С. Қ. АЗИЗ-ҚОРИЕВ, Ш. Х. ЯНГУРАЗОВ

НАЗАРИЙ МЕХАНИКАДАН МАСАЛАЛАР ЕЧИШГА ҚЎЛЛАНМА

ҚАЙТА ИШЛАНГАН ИККИНЧИ НАШРИ

ЎЗБЕКИСТОН ССР ОЛИЙ ВА МАХСУС ЎРТА ТАЪЛИМ МИНИСТРЛИГИ ОЛИЙ ТЕХНИКА ЎҚУВ ЮРТЛАРИНИНГ СИРТҚИ ВА КЕЧКИ БЎЛИМЛАРИ СТУДЕНТЛАРИ УЧУН ЎҚУВ ҚЎЛЛАНМАСИ СИФАТИДА РУХСАТ ЭТГАН

(ДИНАМИКА)

„ЎҚИТУВЧИ“ НАШРИЁТИ
Тошкент — 1975

© „Ўқитувчи“ нашриёти, 1975 (иккинчи нашри)

Мазкур китоб Олий техника ўқув юртлари учун тасдиқланган „Назарий механика“ программасига мувофиқ ёзилди. Китоб икки қисмдан: материал нуқта динамикаси ва материал нуқталар системаси динамикасидан иборат бўлиб, унда назарияга оид қисқача маълумотлар берилди ва уларга оид масалаларни ечиш методикаси кўрсатилди.

$$А \frac{20202\ №}{М-353(06)-75}$$

ДИНАМИКА

БИРИНЧИ ҚИСМ

МАТЕРИАЛ НУҚТА ДИНАМИКАСИ

АСОСИЙ ТУШУНЧАЛАР

Материал жисмларнинг ҳаракатини шу ҳаракатни вужудга келтирувчи сабабга, яъни таъсир этаётган кучга боғлаб текширадиган механиканинг қисмига динамика дейилади.

Материал нуқта механика (динамика)нинг оддий объектидир.

Масала ечишда ўлчамларини ҳисобга олмаслик мумкин бўлган материал жисм материал нуқта деб аталади.

Материал нуқтанинг ҳаракатига ҳеч қандай чегара (чек) қўйилмаса, у эркин материал нуқта дейилади. Материал нуқтанинг ҳаракати бирор сабаб билан чекланган бўлса, ундай материал нуқта эрксиз материал нуқта дейилади.

Динамика икки қисмга, материал нуқта динамикасига ва абсолют қаттиқ жисм динамикасига тегишли материал нуқталар системасининг динамикасига бўлинади.

Динамика И. Ньютон таърифлаб берган тўртта аксиомага (қонунга) асосланади.

Биринчи аксиома (инерция қонуни). *Ҳар қандай материал нуқта унга бирор ташқи куч таъсир этмагунча ўзининг тинчлик ҳолатини ёки тўғри чизиқли текис ўлчовли ҳаракатини сақлайди.*

Ўз тезлигининг ўзгаришига материал нуқта кўрсатадиган қаршилик унинг инерцияси дейилади.

Инерция қонунини татбиқ қилиш мумкин бўлган координата системаси инерциал система деб аталади.

Иккинчи аксиома (динамиканинг асосий қонуни). *Материал нуқтанинг ҳаракатлантирувчи куч таъсирида ҳосил бўлган тезланиши бу куч билан бир йўналишда бўлиб, миқдори жиҳатдан шу кучга пропорционалдир*:

$$\overline{F} = m\overline{w}, \qquad (1)$$

бу ерда $\overline{w}$ — куч таъсирида материал нуқта олган тезланиш вектори;

m — материал нуқтанинг массаси — ўзгармас миқдор;

$\overline{F}$ — материал нуқтага таъсир эттирилган кучнинг вектори.

Иккинчи аксиома эркин тушишга (ерга тортилишга) татбиқ этилганда қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\overline{P} = m\overline{g}, \tag{2}$$

бу ерда $\overline{g}$ — жисмнинг эркин тушиш тезланиши;

$\overline{P}$ — жисм оғирлигининг кучи.

Учинчи аксиома (таъсир ва акс таъсир қонуни).

Икки материал нуқтанинг бир-бирига таъсир кучи ҳамма вақт миқдор жиҳатдан бир-бирига тенг ва қарама-қарши томонга йўналган бўлади.

Тўртинчи аксиома (кучлар таъсирининг эркинлик принципи).

Материал нуқтага бир вақтнинг ўзида бир қанча ку[ч] таъсир этаётган бўлса, унинг тезланиши шу матери[ал] нуқтага ҳар қайси куч алоҳида таъсир этганда ҳосил бў[л]ган тезланишларнинг геометрик йиғиндисига тенг, яъни

$$\overline{w} = \overline{w}_1 + \overline{w}_2 + \overline{w}_3 + \ldots + \overline{w}_n, \tag{3}$$

бу ерда

$$\overline{w}_1 = \frac{\overline{F}_1}{m}, \ \overline{w}_2 = \frac{\overline{F}_2}{m}, \ \overline{w}_3 = \frac{\overline{F}_3}{m}, \ \ldots, \ \overline{w}_n = \frac{\overline{F}_n}{m}.$$

$\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, \ldots, \overline{F}_n$ — материал нуқтага таъсир эттирилган кучлар.

m — материал нуқтанинг массаси.

Материал нуқта динамикаси қуйидаги асосий икки типдаги масалани текширади:

1) материал нуқтанинг массаси билан бирга кинематик элементлари берилган бўлиб, материал нуқтани ҳаракатга келтирувчи кучни топиш керак бўлган масалалар биринчи тип масалаларга киради (динамиканинг биринчи масаласи). Бу типдаги масалаларни тўғри масалалар деб ҳам юритилади;

2) массаси маълум бўлган материал нуқтага таъсир этувчи куч берилган бўлиб, шу куч таъсиридан ҳосил бўлган кинематик элементларни топиш керак бўлган масалалар иккинчи тип масалаларга киради (динамиканинг иккинчи масаласи). Бу типдаги масалаларни тескари масалалар деб ҳам юритилади.

I БОВ

МАТЕРИАЛ НУҚТА ҲАРАКАТИНИНГ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАРИ

1-§. Материал нуқта ҳаракати дифференциал тенгламаларининг асосий формулалари

Динамиканинг иккинчи ва тўртинчи қонунига асосан куч билан нуқтанинг тезланиши орасидаги боғланиш қуйидагича ифодаланган:

$$m\bar{w} = m\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F}$$

ёки

$$m\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \bar{F}. \tag{1,1}$$

(1, 1) материал нуқта ҳаракати дифференциал тенгламаларининг вектор ифодасидир.

(1, 1) вектор тенгликни бирор координата ўқлари системасига проекциялаcак, материал нуқта ҳаракатининг ўша ўқлар системасидаги дифференциал тенгламаларини ҳосил қиламиз.

Декарт координата ўқлари системасини олсак, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= X, \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y, \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z, \end{aligned}\right\} \tag{1,2}$$

бу ерда x, y, z—нуқтанинг координаталари; X, Y, Z—нуқтага таъсир эттирилган кучлар тенг таъсир этувчисининг координата ўқларидаги проекциялари. Нуқта эркcиз бўлса, шу тенгламаларга боғланиш реакция кучлари ҳам киради.

Материал нуқта ҳаракати дифференциал тенгламасининг табиий координата ўқлари системасидаги проекцияси қуйидагича бўлади:

$$\left.\begin{aligned} mw_\tau &= F_\tau, \\ mw_n &= F_n, \\ 0 &= F_b \end{aligned}\right\} \tag{1,3}$$

ёки

$$\left.\begin{aligned} m\frac{dv}{dt}&=F_{\tau},\\ m\frac{v^2}{\rho}&=F_{n},\\ 0&=F_{b},\end{aligned}\right| \qquad (1,3')$$

бу ерда v — материал нуқтанинг тезлиги;

ρ — нуқта траекториясининг эгрилик радиуси;

F_{τ}, F_n, F_b — нуқтага таъсир қилаётган кучларнинг тегишлича уринма, нормал ва бинормал ўқлардаги проекциялари. (1,3') тенгламага материал нуқта ҳаракатининг Эйлер ёки табиий тенгламаси дейилади.

Текисликда ҳаракат қилувчи материал нуқтанинг қутб координата ўқлари орқали ҳаракат дифференциал тенгламаси қуйидагича бўлади:

$$m(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2)=F_r, \qquad (1,4)$$

$$\frac{m}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi})=F_{\varphi},$$

бу ерда r—нуқтанинг радиус-вектори;

φ—қутб бурчаги;

F_r, F_{φ} —нуқтага таъсир эттирилган кучнинг r ва φ даги проекциялари.

Материал нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламалари ёрдамида динамиканинг икки асосий масаласини, яъни тўғри ва тескари масалаларини ечиш мумкин.

2-§. Берилган ҳаракат қонунидан кучни топиш

(Нуқта динамикасининг биринчи—тўғри масаласи)

Массаси m бўлган материал нуқта ҳаракати декарт координатасида $x=f_1(t)$, $y=f_2(t)$, $z=f_3(t)$ тенгламалар билан берилган бўлса, шу ҳаракатни вужудга келтирувчи $\overline{F}$ кучнинг X, Y, Z ўқлардаги проекциялари қуйидаги формулалардан топилади:

$$X=m\frac{d^2x}{dt^2}, \quad Y=m\frac{d^2y}{dt^2}, \quad Z=m\frac{d^2z}{dt^2}, \qquad (1,2)$$

бундан

$$F=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2};$$

$$\cos(\widehat{\overline{F},\overline{x}})=\frac{X}{F}, \ \cos(\widehat{\overline{F},\overline{y}})=\frac{Y}{F}, \ \cos(\widehat{\overline{F},\overline{z}})=\frac{Z}{F}.$$

Бу динамиканинг тўғри масаласи бўлгани учун берилган ҳаракат тенгламасини икки марта дифференциаллаш билан масала осонгина ечилади. Массаси m бўлган материал нуқтанинг ҳаракати траекторияда, яъни $s = f(t)$ тенглама билан берилган бўлса, шу ҳаракатни вужудга келтирувчи $\overline{F}$ кучнинг $\overline{F}_\tau, \overline{F}_n, \overline{F}_b$ проекциялари қуйидаги формулалардан топилади:

$$F_\tau = m\frac{dv}{dt}, \quad F_n = m\frac{v^2}{\rho}, \quad F_b = 0, \qquad (1,3')$$

бундан:

$$F = \sqrt{F_\tau^2 + F_n^2},$$

$$\cos(\widehat{\overline{F}, \overline{\tau}}) = \frac{F_\tau}{F}, \quad \cos(\widehat{\overline{F}, \overline{n}}) = \frac{F_n}{F}, \quad \cos(\widehat{\overline{F}, \overline{b}}) = 0.$$

Массаси m бўлган материал нуқта ҳаракати қутб координатаси тенгламалари $r = f_1(t)$, $\varphi = f_2(t)$ билан берилган бўлса, шу ҳаракатни вужудга келтирувчи $\overline{F}$ кучнинг F_r ва F_φ проекциялари қуйидаги формулалардан топилади:

$$F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2), \quad F_\varphi = \frac{m}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}), \qquad (1,4)$$

бундан:

$$F = \sqrt{F_r^2 + F_\varphi^2},$$

$$\cos(\widehat{\overline{F}, \overline{r}}) = \frac{F_r}{F}, \quad \cos(\widehat{\overline{F}, \overline{\varphi}}) = \frac{F_\varphi}{F}.$$

Материал нуқтага таъсир қилаётган кучнинг таъсир чизиғи доим бирор қўзғалмас нуқтадан ўтса, бундай куч марказий куч деб, нуқта эса марказ деб аталади. Қўзғалмас нуқтага қараб йўналган кучга тортувчи (марказга интилувчи) куч, қўзғалмас нуқтадан йўналган кучга итарувчи (марказдан қочувчи) куч дейилади.

Марказий куч таъсиридаги материал нуқта радиус-вектор билан нуқтанинг бошланғич тезлик вектори ётган текисликда ҳаракат қилади. Бундай ҳаракатдаги материал нуқтани табиий координата уқлари системасида текширишда Бине формуласидан фойдаланиш қулай:

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = -\frac{r^2}{4mc}F_r, \qquad (1,5)$$

бу ерда c—нуқтанинг секториал тезлиги, куч марказий бўлганда, бу тезлик ўзгармас: $c = \dot{S} = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi}$ (радиус-вектор чизган сектор юзи S дан вақтга нисбатан олинган биринчи тартибли ҳосила $\dot{S}$ га секториал тезлик дейилади). Бине формуласи марказий орбита бўйича ҳаракат тенгламаси берилганда марказий кучнинг ўзгариш қонунини топиш имконини беради. Агар F_r мусбат бўлса, марказий куч марказдан қочувчи куч бўлади, агар F_r манфий бўлса, куч марказга интилувчи куч бўлади.

3-§. Масалалар ечишга оид методик кўрсатмалар

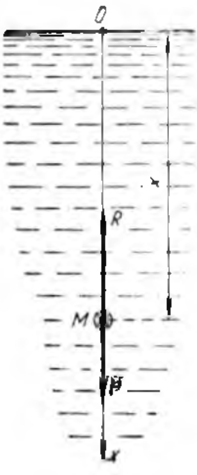
Эркин материал нуқта динамикасининг биринчи тип (тўғри) масалаларини қуйидаги тартибда ечиш тавсия этилади:

1. Агар масала шартида ҳисоблаш системаси берилмаган бўлса, ҳисоблаш системасини танлаб олинади.
2. Берилган кучларни шаклда кўрсатиб ва тасвирлаб олиш керак.
3. Боғланишдан қутулиш принципидан фойдаланиб, боғланиш реакция кучларини кўрсатиб, ифодалаб олинади.
4. Материал нуқтанинг тезланишини берилган ҳаракат қонунидан аниқлаб, унинг олинган координата ўқларидаги проекциялари топилади.
5. Танлаб олинган ҳисоблаш системасида материал нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламаларини тузиб олиш керак.
6. Тузилган дифференциал тенгламалардан изланаётган номаълум миқдорлар топилади.

Динамиканинг биринчи масаласига И. В. Мешчерскийнинг „Назарий механикадан масалалар тўплами" китобидаги 648—653, 672, 673, 748, 749, 751-масалалар ҳамда И. И. Бухгольц, И. М. Воронков ва А. И. Минаковларнинг „Назарий механикадан масалалар тўплами" китобидаги 439, 460, 461, 471, 472, 478, 489, 490, 496, 497-масалалар киради.

4-§. Масалалар

1-масала. Ерга тортилиш кучининг таъсирида вертикал тушаётган, оғирлиги 10 *н* бўлган *M* шар ўз оғирлиги таъсирида вертикал равишда пастга тушмоқда, унга ҳаво қаршилик кўрсатади. Шарнинг ҳаракат қонуни $s = 327t - 109(1-e^{-3t})$ (s — *см* ҳисобида). Ҳавонинг қаршилик кучи тезликнинг функцияси сифатида топилсин.



1 шакл.

Ечиш. Ҳаракат қилаётган *M* нуқтага ернинг тортиш кучи P ва ҳавонинг қаршилик кучи $\overline{R}$ таъсир қилади; уларнинг йўналиши 1-шаклда кўрсатилган. Бу масала динамиканинг тўғри масаласининг (1,2) тенгламасига асосан ечилади.

Шар ҳаракати дифференциал тенгламасининг вертикал x ўқдаги проекциясини тузамиз:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = P - R, \tag{1}$$

бундан:

$$R = P - m\frac{d^2x}{dt^2}.$$

Ҳаракат тенгламасидан биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилалар оламиз:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{ds}{dt} = 327 - 327e^{-3t} = 327(1 - e^{-3t}), \tag{3}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2s}{dt^2} = 981e^{-3t}. \tag{4}$$

Бирликларнинг абсолют системасидан фойдалансак:

$$P = mg,\ P = 10 \cdot 981 = 9810\ \textit{дина},\ m = 10\ \textit{г}.$$

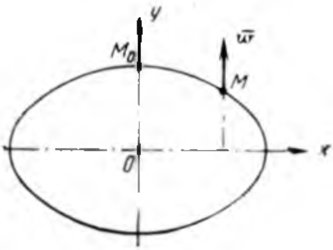
(4) ва (2) дан

$$R = 9810 - 9810\, e^{-3t} = 9810(1 - e^{-3t}).$$

(3) тенгламани назарга олиб R ни тезлик орқали ифодалаймиз:

$$R = 30\, v\ \textit{дина}.$$

2- масала. Массаси m бўлган нуқта $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ эллипс бўйлаб ҳаракат қилади. Нуқтанинг тезланиши y ўққа параллел. $t = 0$ бўлганда нуқтанинг координаталари $x = 0$, $y = b$, бошланғич тезлик v_0. Траекториянинг ҳар бир нуқтасида M нуқтага таъсир қилувчи куч аниқлансин (2-шакл).



2- шакл.

Ечиш. Ҳаракат қилаётган M нуқта тезланиш векторининг Ox координата ўқидаги проекциясини топамиз. Тезланиш Oy ўққа параллел бўлгани учун

$$w_x = \frac{d^2x}{dt^2} = 0. \tag{1}$$

Бу (1) дифференциал тенгламанинг интеграли:

$$x = C_1 t + C_2, \tag{2}$$

бу ерда C_1 ва C_2—интеграллаш доимийлари. Нуқта ҳаракатининг бошланғич шартлари $t = 0$ бўлганда

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = v_0, \quad x_0 = 0, \tag{3}$$

бўлишидан фойдаланиб, C_1 ва C_2 ни топамиз:

$$C_1 = v_1,\ C_2 = 0, \tag{4}$$

демак,

$$x = v_0 t. \tag{5}$$

M нуқта тезланишини топиш учун нуқта траекториясининг тенгламаси (6) дан вақтга нисбатан икки марта ҳосила олиш керак:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0, \tag{6}$$

бундан вақтга нисбатан олинган биринчи тартибли ҳосила:

$$\frac{2x}{a^2}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{2y}{b^2}\cdot\frac{dy}{dt}=0,$$

иккинчи тартибли ҳосила:

$$\frac{2x}{a^2}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{2}{a^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\frac{2y}{b^2}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{2}{b^2}\cdot\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=0 \tag{2}$$

ёки

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+y\,\frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{b^2}{a^2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+x\,\frac{d^2x}{dt^2}\right]. \tag{7}$$

(5) дан x қийматини (6) га олиб қўйиб, y ни топамиз:

$$y=b\sqrt{1-\left(\frac{v_0}{a}\right)^2t^2}. \tag{8}$$

(8) тенгликдан вақтга нисбатан ҳосила оламиз:

$$\frac{dy}{dt}=b\,\frac{-\left(\frac{v_0}{a}\right)^2t}{\sqrt{1-\left(\frac{v_0}{a}\right)^2t^2}}$$

ёки

$$\frac{dy}{dt}=-\frac{b^2}{a^2}\,\frac{v_0^2}{y}\,t. \tag{9}$$

(7), (8) ва (1) тенгламалардан фойдаланиб, изланаётган номаълум миқдорни топамиз:

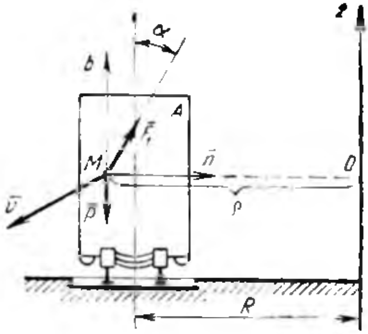
$$\frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{b^4}{a^2}\,\frac{v_0^2}{y^3} \tag{10}$$

Тезланиш вектори топилгандан кейин кучнинг ўша ўқдаги проекцияси Y ни (1,2) тенгламадан фойдаланиб топамиз:

$$Y=F_y=-m\,\frac{b^4v_0^2}{a^2y^3}. \tag{11}$$

3- масала. Эгри чизиқли йўлда 72 *км/соат* ўзгармас тезлик билан борлётган поезд вагонида юк пружинали тарозида тортилади; юкнинг оғирлиги 5 *н*, тарози эса 5,1 *н* ни кўрсатади. Тарозининг массасини ҳисобга олмай, йўлнинг эгрилик радиуси аниқлансин (3- шакл).

Ечиш. Шаклда юкка таъсир қилаётган кучларни $\overline{P}$ (оғирлик) ва $\overline{F}$ (пружинанинг тортиш кучи) билан, шунингдек, оғирлик марказининг траекториясининг нормал йўналишини $\overline{n}$, бинормал йўналишини $\overline{b}$ билан белгилаймиз. Юкнинг оғирлик маркази чизаётган траекториянинг уринма ўқи шакл текислигига тик йўналган. Масалани ечиш учун (1,3) тенгламадан фойдаланамиз.



3- шакл.

$v = 72$ *км/соат* $= 20$ *м/сек* $=$ const бўлгани учун (1,3') тенгламаларининг биринчиси айниятга айланади, яъни $w_\tau = \frac{dv}{dt} = 0$; юкка таъсир қилаётган ҳар қайси кучнинг уринма ўқдаги проекцияси ҳам нолга тенг. Нормал ва бинормал ўқлардаги проекция тенгламаларигина қолади:

$$\frac{mv^2}{\rho} = F_n = F_1 \sin\alpha, \tag{1}$$

$$0 = F_b = F_1 \cos\alpha - P. \tag{2}$$

$m = \frac{P}{g}$ ва ρ нинг бурилиш радиуси R га тенглигини ҳисобга олсак:

$$\frac{P}{g}\frac{v^2}{R} = F_1 \sin\alpha, \tag{3}$$

$$P = F_1 \cos\alpha, \tag{4}$$

буларни квадратга ошириб, қўшсак:

$$\left(\frac{Pv^2}{gR}\right)^2 + P^2 = F_1^2 \sin^2\alpha + F_1^2 \cos^2\alpha = F_1^2 \tag{5}$$

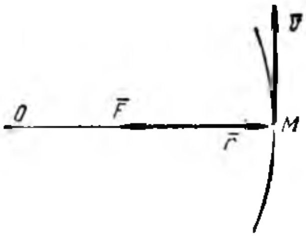
ёки

$$\frac{Pv^2}{gR} = \sqrt{F_1^2 - P^2},$$

бундан:

$$R = \frac{P\,v^2}{g\sqrt{F_1^2 - P^2}} = \frac{5\cdot 20^2}{9{,}81\sqrt{5{,}1^2 - 5^2}} = 202 \text{ м}.$$

4 масала. Массаси m бўлган M нуқта қўзғалмас O марказ атрофида F куч таъсирида ҳаракат қилади; F куч O марказдан чиқади ва $MO = r$ масофагагина боғлиқ. Нуқтанинг тезлигини $v = \frac{a}{r}$ деб ҳисоблаб, F кучнинг миқдори ва нуқтанинг траекторияси топилсин; a — ўзгармас сон (4-шакл).



4- шакл.

Ечиш. Тезликнинг қутб координата ўқлари орқали ифодасини ёзамиз. Формулага асосан

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2. \tag{1}$$

Координата бошини куч чиқиш марказига ўрнаштирсак

$$\frac{a^2}{r^2} = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 \tag{2}$$

бўлади.

Таъсир қилаётган куч марказий куч бўлгани учун у чизган юзнинг интеграли қуйидагича бўлади:

$$r^2\dot{\varphi} = c, \tag{3}$$

бундан:

$$\dot{\varphi} = \frac{c}{r^2}. \tag{4}$$

Бунга биноан

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\cdot\dot{\varphi} = \frac{c}{r^2}\cdot\frac{dr}{d\varphi}. \tag{5}$$

(5) ни (2) га қўйсак

$$\frac{c^2}{r^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2\frac{c^2}{r^4} = \frac{a^2}{r^2}. \tag{6}$$

Тенгламага янги $\frac{1}{r} = u$ ўзгарувчини киритамиз:

$$c^2\left[\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2\right] = a^2u^2. \tag{7}$$

(7) тенгламадан φ бўйича ҳосила олиб, уни $2\frac{dr}{d\varphi}$ га қисқартирсак:

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{a^2}{c^2}u. \tag{8}$$

Бине формуласи (1,5) га биноан (8) нинг ўнг томони $-\frac{F}{mc^2u^2}$ га тенг, демак:

$$\frac{a^2}{c^2}u = -\frac{F}{mc^2u^2},$$

бундан

$$F = -ma^2u^3 = -\frac{ma^2}{r^3}. \tag{9}$$

Таъсир қилаётган F куч марказга тортувчи (чунки у манфий ишорали) ва масофанинг кубига тескари пропорционал.

(8) тенгламадан

$$\frac{du}{d\varphi} = \pm u\sqrt{\frac{a^2}{c^2} - 1} = \pm ku, \tag{10}$$

$$k = \sqrt{\frac{a^2}{c^2} - 1},$$

бундан ўзгарувчиларни ажратсак

$$\frac{du}{u} = \pm k d\varphi, \tag{11}$$

энди буни интеграллаcак,

$$\ln u = \pm k\varphi + c_1. \tag{12}$$

Бошлангич шартлардан $t = 0$ бўлганда $\varphi_0 = 0$; $u = u_0$ шартлардан фойдаланиб c_1 ни топамиз:

$$c_1 = \ln u_0 \tag{13}$$

Шундай қилиб, умумий интеграл

$$\ln u - \ln u_0 = \pm k\varphi$$

ёки

$$\ln\frac{u}{u_0} = \pm k\varphi,$$

бундан:

$$u = \frac{1}{r} = u_0 e^{\pm k\varphi}$$

ёки

$$ru_0 e^{\pm k\varphi} = 1 \text{ ёхуд } \rho e^{\pm k\varphi} = \text{const}.$$

Демак, нуқтанинг траекторияси логарифмик спираль экан.

5-**масала.** Массаси m бўлган нуқта марказий куч таъсирида қутб координаталаридаги тенгламаси $r = \frac{P}{1 + e\cos\varphi}$ кўринишида бўлган траектория буйлаб ҳаракат қилади (бу ерда P ва e—ўзгармас коэффициентлар). Тортиш маркази эса қутб координаталари қутбида. Нуқтани ҳаракатга келтирувчи куч аниқлансин.

Ечиш. $\dot{r}$ ни топамиз:

$$\dot{r} = \frac{Pe\sin\varphi}{(1 + e\cos\varphi)^2}\cdot\dot{\varphi} \tag{1}$$

ёки $\frac{P}{1 + e\cos\varphi}$ ни r билан алмаштирсак

$$\dot{r} = \frac{e\sin\varphi}{P} r^2\dot{\varphi} \tag{2}$$

бўлади.

Таъсир қилаётган куч марказий куч бўлгани учун у юза интеграли булади, яъни

$$r^2\dot{\varphi} = h = \text{const}. \tag{3}$$

(2) тенгламага (3) ни қўйсак, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\dot{r} = \frac{e\sin\varphi}{P} \cdot h. \qquad (5)$$

$\ddot{r}$ ни топамиз:

$$\ddot{r} = \frac{h^2 e}{r^2 P} \cos\varphi = \frac{h^2}{r^2 P}\left(\frac{P}{r} - 1\right). \qquad (5)$$

(1,4) формуладан фойдаланиб F_r ни топамиз:

$$F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = m\left[\frac{h^2}{r^2 P}\left(\frac{P}{r} - 1\right) - \frac{h^2}{r^3}\right] = -\frac{mh^2}{Pr^2}, \qquad (6)$$

бу ерда $\dot{\varphi} = \frac{h}{r^2}$ (3) га асосан ёки квадратга оширсак

$$\dot{\varphi}^2 r = \frac{h^2}{r^3}$$

ҳосил бўлади. $\ddot{\varphi} = 0$ бўлгани учун

$$F_\varphi = 0.$$

5-§. Масса ва куч берилганда нуқтанинг ҳаракат қонунини топиш

(Материал нуқта динамикасининг иккинчи—тескари масаласи)

Берилган куч таъсирида массаси m бўлган материал нуқтанинг ҳаракат қонунини топиш динамиканинг асосий ҳаракат дифференциал тенгламаларини бошланғич шартларида интеграллаш демакдир.

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= X, \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y, \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z. \end{aligned}\right| \qquad (1,2)$$

Бу тенгламаларни икки марта интеграллаб, нуқтанинг декарт координата уқлари системасидаги ҳаракат қонунини топамиз, яъни

$$x = f_1(t),\ y = f_2(t),\ z = f_3(t).$$

Ҳаракати эркин бўлган материал нуқта учун, кўпинча (1,2), яъни декарт координатасидаги ҳаракат дифференциал тенгламаларидан фойдаланилади

Материал нуқта эгри чизиқли эрксиз ҳаракат қилганда, одатда, Эйлернинг ҳаракат тенгламаси (1,3′) дан фойдаланилади, бунда боғланиш реакция кучини ҳисобга олиш керак.

Бу параграфга оид масалаларни асосан икки типга ажратиш мумкин:

1) **тўғри чизиқли ҳаракат қиладиган материал нуқтага тегишли** масалалар ва

2) эгри чизиқли ҳаракат қиладиган материал нуқтага тегишли масалалар.

6-§. Масалалар ечишга оид методик кўрсатмалар

Материал нуқта динамикасининг тескари — иккинчи масаласини қуйидаги тартибда ечиш тавсия этилади.

1. Инерциал ҳисоблаш системасини киритиб, координата ўқлари системаси танлаб олинади.
2. Материал нуқтага боғланиш реакцияси кучлари ва бошқа кучлар таъсир қилаётганини аниқлаб олиш керак.
3. Нуқта ҳаракатининг бошланғич шартларини аниқлаш, яъни x_0, y_0, z_0, v_{0x}, v_{0y}, v_{0z} ларнинг $t = 0$ бўлгандаги ифодаларини топиб олиш керак.
4. (1,2) ёки (1,3) формулаларга мувофиқ материал нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламалари тузилади.
5. Ҳаракат дифференциал тенгламалари интегралланади.
6. Ҳаракатнинг бошланғич шартлари асосида интеграллашдан чиққан номаълум ўзгармасларни топиш керак.
7. Топилган натижани кинематик текшириб кўрилади.

7-§. Материал нуқтанинг тўғри чизиқли ҳаракати

Материал нуқта тўғри чизиқ бўйлаб ҳаракат қилса, у чизиқни Ox ўқи деб қабул қилиб, ўқни ҳаракатнинг ўсиш томонига қаратиб йўналтирамиз. Нуқтанинг ҳаракат дифференциал тенгламаси

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X. \qquad (7,1)$$

Умумий ҳолда X куч нуқтанинг координатаси x, тезлиги $v = \frac{dx}{dt}$ ва вақт t нинг функцияси бўлади, яъни:

$$X = f(x, v, t).$$

Бундай типдаги масалалар тўртта группага бўлинади:

1. Материал нуқтага қўйилган ҳамма кучларнинг тенг таъсир этувчиси ўзгармас бўлган масалалар, яъни

$$X = \text{const}.$$

(Масалан, ер юзи яқинида ҳаракат қилаётган материал нуқтага таъсир қилаётган ернинг тортиш кучи.)

Бу группага И. В. Мешчерскийнинг „Назарий механикадан масалалар тўплами" китобидаги 674, 675, 678, 679, 682, 686-масалалар; Н. Н. Бухгольц, И. М. Воронков ва А. П. Минаковларнинг „Назарий механикадан масалалар тўплами" китобидаги 442, 444, 450, 453, 454, 456 масалалар киради.

2. Материал нуқтага таъсир қилаётган кучларнинг тенг таъсир этувчиси вақтга боғлиқ бўладиган масалалар, яъни:

$$X = f(t)$$

(масалан, нуқтани тебранма ҳаракатга келтирувчи даврий ўзгарувчи куч).

Бу ҳол учун (7,1) тенглама қуйидаги кўринишда бўлади:

$$m\frac{dv}{dt} = f(t). \qquad (7,2)$$

Бу группага И. В. Мешчерскийнинг „Назарий механикадан масалалар тўплами" китобидаги 694, 698, 701, 702-масалалар киради.

3. Материал нуқтага таъсир қилаётган кучларнинг тенг таъсир этувчиси нуқта координатасига (масофага боғлиқ бўладиган масалалар, **яъни:**

$$X = f(x) \qquad (7,3)$$

(эластик пружиналар, иплар ва ҳоказоларнинг кучи).

Бу ҳол учун (7,1) тенглама қуйидаги куринишда бўлади:

$$mv\frac{dv}{dx} = f(x).$$

Бу группага И. В. Мешчерскийнинг „Назарий механикадан масалалар тўплами" китобидаги 699, 700, 724 масалалар; Н. Н. Бухгольц, И. М. Воронков ва А. П. Минаковларнинг „Назарий механикадан масалалар тўплами" китобидаги 462, 463, 464, 466, 467, 468-масалалар киради.

4. Материал нуқтага таъсир қилаётган кучларнинг тенг таъсир этувчиси нуқта тезлигига боғлиқ бўладиган масалалар, **яъни:**

$$X = f(v)$$

(масалан, ҳаракат қилаётган нуқтага муҳитнинг қаршилиги).

Бу ҳол учун (7,1) тенглама қуйидаги куринишда бўлади:

$$m\frac{dv}{dt} = f(v) \qquad (7,4)$$

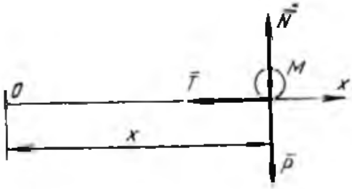
ёки

$$mv\frac{dv}{dx} = f(v). \qquad (7,4')$$

Бу группага И. В. Мешчерскийнинг „Назарий механикадан масалалар тўплами" китобидаги 680, 683, 684, 685, 693, 695, 696, 697, 706, 707, 708-масалалар; Н. Н. Бухгольц, И. М. Воронков ва А. П. Минаковларнинг „Назарий механикадан масалалар тўплами" китобидаги 472, 473, 474, 475, 476, 477-масалалар киради.

8-§. МАСАЛАЛАР

6-масала. Горизонтал йўлда 36 *км/соат* тезлик билан кетаётган трамвайга тормоз берилса, у қанча вақтда ва қандай масофада тухтайди? Тормозлаш вақтида вагон ҳаракатига кўрсатиладиган қаршилик вагон оғирлигининг ҳар тоннасига 300 *кГ* дан туғри келади (5-шакл).



5-шакл.

Ечиш. Трамвайнинг ҳамма массасини оғирлик маркази M нуқтада жойлашган материал нуқта деб фараз қиламиз (5-шакл).

M нуқта ҳаракат қилаётган тўғри чизиқни Ox ўқи деб олиб, уни тормоз бериш вақтида M нуқта турган вазиятни ҳисоблаш боши учун қабул қиламиз.

Трамвайнинг ҳаракатини тормоз берилган $t = 0$ вақтдан бошлаб текширамиз. Масала шартига биноан $t = 0$ бўлганда

$$x_0 = 0, \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = v_0 = 10 \ м/сек.$$

Ҳаракатнинг охирида трамвай тезлигининг $v = 0$ бўлиши маълум. Тормозлаш вақтида трамвайга қандай кучлар таъсир қилишини аниқлаймиз. Тормозлаш вақтида трамвайга учта куч таъсир қилади:

1) трамвайнинг оғирлик кучи $\bar{P}$; 2) рельснинг реакция кучи $\bar{N}$ ва 3) тормозлаш қаршилик кучи $\bar{T}$. Бу кучларни M нуқтага қўйилган деб ҳисоблаймиз.

M нуқтанинг ҳаракат дифференциал тенгламасини тузамиз. Нуқта Ox ўқи бўйлаб тўғри чизиқли ҳаракат қилгани учун, унинг ҳаракат тенгламаси қуйидагича бўлади:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -T,$$

бу ерда m — вагоннинг массаси.

Масала шартига кўра:

$$T = \frac{300}{1000}P = 0{,}3\,P = 0{,}3\ mg,$$

шунинг учун

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -0{,}3\,mg \quad \text{ёки} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -0{,}3\,g. \tag{1}$$

(1) тенгламани интеграллаймиз:

$$\frac{dx}{dt} = v = -0{,}3\,gt + c_1. \tag{2}$$

бу ерда c_1 — интеграллаш доимийси.

Иккинчи марта интегралласак:

$$x = -0{,}3\,g\frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2, \tag{3}$$

бу ерда c_2 — иккинчи интеграллаш доимийси.

(3) ифодада иккита ўзгармас номаълум бор. Уларни (2) ва (3) тенгламалардан топиш учун улардаги t ўрнига $t=\tau$ ни (τ — тормозлаш вақти) ва чап томонларига тегишли қийматларини қўямиз. У вақтда

$$0 = v_0 - 0{,}3\,g\tau, \tag{4}$$

$$x = v_0\tau - \frac{0{,}3\,g\tau^2}{2}. \tag{5}$$

(4) тенгламадан тормозлаш вақти τ ни топамиз:

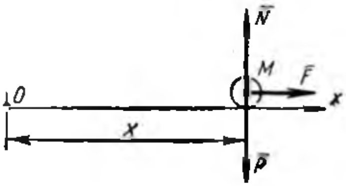
$$\tau = \frac{v_0}{0{,}3g} = \frac{10}{0{,}3\cdot 9{,}81} = 3{,}4\ \textit{сек.} \tag{6}$$

Тормозлаш вақтида трамвай ўтган йўлни топиш учун тормозлаш вақтини (5) га қўямиз.

$$x = 10\cdot 3{,}4 - \frac{0{,}3\cdot 9{,}81\cdot 3{,}4^2}{2} = 16{,}9\ \textit{м},$$

бу изланаётган тормозлаш вақтида трамвай босган йўл.

7-масала. Массаси m бўлган материал нуқта $F = F_0\cos\omega t$ (бу ерда F_0 ва ω — ўзгармас миқдорлар) қонунига мувофиқ ўзгарувчи куч таъсирида тўғри чизиқли ҳаракат қилади. Бошланғич пайтда нуқтанинг тезлиги $\dot{x}_0 = v_0$ бўлган. Нуқта ҳаракатининг тенгламаси топилсин (6-шакл).



6-шакл.

Ечиш. Нуқтанинг бошлангич (олдинги) пайтдаги вазиятини ҳисоблаш боши учун қабул қилиб, Ox ўқини нуқта ҳаракат қилаётган тўғри чизиқ бўйича йўналтирамиз. Бошланғич пайтда нуқта ҳаракатда эканлигини ҳисобга олиб, бошланғич шартларни ёзамиз:

$$t=0 \text{ бўлганда } x=0,\ v = \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = v_0.$$

Нуқтага $\bar{P}$ оғирлик кучи, ҳаракатга келтирувчи $\bar{F}$ куч ва горизонтал текисликнинг $\bar{N}$ нормал реакция кучи қўйилган. Нуқтанинг x ўқи бўйича ҳаракат дифференциал тенгламаси:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F. \tag{1}$$

ёки

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F_0}{m}\cos\omega t \qquad (2)$$

куринишда бўлади. $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$ бўлгани учун уни (2) га қўйиб ўзгарувчиларни ажратамиз:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F_0}{m}\cos\omega t$$

ёки

$$dv = \frac{F_0}{m}\cos\omega t\cdot dt. \qquad (3$$

Буни интеграллаймиз:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{F_0}{m\omega}\sin\omega t + c_1. \qquad (4)$$

Бошланғич $t = 0$ бўлганда $v = v_0$ шартларни (4) га қўйсак c_1 топилади:

$$c_1 = v_0$$

c_1 нинг қийматини (4) га қўямиз:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{F_0}{m\omega}\sin\omega t + v_0. \qquad (5)$$

(5) даги ўзгарувчиларни ажратамиз:

$$dx = \frac{F_0}{m\omega}\sin\omega t\cdot dt + v_0 dt. \qquad (6)$$

Буни интеграллаймиз:

$$x = -\frac{F_0}{m\omega^2}\cos\omega t + v_0 t + c_2. \qquad (7)$$

Бошлангич шартларни ($t = 0$ бўлганда $x = x_0 = 0$) (7) га қўйиб; c_2 ни топамиз:

$$c_2 = \frac{F_0}{\omega^2 m}. \qquad (8)$$

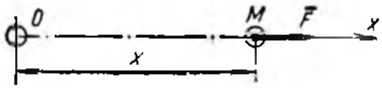
c_2 нинг қийматини (7) га қўйсак:

$$x = \frac{F_0}{m\omega^2}(1 - \cos\omega t) + v_0 t$$

бўлади.

Бу излаётган нуқта ҳаракатининг тенгламаси.

8-масала. Массаси m бўлган материал нуқта қўзғалмас O нуқтадан массаси m ва масофаси x га пропорционал куч билан итарилади. Пропорционаллик коэффициенти k^2 га, бошланғич M нуқтадан O нуқтагача бўлган масофа a га, нуқта-



7- шакл.

нинг бошланғич тезлиги нолга тенг. Нуқтанинг ҳаракат қонуни тенгламаси топилсин (7-шакл).

Ечиш. Масаланинг шартига биноан $F = k^2mx$, шунинг учун нуқтанинг ҳаракат дифференциал тенгламаси (7,1) тенгламага асосан қуйидагича бўлади:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = k^2mx \tag{1}$$

ёки

$$\frac{d^2x}{dt^2} - k^2x = 0. \tag{2}$$

(2) тенглама ўнг томони нолга тенг, коэффициентлари ўзгармас бўлган иккинчи тартибли чизиқли дифференциал тенглама. Буни ечиш учун тегишли характеристик тенглама тузамиз:

$$x = e^{\lambda t} \text{ олиб, } \frac{dx}{dt} = \lambda e^{\lambda t}, \ \frac{d^2x}{dt^2} = \lambda^2 e^{\lambda t}, \tag{3}$$

буларни (2) га қўйиб, $e^{\lambda t}$ га қисқартирсак:

$$\lambda^2 - k^2 = 0 \tag{4}$$

келиб чиқади, бундан

$$\lambda_{1,2} = \pm k,$$

характеристик тенгламанинг илдизлари маълум сонлар эканлигини ҳисобга олиб, (2) дифференциал тенгламанинг ечилишини

$$x = c_1e^{kt} + c_2{}^{-kt} \tag{5}$$

кўринишда оламиз.

Интеграллаш доимийлари c_1 ва c_2 ни топиш учун иккита тенглама бўлиши керак. x дан вақт t га нисбатан ҳосила оламиз:

$$\frac{dx}{dt} = v = c_1ke^{kt} - c_2ke^{-kt}. \tag{6}$$

Бошланғич шартлар ($t = 0$ бўлганда $x_0 = a$, $v = 0$) ни (5) ва (6) ифодаларга қўямиз:

$$a = c_1 + c_2$$
$$0 = kc_1 - kc_2$$

бўлади. Бу тенгламалардан $c_1 = c_2 = \frac{a}{2}$ эканлиги топилди.

c_1 ва c_2 ларнинг топилган қийматларини (5) га қўйсак, изланаётган нуқтанинг ҳаракат қонуни тенгламаси чиқади:

$$x = \frac{a}{2}(e^{kt} + e^{-kt}) \tag{7}$$

ёки

$$x = achkt. \tag{8}$$

9-масала. Массаси m булган шар ернинг тортиш кучи таъсирида бошланғич тезликсиз вертикал бўйича пастга тушади; ҳавонинг қаршилиги $R = \mu\sigma\rho v^2$ га тенг; бу ерда μ — ўзгармас пропорционаллик коэффициенти, σ — тушаётган шар катта доирасининг юзи, ρ — ҳавонинг зичлиги, v — шарнинг тушиш тезлиги. Шарнинг тезлиги v ва ўтган йўли s вақт t орқали топилсин. Вақт t чексиз катта бўлганда тезлик v нинг чегара қиймати топилсин (8-шакл).

8-шакл.

Ечиш. Шарнинг олдинги вазиятини координата боши деб қабул қилиб, Ox ўқини вертикал пастга йўналтирамиз. У вақтда (7,4) га асосан шарнинг ҳаракат дифференциал тенгламаси қуйидаги кўринишда бўлади:

$$m\frac{dv}{dt} = P - R \tag{1}$$

ёки

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \mu\sigma\rho v^2. \tag{2}$$

(2) тенгламани m га бўлиб ва $\frac{\mu\sigma\rho}{mg} = k^2$ деб белгилаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{dv}{dt} = g(1 - k^2v^2). \tag{3}$$

Ўзгарувчиларни ажратсак:

$$\frac{dv}{1 - k^2v^2} = gdt. \tag{4}$$

Шарнинг бошланғич тезлигини нолга тенг деб ҳисоблаб, тегишли чегарада (4) ни интеграллаймиз:

$$\int_0^v \frac{dv}{1 - k^2v^2} = \int_0^t gdt. \tag{5}$$

ёки

$$-\frac{1}{2k}\ln\frac{1 - kv}{1 + kv}\Bigg|_0^v = gt\Bigg|_0^t, \tag{6}$$

ёки

$$\frac{1}{2k}\ln\frac{1 - kv}{1 + kv} = -gt, \tag{7}$$

бундан:

$$\frac{1-kv}{1+kv}=e^{-2kgt}. \tag{8}$$

Бу тенгламадан v ни топамиз:

$$v=\frac{1}{k}\frac{1-e^{-2kgt}}{1+e^{-2kgt}}=\frac{1}{k}\left(\frac{1-e^{-2kgt}}{1+e^{-2kgt}}\right)\cdot\frac{e^{kgt}}{e^{kgt}},$$

демак:

$$v=\frac{1}{k}\frac{e^{kgt}-e^{-kgt}}{e^{kgt}+e^{-kgt}}. \tag{9}$$

(9) дан кўриниб турибдики, $t\to\infty$ да

$$\lim_{t\to 0} v=\frac{1}{k}. \tag{10}$$

бўлади.

Вақт t орта бориши билан e^{-kgt} функция ҳам тез кичиклаша боради, шу сабабли бирор маълум вақтдан кейин шарнинг тезлиги тенг ўлчовли бўлиб қолади ва тезлик $\frac{1}{k}$ га тенг бўлади.

Шар ўтган йўлни топиш учун 0 дан t гача ва 0 дан s гача оралиқда $v=\frac{dx}{dt}=\frac{1}{k}\frac{e^{kgt}-e^{-kgt}}{e^{kgt}+e^{-kgt}}$ (9) тенгламани интеграллаймиз.

Ўзгарувчиларни ажратиб интегралласак:

$$\int_0^s dx=\frac{1}{k}\int_0^t\frac{e^{kgt}-e^{-kgt}}{e^{kgt}+e^{-kgt}}dt \tag{11}$$

ёки

$$x\Big|_0^s=\frac{1}{k^2g}\ln\frac{e^{kgt}+e^{-kgt}}{2}\Big|_0^t,$$

бундан:

$$s=\frac{1}{k^2g}\ln\frac{e^{kgt}+e^{-kgt}}{2}. \tag{12}$$

Бу тенглик шар ўтган йўлнинг вақт орқали ифодасидир.

9-§. Материал нуқтанинг эгри чизиқли ҳаракати

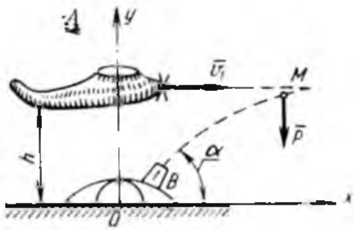
Бу бобдаги масалаларни ечишда (1,2) ҳаракат дифференциал тенгламаларидан фойдаланилади.

Материал нуқтанинг эгри чизиқли ҳаракати, кўпинча, табиий ўқлар системасида текширилади. Бундай ҳолларда (1,3′) тенгламалардан фойдаланилади.

Масалани ечиш тартиби худди 6-§ да кўрсатилгандек бўлади. Бунга И. В. Мешчерскийнинг „Назарий механикадан масалалар тўплами“ китобидаги 709—732 масалалар; Н. Н. Бухгольц, И. М. Воронков ва А. П. Минаковларнинг „Назарий механикадан масалалар тўплами“ китобидаги 491, 492-масалалар киради.

10-§. Масалалар

10-масала. A самолёт ердан h баландликда горизонтал v_1 тезлик билан учади. Самолёт B тўп билан бир вертикалда бўлган вақтда шу тўпдан самолётга снаряд отилган. Снаряд самолётга тегиши учун: 1) снаряднинг бошланғич тезлиги v_0 қандай шартни қаноатлантириши керак ва 2) снаряд горизонтга қандай α бурчак остида отилиши лозим? Ҳавонинг қаршилиги ҳисобга олинмасин (9-шакл).



9-шакл.

Ечиш. Координатанинг Oy ўқини тўп турган нуқтадан вертикал юқорига, Ox ўқини эса горизонтал равишда самолётнинг учиш томонига қаратиб йўналтирамиз. Снаряднинг ҳаракатига ҳаво кўрсатадиган қаршиликни ҳисобга олмасдан, снарядга фақат ўзининг mg оғирлик кучи таъсир қилади деб қараймиз.

(1,2) га мувофиқ снаряднинг ҳаракат дифференциал тенгламасини тузамиз:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= 0, \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= -mg. \end{aligned}\right| \qquad (1)$$

бу ерда m—снаряднинг массаси.

Ҳаракат текисликда юз бераётганлиги учун (1,2) нинг учинчи тенгламаси бўлмайди. $t = 0$ бўлганда

$$x_0 = 0,\ y_0 = 0,\ v_{0x} = v_0 \cos\alpha,\ \ v_{0y} = v_0 \sin\alpha, \qquad (2)$$

бошланғич шартларни қаноатлантирадиган (1) системанинг ечимини топамиз. (1) тенгламани бир марта интегралласак:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dy} &= c_1 \\ \frac{dy}{dx} &= -gt + c_2 \end{aligned}\right| \text{ ёки } \left.\begin{aligned} v_x &= c_1 \\ v_y &= -gt + c_2, \end{aligned}\right| \qquad (3)$$

иккинчи марта интегралласак:

$$x = c_1 t + c_3,$$
$$y = -g\frac{t^2}{2} + c_2 t + c_4.$$

Бошлангич (2) шартлардан фойдаланиб, c_1, c_2, c_3 ва c_4 ни топамиз. $t = 0$ да $v_{0x} = c_1$, $v_{0y} = c_2$, $x_0 = c_3$, $y_0 = c_4$ бўлганлигидан

$$c_1 = v_0 \cos\alpha, \quad c_2 = v_0 \sin\alpha, \quad c_3 = c_4 = 0.$$

Демак,

$$x = v_{0x} t; \quad y = v_{0y} t - \frac{gt^2}{2}.$$

ёки

$$x = v_0 t \cos\alpha; \quad y = v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}.$$

Снаряд самолётга текканда $x_1 = x$, $y = h$ шартларни қаноатлантириши керак, бу ерда $x_1 = v_1 t_1$ — снаряд отилгандан то у бориб самолётга теккунча кетган t_1 вақт ичида самолётнинг ўтган йўли. (4) нинг биринчи тенглиги тўп уқининг қия бурчаги α ни топиш имкониятини беради:

$$v_0 \cos\alpha \geqslant v_1, \text{ яъни } \cos\alpha = \frac{v_1}{v_0}. \tag{5}$$

(4) нинг иккинчи тенглигидан снаряднинг учиш вақти t_1 ни топамиз:

$$t_1 = \frac{1}{g}\left(v_0 \sin\alpha \pm \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha - 2gh}\right). \tag{6}$$

бундан:

$$v_0^2 \sin^2\alpha - 2gh \geqslant 0 \tag{7}$$

бўлгандагина снаряд самолётга тегиши мумкин.

(7) тенгсизликни (5) тенгликка қўйсак, яъни

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \frac{v_1^2}{v_0^2}. \tag{8}$$

(8) ни (7) га қўйсак, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$v_0^2\left(1 - \frac{v_1^2}{v_0^2}\right) - 2hg \geqslant 0,$$

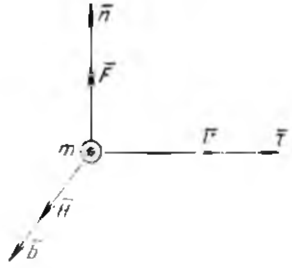
бундан:

$$v_0^2 \geqslant v_1^2 + 2hg. \tag{9}$$

11-масала. *Катод нурларининг магнит майдонида оғиши.* Манфий e электр зарядли, m массали зарра кучланиши H бўлган бир жинсли магнит майдонига майдон кучланишига перпендикуляр йўналган v_0 тезлик билан кириб боради. Заррага

$$\overline{F} = -e(\overline{v} \times \overline{H})$$

куч таъсир қилади деб ҳисоблаб, зарра кейинги ҳаракатининг траекторияси аниқлансин (10-шакл).



10-шакл.

Ечиш. Координата ўқларини 10-шаклда кўрсатилгандек оламиз. Нуқтанинг ҳаракат дифференциал тенгламасини (1,3′) кўринишида (уринма нормал ва бинормал ўқлардаги проекцияcида) тузамиз:

$$\left\{\begin{aligned} & m\frac{dv}{dt} = F_\tau = 0, \\ & m\frac{v^2}{\rho} = F_n = -e(\overline{v} \times \overline{H}) \\ & \qquad 0 = F_b = 0. \end{aligned}\right. \tag{1}$$

Буларнинг биринчисидан

$$v_1 = c_1 = \text{const}, \tag{2}$$

бошланғич шартлардан $t = 0$ бўлганда, $v = v_0$ бунга мувофиқ $c_1 = v_0$, $v = v_0$ бўлгани учун доимо

$$\frac{mv_0^2}{\rho} = eHv_0 \tag{3}$$

ёки

$$\frac{mv_0}{\rho} = eH \tag{4}$$

бўлади бунда миқдорларнинг ҳаммаси ўзгармас, ундан ρ ни топамиз:

$$\rho = \frac{mv_0}{eH}.$$

Демак, зарранинг ҳаракат траекторияси радиуси ρ бўлган айлана экан.

II БОБ

МАТЕРИАЛ НУҚТАНИНГ ТУРЛИ ТЕБРАНМА ҲАРАКАТЛАРИ

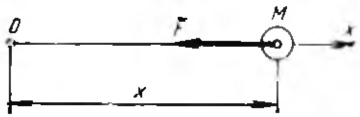
11- §. Материал нуқтанинг тебранма ҳаракати

Бу бобга кирадиган масалалар асосан қуйидаги учта типга бўлинади:

1. Масофага пропорционал бўлган куч таъсирида тебранувчи материал нуқтанинг гармоник тебранма ҳаракати.
2. Қаршилик кўрсатувчи муҳитда материал нуқтанинг сўнувчи тебранма ҳаракати.
3. Қаршилик бўлганда ва қаршилик бўлмаганда материал нуқтанинг мажбурий тебранма ҳаракати.

12- §. Материал нуқтанинг гармоник тебранма ҳаракати

Материал нуқта O мувозанат вазиятидан x масофагача чиқариб қўйиб юборилганда, у ҳамма вақт мувозанат вазияти O га қараб йўналган ва нуқтадан мувозанат вазиятигача бўлган x масофага пропорционал $\overline{F}$ куч таъсирида бўлсин. Материал нуқта ана шундай куч таъсирида ҳамма вақт ўзининг мувозанат вазиятига интилиб, шу O нуқта атрофида тебранма ҳаракат қилади. Бундай куч таъсиридаги материал нуқтанинг тебраниши гармоник ёки эркин тебранма ҳаракат дейилиб, бу $F = c \cdot |x|$ куч эса қайтарувчи куч деб аталади. Бу ерда c — нуқтани бирлик узунликка кўчириш учун зарур бўлган куч бўлиб, $\frac{н}{см}$ билан ўлчанадиган жисмнинг бикрлик коэффициенти.



11- шакл.

Қайтарувчи $\overline{F}$ куч таъсирида горизонтал x ўқи бўйича ҳаракат қилувчи (11- шакл) m массали M нуқтанинг ҳаракат дифференциал тенгламасини тузамиз:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -cx, \tag{12,1}$$

бу ерда x — нуқтанинг абсциссаси, O — M нуқтанинг мувозанат ҳолатидаги вазияти.

(12,1) тенгламани қуйидаги кўринишга келтирамиз:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0, \tag{12,2}$$

бу ерда

$$k^2 = \frac{c}{m}.$$

Бошланғич $t = 0$ пайтда $x = x_0$, $v = v_0$ бўлган шартларда (12,2) нинг умумий интеграли қуйидаги кўринишда бўлади:

$$x = a \sin(kt + \alpha). \tag{12,3}$$

Бу тенглама гармоник тебранма ҳаракат тенгламасидир. Бу ерда

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{k^2}} \text{ — тебраниш амплитудаси,} \tag{12,4}$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{kx_0}{v_0} \text{ — бошланғич фаза,} \tag{12,5}$$

$$(kt + \alpha) \text{ — тебраниш фазаси,}$$

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} \text{ — доиравий такрорлик сони,} \tag{12,6}$$

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}} \text{ — тебраниш даври.} \tag{12,7}$$

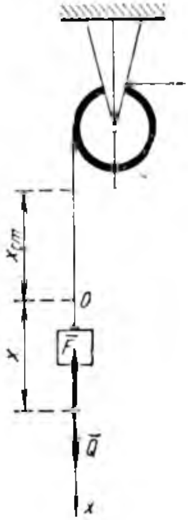
13-§. Масалалар ечиш юзасидан методик кўрсатмалар

Материал нуқтанинг гармоник ҳаракатига тааллуқли масалаларни қуйидаги тартибда ечиш тавсия этилади.

1. Материал нуқтанинг статик мувозанат ҳолатини ҳисоблаш боши учун қабул қилиб, ҳисоблаш системасини танлаб олинади.
2. Материал нуқтанинг бошланғич шартларини аниқлаб олинади.
3. Материал нуқтага қўйилган кучни ва реакция кучини тасвирлаш керак.
4. Материал нуқта ҳаракат дифференциал тенгламасининг тегишли уқдаги проекцияси тузилади.
5. Интегралнинг ўзгармас миқдорларини топиш учун бошланғич шартлардан фойдаланиш керак.
6. Материал нуқтанинг ҳаракат дифференциал тенгламасини тузмасдан (12,4), (12,6), (12,7) формулалардан фойдаланиб, амплитуда, доиравий такрорлик ва тебраниш даври топилса кифоя.
7. Материал нуқтанинг гармоник тебранишига И. В. Мещерский „Назарий механикадан масалалар тўплами" китобидаги 825—842-масалалар киради.

14-§. Масалалар.

12 масала. Оғирлиги $Q=2$ *кн* бўлган юк тенг ўлчовли $v=5$ *м/сек* тезлик билан пастга туширилаётганда пўлат арқон блок обоймасига сиқилиб қолиб, юк туширилаётган пўлат арқоннинг юқориги учи тўсатдан тўхтаб қолди. Пўлат арқоннинг оғирлигини ҳисобга олмай, юкнинг кейинги тебранишида пўлат арқоннинг энг катта тортилиши қанчага етиши аниқлансин, пўлат арқоннинг бикрлик коэффициенти $c = 4\ \frac{кн}{см}$ (12- шакл).



12- шакл.

Ечиш. Координата ўқининг боши учун юкнинг статик мувозанат, яъни $Q = cx_{ст}$ (1) ҳолатидаги нуқтани олиб, координата ўқини вертикал равишда пастга йўналтирамиз. У вақтда бошланғич шарт $t = 0$ бўлганда

$$x_0 = 0, \quad v_0 = 5\ м/сек \tag{2}$$

бўлади.

Юкнинг ҳаракат дифференциал тенгламаси (12,1) га мувофиқ қуйидагича ёзилади:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = Q - c\,(x_{cm} + x). \tag{3}$$

(1) тенгламани назарга олсак,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{cg}{Q}x = 0 \tag{4}$$

бўлади.

Бу дифференциал тенгламани ечсак, (12,3) формулани ҳосил қиламиз, яъни:

$$x = a\sin(kt + \alpha). \tag{5}$$

Бошлангич (2) шартни қаноатлантиришда a, k, α ни топамиз. $t = 0$ бўлганда

$$x_0 = 0,\ k = \sqrt{\frac{cg}{Q}}, \quad a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{k^2}} = \frac{v_0}{k} = v_0\sqrt{\frac{Q}{cg}},$$

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{kx_0}{v_0} = \operatorname{arc\,tg} 0 = 0.$$

Буларни (5) га қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$x = v_0\sqrt{\frac{Q}{cg}}\sin\sqrt{\frac{cg}{Q}}\,t. \tag{6}$$

$\sin\sqrt{\frac{cg}{Q}}\,t$ энг катта қийматга эга бўлганда x_{max} бўлади, яъни $\sin\sqrt{\frac{cg}{Q}}\,t = 1$ га тенг бўлганда

$$x_{\max} = v_0 \sqrt{\frac{Q}{cg}} \qquad (7)$$

бўлади.

Пўлат арқондаги энг катта тортилиш кучи:

$$F_{\max} = cx_{\max} + Q. \qquad (8)$$

(8) тенгламадаги ҳарфларнинг сон қийматларини қўйсак:

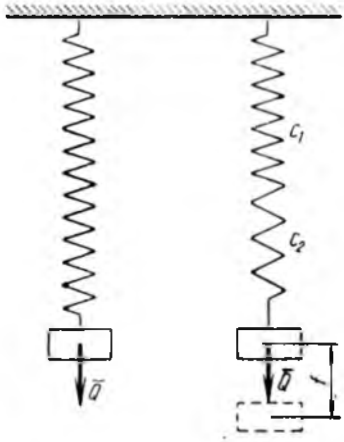
$$F_{\max} = v_0 \sqrt{\frac{cQ}{g}} + Q = 500 \sqrt{\frac{4 \cdot 2}{980}} +$$
$$+ 2 = 45{,}1 + 2 = 47{,}1 \ кн.$$

Бу ҳолда пўлат арқондаги энг катта тортилиш кучи 47,1 *кн* экан.

13-масала. Бикрлик коэффициентлари c_1 ва c_2 ҳар хил бўлган ва кетма-кет уланган иккита пружинага эквивалент c пружинанинг бикрлик коэффициенти аниқлансин ва шу иккита пружинага осилган Q оғирликдаги юкнинг тебраниш даври топилсин (13-шакл).

Е ч и ш. Юқориги ва пастки пружиналарнинг бикрлик коэффициентлари c_1 ва c_2 га тенг. Q кучнинг таъсирида биринчи пружина f_1 га, иккинчи пружина f_2 га чўзилади, деб фараз қилайлик. Чўзувчи куч Q бўлгани учун ҳар қайси пружинанинг чўзилиши қуйидагига тенг бўлади:

$$f_1 = \frac{Q}{c_1} \ \text{ва} \ f_2 = \frac{Q}{c_2}. \qquad (1)$$



13-шакл.

Иккала пружинанинг умумий чўзилиши f эса

$$f = f_1 + f_2 = \frac{Q}{c_1} + \frac{Q}{c_2} = \frac{c_1 + c_2}{c_1 c_2} Q. \qquad (2)$$

Келтирилган бикрлик коэффициенти эквивалент пружинанинг бикрлик коэффициенти c га тенг:

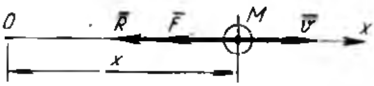
$$c = \frac{Q}{f} = Q \cdot \frac{1}{Q} \cdot \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}. \qquad (3)$$

Юкнинг тебраниш даври (12,7) формулага асосан қуйидагича бўлади:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}} = 2\pi \sqrt{\frac{Q(c_1 + c_2)}{g\, c_1 c_2}} \qquad (4)$$

15- §. Сўнувчи тебранма ҳаракат

Материал нуқта ҳаракатга қаршилик кўрсатувчи муҳитда (ҳаво, суюқлик) ҳаракат қилганда ҳаракатга таъсир қилувчи қаршилик кучи пайдо булади. Бу қаршилик кучи нуқтанинг тезлиги катта бўлмаганда тезликнинг биринчи даражасига тўғри пропорционал, яъни $\overline{R} = -\alpha\overline{v}$ деб ҳисобланади, бунда α — ўзгармас пропорционаллик коэффициенти; материал нуқтанинг тезлиги катта бўлганда қаршилик кучи нуқта тезлигининг квадратига тўғри пропорционал, яъни $\overline{R} = -\alpha_1\overline{v}^2$ деб ҳисобланади, бунда α_1 — ўзгармас пропорционаллик коэффициенти.



14- шакл

Массаси m бўлган M материал нуқта Ox ўқи буйлаб қаршилик кўрсатувчи муҳитда эркин тебранма ҳаракат қилаётган бўлсин. Тебранма ҳаракат учун муҳит қаршилиги тезликнинг биринчи даражасига пропорционал деб олиш мумкин. У ҳолда, материал нуқта қўзғалмас O марказга торгувчи $F_x = -cx$ қайтарувчи куч билан тезликнинг биринчи даражасига пропорционал бўлган $R_x = -\alpha v_x = -\alpha \frac{dx}{dt}$ муҳит қаршилиги кучи таъсирида ҳаракат қилади (14- шакл).

Материал нуқтанинг дифференциал тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -cx - \alpha\frac{dx}{dt}$$

ёки

$$\frac{c}{m} = k^2, \quad \frac{\alpha}{m} = 2n$$

десак, ҳаракат дифференциал тенгламаси қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2n\frac{dx}{dt} + k^2x = 0. \qquad (15,1)$$

Дифференциал тенгламанинг интегралини топиш учун характеристик тенглама тузамиз:

$$\lambda^2 + 2n\lambda + k^2 = 0.$$

Бу тенгламанинг илдизлари:

$$\lambda_1 = -n + \sqrt{n^2 - k^2},$$
$$\lambda_2 = -n - \sqrt{n^2 - k^2}.$$

Илдизларга қараб ҳаракат уч турда бўлади:

1) $n < k$ бўлганда, кичик қаршиликли ҳол, 2) $n > k$ бўлганда, катта қаршиликли ҳол, 3) $n = k$ булганда, чегарадаги ҳол бўлади.

$n < k$ бўлган кичик қаршиликли ҳолда материал нуқта сўнувчи тебранма ҳаракат қилади ва ҳаракат дифференциал тенгламасининг умумий интеграли қуйидагича бўлади:

$$x = e^{-nt}(A\cos k_1 t + B\sin k_1 t) = ae^{-nt}\sin(k_1 t + \delta), \qquad (15,2)$$

бунда $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$.

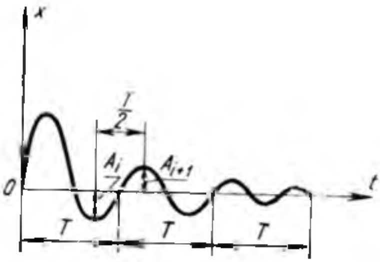
A ва B (ёки a ва δ) — ихтиёрий ўзгармас миқдорлар, улар бошланғич v_0 тезлик ва бошланғич x_0 нуқта координатасининг шартларидан топилади.

$$\left.\begin{aligned} &A_0 = x_0, \quad B = \frac{v_0 + nx_0}{k_1} \\ \text{ёки}\quad &a = \frac{1}{k_1}\sqrt{k_1^2 x_0^2 + (v_0 + nx_0)^2}, \\ &\delta = \operatorname{arctg}\frac{k_1 x_0}{v_0 + nx_0}. \end{aligned}\right| \qquad (15,3)$$

Сўнувчи тебранма ҳаракатнинг тебраниш даври қуйидаги формуладан топилади:

$$T = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}}. \qquad (15,4$$

Сунувчи тебранишнинг амплитудаси $A = ae^{-nt}$ бўлади. ($t \to \infty$ да $A \to 0$ ҳар ярим даврда геометрик прогрессия қонуни бўйича камайиб боради (15- шакл). Бу геометрик прогрессиянинг махражи сўниш декраменти деб аталади ва D ҳарфи билан белгиланади. Бунда



15- шакл.

$$D = \frac{A_{i+1}}{A_i} = e^{-\frac{n\pi}{k_1}} = e^{-\frac{nT}{2}}, \qquad (15,5)$$

$$\ln D = -\frac{nT}{2}, \qquad (15,5')$$

бу миқдорларга логарифмик декрамент дейилади.

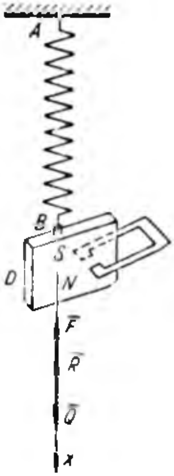
$k < n$ бўлган катта қаршиликли ва $k = 0$ бўлган чегаравий ҳолларда материал нуқтанинг ҳаракати тебранма ҳаракат бўлмайди. Бу ҳолларда материал нуқта апериодик ҳаракат қилади. Бу ҳаракатнинг характери шундайки, t вақт ўтиши билан x асимптотик равишда нолга яқинлашади.

Сунувчи тебранма ҳаракат масалаларини ечиш методи 13- параграфда кўрсатилган методга ўхшаш.

16-§. Масалалар

И. В. Мешчерский „Назарий механикадан масалалар тўплами", китобидаги 843—852-масалалар, 16-§ га оид.

14-масала. Оғирлиги 100 *г* бўлган D пластинка AB пружина билан қўзғалмас A нуқтага осилган ва магнит қутблари орасида ҳаракат қилади. Уюрма токлар таъсирида пластинка ҳаракат тезлигига пропорционал куч билан тормозланади. Ҳаракатга қаршилик қиладиган куч $k_2 v \Phi^2$ *дина*га тенг, бу ерда $k_2 = 0{,}0001$, v—*см/сек* ҳисобидаги тезлик, Φ эса N ва S қутблар орасидаги магнит оқими. Бошланғич пайтда пластинканинг тезлиги нолга тенг ва пружина чўзилмаган; у статик таъсири 20 Γ бўлган куч B нуқтага қўйилганда 1 *см* чўзилади. $\Phi = 100\sqrt{5}$ CGS бирлик бўлганда пластинканинг қандай ҳаракат қилиши аниқлансин (16-шакл).



16-шакл.

Ечиш. Координата ўқининг бошини A нуқтада олиб x ўқини вертикал пастга йўналтирамиз (16-шакл). Пластинка тебранган вақтда пластинкага унинг ўз оғирлик Q кучи, пружинанинг эластиклик кучи $F = cx + Q$ ва ҳаракатга қаршилик курсатаётган $R = k_2 v \Phi^2$ куч таъсир қилади.

Пластинканинг ҳаракат дифференциал тенгламасини ёзамиз:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k_2 v \Phi^2 - cx \tag{1}$$

ёки

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2n\frac{dx}{dt} + k^2 x = 0, \tag{2}$$

бунда

$$\frac{k_2\Phi^2}{m} = 2n; \quad \frac{c}{m} = k^2.$$

(2) дифференциал тенгламанинг умумий интеграли қуйидагича:

$$x = e^{-nt}(A\cos k_1 t + B\sin k_1 t), \tag{3}$$

бунда

$$k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}.$$

Пластинканинг ҳаракат тезлиги v ни топамиз:

$$v = \frac{dx}{dt} = -ne^{-nt}(A\cos k_1 t + B\sin k_1 t) +$$

$$+ k_1 e^{-nt}(B\cos k_1 t - A\sin k_1 t). \tag{4}$$

Бошланғич вақт $t=0$ бўлганда $x_0=\frac{Q}{c}=\frac{100\,г}{20\,г/см}=5\,см$.
шартлардан фойдаланиб, интеграл доимийлари A ва B ни топамиз. Демак (3) дан

$$5=1(A\cdot 1+B\cdot 0)\ \text{ёки}\ A=5\ см. \qquad (5)$$

$t=0$ бўлганда $v_0=\frac{dx}{dt}=0$ буни, (4) га қўйсак:

$$0=-nA+k_1B,$$

бундан

$$B=\frac{nA}{k_1}=\frac{nA}{\sqrt{k^2-n^2}}=\frac{2{,}5\cdot 5}{\sqrt{196-2{,}5^2}}=0{,}907\ см, \qquad (6)$$

бунда

$$n=\frac{k_2\Phi^2}{2m}=\frac{0{,}0001\cdot 5\cdot 10^6\cdot 981}{2\cdot 100\cdot 981}=2{,}5\ 1/сек,$$

$$k^2=\frac{c}{m}=\frac{20\cdot 981}{100}=196\,\frac{1}{сек^2}.$$

$$k_1=\sqrt{k^2-n^2}=\sqrt{196-6{,}25}=13{,}78\ 1/сек. \qquad (7)$$

(5), (6), (7) дан топилган сон қийматларини (3) га қўйсак, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$x=e^{-2{,}5t}(5\cos 13{,}78t+0{,}907\sin 13{,}78t)\ см,$$

бу ерда x — пластинканинг оғирлик марказидан унинг мувозанат вазиятигача бўлган вертикал бўйича пастдаги масофани белгилайди.

15-масала. Оғирлиги 5 $н$ бўлган жисм бикрлик коэффициенти 2 $н/см$ га тенг бўлган пружинага осилган. Муҳитнинг қаршилиги тезликка пропорционал. Тўрт марта тебранишдан кейин амплитуда 12 мартагача кичраяди.

Тебранишлар даври ва сўнишнинг логарифмик декраменти аниқлансин.

Ечиш. (15,5) формулага мувофиқ сўнувчи тебранма ҳаракатнинг амплитудаси қуйидагича бўлади:

$$A_8=A_0e^{-\frac{nT}{2}8}.$$

Масала шартидан $\frac{A_0}{A_8}=12$ бўлгани учун $12=e^{-\frac{nT}{2}8}$, (1)

бундан:

$$\frac{nT}{2}\cdot 8=\ln 12\ \text{ёки}\ \frac{nT}{2}=\frac{\ln 12}{8}=0{,}3106. \qquad (2)$$

$\frac{nT}{2}=a$ (3) деб белгилаймиз ва сўнувчи тебранма ҳаракат даври T нинг формуласи:

$$T=\frac{2\pi}{\sqrt{k^2-n^2}} \qquad (4)$$

га (3) дан T нинг қийматини қўйсак, қуйидаги ҳосил бўлади:

$$n^2 = \frac{Q^2k^2}{\pi^2 + a^2}. \tag{5}$$

$$k^2 = \frac{cg}{P} \tag{6}$$

бўлгани учун (5) формулани қуйидагича ёзамиз:

$$n^2 = \frac{cga^2}{(\pi^2 + a^2)P}. \tag{7}$$

(7) га сон қийматларини қўйсак:

$$n^2 = \frac{2 \cdot 980 \cdot 965 \cdot 10^{-5}}{5\,(986 + 965 \cdot 10^{-5})} = \frac{378}{987} = 0{,}383 \tag{8}$$

келиб чиқади.

(3) формулага асосан:

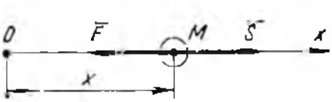
$$T = \frac{6{,}28}{\sqrt{391{,}62}} = \frac{6{,}28}{19{,}78} \approx 0{,}319 \text{ сек.} \tag{9}$$

17-§. Материал нуқтанинг мажбурий тебранма ҳаракати

Материал нуқтага таъсир қилаётган кучлар системасининг таркибига қайтарувчи $\overline{F}$ куч ва уйғотувчи $\overline{S}$ куч кирган бўлса, материал нуқта мажбурий тебранма ҳаракат қилади, кўпинча уйғотувчи S куч вақтнинг узлуксиз функцияси бўлади. Уйғотувчи S куч энг оддий гармоник қонун билан ўзгаради, яъни:

$$S = H \sin(pt + \delta),$$

бунда H — уйғотувчи кучнинг энг катта қиймати (куч амплитудаси), p — уйғотувчи кучнинг доиравий такрорлик сони, δ — бошланғич фаза. H — килограммда, p — $\frac{1}{сек}$ да ўлчанади. δ эса ўлчамсиз миқдордир. Материал нуқтанинг статик мувозанат ҳолатини координата ўқининг боши учун қабул қилиб, x ўқини $\overline{F}$ ва $\overline{S}$ кучларнинг таъсир чизиғи бўйича йўналтирамиз (17-шакл).



17-шакл.

Қаршилик кучи бўлмаганда материал нуқтанинг ҳаракат дифференциал тенгламаси қуйидагича бўлади:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = h \sin(pt + \delta), \tag{17,1}$$

бунда

$$k^2 = \frac{c}{m}, \quad h = \frac{H}{m}.$$

$k \neq p$ бўлган ҳол учун материал нуқтанинг ҳаракат қонуни қуйидагича булади:

$$x = x_1 + x_2 = c_1 \cos kt + c_2 \sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin (pt + \delta), \quad (17,2)$$

бунда

$$x_1 = c_1 \cos kt + c_2 \sin kt. \quad (17,3)$$

Бу тенглама бир жинсли (ўнг томони ноль) бўлган ҳолатнинг умумий интеграли:

$$x_2 = \frac{h}{k^2 - p^2} \sin (pt + \delta). \quad (17,4)$$

Бу тенгламанинг хусусий интеграли $t = 0$ бўлганда $x = x_0$, $v = v_0$ лигидан фойдаланиб, интеграллаш доимийлари c_1, c_2 ни топамиз:

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= x_0 - \frac{h}{k^2 - p^2} \sin \delta, \\ c_2 &= \frac{v_0}{k} - \frac{ph}{k(k^2 - p^2)} \cos \delta. \end{aligned} \right| \quad (17,5)$$

Материал нуқтанинг ҳаракат тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$x = x_0 \cos kt + \frac{v_0}{k} \sin kt - \frac{h}{k^2 - p^2} (\sin \delta \cos kt +$$

$$+ \frac{p}{k} \cos \delta \sin kt) + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin (pt + \delta). \quad (17,6)$$

Мажбурий тебраниш амплитудаси A, яъни материал нуқтанинг энг катта динамик силжиши қуйидагига тенг:

$$A = \frac{h}{|k^2 - p^2|}. \quad (17,7)$$

Материал нуқтанинг ўзгармас H куч таъсиридан статик силжиши:

$$\Delta_н = \frac{H}{c}. \quad (17,8)$$

Мажбурий тебраниш амплитудаси A нинг статик силжиши $\Delta_н$ га нисбати λ, яъни

$$\lambda = \frac{A}{\Delta_н} \quad (17,9)$$

динамик коэффициент деб аталади.

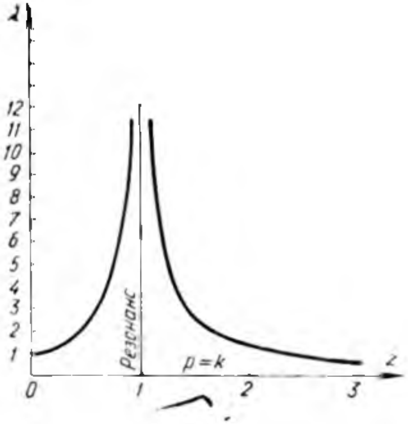
Мажбурий тебраниш доиравий такрорлиги p нинг эркин тебраниш доиравий такрорлиги k га бўлган нисбати, яъни

$$z = \frac{p}{k} \quad (17,10)$$

бузиш (растройка) коэффициенти деб аталади. Динамик коэффициент λ билан бузиш коэффициенти z орасидаги муносабат қуйидагича ифодаланади:

$$\lambda = \frac{1}{|1 - z^2|} \qquad (17.11)$$

(17.11) нинг графиги 18- шаклдаги кўринишда бўлади.



18- шакл.

1) $0 < z < 1$ бўлган ҳолда, яъни $p < k$ бўлганда кичик такрорланишли мажбурий тебраниш бўлади. Бунда динамик коэффициент λ бирдан то чексизгача ўсади.

2) $z \to 1$ да, яъни $p \to k$, $\lambda \to \infty$ ёки $p = k$, яъни эркин тебраниш ва мажбурий тебраниш доиравий такрорликлари бирбирига тенг бўлган ҳолга резонанс ҳодисаси дейилади.

Резонанс бўлган ҳолда мажбурий тебраниш амплитудаси чексиз катталикка эга булади (ҳақиқий масалаларда қаршилик кучи таъсир қилади ва амплитуда чекли сон булади).

3) $z > 1$ бўлган ҳолда, яъни $p > k$ бўлганда катта такрорланишли мажбурий тебранма ҳаракат бўлади. $z \to \infty$ га интилганда динамик коэффициент λ нолгача камаяди.

Резонанс ҳодисаси, яъни $p = k$ бўлган ҳолда (17,6) ҳаракат тенгламаси қуйидаги кўринишда булади:

$$x = x_0 \cos kt + \frac{v_0}{k} \sin kt + \frac{h}{2k^2} \cos \delta \sin kt - \frac{h}{2k} t \cos (kt + \delta), \qquad (17,12)$$

бунда: $\frac{h}{2k} t \cos (kt + \delta)$ — мажбурий тебранишни аниқлайди,

$x_0 \cos kt + \frac{v_0}{k} \sin kt$ — уйғотувчи куч бўлган ҳолдағидай материал нуқтанинг эркин тебранишини ифодалайди.

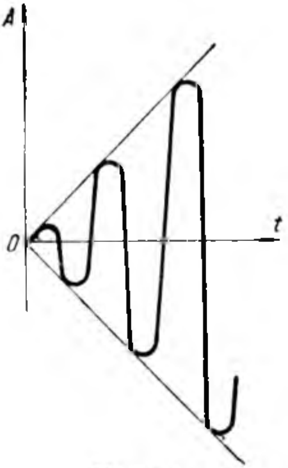
$\frac{h}{2k^2} \cos \delta \sin kt$ — эркин тебранишнинг доиравий такрорлиги булганда уйғотувчи куч таъсирида вужудга келган тебранишни билдиради. Резонанс ҳодисаси бўлганда мажбурий тебраниш амплитудаси

$$A = \frac{h}{2k} t \qquad (17,13)$$

вақтга пропорционал равишда орта боради (19- шакл).

Материал нуқтага умумий кўринишдаги даврий, яъни

$$S = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{i=1}^{n} H_i \sin(ipt + \delta). \tag{17,14}$$



19- шакл

куч таъсир қилса (17,1) тенгламанинг ечилиши қуйидагича ёзилади:

$$x = x_0 \cos kt + \frac{v_0}{k} \sin kt - \sum_{i=1}^{\infty} \cdot \frac{hi}{k^2 - i^2p^2} (\sin \delta \cos kt + + \frac{p}{k} \cos \delta_i \sin kt) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{h_i}{k^2 - i^2p^2} \sin(ipt + \delta_i), \tag{17,15}$$

бунда

$$h_i = \frac{H_i}{m}. \tag{17,15'}$$

Агар $k = np$ ва $n = i$ тенглик мавжуд бўлса, n - тартибли резонанс ҳодисаси бўлади.

n - тартибли резонанс ҳодисаси бўлганда (17,1) тенгламанинг ечилиши қуйидаги кўринишда бўлади:

$$x = x_0 \cos kt + \frac{v_0}{k} \sin kt + \frac{h_n}{2k^2} \cos \delta_n \sin kt - - \frac{h_n}{2k} t \cos(kt + \delta_n) - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{h_i}{k^2 - i^2p^2} (\sin \delta_i \cos kt + + \frac{p}{k} \cos \delta_i \sin kt) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{h_i}{k^2 - i^2p^2} \sin(ip + \delta_i). \tag{17,16}$$

Материал нуқтага таъсир қилаётган уйғотувчи куч катталиги ҳар қандай бўлганда ҳам (17,1) тенгламанинг ечилиши қуйидагича:

$$x = x_0 \cos kt + \frac{v_0}{k} \sin kt + \frac{k}{c} \int_0^t Q(\tau) \sin(t - \tau)\, d\tau. \tag{17,17}$$

Материал нуқта $S = H\sin(pt+\delta)$ уйғотувчи куч таъсирида қаршилик кўрсатувчи муҳитда тебранса, унинг ҳаракат дифференциал тенгламаси қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2h\frac{dx}{dt} + k^2x = h\sin(pt+\delta), \qquad (17,18)$$

бунда

$$2n = \frac{\alpha}{m}; \quad k^2 = \frac{c}{m}; \quad h = \frac{H}{m}.$$

Қаршилик кичик бўлган ҳолда (17,18) тенгламанинг умумий ечилиши

$$x = ae^{-nt}\sin(k_1t+\alpha) + b\sin(pt+\delta+\beta) \qquad (17,19)$$

бўлади.

Бунда

$$b = \frac{h}{\sqrt{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}}; \quad tg\beta = \frac{2np}{k^2-p^2}. \qquad (17,20)$$

(17,19) тенгламанинг ўнг томонидаги биринчи сўнувчи тебранишнинг иккинчи ҳади эса мажбурий тебранишни тасвирлайди. Бошланғич шартлардан фойдаланиб, ўзгармас a, α топилади.

$$\text{Агар } k^2 > 2n^2 \text{ бўлса } p = \sqrt{k^2-2n^2}. \qquad (17.21)$$

У ҳолда мажбурий тебранишнинг амплитудаси энг катта қийматга эга бўлади ва қуйидаги ҳосил бўлади:

$$b_{max} = \frac{h}{2n\sqrt{k^2-n^2}}. \qquad (17,22)$$

Динамик коэффициент эса қуйидаги формуладан топилади:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{p}{n}\right)^2\right]^2+4\left(\frac{n}{k}\right)^2\left(\frac{p}{k}\right)^2}}. \qquad (17.23)$$

18-§. Мажбурий тебранишга оид масалаларни ечишга доир методик кўрсатмалар

Материал нуқтанинг мажбурий тебранишга тааллуқли масалаларини қуйидаги тартибда ечиш тавсия этилади:

1. Ҳисоблаш боши учун материал нуқтанинг статик мувозанат ҳолатини олиб, ҳисоблаш системасини танлаб олиш керак.
2. Материал нуқтанинг бошланғич шартларини аниқлаб ёзиб олинади.
3. Материал нуқтага таъсир эттирилган кучларни тасвирлаб олинади.
4. Материал нуқта ҳаракат дифференциал тенгламасининг уқдаги проекциясини тузиб олиш керак.

5. Дифференциал тенгламани интеграллаб, интегралнинг номаълум доимийларини бошлангич шартлардан фойдаланиб топилади.

6. Масалада материал нуқта резонанс ҳолатида бўлиши талаб қилинган бўлса, дифференциал тенгламани интеграллаш керак эмас.

Бунинг учун тузилган дифференциал тенгламалардан мажбурий ва эркин тебранишларнинг доиравий такрорликларини топиб, уларни бир-бирига тенглаштириш кифоя.

7. Материал нуқта мажбурий тебраниши учун: а) қаршилик кучи булган ҳолларига И. В. Мешчерский „Назарий механикадан масалалар тупламиˮ китобидаги 853, 855, 858, 859, 860-масалалар, б) қаршилик кучи булмаган ҳолларига 854, 857, 861-масалалар киради.

19-§. Масалалар

16-масала. Бикрлиги $c = 20\,Г/см$ бўлган магнит стержени ва мис пластинка осилган, уларнинг оғирлиги 50 $Г$ дан. Магнит стержени солиноиддан, мис пластинка эса магнит қутблари орасидан ўтган. Солиноиддан $i = 20 \sin 8\pi t$ *ампер* ток ўтади ва магнит стержени билан $F = 16\pi i$ *дина* миқдорда ўзаро таъсир кучи ҳосил қилади.

Мис пластинканинг тормозловчи кучи уюрма токлар ҳосил бўлганлигидан $kv\Phi^2$ га тенг, бу ерда $k = 10^{-4}$, $\Phi = 1000\sqrt{5}$ CGS бирлик ва v — пластинка тезлиги. Пластинканинг мажбурий тебраниши аниқлансин (20-шакл, *а*).

20-шакл, *а*.

Ечиш. Магнит стержени оғирлигини P_1 билан, мис пластинка оғирлигини P_2 билан белгилаймиз. Пружинанинг статик чўзилиши λ_{cm} ни топамиз:

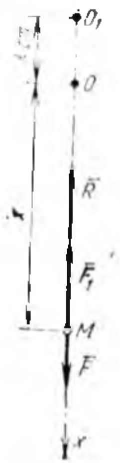
$$\lambda_{cm} = \frac{P_1 + P_2}{c} = \frac{50 + 50}{20} = 5\,см. \qquad (1)$$

Ток билан магнит орасидаги таъсир кучи физик бирликда ифодаланган: уни техник бирликка ўтказишда

$$1\ Г : 981\ см/сек^2 = 1\ дина \qquad (2)$$

эканлигини эслатиб ўтамиз.

Пластинка ва магнит стержени илгарилама ҳаракатда бўлади.



20- шакл, *б.*

Системанинг инерция маркази тўғри чизиқли ҳаракат қилади деб ҳисоблаб ва унинг статик мувозанат ҳолатини координата ўқининг боши учун қабул қилиб Ox ўқини ўтказамиз ҳамда кучларни схематик тасвирлаймиз (20- шакл, *б*).

Схематик тасвирланган кучларни қуйидагича белгилаймиз:

$$R = kv\mathcal{D}^2 = \frac{10^{-4}\cdot 10^6\cdot 5}{g}\cdot\frac{dx}{dt} = \frac{500}{g}\cdot\frac{dx}{dt},$$

$$F = 320\,\frac{\pi}{g}\sin 8\pi t, \qquad (3)$$

$$F_1 = cx = 20\,x.$$

Бу ҳолда пластинканинг ҳаракат дифференциал тенгламаси қуйидагича бўлади:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} + 196\,x = 10{,}048\sin 8\pi t. \qquad (4)$$

Мажбурий тебраниш бошланғич шартларга боғлиқ эмас ва (4) тенгламанинг хусусий ечими мажбурий тебраниш ҳаракати бўлади, яъни

$$x = A\cos 8\pi t + B\sin 8\pi t. \qquad (5)$$

(5) ни (4) га қўйиб, унинг ўнг ва чап томонларидаги $\sin 8\pi t$, $\cos 8\pi t$ ларнинг коэффициентларини тенглаштирамиз. У вақтда A ва B ларни топиш учун алгебраик тенгламалар системаси ҳосил бўлади:

$$x = A\cos 8\pi t + B\sin 8\pi t,$$

$$\frac{dx}{dt} = -8A\pi\sin 8\pi t + 8B\pi\cos 8\pi t,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -64A\pi^2\cos 8\pi t - 64B\pi^2\sin 8\pi t,$$

буларни (4) га қўямиз:

$$-64A\pi^2\cos 8\pi t - 64B\pi^2\sin 8\pi t - 5\cdot 8A\pi\sin 8\pi t + 5\cdot 8B\pi\cos 8\pi t + $$
$$+ 196A\cos 8\pi t + 196B\sin 8\pi t = 10{,}048\sin 8\pi t.$$

Бу тенгликдан қуйидаги айният келиб чиқади:

$$-40\pi A + (196 - 64\pi^2)B = 10{,}048,$$

$$(196 - 64\pi^2)A + 40\pi B = 0. \qquad (6)$$

(6) тенгламалардан A ва B ларни топсак,

$$A = 0{,}006336,\quad B = 0{,}022. \qquad (7)$$

бўлади.

(12,4) ва (12,5) тенгламаларга асосан a, $\operatorname{tg}\alpha$ ларни топамиз

$$a = 0{,}022,\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{A}{B} \approx 0{,}288. \qquad (8)$$

Демак, (5) қуйидагича бўлади:

$$x = -0{,}022 \sin(8\pi t + 0{,}09\pi) \text{ ёки } x = 0{,}022 \sin(8\pi t - 0{,}09\pi).$$

17-масала. Юк ортилган товар вагони рессорининг статик эгилиши $\Delta\lambda_{cm} = 5\,см$. Рельслар уланган жойда вагонга уни мажбурий тебранишга келтирувчи зарблар таъсир этса, вагон ҳаракатининг критик тезлиги қанчага етганда вагон „лукиллай“ бошлайди? Рельсларнинг узунлиги $L = 12\ м$.

Ечиш. Юк ортилган вагонни материал нуқта деб фараз қиламиз. У вақтда рессорининг статик эгилиши қуйидагича бўлади:

$$\Delta\lambda_{cm} = \frac{P}{c}, \qquad (1)$$

бунда P — юк ортилган вагоннинг оғирлиги.

Айтилган нуқтага рессорининг эластиклик кучи

$$F = c(\Delta\lambda_{cm} + x) \qquad (2)$$

ва даврий ўзгарувчи куч

$$S = H \sin pt \qquad (3)$$

таъсир қилади.

Бу ерда

$$p = \frac{2\pi}{T}. \qquad (4)$$

T — тебраниш даври:

$$T = \frac{L}{v}. \qquad (5)$$

Нуқтанинг ҳаракати қуйидаги дифференциал тенглама билан аниқланади:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{\Delta\lambda_{cm}}x = \frac{Hg}{P}\sin pt, \qquad (6)$$

Мажбурий тебраниш такрорлиги билан эркин тебраниш такрорлиги бир-бирига тенг бўлганда „лукиллаш“ бошланади, яъни:

$$p = \sqrt{\frac{g}{\Delta\lambda_{cm}}}. \qquad (7)$$

(4), (5) ва (7) тенгламалардан:

$$v = \frac{L}{T} = \frac{Lp}{2\pi} = \frac{L}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\Delta\lambda_{cm}}}. \qquad (8)$$

Сон қийматини қўйсак:

$$v = \frac{12 \cdot 14 \cdot 3600}{6{,}28 \cdot 1000} = 96\ \frac{км}{соат}.$$

III БОБ

Материал нуқта динамикасининг умумий теоремалари

20-§. Ҳаракат миқдорининг теоремаси

Материал нуқта ҳаракат миқдорининг теоремаси вектор ёки скаляр шаклда ифодаланади.

Ҳаракат миқдори теоремасининг вектор формуласини икки усулда тасвирлаш мумкин:

1) дифференциал шаклда қуйидагича ифодаланади:

$$d(m\bar{v}) = \bar{F}dt = \overline{ds} \qquad (20,1)$$

ва мана бундай таърифланади: *материал нуқта ҳаракат миқдори векторининг дифференциали материал нуқтага таъсир эттирилган кучнинг элементар импульсига тенг:*

2) интеграл шаклда қуйидагича ифодаланади:

$$m\bar{v} - m\bar{v}_0 = \int_{t_0}^{t} \bar{F}dt = \bar{S} \qquad (20,2)$$

ва мана бундай таърифланади: *маълум чекли $(t-t_0)$ вақт ичида материал нуқта ҳаракат миқдори векторининг ўзгариши материал нуқтага таъсир қилувчи кучнинг шу вақт ичидаги тўла импульсига тенг.*

Материал нуқта ҳаракат миқдори теоремасининг скаляр формуласи (20,1) ёки (20,2) вектор тенгламани Декарт координата ўқларига проекциялаш йўли билан топилади, яъни

$$\left.\begin{aligned} d(mv_x) &= Xdt = dS_x, \\ d(mv_y) &= Y dt = dS_y, \\ d(mv_z) &= Zdt = dS_z \end{aligned}\right\} \qquad (20,3)$$

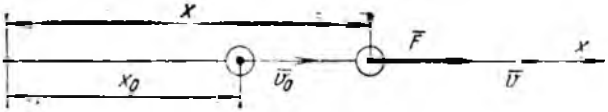
ёки

$$\left.\begin{aligned} mv_x - mv_{ox} &= \int_{t_0}^{t} Xdt = S_x, \\ mv_y - mv_{oy} &= \int_{t_0}^{t} Ydt = S_y, \\ mv_z - mv_{oz} &= \int_{t_0}^{t} Zdt = S_z. \end{aligned}\right\} \qquad (20,4)$$

Материал нуқта тўғри чизиқли ҳаракат қилган ҳолда ҳаракат чизиғи бўйича x ўқини йўналтирамиз (21-шакл). У вақтда ҳаракат миқдори теоремаси қуйидагича булади:

$$d(mv) = Xdt, \tag{20,5}$$

$$mv - mv_0 = \int_{t_0}^{t} Xdt, \tag{20,6}$$



21-шакл.

бу ерда $X = \pm F$— нуқтага таъсир эттирилган ҳамма кучларнинг тенг таъсир этувчиси.

21-§. Материал нуқта ҳаракат миқдорининг ўзгариши теоремасига оид масалаларни ечишга доир методик кўрсатмалар

Материал нуқта ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теоремага оид масалаларни қуйидаги тартибда ечиш керак:

1) координата ўқлари системасини танлаб олиш керак;

2) материал нуқтага таъсир эттирилган ҳамма кучларни, яъни берилган кучларни ва реакция кучларини (боғланишдан озод қилиш принципини қўллаб) тасвирлаб олиш керак;

3) материал нуқта ҳаракат миқдорининг ўзгариш теоремасини олинган координата ўқларидаги проекцияларини (20,4) кўринишида ёзиб олиш керак;

4) а) масалада нуқтага таъсир қилаётган кучнинг ўзгариш қонуни ва куч таъсир қилиш вақти берилган бўлиб, нуқтанинг бошланғич тезлиги ёки охирги тезлигини топиш керак булса, куч импульсининг проекцияларини

$$S_x = \int_{t_0}^{t} Xdt, \; S_y = \int_{t_0}^{t} Ydt, \; S_z = \int_{t_0}^{t} Zdt$$

формулалар бўйича топиб ҳамда олинган натижаларни (20,4) га қўйиб, тезликнинг ўқлардаги проекциялари топилади;

б) масалада материал нуқтага таъсир эттирилган ўзгармас кучлардан бирини топиш керак бўлса, уни (20,4) формуладан фойдаланиб топиш мумкин; бу ҳолда:

$$S_x = X(t_2 - t_1), S_y = Y(t_2 - t_1), \; S_z = Z(t_2 - t_1)$$

бўлади;

5) бу параграфга оид масалалар асосий уч типга бўлинади:

1. Материал нуқтанинг тўғри чизиқли ҳаракатидаги тезлигини ёки вақтни ёхуд материал нуқтага таъсир қилаётган кучни топишга оид масалалар.

Бу типдаги масалаларни ўз навбатида уч группага ажратиш мумкин:

а) материал нуқтага қўйилган куч (ҳамма қўйилган кучларнинг тенг таъсир этувчиси) ўзгармас бўлган масалалар, бунга И. В. Мешчерский „Назарий механикадан масалалар тўплами" китобидаги 733, 734, 737, 743-масалалар киради;

б) материал нуқтага қўйилган куч (ёки ҳамма қўйилган кучларнинг тенг таъсир этувчиси) вақт функцияси бўлган масалалар, бунга И. В. Мешчерский „Назарий механикадан масалалар тўплами" китобидаги 694, 698-масалалар киради;

в) материал нуқтага қўйилган куч (ёки ҳамма қўйилган кучларнинг тенг таъсир этувчиси) тезлик функцияси бўлган масалалар, бунга И. В. Мешчерский „Назарий механикадан масалалар тўплами" китобидаги 687, 691, 696-масалалар киради.

2. Материал нуқтанинг эгри чизиқли ҳаракатидаги тезлигини ёки вақтни топишга оид масалалар.

Бу типдаги масалаларни ҳам учта группага ажратиш мумкин. Бу учала группанинг ҳаммасида ҳам ҳаракат миқдори теоремаси интеграл шаклида ифодаланади.

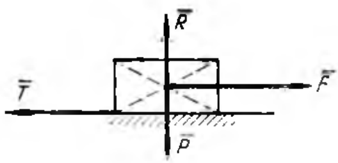
Биринчи ва иккинчи группада, яъни куч ўзгармас ёки вақт функцияси бўлганда интеграл тенглама (20,4) билан ифодаланган теорема татбиқ қилинади. Учинчи группада дифференциал тенглама (20,1) билан ифодаланган теоремадан фойдаланилади.

3. Материал нуқта ҳаракат миқдорининг ўзгариши теоремасидан, материал нуқтага таъсир қилаётган куч импульсини топишга оид масалалар, бунга И. В. Мешчерский „Назарий механикадан масалалар тўплами" китобидаги 741, 744-масалалар киради.

22-§ Масалалар

18-масала. Юк ортилган темир йўл составининг оғирлигини аниқлаш учун тепловоз билан вагонлар орасига динамометр ўрнатилган. 2 минут ичида динамометр ўрта ҳисобда 100,8 *кн* ни кўрсатади.

Шу вақт ичида составнинг тезлиги $v = 57{,}6\ \frac{км}{соат}$ га етди (бошида состав тинч турган эди). Ишқаланиш коэффициенти $f = 0{,}02$. Составнинг оғирлиги топилсин (22-шакл).



22-шакл.

Ечиш. Темир йўл составини тўғри чизиқли ҳаракат қилади деб ҳисоблаймиз.

Вагонга динамометрнинг тортиш кучи $\bar{F}$, ишқаланиш кучи $\bar{T}$ ва огирлик кучи $\bar{P}$ қуйилган, $\bar{R}$ — нормал реакция.

Кулон қонунига асосан:

$$T = f \cdot P. \tag{1}$$

Материал нуқта ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теорема (20,6) га мувофиқ

$$\frac{P}{g}(v - v_0) = (F - T)\,t \tag{2}$$

ёки

$$\frac{P}{g}(v - v_0) = (F - T)\,t. \tag{3}$$

Бошланғич v_0 тезлик нолга тенг эканини ҳисобга олсак, (3) дан

$$\frac{P}{g}v = Ft - fPt \text{ ёки } fPt + \frac{P}{g}v = Ft$$

$$\text{ёхуд } \frac{P}{g}(v + fgt) = Ft \text{ булади;}$$

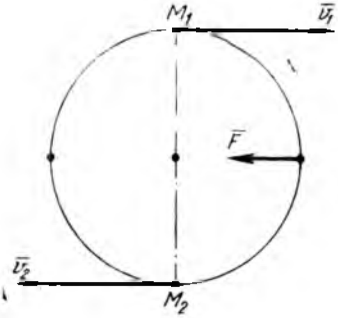
бундан:

$$P = \frac{F \cdot t \cdot g}{v + fgt} = \frac{100{,}8 \cdot 120 \cdot 9{,}81}{16 + 0{,}02 \cdot 9{,}81 \cdot 120} = 300 \text{ кн.}$$

19-масала. Нуқта $v = 20$ *м/сек* тезлик билан айлана буйлаб тенг улчовли ҳаракат қилади. У $T = 4$ *сек* да айланани бир марта тула айланиб чиқади.

Битта ярим давр ичида нуқтага таъсир этувчи куч импульси топилсин; нуқтанинг массаси $m = 5$ *г*. F кучнинг уртача қиймати аниқлансин.

Ечиш. Бошланғич пайтда ҳаракат қилаётган нуқта M_1 вазиятда булсин деб фараз қилайлик (23-шакл), у вақтда ярим давр утгандан кейин нуқта диаметр буйича қарама-қарши томондаги M_2 нуқтага келади (20,2) тенгламага мувофиқ куч импульсини топамиз:



23- шакл.

$$\bar{s} = m\bar{v}_1 - m\bar{v}_2, \quad \bar{v}_1 = -\bar{v}_2$$

булгани учун

$$\bar{s} = 2m\bar{v}_1$$

(1) тенгламага $|mv_1|$ нинг қийматини қуйсак,

$$|\bar{S}| = 2 \cdot 5 \cdot 20 = 200 \text{ дина·сек (2) булади.}$$

Таъсир қиладиган кучнинг уртача миқдори (20,2) га асосан қуйидагича булади:

$$\bar{S} = m(\bar{v} - \bar{v}_0) = \bar{F}_{ур} \cdot (t - t_0), \tag{3}$$

бундан:

$$\bar{F}_{\text{ўр}} = \frac{\bar{S}}{t - t_0} = \frac{\bar{S}}{T/2}$$

ёки

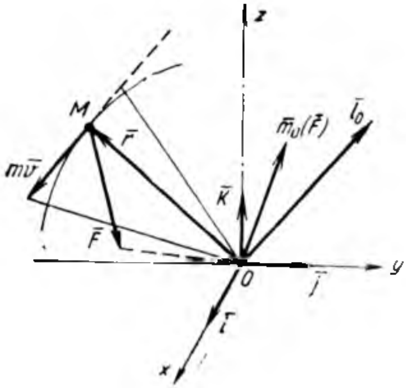
$$F_{\text{ўр}} = |\bar{F}_{\text{ўр}}| = \frac{200}{2} = 100 \text{ дина.}$$

Кучнинг йўналиши импульс йўналишида, яъни кейинги тезлик билан бир хил йўналган.

23-§. Материал нуқта ҳаракат миқдори моментининг ўзгариши ҳақидаги теорема

Бирор O нуқтага (марказга) нисбатан материал нуқтанинг ҳаракат миқдори моменти қуйидагича ифодаланади:

$$\bar{l}_0 = \bar{m}_0(m\bar{v}) = [\bar{r}, \quad m\bar{v}], \tag{23,1}$$



24- шакл.

бу ерда r — O марказга нисбатан ҳаракат қилаётган материал нуқтанинг радиус-вектори (24- шакл).

Вектор тенглама (23,1) ни декарт координата ўқларига проекциялаcак, материал нуқтанинг координата ўқларига нисбатан ҳаракат миқдори моментининг формуласи ҳосил бўлади, яъни

$$\left.\begin{aligned} l_x &= m_x(m\bar{v}) = m(y\dot{z} - z\dot{y}), \\ l_y &= m_y(m\bar{v}) = m(z\dot{x} - x\dot{z}), \\ l_z &= m_z(m\bar{v}) = m(x\dot{y} - y\dot{x}). \end{aligned}\right| \tag{23,2}$$

Материал нуқта ҳаракат миқдори моментининг вектор теоремаси қуйидагича таърифланади: *бирор нуқтага нисбатан олинган ҳаракат моментининг вақт бўйича ҳосиласи материал нуқтага таъсир этувчи кучнинг шу нуқтага нисбатан олинган моментига тенг*, яъни

$$\frac{d\bar{l}_0}{dt} = \bar{m}_0(\bar{F}). \tag{23,3}$$

(23,3) вектор тенгламани Декарт координата ўқларига проекциялаcак, қуйидагилар ҳосил бўлади:

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{dl_x}{dt} &= m_x(\overline{F}),\\
\frac{dl_y}{dt} &= m_y(\overline{F}),\\
\frac{dl_z}{dt} &= m_z(\overline{F}).
\end{aligned}\right\} \qquad (23,4)
$$

Булар теореманинг скаляр ифодасидир, яъни бирор ўққа нисбатан олинган ҳаракат миқдори моментининг (l_x, l_y, l_z) вақт бўйича ҳосиласи материал нуқтага таъсир этувчи кучнинг шу ўққа нисбатан олинган моментига тенг.

Хусусий ҳоллар.

1. Материал нуқтага таъсир қилаётган кучларнинг бирор ўққа нисбатан моменти нолга тенг бўлса, материал нуқтанинг шу ўққа нисбатан ҳаракат миқдорининг моменти ўзгармас бўлади.

2. Материал нуқта марказий куч таъсирида бўлса, шу марказга нисбатан материал нуқтанинг ҳаракат миқдорининг моменти ўзгармас бўлади.

24-§. Материал нуқта ҳаракат миқдори моментининг ўзгариши ҳақидаги теоремага оид масалаларни ечишга доир методик кўрсатмалар

1. Координата ўқлари системасини танлаб олиш керак.

2. Материал нуқтага таъсир эттирилган ҳамма кучларни, яъни берилган кучларни ва реакция кучларини (боғланишдан озод қилиш принципини қуллаб) ифодалаб олинади.

3. Материал нуқтага таъсир эттирилган кучларнинг ҳар қайси координата ўқига нисбатан моментларининг йиғиндисини ҳисоблаб олинади.

4. Материал нуқтанинг ҳаракат миқдори векторини ифодалаб ва ундан координата ўқларига нисбатан моментини топиб, улардан вақтга нисбатан ҳосила олиш керак.

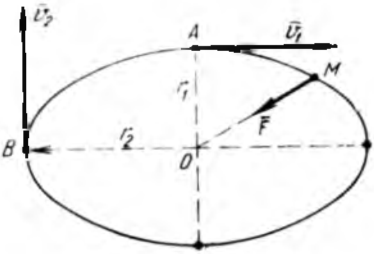
5. Топилган қийматларни (23,4) тенгламага қўйиб ечиш керак.

6. Материал нуқта марказий куч таъсирида булса, иккинчи хусусий ҳолда фойдаланиш керак ва материал нуқтанинг бошланғич вазиятдаги ва кейинги вазиятдаги ҳаракат миқдорининг моментларини бир-бирига тенглаштириб олиш керак, яъни $l_{20} = l_{10}$ тенгликдан изланаётган номаълум топилади. Баъзи бир масалаларда биринчи хусусий ҳолдан фойдаланишга тўғри келади.

7. Бу параграфга И. В. Мешчерский „Назарий механикадан масалалар тўплами" китобидаги 736, 740-масалалар киради.

25-§. Масалалар

19-масала. M нуқта қўзғалмас марказ атрофида шу марказга тортувчи куч таъсирида ҳаракат қилади. Траекториянинг марказдан энг узоқдаги нуқтасининг тезлиги v_2 топилсин; нуқтанинг марказга энг яқин вазиятидаги тезлиги $v_1 = 30$ *см/сек* ва r_2 эса r_1 дан беш марта катта (25- шакл).



25- шакл.

Ечиш. Бу масала ҳаракат миқдори моменти қонунининг иккинчи хусусий ҳолга асосан ечилади, яъни ҳаракат миқдори моменти ҳамма вақт ўзгармас бўлган масала

$$l_0 = \text{const}. \tag{1}$$

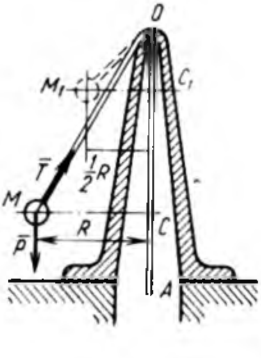
Демак,

$$mv_1 r_1 = mv_2 r_2, \tag{2}$$

бундан

$$v_2 = \frac{v_1 r_1}{r_2} = \frac{v_1 r_1}{5r_1} = \frac{30}{5} = 6 \ см/сек.$$

21 масала. M тош чўзилмайдиган MOA ипнинг учига боғланган. Бу ипнинг OA қисми вертикал трубка орқали ўтказилган. Тош трубка ўқи атрофида радиус $MC = R$ бўлган айлана бўйлаб, 120 *айл/мин* тезлик билан айланади. Ипнинг OA қисмини трубка ичига секин-аста киритиб, ташқи қисмининг узунлиги OM_1 гача қисқартирилади, бунда тош радиуси $\frac{1}{2}R$ бўлган айлана чизади (26- шакл). Шу айланада тош минутига неча марта айланади?



26- шакл.

Ечиш. Тошга таъсир қилаётган оғирлик кучини $\bar{P}$ билан, ипнинг тортиш кучини $\bar{T}$ билан белгилаб, уларни шаклда кўрсатамиз (26- шакл) (23.4), яъни $\frac{dl_z}{dt} = m_z(\bar{F})$ тенгламага мувофиқ тенглама тузамиз.

$\bar{P}$ кучнинг таъсир чизиғи z ўқига параллел бўлгани учун $m_z(\bar{P}) = 0$; $\bar{T}$ кучнинг таъсир чизиғи z ўқини кесиб ўтгани учун $m_z(\bar{T}) = 0$. Демак, $m_z(\bar{F}) = 0$ ва $\frac{dl_z}{dt} = 0$, буни интегралласак, $l_z = \text{const}$. Бундан қуйидаги хулосага келамиз:

$$m_z(m\bar{v}_1) = m_z(m\bar{v}_2).$$

Бу ерда

$$m_z(m\bar{v}_1) = mv_1R = m\frac{\pi n_1}{30}R^2,$$

$$m_z(m\bar{v}_2) = mv_2\frac{R}{2} = m\frac{\pi n_2}{30}\cdot\frac{R^2}{4}.$$

Булардан:

$$m\frac{\pi n_1}{30}R^2 = m\frac{\pi n_2}{30}\cdot\frac{R^2}{4},$$

бундан:

$$n_2 = 4n_1 \text{ ёки } n_2 = 4\cdot 120 = 480\frac{\text{айл}}{\text{мин}}.$$

26-§. Иш ва қувват

Куч векторининг кўчиш масофаси вектори билан скаляр кўпайтмаси ўзгармас $\bar{F}$ кучнинг тўғри чизиқли қисмидаги иши деб аталади, яъни куч модулининг кўчиш масофаси ва уларнинг орасидаги бурчак косинуси билан кўпайтмаси иш деб аталади:

$$A = (\bar{F}, \bar{r}) = Fr\cos(\widehat{\bar{F}, \bar{r}}). \qquad (26,1)$$

$\bar{F}$ кучнинг элементар $d\bar{r}$ кўчишидаги элементар иши қуйидаги формула билан ҳисобланади:

$$\delta' A = (\bar{F}, d\bar{r}) = F\,dr\cos(\widehat{\bar{F}, d\bar{r}}). \qquad (26,2)$$

Техника системасида иш *кГм* билан ўлчанади. Демак, физик системада иш 1 *эрг* = 1 *дин · см* = 1 *г см²* · *сек⁻²* ёки 1 *жоул* = 10^7 *эрг* ёки СИ системасида 1 *ж* = 1 *нм* = 0.102 *кГм* билан ўлчанади.

Элементар иш фақат хусусий ҳолдагина тўла дифференциал бўлгани учун уни $\delta' A$ билан белгилаймиз.

Ўзгарувчи кучнинг элементар иши Декарт координата ўқларидаги проекциялари оркали қуйидагича ифодаланади:

$$\delta' A = X dx + Y dy + Z dz, \qquad (26,3)$$

бунда X, Y, Z кучнинг тегишли координата ўқларидаги проекциялари, dx, dy, dz жуда кичик $d\bar{r}$ кўчишнинг координата ўқларидаги проекциялари.

Материал нуқта фазо соҳасининг (чегараланган ёки чегараланмаган) қандай ерида бўлса ҳам, унга таъсир этувчи куч шу нуқта координаталарининг узлуксиз функцияси бўлса, бундай соҳа куч майдони дейилади.

Материал нуқтага таъсир қилаётган $\bar{F}$ куч куч майдонида қуйидаги икки хусусиятга эга бўлса, яъни 1) кучнинг миқдори ва йўналиши фақат M нуқтанинг вазиятига боғлиқ бўлса ва 2) кучнинг бирор M_1M_2 йўлда бажарган иши унинг траекториясига боғлиқ бўлмаса, бундай куч майдони потенциал куч майдони деб аталади. Куч эса потенциал куч деб аталади.

Потенциал кучнинг элементар иши қуйидагича бўлади:

$$\delta' A = X dx + Y dy + Z dz =$$
$$= \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = dU. \qquad (26,4)$$

Демак, потенциал кучнинг элементар иши шу потенциал функциянинг тўла дифференциалига тенг.

Кучнинг эгри чизиқли $\overset{\frown}{M_1M_2}$ қисмидаги тўла иши эгри чизиқ бўйича M_1 нуқтадан M_2 нуқтагача олинган эгри чизиқли интеграл билан топилади, яъни:

$$A = \int_{(M_1)}^{(M_2)} (\bar{F}, d\bar{r}) = \int_{(M_1)}^{(M_2)} F \cdot ds \cos(\widehat{\bar{F}, d\bar{r}}). \qquad (26,5)$$

Ўзгарувчи кучнинг эгри чизиқли траектория бўйича чекли масофага кўчиришдаги иши кучнинг координата ўқларидаги проекциялари орқали қуйидагича ифодаланади:

$$A = \int_{(M_1)}^{(M_2)} (X dx + Y dy + Z dz). \qquad (26,6)$$

Потенциал кучнинг тўла иши қуйидагича:

$$A = \int_{(M_0)}^{(M)} dU = U - U_0. \qquad (26,6')$$

Демак, потенциал кучнинг куч майдонида бажарган иши, нуқтанинг ўтган йўлига боғлиқ бўлмай, унинг бошланғич ва охирги вазиятидаги потенциалларининг айирмасига тенг бўлар экан.

Кучлар тенг таъсир этувчисининг иши ҳақидаги теорема: *Материал нуқтага таъсир эттирилган кучлар тенг таъсир этувчисининг бирор кўчишида бажарган иши нуқтага таъсир эттирилган кучларнинг шу кўчишда бажарган ишларининг алгебраик йиғиндисига тенг*, яъни:

$$A(\bar{R}) = \sum_{k=1}^{n} A(\bar{F}_k), \qquad (26,7)$$

бу ерда $\bar{R} = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k$ нуқтага қўйилган кучларнинг тенг таъсир этувчиси.

Қўзғалмас z ўқи атрофида айланаётган қаттиқ жисмга қўйилган $\bar{F}$ кучнинг элементар иши ёки чекли иши

$$\delta' A = M_z d\varphi \qquad (26,8)$$

ёки

$$A = \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_z d\varphi \qquad (26,9)$$

формула бўйича топилади.

Бу ерда $d\varphi$ — z ўқи атрофида жисмнинг элементар айланиш бурчаги, M_z — z ўқига нисбатан $\bar{F}$ кучнинг моменти.

Хусусий ҳолда, яъни таъсир қилаётган куч потенциал куч бўлса, унинг иши йўлнинг траекториясига боғлиқ бўлмайди.

Масалан:

а) Материал нуқта оғирлик кучининг тўла иши:

$$A_{1,2} = P(h_1 - h_2), \qquad (26,10)$$

бу ерда P — материал нуқтанинг оғирлиги;

$(h_1 - h_2)$ — нуқтанинг бошланғич ва кейинги вазиятларининг баландликлари айирмаси.

$h_1 > h_2$ бўлганда $A_{1,2} > 0$ ва $h_1 < h_2$ бўлганда $A_{1,2} < 0$ бўлади.

б) Пружина учи олдинги вазиятидан λ узунликка чўзилганда, унинг эластиклик кучининг иши қуйидаги формула билан топилади:

$$A = -\frac{c\lambda^2}{2}, \qquad (26,11)$$

бу ерда c — пружинанинг бикрлик коэффициенти.

в) Буровчи моментлилик $m_z = -c\varphi$ эластик кучнинг иши

$$A = -\frac{c}{2}(\varphi_2^2 - \varphi_1^2), \qquad (26,12)$$

бу ерда φ_2, φ_1 — кейинги ва олдинги бурилиш бурчаклари.

Қувват N вақт ичида ишнинг бажарилиш тезлигини билдиради ва қуйидаги формула бўйича топилади:

$$N = \frac{\delta' A}{dt} = (\bar{F}, \bar{v}) = Fv\cos(\widehat{\bar{F}, \bar{v}}). \qquad (26,13)$$

Қувват куч векторининг тезлик вектори билан скаляр кўпайтмасига тенг.

Қўзғалмас z ўқи атрофида айланаётган қаттиқ жисмга таъсир эттирилган кучнинг қуввати қуйидаги формуладан топилади:

$$N = M_z\omega = M_z \frac{n\pi}{30}, \qquad (26,14)$$

бу ерда M_z — айланиш z ўқига нисбатан жисмга қўйилган кучдан олинган момент, $\omega = \frac{n\pi}{30}$ айланиш бурчак тезлиги.

Буровчи момент қуйидаги формула билан ҳисобланади:

$$M^{(\text{бур})} = 71620 \frac{N}{n} \, кГ \cdot см, \qquad (26,15)$$

бу ерда n — бир минутдаги айланиш сони.

Қувват *от кучи*, $\frac{кГм}{сек}$, *эрг/сек*, *жоул/сек*, *ватт* ва ниҳоят *киловатт* билан ўлчанади.

Бир хил бирликдаги қувватни иккинчи хил бирликка ўтказиш учун қуйидаги жадвалдан фойдаланилади:

$$1 \ ватт = 10^7 \ эрг/сек = 1 \frac{жоул}{сек} = 0,102 \frac{кГм}{сек};$$

$$1 \ киловатт = 10^3 \ ватт = 10^{10} \ эрг/сек = 102 \frac{кГм}{сек},$$

$$1 \frac{кГм}{сек} = 9,81 \ ватт;$$

$$1 \text{ от кучи} = 75 \frac{кГм}{сек} = 0,736 \ киловатт.$$

Фойдали ишнинг ишга ёки фойдали қувватнинг қувватга нисбати фойдали иш коэффициенти (ф. и. к.) деб айтилади, яъни

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \frac{A_ф}{A_х}, \\ \eta &= \frac{N_ф}{N_х}. \end{aligned} \right| \qquad (26,16)$$

$A_ф < A_х$ ёки $N_ф \leq N_х$ бўлгани учун $\eta \leq 1$ бўлади.

27-§. Иш ва қувватга оид масалаларни ечишга доир методик кўрсатмалар

Ишни топишда қуйидаги ҳолларни тафовут қилиш керак:

1. Ўзгармас куч таъсирида нуқта тўғри чизиқли ҳаракат қиладиган ҳолда $A = \pm F \cdot s$ формула (бу ерда s — нуқта босиб ўтган йўл) ёки $A = F \cdot s \cos \alpha$ формула қўлланилади (бу ерда α — куч билан нуқта ҳаракат қилаётган тўғри чизиқ орасидаги бурчак).

2. Масофа функцияси бўлган куч таъсирида нуқта тўғри чизиқли ҳаракатда бўлган ҳолда (26,6) формула қўлланилади, агар x ўқини нуқта траекторияси бўйича йўналтирсак, у формула қуйидагича бўлади:

$$A = \int_{x_0}^{x} X \, dx.$$

3. Миқдори ва йўналиши ўзгармас куч таъсирида нуқта эгри чизиқли ҳаракат қилса, у ҳолда (26,6) формулани қўллаш мумкин.

Иккинчи ва учинчи ҳолларда ҳамма вақт куч функцияси U бўлади, демак, ишни ҳисоблашда $A = \int\limits_{(M_0)}^{(M)} dU = U - U_0$ формуладан фойдаланиш мумкин ($П = U - U_0$). Бунда албатта олдин куч функцияси U ни топиш керак.

4. Куч таъсир эттирилган нуқта координаталарининг функцияси бўлган куч таъсиридаги эгри чизиқли ҳаракат. Бу ҳолда (26,6) формуладан фойдаланилади.

5. Ўзгармас момент ёки айланиш бурчагининг функцияси бўлган момент таъсирида қаттиқ жисмнинг айланма ҳаракати; бу ҳолда ишни ҳисоблаш учун (26,9) формула қўлланилади.

Қувватни ҳисоблашда масала характерига қараб, яъни куч қўйилган нуқта тўғри чизиқли ёки эгри чизиқли ҳаракат қилса, (26.13) формуладан (И. В. Мешчерский „Назарий механикадан масалалар тўплами“ китобидаги 760, 764- масалалар), қаттиқ жисмнинг айланма ҳаракати бўлганда (26,14) формуладан (И. В. Мешчерский „Назарий механикадан масалалар тўплами“ китобидаги 771, 772, 765- масалалар) фойдаланилади.

6. Бу параграфга оид масалаларни асосий уч типга бўлиш мумкин:

а) нуқта ҳаракати тўғри чизиқли бўлган масалаларга, бунга куч ўзгармас бўлганда И. В. Мешчерский „Назарий механикадан масалалар тўплами“ китобидаги 756—764, 766- масалалар; таъсир қилаётган куч нуқтанинг вазиятига боғлиқ бўлганда 768, 769- масалалар ва потенциал энергияни топиш учун И. В. Мешчерский „Назарий механикадан масалалар тўплами“ китобидаги 784—790- масалалар киради;

б) нуқта ҳаракати эгри чизиқли бўлган масалаларга, бунга И. В. Мешчерский „Назарий механикадан масалалар тўплами“ китобидаги 770; 788- масалалар киради;

в) қаттиқ жисмнинг ҳаракати қўзғалмас ўқ атрофида айланма бўлган масалаларга, бунга И. В. Мешчерский „Назарий механикадан масалалар тўплами“ китобидаги 755, 765, 767, 771, 772- масалалар киради (буларда айлантирувчи момент ўзгармас).

28 §. Масалалар

22- масала. 5000 $м^3$ сувни 3 $м$ баландликка кўтариш учун, двигателининг қуввати 2 *от кучи* га эга бўлган насос ўрнатилган. Агар насоснинг фойдали иш коэффициенти 0,8 бўлса, шу ишни бажариш учун қанча вақт керак бўлади?

Ечиш. $A = P \cdot h$ формулага асосан сувни кўтариш учун сарф бўлган ишни топамиз:

$$A = 5000 \cdot 10^3 \cdot 3 = 15 \cdot 10^6 \ кГм.$$

Двигателнинг фойдали қувватини топамиз:

$$N_ф = 2 \cdot 75 \cdot 0{,}8 = 120 \ \frac{кГм}{сек},$$

демак, насос ҳар секундига 120 *кГм* иш бажарар экан.

Қанча вақтда $A_ф$ ишни бажаришини топамиз:

$$120\,t = A_ф \ \text{ёки} \ t = \frac{A_ф}{120} = \frac{15 \cdot 10^6}{120} \ сек$$

ёки $t = 35$ *соат* 43 *мин* 20 *сек.*

23-масала. Оғирлиги 200 *кГ* бўлган болғани 0,75 *м* баландликка бир минутда 84 марта кўтарадиган машинанинг қуввати от кучи ва киловатт билан ҳисобланса, қанча бўлади? Машинанинг фойдали иш коэффициенти 0,7.

Ечиш. Болғани бир марта кўтариш учун машина сарф қиладиган фойдали ишни (26,10) формуладан топамиз:

$$A'_ф = P \cdot h = 200 \cdot 0{,}75 = 150 \ кГм. \qquad (1)$$

Демак, бир минутда, яъни 60 секундда сарф қилган фойдали иш

$$A_ф = A'_ф \cdot n = 150 \cdot 84 = 12600 \ кГм. \qquad (1')$$

Машинанинг фойдали қувватини (26,13) формулага биноан топамиз:

$$N_ф = \frac{A_ф}{t} = \frac{12600}{60} = 210 \ \frac{кГм}{сек}. \qquad (2)$$

(26,16) формулага асосан машинанинг ҳақиқий қувватини топамиз:

$$N_х = \frac{N_ф}{\eta} = \frac{210}{0{,}7} = 300 \ \frac{кГм}{сек}$$

ёки от кучи ҳисобида.

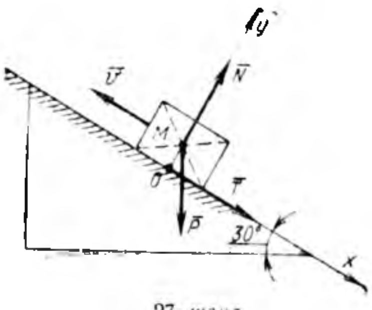
$$N_х = \frac{300}{75} = 4 \ \text{от кучи},$$

киловатт ҳисобида:

$$N_х = 0{,}736 \cdot 4 = 2{,}94 \ квт.$$

24-масала. Оғирлиги 20 *кГ* бўлган юкни қия текислик бўйлаб 6 *м* масофага чиқариш учун сарф бўладиган иш ҳисоблансин. Горизонт билан текислик ўртасидаги бурчак 30° га ва ишқаланиш коэффициенти 0,1 га тенг (27-шакл).

Ечиш. Қия текисликда ҳаракат қилаётган жисмга оғир-



27-шакл.

лик кучи $\overline{P}$ ишқаланиш кучи $\overline{T}$ ва нормал реакция кучи $\overline{N}$ таъсир қилади. $\overline{N}$ реакция кучи ҳаракат йўналишига тик бўлгани учун иш бажармайди.

Оғирлик кучи P нинг бажарган ишини (26,10) формуладан топамиз:

$$A_1 = P \cdot h = P \cdot s \cdot \cos 120^\circ = -20 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = -60 \ кГм. \quad (1)$$

Ишқаланиш кучи T нинг иши:

$$A_2 = -kNs. \quad (2)$$

Oy ўқидаги проекциялар мувозанат тенгламасидан таянчга бўлган нормал босим N ни топамиз:

$$\sum_{i=1}^{3} Y_i = N - P\cos 30^\circ = 0,$$

бундан

$$N = P \cdot \cos 30^\circ = 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3} \ кГ,$$

шунинг учун

$$A_2 = -0{,}01 \cdot 10 \cdot \sqrt{3} \cdot 6 = -0{,}173 \cdot 6 = -1{,}04 \ кГм. \quad (4)$$

Тўла бажарилган иш бу кучлар бажарган ишларнинг йиғиндисига тенг.

$$A = A_1 + A_2 = -60 - 1{,}04 = -61{,}04 \ кГм \quad (5)$$

ёки жоуль ҳисобида

$$A = -61{,}04 : 0{,}102 = -598 \ ж.$$

25-масала. Декарт координата ўқларидаги проекциялари $X = 2x + y$; $Y = x + z^2$; $Z = 2yz + 1$ га тенг. Куч материал нуқтага таъсир этсин. Нуқта $M(1;\ 2;\ 3)$ вазиятдан $M_1(2,\ 3,\ 4)$ вазиятга кўчишида шу кучнинг бажарган иши топилсин (куч *н*, координаталар *см* ҳисобида).

Ечиш. Олдин кучнинг потенциал эканлигини текширамиз: бунинг учун хусусий ҳосилаларни топамиз:

$$\frac{\partial X}{\partial y} = 1; \ \frac{\partial Y}{\partial x} = 1; \ \frac{\partial Y}{\partial z} = 2z; \ \frac{\partial Z}{\partial y} = 2z; \ \frac{\partial Z}{\partial x} = 0; \ \frac{\partial X}{\partial z} = 0.$$

Бундан $\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$; $\frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}$; $\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial z}$ экан.

Куч потенциалли бўлиш масала шартини қаноатлантиради, демак куч потенциал экан. Кучнинг элементар иши потенциал функциянинг тўла дифференциалига тенг, яъни $dU = dA$

элементар ишни $dA = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ формулага X, Y, Z қийматларини қуйиб топамиз:

$$dA = (2x + y)\,dx + (x + z^2)dy + (2z + 1)dz = 2xdx + ydx + \\ + xdy + z^2dy + 2yzdz + dz.$$

Бу ифода тўла дифференциал бўлади:

$$dA = d(x^2) + d(xy) + d(yz^2) + dz = d(x^2 + xy + yz^2 + z).$$

Демак,

$$dU = d(x^2 + xy + yz^2 + z).$$

Буни интеграллсак, $U = x^2 + xy + yz^2 + z + c$ келиб чиқади. M_0 ва M_1 нуқталарда U функциянинг қийматлари:

$$U_0 = 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3^2 + 3 + c = 24 + c,$$

$$U_1 = 2^2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4^2 + 4 + c = 62 + c \text{ га тенг.}$$

Демак, изланаётган иш $A = U_1 - U_0 = 62 - 24 = 38$ *н·см* га тенг.

29-§. Материал нуқта кинетик энергиясининг теоремаси

Нуқта массасининг унинг тезлиги квадратига кўпайтмасининг ярмига тенг катталик материал нуқтанинг кинетик энергияси дейилади:

$$T = \frac{mv^2}{2}. \tag{29,1}$$

Кинетик энергия ҳамма вақт мусбат бўлади ва *кГм* да ўлчанади.

Кинетик энергия материал нуқта ҳаракатини ўлчайдиган ўлчамларидан биридир.

Материал нуқта кинетик энергиясининг теоремасини уч турда ифодалаш мумкин:

$$1)\ d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = F \cdot ds \cos(\widehat{\overline{F}, \overline{dr}}) = \delta' A, \tag{29,2}$$

яъни материали нуқта кинетик энергиясининг дифференциали материал нуқтага таъсир этувчи кучнинг *элементар ишига тенг.*

$$2)\ \frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \frac{\delta' A}{dt} = N, \tag{29,3}$$

яъни материал нуқта кинетик энергиясининг вақтга нисбатан ҳосиласи материал нуқтага таъсир этувчи кучнинг қувватига тенг.

$$3)\ \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A, \tag{29.4}$$

яъни материал нуқта кинетик энергиясининг босиб ўтилган маълум йўлдаги ўзгариши унга таъсир эттирилган кучнинг шу йўлда бажарган тўла ишига тенг.

Материал нуқтага бир неча куч таъсир қилса (29,2), (29,3), (29,4) тенгламаларнинг ўнг томони кучлар тенг таъсир этувчисининг иши ёки қувватини ифодалайди.

Материал нуқта ҳаракати тўғри чизиқли бўлган ҳолда Ox ўқини шу ҳаракат тўғри чизиғи бўйлаб йўналтирамиз, у вақтда

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = X\,dx \tag{29,5}$$

ёки

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int_{(M_0)}^{(M)} X\,dx. \tag{29,6}$$

бўлади.

Бу ерда $X = \pm F$, бу ҳол учун F ҳамма кучларнинг тенг таъсир этувчиси.

$F = \text{const}$ бўлган ҳолда интегрални интеграллаймиз, у вақтда

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \pm F \cdot s, \tag{29,1}$$

бу ерда s — нуқтанинг босиб ўтган йўли.

Материал нуқта ҳаракати эркин бўлмаганда қуйидагиларни назарга олиш керак:

1) нуқтага стационар боғланиш қўйилган бўлсин (нуқта абсолют силлиқ сирт ёки чизиқ устида ҳаракат қилсин). Бу ҳолда боғланиш реакция кучи тенгламага кирмайди, чунки реакция кучи нуқта траекториясининг нормали бўйлаб йўналган, демак, унинг иши нолга тенг;

2) ишқаланиш кучини ҳисобга олиш тўғри келса, у вақтда кинетик энергия тенгламаларига ишқаланиш кучининг ё иши, ё қуввати киради.

30-§. Кинетик энергия теоремасига оид масалаларни ечишга доир методик кўрсатмалар

Материал нуқта кинетик энергиясининг ўзгариш теоремаси ёрдами билан ечиладиган масалаларни қуйидаги тартибда ечиш тавсия этилади:

1. Координата ўқлари системасини танлаб олиш керак.
2. Материал нуқтага таъсир эттирилган кучларни, яъни берилган кучларни ва реакция кучларини белгилаб олиш керак.
3. Материал нуқтага таъсир эттирилган кучларнинг нуқта кўчишида бажарган ишларининг йиғиндисини топиб олиш керак.

4. Материал нуқтанинг бошланғич вазиятига ва кейинги вазиятидаги кинетик энергияларини топиб олиш керак.

5. Юқорида топилган қийматларни кинетик энергиянинг ўзгариш теоремасининг формуласига қўйиб изланаётган номаълумни топиш керак.

Бу параграфга оид масалаларни қуйидаги асосий икки типга ажратиш мумкин:

1. Кинетик энергия теоремасига асосан ечиладиган, тўғри чизиқли ҳаракатдаги материал нуқтага оид масалалар.

2. Кинетик энергия теоремасига асосан ечиладиган, эгри чизиқли ҳаракатдаги материал нуқтага оид масалалар.

Бундан ташқари, биринчи типга кирган масалаларни учта группага ажратиш мумкин:

а) материал нуқтага таъсир эттирилган куч (ёки кучларнинг тенг таъсир этувчиси) ўзгармас, яъни $X = \text{const}$ бўлган масалалар. Бу ерда X — кучнинг (ёки кучлар тенг таъсир этувчисининг) нуқта траекторияси бўйича йўналтирилган Ox ўқидаги проекцияси. Бу ҳолда (29,7) формула қўлланилади;

б) материал нуқтага таъсир эттирилган куч (ёки кучларнинг тенг таъсир этувчиси) масофа (нуқта абсциссаси) функцияси, яъни $x = f(x)$ бўлган масалалар.

Бу ҳолда (29,6) тенглама $\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int\limits_{x_0}^{x} f(x)dx = \varphi(x)$ бўлади. Бу тенглама тезлик билан масофа x нинг орасидаги муносабатни беради ва v тезлик маълум бўлганда x масофани топиш ёки x масофа маълум бўлганда v тезликни топиш имкониятини беради;

в) материал нуқтага таъсир қилаётган куч (ёки кучларнинг тенг таъсир этувчиси) тезликнинг функцияси, яъни $X = f(v)$ бўлган масалалар.

Бу ҳолда кинетик энергия теоремасининг (29,2 дифференциал формуласи қўлланилади.

Шуни эслатиб ўтиш керакки, баъзи бир масалаларни ечишда кинетик энергия теоремаси билан ҳаракат миқдори теоремасини комбинация қилиб ечиш керак бўлади. Бу материал нуқтага таъсир этувчи куч ўзгармас бўлган ҳолларга (И. В. Мешчерский „Назарий механикадан масалалар тўплами" китобидаги 678, 775, 776, 779- масалалар) ёки куч тезлик функцияси бўлган ҳолларга (И. В. Мешчерский „Назарий механикадан масалалар тўплами" китобидаги 678, 689, 693, 696- масалалар) ва ундан ташқари вақтни ҳам топиш керак бўлган масалаларга оид.

Ҳаракат вақтини топиш учун ҳаракат миқдори теоремаси ўтган йўлни топиш учун кинетик энергия теоремаси қўлланилса, қулай бўлади.

Иккинчи типга кирган масалаларни икки группага ажратиш мумкин:

а) Материал нуқтага таъсир қилаётган кучнинг миқдори ва йўналиши ўзгармас бўлган группага.

Бу ҳолда кинетик энергия теоремасининг (29,4) формуласи қўлланилади.

б) Материал нуқтага таъсир қилаётган куч нуқта вазиятининг (нуқта координаталарининг) функцияси бўлган группа.

Бу ҳолда кинетик энергия теоремаси функцияси куч бўлган ҳолдагина ечилади.

Бу вақтда кинетик энергиянинг теоремасини чекли, яъни

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A = U_1 - U_0$$

формуласи кўринишида қўллаш мумкин.

6. Материал нуқта кинетик энергиянинг ўзгариш теоремасига тааллуқли масалаларни қуйидаги типларга ажратиш мумкин:

а) ҳаракат тўғри чизиқли бўлган масалаларга; куч ўзгармас бўлганда И. В. Мешчерский „Назарий механикадан масалалар тўплами" китобидаги 773, 774, 777, 781, 805- масалалар; куч нуқта ҳолатига боғлиқ бўлганда И. В. Мешчерский „Назарий механикадан масалалар тўплами" китобидаги 699, 785—787, 793—796- масалалар ва куч нуқта тезлигига боғлиқ бўлганда И. В. Мешчерский „Назарий механикадан масалалар тўплами" китобидаги 687, 689, 693, 695, 696, 782- масалалар киради;

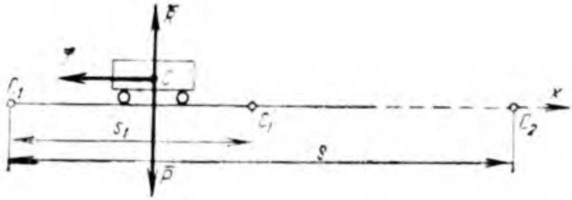
б) ҳаракат эгри чизиқли бўлган масалаларга; бунга куч ўзгармас бўлганда И. В. Мешчерский „Назарий механикадан масалалар тўплами" китобидаги 783- масала, куч нуқта вазиятига боғлиқ бўлганда И. В. Мешчерский „Назарий механикадан масалалар тўплами" китобидаги 788- масала киради.

81- §. Масалалар

26- масала. Темир йўл платформасининг оғирлиги 6 *кн* бўлиб, ўқларнинг ишқаланиши натижасида пайдо бўладиган қаршилик кучи 15 *н* га тенг. Ишчи 25 *н* босим билан тинч турган платформага тиралиб, уни итаради ва тўғри чизиқли горизонтал йўлда юргизади. 20 *м* йўл ўтгандан кейин ишчи платформани қўйиб юборади. Ҳаво қаршилигини ва ғилдиракларнинг темир йўлга ишқаланиш қаршилигини ҳисобга олмай, платформа ҳаракати вақтидаги энг катта v_{max} тезлик ва платформа босиб ўтган ҳамма *s* йўл ҳисоблансин (28- шакл).

Ечиш. Платформани бутун массаси *C* оғирлик марказига жойлашган материал нуқта деб қараймиз (28- шакл). *x* ўқини рельс бўйлаб ҳаракат томонига йўналтирамиз ва ҳаракат бошланиш олдида *C* нуқта турган C_1 нуқтани *x* ни ҳисоблаш боши учун оламиз.

Платформа бошланғич $v_0 = 0$ тезликсиз ҳаракат қила бошлагандан кейин яна тезлигини йўқотиб, охирида тўхтайди,



28- шакл.

яъни охирги тезлиги $v_1 = 0$ ҳам нолга тенг, шу сабабли кучнинг бажарган иши нолга тенг,

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A,$$

яъни

$$v_1 = v_0 = 0$$

бўлгани учун

$$A = 0.$$

Платформага қўйилган актив куч $s_1 = 20$ *м* йўл давомида иш бажаради, қаршилик кучи бўлса, бутун s йўл давомида таъсир қилади, шунинг учун

$$A = 25 \cdot s_1 - 15 \cdot s = 0,$$

бундан

$$s = \frac{25 \cdot s_1}{15} = \frac{25 \cdot 20}{15} = \frac{100}{3} = 33\frac{1}{3}\ м.$$

Платформанинг энг катта тезлигини (29,4) формуладан топамиз. Ишчи платформани қўйиб юбориш вақтида энг катта тезлик булади. Шу йулда кучларнинг бажарган иши A_1:

$$\frac{mv_{max}^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A_1,$$

$$A_1 = (25 - 15) \cdot s_1 = 10 \cdot 20 = 200\ н \cdot м$$

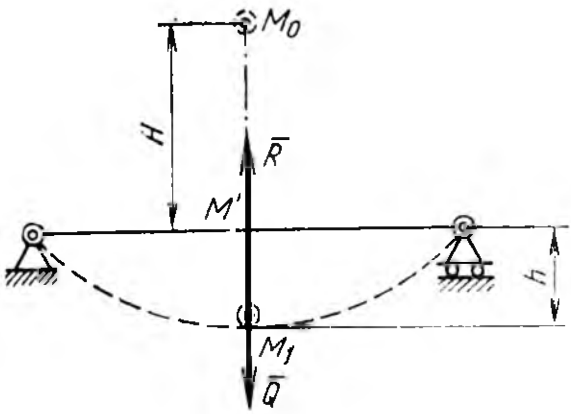
$v_0 = 0$ бўлгани учун

$$\frac{mv_{max}^2}{2} = A_1 \text{ ёки } \frac{6000\, v_{max}^2}{2 \cdot 9{,}81} = 200,$$

бундан

$$v_{max} = \sqrt{\frac{200 \cdot 2 \cdot 9{,}81}{6000}} \approx 0{,}808\ м/сек.$$

27- масала. Ўртасига Q юк қўйилган балканинг статик эгилиши 2 *мм* га тенг. Балканинг массаси ҳисобга олинмаганда, унинг мана шу икки ҳолда максимал эгилиши қанча булади: 1) Q юк эгилмаган балкага қўйилганда ва бошланғич тезликсиз қўйиб юборилганда; 2) Q юк эгилмаган балканинг уртасига 10 *см* баландликдан бошланғич тезликсиз тушганда.



29- шакл.

Масалани ечишда балканинг юкка кўрсатадиган таъсир кучини унинг эгилишига пропорционал деб ҳисоблаш керак (29- шакл).

Ечиш. M юкка 1) M_0 вазиятдан M_1 (балканинг энг катта эгилишига мос бўлган) вазиятгача кўчишида, яъни $H+h$ га кўчишида ҳамма вақт юкнинг оғирлик кучи Q; 2) балканинг эластик деформациясига мос бўлган фақат h — масофага кўчишидагина юкка балканинг эластик реакция R кучи таъсир қилади.

Масалани ечиш учун кинетик энергия ўзгариш теоремасининг (29,4) формуласидан фойдаланамиз. Бу масалада бошланғич M ҳолатида бўлганда юк тезлиги v_0 ва кейинги M_1 ҳолатида (балканинг максимал эгилган ҳолатида) бўлганда юк тезлиги v_1 лар нолга тенг, яъни $v_0 = v_1 = 0$. Бундан, юк $H+h$ масофага кўчганда унинг кинетик энергиясининг ўзгариши нолга тенг бўлади. Демак, шу $H+h$ масофага кўчишда юкка қўйилган ҳамма кучларнинг бажарган ишларининг йиғиндиси нолга тенг; Q юк оғирлик кучи $M_0M_1 = H+h$ кўчишда ва балканинг эластиклик реакция R кучи $M_1M' = h$ кўчишда иш бажаради, демак,

$$A = Q(H+h) - R \cdot h = 0. \qquad (1)$$

Балканинг эластиклик кучининг иши (26,11) формулага асосан:

$$Rh = -\frac{ch^2}{2}. \qquad (2)$$

Балканинг бикрлик коэффициенти c масаланинг шартидан топилади.

Эластик балка устига қўйилган юкнинг тебраниши тўхтаганидан кейин мувозанатда турганида балканинг эластиклик кучи юкнинг огирлик кучига тенг.

$$Q = cx \tag{3}$$

формуладан c ни топамиз:

$$c = \frac{Q}{x}.$$

Бу ҳолда

$$x = f = 2 мм,$$

бундан

$$c = \frac{Q}{f}. \tag{4}$$

Демак, балканинг энг катта эгилишида балканинг эластик кучи бажарган иш

$$Rh = \frac{Qh^2}{2f} \tag{5}$$

га тенг бўлади.

(5) ни (1) га қўйсак:

$$A = Q(H + h) - \frac{Qh^2}{2f} \tag{6}$$

ёки

$$h^2 - 2fh - 2fH = 0 \tag{7}$$

бўлади.

Бу квадрат тенгламани балканинг номаълум энг катта h эгилишига нисбатан ечиб, h ни топамиз:

$$h = f + \sqrt{f^2 + 2fH} = 2 + \sqrt{4 + 2 \cdot 2 \cdot 100} = 22{,}1 \text{ мм}.$$

Тенгламани ечишда мусбат ишорасигина олинади, агар манфий ишора олинса, балканинг эгилиши h манфий бўлади, бундай ҳол бўлиши мумкин эмас;

юк эгилмаган балка устига бошланғич тезликсиз қўйиб юборилганда, юкнинг тушиш баландлиги H нолга тенг. Бу қийматни квадрат тенгламага қўйсак:

$$h = f + \sqrt{f^2 + 2f \cdot 0} = f + f = 2 + 2 = 4 \text{ мм}$$

бўлади.

28-масала. Огирлик кучининг таъсирида бўлмаган m массали нуқта қаршилик кучи $F = k\sqrt{v}\,н$ бўлган муҳитда v_0 $м/сек$ тезлик билан ҳаракат қила бошлайди.

Бу ерда v — нуқтанинг тезлиги, k — ўзгармас мусбат коэффициент.

Нуқта қаерда ва қачон тўхташи топилсин.

Ечиш. Бу масалани ҳаракат миқдори теоремасини ва кинетик энергия теоремасини биргаликда қўллаб ечамиз.

Нуқтанинг бошланғич ҳолатини координата боши учун қабул қилиб x ўқини ҳаракат томонига йўналтирамиз. Кучнинг x ўқдаги проекциясини топамиз:

$$X = -F = -k\sqrt{v}.$$

Ҳаракат миқдори теоремасининг ва кинетик энергия теоремасининг дифференциал шаклидан фойдалансак:

$$d(mv) = X dt = -k\sqrt{v}\,dt \tag{1}$$

ва

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = X dx = -k\sqrt{v}\,dx \tag{2}$$

бўлади ёки ўзгарувчиларни ажратсак:

$$m\frac{dv}{\sqrt{v}} = -k dt, \tag{3}$$

$$mv dv = -k\sqrt{v}\,dx$$

ёки

$$m\sqrt{v}\,dv = -k dx. \tag{4}$$

(3) ва (4) тенгламаларни интеграллаймиз:

$$m\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{\sqrt{v}} = -k\int_0^t dt, \tag{5}$$

$$m\int_{v_0}^{v}\sqrt{v}\,dv = -k\int_0^s dx \tag{6}$$

ёки

$$2m\sqrt{v}\,\Big|_{v_0}^{v} = -kt\,\Big|_0^t, \tag{5'}$$

$$\frac{2}{3}mv\sqrt{v}\,\Big|_{v_0}^{v} = -kx\,\Big|_0^s. \tag{6'}$$

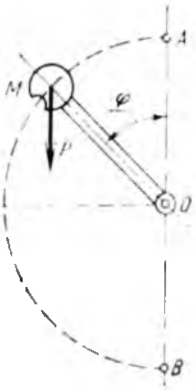
(5') ва (6') ларда $v = 0$ десак (чунки нуқта тўхтаганда тезлиги нолга тенг):

$$-2m\sqrt{v_0} = -kt \quad \text{ва} \quad -\frac{2}{3}mv_0\sqrt{v_0} = -ks,$$

булардан

$$t = 2\frac{m}{k}\sqrt{v_0}\ \text{сек}, \tag{7}$$

$$s = \frac{2}{3}\frac{m}{k}v_0\sqrt{v_0}\ \text{м}. \tag{8}$$



30- шакл.

29- масала. Материални зарба билан синаш учун ишлатиладиган асбобнинг асосий қисми M пўлат қуймадан иборат бўлиб, у қўзғалмас O ўқ атрофида деярли ишқаланмасдан айланадиган стержень учига бириктирилган. Стерженнинг оғирлигини назарга олмай, M қуймани материал нуқта деб ҳисоблаймиз; масофа $MO = 0{,}981$ *м*. Шу нуқта энг юқориги A ҳолатдан ниҳоятда кичик бошланғич тезлик билан тушиб, энг пастки B ҳолатга келганда унинг тезлиги v нинг қанча бўлишин аниқлансин (30- шакл).

Е ч и ш. Пўлат қуйманинг оғирлигини P билан, массасини m билан белгилаймиз. У вақтда кинетик энергия теоремасининг (29,4) формуласидан фойдаланиб, қуйидагини ёзиш мумкин:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = P \cdot AB.$$

Бу ерда AB — пўлат қуйма оғирлик марказининг вертикал кўчиши баландлиги ва у икки радиусга тенг, яъни $AB = 2 \cdot 0{,}981$ *м*. Қуйма бириктирилган стерженнинг реакция кучи ҳар қандай ҳолатда қуйманинг элементар кўчишига тик бўлгани учун у стержень реакция кучининг иши нолга тенг. Бошлангич тезлик v_0 нолга тенглигини аҳамиятга олсак:

$$\frac{mv^2}{2} = P \cdot AB$$

бўлади
ёки

$$\frac{Pv^2}{2g} = P \cdot AB \text{ ёки } v^2 = 2g \cdot AB = 2 \cdot 9{,}81 \cdot 2 \cdot 0{,}981,$$

бундан

$$v = \sqrt{2^2 \cdot 0{,}981^2 \cdot 10} = 1{,}962\sqrt{10} = 6{,}2 \text{ м/сек},$$

$$v = 6{,}2 \text{ м/сек}.$$

Қуйма B нуқтага келганда, яъни энг пастки ҳолатга тушганда унинг тезлиги 6,2 *м/сек* га тенг бўлар экан.

IV БОБ

ЭРКСИЗ МАТЕРИАЛ НУҚТАНИНГ ҲАРАКАТИ. ДАЛАМБЕР ПРИНЦИПИ ВА МАТЕРИАЛ НУҚТАНИНГ НИСБИЙ ҲАРАКАТИ

32-§. Эрксиз материал нуқтанинг ҳаракати. Эрксиз материал нуқтанинг ҳаракат дифференциал тенгламаси

Қўзғалмас силлиқ сирт устида ҳаракатланувчи эрксиз материал нуқтанинг ҳаракат дифференциал тенгламалари Лагранж формуласи асосида қуйидагича бўлади:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= X + \lambda\frac{\partial f}{\partial x}, \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y + \lambda\frac{\partial f}{\partial y}, \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z + \lambda\frac{\partial f}{\partial z}. \end{aligned}\right| \qquad (32,1)$$

бу ерда $\lambda = \frac{N}{\Delta f}$ — Лагранж кўпайтувчиси.

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2};$$

$f(x, y, z) = 0$ — нуқта ҳаракат қилаётган сиртнинг тенгламаси ёки боғланиш тенгламаси;

N — нормал реакция кучи.

Қўзғалмас, силлиқ бўлмаган сирт устида ҳаракат қилувчи эрксиз материал нуқтанинг ҳаракат дифференциал тенгламалари қуйидагича булади:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= X + \lambda\frac{\partial f}{\partial x} - R\frac{v_x}{v}, \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y + \lambda\frac{\partial f}{\partial y} - R\frac{v_y}{v}, \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z + \lambda\frac{\partial f}{\partial z} - R\frac{v_z}{v}, \end{aligned}\right| \qquad (32,2)$$

бу ерда $R = kN$ — ишқаланиш кучи;

k — динамик ишқаланиш коэффициенти,

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}.$$

Бу ҳолда кинетик энергия ўзгариш теоремасининг тенгламаси қуйидагича булади:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int_0^s F\cos\varphi \cdot ds - \int_0^s R\,ds, \qquad (32,3)$$

бу ерда $R = kN$ — ишқаланиш кучи; $\varphi = (\bar{F}, \bar{dr})$. Бу параграфга И. В. Мешчерский „Назарий механикадан масалалар туплами“ китобидаги 645, 820, 824-масалалар киради.

33-§. Эрксиз материал нуқта ҳаракатига оид масалаларни ечишга доир методик кўрсатмалар

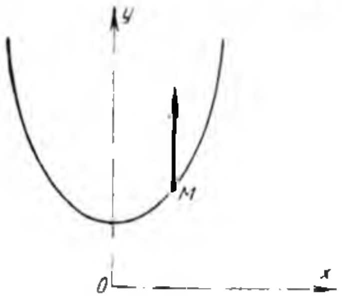
Бу қисмга тааллуқли масалаларни қуйидаги тартибда ечиш керак:

1. Координата ўқлари системаси танлаб олинади.
2. Нуқтани боғланишдан озод қилиб, реакция кучини киритиб, нуқтага таъсир қилаётган ҳамма кучларнинг схемасини тузиб олиш керак.
3. Нуқта учун (32,1) ёки (32,2) га мувофиқ тенгламаларни ва боғланиш тенгламасини тузиб, улардан изланаётган номаълумни топилади.

34-§. Масалалар

30-масала. Массаси m бўлган нуқта

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = a\,ch\,\frac{x}{a}$$



31-шакл.

занжир чизиқда Oy ўққа параллел бўлган итарувчи куч таъсирида ҳаракат қилади, бу куч Ox ўқдан йўналган бўлиб, kmy га тенг. $t = 0$ бўлган пайтда $x = 1$ м, $\dot{x} = $ м/сек, $k = 1$ сек$^{-1}$ ва $a = 1$ м бўлганда нуқтанинг эгри чизиққа курсатадиган босими N ва унинг ҳаракати аниқлансин (оғирлик кучи йўқ). Занжир чизиқнинг эгрилик радиуси $\frac{y^2}{a}$ га тенг (31-шакл).

Ечиш. Боғланиш тенгламасини тузамиз:

$$f = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) - y = 0. \quad (1)$$

(1) муносабатдан қуйидагиларни топамиз:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 1,$$

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)^2 + 1} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = \frac{1}{a}y. \qquad (2)$$

$$a = 1 \text{ бўлганда } \Delta f = y \text{ бўлади.} \qquad (3)$$

Бу ҳолат учун (32,1) тенгламани тузамиз.

Масала шартига кўра

$$F = 1\ my,\ X = 0,\ Y = my$$

бўлгани учун

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{N}{y}\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}),$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = my - \frac{N}{y} \qquad (4)$$

(4) тенгламадан:

$$\frac{N}{y} = my - m\ddot{y},$$

бундан:

$$m\ddot{x} = (my - m\ddot{y})\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

ёки

$$\ddot{x} = \frac{1}{2}(y - \ddot{y})(e^x - e^{-x}), \qquad (5)$$

$\dot{y}$, $\ddot{y}$ ларни топамиз:

$$\dot{y} = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \qquad (6)$$

$$\ddot{y} = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}),$$

булардан:

$$\ddot{x} = \frac{1}{2}(y - y)(e^x - e^{-x}) = 0,$$

яъни

$$\ddot{x} = 0. \qquad (7)$$

(7) ни интеграллаб, қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$\dot{x} = C_1,\ x = C_1t + C_2. \qquad (8)$$

Масала шартидаги бошланғич шартлардан фойдаланиб C_1 ва C_2 ларни топамиз.

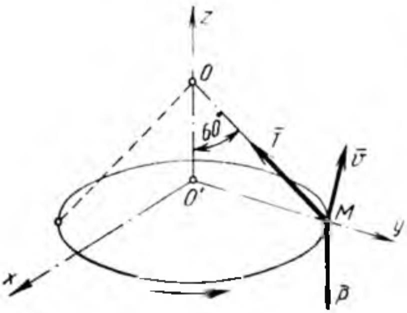
$t = 0$ бўлганда $x = 1$ *м*, $\dot{x} = 1$ *м/сек*, буларни (8) га қўйсак

$$C_1 = 1,\ C_2 = 1.$$

Демак,

$$x = (t + 1)\ м, \qquad (9)$$

$$N = my(y - \ddot{y}) = my(y - y) = 0,\ N = 0. \qquad (10)$$



32- шакл.

31- масала. Қўзғалмас нуқтага боғланган, узунлиги 30 *см* бўлган ипга осиб қўйилган 1 *н* ли M юк конус шаклидаги маятникни тасвирлайди, яъни горизонтал текисликда айлана чизади; шу билан баравар ип вертикал билан 60° ли бурчак ташкил қилади. Юк тезлиги v ва ипдаги тортилиш T аниқлансин (32- шакл).

Ечиш. Юкни радиуси R бўлган сфера бўйича айланишга имкон берадиган, M юк боғланган OM ип юкнинг боғланиши бўлади. Юкнинг координаталарини x, y, z лар билан белгилаб, унинг боғланиш тенгламасини тузамиз:

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2$$

ёки

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0.$$

M юк қўзғалмас силлиқ сирт устида ҳаракат қилади ва $Y=0$, $X=0$, $Z=mg$ бўлгани учун (32,1) тенглама қуйидагича бўлади:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= \frac{T_x}{l}, \\ m\ddot{y} &= \frac{T_y}{l}, \\ m\ddot{z} &= mg + \frac{T_z}{l}. \end{aligned}\right| \qquad (2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z$$

Бунда

$$\lambda = \frac{N}{\Delta f} = + \frac{T}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}} =$$

$$= + \frac{T}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}} = + \frac{T}{2e}. \qquad (3)$$

T нинг олдидаги (+) ишора шунинг учун олинганки, биз ипнинг реакция кучи ташқи нормал бўйича йўналган деб фараз қиламиз. Энди (2) дифференциал тенгламаларнинг охиргисига $\ddot{z} = 0$, $z = l\cos\alpha$ қийматларни қўйиб, ипнинг реакция (тортиш) кучи T ни топамиз:

$$T = -\frac{mg}{\cos\alpha} = -\frac{mg}{\cos 60^\circ} = -2mg. \qquad (4)$$

T реакция кучи манфий (—) ишорали бўлиб чиқди, бу T реакция ички нормал бўйича (яъни ип маҳкамланган O нуқтага) йўналганлигини кўрсатади.

Юкнинг тезлигини топиш учун унинг боғланиши тенглама сидан t вақтга нисбатан икки марта ҳосила оламиз:

$$\dot{x}^2 + x\ddot{x} + \dot{y}^2 + y\ddot{y} = 0, \tag{5}$$

вақтга нисбатан z ўзгармас, шунинг учун унинг ҳосиласи нолга тенг, бу ерда: $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = v^2$. $\ddot{x}$ ва $\ddot{y}$ ларнинг қийматини (2 дифференциал тенгламалардан топамиз.

Уларга топилган $T = -\frac{mg}{\cos\alpha}$ ни қуйсак, қуйидагилар ҳосил булади:

$$m\ddot{x} = -\frac{mg\,x}{l\cos\alpha}, \quad m\ddot{y} = -\frac{mg\,y}{l\cos\alpha};$$

буларни m га қисқартирсак:

$$\ddot{x} = -\frac{gx}{l\cos\alpha},$$

$$\ddot{y} = -\frac{gy}{l\cos\alpha}.$$

Энди буларни (5) га қуямиз:

$$\dot{x}^2 - \frac{gx^2}{l\cos\alpha} + \dot{y}^2 - \frac{gy^2}{l\cos\alpha} = 0$$

ёки

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \frac{g}{l\cos\alpha}(x^2 + y^2),$$

бунда

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = v^2, \; x^2 + y^2 = l^2\sin^2\alpha$$

булгани учун

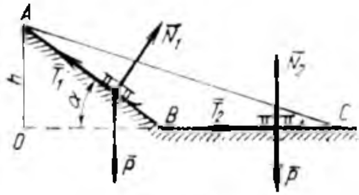
$$v^2 = \frac{gl^2\sin^2\alpha}{l\cos\alpha} = \frac{gl\sin^2\alpha}{\cos\alpha},$$

бундан

$$v = \sqrt{\frac{gl\sin^2\alpha}{\cos\alpha}} = \sqrt{\frac{980\cdot 30\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{\frac{1}{2}}} = 210\,\frac{см}{сек}.$$

Юкнинг тезлиги $v = 210\,\frac{см}{сек}$ экан.

32-масала. Чана α бурчак остида қия бўлган текисликнинг A нуқтасидан бошланғич тезликсиз чиқиб, шу текисликда AB йўлни ўтади, сунгра горизонтал текисликдаги C нуқтага келиб



33- шакл.

тўхтайди (33- шакл). Ишқаланиш коэффициенти f топилсин; $AB = s_1$ ва $BC = s_2$.

Ечиш. Чананинг тезлиги A ва C нуқталарда нолга тенг бўлгани учун чананинг шу нуқталардаги кинетик энергияси ҳам нолга тенг булади, демак, (32,3) формулага асосан, чанага таъсир қилаётган ҳамма кучларнинг шу ABC йўлда бажарган ишларининг йиғиндиси нолга тенг.

AB йўлда бажарилган иш: 1) оғирлик кучи бажарган $P\cdot h = Ps_1 \sin\alpha$ ва 2) ишқаланиш кучи бажарган $-Ts_1$ ишларнинг йиғиндисидан иборат. Ишқаланиш кучи нормал $N_1 = P\cos\alpha$ реакция билан ишқаланиш коэффициенти f нинг кўпайтмасига тенг. Демак, AB йўлдаги ишқаланиш кучининг иши $Pfs_1 \cos\alpha$ га тенг.

Ишқаланиш кучининг горизонтал BC йўлда бажарган иши Pfs_2 га тенг, чунки горизонтал текисликда нормал N_2 реакция оғирлик кучи P га тенг. Шундай қилиб, қуйидаги тенглама ҳосил бўлади:

$$Ps_1(\sin\alpha - f\cos\alpha) - Pfs_2 = 0. \tag{1}$$

Бу тенгламадан f ни топамиз:

$$f = \frac{s_1 \sin\alpha}{s_1\cos\alpha + s_2}. \tag{2}$$

Шаклдан

$$OA = s_1 \sin\alpha,\ \ OB = s_1\cos\alpha \ \text{ва}\ BC = s_2.$$

Буларнинг қийматларини олдинги (2) тенгламага қўямиз:

$$f = \frac{OA}{OB + BC} = \frac{OA}{OC} = \operatorname{tg}(\widehat{ACO}). \tag{3}$$

Бундан ACO бурчакнинг ишқаланиш бурчагига тенг эканлиги кўриниб турибди.

35-§. Материал нуқта учун Даламбер принципи

Ҳаракатдаги эрксиз материал нуқтанинг ҳаракат дифференциал тенгламаси вектор кўринишида қуйидагича ёзилади:

$$m\bar w = \bar F + \bar N, \tag{35,1}$$

бунда F — материал нуқтага таъсир қилаётган (актив) куч;
N — боғланиш реакцияси.

Бу тенгламани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\bar F + \bar N + (-m\bar w) = 0, \tag{35,2}$$

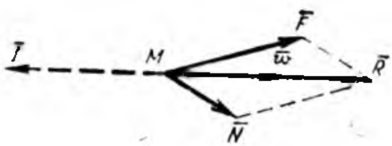
(35,2) тенгликнинг охирги ҳади миқдори жиҳатдан нуқта массаси билан тезланишининг кўпайтмасига тенг бўлган ва тезланиш йўналишига қарама-қарши томонга йўналган қандайдир кучни тасвирлайди. Бу куч инерция кучи деб аталади ва $\bar{I}$ ҳарфи билан белгиланади, яъни

$$\bar{I} = -m\bar{w}. \tag{35,3}$$

Бу ифодадаги белгилашлардан фойдалансак, (35,2) тенглама қуйидаги куринишни олади (34- шакл):

$$\bar{F} + \bar{N} + \bar{I} = 0. \tag{35,4}$$

Демак, материал нуқтага таъсир эттирилган куч, реакция кучи ва инерция кучлари айни онда мувозанатда бўлади (бунға Даламбер принципи дейилади).



34- шакл.

Шундай қилиб, инерция кучини бошқача йўл билан, яъни материал нуқтага таъсир эттирилган кучлар ва реакция кучларининг мувозанатлаштирувчиси сифатида топиш мумкин (34- шакл).

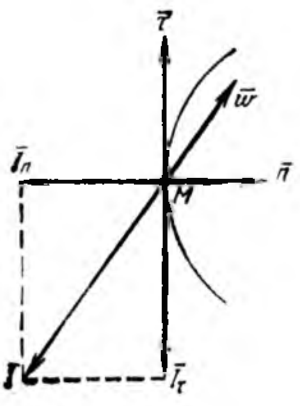
Инерция кучининг Декарт координата ўқларидаги проекциялари (35,3) тенгламага мувофиқ қуйидагича ифодаланади:

$$\left.\begin{aligned} I_x &= -m\frac{d^2x}{dt^2}, \\ I_y &= -m\frac{d^2y}{dt^2}, \\ I_z &= -m\frac{d^2z}{dt^2}. \end{aligned}\right| \tag{35,5}$$

Материал нуқта эгри чизиқли ҳаракат қилганида инерция кучи иккита, яъни бири ҳаракат траекториясига уринма бўлиб йўналган, иккинчиси эса бош нормал бўйлаб йўналган ташкил этувчи кучлар йиғиндисидан иборат бўлади (35- шакл).

Биринчи ташкил этувчи уринма ёки тангенциал инерция кучи дейилади ва $\bar{I}_\tau$ ҳарфи билан белгиланади. Иккинчи ташкил этувчи нормал инерция куч дейилади ва $\bar{I}_n$ ҳарфи билан белгиланади:

$$\bar{I}_\tau = -m\bar{w}_\tau,$$
$$\bar{I}_n = -m\bar{w}_n. \tag{35,6}$$



35- шакл.

Тангенциал ва нормал инерция кучларининг модули қуйидагича ифодаланади:

$$\left.\begin{aligned} |\bar{I}_\tau| &= m\left|\frac{dv}{dt}\right|, \\ |\bar{I}_n| &= \frac{mv^2}{\rho}. \end{aligned}\right| \qquad (35,7)$$

Бу инерция кучларининг табиий ўқлардаги проекциялари қуйидагича бўлади:

$$\left.\begin{aligned} I_\tau &= -m\frac{dv}{dt}, \\ I_n &= -\frac{mv^2}{\rho}. \end{aligned}\right| \qquad (35,8)$$

Материал нуқта радиуси R бўлган айлана бўйлаб ω бурчак тезлик ва ε бурчак тезланиш билан айланма ҳаракат қилса, тангенциал ва нормал инерция кучларининг модули қуйидагича ифодаланади:

$$\left.\begin{aligned} |\bar{I}_\tau| &= mR|\varepsilon|, \\ |\bar{I}_n| &= mR\omega^2. \end{aligned}\right\} \qquad (35\,9)$$

Уринма ва нормал ўқлардаги проекцияси эса қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\left.\begin{aligned} I_\tau &= -mR\varepsilon, \\ I_n &= -mR\omega^2. \end{aligned}\right\} \qquad (35,10)$$

Тангенциал ва нормал инерция кучлари тегишлича тангенциал ва нормал тезланишлар йўналишига қарама-қарши томонга йўналган бўлади.

36-§. Даламбер принципига асосан масалаларни ечишга оид методик кўрсатмалар

Бу параграфга тегишли масалаларни қуйидаги учта типга ажратиш мумкин:

1. Эрксиз материал нуқта тўғри чизиқли ҳаракат қиладиган ҳолга оид масалалар.

Бу ҳолда, ҳаракат қилаётган нуқта траекториясининг эгрилик радиуси $\rho = \infty$ ва демак, $I_n = \frac{mv^2}{\rho} = 0$ бўлади. Шунинг учун инерция кучи фақат битта тангенциал ташкил этувчидан иборат, яъни

$$I = I_\tau = mw_\tau = mw.$$

2. Эрксиз материал нуқта эгри чизиқли тенг ўлчовли ҳаракат қиладиган ҳолга оид масалалар.

Бу ҳолда $v = \text{const}$ бўлгани учун нуқтанинг тангенциал тезланиши $w_\tau = \frac{dv}{dt} = 0$, демак, инерция кучи фақат битта нормал ташкил этувчидан иборат бўлади, яъни $I = I_n = \frac{mv^2}{\rho}$.

3. Эрксиз материал нуқта эгри чизиқли тенг ўлчовли бўлмаган ҳаракат қиладиган ҳолга оид масалалар.

Бу ҳолда, Даламбер принципига асосан масала ечишда ҳаракат қилаётган материал нуқтага иккита: тангенциал I_τ ва нормал I_n инерция кучларини қўшиш керак.

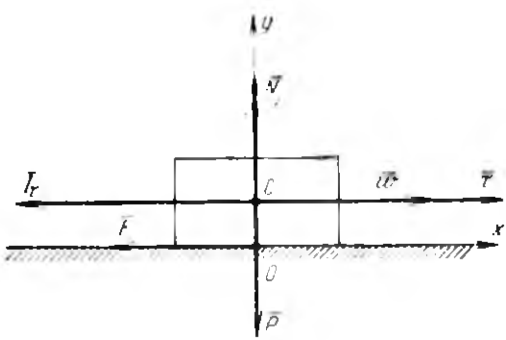
Мувозанат тенгламалари қулай бўлиши учун уларни шундай тузиш кераки, бунда ҳар қайси тенгламага бу инерция кучларидан фақат биттаси кирадиган бўлиши лозим. Бунинг учун координата ўқларидан бирини нуқта ҳаракатининг траекториясига уринма қилиб, иккинчисини эса бош нормал бўйлаб йўналтириш керак.

Бундай масалада тезлик номаълум бўлса, кўпинча у тезликни топиш учун материал нуқта кинетик энергиясининг теоремаси қўлланилса осонроқ бўлади.

Биринчи типга И. В. Мешчерский „Назарий механикадан масалалар тўплами" китобидаги 637—640-масалалар; иккинчи типга И. В. Мешчерский „Назарий механикадан масалалар тўплами" китобидаги 646—670-масалалар; учинчи типга И. В. Мешчерский „Назарий механикадан масалалар тўплами" китобидаги 802, 803, 816—820, 822-масалалар киради.

37-§. Масалалар

33-масала. Оғирлиги P бўлган оғир жисм горизонтал, ғадир-будур текисликда ўзига боғланган горизонтал арқон ёрдамида a тезланиш билан тортилади. Ишқаланиш коэффициенти f га тенг. Арқонда ҳосил бўлган тортиш кучи топилсин (36-шакл).



36- шакл.

Ечиш. Жисмга таъсир қилаётган кучлар 36-шаклда кўрсатилган, унда $\overline{P}$—оғирлик кучи, $\overline{T}$—арқоннинг тортиш кучи, $\overline{N}$ — текисликнинг нормал реакцияси ва $\overline{F}$ — ишқаланиш кучи. Жисмга унинг тезланиши $\overline{w}$ га қарама-қарши томонга йўналган $\overline{I}_\tau$ инерция кучини таъсир эттирамиз. Ҳамма кучларни Ox ва Oy ўқларга проекциялаб, қуйидаги иккита мувозанат тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$\sum_{i=1}^{5} X_i = -I_\tau - F + T = 0, \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{5} Y_i = N - P = 0, \tag{2}$$

бунда

$$I_\tau = ma = \frac{P}{g}\, a, \tag{3}$$

$F = fN$ ёки $N = P$ бўлгани учун

$$F = fP. \tag{4}$$

(3) ва (4) ни назарга олиб (1) тенгламани ечсак, қуйидаги ҳосил бўлади:

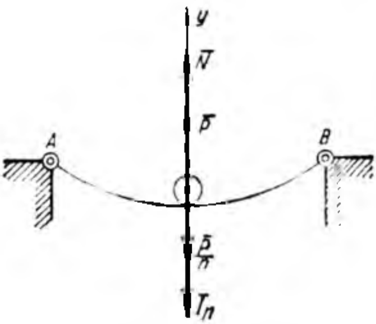
$$T = I_\tau + F \tag{5}$$

ёки

$$T = \frac{P}{g}a + fP = P\left(\frac{a}{g} + f\right). \tag{6}$$

34-масала. Ёй шаклидаги кўприкнинг чўққиси унинг ўртасида бўлиб, паст томонга йўналган; шу ернинг эгрилик радиуси ρ га тенг. Кўприк ўртасига ҳаракат қилмайдиган қилиб қўйилган ва кўприк кўтариб тура оладиган энг катта юк оғирлиги P га тенг. $\frac{P}{n}$ $(n > 1)$ оғирликдаги юк кўприк синиши учун унинг устидан қандай энг кичик v тезлик билан ўтиш кераклиги топилсин.

Кўприк бунда ўз шаклини мутлақо ўзгартиролмайди деб фараз қилинсин (37-шакл).



37-шакл.

Ечиш. Юкнинг кўприкка кўрсатадиган энг катта босими юк кўприкнинг энг пастки нуқтасида бўлганида ҳосил бўлади, чунки шу нуқтада юкка қўйилган ҳамма кучлар бир вертикал тўғри чизиқ бўйлаб йўналган, кўприкни синдирадиган $\left(\frac{P}{n} - P\right)$

куч бўлади. Юкнинг кўприкка кўрсатадиган босимини топиш учун Даламбер принципидан фойдаланамиз.

У вақтда кўприкка қўйилган $\left(\frac{\overline{P}}{n} - \overline{P}\right)$ куч ва $\overline{N}$ нормал реакция кучига яна нормал тезланиш $\overline{w}_n$ га қарама-қарши томонга йўналган $I_n = \frac{P}{ng}\frac{v^2}{\rho}$ га тенг бўлган нормал инерция кучи қўшилади.

Ҳамма кучларни вертикал ўққа проекциялаймиз:

$$\sum_{i=1}^{4} Y_i = N + P - \frac{P}{n} - I_n = 0.$$

Кўприк синган моментда $N = 0$ деб фараз қилиб, кўприкнинг синиш тезлиги v ни топамиз:

$$N = -P + \frac{P}{n} + I_n = 0$$

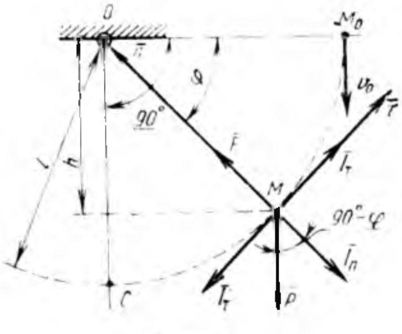
ёки

$$-P + \frac{P}{n} + \frac{Pv^2}{ng\rho} = 0,$$

бундан

$$v = \sqrt{g\rho(n-1)}.$$

35- масала. Оғирлиги P н, узунлиги l бўлган математик маятник вертикал вазиятидан 90° бўлган M_0 вазиятига чиқарилиб, унга бошланғич v_0 тезлик берилган (38-шакл). Уни φ бурчак остида ип билан боғлаб, ипда ҳосил бўлган тортиш кучи F топилсин.



38- шакл.

Ечиш. Даламбер принципига мувофиқ маятникка қўйилган тўртта куч яъни $\overline{P}$ — маятникнинг оғирлиги, $\overline{F}$ — ипнинг тортиш (реакция) кучи, $\overline{I}_\tau$ — тангенциал инерция куч ва $\overline{I}_n$ — марказдан қочирма (нормал) инерция кучи мувозанатда бўлади. Шунинг учун бу кучларни n ўққа, яъни траекториянинг нормалига проекциялсак, қуйидаги ҳосил бўлади:

$$F - P\cos(90° - \varphi) - I_n = 0. \qquad (1)$$

$$I_n = \frac{mv^2}{\rho} = \frac{mv^2}{l},$$

буни (1) га қўйиб, F ни топамиз:

$$F = P\sin\varphi + \frac{mv^2}{l}. \qquad (3)$$

Маятникнинг тезлиги v ни топиш учун M_0M қисмда кинетик энергиянинг ўзгариши теоремасидан фойдаланамиз:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = Ph. \qquad (4)$$

бундан:

$$mv^2 = mv_0^2 + 2Ph, \qquad (5)$$

демак,

$$F = P\sin\varphi + \frac{P}{l}\left(\frac{v_0^2}{g} + 2h\right). \qquad (6)$$

$$h = l\cos(90^\circ - \varphi) = l\sin\varphi$$

бўлгани учун

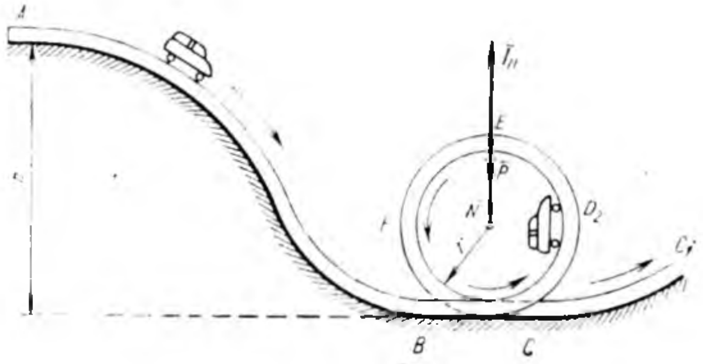
$$F = P\sin\varphi + \frac{P}{g}\frac{v_0^2}{l} + 2P\sin\varphi$$

ёки

$$F = P\left(3\sin\varphi + \frac{v_0^2}{gl}\right)$$

бўлади.

36-масала. Муаллақ сиртмоқ. Вертикал текисликка ўрнатилган ва юмалоқ ҳалқа кўринишидаги сиртмоқ ҳосил қилган рельсларда аравача ғилдираб боради (39-шакл).



39-шакл.

Ҳаракат сиртмоқнинг пастки нуқтасидан h баландликда бўлган A нуқтадан бошланғич тезликсиз бошланади. Йўлнинг AB қисми ихтиёрий шаклда, BC қисми эса горизонтал. Аравачанинг тушиш баландлиги h бир маълум қийматга эга бўлгандагина аравача сиртмоқни айланиб чиқади; акс ҳолда аравача ҳалқа орасида ёки йиқилиб тушади, ёки бўлмаса E нуқтагача кўтарилмай, орқасига қайтиб кетади.

Аравача бутун сиртмоқни айланиб ўтиши учун у қандай h баландликдан тушиши кераклиги топилсин. Сиртмоқ радиуси r га тенг.

Ечиш. Аравача сиртмоқ айланасининг энг юқориги E нуқтасида бўлганида, Даламбер принципига асосан, вертикал бўйлаб юқорига йўналган $\bar{I}_n$ нормал инерция кучи, аравачанинг оғирлик кучи $\bar{P}$ ва рельснинг вертикал бўйлаб пастга йўналган $\bar{N}$ нормал реакцияси мувозанатда бўлиши керак, яъни

$$I_n - P - N = 0, \tag{1}$$

бундан

$$N = I_n - P, \tag{2}$$

бироқ

$$I_n = \frac{P}{g}\frac{v^2}{r}. \tag{3}$$

Аравачанинг E нуқтадаги тезлиги v ни топиш учун ишқаланиш кучини ҳисобга олмай, оғирлик кучи P нинг ACE оралиқдаги ишини (26,10) формулага мувофиқ топиб, аравачанинг бошланғич тезлиги $v_0 = 0$ ни назарга олиб (29,7) формулага асосан кинетик энергия тенгламасини тузамиз, яъни:

$$\frac{Pv^2}{2g} = P(h - 2r). \tag{4}$$

Демак,

$$N = \frac{P}{g}\frac{v^2}{r} - P = \frac{1}{r}\,2P(h-2r) - P = P\left(\frac{2h}{r} - 5\right). \tag{5}$$

Аравача сиртмоқни тўла айланиб ўтиши учун $N > 0$ шарти қаноатлантирилиши керак, демак, $2h \geqslant 5r$ ёки $h \geqslant 2{,}5\,r$ бўлиши керак. Агар $r < h < 2{,}5\,r$ бўлса, аравача сиртмоқ орасида йиқилиб тушади, агар $h \leqslant r$ бўлса, аравача сиртмоқда орқасига қайтиб кетади.

38-§. Материал нуқтанинг нисбий ҳаракати

Кўзғалувчи координата системасига нисбатан материал нуқтанинг ҳаракат дифференциал тенгламаси ёзилганда нуқтага таъсир қилаётган кучларга яна кучирма ва бурилиш (Кориолис) инерция кучлари қушилади, яъни қуйидагича бўлади:

$$m\bar{w} = \bar{F} + \bar{I}_e + \bar{I}_k + \bar{N}$$

ёки

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= X + I_{ex} + I_{kx} + N_x, \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y + I_{ey} + I_{ky} + N_y, \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z + I_{ez} + I_{kz} + N_z. \end{aligned}\right\} \tag{38,1}$$

бу ерда $\overline{I}_e = - m\overline{w}_e$ — нуқтанинг кўчирма инерция кучи; $\overline{I}_k = -2m[\overline{\omega}_e, \overline{v}_r]$ — нуқтанинг бурилиш (Кориолис) инерция кучи.

Материал нуқта нисбий мувозанатда бўлган ҳолда, нисбий мувозанат тенгламаси қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\left.\begin{aligned} X + N_x + I_{ex} &= 0, \\ Y + N_y + I_{ey} &= 0, \\ Z + N_z + I_{ez} &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (38,2)$$

Нисбий ҳаракатдаги материал нуқта кинетик энергиясининг дифференциали нуқтага таъсир этувчи куч билан кучирма инерция кучлари бажарган элементар ишларнинг йиғиндисига тенг, яъни:

$$d\left(\frac{mv_r^2}{2}\right) = (\overline{F}, d\overline{r}) + (\overline{I}_e, d\overline{r}) \quad (38,3)$$

бунда

$$\overline{F} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i .$$

Динамиканинг қўзғалмас координата ўқлари учун чиқарилган ҳамма асосий теоремалари нисбий ҳаракат учун ҳам худди ўшандай таърифланади: фақат нуқтага таъсир эттирилган кучларга $\overline{I}_e$, $\overline{I}_k$ қўшимча инерция кучлари қўшилади.

39-§. Нисбий ҳаракатга оид масалаларни ечиш юзасидан методик кўрсатмалар

Бу турдаги масалаларни қуйидаги тартибда ечиш тавсия этилади:

1) қузғалувчи координата ўқлар системасини танлаб олинади;

2) $\overline{w}_e$ кўчирма, $\overline{w}_k$ Кориолис тезланишлари топилади;

3) кўчирма ҳаракат инерция кучи $\overline{I}_e$ ва Кориолис инерция кучи $\overline{I}_k$ топилади;

4) эрксиз нуқтанинг боғланишини реакция кучи билан алмаштириб, кучларнинг схемаси тузилади ва нуқтани эркин деб қараб унинг ҳаракати текширилади;

5) бошланғич шартлари аниқлаб, ёзиб олинади;

6) нисбий ҳаракатнинг ҳаракат дифференциал тенгламаси ни тузиб у интеграллланади;

7) нисбий мувозанатни текширишда (38,2) тенгламалар системасидан фойдаланиш керак;

8) масала нисбий ҳаракат кинетик энергиясининг узгариши теоремасига асосан ечиладиган булса, (38,3) формуладан фойдаланиш керак.

Бу параграфга И. В. Мешчерский „Назарий механикадан масалалар тўплами“ китобидаги 862—877-масалалар киради.

40-§. Масалалар

37-масала. Меридиан бўйлаб қурилган рельсда поезд жанубдан шимолга қараб 15 *м/сек* тезлик билан бормоқда. Поезднинг оғирлиги 2000 *кн*.

Поезд айни пайтда 60° шимолий кенгликни кесиб ўтаётган бўлса, поезднинг рельс ёнига бериладиган босими аниқлансин. Агар поезд худди шу ерда шимолдан жанубга қараб кетаётган бўлса, унинг рельс ёнига бераладиган босими аниқлансин (40-шакл).

Ечиш. Бунинг учун координаталар системасида Ернинг айланиш бурчак тезлиги $\overline{\omega}$ ни Ернинг айланиш ўқи бўйича пастга йўналтирамиз. Поезд мураккаб ҳаракатда бўлади. Поезднинг кўчма ҳаракати шундайки, унинг инерция кучи бу ҳаракатда рельснинг ёнига ҳеч қандай босим бермайди, фақат нисбий $\overline{v}_r$ тезлик таъсирида ҳосил бўлган $\overline{I}_k$ бурилиш инерция кучи рельснинг ёнига босим беради. Бу ҳолда поезднинг тезлиги $\overline{v}_r$ Ернинг шимолий қутбига қараб йўналган.

Рельсга таъсир қилаётган $\overline{N}$ босим рельснинг $\overline{R}$ реакцияси билан мувозанатлашади, яъни

$$R - I_k = 0,$$

бу ерда

$$I_k = mw_k = \frac{P}{g}\, 2[\overline{v}_r \cdot \overline{\omega}_e],$$

булардан

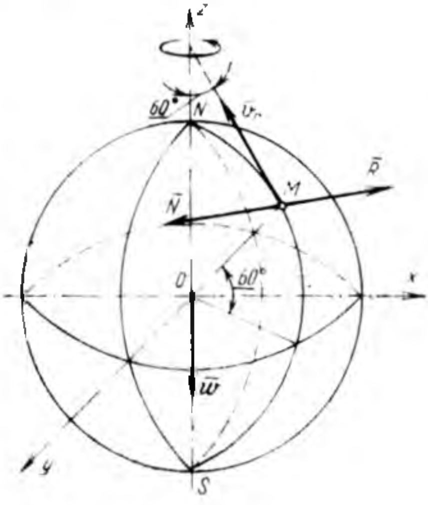
$$|\overline{N}| = |\overline{R}| = \frac{2P}{g}\, |[\overline{v}_r, \overline{\omega}_e]|.$$

Рельсга таъсир қилаётган босимнинг йўналишини векторларнинг вектор кўпайтмасининг вектори йўналишини топиш қоидасига асосан аниқлаймиз. $[\overline{v}_r \cdot \overline{\omega}_e]$ дан шундай хулосага келамизки, бу вақтда босим ўнг шарқ томондаги рельсга берилади, яъни шаклда кўрсатилгандек бўлади.

Поезд шимолдан жанубга қараб кетаётган ҳолда босим

$$N_1 = \frac{2P}{g}\, [\overline{\omega}_e \cdot \overline{v}_r] \qquad (3)$$

бўлади, демак ўнг ғарб томондаги рельсга таъсир этади.



40-шакл.

Босимнинг модулини топамиз:

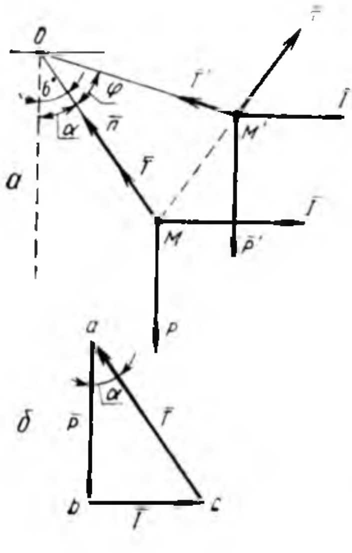
$$N = N_1 = \frac{2P}{g} \omega_e v_r \sin(\widehat{\bar{\omega}_e, \bar{v}_r}). \qquad (4)$$

Бунга сон қийматларни, яъни $P = 2000 \cdot 1000$ *н*, $v_r = 15$ *м/сек*,

$$\sin(\widehat{\bar{\omega}_e, \bar{v}_r}) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \ \omega_e = \frac{2\pi n}{60} = \frac{2 \cdot 3,14}{24 \cdot 60 \cdot 60}$$

ни қуйсак, қуйидаги ҳосил бўлади:

$$N = N_1 = \frac{2 \cdot 2000 \cdot 1000 \cdot 6,28}{9,81 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60} 15 \frac{\sqrt{3}}{2} = 384 \ н.$$



41- шакл.

38-масала. Горизонтал тўғри чизиқли йўлда ҳаракатланувчи вагондаги маятник кичик гармоник тебранма ҳаракат қилади, бунда унинг уртача вазияти вертикалдан 6° бурчакка оғганича қолади.

1) вагоннинг тезланиши w аниқлансин.

2) маятникнинг вагон ҳаракат қилмай турган пайтдаги T ва юриб кетаётгандаги T_1 тебраниш даврининг айирмаси топилсин (41-шакл, *а*).

Ечиш. Маятник уртача, вертикалдан оғган вазиятида унинг инерция кучи $\bar{I}$, оғирлик кучи $\bar{P}$ ва ипнинг тортиш кучи $\bar{T}$ орасида нисбий мувозанат булади. Бу кучлардан ясалган учбурчак ёпиқ учбурчак булади (41-шакл, *б*).

abc учбурчакдан:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{I}{P} = \frac{mw}{mg} = \frac{w}{g}. \qquad (1)$$

Бундан вагоннинг тезланишини топамиз:

$$w = g \cdot \operatorname{tg}\alpha = 981 \cdot \operatorname{tg} 6^\circ = 981 \cdot 0,1051 = 103,1 \frac{см}{сек^2}.$$

Осилган нуқтаси тинч турган математик маятникнинг даври қуйидагига тенг.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \qquad (3)$$

Осилган нуқтаси қўзғалувчи бўлган математик маятникнинг даврини топиш учун унинг ҳаракат дифференциал тенгламасининг уринма ўқдаги проекциясини тузамиз, яъни

$$\frac{P}{g} l\ddot{\varphi} = -P\sin(\alpha+\varphi) + \frac{P}{g} w\cos(\alpha+\varphi), \tag{4}$$

бу ерда φ—маятник мувозанат вазиятидан тебраниш вақтида оиган бурчаги.

Тахминан

$$\sin(\alpha+\varphi) \approx \sin 6^\circ + \varphi\cos 6^\circ,$$
$$\cos(\alpha+\varphi) \approx \cos 6^\circ - \varphi\sin 6^\circ$$

деб қабул қилиб ва (2) нисбатни назарга олсак, (4) қуйидагича кўринишни олади:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l\cos 6^\circ}\varphi = 0. \tag{6}$$

Демак, тебраниш даври қуйидагига тенг бўлади:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l\cos 6^\circ}{g}}. \tag{7}$$

Булардан

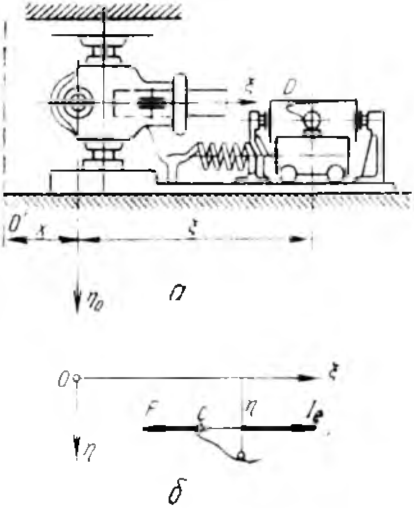
$$T - T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} - 2\pi\sqrt{\frac{l\cos 6^\circ}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}(1-\sqrt{\cos 6^\circ})$$

ёки

$$T - T_1 = T(1-\sqrt{\cos 6^\circ}) = T(1-0{,}9972) = 0{,}0028\,T.$$

39-масала. Буғ машинаси поршенининг тезлигини ўлчаш учун ҳаракатланувчи A аравача ва крейцкопф билан маҳкам бириктирилган бир текис айланадиган D барабандан иборат асбоб ишлатилади: аравачанинг оғирлиги Q *н* бўлиб, у махсус айлантирувчилар борлигидан илгарилама ҳаракат қилади, бунда аравачага маҳкамланган қаламнинг E учи шток ўқига параллел чизиқ чизади. A аравача крейцкопфга пружина билан боғланган, пружинанинг бикрлиги c. Соат механизми барабанни ω бурчак тезлик билан айлантиради, барабан радиуси r *см*. Қаламнинг барабан лентасига чизадиган эгри чизиғининг тенгламаси топилсин: крейцкопфнинг ҳаракати крейцкопф йўналтирувчисига нисбатан $x = a + l\cos\Omega t$ тенглама билан ифодаланади, бу ерда a—қўзғалмас координата системаси боши деб танланган нуқтага боғлиқ бўлган бирор ўзгармас миқдор; l—поршень йўли, Ω—буғ машинаси маховик ғилдирагининг бурчак тезлиги (42-шакл, *a*).

Ечиш. Крейцкопфнинг нейтрал вазиятига боши ўрнатилган қўзғалувчи $O\xi\eta\varphi$ координата ўқлар системасини киритамиз. Крейцкопфнинг кўчирма-илгарилама ҳаракати x координата орқали аниқланади. Аравачага пружинанинг эластик $F=c\xi$ (1)



42- шакл.

кучи (42-шакл, б) ва шаклда кўрсатилмаган, яъни $\xi 0 \eta$ текисликда жойлашган таянч реакция кучлари таъсир қилади. Инерция кучининг миқдори $|I_e| = \frac{Q}{g}\ddot{x}$ (2) формула бўйича топилади. C штифтга мос бўлган D барабан нуқтасининг ҳаракати қуйидаги нисбий ҳаракат дифференциал тенгламаларига асосан топилади:

$$\frac{Q}{g}\ddot{\xi} = \frac{Q}{g}\ddot{x} - c\xi, \qquad (3)$$
$$\frac{Q}{g}\ddot{\eta} = 0.$$

Бу системанинг биринчи тенгламасини ёйилган кўринишда ёзамиз, яъни $\ddot{x}$ ни ўрнига $\ddot{x} = -l\Omega\cos^2\Omega t$ қийматини қуямиз:

$$\ddot{\xi} + \frac{cg}{Q}\xi = l\Omega^2\cos\Omega t. \qquad (4)$$

Бу тенгламанинг хусусий интеграли қуйидагича бўлади:

$$\xi_1 = A_1\cos\Omega t. \qquad (5)$$

(5) ни (3) га қуйиб, A_1 ни топамиз:

$$A_1 = \frac{Ql\Omega^2}{cg - Q\Omega^2}. \qquad (6)$$

(4) тенгламанинг бир жинсли қисми қуйидаги кўринишда.

$$\ddot{\xi} + \frac{cg}{Q}\xi = 0. \qquad (7)$$

Бу тенгламанинг ечилишини қуйидагича олсак бўлади:

$$\xi_2 = A\cos\sqrt{\frac{cg}{Q}}\,t + B\sin\sqrt{\frac{cg}{Q}}\,t. \qquad (8)$$

Бу ерда A ва B—берилган бошланғич шартлардан топиладиган ўзгармас миқдорлар.

(4) тенгламанинг умумий интеграли қуйидагича:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2$$

ёки

$$\xi = A\cos\sqrt{\frac{cg}{Q}}\,t + B\sin\sqrt{\frac{cg}{Q}}\,t + \frac{Ql\Omega^2}{cg - Q\Omega^2}\cos\Omega t. \qquad (9)$$

(3) системанинг иккинчи тенгламасини интеграллаймиз:

$$\eta' = \text{const}. \tag{10}$$

D барабан устида ҳаракат қилаётган штифтнинг нисбий ҳаракат тезлиги $r\omega$ га тенглигини назарга олсак

$$\eta' = r\omega. \tag{10'}$$

Бу тенгламани яна бир марта интеграллаймиз:

$$\eta = r\omega t + \text{const}, \tag{11}$$

$t = 0$ бўлганда ўзи ёзар штифт $O\xi$ ўқида бўлади деб ҳисобласак:

$$\text{const} = 0 \text{ бўлади},$$

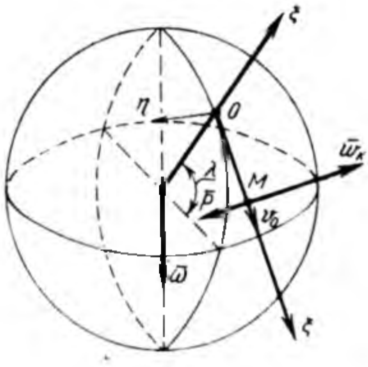
бундан

$$\eta = r\omega t, \tag{12}$$

(9) ва (12) тенгламалардан ўзгарувчи t параметрни чиқарсак, D барабан сиртида штифт чизаётган траекториянинг тенгламаси топилади.

40-масала. Артиллерия снаряди тахминан горизонтал тўғри чизиқ деб ҳисобланган траектория бўйлаб ҳаракат қилади. Ҳаракат вақтида снаряднинг горизонтал тезлиги $v_0 = 900$ *м/сек*. Снаряд отилган жойдан $l = 18$ *км* наридаги мулжалга тегиши керак.

Ҳавонинг қаршилигини ҳисобга олмай, Ернинг айланиши натижасида снаряднинг мулжалдан қанчага оғиши аниқлансин. Снаряд $\lambda = 60°$ шимолий кенгликда отилган (43-шакл).



43-шакл.

Ечиш. Снарядга таъсир қилаётган бурилиш (Кориолис) тезланишининг миқдори $w_к = 2\omega v_r \sin\lambda$ (1) га тенг ва снаряд ҳаракат қилаётган меридиан текисликка тик йўналган.

Координата ўқлари бошини снаряднинг бошланғич вазиятида турган нуқтага жойлаштириб, ўқлари 43-шаклда кўрсатилгандай йўналтирилган қўзғалувчи координата ўқлар системасини киритамиз. Снаряд $\bar{P}$ оғирлик кучининг таъсирида ҳаракат қилади. Ҳамма кучларни $O\eta$ ўққа проекциялагандан кейин, нисбий ҳаракат дифференциал тенгламаси (38,1) га мувофиқ қуйидагича бўлади:

$$m\ddot{\eta} = 2m\omega v_r \sin\lambda. \tag{2}$$

Буни интегралласак, қуйидаги келиб чиқади:

$$|\eta| = \omega v_0 t^2 \sin\lambda.$$

Снаряд қайси томонга (меридиан бўйлаб жанубгами ёки шимолгами) қараб отилмасин ўнг томонига (агар унга юқоридан қаралса), тезликка тик ҳолда $|\eta|$ миқдорда оғади. Снаряднинг $O\xi$ ўқ бўйича ўтган йўли

$$l = v_0 t,$$

шунинг учун

$$s = |\eta| = \frac{\omega l^2}{v_0} \sin\lambda = \frac{2\pi \cdot 18^2 \cdot 10^6 \sqrt{3}}{24 \cdot 36 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 10^4} = 22{,}7 \ м,$$

ИККИНЧИ ҚИСМ

МАТЕРИАЛ НУҚТАЛАР СИСТЕМАСИ ДИНАМИКАСИ

V БОБ

КИНЕТОСТАТИКА АСОСЛАРИ

41-§. Материал нуқталар системаси учун Даламбер принципи

n материал нуқталардан иборат механик системанинг i нуқтасига қўйилган кучни $\overline{F}_i$ билан, шу нуқтага қўйилган боғланиш реакция кучини $\overline{N}_i$ ва шу нуқтанинг инерция кучини $\overline{I}_i$ билан белгилаймиз, у ҳолда:

$$\overline{F}_i + \overline{N}_i + \overline{I}_i = 0, \tag{41,1}$$

бу ерда

$$\overline{I}_i = -m\overline{w}_i, \tag{41,2}$$

$$i = \overrightarrow{1, 2, \ldots, n}.$$

Берилган материал нуқталар системасининг нуқтасига ҳар қандай вақтда инерция кучини таъсир эттирсак, шу инерция кучи нуқтага қўйилган куч ва нуқтанинг боғланиш реакция кучи билан мувозанатда бўлади.

Система учун Даламбер принципининг аҳамияти шундаки, системага қўйилган кучлар, боғланиш реакциялари ва инерция кучлари статиканинг мувозанат тенгламаларини қаноатлантиради, яъни шу айтилган ҳамма кучларнинг ҳар қандай ўқдаги проекцияларининг йиғиндиси нолга тенг, ҳар қандай ўққа ёки нуқтага нисбатан олинган моментларнинг йиғиндиси ҳам нолга тенг бўлади.

Шуни назарда тутиш керакки, инерция кучи ҳақиқатда ҳаракат қилаётган материал нуқтага қўйилмаган бўлади. Даламбер принципини қўллашда системанинг ҳар қайси материал нуқтасига қўшимча системани мувозанат ҳолатга келтирадиган инерция кучларини қуямиз, кейин статиканинг мувозанат тенгламаларидан фойдаланамиз. Даламбер принципи система динамикасининг масалаларини ечиш учун керак бўлган тенгламаларни тузишнинг умумий йўлини беради, тузилган тенгламалари шаклан статика тенгламаларига ўхшаш бўлади. Бу усул айниқса масалада динамик боғланиш реакциясини, яъни системанинг ҳаракатидан вужудга келган реакцияларни топишда қулайдир.

Бу параграфга кирадиган масалаларни учта группага бўлиш мумкин:

1) берилган системага кирган қаттиқ жисмлар (ёки битта жисм) илгарилама ҳаракат қиладиган ҳолга оид масалалар. Бундай группадаги масалаларни Даламбер принципига биноан ечишда ҳаракат қилаётган жисмнинг ҳар қандай кичик бўлагига шу бўлакнинг инерция кучи қўйилади. Илгарилама ҳаракат қилаётган қаттиқ жисмнинг ҳамма нуқталарининг тезланиши $\overline{w}$ бир хил, демак, бу ҳолда жисм материал бўлакларининг инерция кучлари тегишли бўлакларнинг массаларига пропорционал, ўзаро параллел ва бир томонга ($\overline{w}$ тезланишга қарама-қарши томонга) йўналган; шунинг учун бу инерция кучлари жисм оғирлик марказига қўйилган битта тенг таъсир этувчи инерция кучига келтирилади, яъни

$$\overline{I} = -\sum_{i=1}^{n} m_i \overline{w} = -\overline{w} \sum_{i=1}^{n} m_i = -M\overline{w}, \qquad (41,3)$$

бу ерда $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$ — жисмнинг массаси.

Шундай қилиб, илгарилама ҳаракатдаги қаттиқ жисмнинг инерция кучи миқдор жиҳатдан шу жисм массасининг тезланиши билан кўпайтмасига тенг бўлиб, жисм оғирлик марказига қўйилган ва тезланишнинг йўналишига қарши томонга йўналган бўлади.

Илгарилама ҳаракат қилаётган ҳар қайси жисмнинг оғирлик марказига инерция кучи қўйилгандан кейин Даламбер принципига асосан система мувозанатда бўлади. Шу сабабли бу система учун мувозанат тенгламаларини тузиш керак ва у тенгламалардан масалада топиш талаб қилинган номаълумларни топиш керак. Одатда, бундай масалаларда жисм тезланиши ва боғланиш реакциялари изланаётган номаълумлар бўлади. Кўпинча, мувозанат тенгламаларини тузишда система бўлакларга бўлиниб, яъни худди статикада қилинганга ўхшаш ҳар қайси бўлакнинг мувозанати алоҳида текширилади;

2) берилган системага кирган қаттиқ жисмлар (ёки битта жисм) қўзғалмас ўқлар атрофида айланма ҳаракат қиладиган ҳолга оид масалалар.

Бундай жисмнинг ҳар қайси нуқтасининг тезланиши уринма ва нормал (марказга интилувчи) тезланишларнинг геометрик йиғиндисига тенг. Шунга биноан, масалани Даламбер принципига асосан ечишда айланаётган жисмнинг ҳар қайси бўлагига иккитадан инерция кучи қўямиз, яъни: 1) миқдори бўлак массасининг уринма тезланиш билан кўпайтмасига тенг ва уринма тезланишга қарама-қарши йўналган уринма инерция кучи ва 2) миқдори бўлак массасининг нормал тезланиш билан кўпайтмасига тенг ва бу нормал тезланишга қарама-қарши йўналган нормал (марказдан қочирма) инерция кучларини қуямиз. Масалани ечишнинг қолган йўллари биринчи группадаги масалалардагидек бўлади. Жисм уқ атрофида бир текис айланса, уринма тезланиш нолга тенг, бинобарин, жисмнинг ҳамма бўлакларининг уринма инерция кучлари ҳам нолга тенг бўлади;

3) берилган системага кирган қаттиқ жисмлардан бир қанчаси (ёки битта жисми) илгарилама ҳаракат, қолган жисмлари (ёки битта жисми) қўзғалмас уқлар атрофида айланма ҳаракат қиладиган ҳолга оид масалалар.

Бу группадаги масалаларни Даламбер принципига асосан ечишда ечиш методи биринчи ва иккинчи группа масалаларини ечиш методидан ҳеч қандай фарқ қилмайди. Бу ерда фақат масалага илгарилама ҳаракат ва қўзғалмас уқ атрофида айланадиган қаттиқ жисмлар кирган бўлади.

И. В. Мешчерский „Назарий механикадан масалалар тўплами" китобидаги 878—890, 925, 926, 928-масалалар, биринчи группага, 891—901, 1099, 1101, 1102-масалалар иккинчи группага 927, 929, 930-масалалар учинчи группага тегишлидир.

42-§. Кинетостатика усули билан масалалар ечишга оид методик кўрсатмалар

Бу параграфга оид масалаларни қуйидаги тартибда ечиш тавсия этилади:

1) айни системани ажратиб, шаклда курсатилади;

2) системанинг ҳар қайси материал нуқтасига қуйилган кучлар курсатилади;

3) системанинг боғланишларини боғланиш реакциялар билан алмаштириб, системани боғланишлардан озод қилинади;

4) берилган кучларга ва боғланиш реакцияларига инерция кучлари қўшилади;

5) координата ўқлари системаси танлаб олинади;

6) ҳосил бўлган кучлар системасининг мувозанат тенгламалари тузилади;

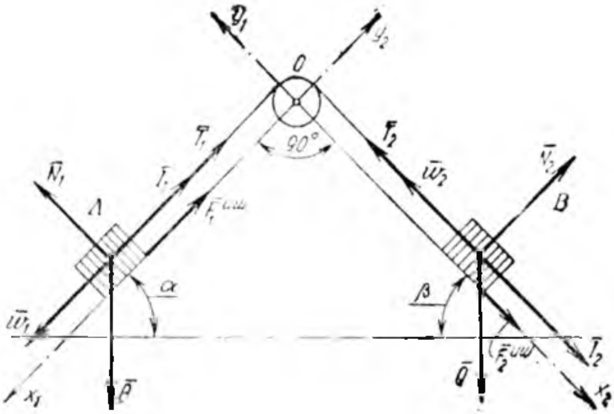
7) тузилган мувозанат тенгламаларини ечиб, изланаётган номаълумлар топилади.

43-§. Масалалар

41-масала. Блокдан ўтказилган, оғирлигини ҳисобга олмаса бўладиган ип билан бир-бирига боғланган P ва Q ли юклар тўғри бурчакли қўзғалмас призманинг томонлари буйлаб сирпана олади (44-шакл). Юкнинг ишқаланиш коэффициенти f га тенг ва призманинг бурчаклари α ва β маълум.

Юкнинг қандай тезланиш билан силжиши ва юклар призманинг ён томонига кўрсатаётган босим N_2 ва N_1 лар топилсин.

Ечиш. A ва B юкларнинг ҳар қайсиси тўғри чизиқли илгарилама ҳаракат қилади. A юк w_1 тезланиш билан пастга тушяпти, деб фараз қилайлик. A ва B юклар чўзилмайдиган ип билан бир-бирига боғланганлиги учун B юк модули w_1 га тенг бўлган $\overline{w}_2$ тезланиш билан юқорига кўтарилади, яъни $w_1 = w_2 = w$.



41- шакл.

Даламбер принципини қўллаб, A юкка модули $I_1 = \frac{P}{g}\ w$ га тенг бўлган ва $\overline{w}_1$ тезланишга қарама-қарши томонга йўналган ўзининг инерция кучини қўямиз. B юкка эса модули $I_2 = \frac{Q}{g} w$ га тенг бўлган ва $\overline{w}_2$ тезланишга қарама-қарши йўналган ўзининг инерция кучини қўямиз. У вақтда Даламбер принципига биноан система мувозанатда бўлади.

Бу системани бўлиб, яъни ипни кесиб ҳар қайси юк учун иккитадан мувозанат тенгламаси тузамиз. Бунинг учун A юкка қўйилган ҳамма $\overline{P}$, $\overline{N}_1$, $\overline{F}_1^{иш}$, $\overline{I}_1$, $\overline{T}_1$ кучларни Ox_1 ва Oy_1 ўқларга проекциялаймиз, B юкка қўйилган ҳамма $\overline{Q}$, $\overline{N}_2$, $\overline{F}_2^{иш}$, $\overline{I}_2$, $\overline{T}_2$ кучларни Ox_2 ва Oy_2 ўқларга проекциялаймиз. Ҳар қайси ўқдаги куч проекцияларининг алгебраик йиғиндиси нолга тенг. Бу ерда тегишлича A ва B юкларга қўйилган: N_1 ва N_2 лар призма ёнларининг нормал реакциялари, $F_1^{иш}$ ва $F_2^{иш}$ лар тегишлича юкларнинг ишқаланиш кучлари, T_1 ва T_2 лар ипнинг реакцияси (ипни тортиш кучи), бунда $T_1 = T_2 = T$.

У вақтда A юк учун

$$\sum_{i=1}^{5} X_{i1} = P\sin\alpha - F_1^{\text{иш}} - I_1 - T = 0, \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{5} Y_{i1} = N_1 - P\cos\alpha = 0 \tag{2}$$

тенгламалар, B юк учун

$$\sum_{i=1}^{5} X_{i2} = Q\sin\beta + F_2^{\text{иш}} + I_2 - T = 0, \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{5} Y_{i2} = N_2 - Q\sin\beta = 0 \tag{4}$$

тенгламалар ҳосил бўлади.

(2) ва (4) тенгламалардан:

$$N_1 = P\cos\alpha, \tag{5}$$

$$N_2 = Q\cos\beta. \tag{6}$$

Ишқаланиш қонунига асосан қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$F_1^{\text{иш}} = fN_1 = fP\cos\alpha, \tag{7}$$

$$F_2^{\text{иш}} = fN_2 = fQ\cos\beta \tag{8}$$

Ишқаланиш кучининг ва инерция кучининг қийматларини (1) ва (3) га қўямиз:

$$\frac{P}{g}w + T = P\sin\alpha - fP\cos\alpha = P(\sin\alpha - f\cos\alpha),$$

$$T - \frac{Q}{g}w = Q\sin\beta - fQ\cos\beta = Q(\sin\beta - f\cos\beta).$$

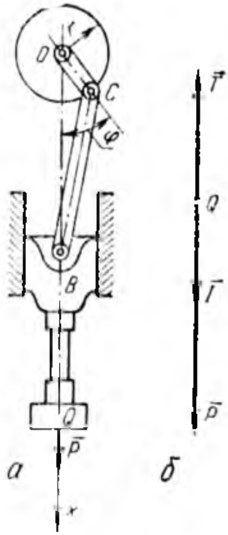
Бу тенгламаларни биргаликда ечамиз; бунинг учун уларнинг бирини иккинчисидан айирамиз:

$$\frac{P}{g}w + \frac{Q}{g}w = P(\sin\alpha - f\cos\alpha) - Q(\sin\beta - f\cos\beta),$$

бундан w ни топамиз:

$$w = g\,\frac{P(\sin\alpha - f\cos\alpha) - Q(\sin\beta - f\cos\beta)}{P + Q}.$$

42-масала. Тез алмашиниб турадиган чўзувчи ва сиқувчи кучларнинг металл брусга курсатадиган таъсирини текшириш учун, текшириладиган A бруснинг юқориги учи BCO кривошипли механизмнинг B ползунига бириктирилган, унинг паст-



45- шакл.

ки учига эса Q оғирликдаги юк осилган (45- шакл, a), OC кривошип O ўқ атрофида доимий ω бурчак тезлиги билан айланган пайтда брусни чўзувчи кучнинг миқдори топилсин.

Ечиш. Q юкнинг боғланишини $\overline{T}$ реакция кучи билан алмаштириб, Q юкни боғланишдан озод қиламиз ва унга яна инерция кучи $\overline{I}$ ни қўйсак, $\overline{P}$, $\overline{T}$, $\overline{I}$ кучлар хаёлан мувозанатда бўлади.

Юк сусаювчи илгарилама ҳаракат билан юқоридан пастга тушади, шунинг учун ҳаракат тезланиши юқорига йўналган (45- шакл, $б$), у вақтда $\overline{I}$ инерция кучининг йўналиши $\overline{P}$ кучнинг йўналиши билан бир хил бўлади. Даламбер принципига биноан кучларнинг мувозанат тенгламасини тузамиз:

$$\sum_{i=1}^{3} X_i = P + I - T = 0 \qquad (1)$$

ёки

$$T = P + \frac{P}{g} w. \qquad (2)$$

Q юкнинг ҳар қандай нуқтасининг тезланиши, ҳаракат қонунини қуйидаги кўринишда бўлган B нуқтанинг тезланишига тенг:

$$x_B = r\cos\omega t + e\sqrt{1-\left(\frac{r}{l}\right)^2 \sin^2\omega t}. \qquad (3)$$

$\sqrt{1-\left(\frac{r}{l}\right)^2 \sin^2\omega t}$ — ифодани $\frac{r}{l}$ даражасида қаторга ёйиб ва қаторнинг $\frac{r}{l}$ иккинчи даражадан юқори бўлган ҳамма ҳадларини ташлаб юборсак, қуйидагича бўлади:

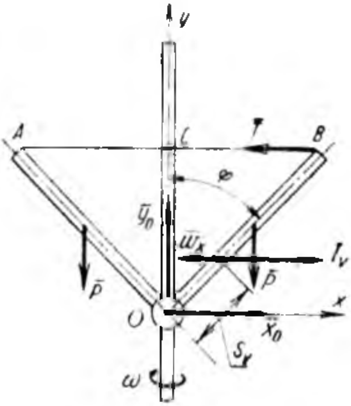
$$w = \ddot{x}_B = -r\omega^2\left(\cos\omega t + \frac{r}{l}\cos 2\omega t\right). \qquad (4)$$

Демак, брусни чўзувчи кучнинг ўзгариш қонуни қуйидагича бўлади:

$$T = P + \frac{P}{g} r\omega^2\left(\cos\omega t + \frac{r}{l}\cos 2\omega t\right).$$

43 масала. Иккита бир хил жинсли стерженларнинг учи O шарнир ёрдамида вертикал OC ўққа бириктирилган, иккинчи A ва B учлари эса C нуқтага чўзилмайдиган горизонтал ип билан шундай боғланганки, система учи пастда бўлган ва вертикал текисликда ўрнашган учбурчак ҳосил қилади (46-шакл). Бу учбурчак OC вертикал ўқ атрофида ω бурчак тезлиги билан айлана бошлайди. Ипнинг тортилиши топилсин. Қуйидагилар берилган $OA=OB=a$, $AC=BC=l$ стерженнинг ҳар қайсисининг оғирлиги P га тенг.

Ечиш. Вертикал OC ўқи атрофида бир текис айланаётган OB стерженга берилган $\overline{P}$ куч, O шарнирнинг $\overline{X}_0$, $\overline{Y}_0$ реакция кучлари ва ипнинг $\overline{T}$ тортиш реакция кучи қўйилган. Даламбер принципини қўллаб, OB стерженни чексиз кичик элементар қисмларга ажратамиз ва ҳар қайси шу элементар қисмларга тезланиши w_ν га қарама-қарши томонга йўналган ва модули



46- шакл.

$$I_\nu = m_\nu w_\nu \tag{1}$$

га тенг бўлган инерция кучини қўямиз.

Бу ерда m_ν —элементар қисмнинг массаси. O нуқтадан s_ν масофада бўлган элементар қисмни олсак

$$w_\nu = r_\nu \omega^2 = s_\nu \sin\varphi \cdot \omega^2,$$

демак,

$$I_\nu = m_\nu \omega^2 s_\nu \sin\varphi, \tag{2}$$

Даламбер принципига мувофиқ OB стерженга қўйилган $\overline{P}$ куч $\overline{X}_0$, $\overline{Y}_0$, $\overline{T}$ реакциялар ва стержень элементар қисмларига қўйилган I_ν инерция кучларининг йиғиндиси мувозанатлашади. Шунинг учун учта қуйидаги мувозанат тенгламасини оламиз:

$$\sum_{i=1}^{5} X_i = X_0 - T + \sum_{\nu=1}^{n} I_\nu = 0, \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{5} Y = Y_0 - P = 0, \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{5} M_0 = -P\frac{a}{2}\sin\varphi + Ta\cos\varphi - \sum_{\nu=1}^{n} I_\nu s_\nu \cos\varphi = 0; \tag{5}$$

Тенгламага кирган суммани ҳисоблаймиз:

$$\sum_{\nu=1}^{n} I_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \omega^2 s_\nu \sin\varphi = \omega^2 \sin\varphi \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu s_\nu ;$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} I_\nu s_\nu \cos\varphi = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \omega^2 s_\nu^2 \sin\varphi \cos\varphi = \omega^2 \sin\varphi \cos\varphi \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu s_\nu^2.$$

Оғирлик марказининг координатасини топишда стержень учун бизга қуйидаги маълум:

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu s_\nu = M s_\nu = \frac{P}{g}\frac{a}{2}, \tag{6}$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu s_\nu^2 = I_0 = \frac{1}{3} Ma^2 = \frac{P}{3g} a^2, \tag{7}$$

бу ерда I_0—OB стерженнинг O нуқтага нисбатан инерция моменти.

Шу сабабли (3), (4), (5) мувозанат тенгламалари қуйидагича бўлади:

$$X_0 - T + \frac{Pa}{2g}\sin\varphi = 0, \tag{8}$$

$$Y_0 - P = 0, \tag{9}$$

$$-P\frac{a}{2}\sin\varphi + Ta\cos\varphi - \frac{Pa^2\omega^2}{3g}\sin\varphi\cos\varphi = 0. \tag{10}$$

Бу тенгламаларни ечсак, қуйидагилар ҳосил бўлади:

$$Y_0 = P,$$

$$T = \frac{P}{2}\left(\operatorname{tg}\varphi + \frac{2a\omega^2}{3g}\sin\varphi\right),$$

$$X_0 = T - \frac{Pa\omega^2}{2g}\sin\varphi = \frac{P}{2}\left(\operatorname{tg}\varphi - \frac{a\omega^2}{3g}\sin\varphi\right),$$

$$\sin\varphi = \frac{CB}{OB} = \frac{l}{a},$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{CB}{OC} = \frac{l}{\sqrt{a^2 - l^2}}$$

эканлиги шаклдан кўриниб турибди, буларни тенгламага қўйсак:

$$T = \frac{P}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{a^2 - l^2}} + \frac{2l\omega^2}{3g}\right)$$

ёки

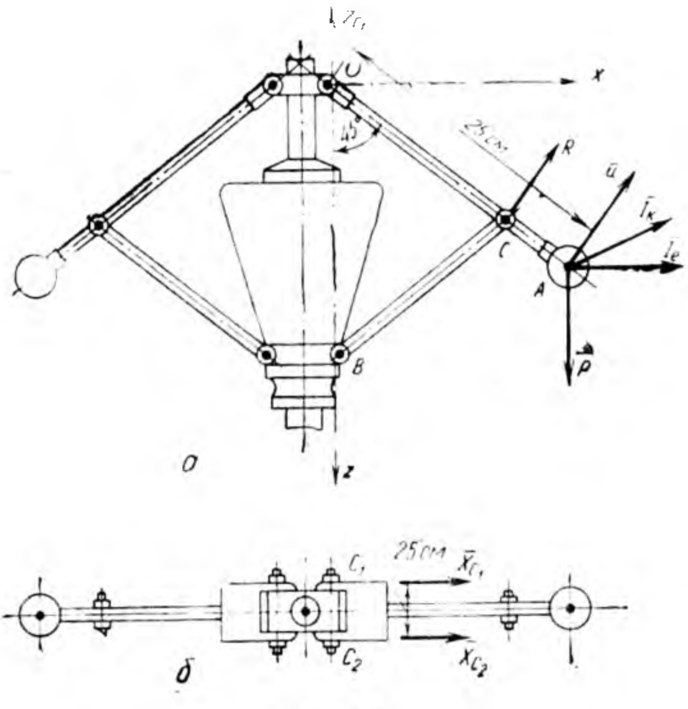
$$T = \frac{Pl}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{a^2 - l^2}} + \frac{2\omega^2}{3g}\right).$$

44-масала. Марказдан қочма регулятор маятниги, машина ҳаракати барқарор бўлганда, минутига 180 марта айланади. Машинанинг нагрузкаси ўзгарганлигидан регулятор ҳаракатга келади ва шарлар $u = 0{,}2$ *м/сек* нисбий тезлик билан бир-биридан узоқлашади. Ҳар қайси шарнинг оғирлигини 10 *н* деб ҳисоблаб ва дасталарнинг оғирлигини ҳисобга олмай, C_1 ва C_2 (47-шакл, *б* га қаралсин) подшипникларда Кориолис тезланишдан ҳосил бўлган қўшимча босим аниқлансин. Бунда дастанинг регулятор ўқи билан ҳосил қилган бурчаги 45° ва айланиш сони ўзгармайди деб ҳисоблансин, османинг ўлчамлари шаклдан олинсин, шаклда регуляторнинг юқориги томонидан ва ён томонидан кўриниши кўрсатилган (47-шакл, *а*).

Ечиш. Кориолис инерция кучининг миқдори

$$I_k = \frac{2P}{g}\omega u \sin 45^\circ \tag{1}$$

га тенг ва $\bar{\omega}$, $\bar{u}$ тезлик векторлари ётган текисликка тик йўналган. *OA* стерженга *BC* стерженнинг ва C_1, C_2 подшипникларнинг таъсирларини уларнинг реакциялари билан алмаштириб, *OA* стерженни боғланишдан озод қиламиз. *OA* ва *BC* стер-



47-шакл.

женлар ўтган текисликда ўрнашган Ox ва Oz координата ўқларини киритамиз.

Даламбер принципига асосан мувозанат тенгламалар тузамиз ва у тенгламалардан C_1 ва C_2 подшипникларда I_k кучи таъсирида ҳосил бўлаётган қўшимча босимларни топамиз:

$$\sum_{i=1}^{5} X_i = X_{C_1} + X_{C_2} = 0, \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{5} Z_i = Z_{C_1} + Z_{C_2} = 0, \qquad (3)$$

$$\sum_{i=1}^{5} M_{xx} = -X_{C_1}\frac{d}{2} + X_{C_2}\frac{d}{2} + I_k l \sin 45^\circ = 0, \qquad (4)$$

$$\sum_{i=1}^{6} M_{zz} = Z_{C_1}\frac{d}{2} - Z_{C_2}\frac{d}{2} + I_k l \sin 45^\circ = 0, \qquad (5)$$

бу ерда X_{C_1}, X_{C_2}, Z_{C_1}, Z_{C_2} лар — C_1 ва C_2 подшипникларнинг реакциялари.

(2) ва (3) тенгламалардан қўшимча реакциянинг жуфт куч ҳосил қилиши кўриниб турибди.

(4) ва (5) тенгламалардан:

$$|X_{C_1}| = |Z_{C_1}| = |X_{C_2}| = |Z_{C_2}| = I_k \frac{l}{d} \sin 45^\circ \qquad (6)$$

Демак, қўшимча босим:

$$N = \sqrt{X_{C_1}^2 + Z_{C_1}^2} = I_k \frac{l}{d}. \qquad (7)$$

(6) ва (7) формулалардан қўшимча босим стержень бўйлаб йўналганлигини кўрамиз. Шунинг учун масалани OA стержень ва I_k инерция кучи жойлашган текисликдаги кучлар системаси мувозанатда деб қараб ечиш мумкин.

(1) нисбатни назарга олсак, (7) қуйидагича бўлади:

$$N = \frac{2Pl}{dg} u \omega \sin 45^\circ, \qquad (8)$$

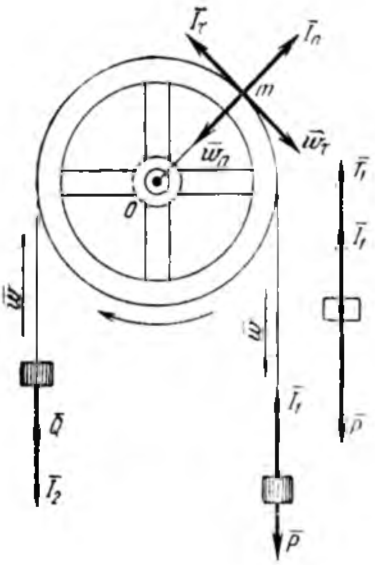
бунга сон қийматларни қўямиз:

$$N = \frac{2 \cdot 10 \cdot 25}{2{,}5 \cdot 981} \cdot 20 \cdot 6\pi \frac{\sqrt{2}}{2} = 54{,}2\ н. \qquad (9)$$

Ҳар қайси подшипникка қарама-қарши томонга йўналган 54,2 *н* дан қўшимча босим тушади.

45-масала. Қўзғалмас силлиқ блок орқали ўтказилган ипнинг учларига оғирлиги Q ва P *н* бўлган юклар осилган, бунда $P > Q$. Ип ўзининг ҳаракатида блокни O нуқта атрофида айлантиради. Ипнинг блок устида сирпаниши сезилмайди деб ҳисоблаб, юкларнинг тезланиши топилсин. Блок оғирлиги Q н га, радиуси r га тенг ва O нуқтага нисбатан инерция радиуси kr га тенг (48- шакл).

Ечиш. Изланаётган юк тезланишининг модулини w билан белгилаймиз. Ўнг томондаги юкнинг инерция кучи $I_1 = \frac{P}{g} w$ га тенг ва вертикал равишда юқорига йўналган, чап томондаги юкнинг инерция кучи $I_2 = \frac{Q}{g} \cdot w$ га тенг ва вертикал равишда пастга йўналган. Блок тўғинининг оғирлигини ҳисобга олмай, блокнинг массаси унинг гардиши бўйича текис тарқалган деб ҳисоблаймиз, яъни масалани соддалаштириш учун уни материал айлана деб қараймиз.



48- шакл.

Гардишда m массали материал бўлагини оламиз: бу бўлак айлана бўйича ҳаракат қилгани учун унинг тезланиш модули $w_n = r\omega^2$ га тенг нормал ва модули $w_t = r\left|\frac{d\omega}{dt}\right|$ га тенг уринма тезланишларининг геометрик йиғиндисига тенг. Бу ерда ω — блокнинг айланиш бурчак тезлиги, $\frac{d\omega}{dt}$ — блокнинг айланиш бурчак тезланиши. Шунга биноан, бўлакнинг инерция кучи ҳам модули $I_n^* = mkr\omega^2$ га тенг ва радиус бўйлаб O марказдан йўналган нормал инерция кучи, ҳамда модули $I_\tau^* = mr\left|\frac{d\omega}{dt}\right| = mr\varepsilon$ га тенг ва бўлакнинг уринма тезланишига қарама-қарши томонга йўналган уринма (тангенциал) инерция кучларининг йиғиндисидан иборат. $r\left|\frac{d\omega}{dt}\right| = r\varepsilon = w$ бўлгани учун

$$I_\tau^* = mw.$$

Иккала юкка ва блокнинг ҳамма материал бўлакларига инерция кучларини қўйиб, Даламбер принципига асосан, ҳамма система мувозанатда турибди, деб қараймиз. Система мувозанатда бўлса, системага қўйилган кучлардан ҳар қандай ўққа нисбатан олинган моментларнинг йиғиндиси нолга тенг эканлиги маълум. O ўққа нисбатан ҳамма кучлардан (бунга албатта инерция кучлари ҳам киради) момент олиб, уларнинг йиғиндисини нолга тенглаштирамиз:

$$\frac{P}{g} wr - Pr + \frac{Q}{g} wr + \sum_{\nu=1}^{n} I_\nu r - Qr = 0, \qquad (1)$$

Бу тенгламага блок материал бўлакларининг нормал инерция кучлари, блокнинг оғирлиги ва подшипникнинг реакциялари кирмайди, чунки у кучларнинг O ўққа нисбатан моментлари нолга тенг.

Бу ҳолда

$$\sum_{\nu=1}^{n} I_\nu r = \sum_{\nu=1}^{n} mr^2 \varepsilon = \varepsilon \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu r_\nu^2 = I_0 \varepsilon,$$

бунда $I_0 = \frac{G}{g} k^2 r^2$ — блокнинг O ўққа нисбатан инерция моменти.

У вақтда (I) қуйидагича бўлади:

$$\frac{P}{g} wr - Pr + \frac{Q}{g} wr + \frac{G}{g} r^2 k^2 \varepsilon + Qr = 0,$$

бу тенгламани r га қисқартирсак:

$$\frac{1}{g}(P + Q) w - P + \frac{G}{g} k^2 r \varepsilon + Q = 0.$$

$r\varepsilon$ ни w билан алмаштирсак,

$$\frac{1}{g}(P + Q + Gk^2) w = P - Q,$$

бундан

$$w = \frac{P - Q}{P + Q + Gk^2} \cdot g.$$

Ипнинг тортиш кучи T ни топиш учун ўнг томондаги юкни алоҳида текширсак кифоя, чунки у юк учта: вертикал юқорига ип бўйича йўналган $\overline{T}_1$, тортиш кучи I_1 инерция кучи ва $\overline{P}$ оғирлик кучларининг таъсирида мувозанатда бўлади. Бундан

$$T_1 + I_1 = P \qquad (3)$$

ёки

$$T_1 = P - I_1 = P - \frac{P}{g} w.$$

Бунга топилган w нинг қийматини қўямиз:

$$T_1 = P - \frac{P}{g} \cdot \frac{P - Q}{P + Q + Gk^2} \cdot g$$

ёки

$$T_1 = \frac{P(2Q + k^2G)}{P + Q + k^2G}. \tag{4}$$

Худди шунга ўхшаш чап томондаги юкни алоҳида текшириб, унинг мувозанат тенгламасини тузамиз ва чап томондаги ипнинг T_2 тортиш кучини топамиз, яъни у қуйидагича бўлади:

$$T_2 = \frac{Q(2P + k^2G)}{P + Q + k^2G}. \tag{5}$$

VI БОБ

МУМКИН БЎЛГАН КЎЧИШ ПРИНЦИПИ

44-§. Мумкин бўлган кўчиш. Идеал боғланишлар. Материал нуқталар системаси мувозанатда бўлган ҳол учун мумкин бўлган кўчиш принципи

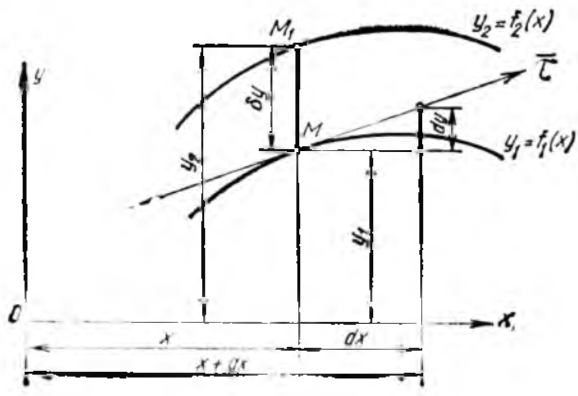
Функциянинг аргументи ўзгармай, ўзининг ихтиёрий ўзгариши δy га вариация дейилади. Масалан, $y_1 = f_1(x)$ функциядан $y_2 = f_2(x)$ функцияга ўтишда, функциянинг вариацияси

$$\delta y = y_2 - y_1 = f_2(x) - f_1(x) \tag{44,1}$$

бўлади.

Функциянинг δy вариациясидан функциянинг dy дифференциалининг фарқи шундаки, dy — дифференциал функциянинг аргументини dx га ўзгаришида бу функциянинг бош орттирмасидир.

49-шаклда кўрсатилган MM_1 кесма аргументи x деб олинган функциянинг δy вариациясининг миқдорига тенг. Шу шакл-



49-шакл.

да аргументи $x+dx$ га ўзгарганда у функциянинг dy дифференциалининг миқдорига тенг бўлган кесма ҳам кўрсатилган. Функцияни вариациялаш ташқи кўринишидан функцияни дифференциаллашга ўхшайди, чунончи, $\delta(cy)=c\delta y$; бу ерда c — ўзгармас сон, $\delta(y_1+y_2)=\delta y_1+\delta y_2$, $\delta(y_1\cdot y_2)=y_1\delta y_2+y_2\delta y_1$ ва шунга ўхшаш.

Мураккаб $z=\varphi(y)$ функция вариациясининг [бунда $y=f(x)$] формуласи қуйидагича бўлади:

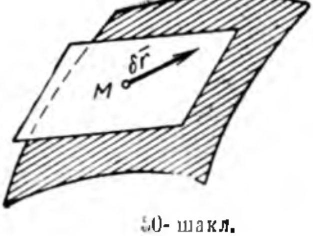
$$\delta z=\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\delta y.$$

Нуқталарнинг боғланишлар томонидан қўйиладиган барча чекларни қаноатлантирадиган ёки мазкур боғланишлар билан бирликда бажариладиган чексиз кичик кўчишларга **мумкин бўлган кўчиш** ёки **виртуал кўчиш** дейилади.

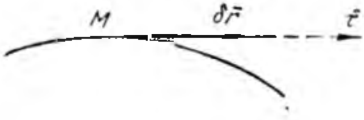
Масалан, материал нуқта қўзғалмас горизонтал текисликда турган бўлса, нуқтанинг шу текисликда тасаввур қилинадиган кўчиши мумкин бўлган кўчиш дейилади.

Материал нуқта сирт устида ёки эгри чизиқ устида бўлса, унинг мумкин бўлган кўчиши тегишлича сиртнинг уринма текислиги устида ёки эгри чизиқнинг уринмаси устида бўлади (50, 51-шакллар).

Материал нуқталарнинг мумкин бўлган кўчишида берилган системанинг аргументи вақт ўзгармаганда содир бўлади деб фараз қилинади. Нуқтанинг ҳақиқий кўчиши эса системага қўйилган кучлар системасининг таъсирида ва аргументи вақтнинг узлуксиз ўзгаришида содир бўлади ва маълум йўналишга эга. Шу сабабли нуқтанинг мумкин бўлган кўчиши вариация, ҳақиқий кўчиши эса дифференциал бўлади. Агар $\bar r$ нуқтанинг радиус вектори бўлса, у вақтда $\delta\bar r$ нуқтанинг мумкин бўлган кўчиши ва $d\bar r$ нуқтанинг ҳақиқий кўчиши бўлади.



50- шакл.



51- шакл.

Мумкин бўлган кўчишни декарт координата ўқлари бўйича ташкил этувчиларга ажратсак, у қуйидагича бўлади:

$$\delta\bar r=\delta x\cdot\bar i+\delta y\cdot\bar j+\delta z\cdot\bar k, \tag{44.2}$$

Бу ерда δx, δy, δz — нуқтанинг мумкин бўлган кўчишининг тегишлича декарт координата ўқларидаги проекциялари.

Ҳақиқий кўчиш формуласи қуйидаги кўринишда бўлади:

$$d\bar{r} = dx \cdot \bar{i} + dy \cdot \bar{j} + dz \cdot \bar{k}, \tag{44.3}$$

бу ерда dx, dy, dz — нуқтанинг ҳақиқий кўчиши $d\bar{r}$ нинг тегишлича декарт координата ўқларидаги проекциялари, бунда

$$dx = \dot{x}dt, \ \ dy = \dot{y}dt, \ \ dz = \dot{z}dt.$$

Нуқтанинг ҳақиқий кўчиши (стационар боғланиш учун) шу нуқтанинг мумкин бўлган кўчишларидан бири бўлади.

Боғланиш ностационар бўлганда (боғланиш вақтга боғлиқ бўлганда) нуқтанинг мумкин бўлган кўчиши боғланишни бирор онда тўхтатилган (яъни белгилаб олинган пайтда) деб қаралади.

Энди бу ҳолда ҳақиқий кўчиш мумкин бўлган кўчишнинг хусусий ҳоли бўлмайди.

Материал нуқталар системасининг боғланиш реакция кучларининг мумкин бўлган кўчишда бажарган ишларининг йиғиндиси нолга тенг бўлса, бундай боғланишга идеал боғланиш дейилади, яъни

$$\sum_{k=1}^{n} (\bar{N}_k, \delta\bar{r}_k) = 0, \tag{44,3'}$$

бунда $\bar{N}_k$ — реакция кучи, $\delta\bar{r}_k$ — материал нуқталар системаси k нуқтасининг мумкин бўлган кўчиши.

Идеал боғланиш учун масалан, абсолют силлиқ текислик ва сирт, абсолют қаттиқ стержень, абсолют қаттиқ жисм ва бошқалар мисол бўла олади.

Системанинг нуқталари боғланишини ташлаб, ундан чиқиб кетолмаса, ундай боғланишга ушлаб турадиган — стационар боғланиш дейилади ва унинг тенгламаси қуйидагича ифодаланади:

$$f_k(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_n, y_n, z_n) = 0 \tag{44,4}$$
$$(k = 1, 2, \ldots, s).$$

Системанинг нуқтаси боғланишдан чиқиб кета оладиган бўлса, ундай боғланишга ушлаб турилмайдиган боғланиш дейилади ва унинг тенгламаси қуйидагича ифодаланади:

$$f_k(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_n, y_n, z_n) \geqq 0, \tag{44,5}$$

$$(k = 1, 2, \ldots s).$$

Идеал боғланишли материал нуқталар системаси шу онда мувозанатда бўлиши учун системанинг маълум ҳолатидан ҳар қандай мумкин бўлган кўчишида унга қўйилган кучлар бажарган ишнинг йиғиндиси нолга тенг бўлиши керак.

Бу таъриф система мувозанатининг зарур ва етарли шартидир, яъни

$$\sum_{k=1}^{n}(\overline{F}_k,\ \delta\overline{r}_k)=0. \tag{44,6}$$

Бунга мумкин бўлган кўчиш принципи дейилади. Декарт координата ўқларидаги проекциялари орқали ҳам шунга ухшаш, яъни

$$\sum_{k=1}^{n}(X_k\delta x_k+Y_k\delta y_k+Z_k\delta z_k)=0. \tag{44,7}$$

деб ёзиш мумкин.

Мумкин бўлган кўчиш принципининг афзаллиги шундаки, унинг формуласига идеал боғланишнинг реакция кучлари кирмайди. Мумкин бўлган кўчиш принципининг ёрдамида текис кучлар системасининг таъсирида шунингдек, фазовий кучлар системасининг таъсирида мувозанатда бўлган қаттиқ жисм ёки қаттиқ жисмлар системаси масалалари осон ечилади.

Агар системага қўйилган боғланишнинг ҳаммаси идеал бўлмаса, масалан, силлиқ бўлмаган текислик ва сиртлар бўлса, у вақтда берилган кучларга яна бунда ҳосил бўлган ишқаланиш кучлари қўшилади. Демак, системага қўйилган кучларнинг ва ишқаланиш кучларининг ҳар қандай мумкин бўлган кўчишдаги бажарган ишларининг йиғиндиси нолга тенглаштирилади. Тузилган тенгламалардан берилган кучлар билан ишқаланиш кучлари орасидаги боғланишлар топилади.

Масалада бирор идеал боғланиши, яъни $(\overline{N},\ \delta\overline{r})=0$ реакциясини топиш талаб қилинган бўлса, боғланишдан қутқазиш принципини қўллаб, у боғланишни ташлаб уни изланаётган реакция кучи билан алмаштирамиз. Мувозанат тенгламаларини тузишда берилган кучларга бу боғланиш реакция кучларини қўшиш керак. Мувозанат тенгламаларидан бу реакция кучлари топилади.

45-§. Мумкин бўлган кўчиш принципига асосан масалалар ечишга оид методик кўрсатмалар

Динамика масалаларини мумкин бўлган кўчиш принципига асосан ечишда қуйидаги тартибга риоя қилиш тавсия этилади.

1. Системага таъсир қилаётган берилган кучларни тасвирлаб олиш керак.

2. Боғланиш идеал бўлмаганда тегишли реакция кучини (ишқаланиш кучини) қўшиш керак.

3. Системанинг эркинлик даражаси битта бўлса, у ҳолда системанинг бир нуқтасига кучиш имкониятини бериб, қолган

кучлар қўйилган нуқталарнинг кўчишини шу нуқтанинг кўчиши орқали ифодалаб олиш керак.

4. Ҳамма кучларнинг улар қўйилган нуқталарнинг кўчишида бажарган ишларини ҳисоблаб олиб, шу ишларнинг йиғиндисини нолга тенглаштириш керак.

5. Тузилган мувозанат тенгламаларини ечиб, изланаётган номаълум сонларни топиш керак.

6. Системанинг эркинлик даражаси бир нечта бўлганда олинган ихтиёрий кўча оладиган нуқталар сонини эркинлик даражасига тенг қилиб олиш керак.

7. Системанинг эркинлик даражаларидан бирига тегишли бўлган нуқталардан бирига кўчиш имкониятини бериб ва қолган эркинлик даражасини нолга тенг деб ҳисоблаб, кучлар қўйилган нуқталар кўчишини шу берилган кўчиш орқали ифодалаб олиш керак.

8. Ихтиёрий кўчиши мумкин бўлган нуқталар сони, яъни системанинг эркинлик даражаси нечта бўлса, шунча мувозанат тенгламалари тузиш керак.

9. Тузилган тенгламалар ечилиб, изланаётган номаълум сонлар топилади.

Бу параграфга оид масалаларни икки типга ажратиш мумкин:

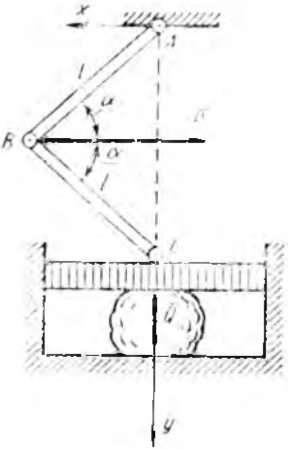
а) эркинлик даражаси битта бўлган системанинг мувозанатини текширишга оид масалалар:

б) эркинлик даражаси бир нечта бўлган системанинг мувозанатини текширишга оид масалалар;

10. Мумкин бўлган кўчиш принципига оид бўлган масалаларни яна қуйидаги группаларга ажратиш мумкин: а) материал нуқталар системасининг мувозанати берилганда системага таъсир қилаётган кучларни ёки шу кучлар орасидаги муносабатни топиш керак бўлган масалаларга, бунга И. В. Мешчерский „Назарий механикадан масалалар тўплами" китобидаги 903—908, 911—921 масалалар, б) системага қўйилган кучлар берилганда системанинг мувозанат ҳолатини топишга оид масалаларга, бунга И. В. Мешчерский „Назарий механикадан масалалар тўплами" китобидаги 909, 910-масалалар, в) мумкин бўлган кўчиш принципини қўллаб, реакция кучини топишга оид масалаларга, бунга И. В. Мешчерский „Назарий механикадан масалалар тўплами" китобидаги 930, 943—948-масалалар киради.

46-§. Масалалар.

46-масала. Тирсакли ABC пресснинг ўртадаги B шарнирига шу шарнир текислигида горизонтал $\overline{P}$ куч таъсир қилади (52-шакл). Шу $\overline{P}$ кучини мувозанатлаштириш учун CA тўғри чизиқ бўйича қандай Q куч қўйилганлиги топилсин (бунда $AB = BC$, $\angle ABC = 2\alpha$).



52-шакл.

Ечиш. Координата ўқларини 52-шаклда кўрсатилгандек қилиб ўтказамиз. Бу текширилаётган системанинг эркинлик даражаси битта.

Системага мумкин бўлган кўчиш берамиз. B нуқтанинг δx_B мумкин бўлган кўчиши x ўқига параллел. C нуқтанинг δx_C мумкин бўлган кўчиши y ўқи бўйлаб юқорига йўналган.

Элементар ишнинг (44,7) аналитик ифодасидан фойдаланиб тенглама тузамиз;

$$\sum_{i=1}^{2} (X\delta x + Y\delta y) =$$

$$= -P\delta x_B - Q\delta y_C = 0. \qquad (1)$$

Эркин координата учун стерженлар орасидаги бурчакнинг ярми α ни оламиз.

У вақтда шаклдан:

$$x_B = l\cos\alpha, \quad y_C = 2l\sin\alpha. \qquad (2)$$

Бундан x_B ва y_C нинг вариациялари δx_B, δy_C ларни топамиз:

$$\left.\begin{aligned} \delta x_B &= -l\sin\alpha\delta\alpha, \\ \delta y_C &= 2l\cos\alpha\delta\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Буларни (1) мувозанат тенгламасига қўйсак, қуйидаги ҳосил бўлади:

$$-Pl(-\sin\alpha\delta\alpha) - Q2l\cos\alpha\delta\alpha = 0,$$

бундан:

$$Q = \frac{Pl\sin\alpha\delta\alpha}{2l\cos\alpha\delta\alpha}$$

ёки

$$Q = \frac{P}{2}\operatorname{tg}\alpha.$$

47-масала. Шаклда кўрсатилган блоклар системаси воситасида осилган A, B юклар оғирлиги орасидаги муносабат топилсин. Система мувозанатда туради.

Ечиш. A ва B юкларнинг кўчишини топамиз. C блок марказининг тезлигини $\bar{u}$ билан белгилаймиз. C блокнинг оний маркази P нуқтада бўлади (53-шакл, a). Демак, $v_E = 2u$ бўлади. D блок марказининг тезлиги ҳам v_E га тенг, бироқ қарама-қарши томонга йўналган.

B юк илгарилама ҳаракат қилади, шунинг учун *D* блок нуқталарининг тезликлари схемаси 53-шакл, *б* да кўрсатилган кўринишда бўлади.

$$EP_1 = \frac{1}{3} r; \quad AP_1 = \frac{5}{3} r$$

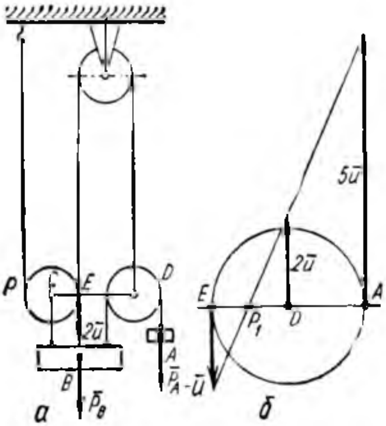
эканлигини ҳисобга олсак,

$$v_A = 5u$$

бўлади.

Шундай қилиб, юкларнинг кўчиши қуйидагича бўлади:

$$\delta \bar{y}_B = \bar{u}\, \delta t; \quad \delta \bar{y}_A = -5\bar{u}\, \delta t.$$



53-шакл.

Мумкин бўлган кўчиш принципи (44.7) га асосан

$$P_B |\delta \bar{y}_B| - P_A |\delta \bar{y}_A| = 0$$

ёки

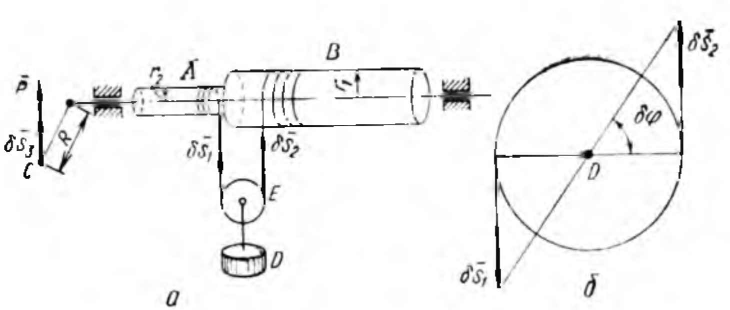
$$P_B u\, \delta t - P_A 5u\, \delta t = 0,$$

бундан:

$$P_B = 5P_A.$$

48-масала. Дифференциал чиғириқ узунлиги l бўлган C даста билан айлантириладиган, маҳкам қилиб бир-бирига бириктирилган иккита A ва B валлардан иборат. Кўтариладиган Q оғирликдаги D юк арқон ўралган қузғалувчан E блокка маҳкамланган. C даста айланганида арқоннинг чап учи r_1 радиусли A валдан чувалади, ўнг учи эса r_2 радиусли B валга ўралади ($r_2 > r_1$).

Агар $Q = 720$ *н*, $r_2 = 12$ *см*, $r_1 = 10$ *см* ва $R = 60$ *см* бўлса, D юкни мувозанатлаштириш учун дастанинг учига, дастага тик қилиб қандай P куч қўйиш керак (54-шакл)?



54-шакл.

Ечиш. A ва B валларнинг мумкин бўлган кўчишини $\delta\varphi$ билан белгилаймиз. Арқоннинг чап қисми $\delta s_1 = r_1\delta\varphi$ қадар пастга тушади, ўнг томони эса $\delta s_2 = r_2\delta\varphi$ қадар юқорига кўтарилади (54-шаклга қаранг). C нуқтанинг кўчиши $\delta s_3 = R\delta\varphi$ га тенг.

Мумкин бўлган кўчиш принципига асосан:

$$P\delta s_3 - \frac{Q}{2}\delta s_1 + \frac{Q}{2}\delta s_2 = 0$$

ёки мумкин бўлган кўчишларнинг $\delta\varphi$ орқали ифодасини қўйсак, қуйидаги ҳосил бўлади:

$$PR\delta\varphi - \frac{Q}{2}r_1\delta\varphi + \frac{Q}{2}r_2\delta\varphi = 0,$$

бундан:

$$P = Q\frac{r_2 - r_1}{2R}.$$

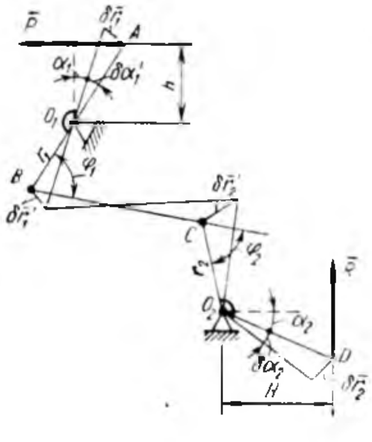
Сон қийматларини қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P = 720 \cdot \frac{12 - 10}{2 \cdot 60} = 12\,н.$$

49- масала. Плугнинг кетинги ғилдираги механизми қўзғалмас O_1 ва O_2 шарнирлар атрофида айланадиган AB тўғри ва O_2 синиқ ричаглардан иборат. Бу стерженларнинг B ва C учлари BC шатун билан шарнир ёрдамида бириктирилган. Шатун шаклда кўрсатилган вазиятида бу стерженлар билан φ_1 ва φ_2 бурчаклар ҳосил қилади (55- шакл). Механизмнинг шу вазиятида A нуқтанинг O_1 ўқдан кўтарилиши h га ва D нуқта билан O_2 ўқи орасидаги горизонтал бўлмаган масофа H га тенг. A нуқтага горизонтал $\overline{P}$ куч, D нуқтага вертикал $\overline{R}$ куч қўйилган;

$$O_1B = r_1, \quad O_2C = r_2.$$

Механизм мувозанатда қолиши учун P ва R кучлар орасидаги муносабатнинг қандай бўлиши кераклиги топилсин (55- шакл).



55- шакл.

Ечиш. Системага мумкин бўлган кўчиш берамиз, у 55-шаклда пунктир чизиқ билан кўрсатилган. Мумкин бўлган кўчиш кичик бўлгани учун айлананинг ёйи бўйича кучаётган A, B, C ва D нуқталарнинг кўчишини у ёйларнинг уринмаси билан алмаштирамиз. Бу нуқталарнинг мумкин бўлган кўчишининг миқдорларини тегишлича $\delta\bar{r}_1$, $\delta\bar{r}_1'$, $\delta\bar{r}_2$, $\delta\bar{r}_2'$ лар билан белгилаймиз. У вақтда мумкин булган кучиш принципининг (44,6) формуладаги иш тенгламасини қулласак,

$$\sum_{k=1}^{2}(\bar{F}_k, \delta\bar{r}_k) = 0 \qquad (1)$$

ёки қуйидаги ҳосил булади:

$$\sum_{k=1}^{2} F_k \delta r_k \cos(\widehat{\bar{F}_k, \delta\bar{r}_k}) = 0. \qquad (2)$$

Кучнинг элементар ишини топишни эсласак:

$$P\delta r_1, \cos(\widehat{\bar{P}, \delta\bar{r}_1}) + R\delta r_2 \cos(\widehat{\bar{R}, \delta\bar{r}_2}) = 0 \qquad (3)$$

ёки

$$P\cdot O_1A\cos\alpha_1\delta\alpha_1 - R\cdot O_2D\cos\alpha_2\delta\alpha_2 = 0, \qquad (4)$$

бундан:

$$Ph\,\delta\alpha_1 - RH\,\delta\alpha_2 = 0. \qquad (5)$$

α_1 билан α_2 нинг орасидаги муносабатини топамиз.
Шаклдан:

$$\delta r_1' = r_1\delta\alpha_1 \text{ ва } \delta r_2' = r_2\delta\alpha_2. \qquad (6)$$

B ва *C* шатунларининг учларининг мумкин бўлган $\delta\bar{r}_1'$ ва $\delta\bar{r}_2'$ кўчишларининг унинг йуналишидаги проекциялари бир-бирига тенг, шунинг учун

$$r_1\delta\alpha_1\cos(90^\circ - \varphi_1) = r_2\delta r_2\cos(90^\circ - \varphi_2) \qquad (7)$$

ёки

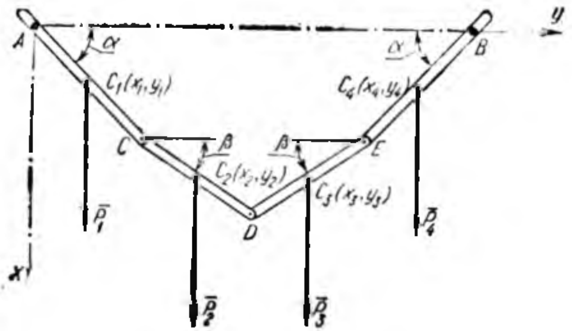
$$r_1\delta\alpha_1\sin\varphi_1 = r_2\delta r_2\sin\varphi_2 \qquad (8)$$

(8) дан фойдаланиб (5) дан $\delta\alpha_1$ ва $\delta\alpha_2$ ни йуқотсак, қуйидаги ҳосил булади:

$$P = R\frac{Hr_1\sin\varphi_1}{hr_2\sin\varphi_2}. \qquad (9)$$

50-масала. Узунликлари ва оғирликлари бир хил бўлган тўртта стерженлар ўзаро *C*, *E*, *D* шарнирлар ёрдамида бириктирилган (56-шакл). Икки четтадаги стерженлар бир горизонталда ётган қўзғалмас *A* ва *B* нуқтада турган шарнирлар атрофида айланади. Ҳамма система вертикал текисликда мувозанатда туради. $\mathrm{tg}\,\alpha = 3\,\mathrm{tg}\,\beta$ эканлиги кўрсатилсин.

Ечиш. *AC*, *CD*, *DE*, *EB* стерженлардан иборат булган системанинг мувозанатини текширамиз (56-шакл). Системага қўйилган стерженларнинг оғирлиги булган $P_1 = P$; $P_2 = P$; $P_3 = P$; $P_4 = P$ актив кучларни чизамиз.



56- шакл.

Координата ўқларини шаклда кўрсатилгандек қилиб оламиз. Мумкин бўлган кучиш принципининг (44,7) тенгламасига асосан тенглама тузамиз:

$$\sum_{k=1}^{4}(X_k\delta x_k + Y_k\delta y_k + Z_k\delta z_k) = 0. \qquad (1)$$

бундан:

$$X_1 = P_{1x} = P;\ X_2 = P_{2x} = P;\ X_3 = P_{3x} = P;\ X_4 = P_{4x} = P;$$
$$Y_1 = P_{1y} = 0;\ Y_2 = P_{2y} = 0;\ Y_3 = P_{3y} = 0;\ Y_4 = P_{4y} = 0;$$
$$Z_1 = P_{1z} = 0;\ Z_2 = P_{2z} = 0;\ Z_3 = P_{3z} = 0;\ Z_4 = P_{4z} = 0;$$

Қуйидаги кучлар ва координаталар қолади:

$$\left.\begin{array}{l|l} X_1 = P, & x_1 = \frac{a}{2}\sin\alpha, \\ X_2 = P, & x_2 = a\sin\alpha + \frac{a}{2}\sin\beta, \\ X_3 = P, & x_3 = a\sin\alpha + \frac{a}{2}\sin\beta, \\ X_4 = P, & x_4 = \frac{a}{2}\sin\alpha. \end{array}\right| \qquad (2)$$

x_1, x_2, x_3, x_4 ларнинг вариацияларини топамиз:

$$\delta x_1 = \frac{a}{2}\cos\alpha\delta\alpha,$$

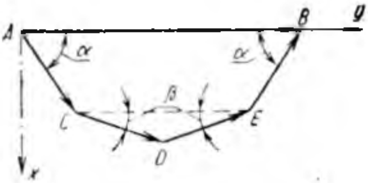
$$\delta x_2 = a\cos\alpha\delta\alpha + \frac{a}{2}\cos\beta\delta\beta,$$

$$\delta x_3 = a\cos\alpha\delta\alpha + \frac{a}{2}\cos\beta\delta\beta,$$

$$\delta x_4 = \frac{a}{2}\cos\alpha\delta\alpha.$$

Мумкин бўлган кўчиш принципининг (1) тенгламаси, $X_1\delta x_1 + X_2\delta x_2 + X_3\delta x_3 + X_4\delta x_4 = 0$ қуйидаги кўринишда бўлади

$$3\cos\alpha\delta\alpha + \cos\beta\delta\beta = 0. \qquad (4)$$



57- шакл.

Бу (4) тенгламани ечамиз. Бунинг учун олдин $\delta\alpha$ билан $\delta\beta$ орасидаги муносабатни топамиз. 57- шаклдан:

$$\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CD} + \overline{DE} + \overline{EB}. \qquad (5)$$

Буни y ўқига проекциялаймиз:

$$(\overline{AB})_y = (\overline{AC})_y + (\overline{CD})_y + (\overline{DE})_y + (\overline{EB})_y, \qquad (6$$

бунда

$$\left.\begin{array}{c}(\overline{AB})_y = b = \text{const}; \quad (\overline{AC})_y = a\cos\alpha; \\ (\overline{CD})_y = a\cos\beta; \; (\overline{DE})_y = a\cos\beta; \; (\overline{EB})_y = a\cos\alpha.\end{array}\right\}$$

Булардан:

$$b = 2a\cos\alpha + 2a\cos\beta. \qquad (8)$$

(8) ни вариацияласак:

$$-\sin\alpha\delta\alpha - \sin\beta\delta\beta = 0, \qquad (9)$$

бундан:

$$\delta\beta = -\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\delta\alpha. \qquad (10)$$

Топилган $\delta\beta$ вариацияни мумкин бўлган кўчиш принципининг (4) тенгламасига қўямиз, у вақтда қуйидаги тенгламани оламиз:

$$\left(3\cos\alpha - \cos\beta\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right)\delta\alpha = 0. \qquad (11)$$

$\delta\alpha \neq 0$ бўлгани учун:

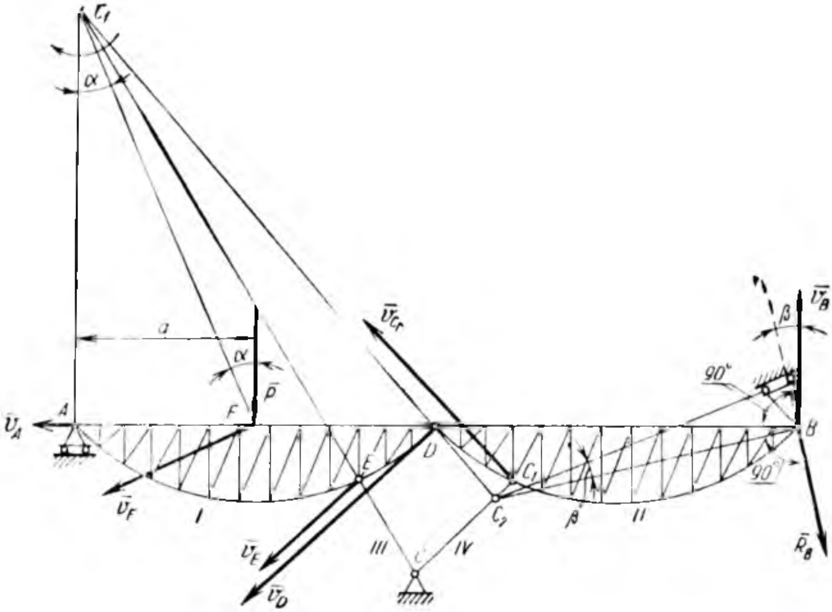
$$3\cos\alpha - \cos\beta\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = 0, \qquad (12)$$

$$3 - \text{ctg}\,\beta\,\text{tg}\,\alpha = 0 \text{ ёки } 3 - \frac{\text{tg}\,\alpha}{\text{tg}\,\beta} = 0,$$

бундан:

$$\text{tg}\,\alpha = 3\,\text{tg}\,\beta.$$

51- масала. D шарнир билан бир-бирига бириктирилган иккита ўзгармас I ва II ферма C шарнир ёрдамида III ва IV стерженлар орқали ерга маҳкамланган. A ва B нуқталарда уларнинг катокли таянчлари бор. I фермага A таянчдан a масофада вертикал P куч қўйилган. B катокнинг реакцияси топилсин (58- шакл).



58- шакл.

Ечиш. I ферма тезликларининг оний марказини топамиз: бунинг учун IV стерженни фикран қирқиб A ва E нуқталарга мумкин бўлган кўчиш берамиз.

$\bar{v}_B$ тезлик вектори EC га тик, $\bar{v}_A$ тезлик вектори горизонтал таянч текислигига параллел, тезликлар оний марказий $\bar{v}_A$ ва $\bar{v}_B$ векторларининг бошларидан чиқарилган тикларининг кесишган нуқтасида бўлади. D нуқтанинг тезлиги C_1D га, E нуқтанинг тезлиги эса C_1F га тик йўналган I ферманинг тезлиги қуйидаги нисбатдан топилади:

$$\frac{v_F}{C_1F} = \frac{v_D}{DC_1}. \tag{1}$$

II ферма тезликларининг оний марказини топамиз, бунинг учун III стерженни фикран қирқамиз. C_2 нуқтанинг тезлиги CC_2 га тик йўналган, $\bar{v}_D$, $\bar{v}_C$ тезлик векторларининг бошларидан тиклар чиқазсак, улар кесишган C_2 нукта оний марказ бўлади.

B нуқтанинг тезлиги C_2B тўғри чизиққа тик ва қуйидаги муносабатда бўлади:

$$\frac{v_D}{DC_2} = \frac{v_B}{BC_2}. \tag{2}$$

F ва B нуқталарнинг кўчиши қуйидаги формуладан топилади:

$$\delta(\overline{F}) = \overline{v}_F \delta t; \ \delta(\overline{B}) = \overline{v}_B \delta t. \tag{3}$$

II ферманинг B нуқтасидаги боғланишни $\overline{R}_B$ реакция билан алмаштириб, уни боғланишдан озод қиламиз.

Мумкин бўлган кўчиш принципига асосан:

$$P v_F \sin\alpha - R_B v_B \cos\beta = 0. \tag{4}$$

(1) ва (2) тенгламаларни ва

$$\sin\alpha = \frac{a}{C_1F}, \tag{5}$$

$$\cos\beta = \frac{b}{BC_2}$$

ларни назарга олсак, (4) қуйидагича бўлади:

$$P\frac{C_1F}{DC_1}\cdot\frac{a}{C_1F}v_D - R_B\frac{BC_2}{DC_2}\cdot\frac{b}{BC_2}v_D = 0, \tag{6}$$

бундан:

$$R_B = P\frac{a}{b}\frac{DC_2}{DC_1}, \tag{7}$$

бу ерда $b - R_B$ реакция кучининг C_2 оний марказга нисбатан олинган елкаси.

R_B реакция кучи B каток сирпанадиган текисликка тик бўлиб йуналган.

VII БОБ

ДИНАМИКАНИНГ УМУМИЙ ТЕНГЛАМАСИ (Даламбер—Лагранж тенгламаси)

47-§. Материал нуқталар системаси динамикасининг умумий тенгламаси

Ҳаракат қилаётган идеал боғланишда бўлган материал нуқталар системасига қўйилган кучлар ва инерция кучларининг мумкин бўлган кўчишда бажарган ишларнинг йиғиндиси нолга тенг:

$$\sum_{k=1}^{n}(\overline{F}_k - m_k\overline{w}_k, \delta\overline{r}_k) = 0, \tag{47,1}$$

Агар

$$\overline{F}_k = X_k\overline{i} + Y_k\overline{j} + Z_k\overline{k},$$
$$\overline{w}_k = \frac{d^2x_k}{dt^2}\overline{i} + \frac{d^2y_k}{dt^2}\overline{j} + \frac{d^2z_k}{dt^2}\overline{k},$$
$$\delta\overline{r}_k = \delta x_k\overline{i} + \delta y_k\overline{j} + \delta z_k\overline{k}.$$

десак у вақтда динамиканинг умумий тенгламаси қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(X_k - m_k\frac{d^2x_k}{dt^2}\right)\delta x_k + \left(Y_k - m_k\frac{d^2y_k}{dt^2}\right)\delta y_k + \right.$$
$$\left. + \left(Z_k - m_k\frac{d^2z_k}{dt^2}\right)\delta z_k\right\} = 0. \qquad (47,2)$$

(47,1) ёки (47,2) тенглама динамиканинг умумий тенгламаси ёки Даламбер—Лагранж тенгламаси дейилади.

48-§. Масалалар ечишга оид методик кўрсатмалар

Динамиканинг умумий тенгламасига оид масалаларни қуйидаги тартибда ечиш тавсия этилади.

1. Системанинг эркинлик даражаси аниқланади.
2. Система нуқталарига қўйилган ҳамма ташқи кучларни тасвирлаб олиш керак.
3. Система нуқталарига инерция кучлари қўйилади.
4. Координата ўқлари системасини танлаб олинади.
5. Таъсир қилаётган кучлар ва инерция кучлари қўйилган нуқталарнинг мумкин бўлган кўчишлари топилади.
6. Динамиканинг (47,2) умумий тенгламасини тузиш керак.
7. (47,2) кирган иш коэффициентларини ихтиёрий мумкин бўлган кўчишда нолга тенглаштирилади.
8. Тузилган система тенгламалардан изланаётган номаълум сонларни топиш керак.

Бу хил масалаларни икки типга ажратиш мумкин:

а) Даламбер – Лагранж тенгламаларига асосан ечиладиган, эркинлик даражаси битта бўлган масалалар;

б) Даламбер—Лагранж тенгламаларига асосан ечиладиган, эркинлик даражаси бир нечта булган масалалар.

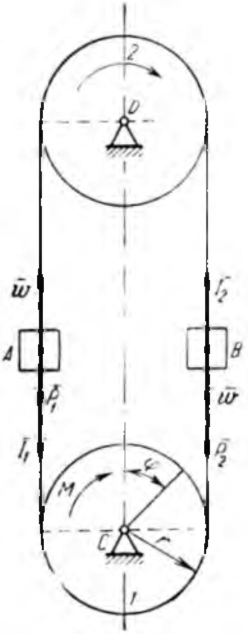
9. Бу параграфга оид масалаларни яна қуйидаги типларга ажратиш мумкин:

а) системанинг нисбий мувозанатини аниқлаш талаб қиладиган масалаларга. Бунга И. В. Мешчерский „Назарий механикадан масалалар туплами" китобидаги 925 – 929, 935 – 939-масалалар;

б) система нуқталарининг тезланишларини топиш талаб қиладиган масалаларга, бунга И. В. Мешчерский „Назарий механикадан масалалар туплами" китобидаги 930, 943 – 948- масалалар.

49-§. Масалалар

52 масала. Подъёмникнинг пастки C шкивига айлантирувчи M момент қўйилган. Юқорига кўтариладиган, оғирлиги P_1 бўлган A юкнинг тезланиши аниқлансин. B посангининг оғирлиги P_2 га тенг, C ва D шкивлар радиуси эса r ва ҳар қайсисининг оғирлиги Q бўлган бир жинсли цилиндрдан иборат. Тасманинг массаси ҳисобга олинмасин (59-шакл).



59-шакл.

Ечиш. Чексиз тасманинг тўғри чизиқли қисмидаги нуқтасининг тезланишини w ҳарфи билан белгилаймиз. Система нуқтасига актив P_1, P_2 кучлар ва айлантирувчи M момент таъсир қилади. Системанинг ҳамма нуқталарига

$$|\bar{I}_1| = \frac{P_1}{g} w; \quad |\bar{I}_2| = \frac{P_2}{g} w \tag{1}$$

инерция кучларини қўшамиз.

Шкивнинг инерция кучи моменти қуйидагига тенг бўлган жуфт куч ҳосил қилади:

$$M_{1-2}(\bar{I}_l) = \frac{Q}{g} r w. \tag{2}$$

Бу текширилаётган системанинг эркинлик даражаси битта ва нуқталарнинг ҳолати пастки дискнинг айланиш бурчаги φ билан аниқланади.

A ва B нуқталарга икки томонлама идеал боғланишлар қўйилган.

Системанинг нуқталарига айланиш бурчаги $\delta\varphi$ бурилиш билан аниқланадиган кичик кўчиш берамиз. A ва B нуқталарнинг кўчиши қуйидагича:

$$\delta s_A = r\delta\varphi, \quad \delta s_B = r\delta\varphi. \tag{3}$$

Инерция кучи бажарган элементар иш;

$$\delta A = -(P_1 + P_2 + Q)\frac{w}{g} r\delta\varphi. \tag{4}$$

Айлантирувчи M момент ва P_1, P_2 кучлар бажарган иш:

$$\delta A_1 = M\delta\varphi, \ \delta A_2 = (P_2 - P_1) r\delta\varphi. \tag{5}$$

Динамиканинг умумий тенгламасини тузамиз:

$$-(P_1 + P_2 + Q)\frac{w}{g} r\delta\varphi + M\delta\varphi + (P_2 - P_1) r\delta\varphi = 0 \tag{6}$$

ёки

$$\left[-(P_1+P_2+Q)\frac{w}{g}r+M+(P_2-P_1)r\right]\delta\varphi=0. \qquad (7)$$

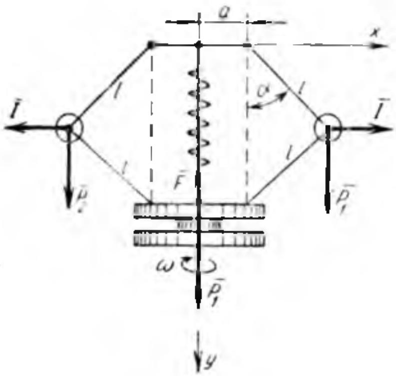
$\delta\varphi\neq 0$ нолга тенг бўлмагани учун

$$-(P_1+P_2+Q)\frac{w}{g}r+M+(P_2-P_1)r=0.$$

Бунда w ни топамиз:

$$w=\frac{M+(P_2-P_1)r}{(P_1+P_2+Q)r}\cdot g. \qquad (8)$$

53- масала. Марказдан қочма регулятор ўзгармас ω бурчак тезлик билан айланади. Регулятор бурчак тезлиги билан унинг стерженининг вертикалдан оғиш бурчаги α орасидаги муносабат топилсин: оғирлиги P_2 бўлган муфта, бикрлиги c бўлган пружина билан пастга сиқилади. $\alpha=0$ бўлганда пружина деформацияланмайди, унинг юқориги учи регулятор ўқига маҳкамланган; шарларнинг оғирлиги P_2, стерженларнинг узунлиги l стерженнинг осилиш ўқи регуляторнинг ўқидан a масофада туради; стерженларнинг ва пружиналарнинг оғирликлари ҳисобга олинмасин (60- шакл).



60- шакл.

Ечиш. Координата ўқларини 60- шаклда кўрсатилгандек қилиб оламиз.

Эркинлик даражаси битта бўлган системага $\bar{P}_2$ — шарларнинг оғирлик кучлари, $\bar{P}_1$ — муфтанинг оғирлик кучи ва $\bar{F}$ — пружинанинг эластиклик кучи таъсир қилади:

$$F=c(2l-2l\cos\varphi)=2lc(1-\cos\varphi). \qquad (1)$$

Бу кучларнинг ҳаммаси вертикал пастга йўналган. Регулятор юклари ўққа интиладиган тезланишга эга, унинг миқдори қуйидагига тенг:

$$w^{(y.\ и.)}=(a+l\sin\alpha)\,\omega^2. \qquad (2)$$

Юкларнинг P_1, P_2 оғирлик кучлари ва пружинанинг F эластиклик кучларига шарларнинг

$$I=\frac{P_2}{g}(a+l\sin\alpha)\,\omega^2 \qquad (3)$$

инерция кучларини қўшсак, система хаёлан мувозанатда бўлади, α бурчакни $\delta\alpha$ га ўзгартиб, юкларга мумкин бўлган кўчиш берамиз, у вақтда кўчиш $s = l\delta\alpha$ ва ричагга тик бўлади. Муфталар оғирлик марказларининг координаталари $y_1 = 2l\cos\alpha$ билан аниқланади, демак, унинг мумкин бўлган кўчиш вариацияси, $\delta y_1 = l\sin\alpha\delta\alpha$ бўлади.

Шарлар оғирлик марказининг координаталари $y_2 = l\cos\alpha$ билан аниқланади ва унинг мумкин бўлган кўчиш вариацияси $\delta y_2 = l\sin\alpha\delta\alpha$ билан аниқланади.

Инерция кучлари қўйилган нуқтанинг координаталари $x_3 = a + l\sin\alpha$ билан аниқланади ва унинг мумкин бўлган кўчиш вариацияси $\delta x_3 = l\cos\alpha\delta\alpha$ бўлади.

Эластиклик кучи қўйилган нуқтанинг координатаси $y_4 = 2l\cdot\cos\alpha$ билан аниқланади ва унинг мумкин бўлган кўчиш вариацияси $\delta y_4 = -2l\sin\alpha\delta\alpha$ бўлади.

Динамиканинг умумий тенгламаси (47,2) ни тузамиз:

$$-2P_1 l\sin\alpha\delta\alpha - 2P_2 l\sin\alpha\delta\alpha + 2\frac{P_2}{g}(a + l\sin\alpha)\,\omega^2 l\cos\alpha\delta\alpha -$$

$$-4l^2c(1-\cos\alpha)\sin\alpha\delta\alpha = 0.$$

$\delta\alpha$ нолга тенг бўлмагани учун:

$$-P_1\sin\alpha - P_2\sin\alpha + \frac{P_2}{g}(a+l\sin\alpha)\,\omega^2\cos\alpha - 2lc(1-\cos\alpha)\sin\alpha = 0,$$

бундан ω^2 ни топамиз:

$$\omega^2 = g\,\frac{P_1 + P_2 + 2lc(1-\cos\alpha)}{P_2(a + l\sin\alpha)}\operatorname{tg}\alpha.$$

54-масала. Ҳар қайсисининг оғирлиги P бўлган иккита D ва E юк чўзилмайдиган ва оғирлигини ҳисобга олмаса бўладиган ип учига боғланган. Бу ип E юкдан чиқиб, қўзғалмас A блок орқали ўтади, кейин қўзғалувчан B блокни ўраб ўтиб, юқорига қўзғалмас C блокка қайтиб келади ва силлиқ оғма текисликка параллел бўлиб ўтади, шу ерда унинг учига D юк боғланган. C блок билан A блок бир ўқда туради; оғма горизонтал текислик билан α бурчак ҳосил қилади. Қўзғалувчи B блокка оғирлиги Q бўлган K юк осилган. E юкнинг сирганиб горизонтал текисликка ишқаланиш коэффициенти f га тенг. Блокларнинг массаси ҳисобга олинмасин (61-шакл).

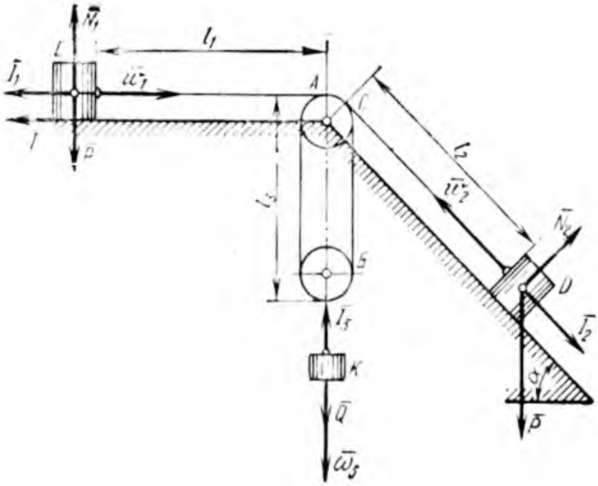
K юкнинг пастга тушиши учун қандай шарт бўлиши кераклиги аниқлансин. Шу юкнинг тезланиши топилсин. Бошланғич пайтда ҳамма юкларнинг тезлиги нолга тенг.

Ечиш. Система нуқталарининг орасидаги боғланишлар чўзилмайдиган эгилувчан ип орқали бўлиб, қуйидаги тенглама билан ифодаланади:

$$f = l_1 + l_2 + 2l_3 = \text{const}. \quad (1)$$

(1) тенгламани қаноатлантирадиган мумкин бўлган кўчиш:

$$\delta l_1 + \delta l_2 + 2\delta l_3 = 0. \quad (2)$$



61- шакл.

(1) боғланиш тенгламасидан қуйидаги келиб чиқади:

$$\bar{w}_3 = -\frac{\bar{w}_1 + \bar{w}_2}{2}, \tag{3}$$

бу ерда $\bar{w}_3$ — K юкнинг тезланиши; $\bar{w}_1$, $\bar{w}_2$ — E ва D юкларнинг тезланишлари.

Қуйилган $\bar{P}$, $\bar{Q}$, $\bar{P}$ актив кучларга ва $\bar{N}_1$, $\bar{N}_2$, $\bar{T}$ боғланиш реакция кучларига қуйидаги инерция кучларини қўшамиз:

$$|\bar{I}_1| = \frac{P}{g}w_1, \quad |\bar{I}_2| = \frac{P}{g}w_2, \quad |\bar{I}_3| = \frac{Q}{g}w_3. \tag{4}$$

Бу ерда $T = fP$ (4) ишқаланиш кучи. Бу вақтда система фикран мувозанат ҳолатда бўлади. Қуйидаги мумкин бўлган кўчишлар ҳам (2) тенгламани қаноатлантириши мумкин:

$$\delta l_1 = \delta l_2 = \delta s, \quad \delta s_3 = -\delta s. \tag{5}$$

Мумкин бўлган кўчиш принципига асосан:

$$-(T + I_1)\delta l_1 + (Q - I_3)\delta l_3 - I_2\delta l_2 - P\sin\alpha\delta l_2 = 0. \tag{6}$$

(8), (4) ва (6) ларни назарга олсак, (7) қуйидагича бўлади:

$$-\left(fP + \frac{P}{g}w_1\right)\delta s - \left(Q - \frac{Q}{g}w_3\right)\delta s - \frac{P}{g}w_2\delta s - P\delta s\sin\alpha = 0,$$

бундан

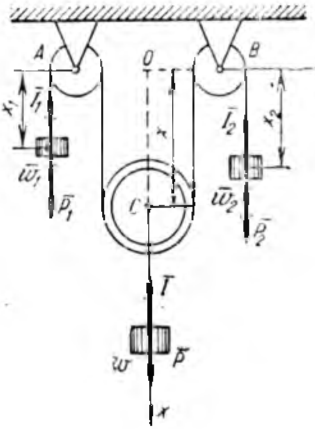
$$w_3 = g\frac{Q - P(f + \sin\alpha)}{Q + 2P}. \tag{7}$$

Бундан шундай хулосага келамиз: K юкнинг пастга тушишида

$$Q > P(f + \sin \alpha)$$

бўлади.

55- масала. Қўзғалувчи C блокни ушлаб турадиган шнур A ва B блок орқали ўтган; A ва B блокнинг ўқлари қўзғалмас; шнурнинг блоклар устида бўлмаган қисмлари вертикал. C блокка оғирлиги $P = 4$ *н* бўлган тош осилган: шнур учларига оғирлиги $P = 2$ *н* ва $P = 3$ *н* бўлган юклар боғланган. Блоклар билан шнур массасини ва ўқлардаги ишқаланишни ҳисобга олмай, ҳамма юкларнинг тезланиши аниқлансин (62- шакл).



62- шакл.

Ечиш. Координата ўқларини 62- шаклда кўрсатилгандек қилиб оламиз. Динамика умумий тенгламасидан фойдалансак, бу ҳол учун тенглама қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\left(P - \frac{P}{g} w\right)\delta x + \left(P_1 - \frac{P_1}{g} w_1\right)\delta x_1 + \left(P_2 - \frac{P_2}{g} w_2\right)\delta x_2 = 0, \quad (1)$$

бу ерда w, w_1, w_2 — изланаётган юкларнинг тезланишлари.

Шнурнинг узунлиги ўзгармаслигини назарга олсак

$$x_1 + 2x + x_2 = \text{const} \quad (2)$$

бўлади. Шундай қилиб, системанинг вазиятини аниқлайдиган учта x_1, x_2 ва x координаталар битта шарт билан боғланган (ҳамма юклар тўғри чизиқли кўчади деб фараз қиламиз). Шунинг учун бу системанинг эркинлик даражаси иккита. Олдинги тенгламани вариациялаб, учта юк координаталари вариацияларининг орасидаги боғланишни топамиз, яъни

$$\delta x_1 + 2\delta x + \delta x_2 = 0, \quad (3)$$

бундан:

$$\delta x = -\frac{1}{2}(\delta x_1 + \delta x_2). \quad (4)$$

Даламбер—Лагранж тенгламасига δx нинг қийматини қўйиб δx_1 ва δx_2 ларни қавсдан ташқарига чиқарсак, қуйидаги ҳосил бўлади:

$$\left(P_1 - \frac{P_1}{g} w_1 - \frac{P}{2} + \frac{P}{2g} w\right)\delta x_1 + \left(P_2 - \frac{P_2}{g} w_2 - \frac{P}{2} + \frac{P}{2g} w\right)\delta x_2 = 0. \quad (5)$$

Бу тенгламадаги δx_1 ва δx_2 лар бир-бирига боғлиқсиз ўзгаради. Тенглама нолга тенг бўлиши учун эркин ўзгарувчи δx_1 ва δx_2 ларнинг олдидаги коэффициентлар нолга тенг бўлиши керак, яъни

$$P_1 - \frac{P_1}{g} w_1 - \frac{P}{2} + \frac{P}{2g} w = 0, \tag{6}$$

$$P_2 - \frac{P_2}{g} w_2 - \frac{P}{2} + \frac{P}{2g} w = 0$$

ёки сон қийматларини қўйсак,

$$\begin{aligned} w - w_1 &= 0, \\ 2w - 3w_2 &= g, \end{aligned} \tag{7}$$

бундан:

$$\left.\begin{aligned} w &= w_1, \\ w_2 &= \frac{2}{3} w + \frac{g}{3}. \end{aligned}\right| \tag{8}$$

Учинчи номаълумни топиш учун тенгламани (2) тенгликдан t вақтга нисбатан икки марта ҳосила олиб, топамиз.

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + 2\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2x_2}{dt^2} = 0 \tag{9}$$

ёки

$$w_1 + 2w + w_2 = 0. \tag{10}$$

Бу тенгламага w_1 ва w_2 нинг қийматларини (8) дан олиб қўямиз:

$$w + 2w + \frac{2}{3} w + \frac{g}{3} = 0, \tag{11}$$

бундан:

$$w = -\frac{1}{11} g. \tag{12}$$

Энди w_1 ва w_2 ни (8) дан топамиз:

$$w_1 = -\frac{1}{11} g,$$

$$w_2 = -\frac{2}{33} g + \frac{1}{3} g = \frac{3}{11} g.$$

w ва w_1 тезланишлар қийматларининг манфийлиги бу тезланишларининг йўналиши координат ўқининг манфий йўналиши билан бир хил эканлигини кўрсатади, яъни бу тезланишлар юқорига йўналган.

VIII БОБ

МАТЕРИАЛ НУҚТАЛАР СИСТЕМАСИ ДИНАМИКАСИНИНГ УМУМИЙ ТЕОРЕМАЛАРИ

50-§. Инерция марказининг ҳаракати ҳақидаги теорема

Координаталари қуйидагича топиладиган геометрик нуқта материал нуқталар системасининг инерция маркази деб аталади:

$$x_c = \frac{\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu x_\nu}{M}, \quad y_c = \frac{\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu y_\nu}{M}, \quad z_c = \frac{\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu z_\nu}{M} \qquad (50,1)$$

ёки вектор кўринишида:

$$\bar{r}_c = \frac{\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \bar{r}_\nu}{M}, \qquad (50,2)$$

бунда $M = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu$ — материал нуқталар системасининг массаси.

Инерция марказининг тезлиги билан материал нуқталар системаси нуқталари тезлиги орасидаги боғланишлар қуйидагича бўлади:

$$\bar{v}_c = \frac{\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \dot{\bar{r}}_\nu}{M}, \qquad (50,3)$$

$$\dot{x}_c = \frac{\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \dot{x}_\nu}{M}, \quad \dot{y}_c = \frac{\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \dot{y}_\nu}{M}, \quad \dot{z}_c = \frac{\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \dot{z}_\nu}{M}. \qquad (50,4)$$

бу ерда

$$\bar{v}_c = \dot{x}_c\bar{i} + \dot{y}_c\bar{j} + \dot{z}_c\bar{k}.$$

Инерция марказининг тезланиши билан материал нуқталар системаси нуқталарининг тезланишлари орасидаги боғланиш қуйидагича бўлади:

$$\bar{w}_c = \frac{\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \bar{w}_\nu}{M}, \qquad (50,5)$$

$$\ddot{x}_c = \frac{\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \ddot{x}_\nu}{M}, \quad \ddot{y}_c = \frac{\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \ddot{y}_\nu}{M}, \quad \ddot{z}_c = \frac{\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \ddot{z}_\nu}{M}, \qquad (50,6)$$

бу ерда

$$\overline{w}_c = \ddot{x}_c\overline{i} + \ddot{y}_c\overline{j} + \ddot{z}_c\overline{k}.$$

Теорема. *Материал нуқталар системасининг инерция маркази, инерция марказига система массаси жойлашган деб фараз қилинганда, системага қўйилган ҳамма ташқи кучларнинг бош вектори таъсирида материал нуқтанинг ҳаракатига ухшаш ҳаракат қилади:*

$$M\overline{w}_c = \overline{R}^{(e)}, \tag{50,7}$$

бунда $M = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu$ — бутун системанинг массаси;

$\overline{w}_c$ — инерция марказининг тезланиши;

$\overline{R}^{(e)}$ — системага қўйилган ташқи кучларнинг бош вектори.

Теоремани декарт координата ўқларидаги проекциялар орқали ёзсак, қуйидагича бўлади:

$$M\ddot{x}_c = X^{(e)}, \quad M\ddot{y}_c = Y^{(e)}, \quad M\ddot{z}_c = Z^{(e)}, \tag{50,8}$$

бунда $X^{(e)}$, $Y^{(e)}$, $Z^{(e)}$ — ташқи кучлар, $\overline{R}^{(e)}$ — бош векторнинг тегишли ўқлардаги проекциялари.

51-§. Масала ечишга оид методик кўрсатмалар

Материал нуқталар системаси инерция марказининг ҳаракати ҳақидаги теоремадан фойдаланиб, ечиладиган масалаларни қуйидаги тартибда ечиш тавсия этилади:

1. Координата ўқлари системаси танлаб олинади.

2. Системага қўйилган ҳамма ташқи кучларни шаклда тасвирлаш керак.

3. Шу материал нуқталар системаси инерция маркази ҳаракати ҳақидаги теореманинг тенгламаси (50,8) ни Декарт координата ўқларидаги проекциялар орқали ёзилади.

4. Ташқи кучлар системасининг ҳар қайси декарт координата ўқларидаги проекцияларининг йиғиндисини ёзиб олиш керак.

5. Системанинг ҳамма n массасини, марказларининг координаталари x_ν, y_ν, z_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ ларни ёзиб олиб ва уларни вақтга нисбатан икки марта дифференциаллаб, кейин (50,9) формулага асосан $M\ddot{x}_c$, $M\ddot{y}_c$, $M\ddot{z}_c$ ларни топилади.

6. (50,8) формуладан фойдаланиб, система инерция марказий ҳаракатининг ҳаракат дифференциал тенгламалари тузилади.

7. Бу система тенгламаларини ечиб, ё ташқи кучлар топилади (биринчи масала), ёки инерция марказининг ҳаракат қонуни топилади (иккинчи масала).

Масалада материал нуқталар системаси инерция марказининг траекториясини топишни талаб қилинган бўлса (50,1) формуладан изланаётган инерция марказининг координаталари вақт орқали топилади, кейин бу тенгламалардан вақтни чиқариб ташлаб изланаётган материал нуқталар системаси инерция марказининг траекторияси топилади.

Бу параграфдаги масалаларни икки группага ажратиш мумкин.

Биринчи группага материал нуқталар системаси инерция марказининг ҳаракат қонуни маълум бўлиб, системага таъсир қилаётган ташқи кучларни топиш керак бўлган (биринчи масала) масалалар киради.

Иккинчи группага материал нуқталар системасига қўйилган ташқи кучлар маълум бўлиб, система инерция марказининг ҳаракат қонунини топиш керак бўлган (иккинчи масала) масалалар киради.

8. И. В. Мешчерский „Назарий механикадан масалалар тўплами" китобидаги 951 — 957-масалалар биринчи группага тегишлидир. Бу масалаларни $x_0 = \text{const} = x_{c0}$ тенгликни татбиқ қилиб ечиш мумкин, чунки текшириладиган масалаларда система инерция марказининг абсциссаси ўзгармас.

И. В. Мешчерский „Назарий механикадан масалалар тўплами" китобидаги 958—963-масалалар иккинчи группага оид. Бу масалалар инерция марказининг ҳаракати ҳақидаги теореманинг (50,8) формуласига биноан ечилади.

52-§. Масалалар

56-масала. Оғирлиги $P_1 = 2\,кн$ бўлган юкни кўтараётган сузувчи краннинг стреласи вертикал вазиятигача 30° бурчакка айланганда краннинг қанча силжиши аниқлансин. Краннинг оғирлиги $P_2 = 20\,кн$, стреланинг узунлиги $OA = 8\,м$. Сувнинг қаршилиги билан стреланинг оғирлиги ҳисобга олинмасин (63-шакл).

Ечиш. Боши O нуқтага урнашган Ox ўқи сув сатҳига параллел, Oy ўқи вертикал юқорига йўналган нисбий қўзғалмас координата ўқлари системасини киритамиз.

Ҳамма $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ ташқи кучлар ва сувнинг $\overline{R}$ реакция кучлари Oy ўқига параллел ва бошланғич пайтда системанинг ҳамма нуқталарининг Ox ўқига параллел тезлиги бўлмаган. Бу ҳолда система инерция марказининг абсцисса координатаси ўзгармас, яъни

$$x_c = \text{const}. \qquad (1)$$

Координата ўқининг бошидан $\overline{P}_2$ кучининг таъсир чизиғигача бўлган масофани a билан белгилаймиз.

Бошланғич пайтдаги система инерция марказининг абсциссa координатаси (50,1) формулага асосан қуйидагига тенг бўлади:

$$x_c = \frac{-P_1 OA \sin 30^\circ + P_2 \cdot a}{P_1 + P_2}. \qquad (2)$$

P_1 юк ўнг томонга ҳаракат қилганда, x_c ўзгармай қолиши учун сузувчи кран чап томонга силжиши керак. Кранинг Oy ўқидан чап томонга силжишини x билан белгилаймиз, у вақтда:

$$x_{c_1} = \frac{-P_1 x + P_2(-x + a)}{P_1 + P_2}. \qquad (3)$$

(2) ва (3) ларнинг ўнг томонларини тенглаштирамиз:

$$\frac{-P_1 OA \sin 30^\circ + P_2 a}{P_1 + P_2} = \frac{-P_1 x + P_2(-x + a)}{P_1 + P_2},$$

бундан:

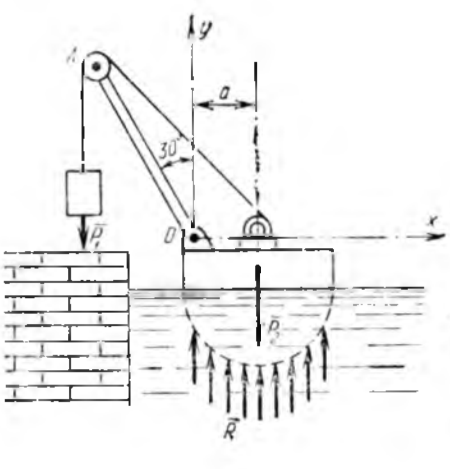
$$x = \frac{P_1 OA \sin 30^\circ}{P_1 + P_2}. \qquad (4)$$

Берилган сон қийматларини қўйсак, қуйидаги ҳосил бўлади:

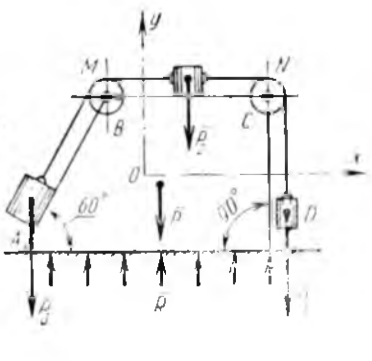
$$x = \frac{2 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2}}{2 + 20} = \frac{8}{22} = 0{,}36 \text{ м}.$$

Кран чап томонга 0,36 *м* силжийди.

57- масала. Оғирлиги $P_1 = 20$ *н*, $P_2 = 15$ *н* ва $P_3 = 10$ *н* бўлгани учта юк қўзғалмас M ва N блоклардан ўтган ва оғирлигини ҳисобга олмаса буладиган чўзилмас ип билан туташтирилган (64- шакл). P_1 юк пастга тушганида P_2 юк оғирлиги



63- шакл.



64- шакл.

$P=100$ *н* бўлган тўрт бурчакли $ABCD$ кесик пирамиданинг юқориги асоси бўлиб силжийди, P_3 юк эса ён томондаги AB қирра бўйлаб юқорига кўтарилади. Агар P_1 юк 1 *м* паст тушган бўлса $ABCD$ кесик пирамида билан пол ўртасидаги ишқаланишни ҳисобга олмай, $ABCD$ кесик пирамиданинг полга нисбатан қанча силжиганлиги аниқлансин (64- шакл.)

Ечиш. Кесик пирамиданинг боғланишини $\bar{R}$ реакция билан алмаштириб уни боғланишдан қутқазамиз. Унинг $\bar{R}$ реакция кучи ва ҳамма $\bar{P}$, P_1, P_2, $\bar{P}_3$ ташқи кучлар горизонтал текисликка тик бўлиб йўналганлиги ҳамда бошланғич пайтда системанинг ҳамма нуқталари тинч ҳолатда турганлигини таъкидлаб ўтамиз.

Бу ҳолда бутун материал нуқталар системаси инерция марказининг абсциссаси ўз ўрнида ўзгармай қолади, яъни

$$x_c=\text{const}. \tag{1}$$

Инерция марказини координата ўқининг боши деб оламиз. Юклар ўнг томонга ҳаракат қилганида инерция марказининг абсциссаси ўзгармай қолиши учун бутун пирамида қарама-қарши томонга, яъни чап томонга илгарилама ҳаракат қилиши керак.

Пирамиданинг силжишини x билан белгилаймиз, у вақтда P, P_1, P_2, P_3 юкларнинг абсциссаси қуйидаги миқдорларга ўзгаради:

$$P(x,\ y);\ P_1(x,\ y_1);\ P_2(x-1,\ y_2);\ P_3(x-1\cdot\sin 30^\circ,\ y_3).$$

(1) тенгламага асосан:

$$P_3\left(x-\frac{1}{2}\right)+P_2(x-1)+P_1x+Px=0, \tag{2}$$

бу тенгламадан:

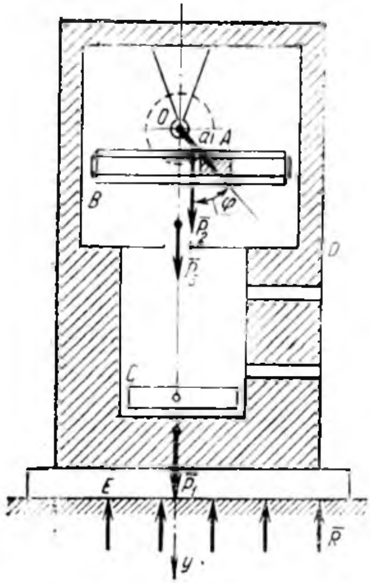
$$x=\frac{P_2+\frac{1}{2}P_3}{P+P_1+P_2+P_3}. \tag{3}$$

Сон қийматларини қўямиз:

$$x=\frac{15+\frac{1}{2}\cdot 10}{100+20+15+10}=14\ см.$$

Пирамида чапга 14 *см* силжийди.

58- масала. Сув чиқарадиган насоснинг салт ишлаган вақтида ерга туширадиган босими аниқлансин; D корпусидаги қўзғалмас қисмларининг ва E фундаментнинг оғирлиги P_1 га тенг, $AO=a$ кривошипнинг оғирлиги P_2 га тенг, B кулиса ва C поршеннинг оғирлиги P_3 га тенг, ω бурчак тезлиги билан бир



65- шакл.

текис айланаётган OA кривошип бир жинсли стержень деб ҳисоблансин (65- шакл).

Ечиш. Кулиса поршень билан бирликда илгарилама ҳаракатда бўлади. Уларнинг ҳамма нуқталари

$$y_3 = a\cos\omega t \tag{1}$$

қонуни билан ҳаракат қилади.

Кривошип айланма ҳаракатда бўлиб, инерция марказининг координатаси эса

$$y_{OA} = \frac{a}{2}\cos\omega t \tag{2}$$

қонуни билан ўзгаради.

Насоснинг боғланишини $\bar R$ реакция билан алмаштириб, насосни боғланишдан қутқазамиз. Инерция маркази ҳаракати ҳақидаги теореманинг (50,7) формуласига асосан:

$$M\ddot y_c = P_1 + P_2 + P_3 - R, \tag{3}$$

бу ерда M — насоснинг ҳаракатлантирувчи қисмининг массаси, яъни

$$M = \frac{1}{g}(P_2 + P_3). \tag{4}$$

(50,1) формулани ҳисобга олиб, ҳаракатлантирувчи масса инерция маркази y_c координатасини вақтга нисбатан икки марта дифференциаллаСак, қуйидаги ҳосил бўлади:

$$M\ddot y_c = \frac{P_2}{g}\ddot y_{OA} + \frac{P_3}{g}\ddot y_3. \tag{5}$$

$\ddot y_3$ ва $\ddot y_{OA}$ ларнинг қийматларини (5) га қўйсак:

$$M\ddot y_c = -\frac{a\omega^2}{2g}(P_2 + 2P_3)\cos\omega t. \tag{6}$$

Боғланишга бўлган босимнинг миқдори динамик R реакция кучига тенг, шунинг учун (3) ва (6) тенгламалардан қуйидагини ҳосил қиламиз:

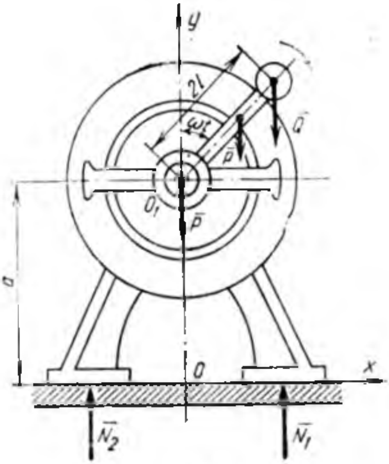
$$N = |R| = P_1 + P_2 + P_3 + \frac{a\omega^2}{2g}(P_2 + 2P_3)\cos\omega t. \tag{7}$$

59- масала. Оғирлиги P бўлган электр мотори силлиқ горизонтал фундаментга маҳкамланмасдан ўрнатилган. Узунлиги

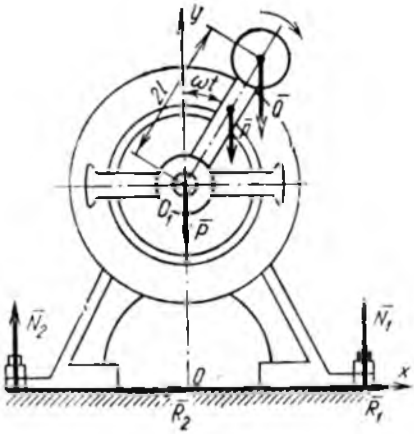
$2l$ ва оғирлиги P бўлган стержень бир учи билан мотор валига тўғри бурчак остида маҳкамланган, стерженнинг иккинчи учига Q жисм ўрнатилган; валнинг бурчак тезлиги ω га тенг (66- шакл):

1) моторнинг горизонтал ҳаракати;

2) агар электр моторининг ғилофи фундаментга болтлар билан маҳкамланган бўлса, шу болтларга таъсир қилувчи энг катта горизонтал зўриқиш R аниқлансин (67- шакл);



66- шакл.



67- шакл.

3) электр моторининг шундай бурчак тезлиги ω аниқлансинки, бунда болтлар билан фундаментга маҳкамланган электр мотори фундаментда сакраб силжийдиган бўлсин.

Ечиш. Механик система сифатида мотор, стержень ва юклардан иборат бўлган системани текширамиз. Моторнинг оғирлиги $\overline{P}$, стерженнинг оғирлиги $\overline{p}$, юкнинг оғирлиги $\overline{Q}$, фундамент реакциялари $\overline{N}_1, \overline{N}_2$ лар механик системага таъсир қилаётган ташқи кучлар ҳисобланади. Масала шарти бўйича фундамент силлиқ бўлгани учун таянч реакциялари таянчларга тик йўналган. Координата ўқлари системасини Oy ўқи стерженнинг бошланғич вертикал вазиятидан ўтадиган қилиб танлаб оламиз. Система симметрик бўлгани учун бошланғич пайтда системанинг инерция маркази Oy ўқининг устида бўлади, яъни $x_c=0$ ва ташқи кучларнинг Ox ўқига проекциялари нолга тенг бўлгани учун ҳар қандай вақтда ҳам $x_c=0$ бўлади. Бундан агар юк ўнг томонга силжиса (юк абсциссаси > 0), мотор чап томонга силжийди (марказининг абсциссаси < 0).

Q юк айланганда мотор гоҳ чап, гоҳ ўнг томонга силжиб бориб қайтар ҳаракат қилади. Шу сабабли моторнинг ҳаракатини текшириш ўрнига унинг бирор нуқтасининг ҳаракатини текширсак кифоя. Содда бўлиши учун O_1 моторнинг ҳаракатини текширамиз. O_1 марказнинг абсциссасини x_1 билан белгилаймиз, у вақтда инерция марказининг абсциссаси қуйидаги формуладан топилади:

$$x_c = \frac{P_{x_1} + P_{x_2} + Q_{x_3}}{P + p + Q} = \frac{P_{x_1} + p(l \sin \omega t + x_1) + Q(2l \sin \omega t + x_1)}{P + p + Q} \qquad (1)$$

$x_c = 0$ бўлгани учун (1) формуладан:

$$p_{x_1} + p(l \sin \omega t + x_1) + Q(2l \sin \omega t + x_1) = 0, \qquad (2)$$

бундан:

$$x_1 = \frac{l(p + 2Q) \sin \omega t}{P + p + Q}. \qquad (3)$$

Бу формуладан кўриниб турибдики, моторнинг маркази, амплитудаси $\frac{l(p+2Q)}{P+p+Q}$ ва даври $\frac{2\pi}{\omega}$ бўлган гармоник тебранма ҳаракат қилар экан.

Энди иккинчи саволни ечиш мақсадида моторни фундаментга болтлар билан бирлаштирамиз ва координата ўқлари системасини 67- шаклда кўрсатилгандек қилиб оламиз. Бу вазиятда механик системага олдин айтилган таъсир қилаётган кучлардан ташқари яна миқдори болтларга тушган горизонтал зўриқишга тенг бўлган болтларнинг реакция кучлари ҳам таъсир қилади. Болтлар реакциясининг йиғиндисини $R = R_1 + R_2$ билан белгилаймиз. Инерция марказининг нисбий Ox ўққа нисбатан ҳаракат дифференциал тенгламасини ёзамиз:

$$M \frac{d^2 x_c}{dt^2} = R_x^{(e)}$$

Инерция марказининг абсциссасини қуйидаги формуладан топамиз:

$$x_c = \frac{P_{x_1} + p_{x_2} + Q_{x_3}}{P + p + Q} = \frac{pl \sin \omega t + Q2l \sin \omega t}{P + p + Q} =$$

$$= \frac{l(p + 2Q) \sin \omega t}{P + p + Q}. \qquad (5)$$

Бундан икки марта вақтга нисбатан ҳосила олиб, (4) формулага қўйсак, қуйидаги ҳосил бўлади:

$$\frac{P + p + Q}{g} \cdot \frac{l(p + 2Q)\omega^2 \sin \omega t}{P + p + Q} = R_x^{(e)} \qquad (6)$$

ёки

$$R_x^{(e)} = \frac{l\omega^2 (p + 2Q)}{g} \sin \omega t. \qquad (7)$$

$\sin \omega t = 1$ бўлганда $R_x^{(e)}$ энг катта қийматга эга бўлади, яъни

$$R^{(e)} = R_{x\,\max}^{(e)} = \frac{l\omega^2 (p + 2Q)}{g}. \qquad (8)$$

Энди учинчи саволни ечиш мақсадида инерция марказининг ҳаракати ҳақидаги теоремани Oy ўққа нисбатан ёзамиз:

$$M\frac{d^2y_c}{dt^2} = -P - p - Q + N_1 + N_2. \tag{9}$$

Таянч реакцияларининг йиғиндисини $N = N_1 + N_2$ билан ва $M = \frac{P + p + Q}{g}$ деб белгилаймиз.

y_c ни қуйидаги формуладан топамиз:

$$y_c = \frac{Py_1 + py_2 + Qy_3}{P + p + Q} = \frac{Pa + p(a + l\cos\omega t) + Q(a + 2l\cos\omega t)}{P + p + Q},$$

бундан икки марта ҳосила оламиз:

$$\frac{d^2y_c}{dt^2} = -\frac{l(p + 2Q)\omega^2}{P + p + Q}\cos\omega t. \tag{10}$$

Бу ҳамма топилган қийматларни (9) га қуямиз:

$$-\frac{P + p + Q}{g}\cdot\frac{l(p + 2Q)\omega^2}{P + p + Q}\cos\omega t = -P - p - Q + N$$

ёки

$$-\frac{l(p + 2Q)\omega^2}{g}\cos\omega t = -P - p - Q + N. \tag{11}$$

Бундан таянч реакциясининг қийматини топамиз:

$$N = P + p + Q + \frac{l(p + 2Q)\omega^2}{g}\cos\omega t. \tag{12}$$

Булардан таянч реакция ўзгарувчи миқдор бўлиб, унинг энг кичик миқдори қуйидаги формуладан топилади:

$$N_{min} = P + p + Q - \frac{l(p + 2Q)\omega^2}{g}. \tag{13}$$

Агар $N_{min} > 0$ бўлса, бунинг физик моҳияти шундан иборат бўладики, таянч моторга босади ва Ньютоннинг учинчи қонунига асосан, мотор шу кучга қарама қарши йўналган куч билан таянчга босади, яъни таянчга сиқилади.

Агар $N_{min} = 0$ бўлса, бу шуни билдирадики, мотор таянчга сиқилмайди, бу вақтда мотор фундаментдан ажраши мумкин.

ω бурчак тезлик $N_{min} = 0$ бўлгандаги ω_0 бурчак тезлигидан катта бўлганида мотор фундаментда сакрай бошлайди. (13) формуладан ω_0 ни топамиз:

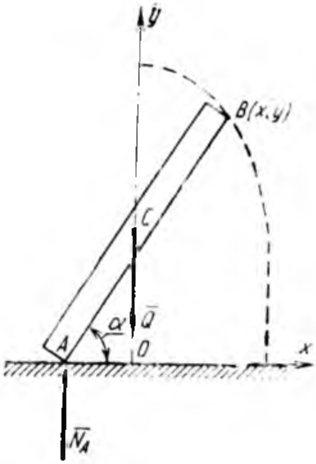
$$N_{min} = 0 \text{ бўлганда } \omega = \omega_0$$

$$\omega_0^2 = \frac{(P + p + Q)g}{l(p + 2Q)}. \tag{14}$$

Шундай қилиб, мотор

$$\omega > \sqrt{\frac{(P + p + Q)g}{l(p + 2Q)}} \tag{15}$$

бўлганда фундаментда сакрай бошлайди.



68- шакл.

60-масала. Бир жинсли оғир AB стержень аввал тинч ҳолатда бўлиб, α бурчак остида силлиқ горизонтал текисликка A учи билан таяниб туради. Кейин оғирлик кучининг таъсирида йиқила бошлайди (68-шакл). Стержень йиқилаётган пайтда B нуқтанинг траекторияси топилсин.

Ечиш. AB стерженнинг A учидаги боғланишни $\vec{N}_A$ реакция билан алмаштириб боғланишдан қутқазамиз. Стержень йиқилишида унга иккита вертикал куч таъсир қилади, яъни $\vec{N}_A$ — нормал реакция кучи ва $\overline{Q}$ — стерженнинг оғирлик кучи.

Ox ўқи горизонтал ва бошлангич пайтда Oy ўқи стержень ўқи билан бир чизиқда бўлсин. Энди (50,8) га асосан стержень инерция марказининг ҳаракат дифференциал тенгламалари қуйидагича бўлади:

$$M\frac{d^2x_M}{dt^2}=0,\quad M\frac{d^2y_M}{dt^2}=N_1-Q. \tag{1}$$

Биринчисини икки марта интегралласак:

$$\frac{d^2x_M}{dt^2}=0;\quad \frac{dx_M}{dt}=c_1;\quad x_M=c_1t+c_2, \tag{2}$$

$t=0$ бўлганда $x_M=0;\quad \dfrac{dx_M}{dt}=0,$

бундан
$$c_1=c_2=0,$$
демак,
$$x_M=0. \tag{3}$$

Бундан кўрамизки, стерженнинг инерция маркази ҳамма вақт бир вертикал бўйича ҳаракат қилар экан.

$AC=AB=a$ бўлгани учун стержень B учининг координаталари

$$x=a\cos\alpha,\quad y=2a\sin\alpha \tag{4}$$

бўлади.

Бу тенгламалардан α ни чиқарсак:

$$\cos\alpha=\frac{x}{a},$$

$$\sin\alpha=\frac{y}{2a},$$

буларни квадратга ошириб қўшамиз;

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{4a^2} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

ёки

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{4a^2} = 1. \tag{5}$$

Стержень B учининг траекторияси эллипс бўлар экан.

53-§. Материал система ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теорема

Материал система ҳамма нуқталарининг ҳаракат миқдорларининг геометрик йиғиндиси материал системанинг ҳаракат миқдори деб аталади, яъни

$$\bar{K} = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \bar{v}_\nu$$

бу ерда K—система ҳаракат миқдорининг вектори.

Система ҳаракат миқдорининг декарт координата ўқларидаги проекциялари қуйидагича бўлади:

$$K_x = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu v_{\nu x} = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \frac{dx_\nu}{dt} = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \dot{x}_\nu,$$

$$K_y = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu v_{\nu y} = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \frac{dy_\nu}{dt} = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \dot{y}_\nu, \tag{53,1}$$

$$K_z = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu v_{\nu z} = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \frac{dz_\nu}{dt} = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \dot{z}_\nu.$$

Система ҳаракат миқдорининг бош вектори инерция марказининг тезлиги билан бутун система массасининг кўпайтмасига тенг.

$$\bar{K} = M\bar{v}_c, \tag{53,2}$$

бунда

$$M = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu$$

(53,2) нинг ўқлардаги проекцияси:

$$K_x = Mv_{cx} = M\frac{dx_c}{dt} = M\dot{x}_c,$$

$$K_y = Mv_{cy} = M\frac{dy_c}{dt} = M\dot{y}_c, \tag{53,3}$$

$$K_z = Mv_{cz} = M\frac{dz_c}{dt} = M\dot{z}_c.$$

Система ҳаракат миқдор теоремаси қуйидагича таърифланади:

система ҳаракат миқдорининг бош векторидан вақтга нисбатан олинган ҳосила системага қуйилган ташқи кучларнинг бош векторига тенг, яъни

$$\frac{d\overline{K}}{dt} = \overline{R}^{(e)}, \tag{53,4}$$

бу ерда

$$\overline{R}^{(e)} = \sum_{\nu=1}^{n} \overline{F}_{\nu}^{(e)}$$

системага таъсир қилаётган ташқи кучларнинг бош вектори.

Система ҳаракат миқдорининг бирор қўзғалмас ўқдаги проекциясидан вақтга нисбатан олинган ҳосила системага таъсир қилаётган ташқи кучлар бош векторининг шу ўқдаги проекциясига тенг, яъни

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\overline{K}_x}{dt} &= X^{(e)}, \\ \frac{d\overline{K}_y}{dt} &= Y^{(e)} \\ \frac{d\overline{K}_z}{dt} &= Z^{(e)}. \end{aligned}\right\} \tag{53,5}$$

бунда

$$X^{(e)} = \sum_{\nu=1}^{n} X_{\nu}^{(e)}; \quad Y^{(e)} = \sum_{\nu=1}^{n} Y_{\nu}^{(e)}; \; Z^{(e)} = \sum_{\nu=1}^{n} Z_{\nu}^{(e)}.$$

Хулоса. Системага таъсир қилаётган ташқи кучларнинг бош вектори ёки унинг бирор қўзғалмас ўқидаги проекцияси ҳамма вақт нолга тенг бўлса, системанинг ҳаракат миқдори ёки система ҳаракат миқдорининг ўша қўзғалмас ўқдаги проекцияси ўзгармас бўлади, яъни

1) $$\overline{R}^{(e)} = \sum_{\nu=1}^{n} \overline{F}_{\nu}^{(e)} = 0$$

бўлса

$$\overline{K} = \sum_{\nu=1}^{n} m_{\nu}\overline{v}_{\nu} = M\overline{v}_{c} = \text{const}, \tag{53,6}$$

бўлади.

2) $$R_x^{(e)} = X^{(e)} = \sum_{\nu=1}^{n} X_{\nu}^{(e)} = 0$$

бўлса

$$K_x = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu v_{\nu x} = M_{cx} = \text{const} \qquad (53.7)$$

бўлади.

Система ҳаракат миқдорининг бирлиги *кГ · сек* ёки *м · кГ · сек*$^{-1}$.

54-§. Масала ечишга оид методик кўрсатмалар

Материал нуқталар система ҳаракат миқдорининг ўзгариш ҳақидаги теоремага ёки система ҳаракат миқдорининг сақланиш қонунига асосан ечиладиган масалаларни қуйидаги тартибда ечиш керак.

1. Системага таъсир қилаётган ҳамма ташқи кучларни, яъни қўйилган кучлар ва реакция кучларини шаклда кўрсатиб ифодалаб олиш керак.
2. Қўзғалмас координата ўқлари системасини танлаб олиш керак.
3. Система учун ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теоремасининг танлаб олинган координата ўқларидаги проекция тенгламалари (53,5) ни ёзиб олиш керак ёки система ҳаракат миқдорининг сақланиш қонуни (53,6) ни ёзиб олиш керак.
4. Ёзилган дифференциал тенгламаларни интеграллаш керак.
5. Бошланғич шартларни ёзиб олиш керак.
6. Бошланғич шартлардан фойдаланиб, интеграллаш номаълум ўзгармасларини топиб олиш керак.
7. Топилган ўзгармас номаълумларнинг қийматларини дифференциал тенгламани интеграллаганда чиққан тенгламаларга қўйиш керак.
8. Тузилган тенгламалардан номаълум сонлар топилади.

Бу параграфга оид масалаларни уч асосий группага ажратиш мумкин:

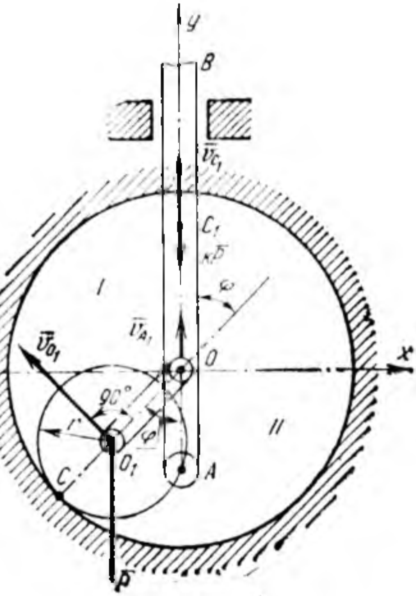
а) системанинг ҳаракат миқдори ҳисобланадиган масалалар; бунга И. В. Мешчерский „Назарий механикадан масалалар тўплами" китобидаги 966—969-масалалар тегишлидир. Бу типдаги масалаларни (53,1) формулага биноан ёки (53,2) ва (53,3) формулага биноан ечиш мумкин;

б) системанинг ҳаракат миқдори ёки система ҳаракат миқдорининг қўзғалмас ўқдаги проекцияси ўзгармас бўлган, яъни (53,6) ёки (53,7) тенгламалар билан ечиладиган масалалар; бунга И. В. Мешчерский „Назарий механикадан масалалар тўплами" китобидаги 970—974-масалалар тегишлидир;

в) системанинг ҳаракат миқдори ҳақидаги теорема татбиқ этиладиган масалалар; бунга И. В. Мешчерский „Назарий механикадан масалалар тўплами" китобидаги 975—980-масалалар киради.

55-§. Масалалар

61-масала. 69-шаклда кўрсатилган механизмдаги ҳаракатланувчи ғилдиракнинг радиуси, r оғирлиги P бўлиб оғирлик маркази O_1 нуқтада; тўғри чизиқли AB стержень ҳаракат қилувчи ғилдиракдан k марта оғир бўлиб, оғирлик маркази унинг ўртасида OO_1 кривошип O ўқ атрофида ўзгармас ω бурчак тезлик билан айланади.



69-шакл.

Кривошип массасини ҳисобга олмай системанинг ҳаракат миқдори ҳисоблансин (69-шакл.)

Ечиш. Бу система иккита жисмдан: ҳаракатланаётган I ғилдирак ва AB стержендан иборат. Шунинг учун

$$\overline{K} = \overline{K}_1 + \overline{K}_2, \qquad (1)$$

бу ерда $\overline{K}_1$, $\overline{K}_2$ — ҳаракатланаётган I ғилдирак ва AB стерженнинг ҳаракат миқдори, ёки буларнинг ҳар қайсисига (53,2) формулани алоҳида қўлласак, қуйидаги ҳосил бўлади:

$$\overline{K} = \frac{kP}{g}\overline{v}_{0.1} + \frac{P}{g}\overline{v}_{0.1} \qquad (2)$$

бу ерда $\overline{v}_{c_1}, \overline{v}_{o_1}$ — тегишлича C_1 O_1 нуқталарнинг (стержень оғирлик маркази ва I ғилдирак оғирлик марказининг) тезликлари.

O_1 нуқта O нуқта атрофида айланаётган кривошипда бўлгани учун унинг $\overline{v}_{o_1}$ тезлик вектори OO_1 га тик ва модули

$$v_{o_1} = r\omega \qquad (3)$$

га тенг.

AB стержень илгарилама ҳаракат қилади, демак,

$$v_{c_1} = v_{A_1} \qquad (4)$$

ва $\overline{v}_{A_1}$ тезлик AB бўйича йўналган.

I ғилдиракдаги A нуқтанинг тезлигини топиш учун у ғилдиракнинг оний айланиш маркази I ва II ғилдираклар тегишган C нуқтада бўлади.

Демак,

$$\frac{v_{A_1}}{v_{O_1}} = \frac{AC}{O_1C} = \frac{2r\sin\varphi}{r} = 2\sin\varphi, \qquad (5)$$

бу ерда $\varphi = \omega t$ — кривошипнинг айланиш бурчаги.

(5) дан:

$$v_{A_1} = v_o\, 2\sin\varphi = 2r\omega\sin\omega t. \qquad (6)$$

Энди (2) тенгламадан изланаётган система ҳаракат миқдорининг ўқдаги проекцияларини топамиз:

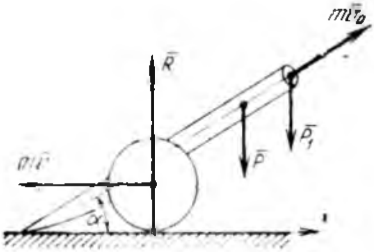
$$K_x = \frac{-P}{g} v_o \cos\varphi = -\frac{Pr\,\omega\cos\varphi}{g} = -\frac{P}{g} r\omega\cos\omega t,$$

$$K_y = \frac{P}{g} v_o \sin\varphi + \frac{kP}{g} v_{A_1} = \frac{P}{g} r\omega\sin\omega t + 2\frac{kP}{g} r\omega\sin\omega t =$$

$$= \frac{P}{g} r\omega(1+2k)\sin\omega t.$$

62-масала. Горизонтга билан $\alpha = 30^\circ$ бурчак ҳосил бўладиган қилиб ўрнатилган тўп стволининг оғирлиги 1100 *н*. Снаряднинг оғирлиги 54 *н*. Снаряд стволнинг оғзидан чиқишда $v_0 = 900$ *м/сек* тезлик билан ҳаракат қилади.

Снаряднинг отилиб чиқиш пайтида тўп стволининг эркин ҳолда орқага қайтиш тезлиги аниқлансин (70-шакл).



70- шакл.

Ечиш. Тўпнинг оғирлик кучини $\bar{P}$ билан, снаряднинг оғирлик кучини $\bar{P}_1$ билан белгилаймиз ва системанинг боғланишини унинг $\bar{R}$ реакция кучи билан алмаштириб системани боғланишидан қутқазамиз. $\bar{P}$, $\bar{P}_1$ ва $\bar{R}$ кучлар Ox ўқига тик, демак, система ҳаракат миқдорининг сақланиш қонуни $K_x = \text{const}$ (53,7) га мувофиқ унинг шу Ox ўқдаги проекцияси ҳам ўзгармайди.

Биринчи ўқ отилган пайтгача система нуқталарининг тезликлари нолга тенг. Тўп стволининг снаряд чиқиш пайтидаги тезлигини $\bar{v}$ билан, снаряд тезлигини $\bar{v}_0$ билан белгилаймиз.

(54,7) тенгликка асосан ҳар қандай вақтда $K_x = 0$, шу сабабли:

$$-\frac{P}{g} v + \frac{P_1}{g} v_0 \cos 30^\circ = 0, \qquad (1)$$

бундан:

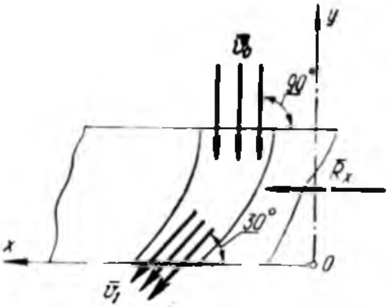
$$v = \frac{P_1 v_0}{P}\cos 30^\circ. \qquad (2)$$

(2) тенгликка сон қийматларни қўйсак, қуйидаги ҳосил бўлади:

$$v = \frac{54 \cdot 900}{1100} \cdot \frac{1{,}73}{2} = 3{,}82\ м/сек.$$

Тўп стволи $v = 3{,}82$ *м/сек* тезлик билан снаряд ҳаракатига қарама-қарши томонга орқага қайтади.

63-масала. Ўзгарувчан кесимли каналга горизонт билан $\alpha = 90°$ бурчак ҳосил қилиб, $\bar{v}_0 = 2$ *м/сек* тезлик билан сув кирмоқда; канал вертикал текисликка нисбатан симметрик бўлиб, сув кирадиган жойидаги кўндаланг кесими $0{,}02$ $м^2$; сувнинг каналдан чиқиш вақтидаги тезлиги $v_1 = 4$ *м/сек* бўлиб, горизонтга $\alpha_1 = 30°$ бурчак остида йўналган. Сув канал деворида ҳосил қиладиган реакциянинг горизонтал ташкил этувчиси аниқлансин (71-шакл).



71-шакл

Ечиш. Координата ўқлари системасини 71-шаклда кўрсатилгандек қилиб оламиз.

Каналнинг кўндаланг кесимига сув кўрсатадиган босимнинг горизонтал ташкил этувчисини R_x билан белгилаймиз.

Сув каналдан $v_x = v_1 \cos 30°$ тезлик билан чиқади деб ҳисоблаймиз, у ҳолда каналдан dt вақтда қуйидаги ҳажмда сув чиқади:

$$dm = \gamma \frac{F}{g} v_0 \cos \alpha\, dt. \qquad (1)$$

Бу айтилган ҳажмдаги сув массасининг ҳаракат миқдори қуйидагича бўлади:

$$dK = \frac{\gamma F v_0}{g} \cos \alpha\, dt \cdot v_1. \qquad (2)$$

бу ерда F — сув кираётган канал кўндаланг кесимининг юзи.

Ҳаракат миқдорининг x ўқидаги проекцияси (53,5) теоремасидан фойдалансак, қуйидагича бўлади:

$$dK_x = R_x dt.$$

Каналга кирадиган ва каналдан чиқадиган сув бир вақтда бир хил бўлгани учун

$$dK_x = \frac{\gamma F v_0 dt}{g} v_1 \cos \alpha = R_x dt, \qquad (4)$$

бундан:

$$R_x = \frac{\gamma F v_0 v_1}{g} \cos \alpha = \frac{0{,}001 \cdot 200 \cdot 200 \cdot 400}{981} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 14{,}1\ кГ.$$

56-§. Импульслар теоремаси

(Материал нуқталар системасининг интеграл формулада ҳаракат миқдори бош векторининг ўзгариш теоремаси.)

Материал нуқталар системаси ҳаракат миқдори бош векторининг маълум вақт ичидаги ўзгариши системага қўйилган ташқи кучлар бош векторининг ана шу вақт ичидаги тўла импульсига тенг:

$$\overline{K}_2 - \overline{K}_1 = \overline{S}^{(e)}, \tag{56,1}$$

бу ерда

$$\overline{S}^{(e)} = \int_{t_1}^{t_2} \overline{R}^{(e)} dt. \tag{56,2}$$

Системага таъсир қилаётган кучнинг вақт ичидаги эффектини ифодалайдиган физик миқдор ташқи кучлар бош векторининг импульси ёки тўла импульси деб аталади.

Бу теоремани ифодаловчи формуланинг декарт координата ўқларидаги проекцияларини ёзамиз:

$$\left.\begin{aligned} K_{2x} - K_{1x} &= S_x^{(e)}, \\ K_{2y} - K_{1y} &= S_y^{(e)}, \\ K_{2z} - K_{1z} &= S_z^{(e)}, \end{aligned}\right. \tag{56,4}$$

бу ерда

$$S_x^{(e)} = \int_{t_1}^{t_2} X^{(e)} dt, \; S_y^{(e)} = \int_{t_1}^{t_2} Y^{(e)} dt, \; S_z^{(e)} = \int_{t_1}^{t_2} Z^{(e)} dt \Big\}. \tag{56,4'}$$

Система ҳаракат миқдори бош векторининг ўзгариши ҳақидаги Л. Эйлер теоремасининг кўринишини ўзгартирган турлари кўпинча узлуксиз муҳит (суюқлик ва газларнинг тезлиги товуш тезлигидан катта фарқ қилган муҳит) ҳаракатларини текширишда қўлланилади.

Ҳажм ва сатҳ кучларининг $\overline{R}_x$, $\overline{R}_c$ векторлари ва ажратиб олинган ҳажм ичига қараб йўналган труба қирқими орқали кирувчи ҳам чиқувчи суюқлик массаси ҳаракат миқдорининг векторлари ёпиқ кўп бурчак ҳосил қилади. (Бу векторларнинг геометрик йиғиндиси нолга тенг, 72- шакл, *а*, *б*.)

$$M\overline{v}_1 - M\overline{v}_2 + \overline{R}_x + \overline{R}_c = 0, \tag{56,5}$$

бу ерда $M = \rho_1 \sigma_1 v_1 = \rho_2 \sigma_2 v_2$; σ_1, σ_2 — кўндаланг кесимнинг юзи; ρ_1, ρ_2 — суюқликнинг зичлиги; v_1, v_2 — суюқликнинг кўндаланг кесимдаги тезлиги.

(56,5) нинг ўқлардаги проекцияларини ёзамиз:

$$\left.\begin{aligned} M(v_{1x} - v_{2x}) + X_x + X_c &= 0, \\ M(v_{1y} - v_{2y}) + Y_x + Y_c &= 0, \\ M(v_{1z} - v_{2z}) + Z_x + Z_c &= 0. \end{aligned}\right| \tag{56,5}$$

Тўла импульс векторининг бирор ўқдаги проекцияси нолга тенг бўлса, система ҳаракат миқдори векторининг шу ўқдаги проекцияси ўзгармас бўлади.

Масалан, $S_x^{(e)} = 0$ бўлса

$$K_{2x} = K_{1x} \qquad (56,7)$$

бўлади.

57-§. Масала ечишга оид методик кўрсатмалар

Бу параграфга оид масалаларни қуйидаги тартибда ечиш керак.

1. Қўзғалмас координата ўқлари системасини танлаб олиш керак.

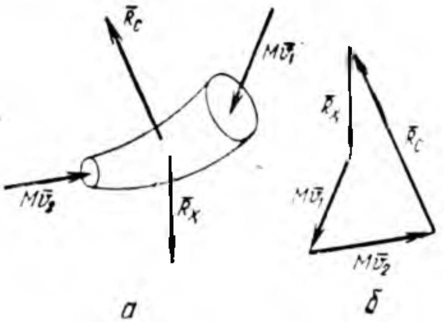
2. Таъсир қилаётган ташқи кучларнинг схемасини тузиш керак.

Система эркин бўлмаса, уни қўйилган боғланишлардан қутқазиш керак.

3. (56,4) формулага асосан бош импульс векторининг координата ўқларидаги проекцияларини топиш керак.

4. (56,3) ёки (56,7) система тенгламаларини тузиш керак ва баъзи миқдорларни топиш керак.

5. Узлуксиз муҳит ҳаракати текширилганда Эйлернинг декарт координата ўқларидаги проекция формуласи (56,6) ни қўллаш керак.



72- шакл

(56,5) тенгламани тузишда, вақт бирлигида пастки (оқиш бўйича) кўндаланг кесимдан ўтган массанинг ҳаракат миқдори вектори ҳамма вақт трубада ажратилган суюқлик ҳажмининг ичига йўналтирилади.

Бу параграфга И. В. Мешчерский „Назарий механикадан масалалар тўплами“ китобидаги 975—980-масалалар киради.

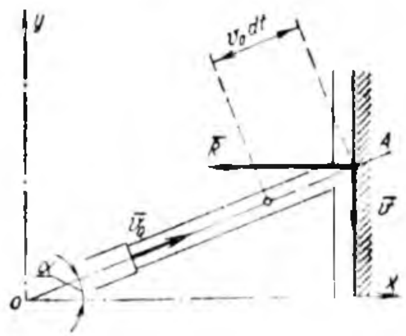
58-§. Масалалар

64-масала. Кўндаланг кесими 16 $см^2$ бўлган ўт ўчирувчи шлангнинг учидан сув 8 $м/сек$ тезлик билан горизонтга $\alpha = 30^\circ$ бурчак остида отилиб чиқади.

Сув оқимининг шаклига оғирлик кучининг кўрсатадиган таъсирини ҳисобга олмай, сув оқимининг вертикал деворга кўрсатадиган босими аниқлансин. Сув зарралари деворга дуч келганида девор бўйлаб йўналган тезлик олади деб ҳисоблансин (73-шакл).

Ечиш. Координата ўқларини 73-шаклда кўрсатилгандек танлаб оламиз.

Сув зарраси деворга босим кўрсатганда, у деворда шу босимга тенг, аммо қарама-қарши томонга йўналган $\bar{R}$ реакцияни ҳосил қилади. Сув зарраси девор билан учрашгандан кейин девор бўйлаб эркин оқиб тушади деб фараз қилингани учун деворнинг $\bar{R}$ реакцияси унинг нормали бўйича йўналган деб ҳисоблаш мумкин.



73- шакл.

Сув оқимининг тезлиги катта бўлганда, сув заррасига девор реакциясидан бошқа таъсир қилаётган ташқи кучлар кичик бўлгани учун уларни ҳисобга олмаса ҳам бўлади.

Сув оқимига импульс теоремасининг координаталардаги проекцияси формуласини қўллаймиз: горизонтал O_x ўқидаги проекцияси

$$K_{2x} - K_{1x} = S_x^{(e)}. \tag{1}$$

Сув оқимининг чексиз кичик dt вақт ичидаги ҳаракатини текширамиз. Система учун девор ёнидаги оқими $AB = v_0dt$ кесмага мос бўлган сув ҳажмини оламиз. Бу системанинг массаси қуйидагига тенг бўлади:

$$M = v_0dt \cdot F\gamma,$$

бунда $F = 16$ *см*^{2} — сув оқими кўндаланг кесимининг юзи, γ — ҳажмий зичлик, яъни бирлик ҳажмдаги сувнинг массаси. $t=0$ бўлганда сув оқимининг ҳамма заррачалари горизонтал x ўқига бир хил $\alpha = 30^\circ$ бурчак остида қия бўлган $\bar{v}_0$ тезликка эга бўлади.

Демак,

$$K_{1x} = Mv_{0x} = Mv_0 \cos\alpha = v_0\,dt\,F\gamma\,v_0 \cos\alpha = v_0^2\,F\gamma \cos\alpha\,dt, \tag{2}$$

dt вақт ўтгандан кейин сув оқимининг ажратиб олинган ҳажмидаги ҳамма заррачалари деворга тегиб горизонтал x ўқи билан 90° бурчак ҳосил қилган $\bar{v}$ тезликка эга;

демак,

$$K_{2x} = Mv_x = Mv \cos 90^\circ = 0. \tag{3}$$

Бу системага фақат битта ташқи $\bar{R}$ куч таъсир қилади ва унинг x ўқидаги проекцияси R га тенг бўлади. Бу ҳол учун dt

вақт ичида ташқи кучлар импульсининг x ўқидаги проекцияларининг йиғиндиси қуйидагига тенг:

$$S_x^{(e)} = -R\,dt. \tag{4}$$

Шундай қилиб, текширилаётган ҳол учун қўлланиши мумкин бўлган (56,3) тенглама қуйидагича:

$$-v_0^2F\gamma\cos\alpha\,dt = -R\,dt. \tag{5}$$

Бундан девор реакциясини (модули изланаётган босимга тенг реакцияни) топамиз:

$$R = \gamma v_0^2 F\cos\alpha. \tag{6}$$

Бу текширилаётган ҳолда сув оқимининг тезлиги $v_0 = 8\ м/сек$, сув оқимининг кўндаланг кесим юзи $F = 16\ см^2 = 0{,}0016\ м^2$.

Масалада ҳажм $м^3$ билан ифодалангани учун сув массасининг зичлигини 1 $м^3$ орқали ифодалаймиз, яъни зичлик

$$\gamma = \frac{1000}{9{,}81} = 102\,\frac{кГ\cdot сек^2}{м^4};$$

$$\cos\alpha = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}866.$$

(6) га сон қийматларини қўйсак, қуйидаги ҳосил бўлади:

$$R = 102\cdot 8^2\cdot 0{,}0016\cdot 0{,}866 = 9{,}05\ кГ.$$

65- масала. Оғирлиги 600 $т$ бўлган шатак пароход 1,5 $м/сек$ тезлик олганидан кейин унга шатак арқони таранг тортилган ва оғирлиги 400 $т$ бўлган баржа пароход унинг кетидан юра бошлаган.

Юргизувчи куч билан сувнинг қаршилик кучини мувозанатланган деб ҳисоблаб, пароход билан баржанинг умумий тезлиги топилсин.

Ечиш. Бунда ташқи кучлар таркибига пароходнинг оғирлиги $\overline{P}$, баржанинг оғирлиги $\overline{Q}$, ҳаракатга келтирувчи $\overline{F}$ кучи ва сувнинг қаршилиги $\overline{R}$ киради.

Масаланинг шартидан $\overline{F}$ ва $\overline{R}$ кучлар мувозанатланувчи кучлар эканлиги ҳамда $\overline{P}$ ва $\overline{Q}$ оғирлик кучларининг ҳаракат йўналишидаги проекциялари нолга тенглиги маълум, демак (56,7) ҳаракат миқдорининг сақланиши теоремасини қўллаш мумкин.

Агар Ox ўқининг йўналиши билан ҳаракат йўналиши бир томонга бўлганда

$$K_{2x} = K_{1x} = \text{const} \tag{1}$$

бўларди.

Система иккита материал нуқтадан иборат бўлгани учун:

$$m_1v_1 + m_2v_2 = \text{const}. \tag{2}$$

Бошланғич пайтда система ҳаракатда бўлмагани учун бу ўзгармас нолга тенг, яъни const = 0, демак,

$$m_1v_1 + m_2v_2 = 0, \tag{3}$$

бу ерда

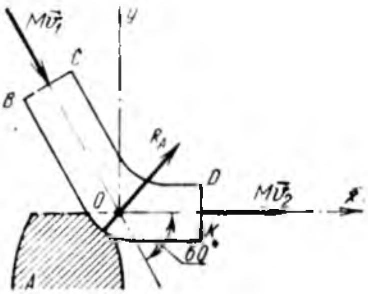
$$m_1 = \frac{P}{g}, \quad m_2 = \frac{P+Q}{g};$$

бунда $v_1 = 1{,}5$ *м/сек*, v_2 — пароход билан баржанинг биргаликдаги, яъни биз излаётган тезлиги.

(3) дан v_2 ни топамиз:

$$v_2 = \frac{m_1v_1}{m_2} = \frac{Pv_1}{P+Q} = \frac{600 \cdot 1{,}5}{600+400} = \frac{900}{1000} = 0{,}9 \text{ м/сек}.$$

66- масала. Диаметри 20 *см* бўлган труба тирсагидан A таянчга тушадиган қўшимча босим аниқлансин. Трубанинг ўқи горизонтал текисликда жойлашган (шаклда унинг юқори томондан кўриниши тасвирланган). Трубада 4 *м/сек* тезлик билан сув оқади, сувнинг трубага кириш вақтидаги тезлиги трубадан чиқиш вақтидаги тезлиги билан 60° бурчак ҳосил қилади (74- шакл).



74- шакл.

Ечиш. Бу масалани ечишда Эйлернинг узлуксиз муҳит учун топган теоремасидан фойдаланамиз. Трубадан $BCDK$ ҳажмни ажратиб оламиз (74- шакл).

A таянчнинг реакцияси $\bar{R}_A$ сатҳ кучларининг векторлари $M\bar{v}_1$, $M\bar{v}_2$ ларни шаклда тасвирлаймиз. (Труба тирсагининг оғирлиги ва шу колонна билан чегараланган сувнинг оғирлиги қўшимча босимга таъсир қилмайди.)

Координата ўқлари системасини 74- шаклда кўрсатилгандек қилиб оламиз.

Эйлер теоремасини x ва y ўқлардаги проекциялар орқали ёзамиз:

$$\begin{aligned} R_{Ax} + Mv_1\cos\alpha - Mv_2\cos\beta &= 0, \\ R_{Ay} - Mv_1\sin\alpha + Mv_2\sin\beta &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

бу ерда $\alpha = 60°$, $\beta = 0°$,

$$v_1 = v_2 = v = 4\frac{м}{сек} = 40\frac{дм}{сек}; \qquad \gamma = 1\frac{кГ}{дм^3};$$

$$d = 2\,дм, \quad M = \frac{\pi d^2 v}{4g}\gamma \text{ ёки } M = \frac{3{,}14 \cdot 2^2 \cdot 40}{4 \cdot 9{,}81}\cdot 1 = 1{,}28\,\frac{кГ\ сек^2}{м}.$$

Бу тенгламалардан R_{Ax} ва R_{Ay} ларни топамиз:

$$R_{Ax} = Mv_2\cos\beta - Mv_1\cos\alpha, \qquad (2)$$
$$R_{Ay} = Mv_1\sin\alpha - Mv_2\sin\beta.$$

Тенгликка сон қийматларни қуйсак, қуйидагилар ҳосил бўлади:

$$R_{Ax} = Mv(\cos\beta - \cos\alpha) = 1{,}28\cdot 40\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 25{,}6\ кГ,$$

$$R_{A_x} = Mv(\sin\alpha - \sin\beta) = 1{,}28\cdot 40\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 0\right) = 44{,}29\ кГ.$$

Энди R_A қўшимча босимнинг реакциясини топамиз, қўшимча босим ҳам миқдор жиҳатидан шунга тенг бўлади:

$$R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2} = \sqrt{(25{,}6)^2 + (44{,}29)^2} = \sqrt{2616{,}9641} \approx 51{,}2\ кГ.$$

59-§. МАТЕРИАЛ НУҚТАЛАР СИСТЕМАСИ ҲАРАКАТ МИҚДОРИ БОШ МОМЕНТИНИНГ ЎЗГАРИШИ ҲАҚИДАГИ ТЕОРЕМА. ИНЕРЦИЯ МОМЕНТИ

Қўзғалмас ўқ атрофида айланаётган қаттиқ жисмнинг ҳаракат миқдори моменти ва айланма ҳаракат дифференциал тенгламаси. Гироскопларнинг элементар назарияси

Бирор нуқтага нисбатан система материал нуқталари ҳаракат миқдори моментларининг геометрик йиғиндиси ўша нуқтага нисбатан система ҳаракат миқдорининг моменти ёки система ҳаракат миқдорининг бош моменти деб аталади:

$$\bar{L}_0 = \sum_{\nu=1}^{n} \bar{L}_{\nu 0}. \qquad (59{,}1)$$

Ўққа нисбатан система ҳаракат миқдорининг моменти система материал нуқталарининг шу ўққа нисбатан ҳаракат миқдорлари моментларининг алгебраик йиғиндисига тенг, яъни

$$L_x = \sum_{\nu=1}^{n} L_{\nu x},$$
$$L_y = \sum_{\nu=1}^{n} L_{\nu y}, \qquad (59{,}2)$$
$$L_z = \sum_{\nu=1}^{n} L_{\nu z}.$$

Илгарилама ҳаракатдаги қаттиқ жисмнинг хар қандай ўққа нисбатан ҳаракат миқдорининг моменти, системанинг ҳамма массаси жойлашган инерция марказининг ўша ўққа нисбатан ҳаракат миқдорининг моментига тенг, яъни

$$L_z = m_z(M\bar{v}_c). \tag{59,3}$$

Қўзғалмас Oz ўқ атрофида айланаётган жисмнинг айланиш ўқига нисбатан ҳаракат миқдорининг моменти қуйидаги формуладан топилади:

$$L_z = I_z\omega, \tag{59,4}$$

бу ерда $I_z = \int\limits_{(M)} (x^2 + y^2)\,dm$ жисмнинг Oz — айланиш ўқига нисбатан инерция моменти; ω — айланиш бурчак тезлиги.

Жисм зарраси массаси билан ундан Oz айланиш ўқигача бўлган масофа квадрати кўпайтмасининг жисмни қоплаган барча зарралар бўйича олинган йиғиндиси жисмнинг ана шу айланиш ўқига нисбатан I_z инерция моменти дейилади, яъни

$$I_z = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu r_\nu^2. \tag{59,5}$$

Қаттиқ материал жисмнинг ҳажмини унинг массаси узлуксиз равишда қопласа, унинг инерция моменти қуйидагича топилади:

$$I_z = \int\limits_{(M)} r^2 dm. \tag{59,6}$$

Жисм бир жинсли бўлса, инерция моменти қуйидагича бўлади:

$$I_z = \frac{M}{V}\int\limits_{(V)} r^2 dV, \tag{59,7}$$

бу ерда M—қаттиқ жисмнинг массаси; V—қаттиқ жисм ҳажми; dV—элементар ҳажм. Экваториал, яъни ўққа нисбатан инерция моментини ҳисоблаш формуласи қуйидагича бўлади:

$$\begin{aligned} I_x &= \int\limits_{(M)} (y^2 + z^2)\,dm, \\ I_y &= \int\limits_{(M)} (x^2 + z^2)\,dm, \\ I_z &= \int\limits_{(M)} (x^2 + y^2)\,dm. \end{aligned} \tag{59,8}$$

Марказдан қочувчи инерция моменти қуйидагига тенг:

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \int\limits_{(M)} xydm, \\ I_{yz} &= \int\limits_{(M)} yzdm, \\ I_{xz} &= \int\limits_{(M)} xzdm. \end{aligned} \tag{59,9}$$

Координата ўқлари билан α, β, γ бурчаклар ҳосил қилувчи жисмнинг инерция моменти қуйидаги формула билан ҳисобланади.

$$I_a = I_x \cos^2\alpha + I_y \cos^2\beta + I_z \cos^2\gamma - 2I_{xy} \cos\alpha \cos\beta -$$
$$- 2I_{yz} \cos\beta \cos\gamma - 2I_{xz} \cos\alpha \cos\gamma. \qquad (59,10)$$

Жисм инерция марказидан ўтадиган ўққа нисбатан жисмнинг инерция моментини I_c билан белгилаймиз, у вақтда инерция марказидан ўтадиган ўққа параллел бўлган ҳар қандай ўққа нисбатан инерция моменти қуйидаги формула бўйича топилади:

$$I_z = I_c + Md^2. \qquad (59,11)$$

бу ерда d — ўқлар орасидаги энг қисқа масофа.

Ўқдан бирор масофада бўлган нуқтага системанинг массаси жойлашган бўлиб, унинг ўққа нисбатан инерция моменти жисмнинг ўша ўққа нисбатан инерция моментига тенг бўлса, ўқдан шу нуқтагача бўлган масофа инерция радиуси деб аталади, яъни

$$\rho_z = \sqrt{\frac{I_z}{M}}. \qquad (59,12)$$

Бир жинсли ва кўндаланг кесими ўзгармас бўлган стерженнинг учидан ўтган ва унинг геометрик ўқига тик бўлган ўққа нисбатан инерция моменти қуйидагича:

$$I_z = \frac{1}{3} Ml^2. \qquad (59,13)$$

Радиуси r, массаси симметрия ўқига нисбатан текис таралган доиравий кесимли цилиндрнинг геометрик ўқига нисбатан инерция моменти қуйидагига тенг:

$$I_z = \frac{1}{2} Mr^2. \qquad (59,14)$$

Радиуси r_1, массаси M бўлган сферанинг координата ўқларига нисбатан инерция моменти қуйидагича бўлади:

$$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5} Mr^2. \qquad (59,15)$$

Битта қўзғалмас нуқтаси бўлган жисмнинг, жисм билан бириктирилган қўзғалувчи координата ўқларидаги жисм ҳаракат миқдори бош моментининг проекциялари қуйидаги формулалар билан ҳисобланади:

$$\begin{aligned} L'_x &= I_x\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{zx}\omega_z, \\ L'_y &= I_y\omega_y - I_{yz}\omega_z - I_{yx}\omega_x, \\ L'_z &= I_z\omega_z - I_{zx}\omega_x - I_{yz}\omega_y, \end{aligned} \qquad (59,16)$$

бу ерда ω_x, ω_y, ω_z — оний айланиш бурчак тезлиги векторининг координата ўқларидаги проекциялари.

Система ҳаракат миқдори моментининг теоремаси қуйидагича таърифланади:

бирор нуқтага нисбатан олинган ҳаракат миқдори моменти бош векторининг вақтга нисбатан ҳосиласи системага қўйилган ташқи кучларнинг ана шу нуқтага нисбатан олинган бош моментига тенг, яъни

$$\frac{d\bar{L}_0}{dt} = \bar{M}_0^{(e)}. \tag{59,17}$$

Бунинг координата ўқларидаги проекциялар орқали ифодаси қуйидагича бўлади:

$$\frac{dL_x}{dt} = M_x^{(e)} = \sum_{\nu=1}^{n} m_x(\bar{F}_\nu^{(e)}),$$

$$\frac{dL_y}{dt} = M_y^{(e)} = \sum_{\nu=1}^{n} m_y(\bar{F}_\nu^{(e)}), \tag{59,18}$$

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z^{(e)} = \sum_{\nu=1}^{n} m_z(\bar{F}_\nu^{(e)}).$$

Ҳаракат миқдори бош моментининг Резаль теоремаси дейилган иккинчи таърифи қуйидагича:

бирор марказга нисбатан система ҳаракат миқдори бош моменти вектори учининг тезлиги системага қўйилган ташқи кучларнинг марказга нисбатан бош моментига тенг, яъни

$$\bar{v}_0 = \bar{M}_0^{(e)}.$$

Хулоса.

1. Агар $M_0^{(e)} = 0$ бўлса, системанинг O нуқтага нисбатан ҳаракат миқдори бош моментининг вектори ўзгармас бўлади, яъни

$$\bar{L}_0 = \text{const}. \tag{59,19}$$

2. Агар $M_0^{(e)}$ ташқи кучлар бош моменти векторининг координата ўқларидан биридаги проекцияси нолга тенг бўлса, система ҳаракат миқдори бош моменти векторининг ана шу ўқдаги проекцияси ўзгармас бўлади, яъни

$$M_z^{(e)} = 0$$

бўлса,

$$L_z = \text{const}. \tag{59,20}$$

Жисм қўзғалмас Oz ўқи атрофида айланса, унинг айланиш ҳаракати дифференциал тенгламаси қуйидагича бўлади:

$$I_z \frac{d^2\varphi}{dt^2} = M_z^{(e)}, \tag{59,21}$$

бу ерда φ – жисмнинг Oz ўқи атрофида айланиш бурчаги.

Физик маятникнинг тебраниш даври қуйидаги формуладан топилади:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_z}{M \cdot g \cdot OC}}, \tag{59,22}$$

бу ерда OC — осилиш ўқидан оғирлик марказигача бўлган масофа, M — маятникнинг массаси.

Симметрия ўқи булган ва шу ўқда ётган нуқта атрофида айланма ҳаракат қиладиган огир қаттиқ жисм гироскоп деб аталади.

Гироскопнинг мунтазам равишдаги прецессия бурчак тезлиги учта эркинлик даражаси бўлган формуладан топилади, яъни

$$\omega_e = \frac{M \cdot g \cdot OC}{I_z \omega}, \tag{59,23}$$

бу ерда M — гироскопнинг массаси;
I_z — симметрия ўқига нисбатан гироскопнинг инерция моменти;
ω — ўз ўқи атрофида айланишининг бурчак тезлиги;
OC — гироскопнинг таянчидан инерция марказигача бўлган масофа.

Гироскоп моментининг вектори қуйидаги формуладан топилди:

$$\bar{L}^{(e)} = [I\bar{\omega}, \bar{\omega}_e], \tag{59,24}$$

унинг миқдори бўлса, қуйидаги формуладан топилади:

$$|\bar{L}^z| = I\,\omega\omega_e \sin(\widehat{\bar{\omega}, \bar{\omega}_e}). \tag{59,25}$$

Бу системанинг инерция марказига нисбатан қилган нисбий ҳаракати учун ҳаракат миқдори бош моментининг узгариш теоремаси.

Системанинг ҳаракатини тузувчи ҳаракатларга ажратсак, системанинг ҳаракат миқдори бош моментини қуйидаги формула билан ҳисоблаш мумкин:

$$\bar{L}_0 = \bar{L}_c + [\bar{r}_c, M\bar{v}_c]. \tag{59,26}$$

Демак, система ҳаракат миқдорининг бош моменти система ҳаракат миқдорининг инерция марказига нисбатан олинган бош моменти вектори билан бутун система массаси инерция марказига жойлашган деб фараз қилиб, ана шу нуқтадаги массадан олинган ҳаракат миқдори моменти векторининг геометрик йиғиндисига тенг.

Бунинг биринчи ҳади $\bar{L}_c$ система инерция маркази билан бирликда илгарилама ҳаракат қилаётган координата ўқларига нисбатан бўлган нисбий ҳаракатга нисбатан ҳисобланиши керак.

Ҳаракат миқдори моменти теоремаси қўзғалмас системага нисбатан қандай таърифланса, инерция марказидан ўтувчи илгарилама ҳаракатдаги кўзғалувчи системага нисбатан ҳам худди шундай таърифланади, яъни

$$\frac{d\overline{L}_c}{dt} = \overline{M}_c^{(e)}. \qquad (59,27)$$

Бу параграфга оид масалаларни қуйидаги олти асосий типга ажратиш мумкин.

1. Инерция моментини ҳисоблашга оид масалалар.

2. Системанинг ҳаракат миқдори моментини ҳисоблашга оид масалалар (И. В. Мешчерский „Назарий механикадан масалалар тўплами“ китобидаги 981- масала).

3. Қўзғалмас нуқтага ёки қўзғалмас ўққа нисбатан системанинг ҳаракат миқдори моменти ўзгармас бўлган ҳолга оид, яъни (59,19) ёки (59,20) тенглама билан ечиладиган масалалар (И. В. Мешчерский „Назарий механикадан масалалар тўплами“ китобидаги 982—989- масалалар).

4. Қўзғалмас ўқ атрофида қаттиқ жисм айланаётган ҳолга оид масалалар.

Бу типдаги масалаларни учта группага ажратиш мумкин:

а) жисмга қўйилган кучларнинг айланиш ўқига нисбатан бош моменти ўзгармас бўлган масалалар.

Бундай масалаларни ечиш учун (59,21) дифференциал тенгламани тузиб, сўнгра уни интеграллаш керак (И. В. Мешчерский „Назарий механикадан масалалар тўплами“ китобидаги 990—992- масалалар);

б) жисмга қўйилган кучларнинг айланиш ўқига нисбатан бош моменти жисмнинг айланиш бурчак тезлигига боғлиқ бўлган масалалар.

Бундай ҳол, жисм қаршилик кўрсатадиган муҳитда айланишида содир бўлади.

Бу ҳолда (59,21) тенгламаларни интеграллашда ўзгарувчиларни ажратиш қоидасини қўллаш керак (И. В. Мешчерский „Назарий механикадан масалалар тўплами“ китобидаги 993—999- масалалар);

в) жисмга қўйилган кучларнинг айланиш ўқига нисбатан бош моменти жисмнинг айланиш бурчаги φ нинг функцияси бўлган масалалар.

Бундай ҳол физик маятникда бўлади.

Бу ҳолда (59,21) тенглама $I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = f(\varphi)$ кўринишда бўлади (И. В. Мешчерский „Назарий механикадан масалалар тўплами“ китобидаги 1003—1013- масалалар).

5. Буралма тебранишга оид масалалар. Буни учта группага ажратиш мумкин:

а) эркин буралма тебранишга оид масала.

Бу масалаларда (59,27) тенглама $I\frac{d^2\varphi}{dt^2} + c\varphi = 0$ кўринишида бўлади. Бу гармоник тебранма ҳаракатнинг дифференциал тенгламаси бўлиб, унинг ечилиши қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\varphi = \varphi_0 \cos\left(\sqrt{\frac{c}{I}}\, t\right) + \dot{\varphi}_0 \sin\left(\sqrt{\frac{S}{I}}\, t\right).$$

Тебраниш даври $T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{c}}$ га тенг (И. В. Мешчерский „Назарий механикадан масалалар тўплами" китобидаги 1014—1017, 1012, 1023- масалалар);

б) сўнувчи буралма тебранишга оид масала.

Бундай масалалар учун (59,21) тенглама

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{\mu}{I}\frac{d\varphi}{dt} + \frac{c}{I}\varphi = 0$$

шаклда бўлиб, унинг ечилиши қуйидагича

$$\varphi = ae^{-\frac{\mu}{2I}t} \cdot \sin\left(\frac{1}{2I}\sqrt{4Ic - \mu^2}\,t + \alpha\right).$$

Тебраниш даври

$$T = \frac{4\pi I}{\sqrt{4Ic - \mu^2}}$$

формула билан a эса бошланғич шартдан топилади. И. В. Мешчерский „Назарий механикадан масалалар тўплами" китобидаги 1019, 1020, 1025- масалалар);

в) мажбурий буралма тебранишга оид масала.

Бундай масалалар учун (59,21) тенглама

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \mu\frac{d\varphi}{dt} + c\varphi = H\sin(pt)$$

кўринишни олади. Бу тенгламанинг умумий ечилиши қуйидагича

$$\varphi = ae^{-\frac{\mu}{2I}t}\sin\left(\frac{1}{2I}\sqrt{4Ic - \mu^2}\,t + \alpha\right) + b\sin(pt + \beta).$$

Муҳитнинг қаршилик кучи бўлмаса, (59,21) тенглама

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} + c\varphi = H\sin(pt)$$

кўринишни олади ва ечилиши қуйидагича

$$\varphi = a\sin\left(\sqrt{\frac{c}{I}}\,t + \alpha\right) + b\sin(pt),$$

бу ерда

$$b = \frac{H}{c - Ip^2}.$$

Резонанс ҳодисаси содир бўлганда ечилиш қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\varphi = a\sin\left(\sqrt{\frac{c}{I}}\,t + \alpha\right) - \frac{H}{2I}\sqrt{\frac{I}{c}}\,t\cos\left(\sqrt{\frac{c}{I}}\,t\right),$$

a, α лар бошлангич шартлардан топилади (И. В. Мешчерский „Назарий механикадан масалалар тўплами" китобидаги 1021—1024- масалалар).

6. Тақрибий гироскоп назариясига оид масалалар (И.В. Мешчерский „Назарий механикадан масалалар тўплами" китобидаги 1029—1035, 1039- масалалар).

60- §. Масала ечишга оид методик кўрсатмалар

Бу параграфга оид масалаларни қуйидаги тартибда ечиш тавсия этилади.

1. Қўзғалмас координата ўқлари системасини танлаб олиш керак.

2. Системага қўйилган ҳамма ташқи кучларни белгилаб олиш керак.

Система эркин бўлмаса, уни боғланишдан қутқазиш керак.

3. Координата ўқларига нисбатан ташқи кучларнинг ($M_x^{(e)}$, $M_y^{(e)}$, $M_z^{(e)}$) бош моментларини ҳисоблаб олиш керак.

4. Системанинг ҳаракат миқдори моментини ҳисоблаш керак на агар лозим бўлса, олдин (59,6 – 59,14) формулаларга асосан тегишли инерция моментларини топиш керак.

5. Ҳаракат бошланғич шартларини аниқлаш керак.

6. (59,1) ёки (59,21) тенгламаларни тузиш керак.

7. Тузилган тенгламаларни интеграллаш керак ёки унинг биринчи интеграллари (59,19) ёки (59,20) дан фойдаланиш керак.

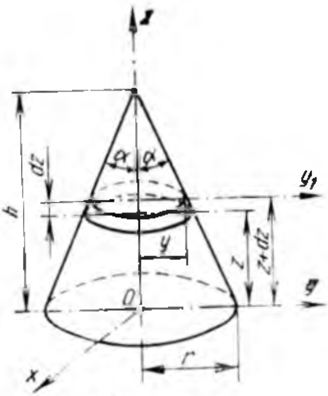
8. Физик маятникларнинг кичик тебраниш даврини (59,22) формулага асосланиб ҳисоблаш мумкин.

9. Тақрибий гироскоп назариясига оид масалаларни ечишдан олдин гироскопнинг учта эркинлик даражаси борлигини билиб олиб, кейин уни (59,23), (59,24), (59,26) формулаларга асосан ечиш керак.

61- §. Масалалар

67- масала. Асосининг радиуси r ва баландлиги h бўлган конуснинг айланиш ўқига нисбатан (I_1) ва асосининг ҳар қандай диаметрига нисбатан инерция моментлари (I_2) топилсин (75- шакл).

Ечиш. Координата ўқларини шаклда кўрсатилгандек қилиб оламиз. Конусни xOy текислигига параллел ва ундан z ва $z + dz$ масофада бўлган иккита текислик билан кесамиз.



75- шакл.

Шу текисликлар ва конуснинг ён сирти билан чегараланган элементар ҳажмнинг инерция моментини топамиз. Жисмнинг дифференциал ҳажми доиравий цилиндрнинг ҳажмига ухшаш асосининг радиуси y ва баландлиги dz орқали топилади, яъни

$$dV = \pi y^2 dz. \qquad (1)$$

Ажратилган элементар ҳажмнинг массаси

$$dm = \gamma\, dV = \gamma\pi\, y^2 dz \qquad (2)$$

га тенг.

Бу ерда γ — конус массасининг зичлиги.

Ажратилган элементар ҳажмнинг z ўқига нисбатан инерция моментини цилиндрнинг инерция моментини топиш формуласидан аниқлаймиз, яъни

$$dI_z = \frac{1}{2}\, y^2 dm = \frac{1}{2}\,\gamma\pi\, y^4 dz. \qquad (3)$$

Конус учи бурчагининг ярмини α билан белгиласак, қуйидагини оламиз:

$$y = (h - z)\operatorname{tg}\alpha. \qquad (4)$$

Демак,

$$dI_z = \frac{1}{2}\,\gamma\pi \operatorname{tg}^4\alpha\,(h - z)^4\, dz. \qquad (5)$$

Бундан z ўқига нисбатан конуснинг инерция моменти қуйидагича бўлади:

$$I_z = \int\limits_{(V)} dI_z = \int\limits_0^h \frac{1}{2}\,\gamma\pi \operatorname{tg}^4\alpha(h - z)^4\, dz = \frac{1}{10}\,\gamma\pi \operatorname{tg}^4\alpha\, h^5. \qquad (6)$$

Конуснинг ҳажми

$$V = \frac{1}{3}\,\pi\, r^2 h = \frac{1}{3}\,\pi\, r^3 \operatorname{ctg}\alpha \qquad (7)$$

эканлигини назарга олсак, конуснинг массаси қуйидагича бўлади:

$$M = \gamma V = \frac{1}{3}\,\pi\gamma\, r^3 \operatorname{ctg}\alpha \qquad (8)$$

Демак,

$$I_1 = I_z = \frac{3}{10} M r^2. \qquad (9)$$

Симметрик бўлганлигидан $I_x = I_y \cdot I_y$ ни топиш учун ажратилган элементар ҳажмнинг y ўқига нисбатан инерция моментини топамиз. Бунинг учун унинг оғирлик марказидан y ўққа параллел қилиб y_1 ўқини ўтказамиз. Экваториал y_1 ўққа нисбатан диск инерция моментининг формуласидан фойдалансак, қуйидагича бўлади:

$$dy_1 = \frac{1}{4}\, y^2 dm. \qquad (10)$$

Инерция моментининг параллел ўқлар орасидаги муносабати теоремасини татбиқ этсак:

$$dI_y = dI_{y_1} + z^2 dm. \tag{11}$$

Топилган (2) тенгламадан фойдалансак,

$$dI_y = \gamma\pi y^2\left(\frac{y^2}{4} + z^2\right) dz = \gamma\pi \operatorname{tg}^2\alpha \left[\frac{(h-z)^2}{4}\operatorname{tg}^2\alpha + z^2\right]\cdot(h-z)^2\,dz.$$

[яъни $y = (h-z)\operatorname{tg}\alpha$].

y ўқига нисбатан конуснинг инерция моментини топамиз:

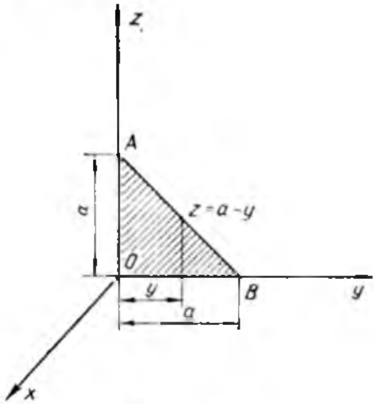
$$I_z = I_y = \int\limits_{(V)} dI_y = \int\limits_0^h \gamma\pi(h-z)^2\operatorname{tg}^2\alpha\left(z^2 + \frac{(h-z)^2}{4}\operatorname{tg}^2\alpha\right)dz =$$

$$= \frac{\gamma\pi h^5}{5}\left(1 + \frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{4}\right)\operatorname{tg}^2\alpha. \tag{12}$$

Конуснинг массаси $M = \frac{1}{3}\gamma\pi r^2 h$ ва $\frac{r}{h} = \operatorname{tg}\alpha$ ни назарга олсак, қуйидаги ҳосил бўлади:

$$I_z = I_y = I_x = \frac{1}{20} M(3r^2 + 2h^2).$$

68-масала. Шаклда кўрсатилган оғирлиги p бўлган бир жинсли OAB пластинканинг I_{xy}, I_{xz} ва I_{yz} марказдан қочма инерция моментлари топилсин (76-шакл). Тўғри бурчакли ва тенг ёнли OAB учбурчакнинг катетлари a га тенг. Координата ўқлари шаклда кўрсатилган.



76-шакл.

Ечиш. Пластинка симметрия текислигига тик, x ўқи O нуқтадаги инерциянинг бош ўқи бўлади. Ox ўқи бош инерция ўқи бўлганидан I_{xy}, I_{xz} — марказдан қочма инерция моментлари нолга тенг бўлиши керак:

$$I_{xy} = I_{xz} = 0.$$

Марказдан қочма I_{yz} инерция моментини ҳисоблаймиз:

$$I_{yz} = \int\limits_{(M)} yz\,dm,$$

бунда $dm = \gamma\,dy\,dz$.

γ — пластинка массасининг зичлиги.

Шунинг учун:

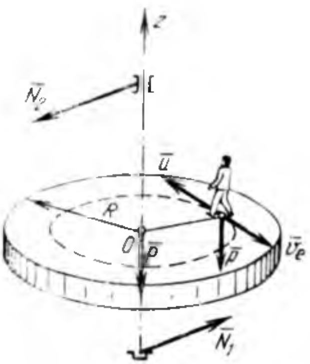
$$I_{yz} = \gamma \iint yz\, dydz = \gamma \int_0^a ydy \int_0^{a-y} zdz =$$

$$= \gamma \int_0^a y \frac{(a-y)}{2} dy = \frac{\gamma}{2} \int_0^a (a^2 y - 2ay^2 + y^3) dy = \frac{\gamma a^4}{24}.$$

Бунда $\frac{\gamma a^2}{2} = M = \frac{P}{g}$ – жисмнинг массаси, шунинг учун

$I_{yz} = \frac{Pa^2}{2g}$ га тенг бўлади.

69- масала. Доиравий горизонтал платформа, унинг O марказидан ўтувчи вертикал Oz ўқи атрофида ишқаланмасдан айлана олади. Платформа устида Oz ўқдан ўзгармас r масофа оғирлиги p бўлган киши ўзгармас нисбий u тезлик билан юради. Бунда платформа ўз ўқи атрофида қандай ω бурчак тезлиги билан айланади? Платформанинг P оғирлигини R радиусли доира юзаси бўйлаб текис тарқалган, деб ҳисоблаш мумкин. Бошланғич пайтда платформа билан кишининг тезлиги нолга тенг (77- шакл).



77- шакл.

Ечиш. Координата ўқларини 77- шаклда кўрсатилгандек қилиб оламиз. Платформа ва кишидан иборат бўлган механик системани текширамиз. Платформанинг оғирлиги $\overline{P}$, кишининг оғирлиги $\overline{p}$, товантагининг реакцияси $\overline{N}_1$ ва подшипникнинг реакцияси $\overline{N}_2$ лар ташқи кучлар бўлади. Бу кучлар ё Oz ўқига параллел бўлади, ёки шу Oz ўқининг таъсир чизиғини кесиб ўтади, шунинг учун у кучларнинг Oz ўқига нисбатан моментлари нолга тенг, яъни $M_z^{(e)} = 0$.

Система ҳаракат миқдори бош моментининг ўзгариши теоремасини Oz ўқига нисбатан ёзамиз:

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z^{(e)} = 0. \qquad (1)$$

Буни интегралласак:

$$L_z = c = \text{const}. \qquad (2)$$

Ҳаракатнинг бошланғич шартларини тузамиз.

Бошланғич пайтда система тинч ҳолатда турганн учун, яъни $t=0$ бўлганда $\omega_0=0$, $v_r=u_0=0$ бўлади. Демак, бошланғич пайтда:

$$L_z\Big|_{t=0}=\sum_{\nu=1}^{4} mOm_z(m_\nu \bar{v}_\nu)\Big|_{t=0}=0. \qquad (3)$$

булардан $c=0$ бўлади. Буни (2) га қўйсак:

$$L_z=0. \qquad (4)$$

Системанинг ҳаракат миқдори моменти L_z платформанинг Oz ўқига нисбатан ҳаракат миқдори моменти L_{1z} билан кишининг (нуқтанинг) Oz ўқига нисбатан ҳаракат миқдори моменти L_{2z} нинг йиғиндисидан иборат. Шунинг учун:

$$L_z=L_{1z}+L_{2z}=0. \qquad (5)$$

Текшириш аниқ бўлиши учун платформа соат стрелкасининг айланиш томонига айланаётибди, деб фараз қиламиз. Платформа ҳаракат миқдорининг моменти L_{1z} манфий, киши ҳаракат миқдорининг моменти (5) га мувофиқ, мусбат бўлади.

(59,4) ва (59,14) формулаларга асосан:

$$L_{1z}=I_z\omega_z=-I_z\omega=-\frac{PR^2}{2g}\omega, \qquad (6)$$

$$L_{2z}=\frac{p}{g}v_a r=\frac{p}{g}(u-v_r)r=\frac{p}{g}(u-\omega r)r. \qquad (7)$$

Бу (6) ва (7) ларни (5) га қуямиз, у ҳолда

$$-\frac{RP^2}{2g}\omega+\frac{p}{g}(u-\omega r)r=0. \qquad (8)$$

Бундан бурчак тезликни топамиз:

$$\omega=\frac{2pr}{PR-2pr^2}u. \qquad (9)$$

70-масала. Жуковский скамейкасида турган киши қўлларини ёнга узатган вақтда унга 15 *айл/мин* га тўғри келадиган бошланғич тезлик берилади: бунда киши билан скамейканинг айланиш ўқига нисбатан олинган инерция моменти 0,8 *кГ м сек*^{2} га тенг. Агар киши қўлларини танасига яқинлаштириб, система инерция моментини (0,12 *кГмсек*^{2} гача) камайтирса, скамейка билан киши қандай бурчак тезлик билан айлана бошлайди (78-шакл)?

Ечиш. Киши ва скамейканинг айланиш ўқи вертикал ва уларга фақат оғирлик кучи таъсир қилади деб ҳисоблаймиз, у вақтда

$$M_z^{(e)}=0 \text{ ва } L_z=\text{const}=0. \qquad (1)$$

Киши танасининг ўзининг айланиш ўқига нисбатан инерция моменти $I_{1z}=0{,}8$ *кГ м сек*^{2} га тенг бўлсин, қўлларини ёнига

78- шакл.

узатган ҳолда инерция моменти (ўша ўққа нисбатан) $I_{2z}=0{,}12$ *кГм сек*^{2} га тенг бўлсин.

Бошланғич пайтда, текширилаётган системанинг ҳаракат миқдори моменти нолга тенг бўлган. Демак, кейин ҳам у нолга тенглигича қолади. Бироқ қўлларининг горизонтал текисликда ω_0 бурчак тезлиги билан айланиши ҳаракат миқдор моментини ҳосил қилади (59,4) га мувофиқ:

$$L_{2z} = I_{2z}\omega_2. \tag{2}$$

Бу система ҳаракат миқдори моментларининг йиғиндиси нолга тенг бўлиб қолишлиги керак бўлгани учун қуйидаги тенглик қаноатлантирилиши керак:

$$L_z = L_{1z} + L_{2z} = 0, \tag{3}$$

яъни

$$I_{1z}\omega_1 + I_{2z}\omega_2 = 0, \tag{4}$$

бу ерда ω_1 — киши қўлларини ҳаракатлантираётган вақтда кишининг айланиш бурчак тезлиги.

Демак,

$$\omega_1 = -\frac{I_{2z}}{I_{1z}}\omega_2 \tag{5}$$

ёки

$$n_1 = -\frac{I_{2z}}{I_{1z}} n_2.$$

Сон қийматларини қўйсак:

$$n_1 = -\frac{0{,}8}{0{,}12}\cdot 15 = -100 \text{ айл/мин} \tag{6}$$

ёки

$$\omega_1 = -\frac{100\pi}{30} = -3\frac{1}{3}\pi \ 1/\text{сек} \tag{7}$$

ҳосил бўлади.

Демак, ω_1 бурчак тезлиги ω_2 бурчак тезлигига қарама-қарши томонга йўналган ва ω_2 нолга тенг бўлганда ω_1 ҳам нолга тенг бўлади, яъни кишининг қўллари ва танаси тўхтайди.

71- масала. Катта маховикларни тез тўхтатиш учун электр тормоз ишлатилади, бу тормоз диаметрал равишда жойлашган иккита электромагнит қутбдан иборат, уларда ўзгармас ток оладиган чулғам бор. Маховик электромагнит қутблар ёнида айланганида унинг массасида индукцияланадиган токлар маховик гардишининг тезлиги v га пропорционал бўлган тормозловчи M_1 моментни ҳосил қилади: $M_1 = kv$, бу ерда k — магнит оқимига ва маховикнинг ўлчамига боғлиқ бўлган коэффициент. Подшипникдаги ишқаланиш моменти M_2 ни ўзгармас деб ҳисоблаш мумкин; маховикнинг диаметри D бўлса, унинг айланиш ўқига нисбатан олинган инерция моменти I бўлса, ω_0 бурчак тезлиги билан айланаётган маховикнинг қанча вақтдан кейин тўхташи топилсин

Ечиш. Маховикка қўйилган ташқи кучларнинг айланиш ўқига нисбатан бош моменти қуйидагича:

$$M_z^{(e)} = -(M_1 + M_2) = -(kv + M_2) \tag{1}$$

Шу сабабли, маховик учун (59,21) тенгламани тузсак:

$$I \frac{d\omega}{dt} = -(kv + M_2). \tag{2}$$

ёки v ни $\frac{D\omega}{2}$ билан алмаштирсак, қуйидагича бўлади:

$$I \frac{d\omega}{dt} = -\left(\frac{kD\omega}{2} + M_2\right). \tag{3}$$

Бундан ўзгарувчиларни ажратамиз:

$$\frac{Id\omega}{\frac{1}{2} kD\omega + M_2} = -dt. \tag{4}$$

Буни интегралласак:

$$\frac{2I}{kD} \left| \ln\left(M_2 + \frac{1}{2} kD\omega\right) \right|_{\omega_0}^{0} = -T \tag{5}$$

ёки

$$T = \frac{2I}{kD} \left\{ \ln\left(M_2 + \frac{1}{2} kD\omega_0\right) - \ln M_2 \right\} = \frac{2I}{kD} \ln\left(1 + \frac{kD}{2M_2} \omega_0\right), \tag{6}$$

$$T = \frac{2I}{kD} \ln\left(1 + \frac{kD}{2M_2} \omega_0\right) \text{ сек} \tag{6'}$$

бўлади.

72- масала. Радиуси r бўлган вал арқонга осилган тош ёрдамида горизонтал ўқ атрофида айланма ҳаракатга келтирилади. Ҳаракат бошлангандан бир оз вақт ўтгач, валнинг бурчак тезлиги ўзгармас миқдорга яқин бўлиши учун валга бир хилда бўлган n та пластинка бириктирилган; пластинкага таъсир қилувчи ҳавонинг қаршилиги бурчак тезлигининг квадратига пропорционал ва айланиш ўқидан R масофада пластинкага нормал қўйилган кучга келтирилади, бунда пропорционаллик коэффициенти k га тенг. Тошнинг массаси m; ҳамма айланувчи қисмларнинг айланиш ўқига нисбатан олинган инерция моменти I; арқон массаси ҳисобга олинмасин. Бошланғич пайтда валнинг бурчак тезлигини нолга тенг деб ҳисоблаб, валнинг бурчак тезлиги аниқлансин. Таянчлардаги ишқаланиш ҳисобга олинмасин.

Ечиш. Масаланинг шартига биноан, айлантирувчи момент

$$M_{1z} = mgr, \tag{1}$$

тормозловчи момент эса

$$M_2 = -knR\omega^2. \tag{2}$$

Ҳаракатнинг бошланғич шарти қуйидагича:

$$t = 0 \text{ бўлганда } \omega_0 = 0 \tag{3}$$

бўлади.

Вал учун айланма ҳаракат дифференциал тенгламасини тузамиз:

$$I_z \frac{d\omega}{dt} = mgr - knR\omega^2, \tag{4}$$

бу ерда I_z — айланаётган массанинг инерция моменти бўлиб, миқдор қуйидагига тенг:

$$I_z = I + mr^2. \tag{5}$$

(4) тенгламадаги ўзгарувчиларни ажратсак, қуйидаги нисбат ҳосил бўлади:

$$\alpha dt = \frac{\sqrt{knR}\, d\omega}{\sqrt{mgr} - \sqrt{knR}\,\omega} + \frac{\sqrt{knR}\, d\omega}{\sqrt{mgr} + \sqrt{knR}\,\omega}, \tag{6}$$

бу ерда

$$\alpha = \frac{2}{I + mr^2} \sqrt{mgnkrR}.$$

(5) тенгламанинг чап томонини вақт 0 дан t гача бўлган оралиқда, ўнг томонида ω бўлса, 0 дан ω гача оралиқда интегралласак:

$$\alpha t = \ln \frac{\sqrt{mgr} + \sqrt{knR}\,\omega}{\sqrt{mgr} - \sqrt{knR}\,\omega} \tag{7}$$

бўлади.

(7) тенгламани ω га нисбатан ечамиз:

$$\omega = \sqrt{\frac{mgr}{knR}}\ \frac{e^{\alpha t} - 1}{e^{\alpha t} + 1}. \tag{8}$$

Демак, t катта қийматга эга бўлганда

$$\lim_{t \to \infty} \frac{e^{\alpha t} - 1}{e^{\alpha t} + 1} = 1 \tag{9}$$

бўлар экан.

Бунга асосан (8) формуладан валнинг айланиш бурчак тезлиги тахминан

$$\omega = \sqrt{\frac{mgr}{knR}}\ 1/сек$$

га тенг.

73-масала. Сейсмографларда, яъни ер қимирлашини қайд қилувчи асбобларда физик маятник бўлади; маятникнинг осилиш ўқи вертикал билан α бурчак ташкил қилади. Осилиш ўқидан маятникнинг оғирлик марказигача бўлган масофа a га тенг, осилиш ўқига параллел бўлиб, оғирлик марказидан ўтган ўққа нисбатан маятник инерция моменти I_c га тенг. Маятникнинг оғирлиги P. Маятникнинг тебраниш даври аниқлансин (78-шакл).

Ечиш. Физик маятникга вертикал билан тебрангич инерция марказини кўрсатувчи OC тўғри чизиқ орасидаги чизиқли φ бурчак орқали ҳаракат берамиз.

Маятникнинг Oz ўқи атрофидаги кичик тебранишнинг дифференциал тенгламасини тузамиз

Параллел ўқларга нисбатан инерция моменти (59,11) теоремага асосан қуйидагича бўлади:

$$I_{z_1} = I_c + \frac{P}{g}a^2. \qquad (1)$$

Маятникга қўйилган ташқи кучларнинг Oz_1 ўқига нисбатан ташкил қилган моменти:

$$M_{z_1}^{(e)} = -Pa\sin\alpha. \qquad (2)$$

Демак, бу масала учун (59,21) тенглама қуйидагича бўлади:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{Pag\sin\alpha}{gI_c + Pa^2}\varphi = 0. \qquad (3)$$

Бу дифференциал тенгламани интеграллаймиз:

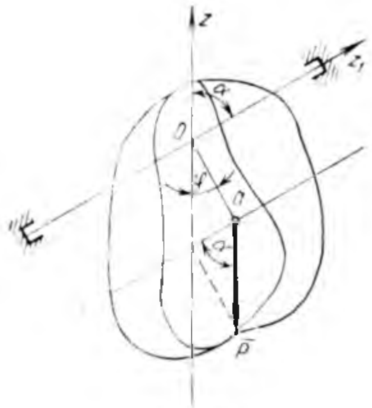
$$\varphi = A\sin\sqrt{\frac{Pag\sin\alpha}{gI_c + Pa^2}}\,t + B\cos\sqrt{\frac{Pag\sin\alpha}{gI_c + Pa^2}}\,t. \qquad (4)$$

Демак, φ бурилиш бурчаги тебраниш даври

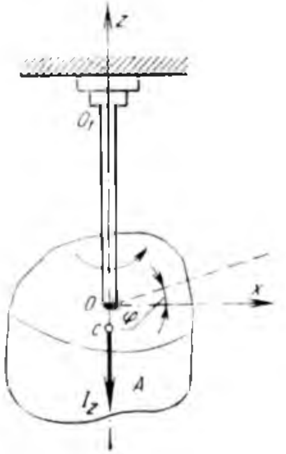
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{gI_c + Pa^2}{Pag\sin\alpha}}$$

бўлган гармоник тебраниш қонуни билан ўзгарар экан.

74-масала. A жисмнинг Oz ўқига нисбатан олинган I_z инерция моментини аниқлаш учун, уни эластик вертикал OO_1 стерженга бириктириб, A жисмни Oz ўқ атрофида кичкина φ_0 бурчакка айлантириш йўли билан шу стержень буралади ва тебрантириб қўйилади. 100 та силкиниш $100\,T_1 = 2$ *мин* давом этган, бу ерда T_1 — ярим давр; стержень эластик кучнинг моменти бурилиш бурчагига пропорционал ва $c\varphi$ га тенг бўлгани учун стержень гармоник тебранма ҳаракат қилади, c



79- шакл.



80- шакл.

коэффициентини аниқлаш учун иккинчи тажриба ўтказилган; стерженнинг O нуқтасига радиуси $r = 15$ *см*, оғирлиги $P = 1{,}6$ *кГ* бўлган бир жинсли доиравий кесимли диск осилган, бунда бир силкиниш $T_2 = 1{,}5$ *сек* давом этган. Жисмнинг инерция моменти I_z аниқлансин (80- шакл).

Ечиш. Координата ўқларини 80- шаклда кўрсатилгандек йўналтирамиз.

Биринчи тажриба шартидан стерженнинг бурилишидаги кичик тебранишининг ҳаракат дифференциал тенгламаси қуйидагича бўлади:

$$I_z \frac{d^2\varphi}{dt^2} + c\varphi = 0. \qquad (1)$$

Иккинчи тажрибада Oz ўқига нисбатан дискнинг инерция моменти $I_{z_1} = \frac{Pr^2}{2g}$ га тенглигини ҳисобга олсак, бу ҳолда бурилиш кичик тебранишининг ҳаракат дифференциал тенгламаси қуйидагича:

$$\left(\frac{Pr^2}{2g}\right)\frac{d^2\varphi}{dt^2} + c\varphi = 0. \qquad (2)$$

(1) тенглама даври

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{I_z}{c}} \qquad (3)$$

бўлган гармоник тебранишга, (2) тенглама эса даври

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{Pr^2}{2g}}{c}} \qquad (4)$$

бўлган гармоник тебранишга мосдир.

(3) ва (4) тенгликлардан c ни чиқарамиз, бунинг учун уларни квадратга ошириб, бирини иккинчисига бўламиз:

$$\frac{T_2^2}{T_1^2} = \frac{\frac{Pr^2}{2g}}{I_z}. \qquad (5)$$

Бу тенгламадан I_z ни топамиз:

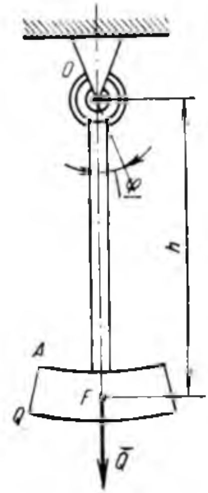
$$I_z = \frac{Pr^2}{2g}\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2. \qquad (6)$$

Сон қийматларини қўйсак, қуйидаги ҳосил бўлади:

$$I_z = \frac{1{,}6 \cdot 0{,}15^2}{2 \cdot 9{,}81} \cdot \frac{1{,}2^2}{1{,}5^2} = 0{,}117 \ кГм\ сек^2.$$

75-масала. Машиналар пойдеворларининг горизонтал тебранишларини ёзувчи вибрографда учида юки бўлган ричагдан иборат OA маятник, ўзининг O горизонтал ўқи атрофида тебрана олади; OA маятникни унинг ўз оғирлиги ва спираль пружина вертикал вазиятда, турғун мувозанат ҳолатида ушлаб туради.

Оғиш бурчаклари кичик бўлганда маятникнинг хусусий тебранишлари даврининг қанча бўлишлиги аниқлансин: маятник оғирлигининг осилиш ўқига нисбатан олинган максимал статик моменти $Q \cdot h = 4{,}5\ кГ \cdot см$, шу ўққа нисбатан олинган инерция моменти $I = 0{,}003\ кГ \cdot см \cdot сек^2$ қаршилиги бурилиш бурчагига пропорционал бўлган пружинанинг бикрлик коэффициенти $c = 0{,}1\ кГ \cdot см$ маятник мувозанатда турганида пружина тортилмаган бўлади. Қаршиликлар ҳисобга олинмасин (81-шакл).



81-шакл.

Ечиш. Маятникни мувозанат ҳолатидан φ бурчакка оғдирамиз. Ташқи кучлардан O нуқтага нисбатан олинган момент:

$$M^{(e)} = -c\varphi - Qh\varphi. \qquad (1)$$

Бурилишни ниҳоятда кичик деб ҳисоблаймиз. Маятник тебранишининг дифференциал тенгламаси қуйидаги кўринишда бўлади:

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} + (c + Qh)\varphi = 0. \qquad (2)$$

Бу тенгламадан кўриниб турибдики, маятник гармоник тебранма ҳаракат қилар экан ва унинг тебраниш даври қуйидагича бўлади:

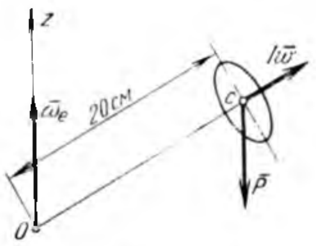
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{c + Qh}}. \qquad (3)$$

Бу тенгликка қийматларнинг сон миқдорларини қўямиз:

$$T = 2 \cdot 3{,}14\sqrt{\frac{0{,}003}{0{,}1 + 4{,}5}} = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}08 = 0{,}5\ сек.$$

76- масала. Радиуси 30 *см* ли диск шаклидаги пирилдоқ ўзининг симметрия ўқи атрофида 80 $сек^{-1}$ бурчак тезлик билан айланади. Диск симметрия ўқи бўйлаб йўналган ва узунлиги 20 *см* бўлган ўққа ўрнатилган.

Ҳаракат миқдорининг бош моменти симметрия ўқи бўйлаб йўналган ва $I\omega$ га тенг деб фараз қилиб, пирилдоқ мунтазам прецессиясининг бурчак тезлиги аниқлансин (82-шакл).



82- шакл.

Ечиш. Пирилдоқ мунтазам прецессиясининг бурчак тезлиги (59, 23) формуладан топилади.

Пирилдоқнинг симметрия ўқига нисбатан инерция моменти қуйидагига тенг:

$$I = \frac{Pr^2}{2g}. \tag{1}$$

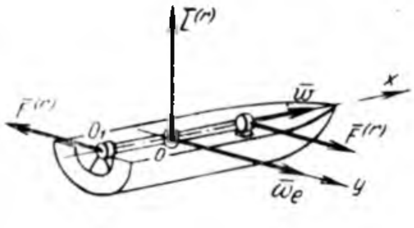
Шунинг учун (59, 23) дан

$$\omega_e = \frac{2g \cdot OC}{\omega r^2}. \tag{2}$$

Бу (2) тенгликка миқдорларнинг сон қийматини қўйсак, изланган натижа келиб чиқади:

$$\omega_e = \frac{2 \cdot 9{,}81 \cdot 20}{80 \cdot 15^2} = 2{,}18\ сек^{-1}. \tag{3}$$

77- масала. Кемага ўрнатилган тез юрар турбина подшипникларига тушадиган максимал гироскопик босим аниқлансин Кема ротор ўқига тик бўлган ўқ атрофида чайқалади, чайқалишнинг амплитудаси 9° ва даври 15 секунд. Оғирлиги 200 *кГ*, инерция радиуси 0,8 *м* бўлган ротор минутига 18000 марта айланади. Подшипниклар орасидаги масофа 1 *м* (83 шакл).



83 шакл

Ечиш. *Oy* ўқи атрофида

$$\varphi = \frac{\pi}{20} \sin \frac{2\pi}{15} t \tag{1}$$

қонуни билан чайқалиши натижасида, кемада бурчак тезлиги

$$\omega_e = \frac{2\pi^2}{300} \cos \frac{2\pi}{15} t \tag{2}$$

га тенг бўлган айланма кўчирма ҳаракат ҳосил бўлади. Турбина ҳаракат миқдори бош моменти қуйидагига тенг:

$$L_x = I_x \omega = \frac{P}{g} r^2\omega. \qquad (3)$$

Ҳаракат миқдори бош моментининг вектори Oy ўқи бўйича йўналган.

$\bar{\omega}$ вектор ва $\bar{\omega}_e$ векторлар бир-бирига тик. (59, 25) формулага асосан максимал гироскопик моментни топамиз:

$$L^{(г)} = L_y\omega_{e\,max} = \frac{P}{g} r^2\omega \cdot \frac{2\pi^2}{300} = \frac{200}{9{,}81}(0{,}8)^2\frac{18000\,\pi}{30} \cdot \frac{2\pi^2}{300} =$$

$$= \frac{200}{9{,}81} \cdot 0{,}64 \cdot 600 \cdot 3{,}14 \cdot \frac{2\cdot 9{,}86}{300} = 1615\ кГм.$$

Гироскопик моментнинг вектори $\bar{\omega}$ ва ω_e векторлар орқали ўтказилган текисликка тик йўналган ва $y\overline{L^{(г)}}$ нинг учидан қараганда, ω векторнинг ω_e вектор билан яқин йўл утиб қопланиши соат стрелкасининг ҳаракатида куриниши керак.

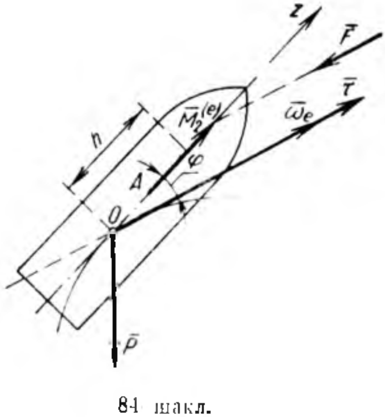
Гироскопик момент векторини қуйидаги жуфт куч билан алмаштирамиз:

$$F^{(г)} \cdot O_1A = L^{(2)}, \qquad (5)$$

бу ерда $F^{(г)}$ — турбина подшипникларига тушадиган максимал гироскопик босим. $O_1A = 1\ м$ бўлгани учун (5) тенгликдан қуйидаги келиб чиқади:

$$F^{(г)} = \frac{L^{(2)}}{O_1A} = \frac{1615}{1} = 1615\ кГ.$$

78-масала. Артиллерия снаряди оғирлик маркази траекториясининг уринмаси атрофида снаряд симметрия ўқининг тўла айланиш вақти T аниқлансин. Бу ҳаракат снаряднинг ўқига оғирлик марказидан $h = 0{,}2\ м$ масофада қўйилган $F = 2140\ кГ$ миқдордаги ҳаво қаршилик кучи таъсиридан юзага келади, бу куч траектория уринмасига параллел. Снаряднинг симметрия ўқига нисбатан ҳаракат миқдорининг моменти 590 *кГм сек* (84-шакл).



84 шакл.

Ечиш. Ҳаво қаршилик кучи снаряд оғирлик марказига нисбатан айлантирувчи момент ҳосил қилади, яъни

$$M_O^{(e)} = -Fh\sin\varphi. \qquad (1)$$

Снаряд юқорига оғдирилмаслиги учун, ташқи F куч моментининг миқдори (59, 25) формуладан топиладиган $L_0^{(2)}$ гироскопик момент билан мувозанатлашади:

$$L_0^{(e)} = I\omega\omega_e \sin\varphi, \tag{2}$$

демак,

$$L_0^{(e)} = M_0^{(e)}(F) \tag{3}$$

ёки

$$I\omega\omega_e \sin\varphi = F\cdot h\sin\varphi,$$

бундан:

$$\omega_e = \frac{F\cdot h}{I\omega}. \tag{4}$$

Снаряднинг симметрия ўқи гироскопик моментга тиклиги туфайли траектория τ урнима атрофида T даврли мунтазам прецессияланувчи айланма ҳаракат қилади:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_e} = \frac{2\pi I\omega}{F\cdot h}. \tag{5}$$

Бунга сон қийматларини қўямиз:

$$T = \frac{2\cdot 3{,}14\cdot 590}{2140\cdot 0{,}2} = 8{,}66 \text{ сек.}$$

79- масала. Авиация тахометрининг AB ҳалқаси A ўқ атрофида айлана олади: A ўқ ҳалқа диаметрларининг бирига тўғри келади ва тахометр айланадиган ўққа тик қилиб ўрнатилган; ҳалқа BC тортқи билан асбоб стрелкаси туташтирилган оғир муфтага бириктирилган бўлиб, спираль пружина билан сиқилади ва бошланғич вазиятга келади; бошланғич вазият ҳалқанинг узунасига кетган ўқи пружина тортилмай турганда ҳосил қилган φ_c бурчакка тўғри келади.

Турғунлик қарор топганида тахометр бурчак тезлиги ω билан ҳалқа ўқининг тахометр ўқидан оғиш бурчаги φ орасида қандай боғланиш бўлишлиги аниқлансин; ҳалқанинг экваториал ва қутб инерция моментлари A ва C, муфтанинг оғирлиги Q, масофа $AB = a$, ватарнинг узунлиги $BC = b$ ва пружинанинг бикрлик коэффициенти C *кГ*/*см*; пружинанинг қаршилик моменти бурилиш бурчагига пропорционал BC тортқининг оғирлиги ва ишқаланиш кучи ҳисобга олинмасин. $\frac{a}{b}$ ни кўпи билан иккинчи даражали ҳадларигача бўлган аниқлик билан ҳисоблансин (85-шакл).

Ечиш. Турғунлик қарор топганида φ бурчак ўзгармас бўлиб қолади.

C муфта ва A ҳалқанинг боғланишини CB ватар бўйлаб йўналган T реакция билан алмаштириб йўқотамиз. Турғунлик барқарор ҳолатда C муфта мувозанатда бўлади. Тахометр ўқига нисбатан T кучи таъсир чизиғининг оғган бурчагини ψ билан белгилаймиз. 85 шакл, *б* дан

$$T\cos\psi = Q \tag{1}$$

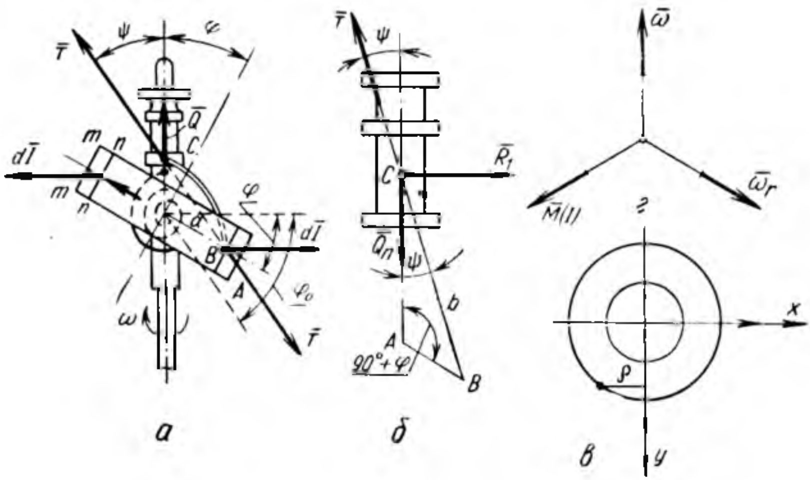
эканлиги кўриниб турибди.

CAB учбурчакдан

$$\sin\psi = \frac{a}{b}\cos\varphi. \tag{2}$$

(2) ни назарга олиб $\cos\psi$ ни топамиз:

$$\cos\psi = \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\cos^2\varphi\right)^{\frac{1}{2}} \approx 1. \tag{3}$$



85- шакл.

Пружина реакциясининг моменти:

$$M_1 = c(\varphi_0 - \varphi). \tag{4}$$

Рамага қўйилган T кучнинг моменти:

$$M_{AB}(T) = Th. \tag{5}$$

Бу икки момент тахометр рамаларини мувозанатда ушлаб туради, бундан:

$$h = a\sin(90° - \varphi - \psi) = a(\cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\sin\varphi). \tag{6}$$

(1), (2), (3) ва (6) ларни назарга олиб, (5) дан $M_{Ab} - (\bar{T})$ ни топамиз:

$$M_{Ab}(\bar{T}) = Q \cdot a\left(1 - \frac{a}{b}\sin\varphi\right)\cos\varphi. \tag{7}$$

Рамага марказдан қочувчи инерция кучини қўшамиз;

$$dI = dm\omega^2\rho\sin\varphi. \tag{8}$$

Бу инерция кучи жуфт момент ҳосил қилиши 85-шакл, *a* дан кўриниб турибди, яъни

$$M(\bar{I}) = -\omega^2\sin\varphi\cos\varphi\int\limits_{\mu}\rho^2 dm, \tag{9}$$

бунда

$$\int\limits_{\mu}\rho^2 dm = I_\varphi, \tag{10}$$

бу ердаги ρ 85-шакл, *b* да кўрсатилган $I_\varphi = C - A$.

Энди (9) формуладан:

$$M(\bar{I}) = -(C - A)\omega^2\sin\varphi\cos\varphi. \tag{11}$$

Рамаларнинг шартли мувозанат тенгламасини тузамиз:

$$M(\bar{I}) + M_1 + M_{лв}(\bar{T}) = 0. \tag{12}$$

(12) тенгламага (4), (7), (11) лардан қийматларини олиб қўйиб, изланаётган муносабатни топамиз:

$$\omega^2 = \frac{c(\varphi_0 - \varphi) + Q\cdot a\left(1 - \frac{a}{b}\sin\varphi\right)\cos\varphi}{(C - A)\sin\varphi\cos\varphi}. \tag{13}$$

То мувозанат ҳолатига келгунича φ бурчак маълум қийматигача ўзгаришида

$$\omega_r = \frac{d\varphi}{dt}. \tag{14}$$

нисбий бурчак тезлиги ва гироскопик момент ҳосил бўлади (85-шакл, *г*).

Гироскопик момент *AB* ўқ маҳкамланган подшипникларда қўшимча босим ҳосил қилади, φ бурчакка эса ҳеч қандай таъсир кўрсатмайди.

62-§. Материал нуқталар системаси кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақидаги теорема

Системанинг материал нуқталари кинетик энергияларининг йиғиндиси системанинг кинетик энергияси деб аталади, яъни

$$T = \sum_{\nu=1}^{n}\frac{m_\nu v_\nu^2}{2}. \tag{62,1}$$

Бу ерда m_ν — системанинг ν нуқтасининг массаси;
v_ν — ўша нуқтанинг тезлиги;

T — системанинг кинетик энергияси. Система геометрик ўзгармас ва ҳаракати илгарилама бўлса, унинг кинетик энергияси қуйидагича бўлади:

$$T = \frac{1}{2} M v_c^2, \tag{62,2}$$

бу ерда $M = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu$ — система массаси;

v_c — система инерция м рказининг тезлиги

Қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи қаттиқ жисмнинг кинетик энергияси қуйидаги формуладан топилади:

$$T = \frac{1}{2} I_z \omega^2, \tag{62,3}$$

бу ерда $I_z = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu r_\nu^2$ — қаттиқ жисмнинг айланиш ўқи z га нисбатан инерция моменти; ω — айланаётган жисмнинг айланиш бурчак тезлиги.

Текис параллел ҳаракатдаги жисмнинг кинетик энергияси қуйидаги формуладан топилади:

$$T = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} I_c \omega^2 \tag{62,4}$$

бу ерда M — жисмнинг массаси;
v_c — инерция марказининг тезлиги;
I_c — ҳаракат текислигига тик ва жисмнинг инерция марказидан ўтган ўққа нисбатан жисмнинг инерция моменти;
ω — жисмнинг шу ўқ атрофида айланишининг оний айланиш бурчак тезлиги.

Қўзғалмас нуқта атрофида айланаётган жисмнинг кинетик энергияси қуйидагича топилади:

$$T = \frac{1}{2} I_\omega \omega^2, \tag{62,5}$$

бу ерда I_ω — оний айланиш ўқига нисбатан жисмнинг инерция моменти.
ω — оний айланиш бурчак тезлиги.

Қўзғалувчи x, y, z координата ўқининг бошини жисмнинг қўзғалмас O нуқтасида олсак, қуйидаги ҳосил бўлади:

$$T = \frac{1}{2}(I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2 - 2 I_{yz} \omega_y \omega_z - 2 I_{zx} \omega_z \omega_x - 2 I_{xy} \omega_x \omega_y). \tag{62,6}$$

Бунда ω_x, ω_y, ω_z — оний айланиш бурчак тезлигининг тегишли ўқлардаги проекцияси.

Агар x, y, z ўқлар O қўзғалмас нуқтадаги жисмнинг бош инерция ўқлари бўлса, $I_{yz} = I_{zx} = I_{xy} = 0$ бўлади, бундан

$$T = \frac{1}{2}\left(I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2\right). \qquad (62,7)$$

Қаттиқ жисм умумий ҳаракат қилганида унинг ҳаракати жисм инерция маркази билан биргаликда қиладиган илгарилама ҳаракатга ва инерция маркази атрофидаги айланма ҳаракатга ажратилади ва кинетик энергиясининг формуласи қуйидагича бўлади:

$$T = \frac{1}{2}\, Mv_c^2 + \frac{1}{2}\, I_c\omega^2, \qquad (62,8)$$

бу ерда M — қаттиқ жисмнинг массаси;

v_c — жисм инерция марказининг тезлиги;

I_c — жисм инерция марказидан ўтган оний ўққа нисбатан жисмнинг инерция моменти;

ω — оний айланиш бурчак тезлигининг миқдори.

Агар қўзғалувчи x, y, z координата ўқининг боши учун жисм инерция марказини олсак, қуйидагича бўлади:

$$T = \frac{1}{2}\, Mv_c^2 + \frac{1}{2}\left(I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2 - 2I_{yz}\omega_y\omega_z - 2I_{zx}\omega_z\omega_x - 2I_{xy}\omega_x\omega_y\right). \qquad (62,9)$$

Агар x, y, z ўқлар бош марказий инерция ўқлари бўлса,

$$I_{yz} = I_{zx} = I_{xy} = 0$$

бўлади, у ҳолда

$$T = \frac{1}{2}\, Mv_c^2 + \frac{1}{2}\left(I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2\right). \qquad (62,10)$$

Мураккаб ҳаракатда бўлган материал нуқталар системасининг кинетик энергияси қуйидаги формуладан топилади:

$$T = \frac{1}{2}\, Mv_c^2 + \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu u_\nu^2, \qquad (62,11)$$

бу ерда u_ν — системанинг ν материал нуқтасининг нисбий тезлиги.

Система кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақидаги теорема бундай таърифланади:

$$dT = d'A^{(e)} + d'A^{(i)}, \qquad (62,12)$$

яъни *система кинетик энергиясининг дифференциали системага қўйилган ташқи ва ички кучлар бажарган элементар ишларнинг йиғиндисига тенг*:

$$\frac{dT}{dt} = N^{(e)} + N^{(i)}, \qquad (62,13)$$

яъни *система кинетик энергиясидан вақтга нисбатан олинган ҳосила системага қуйилган ташқи ва ички кучлар қувватларининг йиғиндисига тенг:*

$$T - T_0 = A^{(e)} + A^{(i)}, \qquad (62,14)$$

яъни *система кинетик энергиясининг, система нуқталари утган маълум йулдаги узгариши, системага қуйилган ташқи ва ички кучларнинг шу йулда бажарган ишларининг йиғиндисига тенг.*

Материал нуқталар системаси узгармас булганда, у абсолют қаттиқ жисм бўлганда ички кучлар бажарган ишларнинг йиғиндиси нолга тенг булади ва (62,12), (62,13), (62,14) формулалар қуйидаги куринишни олади:

$$dT = d'A^{(e)}, \qquad (62,15)$$

$$\frac{dT}{dt} = N^{(e)}, \qquad (62,16)$$

$$T - T_0 = A^{(e)}. \qquad (62,17)$$

Материал нуқталар системасининг потенциал энергияси, системанинг ҳамма нуқтасининг координаталари функциясидир, яъни

$$\Pi = \Pi(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots\ldots x_n, y_n, z_n). \qquad (62,18)$$

Материал нуқталар системаси потенциал майдонда кучишида потенциал кучнинг бажарган иши бошланғич ва охирги ҳолатлардаги потенциал энергияларнинг айирмасига тенг, яъни

$$A = \Pi_1 - \Pi_2. \qquad (62,19)$$

Потенциал кучнинг элементар иши потенциал энергиянинг тескари ишора билан олинган дифференциалига тенг, яъни

$$d'A = -d\Pi. \qquad (62,20)$$

Системага қўйилган ҳамма кучлар потенциал куч булса, системанинг кинетик ва потенциал энергияларининг йиғиндиси ўзгармас булади, яъни

$$T + \Pi = \text{const}. \qquad (62,21)$$

Бу параграфга оид масалаларни қуйидаги икки типга ажратиш мумкин:

1) системанинг кинетик энергияси ҳисобланадиган ҳолга оид масалалар;

2) система кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақидаги теоремага асосан ечиладиган масалалар: система битта жисмдан иборат булган ёки система бир қанча жисмдан иборат бўлган ҳолга оид масалалар.

63- §. Масала ечишга оид методик курсатмалар

Система кинетик энергиясининг узгариши ҳақидаги теоремага асосланиб ечиладиган масалаларни қуйидаги тартибда ечиш тавсия этилади.

1. Координата уқларини танлаб олиш керак.

2. Системага қуйилган ҳамма ташқи ва ички кучларни ифодалаб, шаклда курсатиш керак. (Узгармас система булса, фақат ташқи кучлар олинади.)

3. Система нуқталарининг кучишида системага қуйилган ташқи ва ички кучлар бажарган ишларнинг йиғиндисини топиш керак. (Система ўзгармас булса, фақат ташқи кучлар бажарган ишнинг йиғиндиси топилади.)

4. Система нуқталарининг бошланғич ва кейинги пайтдаги тезликларини топиш керак. Агар система нуқталарининг ҳаракат тенгламалари берилган булса, нуқталарнинг ҳар қандай вақт учун тезликларини топиш керак.

5. Материал нуқталар системасининг бошлангич ва кейинги пайтдаги кинетик энергияларини ҳисоблаб топиш керак:

а) система илгарилама ҳаракат қилаётган булса, унинг кинетик энергияси (62,2) формуладан топилади;

б) система берилган уқ атрофида айланма ҳаракат қилаётган булса, унинг кинетик энергияси (62,3) формуладан топилади;

в) системага кирган жисм текис параллел ҳаракат қилса, бу ҳолатда системанинг кинетик энергияси (62,4) формула билан ҳисоблаб топилади.

6. Кинетик энергиянинг ўзгариши ҳақидаги теоремадан фойдаланиб тенгламалар тузиш ва тузилган ифодалардан изланаётган номаълумларни топиш керак.

(62,14) тенглама фақат берилган системага таъсир қилаётган кучлар узгармас ёки у кучлар вақт функцияси булганда ҳамда масалага берилган ва изланаётган механик миқдорлардан ташқари тезлик ва система таркибидаги жисмларнинг кучиши киргандагина қулланилади.

(62,12) тенглама масалага кирган берилган ва изланаётган механик миқдорлар олдинги масаладагидек булиб, системага таъсир қилаётган узгарувчи кучлар тезликка боғлиқ булганда қулланилади.

(62,13) тенглама масалада жисмнинг чизиқли тезланишини (жисм илгарилама ҳаракатда булганида) ёки жисмнинг айланиш бурчак тезланишини (жисм айланма ҳаракатда булганда) топиш керак булганида ёки аксинча, улар берилганида қулланилади. Бу параграфга оид масалаларни қуйидаги асосий икки типга булиш мумкин.

1. Системанинг кинетик энергияси ҳисобланадиган масалаларга (И В. Мешчерский „Назарий механикадан масалалар туплами" китобидаги 1040—1048-масалалар). Бундай типдаги масалаларни ечишда қуйидагиларни назарда тутиш керак:

а) системага кирган жисм илгарилама ҳаракат қилаётган бўлса, унинг кинетик энергияси (62,2) формулага асосан топилади;

б) жисм қўзғалмас ўқ атрофида айланаётган бўлса, кинетик энергияси (62,3) формулага мувофиқ топилади;

в) системага кирган жисм текис параллел ҳаракат қилса, кинетик энергияси (62,4) формулага мувофиқ топилади (И. В. Мешчерский „Назарий механикадан масалалар тўплами" китобидаги 1045, 1046-масалалар).

2. Битта ёки бир нечта жисмдан иборат системани, система кинетик энергиясининг ўзгариш теоремасини қўллаб ечиладиган масалаларга.

Бундай типдаги масалани қуйидаги учта группага ажратиш мумкин:

а) кинетик энергиянинг ўзгариши теоремасига, яъни (62,14) формулага мувофиқ ечиладиган масалаларга (И. В. Мешчерский „Назарий механикадан масалалар тўплами" китобидаги 1053—1074-масалалар). Системага таъсир қилаётган кучлар ўзгармас (модули ва йўналиши) ёки улар куч функцияси бўлганда (62,14) тенглама татбиқ қилинади;

б) система кинетик энергиясининг ўзгариши дифференциал теоремасига, яъни (62,12) формулага мувофиқ ечиладиган масалаларга;

в) системага таъсир қилаётган кучнинг қуввати билан кинетик энергияси орасидаги боғланиш теоремасига, яъни (62,13) формулага мувофиқ ечиладиган масалаларга (И. В. Мешчерский „Назарий механикадан масалалар тўплами" китобидаги 932—934, 940—942, 1091-масалалар).

Масалада жисм илгарилама ҳаракатда тезлиги ёки (айланма ҳаракатда) бурчак тезлиги берилганда ёки уларни топиш керак бўлганда (62,13) формула татбиқ қилинади.

64-§. Масалалар

80-масала. v_0 тезлик билан ҳаракат қилувчи трактор гусеницасининг кинетик энергияси ҳисоблансин. Ғилдираклар орасидаги масофа l ғилдиракларнинг радиуслари r, гусеница занжири ҳар метрининг оғирлиги γ (86-шакл).

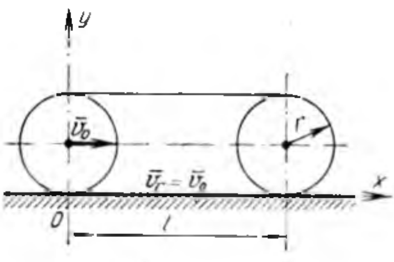
Ечиш. Координата ўқларини шаклда кўрсатилгандек йўналтирамиз. Гусеницанинг m массасини топамиз:

$$m = \frac{\gamma L}{g}, \qquad (1)$$

бу ерда

$$L = 2(l + \pi r) \qquad (2)$$

— гусеницанинг узунлиги.



86-шакл.

Гусеница текис параллел ҳаракат қилади, шунинг учун унинг кинетик энергияси (62,4) формуладан топилади.

Гусеницанинг ерга тегиб турган элементар қисмларининг абсолют тезлиги нолга тенг, шу сабабли:

$$v_0 = v_r, \tag{3}$$

бу ерда v_r — гусеницанинг нисбий ҳаракати тезлиги.

(3) ни назарга олсак, қуйидаги хулосага келамиз:

$$T_{\text{кўч}} = T_{\text{нис}} = \frac{\gamma L v_0^2}{2g}, \tag{4}$$

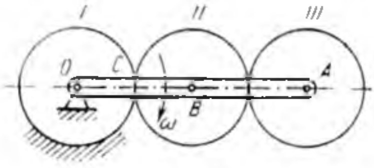
демак,

$$T = T_{\text{кўч}} + T_{\text{нис}} = \frac{\gamma L v_0^2}{g}. \tag{5}$$

Бу тенгликка (2) ва (3) ларни қўйсак, қуйидаги ҳосил бўлади:

$$T = 2\frac{\gamma}{g}(l + \pi r)v_0^2. \tag{6}$$

81-масала. Горизонтал текисликда жойлашган планетар механизмни бир хилдаги учта I, II ва III ғилдираклар ўқларини туташтирувчи OA кривошип ҳаракатга келтиради.



87-шакл.

I ғилдирак қўзғалмас; кривошип ω бурчак тезлиги билан айланади. Ҳар қайси ғилдиракнинг оғирлиги P га, кривошипнинг оғирлиги Q га тенг.

Ғилдиракларни бир жинсли диск ва кривошипларни бир жинсли стержень деб фараз қилиб, механизмнинг кинетик энергияси ҳисоблансин. III ғилдиракка қўйилган жуфт кучнинг иши қанчага тенг. (87-шакл)?

Ечиш. Бу системанинг кинетик энергияси қуйидагича бўлади:

$$T = T_1 + T_2 + T_3,$$

бунда T_1, T_2, T_3 — тегишлича кривошип ва II, III ғилдиракларнинг кинетик энергиялари. (62,3) формулага асосан кривошипнинг кинетик энергиясини топамиз:

$$T_1 = \frac{1}{2} I_0 \omega^2 = \frac{1}{2}\frac{Q}{g} \cdot \frac{OA^2}{3}\omega^2 = \frac{Q \cdot 16r^2}{6g}\omega^2 = \frac{8Q}{3g} r^2\omega^2. \tag{1}$$

Ғилдиракларнинг кинетик энергиясини (62,4) формуладан топамиз:

$$T_2 = \frac{1}{2}\frac{P}{g} v_B^2 + \frac{1}{2} I_B \omega_2^2, \tag{2}$$

$$T_3 = \frac{1}{2}\frac{P}{g} v_A^2 + \frac{1}{2} I_A \omega_3^2, \tag{3}$$

бу ерда I_B, I_A — шакл текислигига тик ва B, A нуқтадан ўтган ўқларга нисбатан тегишлича II ва III ғилдиракларнинг инерция моменти;

ω_2 ва ω_3—тегишлича шу ғилдиракларнинг абсолют бурчак тезликлари.

A ва B нуқталар кривошипда бўлгани учун:

$$v_A = OA \cdot \omega = 4r\omega,$$

$$v_B = OB \cdot \omega = 2r\omega, \qquad (4)$$

бундан ташқари,

$$I_A = \frac{1}{2}\frac{P}{g}r^2, \ I_B = \frac{1}{2}\frac{P}{g}r^2. \qquad (5)$$

I ғилдирак қўзғалмас бўлгани учун у билан II ғилдирак тегишган C нуқта—II ғилдиракнинг тезлик оний марказининг тезлиги нолга тенг. Бунга биноан

$$v_B = CB \cdot \omega_2 = r\omega_2, \qquad (6)$$

бунда

$$\omega_2 = \frac{v_B}{r} = \frac{2r\omega}{r} = 2\omega. \qquad (7)$$

Параллел ўқлар атрофида айланаётган жисмнинг бурчак тезлигини қўшишга асосан (кривошипга нисбатан) II ғилдиракнинг нисбий бурчак тезлиги қуйидагича бўлади:

$$\omega_2' = \omega_2 - \omega = 2\omega - \omega = \omega. \qquad (8)$$

II ва III ғилдиракларнинг радиуслари тенг ва улар бир бири билан ташқи сирти тегишгани учун уларнинг нисбий бурчак тезликлари миқдори жиҳатдан тенг ва қарама-қарши томонга йўналган, шунга асосан:

$$\omega_3' = -\omega_2' = -\omega. \qquad (9)$$

Ўша теоремага асосан III ғилдиракнинг абсолют бурчак тезлиги қуйидагича бўлади:

$$\omega_3 = \omega_3' + \omega = -\omega + \omega = 0. \qquad (10)$$

Демак,

$$T_2 = \frac{1}{2}\frac{P}{g}4r^2\omega^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\frac{P}{g}4r^2\omega^2 = 3\frac{P}{g}r^2\omega^2, \qquad (11)$$

$$T_3 = \frac{1}{2}\frac{P}{g}16r^2\omega^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\frac{P}{g}r^2\cdot 0 = 8\frac{P}{g}r^2\omega^2, \qquad (12)$$

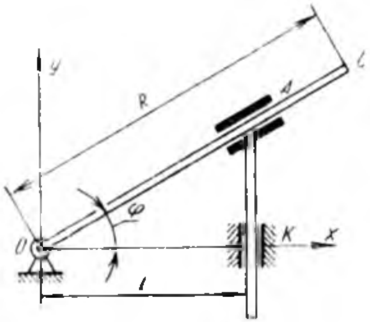
булардан:

$$T = \frac{8}{3}\frac{Q}{g}r^2\omega^2 + 3\frac{P}{g}r^2\omega^2 + 8\frac{P}{g}r^2\omega^2 =$$

$$= \frac{8Q + 33P}{3g}r^2\omega^2 = \frac{r^2\omega^2}{3g}(8Q + 33P). \qquad (13)$$

$\omega_3 = 0$ бўлгани учун, III ғилдиракка қўйилган жуфт кучнинг иши нолга тенг.

82-масала. Кулисали механизмдаги OC кривошип шакл текислигига тик бўлган O ўқ атрофида силкинганида A ползун OC кривошип бўйлаб силжиб, AB стерженни ҳаракатга келтиради; AB стержень вертикал K йўналтирувчиларда ҳаракат қилади. Узунлиги R бўлган OC кривошип массаси m_c, бўлган бир жинсли стержень деб ҳисоблансин; ползун массаси m_A, AB стержень массаси m_B га тенг. $OK = l$. Механизмнинг кинетик энергияси ва OC кривошипнинг бурчак тезлиги айланиш бурчаги функцияси орқали ифодалансин. Ползун материал нуқта деб ҳисоблансин (88-шакл).



88- шакл.

Ечиш. Координата ўқларини 88-шаклда кўрсатилгандек қилиб оламиз.

У вақтда

$$Y_A = l \operatorname{tg} \varphi. \qquad (1)$$

A нуқтанинг ҳаракат тезлигини қуйидагича топамиз:

$$v_A = l\,\omega \sec^2 \varphi. \qquad (2)$$

A ползун ва AB стержень, илгарилама ҳаракат қилмоқда, демак, уларнинг кинетик энергияси қуйидагича булади:

$$T_1 = \frac{m_A + m_B}{2}\, l^2 \omega^2 \sec^4 \varphi. \qquad (3)$$

OC кривошип эса айланма ҳаракат қилмоқда, демак, унинг кинетик энергияси қуйидагича булади:

$$T_2 = \frac{1}{2}\, I_c \omega^2. \qquad (4)$$

Бунда

$$I_c = \frac{1}{3}\, m_c R^2. \qquad (5)$$

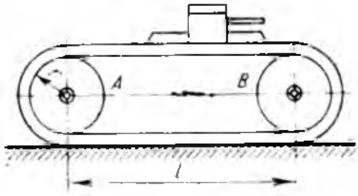
Механизмнинг кинетик энергияси стержень билан ползуннинг кинетик энергияси ҳамда кривошип кинетик энергиясининг йиғиндисига тенг, яъни

$$T = T_1 + T_2.$$

ёки

$$T = \frac{\omega^2}{6\cos^4\varphi}\left[m_c R^2 \cos^4\varphi + 3\, l^2 (m_A + m_B)\right].$$

83- масала. Танк унинг тўртта ғилдирагини (ҳар томонида иккитадан) айлантирувчи двигатель ёрдамида ҳаракатга келтирилади. Ғилдираклар узларининг чиқиқ жойлари билан гусеницани илиб юргизади. Танк ҳаракатлана бошлаганидан 8 секунд утгандан кейин у 36 *км/соат* тезлик билан юради. Агар танкнинг ғилдирак ва гусеницаларсиз оғирлиги $P_1 = 5$ *т* ҳар қайси ғилдиракнинг оғирлиги $P_2 = 200$ *кГ*, ҳар қайси гусеницанинг оғирлиги $P_3 = 500$ *кГ* бўлса, танк двигателининг ўртача қуввати аниқлансин. Ғилдираклар бир жинсли диск деб ҳисоблансин (89- шакл).



89- шакл

Ечиш. Текширилаётган система:

1) илгарилама ҳаракат қилаётган танк корпуси, 2) ҳар қайсиси танк билан бирга илгарилама ва шу вақтда танкка нисбатан ўшандай тезлик билан нисбий ҳаракат қилаётган иккита гусеница ва 3) уз уқининг атрофида айланма ҳамда у билан бирга илгарилама ҳаракат қилаётган, яъни текис параллел ҳаракат қилаётган тўртта ғилдираклардан иборат.

Танк корпусининг T_1 кинетик энергияси:

$$T_1 = \frac{1}{2}\frac{P_1}{g}v^2. \quad (1)$$

Гусеницаларнинг T_2 кинетик энергияси:

$$T_2 = 2\cdot 2\frac{\gamma}{g}(l+\pi r)v^2 = 2\left(\frac{1}{2}\frac{P_3}{g}v^2 + \frac{1}{2}\frac{P_3}{g}v^2\right) = 2\frac{P_3}{g}v^2. \quad (2)$$

Ғилдиракларнинг T_3 кинетик энергияси:

$$T_3 = 4\left(\frac{1}{2}\frac{P_2}{g}v^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2\right). \quad (3)$$

Ғилдирак уқи нуқтасининг тезлиги танкнинг илгарилама ҳаракат тезлиги v га тенг.

Демак, ғилдиракнинг айланиш бурчак тезлиги $\omega = \frac{v}{r}$ булади, бу ерда r— ғилдирак радиуси.

Ғилдиракнинг инерция моменти қуйидагига тенг булади (узлуксиз цилиндр):

$$I_0 = \frac{1}{2}\frac{P_2}{g}r^2.$$

Буларга биноан ғилдиракларнинг кинетик энергияси:

$$T_3 = 4\left(\frac{1}{2}\frac{P_2}{g}v^2 + \frac{1}{4}\frac{P_2}{g}v^2\right) = 3\frac{P_2}{g}v^2, \quad (4)$$

бутун системанинг кинетик энергияси эса қуйидагича:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{1}{2}\frac{P_1}{g}v^2 + 2\frac{P_3}{g}v^2 + 3\frac{P_2}{g}v^2 =$$

$$= \frac{v^2}{2g}(P_1 + 4P_3 + 6P_2). \tag{5}$$

Танк ҳаракат қилиш олдида унинг кинетик энергияси $T_0 = 0$ бўлгани учун (62,14) формула қуйидаги кўринишга келади:

$$T = A, \tag{6}$$

бу ерда A—ҳамма ташқи ва ички кучларнинг бажарган иши.

Танкни ҳаракатга келтирадиган двигателнинг фойдали иши:

$$A = T = \frac{v^2}{2g}(P_1 + 4P_3 + 6P_2). \tag{7}$$

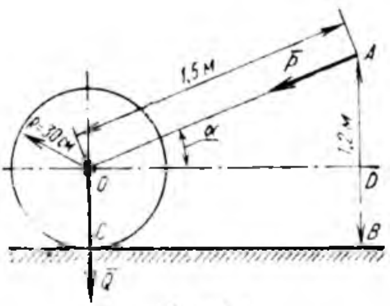
Двигателнинг ўртача фойдали қуввати $N_ф$ (от кучи ҳисобида) қуйидагига тенг бўлади:

$$N_ф = \frac{A}{t \cdot 75} = \frac{v^2(P_1 + 4P_3 + 6P_2)}{150\, gt}. \tag{8}$$

(8) га сон қийматларни қўйсак, қуйидаги келиб чиқади:

$$N_{ўр} = \frac{100(5000 + 1200 + 2000)}{150 \cdot 9{,}81 \cdot 8} = 69{,}4 \text{ от кучи.}$$

84-масала. Диаметри 60 *см* ва оғирлиги 392 *н* бўлган цилиндрик катокни бир одам ҳаракатга келтиради; бунда у катокнинг AO дастасига AO йўналишида ўзгармас P куч билан босади; AO нинг узунлиги 1,5 *м* га тенг. A нуқтанинг горизонтдан баландлиги 1,2 *м*. Шу одам 2 *м* йўл босиб, катокўқига 80 *см/сек* тезлик бериши учун керак бўлган P куч аниқлансин ($g = 980$ *см/сек*^{2}); подшипниклардаги ишқаланиш ҳисобга олинмасин (90-шакл).



90- шакл.

Ечиш. Масалани ечиш учун абсолют қаттиқ жисм кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақидаги теореманинг натижаси бўлган (62,17) формуладан фойдаланамиз, у ҳолда:

$$T - T_0 = A^{(e)}, \tag{1}$$

бу ерда $A^{(e)}$—цилиндрик катокка таъсир қилаётган ҳамма ташқи кучларнинг каток массаси маркази 2 *м* га кўчганида бажарган иши. Масала шартига биноан $T_0 = 0$.

Катокнинг кинетик энергияси, текис параллел ҳаракатдаги жисмнинг кинетик энергиясига ўхшаш (62,3) формуладан топилади, яъни

$$T = \frac{1}{2} Mv_c^2 + \frac{1}{2} I_c \omega^2. \tag{2}$$

Каток билан ер тегишган чизиқ катокнинг оний ўқи бўлгани учун $\omega = \frac{v_c}{R}$ бўлади, бундан ташқари,

$$I_c = \frac{1}{2} MR^2.$$

Демак,

$$T = \frac{1}{2} Mv_c^2 + \frac{1}{2} \frac{MR^2}{2} \left(\frac{v_c}{R}\right)^2 = \frac{3}{4} Mv_c^2 = \frac{3}{4} \frac{Q}{g} v_c^2. \tag{3}$$

Каток оғирлик кучининг, ер нормал реакция кучининг ва ишқаланиш кучининг иши нолга тенг; чунки катокнинг оғирлик кучи ва ернинг нормал реакция кучи ўзлари қўйилган нуқталарнинг кўчишига тик, демак, бу кўчишда улар бажарган ишлар нолга тенг; ишқаланиш кучи эса оний айланиш ўқидан ўтади, демак, бунинг ҳам иши нолга тенг; P кучнинг иши эса қуйидагига тенг бўлади:

$$A^{(e)} = P \cdot s \cdot \cos\alpha. \tag{4}$$

90- шаклдан:

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{(1,5)^2 - (0,9)^2}}{1,5} = \frac{1,2}{1,5} = \frac{4}{5} = 0,8. \tag{5}$$

(3), (4) ва (5) лардан:

$$\frac{3}{4} \frac{Q}{g} v_c^2 = P \cdot s \frac{4}{5},$$

бундан:

$$P = \frac{3 \cdot 5 \cdot Q \cdot v_c^2}{4 \cdot 4 g \cdot s} = \frac{15 \cdot 392 \cdot 80^2}{16 \cdot 980 \cdot 200} = 12 \text{ н}.$$

85- **масала**. Самолёт аэродромга қўниш пайтида 10 *м/сек* тезлик билан учади. Агар ҳавонинг қаршилик кучи 60 *н*, ҳар қайси ғилдиракнинг оғирлиги 100 *н*, ғилдиракларнинг радиуслари 0,5 *м* дан самолётнинг ғилдираксиз оғирлиги 1100 *н*, ғилдиракларнинг ерда силкинишидан ҳосил бўладиган юмалаб ишқаланиш коэффициенти 1 *см* га тенг бўлса, самолёт тўхтагунига қадар қанча йўл босиб ўтиши топилсин. Ғилдираклар бир жинсли доиравий кесимли диск деб ҳисоблансин.

Ечиш. Самолётнинг охирги тезлиги нолга тенг. Самолёт ерга қўнишида у учта нуқтаси билан ерга тегади деб ҳисоблаймиз, шунинг учун самолёт корпуси ғилдиракларга қуйидаги куч билан босади:

$$N = \frac{2}{3} \cdot 1100 = 733 \text{ н}. \tag{1}$$

Ғилдиракларнинг ерга босими:

$$N_1 = N + P = 733 + 100 = 833\ н \tag{2}$$

га тенг.

Ғилдиракларда юмалаб ишқаланиш ҳосил бўлганлигидан, ғилдиракларга тормозланадиган жуфт куч таъсир қилади, унинг моменти қуйидагига тенг:

$$M = kN_1. \tag{3}$$

Бу жуфт куч самолёт тўхтагунича

$$A_1 = -M\varphi = -kN_1\frac{s}{r} \tag{4}$$

иш бажаради.

Бу ерда s — самолёт тормозланганидан кейин тўхтагунича ўтган йўли; r — ғилдирак радиуси; $k = 0{,}01\ м = 1\ см$ юмалаб ишқаланиш коэффициенти.

Ҳавонинг қаршилик кучи самолёт тўхтагунича

$$A_2 = -F \cdot s \tag{5}$$

иш бажаради.

Самолётнинг кинетик энергияси қуйидагига тенг:

$$T = T_1 + T_2, \tag{6}$$

бу ерда $T_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q}{g} v^2$ (7) илгарилама ҳаракат қилаётган самолёт қисмининг кинетик энергияси.

T_2 — текис параллел ҳаракат қилаётган самолёт ғилдирагининг кинетик энергияси, у (62,4) формуладан топилади, яъни

$$T_2 = \frac{1}{2}\frac{P}{g}v^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{P}{g}v^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\frac{P}{g}r^2\omega^2 = \frac{3}{4}\frac{P}{g}v^2, \tag{8}$$

бу ерда $I = \frac{1}{2}\frac{P}{g}r^2$ — ғилдиракни бир жинсли диск деб қаралгандаги ўқига нисбатан инерция моменти.

Система кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақидаги теоремага асосан:

$$-(T_1 - T_2) = A_1 + A_2, \tag{9}$$

ёки

$$\frac{1}{2}\frac{Q}{g}v^2 + \frac{3}{4}\frac{P}{g}v^2 = kN_1 \cdot \frac{s}{r} + F \cdot s,$$

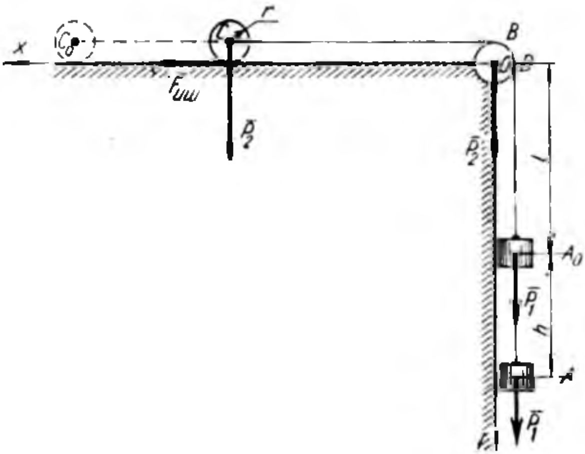
бундан s ни топамиз:

$$s = \frac{v^2 r(3P + 2Q)}{4g(F \cdot r + N_1 k)}.$$

Сон қийматларни қўйсак, қуйидаги келиб чиқади:

$$s = \frac{10^2 \cdot 0{,}5(3 \cdot 100 + 2 \cdot 1100)}{4 \cdot 9{,}81(60 \cdot 0{,}5 + 833 \cdot 0{,}01)} \approx 83\ м.$$

86-масала. P_1 оғирликдаги A юк, узунлиги L ва оғирлиги Q бўлган бир жинсли чўзилмас арқонга осилган. Арқон шакл текислигига тик бўлган O ўқ атрофида айланувчи B блокдан ўтказилган. Арқоннинг иккинчи учи қўзғалмас горизонтал текислик бўйлаб сирғанмай, ғилдировчи C катокнинг ўқига уланган. B блок ва C катокларнинг ҳар қайсисининг радиуси r ва оғирлиги P_2 бўлган бир жинсли доиравий дискдан иборат. Катокнинг горизонтал текисликда силжишидан ҳосил бўладиган ишқаланиш коэффициенти k га тенг. Система тинч ҳолатда турган бошланғич пайтда, B блокдан арқоннинг l узунликдаги қисми осилиб тушган. A юкнинг тезлиги, унинг вертикал силжиши h функциясида аниқлансин (91-шакл).



91-шакл.

Ечиш. Бу масалада юкнинг силжиши h ва P_1, P_2, Q ўзгармас кучлар маълум бўлиб, юкнинг v тезлигини топиш талаб қилинади. Шунинг учун кинетик энергиянинг ўзгариши ҳақидаги теореманинг (62,14) формуласидан фойдаланамиз:

$$T - T_0 = A^{(e)} + A^{(i)}. \tag{1}$$

Системанинг кинетик энергияси: A юкнинг T_1, B блокнинг T_2, C катокнинг T_3 ва арқоннинг T_4 кинетик энергиялар йиғиндисидан иборат, яъни

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4. \tag{2}$$

Арқоннинг ҳар қандай нуқтасининг тезлиги илгарилама ҳаракат қилаётган юкнинг v тезлигига тенг бўлгани учун (62,2) формулага биноан қуйидагини ёзамиз:

$$T_1 = \frac{1}{2}\frac{P_1}{g}v^2; \quad T_4 = \frac{1}{2}\frac{Q}{g}v^2. \tag{3}$$

Блок айланма ҳаракат қилади, унинг кинетик энергиясини (62,3) формуладан топамиз:

$$T_2 = \frac{1}{2} I_0 \omega, \text{ бунда } I_0 = \frac{1}{2} \frac{P_2}{g} r^2; \ \omega = \frac{v}{r},$$

ω — блокнинг айланиш бурчак тезлиги.
Демак,

$$T_2 = \frac{1}{4} \frac{P_2}{g} v^2. \qquad (4)$$

Катокнинг ҳаракати текис параллел ҳаракат бўлгани учун унинг кинетик энергиясини (62,4) формуладан топамиз:

$$T_3 = \frac{1}{2} \frac{P_2}{g} v_c^2 + I_c \frac{\omega_1^2}{2}, \qquad (5)$$

бу ерда $I_c = \frac{1}{2} \frac{P_2}{g} r^2$, ω_1 — катокнинг айланиш бурчак тезлиги.

Каток текисликда сирғанмасдан юмалаётгани учун унинг текислик билан теккан нуқтасининг тезлиги нолга тенг, чунки у нуқта катокнинг айланиш оний маркази.

Шу сабабли:

$$v_c = r\omega_1 \text{ ва } v_c = v,$$

демак,

$$T_3 = \frac{1}{2} \frac{P_2}{g} v_c^2 + \frac{1}{4} \frac{P_2}{g} v_c^2 = \frac{3}{4} \frac{P_2}{g} v_c^2 = \frac{3}{4} \frac{P_2}{g} v^2. \qquad (6)$$

Топилган T_1, T_2, T_3, T_4 ларнинг қийматларини (2) га қўйсак, қуйидаги келиб чиқади:

$$T = \frac{1}{2} \frac{v^2}{g} (P_1 + 2P_2 + Q). \qquad (7)$$

Бошлангич пайтда система тинч ҳолатда тургани учун

$$T_0 = 0. \qquad (8)$$

Энди A юк h масофага кўчганида, системага қўйилган ҳамма кучларнинг бажарган ишларининг йиғиндисини топишга ўтамиз. P_1 куч бажарган иш қуйидагига тенг:

$$A_1 = P_1 h. \qquad (9)$$

O ва C нуқтага қўйилган ҳар қайси P_2 кучнинг иши нолга тенг, чунки O нуқта қўзғалмас, C нуқта эса горизонтал бўйича силжийди.

Юмалаб ишқаланиш жуфтининг моменти μP_2 га тенг, бу жуфтнинг иши манфий ишора билан олинган унинг моментининг каток айланиш бурчагига кўпайтмасига тенг, чунки юмалаб ишқаланиш жуфтининг йўналиши катокнинг айланишига қарама-қарши, демак,

$$A_2 = -\mu P_2 \varphi. \qquad (10)$$

Катокнинг

$$\omega_1 = \frac{v_c}{r} = \frac{v}{r} \tag{11}$$

айланиш бурчак тезлиги B блокнинг айланиш бурчак тезлигига тенг бўлгани учун, катокнинг φ айланиш бурчаги блокнинг айланиш бурчагига тенг, яъни $\varphi = \frac{h}{r}$, шунинг учун:

$$A_2 = -\mu P_2 \frac{h}{r}. \tag{12}$$

Каток текисликда сирғанмай юмалагани учун унинг сирғаниб ишқаланиши $T_{иш}$ кучининг иши нолга тенг, чунки бу сирғаниб ишқаланиш кучи қўйилган нуқтанинг тезлиги нолга тенг. Арқон оғирлигининг тортиш кучини топамиз. Олдин шуни айтиш керакки, арқон бирлик узунлигининг оғирлиги

$$\gamma = \frac{Q}{L} \tag{13}$$

га тенг ва блокдан осилиб турган қисмининг оғирлик маркази ҳаракат бошланганига қадар

$$y_{c_0} = \frac{l}{2} \tag{14}$$

ҳолатда бўлган.

Ҳаракатнинг охирида арқоннинг Oy ўқи бўйича оғирлик маркази

$$y_c = \frac{l+h}{2} \tag{15}$$

ҳолатда бўлади. Арқон оғирлик кучининг ишини қуйидаги формуладан топамиз:

$$A_3 = \frac{Q}{L}\left[(l+h)\,y_c - l y_{c_0}\right] = \frac{h}{2L}(2\,l+h). \tag{16}$$

Ҳақиқатан ҳам, бирор вақтда арқоннинг бирлик узунлиги вертикал ҳолатига ўтса, унинг иши қуйидагича бўлади:

$$dA_3 = \gamma y dy. \tag{17}$$

Тўла иш қуйидагига тенг бўлади:

$$A_3 = \int_l^{l+h} \gamma\, y dy = \frac{\gamma}{2}\, y^2 \Big|_l^{l+h} = \frac{\gamma}{2}\left[(l+h)^2 - l^2\right]. \tag{18}$$

Ҳаракат бошланишида системанинг ҳамма нуқталари тинч ҳолатда эканини назарга олсак, система кинетик энергиясининг ўзгариш теоремаси қуйидагича бўлади:

$$T = A_1 + A_2 + A_3. \tag{19}$$

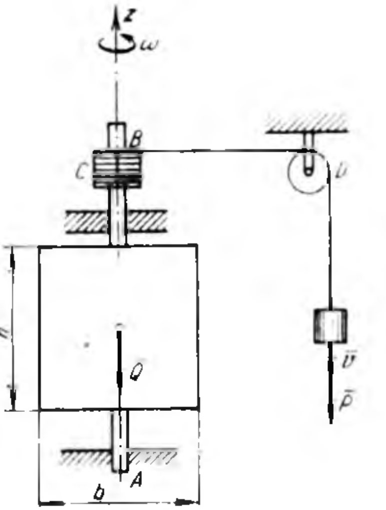
Бунга (7), (9), (12), (16) лардан қийматларини олиб қўямиз;

$$\frac{1}{2}\,\frac{v^2}{g}\,(P_1 + 2P_2 + Q) = P_1 h - \mu P_2\,\frac{h}{r} + \frac{Qh}{2L}\,(2l + h),$$

бундан v ни топамиз:

$$v = \sqrt{\frac{2\,gh\left(P_1 + \frac{Q}{2L}\,(2l + h) - P_2\,\frac{\mu}{r}\right)}{P_1 + 2P_2 + Q}}\,.$$

87- масала. Эни b га, баландлиги h га тенг бўлган тўртбурчак пластинка, ўз текислигида ётган ва ўртасидан h томонига параллел бўлиб ўтган вертикал AB ўқ атрофида ишқаланмай айлана олади (92- шакл). Ўқнинг B учига чўзилмайдиган, эгилувчи ва оғирлигини ҳисобга олмаса бўладиган ип ўралган, r радиусли C шкив ўрнатилган; ипнинг иккинчи учи шкив билан бир хил горизонтда бўлган D блокдан ўтказилган бўлиб, унга пластинкани айланма ҳаракатга келтирувчи P юк боғланган. Пластинканинг оғирлиги Q нинг бошланғич пайтдаги тезлиги нолга тенг ва ҳаракатда ҳеч қандай қаршилик йўқ, деб ҳисоблаб, юкнинг ҳаракат қонуни топилсин.



92- шакл

Ечиш. Юкнинг тезланишини топиш талаб қилингани учун масалани ечишда (62,14) тенгламадан фойдаланамиз:

$$\frac{dT}{dt} = N^{(e)} + N^{(i)}. \tag{1}$$

Бу системанинг кинетик энергияси қўзғалмас z ўқнинг атрофида айланаётган пластинканинг ва илгарилама ҳаракат қилаётган юкнинг кинетик энергияларидан иборат, яъни

$$T = \frac{1}{2}\,I_z\omega^2 + \frac{1}{2}\,\frac{P}{g}\,v^2, \tag{2}$$

бу ерда I_z — айланиш ўқи z га нисбатан пластинканинг инерция моменти;

ω — унинг айланиш бурчак тезлиги;

v — юкнинг тезлиги.

Ип чўзилмас бўлгани учун юкнинг тезлиги шкив айланасининг чизиқли тезлигига тенг, яъни

$$v = \omega r. \tag{3}$$

Демак,

$$T = \frac{1}{2} I_z \frac{v^2}{r^2} + \frac{1}{2} \frac{P}{g} v^2 \tag{4}$$

формула бўйича тўртбурчак пластинканинг h томонига параллел бўлиб, ўртасидан ўтган ўққа нисбатан инерция моменти

$$I_z = \frac{1}{12} \frac{Q}{g} b^2 \tag{5}$$

га тенг, шунинг учун

$$T = \frac{1}{24} \frac{Q}{gr^2} v^2 b^2 + \frac{1}{2} \frac{P}{g} v^2 = \frac{v^2}{2g} \left(\frac{Qb^2}{12r^2} + P \right) \tag{6}$$

ва

$$\frac{dT}{dt} = \frac{v}{g} \left(\frac{Qb^2}{12r^2} + P \right) \frac{dv}{dt}. \tag{7}$$

Юкнинг кўчишида фақат $\overline{P}$ куч (юкнинг оғирлиги) иш бажаради, чунки қаршиликларни ҳисобга олмаймиз.

$\overline{P}$ куч ва юкнинг $\overline{v}$ тезлиги бир тўғри чизиқ бўйлаб бир томонга йўналгани учун унинг қувватини қуйидаги формуладан топамиз:

$$N = \frac{dA}{dt} = P \cdot v. \tag{8}$$

Топилган қувватни (8) дан ва кинетик энергиянинг ҳосиласи $\frac{dT}{dt}$ ни (7) дан олиб (1) га қўямиз:

$$\frac{v}{g} \left(\frac{Qb^2}{12r^2} + P \right) \frac{dv}{dt} = Pv, \tag{9}$$

бундан:

$$w = \frac{dv}{dt} = \frac{12r^2P}{Qb^2 + 12r^2P} g = \text{const} \tag{10}$$

ёки

$$w = \frac{Pr^2}{Pr^2 + Qk^2} g,$$

бу ерда

$$k^2 = \frac{b^2}{12}.$$

пластинканинг AB айланиш ўқи нисбатан инерция радиуси. Демак, юк доимий тезланиш билан ўзгарувчан ҳаракат қилар экан.

IX БОВ

АБСОЛЮТ ҚАТТИҚ ЖИСМНИНГ ТЕКИС ПАРАЛЛЕЛ ҲАРАКАТИ

65- §. Назариядан асосий тушунчалар

Қаттиқ жисм текис ҳаракатининг тенгламаси вектор кўринишда қуйидагича бўлади:

$$M\overline{w}_c = \overline{R}^{(e)},$$
$$I_c \overline{\varepsilon} = \overline{M}_c^{(e)}, \qquad (65{,}1)$$

бу ерда M — жисмнинг массаси;

I_c — асосий ҳаракат текислигига тик бўлган ва инерция марказидан ўтувчи ўққа нисбатан жисмнинг инерция моменти — марказий инерция моменти;

$\overline{R}^{(e)}$ — ташқи кучларнинг бош вектори;

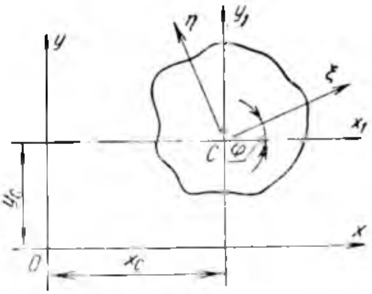
$\overline{M}_{(c)}^{(e)}$ — ташқи кучларнинг инерция марказига нисбатан ҳисобланган бош моменти;

$\overline{\varepsilon}$ — айланиш бурчак тезланишининг вектори.

(65,1) тенглама скаляр кўринишда қуйидагича бўлади:

$$\left.\begin{aligned} M\ddot{x}_c &= \sum_{\nu=1}^{n} X_\nu^{(e)}, \\ M\ddot{y}_c &= \sum_{\nu=1}^{n} Y_\nu^{(e)}, \\ I_c\ddot{\varphi} &= \sum_{\nu=1}^{n} M_c(\overline{F}_\nu^{(e)}). \end{aligned}\right| \qquad (65{,}2)$$

Бу (65,2) тенгламанинг биринчи иккитаси боши қаттиқ жисмнинг инерция маркази C да бўлган координата ўқи билан бирликда содир буладиган илгарилама ҳаракат билан кўчма ҳаракатни ифодалайди. Учинчиси эса қаттиқ жисмнинг инерция маркази C дан ўтувчи ва асосий текислигига тик бўлган ўққа нисбатан нисбий ҳаракатни ифодалайди (93- шакл .



93- шакл.

Агар ҳамма ташқи кучлар маълум бўлса (65,2) система дифференциал тенгламаларини интеграллаб x_c, y_c, φ ларни вақт функциясидан топамиз, яъни

$$\left.\begin{aligned} x_c &= f_1(t), \\ y_c &= f_2(t), \\ \varphi &= f_3(t). \end{aligned}\right| \qquad (65.3)$$

Текис параллел ҳаракатда ташқи кучлар (65,2) тенглама билан топилади.

Агар x_c, y_c лар берилган бўлса, кучнинг иккита проекцияси ва айланиш φ бурчаги топилади.

Шундай қилиб, (65.2) тенглама билан текис ҳаракат динамикасининг тўғри (биринчи) ва тескари (иккинчи) масалаларини ҳам ечиш мумкин.

Динамиканинг тескари масаласини ечишда (65,2) тенгламаларни интеграллашга тўғри келади. Интеграллашда олтита интеграл ўзгармасларини топиш учун $t = 0$ бўлганда

$$x_c = x_{co},\ y_c = y_{co},\ \dot{x}_c = \dot{x}_{co},\ \dot{y}_c = \dot{y}_{co},\ \varphi = \varphi_o,\ \dot{\varphi}_c = \dot{\varphi}_o$$

кўринишидаги олтита бошланғич шартлар берилиши керак.

66-§. Масала ечишга оид методик кўрсатмалар

Қаттиқ жисм текис — параллел ҳаракат динамикасининг масалаларини қуйидаги тартибда ечиш тавсия этилади:

1. Координата ўқлари системасини танлаб олиш керак ва айланиш бурчаги φ йўналишининг мусбат томонини аниқлаб олиш керак.

2. Қаттиқ жисмга қўйилган ҳамма ташқи кучларни ва боғланиш кучларини шаклда кўрсатиб, уларни ифодалаб олиш керак.

3. $\sum\limits_{\nu=1}^{n} X_{\nu}^{(e)}$, $\sum\limits_{\nu=1}^{n} Y_{\nu}^{(e)}$, $\sum\limits_{\nu=1}^{n} M_c(\overline{F}_{\nu}^{(e)})$ ларни ҳисоблаб олиш керак.

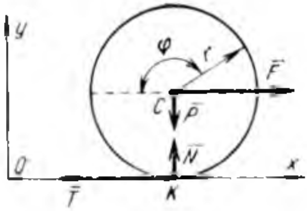
4. Ҳаракатнинг бошланғич шартларини топиб олиш керак.

5. (65,2) система дифференциал тенгламаларини тузиш керак.

6. Тузилган тенгламаларни интеграллаб, изланаётган номаълумларни топиш керак.

67-§. Масалалар

88-масала. Автомобилнинг етакланувчи ғилдиракларининг ўқи горизонтал ва тўғри чизиқли ҳаракат қилади. Ғилдирак ўқига горизонтал йўналган ҳаракатлантирувчи F куч таъсир қилади. Ғилдиракнинг оғирлик марказидан унинг текислигига тик ўтган ўққа нисбатан олинган инерция радиуси ρ га тенг. Ғилдиракнинг ерда сирғанишидан ҳосил бўладиган



94- шакл.

ишқаланиш коэффициенти f га тенг. Ғилдиракнинг радиуси r ва оғирлиги P. Ғилдирак сирғанмай ғилдираши учун F куч қандай шартни қаноатлантириши керак? Юмалаш қаршилиги ҳисобга олинмасин (94-шакл).

Ечиш. Координата ўқларини 94-шаклда курсатилганидек йўналтирамиз.

Ғилдирак сирғанмай юмалаши учун, унинг ер билан ишқаланиш кучи максимал сирғаниб ишқаланиш кучидан катта бўлмаслиги керак, яъни

$$T \leqslant fN, \tag{1}$$

бу ерда T — сирғаниб ишқаланиш кучи;
N — нормал босим кучи.

Ғилдиракка қўйилган ташқи кучлар: $\overline{F}$ куч, $\overline{P}$ оғирлик кучи, $\overline{N}$ нормал реакция кучи ва ғилдирак ер билан тегишган нуқтасига қўйилган, ер бўйлаб ғилдирак айланиш томонига йўналган $\overline{T}$ ишқаланиш кучларидан иборат.

Ғилдиракнинг инерция маркази тўғри чизиқли ҳаракат қилади, шунинг учун

$$y_c = r. \tag{2}$$

Ғилдирак сирғанмасдан юмаланишида унинг кинематик шарти шундан иборатки, ғилдиракнинг ер билан тегишган K нуқтаси унинг оний тезлик маркази бўлади.

Ғилдиракнинг оғирлик марказидан ўтувчи ва шакл текислигига тик ўқи атрофида айланиш бурчагини φ билан белгилаймиз, у вақтда

$$x_c = r\varphi, \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{n} X_{\nu}^{(e)} &= F - T, \\ \sum_{\nu=1}^{n} Y_{\nu}^{(e)} &= N - P, \\ \sum_{\nu=1}^{n} M_c(F_{\nu}^{(e)}) &= T \cdot r, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

эканлигини таъкидлаб ўтамиз.

Текис параллел ҳаракатнинг (65,2) тенгламалари ғилдирак учун қуйидагича бўлади:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x_c}{dt^2} &= F - T, \\ m\frac{d^2y_c}{dt^2} &= N - P, \\ m\rho^2\frac{d^2\varphi}{dt^2} &= T\cdot r. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

(2), (3) лардаги муносабатларни назарга олсак, (5) қуйидагича бўлади:

$$\left.\begin{aligned} mr\cdot\frac{d^2\varphi}{dt^2} &= F - T, \\ N &= P \\ m\rho^2\frac{d^2\varphi}{dt^2} &= T\cdot r. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

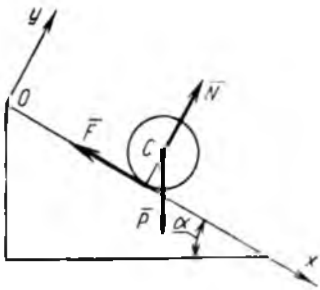
(6) тенгламалардан

$$F = T\frac{r^2+\rho^2}{\rho^2}. \tag{7}$$

(6) нинг иккинчисини ва (1) муносабатни назарга олсак, қуйидаги келиб чиқади:

$$F \leqslant fP\frac{r^2+\rho^2}{\rho^2}.$$

89- масала. Оғирлиги P_H бўлган цилиндр горизонтга α бурчак остида қия текисликда ўз оғирлиги таъсирида сирғанмай юмаламоқда (95- шакл). Цилиндр C марказининг тезланиши, цилиндрнинг текисликка босими N ва цилиндрни сирғанишга йўл қўймаётган ишқаланиш кучи топилсин.



95- шакл.

Ечиш. Ox ўқини қия текислик бўйича, Oy ўқини унга тик қилиб йўналтирамиз. P оғирлик куч, қия текисликнинг $\bar{N}$ нормал реакцияси ва $\bar{F}$ ишқаланиш кучи цилиндрга қўйилган ташқи кучлар бўлади.

Цилиндр массасининг маркази Oy ўқи бўйича кўчмагани учун $\frac{d^2y_c}{dt^2} = 0$ булади, шунинг учун ҳамма кучларнинг шу ўқларга проекцияларининг йиғиндиси ҳам нолга тенг бўлади, шундай қилиб,

$$\sum_{\nu=1}^{3} Y_\nu^{(e)} = N - P\cos\alpha = 0, \tag{1}$$

бундан:

$$N = P\cos\alpha. \tag{2}$$

(65.2) тенгламанинг қолган иккита тенгламасини тузишда $\frac{d^2x_c}{dt^2} = w_c$ ни ҳисобга оламиз.

Юмалаш қаршилигини ҳисобга олмай ва цилиндрнинг айланиши йўналишида бўлган куч моментининг йўналишини мусбат деб ҳисоблаб тенгламаларни тузамиз:

$$\left.\begin{aligned} Mw_c &= P\sin\alpha - F, \\ I_c\varepsilon &= FR, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

бу тенгламаларда учта w_c, ε ва F лар номаълум (бу ерда $F = fN$ деб ҳисоблаш мумкин эмас, чунки бундай тенглик цилиндрнинг текислик билан теккан нуқтаси текисликда сирпанганидагина бўлади, сирпаниш бўлмаганда $F < fN$ бўлиши мумкин). Номаълумлар орасида бўлган қўшимча боғланишни фақат юмалашда

$$v_c = \omega R \tag{4}$$

бўлишини назарга олиб тузамиз, (4) ни вақтга нисбатан дифференциаллаймиз:

$$w_c = \varepsilon R. \tag{5}$$

Агар цилиндр узлуксиз масса билан қопланганини назарга олсак (яъни $I_c = \frac{1}{2}MR^2$ ни), у вақтда (3) нинг иккинчиси қуйидагича бўлади:

$$\frac{1}{2}Mw_c = F. \tag{6}$$

F нинг бу қийматини (3) нинг биринчисига қўямиз, у ҳолда

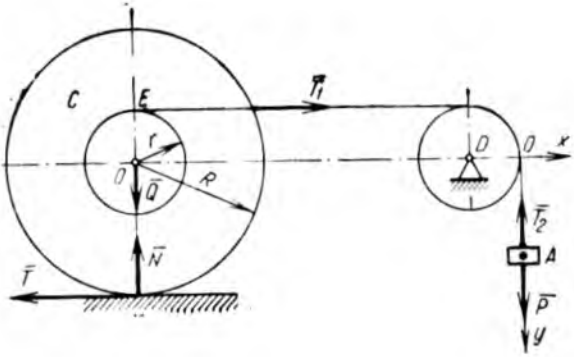
$$w_c = \frac{2}{3}g\sin\alpha \tag{7}$$

бўлади. Энди (7) дан F ни топамиз:

$$F = \frac{1}{3}P\sin\alpha. \tag{8}$$

Сирпанмай юмалаётган цилиндрга шундай ишқаланиш кучи таъсир қилиши керак.

90-масала. Оғирлиги P бўлган A юк пастга тушиб, оғирлигини ҳисобга олмаса бўладиган ва чўзилмайдиган ип билан R радиусли C ғилдиракни горизонтал рельсда сирпанмай юмалашга мажбур қилади; ип қўзғалмас D блокдан ўтказилган ва r радиусли B барабанга ўралган, B барабан C ғилдиракка маҳкам бириктирилган; уларнинг умумий оғирлиги Q га тенг, горизонтал Ox ўққа нисбатан олинган инерция радиуси эса ρ га тенг. A юкнинг тезланиши топилсин (96-шакл).



96- шакл

Ечиш. Координата ўқларини 96-шаклда курсатилганидек йўналтирамиз. Барабан ғилдирак билан бирга текис-параллел ҳаракат қилади. Унга ўзининг $\overline{Q}$ оғирлиги, сирғаниб ишқаланиш $\overline{T}$ кучи, $\overline{N}$ нормал босим ва ипнинг $\overline{T}_1$ тортиш кучи қуйилган. Барабаннинг инерция маркази тўғри чизиқ бўйлаб ҳаракат қилишини таъкидлаб ўтамиз, яъни

$$y_0 = 0. \tag{1}$$

Ҳамма кучларнинг ҳар қайси координата ўқидаги проекцияларининг йиғиндисини ва кучларнинг O нуқтага нисбатан моментларининг йиғиндисини ҳисоблаймиз:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{4} X_\nu^{(e)} &= T_1 - T, \\ \sum_{\nu=1}^{4} Y_\nu^{(e)} &= N - Q, \\ \sum_{\nu=1}^{4} M_0(\overline{F}_\nu^{(e)}) &= T\cdot R + T_1 r. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

(65,2) тенгламага асосан қуйидагича бўлади:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x}_c &= T_1 - T, \\ 0 &= N - Q, \\ m\rho^2\ddot{\varphi} &= TR + T_1 r. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

(3 дан сирғаниб ишқаланиш кучи T ни чиқарамиз, бунинг учун (3) нинг биринчисини R га кўпайтириб, учинчисига қўшамиз:

$$mR\ddot{x}_c + m\rho^2\ddot{\varphi} = RT_1 + T_1 r.$$

Бундан $\ddot{x}_c = R\ddot{\varphi}$ ни назарга олиб T_1 ни топамиз:

$$T_1 = \frac{Q}{g} \cdot \frac{\rho^2 + R^2}{R + r} \cdot \ddot{\varphi}. \tag{4}$$

Агар барабан E нуқтасининг айланишидаги тезланиши A юкнинг тезланишига тенглигини ҳисобга олсак, қуйидаги муносабат ҳосил бўлади:

$$(R + r)\ddot{\varphi} = w_A, \tag{5}$$

бунга асосан (4) қуйидаги кўринишга келади:

$$T_1 = \frac{Q}{g} \cdot \frac{\rho^2 + R^2}{(R + r)^2} w_A. \tag{6}$$

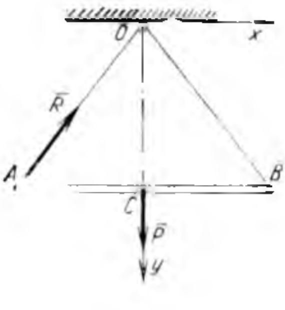
A юкнинг ҳаракат дифференциал тенгламасидан:

$$\frac{P}{g} w_A = P - T_1 \tag{7}$$

Бунга (6) дан T_1 нинг қийматини олиб қўйиб, w_A ни топамиз:

$$w_A = g \frac{P(R + r)^2}{Q(\rho^2 + R^2) + P(R + r)^2}.$$

91-масала. Оғирлиги P бўлган бир жинсли стержень, узунлиги ни стержень узунлигига тенг бўлган иккита ип билан O нуқтага осилган. Бир ип узилганда иккинчи ипда ҳосил бўладиган тортилиш топилсин (97-шакл).



97-шакл.

Ечиш. Координата ўқларини шаклда кўрсатилгандек оламиз. OB ип узилгандан кейин AB стерженнинг A нуқта атрофидаги айланиш бурчагини φ билан белгилаймиз ва уни ниҳоятда кичик деб ҳисоблаймиз.

Стерженга ўз оғирлиги $\overline{P}$ ва ипнинг реакцияси $\overline{R}$ дан иборат ташқи кучлар таъсир қилади.

Кучларнинг ҳар қайси координата ўқлардаги проекцияларининг йиғиндисини ва кучларнинг C нуқтага нисбатан моментларининг йиғиндисини топамиз:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{2} X_\nu &= R\cos 60^\circ, \\ \sum_{\nu=1}^{2} Y_\nu &= P - R\sin 30^\circ, \\ \sum_{\nu=1}^{2} M_C(\overline{F}_\nu^{(e)}) &= R\frac{l}{2}\sin 60^\circ. \end{aligned}\right| \tag{1}$$

(65,2) тенгламаларга асосан, қуйидагилар топилади:

$$\left.\begin{aligned} \frac{P}{g}\ddot{x}_c &= R\cos 60^\circ, \\ \frac{P}{g}\ddot{y}_c &= P - R\sin 30^\circ, \\ I_c\ddot{\varphi} &= R\frac{l}{2}\sin 60^\circ, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

бу ерда $I_c = \frac{Pl^2}{12g}$ — AB стерженнинг C нуқтага нисбатан инерция моменти.

Айланиш бурчаги жуда кичик бўлганда

$$y_c = \frac{l}{2}\varphi \tag{3}$$

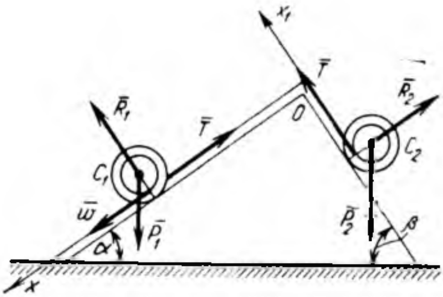
деб ҳисоблаш мумкин. Бундан фойдаланиб (2) тенгламалар системасининг иккинчи ва учинчиларидан $\ddot{\varphi}$ ни чиқарамиз:

$$\frac{l}{6}(P - R\sin 60^\circ) = R\frac{l}{2}\sin 60^\circ,$$

бунда R ни топамиз:

$$R = \frac{P}{4\sin 60^\circ} = \frac{P}{2\sqrt{3}} = 0{,}29\,P.$$

92-масала. Оғирлиги P_1 ва P_2 бўлган иккита цилиндрик вал горизонт билан тегишлича α ва β бурчак ҳосил қилувчи иккита қия текисликда юмалайди. Валларга чўзилмайдиган иплар ўралган ва улар туташтирилган. Ипнинг тортилиши ва унинг оғма текисликларда қиладиган ҳаракатининг тезланиши аниқлансин. Валлар бир жинсли, доиравий, кесимли цилиндр деб ҳисоблансин. Ипларнинг оғирлиги ҳисобга олинмасин (98- шакл).



98- шакл.

Ечиш. Ипнинг ҳаракат қилаётган нуқтасининг тезланишини $\bar{w}$ билан белгилаймиз ва 98- шаклда кўрсатилгандек йўналтирамиз. Ox ўқини $\bar{w}$ векторнинг мусбат йўналиши томонига йўналтирамиз.

Иккала цилиндрнинг ҳам боғланишларини $\bar{R}_1$, $\bar{R}_2$, $\bar{T}$ реакциялар билан алмаштириб, боғланишдан қутқазамиз ҳамда цилиндрларнинг мураккаб ҳаракатини ип билан бирга бўладиган илгарилама кўчирма ва инерция марказлари атрофида айланувчи нисбий айланма ҳаракатларга ажратамиз.

Бу ҳолда:

$$\left.\begin{aligned} w_{c_1} &= w + r_1\ddot{\varphi}_1, \\ w_{c_2} &= w - r_2\ddot{\varphi}_2, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

бу ерда φ_1 ва φ_2 — биринчи ва иккинчи цилиндрларнинг инерция маркази атрофида айланиш бурчаклари.

Цилиндрларнинг (65,2) текис — параллел ҳаракат дифференциал тенгламаларини тузамиз:

Биринчи цилиндр учун:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{P_1}{g}(w + r_1\ddot{\varphi}_1) = P_1 \sin\alpha - T, \\ &\frac{P_1}{g}\ddot{y}_{c_1} = R_1 - P_1\cos\alpha, \\ &\frac{P_1 r^2}{2g}\ddot{\varphi}_1 = Tr_1. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Иккинчи цилиндр учун:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{P_2}{g}(w - r_2\ddot{\varphi}_2) = -P_2\sin\beta + T, \\ &\frac{P_2}{g}\ddot{y}_{c_2} = R_2 - P_2\cos\beta = 0, \\ &\frac{P_2 r_2}{2g}\ddot{\varphi}_2 = Tr_2. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

(3) тенгламалар системасини тузишда Ox ўқининг ҳаракати томонга йўналган деб ҳисоблаймиз. (2) ва (3) тенгламалар системасидан:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{P_1}{g}w = P_1\sin\alpha - 3T; \\ &\frac{P_1}{g}w = -P\sin\beta + 8\,T. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Бу (4) тенгламалар системасини қўшамиз:

$$w = g\,\frac{P_1\sin\alpha - P_2\sin\beta}{P_1 + P_2}. \tag{5}$$

(4) тенгламалар системасидан w ни чиқарсак, қуйидаги келиб чиқади:

$$T = \frac{P_1 P_2(\sin\alpha + \sin\beta)}{3(P_1 + P_2)}.$$

X БОБ

ҚЎЗҒАЛМАС ЎҚ АТРОФИДА АЙЛАНУВЧИ АБСОЛЮТ ҚАТТИҚ ЖИСМНИНГ АЙЛАНИШ ЎҚИГА КЎРСАТАДИГАН БОСИМИ

68-§. Асосий формулалар

Қаттиқ жисм қўзғалмас ўқ атрофида айланганида инерция кучи ҳосил бўлади ва бу куч жисмнинг таянчларида қўшимча босим ҳосил қилади.

1. Статик реакция кучлари қуйидаги мувозанат тенгламалари системасидан топилади:

$$\sum_{\nu=1}^{n} X_{\nu}^{(e)} = 0, \qquad \sum_{\nu=1}^{n} M_{xx}(\overline{F}_{\nu}^{(e)}) = 0,$$
$$\sum_{\nu=1}^{n} Y_{\nu}^{(e)} = 0, \qquad \sum_{\nu=1}^{n} M_{yy}(\overline{F}_{\nu}^{(e)}) = 0, \qquad (68,1)$$
$$\sum_{\nu=1}^{n} Z_{\nu}^{(e)} = 0,$$

бу ерда жисмнинг айланиш ўқи Cz ўқ бўлган.

2. Динамик реакция кучлари қуйидаги мувозанат тенгламалари системасидан топилади:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{\nu=1}^{n} (R_{\nu x}^{(\partial)} + I_{\nu x}) = 0, \quad \sum_{\nu=1}^{n} [M_{xx}(\overline{R}_{\nu}) + M_{xx}(\overline{I}_{\nu})] = 0,\\
&\sum_{\nu=1}^{n} (R_{\nu y}^{(\partial)} + I_{\nu y}) = 0, \quad \sum_{\nu=1}^{n} [M_{yy}(\overline{R}_{\nu}) + M_{yy}(\overline{I}_{\nu})] = 0.\\
&\sum_{\nu=1}^{n} (R_{\nu z}^{(\partial)} + I_{\nu z}) = 0,
\end{aligned}\right| \qquad (68,2)$$

Олтинчи мувозанат тенгламаси эса Oz ўқининг атрофида айланаётган қаттиқ жисмнинг статик ва динамик реакция кучлари нолга тенг бўлган дифференциал тенгламасига мос.

3. Қузғалмас Oz ўқининг атрофида айланаётган абсолют қаттиқ жисмнинг динамик реакциялари қуйидаги тенгламалар системасидан топилади:

$$\left.\begin{aligned}
&M(-\varepsilon y_c - \omega^2 x_c) = X_A^{(\partial)} + X_B^{(\partial)}\\
&M(\varepsilon x_c - \omega^2 y_c) = Y_A^{(\partial)} + Y_B^{(\partial)},\\
&-I_{xz}\varepsilon + \omega^2 I_{yz} = aY_A^{(\partial)} - bY_B^{(\partial)},\\
&-I_{xz}\omega^2 + \varepsilon I_{yz} = -aX_A^{(\partial)} + bX_B^{(\partial)},
\end{aligned}\right| \qquad (68,3)$$
$$Z_A^{(\partial)} = 0,$$

бу ерда a, b — динамик реакция қўйилган нуқтанинг координаталари,

ω — қаттиқ жисмнинг айланиш бурчак тезлиги,

ε — қаттиқ жисмнинг айланиш бурчак тезланиши,

M — қаттиқ жисмнинг массаси,

(x_c, y_c, z_c) — қаттиқ жисм оғирлик марказининг координаталари.

$X_A^{(\partial)}$, $Y_A^{(\partial)}$, $Z_A^{(\partial)}$, $X_B^{(\partial)}, Y_B^{(\partial)}$, $Z_B^{(\partial)}$ — қаттиқ жисм инерция кучи таъсиридан вужудга келган қўшимча динамик реакциянинг ташкил этувчилари.

I_{xz}, I_{yz} — қаттиқ жисмнинг марказдан қочувчи инерция моментлари. Бу ҳолда қўзғалмас координата системасининг боши айланиш ўқининг устида ўрнашган бўлади.

4. Агар жисмнинг айланиш ўқи марказий ўқ бўлса (айланиш ўқи жисмнинг оғирлик марказидан ўтган бўлса) ва қаттиқ жисм бир текис айланса (68,3) тенглама қуйидаги кўринишга келади:

$$\left.\begin{aligned} &X_A^{(\partial)} + X_B^{(\partial)} = 0; \\ &Y_A^{(\partial)} + Y_B^{(\partial)} = 0; \\ &\omega^2 I_{yz} = aY_A^{(\partial)} - bY_B^{(\partial)}; \\ &-\omega^2 I_{xz} = -aX_A^{(\partial)} + bX_B^{(\partial)}. \end{aligned}\right| \qquad (68,4)$$

Бу ҳолда динамик реакция жуфт кучга келтирилади.

5. Айланиш ўқи марказий ўқ бўлмасдан бош ўқ бўлса, материал нуқталар системасининг текислигида ўрнашган нуқта учун динамик реакцияси қуйидаги тенгламалар системасидан топилади:

$$\left.\begin{aligned} &aY_A^{(\partial)} - bY_B^{(\partial)} = 0; \\ &-aX_A^{(\partial)} + bX_B^{(\partial)} = 0; \\ &M(-\varepsilon y_c - \omega^2 x_c) = X_A^{(\partial)} + X_B^{(\partial)}; \\ &M(\varepsilon x_c - \omega^2 y_c) = Y_A^{(\partial)} + Y_B^{(\partial)}. \end{aligned}\right| \qquad (68,5)$$

Бу ҳолда динамик реакция тенг таъсир этувчига келтирилади.

69-§. Масалалар ечишга оид методик кўрсатмалар

Ўқ атрофида айланувчи жисмнинг айланиш ўқига кўрсатадиган динамик босимини топишга оид масалаларни қуйидаги тартибда ечиш тавсия этилади.

1. Иккита координата ўқлари системасини танлаб олиш керак. Улардан бирини қўзғалмас қилиб, иккинчисини эса ўқ атрофида айланаётган жисм билан бириктирилган ва бу қўзғалувчи системанинг ўқларини инерция бош ва марказий ўқларига жойлашадиган қилиб олинади. (Агар жисм оғирлик

марказн айланиш ўқи C да ётган бўлса, уни координата ўқининг боши қилиб олинса, қулай бўлади. Агар у айланиш ўқида ётмаса, координата ўқининг боши қилиб оғирлик марказидан айланиш ўқи z га туширилган тик билан айланиш ўқи кесишган нуқтани ёки қаттиқ жисм таянчларидан бирини олиш керак.)

2. Берилган кучларни ифодалаб кўрсатиш керак.

3. Айланиш ўқининг боғланишларини динамик реакциялар билан алмаштириб айланиш ўқини боғланишлардан қутқазиш керак.

4. Қаттиқ жисм оғирлик маркази C нинг координаталари x_c, y_c ларни топиб олиш керак.

5. Қаттиқ жисмнинг марказдан қочувчи I_{xz}, I_{yz} инерция моментларини ҳисоблаб олиш керак.

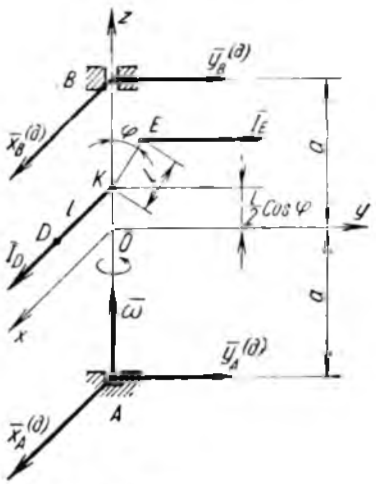
6. Статик реакциялар керак бўлса, уларни топиш керак. улар (68,1) тенгламалар системасидан топилади.

7. (68,2) тенгламалар системасидан динамик реакцияларни топиш керак.

8. Ўқ атрофида айланаётган жисм абсолют қаттиқ жисм бўлса, динамик реакциялар (68,3) тенгламалар системасидан топилади.

70-§. Масалалар

93-масала. Доимий ω бурчак тезлик билан айланувчи вертикал AB валга координата бошидан $\frac{l}{2}\cos\varphi$ масофада иккита стержень маҳкам бириктирилган. KE стержень вал билан φ бурчак ташкил қилади, KD стержень AB вал билан KE стержень турган текисликка тик. $KE=KD=l$; $AB=2a$. Стерженларнинг учларига ҳар қайсисининг массаси m бўлган иккита E ва D шар бириктирилган. A ва B таянчларда валга тушадиган динамик босимлар аниқлансин. D ва E шарлар материал нуқталар деб ҳисоблансин, стерженларнинг массалари ҳисобга олинмасин (99-шакл).



99-шакл.

Ечиш. Координата ўқларини 99-шаклда кўрсатилганидек қилиб оламиз. Айланаётган массага қуйидаги инерция кучларини қўшамиз:

$$\left.\begin{aligned} |\bar{I}_D| &= m\,\omega^2 l \sin\varphi; \\ |\bar{I}_E| &= m\,\omega^2 l. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

A ва B нуқталардаги боғланишларни динамик реакциялар билан алмаштириб, вални боғланишдан қутқазамиз.

Инерция кучлари ва динамик реакциялар учун (68.2) га тааллуқли мувозанат тенгламаларини тузамиз:

$$X_A^{(\partial)} + X_B^{(\partial)} + I_D = 0;$$

$$Y_A^{(\partial)} + Y_B^{(\partial)} + I_E = 0;$$

$$(X_A^{(\partial)} - X_B^{(\partial)}) \cdot a - I_D \cdot \frac{l}{2}\cos\varphi = 0;$$

$$(-Y_A^{(\partial)} + Y_B^{(\partial)}) \cdot a + I_E \cdot \frac{3}{2}\, l\cos\varphi = 0.$$

Бу тенгламаларни биргаликда ечиб, изланаётган номаълумларни топамиз:

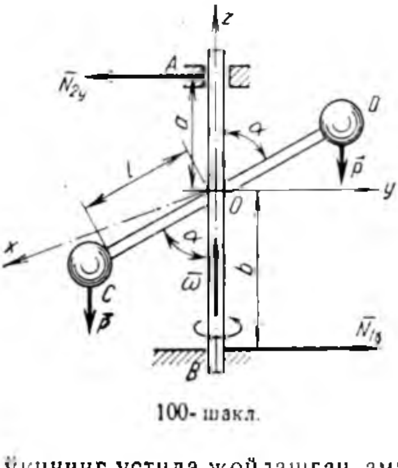
$$X_A^{(\partial)} = N_{Ax}^{(\partial)} = \frac{m\omega^2 l\,(2a - l\cos\varphi)}{4a};$$

$$X_B^{(\partial)} = N_{Bx}^{(\partial)} = \frac{m\omega^2 l\,(2a + l\cos\varphi)}{4a};$$

$$Y_A^{(\partial)} = N_{Ay}^{(\partial)} = \frac{m\omega^2 l\sin\varphi\,(3l\cos\varphi - 2a)}{4a};$$

$$Y_B^{(\partial)} = N_{By}^{(\partial)} = \frac{m\omega^2 l\sin\varphi\,(3l\cos\varphi + 2a)}{4a}.$$

94-масала. Вертикал стержень B товонтаги ва A подшипникда айланади (100-шакл). Унинг O нуқтасига иккинчиси CD стержень маҳкам бириктирилган, бунда $OA=a$ ва $OB=b$. Стерженнинг айланиш бурчак тезлиги ўзгармас ва ω га тенг, C ва D учларига ҳар қайсисининг оғирлиги $P_н$ бўлган шарлар бириктирилган. Стерженларнинг ўз оғирлигини ҳисобга олмай, товонтаги ва подшипникларга тушадиган босимлар топилсин. Бурчак $AOD=\alpha$ ва $CO = OD = l$.



100-шакл.

Ечиш. Координата ўқларини 100-шаклда кўрсатилгандек йўналтирамиз.

Бу текширилаётган масалада инерция маркази айланиш ўқининг устида жойлашган, аммо айланиш ўқи бош инерция ўқи эмас. Олдин (68,4) формуладан фойдаланиб, қўшимча динамик босимни топамиз. Масалада кўрсатилгандек инерция кучлари *yOz* текислигида бўлади, бунда қўшимча динамик босим ҳосил қиладиган жуфт ҳам шу текисликда ётади, демак,

$$N_{1x} - N_{2x} = 0. \quad (1)$$

Бундан ташқари, бу масалада *O* инерция маркази ва *CD* стержень бир текис айланади, шунинг учун

$$\omega_z = 0; \ \varepsilon_z = 0. \quad (2)$$

Қўшимча динамик реакциянинг *Oy* ўқидаги проекциялари қуйидагича бўлади:

$$N_{1y} = \frac{1}{a+b} \frac{2Pl \sin \alpha l \cos \alpha \cdot \omega^2}{g} = \frac{Pl^2 \omega^2 \sin 2\alpha}{g(a+b)}. \quad (3)$$

$$N_{2y} = -\frac{Pl^2 \omega^2 \sin 2\alpha}{g(a+b)}. \quad (4)$$

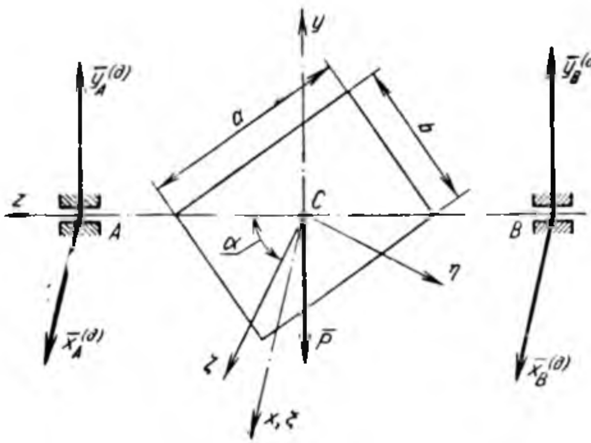
B товонтагидаги ва *A* подшипникдаги динамик реакцияларни топиш учун топилган қўшимча динамик реакцияларга товонтаги оғирлиги $2P$ га тенг ва вертикал юқорига йўналган статик реакцияни қўшсак кифоя.

Динамик реакцияларининг проекциялари қуйидагича бўлади:

$$X_A = X_B = 0; \ -Y_A = Y_B = \frac{Pl^2 \omega^2 \sin 2\alpha}{g(a+b)};$$

$$Z_A = 0; \ Z_B = -2P.$$

95-масала. Оғирлиги *P* булган бир жинсли тўртбурчак пластинка ўзининг *AB* диагонали атрофида ω бурчак тезлик билан бир текис айланади. Агар томонларининг узунлиги *a* ва *b* булса, пластинкадан тушадиган динамик босимнинг қанча булишлиги аниқлансин (101-шакл).



101-шакл.

Ечиш. Координата ўқларини 101-шаклда кўрсатилгандек йўналтирамиз. Айланиш ўқининг боғланишини динамик реакция билан алмаштириб, ўқни боғланишдан қутқазамиз. Танлаб олинган координата ўқлари марказий ўқлигини ва AB ўқ атрофида ўзгармас бурчак тезлик билан айланишини ҳисобга олиб (68,4) тенгламалар системасидан:

$$I_{yz}\omega^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\left(Y_A^{(\partial)} - Y_B^{(\partial)}\right);$$

$$I_{xz}\omega^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\left(X_A^{(\partial)} - X_B^{(\partial)}\right);$$

$$Y_A^{(\partial)} + Y_B^{(\partial)} = 0; \tag{1}$$

$$X_A^{(\partial)} + X_B^{(\partial)} = 0.$$

Cx ўқ пластинка текислигига тик йўналган ва шунда бош ҳамда марказий уқ бўлган ҳолни текширамиз, яъни бу ҳол учун

$$I_{xz} = 0. \tag{2}$$

Марказдан қочма I_{yz} инерция моментини топиш учун C ўқи пластинканинг узунлиги a бўлган томонига параллел ва Cx ўқи билан бир хил бўлган, $C\eta$ ўқи унга тик бўлган бош ҳамда марказий $C\xi\eta\zeta$ координата ўқлари системасини утказамиз.

C_z ва $C\zeta$ ўқлар орасида α бурчак ҳосил бўлади, у қуйидагича топилади:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}; \tag{3}$$

$$I_{yz} = \int\limits_{(M)} zy\,dm \tag{4}$$

формуланинг интеграли остидаги ифодани ўзгартирамиз, координата ўқларининг айланишидаги (5) формулалардан фойдаланиб, интеграл остидаги z, y лар ўрнига ζ, η ларни киритамиз:

$$z = \zeta\sin\alpha + \eta\cos\alpha;$$
$$y = \zeta\cos\alpha - \eta\sin\alpha. \tag{5}$$

Бу қийматларни (4) га қуйсак, қуйидаги келиб чиқади:

$$I_{yz} = \frac{\sin 2\alpha}{2}\left[\int\limits_{(M)}\zeta^2\,dm - \int\limits_{(M)}\eta^2 dm\right] + \cos 2\alpha\int\limits_{(M)}\eta\zeta\,dm. \tag{6}$$

$C\zeta\eta\xi$ бош координата системаси булгани учун марказдан қочувчи момент нолга тенг, яъни

$$\int\limits_{(M)}\eta\zeta\,dm = 0, \tag{7}$$

Қолган инерция моментларини ҳисоблаймиз:

$$\int\limits_{(M)} \zeta^2 dm = \frac{P}{abg} \int\limits_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \int\limits_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \zeta^2 d\zeta\, d\eta = \frac{Pa^2}{12g}. \quad (8)$$

$$\int\limits_{(M)} \eta^2 dm = \frac{P}{abg} \int\limits_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \int\limits_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \eta^2 d\zeta\, d\eta = \frac{Pb^2}{12g}. \quad (9)$$

Бу топилганларни ва $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ ларни (3) дан топиб, (6) га қўйсак, қуйидаги келиб чиқади:

$$I_{yz} = \frac{P(a^2 - b^2)ab}{12g\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{Pab\,(a^2 - b^2)}{12g\,(a^2 + b^2)}. \quad (10)$$

(2), (10) тенгламаларга асосан (1) тенгламалар системаси қуйидаги кўринишга келади:

$$\frac{Pab\,\omega^2}{6g} \cdot \frac{a^2 - b^2}{(a^2 + b^2)^{3/2}} = Y_A^{(\partial)} - Y_B^{(\partial)}; \quad (11)$$

$$Y_A^{(\partial)} + Y_B^{(\partial)} = 0;$$

$$X_A^{(\partial)} - X_B^{(\partial)} = 0;$$

$$X_A^{(\partial)} + X_B^{(\partial)} = 0.$$

Бу тенгламалар системасини ечамиз:

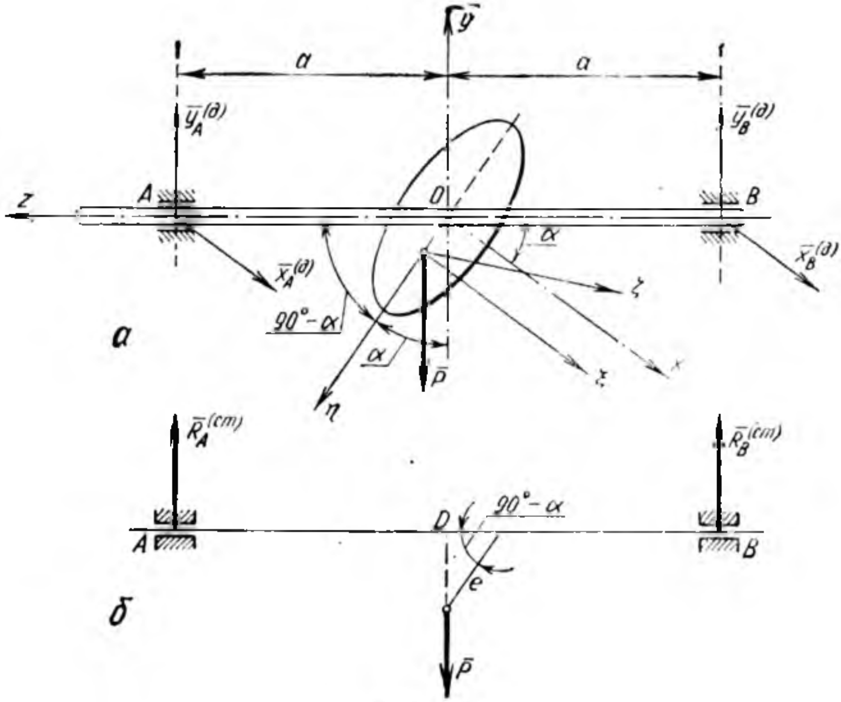
$$N_{Ax} = 0; \ N_{Bx} = 0;$$

$$N_{Ay} = -\frac{Pab\,\omega^2\,(a^2 - b^2)}{12g\,(a^2 + b^2)^{3/2}};$$

$$N_{By} = \frac{Pab\,\omega^2\,(a^2 - b^2)}{12g\,(a^2 + b^2)^{3/2}}.$$

96-масала. Бир жинсли юпқа диск горизонтал вал ўртасига $OC = e$ эксцентриситет билан вал ўқига $90 - \alpha$ бурчак остида ўрнатилган; дискнинг оғирлиги P, радиуси r. Вал ва диск ω бурчак тезлик билан бир текис айланганда ҳосил бўладиган статик ва динамик таянч реакциялари аниқлансин: таянчлар орасидаги масофа $AB = 2a$ (102-шакл, *а*).

Ечиш. Статик реакцияларни топиш учун валга таъсир қилаётган кучларни схемада (102-шакл, *б*) кўрсатамиз. Валга ташқи кучлардан диск оғирлик кучи P ва подшипниклар таянч сиртларига тик бўлиб йўналган $\overline{R}_A^{(\text{ст})}$, $\overline{R}_B^{(\text{ст})}$ реакция кучлари таъсир қилади.



102- шакл.

Шаклдан

$$\left.\begin{aligned} AD &= a - e\sin\alpha, \\ DB &= a + e\sin\alpha \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

эканлиги кўриниб турибди.

Валга қўйилган кучларнинг мувозанат тенгламаларини тузамиз:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{\nu=1}^{n} M_A(\overline{F}_\nu) = 0; \\ &\sum^{n} M_B(\overline{F}_\nu) = 0. \end{aligned}\right| \qquad (2)$$

У вақтда:

$$\begin{aligned} &-R_A^{(\text{ст})}\cdot 2a + P(a - e\sin\alpha) = 0; \\ &R_B^{(\text{ст})}\cdot 2a - P(a + e\sin\alpha) = 0. \end{aligned} \qquad (3)$$

Булардан:

$$\begin{aligned} R_A^{(\text{ст})} &= \frac{P(a - e\sin\alpha)}{2a}; \\ R_B^{(\text{ст})} &= \frac{P(a + e\sin\alpha)}{2a}. \end{aligned} \qquad (4)$$

Вал AB ўқ атрофида доимий бурчак тезлик билан айланғани учун динамик реакцияларни топишда қуйидаги тенгламалар системасидан фойдаланамиз:

$$\left.\begin{aligned} I_{yz}\omega^2 &= a\,(Y_A^{(\partial)} - Y_B^{(\partial)});\\ I_{zx}\omega^2 &= a\,(X_A^{(\partial)} - X_B^{(\partial)});\\ -M_{yc}\omega^2 &= Y_A^{(\partial)} + Y_B^{(\partial)};\\ M_{xc}\omega^2 &= -X_A^{(\partial)} + X_B^{(\partial)}. \end{aligned}\right| \tag{5}$$

Ox ўқи бош ўқ бўлгани учун:

$$I_{zx} = 0. \tag{6}$$

I_{zy} ни ҳисоблаш учун қўзғалувчи марказий ва бош c, $c\xi\eta\zeta$ координата ўқлари системасини киритамиз.

Эски координата ўқлари системаси янги координата ўқлари системасига қуйидаги формулалар орқали ўтказилади:

$$\left.\begin{aligned} y &= (e+\xi)\cos\alpha - \zeta\sin\alpha;\\ z &= (e+\xi)\sin\alpha + \zeta\cos\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Буни назарга олсак, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$I_{zy} = \int\limits_{(M)} yz\; m = \frac{\sin 2\alpha}{2}\left[\int\limits_{(M)}(e+\xi)^2 dm - \int\limits_{(M)}\xi^2 dm\right] +$$

$$+\cos 2\alpha \int\limits_{(M)}(e+\xi)\,\zeta dm. \tag{8}$$

$c\xi\eta\zeta$ координата ўқлари системасининг боши диск инерция марказига жойлашгани учун

$$\int\limits_{(M)}\zeta dm = \int\limits_{(M)}\xi dm = 0 \tag{9}$$

бўлади. Демак,

$$I_{zy} = \frac{\sin 2\alpha}{2}\left[\,e^2M + \int\limits_{(M)}(\xi+\eta)^2 dm - \int\limits_{(M)}(\zeta^2+\eta^2)\,dm\right] =$$

$$= \frac{\sin 2\alpha}{2}\,(e^2M + I_\zeta - I_\xi\,). \tag{10}$$

Массаси текис тақсимланган диск учун:

$$I_\zeta = \frac{1}{2}MR^2;\; I_\xi = \frac{1}{4}MR^2, \tag{11}$$

шу сабабли

$$I_{zy} = \frac{P\sin 2\alpha}{2g}\left(e^2 + \frac{1}{4}R^2\right). \tag{12}$$

$x_c = 0$, $y_c = e\cos\alpha$ эканини ҳисобга олсак, (5) дан қуйидагилар келиб чиқади:

$$X_A^{(\partial)} = X_B^{(\partial)} = 0;$$

$$Me\cos\alpha \cdot \omega^2 = -\left(Y_A^{(\partial)} + Y_B^{(\partial)}\right);$$

$$\frac{P\sin 2\alpha}{2g}\left(e^2 + \frac{1}{4}R^2\right)\omega^2 = a\left(Y_A^{(\partial)} - Y_B^{(\partial)}\right).$$

Демак, динамик реакция диск оғирлик маркази билан айланиш ўқи ётган текисликда ётадиган Oy ўқ бўйлаб йўналган бўлиб, миқдор жиҳатдан қуйидагига тенг:

$$Y_A^{(\partial)} = \frac{P}{2g}\left[e\cos\alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2a}\left(2e^2 + \frac{R^2}{4}\right)\right]\omega^2;$$

$$Y_B^{(\partial)} = \frac{P}{2g}\left[e\cos\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2a}\left(2e^2 + \frac{R^2}{4}\right)\right]\omega^2.$$

XI БОБ

АРАЛАШ ТИПДАГИ МАСАЛАЛАР

71-§. Масалалар ечишга оид методик кўрсатмалар

Бу бобда бундан олдинги бобларда баён қилинган ҳаракат миқдори система ҳаракат миқдорининг моменти, кинетик энергиянинг ўзгариши ва инерция марказининг ҳаракати ҳақидаги теоремалардан фойдаланиб ечиладиган масалалар текширилади. Система инерция марказининг ҳаракати ҳақидаги теореманинг формуласи илгарилама ҳаракат қиладиган қисмига қўлланилади. Кучнинг вақт ичидаги таъсирини топиш керак бўлганда, ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теорема (56,1) қўлланилади. Жисмнинг ёки системанинг айланма ҳаракатини текширишда ҳаракат моменти миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теорема (59,17) дан фойдаланилади. Куч таъсирининг нуқталар кўчиш масофасидаги эффектини текширишда кинетик энергиянинг ўзгариши ҳақидаги теорема (62,52) дан фойдаланилади. Бу теорема системага таъсир қилаётган ички кучларни топишда ҳам қўлланилади.

72-§. Масалани ечиш тартиби

Бу бобга оид масалаларни қуйидаги тартибда ечиш керак:

1. Координата ўқлари системасини танлаб олиш керак.
2. Биринчи навбатда, текшириладиган материал нуқта ёки материал нуқталар системаси аниқланиб, ажратиб олиниши керак.

3. Кучларни ва боғланиш реакцияларининг схемасини тузиб олиш керак.

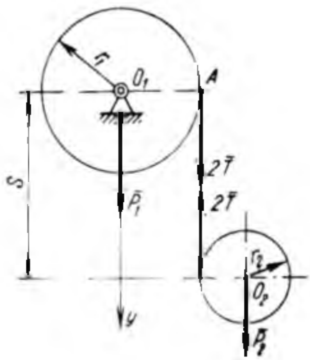
4. Жисм ҳаракатининг типини текшириб, механиканинг тегишли теоремасини танлаб олиш керак.

5. Механиканинг теоремасига асосан система ҳаракат дифференциали тенгламаларини ёки уларнинг биринчи интеграли бўлган кононик теоремаларни тузиш керак. Бу тенгламалардан изланаётган номаълумлар топилади.

73-§. Масалалар

94-масала. Оғирлиги тегишлича P_1 ва P_2, асосларининг радиуси эса r_1 ва r_2 бўлган иккита бир жинсли юмалоқ A ва B цилиндрга иккита эластик ип ўралган: ипнинг ўрамлари цилиндр асосларига параллел бўлган ўрта текисликларга симметрик жойлашган; цилиндрнинг ўқлари горизонтал бўлиб, уларнинг ташкил этувчилари энг кўп оғган чизиқларга тик.

A цилиндрнинг ўқи—қўзғалмас, B цилиндр тинч вазиятдан ўз оғирлиги таъсирида пастга туша боради. Иплар ҳали иккала цилиндрга ўралган деб ҳисоблаб, ҳаракат бошланганидан кейинги t пайтда: 1) цилиндрларнинг бурчак тезликлари ω_1 ва ω_2; 2) B цилиндрнинг оғирлик маркази босиб ўтган s йўл ва 3) ипларнинг тортилиши T аниқлансин (103-шакл).



103-шакл.

Ечиш. Жисмга $\overline{P}_1$ ва $\overline{P}_2$ кучлар таъсир қилади. Вертикал йўналган ипларнинг тортилишини $2\overline{T}$ билан алмаштириб системани боғланишдан қутқазамиз.

Oy ўқини вертикал пастга йўналтирамиз. Ҳар қайси цилиндр учун O_1 ва O_2 ўқларга нисбатан ҳаракат миқдори қонунини қўллаймиз:

$$I_1\ddot{\varphi}_1 = M_1;\qquad I_2\ddot{\varphi}_2 = M_2; \tag{1}$$

бунда

$$I_1 = \frac{1}{2}\frac{P_1}{g}r_1^2;\qquad I_2 = \frac{1}{2}\frac{P_2}{g}r_2^2. \tag{2}$$

(1) га I_1, I_2 ва M_1, M_2 моментларнинг қийматларини қўйсак, қуйидагилар келиб чиқади:

$$\frac{1}{2}\frac{P_1}{g}r_1^2\ddot{\varphi}_1 = 2Tr_1;$$
$$\frac{1}{2}\frac{P_2}{g}r_2^2\ddot{\varphi}_2 = 2Tr_2. \tag{3}$$

Булардан:

$$\ddot{\varphi}_1 = 4\frac{Tg}{P_1r_1};$$
$$\ddot{\varphi}_2 = 4\frac{Tg}{P_2r_2}; \tag{4}$$

бундан

$$P_1r_1\ddot{\varphi}_1 = P_2r_2\ddot{\varphi}_2 \tag{5}$$

ёки

$$\frac{d\omega_1}{dt}P_1r_1 = \frac{d\omega_2}{dt}P_2r_2. \tag{6}$$

(6) ни интеграллаймиз ва $\omega_{01} = \omega_{02} = 0$ эканлигини назарга олиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\omega_1P_1r_1 = \omega_2P_2r_2. \tag{7}$$

(7) ни яна бир марта интеграллаймиз:

$$\varphi_1P_1r_1 = \varphi_2P_2r_2. \tag{8}$$

Иккинчи цилиндр учун инерция марказининг ҳаракати ҳақидаги теоремани қўллаймиз:

$$\frac{P_2}{g}\ddot{s} = P_2 - 2T \tag{9}$$

ёки шаклдан $s = \varphi_1r_1 + \varphi_2r_2$ бўлгани учун:

$$\frac{P_2}{g}(r_1\ddot{\varphi}_1 + r_2\ddot{\varphi}_2) = P_2 - 2T, \tag{10}$$

$\ddot{\varphi}_1$ ва $\ddot{\varphi}_2$ нинг қийматларини (4) дан олиб, (10 га қўйсак:

$$\frac{P_2}{g}\left[r_1\frac{4Tg}{P_1r_1} + r_2\frac{4Tg}{P_2r_2}\right] = P_2 - 2T. \tag{11}$$

ёки

$$4TP_2\left(\frac{P_1 + P_2}{P_1P_2}\right) = P_2 - 2T. \tag{12}$$

Бундан T ни топамиз:

$$T = \frac{P_1P_2}{2(3P_1 + 2P_2)}. \tag{13}$$

(4) ни интеграллаб, цилиндрларнинг ω_1 ва ω_2 бурчак тезликларини топамиз:

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_1 = \frac{4Tg}{P_1r_1}t;$$
$$\dot{\varphi}_2 = \omega_2 = \frac{4Tg}{P_2r_2}t. \tag{14}$$

Буларга T нинг қийматини қўйсак, қуйидагилар келиб чиқади:

$$\omega_1 = \frac{2P_2 g}{r_1(3P_1+2P_2)}\, t;\quad \omega_2 = \frac{2P_1 g}{r_2(3P_1+2P_2)}\, t. \qquad (15)$$

B цилиндр оғирлик марказининг ўтган s йўлини топиш учун кинетик энергиянинг узгариши ҳақидаги теоремадан фойдаланамиз:

$$T_1 - T_0 = A; \qquad (16)$$

бунда $T_0=0$; $A = M_2\varphi_1 = 2Tr_1\varphi_1$ — таъсир қилаётган $2T$ кучнинг иши;

$$T_1 = \frac{1}{2} I_1\omega_1^2 = \frac{1}{4}\frac{P_1}{g} r_1^2\omega_1^2. \qquad (17)$$

(17) ни (16) га қўйсак, қуйидаги ҳосил бўлади:

$$\frac{1}{4}\frac{P_1}{g} r_1^2\omega_1^2 = 2Tr_1\varphi_1, \qquad (18)$$

бундан:

$$r_1\varphi_1 = \frac{1}{8}\frac{P_1 r_1^2\omega_1^2}{gT}. \qquad (19)$$

Бунга (13) дан T нинг қийматини олиб қўйсак, қуйидаги келиб чиқади:

$$r_1\varphi_1 = \frac{(3P_1+2P_2)\, r_1^2\omega_1^2}{4P_2 g}. \qquad (20)$$

(8) дан $\varphi_2 r_2$ ни топиб, кейин $\varphi_1 r_1$ ни қўйсак:

$$r_2\varphi_2 = \frac{P_1}{P_2} r_1\varphi_1 = \frac{P_1(3P_1+2P_2)\, r_1^2\omega_1^2}{4P_2^2 g}. \qquad (21)$$

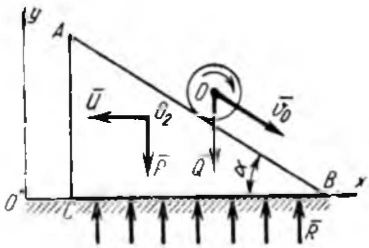
Топилган $r_1\varphi_1$ ва $r_2\varphi_2$ ларни (11) га қўйиб, s ни топамиз:

$$s = r_1\varphi_1 + r_2\varphi_2 = \frac{(P_1+P_2)(3P_1+2P_2)}{4P_2^2 g}\, r_1^2\omega_1^2$$

ёки (15) дан ω_1 нинг қийматини олиб қуйсак, қуйидаги ҳосил бўлади:

$$s = \frac{(P_1+P_2)g}{3P_1+2P_2}\, t^2.$$

98-масала. Силлиқ горизонтал текисликка қуйилган P оғирликдаги уч бурчакли ABC призма шу текисликда қаршиликсиз сирғана олади; призманинг AB қиррасида оғирлиги Q булган бир жинсли доиравий кесимли цилиндр сирғанмай юмалайди. Призманинг ҳаракати аниқлансин (104- шакл).



104- шакл.

Ечиш. Жисмга ташқи $\bar P$ ва $\bar Q$ кучлар таъсир қилади.

Система боғланишини вертикал текис тақсимланган $\bar{R}$ реакциялар билан алмаштириб боғланишдан қутқазамиз. $O'x$ ўқини горизонтал йўналтирамиз.

Система инерция марказининг ҳаракати ҳақидаги теоремага асосан:

$$\frac{P+Q}{g}\dot{v}_{cx}=0. \qquad (1)$$

Бундан шундай хулосага келамиз: инерция маркази тезлик векторининг горизонтал ташкил этувчиси ўзгармас экан.

Бошланғич пайтда призма ва цилиндр тинч вазиятда бўлган деб ҳисоблаймиз, у ҳолда (1) дан:

$$v_{cx}=0. \qquad (2)$$

Илгарилама ҳаракат қилаётган призма инерция марказининг тезлик векторини $\bar{u}$ билан белгилаймиз.

Призма билан цилиндр ҳам бирга кўчгани учун, яъни призма цилиндрга кўчирма ҳаракат бергани учун цилиндр инерция маркази абсолют тезлигининг Ox ўқдаги проекцияси қуйидагича бўлади:

$$v_{0_x}=v_0\cos\alpha-u. \qquad (8)$$

Энди система ҳаракат миқдори векторининг $O'x$ ўқдаги проекциянинг ифодасини тузамиз:

$$K_{0'x}=-\frac{P}{g}u+\frac{Q}{g}(v_0\cos\alpha-u). \qquad (4)$$

(2) тенгликни ҳисобга олсак, қуйидаги ҳосил бўлади:

$$v_0=\frac{(P+Q)u}{Q\cos\alpha}. \qquad (5)$$

Призма ҳаракатининг кинематик элементини топиш учун кинетик энергиянинг ўзгариши ҳақидаги теоремадан фойдаланамиз. Олдин призманинг T_1 кинетик энергияси ва цилиндрнинг T_2 кинетик энергиясидан иборат бўлган системанинг кинетик энергиясини топамиз.

Призма илгарилама ҳаракат қилгани учун

$$T_1=\frac{1}{2}\frac{P}{g}u^2 \qquad (6)$$

бўлади.

Цилиндр текис параллел ҳаракат қилади, шунинг учун унинг кинетик энергияси (62,4) тенгламадан топилади, бу тенгламани тузишда шуни ҳисобга олиш кераккки, цилиндр инерция марказининг горизонтал ташкил этувчисидан ташқари яна унинг қуйидаги вертикал ташкил этувчиси ҳам бўлади:

$$v_{0'y}=v_0\sin\alpha. \qquad (7)$$

Цилиндрнинг кўндаланг маркази ўқига нисбатан ўз инерция моменти қуйидагига тенг:

$$I_c = \frac{1}{2}\frac{Q}{g}r^2. \tag{8}$$

Шундай қилиб, цилиндр учун кинетик энергия қуйидагича бўлади:

$$T_2 = \frac{Q}{2g}\left[(v_0\cos\alpha - u)^2 + v_0^2\sin^2\alpha\right] + \frac{Qr^2\omega^2}{4g}. \tag{9}$$

Цилиндрнинг сирпанмай юмаланишини ҳисобга олиб, қуйидаги қўшимча муносабатни тузамиз:

$$r\omega = v_0 = \frac{(P+Q)\,u}{Q\cos\alpha}. \tag{10}$$

(6), (7) ва (10) формулалардан системанинг кинетик энергиясини топамиз:

$$T = T_1 + T_2 = \frac{P+Q}{4\,Qg\cos^2\alpha}(3P + Q + 2Q\sin^2\alpha)\,u^2 \tag{11}$$

ёки

$$T = \frac{P+Q}{4Qg\cos^2\alpha}\left[3(P+Q) - 2Q\cos^2\alpha\right]u^2 \tag{12}$$

Таъсир қилаётган кучларнинг бажарган ишини топамиз:

$$A = Qr\varphi\sin\alpha, \tag{13}$$

бунда φ — цилиндрнинг инерция маркази атрофида айланиш бурчаги.

Система кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақидаги теоремага асосан қуйидаги муносабат ҳосил бўлади:

$$\frac{P+Q}{2Qg\cos^2\alpha}\left[3(P+Q) - 2Q\cos^2\alpha\right]u^2 = Qr\varphi\sin\alpha. \tag{14}$$

(14) ни вақтга нисбатан дифференциалласак ва (10) ни назарда тутсак, қуйидагича бўлади:

$$\frac{P+Q}{2Qg\cos^2\alpha}\left[3(P+Q) - 2Q\cos^2\alpha\right]uw = Q\,\frac{P+Q}{Q\cos\alpha}\,u\sin\alpha,$$

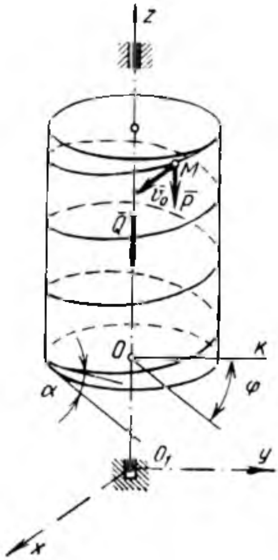
бу ерда

$$w = \frac{du}{dt},$$

бунда:

$$w = \frac{Qg\sin 2\alpha}{3(P+Q) - 2Q\cos^2\alpha}.$$

99-масала. Вертикал ўқли доиравий кесимли цилиндрнинг ён сиртида кўтарилиш бурчаги α бўлган силлиқ винт ариқчаси ўйилган; цилиндр вертикал ўқ атрофида ишқаланмай айлана олади. Бошланғич пайтда цилиндр тинч вазиятда туради; ариқчага оғир шарча туширилади; у ариқча бўйлаб бошланғич тез-



105- шакл.

ликсиз пастга тушади ва цилиндрни айлантиради. Цилиндрнинг массаси M, радиуси R, шарчанинг массаси m; шарчадан ўққача бўлган масофани R ва цилиндр инерция моментини $\frac{1}{2}\ MR$ га тенг деб ҳисоблаймиз. Шарча h баландликдан тушган пайтда цилиндр бурчак тезлиги ω нинг қанча бўлишлиги аниқлансин (105-шакл).

Ечиш. Қўзғалмас O_1xyz координата ўқлари системасини киритамиз.

Системага ташқи $\bar{P}$, $\bar{Q}$ кучлар ва таянч реакциялари таъсир қилади. Бу кучлар Oz ўқига нисбатан момент ҳосил қилмайди, шунинг учун системанинг шу ўққа нисбатан ҳаракат миқдори моменти ўзгармас бўлади, яъни

$$L_z = \text{const.} \tag{1}$$

Бошланғич пайтда шарча ва цилиндр тинч вазиятда бўлгани учун

$$L_z = 0. \tag{2}$$

Шарча ариқчада ҳаракат қилганида ҳамма вақт (1 тенглик қаноатлантирилиши керак, шу сабабли цилиндр шарчанинг ҳаракат йўналишига қарама-қарши томонга қараб айланма ҳаракат қилади.

Цилиндрнинг айланиш бурчак тезлигини ω билан ва Ok ўқидан ҳисоблаб M_1 нуқтанинг айланиш бурчагини φ билан белгилаймиз, у вақтда ҳаракатдаги шарча абсолют тезлигининг қўзғалмас ўқларидаги проекциялари қуйидагича бўлади:

$$\left.\begin{aligned} u_x &= (v\cos\alpha - R\omega)\cos\varphi, \\ u_y &= (v\cos\alpha - R\omega)\sin\varphi, \\ u_z &= v\sin\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

(I) тенгликнинг аниқ кўриниши

$$I\omega - mu_y R = 0 \tag{4}$$

бўлади.

(4) га инерция моментини ва (3) дан u_y нинг ифодасини олиб қўйиб, v ни топамиз:

$$v = \frac{(M + 2m)R\omega}{2m\cos\alpha}. \tag{5}$$

(3) тенгламаларда шарча абсолют тезлигининг квадрати қуйидагига тенг бўлади:

$$u^2 = (v\cos\alpha - R\omega)^2 + v^2\sin^2\alpha. \tag{6}$$

(5) га асосан (6) бундай кўринишда бўлади:

$$u^2 = \frac{R^2\omega^2}{4m^2} \cdot \frac{M^2\cos^2\alpha + (M + 2m)^2\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}. \qquad (7)$$

Системанинг кинетик энергияси 7 цилиндрнинг кинетик энергияси $T_1 = \frac{1}{4}MR^2\omega^2$ билан шарчанинг кинетик энергияси $T_2 = \frac{1}{2}mu^2$ нинг йиғиндисига тенг.

(7) ни назарга олиб, системанинг кинетик энергиясини топамиз:

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{4}\,\frac{M + 2m}{m}\,R^2\omega^2(M + 2m\sin^2\alpha). \qquad (8)$$

$\bar{P}$ куч бажарган ишнинг миқдори:

$$A = mgh. \qquad (9)$$

Материал нуқталар системаси кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақидаги теорема (62,10) га асосан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\omega^2R^2(M + 2m)(M + 2m\sin^2\alpha) = 8m^2hg\cos^2\alpha. \qquad (10)$$

Бундан ω ни топамиз:

$$\omega = \frac{2m\cos\alpha}{R}\sqrt{\frac{2hg}{(M + 2m)(M + 2m\sin^2\alpha)}}.$$

XII боб

ЗАРБА

74-§. Зарба назариясининг асосий қоидалари ва теоремалари

Материал нуқтанинг ёки жисмнинг тезлиги жуда кичик вақт ичида бирдан то чекли қийматигача узгарадиган бўлса, унга зарба назарияси дейилади. Кучнинг чексиз кичик вақт ичида кўрсатган таъсири катта бўлиб, куч импульси чекли миқдорга эга бўлса, бундай кучга зарбали ёки оний куч дейилади.

Зарба вақтида зарбали бўлмаган куч таъсирини ва унинг таъсиридан материал нуқтанинг кўчишини ҳисобга олмаслик мумкин.

Зарбали куч таъсирининг натижаси куч таъсир қилаётган материал нуқта тезлигининг ўзгариши билан ифодаланади, унинг ўзгариши қуйидаги формуладан топилади:

$$\Delta\bar{v} = \bar{v}_2 - \bar{v}_1 = \frac{\bar{S}}{m}, \qquad (74,1)$$

бунда

$$\bar{S} = \int_0^\tau F\,dt. \qquad (74,2)$$

$\bar{S}$ — кучнинг кичик вақт ичидаги импульси ёки оний импульс, τ — чексиз кичик вақт — зарба вақти (масалалар ечишда τ учун тақрибан жуда ҳам кичик, секунднинг мингдан бир улушидан ортиқ бўлмайдиган даражадаги чекли сонни олиш мумкин).

Илгарилама ҳаракатдаги икки жисм бир бири билан тўқнашиш олдида уларнинг инерция марказларининг абсолют тезликлари мазкур марказларни туташтирувчи тўғри чизиқ бўйлаб йўналган бўлса, бундай зарба тўғри марказий зарба дейилади.

1-теорема *Икки шарнинг ҳаракат миқдорларининг йиғиндиси зарбадан илгари қандай бўлса, зарбадан кейин ҳам шундайлигича қолади, яъни ҳаракат миқдорининг йиғиндиси ўзгармайди*:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2, \qquad (74,3)$$

бу ерда: m_1, m_2 — шарларнинг массаси, u_1, u_2 — биринчи ва иккинчи шарларнинг зарбагача бўлган тезликлари, v_1, v_2 — шу шарларнинг зарбадан кейинги тезликлари.

Жисмлар зарбадан кейин биргаликда битта жисмдек ҳаракат қилса, бундай зарбага пластик зарба дейилади.

Агар жисмларнинг массаси ва зарбагача бўлган тезликлари берилган ҳамда зарбанинг пластик бўлиши ҳам маълум бўлса, уларнинг зарбадан кейинги тезлиги

$$v = \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2}{m_1 + m_2} \qquad (74,4)$$

формуладан, импульси эса

$$|\bar{S}| = \frac{m_1 m_2 (u_1 - u_2)}{m_1 + m_2} \qquad (74,5)$$

формуладан топилади (бироқ $u_1 > u_2$).

Тикланиш k коэффициенти зарбаланувчи жисмларнинг материалларига боғлиқдир ва илгарилама ҳаракатда марказий тўғри зарба бўлганда қуйидаги формуладан ҳисоблаб топилади:

$$k = \frac{v_2 - v_1}{u_1 - u_2}. \qquad (74,6)$$

k реал жисмлар учун $0 < k < 1$ орасида ўзгаради. Абсолют эластик жисмлар учун $k = 1$ бўлиб, абсолют пластик жисмлар учун $k = 0$.

Шарларнинг эластик зарбадан кейинги тезликлари қуйидаги формуладан топилади:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= v + k(v - u_1), \\ v_2 &= v + k(v - u_2), \end{aligned}\right\} \qquad (74,7)$$

бундаги v (74,4) формуладан топилади.

Система инерция марказининг ҳаракатига зарбали куч таъсир қилганда τ зарба вақтидаги материал нуқталар системасининг ҳаракат миқдори қонуни қуйидаги муносабатга келади:

$$M\bar{v} - M\bar{u} = \sum_{\nu=1}^{n} S_{\nu}^{(e)}, \tag{74,8}$$

бунда: M — системанинг массаси.

(74,8) тенгламанинг координата ўқлардаги проекцияларининг формуласи қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\left.\begin{aligned} M(v_x - u_x) &= \sum_{\nu=1}^{n} S_{\nu x}^{(e)}, \\ M(v_y - u_y) &= \sum_{\nu=1}^{n} S_{\nu y}, \\ M(v_z - u_z) &= \sum_{\nu=1}^{n} S_{\nu z}^{(e)}. \end{aligned}\right| \tag{74,9}$$

(74,9) тенглама система инерция марказига зарбали оний кучнинг кўрсатаётган таъсирини ҳисоблашда қўлланилади

2-теорема. *Зарба вақтида система ҳаракат миқдори бош моменти векторининг узгариши ҳамма ташқи оний (зарбали) кучлар импульслари моментларининг геометрик йиғиндисига тенг.*

$$\bar{M}_0(\bar{v}) - \bar{M}_0(\bar{u}) = \sum_{\nu=1}^{n} M_0(\bar{S}_{\nu}^{(e)}). \tag{74,10}$$

Бу (74.10) тенгламадан айланма ҳаракат учун қуйидагини топамиз:

$$I_z(\omega_1 - \omega_0) = \sum_{\nu=1}^{n} \bar{M}_z(\bar{S}_{\nu}^{(e)}), \tag{74,11}$$

бу ерда: I_z — жисмнинг инерция моменти, ω_1 — зарбадан кейинги бурчак тезлиги, ω_0 — зарбагача бўлган бурчак тезлиги, $\sum_{\nu=1}^{n} M_z(\bar{S}_{\nu}^{(e)})$ — куч импульслари бош моментининг айланиш Oz ўқидаги проекцияси.

3-теорема. (Остроградский — Карно теоремаси).

Зарба вақтида йўқотилган кинетик энергия йўқотилган тезликка тегишли кинетик энергиянинг $\frac{k-1}{k+1}$ қисмига тенг булади.

Зарбагача булган тезлик зарбадан кейинги тезликнинг айирмаси $v - u$ га йуқотилган тезлик дейилади.

$$T_2 - T_1 = \frac{k-1}{k+1}\left[\frac{m_1}{2}(v_1 - u_1)^2 + \frac{m_2}{2}(v_2 - u_2)^2\right]. \qquad (74,12)$$

Икки жисмнинг тўғри марказий зарбаланишида кинетик энергиянинг йўқолишини қуйидаги формуладан топиш мумкин:

$$T_2 - T_1 = -(1 - k^2)\frac{m_1 m_2 (u_1 - u_2)^2}{2(m_1 + m_2)}. \qquad (74,13)$$

Агар жисмнинг бирор нуқтасига зарбали оний куч қўйилганда, бу жисмнинг осилиш ўқи қушимча динамик (зарба) оғирлик сезмаса, бундай нуқтага зарба маркази дейилади.

Агар жисмнинг осилиш ўқини O нуқтада кесиб ўтадиган, айланиш ўқига тик, инерция маркази OC масофада урнашган ва жисмга $П$ текислик симметрик бўлса, зарба маркази K осилиш ўқи ва инерция марказидан ўтадиган тўғри чизиқ устида OK масофада булади,

$$OK = \frac{I_0}{M \cdot OC}. \qquad (74,14)$$

Бу ерда I_0 — жисмнинг осилиш ўқига нисбатан инерция моменти.
M — жисмнинг массаси

Зарба кучининг $\bar{S}$ импульси OK тўгри чизиғига тик бўлган $П$ симметрия текислигида ётиши керак.

Булардан зарба маркази физик тебрангичнинг тебраниш маркази каби аниқланишини курамиз.

75-§. Масала ечишга оид методик кўрсатмалар

Зарба назариясига асосан ечиладиган масалаларни қуйидаги тартибда ҳал этиш керак.

1. Жисмларнинг зарба олдидаги u_1, u_2 тезликларини топиш керак.

2. Зарбадан кейин жисмлар олган v_1, v_2 тезликларни топиш учун зарба назариясининг тегишли тенгламаларини тузиш керак. Бу тенгламаларни тузишда жисмлар қандай ҳаракат қилаётганлигини ҳисобга олиш керак. Агар жисмлар илгарилама ҳаракатда бўлса, (74,3), (74,6), (74,9), (74,10) тенгламаларга, агар айланма ҳаракатда булса, (74,10), (74,11), (74,12) тенгламаларга асосланмоқ керак.

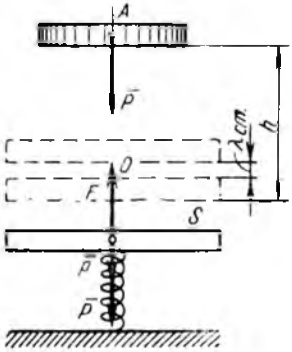
3. Зарба марказий бўлмаганда, қия зарбага оид масалаларни ечишда зарбаланувчи жисмларнинг тезлигини жисмлар уринишган нуқтанинг умумий нормали буйлаб ва умумий уринма текисликда ётган уринма бўйлаб йўналган ташкил этувчиларга ажратиш керак, сўнгра зарба вақтида шу ташкил этувчилар-

нинг ўзгариш ҳаракатларини текшириш ва уларнинг зарбадан кейинги миқдорларини топиш керак.

4. Жисмларнинг зарбадан кейинги ҳаракатларини назарий механикада чиқарилган тегишли теорема ва методларга асосан текшириш керак.

76-§. Масалалар

100-масала. Оғирлиги P бўлган A юк бошланғич тезликсиз h баландликдан оғирлиги p бўлган B плитага тушади, плита бикрлик коэффициенти c бўлган пружинага бириктирилган. Тикланиш коэффициентини нолга тенг деб ҳисоблаб, урилишдан кейин пружина сиқилишининг катталиги s топилсин (106-шакл).



106-шакл.

Ечиш. Плита билан A юкнинг зарбаланишидаги пластик зарбадан кейин юк ва плита бирга битта жисмдай ҳаракат қилади, уларни биргаликдаги ҳаракатининг тезлигини u_B билан белгилаймиз.

A жисм учун кинетик энергиянинг ўзгариши ҳақидаги теоремани қўллаб, унинг зарбадан олдинги тезлиги v_A ни топамиз:

$$\frac{mv_A^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A = P \cdot h = mgh,$$

бунда:

$$v_0 = 0,$$

демак,

$$v_A = \sqrt{2gh}. \quad (1)$$

Зарба вақтида ҳаракат миқдорининг сақланиши (138,3) қонунидан

$$\frac{P}{g} v_A + \frac{p}{g} \cdot 0 = \frac{P+p}{g} u_B, \quad (2)$$

бундан:

$$u_B = \frac{Pv_A}{P+p} = \frac{P\sqrt{2gh}}{P+p}. \quad (3)$$

Зарбадан кейин плитанинг силжиши s ни топиш учун кинетик энергиянинг ўзгариши ҳақидаги теоремадан фойдаланамиз.

Плитанинг p оғирлик кучи пружинанинг эластик кучи билан мувозанатлашади, яъни

$$p = c\lambda_{\text{ст}}, \quad (4)$$

бунда, λ_{cm} — пружинанинг статик чўзилиши, шу сабабли у s кўчишда иш бажаради. Айтилган s кўчишда юкнинг оғирлик кучи P га эластик кучи $F = cs$ иш бажаради, шунинг учун

$$A = A_1 + A_2,$$

яъни

$$A_1 = P \cdot s, \quad A_2 = -\int_0^s Fds = -\int_0^s csds = -\frac{cs^2}{2},$$

булардан:

$$A = P \cdot s - \frac{cs^2}{2}. \tag{5}$$

Кинетик энергиянинг ўзгариши:

$$T_2 - T_1 = \frac{P^2 h}{P + p}. \tag{6}$$

Бу (5) ва (6) лардан:

$$Ps - \frac{cs^2}{2} = \frac{P^2 h}{P+p}$$

ёки

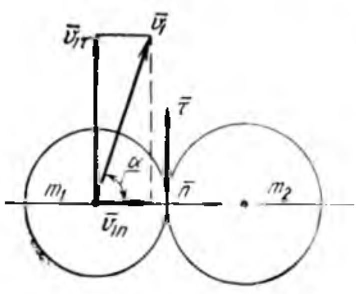
$$s^2 - \frac{2P}{c} s - \frac{2P^2 h}{c(P + p)} = 0, \tag{7}$$

бундан:

$$s = \frac{P}{c} \pm \sqrt{\frac{P^2}{c^2} + 2h \frac{P^2}{c(P+p)}}. \tag{8}$$

(8) формуладаги манфий ишорани олмаймиз, чунки кўчиш манфий булиши мумкин эмас, демак,

$$s = \frac{P}{c} + \sqrt{\frac{P^2}{c^2} + 2h \frac{P^2}{c(P + p)}}.$$



107- шакл.

101- масала. v_1 тезлик билан ҳаракат қилаётган m_1 массали шар тинч турган m_2 массали шарга урилади. Бунда шарга зарба теккaнда унинг тезлиги шарларнинг марказларини бирлаштирувчи чизиқ билан α бурчак ҳосил қилади: 1) урилишни абсолют эластик эмас деб ҳисоблаб, биринчи шарнинг урилишдан кейинги тезлиги; 2) урилиш эластик ва тикланиш коэффициенти k деб фараз қилиб, ҳар қайси шарнинг урилишдан кейинги тезлиги топилсин (107- шакл).

Ечиш. Зарбагача бўлган $\bar{v}_1$ тезлик векторини; шарлар марказларини бирлаштирувчи тўғри чизиқ бўйича йўналган

$$v_{1n} = v_1 \cos \alpha \tag{1}$$

ва шарларнинг умумий уринмаси бўйича йўналган

$$v_{1\tau} = v_1 \sin \alpha \tag{2}$$

ташкил этувчиларга ажратамиз.

Иккинчи шар учун

$$v_{2n} = v_{2\tau} = 0. \tag{3}$$

Шарларнинг сиртларини абсолют силлиқ деб ҳисоблаймиз, шунинг учун

$$v_{1\tau} = u_{1\tau}, \tag{4}$$

бунда: $u_{1\tau}$ — биринчи шарнинг зарбадан кейинги тезлигининг уринма ташкил этувчиси.

1) шарларнинг пластик зарбасини текширамиз: зарбада система ҳаракат миқдорининг сақланиш қонунига асосан:

$$m_1 v_{1n} = (m_1 + m_2) u_{1n}, \tag{5}$$

бундан

$$u_{1n} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{1n} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 \cos \alpha. \tag{6}$$

Биринчи шарнинг зарбадан кейинги тезлигининг модули қуйидагига тенг бўлади:

$$u_1 = \sqrt{u_{1\tau}^2 + u_{1n}^2} = v_1 \sqrt{\sin^2\alpha + \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 \cos^2\alpha}. \tag{7}$$

2) зарба эластик бўлсин: бу ҳолда иккинчи шарнинг зарбадан кейинги тезлигининг нормал ташкил этувчисини u_{2n} билан белгилаймиз.

Зарба даврида система ҳаракати миқдорининг сақланиш теоремасига асосан:

$$m_1 v_{1n} = m_1 u_{1n} + m_2 u_{2n} \tag{8}$$

бўлади, тикланиш коэффициенти (74,6) формулага асосан:

$$k = \frac{u_{2n} - u_{1n}}{v_{1n}}. \tag{9}$$

(8) ва (9) тенгламаларни биргаликда ечиб, қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

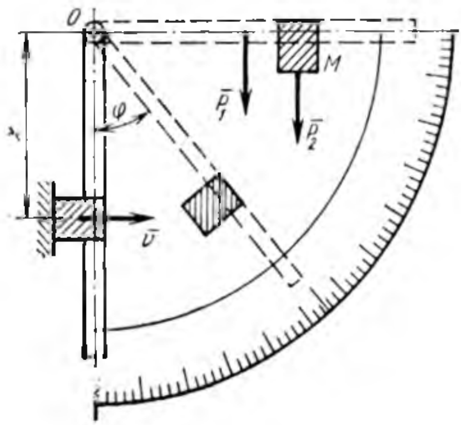
$$\left.\begin{aligned} u_{1n} &= \frac{m_1 - k m_2}{m_1 + m_2} v_1 \cos \alpha, \\ u_{2n} &= \frac{m_1 (1 + k)}{m_1 + m_2} v_1 \cos \alpha. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

(2), (4), (10) тенгламаларни ва $u_{2\tau}=0$ ни назарга олиб, u_1 ва u_2 ни топамиз:

$$u_1 = v_1\sqrt{\sin^2\alpha + \left(\frac{m_1-km_2}{m_1+m_2}\right)^2\cos^2\alpha},$$

$$u_2 = \frac{m_1(1+k)}{m_1+m_2}v_1\cos\alpha.$$

102- масала. Урилишдаги тикланиш коэффициентини аниқлаш учун ишлатиладиган асбобда вертикал текисликдаги горизонтал O ўқ атрофида айланувчи стержень бор; стержень ўқидан маълум масофада текшириладиган материал жойланган; стержень ўз оғирлиги таъсирида горизонтал вазиятидан бошланғич тезликсиз туша бошлайди ва вертикал вазиятга келганда текширилаётган материалдан пластинка шаклда қилиб ясалган қўзғалмас тўсиққа урилади.



108- шакл.

Агар урилишдан кейин стержень вертикалдан φ бурчакка қайта оғган бўлса, тикловчи коэффициенти k нинг қанча бўлишлиги аниқлансин ва урилишда O ўқнинг подшипнигида қўшимча зўриқиш ҳосил бўлмаслиги учун текширилаётган материал стерженнинг айланиш ўқидан қандай x масофага ўрнатилиши кераклиги кўрсатилсин (108-шакл).

Ечиш. Стерженнинг оғирлигини P_1 билан, текширилаётган материалнинг оғирлигини P_2 билан белгилаймиз. Система кинетик энергиясининг ўзгариш формуласи (62,10) га асосланиб, қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\frac{1}{2}(I+m_2x^2)\,\omega^2 = \frac{1}{2}g(m_1l+2m_2x), \tag{1}$$

бу ерда: $I=\frac{1}{3}m_1l^2$ — шакл текислигига тик бўлиб, O нуқтадан ўтган ўққа нисбатан стерженнинг инерция моменти;

ω — стерженнинг урилиш пайтидаги бурчак тезлиги.

Урилиш пайтда M юкнинг тезлиги:

$$v = x\sqrt{g\,\frac{m_1l+2m_2x}{I+m_2x^2}} \tag{2}$$

га, зарбадан кейин эса

$$u = kv \tag{3}$$

га тенг булади.

Зарбадан кейин стержень бурчак тезлиги:

$$\omega_1 = k\frac{v}{x} \tag{4}$$

га тенг булган айланма ҳаракатга келади.

Система кинетик энергиясининг узгариши ҳақидаги теоремага асосан:

$$\frac{1}{2}(I + m_2x^2)\omega_1^2 = \frac{1}{2}g(m_1l + 2m_2x)(1 - \cos\varphi). \tag{5}$$

(2) ва (4) ларни ҳисобга олиб, (5) дан k ни топамиз:

$$k = \sqrt{2}\sin\frac{\varphi}{2}. \tag{6}$$

Айланиш ўқига нисбатан зарба вақтида қўшимча зўриқиш сезмаслиги учун M юк зарба марказига жойланиши керак, яъни $x = x_c$ булиши керак.

Системани инерция марказининг координатаси:

$$\frac{1}{2}m_1l + m_2x = -(m_1 + m_2)x_c \tag{7}$$

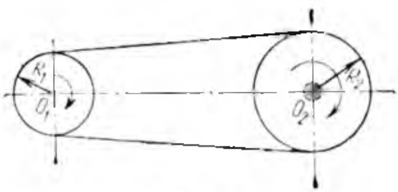
формула бўйича топилади, бунга биноан (74,14) га асосан:

$$x_c = \frac{I + m_2x^2}{\frac{1}{2}m_1l + m_2x}. \tag{8}$$

$x_c = x$ булгани учун (8) дан:

$$x = \frac{2}{3}l.$$

103- масала. Иккита шкив ω_{10} ва ω_{20} бурчак тезлик билан бир текисликда ўз ўқи атрофида айланади. Шкивларнинг зичликлари бир хил ва радиуслари R_1, R_2 булган доиравий кесимли диск деб ҳисоблаб ва тасманинг массаси билан сирганишини ҳисобга олмай, шкивларга тасма кийгизилгандан кейин, шкивлар бурчак тезликлари ω_1 ва ω_2 нинг қанча булишлиги аниқлансин (109- шакл).



109- шакл.

Ечиш. Бу масалани икки усул билан ечиш мумкин.

Биринчи усул. Зарба вақтида система ҳаракат миқдори бош моменти векторининг ўзгариши ҳамма ташқи оний (зарбали) кучлар импульс моментларининг геометрик йиғиндисига тенг деган теоремага асосан биринчи шкив учун қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$I_1(\omega_1 - \omega_{10}) = SR_1, \tag{1}$$

бу ерда S — тасма тортиш оний кучининг импульси. Бундан ташқари шкивга ўқнинг оний реакция импульси қуйилган; унинг айланиш ўқига нисбатан моменти нолга тенг.

Иккинчи шкив учун:

$$I_2(\omega_2 - \omega_{20}) = SR_2. \tag{2}$$

(I) ва (2) лардан импульс S ни чиқазамиз, у вақтда

$$I_1R_2\omega_{10} + I_2R_1\omega_{20} = I_1R_2\omega_1 + I_2R_1\omega_2. \tag{3}$$

Тасмада силжиш бўлмагани учун:

$$\omega_1R_1 = \omega_2R_2. \tag{4}$$

ω_2 нинг қийматини (4) га қуйиб, ω_1 ни топамиз:

$$\omega_1 = \frac{I_1R_1^2\omega_{10} + I_2R_2R_1\omega_{20}}{I_1R_2^2 + I_2R_1^2}. \tag{5}$$

Бунда:

$$I_1 = \frac{\gamma\pi^2R_1^4}{2}, \quad I_2 = \frac{\gamma\pi^2R_2^4}{2} \tag{6}$$

бўлгани учун (5) дан:

$$\omega_1 = \frac{R_1^3\omega_{10} + R_2^3\omega_{20}}{R_1(R_1^2 + R_2^2)}. \tag{7}$$

(4) ва (7) лардан ω_2 ни топамиз:

$$\omega_2 = \frac{R_1^3\omega_{10} + R_2^3\omega_{20}}{R_2(R_1^2 + R_2^2)}.$$

Иккинчи усул. Масалани иккинчи усул билан ечилиши Остроградский — Карно теоремасига асосланган.

Пластик зарбада йўқотилган тезлик орқали тегишли йўқотилган кинетик энергия қуйидагича ифодаланади:

$$T_1 - T_2 = \frac{1}{2}\left[I_1(\omega_{10} - \omega_1)^2 + I_2(\omega_{20} - \omega_2)^2\right]. \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2}I_1\omega_{10}^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_{20}^2, \\ T_2 &= \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 \end{aligned}\right| \tag{10}$$

эканлиги бизга маълум.

(9) ва (10) тенгламалардан қуйидагини топамиз:

$$I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 = I_1\omega_{10}\omega_1 + I_2\omega_{20}\omega_2. \tag{11}$$

ва $\omega_1 R_1 = \omega_2 R_2$ (12) ни ҳисобга олсак, (11) дан қуйидаги келиб чиқади:

$$\omega_1^2\left(I_1 + I_2\frac{R_1^2}{R_2^2}\right) = \omega_1\left(I_1\omega_{10} + I_2\omega_{20}\frac{R_1}{R_2}\right), \tag{13}$$

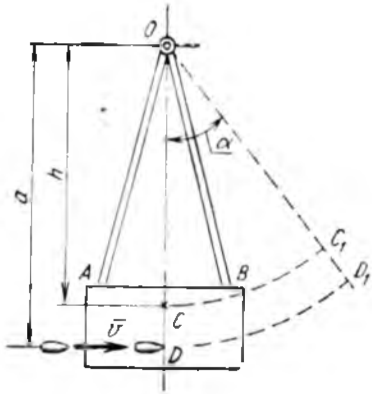
бундан:

$$\omega_1 = \frac{I_1 R_2^2\omega_{10} + I_2 R_1 R_2\omega_{20}}{I_1 R_2^2 + I_2 R_1^2}, \tag{14}$$

яъни (5) формула келиб чиқди.

Масалани ечишнинг давоми биринчи усулдагига ўхшаш, шунинг учун уни бу ерда такрорламаймиз.

104-масала. Снаряд тезлигини аниқлаш учун қўлланиладиган баллистик маятник горизонтал O ўққа осилган AB цилиндрдан иборат: цилиндрга қум тўлдирилган ва унинг A учи очиқ; цилиндрга кирган снаряд маятникни унинг O ўқи атрофида бирор бурчакка айлантиради. Маятникнинг массаси M; унинг C оғирлик марказидан O ўққача бўлган масофа $OC = h$; O ўққа нисбатан олинган инерция радиуси ρ, снаряднинг массаси m; зарба таъсир чизиғининг ўққача бўлган масофаси $OD = a$; маятникнинг оғиш бурчаги α. Маятникнинг O ўқига зарба тегмайди, деб фараз қилиб, снаряднинг тезлиги аниқлансин, $ah = \rho^2$ (110-шакл).


110- шакл.

Ечиш. Маятник ва снаряддан иборат булган системага ҳаракат миқдорининг моменти ҳақидаги теоремани қўллаймиз.

То зарбагача бу система ҳаракат миқдорининг моменти

$$mva \tag{1}$$

га тенг, чунки бу вақтда снаряд ҳаракатда булган.

Агар маятникнинг зарбадан айланиш бурчак тезлигини ω_1 билан белгиласак, системанинг ҳаракат миқдорининг моменти ҳаракат миқдор моментларининг йиғиндисига тенг:

$$M\rho^2\omega_1 + ma^2\omega_1. \tag{2}$$

Зарбада системанинг ташқи зарба кучи фақат зарба (ўқ) богланиши бўлгани учун уларнинг ўққа нисбатан моменти нолга тенг. Демак, системанинг ҳаракат миқдори моментларининг йиғиндиси узгармас, яъни:

$$mva = M\rho^2\omega_1 + ma^2\omega_1, \tag{3}$$

бундан v ни топамиз.

$$v = \frac{M\rho^2 + ma^2}{ma}\omega_1. \tag{4}$$

Энди ω_1 билан энг катта оғиш бурчаги α орасидаги муносабатни топамиз. Уни кинетик энергиянинг ўзгариши ҳақидаги теоремага асосан топамиз. Вертикал вазиятдан энг катта оғиш бурчагига келганда кинетик энергия қуйидагига тенг бўлади:

$$T = \frac{1}{2}(M\rho^2 + ma^2)\omega_1^2, \tag{5}$$

бошланғич пайтда $T = 0$ бўлади.

Оғирлик кучлари, яъни маятник ва снаряднинг оғирликлари бажарган иш қуйидагига тенг:

$$A = -(Mgh + mga)(1 - \cos\alpha). \tag{6}$$

Кинетик энергия теоремасига биноан:

$$(M\rho^2 + ma^2)\omega_1^2 = 2(Mgh + mg\alpha)(1 - \cos\alpha). \tag{7}$$

$(1 + \cos\alpha)$ ни $2\sin^2\frac{\alpha}{2}$ билан алмаштириб ω_1 ни топамиз:

$$\omega_1 = 2\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{g(Mh + ma)}{M\rho^2 + ma^2}}. \tag{8}$$

Буни (4) га қуйсак, қуйидаги келиб чиқади:

$$v = \frac{2}{ma}\sqrt{g(Mh + ma)(M\rho^2 + ma^2)}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}. \tag{9}$$

Бу (9) тенгликдан, агар снаряд ўқидан ҳамма вақт бир хил масофада оғиб қолса, у вақтда унинг тезлиги энг катта оғишган ярим бурчагининг синусига пропорционал бўлиши кўриниб турибди.

Снарядни ўқдан шундай a масофада йўналтириш зарурки, бунда зарбанинг таъсири ўққа сезилмаслиги керак.

Албатта буни ҳамма вақт қилиш мумкин, чунки маятник ўз оғирлик маркази ҳаракат қиладиган вертикал текисликка нисбатан симметрик, шунинг учун осилиш ўқи O нуқта учун бош инерция ўқи ва инерция марказининг шу ўқдаги проекцияси бўлади.

Топилган умумий шарт шуни кўрсатадики, снаряд оғирлик марказидан ўтадиган вертикал чизиқдаги $a \cdot h = \rho^2$, (9) муносабат билан топиладиган нуқтада тўхташи керак.

Агар шу шартлар бажарилса, асбобнинг яхши сақланиши учун қулай шароит яратилади. Унинг тезлиги v ни топиш учун (9) формулада ρ^2 ни ah ифода билан алмаштирсак, у қуйидагига тенг бўлади:

$$v = \frac{2(Mh + ma)}{m}\sqrt{\frac{g}{a}}\sin\frac{\alpha}{2}.$$

XIII БОБ

ЛАГРАНЖНИНГ ИККИНЧИ ТУР ТЕНГЛАМАСИ

77-§ Асосий тушунчалар ва тенгламалар

Бир-бирига боғлиқ бўлмаган ва ҳар қандай вақтда системанинг вазиятини аниқлайдиган ихтиёрий параметрларга **умумлаштирилган координаталар** дейилади. Системанинг ҳамма нуқталарининг координаталарини шу умумлаштирилган координаталар орқали ифодалаш мумкин. Агар системанинг n та умумлаштирилган координаталарини $q_1, q_2, q_3, q_4, \ldots, q_n$ билан белгиласак, системанинг ҳар бир $M_\nu(x_\nu, y_\nu, z_\nu)$ нуқтасининг декарт координаталарини t вақт ва $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n$ параметрларнинг функцияси деб ифодалаш мумкин:

$$\left.\begin{aligned} x_\nu &= x_\nu(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n, t), \\ y_\nu &= y_\nu(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n, t), \\ z_\nu &= z_\nu(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n, t). \end{aligned}\right\} \tag{77,1}$$

Агар системага қўйилган боғланиш стационар (доимий) бўлса, бу тенгламаларнинг ўнг томонида t вақт бўлмайди.

Эркин умумлаштирилган координаталарнинг n сони системанинг эркинлик даражаси дейилади.

Агар системага голоном боғланишлар қўйилган бўлса, система ҳаракат дифференциал тенгламаларининг сони системанинг эркинлик даражасига тенг бўлади

Умумлаштирилган кучлар потенциалли бўлмаганда Лагранжнинг иккинчи тур тенгламаси қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\frac{d}{dt}\cdot\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j(j=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ k), \tag{77,2}$$

бунда $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_k$ — умумлаштирилган координаталар (яъни система нуқтасининг вазиятини битта энг яқин қийматни билан аниқлайдиган бир-бирига боғлиқ бўлмаган координаталар). $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \ldots, \dot{q}_k$ — умумлаштирилган тезликлар.

T — системанинг умумлаштирилган координаталар орқали ифодаланган кинетик энергияси бўлиб, у қуйидагига тенг:

$$T = T_0 + T_1 + T_2, \tag{77,3}$$

бу ерда: $T_0 = \sum\limits_{\nu=1}^{n}\frac{m_\nu}{2}\left(\frac{\partial \bar{r}_\nu}{\partial t}\right)^2$ — умумлаштирилган $\dot{q}_j$ тезликка нисбатан ноль даражадаги функциядир.

$\bar{r}_\nu$ — системанинг бирор M_ν ($\nu = 1, 2, 3, \ldots, n$) нуқтасининг радиус вектори бўлиб, у қуйидагига тенг:

$$\bar{r}_\nu = \bar{r}_\nu(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n, t) \tag{77,4}$$

$T_1 = \sum_{j=1}^{k} b_j \dot{q}_j$ — умумлаштирилган $\dot{q}_j$ тезликка нисбатан биринчи даражали (чизиқли) функция, бунда:

$$b_j = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \frac{\partial \bar{r}_\nu}{\partial t} \cdot \frac{\partial \bar{r}_\nu}{\partial q_j};$$

$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k} \sum_{s=1}^{k} a_{js} \dot{q}_j \dot{q}_s$ — умумлаштирилган $\dot{q}_j$ тезликка нисбатан иккинчи даражали (квадратик) функция бўлиб, бунда:

$$a_{js} = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \frac{\partial \bar{r}_\nu}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \bar{r}_\nu}{\partial q_s};$$

$Q_1, Q_2, Q_3, \ldots, Q_k$ — системанинг умумлаштирилган кучлари, улар қуйидаги формуладан топилади:

$$Q_j = \sum_{\nu=1}^{n} \left(X_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial q_j} + Y_\nu \frac{\partial y_\nu}{\partial q_j} + Z_\nu \frac{\partial z_\nu}{\partial q_j} \right), (j = 1, 2, \ldots, k) \quad 77,4')$$

бу ерда X_ν, Y_ν, Z_ν — $\bar{F}_\nu$ кучнинг декарт координата ўқларидаги проекциялари.

Агар системанинг нуқталарига

$$\sum_{j=1}^{k} (a_{\nu j} X_j + b_{\nu j} Y_j + c_{\nu j} Z_j) + d_\nu = 0, \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots, l) \quad (77,5$$

кўринишда кинематик боғланиш қўйилган бўлса, умумлаштирилган координата вариацияларига қуйидаги қўшимча чек қўйилади:

$$\sum_{j=1}^{k} R_{js} \delta q_j = 0 \ (s = 1, 2, 3, \ldots, l). \quad (77,6$$

Лагранж кўпайтирувчисини $\mu s (s = 1, 2, \ldots, l)$ билан белгилаймиз, у вақтда система нуқталарининг ҳаракат дифференциал тенгламалари қуйидаги кўринишга келади:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j + \sum_{s=1}^{l} \mu_s R_{js} (j = 1, 2, \ldots, k) \quad (77,7$$

Агар система потенциали $П$ кучнинг функцияси бўлган консерватив куч майдонида ҳаракат қилса, қўшимча кинематик потенциал деб аталган L функция киритилади.

$$L = T - П, \quad (77,8)$$

бу ҳол учун (77,2) система қуйидагича ёзилади:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0;\ (j=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ k), \qquad (77,9)$$

Агар богланиш стационар бўлса, кинетик энергия бир жинсли умумлаштирилган координаталарга нисбатан иккинчи даражали шаклда бўлади.

Агар системага таъсир қилаётган кучларнинг потенциалмаслари ҳам бўлса, Лагранжнинг иккинчи тур тенгламаси қуйидаги кўринишда тузилади:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}=Q_j;\ (j=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ k), \qquad (77,10)$$

бу ерда Q_j — консерватив бўлмаган умумлаштирилган куч.

Агар система консерватив куч майдонида ҳаракат қилса ва кинетик потенциал L таркибида вақт ошкор куринишда бўлмаганида (77,9) система тенгламалар ечими энергиянинг умумлаштирилган интегралларини беради, яъни:

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j-L=T_2-T_0+\Pi=h. \qquad (77,11)$$

Агар богланиш стационар бўлса, (77,11) тенгламада материал нуқталар системаси механик энергияларнинг сақланиш қонуни келиб чиқади, яъни:

$$T+\Pi=h. \qquad (77,12)$$

Умумлаштирилган координаталардан баъзи бири кинетик потенциалга кирмаган бўлса, ундай координаталар циклик координаталар деб аталади.

Агар умумлаштирилган координаталарнинг $q_1,\ q_2,\ q_3,\ \ldots,\ q_\sigma$ циклик координаталари бўлса, умумлаштирилган координаталарга тегишли умумлаштирилган $Q_m(m=\overline{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ \sigma})$ кучлар нолга тенг булади, бу вақтда (77,10) тенгламалар системасининг қуйидаги кўринишдаги биринчи интеграллари булади:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}=C_m(m=\overline{1,2,3,\ \ldots,\sigma}). \qquad (77,13)$$

Лагранжнинг тенгламаси қўзгалмас нуқтаси бўлган жисмнинг ҳаракатини текширишга татбиқ этилганда у тенгламалар Эйлер тенгламаларига келади, яъни:

$$\left.\begin{aligned} I_\xi\dot{\omega}_\xi+(I_\zeta-I_\eta)\omega_\eta\omega_\zeta&=L_\xi,\\ I_\eta\dot{\omega}_\eta+(I_\xi-I_\zeta)\omega_\zeta\omega_\xi&=L_\eta,\\ I_\zeta\dot{\omega}_\zeta+(I_\eta-I_\xi)\omega_\xi\omega_\eta&=L_\zeta,\end{aligned}\right\} \qquad (77,14)$$

бу ерда I_ξ, I_η, I_ζ — ўқларга нисбатан инерция моментлари; L_ξ, L_η, L_ζ — ташқи кучлар бош векторининг қўзғалувчи координата ўқларидаги проекциялари; ω_ξ, ω_η, ω_ζ — оний айланиш бурчак тезлиги векторининг қўзғалувчи координата ўқларидаги проекциялари.

78-§. Масалалар ечишга оид методик кўрсатмалар

Лагранжнинг иккинчи тур тенгламасини татбиқ этиб ечиладиган масалалар ечиш методикаси қуйидагича бўлади.

1. Материал нуқталар системасининг эркинлик даражасини аниқлаш керак.

2. Координата ўқларини топиб олиш керак.

Сони системанинг эркинлик даражасига тенг бўлган, бир-бирига боғлиқ бўлмаган умумлаштирилган координаталарни танлаб олиш керак.

3. Танлаб олинган умумлаштирилган координаталарга тегишли бўлган Q_1, Q_2, ... Q_k умумлаштирилган кучларни топиш керак. Бу умумлаштирилган ишнинг ифодасидан топилади.

Умумлаштирилган кучни қуйидаги усуллар билан ҳисоблаш мумкин:

а) бевосита (77,5) формула бўйича; б) q_j умумлаштирилган координатага тегишли Q_j умумлаштирилган кучни топиш учун берилган механик системага шундай мумкин бўлган кўчиш бериш керакки, унинг фақат битта координатаси ўзгариб, қолган умумлаштирилган координаталари ўзгармай қолсин; кейин берилган ҳамма кучларни шу кўчишдаги элементар ишларнинг йиғиндисини $\sum_{\nu=1}^{n} \delta A_{j\nu}$ топиб, уни δ_{qj} вариацияга бўлиш керак, яъни

$$Q_j = \frac{\sum_{\nu=1}^{n} \delta A_{j\nu}}{\delta_{qj}} \quad (j = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ k), \tag{77,16}$$

в) хусусий ҳолда, система потенциал куч таъсирида бўлса, умумлаштирилган куч қуйидаги формула бўйича топилади:

$$Q_j = \frac{\partial U}{\partial q_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}, \tag{77,17}$$

Бунда U — кучнинг потенциал функцияси, Π — системанинг потенциал энергияси. Бу ҳол учун Лагранж тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}, \quad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ k). \tag{77,18}$$

Умумлаштирилган кучни (77,17) формуладан топишдан олдин кучнинг потенциал функциясини ёки системанинг потенциал энергиясини умумлаштирилган координаталар орқали ифодалаб олиш керак.

4. Умумлаштирилган координаталардан кинетик энергия T ни ва потенциал энергия Π ни топиб олиш керак.

5. Хусусий ҳосилалар $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$; $\frac{\partial T}{\partial q_j}$; $\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}$ $(i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ k)$ ларни топиб олиб, Лагранжнинг иккинчи тур тенгламасига қўйиш керак.

6. Система нуқталари ҳаракатга келиш вақтидаги бошланғич шартларни кўрсатиш керак.

7. Бошланғич шартларни қаноатлантирадиган дифференциал тенгламалар системасини интеграллаш керак.

Лагранжнинг тенгламалар системасини интеграллаб q_1, q_2, $\ldots$, q_n умумлаштирилган координаталарини, t вақт ва C_1, C_2 C_3, $\ldots$, C_{2n} интеграл ўзгармасларини функцияси қилиб топилади. C_1, C_2, C_3, $\ldots$, C_{2n} интеграл ўзгармаслари системанинг бошлангич ҳаракат шартидан топилади.

8. Системанинг ҳаракатини кинематик текшириш керак.

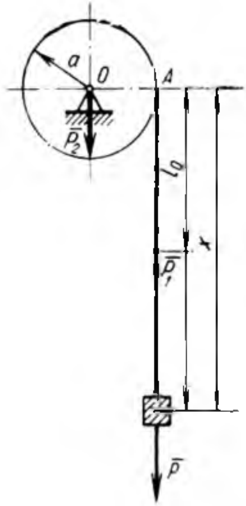
9. Лагранжнинг II тур тенгламаси билан ечиладиган масалаларни қуйидаги типлардан бирининг таркибига киритиш мумкин:

а) масалада фақат системанинг ҳаракат дифференциал тенгламасини тузиш талаб қилинади (бунга И. В. Мешчерский „Назарий механикадан масалалар тўплами“ китобидаги 1190, 1193, 1194, 1196, 1197, 1201, 1203—1205; 1210 1213, 1214, 1218, 1221-масалалар киради);

б) масалада тезликни ёки бурчак тезликни топиш талаб қилинади (бунга И. В. Мешчерский „Назарий механикадан масалалар тўплами“ китобидаги 943—947, 1114, 1120-масалалар киради).

79-§. Масалалар

105-масала. Оғирлиги P_1 ва узунлиги l бўлган пўлат арқонга осилган P оғирликдаги юкнинг ҳаракати аниқлансин; пўлат арқон радиуси a ва оғирлиги P_2 бўлган барабанга ўралган; айланиш ўқи горизонтал; ишқаланишни ҳисобга олмаймиз; барабан массасини унинг гардиши бўйлаб текис таралган деб ҳисоблаймиз. Бошланғич $t = 0$ пайтда система тинч туради; пўлат арқоннинг осилиб турган қисмининг узунлиги l_0 (111-шакл).



111-шакл.

Ечиш. Системанинг эркинлик даражаси битта. P юкнинг ҳаракати умумлаштирилган x координата билан аниқланади.

Барабаннинг айланиш бурчак тезлигини ω билан белгилаймиз, у вақтда:

$$a\omega = \dot{x} = v, \tag{1}$$

бунда, $\dot{x} = v$ — юк ҳаракатининг тезлиги. Системанинг кинетик энергияси T, барабаннинг кинетик энергияси T_1, пўлат арқоннинг кинетик энергияси T_2 ва юкнинг кинетик энергияси T_3 йиғиндисига тенг, яъни:

$$T = T_1 + T_2 + T_3, \tag{2}$$

бунда:

$$T_1 = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{P_2}{g} a^2\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{P_2}{g}\dot{x}^2,$$
$$T_2 = \frac{1}{2}\frac{P_1}{g}\dot{x}^2, \quad T_3 = \frac{1}{2}\frac{P}{g}\dot{x}^2. \tag{3}$$

Пўлат арқон ва юкнинг оғирлик кучлари бажарган иш қуйидаги формула билан ҳисобланади:

$$A = P(x - l_0) + g\gamma\int_{l}^{x} x\,dx = P(x - l_0) + g\,\frac{\gamma}{2}(x^2 - l_0^2)$$

ёки $\gamma g l = P_1$ бўлгани учун:

$$A = P(x - l_0) + \frac{P_1}{2l}(x^2 - l_0^2), \tag{4}$$

(4) ни назарга олиб, системанинг потенциал энергиясини топамиз:

$$\Pi = P(l_0 - x) + \frac{1}{2}\frac{P_1}{g}(l_0^2 - x^2). \tag{5}$$

(2), (3) ва (5) тенгламаларга асосан системанинг кинетик потенциали қуйидагича топилади, (77,9) га биноан:

$$L = \frac{P + P_1 + P_2}{2g}\dot{x}^2 - \frac{P_1}{2g}(l_0^2 - x^2) - P(l_0 - x). \tag{6}$$

(77,10) Лагранж тенгламасини тузамиз:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \tag{7}$$

ва

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{P + P_1 + P_2}{g}\dot{x}; \quad \frac{\partial L}{\partial x} = P + \frac{P_1}{l}x \tag{8}$$

бўлгани учун (7) дан қуйидаги келиб чиқади:

$$\frac{P + P_1 + P_2}{g}\ddot{x} - \left(P + \frac{P_1}{l}x\right) = 0, \tag{9}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{P_1 g}{l(P + P_1 + P_2)}} \tag{10}$$

деб белгилаб, x ни киритамиз ва (9) тенгламанинг $\zeta = \frac{Pl}{P_1}$ (11) хусусий ечими борлигини назарга олиб, ўзгарувчиларни алмаштирсак, қуйидаги ҳосил бўлади:

$$x = -\frac{Pl}{P_1} + \eta. \tag{12}$$

(9) тенгламани $\ddot{\eta} - a^2\eta = 0$ (13) кўринишга келтирамиз. (13) тенгламанинг ечими қуйидагича бўлади:

$$\eta = Ae^{\gamma t} + Be^{-\gamma t}. \tag{14}$$

(9) тенгламанинг ечими $t = 0$ бўлганда $x_0 = l_0$, $\dot{x}_0 = 0$ (15) бошланғич шартларни қаноатлантириши керак. Демак, интеграл ўзгармаслари A ва B ларни топиш учун қуйидаги тенглама малар системаси ҳосил бўлади:

$$\begin{aligned} l_0 &= A + B - \frac{Pl}{P_1}, \\ O &= A - B, \end{aligned} \tag{16}$$

бундан:

$$A = B = \frac{1}{2}\left(l_0 + \frac{Pl}{P_1}\right). \tag{17}$$

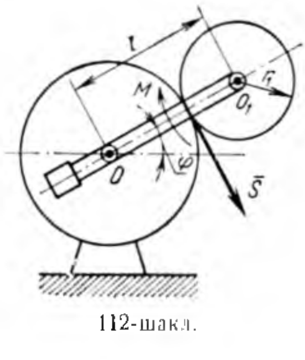
(12), (13); (17) лардан x ни топамиз:

$$x = -\frac{Pl}{P_1} + \frac{1}{2}\left(l_0 + \frac{Pl}{P_1}\right)\left[e^{\sqrt{\frac{P_1 g}{l(P + P_1 + P_2)}}\, t} + e^{-\sqrt{\frac{P_1 g}{l(P + P_1 + P_2)}}\, t}\right]$$

ёки

$$x = -\frac{Pl}{P_1} + \left(l_0 + \frac{Pl}{P_1}\right) ch \sqrt{\frac{P_1 g}{l(P + P_1 + P_2)}}\, t.$$

106-масала. Эпициклик механизмда r_1 радиусли айланувчи шестерня M момент таъсирида қўзғалмайдиган шестерня ўқи атрофида айланувчи посангили кривошипга ўрнатилган. Кривошип айланишининг бурчак тезланиши ва шестернялар бир-бирига тегиб турган нуқтадаги айлана зўриқиш S аниқлансин; шестернялар ўқи орасидаги масофа l посангили кривошипнинг кривошип айланиш ўқига нисбатан олинган инерция моменти I_0, айланувчи шестернянинг массаси m_1, шестернянинг ўз ўқига нисбатан олинган инерция моменти I_1; ишқаланиш ҳисобга олинмасин; шестерня ва посангили кривошипнинг оғирлик марказлари кривошипнинг айланиш ўқида ётади (112-шакл).



112-шакл.

Ечиш. Системанинг вазияти OO_1 кривошипнинг айланиши билан аниқланади, шунинг учун φ бурчакни умумлаштирилган координата учун оламиз. Бу системанинг эркинлик даражаси битта.

Системанинг кинетик энергияси OO_1 кривошипнинг посангиси билан биргаликдаги кинетик энергияси T_1 билан айланувчи шестерянинг кинетик энергияси T_2 нинг йиғиндисига тенг, яъни:

$$T = T_1 + T_2, \tag{1}$$

бу ерда:

$$T_1 = \frac{1}{2} I_0 \omega^2,$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2. \tag{2}$$

ω — кривошипнинг O ўқ атрофида айланиш бурчак тезлиги, ω_1 — ҳаракат қилувчи шестерянинг O_1 ўқ атрофида айланиш бурчак тезлиги. Қўзғалувчи шестерня қўзғалмас шестерня устида сирпанмай юмалайди, шунинг учун:

$$l\omega = r_1\omega_1 = v_1. \tag{3}$$

(2) ва (3) тенгликларни назарга олиб, T ни топамиз:

$$T = \left(I_0 + m_1 l^2 + I_1 \frac{l^2}{r_1^2}\right)\frac{\omega^2}{2}. \tag{4}$$

Моменти M булган жуфт кучнинг иши

$$\delta A = M\delta\varphi \tag{5}$$

га тенг.

Шунинг учун умумлаштирилган куч $Q_\varphi = M$ (6) кўринишда булади.

Системанинг инерция маркази қўзғалмас бўлгани учун оғирлик кучининг иши нолга тенг.

(77,2) кўринишда Лагранж тенгламасини тузамиз:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi. \tag{7}$$

Системанинг кинетик энергияси φ га бевосита боғлиқ бўлмагани учун:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{M}{I_0 + m_1 l^2 + I_1 \frac{l^2}{r_1^2}}. \tag{8}$$

Айлана зўриқиш S, қўзғалувчи шестерня қўзғалмас шестерня билан тегишиб турган нуқтага қўйилган. Бу зўриқиш шестеряни кривошипга нисбатан айланма ҳаракатга келтиради, унинг кинетик энергияси:

$$T = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 \tag{9}$$

га тенг. Айлана зўриқишнинг кўчишда бажарган иши:

$$\delta A = Sr_1 \delta\varphi_1 \qquad (10)$$

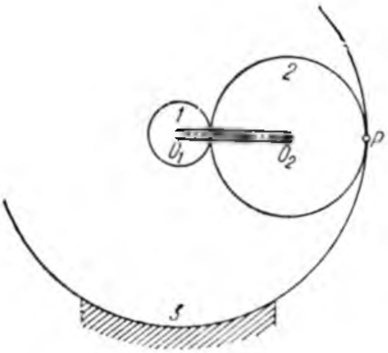
га тенг. (7) формулага асосан Лагранж тенгламасини тузамиз:

$$Sr_1 = I_1 \varepsilon_1. \qquad (11)$$

Қўзғалувчи шестернянинг бурчак тезланиши ε_1 кривошипнинг бурчак тезланиши ε орқали $\varepsilon_1 = \frac{l}{r_1}\varepsilon_1$, муносабатда бўлишини ҳисобга олсак, (11) дан қуйидаги келиб чиқади:

$$S = \frac{I_1 l}{r_1^2}\varepsilon.$$

107- масала. 113- шаклда кўрсатилган илашмада O_1O_2 даста билан ҳаракатга келтириладиган *2* ғилдирак қўзғалмас *3* ғилдиракнинг ички сирти бўйлаб сирғанмай ғилдирайди ва *1* ғилдиракни қўзғалмас O_1 ўқ атрофида айлантиради. *1* ғилдирак дастага қараганда 10 марта тезроқ айланиши маълум. Ғилдиракларни бир хил қалинликдаги ва бир хилдаги материалдан ясалган бир жинсли дисклар деб ҳисоблаб, системанинг ҳаракати топилсин: *1* ғилдиракка ўзгармас M_1 қаршилик моменти, дастага эса айлантирувчи ўзгармас M момент таъсир қилади деб, фараз қилинсин, механизм горизонтал текисликда жойлашган; дастанинг массаси ҳисобга олинмасин.



113- шакл.

Ечиш. OO_1 кривошип механизмнинг стакловчи звеносидир. Системанинг эркинлик даражаси битта. Умумлаштирилган координата учун кривошипнинг айланиш бурчаги φ ни оламиз.

Кривошипнинг айланиш бурчак тезлигини ω билан белгилаймиз.

Масаланинг шартига биноан *1* ғилдиракнинг айланиш бурчак тезлиги $\omega_1 = 10\,\omega$ (1) га тенг. *1* ва 2 ғилдиракларнинг радиусларини тегишлича r_1 ва r_2 лар билан белгилаймиз.

Бирдан оний тўхтатиш методидан фойдаланиб, узатиш сони $k = \frac{r_1}{r_2}$ (2) ни ва *2* ғилдиракнинг айланиш бурчак тезлиги ω_2 ни топамиз, яъни:

$$v_p = \omega_2 r_2 = \omega(r_1 + r_2), \qquad (3)$$

бундан:

$$\omega_2 = \frac{r_1 + r_2}{r_2}\,\omega, \tag{4}$$

иккинчидан:

$$\omega_2 \cdot 2\,r_2 = \omega_1 r_1. \tag{5}$$

Бунга (4) дан ω_2 нинг қийматини олиб қуямиз:

$$\frac{r_1 + r_2}{r_2}\,\omega \cdot 2\,r_2 = \omega_1 r_1 \tag{6}$$

бундан:

$$\omega_1 = \frac{2(r_1 + r_2)}{r_1}\,\omega. \tag{7}$$

Бунга (1) дан ω_1 нинг қийматини олиб қўямиз:

$$10\ \omega = \frac{2\,(r_1 + r_2)}{r_1}\,\omega, \tag{8}$$

бундан:

$$r_2 = 4\,r_1 \tag{9}$$

ва

$$k_1 = \frac{r_1}{4\,r_1} = \frac{1}{4},$$

(4) дан:

$$\omega_2 = \frac{r_1 + 4\,r_1}{4\,r_1}\,\omega = \frac{5}{4}\,\omega = \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{10}\,\omega_1 = \frac{1}{8}\,\omega_1. \tag{10}$$

Ғилдиракларнинг ҳажмлари тегишлича $V_1 = \pi r_1^2 \cdot \delta$ ва

$$V_2 = 16\pi r_1^2 \delta \tag{11}$$

га тенглигини назарга олиб, *2* ғилдиракнинг массасини *1* ғилдирак массаси орқали ифодалаймиз: бунда

δ — ғилдиракнинг қалинлиги.

Демак,

$$m_2 = 16\ m_1. \tag{12}$$

2 ғилдиракнинг (шакл текислигига тик бўлиб *p* нуқтадан ўтган) оний ўққа нисбатан инерция моментини топамиз.

Инерция марказидан ўтадиган ўққа параллел бўлган ўққа нисбатан инерция моментини (59, 11) га асосан топамиз:

$$I_2 = \frac{1}{2}\,m_2 r_2^2 + m_2 r_2^2 = \frac{3}{2}\,m_2 r_2^2. \tag{13}$$

1 ғилдиракнинг марказий ўққа нисбатан инерция моменти $I_1 = \frac{1}{2}\,m_1 r_1^2$ (14) га тенглигини ва (10), (12) формулаларни назарга олсак, I_2 қуйидагича бўлади:

$$I_2 = 3 \cdot 16^2\, I_1. \tag{15}$$

2 ғилдиракнинг абсолют ҳаракатидаги кинетик энергияси қуйидагига тенг бўлади:

$$T_2 = \frac{1}{2}\, I_2\omega_2^2 = \frac{3 \cdot 16^2 \cdot I_1 \omega_1^2}{2 \cdot 8^2} = 6\, I_1\omega_1^2 = 12\, T_1 \qquad (16)$$

бу ерда $T_1 = \frac{1}{2}\, I_1\omega_1^2$ — I ғилдиракнинг кинетик энергияси. Механизмнинг тўла кинетик энергияси қуйидаги формула билан ҳисобланади:

$$T = 13\, T_1 = \frac{13}{2}\, I_1\omega_1^2. \qquad (17)$$

Механизмга қўйилган жуфт кучларнинг иши қуйидагига тенг:

$$\delta A = M\delta\varphi - M_1\delta\varphi_1. \qquad (18)$$

(1) ни назарга олиб, (18) дан қуйидагини топамиз:

$$Q_\varphi = \frac{\delta A}{\delta\varphi_1} = \frac{M}{10} - M_1. \qquad (19)$$

Энди

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = 0;\ \frac{\partial T}{\partial \dot\varphi_1} = \frac{\partial T}{\partial \omega_1} = 13\, I_1\omega_1 \qquad (20)$$

эканини ҳисобга олиб, (77,2) Лагранж тенгламасидан қуйидагини топамиз:

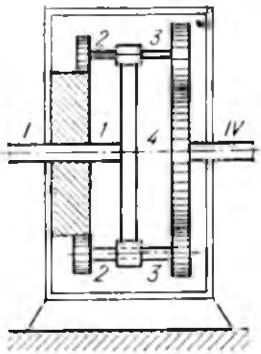
$$13\, I_1\varepsilon_1 = \frac{M - 10M_1}{10}, \qquad (21)$$

бунда: ε_1 — I ғилдиракнинг бурчак тезланиши. Демак, дастанинг бурчак тезланиши:

$$\varepsilon = \frac{M - 10\, M_1}{1300\, I_1}\, \frac{1}{сек^2}.$$

бўлади, бунда I_1 — I ғилдиракнинг ўз айланиш ўқига нисбатан инерция моменти.

108-масала. Радиуси r_1 бўлган қўзғалмас I шестернядан, радиуси r_2 ва r_3 бўлган қўшалоқ айланувчи шестернялар 2 ва 3 дан ва етакланувчи валга ўрнатилган r_4 радиусли шестернядан иборат бўлган тезликлар редукторига бириктирилган етакчи ва етакланувчи I ва IV валларнинг бурчак тезланиши аниқлансин. Етакчи валга бириктирилган массаларнинг вал ўқига нисбатан олинган инерция моменти I_1 га тенг, ҳар қайси жуфт айланувчи шестерняларнинг массаси m_2, унинг ўз ўқига нисбатан олинган инерция моменти I_2; етакланувчи валга бириктирилган массаларнинг шу вал ўқига нисбатан олинган инерция моменти I_4 га тенг; етакчи валга қўйилган айлантирувчи момент M_1 га тенг; етакланувчи валга қўйилган қаршилик



114-шакл.

моменти M_4 га тенг, ишқаланиш ҳисобга олинмасин (114-шакл).

Ечиш. Механизм битта эркинлик даражасига эга. Етакчи валнинг айланиш бурчаги φ_1 ни умумлаштирилган координата учун қабул қиламиз. Бирдан оний тўхтатиш методини қўллаб узатиш сони $k = \frac{r_1 r_3}{r_2 r_4}$ (1) ва 2 ҳамда 4 шестерняларнинг бурчак тезликларини топамиз. Виллис формуласига биноан:

$$\omega_4 = \omega_1(1 - k), \tag{2}$$

бунга (1) дан k нинг қийматини олиб қўямиз:

$$\omega_4 = \omega_1\left(1 - \frac{r_1 r_3}{r_2 r_4}\right). \tag{3}$$

2 шестерянинг чизиқли тезлиги v_2 бўлади:

$$v_2 = \omega_1(r_1 + r_2), \tag{4}$$

иккинчидан:

$$v_2 = \omega_2 \cdot r_2. \tag{5}$$

(4) ва (5) лардан ω_2 ни топамиз:

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{r_1 + r_2}{r_2} = \omega_1\left(1 + \frac{r_1}{r_2}\right). \tag{6}$$

Механизмнинг етакчи вал билан боғланган қисмининг кинетик энергияси:

$$T_1 = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2. \tag{7}$$

Қўзғалувчи 2 ва 3 шестерняларнинг кинетик энергияси текис-параллел ҳаракатдаги жисмнинг кинетик энергияси топиладиган (62,4) формуладан аниқланади, яъни:

$$T_2 = 2\left|\frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2\right|, \tag{8}$$

бу ерда:

$$v_2 = (r_1 + r_2)\omega_1.$$

Механизмнинг етакланувчи вал билан боғланган қисмининг кинетик энергияси қуйидагига тенг:

$$T_3 = \frac{1}{2} I_4 \omega_4^2 = \frac{1}{2} I_4\left(1 - \frac{r_1 r_3}{r_2 r_4}\right)\omega_1^2. \tag{9}$$

Системанинг ҳамма қисмларининг кинетик энергияси буларнинг йиғиндисига тенг, яъни:

$$T = \frac{1}{2}\left| I_1 - 2m_2(r_1 + r_2)^2 + 2\,I_2\left(1 + \frac{r_1}{r_2}\right)^2 + I_4\left(1 - \frac{r_1 r_3}{r_2 r_4}\right)^2\right|\omega_1^2. \quad (10)$$

Айлантирувчи ва тормозловчи моментнинг элементар иши қуйидагича ифодаланади:

$$\delta A = Q_{\varphi 1}\delta_{\varphi} = M_1\delta\varphi_1 - M_4\delta\varphi_4, \quad (11)$$

(3) дан

$$\delta\varphi_4 = \delta\varphi_1\left(1 - \frac{r_1 r_3}{r_2 r_4}\right) \quad (12)$$

эканлиги кўриниб турибди, шунинг учун умумлаштирилган куч қуйидагига тенг булади:

$$Q_{\varphi 1} = M_1 - M_4\left(1 - \frac{r_1 r_3}{r_2 r_4}\right). \quad (13)$$

Энди

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = 0;\ \frac{\partial T}{\partial \dot\varphi_1} = \left| I_1 + 2\,m_2(r_1 + r_2)^2 + 2\,I_2\left(1 + \frac{r_1}{r_2}\right)^2 + I_4\left(1 - \frac{r_1 r_3}{r_2 r_4}\right)\right|^2\omega_1$$

эканини ҳисобга олсак, (77,2) Лагранжнинг тенгламасидан

$$\varepsilon_1 = \frac{M_1 - M_4\left(1 - \frac{r_1 r_3}{r_2 r_4}\right)}{I_1 + 2\,m_2(r_1 + r_2)^2 + 2\,I_2\left(1 + \frac{r_1}{r_2}\right)^2 + I_4\left(1 - \frac{r_1 r_3}{r_2 r_4}\right)^2} \quad (15)$$

бўлади. (3) ва (6) муносабатларга асосан

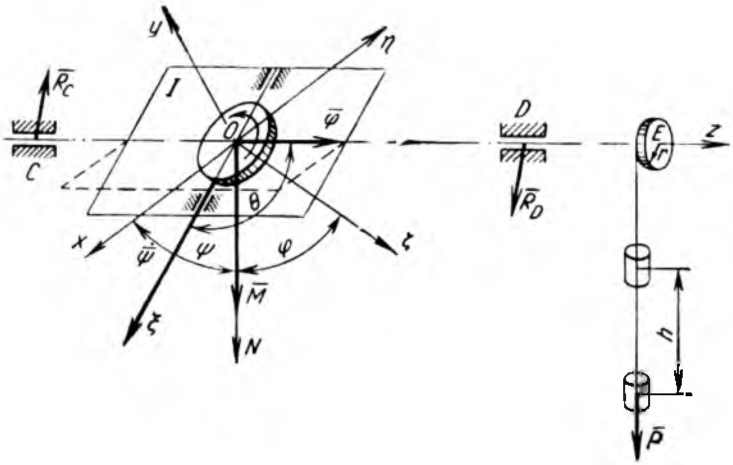
$$\varepsilon_2 = \varepsilon_4 = \varepsilon_1\left(1 - \frac{r_1 r_3}{r_2 r_4}\right)$$

бўлади.

109-масала. *P* юк мувозанатлаштирилган гироскопнинг *I* рамкасини ип ва *r* радиусли *E* шкив ёрдамида *CD* ўқ атрофида айлантиради. Юк *h* баландликдан тушган пайтда гироскопик момент таъсири остида рамканинг *C* ва *D* подшипникларда ҳосил бўладиган босим аниқлансин. *A* ва *C*—роторнинг *Ox* ўқига нисбатан олинган инерция моменти; *E* шкивнинг массасини ҳисобга олмаймиз. Ротор бир секундда *n* марта айланади. Оралиқ $CD = b$ (115-шакл).

Ечиш. Боши системанинг инерция марказига жойлашган *Ox* ўқи горизонтал, *Oy* ўқи эса вертикал йўналган ва *Oz* ўқи учун *CD* тўғри чизиғи олинган қўзғалмас координата ўқлари системасини киритамиз.

Ротор билан қўзғалмас қилиб бириктирилган координата ўқлари системасининг $O\xi$ ўқи учун роторнинг айланиш ўқини оламиз, $O\xi$ ва $O\eta$ ўқларини эса роторнинг диаметрал текислигида оламиз.



115- шакл.

Энди θ, ψ, φ — Эйлер бурчагини киритамиз. Бу бизнинг ҳолда қуйидагига тенг:

$$\theta = \frac{\pi}{2};\ \dot{\varphi} = 2\,\pi n\,\frac{1}{сек}. \tag{1}$$

Буларга биноан Эйлернинг кинетик формуласидан қуйидагиларни топамиз:

$$\left.\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi, \\ \omega_y &= \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi, \\ \omega_z &= \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Жисм айланиш бурчак тезлигининг қўзғалувчи координата ўқларидаги проекцияларини топамиз:

$$\left.\begin{aligned} \omega_\xi &= \dot{\psi}\sin\varphi, \\ \omega_\eta &= \dot{\psi}\cos\varphi, \\ \omega_\zeta &= \dot{\varphi}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Ротор, рамка ва P юкдан иборат бўлган системанинг кинетик энергияси қуйидагича булади:

$$T = \frac{\left(A + A_1 + \frac{P}{g}\,r^2\right)}{2}\,\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}\,C\dot{\varphi}^2. \tag{4}$$

P юкнинг вазияти $y_p = -r\psi$ (5) координата билан аниқланади, шу сабабли бу юк бажарган элементар ишнинг миқдори $\delta A = -P\delta y_p = Pr\delta\psi$ (6) булади. (5) формуладан Q_ψ ни топамиз:

$$Q_\psi = Pr. \tag{7}$$

CD ўқнинг таянч реакциясидан $O\xi$ ва $O\eta$ ўқларга нисбатан олинган моментларни M_ξ ва M_η билан белгилаймиз.

Лагранжнинг қуйидаги (77,2) тенгламасини тузиб

$$\left(A + A_1 + \frac{P}{g} r^2\right)\ddot{\psi} = Pr. \tag{8}$$

ва унинг биринчи интегралини олиб, (77,12) энергия интегралини топамиз

$$\dot{\psi} = \sqrt{\frac{2Ph}{A + A_1 + \frac{P}{g} r^2}} \frac{1}{сек}. \tag{9}$$

Энди

$$I_\xi = I_\eta = A; \; I_\zeta = C; \; \dot{\omega}_\zeta = 0 \tag{10}$$

ларни ва (3), (9) ларни назарга олиб, Эйлернинг (77,14) тенгламасини тузамиз, у вақтда:

$$\left.\begin{aligned} A\ddot{\psi}\sin\varphi + C\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos\varphi &= M_\xi, \\ A\ddot{\psi}\cos\psi - \dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\varphi &= M_\eta, \\ 0 &= M_\zeta. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Бу (11) формулалардан M ни топамиз:

$$M = \sqrt{\frac{(APr)^2}{\left(A + A_1 + \frac{P}{g} r^2\right)^2} + \frac{C^2 8\pi^2 n^2 Ph}{A + A_1 + \frac{P}{g} r^2}}. \tag{12}$$

(12) тенглик шуни кўрсатадики, регулятор процесси содир бўладиган ҳолат қушимча қуйидаги эҳтимолларда булади:

а) рамка инерция моменти A_1 ротор инерция моменти A дан анча катта булганда:

$$A \ll A_1; \tag{13}$$

б) P юк h баландликка тушгандан кейин системага таъсир қилиши тухтайди, яъни

$$\ddot{\psi} = 0. \tag{14}$$

Агар айтилган (13), (14) эҳтимоллардан бирортаси бажарилса, у вақтда

$$M = 2C\pi n \sqrt{\frac{2Phg}{(A + A_1)g + Pr^2}} \tag{15}$$

булади.

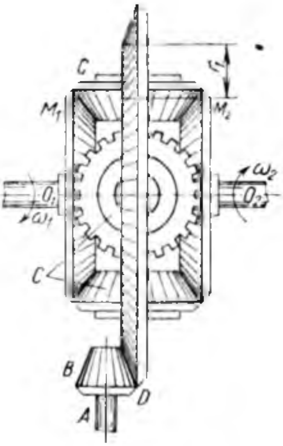
Ҳолат регулятор процесси бўлганда $\overline{M}$ — тугунлар чизиғида бўл ди, шунинг учун

$$R_c = R_D = \frac{M}{b} \tag{16}$$

ёки

$$R_c = R_D = \frac{2C\pi n}{b} \sqrt{\frac{2Ph}{A + A_1 + \frac{P}{g} r^2}}.$$

110- масала. 116-шаклда кўрсатилган дифференциал регуляторда қарама-қарши томонга ω_1 ва ω_2 бурчак тезликлари билан айланувчи O_1 ва O_2 валларга M_1 ва M_2 тишли ғилдираклар ўтказилган; O_1 ва O_2 валлар икки жуфт C сателлитлар ёрдамида D шестерняга туташган, бу шестерня сателлитлар дастаси вазифасини бажаради. Акс ҳолда D айлана бошлайди ва A вали орқали шаклда кўрсатилмаган ростлаш механизмини ишга туширади; бу механизм O_1 ва O_2 валларга узатиладиган моментлар ҳосил қилади, бунда тезроқ айланувчи вал тормозланади, секин айланувчи вал эса ўз бурчак тезлигини оширади. Шу моментларни D шестерянинг бурчак тезлигига пропорционал (пропорционаллик коэффициенти n билан белгиланади) ва миқдори жиҳатдан ҳар икки вал учун бир хилда деб ҳисоблаб ҳамда системанинг O_1 ва O_2 ўққа келтирилган инерция моментини I билан белгилаб, ω_1 ва ω_2 бурчак тезликларининг ўзгариш қонуни топилсин; уларнинг бошланғич қийматлари ω_{10} ва ω_{20} бир бирига тенг эмас. O_1, O_2 валлар билан M_1 ва M_2 шестерняларнинг инерция моменти I_1 ва I_2 лари ўзаро тенг



116-шакл.

деб ҳисоблаймиз, D шестерянинг ва бу шестерня A вал орқали ҳаракатга келтирадиган механизм қисмларининг D шестерня айланиш ўқига келтирилган инерция моментини I_D билан белгилаймиз; масала ечилган вақтда, сателлитларнинг ўз айланиш ўқларига нисбатан инерция моменти I_c ҳам ҳисобга киритилади (бу миқдор охирги натижага кирмайди). Системанинг вал ўқига келтирилган инерция моменти деб $I = 2I_1 + I_D + 4I'_c$ йиғинди тушунилади, бу ерда I'_c — битта сателлитнинг $O_1 O_2$ ўқига нисбатан олинган инерция моменти.

Ечиш. Регуляторнинг ҳамма қисмларининг ҳаракати O_1 ва O_2 валлар ҳаракатига боғлиқ, шунинг учун системанинг эркинлик даражаси иккита.

O_1 валнинг айланиш бурчаги φ_1 ни ва O_2 валнинг айланиш бурчаги φ_2 ни умумлаштирилган координаталар учун оламиз. $\omega_2 > 0$; $\omega_1 < 0$ ундан ташқари

$$|\bar{\omega}_1| > |\bar{\omega}_2| \tag{1}$$

деб фараз қиламиз.

D шестерянинг айланиш бурчак тезлигини ω_1 ва ω_2 лар орқали ифодалаймиз; бунинг учун шестеряни фикран тўхтатиб, оний тўхтатиш методини қўллаймиз.

То оний тўхтатишгача бўлган ва оний тўхтатилгандан кейинги бурчак тезликларининг тақсимланиш жадвалини тузамиз.

Ҳисоблаш учун берилганлар	D шестерня	M_1 шестерня	Сателлитлар	M_2 шестерня
Тўхтатилганча бўлган бурчак тезлиги	ω_D	ω_1	ω	ω_2
Тўхтатилгандан кейинги бурчак тезлиги	0	$\omega_1 - \omega_D$	$\omega - \omega_D$	$\omega_2 + \omega_D$
Бириктириш тури		ташқи		ички

Шундай қилиб,

$$\frac{\omega_1 - \omega_D}{\omega - \omega_D} = -\frac{r_c}{r_2},$$

$$\frac{\omega - \omega_D}{\omega_2 + \omega_D} = -\frac{r_2}{r_c}. \tag{2}$$

Бу (2) нисбатлардан:

$$\frac{\omega - \omega_D}{\omega_1 + \omega_D} = 1,$$

бундан:

$$\omega_D = \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2). \tag{3}$$

Биринчи валнинг айлантирувчи моментини L_1 билан, иккинчи валникини L_2 билан белгилаймиз. Бу жуфт кучлар бажарган элементар иш қуйидагига тенг:

$$\delta A = L_1\delta\varphi_1 + L_2\delta\varphi_2. \tag{4}$$

Масаланинг шартига биноан умумлаштирилган кучлар тенг бўлади:

$$Q_1 = L_1 = -n\,\omega_D,$$

$$Q_2 = L_2 = n\omega_D.$$

(3) тенгламани назарга олсак:

$$Q_1 = -\frac{1}{2}n(\omega_1 - \omega_2),$$

$$Q_2 = \frac{1}{2}n(\omega_1 - \omega_2). \tag{5}$$

Системанинг механизм қисмлари кинетик энергияларининг йиғиндисига тенг бўлган система кинетик энергияси тенгламасини тузамиз:

$$T = T_1 + T_2 + T_D + T_0, \tag{6}$$

бунда $T_1 = \frac{1}{2} I_1\omega_1^2 - O_1$ валнинг M_1 шестерняси билан биргаликдаги кинетик энергияси;

$T_2 = \frac{1}{2} I_1\omega_2^2 - O_2$ валнинг M_2 шестерняси билан биргаликдаги кинетик энергияси;

$T_D = \frac{1}{2} I_D\omega_D^2 - D$ шестернянинг кинетик энергияси;

$T_c = \frac{1}{2} \cdot 4 I_c'\omega_c^2$ — сателлитларнинг кинетик энергияси

Сателлитларнинг кинетик энергиясини тузишда мураккаб ҳаракатдаги система кинетик энергиясининг (62,7) теоремасидан фойдаланамиз, яъни

$$\frac{1}{4} T_c = \frac{1}{2} \left[I_c\omega_c^2 + M (r_D - r_1)^2 \omega_D^2 \right]. \tag{7}$$

бунда $(r_D - r_1)$ — сателлит марказидан O_1O_2 валгача бўлган масофа.

ω_c нинг ω_D орқали топилишини ҳисобга олиб ва O_1O_2 ўққа нисбатан сателлитнинг келтирилган инерция моменти I_c' ни киритсак, юқорида сателлитлар учун олинган кинетик энергия ифодасига келамиз. (6) формулада ω_D нинг қийматини (3) тенглик орқали ифодаласак, қуйидаги ҳосил бўлади:

$$T = \frac{1}{2}\omega_1^2\left(I_1 + \frac{1}{4} I_D + I_c^1\right) + \frac{1}{2}\omega_2^2\left(I_1 + \frac{1}{4} I_D + I_c^1\right) - \\ - \omega_1\omega_2\left(\frac{1}{4} I_D + I_c^1\right), \tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi_1} = \omega_1\left(I_1 + \frac{1}{4} I_D + I_c^1\right) - \omega_2\left(\frac{1}{4} I_D + I_c^1\right); \\ &\frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = 0; \\ &\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi_2} = \omega_2\left(I_1 + \frac{1}{4} I_D + I_c^1\right) - \omega_1\left(\frac{1}{4} I_D + I_c^1\right); \\ &\frac{\partial T}{\partial \varphi_2} = 0 \end{aligned}\right| \tag{9}$$

эканлигини назарга олиб ва Лагранжнинг (77,2) тенгламасини тузиб, валларнинг ҳаракат дифференциал тенгламаларини топамиз:

$$\begin{aligned} a\dot\omega_1 - b\dot\omega_2 &= -\frac{1}{2} n (\omega_1 - \omega_2), \\ -b\dot\omega_1 + a\dot\omega_2 &= \frac{1}{2} n (\omega_1 - \omega_2), \end{aligned} \tag{10}$$

бундан

$$a = I_1 + \frac{1}{4} I_D + I'_c, \qquad b = \frac{1}{4} I_D + I'_c.$$

(10) тенгламалар системасини ечамиз, унинг биринчисини иккинчисига қўшсак, қуйидаги ҳосил бўлади:

$$\dot{\omega}_1 = -\dot{\omega}_2 \tag{11}$$

(11) тенгликка асосан (10) нинг биринчи тенгламасини қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\dot{\omega}_1 = -\frac{\lambda}{2}(\omega_1 - \omega_2), \tag{12}$$

бунда $2(a+b) = I$; $\frac{n}{I} = \frac{\lambda}{2}$.

(12) тенгламани вақтга нисбатан дифференциаллаймиз:

$$\frac{d\dot{\omega}_1}{dt} = -\frac{\lambda}{2}(\dot{\omega}_1 - \dot{\omega}_2) \tag{13}$$

Энди (11) ни ҳисобга олиб, қуйидагини топамиз:

$$\frac{d\dot{\omega}_1}{\dot{\omega}_1} = -\lambda dt, \tag{14}$$

бундан:

$$\dot{\omega}_1 = c\,e^{-\lambda t}. \tag{15}$$

$\dot{\omega}_1$ нинг қийматини (12) га қўйсак, қуйидаги ҳосил бўлади:

$$ce^{-\lambda t} = -\frac{\lambda}{2}(\omega_1 - \omega_2). \tag{16}$$

$t = 0$ бўлганда $\omega_1 = \omega_{10}$, $\omega_2 = \omega_{20}$ бўлишини назарга олиб, (16) дан интеграл ўзгармасларини топамиз:

$$c = \frac{\lambda}{2}(\omega_{20} - \omega_{10}). \tag{17}$$

Шундай қилиб,

$$\frac{d\omega_1}{dt} = \frac{\lambda}{2}(\omega_{20} - \omega_{10})\,e^{-\lambda t}, \tag{18}$$

буни интеграллсак, қуйидаги ҳосил бўлади:

$$\omega_1 \Big|_{\omega_{10}}^{\omega_1} = \frac{1}{2}(\omega_{20} - \omega_{10})\,e^{-\lambda t} \Big|_0^t,$$

бундан

$$\omega_1 = \omega_{10} + \frac{1}{2}(\omega_{20} - \omega_{10})(1 - e^{-\lambda t})$$

ёки

$$\omega_1 = \frac{1}{2}\omega_{10}(1 + e^{-\lambda t}) + \frac{1}{2}\omega_{20}(1 - e^{-\lambda t}) \tag{19}$$

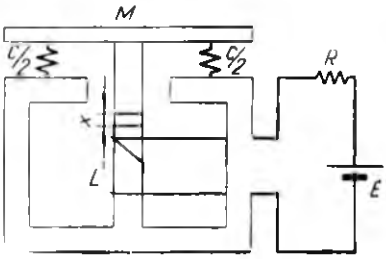
Бироқ $\dot{\omega}_2 = -\dot{\omega}_1 = \frac{\lambda}{2}(\omega_{10} - \omega_{20}) e^{-\lambda t}$ бўлгани учун, буни интеграллагандан кейин қуйидагича бўлади:

$$\omega_2 = \frac{1}{2}\omega_{10}(1 - e^{-\lambda t}) + \frac{1}{2}\omega_{20}(1 + e^{-\lambda t}),$$

бундан

$$\lambda = \frac{2n}{l}.$$

111-масала. 117-шаклда кўрсатилган система механик тебранишларни ёзишда ишлатиладиган электродинамик датчикнинг принципиал схемасига тўғри келади. Якорнинг массаси M, пружиналарнинг бикрлиги c. Ғалтакнинг ўзиндукция коэффициенти магнит ўтказгичдаги кичик ҳаво зазори узунликлари $L = L(x)$ нинг (x — якорнинг пружиналар бўш турган пайтдаги вазиятидан вертикал силжиши) ўзгариши орасида ўзгаради. Ғалтакка E электр юритувчи кучга эга бўлган элементдан ва R қаршиликдан иборат бўлган занжир уланган. Системанинг ҳаракат тенгламаси тузилсин ва унинг „мувозанат ҳолати" аниқлансин.



117-шакл.

Ечиш. Система иккита эркинлик даражасига эга. Умумлаштирилган координаталар учун якорнинг силжиши x ва занжирдаги i токка тўғри келадиган заряд q ни қабул қиламиз $i = \left(\frac{dq}{dt}\right)$. Умумлаштирилган кучни топиш учун q заряд ва x масофа ўзгарганида бажарилиши мумкин бўлган элементар ишни ҳисоблаймиз. Якорнинг δx га кўчишида унинг оғирлик кучи қуйидаги ишни бажаради:

$$\delta A_1 = Mg\delta x. \tag{1}$$

Шу силжишда пружиналарнинг эластиклик кучлари

$$\delta A_2 = -cx\delta x \tag{2}$$

ишни бажаради. E электр юритувчи кучга эга бўлган занжирдаги иш қуйидаги формула билан топилади:

$$\delta A_3 = iEdt = E\delta q. \tag{3}$$

Симни иситиш учун сарфланган токнинг иши

$$\delta A_4 = -i^2Rdt = -\dot{q}R\delta q \tag{4}$$

ни ҳисобга оламиз.

Шундай қилиб, умумлаштирилган кучнинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$\left.\begin{aligned} Q_x &= Mg - cx, \\ Q_q &= E - R\dot{q}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Системанинг кинетик энергияси қуйидагига тенг:

$$T_1 = \frac{1}{2} Li^2, \tag{6}$$

бу ерда L — ўзиндукция коэффициенти. Системанинг тўла кинетик энергияси қуйидаги формуладан топилади:

$$T = \frac{1}{2}(M\dot{x}^2 + L\dot{q}^2). \tag{7}$$

Бизда

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} &= \frac{1}{2}\frac{dL}{dx}\dot{q}^2; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = M\dot{x}; \\ \frac{\partial T}{\partial q} &= 0; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = L\dot{q} \end{aligned}\right| \tag{8}$$

эканини эслатиб ўтамиз.

Лагранжнинг (77,2) тенгламасини тузиб, қуйидагини топамиз

$$\left.\begin{aligned} L\ddot{q} + \left(\dot{x}\frac{\partial L}{\partial x} + R\right)\dot{q} &= E. \\ M\ddot{x} - \frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial x}\dot{q}^2 + cx &= Mq. \end{aligned}\right| \tag{9}$$

„Мувозанат ҳолатида“ $x = x_0$ ва $i = \dot{q} = i_0$; бу ерда $i_0 = \frac{E}{R}$, шунинг учун (9) тенгламадан:

$$cx_0 = Mq + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)_0 \cdot i_0^2.$$

XIV БОВ

МАССАСИ ЎЗГАРУВЧАН НУҚТА ВА ҚАТТИҚ ЖИСМ ДИНАМИКАСИ

80-§ Массаси ўзгарувчан нуқта динамикасининг асосий тенгламалари

Материал нуқтанинг массаси чексиз кичик массаларнинг қўшилиши ёки ажралиши натижасида узлуксиз ўзгариб турса, унинг ҳаракат тенгламаси (И. В. Мешчерский тенгламаси) қуйидаги кўринишда бўлади:

$$m\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F} + \frac{dm}{dt}(\bar{u} - \bar{v}). \tag{80,1}$$

бу ерда m — материал нуқтанинг оний, яъни айни пайтдаги массаси;

$\bar{v}$ — материал нуқтанинг тезлиги;

$\bar{u}$ — қўшилаётган ёки ажралиб кетаётган масса қисмининг тезлиги;

$\bar{F}$ — массаси ўзгарувчан материал нуқтага таъсир қилаётган ташқи кучларнинг бош вектори.

(80,1) тенгламанинг ўнг томонидаги охирги ҳаднинг ўлчов бирлиги ҳам кучнинг ўлчов бирлигидек бўлгани учун уни

$$\bar{\Phi} = \frac{dm}{dt}(\bar{u} - \bar{v}) \tag{80,2}$$

билан белгиласак, (80,1) тенгламани яна қуйидаги кўринишга келтириш мумкин, яъни

$$m\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F} + \bar{\Phi}, \tag{80,3}$$

$\bar{\Phi}$ куч реактив куч деб аталади. Бу (80,3) вектор кўринишни қуйидаги скаляр аналитик кўринишда олиш мумкин:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= F_x + \Phi_x, \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= F_y + \Phi_y, \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= F_z + \Phi_z. \end{aligned}\right| \tag{80,4}$$

Умумий ҳолда И. В. Мещерскийнинг асосий тенгламаси қуйидагича бўлади:

$$m\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F} + \bar{\Phi}_1 + \bar{\Phi}_2, \tag{80,5}$$

Бундаги $\bar{\Phi}_1$ ва $\bar{\Phi}_2$ лар реактив кучлар деб аталади ва улар тегишлича қуйидагиларга тенг:

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_1 &= \frac{dm}{dt}(\bar{u}_1 - \bar{v}), \\ \bar{\Phi}_2 &= \frac{dm}{dt}(\bar{u}_2 - \bar{v}), \end{aligned} \tag{80,6}$$

бу ерда $(\bar{u}_1 - \bar{v})$; $(\bar{u}_2 - \bar{v})$ — тегишлича қўшилаётган ва ажралаётган қисмларнинг нисбий тезликлари.

Массаси ўзгарувчан нуқтанинг ҳаракат қонуни (80,6) га биноан умумий ҳолда бундай таърифланади:

ҳар қандай вақтда нуқта массасининг тезланишга кўпайтмаси нуқтага қўйилган ташқи кучларнинг ва қўшилувчи ҳамда ажралувчи қисмларнинг реактив кучлари деб олинган кучларнинг геометрик йиғиндисига тенг.

(80,5) тенгламанинг скаляр шакли қуйидагича бўлади:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= F_x + \Phi_{1x} + \Phi_{2x}, \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= F_y + \Phi_{1y} + \Phi_{2y}, \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= F_z + \Phi_{1z} + \Phi_{2z}. \end{aligned}\right| \qquad (80,7)$$

81-§. Масалалар ечишга оид методик кўрсатмалар

Бу бобга оид бўлган масалаларни қуйидаги тартибда ечиш керак.

1. Координата ўқлари системасини танлаб олиш керак.
2. Жисмга таъсир қилаётган кучларнинг схемасини тузиш керак.
3. Ҳаракатнинг бошланғич шартларини аниқлаб олиш керак.
4. Кучларнинг схемасига асосан (80,4) ёки (80,7) ҳаракат дифференциал тенгламаларини тузиш керак.
5. Тузилган тенгламалар системасини интеграллаб ва бошланғич шартлардан фойдаланиб интеграл ўзгармасларни топиш керак.
6. Бу бобга И. В. Мешчерский „Назарий механикадан масалалар тўплами" китобидаги 1150—1161-масалалар киради.

82-§. Масалалар

112-масала. Юқорига қараб учаётган ракетанинг ҳаракат дифференциал тенгламаси тузилсин. Газларнинг ракетадан оқиб чиқиш нисбий тезлиги v_r доимий деб ҳисоблансин. $m = m_0\ (1 - \alpha t)$ ва $R = 0$ бўлганда ҳаракат дифференциал тенгламаси интеграллансин. Ракетанинг ер юзасидаги бошланғич тезлиги нолга тенг. $v_r = 2000\ м/сек$ ва $\alpha = \frac{1}{100}\,\frac{1}{сек}$ бўлганда $t = 10;\ 30;\ 50\ сек$ дан кейин ракета қандай баландликда бўлади (118-шакл)?

118-шакл

Ечиш. Ox ўқини вертикал юқорига йўналтирамиз. Ракетанинг вертикал ҳаракатини Ox ўқи бўйича ҳаракат қилаётган нуқтанинг ҳаракатидек деб қараймиз. Массаси $m = m_0(1 - \alpha t)$ қонуни билан ўзгарувчи бу нуқтага масала шартига биноан mg оғирлик кучи ва Φ реактив куч таъсир қилади (118-шакл).

Ҳаракат қонунини топиш учун И. В. Мешчерскийнинг Ox ўқига проекцияланган (80,3) тенгламасини қўллаймиз:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg - \frac{dm}{dt}v_r. \qquad (1)$$

Масаланинг шартига биноан:

$$\frac{dm}{dt} = -\alpha m_0. \tag{2}$$

(1) тенгламага $\frac{dm}{dt}$ нинг қийматини қуямиз:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg + \alpha m_0 v_r. \tag{3}$$

Тенгламанинг ҳар икки томонини $m = m_0(1-\alpha t)$ га бўлсак, қуйидаги келиб чиқади:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g + \frac{\alpha}{1-\alpha t}v_r. \tag{4}$$

Бу тенгламани $t=0$ бўлгандаги $v=v_0=0$; $x=x_0=0$ шартларга биноан интеграллаcак, ракетанинг ҳаракат қонуни келиб чиқади. (4) ни бир марта интеграллаймиз:

$$\frac{dx}{dt} = -gt - v_r \ln(1-\alpha t) + c_1.$$

$t=0$ бўлганда $v = \frac{dx}{dt} = 0$ бўлгани учун $c_1 = 0$.

Бундан:

$$\frac{dx}{dt} = -gt - v_r \ln(1-\alpha t), \tag{5}$$

буни яна интеграллаймиз:

$$x = -\frac{gt^2}{2} + \frac{v_r}{\alpha}[(1-\alpha t)\ln(1-\alpha t) + \alpha t] + c_2.$$

Бошлангич пайтда $t=0$ бўлганда $x = x_0 = 0$ шартига биноан $c_2 = 0$.

Демак,

$$x(t) = \frac{v_r}{\alpha}[(1-\alpha t)\ln(1-\alpha t) + \alpha t] - \frac{gt^2}{2}. \tag{6}$$

Бунга берилган қийматларни қуйсак қуйидаги хосил бўлади:

$$x(10) = 20\left[\left(1-\frac{1}{10}\right)\ln\left(1-\frac{1}{10}\right) + \frac{1}{10}\right] - 490,5 = 0,54 \text{ км}.$$

Шунга ўхшаш

$$x(30) = 5,65 \text{ км},$$
$$x(50) = 18,4 \text{ км}.$$

113-масала. Шар шаклидаги сув томчиси сув буғлари билан тўйинган атмосферада вертикал бўйлаб пастга тушади. Конденсация натижасида томчининг массаси унинг сирт юзасига пропорционал равишда ортиб боради (пропорционаллик коэффициенти α). Томчининг бошлангич радиуси r_0, бошлангич тезлиги v_0, бошлангич баландлиги h_0. Томчи тезлиги ва баландлигининг вақт ўтган сайин ўзгариш қонуни аниқлансин (119- шакл).

Ечиш. Томчининг r радиуси вақтга нисбатан чизиқли қонун билан ўзгаради деб ҳисоблаймиз, у вақтда

$$r = r_0 + \alpha t, \tag{1}$$

бунда α — ўзгармас коэффициент;

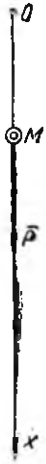
r_0 — томчининг бошланғич пайтдаги радиуси.

Ox ўқини вертикал пастга йўналтирамиз (119- шакл) ва И. В. Мешчерскийнинг тенгламасидан фойдаланиб, қуйидаги тенгламани тузамиз:

$$m \frac{dv}{dt} = mg + \frac{dm}{dt}(u - v). \tag{2}$$

Ишқаланиш йўқ деб оламиз, шунинг учун томчига фақат оғирлик кучи таъсир қилади. Томчининг массаси қуйидагига тенг:

$$m = \frac{4}{3}\gamma\pi r^3, \tag{3}$$



119- шакл.

бу ерда γ — томчининг зичлиги. Сув буғининг қўшиладиган қисмининг абсолют тезлиги нолга тенг, яъни $u = 0$. Шунинг учун томчининг m массаси ажрагандан кейинги ҳаракат тенгламасини қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{1}{m}\frac{dm}{dt} v. \tag{4}$$

(3) дан $\frac{dm}{dt}$ ни топамиз;

$$\frac{dm}{dt} = 4\gamma\pi r^2 \frac{dr}{dt}.$$

(1) дан $\frac{dr}{dt} = \alpha$,

демак,

$$\frac{dm}{dt} = 4\alpha\gamma\pi r^2. \tag{5}$$

(4) га (3) ва (5) лардан m ва $\frac{dm}{dt}$ ларнинг қийматларини олиб қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{3\alpha}{r} v. \tag{6}$$

Янги боғлиқсиз эркли ўзгарувчи r га ўтамиз:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = \alpha \cdot \frac{dv}{dr} \tag{7}$$

бўлади.

(7) ни (6) га қўйсак, қуйидаги келиб чиқади:

$$\frac{dv}{dr} + \frac{3v}{r} = \frac{g}{a}, \tag{8}$$

аввало бир жинсли чизиқли тенгламани ечамиз:

$$\frac{dv}{dr} + \frac{3v}{r} = 0 \tag{9}$$

ёки

$$\frac{dv}{v} + 3\frac{dr}{r} = 0.$$

Буни интеграллагандан кейин қуйидаги ҳосил бўлади:

$$\ln v + 3\ln r = \ln c \tag{10}$$

ёки

$$v = \frac{c}{r^3}. \tag{11}$$

Ўзгармаснинг вариациясини қўллаймиз:

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{3c}{r^4} + \frac{1}{r^3}\frac{dc}{dr}. \tag{12}$$

(12) ни бир жинсли бўлмаган (8) тенгламага қўямиз:

$$-\frac{3c}{r^4} + \frac{1}{r^3}\frac{dc}{dr} + \frac{3c}{r^4} = \frac{g}{a},$$

ёки

$$\frac{1}{r^3}\frac{dc}{dr} = \frac{g}{a}. \tag{13}$$

Ўзгарувчиларни ажратамиз:

$$dc = \frac{g}{a} r^3 dr. \tag{14}$$

Буни интеграллаб, c ни топамиз:

$$c = \frac{g}{a} \cdot \frac{r^4}{4} + c_1. \tag{15}$$

(15) ни (11) га қўйсак, қуйидаги келиб чиқади:

$$v = \frac{1}{r^3}\left(\frac{g}{a} \cdot \frac{r^4}{4} + c_1\right)$$

ёки

$$v = \frac{g}{a} \cdot \frac{r}{4} + \frac{c_1}{r^3}. \tag{16}$$

Интеграллаш ўзгармаси c_1 ни масаладаги бошланғич шартлардан топамиз, яъни $t = 0$ бўлганда:

$$r = r_0; \ v = v_0,$$

$$v_0 = \frac{g}{a} \cdot \frac{r_0}{4} + \frac{c_1}{r_0^3}, \tag{17}$$

бундан

$$c_1 = r_0^3\left(v_0 - \frac{g}{\alpha}\,\frac{r_0^4}{4}\right). \tag{18}$$

Демак,

$$v = v_0\frac{r_0^3}{r^3} + \frac{g}{4\alpha}\left(r - \frac{r_0^4}{r^3}\right), \tag{19}$$

яна бизда

$$v = \alpha\frac{dx}{dr}. \tag{20}$$

Булардан

$$\alpha dx = v_0 r_0^3\frac{dr}{r^3} + \frac{g}{4\alpha}\left(rdr - r_0^4\frac{dr}{r^3}\right). \tag{21}$$

(21) тенгламани интеграллаймиз:

$$\alpha x = -\frac{v_0}{2}\,\frac{r_0^3}{r^2} + \frac{g}{8\alpha}\left(r^2 + \frac{r_0^4}{r^2}\right) + c_2 \tag{22}$$

Интеграллаш ўзгармаси c_2 ни масаладаги бошланғич шартлардан топамиз, яъни
$t = 0$ бўлганда $x = h_0$, $r = r_0$.

$$\alpha h_0 = -\frac{v_0}{2}r_0 + \frac{g}{4\alpha}r_0^2 + c_2, \tag{23}$$

бундан:

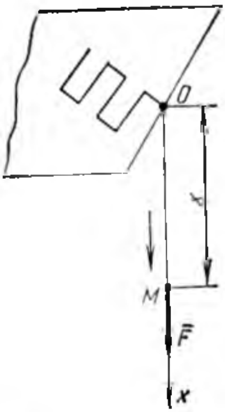
$$c_2 = \alpha h_0 + \frac{v_0 r_0}{2} - \frac{gr_0^2}{4\alpha}. \tag{24}$$

(24) ни (22) га қўйиб, соддалаштириб, кейин x ни топсак

$$x = h_0 + \frac{v_0 r_0}{2\alpha}\left[1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^2\right] + \frac{g}{8\alpha^2}\left[r^2 - 2r_0^2 + \frac{r_0^4}{r^2}\right]$$

бўлади, бунда $r = r_0 + \alpha t$.

114-масала. Юмалоқ қилиб ўралган бир жинсли оғир занжир горизонтал столнинг четига қўйилган, бунда дастлабки пайтда занжирнинг бир ҳалқаси қўзғалмас ҳолда осилиб турибди. x ўқини вертикал пастга йўналтириб ва бошланғич пайтда $x = 0$ ва $\dot{x} = 0$ деб ҳисоблаб, занжирнинг ҳаракати аниқлансин (120-шакл).



120-шакл.

Ечиш. Занжирнинг ҳаракат қилувчи осилган қисмининг узунлиги x бўлсин; занжирнинг t вақт ичида ҳаракат қиладиган элементар dx қисми занжирга қўшиладиган масса бўлади; унинг қўшилиш пайтидаги абсолют тезлиги $\dot{x}$ га тенг бўлади, аммо то шу пайтгача у нолга тенг булади. Шундай қилиб, бу ҳолда:

$$m = \frac{\gamma}{g}x;\quad u = 0;\quad F = \gamma x;\quad \frac{dm}{dt}(v - u) = \frac{1}{g}\dot{x}.$$

(γ — занжир бирлик узунлигининг оғирлиги) (80,1) тенглама қуйидагича бўлади:

$$\frac{\gamma}{g} x\ddot{x} + \frac{\gamma}{g} \dot{x}^2 = \gamma x \tag{1}$$

ёки

$$x\ddot{x} = gx - \dot{x}^2. \tag{2}$$

Бу тенгламанинг биринчи интегралини топамиз:

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx}\dot{x} = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(\dot{x}^2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{dz}{dx}, \tag{3}$$

бунда $z = \dot{x}^2$ ва (2) тенглама чизиқли биринчи тартибли тенгламага келади:

$$\frac{1}{2} x \frac{dz}{dx} + z = gx. \tag{4}$$

Бунинг умумий интеграли

$$z = \dot{x}^2 = \frac{c}{x^4} + \frac{2}{3} g x. \tag{5}$$

бўлади. Ўзгармас c ни ноль деб оламиз, у вақтда

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{3} gx}, \tag{6}$$

бундан:

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{2}{3} g}dt, \tag{7}$$

буни яна бир марта интеграллаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$2\sqrt{x} = \sqrt{\frac{2}{3} g}(t - t_0) \tag{8}$$

ёки

$$t_0 = 0;\ x_0 = 0 \text{ да } x = \frac{1}{6} gt^2.$$

XV БОБ

ЭРКИНЛИК ДАРАЖАСИ ЧЕКЛИ СОН БЎЛГАН СИСТЕМАНИНГ КИЧИК ҲАРАКАТИ. МУНТАЗАМЛИКНИНГ БАРҚАРОРЛИГИ

83-§. Система мувозанатининг барқарорлиги

Материал нуқталар системанинг нуқталарига жуда кичик бошланғич тезликлар берилганда система ўзининг мувозанат ҳолатидан жуда кичик масофага оғса ва шу ҳолат яқинида узоқ вақт тебранмай ўзининг олдинги вазиятига қайтса, системанинг мувозанати барқарор бўлади.

Голономли, стационар ва идеал боғланишга итоат қиладиган системанинг барқарор мувозанатини текширамиз. Агар шундай система консерватив куч майдонида турган бўлса, система мувозанатининг барқарорлиги Лагранж—Дирихле теоремасига асосан ёки А. М. Ляпунов теоремасига асосан аниқланади.

Лагранж—Дирихле теоремаси қуйидагича таърифланади: *системанинг мувозанат ҳолатидаги потенциал энергияси энг кичик қийматга эга бўлганда мувозанат барқарор бўлади.*

Системанинг потенциал энергияси умумлаштирилган координаталарининг даражаси бўйича қаторга ёйилган бўлиши мумкин. Бу ёйилиш камида координатанинг иккинчи тартибли ҳадигача давом этиши керак.

$$П = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 П}{\partial q_1^2}\right)_0 \cdot q_1^2 + 2\left(\frac{\partial^2 П}{\partial q_1 \partial q_2}\right)_0 q_1 q_2 + \ldots + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial^2 П}{\partial q_k^2}\right)_0 q_k^2\right] + \ldots . \qquad (83,1)$$

Агар мувозанат ҳолатини координаталарининг ҳисобланиш боши учун қабул қилсак, мувозанат ҳолатда потенциал энергия нолга тенг деб ҳисобланади.

Агар мувозанат ҳолатда потенциал энергия чизиқли функция бўлмаса, мувозанатнинг барқарорлигини текширишда А. М. Ляпунов теоремасини қўллаш керак, у қуйидагича таърифланади:

1) *қаторга ёйилган потенциал энергиянинг юқори тартибли ҳадини олмай (83,1) тенгламанинг иккинчи тартибли ҳадларини ҳисоблаб топилганда потенциал энергияси минимум бўлмаса мувозанат барқарор бўлмайди;*

2) *мувозанат ҳолатда ҳақиқатан (83,1) қаторга ёйилиши мумкин бўлган потенциал энергиянинг пастки тартибдаги ҳадларини текшириш билан топилган потенциал энергия максимум бўлса, мувозанат барқарор бўлмайди.*

84-§. Масалалар ечишга оид методик кўрсатмалар

Эркинлик даражаси битта бўлган системанинг мувозанати барқарор бўлган ҳолга оид масалаларни қуйидаги тартибда ечиш тавсия этилади;

1) мувозанати текшириладиган жисмни ёки жисмлар системасини аниқлаш ва системанинг ҳолатини аниқлайдиган умумлаштирилган координаталарни танлаб олиш керак;

2) боғланишдан қутқазиш принципини қўллаб, боғланишлар таъсирини реакциялар билан алмаштириш йўли билан фикран боғланишларни ташлаб юбориш керак;

3) система потенциал энергиясининг ифодасини тузиб олиш керак;

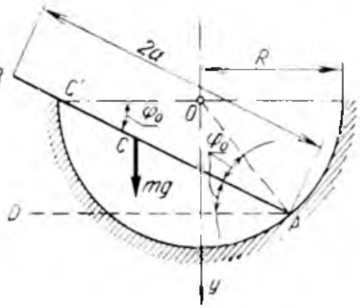
4) система потенциал энергиясининг умумлаштирилган координаталарга нисбатан ҳосиласини топиб, уни нолга тенглаштириш ва системанинг мувозанатда бўлиши мумкин бўлган ҳолатини топиш керак;

5) ҳар қандай мувозанат ҳолатлари учун потенциал энергиянинг умумлаштирилган координаталарга нисбатан иккинчи ҳосиласини топиб, уларнинг ишораларини аниқлаш ва унга қараб мувозанатнинг қандай бўлиши ҳақида мулоҳаза юргизиш керак;

6) бу параграфга И. В. Мешчерский „Назарий механикадан масалалар тўплами" китобидаги 1163—1173- масалалар киради.

85- §. Масалалар

115- масала. Узунлиги $2a$ бўлган бир жинсли оғир AB стержень радиуси R бўлган ярим айлана шаклидаги эгри чизиқли йўналтирувчига таяниб туради. Ишқаланишни ҳисобга олмай, мувозанат ҳолатлари аниқлансин ва уларнинг барқарорлиги текширилсин (121- шакл).



121- шакл.

Ечиш. Стерженнинг ҳолатини аниқлайдиган умумлаштирилган координатани танлаб оламиз.

Умумлаштирилган координата учун горизонтал билан стержень ҳосил қилган φ_0 бурчакни оламиз.

AD юзага нисбатан стерженнинг потенциал энергияси ўзгармас миқдор деб олиб, стержень оғирлик марказининг баландлиги y_c орқали топамиз.

AD тўғри чизиқдан оғирлик марказининг баландлиги y_c ни топамиз (121- шакл):

$$y_c = R - R\cos\alpha + a\sin\varphi_0. \tag{1}$$

Бироқ $\alpha = 90° - 2\varphi_0$ бўлгани учун

$$y_c = R(1 - \sin 2\varphi_0) + a\sin\varphi_0 \tag{2}$$

ва системанинг потенциал энергияси

$$\Pi = mg\,[R(1 - \sin 2\varphi_0) + a\sin\varphi_0] \tag{3}$$

бўлади, y_c нинг φ_0 га нисбатан ҳосиласини топиб, уни нолга тенглаштирамиз:

$$\frac{dy_c}{d\varphi_0} = -2R\cos 2\varphi_0 + a\cos\varphi_0 = -2R(2\cos^2\varphi_0 - 1) + a\cos\varphi_0 = 0.$$

Бу тенгламадан мувозанат икки ҳолатда бўлиши мумкинлигини кўрамиз:

$$\cos\varphi_0 = \frac{1}{8R}\left(a \pm \sqrt{a^2 + 32R^2}\right), \tag{4}$$

яъни

$$\cos\varphi_0 = \frac{1}{8R}\left(a + \sqrt{a^2 + 32R^2}\right)$$

ва

$$\cos\varphi_0 = \frac{1}{8R}\left(a - \sqrt{a^2 + 32R^2}\right).$$

Энди иккинчи тартибли ҳосилани топамиз:

$$\frac{d^2y_c}{d\varphi_0^2} = 4R\sin 2\varphi_0 - a\sin\varphi_0 = \pm\sqrt{a^2 + 32R^2}\sin\varphi_0. \tag{5}$$

Мувозанатнинг барқарорлигини аниқлаш учун бу ҳосиланинг ҳар қайси мумкин бўлган мувозанат ҳолатларидаги ишорасини топиш керак.

Биринчи ҳолатда, $\sin\varphi_0 > 0$ бўлганда, бу қийматни (5) га қўйсак,

$$\frac{d^2y_c}{d\varphi_0^2} > 0 \tag{6}$$

бўлади.

Демак, бу ҳолда мувозанат барқарор бўлади, иккинчи $\frac{d^2y_c}{d\varphi_0^2} < 0$ ҳолда эса барқарор бўлмайди.

Агар $\cos\varphi_0 \leqslant 1$ булса, $(8R - a^2) \geqslant (a^2 + 32R^2)$ бўлади, бундан: $a \geqslant R\cos\varphi_0$ бўлганда

$$a \leqslant 2R$$

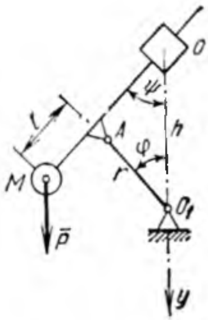
$$a \geqslant \frac{a + \sqrt{a^2 + 32R^2}}{8}$$

бўлади; бундан:

$$a \geqslant \sqrt{\frac{2}{3}}R.$$

Демак, $a < 2R < a\sqrt{6}$ бўлганда мувозанат ҳолати барқарор бўлади.

116 масала. Параллелограф маятнигида M юк MO стерженга осилган, стержень айланиб турадиган O цилиндрдан эркин ўтиб, A нуқтада шарнир ёрдамида AO_1 шайнига бириккан, шайни O ўқ атрофида айланади (122- шакл). Шайнининг узунлиги r; юк оғирлик маркази билан A шарнир орасидаги масофа l га тенг; оралиқ $OO_1 = h$. Маятник вертикал мувозанат ҳолатининг тургунлиги текширилсин. Юкнинг ва стерженнинг оғирлиги ҳисобга олинмасин (122- шакл).



122- шакл.

Ечиш. Система эркинлик даражаси битта.

M юкнинг оғирлигига нисбатан стерженларнинг оғирлигини ҳисобга олмай, система потенциал энергиясининг ифодасини тузамиз:

$$\Pi = -Py_c. \tag{1}$$

Юк оғирлик марказининг y_c ординатасини қуйидаги формуладан топамиз:

$$y_c = h - r\cos\varphi + l\cos\psi, \tag{2}$$

бу ердаги φ ва ψ бурчаклар бир-бири билан

$$\frac{\sin(\psi+\varphi)}{h} = \frac{\sin\psi}{r} \tag{3}$$

муносабатда боғланган. Система барқарорлигининг $\varphi=0$, $\psi=0$ (4) ҳолатга яқин ҳолатда текширилишини назарга олганимизда φ ва ψ бурчакларни кичик деб ҳисоблаб

$$\left.\begin{aligned} \sin\varphi &\approx \varphi, \\ \sin\psi &\approx \psi, \\ \cos\varphi &\approx 1 - \frac{\varphi^2}{2}, \\ \cos\psi &\approx 1 - \frac{\psi^2}{2}, \end{aligned}\right| \tag{5}$$

деб қабул қилиш мумкин.

У вақтда

$$\frac{\psi+\varphi}{h} = \frac{\psi}{r},$$

$$\psi = \frac{r}{h-r}\varphi \tag{6}$$

бўлади. Демак,

$$y_c = h - r + l + \frac{1}{2}(r\varphi^2 - l\psi^2) =$$

$$= h - r + l + \frac{r}{2}\left[1 - \frac{rl}{(h-r)^2}\right]\varphi^2. \tag{7}$$

(7) ни (1) га қўямиз:

$$\Pi = \frac{1}{2}Pr\left[\frac{rl}{(h-r)^2} - 1\right]\varphi^2 + \text{const}, \tag{8}$$

$\varphi = 0$ бўлганда потенциал энергия энг кичик қийматга эга бўлади, агар

$$\frac{rl}{(h-r)} - 1 > 0,$$

яъни

$$\sqrt{rl} > h - r \tag{9}$$

бўлса, бу шартларда текширилаётган ҳолатда мувозанат барқарор бўлади.

Аксинча

$$\sqrt{rl} < h - r \tag{10}$$

бўлганда Ляпуновнинг биринчи теоремасига биноан мувозанат ҳолат барқарор бўлмайди.

$\sqrt{rl} = h - r$ (11) бўлганда мувозанатнинг барқарорлигига оид масалани ечиш учун потенциал энергиянинг ифодаси камида аниқлиги φ^4 тартибгача бўлган қаторга ёйилган бўлиши керак. (Механизм вертикал ўқига нисбатан симметрик бўлгани учун бундай қаторга ёйишда φ нинг тоқ даражалилари бўлмайди.)

86-§. Эркинлик даражаси битта бўлган системанинг кичик эркин тебранишлари

Механик системанинг фазодаги ҳолатини (бир қийматли) умумлаштирилган координата деб юритиладиган битта q орқали топилса, бундай механик система эркинлик даражаси битта бўлган система дейилади. Системанинг фазодаги ҳолати умумлаштирилган координатанинг вақтга боғлиқлигидан топилади.

Эркинлик даражаси битта бўлган системанинг барқарор мувозанат ҳолатини умумлаштирилган координатани ҳисоблаш боши ва потенциал энергиянинг ноль қиймати учун қабул қилиб, системанинг мувозанат барқарорлигига тегишли ҳолат олдида бажараётган кичик ҳаракатини текширамиз.

Ҳисоблаш боши шундай танланганда системанинг мувозанат ҳолатидан огиши умумлаштирилган координатанинг мазмунидан топилади.

Кичик ҳаракатнинг дифференциал тенгламасини тузишда умумлаштирилган координаталарни (мувозанат ҳолатдан олиб ҳисобланган) ва умумлаштирилган тезликларни кичик миқдорлар деб ҳисоблаб, фақат ҳаракат дифференциал тенгламасининг чизиқли ҳадлари билан чегараланамиз. Бу ҳолда чизиқлимас дифференциал тенгламадаги умумлаштирилган координата ва тезликларнинг иккинчи ва юқори даражали ҳадларини ташлаб юбориш, тенгламани чизиқли тенгламага келтириш деб айтилади. Албатта, бундай тенгламани чизиқли қилиш ҳақиқий ҳаракатга нисбатан нотўғри маъно беради, бироқ системанинг барқарор мувозанат ҳолатидан огиши қанча кичик бўлса, айтилган тенгламани чизиқли тенглама қилиш йўли аниқроқ, яъни ҳақиқийсига яқинроқ бўлади.

Дифференциал тенгламани чизиқли тенглама қилиш, кўпинча, интегралини аниқ топиб бўлмайдиган чизиқлимас тенгламанинг аниқ ёпиқ чегарали ечилишини беради.

Кичик тебранишнинг дифференциал тенгламасини тузишда Лагранж тенгламасидан фойдаланиш қулай. Эркинлик даражаси битта булган система учун у тенглама қуйидагича бўлади:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q, \tag{86,1}$$

бу ерда T — системанинг умумлаштирилган q координата ва умумлаштирилган $\dot{q}$ тезлиги орқали ифодаланган кинетик энергияси.

Умумлаштирилган координаталар ва умумлаштирилган тезликлар орқали ифодаланган стационар боғланишдаги системанинг кинетик энергияси қуйидагича ифодаланади:

$$T = \frac{1}{2} A(q)\dot{q}^2, \tag{86,2}$$

бу ерда, $A(q)$ — умумлаштирилган координата q нинг мусбат функцияси. Кинетик энергиянинг ифодасини чизиқли қилиш учун $A(q)$ ни Маклорен қаторига ёйилади:

$$A(q) = A(0) + q \cdot A'(0) + q^2 \frac{A''(0)}{2} + \dots . \tag{86,3}$$

Буни (86,2) формулага қўйсак

$$T = \frac{1}{2} A(0)\dot{q}^2 + \frac{1}{2}\left[A'(0) \cdot q + \frac{A''(0)}{2} q^2 + \dots\dots \right] \dot{q}^2 \tag{86,4}$$

бўлади. Бу ҳолда q ва $\dot{q}$ лар кичик миқдорлар деб фараз қилиб, T ни тахминан қуйидагича топамиз:

$$T = \frac{1}{2} A(0)\dot{q}^2 = \frac{1}{2} a\dot{q}^2, \tag{86,5}$$

бу ерда $A(0)$ ни a билан белгиладик, у ҳамма вақт узгармас ва мусбат, инерция коэффициенти дейилади. Инерция коэффициенти умумлаштирилган чизиқли координаталар учун масса ўлчовида, бурчакли айланма координаталар учун айланиш ўқига нисбатан жисм инерция моментининг ўлчовида ўлчанади.

Системанинг потенциал энергияси умумлаштирилган координаталар функцияси бўлади:

$$П = П(q). \tag{86,6}$$

Бу функцияни барқарор мувозанат ҳолати яқинида Маклорен қаторига ёямиз:

$$П(q) = П(0) + П'(0) \cdot q + \frac{1}{2} П''(0) q^2 + \frac{П'''(0)}{3!} q^3 + \dots, \tag{86,7}$$

бу ифодада

$$П(0) = 0, \tag{86,8}$$

чунки мувозанат ҳолат потенциал энергиянинг ноль ҳолати сатҳига нисбатан қабул қилингани учун Π (0) нолга тенг:

$$Q = \left(-\frac{\partial \Pi}{\partial q}\right)_{q=0} = 0. \tag{86,9}$$

Шунинг учун (86,7) қатор биринчи ҳадидан бошланади. Қаторнинг юқори тартибли ҳадларини ташлаб юбориб ва содда бўлиши учун $\Pi'''(0) = c$ деб белгиласак, қуйидаги ҳосил бўлади:

$$\Pi(q) = \frac{1}{2} cq^2. \tag{86,10}$$

Бундаги ўзгармас c га квази бикрлик коэффициенти дейилади.

Кинетик энергиянинг қийматини (86,5) дан ва потенциал энергиянинг қийматини (86,10) дан Лагранжнинг (86,1) тенгламасига қўйиб, эркинлик даражаси битта бўлган системанинг эркин кичик тебранишининг дифференциал тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$a\ddot{q} + cq = 0. \tag{86,11}$$

Бу тенглама чизиқли қайтарувчи куч таъсирида эркин тебранувчи материал нуқтанинг ҳаракат дифференциал тенгламасига ўхшайди. Бу дифференциал тенгламанинг умумий интеграли (ечилиши) қуйидаги кўринишда бўлади:

$$q = A \sin(kt + \alpha), \tag{86 12}$$

бу ерда $\frac{c}{a} = k^2$ билан белгиланган;

A — тебраниш амплитудаси;
α — бошланғич фаза;
$kt + \alpha$ — тебраниш фазаси;
k — тебраниш такрорлиги.

Амплитуда ва бошланғич фаза тебранишнинг бошланғич шартлари орқали топилади. Умумлаштирилган координатанинг ва ҳосиласининг бошланғич қийматларини, яъни $t = 0$ бўлганда $q = q_0$ ва $\dot{q} = \dot{q}_0$ деб белгиласак

$$A = \sqrt{q_0^2 + \frac{\dot{q}_0^2}{k^2}}; \ \operatorname{tg} \alpha = \frac{kq_0}{\dot{q}_0}, \tag{86,13}$$

тебраниш даври эса

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{a}{c}}. \tag{86,14}$$

бўлади.

(86,12) тенглама билан топиладиган системанинг эркин тебраниши ёки, бошқача айтганда, системанинг ўз тебраниши гармоник тебраниш бўлади.

Унинг тебраниш такрорлиги ва даври берилган бошланғич шартларига боғлиқ эмас, бундай хусусиятига кичик тебраниш изохрониклиги дейилади.

Шуни эслатиб утамизки, системанинг эркин тебраниш тенгламасини (86,12) дифференциал тенгламани кўп масалаларда Лагранж тенгламасидан фойдаланмасдан тузиш ҳам мумкин.

87-§. Масалалар ечишга оид методик кўрсатмалар

Эркинлик даражаси битта бўлган системанинг кичик тебранишига оид масалаларни қуйидаги тартибда ечиш тавсия этилади.

Биринчи усул — Лагранж тенгламасини қўллаш усули.

1. Умумлаштирилган q координата танлаб олинади.
2. Кинетик энергия ифодасини тузиб олиш керак.
3. Потенциал энергиянинг қиймати топилади.
4. Топилган қийматларни Лагранж тенгламасига қўйиб, система кичик тебранишининг дифференциал тенгламасини тузиб олиш керак.
5. Бу тенгламани интеграллаб, интеграл узгармасларини бошланғич шартлардан фойдаланиб аниқлаш ва системанинг ҳаракат тенгламасини тузиш керак.
6. Тебраниш даври ва изланаётган номаълумлар топилади.

Иккинчи усул — динамиканинг асосий тенгламасини ёки система динамикасининг умумлаштирилган теоремасидан бирини қўллаш усули:

1) масала шартиға қараб дифференциал тенгламани қайси йўл билан тузиш кераклигини, яъни динамиканинг асосий тенгламасига ё инерция марказининг ҳаракати ҳақидаги теоремага ёки кинетик энергиянинг узгариши ҳақидаги теоремага, ёхуд ҳаракат миқдори бош моментининг узгариши ҳақидаги теоремага мувофиқ тузилишини танлаб олиш керак;

2) танлаб олинган теоремани татбиқ қилиб, система кичик тебранишининг дифференциал тенгламасини тузиб олиш керак;

3) бу дифференциал тенгламани интеграллаб, интеграл узгармасини номаълумларининг бошланғич шартларидан фойдаланиб топиб олиш керак.

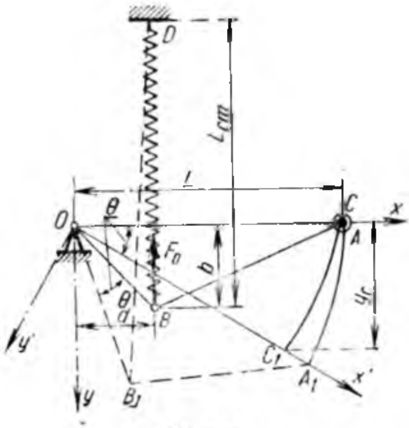
4) шундан сўнг тебраниш даври ва изланаётган номаълум топилади.

7. Бу параграф учун И. В. Мешчерский „Назарий механикадан масалалар тўплами“ китобидаги 1243—1247-масалалар киради.

Бу масалаларда турғун мувозанат ҳолатини умумлаштирилган координаталар ҳисоблаш боши қилиб олиб, кейин Лагранж тенгламасидан фойдаланиб, системанинг ҳаракат дифференциал тенгламалари тузилади.

88 §. Масалалар

117-масала. Б. Б. Голицининг вертикал сейсмографи оғирлиги Q бўлган юк бириктирилган рамкадан иборат. Рамка горизонтал O ўқ атрофида айлана олади. Рамканинг O дан a масофада турган B нуқтасига чўзиладиган пружина бириктирилган, пружинанинг бикрлиги c. Мувозанат ҳолатида OA стержень горизонтал. Рамка билан юкнинг O ўққа нисбатан олинган инерция моменти I, рамканинг баландлиги b. Пружина массасини ҳисобга олмай ва юк билан рамканинг оғирлик марказини 0 дан l масофада турган A нуқтада жойлашган деб ҳисоблаб, маятник кичик тебранишларининг даври аниқлансин (123-шакл)



123- шакл.

Ечиш. Ox ўқини горизонтал OA стержень ўқи бўйлаб йўналтирамиз, Oy ўқини эса Ox ўқига тик қилиб, вертикал пастга йўналтирамиз. Ундан ташқари, рамка билан маҳкам бириккан қўзғалувчи $O'x'y'$ координата ўқлар системасини киритамиз: мувозанат ҳолатда иккала ўқлар системаси бир-бирига ўрнашган қилиб олинган. Пружина маҳкамланган B нуқтанинг қўзғалувчи $O'x'y'$ системасига нисбатан координаталари a ва b бўлсин (мувозанат ҳолатда ҳам $x_B = a$, $y_B = b$ бўлиши яққол кўриниб турибди). D нуқтанинг $O'xy$ системага нисбатан координаталари $x_D = a$, $y_D = L_{cm} + b$ бўлади (123-шакл), бундаги L_{cm} — мувозанат ҳолат бўлган вақтдаги пружинанинг узунлиги. O ўқ атрофида рамканинг айланиш бурчаги θ ни умумлаштирилган координата учун қабул қиламиз. Тебранаётган жисмнинг ҳар қандай нуқтасини қўзғалмас xy системага нисбатан, x, y координаталарини, қўзғалувчи $x'y'$ системага нисбатан координаталари орқали ифодалаймиз:

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos\theta - y'\sin\theta, \\ y &= x'\sin\theta + y'\cos\theta. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Бу ифода B_1 нуқта учун қуйидагича бўлади:

$$\left.\begin{aligned} x_{B_1} &= a\cos\theta + b\sin\theta, \\ y_{B_1} &= a\sin\theta + b\cos\theta. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Энди пружинанинг система оғган ҳолатидаги узунлигини топиш қийин эмас:

$$L = \sqrt{(x_{B_1} - x_D)^2 + (y_{B_1} - y_D)^2} =$$
$$= \sqrt{[a(\cos\theta - 1) - b\sin\theta]^2 + [a\sin\theta + b(\cos\theta - 1) + L_{cm}]^2} =$$
$$= \sqrt{L_{cm}^2 + 2L_{cm}[a\sin\theta - b(1-\cos\theta)] + 2(a^2+b^2)(1-\cos\theta)} \quad (3)$$

Чўзилган пружинанинг потенциал энергияси $П_1$ нинг ифодаси қуйидагича бўлади:

$$П_1 = \frac{c}{2}(L - L_0)^2 = \frac{c}{2}[(L - L_{cm}) + (L_{cm} - L_0)]^2, \quad (4)$$

бу ерда L_0 — пружинанинг чўзилмаган пайтидаги узунлиги;
c — унинг бикрлиги.

Мувозанат ҳолатда айланиш ўқига нисбатан пружинанинг бошлангич тортиш кучи F_0 нинг моменти оғирлик кучининг моменти билан мувозанатлашади, яъни

$$F_0 \cdot a = Q \cdot l, \quad (5)$$

бу ерда Q — оғирлик;
l — система оғирлик марказидан айланиш ўқигача бўлган масофа.

$F_0 = c(L_{cm} - L)$ лигини назарга олсак,

$$П_1 = \frac{c}{2}(L - L_{cm})^2 + \frac{Ql}{a}(L - L_{cm})\,\frac{c}{2}(L_{cm} - L_0)^2 \quad (6)$$

бўлади, бундаги охирги ҳад ўзгармас бўлгани учун уни ташлаб юборамиз, чунки масалада потенциал энергиянинг аниқлиги θ^2 тартибигача бўлган ифодада топиш талаб қилинади, шунинг учун $L - L_{cm}$ ни шу даражали аниқликда топамиз. Қаторга ёйсак, қуйидаги ҳосил бўлади:

$$L = L_{cm}\left\{1 + 2\frac{a}{L_{cm}}\theta + \frac{a^2 + b^2 - bL_{cm}}{L^2_{cm}}\theta^2\right\} \approx$$
$$\approx L_{cm}\left\{1 + \frac{a}{L_{cm}}\theta + \frac{a^2 + b^2 - bL_{cm}}{2L^2_{cm}}\theta^2 - \frac{1}{8}\cdot 4\frac{a^2}{L^2_{cm}}\theta^2 + \dots\right\} \quad (7)$$

Бундан:

$$L - L_{cm} = a\theta - \frac{b(L_{cm} - b)}{2L_{cm}}\theta^2 (L - L_{cm})^2 = a^2\theta^2 + \dots \quad (8)$$

Буларни қўйсак, $П_1$ қуйидагича ҳосил бўлади:

$$П_1 = \frac{1}{2}\left\{ca^2\theta^2 + 2\theta lQ - \frac{Ql}{aL_{cm}}b(L_{cm} - b)\theta^2\right\} \quad (9)$$

Оғирлик кучининг потенциал энергияси:

$$П_2 = -Qy_c = -Ql\sin\theta = -Ql\theta. \quad (10)$$

Π_1 ва Π_2 ларни қўшсак, тўла потенциал энергия топилади:

$$\Pi = \frac{1}{2}\left[ca^2 - \frac{Ql}{aL_{cm}} b(L_{cm} - b)\right]\theta^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left[ca^2 - F_0 b\left(1 - \frac{b}{L_{cm}}\right)\right]\theta^2. \qquad (11)$$

Агар

$$\Pi''(0) = ca^2 - F_0 b\left(1 - \frac{b}{L_{cm}}\right) > 0 \qquad (12)$$

бўлса, мувозанат ҳолат барқарор бўлади.

Келгусида бу (12) тенгсизлик бўлади деб ҳисоблаймиз.

Унинг кинетик энергияси қуйидагича бўлади:

$$T = \frac{1}{2} I\dot{\theta}^2, \qquad (13)$$

бу ерда I — тебранаётган жисмнинг O ўққа нисбатан инерция моменти.

Эркин тебраниш такрорлигини қуйидаги формуладан топамиз:

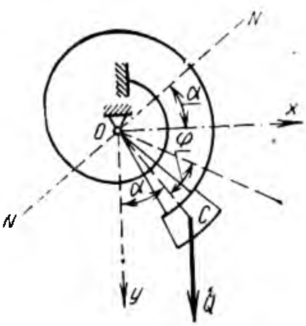
$$k = \sqrt{\frac{ca^2 - F_0 b\left(\frac{b}{L_{cm}}\right)}{I}}, \qquad (14)$$

бу ерда $F_0 = \frac{Ql}{a}$ — мувозанатда турган ҳолда пружинанинг тортиши; L_{cm} — мувозанатда турган ҳолда пружинанинг узунлиги.

Кичик тебранишдаги маятникнинг даври қуйидагича бўлади:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{ca^2 - F_0\left(1 - \frac{b}{L_{cm}}\right)}}.$$

118 масала. Пойдеворлар, машина қисмлари ва ҳоказоларнинг тебранишини ёзишда ишлатиладиган вибрографда Q оғирликдаги юкни бикрлиги c бўлган спираль пружина вертикалга α бурчак остида ушлаб туради; маятникнинг O айланиш ўқига нисбатан олган инерция моменти I; маятник оғирлик марказидан айланиш ўқигача бўлган масофа s. Вибрograф эркин тебранишларининг даври аниқлансин (124-шакл).



124-шакл.

Ечиш. Маятник мувозанат ҳолатдан φ бурчакка оғганда системанинг потенциал энергияси оғирлик кучининг потенциал энергияси билан пружинанинг потенциал энергияси Π_2 нинг йиғиндисидан иборат.

$$\Pi_1 = Qs[\cos\alpha - \cos(\varphi + \alpha)] = Qs[\cos\alpha(1 - \cos\varphi) + \sin\alpha\sin\varphi] \approx$$
$$\approx Qs\left(\frac{\varphi^2}{2}\cos\alpha + \varphi\sin\alpha\right). \qquad (1)$$

Π_2 ни ҳисоблаш учун пружинанинг пастки учини вертикал Oy ўқи устига келтиришда уни бураш зарур бўлган бурчакни α деб белгилаймиз: шу вақтда пружинага $c\alpha_0$ момент қўйиш тўғри келади; агар маятник вертикалдан $(\alpha+\varphi)$ бурчакка оғган бўлса, α_0 бурчак $(\alpha+\varphi)$ га камаяди ва пружинанинг реактив моменти $c(\alpha_0-\alpha-\varphi)$ бўлади; буларга мувофиқ

$$\Pi_2 = \frac{1}{2}c(\alpha_0 - \alpha - \varphi)^2 = \frac{c}{2}(\alpha_0 - \alpha)^2 - c(\alpha_0 - \alpha)\varphi + \frac{c}{2}\varphi^2. \qquad (2)$$

бўлади Йиғиндининг биринчи(ўзгармас) ҳадини ташлаб юборсак булади. Демак,

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = Qs\left(\frac{\varphi^2}{2}\cos\alpha + \varphi\sin\alpha\right) - c(\alpha_0 - \alpha)\varphi + \frac{c}{2}\varphi^2 \qquad (3)$$

бўлади.

Мувозанат шартига биноан $Qs\sin\alpha = c(\alpha_0 - \alpha)$, шунинг учун йиғиндидаги φ нинг биринчи даражали ҳадлари ейишиб кетади. Бунда қуйидаги келиб чиқади:

$$\Pi = \frac{1}{2}(Qs\cos\alpha + c)\varphi^2. \qquad (4)$$

Системанинг кинетик энергияси қуйидагича бўлади:

$$T = \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2. \qquad (5)$$

Лагранжнинг иккинчи тенгламасидан фойдаланиб ҳаракат дифференциал тенгламасини тузамиз:

$$I\ddot{\varphi} + (Qs\cos\alpha + c)\varphi = 0. \qquad (6)$$

Бундан виброграф эркин тебранишининг такрорлигини топамиз:

$$k = \sqrt{\frac{Qs\cos\alpha + c}{I}}.$$

Кичик тебранишнинг даври эса қуйидагича бўлади:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Qs\cos\alpha + c}}.$$

89-§. Эркинлик даражаси иккита бўлган системанинг эркин тебраниши

Эркинлик даражаси иккита: голономли идеал ва стационар боғланишга итоат қиладиган механик системанинг кичик тебранишини текширамиз. Системанинг фазодаги вазиятини аниқлайдиган умумлаштирилган координаталарни q_1, q_2 билан белгилаймиз. Системанинг кинетик энергияси умумлаштирилган тезликларнинг бир жинсли квадратик формасида бўлади:

$$T = \frac{1}{2}\left[A_{11}\dot{q}_1^2 + 2A_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + A_{22}\dot{q}_2^2\right]. \qquad (89,1)$$

Формуладаги A_{11}, A_{12}, A_{22} коэффициентлар умумлаштирилган координаталарнинг функцияси. Системанинг кичик ҳаракати содир бўладиган барқарор мувозанатлик ҳолатини умумлаштирилган координатани ҳисоблаш боши учун қабул қиламиз. Демак, мувозанат ҳолатда умумлаштирилган координаталарнинг ҳаммаси нолга тенг. Ҳар қайси коэффициентни умумлаштирилган координата даражаси бўйича Маклорен қаторига ёямиз:

$$A_{ik}(q_1, q_2) = A_{ik}(0) + \left(\frac{\partial A_{ik}}{\partial q_1}\right) q_1 + \left(\frac{\partial A_{ik}}{\partial q_2}\right) q_2 + \ldots \qquad (89,2)$$

Умумлаштирилган координаталар ва тезликлар кичик деб ҳисоблангани учун қаторга ёйишда биринчи йиғиндилари билангина чегараланамиз ва узгармас коэффициенти $A_{ik}(0)$ ни қисқача a_{ik} билан белгилаймиз, яъни

$$A_{ik}(0) = a_{ik}. \qquad (89,3)$$

Кинетик энергиянинг охирги ифодасини топсак,

$$T = \frac{1}{2}\left(a_{11}\dot{q}_1^2 + 2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + a_{22}\dot{q}_2^2\right) \qquad (89,4)$$

бўлади, a_{11}, a_{12}, a_{22}, лар инерцион коэффициент деб айтилади. Система потенциалли куч майдонида ҳаракат қилаётган булса, системанинг потенциал энергиясини умумлаштирилган координатанинг даражаси бўйича Маклорен қаторига ёйиш мумкин:

$$\Pi(q_1, q_2) = \Pi(0) + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_1}\right)_0 q_1 + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_2}\right)_0 q_2 +$$
$$+ \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1^2}\right)_0 q_1^2 + 2\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1 \partial q_2}\right)_0 q_1 q_2 + \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_2^2}\right)_0 q_2^2\right] + \ldots \qquad (89,5)$$

Система потенциал энергиясининг ҳисоблаш боши ихтиёрий бўлгани учун мувозанат ҳолатда системанинг потенциал энергиясини нолга тенг деб оламиз:

$$\Pi(0) = 0. \qquad (89,6)$$

Мувозанат ҳолатда ҳамма умумлаштирилган кучлар ҳам нолга айланади:

$$Q_i = \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0. \qquad (89,7)$$

Демак, қаторга ёйилган (89,5) га биринчи даражали умумлаштирилган координаталар билан кирган ҳадлар йуқ булиб кетади. Бу вақтда барқарор мувозанат ҳолат ёнида кичик ҳаракат қилаётган системанинг потенциал энергияси умумлаштирилган координаталар квадратининг бир жинсли формуласидек булади:

$$\Pi = \frac{1}{2}\left(c_{11}q_1^2 + 2c_{12}q_1q_2 + c_{22}q_2^2\right), \tag{89,8}$$

бу ерда $\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i\, \partial q_k}\right)_0 = c_{ik}$ (89,9) деб белгиланган.

c_{11}, c_{12}, c_{22} коэффициентлар квазибикрлик коэффициентлар деб айтилади. Топилган кинетик ва потенциал энергияларни Лагранж тенгламасига қуйсак

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i};\ (i = 1,2). \tag{89,9}$$

Системанинг ҳаракат дифференциал тенгламаларини топамиз:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 = 0, \\ a_{21}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + c_{21}q_1 + c_{22}q_2 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{89,10}$$

бу ерда

$$a_{21} = a_{12},\ c_{21} = c_{12}.$$

Бу (86,10) тенгламанинг хусусий ечимини

$$\left.\begin{aligned} q_1 = B\sin(kt + \alpha), \\ q_2 = D\sin(kt + \alpha) \end{aligned}\right\} \tag{89,11}$$

куринишда излаймиз. Бунда B, D, α лар—узгармас номаълумлар. Буларни топиш учун умумлаштирилган координаталарнинг қийматини (89,12) дан (89,11) га олиб қуямиз ва умумий купайтирувчи $\sin(kt + \alpha)$ га қисқартирамиз, у вақтда:

$$\left.\begin{aligned} B(c_{11} - k^2a_{11}) + D(c_{12} - k^2a_{12}) = 0, \\ B(c_{21} - k^2a_{21}) + D(c_{22} - k^2a_{22}) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{89,12}$$

Бу бир жинсли чизиқли алгебраик тенгламалар системаси булиб, система мувозанатига мос булган $B = D = 0$ тривиал ечимга эга. Агар (89,13) система учун тузилган детерминант нолга тенг булса, системанинг бошқа, яъни нолга тенг булмаган ечими ҳам булади:

$$\Delta(k^2) = \begin{vmatrix} c_{11} - k^2a_{11} & c_{12} - k^2a_{12} \\ c_{12} - k^2a_{12} & c_{22} - k^2a_{22} \end{vmatrix} = 0. \tag{89,14}$$

(89,13) тенгламадан амплитудаларнинг нисбатини топамиз:

$$\frac{B}{D} = -\frac{c_{12} - k^2a_{12}}{c_{11} - k^2a_{11}} = -\frac{c_{22} - k^2a_{22}}{c_{12} - k^2a_{12}}. \tag{89,15}$$

(89,14) детерминант амплитудаларнинг нисбати (89,13) нинг биринчиси ёки иккинчиси билан топилганда ҳам натижа бир хил чиқади.

Агар (89,15) шарт бажарилса, (89,13) тенглама бир-бирига боғлиқ бўлади ва номаълум B ёки D дан биттаси топилмай номаълумлигича қолади.

(89,14) детерминантни очиб ёки (89,15) дан такрорлик тенгламасини, бошқача айтганда, мелодий (вековой) тенглама деб айтиладиган тенгламасини топамиз:

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)k^4 - (a_{11}c_{22} + a_{22}c_{11} - 2a_{12}c_{12})k^2 + (c_{11}c_{22} - c_{12}^2) = 0. \qquad (89,16)$$

Агар бу тенгламанинг илдизи мусбат, яъни $k_1^2 > 0$, $k_2^2 > 0$ бўлса текширилаётган ҳаракат кичик ҳаракат ва мувозанат устивор бўлади.

Агар k_1^2 ёки k_2^2 манфий ёхуд комплекс миқдор бўлса, (89,12) ечимига гиперболик функция киради ва ҳаракатнинг мувозанат ҳолати ёнида кичик ҳаракат бўлмайди.

$$\left.\begin{array}{l} a_{11} > 0,\ a_{22} > 0,\ a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0, \\ c_{11} > 0,\ c_{22} > 0,\ c_{11}c_{22} - c_{12}^2 > 0 \end{array}\right\} \qquad (89,17)$$

тенгсизликлар қаноатлантирилганда k_1^2 ва k_2^2 илдизлари мусбат бўлади.

Иккита махсус ҳол учраши мумкин.

Биринчи ҳол

$$\Delta\left(\frac{c_{11}}{a_{11}}\right) = 0, \ \Delta\left(\frac{c_{22}}{a_{22}}\right) = 0 \qquad (89,18)$$

бўлган вақтда икки координата учун ҳам такрорликлари бир хил

$$k = \sqrt{\frac{c_{11}}{a_{11}}} = \sqrt{\frac{c_{12}}{a_{12}}} = \sqrt{\frac{c_{22}}{a_{22}}}. \qquad (89,19)$$

бўлган гармоник тебранишга мос ҳаракат бўлади.

Иккинчи ҳол $c_{11}\ c_{22} - c_{12}^2 = 0$ бўлганда такрорлик тенгламасининг илдизларидан бири нолга тенг бўлади.

Такрорлик тенгламасининг илдизи k_1 ва k_2 топилгандан кейин системанинг бош тебраниши топилади. Биринчи бош тебраниш

$$\left.\begin{array}{l} q_1 = B_1 \sin(k_1 t + \alpha_1), \\ q_2 = D_1 \sin(k_1 t + \alpha_1) \end{array}\right\} \qquad (89,20)$$

тенгламалар билан, иккинчи бош тебраниш эса

$$\left.\begin{array}{l} q_1 = B_2 \sin(k_2 t + \alpha_2), \\ q_2 = D_2 \sin(k_2 t + \alpha_2) \end{array}\right\} \qquad (89,21)$$

тенгламалар билан ифодаланади.

Тенгламалар чизиқли бўлгани туфайли умумий ечим хусусий ечимларнинг йиғиндисидан иборат бўлади:

$$q_1 = B_1 \sin(k_1 t + \alpha_1) + B_2 \sin(k_2 t + \alpha_2), \qquad (89,22)$$

$$q_2 = D_1 \sin(k_1 t + \alpha_1) + D_2 \sin(k_2 t + \alpha_2). \qquad (89,23)$$

(89,16) га k_1 нинг қийматини, кейин k_2 нинг қийматини қўйиб, амплитудаларнинг нисбатини топамиз:

$$\left.\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{B_1}{D_1} = -\frac{c_{12} - k_1^2 a_{12}}{c_{11} - k_1^2 a_{11}}, \\ \beta_2 &= \frac{B_2}{D_2} = -\frac{c_{12} - k_2^2 a_{12}}{c_{11} - k_2^2 a_{11}}. \end{aligned}\right| \qquad (89,24)$$

Бу вақтда:

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= \beta_1 D_1 \sin(k_1 t + \alpha_1) + \beta_2 D_2 \sin(k_2 t + \alpha_2), \\ q_2 &= D_1 \sin(k_1 t + \alpha_1) + D_2 \sin(k_2 t + \alpha_2). \end{aligned}\right\} \qquad (89,25)$$

Кейин бошланғич шартлардан фойдаланиб, интеграллаш ўзгармас номаълумлари D_1, D_2, α_1, α_2, лар топилади.

Эркинлик даражаси иккита бўлган система кичик тебранишларининг дифференциал тенгламасини Лагранж тенгламасига мувофиқ тузишдаги каби динамиканинг асосий тенгламасини ёки динамиканинг асосий теоремасидан фойдаланиб ҳам тузиш мумкин.

90-§. Масалалар ечишга оид методик кўрсатмалар

Эркинлик даражаси иккита бўлган системанинг кичик тебранишини текширишга оид масалаларни ечишда қуйидаги тартиб тавсия этилади.

Биринчи усул — Лагранж тенгламасидан фойдаланиш усули.

1. Умумлаштирилган q_1 ва q_2 координаталарни танлаб олиш керак.

2. Кинетик энергиянинг ифодаси тузилади.

3. Системанинг потенциал энергиясини топиб олиш керак.

4. Бу ифодаларни Лагранж тенгламасига қўйиб, кичик тебранишнинг иккита дифференциал тенгламалар системасини ҳосил қилиш керак.

5. Бу системанинг хусусий ечимини танлаб олиб, шу хусусий ечимларнинг ҳаракатини дифференциал тенгламалар системасига қўйиш керак.

6. Ҳосил бўлган алгебраик тенгламалар системасидан амплитудаларни чиқариб ташлаб, такрорлик тенгламасини топиш керак.

7. Такрорлик тенгламасини ечиб, системанинг ўз такрорлигини топиш керак.

8. Топилган такрорликларни хусусий ечимига қўйиб, бош тебранишни ифодалайдиган иккита формула топилади.

9. Умумлаштирилган координаталарнинг бош тебраниш тенгламаларини қўшиб умумий ечимни топиш керак.

10. Бошланғич тенгламалардан фойдаланиб тўртта номаълум ўзгармаслар топилади.

Иккинчи усул — динамиканинг умумий тенгламасидан ёки динамиканинг умумий теоремаларининг биридан фойдаланиб ечиш усули.

1. Масаланинг шартига қараб қайси йўл билан, яъни динамиканинг асосий тенгламасидан ёки динамиканинг асосий теоремаларидан қайсисига мувофиқ дифференциал тенглама тузиш кераклиги аниқлаб олиниши керак.

2. Танлаб олинган теоремани татбиқ қилиб, система кичик тебранишининг дифференциал тенгламасини тузиш керак.

3. Системанинг хусусий ечимини танлаб олиб, шу хусусий ечимни дифференциал тенгламалар системасига қўйиш керак.

4. Ҳосил бўлган тенгламаларни ечиб, такрорлик тенгламасини топиш керак, ундан кейин системанинг ўз такрорлиги топилади.

5. Топилган такрорликлар қийматини олинган хусусий ечимга қўйиб, бош тебранишлар тенгламасини топиш керак.

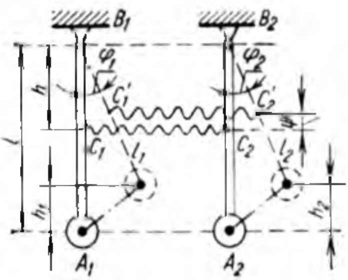
6. Ҳар қайси умумлаштирилган координаталарининг бош тебраниш тенгламаларини қўшиб умумий ечимлари топилади.

7. Ҳаракатнинг бошланғич шартларидан фойдаланиб интеграллаш ўзгармас номаълумлари топилади.

8. Бу параграфга И. В. Мешчерский „Назарий механикадан масалалар тўплами" китобидаги 1219, 1301, 1303, 1304-масалалар киради.

91-§. Масалалар

119-масала. Узунлиги l ва массаси m бўлган иккита бир хил маятник бикрлиги c бўлган, учлари маятник стерженларига маҳкамланган пружина билан h баландликда бирбирига боғланган. Маятниклардан бири мувозанат вазиятидан α бурчакка оғдирилгандан кейин системанинг маятниклар мувозанати текислигида қиладиган кичик тебранишлари аниқлансин; маятникларнинг бошланғич тезлиги нолга тенг. Маятник стерженларининг массалари билан пружина массаси ҳисобга олинмасин (125- шакл).



125- шакл.

Ечиш. Система иккита эркинлик даражасига эга. Унинг ҳолатини иккита умумлаштирилган координаталар билан аниқлаш мумкин.

Маятникларнинг вертикалдан оғиш бурчаклари φ_1 ва φ_2 ларни умумлаштирилган координаталар учун қабул қиламиз ва уларни вертикалдан соат стрелкаси ҳаракатининг акси томонига қараб ҳисоблашни мусбат йўналиш деб оламиз. Мувозанат ҳолатда φ_1 ва φ_2 нолга тенг.

Кичик тебраниш дифференциал тенгламасини тузишда Лагранж тенгламасидан фойдаланамиз. Системанинг кинетик энергияси

$$T = \frac{1}{2} ml^2 (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2) \tag{1}$$

бўлади. Системанинг потенциал энергияси оғирлик кучининг потенциал энергияси билан пружина эластиклик кучининг потенциал энергиясининг йиғиндисидан иборат, яъни

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2, \tag{2}$$

бу ерда

$$\Pi_1 = mgh_1 + mgh_2 = mgl\,[(1 - \cos\varphi_1) + (1 - \cos\varphi_2)]. \tag{3}$$

Кичик миқдорларнинг иккинчи тартиби билан чегаралансак, (3) дан қуйидаги келиб чиқади:

$$\Pi_1 = \frac{1}{2} mgl\,(\varphi_1^2 + \varphi_2^2). \tag{4}$$

Пружинанинг чўзилишини λ билан белгиласак,

$$\Pi_2 = \frac{1}{2} c\lambda^2 \tag{5}$$

бўлади.

λ ни умумлаштирилган координаталар орқали ифодалаш керак; бу вақтда кичик миқдорларнинг биринчи тартибини ҳисобга олинса кифоя, чунки у вақтда Π_2 кичик миқдорларнинг иккинчи тартиби аниқлигида топилади.

125- шаклга биноан

$$\lambda = \overline{C_1'C_2'} - \overline{B_1B_2}. \tag{6}$$

Ёпиқ $B_1C_1'C_2'B_2$ кўпбурчакни ҳосил қилган стерженларнинг вертикал йўналишдаги ва горизонтал йўналишдаги проекцияларини топамиз:

$$C_1'C_2' \sin\psi = h\,(\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1) \doteq \frac{h}{2}\left(\varphi_2^2 - \varphi_1^2\right), \tag{7}$$

$$C_1'C_2' \cos\psi = \overline{B_1B_2} + h\,(\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1) \doteq \overline{B_1B_2} + h(\varphi_2 - \varphi_1). \tag{8}$$

(7) тенгламадан пружина ўқининг айланиш бурчаги умумлаштирилган координаталарга нисбатан иккинчи тартибли кичик миқдор деган хулосага келамиз; шу сабабли $\cos\psi$ булса

бирдан тўртинчи тартибли кичикликда фарқ қилиши мумкин, у вақтда

$$\lambda = \overline{C_1'C_2'} - \overline{B_1 B_2} = h(\varphi_2 - \varphi_1), \tag{9}$$

ва

$$\Pi_2 = \frac{1}{2} h^2 c (\varphi_2 - \varphi_1)^2 \tag{10}$$

бўлади.

Демак,

$$\Pi = \frac{1}{2} \{ mgl(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) + ch^2(\varphi_2 - \varphi_1)^2 \} =$$

$$= \frac{1}{2} \{ (mgl + ch^2)(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) - 2ch^2\varphi_1\varphi_2 \}. \tag{11}$$

Лагранж дифференциал тенгламасини тузишга ўтамиз:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_j} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_j}. \tag{12}$$

Системанинг эркинлик даражаси иккита бўлгани учун бу ерда

$$j = 1,2.$$

Бу ҳолда

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} = ml^2\dot{\varphi}_1, \\ &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1}\right) = ml^2\ddot{\varphi}_1, \\ &\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0, \\ &\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1} = (mgl + ch^2)\varphi_1 - ch^2\varphi_2 \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

бўлгани учун биринчи дифференциал тенглама қуйидагича бўлади:

$$ml^2\ddot{\varphi}_1 = -(mgl + ch^2)\varphi_1 + ch^2\varphi_2. \tag{14}$$

Бу ҳолда

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} = ml^2\dot{\varphi}_2, \\ &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2}\right) = ml_2\ddot{\varphi}_2, \\ &\frac{\partial T}{\partial \varphi_2} = 0, \\ &\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{\varphi}_2} = mlg + ch^2)\varphi_2 - ch^2\varphi_1 \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

бўлгани учун, иккинчи дифференциал тенглама қуйидагича бўлади:

$$ml^2\ddot{\varphi}_2 = -(mlg + ch^2)\varphi_2 + ch^2\varphi_1. \tag{16}$$

Иккита (14), (16) ҳаракат дифференциал тенгламалар системаси топилди.

Бу системаларнинг умумий ечимини топиш мақсадида, коэффициентлари ўзгармас бир жинсли, чизиқли дифференциал тенгламаларнинг хусусий ечимини қуйидаги кўринишда излаймиз:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 &= A \sin(kt + \alpha), \\ \varphi_2 &= B \sin(kt + \alpha). \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Буларни (14) ва (16) га қўйиб, умумий кўпайтувчисига қисқартирсак:

$$\left.\begin{aligned} -Aml^2k^2 + A(mlg + ch^2) - Bch^2 = 0, \\ -Bml^2k^2 + B(mlg + ch^2) - Ach^2 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

келиб чиқади. Бу иккита тенгламада учта (A, B, k) номаълум. Улардан амплитудаларнинг нисбати топилади; тенгламанинг биринчисидан:

$$\frac{B}{A} = \frac{mlg + ch^2 - ml^2k^2}{ch^2}, \tag{19}$$

тенгламанинг иккинчисидан:

$$\frac{B}{A} = \frac{ch^2}{mlg + ch^2 - ml^2k^2}. \tag{20}$$

Бу (19) ва (20) ларнинг ўнг томонларини тенглаштириб, такрорлик тенгламасини топамиз.

$$\frac{mlg + ch^2 - ml^2k^2}{ch^2} = \frac{ch^2}{mlg + ch^2 - ml^2k^2}, \tag{21}$$

бундан:

$$(mlg + ch^2 - ml^2k^2)^2 = c^2h^4.$$

ёки

$$mlg + ch^2 - ml^2k^2 = \pm ch^2. \tag{22}$$

Бу тенгламадан бош тебранишлар такрорлигининг квадратлари қуйидагича бўлади:

$$k_1^2 = \frac{g}{l}; \quad k_2^2 = \frac{g}{l} + \frac{2ch^2}{ml^2}. \tag{23}$$

Энди биринчи ва иккинчи бош тебранишлардан β_1 ва β_2 коэффициентларини, яъни амплитудаларининг нисбатларини топамиз, бунинг учун (23) дан k_1^2 ва k_2^2 ларнинг қийматини (19) ва (20) га олиб қўйсак, қуйидаги келиб чиқади:

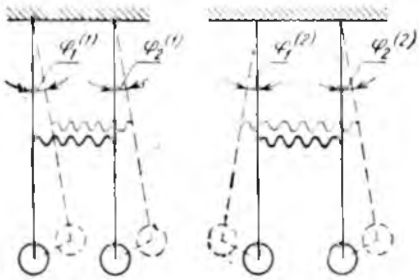
$$\left.\begin{aligned} \beta_1 &= +1, \\ \beta_2 &= -1. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Шу сабабли биринчи бош тебранишда (паст такрорлик) $\varphi_1^{(1)} = \varphi_2^{(1)}$; $k_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ ҳамда иккинчи бош тебранишда (юқори такрорлик)

$$\varphi_1^{(2)} = -\varphi_2^{(2)};\ k_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2ch^2}{ml^2}}$$

бўлади.

Бош тебранишларнинг турлари 126- шаклда кўрсатилган.



$\varphi_1^{(1)} = \varphi_2^{(1)}$ $\varphi_1^{(2)} = -\varphi_2^{(2)}$

126- шакл

Биринчи бош тебранишларнинг такрорлиги маятниклар орасида боғланиш бўлган ҳолдаги ҳар қайси маятникнинг тебраниш такрорлигига тенг. Бу албатта шундай бўлиши керак, чунки $\varphi_1 = \varphi_2$ бўлганда пружина чўзилмайди, демак, системанинг ҳаракатига ҳеч қандай таъсир кўрсатмайди.

Иккинчи бош тебранишнинг такрорлиги эса бир учи ўртага қузғалмас бириктирилган иккинчи учи маятникнинг осилиш ўқидан h масофасига бириктирилган ва бикрлик коэффициенти $2c$ бўлган пружинали битта маятникнинг мувозанат ҳолатига қайтишидаги такрорлигига мос бўлади. Пружина бикрлиги иккилангани учун пружинанинг чўзилиши ҳам унинг чўзилишидан икки марта кичик бўлади.

(14) ва (16) тенгламалар системаси чизиқли бўлгани учун умумий интегралининг такрорликлари, амплитудалари ва бошланғич фазалари ҳар хил бўлган (17) хусусий ечимнинг йиғиндисидан иборат деб топиш мумкин:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 &= A_1 \sin(k_1 t + \alpha_1) + A_2 \sin(k_2 t + \alpha_2), \\ \varphi_2 &= B_1 \sin(k_1 t + \alpha_1) + B_2 \sin(k_2 t + \alpha_2), \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

бунда системанинг биринчи бош тебраниши:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 &= A_1 \sin(k_1 t + \alpha_1), \\ \varphi_2 &= B_1 \sin(k_1 t + \alpha_1). \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Иккинчи бош тебраниши:

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1 &= A_2 \sin(k_2 t + \alpha_2),\\ \varphi_2 &= B_2 \sin(k_2 t + \alpha_2)\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

ларни чизади.

Иккинчидан (19) га $k = k_1$ ни қўйиб биринчи гармоник амплитудаларининг нисбати топилади:

$$\frac{B_1}{A_1} = \frac{mlg + ch^2 - ml^2k^2}{ch^2} \equiv \beta_1 = +1. \tag{28}$$

Худди шунингдек, иккинчи гармоник амплитудаларининг нисбати ҳам топилади:

$$\frac{B_2}{A_2} = \frac{mgl + ch^2 - ml^2k^2}{ch^2} \equiv \beta_2 = -1. \tag{29}$$

Демак, умумий ечим қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1 &= A_1 \sin(k_1 t + \alpha_1) + A_2 \sin(k_2 t + \alpha_2),\\ \varphi_2 &= A_1 \sin(k_1 t + \alpha_1) + A_2 \sin(k_2 t + \alpha_2).\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Ҳаракатнинг бошланғич шартларидан фойдаланиб номаълум ўзгармас A_1, A_2, α_1, α_2 лар топилади.

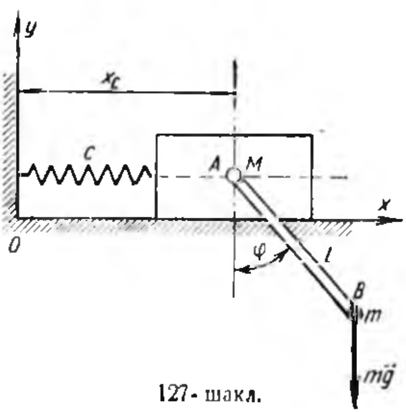
Масалан, бошланғич пайтда иккинчи маятник вертикал бўлганда биринчи маятник ўз вазиятидан φ_0 бурчакка оғган бўлсин. У вақтда $t = 0$, бўлганда $\varphi_1 = \varphi_0$, $\varphi_2 = 0$, $\dot\varphi_1 = \dot\varphi_2 = 0$ бўлади. Буларни қўйиб ҳисоблагандан кейин:

$$\varphi_1 = \frac{\varphi_0}{2}(\cos k_1 t + \cos k_2 t) = \varphi_0 \cos\frac{k_1 - k_2}{2}\, t \cos\frac{k_1 + k_2}{2}\, t,$$

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_0}{2}(\cos k_1 t - \cos k_2 t) = \varphi_0 \sin\frac{k_2 - k_1}{2}\, t \cdot \sin\frac{k_2 + k_1}{2}\, t$$

келиб чиқади. Ҳаракат дифференциал тенгламасини бошқа усул билан, яъни динамиканинг асосий тенгламасидан фойдаланиб тузиш ҳам мумкин.

120- масала. Маятник горизонтал текисликда ишқаланмай сирғанувчи M массали ползундан ва m массали шарчадан иборат; шарча ползун билан боғланган ўқ атрофида айлана оладиган стержень орқали ползунга қўшилган. Ползунга бир учи қўзғалмас қилиб маҳкамланган ва бикрлиги c бўлган пружина боғланган. Система кичик тебранишларининг такрорлиги аниқлансин (127- шакл).



127- шакл.

Ечиш. Ox ўқини горизонтал, Oy ўқини вертикал юқорига йўналтирамиз.

Маятник эркинлик даражаси иккита бўлган системадир. Маятникнинг вазияти иккита $q_1 = x_c$, $q_2 = \varphi$ умумлаштирилган координаталар билан аниқланади. Бу ерда x_c эса A ползуннинг инерция марказининг абсциссаси; φ — маятникнинг айланиш бурчаги. Системадаги актив кучлар ползуннинг оғирлик кучи ва маятникнинг оғирлик кучидан иборат.

Системанинг потенциал энергияси қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\Pi = mlg\,(1 - \cos\varphi) + \frac{cx_c^2}{2}. \qquad (1)$$

Кинетик энергияси эса

$$T = \frac{M\dot{x}_c^2}{2} + m\,\frac{\dot{x}_c^2 + l\dot{\varphi}^2}{2} \qquad (2)$$

бўлади.

Қуйидагиларни топамиз:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_c} = (M + m)\,\dot{x}_c;\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = ml\dot{\varphi};\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_c}\right) = (M + m)\ddot{x}_c, \qquad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_c} = \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0;\quad \frac{\partial \Pi}{\partial x_c} = cx_c;\quad \frac{\partial T}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = ml\ddot{\varphi}.$$

(3) ифодани Лагранж тенгламасига қўйиб, соддалаштирсак, қуйидаги келиб чиқади:

$$M\ddot{x}_c + m\,(\ddot{x}_c + l\ddot{\varphi}) + cx_c = 0, \qquad (4)$$

$$ml\,(\ddot{x}_c + l\ddot{\varphi}) + mlg\varphi = 0. \qquad (5)$$

Бу (4) ва (5) тенгламалардан $\ddot{x}_c$, $\ddot{\varphi}$ ларни чиқарсак, қуйидагича бўлади:

$$\begin{vmatrix} -k^2(M + m) + c & -mlk^2 \\ -k^2ml & -ml^2k^2 + mlg \end{vmatrix} = 0, \qquad (6)$$

бундан:

$$Mml^2k^4 - (Mmlg + m^2lg + ml^2c)k^2 + mlgc = 0$$

ёки

$$k^4 - \left|\frac{g}{l}\,\frac{M + m}{M} + \frac{c}{M}\right| k^2 + \frac{gc}{Ml} = 0. \qquad (7)$$

Изланган такрорликлар (7) тенгламанинг илдизларидир.

92-§. Эркинлик даражаси битта ёки иккита бўлган ва синусоидал уйғотувчи куч таъсиридаги системанинг мажбурий тебраниши

Система тебраниб турганида унга ҳамма вақт уйғотувчи куч таъсир қилиб турса, ундан ҳосил бўлган мажбурий тебраниш билан эркин тебранишлардан иборат бўлган мураккаб тебраниш ҳосил бўлади. Системанинг ҳаракат дифференциал тенгламасини қуйидаги Лагранж тенгламасидан фойдаланиб тузиш мумкин:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + Qi(t), \qquad (92{,}1)$$

бунда q_i — системанинг умумлаштирилган координаталари;
T — системанинг кинетик энергияси;
Π — системанинг потенциал энергияси;
$Q_i(t)$ — уйғотувчи куч. Системанинг эркинлик даражаси битта бўлса, $i = 1$, системанинг эркинлик даражаси иккита бўлса, $i = 1{,}2$ булади. Системанинг эркинлик даражаси иккита бўлган ҳолда T ва Π ларни (92,1) га қўйганда қуйидаги дифференциал тенгламалар системаси келиб чиқади:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 = H_1 \sin(pt + \delta), \\ a_{21}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + c_{21}q_1 + c_{22}q_2 = H_2 \sin(pt + \delta). \end{aligned}\right\} \qquad (92{,}2)$$

Бунда уйғотувчи куч $Q_i(t)$ ни синусоида қонуни билан ўзгарадиган қилиб олинган:

$$\left.\begin{aligned} Q_1(t) = H_1 \sin(pt + \delta) \\ Q_2(t) = H_2 \sin(pt + \delta). \end{aligned}\right\} \qquad (92{,}3)$$

(92,2) дифференциал тенгламалар системасининг умумий ечими бир жинсли тенгламалар системасининг умумий ечими билан дифференциал тенгламалар системасининг хусусий ечимининг йиғиндисидан иборат. Бир жинсли системанинг умумий ечими юқорида текширилган эркин тебранишга келади ва шу бобдаги 86 ва 89-§ ларга мувофиқ топилади.

Шу сабабли системанинг мажбурий тебранишини ифодалайдиган тенгламалар системасининг хусусий ечимини топишга ўтамиз.

Хусусий ечимини қуйидаги кўринишда излаймиз:

$$q_1 = B_1 \sin(pt + \delta); \quad q_2 = B_2 \sin(pt + \delta). \qquad (92{,}4)$$

Буларни (92,2) га қўйсак, қуйидаги алгебраик тенгламалар системаси келиб чиқади:

$$\begin{aligned} (c_{11} - p^2 a_{11}) B_1 + (c_{12} - p^2 a_{12}) B_2 = H_1. \\ (c_{21} - p^2 a_{21}) B_1 + (c_{22} - p^2 a_{22}) B_2 = H_2. \end{aligned} \qquad (92{,}5)$$

Булардан номаълум B_1 ва B_2 лар топилади. Бу системанинг детерминанти нолга тенг бўлади:

$$(c_{11} - p^2 a_{11})(c_{22} - p^2 a_{22}) - (c_{12} - p^2 a_{12})^2 = 0. \qquad (92{,}6)$$

$p = k_1$ ёки $p = k_2$ бўлганда резонанс ҳодисаси бўлади. Бу ҳолда системанинг хусусий ечимини (92,4) формула билан топиб бўлмайди.

Системанинг ҳаракат дифференциал тенгламасини динамиканинг асосий тенгламасидан ёки динамиканинг асосий теоремаларнинг биридан фойдаланиб тузиш ҳам мумкин.

93-§. Масалалар ечишга оид методик кўрсатмалар

Мажбурий тебранишни топишга оид масалаларни қуйидаги тартибда ечиш тавсия этилади.

Биринчи усул — Лагранж тенгламасидан фойдаланиш усули.

1. Умумлаштирилган координаталарни танлаб олиб, системанинг кинетик ва потенциал энергияларининг ифодаларини тузиб олиш керак.

2. Умумлаштирилган кучларни топиб олиш керак.

3. Кинетик энергия, потенциал энергияларни ва умумлаштирилган кучлар қийматларини Лагранж тенгламасига қўйиб, системанинг ҳаракат дифференциал тенгламаларини топиш керак.

4. Дифференциал тенгламаларининг хусусий ечимини излаш керак ва умумлаштирилган координаталарнинг амплитудаларини топиш керак.

5. Амплитуда ифодасидаги махражни нолга тенглаштириб, резонанс ҳодисаси бўладиган ҳолат учун уйғотувчи кучнинг такрорлиги топилади.

Иккинчи усул — динамиканинг асосий тенгламасидан ёки динамиканинг асосий теоремаларининг биридан фойдаланиш усули.

Умумлаштирилган координаталар танлаб олингандан кейин динамиканинг асосий тенгламасига ёки танлаб олинган динамиканинг асосий теоремасига асосан системанинг ҳаракат дифференциал тенгламалари тузилади. Кейинги амаллар худди биринчи усулдагидек бажарилади.

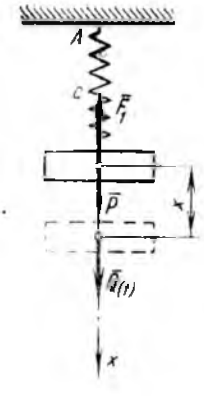
6. Бу параграфга И. В. Мещерский „Назарий механикадан масалалар тўплами" китобидаги 1290, 1329, 1330, 1331, 1340; 1341 -масалалар киради.

94-§. Масалалар

121- масала. Бикрлиги c бўлган пружинага осилган P оғирликдаги юкка $Q(t) = F \cdot |\sin \omega t|$ қонунига мувофиқ ўзгарувчи куч таъсир қилади. Системанинг такрорлиги ўзгарувчи куч такрорлигига тенг бўлган тебранишлари аниқлансин (128- шакл).

Ечиш. Юкнинг мувозанат ҳолатини ҳисоблаш боши деб олиб, Ax ўқини вертикал бўйича пастга йўналтирамиз. Системанинг эркинлик даражаси битта.

Юкнинг мувозанат ҳолатидан оғиши x ни умумлаштирилган координата учун қабул қиламиз. Юкка иккита куч: пружинанинг эластик кучи $F_1 = -cx$ (1) ва уйғотувчи



128- шакл.

куч $Q(t) = F \cdot |\sin \omega t|$ (2) лар таъсир қилади. Юкнинг ҳаракат дифференциал тенгламасини тузамиз:

$$\frac{P}{g}\ddot{x} + cx = F \cdot |\sin \omega t| \tag{3}$$

ёки

$$\ddot{x} + \frac{cg}{P}x = \frac{Fg}{P} \cdot |\sin \omega t|. \tag{4}$$

Содда бўлиш учун

$\frac{cg}{p} = k^2$; $\frac{fg}{P} = h$ деб белгилаймиз,

у вақтда

$$\ddot{x} + k^2x = h \cdot |\sin \omega t|. \tag{5}$$

Хусусий ечимни қуйидаги кўринишда излаймиз:

$$x = B \sin \omega t, \tag{6}$$

буни (6) га қуйиб, бир оз соддалаштирсак

$$B(k^2 - \omega^2) = h \tag{7}$$

бўлади.

Бундан:

$$B = \frac{h}{k^2 - \omega^2}. \tag{8}$$

Мажбурий тебраниш эса қуйидагича бўлади:

$$x = \frac{fg}{P(k^2 - \omega^2)} \sin \omega t. \tag{9}$$

Бир жинсли $\ddot{x} + k^2x = 0$ (10) тенгламанинг ечими маълум. У қуйидаги кўринишда бўлади:

$$x_1 = a \sin kt = c_1 \cos kt + c_2 \sin kt. \tag{11}$$

Демак, (5) тенгламанинг умумий ечими

$$x = c_1 \cos kt + c_2 \sin kt + \frac{Fg}{F(k^2 - \omega^2)} \sin \omega t \tag{12}$$

булади, бунда $k = \sqrt{\frac{cg}{P}}$.

Интеграл ўзгармаслари c_1 ва c_2 ларни бошлангич шартлар $t = 0$ бўлганда $x(0) = x\left(\frac{\pi}{\omega}\right) = 0$, $x = 0$ дан фойдаланиб топамиз: у вақтда

$$c_2k + \frac{fg}{P(k^1 - \omega^2)} = 0, \tag{13}$$

бундан:

$$c_2 = \frac{Fg\omega}{Pk(\omega^2 - k^2)},$$

$$c_1 = c_1 \cos\frac{k\pi}{\omega} + c_2 \sin\frac{k\pi}{\omega},$$

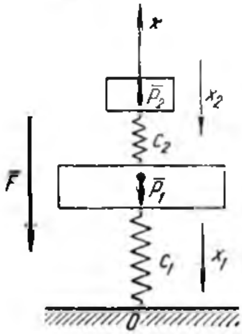
бундан:

$$c_1 = c_2 \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{2\omega}, \tag{14}$$

буларни $0 < t < \frac{\pi}{\omega}$ да (12) га қуйсак, қуйидаги келиб чиқади:

$$x = \frac{Fg\omega}{kP(\omega^2 - k^2)} \left| \sin kt + \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{2\omega} \cdot \cos kt \right| - \frac{Fg}{P(\omega^2 - k^2)} \sin \omega t.$$

122- масала. Эластик грунтга ўрнатилган $P_1 = 100$ *т* оғирликдаги машина пойдевори $F = 10 \sin \omega t$ қонуни билан ўзгарувчи вертикал куч таъсири остида мажбурий равишда вертикал бўйлаб тебранади. Машина вали $\omega = 100 \frac{1}{сек}$ бурчак тезлик билан айланганда ҳосил бўладиган резонанс тебранишларини йўқотиш учун пойдеворга эластик пружиналарда оғир рам шаклидаги сўндирувчи ўрнатилган (129 шаклга қаралсин). Рам оғирлиги P_2 ва сўндирувчи пружиналарнинг шундай умумий бикрлиги c_2 топилсинки, бунда пойдеворнинг юқорида курсатилган тезликдаги тебранишларининг амплитудаси нолга айлансин, сўндирувчининг тебраниш амплитудаси эса $A_2 = 2$ *мм* дан ошмасин (129- шакл).



129- шакл.

Ечиш. Юкнинг мувозанат ҳолатини ҳисоблаш боши деб оламиз (129 шакл). Системанинг иккита эркинлик даражаси бор.

Биринчи юкнинг (пойдеворнинг) мувозанат ҳолатидан оғиши x_1 ва иккинчи юкнинг (рамнинг) мувозанат ҳолатидан силжиши x_2 ларни умумлаштирилган координаталар учун қабул қиламиз.

Бу вақтда биринчи юкка учта куч: юқоридаги пружинанинг эластиклик кучи $F_2 = c_2(x_2 - x_1)$ (1) пастки пружинанинг эластиклик кучи $F_1 = -c_1 x_1$ (2) ва уйғотувчи куч $F = 10 \sin \omega t$ (3) лар таъсир қилади. Иккинчи юкка эса битта пастки пружинанинг эластиклик кучи $F_3 = -c_2(x_2 - x_1)$ (4) таъсир қилади.

Юкларнинг ҳаракат дифференциал тенгламаларини тузамиз;

$$\frac{P_1}{g} \ddot{x}_1 = -c_1 x_1 + c_2(x_2 - x_1) - 10 \sin \omega t, \tag{5}$$

$$\frac{P_2}{g} \ddot{x}_2 = -c_2(x_2 - x_1). \tag{6}$$

Мажбурий тебранишни ифодалайдиган бу системанинг хусусий ечимларини қуйидаги кўринишда излаймиз:

$$x_1 = A_1 \sin \omega t, \quad x_2 = A_2 \sin \omega t. \tag{7}$$

Бу (7) ни (5) ва (6) га қўйсак, қуйидаги келиб чиқади:

$$\left.\begin{aligned} \left(c_1+c_2-\frac{P_1}{g}\omega^2\right)A_1+c_2A_2=10,\\ -c_2A_1+\left(c_2-\frac{P_2}{g}\omega^2\right)A_2=0. \end{aligned}\right| \tag{8}$$

Бу тенгламалардан мажбурий тебранишларининг амплитудаларини топамиз:

$$A_1=\frac{10\left(c_2-\frac{P_2}{g}\omega^2\right)}{\left(c_1+c_2-\frac{P_1}{g}\omega^2\right)\left(c_2-\frac{P_2}{g}\omega^2\right)-c_2^2}, \tag{9}$$

$$A_2=\frac{10c_2}{\left(c_1+c_2-\frac{P_1}{g}\omega^2\right)\left(c_2-\frac{P_2}{g}\omega^2\right)-c_2^2}. \tag{10}$$

Агар иккинчи пружинанинг бикрлик коэффициенти c_2 ва оғирлик P_2 ни

$$c_2-\frac{P_2}{g}\omega^2=0 \tag{11}$$

деб олсак, (9) га мувофиқ биринчи юкнинг мажбурий тебранишининг амплитудаси нолга тенг бўлади, бундан:

$$P_2=\frac{c_2g}{\omega^2}. \tag{12}$$

(12) ни назарга олиб (10) дан c_2 ни топамиз, $A_2=0{,}2$ *см* бўлганлиги учун:

$$-0{,}2=\frac{10c_2}{c_2^2}. \tag{13}$$

бундан:

$$c_2=\frac{10}{0{,}2}=50\ \frac{m}{см}\quad \text{ёки}\quad c_2=5000\,\frac{m}{м}. \tag{14}$$

Топилган c_2 нинг қийматини (12) га қўйсак:

$$P_2=\frac{10\cdot 981}{0{,}2\cdot 10^4}=4{,}9\ m. \tag{15}$$

Шундай қилиб, уйғотувчи кучнинг такрорлиги ω берилганда биринчи юкнинг мажбурий тебранишини сўндирадиган (йўқ қиладиган) қўшимча пружинанинг бикрлик коэффициентини ва иккинчи юкнинг оғирлигини топиш мумкин. Бунда резонанс ҳодисаси бўлишидан сақланиш керак, резонанс ҳодисаси (9) ва (10) нинг махражи нолга тенг, яъни

$$\left(c_1+c_2-\frac{P_1}{g}\omega^2\right)\left(c_2-\frac{P_2}{g}\omega^2\right)-c_2^2=0$$

бўлганда ҳосил бўлади.

XVI боб

Кеплерик ҳаракат (марказий куч таъсиридаги ҳаракат)

95-§. Асосий тушунчалар

Космик фазони тадқиқ қилишда назарий механика қонуниятларидан амалий фойдаланилади.

Учиш масофаси ўн ва юз миллион километр бўлган космик траекторияларни аниқ ҳисоблаш, космик учишларни Ердан бошқариб туриш, космик кемалар лойиҳаларини ва жиҳозларни тайёрлаш ва бошқалар назарий механикада ишлаб чиқилган усулларга асосланади.

Эркин (баллистик) учишлар назарияси осмон механикаси соҳасидаги Ньютон — Кеплер қонунларига асосланган. Кеплернинг асосий учта қонунлари қуйидагича таърифланади:

1- қонун. Ҳар қайси сайёранинг (орбитани) ҳаракатланиш орбитаси эллипсдан иборат, бу эллипс фокусларидан бирида Қуёш турган бўлиб, Қуёшга нисбатан қўзғалмас текисликда ётади.

2- қонун. Қуёшдан сайёрагача ўтган тўғри чизиқ (сайёра радиус-вектори) тенг вақтларда тенг юзалар чизади.

3- қонун. Сайёранинг Қуёш атрофида айланиш даврлари квадратларининг нисбати орбиталари катта ярим ўқлари кубларининг нисбатига тенг:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}. \qquad (95,1)$$

Кеплернинг қонунларида сайёрани ҳаракатлантирувчи кўп факторлар ҳисобга олинмайди; шундай факторлардан бири сайёраларнинг бир-бирини тортиш кучларидир.

Ер сунъий йўлдошининг ҳаракатига: Ернинг сферик эмаслиги, унинг тортиш кучи, Ер атмосферасининг қаршилик кучи ва бошқалар таъсир қилади.

Сунъий йўлдошларнинг траекторияларини ва ҳаракат қонунларини аниқ ҳисоблаш учун шунга ўхшаш барча факторларни ҳисобга олиш керак.

Ер атмосферасидан ташқарида, бироқ Ер сатҳига деярли яқин ҳаракат қилаётган жисмга бошқа осмон жисмларининг гравитацион кучлари таъсир қилмайди, жисмга бутун дунё тортишиш қонунига мувофиқ фақат $\bar{F} = \frac{mgR^2}{r^2} \cdot \frac{\bar{r}}{r}$ куч таъсир қилади деб қараш мумкин. Бу вақтда марказий куч таъсирида ҳаракат қилаётган нуқтанинг ҳаракат дифференциал тенгламаси қуйидагича бўлади:

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{1}{p}, \qquad (95,2)$$

бунда:

$$p = \frac{4c^2}{gR^2} = \text{const}.$$

Бу (95,2) тенгламанинг умумий ечими

$$u = \frac{1}{p} + a\cos(\varphi - \varepsilon) \qquad (95,3)$$

булади.

Бунда a ва ε — интеграл узгармаслари $u = \frac{1}{r}$ деб фараз қилиб (95,3) ни қуйидагича ёзамиз:

$$r = \frac{\overline{P}}{1 + e\cos(\varphi - \varepsilon)}. \qquad (95,4)$$

Бунда $e = aP$ — узгармас миқдор, P — фокал параметр, e — кониник эксцентрик қирқим юзаси.

(95,4) тенглама билан Ньютон кучи таъсирида ҳаракат қилаётган материал нуқтанинг траекторияси аниқланади. Бу ҳаракатга баллистик ҳаракат дейилади. (e, $\overline{P}$) миқдорлар ҳаракатнинг турини ва унинг текисликдаги улчамларини аниқлайди. Агар $e < 1$ булганда $v_0 < \sqrt{\frac{2gR^2}{r_0}}$ булса, траектория эллипс булади.

$e = 0$ булган хусусий ҳолда траекторияси айлана булади. Бу ҳолда бошлангич тезлиги

$$v_1 = v_0 = \sqrt{\frac{gR^2}{r_0}}$$

булади ва доиравий тезлик дейилади. Доиравий тезликнинг Ерга яқин ($r_0 = R$) қиймати биринчи космик тезлик

$$v_1 = \sqrt{gR} = 7{,}9 \text{ км/сек}$$

булади.

Агар $e = 1$ булганда $v_0 = \sqrt{\frac{2gR^2}{r_0}}$ булса, траектория парабола ва тезлик параболик тезлик дейилади. Агар бошлангич тезлик Ерга яқин жойда берилган булса, параболик тезлик

$$v_2 = \sqrt{2gR} = 11{,}2 \text{ км/сек}$$

булади ва иккинчи космик тезлик дейилади. Бундай бошлангич тезлик берилганда нуқта Ердан чексиз узоқлашган булади.

Агар $e > 1$ булганда $v_0 > \sqrt{\frac{2gR^2}{r_0}}$ булса, траектория гипербола булади. Гиперболик тезлик 16,7 *км/сек* булганда материал нуқта Қуёш системасидан чиқиб кетади.

Материал нуқта Ер сатҳидан энг узоқда булганидаги масофа

$$h_{\max} = \frac{P}{1 - e} - R \qquad (95,5)$$

формула бўйича ҳисобланади. Траекториянинг шу нуқтасига апогей дейилади.

Энг қисқа масофа

$$h_{min} = \frac{P}{1+e} - R \tag{95,6}$$

формула бўйича ҳисобланади. Траекториянинг шу нуқтасига перигей дейилади.

Эллиптик орбита бўйича ҳаракат қилаётган нуқтанинг даври

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{gR^2}} \tag{95,7}$$

формула бўйича топилади.
Бунда a — эллипснинг катта ярим ўқи.

Бу бобга И. В. Мешчерский „Назарий механикадан масалалар тўплами" китобидаги 50.1 — 51.12-масалалар киради.

96-§. Масалалар

123-масала. Ер сунъий йўлдоши ер сатҳидан h баландликда доиравий орбитада ҳаракат қилади. Йўлдошнинг параболик орбитага ўтиши учун қандай қўшимча тезлик бериш кераклиги топилсин.

Ечиш.

Ер сунъий йўлдоши ер атрофида h баландликда айлана бўйлаб ҳаракат қилаётгани учун унинг доиравий тезлиги

$$v_1 = \sqrt{\frac{gR^2}{R+h}}$$

бўлади.

Ердан h баландликдаги йўлдош параболик орбитага ўтиши учун, у $v_2 = \sqrt{\frac{2gR^2}{R+h}}$ тезлик олиши керак.

Демак, йўлдошга қўшимча

$$v_к = v_2 - v_1 = \sqrt{\frac{gR^2}{R+h}}\,(\sqrt{2} - 1)$$

тезлик бериш керак.

Фараз қилайлик, $h = 200$ *км* $= 2 \cdot 10^5$ *м*, Ер радиуси $R = 6{,}37 \cdot 10^6$ *м*, $g = 9{,}81$ *м/сек* бўлсин.

У вақтда $v_к = 3219$ *м/сек* бўлади.

124-масала. Ер йўлдошининг айланиш даври Ернинг ўз ўқи атрофида айланиш даврига (24 соатга) тенг бўлиши учун, уни Ер сатҳидан қандай h баландликка учириш керак?

Ечиш. Айланиш даври $T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{gR^2}}$ формуладан топилади:

$$a^3 = \frac{T^2 gR^2}{4\pi^2}.$$

Орбита айлана бўлгани учун

$$a = R + h.$$

Демак:

$$h = \sqrt[3]{\frac{T^2 g R^2}{4\pi^2}} - R.$$

Бунга: $g = 9{,}81$ *м/сек*, $R = 6{,}37 \cdot 10^6$ *м*,
$T = 8{,}61 \cdot 10^4$ *сек* қўйсак,
$h \approx 35630$ *км* бўлади.

Бирликларнинг системалари. Назарий механикада механикавий-физикавий миқдорларни ўлчашда уч хил ўлчов системасидан: 1) абсолют (физикавий) (СГС) система, 2) техникавий (МКГСС) система ва 3) СССРда 1963 йил 1 январда жорий қилинган бирликларнинг халқаро (СИ) системасидан фойдаланилади.

Бу кейинги икки системанинг бир-биридан асосий фарқи шундаки, техникавий (МКГСС) системада механик бирлик учун асосий қилиб куч бирлиги, халқаро (СИ) системада эса масса бирлиги олинган.

Бу учта системани кўриб чиқамиз.

СГС — абсолют система. Абсолют системада асосий бирликлар: узунлик учун сантиметр (*см*), масса учун грамм (*г*), вақт учун секунд (*сек*) олинади. Бу системада куч бирлиги динамиканинг иккинчи $F = mw$ қонунидан топилади. Бу формулага $m = 1$ *г*, $w = 1\ \frac{см}{сек^2}$ қўйсак, куч бирлиги

$$1 \text{ куч бирлиги} = 1\ г \cdot 1\ \frac{см}{сек^2} = 1\ \frac{г \cdot см}{сек^2}.$$

Бу куч бирлигига *дина* дейилади. Демак, 1 *г* массали материал нуқтага $1\ \frac{см}{сек^2}$ тезланиш берадиган куч *дина* (*дн*) деб аталади.

Куч бирлиги *дина* (*дн*) нинг ўлчамлиги қуйидагича бўлади:

$$[F] = [m] \cdot [w] = см \cdot г \cdot сек^{-2}.$$

МКГСС — техникавий система. Техникавий системада узунлик учун метр (*м*), куч учун килограмм-куч (*кГ-к*), вақт учун секунд (*сек*) олинади. 1 *кг* массали материал нуқтага 1 килограмм куч таъсир қилганда у эркин тушаётган жисмнинг тезланишига (9,81 *м/сек*^{2}) тенг тезланиш олади.

Бу техникавий системада масса бирлиги динамиканинг иккинчи $m = \frac{F}{w}$ қонунидан топилади, яъни:

$$F = 1\ кГ, \quad w = 1\ м/сек^2 \text{ қўйсак,}$$

$$1 \text{ масса бирлиги} = \frac{1\ кГ}{1\ м/сек^2} = 1\ \frac{кГ \cdot сек^2}{м}.$$

Бу масса бирлиги техникавий масса бирлиги (т. м. б.) дейилади.

Демак, 1 *кГ* куч таъсирида 1 *м/сек*^{2} тезланиш оладиган материал нуқтанинг массаси техникавий масса бирлиги бўлади. Техникавий масса бирлиги ўлчами қуйидагича:

$$[m] = \frac{[F]}{[w]} = м^{-1} \cdot кГ \cdot сек^2.$$

СИ — халқаро система. Халқаро системада асосий бирликлар: узунлик учун метр (*м*), вақт учун секунд (*сек*) ва масса учун килограмм (*кг*) олинади.

СИ системада куч бирлиги динамиканинг иккинчи қонунидан топилади. Бу формулага $m = 1$ *кг*, $w = 1$ *м/сек*^{2} қўйсак:

1 куч бирлиги $= 1\ кг \cdot 1\ м/сек^2 = 1\ \frac{кг \cdot м}{сек^2}$, бу куч бирлиги ньютон (*н*) дейилади. Демак, **1 *кг* массали материал нуқтага 1 $\frac{м}{сек^2}$ тезланиш берадиган куч ньютон** (*н*) га тенг. Ньютон (*н*) куч бирлиги қуйидагича:

$$[F] = [m] \cdot [w] = кг \cdot м \cdot сек^2 = м \cdot кг \cdot сек^{-2}.$$

Ньютон (*н*) билан дина (*дн*) орасидаги муносабат:

$$1\ н = 10^5\ дн,$$
$$1\ дн = 10^{-5}\ н.$$

Килограмм (*кГ*) билан ньютон (*н*) орасидаги муносабат:

$$1\ кГ = 9{,}81\ н,$$
$$1\ н = 0{,}102\ кГ.$$

Техникавий бирлик (т. м. б.) билан килограмм (*кг*) орасидаги муносабат:

$$1\ т.\ м.\ б. = 9{,}81\ кг,$$
$$1\ кг = 0{,}102\ т.\ м.\ б.$$

кГм (иш) билан жоуль (*ж*) орасидаги муносабат:

$$1\ ж = 0{,}102\ кГм,$$
$$1\ кГм = 9{,}81\ ж.$$

кГм/сек (қувват) билан *ватт* (*вт*) орасидаги муносабат:

$$1\ вт = 0{,}102\ \frac{кГм}{сек} = 0{,}00136\ \text{от кучи},$$
$$1\ \frac{кГм}{сек} = 9{,}81\ вт,$$
$$1\ \text{от кучи} = 735{,}5\ вт.$$

1. **Ҳаракат миқдорининг бирлиги** — СГС техникавий системада **секундда** грамм $\times$ сантиметр $\left(\frac{г \cdot см}{сек}\right)$, МКГСС система-

да секундда килограмм-куч (*кГ/сек*) ва СИ системада секундда килограмм метр (*кг·м/сек*) билан ўлчанади.

2. **Ҳаракат миқдор моментининг бирлиги** — СГС системада секундда грамм × квадрат сантиметр (*г·см²/сек*), МКГСС системада куч килограмм-куч метр-секунд (*кГ·к·м·сек*), СИ системада секундда килограмм × квадрат метр (*кг·м²/сек*).

3. **Инерция моментининг бирлиги** — СГС системада грамм × квадрат сантиметр (*г·см²*) ёки дина-сантиметр квадрат-секунд (*дн·см × сек²*), МКГСС системада килограмм-куч метрда квадрат-секундда (*кГ·м·сек²*), СИ системада килограмм-куч квадрат метрда (*кГ·м²*).

4. **Куч импульсининг бирлиги** — СГС системада дина-секунд (*дн·сек*), МКГСС системада килограмм-куч-секундда (*кГ/сек*), СИ системада ньютон-секунд (*н·сек*).

5. **Куч моментининг бирлиги** — СГС системада дина × сантиметр (*дн·см*), МКГСС системада килограмм-куч метрда (*кГм*) ва СИ системада ньютон × метр (*н·м*).

6. Кинетик энергиянинг бирлиги — СГС системада дина × сантиметр (*дн·см*) ёки (*эрг*), МКГСС системада куч-килограмм-метрда (*кГ·м*) ва СИ системада секунд квадратда килограмм квадрат-метр (*жоуль*).

АДАБИЁТ

1. Т. Б. Айзенберг, И. М. Воронков, В. М. Осецкий, Руководство к решению задач по теоретической механике „Высшая школа", М. 1965.

2. М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон, Теоретическая механика в примерах и задачах, т. 2., М., 1951.

3. Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин, Курс теоретической механики, т. 2., „Наука", М., 1971.

4. Н. Н. Бухгольц, И. М. Воронков, А. П. Минаков, Сборник задач по теоретической механике, Гостехтеоретиздат, М., 1949.

5. Н. А. Бражниченко, В. Л. Кан, Б. Л. Минцберг, В. И. Морозов, Г. Н. Ушакова, Сборник задач по теоретической механике, „Высшая школа",, М. 1974.

6. И. М. Воронков, Курс теоретической механики, Гостехтеоретиздат, М., 1957.

7. М. М. Гернет, Курс теоретической механики, „Высшая школа", М., 1965.

8. В. В. Добронравов, Н. Н. Никитин, А. Л. Дворников, Курс теоретической механики, „Высшая школа" М., 1966.

9. М. М. Кабальский, В. Д. Кривошей, Н. И. Савицкий, Г. Н. Чайковский, Типовые задачи по теоретической механике и методы их решения, К. 1956.

10. Л. Г. Лойцянский и А. И. Лурье, Курс теоретической механики, ч. 2., М., 1954.

11. И. В. Мешчерский, Назарий механикадан масалалар тўплами, „Ўқитувчи", Т., 1967.

12. М. А. Мисюрев, Методика решения задач по теоретической механике, „Высшая школа", М., 1962.

13. Е. Л. Николаи, Теоретическая механика, ч. 2, М., 1950.

14. Е. М. Никитин, Краткий курс теоретической механики, „Наука", М., 1971.

15. С. М. Тарг, Краткий курс теоретической механики М., 1958.

16. Г. Н. Савин, Н. А. Кильчевский, Т. В. Путята, Курс теоретической механики, К., 1957.

17 Н. Ф Сахарний, Курс теоретической механики, „Высшая школа", М., 1961

18 М. Т Ўразбоев, Назарий механика асосий курси, „Ўқитувчи" Т., 1966

19. А. А. Яблонский, Курс теоретической механики, ч. 2, „Высшая школа", М. 1963.

20. А. А. Яблонский, С. С Норейка, С. А. Вольфсон, Н. В. Карпова, Б Н Квасников, Ю. Г. Минкин, Н Н. Никитина, В. Е. Павлов, Ю. М. Тепанков Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике, „Высшая школа", М., 1968.

МУНДАРИЖА

Бет

ДИНАМИКА

Биринчи қисм

МАТЕРИАЛ НУҚТА ДИНАМИКАСИ

IV боб. МАТЕРИАЛ НУҚТАНИНГ ЭРКСИЗ ҲАРАКАТИ. ДАЛАМБЕР ПРИНЦИПИ ВА МАТЕРИАЛ НУҚТАНИНГ НИСБИЙ ҲАРАКАТИ

ИККИНЧИ ҚИСМ

МАТЕРИАЛ НУҚТАЛАР СИСТЕМАСИ ДИНАМИКАСИ

V боб КИНЕТОСТАТИКА АСОСЛАРИ

VI боб. МУМКИН БЎЛГАН КЎЧИШ ПРИНЦИПИ