносителя. Чтобы решить систему уравнений турбулентного пограничного слоя (с соответствующими граничными условиями), ее необходимо дополнить некоторыми соотношениями, которые связывали бы турбулентное касательное напряжение и турбулентный тепловой поток соответственно со скоростью и температурой. Одной из наиболее распространенных теорий турбулентности является полуэмпирическая теория турбулентности Прандтля, согласно которой

$$\tau_т = -\rho l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \frac{d\bar{u}}{dy}, \tag{5.30}$$

$$q_т = -c_p \rho l^2 \left| \frac{du}{dy} \right| \frac{dT}{dy}. \tag{5.31}$$

Здесь l — длина пути смешения (рис. 5.7).

Отметим, что длина пути смешения — величина переменная, она зависит от координаты y. Для случая безградиентного течения вдоль пластины ($dp/dx = 0$) Прандтль предложил следующую зависимость: $l = \varkappa y$, где $\varkappa$ — константа, определяемая экспериментально. Для более сложных течений ($dp/dx \neq 0$) функциональная зависимость $l = l(y)$ может быть иной и содержать несколько констант.

Рассмотрим упрощенную схему турбулентного пограничного слоя, согласно которой в турбулентном пограничном слое имеется вязкий ламинарный подслой, переходящий в турбулентное течение. При такой постановке задачи с целью упрощения не учитывается буферный слой, который существует между ламинарным подслоем и турбулентным слоем. Аналогичную структуру принимают и для теплового пограничного слоя. Поскольку толщина вязкого подслоя очень мала, скорость течения в нем принимается линейно зависящей от координаты y. Аналогично в тепловом подслое, где перенос теплоты осуществляется главным образом за счет теплопроводности, температура линейно зависит от координаты y.

Пусть на границе ламинарного подслоя (динамического и теплового) и собственно турбулентного слоя значения скорости и температуры равны $u_г$ и $T_г$. Тогда для динамического и теплового подслоев запишем

$$\tau_w = \mu \frac{u_г}{\delta_п}, \quad q_w = \lambda \frac{\vartheta_г}{\delta_{т_п}}.$$

Из этих уравнений следует, что

$$q_w = \tau_w \frac{\lambda}{\mu} \frac{\vartheta_г}{u_г} \frac{\delta_п}{\delta_{т_п}}, \tag{5.32}$$

где $\vartheta_г = T_г - T_c$.

Для турбулентной части пограничного слоя из уравнений (5.30), (5.31) имеем следующее выражение:

$$q_\text{т} = \tau c_p \frac{dT}{dy} \Big/ \frac{d\bar{u}}{dy}. \tag{5.33}$$

Интегрируя выражение (5.33), приходим к соотношению

$$q_\text{т} = \tau c_p \frac{T_0 - T_\text{г}}{u_0 - u_\text{г}}. \tag{5.34}$$

На границе теплового подслоя $y = \delta_{\text{т}_\text{п}}$ потерь теплоты нет, поэтому значения q из соотношений (5.32) и (5.34) можно приравнять. При этом пренебрегаем различием значений касательного напряжения в уравнениях (5.32) и (5.34), то есть положим $\tau = \tau_w$. Тогда из выражений (5.32), (5.34) имеем

$$T_\text{г} - T_\text{c} = \frac{q_w \mu}{\tau_w \lambda} u_\text{г} \frac{\delta_{\text{т}_\text{п}}}{\delta_\text{п}}, \quad T_0 - T_\text{г} = \frac{q_w u_0}{\tau_w c_p} u_0 \left(1 - \frac{u_\text{г}}{u_0}\right).$$

Суммируя эти соотношения, получаем

$$T_0 - T_\text{г} = \frac{q_w u_0}{\tau_w c_p}\left(1 + \frac{\mu c_p}{\lambda} \frac{u_\text{г}}{u_0} \frac{\delta_{\text{т}_\text{п}}}{\delta_\text{п}} - \frac{u_\text{г}}{u_0}\right). \tag{5.35}$$

Значения скорости $u_\text{г}$ на границе вязкого подслоя и собственно турбулентного слоя определяют с помощью логарифмического распределения осредненной скорости в пристенной турбулентной части пограничного слоя [80]

$$u_\text{г} = 12 \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}. \tag{5.36}$$

Принимая отношение толщин теплового и вязкого подслоев аналогичным отношению толщин слоев в случае ламинарного течения в пограничном слое и подставляя в равенство (5.35) значения $u_\text{г}$, $\delta_{\text{т}_\text{п}}$ $\delta_\text{п}$ из выражений (5.36), (5.20), получаем

$$q_w = \frac{\tau_w c_p (T_0 - T_\text{c})}{u_0 \left[1 + \frac{12}{u_0} \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} (\mathrm{Pr}^{2/3} - 1)\right]}. \tag{5.37}$$

Касательное напряжение на стенке определяют с помощью коэффициента трения, вычисляемого по формуле (5.17). Подставив (5.17) в (5.37) и разделив обе части уравнения (5.37) на $\rho c_p u_0 (T_0 - T_\text{c})$, получим

$$\mathrm{St} = \frac{\alpha}{\rho c_p u_0} = \frac{c_f/2}{1 + 12 \sqrt{\frac{c_f}{2}} (\mathrm{Pr}^{2/3} - 1)}. \tag{5.38}$$

Выражение $St = \alpha/(\rho c_p u_0)$ называют *критерием Стантона*. С критериями Re, Nu, Pt его связывает следующее соотношение:

$$St = \frac{Nu}{RePr}. \qquad (5.39)$$

При $Pr = 1$ соотношение (5.38) принимает очень простой вид:

$$St = c_f/2. \qquad (5.40)$$

Соотношение (5.40) является математическим выражением аналогии переноса количества теплоты и количества движения при $Pr = Pr_т = 1$. Таким образом, использование аналогии переноса теплоты и количества движения позволяет определить коэффициент теплоотдачи из решения гидродинамической задачи, то есть критерий Nu определяется из соотношения (5.39) по известному коэффициенту трения без решения тепловой задачи. Выражение (5.40) удовлетворительно описывает теплоотдачу газов при небольших температурных напорах.

Эксперименты показывают, что коэффициент теплоотдачи зависит не только от режима течения жидкости (ламинарного или турбулентного), но и от рода жидкости, ее температуры, температурного напора и направления теплового потока, являющихся функцией температуры. Большое значение имеет изменение вязкости жидкости в пограничном слое. При малых скоростях течения жидкости большое внимание на теплоотдачу оказывает естественная конвекция.

В настоящее время влияние всех этих факторов на теплоотдачу теоретическим путем установить невозможно, поэтому расчет конвективной теплоотдачи обычно проводят по экспериментальным формулам.

Результаты экспериментального исследования теплоотдачи при вынужденном движении жидкости вдоль пластины. Среднее значение коэффициента теплоотдачи пластины, продольно омываемой потоком жидкости при ламинарном режиме в пограничном слое, можно рассчитать по формуле Михеева

$$\overline{Nu}_{ж,\,l} = 0{,}66Re_{ж,\,l}^{0,5}Pr^{0,43}\left(\frac{Pr_ж}{Pr_{ст}}\right)^{0,25}, \quad Re_{ж,\,l} < 4 \cdot 10^4. \qquad (5.41)$$

Соотношение (5.41) получено интегрированием по поверхности пластины местного коэффициента теплоотдачи

$$Nu_{ж,\,x} = 0{,}33Re_{ж,\,x}^{0,5}Pr_ж^{0,33}(Pr_ж/Pr_{ст})^{0,25}.$$

Для идеальных газов число Pr зависит только от атомности газов. Для одноатомных газов $Pr = 0{,}66$; для двухатомных (сухой воздух) $Pr = 0{,}71$ и для одноатомных $Pr = 1{,}0$.

Эксперименты показывают, что коэффициент теплоотдачи при нагревании капельной жидкости больше, чем при охлаждении. Влияние направления теплового потока учитывается множителем $(Pr_ж/Pr_{ст})^{0,25}$. Для воды этот множитель изменяется в пределах $0{,}5 \div 2$, для газов — приблизительно равен единице.

Для воздуха и двухатомных газов формула (5.41) имеет вид

$$\overline{Nu}_{ж,\,l} = 0{,}57Re_{ж,\,l}^{0,5}. \qquad (5.42)$$

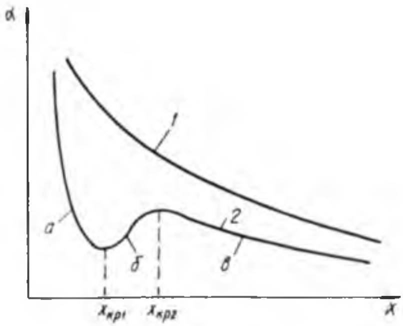


Рис. 5.8. Изменение коэффициента теплоотдачи вдоль пластины:

1 — полностью турбулентное течение в пограничном слое; 2 — смешанное течение (*а* — ламинарное, *б* — переходное, *в* — турбулентное)

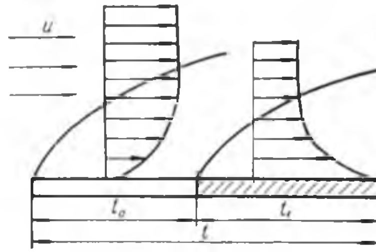


Рис. 5.9. Пластина с необогреваемым начальным участком

М. А. Михеев для определения среднего коэффициента теплоотдачи при турбулентном пограничном слое у поверхности пластины рекомендует следующее уравнение:

$$\overline{Nu}_{ж,l} = 0{,}037\,Re_{ж,l}^{0,8}\,Pr_{ж}^{0,43}\left(\frac{Pr_{ж}}{Pr_{ст}}\right)^{0,25}, \quad Re > 4\cdot 10^4. \qquad (5.43)$$

Соотношение (5.43) — результат интегрирования по поверхности пластины местного коэффициента теплоотдачи

$$Nu_{ж,x} = 0{,}03\,Re_{ж,x}^{0,8}\,Pr_{ж}^{0,43}\,(Pr_{ж}/Pr_{ст})^{0,25}.$$

Для воздуха вместо соотношения (5.43) используется формула

$$\overline{Nu}_{ж,l} = 0{,}032\,Re_{ж,l}^{0,8}. \qquad (5.44)$$

В формулах (5.41)—(5.44) определяющая температура — температура набегающего потока ($Pr_{ст}$ находят при $T_{ст}$), определяющий размер — длина пластины в направлении потока.

На рис. 5.8 показано изменение коэффициента теплоотдачи вдоль пластины. Из рисунка видно, что при наличии на передней части пластины ламинарного пограничного слоя коэффициент теплоотдачи изменяется по сложному закону (кривая *2*). В этом случае среднюю теплоотдачу необходимо рассчитывать отдельно для каждого участка с различными режимами течения. Область перехода $\Delta x_{кр}$ нельзя определить достаточно точно. Поэтому в инженерных расчетах принимают, что переход из ламинарного режима в турбулентный происходит при определенном x, то есть отрезок $\Delta x_{кр}$ заменяют точкой.

Для пластины с необогреваемым начальным участком длиной $l_0 = l - l_1$ (рис. 5.9) при ламинарном пограничном слое

$$\overline{Nu}_{ж} = 0{,}71\,Re_{ж}^{0,5}\,Pr_{ж}^{0,33}\,(Pr_{ж}/Pr_{ст})^{0,2}\left(\frac{l_1}{l}\right)^{0,2}, \qquad (5.45)$$

где l_1 и l — обогреваемая и полная длины пластины. Определяющий размер — l_1.

Задача 5.1. Определить касательное напряжение на расстоянии 0,2 м от передней кромки плоской пластины в ламинарном потоке воды, имеющем температуру 293 К и скорость 1 м/с.

Решение. Физические свойства воды при 293 К берем из табл. 6 приложения: $\mu = 1004 \cdot 10^{-6}$ Па · с, $\rho = 998{,}2$ кг/м³, $\nu = 1{,}006 \cdot 10^{-6}$ м²/кг. Определяем число Рейнольдса

$$\mathrm{Re}_x = \frac{u_0 x}{\nu} = \frac{1 \cdot 0{,}2}{1{,}006 \cdot 10^{-6}} = 2 \cdot 10^5.$$

Так как течение ламинарное, то расчет проводим по формуле (5.17):

$$\tau_w = \frac{3}{9{,}28}\,\frac{\mu u_0}{x}\sqrt{\mathrm{Re}_x} = \frac{3}{9{,}28} \cdot 1004 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{1{,}0}{0{,}2}(2 \cdot 10^5)^{1/2} \approx 0{,}718 \text{ Па}.$$

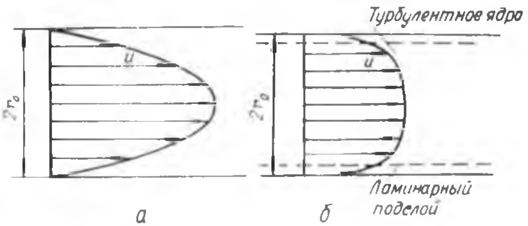
§ 5.2. ТЕПЛООБМЕН ПРИ ТЕЧЕНИИ В ТРУБАХ И КАНАЛАХ

Особенности движения и теплообмена в трубах. Исследование гидродинамики и теплообмена в трубах представляет большой практический интерес, так как трубы являются основными конструктивными элементами различных теплообменных аппаратов. Гидродинамическая картина течения, а также процесс теплоотдачи при движении теплоносителя в трубах (каналах) являются более сложными по сравнению с течением и теплоотдачей при обтекании поверхности пластины неограниченным потоком. При внешнем обтекании, как было отмечено в § 5.1, теплоноситель вдали от поверхности не испытывает влияния процессов, проходящих у стенки. При течении же в трубах (каналах), поперечное сечение которых имеет относительно небольшие (конечные) размеры, влияние процессов, происходящих у стенки, распространяется постепенно на все поперечное сечение трубы. Таким образом, начиная с некоторого расстояния от входа в трубу, жидкость по всему поперечному сечению за счет действия сил вязкости испытывает торможение (ускорение, если стенка движется со скоростью, превышающей скорость движения жидкости). При этом происходит изменение температуры жидкости как по поперечному сечению, так и по длине канала.

Из гидромеханики известно, что течение в трубах (каналах) может быть ламинарным и турбулентным. Режим течения определяют по значению числа $\mathrm{Re} = \bar{u}d/\nu$, где $\bar{u}$ — средняя по сечению трубы скорость жидкости; d — внутренний диаметр трубы. При $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{\text{кр}_1} = 2000$ течение является ламинарным ($\mathrm{Re}_{\text{кр}_1}$ — нижнее критическое число Рейнольдса). При $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{\text{кр}_2} = 10000$ наблюдается развитое турбулентное течение ($\mathrm{Re}_{\text{кр}_2}$ — верхнее критическое число Рейнольдса). Числа Рейнольдса, лежащие в интервале $\mathrm{Re}_{\text{кр}_1} \leqslant \mathrm{Re} \leqslant \mathrm{Re}_{\text{кр}_2}$, соответствуют переходному режиму течения жидкости, а также переходному режиму теплоотдачи.

Участок гидродинамической стабилизации. Будем считать, что как при ламинарном, так и при турбулентном движении во входном сечении трубы скорость жидкости постоянна. Технически это можно реализовать следующим образом: жидкость поступает в трубу из боль-

Рис. 5.10. Распределение скорости по сечению трубы при стабилизированном ламинарном (*а*) и турбулентном (*б*) течениях жидкости



ного объема, при этом кромка трубы на входе закруглена. При движении у стенок трубы образуется пограничный слой, толщина которого постепенно нарастает по длине. Если труба достаточно длинная, то при некотором расстоянии от входа в трубу динамические пограничные слои смыкаются, то есть заполняют все поперечное сечение. При постоянных физических свойствах жидкости после этого сечения в трубе (канале) устанавливается постоянное (по длине) распределение скоростей, характерное для данного режима течения жидкости. Так, при ламинарном режиме течения профиль скорости будет параболическим (рис. 5.10, *а*), при турбулентном имеет форму усеченной параболы (рис. 5.10, *б*). Такое течение называют *стабилизированным*.

Расстояние от входа в трубу (канал) до сечения, в котором динамические пограничные слои смыкаются, называют *гидродинамическим начальным участком* или *участком гидродинамической стабилизации* (рис. 5.11). Картина движения в гидродинамическом начальном участке определяется режимом течения жидкости.

Если $Re < Re_{кр}$, то на всем протяжении гидродинамического начального участка течение жидкости в пограничном слое имеет ламинарный характер (рис. 5.11, *а*). При $Re > Re_{кр}$ в передней части трубы

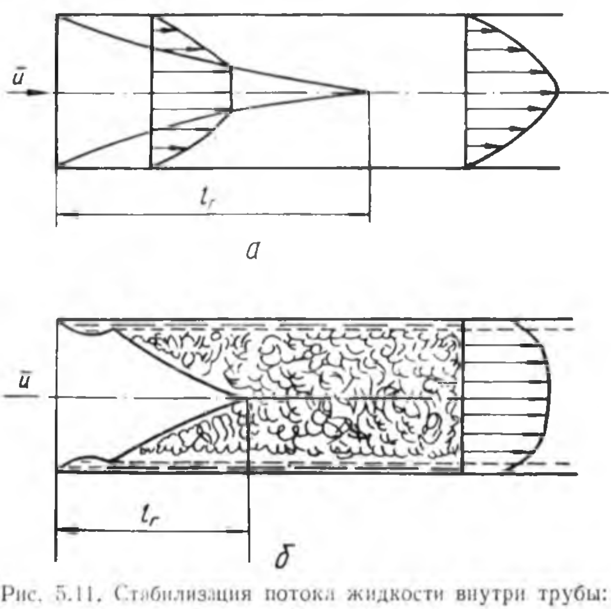


Рис. 5.11. Стабилизация потока жидкости внутри трубы: ламинарное (*а*) и турбулентное (*б*) течения жидкости

формируется ламинарный пограничный слой, который затем переходит в турбулентный. В дальнейшем происходит смыкание турбулентных пограничных слоев и течение приобретает турбулентный стабилизированный характер (рис. 5.11, *б*).

При ламинарном режиме течения длина гидродинамического начального участка определяется по формуле

$$l_г = k_г\, d_{экв}\, Re_ж\,. \qquad (5.46)$$

Коэффициент $k_г$ зависит от формы канала (см. табл. 5.1).

Таблица 5.1

Форма поперечного сечения канала	Эквивалентный диаметр	$k_г$	$k_т$	
			T_c = const	q_c = const
Круглое, $d_в$ — внутренний диаметр	$d_в$	0,065	0,055	0,07
Кольцевое. Отношение внутреннего диаметра к наружному $0{,}1 < \frac{d_в}{d_н} < 1{,}0$	$d_н - d_в$	0,010—0,015	0,05	0,06
Прямоугольное со сторонами *a* и *b*: $a/b = 0{,}125 \div 1$	$\frac{2ab}{a+b}$	0,023—0,075	—	—

Эквивалентный диаметр $d_{экв}$ определяется по формуле (5.63).

Значение $l_г$ тем больше, чем выше число Re, так при Re = = 2000 длина $l_г = 100\, d$.

При турбулентном режиме течения длина гидродинамического начального участка $l_{г_т}$ слабо зависит от Re и составляет примерно

$$l_{г_т} = (10 \div 15)\, d. \qquad (5.47)$$

Участок тепловой стабилизации. Рассмотрим процесс теплообмена при течении жидкости в трубе, температура стенок которой отличается от температуры жидкости на входе в трубу. По мере движения жидкости вдоль трубы сначала в процесс теплообмена вступают пристенные слои жидкости, а центральная часть потока еще имеет температуру, равную температуре на входе в трубу. Постепенно в процесс теплообмена вовлекаются все новые, более удаленные от стенок слои жидкости, то есть толщина теплового пограничного слоя растет. Участок от начала трубы до места смыкания тепловых пограничных слоев называют *начальным тепловым участком* или *участком тепловой стабилизации*. Таким образом, начиная с сечения $x = l_т$, где $l_т$ — длина

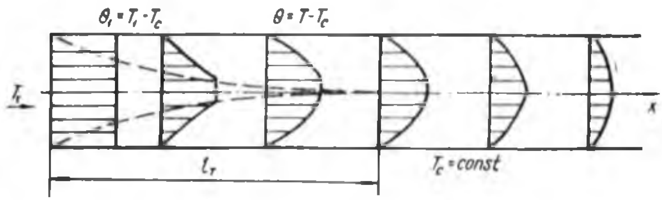


Рис. 5.12. Изменение распределения температуры при движении жидкости вдоль трубы

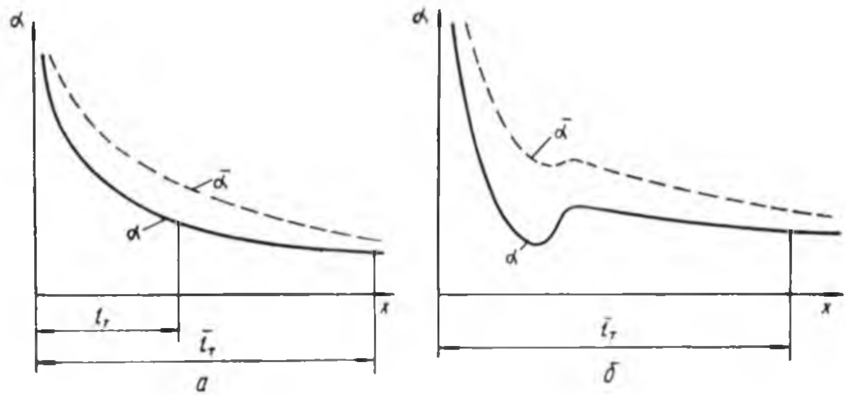


Рис. 5.13. Изменение местного и среднего коэффициентов теплоотдачи по длине трубы:

а — ламинарный режим течения; *б* — смешанный режим течения

начального теплового участка, в теплообмене участвует вся жидкость. Если при $x > l_т$ граничные условия на стенке не меняются, теплообмен называют *стабилизированным*. В отличие от эпюр скорости профили температуры даже при постоянных свойствах теплоносителя меняются по длине трубы при $x > l_т$ (рис. 5.12).

На рис. 5.13, *а* показано изменение местного и среднего коэффициентов теплоотдачи по длине трубы при ламинарном режиме течения. При одинаковой структуре пограничного слоя местный коэффициент теплоотдачи α_x уменьшается по длине $l_т$, а средний коэффициент $\bar{\alpha}$ — по длине $\bar{l}_т$, причем всегда $\bar{l}_т > l_т$.

На рис. 5.13, *б* показано изменение среднего и местного коэффициентов теплоотдачи по длине трубы, в начале которой наблюдается ламинарный пограничный слой, переходящий затем в турбулентный. Коэффициент теплоотдачи уменьшается на участке ламинарного течения и растет при его разрушении. Затем происходит стабилизация теплообмена при турбулентном течении. Длина теплового участка зависит от физических свойств теплоносителя, режима течения, наличия гидродинамической стабилизации, распределения температуры на входе и многих других факторов. В одинаковых условиях теплоотдача для коротких труб больше по сравнению с длинными. Длина участка тепловой стабилизации при ламинарном течении жидкости с постоянными физическими свойствами и однородной температурой на входе определяется по формуле

$$l_т = k_т d_{экв} \mathrm{Re}_ж \mathrm{Pr}_ж . \tag{5.48}$$

Коэффициент $k_т$ зависит от формы канала (см. табл. 5.1).

При ламинарном течении число Re может достигать значения $\mathrm{Re} \approx \approx 2000$, тогда, согласно формуле (5.48), для газов с $\mathrm{Pr} \approx 1$ расчетная длина начального теплового участка равна примерно $100d$.

У очень вязких жидкостей с $\mathrm{Pr} \gg 1$ длина начального теплового участка может изменяться от сотен до нескольких десятков тысяч диаметров. В последнем случае теплообмен происходит в пределах начального теплового участка.

Для турбулентного течения длина начального теплового участка, на котором изменяется местный коэффициент теплоотдачи, определяется зависимостью

$$l_{т_т} = (10 \div 15) d, \tag{5.49}$$

а средний коэффициент теплоотдачи изменяется по длине

$$\bar{l}_{т_т} = 50\, d. \tag{5.50}$$

Необходимо отметить, что теплоотдача на начальном тепловом участке трубы $l_т$ очень трудно поддается теоретическому исследованию, поэтому ниже рассматривается теплообмен на участке $l > l_т$, где течение становится стабилизированным.

Интегральное уравнение теплоотдачи для стабилизированного теплообмена. Изложим аналитический метод определения коэффициента теплоотдачи при гидродинамически- и термически-стабилизированном течении жидкости в прямой круглой трубе при следующих допущениях: физические свойства теплоносителя постоянны, сама жидкость несжимаема, перенос теплоты вдоль оси трубы теплопроводностью и турбулентностью пренебрежимо мал по сравнению с переносом вдоль радиуса. Тогда уравнение энергии имеет следующий вид:

$$\rho c_p u r \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r}\left((\lambda_т + \lambda) r \frac{\partial T}{\partial r}\right). \tag{5.51}$$

Пусть на поверхности трубы заданы граничные условия II рода: $q_c = \mathrm{const}$. В этом случае можно показать, что

$$q_c\, dF = c_p G\, dT, \tag{5.52}$$

где dF — элемент боковой поверхности трубы, $dF = 2\pi r_0\, dx$, G — секундный массовый расход; $G = \rho \bar{u} \pi r_0^2$ ($\bar{u}$ — средняя по сечению трубы скорость теплоносителя). Тогда из равенства (5.52) следует

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{2q_c}{\rho c_p \bar{u} r_0}.$$

Подставляя это соотношение в уравнение (5.51), получаем

$$\frac{d}{dr}\left[(\lambda + \lambda_т) r \frac{dT}{dr}\right] = 2q_c \frac{u}{\bar{u}} \frac{r}{r_0}$$

или

$$\frac{d}{dR}\left[(\lambda+\lambda_т) R \frac{dT}{dR}\right]=2q_с r_0 U R,$$

где $U=u/\bar{u}$ и $R=r/r_0$ — безразмерные скорость и радиус.

Разделяя переменные и интегрируя в пределах от 0 до R, получаем

$$(\lambda+\lambda_т) R \frac{dT}{dR}=2q_с r_0 \int_0^R U R\, d R.$$

Отсюда следует

$$\frac{dT}{dR}=\frac{2q_с r_0}{(\lambda+\lambda_т) R}\int_0^R U R\, d R \qquad (5.53)$$

или

$$dT=\left(\frac{2q_с r_0}{(\lambda+\lambda_т) R}\int_0^R U R\, d R\right) dR. \qquad (5.54)$$

Введем среднемассовую температуру жидкости. При постоянных c_p и ρ она определяется соотношением

$$\bar{T}_ж=\frac{2}{f_0 \bar{u}}\int_0^{f_0} u T\, d f.$$

Для круглой трубы $f=\pi r^2$, $df=2\pi r\, dr$, откуда

$$\bar{T}_ж=\frac{2}{r_0^2 \bar{u}}\int_0^{r_0} u T r\, dr=2\int_0^1 T U R\, d R.$$

Используя правило интегрирования по частям, получаем

$$\bar{T}_ж=2\left[T\int_0^R U R\, d R\Big|_0^1-\int_0^1\left(\int_0^R U R\, d R\right) dT\right]=$$

$$=2\left[T_с\int_0^1 U R\, d R-\int_0^1\left(\int_0^R U R\, d R\right) dT\right]. \qquad (5.55)$$

Интеграл $\int_0^1 U R\, d R$ преобразуется следующим образом:

$$\int_0^1 U R\, d R=\frac{2\pi}{2\bar{u}\,\pi r_0^2}\int_0^{r_0} u r\, dr=\frac{\int_0^{r_0} 2\pi r u\, d r}{2\bar{u}\,\pi r_0^2}=\frac{\pi r_0^2 \bar{u}}{2\bar{u}\,\pi r_0^2}=\frac{1}{2},$$

Подставляя это значение интеграла в (5.55), получаем

$$\bar{T}_ж = T_с - 2\int_0^1 \left(\int_0^R U R\, d R\right) dT.$$

Подставим сюда значение dT из уравнения (5.54):

$$\bar{T}_ж = T_с - \frac{4q_с r_0}{(\lambda + \lambda_т) R}\int_0^1 \left(\int_0^R U R\, d R \int_0^R U R\, d R\right) dR =$$

$$= T_с - \frac{4q_с r_0}{\lambda} \int_0^1 \frac{\left(\int_0^R URdR\right)^2}{\left(1 + \frac{\lambda_т}{\lambda}\right) R} dR,$$

отсюда следует

$$\frac{(T_с - \bar{T}_ж)\lambda}{2q_0 r_0} = 2 \int_0^1 \frac{\left(\int_0^R URdR\right)^2}{\left(1 + \frac{\lambda_т}{\lambda}\right) R} dR. \tag{5.56}$$

По определению

$$q_с = \alpha (T_с - \bar{T}_ж).$$

Тогда левая часть соотношения (5.56) примет вид

$$\frac{(T_с - \bar{T}_ж)\lambda}{2q_с r_0} = \frac{\lambda}{2\alpha r_0} = \frac{\lambda}{\alpha d} = \frac{1}{\mathrm{Nu}_d}.$$

С учетом последнего соотношения запишем интегральное уравнение теплоотдачи для стабилизированного теплообмена:

$$\frac{1}{\mathrm{Nu}_d} = 2 \int_0^1 \frac{\left(\int_0^R URdR\right)^2}{\left(1 + \frac{\lambda_т}{\lambda}\right) R} dR, \tag{5.57}$$

где $\mathrm{Nu}_d = \frac{\alpha d}{\lambda}$.

Соотношение (5.57) называется *уравнением Лайона*. Оно универсально, так как пригодно для турбулентного и ламинарного течений. Если известно распределение скорости, то с помощью уравнения Лайона можно рассчитать коэффициент теплоотдачи.

При ламинарном режиме течения можно использовать частный случай уравнения (5.57):

$$\frac{1}{\mathrm{Nu}_d} = 2\int_0^1 \frac{dR}{R}\left(\int_0^R URdR\right)^2. \tag{5.58}$$

Если течение гидродинамически стабилизировано, распределение скорости описывается выражением

$$u = 2\bar{u}\,[1-(r/r_0)^2] \text{ или } U = 2(1-R^2). \tag{5.59}$$

Подставляя профиль скорости (5.59) в уравнение (5.58), получаем

$$\frac{1}{\mathrm{Nu}_d} = 2\int_0^1 \frac{dR}{R}\left[\int_0^R 2(1-R^2)RdR\right]^2 = \frac{11}{48},$$

откуда

$$\mathrm{Nu}_d = \frac{48}{11} \approx 4{,}36. \tag{5.60}$$

Таким образом, при стабилизированном теплообмене в круглой трубе критерий Нуссельта постоянен и равен 4,36. Этот результат в теории конвективного теплообмена часто используют для оценки достоверности решений, получаемых с помощью различных приближенных методов.

При T_c = const и ламинарном течении в трубе аналогичный анализ дает Nu = 3,66. Необходимо отметить, что Nu = 4,36 и Nu = 3,66 характеризуют теплоотдачу в трубе за пределами участка тепловой и гидродинамической стабилизации в предположении, что физические свойства жидкости постоянны. На практике пользуются результатами экспериментального исследования теплоотдачи в трубах и каналах.

Результаты экспериментального исследования теплообмена в трубах и каналах. Механизм процесса теплоотдачи при течении жидкости в прямых гладких трубах является очень сложным. Интенсивность теплообмена зависит от скорости движения жидкости. Изменение температуры жидкости происходит как по сечению, так и по длине трубы. Движение жидкости в трубах может быть ламинарным и турбулентным. О режиме течения судят по величине $\mathrm{Re} = \frac{ud}{\nu}$. Если $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{\text{кр}}$, то режим ламинарный. При движении жидкости в трубах $\mathrm{Re}_{\text{кр}} = 2\cdot 10^3$. Развитый турбулентный режим устанавливается при значениях $\mathrm{Re} > 10^4$; $2\cdot 10^3 \leqslant \mathrm{Re} \leqslant 1\cdot 10^4$ соответствует переходному периоду. Формирование потока происходит в начальном участке трубы.

Теплоотдача при течении жидкости в трубе неодинакова по длине. Длина стабилизированного участка для горизонтальной круглой трубы зависит от коэффициента теплопроводности, числа Re, стабилизированного течения и других величин. Она принимается равной $50\,d$.

Теплообмен при ламинарном течении жидкости в трубах. При ламинарном изотермическом течении жидкости скорость по сечению потока на расстоянии r от оси трубы распределяется по параболе (см. рис. 5.10, *а*):

$$u = u_{\max}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right),$$

где $u_{\max}$ — скорость жидкости по оси трубы (при $r = 0$), R — радиус трубы.

На оси трубы скорость максимальна, а у стенки — равна нулю. Средняя скорость при ламинарном течении $\bar{u} = 0{,}5\, u_{\max}$. При ламинарном течении встречаются два режима неизотермического движения: вязкостный и вязкостно-гравитационный. Законы для этих режимов различны.

Вязкостный режим — вынужденное течение вязких жидкостей при отсутствии естественной конвекции. В этом случае передача теплоты к стенкам канала (и наоборот) осуществляется только теплопроводностью.

Вязкостно-гравитационный режим — вынужденное течение жидкости, сопровождающееся естественной конвекцией При таком режиме теплота передается не только теплопроводностью, но и конвекцией

Средний коэффициент теплоотдачи в прямых гладких трубах при вязкостном режиме М А. Михеев рекомендует определять по формуле

$$\overline{\mathrm{Nu}}_{ж,d} = 0{,}15\, \mathrm{Re}_{ж,d}^{0,33}\, \mathrm{Pr}_{ж}^{0,43} \left(\frac{\mathrm{Pr}_{ж}}{\mathrm{Pr}_{ст}}\right)^{0,25} \varepsilon_l\,. \qquad (5.61)$$

При вязкостно-гравитационном режиме для определения среднего по длине коэффициента теплоотдачи Михеев рекомендует следующую формулу:

$$\overline{\mathrm{Nu}}_{ж,d} = 0{,}15\, \mathrm{Re}_{ж,d}^{0,33}\, \mathrm{Pr}_{ж}^{0,43}\, \mathrm{Gr}_{ж,d}^{0,1} \left(\frac{\mathrm{Pr}}{\mathrm{Pr}_{ст}}\right)^{0,25} \varepsilon_l\,. \qquad (5.62)$$

Эти формулы применимы для любых упругих и капельных жидкостей По формулам (5.61) и (5.62) можно рассчитывать теплоотдачу для гладких труб любой формы поперечного сечения круга, квадрата прямоугольника, кольца ($d_2/d_1 = 1 \div 5{,}6$), щели ($a/b = 1 \div 40$) Определяющая температура — средняя температура жидкости Определяющий размер — диаметр трубы или эквивалентный диаметр равный

$$d_{экв} = 4F/\Pi, \qquad (5.63)$$

где F — площадь канала; Π — длина смоченного периметра. Коэффициент ε_l зависит от отношения l/d, где l — длина трубы При $l/d = 50$ $\varepsilon_l = 1$. Значения ε_l для коротких труб приведены в табл. 5.2.

Таблица 5.2

l/d	1	2	5	10	15	20	30	40	50
ε_l	1,9	1,7	1,44	1,28	1,18	1,13	1,05	1,02	1,0

Для воздуха ($Pr \approx 0{,}71$, $\left(\frac{Pr_ж}{Pr_{ст}}\right)^{0,25} = 1$) формулы (5.61) и (5.62) принимают вид:

$$\overline{Nu}_{ж,d} = 0{,}13\, Re_{ж,d}^{0,33}, \qquad (5.64)$$

$$\overline{Nu}_{ж,d} = 0{,}13\, Re_{ж,d}^{0,33}\, Gr_ж^{0,1}. \qquad (5.65)$$

На рис. 5.14 приведена зависимость для различных значений критерия Грасгофа в форме

$$K_0 = f(Re),$$

где

$$K_0 = Nu_ж\, Pr_ж^{-0,43} (Pr_ж/Pr_{ст})^{-0,25}. \qquad (5.66)$$

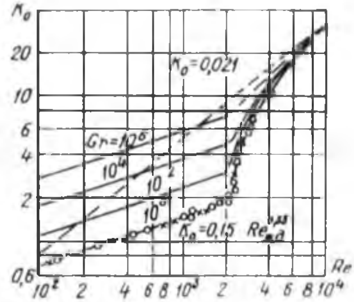


Рис. 5.14. Зависимость $K_0 = f(Re)$ при различных значениях числа Грасгофа Gr для ламинарного и переходного режимов движения жидкости в трубе

Из рисунка видно, что естественная конвекция, которую характеризует число Грасгофа, оказывает существенное влияние на теплообмен: чем больше число Грасгофа, тем больше комплекс K_0, то есть коэффициент теплоотдачи α. При развитом турбулентном течении свободное движение на теплообмен практически не оказывает влияния (на рис. 5.14 при $Re > 10000$ все кривые сливаются в одну линию).

Теплообмен при турбулентном движении жидкости в трубах. На рис. 5.10, *б* показано распределение скорости по сечению при стабилизированном турбулентном потоке. Максимальная скорость потока наблюдается на оси трубы. В инженерных расчетах пользуются средними значениями скорости $\bar{u} = V/F$, где V — секундный объем жидкости, F — площадь поперечного сечения трубы.

Отношение средней скорости к максимальной при турбулентном режиме течения является функцией числа Re:

$$\frac{\bar{u}}{u_{max}} = f(Re) \approx 0{,}8 \div 0{,}9.$$

В этом случае жидкость в потоке весьма интенсивно перемешивается и естественная конвекция не оказывает влияния на процесс теплообмена.

Экспериментальные данные по средним коэффициентам теплоотдачи в трубах и каналах хорошо описываются формулой Михеева

$$\overline{Nu}_{ж,d} = 0{,}021\, Re_{ж,d}^{0,8}\, Pr_ж^{0,43} \left(\frac{Pr_ж}{Pr_{ст}}\right)^{0,25} \varepsilon_l, \qquad (5.67)$$

которая справедлива для всех упругих и капельных жидкостей при $Re = 1 \cdot 10^4 \div 5 \cdot 10^6$ и $Pr_ж = 0{,}6 \div 2500$.

Для воздуха

$$\overline{Nu}_{ж,d} = 0{,}018\, Re_ж^{0,8}\, \varepsilon_l. \qquad (5.68)$$

Формулы (5.67) и (5.68) определяют среднюю теплоотдачу в трубах каналах различного поперечного сечения. За определяющую температуру принята средняя температура жидкости. За определяющий размер — внутренний диаметр трубы или эквивалентный диаметр канала. При $l/d \geqslant 50$ $\varepsilon_l = 1$; при $l/d < 50$ ε_l определяется из табл. 5.3.

Таблица 5.3

R_l	l/d								
	1	2	5	10	15	20	30	40	50
$1 \cdot 10^4$	1,65	1,50	1,34	1,23	1,17	1,13	1,07	1,03	1
$2 \cdot 10^4$	1,51	1,40	1,27	1,18	1,13	1,10	1,05	1,02	1
$5 \cdot 10^4$	1,34	1,27	1,18	1,13	1,10	1,08	1,04	1,02	1
$1 \cdot 10^5$	1,28	1,22	1,15	1,10	1,08	1,06	1,03	1,02	1
$1 \cdot 10^6$	1,14	1,11	1,08	1,05	1,04	1,03	1,02	1,01	1

Теплообмен при переходном режиме. Переходный режим в каналах наблюдается при $\mathrm{Re} = 2 \cdot 10^3 - 10^4$. Теплоотдача на переходном режиме зависит от многих факторов, которые трудно поддаются учету, и не может быть описана одним уравнением подобия. Уравнения для ламинарного и турбулентного режимов нельзя распространять на область переходного режима. Приближенно коэффициент теплоотдачи в переходной области можно оценить следующим образом. Максимальное значение коэффициента теплоотдачи рассчитывается по формуле (5.67), а минимальное — по уравнению (5.66). В табл. 5.4 приведены значения комплекса K_0 в зависимости от числа Re.

Таблица 5.4

$\mathrm{Re} \cdot 10^{-3}$	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	3	4	5	6	8	10
K_0	1,9	2,7	3,3	3,8	4,4	7	10,3	15,5	19,5	27	33,3

Необходимо отметить, что минимальное значение $K_{0_{\min}}$ можно определить непосредственно из рис. 5.14 без учета влияния естественной конвекции.

Теплообмен при течении в каналах кольцевого поперечного сечения. Коэффициент теплоотдачи при течении газов и капельных жидкостей в каналах кольцевого поперечного сечения можно определить по формуле

$$\overline{\mathrm{Nu}}_{\text{ж},d_{\text{экв}}} = 0{,}017\,\mathrm{Re}_{\text{ж}}^{0,8}\,\mathrm{Pr}_{\text{ж}}^{0,4}\left(\frac{\mathrm{Pr}_{\text{ж}}}{\mathrm{Pr}_{\text{ст}}}\right)^{0,25}\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^{0,18}. \qquad (5.69)$$

Отношение $(d_2/d_1)^{0,18}$ (d_1 — внутренний диаметр кольцевого канала, d_2 — внешний диаметр) учитывает особенности теплообмена в кольцевых каналах.

За определяющий линейный размер принят $d_{экв} = d_2 - d_1$, за определяющую температуру — средняя температура жидкости.

Формула (5.69) справедлива при $Re_ж = 10^4 \div 10^6$, $d_2/d = 1 \div 14$, $l/d = 50 \div 460$, $Pr_ж = 0{,}7 \div 100$, $d_2/d_1 = 1 \div 33{,}3$.

Рис. 5.15. Течение в изогнутой трубе

Теплообмен при течении в изогнутых трубах. При движении жидкости в изогнутых трубах (змеевиках) под действием центробежной силы в поперечном сечении труб возникают циркуляционные токи — так называемая *вторичная циркуляция* (рис. 5.15). В результате возникает сложное движение жидкости по винтовой линии. Вторичная циркуляция может возникать как при турбулентном, так и при ламинарном течениях. С увеличением радиуса изгиба R влияние центробежного эффекта уменьшается и в пределе, когда $R \to \infty$, исчезнет (прямая труба).

Экспериментально установлено, что вторичная циркуляция возникает только при числах Рейнольдса, больших некоторых критических чисел $Re'_{кр}$, причем $Re'_{кр} < Re_{кр} \approx 2000$ для прямой трубы.

Значение $Re'_{кр}$ при течении жидкости в винтовых змеевиках вычисляется по формуле

$$Re'_{кр} = \frac{16{,}4}{\sqrt{d/R}}, \qquad (5.70)$$

где d — внутренний диаметр трубы; R — радиус закругления змеевика.

Формула (5.70) справедлива при $\left(\frac{d}{R}\right) \geq 8 \cdot 10^{-4}$.

Переход к турбулентному режиму течения наступает при числах Рейнольдса

$$Re''_{кр} = 18500\,(d/2R)^{0{,}28}. \qquad (5.71)$$

Необходимо отметить, что при $Re < Re'_{кр}$ имеет место ламинарное течение без вторичной циркуляции, при $Re'_{кр} < Re < Re''_{кр}$ — ламинарное течение со вторичной циркуляцией, при $Re > Re''_{кр}$ — турбулентное течение при наличии вторичной циркуляции.

Если $Re < Re'_{кр}$, то расчет теплоотдачи проводят по уравнениям для ламинарного течения в прямых трубах. Если $Re'_{кр} < Re < Re''_{кр}$, то используется уравнение (5.67) при $\varepsilon_l = 1$ для турбулентного течения в каналах. Если $Re > Re''_{кр}$, то в уравнение (5.67) вводят поправочный коэффициент, $\varepsilon_{зм} = 1 + 3{,}6\, d/D$, который учитывает кривизну змеевика. В змеевиках действие вторичной циркуляции распространяется на всю длину трубы.

Теплоотдача шероховатых труб. Процесс теплоотдачи при течении жидкости в шероховатых трубах характеризуется рядом особенностей. На процесс теплоотдачи оказывают влияние высота бугорка шероховатости δ и толщина вязкого подслоя $\delta_п$. Если $\delta \ll \delta_п$, то бугорки шероховатости не нарушают картину течения в подслое, они обтекаются без отрыва и процесс теплоотдачи аналогичен процессу теплоотдачи в гладкой трубе. Нетрудно видеть, что такое течение тем вероятнее, чем меньше Re и относительная шероховатость δ/d (d — диаметр трубы). Эксперименты показывают, что при ламинарном течении коэффициент теплоотдачи и гидравлическое сопротивление практически не зависят от относительной шероховатости.

Если $\delta \gg \delta_п$, течение в вязком подслое нарушается, происходит отрывное, вихревое обтекание бугорков шероховатости. В этом случае бугорки шероховатости выступают в роли турбулизаторов течения и теплоотдача увеличивается. В опытах шероховатость создавалась искусственно путем механической обработки (накатка, нарезка). Теплоотдача в шероховатых трубах по сравнению с гладкими дополнительно зависит от формы неровностей поверхности, величины относительной шероховатости δ/d и расстояния между бугорками.

Экспериментально установлено, что при рациональной (оптимальной) шероховатости трубы коэффициент теплоотдачи может увеличиться в 2—3 раза по сравнению с гладкой. Поэтому шероховатость используют как средство интенсификации теплообмена. При нерациональной шероховатости трубы коэффициент теплоотдачи может быть ниже, чем гладкой трубы, причем снижение теплоотдачи возможно и при высоких бугорках шероховатости, так как за ними у поверхности стенки могут образовываться застойные зоны. Следовательно, при одной и той же относительной высоте δ/d возможно как улучшение, так и ухудшение теплоотдачи. Экспериментально установлено, что целесообразно создавать шероховатости с относительными шагами $(s/\delta)_{опт} = 12 \div 14$ (s — расстояние по потоку между соседними неровностями).

Для расчета среднего коэффициента теплоотдачи при $s/\delta \geqslant 8$ можно использовать формулу Гомелаури, которая обобщает многочисленные опыты при турбулентном течении различных жидкостей (воды, трансформаторного масла, воздуха) в трубах и кольцевых каналах:

$$\overline{Nu}_{ж,d} = 0{,}022\,Re_{ж,d}^{0,8}\,Pr_{ж}^{0,47}\left(\frac{Pr_ж}{Pr_c}\right)^{0,25}\varepsilon_ш . \qquad (5.72)$$

Коэффициент $\varepsilon_ш$ учитывает влияние шероховатости и определяется по формулам:

$$\varepsilon_ш = \exp\left[0{,}85\,\frac{(s/\delta)_{опт}}{s/\delta}\right] \text{ при } \frac{s}{d} > \left(\frac{s}{\delta}\right)_{опт},$$

$$\varepsilon_ш = \exp\left[0{,}85\,\frac{s/\delta}{(s/\delta)_{опт}}\right] \text{ при } \frac{s}{d} < \left(\frac{s}{\delta}\right)_{опт}.$$

За оптимальный относительный шаг можно принять $(s/\delta)_{опт} = 13$ при $Pr = 1 \div 80$. Определяющий размер — внутренний диаметр трубы или эквивалентный диаметр канала, определяющая температура — средняя температура жидкости.

Задача 5.2. По трубе диаметром $d = 60$ мм и длиной $l = 2{,}1$ м протекает воздух со скоростью $w = 5$ м/с. Определить значение среднего коэффициента теплоотдачи, если средняя температура воздуха $T_ж = 100$ °C.

Решение. Физические свойства воздуха берем из табл. 5 (приложение) при $T_ж = 100\,°C$ $\lambda_ж = 0{,}0313$ Вт/(м · К), $\nu_ж = 23{,}13 \cdot 10^{-6}$ м²/с. Определяем число Рейнольдса:

$$Re_{ж,\,d} = \frac{wd}{\nu} = \frac{5 \cdot 0{,}06}{23{,}13 \cdot 10^{-6}} \approx 12\,970,$$

то есть течение турбулентное. Расчет проводим по формуле (5.68). Так как $l/d = 2{,}1/0{,}06 = 35 < 50$, то поправку $\varepsilon_l = 1{,}04$ находим из табл. 5.2. Окончательно имеем

$$\bar{\alpha} = Nu_{ж,\,d}\frac{\lambda_ж}{d} = 0{,}018 \cdot (12\,970)^{0{,}8}\frac{0{,}0321 \cdot 1{,}04}{0{,}06} \approx 19{,}5 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}).$$

§ 5.3. ТЕПЛООБМЕН ПРИ ПОПЕРЕЧНОМ ОБТЕКАНИИ ТРУБ. ОДИНОЧНЫЕ ТРУБЫ (ЦИЛИНДРЫ)

Процесс теплообмена при поперечном обтекании труб имеет особенности, которые объясняются гидродинамической картиной течения жидкости вблизи поверхности трубы. При обтекании цилиндра потоком жидкости на его поверхности образуется пограничный слой переменной величины. Минимальная толщина пограничного слоя — в лобовой точке. Далее его толщина постепенно нарастает. Течение имеет плавный, безотрывный характер только при малых числах $Re < 5$ (рис. 5.16, *а*). При больших числах Re безотрывно обтекается только передняя часть цилиндра (примерно 45—47 %), затем в кормовой части происходит отрыв пограничного слоя и позади цилиндра образуются два симметричных вихря (рис. 5.16, *б*, *в*).

Положение точки отрыва пограничного слоя зависит от числа Re и степени турбулентности. При малых значениях Re и малой степени турбулентности течение в пограничном слое вплоть до точки отрыва имеет ламинарный характер. При таком течении отрыв пограничного слоя происходит при углах $\varphi = 80 - 85°$ (рис. 5.16, *б*). При числах $Re = (1 \div 4) \cdot 10^5$ течение по большей части периметра в пограничном слое становится турбулентным. Отрыв пограничного слоя от цилиндра происходит при углах $\varphi = 120 \div 140°$ (рис. 5.16, *в*).

В соответствии с такой картиной обтекания меняется и коэффициент теплоотдачи по окружности трубы.

На рис. 5.17, *а* показано изменение по длине окружности трубы локального коэффициента теплоотдачи в зависимости от угла φ, который определяет местоположение точки на окружности. По оси абсцисс отложен центральный угол φ, отсчитанный от лобовой точки, а по оси

а *б* *в*

Рис. 5.16. Обтекание цилиндра (трубы):
а — безотрывное; *б* — отрыв ламинарного слоя; *в* — отрыв турбулентного пограничного слоя

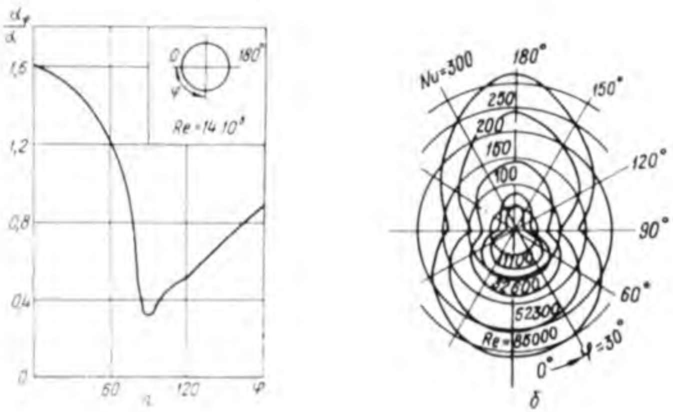


Рис. 5.17, *а* — изменение по длине окружности трубы локального коэффициента теплоотдачи в зависимости от угла φ; *б* — изменение числа Нуссельта по длине окружности (для различных чисел Рейнольдса)

ординат — α_φ/α, где α_φ — локальное, а α — среднее по окружности значение коэффициента теплоотдачи.

Из рис. 5.17, *а* видно, что α_φ достигает максимума при $\varphi = 0$, то есть в лобовой части цилиндра, где толщина пограничного слоя наименьшая. Падение коэффициента теплоотдачи по мере движения жидкости вдоль поверхности трубы объясняется ростом толщины пограничного слоя. Минимальное значение α_φ соответствует точке отрыва пограничного слоя от поверхности ($\varphi = 90 - 95°$). В кормовой части цилиндра движение жидкости носит вихревой характер и значение α_φ возрастает, достигая максимума при $\varphi = 180°$. На рис. 5.17, *б* приведен график изменения числа Nu по длине окружности для различных значений Re в полярных координатах. Из рисунка видно, что при малых Re интенсивность теплообмена в кормовой части трубы ниже, чем в лобовой точке. С возрастанием Re увеличивается α_φ в кормовой части и может сравняться с α_φ в лобовой точке трубы.

Таким образом, процесс теплообмена при поперечном обтекании цилиндра определяется характером движения жидкости и ее параметрами. Определяющими критериями являются Re и Pr. Критериальное уравнение данного процесса имеет вид

$$\mathrm{Nu} = f\left(\mathrm{Re},\ \mathrm{Pr}, \frac{\mathrm{Pr}_ж}{\mathrm{Pr}_с}\right). \qquad (5.73)$$

Многочисленные экспериментальные исследования позволили определить вид зависимости (5.73):

$$\mathrm{Nu}_ж = c\,\mathrm{Re}_ж^n\,\mathrm{Pr}_ж^{0,36}\left(\frac{\mathrm{Pr}_ж}{\mathrm{Pr}_с}\right)^{0,25}. \qquad (5.74)$$

Значения констант *c* и *n* зависят от величины числа Re и формы обтекаемого тела. Для круглых труб соотношение (5.74) имеет следующий вид:

при $Re_{ж,d} = 5 \div 10^3$

$$\overline{Nu}_{ж,d} = 0{,}56\, Re_{ж,d}^{0,5}\, Pr_ж^{0,36}\, (Pr_ж/Pr_{ст})^{0,25}, \qquad (5.75)$$

при $Re_{ж,d} = 1 \cdot 10^3 \div 5 \cdot 10^5$

$$\overline{Nu}_{ж,d} = 0{,}28\, Re_{ж,d}^{0,6}\, Pr_ж^{0,36}\, (Pr_ж/Pr_{ст})^{0,25}. \qquad (5.76)$$

Для воздуха и двухатомных газов выражения (5.75) и (5.76) имеют вид:

$$\overline{Nu}_{ж,d} = 0{,}49\, Re_{ж,d}^{0,5} \quad при \quad Re_{ж,d} = 5 \div 10^3, \qquad (5.77)$$

$$\overline{Nu}_{ж,d} = 0{,}245\, Re_{ж,d}^{0,6} \quad при \quad Re_{ж,d} = 10^3 \div 10^5. \qquad (5.78)$$

Определяющий размер — внешний диаметр трубы. Определяющая температура — средняя температура жидкости.

Формулы справедливы тогда, когда угол φ между направлением потока и осью трубы, называемый *углом атаки*, равен $\pi/2$. При уменьшении угла атаки значение коэффициента теплоотдачи уменьшается, что учитывается введением специального поправочного множителя ε_φ, определяемого экспериментально для тел различной формы при разных значениях угла атаки.

Таким образом, при угле атаки $\varphi \neq \pi/2$ коэффициент теплоотдачи определяется по формуле

$$\alpha_\varphi = \varepsilon_\varphi \alpha_{90^\circ}, \qquad (5.79)$$

где α_{90° — коэффициент теплоотдачи при $\varphi = \pi/2$.

Значения поправочного коэффициента ε_φ приведены в табл. 5.5.

Таблица 5.5

φ, град	90	80	70	60	50	40	30	20	10
ε_φ	1,0	1,0	0,98	0,95	0,87	0,77	0,67	0,6	0,55

Пучки труб. Знание характеристик теплообмена при обтекании пучков труб необходимо при конструировании многих теплообменных устройств. Порядок расположения труб в пучке может быть коридорным (рис. 5.18, *а*) или шахматным (рис. 5.18, *б*). Геометрической характеристикой пучков труб являются их внешний диаметр d, количество рядов труб по движению жидкости, относительный поперечный шаг s_1/d и относительный продольный шаг s_2/d. От схемы компоновки пучков в значительной степени зависят картина движения жидкости омывание труб каждого ряда и теплообмен в пучке (рис. 5.19).

Картина обтекания жидкостью первого ряда труб в обоих пучках (коридорном или шахматном) близка к картине обтекания одиночной трубы, хотя и имеет некоторые отличия, связанные с воздействием на течение последующих рядов труб. Второй и третий ряды труб находятся в зоне потока, возмущенного предыдущими рядами, и их теплоотдача зависит от его структуры.

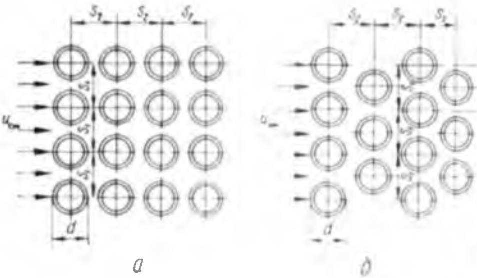


Рис. 5.18. Схема расположения труб в пучках:
а — коридорное; *б* — шахматное

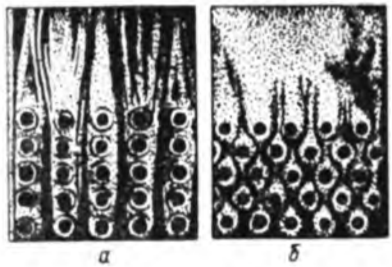


Рис. 5.19. Картина движения жидкости в пучках из круглых труб: коридорное (*а*) и шахматное (*б*) расположение труб

На рис. 5.20 показано изменение по окружности трубы локального коэффициента теплоотдачи в зависимости от угла φ для первого, второго и последующих рядов семирядного коридорного и шахматного расположения пучков труб (цифрами обозначены номера рядов). Для труб шахматного расположения коэффициент α_φ достигает максимума при $\varphi = 0$, то есть на лобовой поверхности трубы в месте удара струи о ее поверхность. Последнее имеет место и для первого ряда коридорного пучка. Таким образом, во всех рядах шахматного и в первом ряду коридорного пучков изменение α_φ по окружности трубы соответствует изменению α_φ для одиночной трубы (см. рис. 5.17, *а*).

Для второго и последующих рядов коридорного расположения пучка максимальное значение α_φ соответствует углу $\varphi \approx 50 \div 60°$.

Многочисленные экспериментальные исследования показали, что структура потока, начиная с третьего ряда и далее, остается практически неизменной, поэтому остается постоянной и интенсивность теплоотдачи, достигающая к третьему ряду трубок своего максимума.

Теплоотдача первого и второго рядов труб меньше по сравнению с третьим рядом. Необходимо отметить, что теплоотдача при шахматном расположении пучков за счет лучшей турбулизации потока выше, чем в коридорном. Кроме того, на процесс теплоотдачи пучков оказывают влияние диаметр d и их взаимное расположение s_1 и s_2.

Обобщая экспериментальные данные для пучков труб (третий и после-

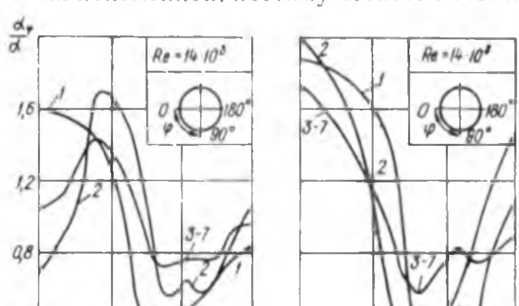


Рис. 5.20. Изменение относительного коэффициента теплоотдачи по окружности трубы для различного расположения рядов:
а — коридорного; *б* — шахматного

дующий ряды), получили следующие формулы для расчета среднего коэффициента теплоотдачи:

а) коридорное расположение пучков труб при $Re_{ж,d} = 100 \div 1000$

$$\overline{Nu}_{ж,d} = 0,56\,Re_{ж,d}^{0,5}\,Pr_{ж}^{0,36}\,(Pr_{ж}/Pr_{ст})^{0,25}\,\varepsilon_s\,\varepsilon_l\,, \qquad (5.80)$$

при $Re_{ж,d} = 1 \cdot 10^3 \div 1 \cdot 10^5$

$$\overline{Nu}_{ж,d} = 0,22\,Re_{ж,d}^{0,65}\,Pr_{ж}^{0,36}\,(Pr_{ж}/Pr_{ст})\,\varepsilon_s\,\varepsilon_l\,; \qquad (5.81)$$

б) шахматное расположение пучков труб
при $Re_{ж,d} = 100 \div 1000$

$$\overline{Nu}_{ж,d} = 0,56\,Re_{ж,d}^{0,5}\,Pr_{ж}^{0,36}\,(Pr_{ж}/Pr_{ст})^{0,25}\,\varepsilon_s\,\varepsilon_l\,, \qquad (5.82)$$

при $Re_{ж,d} = 1 \cdot 10^3 \div 1 \cdot 10^5$

$$\overline{Nu}_{ж,d} = 0,4\,Re_{ж,d}^{0,6}\,Pr_{ж}^{0,36}\,(Pr_{ж}/Pr_{ст})^{0,25}\,\varepsilon_s\,\varepsilon_l\,. \qquad (5.83)$$

Для воздуха и двухатомных газов формулы (5.80) — (5.83) имеют вид:

а) коридорное расположение пучков труб
при $Re_{ж,d} = 100 \div 1000$

$$\overline{Nu}_{ж,d} = 0,49\,Re_{ж,d}^{0,5}\,\varepsilon_s\,\varepsilon_l\,,$$

при $Re_{ж,d} = 1 \cdot 10^3 \div 1 \cdot 10^6$

$$\overline{Nu}_{ж,d} = 0,194\,Re_{ж,d}^{0,65}\,; \qquad (5.84)$$

б) шахматное расположение пучков труб
при $Re_{ж,d} = 100 \div 1000$

$$\overline{Nu}_{ж,d} = 0,49\,Re_{ж,d}^{0,5}\,,$$

при $Re_{ж,d} = 1 \cdot 10^3 \div 1 \cdot 10^5$

$$\overline{Nu}_{ж,d} = 0,35\,Re_{ж,d}^{0,6}\,. \qquad (5.85)$$

Поправочный коэффициент ε_s учитывает влияние относительных шагов. Для глубинных рядов пучка:

а) коридорное расположение труб

$$\varepsilon_s = (s_2/d)^{-0,15}\,;$$

б) шахматное расположение труб
при $s_1/s_2 = 2 \quad \varepsilon_s = (s_1/s_2)^{1/6}$;
при $\frac{s_1}{s_2} \geqslant 2 \quad \varepsilon_s = 1,12$.

Поправочный коэффициент ε_l учитывает номер ряда в пучке труб. Его можно принять равным при коридорном расположении труб для: первого ряда $\varepsilon_1 = 0,6$, второго ряда $\varepsilon_2 = 0,9$, третьего ряда $\varepsilon_3 = 1,0$, при шахматном расположении труб соответственно: $\varepsilon_1 = 0,6$, $\varepsilon_2 = 0,7$, $\varepsilon_3 = 1,0$.

В формулах (5.80)—(5.85) определяющий размер — внешний диаметр трубы, определяющая температура — средняя температура жидкости. Скорость вычисляется в самом узком сечении ряда.

Средний коэффициент теплоотдачи всего пучка в целом определяем по формуле

$$\bar{\alpha}_{\text{пуч}} = \sum_{i=1}^{m} \bar{\alpha}_i F_i \Bigg/ \sum_{i=1}^{m} F_i, \tag{5.86}$$

где $\bar{\alpha}_1$, $\bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{\alpha}_m$ — средние коэффициенты теплоотдачи первого, второго, m-го рядов труб; F_1, $F_2, \ldots, F_m$ — площади наружных поверхностей первого, второго, m-го рядов труб.

Формулы (5.80)—(5.83) применимы, когда поток жидкости пересекает пучок труб под прямым углом. Эксперименты показывают, что если пучок труб омывается вынужденным потоком жидкости под углом $\psi < 90°$, то коэффициент теплоотдачи для пучка труб при $\psi = 90°$ необходимо умножить на поправочный коэффициент ε_ψ, тогда $\alpha_\psi = \alpha_{90°}\varepsilon_\psi$.

В табл. 5.6 приведены значения поправочного коэффициента ε_ψ в зависимости от угла атаки.

Таблица 5.6

ψ, град	90	80	70	60	50	40	30	20	10
ε_ψ	1,0	1,0	0,98	0,94	0,88	0,78	0,67	0,52	0,42

Задача 5.3. Определить средний коэффициент теплоотдачи в поперечном потоке воздуха для трубы диаметром $d = 20$ мм, если температура воздуха $T_ж = 30$ °С и скорость $w = 5$ м/с.

Решение. По табл. 5 приложения при $T_ж = 30$ °С $\lambda_ж = 0{,}0267$ Вт/(м · К), $\nu_ж = 16{,}0 \cdot 10^{-6}$ м²/с. Тогда

$$\mathrm{Re}_{ж,\,d} = \frac{wd}{\nu_ж} = \frac{5 \cdot 0{,}02}{16{,}0 \cdot 10^{-6}} \approx 6200.$$

Поскольку $\mathrm{Re}_{ж,\,d} > 10\,000$, то используем формулу (5.78):

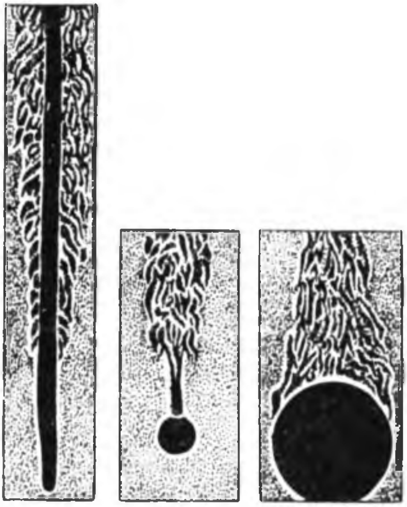
$$\mathrm{Nu}_{ж,\,d} = 0{,}245\mathrm{Re}_{ж,\,d}^{0{,}6} = 0{,}245\,(6200)^{0{,}6} = 45{,}6.$$

Далее вычисляем коэффициент теплоотдачи

$$\bar{\alpha} = \mathrm{Nu}_{ж,\,d}\frac{\lambda_ж}{d} = 45{,}6\,\frac{0{,}0267}{0{,}02} = 60{,}4\ \text{Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}.$$

§ 5.4. ТЕПЛООБМЕН ПРИ СВОБОДНОЙ КОНВЕКЦИИ

Естественная (свободная) конвекция жидкости (газа) широко распространена в технике и в быту. *Свободной конвекцией* называют движение частиц жидкости, обусловленное разностью плотностей нагретых и холодных частиц. Например если нагретое тело поместить в воздуш-



а *б* *в*

Рис. 5.21. Картина свободного движения воздуха:

а — вдоль вертикальной трубы диаметром 28 мм и высотой 1 м; *б* — вокруг горизонтальной трубы диаметром 28 мм; *в* — вокруг горизонтальной трубы диаметром 250 мм

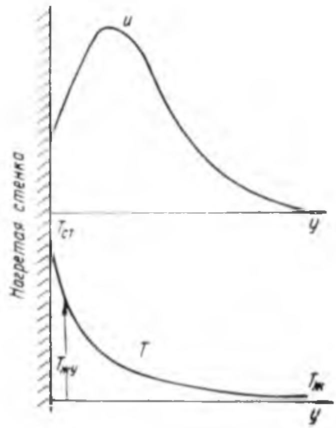


Рис. 5.22. Изменение температуры $T_ж$ и скорости u при свободном движении среды вдоль нагретой вертикальной стенки

ную среду с более низкой температурой, то при соприкосновении с нагретой поверхностью частицы воздуха нагреваются и поднимаются вверх. Если же температура тела ниже температуры воздуха, то наблюдается движение частиц воздуха вниз. В обоих случаях движение возникает без всякого внешнего воздействия и обусловлено только разностью плотностей частиц воздуха. Таким образом, в отличие от вынужденной конвекции, при которой скорость жидкости определяется внешними силами, при свободной конвекции движение жидкости (газа) возникает под действием подъемных (архимедовых) сил, которые связаны с изменениями температуры и плотности в самой жидкости и которые невозможно точно определить. Свободное движение жидкости (газа), как и вынужденное, может быть ламинарным или турбулентным.

На рис. 5.21, *а* показана картина свободного движения воздуха около нагретой вертикальной трубы. Из рисунка видно, что вначале толщина перегретого слоя мала и течение носит ламинарный характер. На рис. 5.21, *б*, *в* показана картина свободного движения воздуха около нагретых горизонтальных труб различного диаметра. На нижнем участке трубы наблюдается ламинарное течение воздуха вверх. У труб малого диаметра входящий поток воздуха сохраняет ламинарный режим до некоторой высоты над поверхностью трубы, после чего переходит в турбулентный струйный поток. При большом диаметре нагретой трубы переход в турбулентный режим происходит в пределах поверхности самой трубы (рис. 5.21, *в*). Из рис. 5.22 видно, что при

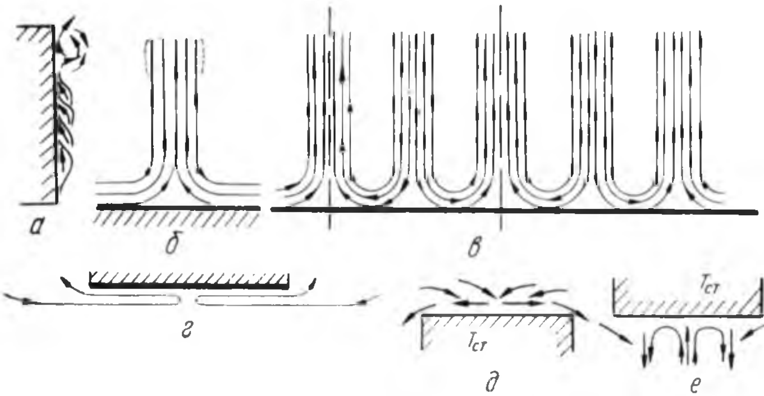


Рис. 5.23. Свободное движение в неограниченном пространстве

свободном движении жидкости в пограничном слое температура жидкости изменяется от $T_{ст}$ до $T_{ж}$, а скорость имеет нулевое значение у стенки, проходит через максимум и на большом удалении от стенки снова равна нулю. Картина движения воздуха около плоских стенок или плит зависит от формы поверхности, ее расположения в пространстве и направления теплового потока. На рис 5.23, *а* показана картина движения жидкости около нагретой вертикальной стенки. Необходимо отметить, что в случае нагреваемой стенки жидкость перемещается сверху вниз и характер течения изменяется в той же последовательности.

На рис. 5.23, *б*, *в*, *г* показана картина движения жидкости около нагретых (охлаждаемых), а на рис. 5.23, *д*, *е* — около холодных нагреваемых горизонтальных поверхностей.

Из рис. 5.23, *б* видно, что если поверхность небольших размеров, то нагреваемая масса воздуха у поверхности горячей плиты образует восходящие струйные потоки с попутным соединением масс окружающей среды. Если плита имеет большие размеры, то над нагретой поверхностью образуются восходящие и нисходящие струйные потоки жидкости с возможными зонами циркуляции (рис. 5.23, *в*). Если же нагретая поверхность обращена вниз, то в этом случае движение жидкости происходит лишь в тонком слое под поверхностью (рис. 5.23, *г*), остальная масса жидкости, которая находится ниже этого слоя, остается без движения.

Уравнения естественной конвекции. Уравнения неразрывности, движения и энергии в условиях естественной конвекции имеют вид [18]:

$$\frac{D\rho}{D\tau} + \rho\nabla\cdot\vec{W} = 0, \tag{5.87}$$

$$\rho\frac{D\vec{W}}{\partial\tau} = \vec{F} - \nabla p + \mu\nabla^2\vec{W} + \frac{\mu}{3}\nabla(\nabla\cdot\vec{W}), \tag{5.88}$$

$$\rho c_p\frac{DT}{\partial\tau} = \nabla(\lambda\nabla T) + Q' + \beta T\frac{Dp}{D\tau} + \mu\Phi_v, \tag{5.89}$$

где T — абсолютная температура.

При свободной конвекции движущая сила обусловлена наличием температурного поля или поля концентрации. Рассмотрим движение жидкости в гравитационном поле. В этом случае объемная сила определяется по формуле $\vec{F} = \rho\vec{g}$. При этом течение жидкости связано с изменением плотности, то есть, если изменение ρ не учитывать, не будет и самого течения. Таким образом, уравнения естественной конвекции связаны друг с другом прежде всего через изменение плотности ρ и должны решаться совместно. Это усложняет решение подобных уравнений, поэтому при исследовании процессов естественной конвекции делают различные упрощающие предположения, на которых мы остановимся ниже.

Местное статическое давление p в уравнении движения можно представить в виде суммы

$$p = p_a + p_d, \tag{5.90}$$

где p_a — гидростатическое давление в покоящейся жидкости, p_d — давление, связанное с движением жидкости. В гравитационном поле гидростатическое давление определяется формулой $\nabla p_a = \rho_a\vec{g}$, где $\vec{g}$ — сила тяжести на единицу массы жидкости, ρ_a — плотность окружающей среды. Если направление действия гравитационной силы совпадает с положительным направлением оси x, то $p_a = \rho_a g x$. За начало отсчета принимается значение $p_a = 0$ при $x = 0$. Динамическая составляющая давления p_d должна определяться из системы уравнений (5.87)—(5.89) совместно с полями скорости и температуры.

Запишем разность первых двух членов в правой части уравнения движения (5.88):

$$\vec{F} - \nabla p = (\rho\vec{g} - \nabla p_a) - \nabla p_d = (\rho\vec{g} - \rho_a\vec{g}) - \nabla p_d = (\rho - \rho_a)\vec{g} - \nabla p_d. \tag{5.91}$$

Для вертикальных течений вектор $\vec{g}$ обычно направлен вверх, а ось x — вниз, поэтому $\vec{g} = -\vec{i}g$ и, следовательно,

$$\vec{F} - \nabla p = (\rho_a - \rho)g\vec{i} - \nabla p_d, \tag{5.92}$$

где $\vec{i}$ — единичный вектор в направлении оси x, g — ускорение, вызванное силой тяжести. Если вектор $\vec{g}$ составляет с направлением оси x некоторый угол γ, то этот член имеет проекцию $(\rho_a - \rho)g\cos\gamma$ на ось x и проекцию $(\rho_a - \rho)g\sin\gamma$ на ось y. Поскольку плотность зависит от температуры, этот член связывает уравнения движения и энергии.

Уравнения естественной конвекции (5.87)—(5.89) представляют собой систему дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа. Решение этой системы является сложной задачей математической физики.

Рассмотрим изотермическую плоскую вертикальную поверхность при температуре T_S. Среда, окружающая эту поверхность, имеет температуру T_∞ и достаточно протяжена. Выталкивающая сила, вызывающая вертикальное течение, возникает в результате разности между объемной силой и силой, обусловленной градиентом гидростатического давления в окружающей среде. Движущая сила, приходящаяся на единицу объема жидкости, равна $g(\rho_a - \rho)$. Если ось x направлена вертикально вверх, то вносимая этой силой энергия равна кинетической энергии на единицу объема:

$$\frac{\rho u^2}{2} \approx gx(\rho_a - \rho). \tag{5.93}$$

Поскольку силы вязкости здесь не учитываются, то значение скорости u, получаемое из уравнения (5.93), является максимальным для такого сечения. Если p_a — давление в окружающей среде, а p — давление в некоторой точке пограничного слоя, то, согласно уравнению Бернулли,

$$p_a - p = \frac{\rho u^2}{2},$$

откуда

$$p_a - p = 0\,[gx\,(\rho_a - \rho)], \tag{5.94}$$

$$u = 0\,[\sqrt{(2gx/\rho)\,(p_a - p)}]. \tag{5.95}$$

Плотность, как функцию температуры и давления, разложим в ряд Тейлора по этим двум переменным относительно параметров окружающей среды:

$$\rho_a = \rho + \left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p (T_a - T) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial T^2}\right)_p (T_a - T)^2 + \ldots$$

$$\ldots + \left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_T (p_a - p) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial p^2}\right)_T (p_a - p)^2 + \cdots + \frac{\partial^2\rho}{\partial p\partial T}(p_a - p)(T_a - T) + \cdots$$

Подставляя в это разложение формулу для коэффициента теплового объемного расширения $\beta = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p$ и оценку (5.94), приходим к соотношению

$$\rho_a - \rho = \rho\beta\,(T - T_a) + \frac{\rho\beta^2}{2}(T - T_a)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_T [gx\,(\rho_a - \rho)] +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial p^2}\right)_T [gx\,(\rho_a - \rho)]^2 + \cdots + \frac{\partial^2\rho}{\partial p\partial T}[gx\,(\rho_a - \rho)\,(T_a - T] + \cdots \tag{5.96}$$

Очевидно, что ряд (5.96) сходится при $|\beta\,(T - T_a)| < 1$ и $|(\partial\rho/\partial p)_T gx| < 1$. Если $[\beta\,(T - T_a)] \ll 1$ и $[(\partial\rho/\partial p)_T gx| \ll 1$, то в разложении (5.96) можно ограничиться только первым членом:

$$\rho_a - \rho = \rho\beta\,(T - T_a). \tag{5.97}$$

Покажем, что для многих, используемых в практике, теплоносителей (как для газов, находящихся в состоянии, близком к идеальному, так и для капельных жидкостей) соотношение (5.97) обеспечивает достаточную точность расчета.

Подставляя (5.97) в (5.95), приходим к следующему соотношению для местной и общей скорости конвекции:

$$u_c(x) = \sqrt{g\beta x\,(T_s - T_a)} \tag{5.98}$$

или

$$u_c = \sqrt{g\beta L\,(T_s - T_a)}, \tag{5.99}$$

где L — характерный размер тела.

Рассмотрим теперь изменение плотности в уравнении неразрывности и сравним его с другими членами уравнения. Сравним член, содержащий изменение плотности, с членом, описывающим изменение скорости. Запишем их отношение

$$\frac{u\,(\partial\rho/\partial x)}{\rho\,(\partial u/\partial x)} \approx \frac{\Delta\rho}{\rho}\,\frac{u}{\Delta u}. \tag{5.100}$$

Поскольку u изменяется от 0 в окружающей среде до u в данной точке потока, то u и Δu имеют одинаковый порядок величины, то есть $0\,(u/\Delta u) = 1$. Разность плотностей $\Delta\rho$ определяется согласно равенству (5.97): $\Delta\rho = \rho\beta\,(T - T_a)$. Поскольку эта формула получена в предположении, что $[\beta\,(T - T_a)] \ll 1$, то из соотношения (5.100) следует, что $\Delta\rho \approx 0$, то есть изменением плотности в уравнении неразрывности можно пренебречь по сравнению с другими членами. Если окружающая жидкость стратифицирована, то для такого упрощения, кроме условия $\beta\,(T - T_L) \ll 1$, требуется дополнительное условие $\beta\,(T_a - T_L) \ll 1$, где T_l — некоторая характерная температура.

Допущения, при которых получены соотношения (5.97) и соотношение $\Delta\rho \approx 0$, называют *допущениями Буссинеска*. Если они выполняются, то разность плотностей, вызывающую возникновение течения в результате взаимодействия между гравитационной объемной силой и градиентом гидростатического давления, можно приближенно представить как влияние одной лишь температуры, описываемое уравнением (5.97), а изменением плотности в уравнении неразрывности можно пренебречь.

Таким образом, уравнения естественной конвекции в приближении Буссинеска принимают вид:

$$\nabla \vec{W} = 0, \tag{5.101}$$

$$\rho \frac{D\vec{W}}{D\tau} = -\vec{e} g\beta\rho (T - T_a) - \nabla P_d + \mu\nabla^2\vec{W}, \tag{5.102}$$

$$\rho c_p \frac{DT}{D\tau} = \lambda\nabla^2 T + Q' + \beta T \frac{DP}{D\tau} + \mu\Phi_v, \tag{5.103}$$

где $\vec{e}$ — единичный вектор в направлении гравитационного поля. Для вертикальной поверхности, когда ось x направлена вдоль поверхности противоположно направлению силы тяжести, $\vec{e} = -\vec{i}$, где $\vec{i}$ — единичный вектор в направлении оси x. Таким образом, член с выталкивающей силой входит только в уравнение движения в направлении оси x. Для наклонной или криволинейной поверхности вектор $\vec{e}$ имеет составляющие по всем направлениям.

О методах решения уравнений естественной конвекции. Несмотря на некоторые упрощения по сравнению с общими уравнениями конвективного теплопереноса, уравнения в приближении Буссинеска образуют сложную систему дифференциальных уравнений в частных производных, решение которой сопряжено с большими трудностями.

Один из наиболее традиционных методов решения задач естественной конвекции опирается на приближение пограничного слоя. Аналогично понятию пограничного слоя, введенному Прандтлем для вынужденных течений, согласно которому влияние вязкости ограничивается тонким слоем в потоке, примыкающем к поверхности, а течение вне этой области является, по существу, невязким, метод пограничного слоя применим ко многим течениям в условиях естественной конвекции. Основные идеи метода пограничного слоя для естественной конвекции аналогичны используемым идеям для вынужденной конвекции и были изложены в § 5.1. Главное отличие состоит в том, что давление в невозмущенном потоке определяется не условиями внешнего течения, а является гидростатическим, а скорость вне пограничного слоя равна нулю. Методы решения уравнений пограничного слоя достаточно хорошо разработаны (см., например, [80]). В частности, классическим методом, применяющимся при решении задач естественной конвекции, является метод автомодельной переменной, который позволяет понизить дифференциальную размерность исходной системы уравнений в частных производных. Например, двумерные уравнения пограничного слоя, описывающие естественную конвекцию около нагретой вертикальной поверхности, преобразуются в систему обыкновенных дифференциальных уравнений.

Следует, однако, отметить, что большинство задач естественной конвекции, даже допускающих переход к приближению пограничного слоя, не имеет замкнутого решения, то есть решения в виде аналитического выражения. Одной из основных трудностей, отличающих расчет течения в условиях естественной конвекции от расчета вынужденной конвекции с постоянными физическими свойствами жидкостей, является неразрывная взаимосвязь уравнений движения и энергии, что не дает возможности выделить и решать самостоятельно задачу гидродинамики. Поэтому с развитием быстродействующих ЭВМ основным инструментом расчета процессов теплопереноса в условиях естественной конвекции стали численные методы. Если уравнения, описывающие исследуемый процесс естественной конвекции, допускают представление в автомодельных переменных, то для численного решения получившихся обыкновенных дифференциальных уравнений обычно используют метод Рунге — Кутта. Если же автомодельность отсутствует, то для решения уравнений естественной конвекции используются методы конечных разностей и конечных элементов. Метод конечных разностей обычно применяют для расчета уравнений естественной конвекции в приближении пограничного слоя, а также для областей канонической формы. Для очень сложных геометрических форм применяют метод конечных элементов.

Численное решение уравнений естественной конвекции имеет свои трудности (ограниченные ресурсы ЭВМ, необходимость достаточно высокой математической подготовки, превышающей вузовские курсы математических дисциплин, и так далее). Кроме того, численное решение не всегда обеспечивает требуемый по точности результат. Поэтому наряду с различными расчетными методами изучения течений в условиях естественной конвекции большое внимание уделяется экспериментальному исследованию задач естественной конвекции. Результатом экспериментов являются эмпирические зависимости, позволяющие определить основные критерии подобия для отдельных классов течений в условиях естественной конвекции. Рассмотрим некоторые основные задачи естественной конвекции.

Теплообмен в неограниченном пространстве. Явления теплоотдачи при свободном движении среды, вызванном ее местным нагреванием или охлаждением в неограниченном пространстве, имеют большое значение в различных областях техники. Критериями, определяющими эти процессы, являются $\mathrm{Gr} = \beta \frac{g\, l^3}{\nu^2} \Delta T$, $\mathrm{Pr} = \frac{\nu}{a}$.

Исследование процесса теплообмена при естественной конвекции в неограниченном пространстве сводится к определению функциональной зависимости вида $\mathrm{Nu} = f\,(\mathrm{Gr}, \mathrm{Pr})$.

Неограниченный объем — объем, размеры которого настолько велики, что тепловое возмущение, вносимое находящимся в нем нагретым (охлаждаемым) телом, не распространяется на весь объем, поэтому на некотором удалении от тела жидкость можно считать невозмущенной.

Очевидно, чем больше площадь поверхности тела, тем большее пространство неограниченного объема будет охвачено процессом, а чем больше разность между температурами поверхности тела $T_{ст}$ и невозмущенной части объема $T_ж$, тем интенсивнее свободное движение.

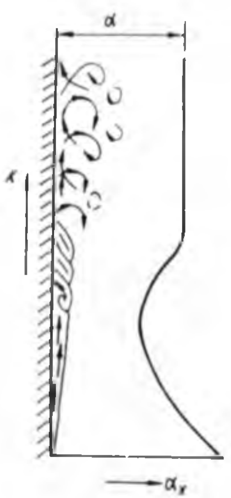


Рис. 5.24. Изменение коэффициента теплоотдачи по высоте трубы при свободном движении среды

Характер движения жидкости около стенки зависит от формы поверхности, ее направления в пространстве и направления теплового потока.

На рис. 5.24 показана схема движения воздуха вдоль нагретой вертикальной стенки и зависимость α от ее высоты. В нижней части стенки в восходящем потоке воздуха устанавливается ламинарный режим. Постепенно на высоте стенки в движение вовлекается все большее количество жидкости, толщина пограничного слоя растет. На некотором расстоянии от нижней кромки стенки ламинарный пограничный слой начинает разрушаться и возникает переходной режим течения. Далее, на высоте h и выше устанавливается развитый турбулентный режим течения с ламинарным подслоем в непосредственной близости от поверхности стенки. В области ламинарного течения коэффициент теплоотдачи уменьшается в связи с утолщением ламинарного слоя и достигает минимума там, где толщина ламинарного слоя достигает максимума. Затем коэффициент α, постепенно возрастая, принимает постоянное значение в области развитого турбулентного потока.

Многочисленные исследования по теплоотдаче в свободном потоке были проведены с горизонтальными и вертикальными проволоками, трубами, плитами, шарами и пр. В экспериментах диаметр проволок и труб изменялся от 0,015 до 245 мм; диаметр шаров — от 30 мм до 16 м; высота плит и труб — от 0,25 до 6 м. Эксперименты проводились с воздухом, водородом, углекислотой, водой, маслом и различными органическими жидкостями. Опыты с газами проводились при давлениях $3 \cdot 10^3 \div 7 \cdot 10^5$ Па.

М. А. Михеев обобщил результаты экспериментальных исследований теплоотдачи для тел различной формы при свободном движении жидкости в неограниченном пространстве и предложил следующую формулу:

$$\overline{\mathrm{Nu}}_{ж,\,d} = c\,(\mathrm{Gr\,Pr})^n_m. \quad (5.104)$$

Таблица 5.7

GrPr	c	n
$1 \cdot 10^{-3}$ — $5 \cdot 10^2$	1,18	1/8
$5 \cdot 10^2$ — $2 \cdot 10^7$	0,54	1/4
$2 \cdot 10^7$ — $1 \cdot 10^{13}$	0,135	1/3

Значения коэффициента c и показателя n зависят от численного значения комплекса GrPr и не зависят от формы тела. Значения величин c и n приведены в табл. 5.7. За определяющую температуру принята средняя температура пограничного слоя. Определяющий размер зависит от формы и расположения поверхности теплообмена: для труб и шаров за определяющий размер принимают диаметр, для вертикальных плит и труб — высоту, для горизонтальных плоских поверхностей — наименьший горизонтальный размер.

Наряду с обобщенной формулой (5.104) широко используются также формулы, приведенные ниже.

Теплоотдача при ламинарном режиме ($(\mathrm{GrPr})_ж = 10^3 \div 10^9$) для вертикальных труб и пластин рассчитывается по формуле

$$\overline{\mathrm{Nu}}_{ж,\,d} = 0{,}75\,(\mathrm{Gr\,Pr})_ж^{0{,}25}\left(\frac{\mathrm{Pr}_ж}{\mathrm{Pr}_{ст}}\right)^{0{,}25}. \quad (5.105)$$

Применительно к воздуху или к другому двухатомному газу формула (5.105) упрощается $\left(\mathrm{Pr} = 0{,}71,\ \frac{\mathrm{Pr}_ж}{\mathrm{Pr}_{ст}} \approx 1\right)$:

$$\overline{\mathrm{Nu}}_{ж,\,d} = 0{,}7\mathrm{Gr}_ж^{0{,}25}. \quad (5.106)$$

Определяющий размер — высота поверхности теплообмена. Определяющая температура — температура окружающей среды.

Переход от ламинарного к турбулентному режиму движения происходит на некотором расстоянии $H_{кр}$ от начала поверхности. Высота

$$H_{кр} = 10^3\left[\frac{\nu a}{g\beta\,\Delta T}\right]_ж^{1/3}. \quad (5.107)$$

Теплоотдача на ламинарном участке до высоты $H_{кр}$ рассчитывается по формуле (5.105), а на турбулентном участке высотой $H - H_{кр}$, где H — полная высота трубы или высоты пластины,

$$\overline{Nu}_{ж,d} = 0{,}15\,(Gr\,Pr)_ж^{0,33}(Pr_ж/Pr_{ст})^{0,25}. \tag{5.108}$$

Средний коэффициент теплоотдачи при наличии ламинарного и турбулентного участков пограничного слоя на вертикальной поверхности

$$\overline{\alpha} = [\alpha_л H_{кр} + \alpha_т(H - H_{кр})]\,H^{-1}, \tag{5.109}$$

где $\alpha_л$ и $\alpha_т$ — средние коэффициенты теплоотдачи на ламинарном и турбулентном участках пограничного слоя.

Применительно к воздуху или к другому двухатомному газу формула (5.108) принимает вид

$$\overline{Nu}_{ж,d} = 0{,}132 Gr_ж^{0,33}. \tag{5.110}$$

Для горизонтальной трубы:
при $(Gr\,Pr)_ж = 10^{-3} \div 10^3$

$$\overline{Nu}_{ж,d} = 1{,}18\,(Gr\,Pr)_ж^{0,125}\left(\frac{Pr_ж}{Pr_{ст}}\right)^{0,25}, \tag{5.111}$$

при $(Gr\,Pr)_ж = 10^3 \div 10^8$

$$\overline{Nu}_{ж,d} = 0{,}5\,(Gr\,Pr)_ж^{0,25}\left(\frac{Pr_ж}{Pr_{ст}}\right)^{0,25}. \tag{5.112}$$

Применительно к воздуху это уравнение имеет вид

$$\overline{Nu}_{ж,d} = 0{,}46 Gr_ж^{0,25}. \tag{5.113}$$

Определяющий размер — наружный диаметр трубы, определяющая температура — средняя температура окружающей среды

$$\overline{T}_ж = 0{,}5\,(T_{ст} + T_ж).$$

Теплообмен при свободном движении около горизонтальных плит. Для приближенного определения коэффициента теплоотдачи при обтекании горизонтальных поверхностей можно использовать формулу для вертикальной плиты. Причем, если теплоотдающая поверхность плиты обращена кверху, то значение коэффициента теплоотдачи надо увеличить на 30 %, а если теплоотдающая поверхность обращена вниз — уменьшить на 30 %. В качестве определяющего размера принимается длина меньшей стороны плиты. Теплоотдачу при обтекании плоских поверхностей, которые составляют с вертикалью угол φ (наклонные плиты), можно оценить с помощью уравнений (5.105), (5.106), (5.108) путем введения в них поправки на угол φ. Поправочный множитель для теплоотдающих поверхностей, обращенных вверх, $\varepsilon_\varphi = (\cos\varphi)^{-0,25}$ и $\varepsilon_\varphi = (\cos\varphi)^{0,25}$ — для теплоотдающих поверхностей, обращенных вниз.

Теплообмен в ограниченном пространстве. Исследование теплообмена в замкнутых объемах представляет большой практический интерес,

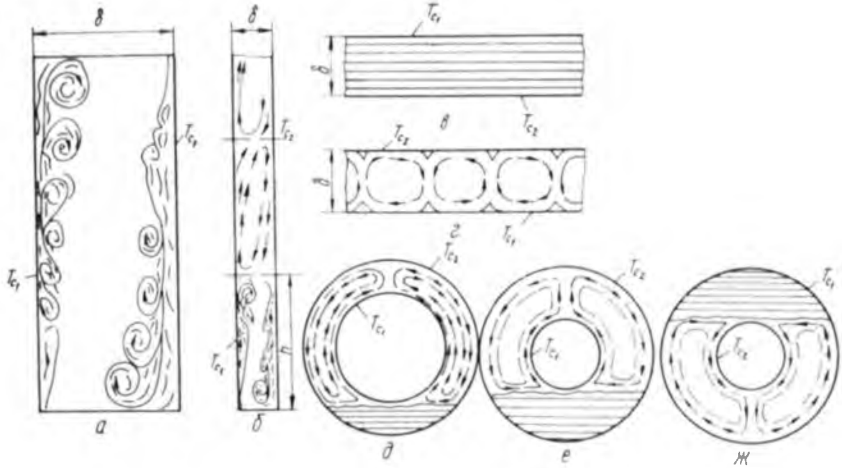


Рис. 5.25. Свободное движение в ограниченном объеме

поскольку его результаты могут быть использованы при расчете воздушных прослоек, применяемых в качестве тепловой изоляции. Характер естественной конвекции в ограниченном пространстве в значительной степени зависит от формы замкнутого объема, от взаимного расположения теплоотдающей и тепловоспринимающей поверхностей. Если замкнутый объем имеет вид вертикальной щели, то характер движения определяется ее шириной. Если толщина щели достаточно велика, то восходящий и нисходящий потоки не пересекаются (рис. 5.25, *а*) и имеют такой же характер, как и вдоль вертикальной поверхности в неограниченном пространстве.

Из рис. 5.25, *б* видно, что если толщина δ мала, то вследствие взаимных помех возникают циркуляционные контуры. Высота контуров h зависит от ширины щели, рода жидкости и интенсивности процесса.

Характер движения теплоносителя между горизонтальными пластинами в большей мере зависит от их расположения и направления теплового потока.

Если нагретая пластина расположена выше холодной, то свободная конвекция между ними не наблюдается (рис. 5.25, *в*). В этих условиях передача теплоты осуществляется теплопроводностью.

Если нагретая пластина расположена ниже холодной (рис. 5.25, *г*), то при значениях $(\mathrm{GrPr}) \approx 1700$ в слое жидкости между пластинами возникает свободная конвекция. При значениях $(\mathrm{GrPr}) < 1700$ движения жидкости не будет и теплота передается теплопроводностью. При значениях $\mathrm{GrPr} > 4700$ режим движения между пластинами становится турбулентным.

Для воздушных прослоек

$$\mathrm{Nu} = 0{,}19\mathrm{Gr}^{0,25} \text{ при } 10^4 < \mathrm{Gr} < 4 \cdot 10^5, \qquad (5.114)$$

$$\mathrm{Nu} = 0{,}068\mathrm{Gr}^{0,33} \text{ при } 10^5 < \mathrm{Gr}. \qquad (5.115)$$

Определяющий размер — расстояние между пластинами.

Необходимо отметить, что в диапазоне $10^4 < Gr < 10^5$ существует ячеистый режим движения жидкости, а при $Gr > 4 \cdot 10^5$ — турбулентный [82].

В горизонтальных цилиндрических каналах характер свободного течения зависит от соотношения диаметров и положения нагретых поверхностей. На рис. 5.25, *д* показана схема свободного движения с внутренней нагретой поверхностью при небольшом соотношении диаметров, а на рис. 5.25, *е* — при большом соотношении диаметров. На рис. 5.25, *ж* показана схема свободного движения при нагретой наружной трубе.

Опытами установлено, что теплопередача между двумя вертикальными пластинами зависит от произведения GrPr, расстояния между пластинами δ и высоты пластины H. Если соотношение $H/\delta < 3$, то теплоотдачу для ламинарного пограничного слоя можно рассчитать по формулам для одиночных пластин, расположенных в неограниченном пространстве. В этом случае восходящий поток на горячей пластине и нисходящий на холодной не оказывают влияния друг на друга. Если отношение $H/\delta > 5$, между пластинами могут возникнуть внутренние циркуляционные контуры высотой h (рис. 5.25, *б*), высота контуров зависит не только от отношения H/δ, но и от произведения GrPr. Понятно, что эти контуры влияют на теплоотдачу.

На основании обработки экспериментальных данных Э. Р. Эккерт предложил следующую формулу для воздушной прослойки:

$$Nu_\delta = 0{,}119 Gr_\delta^{0,3} \left(\frac{H}{\delta}\right), \quad 5 \cdot 10^3 \leqslant Gr_\delta \leqslant 10^6. \qquad (5.116)$$

Из рис. 5.25, *б* видно, что перенос теплоты через прослойки осуществляется одной и той же жидкостью (газом), которая циркулирует между горячей и холодной стенкой, образуя замкнутые контуры. Поэтому практически невозможно отделить теплоотдачу около охлаждаемой и нагреваемой поверхностей. Процесс теплообмена через прослойки (вертикальные, горизонтальные, цилиндрические, шаровые — рис. 5.25, *в—ж*) оценивают в целом, определяя плотность теплового потока по формуле для теплопроводности

$$q = \frac{\lambda_{эк}}{\delta}(T_1 - T_2), \qquad (5.117)$$

где $\lambda_{эк}$ — эквивалентный коэффициент теплопроводности, который учитывает влияние конвективного переноса теплоты; δ — толщина прослойки; T_1 и T_2 — температуры поверхностей, разделенных прослойкой.

При экспериментальном изучении прослоек определяется обычно отношение эквивалентного коэффициента теплопроводности $\lambda_{эк}$ к коэффициенту теплопроводности той же среды λ:

$$\varepsilon_к = \frac{\lambda_{экв}}{\lambda}. \qquad (5.118)$$

Это отношение называют коэффициентом конвекции, потому что его численное значение характеризует влияние конвекции в передаче теплоты от горячей стенки к холодной.

Экспериментальные исследования процессов теплообмена в прослойках различной формы позволили установить функциональную зависимость коэффициента конвекции $\varepsilon_к$ от комплекса GrPr, определяющего конвективный теплообмен при свободном движении:

$$\varepsilon_к = f(\mathrm{Gr\,Pr}). \qquad (5.119)$$

В зависимости от значений комплекса GrPr коэффициент конвекции может быть вычислен по следующим формулам:

$$\varepsilon_к = 0{,}105(\mathrm{Gr\,Pr})_ж^{0,3}, \quad \mathrm{Gr}_ж\mathrm{Pr}_ж = 10^3 \div 10^6, \qquad (5.120)$$

$$\varepsilon_к = 0{,}4(\mathrm{Gr\,Pr})_ж^{0,2}, \quad \mathrm{Gr}_ж\mathrm{Pr}_ж = 10^6 \div 10^{10}. \qquad (5.121)$$

При малых значениях аргумента ($\mathrm{Gr}_ж\,\mathrm{Pr}_ж \leqslant 1000$) полагают $\varepsilon_к = 1$ ($\lambda_{экв} = \lambda$), то есть перенос теплоты от горячей стенки к холодной через прослойки обусловливается только теплопроводностью жидкости.

В приближенных расчетах вместо формул (5.120), (5.121) для значений $\mathrm{Gr}_ж\,\mathrm{Pr}_ж > 10^3$ применяют зависимость

$$\varepsilon_к = 0{,}18(\mathrm{Gr}_ж\,\mathrm{Pr}_ж)^{0,25}. \qquad (5.122)$$

Определяющий размер — толщина прослойки δ, определяющая температура — средняя температура жидкости $T_m = (T_{ст_1} + T_{ст_2})/2$.

Задача 5.4. В узкой щели температуры на поверхностях стенок соответственно 10 и 30 °С. При какой толщине водяной прослойки в щели передача теплоты от горячей поверхности к холодной будет определяться в основном теплопроводностью.

Решение. Теплота будет в основном передаваться за счет теплопроводности, если $\mathrm{Gr}_ж\mathrm{Pr}_ж < 10^3$. Из табл. 6 приложения при $T_{ср} = \frac{1}{2}(T_1 + T_2) = 20$ °С имеем:

$$\beta = 1{,}82\cdot 10^{-4}\ \mathrm{K}^{-1},\quad \nu = 1{,}006\cdot 10^{-6}\ м^2/с,\quad \mathrm{Pr} = 7{,}02.$$

Находим δ из условия $\mathrm{Gr}_ж\,\mathrm{Pr}_ж < 10^3$,

$$\frac{\beta g \Delta T \delta^3}{\nu^2}\mathrm{Pr} < 10^3, \text{ откуда}$$

$$\delta = \sqrt[3]{\frac{10^3\cdot\nu^2}{\beta g\Delta T\,\mathrm{Pr}}} = \sqrt[3]{\frac{10^3\cdot 1{,}006^2\cdot 10^{-12}}{1{,}82\cdot 10^{-4}\cdot 9{,}81\cdot 20\cdot 7{,}02}} \approx 1{,}66\ мм.$$

§ 5.5. ТЕПЛООБМЕН ЖИДКИХ МЕТАЛЛОВ

Теплоносителей, применяющихся в различных энергетических установках, достаточно много. Важное место среди теплоносителей занимают жидкие металлы. В качестве теплоносителей применяют: натрий, калий, литий, цезий, ртуть, висмут, натриево-калиевые сплавы, сплавы висмута и олова, сплавы висмута и свинца и пр. Физические свойства жидких металлов существенно отличаются от свойств обычных теплоносителей — воды, масла, воздуха, различных газов. Высокая температура расплавленных металлов, большая температуропроводность, небольшие теплоемкости и малая кинетическая вязкость обеспечивают высокую интенсивность процесса теплоотдачи в теплообменных устройствах. Критерий Прандтля для жидких металлов значительно меньше единицы ($Pr \approx 0{,}005 - 0{,}05$).

Экспериментально установлено, что интенсивность теплообмена зависит от загрязнения металла окислами и от смачиваемости омываемой поверхности. Для чистых жидких металлов смачиваемость поверхности практически не влияет на интенсивность теплоотдачи. При наличии окислов интенсивность теплоотдачи несмачиваемой поверхности выше, чем смачиваемой.

Теплообмен при вынужденном течении жидких металлов в каналах. Экспериментально установлено, что при ламинарном течении и $q_c = \mathrm{const}$ $Nu_{ж,d} = 4{,}36$, что находится в соответствии с теорией (см. формулу (5.60))

Средние коэффициенты теплоотдачи жидких металлов при турбулентном течении в трубах определяются по формулам:

для чистых металлов, поверхность теплообмена которых надежно смачивается,

$$\overline{Nu}_{ж,\,d} = (4{,}8 + 0{,}014 Pe_{ж,\,d}^{0,8})\varepsilon_l; \qquad (5.123)$$

для полностью развитого турбулентного течения ($Re > 10^4$) [11]

$$\overline{Nu}_{ж,\,d} = 0{,}625 Pe^{0,4}; \qquad (5.124)$$

для условий, когда возможно загрязнение металла, а поверхность теплообмена не смачивается,

$$\overline{Nu}_{ж,\,d} = (3{,}3 + 0{,}014 Pe_{ж,\,d}^{0,8})\,\varepsilon_l. \qquad (5.125)$$

Эти формулы применимы при $Re = 3 \cdot 10^3 - 10^6$, $Pe = 2 \cdot 10^2 - 2 \cdot 10^4$, $Pr = 4 \cdot 10^{-3} - 3 \cdot 10^{-2}$.

При $l/d \geqslant 30$ $\varepsilon_l = 1$. Если $l/d < 30$, то $\varepsilon_l = 1{,}72\left(\frac{d}{l}\right)^{0,16}$.

В формулах (5.123) и (5.125) определяющий линейный размер — внутренний диаметр трубы или эквивалентный диаметр канала, определяющая температура — средняя температура жидкости.

Теплообмен при поперечном омывании жидкими металлами пучка труб. Средний коэффициент теплоотдачи для глубинных рядов коридорного и шахматного пучков

$$\overline{Nu}_{ж,\,d} = Pe_{ж,\,d}^{0,5}. \qquad (5.126)$$

Здесь определяющий размер — внешний диаметр трубы; скорость рассчитывается в узком сечении пучка; физические параметры определяются по температуре жидкого металла. Эксперименты показывают, что средняя теплоотдача первого ряда пучка на 20 % меньше теплоотдачи глубинных рядов. Формула (5.126) применяется для чистых жидких металлов.

Теплообмен при свободном движении жидких металлов. Коэффициент теплоотдачи при свободном движении жидких металлов определяется по формулам:

для $Gr = 10^2 \div 10^9$ (ламинарный режим)

$$Nu_ж = 0{,}52 Gr^{0{,}25} Pr^{0{,}4}, \quad (5.127)$$

для $Gr = 10^9 \div 10^{13}$ (турбулентный режим)

$$Nu_ж = 0{,}106 Gr^{0{,}33} Pr^{0{,}4}. \quad (5.128)$$

Определяющая температура — средняя температура пограничного слоя $T_{п.\,сл} = 0{,}5(T_ж + T_с)$. Определяющий размер: для вертикальных плит — высота, для горизонтальных труб — внешний диаметр.

Задача 5.5. Вычислить коэффициент теплоотдачи при течении чистого жидкого металлического теплоносителя (25 % Na + 75 % K) по трубе диаметром 30 мм, длиной 5 м со скоростью $w = 5$ м/с. Параметры теплоносителя заданы: $\rho = 775$ кг/м³, $c = 1002$ Дж/(кг · К), $\lambda = 22{,}1$ Вт/(м · К).

Решение. Воспользуемся формулой (5.123), полагая в ней $\varepsilon_l = 1$, так как $l/d = 5/0{,}03 > 30$:

$$Nu_{ж,д} = 4{,}8 + 0{,}014\, Pe^{0{,}8}_{ж,d} = 4{,}8 + 0{,}014\,(5 \cdot 0{,}03 \cdot 775 \cdot 1002/22{,}1)^{0{,}8} = 18{,}16.$$

Затем вычисляем коэффициент теплоотдачи

$$\alpha = Nu\lambda/d = 18{,}16 \cdot 22{,}1/0{,}03 \approx 13{,}37 \text{ кВт/(м}^2\cdot\text{К)}.$$

§ 5.6. СОПРЯЖЕННЫЕ ЗАДАЧИ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА

Характеристики конвективного теплообмена существенно зависят от граничных условий на стенках, которые, в свою очередь, зависят от геометрических размеров и теплофизических свойств материала и жидкости. Всю эту взаимосвязь позволяет учесть так называемая сопряженная постановка задач теплообмена, которая, в отличие от традиционного подхода, предполагает определение температурного поля в стенке и жидкости в результате совместного решения уравнений энергии и теплопроводности с уравнениями движения. При таком подходе важным является вопрос о граничных условиях на поверхности раздела жидкость — тело.

При анализе сопряженных задач конвективного теплообмена необходимо выделить два больших класса задач: внутренние и внешние. Первые постановки внутренних сопряженных задач отличались целым рядом существенных упрощающих допущений. Рассматривались течения несжимаемой жидкости с постоянным расходом в канале постоянного поперечного сечения. Предполагалось, что температуры жидкости по поперечному сечению и по толщине стенки, теплофизические характеристики жидкости и материала стенки постоянны, нет внутренних источников теплоты. Теплопередача вдоль жидкости и стенки за счет теплопроводности считалась пренебрежимо малой по сравнению с теплопередачей от жидкости к стенке. Таким образом, сопряженность температурных полей стенки и жидкости учитывалась с помощью граничного условия III рода, которое включалось в правые части уравнений энергии для жидкости и теплопроводности для стенки. В такой постановке задача считалась сопряженной в том смысле, что температуры жидкости и стенки определяются в результате совместного решения уравнений энергии и теплопроводности. Эта постановка приемлема, когда температура стенки постоянна по сечению, что возможно лишь в исключительном случае бесконечно большой теплопроводности твердого тела при бесконечно малой его толщине.

Реальной физической ситуации соответствуют вполне определенные теплопроводность и толщина стенки. Предварительное задание температуры стенки невозможно и в случае высокоинтенсивного теплообмена. Поэтому закон зависимости температуры стенки от координат и от времени должен быть получен путем совместного решения уравнений теплопереноса в жидкости и твердом теле с уравнениями движения, причем сопряжение решений необходимо производить с помощью граничных условий IV рода. При такой постановке задачи учитывается взаимное тепловое влияние тела и жидкости, в результате чего теплообмен оказывается зависящим от свойств тела, его теплофизических характеристик, размеров, распределения источников в теле.

В настоящее время *сопряженными* называют задачи конвективного теплообмена с граничными условиями IV рода на границе раздела твердого тела и теплоносителей. Сопряженная формулировка вызывает большие математические трудности, что вынуждает идти на упрощения, часто делающие решенную задачу далекой от поставленной. Поэтому разработка методов решения сопряженных задач является одним из направлений, обеспечивающих эффективность и надежность инженерных расчетов различных теплообменных систем.

Критерий сопряженности. При рассмотрении задач конвективного теплообмена возникает вопрос о том, при каких условиях их можно решать традиционным путем без учета теплопроводности тел, обтекаемых потоком жидкости, а в каких случаях задачи должны решаться в сопряженной постановке. А. В. Лыков показал, что критерием сопряженности задач конвективного теплообмена является величина, пропорциональная отношению теплового пограничного слоя жидкости к термическому сопротивлению стенки твердого тела, называемая *критерием Брюна*.

Решение задачи в сопряженной постановке предполагает задание на границе раздела жидкость — тело вместо граничных условий III рода граничных условий IV рода, то есть

$$-\lambda_ж \left(\frac{\partial T_ж}{\partial y}\right)_\omega = -\lambda_с \left(\frac{\partial T_с}{\partial y}\right)_\omega, \tag{5.129}$$

$$(T_ж)_\omega = (T_с)_\omega, \tag{5.130}$$

где индексы «ж» и «с» обозначают соответственно жидкость и стенку (твердое тело), индекс «ω» — поверхность тела; ось y направлена перпендикулярно к поверхности тела.

Граничное условие (5.129) может быть заменено приближенным соотношением

$$\frac{(\Delta T_с)_b}{(\Delta T_ж)_{\delta_т}} = \frac{\lambda_ж}{\lambda_с}\frac{b}{\delta'_т}, \tag{5.131}$$

где b — толщина стенки; $\delta'_т$ — условная толщина теплового пограничного слоя. Из формулы (5.131) следует, что отношение перепада температуры по толщине стенки $(\Delta T_с)_b$ к перепаду температуры в пограничном слое жидкости $(\nabla T_ж)_{\delta'_т}$ зависит не только от отношения коэффициентов теплопроводности жидкости и стенки $\lambda_ж/\lambda_с$, но и от отношения толщины стенки к условной толщине теплового пограничного слоя $b/\delta'_т$. Следует отметить, что аппроксимация теплового потока на поверхности твердого тела

$$-\lambda_с \left(\frac{\partial T_с}{\partial y}\right)_w = \frac{\lambda_с (\Delta T_с)_b}{b} \tag{5.132}$$

справедлива только в случае линейного распределения температуры по толщине стенки. Линейный закон изменения температуры справедлив при малых толщинах или при очень больших значениях коэффициентов теплопроводности тела (предполагается также, что внутренние источники (стоки) отсутствуют).

В случае линейного по толщине стенки распределения температуры в формулу (5.132) вводят поправочный множитель ε, являющийся однозначной функцией $(\Delta T_с)_b/b$ и учитывающий искажение температурного профиля. Выражение (5.132) при этом принимает следующий вид:

$$\left(\frac{\partial T_с}{\partial y}\right)_\omega = \varepsilon\frac{(\Delta T_с)_b}{b}. \tag{5.133}$$

Введем величину

$$(\Delta\theta)_b = \frac{(\Delta T_c)_b}{(\Delta T_c)_{\delta'_т}}, \tag{5.134}$$

называемую относительным перепадом температуры по толщине стенки. С учетом (5.133), (5.134) соотношение (5.131) примет вид

$$(\Delta\theta)_b = \varepsilon \frac{\lambda_ж}{\lambda_c} \frac{b}{x} \left(\frac{x}{\delta'_т}\right). \tag{5.135}$$

Отсюда видно, что условия постоянства температуры на поверхности тела соответствуют бесконечно большой теплопроводности стенки ($\lambda_c \gg \lambda_ж$), что приводит к бесконечно малому перепаду температуры $(\Delta T_c)_b \to 0$.

При $(\Delta\theta)_b < 0{,}01$ перепадом температуры в стенке с точностью до 1 % можно пренебречь и считать ее температуру постоянной $(T_c)_w = \mathrm{const}$.

Соотношение (5.135) показывает, что относительный перепад температуры в стенке зависит не только от отношения коэффициентов теплопроводности, толщины стенки, но и от толщины условного теплового пограничного слоя $\delta_т$, который, в свою очередь, зависит от скорости движения жидкости, ее вязкости и изменяется вдоль направления движения (вдоль оси x).

Из теории пограничного слоя известно, что величина $x/\delta'_т$ равна локальному числу Нуссельта:

$$\mathrm{Nu}_x = \frac{x}{\delta'_т} = A_x \mathrm{Pr}^m \mathrm{Re}_x^n, \tag{5.136}$$

где A_x, m и n — постоянные.

Подставляя соотношение (5.136) в (5.135), получим

$$(\Delta\theta)_b = A_x \varepsilon \frac{b}{x} \frac{\lambda_ж}{\lambda_c} \mathrm{Pr}^m \mathrm{Re}_x^n. \tag{5.137}$$

Таким образом, относительный перепад температуры $(\Delta\theta)_b$ является однозначной функцией безразмерной величины $[(\lambda_ж/\lambda_c) \mathrm{Pr}^m \mathrm{Re}_x^n$, называемой *числом Брюна:*

$$(\Delta(\theta)_b) = f(\mathrm{Br}_x), \tag{5.138}$$

где

$$\mathrm{Br}_x = \frac{\lambda_ж}{\lambda_c} \frac{b}{x} \mathrm{Pr}^m \mathrm{Re}_x^n \tag{5.139}$$

— локальное число Брюна, называемое *критерием сопряженности.*

При малых числах Брюна ($\mathrm{Br}_x < \mathrm{Br}_{x_{\min}}$) задачу конвективного теплообмена можно решать без учета сопряжения температурных полей жидкости и тела. Величину $\mathrm{Br}_{x_{\min}}$ определяют на основе оценки точных аналитических решений некоторых модельных задач, а также экспериментальным путем. Из соотношения (5.139) видно, что значение Br_x будет зависеть от режима движения жидкости (ламинарное или турбулентное). Для ламинарного течения $m = 1/3$ и $n = 0{,}5$, для турбулентного — $n = 0{,}2$. Для газов значение Br_x обычно не превышает 0,001 (для $b/x \approx 0{,}1 \div 0{,}001$), для жидкости — 0,07.

При $\mathrm{Br}_x < 0{,}02$ результаты сопряженного и несопряженного решений совпадают с точностью до 1 %. Поскольку, обычно, при проведении теплотехнических расчетов допустима большая величина погрешности (до 5 — 10 %), допускаемое значение числа Брюна может быть существенно увеличено.

Постановка сопряженных краевых задач конвективного теплообмена. Сопряженная постановка задач конвективного теплообмена в общем случае предполагает совместное решение уравнений неразрывности, движения и энергии для потока и теплопроводности для стенки, при этом на границе раздела жидкость — твердое тело задаются граничные условия IV рода (равенство температур теплоносителя и стенки и плотностей тепловых потоков в теплоносителе и стенке).

Запишем, например, систему дифференциальных уравнений, описывающих нестационарный сопряженный теплообмен в канале произвольного поперечного сечения.

Уравнения неразрывности, гидродинамики и энергии для теплоносителя такие:

$$\frac{\partial \rho_ж}{\partial \tau} + \operatorname{div}(\rho_ж \vec{W}_ж) = 0, \tag{5.140}$$

$$\rho_ж \left[\frac{\partial \vec{W}_ж}{\partial \tau} (\vec{W}_ж, \operatorname{grad}) \vec{W}_ж \right] = \vec{F} - \operatorname{grad} p + 2 \operatorname{div}(\mu_ж S_ж) -$$

$$- \frac{2}{3} \operatorname{grad}(\mu_ж \operatorname{div} \vec{W}_ж), \tag{5.141}$$

$$\rho_ж C_ж \left[\frac{\partial T_ж}{\partial \tau} + (\vec{W}_ж, \operatorname{grad} T_ж) \right] = \operatorname{div}(\lambda_ж \operatorname{grad} T_ж) + \frac{dp}{dT}. \tag{5.142}$$

Уравнение теплопроводности для стенки

$$\rho_с C_с \frac{\partial T_с}{\partial \tau} = \operatorname{div}(\lambda_с \operatorname{grad} T_с) + q_v. \tag{5.143}$$

Условия сопряжения на границе раздела поток — стенка:

$$(T_ж)_w = (T_с)_w, \tag{5.144}$$

$$-\lambda_ж \left(\frac{\partial T_ж}{\partial n} \right)_w = -\lambda_с \left(\frac{\partial T_с}{\partial n} \right)_w. \tag{5.145}$$

Граничные условия для потока и стенки во входном, выходном сечениях, а также на плоскости симметрии (если она имеется) зависят от конкретной задачи

Теоретическое решение нестационарных трехмерных сопряженных задач для большинства практически важных случаев встречает серьезные математические трудности. Поэтому в инженерной практике широкое распространение получил метод расчета, основанный на одномерном способе описания процессов в канале [66] Предполагают, что скорость и температура постоянны по сечению канала и могут изменяться лишь по длине канала (ось x). В качестве скорости принимают среднерасходную скорость:

$$\bar{u} = \frac{G}{\rho F}, \tag{5.146}$$

где G — массовый расход; F — площадь поперечного сечения канала, а в качестве температуры — среднемассовую температуру в данном сечении (предполагается, что $c_p = \text{const}$):

$$\bar{T} = \frac{\int\limits_F uT\rho dF}{\int\limits_F u\rho dF}. \tag{5.147}$$

Связь между среднемассовой температурой теплоносителя, плотностью теплового потока через единицу площади поверхности стенки q_w и температурой стенки T_w выражается соотношением

$$q_w = \alpha (T_w - \bar{T}), \tag{5.148}$$

где α — местный коэффициент теплоотдачи, учитывающий реальные процессы, происходящие в трехмерном течении и определяющий теплообмен со стенкой при одномерном описании этих процессов.

В одномерной теории уравнения конвективного теплообмена существенно упрощаются.

Уравнение движения

$$\frac{G}{\bar{u}}\frac{\partial \bar{u}}{\partial T} + G\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = F\bar{\rho}F_x - F\frac{\partial p}{\partial x} - \zeta\frac{\bar{\rho}u^2}{2d_э}F, \tag{5.149}$$

где F_x — проекция плотности массовых сил на ось x;

$$\zeta = -\delta\frac{\partial p}{\partial x}\Bigg/\frac{\bar{\rho}\,\bar{u}^2}{2d_э}F, \tag{5.150}$$

где ζ — местный коэффициент гидравлического сопротивления;

$$d_э = 4F/U, \tag{5.151}$$

где $d_э$ — эквивалентный диаметр канала; U — периметр канала; $\bar{\rho}$ — средняя плотность жидкости, отнесенная к $\bar{T}$ и p в сечении x.

Уравнение неразрывности

$$\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial\tau}F + \frac{\partial G}{\partial x} = 0. \tag{5.152}$$

Уравнение энергии

$$\frac{d\bar{i}}{d\tau}F\bar{\rho} = Uq_w + F\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_{эф}\frac{\partial\bar{T}}{\partial x}\right) + F\frac{dp}{d\tau} + F\bar{T}\sigma, \tag{5.153}$$

где $\lambda_{эф}$ — средний по сечению эффективный коэффициент теплопроводности в направлении оси x; σ — производство энтропии в единице объема за счет вязкого трения.

Пренебрегая в уравнении (5.153) тремя последними членами в правой части, которые для большинства случаев намного меньше первого члена, приходим к выражению вида

$$\frac{G}{\bar{u}}\frac{\partial\bar{i}}{\partial\tau} + G\frac{\partial\bar{i}}{\partial x} = U\alpha\,(T_w - \bar{T}), \tag{5.154}$$

где $\bar{i} = \int\limits_F \rho i u\,dF/G$ — среднемассовая энтальпия потока.

Часто отношение dp/dx мало (безградиентное течение) и процесс можно считать изобарным. Тогда для изобарного процесса любого газа и для любого процесса идеального газа (с уравнением состояния $p = \rho RT$) из термодинамики имеем $di = c_p dT$.

В этом случае уравнение (5.153) примет вид

$$\frac{Gc_p}{\bar{u}}\frac{\partial\bar{T}}{\partial\tau} + Gc_p\frac{\partial\bar{T}}{\partial x} = U\alpha\,(T_w - \bar{T}). \tag{5.155}$$

Математическое упрощение задачи при одномерной постановке достигается введением коэффициентов теплоотдачи и гидравлических потерь, которые сложным образом связаны с реальным трехмерным течением и не могут быть определены в одномерной теории. Их находят либо экспериментально, либо из решения приведенной выше трехмерной системы уравнений с помощью определений

(5.147), (5.149). Если для заданных условий α и ξ известны, то решение одномерной задачи оказывается намного проще трехмерной. Очевидно, что одномерный способ описания не является всеобъемлющим. Более общей и строгой является трехмерная сопряженная постановка, реализация которой возможна лишь с помощью численных методов, ориентированных на применение быстродействующих ЭВМ.

§ 5.7. ТЕПЛООБМЕН ПРИ ТЕЧЕНИИ ГАЗОВ С БОЛЬШИМИ СКОРОСТЯМИ

Высокоскоростные потоки газов имеют определенные существенные отличия от течений жидкостей. В отличие от жидкостей, большинство которых практически несжимаемы, газы способны изменять свою плотность при изменении давления. Это их свойство называют *сжимаемостью*. Существенной особенностью является возникновение при обтекании поверхностей тел значительных градиентов скорости, следствие которых — большие силы трения. В свою очередь, работа сил трения переходит в теплоту, и в пограничном слое выделяется значительное количество тепловой энергии *(процесс диссипации)*. Таким образом, при решении уравнения энергии для высокоскоростных потоков сжимаемых газов нельзя пренебрегать диссипативным членом, вклад которого в общий тепловой баланс является весьма существенным Тепловые потоки, выделяющиеся за счет действия сил трения в пограничном слое, например при обтекании летательного аппарата, проходящего с большой скоростью плотные слои атмосферы, настолько велики, что без специальных теплозащитных покрытий наступает разрушение корпуса аппарата вследствие перегрева обшивки, приводящего к значительным термическим напряжениям. На практике для предохранения корпусов летательных аппаратов от разрушения применяются различные покрытия, материалы которых имеют низкие теплофизические характеристики.

Классификация высокоскоростных потоков осуществляется по *числу Маха*:

$$M = u/a, \tag{5.156}$$

где a, u — скорости звука и потока в одной точке.

Если $M < 1$, то поток называется *дозвуковым*, $M = 1$ — *звуковым*, $M > 1$ — *сверхзвуковым*. Сверхзвуковые потоки разделяют на сверхзвуковые ($1 < M < 5$) и гиперзвуковые ($M > 5$).

Для правильного расчета процессов теплообмена при течении газов с большими скоростями существенное значение приобретает анализ теплоотдачи в пограничном слое, который имеет здесь свои особенности. Предварительно введем некоторые понятия.

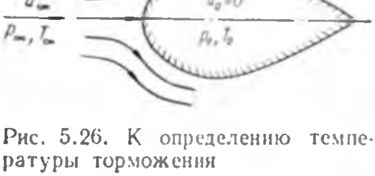


Рис. 5.26. К определению температуры торможения

Определим изменение температуры в передней критической точке тела, обтекаемого адиабатным потоком. Повышение температуры $(\Delta T)_{ад} = T_0 - T_\infty$ определяется повышением давления от p_∞ до p_0 (рис. 5.26). Считая течение стационарным, а также пренебрегая теплопроводностью и силами трения, что в данном случае вполне допустимо, так как определяющим является сжатие потока, приходим к упрощенному уравнению энергии (см. (4.50)):

$$\rho c_p u \frac{dT}{ds} = u \frac{dp}{ds}, \tag{5.157}$$

где s — координата, измеряемая вдоль линии тока, $u(s)$ — скорость вдоль линии тока. После простейших преобразований и интегрирования вдоль линии тока получаем

$$c_p(T - T_\infty) = \int\limits_{s_\infty}^{s} \frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds} ds = \int\limits_{p_\infty}^{p} \frac{dp}{\rho}. \tag{5.158}$$

Кроме того, согласно уравнению Бернулли, для сжимаемого газа имеем

$$\frac{u^2}{2} + \int\limits_{p_\infty}^{p} \frac{dp}{\rho} = \frac{u_\infty^2}{2}.$$

Последнее уравнение можно представить в следующем виде:

$$\frac{u^2}{2} + \int\limits_{p_\infty}^{p} \frac{dp}{\rho} = \frac{u_\infty^2}{2},$$

откуда

$$\int\limits_{p_\infty}^{p} \frac{dp}{\rho} = \frac{1}{2}(u_\infty^2 - u^2).$$

Подставляя полученное значение интеграла в соотношение (5.150), получаем

$$T = T_\infty + \frac{1}{2c_p}(u_\infty^2 - u^2). \tag{5.159}$$

Температура достигает своего максимума в критической точке, где происходит полное торможение потока. С учетом $u = 0$ из (5.159) следует

$$T_0 = T_\infty + \frac{u_\infty^2}{2c_p}. \tag{5.160}$$

Температура T_0 называется *температурой торможения*. С учетом известных соотношений термодинамики температура торможения может быть выражена через число Маха для набегающего потока

$$\frac{T_0}{T_\infty} = 1 + \frac{k-1}{2} M_\infty^2. \tag{5.161}$$

Отметим, что полностью адиабатный поток в реальных условиях невозможен, в нем всегда присутствует процесс обмена механической и тепловой энергией между смежными слоями газа. Этот процесс происходит и в окрестности поверхности, даже если она теплоизолирована. В результате этого теплоизолированная поверхность тела будет иметь некоторую температуру, превышающую температуру невозмущенного потока, но не равную температуре торможения. Эту температуру называют *адиабатной*, *собственной* или *равновесной*, и определяют по следующей формуле:

$$T_{a_c} = T_\infty + r\frac{u_\infty^2}{2c_p}, \tag{5.162}$$

где

$$r = \frac{T_{a_c} - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \tag{5.163}$$

— коэффициент восстановления.

Коэффициент r может принимать значения как больше, так и меньше единицы. Неравенство $r > 1$ соответствует случаю, когда интенсивность тепловыделения за счет работы сил трения преобладает над теплоотводом за счет конвекции и теплопроводности. Если $r < 1$ — преобладает отвод теплоты. При $r = 1$ $T_{a_c} = T_0$, то есть процессы выделения и отвода теплоты уравновешены и течение является адиабатным.

Согласно экспериментальным данным, при течении в ламинарном пограничном слое

$$r = \sqrt{\Pr}, \quad 0{,}5 \leqslant \Pr \leqslant 5, \tag{5.164}$$

а в турбулентном пограничном слое

$$r = \sqrt[3]{\Pr}. \tag{5.165}$$

Так как в высокоскоростном потоке градиенты температуры в пограничном слое велики, то изменения физических свойств жидкости также значительны. Тем не менее допустимо использование соотношений для теплообмена, полученных при постоянных физических свойствах, только все физические характеристики следует брать при характерной температуре

$$T^* = T_\infty + 0{,}5(T_c - T_\infty) + 0{,}22(T_{a_c} - T_\infty). \tag{5.166}$$

На рис. 5.27 показано, как влияет теплоотдача на изменение температуры в пограничном слое. В случае теплоизолированной поверхности имеем $T_c = T_{a_c}$ (кривая *2*). Кривая *1* соответствует случаю, когда имеет место теплоподвод из внутренней области тела к его поверхности, то есть температура стенки превышает адиабатную температуру $T_c > T_{a_c}$. Кривые *3*, *4* соответствуют случаю теплоотвода с поверхности внутрь тела, когда $T_c < T_{a_c}$. Если теплоотвод через поверхность доминирует над выделением теплоты за счет работы сил трения, то последние практически не влияют на формирование температурного профиля в пограничном слое, и распределение температуры по характеру близко к случаю несжимаемой жидкости (газа). Кривые *3а*, *3б* соответствуют случаю, когда тепловыделение за счет трения значительно, поэтому максимум температуры достигается внутри пограничного слоя. Расстояние от поверхности до точки максимума температуры определяется соотношением количества теплоты, выделяемого силами трения и отводимого через поверхность тела. Кривая *3б* иллюстрирует частный случай, когда $T_c = T_\infty$, но при этом тепловой поток на поверхности отличен от нуля. Этот пример наглядно показывает, что использование закона Ньютона — Рихмана в традиционной форме для течений с большими скоростями неправомерно. В самом деле, согласно закону Ньютона — Рихмана, $q_c = \alpha\,(T_\infty - T_c)$. При $T_c = T_\infty$ $q_c = 0$, однако, как было показано выше, $q_c \neq 0$. Из рис. 5.27 видно, что любой температурный профиль, находящийся между кривыми *1* и *3б*, показывает, что в высокоскоростном потоке теплота может передаваться поверхности даже в том случае, когда ее температура выше температуры невозмущенного потока. Это явление есть следствие интенсивного тепловыделения за счет работы сил трения и называется аэродинамическим нагревом.

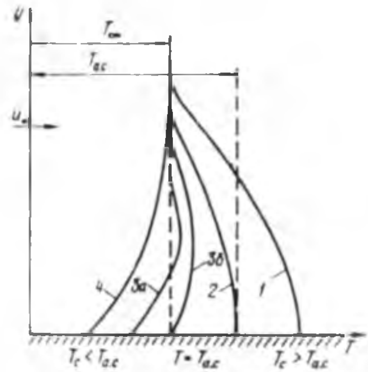


Рис. 5.27. Изменение температуры в пограничном слое быстродвижущегося газа при различных условиях

Чтобы при расчете теплоотдачи высокоскоростных потоков применять закон Ньютона — Рихмана, в его формулу вместо температуры невозмущенного потока T_∞ вводят адиабатную температуру T_{ac}:

$$q_c = \alpha\,(T_{ac} - T_c) = \alpha\left(T_\infty + r\,\frac{u_\infty^2}{2c_p} - T_c\right). \qquad (5.167)$$

При небольших скоростях, когда $r\,\frac{u_\infty^2}{2c_p} \ll T_\infty$, эта формула переходит к закону Ньютона — Рихмана для несжимаемого газа.

Согласно результатам, полученным Эккертом, эта формула дает удовлетворительные результаты для $M < 20$ при $\Pr = 0{,}65 \div 0{,}75$. При этом число Прандтля должно определяться по характерной температуре, вычисляемой по формуле (5.166).

Если теплообмен между поверхностью тела и потоком газа сопровождается химическими реакциями, то количество передаваемой теплоты определяется уже не разностью температур, а разностью полных энтальпий газа. Поэтому вместо выражения (5.167) тепловой поток рассчитывают по соотношению

$$q_c = \frac{\alpha}{c_{p_c}} (I_a - I_c), \tag{5.168}$$

где I_a, I_c — полные энтальпии газа при адиабатной температуре и температуре стенки, c_{pc} — теплоемкость газа при температуре стенки. Таким образом, соотношение (5.168) позволяет при расчете тепловых потоков учитывать два основных фактора, определяющих процесс нагрева аппаратов при их обтекании высокоскоростными потоками: нагрев газа в пограничном слое и изменение его полной энтальпии вследствие химических реакций. Остальные особенности этих процессов учитываются при определении коэффициента теплоотдачи.

Приведем формулы для определения локальных коэффициентов теплоотдачи, полученные на основе решения уравнений пограничного слоя.

Для ламинарного режима течения

$$St_x^* = \left(\frac{\alpha x}{\rho c_p w_\infty}\right)^* = 0{,}332 (Re_x^*)^{-1/2} (Pr^*)^{-2/3}, \quad Re_x^* < 2{,}3 \cdot 10^5, \tag{5.169}$$

или

$$Nu^* = 0{,}332 (Re_x^*)^{1/2} (Pr^*)^{1/3}; \tag{5.170}$$

для турбулентного режима течения

$$St_x^* = 0{,}0288 (Re_x^*)^{-1/5} (Pr^*)^{-2/3}, \quad 2{,}3 \cdot 10^5 < Re_x^* < 10^7, \tag{5.171}$$

или

$$Nu = 0{,}0288 (Re_x^*)^{0,8} (Pr^*)^{1/3}; \tag{5.172}$$

$$St_x^* = \frac{2{,}46}{(\ln Re_x^*)^{2,581}} (Pr^*)^{-2/3}, \quad 10^7 < Re_x^* < 10^9, \tag{5.173}$$

или

$$Nu = \frac{2{,}46}{(\ln Re_x^*)^{2,581}} Re_x (Pr^*)^{1/3}. \tag{5.174}$$

Знак (*) указывает, что все свойства берутся при температуре T^* Средние значения коэффициентов теплоотдачи получают интегрированием α_x по поверхности.

Следует отметить, что формулы (5.169)—(5.174) учитывают влияние химических реакций на интенсивность теплоотдачи. Для учета этого фактора вводится поправка $Le^{*(1-n)}$, где Le — число Льюиса — Семенова (см. гл. 6). Для ламинарного пограничного слоя (формулы (5.169) (5.170)):

$$\left.\begin{array}{ll} \text{при } Le^* < 1 & s = 0{,}582, \\ \text{при } Le^* > 1 & s = 0{,}717, \end{array}\right\} \quad n = 0{,}33.$$

В случае турбулентного течения (формулы (5.171)—(5.174)) $n = 0{,}4$, а значения s аналогичны случаю ламинарного течения.

Формулу (5.169) (или (5.170)), полученную из решения уравнений пограничного слоя при обтекании пластины, можно использовать дл приближенного расчета теплоотдачи на боковой поверхности осесимметричных тел, например конуса. Особенностью обтекания конуса является более медленный рост толщины пограничного слоя за счет его растекания по боковой поверхности. Этот фактор интенсифицирует теплоотдачу, его влияние учитывается введением в формулы (5.169), (5.170) поправочного множителя, равного $\sqrt{3}$.

Подробное изложение вопросов теплообмена при течениях газов с высокими скоростями можно найти в курсах аэродинамики.

Задача 5.6. Найти средний коэффициент теплоотдачи от воздушного потока к плоской пластине длиной $l = 200$ мм, обтекаемой в продольном направлении. Скорость потока 1000 м/с. Температура поверхности пластины 227 °С. Статическое давление и температура потока равны 500 Па и -65 °С. Физические свойства воздуха: $\lambda_{ст} = 0{,}04$ Вт (м · К); $\mu_{ст} = 2{,}67 \cdot 10^{-5}$ Па · с; $\mu_\infty = 1{,}21 \cdot 10^{-5}$ Па·с; $\mathrm{Pr}_{ст} = 0{,}68$.

Решение. Плотность невозмущенного потока находим по уравнению состояния

$$\rho_\infty = p_\infty / RT_\infty = 500/(287 \cdot 208) = 8{,}37 \cdot 10^{-3} \text{ кг/м}^3.$$

Определяем режим истечения

$$\mathrm{Re}_\infty = u_\infty \rho_\infty l/\mu_\infty = 1000 \cdot 8{,}37 \cdot 10^{-3}\, 0{,}2/(1{,}21 \cdot 10^{-5}) \approx 1{,}39 \cdot 10^5 < \mathrm{Re}_{кр} = 2{,}3 \cdot 10^5.$$

Следовательно, течение ламинарное и для расчета будем пользоваться формулой (5.170). Предварительно определяем плотность воздуха при температуре поверхности

$$\rho_{ст} = p_\infty/(RT_{ст}) = 500/(287 \cdot 500) \approx 3{,}48 \cdot 10^{-3} \text{ кг/м}^3.$$

Средний коэффициент теплоотдачи

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{l}\int_0^l \alpha_x dx = \frac{\lambda_{ст}}{l}\int_0^l \frac{\mathrm{Nu}_x}{x} dx = \frac{\lambda_{ст}}{l}\int_0^l 0{,}332\frac{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}{x}\sqrt[3]{\mathrm{Pr}_{ст}}\, dx =$$

$$= \frac{\lambda_{ст}}{l}\, 0{,}332\, \sqrt[3]{\mathrm{Pr}_{ст}} \left(\frac{W_\infty \rho_{ст}}{\mu_{ст}}\right)^{1/2} \int_0^l x^{-1/2} dx =$$

$$= 0{,}664\, \frac{\lambda_{ст}}{l}\left(\frac{W_\infty \rho_{ст} l}{\mu_{ст}}\right)^{1/2} \mathrm{Pr}_{ст}^{1/3} =$$

$$= 0{,}664\, \frac{4 \cdot 10^{-2}}{0{,}2}\left(\frac{1000\; 3{,}48 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}2}{2{,}67 \cdot 10^{-5}}\right)^{1/2} (0{,}68)^{1/2} \approx 18{,}9 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

5.1. Профиль температуры внутри пограничного слоя около плоской пластины можно представить в виде

$$T = e + fy + gy^2 + hy^3,$$

где y — координата, отсчитываемая перпендикулярно к пластине. Используя соответствующие граничные условия, показать, что уравнение для профиля температур при этом будет следующим:

$$\frac{T - T_\omega}{T_\infty - T_\omega} = \frac{3}{2}\frac{y}{\delta_т} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta_т}\right)^3.$$

5.2. Выразить число Стантона $St = Nu/(RePr)$ через свойства и скорость жидкости и коэффициент теплоотдачи.

5.3. Определить средний коэффициент теплоотдачи в поперечном потоке воды для трубы диаметром $d = 20$ мм, если температура воды $T_ж = 20$ °C, температура стенки $T_с = 40°$ и скорость $w = 5$ м/с (при $T_ж = 20$ °C $\lambda_ж = 0{,}599$ Вт/(м·К), $\nu_ж = 1 \cdot 10^{-6}$ м²/с, $Pr_ж = 7{,}02$).

5.4. Пусть локальное число Нуссельта при обтекании пластины описывается выражением $Nu_x = 0{,}5\, Re_x^{1/2}\, Pr^{1/3}$. Определить вид зависимости среднего числа Нуссельта Nu_L от Re_L.

5.5. Определить эквивалентный коэффициент теплопроводности плоской воздушной прослойки толщиной $\delta = 25$ мм. Температура горячей поверхности $T_{с_1} = 150$ °C, холодной $T_{с_2} = 50°$ (при $T_ж = (T_{с_1} + T_{с_2})/2$ $\lambda_ж = 0{,}032$ Вт/(м·К), $\nu_ж = 2{,}31 \cdot 10^{-5}$ м²/с, $Pr_ж = 0{,}69$).

5.6. Гладкая плита шириной $b = 1$ м и длиной $l = 1{,}2$ м обдувается воздухом со скоростью $w = 8$ м/с. Определить средний коэффициент теплоотдачи $\bar{\alpha}$ и полный тепловой поток Q, если температура стенки $T_с = 60$ °C и температура воздуха $T_ж = 20$ °C.

5.7. Через трубу диаметром $d = 50$ мм и длиной $l = 3$ м со скоростью $w = 0{,}8$ м/с протекает вода. Определить средний коэффициент теплоотдачи, если температура воды $T_ж = 50$ °C, а температура стенки $T_с = 70$ °C.

5.8. Определить средний коэффициент теплоотдачи в поперечном потоке воды для трубы диаметром $d = 20$ мм, если температура воды $T_ж = 20$ °C, температура стенки $T_с = 40$ °C, скорость воды $w = 0{,}5$ м/с.

5.9. Определить эквивалентный коэффициент теплопроводности плоской воздушной прослойки толщиной $\delta = 25$ мм и тепловой поток через нее. Температура горячей поверхности $T_{с_1} = 150$ °C, холодной $T_{с_2} = 50$ °C.

5.10. В ядерном реакторе по трубе внутренним диаметром 5 см движется жидкий металл с расходом 3 кг/с. Температура жидкого металла 473 К, а температура стенок обогревающей его трубы на 30° выше. Определить длину трубы, требуемую для повышения среднемассовой температуры жидкого металла на 1°, используя следующие физические свойства: $\rho = 770$ кг/м³, $\nu = 8{,}0 \times 10^{-8}$ м²/с, $c_p = 130$ Дж/(кг·К), $\lambda = 12$ Вт/(м·К), $Pr = 0{,}011$.

Глава 6 ТЕПЛООБМЕН ПРИ ФАЗОВЫХ ПРЕВРАЩЕНИЯХ

§ 6.1. ТЕПЛООБМЕН ПРИ КИПЕНИИ

Кипение — процесс образования пара внутри объема жидкости или на твердой поверхности нагрева. В энергетических установках может происходить объемное, поверхностное или смешанное кипение.

Процесс парообразования происходит при некотором перегреве жидкости. *Перегрев жидкости* — превышение ее температуры над температурой насыщения T_s при данном давлении, то есть $T_ж - T_s > 0$.

Объемное кипение — пузырьки пара зарождаются в любой точке объема жидкости, такой процесс может протекать без подвода теплоты извне. При этом кипящая жидкость может быть изотермической. Необходимо отметить, что объемное кипение возникает в перегретой жидкости $T_ж > T_s$ (например, при очень быстром снижении ее давления p до $p < p_s$).

Поверхностное кипение — пузырьки пара зарождаются на поверхности нагрева, такой процесс парообразования происходит только при подводе теплоты к кипящей жидкости через поверхность нагрева.

При смешанном кипении процесс происходит как в объеме, так и на поверхности нагрева. На рис. 6.1 показан полученный опытным путем график распределения температуры по толщине слоя кипящей жидкости, в большом объеме без вынужденного движения жидкости при атмосферном давлении. Из рисунка видно, что в тонком слое, расположенном непосредственно на поверхности нагрева, перегрев жидкости $\Delta T = T_w - T_s$ достигает максимального значения. Для воды перегрев может достигнуть 25 °С. В остальном объеме жидкости перегрев невелик, например при кипении воды при атмосферном давлении $0{,}4 \div 0{,}8$ °С, и почти не зависит от тепловой нагрузки.

Уравнение теплового баланса при кипении имеет следующий вид:

$$Q = rG, \tag{6.1}$$

где Q — тепловой поток, Вт; r — теплота фазового перехода, Дж/кг; G — количество пара, образующегося в единицу времени, кг/с.

Различают два основных режима кипения: пузырьковое и пленочное.

При *пузырьковом кипении* пар образуется в виде периодически зарождающихся и растущих пузырьков. Пузырьки могут возникать на

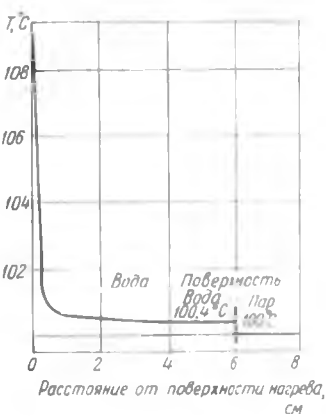


Рис. 6.1. Распределение температуры в объеме кипящей жидкости при нагреве снизу ($T_w = 109{,}1$ °C, $p_s = 10^5$ Па, $q = 22{,}5$ кВт/м^2)

поверхности нагрева и в объеме жидкости.

Центры парообразования. Известно, что пузырьки пара образуются только на поверхности нагрева, где перегрев жидкости максимальный, и только в отдельных точках этой поверхности — в центрах парообразования. Центрами парообразования являются неровности поверхности нагрева (микровпадины, шероховатости), пузырьки газа или пара и мельчайшие твердые частицы. Чем больше центров образования, тем больше количество образующихся пузырьков пара. Необходимо отметить, что на гладкой полированной поверхности нагрева центров парообразования мало и процесс парообразования протекает вяло.

Число действующих центров парообразования z зависит от степени перегрева жидкости $\Delta T = T_w - T_s$. С увеличением ΔT число z возрастает, то есть процесс кипения протекает более интенсивно.

Минимальный перегрев жидкости. Условием образования пузырьков пара является превышение температуры жидкости $T_ж$ над собственной температурой насыщения T_s при данном давлении. Наибольший практический интерес представляет то минимальное значение перегрева жидкости, при котором возможно существование пузырьков пара. Для существования пузырька необходимо, чтобы давление пара в пузырьке было больше давления окружающей жидкости. Перепад давлений в пузырьке и окружающей жидкости определяется формулой Лапласа

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{R_{min}}, \qquad (6.2)$$

где σ — коэффициент поверхностного натяжения между жидкостью и паром, Н/м; R_{min} — минимально возможный радиус пузырька.

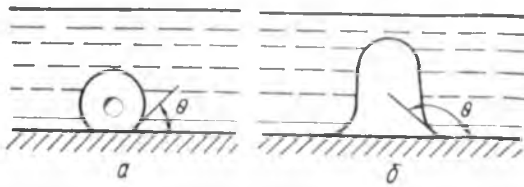
Полученная на основе выражения (6.2) формула для R_{min} имеет вид (подробный вывод см., например, в книге [82])

$$R_{min} = \frac{2\sigma T_s}{\Delta T\, r \rho''}, \qquad (6.3)$$

где ρ'' — плотность пара; $\Delta T = T_ж - T_s$.

Из выражения (6.3) следует, что пузырьки пара с радиусом меньше R_{min} при минимальном перегреве ΔT будут разрушаться, а пузырьки пара с $R > R_{min}$ при том же перегреве будут расти. Чем больше перегрев жидкости, тем меньше минимальный радиус возникшего на поверхности нагрева пузырька пара. С увеличением перегрева жидкости уменьшается минимальный радиус пузырька и увеличивается количество действующих центров парообразования z.

Рис. 6.2. Форма паровых пузырьков на смачиваемой (*а*) и на несмачиваемой (*б*) поверхностях



Смачивающая способность кипящей жидкости. Интенсивность процесса парообразования в значительной степени зависит от смачивающей способности жидкости. В зависимости от смачиваемости поразному происходит образование пузырьков пара и отрыв их от поверхности нагрева. Если кипящая жидкость смачивает поверхность нагрева (например, вода, керосин), то пузырьки пара имеют тонкую ножку и легко отрываются. При этом поверхность нагрева хорошо омывается жидкостью. Если кипящая жидкость не смачивает поверхность нагрева (например ртуть), то пузырьки газа имеют широкую ножку. Отрываются такие пузырьки лишь после того, как достигнут больших размеров. После отрыва пузырька на его месте остается небольшое количество пара, которое является зародышем для развития следующего пузырька.

Смачивающая способность жидкости определяется краевым углом Θ. Если $\Theta < 90°$ (рис. 6.2, *а*), то жидкость считается смачивающей поверхность, а если $\Theta > 90°$ (рис. 6.2, *б*) — несмачивающей.

Отрывной диаметр пузырьков пара — диаметр сферы, объем которой равен объему пузырька пара непосредственно после его отрыва от поверхности нагрева.

Размер пузырьков пара в момент отрыва их от поверхности нагрева зависит от подъемной силы, действующей вверх, и силы поверхностного натяжения, прижимающей пузырек к поверхности, а также от конвекции окружающей жидкости. При этом он практически не зависит от тепловой нагрузки.

Отрывной диаметр d_0 пузырьков пара в спокойной жидкости определяется по формуле

$$d_0 = 0{,}02\Theta \sqrt{\frac{\sigma}{(\rho_ж - \rho'')g}}, \tag{6.4}$$

где σ — коэффициент поверхностного натяжения; Θ — краевой угол между пузырьком и поверхностью нагрева (рис. 6.2); $\rho_ж - \rho''$ — разность плотностей жидкости и пара; g — ускорение свободного падения.

Рост пузырьков пара после отрыва. После отрыва от поверхности нагрева (при кипении жидкости в большом объеме) пузырек пара всплывает в толще жидкости и увеличивается в объеме за счет интенсивного испарения окружающей жидкости. Объем пузырька пара тем больше, чем выше перегрев жидкости и чем больше время всплытия пузырька. Установлено, что примерно 95 % пара образуется во время движения пузырьков в толще жидкости и 5 % во время развития их на поверхности нагрева.

В процессе движения пузырька жидкость сильно перемешивается что приводит к интенсификации теплоотдачи.

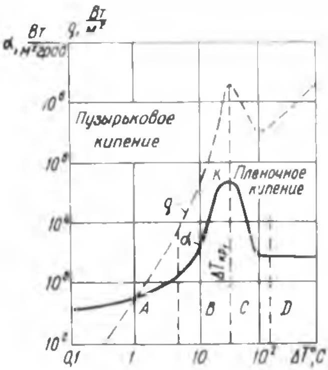


Рис. 6.3. Изменение коэффициента теплоотдачи и плотности теплового потока q от температурного напора ΔT при кипении воды

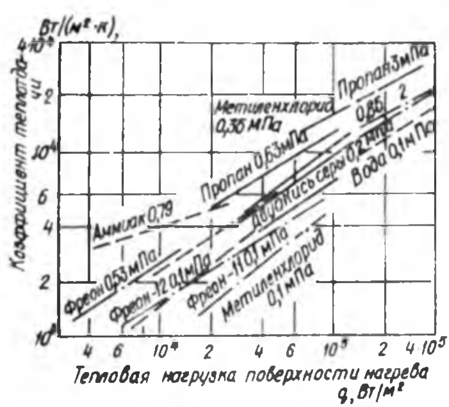


Рис. 6.4. Теплоотдача при пузырьковом кипении различных жидкостей

Частота образования пузырьков пара. Процесс роста пузырька пара (в месте своего возникновения) при температуре насыщения длится $\tau_1 = 0{,}025$ с, после отрыва следует пауза $\tau_2 = 0{,}025$ с и только после этого начинается рост следующего пузырька. Таким образом, полный период роста пузырька пара составляет $\tau_0 = \tau_1 + \tau_2 = 0{,}025 + 0{,}025 = 0{,}05$ с, а частота их появления $u = \frac{1}{\tau_0} = 20$ 1/с.

Скорость роста пузырька пара. Частота образования пузырьков пара u зависит от отрывного диаметра пузырька. Опыты показывают, что

$$d_0 u = \text{const}. \qquad (6.5)$$

Величина $d_0 u$, измеряемая в м/с, характеризует скорость роста пузырька пара на поверхности нагрева и зависит от многих факторов.

Рост пузырьков до отрыва и движение их после отрыва вызывает турбулизацию жидкости у поверхности нагрева, то есть оказывает влияние на интенсивность теплоотдачи от поверхности к жидкости.

Нетрудно видеть, что при кипении жидкости чем выше u и больше действующих центров парообразования z, тем интенсивнее теплоотдача, то есть свыше α. Так как u и z зависят от ΔT, то α является функцией ΔT и q.

Теплоотдача при кипении жидкости в большом объеме. На рис. 6.3 показаны зависимости коэффициента теплоотдачи α и плотности теплового потока $q = \alpha \Delta T$ от температурного напора (перепада) $\Delta T = T_W - T_s$ при кипении жидкости в большом объеме. При малых температурных напорах перемешивающая роль пузырьков пара мала и интенсивность теплоотдачи определяется свободным движением жидкости (свободная конвекция). Коэффициент α слабо увеличивается с ростом ΔT. Для воды при атмосферном давлении конвективный теплообмен наблюдается до $\Delta T \approx 5$ °С, а тепловая нагрузка достигает 6000 Вт/м². При дальнейшем увеличении ΔT возникает число центров парообразования, а также увеличивается частота отрыва пузырьков z.

Интенсивность теплоотдачи в зоне A в основном определяется ростом и движением пузырьков пара. Из рисунка видно, что с повышением ΔT коэффициент α и тепловая нагрузка быстро возрастают. Такой режим кипения называется *пузырьковым*. В точке K коэффициент теплоотдачи достигает максимального значения. Соответствующие значения ΔT, α и q называются *критическими*. Для различных жидкостей эти значения различны, например для воды, кипящей при атмосферном давлении, $\Delta T_{кр_1} = 25$ °C, $q_{кр_1} = 1{,}45$ МВт/м^2, $\alpha_{кр_1} = 58$ кВт/(м^2 · К). Значение этих величин зависит от давления.

При $\Delta T > \Delta T_{кр_1}$ количество действующих центров парообразования увеличивается и их становится так много, что образующиеся пузырьки сливаются между собой, образуя паровую пленку. Паровая пленка неустойчива, непрерывно разрушается и удаляется с поверхности нагрева в виде больших пузырьков, но вновь восстанавливается за счет новых порций образующегося пара. Этот режим кипения называется *пленочным*.

При пленочном кипении перенос теплоты от поверхности нагрева к жидкости осуществляется теплопроводностью, конвекцией и излучением через паровую пленку, а испарение происходит с поверхности пленки. Переход от пузырькового режима кипения в пленочный осуществляется в зоне C. Так как $\lambda_ж \gg \lambda''$, то появление паровой пленки приводит к резкому уменьшению коэффициента α, при этом тепловая нагрузка также уменьшается. Таким образом, зона C характеризуется возникновением неустойчивой паровой пленки — переходный режим кипения.

В зоне D паровая пленка покрывает всю поверхность нагрева, условия теплообмена стабилизируются (пленочное кипение становится устойчивым), поэтому при дальнейшем увеличении ΔT коэффициент α практически постоянный, а тепловой поток q увеличивается пропорционально ΔT.

Значение ΔT, при котором наступает пленочный режим кипения, обозначают $\Delta T_{кр_2}$. В этот момент количество теплоты, передаваемое от поверхности нагрева к жидкости, достигает минимума и называется второй критической плотностью теплового потока $q_{кр_2}$.

Значение первой $q_{кр_1}$ и второй $q_{кр_2}$ критических плотностей теплового потока зависят от условий кипения жидкости и ее физических характеристик.

При эксплуатации теплообменных аппаратов необходимо следить за тем, чтобы действующие на конструкцию тепловые нагрузки не превышали $q_{кр_1}$, поскольку это приводит (при переходе в пленочный режим кипения температура нагрева поверхности возрастает примерно на 1000 °C) к повышению температуры перегрева стенки. Даже легированные стали не выдерживают столь высоких температур. Обратный переход к пузырьковому кипению происходит при снижении тепловых нагрузок до $q_{кр_2}$.

Теплоотдача при пузырьковом кипении жидкости в большом объеме. Основная доля теплоты от поверхности нагрева передается жидкости и только ее малая часть пару. Кипение вызывает образование, рост, отрыв и всплывание паровых пузырей, которые турбулизируют жидкость. Поэтому для описания теплоотдачи в этом случае можно использовать критериальное уравнение

$$\mathrm{Nu} = f\,(\mathrm{Re},\ \mathrm{Pr}). \tag{6.6}$$

Теоретическое изучение теплоотдачи при пузырьковом кипении крайне затруднено, поэтому все основные результаты были получены с помощью многочисленных экспериментов. Некоторые из этих результатов показаны на рис. 6.4. Основные расчетные формулы являются обобщением результатов экспериментального определения коэффициентов теплоотдачи при кипении различных жидкостей с помощью соотношений, полученных методами теории подобия.

Очевидно, что при развитом кипении в большом объеме коэффициент теплоотдачи не должен зависеть от геометрических характеристик системы, поэтому зависимость (6.6) не содержит линейных размеров нагревателя или сосуда большого объема, в котором может находиться жидкость.

Критерии подобия, что входят в уравнение (6.6), вычисляются по следующим формулам:

$$\mathrm{Nu} = \alpha l'/\lambda_{ж}, \quad \mathrm{Re} = \frac{ql'}{\nu_{ж} r \rho''}, \quad \mathrm{Pr} = \nu_{ж}/a_{ж}. \tag{6.7}$$

Здесь индекс «ж» означает жидкость, символ «$''$» — пар. Характерный размер l' принимается пропорциональным линейному размеру пузырька пара в момент зарождения.

При заданном тепловом потоке q на основании многочисленных экспериментов функциональная зависимость (6.6) была аппроксимирована степенной функцией

$$\mathrm{Nu} = c\,\mathrm{Re}^{n}\,\mathrm{Pr}^{1/3}, \tag{6.8}$$

где $c = 0{,}0625$, $n = 0{,}5$ при $\mathrm{Re} < 0{,}01$; $c = 0{,}125$, $n = 0{,}65$ при $\mathrm{Re} \geqslant$ $\geqslant 0{,}01$.

При заданном температурном напоре $\Delta T = T_{\omega} - T_s$ число Нуссельта вычисляется по формуле

$$\mathrm{Nu} = c\,(B\,\Delta T)^{n_1}\mathrm{Pr}^{n_2}, \tag{6.9}$$

где $B = \lambda_{ж}/(r\rho''\nu_{ж})$; $c = 2{,}63 \cdot 10^{-3}$, $n_1 = 1{,}86$, $n_2 = 0{,}952$ при $\beta\,\Delta T\,\mathrm{Pr}^{1/3} \geqslant 1{,}6$; $c = 3{,}91 \cdot 10^{-3}$, $n_1 = 1$, $n_2 = 2/3$ при $B\,\Delta T\,\mathrm{Pr}^{1/3} < 1{,}6$.

Формулы (6.8), (6.9) справедливы для расчета при $\mathrm{Re} = 10^{-5} \div 10^{-4}$; $\mathrm{Pr} = 0{,}86 \div 7{,}6$; $p = (0{,}045 \div 175) \cdot 10^5$ Па, $B\,\Delta T\,\mathrm{Pr}^{1/3} = 0{,}05 \div 200$.

В работе [57] обобщено большое количество экспериментальных данных различных авторов и получена следующая формула для определения плотности теплового потока:

$$\mathrm{Pe} = \frac{ql'}{r\rho'' a_{ж}} = ANJ_a^{\nu}, \tag{6.10}$$

где

$$J_a = \frac{c_p\,\Delta T}{r}\,\frac{\rho_{ж}}{\rho''} \tag{6.11}$$

— число Якоба,

$$N = \mathrm{Pr}^{\gamma_1}\left[\frac{p}{\sqrt{\sigma g(\rho_ж - \rho'')}}\right]^{\gamma_2}\left[\frac{(r\rho'')^2}{c_ж T'' \sqrt{\sigma g(\rho_ж - \rho'')}}\right]^{\gamma_3} \qquad (6.12)$$

— безразмерный критерий, составленный из физических констант жидкости, $1/2 \leqslant \gamma \leqslant 100/27$. Значения остальных констант можно найти в работе [57], там же содержится обширная библиография по расчету теплоотдачи при кипении.

Общим недостатком приведенных формул является необходимость знания физических характеристик жидкости и пара при рабочем давлении, неизвестных для многих теплоносителей. Поэтому при практических расчетах часто используется эмпирическая зависимость вида

$$\bar{\alpha} = cq^n, \qquad (6.13)$$

где $\bar{\alpha}$ — осредненный коэффициент теплоотдачи, c, n — постоянные, зависящие от рабочего давления и рода жидкости.

Для воды

$$c = \frac{5{,}15 p_s^{0{,}18}}{1 - 0{,}045 p_s}, \quad n = 0{,}66,$$

где p_s — давление насыщения.

Формула (6.13) для воды справедлива при $p_s = 0{,}1 \div 20$ МПа.

Первая критическая плотность теплового потока при кипении на горизонтальных трубах и плитах определяется по формуле

$$q_{кр_1} = 0{,}14\sqrt[4]{\sigma g(\rho'')^2(\rho_ж - \rho'')}. \qquad (6.14)$$

Теплоотдача при пузырьковом кипении в трубах в условиях вынужденной конвекции. При вынужденном течении жидкостей в трубах расчет коэффициента теплоотдачи еще более затруднителен, поскольку помимо всех факторов, определяющих теплообмен при кипении в большом объеме, необходимо еще учитывать и гидродинамику потока. В критериальное уравнение (6.9) добавляется еще один аргумент $\mathrm{Re}_ц = w_ц d/\nu$ — число Рейнольдса, вычисленное по скорости циркуляции жидкости $w_ц$. Таким образом, (6.9) принимает вид

$$\mathrm{Nu} = \Phi(\mathrm{Re}, \mathrm{Pr}, \mathrm{Re}_ц). \qquad (6.15)$$

Имеющиеся в настоящее время экспериментальные данные не позволяют получить достаточно универсальную формулу, которая была бы справедлива для широкого класса течений и жидкостей. Наиболее распространенной является формула для расчета коэффициента теплоотдачи α при вынужденной конвекции в трубах кипящей воды, предложенная Д. А. Лабунцовым:

$$\alpha = \begin{cases} \alpha_w, & \text{если } \alpha_к/\alpha_w \leqslant 0{,}5; \\ \alpha_к, & \text{если } \alpha_к/\alpha_w \geqslant 2{,}0; \\ \dfrac{\alpha_w(4\alpha_w + \alpha_к)}{5\alpha_w - \alpha_к}, & \text{если } 0{,}5 \leqslant \alpha_к/\alpha_w \leqslant 2, \end{cases} \qquad (6.16)$$

где $\alpha_к$ — коэффициент теплоотдачи при развитом пузырьковом кипении в большом объеме, определяемый по формулам (6.10), (6.11); α_w — коэффициент теплоотдачи однофазной (некипящей) жидкости при турбулентном режиме течения (см. гл. 5).

Формула (6.16) справедлива при давлении $p = 0{,}02 \div 20$ МПа, скорости $w = 0{,}2 \div 6{,}7$ м/с и объемном паросодержании $\beta < 70\ \%$.

Теплообмен при пленочном кипении. При пленочном кипении жидкость от поверхности нагрева отделена пленкой пара, при этом температура поверхности T_W значительно больше температуры насыщения T_S. В этом случае значительная часть теплоты переносится излучением.

Определяя коэффициент теплоотдачи, необходимо учитывать термическое сопротивление паровой пленки (а также гидродинамику пара). Движение пара в пленке и ее толщина зависят от целого ряда факторов: от размеров и форм поверхности нагрева, от ее расположения в поле тяжести, а также от условий движения жидкости. При пленочном кипении на поверхности горизонтальных труб, расположенных в большом объеме жидкости, течение пара в пленке ламинарное. Пар движется вдоль периметра трубы к верхней образующей, затем пузырьки, накапливаясь, периодически отрываются от поверхности трубы. Средний коэффициент теплоотдачи по поверхности горизонтальной трубы, находящейся в большом объеме, определяют по формуле [16]

$$\overline{\alpha} = 0{,}62 \sqrt[4]{\frac{\lambda''^3 (\rho_ж - \rho'') g r_*}{\nu'' D (T_W - T_ж)}}, \tag{6.17}$$

где $r_* = r + 0{,}5 c''_p (T_w - T_s)$ — эффективная теплота фазового перехода, D — диаметр трубы. Физические свойства пара (величины с индексом «″») выбирают по средней температуре пара

$$T_{ср} = (T_W + T_s)/2.$$

При пленочном кипении на поверхности вертикально расположенных труб и пластин поверхность пленки испытывает колебания. При этом течение пара в пленке, как правило, турбулентное, толщина пленки возрастает в направлении движения пара (здесь уместно провести аналогию с изменением толщины пограничного слоя). Экспериментальные исследования показали, что теплоотдача практически не зависит от высоты поверхности нагрева, а следовательно, и от расхода пара в пленке. В целом пленочное кипение на вертикальных поверхностях сходно процессу естественной конвекции однофазных жидкостей около вертикальных поверхностей. Различие между этими процессами состоит в том, что, если при естественной конвекции движущая (подъемная) сила связана с разностью плотностей частей среды, имеющих разные температуры, то при кипении подъемная сила, определяющая движение пара в пленке, связана с разностью плотностей жидкости и пара $g(\rho_ж - \rho'')$. Расчет теплоотдачи для этого случая кипения проводят по формуле [46]

$$\overline{\alpha} = 0{,}25 \sqrt[3]{\frac{\lambda''^2 c''_p g (\rho_ж - \rho'')}{\nu''}}. \tag{6.18}$$

Как и для предыдущего случая (см. формулу (6.17)), физические свойства пара в соотношении (6.18) выбирают по средней температуре пара.

Задача 6.1. Определить интенсивность теплоотдачи при пузырьковом кипении воды при давлении 1 МПа при тепловой нагрузке $q = 1{,}5 \cdot 10^6$ Вт/м^2.

Р е ш е н и е. Расчет проводим по формуле (6.13):

$$\bar{\alpha} = \frac{5{,}15\, p_s^{0{,}8}}{1-0{,}015 p_s} q^{0{,}66} = \frac{5{,}15}{1-0{,}045}(1{,}5\cdot 10^6)^{2/3} \approx \frac{5{,}15}{0{,}955}\cdot 1{,}31\cdot 10^4 \approx 7{,}06\cdot 10^4\ \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}.$$

Задача 6.2. Жидкий водород кипит в большом объеме при давлении $p = 0{,}1$ МПа. Плотность теплового потока, отводимого от поверхности нагрева, $q = 60$ кВт/м^2. Определить характер процесса кипения. Параметры состояния водорода при заданном давлении следующие: $r = 452 \cdot 10^3$ Дж/кг; $\sigma = 2{,}1 \times \times 10^{-3}$ Н/м; $\rho_ж = 70{,}75$ кг/м^3; $\rho'' = 1{,}19$ кг/м^3.

Р е ш е н и е. По формуле (6.14) определяем первую критическую скорость теплового потока

$$q_{кр_1} = 0{,}14\cdot 452\cdot 10^{-3}\sqrt{1{,}19}\,\sqrt[4]{2{,}1\cdot 10^{-3}\cdot 9{,}8\,(70{,}75-1{,}19)} \approx 69{,}7\ \text{кВт/м}^2.$$

Сравниваем $q_{кр_1}$ с заданным в условии тепловым потоком q. Так как $q_{кр_1} > q$, то реализуется пузырьковый режим кипения.

§ 6.2. ТЕПЛООБМЕН ПРИ КОНДЕНСАЦИИ

Конденсация — процесс перехода вещества из газообразного состояния в жидкое или твердое. Переход вещества из газообразного состояния в твердое (минуя жидкое) называется *десублимацией*.

Конденсация может происходить в объеме пара при его переохлаждении относительно температуры насыщения, а также при введении в пар холодных жидких или твердых частиц, являющихся центрами конденсации.

На твердой поверхности теплообмена конденсация происходит в том случае, если температура поверхности ниже температуры насыщения при данном давлении. Вследствие теплообмена со стенкой пар охлаждается и конденсируется. Конденсат в виде капель или пленки оседает на поверхности охлаждения и стекает. Конденсация на твердых поверхностях наиболее часто применяется в технике.

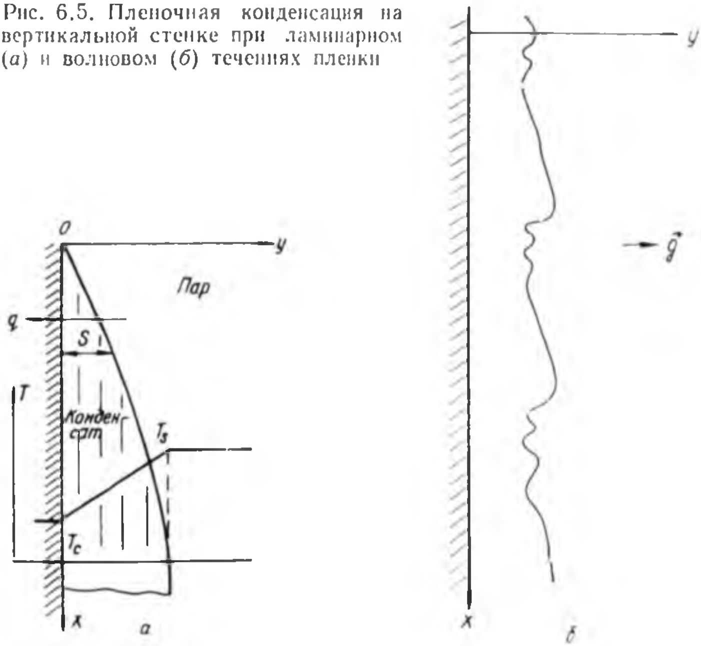
Различают три вида конденсации пара на твердой поверхности.

Пленочная конденсация — процесс перехода вещества из газообразного состояния в жидкое на хорошо смачиваемой жидкостью поверхности твердого тела. Жидкая конденсированная фаза в этом случае образует устойчивую пленку.

Капельная конденсация — процесс перехода вещества из газообразного состояния в жидкое на несмачиваемой жидкостью поверхности твердого тела. В этом случае конденсат осаждается на поверхности в виде отдельных капелек. Кроме того, возможна *смешанная конденсация*, когда часть поверхности покрыта каплями, а часть — пленкой конденсата.

Следует отметить, что в большинстве современных конденсационных аппаратов (конденсаторов) имеет место пленочная конденсация

Рис. 6.5. Пленочная конденсация на вертикальной стенке при ламинарном (*а*) и волновом (*б*) течениях пленки



паров. Капельная конденсация происходит в конденсаторах ртутного пара, а также при пуске теплообменных устройств, когда на поверхностях стенок имеются различные, например масленные, загрязнения, и в некоторых других случаях.

Капельная конденсация отличается особенно интенсивной теплоотдачей, так как при ней всегда сохраняется непосредственный контакт пара с охлажденной поверхностью. Установлено, что при капельной конденсации коэффициент теплоотдачи в 15—20 раз выше, чем при пленочной конденсации. Реализация в теплообменных устройствах капельной конденсации позволила бы создать компактные конденсаторы. Чтобы вызвать капельную конденсацию, в пар вводят (или наносят на поверхность теплообмена) специальные вещества — *лиофобизаторы* (при конденсации водяного пара — *гидрофобизаторы*). В качестве гидрофобизаторов используют некоторые жиры и парафины.

Следует однако отметить, что капельная конденсация явление неустойчивое и кратковременное, поэтому широкого практического применения она пока не нашла. Это объясняется тем, что для поддержания капельной конденсации (например, водяного пара) требуется непрерывное добавление гидрофобизаторов, так как со временем они смываются конденсатом или растворяются в нем.

Теплообмен при пленочной конденсации. На рис. 6.5, *а* показано температурное поле при пленочной конденсации насыщенного пара при ламинарном движении пленки конденсата. Из рисунка видно, что температура поверхности конденсата несколько ниже температуры насыщенного пара. Для водяного пара при атмосферном давлении эта разница составляет 0,02—0,05°.

Ламинарное течение пленки конденсата может сопровождаться волновым движением (рис. 6.5, *б*), причиной которого являются случайные возмущения. На поверхности пленки возникают волны, течение конденсата становится неустойчивым, расчет коэффициента теплоотдачи значительно усложняется.

В 1916 г. В. Нуссельт получил теоретическое решение для расчета коэффициента теплоотдачи при ламинарном течении пленки.

Несмотря на довольно ограниченную практическую значимость этого случая конденсации, а также целый ряд упрощающих предположений, решение, которое получил В. Нуссельт, явилось основой для исследования более сложных случаев пленочной конденсации.

Рассмотрим процесс теплоотдачи при пленочной конденсации сухого насыщенного пара по вертикальной стенке при следующих упрощающих предположениях: течение пленки ламинарное; силы инерции пренебрежимо малы по сравнению с силами вязкости и тяжести; конвективный перенос теплоты в пленке конденсата и теплопроводность вдоль пленки пренебрежимо малы по сравнению с теплопроводностью по толщине пленки; влиянием трения между поверхностью пленки конденсата и пара пренебрегаем; температура на внешней границе пленки конденсата равна температуре насыщения; физические характеристики конденсата постоянны, то есть не зависят от температуры; течение безградиентное.

При сделанных предположениях уравнение энергии, описывающее распределение температуры в пленке, принимает вид

$$d^2T/dy^2 = 0. \tag{6.19}$$

Его дополняют граничные условия

$$T|_{y=0} = T_w; \quad T|_{y=\delta} = T_s, \tag{6.20}$$

где T_w, T_s — температуры поверхности и насыщения.

Решение уравнения энергии (6.19) при граничных условиях (6.20) позволяет определить плотность теплового потока через пленку конденсата

$$q = \lambda\frac{dT}{dy} = \frac{\lambda}{\delta}(T_s - T_w), \tag{6.21}$$

где δ — толщина пленки.

Кроме того, согласно закону Ньютона — Рихмана, имеем

$$q = \alpha(T_s - T_w). \tag{6.22}$$

Сравнивая выражения (6.21) и (6.22), приходим к соотношению

$$\alpha = \lambda/\delta. \tag{6.23}$$

Отсюда следует, что определение коэффициента теплоотдачи сводится к нахождению толщины пленки конденсата δ, которая может быть получена из решения задачи гидродинамики для пленки.

Дифференциальное уравнение движения для единичного объема конденсата в пленке для случая пленочной конденсации на вертикальной поверхности имеет вид

$$g(\rho_ж - \rho'') + \mu \frac{d^2 u}{dy^2} = 0. \qquad (6.24)$$

В этом уравнении равнодействующая силы тяжести (веса жидкости) и выталкивающей силы уравновешивается силой вязкости, действующей со стороны соседних слоев жидкости. Отметим, что В. Нуссельт выталкивающую силу ($-\rho'' g$) не учитывал, так как она обычно пренебрежимо мала. Однако при больших давлениях влияние этой силы может быть значительным. Решение уравнения (6.24) запишем в виде

$$u = -\frac{g(\rho_ж - \rho'')}{2\mu} y^2 + C_1 y + C_2. \qquad (6.25)$$

Постоянные интегрирования определяются из граничных условий

$$u\Big|_{y=0} = 0; \quad \frac{du}{dy}\Big|_{y=\delta} = 0. \qquad (6.26)$$

С учетом граничных условий (6.26) решение (6.25) имеет вид

$$u = \frac{g(\rho_ж - \rho'')}{\mu}\left(y\delta - \frac{y^2}{2}\right). \qquad (6.27)$$

Массовый расход конденсата на единицу ширины пластины определяется по средней скорости пленки следующим образом:

$$G = \rho_ж \bar{u} \delta, \qquad (6.28)$$

где

$$\bar{u} = \frac{1}{\delta}\int_0^\delta u\, dy. \qquad (6.29)$$

Подставляя (6.27) в (6.29), а затем в (6.28), получаем

$$G = g\frac{\rho_ж - \rho''}{3\nu}\delta^3, \qquad (6.30)$$

где $\nu = \mu/\rho_ж$ — кинематический коэффициент вязкости жидкости.

Из (6.30) получаем формулу для определения толщины конденсата

$$\delta = \sqrt[3]{\frac{3G\nu}{g(\rho_ж - \rho'')}}. \qquad (6.31)$$

Величина G может быть получена также из уравнения теплового баланса для участка длиной x при единичной ширине стенки

$$G = \frac{Q}{r} = \frac{\int_0^x q\, dx}{r}. \qquad (6.32)$$

Подставляя в (6.32) соотношение (6.21), получаем

$$G = \frac{\lambda (T_s - T_w)}{r} \int_0^x \frac{dx}{\delta}. \qquad (6.33)$$

Приравнивая правые части выражений (6.30) и (6.33), приходим к следующему соотношению:

$$\lambda (T_s - T_w) \int_0^x \frac{dx}{r} = rg \frac{\rho_ж - \rho''}{3\nu} \delta^3. \qquad (6.34)$$

Будем искать решение уравнения (6.34) в виде степенной функции

$$\delta = Bx^n. \qquad (6.35)$$

Выбранное таким образом решение удовлетворяет известному условию $\delta|_{x=0} = 0$. Подставляя (6.35) в (6.34), имеем

$$\frac{\lambda (T_s - T_w)}{B} \frac{x^{1-n}}{1-n} = rg \frac{\rho_ж - \rho''}{3\nu} B^3 x^{3n}. \qquad (6.36)$$

Это соотношение должно выполняться при любом x, следовательно, показатели степени при x слева и справа должны быть равны между собой, то есть $1 - n = 3n$, откуда $n = 1/4$. Теперь из соотношения (6.36) нетрудно определить константу B:

$$B = \sqrt[4]{\frac{4\lambda (T_s - T_w) \nu}{rg (\rho_ж - \rho'')}}. \qquad (6.37)$$

Подставляя (6.37) в (6.35), получаем

$$\delta = \sqrt[4]{\frac{4\lambda (T_s - T_w) \nu x}{rg (\rho_ж - \rho'')}}. \qquad (6.38)$$

С учетом последнего соотношения формула (6.23) для определения локального коэффициента теплоотдачи принимает вид

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{\lambda^3 rg (\rho_ж - \rho'')}{4\nu x (T_s - T_w)}}, \qquad (6.39)$$

где x — расстояние от начала пластины ($x = 0$). Осредняя местное значение коэффициента теплоотдачи по поверхности пластины, имеем

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{h} \int_0^h \alpha \, dx = \frac{4}{3} \sqrt[4]{\frac{\lambda^3 rg (\rho_ж - \rho'')}{4 (T_s - T_w) \nu h}} = 0{,}943 \frac{A}{\sqrt[4]{h \Delta T}}, \qquad (6.40)$$

где

$$\Delta T = T_s - T_w; \quad A = \sqrt[4]{\frac{\lambda^3 rg (\rho_ж - \rho'')}{\nu}},$$

h — высота пластины. Анализ соотношения (6.39) показывает, что локальный коэффициент теплоотдачи уменьшается с увеличением расстояния от верхнего края пластины x, поскольку толщина пленки δ возрастает. Утолщение пленки конденсата аналогично росту толщины пограничного слоя в условиях конвекции. Интересно отметить, что увеличение разности температур $T_s - T_w$ вызывает уменьшение коэффициента теплоотдачи. Это вызвано увеличением толщины пленки в результате возрастания массового расхода при конденсации пара. Аналогичного явления для случая простого конвективного течения не существует.

Вывод, сделанный для вертикальной стенки, применим также и для наклонной стенки. Можно показать, что для поверхности, наклоненной под углом ψ к горизонтали, средний коэффициент теплоотдачи

$$\overline{\alpha}_\psi = \overline{\alpha}_{\text{верт}} \sqrt[4]{\sin\psi}. \tag{6.41}$$

Используя выражения (6.39) и (6.40), получаем соотношения для местного и среднего чисел Нуссельта:

$$\mathrm{Nu}_x = \frac{\alpha x}{\lambda} = \sqrt[4]{\frac{rg(\rho_ж - \rho'')x^3}{4\lambda(T_s T_w)\nu}}, \tag{6.42}$$

$$\overline{\mathrm{Nu}} = \frac{\alpha h}{\lambda} = \frac{4}{3}\sqrt[4]{\frac{rg(\rho_ж - \rho'')h^3}{4\lambda(T_s - T_w)\nu}}. \tag{6.43}$$

Теплофизические свойства жидкости рассчитывают при среднеарифметическом значении температур пара и стенки $T_{ср} = \frac{1}{2}(T_s + T_w)$. При этих условиях с помощью формул Нуссельта можно удовлетворительно рассчитать коэффициенты теплоотдачи при конденсации паров. Экспериментальные данные в целом согласуются с расчетами числа Nu по формуле (6.43), если физические условия соответствуют допущениям, принятым при анализе. В тех случаях, когда течение конденсата становится турбулентным, когда скорость пара очень высокая или поверхность теплообмена в результате принятия специальных мер становится несмачиваемой, наблюдается расхождение теоретических и экспериментальных результатов. Решение, аналогичное приведенному выше для вертикальной стенки, было получено В. Нуссельтом и для горизонтальной трубы. Формула для определения среднего коэффициента теплоотдачи близка к формуле (6.40):

$$\overline{\alpha} = 0{,}725\frac{A}{\sqrt[4]{d\,\Delta T}}. \tag{6.44}$$

где d — диаметр трубы, величины A, ΔT определяются также как в формуле (6.40).

Сравнение соотношений (6.40) и (6.44) показывает, что качественно они тождественны. Различаются они практически только по величине постоянного числового множителя, поскольку определяющий размер естественно отражает форму поверхности конденсации. В обоих случаях теплофизические свойства конденсата определяются по средней температуре $T_{ср} = \frac{1}{2}(T_s + T_w)$. Для учета переменности физических свойств конденсата в формулы (6.40), (6.44) вводят поправочный коэффициент

$$\varepsilon_t = \left[\left(\frac{\lambda_w}{\lambda_s} \right)^3 \frac{\mu_s}{\mu_w} \right]^{0,125}, \tag{6.45}$$

где индексы «w», «s» означают, что теплопроводность и динамическая вязкость выбираются соответственно при температурах стенки T_w и насыщения T_s.

Пренебрегая плотностью пара ($\rho'' \ll \rho_ж$), формулы (6.40), (6.44) можно привести к следующей критериальной зависимости:

$$\mathrm{Nu} = c \sqrt[4]{\mathrm{Ga}\,\mathrm{Pr}\,\mathrm{K}}, \tag{6.46}$$

где $\mathrm{Ga} = \frac{gL^3}{\nu_ж^2}$, $\mathrm{K} = \frac{r}{c_{p_ж} \Delta T}$ — числа Галилея и фазового превращения, L — характерный размер.

При конденсации на вертикальной поверхности $c = 0{,}943$, $L = h$. При конденсации на горизонтальной трубе $c = 0{,}725$, $L = d$.

Рассмотрим влияние различных факторов на теплоотдачу при пленочной конденсации пара.

Волновой характер течения пленки. Многочисленные сравнения результатов расчета на базе рассмотренной выше математической модели с экспериментальными данными показали, что формулы, полученные Нуссельтом, дают заниженные значения коэффициента теплоотдачи. При малых числах Рейнольдса, определяемых по характерному размеру толщины пленки, эти заниженные данные связаны с тем, что не учитывается влияние волн, вызывающих перемешивание пленки. Теория волнового течения ламинарной пленки конденсата и детальные эксперименты были впервые проведены П. Л. Капицей и С. П. Капицей. Было установлено, что при волновом течении средняя толщина пленки оказывается меньше, чем вычисленная по формуле (6.38), тепловое сопротивление пленки вследствие этого снижается, коэффициент теплоотдачи возрастает примерно на 21 % против значения, вычисленного по формуле (6.40). Эту поправку получили в предположении, что волновое течение имеет упорядоченный периодический характер и изотермично. Необходимо отметить, что реальная физическая картина при волновом течении значительно сложнее. Волновое течение является, как правило, трехмерным, носит неупорядоченный характер и при этом реализуется турбулентный режим течения.

Указанные факторы интенсифицируют теплоотдачу, однако учесть их влияние теоретически пока не представляется возможным. Поэтому С. С. Кутателадзе [37] экспериментально установил поправку на волновой характер течения в пленке конденсата на вертикальной поверхности. С учетом этой поправки формула для определения среднего коэффициента теплоотдачи (6.40) принимает вид

$$\bar{\alpha} = 1{,}13 \sqrt[4]{\frac{\lambda^3 r g (\rho_ж - \rho'')}{\nu (T_s - T_w) h}}. \tag{6.47}$$

П. Л. Капица установил, что течение пленки становится волновым при

$$Re \geqslant Re_в.$$

Значения чисел $Re_в = \bar{u}\delta/\nu$ для различных веществ можно найти в работе [37]. Для воды, например, при температуре насыщения $T_s = 100$ °C значение $Re_в = 8{,}2$.

Турбулентное течение пленки. Если конденсация происходит на вертикальной поверхности большой длины, то числа Рейнольдса для потока конденсата могут достичь значений, при которых возможно возникновение турбулентных пульсаций на некотором расстоянии от передней кромки поверхности. При турбулентном режиме течения пленка утолщается, вследствие чего коэффициент теплоотдачи при конденсации может уменьшаться. Однако для обычных жидкостей коэффициент теплоотдачи увеличивается, поскольку влияние турбулентного режима течения пленки на теплоотдачу более существенно, чем уменьшение теплоотдачи, вызванное утолщением пленки. Для жидких металлов турбулентный режим течения оказывает значительно меньшее влияние, чем утолщение пленки, так как теплопроводность жидких металлов очень высока. Поэтому коэффициенты теплоотдачи при конденсации жидких металлов могут быть меньше, чем рассчитанные по формулам, полученным для ламинарного течения.

Значение критического числа Рейнольдса $Re_{кр}$, при котором ламинарное течение конденсата переходит в турбулентное, лежит в пределах [82] $100 < Re_{кр} < 500$. Приведем формулу, рекомендованную в работе [82], для определения среднего коэффициента теплоотдачи при конденсации в условиях турбулентного режима течения жидкой пленки:

$$(\bar{\alpha}_т/\lambda)\,(\nu^2/g)^{1/3} = 0{,}0133\,Re^{0,4}. \tag{6.48}$$

Средний коэффициент теплоотдачи для всей вертикальной поверхности может быть определен как линейная комбинация средних коэффициентов теплоотдачи для ламинарной и турбулентной зон течения, то есть

$$\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_л x_{кр}/h + \bar{\alpha}_т\,(1 - x_{кр}/h), \tag{6.49}$$

где $x_{кр}$ — расстояние от передней кромки вертикальной стенки до места, где происходит переход от ламинарного режима течения к турбулентному.

Величину $x_{кр}$ с учетом волнового характера течения ламинарной пленки определил С. С. Кутателадзе:

$$x_{кр}/h = 0{,}845\,К \cdot Pr \cdot Ga^{-1/3}\,Re_{кр}^{4/3}, \tag{6.50}$$

где $Ga = gh^3/\nu^2$ — число Галилея; $К = r/(c_p(T_s - T_w))$ — число фазового превращения.

Из соотношения (6.50) видно, что точность определения $x_{кр}$ зависит от того, насколько удачно выбрано значение критического числа Рейнольдса $Re_{кр}$.

Скорость и направление течения пара. При больших скоростях между паром и жидкой пленкой возникает трение. Если движение

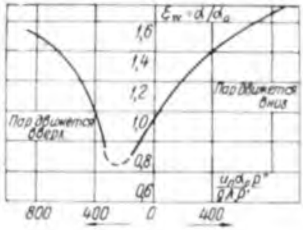


Рис. 6.6. График поправочного коэффициента ε_w для расчета по формуле (6.51)

Рис. 6.7. Капельная конденсация на вертикальной стенке

пара по направлению совпадает с течением пленки, то скорость течения пленки увеличивается, толщина уменьшается и коэффициент теплоотдачи возрастает. Если же пар движется в сторону, противоположную течению пленки, то течение пленки под действием сил трения на границе фазового перехода тормозится, толщина пленки увеличивается и коэффициент теплоотдачи уменьшается. При больших скоростях пара силы трения могут превысить силы тяжести, в этом случае пленка увлекается паром вверх и срывается с поверхности. При этом коэффициент теплоотдачи будет расти с увеличением скорости пара. Экспериментальные исследования показывают, что при увеличении давления влияние скорости пара на коэффициент теплоотдачи возрастает.

При расчете коэффициента теплоотдачи учет движения парового потока относительно поверхности конденсации начинают со скорости $u_п = 10$ м/с. Для $u_п < 10$ м/с можно пользоваться формулами (6.40), (6.44) или (6.46), полученными для случая неподвижного пара.

При ламинарном режиме течения пленки конденсата в формулы (6.40), (6.44) вводится поправочный коэффициент ε_w, то есть

$$\overline{\alpha} = \varepsilon_w \overline{\alpha}_0, \tag{6.51}$$

где $\overline{\alpha}_0$ — коэффициент теплоотдачи при $u_п = 0$. Поправочный коэффициент

$$\varepsilon_w = f\left(\frac{u_п^{''} \alpha_0 \rho''}{g\lambda\rho_ж}\right) \tag{6.52}$$

определяют с помощью эмпирического графика зависимости, который показан на рис. 6.6.

В работе [24] для расчета коэффициента теплоотдачи при конденсации движущегося пара на горизонтальной трубе (ламинарное течение сверху вниз) приведена следующая формула для определения поправочного коэффициента:

$$\varepsilon_w = \left\{1 + 3{,}62\,[0{,}9 + (\mathrm{Pr}\,\mathrm{K}/R)^{1/3}]^4 \frac{\mathrm{Fr}}{\mathrm{Pr}\,\mathrm{K}}\right\}^{1/4}, \tag{6.53}$$

где $R = \left(\frac{\rho_ж \mu_ж}{\rho'' \mu''}\right)^{1/2}$, $\mathrm{Fr} = \frac{w_п^2}{gd}$ — число Фруда.

При $u_п = 0$ $\varepsilon_w = 1$, то есть как частный случай, получаем формулу (6.44) для неподвижного пара.

Состояние поверхности. Интенсивность теплоотдачи при конденсации пара зависит от состояния поверхности. Увеличение шероховатости поверхности приводит к увеличению трения пленки. Вследствие дополнительного сопротивления течению толщина пленки увеличивается, а коэффициент теплоотдачи уменьшается примерно на 30 %. Аналогичное влияние на процесс теплоотдачи оказывает слой окисла, который может покрывать поверхность. Термическое сопротивление окисной пленки также сильно снижает коэффициент теплоотдачи.

Перегрев пара. Все приведенные выше уравнения строго применимы только для случая конденсации насыщенных паров, однако с достаточной степенью точности их можно также использовать и при исследовании конденсации перегретых паров. Для этого необходимо учитывать теплоту перегрева пара $q_п = c_п (T_п - T_s)$ и вместо теплоты парообразования r в расчетные формулы следует подставить значение $r' = r + q_п$, где $T_п$ — температура перегретого пара, T_s — температура насыщения, $c_п$ — теплоемкость перегретого пара. Разность температур, используемая при расчете коэффициента теплоотдачи, остается прежней, то есть $\Delta T = T_s - T_w$. В случае перегретого пара $r' > r$ и коэффициент теплоотдачи увеличивается, но незначительно (на 2—3 %). Поэтому в практических расчетах часто используют формулы для коэффициентов теплоотдачи при конденсации насыщенных паров.

Содержание в паре неконденсирующихся газов. Наличие в паре неконденсирующихся газов (например, воздуха) приводит к снижению теплоотдачи, потому что неконденсирующийся газ, притекающий к поверхности, охлаждается вместе с паром, скапливается на поверхности охлаждения в виде газового слоя и затрудняет доступ пара к поверхности теплообмена. Этот слой газа создает большое дополнительное термическое сопротивление. Так, например, при содержании в паре 1 % воздуха коэффициент теплоотдачи снижается на 60 %. Для движущегося пара влияние воздуха меньше.

Для устранения воздуха из пара в промышленных конденсаторах применяют специальные воздухоотделители и воздушные насосы.

Конструкция теплообменных устройств. Правильная компоновка поверхности нагрева важна при проектировании конденсаторов. Для одиночной трубы более выгодно ее горизонтальное расположение, поскольку теплоотдача на горизонтальных трубах интенсивнее, чем на вертикальных. Последнее справедливо лишь для одной трубы или верхнего ряда труб в пучке. В многорядных пучках конденсат с верхних рядов стекает на нижние. Поэтому в нижних рядах пленки получаются толще, а коэффициент теплоотдачи меньше.

Для вертикальных труб коэффициент теплоотдачи книзу уменьшается вследствие утолщения пленки. Для интенсификации теплоотдачи по высоте трубы устанавливаются конденсатоотводные колпачки. Например, установка конденсатоотводных колпачков на вертикальную трубу через каждые 10 см приводит к увеличению коэффициента теплоотдачи в 2—3 раза.

Теплообмен при капельной конденсации. В этом режиме конденсация происходит на холодной поверхности, но конденсат формируется в виде капель вместо непрерывной пленки (рис. 6.7). Простейший пример капельной конденсации — затуманивание стекла автомобиля изнутри.

В условиях капельной конденсации большая часть поверхности не покрыта изолирующей пленкой и коэффициенты теплоотдачи выше, чем при пленочной конденсации. До сих пор капельная конденсация достаточно надежно получена только для водяного пара.

Капельная конденсация — процесс чрезвычайно динамичный. Цикл образования капель, роста и скатывания их с поверхности происходит очень быстро. Непрерывно стекая, конденсат освобождает рабочую поверхность теплообменного аппарата, вследствие чего коэффициент теплоотдачи сильно возрастает.

В настоящее время многие основные особенности механизма капельной конденсации еще до конца не изучены, а коэффициенты теплоотдачи в этих условиях не определены. В то же время необходимо отметить, что замена пленочной конденсации, для которой обычно проводятся конструктивные расчеты конденсаторов, капельной могла бы привести к значительной экономии в расходе материалов и уменьшению габаритов установок.

В работе [69] показано, что для успешного использования капельной конденсации в современных конденсаторах необходимо решить две проблемы. Одна состоит в том, чтобы избежать влияния на теплообмен неконденсирующегося газа, а вторая — необходимо так обработать поверхности, чтобы капельная конденсация на них поддерживалась в течение длительного периода времени.

Зная коэффициент теплоотдачи для каждого конкретного вида конденсации, с помощью уравнения теплового баланса

$$Q = Gr = \bar{\alpha}(T_s - T_w)F \tag{6.54}$$

можно оценить суммарное количество теплоты Q, выделяющееся при переходе пара в жидкое состояние. Практический интерес представляет также определение количества образующегося конденсата G. Разрешая уравнение (6.51) относительно F, можно найти величину площади поверхности теплообменного аппарата, которая обеспечивает образование заданного количества конденсата.

Задача 6.3. Рассчитать коэффициент теплоотдачи и тепловой поток к горизонтальной трубке парового подогревателя воды для горячего водоснабжения. Длина трубки $l = 2$ м, наружный диаметр $d = 18$ мм, температура стенки $T_w = 100$ °С. Давление конденсирующегося на трубке насыщенного водяного пара $p_п = 0{,}6$ МПа. Теплофизические свойства конденсата: при $T_s = 158{,}8$ °С $\lambda = 0{,}683$ Вт/(м · К); $\rho = 909$ кг/м³; $\mu = 172 \cdot 10^{-6}$ Па · с; $r = 2086$ кДж/кг; при $T_w = 100$ °С: $\lambda_w = 0{,}683$ Вт/(м · К); $\mu_w = 282 \cdot 10^{-6}$ Па · с. Плотностью пара по сравнению с плотностью конденсата пренебречь.

Р е ш е н и е. Воспользуемся формулой (6.44) с учетом поправки на переменность физических свойств конденсата:

$$\bar{\alpha} = 0{,}725 \sqrt[4]{\frac{\lambda^3 r \rho_ж^2 g}{\mu (T_s - T_w) d}} \left[\left(\frac{\lambda_w}{\lambda_s}\right)^3 \frac{\mu_s}{\mu_w}\right]^{0,125}$$

$$= 0{,}725 \sqrt[4]{\frac{0{,}683^3 \cdot 2086 \cdot 10^3 \cdot 909^2 \cdot 9{,}81}{172 \cdot 10^{-6}(158{,}8 - 100)0{,}018}} \left[\left(\frac{0{,}683}{0{,}683}\right)^3 \frac{172 \cdot 10^{-6}}{282 \cdot 10^{-6}}\right]^{0,125} = 8980 \frac{Вт}{м^2 \cdot К}.$$

Суммарный тепловой поток рассчитываем с помощью уравнения теплового баланса (6.54):

$$Q = \bar{\alpha}(T_s - T_w) F = \bar{\alpha}(T_s - T_w)\,\pi d l = 8980\,(158{,}8 - 100)\,3{,}14 \cdot 0{,}018 \cdot 2 \approx 59{,}7 \text{ кВт}.$$

§ 6.3. ТЕПЛООБМЕН ПРИ ИСПАРЕНИИ

Одним из распространенных процессов изменения агрегатного состояния веществ является испарение — переход среды в газообразное состояние.

Наиболее часто переход вещества происходит из жидкого состояния в газообразное. Причиной испарения со свободной поверхности жидкости является тепловое движение ее молекул. После нагревания жидкости до соответствующей температуры в ней появляются молекулы, обладающие энергией, позволяющей преодолеть им силы сцепления и уйти в окружающую среду. Однако не все эти молекулы остаются в окружающей среде. После столкновения с молекулами газа часть молекул возвращается к поверхности испарения. В свою очередь эти молекулы также могут быть разделены на две части. Молекулы с достаточно высокой кинетической энергией, преодолевая силы сцепления поверхностного слоя жидкости, проникают вовнутрь и остаются в ней. Другая часть молекул с менее высоким энергетическим уровнем отражается от поверхности жидкости и окончательно остается в окружающей среде.

В качестве величины, характеризующей интенсивность испарения, вводят *коэффициент испарения* — отношение числа окончательно потерянных молекул (молекул, оставшихся в газе) к общему числу молекул, первоначально покинувших жидкость.

Наряду с испарением жидкости возможно испарение твердого тела. Переход вещества из твердой фазы в газообразную, минуя жидкую фазу, называется *сублимацией*. Для реализации процесса сублимации необходимо, чтобы температура твердого тела была меньше его температуры в тройной точке фазовой диаграммы. В качестве сублимирующих материалов при атмосферном давлении и соответствующих температурных условиях могут выступать сухой лед, нафталин, графит и другие материалы. Отметим, что в определенных условиях практически все вещества могут сублимировать. Для этого давление паров материала над поверхностью должно быть меньше давления паров в тройной точке фазовой диаграммы. В целом процесс сублимации аналогичен процессу испарения жидкости.

Рассмотрим тепловые потоки, возникающие у поверхности жидкости при ее испарении в парогазовую среду. Здесь следует подчеркнуть неразрывную связь между тепловым и массовым потоками. Если газообразная среда не насыщена паром, то массовый поток направлен от поверхности испарения. Направление теплового потока определяется разностью температур поверхности жидкости $T_ж$ и парогазовой среды $T_с$. Если $T_ж > T_с$, то тепловой поток направлен от жидкости в парогазовую среду. При этом испарение жидкости происходит за счет внутренней энергии, что приводит к понижению температуры жидкости, которая в какой-то момент времени становится равной температуре парогазовой среды. Согласно уравнению $q_\alpha = \alpha(T_ж - T_с)$ теплоотдача в этот момент прекратится, однако испарение будет продолжаться, что приведет к дальнейшему понижению температуры жидкости. Испарение жидкости продолжается как за счет внутренней энергии, так и за счет конвективного потока теплоты $q_\alpha = \alpha(T_с - T_ж)$, передаваемого от парогазовой среды к жидкости. С увеличением разности температур $T_с - T_ж$ величина q_α возрастает. В то же время величина теплового потока, отводимого от поверхности жидкости

$$q_\beta = rj_п = r\beta_p(p_с - p_ж),$$

где $\beta_p = \beta_с/RT$, $\beta_с$ — коэффициент массоотдачи, уменьшается вследствие уменьшения парциального давления $p_с$, равного давлению насыщенного пара при температуре $T_с$. В какой-то момент времени тепловой поток от парогазовой среды к жидкости и тепловой поток, отводимый от поверхности жидкости с паром, станут равными и температура поверхности жидкости не будет изменяться.

Процесс испарения, при котором вся теплота, переданная от парогазовой среды к жидкости, затрачивается на ее испарение и возвращается в парогазовую среду с паром, называют *процессом адиабатного испарения*. Постоянная температура поверхности жидкости, при которой реализуется процесс адиабатного испарения, называется *температурой мокрого термометра* $T_м$.

Температуру $T_м$ можно определить из условия теплового баланса

$$q_\alpha = q_\beta$$

или

$$\alpha(T_м - T_с) = r\beta_p(p_с - p_ж).$$

На практике чаще всего встречаются неадиабатные процессы испарения. В этом случае условие теплового баланса принимает следующий вид:

$$q_\alpha = q_\beta + q_W.$$

Величина q_W представляет собой излишек теплоты, подводимой к поверхности жидкости, над той теплотой, которая отдается в парогазовую среду при испарении. Это количество передается от поверхности жидкости внутрь жидкой фазы и расходуется на ее нагревание до температуры испарения. Уравнение теплового баланса на поверхности характеризует равновесное состояние системы и позволяет определить значение равновесной температуры поверхности жидкости.

§ 6.4. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕПЛОМАССООБМЕНА

Многие встречающиеся в природе и технике процессы теплообмена сопровождаются процессами переноса массы вещества. Примерами таких процессов являются испарение, сушка, конденсация пара из парогазовой смеси. В этих процессах наряду с передачей теплоты одновременно происходит перемещение вещества одного компонента в другой.

Самопроизвольный процесс проникновения одного вещества в другое, продолжающийся до установления внутри их равновесного распределения концентраций, называют *диффузией.*

Различают молекулярную и молярную диффузию.

Молекулярная диффузия — самопроизвольный процесс проникновения одного вещества в другое за счет хаотического теплового движения молекул и установления внутри их равновесного распределения концентраций. Ее примером является процесс переноса аэрозоля, распыляемого из баллона в неподвижном воздухе комнаты. Аэрозоль из места распыления распространяется по всей комнате. Аналогично мокрая одежда, находящаяся в комнате, в конечном счете высыхает, поскольку водяной пар с высокой концентрацией, окружающий одежду, диффундирует в более сухой воздух.

Молярная диффузия — процесс переноса вещества за счет перемешивания отдельных частей взаимодействующих веществ. Этот процесс аналогичен конвекции, и поэтому имеет еще одно название — *конвективная диффузия.*

Процесс проникновения одного вещества в другое путем молекулярной и молярной (конвективной) диффузии называют *массообменом.*

Рассмотрим различные виды молекулярной и молярной диффузии.

Концентрационная диффузия — процесс переноса некоторого компонента смеси из области с высокой концентрацией в область с более низкой концентрацией, в результате чего концентрация данного компонента в смеси выравнивается. При этом под компонентом понимается всякое химически однородное вещество.

Характеристикой интенсивности концентрационной диффузии при изотермических условиях является вектор *плотности диффузионного потока вещества*

$$j_{кд} = \frac{d^2m}{dS\,d\tau}, \qquad (6.55)$$

представляет собой количество вещества, диффундирующего в единицу времени через единицу площади изоконцентрационной поверхности (поверхность одинаковой концентрации). В соотношении (6.55) dS — элемент изоконцентрационной поверхности; m — масса диффундирующего вещества, кг; $j_{кд}$ — плотность диффузионного потока, кг/(м^2 · с).

Согласно закону Фика *плотность диффузионного потока вещества прямо пропорциональна градиенту концентраций*

$$j_{кд} = -D\frac{\partial C}{\partial n}, \qquad (6.56)$$

где C — местная концентрация данного вещества, кг/м^3, n — направление нормали к изоконцентрационной поверхности, D — коэффициент пропорциональности, называемый *коэффициентом диффузии* м^2/с.

В векторном виде закон Фика записывается следующим образом

$$\vec{j}_{кд} = -D\nabla C. \qquad (6.56')$$

Знак минус в соотношениях (6.56), (6.56′) указывает на то, что перенос вещества происходит в сторону меньшей концентрации. По виду закон Фика напоминает закон Фурье, что объясняется одинаковым механизмом переноса теплоты и вещества.

Коэффициент диффузии D зависит от физических свойств компонента и от свойств среды, в которой он распространяется. Обычно коэффициент диффузии возрастает с повышением температуры и часто зависит еще и от концентрации (для жидкостей и твердых тел). Значение коэффициентов диффузии в жидкой фазе на несколько порядков величины меньше, чем в газовой фазе, поскольку подвижность молекул жидкости намного меньше, чем молекул газа. Для газов при малой плотности коэффициент диффузии по существу не зависит от концентрации. В бинарной смеси коэффициенты диффузии будут одинаковыми для обоих диффундирующих компонентов.

Термодиффузия (эффект Соре) — молекулярная диффузия, вызываемая неоднородным распределением температуры.

По аналогии с законами Фурье — Фика плотность потока массы за счет термодиффузии определяется по формуле

$$j_{\text{тд}} = -D_{\text{тд}} \frac{\rho}{T} \frac{\partial T}{\partial n} = -DK_{\text{т}} \frac{\rho}{T} \frac{\partial T}{\partial n}, \tag{6.57}$$

где T — местная температура смеси, К; $D_{\text{тд}}$ — коэффициент термодиффузии, м²/с; $k_{\text{т}} = D_{\text{тд}}/D$ — *термодиффузионное отношение:* ρ — плотность смеси, кг/м³.

Вызванный неоднородным распределением температуры перенос вещества приводит к возникновению градиента концентрации и как следствие к появлению концентрационной диффузии. Таким образом, процессы концентрационной диффузии и термодиффузии идут параллельно препятствуя друг другу. При определенных условиях с течением времени устанавливается стационарное состояние, при котором противоположные влияния термодиффузии и концентрационной диффузии уравниваются.

Вследствие концентрационной диффузии в смеси, первоначально имевшей однородную температуру, возникает градиент температуры — *диффузионный термоэффект (эффект Дюфо)*. Этот эффект противоположен термодиффузии.

Бародиффузия — молекулярная диффузия, вызываемая неоднородностью давления.

Плотность потока массы за счет бародиффузии определяется по формуле

$$j_{\text{бд}} = -D_{\text{бд}} \frac{\rho}{p} \frac{\partial p}{\partial n} = -Dk_{\text{б}} \frac{\rho}{p} \frac{\partial p}{\partial n}, \tag{6.58}$$

где p — местное полное давление, Па; $D_{\sigma\text{д}}$ — коэффициент бародиффузии, м²/с; $k_{\sigma} = D_{\sigma}/D$ — бародиффузионное отношение.

Если в процессе переноса массы компонента в смеси имеют место все виды молекулярной диффузии, суммарная плотность диффузионного потока j определяется как сумма плотностей потоков, вызванных концентрационной диффузией, термодиффузией и бародиффузией:

$$j = j_{\text{кд}} + j_{\text{тд}} + j_{\text{бд}} = -D\left(\frac{\partial C}{dn} + k_{\text{т}}\frac{\rho}{T}\frac{\partial T}{\partial n} + k_{б}\frac{\rho}{p}\frac{\partial p}{\partial n}\right). \quad (6.59)$$

В реальных процессах термо- и бародиффузия обычно вносят малый вклад в массовый поток компонентов. Действительно, почти всегда термодиффузное отношение $k_{\text{т}}$ для всех газообразных веществ меньше 0,1, величина $\frac{\partial p/\partial n}{p}$ также достаточно мала (за исключением ударных волн). Поток массы, который переносится за счет термодиффузии, становится соизмеримым с потоком, обусловленным концентрационной диффузией только при больших перепадах температур. Поэтому при умеренных перепадах температур и давления (случай, часто встречающийся в инженерной практике) термо- и бародиффузией можно пренебречь по сравнению с концентрационной диффузией. Далее будем считать, что массоперенос компонентов в смеси осуществляется только за счет концентрационной диффузии. В этом случае

$$j = j_{\text{кд}} = -D\frac{\partial C}{\partial n}, \quad (6.60)$$

то есть соотношение (6.59) переходит в закон Фика.

В движущейся смеси определяющим механизмом массопереноса компонентов является молярная диффузия. Следует отметить, что она всегда сопровождается молекулярной диффузией. Вектор плотности массового потока за счет молярной диффузии определяется соотношением

$$\vec{j}_{\text{к}} = C\vec{W}, \quad (6.61)$$

где $\vec{W}(u, v, w)$ — вектор скорости движения компонента в смеси.

Складывая выражения (6.57), (6.61) и учитывая формулу (6.60), получим соотношение для суммарной плотности массового компонента за счет обоих видов диффузии

$$\vec{j}_{\Sigma} = \vec{j} + \vec{j}_{\text{к}} = -D\,\mathrm{grad}\,C + C\vec{W}. \quad (6.62)$$

Полагая в уравнении Умова (соотношение (4.18)) в качестве субстанции концентрацию данного компонента C, с учетом (6.62) получаем *уравнение конвективного массообмена*

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} + \nabla(C\vec{W}) = -\nabla(\nabla C) + I_C \quad (6.63)$$

или в скалярном виде

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} + u\frac{\partial C}{\partial x} + v\frac{\partial C}{\partial y} + w\frac{\partial C}{\partial z} = D\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}\right) + I_C,$$

где $D = \mathrm{const}$.

Укажем физический смысл входящих в это уравнение членов. Первое слагаемое в левой части описывает локальное изменение концентрации компонента, второе слагаемое — изменение концентрации за счет молярной диффузии; первое слагаемое в правой части учитывает молекулярную (в данном случае только концентрационную) диффузию; I_C — скорость производства компонента в единице объема, кг/(м^3 · с).

В случае отсутствия конвективных членов ($\vec{W} = 0$) уравнение конвективного массообмена переходит в уравнение диффузии

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = -\nabla (\nabla C) + I_C$$

или в скалярном виде

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = D\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}\right) + I_C. \qquad (6.64)$$

Отметим, что уравнения конвективного массообмена (6.63) и диффузии (6.64) аналогичны уравнениям энергии и теплопроводности. Это позволяет использовать для решения задач массообмена математический аппарат, применяющийся в теории конвективного теплообмена.

Условия однозначности. Для корректной формулировки краевых задач конвективного массообмена или диффузии к уравнениям (6.63) и (6.64) необходимо присоединить условия однозначности (см. гл. 4).

Начальное условие. В начальный момент времени задается распределение концентрации компонентов смеси по области

$$C(x,\ y,\ z,\ \tau)|_{\tau=\tau_0} = \varphi(x,\ y,\ z). \qquad (6.65)$$

Граничные условия I рода состоят в задании на границе области концентрации каждого из компонентов смеси

$$C(x,\ y,\ z,\ \tau)|_{x,\ y,\ z \in S} = \psi(x,\ y,\ z)|_{x,\ y,\ z \in S}. \qquad (6.66)$$

Приведем в качестве примера некоторые случаи, когда эти условия могут быть определены. Если стенка покрыта слоем жидкости, температура которой задана, то концентрацию паров на контактной поверхности можно приближенно определить из условия термодинамического равновесия. Если стенка является в сильной степени каталитической, то концентрации компонентов, на которые действует катализатор, можно положить равными нулю. Аналогично можно положить равными нулю концентрации продуктов сгорания на поверхности конденсированной фазы в случае, когда стенки представляют собой твердое топливо, процесс горения которого протекает в две стадии (газификация конденсированной фазы и горение газообразных компонентов).

Граничные условия II рода состоят в задании на границе области градиента концентрации каждого из компонентов смеси

$$-D\frac{\partial C}{\partial n}\bigg|_{x,\ y,\ z \in S} = \omega(x,\ y,\ z)\bigg|_{x,\ y,\ z \in S}. \qquad (6.67)$$

Такие условия задают, например, на непроницаемой каталитической стенке. В этом случае функция $\omega(x,\ y,\ z)$ — скорость образования компонента в гетерогенной химической реакции, зависящая от концентрации и температуры поверхности, то есть

$$\omega = \omega(C(x,\ y,\ z,\ \tau),\quad T(x,\ y,\ z,\ \tau))|_{x,\ y,\ z \in S}. \tag{6.68}$$

Следует отметить, что с учетом соотношения (6.68) граничные условия (6.67) становятся нелинейными. В случае некаталитической стенки получаем *однородные граничные условия II рода*

$$\left.\frac{\partial C}{\partial n}\right|_{x,\ y,\ z \in S} = 0.$$

Это равенство строго справедливо для адиабатной стенки. Если же стенка неадиабатная, то равенство может нарушаться. Например, при бесконечно больших скоростях обратимых химических реакций в газовой фазе (равновесная смесь) градиенты концентраций компонентов у поверхности стенки определяются градиентом температуры и в общем случае отличны от нуля.

Граничные условия III рода состоят в задании на границе области линейной комбинации градиента концентрации и концентрации компонентов смеси. Аналогично теплоотдаче конвективный массообмен между жидкой или твердой поверхностью и окружающей средой называют *массоотдачей*.

Для расчетов массоотдачи используют уравнение

$$j|_S = \beta(C|_S - C_\infty), \tag{6.69}$$

где j — плотность массового потока; β — коэффициент массоотдачи, отнесенный к разности концентраций, м/с; C_∞ — концентрация соответствующего компонента среды вдали от поверхности раздела фаз, кг/м^3.

Поскольку на границе раздела фаз перенос компонентов осуществляется путем молекулярной диффузии, массовый поток на поверхности в уравнении (6.69) можно выразить через закон Фика. После подстановки получим

$$-D\left.\frac{\partial C}{\partial n}\right|_S = \beta(C|_S - C_\infty). \tag{6.70}$$

Соотношение (6.70) представляет собой математическую запись граничных условий III рода.

Приведя соотношение (6.70) к безразмерному виду, получим

$$-\left.\frac{\partial \bar{C}}{\partial N}\right|_S = \mathrm{Nu}_D(\bar{C}|_S - \bar{C}_\infty), \tag{6.71}$$

где $\mathrm{Nu} = n/l$, $\bar{C} = C/C_l$, $\bar{C}_\infty = C_\infty/C_l$.

Безразмерную величину

$$\mathrm{Nu}_D = \frac{\beta l}{D} \tag{6.72}$$

называют *диффузионным числом Нуссельта* или *числом Шервуда*

$$\mathrm{Nu}D = \mathrm{Sh}. \tag{6.73}$$

В литературе по массообмену используются оба термина. Число Шервуда аналогично числу Нуссельта Nu в процессах теплоотдачи.

Аналогия процессов теплообмена и массообмена. В гл. 4 было показано, что в ряде случаев число $\Pr = \nu/a$ является мерой подобия между полем скоростей и температурным полем. Считая гидродинамическую задачу решенной, запишем уравнения энергии и диффузии бинарной смеси при постоянных физических свойствах и отсутствии источников

$$\frac{dT}{d\tau} = a\,\Delta T, \tag{6.74}$$

$$\frac{dC}{d\tau} = D\Delta C. \tag{6.75}$$

Предполагается также, что в соответствующих участках границы области для температуры и концентрации заданы сходные граничные условия.

По аналогии с числом Прандтля вводят числа Шмидта $\mathrm{Sc} = \nu/D$ и Льюиса — Семенова $\mathrm{Le} = a/D$, являющиеся мерами подобия соответственно между полем скоростей и полем концентраций, полем температур и полем концентраций.

Число Шмидта еще называют *диффузионным числом Прандтля*

$$\mathrm{Sc} = \Pr_D.$$

При $\mathrm{Sc} = \mathrm{Le} = \Pr = 1$ говорят, что существует тройная аналогия между процессами переноса количества движения, теплоты и массы.

Аналогия между процессами теплообмена и массообмена позволяет для определения коэффициента массоотдачи использовать безразмерные соотношения, полученные для числа Nu в теории теплообмена с подставкой соответствующих безразмерных комплексов, описывающих процесс массообмена. Так, для теплообмена при вынужденном течении жидкости имеется критериальное уравнение

$$\mathrm{Nu} = c\,\mathrm{Re}^n \Pr^m.$$

Для расчета массообмена в аналогичных условиях можно воспользоваться этим же уравнением, заменив числа подобия Nu и Pr на Sh и Sc, то есть

$$\mathrm{Sh} = c\,\mathrm{Re}^n \mathrm{Sc}^m. \tag{6.76}$$

Например, процесс массообмена при обтекании плоской поверхности определяется соотношениями, аналогичными формулам теплоотдачи (см. гл. 4)

для ламинарного режима

$$\overline{\mathrm{Sh}} = 0{,}664\,\mathrm{Re}_l^{1/2}\mathrm{Sc}^{1/3}; \tag{6.77}$$

для турбулентного режима

$$\overline{\mathrm{Sh}} = 0{,}036\,\mathrm{Re}_l^{0{,}8}\mathrm{Sc}^{1/3} \tag{6.78}$$

(определяющий размер — длина пластины). Поток массы от жидкости, полностью смачивающей внутреннюю поверхность трубы, к турбулентному потоку газа, протекающему вдоль трубы, описывается уравнением

$$\overline{\mathrm{Sh}}_d = 0{,}023\,\mathrm{Re}_d^{0{,}8}\mathrm{Sc}^{0{,}33} \tag{6.79}$$

(определяющий размер — диаметр трубы).

При малых концентрациях для расчета процессов массообмена, вызванных естественной конвекцией, также можно использовать соответствующие критериальные уравнения теплоотдачи.

Для массопереноса от горизонтальных цилиндров:

$$\overline{\mathrm{Sh}} = 0{,}53\,(\mathrm{Gr}_c\mathrm{Sc})^{1/3} \text{ при } 10^4 < \mathrm{Gr}_c\mathrm{Sc} < 10^9, \tag{6.80}$$

$$\overline{\mathrm{Sh}} = 0{,}13\,(\mathrm{Gr}_c\mathrm{Sc})^{1/3} \text{ при } 10^9 < \mathrm{Gr}_c\mathrm{Sc} < 10^{12} \tag{6.81}$$

(определяющий размер — диаметр цилиндра).

Для вертикальных поверхностей:

$$\overline{\mathrm{Sh}} = 0{,}59\,(\mathrm{Gr}_c\mathrm{Sc})^{1/4} \text{ при } 10^4 < \mathrm{Gr}_c\mathrm{Sc} < 10^9, \tag{6.82}$$

$$\overline{\mathrm{Sh}} = 0{,}13\,(\mathrm{Gr}_c\mathrm{Sc})^{1/3} \text{ при } 10^9 < \mathrm{Gr}_c\mathrm{Sc} < 10^{12} \tag{6.83}$$

(определяющий размер — высота цилиндра). В соотношениях (6.80) — (6.83)

$$\mathrm{Gr} = \frac{g\beta^*\Delta C l_0^3}{\nu^2} \text{ — диффузионное число Грасгофа,}$$

$$\beta^* = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial C}\right)_{T,\,p}.$$

Следует отметить, что аналогия между процессами теплообмена и массообмена является приближенной, поэтому она может быть использована только для приближенных расчетов. В реальных условиях эта аналогия нарушается вследствие зависимости физических свойств среды от температуры, а также вследствие взаимного влияния одновременно протекающих процессов тепло- и массоотдачи. Нарушение аналогии учитывается введением в соответствующие критериальные уравнения специальных поправочных коэффициентов. Примером такой зависимости является уравнение, полученное Л. Д. Берманом на основе обобщения результатов исследования массообмена при адиабатном испарении воды, стекающей в виде пленки по внутренней поверхности трубы, в воздух

$$\mathrm{Sh} = 0{,}023 f\,\mathrm{Re}^{0{,}8}\mathrm{Sc}^{0{,}4}, \tag{6.84}$$

где $f = \dfrac{p}{p - p_{\mathrm{ns}}}$ — поправочный коэффициент; p — давление парогазовой смеси; p_{ns} — парциальное давление пара у поверхности испарения. Опыты проводились при $\mathrm{Re} = 2500 - 9000$, $f = 1{,}25 - 6{,}65$, определяющий размер — диаметр трубы; определяющая температура — средняя температура парогазовой смеси. Из формулы (6.84) видно, что от общей критериальной зависимости (6.76), полученной на основе аналогии процессов тепло- и массообмена, она отличается множителем f.

В заключение отметим, что приведенные в данном параграфе уравнения массообмена описывают диффузию только одного компонента смеси без учета связи процессов гидродинамики, тепло- и массопереноса, то есть являются наиболее простыми. Более общие уравнения конвективного массообмена можно найти в работе [4]

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

6.1. Найти коэффициент теплоотдачи и плотность теплового потока, отводимого конвективным путем от поверхности горизонтальной трубы $D = 12$ мм в пленочном режиме кипения воды при атмосферном давлении $T_s = 100$ °С, если температура поверхности $T_w = 500$ °С.

6.2. Решить задачу 6.1 при условии, что труба расположена вертикально.

6.3. Водяной пар конденсируется на вертикальной пластине длиной 1,5 м при давлении 40 кПа и $T_s = 349$ К. Рассчитать коэффициент теплоотдачи для этой пластины при средней температуре ее поверхности $T_w = 325$ К.

6.4. Вывести соотношение для пленочной конденсации Нуссельта при конденсации пара внутри коротких вертикальных труб, когда пленка жидкости течет в виде кольцевого слоя.

6.5. Рассчитать коэффициент теплоотдачи при пузырьковом кипении воды при атмосферном давлении на наружной поверхности вертикальной трубы длиной 2 м и с наружным диаметром 1 см. Предположить, что температура поверхности трубы постоянна и превышает температуру насыщения на 10 К.

6.6. Проверить, что числа Шервуда, Шмидта и Грасгофа для массообмена являются безразмерными.

6.7. В конденсаторе на горизонтальной трубе с наружным диаметром 18 мм конденсируется сухой насыщенный пар при давлении 0,00424 МПа. Найти средний по окружности трубы коэффициент теплоотдачи и количество водяного пара, конденсирующегося за час на 1 м длины трубы, имеющей температуру стенки 10 °С.

6.8. Используя условие задачи 6.7, рассчитать средний коэффициент теплоотдачи, количество сконденсировавшегося пара за 1 ч на 1 м трубы, если труба расположена вертикально.

6.9. Из воды, кипящей в большом объеме при давлении $3{,}61 \cdot 10^5$ Па, необходимо получить 500 кг/г сухого насыщенного пара. Найти необходимую для этого поверхность нагрева, если температура поверхности нагревателя 151 °С.

6.10. На горизонтальной плоской поверхности происходит пленочное кипение воды при давлении 0,27 МПа. Температура поверхности 470 °С. Вычислить коэффициент теплоотдачи от стенки к воде.

Глава 7 ЛУЧИСТЫЙ ТЕПЛООБМЕН

§ 7.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Необходимость изучения законов теплового излучения связана с тем, что процессы лучистого теплообмена получили широкое распространение в ракетной технике и авиации, атомной энергетике, металлургии, химической технологии и многих других отраслях промышленности.

Тепловое излучение представляет собой передачу энергии в форме электромагнитных волн. Интересной особенностью теплового излучения, отличающей его от других видов теплопередачи (теплопроводность, конвекция), является безконтактный тепловой обмен между передающей и воспринимающей поверхностями (средами). Например, передача энергии излучением может происходить между поверхностями, разделенными вакуумом. В частности, передача энергии Солнца Земле происходит исключительно излучением, несмотря на миллионы километров космического пространства, разделяющие их.

Объяснение природы, поведения, закономерностей теплового излучения может быть дано на основе как волновой, так и корпускулярной теории. *Волновая теория* определяет тепловое излучение как процесс распространения внутренней энергии излучающего тела электромагнитными волнами, имеющими определенную частоту ν и длину λ. Произведение частоты на длину есть *скорость распространения электромагнитной волны* равная *скорости света*:

$$c = \lambda\nu \quad (c = 2{,}9979 \cdot 10^8 \text{ м/с}). \tag{7.1}$$

При поглощении электромагнитных волн происходит изменение внутренней энергии поглощающего тела (среды) за счет интенсификации теплового движения его молекул. Возбудителями электромагнитных колебаний являются заряженные материальные частицы (электроны и ионы), которые входят в состав вещества

Согласно *корпускулярной теории*, энергия излучения передается и воспринимается не непрерывно, а в виде дискретных порций, называемых *световыми квантами* или *фотонами*. Каждый фотон движется со скоростью света и имеет определенную энергию

$$e = h\nu, \tag{7.2}$$

где $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж · с — *постоянная Планка*.

Из соотношения (7.2) видно, что фотоны с более высокими частотами обладают большей энергией, чем фотоны с более низкими частотами.

Переход электронов с высокого, или возбужденного, уровня на более низкий (не возбужденный) и наоборот определяется соответствующим изменением температуры тела. При нагревании тела свободные электроны переходят на более высокие уровни. Когда электрон возвращается на более низкий уровень, он испускает фотон, энергия которого равна разности энергий возбужденного и равновесного состояний. Таким образом, в динамическом смысле тепловое излучение можно рассматривать как поток фотонного газа. С энергетической точки зрения — это энергия фотонов, покидающих поверхность тела (среды).

Электромагнитные колебания, являющиеся носителями теплового излучения, по длине волн занимают лишь небольшую часть электромагнитного спектра. В табл. 7.1 приведена примерная классификация излучений по длинам волн.

Таблица 7.1

Вид излучения	Длина волны, м
Космическое	Порядка $0{,}05 \cdot 10^{-12}$
γ-Излучение	$0{,}5 \cdot 10^{-12} \div 0{,}1 \cdot 10^{-12}$
Рентгеновское	$1 \cdot 10^{-12} \div 20 \cdot 10^{-9}$
Ультрафиолетовое	$20 \cdot 10^{-9} \div 0{,}4 \cdot 10^{-6}$
Видимое	$0{,}4 \cdot 10^{-6} \div 0{,}8 \cdot 10^{-6}$
Тепловое (инфракрасное)	$0{,}8 \cdot 10^{-6} \div 0{,}8 \cdot 10^{-3}$
Электромагнитное	$> 0{,}2 \cdot 10^{-3}$

Приведенная классификация носит довольно условный характер, поскольку какой-либо резкой границы между диапазонами волн не существует.

Интенсивность и спектральный состав излучения определяются температурой. Так, при температурах до 4000 К большая часть энергии излучения приходится на инфракрасную и видимую области спектра ($\lambda = 0{,}7 \cdot 10^{-6} \div 50 \cdot 10^{-6}$ м). При $T > 6000$ К более половины энергии излучения дают световые (видимые) и ультрафиолетовые лучи ($\lambda = 0{,}2 \cdot 10^{-6} \div 0{,}7 \cdot 10^{-6}$ м).

Все тела непрерывно испускают и поглощают энергию. При этом каждое тело испускает собственное излучение, обусловленное его физическими свойствами и температурой. Рассмотрим воздействие теплового излучения на произвольное тело. Часть полученной энергии поглощается, часть отражается и часть проходит сквозь тело. В первую очередь в тепловую энергию превратится та часть лучистой энергии, которая поглощается телом. Отражаемая и прошедшая сквозь тело энергия попадет на другие тела и т. д. до тех пор, пока первоначально полученная энергия полностью не распределится между окружающими телами. Количество отдаваемой и получаемой теплоты определяется разностью между величинами излучаемой и поглощаемой телом лучистой энергии. Процесс перераспределения первоначально полученной некоторым телом лучистой энергии заканчивается тогда, когда температура ограниченной системы тел, включающей данное тело, становится постоянной. При этом все тела системы также излучают и поглощают, но для каждого из них приток лучистой энергии равен ее расходу. В этом случае говорят, что система находится в подвижном тепловом или термодинамическом равновесии.

Твердые и жидкие тела в большинстве случаев являются непрозрачными для тепловых лучей. Такие тела излучают и поглощают инфракрасное излучение в очень тонком слое. Для металлов толщина этого слоя примерно 1 мкм $= 10^{-6}$ м, для большинства остальных тел — около 1,3 мм. Поэтому тепловое излучение не зависит от массы таких тел и полностью определяется лишь геометрией и состоянием поверхности. Для непрозрачных тел тепловое излучение рассматривается как поверхностное явление

Газы, а также некоторые твердые и жидкие тела при ограниченных толщинах слоя излучают и поглощают тепловые лучи во всем объеме. Такие тела и среды называют *полупрозрачными* Излучение таких тел определяется их массой или объемом Поэтому в качестве количественных параметров полупрозрачных сред используются объемные или массовые плотности соответствующих характеристик излучения.

Тела излучают энергию в виде непрерывного (сплошного) или прерывистого спектра по длинам волн.

Различают интегральное и спектральное (монохроматическое) излучения.

Интегральное (полное) излучение Q — суммарное излучение во всем диапазоне длин волн от $\lambda = 0$ до $\lambda = \infty$.

Спектральное (монохроматическое или однородное) излучение Q_λ — излучение в узком интервале длин волн от λ до $\lambda + d\lambda$.

Плотность потока излучения E — полное количество лучистой энергии, излучаемое в полусферу за единицу времени единицей площади поверхности

$$E = \frac{dQ}{dF}, \tag{7.3}$$

где dQ — поток излучения с элементарной площадки dF.

Из соотношения (7.3) следует еще одно название характеристики E, встречающееся в литературе по теплообмену — *поверхностная плотность потока излучения.*

Полный лучистый поток излучения Q с поверхности площадью F определяется интегралом

$$Q = \int_F E\,dF. \tag{7.4}$$

В наиболее простом случае, когда $E = \text{const}$, зависимость (7.4) имеет вид

$$Q = EF. \tag{7.5}$$

Спектральная плотность (интенсивность) излучения E_λ — количество спектральной энергии, излучаемой единицей площади элемен-

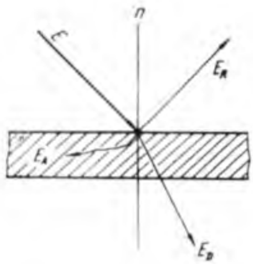


Рис. 7.1. Распределение энергии излучения, падающей на тело

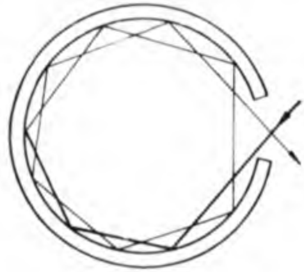


Рис. 7.2. Модель абсолютно черного тела

тарной площадки за единицу времени в единичном интервале длин волн по всем направлениям полусферического пространства.

$$E_\lambda = \frac{dE}{d\lambda}, \tag{7.6}$$

где $d\lambda$ — элементарный интервал длин волн.

Величина E_λ зависит от длины волны, температуры, вида и состояния поверхности.

Из выражения (7.6) нетрудно записать выражение для плотности интегрального излучения через спектральную плотность:

$$E = \int_0^\infty E_\lambda d\lambda. \tag{7.7}$$

Отношение части интегрального потока излучения, приходящейся на бесконечно малый интервал длин волн, к величине этого интервала называют *потоком монохроматического излучения*

$$Q_\lambda = \frac{dQ}{d\lambda}, \tag{7.8}$$

откуда следует

$$Q = \int_0^\infty Q_\lambda d\lambda. \tag{7.9}$$

Поскольку свет и тепловое излучение имеют одинаковую природу, между ними много общего. Энергия теплового излучения E, падающего на тело, может поглощаться (E_A), отражаться (E_R) или проникать (проходить) сквозь него (E_D) (рис. 7.1): $E = E_A + E_R + E_D$ или $1 = E_A/E + E_R/E + E_D/E$.

Введя новые обозначения

$$A = \frac{E_A}{E}, \quad R = \frac{E_R}{E}, \quad D = \frac{E_D}{E}, \tag{7.10}$$

получим

$$A + R + D = 1. \tag{7.11}$$

В соотношении (7.11) величины A, R, D характеризуют соответственно поглощательную, отражательную, пропускательную способности и называются *коэффициентами поглощения, отражения* и *пропускания*. Все эти величины безразмерные и изменяются в пределах от 0 до 1.

Поглощательная способность A — отношение поглощенной телом лучистой энергии к падающей.

Отражательная способность R — отношение отраженной телом лучистой энергии к падающей.

Пропускательная способность D — отношение прошедшей сквозь тело лучистой энергии к падающей.

Необходимо отметить, что в выражении (7.11) один или два коэффициента могут быть равны нулю.

Если $D = 1$, то $A = R = 0$, то есть вся падающая лучистая энергия полностью проходит сквозь тело. Такие тела называют *абсолютно прозрачными (проницаемыми)* или *диатермичными*.

Если $R = 1$, то $A = D = 0$, то есть вся падающая на тело лучистая энергия полностью отражается. Если отражение следует законам геометрической оптики, то тело называют *идеально зеркальным*, если отражение *идеально диффузное*, то есть излучение отражается равномерно по всем направлениям, то тело называют *абсолютно белым*.

Если $A = 1$, то $R = D = 0$, то есть падающая лучистая энергия полностью поглощается телом. Такие тела называют *абсолютно черными*.

Наглядной моделью абсолютно черного тела является изображенная на рис. 7.2 полая сфера с очень малым отверстием в оболочке, площадь которого во много раз меньше площади внутренней поверхности сферы. Поэтому каждый попадающий в это отверстие луч многократно отразится, прежде чем сможет выйти наружу. Поскольку при каждом отражении поглощается часть лучистого потока, а число отражений велико, луч практически полностью поглощается. Таким образом, поглощательную способность рассмотренного полого тела можно принять равной единице.

В природе нет абсолютно черных, абсолютно белых и абсолютно прозрачных тел. Значения коэффициентов A, R, D зависят от природы тела, его температуры и спектра излучения. Так, воздух для тепловых лучей является средой прозрачной, но при его насыщении водяными парами он становится полупрозрачным. Некоторые тела, являясь для лучей определенных длин волн прозрачными, для других длин волн непрозрачны. В частности, кварц для тепловых лучей ($\lambda > 4$ мкм) непрозрачен, а для световых и ультрафиолетовых прозрачен. Каменная соль, наоборот, имеет коэффициент пропускания $D = 1$ для тепловых и полупрозрачна для ультрафиолетовых лучей.

Если $D = 0$, то есть тело непрозрачно, то из формулы (7.11) следует $A + R = 1$.

Тела, подчиняющиеся этому соотношению, называют *серыми*. Из последнего равенства видно, что чем лучше тело отражает, тем меньше энергии оно поглощает и наоборот. Это свойство широко используется в повседневной жизни. Так, летом предпочтительнее носить одежду белого (близкого к нему светлого) цвета; в белый цвет окрашивают вагоны-холодильники, цистерны, в которых необходимо поддерживать определенную температуру, и т. д. При этом светлая окраска способствует отражению лишь световых лучей, в то время как на отражение и поглощение тепловых лучей большее влияние оказывает состояние поверхности.

Известно и этот факт широко используется при проектировании различного рода теплообменников, что гладкие полированные поверхности независимо от цвета отражают тепловой поток во много раз лучше, чем шероховатые. Тела, покрытые шероховатой (то есть увеличивающей тепловоспринимающую поверхность) краской, могут поглощать до 96 % энергии.

Для монохроматического излучения соотношение (7.11) принимает следующий вид: $A_\lambda + R_\lambda + D_\lambda = 1$.

Следует отметить, что длина волны существенно влияет на величины A_λ, R_λ, D_λ для одного и того же тела. Например, обычное стекло хорошо пропускает световые лучи ($\delta = 0{,}4 \div 0{,}8$ мкм), но почти не пропускает ультрафиолетовые и инфракрасные.

При расчете излучения реальных тел используется понятие *эффективного (полного) излучения*. Плотность потока эффективного излучения $E_{эф}$ — сумма плотностей собственного E и отраженного $E_{отр}$ потоков излучения:

$$E_{эф} = E + E_{отр} = E + (1 - A)\,E_{пад}. \qquad (7.12)$$

Аналогично для спектрального излучения

$$E_{\lambda_{эф}} = E_\lambda + E_{\lambda_{отр}} = E_\lambda + (1 - A_\lambda)\,E_{\lambda_{пад}}, \qquad (7.13)$$

где A_λ — поглощательная способность спектрального излучения.

Задача 7.1. Примем, что Солнце ($T = 5800$ К) и лампа накаливания ($T = 2800$ К) являются абсолютно черными телами. Рассчитать для этих источников максимальные плотности потоков монохроматического и интегрального излучений, длину волны, на которой плотность потока излучения максимальна.

Решение 1. Максимальная плотность потока монохроматического излучения абсолютно черного тела определяется по формуле (7.19):

для Солнца

$$(E_{0_\lambda})_{max} = 1{,}287\cdot10^{-5}\,(5800)^5 \approx 8{,}45\cdot10^{10}\ \text{кВт/м}^3,$$

для лампы накаливания

$$(E_{0_\lambda})_{max} = 1{,}287\cdot10^{-5}\,(2800)^5 \approx 2{,}21\cdot10^{9}\ \text{кВт/м}^3.$$

2. Плотность потока интегрального излучения выражается законом Стефана-Больцмана (7.24):

для Солнца

$$E_0 = 5{,}67\cdot10^{-8}\,(5800)^4 \approx 6{,}42\cdot10^{4}\ \text{кВт/м}^2,$$

для лампы накаливания

$$E_0 = 5{,}67\cdot10^{-8}\,(2800)^4 \approx 3{,}49\cdot10^{3}\ \text{кВт/м}^2.$$

3. Величина λ_{max} определяется по закону Вина (7.18).
для Солнца

$$\lambda_{max} = \frac{2,898 \cdot 10^{-3}}{5800} 10^{-3} \approx 5,00 \cdot 10^{-7} \text{ м},$$

для лампы накаливания

$$\lambda_{max} = \frac{2,898 \cdot 10^{-3}}{2800} \approx 1,04 \cdot 10^{-6} \text{ м}.$$

§ 7.2. ЗАКОНЫ ИЗЛУЧЕНИЯ АБСОЛЮТНО ЧЕРНОГО ТЕЛА

Законы излучения абсолютно черного тела, очень простые и универсальные, положены в основу всех расчетов теплового излучения.

Закон Планка получен теоретически. В 1900 году М. Планк установил, что интенсивность излучения абсолютно черного тела зависит от его температуры и длины волны:

$$E_{\lambda_0} = 2\pi c_1 \lambda^{-5} [e^{c_2/(\lambda T)} - 1]^{-1}, \tag{7.14}$$

где $c_1 = 5,944 \cdot 10^{-17}$ Вт · м^2, $c_2 = 1,44 \cdot 10^{-2}$ м · К — первая и вторая постоянные Планка; λ — длина волны излучения, м; T — температура излучающего тела, К.

Из уравнения (7.14) следует, что интенсивность излучения абсолютно черного тела обращается в нуль при $\lambda = 0$ и $\lambda = \infty$. При всех температурах, отличных от абсолютного нуля, E_{λ_0} не равна нулю.

Из рис. 7.3, на котором представлен график зависимости (7.14) видно, что с повышением температуры интенсивность излучения для каждой длины волны возрастает. Максимум кривых $E_{\lambda_0} = f(\lambda)$ с повышением температуры смещается в сторону более коротких волн.

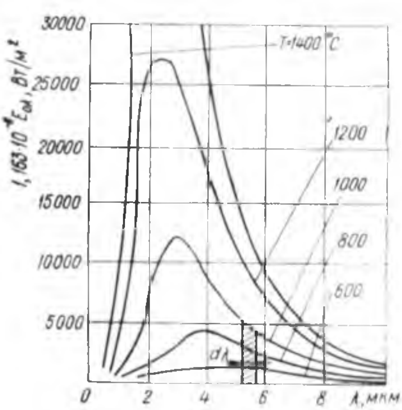


Рис. 7.3. Зависимость интенсивности излучения абсолютно черного тела от длины волны и температуры

Аналитические выражения законов Релея — Джинса и Вина можно получить из формулы Планка (7.14). С этой целью рассмотрим два случая: $\lambda T \gg c_2$ и $\lambda T \ll c_2$.

Закон Релея — Джинса следует из закона Планка, когда $\lambda T \gg c_2$ $\left(\frac{c_2}{\lambda T} \ll 1\right)$. Разложим экспоненту в выражении (7.14) в ряд по степеням $c_2/(\lambda T)$; ввиду малости $c_2/(\lambda T)$ можно ограничиться двумя первыми членами ряда

$$e^{\frac{c_2}{\lambda T}} = 1 + \frac{1}{1!}\left(\frac{c_2}{\lambda T}\right) + \cdots \tag{7.15}$$

Подставляя (7.15) в выражение (7.14), получим

$$E_{\lambda_0} = \frac{2c_1\pi T}{c_2\lambda^4}. \qquad (7.16)$$

Выражение (7.16) представляет закон Релея — Джинса. Если $\lambda T > > 100\,c_2$, расхождение с результатом расчета по формуле Планка (7.14) не превышает 10 %. Таким образом, при больших значениях λT можно применять вместо закона Планка закон Релея — Джинса.

Если $\lambda T \ll c_2$, значение $\exp\left(\frac{c_2}{\lambda_T}\right)$ велико, и единицей в знаменателе можно пренебречь. Так получим формулу Вина:

$$E_{\lambda_0} = 2\pi c_1 \lambda^{-5} \exp\left(-\frac{c_2}{\lambda T}\right). \qquad (7.17)$$

Чтобы ошибка при использовании формулы Вина не превышала 1 %, должно выполняться условие $\exp(c_2/\lambda T) \geqslant 100$. При малых значениях λT можно вместо закона Планка пользоваться законом Вина.

Закон смещения Вина был установлен в 1893 г. Максимальное значение интенсивности излучения соответствует длине волны, определяемой по формуле

$$\lambda_{max} T = 2{,}898 \cdot 10^{-3}, \qquad (7.18)$$

где λ_{max} — длина волны, отвечающая максимальной интенсивности излучения.

Из формулы (7.18) и рис. 7.3 видно, что максимум интенсивности излучения при повышении температуры смещается в сторону коротких волн. Поэтому закон Вина называется также *законом смещения*.

Зависимость (7.18) можно также получить из уравнения Планка (7.14), для чего необходимо вычислить производную $dE_{\lambda_0}/d\lambda$ и приравнять к нулю.

Уравнение (7 14) позволяет определить зависимость максимальной интенсивности излучения $(E_{\lambda_0})_{max}$ абсолютно черного тела от температуры. Подставляя формулу (7.18) в (7.14), получим

$$(E_{\lambda_0})_{max} = 1{,}287 \cdot 10^{-5} T^5 \text{ Вт/м}^3. \qquad (7.19)$$

Из соотношения (7.19) следует, что максимальная интенсивность излучения абсолютно черного тела пропорциональна пятой степени абсолютной температуры черного тела.

Закон Планка в безразмерной форме. С помощью закона смещения Вина закон Планка может быть приведен к безразмерному виду. Для этого разделим левую и правую части соотношения (7.14) соответственно на левую и правую части соотношения (7.19):

$$\frac{E_{\lambda_0}}{(E_{\lambda_0})_{max}} = \frac{2\pi c_1}{c_3 (\lambda T)^5} \left(e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1\right)^{-1}. \qquad (7.20)$$

Подставляя сюда значения T из формулы (7.18), получим

$$\frac{E_{\lambda_0}}{(E_{\lambda_0})_{max}} = f\left(\frac{\lambda}{\lambda_{max}}\right). \qquad (7.21)$$

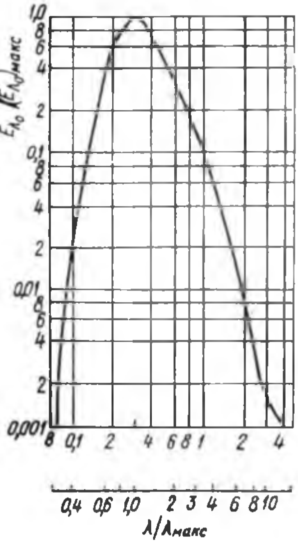


Рис. 7.4. Графическое представление закона Планка в безразмерной форме

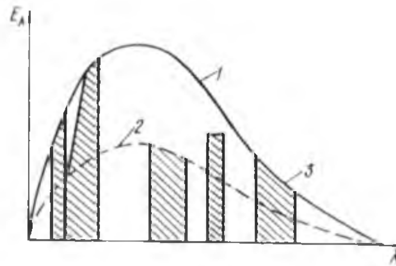


Рис. 7.5. Плотность потока излучения в зависимости от длины волны:
1 — черное; 2 — серое; 3 — селективное

Выражение (7.21) позволяет представить закон Планка в гораздо более простом и удобном виде — не рядом изотерм (см. рис. 7.3), а единой кривой, справедливой для произвольных длин волн и температур тела (рис. 7.4). Из рисунка видно, что $E_{\lambda_0}/(E_{\lambda_0})_{max} = 1$ соответствует максимуму длины волны и $\lambda/\lambda_{max} = 1$ для заданной температуры.

Закон Стефана — Больцмана. Этот закон установил Й. Стефан экспериментально в 1879 г., а Л. Больцман — теоретически в 1881 г. Согласно закону Стефана — Больцмана, плотность потока излучения абсолютно черного тела прямо пропорциональна абсолютной температуре в четвертой степени

$$E_0 = \sigma_0 T^4. \tag{7.22}$$

Постоянную $\sigma_0 = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м$^2 \cdot$ К^4) Больцман определил теоретически. При $T = 0$ К поток интегрального излучения равен нулю.

Из закона Планка, как следствие, можно получить закон Стефана—Больцмана. Для абсолютно черного тела из соотношения (7.7) и (7.14) имеем

$$E_0 = \int_0^\infty E_{\lambda_0} d\lambda = 2\pi \int_0^\infty \frac{c_1 d\lambda}{\lambda^5 \left(e^{c_2/\lambda T} - 1\right)}. \tag{7.23}$$

Проинтегрировав это соотношение, находим

$$E_0 = \sigma_0 T^4.$$

В технических приложениях закон Стефана — Больцмана используется в виде

$$E_0 = c_0 \left(\frac{T}{100}\right)^4, \tag{7.24}$$

где постоянная $c_0 = \sigma_0 \cdot 10^8 = 5{,}67$ Вт/(м$^2 \cdot$ К^4) — *коэффициент излучения абсолютно черного тела.*

Из рис. 7.5 видно, что спектры излучения реальных тел отличны от спектра излучения абсолютно черного тела. Спектральная интенсивность излучения реального тела E_λ всегда меньше спектральной интенсивности излучения абсолютно черного тела E_{λ_0} при той же температуре и длине волны λ. Для селективного спектра излучения интенсивность излучения равна нулю на некоторых участках длин волн. Для характеристики излучения реальных тел вводят понятие *спектральной степени черноты* или *коэффициента черноты* ε_λ:

$$\varepsilon_\lambda = E_\lambda / E_{\lambda_0} \tag{7.25}$$

— отношение спектральной интенсивности излучения реального тела к спектральной интенсивности излучения абсолютно черного тела при одинаковых длинах волн и температурах обоих тел. Для большинства реальных тел ε_λ зависит от длины волны и температуры.

В практических расчетах, как правило, используют *интегральную степень черноты* (или *степень черноты*)

$$\varepsilon = \frac{E}{E_0},$$

представляющую собой отношение плотностей потока излучения данного тела и абсолютно черного тела. Степень черноты изменяется от 0 до 1 и зависит от физических свойств тела, состояния его поверхности и температуры.

При практических расчетах лучистого теплообмена большинство реальных тел рассматривают как серые тела. Дадим еще одно определение серого тела. *Серым* называют тело, спектр излучения которого непрерывен и полностью подобен спектру абсолютно черного тела при той же температуре, а спектральная степень черноты ε_λ = const для $0 \leqslant \lambda < \infty$ и не зависит от температуры. Очевидно, что для серого тела $\varepsilon_\lambda = \varepsilon$. Это позволяет переписать все вышеприведенные законы излучения для серых тел с учетом поправки на степень черноты.

Закон Стефана — Больцмана в этом случае примет вид

$$E = \int_0^\infty \varepsilon E_{\lambda_0} d\lambda = \varepsilon E_0 = \varepsilon c_0 \left(\frac{T}{100}\right)^4 = c \left(\frac{T}{100}\right)^4, \tag{7.26}$$

где $c = \varepsilon c_0$ — коэффициент излучения серого тела. При $\varepsilon = 1$ значение $c = c_0 + 5{,}67$ Вт/(м$^2 \cdot$ К^4). Для серого тела коэффициент излучения c = const. Из соотношения (7.26) имеем

$$\varepsilon = \frac{E}{E_0}, \; E = \varepsilon E_0 = \varepsilon c_0 T^4. \tag{7.27}$$

Зависимости $\varepsilon = \dfrac{E}{E_0} = f(\tau)$ для различных реальных тел определены экспериментально. Значения коэффициента ε берут из табл. 7.2. Для абсолютно черного тела $\varepsilon = 1$, а для абсолютно белого

Таблица 7.2

Материал	T, °C	ε
Алюминий:		
полированный	50÷500	0,04÷0,06
с шероховатой поверхностью	20÷50	0,06÷0,07
Бронза:		
полированная	50	0,1
пористая шероховатая	50÷150	0,55
Вольфрам	200	0,05
»	600÷1000	0,1—0,16
»	1500÷2200	0,24—0,31
Железо оцинкованное листовое блестящее	30	0,23
Жесть белая старая	20	0,28
Золото полированное	200—600	0,02—0,03
Латунь:		
полированная	200	0,03
листовая прокатная	20	0,06
Медь:		
полированная	50—100	0,02
окисленная	500	0,88
Молибден	1500—2200	0,19—0,26
Молибденовая нить	700—2500	0,1—0,3
Никелевая проволока	200—1000	0,1—0,2
Нихромовая проволока чистая	50	0,65
Платиновая проволока	50—200	0,06—0,07
»	1400	0,18
Ртуть чистая	0,100	0,09—0,12
Серебро чистое полированное	200—600	0,02—0,03
Сталь листовая шлифованная	950—1100	0,55—0,61
Стальное литье полированное	750—1050	0,52—0,56
Сталь с плоской шероховатой поверхностью	50	0,56
Хром полированный	50—1000	0,28—0,38
Цинк листовой	50	0,2
Чугунное литье	50	0,81
Асбестовый картон	20	0,96
Вода (слой толщиной 0,1 мм и более)	50	0,95
Смоченная металлическая поверхность	20	0,98
Кирпич красный шероховатый	20	0,88—0,93
Лак:		
черный матовый	40—100	0,96—0,98
белый	40—100	0,8—0,95
Резина мягкая серая шероховатая	20	0,86
Сажа:		
с жидким стеклом	20—200	0,96
нанесенная на твердую поверхность	50—1000	0,96
Снег	—	0,96
Стекло	250—1000	0,87—0,72
»	1100—1500	0,7—0,67
Угольная нить	1000—1400	0,53
Шеллак черно-матовый	75—150	0,91
Шлаки котельные	0—100	0,97—0,93
»	200—500	0,89—0,78
»	600—1200	0,76—0,70
»	1400—1800	0,69—0,67
Эмаль белая	20	0,9

$\varepsilon = 0$. Наиболее черным является бархат, для которого $\varepsilon = 0{,}98$—$0{,}99$.

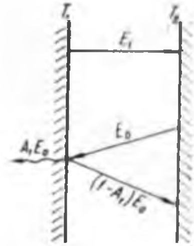


Рис. 7.6. К выводу закона Кирхгофа

Из закона Стефана — Больцмана (7.22) следует, что при низких температурах влияние излучения в большинстве случаев незначительно вследствие малого значения σ. Так, при комнатной температуре (порядка 293—300 К) интегральная плотность потока излучения абсолютно черной поверхности достигает примерно 460 Вт/м^2. Эта величина составляет только 1/10 часть плотности теплового потока, передаваемого конвекцией от поверхности к жидкости, когда коэффициенты конвективной теплоотдачи и перепад температур имеют сравнительно низкие значения — 100 Вт/(м^2 · К) и 50 К соответственно. Поэтому при низких температурах лучистым теплообменом часто можно пренебречь. К тому же это позволяет, как правило, упростить задачу. Однако лучистый теплообмен необходимо учитывать при высоких температурах, поскольку плотность потока излучения возрастает как четвертая степень абсолютной температуры.

Закон четвертой степени подтверждается для реальных тел только приближенно. Наибольшие отклонения от этого закона наблюдаются у металлов и газов. У газов эта степень меньше, у металлов больше.

Закон Кирхгофа устанавливает зависимость между поглощательной и излучательной способностями тел. Его можно получить на основе баланса лучистого теплообмена между двумя телами.

Рассмотрим теплообмен излучением между двумя пластинами (рис. 7.6). Расстояние между пластинами значительно меньше их размеров, так что излучение каждой из них обязательно попадает друг на друга. Пусть первая пластина будет серой с температурой T_1, вторая — абсолютно черной с температурой T_2, причем $T_1 > T_2$. Следовательно, для второй пластины $A_2 = 1$ и $E_2 = E_0$. Энергия первой пластины равна E_1. Вторая пластина, являясь абсолютно черной, поглощает все излучение первой пластины. При этом из энергии излучения второй пластины E_0 первая пластина поглощает A_1E_0 и отражает $E_0(1 - A_1)$ на вторую и полностью ею поглощается.

Если $T_1 > T_2$, между поверхностями происходит лучистый перенос теплоты $Q = E_1 - E_0 \cdot A_1$. При температуре $T_1 = T_2$ теплообмен продолжается, но с нулевым эффектом: $Q = 0$ и $E_1 = E_0A_1$, или

$$E_1/A_1 = E_0. \tag{7.28}$$

Полученный результат можно распространить на любое количество тел:

$$\frac{E_1}{A_1} = \frac{E_2}{A_2} = \cdots = E_0 = \sigma\left(\frac{T}{100}\right)^4. \tag{7.29}$$

Соотношение (7.29) представляет собой *математическое выражение закона Кирхгофа.* В этом случае он формулируется так: отношение энергии излучения и энергии поглощения не зависит от физических свойств тела и для всех тел равно энергии излучения абсолютно черного тела при той же температуре. Это отношение является функцией только температуры.

Закон Кирхгофа справедлив и для монохроматического излучения:

$$\frac{E_\lambda}{A_\lambda} = E_{\lambda_0} = f(\lambda,\ T), \tag{7.30}$$

где A_λ — поглощательная способность в узком интервале длин волн.

В развернутом виде, аналогичном (7.29), соотношение (7.30) запишем в виде

$$\frac{E_{\lambda_1}}{A_{\lambda_1}} = \frac{E_{\lambda_2}}{A_{\lambda_2}} = \cdots = E_{\lambda_0},$$

то есть отношение энергии излучения тела к его поглощательной способности при одной и той же длине волны и температуре одинаково для всех тел. Это отношение является функцией температуры и длины волны.

Следовательно, тело, излучающее энергию при какой-либо длине волны, способно поглощать ее при этой же длине волны. Из выражений (7.29) и (7.30) можно записать закон Кирхгофа для монохроматического тела

$$\varepsilon_\lambda = A_\lambda. \tag{7.31}$$

Для интегрального излучения из выражений (7.27) и (7.29) имеем

$$\varepsilon = A. \tag{7.32}$$

Таким образом, из закона Кирхгофа следует, что при термодинамическом равновесии поглощательная способность численно равна степени черноты тела как для интегрального, так и для монохроматического (спектрального) излучений.

Итак, тела с малой поглощательной способностью обладают малой излучательной способностью и наоборот. Для улучшения изоляционных свойств стенки баллонов термосов и сосудов Дьюара покрывают алюминиевой или серебряной амальгамой (для серебра $\varepsilon = 0{,}02 \div 0{,}03$, для полированного алюминия $\varepsilon = 0{,}04 \div 0{,}06$).

Из закона Кирхгофа можно сделать вывод, что тела, имеющие большие поглощательные способности, будут также хорошими излучателями. Это подсказывает простой способ моделирования черного излучателя с помощью изотермической полости, имеющей маленькое отверстие в поверхности. Эта модель была описана в § 7.1. Идея полого черного излучателя принадлежит Г. Р. Кирхгофу (1860). Такие изотермические оболочки или полости могут быть использованы в лабораторной работе для создания источника черного излучения.

Закон Ламберта. В общем случае плотность потока излучения меняется в зависимости от его направления. Рассмотрим излучение в пространстве с элементарной площадки dF на поверхности тела

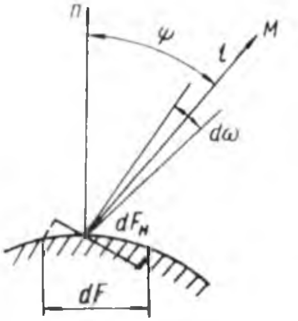


Рис. 7.7. К определению яркости излучения

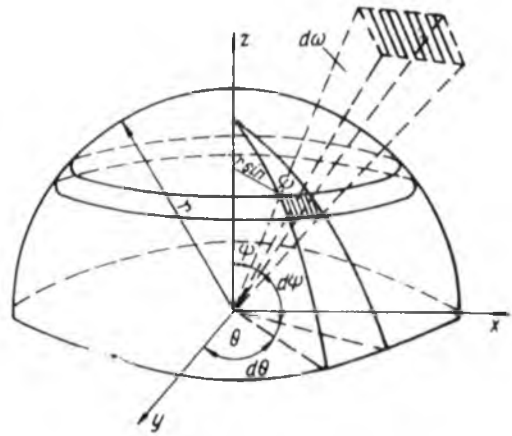


Рис. 7.8. К определению пространственного телесного угла

(рис. 7.7). Согласно выражению (7.3), с этой площадки в единицу времени во всех направлениях в пределах полусферы излучается количество энергии $E = dQ/dF$. Тогда в пучке, ограниченном элементарным телесным углом $d\omega$ и направленном под углом ψ к нормали, излучается элементарное количество энергии $dE/d\omega$. Величина

$$I_\psi = \frac{dE}{d\omega} = \frac{d^2Q}{dFd\omega} \tag{7.33}$$

называется *угловой плотностью излучения*.

Другой важной характеристикой направленного излучения является его *интенсивность (яркость)* I, то есть количество энергии, излучаемое в направлении ψ за единицу времени в пределах элементарного телесного угла, отнесенное к проекции элементарной площадки на плоскость, перпендикулярную к направлению излучения:

$$I = \frac{d^2Q}{dF_н d\omega} = \frac{d^2Q}{d\omega\, dF \cos\psi} = \frac{I_\psi}{\cos\psi}. \tag{7.34}$$

Закон Ламберта (1760) устанавливает энергию излучения, которая испускается телом по отдельным направлениям, и формулируется следующим образом: ***поток излучения абсолютно черного тела в данном направлении пропорционален потоку излучения в направлении нормали к поверхности и косинусу угла между ними***:

$$I_\psi = I_n \cos\psi. \tag{7.35}$$

Сравнивая выражения (7.34) и (7.35), получаем

$$I = I_n = \mathrm{idem}. \tag{7.36}$$

Следовательно, яркость излучения, подчиняющегося закону Ламберта, не зависит от направления, то есть является величиной постоянной. Величину I можно выразить через плотность интегрального излучения E, взяв интеграл в пределах полусферы (рис. 7.8). Из соотношений (7.33)—(7.35) имеем

$$E = \iint\limits_{\omega=2\pi} I_\psi d\omega = \iint\limits_{\omega=2\pi} I_n \cos\psi\, d\omega = I\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} \sin\psi\cos\psi\, d\psi = I\pi, \tag{7.37}$$

откуда

$$I = E/\pi. \tag{7.38}$$

Таким образом, яркость в направлении нормали к поверхности излучения в π раз меньше плотности потока интегрального полусферического излучения.

С учетом (7.36) и (7.38) закон Ламберта может быть представлен в следующем виде:

$$I_\psi = \frac{E}{\pi}\cos\psi. \tag{7.39}$$

Отметим, что закон Ламберта строго справедлив только для абсолютно черного тела. Для шероховатых тел этот закон подтвержден экспериментально лишь для $\psi = 0 \div 60\,°$.

Задача 7.2. Определить лучистый поток между двумя параллельно расположенными поверхностями с температурами $T_1 = 800$ К и $T_2 = 400$ К. Коэффициент излучения первой поверхности $c_1 = 5{,}1$ Вт/(м$^2\cdot$ К^4), второй $c_2 = 4{,}2$ Вт/(м$^2\cdot$ К^4). Потерю теплоты боковыми поверхностями не учитывать.

Р е ш е н и е. Лучистый поток между параллельными поверхностями определяем по уравнению (7.46):

$$q = \frac{1}{\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}-\frac{1}{C_0}}\left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4-\left(\frac{T_2}{100}\right)^4\right] = \frac{1}{\frac{1}{5{,}1}+\frac{1}{4{,}2}+\frac{1}{5{,}67}}\left[\left(\frac{800}{100}\right)^4-\left(\frac{400}{100}\right)^4\right] \approx$$

$$\approx 15 \text{ кВт/м}^2.$$

Задача 7.3. Определить потерю теплоты излучением с поверхности стальной трубы ($\varepsilon_1 = 0{,}79$) $a = 70$ мм и длиной $l = 3$ м при температуре поверхности $T_1 = 227$ °C, если эта труба находится в большом кирпичном помещении при температуре стенок $T_2 = 27$ °C.

Р е ш е н и е. Согласно условию, $F_1 \ll F_2$, поэтому $\varepsilon_{пр} = \varepsilon_1$. По формуле (7.50) определяем

$$Q = \varepsilon_1 C_0 F_1\left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4-\left(\frac{T_2}{100}\right)^4\right] = 0{,}79\cdot 5{,}67 - 3{,}14\cdot 0{,}07\cdot 3 \times (5^4-3^4) \approx 1{,}62 \text{ кВт}.$$

§ 7.3. ЛУЧИСТЫЙ ТЕПЛООБМЕН МЕЖДУ ТВЕРДЫМИ ТЕЛАМИ

Используя законы излучения, поглощения и отражения, зависимость излучения от направления, можно получить расчетные формулы для определения характеристик лучистого теплообмена между непрозрачными телами.

В теплотехнических расчетах, как правило, требуется рассчитать лучистый теплообмен между телами с заданными размерами, температурой и чистотой поверхности. Поскольку эти величины заданы, то энергия излучения взаимодействующих тел может быть определена с помощью закона Стефана — Больцмана. При этом задача сводится к учету влияния таких факторов, как форма, размеры, взаимное расположение, расстояние между телами, степень их черноты.

Необходимо учитывать, что излучение — это сложный процесс многократных чередующихся поглощений и отражений, которые затухают в пространстве и во времени. В качестве примеров рассмотрим некоторые простейшие задачи лучистого теплообмена между телами.

Лучистый теплообмен между двумя параллельными поверхностями. Рассмотрим систему двух тел, имеющих большие размеры по сравнению с расстоянием между ними. Будем считать, что коэффициенты поглощения A_1, A_2 степени черноты ε_1, ε_2 не зависят от температуры и координат поверхности. Кроме того, постоянны температуры T_1, T_2 и плотности потоков собственного излучения этих тел. При заданных условиях необходимо найти поток результирующего излучения.

Для решения задачи воспользуемся *методом многократных отражений*. Суть его состоит в последовательном учете изменения значений лучистой энергии на отдельных этапах затухания поглощений и отражений в процессе теплообмена между телами, входящими в рассматриваемую систему. Основным достоинством данного метода является его наглядность. Кроме того, он позволяет вскрыть механизм протекания процесса лучистого теплообмена в конкретных системах. К недостаткам метода следует отнести прежде всего то, что он требует проведения большого объема вычислений. Поэтому для расчета сложных геометрических излучающих систем метод многократных отражений практически не применяется. Однако, учитывая простоту рассматриваемой задачи, а также возможность при использовании этого метода поэтапного изучения лучистого теплообмена, применим для ее решения метод многократных отражений.

Пусть первая поверхность излучает количество энергии E_1 (рис. 7.9). Из этого количества вторая поверхность поглощает E_1A_2, а отражает $E_1(1-A_2)$. В свою очередь, первая поверхность из этого количества энергии поглощает $E_1(1-A_2)A_2$ и отражает $E_1(1-A_2)(1-A_1)$. Вторая поверхность снова поглощает $E_1(1-A_2)(1-A_1)A_2$ и отражает $E_1(1-A_2)^2(1-A_1)$. Из этого количества энергии первая поверхность снова поглощает $E_1(1-A_1)^2 1(-A_1)A_1$ и т. д. до бесконечности.

Аналогично вторая поверхность излучает количество энергии E_2.

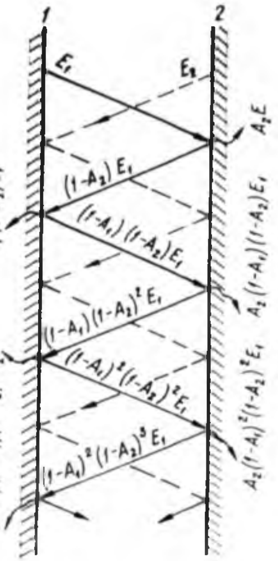


Рис. 7.9. Лучистый теплообмен между двумя параллельными стенками

Из этого количества первая поверхность поглощает E_2A_1, а отражает $E_2(1-A_1)$ и т. д.

Найдем энергию $q_л$, которую получит вторая поверхность в результате лучистого взаимодействия с первой. Для этого подсчитаем общее количество энергии, поглощенной каждой из поверхностей.

Вторая поверхность за счет излучения первой поверхности получит энергию

$$q_{1-2} = E_1A_2 + E_1(1-A_2)(1-A_1)A_2 + \cdots$$
$$\cdots + E_1(1-A_2)^{n-1}(1-A_1)^{n-1}A_2. \quad (7.40)$$

Ряд (7.40) представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем $p = (1-A_2)(1-A_1)$ Сумму этого ряда вычислим по известной формуле

$$q_{1-2} = \frac{a_1}{1-p} = \frac{E_1A_2}{1-(1-A_2)(1-A_1)}. \quad (7.41)$$

Аналогично выразим количество энергии, поглощенное первой поверхностью за счет излучения второй:

$$q_{2-1} = E_2A_1 + E_2(1-A_1)(1-A_2)A_1 + \cdots$$
$$\cdots + E_2(1-A_1)^{n-1}(1-A_2)^{n-1}A_1. \quad (7.42)$$

Сумма ряда (7.42) выразится формулой

$$q_{2-1} = \frac{E_2A_1}{1-(1-A_1)(1-A_2)}. \quad (7.43)$$

В результате взаимного облучения вторая поверхность получит количество энергии

$$q_л = q_{1-2} - q_{2-1} = \frac{E_1A_2}{1-(1-A_1)(1-A_2)} - \frac{E_2A_1}{1-(1-A_1)(1-A_2)} =$$
$$= \frac{E_1A_2 - E_2A_1}{A_1 + A_2 - A_1A_2}. \quad (7.44)$$

Так как $\varepsilon = A$, $c = \varepsilon c_0$, $A_1 = \frac{c_1}{c_0}$, $A_2 = \frac{c_2}{c_0}$ и, согласно закону Стефана — Больцмана,

$$E_1 = c_1\left(\frac{T_1}{100}\right)^4, \; E_2 = c_2\left(\frac{T_2}{100}\right)^4,$$

соотношение (7.44) перепишем следующим образом:

$$q_л = \frac{A_1A_2c_0\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - A_1A_2c_0\left(\frac{T_2}{100}\right)^4}{A_1 + A_2 - A_1A_2}. \quad (7.45$$

Поделив числитель и знаменатель на $A_1 A_2$, имеем

$$q_{12} = \frac{c_0 \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right]}{\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} - 1} = c_0 A_{12} \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right],$$

где $A_{12} = \frac{1}{\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} - 1}$ — *приведенная поглощательная способность.*

Вновь заменяя $A_1 c_0$ на c_1 и $A_2 c_0$ на c_2, из соотношения (7.45) получаем

$$q = \frac{1}{\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_0}} \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] = c_{пр} \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right], \quad (7.46)$$

где

$$c_{пр} = c_{12} = \frac{1}{\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_3}} \quad (7.47)$$

— *приведенный коэффициент излучения.*

Численное значение $c_{пр}$ зависит от значений коэффициентов излучения c_1 и c_2. При $c_1 = c_0$ приведенный коэффициент излучения $c_{12} = c_2$; при $c_2 = c_0$ — $c_{12} = c_1$; при $c_1 = c_2 = c_0$ — $c_{12} = c_0$. Значение $c_{12} = c_0$ является максимально возможным.

Учитывая, что $c/c_0 = \varepsilon$, приведенный коэффициент излучения можно выразить через приведенную степень черноты: $c_{пр} = \varepsilon_{пр} c_0$. Тогда выражение (7.46) примет вид

$$q_л = \varepsilon_{пр} c_0 \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right], \quad (7.48)$$

где

$$\varepsilon_{пр} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} \quad (7.49)$$

— *приведенный коэффициент черноты (приведенная степень черноты).*

Лучистый теплообмен между телом и оболочкой. Аналогично решается задача лучистого теплообмена между двумя поверхностями в замкнутом пространстве, когда одна из поверхностей находится внутри другой (рис. 7.10, *а*). В этом случае на первую (внутреннюю) поверхность попадает лишь часть энергии, излучаемой второй (внешней) поверхностью. Оставшаяся часть потока проходит мимо и снова попадает на вторую поверхность. Окончательная формула для этого случая лучистого взаимодействия имеет вид

$$Q = c_{пр} F_1 \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right], \quad (7.50)$$

где $c_{пр} = \frac{1}{\frac{1}{c_1} + \left(\frac{F_1}{F_2} \right) \left(\frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_0} \right)}$ — *приведенный коэффициент излучения.*

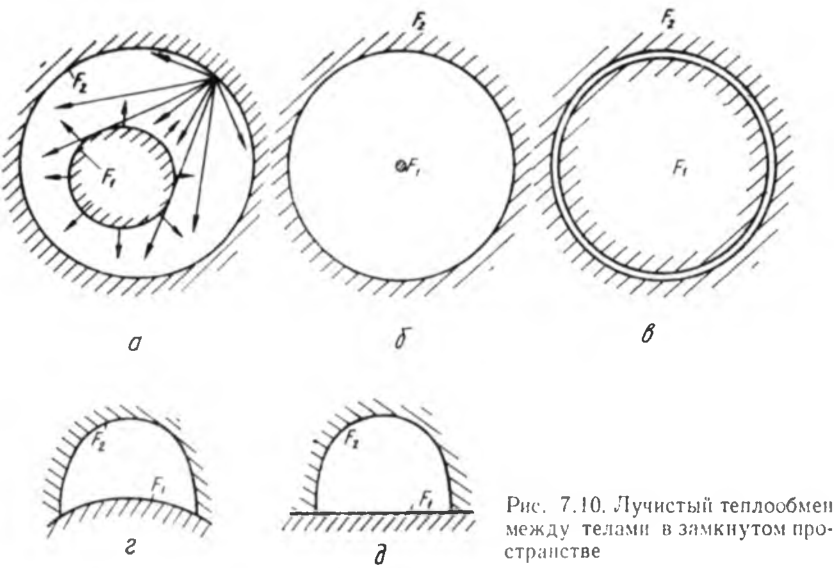


Рис. 7.10. Лучистый теплообмен между телами в замкнутом пространстве

Коэффициент $c_{пр}$ можно выразить через приведенную степень черноты

$$\varepsilon_{пр} = c_{пр}/c_0 = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{F_1}{F_2}\left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1\right)}, \tag{7.51}$$

где F_1 и F_2 — площади поверхностей первого и второго тел.

При $F_2 \gg F_1$ (рис. 7.10, *б*) имеем $F_1/F_2 \to 0$ и $c_{пр} = c_1$, а $\varepsilon_{пр} = \varepsilon_1$.

Аналогичный результат получим, когда оболочка является абсолютно черным телом ($\varepsilon = 1$).

При $F_1/F_2 \approx 1$ (рис. 7.10, *в*) выражение (7.51) преобразуется в (7.49).

Соотношения (7.50), (7.51) используются для расчета теплообмена пар тел любой формы в предположении, что меньшее из них выпукло. Например, соотношения применимы для расчета лучистого теплообмена между длинными цилиндрами, а также для систем поверхностей, образующих замкнутое пространство (рис. 7.10, *г*, *д*). При этом в качестве расчетной принимается меньшая из поверхностей.

Лучистый теплообмен между двумя телами, произвольно расположенными в пространстве. Рассмотрим процесс теплообмена излучением между двумя произвольно ориентированными в пространстве серыми телами. Предполагаем, что тела однородны, изотропны, их яркость не зависит от направления и поверхности тел имеют постоянные температуры T_1, T_2.

Выделим в рассматриваемых телах два элемента dF_1 и dF_2 (рис. 7.11), имеющие соответственно температуры, плотности потоков излучения и поглощательные способности T_1, T_2, E_1, E_2, A_1, A_2.

Обозначим расстояние между элементами поверхности r, углы между нормалями n_1, n_2 и линиями, соединяющими их с центром φ_1,

φ_2 (φ_1, φ_2 могут лежать в разных плоскостях).

Используя закон Ламберта, выразим количество энергии, излучаемой элементом dF_1, в направлении элемента dF_2,

$$d^2Q_1 = \frac{1}{\pi} E_1 \cos\varphi_1 d\Omega_1 dF_1,$$

где $d\Omega_1 = dF_2 \cos\varphi_2/r^2$ — элементарный телесный угол, под которым из точки A виден элемент dF_2. Таким образом,

$$d^2Q_1 = \frac{1}{\pi} E_1 \frac{\cos\varphi_1 \cos\varphi_2}{r^2} dF_1 dF_2.$$

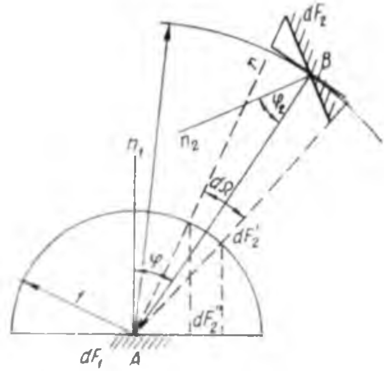


Рис. 7.11. К выводу формулы для углового коэффициента

Из этого количества энергии элемент dF_2 поглощает

$$d^2Q_{1\to 2} = A_2 d^2Q_1 = \frac{1}{\pi} A_2 E_1 \frac{\cos\varphi_1 \cos\varphi_2}{r^2} dF_1\, dF_2. \tag{7.52}$$

Для большинства технических материалов поглощательная способность достаточно велика (порядка 0,8 ÷ 0,9), поэтому ограничимся учетом только первого поглощения.

Аналогично получаем выражение для количества энергии, излучаемого элементом dF_2 и поглощаемого элементом dF_1:

$$d^2Q_{2\to 1} = \frac{1}{\pi} A_1 E_2 \frac{\cos\varphi_1 \cos\varphi_2}{r^2} dF_1\, dF_2. \tag{7.53}$$

Вычитая из соотношения (7.52) соотношение (7.53), получаем количество энергии, переданное излучением от первого элемента ко второму:

$$d^2Q_{12} = \frac{1}{\pi} (A_2E_1 - A_1E_2) \frac{\cos\varphi_1 \cos\varphi_2}{r^2} dF_1 dF_2. \tag{7.54}$$

Подставляя полученные выше соотношения

$$E_1 = \varepsilon_1 c_0 \left(\frac{T_1}{100}\right)^4, \quad E_2 = \varepsilon_2 c_0 \left(\frac{T_2}{100}\right)^4, \quad \varepsilon_1 = A_1, \ \varepsilon_2 = A_2$$

(7.54), после преобразования получим

$$d^2Q_{12} = \varepsilon_1\varepsilon_2 c_0 \left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4\right] \frac{\cos\varphi_1 \cos\varphi_2}{\pi r^2} dF_1 dF_2. \tag{7.55}$$

Количество энергии, переданное первым телом второму, может быть получено интегрированием соотношения (7.55)

$$Q_{12} = \varepsilon_{\text{пр}} c_0 \left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4\right] \int\limits_{F_1}\int\limits_{F_2} \frac{\cos\varphi_1 \cos\varphi_2}{\pi r^2} dF_1 dF_2, \tag{7.56}$$

где $\varepsilon_{\text{пр}} = \varepsilon_1\varepsilon_2$ — *приведенная степень черноты системы.*

В литературе обычно применяют сокращающие обозначения и последнее выражение записывают следующим образом:

$$Q_{12} = \varepsilon_{\text{пр}} C_0 \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] F_{12}, \tag{7.57}$$

где

$$F_{12} = \int\limits_{F_1}\int\limits_{F_2} \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2}{\pi r^2} dF_1 dF_2 \tag{7.58}$$

— *взаимная поверхность излучения двух тел*. Это чисто геометрический параметр, определяемый размерами и формой поверхностей тел, а также их взаимным расположением и расстоянием между ними.

Следовательно, расчет теплообмена между двумя телами, произвольно расположенными в пространстве, сводится к определению взаимной поверхности излучения F_{12}.

Из условий симметричности выражения (7.58) имеем

$$F_{12} = F_{21}. \tag{7.59}$$

В инженерных методах расчета лучистого теплообмена между поверхностями используются *угловой коэффициент излучения (коэффициент облученности)*. *Средний угловой коэффициент излучения* — безразмерное число, меньшее единицы и показывающее, какая доля энергии, излучаемая одним телом по всему полупространству, попадает на поверхность другого тела, то есть

$$\varphi_{12} = \frac{Q_{12}}{Q_1}, \quad \varphi_{21} = \frac{Q_{21}}{Q_2}. \tag{7.60}$$

Значения $Q_{1\to2}$ и $Q_{2\to1}$ определим из формул (7.52), (7.53). Используя законы Стефана — Больцмана и Кирхгофа, получим

$$Q_{1\to2} = \varepsilon_{\text{пр}} C_0 \left(\frac{T_1}{100} \right)^4 \int\limits_{F_1} dF_1 \int\limits_{F_2} \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2}{\pi r^2} dF_2, \tag{7.61}$$

$$Q_{2\to1} = \varepsilon_{\text{пр}} C_0 \left(\frac{T_1}{100} \right)^4 \int\limits_{F_1} dF_1 \int\limits_{F_2} \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2}{\pi r^2} dF_2. \tag{7.62}$$

Полные потоки излучения тел *1* и *2*

$$Q_1 = c_0 \varepsilon_1 \left(\frac{T_1}{100} \right)^4 F_1, \quad Q_2 = c_0 \varepsilon_2 \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 F_2. \tag{7.63}$$

Полагая, что степень черноты поверхностей высока ($\varepsilon_1 \approx \varepsilon_2 \approx 1$ из формул (7.61)—(7.63) получим выражения для угловых коэфф циентов системы из двух тел:

$$\varphi_{12} = \frac{1}{F_1} \int\limits_{F_1} dF_1 \int\limits_{F_2} \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2}{\pi r^2} dF_2,$$

$$\varphi_{21} = \frac{1}{F_2} \int\limits_{F_1} dF_1 \int\limits_{F_2} \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2}{\pi r^2} dF_2. \tag{7.64}$$

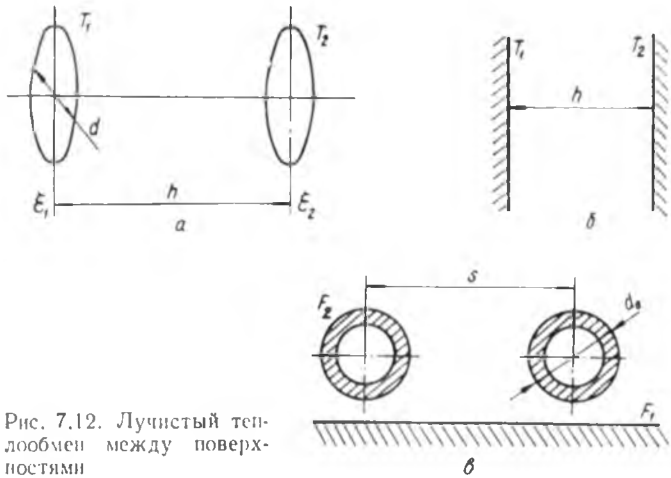


Рис. 7.12. Лучистый теплообмен между поверхностями

Из соотношений (7.58) и (7.64) получим

$$\varphi_{12} = \frac{F_{12}}{F_1}, \quad \varphi_{21} = \frac{F_{21}}{F_2}. \tag{7.65}$$

Отсюда получаем *соотношение взаимности* для угловых коэффициентов

$$\varphi_{12} F_1 = \varphi_{21} F_2. \tag{7.66}$$

Выражение (7.57) для лучистого теплообмена между телами можно записать с помощью угловых коэффициентов излучения

$$Q_{12} = \varepsilon_{\text{пр}} c_0 \left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4\right] F_1 \varphi_{12} = \varepsilon_{\text{пр}} c_0 \left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4\right] F_2 \varphi_{21} \tag{7.67}$$

или

$$Q_{12} = Q_1 \varphi_{12} - Q_2 \varphi_{21}. \tag{7.68}$$

Расчет коэффициентов излучения очень трудоемок и для систем тел выполняется на ЭВМ. Для некоторых конкретных задач величины φ_{12} приведены в работе [67].

На рис. 7.12 представлены некоторые встречающиеся в практике случаи расположения излучающих поверхностей в пространстве.

Два параллельных круга с диаметрами d_1, d_2 и с центрами на общей нормали (рис. 7.12, *а*)

$$\varphi_{12} = \frac{1}{d_1^2} \left\{\sqrt{0{,}5(d_1 + d_2)^2 + h^2} - \sqrt{0{,}5(d_2 - d_1)^2 + h^2}\right\}^2, \tag{7.69}$$

где h — расстояние между дисками,

$$\varphi_{21} = \varphi_{12} \frac{F_1}{F_2} = \varphi_{12} \left(\frac{d_1}{d_2}\right). \tag{7.70}$$

Если $d_1 = d_2$, то формула (7.60) имеет вид

$$\varphi_{12} = \varphi_{21} = \left[\frac{h}{d} - \sqrt{1 + \left(\frac{h}{d}\right)^2}\right]^2. \tag{7.71}$$

Две параллельные пластины одинаковой ширины а (рис. 7.12, *б*):

$$\varphi_{12} = \varphi_{21} = \sqrt{1 + \left(\frac{h}{a}\right)^2} - \frac{h}{a}, \tag{7.72}$$

где h — расстояние между пластинами.

Если две параллельные пластины больших размеров, то

$$\varphi_{12} = \varphi_{21} = 1.$$

Стенка с расположенным на ней рядом труб с наружным диаметром d и шагом s (рис. 7.12, *в*):

$$\varphi_{12} = 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{d}{s}\right)^2} + \frac{d}{s}\,\mathrm{arctg}\sqrt{\left(\frac{s}{d}\right)^2 - 1}; \tag{7.73}$$

$\varphi_{21}\pi d = \varphi_{12}s$ — условие взаимности угловых коэффициентов излучения на 1 м длины трубы.

Приведенная степень черноты $\varepsilon_{пр}$ (см. формулу (7.67)) определяется следующим образом:

Два тела, произвольно расположенные в пространстве,

$$\varepsilon_{пр} = \left[\left(\frac{1}{\varepsilon_1} - 1\right)\varphi_{12} + \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1\right)\varphi_{21} + 1\right]^{-1}. \tag{7.74}$$

Два тела больших размеров с параллельными поверхностями. Тогда угловые коэффициенты $\varphi_{12} = \varphi_{21} = 1$ и формула (7.74) принимает обычный для $\varepsilon_{пр}$ вид (см. формулу (7.46)). Если тело с площадью поверхности F_1 находится внутри другого тела с площадью поверхности F_2, то $\varphi = 1$, $\varphi_{21} < 1$ и формула (7.74) с учетом (7.66) принимает вид

$$\varepsilon_{пр} = \left[\frac{1}{\varepsilon_1} + \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1\right)\frac{F_1}{F_2}\right]^{-1}. \tag{7.75}$$

При $F_2 \gg F_1$ имеем $F_1/F_2 \to 0$, тогда $\varepsilon_{пр} = \varepsilon_1$.

Влияние экрана на лучистый теплообмен. Для защиты какой-либо поверхности от излучения применяют экраны, изготовляемые из материалов с большой отражательной и малой поглощательной способностью.

Предположим, что между двумя параллельными пластинами *1* и *2* находится экран (тонкий лист из металла с высоким коэффициентом теплопроводности). Поэтому температуры обеих поверхностей экрана можно считать одинаковыми (рис. 7.13).

Поверхности стенок и экрана считаем одинаковыми, то есть $F_1 = F_2 = F_э$. Температуры стенок T_1 и T_2 поддерживаются постоянными, причем $T_1 > T_2$

Рассмотрим два случая.

1. Коэффициенты излучения (степени черноты) обеих стенок и обеих поверхностей экрана равны между собой: $c_1 = c_2 = c_э = c$ или $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_э = \varepsilon$. Нетрудно заметить, что приведенные степени черноты между поверхостями *1* и *2* без экрана, между первой поверхностью и экраном, экраном и второй поверхностью равны между собой:

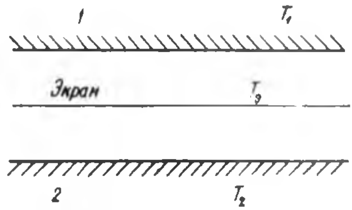


Рис. 7.13. К расчету лучистого теплообмена с экраном

$$\varepsilon_{пр} = \varepsilon_{1э} = \varepsilon_{2э} = \varepsilon_{12} = \frac{1}{\frac{2}{\varepsilon} - 1},$$

$$c_{пр} = \frac{1}{\frac{2}{c} - \frac{1}{c_0}}.$$

Тепловой поток, передаваемый от поверхности *1* к поверхности *2* при отсутствии экрана,

$$q_{12} = c_{пр}\left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4\right]. \qquad (7.76)$$

Тепловой поток, передаваемый от поверхности *1* к экрану,

$$q_{1э} = c_{пр}\left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_э}{100}\right)^4\right], \qquad (7.77)$$

а от экрана к поверхности *2*

$$q_{2э} = c_{пр}\left[\left(\frac{T_э}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4\right]. \qquad (7.78)$$

При установившемся тепловом режиме

$$q = q_{1э} = q_{2э}.$$

Тогда

$$\left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_э}{100}\right)^4\right] = \left[\left(\frac{T_э}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4\right],$$

отсюда

$$\left(\frac{T_э}{100}\right)^4 = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 + \left(\frac{T_2}{100}\right)^4\right].$$

Подставляя $\left(\frac{T_э}{100}\right)^4$ в выражение (7.77) или (7.78), получим

$$q = \frac{1}{2} c_{пр}\left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4\right]. \qquad (7.79)$$

Сравнивая выражения (7.76) и (7.79), находим

$$q = \frac{1}{2} q_{12}. \qquad (7.80)$$

Таким образом, размещение между двумя стенками одного экрана из одного и того же материала уменьшает теплоотдачу излучением в два раза.

Можно показать, что размещение n экранов уменьшает теплоотдачу в $n+1$ раз, то есть

$$q = \frac{1}{n+1} q_{12}. \tag{7.81}$$

2. Коэффициенты излучения (степени черноты) обеих стенок равны между собой, но не равны коэффициенту излучения поверхности экрана, то есть $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ и $\varepsilon_э \neq \varepsilon$, $c_1 = c_2 = c$ и $c_э \neq c$.

При отсутствии экрана

$$c_{пр} = \frac{1}{\frac{1}{c} + \frac{1}{c} - \frac{1}{c_0}} = \frac{1}{\frac{2}{c} - \frac{1}{c_0}}.$$

При установке экрана

$$c_{пр_э} = c_{1э} = \frac{1}{\frac{1}{c} + \frac{1}{c_э} - \frac{1}{c_0}} = c_{2э}.$$

Результирующий тепловой поток от поверхности *1* к поверхности *2* (без экрана) определяется по закону Стефана—Больцмана:

$$q_{12} = c_{пр}\left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4\right]. \tag{7.82}$$

Тепловой поток между поверхностью *1* и экраном

$$q_{1э} = c_{1э}\left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_э}{100}\right)^4\right].$$

Тепловой поток между экраном и поверхностью *2*

$$q_{2э} = c_{2э}\left[\left(\frac{T_э}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4\right].$$

Учитывая, что $q_{1э} = q_{2э} = q$ и $c_{пр} = c_{1э} = c_{2э}$, по аналогии с первым случаем имеем

$$\left(\frac{T_э}{100}\right)^4 = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 + \left(\frac{T_2}{100}\right)^4\right],$$

а тепловой поток

$$q = \frac{1}{2} c_{пр}\left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4\right]. \tag{7.83}$$

Сравнивая выражения (7.82) и (7.83), получаем

$$q = \frac{1}{2}\frac{c_{пр_э}}{c_{пр}} q_{12} = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_{пр_э}}{\varepsilon_{пр}} q_{12}. \tag{7.84}$$

Из (7.84), как частный случай, может быть получена и формула (7.80).

Приведем без вывода наиболее употребляемые формулы для расчета приведенной черноты системы тел с экранами.

Для n плоских экранов, расположенных между двумя телами с параллельными поверхностями больших размеров,

$$\varepsilon_{пр_э} = \left[\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} + 2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\varepsilon_{э_i}} - (n+1)\right]^{-1}, \tag{7.85}$$

где $\varepsilon_{э_i}$ — коэффициенты черноты i-го экрана.

Для n цилиндрических экранов, расположенных между телом и внешней оболочкой,

$$\varepsilon_{пр_э} = \left[\frac{1}{\varepsilon_1} + \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1\right)\frac{F_1}{F_2} + \sum_{i=1}^{n}\frac{F_1}{F_{э_i}}\left(\frac{2}{\varepsilon_{э_i}} - 1\right)\right]^{-1}, \tag{7.86}$$

где ε_1, ε_2, $\varepsilon_{э_i}$ — коэффициенты черноты поверхностей тела, внешней оболочки и i-го экрана; F_1, F_2, $F_{э_i}$ — площади поверхностей соответственно тела, внешней оболочки и i-го экрана.

Задача 7.4. Между двумя поверхностями, коэффициент излучения которых $c_1 = c_2 = 4{,}8$ Вт/(м^2 · К^4), а температуры $T_1 = 600$ К, $T_2 = 300$ К, установлен экран. Определить теплообмен излучением до и после установки экрана, если $c_э = c_1 = c_2$.

Решение. Лучистый поток между поверхностями без экрана определяем по формуле (7.46):

$$q = \frac{1}{\frac{1}{4{,}8} + \frac{1}{4{,}8} - \frac{1}{5{,}67}}\left[\left(\frac{600}{100}\right)^4 - \left(\frac{300}{100}\right)^4\right] \approx 5{,}07 \text{ кВт/м}^2.$$

После установки экрана

$$q_э = \frac{1}{2} q \approx 2{,}535 \text{ кВт/м}^2.$$

§ 7.4. ИЗЛУЧЕНИЕ И ПОГЛОЩЕНИЕ ГАЗОВ

По сравнению с твердыми телами излучение и поглощение газов характеризуются следующими особенностями.

1. Они имеют избирательный (селективный) характер. Это значит, что газы излучают лучистую энергию лишь в определенных интервалах длин волн $\Delta\lambda$ или различных полосах спектра. В остальной части спектра газы не излучают и не поглощают лучистой энергии.

Различные газы обладают различной способностью излучать и поглощать лучистую энергию. Одно- и двухатомные газы, состоящие из однородных атомов (H_2, O_2, N_2 и пр.), обладают малой способностью поглощать лучистую энергию, а следовательно, и малой способностью ее излучать. Поэтому такие газы можно считать диатермичными. Трех- и многоатомные газы способны излучать и поглощать лучистую энергию. Из трехатомных газов наибольший практический интерес представляют углекислый газ (CO_2) и водяной пар (H_2O), образующиеся при сгорании топлива. В табл. 7.3 приведены данные о наиболее важных полосах спектров CO_2 и H_2O.

Таблица 7.3

CO_2		H_2O	
λ, мкм	$\Delta\lambda$, мкм	λ, мкм	$\Delta\lambda$, мкм
2,0÷3,0	0,6	2,0÷3,0	0,8
4,0÷4,8	0,8	4,8÷8,5	3,7
12,5÷16,5	4,0	12÷30	18

Газы излучают и поглощают энергию всем объемом. Количество поглощенной (излучаемой) газом энергии зависит от толщины газового слоя и плотности (концентрации) поглощающих (или излучающих) молекул. Концентрацию молекул можно оценить парциальным давлением газа p. Нетрудно видеть, что чем больше плотность излучающего компонента газовой смеси и чем больше толщина газового слоя L, тем больше молекул примут участие в излучении (поглощении), и тем выше его излучательная способность и коэффициент поглощения. Поэтому коэффициент теплового излучения ε газов зависит не только от температуры, но и от произведения pL.

При проведении расчетов удобно пользоваться понятием средней (эффективной) длины пути луча L, характеризующей не одно, а все возможные направления лучей в данном газовом объеме. Для некоторых форм объема, который занимает газ, эти величины приведены в табл. 7.4.

Таблица 7.4

Форма объема, заполненного газом	Длина луча
Цилиндр с высотой, равной диаметру (излучение на боковую поверхность)	$0{,}6d$
Цилиндр с высотой, равной ∞	$0{,}9d$
Шар диаметром d	$0{,}6d$
Бесконечный плоскопараллельный газовый слой толщиной h	$1{,}8h$
Куб со стороной h	$0{,}6h$
Пучок труб с расстоянием между поверхностями труб L и при расположении их:	
по треугольнику $L = 2d$	$3{,}8L$
по квадрату $L = d$	$3{,}5L$

Для других геометрических форм, не перечисленных в табл. 7.4, средняя длина луча

$$L = 3{,}6\frac{V}{F}, \tag{7.87}$$

где V — объем газа, F — поверхность оболочки, окружающей газ.

Наиболее хорошо изучен теплообмен излучением для газов CO_2 и H_2O, содержащихся в продуктах сгорания многих топлив.

Плотность потока собственного излучения CO_2 и H_2O по опытным данным

$$q_{CO_2} = 8{,}78\sqrt[3]{p_{CO_2}L}\left(\frac{T}{100}\right)^{3,5}, \tag{7.88}$$

$$q_{H_2O} = 87{,}8p_{H_2O}^{0,8}L^{0,6}\left(\frac{T}{100}\right)^{3}, \tag{7.89}$$

где p_{CO_2}, p_{H_2O} — парциальные давления газов, МПа; L — средняя толщина слоя газа, м; T — температура газа, К.

По выражениям (7.88) и (7.89) определяется плотность потока собственного излучения CO_2 и H_2O, то есть количество энергии, испускаемое газами в пустоту ($\varepsilon = 1$ и $T = 0$ К).

Из соотношений (7.88) и (7.89) видно, что излучение CO_2 пропорционально $T^{3,5}$, а излучение H_2O — T^3.

Для практических расчетов излучения газов рекомендуется применять закон четвертой степени абсолютной температуры — закон Стефана — Больцмана:

$$q_л = \varepsilon_г c_0\left(\frac{T_г}{100}\right)^4, \tag{7.90}$$

где $\varepsilon_г$ — степень черноты газа (газовой смеси); $c_0 = 5{,}77 \cdot 10^8$ Вт/(м^2 · К^4) — коэффициент излучения абсолютно черного тела.

Степень черноты данного газа зависит от pL и температуры газа:

$$\varepsilon = f(T,\ pL).$$

Суммарная (эффективная) степень черноты продуктов сгорания, содержащих газы CO_2 и H_2O, определяется формулой

$$\varepsilon_г = \varepsilon_{CO_2} + \varepsilon_{H_2O} - \varepsilon_{CO_2}\varepsilon_{H_2O} = \varepsilon_{CO_2} + \varepsilon_{H_2O} - \Delta\varepsilon. \tag{7.91}$$

Следовательно, суммарное излучение смеси газов CO_2 и H_2O несколько меньше суммы излучения этих газов в связи с тем, что полосы спектра излучения и поглощения для CO_2 и H_2O частично совпадают. Поэтому часть энергии излучения CO_2 поглощается H_2O и наоборот.

Формула (7.90) определяет плотность потока собственного излучения газа, то есть количество энергии, излучаемое газом в пустоту, которую можно рассматривать как абсолютно черное пространство ($\varepsilon = 1$) при $T = 0$ К.

На рис. 7.14 и 7.15 приведены номограммы для определения ε_{H_2O} и ε_{CO_2} в зависимости от температуры газа T и параметра pL. Численные значения степени черноты CO_2 и H_2O экспериментально получены при давлении $p = 0{,}10133$ МПа и температуре до 2000 °С. Если полное давление $p_{см}$ не равно 0,10133 МПа, значения ε_{CO_2} и ε_{H_2O}, полученные из рис. 7.14 и 7.15, необходимо умножить на по-

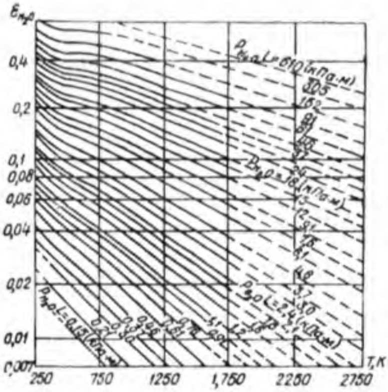


Рис. 7.14. Излучательная способность H_2O при полном давлении 0,10133 МПа

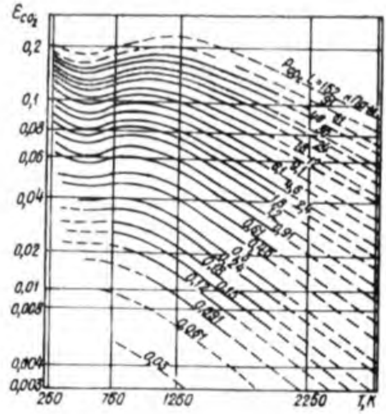


Рис. 7.15. Излучательная способность CO_2 при полном давлении 0,10133 МПа

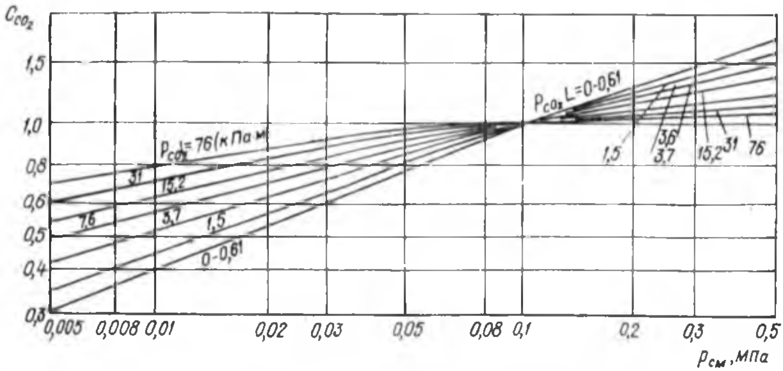


Рис. 7.16. Поправочный коэффициент для излучательной способности CO_2 при давлениях, отличных от 0,10133 МПа

правочные коэффициенты c_{CO_2} и c_{H_2O}, которые находят по графикам на рис. 7.16 и 7.17:

$$\varepsilon_{CO_2} = c_{CO_2}(\varepsilon_{CO_2})_{p_{см}=1},$$

$$\varepsilon_{H_2O} = c_{H_2O}(\varepsilon_{H_2O})_{p_{см}=1}.$$

Значение $\Delta\varepsilon$ определяется по графикам на рис. 7.18. Значения поправок $\Delta\varepsilon$ имеются лишь для ограниченного диапазона температур и парциальных давлений. В приближенных расчетах поправку $\Delta\varepsilon$ не вводят.

По уравнению (7.90) определяется поток собственного излучения газа, то есть количество энергии, испускаемое газом в пустоту, где $\varepsilon = 1$ и $T = 0$ К.

В действительности газ огражден твердой оболочкой (стенки камеры), температура которой выше абсолютного нуля и степень черноты

$\varepsilon_{ст}$ меньше единицы. Эта оболочка имеет собственное излучение, которое частично поглощается газом. Так как $T_г \neq T_{ст}$ и газ поглощает селективно, то количество теплоты, отдаваемое газом стенке, не будет равно количеству теплоты, излучаемого газом. Таким образом, $\varepsilon_г \neq A_г$, где $A_г$ — поглощательная способность газа при температуре стенки (оболочки) $T_{ст}$. Кроме того, при наличии излучающего газа эффективная степень черноты стенки $\varepsilon'_{ст}$ больше ее обычного значения $\varepsilon_{ст}$ и зависит от $\varepsilon_г$:

$$\varepsilon'_{ст} = \varepsilon_{ст}[1 + (1 - \varepsilon_{ст})(1 - \varepsilon_г)]. \quad (7.92)$$

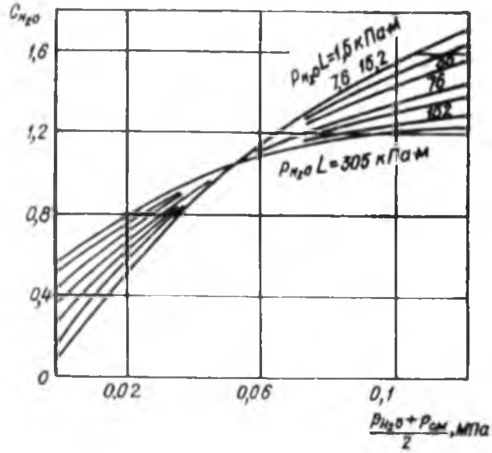


Рис. 7.17. Поправочный коэффициент для излучательной способности H_2O при давлениях, отличных от 0,10133 МПа

При $\varepsilon_{ст} = 0,8 \div 1,0$ можно пользоваться формулой

$$\varepsilon'_{ст} = 0,5(\varepsilon_{ст} + 1). \quad (7.93)$$

Окончательная формула для лучистого теплового потока от газа к стенке имеет следующий вид:

$$q_л = \varepsilon'_{ст} C_0 \left[\varepsilon_г \left(\frac{T_г}{100}\right)^4 - A_г \left(\frac{T_{ст}}{100}\right)^4 \right]. \quad (7.94)$$

Поглощательная способность смеси H_2O и CO_2

$$A_г = A_{H_2O} + A_{CO_2} - \Delta A. \quad (7.95)$$

Поглощательная способность H_2O (приближенно)

$$A_{H_2O} = c_{H_2O} \varepsilon'_{H_2O} \left(\frac{T_{H_2O}}{T_{ст}}\right)^{0,45}. \quad (7.96)$$

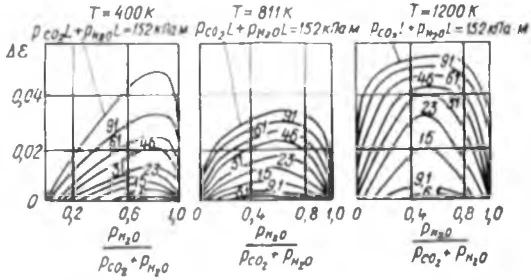


Рис. 7.18. Поправочный коэффициент $\Delta\varepsilon$ для излучательной способности смеси H_2O и CO_2

Значение c_{H_2O} определяется из рис. 7.17. Излучательная способность ε'_{H_2O} определяется из рис. 7.14 при температуре $T_{ст}$ и $p_{H_2O} \times \times L\left(\frac{T_{ст}}{T_{H_2O}}\right)$.

Поглощательная способность CO_2

$$A_{CO_2} = c_{CO_2}\varepsilon'_{CO_2}\left(\frac{T_{CO_2}}{T_{ст}}\right)^{0,65}.$$

Значение c_{CO_2} определяется из рис. 7.16, а значение ε'_{CO_2} — из рис. 7.15 при $p_{CO_2}L\left(\frac{T_{ст}}{T_{CO_2}}\right)$. Значение $\Delta A = \Delta\varepsilon$ определяется из рис. 7.18 при температуре $T_{ст}$.

При приближенных расчетах по формуле (7.94) поглощательную способность газа $A_г$ можно принять равной степени черноты газа $\varepsilon_г$, которая подсчитывается по формуле (7.91) при температуре стенки. Тогда

$$q_л = \varepsilon'_{ст}C_0\varepsilon'_г\left[\left(\frac{T_г}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_{ст}}{100}\right)^4\right] = \varepsilon_{пр}C_0\left[\left(\frac{T_г}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_{ст}}{100}\right)^4\right], \quad (7.97)$$

где $\varepsilon_{пр} = \varepsilon'_{ст}\varepsilon'_г$ — приведенная степень черноты системы; $\varepsilon'_г$ — эффективная степень черноты газа. Из выражений (7.94) и (7.97) следует, что

$$\varepsilon'_г = \frac{\varepsilon_г - A_г\left(\frac{T_{ст}}{T_г}\right)^4}{1-\left(\frac{T_{ст}}{T_г}\right)^4}.$$

Для некоторых расчетов формулу (7.97) удобно использовать в виде

$$q = \varepsilon_{пр}C_0\left[\left(\frac{T_г}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_{ст}}{100}\right)^4\right]. \quad (7.98)$$

Здесь $\varepsilon_{пр} = \frac{\varepsilon_г\varepsilon_{ст}}{[\varepsilon_{ст} + \varepsilon_г(1-\varepsilon_{ст})]}$ и $\varepsilon_{пр} = \varepsilon'_{ст}\varepsilon_г$ — приведенная степень черноты системы.

Задача 7.5. Определить поглощательную способность смеси H_2O и O_2 при давлении 0,12 МПа (парциальное давление H_2O 0,02 мПа) и температуре 400 К. Средняя длина пути луча для газов 1,5 м, а падающее излучение испускается поверхностью, нагретой до температуры 800 К.

Решение. Примем, что $A_{см} \approx A_{H_2O}$. Параметры, необходимые для расчета A_{H_2O}, следующие:

$$p_{H_2O}L = 0{,}03 \text{ мПа·м},$$

$$\frac{1}{2}(p_т + p_{H_2O}) = 0{,}11 \text{ мПа·м},$$

$$p_{H_2O}L\left(\frac{T_{ст}}{T_{H_2O}}\right) = 0{,}06 \text{ мПа·м}.$$

По графику (рис. 7.17) находим $C_{H_2O} = 1{,}45$, а по графику (рис 7.14) $\varepsilon'_{H_2O} = 0{,}33$. Значение A_{H_2O} определяем по формуле (7.99)

$$A_{H_2O} = 1{,}45 \cdot 0{,}33\left(\frac{400}{800}\right)^{0,45} = 0{,}35.$$

В заключение отметим, что лучистый перенос может сопровождаться одновременным переносом теплоты теплопроводностью и конвекцией. Такой комбинированный процесс называют *сложным теплообменом*. В основе его математической модели лежит представление вектора плотности теплового потока как аддитивной функции, включающей в качестве слагаемых векторы плотности теплового потока за счет теплопроводности, конвекции и излучения. Подробно эти вопросы рассмотрены в работах [23, 67].

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

7.1. Рассчитать максимальное значение плотности монохроматического потока излучения абсолютно черного тела для поверхностей, имеющих температуру: а) 100 К, б) 500 К, в) 1000 К, г) 5000 К.

7.2. Определить температуру, до которой необходимо нагреть поверхность абсолютно черного тела, чтобы 40 % ее энергии излучения приходилось на инфракрасную область спектра.

7.3. Вольфрамовая нить лампы фотософита имеет температуру 3500 К. Предполагая, что нить излучает как абсолютно черное тело, найти, в каком отношении распределяется полная энергия излучения, испускаемого нитью в ультрафиолетовой, видимой и инфракрасной областях. Повторить расчеты для обычной вольфрамовой нити, имеющей температуру 2500 К.

7.4. Вывести из закона Вина путем дифференцирования соотношения закона Планка.

7.5. Теплица сооружена из кварцевого стекла, которое пропускает 92 % энергии падающего излучения в интервале длин волн $0{,}35 \cdot 10^{-6} \div 2{,}7 \times \times 10^{-6}$ м. Полагая, что стекло совершенно непрозрачно для малых и больших длин волн, рассчитать долю солнечного излучения, которая достигает грунта, если Солнце излучает как черное тело при температуре 5550 К. Рассчитать долю энергии излучения, испускаемого грунтом, которую пропускает стекло в окружающее пространство, если средняя температура грунта 300 К и он излучает как черное тело.

7.6. Определить потерю теплоты путем излучения с поверхности стальной трубы ($\varepsilon_1 = 0{,}79$) диаметром $d = 70$ мм и длиной $L = 3$ м при температуре поверхности $T_1 = 500$ К, если эта труба находится в кирпичном канале ($\varepsilon_2 = 0{,}93$), площадь которого 3,6 м^2 при температуре стенок $T_2 = 300$ К.

7.7. Происходит теплообмен между двумя абсолютно черными пластинами неограниченных размеров с температурами T_1 и T_2 ($T_1 > T_2$), разделенными прозрачной для теплового излучения средой. Пластины расположены горизонтально: «горячая» сверху, поэтому нет переноса теплоты свободной конвекцией. Определить суммарную поверхностную плотность теплового потока от «горячей» пластины к «холодной», если толщина слоя между пластинами $\delta = 0{,}2$ м, теплопроводность среды $\lambda = 0{,}02$ Вт / (м · К), температуры пластин $T_1 = 800$ К, $T_2 = 400$ К.

7.8. Определить лучистый тепловой поток между двумя круглыми пластинами, центры которых находятся на общей нормали, если меньшая пластина имеет диаметр $d_1 = 0{,}25$ м, степень черноты 0,15 и температуру $T_1 = 727$ °С, а большая — диаметр $d_2 = 0{,}5$ м, степень черноты 0,65 и температуру $T_2 = 227$ °С. Расстояние между пластинами $h = 2$ м.

7.9. Определить потери теплоты излучения с 1 м паропровода, если его наружный диаметр $d_1 = 0{,}3$ м, коэффициент поглощения $A_1 = 0{,}9$, температура стенки $T_c = 450$ °С, температура окружающей среды $T_ж = 50$ °С.

7.10. Продукты сгорания органического топлива заполняют камеру нагревательной печи, имеющую размеры 2 × 3 × 5 м. Определить поток собственного излучения газов на стенки печи, если в составе газов 16 % CO_2 и 9 % H_2O (по объему), полное давление газов 0,102 МПа, температура 1500 К.

Глава 8 ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛООБМЕНА

§ 8.1. ТЕПЛОВОЙ РАСЧЕТ ТЕПЛООБМЕННИКА

Общие положения. *Теплообменниками (теплообменными аппаратами)* называют устройства, в которых происходит процесс передачи теплоты от теплоносителя с более высокой температурой к теплоносителю с менее высокой температурой. Теплообменники применяются в различных отраслях народного хозяйства, например в энергетике, металлургии, пищевой и химической промышленности.

В зависимости от характера процесса передачи теплоты от одной жидкости к другой теплообменники бывают смесительные и поверхностные.

В *смесительных* аппаратах теплота передается за счет перемешивания непосредственно контактирующих частиц горячей и холодной жидкостей (газов). Такими теплообменниками являются градирни тепловых электростанций.

Поверхностные аппараты характеризуются тем, что теплообмен в них происходит между твердой стенкой и омывающим ее теплоносителем. Поверхностные теплообменники разделяют на рекуперативные и регенеративные.

Рекуперативными называют такие теплообменники, в которых процесс передачи теплоты от горячего теплоносителя к холодному осуществляется через разделяющую их твердую стенку.

Такими теплообменниками являются парогенераторы, конденсаторы, котлы и прочие.

Регенеративными называют теплообменники, в которых одна и та же поверхность нагрева через определенные промежутки времени (периодически) омывается то горячим, то холодным теплоносителем. Следует отметить, что в отличие от рекуператоров, работающих, как правило, в стационарном режиме, в регенераторах процесс передачи теплоты всегда нестационарный. Характерным примером регенеративных аппаратов являются воздухоподогреватели доменных и мартеновских печей.

В последнее время в связи с развитием атомной энергетики все большее значение приобретают *теплообменники с внутренними источниками энергии*. Они имеют только один теплоноситель, который отводит теплоту, выделенную в самом аппарате. К такого рода тепло-

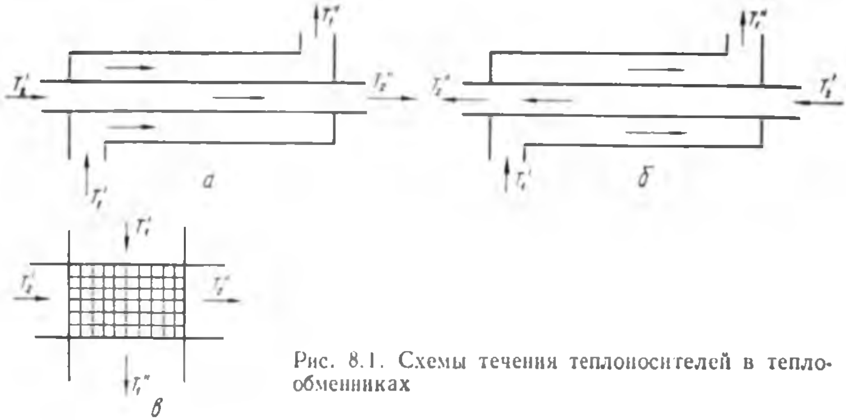


Рис. 8.1. Схемы течения теплоносителей в теплообменниках

обменникам относятся ядерные реакторы, электронагреватели и прочие устройства.

Одним из важных факторов, определяющих эффективность работы теплообменика, является выбор направления движения теплоносителя. Выделим три основные группы теплообменников: прямоточные (рис. 8.1, *а*), в которых оба теплоносителя движутся параллельно в одном направлении — такую схему движения называют *прямоточной* или *прямотоком*, противоточные (рис. 8.1, *б*), в которых два теплоносителя движутся в противоположных направлениях — такую схему движения называют *противоточной* или *противотоком* и перекрестного тока (рис. 8.1, *в*), когда один теплоноситель движется перпендикулярно к направлению движения второго теплоносителя — такую схему движения называют *перекрестным током*. На практике используются теплообменники самых различных конструкций: одноходовые, многоходовые, змеевиковые и пр. Более подробно эти вопросы изложены в работах [26, 76].

Схема теплового расчета. Тепловые расчеты теплообменных аппаратов могут быть проектными и проверочными.

Целью *проектного (конструкторского)* теплового расчета является определение площади теплообменной поверхности. Такой расчет выполняется при проектировании нового аппарата.

Проверочный тепловой расчет выполняется по заданной (известной) поверхности теплообменного аппарата. Целью такого расчета является определение количества переданной теплоты, конечных температур теплоносителей.

Тепловой расчет теплообменника сводится к совместному решению уравнений теплового баланса и теплопередачи.

Проектный расчет теплообменника. В этом случае должны быть заданы расходы нагревающего (индекс 1) и нагреваемого (индекс 2) теплоносителей, их температуры на входе в теплообменник T_1', T_2' и на выходе из него T_1'', T_2'' и теплоемкости. Необходимо найти площадь поверхности нагрева.

Уравнение теплового баланса в дифференциальной форме имеет вид

$$dQ = Gc_p dT. \tag{8.1}$$

Проинтегрировав (8.1), получим

$$Q = Gc_p (T'' - T'), \tag{8.2}$$

где Q — количество теплоты, отдаваемое теплоносителем, G — массовый расход, $\Delta T = T'' - T'$ — изменение температуры, C_p — изобарная теплоемкость жидкости.

Пренебрегая потерями теплоты в окружающую среду, получаем уравнение теплового баланса для нагревающего и нагреваемого теплоносителей:

$$dQ = -G_1 c_{p_1} dT_1 = G_2 c_{p_2} dT_2 \tag{8.3}$$

или

$$Q = G_1 c_{p_1} (T_1' - T_1'') = G_2 c_{p_2} (T_2'' - T_2'). \tag{8.4}$$

Величина Gc_p, входящая в соотношения (8.3), (8.4), называется *водяным эквивалентом* (расход воды, который переносит то же количество теплоты, что и один килограмм действительного теплоносителя в час) и обозначается

$$W = Gc_p. \tag{8.5}$$

С учетом (8.5) выражения (8.3), (8.4) имеют вид

$$dQ = -W_1 dT_1 = W_2 dT_2, \tag{8.6}$$

$$Q = W_1 (T_1' - T_2') = W_2 (T_2'' - T_1''). \tag{8.7}$$

Уравнение теплового баланса позволяет найти расход теплоносителя, определить количество передаваемой теплоты и справедливо для идеального теплообменника, в котором потери теплоты при переходе от горячей жидкости к холодной отсутствуют.

Эффективность (коэффициент полезного действия реального теплообменника) определяется по формуле

$$\eta = \frac{W_2 (T_2'' - T_2')}{W_1 (T_1' - T_1'')} \cdot 100\,\%.$$

Чтобы определить необходимую для передачи теплоты площадь теплообмена, используем уравнение теплопередачи

$$dQ = k\Delta T dF, \tag{8.8}$$

где k — коэффициент теплопередачи.

Интегрируя (8.8) при $k/F = \mathrm{const}$, получим

$$Q = \int_0^F k\Delta T dF = k\Delta T F. \tag{8.9}$$

Из (8.9) получаем искомую площадь поверхности нагрева

$$F = Q/(k\Delta T). \tag{8.10}$$

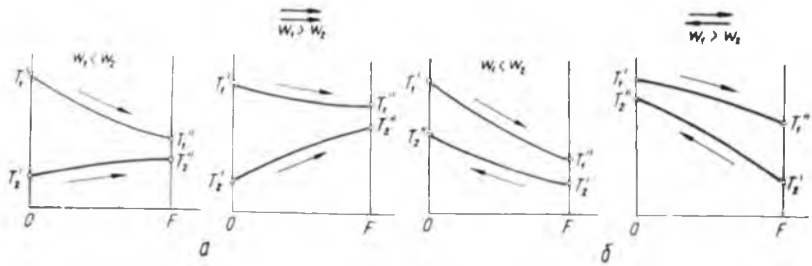


Рис. 8.2. Характер изменения температур теплоносителей при прямотоке (*а*) и противотоке (*б*)

Отсюда видно, что при расчете теплообменника необходимо определить сначала средний температурный напор ΔT и коэффициент теплопередачи k.

При работе теплообменника температура обоих теплоносителей изменяется непрерывно. Характер этого изменения зависит от направлений взаимного движения, рода жидкостей и от соотношения их водяных эквивалентов (рис. 8.2).

Используя уравнения теплового баланса и теплопередачи, определим изменение температуры теплоносителей и средний температурный напор между ними для прямотока и противотока.

Для прямотока из уравнений (8.6) и (8.8) получаем

$$d(T_1 - T_2) = -mk\Delta T\Delta F, \tag{8.11}$$

или

$$d\Delta T/\Delta T = -mkdF, \tag{8.12}$$

где $\Delta T = T_1 - T_2$, $m = 1/W_1 + 1/W_2$.

Проинтегрируем равенство (8.12), считая m, k постоянными,

$$\int_{\Delta T_1}^{\Delta T} \frac{d\Delta T}{\Delta T} = -mk\int_0^F dF \tag{8.13}$$

или

$$\ln(\Delta T/\Delta T_1) = -mkF. \tag{8.14}$$

Отсюда

$$\Delta T = \Delta T_1 e^{-mkF}. \tag{8.15}$$

При противотоке температуры обоих теплоносителей вдоль поверхности теплообмена понижаются (рис. 8.2, *б*) и уравнение теплового баланса принимает вид

$$dQ = -W_1 dT_1 = -W_2 dT_2, \tag{8.16}$$

откуда $d(T_1 - T_2) = -mdQ$, где $m = 1/W_1 - 1/W_2$.

Средний по поверхности теплообмена температурный напор определяется соотношением

$$\overline{\Delta T} = \frac{1}{F}\int_0^F \Delta T dF. \tag{8.17}$$

Подставляя в соотношение (8.17) ΔT из (8.15), получим

$$\Delta\overline{T} = \frac{\Delta T_1}{F}\int\limits_0^F e^{-mkF}dF = -\frac{\Delta T_1}{mkF}(e^{-kmF} - 1). \tag{8.18}$$

Подставляя в выражение (8.18) значения mkF и e^{-mkF} из (8.14) и (8.15), находим

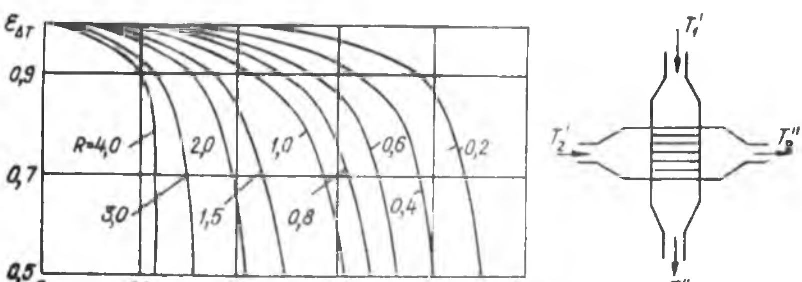
$$\Delta\overline{T} = \frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{\ln(\Delta T_2/\Delta T_1)}. \tag{8.19}$$

Величину $\Delta\overline{T}$ называют *среднелогарифмическим температурным напором*. Формула (8.19) справедлива как для прямоточной, так и для противоточной схемы движения. В случае прямотока $\Delta T_1 = T_1' - T_2'$, $\Delta T_2 = T_1'' - T_2''$, в случае противотока $\Delta T_1 = T_1' - T_2''$, $\Delta T_2 = T_1'' - T_2'$.

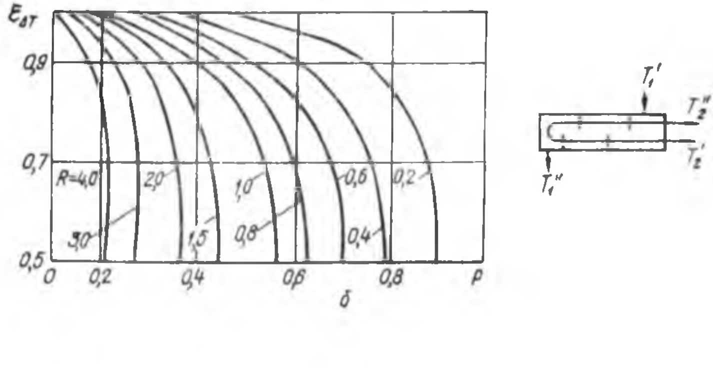
Для сложных теплообменников, имеющих несколько труб с перекрестным током, средний температурный напор

$$\Delta\overline{T} = \Delta\overline{T}_{\text{прот}}\varepsilon_{\Delta T}, \tag{8.20}$$

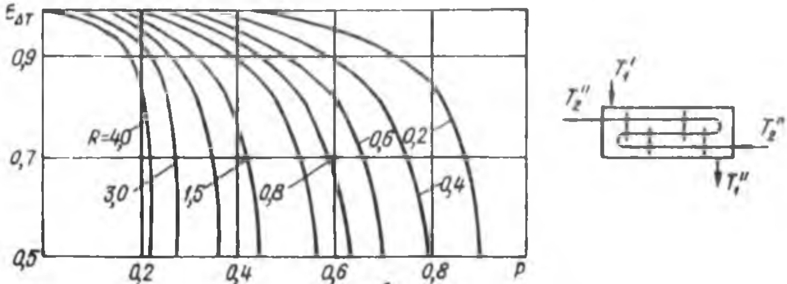
где $\Delta\overline{T}_{\text{прот}}$ — среднелогарифмический температурный напор, определяемый по формуле (8.19) для однотрубного теплообменника с противотоком; $\varepsilon_{\Delta T}$ — поправочный коэффициент, являющийся функцией температур на входе и выходе и взаимной ориентации потоков теплоносителя (рис. 8.3). Для теплообменника со сложной конфигурацией поверхности теплообмена коэффициент $\varepsilon_{\Delta T}$ определяют экспериментально.



а

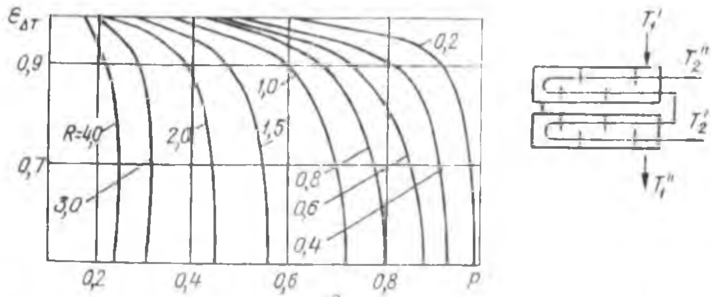


б



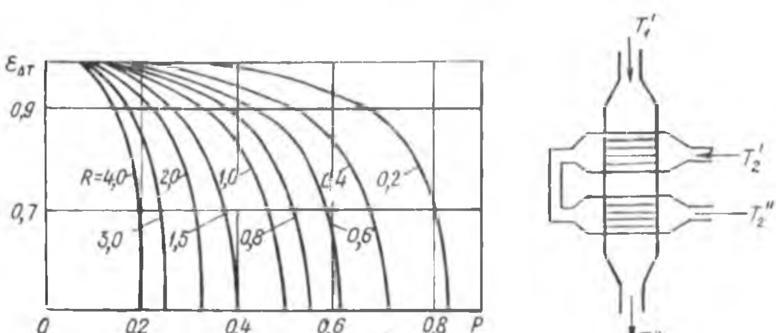
ε_ΔT
0,9
0,7
0,5
0,2
0,4
0,6
0,8
P
R=4,0
3,0
1,5
0,8
0,6
0,2
0,4
T₁′
T₂″
T₂″
T₁″

в



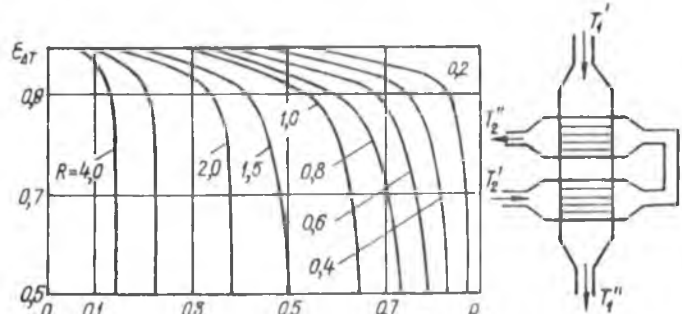
ε_ΔT
0,9
0,7
0,2
0,4
0,6
0,8
P
0,2
1,0
R=4,0
2,0
1,5
3,0
0,8
0,6
0,4
T₁′
T₂″
T₂′
T₁″

г



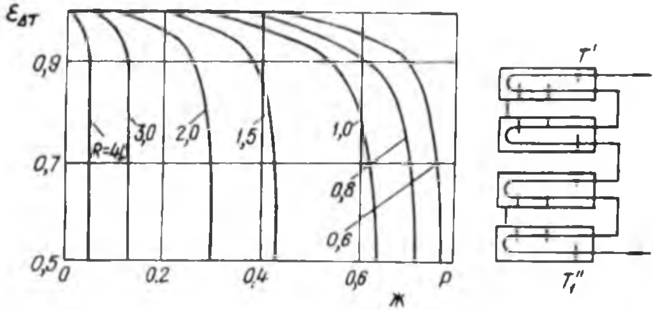
ε_ΔT
0,9
0,7
0
0,2
0,4
0,6
0,8
P
R=4,0
2,0
1,0
0,4
0,2
3,0
1,5
0,8
0,6
T₁′
T₂′
T₂″
T₁″

д

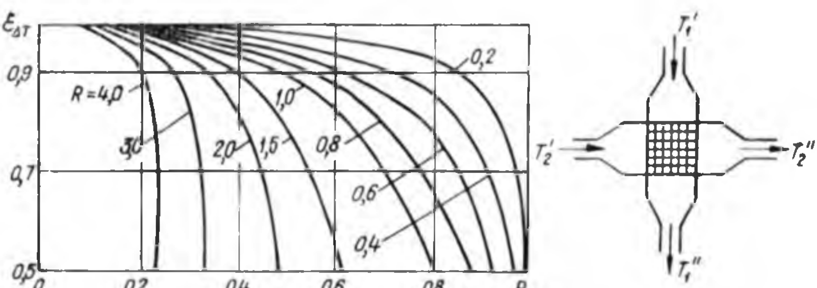


ε_ΔT
0,9
0,7
0,5
0
0,1
0,3
0,5
0,7
P
0,2
1,0
R=4,0
2,0
1,5
0,8
0,6
0,4
T₁′
T₂″
T₂′
T₁″

е



ж



з

Рис. 8.3. Определение $\varepsilon_{\Delta t}$ для расчета среднелогарифмического температурного напора при различных схемах движения теплоносителей в теплообменнике (диаграммы составлены для формулы (8.20) с параметрами $P = (T_2'' - T_1')/(T_1' - T_2') = \delta T_2/\Delta T_{\text{макс}}$; $R = (T_1' - T_2)/(T_2'' - T_2') = \delta T_1/\delta T_2$):

а — перекрестный ток; теплоноситель *1* в межтрубном пространстве — перемешивающийся; *б* — многоходовой в межтрубном пространстве и два хода теплоносителя *2* в трубном пучке; *в* — многоходовой в межтрубном пространстве и три хода теплоносителя *2* в трубном пучке; *г* — многоходовой в межтрубном пространстве и четыре хода теплоносителя *2* в трубном пучке; *д* — перекрестный ток, один ход в межтрубном пространстве (перемешивающийся теплоноситель *1*), два хода теплоносителя *2* в трубном пучке по прямоточному принципу; *е* — перекрестный ток, один ход в межтрубном пространстве (перемешивающийся теплоноситель *1*), два хода теплоносителя *2* в трубном пучке по противоточному принципу; *ж* — многоходовой в межтрубном пространстве и восемь ходов теплоносителя в трубном пучке; *з* — перекрестный ток, оба теплоносителя перемешивающиеся

После определения $\Delta\overline{T}$ для окончательного решения поставленной задачи остается найти коэффициент теплопередачи k, который входит в соотношение (8.10). Однако определение коэффициента теплопередачи и составляет основную трудность теплового расчета теплообменных аппаратов. Чтобы определить коэффициент k, необходимо знать значения коэффициентов теплоотдачи α_1, α_2 со стороны обоих теплоносителей, а также коэффициент теплопроводности стенки λ. Тогда, например, для плоской однослойной стенки коэффициент теплопередачи k подсчитывается по известной формуле (см. гл. 2):

$$k = \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}\right)^{-1}, \tag{8.21}$$

а для цилиндрической стенки с диаметрами d_1, d_2 ($d_2 > d_1$)

$$k = \left(\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda}\ln\frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}\right)^{-1}. \tag{8.22}$$

Значения коэффициента теплопроводности практически для любого материала, используемого в теплообменниках, можно найти в справочниках теплофизических свойств.

Сложность определения коэффициентов теплоотдачи связана с тем, что процесс переноса теплоты осуществляется одновременно конвекцией и теплопроводностью, а при высокотемпературном потоке еще и излучением. Таким образом, в общем случае

$$\alpha = \alpha_к + \alpha_р, \tag{8.23}$$

где $\alpha_к$ — конвективный коэффициент теплоотдачи, учитывающий теплопроводность; $\alpha_р$ — коэффициент теплоотдачи излучением. Коэффициент $\alpha_р$ может быть определен аналитически, если известны степень черноты системы и температурный напор. Основная трудность состоит в определении конвективного коэффициента теплоотдачи $\alpha_к$, зависящего, как было отмечено в гл. 4, от множества факторов. Основной путь для его определения — проведение эксперимента.

Зная значения коэффициента теплопередачи, площади поверхности теплообмена, количество передаваемой теплоты и среднего температурного напора, можно определить конечные температуры теплоносителей, а также температуры поверхности нагрева.

Проверочный расчет теплообменника. В этом случае задаются площадь поверхности нагрева F, коэффициент теплопередачи k, водяные эквиваленты W_1 и W_2 и начальные температуры горячей (T_1') и холодной (T_2') жидкостей. Необходимо найти конечные температуры жидкостей T_1'', T_2'' и количество переданной теплоты Q.

Из равенства (8.7) для горячей жидкости имеем

$$T_1'' = T_1' - Q/W_1, \tag{8.24}$$

для холодной —

$$T_2'' = T_2' + Q/W_2. \tag{8.25}$$

Принимая изменение разности температур вдоль поверхности теплообмена малым ($\Delta T_1/\Delta T_2 < 2$), распределение температур по длине поверхности будет линейным и среднелогарифмический напор (см. соотношение (8.19)) можно заменить средним арифметическим крайних напоров

$$\Delta\bar{T} = \frac{1}{2}(\Delta T_1 + \Delta T_2) = \frac{T_1' + T_1''}{2} - \frac{T_2' + T_2''}{2}. \tag{8.26}$$

Подставляя соотношение (8.26) в уравнение теплопередачи (8.9), находим

$$Q = kF\left(\frac{T_1' + T_1''}{2} - \frac{T_2' + T_2''}{2}\right). \tag{8.27}$$

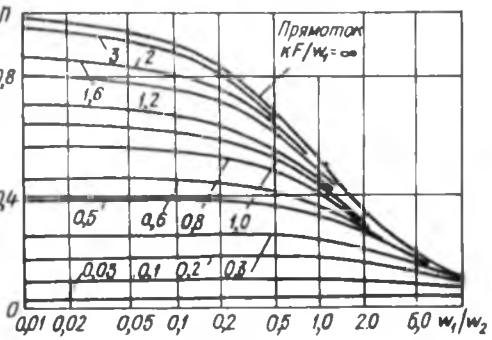


Рис. 8.4. Функция $\Pi = f(kF/W_1;\ W_1/W_2)$ для расчета конечной температуры теплоносителей при прямоточной схеме движения

Исключая из (8.27) с помощью формул (8.24) неизвестные температуры T_1'', T_2'', получаем

$$Q = \frac{T_1' - T_2'}{\dfrac{1}{kF} + \dfrac{1}{2W_1} + \dfrac{1}{2W_2}}. \quad (8.28)$$

По известному количеству переданной теплоты Q с помощью формул (8.24), (8.25) определяем конечные температуры рабочих жидкостей T_1'', T_2''.

Приведенный способ расчета очень прост, однако его можно использовать лишь при незначительном изменении разностей температур жидкостей по длине теплообменника. В общем случае следует учитывать схему движения рабочих жидкостей. Покажем это на примере прямоточной схемы движения. Из соотношения (8.15) имеем

$$\Delta T_2 = \Delta T_1 e^{-mkF}. \quad (8.29)$$

Если это уравнение записать в виде

$$1 - \frac{T_1'' - T_2''}{T_1' - T_2'} = 1 - e^{-(1/W_1 + 1/W_2)kF}$$

или

$$(T_1' - T_1'') + (T_2'' - T_2') = (T_1' - T_2')\left[1 - e^{-(1/W_1 + 1/W_2)kF}\right],$$

то, заменяя разность $T_2'' - T_2'$, с помощью уравнения теплового баланса (8.7), получим

$$T_1' - T_1'' = (T_1' - T_2')\frac{1 - e^{-(1+W_1/W_2)kF/W_1}}{1 + W_1/W_2} = (T_1' - T_2')\Pi. \quad (8.30)$$

Из соотношения (8.30) следует, что изменение температуры горячей жидкости $\delta T_1 = T_1' - T_1''$ равно некоторой доле П располагаемого начального температурного напора ΔT_1 и эта доля определяется двумя безразмерными параметрами W_1/W_2, kF/W_1.

Далее, из уравнения баланса (8.7) определяем изменение температуры холодной жидкости

$$\delta T_2 = T_2'' - T_2' = \delta T_1 \frac{W_1}{W_2} = \Delta T_1 \Pi \frac{W_1}{W_2}.$$

Зная изменения температур горячей (δT_1) и холодной (δT_2) жидкостей, определяем их конечные температуры:

$$T_1'' = T_1' - \delta T_1,\quad T_2'' = T_2' + \delta T_2. \quad (8.31)$$

Количество теплоты, передаваемой через поверхность теплообмена, определяется по уравнению теплового баланса (8.7):

$$Q = W_1 \delta T_1 = W_1 \Delta T_1 \Pi. \quad (8.32)$$

Значение функции $\Pi = f(W_1/W_2,\ kF/W)$ приведено на рис. 8.4.

Задача 8.1. Получить соотношение для полного проверочного расчета при противоточной схеме движения.

Р е ш е н и е. В этом случае из уравнения (8.15) имеем

$$\frac{T_1'' - T_2'}{T_1' - T_2''} = e^{-\frac{kF}{W_1}\left(1-\frac{W_1}{W_2}\right)}.$$

Дальнейшие выкладки такие же, как и для прямотока. Из последнего соотношения

$$1 - \frac{T_1'' - T_2'}{T_1' - T_2''} = 1 - e^{-\frac{kF}{W_1}\left(1-\frac{W_1}{W_2}\right)}$$

или

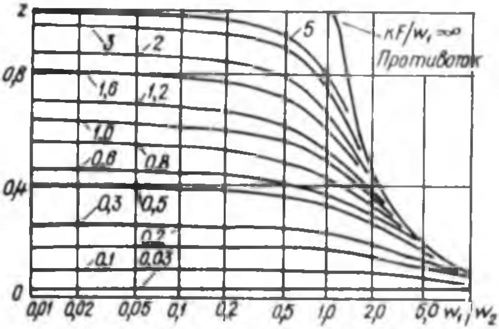


Рис. 8.5. Функция $Z = \varphi(kF/W_1;\ W_1/W_2)$ для расчета конечной температуры теплоносителей при противоточной схеме движения

$$(T_1' - T_1'') - (T_2'' - T_2') = (T_1' - T_2'')\left[1 - e^{-\frac{kF}{W_1}\left(1-\frac{W_1}{W_2}\right)}\right].$$

Подставляя в последнее равенство $T_2'' - T_2' = (T_1' - T_1'')\dfrac{W_1}{W_2}$ из (8.7), получаем

$$\delta T_1 = T_1' - T_1'' = (T_1' - T_2')\,\frac{1 - e^{-\left(1-\frac{W_1}{W_2}\right)(kF/W_1)}}{1 - \left(\dfrac{W_1}{W_2}\right)e^{-(1-W_1/W_2)(kF/W_1)}} = (T_1' - T_2')Z, \quad (8.33)$$

откуда

$$\delta T_2 = T_2'' - T_2' = (T_1' - T_2')\,\frac{W_1}{W_2}\,Z. \quad (8.34)$$

Далее проводим расчет по формулам (8.31), а выражение (8.32) для определения передаваемого количества теплоты примет вид

$$Q = W_1\delta T_1 = W_1(T_1' - T_2')Z. \quad (8.35)$$

Значения функции $Z = \varphi(W_1/W_2,\ kF/W)$ определяются по графику, приведенному на рис. 8.5.

Задача 8.2. В холодильной установке необходимо охладить жидкость, расход которой $G_1 = 275$ кг/ч от $T_1' = 120°$ С до $T_1'' = 50$ °С. Теплоемкость жидкости $C_{p_1} = 3{,}05$ кДж/(кг·К). Для охлаждения используется вода с $T_2' = 10$ °С, ее расход $G_2 = 1100$ кг/ч, теплоемкость $C_{p_2} = 4{,}19$ кДж/(кг·К).

Определить площадь поверхности нагрева при прямотоке, если коэффициент теплопередачи $k = 1000$ Вт/(м²·К).

Р е ш е н и е. Водяные эквиваленты W_1, W_2 определяем по формуле (8.5):

$$W_1 = G_1C_{p_1} = \frac{275}{3600}\cdot 3{,}05 \approx 0{,}23 \text{ кВт/К},$$

$$W_2 = G_2C_{p_2} = \frac{1100}{3600}\cdot 4{,}19 \approx 1{,}28 \text{ кВт/К}.$$

Конечную температуру воды T_2'' определяем из уравнения (8.7):

$$T_2'' = \frac{W_1}{W_2}(T_1' - T_1'') + T_2' = \frac{0{,}23}{1{,}28}(120 - 50) + 10 \approx 22{,}6 \text{ °C}.$$

Среднюю разность температур при прямотоке определяем по формуле (8.19):

$$\Delta \overline{T} = \frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{\ln(\Delta T_2/\Delta T_1)}, \text{ где } \Delta T_1 = T_1' - T_2', \ \Delta T_2 = T_1'' - T_2,$$

$$\Delta \overline{T} = \frac{50 - 22{,}6 - 120 + 10}{-\ln\dfrac{120-10}{50-22{,}6}} \approx 59\ {}^\circ\mathrm{C}.$$

Количество переданной теплоты определяем по уравнению (8.4):

$$Q = W_1 (T_1' - T_1'') = 0{,}23\,(120 - 50) \approx 16{,}1\ \text{кВт}.$$

Площадь поверхности нагрева определяем из уравнения теплопередачи (8.9):

$$F = \frac{Q}{k\Delta\overline{T}} = \frac{16{,}1\cdot 10^3}{1000\cdot 59} \approx 0{,}273\ \text{м}^3.$$

§ 8.2. ГИДРОМЕХАНИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ТЕПЛООБМЕННИКОВ

Задачей расчета является определение перепада давления (потери) теплоносителя $\Delta p = p_1 - p_2$ на участке между входом и выходом из теплообменника.

Полный перепад давления, необходимый для движения рабочей жидкости через теплообменник,

$$\Delta p = \sum \Delta p_{\text{тр}} + \sum \Delta p_{\text{м}} + \sum \Delta p_{\text{ус}} + \sum \Delta p_{\text{с}}, \tag{8.36}$$

где $\Delta p_{\text{тр}}$ — сопротивление трения; $\Delta p_{\text{м}}$ — местное сопротивление; $\Delta p_{\text{ус}}$ — сопротивление ускорения потока; $\Delta p_{\text{с}}$ — сопротивление самотяги.

Потери давления на преодоление сил трения при течении несжимаемой жидкости в каналах при безотрывочном течении

$$\Delta p_{\text{тр}} = \xi \frac{l}{D} \frac{\rho w^2}{2}, \tag{8.37}$$

где ξ — коэффициент сопротивления трения; l — длина канала; $D = 4F/П$ — эквивалентный (гидравлический) диаметр (F, $П$ — площадь поперечного сечения и периметр канала); ρ, w — плотность и средняя скорость жидкости.

Коэффициент сопротивления трения определяют следующим образом [1]:

при ламинарном стабилизированном течении в изотермических условиях для гладких прямых каналов

$$\xi = A_0/\mathrm{Re}_{ж}, \tag{8.38}$$

где

$$A_0 = \begin{cases} 64 \text{ для трубы,} \\ 57 \text{ для канала квадратного сечения,} \\ 96 \text{ для канала кольцевого сечения;} \end{cases}$$

при ламинарном неизотермическом течении потока

$$\xi = \frac{A_0}{\mathrm{Re}_{ж}} \left(\frac{\mathrm{Pr}_{с}}{\mathrm{Pr}_{ж}}\right)^{0,33} \left[1 + 0{,}22\left(\frac{\mathrm{Gr Pr}}{\mathrm{Re}}\right)_{ж}^{0,15}\right]; \tag{8.39}$$

при турбулентном изотермическом течении

$$\xi = (1{,}82 \lg \mathrm{Re}_ж - 1{,}64)^{-2}; \qquad (8.40)$$

при турбулентном неизотермическом течении

$$\xi = (1{,}82 \lg \mathrm{Re}_ж - 1{,}64)^{-2} \left(\frac{\mathrm{Pr}_с}{\mathrm{Pr}_ж}\right)^{0{,}33}; \qquad (8.41)$$

при турбулентном течении с учетом шероховатости стенок труб

$$\xi = 0{,}11\,(\Delta/D_в + 68/\mathrm{Re}_ж)^{0{,}25}, \qquad (8.42)$$

где $d_в$ — внутренний диаметр трубы; Δ — эквивалентная абсолютная шероховатость (для бесшовных стальных новых труб $\Delta = 0{,}04$ мм; для сварных стальных новых труб $\Delta = 0{,}05$ мм; для умеренно заржавевших труб $\Delta = 0{,}5$ мм; для старых заржавевших труб $\Delta = 1$ мм; для чугунных труб, бывших в употреблении, $\Delta = 2$ мм; для очень старых труб $\Delta \leqslant 3$ мм).

Местные гидравлические сопротивления определяются по формуле

$$\Delta p_м = \frac{1}{2}\zeta\rho w^2, \qquad (8.43)$$

где ζ — коэффициент местного сопротивления, который находят по справочникам. Его можно определить также по формулам:

при повороте потока в колене на угол α

$$\zeta = \sin^2(\alpha/2) + 2\sin^4(\alpha/2); \qquad (8.44)$$

при внезапном расширении потока

$$\zeta = (1 - F_1/F_2)^2, \qquad (8.45)$$

где F_1, F_2 — площади сечений канала до и после расширения;

при внезапном сужении потока по табл. 8.1.

Таблица 8.1

F_1/F_2	0,01	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
ζ	0,5	0,47	0,42	0,38	0,34	0,3	0,25	0,20	0,15	0,06	0

Сопротивление ускорения потока

$$\Delta p_{ус} = \rho_2 w_2^2 - \rho_1 w_1^2, \qquad (8.46)$$

где индексы 1 и 2 определяют величины для входного и выходного сечений канала.

Сопротивление самотяги, возникающее при сообщении теплообменного аппарата с окружающей средой,

$$\Delta p_с = \pm g(\rho_0 - \rho) h, \qquad (8.47)$$

где h — расстояние по вертикали между входом и выходом теплоносителя; ρ и ρ_0 — средние плотности теплоносителя и окружающей среды. Знак плюс в формуле (8.47) выбирают при движении сверху вниз, минус — при движении снизу вверх. Если теплообменник изолирован от окружающей среды, то $\Delta p_0 = 0$.

Зная полное гидравлическое сопротивление Δp (соотношение (8.36)), можно определить мощность, необходимую для перемещения жидкости через теплообменник

$$N = \frac{V\Delta p}{\eta} = \frac{G\Delta p}{\rho\eta}, \tag{8.48}$$

где V — объемный расход жидкости, м³/с; G — массовый расход жидкости, кг/с; $\eta = \eta_н\eta_п\eta_д$ — общий коэффициент полезного действия ($\eta_н$, $\eta_п$, $\eta_д$ — коэффициенты полезного действия соответственно насоса (вентилятора), передачи и двигателя).

§ 8.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУР В КОНСТРУКЦИЯХ ЯДЕРНЫХ РЕАКТОРОВ

Развитие атомной энергетики выдвинуло в число первоочередных задачи создания и эксплуатации ядерных реакторов, обеспечивающих высокую плотность энерговыделения, высокие температуры, имеющих длительный срок эксплуатации.

Большинство элементов конструкций реакторов работают при высокой, периодически меняющейся температуре, что приводит к развитию явления термической усталости. Основными и наиболее напряженными конструктивными элементами реактора являются тепловыделяющие элементы (твэлы). В данном параграфе рассмотрены задача определения температурного поля в твэле, имеющем форму эллиптического цилиндра, а также задача теплового удара в конструктивных элементах реактора.

Тепловыделяющий элемент в форме эллиптического цилиндра [75]. Рассматриваемый твэл представляет собой бесконечно длинный ортотропный эллиптический цилиндр с полуосями a и b ($a > b$), в объеме которого распределены тепловые источники с постоянной плотностью q_v. На боковой поверхности твэла происходит теплообмен с внешней средой по закону Ньютона — Рихмана:

$$q|_S = \alpha(T|_S - T_S), \tag{8.49}$$

где T_S — температура теплоносителя, омывающего твэл. Применим для расчета коэффициента теплоотдачи следующую зависимость:

$$\alpha = Hp, \; p = \frac{a^2b^2}{\sqrt{a^4y^2 + b^4x^2}}, \; H = \text{const}. \tag{8.50}$$

Соотношение (8.50) имеет следующую геометрическую интерпретацию: значение коэффициента α в произвольной точке эллипса (точка M на рис. 8.6) пропорционально расстоянию от центра до касательной, проведенной к эллипсу в этой точке. В работе [75] отмечается, что физически подобные ситуации могут возникать при омывании твэла потоком жидкости или газа.

С математической точки зрения расчет температурного поля в твэле сводится к решению стационарного уравнения теплопроводности

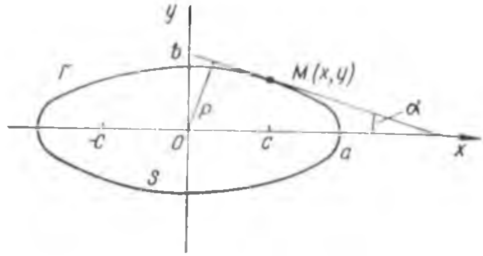


Рис. 8.6. Геометрическая интерпретация коэффициента теплоотдачи для цилиндра эллиптического сечения

$$\lambda_1 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda_2 \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = -q_v \quad (8.51)$$

с граничными условиями

$$\lambda_1 \frac{\partial T}{\partial x} \cos(nx)|_\Gamma + \lambda_2 \frac{\partial T}{\partial y} \cos(ny)|_\Gamma + \alpha(T|_\Gamma - T_S) = 0, \quad (8.52)$$

где λ_1, λ_2 — коэффициенты теплопроводности в направлениях x, y; (nx), (ny) — углы между внешней нормалью к границе Γ и осями Ox, Oy.

Решение краевой задачи (8.51), (8.52) представим в виде суммы $T = T_S + T_1 + T_2$, где функция T_1 является решением задачи

$$\lambda_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + \lambda_2 \frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2} = -q_V, \quad (8.53)$$

$$T_1|_\Gamma = 0, \quad (8.54)$$

а функция T_2 удовлетворяет соотношениям

$$\lambda_1 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} + \lambda_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial y^2} = 0, \quad (8.55)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_2}{\partial x} \cos(n,\ x) + \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial y} \cos(n,\ y) + \alpha T_2 =$$
$$= -\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} \cos(n,\ x) - \lambda_2 \frac{\partial T_1}{\partial y} \cos(n,\ y); \ (x,\ y) \in \Gamma. \quad (8.56)$$

Решение краевой задачи (8.53), (8.54) имеет вид

$$T_1 = \frac{q_v a^2 b^2}{2(\lambda_2 a^2 + \lambda_1 b^2)} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right). \quad (8.57)$$

Справедливость соотношения (8.57) легко устанавливается его непосредственной подстановкой в уравнение (8.55). Решение уравнения (8.55) ищем в виде

$$T_2 = A\left(\frac{x^2}{\lambda_1} - \frac{y^2}{\lambda_2}\right) + Bxy + C. \quad (8.58)$$

Константы A, B, C определяются из граничного условия (8.56) и имеют вид

$$A = -\frac{2\lambda_1\lambda_2(\lambda_1 b^2 - \lambda_2 a^2)}{a^2b^2[4\lambda_1\lambda_2 + H(\lambda_2 a^2 + \lambda_1 b^2)]},$$
$$B = 0,$$
$$C = \frac{1}{H}\left[\left(2 + \frac{Hb^2}{\lambda_2}\right) - \frac{2\lambda_2}{b^2}\right].$$

С учетом соотношений (8.56) — (8.58) решение задачи (8.51), (8.52) примет вид

$$T = T_S + \frac{q_V}{2}\left[\frac{A_1B_1 - H(B_1x^2 + A_1y^2)}{H(\lambda_1B_1 + \lambda_2A_1)}\right], \tag{8.59}$$

где $A_1 = 2\lambda_1 + Ha^2$, $B_1 = 2\lambda_2 + Hb^2$.

Анализируя выражение (8.59), можно сделать следующий вывод: максимум температуры достигается в центре эллипса, минимум — на конце одной из полуосей (большая ось, если $\lambda_1 b^2 > \lambda_2 a^2$; малая ось, если $\lambda_1 b^2 < \lambda_2 a^2$). При $\lambda_1 b^2 = \lambda_2 a^2$ температура на границе эллипса будет постоянной:

$$T = T_S + \frac{q_V}{2H}.$$

В заключение приведем формулу для средней температуры, которая используется при вычислении наиболее опасных осевых напряжений:

$$T_{\text{ср}} = \frac{q_V}{8H(\lambda_1B_1 + \lambda_2A_1)}[4A_1B_1 - H(a^2B_1 + b^2A_1)]. \tag{8.60}$$

Тепловой удар в конструктивных элементах реактора [58]. Внезапная аварийная остановка реактора сопровождается быстрым падением температуры теплоносителя на выходе из активной зоны. Это явление, называемое тепловым ударом, приводит к резкому росту напряжений в конструктивных элементах реактора.

Напряжения, вызываемые тепловым ударом, могут быть уменьшены за счет постановки разделительного теплового экрана между несущей стенкой реактора и теплоносителем.

Рассмотрим задачу о тепловом ударе в предположении, что стенки элементов реактора и экран плоские.

Температурное поле, характеризующее тепловой удар, описывается уравнением нестационарной теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{8.61}$$

с начальными

$$T|_{\tau=0} = \vartheta_0 \tag{8.62}$$

и граничными условиями:

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \tag{8.63}$$

$$-\lambda\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=\delta} = \alpha\left(T\big|_{x=\delta} - \vartheta_c(\tau)\right), \tag{8.64}$$

где ϑ — температура теплоносителя; δ — общая толщина несущей стенки и теплового экрана; x — координата, отсчитываемая от наружной поверхности внутрь корпуса.

Решение начально-краевой задачи (8.61)—(8.64) имеет вид

$$T(x, \tau) = \vartheta(\tau) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\tau) \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right), \tag{8.65}$$

где

$$\begin{cases} A_n(\tau) = -B_n e^{-\frac{a\tau}{\delta}\mu_n^2} \int\limits_0^{\tau} \dfrac{\partial\vartheta}{\partial\tau} e^{\frac{a\tau}{\delta}\mu_n^2} d\tau, \\ B_n = \dfrac{4 \sin \mu_n}{2\mu_n + \sin 2\mu_n}. \end{cases} \tag{8.66}$$

Значения характеристических чисел μ_n находят из трансцендентного уравнения

$$\operatorname{tg} \mu_n = \frac{\mathrm{Bi}}{\mu_n}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{8.67}$$

По известному температурному полю уравнения

$$\sigma_{c_k}(\tau) = \frac{\alpha E}{1-\mu} [T_k(\tau) - T(c_k, \tau)], \tag{8.68}$$

где

$$T_k(\tau) = \frac{1}{c_k - d_k} \int\limits_{d_k}^{c_k} T(x, \tau)\, dx,$$

c_k, d_k — координаты наружной и внутренней поверхностей k-го слоя, находят напряжение на наружной поверхности k-го слоя.

Формула (8.68) удобна тем, что может быть использована для расчета напряжений при произвольно заданной функции $T(x, \tau)$, то есть при различных законах изменения температуры теплоносителя (экспоненциальный, линейный и так далее).

§ 8.4. ПЕРЕНОС ТЕПЛОТЫ ЧЕРЕЗ РЕБРА

Оребрение поверхности является одним из основных путей интенсификации теплопередачи. Необходимо отметить, что ребра различной геометрии и теплопроводности по-разному работают даже в одинаковых условиях при однородных источниках и стоках теплоты. В монографии [27] сформулированы основные упрощающие предположения, позволяющие провести тепловой расчет ребер различной геометрии. Они состоят в следующем:

1) тепловой поток и распределение температуры в ребре стационарны;

2) материал ребра изотропен, коэффициент теплопроводности $\lambda = \mathrm{const}$;

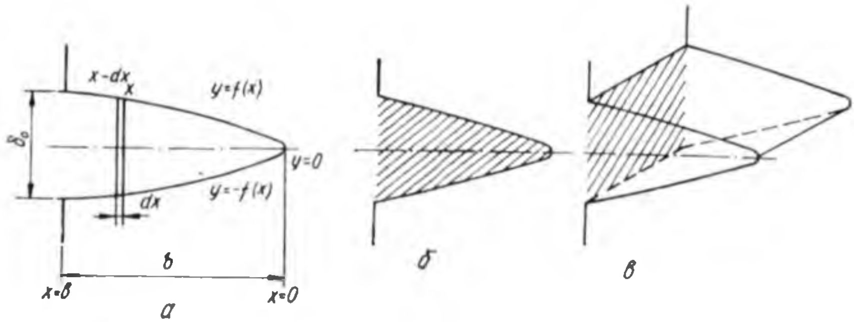


Рис. 8.7. Продольное ребро произвольного профиля:
а — расчетная схема; *б* — профильное сечение ребра; *в* — поперечное сечение ребра

3) коэффициент теплоотдачи постоянен по всей поверхности ребра;

4) температура среды, окружающей ребро, постоянная;

5) толщина ребра мала по сравнению с его высотой, что позволяет пренебречь температурными градиентами поперек ребра (по толщине);

6) температура в основании ребра постоянная;

7) отсутствуют контактное термическое сопротивление между ребром и основной поверхностью, а также источники и стоки теплоты внутри ребра;

8) тепловым потоком через торцевую поверхность ребра можно пренебречь по сравнению с тепловым потоком, отводимым с боковых поверхностей.

Продольные ребра. Рассмотрим продольное ребро произвольного профиля (рис. 8.7). Профиль ребра ограничен симметричными кривыми $y = f(x)$ и $y = -f(x)$. Тогда его площадь на единицу длины $S = 2f(x)$.

Рассмотрим стационарный тепловой баланс бесконечно малого элемента ребра высотой dx, заключенного между плоскостями x и $x + dx$, параллельными основанию, и кривыми $\pm f(x)$, ограничивающими профиль ребра. Разность между тепловым потоком, поступающим в элемент через сечение x и вытекающим из него через сечение $x + dx$, описывается соотношением

$$dq = \lambda \frac{d}{dx}\left[f(x)\frac{dT}{dx}\right]dx. \tag{8.69}$$

Этот же тепловой поток отводится в окружающую среду конвекцией

$$dq = 2\alpha(T - T_S)\,dx. \tag{8.70}$$

Приравнивая выражения (8.69), (8.70), получим

$$\lambda \frac{d}{dx}\left[f(x)\frac{dT}{dx}\right]dx = 2\alpha(T - T_S)\,dx,$$

или

$$f(x)\frac{d^2\Theta}{dx^2} + \frac{2df(x)}{dx^2}\,\frac{d\Theta}{dx} - \frac{2\alpha}{\lambda}\Theta = 0. \tag{8.71}$$

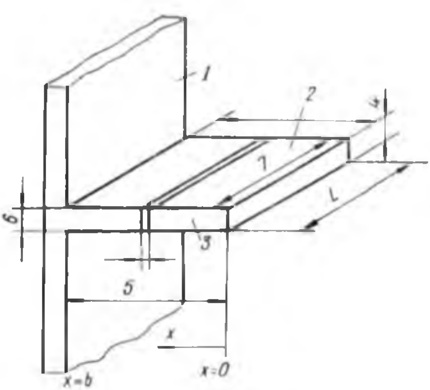


Рис. 8.8. Продольное ребро прямоугольного профиля и расчетная схема:

1 — основная поверхность; 2 — боковая поверхность; 3 — концевая поверхность; 4 — торец ребра; 5 — высота ребра; 6 — толщина δ_0; 7 — длина ребра

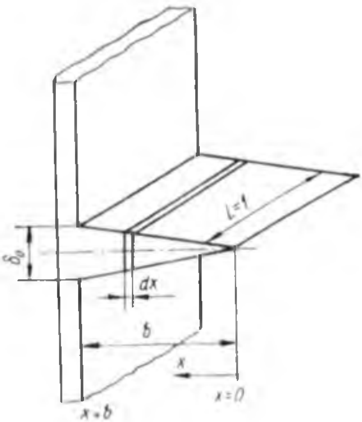


Рис. 8.9. Продольное ребро треугольного профиля

Обобщенная функция профиля $f(x)$ для продольных ребер записывается в виде

$$f(x) = \frac{\delta_0}{2}\left(\frac{x}{\delta}\right)^{(1-2n)/(1-n)}, \tag{8.72}$$

где δ — толщина ребра в основании. Для определения частного решения уравнения (8.71) используют граничные условия:

$$\Theta\Big|_{x=b} = \Theta_0, \quad \frac{d\Theta}{dx}\Big|_{x=0} = 0. \tag{8.73}$$

Используя обобщенное уравнение теплопроводности (8.71), функцию профиля (8.72) и граничные условия (8.73), получим распределение температур в ребрах различной геометрической формы.

Продольное ребро прямоугольного профиля (рис. 8.8). Функция профиля такого ребра имеет вид (показатель n в (8.72) равен 1/2):

$$f(x) = \frac{\delta_0}{2}; \quad \frac{df(x)}{dx} = 0. \tag{8.74}$$

Уравнение теплопроводности в этом случае

$$\frac{d^2\Theta}{dx^2} - \frac{2\alpha}{\lambda\delta_0}\Theta = 0. \tag{8.75}$$

Решив уравнение (8.75), получим

$$\Theta = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}, \tag{8.76}$$

где

$$m = (2\alpha/\lambda\delta_0)^{1/2}.$$

С учетом граничных условий (8.73) соотношение (8.76) примет вид

$$\Theta = \frac{\Theta_0 \operatorname{ch} mx}{\operatorname{ch} mb}, \tag{8.77}$$

откуда

$$q_0 = \lambda S \left.\frac{d\Theta}{dx}\right|_{x=b} = \lambda\delta_0 m\Theta_0 \operatorname{th} mb, \qquad (8.78)$$

где q_0 — тепловой поток, передаваемый через основание ребра.

Для сравнительного анализа ребер различной геометрической формы вводят показатель *эффективности ребра* — отношение теплового потока, действительно передаваемого ребром, к тепловому потоку, который передало бы такое же идеально проводящее ребро ($\lambda = \infty$) с однородной температурой, равной температуре в основании. Таким образом,

$$\eta = \frac{\alpha P \int\limits_0^b \Theta(x)\,dx}{\alpha P \Theta_0 b} = \frac{\int\limits_0^b \Theta(x)dx}{\Theta_0 b}, \qquad (8.79)$$

где P — периметр поперечного сечения ребра. С учетом соотношений (8.77), (8.78) выражение (8.79) примет вид

$$\eta = \frac{\operatorname{th} mb}{mb}. \qquad (8.80)$$

Продольное ребро треугольного профиля (рис. 8.9). Показатель функции в соотношении (8.72) $n = 0$ и она имеет вид

$$f(x) = \frac{\delta_0 x}{2b}; \quad \frac{df(x)}{dx} = \frac{\delta_0}{2b}. \qquad (8.81)$$

Уравнение теплопроводности в этом случае

$$x\frac{d^2\Theta}{dx^2} + \frac{d\Theta}{dx} - m^2 b\Theta = 0, \qquad (8.82)$$

где $m = (2\alpha/\lambda\delta_0)^{1/2}$.

Выражение (8.82) путем несложных преобразований приводится к уравнению вида

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - (x^2 + n^2)y = 0,$$

называемому *модифицированным уравнением Бесселя*. Его общее решение известно из курса математической физики (см., например, работу [71]) и имеет следующий вид:

$$y = C_1 I_n(x) + C_2 I_{-n}(x) \text{ для целых } n,$$
$$y = C_1 I_n(x) + C_2 K_n(x) \text{ для дробных } n.$$

Здесь $I_{\pm n}(x)$, $K_n(x)$ — модифицированные функции Бесселя первого и второго рода n-го порядка, представляющие собой бесконечные ряды вида

$$I_{\pm n}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m+n}}{2^{2m+n} m!\,\Gamma(m \pm n - 1)},$$

$$K_n(x) = \frac{\pi}{2\sin\pi x}\,[I_{-n}(x) - I_n(x)] \text{ для дробных } n;$$

$$K_n(x) = \frac{3}{\cos n\pi}\left[\frac{\partial I_{-n}(x)}{\partial n} - \frac{\partial I_n(x)}{\partial n}\right] \text{ для целых } n.$$

В этих соотношениях $\Gamma(k)$ — гамма-функция, представляющая интеграл вида

$$\Gamma(k) = \int_0^\infty x^{k-1} e^x dx,$$

где k — произвольное (не обязательно целое) положительное число.

Очевидно, что эти специальные функции настолько сложны, что не могут быть вычислены без помощи ЭВМ. На основе программ численного расчета этих функций составлены специальные таблицы (например, [46]), в которых содержатся значения функций Бесселя $I_0(x)$, $I_1(x)$, $K_0(x)$, $K_1(x)$, наиболее часто встречающихся в практике тепловых расчетов. Значения функций табулированы в определенном интервале с некоторым шагом (табл. 12 приложения). Если аргумент, при котором нужно вычислить значение функции, не совпадает с табличными аргументами, следует применять линейную интерполяцию по двум соседним значениям функции, вычисленным в ближайших к данному аргументу точках.

Решение уравнения (8.82) с учетом граничных условий имеет вид

$$\Theta = \frac{\Theta_0 I_0(2m\sqrt{bx})}{I_0(2mb)}. \tag{8.83}$$

Тепловой поток через основание находят из выражения (8.33), разлагая функцию Бесселя $I_0(2m\sqrt{bx})$ в ряд и почленно дифференцируя его при $x = b$;

$$q_0 = \frac{2\alpha\Theta_0 I_1(2mb)}{mI_0(2mb)}. \tag{8.84}$$

Эффективность ребра треугольного профиля определяется по формуле (8.79):

$$\eta = \frac{I_1(2mb)}{mbI_0(2mb)}. \tag{8.85}$$

Продольное ребро вогнутого параболического профиля (рис. 8.10). Показатель функции в соотношении (8.72) $n = \infty$ и она имеет вид

$$f(x) = \frac{\delta_0}{2}\left(\frac{x}{b}\right)^2; \quad \frac{df(x)}{dx} = \frac{\delta_0 x}{b^2}. \tag{8.86}$$

Уравнение теплопроводности в этом случае

$$x^2\frac{d^2\Theta}{dx^2} + 2x\frac{d\Theta}{dx} - m^2b^2\Theta = 0, \tag{8.87}$$

где $m = (2\alpha/\lambda\delta_0)^{1/2}$.

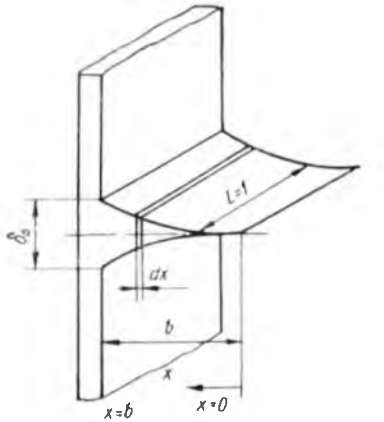


Рис. 8.10. Продольное ребро вогнутого параболического профиля

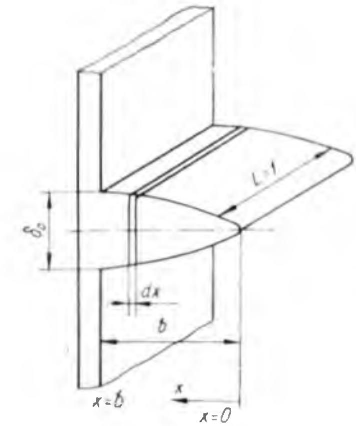


Рис. 8.11. Продольное ребро выпуклого параболического профиля

Решив уравнение (8.87) с учетом граничных условий, получим

$$\Theta = \Theta_0 \left(\frac{x}{b}\right)^p, \tag{8.88}$$

где $p = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 + 4m^2b^2)^{1/2}$.

Тепловой поток через основание ребра

$$q_0 = \frac{\lambda\delta_0\Theta_0}{2}\left(-1 + \sqrt{1 + 4m^2b^2}\right). \tag{8.89}$$

Эффективность ребра

$$\eta = \frac{\lambda\delta_0\Theta_0\left(-1 + \sqrt{1 + 4m^2b^2}\right)}{4b^2\alpha\Theta_0}. \tag{8.90}$$

Продольное ребро выпуклого параболического профиля (рис. 8.11). Показатель функции в соотношении (8.72) $n = \frac{1}{3}$, и она имеет вид

$$f(x) = \frac{\delta_0}{2}\left(\frac{x}{b}\right)^{1/2}; \quad \frac{df(x)}{dx} = \frac{\delta_0}{4\sqrt{bx}}. \tag{8.91}$$

Уравнение теплопроводности в этом случае

$$\sqrt{x}\frac{d^2\Theta}{dx^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{d\Theta}{dx} - m^2\sqrt{b}\,\Theta = 0, \tag{8.92}$$

где $m = (2\alpha/\lambda\delta_0)^{1/2}$.

Его решение с учетом граничных условий

$$\Theta = \Theta_0\left(\frac{x}{b}\right)^{1/4}\frac{I_{-1/3}\left(\frac{3}{4}mb^{1/4}x^{3/4}\right)}{I_{-1/3}\left(\frac{4}{3}mb\right)}. \tag{8.93}$$

Тепловой поток через основание ребра определяется выражением

$$q_0=\lambda\delta_0\Theta_0 m\,\frac{I_{2/3}\left(\frac{4}{3}\,mb\right)}{I_{-1/3}\left(\frac{4}{3}\,mb\right)}. \tag{8.94}$$

Эффективность ребра вычисляют по формуле

$$\eta=\frac{I_{2/3}\left(\frac{4}{3}\,mb\right)}{mbI_{1/3}\left(\frac{4}{3}\,mb\right)}. \tag{8.95}$$

Оптимальные формы продольных ребер. Приведенные соотношения позволяют решить простейшую задачу об определении оптимальных геометрических размеров ребер различной формы, которые обеспечивали бы отвод максимального количества теплоты. При этом максимальным будет и тепловой поток через основание ребра.

Ребро прямоугольного профиля. В качестве оптимизируемого параметра, определяемого через площадь профиля ребра $S=b\delta_0$, выбирают

$$\beta_L=mb=b\left(\frac{2\alpha}{\lambda\delta_0}\right)^{1/2}=S\left(\frac{2\alpha}{\lambda}\right)^{1/2}\delta_0^{-3/2}.$$

Выражение для теплового потока через основание ребра (8.78) с учетом $m=(2\alpha/\lambda\delta_0)^{1/2}$ и $S=b\delta_0$ имеет вид

$$q_0=\lambda\delta_0\Theta_0\left(\frac{2\alpha}{\lambda\delta_0}\right)^{1/2}\operatorname{th} S\left(\frac{2\alpha}{\lambda}\right)^{1/2}\delta_0^{-3/2}.$$

Дифференцируя последнее соотношение по δ_0 и приравнивая результат к нулю, получаем

$$3\beta_L\operatorname{sch}^2\beta_L=\operatorname{th}\beta_L.$$

Численное решение этого трансцендентного уравнения дает следующее значение корня: $\beta_L=1{,}4192$.

Используя значение β_L, получаем соотношение для оптимальной толщины ребра

$$\delta_0=\left[\frac{S}{1{,}4192}\left(\frac{2\alpha}{\lambda}\right)^{1/2}\right]^{2/3}=0{,}791\left(\frac{2\alpha S^2}{\lambda}\right)^{1/3}, \tag{8.96}$$

откуда легко определяется оптимальная высота ребра

$$b=\frac{S}{\delta_0}=1{,}262\left(\frac{\lambda S}{2\lambda}\right)^{1/3}. \tag{8.97}$$

Ребро треугольного профиля. В качестве оптимизируемого параметра выбирают

$$\beta_{\text{т}}=2mb=2\left(\frac{2\alpha}{\lambda\delta_0}\right)^{1/2}b, \tag{8.98}$$

который связан с площадью профильного сечения

$$S = \frac{\delta_0 b}{2}. \tag{8.99}$$

Подставив выражение (8.99) в (8.98), получим

$$\beta_т = 4S \left(\frac{2\alpha}{\lambda}\right)^{1/2} (\delta_0)^{-3/2}.$$

Выражение для теплового потока через основание ребра с учетом (8.99) имеет вид

$$q_0 = [4S (2\alpha)^2 \lambda]^{1/3} \Theta_0 \beta_т^{-1/3} \frac{I_1(\beta_т)}{I_0(\beta_т)}.$$

Дифференцируя последнее соотношение по $\beta_т$ и приравнивая результат к нулю, находим

$$I_0(\beta_т) I_2(\beta_т) + \frac{2}{3} \frac{I_0(\beta_т) I_1(\beta_т)}{\beta_т} = I_1^2(\beta_т).$$

Это уравнение имеет корень $\beta_т = 2{,}6188$. Зная $\beta_т$, с учетом выражений (8.99) и $m = (2\alpha/\lambda\delta_0)^{1/2}$ определяем оптимальную толщину ребра

$$\delta_0 = \left[\frac{4S (2\alpha/\lambda)^{1/2}}{2{,}6188}\right]^{2/3} = 1{,}328 \left(\frac{2\alpha S^2}{\lambda}\right)^{1/3} \tag{8.100}$$

и оптимальную высоту ребра

$$b = \frac{2S}{\delta_0} = 1{,}506 \left(\frac{S\lambda}{2\alpha}\right)^{1/3}. \tag{8.101}$$

Ребро вогнутого параболического профиля. В качестве оптимизируемого параметра выбирают

$$\beta_p = mb = \left(\frac{2\alpha}{\lambda\delta_0}\right)^{1/2} b. \tag{8.102}$$

Параметр β_p связан с площадью сечения соотношением

$$S = \frac{\delta_0 b}{3}. \tag{8.103}$$

Подставим соотношение (8.103) в (8.102):

$$\beta_p = 3S \left(\frac{2\alpha}{\lambda}\right)^{1/2} \delta_0^{-3/2}. \tag{8.104}$$

Выражение для теплового потока через основание ребра с учетом (8.104) имеет вид

$$q_0 = \frac{\lambda\Theta_0}{6S} \left[3S \left(\frac{2\alpha}{\lambda}\right)^{1/2}\right]^{4/3} \beta_p^{-4/3} [-1 + (1 + 4\beta_p^2)^{1/2}].$$

Дифференцируя последнее соотношение по β_p и приравнивая результат к нулю, получим

$$-\frac{4}{3} \beta_p^{-7/3} [-1 + (1 + 4\beta_p^2)^{1/2}] + \frac{1}{2} \beta_p^{-4/3} \frac{8\beta_p}{(1 + 4\beta_p^2)^{1/2}} = 0.$$

Корень этого уравнения $\beta_p = \sqrt{2}$. Затем из (8.104), зная β_p и учитывая, что $m = (2\alpha/\lambda\delta_0)^{1/2}$, находим оптимальную толщину

$$\delta_0 = 1{,}651\left(\frac{2\alpha S^2}{\lambda}\right)^{1/3} \tag{8.105}$$

и оптимальную высоту ребра

$$b = \frac{3S}{\delta_0} = 1{,}817\left(\frac{S\lambda}{2\alpha}\right)^{1/3}. \tag{8.106}$$

Сравнение продольных ребер. Сравним ребра прямоугольного, треугольного и вогнутого параболического профилей, чтобы определить, какое из них имеет наименьшую площадь профильного сечения для передачи заданного теплового потока.

Для ребра прямоугольного профиля тепловой поток

$$q_0 = \lambda\delta_0 m\Theta_0 \operatorname{th} mb = (2\alpha\lambda)^{1/2}\delta_0^{1/2} \operatorname{th} mb. \tag{8.107}$$

Для ребра оптимальной толщины $\beta_L = mb = 1{,}4192$

$$q_0 = (2\alpha\lambda)^{1/2}\left[0{,}791\left(\frac{2\alpha S}{\lambda}\right)^{1/3}\right]^{1/2}\Theta_0 \operatorname{th} 1{,}4192 = 1{,}26\,(\alpha^2 S\lambda)^{1/3}\,\Theta_0, \tag{8.108}$$

откуда

$$S = \frac{0{,}5}{\alpha^2\lambda}\left(\frac{q_0}{\Theta_0}\right)^3. \tag{8.109}$$

Соотношения, аналогичные (8.107)—(8.109) для ребра треугольного профиля, имеют вид

$$q_0 = (2\alpha\lambda)^{1/2}\delta_0^{1/2}\Theta_0\,\frac{I_1(2mb)}{I_0(2mb)}, \tag{8.110}$$

$$\beta_т = 2mb = 2{,}6188,$$

$$q_0 = 1{,}422\,(\alpha^2 S\lambda)^{1/3}\Theta_0, \tag{8.111}$$

$$S = \frac{0{,}347}{\alpha^2\lambda}\left(\frac{q_0}{\Theta_0}\right)^3; \tag{8.112}$$

для ребра вогнутого параболического профиля

$$q_0 = \frac{\lambda\delta_0^2\Theta_0}{6S}\left[-1 + \sqrt{1 + (2mb)^2}\right], \tag{8.113}$$

$$\beta_p = mb = \sqrt{2},$$

$$q_0 = 1{,}442\,(\alpha^2 S\lambda)^{1/3}\Theta_0, \tag{8.114}$$

$$S = \frac{1}{3\alpha^2\lambda}\left(\frac{q_0}{\Theta_0}\right)^3. \tag{8.115}$$

Соотношения (8.109), (8.112), (8.115) можно объединить в одно:

$$S = \frac{\psi}{\alpha^2\lambda}\left(\frac{q_0}{\Theta_0}\right)^3, \tag{8.116}$$

где $\psi = 0{,}5$ — для прямоугольного ребра; $\psi = 0{,}347$ — для треугольного ребра; $\psi = 1/3$ — для ребра вогнутого параболического профиля.

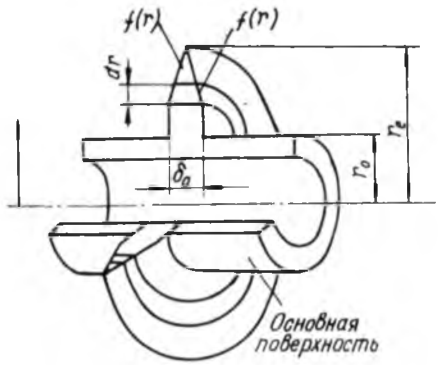


Рис. 8.12. Радиальное ребро произвольного профиля

Анализируя соотношения (8.116), можно сделать вывод, что для ребер, выполненных из одного материала, при одинаковых граничных условиях и одинаковых отношениях теплового потока через основание к температурному напору, оптимальное ребро вогнутого параболического профиля требует лишь примерно 65 % материала, необходимого для изготовления оптимального прямоугольного ребра, соответственно треугольное ребро требует около 69 % материала от прямоугольного. Таким образом, из трех рассмотренных оптимальным в плане материалоемкости является ребро вогнутого параболического профиля, для изготовления которого требуется минимум материала.

Радиальные ребра. Расчет температурных полей в радиальных ребрах (рис. 8.12) проводят аналогично продольным. В данном пункте кратко, без вывода приведем основные соотношения более подробно (см. работу [27]).

Обобщенное уравнение теплопроводности

$$f(r)\frac{d^2\Theta}{dr^2}+\frac{f(r)}{r}\frac{d\Theta}{dr}+\frac{df(r)}{dr}\frac{d\Theta}{dr}-\frac{\alpha}{\lambda}\Theta=0, \qquad (8.117)$$

для прямоугольного радиального ребра $f(r)=\delta_0/2$ и уравнение (8.117) принимает вид

$$r^2\frac{d^2\Theta}{dr^2}+r\frac{d\Theta}{dr}-m^2r^2\Theta=0, \qquad (8.118)$$

где $m=(2\alpha/\lambda\delta_0)^{1/2}$, $R_1<r<R_2$. Уравнение (8.118) — модифицированное уравнение Бесселя, его решение с учетом граничных условий

$$\Theta\Big|_{r=R_1}=\Theta_0;\quad \frac{d\Theta}{dr}\Big|_{r=R_2}=0, \qquad (8.119)$$

$$\Theta=\frac{\Theta_0[K_1(mR_2)I_0(mr)+I_1(mR_2)K_0(mr)]}{I_0(mR_1)K_1(mR_1)+I_1(mR_1)K_0(mR_1)}. \qquad (8.120)$$

Аналогично может быть определена эффективность радиального ребра

$$\eta=\frac{2R_2[I_1(mR_2)K_1(mR_1)-K_1(mR_2)I_1(mR_1)]}{m(R_2^2-R_1^2)[I_0(mR_1)K_1(mR_2)+I_1(mR_2)K_0(mR_1)]} \qquad (8.121)$$

и другие соотношения.

Задача 8.3. Какое количество теплоты передается через железное ребро толщиной $\delta_0=5$ мм, высотой $h=50$ мм и длиной $l=1$ м и каков температурный напор Θ_l на конце ребра, если коэффициент теплопроводности железа $\lambda=50$ Вт/(м · К), коэффициент теплоотдачи на боковых поверхностях $\alpha=$

= 10 Вт/(м² · К) и избыточная температура в основании ребра $\Theta_0 = 80$ °С. Теплоотдачей с торцов можно пренебречь.

Решение. Согласно формуле (8.76), для ребра прямоугольного профиля

$$m = (2\alpha/\lambda\delta_0)^{1/2} = \sqrt{\frac{2\cdot 10}{50\cdot 0{,}005}} \approx 8{,}95 \text{ м}^{-1}.$$

Избыточную температуру на конце ребра определяем по формуле (8.77):

$$\Theta|_{x=0} = \frac{\Theta_0 \operatorname{ch} mx}{\operatorname{ch} mh}\Bigg|_{x=0} = \frac{\Theta_0}{\operatorname{ch} mh} = \frac{80}{1{,}1} \approx 72{,}7° \text{ C}.$$

Суммарный тепловой поток определяем по формуле (8.78):

$$q_0 = \lambda S \frac{d\Theta}{dx}\Bigg|_{x=b} = \lambda\delta_0 m\Theta_0 \operatorname{th} mh =$$
$$= 50\cdot 0{,}005\cdot 8{,}95\cdot 80\cdot 0{,}42 \approx 75{,}5 \text{ Вт}.$$

Задача 8.4. Продольное ребро треугольного профиля толщиной в основании 9,5 мм, высотой 101,6 мм, изготовленное из стали с коэффициентом теплопроводности $\lambda = 34{,}1$ Вт/(м · К), отводит теплоту в окружающую среду с температурой 50 °С. Температура ребра в основании 100 °С, коэффициент теплоотдачи 50 Вт/(м² · К). Определить эффективность ребра, тепловой поток через основание, передаваемый на единицу длины, и температуру торца.

Решение. Для ребра заданного профиля

$$m = (2\alpha/\lambda\delta_0)^{1/2} = \left(\frac{2\cdot 50}{34{,}1\cdot 9{,}5\cdot 10^{-3}}\right) \approx 17{,}5 \text{ м}^{-1};$$
$$mb = 17{,}5\cdot 0{,}1016 \approx 1{,}78.$$

Эффективность ребра вычисляем по формуле (8.85) с помощью табл. 12 приложения:

$$\eta = \frac{I_1(3{,}56)}{1{,}78 I_0(3{,}56)} \approx \frac{6{,}55}{1{,}78\cdot 7{,}76} \approx 0{,}47 .$$

Тепловой поток через основание ребра вычисляем по формуле (8.84):

$$q_0 = \frac{2\cdot 50\cdot 50\cdot 6{,}55}{17{,}5\cdot 7{,}76} \approx 240 \text{ Вт/м}.$$

Температурный напор у торца ребра определяем по формуле (8.83):

$$\Theta|_{x=0} \frac{\Theta_0 I_0(0)}{7{,}76} = \frac{50\cdot 1}{7{,}76} \approx 6{,}4° \text{ C},$$

откуда температура торца

$$T|_{x=0} = 6{,}4 + 50 = 56{,}4° \text{ C}.$$

8.5. ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ПОЛЯ В ДЕТАЛЯХ МЕТАЛЛУРГИЧЕСКОГО ОБОРУДОВАНИЯ

Хобот завалочной машины [74]. Хобот является основным элементом завалочной машины и предназначен для захвата мульды и ввода ее в печь. В процессе охлаждения хобот испытывает многократные нагревания и охлаждения по сечению и длине, приводящие к возникновению термонапряжений, образованию сетки разгара на поверхности хобота, и т. д., поэтому задача расчета температурного поля для хобота является весьма актуальной.

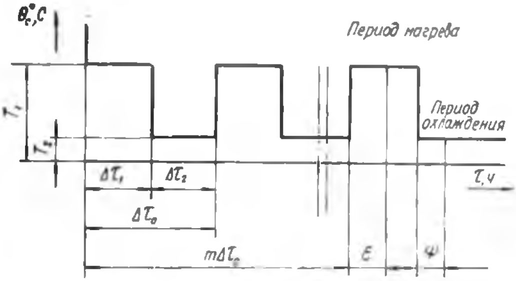


Рис. 8.13. Упрощенная схема изменения во времени температуры среды, окружающей хобот

Температурный расчет хобота проведен при следующих упрощающих допущениях: 1) хобот представляется как неограниченный осесимметричный полый цилиндр; 2) теплофизические свойства материала и коэффициенты теплоотдачи между печным пространством и поверхностями хобота не зависят от температуры. Упрощенный график изменения температуры среды, омывающей хобот, приведен на рис. 8.13 ($\Delta\tau_1$, $\Delta\tau_2$ — длительности пребывания хобота внутри рабочего пространства печи (период нагрева) и вне его (период охлаждения)). С учетом сделанных предположений математическая модель задачи имеет следующий вид:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right), \qquad (8.122)$$

$$\lambda\frac{\partial T}{\partial r}\bigg|_{r=R_1} = \alpha_1\left(T|_{r=R_1} - T_S\right), \qquad (8.123)$$

$$\lambda\frac{\partial T}{\partial r}\bigg|_{r=R_2} = \alpha_2\left(T_S - T|_{r=R_2}\right), \qquad (8.124)$$

$$T|_{\tau=0} = T_0 = \mathrm{const}. \qquad (8.125)$$

Решение данной задачи для периодически изменяющейся температуры окружающей среды, полученное в [74] с помощью преобразования Лапласа, довольно громоздко, поэтому остановимся только на определении значения коэффициента теплоотдачи от окружающей среды к поверхности.

В период нагрева теплообмен между хоботом завалочной машины и печью осуществляется в основном излучением:

$$q = \sigma_{\text{прив}}\left[\left(\frac{T_{\text{п}}}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_{\text{хоб}}}{100}\right)^4\right] = \alpha_{\text{л}}\left(T_{\text{п}} - T_{\text{хоб}}\right), \qquad (8.126)$$

где

$$\alpha_{\text{л}} = \frac{\sigma_{\text{прив}}\left[(T_{\text{п}}/100)^4 - (T_{\text{хоб}}/100)^4\right]}{T_{\text{п}} - T_{\text{хоб}}}, \qquad (8.127)$$

$\sigma_{\text{прив}}$ — приведенный коэффициент излучения системы печь — хобот; $T_{\text{п}}$, $T_{\text{хоб}}$ — температуры печи и поверхности хобота. При $T_{\text{хоб}} = 600$ К, $T_{\text{п}} = 1923$ К $\sigma_{\text{прив}} = 3{,}5$ Вт/(м$^2\cdot$К).

В период охлаждения (температура омывающего хобот воздуха равна 323 К) доминирующим является теплообмен по закону Ньютона — Рихмана:

$$q = \alpha_{\text{к}}\left(T'_{\text{хоб}} - T_{\text{в}}\right), \qquad (8.128)$$

где $T'_{\text{хоб}}$ — средняя за период охлаждения температура поверхности хобота ($T'_{\text{хоб}} = 673$ К).

Для определения коэффициента теплоотдачи используется известная формула

$$\mathrm{Nu} = C(\mathrm{GrPr})^n, \qquad (8.129)$$

где $\mathrm{Nu} = \alpha_{\text{к}}d/\lambda_{\text{ж}}$ — критерий Нуссельта, $\lambda_{\text{ж}}$ (воздух) $|_{T=323\text{К}} = 0{,}025$ Вт/(м $\cdot$ К) $d = 0{,}4$ м; $\mathrm{Gr} = \beta g d^3\Delta T/\nu^2$ — критерий Грасгофа; $\mathrm{Pr} = 0{,}69$ — критерий Прандтля

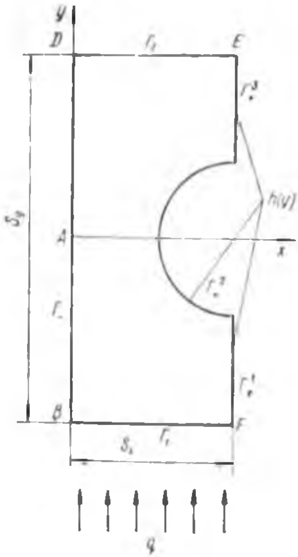


Рис. 8.14. К задаче о гладком плитовом холодильнике. Расчетная область

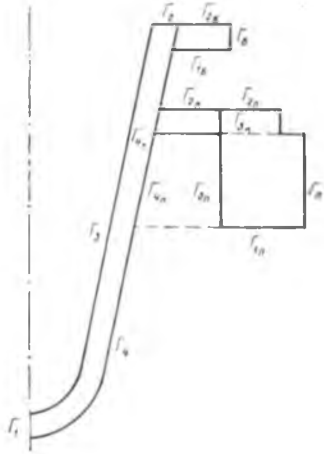


Рис. 8.15. К задаче о чаше шлаковоза

В этом случае постоянные C и n соответственно равны 0,135 и 0,33, а $\mathrm{GrPr} = 1{,}24 \cdot 10^{10}$, откуда

$$\mathrm{Nu} = 0{,}135\ (1{,}24 \cdot 10^{10})^{0{,}33} \approx 286.$$

Из последнего соотношения определяем значение коэффициента теплоотдачи от хобота в воздух:

$$\alpha_{\text{к}} = \frac{286{,}0 \cdot 0{,}025}{0{,}40} = 17{,}9\ \text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}).$$

Среднее значение коэффициента теплоотдачи за цикл нагрев — охлаждение определяется по формуле

$$\alpha_{\text{ср}} = (\alpha_{\text{л}} + \alpha_{\text{к}})/2 = 190\ \text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}). \tag{8.130}$$

Приведенные выкладки показывают существенную зависимость коэффициента теплоотдачи от времени. Использование среднего значения коэффициента теплоотдачи (8.130) позволяет существенно упростить исходную задачу теплопроводности, поскольку при $\alpha = \text{const}$ она становится линейной.

Гладкий плитовой холодильник доменной печи [5]. Холодильные плиты являются одними из самых теплонапряженных элементов оборудования доменных печей. Холодильники такого типа устанавливаются в лещади, горне и фурменной зоне и служат в основном для предохранения кожуха печи от нагревания. С достаточной для инженерной практики точностью задача расчета температурного поля холодильника может рассматриваться, как плоская, для элемента, изображенного на рис. 8.14. Математическая запись задачи имеет вид

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = 0, \tag{8.131}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial g}\right|_{\Gamma_-} = 0, \tag{8.132}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{\Gamma^1_+,\ \Gamma^3_+} = 0, \tag{8.133}$$

$$-\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial n}\right|_{\Gamma^2_+} = \alpha\left(T|_{\Gamma^2_+} - T_S\right), \tag{8.134}$$

$$-\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{\Gamma_1} = q, \tag{8.135}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{\Gamma_2} = 0, \tag{8.136}$$

где

$$q_x = -\lambda \partial T/\partial x,\ q_y = -\lambda \partial T/\partial y \tag{8.137}$$

— составляющие вектора плотности теплового потока соответственно в направлениях x, y; λ — теплопроводность материала холодильника; α — коэффициент теплоотдачи с охлаждаемой поверхности; T_S — температура воды в системе охлаждения; n — нормаль к границе Γ^2_+; q — плотность теплового потока, действующего на холодильник.

Решение задачи (8.131)—(8.136) ищем в виде [6]:

$$T = \sum_{n=0}^{n} T\varphi_n, \tag{8.138}$$

где $\varphi_n = \sqrt{\frac{2n+1}{h}}\, P_n\left(\frac{2x-h}{h}\right)$ — координатные функции; $P_n\left(\frac{2x-h}{h}\right)$ — полиномы Лежандра, ортогональные на промежутке $[0,\ h]$:

$$\int_0^h P_n\left(\frac{2x-h}{h}\right) P_m\left(\frac{2x-h}{h}\right) dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n), \\ \dfrac{h}{2n+1} & (m = n), \end{cases}$$

$$T = \sqrt{\frac{2n+1}{h}} \int_0^h T P_n\left(\frac{2x-h}{h}\right) dx \text{ — неизвестный коэффициент.}$$

Система для определения коэффициентов T_n $(n = 0,\ 1,\ \ldots)$, получившаяся в результате применения проекционного метода [6] к уравнению (8.131), решалась методом матричной прогонки. Расчеты проводились при $\lambda = 41$ Вт/(м · К) и $T_S = 40°$ C;

$$\alpha = \frac{1750\ v}{d^{0,2}}, \tag{8.139}$$

где v — скорость потока в системе охлаждения, м/с; $d = 0{,}0445$ — диаметр трубы, м; $q = 47$ кВт/м^2; $s_y = 0{,}12$ м. В табл. 8.2 приведены результаты расчетов поля температур в зависимости от скорости воды и шага труб. Расчеты показали, что температура холодильника возрастает пропорционально увеличению шага труб. Скорость воды в исследованном диапазоне мало влияет на температуру плиты. Дальнейшее увеличение шага труб приводит к резкому повышению температуры.

Чаша шлаковоза для уборки доменного и сталеплавильного шлака [9]. Чаша шлаковоза, предназначенная для уборки и транспортировки шлака от доменных и сталеплавильных агрегатов, работает в тяжелых температурных условиях. Чередующиеся нагрев и охлаждение, отсутствие эффективного теплоизоляционного слоя, предохраняющего чашу от прямого воздействия расплавленного шлака, вызывают быстрый выход ее из строя, поэтому чаша является основной сменной деталью шлаковоза.

Таблица 8.2

Шаг трубы $2s_x$, м	Скорость воды v, м/с	Температура в характерных точках C (см. рис. 8.14)				
		A	D	E	B	F
0,1	0,5	65,8	52,8	50,3	116,8	107,9
	0,7	64,7	51,7	48,9	115,6	106,0
	0,9	63,8	50,9	47,9	114,7	104,6
	1,0	63,5	50,6	47,5	114,4	104,1
	1,2	62,9	50,1	46,8	113,8	103,1
	1,5	62,3	49,5	46,0	113,1	102,1
0,15	0,5	105,4	91,4	82,6	156,8	137,8
	0,7	103,7	89,8	79,5	155,1	133,9
	0,9	102,5	88,6	77,3	153,9	131,0
	1,0	102,0	88,2	76,4	153,4	129,8
	1,2	101,2	87,4	74,9	152,6	127,9
	1,5	100,3	86,5	73,2	151,6	125,6
0,2	0,5	147,8	133,3	116,6	199,3	168,8
	0,7	146,2	131,7	112,1	197,6	162,9
	0,9	145,1	130,5	108,8	196,3	158,6
	1,0	144,6	130,1	107,5	195,8	156,8
	1,2	143,8	129,3	105,2	195,0	153,8
	1,5	142,9	128,4	102,4	194,0	150,4
0,25	0,5	191,3	176,2	151,5	242,3	200,2
	0,7	190,0	174,8	145,8	240,8	192,3
	0,9	189,1	173,8	141,5	239,7	186,5
	1,0	188,7	173,4	139,7	239,2	184,1
	1,2	188,0	172,7	136,7	238,4	180,1
	1,5	187,3	171,9	133,3	237,5	175,4

Опыт эксплуатации шлаковых чаш показывает, что наиболее «слабым» местом при циклическом тепловом воздействии является зона кольцевого ребра и кольцевого опорного пояса, на который опирается чаша.

Рассмотрим задачу нестационарной теплопроводности для системы тел (рис. 8.15), в которую входят чаша, обрамляющий бурт в верхней части, кольцевое ребро, опорный кольцевой пояс. Предполагается, что кольцевой пояс сплошной и между ним и кольцевым ребром идеальный тепловой контакт. При сделанных предположениях задача теплопроводности становится осесимметричной и записывается в виде

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial\sqrt{g_i}\,q_i^1}{\partial x^1}+\frac{\partial\sqrt{g_i}\,q_i^3}{\partial x^3}\right)+c\rho\,\frac{\partial T_i}{\partial\tau}=0 \quad (i — \text{ч, п, к, б}). \tag{8.140}$$

Начальное условие

$$T_i(x^1,\ x^3,\ \tau)=T_0.$$

Граничные условия

$$q_4^1\big|_{\Gamma_1} = 0;\ q_4^3\big|_{\Gamma_3} = \alpha\big|_{\Gamma_3}(T_l - T_4\big|_{\Gamma_3});$$

$$T_l = \begin{cases} T_{ш} \text{ — температура шлака, если поверхность омывается шлаком} \\ T_s \text{ — если поверхность омывается воздухом.} \end{cases}$$

На участках системы, омываемых воздухом (Γ_2, Γ_4, $\Gamma_{1б}$, $\Gamma_{2б}$, $\Gamma_б$, $\Gamma_{1к}$, $\Gamma_{2к}$, $\Gamma_{1п}$, $\Gamma_{2п}$, $\Gamma_п$), заданы граничные условия третьего рода, коэффициенты теплоотдачи в которых вычислены по формуле $\alpha = \alpha_л + 4{,}77 \cdot 10^{-8}(T_п^4 - T_s^4)/(T_п - T_s)$, где $T_п$ — температура на поверхности; $\alpha_л = 9{,}31$ Вт/(м^2 · К).

Для участка поверхности, омываемого шлаком, $\alpha = \dfrac{(\alpha_2 - \alpha_1)\,\tau}{\Delta\tau} + \alpha_1$, где $\alpha_1 = 98{,}93$ Вт/(м^2 · К); $\alpha_2 = 86{,}07$ Вт/(м^2 · К).

В математической модели приняты следующие обозначения: $q_l^1 = -\lambda g_l^{11}\dfrac{\partial T_l}{\partial x^1}$, $q_l^3 = -\lambda g_l^{33}\dfrac{\partial T}{\partial x^3}$ (l — ч, п, к, б) — контравариантные компоненты вектора плотности теплового потока в направлениях x^1 (вдоль срединных поверхностей тел системы), x^3 (по нормали к x^1); g_l^{11}, g_l^{33} и g_l — контравариантные компоненты и дискриминант тензора метрики из тел системы (l — ч, п, к, б); $\alpha|_{\Gamma_1}, \ldots, \alpha|_{\Gamma п}$ — коэффициенты теплоотдачи с соответствующих участков поверхности; $\sigma = \sigma_0/[1/\varepsilon_1 + (r_1/r_2)(1/\varepsilon_2 - 1)]$, где σ_0 — постоянная Стефана — Больцмана; ε_1, ε_2, r_1, r_2 — степень черноты и расстояния до оси вращения поверхностей $\Gamma_{4п}$, $\Gamma_{3п}$; λ, c, ρ — теплопроводность, теплоемкость, плотность материала; T_0 — начальная температура системы.

В расчетах приняты следующие значения параметров: $c = 670{,}4$ Дж/(кг · К); $\rho = 7850$ кг/м^3; $T_0 = 293$ К; $\lambda = 32{,}6$ Вт/(м · К); $T_s = 293$ К.

Расчеты проводили для чаши объемом 16 м^3. Рассматривали периоды заливки шлака (длительность принята равной 20 мин) и дальнейшего прогрева чаши до момента опорожнения (100 мин). Решение получено конечно-разностным методом с использованием неявной схемы расщепления.

Проведенные исследования показали, что кольцевое ребро и опорный кольцевой пояс существенно влияют на распределение температуры в стенках чаши. В зоне опорного кольца примерно через 120 мин после начала заливки достигаются максимальные температуры: на внутренней поверхности чаши 1053 К, на внешней — 993 К (рис. 8.16). Таким образом, зона чаши, расположенная в опорном поясе, и примыкающие к ней области находятся в наихудших (по теплообмену) условиях. Это объясняется тем, что массивное опорное кольцо является экраном и затрудняет отвод теплоты с внешней поверхности чаши в этой зоне. Сравнительный расчет температур для чаши без учета ребра, кольца, бурта в той же точке на внутренней поверхности дает температуру 960 К, то есть примерно на 10 % меньше. Такое сравнение результатов позволяет количественно оценить влияние опорного кольца на распределение температуры в стенке чаши.

Кольцевое ребро является концентратором наибольших градиентов температуры. Здесь реализуется максимальный поперечный градиент, равный 180 К, а на небольшом отрезке образующей ниже кольцевого ребра — максимальный продольный градиет, равный 280 К (рис. 8.17). Это объясняется тем, что теплоотвод с участка внешней поверхности чаши, сопряженного с кольцевым ребром, осуществляется теплопроводностью, а с остальной поверхности — излучением и конвекцией, которые в зоне опорного пояса еще и затруднены. Таким образом, в области кольцевого ребра и опорного кольца имеют место максимальные на единицу длины продольный и поперечный градиенты, достигающие 25—30 град/см, что при циклических теплосменах приводит к возникновению температурных напряжений, являющихся причиной появления трещин в этой зоне чаши.

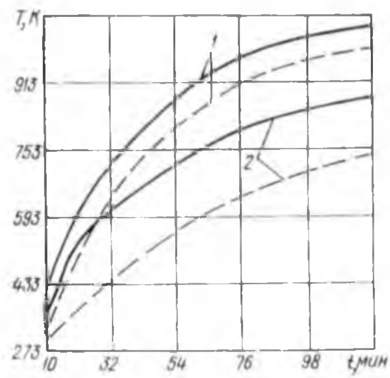


Рис. 8.16. Максимальная температура на внутренней и наружной поверхностях:

1 — зона опорного кольца; *2* — зона кольцевого ребра

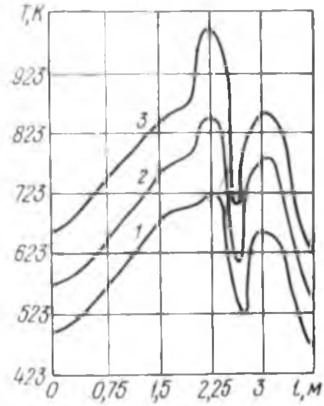


Рис. 8.17. Распределение температуры на внешней поверхности вдоль образующей чаши через 50 (*1*), 70 (*2*) и 120 мин (*3*) после начала заливки

Влияние бурта на температурное поле чаши очень мало, так как внутренняя поверхность чаши в зоне бурта не омывается шлаком. Поэтому при расчетах температур, с целью упрощения, бурт можно не учитывать.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

8.1. В теплообменнике поток воздуха обтекает латунные трубы, внутри которых проходит водяной пар. Коэффициенты конвективной теплоотдачи от водяного пара к поверхности нагрева и от поверхности нагрева к воздуху равны соответственно 210 и 70 Вт/(м^2 · К). Все трубы имеют внутренний диаметр 1,8 и наружный — 2,1 см. Рассчитать суммарный коэффициент теплопередачи теплообменника: а) отнесенный к площади внутренней поверхности трубы; б) отнесенный к площади внешней поверхности трубы.

8.2. Масло используется для нагрева воды в противоточном теплообменнике от 20 до 40 °С. Температура масла изменяется от 95 до 60 °С. Рассчитать среднелогарифмическую разность температур для этих условий.

8.3. Отработавшие газы теплоэлектростанции используются для подогрева воздуха в перекрестноточном теплообменнике. Эти газы поступают в теплообменник при 450 °С и выходят из него при 200 °С. Воздух с массовым расходом 10 кг/с входит в теплообменник при 70 °С и выходит из него при 250 °С. Предполагается, что свойства отработавших газов близки к свойствам воздуха. Суммарный коэффициент теплопередачи теплообменника равен 154 Вт/(м^2 · К). Рассчитать площадь поверхности теплообмена, если: а) воздух не смешивающийся, а отработавшие газы смешивающиеся; б) оба теплоносителя не смешивающиеся.

8.4. Имеется водяной холодильник с площадью поверхности $F = 8$ м^2. Определить конечные температуры жидкостей и количество передаваемой теплоты, если заданы следующие величины: $G_1 = 225$ кг/ч, $c_{p_1} = 3{,}03$ кДж/(кг · К), $T'_1 = 120°$ С. Для охлаждения используется вода с расходом $G_2 = 1000$ кг/ч при температуре $T'_2 = 10$ °С, $c_{p_2} = 4{,}19$ кДж/(кг · К). Коэффициент теплоотдачи $k = 35$ Вт/(м^2 · К).

8.5. Продольное ребро прямоугольного профиля толщиной 9,5 мм, высотой 101,6 мм, изготовленное из стали с коэффициентом теплопроводности 34,1 Вт/(м · К), отводит теплоту в окружающую среду с температурой 50 °С. Температура ребра у основания 100 °С, коэффициент теплоотдачи 50 Вт/(м^2 · К).

Определить эффективность ребра, температуру торца и тепловой поток на единицу длины, передаваемый ребром.

8.6. Продольные ребра прямоугольного, треугольного, вогнутого и выпуклого параболических профилей толщиной у основания 9,5 мм, высотой 101,6 мм, изготовленные из стали с коэффициентом теплопроводности $\lambda = 34{,}1$ Вт/(м · К), отводят теплоту в окружающую среду с температурой 50 °С. Температура ребер у основания 100 °С, коэффициент теплоотдачи 50 Вт/(м² · К). Сравнить эффективности ребер, тепловые потоки, передаваемые на единицу длины, и температуры торцов (вершин) ребер.

8.7. В теплообменнике вода обогревается горячим воздухом; расход воды 12 кг/с, расход воздуха 2 кг/с. Вода входит при температуре 40 °С, воздух — при 460 °С. Суммарный коэффициент теплопередачи на поверхности теплообмена площадью 14 м² равен 275 Вт/(м² · К). Определить эффективность теплообменника: а) прямоточного типа; б) перекрестноточного типа.

8.8. Нефть нагревается от 25 до 175 °С теплоносителем с температурой на входе 300 °С и на выходе 200 °С. Определить средние арифметический и логарифмический температурные напоры между теплоносителем и нефтью в теплообменнике для прямотока и перекрестного тока, выполненного по схемам в) и д) на рис. 8.3.

8.9. Сухой насыщенный пар с давлением $6{,}18 \cdot 10^5$ Па конденсируется в теплообменнике на трубах, внутри которых движется вода, нагреваемая от 20 до 70 °С. Определить среднелогарифмический и среднеарифметический температурные напоры.

8.10. В теплообменнике горячим мазутом нагревается сырая нефть от 20 до 160 °С. При этом мазут остывает от 280 до 190 °С. Найти средние арифметический и логарифмический температурные напоры в теплообменнике для прямотока.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ

1.1. Закон Фурье для ортотропного тела в сферической системе координат: $q_r = -\lambda_r \dfrac{\partial T}{\partial r}$, $q_\Theta = -\lambda_\Theta \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial T}{\partial r}$, $q_\psi = -\lambda_\psi \dfrac{1}{r\sin\Theta}\dfrac{\partial T}{\partial \psi}$. **1.2.** Закон Фурье для ортотропного тела в цилиндрической системе координат: $q_r = -\lambda_r \dfrac{\partial T}{\partial r}$, $q_\Theta = -\lambda_\Theta \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial T}{\partial r}$, $q_z = -\lambda_z \dfrac{\partial T}{\partial z}$. **1.3.** $\rho c \dfrac{\partial T}{\partial \tau} = \dfrac{1}{r_2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\lambda_{rr}\dfrac{\partial T}{\partial r} + r\lambda_{r\Theta}\dfrac{\partial T}{\partial \Theta} + r\dfrac{1}{\sin\Theta} \times \lambda_{r\psi}\dfrac{\partial T}{\partial \psi}\right) + \dfrac{1}{r^2\sin\Theta}\dfrac{\partial}{\partial\psi}\left(r\lambda_{\psi r}\dfrac{\partial T}{\partial r} + \dfrac{1}{\sin\Theta}\lambda_{\psi\psi}\dfrac{\partial T}{\partial\psi} + \lambda_{\psi\Theta}\dfrac{\partial T}{\partial\Theta}\right) + \dfrac{1}{r\sin\Theta}\dfrac{\partial}{\partial\Theta}\left(\sin\Theta\dfrac{\partial T}{\partial r} \times \lambda_{\Theta r} + \dfrac{1}{r}\lambda_{\Theta\psi}\dfrac{\partial T}{\partial\psi} + \lambda_{\Theta\Theta}\dfrac{\sin\Theta}{r^2}\dfrac{\partial T}{\partial\Theta}\right) + q_v$. **1.4.** а) $\rho c\dfrac{\partial T}{\partial\tau} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_x\dfrac{\partial T}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_y \times \dfrac{\partial T}{\partial y}\right) + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_z\dfrac{\partial T}{\partial z}\right)$, б) $\rho c\dfrac{\partial T}{\partial\tau} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda_r\dfrac{\partial T}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial\Theta}\left(\lambda_\Theta\dfrac{\partial T}{\partial\Theta}\right) + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_z\dfrac{\partial T}{\partial z}\right)$, в) $\rho c\dfrac{\partial T}{\partial\tau} = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\lambda_r\dfrac{\partial T}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2\sin^2\Theta}\dfrac{\partial}{\partial\psi}\left(\lambda_\psi\dfrac{\partial T}{\partial\psi}\right) + \dfrac{1}{r^2\sin\Theta}\dfrac{\partial}{\partial\Theta}\left(\lambda_\Theta\sin\Theta\dfrac{\partial T}{\partial\Theta}\right)$. **1.5.** $c\rho\left(\dfrac{\partial T}{\partial\tau} + \tau_r\dfrac{\partial^2 T}{\partial\tau^2}\right) = \nabla(\lambda\nabla T)$. **1.6.** Математическая модель имеет вид: а) $\dfrac{\partial T}{\partial\tau} = a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dfrac{q_v}{\rho c}$, $0 < x < l$, $\tau > 0$; начальное условие $T|_{\tau=0} = T_0(x)$, граничные условия $T|_{x=0} = T|_{x=l} = T_s = \text{const}$; б) $\dfrac{\partial T}{\partial\tau} = a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dfrac{q_v}{\rho c}$, $0 < x < l$, $\tau > 0$, граничные условия $\left.\dfrac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$, $-\lambda\left.\dfrac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=l} = \alpha(T|_{x=l} - T_c)$, начальное условие

$T|_{\tau=0} = T_0(x)$. **1.7.** Математическая модель процесса имеет вид $\frac{\partial T}{\partial \tau} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)$, $0 < r < R$, $0 < z < l$, начальное условие $T|_{\tau=0} = T_0(z)$, граничные условия $\left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z=0} = \left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z=l} = 0$, $\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=R} = \sigma_0 (T_{11}^4 - T|_{r=R}^4)$. **1.8.** $\rho_1(T_1)c_1(T_1) \times \frac{\partial T_1(x, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_1(T_1)\frac{\partial T_1}{\partial x}\right) + q_v(T_1)$, $0 < x < l$, $\tau > 0$ $\rho_2(T_2)c_2(T_2) \times \frac{\partial T_2(x, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_2(T)\frac{\partial T_2}{\partial x}\right) + q_v(T_2)$, $l_1 < x < l_2$, $\tau > 0$; начальные условия $T_1(x, 0) = T_{0_1}$, $T_2(x, 0) = T_{0_2}$, граничные условия $-\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x}(l_1, \tau) = -\lambda \times \frac{\partial T_2(l_1, \tau)}{\partial x} = \frac{1}{R}\left(T_1(l_1, \tau) - T_2(l_1, \tau)\right)$; а) $\lambda_1 \frac{\partial T_1(0, \tau)}{\partial x} = q_0 = \text{const}$, $\frac{\partial T_2(l_2, \tau)}{\partial x} = 0$; б) $\lambda_1 \frac{\partial T_1(0, \tau)}{\partial x} = \alpha(T_1(0, \tau) - T_c)$, $-\lambda_2 \frac{\partial T_2(l_2, \tau)}{\partial x} = \alpha(T_2(l_2, \tau) - T_c)$; в) $-\lambda_2 \frac{\partial T_2(l_2, \tau)}{\partial x} = \alpha(T_2(l_2, \tau) - T_c)$, $-\lambda_1 \frac{\partial T_1(0, \tau)}{\partial x} = \alpha_л (T_1(0, \tau) - T_п)$.
1.9. $\frac{\partial T}{\partial \tau} = a\left[\frac{1}{r}\frac{\partial^2 (r\, T)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin\psi}\frac{\partial}{\partial \psi}\left(\sin\psi \frac{\partial T}{\partial \psi}\right)\right]$, $T = T(\tau, r, \psi)$, $R > r > 0$, $0 < \psi < 2\pi$; начальное условие $T(0, r, \psi) = T_0(r)$, граничные условия $\frac{\partial T(\tau, 0, \psi)}{\partial r} = 0$, $-\lambda \frac{\partial T(\tau, R, \psi)}{\partial r} = \alpha_{эф}(T(\tau, R, \psi) - T_ф)$, если $\pi \leqslant \psi < 2\pi$ ($T_ф = 373$ К), $\frac{\partial T(\tau, R, \psi)}{\partial r} = 0$, если $0 \leqslant \psi < \pi$. **2.1.** а) $T =$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{b} + T_{s_1}\right)^2 - 2\frac{\lambda_{cp}}{\lambda_0 b}(T_{S_1} - T_{S_2})\frac{x}{\delta}} - \frac{1}{b},$$

$$б)\ T = \sqrt{\left(\frac{1}{b} + T_{S_1}\right)^2 - 2\frac{\lambda_{cp}}{\lambda_0 b}(T_{S_1} - T_{S_2})\frac{\ln(r/r_1)}{\ln(r_2/r_1)}} - \frac{1}{b},$$

$$в)\ T = \sqrt{\left(\frac{1}{b} + T_{S_1}\right)^2 - 2\frac{\lambda_{cp}}{\lambda_0 b}(T_{S_1} - T_{S_2})\frac{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}} - \frac{1}{b}.$$

2.2. а) плоская стенка

$$T = T_{c_2} + \frac{(T_{c_1} - T_{c_2})\left(1 + \frac{\lambda}{\alpha_2 \delta} - \frac{x}{\delta}\right)}{1 + \frac{\lambda}{\alpha_1 \delta} + \frac{\lambda}{\alpha_2 \delta}};$$

б) цилиндрическая стенка

$$T = T_{c_2} + (T_{c_1} - T_{c_2})\frac{\ln\frac{r}{r_1} + \frac{\lambda}{\alpha_2 r_2}}{\ln\frac{r_2}{r_1} + \frac{\lambda}{\alpha_1 r_1} + \frac{\lambda}{\alpha_2 r_2}};$$

в) шаровая стенка

$$T = T_{c_2} + (T_{c_1} - T_{c_2}) \left[1 + \frac{\lambda}{\alpha_2 r_2 (r_2/r_1 - 1)} - \frac{\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r}}{\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2}} \right] \times$$

$$\times \left[1 + \frac{\lambda}{\alpha_1 r_1 (1 - r_1/r_2)} + \frac{\lambda}{\alpha_2 r_2 (r_2/r_1 - 1)} \right]^{-1}.$$

2.3. Указание. Конвективным термическим сопротивлением пара можно пренебречь, то есть принять $T_{c_1} = T_{S_1}$.

$$q_l = \frac{Q}{l} = \frac{T_{c_1} - T_{c_2}}{\dfrac{\ln (r_2/r_1)}{2\pi\lambda} + \dfrac{1}{2\pi\, r_2 \alpha_2}} = 452 \text{ Вт/м}.$$

2.4. $T_{\text{ср}} = \dfrac{T_1 + T_2}{2} = \dfrac{35 + 115}{2} = 75\ ^\circ\text{C}$, $\lambda_{\text{ср}} = -\dfrac{100 - 75}{100 - 0}(32 - 26) + 32 = 30{,}5$ Вт/(м · К), $q = 6970$ Вт/м². **2.5.** Формула для определения неизвестной температуры внутренней поверхности стенки:

$$\text{а)}\ T_{S_1} = -\frac{\lambda_0 + \alpha_1 S_1 N_{n_1}^{n_2}}{b\lambda_0} + \left[\left(\frac{\lambda_0 + \alpha_1 S_1 N_{n_1}^{n_2}}{b\lambda_0} \right)^2 + \frac{2\,T_{S_2}}{b} + T_{S_2}^2 + T_{c_1} \frac{2\,\alpha_1 S_1\, N_{n_1}^{n_2}}{b\lambda_0} \right]^{1/2};$$

$$\text{б)}\ T_{S_1} = -\frac{1}{b} + \left[\frac{1}{b^2} + \frac{2}{b} \left(\frac{q_0 S_2}{S_1\, N_{n_1}^{n_2}\, \alpha_1 \lambda_0} + T_{c_1} \right) + \left(\frac{q_0 S_2}{\alpha_1 S_1\, N_{n_1}^{n_2}} + T_{c_1} \right)^2 + \frac{2\, q_0 S_1}{\lambda_0 b} \right]^{1/2},$$

где $q_0 = Q/S_2$ — плотность теплового потока на поверхности S_2. Распределение температур в стенке можно найти из равенства

$$T = \sqrt{\left(\frac{1}{b} + T_{S_1} \right)^2 - \frac{2Q\, N_{n_1}^{n_2}}{\lambda_0 b}} - \frac{1}{b},$$ где а) $Q = \dfrac{\lambda_{\text{ср}} (T_{S_1} - T_{S_2})}{N_{n_1}^{n_2}}$, $\lambda_{\text{ср}} = \lambda_0 \times \left(1 + b \dfrac{T_{S_1} + T_{S_2}}{2} \right)$, б) $Q = q_0 S_2$. **2.6.** В силу симметрии задачи рассматриваем лишь одну половину пластины ($0 \leqslant x \leqslant \delta$) с условием теплоизоляции при $x = 0$. Распределение температур будет следующим:

$$T = T_c + \frac{q_v\, \delta}{2} + \frac{q_v\, \delta^2}{2\lambda} \left[1 - \left(\frac{x}{\delta} \right)^2 \right].$$

2.7. Распределение температур в стержне

$$T = -\frac{1}{b} + \sqrt{\left(T_0 + \frac{1}{b} \right)^2 - \frac{q_v\, r^2}{2\lambda_0 b}},$$

где $T_0 = T(0) = T_c + \dfrac{q_v r_0}{2\alpha} + \dfrac{q_v r_0^2}{4\lambda}$ — температура на оси стержня. **2.8.** Значения коэффициентов, которые входят в решение: а) $c_1 = 0$, $F(\nu) = 0$, $W(z) = (z^3 - r_1^3)/(3z^2)$, $T(r) = T_{c_2} + \dfrac{r_2}{3\alpha_2}\left[1 - \left(\dfrac{r_1}{r_2} \right)^3 \right] q_v + \dfrac{q_v}{6\lambda}(r^2 - r_2^2) + \dfrac{q_v\, r_1^3}{3\lambda}\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{r_2} \right)$; б) $F(\alpha) = \alpha_1 \left(\dfrac{r_1}{r_2} \right)^2$, $W(z) = (z^3 - r_1^3)/(3z^2)\, q_v$, $c_2 = \dfrac{q_v}{3\alpha_1}(r_2^3/r_1^2 - r_1) + T_{c_1}$, $c_1 = \dfrac{q_v}{3\lambda}\left(\dfrac{r_2^3}{r_1} - r_1 \right)$,

$$T(r)=\frac{1}{3\lambda}\left(\frac{r_2^3}{r_1}-r_1\right)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r}\right)-\frac{q_v}{\lambda}\left[\frac{1}{6}(r^2-r_1^2)-\frac{r_1^3}{3}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r}\right)\right]+\frac{q_v}{3\alpha_1}\times$$

$$\left(r_2^3/r_1^2-r_1\right)+T_{c_1}=T_{c_1}+\frac{q_v r_1}{3\alpha_1}\left(\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3-1\right)+\frac{q_v}{6\lambda}(r_1^2-r^2)+\frac{q_v r_1^3}{3\lambda}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r}\right).$$

2.9.

$T(r)=T_{c_2}+\frac{q_v}{6\lambda}(r^2-r_0^2)+\frac{r_0}{3\alpha_2}q_v$. **2.10.** Указание. Мощность q_v источника теплоты при прохождении электрического тока I через проволоку радиуса r_0 при напряжении U определяется в соответствии с законом Ома: $q_v=\frac{I^2R}{U}=\frac{I^2}{\pi r_0^2}\frac{R}{l}=$ $=\frac{I^2}{\pi r_0}R_l$, $T_{\text{макс}}=T(0)=T_c+\frac{q_v r_0}{2\alpha}\left(1+\frac{\alpha r_0}{2\lambda}\right)=T_c+\frac{I^2}{2\pi r_0\alpha}R_l\left(1+\frac{\alpha r_0}{2\lambda}\right)$. Отсюда

$$I=\frac{(T_{\text{макс}}-T_c)\,2\pi r_0\alpha}{\left(1+\frac{\alpha r_0}{2\lambda}\right)R_l}=12{,}2\ A.$$

3.1.

$T(x,\ y,\ \tau)=T_c+\left(\sum_{m,\ n=1}^{\infty}\int_0^d\int_0^b\varphi(x,\ y)\,\Theta_{nm}(x,\ y)\,dx\,dy\right)e^{-a\mu_{nm}^2\tau}\Theta_{nm}\ (x,\ y)$, где

$\Theta_{nm}(x,\ y)=\frac{2}{\sqrt{db}}\sin\frac{m\pi x}{d}\sin\frac{n\pi y}{b}$, $\mu_{nm}=\pi\sqrt{\frac{m^2}{d^2}+\frac{n^2}{b^2}}$, $\varphi(x,\ y)=f(x,\ y)-T_c$.

3.2. $T(r,\ \tau)=u(r)+w(r,\ \tau)$, где

$$u=\frac{T_1\ln(R_2/r)+T_2\ln(R_1/r)}{\ln(R_2/R_1)},$$

$$W=\frac{\pi^2}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n^2 I_0^2(R_1,\ \alpha_n)}{I_0^2(R_1\alpha_n)-I_0^2(R_2\alpha_n)}e^{-a\tau\alpha_n^2}U_0(r\alpha_n)\int_{R_1}^{R_2}rf(r)\,U_0(r\alpha_n)\,dr-$$

$$-\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[T_2I_0(R_1\alpha_n)-T_2I_0(R_2\alpha_n)]\,I_0(R_1\alpha_n)\,U_0(r\alpha_n)}{I_0^2(R_1\alpha_n)-I_0^2(R_2\alpha_n)}e^{-a\tau\alpha_n^2},$$

$$U_0(\alpha r)=I_0(\alpha r)\,I_0(R_1R_2)-I_0(R_1R_2)\,I_0(\alpha r),$$

α_n — корни характеристического уравнения $U_0(\alpha r)=0$. **3.3.** $T(r,\ \tau)=$ $=\frac{2}{r}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\alpha_n^2\tau a}R_n(r)\int_{R_1}^{R_2}r'\,R_n(r')\,f(r')\,dr'$, где

$$R_n(r)=\frac{(H^2+R_2^2\lambda^2\alpha_n^2)^{1/2}[G\sin(r-R_1)\alpha_n+R_1\lambda\alpha_n\cos(r-R_1)\alpha_n]}{[(R_2-R_1)(R_1^2\lambda^2\alpha_n^2+G^2)(R_2^2\lambda^2\alpha_n^2+H^2)+(Ha\lambda+GR_2\lambda)(GH+R_1R_2\alpha_n^2)]^{1/2}},$$

$G=R_1\alpha_1+\lambda$, $H=R_2\alpha_2-\lambda$, α_n — корни характеристического уравнения $(GH-$ $-R_1R_2\lambda^2\alpha^2)\sin(R_2-R_1)\alpha+\alpha(R_1\lambda H+R_2\lambda G)\cos(R_2-R_1)\alpha=0$. **3.4.** Использовать решение задачи об охлаждении неограниченной пластины из § 3.1. **3.5.** Уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial\tau}=a\left(\frac{\partial^2T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}\right),$$

начальное условие $T|_{\tau=0} = T_0$, граничные условия $\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=0} = 0$, $-\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=R} = \alpha (T|_{r=R} - T_ж)$. Общее решение

$$T = T_ж + (T_0 - T_ж) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2I_1(\mu_n)}{\mu_n [I_0^2(\mu_n) + I_1^2(\mu_n)]} I_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right) e^{-\mu_n^2 \frac{a\tau}{R^2}},$$

где μ_n — корни характеристического уравнения $\frac{I_0(\mu)}{I_1(\mu)} = \frac{\mu}{\mathrm{Bi}}$. **3.6.** Уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r} + \frac{2}{r}\frac{\partial T}{\partial r}\right).$$

Начальные и граничные условия аналогичные задаче 3.5. Общее решение

$$T = T_ж + (T_0 - T_ж) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(\sin \mu_n - \mu_n \cos \mu_n) \sin (\mu_n R)}{(\mu_n - \sin \mu_n \cos \mu_n)\mu_n R} e^{-\mu_n \frac{a\tau}{R_2}},$$

где μ_n — корни характеристического уравнения $\operatorname{tg} \mu = -\frac{\mu}{\mathrm{Bi} - 1}$. **3.7.** $c_i\rho_i \times \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = \frac{1}{r_i^\nu}(r_{i-1/2}^\nu \lambda_{i-1/2} u_{\bar{r},i}^{n+1})_{r,i}$, где $\nu = 1$ — цилиндрические координаты, $\nu = 2$ — сферические координаты. **3.8.** $c_i\rho_i \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = \sigma \frac{1}{r_i^\nu}(r_{i-1/2}^\nu \lambda_{i-1/2} u_{\bar{r},i}^{n+1})_{r,i} + (1-\sigma)\frac{1}{r_i^\nu}(r_{i-1/2}^\nu \lambda_{i-1/2} u_{\bar{r},i}^{n})_{r,i}$ $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$, $\nu = 1,2$. **3.9.** $c_i\rho_i \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = \frac{1}{r_i^\nu}(r_{i-1/2}^\nu \lambda_{i-1/2} u_{\bar{r},i}^{n+1})_{r,i}$, $\nu = 0$ — декартовы координаты, $\nu = 2$ — сферические координаты. **4.1.** $q_c = \alpha F(T_c - T_s) = 200.2.(400 - 300) = 40000$ Вт. **4.2.** 48000 Вт, 680000 Вт. **4.3.** 500 см². **4.4.** 187,5 Вт/(м² · К), 5625 Вт/м². **4.5.** $\mathrm{Re} = 1250$. Режим течения — ламинарный. **4.6.** 100°C. **4.7.** 15 мм, $\tau_1 = 25$ с, $\tau_2 = 50$ с. **4.8.** $0{,}54 \cdot 10^{-6}$ м²/с. **4.9.** 0,19 м, 140 Вт/(м² · К). **4.10.** $\mathrm{Nu} = 11{,}9$, $\mathrm{Re} = 1485$, $\mathrm{Pe} = 4600$. **5.2.** $\mathrm{St} = \alpha/(\rho_\infty v_\infty c_p)$. **5.3.** $\alpha = 4780$ Вт/(м² · К). Указание. Определив число Re, воспользоваться формулой (5.75) или (5.76). **5.4.** $\overline{\mathrm{Nu}}_L = 1{,}5\,\mathrm{Re}_L^{1/3}\,\mathrm{Pr}^{1/3}$ **5.5.** $\lambda_{экв} = 0{,}088$ Вт/(м · К). Указание. Воспользоваться формулой (5.122). **5.6.** $\bar{\alpha} = 30{,}6$ Вт/(м² · К), $Q = 1470$ Вт. **5.7.** $\alpha = 3920$ Вт/(м² · К). **5.8.** $\bar{\alpha} = 4780$ Вт/(м² · К). **5.9.** $\lambda_{экв} = 0{,}088$ Вт/(м² · К), $q = 352$ Вт/м². **5.10.** $L = 0{,}0307$ м. **6.1.** Указание. Воспользоваться формулой (6.17). Физические свойства водяного пара при $T_{ср} = (T_w + T_s)/2$ и атмосферном давлении: $\lambda'' = 4{,}43 \cdot 10^{-2}$ Вт/(м · К), $\rho'' = 0{,}384$ кг/м³, $\nu'' = 4{,}43 \cdot 10^{-5}$ м²/с, $c_p = 2{,}01 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К), $\rho_ж = 958$ кг/м³, $r = 2{,}26 \cdot 10^{-6}$. Тогда $\bar{\alpha} = 196$ Вт/(м² · К), $q = 7{,}85 \cdot 10^4$ Вт/м². **6.2.** Указание. Воспользоваться формулой (6.18), остальные данные взять из задачи 6.1. Тогда $\bar{\alpha} = 236$ Вт/(м² · К), $q = 9{,}45 \cdot 10^1$ Вт/м². **6.3.** Указание. Воспользоваться формулой (6.40). При $T_{ср} = (T_w + T_s)/2$ условиям данной задачи соответствуют следующие значения теплофизических свойств: $\lambda = 0{,}661$ Вт/(м · К), $\rho_ж = 980{,}9$ кг/м³, $\rho'' = 0{,}3$ кг/м³, $r = 2{,}387 \cdot 10^6$ Дж/кг, $\mu = 4{,}48 \cdot 10^{-4}$ Па · с. Тогда $\bar{\alpha} = 4230$ Вт/(м² · К). **6.7.** 7,82 кВт/(м² · К), 13,1 кг/ч. **6.8.** 4,32 кВт/(м² · К)

7,24 кг/ч. **6.9.** 1,126 $м^2$. **6.10.** 2,94 кВт/($м^2 \cdot К$). **7.1.** а) 128,7 кВт/$м^3$; б) 4,022 $\times$ $\times 10^9$ Вт/$м^3$; в) 12,87 ГВт/$м^3$; г) 40,22 ГВт/$м^3$. **7.2.** 6245 К. **7.3.** а) Ультрафиолетовая область 0,58 %, видимая 19,0 %, инфракрасная 80,4%; б) ультрафиолетовая область 0,024 %, видимая 5,28 %, инфракрасная 94,7 %. **7.5.** Солнечное излучение 83,7 %, грунт 0,0015 %. **7.6.** 1595 Вт. Указание. Воспользоваться соотношениями закона Стефана-Больцмана и приведенной степени черноты, в пункте а) учесть, что $F_1 \ll F_2$. **7.7.** $q_\Sigma = 21810$ Вт. Указание. $q_\Sigma = q_т + q_л$, где $q_т$ — плотность теплового потока, передаваемого теплопроводностью; $q_л$ — плотность потока излучения. **7.8.** $Q = 17,72$ Вт. **7.9.** $q_l = 16640$ Вт/м. **7.10.** $E_г = 107,3$ кВт/$м^2$. **8.1.** а) 58,8 Вт/($м^2 \cdot К$); б) 50,3 Вт/($м^2 \cdot К$). **8.2.** 47,1 °С. **8.3.** а) 53,7 $м^2$; б) 51,4 $м^2$. **8.4.** $Q = 15$ кВт; $T_1'' = 41$ °С; $T_2'' = 23,9$ °С. **8.5.** Эффективность ребра $\eta = 0,531$; температура торца $T_l = 66,4$ °С; тепловой поток $q_0 = 270$ Вт/м. **8.6.** 1) Прямоугольный профиль $\eta = 0,531$; $q_0 = 270$ Вт/м; $T_l = 66,4$ °С. 2) Треугольный профиль $\eta = 0,474$; $q_0 = 240$ Вт/м; $T_l = 56,4$ °С. 3) Вогнутый параболический профиль $\eta = 0,426$; $q_0 = 216$ Вт/м; $T_l = 50$ °С. 4) Выпуклый параболический профиль $\eta = 0,503$; $q_0 = 254$ Вт/м; $T_l = 50$ °С. **8.7.** а) 81 %; б) 82 %. **8.8.** $\Delta T_a = 150$ °С; $\Delta \overline{T}_л = 104$ °С (прямоток); $\Delta \overline{T}_л = 149$ °С (противоток); схема в) $\Delta \overline{T}_л = 131$°С; схема д) $\Delta \overline{T}_л = 113$°С. **8.9.** $\Delta \overline{T}_a = 115$ °С; $\Delta \overline{T}_л = 113$ °С. **8.10.** $\Delta \overline{T}_a = 145$ °С; $\Delta \overline{T}_л = 106,5$ °С.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Таблица 1. **Теплопроводность материалов**

Материал	λ, Вт/(м · К)
Алюминий	204
Асбест	0,151
Асбозурит	0,213
Асбослюда	0,208
Бетон	1,28
Бронза	64
Вата минеральная	0,052
Вермикулит	0,328
Вермикулитовые плиты	0,186
Винипласт	0,165
Диатомит молотый	0,314
Кирпич:	
диатомовый	0,25
динасовый	0,35
красный	0,76
силикатный	0,82
шамотный	1,14
Латунь	93
Лед	2,22
Масляный слой загрязнения	0,15
Медь	384
Накипь	1,75
Новоасбозурит	0,175
Ньювель	0,11
Пенопласт	0,05
Пеношамот	0,29
Полиэтилен	0,29
Пористые отложения, пропитанные нефтепродуктами	0,1
Пробковые плиты	0,047
Резина	0,16
Ржавчина	1,15
Сажа	0,09
Снег уплотненный	0,46
Совелит	0,09

Продолжение табл. 1

Материал	λ, Вт/(м · К)
Сосна поперек волокон	0,151
Сталь:	
углеродистая	45
нержавеющая	18
Стекловата	0,047
Стекло обыкновенное	0,745
Титан	15
Чугун	90
Шлаковата	0,16
Фарфор	1,04

Таблица 2. **Физические свойства некоторых материалов при 0 °С**

Материал	ρ, кг/м³	λ, Вт/(м · К)	c, кДж/(кг · К)
Алюминий	2700	209	0,896
Ванадий	5900	34,9	0,494
Висмут	9830	9,4	0,121
Вольфрам	19340	169	0,134
Железо	7880	74	0,44
Золото	19310	313	0,130
Калий	870	100	0,737
Литий	534	68,6	3,31
Магний	1760	158	0,975
Медь	8930	390	0,388
Молибден	10200	141	0,252
Натрий	975	109	1,20
Никель	8900	67,5	0,427
Олово	7300	66,3	0,222
Платина	21460	69,8	0,132
Свинец	11350	35,1	0,127
Серебро	10500	419	0,234
Сурьма	6690	18,8	0,205
Титан	4540	15,1	0,531
Углерод, графит	(1700...2300)	174	0,67
Уран	19100	19,2	0,117
Хром	7150	69,8	0,448
Цинк	7150	113	0,384

Таблица 3. **Физические свойства некоторых сталей и сплавов при $T = (20 \div 200)$ °С**

Материал	ρ, кг/м³	λ, Вт/(м · К)	c, кДж/(кг × × К)	a, м²/с
Сталь 20	7830	51,0	0,494	1,32
Сталь 45	7830	47,8	0,490	1,25
Нержавеющая сталь	7860	16,3	0,494	0,42
Магниевые сплавы	1780	79,1	0,98	4,53
Алюминиевые сплавы	2800	163	1,13	5,15
Титановые сплавы	4460	8,7	0,524	0,372
Латунь	8500	109	0,392	3,27
Бронза	8800	48,2	0,368	1,49

Таблица 4. **Физические свойства различных технических материалов**

Материал	ρ, кг/м³	T °С	λ, Вт/(м · К)	c, кДж/(кг × × К)
Асбест	500	20	0,106	0,037
Асбестовый картон	1000	20	0,184	0,84
Асбест распушенный	100	20	0,092	0,84
Графитовые изделия	1600	100	158	0,837
Двуокись циркония	5280	100	167	0,586
Железобетон	2200	20	1,55	0,840
Кирпич красный	1800	0	0,77	0,879
Минеральная вата	150	20	0,075	0,92
Окись алюминия	3740	100	30,2	0,925
Оргстекло	1180	20	0,184	1,43
Пенокерамика	1400	20	1,16	0,84
Пенопласт	200	30	0,058	—
Пеностекло	400	20	0,107	0,84
Пеношамот	600	20	0,132	0,92
Резина твердая обыкновенная	1200	20	0,159	1,382
Слюда	2900	20	0,52	0,879
Стекло обыкновенное	2500	20	0,74	0,670
Стекловата	200	20	0,0465	—
Стекловолокно	120	20	0,11	0,84
Стеклотекстолит	1650	20	0,459	1,64
Текстолит	1350	20	0,293	1,47
Фторопласт-4	2150	20	0,247	1,05
Фибра	1200	60	0,48	—
Шлак котельный	700	20	0,186	0,75
Эбонит	1200	20	0,165	—

Таблица 5. **Физические свойства сухого воздуха (давление $1{,}013 \cdot 10^5$ Па)**

T °C	ρ, кг/м³	c_p, кДж/(кг · К)	$\lambda \cdot 10^2$ Вт/м · К	$\mu \cdot 10^6$ Па · с	$\nu \cdot 10^6$ м²/с	$Pr = \nu/a$
—50	1,584	1,013	2,04	14,6	9,23	0,728
—40	1,515	1,013	2,12	15,2	10,04	0,728
—30	1,453	1,013	2,20	15,7	10,80	0,723
—20	1,395	1,009	2,28	16,2	11,79	0,716
—10	1,342	1,009	2,36	16,7	12,43	0,712
0	1,293	1,005	2,44	17,2	13,28	0,707
10	1,247	1,005	2,51	17,6	14,16	0,705
20	1,205	1,005	2,59	18,1	15,06	0,703
30	1,165	1,005	2,67	18,6	16,00	0,701
40	1,128	1,005	2,76	19,1	16,96	0,699
50	1,093	1,005	2,83	19,6	17,95	0,698
60	1,060	1,005	2,90	20,1	18,97	0,696
70	1,029	1,009	2,96	20,6	20,02	0,694
80	1,000	1,009	3,05	21,1	21,09	0,692
90	0,972	1,009	3,13	21,5	22,10	0,690
100	0,946	1,009	3,21	21,9	23,13	0,688
120	0,898	1,009	3,34	22,8	25,45	0,686
140	0,854	1,013	3,49	23,7	27,80	0,684
160	0,815	0,017	3,64	24,5	30,09	0,682
180	0,779	1,022	3,78	25,3	32,49	0,681
200	0,746	1,026	3,93	26,0	34,85	0,680
250	0,674	1,038	4,27	27,4	40,61	0,677
300	0,615	1,047	4,60	29,7	48,33	0,674
350	0,566	1,059	4,91	31,4	55,46	0,676
400	0,524	1,068	5,21	33,0	63,09	0,678
500	0,456	1,093	5,74	36,2	79,38	0,687
600	0,404	1,114	6,22	39,1	96,89	0,699
700	0,362	1,135	6,71	41,8	115,4	0,706
800	0,329	1,156	7,18	44,3	134,8	0,713
900	0,301	1,172	7,63	46,7	155,1	0,717
1000	0,277	1,185	8,07	49,0	177,1	0,719
1100	0,257	1,197	8,50	51,2	199,3	0,722
1200	0,239	1,210	9,15	53,5	233,7	0,724

Таблица 6. **Физические свойства воды на линии насыщения**

T, °C	$p \cdot 10^{-5}$, Па	ρ, кг/м³	c_p, кДж/кг·К	$\lambda \cdot 10^2$, Вт/м · К	$\mu \cdot 10^6$, Па · с	$\nu \cdot 10^6$, м²/с	$\beta \cdot 10^4$, К⁻¹	Pr
0	1,013	999,9	4,212	55,1	1788	1,789	—0,63	13,67
10	1,013	999,7	4,191	57,4	1306	1,306	0,70	9,52
20	1,013	998,2	4,183	59,9	1004	1,006	1,82	7,02
30	1,013	995,7	4,174	61,8	801,5	0,805	3,21	5,42
40	1,013	992,2	4,174	63,5	653,3	0,659	3,87	4,31
50	1,013	998,1	4,174	64,8	549,4	0,556	4,49	3,54
60	1,013	983,2	4,179	65,9	469,4	0,478	5,11	2,98
70	1,013	977,8	4,187	66,8	406,1	0,415	5,70	2,55
80	1,013	971,8	4,195	67,4	355,1	0,365	6,32	2,21
90	1,013	865,3	4,208	68,0	314,9	0,326	6,95	1,95
100	1,013	958,4	4,220	68,3	282,5	0,295	7,52	1,75

T, °C	$p\cdot10^{-5}$, Па	ρ, кг/м³	c_p, кДж/кг·К	$\lambda\cdot10^2$, Вт/м·К	$\mu\cdot10^6$, Па·с	$\nu\cdot10^6$, м²/с	$\beta\cdot10^4$, К⁻¹	Pr
110	1,43	951,0	4,233	68,5	259,0	0,272	8,08	1,60
120	1,98	943,1	4,250	68,6	237,4	0,252	8,64	1,47
130	2,70	934,8	4,266	68,6	217,8	0,233	9,19	1,36
140	3,61	926,1	4,287	68,5	201,1	0,217	9,72	1,26
150	4,76	917,0	4,313	68,4	186,4	0,203	10,3	1,17
160	6,18	907,4	4,346	68,3	173,6	0,191	10,7	1,10
170	7,92	897,3	4,380	67,9	162,8	0,181	11,3	1,05
180	10,03	886,9	4,417	67,4	153,0	0,173	11,9	1,00
190	12,55	876,0	4,459	67,0	144,2	0,165	12,6	0,96
200	15,55	863,0	4,505	66,3	136,4	0,158	13,3	0,93
210	19,08	852,8	4,555	65,5	130,5	0,153	14,1	0,91
220	23,20	840,3	4,614	64,5	124,6	0,148	14,8	0,89
230	27,98	827,3	4,681	63,7	119,7	0,145	15,9	0,88
240	33,48	813,6	4,756	62,8	114,8	0,141	16,8	0,87
250	39,78	799,0	4,844	61,8	109,9	0,137	18,1	0,86
260	46,94	784,0	4,949	60,5	105,9	0,135	19,7	0,87
270	55,05	767,9	5,070	59,0	102,0	0,133	21,6	0,88
280	64,19	750,7	5,230	57,4	98,1	0,131	23,7	0,90
290	74,45	732,3	5,485	55,8	94,2	0,129	26,2	0,93
300	85,92	712,5	5,736	54,0	91,2	0,128	29,2	0,97
310	98,70	691,1	6,071	52,3	88,3	0,128	32,9	1,03
320	112,90	667,1	6,574	50,6	85,3	0,128	38,2	1,11
330	128,65	640,2	7,244	48,4	81,4	0,127	43,3	1,22
340	146,08	610,1	8,165	45,7	77,5	0,127	53,4	1,39
350	156,37	574,4	9,504	43,0	72,6	0,126	66,8	1,60
360	186,74	528,0	13,984	39,5	66,7	0,126	109	2,35
370	210,53	450,5	40,321	33,7	56,9	0,126	264	6,79

Таблица 7. **Физические свойства водяного пара на линии насыщения**

T °C	$p\cdot10^{-5}$, Па	ρ'', кг/м³	r, кДж/кг	c_p, кДж/кг·К	$\lambda\cdot10^2$ Вт/м·К	$\nu\cdot10^6$, м²/с	$\mu\cdot10^6$ Па·с	Pr
10	0,0123	0,0106	2477,4	1,861	1,89	—	—	—
20	0,0233	0,0173	2453,8	1,866	1,94	510	—	—
30	0,0424	0,0304	2430,2	1,874	1,99	313	—	—
40	0,0737	0,0511	2406,5	1,885	2,06	188	—	—
50	0,123	0,0830	2382,5	1,898	2,12	119	—	—
60	0,199	0,1302	2358,4	1,915	2,19	80	—	—
70	0,310	0,198	2333,8	1,936	2,26	56	—	—
80	0,473	0,293	2308,9	1,862	2,32	38	—	—
90	0,701	0,423	2283,4	2,006	2,35	26	—	—
100	1,013	0,598	2256,8	2,135	2,372	20,02	11,97	1,08
110	1,43	0,826	2230,0	2,177	2,489	15,07	12,46	1,09
120	1,98	1,121	2202,8	2,206	2,593	11,46	12,85	1,09
130	2,70	1,496	2174,3	2,257	2,686	8,85	13,24	1,11
140	3,61	1,966	2145,0	2,315	2,791	6,89	13,54	1,12
150	4,76	2,547	2114,3	2,395	2,884	5,47	13,93	1,16
160	6,18	3,258	2082,6	2,479	3,012	4,39	14,32	1,18
170	7,92	4,122	2049,5	2,583	3,128	3,57	14,72	1,21
180	10,03	5,156	2015,2	2,709	3,268	2,93	15,11	1,25

T °C	$p\cdot10^{-5}$, Па	ρ'', кг/м³	r, кДж/кг	c_p, кДж/кг·К	$\lambda\cdot10^2$, Вт/м·К	$\nu\cdot10^6$, м²/с	$\mu\cdot10^6$, Па·с	Pr
190	12,55	6,397	1978,8	2,586	3,419	2,44	15,60	1,30
200	15,55	7,862	1940,7	3,023	3,547	2,03	15,99	1,36
210	19,08	9,588	1900,5	3,199	3,722	1,71	16,38	1,41
220	23,20	11,62	1857,8	4,408	3,896	1,45	16,87	1,47
230	27,98	13,99	1813,0	3,634	4,094	1,24	17,36	1,54
240	33,48	16,76	1765,6	3,881	4,291	1,06	17,76	1,61
250	39,78	19,98	1715,8	4,158	4,512	0,913	18,25	1,68
260	46,94	23,72	1661,4	4,468	4,803	0,794	18,84	1,75
270	55,05	28,09	1604,4	4,815	5,106	0,688	19,32	1,82
280	64,19	33,19	1542,9	5,234	5,498	0,600	19,91	1,90
290	74,45	39,15	1473,3	5,694	5,827	0,526	20,60	2,01
300	85,92	46,21	1404,3	6,280	6,268	0,461	21,29	2,13

Таблица 8. **Физические свойства дымовых газов ($e = 1{,}013\cdot10^5$ Па)**
Состав: $\bar p_{CO_2} = 0{,}13$, $\bar p_{H_2O} = 0{,}11$; $\bar p_{N_2} = 0{,}76$

T, °C	ρ, кг/м³	c_p, кДж/кг·К	$\lambda\cdot10^2$, Вт/м·К	$\nu\cdot10^6$, м²/с	Pr
100	0,950	1,068	3,13	21,54	0,69
200	0,748	1,097	4,01	32,80	0,67
300	0,617	1,122	4,84	45,81	0,65
400	0,525	1,151	5,70	60,38	0,64
500	0,457	1,185	6,56	76,30	0,63
600	0,405	1,214	7,42	93,61	0,62
700	0,363	1,239	8,27	112,1	0,61
800	0,330	1,264	9,15	131,8	0,60
900	0,301	1,290	10,0	152,5	0,59
1000	0,275	1,306	10,90	174,3	0,58
1100	0,257	1,323	11,75	197,1	0,57
1200	0,240	1,340	1262	221,0	0,56

Таблица 9. **Физические свойства жидких металлов**

Металл	T, °C	ρ, кг/м³	λ, Вт/м·К	c_p, кДж/кг·К	$a\cdot10^6$, м²/с	$\nu\cdot10^8$, м²/с	$\mathrm{Pr}\cdot10^2$
Висмут	300	10030	13,0	0,151	8,61	17,1	1,98
	500	9785	15,8	0,151	10,8	12,2	1,13
Натрий	300	878	70,9	1,281	63,0	39,4	0,63
	500	829	57,0	1,273	54,2	28,9	0,53
Олово	300	6940	33,7	0,255	19,0	24,0	1,26
	400	6865	33,1	0,255	18,9	20,0	1,06
	500	6790	32,6	0,255	18,8	17,3	0,92
Ртуть	150	13230	9,65	0,1373	5,30	8,6	1,62
	200	13120	10,3	0,1373	5,72	8,0	1,40
Сплав 25 % Na + + 75 % K	500	753	28,4	0,967	39,0	26,7	0,69
	600	729	29,6	0,934	43,6	23,7	0,54

Таблица 10. **Удельная теплоемкость газов c_p, кДж/(кг · К), при давлении 0,1 МПа**

T, К	Азот	Аргон	Водород	Кислород	Окись углерода	Двуокись углерода
260	1,041	0,522	14,15	0,916	1,040	—
280	1,041	0,522	14,24	0,917	1,040	0,830
300	1,041	0,522	14,31	0,920	1,041	0,851
350	1,042	0,521	14,43	0,929	1,043	0,900
400	1,045	0,521	14,48	0,942	1,048	0,942
450	1,050	0,521	14,50	0,956	1,055	0,981
500	1,056	0,521	14,52	0,972	1,064	1,020

Таблица 11. **Физические свойства трансформаторного масла**

T, °С	ρ, кг/м³	c_p, кДж/(кг · К)	λ, Вт/(м · К)	$\nu \cdot 10^6$, м²/с	$\beta \cdot 10^4$, К⁻¹	Pr
10	886,4	1,620	0,1115	37,9	6,85	484
20	880,3	1,666	0,1106	22,5	6,90	298
30	874,2	1,729	0,1098	14,7	6,95	202
40	868,2	1,788	0,1090	10,3	7,00	146
50	862,1	1,846	0,1082	7,58	7,05	111
60	856,0	1,905	0,1072	5,78	7,10	87,8
70	850,0	1,964	0,1064	4,54	7,15	71,3
80	843,9	2,026	0,1056	3,66	7,20	59,3
90	837,8	2,085	0,1047	3,03	7,25	50,5
100	831,8	2,144	0,1038	2,56	7,30	43,9
110	825,7	2,202	0,1030	2,20	7,35	38,8
120	819,6	2,261	0,1022	1,92	7,40	34,9

Таблица 12. **Модифицированные функции Бесселя I рода нулевого и первого порядков $I_0(x)$, $I_1(x)$ и II рода нулевого и первого порядков $Y_0(x)$, $Y_1(x)$**

x	$I_0(x)$	$I_1(x)$	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$
0,0	1,000		0	
0,1	1,003	2,447	0,050	9,854
0,2	1,010	1,753	0,101	4,776
0,3	1,023	1,373	0,152	3,056
0,4	1,040	1,115	0,204	2,184
0,5	1,064	0,924	0,258	1,656
0,6	1,092	0,775	0,314	1,303
0,7	1,126	0,661	0,372	1,050
0,8	1,166	0,565	0,433	0,862
0,9	1,213	0,487	0,497	0,717
1,0	1,266	0,421	0,565	0,602
1,2	1,394	0,318	0,715	0,435
1,4	1,553	0,244	0,886	0,320
1,6	1,750	0,188	1,085	0,241

Продолжение табл. 12

x	$I_0(x)$	$I_1(x)$	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$
1,8	1,989	0,159	1,317	0,183
2,0	2,279	0,114	1,591	0,140
2,5	3,289	0,062	2,517	0,0739
3,0	4,881	0,0347	3,395	0,0402
3,5	7,378	0,0196	6,206	0,0222
4,0	11,302	0,0112	9,759	0,0125
4,5	17,481	0,0064	15,389	0,00708
5,0	27,240	0,0037	24,336	0,00404

Формулы векторного анализа

Диадное произведение векторов

$$\vec{a}\,\vec{b} = (a_1 \vec{e} + a_2 \vec{e_2} + a_3 \vec{e_3})\ (b_1 \vec{e_1} + b_2 \vec{e_2} + b_3 \vec{e_3}).$$

Оператор Гамильтона в прямоугольной декартовой системе координат

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}.$$

Градиент функции F

$$\operatorname{grad} F = \nabla F.$$

Дивергенция вектора $\vec{A}$

$$\operatorname{div} \vec{A} = \nabla \cdot \vec{A}.$$

Ротор вектора $\vec{A}$

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \nabla \cdot \vec{A}.$$

Оператор Лапласа в декартовой системе координат

$$\Delta = \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Потоком вектора $\vec{A}$ через поверхность S называется скалярный поверхностный интеграл

$$\iint_S \vec{A} d\vec{S} = \iint_S \vec{A} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_S A_n\, dS.$$

Теорема Остроградского — Гаусса.
Поток вектора через замкнутую поверхность S равен интегралу от дивергенции данного вектора по объему V, ограниченному этой поверхностью, т. е.

$$\iint_S d\vec{S} \cdot \vec{A} = \iiint_V (\nabla \cdot \vec{A})\, dV.$$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Авчухов В. В., Паюсте Б. Я.* Задачник по процессам тепломассообмена.— М. : Энергоатомиздат, 1986.— 144 с.
2. *Алифанов О. М.* Идентификация процессов теплообмена летательных аппаратов : Введение в теорию обратных задач теплообмена.— М. : Машиностроение, 1979.— 216 с.
3. *Арнольд Л. В., Михайловский Г. А., Селиверстов В. М.* Техническая термодинамика и теплопередача.— М. : Высш. шк., 1979.— 446 с.
4. *Безуглый В. Ю., Беляев Н. М.* Численные методы теории конвективного тепломассообмена.— К.; Донецк : Вища шк. Головное изд-во, 1984.— 176 с.
5. *Беляев Н. М., Завелион В. И.* К расчету температурного поля в гладком плитовом холодильнике // Аэрогазодинамика и нестационарный тепломассообмен.— К., 1983.— С. 112—116.
6. *Беляев Н. М., Завелион В. И., Рядно А. А.* Проекционные и разностные методы в задачах теплообмена и термоупругости.— Днепропетровск: ДГУ, 1982.— 104 с.
7. *Беляев Н. М., Рядно А. А.* Методы нестационарной теплопроводности.— М. : Высш. шк., 1978.— 328 с.
8. *Беляев Н. М., Рядно А. А.* Методы теории теплопроводности: В 2 т.— М. : Высш. шк., 1982.— Т. 1—2
9. *Беляев Н. М., Рядно А. А., Завелион В. И.* К оценке влияния конструктивных особенностей на температурное поле чаши шлаковоза // Изв вузов Черная металлургия.— 1983.— № 7.— С. 19—21
10. *Болгарский А. В., Мухачев Г. А., Щукин В. К.* Термодинамика и теплопередача.— М. : Высш. шк., 1975.— 495 с.
11. *Боришанский В. М., Андриевский А. А., Жинкина В. В.* Жидкие металлы.— М. : Высш. шк., 1963.— 205 с.
12. *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости.— М. : Мир, 1973.— 760 с.
13. *Ваничев И. П.* Приближенный метод решения задач теплопроводности // Изв. АН СССР. ОТН.— 1946.— № 12.— С. 1767—1774.
14. *Варгафтик Н. Б.* Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей.— М. : Наука, 1972.— 720 с.
15. *Вейник А. И.* Расчет отливки.— М. : Машиностроение, 1964.— 404 с.
16. *Годунов С. К., Рябенький В. С.* Разностные схемы (введение в теорию).— М. : Наука, 1973.— 400 с.
17. *Гухман А. А.* Введение в теорию подобия.— М. : Высш. шк., 1973.— 254 с.
18. *Джалурия Й.* Естественная конвекция. Тепло- и массообмен. — М. : Мир, 1983.— 400 с.
19. *Есьман Р. И., Жмакин Н. П., Шуб Л. И.* Расчеты процессов литья.— Минск : Вышэйш. шк., 1977.— 267 с.
20. *Жукаускас А. А.* Конвективный перенос в теплообменниках.— М. : Наука, 1982.— 472 с.
21. *Задачник* по технической термодинамике и теории тепломассообмена / Под ред. *В. И. Крутова, Г. Б. Петражицкого.*— М. : Высш. шк., 1986.— 383 с.

22. *Зарубин В. С.* Инженерные методы решения задач теплопроводности.— М. : Энергоатомиздат, 1983.— 328 с.
23. *Зигель М., Хауэлл Дж.* Теплообмен излучением.— М. : Мир, 1975.— 934 с.
24. *Исаченко В. П., Осипова В. А., Сукомел А. С.* Теплопередача.— М. : Энергоатомиздат, 1981.— 416 с.
25. *Калиткин Н. Н.* Численные методы.— М. : Наука, 1978.— 512 с.
26. *Карслоу Г., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел.— М. : Наука, 1964.— 487 с.
27. *Керн Д., Краус А.* Развитые поверхности теплообмена.— М. : Энергия, 1977.— 464 с.
28. *Кирпичев М. В., Михеев М. А., Эйгенсон Л. С.* Теплопередача.— М., Л. : Госэнергоиздат, 1940.— 292 с.
29. *Коздоба Л. А.* Методы решения нелинейных задач теплопроводности.— М. : Наука, 1975.— 227 с.
30. *Коздоба Л. А.* Решение нелинейных задач теплопроводности.— К. : Наук. думка, 1976.— 136 с.
31. *Коздоба Л. А.* Электрическое моделирование явлений тепло- и массопереноса.— М. : Энергия, 1970.— 296 с.
32. *Кондратьев Г. М.* Регулярный тепловой режим.— М. : Гостехтеоретиздат, 1954.— 408 с.
33. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров.— М. : Наука, 1970.— 720 с.
34. *Кошляков Н. С., Глинер Э. В., Смирнов М. М.* Уравнения в частных производных математической физики.— М. : Высш. шк., 1970.— 710 с.
35. *Крейт Ф., Блэк У.* Основы теплопередачи.— М. : Мир, 1983.— 512 с.
36. *Кутателадзе С. С.* Основы теории теплообмена.— Новосибирск : Наука, 1970.— 660 с.
37. *Кутателадзе С. С.* Теплопередача при конденсации и кипении.— М.; Л. : Машгиз, 1952.— 232 с.
38. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики.— М. : Наука, 1973.— 334 с.
39. *Лариков Н. Н.* Теплотехника.— М. : Стройиздат, 1975.— 559 с.
40. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа.— М. : Наука, 1973.— 848 с.
41. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности.— М. : Высш. шк., 1967.— 600 с.
42. *Лыков А. А.* Тепломассообмен: Справочник.— М. : Энергия, 1978.— 480 с.
43. *Марчук Г. И.* Методы вычислительной математики.— М. : Наука, 1980.— 535 с.
44. *Мацевитый Ю. М.* Электрическое моделирование нелинейных задач технической теплофизики.— К. : Наук. думка, 1977.— 254 с.
45. *Методы* расчета сопряженных задач теплообмена.— М. : Машиностроение, 1983.— 232 с.
46. *Михеев М. А., Михеева И. М.* Основы теплопередачи.— М. : Энергия, 1973.— 320 с.
47. *Нащокин В. В.* Техническая термодинамика и теплопередача.— М. : Высш. шк., 1975.— 469 с.
48. *Недужий И. А., Алабовский А. Н.* Техническая термодинамика и теплопередача.— К. : Вища шк. Головное изд-во, 1981.— 248 с.
49. Нестационарный теплообмен в трубах / Под ред. *Н. М. Беляева.*— К.; Донецк : Вища шк. Головное изд-во, 1980.— 160 с.
50. *Никитенко Н. И.* Исследование нестационарных процессов тепло- и массообмена методом сеток.— К. : Наук. думка, 1978.— 212 с.
51. *Новиков И. Н., Воскресенский К. Д.* Прикладная термодинамика и теплопередача.— М. : Госатомиздат, 1961.— 548 с.
52. *Осипова В. А.* Экспериментальное исследование процессов теплообмена.— М. : Энергия, 1979.— 320 с.
53. Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике / Под ред. *В. К. Кошкина.*— М. : Машиностроение, 1975.— 624 с.
54. *Петухов Б. С.* Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах.— М. : Энергия, 1967.— 412 с.
55. *Петухов Б. С., Генин Л. Г., Ковалев С. А.* Теплообмен в ядерных энергетических установках.— М. : Атомиздат, 1974.— 408 с.

56. *Положий Г. Н.* Уравнения математической физики.— М. : Наука, 1964.— 467 с.
57. *Присняков В. Ф.* Термодинамика при кипении.— Днепропетровск: ДГУ, 1982.— 139 с.
58. Расчеты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур.— М. : Машиностроение, 1965.— 567 с.
59. *Рвачев В. Л.*, *Слесаренко А. П.* Алгебра логики и интегральные преобразования в краевых задачах.— К. : Наук. думка, 1976.— 287 с.
60. *Розенау У. М.* Теплообмен при кипении // Современные проблемы теплообмена.— М., 1966.— С. 23—34.
61. *Самарский А. А.* Теория разностных схем.— М. : Наука, 1977.— 364 с.
62. *Самарский А. А.*, *Моисеенко Б. Д.* Экономичная схема сквозного счета для многомерной задачи Стефана // Журн. вычисл. математики и мат. физики.— 1965.— № 5.— С. 816—827.
63. *Самарский А. А.*, *Николаев Е. С.* Методы решения сеточных уравнений.— М. : Наука, 1978.— 592 с.
64. *Самойлович Ю. А.* Формирование слитка.— М. : Металлургия, 1977.— 158 с.
65. *Седов Л. И.* Методы подобия и размерности в механике.— М. : Наука, 1977.— 440 с.
66. *Соковишин Ю. А.*, *Мартыненко О. Г.* Введение в теорию свободно-конвективного теплообмена.— Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1982.— 224 с.
67. *Спэроу Э. М.*, *Сесс Р. Д.* Теплообмен излучением.— Л. : Энергия, 1971.— 294 с.
68. *Танасава И.* Капельная конденсация и пути ее практического применения// Теплообмен. Достижения. Проблемы. Перспективы.— М., 1981.— С. 74—105.
69. *Теплопередача* в двухфазном потоке / Под ред. *Д. Баттерфорса*, *Г. Хьюита*.— М. : Энергия, 1980.— 328 с.
70. Теория тепломассообмена / Под ред. *А. И. Леонтьева*.— М. : Высш. шк., 1979.— 495 с.
71. *Тихонов А. Н.*, *Самарский А. А.* Уравнения математической физики.— М. : Наука, 1972.— 736 с.
72. *Толубинский Е. В.* Теория процессов переноса.— К. : Наук. думка, 1969.— 260 с.
73. Турбулентность. Принципы и применения / Под ред. *У. Фроста*, *Т. Моулдена*.— М. : Мир, 1980.— 535 с.
74. *Тылкин М. А.*, *Яловой Н. И.*, *Полухин П. И.* Температуры и напряжения в деталях металлургического оборудования.— М. : Высш. шк., 1970.— 428 с.
75. *Федик И. И.*, *Колесов В. С.*, *Михайлов В. Н.* Температурные поля и термонапряжения в ядерных реакторах.— М. : Энергоиздат, 1985.— 280 с.
76. *Хаузен Х.* Теплопередача при противотоке, прямотоке и перекрестном токе.— М. : Энергоатомиздат, 1981.— 384 с.
77. *Хинце И. О.* Турбулентность.— М. : Физматгиз, 1963.— 680 с.
78. *Цой П. В.* Методы расчета задач тепломассопереноса.— М. : Энергоатомиздат, 1984.— 416 с.
79. *Чиркин В. С.* Теплофизические свойства веществ.— М. : Физматгиз, 1959.— 356 с.
80. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя.— М. : Наука, 1974.— 712 с.
81. *Эккерт Э. Р.*, *Дрейк Р. М.* Теория тепло- и массообмена.— М. : Госэнергоиздат, 1961.— 680 с.
82. *Юдаев Б. Н.* Теплопередача.— М. : Высш. шк., 1981.— 319 с.
83. *Яненко Н. Н.* Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики.— Новосибирск : Наука, 1967.— 225 с.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Беляев
Николай Михайлович

ОСНОВЫ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ

Художественное оформление
Л. А. Дикарева
Художественный редактор
С. В. Анненков
Технический редактор
О. В. Козлитина
Корректоры
И. Е. Бей, С. А. Хортова

ИБ № 12708

Сдано в набор 26.02.88. Подписано в печать 10.01.89. БФ 03039. Формат 60×90 1/16. Бум. тип. № 2. Гарнитура литературная. Высокая печать. Усл. печ. л.21,5+0,25 форз. Усл. кр.-отт. 22,0. Уч.-изд. л. 23,18+0,45 форз. Тираж 6000 экз. Изд. № 8136. Заказ № 8-844. Цена 1 р. 20 к.

Головное издательство издательского объединения «Вища школа», 252054, Киев-54, ул. Гоголевская, 7

Книжная фабрика им. М. В. Фрунзе, 310057. Харьков-57, Донец-Захаржевского, 6/8.