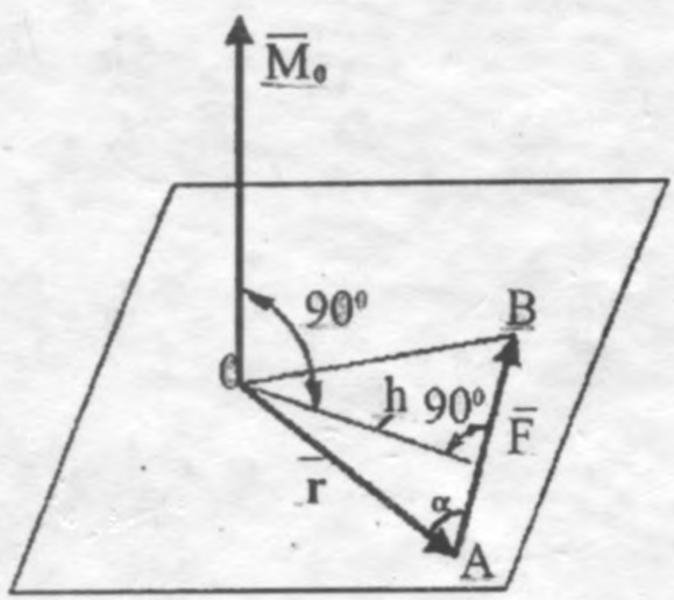
М. М. Муродов, Х. М. Иноятова,
К. У. Уснатдинов

НАЗАРИЙ МЕХАНИКА



М. М. Муродов, Х. М. Иноятова,
К. У. Уснатдинов

НАЗАРИЙ МЕХАНИКА

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ ТОМОНИДАН ОЛИЙ ЎҚУВ ЮРТЛАРИНИНГ БАРЧА ЙЎНАЛИШДАГИ БАКАЛАВРЛАР УЧУН ЎҚУВ ҚЎЛЛАНМА СИФАТИДА ТАВСИЯ ЭТГАН

Тошкент,
"Истиқлол" - 2004

Ушбу қулланма Бухоро озиқ-овқат ва енгил саноат технологияси институтининг услубий кенгашида (8-сонли баёни, 27.03.2003 йил) ва Олий таълим вазирлигининг (43-сонли баёни, 26.03.2004 йил) Қарори асосида нашрга тавсия этилган. Қулланма Олий уқув юртларининг профессионал таълим йуналишида укиётган бакалаврларига мулжалланган.

Тақризчилар: Тошкент Давлат Техника Университети, «Назарий механика ва машина деталлари», кафедраси мудири, техника фанлари доктори, профессор **Ш. А. Шообидов**, Бухоро Давлат Университети техника фанлари доктори, профессор **З. Жумаев**.

Масъул муҳаррир: доц. **З. Х. Ғайбуллаев.**
Саҳифаловчи: **Б. Ахмедов**

Уқув қулланма статика, кинематика, нуқта ва система динамикаси баён этилган.

Китобда механиканинг асосий тушунчалари ва қонунлари билан бирга мухандислик фаолиятида учрайдиган бошқа масалалар ҳам ёритилган.

Уқув қулланма олий уқув юртлари барча йуналишидаги бакалаврлар учун мулжалланган. Шунингдек бу қулланмадан касб-ҳунар коллежларининг талабалари ҳам фойдаланиши мумкин.

В учебном пособие «Теоретической механики» изложены основные раздели статики, кинематики и динамики точки и системы.

В книге наряду с изложением основных понятий и законов теоретической механики нашли свои отражения некоторые инженерные вопросы встречающей в практике.

Учебная пособия предназначена для студентов высших учебных заведений в при подготовке бакалавриатов. Пособий могут пользоваться и студенты профессиональных колледжей.

In educational the manual of "Theoretical mechanics" the basic static, kinematics and dynamics of a point and system are stated.

In the book alongside with a statement of the basic concepts and laws of theoretical mechanics some engineering questions meeting in practice have found their reflections.

Educational manual is intended for students of high educational institutions in by preparation of bachelor degrees. Students of professional colleges can use manual.

КИРИШ

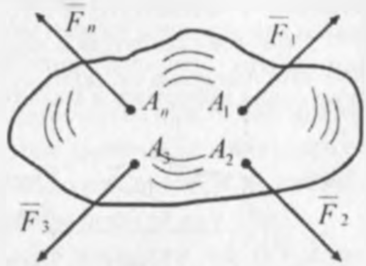
Хар бир фан асосларини чуқур ўрганиш келажак тараққиётини илмий кўз билан кўра билиш укувчиларга ўргатиш жамиятнинг тез суратлар билан ривожланишига йўл очади. Академик М. Т. Уразбоев «Олим келажакни ўз руҳий дунёсининг энг баланд чўққисидан туриб кўра олиши ва атрофдагиларни шубҳаланмасдан етаклаши билан бошқалардан фарқ қилиши керак»-деган эди. Бу эса келажакда ижодкор шахсларни кўпайтиради, технологияга айланиб, меҳнатни унумдорбулишига имконият яратади. Меҳнат самарадорлиги, маҳсулот сифати ва халқнинг фаровонлиги фан ривожидан боғлиқдир. Ҳозирги замон фан ва техникасининг тараққиёти умумтехника фанларининг асосларидан бири бўлган назарий механикани пухта ўрганишни талаб қилади. Назарий механика техника олий ўқув юртларида ўтиладиган умумий фанлардан биридир. Назарий механика фанининг қонунлари материаллар қаршилиги, қурилиш механикаси, машина ва механизмлар назарияси, гидравлика, аэродинамика каби фанлар учун хилма-хил мураккаб техника масалаларини назарий база сифатида қўлланилади. Назарий механика фани бўлажак мутахассисларга машиналарни лойиҳалаш ва автоматлаштириш ўрганалиган мухандислик фани сифатида ҳам зарур бўлган билимни беради. Фан-техника тараққиёти билан бирга назарий механика бўлажак мутахассисларда техникада қўланиладиган жараёнлар моделини ясаш ва илмий хулосалар яратиш қобилиятини ривожлантиради. Техниканинг кейинги тараққиётлари асосида назарий механика фанини пухта ўрганган талабалар ЭХМ ни тадбиқ этган ҳолда, мураккаб масалаларни ҳам еча олиши мумкин. Назарий механика фани моддий жисмларнинг бир-бирига кўрсатадиган таъсири ва ҳаракатнинг умумий қонунлари ҳақидаги фандир. Табиий фанлар материя ҳаракатини ва уларнинг хусусиятларини ўрганадилар. Табиий фанлардан бири бўлган назарий механика фани материя ҳаракатларидан энг оддийси ҳисобланган механик ҳаракатни ўрганади. Шу билан бирга назарий механика жисмларнинг мувозанатини ҳамм ўрганади, зероки жисм мувозанати механик ҳаракатнинг хусусий ҳолидир.

Бунда: AB кесманинг узунлиги куч микдорини ифодалайди. Стрелка $\overline{F}$ - куч йуналишини курсатади. A нукта куч қуйилган нукта.

Куч йуналган тугри чизикка кучнинг таъсир чизиги дейилади.

KL тугри чизик $\overline{F}$ кучининг таъсир чизиги булади.

1. Агар жисмга бир нечта кучлар қуйилган булса бундай кучларга кучлар системаси дейилади.



3-расм.

$(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, \ldots \overline{F}_n)$ - жисмга кучлар системаси қуйилган. $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ кучлар қуйилган нукталар.

2. Икки куч системаси жисмга бир хил таъсир курсатса, улар эквивалент кучлар системаси дейилади.

$(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, \ldots \overline{F}_n)$ кучлар системасининг жисмга курсатадиган таъсирини $(\overline{Q}_1, \overline{Q}_2, \ldots \overline{Q}_n)$ кучлар системаси курсатса, бундай икки куч системаси ўзаро эквивалент булади. Уларнинг эквивалентлиги қуйидагича ёзилади.

$$(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, \ldots \overline{F}_n) \sim (\overline{Q}_1, \overline{Q}_2, \ldots \overline{Q}_n)$$

3. Агар бирор кучлар системасининг жисмга курсатадиган таъсирини битта куч курсата олса, бундай кучга кучлар системасининг тенг таъсир этувчиси дейилади. $(\overline{F}, \overline{F}, \ldots \overline{F}_n)$ кучлар системасининг тенг таъсир этувчисини $\overline{R}$ билан белгиласак, у ҳолда:

$$(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, \ldots \overline{F}_n) \sim \overline{R}$$

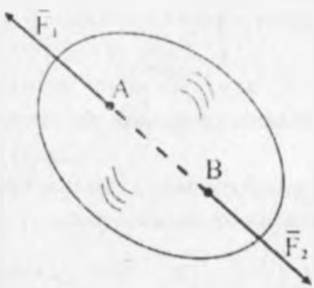
4. Тинч турган жисм унга қуйилган $(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, \ldots \overline{F}_n)$ кучлар системаси таъсирида ҳам тинч ҳолатда қолса, бундай кучлар системаси мувозанатлашган кучлар ситемаси ёки нолга эквивалент система дейилади. Мувозанатлашган кучлар системаси нолга эквивалентдир.

$$(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, \ldots \overline{F}_n) \sim 0.$$

2-§. СТАТИКАНИНГ АКСИОМАЛАРИ

Назарий механика фанининг статика қисми кундалик ҳаётда тасдиқланган қуйидаги аксиомаларга асосланади:

1-аксиома Жисмга таъсир этаётган иккита куч миқдор жиҳатидан тенг ва бир тўғри чизиқ бўйлаб қарама-қарши томонга йўналган бўлса, жисм мувозанатда бўлади (4-расм)

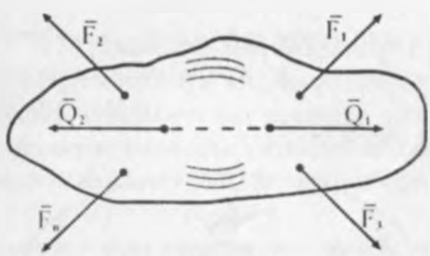


4-расм.

Бунда $F_1 - F_2$, $F_1 = F_2$, F_1 ва F_2, кучларга ўзаро мувозанатлашган кучлар системаси ёки нолга эквивалент кучлар системаси дейилади.

$$(F_1, F_2) \sim 0$$

2-аксиома: Жисмга таъсир этаётган кучлар системасига ўзаро мувозанатлашувчи кучлар қўшилса ёки олинса кучлар системасининг жисмга кўрсатадиган таъсири ўзгармайди (5-расм).



5-расм.

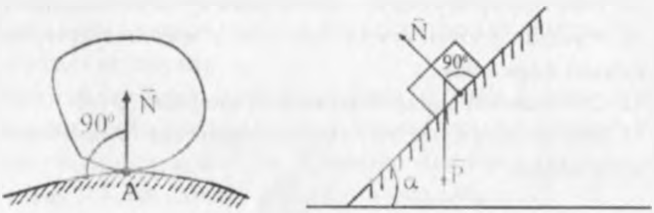
$F_1, F_2, \dots F_n$ кучлар таъсирида жисм мувозанатда турган бўлсин.

Шу жисмга нолга эквивалент $(\bar{Q}_1, \bar{Q}_2)$ кучларни қўямиз $(\bar{Q}_1, \bar{Q}_2) \sim 0$, бу ҳолатда билан жисмнинг мувозанати ўзгармайди.

боғланишларнинг асосий турларида реакция кучлари қандай йўналганлигини кўриб чиқамиз.

1. Силлиқ қўзғалмас текислик. Ишқаланишнинг эътиборга олинмайдиган даражада силлиқ бўлган сирт одатда силлиқ сирт деб ҳисобланади. Жисм силлиқ қўзғалмас текислик устида мувозанатда турса, ёки шу текисликка нисбатан ҳаракатланса, силлиқ қўзғалмас текислик жисмни текисликка перпендикуляр бўлган йўналишда ҳаракат қилишига тўсқинлик кўрсатади.

Силлиқ қўзғалмас текисликнинг реакция кучи $\vec{N}$ текисликка перпендикуляр бўлиб, жисм қайси томонга ҳаракат қила олмаса, шунга тескари йўналган бўлади (9-расм a, b).

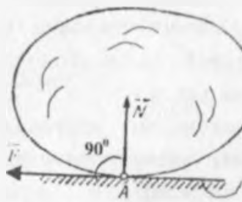


a) b)

9-расм.

Бунда $\vec{N}$ - силлиқ қўзғалмас текисликнинг реакция кучи ёки нормал реакция кучи деб аталади, $\vec{P}$ – жисм оғирлиги.

Агар сирт силлиқ бўлмаса, А нуқтада нормал реакция кучидан ташқари уринма реакция кучи $\vec{F}$ ҳам бўлади (10-расм). Бу $\vec{F}$ кучга ишқаланиш кучи деб аталади.

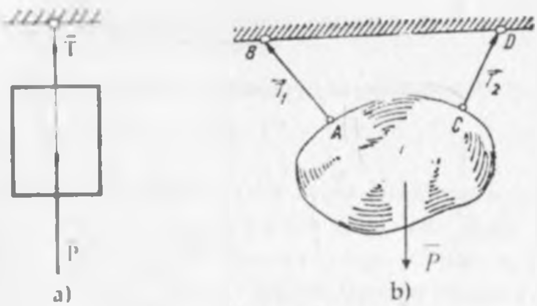


10-расм.

Бунда $\vec{N}$ нормал реакция кучи, $\vec{F}$ -ишқаланиш кучи.

2. Эгилувчан ёки эластик жисмлар. Жисмлар чўзилмайдиган ип, арқон, трос, занжир, қайишлар воситасида осилган бўлса, уларда ҳосил

бўладиган реакция кучлари мос равишда эгилувчан жисмлар бўйлаб йўналган бўлади (11-расм a,b). Эгилувчан жисмларда ҳосил бўладиган реакция кучлари T, T_1, T_2 билан белгиланади ва таранглик кучи деб аталади.



11-расм.

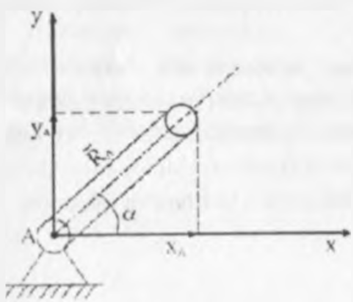
Бунда P ипга осилган юкнинг оғирлиги.

Реакция кучининг миқдор ва йўналиши жисмга таъсир қилувчи кучга боғлиқ бўлади.

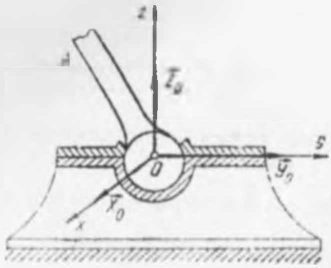
3. Шарнирли қўзғалмас таянч. Бу таянч жисмнинг илгарилама ҳаракат қилишига тўсқинлик қилади, жисм шарнир атрофида айланади.

Иккита жисмнинг ўзаро бирлашган жойига шарнир дейилади. Шарнир атрофида жисмларнинг бири иккинчисига нисбатан эркин айланади. Болт – шарнирли қўзғалмас таянчга мисол бўла олади.

Шарнирли қўзғалмас таянчнинг белгиси (12-расмда) кўрсатилган.



12-расм.

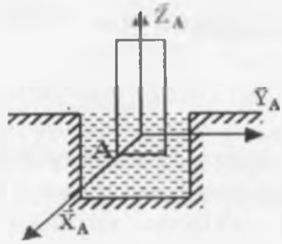


16-расм.

Бунда X_0, Y_0, Z_0 реакция кучлари.

7. Ўқлар қўзғалмас таянчга маҳкамланган. Асос устунларни мустаҳкамлаш учун хизмат қилади ва жисмнинг фақат устун ўқи атрофида айланишига йўл қўяди.

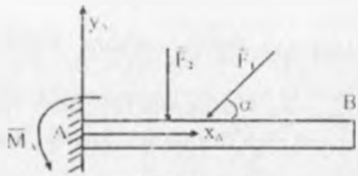
Асосининг реакцияси Z_A вертикал бўйлаб юқорига йўналган, деворнинг реакцияси эса X ва Y ўқлари бўйлаб йўналган ва устуннинг ўқига тик бўлган ҳолатда кучларни X_A, Y_A ташкил этувчиларга ажратиш керак (17-расм).



17-расм.

Бунда X_A, Y_A, Z_A - реакция кучлари.

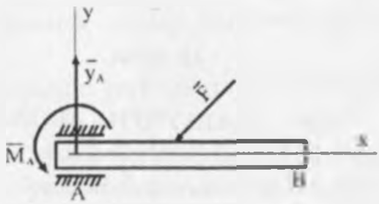
8. Бир учи деворга қисиб маҳкамланган балка. Агар (18-расм) AB балканинг A учи деворга қисиб маҳкамланган бўлса, A нуқтадаги боғланиш реакциясининг иккита тузувчисидан ташқари, балканинг A нуқта атрофида айланишига тўсқинлик қилувчи реакция моменти M_A ҳам мавжуд бўлади.



18-расм.

Бунда X_A, Y_A реакция кучлари, M_A реактив моменти.

9. Бир учи горизонтал бўйлаб силжишга йўл қўядиган қилиб махкамланган балка. 19-расмда кўрсатилган АВ балканинг А учи горизонтал бўйлаб силжишга йўл қўядиган қилиб маҳкамланган бўлса, бундан боғланиш реакцияси силжиш текислигига перпендикуляр бўлган Y_A реакция кучидан хамда балканинг А нуқта атрофида айланишига тўсқинлик қилувчи реакция моменти M_A дан иборат бўлади.



19-расм.

Y_A - реакция кучи, M_A - реакция моменти

10. Бир учи горизонтал ҳам вертикал бўйлаб силжишга йўл қўядиган қилиб маҳкамланган балка. 20-расмда кўрсатилган АВ балканинг А учи ҳам горизонтал, ҳам вертикал бўйлаб силжишга йўл қўядиган қилиб махкамланган. Бу ҳолда А нуқтада фақат балканинг А нуқта атрофида айланишига қаршилик қилувчи M_A реакция моменти мавжуд бўлади.

20-расм.

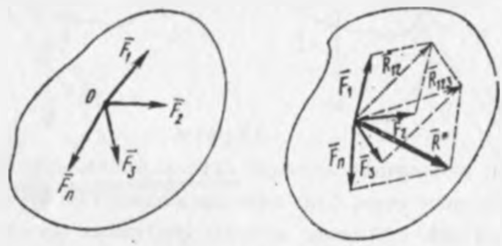
6-аксиома. Боғланишда бўлган жисмни эркин жисм деб қараш учун боғланишни реакция кучи билан алмаштириш керак.

Тенг таъсир этувчи $\overline{R}$ кучининг $\overline{F}_1$ ва $\overline{F}_2$ кучлар билан ташкил қилган α ва γ бурчаклари синуслар теоремасига кура 23-расм b дан аниқланади.

$$\frac{F_1}{\sin\gamma} = \frac{F_2}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin\beta} \qquad (7)$$

б) Кучлар купбурчаги усули.

Бир нуктага қуйилган $\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n$ кучлари берилган булсин (24-расм) Шу кучларнинг тенг таъсир этувчисини топиш лозим булсин.



a) b)

24-расм.

Тенг таъсир этувчи кучни топиш учун параллелограмм аксиомасига асосан $\overline{F}_1$ ва $\overline{F}_2$ кучларни қушиб, уларни тенг таъсир этувчи $\overline{R}_1$ кучи билан алмаштирамиз.

$$\overline{R}_1 = \overline{F}_1 + \overline{F}_2$$

Бу усулга асосан $\overline{R}_1$ куч билан $\overline{F}_3$ кучни қушиб $\overline{R}_2$ кучни ҳосил қиламиз.

$$\overline{R}_2 = \overline{R}_1 + \overline{F}_3 = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3$$

ва ҳоказо.

Шу усул билан n-1 гача булган кучларни қушиб, тенг таъсир этувчисини аниқлаймиз.

$$\overline{R}_{n-1} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3 + ... + \overline{F}_{n-1}$$

$\overline{R}_{n-1}$ билан $\overline{F}_n$ кучни қўшиб тенг таъсир этувчи кучни топамиз.

$$\overline{R} = \overline{R}_{n-1} + \overline{F}_n = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3 + ... + \overline{F}_{n-1} + \overline{F}_n$$

$$\overline{R} = \Sigma\overline{F} \qquad (8)$$

Бир нуктага қуйилган кучларнинг тенг таъсир этувчиси шу кучларнинг геометрик йиғиндисига тенг булиб, кучлар қуйилган нуқтага қўйилган бўлади. Кучларни кетма-кет параллелограмм қоидаси асосида қушиш, берилган кучлардан куч купбурчагини қуришга олиб келади.

5-§. УЧ КУЧ МУВОЗАНАТИГА ОИД ТЕОРЕМА

Теорема: Бир текисликда жойлашган ва ўзаро параллел бўлмаган учта куч мувозанатда бўлса, уларнинг таъсир чизиклари бир нуктада кесишади.

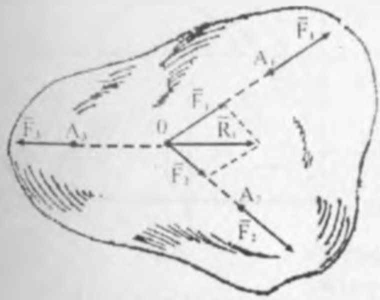
__Исбот.__ Жисмнинг A_1, A_2, ва A_3 нукталарига бир текисликда ётувчи параллел бўлмаган мувозанатлашувчи F_1 F_2 ва F_3 кучлари қўйилган бўлсин (25-расм)

Кучлар параллел бўлмагани учун улардан ихтиёрий иккитасининг таъсир чизиги бирор нуктада кесишади. Масалан F_1 ва F_2 кучларининг таъсир чизиклари 0 нуктада кесишади. Бу кучларни таъсир чизиклари бўйлаб 0 нуктага кўчирамиз. Параллелограмм қоидасига асосан F_1 F_2 кучларни қўшамиз.

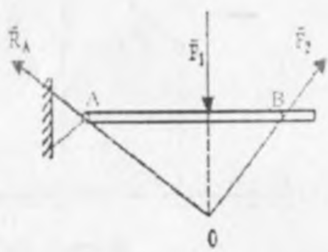
$$R = F_1 + F_2$$

R кучининг таъсир чизиги F_1 ва F_2 кучларининг таъсир чизиклари кесишган нуктадан ўтади. Шундан қилиб жисмга $\bar{R}$ ва F_3 кучлари таъсир килади. Иккита куч қўйилган жисм мувозанатда бўлиши учун бу кучларнинг миқдорлари тенг бўлиб, бир тўғри чизиқ бўйлаб карама-карши томонга йўналган бўлиши керак. Демак, F_3 кучнинг таъсир чизиги 0 нуктадан ўтади ёки учта кучнинг таъсир чизиги бир нуктада кесишади. Бу теорема ёрдамида реакция кучининг йўналиши аниқланади.

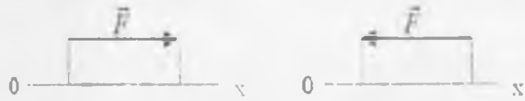
__Масалан.__ АВ стержен F_1 ,F_2 кучлар ва R_1 реакция кучи таъсирида мувозанатда бўлса, R_1 кучининг таъсир чизиги F_1 ва F_2 кучлар таъсир чизиги кесишган нуқтадан ўтади (26-расм).



25-расм.



26-расм.



a) b)

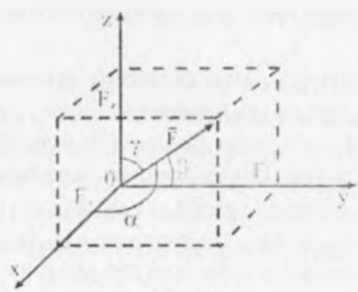
29 – расм.

$$F_x = F\cos 0^0 = F\cdot 1 = F \qquad F_x = F_1\cos 180^0 = -F_1$$

$$F_x = F \qquad F_x = -F$$

Кучнинг модули тугри бурчакли параллелепипеднинг диагоналига (30-расм), бу параллелепипеднинг қирралари эса кучнинг координата укларидаги проекцияларига тенг булади.

$$F = \sqrt{Fx^2 + Fy^2 + Fz^2} \qquad (10)$$



30-расм.

$\vec{F}$ кучнинг йўналиши йўналтирувчи косинуслар ёрдамида аниқланади.

$$\cos\alpha = \frac{Fx}{F}, \quad \cos\beta = \frac{Fy}{F}, \quad \cos\gamma = \frac{Fz}{F} \qquad (11)$$

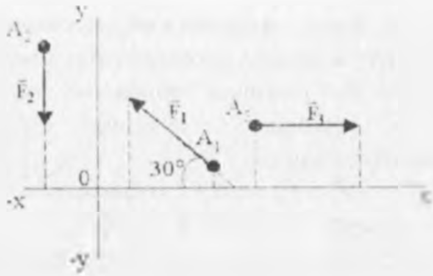
Бунда α, β, γ – F кучи билан x,y,z уклари орасидаги бурчак.

МАСАЛА № 4.

Берилган:

$F_1 = 6н$, $F_2 = 8н$, $F_3 = 10н$

Бу кучларнинг координата укларидаги проекциялари топилсин. (31-расм).



31-расм.

Ечиш. 1) F_1 - кучининг проекциялари. $X_1 = -F_1\cos 30^\circ = -6\frac{\sqrt{3}}{2} = -3\sqrt{3}н$

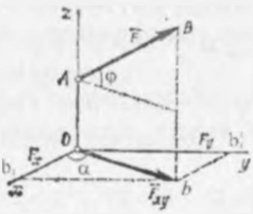
$Y_1 = F_1 \sin 30^\circ = 6\frac{1}{2} = 3н$

2) F_2 кучининг проекциялари; $X_2 = 0$ $Y_2 = -F_2 = -8н$

3) F_3 кучининг проекциялари; $X_3 = F_3 = 10н$ $Y_3 = 0$.

7-§. КУЧНИНГ ТЕКИСЛИКДАГИ ПРОЕКЦИЯСИ

Oxyz координаталар системасида *A* нуқтага қўйилган *F* кучи берилган бўлсин (31-расм, а).



31-расм, а.

F кучини *Oxy* текисликдаги проекциясини аниқлаймиз. Бунинг учун *A* ва *B* нуқталардан *Oxy* текисликка перпендикуляр *AO* ва *Bb* чизиқлар ўтказамиз. У ҳолда $\bar{F}_{xy} = \overline{Ob}$ вектори ҳосил бўлади. $\bar{F}_{xy} - \overline{Ob}$ *F* кучнинг *Oxy* текисликдаги проекциясини ифодалайди.

F куч текисликдаги проекциясининг миқдори қуйидагига тенг.

$$F_{xy} = F\cos\varphi$$

Бунда φ *F* кучи билан унинг проекцияси орасидаги бурчак. Фазода жойлашган кучни *x,y* ўқлардаги проекциясини аниқлаш учун аввал кучни шу ўқлар ётган текисликдаги проекцияси топилади. F_{xy} векторнинг Ox ва Oy ўқлардаги проекциясини аниқлаш учун b нуқтадан Ox ва Oy ўқларига мос равишда перпендикуляр чизиқлар ўтказамиз. Ob_1 ва Ob_2 мос равишда F кучнинг Ox ва Oy ўқларидаги проекцияларини ифодалайди.

$$F_x = F_{xy}\cos\alpha = F\cos\varphi\cos\alpha$$
$$F_y = F_{xy}\sin\alpha = F\cos\varphi\sin\alpha \qquad (14)$$

Бу усул кучни икки марта проекциялаш усули дейилади.

8-§. БИР НУҚТАДА КЕСИШУВЧИ КУЧЛАРНИНГ ТЕНГ ТАЪСИР ЭТУВЧИСИНИ АНАЛИТИК УСУЛДА АНИҚЛАШ

Таъсир чизиқлари бир нуқтада кесишувчи $F_1, F_2, F_3 ... F_n$ кучлар берилган бўлсин (32-расм, а).

Берилган кучларнинг тенг таъсир этувчисини миқдор ва йўналишини аниқлаш лозим.

Тенг таъсир этувчи куч берилган кучларнинг геометрик йиғиндисига тенг

$$R = F_1 + F_2 + F_3 + ... + F_n \quad \text{ёки}$$
$$R = \Sigma F \qquad (15)$$

(15) – вектор тенгликни координата ўқларига проекциялаб, тенг таъсир этувчи кучнинг координата ўқларидаги проекциясини аниқлаймиз.

Тенг таъсир этувчи кучнинг бирор ўқдаги проекциясини ташкил этувчи кучларнинг шу ўқдаги проекцияларининг йиғиндисига тенг бўлади.

$$Rx = \Sigma X, \quad Ry = \Sigma Y, \quad Rz = \Sigma Z \qquad (16)$$

Бунда R_x, R_y, R_z – R кучнинг координата ўқларидаги проекцияси. (16) ёрдамида тенг таъсир этувчи кучнинг координата ўқлардаги проекцияси топилади.

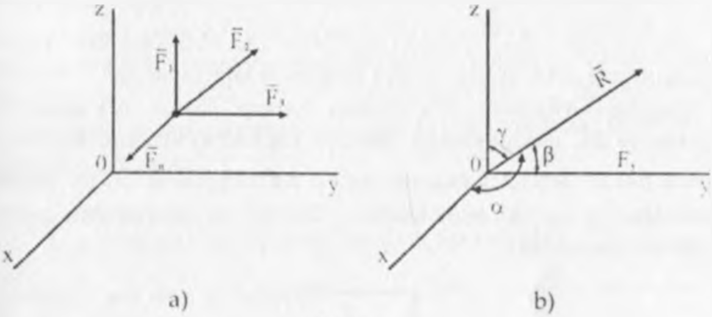
Тенг таъсир этувчи кучнинг миқдори қуйидагига тенг.

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{\left(\sum X\right)^2 + \left(\sum Y\right)^2 + \left(\sum Z\right)^2} \qquad (17)$$

Йўналиши эса қуйидагича аниқланади.

$$\cos\alpha = \frac{R_x}{R}; \quad \cos\beta = \frac{R_y}{R}; \quad \cos\gamma = \frac{R_z}{R}; \qquad (18)$$

Бунда α, β, γ лар R билан x,y,z ўқлари орасидаги бурчаклар (32-расм, b).



32-расм.

9-§. БИР НУҚТАГА ҚЎЙИЛГАН КУЧЛАРНИНГ МУВОЗАНАТИ

1. Бир нуқтага қўйилган кучлар системаси мувозанатда бўлиши учун уларнинг тенг таъсир этувчиси $R=0$ бўлиши зарур ва етарлидир. Бунда кучлардан тузилган куч кўпбурчаги ёпиқ бўлиши керак. $R=0$, $\Sigma F=0$ тенгламалар кесишувчи кучлар системаси мувозанатининг зарурий ва етарли шартининг вектор ифодасидир.

Демак кесишувчи кучлар системаси таъсиридаги жисм мувозанатда бўлиши учун шу кучларнинг геометрик йиғиндиси нолга тенг бўлиши зарур ва етарли шартдир.

2. Тенг таъсир этувчи куч нолга тенг бўлиши учун (17) - формулалаги қавслар ичидаги ифодаларнинг ҳар бири нолга тенг бўлиши шарт.

$$\begin{aligned} \sum X = 0: &\quad X_1 + X_2 + \ldots + X_n = 0 \\ \sum Y = 0: &\quad Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n = 0 \\ \sum Z = 0: &\quad Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n = 0 \end{aligned} \qquad (19)$$

(19) -формула фазодаги таъсир чизиқлари бир нуқтада кесишувчи кучларнинг аналитик мувозанат шартини ифодалайди. Бу шарт қуйидагича таърифланади.

Таъсир чизиқлари бир нуқтада кесишувчи кучлар мувозанатда бўлиши учун кучларнинг x,y,z ўқларидаги проекцияларининг йиғиндиси нолга тенг бўлиши зарур ва етарлидир. Агар кучлар моменти қуйидаги кўринишда белгиланади. M_o ёки $m_o(F)$ куч моменти $H \cdot M$, $KH \cdot M$ билан ўлчанади.

$$m_o(F) = \pm Fh \qquad (21)$$

(21) - формула ёрдамида кучнинг нуқтага нисбатан моменти топилади.

Нуқтага нисбатан куч моменти қуйидагича таърифланади:

куч миқдори билан шу куч елкасининг кўпайтмасига билан олинган нуқтага нисбатан кучнинг моменти дейилади.

Куч моменти мусбат ва манфий ишора билан тавсифланади.

Агар куч момент маркази атрофида жисмни соат стрелкаси айланишига қарама-қарши томонга айлантирса куч моменти мусбат, аксинча манфий бўлади (34-расм, а ва b).

Нуқтага нисбатан куч моменти қуйидаги хоссаларга эга.

1. Агар кучнинг таъсир чизиги бирор нуқтадан ўтган бўлса, кучнинг шу нуқтага нисбатан моменти нолга тенг бўлади. Чунки бу ҳолда кучнинг елкаси h=0 га тенг (35-расм).

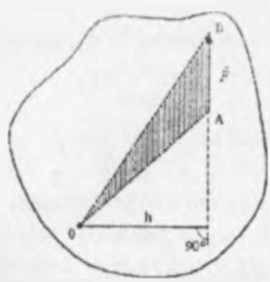
$$m_B(F) = F \cdot h = F \cdot 0 = 0.$$

Бу ҳолда куч жисмни айлантирмайди.

35-расм.

2. Кучнинг миқдори ва йўналишини ўзгартирмай таъсир чизиғи бўйлаб истаган нуқтага кўчирилса, куч моменти ўзгармайди (чунки унинг елкаси ўзгармай қолади).

3. Кучнинг нуқтага нисбатан моменти куч билан шу нуқтадан ташкил бўлган учбурчак юзасининг иккилангатига тенг.



36-расм.

$\overline{F}$ кучининг икки учини момент маркази 0 билан туташтирамиз (36-расм). AOB учбурчаги ҳосил бўлади. Бу учбурчакнинг юзаси ΔAOB юзаси=$1/2F.h$

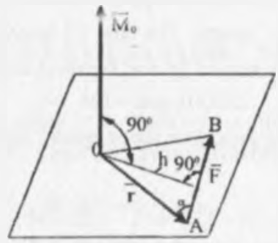
$$2\Delta A0B.юзи = F \cdot h = m_0(\overline{F})$$

$$m_0(\overline{F}) = 2\Delta AOB \ юзи \qquad (22)$$

11-§. КУЧНИНГ НУҚТАГА НИСБАТАН МОМЕНТИ ВЕКТОРИ

$\overline{F}$ кучнинг 0 нуқтага нисбатан моменти момент марказига қўйилган $\overline{Mo}$ вектор бўлиб, бу марказ ва кучнинг таъсир чизиғи орқали ўтган текисликка перпендикуляр йўналган бўлади.

$\overline{F}$ кучининг 0 нуқтага нисбатан момент векторини аниқлаймиз (37-расм).



37-расм.

Бунда $m_0(\overline{F})$ - 0 нуқтага нисбатан олинган F куч моментининг вектори. $\overline{OA} = \overline{r}$ -А нуқтанинг радиус вектори. Момент вектори куч қўйилган нуқтанинг радиус вектори билан кучнинг вектор кўпайтмасига тенг.

$$\overline{M}_0 = [\overline{r} \ \overline{F}] \qquad (23)$$

Момент вектори $\overline{M}_0$ OAB учбурчак текислигига перпендикуляр бўлиб, $\overline{M}_0$ нинг учидан қараганда куч жисмни соат стрелкаси айланишига тескари йўналишда айлантиришга интилади. Момент векторининг абсолют қиймати куч моментига тенг.

$$|\overline{M}_0| = m_0(\overline{F}) \qquad (24)$$

(24) – формулани исботлаш учун (23) дан абсолют қиймат оламиз.

$$|\overline{M}_0| = |[\overline{r} \cdot \overline{F}]| = r \cdot F \ \sin\alpha = F \cdot h = m_0(\overline{F})$$

Бунда: $h = r\sin\alpha$, $\left|\overline{M_0}\right| = m_0(\overline{F})$.

12-§. ТЕНГ ТАЪСИР ЭТУВЧИНИНГ МОМЕНТИ ҲАҚИДАГИ ТЕОРЕМА (ВАРИНЬОН ТЕОРЕМАСИ)

Теорема. Бир текисликда жойлашган кучлар тенг таъсир этувчисининг бирор нуқтага нисбатан олинган моменти ташкил этувчи кучларнинг шу нуқтага нисбатан олинган моментларининг йиғиндисига тенг.

Исбот. Жисмнинг А нуқтасига $\overline{F_1}, \overline{F_2}, ..., \overline{F_n}$ кучлари қуйилган булсин. Ихтиёрий *0* нуқта оламиз ва *0* ни *А* билан туташтирамиз. *0* марказдан *ОА* кесмага тик қилиб *ОХ* уқини утказамиз (37-расм).

Энди $m_0(\overline{F_1}), m_0(\overline{F_2}), ..., m_0(\overline{F_n})$, моментларнинг ифодасини аниқлаймиз. (22)-формулага асосан $m_0(\overline{F_1}) = 2\Delta 0AB_1$ юзи.

$0AB_1$ учбурчакнинг юзи асоси билан баландлиги купайтмасининг ярмига тенг. Бунда асос ОА кесма булса, баландлиги ob_1 булади.

$$2\Delta 0AB_1 юзи = OA \cdot ob_1$$

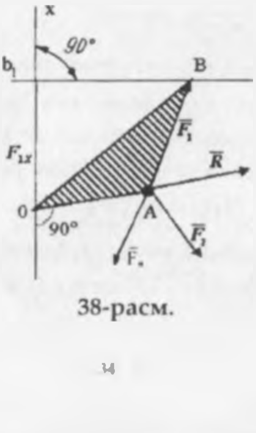
ob_1 кесма $\overline{F}$ кучининг ох уқидаги проекциясини билдиради $ob_1 = F_{1X}$. Шунинг учун

$$m_0(\overline{F_1}) = OA \cdot F_{1X} \tag{25}$$

Қолган кучларнинг моменти ҳам худди шундай ҳисобланади.

$\overline{F}$ куч *ОА* чизиқдан пастга бориб етганда ҳам (25) формула тугри булаверади, бунда кучнинг проекцияси манфий булганлиги учун моментнинг ишораси ҳам манфий булади.

$\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n$, кучларнинг тенг таъсир этувчиси R билан белгиланади.



38-расм.

$$\bar{R} = \sum \bar{F} \qquad (26)$$

Тенг таъсир этувчининг бирор ўқдаги (x ўқидаги) проекцияси қўшилувчи кучларнинг ўша ўқдаги проекцияларининг йиғиндисига тенг, яъни:

$$R_x = \sum F_x \qquad (27)$$

Бу тенгликнинг иккала томонини OA га кўпайтирсак.

$$OA \cdot R_x = \sum (F_x \cdot OA) \qquad (28)$$

(25) - формулага асосан

$$\begin{aligned} OA \cdot R_x &= \sum m_O(\bar{R}) \\ \sum (OA \cdot F_x) &= \sum m_O(\bar{F}) \end{aligned} \qquad (29)$$

(29) ни (28) га қўйиб қуйидагини ҳосил қиламиз.

$$m_O(\bar{R}) = \sum m_O(\bar{F}) \qquad (30)$$

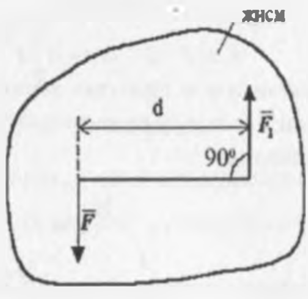
(30) -формула Вариньон теоремасининг математик ифодасидир.

13-§. ЖУФТ КУЧ ВА УНИНГ МОМЕНТИ

Таъриф. Миқдорлари тенг, таъсир чизиқлари бир тўғри чизиқда ётмайдиган, параллел ва қарама-қарши томонга йўналган иккита кучга жуфт куч дейилади.

$$\bar{F} = \bar{F}_1; \quad \bar{F} = -\bar{F}_1; \quad \bar{F} \parallel \bar{F}_1;$$

Жуфт куч $(\bar{F}, \bar{F}_1)$ кўринишда белгиланади (39-расм).



39-расм.

$\bar{F}$ *ва* $\bar{F}_1$ кучларга жуфт кучни ташкил этувчи кучлар дейилади.

Жуфт кучни ташкил этувчи кучлар орасидаги энг қисқа d масофага жуфт кучнинг елкаси дейилади. Жуфт кучнинг тенг таъсир этувчиси нолга баробар бўлади.

$$R = F - F_1 = 0, \quad R = 0$$

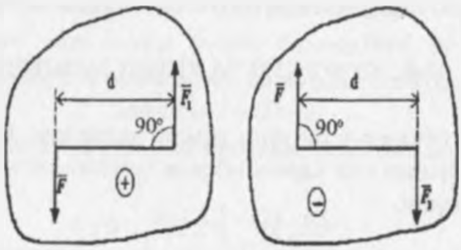
Жуфт кучни битта куч билан алмаштириш мумкин эмас. Жуфт кучни жисмга курсатадиган таъсири жуфт куч моменти билан тавсифланади. Жуфт кучни ташкил этувчи кучларнинг бири билан жуфт куч елкасининг купайтмасига жуфт кучнинг моменти дейилади.

Жуфт кучнинг моменти m, ёки M билан белгиланади.

$$m = \pm F \cdot d = \pm F_1 d \qquad (31)$$

(31)-формула билан жуфт кучнинг моменти аникланади. Жуфт кучнинг моменти мусбат ёки манфий булади.

Жуфт жисмни соат стрелкаси айланишига тескари томонга айлантирса унинг моменти мусбат, соат стрелкаси айланиши буйича айлантирса манфий ишора билан олинади (40-расм a,b).



a) b)

40-расм.

$$m = F \cdot d \qquad m = -F \cdot d$$

Жуфт куч куйилган жисм айланма ҳаракатда булади. Ҳар қандай жуфт кучни стрелкали ёй шаклида тасвирлаш мумкин. Стрелка ёнига жуфт куч моменти куйилади.

Жуфт куч жойлашган текисликка жуфт кучнинг таъсир текислиги дейилади.

<u>Теорема 1.</u> Жуфт кучни ташкил этувчи кучларнинг ҳар қандай уқдаги проекциялари йигиндиси нолга тенг.

<u>Исбот:</u> Жуфт куч берилган булсин (41-расм). Шу жуфт кучни х уқига проекциялаймиз.

$$\Sigma X = 0, \quad F - F^{1} = 0 \text{ чунки } F = F^{1}$$

41-расм.

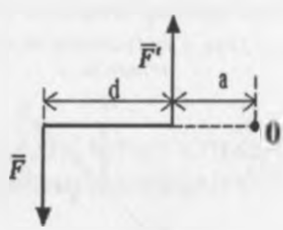
<u>Теорема 2.</u> Жуфт кучни моменти уни ташкил этувчи кучлардан ихтиёрий нуқтага нисбатан олинган моментларнинг йиғиндисига тенг.

$$m = m_0(\overline{F}) + m_0(\overline{F}^1)$$

<u>Исбот.</u> Моменти $m = F \cdot d$ га тенг бўлган $(\overline{F}, \overline{F}^1)$ жуфт куч берилган бўлсин (42-расм). Жуфт кучни ташкил этувчи кучлардан 0 нуқтага нисбатан момент оламиз.

$$m_0(\overline{F}) = F(a + d)$$

$$m_0(\overline{F}^1) = -F^1 a$$



42-расм.

Бу тенгликларнинг иккала қисмини қўшамиз.

$$\begin{aligned} & m_0(\overline{F}) + m_0(\overline{F}^1) = F(a + d) - \overline{F}^1 a = Fa + Fd - F^1 d = Fd = m \\ & m_{0-} = m_0(\overline{F}) + m_0(\overline{F}^1) \end{aligned} \tag{32}$$

Теорема исботланди.

Бу теоремалар шуни кўрсатадики, жуфт куч проекциялар тенгламаси $\sum X = 0$ $\sum Y = 0$ га иштирок қилмайди. Жуфт кучни бирор нуқтага нисбатан олинган моментлар тенгламасига $(\sum m_0 = 0)$ қўшиш керак.

14-§. ЖУФТ КУЧЛАРНИНГ ЭКВИВАЛЕНТЛИГИ ҲАҚИДАГИ ТЕОРЕМА

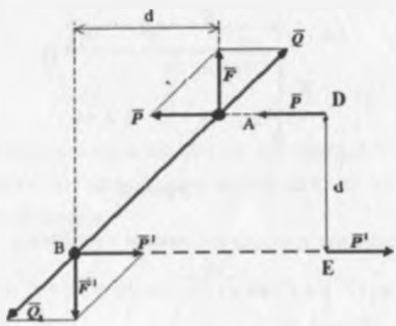
<u>Теорема.</u> Жисмга қуйилган ҳар қандай жуфт кучнинг моменти шу жуфт кучнинг моментига тенг булган бошқа жуфт куч билан алмаштириш мумкин.

<u>Исбот.</u> Жисмга моменти $m=Fd$ (F, F^1) бўлган жуфт кучи таъсир қилаётган бўлсин (43-расм).

Ихтиёрий D ва E нуқталардан иккита параллел тўгри чизиқ ўтказамиз. Бу параллел тўгри чизиқ F ва F^1 кучларнинг таъсир чизиғи билан A ва B нуқталарда кесишади. AD ва BE тўгри чизиқлар бўйлаб йўналган ташкил этувчиларини P ва Q билан белгилаймиз. F кучини AB ва BE тўгри чизиқ бўйлаб йўналган ташкил этувчисини Q ва P билан белгилаймиз. Демак

$$\overline{P} = -\overline{P}^1, \quad \overline{Q} = -\overline{Q}^1$$

Q ва Q^1 кучлари ўзаро мувозанатлашувчи, бўлгани учун жисмдан олиб ташлаймиз. Натижада $(\overline{F}, \overline{F}^1)$ жуфт кучини $(\overline{P}, \overline{P}^1)$ жуфт кучи билан алмаштирдик. (P, P^1) жуфт кучнинг елкаси d_1 га тенг. P ва $\overline{P}^1$ кучларни таъсир чизиқлари бўйлаб D ва E нуқталарга келтирамиз.



43-расм.

(FF^1) жуфт кучи билан $(\overline{P}, P^1)$ жуфт кучининг моментлари тенг эканлигини исботлаймиз.

$(\overline{F})$ кучи $\overline{P}$ ва $\overline{Q}$ кучларнинг тенг таъсир этувчиси Вариньон теоремасига асосан:

$$m_B(\overline{F}) = m_B(\overline{P}) + m_B(\overline{Q})$$
$$m_B(\overline{F}) = F \cdot d \quad , m_B(\overline{P}) = Pd$$
$$m_B(Q) = 0$$

Шундай қилиб $Fd = Pd_1$ теорема исботланди.

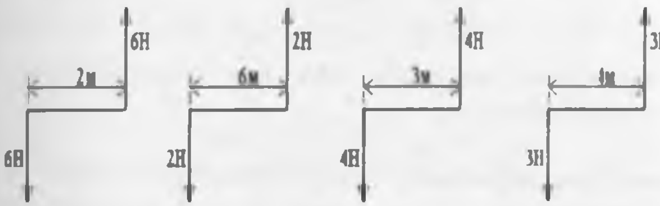
Демак моментлари тенг ва айланиш йўналишлари бир хил бўлган иккита жуфт кучга эквивалент жуфт кучлар дейилади.

Бу теоремадан қуйидаги натижа келиб чиқади.

1. Жуфт кучни ўзининг таъсир текислигида ҳар қандай вазиятга кўчириш мумкин, бунда жуфт кучни жисмга таъсири ўзгармайди.

2. Жуфт кучнинг моментини ўзгартирмай уни ташкил этувчи кучларнинг катталигини ва елкасини исталганча ўзгартириш мумкин бу билан жуфт кучнинг жисмга таъсири ўзгармайди.

Масалан, моменти *m=12 кнм* жуфт куч берилган бўлсин.



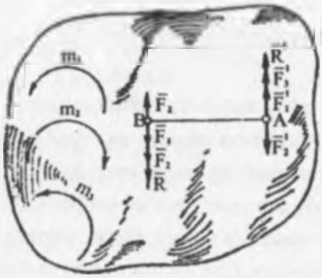
44-расм.

15-§. ТЕКИСЛИКДАГИ ЖУФТ КУЧЛАРНИ ҚЎШИШ. ЖУФТ КУЧЛАРНИНГ МУВОЗАНАТЛИК ШАРТИ

__Теорема__. Бир текисликда жойлашган бир нечта жуфт кучларни қўшиб, моменти шу жуфт кучлар моментларининг йиғиндисига тенг бўлган битта жуфт кучга келтириш мумкин.

__Исбот__. Бир текисликда жойлашган моментлари m_1, m_2, m_3 бўлган жуфт кучлар берилган бўлсин (44-расм). Шу жуфт кучларни қўшиб битта тенг таъсир этувчи жуфт кучга келтириш керак. Берилган жуфт кучларни умумий d елкага эга бўлган эквивалент $(F_1 F_1')$, $(F_2 F_2')$ ва $(F_3 F_3')$ жуфт кучлар билан алмаштирамиз. Эквивалент жуфт кучларнинг таърифига асосан қуйидаги формулани ёзамиз.

$$m_1 = F_1 d, \quad m_2 = -F_2 d, \quad m_3 = F_3 d. \qquad (34)$$



45-расм.

А ва В нуқталарга қўйилган кучларни қўшиб тенг таъсир этувчисини аниқлаймиз.

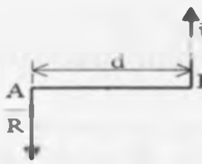
$$R = F_1 - F_2 + F_3$$

$$R' = F_1' - F_2' + F_3' = F_1 - F_2 + F_3$$

Бу кучларнинг модуллари тенг бир бирига қарама-қарши йўналган ва ўзаро параллел.

$$R = R', \quad \bar{R} = -\bar{R}', \quad \bar{R} \parallel \bar{R}'$$

Демак, бу кучлар битта $(\bar{R}, \bar{R}')$ жуфт кучни ташкил этади. Бу жуфт кучга тенг таъсир этувчи жуфт куч дейилади. Демак берилган учта жуфт кучларни қўшиб битта тенг таъсир этувчи янги жуфт кучга келтирдик (46-расм).



46-расм.

Тенг таъсир этувчи жуфт кучнинг моменти қуйидаги формула билан топилади:

$$M = Rd = (F_1 - F_2 + F_3)d = F_1 d + (-F_2 d) + F_3 d = m_1 + m_2 + m_3 \tag{35}$$

$$M = m_1 + m_2 + m_3$$

Бир текисликда жойлашган, моментлари $m_1, m_2, ..., m_n$ га тенг бўлган n та жуфт кучлар берилган бўлса, бу жуфт кучларни қўшиб битта тенг таъсир этувчи жуфт кучга келтириш мумкин.

Тенг таъсир этувчи жуфт кучнинг моменти юқоридаги теоремага асосан

$$M = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$$

$$M = \sum m \quad \text{га тенг булади} \qquad (36)$$

Бир текисликда жойлашган жуфт кучлар мувозанатда булиши учун улар моментларининг йиғиндиси 0 га тенг булиши зарур ва етарлидир.

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_n = 0$$

$$\sum m = 0 \qquad (37)$$

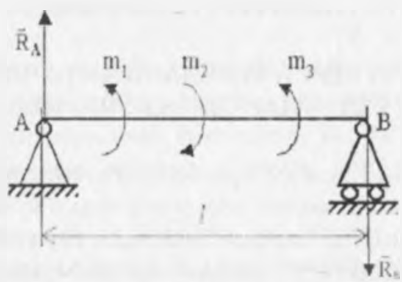
Бу тенглик бир текисликда жойлашган жуфт кучларнинг мувозанат шартини ифодалайди.

Мисол. Балка моментлари

$$m_1 = 6кнм, \quad m_2 = 8кнм, \quad m_3 = 12кнм$$

булган жуфт кучлар таъсирида мувозанатда турган булсин (47-расм).

Балканинг узунлиги ***l=5 м,*** **таянч реакциялари аниқлансин.**



47-расм.

Ечиш. Маълумки жуфт кучни бошқа бир жуфт куч билан мувозанатлаш мумкин, шунинг учун балканинг A ва B таянчдаги R_A ва R_B реакция кучлари жуфт кучни ташкил қилиши керак. Яъни бу кучларни миқдорлари тенг қарама-қарши томонга йуналган ва параллел булиши зарур.

$$R_A = R_B \qquad R_A = -\bar{R}_B, \; R_A \parallel R_B$$

Бу жуфт кучнинг моменти:

$$m_4 = -R_A \cdot l \quad \text{булади.}$$

Демак, балка моментлари m_1, m_2, m_3 *ва* m_4 **ва жуфт кучлари таъсирида мувозанатда туради. (37) - тенгликка асосан:**

$$m_1 - m_2 + m_3 - m_4 = 0; \quad 6 - 8 + 12 - 5R_A = 0; \quad R_A = 2kH$$

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР.

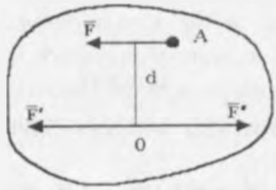
1. Нуқтага нисбатан куч моменти деб нимага айтилади?
2. Момент ишораси қандай танланади?
3. Куч елкаси нима?
4. Қандай ҳолатда нуқтага нисбатан куч моменти нолга тенг булади?
5. Кучларни таъсир чизиғлари буйича кучирилса, берилган нуқтага нисбатан куч моменти узгарадими?
6. Жуфт куч нима? Нима учун жуфт куч тенг таъсир этувчи кучга эга эмас?
7. Вариньон теоремасини таърифланг?
8. Эркин жисм жуфт куч таъсирида қандай ҳаракат қилади?
9. Жуфт кучни моменти деб нимага айтилади?
10. Қандай шарт бажарилганда иккита жуфт куч эквивалент булади?
11. Жуфт кучларни қушиш тугрисидаги теоремани таърифланг.
12. Жуфт кучлар системасининг мувозанат шартини таърифланг.

ТЕКИСЛИКДА ИХТИЁРИЙ ЖОЙЛАШГАН КУЧЛАР СИСТЕМАСИ.

16-§. КУЧНИ УЗИГА ПАРАЛЛЕЛ КУЧИРИШГА ОИД ЛЕММА

Жисмнинг А нуқтасига $\bar{F}$ кучи қуйилган булсин (48-расм).

Шу кучни таъсир чизиғи устида ётмаган *0* нуқтага келтириш керак. *0* нуқтага келтириш маркази дейилади. Шу келтириш марказидан кучнинг таъсир чизиғига перпендикуляр туширамиз ва $\bar{F}$ кучнинг *0* нуқтага нисбатан моментини оламиз.



48-расм.

$$m_0(\bar{F}) = Fd \qquad (38)$$

Бунда d-$\bar{F}$ кучнинг *0* марказга нисбатан елкаси.

Келтириш марказига узаро мувозанатлашувчи $\bar{F}'$ ва $\bar{F}''$ кучларини қуямиз. Бу кучлар берилган $\bar{F}$ кучга тенг ва параллел булиши керак $F' = F'' = F$. Кучни келтириш натижасида берилган кучга геометрик тенг ва параллел булган $\bar{F}' = \bar{F}$ кучга ҳамда $(\bar{F}, \bar{F}'')$ жуфт кучга эга буламиз.

$$R = 0; \quad M_0 = 0 \qquad (43)$$

(43)-тенглик кучлар системасининг геометрик шаклдаги мувозанатлик шартини ифодалайди.

Аналитик куринишидаги мувозанат шартини ёзамиз.

Бош векторнинг модули қуйидаги формула билан аниқланади.

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{\left(\sum X\right)^2 + \left(\sum Y\right)^2} \qquad (44)$$

(43)-тенгликнинг биринчи шарти бажарилиши учун яъни R=0 булиши учун, ΣX=0 ΣY=0 булиши керак. (43)-нинг иккинчисига (42)ни қуямиз $\sum m_0(\bar{F}) = 0$

$$\left.\begin{aligned} &\sum X = 0 \\ &\sum Y = 0 \\ &\sum m_0(\bar{F}) = 0 \end{aligned}\right| \qquad (45) \qquad \left|\begin{aligned} &X_1 + X_2 + ... + X_n = 0 \\ &Y_1 + Y_2 + ... + Y_n = 0 \\ &m_0(\bar{F}_1) + m_0(\bar{F}_2) + ... + m_0(\bar{F}_n) = 0 \end{aligned}\right. \qquad (45')$$

(45)-формула текисликда ихтиёрий жойлашган кучлар системасининг биринчи асосий турдаги аналитик мувозанат шартини ифодалайди. Бу шарт қуйидагича таърифланади: Текисликда ихтиёрий жойлашган кучлар системаси мувозанатда булиши учун кучларнинг x, y ўқларидаги проекцияларининг йиғиндиси ва ихтиёрий *0* нуқтага нисбатан моментларининг йиғиндиси нолга тенг булиши зарур ва етарлидир.

Кучлар системасининг иккинчи ва учинчи турдаги аналитик мувозанатлик шартлари мавжуд. Иккинчи турдаги мувозанатлик шарти

$\sum m_A(\bar{F}) = 0 \quad \sum m_B(\bar{F}) = 0 \quad \sum X = 0$ билан ифодаланади (46)

Текисликда ихтиёрий жойлашган кучлар системаси мувозанатда булиши учун ихтиёрий A ва B нуқталарга нисбатан моментларининг йиғиндиси ва OX ўқига нисбатан проекцияларининг йиғиндиси нолга тенг булиши зарур ва етарли шартдир.

Бу холда *A* ва *B* нуқталарни туташтирувчи *AB* тўғри чизиқ кесмасини x ўқига перпендикуляр булмайдиган қилиб танлаб олиш керак. Акс холда тузилган учта тенгламалардан биттаси қолган иккитасининг натижаси булиб қолади ва иккита тенглама билан учта номаълумни аниқлаб булмайди.

Учинчи турдаги мувозанатлик шарти.

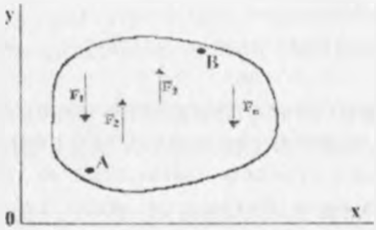
$\sum m_A(\bar{F}) = 0 \quad \sum m_B(\bar{F}) = 0 \quad \sum m_C(\bar{F}) = 0$ билан ифодаланади (47)

Текисликда ихтиёрий жойлашган кучлар системаси мувозанатда булиши учун кучларнинг бир тўғри чизиқ устида ётмаган учта *A*, *B* ва *C* нуқталарга нисбатан моментларининг йиғиндиси нолга тенг булиши зарур ва етарли.

Бу ҳолда момент марказлари A, B ва C нуқталарни бир тўғри чизиқ устида ётмайдиган, яъни учбурчак ҳосил қиладиган, қилиб танлаб олиш керак. Акс ҳолда юқоридаги эслатмага келамиз.

9-§. ТЕКИСЛИКДАГИ ПАРАЛЛЕЛ КУЧЛАРНИНГ МУВОЗАНАТ ШАРТЛАРИ

Бир текисликда жойлашган ва ўзаро параллел булган $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n$ кучлари берилган булсин (57-расм). Кучларга параллел қилиб Y ўқини йўналтирамиз. Параллел кучларга текисликда ихтиёрий йўналган кучларнинг биринчи ва иккинчи турдаги мувозанат шартини тадбиқ қиламиз.



57-расм.

$$\left.\begin{aligned} \sum Y &= 0 \\ \sum m_O(\overline{F}) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (48)$$

$$\left.\begin{aligned} \sum m_A(\overline{F}) &= 0 \\ \sum m_B(\overline{F}) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (49)$$

бунда A ва B нуқталардан ўтган тўғри чизиқ Y ўқига параллел булмаслиги керак. (48) - ва (49) - формулалар бир текисликда жойлашган ва ўзаро параллел булган кучларнинг мос равишда биринчи ва иккинчи турдаги мувозанат шартини ифодалайдилар.

Биринчи турдаги мувозанат шарти қуйидагича таърифланади.

Бир текисликда жойлашган ва бир бирига параллел кучлар системаси мувозанатда булиши учун кучларнинг кучларга параллел булган ўқдаги проекцияларининг йиғиндиси ва текисликдаги ихтиёрий

O нуктага нисбатан олинган моментларининг йиғиндиси нолга тенг бўлиши зарур ва етарлидир.

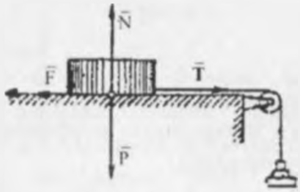
Иккинчи турдаги мувозанат шарти қуйидагича таърифланади

Бир текисликда жойлашган параллел кучлар мувозанатда бўлиши учун кучларнинг ихтиёрий *A* ва *B* нуқталарга нисбатан олинган моментларининг йиғиндиси нолга тенг бўлиши зарур ва етарлидир.

20-§. СИРПАНИШДАГИ ИШҚАЛАНИШ

Бир жисмнинг иккинчи жисм устида сирпаниши натижасида хосил бўладиган ишқаланишга сирпанишдаги ишқаланиш дейилади.

Оғирлиги *P* га тенг жисм горизонтал столга қўйилган бўлсин (58-расм). Жисмни блок орқали ўтказилган ипга боғлаймиз. Ипнинг иккинчи учига палла осиб қўямиз. Жисм оғирлик кучи *P* ва столнинг нормал реакция кучи *N* таъсирида мувозанатда бўлади. Бу кучлар вертикал кучлардан иборат бўлгани учун улар жисмни ҳаракатга келтирмайди. Жисмни ҳаракатга келтириш учун паллага тош қўйиш керак. Лекин жисм паллага маълум миқдорда тош қўймагунча ҳаракатланмайди. Чунки стол юзаси ва жисмнинг столга тегиб турган юзаси силлиқ бўлмагани учун ипнинг тортилиш кучи *T* га миқдор жиҳатдан тенг, йўналиши қарама-қарши бўлган *F* ишқаланиш кучи хосил бўлади. *F* кучга сирпанишдаги ишқаланиш кучи дейилади. *T* кучнинг қиймати (яъни паллага қўйиладиган тош) ортиб бориб, маълум миқдорга етганда жисм силжиш олдида туради, бу ҳолда ишқаланиш кучи $F = F_{max}$ энг катта (максимал) қийматга эга бўлади.

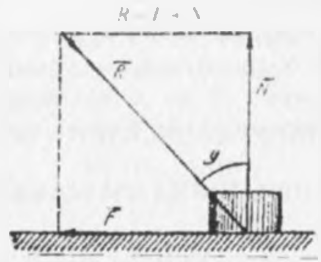


58-расм.

Сирпанишдаги ишқаланиш кучи F нолдан энг катта ишқаланиш кучигача ўзгаради.

$$0 \le F \le F_{max}$$

Шундай қилиб, дағал текисликнинг тўлиқ реакция кучи миқдор ва йўналиши жиҳатдан нормал реакция кучи ва ишқаланиш кучларига қурилган тўғри тўртбурчакнинг диагонали билан ифодаланади (59-расм).



59-расм.

Француз олими Ш. Г. Кулон (1736-1806) ўтказган тажрибаларига асосланиб, сирпанишдаги ишқаланиш қонунларини қуйидагича таърифлаган.

1) Тинч ҳолатдаги максимал ишқаланиш куч нормал реакция кучига пропорционалдир.

$$F_{max}=f\,N \qquad (50)$$

Бунда: F_{max} - сирпанишдаги энг катта ишқаланиш кучи; f - сирпанишдаги ишқаланиш коэффициенти; N - нормал реакция кучи.

2) Ишқаланиш кучи жисмларнинг ишқаланувчи сиртлари ўлчамларига боғлиқ бўлмайди.

3) Сирпанишдаги ишқаланиш кучи жисмлар материалига ва ишқаланувчи юзаларнинг ишқаланиш даражасига боғлиқ бўлади. Юзалар силлиқ бўлса ишқаланиш кучи кам бўлади.

(50) дан

$$f=\frac{F_{max}}{N} \quad \text{келиб чиқади} \qquad (51)$$

Яъни сирпанишдаги ишқаланиш коэффициенти ўлчовсиз катталикдир. Турли материаллар учун ишқаланиш коэффициентининг қийматлари маълумотномаларда келтирилган.

Бир жисм иккинчиси устида ҳаракатланганда ҳосил буладиган ишқаланиш кучи ҳам нормал реакция кучига пропорционал булади $F=f' N$. Бунда f'- жисм ҳаракатлангандаги ишқаланиш коэффициенти бўлиб, у жисмнинг ҳолатидаги ишқаланиш коэффициенти f дан кичик булади; $f'<f$

Демак, жисм ҳаракатда бўлганда ишқаланиш кучи тинч турганидагига нисбатан камроқ булар экан.

2-§. ИШҚАЛАНИШ БУРЧАГИ. ИШҚАЛАНИШ КОНУСИ

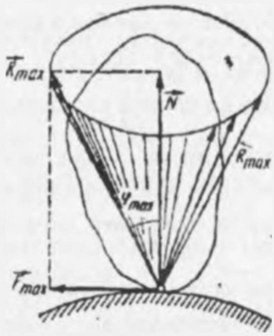
Агар бирор горизонтал текисликка таяниб турган жисм сирпаниш олдида (мувозанат чегарасида) бўлса, ишқаланиш кучи энг катта қийматга эга бўлади (60-расм) ҳамда

$$\bar{R}_{max} = \bar{N} + \bar{F}_{max} \quad \text{бўлади} \qquad (52).$$

Максимал тулиқ реакция кучининг нормал реакция кучи билан ташкил қилган бурчаги ишқаланиш бурчаги дейилади. 72 - расмдан кўриниб турибдики,

$$tg\varphi = \frac{F_{max}}{N} = \frac{fN}{N} = f \qquad tg\varphi = f \qquad (53)$$

Шундай қилиб, ишқаланиш бурчагининг тангенси ишқаланиш коэффициентига тенг бўлар экан. Сирпанишдаги ишқаланиш коэффициенти f қанча кичик бўлса, ишқаланиш бурчаги шунча кичик бўлади.



60-расм.

Агар $f=0$ бўлса, $\varphi=0$ га тенг бўлади. Бу ҳолда сирпанувчи жисмларнинг юзалари абсолют силлиқ бўлади. Абсолют силлиқ текисликнинг реакция кучи текисликка перпендикуляр йўналади.

Горизонтал дағал текисликда тинч ҳолда ётувчи жисмга текисликка ўтказилган нормал билан α бурчак ташкил этувчига Q куч таъсир этсин (61-расм). Q кучни нормал реакция кучи билан мувозанатлашувчи P ва жисмни силжитишга интилувчи S иккита ташкил этувчига ажратамиз. Уларнинг модули:

$$P=Q\cos\alpha, \qquad S=Q\sin\alpha$$

Бунда δ - думалашдаги ишқаланиш коэффициенти булиб, узунлик бирлиги билан улчанади. Тажрибаларнинг курсатишича, думалашдаги ишқаланиш коэффициенти жисмларнинг материалига, ишқаланувчи сиртларнинг ишланиш даражасига, гилдиракнинг радиусига ва нормал босимга боғлиқ булади. (55) - ва (56) – формулалардан:

$$Q R = \delta N, \qquad (57)$$

бундан

$$Q = \frac{\delta}{R} N \quad \text{келиб чиқади} \qquad (58)$$

(58)-тенгликдан курамизки (Q, F) ва (P, N) жуфт кучларнинг моментлари узаро тенг булар экан. Бу жуфт кучларга узаро мувозанатлашувчи жуфт кучлар дейилади.

$$F < fN, \quad \frac{\delta}{R} \cdot N < fN, \quad \frac{\delta}{R} < f \qquad (59)$$

(59)-формуладан курамизки гилдирак сирпанмасдан думалаши учун думалашдаги ишқаланиш кучи сирпанишдаги максимал ишқаланиш кучидан кичик булиши зарур; бунда f сирпанишдаги ишқаланиш коэффициенти. (59) - тенгсизлик бажарилганда гилдирак сирпанмасдан думалайди.

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР.

1. Қўшилган жуфт куч деб нимага айтилади ва унинг моменти нимага тенг?
2. Кучлар системасининг бош вектори деб нимага айтилади ҳамда уни қандай аниқлаш мумкин?
3. Бош момент деб нимага айтилади ва у қандай аниқланади?
4. Бош вектор тенг таъсир этувчи кучдан нима билан фарқ қилади?
5. Келтириш маркази узгартирилганда, берилган кучлар системасининг бош вектори ва бош моменти ўзгарадими?
6. Текисликда ихтиёрий жойлашган кучлар системасини қандай ҳолларда битта кучга еки битта жуфт кучга келтириш мумкин?
7. Текисликда ихтиёрий жойлашган кучлар системасининг аналитик мувозанат шарти қандай таърифланади?
8. Мувозанат тенгламаларини уч турини ёзинг?
9. Текисликдаги параллел кучлар системасининг мувозанат тенгламаларини ёзинг?
10. Ишқаланиш бурчаги деб нимага айтилади?
11. Ишқаланиш конуси деб нимага айтилади?

12. Ишқаланиш бурчаги билан ишқаланиш коэффициенти орасида қандай боғланиш мавжуд?
13. Ишқаланиш кучи деб нимага айтилади?
14. Думалаб ишқаланиш коэффициенти деб нимага айтилади?
15. Думалаб ишқаланиш моменти нимага тенг?
16. Ишқаланишнинг қандай турларини биласиз?
17. Сирпаниб ишқаланиш кучи қаиси формула билан аниқланади?
18. Мувозанат сохаси нима?
19. Сирпаниб ишқаланиш яхшими ёки думалаб ишқаланиш яхшими ва нима учун?

23-§. ФЕРМА ҲАҚИДА ТУШУНЧА

Тўғри чизиқли стерженлардан ташкил топган геометрик ўзгармас конструкцияга ферма дейилади. Стерженларнинг учларини бирлаштирувчи нуқта тугун дейилади. Стерженлари бир текисликда ётувчи ферма текис ферма дейилади. Фермага таъсир қилувчи кучлар унинг тугунларига қўйилган бўлади. Тугунларга қўйилган кучлардан ферманинг стерженлари фақат чўзилиши ёки сиқилиши мумкин.

Фермалардаги стерженларнинг сони билан тугунлар сони орасида қуйидаги боғланиш мавжуд:

$$m=2n-3$$

Бунда m – фермадаги стерженларнинг сони

n – тугунлар сони

Агар $m<2n-3$ бўлса, у ҳолда ферма геометрик ўзгарувчан бўлади ва $m>2n-3$ бўлганда геометрик ўзгармас бўлиб, у ортиқча стерженларга эга бўлади. Геометрик ўзгармас ва статик аниқ фермани тузиш учун $m=2n-3$ шарти бажарилиши зарур.

Ферма таянчларининг реакцияларини ва фермага қўйилган кучлар таъсиридан унинг стерженларида ҳосил бўладиган зўриқишларни аниқлаш мумкин. Бу зўриқишларни билиш фермани лойиҳалаш вақтида керакли мустаҳкамликдаги стерженларни танлаб олиш учун зарурдир. Бу масалани ечишда:

- ферма стерженларининг оғирлиги эътиборга олинмайди;
- тугунлардаги ишқаланиш ҳисобга олинмайди.

Фермага таъсир этувчи кучлар фақат унинг тугунларига қўйилади деб фараз қилинади.

У ҳолда ферманинг ҳар бир стерженига, унинг учларига қўйилган ва стержен бўйлаб йўналган икки куч таъсир қилади. Демак, ферманинг стерженлари бу кучлар таъсирида фақат чўзилиши ёки сиқилиши мумкин.

Ферма стерженларидаги зўриқишлар асосан қуйидаги усуллар билан аниқланади: *1. Тугунлари ёки стерженларни кесиш усули, 2. Риттер усули; 3. Максвелл - Кремон диаграммасини қуриш усули.*

24-§. ФЕРМА СТЕРЖЕНЛАРИДАГИ ЗЎРИҚИШЛАРНИ ТУГУНЛАРНИ КЕСИШ УСУЛИ БИЛАН АНИҚЛАШ

Ферманинг ҳамма стерженларида ҳосил бўладиган зўриқишларни аниқлаш учун тугунни кесиш усулидан фойдаланилади. Бу усул билан ферманинг стерженларидаги зўриқишларни график ва аналитик усул билан аниқлаш мумкин. Ферманинг тугун кесиш усули билан аналитик ҳисоблаш тартиби қуйидагичадир

Берилган ферманинг тугунларини ҳарфлар билан, стерженларини эса рақамлар билан белгилаб чиқилади.

Таянчлар олиб ташланади ва уларнинг фермага берадиган таъсирини ҳозирча бизга номаълум бўлган таянч реакциялари билан алмаштирилади. Таянч реакция кучлари аниқланади.

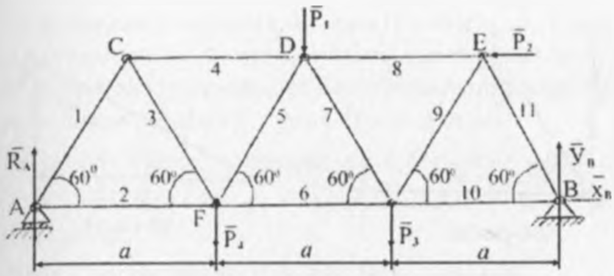
Ферманинг тугунларини кесиб олинади (кесилган тугунлар схемаси чизилади):

Ферманинг ҳамма стерженлари чўзилган (зўриқишлар тугунлардан стерженлар томонига йўналган) деб фараз қилиб, ферманинг ҳар бир тугуни учун мувозанат тенгламалари ($\sum X = 0; \sum Y = 0$) тузилади. Тугундан тугунга ўтиш тартиби текшираётган тугундаги номаълум кучлар сони иккитадан кўп бўлмаслиги керак, деган талабни қондириши лозим.

Бу мувозанат тенгламалари ечилади ва стерженлардаги изланаётган зўриқишларнинг катталиги ҳамда ишораси аниқланади.

<u>Мисол.</u> Ферманинг таянч реакциялари ва стерженларида пайдо бўладиган зўриқиш кучлар аниқлансин (63-расм). Қуйидагилар берилган:

$$a=5м;\ P_1=10кН,\ P_2=20кН,\ P_3=30кН,\ P_4=40кН.$$



63-расм.

<u>Ечиш.</u> 1) Таянч реакцияларни аниқлаш.

Фермага берилган кучлар, $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \bar{P}_4$ B қўзғалмас таянч $\bar{X}_B$ ва $\bar{Y}_B$ реакциялари, A қўзғалувчан таянчнинг $\bar{R}_A$ реакцияси қўйилган. Бу кучлар текисликда ихтиёрий равишда жойлашган кучлар бўлгани учун уларнинг мувозанат шарти қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$\sum X = 0; X_B - P_2 = 0 \qquad X_B = P_2 = 20кМ$$

$$\sum Y = 0; R_A - P_1 - P_3 - P_4 + Y_B = 0;$$

$$\sum M_A = 0; -P_4 \cdot a - P_1 \cdot \frac{3}{2}a - P_3 \cdot 2a + P_2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a + Y_B \cdot 3a = 0$$

Тузилган тенгламаларни ечиб реакция кучларини аниқланади:

$$Y_B = \frac{P_4 + P_1 \cdot \frac{3}{2} + P_3 \cdot 2 - P_2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{3} = \frac{40 + 10 \cdot \frac{3}{2} + 30 \cdot 2 - 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{3} = 32{,}56\,кН$$

$$R_1 = P_1 + P_3 + P_4 - Y_B = 10 + 30 + 40 - 32{,}56 = 47{,}44\,кН$$

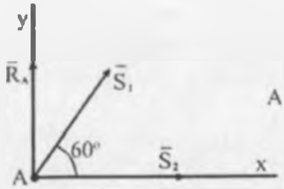
2) Стерженларда ҳосил бўладиган зўриқиш кучларини аниқлаш. Ферманинг тугунларини $A, B, C, Д, E$ ва F ҳарфлар билан белгиланади. Энг олдин A ёки B тугунларини кесиш мумкин. Чунки бу тугунларда реакциялари аниқланмаган икки стержен (1,2 ёки 10 ва 11 стерженлар) бор. A тугуни кесилади. A тугунга A шарнирнинг $\bar{R}_A$ реакцияси ва кесилган 1 ва 2 - стерженнинг $\bar{S}_1$ ва $\bar{S}_2$ реакциялари қўйилган (64- расм). A тугунга қўйилган кесишувчи кучларнинг мувозанат тенгламалари тузилади:

$$\sum X = 0; S_2 + S_1 \cos 60^0 = 0$$

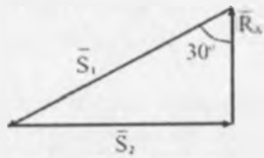
$$\sum Y = 0; R_A + S_1 \sin 60^0 = 0$$

$$S_1 = -\frac{R_A}{\sin 60^0} = 2 \cdot \frac{47.44}{\sqrt{3}} = -54.78кН$$

$$S_2 = -S_1 \cos 60^0 = -(-54.78) \cdot 0.5 = 27.39кН$$



64-расм.



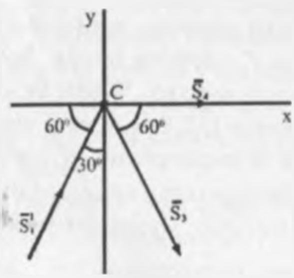
65-расм.

S_1 кучидаги (-) ишора, $\bar{S}_1$ реакция кучи расмда кўрсатилган йўналишга тескари қараб йўналганлигини кўрсатади, яъни 1 – стержен сиқилади. Энди реакция кучларининг йўналишларини тўғри топилганини куч учбурчагини ясаб текшириб қўйилади, бу учбурчак ёпиқ бўлиши керак (65-расм).

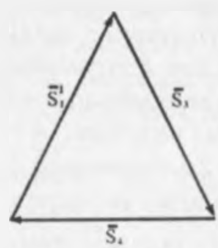
3) Энди қайси тугунга ўтамиз деган савол тугилади. Кесиладиган тугунлар реакцияси аниқланмаган икки стержен бўлиши керак, бу *C* тугундир. *C* тугун кесилади, унга 1 – стерженнинг ҳозиргина аниқланган $\bar{S}_1^{1}$ = - $\bar{S}_1$ реакцияси, кесилган 3 - ва 4 - стерженларнинг $\bar{S}_3$ ва $\bar{S}_4$ реакциялари қўйилган (66- расм).

C тугунга қўйилган кесишувчи кучларнинг мувозанат тенгламалари тузилади:

$$\begin{cases} \sum X = 0; S_4 + S_3 \cos 60^0 + S_1^1 \cos 60^0 = 0 \\ \sum Y = 0; S_3 \cos 30^0 + S_1 \cos 30^0 = 0 \end{cases}$$



66-расм.



67-расм.

Бу тенгламаларни ечиб, 3 - ва 4 -стерженлардаги реакция кучларини аниқлаймиз.

$$\begin{cases} S_3 = S_1^1 = 54.78 кН; S_4 = -S_3 \cos 60^0 - S_1^1 \cos 60^0 = -(S_3 + S_1^1) \cos 60^0 \\ S_4 = -(54.78 + 54.78) \cdot 0.5 = -54.78 кН; S_4 = -54.78 кН \end{cases}$$

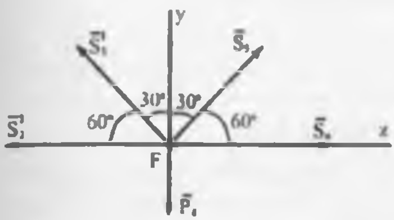
4 – стерженнинг реакцияси манфий булиб чикди. Демак бу стержен сикилади, яъни S_4 куч C тугунга караб йуналган булади. Энди C тугунга қуйилган кучларнинг ҳақиқий йуналишини ҳисобга олиб, куч учбурчаги ясалади (67 -расм). У ёпиқ булиши керак.

4) Энди F тугун кесилади, унга берилган $P_4\ \overline{S_2^1}, \overline{S_3^1}$ реакция кучлари ва кесилган 5 - ва 6 - стерженнинг $\overline{S_5}$ *ва* $\overline{S_6}$ реакциялари қуйилган (68-расм).

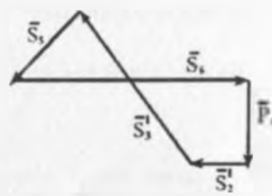
Бу кучлар учун мувозанат тенгламалари тузилади:

$$\sum X = 0; S_6 - S_2^1 + S_5 \cos 60^\circ - S_3^1 \cos 60^\circ = 0$$

$$\sum Y = 0; S_3^1 \cos 30^\circ + S_5 \cos 30^\circ - P_4 = 0;$$



68-расм.



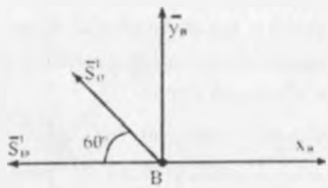
69-расм.

Бу тенгламаларни ечиб, 5- ва 6-стерженлардаги реакция кучлари топилади.

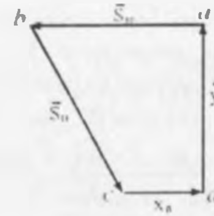
$$\begin{cases} S_5 \cos 30^\circ = P_4 - S_3^1 \cos 30^\circ; S_5 = \dfrac{P_4}{\cos 30^\circ} - S_3^1 = \dfrac{2\cdot 40}{\sqrt{3}} - 54{,}78 kH \\ S_5 = \dfrac{80}{1.73} - 54{,}78 = 46{,}24 - 54{,}78 = -8{,}57 KH\ S_5 = -8{,}54 кH \\ S_6 = S_2^1 - S_5 \cos 60^\circ + S_3^1 \cos^\circ = S_2^1 + (S_3^1 - S_5)\cdot \cos 60^\circ; \\ S_6 = 27{,}39 + (54{,}78 + 8{,}54)\cdot 0{,}5 = 27{,}39 + 63{,}32\cdot 0{,}5; \\ S_6 = 31{,}66 + 27{,}39 = 59{,}05 KH; S_6 = 59{,}05 кH \end{cases}$$

F тугунга қуйилган кучларнинг ҳақиқий йуналишини ҳисобга олиб, куч куп бурчаги ясалади (70-расм).

5) Энди B тугунни кесилади. Унга берилган $\overline{X_B}$ *ва* $\overline{Y_B}$ реакция кучлари ва кесилган 10 - ва 11 - стерженларнинг $\overline{S_{10}}$ *ва* $\overline{S_{11}}$ реакция кучлари таъсир қилади (71-расм). B тугун учун иккита мувозанат тенгламаси тузилади:



71-расм.



72-расм.

$$\sum X = 0;\ X_B - S_{10} - S_{11}\cos 60^\circ = 0$$

$$\sum Y = 0;\ Y_B + S_{11}\cos 30^\circ = 0;$$

Бу тенгламалардан:

$$S_{11} = -\frac{Y_B}{\cos 30^\circ} = -\frac{2\cdot Y_B}{\sqrt{3}}$$

$$S_{11} = -\frac{2\cdot 32{,}56}{1{,}73} = -37{,}64\,KH$$

$$S_{11} = -37{,}64\,KH \qquad \text{келиб чиқади.}$$

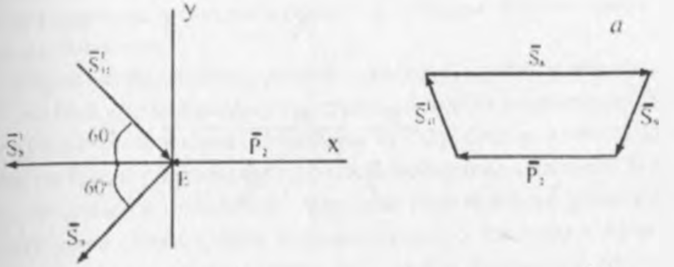
Демак, 11 - стержен сиқилади.

$$S_{10} = X_B - S_{11}\cos 60^\circ = 20 + 37{,}64\cdot 0{,}5$$

$$S_{10} = 20 + 18{,}82 = 38{,}82\,KH \quad S_{10} = 38{,}82\,KH$$

$\overline{S_{10}}$ ва $\overline{S_{11}}$ реакция кучларини график усулда аниқланади. Бунинг учун *B* тугунга қуйилган кучлардан куч кўпбурчаки қурилади (72-расм). Бу кўпбурчак ёпиқ бўлиши керак, чунки *B* тугунга кучлар системаси мувозанатда турибди. Ихтиёрий нуқта олиб, бу нуқтага ўзига параллел қилиб *M=10 кн/м* масштабда $\overline{X_B}$ куч келтириб қуйилади. Унинг учига ўзиа параллел қилиб худди шу масштабда $\overline{Y_B}$ кучи келтирилади. Бу куч учига ўзига параллел қилиб $\overline{S_{10}}$ кучни, унинг учига ўзига параллел қилиб $\overline{S_{11}}$ куч келтирилади. Натижада куч кўпбурчаги ҳосил бўлади (72-расм).

6) Энди *E* тугуни кесилади. Бу тугунга берилган $\overline{P_2}$ куч ҳамда 8-, 9- ва 11-стерженларнинг реакция кучлари қуйилган (73-расм, а). Бунда *E* тугунга қуйилган 11-стерженнинг реакция кучи $\overline{S}_{11}^{1}$ миқдор жиҳатдан $\overline{S}_{11}$ га тенг ва унга қарама–қарши йўналганлигини эътиборга олиш лозим. *E* тугун учун иккита мувозанат тенгламалари тузилади:



a) b)

73-расм.

$$\begin{cases}\sum X = 0; -P_2 - S_8 - S_9\cos 60^\circ + S_{11}\cos 60^\circ = 0\\ \sum Y = 0, -S_{11}^1\cos 30^\circ - S_9\cos 30^\circ = 0;\end{cases}$$

Бу тенгламаларни ечиб:

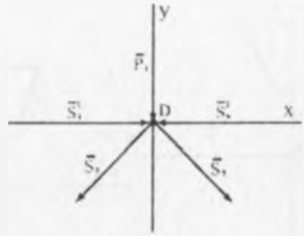
$S_8 = -P_2 - S_9\cos 60^\circ + S_{11}\cos 60^\circ = -20 - 37{,}6\cdot 0{,}5 + 37{,}6\cdot 0{,}5 = 38{,}8 + 18{,}8 = -20KH$

$S_9 = S_{11}^1 = 37{,}64KH$. $S_8 = -20KH$ олинади.

E тугун учун куч купбурчаги (73- расм, b).

Энди D тугунни кесилади. Бу тугун берилган $\overline{P_1}$ куч ҳамда 4-, 5-, 6-, 7-, ва 8-стерженларнинг реакция кучлари қуйилган (74-расм). Мувозанат тенгламаларини тузишда 4-, 5-, ва 8 - стерженларнинг реакция кучлари $\overline{S_4^1}, \overline{S_5^1}$ *ва* $\overline{S_8^1}$ C, F ва E тугунларга қуйилган $\overline{S_4}, \overline{S_5}$ *ва* S_8 реакцияси кучларга миқдор жиҳатдан тенг, йуналиши қарама-қарши эканлигини эътиборга олиш лозим. $Д$ тугун учун битта мувозанат тенгламасини тузиш кифоя, битта номаълум стерженнинг зуриқишини аниқлаш қолди холос. 7-стержендаги реакция кучи аниқланади:

$$\begin{cases}\sum Y = 0; -P_1 + S_5^1\cos 30^0 - S_7\cos 30^0 = 0\\ S_7\cos 30^0 = -P_1 + S_5^1\cos 30^0\\ S_7 = -\dfrac{P_1}{\cos 30^0} + S_5^1 = -\dfrac{2\cdot P_1}{\sqrt{3}} + S_5^1\\ S_7 = -\dfrac{2\cdot 10}{1{,}73} + 8{,}54 = -1156 + 8{,}54 = -3{,}02\\ S_7 = -3{,}02KH.\end{cases}$$



74-расм.

Демак, 7 - стержен сиқилади.

Стержендаги зуриқиш миқдор жиҳатдан унга реакция кучига тенг булади. Сиқиладиган стержендаги зуриқиш кучи шартли равишда манфий ишора билан белгиланади. Олинган натижалар қуйидаги жадвалда келтирилган:

Стержень рақами	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11
Зўриқиш, кН хисобида	-54,78	-27,39	54,78	-54,78	-8,54	59,05	-3,02	-20	-37,84	38,82	-37,64

25-§. ФЕРМА СТЕРЖЕНЛАРИДАГИ ЗЎРИҚИШЛАРНИ РИТТЕР УСУЛИ БИЛАН АНИҚЛАШ

Агар текис ферманинг барча стержинларидаги зўриқишларни аниқлаш зарур бўлса тугунни кесиш усулидан фойдаланиш энг қулай ҳисобланади. Лекин ферманинг айрим стержинларидаги зўриқишларни аниқлаш лозим булса, у ҳолда Риттер 1826-1906 томонидан кашф қилинган ва унинг номи билан аталадиган усулдан фойдаланиш мақсадга мувофиқдир. Бу усулда ҳам дастлаб ферманинг таянч реакциялари аниқланади.

Риттер усулининг моҳияти шундан иборатки, ферма бирор I-I кесим билан қирқиб икки қисмга ажратилади ва ажратилган қисмнинг мувозанати текширилади. Текисликда ихтиёрий жойлашган кучлар системасининг мувозанат тенгламалари ёрдамида учта номаълум катталикни аниқлаш мумкин. Шу сабабли фермани шундай кесим билан кесиш керакки, реакция кучлари номаълум булган стерженлар сони учтадан ошмасин.

Ферманинг кесилган бир қисмини ташлаб қуйиб, унинг ферманинг иккинчи қисмига курсатадиган таъсирини кесилган стерженлар буйлаб ташлаб қуйилган томонга йуналган кучлар билан алмаштирамиз, яъни барча кесилган стерженлар чузилади деб фараз қиламиз. Тузилган мувозанат тенгламаси ечилганда бирорта стерженнинг реакция кучи манфий ишорали чиқса, унинг йуналиши қабул қилинган йуналишга қарама-қарши булиб, мазкур стержен аслида сиқилади. Ферманинг қолган қисми учун текисликда ихтиёрий жойлашган кучлар системасининг мувозанат тенгламалари тузилиб ва бу тенгламаларни ечиб, стерженларнинг номаълум реакция кучлари аниқланади. Тенгламалар тузишда имкони борича ҳар бир тенгламада номаълумлар сони биттадан ошмаслигига ҳаракат қилиш керак. Тенгламаларни тузишда момент маркази учун учта номаълум реакция кучидан кетма – кет иккитасининг таъсир чизиги кесишган нуқтани олиш тавсия этилади. Бундай нуқталар момент ёки **Риттер** нуқталари деб аталади. Агар реакция кучи аниқланадиган учта стержендан иккитаси параллел булса, демак уларнинг кесишиш нуқтаси чексизликда ётади, моментлар тенгламасидан бирининг урнига кучларнинг параллел стерженларга перпендикуляр уқга проекцияси тенгламасини тузиш мумкин, яъни $\sum Y = 0$ ёки $\sum X = 0$.

Риттер усулининг афзаллиги шундаки, у ферманинг исталган стерженидаги зуриқишни бошқа стерженлардаги зуриқишларни ҳисобламай туриб аниқлашга имкон беради. Унинг соддалиги шундаки, баён қилинган усулда тузилган ҳар бир тенгламага факат битта номаълум киради.

Риттер усули билан 1 – масалада берилган ферманинг 2-, 3-, 4-, 6-, 7- ва 8-стреженларидаги зуриқишларни аниқлаймиз. Юқорида курганимиздек, фермага $P_1 = 10\ kH$, $P_2 = 20\ kH$, $P_3 = 30\ kH$. $P_4 = 40\ kH$ кучлар таъсир этади ва унинг таянч реакциялари R_A=47,44 кН, X_B=20 кН, Y_B=32,56 кН га тенг.

2-, 3- ва 4 - стерженлардаги зуриқишни топиш учун ферманинг 2-, 3- ва 4-стерженларини I-I кесим билан кесилади. Ферманинг унг томони ташлаб қуйилади, қолдирилган қисмнинг чап қисмига берадиган таъсирини мос стерженлар буйлаб йуналган $\overline{S}_2, \overline{S}_3$ ва $\overline{S}_4$ зуриқиш

<u>Исбот:</u> Фазодаги бирор A нуқтага кучи қўйилган бўлсин (79 расм).

Бу кучни O нуқтага нисбатан моменти шу нуқтага қўйилган вектор катталик бўлиб, ОАВ учбурчак текислигига перпендикуляр йўналган, унинг модули қуйидаги формула билан топилади;

$$M_0 = 2\,\Delta OAB \text{ юзи} \qquad (63)$$

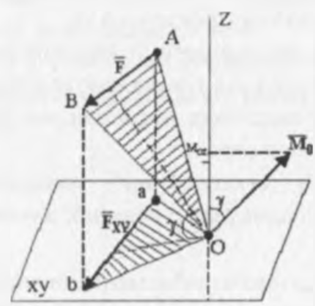
Момент векторининг z ўқи билан ташкил қилган бурчагини γ билан белгиласак момент векторининг z ўқидаги проекцияси қуйидагича ифодаланади.

$$\left[\overline{M}_0(\overline{F})\right]_z = \left[M_0(\overline{F})\right]\cos\gamma = 2S_{\Delta OAB}\cdot\cos\gamma \qquad (64)$$

ОАВ ва оав учбурчакларининг текисликлари орасидаги бурчак бу текисликларга перпендикуляр йўналган вектор ва ўқ орасидаги γ бурчакка тенг. ОАВ учбурчакнинг ху текисликдаги проекцияси оав га тенг бўлганлиги учун

$$2S_{\Delta OAB}\cdot\cos\gamma = 2S_{\Delta oab} \qquad (65)$$

У холда
$$\left[\overline{M}_0(\overline{F})\right]_z = M_0\cos\alpha \qquad (66)$$



79-расм.

79-расмда $F_{xy}\cdot h=2S_{\Delta oab}$ бўлганлиги учун (60) га асосан

$$M_z(\overline{F}) = \pm 2S_{\Delta oab} \qquad (67)$$

(66) ва (67) ни солиштириб қуйидаги олинади.

$$M_z(\overline{F}) = \left[\overline{M}_0(\overline{F})\right]_z \qquad (67')$$

Худди шунингдек кучнинг қолган координата ўқларга нисбатан моментлари ҳисобланади. Натижада

$$M_x(\overline{F}) = \left[\overline{M}_0(\overline{F})\right]_x, \quad M_y(\overline{F}) = \left[\overline{M}_0(\overline{F})\right]_y, \quad M_z(\overline{F}) = \left[\overline{M}_0(\overline{F})\right]_z,$$

формула келиб чиқади.

Демак (67') – формула нуктага нисбатан куч моменти билан шу нуктадан утган укга нисбатан куч моменти орасидаги муносабатни ифодалайди: Нуктага нисбатан куч моментининг шу нуктадан утган укдаги проекцияси кучнинг шу укга нисбатан олинган моментига тенг.

28-§. КООРДИНАТА УҚЛАРИГА НИСБАТАН КУЧ МОМЕНТИНИ ҲИСОБЛАШ УЧУН ФОРМУЛАЛАР

F кучнинг координата укларидаги проекциялари Fx, Fy, Fz ва шу куч куйилган A нуктанинг x, y, z координаталари берилган булсин (80-расм). Координата бошини O нуктада олиб x, y, z укларини утказамиз. Координата укларини бирлик векторини i, j, k билан белгилаймиз.

$M_0(F) = r \times F$ ни

дитерминанд шаклида ёзамиз.

$$M_0(F) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix}$$

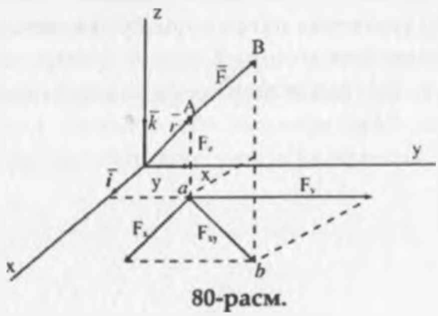
Дитерминантнинг биринчи йулини элементлари буича ёйиб чикамиз.

$$\bar{M}_0(\bar{F}) = (yZ - zY) \cdot i + (xZ - zX) \cdot j + (xY - yX) \cdot k \qquad (68)$$

(68) - формулада бирлик векторлар олдидаги коэффициентлар кучининг координата укларидаги моменти булади.

$$m_x(F) = yFz - zFy$$
$$m_y(F) = zFx - xFz \qquad (68')$$
$$m_z(F) = xFy - yFx$$

(68')-формулалар кучнинг координата укларига нисбатан моментларининг аналитик ифодасидир.



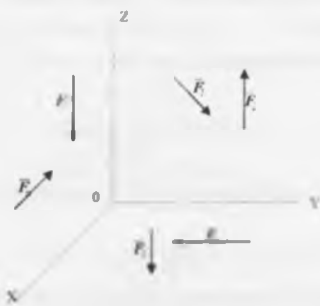
80-расм.

29-§. ФАЗОДА ИХТИЁРИЙ ЖОЙЛАШГАН КУЧЛАР СИСТЕМАСИНИ БЕРИЛГАН МАРКАЗГА КЕЛТИРИШ. КУЧЛАР СИСТЕМАСИНИНГ БОШ ВЕКТОРИ ВА БОШ МОМЕНТИ

Фазода ихтиёрий жойлашган $F_1, F_2, \ldots, F_n$ кучлар системаси берилган бўлсин (81-расм). Шу кучларни 0 нуқтага келтириш лозим бўлсин. Фазода ихтиёрий жойлашган кучларни текисликда ихтиёрий жойлашган кучларга ўхшаш бош вектор $\bar{R}$ га тенг бўлган битта кучга ва моменти бош момент $\bar{M}_O$ га тенг бўлган битта жуфт кучга келтириш мумкин. Бош вектор берилган кучларнинг геометрик йиғиндисига тенг

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \bar{F}_4 + \ldots + \bar{F}_n = \sum \bar{F}$$

$$\bar{R} = \sum \bar{F} \qquad (69)$$



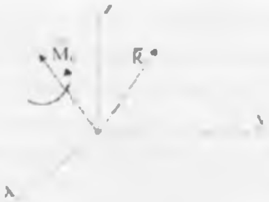
81-расм.

Бош момент эса келтирилиши керак бўлган кучларнинг келтириш марказига нисбатан олинган моментларнинг геометрик йиғиндисига тенг.

$$\bar{M}_O = \bar{m}_O(\bar{F}_1) + \bar{m}_O(\bar{F}_2) + \ldots + \bar{m}_O(\bar{F}_n) = \sum \bar{m}_O(\bar{F})$$

$$\bar{M}_O = \sum \bar{m}_O(\bar{F}) \qquad (70)$$

Шундай қилиб; фазода ихтиёрий жойлашган кучлар системасини бирор 0 марказга келтириш натижасида бу кучлар системаси келтириш марказига қўйилган бош вектор $\bar{R}$ га тенг битта куч билан, момент эса бош момент $\bar{M}_O$ га тенг битта жуфт кучга келтирилади (82-расм).



82-расм.

30-§. ФАЗОДА ИХТИЁРИЙ ЖОЙЛАШГАН КУЧЛАР СИСТЕМАСИНИНГ БОШ ВЕКТОРИ ВА БОШ МОМЕНТИНИ ҲИСОБЛАШ

1. Бош векторни ҳисоблаймиз. Бунинг учун (69)-вектор тенгламанинг иккала қисмини координата ўкларига проекциялаймиз.

$$R_x = X_1 + X_2 + \dots + X_n = \sum X$$
$$R_y = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n = \sum Y \qquad (71)$$
$$R_z = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n = \sum Z$$

(71)-формула билан бош векторнинг координата ўкларидаги проекциялари топилади.

Бош векторнинг модули қуйидаги формулалар билан топилади.

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \quad \text{ёки}$$
$$R = \sqrt{\left(\sum X\right)^2 + \left(\sum Y\right)^2 + \left(\sum Z\right)^2} \qquad (72)$$

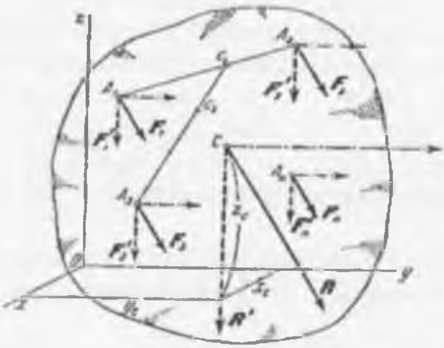
Бош векторнинг йўналиши эса қуйидаги формула билан аниқланади.

$$\cos\alpha = \frac{R_x}{R}; \quad \cos\beta = \frac{R_y}{R}; \quad \cos\gamma = \frac{R_z}{R} \qquad (73)$$

бунда, α, β, γ, - R - билан x, y, z ўклари орасидаги бурчаклар.

2. Бош моментни ҳисоблаш.

Бунинг учун вектор тенгламанинг икки қисмини координата ўкларига проекциялаймиз ва нуқтага нисбатан куч моменти билан шу нуқтадан ўтган ўққа нисбатан куч моменти орасидаги муносабатдан фойдаланиб бош моментнинг координата ўкларидаги проекцияларини аниқлаймиз.



85-расм.

Бу миқдорларнинг ҳаммаси (82) тенгликга қўйилса,

$R \cdot X_c = F_1X_1 + F_2X_2 + \ldots + F_nX_n$ бўлади.

Бундан Xc яъни параллел кучлар марказининг абсциссаси аниқланади:

$$X_c = \frac{F_1X_1 + F_2X_2 + \ldots + F_nX_n}{R} = \frac{\sum F_iX_i}{R}.$$

(83)

y_c координатани аниқлаш учун кучлардан x ўқига нисбатан моментлар олинади:

$$R \cdot Y_C = F_1Y_1 + F_2Y_2 + \ldots + F_nY_n$$

$$Y_c = \frac{F_1Y_1 + F_2Y_2 + \ldots + F_nY_n}{R} = \frac{\sum F_iY_i}{R}; \qquad (84)$$

z_c координатани аниқлаш учун ҳамма кучларни қўйилган нуқталари атрофида Y ўқига параллел бўлганча бурамиз ва бу кучларга (нуқта билан пунктир қилиб тасвирланган) Вариньон теоремасини тадбик этиб, улардан X ўқга нисбатан моментлар олинади:

$$-R \cdot Z_c = -F_1Z_1 + (-F_2Z_2) + \ldots + (-F_nZ_n) \qquad (85)$$

бундан Zc аниқланади.

$$Z_c = \frac{F_1Z_1 + F_2Z_2 + \ldots + F_nZ_n}{R} = \frac{\sum F_iZ_i}{R} \qquad (86)$$

(84) - (86) - формулалар билан параллел кучлар марказининг координаталари топилади, бунда **R** - (85) тенглик билан аниқланади.

(85) - (86) - формулаларнинг ҳар бирини мос равишда i, j, k. бирлик векторларига кўпайтириб ва қўшиб, параллел кучлар марказининг радиус – вектори аниқланади:

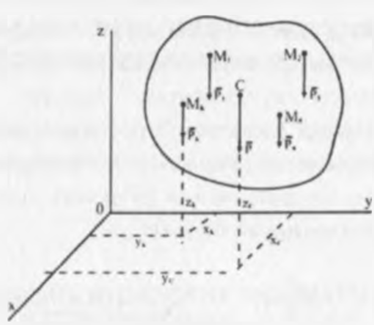
$$\bar{r}_c = X_c \bar{i} + y_c \bar{j} + Z_c \bar{k} \qquad \bar{r}_c = \frac{F_1 \bar{r}_1 + F_2 \bar{r}_2 + \ldots + F_n \bar{r}_n}{R} = \frac{\sum F_k \bar{r}_k}{R}, \quad k = \overline{1,n} \qquad (87)$$

(84) - (87) - формулалардан куринадики, параллел кучларнинг тенг таъсир этувчиси қуйилган С нуқтанинг холати кучларнинг йуналишига боғлик булмай, уларнинг миқдори ва қуйилган нуқталарининг координаталарига боғлиқдир. Шунга асосан, агар кучлар қўйилган нуқталарни узгартирмай, барча кучлар бирор α бурчакка бурилса, бу кучларнинг тенг таъсир этувчиси хам шу бурчакка бурилиб қуйилган нуқтасининг холати узгармайди

34-§. ҚАТТИҚ ЖИСМНИНГ ОҒИРЛИК МАРКАЗИ КООРДИНАТАЛАРИНИНГ УМУМИЙ ФОРМУЛАЛАРИ

Бирор қаттиқ жисмнинг хар бир булагига ернинг марказига караб йуналган тортиш кучи (оғирлик кучи) таъсир этади. Бу кучларни $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots \bar{P}_n$ билан белгиланади. Ернинг радиусига нисбатан жисмнинг улчамлари жуда кичик булгани учун бу кучларни параллел кучлар деб қараш мумкин. Бу параллел кучларнинг маркази – C нуқта жисмнинг оғирлик маркази булади (86-расм).

Агар (86)-(87)- формулалардаги F_K кучларнинг ўрнига P_k кучларни олинса, жисмнинг оғирлик маркази координаталари топилади:

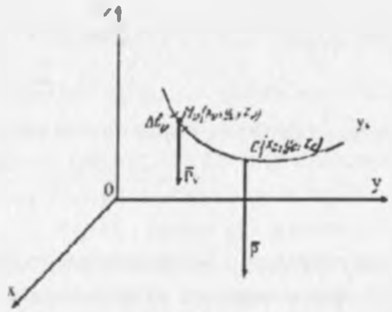


86-расм.

$$\left.\begin{aligned} X_c &= \frac{1}{P} \cdot \sum p_k x_k \\ Y_c &= \frac{1}{P} \cdot \sum p_k y_k \\ Z_c &= \frac{1}{P} \cdot \sum p_k z_k \end{aligned}\right\} \qquad (88)$$

оғирлик марказининг координаталари x_k, y_k, z_k билан белгиланади. p ва P_k нинг қийматлари (88)-формулаларга қўйилади:

$$x_c = \frac{\sum p l_k x_k}{pL} = \frac{p \sum l_k x_k}{pL} \qquad (92)$$



88-расм.

$$\left.\begin{aligned} x_c &= \frac{1}{L}\cdot\sum l_k x_k, \\ y_c &= \frac{1}{L}\cdot\sum l_k y_k, \\ z_c &= \frac{1}{L}\cdot\sum l_k z_c \end{aligned}\right\} \qquad (93)$$

Бу ерда L - бутун чизиқнинг узунлиги, Координаталари (93)-формулалар билан аниқланадиган C нуқтага чизиқнинг оғирлик маркази дейилади.

37-§. ЖИСМЛАРНИНГ ОҒИРЛИК МАРКАЗИНИ АНИҚЛАШ УСУЛЛАРИ

1) Симметрия усули. 1-теорема: Агар жисм симметрия ўқига эга бўлса, жисмнинг оғирлик маркази шу симметрия ўқида ётади. Симметрия ўқига эга бўлган жисм берилган бўлсин (88-расм). Координата ўқларининг бирини мисол учун z ўқини симметрия ўқи бўйича йўналтирилади. Жисм оғирлик марказининг икки координатаси (94)-формулалар билан аниқланади;

$$x_c = \frac{\sum v_k x_k}{V};\ y_c = \frac{\sum v_k y_k}{V} \qquad (94)$$

Бу жисмдан z ўқига нисбатан симметрик жойлашган икки M_k ва M_k' нуқталар олинади. Уларнинг атрофидан бир - бирига тенг бўлган V_k

элементар ҳажм ажратиб олинади. M_k ва M_k^1 нуқталар уқига перпендикуляр бўлган битта тўғри чизиқда ётибди ва бу нуқталардан ўқигача бўлган масофалар тенг;

$$M_k N_k = N_k M_k .$$

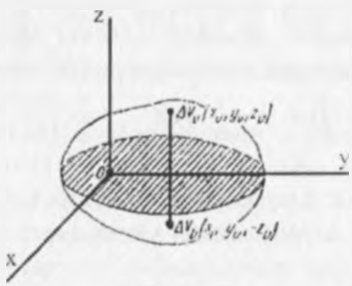
Демак, бу нуқталарнинг x_k ва y_k координаталари ўзаро тенг, ишоралари эса тескари бўлади. У ҳолда ҳар бир x_k, y_k, z_k координаталар билан аниқланадиган V_k ҳажмли бўлакчага мос келади. Шу сабабли $\sum V_k x_k = 0$ ва $\sum V_k y_k = 0$ тенг бўлади. $\sum V_k x_k = V_1 X_1 + V_2 X_2 + \ldots + V_N X_N - V_1 X_1 - V_2 X_2 - \ldots - V_N X_N = 0$ шунинг учун $x_c = 0$ ва $y_c = 0$ жисмнинг оғирлик маркази z ўқида ётади ва унинг бу ўқдаги ҳолати битта координата билан аниқланади:

$$z_C = \frac{1}{V} \sum V_K z_K \qquad (94')$$

2–теорема: Агар жисм симметрия текислигига эга бўлса, жисмнинг оғирлик маркази шу симметрия текислигида ётади (89-расм). Буни исбот қилиш учун симметрия текислиги орқали *Oxy* текслик ўтказилади. Бу текисликка перпендикуляр қилиб *z* ўқини йўналтирилади. Жисмдан *Oxy* текислигига нисбатан симметрик жойлашган икки M_k ва M_{k1} нуқталар олинади. Бу нуқталарнинг атрофидан υ_k элементар ҳажмларни ажратиб оламиз. M_k ва M_{k1} нуқталар Oxy текислигига перпендикуляр бўлган битта тўғри чизиқда ётибди. Бу нуқталардан симметрия текислигигача бўлган масофалар ўзаро тенг, яъни $M_k N_k = M_k^1 N_k$ (89-расм). Демак, бу нуқталарнинг Z_k координаталари ўзаро тенг бўлиб, ишоралари тескаридир.

$$\sum \upsilon_k Z_k = \upsilon_1 Z_1 + \upsilon_2 Z_2 + \ldots + \upsilon_n Z_n - \upsilon_1 Z_1 - \upsilon_2 Z_2 - \ldots - \upsilon_n Z_n = 0$$

$$Z_c = \frac{1}{V} \sum \upsilon_k Z_k = 0,\ X_c = \frac{1}{V} \sum \upsilon_k X_k,\ Y_c = \frac{1}{V} \sum \upsilon_k Y_k \qquad (95)$$



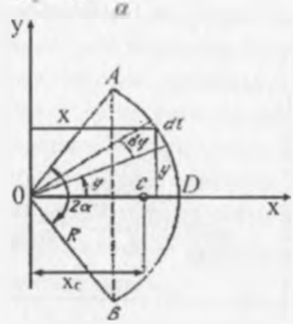
89-расм.

$$X_c = \frac{1}{L}\int_A^B X dl = \frac{1}{L}\int_{-\alpha}^{\alpha} R\cos\gamma \cdot R d\gamma = \frac{R^2}{L}\int_{-\alpha}^{\alpha} R\cos\gamma \; d\gamma = \frac{R^2}{L}\cdot \sin\gamma \Big|_{-L}^{L} = \frac{R^2}{L}\left[\sin\alpha - \sin(-\alpha)\right]$$

$$X_c = \frac{R^2}{L}\cdot\left[\sin\alpha + \sin\alpha\right] = \frac{R^2}{L}\, 2\sin\alpha = \frac{2R^2}{L}\cdot\sin\alpha$$

Бунда L –AB ёйининг узунлиги $L = R \cdot 2\alpha$ га тенг. Демак, айлана ёйининг оғирлик маркази симметрия ўқида ётади ва айлана марказидан масофада бўлади. Бунда α бурчаги радианда ўлчанади.

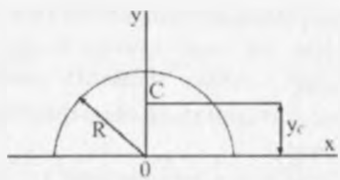
$$X_c = R\cdot\frac{\sin\alpha}{\alpha} \qquad (101)$$



91-расм.

Агар 2α = π га тенг бўлса, ярим Айлана хосил бўлади (92-расм). Буни (99)-формулага қўйсак,

$$y_c = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}\, R = \frac{2}{3.14}\, R = 0.64R \quad y_c = 0.64R$$



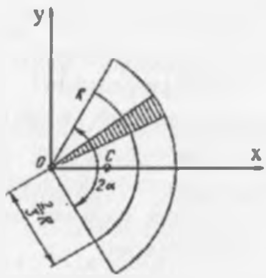
92-расм.

(101)-формула билан ярим айлана ёйининг оғирлик марказининг координатаси топилади.

3. Доира сектори юзасининг оғирлик маркази. Радиуси R, маркази бурчаги 2α га тенг доира сектори юзаси оғирлик марказини аниклаш учун x ўкни сектор юзасининг симметрия ўки бўйлаб йўналтирилади (93-расм).

Сектор юзасининг бир қанча элементар секторлардан ташкил топган деб қаралади. Хар бир элементар секторнинг баландлиги R га тенг учбурчак деб қаралса, унинг оғирлик маркази 0 нуктадан $\frac{2}{3}R$ масофада ётади. OAB Доира секторининг оғирлик маркази радиуси $\frac{2}{3}R$ га тенг AE айлана ёйининг оғирлик маркази билан устма-уст тушади. (101) га асосан

$$x_2 = \frac{2}{3}R\frac{R\sin\alpha}{\alpha} \qquad (101)$$



93-расм.

Агар $\alpha = \frac{\pi}{2}$ га тенг бўлса ярим доира хосил бўлади. (101)-формуладан ярим доира оғирлик марказининг координатаси аникланади.

$$x_c = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}\cdot R = \frac{4}{3\pi}\cdot R = \frac{4}{3\cdot 3.14}\cdot R = 0.42R \qquad (102)$$

$$x_c=0,64R \quad (y_c=0).$$

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР.

1. Ўкка нисбатан куч моменти деб нимага айтилади? Бу моментнинг ишораси қандай танланади?
2. Қандай холларда ўкка нисбатан куч моменти нолга тенг бўлади?
3. Нуктага нисбатан куч моменти билан шу нуктадан ўтган ўкка нисбатан куч моменти орасида қандай боғланиш бор?

4. Берилган кучларнинг координата бошига нисбатан вектор-моменти xOy координата текислигида ётса шу кучларнинг Oz ўққа нисбатан моменти нимага тенг бўлади?
5. Агар кучнинг моменти икки координата ўқларига нисбатан нолга тенг бўлса, берилган кучларнинг координата бошига нисбатан вектор моменти нимага тенг бўлади?
6. Фазода ихтиёрий жойлашган кучлар системаси берилган марказга қандай келтирилади?
7. Кучлар системаси бош векторининг ҳар қайси координата ўқига проекцияси нимага тенг?
8. Кучлар системаси бош моментининг ҳар қайси координата ўқи бошига нисбатан проекцияси нимага тенг?
9. Фазода ихтиёрий йўналган кучлар системасининг аналитик мувозанат шарти қандай таърифланади?
10. Мувозанат тенгламаларини ёзиб, унинг маъносини тушунтиринг?
11. Фазода параллел йўналган кучлар системасининг мувозанат тенгламаларини ёзинг ва унинг маъносини тушунтиринг?
12. Қаттиқ жисмнинг оғирлик маркази деб нимага айтилади? Уни координаталари қандай топилади?
13. Текис шакл юзасининг статик моменти деб нимага айтилади?
14. Қаттиқ жисмнинг оғирлик марказини аниқлаш усулларини айтинг ва ҳар бир усулнинг маъносини тушунтиринг?
15. Учбурчак юзаси, айлана ёки сектор юзасининг оғирлик маркази қандай аниқланади?

КИНЕМАТИКА БЎЛИМИ

39-§. НУҚТА КИНЕМАТИКАСИ

Назарий механиканинг кинематика бўлимида қаттиқ жисмларнинг ҳаракати геометрик нуқтаи назардан текширилади, яъни кинематикада жисмларнинг массаси ва уларга таъсир қилувчи кучлар ҳисобга олинмайди. Кинематиканинг теорема ва формулалари техникада турли машина ва механизмлар қисмларининг ҳаракатини ўрганишда назарий база сифатида қўлланилади.

Кинематикада жисмнинг ҳаракати бошқа жисм билан боғланган саноқ системасига нисбатан текширилади. Айнан бир вақтда жисм турли саноқ системасига нисбатан турлича ҳаракатда бўлиши мумкин. Масалан, кема палубасидаги жисм кема билан боғланган саноқ системасига нисбатан ҳаракатсиз булса, қирғоқ билан боғланган саноқ системасига нисбатан кема билан биргаликда ҳаракатланади. Табиатда абсолют ҳаракатсиз жисм булмагани туфайли, абсолют қузғалмас саноқ системаси ҳам мавжуд булмайди.

Техника масалаларини ечишда, одатда ер билан қузғалмас боғланган саноқ системаси олинади. Ерга нисбатан қузғалмас булган саноқ системаси "қузғалмас саноқ" системаси дейилади. Қузғалмас саноқ системасига нисбатан жисм вазияти узгариши ва вақт ўтиши билан ўзгармаса, жисм олинган системага нисбатан тинч ҳолатда дейилади. Агар мазкур саноқ системасига нисбатан вақт утиши билан жисмнинг вазияти узгарса, жисм шу системага нисбатан ҳаракатда булади. Танланган саноқ системасига нисбатан ҳар онда жисмнинг вазиятини аниқлаш мумкин булса, унинг ҳаракати кинематик берилган деб ҳисобланади.

Кинематикада учрайдиган барча чизиқли ўлчовларни (ҳаракатлаги нуқтанинг координаталари, ўтган йўлининг узунлиги ва ҳоказолар) техник ва халқаро СИ бирликлар системасида метрда олинади. Механикада вақт абсолют деб ҳисобланади, яъни уни барча саноқ системалари учун бир хилда утади деб қаралади. Вақт одатда t билан белгиланади ва у ҳаракатнинг аргументи ҳисобланади. Вақт ўлчови учун МКГСС системасида соат ёки минут, СИ системасида секунд (с) қабул қилинган.

Кучиш ва ҳаракат тушунчалари механиканинг асосий тушунчаларидир. Бирор саноқ системасига нисбатдан нуқтанинг маълум вақт t ичида фазода бир ҳолатдан бошқа ҳолатга ихтиёрий равишда утиши кучиш дейилади.

Нуқтанинг бошланғич ҳолатдан охирги ҳолатга вақтга боғлиқ ҳолда аниқ бир усулда утиши ҳаракат деб айтилади.

Фазода ҳаракатланаётган нуқтанинг бирор саноқ системасига нисбатан ҳолати билан вақт орасидаги боғланишни ифодаловчи тенглама нуқтанинг ҳаракат қонунини аниқлайди.

Кинематиканинг асосий масаласи нуқтанинг (ёки жисмнинг) ҳаракат қонунларини урганишдан иборат. Ихтиёрий вақт ичида фазода нуқтанинг ҳолатини бирор саноқ системасига нисбатан аниқлаш мумкин булса, у ҳолда нуқтанинг ҳаракат қонуни маълум булади. Агар нуқтанинг бирор саноқ системасига нисбатан ҳаракат қонуни берилган бўлса, нуқта ҳаракатининг кинематик характеристикалари: траектория, тезлик ва тезланишларини аниқлаш мумкин бўлади.

Қаттиқ жисм ҳаракатини кузатар эканмиз, кўпинча унинг нуқталари турлича ҳаракат қилишини кўрамиз. Шунинг учун жисм ҳаракатини ўрганишда унинг нуқталари ҳаракатини ўрганишга тўғри келади. Дастлаб нуқта кинематикасини ўрганиб, ундан қаттиқ жисм кинематикасини ўрганишга ўтилади. Демак, кинематика икки қисмга бўлинади.

1. Нуқта кинематикаси.

2. Абсолют қаттиқ жисм кинематикаси.

40-§. НУҚТА ҲАРАКАТИНИНГ БЕРИЛИШ УСУЛЛАРИ

Нуқтанинг фазода қолдирган изига ёки чизган чизиғига нуқтанинг траекторияси дейилади.

Оний вақтда нуқтанинг фазодаги ҳолатини бирор координаталар системасига нисбатан аниқлаш мумкин бўлса, нуқта ҳаракати берилган дейилади. Демак, нуқтага ҳаракат бериш унинг оний вақтдаги ҳолатини аниқлашдан иборат.

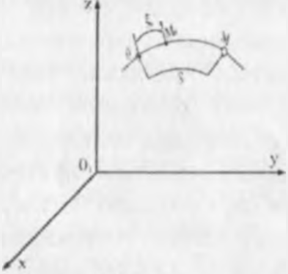
Нуқтанинг ҳаракати қуйидаги уч усул билан берилган бўлади: табиий, координаталар ва вектор.

1. Нуқтага табиий усулда ҳаракат бериш.

Нуқта ҳаракатини бу усулда бериш учун унинг траекторияси олдиндан аниқланган бўлиши керак.

Нуқтанинг траекторияси берилган бўлсин (94-расм).

M нуқтанинг бирор вақтдаги ҳолатини аниқлаймиз. Бунинг учун траектория устида қўзғалмас 0 нуқтани ҳисоблаш боши деб оламиз. M нуқтанинг O нуқтага нисбатан ҳолати S координатаси билан аниқланади.



94-расм.

$$S = 0\breve{M}$$

M нуқта ҳаракатланганда вақт ўтиши билан *S* ёй координата ўзгаради.

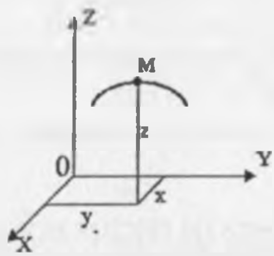
$$S=f(t) \qquad (103)$$

(103)-тенглама М нуқтанинг траектория бўйлаб ҳаракатланиш қонуни ёки ҳаракат тенгламаси дейилади. Агар S ёй билан t вақт орасидаги муносабат берилган бўлса, нуқтанинг исталган вақтдаги вазиятини фазода аниқлаш мумкин. Нуқтанинг ҳаракатини табиий усулда бериш учун унинг траекторияси, координаталар боши *0* нуқта ва (103)-тенглама мавжуд бўлиши керак.

2. Нуқта ҳаракатининг координаталар усулида берилиши

M нуқтанинг *Oxyz* системага нисбатан ҳолати унинг учта *x, y, z* декарт координаталари билан аниқланади (94-расм).

М нуқта ҳаракатланганда вақт ўтиши билан унинг координаталари ўзгаради. Демак, ҳаракат қилаётган нуқта координаталари вақтнинг функциясидир.



94-расм.

$$\left.\begin{aligned} x &= f_1(t); \\ y &= f_2(t); \\ z &= f_3(t); \end{aligned}\right| \qquad (104)$$

(104)-формула нуқта ҳаракатининг декарт координаталаридаги тенгламаси ёки нуқта траекториясининг параметрик тенгламалари дейилади.

Нуқтанинг ҳаракат тенгламасидан *t* вақтни олиб ташласак нуқтанинг траектория тенгламаси ҳосил бўлади.

Агар нуқта бир текисликда, мисол учун *Oxy* текислигида, ҳаракатланса (104)-тенгламалар қуйидаги кўринишни олади.

$$\left.\begin{aligned} x &= f_1(t) \\ y &= f_2(t) \end{aligned}\right| \qquad (105)$$

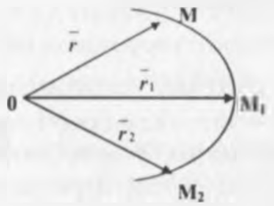
Агар нуқта тўғри чизиқли ҳаракатда бўлса, масалан фақат Ox ўқи бўйлаб, (104)-тенглама қуйидагича ёзилади:

$$x=f(t) \tag{106}$$

(106)-формулага тўғри чизиқли ҳаркатнинг тенгламаси дейилади.

3. Нуқта ҳаракатини вектор усулида берилиши

Нуқтанинг фазодаги ҳолатини $\bar{r}$ радиус-вектори билан аниқлаш мумкин (96-расм). Нуқта фазода ҳаракатланганда вақтнинг ўтиши билан унинг радиус - векторининг модули ва йўналиши ўзгаради:



96-расм.

Нуқтанинг $\bar{r}$ радиус –вектори вақтнинг функциясидир:

$$\bar{r} = \bar{r}(t) \tag{107}$$

(107) - тенгламага нуқта ҳаракатининг вектор кўринишдаги тенгламаси дейилади.

41-§. НУҚТА ҲАРАКАТИ ВЕКТОР УСУЛДА БЕРИЛГАНДА УНИНГ ТЕЗЛИГИНИ АНИҚЛАШ

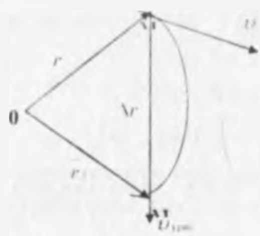
Нуқта ҳаракати вектор кўринишдаги тенгламаси берилган бўлсин:

$$\bar{r} = \bar{r}(t) \tag{108}$$

Нуқтанинг тезлигини топиш керак. Нуқтанинг бирор t пайтдаги троекторияда эгаллаган ҳолатини M, радиус векторини $\bar{r}$, $t_1+\Delta t$ пайтдаги ҳолатини M_1 радиус векторини $\bar{r}_1$ билан белгилаймиз. (97-расм). Нуқтанинг M ва M_1 ҳолатларини туташтирувчи $\overline{MM_1} = \Delta\bar{r}$ вектор нуқтанинг $\Delta t = t_1 - t$ вақт оралиғдаги кўчиш вектори дейилади. Расмдан кўриниб турибдики $\bar{r}_1 = \bar{r} + \Delta\bar{r}$. Бундан нуқтанинг Δt вақт ичидаги кўчиши (радиус вектор orттирмаси)ни топиш мумкин.

$$\Delta\bar{r} = \bar{r}_1 - \bar{r}$$

Кучиш вектори Δr нинг шу кучиш содир буладиган Δt вақтга нисбати нуқтанинг мазкур оралиқдаги ўртача тезлик вектори дейилади ва $\vartheta_{\text{ўрт}}$ билан белгиланади



97-расм.

$$\bar{\upsilon}_{\text{ўрт}} = \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t}$$

$\upsilon_{\text{ўрт}}$ нуқтанинг Δt вақт ичидаги ўртача тезлиги булади.

Ўртача тезлик $\Delta\bar{r}$ бўйлаб йуналади. Ўртача тезликнинг $\Delta t \to 0$ интилгандаги лимитига нуқтанинг берилган t вақтдаги тезлиги дейилади.

$$\bar{\upsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{\upsilon}_{\text{ўрт}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} = \frac{d\bar{r}}{dt};$$

$$\bar{\upsilon} = \frac{d\bar{r}}{dt} \qquad (109)$$

Бунда $\bar{\vartheta}$ - М нуқтанинг t вақтдаги тезлиги. Нуқтанинг тезлиги вектор катталикдир. Тезлик бирликлари:

$$\frac{см}{сек}, \frac{м}{сек}, \frac{км}{соат}$$

Демак, нуқта ҳаракати тенгламаси вектор усулида берилган булса, унинг тезлигини топиш учун радиус-вектордан вақт буйича биринчи тартибли ҳосила олиш лозим.

Тезликнинг йуналишини аниқлаймиз. $\Delta t \to 0$ га интилганда M_1 нуқта M га интилади. Натижада MM_1 кесувчи M нуқтадан траекторияга утказилган уринмага айланади. Нуқтанинг тезлиги шу нуқтадан траекторияга утказилган уринма буйича нуқта ҳаракат қилаётган томонга қараб йуналади.

42-§. НУҚТА ҲАРАКАТИ КООРДИНАТАЛАР УСУЛИДА БЕРИЛГАНДА УНИНГ ТЕЗЛИГИНИ АНИҚЛАШ

Нуқта ҳаракатининг декарт координаталардаги тенгламалари берилган бўлсин:

$$\left.\begin{aligned} x &= f_1(t), \\ y &= f_2(t), \\ z &= f_3(t). \end{aligned}\right\} \qquad (110)$$

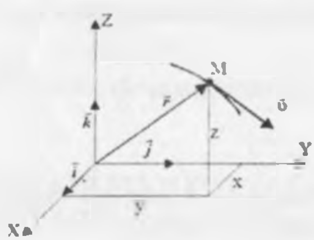
Нуқта тезлигининг модули ва йўналишини аниқлаймиз.

M нуқта тўғри бурчакли $Oxyz$ координата системасига нисбатан ҳаракат қилсин (98-расм).

M нуқтанинг $\bar{r}$ радиус-вектори координата ўқлари бўйича йўналган ташкил этувчилари орқали қуйидагича ёзилади.

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} \qquad (111)$$

Бунда $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ координата ўқлари бўйича йўналган бирлик векторлар.



98-расм.

(111) формулани (109)-формулага қўйиб вақт бўйича ҳосила оламиз:

$$\vartheta = \frac{d}{dt}\left(X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k}\right) = \frac{dx}{dt}\bar{i} + \frac{dy}{dt}\bar{j} + \frac{dz}{dt}\bar{k} \qquad (112)$$

(112)-формуладаги бирлик векторлар олдидаги коэффициентлар нуқта тезлигининг мос равишда x,y,z ўқларидаги проекцияси бўлади:

$$\vartheta_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad \vartheta_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \quad \vartheta_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z} \qquad (113)$$

Бунда $\vartheta_x, \vartheta_y, \vartheta_z$ лар $-\vartheta$ нинг x,y,z ўқларидаги проекциялари. Нуқта тезлигининг қўзғалмас декарт координата ўқларидаги проекциялари унинг тегишли координаталаридан вақт бўйича олинган биринчи тартибли ҳосилага тенг. Нуқта тезлигининг декарт координата

ўкларидаги проекцияларидан тўғри бурчакли параллелопипед қурамиз. Бу параллелопипеднинг ўлчовлари нуқта тезлигининг координата ўқлардаги проекцияси, диоганали эса нуқта тезлиги бўлади.
Геометриядан маълумки тўғри бурчакли параллелопипед диоганалининг квадрати унинг учала ўлчовлари квадратларининг йиғиндисига тенг.

$$\vartheta^2 = \vartheta_x^2 + \vartheta_y^2 + \vartheta_z^2$$

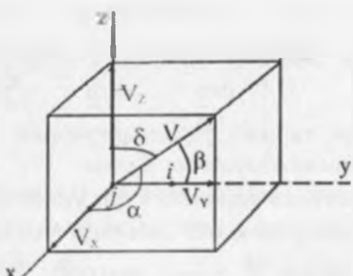
$$\vartheta = \sqrt{\vartheta_x^2 + \vartheta_y^2 + \vartheta_z^2}$$

(113)-формуладан фойдаланиб, нуқта тезлигининг модули ва йўналишини аниқлаймиз.

$$\vartheta = \sqrt{\vartheta_x^2 + \vartheta_y^2 + \vartheta_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \qquad (114)$$

$$\cos\alpha = \frac{\vartheta_x}{\vartheta}; \quad \cos\beta = \frac{\vartheta_y}{\vartheta}; \quad \cos\gamma = \frac{\vartheta_z}{\vartheta}; \qquad (115)$$

Бунда α, β, γ лар - ϑ вектори билан x,y,z ўқлари орасидаги бурчакни ифодалайди. (99-расм). Нуқта тезлигининг декарт координата ўқларидаги проекцияларидан тўғри бурчакли параллелопипед қурамиз. Бу параллелопипеднинг ўлчовлари нуқта тезлигининг координата ўқларидаги проекцияси, диоганали эса нуқта тезлиги бўлади.



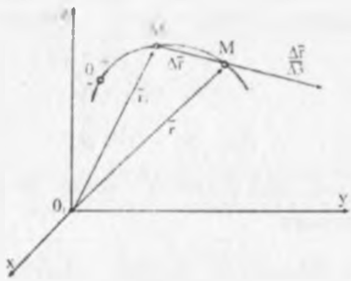
99-расм.

43-§. НУҚТА ҲАРАКАТИ ТАБИИЙ УСУЛДА БЕРИЛГАНДА УНИНГ ТЕЗЛИГИНИ АНИҚЛАШ

Нуқта траекторияси шу траектория бўйлаб ҳаракат қонуни асосида берилган бўлсин.

$$S = f(t) \qquad (116)$$

Нуқта тезлигини аниқлаймиз. Нуқта t вақтда M га келиб унинг ҳолати S ейи билан t_1 вақтда эса M_1 га келиб унинг ҳолати S_1 ейи кўринишида бўлсин (100-расм).



100-расм.

$$S = OM$$

$$S_1 = OM_1$$

$$\Delta t = t_1 - t$$

$$\Delta S = S_1 - S$$

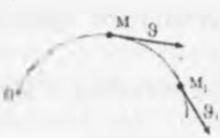
$$\vartheta_{\text{ўрт}} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

Бунда $\vartheta_{\text{ўрт}}$ - Δt вақт ичидаги ўртача тезликнинг модули. M нуқтанинг t вақтдаги тезлигининг модулини аниқлаймиз.

$$\vartheta = \lim_{\Delta t \to 0} \vartheta_{\text{ўрт}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}; \quad \vartheta = \frac{dS}{dt} \qquad (117)$$

Нуқта ҳаракати табиий усулда берилган бўлса, (117)-формула билан нуқта тезлигининг модули топилади.

Нуқтанинг тезлигини аниқлаш учун унинг ҳолатини аниқловчи S ёй координатадан вақт бўйича олинган биринчи тартибли ҳосила олиш керак. Агар $\frac{dS}{dt} > 0$ бўлса V тезлик вектори S ёй координата ортиб бораётган томонга йўналган бўлади. Агар $\frac{dS}{dt} < 0$ бўлса S ёй камаядиган томонга йўналади (101-расм).



101-расм.

44-§. НУҚТА ҲАРАКАТИ ВЕКТОР УСУЛИДА БЕРИЛГАНДА УНИНГ ТЕЗЛАНИШИНИ АНИҚЛАШ

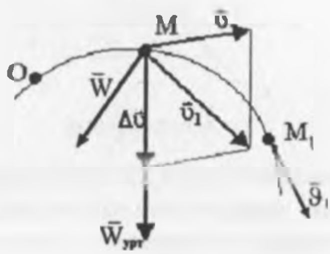
Нуқта тезлигининг модули ва йўналиши жиҳатидан ўзгаришини тасвирлаш учун тезланиш деган тушунча киритилади. Нуқта эгри чизиқли траектория бўйлаб ҳаракатланиб, t вақтда M нуқтада, t_1 вақтда эса M_1 нуқтада бўлсин (102-расм).

Бунда $\bar{\upsilon}$ ва $\bar{\upsilon}_1$, M ва M_1 нуқталарнинг тезликлари. Δt вақт ичида нуқта тезлиги $\Delta\bar{\upsilon}$ орттирма олади.

$$\Delta t = t_1 - t$$

$$\Delta\bar{\upsilon} = \bar{\upsilon}_1 - \bar{\upsilon}$$

$$\bar{\upsilon}_1 = \bar{\upsilon} + \Delta\bar{\upsilon}$$



102-расм.

$\Delta\bar{\upsilon}$ нинг Δt га нисбати Δt вақт ичидаги нуқтанинг ўртача тезланиши дейилади.

$$\bar{W}_{урт} = \frac{\Delta\bar{\upsilon}}{\Delta t}$$

Ўртача тезланишнинг $\Delta t \to 0$ интилгандаги лимитига нуқтанинг берилган t вақтдаги ёки ҳақиқий тезланиши дейилади.

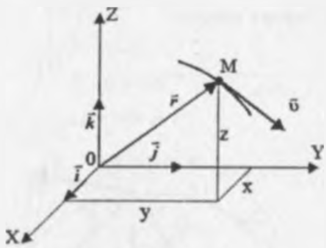
$$\bar{W} = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{W}_{урт} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\bar{\upsilon}}{\Delta t} = \frac{d\bar{\upsilon}}{dt} \qquad \bar{W} = \frac{d\bar{\upsilon}}{dt} \qquad \bar{W} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} \quad (118)$$

Демак, нуқтанинг тезланиши нуқта тезлигидан вақт бўйича олинган биринчи тартибли ҳосилага ёки радиус - векторидан вақт бўйича олинган иккинчи тартибли ҳосилага тенг. Ўртача тезланиш траекториясининг ботиқ томонига қараб йўналганлиги учун нуқта тезланиши $\bar{W}$ ҳам траекториянинг ботиқ томонига қараб йўналган бўлади. Нуқта тезланишининг бирлиги м/сек^2 билан ўлчанади.

45-§. НУҚТА ҲАРАКАТИ КООРДИНАТАЛАР УСУЛИДА БЕРИЛГАНДА УНИНГ ТЕЗЛАНИШИНИ АНИҚЛАШ

Нуқта координаталари вақтнинг функцияси шаклида берилган бўлсин (103-расм).

$$x=f_1(t); \qquad y=f_2(t); \qquad z=f_3(t)$$



103-расм.

Нуқта тезланишининг модули ва йўналиши топилсин. Нуқта тезлигини координата ўқлари бўйича йўналган ташкил этувчилари орқали қуйидагича ёзилади (102-расм).

$$\bar{\upsilon}=\upsilon_x\bar{i}+\upsilon_y\bar{j}+\upsilon_z\bar{k} \qquad (119)$$

Бунда $\upsilon_x,\upsilon_y,\upsilon_z$ лар $-\bar{\upsilon}$ тезликнинг проекциялари. $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ қўзғалмас координата ўқлари бўйича йўналган бирлик векторлар. (119)-формулани, (118)-формулага қўйиб вақт бўйича ҳосила оламиз.

$$\bar{W}=\frac{d\upsilon_x}{dt}\bar{i}+\frac{d\upsilon_y}{dt}\bar{j}+\frac{d\upsilon_z}{dt}\bar{k} \qquad (120)$$

(120)-формуладаги бирлик векторлари олдидаги коэффицентлар нуқта тезланишининг проекциясини ифодалайди.

$$W_x=\frac{d\upsilon_x}{dt};W_y=\frac{d\upsilon_y}{dt};W_z=\frac{d\upsilon_z}{dt} \qquad (121)$$

ёки

$$W_x=\frac{d\upsilon_x}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)=\frac{d^2x}{dt^2}=\ddot{x}$$

$$W_y=\frac{d^2y}{dt^2}=\ddot{y} \qquad W_z=\frac{d^2z}{dt^2}=\ddot{z} \qquad (122)$$

Бунда W_x, W_y, W_z лар $-\bar{W}$ тезланишнинг проекцияси. (121)- ёки (122)-формулалар билан нуқта тезлашининг қўзғалмас *x,y,z* ўқларидаги проекциясини аниқлаймиз.

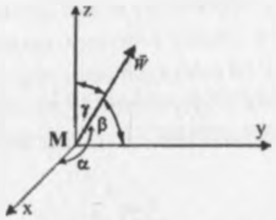
Нуқта тезланишининг бирор қузғалмас декарт координаталар уқидаги проекцияси нуқтанинг тегишли координаталаридан вақт буйича олинган иккинчи тартибли ҳосилага тенг булади.

Нуқта тезланишининг модули ва йуналиши қуйидаги формула билан топилади.

$$W = \sqrt{W_x'^2 + W_y'^2 + W_z'^2} \tag{123}$$

$$\cos\alpha_1 = \frac{W'_x}{W};\cos\beta_1 = \frac{W'_y}{W};\cos\gamma_1 = \frac{W'_z}{W}; \tag{124}$$

Бунда $\alpha,\beta,\gamma,$ лар -W билан *x,y,z* уқлари орасидаги бурчаклар (104-расм).



104-расм.

Н а т и ж а: Нуқта ҳаракати координаталар усулида берилган булса (123)-формула билан нуқта тезланишини модули ҳамда (124)-формула билан тезланишининг йуналиши топилади.

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР.

1. Кинематика нимани урганади?
2. Кинематикани асосий масалаларини айтинг?
3. Нуқта траекторияси деб нимага айтилади?
4. Нуқта ҳаракати табиий усулда қандай берилади?
5. Нуқта ҳаракати координаталар усулида қандай берилади?
6. Нуқтани траектория тенгламаси қандай топилади?
7. Нуқта ҳаракати вектор усулида қандай берилади?
8. Нуқта ҳаракати вектор усулида берилганда унинг тезлиги қандай аниқланади? Нуқтанинг тезлиги қандай йуналган булади?
9. Нуқтанинг тезланиши вектор усулида қандай аниқланади? Нуқтанинг тезланиши қандай йуналган?
10. Нуқта тезлигининг декарт координаталар уқларидаги проекциялари нимага тенг?
11. Нуқта тезлигининг миқдори ва йуналиши проекциялар буйича қандай аниқланади?

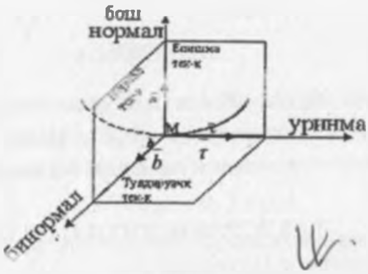
12. Нуқта тезланишининг декарт координаталари ўқларидаги проекцияси нимага тенг?

13. Нуқта тезланишининг миқдор ва йўналиши проекциялари бўйича қандай аниқланади?

46-§. ТАБИИЙ КООРДИНАТЛАР СИСТЕМАСИ

Нуқта траекторияси берилган бўлсин. Шундан битта нуқта олиб унга уринма ўтказамиз. М нуқтадан уринмага перпендикуляр қилиб ўтказилган текисликка нормал текислик деб айтилади.

Нормал текислик билан ёпишма текисликнинг кесишган чизиғи бош нормал дейилади. М нуқтадан бош нормалга перпендикуляр қилиб ўтказилган текисликка тўғриловчи текислик дейилади. Нормал текислик билан тўғриловчи текисликнинг кесишган чизиғига бинормал дейилади (105-расм).

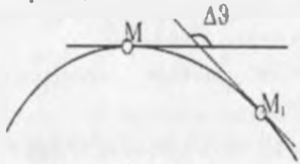


105-расм.

Уринма, бош нормал ва бинормалдан ташкил топган ўқларга табиий ўқлар дейилади. Бу ўқлар $M\tau n b$ табиий координаталар системасини ташкил этади. Табиий ўқларнинг бирлик векторларини мос равишда τ, n, b билан белгиланади (105-расм).

Эгри чизиқнинг эгрилиги.

Нуқта троекториясидаги М ва M_1 нуқталардан троекторияга уринма ўтказилади (105^1-расм).



105^1-расм.

Бу уринмалар орасидаги бурчак $\Delta\varphi$ билан белгилаймиз. $\Delta\varphi$ бурчакка қушни бурчак дейилади. Бу бурчакнинг ΔS ёйига нисбати эгри чизиқнинг ўртача эгрилиги дейилади ва $K_{ўрт}$ билан белгиланади.

$$K_{ўрт} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta S} \quad \text{бунда } \Delta S = MM_1$$

Ўртача эгириликнинг $\Delta S \to 0$ лимитига эгри чизиқнинг берилган нуқтадаги эгрилиги дейилади.

$$K = \lim_{\Delta S \to 0} K_{ўрт} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta S}$$

$$K = \frac{d\varphi}{dS}$$

Бунда K эгри чизиқнинг M нуқтадаги эгрилиги.

Эгриликнинг тескари қийматига эгрилик радиуси дейилади.

$$\rho = \frac{1}{K}$$

Мисол учун тўғри чизиқнинг эгрилиги K=0 бўлса, $\rho = \frac{1}{K} = \infty$ бўлади. R радиусли айлананинг эгрилик радиуси унинг радиусига тенг.

47-§. НУҚТА ҲАРАКАТИ ТАБИИЙ УСУЛДА БЕРИЛГАНДА УНИНГ ТЕЗЛАНИШИНИ ТОПИШИ

Нуқтанинг троекторияси ва унинг троектория бўйлаб ҳаракатланиш қонуни берилган бўлсин. Нуқтанинг тезланишини аниқлаймиз. Маълумки нуқта ҳаракати вектор усулида берилганда унинг тезлиги қуйидаги формула билан топилади.

$$\bar{\vartheta} = \frac{d\bar{r}}{dt}$$

Бу формуланинг унг томонини қуйидагича ёзамиз.

$$\bar{\vartheta} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}}{dS} \cdot \frac{dS}{dt}$$

$\frac{d\bar{r}}{dS} = \tau$ ва $\vartheta = \frac{dS}{dt}$ алгебраик тезлик эканини ҳисобга олсак, у ҳолда:

$$\bar{\upsilon} = \upsilon\bar{\tau} \qquad (125)$$

бўлади.

Нуқта ҳаракати вектор усулида берилганда унинг тезланиши қуйидаги формула билан аниқланади:

$$\overline{W} = \frac{d\overline{\upsilon}}{dt} \qquad (125.1)$$

Бунда $$\frac{d\overline{\tau}}{dt} = \frac{d\overline{\tau}}{dS} \cdot \frac{dS}{dt} \qquad (126)$$

$$\frac{dS}{dt} = \vartheta$$

$\overline{W} = \frac{d\overline{\upsilon}}{dt}$ га асосан $\frac{d\overline{\tau}}{dS}\overline{k} = \frac{1}{\rho}\overline{n}$

(126)-ни қуйидагича ёзамиз.

$$\frac{d\overline{\tau}}{dt} = \frac{\vartheta}{\rho} \cdot \overline{n} \qquad (127)$$

Бунда ρ троекторияни эгрилик радиуси, n бош нормалнинг бирлик вектори. (127)- ни (126)- га қуямиз.

$$\overline{W} = \frac{d\upsilon}{dt}\overline{\tau} + \frac{\upsilon^2}{\rho}\overline{n} \qquad (128)$$

(128)- ифодада нуқта тезланиши табиий координата ўқларидаги ташкил этувчилари орқали берилган.

Тезланишнинг уринма бўйлаб йўналган ташкил этувчиси:

$$\overline{W_\tau} = \frac{d\upsilon}{dt}\overline{\tau} \qquad (129)$$

Нуқтанинг уринма тезланиши, бош нормал бўйича йўналган бўлиб, ташкил этувчиси эса нуқтанинг нормал тезланишидир.

$$\overline{W_n} = \frac{\upsilon^2}{\rho}\overline{n} \qquad (130)$$

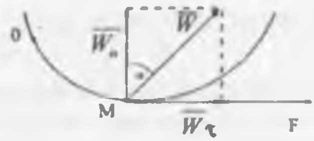
М нуқтанинг тезланиши шу нуқта троекториясига ўтказилган ёпишма текислигида ётади. Бу текисликка эса бинормал перпендикуляр. Шунинг учун нуқта тезланишининг бинормалдаги проекцияси нолга тенг.

$$\overline{W_b} = 0 .$$

(129)- ва (130)- га кўра (128)- ифода қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\overline{W} = \overline{W'_\tau} + \overline{W_n} \qquad (131)$$

Яъни, эгри чизикли ҳаракатдаги нуқтанинг тезланиши уринма ва нормал тезланишларнинг геометрик йиғиндисига тенг. Бу икки тезланиш ўзаро перпендикуляр йўналган. Шу сабабли $\overline{W}$ тезланиш вектори $\overline{W_\tau}$ ва $\overline{W_n}$ ларга қурилган тўғри тўртбурчакнинг диагонали бўйича йўналган бўлади (106-расм).



106-расм.

Нуқта тўла тезланишининг модули ва йўналиши қуйидаги формулалар билан топилади:

$$W = \sqrt{W_\tau^2 + W_n^2}, \qquad tg\alpha = \frac{|W_\tau|}{W_n} \qquad (132)$$

Нуқта тезланишининг табиий координата ўқларидаги проекциялари

$$W_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2}, \qquad W_n = \frac{v^2}{\rho}, \qquad W_b = 0 \qquad (133)$$

формулалар ёрдамида аниқланади.

Демак, нуқтанинг ҳаракати табиий усулда берилганда (129)-(133) формулалар билан нуқта тезланиши аниқланади.

Агар нуқтанинг ҳаракати тўғри чизиқли бўлса траекториянинг эгрилик радиуси ∞ ка тенг бўлади.

$$W_n = \frac{\upsilon^2}{\infty} = 0 \qquad W_b = 0$$

Нуқтанинг нормал тезланиши эгри чизиқли ҳаракатда мавжуд бўлиб, нуқта тезлигининг йўналиши жиҳатдан ўзгаришини тасвирлайди. Агар ϑ =const бўлса, $w_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = 0, \ldots w_\tau = 0$.

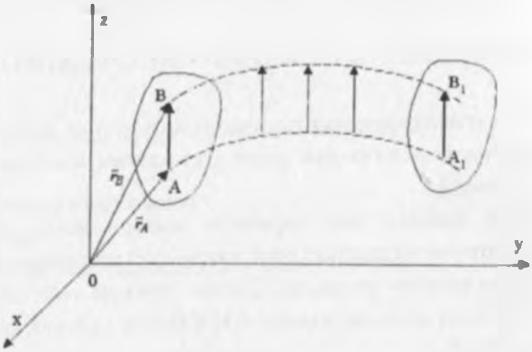
Уринма тезланиш нуқта тезлигининг модул жиҳатидан ўзгаришини тасвирлайди. Демак уринма тезланиш нотекис ҳаракатда мавжуд бўлади.

48-§. НУҚТАНИНГ ТЕКИС ЎЗГАРУВЧАН ҲАРАКАТИ

Агар уринма тезланиш ўзгармас бўлса, бундай ҳаракатга текис ўзгарувчан ҳаракат дейилади. Текис ўзгарувчан ҳаракат тенгламасини аниқлаймиз.

Нуқтанинг уринма тезланиши:

$$W_\tau = Const,$$



108-расм.

Шунинг учун $\bar{r}_A$ ва $\bar{r}_B$ векторлари ўзгарганда, уларнинг A ва B нуқталарининг чизган траекториялари бир хил бўлади. Яъни $AA_1=BB_1$ ва $AA_1 \parallel BB_1$.

$$\bar{r}_B = \bar{r}_A + \overline{AB} \qquad (136)$$

бунда t вақт бўйича ҳосила оламиз.

$$\frac{d\bar{r}_B}{dt} = \frac{d\bar{r}_A}{dt} + \frac{d(\overline{AB})}{dt}$$

$$\frac{d\bar{r}_B}{dt} = \bar{\upsilon}_B; \qquad \frac{d\bar{r}_A}{dt} = \bar{\upsilon}_A; \qquad \frac{d(\overline{AB})}{dt} = 0$$

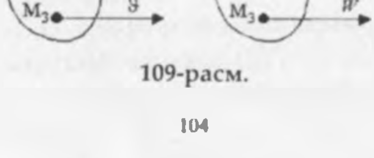
$$\bar{\upsilon}_B = \bar{\upsilon}_A \qquad (137)$$

A ва B нуқталар ихтиёрий нуқталар бўлганлиги учун илгариланма ҳаракатдаги жисмнинг қолган ҳамма нуқталар тезликлари бир хил бўлади.

(137)- дан t вақт бўйича ҳосила оламиз.

$$\frac{\bar{\upsilon}_B}{dt} = \frac{\bar{\upsilon}_A}{dt} \quad \text{ёки} \quad \bar{W}_B = \bar{W}_A \qquad (138)$$

Илгариланма ҳаракат қилаётган қаттиқ жисм бирор нуқтасининг тезлигини ва тезланишини аниқлаш (кифоя). Жисм бошқа нуқталарининг тезлиги ва тезланиши теоремага асосан шу нуқтанинг тезлиги ва тезланишига тенг бўлади (109-расм).



109-расм.

Жисмнинг илгарилама ҳаракати унинг ихтиёрий нуқтаси ҳаракати билан аниқланади. Илгарилама ҳаракатдаги жисм нуқталарининг ҳар ондаги тезлиги ҳам, тезланиши ҳам бир хил булаганидан уларни мос равишда жисмнинг тезлиги ва тезланиши деб аташ мумкин.

50-§. ҚАТТИҚ ЖИСМНИНГ ҚЎЗҒАЛМАС ЎҚ АТРОФИДАГИ АЙЛАНМА ҲАРАКАТИ. БУРЧАК ТЕЗЛИГИ ВА БУРЧАК ТЕЗЛАНИШИ

Жисм ҳаракати давомида унинг икки нуқтаси қузғалмасдан қолса бундай ҳаракатга қаттиқ жисмнинг қузғалмас уқ атрофидаги айланма ҳаракати дейилади. Шу қузгалмас нуқталардан утган тўғри чизиққа айланиш ўқи дейилади. Қузгалмас z ўқи атрофида айланувчи қаттиқ жисм берилган бўлсин (110-расм). Шу жисмнинг ҳар бир вақтдаги ҳолатини аниқлаймиз. А ва В нуқталар қўзгалмас нуқталардир. Шу нуқталар орқали z ўқи ўтказилади. z - жисмнинг айланиш ўқи. Жисмнинг ҳолатини аниқлаш учун айланиш ўқидан Q ва P текисликлари олинади. Бунда Q қузғалмас текислик, P қўзгалувчи текислик. P - текислиги жисмга қаттиқ бириктирилган ва жисм билан бирга айланади. Жисмнинг ҳолатини аниқлаш учун P текисликнинг Q га нисбатан ҳолатини аниқлаш кифоя. P - текисликнинг ҳолати φ бурчаги билан аниқланади. φ-га айланиш бурчаги дейилади. Жисм ук атрофида айлаганда φ бурчаги вақт ўтиши билан ўзгаради.

$$\varphi=f(t) \qquad (139)$$

Бу тенглама жисмнинг қузғалмас уқ атрофидаги айланма ҳаракати тенгламаси дейилади. Айланиш бурчаги радиан билан ўлчанади.

Айланма ҳаракат қонуни, бурчак тезлиги билан бурчак тезланишга айланма ҳаракатнинг кинематик тавсифи дейилади. Айланиш бурчаги φ дан вақт бўйича олинган биринчи тартибли ҳосила жисмнинг бурчак тезлиги дейилади ва ω билан белгиланади:

$$\omega=\frac{d\varphi}{dt} \qquad \omega=\dot{\varphi}=f'(t) \qquad (140)$$

Бунда ҳосиланинг ишораси жисмнинг айланиш йўналишини ифодалайди. Агар $\omega=\dot{\varphi}=f'(t)>0$ бўлган онда $f(t)$ функция усувчан булади, яъни уқнинг мусбат йўналишидан қараганда жисм соат стрелкаси айланишига тескари айланади: $\dot{\varphi}=f'(t)<0$ булган онда $f(t)$ функция камаювчан бўлади, яъни жисм соат стрелкаси айланиши бўйича айланади.

110-расм.

Демак, жисмнинг бурчак тезлиги айланиш бурчагидан вақт бўйича олинган биринчи тартибли ҳосилага тенг бўлади.

Бурчак тезлигининг бирлиги

$$\omega = \frac{рад}{сек} = \frac{1}{сек} = сек^{-1} \qquad (141)$$

Бурчак тезланишинг бурчак тезлигидан вақт бўйича олинган иккинчи тартибли ҳосилага тенг бўлади.

$$\dot{\varepsilon} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \qquad (142)$$

Бурчак тезланишини бирлиги $\dot{\varepsilon} = \frac{рад}{сек^2} = \frac{1}{сек^2} = сек^{-2}$.

Бурчак тезланиши айланиш бурчагидан вақт бўйича олинган иккинчи тартибли ҳосилага тенг бўлади.

51-§. ЖИСМНИНГ ТЕКИС ВА ТЕКИС ЎЗГАРУВЧАН АЙЛАНМА ҲАРАКАТИ

1. Қаттиқ жисм қўзғалмас ўқ атрофида бир хил вақт оралиғида бир хил бурчакка бурилса жисм текис айланма ҳаракатда дейилади. Текис айланма ҳаракат бурчак тезлиги ω=*const* бўлади.

$$\varphi = \omega t \qquad (143)$$

Текис айланма ҳаракат тенгламаси (143)- билан ифодаланади. Текис айланишидаги жисмнинг бурчак тезлигини бир минутдаги айланишлар сони билан ифодаланади. Жисм бир марта тўла айланганда $\varphi = 2\pi$ радиан бурчакка бурилади.

Қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи қаттиқ жисмнинг бурчак тезлиги ва бурчак тезланиши айланиш ўқи бўйлаб йўналган вектор катталиклир.

52-§. ҚЎЗҒАЛМАС ЎҚ АТРОФИДА АЙЛАНУВЧИ ҚАТТИҚ ЖИСМ НУҚТАСИНИНГ ТЕЗЛИГИ ВА ТЕЗЛАНИШИ

Қўзғалмас z ўқи атрофида айланувчи қаттиқ жисм берилган бўлсин.

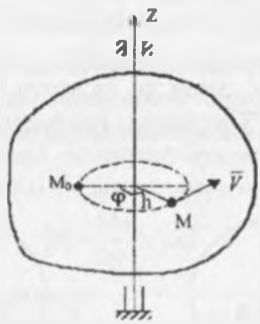
Шу жисмнинг ихтиёрий M нуқтаси тезлиги ва тезланишини аниқлаймиз.

Бунда h – M нуқтадан айланиш ўқигача бўлган масофа (111-расм). Z жисмнинг қўзғалмас айланиш ўқи. Жисм абсолют қаттиқ бўлганлиги учун $h = const$ бўлади. Жисм ўқи атрофида айланганда M нуқта айланиш ўқига перпендикуляр текисликда радиуси h га тенг бўлган айлана чизади.

Жисм ўқ атрофида $d\varphi$ бурчакка бурилганда M нуқта dS йўлни босиб ўтади.

$$dS = \overset{\smile}{M_0M}$$

$$dS = hd\varphi$$



111-расм.

M нуқтанинг тезлиги:

$$\upsilon = \frac{dS}{dt} = \frac{d(\varphi h)}{dt} = h\frac{d\varphi}{dt} = h \cdot \omega$$

ёки

$$\upsilon = \omega h \qquad (147)$$

ω - жисмнинг бурчак тезлиги. (147)-формула билан қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи қаттиқ жисм нуқтасининг чизиқли тезлиги топилади. Қўзғалмас ўқ атрофида айланма ҳаракатдаги жисм ихтиёрий нуқтаси чизиқли тезлигининг миқдори жисм бурчак тезлиги билан қўзғалмас ўқдан нуқтагача бўлган масофанинг кўпайтмасига тенг. Чизиқли тезлик вектори $\bar{\upsilon}$ M нуқтада h га перпендикуляр бўлиб, жисм айланаётган томонга қараб йўналган бўлади. Қаттиқ жисм нуқталарининг тезликлари шу нуқталардан айланиш ўқигача бўлган масофага пропорционалдир.

M нуқтанинг уринма тезланишини топамиз. Уринма тезланиши:

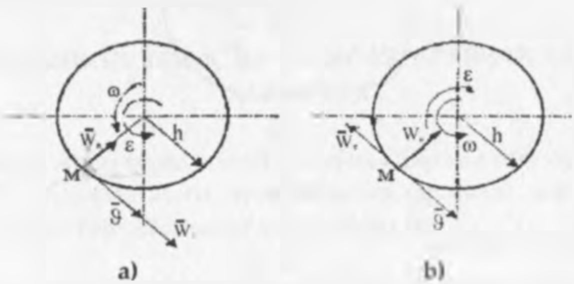
$$W_{\tau}=\frac{d\upsilon}{dt}=\frac{d(\omega h)}{dt}=h\cdot\dot{\varepsilon},\quad W_{\tau}=\varepsilon\cdot h \qquad (148)$$

Қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи жисм ихтиёрий нуқтасининг уринма тезланиши жисмнинг бурчак тезланиши билан шу нуқтадан айланиш ўқигача бўлган масофанинг кўпайтмасига тенг.

Уринма тезланиш шу нуқтадан h га перпендикуляр бўлиб, тезланувчан айланма ҳаракатда υ тезлик йўналиши бўйича (112-расм, а), секинланувчан айланма ҳаракатда эса унга тескари йўналади (112-расм, b). М нуқтанинг нормал тезланишини топамиз.

$$W_{n}=\frac{\upsilon^{2}}{\rho}=\frac{(\omega h)^{2}}{h}=\frac{\omega^{2}h^{2}}{h}=\omega^{2}h \qquad (149)$$

Қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи жисм ихтиёрий нуқтасининг нормал тезланиши бурчак тезлигининг квадрати билан нуқтадан айланиш ўқигача бўлган масофанинг кўпайтмасига тенг.



112-расм.

Нормал тезланиши айланиш радиуси h бўйлаб айланиш ўқи томон йўналган бўлади.

Жисм n марта айланса, $\varphi = 2\pi n$ бурчакка бурилади. Текис айланма ҳаркатнинг бурчак тезлиги қуйидагига тенг булади:

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30} \frac{рад}{сек} \qquad (144)$$

Бунда n - жисмнинг бир минутдаги айланишлар сони Агар жисмнинг бир минутдаги айланишлар сони берилган булса, (144)-формула билан унинг бурчак тезлиги топилади.

2. Агар айланма ҳаракат давомида бурчак тезланиши ε =const бўлса, жисм текис ўзгарувчан айланма ҳаракатда булади.

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t \qquad (145)$$

(145)-формула билан текис ўзгарувчан айланма ҳаракатнинг бурчак тезлиги топилади.

Бунда ω_0 - бошлангич бурчак тезлиги

ω - ихтиёрий вақтдаги бурчак тезлиги.

(145)-формулага $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ ни қўйиб интегралласак, (146)-формулани хосил қиламиз

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2} \qquad (146)$$

(146)-тенглама билан текис ўзгарувчан айланишда бурилиш бурчаги, ёки текис ўзгарувчан айланма ҳаракат қонуни аниқланади.

Қўзгалмас ўқ атрофида айланувчи жисмнинг бурчак тезлик вектори мазкур ўқ бўйлаб йўналган ва унинг мусбат йўналишидан қараганда айланиш соат стрелкаси ҳаракатига тескари йўналишда кўринадиган, айланиш ўқининг ихтиёрий нуқтасига қўйилган вектор билан ифодаланади (110.1-расм). Бурчак тезлик векторининг модули

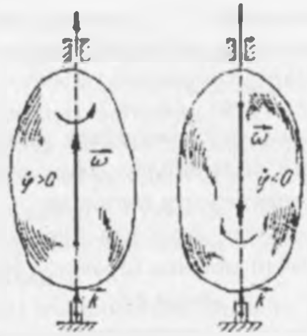
$$|\bar{\omega}| = \left|\frac{d\varphi}{dt}\right| = |\omega_z|$$

формула ёрдамида аниқланади.

Агар айланиш ўқи бирлик векторини k билан белгиласак, бурчак тезлик вектори

$$\bar{\omega} = \dot{\varphi} \cdot \bar{k} = \omega_z \cdot \bar{k} \qquad (146.1)$$

кўринишида ёзиш мумкин. (146`) дан кўрамизки, $\dot{\varphi} > 0$ бўлса, $\bar{\omega}$ вектори $\bar{k}$ йўналиши бўйича, $\dot{\varphi} < 0$ да $\bar{k}$ қарама-қарши йўналишда бўлади (110.1 -расм a,b).



a) b)

110.1-расм.

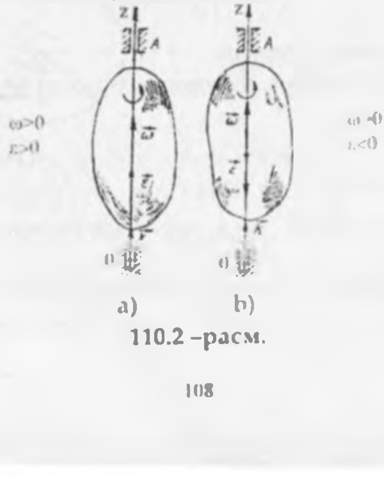
Жисмнинг бурчак тезланишини айланиш уқи буйлаб йуналган ε вектори тарзида ифодалаш мумкин. Бунда жисмнинг бурчак тезланиш вектори шу жисм бурчак тезлик векторидан вақт буйича олинган хосилага тенг булади (110.2-расм).

$$\bar\omega = \frac{d\bar\omega}{dt} = \frac{d\omega_z}{dt}\cdot\bar k = \varepsilon_z\cdot\bar k$$

ёки

$$\bar\varepsilon = \varepsilon_z\bar k = \ddot\varphi\bar k \qquad (146.2)$$

Агар жисмнинг бурчак тезлиги модуль жиҳатидан орта борса, бундай ҳаракат тезланувчан айланма ҳаракат, камая борса, секинланувчан айланма ҳаракат дейилади. Текис айланма ҳаракатда $\omega = const$ булгани учун $\varepsilon = 0$ булади. Демак, ω_z ва ε_z лар бир хил ишорали булса, ҳаракат тезланувчан турли ишорага эга булса, ҳаракат секинланувчан булади (110.2-расм a,b).



a) b)

110.2 –расм.

Уринма ва нормал тезланишлар ўзаро пепендикуляр булади. Тула тезланишни модули қуйидагича аниқланади.

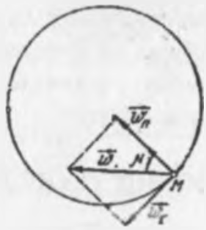
$$W'_{r} = \sqrt{W'^{2}_{\tau} + W'^{2}_{n}} = \sqrt{\varepsilon^{2} h^{2} + \omega^{4} h^{2}} = h\sqrt{\varepsilon^{2} + \omega^{4}} \qquad W' = h\sqrt{\varepsilon^{2} + \omega^{4}}$$

(150)

Тезланишининг йуналиши эса қуйидаги формуладан топилади.

$$tg\mu = \frac{\varepsilon}{\omega^{2}} \qquad (151)$$

Бунда μ - тула тезланиш билан нормал тезланиш орасидаги бурчак.



113-расм.

Жисм қўзгалмас ўқ атрофида текис айланса, W=*const* ва унинг бурчак тезланиши нолга тенг булади $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 0$. У ҳолда жисм нуқтасининг уринма тезланиши нолга тенг булиб, $W = \varepsilon \cdot h = 0$, жисм нуқталари нормал тезланишга эга булади $W' = W'_{n} = W'^{2} h$

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР.

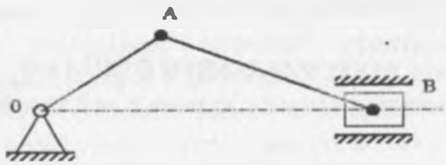
1. Қаттиқ жисмнинг қандай ҳаракатига илгарилама ҳаракат деб аталади?
2. Илгарилама ҳаракат қилаётган қаттиқ жисм нуқталарининг траекторияси, тезлиги ва тезланиши ҳақидаги теорема қандай таърифланади?
3. Қаттиқ жисмнинг эгри чизиқли илгарилама ҳаракатига мисоллар келтиринг?
4. Қаттиқ жисмнинг қузғалмас уқ атрофидаги айланма ҳаракат таърифини айтинг? Бу ҳаракатга мисоллар келтиринг?
5. Жисмнинг бурчак тезлик ва бурчак тезланиши нима? Уларнинг ўлчов бирлиги қандай?
6. Қаттиқ жисмнинг қандай айланишига текис айланиш дейилади?
7. Жисмнинг бир минутдаги айланишлар сони билан бурчак тезлик орасида қандай богланиш мавжуд?

8. Жисмнинг қандай айланишига текис узгарувчан айланиш дейилади?
9. Текис узгарувчан айланма ҳаракатда жисмнинг бурчак тезлиги ва айланиш бурчаги қайси формула билан топилади?
10. Айланма ҳаракат қилаётган қаттиқ жисм нуқтасининг тезлиги модули қандай топилади ва у қандай йуналган?
11. Қузғалмас уқ атрофида айланаётган қаттиқ жисм нуқтасининг уринма ва нормал тезланиши қайси формула билан аниқланади? Бу тезланишлар қандай йуналган булади?
12. Қузғалмас уқ атрофида айланаётган қаттиқ жисм нуқтасининг тула тезланиши қайси формула билан аниқланади? Бу тезланишнинг йуналиши қандай?

53-§. ҚАТТИҚ ЖИСМНИНГ ТЕКИС ПАРАЛЛЕЛ ҲАРАКАТИ

Қаттиқ жисмда олинган ҳамма нуқталар жисм ҳаракатида бирор қузғалмас текисликка параллел текисликда ҳаракатланса, унинг бундай ҳаракатига текис параллел ҳаракат дейилади.

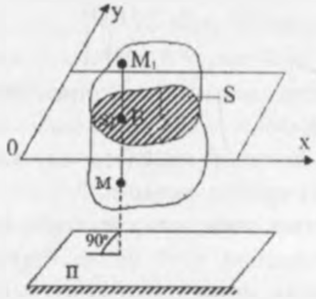
Масалан: Тўғри чизиқли йулдаги машина ғилдирагининг ҳаракати ёки кривошип шатунли механизмдаги шатунининг ҳаракати (114-расм).



114-расм.

Текис параллел ҳаракат қилаётган жисм берилган булсин. Жисмнинг текис параллел ҳаракатини урганиш учун жисмда қузғалмас текисликка перпендикуляр булган MM_1 ихтиёрий кесма олинади. Текис параллел ҳаракат таърифига кура MM_1 кесманинг нуқталаридан $П$ текисликгача булган масофалар узгармасдан қолади, шу сабабли MM_1 кесма ҳар доим узига параллел равишда ҳаракатланади. Бинобарин MM_1 кесма илгарилама ҳаракатда булади. Илгарилама ҳаракат таърифига кура жисмнинг барча нуқталари бир хил траектория чизади, тезлик ва тезланишлари тенг булади. Шу сабабли илгарилама ҳаракатдаги жисм битта нуқтасининг ҳаракатини урганиш кифоя.

Жисмни қўзғалмас Π текисликка параллел бўлган Π_1 текислик билан кесиб, кесимда ҳосил бўлган кесимани (S) билан белгилаймиз (115-расм). MM_1 кесма (S) кесимдаги нуқтаси B билан белгиланади. У ҳолда MM_1 кесмани ҳаракатини ўрганиш ўрнига B нуқтасининг ҳаракати ўрганилади.



115-расм.

Худди шунингдек MM_1 кесмага параллел $M_1M_1^1$ кесмани олсак $M_1M_1^1$ кесма ҳам илгариланма харакатда бўлгани учун унинг (S) кесимдаги O_1 нуқтасининг ҳаракатини ўрганиш кифоя. Жисмни MM_1, $M_1M_1^1$, $M_2M_2^1$ кесмалар тўпламидан иборат деб қараш мумкин ва бундай жисмнинг ҳаракатини ўрганиш ўрнига унинг (S) кесимининг ҳаракатини ўрганиш кифоя. (S) кесимга текис шакл дейилади. Текис шакл ҳаракатланадиган Π текисликка текис шаклнинг ҳаракат текислиги дейилади.

Oxy координаталар системасига нисбатан ҳаракат қилаётган (S) текис шакл берилган бўлсин. Бу текис шаклдаги AB кесманинг вазияти A нуқтанинг $\overline{x}_A, \overline{y}_A$ координаталари ва А нуқта атрофида φ айланиш бурчаги билан аниқланади.

φ - AB кесманинг Ox ўқи билан ташкил қилган бурчаги (116-расм).

116-расм.

r_B - B нуқтанинг радиус вектори

r' - B нуқтанинг Axy координаталарига нисбатан холатини аниқлайдиган радиус-вектор.

B нуқтанинг тезлигини аниқлаш учун (153) дан t вақт бўйича ҳосила оламиз.

$$\frac{dr_B}{dt}=\frac{dr_A}{dt}+\frac{dr'}{dt} \qquad (154)$$

$$\frac{dr_B}{dt}=\upsilon_B; \quad \frac{dr_A}{dt}=\upsilon_A; \quad \frac{dr'}{dt}=\bar{\upsilon}_{BA}; \qquad (155)$$

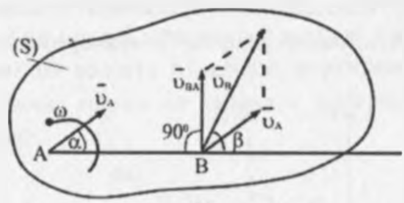
(155)- ни (154)- га қуямиз у ҳолда

$$\bar{\upsilon}_B=\bar{\upsilon}_A+\bar{\upsilon}_{BA} \qquad (156)$$

(156)- формула билан текис параллел ҳаракат қилаётган қаттиқ жисмнинг ихтиёрий B нуқтасининг тезлиги топилади. Бунда тезлик υ_{BA} B нуқтанинг A қутб атрофида айланганда ҳосил қилган тезлиги. Бу тезликнинг миқдори қуйидагига тенг.

$$\upsilon_{AB}=\omega\ AB \qquad (157)$$

Бунда ω - бурчак тезлик. $\bar{\upsilon}_{BA}$ тезлик вектори айланиш радиуси AB га перпендикуляр равишда текис шаклнинг айланиш йўналиши бўйича йўналади яъни $\bar{\upsilon}_{BA}\perp$. B нуқтанинг тезлиги $\bar{\upsilon}_A$ ва $\bar{\upsilon}_{BA}$ векторлардан тузилган параллелограмнинг диоганали бўйлаб йўналган бўлади (119-расм.)



119-расм.

Текис шакл бирор нуқтасининг тезлиги ва айланма ҳаракатининг бурчак тезлиги берилганда текис шаклнинг бошқа нуқтасининг тезлигини (156) формуладан аниқлаш қутб усулида аниқлаш дейилади.

55-§. ТЕКИС ШАКЛ ИККИ НУҚТАСИ ТЕЗЛИКЛАРИНИНГ ПРОЕКЦИЯСИ ҲАҚИДАГИ ТЕОРЕМА

<u>Теорема:</u> Текис шакл икки нуқтаси тезликларининг шу нуқталардан ўтган тўғри чизиқдаги проекцияси ўзаро тенг.

Исбот. Текис шаклда A ва B нуқталарини оламиз. A нуқтани қутб деб қабул қиламиз. Маълумки, B нуқтанинг тезлигини (156)-формула билан ёзиш мумкин. A ва B нуқталар орқали x уқи утказилади (118-расм). (156) ни уқга проекциялаймиз.

$$(\upsilon_B)_x = (\bar{\upsilon}_A)_x + (\bar{\upsilon}_{BA})_x$$

$\upsilon_{BA} \perp x$ булганлиги учун $(\upsilon_{BA})_x = 0$ булади. Шундан қилиб

$$(\bar{\upsilon}_B)_x = (\bar{\upsilon}_A)_x$$

118-расмга асосан

$$\upsilon_B \cos\beta = \upsilon_A \cos\alpha \qquad (158)$$

Бу теорема ёрдамида A нуқта тезлигининг катталиги ва йуналиши B нуқта тезлигининг йуналиши берилганда B нуқта тезлигининг модулини топиш мумкин.

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР.

1. Қаттиқ жисмнинг қандай ҳаракатига илгариланма ҳаракат деб аталади?
2. Илгариланма ҳаракат қилаётган қаттиқ жисм нуқталарининг траекторияси, тезлиги ва тезланиши ҳақидаги теорема қандай таърифланади?
3. Қаттиқ жисмнинг эгри чизиқли илгариланма ҳаракатига мисоллар келтиринг?
4. Қаттиқ жисмнинг қўзғалмас ўқ атрофидаги айланма ҳаракат таърифини айтинг? Бу ҳаракатга мисоллар келтиринг?
5. Жисмнинг бурчак тезлик ва бурчак тезланиши нима? Уларнинг ўлчов бирлиги қандай?
6. Қаттиқ жисмнинг қандай айланишига текис айланиш дейилади?
7. Жисмнинг бир минутдаги айланишлар сони билан бурчак тезлиги орасида қандай боғланиш мавжуд?
8. Жисмнинг қандай айланишига текис ўзгарувчан айланиш дейилади?
9. Текис ўзгарувчан айланма ҳаракатда жисмнинг бурчак тезлиги ва айланиш бурчаги қайси формула билан топилади?
10. Айланма ҳаракат қилаётган қаттиқ жисм нуқтасининг тезлигининг модул ва йўналиши қандай топилади?
11. Қўзғалмас ўқ атрофида айланаётган қаттиқ жисм нуқтасининг уринма ва нормал тезланиши қандай аниқланади? Бу тезланишлар қандай йўналган бўлади?

12. Қўзғалмас ўқ атрофида айланаётган қаттиқ жисм нуқтасининг тезланиши қандай аниқланади? Бу тезланишнинг йўналиши қандай?

13. Қаттиқ жисмнинг қандай ҳаракатига текис параллел ҳаракат дейилади?

14. Текис параллел ҳаракат нечта тенглама билан аниқланади?

15. Жисмнинг текис параллел ҳаракатини қандай икки ҳаракатга ажратиш мумкин?

16. Жисмнинг бурчак тезлиги ва бурчак тезланиши қутбга боғлиқми?

17. Текис шакл нуқтасининг тезлиги қандай аниқланади?

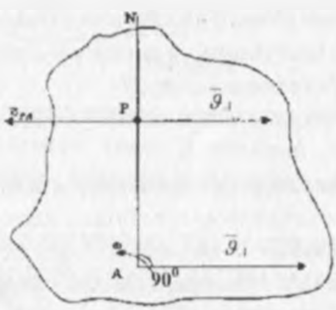
18. $v_{BA}=v_B-v_A$ тенгликдаги v_{BA} тезликнинг модули қандай топилади? У қандай йўналган?

19. Текис шакл икки нуқтаси тезлигининг проекцияси ҳақидаги теоремани таърифланг?

56-§. ТЕЗЛИКЛАР ОНИЙ МАРКАЗИ

Агар *(S)* текис шакл илгариланма ҳаракатда бўлса, бу шаклда ҳар онда тезлиги нолга тенг бўлган битта нуқта мавжуд бўлади. Тезлиги нолга тенг бўлган бундай нуқтага тезликлар оний маркази дейилади. Текис шаклнинг тезлиги нолга тенг бўлган битта нуқтанинг мавжудлигини исботлаймиз. Текис шакл бирор *A* нуқтасининг тезлиги $\bar{v}_1$ ва шу *A* нуқта атрофидаги айланма ҳаракатнинг бурчак тезлиги ω берилган бўлсин (120-расм). *A* нуқтани қутб деб қабул қиламиз.

Қутбдан айланма ҳаракат йўналишида $\bar{v}_1$ га перепендикуляр *AN* тўғри чизиғи ўтказилади. *A* нуқтадан бошлаб *AN* тўғри чизиққа *AP* кесма қўйилади.



120-расм.

$$PA = \frac{\upsilon_A}{\omega}$$

P нуқтанинг тезлиги қуйидагича ёзилади.

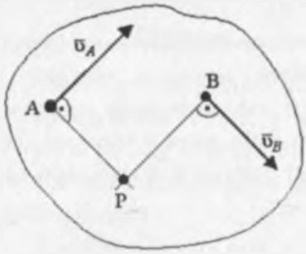
$$\overline{\upsilon}_P = \overline{\upsilon}_A + \overline{\upsilon}_{PA} \qquad (159)$$

P нуқтанинг *A* қутб атрофида айланишдаги тезлигининг модули топилади

$$\upsilon_{PA} = \omega \cdot AP = \omega \frac{\upsilon_A}{\omega} = \upsilon_A \qquad \upsilon_{PA} = \upsilon_A$$

P нуқтада $\bar{\upsilon}_{P_1}$ вектори $\bar{\upsilon}_1$ га бир тўғри чизиқ буйлаб қарама-қарши йўналган булади.

У ҳолда (159)-тенгликдан $\upsilon_P = 0$ булиши келиб чиқади. Демак, *P* нуқта тезликлар оний маркази булади. Тезликларнинг оний марказини топиш учун текис шаклда ётган икки ихтиёрий *A* ва *B* нуқталар тезликларининг йуналиши берилган булиши керак. Шу нуқталардан уларнинг тезликларига туширилган перпендикулярнинг кесишган нуқтаси тезликларнинг оний маркази булади (121-расм). *P* нуқта тезликларнинг оний маркази, бу нуқтанинг тезлиги нолга тенг. $\upsilon_P = 0$



121-расм.

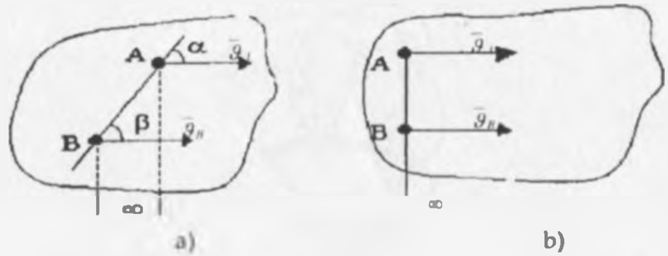
57-§. ТЕЗЛИКЛАР ОНИЙ МАРКАЗИ ЕРДАМИДА ТЕКИС ШАКЛ НУҚТАЛАРИНИНГ ТЕЗЛИГИНИ ТОПИШ

Шаклда курсатилган ҳолатда *S* текис шаклда ётган *P* нуқта тезликларнинг оний маркази булсин. Шаклдаги ихтиёрий *A* ва *B* нуқталарнинг тезликларини топиш керак (122-расм). Бунинг учун *P* нуқтани қутб деб қабул қиламиз. *A* ва *B* нуқталарнинг тезликлари учун қуйидаги формулаларни ёзамиз.

$$\overline{\upsilon}_A = \overline{\upsilon}_P + \overline{\upsilon}_{PA}$$

$$\overline{\upsilon}_B = \overline{\upsilon}_P + \overline{\upsilon}_{BP}$$

текис шакл барча нуқталарининг тезиклари ўзаро тенг ва параллел бўлади, яъни текис шакл оний илгариланма ҳаракатда бўлади.



125-расм.

5. Агар текис шакл бирор қўзғалмас сирт устида сирпанмасдан юмалаб ҳаракат қилса, у ҳолда уриниш нуқтаси тезликларнинг оний маркази бўлади. P уриниш нуқтаси тезликларнинг оний маркази бўлади $\upsilon_P = 0$ (123-расм).

59-§. ТЕКИС ШАКЛ НУҚТАСИНИНГ ТЕЗЛАНИШИНИ АНИҚЛАШ

Теорема: Текис шакл ихтиёрий B нуқтасининг тезланиши қутб тезланиши билан мазкур нуқтанинг қутб атрофида айланишидан ҳосил бўлган тезланишларининг геометрик йиғиндисига тенг.

Исбот: Текис шакл ихтиёрий B нуқтасининг тезлигини аниқлайдиган формула берилган бўлсин.

$$\bar{\upsilon}_B = \bar{\upsilon}_A + \bar{\upsilon}_{BA} \qquad (163)$$

В нуқтанинг тезланишини аниқлаш учун (163)-формуладан вақт бўйича ҳосила оламиз.

$$\frac{d\bar{\upsilon}_B}{dt} = \frac{d\bar{\upsilon}_A}{dt} + \frac{d\bar{\upsilon}_{BA}}{dt} \qquad (164)$$

бунда $\quad \frac{d\bar{\upsilon}_B}{dt} = \bar{W}_B; \quad \frac{d\bar{\upsilon}_A}{dt} = \bar{W}_A; \quad \frac{d\bar{\upsilon}_{BA}}{dt} = \bar{W}_{BA} \qquad (165)$

(165) ни (164) га қўямиз, у ҳолда

$$\bar{W}_B = \bar{W}_A + \bar{W}_{BA} \qquad (166)$$

(166)-формула билан текис шакл исталган B нуқтасининг тезланиши топилади.

Бунда $\overline{W}_A$ - А қутбнинг тезланиши, $\overline{W}_{BA}$ - В нуқтанинг A қутб атрофида айланганда ҳосил бўлган тезланиши. $\overline{W}_{BA}$ тезланишини уринма ва нормал тезланишларга ажратамиз.

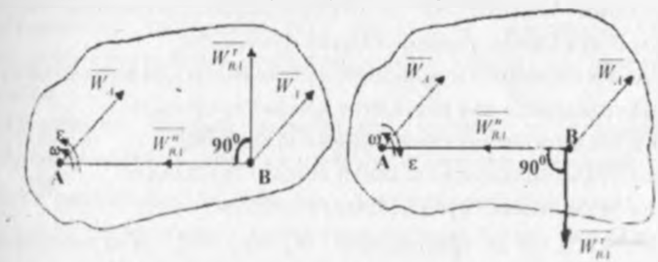
$$\overline{W}_{BA} = \overline{W}^{\tau}_{BA} + \overline{W}^{n}_{BA} \qquad (166')$$

Бунда $\overline{W}^{\tau}_{BA}$ ва $\overline{W}^{n}_{BA}$ - B нуқтанинг A қутб атрофида айланишида ҳосил бўлган уринма ва нормал тезланишлар модули қуйидагига тенг

$$W^{\tau}_{BA} = \varepsilon \cdot AB \qquad \text{бунда} \qquad \overline{W}^{\tau}_{BA} \perp \overline{W}^{n}_{BA} \qquad (167)$$
$$W^{n}_{BA} = \omega^2 \cdot AB \qquad\qquad W_{BA} = AB\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

$\overline{W}^{n}_{BA}$ - тезланиш вектори ҳар доим AB масофа бўйича B нуқтадан A қутбга қараб йўналган бўлади. $\overline{W}^{\tau}_{BA}$ тезланиш вектори B нуқтадан AB га перпендикуляр йўналган бўлади.

$\overline{W}^{\tau}_{BA}$ - тезланиш векторининг йўналиши текис шаклнинг ҳаракатига боғлиқ бўлади. Агар текис шаклнинг ҳаракати тезланувчан бўлса, яъни $\varepsilon>0$, $\overline{W}^{\tau}_{BA}$, тезланиш шакл айланишига қараб йўналган бўлади. Акс ҳолда $\varepsilon<0$ шакл айланишига тескари йўналади (126-расм a,b). Демак $\overline{W}^{\tau}_{BA}$ тезланишнинг йўналиши бурчак тезланишининг йўналишига боғлиқ. Бурчак тезланиши ε қайси томонга қараб йўналса, $\overline{W}^{\tau}_{BA}$ тезланиш шу томонга қараб йўналган бўлади.



126-расм.

(166') ни (166) га қўйиб B нуқтанинг тезланиши топилади.

$$\overline{W}_B = \overline{W}_A + \overline{W}^{\tau}_{BA} + \overline{W}^{n}_{BA} \qquad (168)$$

Текис шакл ҳар қандай B нуқтасининг тезланиши қутбнинг тезланиши билан B нуқтанинг текис шакл билан бирга шу қутб атрофида айланишидан ҳосил бўлган уринма ва нормал тезланишларнинг геометрик йиғиндисига тенг бўлади.

Текис шакл ихтиёрий нуқтаси тезланишининг катта ва йўналишини (168)-дан фойдаланиб аниқлаш мураккаб бўлиши мумкин.

Бундай ҳолда $\overline{W}_B$ тезланишнинг бир бирига перпендикуляр йўналган ўқлардаги проекциялари топилади. Бунинг учун ўқлардан бирини, масалан X ўқини, айланиш радиуси *(АВ)* бўйлаб, иккинчисини эса унга перпендикуляр равишда ўтказиб, (168) ни шу ўқларга проекциялаймиз:

Тезланиш $\overline{W}_B$ нинг координата ўқларидаги проекциялари маълум бўлса, унинг модули ва йўналиши қуйидаги формулалардан топилади.

$$W_B = \sqrt{W_{Bx}^2 + W_{By}^2} \tag{169}$$

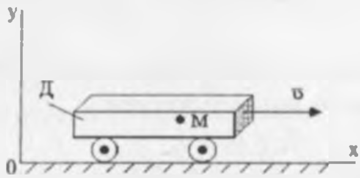
$$\cos(\overline{W}, x) = \frac{W_{Bx}}{W_B}; \qquad \cos(\overline{W}, y) = \frac{W_{By}}{W_B}; \tag{170}$$

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР

1. Тезликлар оний маркази деб нимага айтилади?
2. Текис шакл икки нуқтаси тезликларининг йўналиши маълум бўлса, тезликлар оний марказини қандай аниқлаш мумкин?
3. Тезликлар оний маркази чексизликда бўлган пайтда текис шакл нуқталарининг тезлигини аниқланг?
4. Бурчак тезлиги қандай аниқланади?
5. Текис шаклнинг *А* ва *В* икки нуқтаси берилган. Бунда *А* нуқтасининг тезлиги *АВ* га перпендикуляр йўналган эканлиги маълум В нуқтанинг тезлиги қандай йўналади?
6. Текис шакл ихтиёрий нуқтасининг тезланиши қандай аниқланади?
7. Уринма тезланишнинг катталиги қандай топилади?
8. Уринма тезланишнинг йўналишини аниқланг?
9. Нормал тезланишнинг катталиги қандай топилади?
10. Нормал тезланишни йўналишини аниқланг?
11. $\overline{W}_B = \overline{W}_A + \overline{W}^{\tau}_{BA} + \overline{W}^{n}_{BA}$ тенгликдаги W^{τ}_{BA} ва W^{n}_{BA} тезланишларнинг модули қандай топилади? Улар қандай йўналган?

60-§. НУҚТАНИНГ МУРАККАБ ҲАРАКАТИ. НУҚТАНИНГ НИСБИЙ, КЎЧИРМА ВА АБСОЛЮТ ҲАРАКАТИ

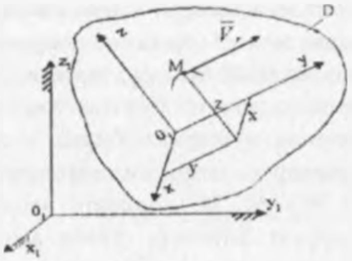
Агар нуқта ёки қаттиқ жисм бир вақтда икки ёки ундан кўп ҳаракатда иштирок қилса, нуқтанинг ёки қаттиқ жисмнинг бундай ҳаракатига мураккаб ёки абсолют ҳаракат дейилади. Масалаларни ечишда нуқта ёки жисмнинг ҳаракатини икки ва ундан ортиқ координата системаларига нисбатан текширишга тўғри келади. Бундай ҳолда координата системаларидан бири қўзғалмас деб олиниб, иккинчиси эса унга нисбатан маълум қонунга мувофик ҳаракат қилади деб қаралади. Бу ҳолда нуқта қўзғалмас координаталар системасига нисбатан мураккаб ҳаракатда бўлади. Масалан: Автобус ёки поезд ичидаги пассажирнинг ҳаракати. Бу мисолда ер билан боғланган координаталар системаси қўзғалмас булиб, поезд, автобус билан боғланган координаталар системаси қузғалувчи координаталар системасидан иборат булади. М нуқтанинг вагонга нисбатан қилган ҳаракатига нисбий ҳаракат дейилади. Унинг вагон билан бирга ерга нисбатан қилган ҳаракатига кучирма ҳаракат дейилади. М нуқтанинг бевосита ерга нисбатан қилган ҳаракати мураккаб ҳаракат булади (127-расм).



127-расм.

Маълум бир ҳаракат қилувчи *Д* жисм берилган булсин. *Oxyz* - *D* жисмга маҳкам ўрнатилган қўзғалувчи система. *O₁,x₁,y₁,z₁* - қўзғалмас координаталар системаси (127-расм.) *M* нуқтанинг қўзғалувчи координата системасига нисбатан қилган ҳаракатига нисбий ҳаракат дейилади.

Нуқтанинг нисбий ҳаракатдаги тезлиги ва тезланишига шу нуқтанинг нисбий тезлиги ва нисбий тезланиши дейилади. Нуқтанинг нисбий тезлигини $\overline{\upsilon}_r$ билан, нисбий тезланишини $\overline{W}_r$ билан белгилайди. М нуқтанинг қузғалувчи система билан ёки *D* жисм билан бирга қўзғалмас системага нисбатан қилган ҳаракатига кўчирма ҳаракат дейилади. М нуқтанинг кучирма ҳаракатдаги тезлиги ва тезланишига шу нуқтанинг кучирма тезлиги ва кучирма тезланиши дейилади. Нуқтанинг кучирма тезлиги $\overline{\upsilon}_e$ билан кучирма тезланиши $\overline{W}_e$ билан белгиланади. *M* нуқтанинг бевосита қўзғалмас координаталар системасига нисбатан ҳаракати мураккаб ҳаракат ёки абсолют ҳаракат дейилади. Нуқтанинг абсолют ёки мураккаб ҳаракатдаги тезлигига абсолют тезлик, тезланишига абсолют тезланиш дейилади. Абсолют тезликни $\overline{\upsilon}_a$ билан, абсолют тезланишни $\overline{W}_a$ билан белгиланади.



128-расм.

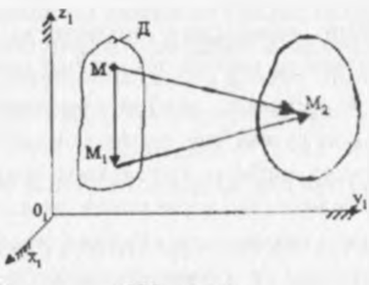
61-§. ТЕЗЛИКЛАРНИ ҚЎШИШ ҲАҚИДАГИ ТЕОРЕМА

Теорема: Нуқтанинг абсолют тезлиги унинг нисбий ва кўчирма тезликларининг геометрик йиғиндисига тенг.

$$\overline{\upsilon}_a = \overline{\upsilon}_r + \overline{\upsilon}_e \tag{171}$$

Исбот: Қўзғалмас тўғри бурчакли O_1, x_1, y_1, z_1 координата системасига нисбатан ҳаракат қилаётган D жисм берилган бўлсин. Шу жисмга нисбатан M нуқта ҳаракат қилади. D жисмнинг t ва t_1 вақтлардаги ҳолатлари берилган бўлсин (129-расм.)

Δt вақт ичида M нуқта D жисмга нисбатан $\overline{MM_1}$ масофага, жисм билан бирга эса $\overline{MM_2}$ масофага силжийди.



129 – расм.

Бунда $\overline{MM_1}$ ва $\overline{M_1M_2}$ мос равишда M нуқтанинг нисбий ва кўчирма силжиш векторлари, MM_2 нуқтанинг абсолют силжиш вектори. Расмдан:

$$\overline{MM_2} = \overline{MM_1} + \overline{M_1M_2} \tag{171}$$

(171) - формуланинг иккала қисмини Δt га бўламиз:

$$\frac{\overline{MM_2}}{\Delta t} = \frac{\overline{MM_1}}{\Delta t} + \frac{\overline{M_1M_2}}{\Delta t} \qquad (172)$$

(172)-формуладаги

$$\frac{\overline{MM_2}}{\Delta t},\ \frac{\overline{MM_1}}{\Delta t} \text{ ва } \frac{\overline{M_1M_2}}{\Delta t}$$

Мос равишда M нуқтанинг Δt вақт ичидаги уртача абсолют нисбий ва кучирма тезлиги булади.

Нуқтанинг бирор ихтиерий t вақтдаги тезлигини топиш учун (172) ни $\Delta t \to 0$ интилтириб, лимит оламиз:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{MM_2}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{MM_1}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{M_1M_2}}{\Delta t} \qquad (172^*)$$

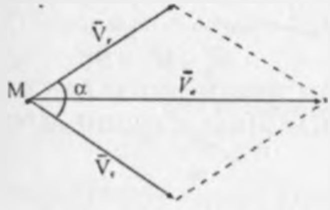
бунда $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{MM_2}}{\Delta t} = \bar{\upsilon}_a,\quad \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{MM_1}}{\Delta t} = \bar{\upsilon}_r,\quad \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{M_1M_2}}{\Delta t} = \bar{\upsilon}_e.$

Демак (172*) формулани қуйидагича ёзамиз.

$$\bar{\upsilon}_a = \bar{\upsilon}_r + \bar{\upsilon}_e \qquad (173)$$

Теорема исбот қилинди. (173)-формула нуқтанинг кучирма ҳаракати илгариланма ва айланма ҳаракатлардан иборат булган ҳолларда ҳам уринлидир.

Абсолют тезликнинг модулини ва йуналишини аниқлаш учун нисбий ва кучирма тезликлардан параллелаграм ясаш керак (130-расм).



130-расм.

Абсолют тезликнинг модули қуйидаги формула билан аниқланади.

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_r^2 + \upsilon_e^2 + 2\upsilon_r\upsilon_e\cos\alpha} \qquad (173)$$

Бунда α, υ_r ва υ_e тезликлар орасидаги бурчак

1) Агар $\alpha=0$ булса, υ_r билан υ_e тезликлар бир тугри чизиқ буйлаб бир томонга йуналган булса, абсолют тезлик қуйидагича топилади.

$$\upsilon_a = \sqrt{\upsilon_r^2 + \upsilon_e^2 + 2\upsilon_r\upsilon_e} = \upsilon_r + \upsilon_e$$

2) Агар α=180° бўлса, яъни $\bar{\upsilon}_r$ билан $\bar{\upsilon}_e$ бир тўғри чизиқ бўйлаб қарама қарши йўналган бўлса абсолют тезлик қуйидагича топилади.

$$\upsilon_a = \sqrt{\upsilon_r^2 + \upsilon_e^2 - 2\upsilon_r\upsilon_e} = \upsilon_r - \upsilon_e$$

3) Агар α=90° бўлса, абсолют тезлик модули қуйидагига тенг бўлади.

$$\upsilon_a = \sqrt{\upsilon_r^2 + \upsilon_e^2}$$

Агар нисбий, кўчирма ва абсолют тезликларидан ихтиёрий иккитаси маълум бўлса, учинчи номаълум тезликни тезликларни қўшиш ҳақидаги теоремадан фойдаланиб аниқлаш мумкин.

62-§. НУҚТАНИНГ КЎЧИРМА ҲАРАКАТИ АЙЛАНМА ҲАРАКАТДАН ИБОРАТ БЎЛГАН ҲОЛДА ТЕЗЛАНИШЛАРНИ ҚЎШИШ ТЕОРЕМАСИ

<u>Теорема:</u> Нуқтанинг кўчирма ҳаракати айланма ҳаракатдан иборат бўлган ҳолда нуқтанинг абсолют тезланиши унинг нисбий, кўчирма ва Кориолис тезланишларининг геометрик йиғиндисига тенг бўлади.

$$\bar{W}_a = \bar{W}_r + \bar{W}_e + \bar{W}_k \qquad (176)$$

Бунда $\bar{W}_r, \bar{W}_e, \bar{W}_k$ лар мос равишда нуқтанинг кўчирма нисбий ва кориолис тезланишлари.

$\bar{W}_r$ ва $\bar{W}_e$ тезланишларни уринма ва нормал тезланишларга ажратиш мумкин.

$$\bar{W}_r = \bar{W}_r^{\tau} + \bar{W}_r^{n} \qquad (177)$$

W_r^{τ} нинг модули қуйидагига тенг

$$W_r^{\tau} = \frac{d\upsilon_r}{dt} = \frac{d^2 S_r}{dt^2}$$

W_r^{n} нинг модули:

$$W_r^{n} = \frac{\upsilon_r^2}{\rho}$$

Агар нуқтанинг нисбий ҳаракати тўғри чизиқли ҳаракатдан иборат бўлса, троекториянинг эгрилик радиуси ρ=∞ га тенг бўлади. Бу ҳолда W_r^{n}=0 бўлади.

$$W_e = W_e^{\tau} + W_e^{n} \qquad (178)$$

$\bar{W}_e^{\tau}$ нинг модули қуйидагига тенг

$$W_e^{\tau} = \varepsilon_e \cdot h$$

W_e^{τ} нинг модули

$$W_e^{n} = \omega_e^2 \cdot h$$

(177) ва (178) ларни (176) га қуямиз, у ҳолда

$$W_a = W_r^n + W_r^{\tau} + W_e^{\tau} + W_e^n + W_k \qquad (179)$$

Кучирма ҳаракат айланма ҳаракатдан иборат бўлган ҳолда нуқтанинг абсолют тезланиши (179)-формуладан топилади.

$\overline{W}_a$ абсолют тезланишининг модулини ва йўналишини аниқлаш учун (179) ни x,y,z, координата ўқларига проекциялаб, унинг шу ўқлардаги W_{ax}, W_{ay}, W_{az} проекцияларини топиш керак. Абсолют тезланишининг модулини қуйидаги формула билан аниқлаймиз:

$$W_a = \sqrt{W_{ax}^2 + W_{ay}^2 + W_{az}^2} \qquad (180)$$

Кучирма ҳаракат илгарилама ҳаракат бўлганда нуқтанинг абсолют тезланиши шу нуқтанинг нисбий ва кўчирма тезланишларининг геометрик йиғиндисига тенг бўлади.

Шундай қилиб, кўчирма ҳаракат илгариланма ҳаракат бўлганда, нуқтанинг абсолют тезланиши нисбий тезланиш $\overline{W}_r$ ва кўчирма тезланиш $\overline{W}_e$ лардан қурилган параллелограмнинг диагонали билан ифодаланади. Бу ҳолда абсолют тезланишнинг модули қуйидагича топилади.

$$W_a = \sqrt{W_r^2 + W_e^2 + 2W_rW_e\cos\alpha} \qquad (180')$$

Бунда α $\overline{W}_r$ ва $\overline{W}_e$ векторлари орасидаги бурчак

63-§. КОРИОЛИС ТЕЗЛАНИШИНИНГ МОДУЛИНИ ВА ЙЎНАЛИШИНИ АНИҚЛАШ

Кориолис тезланиши кўчирма ҳаракат бурчак тезлиги ва нисбий ҳаракат тезликлари вектори кўпайтмасининг иккиланганига тенг

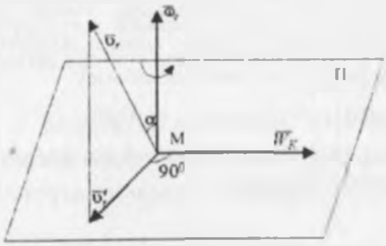
$$\overline{W}_k = 2(\overline{\omega}_e \times \overline{\upsilon}_r) \qquad (181)$$

Агар ω_e билан $\overline{\upsilon}_r$ орасидаги бурчак катталигини α билан белгиласак, Кориолис тезланишининг модули қуйидагича тенг бўлади.

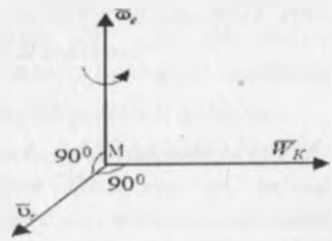
$$W_k = 2\omega_e\upsilon_r\sin\alpha \qquad (182)$$

Кориолис тезланишининг йўналишини аниқлаймиз. М нуқтанинг нисбий тезлиги υ_r берилган бўлсин. Кариолис тезланишини йўналишини аниқлаш учун M нуқтадан ω бурчак тезлик векторига перпендикуляр қилиб, *П* текислиги ўтказилади. Нисбий тезлик $\bar{\upsilon}_r$ ни шу текисликка проекциялаймиз, $\bar{\upsilon}_r'$ проекцияни *M* нуқта атрофида айланиш йўналишига қараб, 90° бурчакка бурсак Кориолис тезланишининг йўналиши келиб чиқади (131-расм). Агар $\omega \perp \upsilon_r$ бўлса (132-расм), $\sin\alpha=1$ бўлади. У ҳолда Кориолис тезланиши қуйидагича бўлади.

$$W_k = 2\omega_e \upsilon_r \qquad (183)$$



131-расм.



132-расм.

Нуқтанинг Кориолис тезланиши қуйидаги ҳолларда нолга тенг бўлади.

1. Кўчирма ҳаракат илгариланма ҳаракат бўлса, бу ҳолда $\omega_e=0$ шунинг учун $W_k=0$ бўлади.

Кўчирма ҳаракат илгариланма ҳаракат бўлганда нуқтанинг абсолют тезланиши шу нуқтанинг нисбий ва кўчирма тезланишларининг геометрик йиғиндисига тенг бўлади.

$$W_a = W_r + W_e \qquad (184)$$

2. Нуқтанинг нисбий тезлиги $\upsilon_r=0$ га тенг бўлса, $\upsilon_r=0$ $W_k=0$.

3. ω ва υ_r векторлар ўзаро паралел бўлса, бу ҳолда $\alpha=0°$, $\alpha=180°$ $W_k=0$ бўлади.

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР.

1. Нуқтанинг нисбий ҳаракатини айтинг?
2. Нуқтанинг кўчирма ҳаракатини айтинг?
3. Нуқтанинг абсолют ҳаракатини айтинг?
4. Тезликларни қўшиш ҳақидаги теоремани таърифланг?
5. Абсолют тезликнинг миқдори қандай аниқланади?
6. Абсолют тезликнинг йўналиши қандай аниқланади?
7. Тезланишларни қўшиш ҳақидаги теоремани таърифланг?

8. Кўчирма ҳаракат илгариланма бўлганда нуқтанинг абсолют тезланиши қандай аниқланади?

9. Кўчирма ҳаракат айланма бўлганда нуқтанинг абсолют тезланиши қандай аниқланади?

10. Кориолис тезланишининг катталиги қандай аниқланади?

11. Кориолис тезланишининг йўналишини аниқланг?

12. Қандай ҳолларда нуқтанинг Кориолис тезланиши нолга тенг бўлади.

ДИНАМИКА.

64-§. ДИНАМИКАНИНГ АСОСИЙ ТУШУНЧАЛАРИ

Назарий механиканинг динамика бўлимида жисмларнинг ҳаракати уларнинг массасига ва ҳаракатни вужудга келтирувчи кучларга боғлиқ равишда текширилади.

Жисм ҳаракатланганда унга ўзгармас кучлардан ташқари миқдор ва йўналиш жиҳатидан ўзгарадиган кучлар ҳам таъсир этади. Жисмга таъсир қилувчи кучлар вақтга, жисм ҳолатига ва унинг тезлигига маълум муносабатда боғлиқ бўлади.

Масалан, электровоз реостатини кетма-кет улашда ёки узишда ҳосил бўладиган тортиш кучи вақтга боғлиқ, суюқлик ёки ҳавонинг қаршилик кучи эса жисмнинг тезлигига боғлиқ бўлади. Демак, умумий ҳолда жисмга таъсир этувчи кучлар вақтга, жисмнинг ҳолатига ва тезлигига боғлиқ бўлади.

$$F = F(t, r, v)$$

бунда t вақт, r -нуқтанинг ҳолатини аниқловчи радиус-вектор, v -жисм тезлиги.

Жисмнинг қўйилган кучлар таъсирида ўз тезлигини тез ёки секин ўзгартириш хусусияти жисмнинг инертлиги дейилади. Жисмнинг инертлигини миқдор жиҳатидан ифодаловчи физик катталик жисмнинг массаси дейилади. Механикада жисмнинг массаси ўзгармас, сколяр ва мусбат катталик деб қаралади. Динамикада дастлаб жисмларнинг ўлчамлари ва массаларининг тақсимланишини эътиборга олмаган ҳолда уларнинг ҳаракатини ўрганиш учун моддий нуқта тушунчаси киритилади. Ҳаракатини ўрганишда ўлчамлари аҳамиятга эга бўлмаган, лекин массага эга бўлган жисм моддий нуқта дейилади.

Динамикада жисмнинг ҳаракатини ўрганиш, одатда, унинг нуқтасининг ҳаракатини ўрганишдан бошланади.

Динамика икки қисмга бўлинади:

1. Моддий нуқта динамикаси
2. Механик система ва қаттиқ жисм динамикаси

Динамикада қуйидаги иккита масала ечилади:

1. Нуқта ёки системанинг ҳаракати берилган, шу нуқта ёки системага таъсир қилувчи кучни топиш керак.
2. Нуқта ёки системага таъсир қилувчи кучлар берилган, нуқта ёки системанинг ҳаракатини аниқлаш керак.

65-§. ДИНАМИКАНИНГ АСОСИЙ ҚОНУНЛАРИ

Механика қонунлари жисмларнинг тезликлари ёруғлик тезлигидан анча кичик бўлган ҳолда ўринли бўлади. Динамика қуйидаги 4 та қонунга асосланган:

1-қонун (инерция қонуни)

Агар нуқтага куч таъсир этмаса нуқта ўзининг тинч ҳолатини ёки тўғри чизиқли текис ҳаракат ҳолатини сақлайди.

Инерция қонунига кўра $\bar F = 0$ бўлса, $\bar w = 0$ бўлади, $\bar \upsilon = const$ бўлади. Бу ерда $\bar \upsilon$ – моддий нуқтанинг тезлик вектори, $\bar w$ - тезланиш вектори, $\bar F$ -куч вектори.

2-қонун (динамиканинг асосий қонуни).

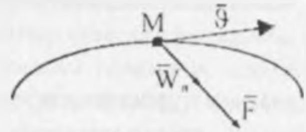
Нуқтанинг куч таъсирида олган тезланишини билан массасининг кўпайтмаси миқдор жиҳатидан шу кучга тенг бўлиб куч билан бир хил йўналишда бўлади

$$\bar F = m\bar w \qquad (186)$$

Бунда: F - куч миқдори;

m - нуқтанинг массаси;

w- нуқтанинг тезланиши.



133-расм.

Эркин тушаётган жисмнинг оғирлик кучи унинг массаси билан эркин тушиш тезланишининг кўпайтмасига тенг.

$$P = mg$$

Жисмнинг массаси қуйидагича аниқланади:

$$m = \frac{P}{g} \qquad (187)$$

Бунда $g=9{,}81\ м/с^2$ - эркин тушиш тезланиши.
(186)- нинг вектор кўриниши қуйидагича ёзилади.

$$m\overline{w} = \overline{F} \qquad (188)$$

Кинематикадан маълумки нуқтанинг тезланиши қуйидагига тенг.

$$\overline{w} = \frac{d\overline{v}}{dt}; \qquad \overline{w} = \frac{d^2\overline{r}}{dt^2},$$ у холда:

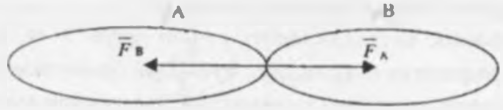
(188)-тенглама қуйидагича ёзилади

$$m\frac{d^2\overline{r}}{dt^2} = \overline{F} \qquad m\frac{dV}{dt} = \overline{F} \qquad (189)$$

(188)- ва (189)- тенгликка нуқта динамикасининг асосий тенгламаси дейилади.

3-қонун (таъсир ва акс таъсир қонуни)

Ҳар қандай таъсир миқдор жиҳатидан ўзига тенг бўлган ва бир тўғри чизиқ бўйлаб тескари томонга йўналган акс таъсирни вужудга келтиради.



134-расм.

A жисм ***B*** жисмга $\overline{F}_A$ куч билан таъсир этса, ***B*** жисм ҳам ***A*** жисмга $\overline{F}_B$ куч билан таъсир қилади

$$\overline{F}_A = -\overline{F}_B$$
$$|\overline{F}_A| = |\overline{F}_B| \qquad (190)$$

Бу ерда $\overline{F}_A$ ва $\overline{F}_B$ кучлари ўзаро мувозанатлашмайди, чунки кучлар ҳар хил жисмга қўйилган.

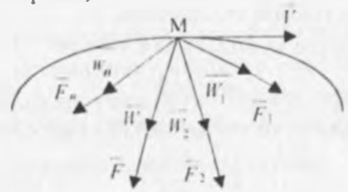
4-қонун (кучлар таъсирининг эркинлик қонуни)

Бир нечта куч бирданига таъсир этганда нуқтанинг олган тезланиши шу кучларнинг ҳар бири алоҳида-алоҳида таъсир этганда олган тезланишларининг геометрик йиғиндисига тенг.

$$\overline{w} = \overline{w}_1 + \overline{w}_2 + \overline{w}_3 + \ldots + \overline{w}_n \qquad (191)$$

Бунда $\overline{w}$ – нуқтанинг $F_1, F_2, F_3, \ldots, F_n$ кучлари бирданига таъсир этганда олган тезланиши.

$\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3 ... \bar{w}_n$ - шу кучларнинг ҳар бири алоҳида-алоҳида таъсир этганда олган тезланиши (135-расм).



135-расм.

(191)-тенгламани иккала қисмини нуқтанинг массасига кўпайтирамиз.

$$m\bar{w} = m\bar{w}_1 + m\bar{w}_2 + m\bar{w}_3 + ... + m\bar{w}_n$$

$$m\bar{w} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + ... + \bar{F}_n$$

ёки

$$m\bar{w} = \sum \bar{F}_k \qquad (192)$$

Классик механика қонунлари ўринли бўлган саноқ системаси инерциал система дейилади. Техника масалаларини ечишда инерциал система сифатида Ер билан бевосита боғланган система олинади.

Механик ўлчов бирликлари системаси

Ҳамма механик катталикларни ўлчаш учун 3 та асосий ўлчов бирликларини киритиш етарлидир. Булардан иккитаси учун вақт ва узунлик бирликлари олинишини кинематика бўлимидан маълум. 3-ўлчов бирлиги сифатида масса ёки кучнинг ўлчов бирликлари олинади.

Механикада бир-биридан фарқ қилувчи икки турдаги бирликлар системаси киритилади.

Биринчи тур бирликлар системаси.

Халқаро СИ бирликлар системасининг таркибий қисми бўлган МКС системаси кенг қўлланилади. Бу системада асосий ўлчов бирликлари учун қуйидаги бирликлар олинади:

1. Узунлик бирлиги – 1 метр (м)
2. Масса бирлиги – 1 килограмм (кг)
3. Вақт бирлиги – 1 секунд (сек)

Қолган барча механик катталикларнинг бирлиги асосий бирликлардан ҳосилавий бирлик сифатида олинади.

Масалан, куч бирлиги учун 1 ньютон (Н) қабул қилинади. 1Н=кгм/с^2, яъни 1кг массага 1м/с^2 тезланиш берадиган куч бирлиги 1Н га тенг.

Иккинчи тур бирликлар системаси.

Техник бирликлар системаси деб аталувчи МКГСС системаси ҳам қўлланилади. Бу системада асосий ўлчов бирликлари учун қуйидаги бирликлар қабул қилинади.

1. Узунлик бирлиги - 1 метр (м)
2. Куч бирлиги – 1 килограмм куч (кгк)
3. Вақт бирлиги – 1 секунд (сек)

Ҳар қандай масалани ечишда фақат битта бирликлар системасидан фойдаланиш лозим.

66-§. МОДДИЙ НУҚТА ҲАРАКАТИНИНГ ДЕКАРТ КООРДИНАТАЛАРИДАГИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАРИ

Массаси m га тенг бўлган M нуқта F кучи таъсирида қўзғалмас $Oxyz$ координаталар системасига нисбатан ҳаракатланаётган бўлсин. F - нуқтага қўйилган барча кучларнинг тенг таъсир этувчиси (136-расм).

Нуқта динамикасининг асосий тенгламаси тонамиз:

$$m\bar{w} = \bar{F} \qquad (193)$$

$\bar{w} = \frac{d\bar{\vartheta}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$ бўлгани учун (193) формула қуйидагича ёзилади.

$$m\frac{d\bar{\vartheta}}{dt} = \bar{F}; \qquad (194)$$

$$m\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \bar{F} \qquad (195)$$

(194)- ёки (195)- тенгламалар эркин моддий нуқта ҳаракати дифференциал тенгламасининг векторли ифодаси дейилади.

(161)- тенглама координата ўқларига проекциялаймиз:

$$m\frac{dV_x}{dt} = F_x; \quad m\frac{dV_y}{dt} = F_y, \quad m\frac{dV_z}{dt} = F_z; \quad (196)$$

бунда $\vartheta_x, \vartheta_y, \vartheta_z$ - ϑ тезлик векторининг x,y,z ўқларидаги проекцияси

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \dot{X}, \quad V_y = \frac{dy}{dt} = \dot{Y}, \quad V_z = \frac{dz}{dt} = \dot{Z}. \qquad (197)$$

F_x, F_y, F_z-F кучларининг x,y,z ўқларидаги проекциялари

(196)- формулага нуқта ҳаракатининг Декарт координаталардаги дифференциал тенгламалари дейилади.

(197)- ни (196)- га қўйсак қуйидаги тенгламалар ҳосил бўлади.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x; \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y; \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = F_z; \quad (198)$$

ёки $\qquad m\ddot{x} = F_x; \qquad m\ddot{y} = F_y; \qquad m\ddot{z} = F_z; \qquad (199)$

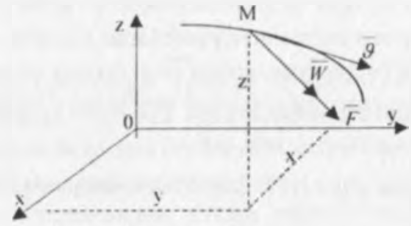
(198)- ва (199)- формулалар ҳам нуқта ҳаракатининг Декарт координаталаридаги дифференциал тенгламаларни ифодалайди. Агар нуқта бир текисликда *(xoy)* ҳаракат қилса, (198)-тенглама қуйидагича ёзилади:

$$m\frac{d\vartheta_x}{dt} = F_x; \qquad m\frac{d\vartheta_y}{dt} = F_y; \qquad (200)$$

Агар нуқта тўғри чизиқли ҳаракат қилса, (196)-тенглама қуйидагича ёзилади:

$$m\frac{d\vartheta_x}{dt} = F_x; \qquad (201)$$

(201)-тенгламага тўғри чизиқли ҳаракатининг дифференциал тенгламаси дейилади.



136-расм.

Массаси m га тенг бўлган моддий нуқтанинг ҳаракати табиий усулда берилса, тенг таъсир этувчи кучнинг табиий координата ўқларидаги проекцияларини қуйидагича аниқлаш мумкин:

$$mw_\tau = F_\tau \qquad mw_n = F_n$$

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = F_\tau \qquad m\frac{\upsilon^2}{\rho} = F_n \qquad mw_b = 0 \qquad (201')$$

(201`)-тенгламаларга моддий нуқта ҳаракатининг табиий кордината ўқларидаги дифференциал тенгламалари дейилади

ТАРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР.

1. Динамика бўлими нимани ўрганади?
2. Асосий тушунча ва таърифларни айтинг?
3. Масса деб нимага айтилади?
4. Моддий нуқта деб нимага айтилади?
5. Техникка, вақтга ва масофага боғлиқ бўлган кучларга мисол келтиринг?

6. Механиканинг асосий қонунларини айтинг?
7. Инерционал саноқ системаси деб нимага айтилади?
8. Нуқта ҳаракатининг Декарт координаталардаги диференциал тенгламаларини ёзинг?
9. Динамиканинг асосий тенгламасини ёзинг?
10. Нуқта учун динамиканинг икки асосий масаласини айтинг?

67-§. НУҚТА ДИНАМИКАСИНИНГ БИРИНЧИ МАСАЛАСИ ВА УНИ ЕЧИШ УСУЛИ

Нуқтанинг массаси ва ҳаракат тенгламалари берилган бўлсин.

$$x = f_1(t), y = f_2(t), z = f_3(t) \qquad (202)$$

Нуқтага таъсир этувчи кучнинг миқдори ва йўналишини топиш лозим бўлсин. Ҳаракатни вужудга келтирувчи кучнинг проекциялари аниқланади. Бунинг учун берилган тенгламалардан вақт бўйича икки маротаба ҳосила олинади.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f_1''(t); \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = f_2''(t); \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = f_3''(t); \qquad (203)$$

Нуқта ҳаракатининг декарт координаталардаги дифференциал тенгламаларига қўйилади:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x; \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y; \qquad m\frac{d^2z}{dt^2} = F_z; \qquad (204)$$

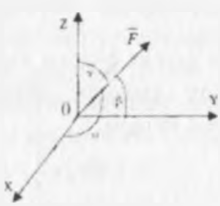
$$F_x = mf_1''(t); \qquad F_y = mf_2''(t); \qquad F_z = mf_3''(t); \qquad (205)$$

Нуқтага таъсир этувчи кучнинг миқдори қуйидагига тенг:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \qquad (206)$$

Нуқтага таъсир этувчи кучнинг йўналиши йўналтирувчи косинуслар ёрдамида топилади.

$$\cos\alpha = \frac{F_x}{F}; \cos\beta = \frac{F_y}{F}; \cos\gamma = \frac{F_z}{F} \qquad (207)$$



137-расм.

(208) дан вақт бўйича ҳосила олсак 6 та интеграллаш доимийларига боғлиқ қуйидаги учта функция ҳосил бўлади.

$$\dot{x} = \dot{x}(t, C_1, C_2, C_3, c_4, C_5, C_6)$$

$$\dot{y} = \dot{y}(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \qquad (209)$$

$$\dot{z} = \dot{z}(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6)$$

Бошланғич шартларни (208)- ва (209)- га қўйиб, 6 та интеграллаш доимийлари қатнашадиган 6 та тенгламалар системасини оламиз. Бу тенгламалар системасини биргаликда ечиб 6 та интеграллаш доимийларини аниқлаймиз.

$$c_i = c_i(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$$

Интеграллаш доимийлари топилган қийматларини (208)- га қўйиб, (209)- бошланғич шартларига мос бўлган нуқтанинг Декарт координаталардаги кинематик тенгламаларини оламиз.

$$x = x(t), \; y = y(t), \quad z = z(t)$$

Нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламасини нуқтага таъсир этувчи куч бир вақтда нуқта координатасига, тезлигига ва вақтга боғлиқ бўлганда интеграллаш мураккаб. Дифференциал тенгламани фақат қуйидаги ҳолларнинг бирида интеграллаш мумкин.

1) Нуқтага таъсир этувчи куч ўзгармас бўлса, $\bar{F} = const$

2) Куч вақтнинг функцияси бўлса, $\bar{F} = \bar{F}(t)$

3) Куч масофанинг функцияси бўлса, $\bar{F} = \bar{F}(s)$.

4) Куч нуқта тезлигининг функцияси бўлса, $\bar{F} = \bar{F}(\vartheta)$

Нуқта динамикасининг иккинчи масаласига доир масалалар ечиш тартиби:

Моддий нуқта динамикасининг иккинчи асосий масаласи қуйидаги тартибда ечилади.

1. Инерциал саноқ системасини киритиб, координата ўқлари танлаб олинади.

2. Нуқтага таъсир этувчи ва боғланиш реакция кучлари чизмада кўрсатилади.

3. Нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламалари тузилади.

4. Нуқта ҳаракатининг бошланғич шартлари ёзилади.

$$x = x_0, \vartheta_x = \vartheta_{0x}$$

$$y = y_0, \vartheta_y = \vartheta_{0y}$$

$$z = z_0, \vartheta_z = \vartheta_{0z}$$

5. Тузилган тенгламаларнинг ҳар бири икки мартадан интегралланади.

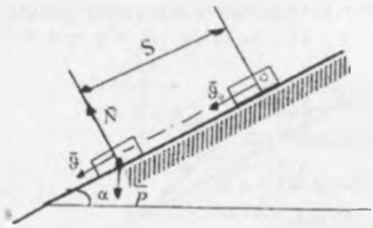
6. Интеграллашда ҳосил бўладиган ўзгармас миқдорлар бошланғич шартлардан фойдаланиб топилади.

7. Тузилган дифференциал тенгламаларнинг бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечими аниқланади ва изланаётган номаълумлар топилади.

Масала №3. Оғир жисм горизонтга 30° бурчак остида оғган силлиқ текислик бўйлаб пастга тушади. Агар жисмнинг тезлиги бошланғич пайтда 2м/с га тенг бўлган бўлса, жисм 9,6 М йўлни қанча вақтда ўтишини топилсин.

Ечиш.

Жисмга таъсир этувчи кучларнинг йўналишини чизмада кўрсатамиз.



138-расм.

Юк ҳаракатининг дифференциал тенгламасини тузамиз. Бунинг учун тўғри чизиқли ҳаракатнинг дифференциал тенгламасидан фойдаланамиз.

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F_x;\quad m\frac{d\vartheta_x}{dt}=F_x;$$

чизмадан $F_x = P_x + N_x$, $N_x = 0$, $F_x = P\sin\alpha = mg\sin\alpha$

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=mg\sin\alpha$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=g\sin\alpha \qquad (210)$$

(210) ни интеграллаймиз

(219) тенглама моддий нуқта нисбий ҳаракатининг дифференциал тенгламасининг векторли кўриниши дейилади. (219) ни икки томонини $Oxyz$ координата ўқларига проекциялаймиз

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x + N_x + F_{ex} + F_{kx} \\ m\ddot{y} &= F_y + N_y + F_{ey} + F_{ky} \\ m\ddot{z} &= F_z + N_z + F_{ez} + F_{kz} \end{aligned}\right\} \qquad (220)$$

(220) нуқта нисбий ҳаракати дифференциал тенгламасининг координата ўқларидаги проекциясини ифодалайди. Қуйидаги хусусий ҳолларни кўриб чиқамиз.

1. Кўзғалувчи саноқ системаси илгариланма ҳаракатда бўлсин. У ҳолда $W_k = 0,\ F_k = 0$

Моддий нуқта нисбий ҳаракатининг дифференциал тенгламаси

$$m\overline{W}_r = \overline{F} + \overline{N} + \overline{F}^e \qquad (221)$$

кўринишда ёзилади.

2. Қўзғалувчи саноқ система илгарилама ва тўғри чизиқли тенг ўлчовли ҳаракатда бўлсин.

$\overline{W}_e = 0$ $\overline{W}_k = 0$ $\overline{F}_e = 0$, $\overline{F}_k = 0$ бўлиб дифференциал тенглама қуйидагича ёзилади.

$$m\overline{W}_r = \overline{F} + \overline{N} \qquad (222)$$

3. Нуқта қўзғалувчи саноқ системасига нисбатан тўғри чизиқли ва тенг ўлчовли ҳаракатлансин ($\vartheta_r = const$) $W_r = 0$ бўлиб дифференциал тенглама қуйидаги кўринишда ёзилади

$$\overline{F} + \overline{N} + \overline{F}_e + \overline{F}_k = 0 \qquad (223)$$

4. Нуқта қўзғалувчи саноқ системасига нисбатан тинч ҳолатда бўлсин. Бу ҳолда $V_r = 0$, $W_r = 0$ $F_k = 0$ бўлади ва дифференциал тенглама кўринишда ёзилади.

$$F + N + F_e = 0 \qquad (224)$$

Яъни берилган кучлар, реакция кучлари ва кўчирма инерция кучлари ҳар онда ўзаро мувозанатланади.

(224) - тенглама моддий нуқта нисбий мувозанат тенгламасининг векторли кўринишини ифодалайди.

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР

1. Нуқтанинг нисбий ва абсолют дифференциал тенгламалари орасида қандай фарқ бор?
2. Кўчирма инерция кучлари қайси формула билан топилади?

3. Кориолис инерция кучлари қайси формула билан топилади?
4. Классик механиканинг нисбийлик принципининг моҳияти нимадан иборат?
5. Қандай саноқ системасига инерциал саноқ системаси дейилади?
6. Қандай саноқ системасига инерциал булмаган саноқ системаси дейилади?
7. Қачон нуқта нисбий мувозанатда булади?
8. Нуқтанинг қандай ҳаракатига нисбий ҳаракат дейилади?
9. Нуқтанинг қандай ҳаракатига кучирма ҳаракат дейилади?
10. Нуқтанинг қандай ҳаракатига абсолют ҳаракат дейилади?

70-§. НУҚТАНИНГ ЭРКИН ТЕБРАНМА ҲАРАКАТИ. ТЕБРАНИШ АМПЛИТУДАСИ, ФАЗАСИ, ЧАСТОТАСИ ВА ДАВРИ

Табиат ва техникада тебранма ҳаракатлар жуда куп учрайди. Ҳар қандай иншоот ёки машинанинг таркибига кирадиган барча қисмлар маълум даражада эластик булганидан тебраниш қобилиятига эгадир. M нуқтанинг эркин тебранма ҳаракатини текширамиз. Фараз қилайлик O нуқта M нуқтанинг мувозанат ҳолати булсин. Нуқтани O нуқтадан x масофага олиб бориб қуйиб юборилганда, у яна мувозанат ҳолатига қайтишга интилади. Нуқтага ҳамма вақт мувозанат ҳолатига қараб йуналган F кучи таъсир қилади. Бундай кучга қайтарувчи куч дейилади.

M нуқта ҳаракатининг тенгламасини аниқлаймиз. Бунинг учун O нуқтани координата боши қилиб x уқини утказамиз (140-расм).

140-расм.

Қайтарувчи куч модулини топиш формуласи

$$F=cx$$

Бунда F - қайтарувчи куч,

c - пропорционаллик коэффициенти, c нинг бирлиги кг/см, н/м.

x - нуқтанинг мувозанат ҳолатидан четга чиқиш масофаси.

Қайтарувчи кучнинг x уқидаги проекцияси

$$F_x=-F \quad F_x=-cx$$

C_1 ва C_2 ларни ўрнига янги a ва α кичик ўзгармас миқдорларни киритамиз. булар орасида қуйидагича боғланиш бор

$$\begin{cases} C_1 = a\sin\alpha \\ C_2 = a\cos\alpha \end{cases} \qquad (230)$$

(230) ни (227) га қўйиб қуйидагини ҳосил қиламиз

$$x = a\sin\alpha\,\cos kt + a\cos\alpha\,\sin kt$$

$$x = a\sin(kt+\alpha) \qquad (231)$$

(231) ҳам (225) нинг ечими бўлади

Физикадан маълумки (231) - тенглама нуқтанинг гармоник тебранма ҳаракатининг тенгламасидир.

Демак, нуқтанинг қайтарувчи куч таъсиридаги эркин тебранма ҳаракати гармоник тебранма ҳаракатдан иборат бўлади.

Бунда, a - тебранишн амплитудаси

Нуқтани мувозанат ҳолатидан энг катта масофага оғишига нуқтанинг амплитудаси дейилади. $kt+\alpha$ тебранишн фазаси.

Тебранишн фазаси нуқтанинг t вақтдаги вазиятини ва қайси томонга қараб ҳаракат қилишини курсатади. к - циклик частота (доиравий такрорлик) к нуқтанинг 2π секундда тўла тебранишлар сонини кўрсатади.

Нуқтани тўла бир марта тебраниш учун кетган вақтга тебраниш даври дейилади.

$$T = \frac{2\pi}{k}, \quad k = \sqrt{\frac{c}{m}}, \quad T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{c}{m}}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}} \qquad (232)$$

(232)-тебраниш даврини топиш формуласи a билан (α) ни аниқлаймиз. Бунинг учун (230)- дан фойдаланамиз:

$$C_1^2 + C_2^2 = a^2$$

$$a = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$$

C_1 ва C_2 ларнинг қийматини қуямиз

$$a = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\vartheta_0}{k}\right)^2} \qquad (233)$$

(233) - Эркин тебраниш амплитудасини топиш формуласи

(230)- ни бир бирига бўламиз

$$\frac{C_1}{C_2} = tg\alpha$$

$$tg\alpha = \frac{kx_0}{\vartheta_0} \qquad (234)$$

Бунда α - бошланғич фаза (234)- билан α ни аниқлаймиз

(-) ишора қайтарувчи кучнинг тезликка нисбатан тескари йуналишида эканлигини билдиради.

M нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламасини тузамиз.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -F \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} = -cx$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{cx}{m} = 0$$

$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{cx}{m} = 0 \qquad \frac{c}{m} = k^2$ - билан белгилаймиз.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0 \quad \text{ёки} \quad \ddot{x}+k^2x = 0 \qquad (225)$$

(225)- формула эркин тебранма ҳаракатининг дифференциал тенгламаси.

(225)-нинг умумий ечимини топамиз. Бунинг учун характеристик тенглама тузамиз:

$$r^2 + k^2 = 0 \qquad (226)$$

(226) - тенглама (225)- ни тавсифий тенгламаси

$$r^2 = -k^2 \quad r_{1,2} = \pm\sqrt{-k^2} = \pm ki$$

$$r_1 = ki \qquad r_2 = -ki$$

Дифференциал тенгламаларнинг назариясига асосан (225) ни умумий ечими қуйидагича булади.

$$x = C_1\cos kt + C_2\sin kt \qquad (227)$$

Бу ерда C_1, C_2 ихтиёрий узгармас миқдорлар: C_1 ва C_2 ларни топиш учун бошлангич шартлар берилиши керак.

$$t = 0 \quad x = x_0 \quad \upsilon = \upsilon_0$$

(227)- дан вақт буйича ҳосила оламиз.

$$V_x = \dot{x} = -C_1 k\sin kt + C_2 k\cos kt \qquad (228)$$

(228)- билан эркин тебранма ҳаракат қилаётган нуқтанинг тезлиги топилади.

$t=0$ ва $x=x_0$ ларни (227)га қуямиз, у ҳолда $C_1=x_0$

$t=0$ ва $\upsilon=\upsilon_0$ ларни (228) қуямиз.

$$V_0=C_2k, \quad C_2 = \frac{V_0}{k}$$

C_1 ва C_2 ларнинг қийматларини 3 га қуямиз.

$$x = x_0\cos kt + \frac{V_0}{k}\sin kt \qquad (229)$$

(229) - тенглама ҳам M нуқтанинг ҳаракат тенгламаси булади.

(227)- ни бошқача куринишга келтирамиз.

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР.

1. Қандай ҳаракатга мажбурий тебранма ҳаркат дейилади?
2. Мажбурий тебранма ҳаракат дифференциал тенгламасини ёзинг
3. Мажбурий тебранма ҳаракатнинг умумий ечимини ёзинг?
4. Мажбурий тебранма ҳаракат частотаси қандай ёзилади?
5. Мажбурий тебранма ҳаракат даври қандай ёзилади?
6. Мажбурий тебранма ҳаракат амплитудаси қандай факторларга боғлиқ?
7. Динамик коэффициент нима?
8. Динамик коэффициентнинг графиги қандай бўлади?
9. Қачон резонанс ҳодисаси содир бўлади?
10. Мажбурий тебранма ҳаркатнинг тенгламаси ва графиги резонанс ҳодисаси вақтида қандай бўлади?

73-§. МЕХАНИК СИСТЕМА

Бир нечта нуқталар (жисмлар) тўплами берилган бўлсин. Агар бу тўпламдаги ҳар бир нуқтанинг (жисмнинг) ҳаракати бошқаларнинг ҳаракатига ва вазиятига боғлиқ бўлса, бундай нуқталар (жисмлар) тўпламига механик система дейилади.

Масалан: автомашина, кривошип шатун механизми, қуёш системаси ва абсолют қаттиқ жисмлар мисол бўлади.

Демак системани ташкил қилувчи жисмлар доимо бир-бирига таъсир қилиши шарт.

Системага таъсир қилувчи кучлар

Системадаги жисмлар фазода ихтиёрий томонга қараб ҳаракат қила олса, бундай системага эркин система дейилади.

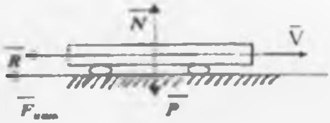
Масалан: Қуёш системаси. Системадаги жисмлар ҳаракати чекланган бўлса бундай системага –эрксиз система дейилади

Ҳар қандай машина ёки механизм боғланишдаги системага мисол бўла олади. Боғланишнинг системадаги жисмларга кўрсатадиган таъсирига – реакция кучи дейилади. Эркин ва эрксиз системага таъсир қилувчи кучларни икки гуруҳга ажратамиз:

1. Ташқи кучлар *2. Ички кучлар*

Система таркибига кирмаган жисмларнинг системага кўрсатадиган таъсирига ташқи кучлар дейилади.

Масалан: Автомобилни бирор система деб қарасак, автомобилга таъсир қилувчи куч – ернинг тортиш кучи P ҳавонинг қаршилиги R, ишқаланиш кучи F ва ернинг нормал реакция кучи N ташқи кучларга мисол бўлади (147-расм).



147-расм.

Системадаги жисмларнинг бир-бирига кўрсатадиган таъсири ички кучлар дейилади.

Газларнинг поршенга, шатуннинг валга таъсири ички кучларга мисол бўлади. Система таъсир қилувчи ташқи кучларни $\bar{F}^e$ – билан, ички кучларни $\bar{F}^i$ – билан белгилаймиз.

Системага таъсир қилувчи ички кучлар икки хоссага эга:

I - Хосса: Системага таъсир қилувчи барча ички кучларнинг геометрик йиғиндиси ёки бош вектори нолга тенг.

Исбот: Бизга n та нуқтадан иборат система берилган бўлсин. Шу системада ихтиёрий M_1 ва M_2 нуқталарини оламиз. Ньютоннинг III-қонунига асосан бу нуқталар бир-бирига модуллари жиҳатидан тенг бўлган ва бир тўғри чизиқ бўйлаб тескари томонга йўналган куч билан таъсир қилади. M_1 нуқта M_2 нуқтага F_1 куч билан таъсир этса, M_2 нуқта эса M_1 нуқтага F_2 куч билан таъсир қилади.

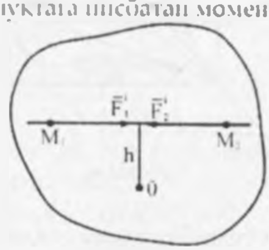
$$F_1 = F_2; F_1 = -F_2; \qquad (249)$$
$$F_1 + F_2 = 0;$$

(249) ни системадаги ҳар бир нуқта учун ёзиб қўшиб чиқсак қуйидаги ҳосила бўлади:

$$\sum F_1^i = 0, \quad \kappa = 1.2...n \qquad (250)$$

II -Хосса: Системадаги барча ички кучларнинг ихтиёрий нуқтага ёки ўққа нисбатан олинган моментларининг йиғиндиси нолга тенг.

Ички кучлардан 0 нуқтага нисбатан момент олсак (148-расм).



148-расм.

$$m_o(\vec{F}_1^i) = -F\cdot h$$
$$m_o(\vec{F}_2^i) = F'\cdot h = F\cdot h \qquad (251)$$
$$m_o(\vec{F}_1^i) + m_o(\vec{F}_2^i) = 0$$

(251) ни хар бир нуқта учун ёзиб ҳадма-ҳад қўшсак қуйидаги хосил бўлади:

$$\sum m_o(\vec{F}_k^i) = 0, \qquad \kappa = 1,2...n \qquad (252)$$

Бу хоссалардан ички кучлар ўзаро мувозанатлашади деган хулосага келиш мумкин эмас, чунки ички кучлар системадаги хар бир жисмга қўйилган. Демак ички кучлар таъсирида системадаги жисмлар бир бирига нисбатан харакат қилади.

Системанинг массаси, массалар маркази ва унинг координаталари

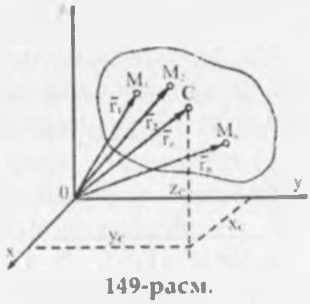
Системадаги нуқталарнинг ёки жисмларининг массалар йиғиндисига системанинг массаси дейилади.

$$M = m_1 + m_2 + ... + m_n = \sum m_k \qquad (253)$$

бунда M - системанинг массаси. $m_1, m_2, ..., m_n$ - системадаги нуқталарнинг массаси.

Массалари $m_1, m_2, ..., m_n$ га тенг бўлган n та $M_1, M_2, ..., M_n$ нуқталардан тузилган система берилган. $r_1, r_2, ... r_n$ шу нуқталарнинг радиус-векторлари бўлсин (148-расм). Ва шу r_c радиус-вектори билан аниқланадиган геометрик С нуқта системанинг массалар маркази ёки инерция маркази дейилади.

$$\vec{r}_c = \frac{\sum m_k \vec{r}_k}{M}, \qquad \kappa = 1,2...n \qquad (254)$$



149-расм.

(254) ни координата ўқларига проекциялаймиз;

$$x_c = \frac{\sum m_k x_k}{M}$$
$$y_c = \frac{\sum m_k y_k}{M} \qquad k = 1, 2, \dots n \qquad (255)$$
$$z_c = \frac{\sum m_k z_k}{M}$$

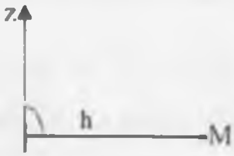
бунда x_c, y_c, z_c - лар массалар марказининг координаталари билан топилади. Массалар маркази системадаги массаларнинг жойлашишини тавсифлайди. Агар система иккита нуқтадан иборат бўлса, (255)-қуйидагига тенг;

$$x_c = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}$$
$$y_c = \frac{m_1y_1 + m_2y_2}{m_1 + m_2} \qquad (256)$$
$$z_c = \frac{m_1z_1 + m_2z_2}{m_1 + m_2}$$

74-§. ҚАТТИҚ ЖИСМНИНГ ЎҚГА НИСБАТАН ИНЕРЦИЯ МОМЕНТИ ВА ИНЕРЦИЯ РАДИУСИ

Бизга z ўқи ва массаси m га тенг бўлган M нуқта берилган бўлсин. h-M нуқтадан z ўққача бўлган масофа (150-рам).

Нуқтанинг массаси билан шу нуқтадан ўққача бўлган масофа квадрати кўпайтмасига ўққа нисбатан нуқтанинг инерция моменти дейилади. mh^2-M нуқтанинг z ўққа нисбатан инерция моменти дейилади.



150-расм.

Таъриф: Жисмнинг бирор ўққа нисбатан инерция моменти жисмдаги барча нуқталарнинг шу ўққа нисбатан олинган инерция моментларининг йиғиндисига тенг;

$$I_z = m_1h_1^2 + m_2h_2^2 + \dots + m_nh_n^2 = \sum mh^2 \qquad (257)$$

Бунда I_z жисмнинг z ўққа нисбатан инерция моменти. Инерция моменти жисмдаги массаларнинг жойлашишининг тавсифлайди. Инерция моменти мусбат скаляр катталик. Инерция моментининг ўлчов бирлиги $кгм^2$. Система - нуқталарининг массаларини ўққача (нуқта ёки текисликкача) бўлаган масофалар квадрати кўпайтмасининг йиғиндисига тенг скаляр катталик мос равишда системанинг ўққа (нуқта ёки текисликка) нисбатан инерция моменти дейилади. Нуқтага нисбатан инерция моменти кўпинча қутбга нисбатан инерция моменти деб аталади. Агар z ўққа, 0 нуқтага ва П текисликка нисбатан системанинг инерция моментларини I_z, I_0 ва $I_П$ билан белгиласак,

$$I_z = \Sigma m_k h_k^2, \quad I_0 = \Sigma M_k r_k^2, \quad I_П = \Sigma m_k d_k^2 \qquad (257)$$

формула ўринли бўлади. Бунда m_k система M_k нуқтасининг массасини, h_k, r_k, d_k лар M_k нуқтадан z ўққа, 0 нуқтага ва П текисликкача бўлган масофаларни ифодалайди.

Жисмнинг ўққа нисбатан инерция моментини қуйидаги формула билан ҳисоблаш мумкин.

$$J_z = m \cdot \rho_z^2 \qquad (258)$$

Бунда ***m***- масса.

ρ –жисмнинг инерция радиуси.

Жисмнинг массаси тўпланган нуқтадан ўққача бўлган масофага инерция радиуси дейилади.

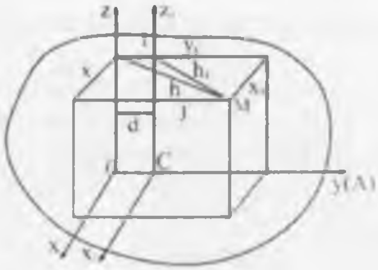
$$\rho_z = \sqrt{\frac{I_z}{m}} \qquad (259)$$

75-§. ПАРАЛЕЛ ЎҚЛАРГА НИСБАТАН ИНЕРЦИЯ МОМЕНТИ ҲАҚИДАГИ ТЕОРЕМА

Жисмнинг ҳар хил ўқларга нисбатан инерция моменти ҳар хил бўлади.

z ва z_1 ўқларга нисбатан инерция моменти қуйидагига тенг.

$$J_z = \sum mh^2 \quad J_{z_1} = \sum mh_1^2 \qquad (260)$$



151-расм.

Жисм берилган булсин. Жисмда ихтиёрий *M* нуктани оламиз (151-расм).

Жисмнинг массалар марказини координата боши килиб оламиз $z_1 // z$ укига $x_1 // x$ булсин. *x, y, z M* нуктани *cxyz* системадаги координаталари. Бу координаталар орасидаги богланишни куйидагича езамиз.

$$x = x_1; \quad y = d + y_1 \qquad \text{бундан} \qquad y_1 = y - d$$

h ва ***h₁*** лар ***M*** нуқтадан ***z*** ва ***z₁*** укларигача булган масофалар.

Расмдан $h^2 = x^2 + y^2$, $h_1^2 = x_1^2 + y_1^2$ қийматларини қуйсак

$$h_1^2 = x^2 + (y - d)^2 = x^2 + y^2 - 2dy + d^2 = h^2 - 2dy + d^2 \qquad (261)$$

$$I_{z_1} = \sum mh_1^2 \qquad (262)$$

(261) ни (262) га қуямиз. У холда

$$I_{z_1} = \sum m(h^2 - 2dy + d^2) = \sum mh^2 - 2d\sum my + d^2\sum m$$

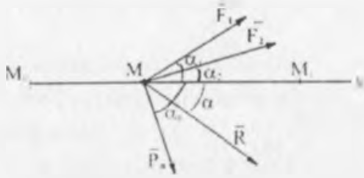
$\sum mh^2 = I$ жисмни *z* укига нисбатан инерция моменти $\sum m = M$ жисмнинг массаси.

C нукта координата боши булганлиги учун унинг координатаси нолга тенг булади.

$$Y_c = 0; Y_c = \frac{\sum my}{M}; \sum my = MY_c \quad \sum my = 0; I_{z_1} = I + Md^2 \qquad (263)$$

(263) формула параллел укларга нисбатан инерция моменти хакидаги тенгламани ифодалайди

Теорема: Жисмнинг массалар марказидан утувчи укга параллел булган бирор укга нисбатан инерция моменти массалар марказидан утувчи укга нисбатан хисобланган инерция моменти билан жисм массасининг шу уклар оралиги квадрати купайтмаси йигиндисига тенг



156-расм.

Тенг таъсир этувчи куч

$$R = F_1 + F_2 + \dots F_n \qquad (273)$$

(273) ни иккала қисмини M_0M_1 нуқтадан ўтган тўғри чизиққа проекциялаймиз.

$$R\cos\alpha = F_1\cos\alpha_1 + F_2\cos\alpha_2 + \dots + F_n\cos\alpha_n \qquad (274)$$

(274) ни иккала қисмини S йўлга кўпайтирамиз

$$R\cdot S\cos\alpha = F_1 S\cos\alpha_1 + F_2 S\cos\alpha_2 + \dots + F_n\cos\alpha_n\cdot S$$

$$R\cdot S\cos\alpha = A, \quad F_1 S\cos\alpha_1 = A_1$$

$$F_2 S\cos\alpha_2 = A_2, \ \dots\dots F_n S\cos\alpha_n = A_n$$

$$A = A_1 + A_2 + \dots + A_n \qquad (275)$$

81-§. КУЧ ЭЛЕМЕНТАР ИШИНИНГ АНАЛИТИК ИФОДАСИ

Куч элементар ишини аналитик ифодасини аниқлаймиз. Бунинг учун $\bar{F}$ кучини ташкил этувчиларга ажратамиз (157-расм).

F_x, F_y, F_z - $\bar{F}$ кучнинг ташкил этувчилари.

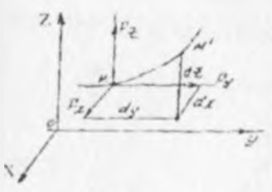
Элементар MM силжиш $MM=dS$ координата ўқлари бўйлаб йўналган M нуқта dx, dy, dz силжишларининг йиғиндисига тенг. Шунинг учун F кучининг dS силжишдаги бажарган иши унинг ташкил этувчилари Fx, Fy, Fz ларининг dx, dy, dz силжишдаги бажарган ишларининг йиғиндисига тенг бўлади. dx силжиш фақат $Fx\,dx$ га тенг. dy, dz силжишдаги Fy, Fz кучларининг бажарган ишини қуйидагича ёзамиз. $Fy\,dy$, $Fz\,dz$

Кучни элементар иши қуйидаги формула билан топилади (157-расм).

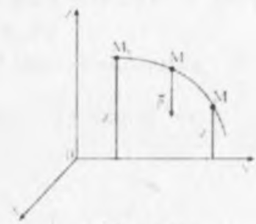
$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz \qquad (276)$$

Бу формула кучнинг элементар ишининг аналитик ифодасини беради. Кучнинг M_0M_1 йўлдаги бажарган иши унинг элементар ишидан олинган интегралга тенг.

$$A=\int_{M_0}^{M_1}F_\tau ds \qquad A=\int_{M_0}^{M_1}(F_x dx+F_y dy+F_z dz) \qquad (277)$$



157-расм.



158-расм.

Оғирлик кучининг бажарган иши.

Оғирлиги P га тенг бўлган M нуқта M_0 дан M_1 гача келсин. P оғирлик кучини M_0M_1 йўлдаги бажарган ишини ҳисоблаймиз (158-расм).

P кучининг координата ўқларидаги проекцияси $x=0$, $y=0$, $z=-P$. P кучининг M_0M_1 йўлдаги иши. (277) формулага кўра.

$$A=\int_{M_0}^{M_1}(-P)dz=-P\int_{z_0}^{z_1}dz=-Pz\Big|_{z_0}^{z_1}=-Pz\Big|_{z_0}^{z_1}=-P(z_1-z_0)=P(z_0-z_1)=\pm Ph$$

$$A=P(z_0-z_1)=\pm Ph \qquad A=\pm Ph$$

Бунда $z_0-z_1=h$

h - M нуқтанинг вертикал бўйича юрган йўли. Агар $z_0>z_1$ бўлса M нуқта юқоридан пастга тушади, иш эса мусбат бўлади.

Агар $z_0<z_1$ бўлса M нуқта юқорига кўтарилади, иш эса манфий бўлади.

$$A=\pm Ph \qquad (278)$$

(278) билан оғирлик кучининг бажарган иши топилади. Оғирлик кучининг бажарган иши плюс ва минус ишораси билан олинган куч миқдорининг вертикал бўйича силжишга кўпайтмасига тенг.

82-§. ЭЛАСТИКЛИК КУЧИНИНГ БАЖАРГАН ИШИ

Пружинадаги реакция кучининг ишини ҳисоблаймиз. Бизга бир учи маҳкамланган пружина берилган. F - пружинани реакция кучи ёки эластиклик кучи. Пружина h масофага чўзилганда F кучини бажарган ишини топиш керак. Бунинг учун M нуқтани координата боши деб x ўқини йўналтирамиз (159-расм).

$F = cx$: бунда c – пружинанинг бикрлиги, x – пружинани чўзилиши ёки сиқилиши, $\bar{F}$ - кучнинг координата ўқларидаги проекцияси

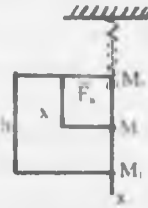
$$X = -F \quad Y = 0 \quad Z = 0$$

F кучнинг h – масофадаги иши (277) формулага кўра.

$$A = \int_0^h (-F)dx = \int_0^h -cx\,dx = -c\int_0^h x\,dx = -\frac{cx^2}{2}\Big|_0^h = -\frac{ch^2}{2},$$

$$A = -\frac{ch^2}{2} \qquad (279)$$

Бу формула билан эластиклик кучнинг бажарган иши топилади.



159-расм.

83-§. ҚЎЗҒАЛМАС ЎҚ АТРОФИДА АЙЛАНМА ҲАРАКАТ ҚИЛУВЧИ ЖИСМГА ҚЎЙИЛГАН КУЧНИНГ ИШИ ВА ҚУВВАТИ

Агар жисм $F_1, F_2, ..., F_n$ кучлар системаси таъсирида қўзғалмас z ўқи атрофида айланма ҳаракатда бўлса, қутбни айланиш ўқида оламиз; натижада $dr = 0$ ҳамда бурчак тезлик йўналган OP ва z ўқлари устма-уст тушади (160-расм). Бинобарин, кўрилаётган ҳолда

$$d'A = M_z d\varphi \qquad (280.1)$$

формула ўринли бўлади, яъни қўзғалмас ўқ атрофида айланма ҳаракат қилувчи жисмга таъсир этувчи кучлар системасининг элементар иши мазкур ўққа нисбатан кучлар бош моментининг жисм ўқ атрофида айланганда элементар кучишдаги ишига тенг.

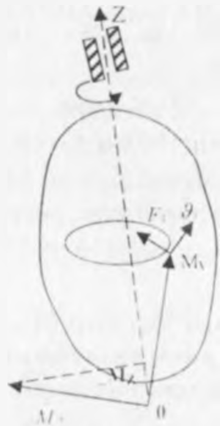
Бу ҳолда кучлар системасининг қуввати

$$N = M_z \frac{d\varphi}{dt} = M_z \omega \qquad (280.2)$$

чекли айланма кўчишдаги иши эса,

$$I = \int_{0}^{\varphi} M \, d\omega \qquad (280.3)$$

формулалар ёрдамида аниқланади.



160-расм.

84-§. АБСОЛЮТ ҚАТТИҚ ЖИСМДАГИ ИЧКИ КУЧЛАР ИШЛАР ЙИҒИНДИСИНИНГ НОЛГА ТЕНГЛИГИ

Абсолют қаттиқ жисмнинг ҳар қандай силжишида шу жисмдаги ички кучлар ишлари йиғиндиси нолга тенглигини исбот қилиш керак.

Бизга n та нуқтадан тузилган абсолют қаттиқ жисм берилган бўлсин. Шу жисмда ихтиёрий M_1 ва M_2 нуқталарини оламиз (161-расм)

V_1 ва V_2, M_1 ва M_2 нуқталарнинг тезлиги.

Тезлик модули.

$$V_1 = \frac{dS_1}{dt}; V_2 = \frac{dS_2}{dt} \qquad (281)$$

V_1 ва V_2 тезликларини M_1 ва M_2 нуқталардан ўтган тўғри чизиқдаги проекцияси ўзаро тенг бўлади.

$$V_1 \cos\alpha_1 = V_2 \cos\alpha_2 \qquad \text{ёки}$$

$$\frac{dS_1}{dt}\cos\alpha_1 = \frac{dS_2}{dt}\cos\alpha_2$$

$$dS_1 \cos\alpha_1 = dS_2 \cos\alpha_2$$

$$dS_1 \cos\alpha_1 = dS_2 \cos\alpha_2 = 0$$

M_1 ва M_2 нукталарга бир-бирига модуллари жихатидан тенг булган ва бир тугри чизик буйлаб тескари томонга йуналган F_1' ва F_2' кучлар билан таъсир этади.

$$\bar{F}_1' = -\bar{F}_2' \qquad\qquad F_1' = F_2'$$

F_1', F_2' кучларин dS_1 ва dS_2 масофага силжигандаги бажарган ишини топамиз.

$$dA_1' = F_1' dS_1 \cos\alpha_1$$

$$dA_2' = F_2' dS_2 \cos(180 - \alpha_2) = -F_2' dS_2 \cos\alpha_2$$

Кучларнинг элементар ишларини кушамиз.

$$dA_1' + dA_2' = F_1' dS_1 \cos\alpha_1 - F_2' dS_2 \cos\alpha_2 =$$

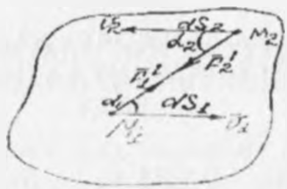
$$= F_1'(dS_1 \cos\alpha_1 - dS_2 \cos\alpha_2) = 0 \qquad (282)$$

$$dA_1' + dA_2' = 0$$

бу формулани системадаги хар бир нукта учун ёзиб хадма-хад кушиб чикамиз. (282) ни интеграллаймиз.

(282) ни интеглаб, куйидагини ёзамиз:

$$\sum dA_k^i = 0 \qquad \sum A_k^i = 0 \quad k = 1, 2, \ldots n \qquad (283)$$



161-расм.

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР.

1. Кучнинг элементлар иши қайси формула билан топилади?
2. Кучнинг элементар иши аналитик ифодасини ёзинг?
3. Кучнинг чекли йулда бажарган иши қандай ифодаланади?
4. Қувват нима?
5. Тенг таъсир этувчи кучнинг иши тугрисидаги теорема нимадан иборат?
6. Огирлик кучини бажарган иши нимага тенг булади?
7. Эластиклик кучини бажарган иши нимага тенг булади?
8. Ишқаланиш кучининг бажарган иши нимага тенг булади?

9. Қузғалмас ук атрофида айланувчи жисмга қуйилган кучни бажарган иши қандай топилади?
10. Қувват қандай топилади?

85-§. НУҚТА ВА СИСТЕМАНИНГ КИНЕТИК ЭНЕРГИЯСИ

Нуқта массаси билан тезлик квадрати купайтмасининг ярмига нуқтанинг кинетик энергияси дейилади

$$\frac{m\vartheta^2}{2}$$

Системанинг кинетик энергияси шу системадаги барча нуқталар кинетик энергияларининг алгебраик йиғиндисига тенг булади

$$T = \frac{m_1V_1^2}{2} + \frac{m_2V_2^2}{2} + \dots + \frac{m_nV_n^2}{2} = \sum\frac{m_KV_K^2}{2}$$

$$T = \sum\frac{m_KV_K^2}{2} \qquad k = 1, 2, \dots n$$

Бунда T системанинг кинетик энергияси.

Система бир нечта қаттиқ жисмдан иборат булса, системани кинетик энергияси шу қаттиқ жисмлар кинетик энергиялари йиғиндисига тенг булади.

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + \dots + T_n \qquad (284)$$

Кинетик энергиянинг бирликлари кгм, тм, нм

Система кинетик энергияси унинг илгарилама ва айланма ҳаракатларини тавсифлайди

Кёнига теоремаси

Системанинг кинетик энергияси унинг массалар марказининг кинетик энергияси билан шу марказга нисбатан система бажарган ҳаракати кинетик энергиясининг йиғиндисига тенг.

$$T = \frac{mVc^2}{2} + Tc \qquad (285)$$

Бунда $\left(\frac{mVc^2}{2}\right)$-система массалар марказининг кинетик энергияси.

Vc-массалар марказининг тезлиги

Tc - массалар марказига нисбатан система бажарган ҳаракатнинг кинетик энергияси.

$$F = const \text{ бўлса } S = F\int_0^{t_1} dt = F\cdot t_1 \text{ бўлади.} \quad (297)$$

Бунда t_1 - F кучнинг жисмга таъсир этган вақти.
(297) ни координата ўқларига проекциялаймиз

$$
\begin{aligned}
S_x &= F_x \cdot t_1 \\
S_y &= F_y \cdot t_1 \\
S_z &= F_z \cdot t_1
\end{aligned} \quad (298)
$$

Бунда F_x, F_y, F_z - F кучнинг x, y, z ўқлардаги проекциялари
Куч импульсининг миқдори қуйидаги формула билан топилади.

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2} \quad (299)$$

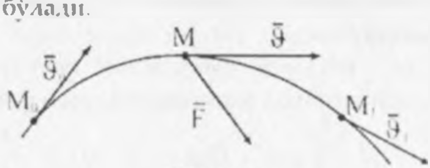
90-§. НУҚТА ҲАРАКАТ МИҚДОРИНИНГ ЎЗГАРИШИ ҲАҚИДАГИ ТЕОРЕМА

M нуқта F куч таъсирида ҳаракатланиб, ***M_0*** дан ***M_1*** гача келсин (168-расм). Нуқта динамикасининг асосий тенгламасини ёзамиз.

$$m\bar a = \bar F$$

$$m\frac{d\bar V}{dt} = \bar F; \qquad \frac{d(m\bar V)}{dt} = \bar F \quad (300)$$

(300) - формула дифференциал кўринишидаги нуқта ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теоремани ифодалайди: Нуқта ҳаракат миқдоридан вақт бўйича олинган ҳосила шу нуқтадаги таъсир этувчи кучга тенг бўлади.



168-расм.

(300)-формулани интеграллаймиз.

$$d(m\bar V) = \bar F dt.$$

$$\int_{V_0}^{V_1} d(m\bar V) = \int_0^{t_1} \bar F dt$$

$$m\bar V \Big|_{V_0}^{V_1} = \bar S \quad \text{ёки} \quad m\bar V_1 - m\bar V_0 = \bar S \quad (301)$$

(301)-формула интеграл куринишидаги нукта харакат микдорининг узгариши хакидаги теоремани ифодалайди. Нукта ҳаракат микдорининг бирор вакт ичидаги узгариши нуктага таъсир этувчи кучнинг шу вактдаги тула импульсига тенг булади. (301) формулани координата укларига проекциялаймиз:

$$mV_{1x} - mV_{0x} = S_x;$$
$$mV_{1y} - mV_{0y} = S_y; \qquad (302)$$
$$mV_{1z} - mV_{0z} = S_z;$$

Демак, нукта харакат микдорининг координата уки буйича чекли вакт ичида узгариши шу вакт ичидаги нуктага таъсир этувчи куч импульсининг мазкур укдаги проекциясига тенг.

91-§. СИСТЕМА ҲАРАКАТ МИҚДОРИНИНГ ЎЗГАРИШИ ҲАҚИДАГИ ТЕОРЕМА

Системадаги ихтиерий ***Mk*** нукта учун дифференциал шаклдаги нуқта ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теоремани ёзамиз.

(300) – формуладан.

$$\frac{d}{dt}(m_K\bar{V}_K) = \bar{F}_K^e + \bar{F}_K^i \qquad (303)$$

Бунда $\bar{F}_k^e$ ва $\bar{F}_k^i$ -Mк нуқта қуйилган ташқи ва ички кучлар. (303) – формулани системадаги ҳар бир нуқталар учун ёзиб хадма-хал қушамиз; (169-расм).

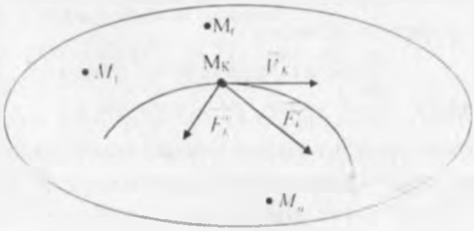
$$\frac{d}{dt}\left(\sum m_k\bar{V}_k\right) = \sum \bar{F}_k^e + \sum \bar{F}_k^i \qquad k = 1, 2, \ldots n \qquad (304)$$

Бунда $\sum m_k\bar{V}_k = \bar{Q}$-системанинг ҳаракат миқдори.

$\sum \bar{F}_k^e = \bar{R}$-ташқи кучлар бош вектори. Ички кучлар хоссасига кура

$\sum \bar{F}_k^i = 0$ - натижада (304) ни қуйидагича ёзиш мумкин

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \bar{R} \qquad (305)$$



169-расм.

(305) ни Декарт координата ўқларига проекциялаб, система ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теоремани скаляр кўринишида ёзамиз:

$$
\frac{dQ_x}{dt} = R_x,
$$

$$
\frac{dQ_y}{dt} = R_y, \qquad (306)
$$

$$
\frac{dQ_z}{dt} = R_z.
$$

Система ҳаракат миқдорининг бирор ўқдаги проекциясидан вақт бўйича олинган ҳосила, системага таъсир этувчи ташқи кучлар бош векторининг шу ўқдаги проекциясига тенг.

Система ҳаракат миқдорининг чекли вақт ичидаги ўзгаришини аниқлаш учун (305) ни dt га кўпайтириб, интеграллаймиз:

$$
\frac{dQ}{dt} = R,\ dQ = R\,dt,\ \int_{Q_0}^{Q} dQ = \int_0^t R\,dt,\ Q\Big|_{Q_0}^{Q} = S,\quad Q - Q_0 = S \qquad (307)
$$

Бунда Q_0 - системанинг бошланғич вақтдаги ҳаракат миқдори.

Q системанинг t вақтдаги ҳаракат миқдори. $S = \int_0^t R\,dt$ - t вақт ичида системага таъсир этувчи кучлар бош векторининг импульси.

(307) формула интеграл шаклдаги система ҳаракат миқдорини ўзгариши ҳақидаги теоремани ифодаланди: Система ҳаракат миқдорининг бирор вақт ичидаги ўзгариши системага қўйилган барча ташқи кучлар бош векторининг шу вақт ичидаги импульсига тенг. (307) ни координата ўқларига проекциялаймиз

$$
Q_{1x} - Q_{0x} = S_x \qquad Q_{1y} - Q_{0y} = S_y \qquad Q_{1z} - Q_{0z} = S_z \qquad (308)
$$

Бунда S_x, S_y, S_z, - S куч импульсининг проекциялари. Исбот қилинган теоремадан қуйидаги натижалар келиб чиқади

1) Агар ташқи кучлар бош вектори $R=0$ га тенг бўлса, системанинг ҳаракат миқдори ўзгармас бўлади.

$$
\frac{dQ}{dt} = 0,\ dQ = 0,\ \int dQ = 0 \qquad Q = const
$$

2) Агар системага қўйилган ташқи кучлар бош векторининг бирор ўқдаги, масалан Ох ўқдаги проекцияси нолга тенг бўлса, система ҳаракат миқдорининг шу ўқдаги проекцияси ўзгармайди.

$$
R_x = 0
$$

у ҳолда (306)- дан $\qquad Q_x = const$

Бу натижалар система ҳаракат миқдорининг сақланиши ҳақидаги қонунни ифодалайди. Демак, системанинг ҳаракат миқдорини ички кучлар ўзгартирмайди.

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР.

1. Нуқтанинг ҳаракат миқдори нима?
2. Кучнинг элементар импульси нима?
3. Элементар импульс қандай йўналган?
4. Кучнинг тўла импульси қандай топилади?
5. Куч импульсининг координата ўқларидаги проекцияси қандай топилади?
6. Нуқта ҳаракат миқдори тўғрисидаги теорема нимадан иборат?
7. Нуқта ҳаракат миқдорининг сақланиш қонунини айтинг?
8. Системанинг ҳаракат миқдори деб нимага айтилади?
9. Системанинг ҳаракат миқдори тўғрисидаги теорема нимадан иборат?
10. Системанинг ҳаракат миқдори қандай ҳолларда сақланади?

92-§. СИСТЕМА МАССАЛАР МАРКАЗИНИ ҲАРАКАТИ ҲАҚИДАГИ ТЕОРЕМА

Системанинг ҳаракат миқдори қуйидагига тенг:

$$Q = mV \qquad (309)$$

Системанинг ҳаракат миқдорини ўзгариши ҳақидаги формулани ёзамиз:

$$\frac{dQ}{dt} = R \qquad (310)$$

Бу ерда $R = \sum F_k$ - система нуқталарига таъсир этувчи ташқи кучларнинг бош вектори.

(309) ни (310) га қўйиб ҳосила оламиз:

$$M\frac{dV}{dt} = R, \quad \frac{dV}{dt} = a, \quad Ma = R; \qquad (311)$$

бу ерда $a = \frac{dV}{dt}$ - система массалар марказининг тезланиши.

(311)-формула система массалар марказининг ҳаракати ҳақидаги теоремани ифодалайди: система массалар маркази, массаси бутун система массасига тенг бўлган ва система нуқталарига таъсир этувчи барча ташқи кучларнинг бош вектори таъсиридаги моддий нуқта каби ҳаракатланади.

(311) иккала қисмини координата ўқларига проекциялаймиз

$$
\begin{aligned}
mW_{cx} &= R_x;\\
mW_{cy} &= R_y;\\
mW_{cz} &= R_z;
\end{aligned}
\qquad (312)
$$

Бунда R_x, R_y, R_z – R бош векторининг координата ўқларидаги проекциялари.

$$W_{cx} = \frac{d^2 x_c}{dt^2} = \ddot{X}_c; \quad W_{cy} = \frac{d^2 y_c}{dt^2} = \ddot{Y}_c; \quad W_{cz} = \frac{d^2 z_c}{dt^2} = \ddot{Z}_c; \qquad (313)$$

Бунда x_c, y_c, z_c – массалар марказининг координаталари. (313) ни (312) га қуямиз, у ҳолда

$$
\begin{aligned}
m\ddot{x}_c &= R_x;\\
m\ddot{y}_c &= R_y;\\
m\ddot{z}_c &= R_z;
\end{aligned}
\qquad (314)
$$

(314)-формула массалар маркази ҳаракатини дифференциал тенгламаларини ифодалайди. Исбот қилинган теоремадан қуйидаги натижаларни оламиз:

1. Фараз қилайлик, системага таъсир этувчи ташқи кучларнинг бош вектори нолга тенг бўлсин:

$$\bar{R} = \sum \bar{F}_k = 0$$

У ҳолда $\quad W_c = \frac{d\bar{V}_c}{dt} = 0 \quad$ бўлиб,

$$\bar{V}_c = const$$

бўлишини кўрамиз. Яъни система нуқталарига таъсир этувчи кучларнинг бош вектори нолга тенг бўлса, системанинг массалар маркази тўғри чизиқли ва тенг ўлчовли ҳаракат қилади.

Агар массалар маркази бошланғич пайтда тинч ҳолатда бўлса, у ҳолда $v_c = 0$ бўлиб, системанинг массалар маркази кейинчалик ҳам қўзғалмасдан қолади

$$\bar{r}_c = const$$

2. Фараз қилайлик, системага таъсир этувчи ташқи кучларнинг бош вектори нолдан фарқли бўлиб, унинг бирор ўқдаги проекцияси нолга тенг бўлсин:

$$R_x = X^e = 0 .$$

У ҳолда (314)-тенгламаларнинг биринчисидан

$$\ddot{x}_c = 0$$

$$v_c = const$$

келиб чиқади.

Демак, системага таъсир этувчи ташқи кучларнинг бирор ўқдаги проекцияларининг йиғиндиси нолга тенг бўлса, система массалар маркази тезлигининг шу ўқдаги проекцияси ўзгармас бўлади. Хусусан, агар бошланғич пайтда [illegible] бўлса, системанинг ҳаракати давомида $v_{cx} = 0$ бўлади, яъни бу ҳолда система массалар марказининг координатаси x_c ўзгармай қолади:

$$x_c = x_{c0} = const$$

Олинган натижалар система массалар маркази ҳаракатининг сақланиш қонунини ифодалайди. Демак массалар марказини ташқи кучлар ҳаракатга келтиради. Ички кучлар эса ҳаракатга келтира олмайди.

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР

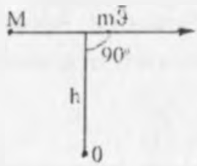
1. Нуқтанинг ҳаракат миқдори нимага тенг бўлади?
2. Системанинг ҳаракат миқдорини таърифланг?
3. Дифференциал шаклдаги система ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теоремани ёзинг?
4. Ташқи кучлар бош вектори нима?
5. Ташқи кучлар бош векторининг проекциясини айтинг?
6. Системанинг массаси нимага тенг бўлади?
7. Системани массалар марказининг координаталари қайси формула билан топилади?
8. Системанинг ҳаракат миқдори унинг массалар марказининг тезлиги орқали қандай ифодаланади?
9. Система массалар марказининг ҳаракати ҳақидаги теоремани таърифланг?
10. Система массалар маркази ҳаракатининг сақланиш қонунини айтинг?

93-§. МАРКАЗГА ВА ЎҚҚА НИСБАТАН НУҚТА ҲАРАКАТ МИҚДОРИНИНГ МОМЕНТИ

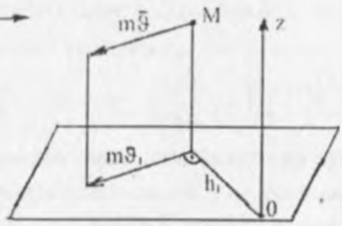
Нуқта ҳаракат миқдори вектор катталик бўлгани учун унинг бирор марказга ва ўққа нисбатан моментини аниқлаш мумкин. Кучнинг марказга ва ўққа нисбатан моменти қандай топилса, ҳаракат миқдорининг моменти ҳам шундай топилади.

Нуқта ҳаракат миқдорининг О – марказга нисбатан моменти кўпайтмасига тенг:

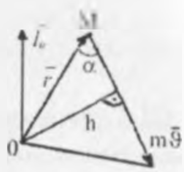
$$l_0 = mVh, l_0 = m_0(mV) \tag{315}$$



170-расм.



171-расм.



172-расм.

z ўққа нисбатан момент олсак;

$$l_z = m_0(m\overline{V_1}) = h_1 m V_1$$

$$l_z = h_1 m V_1 \tag{316}$$

Бунда l_z - нуқта ҳаракат миқдорининг z ўқга нисбатан моменти.

Бирор О марказга нисбатан олинган нуқта ҳаракат миқдорининг моменти шу марказга қўйилган вектор бўлади. (172 -расм) дан

$$\frac{h}{r} = \sin\alpha; \quad h = r\sin\alpha;$$

$$l_0 = hmV = r\sin\alpha\, mv;$$

$$l_0 = hmv\sin\alpha \tag{317}$$

(317) ни ўнг томони вектор кўпайтманинг модули бўлади.

$$\overline{l_0} = [\bar{r} \cdot m\bar{\vartheta}] \tag{318}$$

(318) - вектор кўпайтма қуйидагича таърифланади: бирор О марказга нисбатан олинган ҳаракат миқдорининг моменти шу марказга қўйилган вектор катталик бўлиб, нуқтанинг радиус - вектори билан шу нуқта ҳаракат миқдорининг вектор кўпайтмасига тенг

$\overline{l_0}$ - вектори *0* нуқта ва $m\bar{v}$ вектордан ўтказилган учбурчак текислигига перпендикуляр йўналган бўлади

94-§. МАРКАЗГА ВА ЎҚГА НИСБАТАН СИСТЕМА КИНЕТИК МОМЕНТИ

Системанинг бирор марказга нисбатан кинетик моменти системадаги барча нуқталар ҳаракат миқдорининг шу марказга нисбатан олинган моментларининг геометрик йиғиндисига тенг.

$$\overline{L}_0 = \overline{m}_0(m_1\overline{\vartheta}_1) + \overline{m}_0(m_2\overline{\vartheta}_2) + \ldots + \overline{m}_0(m_n\overline{\vartheta}_n)$$

$$= \overline{m}_0(m_k\overline{\vartheta}_k). \qquad \overline{L}_0 = \sum \overline{m}_0(m_k\overline{\vartheta}_k) \quad k = 1, 2, \ldots n \qquad (319)$$

Бу ерда L - системани нг0 марказга нисбатан кинетик моменти

Системанинг бирор ўққа нисбатан кинетик моменти шу ўққа нисбатан системадаги нуқталар ҳаракат миқдорлар моментларининг йиғиндисига тенг.

$$L_z = m_z(m_1\overline{V}_1) + m_z(m_2\overline{V}_2) + \ldots + m_z(m_n\overline{V}_n);$$

$$L_x = \sum m_x(m_k\overline{V}_k);$$

$$L_y = \sum m_y(m_k\overline{V}_k); \qquad (320)$$

$$L_z = \sum m_z(m_k\overline{V}_k);$$

Бунда L_x, L_y, L_z - системанинг x, y, z, ўқларига нисбатан кинетик моменти.

95-§. ҚЎЗҒАЛМАС ЎҚ АТРОФИДА АЙЛАНУВЧИ ҚАТТИҚ ЖИСМНИНГ КИНЕТИК МОМЕНТИ

Қўзғалмас z ўқи атрофида ω бурчак тезлиги билан айланаётган абсолют қаттиқ жисм берилган. Шу жисмнинг айланиш ўқига нисбатан кинетик моменти ёки ҳаракат миқдорининг бош моментини ҳисоблаш лозим бўлсин. Жисмга система деб қараймиз. Жисмдан ихтиёрий M_k нуқтани оламиз (173-расм). Бу нуқтанинг тезлиги $\upsilon_k = \omega \cdot h_k$ га тенг. Нуқта ҳаракат миқдорининг z ўқга нисбатан моменти:

$$m_z(m_k\overline{V}_k) = h_k \cdot m_k \cdot V_k = \omega \cdot m_k h_k^2$$

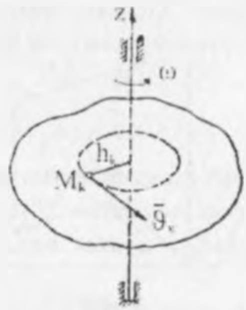
$$L_z = \sum m_z(m_k\overline{V}_k) = \sum \omega m_k h_k^2$$

$$\omega \sum m_k h_k^2 = \omega \cdot I_z.$$

$$L_Z = I_Z \cdot \omega \qquad (321)$$

(321)-формула билан жисмнинг z ўқига нисбатан кинетик моменти топилади.

Бу ерда $I_z = \sum m_k h_k^2$ - жисмнинг z ўққа нисбатан инерция моменти. Демак, қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи жисмнинг кинетик моменти мазкур ўққа нисбатан инерция моменти билан бурчак тезлигининг кўпайтмасига тенг.



173-расм.

96-§. НУҚТА ҲАРАКАТ МИҚДОРИ МОМЕНТИНИНГ ЎЗГАРИШИ ҲАҚИДАГИ ТЕОРЕМА

M нуқта $\bar{F}$ кучи таъсирида қўзғалмас *Oxyz* координаталар системасида ҳаракат қилаётган бўлсин (174-расм).

174-расм.

Нуқта ҳаракат миқдорининг *O* нуқтага нисбатан моменти:

$$\bar{l}_0 = [\bar{r} \times m\bar{\vartheta}] \quad \text{бўлади.} \qquad (322)$$

Теоремадан исбот қилиш учун (322)- нинг иккала томонидан вақт бўйича ҳосила оламиз:

$$\frac{dL_0}{dt} = \left[\frac{dr}{dt} \cdot m\bar{V}\right] + \left[r \cdot \frac{d(m\bar{V})}{dt}\right]$$

$$\frac{d(m\bar{V})}{dt} = \bar{F}; \quad \frac{dr}{dt} = \bar{V}$$

$$\left[\frac{dr}{dt} m\bar{V}\right] = \left[\bar{V} m\bar{V}\right] = 0$$

$\bar{V}$ ва $m\bar{V}$ векторлар бир тўғри чизиқ бўйлаб йўналганлиги учун улар орасидаги бурчак нолга тенг.

(322) ни қуйидагича ёзамиз.

$$\frac{dl_0}{dt} = \left[\bar{r} \cdot \bar{F}\right] \text{ ёки } \frac{dl_0}{dt} = m_0(\bar{F}); \qquad (323)$$

Бунда $\overline{m}_0(\bar{F}) = \left[\bar{r} \cdot \bar{F}\right]$ - $\bar{F}$ кучни O нуқтага нисбатан моменти.

(323) - формула нуқта ҳаракат миқдори моментининг ўзгариши ҳақидаги теоремани ифодалайди: моддий нуқта ҳаракат миқдорининг бирор қўзғалмас марказга нисбатан моментидан вақт бўйича олинган ҳосила нуқтага таъсир этувчи кучнинг шу марказга нисбатан моментига тенг.

(323) - ни x, y, z ўқларга проекциялаб қуйидагиларни оламиз:

$$\frac{dl_x}{dt} = m_x(\bar{F}); \quad \frac{dl_y}{dt} = m_y(\bar{F}); \quad \frac{dl_z}{dt} = m_z(\bar{F}) \qquad (324)$$

Бунда l_x, l_y, l_z - нуқталар ҳаракат миқдорининг x, y, z ўқларига нисбатан моментлари.

...ларига нисбатан моментлари.

(324)-формулалар нуқталар ҳаракат миқдорининг координата ўқларига нисбатан моментлари ўзгариши ҳақидаги теоремани ифодалайди: нуқта ҳаракат миқдорининг бирор қўзғалмас ўққа нисбатан моментидан вақт бўйича олинган ҳосила нуқтага таъсир этувчи кучнинг шу ўққа нисбатан моментига тенг.

(324) - ни қуйидагича ёзиш мумкин.

$$\frac{d}{dt}\left[m_0(m\bar{v})\right] = m_0(\bar{F}) \qquad (325)$$

97-§. СИСТЕМА КИНЕТИК МОМЕНТИНИ ЎЗГАРИШИ ҲАҚИДАГИ ТЕОРЕМА

$M_1, M_2, \ldots, M_n$ нуқталардан тузилган система берилган бўлсин. (173-расм).

Системадаги ихтиёрий M_k нуқтага нуқта ҳаракат миқдори моментининг ўзгариши ҳақидаги теоремани татбиқ қиламиз.

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР

1. Марказга нисбатан нуқта ҳаракат миқдорининг моменти қандай аниқланади?
2. Ўққа нисбатан нуқта ҳаракат миқдорининг моменти қандай аниқланади?
3. Марказга ва шу марказдан ўтган ўққа нисбатан нуқта ҳаракат миқдорининг моментлари орасида қандай боғланиш мавжуд?
4. Марказга нисбатан системанинг кинетик моменти қандай аниқланади?
5. Ўққа нисбатан системанинг кинетик моменти қандай аниқланади? Улар орасида қандай боғланиш мавжуд?
6. Қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи қаттиқ жисмнинг кинетик моменти қандай аниқланади? Қайси формула билан топилади?
7. Нуқта ҳаракат миқдори моментининг ўзгариши ҳақидаги теоремани таърифланг?
8. Система кинетик моменти ўзгариши ҳақидаги теоремани таърифланг?
9. Системанинг бирор марказга ва ўққа нисбатан олинган кинетик моменти қачон ўзгармайди?

99-§. ҚАТТИҚ ЖИСМНИНГ ҚЎЗҒАЛМАС ЎҚ АТРОФИДАГИ АЙЛАНИШИНИНГ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАСИ

Қаттиқ жисм қўзғалмас z ўқи атрофида $\bar{F}_1^e, \bar{F}_2^e, \ldots, \bar{F}_n^e$ ташқи кучлар таъсирида айланаётган бўлсин (176-расм).

176-расм.

Жисм ҳаракатининг дифференциал тенгламасини келтириб чиқариш учун система кинетик моментини узгариши ҳақидаги теоремадан фойдаланамиз.

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z \qquad (332)$$

$$L_z = J_z\omega \qquad (333)$$

Бунда, M_z-айлантирувчи момент;

(333)- ни (332)- га куйиб вақт буйича ҳосила оламиз.

$$J_z\frac{d\omega}{dt} = M_z, \qquad J_z\varepsilon = M_z$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \qquad (334)$$

бунда, ε - жисмни бурчак тезланиши. J_z - жисмни z укка нисбатан инерция моменти

(334)-га қаттиқ жисмнинг қузғалмас ук атрофида айланма ҳаракатининг дифференциал тенгламаси дейилади

(334) - формуладан $\qquad \varepsilon = \frac{M_z}{J_z}$

Агар $M_z = const$ булиб J_z нинг қиймати катта булса жисмнинг айланиши кичик булади. Агар J_z кичик булса, жисмни айланиши тезлашади. Жисмнинг инерция моменти айланма ҳаракат қилувчи жисмнинг инерция улчовидир.

(334) - тенгламадан фойдаланиб иккита масала ечиш мумкин

1. Агар айлантирувчи момент M_z берилган булса, жисм ҳаракатининг тенгламасини топиш мумкин.

$$\varphi = f(t)$$

2. Агар жисм ҳаракатининг тенгламаси берилган булса, жисмнинг айлантирувчи моментини топиш мумкин.

100-§. НУКТА УЧУН ДАЛАМБЕР ПРИНЦИПИ. НУКТАНИ ИНЕРЦИЯ КУЧИ

Эркин булмаган М нуктага F актив ва N реакция кучлари таъсир қилади (175-расм). Нукта динамикасининг асосий тенгламасини ёзамиз.

$$mW = F + N \qquad (335)$$

(335) ни $F + N + (-mW) = 0$ куринишида ёзиб,

$$F^{ин} = -mW \qquad \text{нуктанинг инерция кучи} \qquad (336)$$

$$F + N + F^{ин} = 0 \qquad (337)$$

тенгламасини оламиз.

Миқдор жиҳатидан нуқтанинг массаси билан унинг тезланишининг кўпайтмасига тенг. Йўналиши тезланиш векторига тескари бўлган кучга инерция кучи дейилади.

(337)-тенглик эркин бўлмаган нуқта учун Даламбер принципини ифодалайди: актив куч ва боғланиш реакция кучи таъсирида ҳаракатланувчи нуқтага ҳар онда инерция кучини қўйсак, бу кучлар ўзаро мувозанатлашади.

Даламбер принципи ёрдамида динамиканинг биринчи масаласини ечиш мумкин.

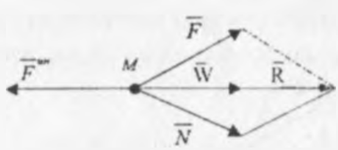
Динамика масалаларини ечишда Даламбер принципидан, асосан номаълум реакция кучларини топишда фойдаланилади.

Агар нуқта эгри чизиқли траектория буйлаб нотекис ҳаракатда булса, инерция кучи $F^{ин}$ траекторияга утказилган уринма ва бош нормаллар буйича йуналаган ташкил этувчиларга ажратилади (178-расм).

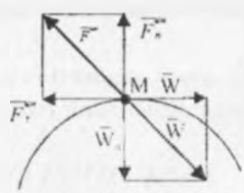
$$\overline{F}^{ин} = \overline{F}_\tau^{ин} + \overline{F}_n^{ин} \qquad (338)$$

Бунда, $F_\tau^{ин}$ ва $F_n^{ин}$ ларга мос равишда нуқтани уринма ва нормал инерция кучлари дейилади. Бу кучлар уринма ва нормал тезланишларга тескари йуналади,

$$\begin{aligned} \overline{F}_\tau^{ин} &= -m\overline{W}_\tau \\ \overline{F}_n^{ин} &= m\overline{W}_n \end{aligned} \qquad (339)$$



177-расм.



178-расм.

Уринма ва нормал тезланишлар $w_\tau = \frac{dV}{dt}$, $w_n = \frac{V^2}{\rho}$ формулалардан аниқланишини эътиборга олсак, нуқтанинг уринма ва нормал инерция кучларини модули учун ушбу муносабатларни оламиз

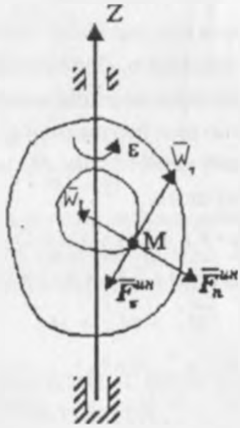
$$F_\tau^{ин} = m\frac{dV}{dt}, \quad F_n^{ин} = \frac{mV^2}{\rho} \qquad (340)$$

Агар нуқта эгри чизиқ бўйича текис ҳаракатда бўлса, $W_\tau = 0$, $F_\tau^{ин} = 0$ ва инерция кучи $F^{ин}$ фақат нормал ташкил этувчидан иборат бўлади. Нуқта тўғри чизиқ бўйича нотекис ҳаракатланганда $W_n = 0$ ва инерция кучи фақат уринма ташкил этувчидан иборат бўлади. Нуқта тўғри чизиқли текис ҳаракатланганда $W=0$ бўлиб, инерция кучи $F^{ин} = 0$ бўлади. Бу ерда ρ - траекториянинг эгрилик радиуси.

Қўзғалмас ўқ атрофида айланма ҳаракатдаги қаттиқ жисм нуқтасининг тезланиши уринма ва нормал тезланишлардан иборат бўлгани учун мазкур нуқтанинг уринма ва нормал инерция кучлари мос равишда уринма ва нормал инерция кучлари дейилади, ҳамда уларнинг қиймати қуйидаги формулалардан аниқланади (179-расм):

$$F_\tau^{ин} = m\varepsilon h, \quad F_n^{ин} = m\omega^2 h.$$

Бунда h нуқтадан айланиш ўқигача бўлган масофа, ω ва ε жисмнинг бурчак тезлиги ва бурчак тезланишидир.



179-расм.

101-§. МЕХАНИК СИСТЕМА УЧУН ДАЛАМБЕР ПРИНЦИПИ

Системанинг ҳар бир M_k нуқтаси учун Даламбер принципини ёзамиз:

$$\overline{F}_k + \overline{N}_k + \overline{F}_k^{ин} = 0, (k = 1,2,...n) \qquad (341)$$

бунда $\overline{F_k}$ — M_k нуктага таъсир этувчи актив кучларнинг тенг таъсир этувчиси; $\overline{N_k}$ — богланиш реакция кучларининг тенг таъсир этувчиси; $\overline{Ф_k} = -m_k\overline{a_k}$ шу нуктанинг инерция кучи.

(341)-тенгламалар механик система учун Даламбер принципини ифодалайди: актив куч ва богланиш реакция кучлари таъсиридаги системанинг хар бир нуктасига хар онда шу нукталарнинг инерция кучини куйсак, бу кучлар системаси шу куйилган актив ва реакция кучлари билан мувозанат мувозанатланади.

(341) тенгламаларни кушиб кушидагини хосил киламиз:

$$\Sigma\overline{F_k} + \Sigma\overline{N_k} + \Sigma\overline{F_k^{ин}} = 0 \qquad (342)$$

ёки

$$\overline{R}^{I} + \overline{R}^{N} + \overline{R}^{ин} = 0 \qquad (343)$$

бунда: $\overline{R}^{I} = \sum\overline{F_k}$ — актив кучларнинг бош вектори; $\overline{R}^{N} = \sum\overline{N_k}$ — реакция кучларининг бош вектори;

$$\overline{R}^{ин} + \Sigma\overline{F_k^{ин}} = 0 \qquad (344)$$

система нукталари инерция кучларининг бош векторидир.

(343)-тенгламадан курамизки, богланишдаги механик системанинг актив кучлар, реакция кучлари ва система нукталари инерция кучлари бош векторларининг геоматрик йигиндиси хар онда нолга тенг булади.

(341)-тенгламаларнинг хар бирини M_k нуктанинг радиус-вектори $\overline{r_k}$ га векторли купайтириб кушсак,

$$\Sigma\overline{r_k}\cdot\overline{F_k} + \Sigma\overline{r_k}\cdot\overline{N_k} + \Sigma\overline{r_k}\cdot\overline{F_k^{ин}} = 0$$

ёки
$$\Sigma\overline{M_0}(\overline{F_k}) + \Sigma\overline{M_0}(\overline{N_k}) + \Sigma\overline{M_0}(\overline{F_k^{ин}}) = 0 \qquad (3\ldots)$$

$$\overline{M_0}^{I} + \overline{M_0}^{N} + \overline{M_0}^{ин} \qquad (3\ldots)$$

хосил булади. Бунда $\overline{M_0}^{I} = \sum\overline{M_0}(\overline{F_k})$ - актив кучларнинг 0 марказга нисбатан бош моменти; $\overline{M_0}^{N} = \sum\overline{M_0}(\overline{N_k})$ — реакция кучларининг 0 марказга нисбатан бош моменти;

$$\overline{M_0}^{ин} = \sum\overline{M_0}(\overline{F_k^{ин}}) \qquad (3\ldots)$$

система нукталари инерция кучларининг 0 марказга нисбатан бош моментини ифодалайди.

(346)- дан курамизки, богланишдаги механик система учун актив кучлар, реакция кучлари ва система нукталари инерция кучларининг ихтиёрий кузгалмас марказга нисбатан бош моментларининг геометрик йигиндиси хар онда нолга тенг булади.

(342)- ва (346)- тенгламаларни координата укларига проекциялаб, кучлар системасининг олтита мувозанат тенгламасини оламиз:

$$
\begin{aligned}
&\Sigma X_k + \Sigma N_{kx} + \Sigma F_{kx}^{ин} = 0\\
&\Sigma Y_k + \Sigma N_{ky} + \Sigma F_{ky}^{ин} = 0\\
&\Sigma Z_k + \Sigma N_{kz} + \Sigma F_{kz}^{ин} = 0\\
&\Sigma M_x(\bar{F}_k) + \Sigma M_x(\bar{N}_k) + \Sigma M_x(\bar{F}_k^{ин}) = 0 \qquad (348)\\
&\Sigma M_y(\bar{F}_k) + \Sigma M_y(\bar{N}_k) + \Sigma M_y(\bar{F}_k^{ин}) = 0\\
&\Sigma M_z(\bar{F}_k) + \Sigma M_z(\bar{N}_k) + \Sigma M_z(\bar{F}_k^{ин}) = 0
\end{aligned}
$$

Агар системанинг хар бир нуктасига куйилган кучларни ички ва ташки кучларга ажратсак, ички кучларнинг бош вектори ва бирор марказга нисбатан бош моменти нолга тенг булгани учун (342)- ва (345)- тенгламалар куйидаги куринишни олади:

$$
\left.\begin{aligned}
&\Sigma \bar{F}_k^e + \Sigma \bar{F}_k^{ин} = 0\\
&\Sigma \bar{M}_O(\bar{F}_k^e) + \Sigma \bar{M}_O \bar{F}_k^{ин} = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (349)
$$

(344) ва (347) ларга кура (349) ни куйидагича езамиз:

$$
\left.\begin{aligned}
&\Sigma \bar{F}_k^e + \Sigma \bar{R}^{и} = 0\\
&\Sigma \bar{M}_O(\bar{F}_k^e) + \bar{M}_O^{и} = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (350)
$$

(350)- тенгламаларнинг афзаллиги шундан иборатки, бу тенгламаларда ички кучлар катнашмайди, шу сабабли система динамикасининг купгина масалаларини ечишда бу мувозанат шартларидан фойдаланиш кулай булади.

102-§. ИНЕРЦИЯ КУЧЛАРИНИНГ БОШ ВЕКТОРИ ВА БОШ МОМЕНТИ

Инерция кучларининг бош вектори ва бош моментини хисоблаш учун система массалар марказининг харакати хакидаги ва кинетик моментнинг узгариши хакидаги теоремалардан фойдаланамиз:

$$
\begin{aligned}
&M\bar{a}_C = \Sigma \bar{F}_k^e\\
&\frac{d\bar{L}_O}{dt} = \Sigma \bar{M}_O(\bar{F}_k^e) \qquad (351)
\end{aligned}
$$

Бунда: M — системанинг массаси; W_C — массалар марказининг тезланиши; L_O — системанинг O марказга нисбатан кинетик моменти.

(351)- тенгламаларни (350)- билан солиштириб

$$\left.\begin{aligned} R^{ин} &= -M\,W_C \\ M_O^{ин} &= -\frac{dL_O}{dt} \end{aligned}\right\} \qquad (352)$$

муносабатларни оламиз.

Шундай қилиб, ихтиёрий механик система (ёки қаттиқ жисм) инерция кучларининг бош вектори миқдор жиҳатдан система массасининг мазкур система (қаттиқ жисм) массалар марказининг тезланиши кўпайтмасига тенг бўлади ва бу тезланишга тескари йўналади, инерция кучларининг 0 марказга нисбатан бош моменти эса миқдор жиҳатдан шу марказга нисбатан система (қаттиқ жисм) кинетик моментидан вақт бўйича олинган ҳосилага тенг, йўналиши унга тескари бўлади.

Қаттиқ жисм илгариланма, қўзғалмас ўқ атрофида айланма ва текис параллел ҳаракатда бўлганда инерция кучларининг бош вектори ва бош моментини ҳисоблашни кўриб чиқамиз.

1. Илгариланма ҳаракат. Жисм илгариланма ҳаракатда бўлганда массалар маркази атрофида айланмайди ω=0. Шу сабабли $\sum M_C(\vec{F}_k^{ин}) = 0$ ва (350)- га кўра:

$$M_C^{ин} = 0$$

бўлади.

Шундай қилиб, илгариланма ҳаракатдаги қаттиқ жисмнинг инерция кучлари массалар марказига қўйилган ва массалар марказининг тезланишининг қарама-қарши йўналган битта кучга келтиради.

$$R^{ин} = -M\,W_C \qquad (353)$$

2. Қўзғалмас ўқ атрофида айланма ҳаракат. Агар жисм қўзғалмас ўқ атрофида айланма ҳаракатда бўлса, у ҳолда инерция кучлари умумий ҳолда бирор ихтиёрий O нуқтага қўйилган $R^{ин}$ кучга ва $M_O^{ин}$ моментга тенг бўлган битта жуфт кучга келтирилади. Дастлаб жисмнинг айланиш ўқи Oz га нисбатан инерция кучларининг бош моменти $M_z^{ин}$ ни ҳисоблаймиз. Бунинг учун (351) нинг иккинчи тенгламаси Oz ўққа проекциялаймиз:

$$M_z^{ин} = -\frac{dL_z}{dt}$$

Аммо қурилаётган ҳолда $L_z = I_z\omega$ бўлгани учун:

$$M_z^{ин} = -I_z\varepsilon \qquad (354)$$

тенгликни оламиз, бунда I_z — айланиш ўқига нисбатан жисмнинг инерция моменти. (354)-даги манфий ишора инерция кучларининг айланиш ўқига нисбатан бош моменти $M_z^{ин}$ жисмнинг бурчак тезланиши ε га тескари йўналганлигини ифодалайди.

Хусусий ҳолда, агар айланиш ўқи жисмнинг моддий симметрия ўқи билан устма-уст тушса, жисмнинг массалар маркази симметрия ўқида ётади ва қўзғалмас бўлади. Бунда $a_C = 0$ бўлгани учун инерция кучларининг бош вектори $R^{ин} = 0$ бўлади. Шунобарин, бу ҳолда қўзғалмас ўқ атрофида айланаётган қаттиқ жисмнинг инерция кучлари ва моменти (354)-формуладан аниқланадиган битта жуфт кучга келтирилади. Жисм симметрия ўқига эга бўлгани учун бу жуфт куч айланиш ўқига перпендикуляр текисликда ётади.

3. Текис параллел ҳаракат. Фараз қилайлик, жисм симметрия текислигига эга бўлсин ва унга параллел равишда ҳаракатлансин. Бу ҳолда инерция кучлари жисмнинг массалар марказига қўйилган, (353)-формула ёрдамида аниқланадиган $R^{ин}$ кучга ва жисмнинг симметрия текислигида ётувчи битта жуфт кучга келтирилади ҳамда унинг моменти ҳам (354)-формула ёрдамида аниқланади. Бунда I_z га жисмнинг массалар марказидан ҳаракат текислигига перпендикуляр равишда ўтувчи ўққа нисбатан инерция моменти деб қаралади.

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР.

1. Қаттиқ жисмнинг қўзғалмас ўқ атрофидаги дифференциал тенгламасини ёзинг?
2. Айланма ҳаракатдаги жисмнинг инерция моменти нимани ифодалайди?
3. Нуқтанинг инерция кучи нима?
4. Инерция кучи қандай йўналган?
5. Агар нуқта тўғри чизиқли текис ҳаракат қилса, инерция кучига эга бўладими?
6. Уринма инерция кучи нима?
7. Уринма инерция кучи қандай йўналган?
8. Нормал инерция кучи нима? У нимага тенг?
9. Агар нуқта эгри чизиқли ҳаракатда бўлса, нормал инерция кучи ҳосил бўладими?

10. Даламбер принципининг моҳияти нимадан иборат ва у қандай таърифланади?

103-§. БОҒЛАНИШЛАР. БОҒЛАНИШЛАРДАГИ МОДДИЙ НУҚТАНИНГ ҲАРАКАТИ

Моддий нуқтанинг ҳаракатига маълум йуналишда чек қуйилган булиши мумкин. Нуқта ҳаракатини бирор йуналишда чекловчи сабабга боғланиш дейилади. Боғланиш сирт, текислик, эгри чизиқ ёки тўғри чизиқли булиши мумкин. Нуқта бирор сирт бўйлаб ҳаракатлансин, у ҳолда боғланишнинг тенгламаси $f(x, y, z) = 0$ куринишда бўлади. Агар моддий нуқта бирор фазовий эгри чизиқ бўйлаб ҳаракатланса, бундан эгри чизиқ икки $f_1(x, y, z) = 0$ ва $f_2(x, y, z) = 0$ сиртларнинг кесишиш чизиги сифатида олиниши мумкин. Бу икки тенглама фазовий эгри чизиқнинг тенгламаси, яъни боғланиш тенгламасини ифодалайди. Боғланишлар фақат тенгламалар билангина эмас, тенгсизликлар билан ҳам берилиши мумкин.

Тенглик ишораси билан берилган боғланишлар бушатмайдиган боғланишлар дейилади. Тенгсизлик билан ифодаланадиган боғланишлар бушатадиган боғланишлар дейилади. Боғланишлар тенгламасига фақат нуқта координатлари кирса, бундан боғланишлар голоном (ёки геометрик) боғланишлар дейилади. Боғланишлар тенгламасига нуқта координатасини вақт бўйича ҳосилалари ҳам кириб, бу боғланишлар интегралланадиган бўлса, уларга беголономлар ёки кинематик боғланишлар дейилади. Голономли боғланишлар ҳам, беголоном боғланишлар ҳам стационар ва ностационар боғланишларга булинади. Вақтга боғлиқ булмаган боғланишлар стационар боғланишлар дейилади. Агар боғланишлар вақтга боғлиқ бўлса, у ностационар боғланишлар дейилади. Стационар ва ностационар боғланишлар бушатмайдиган ва бушатадиган булиши мумкин. Боғланишлар тенгламаларини қуйидагича синфлаш мумкин:

1. Стационар бўшатмайдиган голономли боғланишлар.

$$f_j(x, y, z) = 0 \quad 1 \le j \le 3$$

2. Ностационар бўшатмайдиган голоном боғланишлар.

$$f_j(x, y, z, t) = 0 \quad 1 \le j \le 3$$

3. Бушатадиган стационар, голоном боғланишлар.

$$f_j(x, y, z) \le 0 \quad 1 \le j \le 3$$

4. Бушатадиган ностационар голоном боғланишлар.

$$f_j(x, y, z, t) \le 0 \quad 1 \le j \le 3$$

5. Беголоном стационар, бўшатмайдиган боғланишлар

$$f_j(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = 0 \quad 1 \le j \le 3$$

6. Беголоном ностационар бўшатмайдиган боғланишлар.

$$f_j(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) = 0 \quad 1 \le j \le 3$$

7. Беголоном стационар бўшатиладиган боғланишлар.

$$f_j(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \le 0 \quad 1 \le j \le 3$$

8. Беголоном ностационар бўшатиладиган боғланишлар.

$$f_j(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \le 0 \quad 1 \le j \le 3$$

Боғланишдаги моддий нуқта ҳаракатини ўрганишда унга қўйилган кучлар қаторига боғланиш таъсирини берадиган реакция кучини ҳам қўшиш керак. Боғланиш реакция кучи эса номаълум катталиклар қаторига киради.

104-§. АНАЛИТИК МЕХАНИКА. МЕХАНИК СИСТЕМАГА ҚЎЙИЛГАН БОҒЛАНИШЛАР

Механик системага қўйилган боғланишлар ҳам голоном ва беголоном стационар ва ностационар бўшатадиган ва бўшатмайдиган бўлиши мумкин. Фақат голоном боғланишлар қўйилган система голоном система дейилади ва қуйидаги кўринишдаги тенгламалар билан ифодаланади.

$$f_\gamma(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots x_n, y_n, z_n) = 0$$
$$(\gamma = 1, 2, 3, \ldots S)$$

S билан голоном сони белгиланган.

Беголоном боғланишлар система нуқталари тезликларининг проекцияларига нисбатан чизиқли ёки чизиқли бўлмаган тенгламалар билан ифодаланиши мумкин, чизиқли бўлган ҳолда боғланиш тенгламалари қуйидаги кўринишда ёзилади.

$$f_\mu = a_\mu + \sum \left(b_{\mu i} \cdot \dot{x}_i + c_{\mu i} \cdot \dot{y}_i + d_{\mu i} \cdot \dot{z}_i\right)$$
$$(\mu = 1, 2, \ldots, S_1)$$

Бунда S_1 билан беголоном боғланишлар сони белгиланган.

Системага қўйилган боғланишларнинг бир қисми голоном, қолган қисми эса беголоном боғланишлар ҳам бўлиши мумкин. Биз асосан голоном система ҳаракати ёки мувозанатини ўрганамиз.

Механик система n та нуқтадан ташкил топган бўлса, унга қўйилган боғланишлар тенгламасининг сони 3n дан ошмаслиги керак.

105-§. СИСТЕМАНИНГ МУМКИН БЎЛГАН КЎЧИШЛАРИ. ИДЕАЛ БОҒЛАНИШЛАР

Системанинг мумкин бўлган кўчишини ўрганишдан аввал нуқтанинг мумкин бўлган кўчишини таърифлаймиз.

Берилган пайтда нуқтанинг унга қўйилган боғланиш чеклашларини қаноатлантирувчи ҳар қандай чексиз кичик кўчишларга мумкин бўлган кўчишлар дейилади. Нуқтанинг мумкин бўлган кўчишини δ_r вектор билан белгилаймиз. δ_r векторнинг координата ўқларидаги проекцияларини δ_x, δ_y, δ_z, билан белгилаймиз; бу катталиклар нуқта координаталарининг вариациялари деб ҳам аталади. У ҳолда мумкин бўлган кўчиш векторини нуқта координаталарининг вариациялари орқали қуйидагича ифодалаш мумкин.

$$\delta r = \delta x i + \delta y j + \delta z k$$

Агар боғланиш $f(x,y,z,t)=0$ тенглама билан ифодаланган бўлса, нуқтанинг координаталар бўйича ҳақиқий кўчишлари ўзаро қуйидаги муносабат билан боғланган бўлади.

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial t}dt = 0$$

Системани ташкил этувчи нуқталар мумкин бўлган кўчишлари системанинг мумкин бўлган кўчишлари дейилади. Система нуқталарининг мумкин бўлган кўчишлари қуйидаги икки шартни қаноатлантириши керак..

1. Система нуқталарининг мумкин бўлган кўчишлари чексиз кичик бўлиши керак. Агар бу кўчишлар чекли бўлса, система бошқа вазиятга ўтиб системанинг мувозанат шарти ўзгаради.

2. Система нуқталарининг мумкин бўлган кўчишида системага қўйилган барча боғланишлар сақланиб қолиши керак. Агар боғланишлар бузилса, системанинг кўриниши ўзгаради.

Стационар голономли боғланишдаги системанинг бир-бирига боғлиқ бўлмаган мумкин бўлган кўчишлари сони шу системанинг эркинлик даражаси дейилади. S та голономли боғланиш таъсиридаги n та нуқтадан ташкил топган системанинг эркинлик даражасини k билан белгиласак,

$k = 3n-S$ деб ёзиш мумкин.

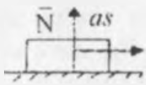
Актив куч қўйилган нуқтанинг бирор δr мумкин бўлган кўчишдаги шу кучнинг элементар ишини қисқача, кучнинг мумкин бўлган иши деб атаймиз ва уни δA билан белгилаймиз. У холда элементар иш таърифига кура

$$\delta A = \bar{F}_i' \delta r_i$$

формула уринли булади. n та нуктадан ташкил топган механик системага таъсир этувчи кучлар мумкин бўлган ишларнинг йиғиндиси нолга тенг буладиган богланишлар идеал богланишлар дейилади. Идеал богланишларни куйидагича ифодалаш мумкин.

$$\delta A' = \sum F_i' \delta r_i = 0$$

$\bar{F}'$ -системага қуйилган богланиш реакция кучи



180-расм.

$$\delta A^r = N\delta S\cos 90° = 0 \qquad \delta A^r = 0$$

Силлиқ текислик идеал богланишга мисол булади.

106-§. МУМКИН БУЛГАН КУЧИШЛАР ПРИНЦИПИ

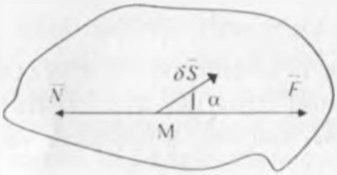
Идеал богланишдаги система узига қуйилган актив ва реакция кучлари таъсирида мувозанатда булсин. $\bar{F}$ кучнинг dS силжишдаги бажарган элементар иши қуйидагига тенг.

$$\delta A = F\delta S\cos\alpha$$

$\bar{N}$ реакция кучининг бажарган элементар иши

$$\delta A' = N\delta S\cos(180° - \alpha) = -N\delta S\cos\alpha = -F\delta S\cos\alpha$$

Ишларни қушамиз.



181-расм.

$$\delta A + \delta A' = F\delta S\cos\alpha - F\delta S\cos\alpha = 0 \qquad (355)$$

$$\delta A + \delta A' = 0$$

(355) ни системадаги ҳар бир нуқта учун ёзиб қўшиб чиқсак, қуйидагича ёзилади.

$$\sum \delta A^a + \sum \delta A^r = 0$$
$$\sum \delta A^r = 0 \ \text{бўлса} \ \sum \delta A^a = 0 \ \text{бўлади} \qquad (356)$$

(356) система учун мумкин бўлган кўчиш принципини ифодалайди. Идеал боғланишдаги система мувозанатда бўлса, унинг ҳар қандай мумкин бўлган кўчишида системага қўйилган барча актив кучларнинг бажарган элементар ишларининг йиғиндиси нолга тенг бўлади.

(356) ни қуйидагича ёзиш мумкин.

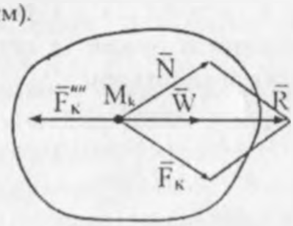
$$\sum (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0 \qquad (357)$$

Бунда X, Y, Z системага таъсир этувчи кучларнинг координата ўқларидаги проекцияси, δx, δy, δz – кучлар қўйилган нуқталарнинг силжиши.

107-§. ДИНАМИКАНИНГ УМУМИЙ ТЕНГЛАМАСИ. (ДАЛАМБЕР ЛАГРАНЖ ТЕНГЛАМАСИ)

n та нуқтадан иборат бўлган идеал боғланишдаги система берилган бўлсин. Система билан боғланиш ўртасида ишқаланиш йўқ.

$\bar{F}$ ва $\bar{N}$ системадаги ихтиёрий M нуқтага таъсир қилувчи актив ва реакция кучлари (182-расм).



182-расм.

M нуқтага инерция кучларини қўямиз. Инерция кучи ҳар доим тезланишга қарама-қарши йўналган бўлади. Даламбер принципига асосан актив, реакция ва инерция кучларининг геометрик йиғиндиси нолга тенг бўлади.

$$\bar{F}_k + \bar{N}_k + \bar{F}_k'''' = 0$$

Система нуқталарига мумкин бўлган δS силжиш берамиз. Мумкин бўлган кўчишлар принципига асосан

$$\delta A_k + \delta A_k' + \delta A_k'''' = 0 \qquad (358)$$

$$\sum \delta A_k + \sum \delta A_k - \sum \delta A_k'' = 0 \qquad (359)$$

Системага қўйилган боғланишлар идеал бўлганлиги учун реакция кучларининг бажарган элементар ишларининг йиғиндиси нолга тенг бўлади. (358) ни системадаги ҳар бир нуқта учун ёзиб қўшиб чиқамиз.

$$\sum \delta A_k'' = 0$$

$$\sum \delta A_k - \sum \delta A_k = 0 \text{ бўлади} \quad k=1,2,\ldots,n \qquad (360)$$

Бу тенгламага динамиканинг умумий тенгламаси ёки Даламбер – Лагранж тенгламаси дейилади: идеал боғланишдаги системанинг ҳар қандай мумкин бўлган кўчишида системага қўйилган барча актив кучларининг ва инерция кучларининг бажарган элементар ишларининг йиғиндиси нолга тенг бўлади.

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР

1. Қандай системага эркин система дейилади?
2. Қандай системага эрксиз система дейилади?
3. Боғланиш нима?
4. Реакция кучи нима?
5. Қандай боғланишга стационар боғланиш дейилади?
6. Қандай боғланишга стационар бўлмаган боғланиш дейилади?
7. Қандай боғланишга голономли боғланиш дейилади?
8. Қандай боғланишга беголономли боғланиш дейилади?
9. Мумкин бўлган кўчиш принципини таърифланг?
10. Динамиканинг умумий тенгламасининг формуласини ёзинг?

108-§. УМУМЛАШГАН КООРДИНАТАЛАР ВА УМУМЛАШГАН ТЕЗЛИКЛАР

Система n та нуқтадан ташкил топган бўлса, унинг ҳолатини 3n та Декарт координаталари орқали аниқлаш мумкин.

Системага S та голоном боғланишлар қўйилган бўлса 3n координаталардан $k=3n-S$ таси бир-бирига боғлиқ бўлмайди. Декарт координаталардан k тасини бир-бирига боғлиқ қилмай, S тасини эса бир-бирига боғлиқ қилиб танлаш мумкин. Бир бирига боғлиқ бўлмаган k та Декарт координаталари ўрнига бошқа $q_1, q_2, \ldots, q_n$ параметрларини ҳам киритиш мумкин. Система ҳолатини бир қийматли аниқлайдиган бир-бирига боғлиқ бўлмаган параметрлар умумлашган координаталар дейилади. Умумлашган координаталар қуйидагича белгиланади:

$q_1, q_2, \ldots, q_k$

Умумлашган координаталар бир-бирларига боғлиқ бўлмаганлидан улар турлича ўлчов бирлигида (масалан м, радиан, м ва х.к.) бўлиши мумкин. Умумлашган координаталардан вақт бўйича олинган ҳосилалар умумлашган тезликлар дейилади. Умумлашган тезликларни $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$ билан белгилаймиз.

$$\dot{q}_1 = \frac{dq_1}{dt}, \quad \dot{q}_2 = \frac{dq_2}{dt}, \ldots, \dot{q}_n = \frac{dq_n}{dt}$$

Умумлашган тезликнинг ўлчов бирлиги умумлашган координата ўлчов бирлигининг вақт бирлигига нисбати билан ифодаланади. Масалан q координата «м» да ўлчанганда $\dot{q} - \frac{м}{с}$ да, q учун радиан олинганда $\dot{q} - \frac{рад}{с} = с^{-1}$ га ўлчанади.

Система ихтиерий нуқтасининг бирор саноқ системасига нисбатан радиус-векторини $\overline{ri}$ координаталарини (x_i, y_i, z_i) десак, ҳар бир q_i умумлашган координатани улар орқали ифодалаш мумкин.

$$\overline{ri} = ri(q_1, q_2, \ldots, q_k, t)$$

$$\overline{xi} = xi(q_1, q_2, \ldots, q_k, t)$$

$$\overline{yi} = yi(q_1, q_2, \ldots, q_k, t)$$

$$\overline{zi} = zi(q_1, q_2, \ldots, q_k, t)$$

Система нуқталарининг мумкин бўлган кўчишларини қуйидагича ифодалай оламиз:

$$\delta \overline{ri} = \frac{\partial \overline{ri}}{\partial g_1}\delta q_1 + \frac{\partial \overline{ri}}{\partial g_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{\partial \overline{ri}}{\partial g_k}\delta q_k = \sum_{j=1}^{k}\frac{\partial \overline{ri}}{\partial gj}\delta qj \qquad (361)$$

(356)-ифодадаги δqj $(j = 1,2,3,\ldots k)$ мумкин бўлган кўчишларнинг умумлашган координаталари орқали ифодаларидан иборат.

109-§. УМУМЛАШГАН КУЧЛАР ВА УЛАРНИ ҲИСОБЛАШ

Эркинлик даражаси k бўлган n та моддий нуқтадан ташкил топган голоном механик системанинг ҳолати $q_1, q_2, \ldots, q_k$ умумлашган координаталар орқали аниқлансин. Система нуқталарига мос равишда таъсир этувчи кучларни $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n$ билан белгилайлик. Система нуқталарининг радиус векторларини $\overline{r}_1, \overline{r}_2, \ldots, \overline{r}_n$ десак бу кучлар мумкин бўлган ишларининг йиғиндиси қуйидагича аниқланади:

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} F_i \delta r_i$$

$\delta r_i = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j$ шунга кўра

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} F_i \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{i=1}^{n} (F_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j}) \delta q_j$$

Қуйидагича белгилаш киритайлик

$Q_j = \sum F_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j}$ у холда:

$$\delta A = \sum Q_j \delta q_j = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_k \delta q_k;$$

Qj катталикка ***qj*** умумлашган координатага мос келувчи умумлашган куч дейилади.

$$Q_j = \sum \left(F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} + \right)$$

Ихтиёрий q_j умумлашган координатага мос келувчи Q_j умумлашган кучни хисоблаш учун

$$Q_j = \frac{\delta A_j}{\delta q_j} (j = 1,2 \dots k)$$

формула қўлланилади.

110-§. ЛАГРАНЖНИНГ ИККИНЧИ ХИЛ ТЕНГЛАМАЛАРИ

Эркинлик даражаси n га тенг голономли [illegible] механик система ҳолати $q_1, q_2, \dots, q_n$ умумлашган координата орқали аниқлансин.

Бу тенгламаларни келтириб чиқариш учун динамиканинг умумий тенгламасидан фойдаланамиз:

$$\sum (F_i - m_i a_i) \delta r_i = 0 \qquad (362)$$

ёки

$$\sum F_i \delta r_i = \sum m_i a_i \delta r_i$$

(362)-тенгламани умумлашган координаталар орқали ифодалаймиз (362)-формулага мувофиқ

$$\sum F_i \delta r_i = \sum Q_j \delta q_j .$$

Энди (362)-тенгликнинг ўнг томонини умумлашган координаталар орқали ифодалаймиз:

$$\sum m_i a_i \delta r_i = \sum m_i \frac{dV_i}{dt} \cdot \sum \frac{\partial r_i}{\partial q_i} \cdot \delta q_i = \sum \left(\sum m_i \frac{dV_i}{dt} \cdot \sum \frac{\partial r_i}{\partial q_i} \right) \delta q_i$$

Қавс ичидаги ифодани қуйидагича ёзамиз:

$$\sum m_i \frac{dV_i}{dt}\frac{\partial r_i}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\sum m_i V_i \frac{\partial r_i}{\partial q_i} - \sum m_i V_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial r_i}{\partial q_i}\right) \qquad (363)$$

Лагранжнинг айниятидан (362), (363) ва система кинетик энергиясининг таърифидан қуйидагилар ҳосил бўлади:

$$\sum m_i \frac{dV_i}{dt}\frac{\partial r_i}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\sum m_i V_i \frac{\partial r_i}{\partial q_i} - \sum m_i V_i \frac{\partial r_i}{\partial q_i} =$$
$$= \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial q_i}\sum \frac{m_i V_i^2}{2} - \frac{\partial}{\partial q_i}\sum \frac{m_i V_i^2}{2} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \qquad (364)$$

Шундай қилиб (364) муносабат қуйидаги кўринишни олади:

$$\sum m_i a_i \delta r_i = \sum \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i}\right)\delta q_i \qquad (365)$$

(364)- ва (365)- формулалардан фойдаланиб динамиканинг тенгламасини қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$\sum \left(Q_i - \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i}\right)\right)\delta q_i = 0 \qquad (366)$$

(366)-тенглама динамика умумий тенгламасининг умумлашган координаталаридаги ифодасидир. Бу тенгламада:

$$\sum \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i}\right)\delta q_i$$

ҳад система нуқталарининг $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_n$ кўчишидаги барча инерция кучлари ишларининг йиғиндисини ифодалайди.

Голономли боғланишлар қўйилган система учун (366) да барча умумлашган координаталарининг орттирмалари $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_n$ эркин бўлгани учун улар олдидаги ифодаларни айрим-айрим нолга тенглаш мумкин.

Шундай қилиб, қуйидаги n та тенгламалар системасини оламиз:

$$Q_i - \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i}\right) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (367)$$

(367)-тенгламалар Лагранжнинг иккинчи хил тенгламалари ёки механик системанинг умумлашган координаталаридаги ҳаракат дифференциал тенгламалари дейилади. Бу тенгламаларнинг афзаллиги шундан иборатки, бу тенгламалар сони системанинг эркинлик даражасига тенг бўлиб, системани ташкил этувчи нуқталар сонига боғлиқ бўлмайди.

Бу тенгламалар системанинг умумлашган координаталарига нисбатан иккинчи тартибли оддий дифференциал тенгламалардир.

Уларни интеграллаб ва интеграллаш доимийларини харакатнинг бошланғич шартлари асосида аниқлаб, системанинг умумлашган координаталар орқали ифодаланган n та ҳаракат тенгламаларини оламиз:

$$q_i = q_i(t), \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Лагранжнинг иккинчи хил тенгламалари аналитик механикада муҳим аҳамиятга эга ва кўпчилик техника масалаларини ечишда улардан самарали фойдаланилади. Лекин бу тенгламалар таркибида боғланиш реакция кучларини аниқлаш лозим бўлганда Даламбер принципидан фойдаланиш мумкин.

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР

1. Системанинг эркинлик даражаси деб нимага айтилади?
2. Қандай боғланишга идеал боғланиш дейилади?
3. Системанинг мумкин бўлган кўчиши деб нимага айтилади?
4. Мумкин бўлган кўчиш принципи қандай таърифланади?
5. Динамиканинг умумий тенгламаси қандай ёзилади?
6. Умумлашган координата нима?
7. Умумлашган тезлик нима?
8. Умумлашган куч нима? Унинг ўлчов бирлигини айтинг?
9. Умумлашган куч қандай тартибда ҳисобланади?
10. Агар система потенциал бўлса, у ҳолда умумлашган куч потенциал энергия орқали қандай ифода қилинади?
11. Лагранжнинг иккинчи хил тенгламаларини ёзинг?
12. Лагранжнинг иккинчи хил тенгламаларининг сони нечта бўлади?

ФОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЁТЛАР:

1. П. Шохайдарова, Ш. Шоназаров, Ш. Зокиров. «Назарий механика», дарслик. Тошкент, 1991 йил.
2. Т. Р. Рашидов, Ш. Шоназаров, К. Б. Муминов. «Назарий механика асослари», дарслик. Тошкент, 1990 й.
3. С. К. Азизкориев, Янгуразов Ш. «Назарий механикадан масалалар ечиш». Ўқув қўлланма. Тошкент, 1980 й.
4. Д. И. Толибова. «Назарий механика (динамика)». Ўқув қўлланма. Тошкент, 1987 й.
5. М. С. Яхёев, К. Б. Муминов. «Назарий механика». Тошкент, «Ўқитувчи», 1990 й.
6. Н. С. Бибутов, М. Муродов. «Амалий механика». Тошкент, «Унимоцентр», 2002 й.
7. С. М. Тарг. «Краткий курс теоретической механики». Дарслик. Москва, 1986 й.
8. И. В. Мещерский. «Назарий механикадан масалалар тўплами». Ўқув қўлланма. Тошкент, 1989 й.

М У Н Д А Р И Ж А

Муродов Мустафо Муродович,
Иноятова Хайринисо Мирхалиловна,
Уснатдинов Кенис Уснатдинович

«НАЗАРИЙ МЕХАНИКА»

Тақризчилар: Тошкент Давлат Техника Университети, «Назарий механика ва машина деталлари», кафедраси мудири, техника фанлари доктори, профессор **Ш. А. Шообидов,**
Бухоро Давлат Университети техника фанлари доктори, профессор **З. Жумаев.**

Масъул муҳаррир: доц. **З. Х. Ғайбуллаев.**
Саҳифаловчи: Б. Ахмедов.

Босишга рухсат этилди 8.10.2004. Бичими 84 x 108 $\frac{1}{32}$. Нашр табоги 13,0. Босма табоги 12,0. Адади 1000 нусха. Баҳоси келишилган нархда.
«Истиқлол» нашриёти, Тошкент ш. Навоий кўчаси, 30-уй.
Шартнома № Г- 41.
«Ёқуб-Довуд» босмахонасида чоп этилди. Бухоро шаҳар, мустақиллик кўчаси, 27 уй.