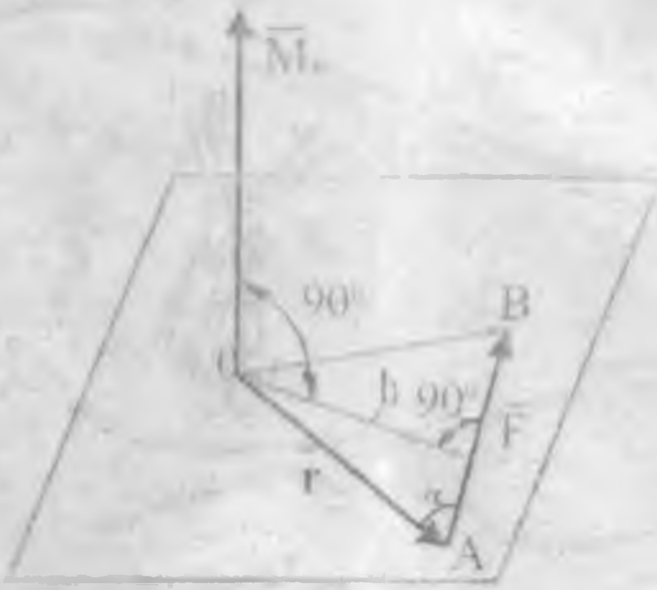
М. М. Муродов, Х. М. Иноятова,
К. У. Уснатдинов

НАЗАРИЙ МЕХАНИКА



531
M1-92

М. М. Муродов, Х. М. Иноятова,
К. У. Уснатдинов

НАЗАРИЙ МЕХАНИКА

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ ТОМОНИДАН ОЛИЙ ЎҚУВ ЮРТЛАРИНИНГ БАРЧА ЙЎНАЛИШДАГИ БАКАЛАВРЛАР УЧУН ЎҚУВ ҚЎЛЛАНМА СИФАТИДА ТАВСИЯ ЭТГАН

Тошкент,
"Истиқлол" - 2004

БИБЛИОТЕКА
Бух. ТИП и ЛП
№ У 3591

Ушбу қўлланма Бухоро озиқ-овқат ва енгил саноат технологияси институтининг услубий кенгашида (8-сонли баёни, 27.03.2003 йил) ва Олий таълим вазирлигининг (43-сонли баёни, 26.03.2004 йил) Қарори асосида нашрга тавсия этилган. Қўлланма Олий ўқув юртларининг профессионал таълим йўналишида ўқиётган бакалаврларига мўлжалланган.

Тақризчилар: Тошкент Давлат Техника Университети, «Назарий механика ва машина деталлари», кафедраси мудири, техника фанлари доктори, профессор **Ш. А. Шообидов**, Бухоро Давлат Университети техника фанлари доктори, профессор **З. Жумаев**.

Масъул муҳаррир: доц. **З. Х. Ғайбуллаев.**
Саҳифаловчи: Б. Ахмедов.

Ўқув қўлланма статика, кинематика, нуқта ва система динамикаси баён этилган.

Китобда механиканинг асосий тушунчалари ва қонунлари билан бирга муҳандислик фаолиятида учрайдиган бошқа масалалар ҳам ёритилган.

Ўқув қўлланма олий ўқув юртлари барча йўналишидаги бакалаврлар учун мўлжалланган. Шунингдек бу қўлланмадан касб-ҳунар коллежларининг талабалари ҳам фойдаланиши мумкин.

В учебном пособие «Теоретической механики» изложены основные раздели статики, кинематики и динамики точки и системы.

В книге наряду с изложением основных понятий и законов теоретической механики нашли свои отражения некоторые инженерные вопросы встречающей в практике.

Учебная пособия предназначена для студентов высших учебных заведений в при подготовке бакалавриатов. Пособий могут пользоваться и студенты профессиональных коллежей.

In educational the manual of "Theoretical mechanics" the basic static, kinematics and dynamics of a point and system are stated.

In the book alongside with a statement of the basic concepts and laws of theoretical mechanics some engineering questions meeting in practice have found their reflections.

Educational manual is intended for students of high educational institutions in by preparation of bachelor degrees. Students of professional colleges can use manual.

© "Истиқлол" нашриёти, 2004 й.

КИРИШ

Ҳар бир фан асосларини чуқур ўрганиш келажак тараққиётини илмий кўз билан кўра билиш ўқувчиларга ўргатиш жамиятнинг тез суратлар билан ривожланишига йўл очади. Академик М. Т. Уразбоев «Олим келажакни ўз руҳий дунёсининг энг баланд чўққисидан туриб кўра олиши ва атрофдагиларни шубҳаланмасдан етаклаши билан бошқалардан фарқ қилиши керак»-деган эди. Бу эса келажакда ижодкор шахсларни кўпайтиради, технологияга айланиб, меҳнатни унумдор бўлишига имконият яратади. Меҳнат самарадорлиги, маҳсулот сифати ва халқнинг фаровонлиги фан ривожидан боғлиқдир. Ҳозирги замон фан ва техникасининг тараққиёти умумтехника фанларининг асосларидан бири бўлган назарий механикани пухта ўрганишни талаб қилади. Назарий механика техника олий ўқув юртларида ўтиладиган умумий фанлардан биридир. Назарий механика фанининг қонунлари материаллар қаршилиги, қурилиш механикаси, машина ва механизмлар назарияси, гидравлика, аэродинамика каби фанлар учун хилма-хил мураккаб техника масалаларини назарий база сифатида қўлланилади. Назарий механика фани бўлажак мутахассисларга машиналарни лойиҳалаш ва автоматлаштириш ўрганадиган муҳандислик фани сифатида ҳам зарур бўлган билимни беради. Фан-техника тараққиёти билан бирга назарий механика бўлажак мутахассисларда техникада қўлланиладиган жараёнлар моделини ясаш ва илмий хулосалар яратиш қобилиятини ривожлантиради. Техниканинг кейинги тараққиётлари асосида назарий механика фанини пухта ўрганган талабалар ЭҲМ ни тадбиқ этган ҳолда, мураккаб масалаларни ҳам еча олиши мумкин. Назарий механика фани моддий жисмларнинг бир-бирига кўрсатадиган таъсири ва ҳаракатнинг умумий қонунлари ҳақидаги фандир. Табиий фанлар материя ҳаракатини ва уларнинг хусусиятларини ўрганадилар. Табиий фанлардан бири бўлган назарий механика фани материя ҳаракатларидан энг оддийси ҳисобланган механик ҳаракатни ўрганади. Шу билан бирга назарий механика жисмларнинг мувозанатини ҳамм ўрганади, зероки жисм мувозанати механик ҳаракатнинг хусусий ҳолидир.

Жисмларнинг вакт утиши билан фазода бир-бирига нисбатан силжишига механик харакат деб аталади. Жисмларнинг бошка бир жисмга нисбатан тинчлик холатига мувозанат холати дейилади. Механик холатларни кандай нуктаи назардан каралишига караб, назарий механика уч кисмга булинади:

1. Статика 2. Кинематика 3. Динамика

Статика жисмларнинг мувозанати, уларга қуйилган кучларни қушиш, айириш ва таъсири жиҳатидан тенг булган эквивалент кучлар системаси билан алмаштириш масалаларини урганади.

Кинематикада жисмларнинг ҳаракатини геометрик нуқтаи назардан урганади. Кинематикада жисмларга таъсир этувчи куч ва юкнинг массаси ҳисобга олинмайди.

Динамика жисмлар ҳаракати ва шу ҳаракатни вужудга келтирувчи кучлар биргаликда урганилади.

Муаллифлар, Ўқув қулланма қулёзмасини синчиклаб ўқиб чиқиб, берган фойдали маслаҳатлари учун Тошкент Давлат Техника Университети катта ўқитувчиси Х. Ҳабибуллаевага миннатдорчилик билдирадилар.

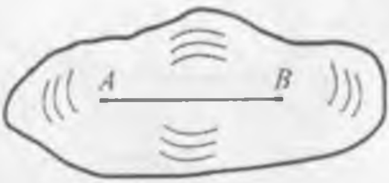
БИРИНЧИ БЎЛИМ

1-§. СТАТИКА. СТАТИКАНИНГ АСОСИЙ ТУШУНЧАЛАРИ

Статиканинг асосий тушунчалари қуйидагилардан иборат.

1. Абсолют қаттиқ жисм. 2. Куч.

Жисмнинг ихтиёрий икки нуқтаси орасидаги масофа хар қандай кучлар таъсир қилганда хам хар доим ўзгармасдан қолса, бундай жисмларга абсолют қаттиқ жисмлар дейилади. Демак, статикада жисмларда бўладиган кичик деформация хисобга олинмайди (1-расм).



1-расм.

$AB=l=const$

Механикада жисмга таъсир этиб, унинг тинч холатини ёки тўғри чизиқли текис харакатини ўзгартирувчи сабабга куч деб аталади.

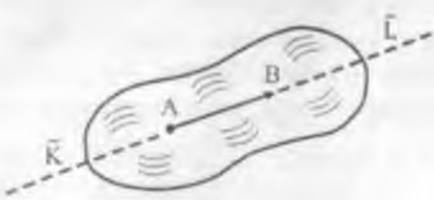
Кучнинг жисмга таъсири уч фактор билан тавсифланади:

1. Кучнинг миқдори; 2. Кучнинг йўналиши; 3. Куч қўйилган нуқта.

Куч - вектор катталик. Куч чизмада стрелкали тўғри чизиқ кесмаси шаклида тасвирланади.

Жисмнинг бевосита куч таъсир этилган нуқтаси куч қўйилган нуқта дейилади. Тинч холатда турган жисмга таъсир этилган куч йўналиши кучнинг йўналиши дейилади. Кучнинг миқдорини ўлчаш учун уни куч бирлиги деб қабул қилинган катталик билан солиштирилади. Халқаро СИ системасида Ньютон (1н) қабул қилинганига кўра, кучни катта лотин харфлари билан белгилаб, харф устида стрелка, яъни вектор қўйилади: $\overline{F}, \overline{P}\ \overline{T}, \overline{Q}, \overline{R}\ \overline{N}, \overline{S}$ ва бошқалар.

Жисмнинг бирор A нуқтасига $\overline{F}$ кучи қўйилган бўлсин (2-расм).



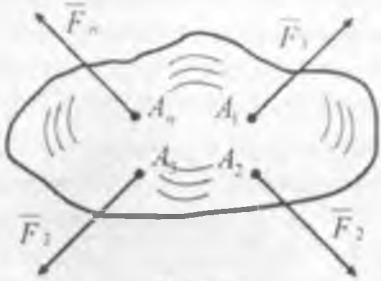
2-расм.

Бунда: AB кесманинг узунлиги куч миқдорини ифодалайди. Стрелка $\overline{F}$ - куч йўналишини курсатади. A нуқта куч қўйилган нуқта.

Куч йўналган тўғри чизиққа кучнинг таъсир чизиги дейилади.

KL тўғри чизик $\overline{F}$ кучининг таъсир чизиги булади.

1. Агар жисмга бир нечта кучлар қўйилган бўлса бундай кучларга кучлар системаси дейилади.



3-расм.

$(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, ...\overline{F}_n)$ - жисмга кучлар системаси қўйилган. $A_1, A_2, A_3, ... A_n$ кучлар қўйилган нуқталар.

2. Икки куч системаси жисмга бир хил таъсир курсатса, улар эквивалент кучлар системаси дейилади.

$(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, ...\overline{F}_n)$ кучлар системасининг жисмга курсатадиган таъсирини $(\overline{Q}_1, \overline{Q}_2, ...\overline{Q}_n)$ кучлар системаси курсатса, бундай икки куч системаси ўзаро эквивалент булади. Уларнинг эквивалентлиги қуйидагича ёзилади.

$$(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, ...\overline{F}_n) \sim (\overline{Q}_1, \overline{Q}_2, ...\overline{Q}_n)$$

3. Агар бирор кучлар системасининг жисмга курсатадиган таъсирини битта куч курсата олса, бундай кучга кучлар системасининг тенг таъсир этувчиси дейилади. $(\overline{F}, \overline{F}, ...\overline{F}_n)$ кучлар системасининг тенг таъсир этувчисини $\overline{R}$ билан белгиласак, у ҳолда:

$$(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, ...\overline{F}_n) \sim \overline{R}$$

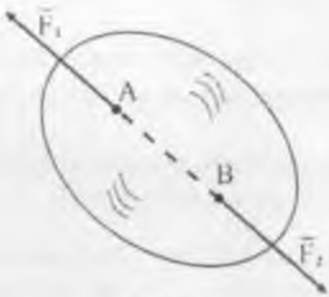
4. Тинч турган жисм унга қўйилган $(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, ...\overline{F}_n)$ кучлар системаси таъсирида ҳам тинч ҳолатда қолса, бундай кучлар системаси мувозанатлашган кучлар ситемаси ёки нолга эквивалент система дейилади. Мувозанатлашган кучлар системаси нолга эквивалентдир.

$$(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, ...\overline{F}_n) \sim 0.$$

2-§. СТАТИКАНИНГ АКСИОМАЛАРИ

Назарий механика фанининг статика қисми кундалик ҳаётда тасдиқланган қуйидаги аксиомаларга асосланади:

1-аксиома: Жисмга таъсир этаётган иккита куч миқдор жиҳатидан тенг ва бир тўғри чизиқ бўйлаб қарама-қарши томонга йўналган бўлса, жисм мувозанатда бўлади (4-расм).

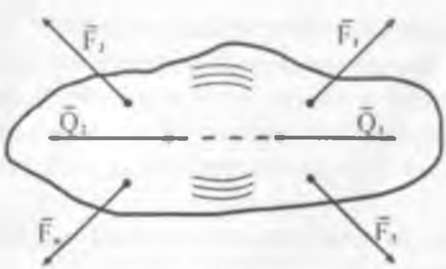


4-расм.

Бунда $F_1 = F_2$, $\bar{F}_1 = \bar{F}_2$, $\bar{F}_1$ *ва* $\bar{F}_2$, кучларга ўзаро мувозанатлашган кучлар системаси ёки нолга эквивалент кучлар системаси дейилади.

$$(\bar{F}_1, \bar{F}_2) \sim 0$$

2-аксиома: Жисмга таъсир этаётган кучлар системасига ўзаро мувозанатлашувчи кучлар қўшилса ёки олинса кучлар системасининг жисмга курсатадиган таъсири узгармайди (5-расм).



5-расм.

$\bar{F}_1, \bar{F}_2, \ldots \bar{F}_n$ кучлар таъсирида жисм мувозанатда турган бўлсин.

Шу жисмга нолга эквивалент $(\bar{Q}_1, \bar{Q}_2)$ кучларни қуямиз $(\bar{Q}_1, \bar{Q}_2) \sim 0$, бу ҳолатда билан жисмнинг мувозанати узгармайди.

Бу аксиомалардан қуйидаги натижа келиб чиқади:

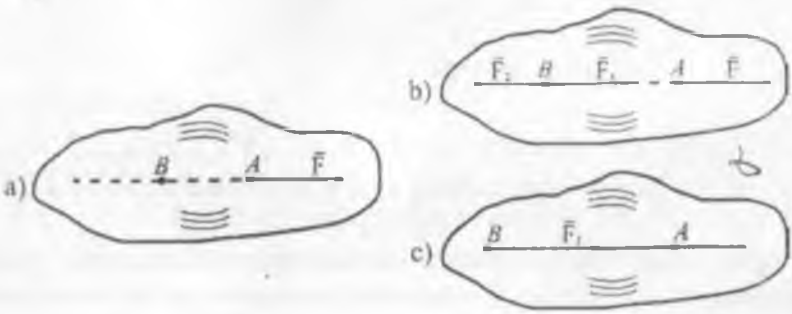
ҳар қандай кучни таъсир чизиғи бўйлаб бир нуқтадан иккинчи нуқтага йўналишини ўзгартирмай кўчириш мумкин. Бу билан кучнинг жисмга кўрсатадиган таъсири ўзгармайди.

<u>Исбот:</u> Жисмнинг *A* нуқтасига $\bar{F}$ кучи қўйилган бўлсин (6-расм, а). Бу кучни таъсир чизиғи устидаги *B* нуқтага кўчириш лозим бўлсин.

Бунинг учун *B* нуқтага ўзаро мувозанатлашган $\bar{F}_1$ ва $\bar{F}_2$ кучларни қўямиз, уларнинг миқдори жисмга қўйилган $\bar{F}$ кучнинг миқдорига тенг бўлиши шарт. $F_1 = F_2 = F$

6-расмдаги $\bar{F}$ ва $\bar{F}_2$ кучлари нолга эквивалент $(\bar{F}, \bar{F}_2) \sim 0$ бўлгани учун иккинчи аксиомага асосланиб бу кучларни жисмдан олиб ташлаймиз.

(6-расм, b) Натижада B нуқтага қўйилган берилган кучга геометрик тенг бўлган $\bar{F}_1 = \bar{F}$ кучига эга бўламиз (6-расм, с).



6-расм.

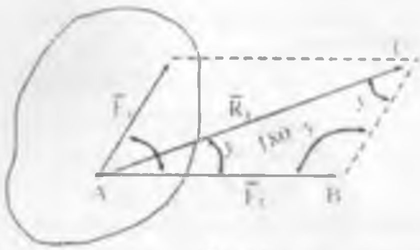
<u>3-аксиома.</u> (Параллелограм аксиомаси)

Жисмнинг бирор нуқтасига қўйилган турли йўналишдаги икки кучнинг тенг таъсир этувчиси шу кучларнинг геометрик йиғиндисига тенг бўлиб, кучлардан тузилган паралелограммнинг диагонали бўйлаб йўналади ва кучлар қўйилган нуқтага қўйилган бўлади (7-расм).

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 \qquad (1)$$

Тенг таъсир этувчи кучнинг миқдори косинуслар теоремасидан фойдаланиб топилади.

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 F_1 \cos\varphi} \qquad (2)$$



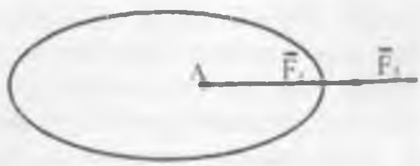
7-расм.

бунда φ берилган F_1 *ва* F_2 кучлар орасидаги бурчак.

1) Агар φ=0 бўлса (2) дан:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 F_1} = \sqrt{(F_1 + F_2)^2} = F_1 + F_2$$
$$R = F_1 + F_2 \qquad (3)$$

(3) - формула асосида бир тўғри чизиқ бўйлаб бир томонга йўналган иккита кучнинг тенг таъсир этувчиси миқдори аниқланади (7-расм, а).

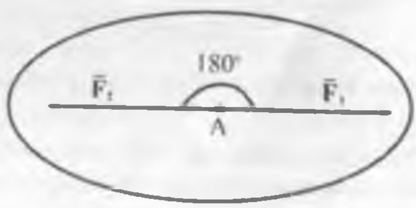


7-расм а.

2) Агар φ=180° бўлса, кучлар бир тўғри чизиқ бўйлаб қарама-қарши томонга йўналган бўлади (7-расм, b).

У холда (2) – формуладан:

$R = F_1 - F_2$ келиб чиқади.

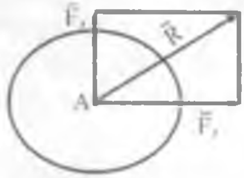


7-расм b.

3) Агар $\varphi=90^0$ булса, кучлар узаро перпендикуляр йуналган булади (7-расм, с).

У ҳолда (2) – формуладан:

$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$ тенглиги олинади.



7-расм с.

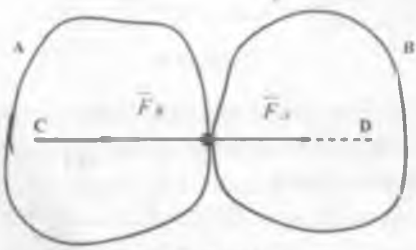
<u>4-аксиома.</u> Таъсир миқдори жиҳатидан узига тенг ва бир тугри чизиқ буйлаб қарама-қарши томонга йуналган ҳар қандай куч акс таъсирни вужудга келтиради.

А ва В жисмлар берилган булсин (8-расм). Агар А жисм В жисмга $\bar{F}_A$ куч билан таъсир қилса, худди шу вақтнинг узида В жисм А жисмга $\bar{F}_B$ куч билан таъсир қилади. $\bar{F}_A$ ва $\bar{F}_B$ кучлар миқдор жиҳатидан тенг ва бир тугри чизиқ буйлаб қарама-қарши томонга йуналган.

$$\bar{F}_A = -\bar{F}_B$$

$\bar{F}_A$ ва $\bar{F}_B$ кучлар узаро мувозанатлашмайди, чунки улар бир жисмга қуйилмаган.

Бу аксиома Ньютоннинг учинчи қонунини ифодалайди.



8-расм.

Демак табиатда бир томонлама таъсир йуқ булиб ҳар қандай таъсирга акс таъсир мавжуд.

<u>5-аксиома. (Қотиш принципи).</u> Агар деформацияланадиган жисм мувозанат ҳолатида абсолют қаттиқ жисмга айланса, унинг мувозанати узгармайди.

Масалан, эгилувчан сим мувозанат ҳолатида абсолют қаттиқ стерженга айланса, унинг мувозанати узгармайди.

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР.

1. Назарий механика фани нимани ўрганади?
2. Механик харакат деб нимага айтилади?
3. Мувозанат деб нимага айтилади?
4. Статика бўлими нимани ўрганади?
5. Кинематика бўлими нимани ўрганади?
6. Динамика бўлими нимани ўрганади?
7. Қандай жисм абсалют қаттиқ жисм деб аталади?
8. Куч деб нимага айтилади ва куч қандай омиллар билан тавсифланади?
9. Кучлар системаси деб нимага айтилади?
10. Тенг таъсир этувчи куч деб қандай кучга айтилади?
11. Мувозанатловчи куч нима ва унинг тенг таъсир этувчи кучдан қандай фарқи бор?
12. Статиканинг аксиомаларини таърифланг?
13. Бир нуқтага қўйилган иккита кучни тенг таъсир этувчиси қандай аниқланади?

3-§. БОҒЛАНИШЛАР ВА БОҒЛАНИШ РЕАКЦИЯЛАРИ

Назарий механикада барча жисмлар икки гуруҳга ажралади.

1. Эркин жисмлар *2. Эрксиз жисмлар*

Агар жисм фазода исталган томонга қараб ҳаракатлана олса, бундай жисмга эркин жисм деб аталади.

<u>**Масалан.**</u> Ҳавода учаётган самолёт, шар.

Агар жисмнинг бирор томонга қараб буладиган ҳаракати чекланган булса, бундай жисмга эркинмас ёки богланишдаги жисм дейилади. Жисмнинг ҳаракатини чекловчи тусиққа богланиш дейилади.

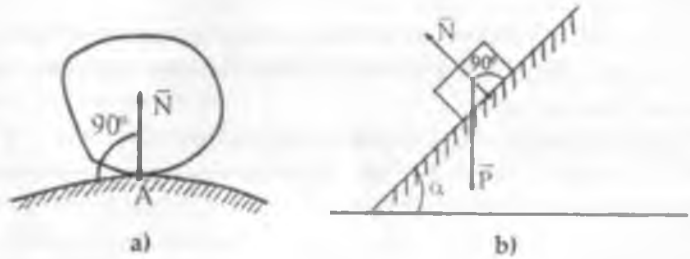
<u>**Масалан**</u>. Рельсда турган вагон, стол устидаги юк, ипга осилган юк ва шу кабилар мисол була олади.

Рельсда турган вагоннинг вертикал йўналишдаги ҳаракати чекланган. Бунда рельслар вагон учун богланиш вазифасини утайди, вагон эса боғланишдаги жисмдир.

Богланишнинг жисмга кўрсатадиган таъсирини белгиловчи кучга богланиш реакция кучи ёки реакция кучи дейилади. Боғланиш жисмни қайси томонга кучишга йул қуймаса, реакция кучи шу томонга қарама-қарши йуналади. Статикада масала ечишда богланиш реакциясининг йуналишини тугри топиш катта аҳамиятга эга. Шу сабабли боғланишларнинг асосий турларида реакция кучлари қандан йўналганлигини кўриб чиқамиз.

1. **Силлик қўзғалмас текислик.** Ишқаланишнинг эътиборга олинмайдиган даражада силлиқ бўлган сирт одатда силлиқ сирт деб ҳисобланади. Жисм силлиқ қўзғалмас текислик устида мувозанатда турса, ёки шу текисликка нисбатан ҳаракатланса, силлиқ қўзғалмас текислик жисмни текисликка перпендикуляр бўлган йўналишда ҳаракат қилишига тусқинлик кўрсатади.

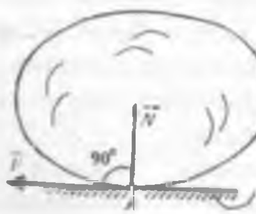
Силлиқ қўзғалмас текисликнинг реакция кучи $\bar{N}$ текисликка перпендикуляр бўлиб, жисм қайси томонга ҳаракат қила олмаса, шунга тескари йўналган бўлади (9-расм a, b).



9-расм.

Бунда $\bar{N}$ - силлик қўзғалмас текисликнинг реакция кучи ёки нормал реакция кучи деб аталади, $\bar{P}$ – жисм оғирлиги.

Агар сирт силлиқ бўлмаса, A нуқтада нормал реакция кучидан ташқари уринма реакция кучи $\bar{F}$ ҳам бўлади (10-расм). Бу $\bar{F}$ кучга ишқаланиш кучи деб аталади.



10-расм.

Бунда $\bar{N}$ -нормал реакция кучи, $\bar{F}$ -ишқаланиш кучи.

2. Эгилувчан ёки эластик жисмлар. Жисмлар чўзилмайдиган ип, арқон, трос, занжир, қайишлар воситасида осилган бўлса, уларда ҳосил буладиган реакция кучлари мос равишда эгилувчан жисмлар буйлаб йуналган булади (11-расм a,b). Эгилувчан жисмларда хосил буладиган реакция кучлари $\bar{T}, \bar{T}_1, \bar{T}_2$ билан белгиланади ва таранглик кучи деб аталади.

11-расм.

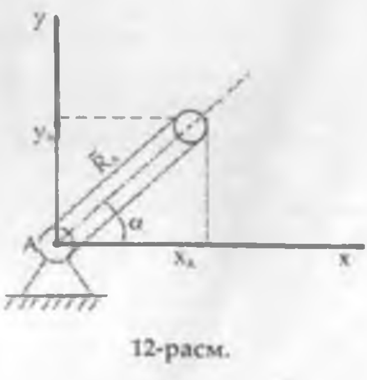
Бунда $\bar{P}$ ипга осилган юкнинг огирлиги.

Реакция кучининг миқдор ва йуналиши жисмга таъсир қилувчи кучга боғлиқ булади.

3. Шарнирли қўзғалмас таянч. Бу таянч жисмнинг илгарилама ҳаракат қилишига тусқинлик қилади, жисм шарнир атрофида айланади.

Иккита жисмнинг узаро бирлашган жойига шарнир дейилади. Шарнир атрофида жисмларнинг бири иккинчисига нисбатан эркин айланади. Болт – шарнирли қузғалмас таянчга мисол була олади.

Шарнирли қўзғалмас таянчнинг белгиси (12-расмда) кўрсатилган.



12-расм.

Шарнирли қўзғалмас таянчдаги реакция кучининг миқдори ва йўналиши номаълум бўлган масалани ечишда, шарнирли қўзғалмас таянчнинг реакция кучини координата ўқлари бўйлаб йўналган иккита ташкил этувчиларга ажратиш керак (12-расм).

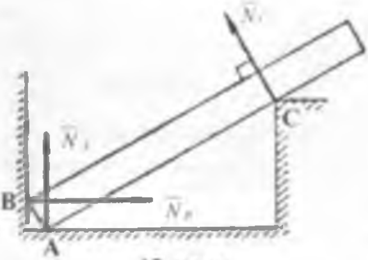
$$R_A = X_A + Y_A$$

Бунда R_A - тўла реакция кучи, X_A, Y_A лар, R_A кучининг ташкил этувчилари.

R_A кучининг миқдори ва йўналиши қуйидагига тенг.

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} \qquad (5)$$

$$tg\alpha = \frac{Y_A}{X_A} \qquad (6)$$

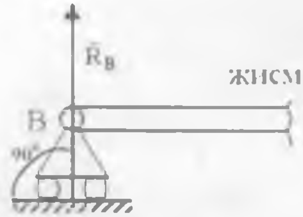


13-расм.

Балка А нуқтада силлиқ полга, В нуқтада вертикал деворга ва С нуқтада икки ёқли бурчак қиррасига таянади деб фараз қилсак (13 – расм). Пол ва вертикал деворнинг $\overline{N}_A, \overline{N}_B$ реакция кучлари, А ва В нуқталарда мос равишда пол ва деворга ўтказилган перпендикуляр бўйича йўналади. Икки ёқли бурчакдан ташкил топган қирранинг реакция кучи $\overline{N}_C$ эса С нуқтада балкага ўтказилган перпендикуляр бўйича йўналади.

4. Шарнирли қўзғалувчан таянч. Шарнирли қўзғалувчан таянчнинг пастига юмалайдиган ғилдираклар қўйилади. Шарнирли қўзғалувчан таянчнинг реакция кучи $\overline{R}_B$ ғилдирак ҳаракат қилаётган текисликка перпендикуляр йўналган бўлади (14-расм).

Шарнирли қўзғалувчан таянчнинг белгиси;

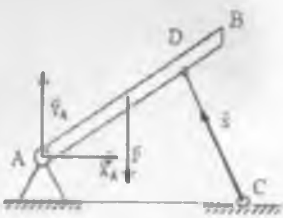


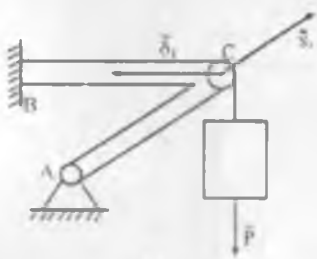
14-расм.

Бунда R_B - реакция кучи.

5. Мувозанати текширилаётган жисм огирлигини хисобга олмаса ҳам буладиган қаттиқ стержен билан богланган булса, стерженнинг реакция кучи стержен буйлаб йуналган булади (15-расм a, b).

Бунда $\bar{S}, \bar{S}_1, \bar{S}_2$ - CD, BC ва AC стерженларнинг реакция кучлари.





15-расм.

6. Жисм сферик шарнир воситаси ёрдамида богланган булса (16-расм), бу шарнир уз маркази 0 дан утадиган ҳар қандай уқ атрофида жисмнинг айланишига тусқинлик қилмайди. Сферик шарнирнинг реакция кучи 0 нуқтасидан утади, лекин қайси томонга йуналганлиги номаълум булган, масалани ечишда бундай реакция кучини танлаб олинган координата уқлари буйлаб йуналган ташкил этувчиларга ажратиш керак.

БИБЛИОТЕКА
Б... ТИП и ЛП
№ 43591

Шарнирли қўзғалмас таянчдаги реакция кучининг миқдори ва йўналиши номаълум бўлган масалани ечишда, шарнирли қўзғалмас таянчнинг реакция кучини координата ўқлари бўйлаб йўналган иккита ташкил этувчиларга ажратиш керак (12-расм).

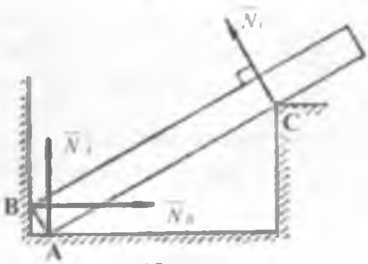
$$\bar{R}_A = \bar{X}_A + \bar{Y}_A$$

Бунда $\bar{R}_A$ - тўла реакция кучи, X_A, Y_A лар, R_A кучининг ташкил этувчилари.

R_A кучининг миқдори ва йўналиши қуйидагига тенг.

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} \qquad (5)$$

$$tg\alpha = \frac{Y_A}{X_A} \qquad (6)$$

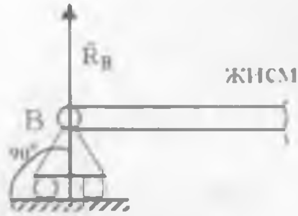


13-расм.

Балка A нуқтада силлиқ полга, B нуқтада вертикал деворга ва C нуқтада икки ёқли бурчак қиррасига таянади деб фараз қилсак (13 – расм). Пол ва вертикал деворнинг $\bar{N}_A, \bar{N}_B$ реакция кучлари, A ва B нуқталарда мос равишда пол ва деворга ўтказилган перпендикуляр бўйича йўналади. Икки ёқли бурчакдан ташкил топган қирранинг реакция кучи $\bar{N}_C$ эса C нуқтада балкага ўтказилган перпендикуляр бўйича йўналади.

4. Шарнирли қўзғалувчан таянч. Шарнирли қўзғалувчан таянчнинг пастига юмалайдиган ғилдираклар қўйилади. Шарнирли қўзғалувчан таянчнинг реакция кучи $\bar{R}_B$ ғилдирак ҳаракат қилаётган текисликка перпендикуляр йўналган бўлади (14-расм).

Шарнирли қўзғалувчан таянчнинг белгиси;

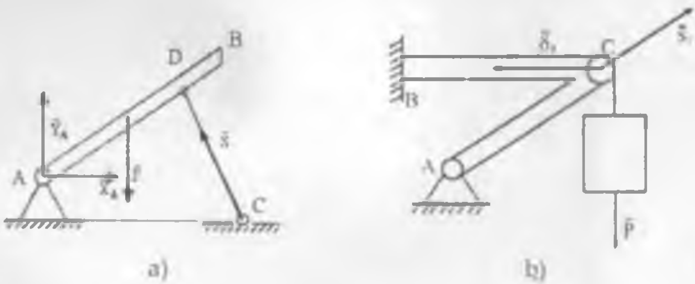


14-расм.

Бунда R_B - реакция кучи.

5. Мувозанати текширилаётган жисм оғирлигини хисобга олмаса ҳам буладиган қаттиқ стержен билан боғланган булса, стерженнинг реакция кучи стержен буйлаб йуналган булади (15-расм a, b).

Бунда S, S_1, S_2 - CD, BC ва AC стерженларнинг реакция кучлари.



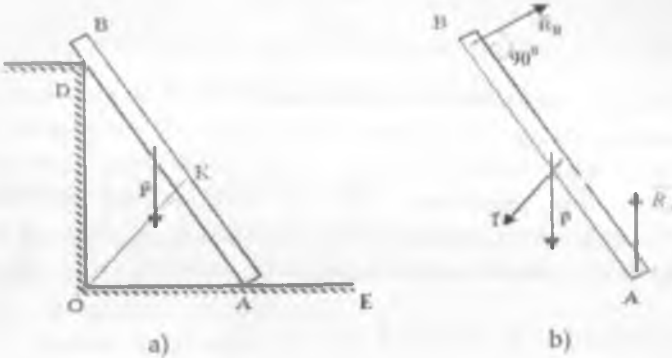
15-расм.

6. Жисм сферик шарнир воситаси ёрдамида боғланган булса (16-расм), бу шарнир уз маркази 0 дан утадиган ҳар қандай уқ атрофида жисмнинг айланишига тусқинлик қилмайди. Сферик шарнирнинг реакция кучи 0 нуқтасидан утади, лекин қайси томонга йуналганлиги номаълум булган, масалани ечишда бундай реакция кучини танлаб олинган координата уқлари буйлаб йуналган ташкил этувчиларга ажратиш керак.

БИБЛИОТЕКА
Бух. ТИП и ЛП
№ 43591

Бу аксиома ёрдамида боғланишдаги жисмларнинг мувозанати текширилади.

Мисол: АВ балка учун Р оғирлик (21-расм, а) ОЕ силлиқ текислик, D таянч ва ОК трос орасидаги боғланиш хизмат қилади. 21-расм, b даги балка эркин булади.



21-расм.

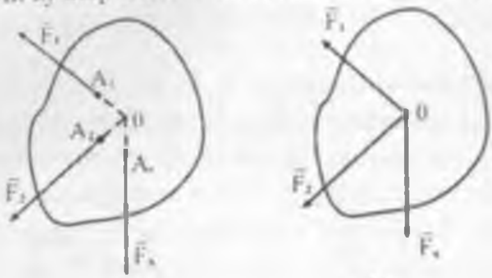
ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР.

1. Эркин жисм деб қандай жисмга айтилади?
2. Эрксиз жисм деб қандай жисмга айтилади?
3. Реакция кучи нима?
4. Боғланишларнинг асосий турларини айтинг?
5. Силлиқ қузғалмас текисликнинг реакция кучи қандай йуналган?
6. Эгилувчан ёки эластик жисмларнинг реакция кучи қандаи йуналган?
7. Шарнирли қузғалмас таянчнинг реакция кучи қандай йуналган?
8. Шарнирли қузғалувчан таянчнинг реакция кучи қандай йуналган?
9. Стерженли боғланиш ва сферик шарнирнинг реакция кучи қандай йуналган?
10. Боғланиш аксиомасини таърифланг?

4-§. БИР НУҚТАДА КЕСИШУВЧИ КУЧЛАР СИСТЕМАСИ

Таъсир чизиқлари бир нуқтада кесишадиган кучларга бир нуқтада кесишувчи кучлар системаси дейилади.

Масалан, жисмнинг $A_1, A_2 \ldots A_n$ нуқталарига таъсир чизиқлари 0 нуқтада кесишадиган $F_1, F_2 \ldots F_n$ кучлари таъсир этса, бу кучлар бир нуқтада кесишувчи кучлар системасини ташкил қилади. (22-расм,а ва b)



a) b)

22-расм.

Берилган кучларни уларнинг таъсир чизиқлари бўйлаб кўчириш мумкин бўлганлиги учун, бир нуқтада кесишувчи кучлар системасини доим бир нуқтага қўйилган кучлар системаси билан алмаштириш мумкин (22-расм, b).

Бу кучлар системасининг тенг таъсир этувчиси қуйидаги икки усул билан аниқланади.

1. Геометрик усул *2. Аналитик усул*

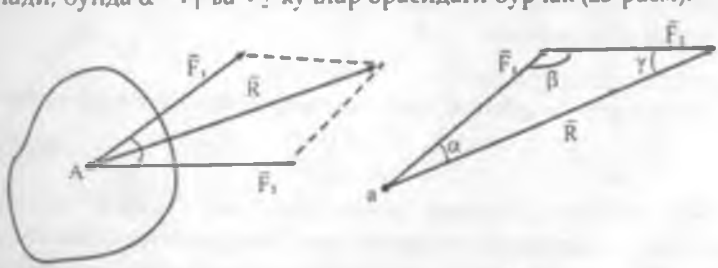
Бир нуқтада кесишувчи кучларни геометрик усулда қўшиш иккига бўлинади.

Параллелограм усули ва кучлар кўпбурчаги қуриш усули.

а) Параллелограмм усули

Параллелограмм аксиомасига асосан.

$\bar{F}_1$ ва $\bar{F}_2$ кучларининг тенг таъсир этувчиси $\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2$ га тенг бўлиб модули эса косинуслар теоремасига асосан $R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 F_1 \cos\alpha}$ га тенг бўлади, бунда α - $\bar{F}_1$ ва $\bar{F}_2$ кучлар орасидаги бурчак (23-расм).



a) b)

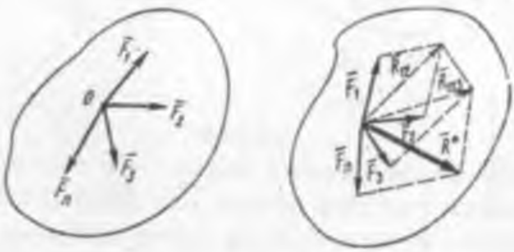
23-расм.

Тенг таъсир этувчи $\bar{R}$ кучнинг F_1 ва F_2 кучлар билан ташкил қилган α ва γ бурчаклари синуслар теоремасига кўра 23-расм, b дан аниқланади.

$$\frac{F_1}{\sin\gamma} = \frac{F_2}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin\beta} \qquad (7)$$

б) Кучлар кўпбурчаги усули.

Бир нуқтага қўйилган $\bar{F}_1, \bar{F}_2, ..., \bar{F}_n$ кучлари берилган бўлсин (24-расм) Шу кучларнинг тенг таъсир этувчисини топиш лозим бўлсин.



a) b)

24-расм.

Тенг таъсир этувчи кучни топиш учун параллелограмм аксиомасига асосан $\bar{F}_1$ ва $\bar{F}_2$ кучларни қўшиб, уларни тенг таъсир этувчи $\bar{R}_1$ кучи билан алмаштирамиз.

$$\bar{R}_1 = \bar{F}_1 + \bar{F}_2$$

Бу усулга асосан $\bar{R}_1$ куч билан $\bar{F}_3$ кучни қўшиб $\bar{R}_2$ кучни ҳосил қиламиз.

$$\bar{R}_2 = \bar{R}_1 + \bar{F}_3 = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3$$

ва ҳоказо.

Шу усул билан n-1 гача бўлган кучларни қўшиб, тенг таъсир этувчисини аниқлаймиз.

$$\bar{R}_{n-1} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + ... + \bar{F}_{n-1}$$

$\bar{R}_{n-1}$ билан $\bar{F}_n$ кучни қўшиб тенг таъсир этувчи кучни топамиз.

$$\bar{R} = \bar{R}_{n-1} + \bar{F}_n = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + ... + \bar{F}_{n-1} + \bar{F}_n$$

$$\bar{R} = \Sigma\bar{F} \qquad (8)$$

Бир нуқтага қўйилган кучларнинг тенг таъсир этувчиси шу кучларнинг геометрик йиғиндисига тенг бўлиб, кучлар қўйилган нуқтага қўйилган бўлади. Кучларни кетма-кет параллелограмм қоидаси асосида қўшиш, берилган кучлардан куч кўпбурчагини қуришга олиб келади.

2.

5-§. УЧ КУЧ МУВОЗАНАТИГА ОИД ТЕОРЕМА

Теорема: Бир текисликда жойлашган ва ўзаро параллел бўлмаган учта куч мувозанатда бўлса, уларнинг таъсир чизиқлари бир нуқтада кесишади.

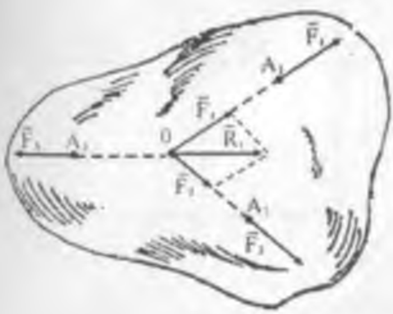
__Исбот.__ Жисмнинг A_1, A_2, ва A_3 нуқталарига бир текисликда ётувчи параллел бўлмаган мувозанатлашувчи F_1, F_2 ва F_3 кучлари қўйилган бўлсин (25-расм).

Кучлар параллел бўлмагани учун улардан ихтиёрий иккитасининг таъсир чизиги бирор нуқтада кесишади. Масалан $\bar{F_1}$ ва $\bar{F_2}$ кучларнинг таъсир чизиқлари 0 нуқтада кесишади. Бу кучларни таъсир чизиқлари бўйлаб 0 нуқтага кўчирамиз. Параллелограмм қоидасига асосан F_1, F_2 кучларини қўшамиз.

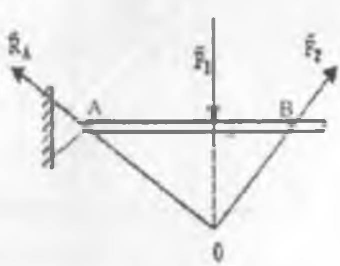
$$\bar{R} = \bar{F_1} + \bar{F_2}$$

$\bar{R}$ кучининг таъсир чизиги $\bar{F_1}$ ва $\bar{F_2}$ кучларининг таъсир чизиқлари кесишган нуқтадан ўтади. Шундай қилиб жисмга $\bar{R}$ ва $\bar{F_3}$ кучлари таъсир қилади. Иккита куч қўйилган жисм мувозанатда бўлиши учун бу кучларнинг миқдорлари тенг бўлиб, бир тўғри чизиқ бўйлаб қарама-қарши томонга йўналган бўлиши керак. Демак, $\bar{F_3}$ кучнинг таъсир чизиги 0 нуқтадан ўтади ёки учта кучнинг таъсир чизиги бир нуқтада кесишади. Бу теорема ёрдамида реакция кучининг йўналиши аниқланади.

__Масалан.__ АВ стержен $\bar{F_1}$, $\bar{F_2}$ кучлар ва $\bar{R_1}$ реакция кучи таъсирида мувозанатда бўлса, $\bar{R_1}$ кучининг таъсир чизиги $\bar{F_1}$ ва $\bar{F_2}$ кучлар таъсир чизиги кесишган нуқтадан ўтади (26-расм).



25-расм.



26-расм.

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР.

1. Қандай кучлар системасига кесишувчи кучлар системаси дейилади?
2. Бир нуқтада кесишувчи иккита кучнинг тенг таъсир этувчисининг модули қандай аниқланади?
3. Кесишувчи кучларнинг тенг таъсир этувчисининг йўналиши қандай аниқланади?
4. Тенг таъсир этувчи куч деб нимага айтилади?
5. Мувозанатловчи куч деб нимага айтилади?
6. Параллелограмм усулини тушунтиринг?
7. Куч кўпбурчаги қоидаси нимадан иборат?
8. Куч учбурчаги усулини тушунтиринг?
9. Уч куч теоремасини айтинг?
10. Бир нуқтага қўйилган кучлар системасининг геометрик кўринишда мувозанат шарти қандай таърифланади?

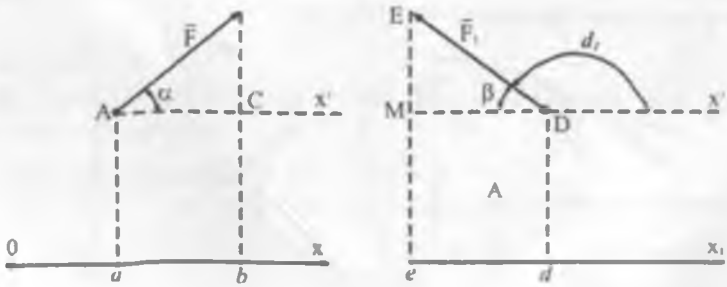
6-§. КУЧНИНГ ЎҚДАГИ ПРОЕКЦИЯСИ

Статика масалаларини аналитик йўл билан ечиш усулига ўтамиз. Бу усул кучнинг ўқдаги проекцияси тушунчасига асосланган.

$\bar{F}$ кучи ва Ox ўқи берилган бўлсин (27-расм, a ва b).

Кучни шу ўқдаги проекциясини топамиз. Бунинг учун шу куч чизиғининг икки учидан Ox ўқига перпендикулярлар туширамиз.

Бунда ab, ed - $\bar{F}$ва$\bar{F}_1$ кучнинг проекцияларидир.



a) b)

27-расм.

Кучни ўқдаги проекциясини F_x ёки x билан белгилаймиз.

$ab=x$, $ed=x_1$ x ва x_1 ларни топиш учун A ва D нукталардан Ox укига параллел килиб x' ук ни утказамиз, у холда ΔABC ва ΔDEM тугри бурчакли учбурчаклар хосил булади.

Бу учбурчаклардан фойдаланамиз. Кучнинг йўналиши бир хил бўлган иккита параллел уклаги проекциялар узаро тенг.

$$X=AC=ab,\ X_1=-DM=-de$$

$$\frac{AC}{F}=\cos\alpha \quad \text{бундан} \quad AC=F\cos\alpha$$

$$\frac{DM}{F_1}=\cos\beta \quad DM=F_1\cos\beta=F_1\cos(180^\circ-\alpha_1)=-F\cos\alpha_1$$

$$Fx=X=F\cos\alpha \quad Fx_1=X_1=F_1\cos\alpha_1 \qquad (9)$$

(9) - формула билан кучнинг уклаги проекцияси аникланади..

Кучнинг бирор уклаги проекцияси куч микдори билан кучнинг шу ўқ мусбат йўналиши орасида ташкил килган бурчаги косинусининг купайтмасига тенг.

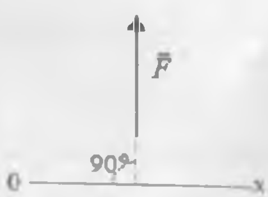
Проекциянинг ишораси кучнинг йўналишига караб олинади.

Масалан 27-расм, a да проекция мусбат, 27-расм, b да эса манфийдир.

Демак куч укнинг мусбат томонига караб йўналса кучни проекцияси мусбат, акс холда манфий.

Кучнинг таъсир чизиги билан Ox укининг мусбат йўналиши орасидаги бурчак уткир бўлса кучнинг проекцияси мусбат, агар бу бурчак утмас бўлса манфий ишорада олинади.

1. Агар куч бирор укга перпендикуляр бўлса, $\alpha=90^0$ кучнинг шу уклаги проекцияси нолга тенг бўлади (28-расм).



28-расм.

$$Fx=F\cos 90^\circ=0,\ Fx=0$$

2. Агар куч укка параллел йўналган бўлса, $\alpha=0$, $\alpha=180^0$ ёки укни устида жойлашган бўлса, кучни уклаги проекцияси куч микдорига тенг бўлади (29 – расм, a ва b).

a) b)

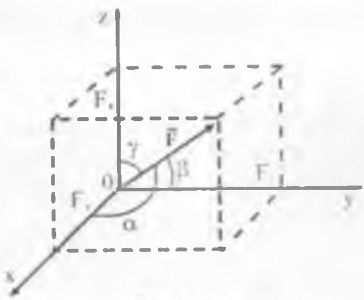
29 – расм.

$$Fx = F\cos 0^0 = F\cdot 1 = F \qquad F = F_1\cos 180^0 = -F_1$$

$$Fx = F \qquad Fx_1 = -F_1$$

Кучнинг модули тўғри бурчакли параллелипипеднинг диагоналига (30-расм), бу параллелипипеднинг қирралари эса кучнинг координата ўқларидаги проекцияларига тенг бўлади.

$$F = \sqrt{Fx^2 + Fy^2 + Fz^2} \qquad (10)$$



30-расм.

$\bar F$ кучининг йўналиши йўналтирувчи косинуслар ёрдамида аниқланади.

$$\cos\alpha = \frac{Fx}{F}; \quad \cos\beta = \frac{Fy}{F}. \quad \cos\gamma = \frac{Fz}{F}. \qquad (11)$$

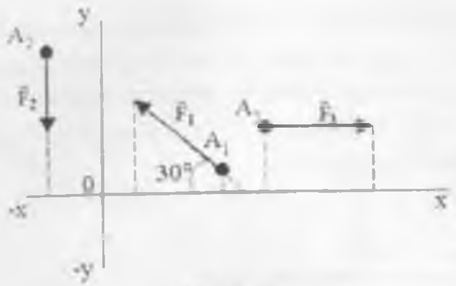
Бунда α, β, γ- F кучи билан x,y,z ўқлари орасидаги бурчак.

МАСАЛА № 4.

Берилган:

$F_1=6н$, $F_2=8н$, $F_3=10н$

Бу кучларнинг координата ўқларидаги проекциялари топилсин. (31-расм).



31-расм.

Ечиш. 1) $\bar{F}_1$ - кучининг проекциялари. $X_1 = -F_1\cos 30^\circ = -6\frac{\sqrt{3}}{2} = -3\sqrt{3}$ Н

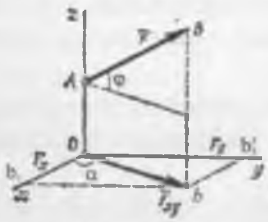
$Y_1 = F_1 \sin 30^\circ = 6\frac{1}{2} = 3$ Н

2) F_2 кучининг проекциялари; $X_2 = 0 \quad Y_2 = -F_2 = -8н$

3) F_3 кучининг проекциялари; $X_3 = F_3 = 10н \quad Y_3 = 0$.

7-§. КУЧНИНГ ТЕКИСЛИКДАГИ ПРОЕКЦИЯСИ

Oxyz координаталар системасида *A* нуқтага қўйилган $\bar{F}$ кучи берилган бўлсин (31-расм, а).



31-расм, а.

$\bar{F}$ кучини *Oxy* текисликдаги проекциясини аниқлаймиз. Бунинг учун *A* ва *B* нуқталардан *Oxy* текисликга перпендикуляр *AO* ва *Bb* чизиқлар ўтказамиз. У ҳолда $\bar{F}_{xy} = \overline{Ob}$ вектори ҳосил бўлади. $\bar{F}_{xy} - \overline{Ob}$ $\bar{F}$ кучнинг *Oxy* текисликдаги проекциясини ифодалайди.

$\bar{F}$ куч текисликдаги проекциясининг миқдори қуйидагига тенг.

$$Fxy = F\cos\varphi$$

Бунда φ $\bar{F}$ кучи билан унинг проекцияси орасидаги бурчак. Фазода жойлашган кучни *x,y* ўқлардаги проекциясини аниқлаш учун аввал кучни шу уқлар ётган текисликдаги проекцияси топилади. F_1 векторнинг Ox ва Oy уқлардаги проекциясини аниқлаш учун b нуқтадан Ox ва Oy уқларига мос равишда перпендикуляр чизиқлар утказамиз. Ob_1 ва Ob_2 мос равишда F кучининг Ox ва Oy уқларидаги проекцияларини ифодалайди.

$$F_x = F_{11} \cos \alpha = F \cos \varphi \cos \alpha$$
$$F_y = F_{11} \sin \alpha = F \cos \varphi \sin \alpha \qquad (14)$$

Бу усул кучни икки марта проекциялаш усули дейилади.

8-§. БИР НУҚТАДА КЕСИШУВЧИ КУЧЛАРНИНГ ТЕНГ ТАЪСИР ЭТУВЧИСИНИ АНАЛИТИК УСУЛДА АНИҚЛАШ

Таъсир чизиқлари бир нуқтада кесишувчи $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, ..., \bar{F}_n$ кучлар берилган булсин (32-расм, а).

Берилган кучларнинг тенг таъсир этувчисини миқдор ва йуналишини аниқлаш лозим.

Тенг таъсир этувчи куч берилган кучларнинг геометрик йиғиндисига тенг.

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + ... + \bar{F}_n \qquad \text{ёки}$$
$$\bar{R} = \Sigma \bar{F} \qquad (15)$$

(15) – вектор тенгликни координата уқларига проекциялаб, тенг таъсир этувчи кучнинг координата уқларидаги проекциясини аниқлаймиз.

Тенг таъсир этувчи кучнинг бирор уқдаги проекциясини ташкил этувчи кучларнинг шу уқдаги проекцияларининг йиғиндисига тенг булади.

$$Rx = \Sigma X, \quad Ry = \Sigma Y, \quad Rz = \Sigma Z \qquad (16)$$

Бунда $R_x, R_y, R_z - \bar{R}$ кучининг координата уқларидаги проекцияси. (16) ёрдамида тенг таъсир этувчи кучнинг координата уқлардаги проекцияси топилади.

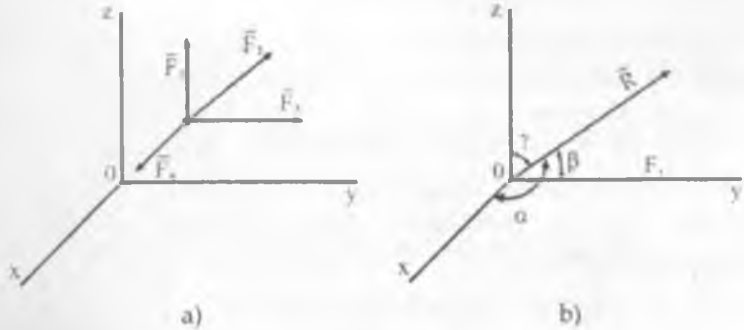
Тенг таъсир этувчи кучнинг миқдори қуйидагига тенг.

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{\left(\sum X\right)^2 + \left(\sum Y\right)^2 + \left(\sum Z\right)^2} \qquad (17)$$

Йуналиши эса қуйидагича аниқланади.

$$\cos \alpha = \frac{R_x}{R}; \quad \cos \beta = \frac{R_y}{R}; \quad \cos \gamma = \frac{R_z}{R}; \qquad (18)$$

Бунда α, β, γ, лар R билан x,y,z уклари орасидаги бурчаклар (32-расм, b).



32-расм.

9-§. БИР НУҚТАГА ҚЎЙИЛГАН КУЧЛАРНИНГ МУВОЗАНАТИ

1. Бир нуқтага қўйилган кучлар системаси мувозанатда бўлиши учун уларнинг тенг таъсир этувчиси $\bar{R}=0$ бўлиши зарур ва етарлидир. Бунда кучлардан тузилган куч кўпбурчаги ёпиқ бўлиши керак. $\bar{R}=0$, $\Sigma\bar{F}=0$ тенгламалар кесишувчи кучлар системаси мувозанатини зарурий ва етарли шартининг вектор ифодасидир.

Демак кесишувчи кучлар системаси таъсиридаги жисм мувозанатда бўлиши учун шу кучларнинг геометрик йиғиндиси нолга тенг бўлиши зарур ва етарли шартдир.

2. Тенг таъсир этувчи куч нолга тенг бўлиши учун (17) - формуладаги қавслар ичидаги ифодаларнинг ҳар бири нолга тенг бўлиши шарт.

$$\begin{aligned} \sum X = 0; \quad & X_1 + X_2 + \ldots + X_n = 0 \\ \sum Y = 0; \quad & Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n = 0 \\ \sum Z = 0; \quad & Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n = 0 \end{aligned} \qquad (19)$$

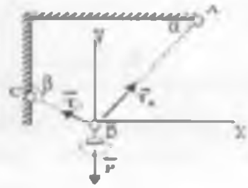
(19) -формула фазодаги таъсир чизиқлари бир нуқтада кесишувчи кучларнинг аналитик мувозанат шартини ифодалайди. Бу шарт қуйидагича таърифланади.

Таъсир чизиқлари бир нуқтада кесишувчи кучлар мувозанатда бўлиши учун кучларнинг x,y,z ўқларидаги проекцияларининг йиғиндиси нолга тенг бўлиши зарур ва етарлидир. Агар кучлар системаси бир текисликда жойлашган булса, (19)-формула куйидаги куринишда булади.

$$\sum X = 0 \quad \sum Y = 0 \qquad (20)$$

(20) - формула бир нуктада кесишувчи ва бир текисликда жойлашган кучларнинг аналитик мувозанат шартини ифодалайди.

<u>Масала.</u> Огирлиги 20н булган электр лампа АВ шнурда шипга осилган ва ВС аркон билан деворга тортиб куйилган. Бурчак $\alpha = 60^0$ ва бурчак $\beta = 135^0$ деб кабул килиб олиб, *AB* шнурнинг T_1, *BC* арконнинг T_c таранглик кучлари аниклансин. Шнур ва арконнинг огирликлари хисобга олинмасин.



33-расм.

<u>Ечиш:</u> В нуктанинг мувозанатини текширамиз. Унга таъсир этувчи ва реакция кучларининг йуналишини чизмада курсатамиз.

Координата укларини чизмада йуналтирамиз. Бир нуктада кесишувчи кучларнинг мувозанат тенгламасини тузамиз.

$$\sum X = 0 \quad T_A \cos 60^0 - T_c \cos 45^0 = 0 \quad (1)$$

$$\sum Y = 0 \quad T_A \sin 60^0 + T_c \sin 45^0 - P = 0 \quad (2)$$

Тенгламаларни ечиб номаълум реакция кучларини топамиз.

$$T_c = \frac{T_A \cos 60^0}{\cos 45^0} = \frac{T_A \cdot 0{,}5}{0{,}7} = \frac{T_A \cdot 5}{7}$$

$$T_A \cdot 0.86 + \frac{T_A \cdot 5}{7} \cdot 0{,}7 - 20 = 0; \quad T_A \cdot 6{,}02 + T_A \cdot 3.5 - 140 = 0$$

$$T_A \cdot 9\ 52 - 140 = 0; \quad T_A = \frac{140}{9.52} = 14.6н;$$

$$T_c = \frac{T_A \cdot 5}{7} = \frac{14{,}6 \cdot 5}{7} = \frac{73}{7} = 10{,}4нж$$

$$T_A = 14{,}6н \quad T_c = 10{,}4н$$

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР.

1. Кучни укдаги проекцияси кандай аникланади?

2. Куч модули проекцияларга асосан қандай аниқланади?

3. Кучни йўналишини проекциялари ёрдамида қандай аниқланади?

4. Тенг таъсир этувчи кучнинг миқдори қандай аниқланади?

5. Тенг таъсир этувчи кучнинг йўналишини қандай аниқланади?

6. Бир нуқтага қўйилган кучларни аналитик қўшиш усули нимадан иборат?

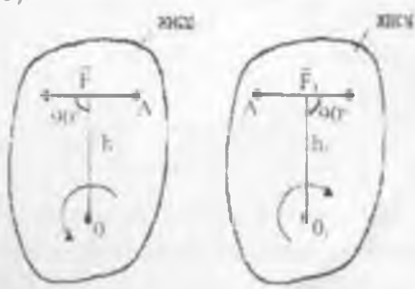
7. Кесишувчи кучлар системасининг аналитик мувозанат шарти қандай ифодаланади?

10-§. НУҚТАГА НИСБАТАН КУЧ МОМЕНТИ

Механикада жисмни айлантирувчи кучнинг таъсири, куч моменти деб аталадиган катталик билан ўлчанади.

Жисмнинг бирор нуқта ёки ўқ атрофидаги айланма ҳаракати куч моментидан боғлиқ бўлади.

0 нуқта атрофида эркин айлана оладиган қаттиқ жисм берилган бўлсин (34-расм а ва b).



a) b)

34-расм.

Жисмни А нуқтага қўйилган F кучи айлантиради.

Жисмни 0 нуқта атрофида тез ёки секин айланиши қуйидагилардан боғлиқ бўлади.

1. Кучни модули ёки қийматидан

2. Кучнинг елкасига

Бирор нуқтага нисбатан кучдан момент олинса бу нуқтага момент маркази дейилади. 0 нуқта момент маркази. Момент марказидан кучнинг таъсир чизиғига туширилган перпендикулярга кучнинг елкаси дейилади. – h ва h_1 - F кучнинг елкаси, F кучнинг 0 нуқтага нисбатан моменти қуйидаги куринишда белгиланади. M_o ёки $m_o(F)$ куч моменти *Н, М, КНМ* билан улчанади.

$$m_0(F) = \pm Fh \qquad (21)$$

(21) - формула ёрдамида кучнинг нуқтага нисбатан моменти топилади.

Нуқтага нисбатан куч моменти қуйидагича таърифланади:

куч миқдори билан шу куч елкасининг купайтмасига билан олинган нуқтага нисбатан кучнинг моменти дейилади

Куч моменти мусбат ва манфий ишора билан тавсифланади

Агар куч момент маркази атрофида жисмни соат стрелкаси айланишига қарама-қарши томонга айлантирса куч моменти мусбат, аксинча манфий булади (34-расм, a ва b).

Нуқтага нисбатан куч моменти қуйидаги хоссаларга эга.

1. Агар кучнинг таъсир чизиги бирор нуқтадан утган булса, кучнинг шу нуқтага нисбатан моменти нолга тенг булади. Чунки бу холда кучнинг елкаси h=0 га тенг (35-расм).

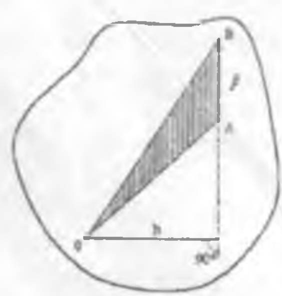
$$m_B(\overline{F}) = F \cdot h = F \cdot 0 = 0 .$$

Бу холда куч жисмни айлантирмайди.

35-расм.

2. Кучнинг миқдори ва йуналишини узгартирмай таъсир чизиги буйлаб истаган нуқтага кучирилса, куч моменти узгармайди (чунки унинг елкаси узгармай қолади).

3. Кучнинг нуқтага нисбатан моменти куч билан шу нуқтадан ташкил булган учбурчак юзасининг иккиланганига тенг.



36-расм.

$\bar{F}$ кучнинг икки учини момент маркази 0 билан туташтирамиз (36-расм). AOB учбурчаги хосил булади. Бу учбурчакнинг юзаси ΔAOB юзаси$=1/2F.h$

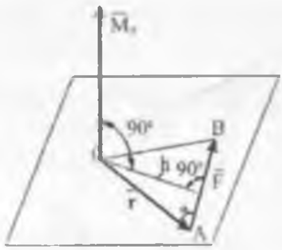
$$2\Delta A0B.юзи = F \cdot h = m_0(\bar{F})$$

$$m_0(\bar{F}) = 2\Delta AOB \text{ юзи} \qquad (22)$$

11-§. КУЧНИНГ НУҚТАГА НИСБАТАН МОМЕНТИ ВЕКТОРИ

$\bar{F}$ кучнинг 0 нуқтага нисбатан моменти момент марказига қуйилган $\bar{M}_0$ вектор булиб, бу марказ ва кучнинг таъсир чизиги орқали утган текисликка перпендикуляр йуналган булади.

$\bar{F}$ кучнинг 0 нуқтага нисбатан момент векторини аниқлаймиз (37-расм).



37-расм.

Бунда $m_0(\bar{F})$ - 0 нуқтага нисбатан олинган $\bar{F}$ куч моментининг вектори $\overline{OA} = \bar{r}$ -А нуқтанинг радиус вектори. Момент вектори куч қуйилган нуқтанинг радиус вектори билан кучнинг вектор купайтмасига тенг.

$$\bar{M}_0 = [\bar{r} \cdot \bar{F}] \qquad (23)$$

Момент вектори $\bar{M}_0$ OAB учбурчак текислигига перпендикуляр булиб, $\bar{M}_0$ нинг учидан қараганда куч жисмни соат стрелкаси айланишига тескари йуналишда айлантиришга интилади. Момент векторининг абсолют қиймати куч моментига тенг.

$$|\bar{M}_0| = m_0(\bar{F}) \qquad (24)$$

(24) – формулани исботлаш учун (23) дан абсолют қиймат оламиз.

$$|\bar{M}_0| = |[\bar{r} \cdot \bar{F}]| = r \cdot F \cdot \sin\alpha = F \cdot h = m_0(\bar{F})$$

Бунда: $h = r\sin\alpha, \quad |M_0| = m_0(F)$.

12-§. ТЕНГ ТАЪСИР ЭТУВЧИНИНГ МОМЕНТИ ҲАҚИДАГИ ТЕОРЕМА (ВАРИНЬОН ТЕОРЕМАСИ)

Теорема. Бир текисликда жойлашган кучлар тенг таъсир этувчисининг бирор нуқтага нисбатан олинган моменти ташкил этувчи кучларнинг шу нуқтага нисбатан олинган моментларининг йиғиндисига тенг.

Исбот. Жисмнинг А нуқтасига $\overline{F_1}, \overline{F_2}, ..., \overline{F_n}$ кучлари қуйилган булсин. Ихтиёрий *0* нуқта оламиз ва *0* ни *А* билан туташтирамиз. *0* марказдан *ОА* кесмага тик қилиб *ОХ* уқини утказамиз (37-расм).

Энди $m_0(\overline{F_1}), m_0(\overline{F_2}), ..., m_0(\overline{F_n})$, моментларнинг ифодасини аниқлаймиз. (22)-формулага асосан $m_0(\overline{F_1}) = 2\Delta 0AB_1$ юзи.

$0AB_1$ учбурчакнинг юзи асоси билан баландлиги купайтмасининг ярмига тенг. Бунда асос ОА кесма булса, баландлиги ob_1 булади.

$$2\Delta 0AB_1 \text{юзи} = OA \cdot ob_1$$

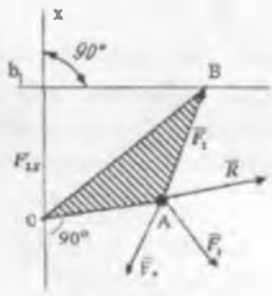
ob_1 кесма $\overline{F}$ кучининг ох уқидаги проекциясини билдиради $ob_1 = F_{1x}$. Шунинг учун

$$m_0(\overline{F_1}) = OA \cdot F_{1x} \tag{25}$$

Қолган кучларнинг моменти ҳам худди шундай ҳисобланади.

$\overline{F}$ куч *ОА* чизиқдан пастга бориб етганда ҳам (25) формула тугри булаверади, бунда кучнинг проекцияси манфий булганлиги учун моментнинг ишораси ҳам манфий булади.

$\overline{F_1}, \overline{F_2}, ..., \overline{F_n}$, кучларнинг тенг таъсир этувчиси $\overline{R}$ билан белгиланади.



38-расм.

$$R = \sum F \qquad (26)$$

Тенг таъсир этувчининг бирор ўқдаги (x ўқидаги) проекцияси қўшилувчи кучларнинг ўша ўқдаги проекцияларининг йиғиндисига тенг, яъни:

$$R_x = \sum F_x \qquad (27)$$

Бу тенгликнинг иккала томонини ОА га кўпайтирсак.

$$OA \cdot R_x = \sum (F_x \cdot OA) \qquad (28)$$

(25) - формулага асосан

$$OA \cdot R_x = \sum m_o(\bar{R})$$
$$\sum (OA \cdot F_x) = \sum m_o(\bar{F}) \qquad (29)$$

(29) ни (28) га қўйиб қуйидагини ҳосил қиламиз.

$$m_o(\bar{R}) = \sum m_o(\bar{F}) \qquad (30)$$

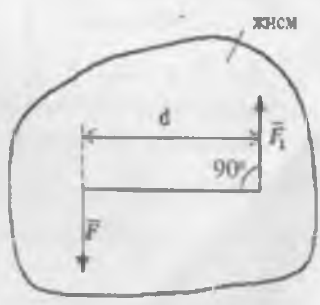
(30) -формула Вариньон теоремасининг математик ифодасидир.

13-§. ЖУФТ КУЧ ВА УНИНГ МОМЕНТИ

Таъриф. Миқдорлари тенг, таъсир чизиқлари бир тўғри чизиқда ётмайдиган, параллел ва қарама-қарши томонга йўналган иккита кучга жуфт куч дейилади.

$$F = F_1; \quad F = -F_1; \quad F \parallel F_1;$$

Жуфт куч (F, F_1) кўринишда белгиланади (39-расм).



39-расм.

F *ва* F_1 кучларга жуфт кучни ташкил этувчи кучлар дейилади.

Жуфт кучни ташкил этувчи кучлар орасидаги энг қисқа d масофага жуфт кучнинг елкаси дейилади. Жуфт кучнинг тенг таъсир этувчиси нолга баробар бўлади.

$$R = F - F_1 = 0, \quad R = 0$$

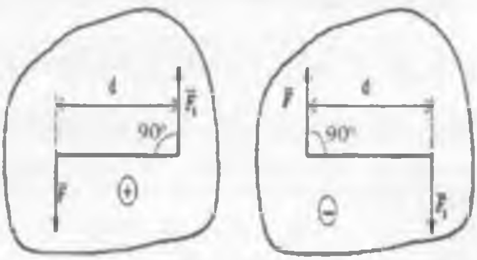
Жуфт кучни битта куч билан алмаштириш мумкин эмас. Жуфт кучни жисмга курсатадиган таъсири жуфт куч моменти билан тавсифланади. Жуфт кучни ташкил этувчи кучларнинг бири билан жуфт куч елкасининг купайтмасига жуфт кучнинг моменти дейилади.

Жуфт кучнинг моменти m, ёки M билан белгиланади.

$$m = \pm F \cdot d = \pm F_1 d \qquad (31)$$

(31)-формула билан жуфт кучнинг моменти аниқланади. Жуфт кучнинг моменти мусбат ёки манфий булади.

Жуфт жисмни соат стрелкаси айланишига тескари томонга айлантирса унинг моменти мусбат, соат стрелкаси айланиши буйича айлантирса манфий ишора билан олинади (40-расм a,b).



a) b)

40-расм.

$$m = F \cdot d \quad m = -F \cdot d$$

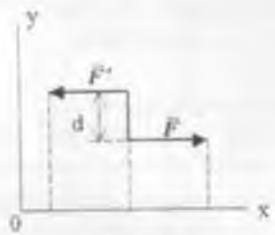
Жуфт куч қуйилган жисм айланма ҳаракатда булади. Ҳар қандай жуфт кучни стрелкали ёй шаклида тасвирлаш мумкин. Стрелка ёнига жуфт куч моменти қуйилади.

Жуфт куч жойлашган текисликка жуфт кучнинг таъсир текислиги дейилади.

<u>Теорема 1.</u> Жуфт кучни ташкил этувчи кучларнинг ҳар қандай ўқдаги проекциялари йиғиндиси нолга тенг.

<u>Исбот:</u> Жуфт куч берилган булсин (41-расм). Шу жуфт кучни x ўқига проекциялаймиз.

$$\Sigma X = 0, \quad F - F^1 = 0 \text{ чунки } F = F^1$$



41-расм.

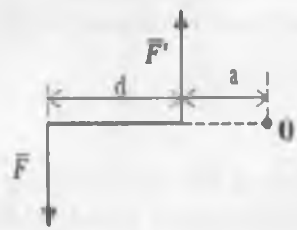
<u>Теорема 2.</u> Жуфт кучни моменти уни ташкил этувчи кучлардан ихтиёрий нуқтага нисбатан олинган моментларнинг йиғиндисига тенг.

$$m = m_0(\overline{F}) + m_0(\overline{F}^1)$$

<u>Исбот.</u> Моменти $m = F \cdot d$ га тенг бўлган $(\overline{F}, \overline{F}^1)$ жуфт куч берилган бўлсин (42-расм). Жуфт кучни ташкил этувчи кучлардан 0 нуқтага нисбатан момент оламиз.

$$m_0(\overline{F}) = F(a+d)$$

$$m_0(\overline{F}^1) = -F^1 a$$



42-расм.

Бу тенгликларнинг иккала қисмини қўшамиз.

$$\begin{aligned} & m_0(\overline{F}) + m_0(\overline{F}^1) = F(a+d) - F^1 a = Fa + Fd - F^1 d = Fd = m \\ & m_0 = m_0(\overline{F}) + m_0(\overline{F}^1) \end{aligned} \qquad (32)$$

Теорема исботланди.

Бу теоремалар шуни курсатадики, жуфт куч проекциялар тенгламаси $\sum X = 0$ $\sum Y = 0$ га иштирок қилмайди. Жуфт кучни бирор нуқтага нисбатан олинган моментлар тенгламасига $(\sum m_i = 0)$ қушиш керак.

14-§. ЖУФТ КУЧЛАРНИНГ ЭКВИВАЛЕНТЛИГИ ҲАҚИДАГИ ТЕОРЕМА

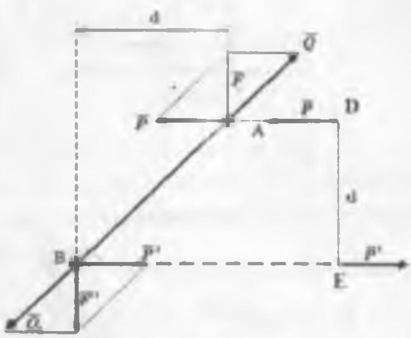
Теорема. Жисмга қўйилган ҳар қандай жуфт кучнинг моменти шу жуфт кучнинг моментига тенг бўлган бошқа жуфт куч билан алмаштириш мумкин.

Исбот. Жисмга моменти $m=Fd$ (F, F^1) бўлган жуфт кучи таъсир қилаётган бўлсин (43-расм).

Ихтиёрий D ва E нуқталардан иккита параллел тўғри чизиқ ўтказамиз. Бу параллел тўғри чизиқ F ва F^1 кучларнинг таъсир чизиғи билан A ва B нуқталарда кесишади. AD ва BE тўғри чизиқлар бўйлаб йўналган ташкил этувчиларини P ва Q билан белгилаймиз. F кучини AB ва BE тўғри чизиқ бўйлаб йўналган ташкил этувчисини Q ва P билан белгилаймиз. Демак

$$\overline{P} = -\overline{P}^1, \quad \overline{Q} = -\overline{Q}^1$$

$\overline{Q}$ ва $\overline{Q}^1$ кучлари ўзаро мувозанатлашувчи, бўлгани учун жисмдан олиб ташлаймиз. Натижада $(\overline{F}, \overline{F}^1)$ жуфт кучини $(\overline{P}, \overline{P}^1)$ жуфт кучи билан алмаштирдик. $(\overline{P}, \overline{P}^1)$ жуфт кучнинг елкаси d_1 га тенг. $\overline{P}$ ва $\overline{P}^1$ кучларини таъсир чизиқлари бўйлаб D ва E нуқталарга келтирамиз.



43-расм.

$(\overline{FF}^1)$ жуфт кучи билан $(\overline{P}, \overline{P}^1)$ жуфт кучининг моментлари тенг эканлигини исботлаймиз.

$(\overline{F})$ кучи $\overline{P}$ ва $\overline{Q}$ кучларнинг тенг таъсир этувчиси Вариньон теоремасига асосан:

$$m_B(F) = m_B(P) + m_B(Q)$$
$$m_B(F) = F \cdot d \qquad m_B(P) = Pd$$
$$m_B(Q) = 0$$

Шундай килиб $Fd = Pd_1$ теорема исботланди.

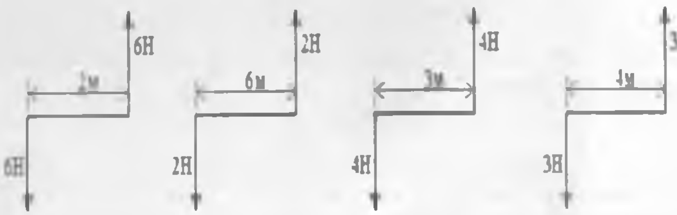
Демак моментлари тенг ва айланиш йуналишлари бир хил булган иккита жуфт куча эквивалент жуфт кучлар дейилади.

Бу теоремадан куйидаги натижа келиб чикади.

1. Жуфт кучни узининг таъсир текислигида ҳар қандай вазиятга кучириш мумкин, бунда жуфт кучни жисмга таъсири ўзгармайди.

2. Жуфт кучнинг моментини узгартирмай уни ташкил этувчи кучларнинг катталигини ва елкасини исталганча ўзгартириш мумкин бу билан жуфт кучнинг жисмга таъсири ўзгармайди.

Масалан, моменти *m=12 кнм* жуфт куч берилган булсин.



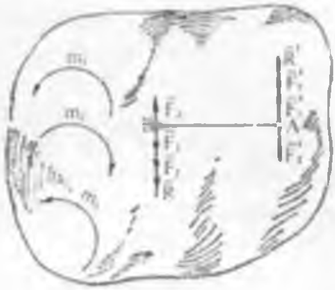
44-расм.

15-§. ТЕКИСЛИКДАГИ ЖУФТ КУЧЛАРНИ ҚЎШИШ. ЖУФТ КУЧЛАРНИНГ МУВОЗАНАТЛИК ШАРТИ

<u>Теорема.</u> Бир текисликда жойлашган бир нечта жуфт кучларни қушиб, моменти шу жуфт кучлар моментлари нинг йиғиндисига тенг булган битта жуфт кучга келтириш мумкин.

<u>Исбот.</u> Бир текисликда жойлашган моментлари m_1, m_2, m_3 булган жуфт кучлар берилган булсин (44-расм). Шу жуфт кучларни қушиб битта тенг таъсир этувчи жуфт кучга келтириш керак. Берилган жуфт кучларни умумий d елкага эга булган эквивалент $(F_1 F_1')$, $(F_2 F_2')$ ва $(F_3 F_3')$ жуфт кучлар билан алмаштирамиз. Эквивалент жуфт кучларнинг таърифига асосан куйидаги формулани ёзамиз.

$$m_1 = F_1 d, \quad m_2 = -F_2 d, \quad m_3 = F_3 d, \qquad (34)$$



45-расм.

А ва В нуқталарга қўйилган кучларни қўшиб тенг таъсир этувчисини аниқлаймиз.

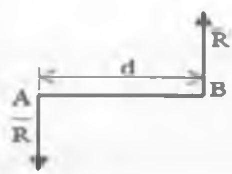
$$R = F_1 - F_2 + F_3$$

$$R' = F_1' - F_2' + F_3' = F_1 - F_2 + F_3$$

Бу кучларнинг модуллари тенг бир бирига қарама-қарши йўналган ва ўзаро параллел.

$$R = R', \quad \overline{R} = -\overline{R}', \quad \overline{R} \parallel \overline{R}'$$

Демак, бу кучлар битта $(\overline{R}, \overline{R}')$ жуфт кучни ташкил этади. Бу жуфт кучга тенг таъсир этувчи жуфт куч дейилади. Демак берилган учта жуфт кучларни қўшиб битта тенг таъсир этувчи янги жуфт кучга келтирдик (46-расм).



46-расм.

Тенг таъсир этувчи жуфт кучнинг моменти қуйидаги формула билан топилади:

$$M = Rd = (F_1 - F_2 + F_3)d = F_1d + (-F_2d) + F_3d = m_1 + m_2 + m_3$$

$$M = m_1 + m_2 + m_3 \tag{35}$$

Бир текисликда жойлашган, моментлари $m_1, m_2, \ldots, m_n$ га тенг бўлган n та жуфт кучлар берилган бўлса, бу жуфт кучларни қўшиб битта тенг таъсир этувчи жуфт кучга келтириш мумкин.

Тенг таъсир этувчи жуфт кучнинг моменти юқоридаги теоремага асосан

$$M = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$$
$$M = \sum m$$ га тенг булади (36)

Бир текисликда жойлашган жуфт кучлар мувозанатда булиши учун улар моментларининг йигиндиси 0 га тенг булиши зарур ва етарлидир.

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_n = 0$$
$$\sum m = 0 \qquad (37)$$

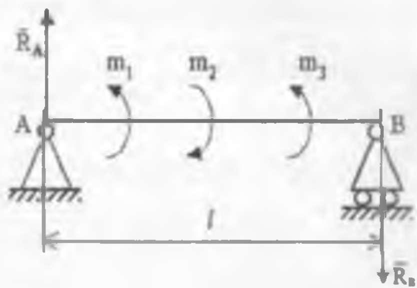
Бу тенглик бир текисликда жойлашган жуфт кучларнинг мувозанат шартини ифодалайди.

<u>Мисол</u>. Балка моментлари

$$m_1 = 6кн.м. \quad m_2 = 8кн.м. \quad m_3 = 12кн.м$$

булган жуфт кучлар таъсирида мувозанатда турган булсин (47-расм).

Балканинг узунлиги l=5 *м*, таянч реакциялари аниқлансин.



47-расм.

<u>Ечиш</u>. Маълумки жуфт кучни бошқа бир жуфт куч билан мувозанатлаш мумкин, шунинг учун балканинг A ва B таянчдаги $\bar{R}_A$ ва R_B реакция кучлари жуфт кучни ташкил қилиш керак. Яъни бу кучларни миқдорлари тенг қарама-қарши томонга йуналган ва параллел булиши зарур.

$$R_A = R_B \quad \bar{R}_A = -\bar{R}_B, \bar{R}_A \parallel \bar{R}_B$$

Бу жуфт кучнинг моменти:

$$m_4 = -R_A \cdot l$$ булади.

Демак, балка моментлари m_1, m_2, m_3 *ва* m_4 ва жуфт кучлари таъсирида мувозанатда туради. (37) - тенгликка асосан:

$$m_1 - m_2 + m_3 - m_4 = 0; \quad 6 - 8 + 12 - 5R_A = 0; \quad R_A = 2kH$$

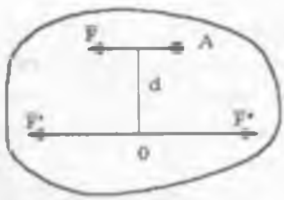
ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР.

1. Нуқтага нисбатан куч моменти деб нимага айтилади?
2. Момент ишораси қандай танланади?
3. Куч елкаси нима?
4. Қандай ҳолатда нуқтага нисбатан куч моменти нолга тенг булади?
5. Кучларни таъсир чизиглари буйича кучирилса, берилган нуқтага нисбатан куч моменти узгарадими?
6. Жуфт куч нима? Нима учун жуфт куч тенг таъсир этувчи кучга эга эмас?
7. Вариньон теоремасини таърифланг?
8. Эркин жисм жуфт куч таъсирида қандай ҳаракат қилади?
9. Жуфт кучни моменти деб нимага айтилади?
10. Қандай шарт бажарилганда иккита жуфт куч эквивалент булади?
11. Жуфт кучларни қушиш туғрисидаги теоремани таърифланг.
12. Жуфт кучлар системасининг мувозанат шартини таърифланг.

ТЕКИСЛИКДА ИХТИЁРИЙ ЖОЙЛАШГАН КУЧЛАР СИСТЕМАСИ.
16-§. КУЧНИ ЎЗИГА ПАРАЛЛЕЛ КЎЧИРИШГА ОИД ЛЕММА

Жисмнинг А нуқтасига $\bar{F}$ кучи қуйилган булсин (48-расм).

Шу кучни таъсир чизиғи устида ётмаган O нуқтага келтириш керак. O нуқтага келтириш маркази дейилади. Шу келтириш марказидан кучнинг таъсир чизиғига перпендикуляр туширамиз ва $\bar{F}$ кучининг O нуқтага нисбатан моментини оламиз.



48-расм.

$$m_0(\bar{F}) = Fd \qquad (38)$$

Бунда d-$\bar{F}$ кучининг O марказга нисбатан елкаси.

Келтириш марказига ўзаро мувозанатлашувчи $\bar{F}'$ ва $\bar{F}''$ кучларини қуямиз. Бу кучлар берилган $\bar{F}$ кучига тенг ва параллел булиши керак $F' = F'' = F$. Кучни келтириш натижасида берилган кучга геометрик тенг ва параллел булган $\bar{F} = \bar{F}'$ кучига ҳамда $(\bar{F}, \bar{F}'')$ жуфт кучига эга буламиз

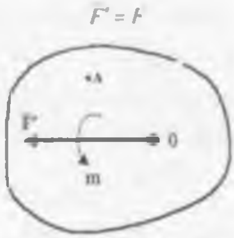
(F, F'') жуфт кучига қўшилган жуфт куч деб аталади бу жуфт кучнинг моменти.

$$m = Fd = F''d \qquad (39)$$

Қўшилган жуфт кучнинг моменти берилган кучнинг келтириш марказига нисбатан олинган моментига тенг.

$$m = m_0(F) \qquad (40)$$

<u>**Лемма**</u>. Ҳар қандай куч таъсир чизиғи устида ётмаган бошқа нуқтага ўзига геометрик тенг ва параллел бўлган куч ҳамда битта жуфт куч билан келади (49-расм).



49-расм.

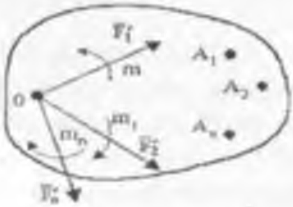
Бу усулга Пуансо усули дейилади.

Бу усул билан ҳар қандай кучни ўзига параллел қилиб таъсир чизиғи устида ётмаган бошқа нуқтага келтириш мумкин.

17-§. ТЕКИСЛИКДА ИХТИЁРИЙ ЖОЙЛАШГАН КУЧЛАРНИ БЕРИЛГАН МАРКАЗГА КЕЛТИРИШ. КУЧЛАР СИСТЕМАСИНИНГ БОШ ВЕКТОРИ ВА БОШ МОМЕНТИ

Бир текисликда ихтиёрий жойлашган $\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n$ кучлар системаси берилган бўлсин. Кучлар мос равишда жисмнинг $A_1, A_2, ..., A_n$ нуқталарига қўйилган (50-расм). Шу кучларни текисликдаги 0 нуқтага келтириш керак. Кучларни берилган марказга келтириш натижасида бир нуқтага қўйилган берилган кучларга тенг ва параллел бўлган n та $F_1' = F_1, F_2' = F_2, ..., F_n' = F_n$ кучларга ва моментлари $m_1, m_2, ..., m_n$ га тенг бўлган n та жуфт кучга эга бўламиз (51-расм).

50-расм.

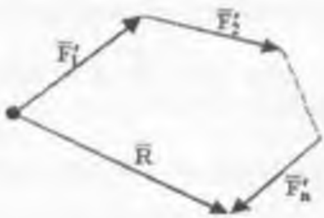


51-расм.

Бу жуфт кучларнинг моменти Пуансо усулига асосан

$m_1 = m_0(\overline{F}_1), \quad m_2 = m_0(\overline{F}_2), \quad .... \quad m_n = m_0(\overline{F}_n)$, бўлади.

Келтириш марказига қўйилган $F_1, F_2, ..., F_n$ кучларини куч кўпбурчагини қўшиш усули билан қўшиб, тенг таъсир этувчисини аниқлаймиз (52-расм).



52-расм.

$$\overline{R} = \overline{F}_1' + \overline{F}_2' + ... + \overline{F}_n' = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + ... + \overline{F}_n = \sum \overline{F}$$
$$\overline{R} = \sum \overline{F} \qquad (41)$$

Бунда $\overline{R}$ бош вектор. Бош вектор берилган кучларнинг геометрик йиғиндисига тенг.

Текисликдаги жуфт кучларни қўшиш ҳақидаги теоремага асосланиб, моментлари $m_1, m_2, ..., m_n$ га тенг бўлган n та жуфт кучларни қўшиб битта жуфт кучга келтирамиз. Бу жуфт кучнинг моментини M_0 билан белгилаймиз.

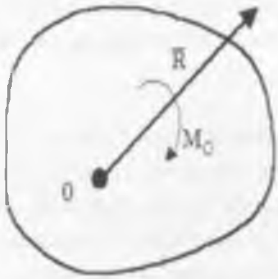
$$M_0 = m_1 + m_2 + ... + m_n = m_0(F_1) + m_0(F_2) + ... + m_0(F_n) = \sum m_0(F)$$
$$M_0 = \sum m_0(\overline{F})$$

(42)

Бунда *Mo* берилган кучларнинг бош моменти. Кучлар системасининг бош моменти берилган кучларнинг келтириш марказига нисбатан олинган моментларнинг йиғиндисига тенг.

- Шундай қилиб статиканинг қуйидаги асосий теоремаси исбот қилинди.

Теорема. Текисликда ихтиёрий жойлашган кучларни келтириш марказига қуйилган кучларни бош вектор $\bar{R}$ га тенг бўлган битта кучга ва моменти бош моменти Мо га тенг бўлган битта жуфт кучга келтириш мумкин (53-расм).



53-расм.

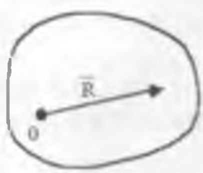
Бош вектор келтириш марказига боғлиқ эмас, бош момент эса келтириш марказига боғлиқ бўлади, келтириш маркази ўзгарса бош моменти ўзгаради, чунки кучларни шу марказга нисбатан елкаси ўзгаради.

Бош векторнинг модули ва йўналишини бир нуқтага қўйилган кучлар системасининг тенг таъсир этувчисининг модулини аниқлайдиган (40) - ва (41) - формулалар билан топилади. Бош моментнинг миқдори (42) - формула билан аниқланади.

Қуйидаги ҳолларни кўриб чиқамиз

1. $\bar{R} \neq 0 \quad M_o = 0$.

Бу ҳолда кучлар системаси келтириш марказига қуйилган битта тенг таъсир этувчи $\bar{R}$ кучига келтирилади (54-расм).



54-расм.

2. Агар $\bar{R} = 0 \quad M_o \neq 0$.

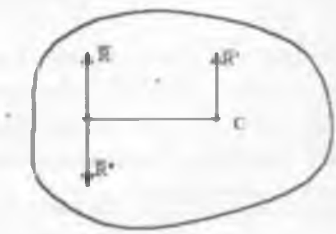
Бу холда кучлар системаси моменти бош моментга тенг бўлган битта жуфт кучга келтирилади (55-расм).

55-расм.

3. $\bar{R} \neq 0$ $M_0 \neq 0$

Бу холда кучлар системаси тенг таъсир этувчи кучга келтирилади, лекин тенг таъсир этувчи кучнинг таъсир чизиги $OC=M_0/R$ шартидан аниқланадиган C нуқтадан ўтади. Кучлар системасини О марказга келтириш натижасида $\bar{R}$ ҳамда Mo ни аниқладик (56-расм).

$\bar{R}' = \bar{R}'' = \bar{R}$ шартини қаноатлантирувчи $(\bar{R}', \bar{R}'')$ жуфтни хосил қилайлик, бу жуфт $m_0(\bar{R}', \bar{R}'') = M_0$ бўлсин. $(\bar{R}, \bar{R}'') \sim 0$ бўлганлиги учун иккинчи аксиомадан фойдаланиб, уни ташлаб юборамиз натижада қиймати бош векторга тенг, йўналиши унга параллел бўлган C нуқта орқали ўтувчи тенг таъсир этувчи кучга эга бўламиз.



56-расм.

4. $R=0$ $M_0=0$

Бу холда берилган кучлар системаси мувозанатда бўлади.

18-§. ТЕКИСЛИКДА ИХТИЁРИЙ ЖОЙЛАШГАН КУЧЛАР СИСТЕМАСИНИНГ АНАЛИТИК МУВОЗАНАТ ШАРТЛАРИ

Текисликда ихтиёрий жойлашган кучлар системаси мувозанатда бўлиши учун уларнинг бош вектори билан бош моменти бир вақтда нолга тенг бўлиши зарур ва етарли.

$$R = 0, \quad M_0 = 0 \qquad (43)$$

(43)-тенглик кучлар системасининг геометрик шаклдаги мувозанатлик шартини ифодалайди.

Аналитик куринишдаги мувозанат шартини ёзамиз.

Бош векторнинг модули куйидаги формула билан аникланади.

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{\left(\sum X\right)^2 + \left(\sum Y\right)^2} \qquad (44)$$

(43)-тенгликнинг биринчи шарти бажарилиш учун яъни R=0 булиши учун, ΣX=0 ΣY=0 булиши керак. (43)-нинг иккинчисига (42)ни куямиз. $\sum m_0(F) = 0$

$$\left.\begin{aligned} \sum X &= 0 \\ \sum Y &= 0 \\ \sum m_0(F) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (45) \qquad \begin{cases} X_1 + X_2 + \ldots + X_n = 0 \\ Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n = 0 \\ m_0(\bar{F}_1) + m_0(\bar{F}_2) + \ldots + m_0(\bar{F}_n) = 0 \end{cases} \qquad (45')$$

(45)-формула текисликда ихтиёрий жойлашган кучлар системасининг биринчи асосий турдаги аналитик мувозанат шартини ифодалайди. Бу шарт куйидагича таърифланади: Текисликда ихтиёрий жойлашган кучлар системаси мувозанатда булиши учун кучларнинг *x,y* укларидаги проекцияларининг йигиндиси ва ихтиёрий *0* нуктага нисбатан моментларнинг йигиндиси нолга тенг булиши зарур ва етарлидир.

Кучлар системасининг иккинчи ва учинчи турдаги аналитик мувозанатлик шартлари мавжуд. Иккинчи турдаги мувозанатлик шарти

$\sum m_A(\bar{F}) = 0 \quad \sum m_B(\bar{F}) = 0 \quad \sum X = 0$ билан ифодаланади (46)

Текисликда ихтиёрий жойлашган кучлар системаси мувозанатда булиши учун ихтиёрий А ва В нукталарга нисбатан моментларнинг йигиндиси ва ОХ ўкига нисбатан проекцияларнинг йигиндиси нольга тенг булиши зарур ва етарли шартдир.

Бу холда *А* ва *В* нукталарни туташтирувчи *АВ* тўгри чизик кесмасини *х* укига перпендикуляр булмайдиган килиб танлаб олиш керак. Акс холда тузилган учта тенгламалардан биттаси колган иккитасининг натижаси булиб колади ва иккита тенглама билан учта номаълумни аниклаб булмайди.

Учинчи турдаги мувозанатлик шарти.

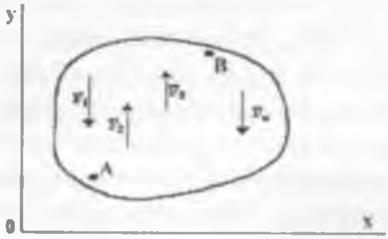
$\sum m_A(\bar{F}) = 0 \quad \sum m_B(\bar{F}) = 0 \quad \sum m_C(\bar{F}) = 0$ билан ифодаланади (47).

Текисликда ихтиёрий жойлашган кучлар системаси мувозанатда булиши учун кучларнинг бир тўгри чизик устида ётмаган учта *А, В* ва *С* нуқталарга нисбатан моментларнинг йиғиндиси нолга тенг бўлиши зарур ва етарли.

Бу холда момент марказлари *A, B* ва *C* нуқталарни бир тўғри чизиқ устида ётмайдиган, яъни учбурчак хосил қиладиган, қилиб танлаб олиш керак. Акс холда юқоридаги эслатмага келамиз.

19-§. ТЕКИСЛИКДАГИ ПАРАЛЛЕЛ КУЧЛАРНИНГ МУВОЗАНАТ ШАРТЛАРИ

Бир текисликда жойлашган ва ўзаро параллел бўлган F_1, F_2, F_3, F_n кучлари берилган бўлсин (57-расм). Кучларга параллел қилиб *y* ўқини йўналтирамиз. Параллел кучларга текисликда ихтиёрий йўналган кучларнинг биринчи ва иккинчи турдаги мувозанат шартини татбиқ қиламиз.



57-расм.

$$\left.\begin{aligned} \sum Y &= 0 \\ \sum m_0(\bar{F}) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (48)$$

$$\left.\begin{aligned} \sum m_A(\bar{F}) &= 0 \\ \sum m_B(\bar{F}) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (49)$$

бунда *A* ва *B* нуқталардан утган тўғри чизиқ *y* ўқига параллел бўлмаслиги керак. (48) - ва (49) - формулалар бир текисликда жойлашган ва ўзаро параллел бўлган кучларнинг мос равишда биринчи ва иккинчи турдаги мувозанат шартини ифодалайдилар.

Биринчи турдаги мувозанат шарти қуйидагича таърифланади.

Бир текисликда жойлашган ва бир бирига параллел кучлар системаси мувозанатда бўлиши учун кучларнинг кучларга параллел бўлган ўқдаги проекцияларининг йиғиндиси ва текисликдаги ихтиёрий

O нуктага нисбатан олинган моментларнинг йигиндиси нолга тенг булиши зарур ва етарлидир.

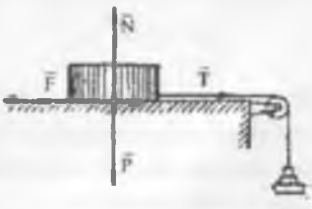
Иккинчи турдаги мувозанат шарти куйидагича таърифланади.

Бир текисликда жойлашган параллел кучлар мувозанатда булиши учун кучларнинг ихтиёрий A ва B нукталарга нисбатан олинган моментларнинг йигиндиси нолга тенг булиши зарур ва етарлидир.

20-§. СИРПАНИШДАГИ ИШҚАЛАНИШ

Бир жисмнинг иккинчи жисм устида сирпаниши натижасида ҳосил буладиган ишқаланишга сирпанишдаги ишқаланиш дейилади.

Огирлиги P га тенг жисм горизонтал столга қуйилган булсин (58-расм). Жисмни блок оркали утказилган ипга боглаймиз. Ипнинг иккинчи учига палла осиб куямиз. Жисм огирлик кучи $\bar{P}$ ва столнинг нормал реакция кучи $\bar{N}$ таъсирида мувозанатда булади. Бу кучлар вертикал кучлардан иборат булгани учун улар жисмни ҳаракатга келтирмайди. Жисмни ҳаракатга келтириш учун паллага тош қуйиш керак. Лекин жисм паллага маълум микдорда тош қуймагунча ҳаракатланмайди. Чунки стол юзаси ва жисмнинг столга тегиб турган юзаси силлиқ булмагани учун ипнинг тортилиш кучи $\bar{T}$ га микдор жиҳатдан тенг, йуналиши қарама-қарши булган $\bar{F}$ ишқаланиш кучи ҳосил булади. $\bar{F}$ кучга сирпанишдаги ишқаланиш кучи дейилади. Т кучнинг қиймати (яъни паллага куйиладиган тош) орта бориб, маълум микдорга етканда жисм силжиш олдида туради, бу ҳолда ишқаланиш кучи $F=F_{max}$ энг катта (максимал) қийматга эга булади.

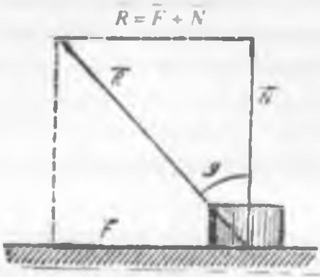


58-расм.

Сирпанишдаги ишқаланиш кучи F нолдан энг катта ишқаланиш кучигача узгаради.

$$0 \le F \le F_{max}$$

Шундай қилиб, дагал текисликнинг тулиқ реакция кучи микдор ва йуналиш жиҳатдан нормал реакция кучи ва ишқаланиш кучларига қурилган тўғри тўртбурчакнинг диагонали билан ифодаланади (59-расм):



59-расм.

Француз олими Ш. Г. Кулон (1736-1806) ўтказган тажрибаларига асосланиб, сирпанишдаги ишқаланиш қонунларини қуйидагича таърифлаган.

1) Тинч ҳолатдаги максимал ишқаланиш куч нормал реакция кучига пропорционалдир.

$$F_{max} = f\, N \qquad (50)$$

Бунда: F_{max} - сирпанишдаги энг катта ишқаланиш кучи; f - сирпанишдаги ишқаланиш коэффициенти; N - нормал реакция кучи.

2) Ишқаланиш кучи жисмларнинг ишқаланувчи сиртлари ўлчамларига боғлиқ бўлмайди.

3) Сирпанишдаги ишқаланиш кучи жисмлар материалига ва ишқаланувчи юзаларнинг ишқаланиш даражасига боғлиқ бўлади. Юзалар силлиқ бўлса ишқаланиш кучи кам бўлади.

(50) дан

$$f = \frac{F_{max}}{N} \quad \text{келиб чиқади} \qquad (51)$$

Яъни сирпанишдаги ишқаланиш коэффициенти ўлчовсиз катталикдир. Турли материаллар учун ишқаланиш коэффициентининг қийматлари маълумотномаларда келтирилган.

Бир жисм иккинчиси устида ҳаракатланганда ҳосил бўладиган ишқаланиш кучи ҳам нормал реакция кучига пропорционал бўлади: $F = f' N$. Бунда f'- жисм ҳаракатлангандаги ишқаланиш коэффициенти бўлиб, у жисмнинг ҳолатидаги ишқаланиш коэффициенти f дан кичик бўлади; $f' < f$

Демак, жисм ҳаракатда бўлганда ишқаланиш кучи тинч турганлагига нисбатан камроқ бўлар экан.

2-§. ИШҚАЛАНИШ БУРЧАГИ. ИШҚАЛАНИШ КОНУСИ

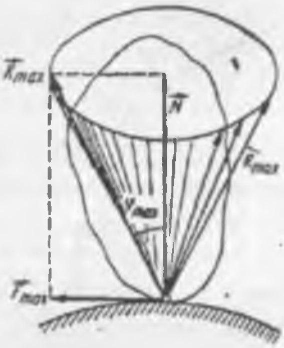
Агар бирор горизонтал текисликка таяниб турган жисм сирпаниш олдида (мувозанат чегарасида) булса, ишқаланиш кучи энг катта қийматга эга булади (60-расм) ҳамда:

$$\overline{R}_{max} = \overline{N} + \overline{F}_{max} \quad \text{булади} \quad (52).$$

Максимал тулиқ реакция кучининг нормал реакция кучи билан ташкил қилган бурчаги ишқаланиш бурчаги дейилади. 72 - расмдан курипиб турибдики,

$$tg\varphi = \frac{F_{max}}{N} = \frac{fN}{N} = f \quad tg\varphi = f \qquad (53)$$

Шундай қилиб, ишқаланиш бурчагининг тангенси ишқаланиш коэффициентига тенг булар экан. Сирпанишдаги ишқаланиш коэффициенти f канча кичик булса, ишқаланиш бурчаги шунча кичик булади.



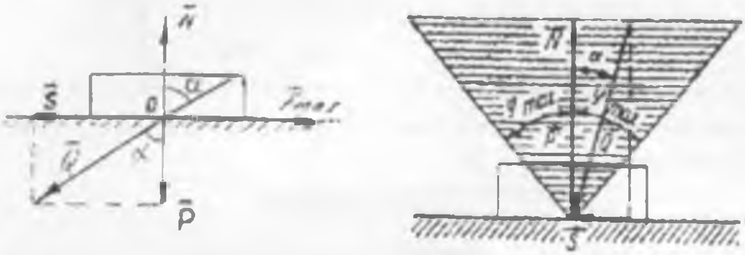
60-расм.

Агар $f=0$ булса, $\varphi=0$ га тенг булади. Бу ҳолда сирпанувчи жисмларнинг юзалари абсолют силлиқ булади. Абсолют силлиқ текисликнинг реакция кучи текисликка перпендикуляр йуналади.

Горизонтал дагал текисликда тинч ҳолда ётувчи жисмга текисликка утказилган нормал билан α бурчак ташкил этувчига Q куч таъсир этсин (61-расм). Q кучни нормал реакция кучи билан мувозанатлашувчи P ва жисмни силжитишга интилувчи S иккита ташкил этувчига ажратамиз. Уларнинг модули:

$$P=Q\cos\alpha, \qquad S=Q\sin\alpha$$

S ташкил этувчи жисмни ҳаракатга келтиришга интилади, P ташкил этувчи эса жисмни текисликка босади. Бунинг натижасида S га қарши йуналган ишқаланиш кучи пайдо булади.



a) b)

61-расм.

Жисмни жойидан силжитиш учун S кучнинг модули, максимал ишқаланиш кучи $F_{max}=f\,N=f\,Q\cos\alpha$ дан катта булиши керак:

$Q\sin\alpha \geq f\,Q\cos\alpha$ ёки $f=tg\,\varphi \leq tg\,\alpha$

Бундан

$$\alpha \geq \varphi \qquad (54)$$

(54) - тенгсизликдан курамизки, агар Q куч текисликка ўтказилган нормалга ишқаланиш бурчаги φ дан кичик бурчак остида таъсир этса, у ҳолда бу куч ҳар канча катта булишига қарамай, жисм тинч ҳолатда қолади.

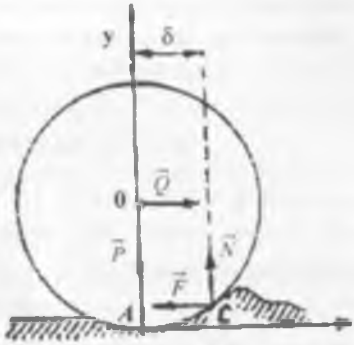
Вертикалга φ бурчак остида ўтказилган тугри чизиқлар билан чегараланган (61-расмда штрихланган) сохага мувозанат сохаси дейилади. Мувозанат сохаси ичида ётувчи Q куч қанча катта булса ҳам текисликка таяниб турган жисмни ҳаракатга келтира олмайди.

Агар жисмни силжитувчи куч турли йуналишларда таъсир этса, мувозанат сохаси учидаги бурчаги **2** φ га тенг ишқаланиш конуси билан чегараланади. Бу ҳолда ишқаланиш конуси ичида ётувчи ҳар қандай куч жисмни ҳаракатга келтира олмайди. Чунки бу ҳолда жисмни силжитувчи куч, максимал ишқаланиш кучидан кичик булади.

22-§. ДУМАЛАШДАГИ ИШҚАЛАНИШ

Бир жисм иккинчи бир жисм устида сирпанмай, думалаб юраётганда думалашдаги ишқаланиш ҳосил булади.

Оғирлиги P ва радиуси R га тенг ғилдирак горизонтал текисликда ётган бўлсин (62-расм). Ғилдиракка унинг О марказидан ўтувчи горизонтал куч қўйилган.



62-расм.

Ғилдирак ва текисликнинг деформацияланиши натижасида ишқаланиш битта нуқтада ҳосил бўлмай, икки жисмнинг бир-бирига тегиб турган эзилган юзасида ҳосил бўлади ва нормал реакция кучи O нуқтадан ўтувчи вертикалдан δ масофада етувси C нуқтага қўйилади.

F ишқаланиш кучи эса тезликларнинг оний марказига қўйилган бўлади.

Ғилдирак учун мувозанат тенгламаларини тузамиз:

$$\Sigma X=0, \quad Q - F = 0 \qquad (1)$$

$$\Sigma Y=0, \quad N - P = 0 \qquad (2)$$

$$\Sigma m_A=0, \quad QR - N\delta = 0 \qquad (3)$$

(1) - ва (2) – тенгламалардан

$$Q=F; \quad P=N$$

Демак, $\overline{Q}, \overline{F}, \overline{P}$ ва $\overline{N}$ кучлари $(\overline{Q}, \overline{F})$ ва $(\overline{P}, \overline{N})$ жуфт кучларни ташкил этади. $(\overline{Q}, \overline{F})$ жуфт куч ғилдиракни ҳаракатга келтиради. Унинг моменти

$$M = QR \text{ га тенг} \qquad (55)$$

$(\overline{P}, \overline{N})$ жуфт кучи ғилдиракнинг думалашига қаршилик кўрсатади, яъни уни мувозанатда сақлаб туради. Бу жуфт кучнинг моментига думалашга қаршилик кўрсатувчи момент дейилади. Унинг миқдори нормал $\overline{N}$ реакция кучи билан думалашдаги δ ишқаланиш коэффициентининг кўпайтмасига тенг.

$$M_{max}=\delta N \qquad (56)$$

Бунда δ - думалашдаги ишқаланиш коэффициенти булиб, узунлик бирлиги билан улчанади. Тажрибаларнинг курсатишича, думалашдаги ишқаланиш коэффициенти жисмларнинг материалига, ишқаланувчи сиртларнинг ишланиш даражасига, гилдиракнинг радиусига ва нормал босимга боглиқ булади. (55) - ва (56) – формулалардан:

$$Q R = \delta N, \qquad (57)$$

бундан

$$Q = \frac{\delta}{R} \cdot N \quad \text{келиб чиқади} \qquad (58)$$

(58)-тенгликдан курамизки (Q, F) ва (P, N) жуфт кучларнинг моментлари узаро тенг булар экан. Бу жуфт кучларга узаро мувозанатлашувчи жуфт кучлар дейилади.

$$F < fN, \quad \frac{\delta}{R} \cdot N < fN, \quad \frac{\delta}{R} < f \qquad (59)$$

(59)-формуладан курамизки гилдирак сирпанмасдан думалаши учун думалашдаги ишқаланиш кучи сирпанишдаги максимал ишқаланиш кучидан кичик бўлиши зарур; бунда f сирпанишдаги ишқаланиш коэффициенти. (59) - тенгсизлик бажарилганда гилдирак сирпанмасдан думалайди.

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР.

1. Қушилган жуфт куч деб нимага айтилади ва унинг моменти нимага тенг?
2. Кучлар системасининг бош вектори деб нимага айтилади ҳамда уни қандай аниқлаш мумкин?
3. Бош момент деб нимага айтилади ва у қандай аниқланади?
4. Бош вектор тенг таъсир этувчи кучдан нима билан фарқ қилади?
5. Келтириш маркази ўзгартирилганда, берилган кучлар системасининг бош вектори ва бош моменти ўзгарадими?
6. Текисликда ихтиёрий жойлашган кучлар системасини қандай ҳолларда битта кучга еки битта жуфт кучга келтириш мумкин?
7. Текисликда ихтиёрий жойлашган кучлар системасининг аналитик мувозанат шарти қандай таърифланади?
8. Мувозанат тенгламаларини уч турини ёзинг?
9. Текисликдаги параллел кучлар системасининг мувозанат тенгламаларини ёзинг?
10. Ишқаланиш бурчаги деб нимага айтилади?
11. Ишқаланиш конуси деб нимага айтилади?

12. Ишқаланиш бурчаги билан ишқаланиш коэффициенти орасида қандай боғланиш мавжуд?
13. Ишқаланиш кучи деб нимага айтилади?
14. Думалаб ишқаланиш коэффициенти деб нимага айтилади?
15. Думалаб ишқаланиш моменти нимага тенг?
16. Ишқаланишнинг қандай турларини биласиз?
17. Сирпаниб ишқаланиш кучи қайси формула билан аниқланади?
18. Мувозанат сохаси нима?
19. Сирпаниб ишқаланиш яхшими ёки думалаб ишқаланиш яхшими ва нима учун?

23-§. ФЕРМА ҲАҚИДА ТУШУНЧА

Тўғри чизиқли стерженлардан ташкил топган геометрик ўзгармас конструкцияга ферма дейилади. Стерженларнинг учларини бирлаштирувчи нуқта тугун дейилади. Стерженлари бир текисликда ётувчи ферма текис ферма дейилади. Фермага таъсир қилувчи кучлар унинг тугунларига қўйилган бўлади. Тугунларга қўйилган кучлардан ферманинг стерженлари фақат чўзилиши ёки сиқилиши мумкин.

Фермалардаги стерженларнинг сони билан тугунлар сони орасида қуйидаги боғланиш мавжуд:

$$m=2n-3$$

Бунда m – фермадаги стерженларнинг сони

n – тугунлар сони

Агар $m<2n-3$ бўлса, у ҳолда ферма геометрик ўзгарувчан бўлади ва $m>2n-3$ бўлганда геометрик ўзгармас бўлиб, у ортиқча стерженларга эга бўлади. Геометрик ўзгармас ва статик аниқ фермани тузиш учун $m=2n-3$ шарти бажарилиши зарур.

Ферма таянчларининг реакцияларини ва фермага қўйилган кучлар таъсиридан унинг стерженларида ҳосил бўладиган зўриқишларни аниқлаш мумкин. Бу зўриқишларни билиш фермани лойиҳалаш вақтида керакли мустаҳкамликдаги стерженларни танлаб олиш учун зарурдир. Бу масалани ечишда:

- ферма стерженларининг оғирлиги эътиборга олинмайди;
- тугунлардаги ишқаланиш ҳисобга олинмайди.

Фермага таъсир этувчи кучлар фақат унинг тугунларига қўйилади деб фараз қилинади.

У холда ферманинг хар бир стерженига, унинг учларига қуйилган ва стержен буйлаб йуналган икки куч таъсир қилади. Демак, ферманинг стерженлари бу кучлар таъсирида фақат чузилиши ёки сиқилиши мумкин.

Ферма стерженларидаги зуриқишлар асосан қуйидаги усуллар билан аниқланади: *1. Тугунлари ёки стерженларни кесиш усули; 2. Риттер усули; 3. Максвелл - Кремон диаграммасини қуриш усули.*

24-§. ФЕРМА СТЕРЖЕНЛАРИДАГИ ЗУРИҚИШЛАРНИ ТУГУНЛАРНИ КЕСИШ УСУЛИ БИЛАН АНИҚЛАШ

Ферманинг хамма стерженларида хосил буладиган зуриқишларни аниқлаш учун тугунни кесиш усулидан фойдаланилади. Бу усул билан ферманинг стерженларидаги зуриқишларни график ва аналитик усул билан аниқлаш мумкин. Ферманинг тугун кесиш усули билан аналитик хисоблаш тартиби қуйидагичадир.

Берилган ферманинг тугунларини харфлар билан, стерженларини эса рақамлар билан белгилаб чиқилади.

Таянчлар олиб ташланади ва уларнинг фермага берадиган таъсирини хозирча бизга номаълум булган таянч реакциялари билан алмаштирилади. Таянч реакция кучлари аникланади.

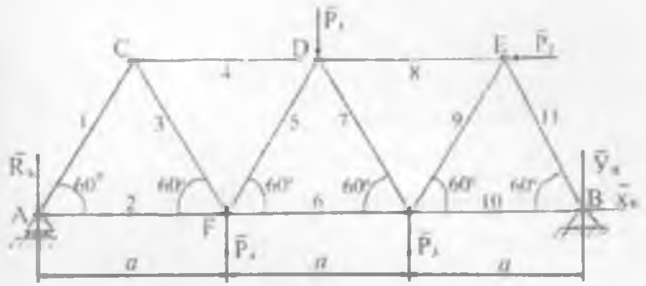
Ферманинг тугунларини кесиб олинади (кесилган тугунлар схемаси чизилади):

Ферманинг хамма стерженлари чузилган (зуриқишлар тугунлардан стерженлар томонига йуналган) деб фараз қилиб, ферманинг хар бир тугуни учун мувозанат тенгламалари $(\sum X = 0; \sum Y = 0)$ тузилади. Тугундан тугунга утиш тартиби текшираётган тугундаги номаълум кучлар сони иккитадан куп булмаслиги керак, деган талабни қондириши лозим.

Бу мувозанат тенгламалари ечилади ва стерженлардаги изланаётган зуриқишларнинг катталиги хамда ишораси аниқланади.

<u>Мисол.</u> Ферманинг таянч реакциялари ва стерженларида пайдо буладиган зурикиш кучлар аниклансин (63-расм). Қуйидагилар берилган:

$$a=5м;\ P_1=10кН,\ P_2=20кН,\ P_3=30кН,\ P_4=40кН.$$



63-расм.

Ечиш. 1) Таянч реакцияларини аниқлаш.

Фермага берилган кучлар, $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \bar{P}_4$ В қузғалмас таянч $\bar{X}_B$ ва $\bar{Y}_B$ реакциялари, А қузғалувчан таянчнинг $\bar{R}_A$ реакцияси қўйилган. Бу кучлар текисликда ихтиёрий равишда жойлашган кучлар бўлгани учун уларнинг мувозанат шарти қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$\sum X = 0; X_B - P_2 = 0 \qquad X_B = P_2 = 20кМ$$

$$\sum Y = 0; R_A - P_1 - P_3 - P_4 + Y_B = 0;$$

$$\sum M_A = 0; -P_4 \cdot a - P_1 \cdot \frac{3}{2}a - P_3 \cdot 2a + P_2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a + Y_B \cdot 3a = 0$$

Тузилган тенгламаларни ечиб реакция кучларини аникланади:

$$Y_B = \frac{P_4 + P_1 \cdot \frac{3}{2} + P_3 \cdot 2 - P_2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{3} = \frac{40 + 10 \cdot \frac{3}{2} + 30 \cdot 2 - 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{3} = 32{,}56\,кН$$

$$R_A = P_1 + P_3 + P_4 - Y_B = 10 + 30 + 40 - 32{,}56 = 47{,}44\,кН$$

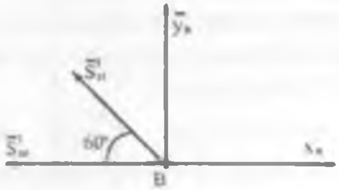
2) Стерженларда ҳосил буладиган зурикиш кучларини аниқлаш. Ферманинг тугунларини $A, B, C, Д, E$ ва F харфлар билан белгиланади. Энг олдин A ёки B тугунларини кесиш мумкин. Чунки бу тугунларда реакциялари аниқланмаган икки стержен (1,2 ёки 10 ва II стерженлар) бор. A тугуни кесилади. A тугунга A шарнирнинг $\bar{R}_A$ реакцияси ва кесилган 1 ва 2 - стерженнинг $\bar{S}_1$ ва $\bar{S}_2$ реакциялари қуйилган (64- расм). A тугунга қуйилган кесишувчи кучларнинг мувозанат тенгламалари тузилади:

$$\sum X = 0; S_2 + S_1 \cos 60^\circ = 0$$

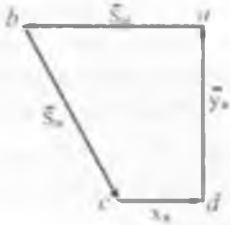
$$\sum Y = 0; R_A + S_1 \sin 60^\circ = 0$$

$$S_1 = -\frac{R_A}{\sin 60^\circ} = 2\frac{47{,}44}{\sqrt{3}} = -54{,}78кН$$

$$S_2 = -S_1 \cos 60^\circ = -(-54{,}78) \cdot 0{,}5 = 27{,}39кН$$



71-расм.



72-расм.

$$\sum X = 0; X_B - S_{10} - S_{11}\cos 60^0 = 0$$

$$\sum Y = 0; Y_B + S_{11}\cos 30^0 = 0;$$

Бу тенгламалардан:

$$S_{11} = -\frac{Y_B}{\cos 30^0} = -\frac{2\cdot Y_B}{\sqrt{3}}$$

$$S_{11} = -\frac{2\cdot 32.56}{1.73} = -37.64KH$$

$S_{11} = -37.64KH$ келиб чиқади.

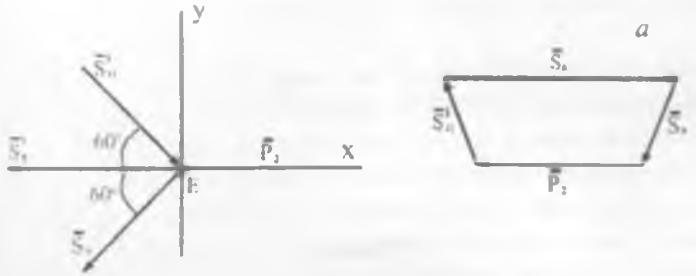
Демак, 11 - стержен сиқилади.

$$S_{10} = X_B - S_{11}\cos 60^0 = 20 + 37.64\cdot 0.5$$

$$S_{10} = 20 + 18.82 = 38.82KH \quad S_{10} = 38.82KH$$

$\overline{S_{10}}$ *ва* $\overline{S_{11}}$ реакция кучларини график усулда аниқланади. Бунинг учун *В* тугунга қўйилган кучлардан куч кўпбурчаки қурилади (72-расм). Бу кўпбурчак ёпиқ бўлиши керак, чунки *В* тугунга кучлар системаси мувозанатда турибди. Ихтиёрий нуқта олиб, бу нуқтага ўзига параллел қилиб *М=10 кн/м* масштабда $\overline{X_B}$ куч келтириб қўйилади. Унинг учига ўзиа параллел қилиб худди шу масштабда $\overline{Y_B}$ кучи келтирилади. Бу куч учига ўзига параллел қилиб $\overline{S_{10}}$ кучни, унинг учига ўзига параллел қилиб $\overline{S_{11}}$ куч келтирилади. Натижада куч кўпбурчаги ҳосил бўлади (72-расм).

6) Энди *Е* тугуни кесилади. Бу тугунга берилган $\overline{P_1}$ куч ҳамда 8-, 9- ва 11-стерженларнинг реакция кучлари қўйилган (73-расм, а). Бунда *Е* тугунга қўйилган 11-стерженнинг реакция кучи $\overline{S_2}$ миқдор жиҳатдан $\overline{S_2}$ га тенг ва унга қарама-қарши йўналганлигини эътиборга олиш лозим. *Е* тугун учун иккита мувозанат тенгламалари тузилади:



a) b)

73-расм.

$$\begin{cases} \sum X = 0; \ -P_3 - S_8 - S_9 \cos 60^0 + S_{11} \cos 60^0 = 0 \\ \sum Y = 0; \ -S_{11}^1 \cos 30^0 - S_9 \cos 30^0 = 0; \end{cases}$$

Бу тенгламаларни ечиб:

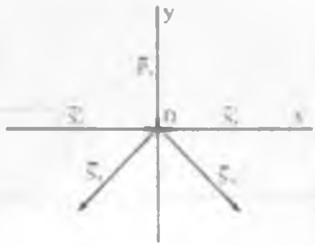
$S_8 = -P_3 - S_9 \cos 60^0 + S_{11} \cos 60^0 = -20 - 37.6 \cdot 0.5 + 37.6 \cdot 0.5 = 38.8 + 18.8 = -20KH$

$S_9 = S_{11}^1 = 37.64KH$, $S_8 = -20KH$ олинади.

E тугун учун куч купбурчаги (73- расм, b).

Энди D тугуни кесилади. Бу тугун берилган $\overline{P_1}$ куч ҳамда 4-, 5-, 6-, 7-, ва 8-стерженларнинг реакция кучлари қўйилган (74-расм). Мувозанат тенгламаларини тузишда 4-, 5-, ва 8 - стерженларнинг реакция кучлари $\overline{S_4^1}, \overline{S_5^1}$ ва $\overline{S_8^1}$ C, F ва E тугунларга қўйилган $\overline{S_4}, \overline{S_5}$ ва $\overline{S_8}$ реакцияси кучларга миқдор жиҳатдан тенг, йўналиши қарама-қарши эканлигини эътиборга олиш лозим. $Д$ тугун учун битта мувозанат тенгламасини тузиш кифоя, битта номаълум стерженнинг зўриқишини аниқлаш қолди холос. 7-стержендаги реакция кучи аниқланади:

$$\begin{cases} \sum Y = 0; -P_1 + S_5^1 \cos 30^0 - S_7 \cos 30^0 = 0 \\ S_7 \cos 30^0 = -P_1 + S_4^1 \cos 30^0 \\ S_7 = -\dfrac{P_1}{\cos 30^0} + S_5^1 = -\dfrac{2 \cdot P_1}{\sqrt{3}} + S_5^1 \\ S_7 = -\dfrac{2 \cdot 10}{1{,}73} + 8{,}54 = -1156 + 8{,}54 = -3{,}02 \\ S_7 = -3{,}02KH. \end{cases}$$



74-расм.

Демак, 7 - стержен сиқилади.

Стержендаги зўриқиш миқдор жиҳатдан унга реакция кучига тенг бўлади. Сиқиладиган стержендаги зўриқиш кучи шартли равишда манфий ишора билан белгиланади. Олинган натижалар қуйидаги жадвалда келтирилган:

Стержень рақами	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.
Зўриқиш, кН хисобида	-54,78	-27,39	54,78	-54,78	-8,54	59,05	-3,02	-20	-37,84	38,82	-37,64

25-§. ФЕРМА СТЕРЖЕНЛАРИДАГИ ЗЎРИҚИШЛАРНИ РИТТЕР УСУЛИ БИЛАН АНИҚЛАШ

Агар текис ферманинг барча стержинларидаги зўриқишларни аниқлаш зарур бўлса тугунни кесиш усулидан фойдаланиш энг қулай ҳисобланади. Лекин ферманинг айрим стержинларидаги зўриқишларни аниқлаш лозим бўлса, у ҳолда Риттер 1826-1906 томонидан кашф қилинган ва унинг номи билан аталадиган усулдан фойдаланиш мақсадга мувофиқдир. Бу усулда ҳам дастлаб ферманинг таянч реакциялари аниқланади.

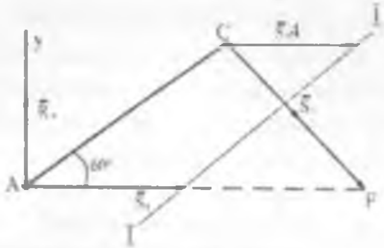
Риттер усулининг моҳияти шундан иборатки, ферма бирор I-I кесим билан қирқиб икки қисмга ажратилади ва ажратилган қисмнинг мувозанати текширилади. Текисликда ихтиёрий жойлашган кучлар системасининг мувозанат тенгламалари ёрдамида учта номаълум катталикни аниқлаш мумкин. Шу сабабли фермани шундай кесим билан кесиш керакки, реакция кучлари номаълум булган стерженлар сони учтадан ошмасин.

Ферманинг кесилган бир кисмини ташлаб қуйиб, унинг фермани иккинчи кисмига курсатадиган таъсирини кесилган стерженлар буйлаб ташлаб қуйилган томонга йуналган кучлар билан алмаштирамиз, яъни барча кесилган стерженлар чузилади деб фараз киламиз. Тузилган мувозанат тенгламаси ечилганда бирорта стерженнинг реакция кучи манфий ишорали чикса, унинг йуналиши кабул килинган йуналишга карама-карши булиб, мазкур стержен аслида сикилади. Ферманинг колган кисми учун текисликда ихтиёрий жойлашган кучлар системасининг мувозанат тенгламалари тузилиб ва бу тенгламаларни ечиб, стерженларнинг номаълум реакция кучлари аникланади. Тенгламалар тузишда имкони борича ҳар бир тенгламада номаълумлар сони биттадан ошмаслигига ҳаракат қилиш керак. Тенгламаларни тузишда момент маркази учун учта номаълум реакция кучидан кетма – кет иккитасининг таъсир чизиғи кесишган нуқтани олиш тавсия этилади. Бундай нуқталар момент ёки **Риттер** нуқталари деб аталади. Агар реакция кучи аникланадиган учта стержендан иккитаси параллел булса, демак уларнинг кесишиш нуқтаси чексизликда ётади, моментлар тенгламасидан бирининг урнига кучларнинг параллел стерженларга перпендикуляр ўқга проекцияси тенгламасини тузиш мумкин, яъни $\sum Y = 0$ ёки $\sum X = 0$.

Риттер усулининг афзаллиги шундаки, у ферманинг исталган стерженидаги зўриқишни бошқа стерженлардаги зўриқишларни ҳисобламай туриб аниқлашга имкон беради. Унинг соддалиги шундаки, баён қилинган усулда тузилган ҳар бир тенгламага факат битта номаълум киради.

Риттер усули билан 1 – масалада берилган ферманинг 2-, 3-, 4-, 6-, 7- ва 8-стреженларидаги зўриқишларни аниқлаймиз. Юқорида курганимиздек, фермага $P_1 = 10\ kH$, $P_2 = 20\ kH$, $P_3 = 30\ kH$, $P_4 = 40\ kH$ кучлар таъсир этади ва унинг таянч реакциялари $R_A=47{,}44$ *кН*, $X_B=20$ *кН*, $Y_B=32{,}56$ *кН* га тенг.

2-, 3- ва 4 - стерженлардаги зўриқишни топиш учун ферманинг 2-, 3- ва 4-стерженларини I-I кесим билан кесилади. Ферманинг ўнг томони ташлаб қуйилади, қолдирилган кисмнинг чап кисмига берадиган таъсирини мос стерженлар буйлаб йуналган $\overline{S}_2, \overline{S}_3$ *ва* $\overline{S}_4$ зўриқиш кучлари билан алмаштирамиз (75-расм). Ферманинг чап қисми $\overline{S}_2$, $\overline{S}_3$, $\overline{S}_4$ ва $\overline{R}_A$ кучлар таъсири остида мувозанатда турибди.



75-расм.

$\overline{S}_2$ зўриқиш кучини аниқлаш учун иккита номаълум $\overline{S}_3$ ва $\overline{S}_4$ кучлари кесишган C нуқтага нисбатан моментлар тенгламаси тузилади.

$$\left|\begin{array}{l} \sum m_c = 0; -R_A \cdot \dfrac{a}{2} + S_2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} a = 0, \quad h = \dfrac{a}{2} tg60^\circ = \dfrac{a}{2}\sqrt{3} \\ S_2 = \dfrac{R_A}{\sqrt{3}} = \dfrac{47.44}{1.73} = 27.4KH \end{array}\right.$$

$\overline{S}_3$ ва $\overline{S}_4$ кучлари кесишган F нуқтага нисбатан моментлар тенгламасини тузиб $\overline{S}_4$ кучини аниқланади:

$$\left|\begin{array}{l} \sum m_F = 0; -R_A \cdot a - S_4 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} a = 0; \\ S_4 = \dfrac{2R_A}{\sqrt{3}} = -\dfrac{2 \cdot 47,44}{1,73} = -54,8KH, \ S_4 = -54,8KH \end{array}\right.$$

2- ва 4-стерженлар ўзаро параллел. Бу ҳолда момент нуқтаси чексизликда бўлади. Шунинг учун қия стержендаги, яъни 3-стержендаги зўриқишни топиш учун моментлар тенгламаси эмас, кучларнинг проекциялари тенгламаси тузилади. Кучларни шундай ўққа проекциялаш керакки, бунда ҳам тенгламада фақат битта номаълум катнашадиган бўлсин. Бунда ўқ сифатида вертикал ўқ олинади, 75-расмдаги кучлар вертикал A_y ўкга проекцияланади:

$$\sum Y = 0; R_A - S_3 \cos 30^\circ = 0$$

$$S_3 = \frac{R_A}{\cos 330^\circ} = \frac{2 \cdot R_A}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot 47,44}{1,73} = 54,8KH.$$

Олинган натижани тугунни кесиш усули билан аниқланган натижа (1-жадвал) билан солиштирсак, Риттер усулида ҳисобланган ферма стерженлардаги зўриқишлар қиймати тенг бўлишини кўрамиз.

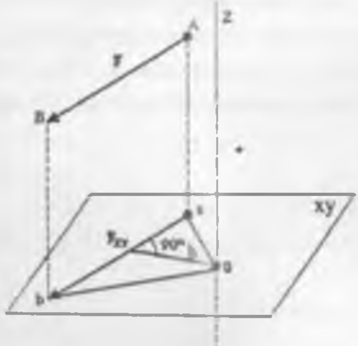
ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР

1. Қандай иншоотга ферма дейилади?
2. Тугунларни кесиш усулининг моҳияти нимадан иборат?
3. Риттер усулининг моҳияти нимадан иборат?
4. Қандай фермалар ортиқча стерженли фермалар дейилади?
5. Ортиқча стерженларга эга бўлмаган фермалар стерженлар сони билан тугунлар сони орасида қандай боғланиш мавжуд?

26-§. ФАЗОДА ИХТИЁРИЙ ЖОЙЛАШГАН КУЧЛАР СИСТЕМАСИ. ЎҚҚА НИСБАТАН КУЧ МОМЕНТИ

Фазода ихтиёрий жойлашган кучлар системасига оид статика масалаларини ечишда кучнинг ўкга нисбатан моменти тушунчасидан фойдаланилади.

Жисмнинг *A* нуқтасига қўйилган $\overline{F}$ кучи ва *Z* ўқи берилган бўлсин (75-расм). Кучнинг шу ўқга нисбатан моментини аниқлаймиз. Бунинг учун *Z* ўқига перпендикуляр қилиб *(xy)* текислигини ўтказамиз ва $\overline{F}$ кучини шу текисликка проекциялаймиз.



76-расм.

Бунинг учун кучни икки учидан текисликка перпендикуляр туширамиз (76-расм).

$\overline{ав} = \overline{F}_{xy} - \overline{F}$ кучининг ху текисликдаги проекцияси вектор катталик, чунки *у* қийматга ва йўналишига эга. Кучнинг проекциясидан куч билан *z* ўқи кесишган *0* нуқтасига нисбатан момент олинади. $\overline{F}$ кучининг *z* ўқига нисбатан моменти $m_z(\overline{F})$ билан белгиланади. Кучнинг *z* ўқига нисбатан моменти қуйидаги формула билан топилади.

$$m_z(\overline{F}) = m_0(\overline{F}_n) = \pm Fxy \cdot h \qquad (60)$$

Бунда h-F_{xy} кучининг 0 нуқтага нисбатан елкаси. (60) - формула қуйидагича таърифланади.

Кучнинг ўққа нисбатан моменти кучнинг шу ўққа перпендикуляр текисликдаги проекциясидан ўқ билан текисликнинг кесишган нуқтасига нисбатан олинган моментига тенг булади.

Кучнинг ўққа нисбатан моменти сколяр миқдор булиб, ўқнинг мусбат йўналишидан қараганда кучнинг ўққа перпендикуляр текисликдаги проекцияси жисмни соат стрелкаси ҳаракатига тескари йуналишда айлантиришга интилса, куч моменти мусбат, акс ҳолда манфий ишора билан олинади.

О нуқта билан *а, в* нуқталарни туташтирилади (76-расм), натижада *оав* учбурчаги ҳосил бўлади.

Бу учбурчакнинг юзаси

$$\Delta\, 0ав\ юзи = 1/2\, F_{xy}\, h \qquad (61)$$

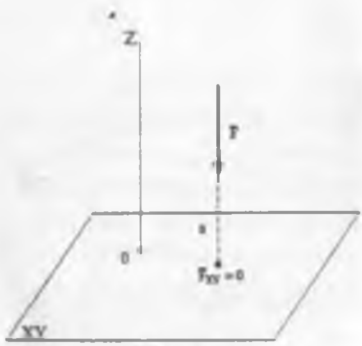
$$2 \cdot \Delta 0ав \quad юзи = F_{xy} \cdot h = m_z(\overline{F})$$

$$m_z(F) = 2 \cdot \Delta 0ав.юзи \qquad (62)$$

Демак, ўқга нисбатан куч моменти *0* нуқтадан ва $\overline{F}xy$ кучдан тузилган учбурчак юзининг иккиланганига тенг.

Қуйидаги ҳолларда ўқга нисбатан куч моменти нолга тенг бўлади.

1) $\overline{F}$ кучи z ўқига параллел булганда (77-расм).

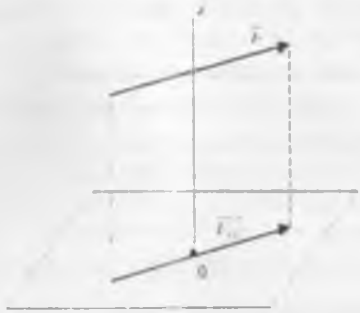


77-расм.

Бу ҳолда кучнинг z ўқига перпендикуляр бўлган текисликдаги проекцияси нолга тенг бўлади.

$$Fxy=0$$

2) $\overline{F}$ кучи z ўқи билан кесишган бўлса



78-расм.

Бу ҳолда кучнинг елкаси нолга тенг булади, h=0.

Бу икки ҳолни қуйидагича бирлаштириш мумкин.

Куч билан уқ бир текисликда ётган булса кучнинг шу уқга нисбатан моменти нолга тенг булади. Бу икки ҳолда ҳам кучи жисмни z уқи атрофида айлантира олмайди. Куч жисмни фақат уқ буйлаб силжитади. Уққа нисбатан куч моментининг механик маъноси қуйидагича таърифланади.

Уққа нисбатан куч моменти кучнинг жисмни шу уқ атрофида айлантириш қобилиятини тавсифлайди.

Уқга нисбатан куч моментини аниқлаш учун;

1. Уқга перпендикуляр текислик утказиш керак.

2. Кучни шу текисликка проекциялаш керак, яъни проекциянинг F_0 модулини ҳисоблаш керак.

3. Уқ билан текисликнинг кесишган нуқтасидан кучнинг проекциясига перпендикуляр тушириб, кучнинг елкаси аниқланади h топилади.

4. Кучнинг уққа нисбатан моментини ҳисоблаш лозим.

5. Уққа нисбатан куч моментининг ишорасини аниқлаш керак.

27-§. НУҚТАГА НИСБАТАН КУЧ МОМЕНТИ БИЛАН ШУ НУҚТАДАН УТГАН УҚГА НИСБАТАН КУЧ МОМЕНТИ ОРАСИДАГИ МУНОСАБАТ

Теорема: Кучнинг бирор уққа нисбатан моменти унинг шу уқда олинган ихтиёрий нуқтага нисбатан момент векторининг мазкур уқдаги проекциясига тенг.

<u>Исбот:</u> Фазодаги бирор *A* нуктага   кучи қуйилган булсин (79-расм).

Бу кучни *0* нуктага нисбатан моменти   шу нуктага қуйилган вектор катталик бўлиб, ОАВ учбурчак текислигига перпендикуляр йуналган, унинг модули қуйидаги формула билан топилади;

$$M_{.} = 2 \cdot \Delta OAB \text{ юзи} \qquad (63)$$

Момент векторининг z уки билан ташкил килган бурчагини γ билан белгиласак   момент векторининг z укидаги проекцияси қуйидагича ифодаланади.

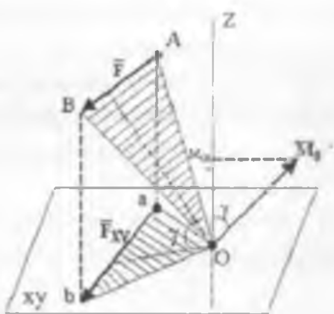
$$\left[\overline{M}_0(\overline{F})\right]_z = \left[M_0(\overline{F})\right]\cos\gamma = 2S_{\Delta OAB}\cdot\cos\gamma \qquad (64)$$

ОАВ ва оав учбурчакларнинг текисликлари орасидаги бурчак бу текисликларга перпендикуляр йўналган   вектор ва ук орасидаги γ бурчакка тенг. ОАВ учбурчакнинг *xy* текисликдаги проекцияси оав га тенг булганлиги учун

$$2S_{\Delta OAB}\cdot\cos\gamma = 2S_{\Delta oab} \qquad (65)$$

У холда

$$\left[\overline{M}_0(\overline{F})\right]_z = M_0\cos\alpha \qquad (66)$$



79-расм.

79-расмда $F_{xy}\cdot h=2S_{\Delta oab}$ булганлиги учун (60) га асосан

$$M_Z(\overline{F}) = \pm 2S_{\Delta oab} \qquad (67)$$

(66) ва (67) ни солиштириб қуйидаги олинади.

$$M_z(\overline{F}) = \left[\overline{M}_0(\overline{F})\right]_z \qquad (67')$$

Худди шунингдек кучнинг колган координата укларга нисбатан моментлари хисобланади. Натижада

$$M_x(\overline{F}) = \left[\overline{M}_0(\overline{F})\right]_x, \quad M_y(\overline{F}) = \left[\overline{M}_0(\overline{F})\right]_y, \quad M_z(\overline{F}) = \left[\overline{M}_0(\overline{F})\right]_z.$$

формула келиб чиқади.

Демак (67') – формула нуктага нисбатан куч моменти билан шу нуктадан ўтган укта нисбатан куч моменти орасидаги муносабатни ифодалайди: Нуктага нисбатан куч моментининг шу нуктадан ўтган ўқдаги проекцияси кучнинг шу укта нисбатан олинган моментига тенг.

28-§. КООРДИНАТА ЎҚЛАРИГА НИСБАТАН КУЧ МОМЕНТИНИ ҲИСОБЛАШ УЧУН ФОРМУЛАЛАР

F кучнинг координата ўқларидаги проекциялари Fx, Fy, Fz ва шу куч қўйилган A нуқтанинг x, y, z координаталари берилган бўлсин (80-расм). Координата бошини O нуқтада олиб x, y, z ўқларини ўтказамиз. Координата ўқларини бирлик векторини i, j, k билан белгилаймиз.

$$M_O(F) = r \times F$$ ни

дитерминанд шаклида ёзамиз.

$$M_O(F) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix}$$

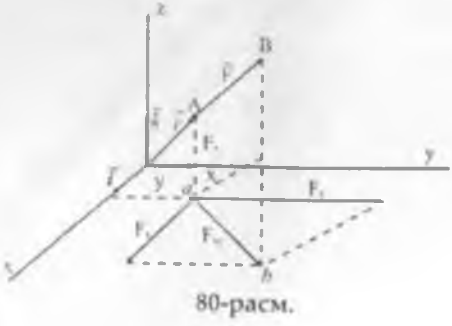
Дитерминантнинг биринчи йулини элементлари буича ёйиб чиқамиз.

$$M_O(\bar{F}) = (yZ - zY)\cdot i + (xZ - zX)\cdot j + (xY - yX)\cdot k \qquad (68)$$

(68) - формулада бирлик векторлар олдидаги коэффициентлар кучнинг координата ўқларидаги моменти бўлади.

$$\begin{aligned} m_x(F) &= yFz - zFy \\ m_y(F) &= zFx - xFz \\ m_z(F) &= xFy - yFx \end{aligned} \qquad (68')$$

(68')-формулалар кучнинг координата ўқларига нисбатан моментларининг аналитик ифодасидир.



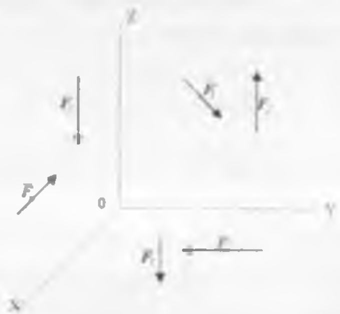
80-расм.

29-§. ФАЗОДА ИХТИЁРИЙ ЖОЙЛАШГАН КУЧЛАР СИСТЕМАСИНИ БЕРИЛГАН МАРКАЗГА КЕЛТИРИШ. КУЧЛАР СИСТЕМАСИНИНГ БОШ ВЕКТОРИ ВА БОШ МОМЕНТИ

Фазода ихтиёрий жойлашган $F_1, F_2, \ldots F_n$ кучлар системаси берилган булсин (81-расм). Шу кучларни 0 нуктага келтириш лозим булсин. Фазода ихтиёрий жойлашган кучларни текисликда ихтиёрий жойлашган кучларга ухшаш бош вектор R га тенг булган битта кучга ва моменти бош момент га тенг булган битта жуфт кучга келтириш мумкин. Бош вектор берилган кучларнинг геометрик йигиндисига тенг.

$$R = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + \ldots + F_n = \sum F$$

$$R = \sum F \qquad (69)$$



81-расм.

Бош момент эса келтирилиши керак булган кучларнинг келтириш марказига нисбатан олинган моментларнинг геометрик йигиндисига тенг.

$$\bar{M}_O = \bar{m}_O(\bar{F}_1) + \bar{m}_O(\bar{F}_2) + \ldots + \bar{m}_O(\bar{F}_n) = \sum \bar{m}_O(\bar{F})$$

$$M_O = \sum \bar{m}_O(F) \qquad (70)$$

Шундай килиб; фазода ихтиёрий жойлашган кучлар системаси бирор 0 марказга келтириш натижасида бу кучлар системаси келтириш марказига куйилган бош вектор $\bar{R}$ га тенг битта куч билан, моменти эса бош момент M_O га тенг битта жуфт кучга келтирилади (82-расм).

82-расм.

30-§. ФАЗОДА ИХТИЁРИЙ ЖОЙЛАШГАН КУЧЛАР СИСТЕМАСИНИНГ БОШ ВЕКТОРИ ВА БОШ МОМЕНТИНИ ҲИСОБЛАШ

1. Бош векторни ҳисоблаймиз. Бунинг учун (69)-вектор тенгламанинг иккала қисмини координата ўкларига проекциялаймиз.

$$R_x = X_1 + X_2 + ... + X_n = \sum X$$
$$R_y = Y_1 + Y_2 + ... + Y_n = \sum Y \qquad (71)$$
$$R_z = Z_1 + Z_2 + ... + Z_n = \sum Z$$

(71)-формула билан бош векторнинг координата ўқларидаги проекциялари топилади.

Бош векторнинг модули қуйидаги формулалар билан топилади.

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \quad \text{ёки}$$
$$R = \sqrt{\left(\sum X\right)^2 + \left(\sum Y\right)^2 + \left(\sum Z\right)^2} \qquad (72)$$

Бош векторнинг йўналиши эса қуйидаги формула билан аниқланади.

$$\cos\alpha = \frac{R_x}{R}; \quad \cos\beta = \frac{R_y}{R}; \quad \cos\gamma = \frac{R_z}{R} \qquad (73)$$

бунда, α, β, γ, - R - билан *x, y, z* ўқлари орасидаги бурчаклар.

2. Бош моментни ҳисоблаш.

Бунинг учун вектор тенгламанинг икки қисмини координата ўқларига проекциялаймиз ва нуқтага нисбатан куч моменти билан шу нуқтадан ўтган ўққа нисбатан куч моменти орасидаги муносабатдан фойдаланиб бош моментнинг координата ўқларидаги проекцияларини аниқлаймиз.

$$M_{0x} = m_x(\bar{F}_1) + m_x(\bar{F}_2) + ... + m_x(\bar{F}_n) = \sum m_x(\bar{F})$$
$$M_{0y} = m_y(\bar{F}_1) + m_y(\bar{F}_2) + ... + m_y(\bar{F}_n) = \sum m_y(\bar{F})$$
$$M_{0z} = m_z(\bar{F}_1) + m_z(\bar{F}_2) + ... + m_z(\bar{F}_n) = \sum m_z(\bar{F})$$

$$\begin{aligned} M_{0x} &= \sum m_x(\bar{F}) \\ M_{0y} &= \sum m_y(\bar{F}) \\ M_{0z} &= \sum m_z(\bar{F}) \end{aligned} \qquad (74)$$

Бунда M_{0x}, M_{0y}, M_{0z} - бош момент $\bar{M}_0$ нинг *x,y,z* ўқларидаги проекцияси.

Бош моментнинг координата ўқларидаги проекцияси ташкил этувчи кучларнинг ўша ўққа нисбатан олинган моментларнинг йигиндисига тенг.

Бош моментнинг катталиги қуйидаги формула билан топилади.

$$M_0 = \sqrt{M_{0x}^2 + M_{0y}^2 + M_{0z}^2}\ ;\ \text{ёки}$$
$$M_0 = \sqrt{\left[\sum m_x(\bar{F})\right]^2 + \left[\sum m_y(\bar{F})\right]^2 + \left[\sum m_z(\bar{F})\right]^2} \qquad (75)$$

Бош моментнинг йўналиши қуйидаги формула билан топилади.

$$\cos\alpha_1 = \frac{M_{0x}}{M_0};\quad \cos\beta_1 = \frac{M_{0y}}{M_0};\quad \cos\gamma_1 = \frac{M_{0z}}{M_0} \qquad (76)$$

Бунда $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ - бош момент *Mo* нинг мос равишда *x,y,z* ўқлари билан ташкил этган бурчаги.

31-§. ФАЗОДА ИХТИЁРИЙ ЖОЙЛАШГАН КУЧЛАР СИСТЕМАСИНИНГ АНАЛИТИК МУВОЗАНАТ ШАРТЛАРИ

Фазода ихтиёрий жойлашган кучлар системаси мувозанатда бўлиши учун бош вектор ва бош момент бир вақтда нолга тенг бўлиши зарур ва етарли;

$$\bar{R} = 0, \qquad \bar{M}_0 = 0 \qquad (77)$$

(77)-тенглик кучларнинг геометрик кўринишдаги мувозанатлик шартини ифодалайди. (72)- ва (75)- формулалардан фойдаланиб кучларнинг аналитик мувозанат шарти қуйидаги кўринишда ёзилади.

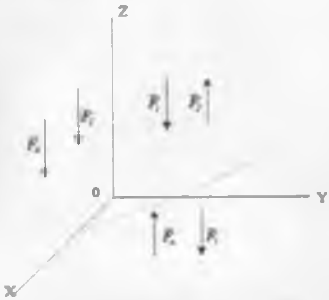
$$\left.\begin{aligned} \sum X &= 0 \qquad & \sum m_x(\bar{F}) &= 0 \\ \sum Y &= 0 \qquad & \sum m_y(\bar{F}) &= 0 \\ \sum Z &= 0 \qquad & \sum m_z(\bar{F}) &= 0 \end{aligned}\right| \qquad (78)$$

(78)-формула фазода ихтиёрий жойлашган кучлар системасининг аналитик мувозанатлик шартини ифодалайди. Бу шарт қуйидагича таърифланади. Фазода ихтиёрий жойлашган кучлар системаси мувозанатда бўлиши учун кучларнинг x, y, z ўқларидаги проекциялари -

нинг йиғиндиси ва кучларнинг шу ўқларга нисбатан олинган моментларнинг йиғиндиси нолга тенг бўлиши зарур ва етарлидир.

Кучлар параллел йуналган ҳол. $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \ldots \bar{F}_n$ кучлар фазода жойлашган ва ўзаро параллел бўлсин (83-расм). Бу кучларнинг мувозанат шартини аниқлаймиз. Бунинг учун координата ўқларидан бирини, масалан Z ўқини, кучларга параллел қилиб йўналтирилади. Параллел кучларга фазода ихтиёрий йўналган кучларнинг аналитик мувозанат шартини тадбиқ қилинади.

$$\left.\begin{aligned} &\sum Z = 0 \\ &\sum m_x(\bar{F}) = 0 \\ &\sum m_y(\bar{F}) = 0 \end{aligned}\right| \qquad (79)$$



83-расм.

(79)-формула фазода параллел йўналган кучлар системасининг аналитик мувозанат шартини ифодалайди.

Фазода параллел йўналган кучлар системаси мувозанатда бўлиши учун кучларнинг шу кучларга параллел бўлган ўқдаги проекцияларининг йиғиндиси ва қолган иккита ўқга нисбатан олинган моментларининг йиғиндиси нолга тенг бўлиши зарур ва етарлидир.

32-§. ОҒИРЛИК МАРКАЗИ. ПАРАЛЛЕЛ КУЧЛАР МАРКАЗИ

Икки параллел кучларни қўшиш ҳақидаги қоидадан фойдаланиб бир қанча параллел кучлар қўшилади.

Бир томонга қараб йўналган ва бир-бирига параллел бўлган F_1, F_2, F_3, F_4 кучлар берилган бўлсин (84-расм). Бу кучлар A_1, A_2, A_3, A_4 нуқталарга қўйилган.

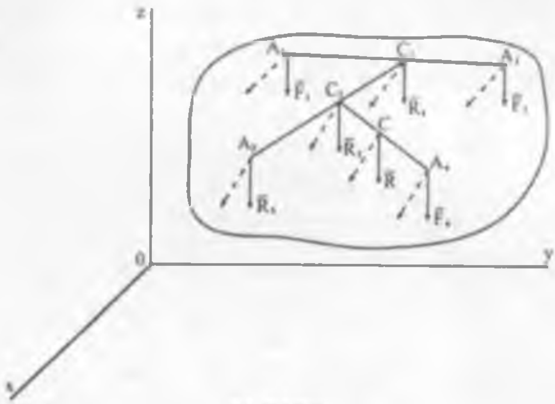
F_1 ва F_2 кучларнинг тенг таъсир этувчиси R_1, шу кучлар модулларининг йиғиндисига тенг $R_1 = F_1 + F_2$ бўлиб, F_1 ва F_2 кучлари

78-79 бет,

қуйилган ва A_1 ҳамда A_2 нуқталарни бирлаштирувчи тўғри чизиқдаги C_1 нуқтага қўйилган булади. R_1 кучи қолган кучларга параллел булиб, кучлар йуналган томонга қараб йуналгандир. C_1 нуқтанинг ҳолати қуйидаги муносабатдан аниқланади.

$$A_1C_1 = \frac{F_2}{R_1} \cdot A_1A_2 \qquad (80)$$

R_1 ва F_3 кучларни қўшиб, уларнинг тенг таъсир этувчиси R_2 ни аниқлаймиз.



84-расм.

R_2 модули R_1 ва F_3 кучларининг модулларининг йиғиндисига тенг бўлади.

$$R_2=R_1+F_3=F_1+F_2+F_3$$

R_2 кучи R_1 ва F_3 кучлари қўшилган C_1 ва A_3 нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқдаги C_2 нуқтага қўйилган бўлиб, кучларга параллел равишда кучлар йўналган томонга қараб йўналади. C_2 нуқтанинг ҳолати қуйидаги муносабатдан аниқланади:

$$C_1C_2 = \frac{F_3}{R_2} \cdot C_1A_3$$

R_2 ва F_4 кучларини қўшиб, R тенг таъсир этувчисини аниқланади.

Унинг модули R_2 ва $\bar{F}_4$ кучларининг модулларининг йиғиндисига тенг

$$R=R_2+F_4=F_1+F_2+F_3+F_4. \qquad (80)$$

$\bar{R}$ тенг таъсир этувчи $\bar{R}_2$ ва $\bar{F}_4$ кучларга параллел бўлиб, улар йўналган томонга қараб йўналган ва C_2 A_4 кесмадаги C нуқтага қўйилган бўлади. C нуқта қуйидаги муносабатдан аниқланади:

$$C_2C = \frac{F_4}{R} \cdot C_2A_4$$

Худди шунингдек, бу усул билан бир томонга қараб йуналган n та параллел $F_1, F_2, ... F_n$ кучларни қушилиб битта R тенг таъсир этувчи кучга келтириш мумкин. Бу кучнинг модули берилган кучлар модулларининг йиғиндисига тенг булади:

$$R = F_1 + F_2 + ... + F_n = \sum F_k \qquad (81)$$

Параллел кучларнинг тенг таъсир этувчиси қуйилган С нуқтага параллел кучларнинг маркази дейилади (84-расм).

33-§. ПАРАЛЛЕЛ КУЧЛАР МАРКАЗИНИНГ КООРДИНАТАЛАРИНИ ВА РАДИУС-ВЕКТОРИНИ АНИҚЛАШ

Параллел кучлар маркази тушунчаси механиканинг баъзи масалаларини ечишда, жумладан, жисмларнинг оғирлик марказини аниқлашда қулланилади.

Қаттиқ жисмнинг $A_1(X_1, Y_1, Z_1), A_2(X_2, Y_2, Z_2) ... A_n(X_n, Y_n, Z_n)$ нуқталарига бир томонга йуналган $\overline{F_1}, \overline{F_2} ... \overline{F_n}$ параллел кучлар қуйилган булсин.

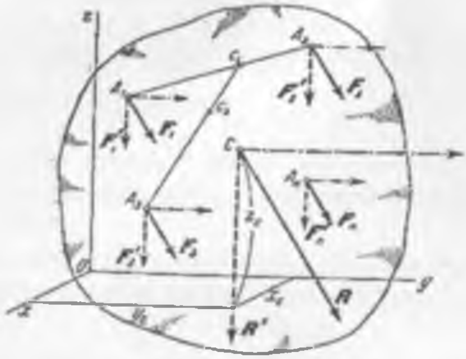
Бу кучларнинг тенг таъсир этувчиси барча кучларга параллел булиб, улар модулларининг йиғиндисига тенг:

$$R = F_1 + F_2 + ... + F_n$$

Тенг таъсир этувчи куч қуйилган С нуқтанинг координаталарини, яъни параллел кучлар марказининг координаталарини x_c, y_c, z_c билан белгиланади. С нуқтанинг холати кучларнинг йуналишига боглиқ эмас, шунинг учун кучларнинг хаммасини қушилган нуқталар атрофида O_z уқига параллел қилиб бурилади. Бурилган $\overline{F_1^1}, \overline{F_2^1}, ... \overline{F_n^1}$ кучларга Вариньон теоремасини тадбиқ этилади. Бурилган кучларнинг тенг таъсир этувчиси $\overline{R^1}$ булгани учун ундан Y уқига нисбатан момент олиб,

$$m_y(\overline{R^1}) = \sum m_y(\overline{F^1}); \qquad (82)$$

тенглик ёзилади. Бу холда кучларнинг елкаси, қуйилган нуқталарнинг абсциссасига тенг булади. Расмдан $m_y(\overline{R^1}) = R^1 \cdot X_c = R \cdot X_c$, чунки $R_1 = R$, худди шунга ухшаш хар бир кучнинг Y уқига нисбатан моменти $m_y(\overline{F_1^1}) = F_1^1 \cdot X_1 = F_1 X_1$ булади, чунки $F_1^1 = F_1$ ва хоказо.



85-расм.

Бу микдорларнинг ҳаммаси (82) тенгликга қуйилса,

$R \cdot X_c = F_1X_1 + F_2X_2 + ... + F_nX_n$ булади.

Бундан Xc яъни параллел кучлар марказининг абсциссаси аникланади:

$$X_C = \frac{F_1X_1 + F_2X_2 + ... + F_nX_n}{R} = \frac{\sum F_kX_k}{R}.$$

(83)

y_c координатани аниқлаш учун кучлардан x ўқига нисбатан моментлар олинади:

$$R \cdot Y_C = F_1Y_1 + F_2Y_2 + ... + F_nY_n$$

$$Y_c = \frac{F_1Y_1 + F_2Y_2 + ... + F_nY_n}{R} = \frac{\sum F_kY_k}{R}; \qquad (84)$$

z_c координатани аниқлаш учун ҳамма кучларни қўйилган нуқталари атрофида Y ўқига параллел бўлганча бурамиз ва бу кучларга (нукта билан пунктир қилиб тасвирланган) Вариньон теоремасини тадбик этиб, улардан X ўқга нисбатан моментлар олинади:

$$-R \cdot Z_c = -F_1Z_1 + (-F_2Z_2) + ... + (-F_nZ_n) \qquad (85)$$

бундан Zc аниқланади.

$$Z_c = \frac{F_1Z_1 + F_2Z_2 + ... + F_nZ_n}{R} = \frac{\sum F_kZ_k}{R} \qquad (86)$$

(84) - (86) - формулалар билан параллел кучлар марказининг координаталари топилади, бунда R - (85) тенглик билан аниқланади.

(85) - (86) - формулаларнинг хар бирини мос равишда $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$. бирлик векторларига купайтириб ва қушиб, параллел кучлар марказининг радиус – вектори аниқланади:

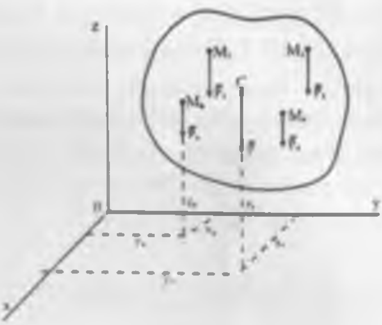
$$\bar{r}_i = X_i \bar{i} + y_i \bar{j} + Z_i \bar{K} \quad \bar{r}_c = \frac{F_1\bar{r}_1 + F_2\bar{r}_2 + \ldots + F_n\bar{r}_n}{R} = \frac{\sum F_k \bar{r}_k}{R}, \quad k = \overline{i,n} \qquad (87)$$

(84) - (87) - формулалардан куринадики, параллел кучларнинг тенг таъсир этувчиси қуйилган С нуқтанинг ҳолати кучларнинг йуналишига боғлиқ булмай, уларнинг миқдори ва қуйилган нуқталарининг координаталарига боғлиқдир. Шунга асосан, агар кучлар қуйилган нуқталарни узгартирмай, барча кучлар бирор α бурчакка бурилса, бу кучларнинг тенг таъсир этувчиси ҳам шу бурчакка бурилиб қуйилган нуқтасининг ҳолати узгармайди.

34-§. ҚАТТИҚ ЖИСМНИНГ ОҒИРЛИК МАРКАЗИ КООРДИНАТАЛАРИНИНГ УМУМИЙ ФОРМУЛАЛАРИ

Бирор қаттиқ жисмнинг ҳар бир булагига ернинг марказига қараб йуналган тортиш кучи (огирлик кучи) таъсир этади. Бу кучларни $\overline{P_1}, \overline{P_2}, \ldots \overline{P_n}$ билан белгиланади. Ернинг радиусига нисбатан жисмнинг улчамлари жуда кичик булгани учун бу кучларни параллел кучлар деб қараш мумкин. Бу параллел кучларнинг маркази – C нуқта жисмнинг огирлик маркази булади (86-расм).

Агар (86)-(87)- формулалардаги $\overline{F_K}$ кучларнинг урнига $\overline{P_k}$ кучларни олинса, жисмнинг огирлик маркази координаталари топилади:



86-расм.

$$\left.\begin{aligned} X_c &= \frac{1}{P}\sum p_k x_k \\ Y_c &= \frac{1}{P}\cdot\sum p_k y_k \\ Z_c &= \frac{1}{P}\cdot\sum p_k z_k \end{aligned}\right| \qquad (88)$$

Бу ерда P_k $(k=1,2,\ldots,n)$ – жисм заррачаларининг оғирликлари, x_k, y_k, z_k – зарарчалар оғирликлари қўйилган нуқталарининг координаталари, $P=\Sigma P_k$ жисмнинг оғирлиги.

(88)-формулалар билан ҳар қандай қаттиқ жисм оғирлик марказининг координаталарини аниқлаш мумкин. Шунинг учун бу формулаларга оғирлик марказларининг координаталари учун умумий формулалар дейилади.

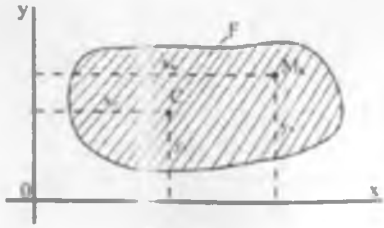
Бир жинсли жисмнинг оғирлик марказини аниқлаймиз. Бир жинсли жисмнинг оғирлиги қуйидаги формула билан аниқланади: $P=\gamma V$, бунда V- жисмнинг ҳажми, γ - бир бирлик ҳажмнинг оғирлиги. Қаттиқ жисмнинг ҳар бир бўлагининг оғирлиги шу бўлакнинг ҳажмига пропорционал бўлади: $P_K=\gamma\cdot\upsilon_K$, бунда υ_k - жисмнинг M_k бўлагининг ҳажми. P ва P_k ларнинг бу қийматларини (88)-формулаларга қўйиб, суратдаги γ умумий кўпайтувчини қавсдан чиқариб, махраждаги γ билан қисқартирилса:

$$X_c=\frac{1}{V}\cdot\sum\upsilon_k X_k,\ Y_c=\frac{1}{V}\cdot\sum\upsilon_k Y_k,\ Z_c=\frac{1}{V}\cdot\sum\upsilon_k Z_k \qquad (89)$$

формулалар келиб чиқади. Бир жинсли жисмнинг оғирлик маркази жисмнинг фақат геометрик шаклига боғлиқ бўлиб, γ нинг қийматига боғлиқ эмас. Координаталари (89) - формулалар билан аниқланадиган C нуқта ҳажмнинг оғирлик маркази деб аталади.

35-§. ТЕКИС ШАКЛНИНГ ОҒИРЛИК МАРКАЗИ. ЎҚҚА НИСБАТАН ТЕКИС ШАКЛ ЮЗАСИНИНГ СТАТИК МОМЕНТИ

Бир жинсли юпқа пластинка шаклидаги жисмни текис шакл деб қараш мумкин. Текис шакл оғирлик марказининг ҳолати икки X_c ва Y_c координаталари билан аниқланади (87-расм). Текис шаклнинг оғирлиги унинг юзасига пропорционал бўлади.



87-расм.

$P = \gamma F$, бунда F – текис шаклнинг юзаси, γ - бир бирлик юзанинг огирлиги. Текис шаклнинг юзасини элементар юзаларга ажратамиз. Ҳар бир M_k элементар юзанинг огирлиги қуйидаги формула билан топилади: $P_K = \gamma \cdot F_K$, бунда F_k - унинг юзаси. M_k элементар юза огирлик марказининг координаталари X_k, Y_k билан белгиланади. P ва P_k ларнинг қийматларини (88) формулаларга қуйилади:

$$X_c = \frac{\sum \gamma F_k X_k}{\gamma \cdot F} = \frac{\gamma \cdot \sum F_k X_k}{\gamma F} = \frac{\sum F_k X_k}{F}$$

Демак текис шакл огирлик марказининг координаталари:

$$X_c = \frac{\sum F_k X_k}{F}, Y_c = \frac{\sum F_k Y_k}{F},$$

(90)

формулалар билан топилади. Координаталари (90)-формулалар билан аниқланадиган С нуқта юзанинг огирлик маркази деб аталади. (90) формулалардаги $S_x = \sum F_k Y_k$, $S_y = \sum F_k X_k$ катталиклар текис шакл юзасининг X ва Y ўқларига нисбатан статик моменти дейилади. Статик моментнинг улчов бирлиги М³.

Демак (90) - формулаларни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин.

$$X_c = \frac{S_y}{F}; Y_c = \frac{S_x}{F} \qquad (91)$$

Бунда $S_x = F \cdot Y_c$, $S_y = F \cdot X_c$ (91) келиб чиқади. Текис шакл юзасининг бирор ўқга нисбатан статик моменти шаклнинг юзаси билан унинг огирлик марказидан шу ўқгача бўлган масофанинг кўпайтмасига тенг. Агар текис шаклнинг статик моменти ва юзаси маълум бўлса, у ҳолда, текис шакл огирлик марказининг координаталари (91)-формулалар ёрдамида топилади. Текис шакл юзалари шакл огирлик марказидан утган ўқларига нисбатан статик моментлари нолга тенг бўлади, чунки бу ҳолда:

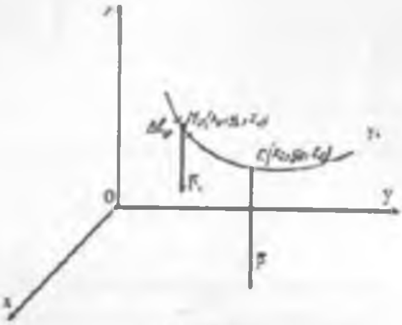
$$x_c = 0, \quad y_c = 0.$$

36-§. ЧИЗИҚНИНГ ОҒИРЛИК МАРКАЗИ

Узунлиги L га тенг бўлган бир жинсли AB чизиқ берилган бўлсин (88-расм). Чизиқнинг кундаланг кесимнинг юзаси ўзгармасдир. Чизиқнинг огирлиги қуйидаги формула билан топилади: $P = \rho \cdot L$. Бунда ρ - бир бирлик узунликнинг огирлиги, AB чизиқнинг узунликлари l_k тенг бўлган M_k элементлар бўлакчаларга бўламиз. Ҳар бир бўлакчанинг огирлиги қуйидаги формула билан топилади: $P_k = pl_k$. Бўлакчалар огирлик марказининг координаталари x_k, y_k, z_k билан белгиланади. P ва P_k нинг қийматлари (88)-формулаларга қуйилади:

$$x_c = \frac{\sum p l_k x_k}{pL} = \frac{p \cdot \sum l_k x_k}{pL}$$

(92)



88-расм.

$$\left.\begin{aligned} x_c &= \frac{1}{L} \cdot \sum l_k x_k, \\ y_c &= \frac{1}{L} \cdot \sum l_k y_k, \\ z_c &= \frac{1}{L} \cdot \sum l_k z_c \end{aligned}\right\} \qquad (93)$$

Бу ерда L - бутун чизиқнинг узунлиги, Координаталари (93)-формулалар билан аниқланадиган C нуқтага чизиқнинг огирлик маркази дейилади.

37-§. ЖИСМЛАРНИНГ ОҒИРЛИК МАРКАЗИНИ АНИҚЛАШ УСУЛЛАРИ

1) <u>Симметрия усули.</u> 1-теорема: Агар жисм симметрия ўқига эга бўлса, жисмнинг огирлик маркази шу симметрия ўқида ётади. Симметрия ўқига эга бўлган жисм берилган бўлсин (88-расм). Координата ўқларининг бирини мисол учун z ўқини симметрия ўқи бўйича йўналтирилади. Жисм огирлик марказининг икки координатаси (94)-формулалар билан аниқланади;

$$x_c = \frac{\sum \upsilon_k x_k}{V}; y_c = \frac{\sum \upsilon_k y_k}{V} \qquad (94)$$

Бу жисмдан z ўқига нисбатан симметрик жойлашган икки M_k ва M_k^1 нуқталар олинади. Уларнинг атрофидан бир - бирига тенг бўлган V_k

элементар ҳажм ажратиб олинади. M_k ва M_k^1 нуқталар ўқига перпендикуляр бўлган битта тўғри чизиқда ётибди ва бу нуқталардан ўқигача бўлган масофалар тенг;

$$M_k N_k = N_k M_k^1 .$$

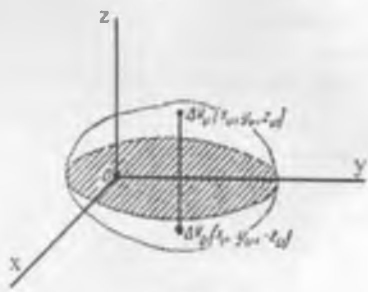
Демак, бу нуқталарнинг x_k ва y_k координаталари ўзаро тенг, ишоралари эса тескари бўлади. У ҳолда ҳар бир x_k, y_k, z_k координаталар билан аниқланадиган V_k ҳажмли бўлакчага мос келади. Шу сабабли $\sum V_k\ x_k = 0$ ва $\sum V_k\ y_k = 0$ тенг бўлади. $\sum V_k\ x_k = V_1\ X_1 + V_2\ X_2 + \ldots\ldots + V_N\ X_N - V_1\ X_1 - V_2\ X_2 - \ldots\ldots - V_N\ X_N = 0$ шунинг учун $x_c = 0$ ва $y_c = 0$ жисмнинг оғирлик маркази z ўқида ётади ва унинг бу ўқдаги ҳолати битта координата билан аниқланади:

$$z_c = \frac{1}{V} \sum V_K\, z_K \qquad (94')$$

2-теорема: Агар жисм симметрия текислигига эга бўлса, жисмнинг оғирлик маркази шу симметрия текислигида ётади (89-расм). Буни исбот қилиш учун симметрия текислиги орқали Oxy текслик ўтказилади. Бу текисликка перпендикуляр қилиб z ўқини йўналтирилади. Жисмдан Oxy текислигига нисбатан симметрик жойлашган икки M_k ва M_{k1} нуқталар олинади. Бу нуқталарнинг атрофидан υ_k элементар ҳажмларни ажратиб оламиз. M_k ва M_{k1} нуқталар Oxy текислигига перпендикуляр бўлган битта тўғри чизиқда ётибди. Бу нуқталардан симметрия текислигигача бўлган масофалар ўзаро тенг, яъни $M_k N_k = M_k^1 N_k$ (89-расм). Демак, бу нуқталарнинг Z_k координаталари ўзаро тенг бўлиб, ишоралари тескаридир.

$$\sum \upsilon_k Z_k = \upsilon_1 Z_1 + \upsilon_2 Z_2 + \ldots + \upsilon_n Z_n - \upsilon_1 Z_1 - \upsilon_2 Z_2 - \ldots - \upsilon_n Z_n = 0$$

$$Z_c = \frac{1}{V} \sum \upsilon_k Z_k = 0,\ X_c = \frac{1}{V} \sum \upsilon_k X_k,\ Y_c = \frac{1}{V} \sum \upsilon_k Y_k \qquad (95)$$



89-расм.

Олинган бу натижа шуни курсатадики, жисмнинг огирлик маркази симметрия текислигида ётади. Худди шунингдек, жисм симметрик марказига эга булса, унинг огирлик маркази шу симметрия марказида ётиши исботланади.

1) **Булакларга булиш усули**. Агар жисмни огирлик марказларини олдиндан маълум булган бир неча булакларга булиш мумкин булса, жисм огирлик марказининг координаталари (95)-формулалар ёрдамида аникланади.

2) **Манфий юза усули**. Бу усул булакларга булиш усулининг хусусий ҳоли. Бу усул тешиги бор жисмларга қулланилади. Усулнинг моҳияти шундан иборатки, жисмга тешиксиз бутун жисм ва тешиги бор деб қаралади; тешик юзаси шартли равишда манфий ишора билан олинади. Бу усулни тадбиқ этиш учун бутун жисмнинг ва тешик қисмининг огирлик марказлари маълум булиши керак.

3) **Интеграллаш усули**. Агар жисмни бир нечта огирлик марказлари маълум булган булакчаларга ажратиш мумкин булмаса, олдин у ихтиёрий кичик $\Delta\upsilon_k$ ҳажмларга булинади ва жисм учун (95)-формула қуйидаги куринишни олади.

$$X_c = \frac{1}{V}\sum \upsilon_k Z_k \quad \text{ва ҳоказо,} \qquad (96)$$

Бунда x_k, y_k, z_k - $\Delta\upsilon_k$ ҳажм ичида ётган бирор нуқтанинг координаталари. (96)-формулаларга $\Delta\upsilon_k$ нолга интилтириб лимитга утсак, қуйидагиларни оламиз:

а) Ҳажм огирлик марказининг координаталари учун:

$$x_c = \frac{1}{V}\cdot\int_V x dV,\ y_c = \frac{1}{V}\cdot\int_V y dV,\ z_c = \frac{1}{V}\cdot\int_V z dV, \qquad (97)$$

б) Юза огирлик марказининг координаталари учун:

$$x_c = \frac{1}{F}\cdot\int_F x dF,\ \ y_c = \frac{1}{F}\cdot\int_F y dF,\ \ z_c = \frac{1}{F}\int_F z dF \qquad (98)$$

в) Чизиқ огирлик марказининг координаталари учун:

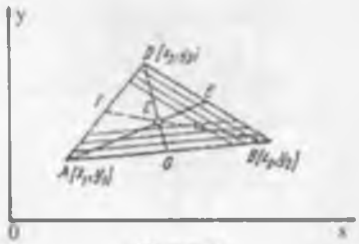
$$x_c = \frac{1}{L}\cdot\int_L x dl,\ \ y_c = \frac{1}{L}\cdot\int_L y dl,\ \ z_c = \frac{1}{L}\cdot\int_l z dl \qquad (99)$$

38-§. ОДДИЙ ШАКЛЛИ БИР ЖИНСЛИ БАЪЗИ ЖИСМЛАРНИНГ МАРКАЗИНИ АНИҚЛАШ

1. **Учбурчак юзасининг огирлик маркази.** Ихтиёрий *ABD* учбурчак юзасининг огирлик марказини аниқлаш учун учбурчак

юзасини AB томонига параллел булган тўғри чизиқ кесмаси билан бўламиз (90-расм). Бундай кесманинг оғирлик маркази унинг уртасида, яъни DE медианада ётади. Демак, учбурчак юзасининг оғирлик маркази медианага ётади. Худди шунингдек, учбурчак юзасини AD томонига параллел булган тўғри чизиқ кесмаси билан ажратсак, бу тўғри чизиқ кесмаларининг оғирлик маркази ВК медианада ётади.

Демак, учбурчак юзасининг оғирлик маркази унинг уч медианаларининг кесишган нуқтасида ётади. Геометриядан маълумки, медианаларнинг кесишган нуқтаси асосдан медиананинг $\frac{1}{3}$ қисмида ётади, яъни $CE=\frac{1}{3}DE$.



90-расм.

Агар учбурчак учларининг $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $Д(x_3,y_3)$ координаталари берилган бўлса, унинг оғирлик марказининг $C(x_c,y_c)$ координаталари қуйидаги формулалардан топилади:

$$x_c = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y_c = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \qquad (100)$$

(100)-формулалар аналитик геометрияда келтириб чиқарилган.

2. Айлана ёйининг оғирлик маркази. Радиуси R га, бурчаги $2a$ га тенг булган айлана ёйи AB нинг оғирлик марказини аниқлаймиз. Бунинг учун Ox ўқини айлана ёйининг симметрия ўқи бўйлаб йуналтирилади (91-расм). У ҳолда айлана ёйининг оғирлик маркази шу Ox ўқда ётади. $(yc=O)$.

(101)-формула билан xc координатани топамиз. Бунинг учун AB ёйидаги $dl=Rdy$ га тенг булган элементар булакча ажратиб олинади.

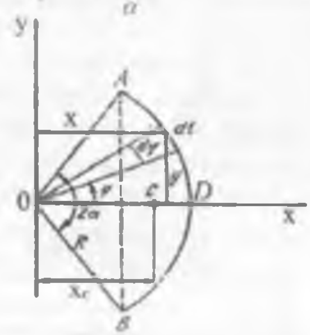
Унинг ҳолати y бурчаги билан аниқланади. Элементар бурчакга оғирлик марказининг координатаси $X = R\cos y$ га тенг (99)-формуланинг биринчисига x ва de ларнинг қийматларини қуйиб, бутун ёйининг узунлиги бўйича интегралланади:

$$X_c = \frac{1}{L}\int_A^B X dl = \frac{1}{L}\int_{-\alpha}^{\alpha} R\cos\gamma \cdot R d\gamma = \frac{R^2}{L}\int_{-\alpha}^{\alpha} R\cos\gamma \cdot d\gamma = \frac{R^2}{L}\sin\gamma\Big|_{-L}^{L} = \frac{R^2}{L}\cdot[\sin\alpha - \sin(-\alpha)]$$

$$X_c = \frac{R^2}{L}\cdot[\sin\alpha + \sin\alpha] = \frac{R^2}{L}\,2\sin\alpha = \frac{2R^2}{L}\cdot\sin\alpha$$

Бунда $L-AB$ ёйининг узунлиги $L = R\,2\alpha$ га тенг. Демак, айлана ёйининг оғирлик маркази симметрия ўқида, ётади ва айлана марказидан масофада бўлади. Бунда α бурчаги радианда ўлчанади.

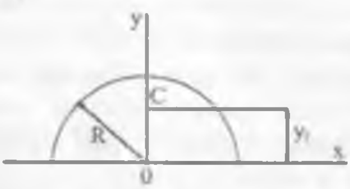
$$X_c = R\,\frac{\sin\alpha}{\alpha} \qquad (101)$$



91-расм.

Агар 2α = π га тенг бўлса, ярим Айлана ҳосил бўлади (92-расм). Буни (99)-формулага қўйсак,

$$y_c = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}\cdot R = \frac{2}{3{,}14}\cdot R = 0{,}64\,R,\quad y_c = 0{,}64\,R$$



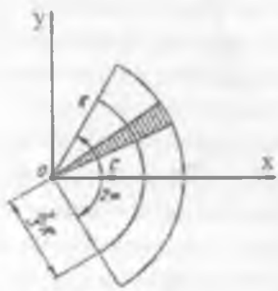
92-расм.

(101)-формула билан ярим айлана ёйининг оғирлик марказининг координатаси топилади.

3. Доира сектори юзасининг оғирлик маркази. Радиуси R, марказий бурчаги 2α га тенг доира сектори юзаси оғирлик марказини аниклаш учун x укни сектор юзасининг симметрия уки буйлаб йуналтирилади (93-расм).

Сектор юзасининг бир канча элементар секторлардан ташкил топган деб каралади. Ҳар бир элементар секторнинг баландлиги R га тенг учбурчак деб каралса, унинг огирлик маркази 0 нуктадан $\frac{2}{3}R$ масофада ётади. OAB Доира секторининг огирлик маркази радиуси $\frac{2}{3}R$ га тенг AE айлана ёйининг огирлик маркази билан устма-уст тушади. (101) га асосан

$$x_c = \frac{2}{3} R \frac{R\sin\alpha}{\alpha} \qquad (101)$$



93-расм.

Агар $\alpha = \frac{\pi}{2}$ га тенг булса ярим доира хосил булади. (101)-формуладан ярим доира огирлик марказининг координатаси аникланади.

$$x_c = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}\cdot R = \frac{4}{3\pi}\cdot R = \frac{4}{3\cdot 3.14}\cdot R = 0.42R \qquad (102)$$

$$x_c = 0{,}64R \quad (y_c = 0).$$

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР.

1. Укга нисбатан куч моменти деб нимага айтилади? Бу моментнинг ишораси кандай танланади?
2. Кандай ҳолларда укга нисбатан куч моменти нолга тенг булади?
3. Нуктага нисбатан куч моменти билан шу нуктадан утган ўкка нисбатан куч моменти орасида кандай богланиш бор?

4. Берилган кучларнинг координата бошига нисбатан вектор-моменти xOy координата текислигида ётса шу кучларнинг Oz укқа нисбатан моменти нимага тенг булади?
5. Агар кучнинг моменти икки координата укларига нисбатан нолга тенг булса, берилган кучларнинг координата бошига нисбатан вектор моменти нимага тенг булади?
6. Фазода ихтиёрий жойлашган кучлар системаси берилган марказга қандай келтирилади?
7. Кучлар системаси бош векторининг ҳар қайси координата укига проекцияси нимага тенг?
8. Кучлар системаси бош моментининг ҳар қайси координата уки бошига нисбатан проекцияси нимага тенг?
9. Фазода ихтиёрий йуналган кучлар системасининг аналитик мувозанат шарти қандай таърифланади?
10. Мувозанат тенгламаларини ёзиб, унинг маъносини тушунтиринг?
11. Фазода параллел йуналган кучлар системасининг мувозанат тенгламаларини ёзинг ва унинг маъносини тушунтиринг?
12. Қаттиқ жисмнинг оғирлик маркази деб нимага айтилади? Уни координаталари қандай топилади?
13. Текис шакл юзасининг статик моменти деб нимага айтилади?
14. Қаттиқ жисмнинг оғирлик марказини аниқлаш усулларини айтинг ва ҳар бир усулнинг маъносини тушунтиринг?
15. Учбурчак юзаси, айлана ёки сектор юзасининг огирлик маркази қандай аниқланади?

КИНЕМАТИКА БЎЛИМИ

39-§. НУҚТА КИНЕМАТИКАСИ

Назарий механиканинг кинематика булимида қаттиқ жисмларнинг ҳаракати геометрик нуқтаи назардан текширилади, яъни кинематикада жисмларнинг массаси ва уларга таъсир қилувчи кучлар ҳисобга олинмайди. Кинематиканинг теорема ва формулалари техникада турли машина ва механизмлар қисмларининг ҳаракатини урганишда назарий база сифатида қулланилади.

Кинематикада жисмнинг ҳаракати бошқа жисм билан боғланган саноқ системасига нисбатан текширилади. Айнан бир вақтда жисм турли саноқ системасига нисбатан турлича ҳаракатда булиши мумкин. Масалан, кема палубасидаги жисм кема билан боғланган саноқ системасига нисбатан ҳаракатсиз булса, қирғоқ билан боғланган саноқ системасига нисбатан кема билан биргаликда ҳаракатланади. Табиатда абсолют ҳаракатсиз жисм булмагани туфайли, абсолют қузғалмас саноқ системаси ҳам мавжуд булмайди.

Техника масалаларини ечишда, одатда ер билан қузғалмас боғланган саноқ системаси олинади. Ерга нисбатан қузғалмас булган саноқ системаси "қузғалмас саноқ" системаси дейилади. Қузғалмас саноқ системасига нисбатан жисм вазияти узгариши ва вақт утиши билан ўзгармаса, жисм олинган системага нисбатан тинч ҳолатда дейилади. Агар мазкур саноқ системасига нисбатан вақт утиши билан жисмнинг вазияти узгарса, жисм шу системага нисбатан ҳаракатда булади. Танланган саноқ системасига нисбатан ҳар онда жисмнинг вазиятини аниқлаш мумкин булса, унинг ҳаракати кинематик берилган деб ҳисобланади.

Кинематикада учрайдиган барча чизиқли улчовларни (ҳаракатдаги нуқтанинг координаталари, утган йулининг узунлиги ва ҳоказолар) техник ва халқаро СИ бирликлар системасида метрда олинади. Механикада вақт абсолют деб ҳисобланади, яъни уни барча саноқ системалари учун бир хилда утади деб қаралади. Вақт одатда t билан белгиланади ва у ҳаракатнинг аргументи ҳисобланади. Вақт улчови учун МКГСС системасида соат ёки минут, СИ системасида секунд (с) қабул қилинган.

Кучиш ва ҳаракат тушунчалари механиканинг асосий тушунчаларидир. Бирор саноқ системасига нисбатдан нуқтанинг маълум вақт t ичида фазода бир ҳолатдан бошқа ҳолатга ихтиёрий равишда утиши кучиш дейилади.

Нуқтанинг бошланғич ҳолатдан охирги ҳолатга вақтга боғлиқ ҳолда аниқ бир усулда утиши ҳаракат деб айталади.

Фазода ҳаракатланаётган нуқтанинг бирор саноқ системасига нисбатан ҳолати билан вақт орасидаги боғланишни ифодаловчи тенглама нуқтанинг ҳаракат қонунини аниқлайди.

Кинематиканинг асосий масаласи нуқтанинг (ёки жисмнинг) ҳаракат қонунларини урганишдан иборат. Ихтиёрий вақт ичида фазода нуқтанинг ҳолатини бирор саноқ системасига нисбатан аниқлаш мумкин булса, у ҳолда нуқтанинг ҳаракат қонуни маълум булади. Агар нуқтанинг бирор саноқ системасига нисбатан ҳаракат қонуни берилган булса, нуқта ҳаракатнинг кинематик характеристикалари: троектория, тезлик ва тезланишларини аниқлаш мумкин булади.

Қаттиқ жисм ҳаракатини кузатар эканмиз, купинча унинг нуқталари турлича ҳаракат қилишини курамиз. Шунинг учун жисм ҳаракатини урганишда унинг нуқталари ҳаракатини урганишга тугри келади. Дастлаб нуқта кинематикасини урганиб, ундан қаттиқ жисм кинематикасини урганишга ўтилади. Демак, кинематика икки қисмга бўлинади.

1. Нуқта кинематикаси.
2. Абсолют қаттиқ жисм кинематикаси.

40-§. НУҚТА ҲАРАКАТИНИНГ БЕРИЛИШ УСУЛЛАРИ

Нуқтанинг фазода қолдирган изига ёки чизган чизиғига нуқтанинг траекторияси дейилади.

Оний вақтда нуқтанинг фазодаги ҳолатини бирор координаталар системасига нисбатан аниқлаш мумкин бўлса, нуқта ҳаракати берилган дейилади. Демак, нуқтага ҳаракат бериш унинг оний вақтдаги ҳолатини аниқлашдан иборат.

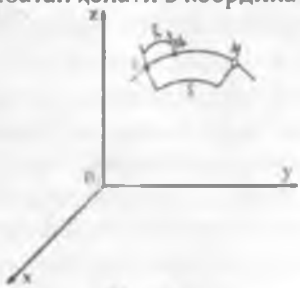
Нуқтанинг ҳаракати қуйидаги уч усул билан берилган бўлади: табиий, координаталар ва вектор.

1. Нуқтага табиий усулда ҳаракат бериш.

Нуқта ҳаракатини бу усулда бериш учун унинг траекторияси олдиндан аниқланган бўлиши керак.

Нуқтанинг траекторияси берилган бўлсин (94-расм).

М нуқтанинг бирор вақтдаги ҳолатини аниқлаймиз. Бунинг учун траектория устида қўзғалмас 0 нуқтани ҳисоблаш боши деб оламиз. *М* нуқтанинг *0* нуқтага нисбатан ҳолати *S* координатаси билан аниқланади.



94-расм.

$$S = 0M$$

M нукта ҳаракатланганда вақт ўтиши билан *S* ей координата ўзгаради.

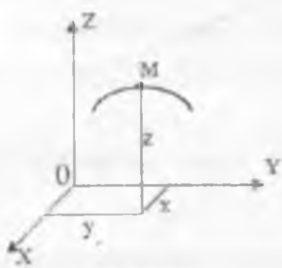
$$S=f(t) \qquad (103)$$

(103)-тенглама М нуктанинг траектория бўйлаб ҳаракатланиш қонуни ёки ҳаракат тенгламаси дейилади. Агар S ей билан t вақт орасидаги муносабат берилган бўлса, нуктанинг исталган вақтдаги вазиятини фазода аниқлаш мумкин. Нуқтанинг ҳаракатини табиий усулда бериш учун унинг траекторияси, координаталар боши *O* нукта ва (103)-тенглама мавжуд бўлиши керак.

2. Нуқта ҳаракатининг координаталар усулида берилиши

M нуқтанинг *Oxyz* системага нисбатан ҳолати унинг учта *x, y, z* декарт координаталари билан аниқланади (94-расм).

М нуқта ҳаракатланганда вақт ўтиши билан унинг координаталари ўзгаради. Демак, ҳаракат қилаётган нуқта координаталари вақтнинг функциясидир.



94-расм.

$$\left.\begin{aligned} x &= f_1(t); \\ y &= f_2(t); \\ z &= f_3(t); \end{aligned}\right| \qquad (104)$$

(104)-формула нуқта ҳаракатининг декарт координаталаридаги тенгламаси ёки нуқта траекториясининг параметрик тенгламалари дейилади.

Нуқтанинг ҳаракат тенгламасидан *t* вақтни олиб ташласак нуқтанинг траектория тенгламаси ҳосил бўлади.

Агар нуқта бир текисликда, мисол учун *Oxy* текислигида, ҳаракатланса (104)-тенгламалар қуйидаги кўринишни олади.

$$\left.\begin{aligned} x &= f_1(t) \\ y &= f_2(t) \end{aligned}\right\} \qquad (105)$$

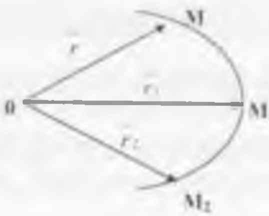
Агар нуқта тўғри чизиқли ҳаракатда бўлса, масалан фақат Ox ўқи бўйлаб, (104)-тенглама қуйидагича ёзилади:

$$x=f(t) \qquad (106)$$

(106)-формулага тўғри чизиқли ҳаркатнинг тенгламаси дейилади.

3. Нуқта ҳаракатини вектор усулида берилиши

Нуқтанинг фазодаги ҳолатини $\bar{r}$ радиус-вектори билан аниқлаш мумкин (96-расм). Нуқта фазода ҳаракатланганда вақтнинг ўтиши билан унинг радиус - векторининг модули ва йўналиши ўзгаради:



96-расм.

Нуқтанинг $\bar{r}$ радиус –вектори t вақтнинг функциясидир:

$$\bar{r}=\bar{r}(t) \qquad (107)$$

(107) - тенгламага нуқта ҳаракатининг вектор кўринишдаги тенгламаси дейилади.

41-§. НУҚТА ҲАРАКАТИ ВЕКТОР УСУЛДА БЕРИЛГАНДА УНИНГ ТЕЗЛИГИНИ АНИҚЛАШ

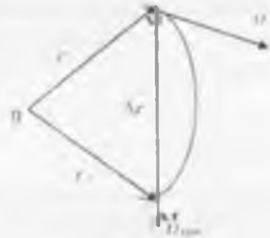
Нуқта ҳаракати вектор кўринишдаги тенгламаси берилган бўлсин:

$$\bar{r}=\bar{r}(t) \qquad (108)$$

Нуқтанинг тезлигини топиш керак. Нуқтанинг бирор t пайтдаги троекторияда эгаллаган ҳолатини M, радиус векторини $\bar{r}$, $t_1+\Delta t$ пайтдаги ҳолатини M_1 радиус векторини $\bar{r}_1$ билан белгилаймиз. (97-расм). Нуқтанинг M ва M_1 ҳолатларини туташтирувчи $\overline{MM_1}=\Delta\bar{r}$ вектор нуқтанинг [illegible] вақт оралиғидаги кўчиш вектори дейилади. Расмдан кўриниб турибдики $\bar{r}_1=\bar{r}+\Delta\bar{r}$. Бундан нуқтанинг Δt вақт ичидаги кўчиши (радиус вектор орттирмаси)ни топиш мумкин.

$$\Delta\bar{r}=\bar{r}_1-\bar{r}$$

Кучиш вектори Δr нинг шу кучиш содир буладиган Δt вақтга нисбати нуқтанинг мазкур оралиқдаги уртача тезлик вектори дейилади ва $\vartheta_{ўрт}$ билан белгиланади.



97-расм.

$$\bar{\upsilon}_{ўрт} = \frac{\Delta r}{\Delta t}$$

$\upsilon_{ўрт}$ нуқтанинг Δt вақт ичидаги ўртача тезлиги булади.

Уртача тезлик Δr бўйлаб йўналади. Ўртача тезликнинг $\Delta t \to 0$ интилгандаги лимитига нуқтанинг берилган t вақтдаги тезлиги дейилади.

$$\bar{\upsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \upsilon_{ўрт} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{dr}{dt};$$
$$\bar{\upsilon} = \frac{dr}{dt} \qquad (109)$$

Бунда ϑ - М нуқтанинг t вақтдаги тезлиги. Нуқтанинг тезлиги вектор катталикдир. Тезлик бирликлари:

$$\frac{см}{сек}, \frac{м}{сек}, \frac{км}{соат}$$

Демак, нуқта ҳаракати тенгламаси вектор усулида берилган булса, унинг тезлигини топиш учун радиус-вектордан вақт бўйича биринчи тартибли ҳосила олиш лозим.

Тезликнинг йўналишини аниқлаймиз. $\Delta t \to 0$ га интилганда M_1 нуқта M га интилади. Натижада MM_1 кесувчи M нуқтадан траекторияга утказилган уринмага айланади. Нуқтанинг тезлиги шу нуқтадан траекторияга утказилган уринма бўйича нуқта ҳаракат қилаётган томонга қараб йўналади.

42-§. НУҚТА ҲАРАКАТИ КООРДИНАТАЛАР УСУЛИДА БЕРИЛГАНДА УНИНГ ТЕЗЛИГИНИ АНИҚЛАШ

Нуқта ҳаракатининг декарт координаталардаги тенгламалари берилган бўлсин:

$$\left.\begin{aligned} x &= f_1(t), \\ y &= f_2(t), \\ z &= f_3(t). \end{aligned}\right\} \qquad (110)$$

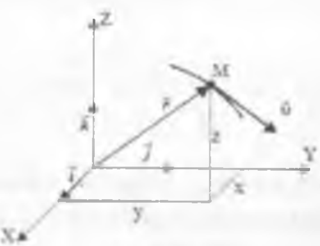
Нуқта тезлигининг модули ва йўналишини аниқлаймиз.

M нуқта тўғри бурчакли *Oxyz* координата системасига нисбатан ҳаракат қилсин (98-расм).

M нуқтанинг r радиус-вектори координата ўқлари бўйича йўналган ташкил этувчилари орқали қуйидагича ёзилади.

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} \qquad (111)$$

Бунда $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ координата ўқлари бўйича йўналган бирлик векторлар.



98-расм.

(111)-формулани (109)-формулага қўйиб вақт бўйича ҳосила оламиз.

$$\bar{\vartheta} = \frac{d}{dt}\left(X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k}\right) = \frac{dx}{dt}\bar{i} + \frac{dy}{dt}\bar{j} + \frac{dz}{dt}\bar{k} \qquad (112)$$

(112)-формуладаги бирлик векторлар олдидаги коэффициентлар нуқта тезлигининг мос равишда **x,y,z** ўқларидаги проекцияси бўлади:

$$\vartheta_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad \vartheta_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \quad \vartheta_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z} \qquad (113)$$

Бунда $\vartheta_x, \vartheta_y, \vartheta_z$, лар $-\bar{\vartheta}$ нинг *x,y,z* ўқларидаги проекциялари. Нуқта тезлигининг қўзғалмас декарт координата ўқларидаги проекциялари унинг тегишли координаталаридан вақт бўйича олинган биринчи тартибли ҳосилага тенг. Нуқта тезлигининг декарт координата укларидаги проекцияларидан тўгри бурчакли параллелопипед қурамиз. Бу параллелопипеднинг ўлчовлари нуқта тезлигини координата ўқлардаги проекцияси, диоганали эса нуқта тезлиги бўлади. Геометриядан маълумки тўгри бурчакли параллелопипед диоганалининг квадрати унинг учала ўлчовлари квадратларининг йигиндисига тенг.

$$\vartheta^2 = \vartheta_x^2 + \vartheta_y^2 + \vartheta_z^2$$

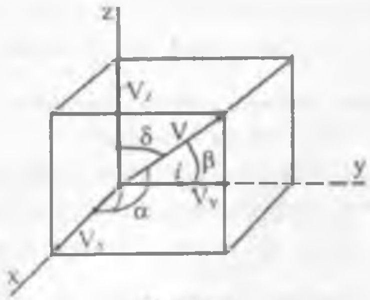
$$\vartheta = \sqrt{\vartheta_x^2 + \vartheta_y^2 + \vartheta_z^2}$$

(113)-формуладан фойдаланиб, нуқта тезлигининг модули ва йуналишини аниқлаймиз.

$$\vartheta = \sqrt{\vartheta_x^2 + \vartheta_y^2 + \vartheta_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \qquad (114)$$

$$\cos\alpha = \frac{\vartheta_x}{\vartheta}; \quad \cos\beta = \frac{\vartheta_y}{\vartheta}; \quad \cos\gamma = \frac{\vartheta_z}{\vartheta}; \qquad (115)$$

Бунда α, β, γ лар - ϑ вектори билан *x,y,z* ўқлари орасидаги бурчакни ифодалайди (99-расм). Нуқта тезлигининг декарт координата ўқларидаги проекцияларидан тўгри бурчакли параллелопипед қурамиз. Бу параллелопипеднинг ўлчовлари нуқта тезлигининг координата ўқларидаги проекцияси, диоганали эса нуқта тезлиги бўлади.



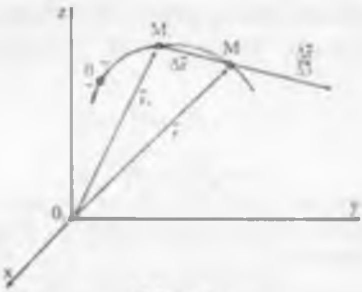
99-расм.

43-§. НУҚТА ҲАРАКАТИ ТАБИИЙ УСУЛДА БЕРИЛГАНДА УНИНГ ТЕЗЛИГИНИ АНИҚЛАШ

Нуқта траекторияси шу траектория бўйлаб ҳаракат конуни асосида берилган бўлсин.

$$S=f(t) \qquad (116)$$

Нуқта тезлигини аниқлаймиз. Нуқта t вақтда M га келиб унинг ҳолати S ёйи билан t_1 вақтда эса M_1 га келиб унинг ҳолати S_1 ёйи кўринишида бўлсин (100-расм).



100-расм.

$$S = OM$$

$$S_1 = OM_1$$

$$\Delta t = t_1 - t$$

$$\Delta S = S_1 - S$$

$$\vartheta_{ypm} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

Бунда ϑ_{ypm} - Δt вақт ичидаги ўртача тезликнинг модули. M нуқтанинг t вақтдаги тезлигининг модулини аниқлаймиз.

$$\vartheta = \lim_{\Delta t \to 0} \vartheta_{ypm} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}; \quad \vartheta = \frac{dS}{dt} \qquad (117)$$

Нуқта ҳаракати табиий усулда берилган бўлса, (117)-формула билан нуқта тезлигининг модули топилади.

Нуқтанинг тезлигини аниқлаш учун унинг ҳолатини аниқловчи S ёй координатадан вақт бўйича олинган биринчи тартибли ҳосила олиш керак. Агар $\frac{dS}{dt} > 0$ бўлса V тезлик вектори S ёй координата ортиб бораётган томонга йўналган бўлади. Агар $\frac{dS}{dt} < 0$ бўлса S ёй камаядиган томонга йўналади (101-расм).

101-расм.

44-§. НУҚТА ҲАРАКАТИ ВЕКТОР УСУЛИДА БЕРИЛГАНДА УНИНГ ТЕЗЛАНИШИНИ АНИҚЛАШ

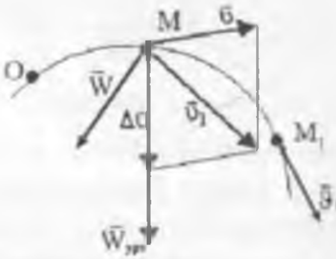
Нуқта тезлигининг модули ва йўналиши жиҳатидан ўзгаришини тасвирлаш учун тезланиш деган тушунча киритилади. Нуқта эгри чизиқли траектория бўйлаб ҳаракатланиб, t вақтда M нуқтада, t_1 вақтда эса M_1 нуқтада бўлсин (102-расм).

Бунда $\bar{\upsilon}$ ва $\bar{\upsilon}_1$, M ва M_1 нуқталарнинг тезликлари. Δt вақт ичида нуқта тезлиги $\Delta\bar{\upsilon}$ орттирма олади.

$$\Delta t = t_1 - t$$

$$\Delta\bar{\upsilon} = \bar{\upsilon}_1 - \bar{\upsilon}$$

$$\bar{\upsilon}_1 = \bar{\upsilon} + \Delta\bar{\upsilon}$$



102-расм.

$\Delta\bar{\upsilon}$ нинг Δt га нисбати Δt вақт ичидаги нуқтанинг ўртача тезланиши дейилади.

$$\bar{W}_{\text{ўрт}} = \frac{\Delta\bar{\upsilon}}{\Delta t}$$

Ўртача тезланишнинг $\Delta t \to 0$ интилгандаги лимитига нуқтанинг берилган t вақтдаги ёки ҳақиқий тезланиши дейилади.

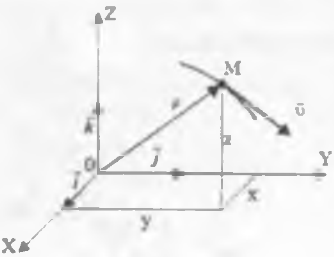
$$\bar{W} = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{W}_{\text{ўрт}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\bar{\upsilon}}{\Delta t} = \frac{d\bar{\upsilon}}{dt} \qquad \bar{W} = \frac{d\bar{\upsilon}}{dt} \qquad \bar{W} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} \quad (118)$$

Демак, нуқтанинг тезланиши нуқта тезлигидан вақт бўйича олинган биринчи тартибли ҳосилага ёки радиус - векторидан вақт бўйича олинган иккинчи тартибли ҳосилага тенг. Ўртача тезланиш траекториясининг ботиқ томонига қараб йўналганлиги учун нуқта тезланиши $\bar{W}$ ҳам траекториянинг ботиқ томонига қараб йўналган бўлади. Нуқта тезланишининг бирлиги м/сек² билан ўлчанади.

45-§. НУҚТА ҲАРАКАТИ КООРДИНАТАЛАР УСУЛИДА БЕРИЛГАНДА УНИНГ ТЕЗЛАНИШИНИ АНИҚЛАШ

Нуқта координаталари вақтнинг функцияси шаклида берилган бўлсин (103-расм).

$$x=f_1(t); \qquad y=f_2(t); \qquad z=f_3(t)$$



103-расм.

Нуқта тезланишининг модули ва йўналиши топилсин. Нуқта тезлигини координата ўқлари бўйича йўналган ташкил этувчилари орқали қуйидагича ёзилади (102-расм).

$$\bar{\upsilon} = \upsilon_x \bar{i} + \upsilon_y \bar{j} + \upsilon_z \bar{k} \qquad (119)$$

Бунда $\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z$ лар $-\bar{\upsilon}$ тезликнинг проекциялари. $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ қўзғалмас координата ўқлари бўйича йўналган бирлик векторлар. (119)-формулани, (118)-формулага қўйиб вақт бўйича ҳосила оламиз.

$$\bar{W} = \frac{d\upsilon_x}{dt}\bar{i} + \frac{d\upsilon_y}{dt}\bar{j} + \frac{d\upsilon_z}{dt}\bar{k} \qquad (120)$$

(120)-формуладаги бирлик векторлари олдидаги коэффицентлар нуқта тезланишининг проекциясини ифодалайди

$$W_x = \frac{d\upsilon_x}{dt}; W_y = \frac{d\upsilon_y}{dt}; W_z = \frac{d\upsilon_z}{dt} \qquad (121)$$

ёки

$$W_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$$

$$W_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y} \qquad W_z = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z} \qquad (122)$$

Бунда W_x, W_y, W_z лар $-\bar{W}$ тезланишнинг проекцияси. (121)- ёки (122)-формулалар билан нуқта тезлашининг қўзғалмас x,y,z ўқларидаги проекциясини аниқлаймиз.

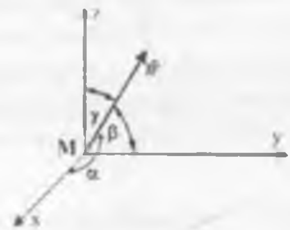
Нуқта тезланишининг бирор қузғалмас декарт координаталар ўқидаги проекцияси нуқтанинг тегишли координаталаридан вақт буйича олинган иккинчи тартибли хосилага тенг булади.

Нуқта тезланишининг модули ва йуналиши қуйидаги формула билан топилади.

$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2} \qquad (123)$$

$$\cos\alpha_1 = \frac{W_x}{W}; \cos\beta_1 = \frac{W_y}{W}; \cos\gamma_1 = \frac{W_z}{W}; \qquad (124)$$

Бунда α, β, γ, лар -W билан x, y, z ўқлари орасидаги бурчаклар (104-расм).



104-расм.

Н а т и ж а: Нуқта ҳаракати координаталар усулида берилган булса (123)-формула билан нуқта тезланишини модули ҳамда (124)-формула билан тезланишининг йўналиши топилади.

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР.

1. Кинематика нимани ўрганади?
2. Кинематикани асосий масалаларини айтинг?
3. Нуқта траекторияси деб нимага айтилади?
4. Нуқта ҳаракати табиий усулда қандай берилади?
5. Нуқта ҳаракати координаталар усулида қандай берилади?
6. Нуқтани траектория тенгламаси қандай топилади?
7. Нуқта ҳаракати вектор усулида қандай берилади?
8. Нуқта ҳаракати вектор усулида берилганда унинг тезлиги қандай аниқланади? Нуқтанинг тезлиги қандай йўналган булади?
9. Нуқтанинг тезланиши вектор усулида қандай аниқланади? Нуқтанинг тезланиши қандай йўналган?
10. Нуқта тезлигининг декарт координаталар ўқларидаги проекциялари нимага тенг?
11. Нуқта тезлигининг миқдори ва йўналиши проекциялар буйича қандай аниқланади?

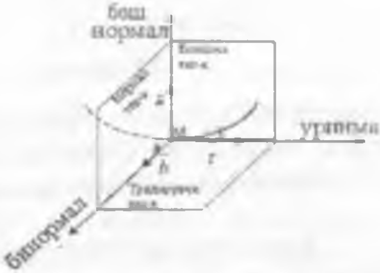
12. Нуқта тезланишининг декарт координаталари уқларидаги проекцияси нимага тенг?

13. Нуқта тезланишининг миқдор ва йуналиши проекциялари буйича қандай аниқланади?

46-§. ТАБИИЙ КООРДИНАТЛАР СИСТЕМАСИ

Нуқта траекторияси берилган булсин. Шундан битта нуқта олиб унга уринма утказамиз. М нуқтадан уринмага перпендикуляр қилиб утказилган текисликка нормал текислик деб айтилади.

Нормал текислик билан ёпишма текисликнинг кесишган чизиғи бош нормал дейилади. М нуқтадан бош нормалга перпендикуляр қилиб утказилган текисликка тугриловчи текислик дейилади. Нормал текислик билан тугриловчи текисликнинг кесишган чизиғига бинормал дейилади (105-расм).

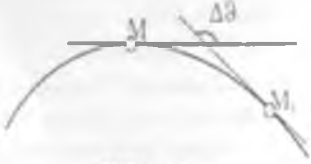


105-расм.

Уринма, бош нормал ва бинормалдан ташкил топган уқларга табиий уқлар дейилади. Бу уқлар $M\tau b$ табиий координаталар системасини ташкил этади. Табиий уқларнинг бирлик векторларини мос равишда τ, n, b билан белгиланади (105-расм).

Эгри чизиқнинг эгрилиги.

Нуқта троекториясидаги М ва M_1 нуқталардан троекторияга уринма утказилади (105^1-расм).



105^1-расм.

Бу уринмалар орасидаги бурчак $\Delta\varphi$ билан белгилаймиз. $\Delta\varphi$ бурчакка қўшни бурчак дейилади. Бу бурчакнинг ΔS ёйига нисбати эгри чизиқнинг ўртача эгрилиги дейилади ва $K_{ўрт}$ билан белгиланади.

$$K_{ўрт} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta S} \text{ бунда } \Delta S = MM_1$$

Ўртача эгриликнинг $\Delta S \to 0$ лимитига эгри чизиқнинг берилган нуқтадаги эгрилиги дейилади.

$$K = \lim_{\Delta S \to 0} K_{ўрт} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta S}$$

$$K = \frac{d\varphi}{dS}$$

Бунда K эгри чизиқнинг M нуқтадаги эгрилиги.

Эгриликнинг тескари қийматига эгрилик радиуси дейилади.

$$\rho = \frac{1}{K}$$

Мисол учун тўғри чизиқнинг эгрилиги K=0 бўлса, $\rho = \frac{1}{K} = \infty$ бўлади.

R радиусли айлананинг эгрилик радиуси унинг радиусига тенг.

47-§. НУҚТА ҲАРАКАТИ ТАБИИЙ УСУЛДА БЕРИЛГАНДА УНИНГ ТЕЗЛАНИШИНИ ТОПИШ

Нуқтанинг троекторияси ва унинг троектория бўйлаб ҳаракатланиш қонуни берилган бўлсин. Нуқтанинг тезланишини аниқлаймиз. Маълумки нуқта ҳаракати вектор усулида берилганда унинг тезлиги қуйидаги формула билан топилади.

$$\bar{\vartheta} = \frac{d\bar{r}}{dt}$$

Бу формуланинг ўнг томонини қуйидагича ёзамиз.

$$\bar{\vartheta} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}}{dS} \cdot \frac{dS}{dt}$$

$\frac{d\bar{r}}{dS} = \tau$ ва $\vartheta = \frac{dS}{dt}$ алгебраик тезлик эканини хисобга олсак, у ҳолда:

$$\bar{\upsilon} = \upsilon\bar{\tau} \qquad (125)$$

бўлади.

Нуқта ҳаракати вектор усулида берилганда унинг тезланиши қуйидаги формула билан аниқланади:

$$\overline{W} = \frac{d\overline{\upsilon}}{dt} \tag{125.1}$$

Бунда
$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{d\tau}{dS} \cdot \frac{dS}{dt} \tag{126}$$

$$\frac{dS}{dt} = \vartheta$$

$\overline{W} = \dfrac{d\overline{\upsilon}}{dt}$ га асосан $\dfrac{d\overline{\tau}}{dS} k = \dfrac{1}{\rho} \overline{n}$

(126)-ни қуйидагича ёзамиз.

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{\vartheta}{\rho} \cdot n \tag{127}$$

Бунда ρ троекторияни эгрилик радиуси, n бош нормалнинг бирлик вектори. (127)- ни (126)- га қуямиз.

$$\overline{W} = \frac{d\upsilon}{dt}\overline{\tau} + \frac{\upsilon^2}{\rho}\overline{n} \tag{128}$$

(128)- ифодада нуқта тезланиши табиий координата ўқларидаги ташкил этувчилари орқали берилган.

Тезланишнинг уринма бўйлаб йўналган ташкил этувчиси:

$$\overline{W}_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}\overline{\tau} \tag{129}$$

Нуқтанинг уринма тезланиши, бош нормал бўйича йўналган бўлиб, ташкил этувчиси эса нуқтанинг нормал тезланишидир.

$$\overline{W}_n = \frac{\upsilon^2}{\rho}\overline{n} \tag{130}$$

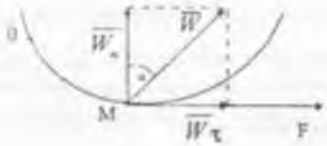
М нуқтанинг тезланиши шу нуқта троекториясига ўтказилган ёпишма текислигида ётади. Бу текисликка эса бинормал перпендикуляр. Шунинг учун нуқта тезланишининг бинормалдаги проекцияси нолга тенг.

$$\overline{W}_b = 0\,.$$

(129)- ва (130)- га кўра (128)- ифода қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\overline{W} = \overline{W}_\tau + \overline{W}_n \tag{131}$$

Яъни, эгри чизикли харакатдаги нуқтанинг тезланиши уринма ва нормал тезланишларнинг геометрик йиғиндисига тенг. Бу икки тезланиш ўзаро перпендикуляр йўналган. Шу сабабли $\overline{W}$ тезланиш вектори $\overline{W}_\tau$ ва $\overline{W}_n$ ларга қурилган тўғри тўртбурчакнинг диагонали бўйича йўналган бўлади (106-расм).



106-расм.

Нуқта тўла тезланишининг модули ва йўналиши қуйидаги формулалар билан топилади:

$$W = \sqrt{W_\tau^2 + W_n^2}, \qquad tg\alpha = \frac{|W_\tau|}{W_n} \qquad (132)$$

Нуқта тезланишининг табиий координата ўқларидаги проекциялари

$$W_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2}, \qquad W_n = \frac{v^2}{\rho}, \qquad W_B = 0 \qquad (133)$$

формулалар ёрдамида аниқланади.

Демак, нуқтанинг ҳаракати табиий усулда берилганда (129)-(133) формулалар билан нуқта тезланиши аниқланади.

Агар нуқтанинг ҳаракати тўғри чизиқли бўлса траекториянинг эгрилик радиуси ∞ ка тенг бўлади.

$$W_n = \frac{\upsilon^2}{\infty} = 0 \qquad W_n = 0$$

Нуқтанинг нормал тезланиши эгри чизиқли ҳаракатда мавжуд бўлиб, нуқта тезлигининг йўналиши жиҳатдан ўзгаришини тасвирлайди. Агар $\vartheta = const$ бўлса, $w_\tau = \dfrac{d\upsilon}{dt} = 0; ... w_\tau = 0$.

Уринма тезланиш нуқта тезлигининг модул жиҳатидан ўзгаришини тасвирлайди. Демак уринма тезланиш нотекис ҳаракатда мавжуд бўлади.

48-§. НУҚТАНИНГ ТЕКИС ЎЗГАРУВЧАН ҲАРАКАТИ

Агар уринма тезланиш ўзгармас бўлса, бундай ҳаракатга текис ўзгарувчан ҳаракат дейилади. Текис ўзгарувчан ҳаракат тенгламасини аниқлаймиз.

Нуқтанинг уринма тезланиши:

$$W_\tau = Const,$$

$$W_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}$$

$d\vartheta = W_\tau dt$ интеграллаб нукта тезлигини топилади.

$$\upsilon = \upsilon_0 + W_\tau t \qquad (134)$$

Бунда υ_0 - бошлангич тезлик.

υ -охирги тезлик.

(134) ни интеграллаб харакат конунини топамиз.

$$S = \upsilon_0 t + \frac{W_\tau t^2}{2} \qquad (135)$$

Бунда S - ёй координатаси.

Демак, (134)- ва (135)- формулалар билан текис узгарувчан харакатдаги нукта тезлиги ва траектория буйлаб харакат тенгламаси топилади.

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР.

1. Кандай уқлар табиий уқлар деб аталади?
2. Нукта тезланишини табиий укларга проекциялари нимага тенг?
3. Қандай ҳаракатда нуқтанинг уринма тезланиши 0 га тенг булади?
4. Қандай ҳаракатда нукттанинг нормал тезланиши нолга тенг булади?
5. Нукта ҳаракати табиий усулда берилганда унинг тезлиги кандай топилади?
6. Нуктанинг қандай ҳаракатига текис ҳаракат дейилади?
7. Нуқтани тезлиги қандай топилади?
8. Қандай ҳаракатта текис ўзгарувчан ҳаракат дейилади?
9. Тезлик формуласини ёзинг?

ҚАТТИҚ ЖИСМ КИНЕМАТИКАСИ

Кинематиканинг бу қисмида қаттиқ жисмларнинг қуйидаги харакатлари урганилади:

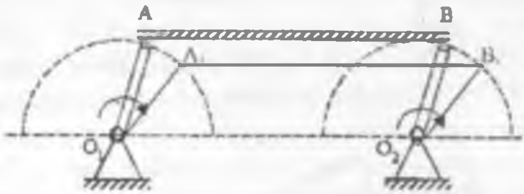
1. Илгариланма ҳаракати.
2. Қўзғалмас ўқ атрофидаги айланма ҳаракати.
3. Текис параллел ҳаракати.
4. Қўзғалмас нуқта атрофида айланма ҳаракати.
5. Нуқтанинг мураккаб ҳаракати.

Қаттиқ жисмнинг илгариланма ва айланма ҳаракатларининг оддий ҳаракат бўлиб ҳисобланади.

49-§. ҚАТТИҚ ЖИСМНИНГ ИЛГАРИЛАНМА ҲАРАКАТИ

Жисм ҳаракатланганда шу жисмда олинган кесма ҳамма вақт ўз-ўзига параллел қолса бундай ҳаракатга қаттиқ жисмнинг илгариланма ҳаракати дейилади.

Паравоз спарнигини ҳаракати илгариланма ҳаракатга мисол бўлади. Илгариланма ҳаракатдаги жисм нуқталарининг траекториялари тўғри чизиқли ва эгри чизиқли бўлиши мумкин. *AB* спарник ҳамма вақт ўз-ўзига параллел қолади, яъни илгариланма ҳаракат қилади (107-расм) $O_1A=O_2B$, $AB \parallel A_1B_1$.



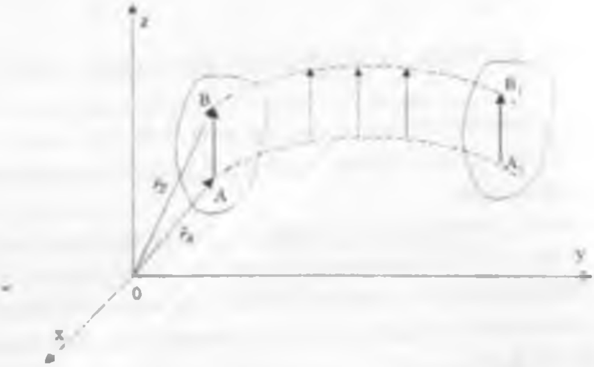
107-расм.

Қаттиқ жисмнинг илгариланма ҳаракатига оид қуйидаги теоремани исботлаймиз.

<u>Теорема:</u> Илгариланма ҳаракатдаги жисмнинг ҳамма нуқталари бир хил траектория чизади ва ҳар онда миқдор ва йўналишлари жиҳатдан бир хил тезликка ва тезланишга эга бўлади.

<u>Исбот:</u> *Oxyz* координаталар системасига нисбатан илгариланма ҳаракат қилаётган қаттиқ жисм берилган бўлсин (108-расм). Бу жисмда ихтиёрий иккита *A* ва *B* нуқталар олинади. t вақтда бу нуқталарнинг ҳолати r_1 ва r_B радиус векторлари билан аниқланади.

Қаттиқ жисмдаги *AB* ва A_1B_1 кесмалар ўзаро параллел. Жисм абсолют қаттиқ бўлганлиги учун *AB* кесманинг узунлиги ўзгармайди, $AB=const$. Жисм илгариланма ҳаракатда бўлганлиги учун *AB* векторнинг йўналиши ҳам ўзгармайди. Агар A нуқтанинг траекторияси AA_1, ёйни *AB* масофага силжитсак, бу траектория B нуқтанинг траекторияси билан яъни BB_1 ёй билан устма-уст тушади.



108-расм.

Шунинг учун $\bar{r}_A$ ва $\bar{r}_B$ векторлари ўзгарганда, уларнинг *A* ва *B* нуқталарининг чизган траекториялари бир хил бўлади. Яъни $AA_1=BB_1$ ва $AA_1 \| BB_1$.

$$\bar{r}_B = \bar{r}_A + \overline{AB} \qquad (136)$$

бунда *t* вақт бўйича ҳосила оламиз.

$$\frac{d\bar{r}_B}{dt} = \frac{d\bar{r}_A}{dt} + \frac{d(\overline{AB})}{dt}$$

$$\frac{d\bar{r}_B}{dt} = \bar{\upsilon}_B; \qquad \frac{d\bar{r}_A}{dt} = \bar{\upsilon}_A; \qquad \frac{d(\overline{AB})}{dt} = 0$$

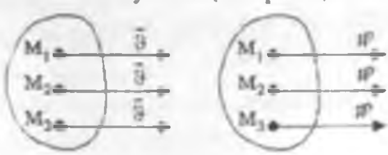
$$\bar{\upsilon}_B = \bar{\upsilon}_A \qquad (137)$$

A ва *B* нуқталар ихтиёрий нуқталар бўлганлиги учун илгариланма ҳаракатдаги жисмнинг қолган ҳамма нуқталар тезликлари бир хил бўлади.

(137)- дан *t* вақт бўйича ҳосила оламиз.

$$\frac{\bar{\upsilon}_B}{dt} = \frac{\bar{\upsilon}_A}{dt} \quad \text{ёки} \quad \bar{W}_B = \bar{W}_A \qquad (138)$$

Илгариланма ҳаракат қилаётган қаттиқ жисм бирор нуқтасининг тезлигини ва тезланишини аниқлаш (кифоя). Жисм бошқа нуқталарининг тезлиги ва тезланиши теоремага асосан шу нуқтанинг тезлиги ва тезланишига тенг бўлади (109-расм).



109-расм.

Жисмнинг илгарилама ҳаракати унинг ихтиёрий нуқтаси ҳаракати билан аниқланади. Илгарилама ҳаракатдаги жисм нуқталарининг ҳар ондаги тезлиги ҳам, тезланиши ҳам бир хил булаганидан уларни мос равишда жисмнинг тезлиги ва тезланиши деб аташ мумкин.

50-§. ҚАТТИҚ ЖИСМНИНГ ҚЎЗҒАЛМАС ЎҚ АТРОФИДАГИ АЙЛАНМА ҲАРАКАТИ. БУРЧАК ТЕЗЛИГИ ВА БУРЧАК ТЕЗЛАНИШИ

Жисм ҳаракати давомида унинг икки нуқтаси қузғалмасдан қолса бундай ҳаракатга қаттиқ жисмнинг қузғалмас уқ атрофидаги айланма ҳаракати дейилади. Шу қўзғалмас нуқталардан ўтган тўғри чизиққа айланиш уқи дейилади. Қузғалмас z уқи атрофида айланувчи қаттиқ жисм берилган булсин (110-расм). Шу жисмнинг ҳар бир вақтдаги ҳолатини аниқлаймиз. А ва В нуқталар қўзғалмас нуқталардир. Шу нуқталар орқали z уқи ўтказилади. z - жисмнинг айланиш уқи. Жисмнинг ҳолатини аниқлаш учун айланиш уқидан Q ва P текисликлари олинади. Бунда Q қўзғалмас текислик, P қўзғалувчи текислик. P - текислиги жисмга қаттиқ бириктирилган ва жисм билан бирга айланади. Жисмнинг ҳолатини аниқлаш учун P текисликнинг Q га нисбатан ҳолатини аниқлаш кифоя. P - текисликнинг ҳолати φ бурчаги билан аниқланади. φ-га айланиш бурчаги дейилади. Жисм уқ атрофида айлаганда φ бурчаги вақт ўтиши билан ўзгаради.

$$\varphi = f(t) \tag{139}$$

Бу тенглама жисмнинг қўзғалмас уқ атрофидаги айланма ҳаракати тенгламаси дейилади. Айланиш бурчаги радиан билан ўлчанади.

Айланма ҳаракат қонуни, бурчак тезлиги билан бурчак тезланишга айланма ҳаракатнинг кинематик тавсифи дейилади. Айланиш бурчаги φ дан вақт бўйича олинган биринчи тартибли ҳосила жисмнинг бурчак тезлиги дейилади ва ω билан белгиланади:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \qquad \omega = \varphi = f'(t) \tag{140}$$

Бунда ҳосиланинг ишораси жисмнинг айланиш йўналишини ифодалайди. Агар $\omega = \varphi = f'(t) > 0$ булган онда $f(t)$ функция ўсувчан булади, яъни уқнинг мусбат йўналишидан қараганда жисм соат стрелкаси айланишига тескари айланади: $\varphi = f'(t) < 0$ булган онда $f(t)$ функция камаювчан булади, яъни жисм соат стрелкаси айланиши буйича айланади.

110-расм.

Демак, жисмнинг бурчак тезлиги айланиш бурчагидан вақт бўйича олинган биринчи тартибли ҳосилага тенг бўлади.

Бурчак тезлигининг бирлиги

$$\omega = \frac{рад}{сек} = \frac{1}{сек} = сек^{-1} \qquad (141)$$

Бурчак тезланишинг бурчак тезлигидан вақт бўйича олинган иккинчи тартибли ҳосилага тенг бўлади.

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \qquad (142)$$

Бурчак тезланишини бирлиги $\varepsilon = \frac{рад}{сек^2} = \frac{1}{сек^2} = сек^{-2}$.

Бурчак тезланиши айланиш бурчагидан вақт бўйича олинган иккинчи тартибли ҳосилага тенг бўлади.

51-§. ЖИСМНИНГ ТЕКИС ВА ТЕКИС ЎЗГАРУВЧАН АЙЛАНМА ҲАРАКАТИ

1. Қаттиқ жисм қўзғалмас ўқ атрофида бир хил вақт оралиғида бир хил бурчакка бурилса жисм текис айланма ҳаракатда дейилади. Текис айланма ҳаракат бурчак тезлиги $\omega = const$ бўлади.

$$\varphi = \omega t \qquad (143)$$

Текис айланма ҳаракат тенгламаси (143)- билан ифодаланади. Текис айланишдаги жисмнинг бурчак тезлигини бир минутдаги айланишлар сони билан ифодаланади. Жисм бир марта тўла айланганда $\varphi = 2\pi$ радиан бурчакка бурилади.

Жисм n марта айланса, $\varphi = 2\pi n$ бурчакка бурилади. Текис айланма ҳаракатнинг бурчак тезлиги қуйидагига тенг булади:

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30}\ \frac{рад}{сек} \qquad (144)$$

Бунда n - жисмнинг бир минутдаги айланишлар сони Агар жисмнинг бир минутдаги айланишлар сони берилган булса, (144)-формула билан унинг бурчак тезлиги топилади.

2. Агар айланма ҳаракат давомида бурчак тезланиши ε =const булса, жисм текис узгарувчан айланма ҳаракатда булади.

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t \qquad (145)$$

(145)-формула билан текис узгарувчан айланма ҳаракатнинг бурчак тезлиги топилади.

Бунда ω_0 - бошлангич бурчак тезлиги

ω - ихтиёрий вақтдаги бурчак тезлиги.

(145)-формулага $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ ни қуйиб интеграллаcак, (146)-формулани ҳосил қиламиз.

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2} \qquad (146)$$

(146)-тенглама билан текис узгарувчан айланишда бурилиш бурчаги, ёки текис узгарувчан айланма ҳаракат қонуни аниқланади.

Қузгалмас уқ атрофида айланувчи жисмнинг бурчак тезлик вектори мазкур уқ буйлаб йуналган ва унинг мусбат йуналишидан қараганда айланиш соат стрелкаси ҳаракатига тескари йуналишда куринадиган, айланиш уқининг ихтиёрий нуқтасига қуйилган вектор билан ифодаланади (110.1-расм). Бурчак тезлик векторининг модули

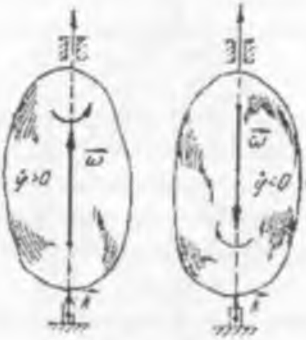
$$|\bar{\omega}| = \left|\frac{d\varphi}{dt}\right| = |\omega_z|$$

формула ёрдамида аниқланади.

Агар айланиш уқи бирлик векторини *k* билан белгиласак, бурчак тезлик векторини

$$\bar{\omega} = \dot{\varphi} \cdot \bar{k} = \omega_z \cdot \bar{k} \qquad (146.1)$$

куринишида ёзиш мумкин. (146*) дан курамизки, $\dot{\varphi} > 0$ булса, $\bar{\omega}$ вектори $\bar{k}$ йуналиши буйича, $\dot{\varphi} < 0$ да $\bar{k}$ қарама-қарши йуналишда булади (110.1 -расм a,b).



a) b)

110.1-расм.

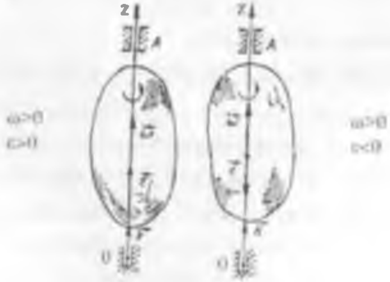
Жисмнинг бурчак тезланишини айланиш ўқи бўйлаб йўналган $\bar{\varepsilon}$ вектори тарзида ифодалаш мумкин. Бунда жисмнинг бурчак тезланиш вектори шу жисм бурчак тезлик векторидан вақт бўйича олинган ҳосилага тенг бўлади (110.2-расм).

$$\bar{\omega} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \frac{d\omega_z}{dt}\cdot\bar{k} = \varepsilon_z\cdot\bar{k}$$

ёки

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon_z\bar{k} = \ddot{\varphi}\bar{k} \qquad (146.2)$$

Агар жисмнинг бурчак тезлиги модуль жиҳатидан орта борса, бундай ҳаракат тезланувчан айланма ҳаракат, камая борса, секинланувчан айланма ҳаракат дейилади. Текис айланма ҳаракатда $\omega = const$ бўлгани учун $\varepsilon = 0$ бўлади. Демак, ω_z ва ε_z лар бир хил ишорали бўлса, ҳаракат тезланувчан турли ишорага эга бўлса, ҳаракат секинланувчан бўлади (110.2-расм a,b).



a) b)

110.2 –расм.

Қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи қаттиқ жисмнинг бурчак тезлиги ва бурчак тезланиши айланиш ўқи бўйлаб йўналган вектор катталикдир.

52-§. ҚЎЗҒАЛМАС ЎҚ АТРОФИДА АЙЛАНУВЧИ ҚАТТИҚ ЖИСМ НУҚТАСИНИНГ ТЕЗЛИГИ ВА ТЕЗЛАНИШИ

Қўзғалмас z ўқи атрофида айланувчи қаттиқ жисм берилган бўлсин.

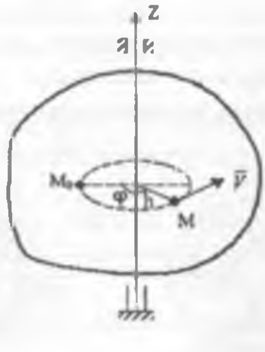
Шу жисмнинг ихтиёрий M нуқтаси тезлиги ва тезланишини аниқлаймиз.

Бунда h – M нуқтадан айланиш ўқигача бўлган масофа (111-расм). Z жисмнинг қўзғалмас айланиш ўқи. Жисм абсолют қаттиқ бўлганлиги учун $h = const$ бўлади. Жисм ўқи атрофида айланганда M нуқта айланиш ўқига перпендикуляр текисликда радиуси h га тенг бўлган айлана чизади.

Жисм ўқ атрофида $d\varphi$ бурчакка бурилганда M нуқта dS йўлни босиб ўтади.

$$dS = \overset{\frown}{M_0M}$$

$$dS = hd\varphi$$



111-расм.

М нуқтанинг тезлиги:

$$\upsilon = \frac{dS}{dt} = \frac{d(\varphi h)}{dt} = h\frac{d\varphi}{dt} = h \cdot \omega$$

ёки

$$\upsilon = \omega h \qquad (147)$$

ω - жисмнинг бурчак тезлиги. (147)-формула билан кўзғалмас ўқ атрофида айланувчи қаттиқ жисм нуқтасининг чизиқли тезлиги топилади. Кўзғалмас ўқ атрофида айланма ҳаракатдаги жисм ихтиёрий нуқтаси чизиқли тезлигининг миқдори жисм бурчак тезлиги билан кўзғалмас ўқдан нуқтагача бўлган масофанинг кўпайтмасига тенг. Чизиқли тезлик вектори $\bar{\upsilon}$ M нуқтада h га перпендикуляр бўлиб, жисм айланаётган томонга қараб йўналган бўлади. Қаттиқ жисм нуқталарининг тезликлари шу нуқталардан айланиш ўқигача бўлган масофага пропорционалдир.

M нуқтанинг уринма тезланишини топамиз. Уринма тезланиши:

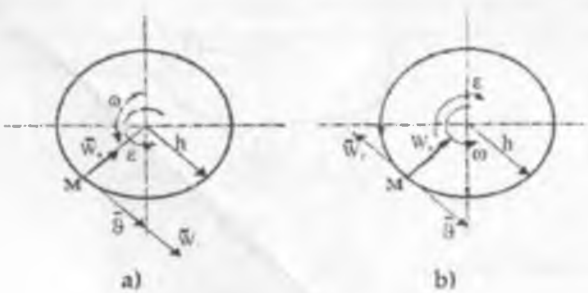
$$W_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d(\omega h)}{dt} = h \cdot \dot{\varepsilon}, \quad W_\tau = \varepsilon \cdot h \qquad (148)$$

Кўзғалмас ўқ атрофида айланувчи жисм ихтиёрий нуқтасининг уринма тезланиши жисмнинг бурчак тезланиши билан шу нуқтадан айланиш ўқигача бўлган масофанинг кўпайтмасига тенг.

Уринма тезланиш шу нуқтадан h га перпендикуляр бўлиб, тезланувчан айланма ҳаракатда $\bar{\upsilon}$ тезлик йўналиши бўйича (112-расм, a), секинланувчан айланма ҳаракатда эса унга тескари йўналади (112-расм, b). М нуқтанинг нормал тезланишини топамиз.

$$W_n = \frac{\upsilon^2}{\rho} = \frac{(\omega h)^2}{h} = \frac{\omega^2 h^2}{h} = \omega^2 h \qquad (149)$$

Кўзғалмас ўқ атрофида айланувчи жисм ихтиёрий нуқтасининг нормал тезланиши бурчак тезлигининг квадрати билан нуқтадан айланиш ўқигача бўлган масофанинг кўпайтмасига тенг.



112-расм.

Нормал тезланиши айланиш радиуси h бўйлаб айланиш ўқи томон йўналган бўлади.

Уринма ва нормал тезланишлар узаро пепендикуляр булади. Тула тезланишни модули қуйидагича аниқланади.

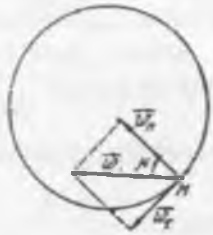
$$W_т = \sqrt{W_\tau^2 + W_n^2} = \sqrt{\varepsilon^2 h^2 + \omega^2 h^2} = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \qquad W = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

(150)

Тезланишининг йуналиши эса қуйидаги формуладан топилади.

$$tg\mu = \frac{\varepsilon}{\omega^2} \qquad (151)$$

Бунда μ - тула тезланиш билан нормал тезланиш орасидаги бурчак.



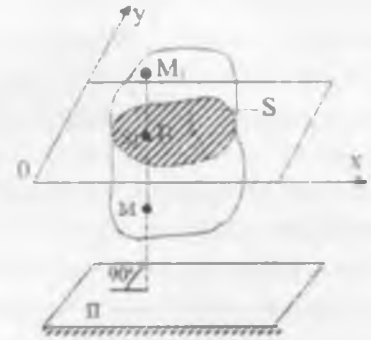
113-расм.

Жисм қузғалмас уқ атрофида текис айланса, *W=const* ва унинг бурчак тезланиши нолга тенг булади $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 0$. У ҳолда жисм нуқтасининг уринма тезланиши нолга тенг булиб, $W = \varepsilon \cdot h = 0$, жисм нуқталари нормал тезланишга эга булади $W = W_n = \omega^2 h$.

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР.

1. Қаттиқ жисмнинг қандай ҳаракатига илгарилама ҳаракат деб аталади?
2. Илгарилама ҳаракат қилаётган қаттиқ жисм нуқталарининг траекторияси, тезлиги ва тезланиши ҳақидаги теорема қандай таърифланади?
3. Қаттиқ жисмнинг эгри чизиқли илгарилама ҳаракатига мисоллар келтиринг?
4. Қаттиқ жисмнинг қузғалмас уқ атрофидаги айланма ҳаракат таърифини айтинг? Бу ҳаракатга мисоллар келтиринг?
5. Жисмнинг бурчак тезлик ва бурчак тезланиши нима? Уларнинг улчов бирлиги қандай?
6. Қаттиқ жисмнинг қандай айланишига текис айланиш дейилади?
7. Жисмнинг бир минутдаги айланишлар сони билан бурчак тезлик орасида қандай богланиш мавжуд?

Жисмни қўзғалмас *П* текисликка параллел бўлган *П₁* текислик билан кесиб, кесимда хосил бўлган кесимани *(S)* билан белгилаймиз (115-расм). *MM_1* кесма *(S)* кесимдаги нуқтаси *B* билан белгиланади. У холда *MM_1* кесмани ҳаракатини ўрганиш ўрнига *B* нуқтасининг ҳаракати ўрганилади.

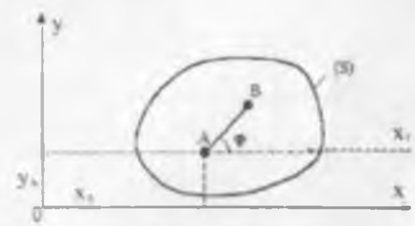


115-расм.

Худди шунингдек *MM_1* кесмага параллел $M_1M_1^{|}$ кесмани олсак $M_1M_1^{|}$ кесма ҳам илгариланма харакатда бўлгани учун унинг *(S)* кесимдаги *O_1* нуқтасининг ҳаракатини ўрганиш кифоя. Жисмни *MM_1*, $M_1M_1^{|}$, $M_2M_2^{|}$ кесмалар тўпламидан иборат деб қараш мумкин ва бундай жисмнинг ҳаракатини ўрганиш ўрнига унинг *(S)* кесимининг ҳаракатини ўрганиш кифоя. *(S)* кесимга текис шакл дейилади. Текис шакл ҳаракатланадиган *П* текисликка текис шаклнинг ҳаракат текислиги дейилади.

Oxy координаталар системасига нисбатан ҳаракат қилаётган *(S)* текис шакл берилган бўлсин. Бу текис шаклдаги *AB* кесманинг вазияти *A* нуқтанинг $\bar{x}_A, \bar{y}_A$ координаталари ва А нуқта атрофида φ айланиш бурчаги билан аниқланади.

φ - *AB* кесманинг *Ox* ўқи билан ташкил қилган бурчаги (116-расм).



116-расм.

8. Жисмнинг қандай айланишига текис ўзгарувчан айланиш дейилади?

9. Текис ўзгарувчан айланма ҳаракатда жисмнинг бурчак тезлиги ва айланиш бурчаги қайси формула билан топилади?

10. Айланма ҳаракат қилаётган қаттиқ жисм нуқтасининг тезлиги модули қандай топилади ва у қандай йўналган?

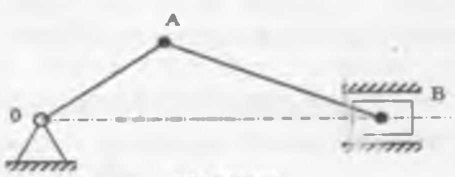
11. Қўзғалмас ўқ атрофида айланаётган қаттиқ жисм нуқтасининг урина ва нормал тезланиши қайси формула билан аниқланади? Бу тезланишлар қандай йўналган бўлади?

12. Қўзғалмас ўқ атрофида айланаётган қаттиқ жисм нуқтасининг тўла тезланиши қайси формула билан аниқланади? Бу тезланишнинг йўналиши қандай?

53-§. ҚАТТИҚ ЖИСМНИНГ ТЕКИС ПАРАЛЛЕЛ ҲАРАКАТИ

Қаттиқ жисмда олинган ҳамма нуқталар жисм ҳаракатида бирор қўзғалмас текисликка параллел текисликда ҳаракатланса, унинг бундай ҳаракатига текис параллел ҳаракат дейилади.

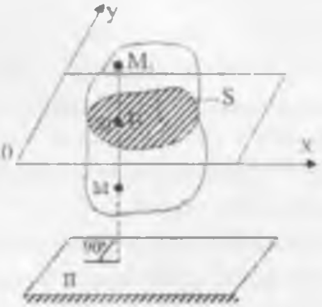
Масалан: Тўғри чизиқли йўлдаги машина ғилдирагининг ҳаракати ёки кривошип шатунли механизмдаги шатуннинг ҳаракати (114-расм).



114-расм.

Текис параллел ҳаракат қилаётган жисм берилган бўлсин. Жисмнинг текис параллел ҳаракатини ўрганиш учун жисмда қўзғалмас текисликка перпендикуляр бўлган MM_1 ихтиёрий кесма олинади. Текис параллел ҳаракат таърифига кўра MM_1 кесманинг нуқталаридан Π текисликгача бўлган масофалар ўзгармасдан қолади, шу сабабли MM_1 кесма ҳар доим ўзига параллел равишда ҳаракатланади. Бинобарин MM_1 кесма илгарилама ҳаракатда бўлади. Илгарилама ҳаракат таърифига кўра жисмнинг барча нуқталари бир хил траектория чизади, тезлик ва тезланишлари тенг бўлади. Шу сабабли илгариланма ҳаракатдаги жисм битта нуқтасининг ҳаракатини ўрганиш кифоя.

Жисмни кўзғалмас $П$ текисликка параллел бўлган $П_1$ текислик билан кесиб, кесимда хосил бўлган кесимани (S) билан белгилаймиз (115-расм). MM_1 кесма (S) кесимдаги нуқтаси B билан белгиланади. У холда MM_1 кесмани харакатини ўрганиш урнига B нуктасининг харакати урганилади.



115-расм.

Худди шунингдек MM_1 кесмага параллел $M_1M_1^1$ кесмани олсак $M_1M_1^1$ кесма ҳам илгариланма харакатда бўлгани учун унинг (S) кесимдаги 0_1 нуқтасининг ҳаракатини ўрганиш кифоя. Жисмни MM_1, $M_1M_1^1$, $M_2M_2^1$ кесмалар тўпламидан иборат деб қараш мумкин ва бундай жисмнинг ҳаракатини ўрганиш ўрнига унинг (S) кесимининг ҳаракатини ўрганиш кифоя. (S) кесимга текис шакл дейилади. Текис шакл ҳаракатланадиган $П$ текисликка текис шаклнинг ҳаракат текислиги дейилади.

Oxy координаталар системасига нисбатан ҳаракат қилаётган (S) текис шакл берилган бўлсин. Бу текис шаклдаги AB кесманинг вазияти A нуқтанинг $\bar{x}_A$, $\bar{y}_A$ координаталари ва А нуқта атрофида φ айланиш бурчаги билан аниқланади.

φ - AB кесманинг Ox ўқи билан ташкил қилган бурчаги (116-расм).

116-расм.

A нуқтани қутб деб қабул қиламиз. Жисм ҳаракатланганда x_A, y_A координатаси ва φ бурчаги вақтнинг функцияси сифатида узгаради. Шунинг учун x_A, y_A, φ қуйидагича ёзилади.

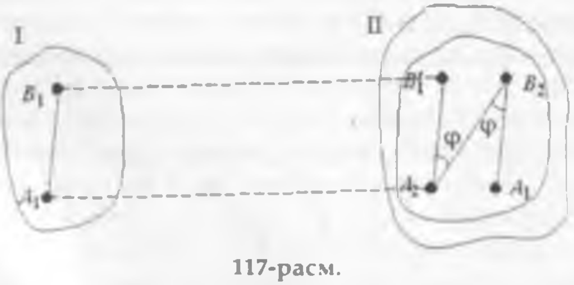
$$\left.\begin{aligned} x_A &= f_1(t) \\ y_A &= f_2(t) \\ \varphi &= f_3(t) \end{aligned}\right\} \qquad (152)$$

(152)-формулаларга қаттиқ жисмнинг текис параллел ҳаракат тенгламалари дейилади.

Қаттиқ жисмнинг текис параллел ҳаракатини илгариланма ва айланма ҳаракатларга ажратиш мумкин.

<u>Теорема:</u> Текис шаклнинг шакл текислигида бир ҳолдан иккинчи ҳолга ҳар қандай кўчишини қутб билан биргаликдаги илгариланма ҳаракат ва қутбдан ўтган шакл текислигига перпендикуляр бўлган ўқ атрофидаги айланма харакатдан ташкил топган деб қараш мумкин.

<u>Исбот:</u> Текис шакл текисликда I ҳолатдан II ҳолатга кўчган бўлсин (117-расм). I ҳолатда текис шаклда ихтиёрий A_1B_1 кесма олинади. II ҳолатда A_1B_1 кесма A_2B_2 ҳолатини эгалласин. Текис шаклга шундай илгарилама кўчиш берилади, A_1 нуқта A_2 нуқта билан устма-уст тушсин. B_1 нуқта эса $B_1^{|}$ ҳолатини эгалласин. Агар текис шаклни A_2 нуқтадан шакл текислигига тик равишда ўтувчи ўқ атрофида $B_1^{|}, A_2, B_2 = \varphi$ бурчакка айлантирилса, у ҳолда $A_2B_1 = A_2B_2$ бўлгани учун A_2, B_1 ва A_2, B_2 кесмалар устма-ўст тушади. Жисм эса II ҳолатни эгаллайди. Худди шу йўл билан жисмни II ҳолатдан III ҳолатга ва ҳоказо келтириш мумкин. Демак, қаттиқ жисмнинг текис параллел ҳаракати илгариланма ва айланма ҳаракатлардан иборат.



117-расм.

(152)-формуладаги биринчи иккита тенглама илгарилама ҳаракатини, учинчи тенглама эса айланма ҳаракатини ифодалайди.

Теоремани бошқача усулда қуйидагичи исботлаймиз (117-расм). Жисмга шундай илгариланма кучини берамизки, натижада B_1 нуқта B_2 билан устма-уст тушсин A_1 нуқта эса A_2 холатни эгалласин A_1B_1 A_1B_2 булади.

Агар текис шаклни B_2 нуқтадан ўтувчи ўқ атрофида A_1', $B_2A_2=\varphi$ бурчакка бурсак A_1B_2 кесма A_1, $B_2=A_2B_2$, булганлиги учун A_1B_2 билан устма-уст тушади текис шакл эса II холатини эгаллайди A_2 ёки B_2 нуқталарга қутб деб аталади.

Теореманинг исботидан курамизки, текис шаклнинг илгариланма кучини қутбни танлаб олишига боглиқ булади. Ҳақиқатда A_1 нуқтанинг холати I холда A_1A_2, II холда A_1A_1' булади. $A_1A_2 \neq A_1A_1'$

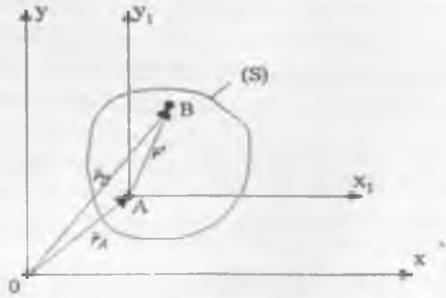
Айланиш бурчаги φ эса қутбни танлаб олишига боглиқ булмайди.

54-§. ҚАТТИҚ ЖИСМ ИСТАЛГАН НУҚТАСИНИНГ ТЕЗЛИГИНИ ҚУТБ УСУЛИДА АНИҚЛАШ

Теорема: Текис шакл ихтиёрий B нуқтасининг тезлиги A қутбнинг тезлиги билан B нуқтанинг қутб атрофида айланганда ҳосил килган тезлигининг геометрик йигиндисига тенг.

$$\bar{\upsilon}_B = \bar{\upsilon}_A + \bar{\upsilon}_{BA}$$

Исбот. Текис параллел ҳаракат қилаетган текис шакл берилган булсин. Шу текис шаклдаги B нуқтасининг тезлигини аниқлашимиз лозим булсин. В нуқтанинг вазияти $\bar{r}_B$ вектор билан аниқланади (118-расм).



118-расм.

$$\bar{r}_B = \bar{r}_A + \bar{r}' \tag{153}$$

r_A - А қутбнинг радиус вектори.

r_B - B нуқтанинг радиус вектори

r' - B нуқтанинг Axy координаталарига нисбатан ҳолатини аниқлайдиган радиус-вектор.

B нуқтанинг тезлигини аниқлаш учун (153) дан t вақт бўйича ҳосила оламиз.

$$\frac{dr_B}{dt} = \frac{dr_A}{dt} + \frac{dr'}{dt} \qquad (154)$$

$$\frac{dr_B}{dt} = \upsilon_B, \quad \frac{dr_A}{dt} = \bar{\upsilon}_A; \quad \frac{dr'}{dt} = \bar{\upsilon}_{BA}, \qquad (155)$$

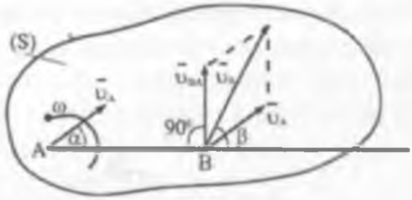
(155)- ни (154)- га қўямиз у ҳолда

$$\bar{\upsilon}_B = \bar{\upsilon}_A + \bar{\upsilon}_{BA} \qquad (156)$$

(156)- формула билан текис параллел ҳаракат қилаётган қаттиқ жисмнинг ихтиёрий B нуқтасининг тезлиги топилади. Бунда тезлик $\bar{\upsilon}_{BA}$ B нуқтанинг A қутб атрофида айланганда ҳосил қилган тезлиги. Бу тезликнинг миқдори қуйидагига тенг.

$$\upsilon_{AB} = \omega\, AB \qquad (157)$$

Бунда ω - бурчак тезлик. $\bar{\upsilon}_{BA}$ тезлик вектори айланиш радиуси AB га перпендикуляр равишда текис шаклнинг айланиш йўналиши бўйича йўналади яъни $\bar{\upsilon}_{BA}\perp$. B нуқтанинг тезлиги $\bar{\upsilon}_A$ ва $\bar{\upsilon}_{BA}$ векторлардан тузилган параллелограмнинг диоганали бўйлаб йўналган бўлади (119-расм.)



119-расм.

Текис шакл бирор нуқтасининг тезлиги ва айланма ҳаракатининг бурчак тезлиги берилганда текис шаклнинг бошқа нуқтасининг тезлигини (156) формуладан аниқлаш қутб усулида аниқлаш дейилади.

55-§. ТЕКИС ШАКЛ ИККИ НУҚТАСИ ТЕЗЛИКЛАРИНИНГ ПРОЕКЦИЯСИ ҲАҚИДАГИ ТЕОРЕМА

Теорема: Текис шакл икки нуқтаси тезликларининг шу нуқталардан ўтган тўғри чизиқдаги проекцияси ўзаро тенг.

Исбот. Текис шаклда A ва B нуқталарни оламиз. A нуқтани қутб деб қабул қиламиз. Маълумки, B нуқтанинг тезлигини (156)-формула билан ёзиш мумкин. A ва B нуқталар орқали x ўқи ўтказилади (118-расм). (156) ни ўқа проекциялаймиз.

$$(\bar{\upsilon}_B)_x = (\bar{\upsilon}_A)_x + (\bar{\upsilon}_{BA})_x$$

$\upsilon_{BA} \perp x$ бўлганлиги учун $(\bar{\upsilon}_{BA})_x = 0$ бўлади. Шундай қилиб

$$(\bar{\upsilon}_B)_x = (\bar{\upsilon}_A)_x$$

118-расмга асосан

$$\upsilon_B \cos\beta = \upsilon_A \cos\alpha \qquad (158)$$

Бу теорема ердамида A нуқта тезлигининг катталиги ва йўналиши B нуқта тезлигининг йўналиши берилганда B нуқта тезлигининг модулини топиш мумкин.

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР.

1. Қаттиқ жисмнинг қандай ҳаракатига илгариланма ҳаракат деб аталади?
2. Илгариланма ҳаракат қилаётган қаттиқ жисм нуқталарининг траекторияси, тезлиги ва тезланиши ҳақидаги теорема қандай таърифланади?
3. Қаттиқ жисмнинг эгри чизиқли илгариланма ҳаракатига мисоллар келтиринг?
4. Қаттиқ жисмнинг қўзғалмас ўқ атрофидаги айланма ҳаракат таърифини айтинг? Бу ҳаракатга мисоллар келтиринг?
5. Жисмнинг бурчак тезлик ва бурчак тезланиши нима? Уларнинг ўлчов бирлиги қандай?
6. Қаттиқ жисмнинг қандай айланишига текис айланиш дейилади?
7. Жисмнинг бир минутдаги айланишлар сони билан бурчак тезлиги орасида қандай боғланиш мавжуд?
8. Жисмнинг қандай айланишига текис ўзгарувчан айланиш дейилади?
9. Текис ўзгарувчан айланма ҳаракатда жисмнинг бурчак тезлиги ва айланиш бурчаги қайси формула билан топилади?
10. Айланма ҳаракат қилаётган қаттиқ жисм нуқтасининг тезлигининг модул ва йўналиши қандай топилади?
11. Қўзғалмас ўқ атрофида айланаётган қаттиқ жисм нуқтасининг уринма ва нормал тезланиши қандай аниқланади? Бу тезланишлар қандай йўналган бўлади?

12. Кузғалмас ўқ атрофида айланаётган қаттиқ жисм нуқтасининг тезланиши қандай аниқланади? Бу тезланишининг йўналиши қандай?
13. Қаттиқ жисмнинг қандай ҳаракатига текис параллел ҳаракат дейилади?
14. Текис параллел ҳаракат нечта тенглама билан аниқланади?
15. Жисмнинг текис параллел ҳаракатини қандай икки ҳаракатга ажратиш мумкин?
16. Жисмнинг бурчак тезлиги ва бурчак тезланиши қутбга боғлиқми?
17. Текис шакл нуқтасининг тезлиги қандай аниқланади?

18. $\vec{v}_B=\vec{v}_A+\vec{v}_{BA}$ тенгликдаги v_{BA} тезликнинг модули қандай топилади? У қандай йўналган?
19. Текис шакл икки нуқтаси тезлигининг проекцияси ҳақидаги теоремани таърифланг?

56-§. ТЕЗЛИКЛАР ОНИЙ МАРКАЗИ

Агар *(S)* текис шакл илгариланма ҳаракатда бўлса, бу шаклда ҳар онда тезлиги нолга тенг бўлган битта нуқта мавжуд бўлади. Тезлиги нолга тенг бўлган бундан нуқтага тезликлар оний маркази дейилади. Текис шаклнинг тезлиги нолга тенг бўлган битта нуқтанинг мавжудлигини исботлаймиз. Текис шакл бирор *A* нуқтасининг тезлиги $\bar{\upsilon}_1$ ва шу *A* нуқта атрофидаги айланма ҳаракатнинг бурчак тезлиги ω берилган бўлсин (120-расм). *A* нуқтани қутб деб қабул қиламиз.

Қутбдан айланма ҳаракат йўналишида $\bar{\upsilon}_1$ га перепендикуляр *AN* тўғри чизиғи ўтказилади. *A* нуқтадан бошлаб *AN* тўғри чизиққа *AP* кесма қўйилади.

120-расм.

$$PA = \frac{\upsilon_A}{\omega}$$

P нуқтанинг тезлиги қуйидагича ёзилади.

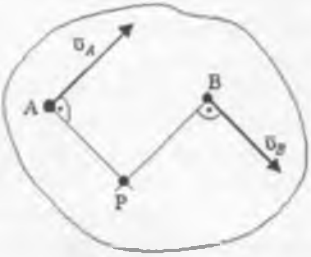
$$\bar{\upsilon}_P = \bar{\upsilon}_A + \bar{\upsilon}_{PA} \qquad (159)$$

P нуқтанинг A қутб атрофида айланишдаги тезлигининг модули топилади.

$$\upsilon_{PA} = \omega \cdot AP = \omega \frac{\upsilon_A}{\omega} = \upsilon_A \qquad \upsilon_{PA} = \upsilon_A$$

P нуқтада υ_{PA} вектори υ_A га бир тўғри чизиқ бўйлаб қарама-қарши йўналган бўлади.

У ҳолда (159)-тенгликдан $\upsilon_P = 0$ бўлиши келиб чиқади. Демак, P нуқта тезликлар оний маркази бўлади. Тезликларнинг оний марказини топиш учун текис шаклда ётган икки ихтиёрий A ва B нуқталар тезликларининг йўналиши берилган бўлиши керак. Шу нуқталардан уларнинг тезликларига туширилган перпендикулярнинг кесишган нуқтаси тезликларнинг оний маркази бўлади (121-расм). P нуқта тезликларнинг оний маркази, бу нуқтанинг тезлиги нолга тенг. $\upsilon_P = 0$



121-расм.

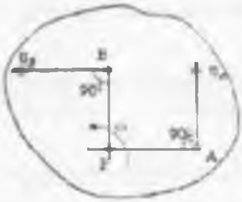
57-§. ТЕЗЛИКЛАР ОНИЙ МАРКАЗИ ЁРДАМИДА ТЕКИС ШАКЛ НУҚТАЛАРИНИНГ ТЕЗЛИГИНИ ТОПИШ

Шаклда кўрсатилган ҳолатда S текис шаклда ётган P нуқта тезликларнинг оний маркази бўлсин. Шаклдаги ихтиёрий A ва B нуқталарнинг тезликларини топиш керак (122-расм). Бунинг учун P нуқтани қутб деб қабул қиламиз. A ва B нуқталарнинг тезликлари учун қуйидаги формулаларни ёзамиз.

$$\bar{\upsilon}_A = \bar{\upsilon}_P + \bar{\upsilon}_{PA}$$
$$\bar{\upsilon}_B = \bar{\upsilon}_P + \bar{\upsilon}_{BP}$$

Бу ерда $\upsilon_P = 0$ бўлганлиги учун қуйидагича ёзамиз.

$$\upsilon_A = \upsilon_{AP} \qquad \upsilon_B = \upsilon_{BP}$$



122-расм.

Бунда $\overline{\upsilon}_{PA}, \overline{\upsilon}_{BP}$ лар - A ва B нуқталар тезликлар оний маркази атрофида айлаганда ҳосил қилган тезлиги. Уларнинг модули:

$$\upsilon_{AP} = \omega \cdot PA \qquad \upsilon_{BP} = \omega \cdot BP \qquad \text{ёки} \qquad \upsilon_A = \omega \cdot PA \qquad \upsilon_B = \omega \cdot BP \qquad (160)$$

$$\overline{\upsilon}_A \perp PA \qquad \overline{\upsilon}_B \perp BP$$

$$\omega = \frac{\upsilon_A}{PA}; \qquad \omega = \frac{\upsilon_B}{BP}; \qquad (161)$$

(161)-формула билан текис шаклнинг бурчак тезлиги топилади. Демак, бирор онда оний маркази маълум бўлган текис шакл нуқталарининг шу ондаги тезликларини айланма ҳаракатдаги жисм нуқталарининг тезликлари каби топиш мумкин. (160)-формуладан текис шакл нуқталарининг айни пайтдаги тезликлари орасидаги муносабатни аниқлаймиз.

$$\frac{\upsilon_A}{PA} = \frac{\upsilon_B}{PB} \qquad (162)$$

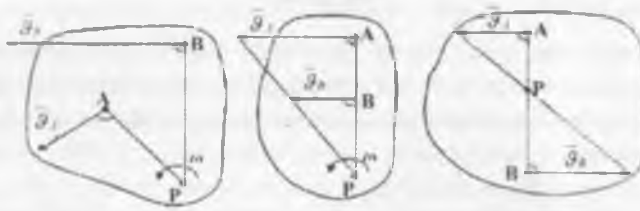
Яъни ҳар ондаги текис шакл нуқталари тезликларнинг модули оний марказдан то шу нуқталаргача бўлган масофага пропорционал бўлади. Демак, тезликлар оний маркази билан текис шакл ҳар қандай нуқтасининг тезлигини топиш учун шу шаклда етган ихтиёрий А нуқтаси тезлигининг модули ва йўналиши ҳамда бошқа B нуқта тезлигининг йўналиши берилган бўлиши керак.

58-§. БАЪЗИ ҲОЛЛАРДА ТЕЗЛИКЛАР ОНИЙ МАРКАЗИНИ АНИҚЛАШ

1. Агар текис шакл бирор A нуқтасининг тезлиги $\overline{\upsilon}_A$ ва B нуқта тезлигининг йўналиши маълум бўлса, тезликлар оний маркази A ва B

нуқталардан тезликларга ўтказилган перпендикулярларнинг кесишган нуқтасида булади (124-расм, а).

123 – расм.



а) b) c)

124–расм.

2. Агар текис шакл A ва B нуқталарининг тезликлари параллел ва AB кесмага перпендикуляр йўналган бўлса, у ҳолда тезликлар оний марказини аниқлаш (124-расм b,c) да кўрсатилган. Бу ҳолда тезликлар оний маркази AB кесма билан тезликларнинг учлари орқали ўтган тўғри чизиқнинг кесишган нуқтаси булади.

3. Текис шакл A ва B нуқталарнинг тезликлари бир бири билан параллел булиб, AB кесма υ_A тезликка перпендикуляр бўлмаса бу ҳолда A ва B нуқталардан уларни тезликларига туширилган перпендикулярлар ўзаро параллел булиб кесишмайди. Демак, тезликлар оний маркази чексизликда бўлади (125-расм, а). A ва B нуқталарнинг тезликларини AB тўғри чизиққа проекцияланганда:

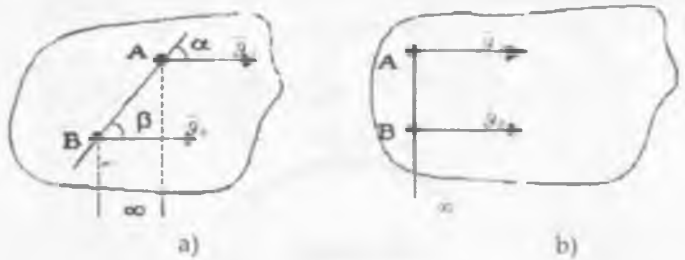
$$\upsilon_A \cos\alpha = \upsilon_B \cos\beta$$

$$\upsilon_A = \upsilon_B$$

Текис шаклнинг бурчак тезлиги $\omega = \frac{V_A}{PA} = \frac{V_A}{\infty} = 0$. Яъни текис шакл берилган онда илгариланма ҳаракат қилади.

4. Текис шакл A ва B нуқталарининг тезликлари тенг ва параллел йўналган булса, тезликлар оний маркази чексизликда булади $/AP/=\infty$ ва текис шаклнинг бурчак тезлиги нолга тенг буладп (124-расм, b). Бу ҳолда

текис шакл барча нуқталарининг тезиклари ўзаро тенг ва параллел бўлади, яъни текис шакл оний илгариланма ҳаракатда бўлади.



125-расм.

5. Агар текис шакл бирор қўзғалмас сирт устида сирпанмасдан юмалаб ҳаракат килса, у ҳолда урининш нуқтаси тезликларнинг оний маркази бўлади. P уриниш нуқтаси тезликларнинг оний маркази бўлади $\upsilon_P = 0$ (123-расм).

59-§. ТЕКИС ШАКЛ НУҚТАСИНИНГ ТЕЗЛАНИШИНИ АНИҚЛАШ

<u>Теорема:</u> Текис шакл ихтиёрий B нуқтасининг тезланиши қутб тезланиши билан мазкур нуқтанинг қутб атрофида айланишидан ҳосил бўлган тезланишларнинг геометрик йиғиндисига тенг.

<u>Исбот:</u> Текис шакл ихтиёрий B нуқтасининг тезлигини аниқлайдиган формула берилган бўлсин.

$$\overline{\upsilon}_B = \overline{\upsilon}_A + \overline{\upsilon}_{BA} \qquad (163)$$

B нуқтанинг тезланишини аниқлаш учун (163)-формуладан вақт бўйича ҳосила оламиз.

$$\frac{d\overline{\upsilon}_B}{dt} = \frac{d\overline{\upsilon}_A}{dt} + \frac{d\overline{\upsilon}_{BA}}{dt} \qquad (164)$$

бунда
$$\frac{d\overline{\upsilon}_B}{dt} = \overline{W}_B; \quad \frac{d\overline{\upsilon}_A}{dt} = \overline{W}_A; \quad \frac{d\overline{\upsilon}_{BA}}{dt} = \overline{W}_{BA} \qquad (165)$$

(165) ни (164) га қўямиз, у ҳолда

$$\overline{W}_B = \overline{W}_A + \overline{W}_{BA} \qquad (166)$$

(166)-формула билан текис шакл исталган B нуқтасининг тезланиши топилади.

Бунда W_A - А қутбнинг тезланиши. W_{BA} - В нуқтанинг A қутб атрофида айланганда ҳосил бўлган тезланиши. W_{BA} тезланишини уринма ва нормал тезланишларга ажратамиз.

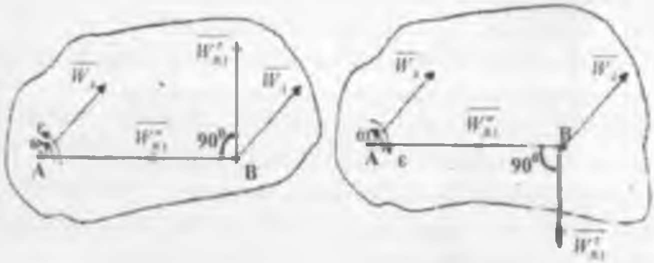
$$\overline{W}_{BA} = \overline{W}^{\tau}_{BA} + \overline{W}^{n}_{BA} \qquad (166')$$

Бунда $\overline{W}^{\tau}_{BA}$ ва $\overline{W}^{n}_{BA}$ - B нуқтанинг A қутб атрофида айланишида ҳосил бўлган уринма ва нормал тезланишлар модули қуйидагига тенг.

$$W^{\tau}_{BA} = \varepsilon \cdot AB \qquad \qquad W^{\tau}_{BA} \perp W^{n}_{BA}$$
$$\text{бунда} \qquad \qquad (167)$$
$$W^{n}_{BA} = \omega^2 \cdot AB \qquad \qquad W_{BA} = AB\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

$\overline{W}^{n}_{BA}$ - тезланиш вектори ҳар доим AB масофа бўйича B нуқтадан A қутбга қараб йўналган бўлади. $\overline{W}^{\tau}_{BA}$ тезланиш вектори B нуқтадан AB га перпендикуляр йўналган бўлади.

$\overline{W}^{\tau}_{BA}$ - тезланиш векторининг йўналиши текис шаклнинг ҳаракатига боғлиқ бўлади. Агар текис шаклнинг ҳаракати тезланувчан бўлса, яъни $\varepsilon>0$, $\overline{W}^{\tau}_{BA}$, тезланиш шакл айланишига қараб йўналган бўлади. Акс ҳолда $\varepsilon<0$ шакл айланишига тескари йўналади (126-расм a,b). Демак $\overline{W}^{\tau}_{BA}$ тезланишнинг йўналиши бурчак тезланишининг йўналишига боғлиқ. Бурчак тезланиши ε қайси томонга қараб йўналса, $\overline{W}^{\tau}_{BA}$ тезланиш шу томонга қараб йўналган бўлади.



a) b)

126-расм.

(166') ни (166) га қўйиб B нуқтанинг тезланиши топилади.

$$\overline{W}_B = \overline{W}_A + \overline{W}^{\tau}_{BA} + \overline{W}^{n}_{BA} \qquad (168)$$

Текис шакл ҳар қандай B нуқтасининг тезланиши қутбнинг тезланиши билан B нуқтанинг текис шакл билан бирга шу қутб атрофида айланишидан ҳосил бўлган уринма ва нормал тезланишларнинг геометрик йиғиндисига тенг бўлади.

Текис шакл ихтиёрий нуқтаси тезланишининг катта ва йўналишини (168)-дан фойдаланиб аниқлаш мураккаб бўлиши мумкин.

Бундай ҳолда W_n тезланишнинг бир бирига перпендикуляр йуналган уқлардаги проекциялари топилади. Бунинг учун уқлардан бирини, масалан X уқини, айланиш радиуси *(АВ)* буйлаб, иккинчисини эса унга перпендикуляр равишда утказиб, (168) ни шу уқларга проекциялаймиз:

Тезланиш $\overline{W}_n$ нинг координата уқларидаги проекциялари маълум булса, унинг модули ва йуналиши қуйидаги формулалардан топилади.

$$W_n = \sqrt{W_{nx}^2 + W_{ny}^2} \qquad (169)$$

$$\cos(\overline{W}, x) = \frac{W_{nx}}{W_n}; \qquad \cos(\overline{W}, y) = \frac{W_{ny}}{W_n}; \qquad (170)$$

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР

1. Тезликлар оний маркази деб нимага айтилади?
2. Текис шакл икки нуқтаси тезликларининг йуналиши маълум булса, тезликлар оний марказини қандай аниқлаш мумкин?
3. Тезликлар оний маркази чексизликда булган пайтда текис шакл нуқталарининг тезлигини аниқланг?
4. Бурчак тезлиги қандай аниқланади?
5. Текис шаклнинг *А* ва *В* икки нуқтаси берилган. Бунда *А* нуқтасининг тезлиги *АВ* га перпендикуляр йуналган эканлиги маълум В нуқтанинг тезлиги қандай йуналади?
6. Текис шакл ихтиёрий нуқтасининг тезланиши қандай аниқланади?
7. Уринма тезланишнинг катталиги қандай топилади?
8. Уринма тезланишнинг йуналишини аниқланг?
9. Нормал тезланишнинг катталиги қандай топилади?
10. Нормал тезланишни йуналишини аниқланг?
11. $\overline{W}_B = \overline{W}_A + \overline{W}^n_{BA} + \overline{W}^\tau_{BA}$ тенгликдаги W^τ_{BA} ва W^n_{BA} тезланишларнинг модули қандай топилади? Улар қандай йуналган?

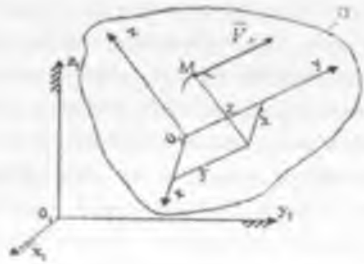
60-§. НУҚТАНИНГ МУРАККАБ ҲАРАКАТИ 12
НУҚТАНИНГ НИСБИЙ, КУЧИРМА ВА АБСОЛЮТ ҲАРАКАТИ

Агар нуқта ёки қаттиқ жисм бир вақтда икки ёки ундан куп ҳаракатда иштирок қилса, нуқтанинг ёки қаттиқ жисмнинг бундай ҳаракатига мураккаб ёки абсолют ҳаракат дейилади. Масалаларни ечишда нуқта ёки жисмнинг ҳаракатини икки ва ундан ортиқ координата системаларига нисбатан текширишга тугри келади. Бундай ҳолда координата системаларидан бири қузғалмас деб олиниб, иккинчиси эса унга нисбатан маълум қонунга мувофик ҳаракат қилади деб қаралади. Бу ҳолда нуқта қузғалмас координаталар системасига нисбатан мураккаб ҳаракатда булади. Масалан: Автобус еки поезд ичидаги пассажирнинг ҳаракати. Бу мисолда ер билан боғланган координаталар системаси қузғалмас булиб, поезд, автобус билан боғланган координаталар системаси кузғалувчи координаталар системасидан иборат булади. М нуқтанинг вагонга нисбатан килган ҳаракатига нисбий ҳаракат дейилади. Унинг вагон билан бирга ерга нисбатан килган ҳаракатига кўчирма ҳаракат дейилади. М нуқтанинг бевосита ерга нисбатан килган ҳаракати мураккаб ҳаракат булади (127-расм).

127-расм.

Маълум бир ҳаракат қилувчи *Д* жисм берилган булсин. *Oxyz - D* жисмга маҳкам урнатилган қузғалувчи система. O_1, x_1, y_1, z_1 - қўзғалмас координаталар системаси (127-расм.) *М* нуқтанинг қузғалувчи координата системасига нисбатан қилган ҳаракатига нисбий ҳаракат дейилади.

Нуқтанинг нисбий ҳаракатдаги тезлиги ва тезланишига шу нуқтанинг нисбий тезлиги ва нисбий тезланиши дейилади. Нуқтанинг нисбий тезлигини $\overline{\upsilon_r}$ билан, нисбий тезланишини $\overline{W_r}$ билан белгилайди. М нуқтанинг қўзғалувчи система билан ёки *D* жисм билан бирга қузғалмас системага нисбатан килган ҳаракатига кўчирма ҳаракат дейилади. М нуқтанинг кўчирма ҳаракатдаги тезлиги ва тезланишига шу нуқтанинг кўчирма тезлиги ва кўчирма тезланиши дейилади. Нуқтанинг кўчирма тезлиги υ_e билан кўчирма тезланиши $\overline{W_e}$ билан белгиланади. *М* нуқтанинг бевосита қўзғалмас координаталар системасига нисбатан ҳаракати мураккаб ҳаракат ёки абсолют ҳаракат дейилади. Нуқтанинг абсолют ёки мураккаб ҳаракатдаги тезлигига абсолют тезлик, тезланишига абсолют тезланиш дейилади. Абсолют тезликни $\overline{\upsilon_a}$ билан, абсолют тезланиши $\overline{W_a}$ билан белгиланади.



128-расм.

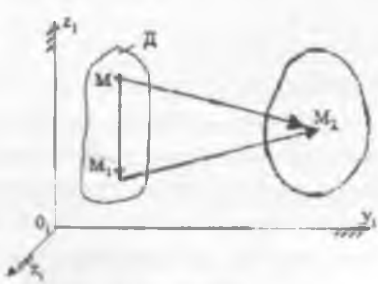
61-§. ТЕЗЛИКЛАРНИ ҚЎШИШ ҲАҚИДАГИ ТЕОРЕМА

Теорема: Нуқтанинг абсолют тезлиги унинг нисбий ва кўчирма тезликларининг геометрик йиғиндисига тенг.

$$\bar{\upsilon}_a = \bar{\upsilon}_r + \bar{\upsilon}_e \qquad (171)$$

Исбот: Қўзғалмас тўғри бурчакли O_1, x_1, y_1, z_1 координата системасига нисбатан ҳаракат қилаётган D жисм берилган бўлсин. Шу жисмга нисбатан M нуқта ҳаракат қилади. D жисмнинг t ва t_1 вақтлардаги ҳолатлари берилган бўлсин (129-расм.)

Δt вақт ичида M нуқта D жисмга нисбатан $\overline{MM_1}$ масофага, жисм билан бирга эса $\overline{MM_2}$ масофага силжийди.



129 – расм.

Бунда $\overline{MM_1}$ ва $\overline{M_1M_2}$ мос равишда M нуқтанинг нисбий ва кўчирма силжиш векторлари, MM_2 нуқтанинг абсолют силжиш вектори. Расмдан:

$$\overline{MM_2} = \overline{MM_1} + \overline{M_1M_2} \qquad (171)$$

(171) - формуланинг иккала қисмини Δt га бўламиз:

$$\frac{\overline{MM_2}}{\Delta t} = \frac{\overline{MM_1}}{\Delta t} + \frac{\overline{M_1M_2}}{\Delta t} \qquad (172)$$

(172)-формуладаги

$$\frac{\overline{MM_2}}{\Delta t},\ \frac{\overline{MM_1}}{\Delta t} \quad ва \quad \frac{\overline{M_1M_2}}{\Delta t}$$

Мос равишда M нуқтанинг Δt вақт ичидаги уртача абсолют нисбий ва кучирма тезлиги булади.

Нуқтанинг бирор ихтиерий t вақтдаги тезлигини топиш учун (172) ни $\Delta t \to 0$ интилтириб, лимит оламиз:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{MM_2}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{MM_1}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{M_1M_2}}{\Delta t} \qquad (172')$$

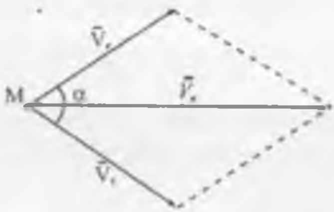
бунда $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{MM_2}}{\Delta t} = \bar{\upsilon}_a$, $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{MM_1}}{\Delta t} = \bar{\upsilon}_r$, $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{M_1M_2}}{\Delta t} = \bar{\upsilon}_e$.

Демак (172') формулани қуйидагича ёзамиз.

$$\overline{\upsilon}_a = \overline{\upsilon}_r + \overline{\upsilon}_e \qquad (173)$$

Теорема исбот қилинди. (173)-формула нуқтанинг кўчирма ҳаракати илгариланма ва айланма ҳаракатлардан иборат бўлган ҳолларда ҳам ўринлидир.

Абсолют тезликнинг модулини ва йўналишини аниқлаш учун нисбий ва кўчирма тезликлардан параллелаграм ясаш керак (130-расм).



130-расм.

Абсолют тезликнинг модули қуйидаги формула билан аниқланади.

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_r^2 + \upsilon_e^2 + 2\upsilon_r\upsilon_e \cos\alpha} \qquad (173)$$

Бунда α, $\bar{\upsilon}_r$ ва $\bar{\upsilon}_e$ тезликлар орасидаги бурчак.

1) Агар $\alpha=0$ бўлса, υ_r билан υ_e тезликлар бир тўғри чизиқ бўйлаб бир томонга йўналган бўлса, абсолют тезлик қуйидагича топилади.

$$\upsilon_a = \sqrt{\upsilon_r^2 + \upsilon_e^2 + 2\upsilon_r\upsilon_e} = \upsilon_r + \upsilon_e$$

2) Агар α=180° булса, яъни υ_r билан υ_e бир тугри чизиқ буйлаб қарама карши йуналган булса абсолют тезлик қуйидагича топилади.

$$\upsilon_a = \sqrt{\upsilon_r^2 + \upsilon_e^2 - 2\upsilon_r\upsilon_e} = \upsilon_r - \upsilon_e$$

3) Агар α=90° булса, абсолют тезлик модули қуйидагига тенг булади.

$$\upsilon_a = \sqrt{\upsilon_r^2 + \upsilon_e^2}$$

Агар нисбий, кучирма ва абсолют тезликларидан ихтиёрий иккитаси маълум булса, учунчи номаълум тезликни тезликларни қушиш ҳақидаги теоремадан фойдаланиб аниқлаш мумкин.

62-§. НУҚТАНИНГ КЎЧИРМА ҲАРАКАТИ АЙЛАНМА ҲАРАКАТДАН ИБОРАТ БЎЛГАН ҲОЛДА ТЕЗЛАНИШЛАРНИ ҚЎШИШ ТЕОРЕМАСИ

<u>Теорема:</u> Нуқтанинг кучирма ҳаракати айланма ҳаракатдан иборат булган ҳолда нуқтанинг абсолют тезланиши унинг нисбий, кучирма ва Кориолис тезланишларининг геометрик йиғиндисига тенг булади.

$$\overline{W}_a = \overline{W}_r + \overline{W}_e + \overline{W}_k \qquad (176)$$

Бунда $\overline{W}_r, \overline{W}_e, \overline{W}_k$ лар мос равишда нуқтанинг кучирма нисбий ва кориолис тезланишлари.

$\overline{W}_r$ ва $\overline{W}_e$ тезланишларни уринма ва нормал тезланишларга ажратиш мумкин.

$$\overline{W}_r = \overline{W}_r^{\tau} + \overline{W}_r^{n} \qquad (177)$$

W_r^{τ} нинг модули қуйидагига тенг

$$W_r^{\tau} = \frac{d\upsilon_r}{dt} = \frac{d^2S_r}{dt^2};$$

W_r^{n} нинг модули:

$$W_r^{n} = \frac{\upsilon_r^2}{\rho}$$

Агар нуқтанинг нисбий ҳаракати тугри чизиқли ҳаракатдан иборат булса, траекториянинг эгрилик радиуси ρ=∞ га тенг булади. Бу ҳолда W_r^n=0 булади.

$$\overline{W}_e = \overline{W}_e^{\tau} + \overline{W}_e^{n} \qquad (178)$$

$\overline{W}_e^{\tau}$ нинг модули қуйидагига тенг

$$W_e^{n} = \xi_e \cdot h$$

W_e^{n} нинг модули

$$W_e^n = \omega_e^2 \cdot h$$

(177) ва (178) ларни (176) га қуямиз, у ҳолда

$$\overline{W}_a = \overline{W}_r^n + \overline{W}_r^\tau + \overline{W}_e^\tau + \overline{W}_e^n + \overline{W}_k \qquad (179)$$

Кўчирма ҳаракат айланма ҳаракатдан иборат бўлган ҳолда нуқтанинг абсолют тезланиши (179)-формуладан топилади.

$\overline{W}_a$ абсолют тезланишнинг модулини ва йўналишини аниқлаш учун (179) ни x,y,z координата ўқларига проекциялаб, унинг шу ўқлардаги W_{ax}, W_{ay}, W_{az} проекцияларини топиш керак. Абсолют тезланишнинг модулини қуйидаги формула билан аниқлаймиз:

$$W_a = \sqrt{W_{ax}^2 + W_{ay}^2 + W_{az}^2} \qquad (180)$$

Кўчирма ҳаракат илгарилама ҳаракат бўлганда нуқтанинг абсолют тезланиши шу нуқтанинг нисбий ва кўчирма тезланишларининг геометрик йиғиндисига тенг бўлади.

Шундай қилиб, кўчирма ҳаракат илгариланма ҳаракат бўлганда, нуқтанинг абсолют тезланиши нисбий тезланиш $\overline{W}_r$ ва кўчирма тезланиш $\overline{W}_e$ лардан қурилган параллелограмнинг диагонали билан ифодаланади. Бу ҳолда абсолют тезланишнинг модули қуйидагича топилади.

$$W_a = \sqrt{W_r^2 + W_e^2 + 2W_rW_e\cos\alpha} \qquad (180')$$

Бунда α $\overline{W}_r$ ва $\overline{W}_e$ векторлари орасидаги бурчак.

63-§. КОРИОЛИС ТЕЗЛАНИШИНИНГ МОДУЛИНИ ВА ЙЎНАЛИШИНИ АНИҚЛАШ

Кориолис тезланиши кўчирма ҳаракат бурчак тезлиги ва нисбий ҳаракат тезликлари векторли кўпайтмасининг иккиланганига тенг.

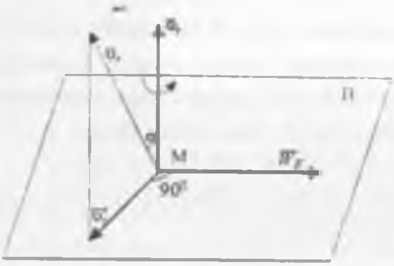
$$\overline{W}_k = 2(\overline{\omega}_e \times \overline{\upsilon}_r) \qquad (181)$$

Агар ω_e билан υ_r орасидаги бурчак катталигини α билан белгиласак, Кориолис тезланишининг модули қуйидагича тенг бўлади.

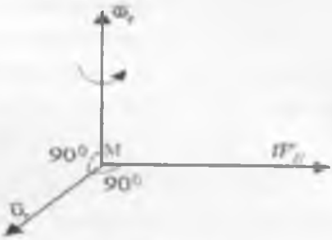
$$W_k = 2\omega_e \upsilon_r \sin\alpha \qquad (182)$$

Кориолис тезланишининг йўналишини аниқлаймиз. М нуқтанинг нисбий тезлиги $\overline{\upsilon}_r$ берилган бўлсин. Кариолис тезлашининг йўналишини аниқлаш учун M нуқтадан $\overline{\omega}_e$ бурчак тезлик векторига перпендикуляр қилиб, *П* текисликни ўтказилади. Нисбий тезлик, υ_r ни шу текисликка проекциялаймиз, υ' проекцияни *M* нуқта атрофида айланиш йўналишига қараб, 90⁰ бурчакка бурсак Кориолис тезланишининг йўналиши келиб чиқади (131-расм). Агар $\omega \perp \upsilon$ бўлса (132-расм), *sinα=1* бўлади. У холда Кориолис тезланиши қуйидагича бўлади.

$$W_k = 2\omega_e \upsilon_r \qquad (183)$$



131-расм.



132-расм.

Нуқтанинг Кориолис тезланиши қуйидаги холларда нолга тенг бўлади.

1. Кўчирма харакат илгариланма харакат бўлса, бу холда $\omega_e=0$ шунинг учун $W_k=0$ бўлади.

Кўчирма харакат илгариланма харакат бўлганда нуқтанинг абсолют тезланиши шу нуқтанинг нисбий ва кўчирма тезланишларнинг геометрик йиғиндисига тенг бўлади.

$$\overline{W}_a = \overline{W}_r + \overline{W}_e \qquad (184)$$

2. Нуқтанинг нисбий тезлиги υ_r =0 га тенг бўлса, $\upsilon_r = 0$ $W_k = 0$.

3. $\bar{\omega}_e$ ва $\bar{\upsilon}_r$ векторлар ўзаро паралел бўлса, бу холда $\alpha=0^\circ$, $\alpha=180^\circ$ $W_k=0$ бўлади.

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР.

1. Нуқтанинг нисбий харакатини айтинг?
2. Нуқтанинг кўчирма харакатини айтинг?
3. Нуқтанинг абсолют харакатини айтинг?
4. Тезликларни қўшиш хақидаги теоремани таърифланг?
5. Абсолют тезликнинг миқдори қандай аниқланади?
6. Абсоют тезликнинг йўналиши қандай аниқланади?
7. Тезланишларни қўшиш хақидаги теоремани таърифланг?

8. Кучирма ҳаракат илгарилама бўлганда нуқтанинг абсолют тезланишини қандай аниқланади?

9 Кучирма ҳаракат айланма бўлганда нуқтанинг абсолют тезланишини қандай аниқланади?

10. Кориолис тезланишининг катталиги қандай аниқланади?

11. Кориолис тезланишининиг йўналишини аниқлаш?

12. Қандай ҳолларда нуқтанинг Кориолис тезланиши нолга тенг бўлади.

ДИНАМИКА.

64-§. ДИНАМИКАНИНГ АСОСИЙ ТУШУНЧАЛАРИ

Назарий механиканинг динамика бўлимида жисмларнинг ҳаракати уларнинг массасига ва ҳаракатни вужудга келтирувчи кучларга боғлиқ равишда текширилади.

Жисм ҳаракатланганда унга ўзгармас кучлардан ташқари миқдор ва йўналиш жиҳатидан ўзгарадиган кучлар ҳам таъсир этади. Жисмга таъсир қилувчи кучлар вақтга, жисм ҳолатига ва унинг тезлигига маълум муносабатда боғлиқ бўлади.

Масалан, электровоз реостатини кетма-кет улашда ёки узишда ҳосил бўладиган тортиш кучи вақтга боғлиқ, суюқлик ёки ҳавонинг қаршилик кучи эса жисмнинг тезлигига боғлиқ бўлади. Демак, умумий ҳолда жисмга таъсир этувчи кучлар вақтга, жисмнинг ҳолатига ва тезлигига боғлиқ бўлади.

$$F = F(t, r, \upsilon)$$

бунда t-вақт, r-нуқтанинг ҳолатини аниқловчи радиус-вектор, υ-жисм тезлиги.

Жисмнинг қўйилган кучлар таъсирида ўз тезлигини тез ёки секин ўзгартириш хусусияти жисмнинг инертлиги дейилади. Жисмнинг инертлигини миқдор жиҳатидан ифодаловчи физик катталик жисмнинг массаси дейилади. Механикада жисмнинг массаси ўзгармас, сколяр ва мусбат катталик деб қаралади. Динамикада дастлаб жисмларнинг ўлчамлари ва массаларининг тақсимланишини эътиборга олмаган ҳолда уларнинг ҳаракатини ўрганиш учун моддий нуқта тушунчаси киритилади. Ҳаракатини ўрганишда ўлчамлари аҳамиятта эга бўлмаган, лекин массага эга бўлган жисм моддий нуқта дейилади.

Динамикада жисмнинг ҳаракатини ўрганишни, одатда, унинг нуқтасининг ҳаракатини ўрганишдан бошланади.

Динамика икки қисмга бўлинади:

сухроб Дилага Мафтун

1. Моддий нуқта динамикаси
2. Механик система ва қаттиқ жисм динамикаси.

Динамикада қуйидаги иккита масала ечилади:

1. Нуқта ёки системанинг ҳаракати берилган, шу нуқта ёки системага таъсир қилувчи кучни топиш керак.
2. Нуқта ёки системага таъсир қилувчи кучлар берилган, нуқта ёки системанинг ҳаракатини аниқлаш керак.

65-§. ДИНАМИКАНИНГ АСОСИЙ ҚОНУНЛАРИ

Механика қонунлари жисмларнинг тезликлари ёруғлик тезлигидан анча кичик бўлган ҳолда уринли бўлади. Динамика қуйидаги 4 та қонунга асосланган:

1-қонун (инерция қонуни)

Агар нуқтага куч таъсир этмаса нуқта ўзининг тинч ҳолатини ёки тўғри чизиқли текис ҳаракат ҳолатини сақлайди.

Инерция қонунига кура $F=0$ бўлса, $\bar{w}=0$ бўлади, $\bar{\upsilon}=const$ бўлади. Бу ерда $\bar{\upsilon}$ – моддий нуқтанинг тезлик вектори, w - тезланиш вектори, F -куч вектори.

2-қонун (динамиканинг асосий қонуни).

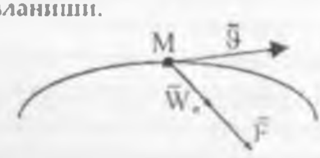
Нуқтанинг куч таъсирида олган тезланишини билан массасининг купайтмаси миқдор жиҳатидан шу кучга тенг булиб куч билан бир хил йуналишда булади.

$$F = mw \qquad (186)$$

Бунда: F - куч миқдори;

m - нуқтанинг массаси;

w- нуқтанинг тезланиши.



133-расм.

Эркин тушаётган жисмнинг оғирлик кучи унинг массаси билан эркин тушиш тезланишининг купайтмасига тенг.

$$P = mg$$

Жисмнинг массаси қуйидагича аниқланади:

$$m = \frac{P}{g} \qquad (187)$$

Бунда $g=9,81\ м/с^2$ - эркин тушиш тезланиши.
(186)- нинг вектор кўриниши қуйидагича ёзилади.

$$m\overline{w} = \vec{F} \qquad (188)$$

Кинематикадан маълумки нуқтанинг тезланиши қуйидагига тенг.

$$\overline{w} = \frac{d\overline{v}}{dt}; \qquad \overline{w} = \frac{d^2\overline{r}}{dt^2}, \qquad \text{у холда:}$$

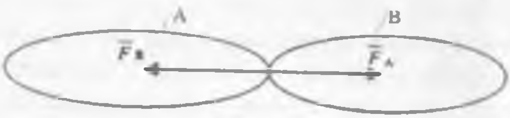
(188)-тенглама қуйидагича ёзилади

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = \overline{F} \qquad m\frac{d\overline{v}}{dt} = \overline{F} \qquad (189)$$

(188)- ва (189)- тенгликка нуқта динамикасининг асосий тенгламаси дейилади.

3-қонун (таъсир ва акс таъсир қонуни)

Ҳар қандай таъсир миқдор жиҳатидан ўзига тенг бўлган ва бир тўғри чизиқ бўйлаб тескари томонга йўналган акс таъсирни вужудга келтиради.



134-расм.

A жисм ***B*** жисмга $\overline{F}_A$ куч билан таъсир этса, ***B*** жисм ҳам ***A*** жисмга $\overline{F}_B$ куч билан таъсир қилади.

$$\overline{F}_A = -\overline{F}_B$$
$$\left|\overline{F}_A\right| = \left|\overline{F}_B\right| \qquad (190)$$

Бу ерда $\overline{F}_A$ ва $\overline{F}_B$ кучлари ўзаро мувозанатлашмайди, чунки кучлар ҳар хил жисмга қўйилган.

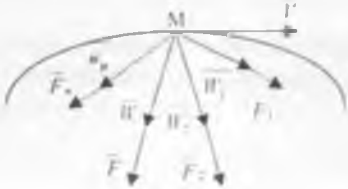
4-қонун (кучлар таъсирининг эркинлик қонуни)

Бир нечта куч бирданига таъсир этганда нуқтанинг олган тезланиши шу кучларнинг ҳар бири алоҳида-алоҳида таъсир этганда олган тезланишларининг геометрик йиғиндисига тенг.

$$\overline{w} = \overline{w}_1 + \overline{w}_2 + \overline{w}_3 + ... + \overline{w}_n \qquad (191)$$

Бунда $\overline{w}$ - нуқтанинг $F_1, F_2, F_3, ..., F_n$ кучлари бирданига таъсир этганда олган тезланиши.

$\overline{w}_1, \overline{w}_2, \overline{w}_3 ... \overline{w}_n$ - шу кучларнинг ҳар бири алоҳида-алоҳида таъсир этганда олган тезланиши (135-расм).



135-расм.

(191)-тенгламани иккала қисмини нуқтанинг массасига кўпайтирамиз.

$$m\overline{w} = m\overline{w}_1 + m\overline{w}_2 + m\overline{w}_3 + ... + m\overline{w}_n$$

$$m\overline{w} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3 + ... + \overline{F}_n$$

ёки
$$m\overline{w} = \sum \overline{F}_i \qquad (192)$$

Классик механика қонунлари ўринли бўлган саноқ системаси инерциал система дейилади. Техника масалаларини ечишда инерциал система сифатида Ер билан бевосита боғланган система олинади.

Механик ўлчов бирликлари системаси

Ҳамма механик катталикларни ўлчаш учун 3 та асосий ўлчов бирликларини киритиш етарлидир. Булардан иккитаси учун вақт ва узунлик бирликлари олиниши кинематика бўлимидан маълум. 3-ўлчов бирлиги сифатида масса ёки кучнинг ўлчов бирликлари олинади.

Механикада бир-биридан фарқ қилувчи икки турдаги бирликлар системаси киритилади.

Биринчи тур бирликлар системаси.

Халқаро СИ бирликлар системасининг таркибий қисми бўлган МКС системаси кенг қўлланилади. Бу системада асосий ўлчов бирликлари учун қуйидаги бирликлар олинади:

1. Узунлик бирлиги – 1 метр (м)
2. Масса бирлиги – 1 килограмм (кг)
3. Вақт бирлиги – 1 секунд (сек)

Қолган барча механик катталикларнинг бирлиги асосий бирликлардан ҳосилавий бирлик сифатида олинади.

Масалан, куч бирлиги учун 1 ньютон (Н) қабул қилинади. 1Н=кгм/с^2, яъни 1кг массага 1м/с^2 тезланиш берадиган куч бирлиги 1Н га тенг.

Иккинчи тур бирликлар системаси.

Техник бирликлар системаси деб аталувчи МКГСС системаси ҳам қўлланилади. Бу системада асосий ўлчов бирликлари учун қуйидаги бирликлар қабул қилинади.

1. Узунлик бирлиги - 1 метр (м)
2. Куч бирлиги – 1 килограмм куч (кгк)
3. Вақт бирлиги – 1 секунд (сек)

Ҳар қандай масалани ечишда фақат битта бирликлар системасидан фойдаланиш лозим.

66-§. МОДДИЙ НУҚТА ҲАРАКАТИНИНГ ДЕКАРТ КООРДИНАТАЛАРИДАГИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАРИ

Массаси m га тенг бўлган M нуқта F кучи таъсирида қўзғалмас $Oxyz$ координаталар системасига нисбатан ҳаракатланаетган бўлсин. F - нуқтага қўйилган барча кучларнинг тенг таъсир этувчиси (136-расм).

Нуқта динамикасининг асосий тенгламаси топамиз:

$$m\overline{w} = \vec{F} \tag{193}$$

$w = \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{d^2 r}{dt^2}$ бўлгани учун (193) формула қуйидагича ёзилади.

$$m\frac{d\vartheta}{dt} = \bar{F}; \tag{194}$$

$$m\frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = \bar{F} \tag{195}$$

(194)- ёки (195)- тенгламалар эркин моддий нуқта ҳаракати дифференциал тенгламасининг векторли ифодаси дейилади.

(161)- тенглама координата ўқларига проекциялаймиз:

$$m\frac{dVx}{dt} = F_x; \qquad m\frac{dV_y}{dt} = F_y, \qquad m\frac{dV_z}{dt} = F_z; \tag{196}$$

бунда $\vartheta_x, \vartheta_y \vartheta_z$ - ϑ тезлик векторининг x,y,z ўқларидаги проекцияси

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \dot{X}, \qquad V_y = \frac{dy}{dt} = \dot{Y}, \qquad V_z = \frac{dz}{dt} = \dot{Z}, \tag{197}$$

F_x, F_y, F_z-F кучларининг x,y,z ўқларидаги проекциялари.

(196)- формулага нуқта ҳаракатининг Декарт координаталардаги дифференциал тенгламалари дейилади.

(197)- ни (196)- га қўйсак қуйидаги тенгламалар ҳосил бўлади.

$$m\frac{d^2 x}{dt^2} = F_x; \qquad m\frac{d^2 y}{dt^2} = F_y; \qquad m\frac{d^2 z}{dt^2} = F_z; \tag{198}$$

ёки $\qquad m\ddot{x} = F_x; \qquad m\ddot{y} = F_y; \qquad m\ddot{z} = F_z; \qquad (199)$

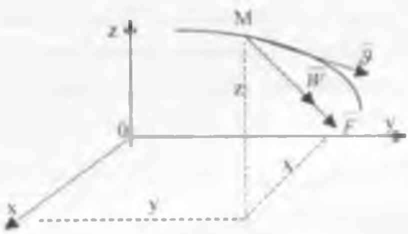
(198)- ва (199)- формулалар ҳам нуқта ҳаракатининг Декарт координаталаридаги дифференциал тенгламаларни ифодалайди. Агар нуқта бир текисликда *(xoy)* ҳаракат қилса, (198)-тенглама қуйидагича ёзилади:

$$m\frac{d\vartheta_x}{dt} = F_x; \qquad m\frac{d\vartheta_y}{dt} = F_y, \qquad (200)$$

Агар нуқта тўғри чизиқли ҳаракат қилса, (196)-тенглама қуйидагича ёзилади:

$$m\frac{d\vartheta_x}{dt} = F_x; \qquad (201)$$

(201)-тенгламага тўғри чизиқли ҳаракатининг дифференциал тенгламаси дейилади.



136-расм.

Массаси m га тенг бўлган моддий нуқтанинг ҳаракати табиий усулда берилса, тенг таъсир этувчи кучнинг табиий координата ўқларидаги проекцияларини қуйидагича аниқлаш мумкин:

$$mw_\tau = F_\tau \qquad mw_n = F_n$$

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = F_\tau \qquad m\frac{\upsilon^2}{\rho} = F_n \qquad mw_b = 0 \qquad (201`)$$

(201`)-тенгламаларга моддий нуқта ҳаракатининг табиий кордината ўқларидаги дифференциал тенгламалари дейилади.

ТАРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР.

1. Динамика бўлими нимани ўрганади?
2. Асосий тушунча ва таърифларни айтинг?
3. Масса деб нимага айтилади?
4. Моддий нукта деб нимага айтилади?
5. Тезликка, вақтга ва масофага боғлиқ бўлган кучларга мисол келтиринг?

6. Механиканинг асосий қонунларини айтинг?
7. Инерционал саноқ системаси деб нимага айтилади?
8. Нуқта ҳаракатининг Декарт координаталардаги дифференциал тенгламаларини ёзинг?
9. Динамиканинг асосий тенгламасини ёзинг?
10. Нуқта учун динамиканинг икки асосий масаласини айтинг?

67-§. НУҚТА ДИНАМИКАСИНИНГ БИРИНЧИ МАСАЛАСИ ВА УНИ ЕЧИШ УСУЛИ

Нуқтанинг массаси ва ҳаракат тенгламалари берилган бўлсин.

$$x = f_1(t), y = f_2(t), z = f_3(t) \qquad (202)$$

Нуқтага таъсир этувчи кучнинг миқдори ва йўналишини топиш лозим бўлсин. Ҳаракатни вужудга келтирувчи кучнинг проекциялари аниқланади. Бунинг учун берилган тенгламалардан вақт бўйича икки маротаба ҳосила олинади.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f_1''(t); \quad \frac{d^2y}{dt^2} = f_2''(t); \quad \frac{d^2z}{dt^2} = f_3''(t); \qquad (203)$$

Нуқта ҳаракатининг декарт координаталардаги дифхференциал тенгламаларига қўйилади:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x; \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y; \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = F_z; \qquad (204)$$

$$F_x = mf_1''(t); \quad F_y = mf_2''(t); \quad F_z = mf_3''(t); \qquad (205)$$

Нуқтага таъсир этувчи кучнинг миқдори қуйидагига тенг:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \qquad (206)$$

Нуқтага таъсир этувчи кучнинг йўналиши йўналтирувчи косинуслар ёрдамида топилади.

$$\cos\alpha = \frac{F_x}{F}; \cos\beta = \frac{F_y}{F}; \cos\gamma = \frac{F_z}{F} \qquad (207)$$

137-расм.

Бунда, α, β, γ- F куч вектори билан координата уқлари орасидаги бурчаклар.

Нуқта динамикасининг биринчи масаласига доир масалалар ечиш тартиби

Нуқта динамикасининг биринчи асосий масаласи қуйидаги тартибда ечилади.

1) Нуқта тезланишининг координата уқларидаги проекцияси топилади.

2) (204)-формула билан нуқтага таъсир этувчи кучнинг координата уқларидаги проекцияси топилади.

3) (206)- ва (207)- формулалар билан нуқтага таъсир этувчи кучнинг миқдори ва йуналиши топилади.

Мисол №1. Массаси *0,2 кг* булган моддий нуқтанинг ҳаракати $x=3\cos 2\pi t$, $y=4\sin \pi t$ (см) тенгламалар билан ифодаланади, бу ерда t- секундлар ҳисобида. Нуқтага таъсир қилувчи кучнинг проекциялари унинг координаталари орқали ифодалансин.

Ечиш. Нуқта тезланишининг координата уқларидаги проекциясини аниқлаймиз.

$$W_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -12\pi^2 \cos 2\pi t$$

$$W_y = -4\pi^2 \sin \pi t$$

Нуқтага таъсир этувчи кучларнинг координата уқларидаги проекциясини аниқлаймиз

$$m\frac{d_x^2}{dt^2} = F_x; \qquad m\frac{d_y^2}{dt^2} = F_y;$$

$$\cos 2\pi t = \frac{x}{3}$$

$$\sin \pi t = \frac{y}{4}, \quad F_x = m(-12\pi^2 \cos 2\pi t) = -12\pi^2 m\frac{x}{3} = -4\pi^2 \cdot 0.2x = -0{,}8 \cdot 986x \cdot 10^{-2} = -0.0788x$$

$$F_y = m(-4\pi^2 \sin \pi t) = -4 \cdot 9.86 \cdot 0.2 \cdot \frac{y}{4} = -9.86 \cdot 0.2y \cdot 10^{-2} = -0.0197y$$

Мисол № 2. Массаси 2,04 кг булган жисм горизонтал тўғри чизиқ буйлаб тебранма ҳаракат қилади. Жисмнинг тебранма ҳаракат тенгламаси қуйидагича аниқланади.

$$x = 10\sin\frac{\pi}{2}t \quad (M)$$

Жисмга таъсир қилувчи куч билан унинг ҳаракат тенгламаси орасидаги муносабат ва шу кучнинг энг катта қиймати топилсин.

Ечиш. Нуқта тезланишининг координата ўқларидаги проекциясини топамиз.

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 5\pi\cos\frac{\pi}{2}t$$

$$w_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d\vartheta_x}{dt} = -\frac{5\pi^2}{2}\sin\frac{\pi}{2}t$$

$$\sin\frac{\pi}{2}t = \frac{x}{10}$$

$$F_x = m\frac{d^2x}{dt^2} = m\left(-\frac{5\pi^2}{2}\sin\frac{\pi}{2}t\right) = -\frac{m\cdot 5\cdot 9{,}86}{2}\cdot\frac{x}{10} =$$

$$-\frac{2{,}04\cdot 5\cdot 9{,}86x}{20} = -\frac{2{,}04\cdot 9{,}86x}{4} = -5{,}03xн \quad F_x = -5{,}03xн$$

$$F_{max} = m\cdot\frac{5\pi^2}{2}\sin\frac{\pi}{2}t = \frac{2{,}04\cdot 5\cdot 9{,}86}{2} = \frac{100{,}5}{2} = 50{,}3H$$

$$F_{max} = 50{,}3H$$

68-§. НУҚТА ДИНАМИКАСИНИНГ ИККИНЧИ МАСАЛАСИ ВА УНИ ЕЧИШ

Моддий нуқта динамикасининг иккинчи асосий масаласида массаси ва нуқтага таъсир этувчи куч берилганда, нуқтанинг ҳаракат қонуни аниқланади.

Бу масалани ечишда нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламаларининг (198)- ҳар бирини икки мартадан интеграллаймиз. У ҳолда

$$\begin{aligned} x &= f_1(t, C_1, C_2, ..., C_6), \\ y &= f_2(t, C_1, C_2, ..., C_6), \\ z &= f_3(t, C_1, C_2, ..., C_6) \end{aligned} \qquad (208)$$

(208)- тенглама нуқта ҳаракатининг тенгламасини ифодалайди.

Бунда $c_1, c_2, ..., c_6$ -ихтиёрий ўзгармас миқдорлар, бу ўзгармас миқдорларни топиш учун бошланғич шартлардан фойдаланамиз.

Нуқтанинг бошланғич вақтидаги $t=0$ ҳолатини ва тезлигини ифодаловчи шартлар – бошланғич шартлар дейилади.

Масалан; бошланғич шартлар қуйидагича ёзилади.

$$t=0 \text{ да} \quad \begin{aligned} x &= x_0, & \vartheta_x &= \vartheta_{0x} \\ y &= y_0, & \vartheta_y &= \vartheta_{0y} \\ z &= z_0, & \vartheta_z &= \vartheta_{0z} \end{aligned} \qquad (208')$$

(208) дан вакт буйича хосила олсак 6 та интеграллаш доимийларига боглик куйидаги учта функция хосил булади.

$$\dot{x} = \dot{x}(t, C_1, C_2, C_3, c_4, C_5, C_6)$$

$$\dot{y} = \dot{y}(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \qquad (209)$$

$$\dot{z} = \dot{z}(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6)$$

Бошлангич шартларни (208)- ва (209)- га куйиб, 6 та интеграллаш доимийлари қатнашадиган 6 та тенгламалар системасини оламиз. Бу тенгламалар системасини биргаликда ечиб 6 та интеграллаш доимийларини аниқлаймиз.

$$c_i = c_i(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$$

Интеграллаш доимийлари топилган қийматларни (208)- га қуйиб, (209)- бошлангич шартларига мос булган нуқтанинг Декарт координаталардаги кинематик тенгламаларини оламиз.

$$x = x(t), \ y = y(t), \quad z = z(t)$$

Нукта ҳаракатининг дифференциал тенгламасини нуқтага таъсир этувчи куч бир вактда нукта координатасига, тезлигига ва вактга боглик булганда интеграллаш мураккаб. Дифференциал тенгламани факат қуйидаги ҳолларнинг бирида интеграллаш мумкин.

1) Нуқтага таъсир этувчи куч узгармас булса, $\overline{F} = const$

2) Куч вактнинг функцияси булса, $\overline{F} = \overline{F}(t)$

3) Куч масофанинг функцияси булса, $\overline{F} = \overline{F}(s)$.

4) Куч нукта тезлигининг функцияси булса, $\overline{F} = \overline{F}(\vartheta)$

Нукта динамикасининг иккинчи масаласига доир масалалар ечиш тартиби:

Моддий нуқта динамикасининг иккинчи асосий масаласи қуйидаги тартибда ечилади.

1. Инерциал саноқ системасини киритиб, координата уқлари танлаб олинади.

2. Нуқтага таъсир этувчи ва богланиш реакция кучлари чизмала курсатилади.

3. Нукта ҳаракатининг дифференциал тенгламалари тузилади.

4. Нуқта ҳаракатининг бошлангич шартлари ёзилади.

$$x = x_0, \vartheta_x = \vartheta_{0x}$$

$$y = y_0, \vartheta_y = \vartheta_{0y}$$

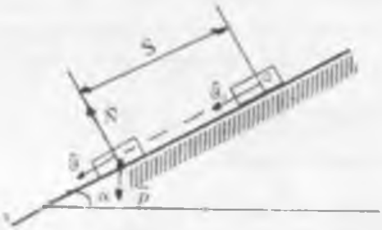
$$z = z_0, \vartheta_z = \vartheta_{0z}$$

5. Тузилган тенгламаларнинг ҳар бири икки мартадан интегралланади
6. Интегралланганда ҳосил буладиган узгармас миқдорлар бошлангич шартлардан фойдаланиб топилади.
7. Тузилган дифференциал тенгламаларнинг бошлангич шартларни қаноатлантирувчи ечими аниқланади ва изланаётган номаълумлар топилади.

Масала №3. Оғир жисм горизонтга 30^0 бурчак остида оғган силлиқ текислик буйлаб пастга тушади. Агар жисмнинг тезлиги бошлангич пайтда 2м/с га тенг булган булса, жисм 9,6 М йулни қанча вақтда утишни топилсин.

Ечиш.

Жисмга таъсир этувчи кучларнинг йуналишини чизмада курсатамиз.



138-расм.

Юк ҳаракатининг дифференциал тенгламасини тузамиз. Бунинг учун тугри чизиқли ҳаракатнинг дифференциал тенгламасидан фойдаланамиз.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x; \quad m\frac{d\vartheta_x}{dt} = F_x;$$

чизмадан $F_x = P_x + N_x \quad N_x = 0$, $F_x = P\sin\alpha = mg \cdot \sin\alpha$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg\sin\alpha$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g\sin\alpha \qquad (210)$$

(210) ни интеграллаймиз

$$\frac{d_x^2}{dt^2}=\frac{d\vartheta_x}{dt}=g\sin\alpha$$

$$d\vartheta_x=g\sin\alpha\cdot dt \qquad (211)$$

$$\vartheta_x=g\sin\alpha\cdot t+C_1$$

$$\vartheta_x=\frac{dx}{dt}g\sin\alpha\cdot t+C_1$$

$$dx=g\sin\alpha dt+C_1dt \qquad (212)$$

$$x=g\sin\alpha\cdot\frac{t^2}{2}+C_1t+C_2$$

C_1 ва C_2 ўзгармас миқдорларни аниқлаймиз. Бунинг учун бошланғич шартларини ёзамиз.

$$t=0 \quad x=x_0=0 \quad \vartheta_x=\vartheta_{0x}=2 \quad \text{м/с}$$

Бошланғич шартларини (211)- ва (212)- тенгламаларга қуямиз:

$C_1=2 \quad C_2=0$ *бу холда* $\vartheta_x=g\sin\alpha\cdot t+2$

$$x=g\sin\alpha\cdot\frac{t^2}{2}+2t \qquad (213)$$

(213) дан t ни аниқлаймиз.

$$9.6=9.8\cdot 0.5\frac{t^2}{2}+2t$$

$$19.2=4.9t^2+4t$$

$$4.9t^2+4t-19.2=0$$

$$t_{12}=\frac{-4\pm\sqrt{16+4\cdot 19.2\cdot 4.9}}{2\cdot 4.9}=\frac{-4\pm\sqrt{352}}{9.8}$$

$$t_1=\frac{-4\pm 19.6}{9.8}=\frac{15,6}{9.8}=1.6 \text{ сек}$$

$$t=1,6 \text{ сек}$$

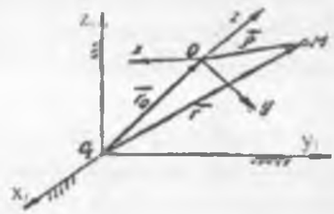
ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР.

1. Нуқта динамикасининг дифференциал тенгламасини ёзинг?
2. Динамиканинг биринчи масаласи қандай ечилади?
3. Динамиканинг иккинчи масаласи қандай ечилади?
4. Бошланғич шартлар деб нимага айтилади?
5. Интеграллаш узгармаслари қандай аниқланади?
6. Дифференциал тенгламани қандай холларнинг бирида интеграллаш мумкин?
7. Куч ўзгармас булган холни айтинг?
8. Куч масофанинг функцияси булган холни айтинг?

9. Куч вақтнинг функцияси бўлган ҳолни айтинг?
10. Куч нуқта тезлигининг функцияси бўлган ҳолни айтинг?

69-§. МОДДИЙ НУҚТА НИСБИЙ ҲАРАКАТИНИНГ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАРИ. КЎЧИРМА ВА КОРИОЛИС ИНЕРЦИЯ КУЧЛАРИ.

Моддий нуқтанинг инерциал бўлмаган саноқ системасига нисбатан ҳаракатини текширамиз. Фараз қилайлик, массаси m га тенг бўлган M нуқта бирор $Oxyz$ саноқ системасига нисбатан харакатлансин. Бу системасининг ўзи ҳам бошқа бир инерциал $O_1x_1y_1z_1$ саноқ системасига нисбатан маълум қонун асосида ҳаракатланаетган бўлсин. M нуқтага қуйилган актив кучларнинг тенг таъсир этувчиси $\overline{F}$ боғланиш реакциясининг тенг таъсир этувчи $\overline{N}$ га тенг.



139-расм.

Ньютоннинг иккинчи қонунига асосан:

$$m\overline{w} = \overline{F} + \overline{N} \qquad (214)$$

бунда $\overline{w}$ нуқтанинг абсолют тезланиши. Тезланишларни қўшиш теоремасига кура, нуқтанинг абсалют тезланиши.

$$\overline{W} = \overline{w}_r + \overline{W}_e + \overline{W}_k \qquad (215)$$

(214) ни (215) га қўйсак

$$m\overline{W}_r + m\overline{W}_e + m\overline{W}_k = \overline{F} + \overline{N} \quad \text{ёки} \qquad (216)$$

$$m\overline{W}_r = \overline{F} + \overline{N} + \left(-m\overline{W}_e\right) + \left(-m\overline{W}_k\right) \qquad (217)$$

бу ерда $\left(-m\overline{W}_e\right)$ ва $\left(-m\overline{W}_k\right)$ векторлар мос равишда кўчирма ва кориолис инерция кучлари ва уларни қуйидагича белгилаймиз.

$$\overline{F}_e^{\,''} = m\overline{W}_r, \qquad \overline{F}_k^{\,''} = -m\overline{W}_r \qquad (218)$$

(218) ни (217) га қўямиз

$$m\overline{W}_r = \overline{F} + \overline{N} + \overline{F}_e + \overline{F}_k \qquad (219)$$

(219) тенглама моддий нуқта нисбий ҳаракатининг дифференциал тенгламасининг векторли куриниши дейилади. (219) ни икки томонини $Oxyz$ координата укларига проекциялаймиз.

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x + N_x + F_{ex} + F_{kx} \\ m\ddot{y} &= F_y + N_y + F_{ey} + F_{ky} \\ m\ddot{z} &= F_z + N_z + F_{ez} + F_{kz} \end{aligned}\right\} \qquad (220)$$

(220) нуқта нисбий ҳаракати дифференциал тенгламасининг координата укларидаги проекциясини ифодалайди. Қуйидаги хусусий ҳолларни кўриб чиқамиз.

1. Кузғалувчи саноқ системаси илгариланма ҳаракатда бўлсин. У ҳолда $w_e = 0,\ F_k = 0$

Моддий нукта нисбий ҳаракатининг дифференциал тенгламаси

$$m\overline{W}_r = \overline{F} + \overline{N} + \overline{F}^e \qquad (221)$$

кўринишда ёзилади.

2. Қузғалувчи саноқ система илгарилама ва тўғри чизиқли тенг ўлчовли ҳаракатда бўлсин.

$\overline{W}_e = 0 \quad \overline{W}_k = 0\ \overline{F}_e = 0, \quad \overline{F}_e = 0$ булиб дифференциал тенглама қуйидагича езилади.

$$m\overline{W}_r = \overline{F} + \overline{N} \qquad (222)$$

3. Нукта кўзғалувчи саноқ системасига нисбатан тўғри чизиқли ва тенг ўлчовли ҳаракатлансин $(\vartheta_r = const)$ $v_r = 0$ бўлиб дифференциал тенглама қуйидаги кўринишда ёзилади

$$\overline{F} + \overline{N} + \overline{F}_e + \overline{F}_k = 0 \qquad (223)$$

4. Нуқта қузғалувчи саноқ системасига нисбатан тинч ҳолатда бўлсин. Бу ҳолда $V_c = 0$, $W_r = 0$ $F_k = 0$ бўлади ва дифференциал тенглама кўринишда ёзилади.

$$\overline{F} + \overline{N} + F_c = 0 \qquad (224)$$

Яъни берилган кучлар, реакция кучлари ва кучирма инерция кучлари ҳар онда уз аро мувозанатланади.

(224) - тенглама моддий нукта нисбий мувозанат тенгламасининг векторли кўринишини ифодалайди.

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР

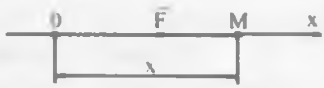
1. Нуқтанинг нисбий ва абсолют дифференциал тенгламалари орасида қандай фарқ бор?
2. Кўчирма инерция кучлари қайси формула билан топилади?

3. Кориолис инерция кучлари қайси формула билан топилади?
4. Классик механиканинг нисбийлик принципининг моҳияти нимадан иборат?
5. Қандай саноқ системасига инерциал саноқ системаси дейилади?
6. Қандай саноқ системасига инерциал булмаган саноқ системаси дейилади?
7. Қачон нуқта нисбий мувозанатда булади?
8. Нуқтани қандай ҳаракатига нисбий ҳаракат дейилади?
9. Нуқтани қандай ҳаракатига кучирма ҳаракат дейилади?
10. Нуқтани қандай ҳаракатига абсолют ҳаракат дейилади?

70-§. НУҚТАНИНГ ЭРКИН ТЕБРАНМА ҲАРАКАТИ. ТЕБРАНИШ АМПЛИТУДАСИ, ФАЗАСИ, ЧАСТОТАСИ ВА ДАВРИ

Табиат ва техникада тебранма ҳаракатлар жуда куп учрайди. Ҳар қандай иншоот ёки машинанинг таркибига кирадиган барча қисмлар маълум даражада эластик булганидан тебраниш қобилиятига эгадир. *M* нуқтанинг эркин тебранма ҳаракатини текширамиз. Фараз қилайлик О нуқта М нуқтанинг мувозанат ҳолати булсин. Нуқтани О нуқтадан x масофага олиб бориб қуйиб юборилганда, у яна мувозанат ҳолатига қайтишга интилади. Нуқтага ҳамма вақт мувозанат ҳолатига қараб йуналган *F* кучи таъсир қилади. Бундай кучга қайтарувчи куч дейилади.

М нуқта ҳаракатининг тенгламасини аниқлаймиз. Бунинг учун О нуқтани координата боши қилиб *x* уқини утказамиз (140-расм).



140-расм.

Қайтарувчи куч модулини топиш формуласи

$$F=cx$$

Бунда F - қайтарувчи куч,

c - пропорционаллик коэффициенти, *c* нинг бирлиги кг/см, н/м,

x - нуқтанинг мувозанат ҳолатидан четга чиқиш масофаси.

Қайтарувчи кучни x уқидаги проекцияси

$$F_x=-F \quad F_x=-cx$$

(-) ишора қайтарувчи кучнинг тезликка нисбатан тескари йуналишида эканлигини билдиради.

М нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламасини тузамиз.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -F \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} = -cx$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{cx}{m} = 0$$

$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{cx}{m} = 0 \qquad \frac{c}{m} = k^2$ - билан белгилаймиз.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0 \qquad \text{ёки} \qquad \ddot{x}+k^2x = 0 \qquad (225)$$

(225)- формула эркин тебранма ҳаракатнинг дифференциал тенгламаси.

(225)-нинг умумий ечимини топамиз. Бунинг учун характеристик тенглама тузамиз:

$$r^2 + k^2 = 0 \qquad (226)$$

(226) - тенглама (225)- ни тавсифий тенгламаси

$$r^2 = - k^2 \qquad r_{1,2} = \pm\sqrt{-k^2} = \pm ki$$

$$r_1 = ki \qquad r_2 = - ki$$

Дифференциал тенгламаларининг назариясига асосан (225) ни умумий ечими қуйидагича бўлади.

$$x = C_1\cos kt + C_2\sin kt \qquad (227)$$

Бу ерда C_1, C_2 ихтиёрий ўзгармас миқдорлар: C_1 ва C_2 ларни топиш учун бошлангич шартлар берилиши керак.

$$t = 0 \quad x = x_0 \quad \upsilon = \upsilon_0$$

(227)- дан вақт бўйича ҳосила оламиз.

$$V_x = x - C_1 k\sin kt + C_2 k\cos kt \qquad (228)$$

(228)- билан эркин тебранма ҳаракат қилаётган нуқтанинг тезлиги топилади.

$t=0$ ва $x=x_0$ ларни (227)га қуямиз, у холда $C_1=x_0$

$t=0$ ва $\upsilon=\upsilon_0$ ларни (228) қуямиз.

$$V_0=C_2k, \quad C_2 = \frac{V_0}{k}$$

C_1 ва C_2 ларнинг қийматларини 3 га қуямиз.

$$x = x_0\cos kt + \frac{V_0}{k}\sin kt \qquad (229)$$

(229) - тенглама хам М нуқтанинг ҳаракат тенгламаси бўлади.

(227)- ни бошқача кўринишга келтирамиз.

C_1 ва C_2 ларни ўрнига янги a ва α кичик ўзгармас миқдорларни киритамиз. Булар орасида қуйидагича боғланиш бор.

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= a\sin\alpha \\ C_2 &= a\cos\alpha \end{aligned}\right| \qquad (230)$$

(230) ни (227) га қўйиб қуйидагини хосил қиламиз

$$x = a\sin\alpha\ \cos kt\ +\ a\ \cos\alpha\ \sin kt$$

$$x\ =\ a\ \sin(kt+\alpha) \qquad (231)$$

(231) хам (225) нинг ечими бўлади.

Физикадан маълумки (231) - тенглама нуктанинг гармоник тебранма харакатининг тенгламасидир.

Демак, нуктанинг қайтарувчи куч таъсиридаги эркин тебранма ҳаракати гармоник тебранма харакатдан иборат бўлади.

Бунда, а - тебраниш амплитудаси.

Нуктани мувозанат холатидан энг катта масофага оғишига нуктанинг амплитудаси дейилади. $kt+\alpha$ тебраниш фазаси.

Тебраниш фазаси нуктанинг t вақтдаги вазиятини ва қайси томонга қараб харакат қилишини кўрсатади. к - циклик частота (доиравий такрорлик). к нуктанинг 2π секундда тўла тебранишлар сонини курсатади.

Нуктани тўла бир марта тебраниш учун кетган вақтга тебраниш даври дейилади.

$$T=\frac{2\pi}{k},\quad k=\sqrt{\frac{c}{m}},\quad T=\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{c}{m}}}=2\pi\sqrt{\frac{m}{c}},\quad T=2\pi\sqrt{\frac{m}{c}} \qquad (232)$$

(232)-тебраниш даврини топиш формуласи a билан (α) ни аниқлаймиз. Бунинг учун (230)- дан фойдаланамиз:

$$C_1^2+C_2^2=a^2$$

$$a=\sqrt{C_1^2+C_2^2}$$

C_1 ва C_2 ларнинг қийматини қўямиз.

$$a=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{\vartheta_0}{k}\right)^2} \qquad (233)$$

(233) - Эркин тебраниш амплитудасини топиш формуласи.

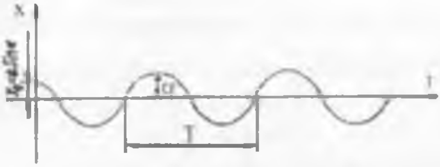
(230)- ни бир бирига бўламиз.

$$\frac{C_1}{C_2}=tg\alpha$$

$$tg\alpha=\frac{kx_0}{\vartheta_0} \qquad (234)$$

Бунда α - бошланғич фаза (234)- билан α ни аниқлаймиз

(231) нинг графигини чизамиз.

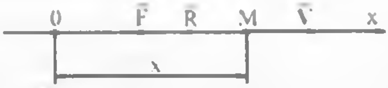


141-расм.

Қайтарувчи куч таъсирида нуқта қилган тебранма ҳаракатига эркин тебранма ҳаракат дейилади.

71-§. НУҚТАНИНГ СЎНУВЧИ ТЕБРАНМА ҲАРАКАТИ. СЎНИШ ДЕКРЕМЕНТИ. АПЕРИОДИК ҲАРАКАТ

M нуқта тўғри чизиқли ҳаракат қилади. Бу нуқтага F қайтарувчи куч ва R қаршилик кучи таъсир қилади. M нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламасини тузамиз. Бунинг учун M нуқта мувозанат ҳолатини координата боши деб оламиз (142-расм).



142-расм.

Қайтарувчи кучнинг модули $F = cx$

Бу ерда c - пропорционаллик коэфициенти

Қаршилик кучининг модули $R = \mu\vartheta$

Бу ерда μ - коэффициент

ϑ - нуқта тезлиги

Қаршилик кучининг йўналиши тезликка тескари бўлади.

$$R = -\mu\vartheta; \quad R = -\mu\dot{x}, \quad \vartheta = \dot{x} = \frac{dx}{dt}$$

M нуқтага таъсир этувчи кучларнинг проекцияларининг йиғиндиси

$$X = -F - R = -cx - \mu\vartheta$$

M нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламасини тузамиз;

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -cx - \mu\dot{x}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + cx + \mu\dot{x} = 0 \quad \text{m га бўламиз;}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{c}{m}x + \frac{\mu}{m}\dot{x} = 0 \qquad \frac{c}{m} = \kappa^2 \qquad \frac{\mu}{m} = 2b$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2b\dot{x} + \kappa^2 x = 0 \quad \text{ёки} \quad \ddot{x} + 2b\dot{x} + \kappa^2 x = 0 \qquad (235)$$

(235) - формуласи сўнувчи тебранма харакатнинг дифференциал тенгламаси

(235) - ни умумий ечимини топамиз.

Бунинг учун характеристик тенглама тузамиз.

$$\lambda^2 + 2b\lambda + \kappa^2 = 0 \qquad (236)$$

(236) - формула (235) ни характеристик тенгламаси. (236) ни ечамиз.

$$\lambda_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - \kappa^2}$$

$$\lambda_1 = -b + \sqrt{b^2 - \kappa^2}$$

$$\lambda_2 = -b - \sqrt{b^2 - \kappa^2}$$

λ_1, λ_2 (236) - тенгламани илдиизлари бўлади.

Энди қуйидаги холни кўриб чиқамиз.

1) к>b (қаршилик кучи кичик бўлган хол).

Бу холда характеристик тенглама илдизлари қуйидагича бўлади.

$$\lambda_1 = -b + \sqrt{-(\kappa^2 - b^2)} \qquad \kappa^2 - b^2 = \kappa_1^2$$

$$\lambda_1 = -b + \sqrt{-\kappa_1^2} = -b + \kappa_1^2 \qquad \lambda_1 = -b + \kappa i \qquad \lambda_2 = -b - \kappa_1 i$$

Характеристик тенгламани илдизларига қараб (235) ни умумий ечимини ёзамиз.

$$x = e^{-bt}\left(C_1 \cos \kappa_1 t + C_2 \sin \kappa_1 t\right) \qquad (237)$$

(237) - формуласи (235) нинг умумий ечими бўлади.

C_1 ва C_2 ихтиёрий ўзгармас миқдорлар.

Бу ўзгармас миқдорларни топиш учун бошланғич шартлар берилган бўлиши керак. Бошланғич моментдаги нуқта координатасига ва унинг бошланғич тезлигига бошланғич шартлар дейилади.

$$t = 0 \quad x = x_0 \quad \vartheta = \vartheta_0$$

(237) - тенгламадан вақт бўйича хосила олиб нуқта тезлигини топамиз.

$$\vartheta_x = \frac{dx}{dt} = -be^{-ht}(C_1\cos\kappa_1 t - C_2\sin\kappa_1 t) + e^{-ht}(-C_1\kappa_1\sin\kappa_1 t + C_2\kappa_1\cos\kappa_1 t) \quad (238)$$

(238) билан нуқта тезлиги топилади.

$t = 0$ $x = x_0$ ларни (237) га қўямиз, $C_1 = x_0$

$t = 0$ $\vartheta = \vartheta_0$ ларни (238) га қўямиз, у холда:

$$\vartheta_0 = -bC_1 + C_2\kappa_1 \quad \text{бундан:}$$

$$c_2 = \frac{\vartheta_0 + bC_1}{\kappa_1} = \frac{\vartheta_0 + bx_0}{\kappa_1}$$

C_1 ва C_2 ларнинг қийматини (237) га қўямиз

$$x = e^{-ht}\left(x_0\cos\kappa_1 t + \frac{\vartheta_0 + bx_0}{\kappa_1}\sin\kappa_1 t\right) \quad (239)$$

(239)- формула М нуқта харакатининг тенгламасини ифодалайди.

$\vartheta_0 = 0$ бўлса,

$$x = x_0 e^{-ht}\left(\cos\kappa_1 t + \frac{b}{\kappa_1}\sin\kappa_1 t\right) \text{ кўринишни олади.}$$

(237)- ни бошкача кўринишга келтирамиз.

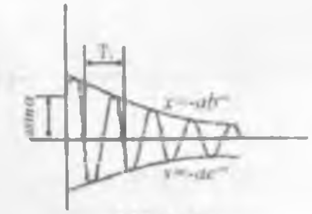
C_1 ва C_2 ларни ўрнига a ва α кичик ўзгармас миқдорларни киритамиз.

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= a\sin\alpha \\ c_2 &= a\cos\alpha \end{aligned}\right\} \quad (240)$$

(240) ни (237) га қўямиз.

$$x = ae^{-ht}\sin(\kappa_1 t + \alpha) \quad (241)$$

$$t \to \infty \quad e^{-ht} \to 0$$



143-расм.

$t \to \infty$ $x \to 0$ яъни харакат сўнади.

(241) тенглама сўнувчи тебранма харакат тенгламаси.

Математикадан маълумки

$$|\sin(\kappa_1 t + \alpha)| \le 1 \quad x = ae^{-ht}$$

$$|x| \le |ae^{-ht}| \quad x = -ae^{-ht}$$

Сунувчи тебранма харакатининг даври куйидагига тенг.

$$T = \frac{2\pi}{k_1}; \qquad T = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - b^2}}$$

А сунувчи тебранма харакат амплитудаси

$$A = ae^{-bt}$$

t_1 вақтдаги амплитуда A_1 га тенг

$$a_1 = ae^{-bt_1}$$

$t_1 + T$ вақтдаги амплитуда

$$A_2 = ae^{-b(t_1+T)} = ae^{-bt_1} \cdot e^{-bT} = a_1 e^{-bT} \cdot A_2 = a_1 e^{-bT}$$

$t_1 + 2T$ вақтдаги амплитуда

$$A_3 = A_2 e^{-bT}$$

Демак,

$$A_1 = ae^{-bt_1}$$
$$A_2 = a_1 e^{-bT_1}$$
$$A_3 = a_2 e^{-bT}$$
$$A_n = a_{n-1} e^{-bT_1}$$

Демак сунувчи тебранма харакат амплитудаси камайиб борувчи геометрик прогрессияни ташкил килади.

Бу прогрессия махражига сунпш декременти дейилади. Сунпш декрементининг иккала кисмидан натурал логарифм оламиз.

$$\ln D = \ln e^{-bT} = -bT_1 \ln e = -bT_1 * 1 = -bT_1 \qquad \ln D = -bT_1 \quad D = e^{-bT_1}$$

2) *в>к* (каршилик кучи катта булган хол)

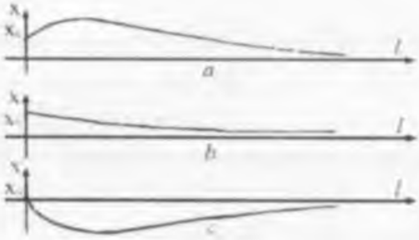
Бу холда тавсифий тенглама илдизлари хакикий сон булади

$$b^2 - k^2 = r^2$$
$$\lambda_1 = -b + r = -(b - r)$$
$$\lambda_2 = -b - r = -(b + r)$$

(235) - тенгламани учун умумий ечими куйидагича булади

$$x = (c_1 e^{-(b-r)t} + c_2 e^{-(b+r)t}) \cdot l^{-bt} \qquad (242)$$

$t \to \infty$ $x \to 0$ га интилади (242)- нинг графики куйидагича булади.



144-расм.

Қаршилик кучи катта бўлган ҳолда нуқта апериодик ҳаракат қилади

3) в=к бўлса $\lambda_1 = \lambda_2 = -b$

Тавсифий тенгламанинг илдизлари бир бирига тенг бўлади. Бу ҳолда ҳам нуқта апериодик ҳаракат қилади.

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР

1. Нуқта қандай куч таъсирида эркин тебранма ҳаракат қилади?
2. Нуқта эркин тебранма ҳаркатининг дифференциал тенгламасини ёзинг?
3. Эркин тебранма ҳаракат тенгламасини ёзинг? Унинг графигини чизинг?
4. Эркин тебранма ҳаркатнинг даври қайси формула билан аниқланади?
5. Эркин тебранма ҳаракат амплитудаси қайси формула билан топилади?
6. Эркин тебранма ҳаркатнинг частотаси даври, амплитудаси ва бошланғич фазаси қандай факторларга боғлиқ?
7. Нуқтанинг қандай тебранма ҳаркатига сўнувчи тебранма ҳаракат дейилади?
8. Сўнувчи тебранма ҳаркатнинг дифференциал тенгламасини ёзинг?
9. Сўнувчи тебранма ҳаракатнинг қонуни қандай ёзилади? Унинг графигини чизинг?
10. Сўнувчи тебранма ҳаркатнинг даври қайси формула билан аниқланади?
11. Апериодик ҳаркат деб қандай ҳаракатга айтилади?

72-§. НУҚТАНИНГ МАЖБУРИЙ ТЕБРАНМА ҲАРАКАТИ. РЕЗОНАНС ҲОДИСАСИ

Массаси m га тенг булган M нуқта тугри чизиқли ҳаракат қилсин. Бу нуқтага F қайтарувчи куч ва Q кучи таъсир қилади (145-расм). Q кучнинг x уқидаги проекцияси қуйидагига тенг:

$$Q_x = H \sin pt$$

145 – расм.

Q - уйғотувчи куч, бу куч даврий равишда миқдор ва йуналишини узгартириб туради.

H - уйғотувчи куч амплитудаси

p - уйғотувчи куч частотаси

M нуқта ҳаракат тенгламасини топиш керак. Қайтарувчи кучнинг модули

$$F = cx$$

M нуқтага таъсир қилувчи кучларнинг x уқидаги проекция-ларининг йиғиндиси

$$x = Q_x - F_x = H \sin pt - cx \qquad \text{булади.}$$

M нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламасини аниқлаймиз.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = H \sin pt - cx$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{c}{m}x = \frac{H}{m}\sin pt$$

$$\frac{c}{m} = \kappa^2; \quad \frac{H}{m} = h \quad \text{деб белгилаймиз.}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \kappa^2 x = h\sin pt \qquad (243)$$

(243)-формула мажбурий тебранма ҳаракатининг дифференциал тенгламаси дейилади.

(243) ни умумий ечимининг қуйидаги куринишда ёзамиз.

$$x = x_1 + x_2 \text{ бунда}$$

x_1 (243) - чап томонининг умумий ечими, яъни:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \kappa^2 x = 0 \text{ тенгламанинг}$$

$$x_1 = C_1 \cos\kappa t + C_2 \sin\kappa t$$

x_2 (243) нинг хусусий ечими.

x_2 ни қуйидаги куринишда ёзамиз

$$x_2 = B\sin pt \qquad (244)$$

Коэффициент B ни топиш учун (244)- дан вақт буйича 2 марта хосила оламиз.

$$\dot{x}_2 = Bp\cos pt$$

$$\ddot{x}_2 = -Bp^2\sin pt \qquad (245)$$

(244)- ва (245)- ни (243)- га қуямиз;

$$-Bp^2\sin pt + \kappa^2 B\sin pt = h\sin pt$$

sin pt га қисқартирамиз

$$-Bp^2 + \kappa^2 B = h$$

$$B\left(\kappa^2 - p^2\right) = h$$

$$B = \frac{h}{\kappa^2 - p^2}$$

В нинг қийматини (244)- га қуямиз

$$x_2 = \frac{h}{\kappa^2 - p^2}\, sinpt$$

$$x = C_1\cos\kappa t + C_2\sin\kappa t + \frac{h}{\kappa^2 - p^2}\sin pt \qquad (246)$$

(246) - нуқта ҳаракат тенгламасидир.

(246) дан вақт буйича бир марта хосила оламиз ва нуқтанинг тезлигини топамиз.

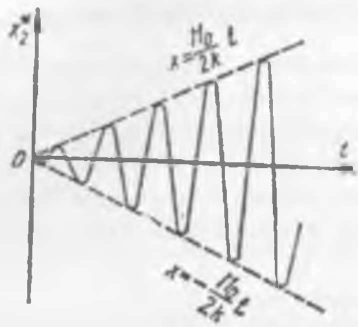
$$\frac{dx}{dt} = \vartheta = -C_1\kappa\sin\kappa t + C_2 k\cos kt + \frac{hp}{k^2 - p^2}\cos pt \qquad (247)$$

Нуқта уйғотувчи куч таъсирида мураккаб тебранма ҳаракат қилади. Бу ҳаракатнинг биринчи қисми эркин, иккинчи қисми эса мажбурий ҳаракатда булади.

$$x_2 = \frac{h}{k^2 - p^2}\sin pt \qquad (248)$$

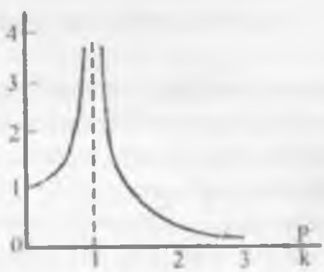
P=k булса, $B = \frac{h}{0} = \infty$ булади.

$B = \infty$ булса резонанс ходисаси руй беради. Эркин тебранма ҳаракат частотаси мажбурий тебранма ҳаракат частотасига тенг булган ҳолга резонанс ходисаси дейилади. Унинг графиги қуйидагича булади.



145.1-расм.

Мажбурий тебранма ҳаракат амплитудасининг графиги қуйидагича бўлади:



146–расм.

$$B=\frac{h}{k^2-p^2};\quad B=\frac{\frac{h}{k^2}}{1-\frac{p^2}{k^2}};\qquad B_0=\frac{h}{k^2}$$

$$B=\frac{B_0}{1-\left(\frac{p}{k}\right)^2};\quad \frac{B}{B_0}=\frac{1}{1-\left(\frac{p}{k}\right)^2}$$

$\frac{B}{B_0}=\eta$; η - динамик коэффициент.

$\frac{p}{k}=0$ ёки $p=0$ $\eta=1$ га тенг бўлади.

$$\frac{p}{k}=1;\ p=k\quad \eta=\infty$$

Уйғотувчи кучни такрорлиги *P=0, P=K* гача ўзгарса, динамик коэффициент 1 дан ∞ гача ортади.

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР.

1. Қандай харакатга мажбурий тебранма харкат дейилади?
2. Мажбурий тебранма харакат дифференциал тенгламасини ёзинг.
3. Мажбурий тебранма харакатнинг умумий ечимини ёзинг?
4. Мажбурий тебранма ҳаракат частотаси қандай ёзилади?
5. Мажбурий тебранма харакат даври қандай ёзилдан?
6. Мажбурий тебранма ҳаракат амплитудаси қандай факторларга боғлиқ?
7. Динамик коэффициент нима?
8. Динамик коэффициентнинг графиги қандай булади?
9. Қачон резонанс ходисаси содир булади?
10. Мажбурий тебранма ҳаркатнинг тенгламаси ва графиги резонанс ходисаси вақтида қандай булади?

73-§. МЕХАНИК СИСТЕМА

Бир нечта нуқталар (жисмлар) тупламн берилган булсин. Агар бу тупламдаги хар бир нуктанинг (жисмнинг) харакати бошқаларнинг харакатига ва вазиятига боғлиқ булса, бундай нуқталар (жисмлар) тупламига механик система дейилади.

Масалан: автомашина, кривошип шатун механизми, қуёш системаси ва абсолют қаттиқ жисмлар мисол булади.

Демак системани ташкил қилувчи жисмлар доимо бир-бирига таъсир қилиши шарт.

Системага таъсир қилувчи кучлар

Системадаги жисмлар фазода ихтиёрий тамонга қараб ҳаракат қила олса, бундай системага эркин система дейилади.

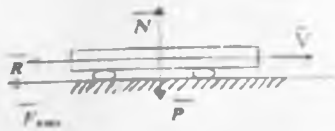
Масалан: Қуёш системаси. Системадаги жисмлар харакати чекланган булса бундан системага –эркснз система дейилади.

Хар қандай машина ёки механизм богланишидаги системага мисол була олади. Богланишнинг системадаги жисмларга курсатадиган таъсирига – реакция кучи дейилади. Эркин ва эрксиз системага таъсир қилувчи кучларни икки гурухга ажратамиз :

1. Ташқи кучлар *2. Ички кучлар*

Система таркибига кирмаган жисмларнинг системага курсатадиган таъсирига ташқи кучлар дейилади.

Масалан: Автомобилни бирор система деб қарасак, автомобилга таъсир қилувчи куч – ернинг тортиш кучи P хавонинг қаршилиги R, ишқаланиш кучи F ва ернинг нормал реакция кучи N ташқи кучларга мисол булади (147-расм).



147-расм.

Системадаги жисмларнинг бир-бирига курсатадиган таъсири ички кучлар дейилади.

Газларнинг поршенга, шатуннинг валга таъсири ички кучларга мисол булади. Система таъсир қилувчи ташқи кучларни $\overline{F^e}$ – билан, ички кучларни $\overline{F^i}$ – билан белгилаймиз.

Системага таъсир қилувчи ички кучлар икки хоссага эга:

I - Хосса: Системага таъсир қилувчи барча ички кучларнинг геометрик йиғиндиси ёки бош вектори нолга тенг.

Исбот: Бизга n та нуқтадан иборат система берилган булсин. Шу системада ихтиёрий M_1 ва M_2 нуқталарни оламиз. Ньютоннинг III-қонунига асосан бу нуқталар бир-бирига модуллари жиҳатидан тенг булган ва бир тугри чизиқ буйлаб тескари томонга йуналган куч билан таъсир қилади. M_1 нуқта M_2 нуқтага $\bar F_1^i$ куч билан таъсир этса, M_2 нуқта эса M_1 нуқтага $\bar F_2^i$ куч билан таъсир қилади.

$$\bar F_1^i = \bar F_2^i; \bar F_1^i = -\bar F_2^i; \qquad (249)$$
$$\bar F_1^i + \bar F_2^i = 0;$$

(249) ни системадаги ҳар бир нуқта учун ёзиб қушиб чиқсак қуйидаги ҳосила булади:

$$\sum \bar F_k^i = 0, \quad k = 1,2,..,n \qquad (250)$$

II –Хосса: Системадаги барча ички кучларнинг ихтиёрий нуқтага ёки уққа нисбатан олинган моментларининг йиғиндиси нолга тенг.

Ички кучлардан 0 нуқтага нисбатан момент олсак (148-расм).

148-расм.

$$m_0(\bar{F}_1') = -F_1'h$$

$$m_0(\bar{F}_2') = -F_2'h = F_2'h \qquad (251)$$

$$m_0(\bar{F}_1') + m(\bar{F}_2') = 0$$

(251) ни ҳар бир нуқта учун ёзиб ҳадма-ҳад қўшсак қуйидаги ҳосил бўлади.

$$\sum m_0(\bar{F}_k') = 0, \qquad \kappa = 1,2,...n \qquad (252)$$

Бу хоссалардан ички кучлар ўзаро мувозанатлашади деган хулосага келиш мумкин эмас, чунки ички кучлар системадаги ҳар бир жисмга қўйилган. Демак ички кучлар таъсирида системадаги жисмлар бир-бирига нисбатан ҳаракат қилади.

Системанинг массаси, массалар маркази ва унинг координаталари.

Системадаги нуқталарнинг ёки жисмларнинг массалар йиғиндисига системанинг массаси дейилади.

$$M = m_1 + m_2 + ... + m_n = \sum m_k \qquad (253)$$

бунда ***M*** - системанинг массаси. ***$m_1, m_2,..., m_n$*** - системадаги нуқталарнинг массаси.

Массалари ***$m_1, m_2,..., m_n$*** га тенг бўлган n та ***$M_1, M_2,..., M_n$*** нуқталардан тузилган система берилган. $\bar{r}_1, \bar{r}_2,...\bar{r}_n$ шу нуқталарнинг радиус-векторлари бўлсин (148-расм). Вазияти $\bar{r}_c$ радиус-вектори билан аниқланадиган геометрик С нуқта системанинг массалар маркази ёки инерция маркази дейилади.

$$\bar{r}_c = \frac{\Sigma m_k \bar{r}_k}{M}, \quad \kappa = 1,2,...n \qquad (254)$$

149-расм.

(254) ни координата ўқларига проекциялаймиз;

$$x_c = \frac{\sum m_k x_k}{M}, \qquad y_c = \frac{\sum m_k y_k}{M}, \qquad z_c = \frac{\sum m_k z_k}{M} \qquad k = 1, 2, \ldots n \tag{255}$$

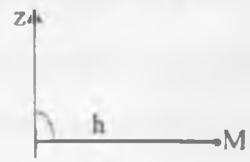
бунда x_c, y_c, z_c - лар массалар марказининг координаталари билан топилади. Массалар маркази системадаги массаларнинг жойлашишини тавсифлайди. Агар система иккита нуқтадан иборат бўлса, (255)-қуйидагига тенг;

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}, \qquad y_c = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}, \qquad z_c = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2}{m_1 + m_2} \tag{256}$$

74-§. ҚАТТИҚ ЖИСМНИНГ ЎҚГА НИСБАТАН ИНЕРЦИЯ МОМЕНТИ ВА ИНЕРЦИЯ РАДИУСИ

Бизга *z* ўқи ва массаси *m* га тенг бўлган *M* нуқта берилган бўлсин. *h-M* нуқтадан *z* ўқгача бўлган масофа (150-рам).

Нуқтанинг массаси билан шу нуқтадан ўқгача бўлган масофа квадрати кўпайтмасига ўқга нисбатан нуқтанинг инерция моменти дейилади. mh^2-*M* нуқтанинг *z* ўққа нисбатан инерция моменти дейилади.



150-расм.

Таъриф: Жисмнинг бирор ўқга нисбатан инерция моменти жисмдаги барча нуқталарнинг шу ўқга нисбатан олинган инерция моментларининг йиғиндисига тенг;

$$I_z = m_1 h_1^2 + m_2 h_2^2 + \ldots + m_n h_n^2 = \sum m h^2 \tag{257}$$

Бунда I_z жисмнинг z ўққа нисбатан инерция моменти. Инерция моменти жисмдаги массаларнинг жойлашишини тавсифлайди. Инерция моменти мусбат скаляр катталик. Инерция моментининг ўлчов бирлиги $кгм^2$. Система - нуқталарининг массаларини ўққача (нуқта ёки текисликгача) бўлаган масофалар квадрати кўпайтмасининг йиғиндисига тенг скаляр катталик мос равишда системанинг ўққа (нуқта ёки текисликга) нисбатан инерция моменти дейилади. Нуқтага нисбатан инерция моменти кўпинча қутбга нисбатан инерция моменти деб аталади. Агар z ўққа, 0 нуқтага ва П текисликка нисбатан системанинг инерция моментларини I_z, I_0 ва $I_П$ билан белгиласак,

$$I_z = \Sigma m_\mu h_\mu^2, \quad I_0 = \Sigma M_k r_k^2, \quad I_П = \Sigma m_n d_n^2 \qquad (257)$$

формула ўринли бўлади. Бунда m_μ система M_k нуқтасининг массасини, h_μ, r_k, d_n лар M_k нуқтадан z ўққа, 0 нуқтага ва П текисликкача бўлган масофаларни ифодалайди.

Жисмнинг ўқга нисбатан инерция моментини қуйидаги формула билан хисоблаш мумкин.

$$J_z = m \cdot \rho_z^2 \qquad (258)$$

Бунда m- масса.

ρ –жисмнинг инерция радиуси.

Жисмнинг массаси тўпланган нуқтадан ўқгача бўлган масофага инерция радиуси дейилади.

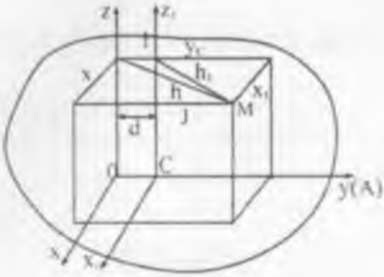
$$\rho_z = \sqrt{\frac{I_z}{m}} \qquad (259)$$

75-§. ПАРАЛЕЛ ЎҚЛАРГА НИСБАТАН ИНЕРЦИЯ МОМЕНТИ ҲАҚИДАГИ ТЕОРЕМА

Жисмнинг ҳар хил ўқларга нисбатан инерция моменти ҳар хил бўлади.

z ва z_1 ўқларга нисбатан инерция моменти қуйидагига тенг.

$$J_z = \sum mh^2 \quad J_{z_1} = \sum mh_1^2 \qquad (260)$$



151-расм.

Жисм берилган булсин. Жисмда ихтиерий M нуқтани оламиз (151-расм).

Жисмнинг массалар марказини координата боши килиб оламиз. $z_1//z$ укига $x_1//x$ булсин. x, y, z M нуқтани $cxyz$ системадаги координаталари. Бу координаталар орасидаги богланишни қуйидагича ёзамиз.

$$x = x_1; \quad y = d + y_1 \qquad \text{бундан} \qquad y_1 = y - d$$

h ва h_1 лар M нуқтадан z ва z_1 укларигача булган масофалар.

Расмдан $h^2 = x^2 + y^2$, $h_1^2 = x_1^2 + y_1^2$ қийматларини қуйсак

$$h_1^2 = x^2 + (y - d)^2 = x^2 + y^2 - 2dy + d^2 = h^2 - 2dy + d^2 \qquad (261)$$

$$I_{z_1} = \sum m h_1^2 \qquad (262)$$

(261) ни (262) га қуямиз. У ҳолда

$$I_{z_1} = \sum m(h^2 - 2dy + d^2) = \sum mh^2 - 2d\sum my + d^2\sum m$$

$\sum mh^2 = I_z$ жисмни z ўкига нисбатан инерция моменти $\sum m = M$ жисмнинг массаси.

C нуқта координата боши булганлиги учун унинг координатаси нолга тенг булади.

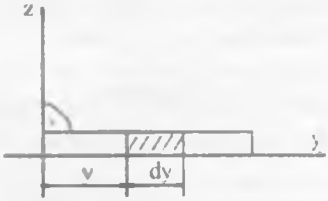
$$Y_c = 0, Y_c = \frac{\sum my}{M}, \sum my = MY_c \quad \sum my = 0; I_{z_1} = I + Md^2 \qquad (263)$$

(263) формула параллел укларга нисбатан инерция моменти ҳақидаги тенгламани ифодалайди.

Теорема: Жисмнинг массалар марказидан ўтувчи ўқга параллел булган бирор ўқга нисбатан инерция моменти массалар марказидан ўтган ўқга нисбатан ҳисобланган инерция моменти билан жисм массасининг шу уқлар оралиги квадрати купайтмаси йиғиндисига тенг.

76-§. СТЕРЖЕННИНГ ИНЕРЦИЯ МОМЕНТИ

Массаси *m* га, узунлиги *l* га тенг бўлган бир жинсли ингичка стерженнинг бирор учидан ўтиб стерженга перпендикуляр бўлган z ўққа нисбатан инерция моменти ҳисоблансин:



152-расм.

Стержендан элементар бўлакча оламиз. Элементар бўлакча массаси $dm = \gamma dy$

γ – бир бирлик узунлик массаси ёки зичлиги

$$I_z = \int_0^l h^2 dm = \int_0^l y^2 \gamma dy = \gamma \int_0^l y^2 dy = \gamma \frac{y^3}{3} \Big|_0^l = \gamma \frac{l^3}{3}$$

Стерженнинг массаси $m = \gamma l$

$$\gamma = \frac{m}{l};\ I_z = \frac{ml^2}{3} \quad \text{ёки} \quad I_z = \frac{ml^2}{3} \qquad (264)$$

Стерженнинг оғирлик марказидан ўтган ўққа нисбатан инерция моментини ҳисоблаймиз. Бунинг учун параллел ўқларга нисбатан инерция моменти ҳақидаги теоремадан фойдаланамиз.

$$I_z = I_0 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2; \qquad \frac{ml^2}{3} = I_0 + \frac{ml^2}{4}$$

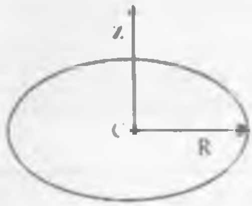
$$J_0 = \frac{ml^2}{3} - \frac{ml^2}{4} = \frac{ml^2}{12} \quad \text{Демак,} \quad J_z = \frac{ml^2}{12} \qquad (265)$$

77-§. ҲАЛҚАНИНГ ИНЕРЦИЯ МОМЕНТИ

Массаси *M* га радиуси *R* га тенг бўлган халқанинг марказга нисбатан инерция моменти ҳисоблансин. Ҳалқанинг массалари m_1, m_2...m_n га тенг бўлган бўлакчаларга бўламиз.

$$J_{c_z} = m_1R^2 + m_2R^2 + m_3R^2 + \ldots + m_nR^2 = R^2(m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_n) \qquad (266)$$

$$J_{c_z} = MR^2$$

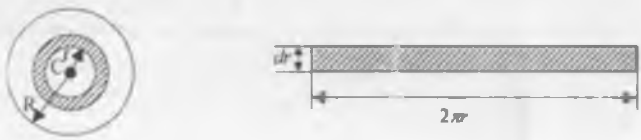


153-расм.

78-§. ДОИРАВИЙ ДИСКНИНГ ИНЕРЦИЯ МОМЕНТИ

Массаси M га радиуси R га тенг булган доиравий дискнинг марказга нисбатан инерция моменти ҳисоблансин.

Дискнинг радиуси r ва калинлиги dr булган ҳалқа оламиз.



А) Б)

154-расм.

Ҳалқанинг массаси $dm=\gamma dF$, бунда γ*-1 кв* бирлик юза массаси, dF-элементар юза.

Ҳалқани узиб чўзсак, стерженга ўхшаб колади.

$$dF = 2\pi r dr \qquad dm = \gamma 2\pi r dr$$

$$J_{Cz} = \int_I h^2 dm = \int_0^R r^2 2\pi r \gamma dr = 2\pi\gamma \int_0^R r^3 dr = 2\pi\gamma \frac{r^4}{4}\Big|_0^R = \frac{\pi\gamma R^4}{2}$$

$$m = \gamma\pi R^2 \qquad \gamma = \frac{m}{\pi R^2} \qquad J_{Cz} = \frac{MR^2}{2}$$

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР.

1. Механик система деб нимага айтилади?
2. Ташқи куч нима?
3. Ички куч нима?
4. Ички кучлар қандай хоссага эга?
5. Системанинг массаси нима?
6. Массалар марказининг координатаси қандай аниқланади?

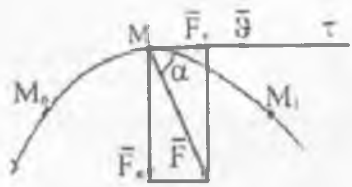
7. Қаттиқ жисмнинг ўққа нисбатан инерция моменти деб нимага айтилади?
8. Инерция радиуси қандай топилади?
9. Параллел ўқларга нисбатан инерция моменти ҳақидаги теоремани таърифланг?
10. Стержен, ҳалқа ва доиравий дискнинг инерция моменти қандай аниқланади?

79-§. КУЧНИНГ ЭЛЕМЕНТАР ВА ТЎЛА ИШИ

Кучни бирор йўлда жисмга кўрсатадиган таъсирини тасвирлаш учун кучнинг иши деган тушунча киритилади. М нуқта F кучи таъсирида эгри чизиқли траектория бўйича ҳаракатланиб M_0 дан M_1 гача келсин. $\bar{F}$ куч ўзгарувчан F кучининг M_0M_1 йўлдаги (155-расм) ишини аниқлаш керак бўлсин. Бунинг учун M_0M_1 йўлни элементар бўлакларга бўлиш керак. Элементар бўлакларда кучларнинг бажарган ишларининг йиғиндиси кучнинг M_0M_1 йўлдаги иши бўлади.

Бунда *ds* – уринма устида жойлашган чексиз кичик элементар йўл.

Кучнинг чексиз кичик элементар йўлда бажарган ишига кучнинг элементар иши дейилади ва dA билан белгиланади.



155-расм.

$$dA = F_\tau \cdot ds \qquad (267)$$

Бунда, F_τ - $\bar{F}$ **кучининг уринмадаги проекцияси.**

dA-кучнинг элементар иши $\bar{F}$ кучининг элементар иши деб, шу куч билан у қўйилган нуқта элементар кўчишининг сколяр кўпайтмасига тенг. *dA=Fdr*

$F_\tau = F\cos a \qquad dA = Fds\cos a$

✓Кучнинг бажарган иши скаляр катталик. Кучнинг M_0 M_1 йўлдаги иши унинг элементар ишидан олинган интегралга тенг.

$$A = \int_{M_0}^{M_1} F_\tau \, ds \qquad (268)$$

A- F кучининг M_0 M_1 йулдаги тула иши. Фараз қилайлик F_τ *=const* булса, (268)- дан:

$$A = F_\tau \int_{M_0}^{M_1} ds = F_\tau \cdot S = F\cos\alpha \cdot S$$

Бунда S- йулнинг узунлиги $S = \int_{M}^{M} ds$, $\quad A = FS\cos\alpha \qquad (269)$

(269) билан узгармас кучнинг иши топилади. Бурчак α- уткир булса, $\alpha < 90°$ кучнинг иши мусбат булади.

$\alpha > 90°$ утмас булса, кучнинг иши манфий булади.

Агар $\alpha = 0°$ булса, $A=FS$, $\alpha = 90°$ булса, A=0 булади. Иш бирликлари: Нм, Дж.

Қувват

Кучнинг вақт бирлигида бажарган ишига қувват дейилади.

Агар куч бир хил вақт оралигида бир хил иш бажарса, унинг қуввати қуйидагича топилади.

$$W = \frac{A}{t} \qquad (270)$$

Агар иш узгарувчан булса қувват шу ишдан вақт буйича олинган ҳосилага тенг.

$$W = \frac{dA}{dt} \qquad (271)$$

Элементар ишнинг қийматини қуйсак

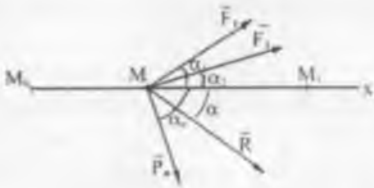
$$W = \frac{Fds\cos\alpha}{dt} = FV\cos\alpha \qquad W = FV\cos\alpha \qquad (272)$$

Бунда $V = \frac{dS}{dt}$ - тезлик.

80-§. ТЕНГ ТАЪСИР ЭТУВЧИ КУЧНИНГ ИШИ ҲАҚИДАГИ ТЕОРЕМА

Теорема: Тенг таъсир этувчи кучнинг бирор йулда бажарган иши ташкил этувчи кучларнинг шу йулда бажарган ишларининг йигиндисига тенг.

Исбот: М нуқта $\bar{F}_1$ $\bar{F}_2 \ldots \bar{F}_n$ кучлар таъсирида M_0 дан M_1 гача келсин (156-расм).



156-расм.

Тенг таъсир этувчи куч

$$R = F_1 + F_2 + ... F_n \qquad (273)$$

(273) ни иккала қисмини M_0M_1 нуқтадан утган тугри чизиққа проекциялаймиз.

$$R\cos\alpha = F_1\cos\alpha_1 + F_2\cos\alpha_2 + \ldots + F_n\cos\alpha_n \qquad (274)$$

(274) ни иккала қисмини S йулга купайтирамиз

$$R\cdot S\cos\alpha = F_1S\cos\alpha_1 + F_2S\cos\alpha_2 + \ldots + F_n\cos\alpha_n\cdot S$$

$$R\cdot S\cos\alpha = A. \quad F_1S\cos\alpha_1 = A_1$$

$$F_2S\cos\alpha_2 = A_2, \ldots\ldots F_nS\cos\alpha_n = A_n$$

$$A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n \qquad (275)$$

81-§. КУЧ ЭЛЕМЕНТАР ИШИНИНГ АНАЛИТИК ИФОДАСИ

Куч элементар ишининг аналитик ифодасини аниқлаймиз. Бунинг учун $\bar{F}$ кучини ташкил этувчиларга ажратамиз (157-расм).

$F_x, \bar{F_y}, F_z$ - $\bar{F}$ кучнинг ташкил этувчилари.

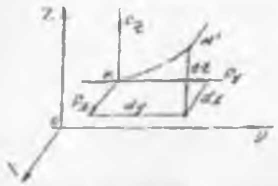
Элементар *MM'* силжиш *MM'=dS* координата ўқлари буйлаб йуналган *M* нуқта *dx, dy, dz* силжишларининг йиғиндисига тенг. Шунинг учун *F* кучининг*dS* силжишдаги бажарган иши унинг ташкил этувчилари *Fx, Fy, Fz* ларининг *dx, dy, dz* силжишдаги бажарган ишларининг йиғиндисига тенг булади. *dx* силжиш фақат *Fx dx* га тенг. *dy, dz* силжишдаги *Fy,Fz* кучларининг бажарган ишини қуйидагича ёзамиз. *Fy dy, Fz dz*

Кучни элементар иши қуйидаги формула билан топилади (157-расм).

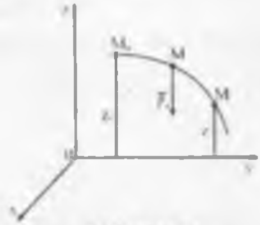
$$dA = F_xdx + F_ydy + F_zdz \qquad (276)$$

Бу формула кучнинг элементар ишининг аналитик ифодасини беради. Кучнинг *M₀M₁* йулдаги бажарган иши унинг элементар ишидан олинган интегралга тенг.

$$A = \int_{M_0}^{M} F_\tau ds \qquad A = \int_{M_0}^{M} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) \qquad (277)$$



157-расм.



158-расм.

Огирлик кучининг бажарган иши.

Огирлиги P га тенг булган M нуқта M_0 дан M_1 гача келсин. P огирлик кучини M_0M_1 йулдаги бажарган ишини ҳисоблаймиз (158-расм).

P кучининг координата уқларидаги проекцияси $x=0,\ y=0,\ z=-P$. P кучининг M_0M_1 йулдаги иши. (277) формулага кура.

$$A=\int_{M_0}^{M_1}(-P)dz=-P\int_{Z_0}^{Z_1}dZ=-PZ\Big|_{Z_0}^{Z_1}=-PZ\Big|_{Z_0}^{Z_1}=-P(Z_1-Z_0)=P(Z_0-Z_1)=\pm ph$$

$$A=P\,(z_0-z_1)=\pm ph \qquad\qquad A=\pm Ph$$

Бунда $z_0-z_1=h$

h - M нуқтанинг вертикал буйича юрган йули. Агар $z_0>z_1$ булса M нуқта юқоридан пастга тушади, иш эса мусбат булади.

Агар $z_0<z_1$ булса M нуқта юқорига кўтарилади, иш эса манфий булади.

$$A=\pm Ph \qquad (278)$$

(278) билан огирлик кучининг бажарган иши топилади. Огирлик кучининг бажарган иши плюс ва минус ишораси билан олинган куч миқдорининг вертикал буйича силжишга купайтмасига тенг.

82-§. ЭЛАСТИКЛИК КУЧИНИНГ БАЖАРГАН ИШИ

Пружинадаги реакция кучининг ишини ҳисоблаймиз. Бизга бир учи маҳкамланган пружина берилган. $\bar{F}$ - пружинанинг реакция кучи ёки эластиклик кучи. Пружина h масофага чузилганда $\bar{F}$ кучини бажарган ишини топиш керак. Бунинг учун M нуқтани координата боши деб x уқини йуналтирамиз (159-расм).

$F = cx$: бунда c – пружинанинг бикрлиги, x – пружинани чўзилиши ёки сиқилиши, $\overline{F}$ - кучнинг координата ўқларидаги проекцияси.

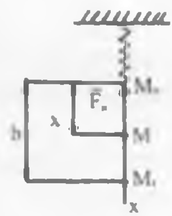
$$X = -F \quad Y = 0 \quad Z = 0$$

F кучининг h – масофадаги иши (277) формулага кўра.

$$A = \int_{M_0}^{M_1}(-F)dx = \int_0^h -cxdx = -c\int_0^h xdx = -\frac{cx^2}{2}\Big|_0^h = -\frac{ch^2}{2};$$

$$A = -\frac{ch^2}{2} \qquad (279)$$

Бу формула билан эластиклик кучини бажарган иши топилади.



159-расм.

83-§. ҚЎЗҒАЛМАС ЎҚ АТРОФИДА АЙЛАНМА ҲАРАКАТ ҚИЛУВЧИ ЖИСМГА ҚЎЙИЛГАН КУЧНИНГ ИШИ ВА ҚУВВАТИ

Агар жисм $\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_N$ кучлар системаси таъсирида қўзғалмас z ўқи атрофида айланма ҳаракатда бўлса, қутбни айланиш ўқида оламиз; натижада $dr_0 = 0$ ҳамда бурчак тезли йўналган OP ва z ўқлари устма-уст тушади (160-расм Бинобарин, кўрилаётган ҳолда

$$d'A = M_z d\varphi \qquad (280.1)$$

формула ўринли бўлади, яъни қўзғалмас ўқ атрофида айланм ҳаракат қилувчи жисмга таъсир этувчи кучлар системасини элементар иши мазкур ўққа нисбатан кучлар бош моментини жисм ўқ атрофида айланганда элементар кучишдаги ишига тенг.

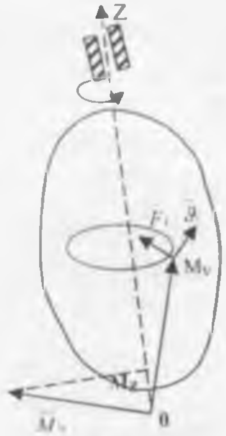
Бу ҳолда кучлар системасининг қуввати

$$N = M_z \frac{d\varphi}{dt} = M_z\omega \qquad (280.2)$$

чекли айланма кўчишдаги иши эса,

$$I = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M\, d\varphi \qquad (280.3)$$

формулалар ёрдамида аниқланади.



160-расм.

84-§. АБСОЛЮТ ҚАТТИҚ ЖИСМДАГИ ИЧКИ КУЧЛАР ИШЛАР ЙИҒИНДИСИНИНГ НОЛҒА ТЕНГЛИГИ

Абсолют қаттиқ жисмни ҳар қандай силжишда шу жисмдаги ички кучлар ишлари йиғиндиси нолга тенглигини исбот қилиш керак.

Бизга *n* та нуқтадан тузилган абсолют қаттиқ жисм берилган бўлсин. Шу жисмда ихтиёрий M_1 ва M_2 нуқталарни оламиз (161-расм).

V_1 ва V_2, M_1 ва M_2 нуқталарнинг тезлиги.

Тезлик модули.

$$V_1 = \frac{dS_1}{dt}; V_2 = \frac{dS_2}{dt} \qquad (281)$$

V_1 ва V_2 тезликларни M_1 ва M_2 нуқталардан ўтган тўғри чизиқдаги проекцияси ўзаро тенг бўлади.

$$V_1 \cos\alpha_1 = V_2 \cos\alpha_2 \qquad \text{ёки}$$

$$\frac{dS_1}{dt}\cos\alpha_1 = \frac{dS_2}{dt}\cos\alpha_2$$

$$dS_1 \cos\alpha_1 = dS_2 \cos\alpha_2$$

$$dS_1 \cos\alpha_1 = dS_2 \cos\alpha_2 = 0$$

M_1 ва *M_2* нуқталарга бир-бирига модуллари жиҳатидан тенг булган ва бир тугри чизик буйлаб тескари томонга йуналган F_1' *ва* $\overline{F'_2}$ кучлар билан таъсир этади.

$$F_1' = F_2' \qquad\qquad F_1' = -F_2'$$

F_1', F_2' кучларни *dS_1* ва *dS_2* масофага силжигандаги бажарган ишини топамиз.

$$dA_1' = F_1' dS_1 \cos\alpha$$

$$dA_2' = F_2' dS_2 \cos(180 - \alpha_1) = -F_2' dS_2 \cos\alpha_2$$

Кучларнинг элементар ишларини қушамиз.

$$dA_1' + dA_2' = F_1' dS_1 \cos\alpha_1 - F_2' dS_2 \cos\alpha_1 =$$

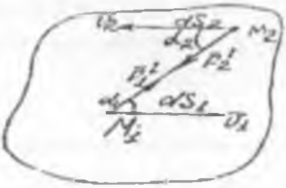
$$= F_2'(dS_1 \cos\alpha_1 - dS_2 \cos\alpha_2) = 0 \qquad (282)$$

$$dA_1' + dA_2' = 0$$

бу формулани системадаги хар бир нукта учун ёзиб хадма-хад кушиб чиқамиз. (282) ни интеграллаймиз.

(282) ни интеглаб, қуйидагини ёзамиз:

$$\sum dA_k' = 0 \qquad \sum A_k' = 0 \quad k = 1, 2, \dots n \qquad (283)$$



161-расм.

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР.

1. Кучнинг элементлар иши қайси формула билан топилади?
2. Кучнинг элементар иши аналитик ифодасини езинг?
3. Кучнинг чекли йулда бажарган иши қандай ифодаланади?
4. Қувват нима?
5. Тенг таъсир этувчи кучнинг иши тугрисидаги теорема нимадан иборат?
6. Огирлик кучини бажарган иши нимага тенг булади?
7. Эластиклик кучини бажарган иши нимага тенг булади?
8. Ишкаланиш кучининг бажарган иши нимага тенг булади?

9. Қузғалмас уқ атрофида айланувчи жисмга куйилган кучни бажарган иши қандай топилади?
10. Қувват қандай топилади?

85-§. НУҚТА ВА СИСТЕМАНИНГ КИНЕТИК ЭНЕРГИЯСИ

Нуқта массаси билан тезлик квадрати купайтмасининг ярмига нуқтанинг кинетик энергияси дейилади.

$$\frac{m\vartheta^2}{2}$$

Системанинг кинетик энергияси шу системадаги барча нуқталар кинетик энергияларининг алгебраик йиғиндисига тенг булади.

$$T=\frac{m_1V_1^2}{2}+\frac{m_2V_2^2}{2}+\ldots+\frac{m_nV_n^2}{2}=\sum\frac{m_KV_K^2}{2}$$

$$T=\sum\frac{m_KV_K^2}{2}\qquad k=1,2,\ldots,n$$

Бунда T системанинг кинетик энергияси.

Система бир нечта қаттиқ жисмдан иборат бўлса, системани кинетик энергияси шу қаттиқ жисмлар кинетик энергиялари йиғиндисига тенг булади.

$$T=T_1+T_2+T_3+\ldots+T_n \tag{284}$$

Кинетик энергиянинг бирликлари кгм, тм, нм

Система кинетик энергияси унинг илгарилама ва айланма ҳаракатларини тавсифлайди.

Кёнига теоремаси

Системанинг кинетик энергияси унинг массалар марказининг кинетик энергияси билан шу марказга нисбатан система бажарган ҳаракати кинетик энергиясининг йиғиндисига тенг.

$$T=\frac{mV_C^2}{2}+Tc \tag{285}$$

Бунда $\left(\frac{mV_C^2}{2}\right)$-система массалар марказининг кинетик энергияси.

Vc-массалар марказининг тезлиги

Tc - массалар марказига нисбатан система бажарган ҳаракатининг кинетик энергияси.

Бу теоремадан фойдаланиб, қаттиқ жисмлар кинетик энергиясини аниқлаш мумкин.

1) Илгариланма ҳаракат қилаётган қаттиқ жисмнинг кинетик энергияси.

Илгариланма ҳаракат қилаётган қаттиқ жисм берилган бўлсин (162-расм). Шу қаттиқ жисмни кинетик энергиясини ҳисоблаш лозим бўлсин. Бунинг учун жисмни $M_1, M_2, \ldots, M_n$ нуқталардан иборат бўлган система деб қараймиз. Системани кинетик энергияси ҳақидаги таърифга асосан:

$$T = m_1\frac{V_1^2}{2} + m_2\frac{V_1^2}{2} + \ldots + m_n\frac{V_n^2}{2} = \frac{V_c^2}{2}(m_1 + m_2 + \ldots + m_n);$$

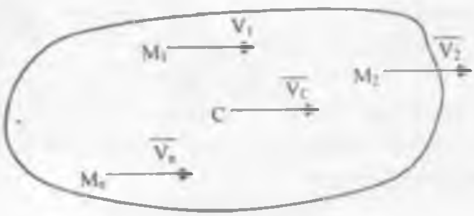
бунда $(m_1 + m_2 + \ldots + m_n) = M;\ V_1 = V_2 = \ldots V_n = V_c.$

у холда
$$T = \frac{MV_c^2}{2} \tag{286}$$

бунда M-жисмни массаси;

V_c – массалар марказининг тезлиги;

(286)- билан илгариланма ҳаракат қилаётган қаттиқ жисмни кинетик энергияси топилади.



162-расм.

2) Қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи қаттиқ жисмнинг кинетик энергияси

Қўзғалмас z ўқи атрофида ω бурчак тезлиги билан айланаётган қаттиқ жисм берилган. Шу жисмни кинетик энергиясини топиш керак. Жисмни n та нуқтадан иборат бўлган система деб қараймиз. Системадан ихтиёрий M_k нуқтани оламиз. Бу нуқтанинг тезлиги:

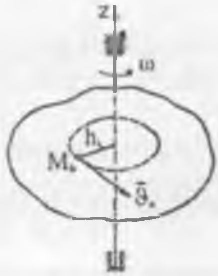
$$V_K = \omega \cdot h_K$$

$$T = \frac{\sum m_K V_K^2}{2} = \frac{\sum \omega^2 h_K^2 m_K}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum m_K h_K^2 = \frac{\omega^2}{2} I_z = \qquad (287)$$

$$= I_z \frac{\omega^2}{2}; \qquad T = \frac{1}{2} \cdot J_{z\omega^2}$$

Бунда: $$J_z = \sum m_k h_k^2.$$

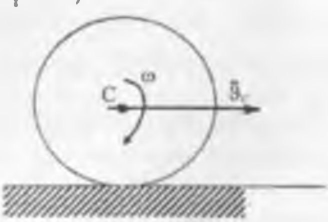
I_z жисмнинг айланиш ўқига нисбатан инерция моменти. (287)- формула билан қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи қаттиқ жисмнинг кинетик энергияси топилади.



163-расм.

3) Текис - параллел ҳаракат қилаетган қаттиқ жисмнинг кинетик энергияси

Қаттиқ жисмнинг текис параллел ҳаракати қутб билан биргаликдаги илгариланма ва қутб атрофидаги айланма ҳаракатлардан иборат. Шунинг учун жисмнинг кинетик энергияси шу икки ҳаракатдаги кинетик энергияларнинг йиғиндисига тенг (164-расм).



164-расм.

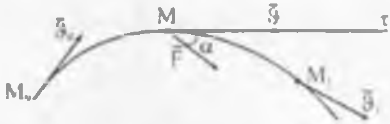
$$T = \frac{mV_C^2}{2} + \frac{I_z \omega^2}{2}.$$

Бунда m- жисмнинг массаси; V_c- жисм оғирлик марказининг тезлиги; I_c- жисмнинг оғирлик марказига нисбатан инерция моменти; ω- жисмни бурчак тезлиги. (288) – формула билан текис параллел ҳаракат қилаётган қаттиқ жисмнинг кинетик энергияси топилади.

86-§. НУҚТА КИНЕТИК ЭНЕРГИЯСИНИНГ ЎЗГАРИШИ ҲАҚИДАГИ ТЕОРЕМА

M нуқта $\overline{F}$ кучи таъсирида ҳаракат қилиб M_0 нуқтадан M_1 нуқтага келсин (165-расм).

$\overline{F}$ нуқтани ҳаракатга келтирувчи куч



165-расм.

Нуқта динамикасининг асосий тенгламасини ёзамиз.

$$m\overline{W} = \overline{F} \qquad (289)$$

Бу формуланинг иккала қисмини **M** нуқтадан ўтган уринмага проекциялаймиз.

$$mW_\tau = F_\tau; \quad F_\tau = F\cdot\cos\alpha$$

$$mW_\tau = F\cos\alpha;$$

$$W_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dS}\cdot\frac{dS}{dt} = \frac{dv}{dt}\cdot v; \qquad W_\tau = V\frac{dV}{dS}$$

$$v = \frac{dS}{dt}$$ - нуқтанинг тезлиги

$$mv\frac{dv}{ds} = F\cos\alpha$$

$mvdv = F\cos\alpha dS$; $\quad dA = F\cos\alpha ds$ - кучнинг элементар иши.

$$\frac{d(mv^2)}{2} = dA \qquad (290)$$

(290)-формула дифференциал шаклдаги нуқта кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақидаги теоремани ифодалайди: Нуқта кинетик энергиясининг дифференциали нуқтага таъсир этувчи кучнинг элементар ишига тенг.

(290) ни интеграллаймиз.

$$\int_{v_0}^{v_1}\frac{d(mv^2)}{2} = \int_{M_0}^{M_1} dA$$

$$\frac{mv^2}{2}\Big|_{v_0}^{v_1} = A, \qquad A = \int_{M_0}^{M_1} dA,$$

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A \qquad (291)$$

(291)- интеграл шаклдаги нукта кинетик энергиясининг узгариши ҳакидаги теоремани ифодалайди: Нукта кинетик энергиясининг бирор чекли йулдаги узгариши нуктага таъсир этувчи кучнинг шу йўлда бажарган ишига тенг.

Агар нуктага бир нечта кучлар қўйилган булса, (291)-формуладаги A иш кучлар тенг таъсир этувчисининг иши булади.

87-§. СИСТЕМА КИНЕТИК ЭНЕРГИЯСИНИНГ УЗГАРИШИ ҲАҚИДАГИ ТЕОРЕМА

Системадаги ихтиёрий M нуктага интеграл шаклдаги нукта кинетик энергиясининг узгариши ҳакидаги теоремани татбиқ киламиз.

$$\frac{m\vartheta_1^2}{2} - \frac{m\vartheta_0^2}{2} = A^e + A^i \qquad (291.1)$$

Бунда A^e ва A^i М нуктага қўйилган ташқи ва ички кучларнинг бажарган иши.

(291.1)-формулани системадаги ҳар бир нукта учун ёзиб қўшиб чиқамиз.

$$\sum\frac{m\vartheta_1^2}{2} - \sum\frac{m\vartheta_0^2}{2} = \sum A^e + \sum A^i \qquad (291.2)$$

$$\sum\frac{m\vartheta_0^2}{2} = T_0, \quad \sum\frac{m\vartheta_1^2}{2} = T$$

T_0 ва T системани бошланғич ва охирги ҳолатдаги кинетик энергияси.

$$T - T_0 = \sum A^e + \sum A^i \qquad (291.3)$$

(291.3)- формула система кинетик энергиясининг узгариши ҳақидаги теоремани ифодалайди: Система бир вазиятдан иккинчи вазиятга ўтганда, унинг кинетик энергиясининг ўзгариши системага қўйилган барча ташқи ва ички кучлар бажарган ишларининг йиғиндисига тенг.

Агар система абсолют қаттиқ жисмдан тузилган булса, ички кучларнинг бажарган ишларининг йиғиндиси нолга тенг булади $\sum A^i = 0$: У ҳолда (291.3) формулани қуйидагича ёзиш мумкин.

$$T - T_0 = \sum A^e \qquad (291.4)$$

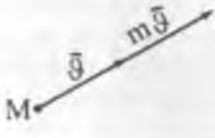
ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР.

1. Нуқтанинг кинетик энергияси деб нимага айтилади?
2. Системанинг кинетик энергияси деб нимага айтилади?
3. Илгарилама ҳаракатдаги қаттиқ жисмнинг кинетик энергияси қайси формула билан аниқланади?
4. Қўзғалмас ўқ атрофида айланма ҳаракат қилганда қаттиқ жисмнинг кинетик энергияси қайси формула билан аниқланади?
5. Текис параллел ҳаракат қилганда қаттиқ жисмнинг кинетик энергияси қандай аниқланади?
6. Нуқта кинетик энергиянинг ўзгариши ҳақидаги теоремани таърифланг?
7. Дифференциал кўринишдаги нуқта кинетик энергиянинг ўзгариши ҳақидаги теоремани ёзинг?
8. Интеграл кўринишдаги нуқта кинетик энергиянинг ўзгариши ҳақидаги теоремани ёзинг?
9. Дифференциал шаклдаги система кинетик энергиянинг ўзгариши ҳақидаги теоремани айтинг.
10. Интеграл шаклдаги система кинетик энергияси тўғрисидаги теоремани айтинг?

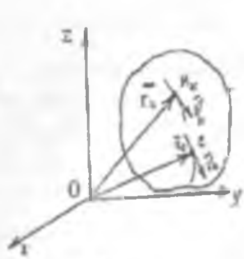
88-§. НУҚТА ВА СИСТЕМАНИНГ ҲАРАКАТ МИҚДОРИ

Нуқтанинг ҳаракат миқдори деб, нуқта массаси билан унинг тезлигининг кўпайтмасига айтилади. Нуқтанинг ҳаракат миқдори вектор катталик бўлиб, унинг тезлиги билан бир хил йўналган бўлади. (166-расм)

$m\bar{v}$ - нуқтанинг ҳаракат миқдори.



166-расм.



167-расм.

Системадаги барча нуқталар ҳаракат миқдорларининг геометрик йиғиндисига системанинг ҳаракат миқдори дейилади.

$$Q = m_1 \bar V_1 + m_2 \bar V_2 + \ldots m_n \bar V_n = \sum m_k \bar V_k ;$$

$$Q = \sum m_k \bar V_k \qquad k = 1,2,\ldots,n$$

Бунда Q - системанинг ҳаракат миқдори

Системанинг ҳаракат миқдори унинг массаси билан массалар маркази тезлигининг кўпайтмасига тенг.

(254) – формуладан

$$\bar r_c = \frac{\sum m_k \bar r_k}{m_k}; \quad \sum m_k \bar r_k = \bar r_c m_k \qquad (292)$$

(292)-дан вақт бўйича ҳосила оламиз:

$$\sum m_k \frac{d\bar r_k}{dt} = M\frac{d\bar r_c}{dt}$$

$$\sum m_k \bar V_k = M\bar V_c \quad \text{ёки } \bar Q = M \cdot \bar V_c \qquad (293)$$

Системанинг ҳаракат миқдори унинг илгариланма ҳаракатини тавсифлайди.

4

89-§. КУЧ ИМПУЛЬСИ ВА УНИНГ КООРДИНАТА ЎҚЛАРИДАГИ ПРОЕКЦИЯЛАРИ

Кучни элементар вақтга кўпайтмаси кучи элементар импульси дейилади.

$$d\bar S = \bar F dt \qquad (294)$$

бунда – $d\bar S$ - кучни элементар импульси; $\bar F$ - нуқтага таъсир этувчи куч; dt –элементар вақт.

Кучни бирор t_1 - вақтдаги импульсини аниқлаш учун унинг элементар импульсидан интеграл олиш керак.

$$\bar S = \int_0^{t_1} \bar F dt \qquad (295)$$

Бунда $\bar S$ ва $\bar F$ кучининг t_1 вақт ичидаги тўла импульси.

(295)- нинг иккала қисмини координата ўқларига проекциялаймиз:

$$S_x = \int_0^{t_1} F_x dt; \quad S_y = \int_0^{t_1} F_y dt; \quad S_z = \int_0^{t_1} F_z dt; \qquad (296)$$

(296)- билан куч импульсининг координата ўқларидаги проекциялари аниқланади. Агар

$$\bar F = const \text{ бўлса } \bar S = \bar F\int_0^{t_1} dt = \bar F \cdot t_1 \text{ бўлади.} \qquad (297)$$

Бунда t_1 - $\bar F$ кучнинг жисмга таъсир этган вақти.
(297) ни координата ўқларига проекциялаймиз.

$$\begin{aligned} S_x &= F_x \cdot t_1 \\ S_y &= F_y \cdot t_1 \\ S_z &= F_z \cdot t_1 \end{aligned} \qquad (298)$$

Бунда F_x, F_y, F_z - $\bar F$ кучнинг x, y, z ўқлардаги проекциялари.
Куч импульсининг миқдори қуйидаги формула билан топилади.

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2} \qquad (299)$$

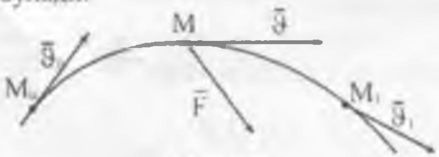
90-§. НУҚТА ҲАРАКАТ МИҚДОРИНИНГ ЎЗГАРИШИ ҲАҚИДАГИ ТЕОРЕМА

M нуқта $\bar F$ кучи таъсирида ҳаракатланиб, M_0 дан M_1 гача келсин (168-расм). Нуқта динамикасининг асосий тенгламасини ёзамиз.

$$m\bar a = \bar F$$

$$m\frac{d\bar V}{dt} = \bar F; \qquad \frac{d(m\bar V)}{dt} = \bar F \qquad (300)$$

(300) - формула дифференциал кўринишдаги нуқта ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теоремани ифодалайди: Нуқта ҳаракат миқдоридан вақт бўйича олинган ҳосила шу нуқтадаги таъсир этувчи кучга тенг бўлади.



168-расм.

(300)-формулани интеграллаймиз.

$$d(m\bar V) = \bar F dt;$$

$$\int d(m\bar V) = \int \bar F dt;$$

$$m\bar V \Big|_{V_0}^{V_1} = \bar S \quad \text{ёки} \quad m\bar V_1 - m\bar V_0 = \bar S \qquad (301)$$

(301)-формула интеграл куринишидаги нуқта ҳаракат миқдорининг узгариши хақидаги теоремани ифодалайди: Нуқта ҳаракат миқдорининг бирор вақт ичидаги узгариши нуқтага таъсир этувчи кучнинг шу вақтдаги тула импульсига тенг булади. (301) формулани координата укларига проекциялаймиз:

$$mV_{1x} - mV_{0x} = S_x;$$
$$mV_{1y} - mV_{0y} = S_y; \qquad (302)$$
$$mV_{1z} - mV_{0z} = S_z;$$

Демак, нуқта харакат миқдорининг координата уқи буйича чекли вақт ичида узгариши шу вақт ичидаги нуқтага таъсир этувчи куч импульсининг мазкур ўқдаги проекциясига тенг.

91-§. СИСТЕМА ҲАРАКАТ МИҚДОРИНИНГ ЎЗГАРИШИ ҲАҚИДАГИ ТЕОРЕМА

Системадаги ихтиерий ***Mк*** нуқта учун дифференциал шаклдаги нуқта ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теоремани ёзамиз.

(300) – формуладан.

$$\frac{d}{dt}(m_k V_k) = F_k^e + F_k^i \qquad (303)$$

Бунда $\bar{F}_k^e \text{ ва } \bar{F}_k^i$ -Мк нуқта қуйилган ташқи ва ички кучлар. (303) – формулани системадаги ҳар бир нуқталар учун ёзиб ҳадма-ҳад қушамиз; (169-расм).

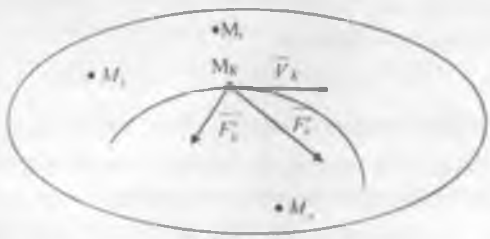
$$\frac{d}{dt}\left(\sum m_k \bar{V}_k\right) = \sum \bar{F}_k^e + \sum \bar{F}_k^i \qquad k = 1,2,\dots,n \qquad (304)$$

Бунда $\sum m_k \bar{V}_k = Q$ -системанинг ҳаракат миқдори.

$\sum \bar{F}_k^e = \bar{R}$ ташқи кучлар бош вектори. Ички кучлар хоссасига кура

$\sum \bar{F}_k^i = 0$ - натижада (304) ни қуйидагича ёзиш мумкин

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \bar{R} \qquad (305)$$



169-расм.

(305) ни Декарт координата ўқларига проекциялаб, систем ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теоремани скаляр кўринишида ёзамиз:

$$\frac{dQ_x}{dt} = R_x,$$

$$\frac{dQ_y}{dt} = R_y, \qquad (306)$$

$$\frac{dQ_z}{dt} = R_z.$$

Система ҳаракат миқдорининг бирор ўқдаги проекциясидан вақ бўйича олинган ҳосила, системага таъсир этувчи ташқи кучлар бош векторининг шу ўқдаги проекциясига тенг.

Система ҳаракат миқдорининг чекли вақт ичидаги ўзгаришин аниқлаш учун (305) ни dt га кўпайтириб, интеграллаймиз:

$$\frac{d\overline{Q}}{dt} = \overline{R}, dQ = R\ dt, \int_{Q_0}^{Q_1} dQ = \int_0^{t_1} Rdt, Q\Big|_{Q_0}^{Q_1} = \overline{S} \quad \overline{Q} - \overline{Q}_0 = \overline{S} \qquad (307)$$

Бунда $\overline{Q}_0$ - системанинг бошланғич вақтдаги ҳаракат миқдори.

$\overline{Q}_1$–системанинг t_1 вақтдаги ҳаракат миқдори. $\overline{S} = \int_0^{t_1} \overline{R}\ dt - t_1$ вақт ичид системага таъсир этувчи кучлар бош векторининг импульси.

(307) формула интеграл шаклдаги система ҳаракат миқдорин ўзгариши ҳақидаги теоремани ифодалайди: Система ҳарака миқдорининг бирор вақт ичидаги ўзгариши системага қўйилган барч ташқи кучлар бош векторининг шу вақт ичидаги импульсига тенг. (307 ни координата ўқларига проекциялаймиз.

$$Q_{1x} - Q_{0x} = S_x \qquad Q_{1y} - Q_{0y} = S_y \qquad Q_{1z} - Q_{0z} = S_z \qquad (308)$$

Бунда S_x, S_y, S_z, - $\overline{S}$ куч импульсини проекциялари. Исбот қилинг теоремадан қуйидаги натижалар келиб чиқади:

1) Агар ташқи кучлар бош вектори $R=0$ га тенг бўлса, системан ҳаракат миқдори ўзгармас бўлади.

$$\frac{dQ}{dt} = 0; dQ = 0. \int dQ = 0 \qquad \overline{Q} = \overline{const}$$

2) Агар системага қўйилган ташқи кучлар бош векторининг бир ўқдаги, масалан Ох ўқдаги проекцияси нолга тенг бўлса, система ҳара миқдорининг шу ўқдаги проекцияси ўзгармайди.

$$R_x = 0$$

у ҳолда (306)- дан $\qquad Q_X = const$

Бу натижалар система ҳаракат миқдорининг сақланиши ҳақидаги қонунини ифодалайди. Демак, системанинг ҳаракат миқдорини ички кучлар ўзгартирмайди.

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР.

1. Нуктанинг ҳаракат миқдори нима?
2. Кучнинг элементар импульси нима?
3. Элементар импульс қандай йўналган?
4. Кучни тўла импульси қандай топилади?
5. Куч импульсининг координата ўқларидаги проекцияси қандай топилади?
6. Нуқта ҳаракат миқдори тўғрисидаги теорема нимадан иборат?
7. Нуқта ҳаракат миқдорини сакланиш конунини айтинг?
8. Системанинг ҳаракат миқдори деб нимага айтилади?
9. Системанинг ҳаракат миқдори тўғрисидаги теорема нимадан иборат?
10. Системанинг ҳаракат миқдори қандай ҳолларда сакланади?

92-§. СИСТЕМА МАССАЛАР МАРКАЗИНИ ҲАРАКАТИ ҲАҚИДАГИ ТЕОРЕМА

Системанинг ҳаракат миқдори қуйидагига тенг.

$$\bar{Q} = m\,\bar{V}_c \qquad (309)$$

Системанинг ҳаракат миқдорини ўзгариши ҳақидаги формулани ёзамиз.

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \bar{R} \qquad (310)$$

Бу ерда $\bar{R} = \sum \bar{F}_k$ - система нуқталарига таъсир этувчи ташқи кучларнинг бош вектори.

(309) ни (310) га қўйиб ҳосила оламиз:

$$M\frac{d\bar{V}_c}{dt} = \bar{R};\ \frac{d\bar{V}_c}{dt} = \bar{W}_c;\qquad M\bar{W}_c = \bar{R}; \qquad (311)$$

бу ерда $\bar{W}_c = \frac{d\bar{V}_c}{dt}$ - система массалар марказининг тезланиши.

(311)-формула система массалар марказининг ҳаракати ҳақидаги теоремани ифодаланди: система массалар маркази, массаси бутун система массасига тенг бўлган ва система нуқталарига таъсир этувчи барча ташқи кучларнинг бош вектори таъсиридаги моддий нуқта каби ҳаракатланади.

(311) иккала қисмини координата ўқларига проекциялаймиз

$$mW_{cx} = R_x;$$
$$mW_{cy} = R_y; \quad (312)$$
$$mW_{cz} = R_z;$$

Бунда $R_x, R_y, R_z - R$ бош векторнинг координата ўқларидаги проекциялари.

$$W_{cx} = \frac{d^2 x_c}{dt^2} = \ddot{X}_c; \quad W_{cy} = \frac{d^2 y_c}{dt^2} = \ddot{Y}_c; \quad W_{cz} = \frac{d^2 z_c}{dt^2} = \ddot{Z}_c; \quad (313)$$

Бунда x_c, y_c, z_c – массалар марказининг координаталари. (313) ни (312) га қуямиз, у холда

$$m\ddot{x}_c = R_x;$$
$$m\ddot{y}_c = R_y; \quad (314)$$
$$m\ddot{z}_c = R_z;$$

(314)-формула массалар маркази ҳаракатини дифференциал тенгламаларини ифодалайди. Исбот қилинган теоремадан қуйидаги натижаларни оламиз:

1. Фараз қилайлик, системага таъсир этувчи ташқи кучларнинг бош вектори нолга тенг бўлсин:

$$\overline{R} = \sum \overline{F_k^e} = 0$$

У ҳолда $\overline{W_c} = \frac{d\overline{V_c}}{dt} = 0$ булиб,

$$\overline{V_C} = const$$

бўлишини кўрамиз. Яъни система нуқталарига таъсир этувчи кучларнинг бош вектори нолга тенг бўлса, системанинг массалар маркази тўғри чизиқли ва тенг ўлчовли ҳаракат қилади.

Агар массалар маркази бошлангич пайтда тинч ҳолатда бўлса, у ҳолда $v_c = 0$ бўлиб, системанинг массалар маркази кейинчалик ҳам қўзғалмасдан қолади.

$$\overline{r_C} = const$$

2. Фараз қилайлик, системага таъсир этувчи ташқи кучларнинг бош вектори нолдан фаркли булиб, унинг бирор ўқдаги проекцияси нолга тенг бўлсин:

$$R_x^e = X^e = 0\,.$$

У ҳолда (314)-тенгламаларнинг биринчисидан

$$\ddot{x}_c = 0$$
$$\dot{x}_c = const$$

келиб чикади.

Демак, системага таъсир этувчи ташқи кучларнинг бирор ўқдаги проекцияларининг йиғиндиси нолга тенг бўлса, система массалар маркази тезлигининг шу ўқдаги проекцияси ўзгармас бўлади. Хусусан, агар бошланғич пайтда $\dot{x}_c = \upsilon_{cx} = 0$ бўлса, системанинг ҳаракати давомида $\upsilon_{cx} = 0$ бўлади, яъни бу ҳолда система массалар марказининг координатаси x_c ўзгармай қолади:

$$x_c = x_{c_0} = const .$$

Олинган натижалар система массалар маркази ҳаракатининг сақланиш қонунини ифодалайди. Демак массалар марказини ташқи кучлар ҳаракатга келтиради. Ички кучлар эса ҳаракатга келтира олмайди.

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР

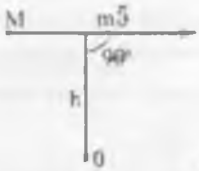
1. Нуқтанинг ҳаракат миқдори нимага тенг бўлади?
2. Системанинг ҳаракат миқдорини таърифланг?
3. Дифференциал шаклдаги система ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теоремани ёзинг?
4. Ташқи кучлар бош вектори нима?
5. Ташқи кучлар бош векторининг проекциясини айтинг?
6. Системанинг массаси нимага тенг бўлади?
7. Системани массалар марказининг координаталари қайси формула билан топилади?
8. Системанинг ҳаракат миқдори унинг массалар марказининг тезлиги оркали қандай ифодаланади?
9. Система массалар марказининг ҳаракати ҳақидаги теоремани таърифланг?
10. Система массалар маркази ҳаракатининг сақланиш қонунини айтинг?

93-§. МАРКАЗГА ВА ЎҚҚА НИСБАТАН НУҚТА ҲАРАКАТ МИҚДОРИНИНГ МОМЕНТИ

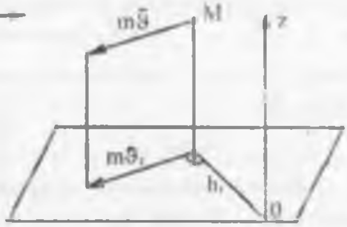
Нуқта ҳаракат миқдори вектор катталик бўлгани учун унинг бирор марказга ва ўққа нисбатан моментини аниқлаш мумкин. Кучнинг марказга ва ўққа нисбатан моменти қандай топилса, ҳаракат микдорини моменти ҳам шундай топилади.

Нукта ҳаракат миқдорининг О – марказга нисбатан моменти қуйидагига тенг:

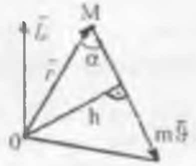
$$l_0 = mVh, l_0 = m_0(mV) \qquad (315)$$



170-расм.



171-расм.



172-расм.

z ўқга нисбатан момент олсак;

$$l_z = m_0(m\overline{V}_1) = h_1 mV_1$$
$$l_z = h_1 mV_1 \qquad (316)$$

Бунда l_z - нуқта ҳаракат миқдорининг z ўққа нисбатан моменти.

Бирор О марказга нисбатан олинган нуқта ҳаракат миқдорининг моменти шу марказга қўйилган вектор бўлади (172 -расм) дан

$$\frac{h}{r} = \sin\alpha, \quad h = r\sin\alpha;$$
$$l_0 = hmV = r\sin\alpha\, mv,$$
$$l_0 = hmv\sin\alpha \qquad (317)$$

(317) ни ўнг томони вектор кўпайтманинг модули булади.

$$\overline{l_0} = [\bar{r} \cdot m\bar{\vartheta}] \qquad (318)$$

(318) - вектор купайтма қуйидагича таърифланади: бирор О марказга нисбатан олинган ҳаракат миқдорининг моменти шу марказга қўйилган вектор катталик бўлиб, нуқтанинг радиус вектори билан шу нуқта ҳаракат миқдорининг вектор кўпайтмасига тенг.

$\overline{l_0}$ - вектори O нуқта ва $m\bar{v}$ вектордан ўтказилган учбурчак текислигига перпендикуляр йуналган булади

94-§. МАРКАЗГА ВА УҚГА НИСБАТАН СИСТЕМА КИНЕТИК МОМЕНТИ

Системанинг бирор марказга нисбатан кинетик моменти системадаги барча нуқталар ҳаракат миқдорининг шу марказга нисбатан олинган моментларининг геометрик йиғиндисига тенг.

$$\overline{L}_0 = \overline{m}_0(m_1\overline{\vartheta}_1) + \overline{m}_0(m_2\overline{\vartheta}_1) + \ldots + \overline{m}_0(m_n\overline{\vartheta}_n),$$

$$= \overline{m}_0(m_k\overline{\vartheta}_k). \qquad \overline{L}_0 = \sum \overline{m}_0(m_k\overline{\vartheta}_k) \quad k = 1, 2, \ldots n \qquad (319)$$

Бу ерда L_0 - системани ш0 марказга нисбатан кинетик моменти.

Системанинг бирор ўққа нисбатан кинетик моменти шу ўққа нисбатан системадаги нуқталар ҳаракат миқдорлар моментларининг йиғиндисига тенг.

$$L_x = m_x(m_1\overline{V}_1) + m_x(m_2\overline{V}_2) + \ldots + m_x(m_n\overline{V}_n);$$

$$L_x = \sum m_x(m_k\overline{V}_k);$$

$$L_y = \sum m_y(m_k\overline{V}_k); \qquad (320)$$

$$L_z = \sum m_z(m_k\overline{V}_k);$$

Бунда L_x, L_y, L_z - системанинг *x, y, z,* ўқларига нисбатан кинетик моменти.

95-§. ҚЎЗҒАЛМАС ЎҚ АТРОФИДА АЙЛАНУВЧИ ҚАТТИҚ ЖИСМНИНГ КИНЕТИК МОМЕНТИ

Қўзғалмас z ўқи атрофида ω бурчак тезлиги билан айланаётган абсолют қаттиқ жисм берилган. Шу жисмнинг айланиш ўқига нисбатан кинетик моменти ёки ҳаракат миқдорининг бош моментини ҳисоблаш лозим бўлсин. Жисмга система деб қараймиз. Жисмдан ихтиёрий M_k нуқтани оламиз (173-расм). Бу нуқтанинг тезлиги $\upsilon_k = \omega \cdot h_k$ га тенг. Нуқта ҳаракат миқдорининг z ўқга нисбатан моменти:

$$m_z(m_k\overline{V}_k) = h_k \cdot m_k \cdot V_k = \omega \cdot m_k h_k^2.$$

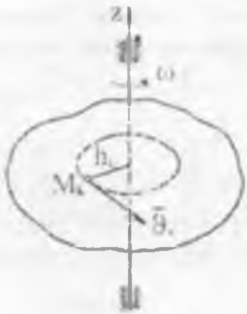
$$L_z = \sum m_z(m_k\overline{V}_k) = \sum \omega m_k h_k^2.$$

$$\omega \sum m_k h_k^2 = \omega \cdot I_z.$$

$$L_Z = I_Z \cdot \omega \qquad (321)$$

(321)-формула билан жисмнинг z ўқига нисбатан кинетик моменти топилади.

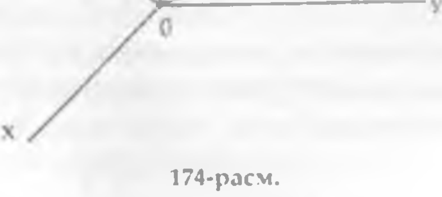
Бу ерда $I_z = \sum m_k h_k^2$ - жисмнинг z ўққа нисбатан инерция моменти. Демак, қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи жисмнинг кинетик моменти мазкур ўққа нисбатан инерция моменти билан бурчак тезлигининг кўпайтмасига тенг.



173-расм.

96-§. НУҚТА ҲАРАКАТ МИҚДОРИ МОМЕНТИНИНГ ЎЗГАРИШИ ҲАҚИДАГИ ТЕОРЕМА

M нуқта $\bar{F}$ кучи таъсирида қўзғалмас *Oxyz* координаталар системасида ҳаракат қилаётган бўлсин (174-расм).



174-расм.

Нуқта ҳаракат миқдорининг *O* нуқтага нисбатан моменти:

$\bar{l}_0 = [\bar{r} \cdot m\bar{\vartheta}]$ бўлади. (322)

Теоремадан исбот қилиш учун (322)- нинг иккала томонидан вақт бўйича ҳосила оламиз:

$$\frac{dl_0}{dt} = \left[\frac{d\bar{r}}{dt} \cdot m\bar{V}\right] + \left[\bar{r} \cdot \frac{d(m\bar{V})}{dt}\right]$$

$$\frac{d(m\bar{V})}{dt} = \bar{F}, \qquad \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{V}$$

$$\left[\frac{d\bar{r}}{dt} \cdot m\bar{V}\right] = \left[\bar{V} \cdot m\bar{V}\right] = 0$$

$\bar{V}$ ва $m\bar{V}$ векторлар бир тўғри чизиқ бўйлаб йўналганлиги учун улар орасидаги бурчак нолга тенг.

(322) ни қуйидагича ёзамиз.

$$\frac{dl_0}{dt} = \left[\bar{r} \cdot \bar{F}\right] \quad ёки \quad \frac{dl_0}{dt} = m_0(\bar{F}); \qquad (323)$$

Бунда $m_0(\bar{F}) = \left[\bar{r} \cdot \bar{F}\right]$ - $\bar{F}$ кучни O нуқтага нисбатан моменти.

(323) - формула нуқта ҳаракат миқдори моментининг ўзгариши ҳақидаги теоремани ифодалайди: моддий нуқта ҳаракат миқдорининг бирор қўзғалмас марказга нисбатан моментидан вақт бўйича олинган ҳосила нуқтага таъсир этувчи кучнинг шу марказга нисбатан моментига тенг.

(323) - ни x, y, z ўқларга проекциялаб қуйидагиларни оламиз:

$$\frac{dl_x}{dt} = m_x(\bar{F}); \quad \frac{dl_y}{dt} = m_y(\bar{F}); \quad \frac{dl_z}{dt} = m_z(\bar{F}) \qquad (324)$$

Бунда l_x, l_y, l_z - нуқталар ҳаракат миқдорининг *x, y, z* ўқларига нисбатан моментлари.

$m_x(\bar{F})$ $m_y(\bar{F})$ $m_z(\bar{F})$ - $\bar{F}$ кучнинг *x,y,z* ўқларига нисбатан моментлари.

(324)-формулалар нуқталар ҳаракат миқдорининг координата ўқларига нисбатан моментлари ўзгариши ҳақидаги теоремани ифодалайди: нуқта ҳаракат миқдорининг бирор қўзғалмас ўққа нисбатан моментидан вақт бўйича олинган ҳосила нуқтага таъсир этувчи кучнинг шу ўққа нисбатан моментига тенг.

(324) - ни қуйидагича ёзиш мумкин.

$$\frac{d}{dt}\left[m_0(m\bar{v})\right] = m_0(\bar{F}) \qquad (325)$$

97-§. СИСТЕМА КИНЕТИК МОМЕНТИНИ ЎЗГАРИШИ ҲАҚИДАГИ ТЕОРЕМА

M₁, M₂,…, Mₙ нуқталардан тузилган система берилган бўлсин. (173-расм).

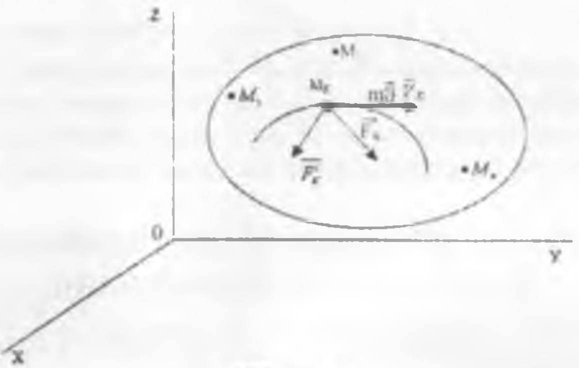
Системадан ихтиёрий M_k нуқтага нуқта ҳаракат миқдори моментининг ўзгариши ҳақидаги теоремани татбиқ қиламиз.

$$\frac{\Sigma \overline{m_0}(m_k \overline{V_k})}{dt} = \overline{m_0}(\overline{F_k^e}) + \overline{m_0}(\overline{F_k^i}) \qquad (326)$$

Бунда $\overline{m_0}(\overline{F_k^e})$ ва $\overline{m_0}(\overline{F_k^i})$ - M_k нуқтага қўйилган ташқи ва ички кучларнинг 0 нуқтага нисбатан моменти.

(326)-формулани системадаги ҳар бир нуқта учун ёзиб ҳадма-ҳад қўшамиз.

$$\frac{\Sigma \overline{m_0}(m_k \overline{V_k})}{dt} = \sum \overline{m_0}(\overline{F_k^e}) + \sum \overline{m_0}(\overline{F_k^i}) \qquad k = 1,2...n \quad (327)$$



175-расм.

$\sum \overline{m_0}(m_k \overline{V_k}) = \overline{L_0}$ системанинг 0 нуқтага нисбатан кинетик моменти.

$\sum \overline{m_0}(\overline{F_k^e}) = \overline{M_e}$ система нуқталарига қўйилган ташқи кучларнинг 0 марказга нисбатан бош моменти. Ички кучларнинг хоссасига кўра $\sum \overline{m_0}(\overline{F_k^i}) = 0$.

(327) ни қуйидагича ёзамиз.

$$\frac{d\overline{L_0}}{dt} = \overline{M_e} \qquad (328)$$

(328) – ифода система кинетик моментининг ўзгариши ҳақидаги теоремани ифодалайди: системанинг бирор қўзғалмас нуқтага нисбатан кинетик моментидан вақт бўйича олинган ҳосила система нуқталарига таъсир этувчи ташқи кучларнинг шу нуқтага нисбатан бош моментига тенг.

(328) - ифоданинг иккала томонини қўзғалмас декарт координата ўқларига проекциялаб қуйидаги тенгликларни оламиз:

$$\frac{dL_x}{dt} = M_x, \quad \frac{dL_y}{dt} = M_y, \quad \frac{dL_z}{dt} = M_z, \qquad (329)$$

нда L_y L_z - системани координата ўқларига нисбатан кинетик лар M_y M_z - системага қўйилган ташқи кучларнинг шу а ни ган бош моментлари.

9)-т аламалар қўзғалмас координата ўқларига нисбатан а ки тик моменти ўзгариши ҳақидаги теоремани ифодалайди: ани бирор қўзғалмас ўққа нисбатан кинетик моментидан вақт о ган ҳосила система нуқталарига таъсир этувчи ташқи нинг шу ўққа нисбатан бош моментига тенг.

ИС МА КИНЕТИК МОМЕНТИНИНГ САҚЛАНИШ ҚОНУНИ

исте кинетик моментининг ўзгариши ҳақидаги теоремадан ги н ижаларни оламиз.

р си ма нуқталарига таъсир этувчи ташқи кучларнинг бирор тага нисбатан олинган бош моменти нолга тенг бўлса, ема ни шу нуқтага нисбатан кинетик моменти миқдор ва алиш йўналиш жиҳатдан ўзгармас бўлади.

гар $= 0$ бўлса, (328) га кўра:

$$\frac{d\bar{L}_0}{dt} = 0$$

ади бундан

$$\overline{L_0} = \overline{const} \qquad \text{келиб чиқади.} \quad (330)$$

р си ма нуқталарига таъсир этувчи ташқи кучларнинг бирор (м лан, Oz ўқига) нисбатан бош моменти нолга тенг бўлса, ема ни шу ўққа нисбатан кинетик моменти ҳаракат давомида рма и қолади.

р M_z бўлса, (329) га кўра

$$\frac{dL_z}{dt} = 0$$

. Бу эса

$$L_z = const \qquad (331)$$

ги ке иб чиқади.

30)- ва (331)- тенгламалар система кинетик моментининг ниш қонунини ифодалайди. Демак системанинг кинетик тини ташқи кучлар ўзгартиради. Ички кучлар эса ўзгартира ди.

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР

1. Марказга нисбатан нуқта ҳаракат миқдорининг моменти қа[illegible] аниқланади?
2. Ўққа нисбатан нуқта ҳаракат миқдорининг моменти қанда[illegible] аниқланади?
3. Марказга ва шу марказдан ўтган ўққа нисбатан нуқта ҳар[illegible] миқдорининг моментлари орасида қандай боғланиш мавжуд?
4. Марказга нисбатан системанинг кинетик моменти қанд[illegible] аниқланади?
5. Ўққа нисбатан системанинг кинетик моменти қандай аниқлан[illegible] Улар орасида қандай боғланиш мавжуд?
6. Қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи каттиқ жисмни ки[illegible] моменти қандай аниқланади? Қайси формула билан топилади?
7. Нуқта ҳаракат миқдори моментини ўзгариши ҳақ[illegible] теоремани таърифланг?
8. Система кинетик моменти ўзгариши ҳақидаги теоре[illegible] таърифланг?
9. Системанинг бирор марказга ва ўққа нисбатан олинган ки[illegible] моменти қачон ўзгармайди?

99-§. ҚАТТИҚ ЖИСМНИНГ ҚЎЗҒАЛМАС ЎҚ АТРОФИДАГИ АЙЛАНИШИНИНГ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАСИ

Қаттиқ жисм қўзғалмас z ўқи атрофида $F_1^e, F_2^e, ..., F_n^e$ ташқи ку[illegible] таъсирида айланаетган бўлсин (176-расм).

176-расм.

Жисм ҳаракатининг дифференциал тенгламасини келтириб чиқариш учун система кинетик моментининг ўзгариши ҳақидаги теоремадан фойдаланамиз.

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z \qquad (332)$$

$$L_z = J_z\,\omega \qquad (333)$$

Бунда, M_z-айлантирувчи момент;

(333)- ни (332)- га қўйиб вақт бўйича ҳосила оламиз.

$$J_z\frac{d\omega}{dt} = M_z, \qquad J_z\,\varepsilon = M_z, \qquad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \qquad (334)$$

бунда, ε - жисмни бурчак тезланиши. *Jz* – жисмни *z* ўққа нисбатан инерция моменти

(334)-га қаттиқ жисмнинг қўзғалмас ўқ атрофида айланма ҳаракатининг дифференциал тенгламаси дейилади.

(334) - формуладан $\qquad \varepsilon = \frac{M_z}{J_z}$

Агар $M_z = const$ бўлиб J_z нинг қиймати катта бўлса жисмнинг айланиши кичик бўлади. Агар J_z кичик бўлса, жисмни айланиши тезланади. Жисмнинг инерция моменти айланма ҳаракат қилувчи жисмнинг инерция ўлчовидир.

(334) - тенгламадан фойдаланиб иккита масала ечиш мумкин.

1. Агар айлантирувчи момент M_z берилган бўлса, жисм ҳаракатининг тенгламасини топиш мумкин.

$$\varphi = f(t)$$

2. Агар жисм ҳаракатининг тенгламаси берилган бўлса, жисмнинг айлантирувчи моментини топиш мумкин.

100-§. НУҚТА УЧУН ДАЛАМБЕР ПРИНЦИПИ. НУҚТАНИ ИНЕРЦИЯ КУЧИ

Эркин бўлмаган М нуқтага $\bar F$ актив ва $\bar N$ реакция кучлари таъсир қилади (175-расм). Нуқта динамикасининг асосий тенгламасини ёзамиз.

$$m\bar W = \bar F + \bar N \qquad (335)$$

(335) ни $\bar F + \bar N + (-m\bar W) = 0$ кўринишида ёзиб,

$$\bar F^{ин} = -m\bar W \quad \text{нуқтанинг инерция кучи} \qquad (336)$$

$$\bar F + \bar N + \bar F^{ин} = 0 \qquad (337)$$

тенгламасини оламиз.

Миқдор жиҳатидан нуқтанинг массаси билан унинг тезланишини купайтмасига тенг. Йуналиши тезланиш векторига тескари булган кучга инерция кучи дейилади.

(337)-тенглик эркин булмаган нуқта учун Даламбер принципини ифодалайди: актив куч ва богланиш реакция кучи таъсирида ҳаракатланувчи нуқтага ҳар онда инерция кучини қуйсак, бу кучлар ўзаро мувозанатлашади.

Даламбер принципи ёрдамида динамиканинг биринчи масаласини ечиш мумкин.

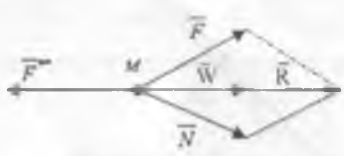
Динамика масалаларини ечишда Даламбер принципидан, асосан номаълум реакция кучларини топишда фойдаланилади.

Агар нуқта эгри чизиқли траектория буйлаб нотекис ҳаракатда булса, инерция кучи $\bar F^{ин}$ траекторияга утказилган уринма ва бош нормаллар буйича йуналаган ташкил этувчиларга ажратилади (178-расм).

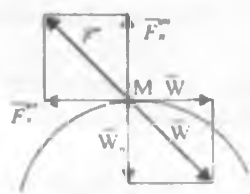
$$\bar F^{ин} = \bar F_\tau^{ин} + \bar F_n^{ин} \qquad (338)$$

Бунда, $\bar F_\tau^{ин}$ ва $\bar F_n^{ин}$ ларга мос равишда нуқтани уринма ва нормал инерция кучлари дейилади. Бу кучлар уринма ва нормал тезланишларга тескари йуналади,

$$\bar F_\tau^{ин} = -m\bar W_\tau$$
$$\bar F_n^{ин} = m\bar W_n \qquad (339)$$



177-расм.



178-расм.

Уринма ва нормал тезланишлар $w_\tau = \frac{dV}{dt}$, $w_n = \frac{V^2}{\rho}$ формулалардан аниқланишини эътиборга олсак, нуқтанинг уринма ва нормал инерция кучларини модули учун ушбу муносабатларни оламиз

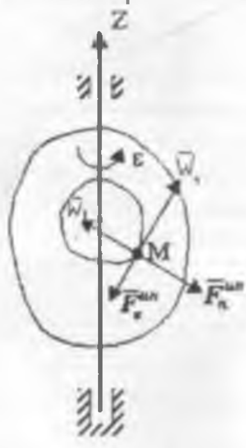
$$F_\tau^{ин} = m\frac{dV}{dt}, \quad F_n^{ин} = \frac{mV^2}{\rho} \qquad (340)$$

Агар нукта эгри чизиқ буйича текис харакатда булса, $W_{\tau}=0$, $F_{\tau}^{ин}=0$ ва инерция кучи $F^{ин}$ факат нормал ташкил этувчидан иборат булади. Нукта тугри чизик буйича нотекис харакатланганда $W_{n}=0$ ва инерция кучи факат уринма ташкил этувчидан иборат булади. Нукта тугри чизиқли текис харакатланганда $W=0$ булиб, инерция кучи $F^{ин}=0$ булади. Бу ерда ρ - траекториянинг эгрилик радиуси.

Қузғалмас ўқ атрофида айланма харакатдаги қаттиқ жисм нуқтасининг тезланиши уринма ва нормал тезланишлардан иборат булгани учун мазкур нуқтанинг уринма ва нормал инерция кучлари мос равишда уринма ва нормал инерция кучлари дейилади, хамда уларнинг қиймати қуйидаги формулалардан аниқланади (179-расм):

$$F_{t}^{ин}=m\varepsilon h,\quad F_{n}^{ин}=m\omega^{2}h.$$

Бунда h нуқтадан айланиш ўқигача булган масофа, ω ва ε жисмнинг бурчак тезлиги ва бурчак тезланишидир.



179-расм.

101-§. МЕХАНИК СИСТЕМА УЧУН ДАЛАМБЕР ПРИНЦИПИ

Системанинг хар бир M_k нуқтаси учун Даламбер принципини ёзамиз

$$\bar{F}_{k}+\bar{N}_{k}+\bar{F}_{k}^{ин}=0,(k=1,2,..n)\qquad(341)$$

бунда $\overline{F_k}$ — M_k нуктага таъсир этувчи актив кучларнинг тенг таъсир этувчиси; $\overline{N_k}$ — богланиш реакция кучларининг тенг таъсир этувчиси; $\overline{\Phi_k} = -m_k \overline{W_k}$ шу нуктанинг инерция кучи.

(341)-тенгламалар механик система учун Даламбер принципини ифодалайди: актив куч ва богланиш реакция кучлари таъсиридаги системанинг ҳар бир нуктасига ҳар онда шу нукталарнинг инерция кучини кўйсак, бу кучлар системаси шу кўйилган актив ва реакция кучлари билан мувозанат мувозанатлашади.

(341) тенгламаларни кушиб куйидагини хосил киламиз:

$$\Sigma \overline{F_k} + \Sigma \overline{N_k} + \Sigma \overline{F_k^{ин}} = 0 \qquad (342)$$

ёки

$$\overline{R^{a}} + \overline{R^{N}} + \overline{R^{ин}} = 0 \qquad (343)$$

бунда: $\overline{R^a} = \sum \overline{F_k}$ — актив кучларнинг бош вектори; $\overline{R^N} = \sum \overline{N_k}$ — реакция кучларининг бош вектори;

$$\overline{R^{ин}} = \Sigma \overline{F_k^{ин}} = 0 \qquad (344)$$

система нукталари инерция кучларининг бош векторидир.

(343)-тенгламадан кўрамизки, богланишдаги механик система учун актив кучлар, реакция кучлари ва система нукталари инерция кучлари бош векторларининг геоматрик йигиндиси ҳар онда нолга тенг бўлади.

(341)-тенгламаларнинг ҳар бирини M_k нуктанинг радиус-вектори r_k га векторли купайтириб кушсак,

$$\Sigma r_k \cdot F_k + \Sigma r_k \cdot N_k + \Sigma r_k \cdot F_k^{ин} = 0$$

ёки

$$\Sigma \overline{M}_0(F_k) + \Sigma M_0(N_k) + \Sigma M_0(\overline{F_k^{ин}}) = 0 \qquad (345)$$

$$\overline{M_0^{F}} + \overline{M_0^{N}} + \overline{M_0^{ин}} \qquad (346)$$

хосил булади. Бунда $\overline{M_0^F} = \sum M_0(F_k)$ - актив кучларнинг 0 марказга нисбатан бош моменти; $M_0^N = \sum M_0(N_k)$ — реакция кучларининг 0 марказга нисбатан бош моменти;

$$M_0^{ин} = \sum M_0(F_k^{ин}) \qquad (347)$$

система нукталари инерция кучларининг 0 марказга нисбатан бош моментини ифодалайди.

(346)- дан кўрамизки, богланишдаги механик система учун актив кучлар, реакция кучлари ва система нукталари инерция кучларининг ихтиёрий кўзгалмас марказга нисбатан бош моментларининг геометрик йигиндиси ҳар онда нолга тенг булади.

(342)- ва (346)- тенгламаларни координата укларига проекциялаб, кучлар системасининг олтита мувозанат тенгламасини оламиз:

$$\begin{aligned}
&\Sigma x_k + \Sigma N_{kx} + \Sigma F_{kx} = 0 \\
&\Sigma y_k + \Sigma N_{ky} + \Sigma F_{ky} = 0 \\
&\Sigma z_k + \Sigma N_{kz} + \Sigma F_{kz} = 0 \\
&\Sigma M_x(F_k) + \Sigma M_x(N_k) + \Sigma M_x(\overline{F_k}) = 0 \\
&\Sigma M_y(F_k) + \Sigma M_y(N_k) + \Sigma M_y(\overline{F_k}) = 0 \\
&\Sigma M_z(F_k) + \Sigma M_z(N_k) + \Sigma M_z(F_k^{ин}) = 0
\end{aligned} \qquad (348)$$

Агар системанинг хар бир нуктасига куйилган кучларни ички ва ташки кучларга ажратсак, ички кучларнинг бош вектори ва бирор марказга нисбатан бош моменти нолга тенг булгани учун (342)- ва (345)- тенгламалар куйидаги куринишни олади:

$$\left.\begin{aligned}
&\Sigma F_k^e + \Sigma F_k^{ин} = 0 \\
&\Sigma M_O(F_k^e) + \Sigma M_O(F_k^{ин}) = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (349)$$

(344) ва (347) ларга кура (349) ни куйидагича ёзамиз:

$$\left.\begin{aligned}
&\Sigma \overline{F}_k^e + \Sigma \overline{R}^{и} = 0 \\
&\Sigma M_O(\overline{F}_k^e) + \overline{M}_O^{и} = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (350)$$

(350)- тенгламаларининг афзаллиги шундан иборатки, бу тенгламаларда ички кучлар катнашмайди, шу сабабли система динамикасининг купгина масалаларини ечишда бу мувозанат шартларидан фойдаланиш кулай булади.

102-§. ИНЕРЦИЯ КУЧЛАРИНИНГ БОШ ВЕКТОРИ ВА БОШ МОМЕНТИ

Инерция кучларининг бош вектори ва бош моментини хисоблаш учун система массалар марказининг харакати хакидаги ва кинетик моментининг узгариши хакидаги теоремалардан фойдаланамиз:

$$\begin{aligned}
&M\overline{w}_C = \Sigma \overline{F}_k^e \\
&\frac{d\overline{L}_O}{dt} = \Sigma M_O(\overline{F}_k^e)
\end{aligned} \qquad (351)$$

Бунда: M — системанинг массаси; W_C — массалар марказининг тезланиши; L_C — системанинг O марказга нисбатан кинетик моменти.

(351)- тенгламаларни (350)- билан солиштириб:

$$\left.\begin{aligned} R^{ин} &= -M\,\omega_C \\ M_C^{ин} &= -\frac{dL_C}{dt} \end{aligned}\right\} \qquad (352)$$

муносабатларни оламиз.

Шундай қилиб, ихтиёрий механик система (ёки қаттиқ жисм) инерция кучларининг бош вектори миқдор жиҳатдан система массасининг мазкур система (қаттиқ жисм) массалар марказининг тезланиши кўпайтмасига тенг бўлади ва бу тезланишга тескари йўналади; инерция кучларининг 0 марказга нисбатан бош моменти эса миқдор жиҳатдан шу марказга нисбатан система (қаттиқ жисм) кинетик моментидан вақт бўйича олинган ҳосилага тенг, йўналиши унга тескари бўлади.

Қаттиқ жисм илгариланма, қўзғалмас ўқ атрофида айланма ва текис параллел ҳаракатда бўлганда инерция кучларининг бош вектори ва бош моментини ҳисоблашни кўриб чиқамиз.

1. Илгариланма ҳаракат. Жисм илгариланма ҳаракатда бўлганда массалар маркази атрофида айланмайди ω=0. Шу сабабли $\sum M_C(F_k) = 0$ ва (350)- га кўра:

$$\overline{M_C^{ин}} = 0$$

бўлади.

Шундай қилиб, илгариланма ҳаракатдаги қаттиқ жисмнинг инерция кучлари массалар марказига қўйилган ва массалар марказининг тезланишини қарама-қарши йўналган битта кучга келтиради.

$$R^{ин} = -M\,W_C \qquad (353)$$

2. Қўзғалмас ўқ атрофида айланма ҳаракат. Агар жисм қўзғалмас ўқ атрофида айланма ҳаракатда бўлса, у ҳолда инерция кучлари умумий ҳолда бирор ихтиёрий O нуқтага қўйилган $R^{ин}$ кучга ва $M^{ин}$ моментига тенг бўлган битта жуфт кучга келтирилади. Дастлаб жисмнинг айланиш ўқи Oz га нисбатан инерция кучларининг бош моменти $M_z^{ин}$ ни ҳисоблаймиз. Бунинг учун (351) нинг иккинчи тенгламаси Oz ўққа проекциялаймиз:

$$M_z^{ин} = -\frac{dL_z}{dt}$$

Аммо қурилаётган ҳолда $L_z = I_z\omega$ бўлгани учун:

$$M_z^{ин} = -I_z\varepsilon \qquad (354)$$

тенгликни оламиз, бунда I_z — айланиш ўқига нисбатан жисмнинг инерция моменти. (354)- даги манфий ишора инерция кучларининг айланиш ўқига нисбатан бош моменти $M_z^{ин}$ жисмнинг бурчак тезланиши ε га тескари йўналганлигини ифодалайди.

Хусусий ҳолда, агар айланиш ўқи жисмнинг моддий симметрия ўқи билан устма-уст тушса, жисмнинг массалар маркази симметрия ўқида ётади ва қўзғалмас бўлади. Бунда $W = 0$ бўлгани учун инерция кучларининг бош вектори $R^{ин} = 0$ бўлади. Бинобарин, бу ҳолда қўзғалмас ўқ атрофида айланаётган қаттиқ жисмнинг инерция кучлари ва моменти (354)-формуладан аниқланадиган битта жуфт кучга келтирилади. Жисм симметрия ўқига эга бўлгани учун бу жуфт куч айланиш ўқига перпендикуляр текисликда ётади.

3. Текис параллел ҳаракат. Фараз қилайлик, жисм симметрия текислигига эга бўлсин ва унга параллел равишда ҳаракатлансин. Бу ҳолда инерция кучлари жисмнинг массалар марказига қўйилган, (353)-формула ёрдамида аниқланадиган $\bar{R}^{ин}$ кучга ва жисмнинг симметрия текислигида ётувчи битта жуфт кучга келтирилади ҳамда унинг моменти ҳам (354)-формула ёрдамида аниқланади. Бунда I_z га жисмнинг массалар марказидан ҳаракат текислигига перпендикуляр равишда ўтувчи ўққа нисбатан инерция моменти деб қаралади.

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР.

1. Қаттиқ жисмнинг қўзғалмас ўқ атрофидаги дифференциал тенгламасини ёзинг?
2. Айланма ҳаракатдаги жисмнинг инерция моменти нимани ифодалайди?
3. Нуқтанинг инерция кучи нима?
4. Инерция кучи қандай йўналган?
5. Агар нуқта тўғри чизиқли текис ҳаракат қилса, инерция кучига эга бўладими?
6. Уринма инерция кучи нима?
7. Уринма инерция кучи қандай йўналган?
8. Нормал инерция кучи нима? У нимага тенг?
9. Агар нуқта эгри чизиқли ҳаракатда бўлса, нормал инерция кучи ҳосил бўладими?

10. Даламбер принципининг моҳияти нимадан иборат ва у қандай таърифланади?

103-§. БОҒЛАНИШЛАР. БОҒЛАНИШЛАРДАГИ МОДДИЙ НУҚТАНИНГ ҲАРАКАТИ

Моддий нуқтанинг ҳаракати маълум йўналишда чеклаб қўйилган бўлиши мумкин. Нуқта ҳаракатини бирор йўналишда чекловчи сабабга боғланиш дейилади. Боғланиш сирт, текислик, эгри чизиқ ёки тўғри чизиқли бўлиши мумкин. Нуқта бирор сирт бўйлаб ҳаракатланса, у ҳолда боғланишнинг тенгламаси $f(x, y, z) = 0$ кўринишида бўлади. Агар моддий нуқта бирор фазовий эгри чизиқ бўйлаб ҳаракатланса, бундай эгри чизиқ икки $f_1(x, y, z) = 0$ ва $f_2(x, y, z) = 0$ сиртларининг кесишиш чизиғи сифатида олиниши мумкин. Бу икки тенглама фазовий эгри чизиқнинг тенгламаси, яъни боғланиш тенгламасини ифодалайди. Боғланишлар фақат тенгламалар билангина эмас, тенгсизликлар билан ҳам берилиши мумкин.

Тенглик ишораси билан берилган боғланишлар бўшатмайдиган боғланишлар дейилади. Тенгсизлик билан ифодаланадиган боғланишлар бўшатадиган боғланишлар дейилади. Боғланишлар тенгламасига фақат нуқта координаталари кирса, бундай боғланишлар голоном (ёки геометрик) боғланишлар дейилади Боғланишлар тенгламасига нуқта координатасини вақт бўйича ҳосилалари ҳам кириб, бу боғланишлар интегралланадиган бўлса, уларга беголономлар ёки кинематик боғланишлар дейилади. Голономли боғланишлар ҳам, беголоном боғланишлар ҳам стационар ва ностационар боғланишларга бўлинади. Вақтга боғлиқ бўлмаган боғланишлар стационар боғланишлар дейилади. Агар боғланишлар вақтга боғлиқ бўлса, у ностационар боғланишлар дейилади. Стационар ва ностационар боғланишлар бўшатмайдиган ва бўшатадиган бўлиши мумкин. Боғланишлар тенгламаларини қуйидагича синфлаш мумкин:

1. Стационар бўшатмайдиган голономли боғланишлар.

$$f_j(x, y, z) = 0 \quad 1 \le j \le 3$$

2. Ностационар бўшатмайдиган голоном боғланишлар.

$$f_j(x, y, z, t) = 0 \quad 1 \le j \le 3$$

3. Бўшатадиган стационар, голоном боғланишлар.

$$f_j(x, y, z) \le 0 \quad 1 \le j \le 3$$

4. Бўшатадиган ностационар голоном боғланишлар.

$$f_j(x,y,z,t)\le 0 \quad 1\le j\le 3$$

5. Беголоном стационар, бўшатмайдиган боғланишлар

$$f_j(x,y,z,\dot x,\dot y,\dot z)=0 \quad 1\le j\le 3$$

6. Беголоном ностационар бўшатмайдиган боғланишлар.

$$f_j(x,y,z,\dot x,\dot y,\dot z,t)=0 \quad 1\le j\le 3$$

7. Беголоном стационар бўшатиладиган боғланишлар.

$$f_j(x,y,z,\dot x,\dot y,\dot z)\le 0 \quad 1\le j\le 3$$

8. Беголоном ностационар бўшатиладиган боғланишлар.

$$f_j(x,y,z,\dot x,\dot y,\dot z,t)\le 0 \quad 1\le j\le 3$$

Боғланишдаги моддий нуқта ҳаракатини ўрганишда унга қўйилган кучлар қаторига боғланиш таъсирини берадиган реакция кучини ҳам қўшиш керак. Боғланиш реакция кучи эса номаълум катталиклар қаторига киради.

104-§. АНАЛИТИК МЕХАНИКА. МЕХАНИК СИСТЕМАГА ҚЎЙИЛГАН БОҒЛАНИШЛАР

Механик системага қўйилган боғланишлар ҳам голоном ва беголоном стационар ва ностационар бўшатадиган ва бўшатмайдиган бўлиши мумкин. Фақат голоном боғланишлар қўйилган система голоном система дейилади ва қуйидаги кўринишдаги тенгламалар билан ифодаланади.

$$f_j(x_1,y_1,z_1,x_2,y_2,z_2 \dots x_n,y_n,z_n)=0$$
$$(j=1,2,3 \dots S)$$

S билан голоном сони белгиланган.

Беголоном боғланишлар система нуқталари тезликларининг проекцияларига нисбатан чизиқли ёки чизиқли бўлмаган тенгламалар билан ифодаланиши мумкин, чизиқли бўлган ҳолда боғланиш тенгламалари қуйидаги кўринишда ёзилади.

$$f_\mu = a_\mu + \sum\left(b_{\mu i}\dot x_i + c_{\mu i}\dot y_i + d_{\mu i}\dot z_i\right)$$
$$(\mu=1,2 \dots S_1)$$

Бунда Si билан беголоном боғланишлар сони белгиланган.

Системага қўйилган боғланишларнинг бир қисми голоном, қолган қисми эса беголоном боғланишлар ҳам бўлиши мумкин. Биз асосан голоном система ҳаракати ёки мувозанатини ўрганамиз.

Механик система n та нуқтадан ташкил топган бўлса, унга қўйилган боғланишлар тенгламасининг сони 3n дан ошмаслиги керак.

105-§. СИСТЕМАНИНГ МУМКИН БЎЛГАН КЎЧИШЛАРИ. ИДЕАЛ БОҒЛАНИШЛАР

Системанинг мумкин бўлган кўчишини ўрганишдан аввал нуқтанинг мумкин бўлган кўчишини таърифлаймиз.

Берилган пайтда нуқтанинг унга қўйилган боғланиш чекланишларини қаноатлантирувчи ҳар қандай чексиз кичик кўчишларга мумкин бўлган кўчишлар дейилади. Нуқтанинг мумкин бўлган кўчишини δ_r вектор билан белгилаймиз. δ_r векторининг координата ўқларидаги проекцияларини δ_x, δ_y, δ_z билан белгилаймиз; бу катталиклар нуқта координаталарининг вариациялари деб ҳам аталади. У ҳолда мумкин бўлган кўчиш векторини нуқта координаталарининг вариациялари орқали қуйидагича ифодалаш мумкин.

$$\delta r = \delta x i + \delta y j + \delta z k$$

Агар боғланиш $f(x,y,z,t)=0$ тенглама билан ифодаланган бўлса, нуқтанинг координаталар бўйича ҳақиқий кўчишлари ўзаро қуйидаги муносабат билан боғланган бўлади.

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial t}dt = 0$$

Системани ташкил этувчи нуқталар мумкин бўлган кўчишлари системанинг мумкин бўлган кўчишлари дейилади. Система нуқталарининг мумкин бўлган кўчишлари қуйидаги икки шартни қаноатлантириши керак.

1. Система нуқталарининг мумкин бўлган кўчишлари чексиз кичик бўлиши керак. Агар бу кўчишлар чекли бўлса, система бошқа вазиятга ўтиб системанинг мувозанат шарти ўзгаради.

2. Система нуқталарининг мумкин бўлган кўчишида системага қўйилган барча боғланишлар сақланиб қолиши керак. Агар боғланишлар бузилса, системанинг кўриниши ўзгаради.

Стационар голономли боғланишдаги системанинг бир-бирига боғлиқ бўлмаган мумкин бўлган кўчишлари сони шу системанинг эркинлик даражаси дейилади. S та голономли боғланиш таъсиридаги n та нуқтадан ташкил топган системанинг эркинлик даражасини k билан белгиласак,

$k = 3n - S$ деб ёзиш мумкин.

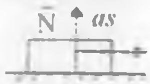
Актив куч қўйилган нуқтанинг бирор δr мумкин бўлган кўчишдаги шу кучнинг элементар ишини қисқача, кучнинг мумкин бўлган иши деб атаймиз ва уни δA билан белгилаймиз. У холда элементар иш таърифига кура

$$\delta A = \bar{F}_i' \delta r_i$$

формула уринли булади. n та нуктадан ташкил топган механик системага таъсир этувчи кучлар мумкин булган ишларининг йигиндиси нолга тенг буладиган богланишлар идеал богланишлар дейилади. Идеал богланишларни куйидагича ифодалаш мумкин.

$$\delta A' = \sum \bar{F}_i' \delta r_i = 0$$

$\bar{F}^r$ -системага куйилган богланиш реакция кучи



180-расм.

$$\delta A^r = N\delta S \cos 90° = 0 \qquad \delta A^r = 0$$

Силлик текислик идеал богланишга мисол булади.

106-§. МУМКИН БУЛГАН КУЧИШЛАР ПРИНЦИПИ

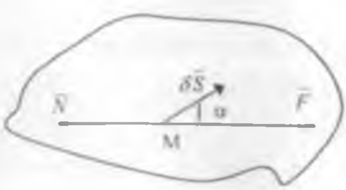
Идеал богланишдаги система узига куйилган актив ва реакция кучлари таъсирида мувозанатда булсин. $\bar{F}$ кучининг dS силжишдаги бажарган элементар иши куйидагига тенг.

$$\delta A = F\delta S \cos\alpha$$

N реакция кучининг бажарган элементар иши

$$\delta A' = N\delta S\cos(180° - \alpha) = -N\delta S\cos\alpha = -F\delta S\cos\alpha$$

Ишларни кушамиз.



181-расм.

$$\delta A + \delta A' = F\delta S\cos\alpha - F\delta S\cos\alpha = 0$$

$$\delta A + \delta A' = 0 \qquad (355)$$

(355) ни системадаги хар бир нукта учун ёзиб қушиб чиқсак, қуйидагича ёзилади.

$$\sum \delta A + \sum \delta A = 0$$

$$\sum \delta A' = 0 \quad \text{булса} \quad \sum \delta A = 0 \quad \text{булади} \qquad (356)$$

(356) система учун мумкин булган кучиш принципини ифодалайди. Идеал богланишдаги система мувозанатда булса, унинг хар қандай мумкин булган кучишида системага қуйилган барча актив кучларнинг бажарган элементар ишларининг йиғиндиси нолга тенг булади.

(356) ни қуйидагича ёзиш мумкин.

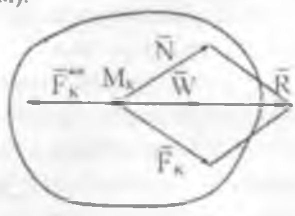
$$\sum (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0 \qquad (357)$$

Бунда *X, Y, Z*, системага таъсир этувчи кучларнинг координата ўқларидаги проекцияси, δx, δy, δz – кучлар қуйилган нуқталарнинг силжиши.

107-§. ДИНАМИКАНИНГ УМУМИЙ ТЕНГЛАМАСИ. (ДАЛАМБЕР ЛАГРАНЖ ТЕНГЛАМАСИ)

n та нуқтадан иборат булган идеал богланишдаги система берилган булсин. Система билан богланиш уртасида ишқаланиш йуқ.

$\bar{F}$ ва $\bar{N}$ системадаги ихтиёрий М нуқтага таъсир қилувчи актив ва реакция кучлари (182-расм).



182-расм.

M нуктага инерция кучларини қуямиз. Инерция кучи хар доим тезланишга қарама-қарши йуналган булади. Даламбер принципига асосан актив, реакция ва инерция кучларининг геометрик йиғиндиси нолга тенг булади.

$$F_k + N_k + F_k^{ин} = 0$$

Система нуқталарига мумкин булган δS силжиш берамиз. Мумкин булган кучишлар принципига асосан

$$\delta A_k + \delta A_k' + \delta A_k^{ин} = 0 \qquad (358)$$

$$\sum \delta A_k + \sum \delta A_k + \sum \delta A_k^{ин} = 0 \qquad (359)$$

Системага қуйилган богланишлар идеал булганлиги учун реакция кучларининг бажарган элементар ишларининг йигиндиси нолга тенг булади. (358) ни системадаги ҳар бир нуқта учун ёзиб қушиб чиқамиз.

$$\sum \delta A_k' = 0$$

$$\sum \delta A_k + \sum \delta A_k^{ин} = 0 \text{ булади } \quad k=1,2,\dots,n \qquad (360)$$

Бу тенгламага динамиканинг умумий тенгламаси ёки Даламбер – Лагранж тенгламаси дейилади: идеал богланишдаги системанинг ҳар қандай мумкин булган кучишида системага қуйилган барча актив кучларининг ва инерция кучларининг бажарган элементар ишларининг йигиндиси нолга тенг булади.

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР

1. Қандай системага эркин система дейилади?
2. Қандай системага эрксиз система дейилади?
3. Богланиш нима?
4. Реакция кучи нима?
5. Қандай богланишга стационар богланиш дейилади?
6. Қандай богланишга стационар булмаган богланиш дейилади?
7. Қандай богланишга голономли богланиш дейилади?
8. Қандай богланишга беголономли богланиш дейилади?
9. Мумкин булган кўчиш принципини таърифланг?
10. Динамиканинг умумий тенгламасининг формуласини ёзинг?

108-§. УМУМЛАШГАН КООРДИНАТАЛАР ВА УМУМЛАШГАН ТЕЗЛИКЛАР

Система n та нуқтадан ташкил топган булса, унинг ҳолатини 3n та Декарт координаталари орқали аниқлаш мумкин.

Системага S та голоном богланишлар қуйилган булса 3n координаталардан $к=3n-S$ таси бир-бирига боғлиқ булмайди. Декарт координаталардан $к$ тасини бир-бирига боғлиқ килмай, S тасини эса бир-бирига боғлиқ килиб танлаш мумкин. Бир бирига боғлиқ булмаган $к$ та Декарт координаталари урнига бошқа $q_1, q_2, \dots, q_n$ параметрларни ҳам киритиш мумкин. Система ҳолатини бир кийматли аниқлайдиган бир-бирига боғлиқ булмаган параметрлар умумлашган координаталар дейилади. Умумлашган координаталар қуйидагича белгиланади:

$q_1, q_2, \ldots, q_n$

Умумлашган координаталар бир-бирларига боғлиқ бўлмаганидан улар турлича улчов бирлигида (масалан м, радиан, м ва х.к.) бўлиши мумкин. Умумлашган координаталардан вақт бўйича олинган хосилалар умумлашган тезликлар дейилади. Умумлашган тезликларни $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$ билан белгилаймиз.

$$\dot{q}_1 = \frac{dq_1}{dt}, \quad \dot{q}_2 = \frac{dq_2}{dt}, \quad \dot{q}_k = \frac{dq_k}{dt}.$$

Умумлашган тезликнинг улчов бирлиги умумлашган координата улчов бирлигининг вақт бирлигига нисбати билан ифодаланади. Масалан q координата «м» да улчанганда $\dot{q} - \frac{м}{с}$ да, q учун радиан олинганда $\dot{q} - \frac{рад}{с} = c^{-1}$ га улчанади.

Система ихтиерий нуқтасининг бирор саноқ системасига нисбатан радиус-векторини $\bar{r}i$ координаталарини (x_i, y_i, z_i) десак, ҳар бир q_i умумлашган координатани улар орқали ифодалаш мумкин.

$$\overline{ri} = ri(q_1, q_2, \ldots, q_k, t)$$

$$\overline{xi} = xi(q_1, q_2, \ldots, q_k, t)$$

$$\overline{yi} = yi(q_1, q_2, \ldots, q_k, t)$$

$$\overline{zi} = zi(q_1, q_2, \ldots, q_k, t)$$

Система нуқталарининг мумкин бўлган кўчишларини куйидагича ифодалай оламиз:

$$\delta \bar{r}i = \frac{\partial \bar{r}i}{\partial g_1}\delta q_1 + \frac{\partial \bar{r}i}{\partial g_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{\partial \bar{r}i}{\partial g_k}\delta q_k = \sum_{i=1}^{k}\frac{\partial \bar{r}i}{\partial gj}\delta qj \qquad (361)$$

(356)-ифодадаги δqj $(j = 1,2,3,\ldots k)$ мумкин булган кучишларнинг умумлашган координаталари оркали ифодаларидан иборат.

109-§. УМУМЛАШГАН КУЧЛАР ВА УЛАРНИ ҲИСОБЛАШ

Эркинлик даражаси κ булган n та моддий нуқтадан ташкил топган голоном механик системанинг ҳолати $q_1, q_2, \ldots, q_k$ умумлашган координаталар оркали аниқлансин. Система нуқталарига мос равишда таъсир этувчи кучларни $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \ldots, \bar{F}_n$ билан белгилайлик. Система нуқталарининг радиус векторларини $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \ldots, \bar{r}_n$ десак бу кучлар мумкин бўлган ишларининг йиғиндиси қуйидагича аниқланади:

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} F_i \delta r_i$$

$\delta r_i = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j$ шунга кура

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} F_i \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^{k} \left(F_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j$$

Қуйидагича белгилаш киритайлик

$Q_j = \sum F_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j}$ у ҳолда

$$\delta A = \sum Q_j \delta q_j = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_n \delta q_n ;$$

Qj катталикка *qj* умумлашган координатага мос келувчи умумлашган куч дейилади.

$$Q_j = \sum \left(F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} + \right)$$

Ихтиёрий q_j умумлашган координатага мос келувчи *Qj* умумлашган кучни ҳисоблаш учун

$$Q_j = \frac{\delta A_j}{\delta q_j} \; (j = 1, 2 \dots k)$$

формула ҳосил қилинади.

110-§. ЛАГРАНЖНИНГ ИККИНЧИ ХИЛ ТЕНГЛАМАЛАРИ

Эркинлик даражаси n га тенг голономли идеал боғланишдаги механик система ҳолати $q_1, q_2, \dots, q_n$ умумлашган координата оркали аниқлансин.

Бу тенгламаларни келтириб чиқариш учун динамиканинг умумий тенгламасидан фойдаланамиз:

$$\sum \left(F_i - m_i a_i \right) \delta r_i = 0 \qquad (362)$$

ёки $\sum F_i \delta r_i = \sum m_i a_i \delta r_i$

(362)-тенгламани умумлашган координаталар оргали ифодалаймиз. (362)-формулага мувофиқ

$$\sum F_i \delta r_i = \sum Q_i \delta q_i .$$

Энди (362)-тенгликнинг унг томонини умумлашган координаталар орқали ифодалаймиз:

$$\sum m_i a_i \delta \bar{r_i} = \sum m_i \frac{d\bar{V_i}}{dt} \cdot \sum \frac{\partial \bar{r_i}}{\partial q_i} \cdot \delta q_i = \sum \left(\sum m_i \frac{d\bar{V_i}}{dt} \cdot \sum \frac{\partial \bar{r_i}}{\partial q_i} \cdot \right) \delta q_i$$

Қавс ичидаги ифодани қуйидагича ёзамиз:

$$\sum m_i \frac{d\bar{V}_i}{dt}\cdot\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\sum m_i \bar{V}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_i} - \sum m_i \bar{V}_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_i}\right) \qquad (363)$$

Лагранжнинг айниятидан (362), (363) ва система кинетик энергиясининг таърифидан: қуйидагилар хосил булади:

$$\sum m_i \frac{d\bar{V}_i}{dt}\cdot\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\sum m_i \bar{V}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial \dot{q}_i} - \sum m_i \bar{V}_i \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial q_i} =$$
$$= \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\sum \frac{m_i V_i^2}{2} - \frac{\partial}{\partial q_i}\sum \frac{m_i V_i^2}{2} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \qquad (364)$$

Шундай қилиб (364) муносабат қуйидаги куринишни олади:

$$\sum m_i a_i \delta r_i = \sum\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i}\right)\delta q_i \qquad (365)$$

(364)- ва (365)- формулалардан фойдаланиб динамиканинг тенгламасини қуйидаги куринишда ёзамиз:

$$\sum\left(Q_i - \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i}\right)\right)\delta q_i = 0 \qquad (366)$$

(366)-тенглама динамика умумий тенгламасининг умумлашган координаталаридаги ифодасидир. Бу тенгламада:

$$\sum\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i}\right)\delta q_i$$

ҳад система нуқталарининг $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_n$ кучишидаги барча инерция кучлари ишларининг йиғиндисини ифодалайди.

Голономли боғланишлар қуйилган система учун (366) да барча умумлашган координаталарининг орттирмалари $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_n$ эркин булгани учун улар олдидаги ифодаларни айрим-айрим нолга тенглаш мумкин.

Шундай қилиб, қуйидаги n та тенгламалар системасини оламиз:

$$Q_i - \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i}\right) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (367)$$

(367)-тенгламалар Лагранжнинг иккинчи хил тенгламалари ёки механик системанинг умумлашган координаталаридаги ҳаракат дифференциал тенгламалари дейилади. Бу тенгламаларнинг афзаллиги шундан иборатки, бу тенгламалар сони системанинг эркинлик даражасига тенг булиб, системани ташкил этувчи нуқталар сонига боғлиқ бўлмайди.

Бу тенгламалар системанинг умумлашган координаталарига нисбатан иккинчи тартибли оддий дифференциал тенгламалардир

Уларни интеграллаб ва интеграллаш доимийларини ҳаракатнинг бошланғич шартлари асосида аниқлаб, системанинг умумлашган координаталар орқали ифодаланган n та ҳаракат тенгламаларини оламиз:

$$q_i = q_i(t), \quad (i = 1, 2, \ldots n)$$

Лагранжнинг иккинчи хил тенгламалари аналитик механикада муҳим аҳамиятга эга ва кўпчилик техника масалаларини ечишда ундан самарали фойдаланилади. Лекин бу тенгламалар таркибида боғланиш реакция кучларини аниқлаш лозим бўлганда Даламбер принципидан фойдаланиш мумкин.

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР

1. Системани эркинлик даражаси деб нимага айтилади?
2. Қандай боғланишга идеал боғланиш дейилади?
3. Системани мумкин бўлган кўчиши деб нимага айтилади?
4. Мумкин бўлган кўчиш принципи қандай таърифланади?
5. Динамиканинг умумий тенгламаси қандай ёзилади?
6. Умумлашган координата нима?
7. Умумлашган тезлик нима?
8. Умумлашган куч нима? Унинг ўлчов бирлигини айтинг?
9. Умумлашган куч қандай тартибда ҳисобланади?
10. Агар система потенциал бўлса, у ҳолда умумлашган куч потенциал энергия орқали қандай ифода қилинади?
11. Лагранжнинг иккинчи хил тенгламаларини ёзинг?
12. Лагранжнинг иккинчи хил тенгламаларининг сони нечта бўлади?

ФОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЁТЛАР:

1. П. Шохайдарова, Ш. Шозиётов, Ш. Зоиров. «Назарий механика», дарслик Тошкент, 1991 йил.
2. Т. Р. Рашидов, Ш. Шозиётов, К. Б. Муминов. «Назарий механика асослари», дарслик. Тошкент, 1990 й.
3. С. К. Азизкориев, Янгуразов Ш. «Назарий механикадан масалалар ечиш». Ўкув кўлланма. Тошкент, 1980 й
4. Д. И. Толибова. «Назарий механика (динамика)». Ўкув кўлланма. Тошкент, 1987 й.
5. М. С. Яхёев, К. Б. Муминов. «Назарий механика». Тошкент, «Ўкитувчи», 1990 й
6. Н. С. Бибутов, М. Муродов. «Амалий механика». Тошкент, «Узинкомцентр», 2002 й.
7. С. М. Тарг. «Краткий курс теоретической механики». Дарслик. Москва, 1986 й
8. И. В. Мешчерский. «Назарий механикадан масалалар тўплами». Ўкув кўлланма. Тошкент, 1989 й.