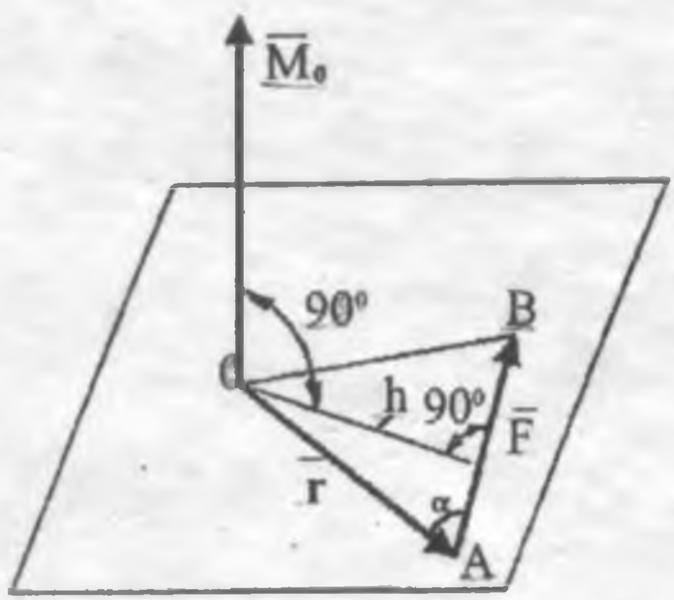
М. М. Муродов, Х. М. Иноятова,
К. У. Уснатдинов

НАЗАРИЙ МЕХАНИКА



М. М. Муродов, Х. М. Иноятова,
К. У. Уснатдинов

НАЗАРИЙ МЕХАНИКА

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ ТОМОНИДАН ОЛИЙ ЎҚУВ ЮРТЛАРИНИНГ БАРЧА ЙЎНАЛИШДАГИ БАКАЛАВРЛАР УЧУН ЎҚУВ ҚЎЛЛАНМА СИФАТИДА ТАВСИЯ ЭТГАН

Тошкент,
"Истиқлол" - 2004

Ушбу қулланма Бухоро озик-овқат ва енгил саноат технологияси институтининг услубий кенгашида (8-сонли баёни, 27.03.2003 йил) ва Олий таълим вазирлигининг (43-сонли баёни, 26.03.2004 йил) Қарори асосида нашрга тавсия этилган. Қулланма Олий укув юртларининг профессионал таълим йуналишида укиётган бакалаврларига мулжалланган.

Тақризчилар: Тошкент Давлат Техника Университети, «Назарий механика ва машина деталлари», кафедраси мудири, техника фанлари доктори, профессор **Ш. А. Шообидов**,
Бухоро Давлат Университети техника фанлари доктори, профессор **3. Жумаев.**

Масъул муҳаррир: доц. **3. Х. Ғайбуллаев.**
Саҳифаловчи: **Б. Ахмедов**

Уқув қулланма статика, кинематика, нуқта ва система динамикаси баён этилган.

Китобда механиканинг асосий тушунчалари ва қонунлари билан бирга мухандислик фаолиятида учрайдиган бошқа масалалар ҳам ёритилган.

Уқув қулланма олий уқув юртлари барча йуна[illegible] учун мулжалланган. Шунингдек бу қулланмадан касб-ҳунар коллежларининг талабалари ҳам фойдаланиши мумкин.

В учебном пособие «Теоретической механики» изложены основные раздели статики, кинематики и динамики точки и системы

В книге наряду с изложением основных понятий и законов теоретической механики нашли свои отражения некоторые инженерные вопросы встречающей в практике.

Учебная пособия предназначена для студентов высших учебных заведений в при подготовке бакалавриатов. Пособий могут пользоваться и студенты профессиональных коллежей.

In educational the manual of "Theoretical mechanics" the basic static, kinematics and dynamics of a point and system are stated.

In the book alongside with a statement of the basic concepts and laws of theoretical mechanics some engineering questions meeting in practice have found their reflections.

Educational manual is intended for students of high educational institutions in by preparation of bachelor degrees. Students of professional colleges can use manual

КИРИШ

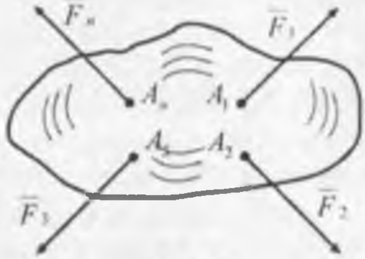
Ҳар бир фан асосларини чуқур урганиш келажак тараққиётини илмий куз билан кура билиш укувчиларга ургатиш жамиятнинг тез суратлар билан ривожланишига йул очади. Академик М. Т. Уразбоев «Олим келажакни уз руҳий дунёсининг энг баланд чуққисидан туриб кура олиши ва атрофдагиларни шубҳаланмасдан етаклаши билан бошқалардан фарқ қилиши керак»-деган эди. Бу эса келажакда ижодкор шахсларни купайтиради, технологияга айланиб, меҳнатни унумдорбулишига имконият яратади. Меҳнат самарадорлиги, маҳсулот сифати ва халқнинг фаровонлиги фан ривожидан боғлиқдир. Ҳозирги замон фан ва техникасининг тараққиёти умумтехника фанларининг асосларидан бири булган назарий механикани пухта урганишни талаб қилади. Назарий механика техника олий укув юртларида ўтиладиган умумий фанлардан биридир. Назарий механика фанининг қонунлари материаллар қаршилиги, қурилиш механикаси, машина ва механизмлар назарияси, гидравлика, аэродинамика каби фанлар учун хилма-хил мураккаб техника масалаларини назарий база сифатида қулланилади. Назарий механика фани булажак мутахассисларга машиналарни лойиҳалаш ва автоматлаштириш урганалиганмуханлислик фани сифатида ҳам зарур булган билимни беради. Фан-техника тараққиёти билан бирга назарий механика булажак мутахассисларда техникада қуланиладиган жараёнлар моделини ясаш ва илмий хулосалар яратиш қобилиятини ривожлантиради. Техниканинг кейинги тараққиётлари асосида назарий механика фанини пухта урганган талабалар ЭҲМ ни тадбиқ этган ҳолда, мураккаб масалаларни ҳам еча олиши мумкин. Назарий механика фани моддий жисмларнинг бир-бирига курсатадиган таъсири ва ҳаракатнинг умумий қонунлари ҳақидаги фандир. Табиий фанлар материя ҳаракатини ва уларнинг хусусиятларини урганадилар. Табиий фанлардан бири булган назарий механика фани материя ҳаракатларидан энг оддийси ҳисобланган механик ҳаракатни урганади. Шу билан бирга назарий механика жисмларнинг мувозанатини ҳам урганади, зероки жисм мувозанати механик ҳаракатнинг хусусий ҳолидир.

Бунда: AB кесманинг узунлиги куч миқдорини ифодалайди. Стрелка $\overline{F}$ - куч йўналишини кўрсатади. A нуқта куч қўйилган нуқта.

Куч йўналган тўғри чизиққа кучнинг таъсир чизиғи дейилади.

KL тўғри чизиқ $\overline{F}$ кучининг таъсир чизиғи бўлади.

1. Агар жисмга бир нечта кучлар қўйилган бўлса бундай кучларга кучлар системаси дейилади.



3-расм.

$(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, \ldots \overline{F}_n)$ - жисмга кучлар системаси қўйилган. $A_1, A_2, A_3 \ldots A_n$ кучлар қўйилган нуқталар.

2. Икки куч системаси жисмга бир хил таъсир кўрсатса, улар эквивалент кучлар системаси дейилади.

$(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, \ldots \overline{F}_n)$ кучлар системасининг жисмга кўрсатадиган таъсирини $(\overline{Q}_1, \overline{Q}_2, \ldots \overline{Q}_n)$ кучлар системаси кўрсатса, бундай икки куч системаси ўзаро эквивалент бўлади. Уларнинг эквивалентлиги қуйидагича ёзилади.

$$(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, \ldots \overline{F}_n) \sim (\overline{Q}_1, \overline{Q}_2, \ldots \overline{Q}_n)$$

3. Агар бирор кучлар системасининг жисмга кўрсатадиган таъсирини битта куч кўрсата олса, бундай кучга кучлар системасининг тенг таъсир этувчиси дейилади. $(\overline{F}, \overline{F}, \ldots \overline{F}_n)$ кучлар системасининг тенг таъсир этувчисини $\overline{R}$ билан белгиласақ, у ҳолда:

$$(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, \ldots \overline{F}_n) \sim \overline{R}$$

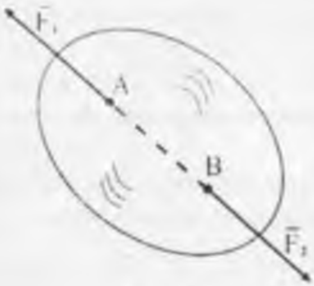
4. Тинч турган жисм унга қўйилган $(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, \ldots \overline{F}_n)$ кучлар системаси таъсирида ҳам тинч ҳолатда қолса, бундай кучлар системаси мувозанатлашган кучлар ситемаси ёки нолга эквивалент система дейилади. Мувозанатлашган кучлар системаси нолга эквивалентдир.

$$(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, \ldots \overline{F}_n) \sim 0.$$

2-§. СТАТИКАНИНГ АКСИОМАЛАРИ

Назарий механика фанининг статика кисми кундалик хаетда тасдикланган куйидаги аксиомаларга асосланади:

<u>1-аксиома</u>: Жисмга таъсир этаётган иккита куч микдор жихатидан тенг ва бир тугри чизик буйлаб карама-карши томонга йуналган булса, жисм мувозанатда булади (4-расм).

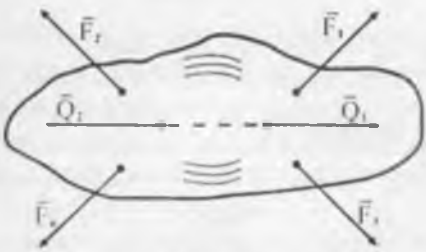


4-расм.

Бунда $F_1 = F_2$, $\bar{F}_1 = \bar{F}_2$, $\bar{F}_1$ ва $\bar{F}_2$, кучларга узаро мувозанатлашган кучлар системаси ёки нолга эквивалент кучлар системаси дейилади

$$(\bar{F}_1, \bar{F}_2) \sim 0$$

<u>2-аксиома:</u> Жисмга таъсир этаётган кучлар системасига узаро мувозанатлашувчи кучлар кушилса ёки олинса кучлар системасининг жисмга курсатадиган таъсири узгармайди (5-расм).



5-расм.

$\bar{F}_1, \bar{F}_2, \ldots \bar{F}_n$ кучлар таъсирида жисм мувозанатда турган бўлсин.

Шу жисмга нолга эквивалент $(\bar{Q}_1, \bar{Q}_2)$ кучларни қўямиз $(\bar{Q}_1, \bar{Q}_2) \sim 0$, бу холатда билан жисмнинг мувозанати ўзгармайди.

боғланишларнинг асосий турларида реакция кучлари қандай йўналганлигини кўриб чиқамиз.

1. Силлиқ қўзғалмас текислик. Ишқаланишни эътиборга олинмайдиган даражада силлиқ бўлган сирт одатда силлиқ сирт деб ҳисобланади. Жисм силлиқ қўзғалмас текислик устида мувозанатда турса, ёки шу текисликка нисбатан ҳаракатланса, силлиқ қўзғалмас текислик жисмни текисликка перпендикуляр бўлган йўналишда ҳаракат қилишига тўсқинлик кўрсатади.

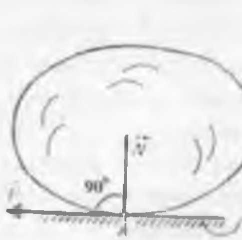
Силлиқ қўзғалмас текисликнинг реакция кучи N текисликка перпендикуляр бўлиб, жисм қайси томонга ҳаракат қила олмаса, шунга тескари йўналган бўлади (9-расм a, b).

a) b)

9-расм.

Бунда N - силлиқ қўзғалмас текисликнинг реакция кучи ёки нормал реакция кучи деб аталади, P – жисм оғирлиги.

Агар сирт силлиқ бўлмаса, А нуқтада нормал реакция кучидан ташқари уринма реакция кучи $\bar{F}$ ҳам бўлади (10-расм). Бу $\bar{F}$ кучга ишқаланиш кучи деб аталади.

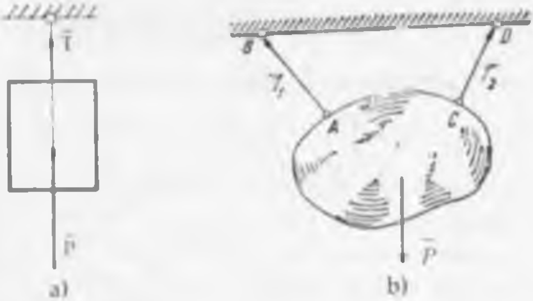


10-расм.

Бунда N нормал реакция кучи, F -ишқаланиш кучи.

2. Эгилувчан ёки эластик жисмлар. Жисмлар чўзилмайдиган ип, арқон, трос, занжир, қайишлар воситасида осилган бўлса, уларда ҳосил

буладиган реакция кучлари мос равишда эгилувчан жисмлар бўйлаб йўналган булади (11-расм a,b). Эгилувчан жисмларда хосил буладиган реакция кучлари T, T_1, T_2 билан белгиланади ва тарангилик кучи деб аталади.



11-расм.

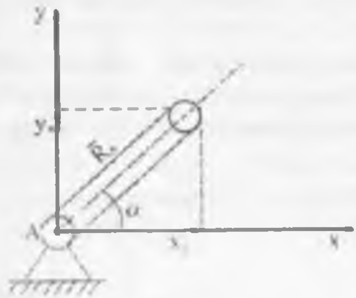
Бунда P ипга осилган юкнинг оғирлиги

Реакция кучининг миқдор ва йўналиши жисмга таъсир қилувчи кучга боғлиқ булади.

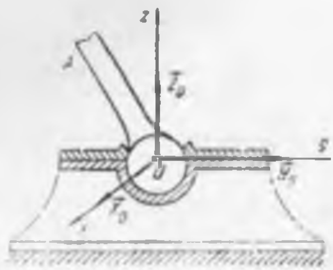
3. Шарнирли қўзғалмас таянч. Бу таянч жисмнинг илгарилама ҳаракат қилишига тусқинлик қилади, жисм шарнир атрофида айланади.

Иккита жисмнинг узаро бирлашган жойига шарнир дейилади. Шарнир атрофида жисмларининг бири иккинчисига нисбатан эркин айланади. Болт – шарнирли кузғалмас таянчга мисол була олади.

Шарнирли қузғалмас таянчнинг белгиси (12-расмда) курсатилган.



12-расм.

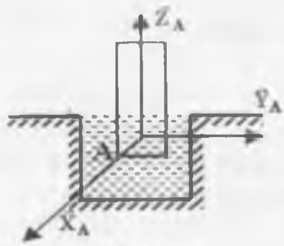


16-расм.

Бунда X_O, Y_O, Z_O - реакция кучлари.

7. Ўқлар қўзғалмас таянчга маҳкамланган. Асос устунларни мустаҳкамлаш учун хизмат қилади ва жисмнинг фақат устун ўқи атрофида айланишига йўл қўяди.

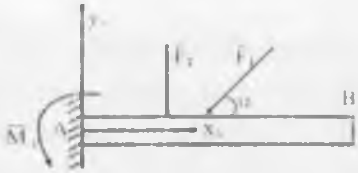
Асосининг реакцияси Z_A вертикал бўйлаб юқорига йўналган, деворнинг реакцияси эса X ва Y ўқлари бўйлаб йўналган ва устуннинг ўқига тик бўлган ҳолатда кучларни X_A, Y_A ташкил этувчиларга ажратиш керак (17-расм).



17-расм.

Бунда X_A, Y_A, Z_A - реакция кучлари.

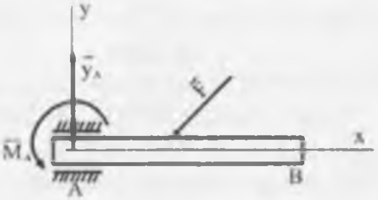
8. Бир учи деворга қисиб маҳкамланган балка. Агар (18-расм) AB балканинг A учи деворга қисиб маҳкамланган бўлса, A нуқтадаги боғланиш реакциясининг иккита тузувчисидан ташқари, балканинг A нуқта атрофида айланишига тўсқинлик қилувчи реакция моменти M_A ҳам мавжуд бўлади.



18-расм.

Бунда X_A, Y_A реакция кучлари, M_A реактив моменти.

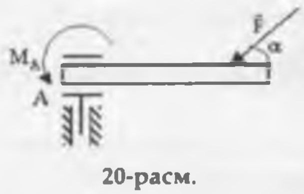
9. Бир учи горизонтал буйлаб силжишга йул куядиган қилиб махкамланган балка. 19-расмда курсатилган АВ балканинг А учи горизонтал буйлаб силжишга йул қуядиган қилиб маҳкамланган булса, бундан богланиш реакцияси силжиш текислигига перпендикуляр булган Y_A реакция кучидан хамда балканинг А нуқта атрофида айланишига тусқинлик қилувчи реакция моменти M_A дан иборат булади.



19-расм.

$\overline{Y_A}$ - реакция кучи, M_A - реакция моменти

10. Бир учи горизонтал ҳам вертикал буйлаб силжишга йул қуядиган қилиб маҳкамланган балка. 20-расмда курсатилган АВ балканинг А учи ҳам горизонтал, ҳам вертикал буйлаб силжишга йул куядиган қилиб махкамланган. Бу холда А нуқтада фақат балканинг А нукта атрофида айланишига қаршилик қилувчи M_A реакция моменти мавжуд булади.



20-расм.

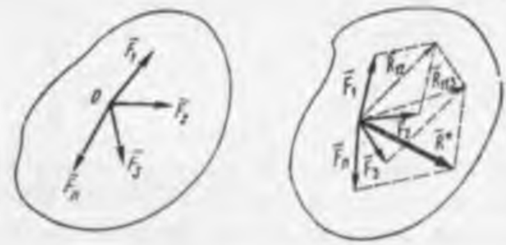
6-аксиома. Богланишда булган жисмни эркин жисм деб қараш учун богланишни реакция кучи билан алмаштириш керак.

Тенг таъсир этувчи $\overline{R}$ кучининг F_1 ва F_2 кучлар билан ташкил қилган α ва γ бурчаклари синуслар теоремасига кура 23-расм b дан аниқланади.

$$\frac{F_1}{\sin\gamma} = \frac{F_2}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin\beta} \qquad (7)$$

б) Кучлар купбурчаги усули.

Бир нуктага қуйилган $F_1, F_2, ..., F_n$ кучлари берилган булсин (24-расм) Шу кучларнинг тенг таъсир этувчисини топиш лозим булсин.



a) b)

24-расм.

Тенг таъсир этувчи кучни топиш учун параллелограмм аксиомасига асосан $\overline{F}_1$ ва $\overline{F}_2$ кучларни қушиб, уларни тенг таъсир этувчи $\overline{R}_1$ кучи билан алмаштирамиз.

$$\overline{R}_1 = \overline{F}_1 + \overline{F}_2$$

Бу усулга асосан $\overline{R}_1$ куч билан $\overline{F}_3$ кучни қушиб $\overline{R}_2$ кучни ҳосил қиламиз.

$$\overline{R}_2 = \overline{R}_1 + \overline{F}_3 = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3$$

ва ҳоказо.

Шу усул билан n-1 гача булган кучларни қушиб, тенг таъсир этувчисини аниқлаймиз.

$$\overline{R}_{n-1} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3 + ... + \overline{F}_{n-1}$$

$\overline{R}_{n-1}$ билан $\overline{F}_n$ кучни қушиб тенг таъсир этувчи кучни топамиз.

$$\overline{R} = \overline{R}_{n-1} + \overline{F}_n = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3 + ... + \overline{F}_{n-1} + \overline{F}_n$$

$$\overline{R} = \Sigma\overline{F} \qquad (8)$$

Бир нуқтага қуйилган кучларнинг тенг таъсир этувчиси шу кучларнинг геометрик йиғиндисига тенг булиб, кучлар қуйилган нуқтага қуйилган булади. Кучларни кетма-кет параллелограмм қоидаси асосида қушиш, берилган кучлардан куч купбурчагини қуришга олиб келади.

5-§. УЧ КУЧ МУВОЗАНАТИГА ОИД ТЕОРЕМА

Теорема: Бир текисликда жойлашган ва ўзаро параллел бўлмаган учта куч мувозанатда булса, уларнинг таъсир чизиқлари бир нуктада кесишади.

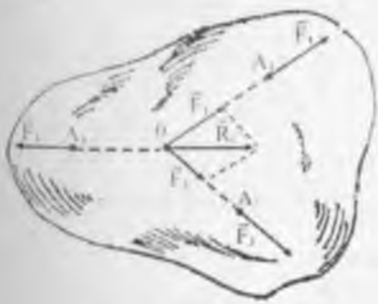
<u>Исбот.</u> Жисмнинг A_1, A_2, ва A_3 нукталарига бир текисликда ётувчи параллел бўлмаган мувозанатлашувчи F_1, F_2 ва F_3 кучлари қўйилган бўлсин (25-расм)

Кучлар параллел бўлмагани учун улардан ихтиёрий иккитасининг таъсир чизиғи бирор нуктада кесишади. Масалан F_1 ва F_2 кучларининг таъсир чизиқлари 0 нуктада кесишади. Бу кучларни таъсир чизиқлари бўйлаб 0 нуктага кучирамиз. Параллелограмм қоидасига асосан F_1 F_2 кучларини қушамиз.

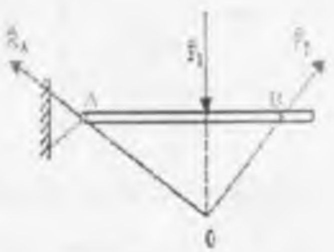
$$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2$$

$\overline{R}$ кучининг таъсир чизиғи $\overline{F}_1$ ва $\overline{F}_2$ кучларининг таъсир чизиқлари кесишган нуктадан ўтади. Шундан қилиб жисмга $\overline{R}$ ва $\overline{F}_3$ кучлари таъсир қилади. Иккита куч қўйилган жисм мувозанатда бўлиши учун бу кучларнинг миқдорлари тенг бўлиб, бир тўғри чизиқ бўйлаб қарама-қарши томонга йўналган бўлиши керак. Демак, $\overline{F}_3$ кучининг таъсир чизиғи 0 нуктадан ўтади ёки учта кучнинг таъсир чизиғи бир нуктада кесишади. Бу теорема ёрдамида реакция кучининг йўналиши аниқланади.

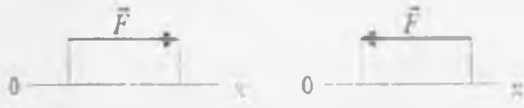
<u>Масалан.</u> АВ стержен $\overline{F}_1$,$\overline{F}_2$ кучлар ва $\overline{R}_1$ реакция кучи таъсирида мувозанатда бўлса, $\overline{R}_1$ кучининг таъсир чизиғи $\overline{F}_1$ ва $\overline{F}_2$ кучлар таъсир чизиғи кесишган нуктадан ўтади (26-расм).



25-расм.



26-расм.



a) b)

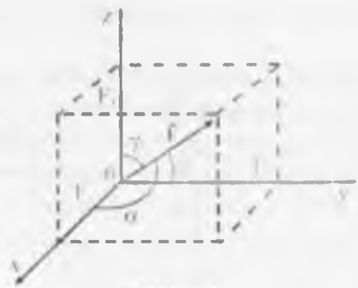
29 – расм.

$$F_x = F\cos 0^\circ = F \cdot 1 = F \qquad\qquad F_x = F\cos 180^\circ = -F$$

$$F_x = F \qquad\qquad F_x = -F$$

Кучнинг модули тўғри бурчакли параллелепипеднинг диагоналига (30-расм), бу параллелепипеднинг қирралари эса кучнинг координата ўқларидаги проекцияларига тенг бўлади.

$$F = \sqrt{Fx^2 + Fy^2 + Fz^2} \qquad (10)$$



30-расм.

$\vec{F}$ кучнинг йўналиши йўналтирувчи косинуслар ёрдамида аниқланади.

$$\cos\alpha = \frac{Fx}{F}, \quad \cos\beta = \frac{Fy}{F}, \quad \cos\gamma = \frac{Fz}{F} \qquad (11)$$

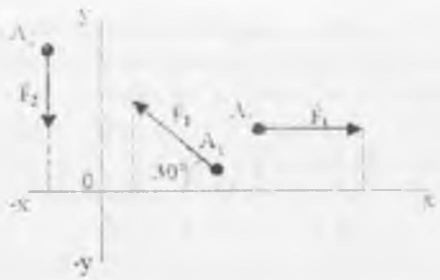
Бунда α, β, γ – F кучи билан x, y, z ўқлари орасидаги бурчак.

МАСАЛА № 4.

Берилган:

$F_x = 6н$, $F_y = 8н$, $F_z = 10н$

Бу кучларнинг координата ўқларидаги проекциялари топилсин. (31-расм).



31-расм.

Ечиш. 1) F_3 - кучининг проекциялари. $X_3 = -F_3\cos 30^\circ = -6\frac{\sqrt{3}}{2} = -3\sqrt{3}$ н

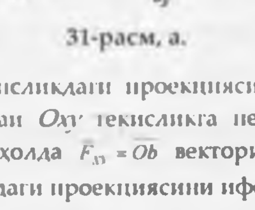
$Y_3 = F_3 \sin 30^\circ = 6\frac{1}{2} = 3$ н

2) F_2 кучининг проекциялари; $X_2 = 0$ $Y_2 = -F_2 = -8н$

3) F_1 кучининг проекциялари; $X_1 = F_1 = 10н$ $Y_1 = 0$.

7-§. КУЧНИНГ ТЕКИСЛИКДАГИ ПРОЕКЦИЯСИ

Oxyz координаталар системасида *A* нуқтага қўйилган *F* кучи берилган бўлсин (31-расм, а).



31-расм, а.

F кучини *Oxy* текисликдаги проекциясини аниқлаймиз. Бунинг учун *A* ва *B* нуқталардан *Oxy* текисликга перпендикуляр *AO* ва *Bb* чизиқлар ўтказамиз. У ҳолда $\bar{F}_{xy} = \overline{Ob}$ вектори ҳосил бўлади. $\bar{F}_{xy} - \overline{Ob}$ *F* кучнинг *Oxy* текисликдаги проекциясини ифодалайди.

F куч текисликдаги проекциясининг миқдори қуйидагига тенг.

$$Fxy = F\cos\varphi$$

Бунда φ $\bar{F}$ кучи билан унинг проекцияси орасидаги бурчак. Фазода жойлашган кучни *x,y* ўқлардаги проекциясини аниқлаш учун аввал кучни шу уқлар ётган текисликдаги проекцияси топилади F_{xy} векторнинг Ox ва Oy уқлардаги проекциясини аниқлаш учун b нуқтадан Ox ва Oy уқларига мос равишда перпендикуляр чизиқлар ўтказамиз. Ob_1 ва Ob_1' мос равишда F кучнинг Ox ва Oy уқларидаги проекцияларини ифодалайди.

$$F_x = F_{xy}\cos\alpha = F\cos\varphi\cos\alpha$$
$$F_y = F_{xy}\sin\alpha = F\cos\varphi\sin\alpha \qquad (14)$$

Бу усул кучни икки марта проекциялаш усули дейилади.

8-§. БИР НУҚТАДА КЕСИШУВЧИ КУЧЛАРНИНГ ТЕНГ ТАЪСИР ЭТУВЧИСИНИ АНАЛИТИК УСУЛДА АНИҚЛАШ

Таъсир чизиқлари бир нуқтада кесишувчи $F_1, F_2, F_3 \dots F_n$ кучлар берилган бўлсин (32-расм, а).

Берилган кучларнинг тенг таъсир этувчисини миқдор ва йўналишини аниқлаш лозим.

Тенг таъсир этувчи куч берилган кучларнинг геометрик йиғиндисига тенг

$$R = F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_n \qquad \text{ёки}$$
$$R = \Sigma F \qquad (15)$$

(15) – вектор тенгликни координата уқларига проекциялаб, тенг таъсир этувчи кучнинг координата уқларидаги проекциясини аниқлаймиз.

Тенг таъсир этувчи кучнинг бирор уқдаги проекциясини ташкил этувчи кучларнинг шу уқдаги проекцияларининг йиғиндисига тенг бўлади.

$$Rx = \Sigma X, \quad Ry = \Sigma Y, \quad Rz = \Sigma Z \qquad (16)$$

Бунда R_x, R_y, R_z – R кучнинг координата уқларидаги проекцияси. (16) ёрдамида тенг таъсир этувчи кучнинг координата уқлардаги проекцияси топилади.

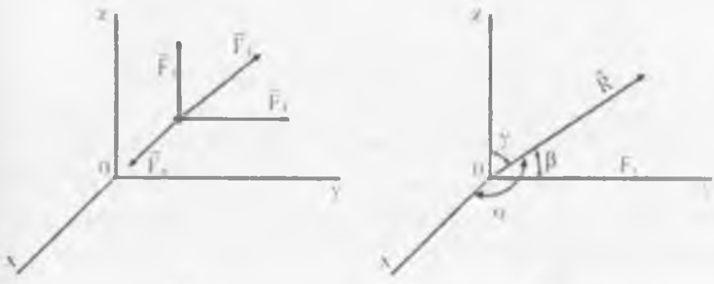
Тенг таъсир этувчи кучнинг миқдори қуйидагига тенг.

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{\left(\sum X\right)^2 + \left(\sum Y\right)^2 + \left(\sum Z\right)^2} \qquad (17)$$

Йўналиши эса қуйидагича аниқланади.

$$\cos\alpha = \frac{R_x}{R}; \quad \cos\beta = \frac{R_y}{R}; \quad \cos\gamma = \frac{R_z}{R}; \qquad (18)$$

Бунда α, β, γ лар R билан x,y,z уқлари орасидаги бурчаклар (32-расм, b).



a) b)

32-расм.

9-§. БИР НУКТАГА ҚУЙИЛГАН КУЧЛАРНИНГ МУВОЗАНАТИ

1. Бир нуқтага қуйилган кучлар системаси мувозанатда булиши учун уларнинг тенг таъсир этувчиси $R=0$ булиши зарур ва етарлидир. Бунда кучлардан тузилган куч купбурчаги ёпиқ бўлиши керак. $R=0$, $\Sigma F=0$ тенгламалар кесишувчи кучлар системаси мувозанатини зарурий ва етарли шартининг вектор ифодасидир.

Демак кесишувчи кучлар системаси таъсиридаги жисм мувозанатда булиши учун шу кучларнинг геометрик йиғиндиси нолга тенг булиши зарур ва етарли шартдир.

2. Тенг таъсир этувчи куч нолга тенг булиши учун (17) - формуладаги қавслар ичидаги ифодаларнинг ҳар бири нолга тенг булиши шарт.

$$\begin{aligned}
&\sum X = 0; \quad X_1 + X_2 + \ldots + X_n = 0 \\
&\sum Y = 0; \quad Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n = 0 \qquad\qquad (19) \\
&\sum Z = 0; \quad Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n = 0
\end{aligned}$$

(19) -формула фазодаги таъсир чизиқлари бир нуқтада кесишувчи кучларнинг аналитик мувозанат шартини ифодалайди. Бу шарт қуйидагича таърифланади.

Таъсир чизиқлари бир нуқтада кесишувчи кучлар мувозанатда булиши учун кучларнинг x,y,z уқларидаги проекцияларининг йиғиндиси нолга тенг булиши зарур ва етарлидир. Ҳар кучлар моменти куйидаги кўринишда белгиланади. M_o ёки $m_o(F)$ куч моменти $H \cdot M$, $KH \cdot M$ билан ўлчанади.

$$m_o(F) = \pm Fh \qquad (21)$$

(21) - формула ёрдамида кучнинг нуктага нисбатан моменти топилади.

Нуктага нисбатан куч моменти куйидагича таърифланади:

куч микдори билан шу куч елкасининг купайтмасига билан [illegible]ан нуктага нисбатан кучнинг моменти дейилади.

Куч моменти мусбат ва манфий ишора билан тавсифланади.

Агар куч момент маркази атрофида жисмни соат стрелкаси айланишига карама-карши томонга айлантирса куч моменти мусбат, аксинча манфий булади (34-расм, а ва b).

Нуктага нисбатан куч моменти куйидаги хоссаларга эга.

1. Агар кучнинг таъсир чизиги бирор нуктадан утган булса, кучнинг шу нуктага нисбатан моменти нолга тенг булади. Чунки бу холда кучнинг елкаси h=0 га тенг (35-расм).

$$m_B(F) = F \cdot h = F \cdot 0 = 0 .$$

Бу холда куч жисмни айлантирмайди.

35-расм.

2. Кучнинг микдори ва йуналишини узгартирмай таъсир чизиги буйлаб истаган нуктага кучирилса, куч моменти узгармайди (чунки унинг елкаси узгармай колади).

3. Кучнинг нуктага нисбатан моменти куч билан шу нуктадан ташкил булган учбурчак юзасининг иккиланганига тенг.

36-расм.

$\overline{F}$ кучининг икки учини момент маркази 0 билан туташтирамиз (36-расм). AOB учбурчаги ҳосил бўлади. Бу учбурчакнинг юзаси ΔAOB юзаси=$1/2F.h$

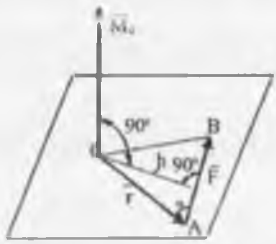
$$2\Delta AOB.юзи = F \cdot h = m_0(\overline{F})$$

$$m_0(\overline{F}) = 2\Delta AOB \ юзи \qquad (22)$$

11-§. КУЧНИНГ НУҚТАГА НИСБАТАН МОМЕНТИ ВЕКТОРИ

$\overline{F}$ кучнинг 0 нуқтага нисбатан моменти момент марказига қўйилган $\overline{Mo}$ вектор бўлиб, бу марказ ва кучнинг таъсир чизиғи орқали ўтган текисликка перпендикуляр йўналган бўлади.

$\overline{F}$ кучининг 0 нуқтага нисбатан момент векторини аниқлаймиз (37-расм).



37-расм.

Бунда $m_0(\overline{F})$ - 0 нуқтага нисбатан олинган F куч моментининг вектори. $\overline{OA} = \overline{r}$ -А нуқтанинг радиус вектори. Момент вектори куч қўйилган нуқтанинг радиус вектори билан кучнинг вектор кўпайтмасига тенг.

$$\overline{M}_0 = [\overline{r} \cdot \overline{F}] \qquad (23)$$

Момент вектори $\overline{Mo}$ OAB учбурчак текислигига перпендикуляр бўлиб, $\overline{Mo}$ нинг учидан қараганда куч жисмни соат стрелкаси айланишига тескари йўналишда айлантиришига интилади. Момент векторининг абсолют қиймати куч моментига тенг.

$$|\overline{M}_0| = m_0(\overline{F}) \qquad (24)$$

(24) – формулани исботлаш учун (23) дан абсолют қиймат оламиз.

$$|\overline{M}_0| = |[\overline{r} \cdot \overline{F}]| = r \cdot F \cdot \sin\alpha = F \cdot h = m_0(\overline{F})$$

Бунда: $h = r\sin\alpha$; $\left|\overline{M_0}\right| = m_0(\overline{F})$.

12-§. ТЕНГ ТАЪСИР ЭТУВЧИНИНГ МОМЕНТИ ҲАҚИДАГИ ТЕОРЕМА (ВАРИНЬОН ТЕОРЕМАСИ)

Теорема. Бир текисликда жойлашган кучлар тенг таъсир этувчисининг бирор нуқтага нисбатан олинган моменти ташкил этувчи кучларнинг шу нуқтага нисбатан олинган моментларининг йиғиндисига тенг.

Исбот. Жисмнинг А нуқтасига $\overline{F_1}, \overline{F_2}, ..., \overline{F_n}$ кучлари қўйилган бўлсин. Ихтиёрий *0* нуқта оламиз ва *0* ни *A* билан туташтирамиз. *0* марказдан *OA* кесмага тик қилиб *OX* ўқини ўтказамиз (37-расм).

Энди $m_0(\overline{F_1}), m_0(\overline{F_2}), ..., m_0(\overline{F_n})$, моментларнинг ифодасини аниқлаймиз. (22)-формулага асосан $m_0(\overline{F_1}) = 2\Delta 0AB_1$ юзи.

$0AB_1$ учбурчакнинг юзи асоси билан баландлиги кўпайтмасининг ярмига тенг. Бунда асос ОА кесма бўлса, баландлиги ob_1 бўлади.

$$2\Delta 0AB_1 юзи = OA \cdot ob_1$$

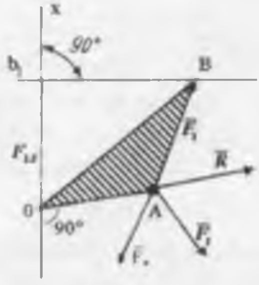
ob_1 кесма $\overline{F}$ кучининг ох ўқидаги проекциясини билдиради $ob_1 = F_{1X}$. Шунинг учун

$$m_0(\overline{F_1}) = OA \cdot F_{1X} \qquad (25)$$

Қолган кучларнинг моменти ҳам худди шундай ҳисобланади.

$\overline{F}$ куч *OA* чизиқдан пастга бориб етганда ҳам (25) формула тўғри бўлаверади, бунда кучнинг проекцияси манфий бўлганлиги учун моментнинг ишораси ҳам манфий бўлади.

$\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n$, кучларнинг тенг таъсир этувчиси $\overline{R}$ билан белгиланади.



38-расм.

$$\bar{R} = \sum \bar{F} \qquad (26)$$

Тенг таъсир этувчининг бирор ўқдаги (x ўқидаги) проекцияси қўшилувчи кучларнинг шу ўқдаги проекцияларининг йиғиндисига тенг, яъни:

$$R_x = \sum F_x \qquad (27)$$

Бу тенгликнинг иккала томонини ОА га кўпайтирсак.

$$OA \cdot R_x = \sum (F_x \cdot OA) \qquad (28)$$

(25) - формулага асосан

$$\begin{aligned} OA \cdot R_x &= \sum m_0(\bar{R}) \\ \sum (OA \cdot F_x) &= \sum m_0(\bar{F}) \end{aligned} \qquad (29)$$

(29) ни (28) га қўйиб қуйидагини ҳосил қиламиз.

$$m_0(\bar{R}) = \sum m_0(\bar{F}) \qquad (30)$$

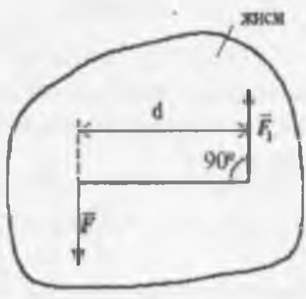
(30) -формула Вариньон теоремасининг математик ифодасидир.

13-§. ЖУФТ КУЧ ВА УНИНГ МОМЕНТИ

Таъриф. Миқдорлари тенг, таъсир чизиқлари бир тўғри чизиқда ётмайдиган, параллел ва қарама-қарши томонга йўналган иккита кучга жуфт куч дейилади.

$$F = F_1; \quad \bar{F} = -\bar{F}_1; \quad \bar{F} \parallel \bar{F}_1;$$

Жуфт куч $(\bar{F}, \bar{F}_1)$ кўринишда белгиланади (39-расм).



39-расм.

$\bar{F}$ *ва* $\bar{F}_1$ кучларга жуфт кучни ташкил этувчи кучлар дейилади.

Жуфт кучни ташкил этувчи кучлар орасидаги энг қисқа d масофага жуфт кучнинг елкаси дейилади. Жуфт кучнинг тенг таъсир этувчиси нолга баробар бўлади.

$$R = F - F_1 = 0, \quad R = 0$$

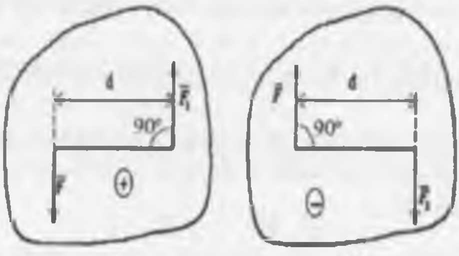
Жуфт кучни битта куч билан алмаштириш мумкин эмас. Жуфт кучни жисмга курсатадиган таъсири жуфт куч моменти билан тавсифланади. Жуфт кучни ташкил этувчи кучларнинг бири билан жуфт куч елкасининг купайтмасига жуфт кучнинг моменти дейилади.

Жуфт кучнинг моменти m, ёки M билан белгиланади.

$$m = \pm F \cdot d = \pm F_1 d \qquad (31)$$

(31)-формула билан жуфт кучнинг моменти аниқланади. Жуфт кучнинг моменти мусбат ёки манфий булади.

Жуфт жисмни соат стрелкаси айланишига тескари томонга айлантирса унинг моменти мусбат, соат стрелкаси айланиши буйича айлантирса манфий ишора билан олинади (40-расм a,b).



40-расм.

$$m = F \cdot d \quad m = -F \cdot d$$

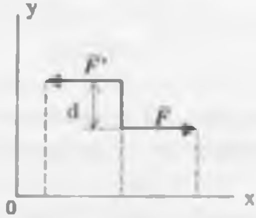
Жуфт куч қуйилган жисм айланма ҳаракатда булади. Ҳар қандай жуфт кучни стрелкали ёй шаклида тасвирлаш мумкин. Стрелка ёнига жуфт куч моменти куйилади.

Жуфт куч жойлашган текисликка жуфт кучнинг таъсир текислиги дейилади.

<u>**Теорема 1.**</u> Жуфт кучни ташкил этувчи кучларнинг ҳар қандай ўқдаги проекциялари йиғиндиси нолга тенг.

<u>**Исбот:**</u> Жуфт куч берилган булсин (41-расм). Шу жуфт кучни x ўқига проекциялаймиз.

$$\Sigma X = 0, \quad F - F^1 = 0 \text{ чунки } F = F^1$$



41-расм.

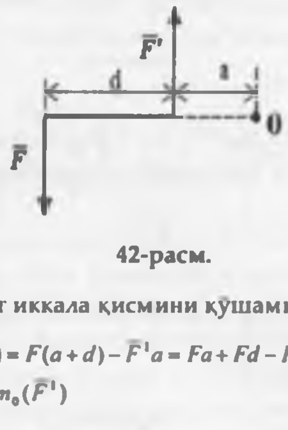
<u>Теорема 2.</u> Жуфт кучни моменти уни ташкил этувчи кучлардан ихтиёрий нуқтага нисбатан олинган моментларнинг йиғиндисига тенг.

$$m = m_0(\overline{F}) + m_0(\overline{F}^1)$$

<u>Исбот.</u> Моменти $m = F \cdot d$ га тенг бўлган $(\overline{F}, \overline{F}^1)$ жуфт куч берилган бўлсин (42-расм). Жуфт кучни ташкил этувчи кучлардан 0 нуқтага нисбатан момент оламиз.

$$m_0(\overline{F}) = F(a + d)$$

$$m_0(\overline{F}^1) = -F^1 a$$



42-расм.

Бу тенгликларнинг иккала қисмини қўшамиз.

$$m_0(\overline{F}) + m_0(\overline{F}^1) = F(a+d) - \overline{F}^1 a = Fa + Fd - F^1 d = Fd = m$$
$$m_{0-1} = m_0(\overline{F}) + m_0(\overline{F}^1) \qquad (32)$$

Теорема исботланди.

Бу теоремалар шуни кўрсатадики, жуфт куч проекциялар тенгламаси $\sum X = 0$ $\sum Y = 0$ га иштирок қилмайди. Жуфт кучни бирор нуқтага нисбатан олинган моментлар тенгламасига $(\sum m_0 = 0)$ қўшиш керак.

14-§. ЖУФТ КУЧЛАРНИНГ ЭКВИВАЛЕНТЛИГИ ҲАҚИДАГИ ТЕОРЕМА

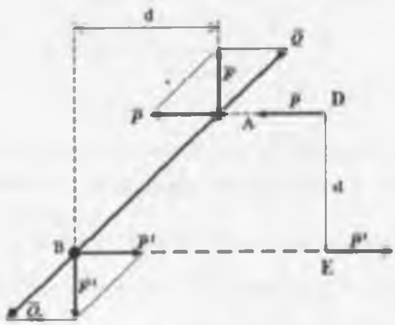
Теорема. Жисмга қўйилган ҳар қандай жуфт кучнинг моменти шу жуфт кучнинг моментига тенг бўлган бошқа жуфт куч билан алмаштириш мумкин.

Исбот. Жисмга моменти $m=Fd$ (F, F^1) бўлган жуфт кучи таъсир қилаётган бўлсин (43-расм).

Ихтиёрий D ва E нуқталардан иккита параллел тўгри чизиқ ўтказамиз. Бу параллел тўгри чизиқ F ва F^1 кучларнинг таъсир чизиги билан A ва B нуқталарда кесишади. AD ва BE тўгри чизиқлар бўйлаб йўналган ташкил этувчиларини P ва Q билан белгилаймиз. F кучини AB ва BE тўгри чизиқ бўйлаб йўналган ташкил этувчисини Q ва P билан белгилаймиз. Демак

$$\overline{P} = -\overline{P}^1, \quad \overline{Q} = -\overline{Q}^1$$

Q ва Q^1 кучлари ўзаро мувозанатлашувчи, бўлгани учун жисмдан олиб ташлаймиз. Натижада $(\overline{F}, \overline{F}^1)$ жуфт кучини $(\overline{P}, \overline{P}^1)$ жуфт кучи билан алмаштирдик. $(\overline{P}, \overline{P}^1)$ жуфт кучнинг елкаси d_1 га тенг. P ва P^1 кучларни таъсир чизиқлари бўйлаб D ва E нуқталарга келтирамиз.



43-расм.

$(\overline{F}\overline{F}^1)$ жуфт кучи билан $(\overline{P}, \overline{P}^1)$ жуфт кучининг моментлари тенг эканлигини исботлаймиз.

$(\overline{F})$ кучи $\overline{P}$ ва $\overline{Q}$ кучларнинг тенг таъсир этувчиси Вариньон теоремасига асосан:

$$m_B(\bar F) = m_B(\bar P) + m_B(\bar Q)$$
$$m_B(\bar F) = F \cdot d \quad , m_B(\bar P) = Pd$$
$$m_B(Q) = 0$$

Шундай қилиб $Fd = Pd_1$ теорема исботланди.

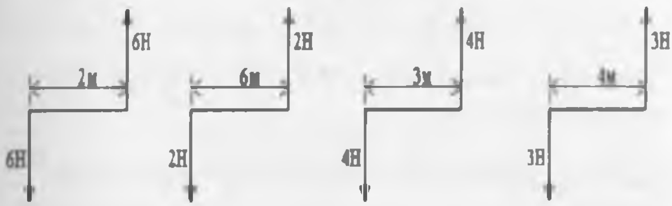
Демак моментлари тенг ва айланиш йуналишлари бир хил булган иккита жуфт кучга эквивалент жуфт кучлар дейилади.

Бу теоремадан қуйидаги натижа келиб чиқади.

1. Жуфт кучни ўзининг таъсир текислигида ҳар қандай вазиятга кучириш мумкин, бунда жуфт кучни жисмга таъсири ўзгармайди.

2. Жуфт кучнинг моментини ўзгартирмай уни ташкил этувчи кучларнинг катталигини ва елкасини исталганча ўзгартириш мумкин бу билан жуфт кучнинг жисмга таъсири ўзгармайди.

Масалан, моменти *m=12 кнм* жуфт куч берилган бўлсин.



44-расм.

15-§. ТЕКИСЛИКДАГИ ЖУФТ КУЧЛАРНИ ҚЎШИШ. ЖУФТ КУЧЛАРНИНГ МУВОЗАНАТЛИК ШАРТИ

Теорема. Бир текисликда жойлашган бир нечта жуфт кучларни қушиб, моменти шу жуфт кучлар моментларининг йиғиндисига тенг бўлган битта жуфт кучга келтириш мумкин.

Исбот. Бир текисликда жойлашган моментлари m_1, m_2, m_3 бўлган жуфт кучлар берилган бўлсин (44-расм). Шу жуфт кучларни қўшиб битта тенг таъсир этувчи жуфт кучга келтириш керак. Берилган жуфт кучларни умумий d елкага эга бўлган эквивалент (F_1F_1'), (F_2F_2') ва (F_3F_3') жуфт кучлар билан алмаштирамиз. Эквивалент жуфт кучларнинг таърифига асосан қуйидаги формулани ёзамиз.

$$m_1 = F_1 d, \quad m_2 = -F_2 d, \quad m_3 = F_3 d, \qquad (34)$$

45-расм.

А ва В нуқталарга қўйилган кучларни қўшиб тенг таъсир этувчисини аниқлаймиз.

$$R = F_1 - F_2 + F_3$$

$$R' = F_1' - F_2' + F_3' = F_1 - F_2 + F_3$$

Бу кучларнинг модуллари тенг бир бирига қарама-қарши йўналган ва ўзаро параллел.

$$R = R', \quad \bar{R} = -\bar{R}', \quad \bar{R} \parallel \bar{R}'$$

Демак, бу кучлар битта $(\bar{R}, \bar{R}')$ жуфт кучни ташкил этади. Бу жуфт кучга тенг таъсир этувчи жуфт куч дейилади. Демак берилган учта жуфт кучларни қўшиб битта тенг таъсир этувчи янги жуфт кучга келтирдик (46-расм).

46-расм.

Тенг таъсир этувчи жуфт кучнинг моменти қуйидаги формула билан топилади:

$$M = Rd = (F_1 - F_2 + F_3)d = F_1 d + (-F_2 d) + F_3 d = m_1 + m_2 + m_3 \qquad (35)$$

$$M = m_1 + m_2 + m_3$$

Бир текисликда жойлашган, моментлари $m_1, m_2, ..., m_n$ га тенг бўлган n та жуфт кучлар берилган бўлса, бу жуфт кучларни қўшиб битта тенг таъсир этувчи жуфт кучга келтириш мумкин.

Тенг таъсир этувчи жуфт кучнинг моменти юқоридаги теоремага асосан

$$M = m_1 + m_2 + \dots + m_n$$
$$M = \sum m \quad \text{га тенг булади} \qquad (36)$$

Бир текисликда жойлашган жуфт кучлар мувозанатда булиши учун улар моментларининг йигиндиси 0 га тенг булиши зарур ва етарлидир.

$$m_1 + m_2 + \dots + m_n = 0$$
$$\sum m = 0 \qquad (37)$$

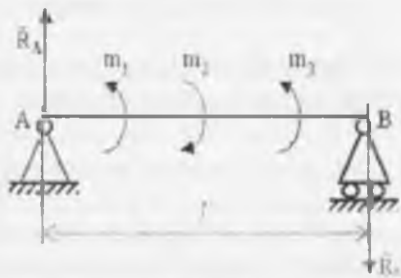
Бу тенглик бир текисликда жойлашган жуфт кучларнинг мувозанат шартини ифодалайди.

Мисол. Балка моментлари

$$m_1 = 6кнм, \quad m_2 = 8кнм, \quad m_3 = 12кнм$$

булган жуфт кучлар таъсирида мувозанатда турган булсин (47-расм).

Балканинг узунлиги $l=5$ м, таянч реакциялари аниклансин.



47-расм.

Ечиш. Маълумки жуфт кучни бошқа бир жуфт куч билан мувозанатлаш мумкин, шунинг учун балканинг A ва B таянчдаги R_A ва R_B реакция кучлари жуфт кучни ташкил қилиш керак. Яъни бу кучларнинг миқдорлари тенг қарама-қарши томонга йуналган ва параллел булиши зарур.

$$R_A = R_B \qquad R_A = -R_B, \; R_A \parallel R_B$$

Бу жуфт кучнинг моменти:

$$m_4 = -R_A \cdot l \quad \text{булади.}$$

Демак, балка моментлари m_1, m_2, m_3 ва m_4 ва жуфт кучлари таъсирида мувозанатда туради. (37) - тенгликка асосан:

$$m_1 - m_2 + m_3 - m_4 = 0; \quad 6 - 8 + 12 - 5R_A = 0; \quad R_A = 2kH$$

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР.

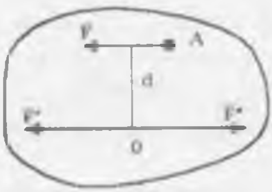
1. Нуқтага нисбатан куч моменти деб нимага айтилади?
2. Момент ишораси қандай танланади?
3. Куч елкаси нима?
4. Қандай ҳолатда нуқтага нисбатан куч моменти нолга тенг булади?
5. Кучларни таъсир чизиглари буйича кучирилса, берилган нуқтага нисбатан куч моменти узгарадими?
6. Жуфт куч нима? Нима учун жуфт куч тенг таъсир этувчи кучга эга эмас?
7. Вариньон теоремасини таърифланг?
8. Эркин жисм жуфт куч таъсирида қандай ҳаракат қилади?
9. Жуфт кучни моменти деб нимага айтилади?
10. Қандай шарт бажарилганда иккита жуфт куч эквивалент булади?
11. Жуфт кучларни қушиш тугрисидаги теоремани таърифланг.
12. Жуфт кучлар системасининг мувозанат шартини таърифланг.

ТЕКИСЛИКДА ИХТИЁРИЙ ЖОЙЛАШГАН КУЧЛАР СИСТЕМАСИ.

16-§. КУЧНИ УЗИГА ПАРАЛЛЕЛ КУЧИРИШГА ОИД ЛЕММА

Жисмнинг А нуқтасига F кучи қуйилган булсин (48-расм).

Шу кучни таъсир чизиги устида ётмаган O нуқтага келтириш керак. O нуқтага келтириш маркази дейилади. Шу келтириш марказидан кучнинг таъсир чизигига перпендикуляр туширамиз ва F кучнинг O нуқтага нисбатан моментини оламиз.



48-расм.

$$m_0(\bar{F}) = Fd \qquad (38)$$

Бунда d-F кучининг O марказга нисбатан елкаси.

Келтириш марказига узаро мувозанатлашувчи $\bar{F}'$ ва $\bar{F}''$ кучларини қуямиз. Бу кучлар берилган F кучига тенг ва параллел булиши керак $F' = F'' = F$. Кучни келтириш натижасида берилган кучга геометрик тенг ва параллел булган $F = F'$ кучига ҳамда (F, F'') жуфт кучига эга буламиз

$$R = 0, \quad M_0 = 0 \qquad (43)$$

(43)-тенглик кучлар системасининг геометрик шаклдаги мувозанатлик шартини ифодалайди.

Аналитик куринишдаги мувозанат шартини ёзамиз.

Бош векторнинг модули қуйидаги формула билан аниқланади.

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(\sum X)^2 + (\sum Y)^2} \qquad (44)$$

(43)-тенгликнинг биринчи шарти бажарилиши учун яъни R=0 булиши учун, ΣX=0 ΣY=0 булиши керак. (43)-нинг иккинчисига (42)ни қуямиз $\sum m_0(F) = 0$

$$\left.\begin{aligned} \sum X &= 0 \\ \sum Y &= 0 \\ \sum m_0(F) &= 0 \end{aligned}\right| \qquad (45) \qquad \left|\begin{aligned} X_1 + X_2 + \ldots + X_n &= 0 \\ Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n &= 0 \\ m_0(F_1) + m_0(F_2) + \ldots + m_0(F_n) &= 0 \end{aligned}\right. \qquad (45')$$

(45)-формула текисликда ихтиёрий жойлашган кучлар системасининг биринчи асосий турдаги аналитик мувозанат шартини ифодалайди. Бу шарт қуйидагича таърифланади: Текисликда ихтиёрий жойлашган кучлар системаси мувозанатда булиши учун кучларнинг x, y укларидаги проекцияларининг йиғиндиси ва ихтиёрий *O* нуқтага нисбатан моментларининг йиғиндиси нолга тенг булиши зарур ва етарлидир.

Кучлар системасининг иккинчи ва учинчи турдаги аналитик мувозанатлик шартлари мавжуд. Иккинчи турдаги мувозанатлик шарти

$\sum m_A(F) = 0 \quad \sum m_B(F) = 0 \quad \sum X = 0$ билан ифодаланади (46)

Текисликда ихтиёрий жойлашган кучлар системаси мувозанатда булиши учун ихтиёрий A ва B нуқталарга нисбатан моментларининг йиғиндиси ва OX уқига нисбатан проекцияларининг йиғиндиси нолга тенг булиши зарур ва етарли шартдир.

Бу холда *A* ва *B* нуқталарни туташтирувчи *AB* тугри чизиқ кесмасини x уқига перпендикуляр булмайдиган қилиб танлаб олиш керак. Акс холда тузилган учта тенгламалардан биттаси қолган иккитасининг натижаси булиб қолади ва иккита тенглама билан учта номаълумни аниқлаб булмайди.

Учинчи турдаги мувозанатлик шарти.

$\sum m_A(F) = 0 \quad \sum m_B(F) = 0 \quad \sum m_C(F) = 0$ билан ифодаланади (47)

Текисликда ихтиёрий жойлашган кучлар системаси мувозанатда булиши учун кучларнинг бир тугри чизиқ устида ётмаган учта A, B, C нуқталарга нисбатан моментларининг йиғиндиси нолга тенг бўлиши зарур ва етарли.

Бу ҳолда момент марказлари A, B ва C нуқталарни бир тўғри чизиқ устида ётмайдиган, яъни учбурчак ҳосил қиладиган, қилиб танлаб олиш керак. Акс ҳолда юқоридаги эслатмага келамиз.

19-§. ТЕКИСЛИКДАГИ ПАРАЛЛЕЛ КУЧЛАРНИНГ МУВОЗАНАТ ШАРТЛАРИ

Бир текисликда жойлашган ва ўзаро параллел бўлган F_1, F_2, F_3, F_4 кучлари берилган бўлсин (57-расм). Кучларга параллел қилиб y ўқини йўналтирамиз. **Параллел кучларга текисликда ихтиёрий йўналган кучларнинг биринчи ва иккинчи турдаги мувозанат шартини татбиқ қиламиз.**

57-расм.

$$\left.\begin{aligned} &\sum Y_k = 0 \\ &\sum m_O(\overline{F}_k) = 0 \end{aligned}\right| \qquad (48)$$

$$\begin{aligned} &\sum m_A(F_k) = 0 \\ &\sum m_B(F_k) = 0 \end{aligned} \qquad (49)$$

бунда A ва B нуқталардан ўтган тўғри чизиқ y ўқига параллел бўлмаслиги керак. (48) - ва (49) - формулалар бир текисликда **жойлашган ва ўзаро параллел бўлган кучларнинг мос равишда биринчи ва иккинчи турдаги мувозанат шартини ифодалайдилар.**

Биринчи турдаги мувозанат шарти қуйидагича таърифланади.

Бир текисликда жойлашган ва бир бирига параллел кучлар системаси мувозанатда бўлиши учун кучларнинг кучларга параллел бўлган ўқдаги проекцияларининг йиғиндиси ва текисликдаги ихтиёрий

O нуқтага нисбатан олинган моментларнинг йиғиндиси нолга тенг бўлиши зарур ва етарлидир.

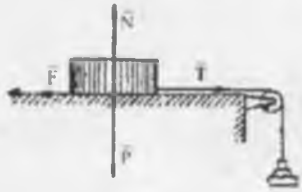
Иккинчи турдаги мувозанат шарти қуйидагича таърифланади.

Бир текисликда жойлашган параллел кучлар мувозанатда бўлиши учун кучларнинг ихтиёрий A ва B нуқталарга нисбатан олинган моментларнинг йиғиндиси нолга тенг бўлиши зарур ва етарлидир.

20-§. СИРПАНИШДАГИ ИШҚАЛАНИШ

Бир жисмнинг иккинчи жисм устида сирпаниши натижасида ҳосил бўладиган ишқаланишга сирпанишдаги ишқаланиш дейилади.

Оғирлиги P га тенг жисм горизонтал столга қўйилган бўлсин (58-расм). Жисмни блок орқали ўтказилган ипга боғлаймиз. Ипнинг иккинчи учига палла осиб қўямиз. Жисм оғирлик кучи P ва столнинг нормал реакция кучи N таъсирида мувозанатда бўлади. Бу кучлар вертикал кучлардан иборат бўлгани учун улар жисмни ҳаракатга келтирмайди. Жисмни ҳаракатга келтириш учун паллага тош қўйиш керак. Лекин жисм паллага маълум миқдорда тош қўйилмагунча ҳаракатланмайди. Чунки стол юзаси ва жисмнинг столга тегиб турган юзаси силлиқ бўлмагани учун ипнинг тортилиш кучи T га миқдор жиҳатдан тенг, йўналиши қарама-қарши бўлган F ишқаланиш кучи ҳосил бўлади. F кучга сирпанишдаги ишқаланиш кучи дейилади. T кучнинг қиймати (яъни паллага қўйиладиган тош) ортга бориб, маълум миқдорга етганда жисм силжиш олдида туради, бу ҳолда ишқаланиш кучи $F=F_{max}$ энг катта (максимал) қийматга эга бўлади.

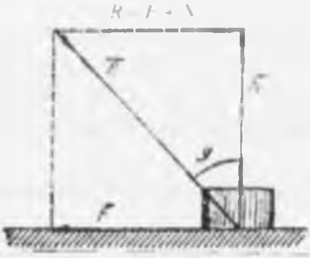


58-расм.

Сирпанишдаги ишқаланиш кучи F нолдан энг катта ишқаланиш кучигача ўзгаради.

$$0 \le F \le F_{max}$$

Шундай қилиб, ғадир-будир текисликнинг тўлиқ реакция кучи миқдор ва йўналиш жиҳатдан нормал реакция кучи ва ишқаланиш кучларига қурилган тугри туртбурчакнинг диагонали билан ифодаланади (59-расм).



59-расм.

Француз олими Ш. Г. Кулон (1736-1806) утказган тажрибаларига асосланиб, сирпанишдаги ишқаланиш қонунларини қуйидагича таърифлаган.

1) Тинч холатдаги максимал ишқаланиш куч нормал реакция кучига пропорционалдир.

$$F_{max}=fN \qquad (50)$$

Бунда: *Fmax* - сирпанишдаги энг катта ишқаланиш кучи; *f* - сирпанишдаги ишқаланиш коэффициенти; *N* - нормал реакция кучи.

2) Ишқаланиш кучи жисмларнинг ишқаланувчи сиртлари улчамларига боглиқ булмайди.

3) Сирпанишдаги ишқаланиш кучи жисмлар материалига ва ишқаланувчи юзаларнинг ишқаланиш даражасига боглиқ булади. Юзалар силлиқ булса ишқаланиш кучи кам булади

(50) дан

$$f=\frac{F_{max}}{N} \quad \text{келиб чиқади} \qquad (51)$$

Яъни сирпанишдаги ишқаланиш коэффициенти улчовсиз катталикдир. Турли материаллар учун ишқаланиш коэффициентининг қийматлари маълумотномаларда келтирилган.

Бир жисм иккинчиси устида харакатланганда хосил буладиган ишқаланиш кучи хам нормал реакция кучига пропорционал булади: $F=f'N$. Бунда f'- жисм харакатлангандаги ишқаланиш коэффициенти булиб, у жисмнинг холатидаги ишқаланиш коэффициенти f дан кичик булади; $f'<f$

Демак, жисм харакатда булганда ишқаланиш кучи тинч тургандагига нисбатан камроқ булар экан.

2-§. ИШҚАЛАНИШ БУРЧАГИ. ИШҚАЛАНИШ КОНУСИ

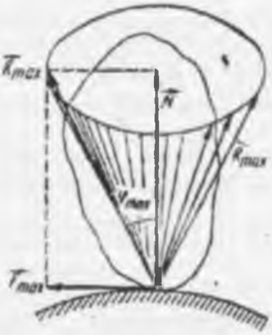
Агар бирор горизонтал текисликка таяниб турган жисм сирпаниш олдида (мувозанат чегарасида) бўлса, ишқаланиш кучи энг катта қийматга эга бўлади (60-расм) ҳамда

$$\bar{R}_{max} = \bar{N} + \bar{F}_{max} \quad \text{бўлади} \quad (52).$$

Максимал тўлиқ реакция кучининг нормал реакция кучи билан ташкил қилган бурчаги ишқаланиш бурчаги дейилади. 72 - расмдан кўриниб турибдики,

$$tg\varphi = \frac{F}{N} = \frac{fN}{N} = f \quad tg\varphi = f \qquad (53)$$

Шундай қилиб, ишқаланиш бурчагининг тангенси ишқаланиш коэффициентига тенг бўлар экан. Сирпанишдаги ишқаланиш коэффициенти f қанча кичик бўлса, ишқаланиш бурчаги шунча кичик бўлади.



60-расм.

Агар $f=0$ бўлса, $\varphi=0$ га тенг бўлади. Бу ҳолда сирпанувчи жисмларнинг юзалари абсолют силлиқ бўлади. Абсолют силлиқ текисликнинг реакция кучи текисликка перпендикуляр йўналади.

Горизонтал дағал текисликда тинч ҳолда ётувчи жисмга текисликка ўтказилган нормал билан α бурчак ташкил этувчига Q куч таъсир этсин (61-расм). Q кучни нормал реакция кучи билан мувозанатлашувчи P ва жисмни силжитишга интилувчи S иккита ташкил этувчига ажратамиз. Уларнинг модули:

$$P=Q\cos\alpha, \qquad S=Q\sin\alpha$$

Бунда δ - думалашдаги ишқаланиш коэффициенти булиб, узунлик бирлиги билан улчанади. Тажрибаларнинг курсатишича, думалашдаги ишқаланиш коэффициенти жисмларнинг материалига, ишқаланувчи сиртларнинг ишланиш даражасига, гилдиракнинг радиусига ва нормал босимга боғлиқ булади. (55) - ва (56) – формулалардан:

$$Q R = \delta N, \tag{57}$$

бундан

$$Q = \frac{\delta}{R} N \quad \text{келиб чиқади} \tag{58}$$

(58)-тенгликдан курамизки (Q,F) ва (P,N) жуфт кучларнинг моментлари узаро тенг булар экан. Бу жуфт кучларга узаро мувозанатлашувчи жуфт кучлар дейилади.

$$F < fN, \quad \frac{\delta}{R} N < fN, \quad \frac{\delta}{R} < f \tag{59}$$

(59)-формуладан курамизки гилдирак сирпанмасдан думалаши учун думалашдаги ишқаланиш кучи сирпанишдаги максимал ишқаланиш кучидан кичик булиши зарур; бунда f сирпанишдаги ишқаланиш коэффициенти. (59) - тенгсизлик бажарилганда гилдирак сирпанмасдан думалайди.

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР.

1. Кушилган жуфт куч деб нимага айтилади ва унинг моменти нимага тенг?
2. Кучлар системасининг бош вектори деб нимага айтилади ҳамда уни қандай аниқлаш мумкин?
3. Бош момент деб нимага айтилади ва у қандай аниқланади?
4. Бош вектор тенг таъсир этувчи кучдан нима билан фарқ қилади?
5. Келтириш маркази узгартирилганда, берилган кучлар системасининг бош вектори ва бош моменти узгарадими?
6. Текисликда ихтиёрий жойлашган кучлар системасини қандай ҳолларда битта кучга ёки битта жуфт кучга келтириш мумкин?
7. Текисликда ихтиёрий жойлашган кучлар системасининг аналитик мувозанат шарти қандай таърифланади?
8. Мувозанат тенгламаларини уч турини ёзинг?
9. Текисликдаги параллел кучлар системасининг мувозанат тенгламаларини ёзинг?
10. Ишқаланиш бурчаги деб нимага айтилади?
11. Ишқаланиш конуси деб нимага айтилади?

12. Ишқаланиш бурчаги билан ишқаланиш коэффициенти орасида қандай боғланиш мавжуд?
13. Ишқаланиш кучи деб нимага айтилади?
14. Думалаб ишқаланиш коэффициенти деб нимага айтилади?
15. Думалаб ишқаланиш моменти нимага тенг?
16. Ишқаланишнинг қандай турларини биласиз?
17. Сирпаниб ишқаланиш кучи қайси формула билан аниқланади?
18. Мувозанат соҳаси нима?
19. Сирпаниб ишқаланиш яхшими ёки думалаб ишқаланиш яхшими ва нима учун?

23-§. ФЕРМА ҲАҚИДА ТУШУНЧА

Тугри чизиқли стерженлардан ташкил топган геометрик узгармас конструкцияга ферма дейилади. Стерженларнинг учларини бирлаштирувчи нуқта тугун дейилади. Стерженлари бир текисликда ётувчи ферма текис ферма дейилади. Фермага таъсир қилувчи кучлар унинг тугунларига қуйилган булади. Тугунларга қуйилган кучлардан ферманинг стерженлари фақат чузилиши ёки сиқилиши мумкин.

Фермалардаги стерженларнинг сони билан тугунлар сони орасида қуйидаги боғланиш мавжуд:

$$m=2n-3$$

Бунда m – фермадаги стерженларнинг сони

n – тугунлар сони

Агар $m<2n-3$ булса, у холда ферма геометрик узгарувчан булади ва $m>2n-3$ булганда геометрик узгармас булиб, у ортиқча стерженларга эга булади. Геометрик узгармас ва статик аниқ ферманн тузиш учун $m=2n-3$ шарти бажарилиши зарур.

Ферма таянчларининг реакцияларини ва фермага қуйилган кучлар таъсиридан унинг стерженларида ҳосил буладиган зурикишларни аниқлаш мумкин. Бу зуриқишларни билиш ферманн лойиҳалаш вақтида керакли мустаҳкамликдаги стерженларни танлаб олиш учун зарурдир. Бу масалани ечишда:

- ферма стерженларининг оғирлиги эътиборга олинмайди;
- тугунлардаги ишқаланиш ҳисобга олинмайди.

Фермага таъсир этувчи кучлар фақат унинг тугунларига қуйилади деб фараз қилинади.

У ҳолда ферманинг ҳар бир стерженига, унинг учларига қуйилган ва стержен буйлаб йуналган икки куч таъсир қилади. Демак, ферманинг стерженлари бу кучлар таъсирида фақат чузилиши ёки сиқилиши мумкин.

Ферма стерженларидаги зуриқишлар асосан қуйидаги усуллар билан аниқланади: *1. Тугунларни ёки стерженларни кесиш усули, 2. Риттер усули; 3. Максвелл - Кремон диаграммасини қуриш усули.*

24-§. ФЕРМА СТЕРЖЕНЛАРИДАГИ ЗУРИҚИШЛАРНИ ТУГУНЛАРНИ КЕСИШ УСУЛИ БИЛАН АНИҚЛАШ

Ферманинг ҳамма стерженларида ҳосил буладиган зуриқишларни аниқлаш учун тугунни кесиш усулидан фойдаланилади. Бу усул билан ферманинг стерженларидаги зуриқишларни график ва аналитик усул билан аниқлаш мумкин. Ферманинг тугун кесиш усули билан аналитик ҳисоблаш тартиби қуйидагичадир.

Берилган ферманинг тугунларини ҳарфлар билан, стерженларини эса рақамлар билан белгилаб чиқилади.

Таянчлар олиб ташланади ва уларнинг фермага берадиган таъсирини ҳозирча бизга номаълум булган таянч реакциялари билан алмаштирилади. Таянч реакция кучлари аниқланади.

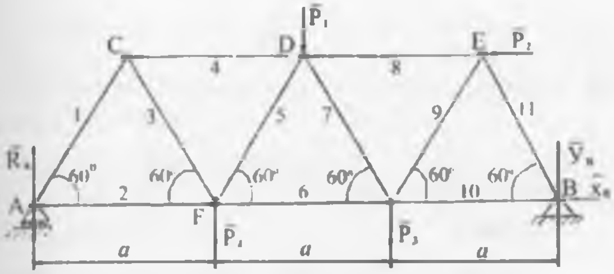
Ферманинг тугунларини кесиб олинади (кесилган тугунлар схемаси чизилади):

Ферманинг ҳамма стерженлари чузилган (зуриқишлар тугунлардан стерженлар томонига йуналган) деб фараз қилиб, ферманинг ҳар бир тугуни учун мувозанат тенгламалари ($\sum X = 0, \sum Y = 0$) тузилади. Тугундан тугунга утиш тартиби текшираётган тугундаги номаълум кучлар сони иккитадан куп булмаслиги керак, деган талабни қондириши лозим.

Бу мувозанат тенгламалари ечилади ва стерженлардаги изланаётган зуриқишларнинг катталиги ҳамда ишораси аниқланади.

<u>Мисол.</u> Ферманинг таянч реакциялари ва стерженларида пайдо буладиган зуриқиш кучлар аниқлансин (63-расм). Қуйидагилар берилган:

$$a=5м;\ P_1=10кН,\ P_2=20кН,\ P_3=30кН,\ P_4=40кН.$$



63-расм.

<u>Ечиш.</u> 1) Таянч реакцияларни аниқлаш.

Фермага берилган кучлар, $\overline{P_1}, \overline{P_2}, \overline{P_3}, \overline{P_4}$ В қўзғалмас таянч $\overline{X_B}$ ва $\overline{Y_B}$ реакциялари, А қўзғалувчан таянчнинг $\overline{R_A}$ реакцияси қўйилган. Бу кучлар текисликда ихтиёрий равишда жойлашган кучлар бўлгани учун уларнинг мувозанат шарти қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$\sum X = 0; X_B - P_2 = 0 \qquad X_B = P_2 = 20кМ$$

$$\sum Y = 0; R_A - P_1 - P_3 - P_4 + Y_B = 0;$$

$$\sum M_A = 0; -P_4 \cdot a - P_1 \cdot \frac{3}{2}a - P_3 \cdot 2a + P_2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a + Y_B \cdot 3a = 0$$

Тузилган тенгламаларни ечиб реакция кучларини аниқланади:

$$Y_B = \frac{P_4 + P_1 \cdot \frac{3}{2} + P_3 \cdot 2 - P_2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{3} = \frac{40 + 10 \cdot \frac{3}{2} + 30 \cdot 2 - 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{3} = 32{,}56\,кН$$

$$R_A = P_1 + P_3 + P_4 - Y_B = 10 + 30 + 40 - 32{,}56 = 47{,}44\,кН$$

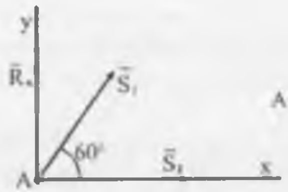
2) Стерженларда ҳосил бўладиган зўриқиш кучларини аниқлаш. Ферманинг тугунларини $A, B, C, Д, E$ ва F ҳарфлар билан белгиланади. Энг олдин A ёки B тугунларини кесиш мумкин. Чунки бу тугунларда реакциялари аниқланмаган икки стержен (1,2 ёки 10 ва II стерженлар) бор. A тугуни кесилади. A тугунга A шарнирнинг $\overline{R_A}$ реакцияси ва кесилган 1 ва 2 - стерженнинг $\overline{S_1}$ ва $\overline{S_2}$ реакциялари қўйилган (64- расм). A тугунга қўйилган кесишувчи кучларнинг мувозанат тенгламалари тузилади:

$$\sum X = 0; S_2 + S_1 \cos 60^0 = 0$$

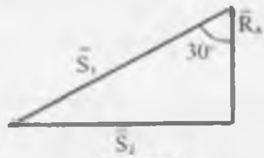
$$\sum Y = 0; R_A + S_1 \sin 60^0 = 0$$

$$S_1 = -\frac{R_A}{\sin 60^0} = 2 \cdot \frac{47.44}{\sqrt{3}} = -54.78кН$$

$$S_2 = -S_1 \cos 60^0 = -(-54.78) \cdot 0.5 = 27.39кН$$



64-расм.



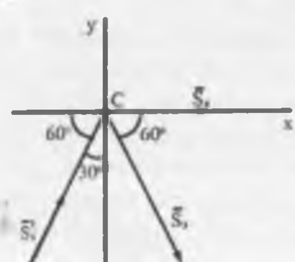
65-расм.

S_1 кучидаги (-) ишора, $\overline{S_1}$ реакция кучи расмда кўрсатилган йўналишга тескари қараб йўналганлигини кўрсатади, яъни 1 – стержен сиқилади. Энди реакция кучларининг йўналишларини тўғри топилганини куч учбурчагини ясаб текшириб қўйилади, бу учбурчак ёпиқ бўлиши керак (65-расм).

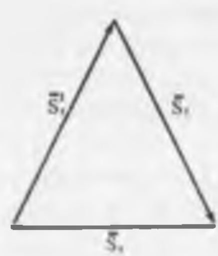
3) Энди қайси тугунга ўтамиз деган савол туғилади. Кесиладиган тугунлар реакцияси аниқланмаган икки стержен бўлиши керак, бу *C* тугундир. *C* тугун кесилади, унга 1 – стерженнинг ҳозиргина аниқланган $\overline{S_1^1}$ = - $\overline{S_1}$ реакцияси, кесилган 3 - ва 4 - стерженларнинг $\overline{S_3}$ ва $\overline{S_4}$ реакциялари қўйилган (66- расм).

C тугунга қўйилган кесишувчи кучларнинг мувозанат тенгламалари тузилади:

$$\begin{cases} \sum X = 0; S_4 + S_3 \cos 60^0 + S_1^1 \cos 60^0 = 0 \\ \sum Y = 0; S_3 \cos 30^0 + S_1^1 \cos 30^0 = 0 \end{cases}$$



66-расм.



67-расм.

Бу тенгламаларни ечиб, 3 - ва 4 -стерженлардаги реакция кучларни аниқлаймиз.

$$\begin{cases} S_3 = S_1^1 = 54.78кН; S_4 = -S_3 \cos 60^0 - S_1^1 \cos 60^0 = -(S_3 + S_1^1) \cos 60^0 \\ S_4 = -(54.78 + 54.78) \cdot 0.5 = -54.78кН; S_4 = -54.78кН \end{cases}$$

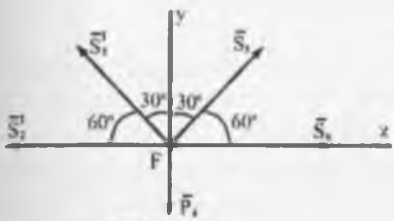
4 – стерженнинг реакцияси манфий булиб чикди. Демак бу стержен сикилади, яъни S_4 куч C тугунга караб йуналган булади. Энди C тугунга қуйилган кучларнинг хакикий йуналишини хисобга олиб, куч учбурчаги ясалади (67 -расм). У ёпик булиши керак.

4) Энди F тугун кесилади, унга берилган P_4 $\overline{S_2^1}, \overline{S_3^1}$ реакция кучлари ва кесилган 5 - ва 6 - стерженнинг $\overline{S_5}$ ва $\overline{S_6}$ реакциялари қуйилган (68-расм).

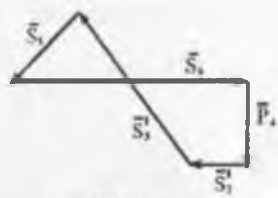
Бу кучлар учун мувозанат тенгламалари тузилади:

$$\sum X = 0: S_6 - S_2^1 + S_5 \cos 60^\circ - S_3^1 \cos 60^\circ = 0$$

$$\sum Y = 0: S_3^1 \cos 30^\circ + S_5 \cos 30^\circ - P_4 = 0;$$



68-расм.



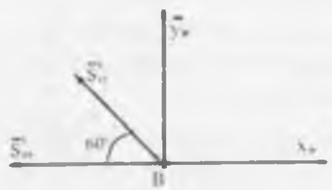
69-расм.

Бу тенгламаларни ечиб, 5- ва 6-стерженлардаги реакция кучлари топилади.

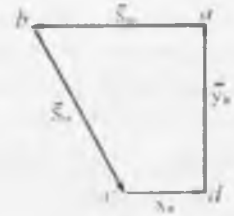
$$\begin{cases} S_5 \cos 30^\circ = P_4 - S_3^1 \cos 30^\circ; S_5 = \dfrac{P_4}{\cos 30^\circ} - S_3^1 = \dfrac{2 \cdot 40}{\sqrt{3}} - 54{,}78kH \\ S_5 = \dfrac{80}{1{,}73} - 54{,}78 = 46{,}24 - 54{,}78 = -8{,}57KH \; S_5 = -8{,}54кH \\ S_6 = S_2^1 - S_5 \cos 60^\circ + S_3^1 \cos^\circ = S_2^1 + (S_3^1 - S_5) \cdot \cos 60^\circ; \\ S_6 = 27{,}39 + (54{,}78 + 8{,}54) \cdot 0{,}5 = 27{,}39 + 63{,}32 \cdot 0{,}5; \\ S_6 = 31{,}66 + 27{,}39 = 59{,}05KH; S_6 = 59{,}05кH \end{cases}$$

F тугунга қуйилган кучларнинг ҳақиқий йуналишини ҳисобга олиб, куч куп бурчаги ясалади (70-расм).

5) Энди B тугунни кесилади. Унга берилган $\overline{X_B}$ ва $\overline{Y_B}$ реакция кучлари ва кесилган 10 - ва 11 - стерженларнинг $\overline{S_{10}}$ ва $\overline{S_{11}}$ реакция кучлари таъсир қилади (71-расм). B тугун учун иккита мувозанат тенгламаси тузилади:



71-расм.



72-расм.

$$\sum X = 0;\ X_B - S_{10} - S_{11}\cos 60^0 = 0$$

$$\sum Y = 0;\ Y_B + S_{11}\cos 30^0 = 0;$$

Бу тенгламалардан:

$$S_{11} = -\frac{Y_B}{\cos 30^0} = -\frac{2\cdot Y_B}{\sqrt{3}}$$

$$S_{11} = -\frac{2\cdot 32{,}56}{1{,}73} = -37.64KH$$

$S_{11} = -37{,}64KH$ келиб чиқади.

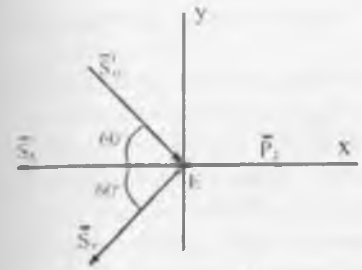
Демак, 11 - стержен сиқилади.

$$S_{10} = X_B - S_{11}\cos 60^0 = 20 + 37{,}64\cdot 0{,}5$$

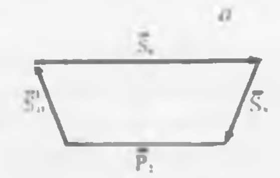
$$S_{10} = 20 + 18.82 = 38.82KH\ \ S_{10} = 38.82KH$$

$\overline{S_{10}}$ ва $\overline{S_{11}}$ реакция кучларини график усулда аниқланади. Бунинг учун B тугунга қўйилган кучлардан куч кўпбурчаки қурилади (72-расм). Бу кўпбурчак ёпиқ бўлиши керак, чунки B тугунга кучлар системаси мувозанатда турибди. Ихтиёрий нуқта олиб, бу нуқтага ўзига параллел қилиб *М=10 кн/м* масштабда $\overline{X_B}$ куч келтириб қўйилади. Унинг учига ўзиа параллел қилиб худди шу масштабда $\overline{Y_B}$ кучи келтирилади. Бу куч учига ўзига параллел қилиб $\overline{S_{10}}$ кучни, унинг учига ўзига параллел қилиб $\overline{S_{11}}$ куч келтирилади. Натижада куч кўпбурчаги ҳосил бўлади (72-расм).

б) Энди E тугуни кесилади. Бу тугунга берилган $\overline{P_2}$ куч ҳамда 8-, 9- ва 11-стерженларнинг реакция кучлари қўйилган (73-расм, а). Бунда E тугунга қўйилган 11-стерженнинг реакция кучи S_{11} миқдор жиҳатдан S_{21} га тенг ва унга қарама–қарши йўналганлигини эътиборга олиш лозим. E тугун учун иккита мувозанат тенгламалари тузилади:



a)



b)

73-расм.

$$\begin{cases}\sum X = 0,\ -P_2 - S_8 - S_9\cos 60^0 + S_{11}\cos 60^0 = 0\\ \sum Y = 0,\ -S_{11}^{|}\cos 30^0 - S_9\cos 30^0 = 0;\end{cases}$$

Бу тенгламаларни ечиб:

$$S_8 = -P_2 - S_9\cos 60^0 + S_{11}\cos 60^0 = -20 - 37{,}6\cdot 0{,}5 + 37{,}6\cdot 0{,}5 = 38{,}8 + 18{,}8 = -20KH$$

$S_9 = S_{11}^{|} = 37{,}64KH$ $S_8 = -20KH$ олинади.

E тугун учун куч кўпбурчаги (73- расм, b).

Энди D тугунни кесилади. Бу тугун берилган $\overline{P_1}$ куч ҳамда 4-, 5-, 6-, 7-, ва 8-стерженларнинг реакция кучлари қўйилган (74-расм). Мувозанат тенгламаларини тузишда 4-, 5-, ва 8 - стерженларнинг реакция кучлари $\overline{S_4^{|}}, \overline{S_5^{|}}$ ва $\overline{S_8^{|}}C, F$ ва E тугунларга қўйилган $\overline{S_4}, \overline{S_5}$ ва $\overline{S_8}$ реакцияси кучларга миқдор жиҳатдан тенг, йўналиши қарама-қарши эканлигини эътиборга олиш лозим. $Д$ тугун учун бутта мувозанат тенгламасини тузиш кифоя, битта номаълум стерженнинг зўриқишини аниқлаш қолди холос. 7-стержендаги реакция кучи аниқланади:

$$\begin{cases}\sum Y = 0; -P_1 + S_5^{|}\cos 30^0 - S_7\cos 30^0 = 0\\ S_7\cos 30^0 = -P_1 + S_5^{|}\cos 30^0\\ S_7 = -\dfrac{P_1}{\cos 30^0} + S_5^{|} = -\dfrac{2\cdot P_1}{\sqrt{3}} + S_5^{|}\\ S_7 = -\dfrac{2\cdot 10}{1{,}73} + 8{,}54 = -1156 + 8{,}54 = -3{,}02\\ S_7 = -3{,}02KH.\end{cases}$$

74-расм.

Демак, 7 - стержен сиқилади.

Стержендаги зўриқиш миқдор жиҳатдан унга реакция кучига тенг булади. Сиқиладиган стержендаги зўриқиш кучи шартли равишда манфий ишора билан белгиланади. Олинган натижалар қуйидаги жадвалда келтирилган:

Стержень рақами	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11
Зўриқиш, кН ҳисобида	-54,78	-27,39	54,78	-54,78	-8,54	59,05	-3,02	-20	-37,84	38,82	-37,64

25-§. ФЕРМА СТЕРЖЕНЛАРИДАГИ ЗЎРИҚИШЛАРНИ РИТТЕР УСУЛИ БИЛАН АНИҚЛАШ

Агар текис ферманинг барча стержинларидаги зўриқишларни аниқлаш зарур бўлса тугунни кесиш усулидан фойдаланиш энг қулай ҳисобланади. Лекин ферманинг айрим стержинларидаги зўриқишларни аниқлаш лозим бўлса, у ҳолда Риттер 1826-1906 томонидан кашф қилинган ва унинг номи билан аталадиган усулдан фойдаланиш мақсадга мувофиқдир. Бу усулда ҳам дастлаб ферманинг таянч реакциялари аниқланади.

Риттер усулининг моҳияти шундан иборатки, ферма бирор I-I кесим билан қирқиб икки қисмга ажратилади ва ажратилган қисмнинг мувозанати текширилади. Текисликда ихтиёрий жойлашган кучлар системасининг мувозанат тенгламалари ёрдамида учта номаълум катталикни аниқлаш мумкин. Шу сабабли фермани шундай кесим

билан кесиш керакки, реакция кучлари номаълум булган стерженлар сони учтадан ошмасин.

Ферманинг кесилган бир қисмини ташлаб юбориб қуйиб, унинг ферманинг иккинчи қисмига курсатадиган таъсирини кесилган стерженлар буйлаб ташлаб қуйилган томонга йуналган кучлар билан алмаштирамиз, яъни барча кесилган стерженлар чузилади деб фараз қиламиз. Тузилган мувозанат тенгламаси ечилганда бирорта стерженнинг реакция кучи манфий ишорали чиқса, унинг йуналиши қабул қилинган йуналишга қарама-қарши булиб, мазкур стержен аслида сиқилади. Ферманинг қолган қисми учун текисликда ихтиёрий жойлашган кучлар системасининг мувозанат тенгламалари тузилиб ва бу тенгламаларни ечиб, стерженларнинг номаълум реакция кучлари аниқланади. Тенгламалар тузишда имкони борича ҳар бир тенгламада номаълумлар сони биттадан ошмаслигига ҳаракат қилиш керак. Тенгламаларни тузишда момент маркази учун учта номаълум реакция кучидан кетма – кет иккитасининг таъсир чизиғи кесишган нуқтани олиш тавсия этилади. Бундай нуқталар момент ёки **Риттер** нуқталари деб аталади. Агар реакция кучи аниқланадиган учта стерженлан иккитаси параллел булса, демак уларнинг кесишиш нуқтаси чексизликда ётади, моментлар тенгламасидан бирининг урнига кучларнинг параллел стерженларга перпендикуляр уққа проекцияси тенгламасини тузиш мумкин, яъни $\sum Y = 0$ ёки $\sum X = 0$.

Риттер усулининг афзаллиги шундаки, у ферманинг исталган стерженидаги зуриқишни бошқа стерженлардаги зуриқишларни ҳисобламай туриб аниқлашга имкон беради. Унинг соддалиги шундаки, баён қилинган усулда тузилган ҳар бир тенгламага фақат битта номаълум киради.

Риттер усули билан 1 – масалада берилган ферманинг 2-, 3-, 4-, 6-, 7- ва 8-стреженларидаги зуриқишларни аниқлаймиз. Юқорида курганимиздек, фермага $P_1 = 10\ kH$, $P_2 = 20\ kH$, $P_3 = 30\ kH$, $P_4 = 40\ kH$ кучлар таъсир этади ва унинг таянч реакциялари $R_A = 47{,}44\ кН$, $X_B = 20\ кН$, $Y_B = 32{,}56\ кН$ га тенг.

2-, 3- ва 4 - стерженлардаги зуриқишни топиш учун ферманинг 2-, 3- ва 4-стерженларини I-I кесим билан кесилади. Ферманинг унг томони ташлаб юборилиб қуйилади, қолдирилган қисмнинг чап қисмига берадиган таъсирни мос стерженлар буйлаб йуналган $\overline{S}_2, \overline{S}_3$ *ва* $\overline{S}_4$ зуриқиш

Исбот: Фазодаги бирор A нуқтага кучи қўйилган бўлсин (79 расм).

Бу кучни O нуқтага нисбатан моменти шу нуқтага қўйилган вектор катталик бўлиб, ОАВ учбурчак текислигига перпендикуляр йўналган, унинг модули қуйидаги формула билан топилади;

$$M_0 = 2\,S_{\Delta OAB}\ \text{юзи} \qquad (63)$$

Момент векторининг z ўқи билан ташкил қилган бурчагини γ билан белгиласак момент векторининг z ўқидаги проекцияси қуйидагича ифодаланади.

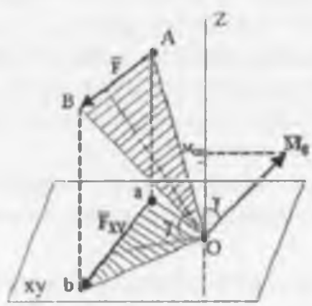
$$\left[\overline{M}_0(\overline{F})\right]_z = \left[M_0(\overline{F})\right]\cos\gamma = 2S_{\Delta OAB}\cdot\cos\gamma \qquad (64)$$

ОАВ ва оав учбурчакларининг текисликлари орасидаги бурчак бу текисликларга перпендикуляр йўналган вектор ва ўқ орасидаги γ бурчакка тенг. ОАВ учбурчакнинг xy текисликдаги проекцияси оав га тенг бўлганлиги учун

$$2S_{\Delta OAB}\cdot\cos\gamma = 2S_{\Delta oab} \qquad (65)$$

У холда

$$\left[\overline{M}_0(\overline{F})\right]_z = M_0\cos\alpha \qquad (66)$$



79-расм.

79-расмда $F_{xy}\cdot h = 2S_{\Delta oab}$ бўлганлиги учун (60) га асосан

$$M_z(\overline{F}) = \pm 2S_{\Delta oab} \qquad (67)$$

(66) ва (67) ни солиштириб қуйидаги олинади.

$$M_z(\overline{F}) = \left[\overline{M}_0(\overline{F})\right]_z \qquad (67')$$

Худди шунингдек кучнинг қолган координата ўқларга нисбатан моментлари ҳисобланади. Натижада

$$M_x(\overline{F}) = \left[\overline{M}_0(\overline{F})\right]_x, \quad M_y(\overline{F}) = \left[\overline{M}_0(\overline{F})\right]_y, \quad M_z(\overline{F}) = \left[\overline{M}_0(\overline{F})\right]_z,$$

формула келиб чиқади.

Демак (67') – формула нуқтага нисбатан куч моменти билан шу нуқтадан ўтган ўққа нисбатан куч моменти орасидаги муносабатни ифодалайди: Нуқтага нисбатан куч моментининг шу нуқтадан ўтган ўқдаги проекцияси кучнинг шу ўққа нисбатан олинган моментига тенг.

28-§. КООРДИНАТА ЎҚЛАРИГА НИСБАТАН КУЧ МОМЕНТИНИ ҲИСОБЛАШ УЧУН ФОРМУЛАЛАР

F кучнинг координата ўқларидаги проекциялари Fx, Fy, Fz ва шу куч қўйилган A нуқтанинг x,y,z координаталари берилган бўлсин (80-расм). Координата бошини O нуқтада олиб x, y, z ўқларини ўтказамиз. Координата ўқларини бирлик векторини i,j,k билан белгилаймиз.

$$\bar{M}_0(\bar{F}) = \bar{r} \times \bar{F}$$ ни

дитерминанд шаклида ёзамиз.

$$\bar{M}_0(\bar{F}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix}$$

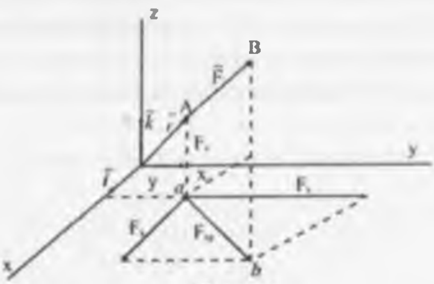
Дитерминантнинг биринчи йўлини элементлари бўйича ёйиб чиқамиз.

$$\bar{M}_0(\bar{F}) = (yZ - zY)\cdot\bar{i} + (xZ - zX)\cdot\bar{j} + (xY - yX)\cdot\bar{k} \qquad (68)$$

(68) - формулада бирлик векторлар олдидаги коэффициентлар кучнинг координата ўқларидаги моменти бўлади.

$$m_x(F) = yFz - zFy$$
$$m_y(F) = zFx - xFz \qquad (68')$$
$$m_z(F) = xFy - yFx$$

(68')-формулалар кучнинг координата ўқларига нисбатан моментларининг аналитик ифодасидир.



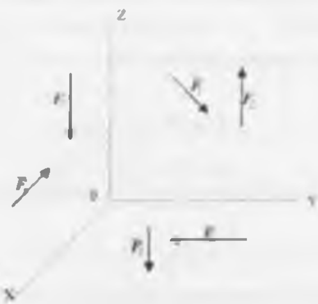
80-расм.

29-§. ФАЗОДА ИХТИЁРИЙ ЖОЙЛАШГАН КУЧЛАР СИСТЕМАСИНИ БЕРИЛГАН МАРКАЗГА КЕЛТИРИШ. КУЧЛАР СИСТЕМАСИНИНГ БОШ ВЕКТОРИ ВА БОШ МОМЕНТИ

Фазода ихтиёрий жойлашган $\bar F_1, \bar F_2, ..., \bar F_n$ кучлар системаси берилган булсин (81-расм). Шу кучларни 0 нуктага келтириш лозим булсин. Фазода ихтиёрий жойлашган кучларни текисликда ихтиёрий жойлашган кучларга ухшаш бош вектор $\bar R$ га тенг булган битта кучга ва моменти бош момент $\bar M_O$ га тенг булган битта жуфт кучга келтириш мумкин. Бош вектор берилган кучларнинг геометрик йиғиндисига тенг.

$$\bar R = \bar F_1 + \bar F_2 + \bar F_3 + \bar F_4 + ... + \bar F_n = \sum \bar F$$

$$\bar R = \sum \bar F \qquad (69)$$



81-расм.

Бош момент эса келтирилиши керак булган кучларнинг келтириш марказига нисбатан олинган моментларнинг геометрик йиғиндисига тенг.

$$\bar M_O = \bar m_O(\bar F_1) + \bar m_O(\bar F_2) + ... + \bar m_O(\bar F_n) = \sum \bar m_O(\bar F)$$

$$\bar M_O = \sum \bar m_O(\bar F) \qquad (70)$$

Шундай қилиб; фазода ихтиёрий жойлашган кучлар системасини бирор 0 марказга келтириш натижасида бу кучлар системаси келтириш марказига қўйилган бош вектор $\bar R$ га тенг битта куч билан, момент эса бош момент $\bar M_O$ га тенг битта жуфт кучга келтирилади (82-расм).

82-расм.

30-§. ФАЗОДА ИХТИЁРИЙ ЖОЙЛАШГАН КУЧЛАР СИСТЕМАСИНИНГ БОШ ВЕКТОРИ ВА БОШ МОМЕНТИНИ ҲИСОБЛАШ

1. Бош векторни ҳисоблаймиз. Бунинг учун (69) вектор тенгламанинг иккала қисмини координата ўқларига проекциялаймиз.

$$R_x = X_1 + X_2 + \ldots + X_n = \sum X$$
$$R_y = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n = \sum Y \qquad (71)$$
$$R_z = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n = \sum Z$$

(71)-формула билан бош векторнинг координата ўқларидаги проекциялари топилади.

Бош векторнинг модули қуйидаги формулалар билан топилади.

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \quad \text{ёки}$$
$$R = \sqrt{\left(\sum X\right)^2 + \left(\sum Y\right)^2 + \left(\sum Z\right)^2} \qquad (72)$$

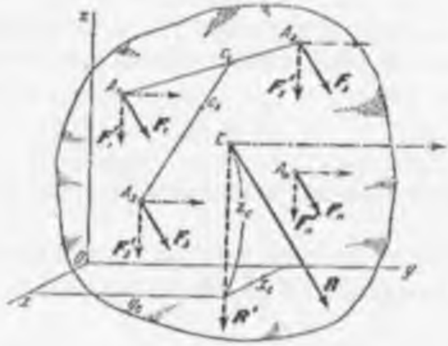
Бош векторнинг йўналиши эса қуйидаги формула билан аниқланади.

$$\cos\alpha = \frac{R_x}{R}; \quad \cos\beta = \frac{R_y}{R}; \quad \cos\gamma = \frac{R_z}{R} \qquad (73)$$

бунда, α, β, γ, - $\bar{R}$ - билан *x, y, z* ўқлари орасидаги бурчаклар.

2. Бош моментни ҳисоблаш.

Бунинг учун вектор тенгламанинг икки қисмини координата ўқларига проекциялаймиз ва нуқтага нисбатан куч моменти билан шу нуқтадан ўтган ўққа нисбатан куч моменти орасидаги муносабатдан фойдаланиб бош моментнинг координата ўқларидаги проекцияларини аниқлаймиз.



85-расм.

Бу микдорларнинг ҳаммаси (82) тенгликга қуйилса,

$R \cdot X_c = F_1X_1 + F_2X_2 + ... + F_nX_n$ булади.

Буидан Xc яъни параллел кучлар марказининг абсциссаси аниқланади:

$$X_c = \frac{F_1X_1 + F_2X_2 + ... + F_nX_n}{R} = \frac{\sum F_kX_k}{R}$$

(83)

y_c координатани аниқлаш учун кучлардан x ўқига нисбатан моментлар олинади:

$$R \cdot Y_c = F_1Y_1 + F_2Y_2 + ... + F_nY_n$$

$$Y_c = \frac{F_1Y_1 + F_2Y_2 + ... + F_nY_n}{R} = \frac{\sum F_kY_k}{R}; \qquad (84)$$

z_c координатани аниқлаш учун ҳамма кучларни қўйилган нуқталари атрофида Y ўқига параллел булганча бурамиз ва бу кучларга (нукта билан пунктир қилиб тасвирланган) Варинъон теоремасини тадбик этиб, улардан X ўқга нисбатан моментлар олинади:

$$-R \cdot Z_c = -F_1Z_1 + (-F_2Z_2) + ... + (-F_nZ_n) \qquad (85)$$

бундан Zc аниқланади.

$$Z_c = \frac{F_1Z_1 + F_2Z_2 + ... + F_nZ_n}{R} = \frac{\sum F_kZ_k}{R} \qquad (86)$$

(84) - (86) - формулалар билан параллел кучлар марказини координаталари топилади, бунда R - (85) тенглик билан аниқланади.

(85) - (86) - формулаларнинг ҳар бирини мос равишда $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, бирлик векторларига купайтириб ва қушиб, параллел кучлар марказининг радиус – вектори аниқланади:

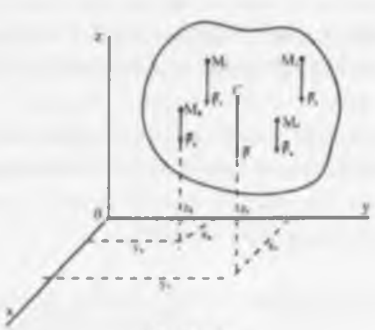
$$\bar{r}_c = X_c \bar{i} + y_c \bar{j} + Z_c \bar{K} \quad \bar{r}_c = \frac{F_1 r_1 + F_2 r_2 + \dots + F_n r_n}{R} = \frac{\sum F_k r_k}{R} \quad k = 1,n \qquad (87)$$

(84) - (87) - формулалардан куринадики, параллел кучларнинг тенг таъсир этувчиси куйилган С нуктанинг холати кучларнинг йуналишига боглик булмай, уларнинг микдори ва куйилган нукталарининг координаталарига богликдир. Шунга асосан, агар кучлар қўйилган нукталарини узгартирмай, барча кучлар бирор α бурчакка бурилса, бу кучларнинг тенг таъсир этувчиси хам шу бурчакка бурилиб қуйилган нуктасининг холати узгармайди

34-§. ҚАТТИҚ ЖИСМНИНГ ОҒИРЛИК МАРКАЗИ КООРДИНАТАЛАРИНИНГ УМУМИЙ ФОРМУЛАЛАРИ

Бирор қаттиқ жисмнинг ҳар бир бўлагига ернинг марказига қараб йуналган тортиш кучи (оғирлик кучи) таъсир этади. Бу кучларни $\overline{P_1}, \overline{P_2}, \dots \overline{P_n}$ билан белгиланади. Ернинг радиусига нисбатан жисмнинг ўлчамлари жуда кичик бўлгани учун бу кучларни параллел кучлар деб қараш мумкин. Бу параллел кучларнинг маркази – *С* нуқта жисмнинг оғирлик маркази бўлади (86-расм).

Агар (86)-(87)- формулалардаги $\overline{F_K}$ кучларнинг ўрнига $\overline{P_k}$ кучларни олинса, жисмнинг оғирлик маркази координаталари топилади:



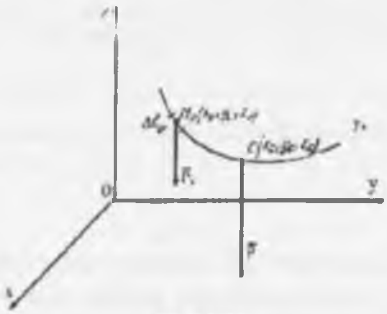
86-расм.

$$\left.\begin{aligned} X_c &= \frac{1}{P} \cdot \sum p_k x_k \\ Y_c &= \frac{1}{P} \cdot \sum p_k y_k \\ Z_c &= \frac{1}{P} \cdot \sum p_k z_k \end{aligned}\right| \qquad (88)$$

оғирлик марказининг координаталари x_k, y_k, z_k билан белгиланади P ва P_k нинг қийматлари (88)-формулаларга қуйилади:

$$x = \frac{\sum pl_k x_k}{pL} = \frac{p \cdot \sum l_k x_k}{pL}$$

(92)



88-расм.

$$\left. \begin{aligned} x_c &= \frac{1}{L} \cdot \sum l_k x_k, \\ y_c &= \frac{1}{L} \cdot \sum l_k y_k, \\ z_c &= \frac{1}{L} \cdot \sum l_k z_c \end{aligned} \right| \qquad (93)$$

Бу ерда L - бутун чизиқнинг узунлиги, Координаталари (93)-формулалар билан аниқланадиган C нуқтага чизиқнинг оғирлик маркази дейилади.

37-§. ЖИСМЛАРНИНГ ОҒИРЛИК МАРКАЗИНИ АНИҚЛАШ УСУЛЛАРИ

1) <u>Симметрия усули.</u> 1-теорема: Агар жисм симметрия ўқига эга бўлса, жисмнинг оғирлик маркази шу симметрия ўқида ётади. Симметрия ўқига эга бўлган жисм берилган бўлсин (88-расм). Координата ўқларининг бирини мисол учун z ўқини симметрия ўқи бўйича йўналтирилади. Жисм оғирлик марказининг икки координатаси (94)-формулалар билан аниқланади;

$$x_c = \frac{\sum \upsilon_k x_k}{V}; y_c = \frac{\sum \upsilon_k y_k}{V} \qquad (94)$$

Бу жисмдан z ўқига нисбатан симметрик жойлашган икки M_k ва M_k^1 нуқталар олинади. Уларнинг атрофидан бир - бирига тенг бўлган V_k

элементар ҳажм ажратиб олинади. M_k ва M'_k нуқталар ўқига перпендикуляр бўлган битта тўғри чизиқда ётибди ва бу нуқталардан ўқигача бўлган масофалар тенг;

$$M_k N_k = N_k M'_k .$$

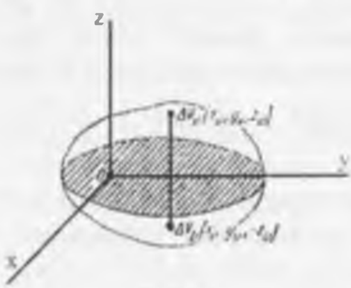
Демак, бу нуқталарнинг x_k ва y_k координаталари ўзаро тенг, ишоралари эса тескари бўлади. У ҳолда ҳар бир x_k, y_k, z_k координаталар билан аниқланадиган V_k ҳажмли бўлакчага мос келади. Шу сабабли $\sum V_k\, x_k = 0$ ва $\sum V_k\, y_k = 0$ тенг бўлади. $\sum V_k\, x_k = V_1 X_1 + V_2 X_2 + \ldots\ldots + V_N X_N - V_1 X_1 - V_2 X_2 - \ldots\ldots - V_N X_N = 0$ шунинг учун $x_c = 0$ ва $y_c = 0$ жисмнинг оғирлик маркази z ўқида ётади ва унинг бу ўқдаги ҳолати битта координата билан аниқланади:

$$z_c = \frac{1}{V} \sum V_K\, z_K \qquad (94')$$

2–теорема: Агар жисм симметрия текислигига эга бўлса, жисмнинг оғирлик маркази шу симметрия текислигида ётади (89-расм). Буни исбот қилиш учун симметрия текислиги орқали *Oxy* теклсик ўтказилади. Бу текисликка перпендикуляр қилиб z ўқини йўналтирилади. Жисмдан *Oxy* текислигига нисбатан симметрик жойлашган икки M_k ва M_{k1} нуқталар олинади. Бу нуқталарнинг атрофидан υ_k элементар ҳажмларни ажратиб оламиз. M_k ва M_{k1} нуқталар Oxy текислигига перпендикуляр бўлган битта тўғри чизиқда ётибди. Бу нуқталардан симметрия текислигигача бўлган масофалар ўзаро тенг, яъни $M_k N_k = M_k^1 N_k$ (89-расм). Демак, бу нуқталарнинг Z_k координаталари ўзаро тенг бўлиб, ишоралари тескаридир.

$$\sum \upsilon_k Z_k = \upsilon_1 Z_1 + \upsilon_2 Z_2 + \ldots + \upsilon_n Z_n - \upsilon_1 Z_1 - \upsilon_2 Z_2 - \ldots - \upsilon_n Z_n = 0$$

$$Z_c = \frac{1}{V} \cdot \sum \upsilon_k Z_k = 0,\; X_c = \frac{1}{V} \cdot \sum \upsilon_k X_k ,\; Y_c = \frac{1}{V} \cdot \sum \upsilon_k Y_k \qquad (95)$$



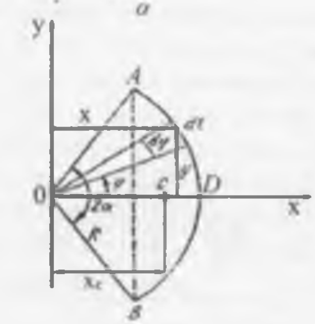
89-расм.

$$X_c = \frac{1}{L}\int_A^B X dl = \frac{1}{L}\int_{-\alpha}^{\alpha} R\cos\gamma \cdot R d\gamma = \frac{R^2}{L}\int_{-\alpha}^{\alpha} R\cos\gamma \; d\gamma = \frac{R^2}{L}\cdot \sin\gamma\Big|_{-L}^{L} = \frac{R^2}{L}\cdot[\sin\alpha - \sin(-\alpha)]$$

$$X_c = \frac{R^2}{L}\cdot[\sin\alpha + \sin\alpha] = \frac{R^2}{L}\, 2\sin\alpha = \frac{2R^2}{L}\sin\alpha$$

Бунда $L - AB$ ёйининг узунлиги $L = R \cdot 2\alpha$ га тенг. Демак, айлана ёйининг огирлик маркази симметрия ўқида, ётади ва айлана марказидан масофада бўлади. Бунда α бурчаги радианда ўлчанади.

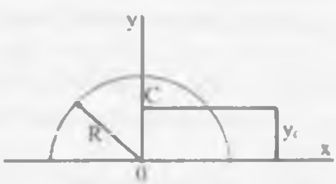
$$X_c = R\,\frac{\sin\alpha}{\alpha} \qquad (101)$$



91-расм.

Агар 2α = π га тенг бўлса, ярим Айлана ҳосил бўлади (92-расм). Буни (99)-формулага қўйсак,

$$y_c = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}\cdot R = \frac{2}{3.14}\cdot R = 0.64R. \quad y_c = 0.64R$$



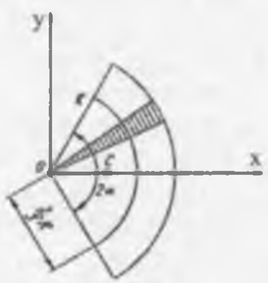
92-расм.

(101)-формула билан ярим айлана ёйининг оғирлик марказининг координатаси топилади.

3. Доира сектори юзасининг огирлик маркази. Радиуси R, марказий бурчаги 2α га тенг доира сектори юзаси огирлик марказини аниклаш учун x уқни сектор юзасининг симметрия уқи буйлаб йуналтирилади (93-расм).

Сектор юзасининг бир қанча элементар секторлардан ташкил топган деб қаралади. Ҳар бир элементар секторнинг баландлиги R га тенг учбурчак деб қаралса, унинг огирлик маркази 0 нуктадан $\frac{2}{3}R$ масофада ётади. OAB Доира секторининг огирлик маркази радиуси $\frac{2}{3}R$ га тенг AE айлана ёйининг огирлик маркази билан устма-уст тушади. (101) га асосан

$$x_c = \frac{2}{3}R\frac{R\sin\alpha}{\alpha} \qquad (101)$$



93-расм.

Агар $\alpha = \frac{\pi}{2}$ га тенг булса ярим доира хосил булади. (101)-формуладан ярим доира огирлик марказининг координатаси аникланади.

$$x_c = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}\cdot R = \frac{4}{3\pi}\cdot R = \frac{4}{3\cdot 3.14}\cdot R = 0.42R \qquad (102)$$

$x_c=0,64R \quad (y_c=0).$

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР.

1. Укга нисбатан куч моменти деб нимага айтилади? Бу моментнинг ишораси қандай танланади?
2. Қандай холларда укга нисбатан куч моменти нолга тенг булади?
3. Нуктага нисбатан куч моменти билан шу нуктадан утган укка нисбатан куч моменти орасида қандай богланиш бор?

4. Берилган кучларнинг координата бошига нисбатан вектор-моменти xOy координата текислигида ётса шу кучларнинг Oz ўққа нисбатан моменти нимага тенг бўлади?
5. Агар кучнинг моменти икки координата ўқларига нисбатан нолга тенг бўлса, берилган кучларнинг координата бошига нисбатан вектор моменти нимага тенг бўлади?
6. Фазода ихтиёрий жойлашган кучлар системаси берилган марказга қандай келтирилади?
7. Кучлар системаси бош векторининг ҳар қайси координата ўқига проекцияси нимага тенг?
8. Кучлар системаси бош моментининг ҳар қайси координата ўқи бошига нисбатан проекцияси нимага тенг?
9. Фазода ихтиёрий йўналган кучлар системасининг аналитик мувозанат шарти қандай таърифланади?
10. Мувозанат тенгламаларини ёзиб, унинг маъносини тушунтиринг?
11. Фазода параллел йўналган кучлар системасининг мувозанат тенгламаларини ёзинг ва унинг маъносини тушунтиринг?
12. Қаттиқ жисмнинг оғирлик маркази деб нимага айтилади? Унинг координаталари қандай топилади?
13. Текис шакл юзасининг статик моменти деб нимага айтилади?
14. Қаттиқ жисмнинг оғирлик марказини аниқлаш усулларини айтинг ва ҳар бир усулнинг маъносини тушунтиринг?
15. Учбурчак юзаси, айлана ёки сектор юзасининг оғирлик маркази қандай аниқланади?

КИНЕМАТИКА БЎЛИМИ

39-§. НУҚТА КИНЕМАТИКАСИ

Назарий механиканинг кинематика бўлимида қаттиқ жисмларнинг ҳаракати геометрик нуқтаи назардан текширилади, яъни кинематикада жисмларнинг массаси ва уларга таъсир қилувчи кучлар ҳисобга олинмайди. Кинематиканинг теорема ва формулалари техникада турли машина ва механизмлар қисмларининг ҳаракатини ўрганишда назарий база сифатида қўлланилади.

Кинематикада жисмнинг ҳаракати бошқа жисм билан боғланган саноқ системасига нисбатан текширилади. Айнан бир вақтда жисм турли саноқ системасига нисбатан турлича ҳаракатда бўлиши мумкин. Масалан, кема полубасидаги жисм кема билан боғланган саноқ системасига нисбатан ҳаракатсиз бўлса, қирғоқ билан боғланган саноқ системасига нисбатан кема билан биргаликда ҳаракатланади. Табиатда абсолют ҳаракатсиз жисм бўлмагани туфайли, абсолют қўзғалмас саноқ системаси ҳам мавжуд бўлмайди.

Техника масалаларини ечишда, одатда ер билан қўзғалмас боғланган саноқ системаси олинади. Ерга нисбатан қўзғалмас бўлган саноқ системаси "қўзғалмас саноқ" системаси дейилади. Қўзғалмас саноқ системасига нисбатан жисм вазияти ўзгариши ва вақт ўтиши билан ўзгармаса, жисм олинган системага нисбатан тинч ҳолатда дейилади. Агар мазкур саноқ системасига нисбатан вақт ўтиши билан жисмнинг вазияти ўзгарса, жисм шу системага нисбатан ҳаракатда бўлади. Танланган саноқ системасига нисбатан ҳар онда жисмнинг вазиятини аниқлаш мумкин бўлса, унинг ҳаракати кинематик берилган деб ҳисобланади.

Кинематикада учрайдиган барча чизиқли ўлчовларни (ҳаракатлаги нуқтанинг координаталари, ўтган йўлининг узунлиги ва ҳоказолар) техник ва халқаро СИ бирликлар системасида метрда олинади. Механикада вақт абсолют деб ҳисобланади, яъни уни барча саноқ системалари учун бир хилда ўтади деб қаралади. Вақт одатда t билан белгиланади ва у ҳаракатнинг аргументи ҳисобланади. Вақт ўлчови учун МКГСС системасида соат ёки минут, СИ системасида секунд (с) қабул қилинган.

[illegible] ва ҳаракат тушунчалари механиканинг асосий тушунчаларидир. Бирор саноқ системасига нисбатдан нуқтанинг маълум вақт t ичида фазода бир ҳолатдан бошқа ҳолатга ихтиёрий равишда ўтиши кўчиш дейилади.

Нуқтанинг бошланғич ҳолатдан охирги ҳолатга вақтга боғлиқ ҳолда аниқ бир усулда ўтиши ҳаракат деб айталади.

Фазода ҳаракатланаётган нуқтанинг бирор саноқ системасига нисбатан ҳолати билан вақт орасидаги боғланишни ифодаловчи тенглама нуқтанинг ҳаракат қонунини аниқлайди.

Кинематиканинг асосий масаласи нуқтанинг (ёки жисмнинг) ҳаракат қонунларини ўрганишдан иборат. Ихтиёрий вақт ичида фазода нуқтанинг ҳолатини бирор саноқ системасига нисбатан аниқлаш мумкин бўлса, у ҳолда нуқтанинг ҳаракат қонуни маълум бўлади. Агар нуқтанинг бирор саноқ системасига нисбатан ҳаракат қонуни берилган бўлса, нуқта ҳаракатининг кинематик характеристикалари: троектория, тезлик ва тезланишларини аниқлаш мумкин бўлади.

Қаттиқ жисм ҳаракатини кузатар эканмиз, купинча унинг нуқталари турлича ҳаракат қилишини курамиз. Шунинг учун жисм ҳаракатини урганишда унинг нуқталари ҳаракатини урганишга тугри келади. Дастлаб нуқта кинематикасини урганиб, ундан қаттиқ жисм кинематикасини урганишга утилади. Демак, кинематика икки қисмга булинади.

1. Нуқта кинематикаси.

2. Абсолют қаттиқ жисм кинематикаси.

40-§. НУҚТА ҲАРАКАТИНИНГ БЕРИЛИШ УСУЛЛАРИ

Нуқтанинг фазода қолдирган изига ёки чизган чизигига нуқтанинг траекторияси дейилади.

Оний вақтда нуқтанинг фазодаги ҳолатини бирор координаталар системасига нисбатан аниқлаш мумкин булса, нуқта ҳаракати берилган дейилади. Демак, нуқтага ҳаракат бериш унинг оний вақтдаги ҳолатини аниқлашдан иборат.

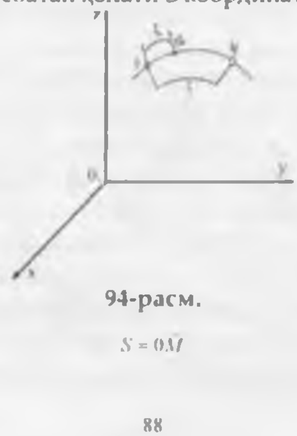
Нуқтанинг ҳаракати қуйидаги уч усул билан берилган булади: табиий, координаталар ва вектор.

1. Нуқтага табиий усулда ҳаракат бериш.

Нуқта ҳаракатини бу усулда бериш учун унинг траекторияси олдиндан аниқланган булиши керак.

Нуқтанинг траекторияси берилган булсин (94-расм).

М нуқтанинг бирор вақтдаги ҳолатини аниқлаймиз. Бунинг учун траектория устида қузгалмас 0 нуқтани ҳисоблаш боши деб оламиз. M нуқтанинг O нуқтага нисбатан ҳолати S координатаси билан аниқланади.



94-расм.

$$S = OM$$

M нуқта ҳаракатланганда вақт ўтиши билан *S* ей координата ўзгаради.

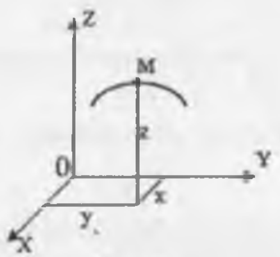
$$S=f(t) \qquad (103)$$

(103)-тенглама М нуқтанинг траектория бўйлаб ҳаракатланиш қонуни ёки ҳаракат тенгламаси дейилади. Агар S ей билан t вақт орасидаги муносабат берилган бўлса, нуқтанинг исталган вақтдаги вазиятини фазода аниқлаш мумкин. Нуқтанинг ҳаракатини табиий усулда бериш учун унинг траекторияси, координаталар боши *O* нуқта ва (103)-тенглама мавжуд бўлиши керак.

2. Нуқта ҳаракатининг координаталар усулида берилиши

M нуқтанинг *Oxyz* системага нисбатан ҳолати унинг учта *x, y, z* декарт координаталари билан аниқланади (94-расм).

М нуқта ҳаракатланганда вақт ўтиши билан унинг координаталари ўзгаради. Демак, ҳаракат қилаётган нуқта координаталари вақтнинг функциясидир.



94-расм.

$$\left.\begin{aligned} x &= f_1(t); \\ y &= f_2(t); \\ z &= f_3(t); \end{aligned}\right| \qquad (104)$$

(104)-формула нуқта ҳаракатининг декарт координаталаридаги тенгламаси ёки нуқта траекториясининг параметрик тенгламалари дейилади.

Нуқтанинг ҳаракат тенгламасидан *t* вақтни олиб ташласак нуқтанинг траектория тенгламаси ҳосил бўлади.

Агар нуқта бир текисликда, масалан учун *Oxy* текислигида, ҳаракатланса (104)-тенгламалар қуйидаги кўринишни олади.

$$\left.\begin{aligned} x &= f_1(t) \\ y &= f_2(t) \end{aligned}\right\} \qquad (105)$$

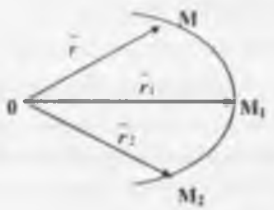
Агар нуқта тўғри чизиқли ҳаракатда бўлса, масалан фақат Ox ўқи бўйлаб, (104)-тенглама қуйидагича ёзилади:

$$x=f(t) \tag{106}$$

(106)-формулага тўғри чизиқли ҳаркатнинг тенгламаси дейилади.

3. Нуқта ҳаракатини вектор усулида берилиши

Нуқтанинг фазодаги ҳолатини $\bar{r}$ радиус-вектори билан аниқлаш мумкин (96-расм). Нуқта фазода ҳаракатланганда вақтнинг ўтиши билан унинг радиус - векторининг модули ва йўналиши ўзгаради:



96-расм.

Нуқтанинг $\bar{r}$ радиус –вектори t вақтнинг функциясидир:

$$\bar{r} = \bar{r}(t) \tag{107}$$

(107) - тенгламага нуқта ҳаракатининг вектор кўринишдаги тенгламаси дейилади.

41-§. НУҚТА ҲАРАКАТИ ВЕКТОР УСУЛДА БЕРИЛГАНДА УНИНГ ТЕЗЛИГИНИ АНИҚЛАШ

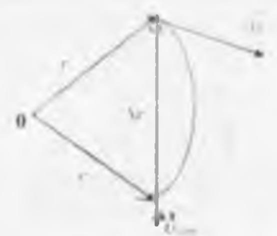
Нуқта ҳаракати вектор кўринишдаги тенгламаси берилган бўлсин:

$$\bar{r} = \bar{r}(t) \tag{108}$$

Нуқтанинг тезлигини топиш керак. Нуқтанинг бирор t пайтдаги троекторияда эгаллаган ҳолатини M, радиус векторини $\bar{r}$, $t_1+\Delta t$ паайтдаги ҳолатини M_1 радиус векторини $\bar{r}_1$ билан белгилаймиз. (97-расм). Нуқтанинг M ва M_1 ҳолатларини туташтирувчи $\overline{MM_1} = \Delta\bar{r}$ вектор нуқтанинг $\Delta t = t_1 - t$ вақт оралиғдаги кўчиш вектори дейилади. Расмдан кўриниб турибдики $\bar{r}_1 = \bar{r} + \Delta\bar{r}$. Бундан нуқтанинг Δt вақт ичидаги кўчиши (радиус вектор орттирмаси)ни топиш мумкин.

$$\Delta\bar{r} = \bar{r}_1 - \bar{r}$$

Кўчиш вектори $\Delta\bar{r}$ нинг шу кўчиш содир бўладиган Δt вақтга нисбати нуқтанинг мазкур оралиқдаги ўртача тезлик вектори дейилади ва $\bar{\vartheta}_{\text{ўр}}$ билан белгиланади



97-расм.

$$\bar{\upsilon}_{\text{ўр}} = \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t}$$

$\upsilon_{\text{ўр}}$ нуқтанинг Δt вақт ичидаги ўртача тезлиги бўлади.

Ўртача тезлик $\Delta\bar{r}$ бўйлаб йўналади. Ўртача тезликнинг $\Delta t \to 0$ интилгандаги лимитига нуқтанинг берилган t вақтдаги тезлиги дейилади.

$$\bar{\upsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{\upsilon}_{\text{ўр}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} = \frac{d\bar{r}}{dt},$$

$$\bar{\upsilon} = \frac{d\bar{r}}{dt} \qquad (109)$$

Бунда $\bar{\vartheta}$ - М нуқтанинг t вақтдаги тезлиги. Нуқтанинг тезлиги вектор катталикдир. Тезлик бирликлари:

$$\frac{см}{сек}, \frac{м}{сек}, \frac{км}{соат}$$

Демак, нуқта ҳаракати тенгламаси вектор усулида берилган бўлса, унинг тезлигини топиш учун радиус-вектордан вақт бўйича биринчи тартибли ҳосила олиш лозим.

Тезликнинг йўналишини аниқлаймиз. $\Delta t \to 0$ га интилганда M_1 нуқта M га интилади. Натижада MM_1 кесувчи M нуқтадан траекторияга ўтказилган уринмага айланади. Нуқтанинг тезлиги шу нуқтадан траекторияга ўтказилган уринма бўйича нуқта ҳаракат қилаётган томонга қараб йўналади.

42-§. НУҚТА ҲАРАКАТИ КООРДИНАТАЛАР УСУЛИДА БЕРИЛГАНДА УНИНГ ТЕЗЛИГИНИ АНИҚЛАШ

Нуқта ҳаракатининг декарт координаталардаги тенгламалари берилган бўлсин:

$$\left.\begin{aligned} x &= f_1(t), \\ y &= f_2(t), \\ z &= f_3(t). \end{aligned}\right\} \qquad (110)$$

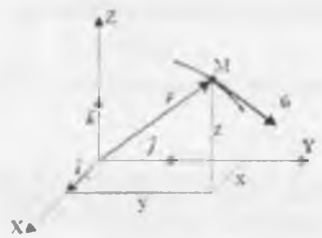
Нуқта тезлигининг модули ва йўналишини аниқлаймиз.

M нуқта тўғри бурчакли $Oxyz$ координата системасига нисбатан ҳаракат қилсин (98-расм).

M нуқтанинг r радиус-вектори координата ўқлари бўйича йўналган ташкил этувчилари орқали қуйидагича ёзилади

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} \qquad (111)$$

Бунда $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ координата ўқлари бўйича йўналган бирлик векторлар.



98-расм.

(111)-формулани (109)-формулага қўйиб вақт бўйича ҳосила оламиз.

$$\bar{\vartheta} = \frac{d}{dt}\left(x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}\right) = \frac{dx}{dt}\bar{i} + \frac{dy}{dt}\bar{j} + \frac{dz}{dt}\bar{k} \qquad (112)$$

(112)-формуладаги бирлик векторлар олдидаги коэффициентлар нуқта тезлигининг мос равишда x,y,z ўқларидаги проекцияси бўлади:

$$\vartheta_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad \vartheta_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \quad \vartheta_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z} \qquad (113)$$

Бунда $\vartheta_x, \vartheta_y, \vartheta_z$ лар ϑ нинг x,y,z ўқларидаги проекциялари. Нуқта тезлигининг қўзғалмас декарт координата ўқларидаги проекциялари унинг тегишли координаталаридан вақт бўйича олинган биринчи тартибли ҳосилага тенг. Нуқта тезлигининг декарт координата ўқларидаги проекцияларидан тўғри бурчакли параллелопипед қурамиз. Бу параллелопипеднинг ўлчовлари нуқта тезлигининг координата ўқлардаги проекцияси, диоганали эса нуқта тезлиги бўлади. Геометриядан маълумки тўғри бурчакли параллелопипед диоганалининг квадрати унинг учала ўлчовлари квадратларининг йиғиндисига тенг.

$$\vartheta^2 = \vartheta_x^2 + \vartheta_y^2 + \vartheta_z^2$$

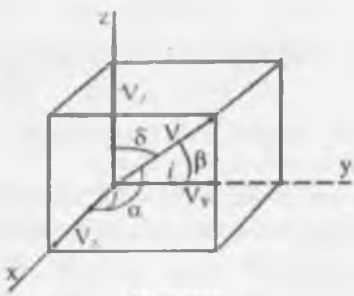
$$\vartheta = \sqrt{\vartheta_x^2 + \vartheta_y^2 + \vartheta_z^2}$$

(113)-формуладан фойдаланиб, нуқта тезлигининг модули ва йўналишини аниқлаймиз.

$$\vartheta = \sqrt{\vartheta_x^2 + \vartheta_y^2 + \vartheta_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \qquad (114)$$

$$\cos\alpha = \frac{\vartheta_x}{\vartheta}; \quad \cos\beta = \frac{\vartheta_y}{\vartheta}; \quad \cos\gamma = \frac{\vartheta_z}{\vartheta}; \qquad (115)$$

Бунда α, β, γ лар - ϑ вектори билан *x,y,z* ўқлари орасидаги бурчакни ифодалайди. (99-расм). Нуқта тезлигининг декарт координата ўқларидаги проекцияларидан тўғри бурчакли параллелопипед қурамиз. Бу параллелопипеднинг ўлчовлари нуқта тезлигининг координата ўқларидаги проекцияси, диоганали эса нуқта тезлиги бўлади.



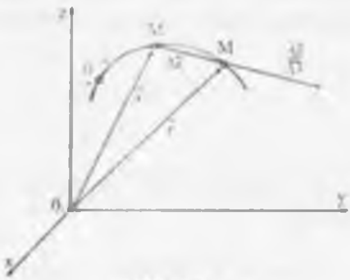
99-расм.

43-§. НУҚТА ҲАРАКАТИ ТАБИИЙ УСУЛДА БЕРИЛГАНДА УНИНГ ТЕЗЛИГИНИ АНИҚЛАШ

Нуқта траекторияси шу траектория бўйлаб ҳаракат қонуни асосида берилган бўлсин.

$$S = f(t) \qquad (116)$$

Нуқта тезлигини аниқлаймиз. Нуқта t вақтда M га келиб унинг ҳолати S ейи билан t_1 вақтда эса M_1 га келиб унинг ҳолати S_1 ейи кўринишида бўлсин (100-расм).



100-расм.

$$S = OM$$

$$S_1 = OM_1$$

$$\Delta t = t_1 - t$$

$$\Delta S = S_1 - S$$

$$\vartheta_{ўрт} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

Бунда $\vartheta_{ўрт}$ - Δt вақт ичидаги ўртача тезликнинг модули. M нуқтанинг t вақтдаги тезлигининг модулини аниқлаймиз.

$$\vartheta = \lim_{\Delta t \to 0} \vartheta_{ўрт} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}, \quad \vartheta = \frac{dS}{dt} \qquad (117)$$

Нуқта ҳаракати табиий усулда берилган бўлса, (117)-формула билан нуқта тезлигининг модули топилади.

Нуқтанинг тезлигини аниқлаш учун унинг ҳолатини аниқловчи S ёй координатадан вақт бўйича олинган биринчи тартибли ҳосила олиш керак.[1] Агар $\frac{dS}{dt} > 0$ бўлса V тезлик вектори S ёй координата ортиб бораётган томонга йўналган бўлади. Агар $\frac{dS}{dt} < 0$ бўлса S ёй камаядиган томонга йўналади (101-расм).

101-расм.

44-§. НУҚТА ҲАРАКАТИ ВЕКТОР УСУЛИДА БЕРИЛГАНДА УНИНГ ТЕЗЛАНИШИНИ АНИҚЛАШ

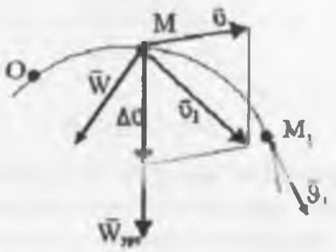
Нуқта тезлигининг модули ва йўналиши жиҳатидан ўзгаришини тасвирлаш учун тезланиш деган тушунча киритилади., Нуқта эгри чизиқли траектория бўйлаб ҳаракатланиб, t вақтда M нуқтада, t_1 вақтда эса M_1, нуқтада бўлсин (102-расм).

Бунда $\bar{\upsilon}$ ва $\bar{\upsilon}_1$, M ва M_1 нуқталарнинг тезликлари. Δt вақт ичида нуқта тезлиги $\Delta\bar{\upsilon}$ орттирма олади.

$$\Delta t = t_1 - t$$

$$\Delta\bar{\upsilon} = \bar{\upsilon}_1 - \bar{\upsilon}$$

$$\bar{\upsilon}_1 = \bar{\upsilon} + \Delta\bar{\upsilon}$$



102-расм.

$\Delta\bar{\upsilon}$ нинг Δt га нисбати Δt вақт ичидаги нуқтанинг ўртача тезланиши дейилади.

$$\bar{W}_{ўрт} = \frac{\Delta\bar{\upsilon}}{\Delta t}$$

Уртача тезланишнинг $\Delta t \to 0$ интилгандаги лимитига нуқтанинг берилган t вақтдаги ёки ҳақиқий тезланиши дейилади.

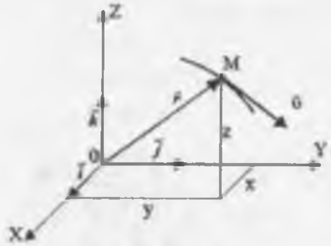
$$\bar{W} = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{W}_{ўрт} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\bar{\upsilon}}{\Delta t} = \frac{d\bar{\upsilon}}{dt} \qquad \bar{W} = \frac{d\bar{\upsilon}}{dt} \qquad \bar{W} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} \quad (118)$$

Демак, нуқтанинг тезланиши нуқта тезлигидан вақт бўйича олинган биринчи тартибли ҳосилага ёки радиус - вектордан вақт бўйича олинган иккинчи тартибли ҳосилага тенг. Ўртача тезланиш траекториясининг ботиқ томонига қараб йўналганлиги учун нуқта тезланиши $\bar{W}$ ҳам траекториянинг ботиқ томонига қараб йўналган бўлади. Нуқта тезланишининг бирлиги м/сек² билан ўлчанади.

45-§. НУҚТА ҲАРАКАТИ КООРДИНАТАЛАР УСУЛИДА БЕРИЛГАНДА УНИНГ ТЕЗЛАНИШИНИ АНИҚЛАШ

Нуқта координаталари вақтнинг функцияси шаклида берилган бўлсин (103-расм).

$$x=f_1(t); \qquad y=f_2(t); \qquad z=f_3(t)$$



103-расм.

Нуқта тезланишининг модули ва йўналиши топилсин. Нуқта тезлигини координата ўқлари бўйича йўналган ташкил этувчилари орқали қуйидагича ёзилади (102-расм).

$$\bar{\upsilon} = \upsilon_x \bar{i} + \upsilon_y \bar{j} + \upsilon_z \bar{k} \qquad (119)$$

Бунда $\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z$ лар $-\bar{\upsilon}$ тезликнинг проекциялари. $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ қўзғалмас координата ўқлари бўйича йўналган бирлик векторлар. (119)-формулани, (118)-формулага қўйиб вақт бўйича ҳосила оламиз.

$$\bar{W} = \frac{d\upsilon_x}{dt}\bar{i} + \frac{d\upsilon_y}{dt}\bar{j} + \frac{d\upsilon_z}{dt}\bar{k} \qquad (120)$$

(120)-формуладаги бирлик векторлари олдидаги коэффицентлар нуқта тезланишининг проекциясини ифодалайди.

$$W_x = \frac{d\upsilon_x}{dt}; W_y = \frac{d\upsilon_y}{dt}; W_z = \frac{d\upsilon_z}{dt} \qquad (121)$$

ёки

$$W_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$$

$$W_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y} \qquad W_z = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z} \qquad (122)$$

Бунда W_x, W_y, W_z лар $-\bar{W}$ тезланишнинг проекцияси (121)- ёки (122)-формулалар билан нуқта тезлашининг қўзғалмас *x,y,z* ўқларидаги проекциясини аниқлаймиз.

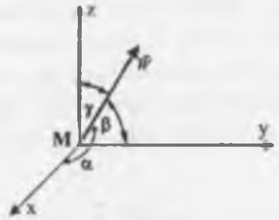
Нуқта тезланишининг бирор қузғалмас декарт координаталар укидаги проекцияси нуқтанинг тегишли координаталаридан вақт буйича олинган иккинчи тартибли ҳосилага тенг булади.

Нуқта тезланишининг модули ва йуналиши қуйидаги формула билан топилади.

$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2} \qquad (123)$$

$$\cos\alpha_1 = \frac{W_x}{W}; \cos\beta_1 = \frac{W_y}{W}; \cos\gamma_1 = \frac{W_z}{W}; \qquad (124)$$

Бунда *α,β,γ,* лар -W билан *x,y,z* уқлари орасидаги бурчаклар (104-расм).



104-расм.

Н а т и ж а: Нуқта ҳаракати координаталар усулида берилган булса (123)-формула билан нуқта тезланишини модули ҳамда (124)-формула билан тезланишининг йуналиши топилади.

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР.

1. Кинематика нимани урганади?
2. Кинематикани асосий масалаларини айтинг?
3. Нуқта траекторияси деб нимага айтилади?
4. Нуқта ҳаракати табиий усулда қандай берилади?
5. Нуқта ҳаракати координаталар усулида қандай берилади?
6. Нуқтани траектория тенгламаси қандай топилади?
7. Нуқта ҳаракати вектор усулида қандай берилади?
8. Нуқта ҳаракати вектор усулида берилганда унинг тезлиги қандай аниқланади? Нуқтанинг тезлиги қандай йуналган булади?
9. Нуқтанинг тезланиши вектор усулида қандай аниқланади? Нуқтанинг тезланиши қандай йуналган?
10. Нуқта тезлигининг декарт координаталар уқларидаги проекциялари нимага тенг?
11. Нуқта тезлигининг миқдори ва йуналиши проекциялар буйича қандай аниқланади?

12. Нуқта тезланишининг декарт координаталари ўқларидаги проекцияси нимага тенг?

13. Нуқта тезланишининг миқдор ва йўналиши проекциялари бўйича қандай аниқланади?

46-§. ТАБИИЙ КООРДИНАТЛАР СИСТЕМАСИ

Нуқта траекторияси берилган бўлсин. Шундан битта нуқта олиб унга уринма ўтказамиз. М нуқтадан уринмага перпендикуляр қилиб ўтказилган текисликка нормал текислик деб айтилади.

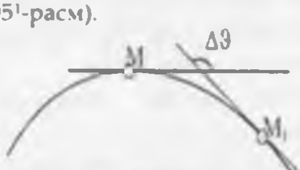
Нормал текислик билан ёпишма текисликнинг кесишган чизиги бош нормал дейилади. М нуқтадан бош нормалга перпендикуляр қилиб ўтказилган текисликка тўғриловчи текислик дейилади. Нормал текислик билан тўғриловчи текисликнинг кесишган чизигига бинормал дейилади (105-расм).

105-расм.

Уринма, бош нормал ва бинормалдан ташкил топган ўқларга табиий ўқлар дейилади. Бу ўқлар Mmb табиий координаталар системасини ташкил этади. Табиий ўқларнинг бирлик векторларини мос равишда $\bar{\tau}, \bar{n}, \bar{b}$ билан белгиланади (105-расм).

Эгри чизиқнинг эгрилиги.

Нуқта троекториясидаги М ва M_1 нуқталардан троекторияга уринма ўтказилади (105[1]-расм).



105[1]-расм.

Бу уринмалар орасидаги бурчак $\Delta\varphi$ билан белгилаймиз. $\Delta\varphi$ бурчакка қўшни бурчак дейилади. Бу бурчакнинг ΔS ёйига нисбати эгри чизиқнинг ўртача эгрилиги дейилади ва $K_{ўрт}$ билан белгиланади.

$$K_{ўрт} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta S} \text{ бунда } \Delta S = MM_1$$

Ўртача эгириликнинг $\Delta S \to 0$ лимитига эгри чизиқнинг берилган нуқтадаги эгрилиги дейилади.

$$K = \lim_{\Delta S \to 0} K_{ўрт} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta S}$$

$$K = \frac{d\varphi}{dS}$$

Бунда К эгри чизиқнинг М нуқтадаги эгрилиги.

Эгриликнинг тескари қийматига эгрилик радиуси дейилади.

$$\rho = \frac{1}{K}$$

Мисол учун тўғри чизиқнинг эгрилиги K=0 бўлса, $\rho = \frac{1}{K} = \infty$ бўлади.

R радиусли айлананинг эгрилик радиуси унинг радиусига тенг.

47-§. НУҚТА ҲАРАКАТИ ТАБИИЙ УСУЛДА БЕРИЛГАНДА УНИНГ ТЕЗЛАНИШИНИ ТОПИШИ

Нуқтанинг троекторияси ва унинг троектория бўйлаб ҳаракатланиш қонуни берилган бўлсин. Нуқтанинг тезланишини аниқлаймиз. Маълумки нуқта ҳаракати вектор усулида берилганда унинг тезлиги қуйидаги формула билан топилади.

$$\bar{\vartheta} = \frac{d\bar{r}}{dt}$$

Бу формуланинг унг томонини қуйидагича ёзамиз.

$$\bar{\vartheta} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}}{dS} \cdot \frac{dS}{dt}$$

$\frac{d\bar{r}}{dS} = \bar{\tau}$ ва $\vartheta = \frac{dS}{dt}$ алгебраик тезлик эканини хисобга олсак, у ҳолда:

$$\bar{\upsilon} = \upsilon\bar{\tau} \qquad (125)$$

бўлади.

Нуқта ҳаракати вектор усулида берилганда унинг тезланиши қуйидаги формула билан аниқланади:

$$\overline{W} = \frac{d\overline{\upsilon}}{dt} \qquad (125.1)$$

Бунда
$$\frac{d\overline{\tau}}{dt} = \frac{d\overline{\tau}}{dS} \cdot \frac{dS}{dt} \qquad (126)$$

$$\frac{dS}{dt} = \vartheta$$

$\overline{W} = \dfrac{d\overline{\upsilon}}{dt}$ га асосан $\dfrac{d\overline{\tau}}{dS}\overline{k} = \dfrac{1}{\rho}\overline{n}$

(126)-ни қуйидагича ёзамиз.

$$\frac{d\overline{\tau}}{dt} = \frac{\vartheta}{\rho} \cdot \overline{n} \qquad (127)$$

Бунда ρ троекторияни эгрилик радиуси, $\overline{n}$ бош нормалнинг бирлик вектори. (127)- ни (126)- га қуямиз.

$$\overline{W} = \frac{d\upsilon}{dt}\overline{\tau} + \frac{\upsilon^2}{\rho}\overline{n} \qquad (128)$$

(128)- ифодада нуқта тезланиши табиий координата ўқларидаги ташкил этувчилари орқали берилган.

Тезланишнинг уринма бўйлаб йўналган ташкил этувчиси:

$$\overline{W}_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}\overline{\tau} \qquad (129)$$

Нуқтанинг уринма тезланиши, бош нормал бўйича йўналган бўлиб, ташкил этувчиси эса нуқтанинг нормал тезланишидир.

$$\overline{W}_n = \frac{\upsilon^2}{\rho}\overline{n} \qquad (130)$$

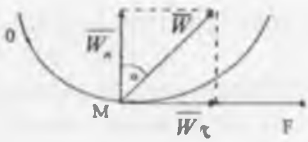
М нуқтанинг тезланиши шу нуқта троекториясига ўтказилган ёпишма текислигида ётади. Бу текисликка эса бинормал перпендикуляр. Шунинг учун нуқта тезланишининг бинормалдаги проекцияси нолга тенг.

$$\overline{W}_b = 0 .$$

(129)- ва (130)- га кура (128)- ифода қуйидаги куринишга эга булади:

$$\overline{W} = \overline{W}_\tau + \overline{W}_n \qquad (131)$$

Яъни, эгри чизикли ҳаракатдаги нуқтанинг тезланиши уринма ва нормал тезланишларнинг геометрик йиғиндисига тенг. Бу икки тезланиш узаро перпендикуляр йўналган. Шу сабабли $\overline{W}$ тезланиш вектори $\overline{W}_\tau$ ва $\overline{W}_n$ ларга қурилган тўғри тўртбурчакнинг диагонали бўйича йўналган бўлади (106-расм).



106-расм.

Нуқта тўла тезланишининг модули ва йўналиши қуйидаги формулалар билан топилади:

$$W = \sqrt{W_\tau^2 + W_n^2}, \qquad tg\alpha = \frac{|W_\tau|}{W_n} \qquad (132)$$

Нуқта тезланишининг табиий координата ўқларидаги проекциялари

$$W_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2}, \qquad W_n = \frac{v^2}{\rho}, \qquad W_b = 0 \qquad (133)$$

формулалар ёрдамида аниқланади.

Демак, нуқтанинг ҳаракати табиий усулда берилганда (129)-(133) формулалар билан нуқта тезланиши аниқланади.

Агар нуқтанинг ҳаракати тўғри чизиқли бўлса траекториянинг эгрилик радиуси ∞ ка тенг бўлади.

$$W_n = \frac{\upsilon^2}{\infty} = 0 \qquad W = 0$$

Нуқтанинг нормал тезланиши эгри чизиқли ҳаракатда мавжуд бўлиб, нуқта тезлигининг йўналиши жиҳатдан ўзгаришини тасвирлайди. Агар $\vartheta = const$ бўлса, $w_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = 0; ... w_\tau = 0$.

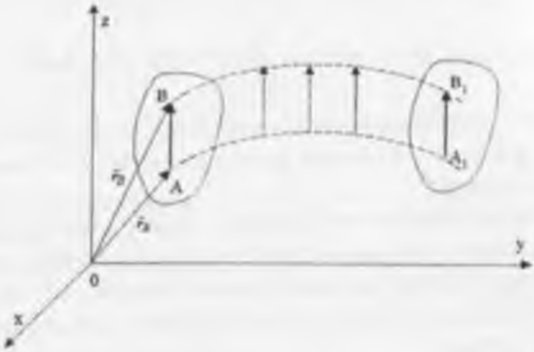
Уринма тезланиш нуқта тезлигининг модул жиҳатидан ўзгаришини тасвирлайди. Демак уринма тезланиш нотекис ҳаракатда мавжуд бўлади.

48-§. НУҚТАНИНГ ТЕКИС ЎЗГАРУВЧАН ҲАРАКАТИ

Агар уринма тезланиш ўзгармас бўлса, бундай ҳаракатга текис ўзгарувчан ҳаракат дейилади. Текис ўзгарувчан ҳаракат тенгламасини аниқлаймиз.

Нуқтанинг уринма тезланиши:

$$W_\tau = Const,$$



108-расм.

Шунинг учун $\bar{r}_A$ ва $\bar{r}_B$ векторлари ўзгарганда, уларнинг A ва B нуқталарининг чизган траекториялари бир хил бўлади. Яъни $AA_1=BB_1$ ва $AA_1 \parallel BB_1$.

$$\bar{r}_B = \bar{r}_A + \overline{AB} \qquad (136)$$

бунда t вақт бўйича ҳосила оламиз.

$$\frac{d\bar{r}_B}{dt} = \frac{d\bar{r}_A}{dt} + \frac{d(\overline{AB})}{dt}$$

$$\frac{d\bar{r}_B}{dt} = \bar{\upsilon}_B; \qquad \frac{d\bar{r}_A}{dt} = \bar{\upsilon}_A. \qquad \frac{d(\overline{AB})}{dt} = 0$$

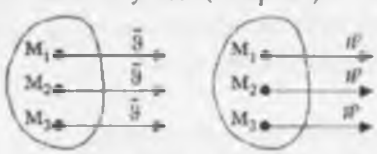
$$\bar{\upsilon}_B = \bar{\upsilon}_A \qquad (137)$$

A ва B нуқталар ихтиёрий нуқталар бўлганлиги учун илгариланма ҳаракатдаги жисмнинг қолган ҳамма нуқталар тезликлари бир хил бўлади.

(137)- дан t вақт бўйича ҳосила оламиз.

$$\frac{\bar{\upsilon}_B}{dt} = \frac{\bar{\upsilon}_A}{dt} \quad \text{ёки} \quad \bar{W}_B = \bar{W}_A \qquad (138)$$

Илгариланма ҳаракат қилаётган қаттиқ жисм бирор нуқтасининг тезлигини ва тезланишини аниқлаш (кифоя). Жисм бошқа нуқталарининг тезлиги ва тезланиши теоремага асосан шу нуқтанинг тезлиги ва тезланишига тенг бўлади (109-расм).



109-расм.

Жисмнинг илгарилама ҳаракати унинг ихтиёрий нуқтаси ҳаракати билан аниқланади. Илгарилама ҳаракатдаги жисм нуқталарининг ҳар ондаги тезлиги ҳам, тезланиши ҳам бир хил булаганидан уларни мос равишда жисмнинг тезлиги ва тезланиши деб аташ мумкин.

50-§. ҚАТТИҚ ЖИСМНИНГ ҚЎЗҒАЛМАС ЎҚ АТРОФИДАГИ АЙЛАНМА ҲАРАКАТИ. БУРЧАК ТЕЗЛИГИ ВА БУРЧАК ТЕЗЛАНИШИ

Жисм ҳаракати давомида унинг икки нуқтаси қўзғалмасдан қолса бундай ҳаракатга қаттиқ жисмнинг қўзғалмас ўқ атрофидаги айланма ҳаракати дейилади. Шу қўзғалмас нуқталардан ўтган тўғри чизиққа айланиш ўқи дейилади. Қўзғалмас z ўқи атрофида айланувчи қаттиқ жисм берилган бўлсин (110-расм). Шу жисмнинг ҳар бир вақтдаги ҳолатини аниқлаймиз. А ва В нуқталар қўзғалмас нуқталардир. Шу нуқталар орқали z ўқи ўтказилади. z - жисмнинг айланиш ўқи. Жисмнинг ҳолатини аниқлаш учун айланиш ўқидан Q ва P текисликлари олинади. Бунда Q қўзғалмас текислик, P қўзғалувчи текислик. P - текислиги жисмга қаттиқ бириктирилган ва жисм билан бирга айланади. Жисмнинг ҳолатини аниқлаш учун P текисликнинг Q га нисбатан ҳолатини аниқлаш кифоя. P - текисликнинг ҳолати φ бурчаги билан аниқланади. φ-га айланиш бурчаги дейилади. Жисм ўқ атрофида айлаганда φ бурчаги вақт ўтиши билан ўзгаради.

$$\varphi = f(t) \tag{139}$$

Бу тенглама жисмнинг қўзғалмас ўқ атрофидаги айланма ҳаракати тенгламаси дейилади. Айланиш бурчаги радиан билан ўлчанади.

Айланма ҳаракат қонуни, бурчак тезлиги билан бурчак тезланишга айланма ҳаракатнинг кинематик тавсифи дейилади. Айланиш бурчаги φ дан вақт бўйича олинган биринчи тартибли ҳосила жисмнинг бурчак тезлиги дейилади ва ω билан белгиланади:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \qquad \omega = \varphi = f'(t) \tag{140}$$

Бунда ҳосиланинг ишораси жисмнинг айланиш йўналишини ифодалайди. Агар $\omega = \varphi = f'(t) > 0$ бўлган онда $f(t)$ функция усувчан бўлади, яъни ўқнинг мусбат йўналишидан қараганда жисм соат стрелкаси айланишига тескари айланади: $\varphi = f'(t) < 0$ бўлган онда $f(t)$ функция камаювчан булади, яъни жисм соат стрелкаси айланиши бўйича айланади.

110-расм.

Демак, жисмнинг бурчак тезлиги айланиш бурчагидан вақт бўйича олинган биринчи тартибли ҳосилага тенг бўлади.

Бурчак тезлигининг бирлиги

$$\omega = \frac{рад}{сек} = \frac{1}{сек} = сек^{-1} \qquad (141)$$

Бурчак тезланишинг бурчак тезлигидан вақт бўйича олинган иккинчи тартибли ҳосилага тенг бўлади.

$$\dot{\varepsilon} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \qquad (142)$$

Бурчак тезланишини бирлиги $\dot{\varepsilon} = \frac{рад}{сек^2} = \frac{1}{сек^2} = сек^{-2}$.

Бурчак тезланиши айланиш бурчагидан вақт бўйича олинган иккинчи тартибли ҳосилага тенг бўлади.

51-§. ЖИСМНИНГ ТЕКИС ВА ТЕКИС ЎЗГАРУВЧАН АЙЛАНМА ҲАРАКАТИ

1. Қаттиқ жисм қўзғалмас ўқ атрофида бир хил вақт оралиғида бир хил бурчакка бурилса жисм текис айланма ҳаракатда дейилади. Текис айланма ҳаракат бурчак тезлиги $\omega=const$ бўлади.

$$\varphi=\omega t \qquad (143)$$

Текис айланма ҳаракат тенгламаси (143)- билан ифодаланади. Текис айланишидаги жисмнинг бурчак тезлигини бир минутдаги айланишлар сони билан ифодаланади. Жисм бир марта тўла айланганда $\varphi=2\pi$ радиан бурчакка бурилади.

Қузғалмас уқ атрофида айланувчи қаттиқ жисмнинг бурчак тезлиги ва бурчак тезланиши айланиш уқи буйлаб йуналган вектор катталиклар.

52-§. ҚУЗҒАЛМАС УҚ АТРОФИДА АЙЛАНУВЧИ ҚАТТИҚ ЖИСМ НУҚТАСИНИНГ ТЕЗЛИГИ ВА ТЕЗЛАНИШИ

Қузғалмас z уқи атрофида айланувчи қаттиқ жисм берилган булсин.

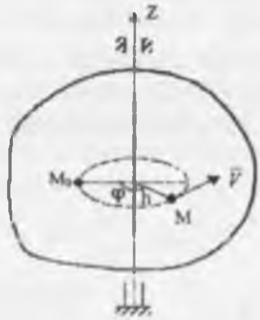
Шу жисмнинг ихтиёрий M нуқтаси тезлиги ва тезланишини аниқлаймиз.

Бунда h – M нуқтадан айланиш уқигача булган масофа (111-расм). Z жисмнинг қузғалмас айланиш уқи. Жисм абсолют қаттиқ булганлиги учун $h = const$ булади. Жисм уқи атрофида айланганда M нуқта айланиш ўқига перпендикуляр текисликда радиуси h га тенг булган айлана чизади.

Жисм уқ атрофида $d\varphi$ бурчакка бурилганда M нуқта dS йулни босиб ўтади.

$$dS = \overset{\frown}{M_0 M}$$

$$dS = hd\varphi$$



111-расм.

M нуқтанинг тезлиги:

$$\upsilon = \frac{dS}{dt} = \frac{d(\varphi h)}{dt} = h\frac{d\varphi}{dt} = h \cdot \omega$$

ёки

$$\upsilon = \omega h \qquad (147)$$

ω - жисмнинг бурчак тезлиги. (147)-формула билан қузғалмас уқ атрофида айланувчи қаттиқ жисм нуқтасининг чизиқли тезлиги топилади. Қузғалмас уқ атрофида айланма ҳаракатдаги жисм ихтиёрий нуқтаси чизиқли тезлигининг миқдори жисм бурчак тезлиги билан қузғалмас уқдан нуқтагача булган масофанинг купайтмасига тенг. Чизиқли тезлик вектори $\bar{\upsilon}$ M нуқтада h га перпендикуляр булиб, жисм айланаётган томонга қараб йуналган булади. Қаттиқ жисм нуқталарининг тезликлари шу нуқталардан айланиш уқигача булган масофага пропорционалдир.

M нуқтанинг уринма тезланишини топамиз. Уринма тезланиши:

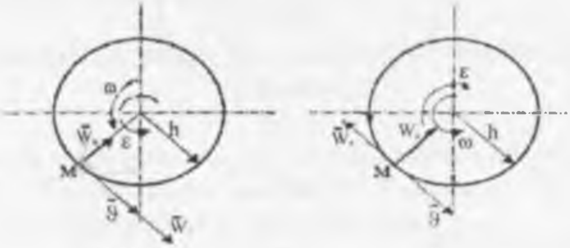
$$W_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d(\omega h)}{dt} = h \cdot \dot{\varepsilon}, \quad W_\tau = \varepsilon \cdot h \qquad (148)$$

Қузғалмас уқ атрофида айланувчи жисм ихтиёрий нуқтасининг уринма тезланиши жисмнинг бурчак тезланиши билан шу нуқтадан айланиш уқигача булган масофанинг купайтмасига тенг.

Уринма тезланиш шу нуқтадан h га перпендикуляр булиб, тезланувчан айланма ҳаракатда υ тезлик йуналиши буйича (112-расм, a), секинланувчан айланма ҳаракатда эса унга тескари йуналади (112-расм, b). M нуқтанинг нормал тезланишини топамиз.

$$W_n = \frac{\upsilon^2}{\rho} = \frac{(\omega h)^2}{h} = \frac{\omega^2 h^2}{h} = \omega^2 h \qquad (149)$$

Қузғалмас уқ атрофида айланувчи жисм ихтиёрий нуқтасининг нормал тезланиши бурчак тезлигининг квадрати билан нуқтадан айланиш ўқигача булган масофанинг купайтмасига тенг.



112-расм.

Нормал тезланиши айланиш радиуси h буйлаб айланиш уқи томон йуналган булади.

Жисм n марта айланса, $\varphi = 2\pi n$ бурчакка бурилади. Текис айланма ҳаркатнинг бурчак тезлиги қуйидагига тенг булади:

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30}\,\frac{рад}{сек} \qquad (144)$$

Бунда n - жисмнинг бир минутдаги айланишлар сони. Агар жисмнинг бир минутдаги айланишлар сони берилган булса, (144)-формула билан унинг бурчак тезлиги топилади.

2. Агар айланма ҳаракат давомида бурчак тезланиши ε =const булса, жисм текис ўзгарувчан айланма ҳаракатда булади.

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t \qquad (145)$$

(145)-формула билан текис ўзгарувчан айланма ҳаракатнинг бурчак тезлиги топилади.

Бунда ω_0 - бошлангич бурчак тезлиги

ω - ихтиёрий вақтдаги бурчак тезлиги.

(145)-формулага $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ ни қуйиб интегралласак, (146)-формулани ҳосил қиламиз

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2} \qquad (146)$$

(146)-тенглама билан текис ўзгарувчан айланишда бурилиш бурчаги, ёки текис ўзгарувчан айланма ҳаракат қонуни аниқланади.

Қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи жисмнинг бурчак тезлик вектори мазкур ўқ буйлаб йўналган ва унинг мусбат йўналишидан қараганда айланиш соат стрелкаси ҳаракатига тескари йўналишда кўринадиган, айланиш ўқининг ихтиёрий нуқтасига қўйилган вектор билан ифодаланади (110.1-расм). Бурчак тезлик векторининг модули

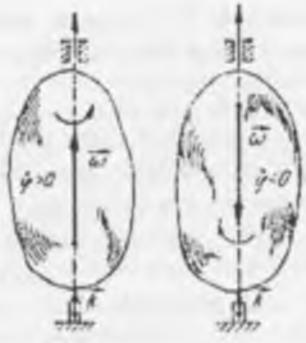
$$|\bar{\omega}| = \left|\frac{d\varphi}{dt}\right| = |\omega_z|$$

формула ёрдамида аниқланади.

Агар айланиш ўқи бирлик векторини k билан белгиласак, бурчак тезлик векторини

$$\bar{\omega} = \dot{\varphi} \cdot \bar{k} = \omega_z \cdot \bar{k} \qquad (146.1)$$

куринишида ёзиш мумкин. (146') дан курамизки, $\dot{\varphi} > 0$ булса, $\bar{\omega}$ вектори $\bar{k}$ йуналиши буйича, $\dot{\varphi} < 0$ да $\bar{k}$ қарама-қарши йуналишда булади (110.1 -расм a,b).



a) b)

110.1-расм.

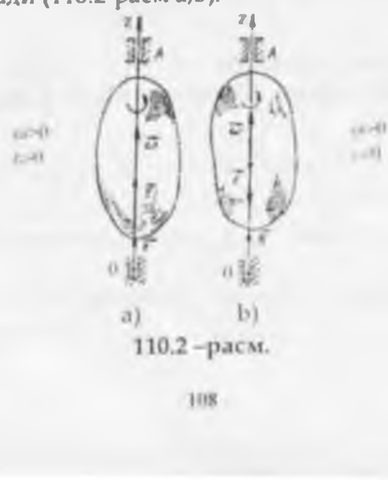
Жисмнинг бурчак тезланишини айланиш ўқи бўйлаб йўналган $\bar{\varepsilon}$ вектори тарзида ифодалаш мумкин. Бунда жисмнинг бурчак тезланиш вектори шу жисм бурчак тезлик векторидан вақт бўйича олинган ҳосилага тенг бўлади (110.2-расм).

$$\bar{\omega} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \frac{d\omega_z}{dt}\cdot\bar{k} = \varepsilon_z\cdot\bar{k}$$

ёки

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon_z\bar{k} = \ddot{\varphi}\bar{k} \qquad (146.2)$$

Агар жисмнинг бурчак тезлиги модуль жиҳатидан орта борса, бундай ҳаракат тезланувчан айланма ҳаракат, камая борса, секинланувчан айланма ҳаракат дейилади. Текис айланма ҳаракатда $\omega = const$ бўлгани учун $\varepsilon = 0$ бўлади. Демак, ω_z ва ε_z лар бир хил ишорали бўлса, ҳаракат тезланувчан турли ишорага эга бўлса, ҳаракат секинланувчан бўлади (110.2-расм a,b).



a) b)

110.2 –расм.

Уринма ва нормал тезланишлар ўзаро перпендикуляр бўлади. Тўла тезланишни модули қуйидагича аниқланади.

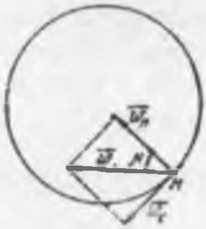
$$W_t = \sqrt{W_\tau^2 + W_n^2} = \sqrt{\varepsilon^2 h^2 + \omega^4 h^2} = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \qquad W = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

(150)

Тезланишнинг йўналиши эса қуйидаги формуладан топилади.

$$tg\mu = \frac{\varepsilon}{\omega^2} \qquad (151)$$

Бунда μ - тўла тезланиш билан нормал тезланиш орасидаги бурчак.



113-расм.

Жисм қўзғалмас ўқ атрофида текис айланса, *W=const* ва унинг бурчак тезланиши нолга тенг бўлади $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 0$. У ҳолда жисм нуқтасининг уринма тезланиши нолга тенг бўлиб, $W = \varepsilon \cdot h = 0$, жисм нуқталари нормал тезланишга эга бўлади $W = W_n = W^2 h$

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР.

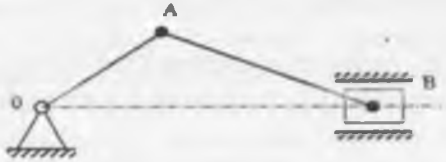
1. Қаттиқ жисмнинг қандай ҳаракатига илгарилама ҳаракат деб аталади?
2. Илгарилама ҳаракат қилаётган қаттиқ жисм нуқталарининг траекторияси, тезлиги ва тезланиши ҳақидаги теорема қандай таърифланади?
3. Қаттиқ жисмнинг эгри чизиқли илгарилама ҳаракатига мисоллар келтиринг?
4. Қаттиқ жисмнинг қўзғалмас ўқ атрофидаги айланма ҳаракат таърифини айтинг? Бу ҳаракатга мисоллар келтиринг?
5. Жисмнинг бурчак тезлик ва бурчак тезланиши нима? Уларнинг ўлчов бирлиги қандай?
6. Қаттиқ жисмнинг қандай айланишига текис айланиш дейилади?
7. Жисмнинг бир минутдаги айланишлар сони билан бурчак тезлик орасида қандай боғланиш мавжуд?

8. Жисмнинг қандай айланишига текис ўзгарувчан айланиш дейилади?
9. Текис ўзгарувчан айланма ҳаракатда жисмнинг бурчак тезлиги ва айланиш бурчаги қайси формула билан топилади?
10. Айланма ҳаракат қилаётган қаттиқ жисм нуқтасининг тезлиги модули қандай топилади ва у қандай йўналган?
11. Қўзғалмас ўқ атрофида айланаётган қаттиқ жисм нуқтасининг уринма ва нормал тезланиши қайси формула билан аниқланади? Бу тезланишлар қандай йўналган бўлади?
12. Қўзғалмас ўқ атрофида айланаётган қаттиқ жисм нуқтасининг тўла тезланиши қайси формула билан аниқланади? Бу тезланишнинг йўналиши қандай?

53-§. ҚАТТИҚ ЖИСМНИНГ ТЕКИС ПАРАЛЛЕЛ ҲАРАКАТИ

Қаттиқ жисмда олинган ҳамма нуқталар жисм ҳаракатида бирор қўзғалмас текисликка параллел текисликда ҳаракатланса, унинг бундай ҳаракатига текис параллел ҳаракат дейилади.

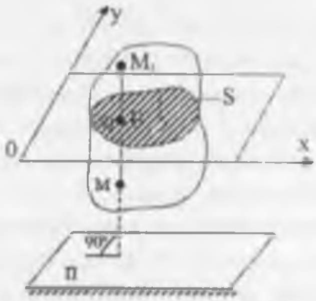
Масалан: Тўғри чизиқли йўлдаги машина ғилдирагининг ҳаракати ёки кривошип шатунли механизмдаги шатунининг ҳаракати (114-расм).



114-расм.

Текис параллел ҳаракат қилаётган жисм берилган бўлсин. Жисмнинг текис параллел ҳаракатини ўрганиш учун жисмда қўзғалмас текисликка перпендикуляр бўлган MM_1 ихтиёрий кесма олинади. Текис параллел ҳаракат таърифига кўра MM_1 кесманинг нуқталаридан $П$ текисликгача бўлган масофалар ўзгармасдан қолади, шу сабабли MM_1 кесма ҳар доим ўзига параллел равишда ҳаракатланади. Бинобарин MM_1 кесма илгарилама ҳаракатда бўлади. Илгарилама ҳаракат таърифига кўра жисмнинг барча нуқталари бир хил траектория чизади, тезлик ва тезланишлари тенг бўлади. Шу сабабли илгариланма ҳаракатдаги жисм битта нуқтасининг ҳаракатини ўрганиш кифоя.

Жисмни қўзғалмас *П* текисликка параллел бўлган *П₁* текислик билан кесиб, кесимда ҳосил бўлган кесимани *(S)* билан белгилаймиз (115-расм). *MM_1* кесма *(S)* кесимдаги нуқтаси *В* билан белгиланади. У ҳолда *MM_1* кесмани ҳаракатини ўрганиш ўрнига *В* нуқтасининг ҳаракати ўрганилади.

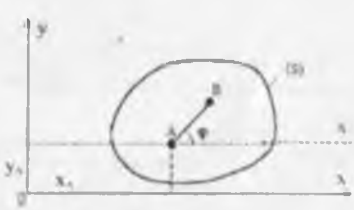


115-расм.

Худди шунингдек *MM_1* кесмага параллел $M_1M_1^1$ кесмани олсак $M_1M_1^1$ кесма ҳам илгариланма харакатда бўлгани учун унинг *(S)* кесимдаги *O_1* нуқтасининг ҳаракатини ўрганиш кифоя. Жисмни *MM_1*, $M_1M_1^1$, $M_2M_2^1$ кесмалар тўпламидан иборат деб қараш мумкин ва бундай жисмнинг ҳаракатини ўрганиш ўрнига унинг *(S)* кесимининг ҳаракатини ўрганиш кифоя. *(S)* кесимга текис шакл дейилади. Текис шакл ҳаракатланадиган *П* текисликка текис шаклнинг ҳаракат текислиги дейилади.

Oxy координаталар системасига нисбатан ҳаракат қилаётган *(S)* текис шакл берилган бўлсин. Бу текис шаклдаги *АВ* кесманинг вазияти *А* нуқтанинг x_A, y_A координаталари ва А нуқта атрофида φ айланиш бурчаги билан аниқланади.

φ - *АВ* кесманинг *Ox* ўқи билан ташкил қилган бурчаги (116-расм).



116-расм.

r_B - В нуқтанинг радиус вектори

r' - B нуқтанинг Axy координаталарига нисбатан холатини аниқлайдиган радиус-вектор.

B нуқтанинг тезлигини аниқлаш учун (153) дан t вақт бўйича ҳосила оламиз.

$$\frac{dr_B}{dt} = \frac{dr_A}{dt} + \frac{dr'}{dt} \qquad (154)$$

$$\frac{dr_B}{dt} = \upsilon_B; \quad \frac{dr_A}{dt} = \upsilon_A; \quad \frac{dr'}{dt} = \bar{\upsilon}_{BA}; \qquad (155)$$

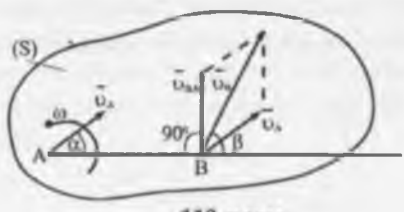
(155)- ни (154)- га қуямиз у холда

$$\bar{\upsilon}_B = \bar{\upsilon}_A + \bar{\upsilon}_{BA} \qquad (156)$$

(156)- формула билан текис параллел ҳаракат қилаётган қаттиқ жисмнинг ихтиёрий B нуқтасининг тезлиги топилади. Бунда тезлик $\bar{\upsilon}_{BA}$ B нуқтанинг A қутб атрофида айланганда ҳосил қилган тезлиги. Бу тезликнинг миқдори қуйидагига тенг.

$$\upsilon_{AB} = \omega\, AB \qquad (157)$$

Бунда ω - бурчак тезлик. $\bar{\upsilon}_{BA}$ тезлик вектори айланиш радиуси AB га перпендикуляр равишда текис шаклнинг айланиш йўналиши бўйича йўналади яъни $\bar{\upsilon}_{BA} \perp$. B нуқтанинг тезлиги $\bar{\upsilon}_A$ ва $\bar{\upsilon}_{BA}$ векторлардан тузилган параллелограмнинг диоганали бўйлаб йўналган булади (119-расм.)



119-расм.

Текис шакл бирор нуқтасининг тезлиги ва айланма ҳаракатининг бурчак тезлиги берилганда текис шаклнинг бошқа нуқтасининг тезлигини (156) формуладан аниқлаш қутб усулида аниқлаш дейилади.

55-§. ТЕКИС ШАКЛ ИККИ НУҚТАСИ ТЕЗЛИКЛАРИНИНГ ПРОЕКЦИЯСИ ҲАҚИДАГИ ТЕОРЕМА

<u>Теорема:</u> Текис шакл икки нуқтаси тезликларининг шу нуқталардан ўтган тўғри чизиқдаги проекцияси ўзаро тенг.

Исбот. Текис шаклда A ва B нуқталарни оламиз. A нуқтани қутб деб қабул қиламиз. Маълумки, B нуқтанинг тезлигини (156)-формула билан ёзиш мумкин. A ва B нуқталар орқали x ўқи ўтказилади (118-расм). (156) ни ўқа проекциялаймиз.

$$(\bar{\upsilon}_B)_x = (\bar{\upsilon}_A)_x + (\bar{\upsilon}_{BA})_x$$

$\upsilon_{BA} \perp x$ бўлганлиги учун $(\bar{\upsilon}_{BA})_x = 0$ бўлади. Шундан қилиб

$$(\bar{\upsilon}_B)_x = (\bar{\upsilon}_A)_x$$

118-расмга асосан

$$\upsilon_B \cos\beta = \upsilon_A \cos\alpha \tag{158}$$

Бу теорема ердамида A нуқта тезлигининг катталиги ва йўналиши B нуқта тезлигининг йўналиши берилганда B нуқта тезлигининг модулини топиш мумкин.

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР.

1. Қаттиқ жисмнинг қандай ҳаракатига илгариланма ҳаракат деб аталади?
2. Илгариланма ҳаракат қилаётган қаттиқ жисм нуқталарининг траекторияси, тезлиги ва тезланиши ҳақидаги теорема қандай таърифланади?
3. Қаттиқ жисмнинг эгри чизиқли илгариланма ҳаракатига мисоллар келтиринг?
4. Қаттиқ жисмнинг қўзғалмас ўқ атрофидаги айланма ҳаракат таърифини айтинг? Бу ҳаракатга мисоллар келтиринг?
5. Жисмнинг бурчак тезлик ва бурчак тезланиши нима? Уларнинг ўлчов бирлиги қандай?
6. Қаттиқ жисмнинг қандай айланишига текис айланиш дейилади?
7. Жисмнинг бир минутдаги айланишлар сони билан бурчак тезлиги орасида қандай боғланиш мавжуд?
8. Жисмнинг қандай айланишига текис ўзгарувчан айланиш дейилади?
9. Текис ўзгарувчан айланма ҳаракатда жисмнинг бурчак тезлиги ва айланиш бурчаги қайси формула билан топилади?
10. Айланма ҳаракат қилаётган қаттиқ жисм нуқтасининг тезлигининг модул ва йўналиши қандай топилади?
11. Қўзғалмас ўқ атрофида айланаётган қаттиқ жисм нуқтасининг уринма ва нормал тезланиши қандай аниқланади? Бу тезланишлар қандай йўналган бўлади?

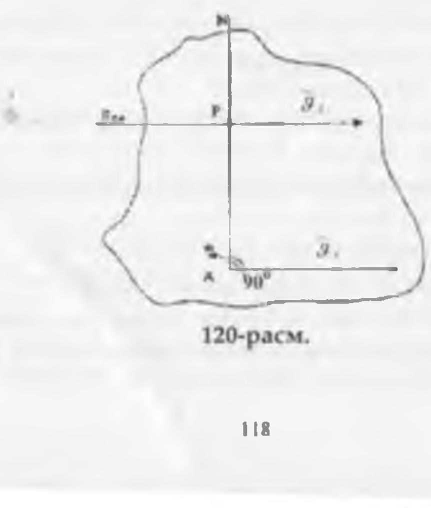
12. Қўзғалмас ўқ атрофида айланаётган қаттиқ жисм нуқтасининг тезланиши қандай аниқланади? Бу тезланишнинг йўналиши қандай?
13. Қаттиқ жисмнинг қандай ҳаракатига текис параллел ҳаракат дейилади?
14. Текис параллел ҳаракат нечта тенглама билан аниқланади?
15. Жисмнинг текис параллел ҳаракатини қандай икки ҳаракатга ажратиш мумкин?
16. Жисмнинг бурчак тезлиги ва бурчак тезланиши қутбга боғлиқми?
17. Текис шакл нуқтасининг тезлиги қандай аниқланади?

18. $\bar{v}_B=\bar{v}_A+\bar{v}_{BA}$ тенгликдаги v_{BA} тезликнинг модули қандай топилади? У қандай йўналган?
19. Текис шакл икки нуқтаси тезлигининг проекцияси ҳақидаги теоремани таърифланг?

56-§. ТЕЗЛИКЛАР ОНИЙ МАРКАЗИ

Агар *(S)* текис шакл илгариланма ҳаракатда бўлса, бу шаклда ҳар онда тезлиги нолга тенг бўлган битта нуқта мавжуд бўлади. Тезлиги нолга тенг бўлган бундай нуқтага тезликлар оний маркази дейилади. Текис шаклнинг тезлиги нолга тенг бўлган битта нуқтанинг мавжудлигини исботлаймиз. Текис шакл бирор *A* нуқтасининг тезлиги $\bar{v}_A$ ва шу *A* нуқта атрофидаги айланма ҳаракатнинг бурчак тезлиги ω берилган бўлсин (120-расм). *A* нуқтани қутб деб қабул қиламиз.

Қутбдан айланма ҳаракат йўналишида $\bar{v}_A$ га перпендикуляр *AN* тўғри чизиғи ўтказилади. *A* нуқтадан бошлаб *AN* тўғри чизиққа *AP* кесма қўйилади.



120-расм.

$$PA = \frac{\upsilon_A}{\omega}$$

P нуқтанинг тезлиги қуйидагича ёзилади.

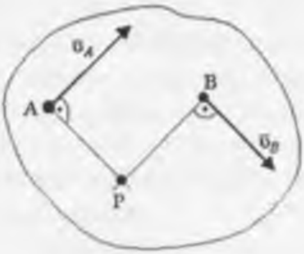
$$\bar{\upsilon}_P = \bar{\upsilon}_A + \bar{\upsilon}_{PA} \qquad (159)$$

P нуқтанинг *A* қутб атрофида айланишдаги тезлигининг модули топилади.

$$\upsilon_{PA} = \omega \cdot AP = \omega \frac{\upsilon_A}{\omega} = \upsilon_A \qquad \upsilon_{PA} = \upsilon_A$$

P нуқтада $\bar{\upsilon}_{PA}$ вектори $\bar{\upsilon}_A$ га бир тўғри чизиқ бўйлаб қарама-қарши йўналган бўлади.

У ҳолда (159)-тенгликдан $\upsilon_P = 0$ бўлиши келиб чиқади. Демак, *P* нуқта тезликлар оний маркази бўлади. Тезликларнинг оний марказини топиш учун текис шаклда ётган икки ихтиёрий *A* ва *B* нуқталар тезликларининг йўналиши берилган бўлиши керак. Шу нуқталардан уларнинг тезликларига туширилган перпендикулярнинг кесишган нуқтаси тезликларнинг оний маркази бўлади (121-расм). *P* нуқта тезликларининг оний маркази, бу нуқтанинг тезлиги нолга тенг. $\upsilon_P = 0$



121-расм.

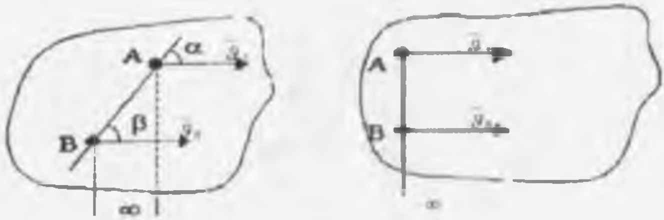
57-§. ТЕЗЛИКЛАР ОНИЙ МАРКАЗИ ЕРДАМИДА ТЕКИС ШАКЛ НУҚТАЛАРИНИНГ ТЕЗЛИГИНИ ТОПИШ

Шаклда кўрсатилган ҳолатда *S* текис шаклда ётган *P* нуқта тезликларнинг оний маркази бўлсин. Шаклдаги ихтиёрий *A* ва *B* нуқталарнинг тезликларини топиш керак (122-расм). Бунинг учун *P* нуқтани қутб деб қабул қиламиз. *A* ва *B* нуқталарнинг тезликлари учун қуйидаги формулаларни ёзамиз.

$$\bar{\upsilon}_A = \bar{\upsilon}_P + \bar{\upsilon}_{PA}$$

$$\bar{\upsilon}_B = \bar{\upsilon}_P + \bar{\upsilon}_{BP}$$

текис шакл барча нуқталарининг тезликлари ўзаро тенг ва параллел бўлади, яъни текис шакл оний илгариланма ҳаракатда бўлади.



a) b)

125-расм.

5. Агар текис шакл бирор қўзғалмас сирт устида сирпанмасдан юмалаб ҳаракат килса, у ҳолда урининш нуқтаси тезликларнинг оний маркази бўлади. *P* урининш нуқтаси тезликларнинг оний маркази бўлади $\upsilon_P = 0$ (123-расм).

59-§. ТЕКИС ШАКЛ НУҚТАСИНИНГ ТЕЗЛАНИШИНИ АНИҚЛАШ

Теорема: Текис шакл ихтиёрий *B* нуқтасининг тезланиши қутб тезланиши билан мазкур нуқтанинг қутб атрофида айланишидан ҳосил бўлган тезланишларнинг геометрик йиғиндисига тенг.

Исбот: Текис шакл ихтиёрий *B* нуқтасининг тезлигини аниқлайдиган формула берилган бўлсин.

$$\overline{\upsilon}_B = \overline{\upsilon}_A + \overline{\upsilon}_{BA} \qquad (163)$$

B нуқтанинг тезланишини аниқлаш учун (163)-формуладан вақт бўйича ҳосила оламиз.

$$\frac{d\overline{\upsilon}_B}{dt} = \frac{d\overline{\upsilon}_A}{dt} + \frac{d\overline{\upsilon}_{BA}}{dt} \qquad (164)$$

бунда $\frac{d\overline{\upsilon}_B}{dt} = \overline{W}_B$; $\frac{d\overline{\upsilon}_A}{dt} = \overline{W}_A$; $\frac{d\overline{\upsilon}_{BA}}{dt} = \overline{W}_{BA}$ (165)

(165) ни (164) га қўямиз, у ҳолда

$$\overline{W}_B = \overline{W}_A + \overline{W}_{BA} \qquad (166)$$

(166)-формула билан текис шакл исталган *B* нуқтасининг тезланиши топилади.

Бунда $\overline{W}_A$ - А кутбнинг тезланиши. $\overline{W}_{BA}$ - В нуктанинг A кутб атрофида айланганда хосил бўлган тезланиши. $\overline{W}_{BA}$ тезланишини уринма ва нормал тезланишларга ажратамиз.

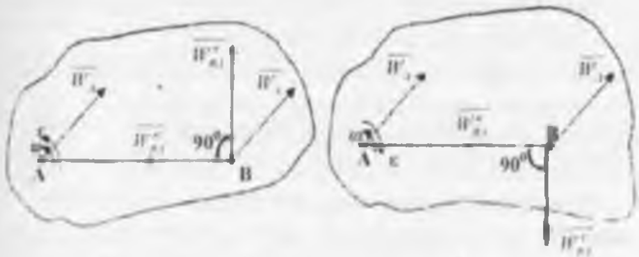
$$\overline{W}_{BA} = \overline{W}_{BA}^{\tau} + \overline{W}_{BA}^{n} \qquad (166')$$

Бунда $\overline{W}_{BA}^{\tau}$ ва $\overline{W}_{BA}^{n}$ - B нуктанинг A кутб атрофида айланишида хосил булган уринма ва нормал тезланишлар модули куйидагига тенг.

$$W_{BA}^{\tau} = \varepsilon \cdot AB \qquad W_{BA}^{n} = \omega^2 \cdot AB \qquad \text{бунда} \qquad W_{BA}^{\tau} \perp W_{BA}^{n} \qquad W_{BA} = AB\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \qquad (167)$$

$\overline{W}_{BA}^{n}$ - тезланиш вектори хар доим AB масофа буйича B нуктадан A кутбга караб йуналган булади. $\overline{W}_{BA}^{\tau}$ тезланиш вектори B нуктадан AB га перпендикуляр йуналган булади.

$\overline{W}_{BA}^{\tau}$ - тезланиш векторининг йуналиши текис шаклнинг харакатига боглик булади. Агар текис шаклнинг харакати тезланувчан бўлса, яъни $\varepsilon>0$, $\overline{W}_{BA}^{\tau}$, тезланиш шакл айланишига караб йўналган булади. Акс холда $\varepsilon<0$ шакл айланишига тескари йуналади (126-расм a,b). Демак $\overline{W}_{BA}^{\tau}$ тезланишининг йуналиши бурчак тезланишининг йуналишига боглик. Бурчак тезланиши ε кайси томонга караб йўналса, $\overline{W}_{BA}^{\tau}$ тезланиш шу томонга караб йуналган булади.



a) b)

126-расм.

(166') ни (166) га куйиб B нуктанинг тезланиши топилади.

$$\overline{W}_B = \overline{W}_A + \overline{W}_{BA}^{\tau} + \overline{W}_{BA}^{n} \qquad (168)$$

Текис шакл хар кандай B нуктасининг тезланиши кутбнинг тезланиши билан B нуктанинг текис шакл билан бирга шу кутб атрофида айланишидан хосил булган уринма ва нормал тезланишларининг геометрик йигиндисига тенг булади.

Текис шакл ихтиёрий нуктаси тезланишининг катта ва йуналишини (168)-дан фойдаланиб аниклаш мураккаб булиши мумкин.

Бундай ҳолда W_B тезланишнинг бир бирига перпендикуляр йўналган ўқлардаги проекциялари топилади. Бунинг учун ўқлардан бирини, масалан X ўқини, айланиш радиуси *(AB)* бўйлаб, иккинчисини эса унга перпендикуляр равишда ўтказиб, (168) ни шу ўқларга проекциялаймиз:

Тезланиш W_B нинг координата ўқларидаги проекциялари маълум бўлса, унинг модули ва йўналиши қуйидаги формулалардан топилади.

$$W_B = \sqrt{W_{Bx}^2 + W_{By}^2} \tag{169}$$

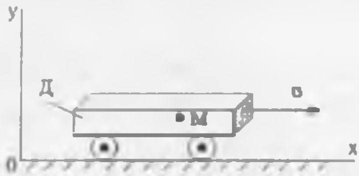
$$\cos(\overline{W}_B, x) = \frac{W_{Bx}}{W_B}; \qquad \cos(\overline{W}_B, y) = \frac{W_{By}}{W_B}; \tag{170}$$

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР

1. Тезликлар оний маркази деб нимага айтилади?
2. Текис шакл икки нуқтаси тезликларининг йўналиши маълум бўлса, тезликлар оний марказини қандай аниқлаш мумкин?
3. Тезликлар оний маркази чексизликда бўлган пайтда текис шакл нуқталарининг тезлигини аниқланг?
4. Бурчак тезлиги қандай аниқланади?
5. Текис шаклнинг *A* ва *B* икки нуқтаси берилган. Бунда *A* нуқтасининг тезлиги *AB* га перпендикуляр йўналган эканлиги маълум В нуқтанинг тезлиги қандай йўналади?
6. Текис шакл ихтиёрий нуқтасининг тезланиши қандай аниқланади?
7. Уринма тезланишнинг катталиги қандай топилади?
8. Уринма тезланишнинг йўналишини аниқланг?
9. Нормал тезланишнинг катталиги қандай топилади?
10. Нормал тезланиши йўналишини аниқланг?
11. $\overline{W}_B = \overline{W}_A + \overline{W}^{\tau}_{BA} + \overline{W}^{n}_{BA}$ тенгликдаги W^{τ}_{BA} ва W^{n}_{BA} тезланишларнинг модули қандай топилади? Улар қандай йўналган?

60-§. НУҚТАНИНГ МУРАККАБ ҲАРАКАТИ. НУҚТАНИНГ НИСБИЙ, КЎЧИРМА ВА АБСОЛЮТ ҲАРАКАТИ

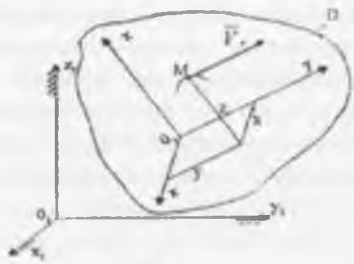
Агар нуқта ёки қаттиқ жисм бир вақтда икки ёки ундан кўп ҳаракатда иштирок қилса, нуқтанинг ёки қаттиқ жисмнинг бундай ҳаракатига мураккаб ёки абсолют ҳаракат дейилади. Масалаларни ечишда нуқта ёки жисмнинг ҳаракатини икки ва ундан ортиқ координата системаларига нисбатан текширишга тўғри келади. Бундай ҳолда координата системаларидан бири қўзғалмас деб олиниб, иккинчиси эса унга нисбатан маълум қонунга мувофик ҳаракат қилади деб қаралади. Бу ҳолда нуқта қўзғалмас координаталар системасига нисбатан мураккаб ҳаракатда булади. Масалан: Автобус еки поезд ичидаги пассажирнинг ҳаракати. Бу мисолда ер билан богланган координаталар системаси қўзғалмас булиб, поезд, автобус билан богланган координаталар системаси кузғалувчи координаталар системасидан иборат булади. М нуктанинг вагонга нисбатан килган ҳаракатига нисбий ҳаракат дейилади. Унинг вагон билан бирга ерга нисбатан килган ҳаракатига кучирма ҳаракат дейилади. М нуқтанинг бевосита ерга нисбатан килган ҳаракати мураккаб ҳаракат булади (127-расм).



127-расм.

Маълум бир ҳаракат қилувчи *Д* жисм берилган бўлсин. *Oxyz - D* жисмга маҳкам ўрнатилган қўзғалувчи система. O_1, x_1, y_1, z_1 - қўзғалмас координаталар системаси (127-расм.) *М* нуқтанинг қўзғалувчи координата системасига нисбатан қилган ҳаракатига нисбий ҳаракат дейилади.

Нуқтанинг нисбий ҳаракатдаги тезлиги ва тезланишига шу нуқтанинг нисбий тезлиги ва нисбий тезланиши дейилади. Нуқтанинг нисбий тезлигини υ_r билан, нисбий тезланишини W_r билан белгилайди. М нуқтанинг қўзғалувчи система билан ёки *D* жисм билан бирга қўзғалмас системага нисбатан килган ҳаракатига кўчирма ҳаракат дейилади. М нуктанинг кўчирма ҳаракатдаги тезлиги ва тезланишига шу нуктанинг кўчирма тезлиги ва кўчирма тезланиши дейилади. Нуқтанинг кўчирма тезлиги υ_e билан кўчирма тезланиши W_e билан белгиланади. *М* нуктанинг бевосита қўзғалмас координаталар системасига нисбатан ҳаракати мураккаб ҳаракат ёки абсолют ҳаракат дейилади. Нуқтанинг абсолют ёки мураккаб ҳаракатдаги тезлигига абсолют тезлик, тезланишига абсолют тезланиш дейилади. Абсолют тезлиги υ_a билан, абсолют тезланиши W_a билан белгиланади.



128-расм.

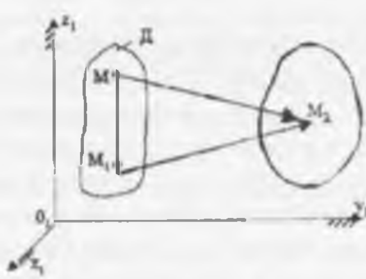
61-§. ТЕЗЛИКЛАРНИ ҚЎШИШ ҲАҚИДАГИ ТЕОРЕМА

__Теорема:__ Нуқтанинг абсолют тезлиги унинг нисбий ва кўчирма тезликларининг геометрик йиғиндисига тенг.

$$\overline{\upsilon}_a = \overline{\upsilon}_r + \overline{\upsilon}_e \qquad (171)$$

__Исбот:__ Қўзғалмас тўғри бурчакли O_1, x_1, y_1, z_1 координата системасига нисбатан ҳаракат қилаётган D жисм берилган бўлсин. Шу жисмга нисбатан M нуқта ҳаракат қилади. D жисмнинг t ва t_1 вақтлардаги ҳолатлари берилган бўлсин (129-расм.)

Δt вақт ичида M нуқта D жисмга нисбатан $\overline{MM_1}$ масофага, жисм билан бирга эса $\overline{MM_2}$ масофага силжийди.



129 – расм.

Бунда $\overline{MM_1}$ ва $\overline{M_1M_2}$ мос равишда M нуқтанинг нисбий ва кўчирма силжиш векторлари, $\overline{MM_2}$ нуқтанинг абсолют силжиш вектори. Расмдан:

$$\overline{MM_2} = \overline{MM_1} + \overline{M_1M_2} \qquad (171)$$

(171) - формуланинг иккала қисмини Δt га бўламиз:

$$\frac{\overline{MM_2}}{\Delta t} = \frac{\overline{MM_1}}{\Delta t} + \frac{\overline{M_1M_2}}{\Delta t} \qquad (172)$$

(172)-формуладаги

$$\frac{\overline{MM_2}}{\Delta t}, \ \frac{\overline{MM_1}}{\Delta t} \ \text{ва} \ \frac{\overline{M_1M_2}}{\Delta t}$$

Мос равишда M нуқтанинг Δt вақт ичидаги ўртача абсолют нисбий ва кўчирма тезлиги бўлади.

Нуқтанинг бирор ихтиерий t вақтдаги тезлигини топиш учун (172) ни $\Delta t \to 0$ интилтириб, лимит оламиз:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{MM_2}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{MM_1}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{M_1M_2}}{\Delta t} \qquad (172`)$$

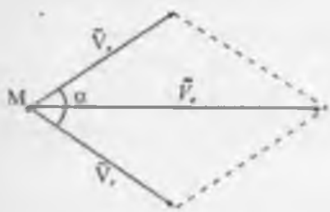
бунда $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{MM_2}}{\Delta t} = \bar{\upsilon}_a$, $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{MM_1}}{\Delta t} = \bar{\upsilon}_r$, $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{M_1M_2}}{\Delta t} = \bar{\upsilon}_e$.

Демак (172`) формулани қуйидагича ёзамиз.

$$\overline{\upsilon}_a = \overline{\upsilon}_r + \overline{\upsilon}_e \qquad (173)$$

Теорема исбот қилинди. (173)-формула нуқтанинг кўчирма ҳаракати илгариланма ва айланма ҳаракатлардан иборат бўлган ҳолларда ҳам ўринлидир.

Абсолют тезликнинг модулини ва йўналишини аниқлаш учун нисбий ва кўчирма тезликлардан параллелаграм ясаш керак (130-расм).



130-расм.

Абсолют тезликнинг модули қуйидаги формула билан аниқланади.

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_r^2 + \upsilon_e^2 + 2\upsilon_r\upsilon_e\cos\alpha} \qquad (173)$$

Бунда α, υ_r ва υ_e тезликлар орасидаги бурчак.

1) Агар α=0 бўлса, υ_r билан υ_e тезликлар бир тўғри чизиқ бўйлаб бир томонга йўналган бўлса, абсолют тезлик қуйидагича топилади.

$$\upsilon_a = \sqrt{\upsilon_r^2 + \upsilon_e^2 + 2\upsilon_r\upsilon_e} = \upsilon_r + \upsilon_e$$

2) Агар α=180° бўлса, яъни υ_r билан υ_e бир тўғри чизиқ бўйлаб қарама қарши йўналган бўлса абсолют тезлик қуйидагича топилади.

$$\upsilon_a = \sqrt{\upsilon_r^2 + \upsilon_e^2 - 2\upsilon_r\upsilon_e} = \upsilon_r - \upsilon_e$$

3) Агар α=90° бўлса, абсолют тезлик модули қуйидагига тенг бўлади.

$$\upsilon_a = \sqrt{\upsilon_r^2 + \upsilon_e^2}$$

Агар нисбий, кўчирма ва абсолют тезликларидан ихтиёрий иккитаси маълум бўлса, учунчи номаълум тезликни тезликларни қўшиш ҳақидаги теоремадан фойдаланиб аниқлаш мумкин.

62-§. НУҚТАНИНГ КЎЧИРМА ҲАРАКАТИ АЙЛАНМА ҲАРАКАТДАН ИБОРАТ БЎЛГАН ҲОЛДА ТЕЗЛАНИШЛАРНИ ҚЎШИШ ТЕОРЕМАСИ

Теорема: Нуқтанинг кўчирма ҳаракати айланма ҳаракатдан иборат бўлган ҳолда нуқтанинг абсолют тезланиши унинг нисбий, кўчирма ва Кориолис тезланишларнинг геометрик йиғиндисига тенг бўлади.

$$\overline{W}_a = \overline{W}_r + \overline{W}_e + \overline{W}_k \qquad (176)$$

Бунда $\overline{W}_e, \overline{W}_r, \overline{W}_k$ лар мос равишда нуқтанинг кўчирма нисбий ва кориолис тезланишлари.

$\overline{W}_r$ ва $\overline{W}_e$ тезланишларни уринма ва нормал тезланишларга ажратиш мумкин.

$$\overline{W}_r = \overline{W}_r^\tau + \overline{W}_r^n \qquad (177)$$

W_r^τ нинг модули қуйидагига тенг

$$W_r^\tau = \frac{d\upsilon_r}{dt} = \frac{d^2S_r}{dt^2};$$

W_r^n нинг модули:

$$W_r^n = \frac{\upsilon_r^2}{\rho}$$

Агар нуқтанинг нисбий ҳаракати тўғри чизикли ҳаракатдан иборат бўлса, траекториянинг эгрилик радиуси $\rho=\infty$ га тенг бўлади. Бу ҳолда W_r^n=0 бўлади.

$$W_e = W_e^\tau + W_e^n \qquad (178)$$

$\overline{W}_e^\tau$ нинг модули қуйидагига тенг

$$W_e^n = \xi_e \cdot h$$

W_e^{-r} нинг модули

$$W_e^n = \omega_e^2 \cdot h$$

(177) ва (178) ларни (176) га қўямиз, у ҳолда

$$W_a = W_r^n + W_r^\tau + W_e^\tau + W_e^n + W_k \qquad (179)$$

Кўчирма ҳаракат айланма ҳаракатдан иборат бўлган ҳолда нуқтанинг абсолют тезланиши (179)-формуладан топилади.

W_a абсолют тезланишининг модулини ва йўналишини аниқлаш учун (179) ни x,y,z координата ўқларига проекциялаб, унинг шу ўқлардаги W_{ax}, W_{ay}, W_{az} проекцияларини топиш керак. Абсолют тезланишининг модулини қуйидаги формула билан аниқлаймиз:

$$W_a = \sqrt{W_{ax}^2 + W_{ay}^2 + W_{az}^2} \qquad (180)$$

Кўчирма ҳаракат илгарилама ҳаракат бўлганда нуқтанинг абсолют тезланиши шу нуқтанинг нисбий ва кўчирма тезланишларининг геометрик йиғиндисига тенг бўлади.

Шундай қилиб, кўчирма ҳаракат илгариланма ҳаракат бўлганда, нуқтанинг абсолют тезланиши нисбий тезланиш $\overline{W_r}$ ва кўчирма тезланиш $\overline{W_e}$ лардан қурилган параллелограмнинг диагонали билан ифодаланади. Бу ҳолда абсолют тезланишининг модули қуйидагича топилади.

$$W_a = \sqrt{W_r^2 + W_e^2 + 2W_r W_e \cos\alpha} \qquad (180')$$

Бунда α W_r ва W_e векторлари орасидаги бурчак.

63-§. КОРИОЛИС ТЕЗЛАНИШИНИНГ МОДУЛИНИ ВА ЙЎНАЛИШИНИ АНИҚЛАШ

Кориолис тезланиши кўчирма ҳаракат бурчак тезлиги ва нисбий ҳаракат тезликлари векторли кўпайтмасининг иккиланганига тенг.

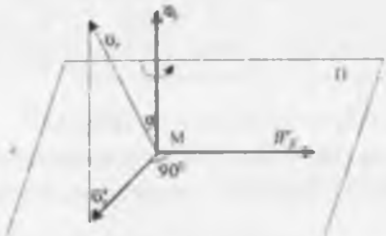
$$W_k = 2(\overline{\omega}_e \times \overline{\upsilon}_r) \qquad (181)$$

Агар ω_e билан υ_r орасидаги бурчак катталигини α билан белгиласак, Кориолис тезланишининг модули қуйидагича тенг бўлади.

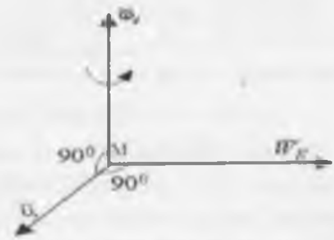
$$W_k = 2\omega_e \upsilon_r \sin\alpha \qquad (182)$$

Кориолис тезланишининг йўналишини аниқлаймиз. М нуқтанинг нисбий тезлиги υ_r берилган бўлсин. Кариолис тезланишининг йўналишини аниқлаш учун M нуқтадан ω бурчак тезлик векторига перпендикуляр қилиб, Π текислиги ўтказилади. Нисбий тезлик, $\bar{\upsilon}_r$ ни шу текисликка проекциялаймиз, υ_r' проекцияни M нуқта атрофида айланиш йўналишига қараб, 90^0 бурчакка бурсак Кориолис тезланишининг йўналиши келиб чиқади (131-расм). Агар $\omega \perp \upsilon_r$ бўлса (132-расм), $\sin\alpha=1$ бўлади. У холда Кориолис тезланиши қуйидагича бўлади.

$$W_k = 2\omega_e \upsilon_r \qquad (183)$$



131-расм.



132-расм.

Нуқтанинг Кориолис тезланиши қуйидаги холларда нолга тенг бўлади.

1. Кўчирма харакат илгариланма харакат бўлса, бу холда $\omega_e=0$ шунинг учун $W_k=0$ бўлади.

Кўчирма харакат илгариланма харакат бўлганда нуқтанинг абсолют тезланиши шу нуқтанинг нисбий ва кўчирма тезланишларини геометрик йиғиндисига тенг бўлади.

$$W_a = W_r + W_e \qquad (184)$$

2. Нуқтанинг нисбий тезлиги $\upsilon_r=0$ га тенг бўлса, $\upsilon_r=0$ $W_k=0$.

3. ω ва $\bar{\upsilon}_r$ векторлар ўзаро паралел бўлса, бу холда $\alpha=0^0$, $\alpha=180^0$ $W_k=0$ бўлади.

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР.

1. Нуқтанинг нисбий харакатини айтинг?
2. Нуқтанинг кўчирма харакатини айтинг?
3. Нуқтанинг абсолют харакатини айтинг?
4. Тезликларни қўшиш хақидаги теоремани таърифланг?
5. Абсолют тезликнинг миқдори қандай аниқланади?
6. Абсолют тезликнинг йўналиши қандай аниқланади?
7. Тезланишларни қўшиш хақидаги теоремани таърифланг?

8. Кўчирма ҳаракат илгариланма бўлганда нуқтанинг абсолют тезланиши қандай аниқланади?
9. Кўчирма ҳаракат айланма бўлганда нуқтанинг абсолют тезланиши қандай аниқланади?
10. Кориолис тезланишининг катталиги қандай аниқланади?
11. Кориолис тезланишининг йўналишини аниқланг?
12. Қандай ҳолларда нуқтанинг Кориолис тезланиши нолга тенг бўлади.

ДИНАМИКА.

64-§. ДИНАМИКАНИНГ АСОСИЙ ТУШУНЧАЛАРИ

Назарий механиканинг динамика бўлимида жисмларнинг ҳаракати уларнинг массасига ва ҳаракатни вужудга келтирувчи кучларга боғлиқ равишда текширилади.

Жисм ҳаракатланганда унга ўзгармас кучлардан ташқари миқдор ва йўналиш жиҳатидан ўзгарадиган кучлар ҳам таъсир этади. Жисмга таъсир қилувчи кучлар вақтга, жисм ҳолатига ва унинг тезлигига маълум муносабатда боғлиқ бўлади.

Масалан, электровоз реостатини кетма-кет улашда ёки узишда ҳосил бўладиган тортиш кучи вақтга боғлиқ, суюқлик ёки ҳавонинг қаршилик кучи эса жисмнинг тезлигига боғлиқ бўлади. Демак, умумий ҳолда жисмга таъсир этувчи кучлар вақтга, жисмнинг ҳолатига ва тезлигига боғлиқ бўлади.

$$\bar{F} = \bar{F}(t, r, \upsilon)$$

бунда t-вақт, r-нуқтанинг ҳолатини аниқловчи радиус-вектор, υ жисм тезлиги.

Жисмнинг қўйилган кучлар таъсирида ўз тезлигини тез ёки секин ўзгартириш хусусияти жисмнинг инертлиги дейилади. Жисмнинг инертлигини миқдор жиҳатидан ифодаловчи физик катталик жисмнинг массаси дейилади. Механикада жисмнинг массаси ўзгармас, сколяр ва мусбат катталик деб қаралади. Динамикада дастлаб жисмларнинг ўлчамлари ва массаларининг тақсимланишини эътиборга олмаган ҳолда уларнинг ҳаракатини ўрганиш учун моддий нуқта тушунчаси киритилади. Ҳаракатини ўрганишда ўлчамлари аҳамиятга эга бўлмаган, лекин массага эга бўлган жисм моддий нуқта дейилади.

Динамикада жисмнинг ҳаракатини ўрганишни, одатда, унинг нуқтасининг ҳаракатини ўрганишдан бошланади.

Динамика икки қисмга бўлинади:

1. Моддий нуқта динамикаси
2. Механик система ва қаттиқ жисм динамикаси.

Динамикада қуйидаги иккита масала ечилади:

1. Нуқта ёки системанинг ҳаракати берилган, шу нуқта ёки системага таъсир қилувчи кучни топиш керак.
2. Нуқта ёки системага таъсир қилувчи кучлар берилган, нуқта еки системанинг ҳаракатини аниқлаш керак.

65-§. ДИНАМИКАНИНГ АСОСИЙ ҚОНУНЛАРИ

Механика қонунлари жисмларнинг тезликлари ёруғлик тезлигидан анча кичик бўлган ҳолда ўринли бўлади. Динамика қуйидаги 4 та қонунга асосланган:

1-қонун (инерция қонуни)

Агар нуқтага куч таъсир этмаса нуқта ўзининг тинч ҳолатини ёки тўғри чизиқли текис ҳаракат ҳолатини сақлайди.

Инерция қонунига кўра $\bar{F}=0$ бўлса, $\bar{w}=0$ бўлади, $\bar{\upsilon}=const$ бўлади. Бу ерда $\bar{\upsilon}$ – моддий нуқтанинг тезлик вектори, w - тезланиш вектори, $\bar{F}$ -куч вектори.

2-қонун (динамиканинг асосий қонуни).

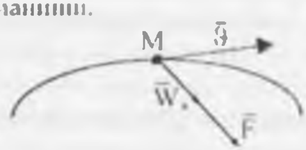
Нуқтанинг куч таъсирида олган тезланиши билан массасининг кўпайтмаси миқдор жиҳатидан шу кучга тенг бўлиб куч билан бир хил йўналишда бўлади.

$$F=mw \qquad (186)$$

Бунда: F - куч миқдори;

m - нуқтанинг массаси;

w- нуқтанинг тезланиши.



133-расм.

Эркин тушаётган жисмнинг оғирлик кучи унинг массаси билан эркин тушиш тезланишининг кўпайтмасига тенг.

$$P=mg$$

Жисмнинг массаси қуйидагича аниқланади:

$$m = \frac{P}{g} \qquad (187)$$

Бунда $g=9{,}81\ м/с^2$ - эркин тушиш тезланиши.

(186)- нинг вектор кўриниши қуйидагича ёзилади.

$$m\bar{w} = \bar{F} \qquad (188)$$

Кинематикадан маълумки нуқтанинг тезланиши қуйидагига тенг.

$$\bar{w} = \frac{d\bar{v}}{dt}; \qquad \bar{w} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}, \qquad \text{у холда:}$$

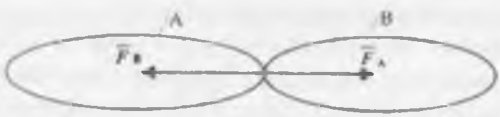
(188)-тенглама қуйидагича ёзилади

$$m\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \bar{F} \qquad m\frac{d\bar{V}}{dt} = \bar{F} \qquad (189)$$

(188)- ва (189)- тенгликка нуқта динамикасининг асосий тенгламаси дейилади.

3-қонун (таъсир ва акс таъсир қонуни)

Ҳар қандай таъсир миқдор жиҳатидан ўзига тенг бўлган ва бир тўғри чизиқ бўйлаб тескари томонга йўналган акс таъсирни вужудга келтиради.



134-расм.

A жисм ***B*** жисмга F_A куч билан таъсир этса, ***B*** жисм хам ***A*** жисмга F_B куч билан таъсир қилади.

$$\bar{F}_A = -\bar{F}_B$$
$$|\bar{F}_A| = |\bar{F}_B| \qquad (190)$$

Бу ерда F_A ва F_B кучлари ўзаро мувозанатлашмайди, чунки кучлар хар хил жисмга қўйилган.

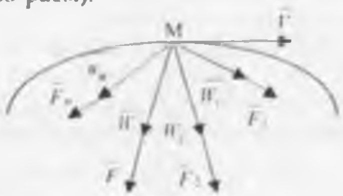
4-қонун (кучлар таъсирининг эркинлик қонуни)

Бир нечта куч бирданига таъсир этганда нуқтанинг олган тезланиши шу кучларнинг хар бири алохида-алохида таъсир этганда олган тезланишларининг геометрик йиғиндисига тенг.

$$\bar{w} = \bar{w}_1 + \bar{w}_2 + \bar{w}_3 + \ldots + \bar{w}_n \qquad (191)$$

Бунда $\bar{w}$ – нуқтанинг $F_1, F_2, F_3, \ldots, F_n$ кучлари бирданига таъсир этганда олган тезланиши.

$\overline{w}_1, \overline{w}_2, \overline{w}_3 ... \overline{w}_n$ - шу кучларнинг ҳар бири алохида-алохида таъсир этганда олган тезланиши (135-расм).



135-расм.

(191)-тенгламани иккала кисмини нуктанинг массасига кўпайтирамиз.

$$m\overline{w} = m\overline{w}_1 + m\overline{w}_2 + m\overline{w}_3 + ... + m\overline{w}_n$$

$$m\overline{w} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3 + ... + \overline{F}_n$$

ёки
$$m\overline{w} = \sum \overline{F}_k \qquad (192)$$

Классик механика конунлари ўринли бўлган саноқ системаси инерциал система дейилади. Техника масалаларини ечишда инерциал система сифатида Ер билан бевосита боғланган система олинади.

Механик ўлчов бирликлари системаси

Ҳамма механик катталикларни ўлчаш учун 3 та асосий ўлчов бирликларини киритиш етарлидир. Булардан иккитаси учун вақт ва узунлик бирликлари олинишини кинематика бўлимидан маълум. 3-ўлчов бирлиги сифатида масса ёки кучнинг ўлчов бирликлари олинади.

Механикада бир-биридан фарқ қилувчи икки турдаги бирликлар системаси киритилади.

Биринчи тур бирликлар системаси.

Халқаро СИ бирликлар системасининг таркибий қисми бўлган МКС системаси кенг қўлланилади. Бу системада асосий ўлчов бирликлари учун қуйидаги бирликлар олинади:

1. Узунлик бирлиги – 1 метр (м)
2. Масса бирлиги – 1 килограмм (кг)
3. Вақт бирлиги – 1 секунд (сек)

Қолган барча механик катталикларнинг бирлиги асосий бирликлардан ҳосилавий бирлик сифатида олинади.

Масалан, куч бирлиги учун 1 ньютон (Н) қабул қилинади. 1Н=кгм/с^2, яъни 1кг массага 1м/с^2 тезланиш берадиган куч бирлиги 1Н га тенг.

Иккинчи тур бирликлар системаси.

Техник бирликлар системаси деб аталувчи МКГСС системаси ҳам қўлланилади. Бу системада асосий ўлчов бирликлари учун қуйидаги бирликлар қабул қилинади.

1. Узунлик бирлиги - 1 метр (м)
2. Куч бирлиги – 1 килограмм куч (кгк)
3. Вақт бирлиги – 1 секунд (сек)

Ҳар қандай масалани ечишда фақат битта бирликлар системасидан фойдаланиш лозим.

66-§. МОДДИЙ НУҚТА ҲАРАКАТИНИНГ ДЕКАРТ КООРДИНАТАЛАРИДАГИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАРИ

Массаси m га тенг бўлган M нуқта $\overline{F}$ кучи таъсирида қўзғалмас $Oxyz$ координаталар системасига нисбатан ҳаракатланаётган бўлсин. $\overline{F}$ - нуқтага қўйилган барча кучларнинг тенг таъсир этувчиси (136-расм).

Нуқта динамикасининг асосий тенгламаси гонамиз:

$$m\overline{w} = \overline{F} \qquad (193)$$

$\overline{w} = \frac{d\overline{\vartheta}}{dt} = \frac{d^2\overline{r}}{dt^2}$ бўлгани учун (193) формула қуйидагича ёзилади.

$$m\frac{d\overline{\vartheta}}{dt} = \overline{F}; \qquad (194)$$

$$m\frac{d^2\overline{r}}{dt^2} = \overline{F} \qquad (195)$$

(194)- ёки (195)- тенгламалар эркин моддий нукта ҳаракати дифференциал тенгламасининг векторли ифодаси дейилади.

(161)- тенглама координата ўқларига проекциялаймиз:

$$m\frac{dV_x}{dt} = F_x; \quad m\frac{dV_y}{dt} = F_y; \quad m\frac{dV_z}{dt} = F_z; \quad (196)$$

бунда $\vartheta_x, \vartheta_y, \vartheta_z$ - ϑ тезлик векторининг x,y,z ўқларидаги проекцияси

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \dot{X}, \quad V_y = \frac{dy}{dt} = \dot{Y}, \quad V_z = \frac{dz}{dt} = \dot{Z}, \qquad (197)$$

F_x, F_y, F_z-F кучларининг x,y,z ўқларидаги проекциялари

(196)- формулага нуқта ҳаракатининг Декарт координаталардаги дифференциал тенгламалари дейилади.

(197)- ни (196)- га қўйсак қуйидаги тенгламалар ҳосил бўлади.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x; \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y; \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = F_z; \quad (198)$$

ёки $\qquad m\ddot{x} = F_x; \qquad m\ddot{y} = F_y; \qquad m\ddot{z} = F_z; \qquad (199)$

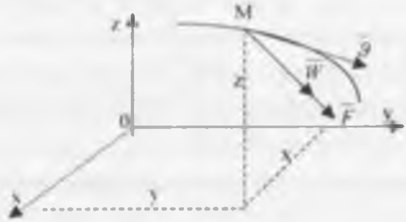
(198)- ва (199)- формулалар ҳам нуқта ҳаракатининг Декарт координаталаридаги дифференциал тенгламаларни ифодалайди. Агар нуқта бир текисликда *(xoy)* ҳаракат қилса, (198)-тенглама қуйидагича ёзилади:

$$m\frac{d\vartheta_x}{dt} = F_x; \qquad m\frac{d\vartheta_y}{dt} = F_y; \qquad (200)$$

Агар нуқта тўғри чизиқли ҳаракат қилса, (196)-тенглама қуйидагича ёзилади:

$$m\frac{d\vartheta_x}{dt} = F_x; \qquad (201)$$

(201)-тенгламага тўғри чизиқли ҳаракатининг дифференциал тенгламаси дейилади.



136-расм.

Массаси m га тенг бўлган моддий нуқтанинг ҳаракати табиий усулда берилса, унга таъсир этувчи кучнинг табиий координата ўқларидаги проекцияларини қуйидагича аниқлаш мумкин:

$$mw_\tau = F_\tau \qquad mw_n = F_n$$

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = F_\tau \qquad m\frac{\upsilon^2}{\rho} = F_n \qquad mw_b = 0 \qquad (201')$$

(201')-тенгламаларга моддий нуқта ҳаракатининг табиий координата ўқларидаги дифференциал тенгламалари дейилади.

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР.

1. *Динамика бўлими нимани ўрганади?*
2. Асосий тушунча ва таърифларни айтинг?
3. Масса деб нимага айтилади?
4. Моддий нуқта деб нимага айтилади?
5. Тезликка, вақтга ва масофага боғлиқ бўлган кучларга мисол келтиринг?

6. Механиканинг асосий қонунларини айтинг?
7. Инерционал саноқ системаси деб нимага айтилади?
8. Нуқта ҳаракатининг Декарт координаталардаги дифференциал тенгламаларини ёзинг?
9. Динамиканинг асосий тенгламасини ёзинг?
10. Нуқта учун динамиканинг икки асосий масаласини айтинг?

67-§. НУҚТА ДИНАМИКАСИНИНГ БИРИНЧИ МАСАЛАСИ ВА УНИ ЕЧИШ УСУЛИ

Нуқтанинг массаси ва ҳаракат тенгламалари берилган бўлсин.

$$x = f_1(t), y = f_2(t), z = f_3(t) \qquad (202)$$

Нуқтага таъсир этувчи кучнинг миқдори ва йўналишини топиш лозим бўлсин. Ҳаракатни вужудга келтирувчи кучнинг проекциялари аниқланади. Бунинг учун берилган тенгламалардан вақт бўйича икки маротаба ҳосила олинади.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f_1''(t); \quad \frac{d^2y}{dt^2} = f_2''(t); \quad \frac{d^2z}{dt^2} = f_3''(t); \qquad (203)$$

Нуқта ҳаракатининг декарт координаталардаги дифференциал тенгламаларига қўйилади:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x; \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y; \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = F_z; \qquad (204)$$

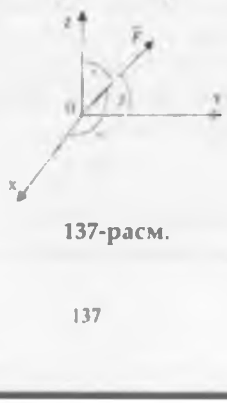
$$F_x = mf_1''(t); \quad F_y = mf_2''(t); \quad F_z = mf_3''(t); \qquad (205)$$

Нуқтага таъсир этувчи кучнинг миқдори қуйидагига тенг:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \qquad (206)$$

Нуқтага таъсир этувчи кучнинг йўналиши йўналтирувчи косинуслар ёрдамида топилади.

$$\cos\alpha = \frac{F_x}{F}; \cos\beta = \frac{F_y}{F}; \cos\gamma = \frac{F_z}{F} \qquad (207)$$



137-расм.

(208) дан вақт бўйича ҳосила олсак 6 та интеграллаш доимийларига боғлиқ қуйидаги учта функция ҳосил бўлади.

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= \dot{x}(t, C_1, C_2, C_3, c_4, C_5, C_6) \\
\dot{y} &= \dot{y}(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \qquad (209) \\
\dot{z} &= \dot{z}(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6)
\end{aligned}
$$

Бошланғич шартларни (208)- ва (209)- га қуйиб, 6 та интеграллаш доимийлари қатнашадиган 6 та тенгламалар системасини оламиз. Бу тенгламалар системасини биргаликда ечиб 6 та интеграллаш доимийларини аниқлаймиз.

$$c_i = c_i(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$$

Интеграллаш доимийлари топилган қийматларини (208)- га қуйиб, (209)- бошланғич шартларига мос бўлган нуқтанинг Декарт координаталардаги кинематик тенгламаларини оламиз.

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

Нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламасини нуқтага таъсир этувчи куч бир вақтда нуқта координатасига, тезлигига ва вақтга боғлиқ бўлганда интеграллаш мураккаб. Дифференциал тенгламани фақат қуйидаги ҳолларининг бирида интеграллаш мумкин.

1) Нуқтага таъсир этувчи куч ўзгармас бўлса, $\overline{F} = const$

2) Куч вақтнинг функцияси бўлса, $\overline{F} = \overline{F}(t)$

3) Куч масофанинг функцияси бўлса, $\overline{F} = \overline{F}(s)$.

4) Куч нуқта тезлигининг функцияси бўлса, $\overline{F} = \overline{F}(\vartheta)$

Нуқта динамикасининг иккинчи масаласига доир масалалар ечиш тартиби:

Моддий нуқта динамикасининг иккинчи асосий масаласи қуйидаги тартибда ечилади.

1. Инерциал саноқ системасини киритиб, координата ўқлари танлаб олинади.

2. Нуқтага таъсир этувчи ва боғланиш реакция кучлари чизмада кўрсатилади.

3. Нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламалари тузилади.

4. Нуқта ҳаракатининг бошланғич шартлари ёзилади.

$$
\begin{aligned}
x &= x_0, \vartheta_x = \vartheta_{0x} \\
y &= y_0, \vartheta_y = \vartheta_0 \\
z &= z_0, \vartheta_z = \vartheta_{0z}
\end{aligned}
$$

5. Тузилган тенгламаларнинг ҳар бири икки мартадан интегралланади.

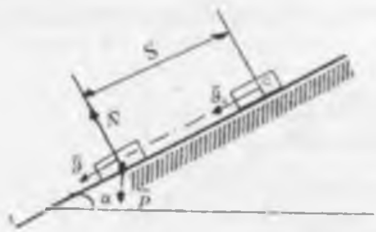
6. Интеграллашда ҳосил бўладиган ўзгармас миқдорлар бошланғич шартлардан фойдаланиб топилади.

7. Тузилган дифференциал тенгламаларнинг бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечими аниқланади ва изланаётган номаълумлар топилади.

Масала №3. Оғир жисм горизонтга 30^0 бурчак остида оғган силлиқ текислик бўйлаб пастга тушади. Агар жисмнинг тезлиги бошланғич пайтда 2м/с га тенг бўлган бўлса, жисм 9,6 М йўлни қанча вақтда ўтишни топилсин.

Ечиш.

Жисмга таъсир этувчи кучларнинг йўналишини чизмада кўрсатамиз.



138-расм.

Юк ҳаракатининг дифференциал тенгламасини тузамиз. Бунинг учун тўғри чизиқли ҳаракатнинг дифференциал тенгламасидан фойдаланамиз.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x; \quad m\frac{d\vartheta_x}{dt} = F_x;$$

чизмадан $F_x = P_x + N_x$, $N_x = 0$, $F_x = P\sin\alpha = mg\cdot\sin\alpha$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg\sin\alpha$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g\sin\alpha \qquad (210)$$

(210) ни интеграллаймиз

(219) тенглама моддий нуқта нисбий ҳаракатининг дифференциал тенгламасининг векторли кўриниши дейилади. (219) ни икки томонини $Oxyz$ координата ўқларига проекциялаймиз.

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x + N_x + F_{ex} + F_{kx} \\ m\ddot{y} &= F_y + N_y + F_{ey} + F_{ky} \\ m\ddot{z} &= F_z + N_z + F_{ez} + F_{kz} \end{aligned}\right\} \qquad (220)$$

(220) нуқта нисбий ҳаракати дифференциал тенгламасининг координата ўқларидаги проекциясини ифодалайди. Қуйидаги хусусий ҳолларни кўриб чиқамиз.

1. Кўзгалувчи саноқ системаси илгариланма ҳаракатда бўлсин. У ҳолда $\qquad W_e = 0, \; F_k = 0$

Моддий нуқта нисбий ҳаракатинингдифференциал тенгламаси

$$m\overline{W}_r = \overline{F} + \overline{N} + \overline{F}^e \qquad (221)$$

кўринишида ёзилади.

2. Қўзгалувчи саноқ система илгарилама ва тўгри чизиқли тенг ўлчовли ҳаракатда бўлсин.

$\overline{W}_e = 0 \quad \overline{W}_k = 0 \; \overline{F}_e = 0, \quad \overline{F}_k = 0$ булиб дифференциал тенглама қуйидагича езилади.

$$m\overline{W}_r = \overline{F} + \overline{N} \qquad (222)$$

3. Нуқта кўзгалувчи саноқ системасига нисбатан тўгри чизиқли ва тенг ўлчовли ҳаракатлансин ($\vartheta_r = const$) $v_r = 0$ бўлиб дифференциал тенглама қуйидаги кўринишда ёзилади

$$\overline{F} + \overline{N} + \overline{F}_e + \overline{F}_k = 0 \qquad (223)$$

4. Нуқта қўзгалувчи саноқ системасига нисбатан тинч ҳолатда бўлсин. Бу ҳолда $V_r = 0$, $W_r = 0$ $F_k = 0$ бўлади ва дифференциал тенглама кўринишида ёзилади.

$$F + N + Fe = 0 \qquad (224)$$

Яъни берилган кучлар, реакция кучлари ва кўчирма инерция кучлари ҳар онда ўз аро мувозанатланади.

(224) - тенглама моддий нуқта нисбий мувозанат тенгламасининг векторли кўринишини ифодалайди.

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР

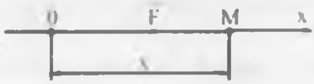
1. Нуқтанинг нисбий ва абсолют дифференциал тенгламалари орасида қандай фарқ бор?
2. Кўчирма инерция кучлари қайси формула билан топилади?

3. Кориолис инерция кучлари қайси формула билан топилади?
4. Классик механиканинг нисбийлик принципининг моҳияти нимадан иборат?
5. Қандай саноқ системасига инерциал саноқ системаси дейилади?
6. Қандай саноқ системасига инерциал булмаган саноқ системаси дейилади?
7. Қачон нуқта нисбий мувозанатда булади?
8. Нуқтани қандай ҳаракатига нисбий ҳаракат дейилади?
9. Нуқтани қандай ҳаракатига кучирма ҳаракат дейилади?
10. Нуқтани қандай ҳаракатига абсолют ҳаракат дейилади?

70-§. НУҚТАНИНГ ЭРКИН ТЕБРАНМА ҲАРАКАТИ. ТЕБРАНИШ АМПЛИТУДАСИ, ФАЗАСИ, ЧАСТОТАСИ ВА ДАВРИ

Табиат ва техникада тебранма ҳаракатлар жуда куп учрайди. Ҳар қандай иншоот ёки машинанинг таркибига кирадиган барча қисмлар маълум даражада эластик булганидан тебраниш қобилиятига эгадир. M нуқтанинг эркин тебранма ҳаракатини текширамиз. Фараз қилайлик О нуқта М нуқтанинг мувозанат ҳолати булсин. Нуқтани О нуқтадан х масофага олиб бориб қуйиб юборилганда, у яна мувозанат ҳолатига қайтишга интилади. Нуқтага ҳамма вақт мувозанат ҳолатига қараб йуналган F кучи таъсир қилади. Бундай кучга қайтарувчи куч дейилади.

М нуқта ҳаракатининг тенгламасини аниқлаймиз. Бунинг учун О нуқтани координата боши қилиб х укини утказамиз (140-расм).



140-расм.

Қайтарувчи куч модулини топиш формуласи

$$F=cx$$

Бунда F - қайтарувчи куч,
c - пропорционаллик коэффициенти, унинг бирлиги кг/см, н/м.
x - нуқтанинг мувозанат ҳолатидан четга чиқиш масофаси.
Қайтарувчи кучнинг х укидаги проекцияси

$$F_x=-F \quad F_x=-cx$$

(-) ишора қайтарувчи кучнинг тезликка нисбатан тескари йўналишида эканлигини билдиради.

М нуқта харакатининг дифференциал тенгламасини тузамиз.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -F \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} = -cx$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{cx}{m} = 0$$

$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{cx}{m} = 0 \qquad \frac{c}{m} = k^2$ - билан белгилаймиз.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0 \qquad \text{ёки} \qquad x+k^2x = 0 \qquad (225)$$

(225)- формула эркин тебранма харакатининг дифференциал тенгламаси.

(225)-нинг умумий ечимини топамиз. Бунинг учун характеристик тенглама тузамиз:

$$r^2 + k^2 = 0 \qquad (226)$$

(226) - тенглама (225)- ни тавсифий тенгламаси

$$r^2 = -k^2 \qquad r_{1,2} = \pm\sqrt{-k^2} = \pm ki$$

$$r_1 = ki \qquad r_2 = -ki$$

Дифференциал тенгламаларнинг назариясига асосан (225) ни умумий ечими қуйидагича бўлади.

$$x = C_1\cos kt + C_2\sin kt \qquad (227)$$

Бу ерда C_1, C_2 ихтиёрий ўзгармас миқдорлар: C_1 ва C_2 ларни топиш учун бошланғич шартлар берилиши керак.

$$t = 0 \quad x = x_0 \quad \upsilon = \upsilon_0$$

(227)- дан вақт бўйича ҳосила оламиз.

$$V_x = \dot{x} = -C_1k\sin kt + C_2k\cos kt \qquad (228)$$

(228)- билан эркин тебранма харакат қилаётган нуқтанинг тезлиги топилади.

$t=0$ ва $x=x_0$ ларни (227)га қўямиз, у холда $C_1=x_0$

$t=0$ ва $\upsilon=\upsilon_0$ ларни (228) қўямиз.

$$V_0 = C_2k, \quad C_2 = \frac{V_0}{k}$$

C_1 ва C_2 ларнинг қийматларини 3 га қўямиз.

$$x = x_0\cos kt + \frac{V_0}{k}\sin kt \qquad (229)$$

(229) - тенглама хам М нуқтанинг харакат тенгламаси бўлади.

(227)- ни бошқача кўринишга келтирамиз.

C_1 ва C_2 ларни ўрнига янги a ва α кичик ўзгармас микдорларни киритамиз. булар орасида қуйидагича боғланиш бор

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= a\sin\alpha \\ C_2 &= a\cos\alpha \end{aligned}\right\} \qquad (230)$$

(230) ни (227) га қўйиб қуйидагини ҳосил қиламиз.

$$x = a\sin\alpha\ \cos kt\ +\ a\cos\alpha\ \sin kt$$

$$x = a\ \sin(kt + \alpha) \qquad (231)$$

(231) ҳам (225) нинг ечими бўлади.

Физикадан маълумки (231) – тенглама нуқтанинг гармоник тебранма ҳаракатининг тенгламасидир.

Демак, нуқтанинг қайтарувчи куч таъсиридаги эркин тебранма ҳаракати гармоник тебранма ҳаракатдан иборат бўлади.

Бунда, а - тебранишн амплитудаси.

Нуқтани мувозанат ҳолатидан энг катта масофага оғишига нуқтанинг амплитудаси дейилади $kt+\alpha$ тебраниш фазаси.

Тебраниш фазаси нуқтанинг t вақтдаги вазиятини ва қайси томонга қараб ҳаракат қилишини кўрсатади. к - циклик частота (доиравий такрорлик). к нуқтанинг 2π секундда тўла тебранишлар сонини кўрсатади.

Нуқтани тўла бир марта тебраниш учун кетган вақтга тебраниш даври дейилади.

$$T = \frac{2\pi}{k}, \quad k = \sqrt{\frac{c}{m}}, \quad T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{c}{m}}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}} \qquad (232)$$

(232)-тебраниш даврини топиш формуласи a билан (α) ни аниқлаймиз. Бунинг учун (230)- дан фойдаланамиз:

$$C_1^2 + C_2^2 = a^2$$

$$a = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$$

C_1 ва C_2 ларнинг қийматини қўямиз.

$$a = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\vartheta}{k}\right)^2} \qquad (233)$$

(233) - Эркин тебраниш амплитудасини топиш формуласи.

(230)- ни бир бирига бўламиз

$$\frac{C_1}{C_2} = tg\alpha$$

$$tg\alpha = \frac{kx_0}{\vartheta} \qquad (234)$$

Бунда α - бошланғич фаза (234)- билан α ни аниқлаймиз

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР.

1. Қандай ҳаракатга мажбурий тебранма харкат дейилади?
2. Мажбурий тебранма ҳаракат дифференциал тенгламасини ёзинг
3. Мажбурий тебранма ҳаракатнинг умумий ечимини ёзинг?
4. Мажбурий тебранма ҳаракат частотаси қандай езилади?
5. Мажбурий тебранма харакат даври қандай ёзилдан?
6. Мажбурий тебранма ҳаракат амплитудаси қандай факторларга боғлиқ?
7. Динамик коэффициент нима?
8. Динамик коэффициентнинг графиги қандай булади?
9. Қачон резонанс ҳодисаси содир булади?
10. Мажбурий тебранма ҳаркатнинг тенгламаси ва графиги резонанс ҳодисаси вақтида қандай булади?

73-§. МЕХАНИК СИСТЕМА

Бир нечта нуқталар (жисмлар) тупламн берилган булсин. Агар бу тупламдаги хар бир нуқтанинг (жисмнинг) ҳаракати бошқаларининг ҳаракатига ва вазиятига боғлиқ булса, бундай нуқталар (жисмлар) тупламига механик система дейилади.

Масалан: автомашина, кривошип шатун механизми, қуёш системаси ва абсолют қаттиқ жисмлар мисол булади.

Демак системани ташкил қилувчи жисмлар доимо бир-бирига таъсир қилиши шарт.

Системага таъсир қилувчи кучлар

Системадаги жисмлар фазода ихтиёрий томонга қараб ҳаракат қила олса, бундай системага эркин система дейилади.

Масалан: Қуёш системаси. Системадаги жисмлар ҳаракати чекланган булса бундай системага –эрксиз система дейилади.

Ҳар қандай машина ёки механизм боғланишдаги системага мисол була олади. Боғланишнинг системадаги жисмларга курсатадиган таъсирига – реакция кучи дейилади. Эркин ва эрксиз системага таъсир қилувчи кучларни икки гуруҳга ажратамиз :

1. Ташқи кучлар *2. Ички кучлар*

Система таркибига кирмаган жисмларнинг системага курсатадиган таъсирига ташқи кучлар дейилади.

Масалан: Автомобилни бирор система деб қарасак, автомобилга таъсир қилувчи куч – ернинг тортиш кучи P ҳавонинг қаршилиги R, ишкаланиш кучи F ва ернинг нормал реакция кучи N ташки кучларга мисол булади (147-расм).

147-расм.

Системадаги жисмларнинг бир-бирига курсатадиган таъсири ички кучлар дейилади.

Газларнинг поршенга, шатуннинг валга таъсири ички кучларга мисол булади. Система таъсир килувчи ташки кучларни $\overline{F}^e$ – билан, ички кучларни $\overline{F}^i$ – билан белгилаймиз.

Системага таъсир килувчи ички кучлар икки хоссага эга:

I - Хосса: Системага таъсир килувчи барча ички кучларнинг геометрик йигиндиси ёки бош вектори нолга тенг.

Исбот: Бизга ***n*** та нуктадан иборат система берилган булсин. Шу системада ихтиёрий ***M_1*** ва ***M_2*** нукталарни оламиз. Ньютоннинг III-конунига асосан бу нукталар бир-бирига модуллари жихатидан тенг булган ва бир тугри чизик буйлаб тескари томонга йуналган куч билан таъсир килади. ***M_1*** нукта ***M_2*** нуктага F_1^i куч билан таъсир этса, ***M_2*** нукта эса ***M_1*** нуктага F_2^i куч билан таъсир килади.

$$F_1^i = F_2^i; F_1^i = -F_2^i; \qquad (249)$$
$$F_1^i + F_2^i = 0,$$

(249) ни системадаги хар бир нукта учун ёзиб қушиб чиқсак қуйидаги хосила булади:

$$\sum F_k^i = 0, \quad k = 1.2 \ldots n \qquad (250)$$

II –Хосса: Системадаги барча ички кучларнинг ихтиёрий нуктага ёки укка нисбатан олинган моментларининг йигиндиси нолга тенг.

Ички кучлардан 0 нуктага нисбатан момент олсак (148-расм).

148-расм.

$$m_c(F_1^i) = -F_1^i h$$
$$m_c(F_2^i) = F_1^i h - F_2^i h \qquad (251)$$
$$m_c(F_1^i) + m_c(F_2^i) = 0$$

(251) ни хар бир нуқта учун ёзиб ҳадма-ҳад қўшсак қуйидаги ҳосил бўлади:

$$\sum m_c(F_k^i) = 0, \qquad k = 1,2...n \qquad (252)$$

Бу хоссалардан ички кучлар ўзаро мувозанатлашади деган хулосага келиш мумкин эмас, чунки ички кучлар системадаги хар бир жисмга қўйилган. Демак ички кучлар таъсирида системадаги жисмлар бир бирига нисбатан харакат қилади.

Системанинг массаси, массалар маркази ва унинг координаталари

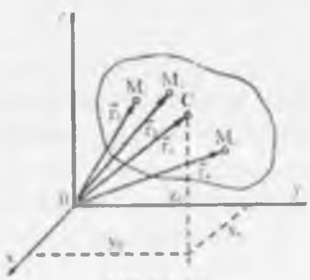
Системадаги нуқталарнинг ёки жисмларнинг массалар йиғиндисига системанинг массаси дейилади.

$$M = m_1 + m_2 + ... + m_n = \sum m_k \qquad (253)$$

бунда ***M*** - системанинг массаси. $m_1, m_2, ..., m_n$ - системадаги нуқталарнинг массаси.

Массалари $m_1, m_2, ..., m_n$ га тенг бўлган n та $M_1, M_2, ..., M_n$ нуқталардан тузилган система берилган. $r_1, r_2, ... r_n$ шу нуқталарнинг радиус-векторлари бўлсин (148-расм). Вазияти r_c радиус-вектори билан аниқланадиган геометрик C нуқта системанинг массалар маркази ёки инерция маркази дейилади

$$r_c = \frac{\sum m_k r_k}{M}, \qquad k = 1,2...n \qquad (254)$$



149-расм.

(254) ни координата ўқларига проекциялаймиз;

$$x_c = \frac{\sum m_k x_k}{M}$$
$$y_c = \frac{\sum m_k y_k}{M} \qquad k = 1, 2, \ldots n \qquad (255)$$
$$z_c = \frac{\sum m_k z_k}{M}$$

бунда x_c, y_c, z_c - лар массалар марказининг координаталари билан топилади. Массалар маркази системадаги массаларнинг жойлашишини тавсифлайди. Агар система иккита нуктадан иборат бўлса, (255) куйидагига тенг;

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$
$$y_c = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} \qquad (256)$$
$$z_c = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2}{m_1 + m_2}$$

74-§. ҚАТТИҚ ЖИСМНИНГ ЎҚГА НИСБАТАН ИНЕРЦИЯ МОМЕНТИ ВА ИНЕРЦИЯ РАДИУСИ

Бизга ***z*** ўқи ва массаси ***m*** га тенг булган ***M*** нукта берилган булсин ***h-M*** нуктадан ***z*** укгача булган масофа (150-рам).

Нуктанинг массаси билан шу нуктадан укгача булган масофа квадрати купайтмасига укга нисбатан нуктанинг инерция моменти дейилади. ***mh²-M*** нуктанинг ***z*** укка нисбатан инерция моменти дейилади.

150-расм.

Таъриф: Жисмнинг бирор укга нисбатан инерция моменти жисмдаги барча нукталарининг шу укга нисбатан олинган инерция моментларининг йигиндисига тенг;

$$I_z = m_1 h_1^2 + m_2 h_2^2 + \ldots + m_n h_n^2 = \sum mh^2 \qquad (257)$$

Бунда I_z жисмнинг z ўқка нисбатан инерция моменти. Инерция моменти жисмдаги массаларнинг жойлашишининг тавсифлайди. Инерция моменти мусбат скаляр катталик. Инерция моментининг ўлчов бирлиги $кгм^2$. Система - нуқталарнинг массаларини ўққача (нуқта ёки текисликкача) бўлаган масофалар квадрати кўпайтмасининг йиғиндисига тенг скаляр катталик мос равишда системанинг ўққа (нуқта ёки текисликка) нисбатан инерция моменти дейилади. Нуқтага нисбатан инерция моменти қутбга нисбатан инерция моменти деб аталади. Агар z ўққа, 0 нуқтага ва П текисликка нисбатан системанинг инерция моментларини I_z, I_0 ва $I_П$ билан белгиласак,

$$I_z = \Sigma m_k h_k^2, \quad I_0 = \Sigma M_k r_k^2, \quad I_П = \Sigma m_k d_k^2 \qquad (257)$$

формула ўринли бўлади. Бунда m_k система M_k нуқтасининг массасини, h_k, r_k, d_k лар M_k нуқтадан z ўққа, 0 нуқтага ва П текисликкача бўлган масофаларни ифодалайди.

Жисмнинг ўққа нисбатан инерция моментини қуйидаги формула билан хисоблаш мумкин.

$$J_z = m \cdot \rho^2 \qquad (258)$$

Бунда m- масса.

ρ –жисмнинг инерция радиуси.

Жисмнинг массаси тўпланган нуқтадан ўққача бўлган масофага инерция радиуси дейилади.

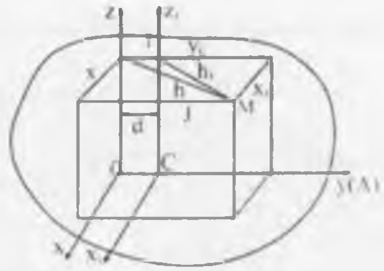
$$\rho_z = \sqrt{\frac{I}{m}} \qquad (259)$$

75-§. ПАРАЛЕЛ ЎҚЛАРГА НИСБАТАН ИНЕРЦИЯ МОМЕНТИ ҲАҚИДАГИ ТЕОРЕМА

Жисмнинг ҳар хил ўқларга нисбатан инерция моменти ҳар хил бўлади.

z ва z_1 ўқларга нисбатан инерция моменти қуйидагига тенг

$$J_z = \sum mh^2 \quad J_{z_1} = \sum mh_1^2 \qquad (260)$$



151-расм.

Жисм берилган булсин. Жисмда ихтиёрий M нуктани оламиз (151-расм).

Жисмнинг массалар марказини координата боши килиб оламиз. $z_1 // z$ укига $x_1 // x$ булсин. x, y, z M нуктани $cxyz$ системадаги координаталари. Бу координаталар орасидаги богланишни қуйидагича ёзамиз.

$$x = x_1; \quad y = d + y_1 \qquad \text{бундан} \qquad y_1 = y - d$$

h ва h_1 лар M нуктадан z ва z_1 укларигача булган масофалар.

Расмдан $h^2 = x^2 + y^2$, $h_1^2 = x_1^2 + y_1^2$ қийматларини қуйсак

$$h_1^2 = x^2 + (y - d)^2 = x^2 + y^2 - 2dy + d^2 = h^2 - 2dy + d^2 \qquad (261)$$

$$I_{z_1} = \sum m h_1^2 \qquad (262)$$

(261) ни (262) га қуямиз. У холда

$$I_{z_1} = \sum m(h^2 - 2dy + d^2) = \sum mh^2 - 2d \sum my + d^2 \sum m$$

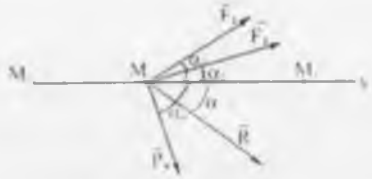
$\sum mh^2 = I_z$ жисмнинг z укига нисбатан инерция моменти $\sum m = M$ жисмнинг массаси.

C нукта координата боши булганлиги учун унинг координатаси нолга тенг булади.

$$y_c = 0; \; y_c = \frac{\sum my}{M}; \; \sum my = My_c; \quad \sum my = 0; \; I_{z_1} = I_z + Md^2 \qquad (263)$$

(263) формула параллел укларга нисбатан инерция моменти хакидаги тенгламани ифодалайди.

Теорема: Жисмнинг массалар марказидан утувчи укга параллел булган бирор укга нисбатан инерция моменти массалар марказидан утувчи укга нисбатан хисобланган инерция моменти билан жисм массасининг шу уклар оралиги квадрати купайтмаси йигиндисига тенг



156-расм.

Тенг таъсир этувчи куч

$$R = F_1 + F_2 + \ldots F_n \qquad (273)$$

(273) ни иккала қисмини M_0M_1 нуқтадан ўтган тўғри чизиққа проекциялаймиз.

$$R\cos\alpha = F_1\cos\alpha_1 + F_2\cos\alpha_2 + \ldots + F_n\cos\alpha_n \qquad (274)$$

(274) ни иккала қисмини S йўлга кўпайтирамиз

$$R \cdot S\cos\alpha = F_1S\cos\alpha_1 + F_2S\cos\alpha_2 + \ldots + F_n\cos\alpha_n \cdot S$$

$$R \cdot S\cos\alpha = A, \quad F_1S\cos\alpha_1 = A_1$$

$$F_2S\cos\alpha_2 = A_2, \ldots\ldots F_nS\cos\alpha_n = A_n$$

$$A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n \qquad (275)$$

81-§. КУЧ ЭЛЕМЕНТАР ИШИНИНГ АНАЛИТИК ИФОДАСИ

Куч элементар ишининг аналитик ифодасини аниқлаймиз. Бунинг учун $\bar{F}$ кучини ташкил этувчиларга ажратамиз (157-расм).

F_x, F_y, F_z - $\bar{F}$ кучини ташкил этувчилари.

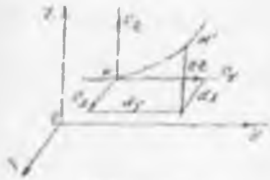
Элементар MM силжиш $MM=dS$ координата ўқлари бўйлаб йўналган M нуқта dx, dy, dz силжишларининг йиғиндисига тенг. Шунинг учун F кучининг dS силжишдаги бажарган иши унинг ташкил этувчилари Fx, Fy, Fz ларининг dx, dy, dz силжишдаги бажарган ишларининг йиғиндисига тенг бўлади. dx силжиш фақат $Fx\,dx$ га тенг. dy, dz силжишдаги Fy, Fz кучларининг бажарган ишини қуйидагича ёзамиз $Fy\,dy$, $Fz\,dz$

Кучни элементар иши қуйидаги формула билан топилади (157-расм).

$$dA = F_xdx + F_ydy + F_zdz \qquad (276)$$

Бу формула кучнинг элементар ишининг аналитик ифодасини беради. Кучнинг M_0M_1 йўлдаги бажарган иши унинг элементар ишидан олинган интегралга тенг.

$$A = \int_{M_0}^{M_1} F_\tau ds \qquad A = \int_{M_0}^{M_1} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) \qquad (277)$$



157-расм.

158-расм.

Оғирлик кучининг бажарган иши.

Оғирлиги P га тенг бўлган M нуқта M_0 дан M_1 гача келсин. P оғирлик кучини M_0M_1 йўлдаги бажарган ишини хисоблаймиз (158-расм).

P кучининг координата ўқларидаги проекцияси $x=0$, $y=0$, $z=-P$. P кучининг M_0M_1 йўлдаги иши. (277) формулага кўра.

$$A = \int_{M_0}^{M_1} -Pdz = -P\int_{z_0}^{z_1} dz = -PZ\Big|_{Z_0}^{Z_1} = -P(Z_1 - Z_0) = P(Z_0 - Z_1) = \pm ph$$

$$A = P(z_0 - z_1) = \pm ph \qquad A = \pm Ph$$

Бунда $z_0 - z_1 = h$

h - M нуқтанинг вертикал бўйича юрган йўли. Агар $z_0>z_1$ бўлса M нуқта юқоридан пастга тушади, иш эса мусбат бўлади.

Агар $z_0<z_1$ бўлса M нуқта юқорига кўтарилади, иш эса манфий бўлади.

$$A=\pm Ph \qquad (278)$$

(278) билан оғирлик кучининг бажарган иши топилади. Оғирлик кучининг бажарган иши плюс ва минус ишораси билан олинган куч миқдорининг вертикал бўйича силжишига кўпайтмасига тенг.

82-§. ЭЛАСТИКЛИК КУЧИНИНГ БАЖАРГАН ИШИ

Пружинадаги реакция кучининг ишини хисоблаймиз. Бизга бир учи маҳкамланган пружина берилган. F – пружинани реакция кучи ёки эластиклик кучи. Пружина h масофага чўзилганда F кучини бажарган ишини топиш керак. Бунинг учун M нуқтани координата боши деб x ўқини йўналтирамиз (159-расм).

F = cx: бунда *c* – пружинанинг бикрлиги, *x* – пружинани чўзилиши ёки сиқилиши, $\bar{F}$ - кучнинг координата ўқларидаги проекцияси.

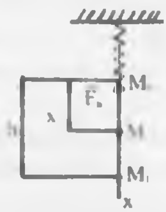
$$X = -F \quad Y = 0 \quad Z = 0$$

F кучнинг ***h*** – масофадаги иши (277) формулага кўра.

$$A = \int_{M_0}^{M} (-F)dx = \int_0^h -cx\,dx = -c\int_0^h x\,dx = -\frac{cx^2}{2}\Big|_0^h = -\frac{ch^2}{2}.$$

$$A = -\frac{ch^2}{2} \qquad (279)$$

Бу формула билан эластиклик кучнинг бажарган иши топилади.



159-расм.

83-§. ҚЎЗҒАЛМАС ЎҚ АТРОФИДА АЙЛАНМА ҲАРАКАТ ҚИЛУВЧИ ЖИСМГА ҚЎЙИЛГАН КУЧНИНГ ИШИ ВА ҚУВВАТИ

Агар жисм $\bar{F}_1, \bar{F}_2, ..., \bar{F}_n$ кучлар системаси таъсирида қўзғалмас *z* ўқи атрофида айланма ҳаракатда бўлса, қутбни айланиш ўқида оламиз; натижада $dr_0 = 0$ ҳамда бурчак тезлик йўналган *OP* ва *z* ўқлари устма-уст тушади (160-расм). Бинобарин, қаралаётган ҳолда

$$d'A = M_z\,d\varphi \qquad (280.1)$$

формула ўринли бўлади, яъни қўзғалмас ўқ атрофида айланма ҳаракат қилувчи жисмга таъсир этувчи кучлар системасининг элементар иши мазкур ўққа нисбатан кучлар бош моментининг жисм ўқ атрофида айланганда элементар кўчишдаги ишига тенг.

Бу ҳолда кучлар системасининг қуввати

$$N = M_z\frac{d\varphi}{dt} = M_z\omega \qquad (280.2)$$

чекли айланма кўчишдаги иши эса,

$$I = \int M\, dm \qquad (280.3)$$

формулалар ёрдамида аниқланади.

160-расм.

84-§. АБСОЛЮТ ҚАТТИҚ ЖИСМДАГИ ИЧКИ КУЧЛАР ИШЛАР ЙИҒИНДИСИНИНГ НОЛГА ТЕНГЛИГИ

Абсолют қаттиқ жисмни ҳар қандай силжишда шу жисмдаги ички кучлар ишлари йиғиндиси нолга тенглигини исбот қилиш керак.

Бизга n та нуқтадан тузилган абсолют қаттиқ жисм берилган бўлсин. Шу жисмда ихтиёрий M_1 ва M_2 нуқталарни оламиз (161-расм)

V_1 ва V_2, M_1 ва M_2 нуқталарнинг тезлиги.

Тезлик модули.

$$V_1 = \frac{dS_1}{dt}; V_2 = \frac{dS_2}{dt} \qquad (281)$$

V_1 ва V_2 тезликларни M_1 ва M_2 нуқталардан ўтган тўғри чизиқдаги проекцияси ўзаро тенг бўлади.

$$V_1 \cos\alpha_1 = V_2 \cos\alpha_2 \qquad \text{ёки}$$

$$\frac{dS_1}{dt}\cos\alpha_1 = \frac{dS_2}{dt}\cos\alpha_2$$

$$dS_1 \cos\alpha_1 = dS_2 \cos\alpha_2$$

$$dS_1 \cos\alpha_1 = dS_2 \cos\alpha_2 = 0$$

M_1 ва M_2 нукталарга бир-бирига модуллари жихатидан тенг булган ва бир тугри чизик буйлаб тескари томонга йуналган F_1 ва F_2 кучлар билан таъсир этади.

$$F_1' = F_2'$$

F_1', F_2' кучларни dS_1 ва dS_2 масофага силжиганда:и бажарган ишини топамиз.

$$dA = F_1' dS \cos\alpha$$

$$dA_2' = F_2' dS_2 \cos(180 - \alpha_2) = -F_2' dS_2 \cos\alpha_2$$

Кучларнинг элементар ишларини кушамиз.

$$dA_1' + dA_2' = F_1' dS_1 \cos\alpha_1 - F_2' dS_2 \cos\alpha_2 =$$

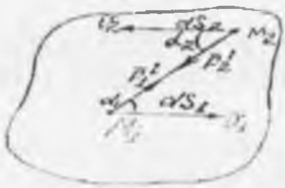
$$= F_1'(dS_1 \cos\alpha_1 - dS_2 \cos\alpha_2) = 0 \qquad (282)$$

$$dA_1' + dA_2' = 0$$

бу формулани системадаги хар бир нукта учун ёзиб хадма-хад кушиб чикамиз. (282) ни интеграллаймиз.

(282) ни интеглаб, куйидагини ёзамиз:

$$\sum dA_k' = 0 \qquad \sum A_k' = 0 \quad k = 1, 2, \ldots n \qquad (283)$$



161-расм.

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР.

1. Кучнинг элементлар ишиканси формула билан топилади?
2. Кучнинг элементар иши аналитик ифодасини езинг?
3. Кучнинг чекли йулда бажарган иши кандай ифодаланади?
4. Кувват нима?
5. Тенг таъсир этувчи кучнинг иши тугрисидаги теорема нимадан иборат?
6. Огирлик кучини бажарган иши нимага тенг булади?
7. Эластиклик кучини бажарган иши нимага тенг булади?
8. Ишкаланиш кучининг бажарган иши нимага тенг булади?

9. Қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи жисмга қўйилган кучни бажарган иши қандай топилади?
10. Қувват қандай топилади?

85-§. НУҚТА ВА СИСТЕМАНИНГ КИНЕТИК ЭНЕРГИЯСИ

Нуқта массаси билан тезлик квадрати кўпайтмасининг ярмига нуқтанинг кинетик энергияси дейилади

$$\frac{m\vartheta^2}{2}$$

Системанинг кинетик энергияси шу системадаги барча нуқталар кинетик энергияларининг алгебраик йиғиндисига тенг бўлади

$$T=\frac{m_1V_1^2}{2}+\frac{m_2V_2^2}{2}+\ldots+\frac{m_nV_n^2}{2}=\sum\frac{m_kV_k^2}{2}$$

$$T=\sum\frac{m_kV_k^2}{2}\qquad k=1,2,\ldots,n$$

Бунда T системанинг кинетик энергияси.

Система бир неча қаттиқ жисмдан иборат бўлса, системани кинетик энергияси шу қаттиқ жисмлар кинетик энергиялари йиғиндисига тенг бўлади.

$$T=T_1+T_2+T_3+\ldots+T_n \qquad (284)$$

Кинетик энергиянинг бирликлари кГм, Гм, Нм

Система кинетик энергияси унинг илгарилама ва айланма ҳаракатларини тавсифлайди

Кёнига теоремаси

Системанинг кинетик энергияси унинг массалар марказининг кинетик энергияси билан шу марказга нисбатан система бажарган ҳаракати кинетик энергиясининг йиғиндисига тенг.

$$T=\frac{mV_c^2}{2}+Tc \qquad (285)$$

Бунда $\left(\frac{mV_c^2}{2}\right)$-система массалар марказининг кинетик энергияси.

Vc-массалар марказининг тезлиги

Tc - массалар марказига нисбатан система бажарган ҳаракатининг кинетик энергияси.

$$F = const \text{ бўлса } S = F\int_0^{t_1} dt = F \cdot t_1 \text{ бўлади.} \qquad (297)$$

Бунда t_1 - F кучнинг жисмга таъсир этган вақти.

(297) ни координата ўқларига проекциялаймиз

$$\begin{aligned} S_x &= F_x \cdot t \\ S_y &= F_y \cdot t \\ S_z &= F_z \cdot t_1 \end{aligned} \qquad (298)$$

Бунда F_x, F_y, F_z - F кучнинг x, y, z ўқлардаги проекциялари.

Куч импульсининг миқдори қуйидаги формула билан топилади

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2} \qquad (299)$$

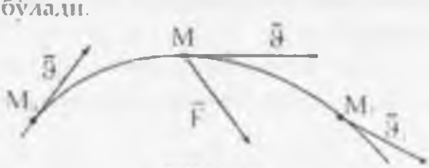
90-§. НУҚТА ҲАРАКАТ МИҚДОРИНИНГ ЎЗГАРИШИ ҲАҚИДАГИ ТЕОРЕМА

M нуқта $\bar{F}$ кучи таъсирида ҳаракатланиб, ***M₀*** дан ***M₁*** гача келсин (168-расм). Нуқта динамикасининг асосий тенгламасини ёзамиз.

$$m\bar{a} = \bar{F}$$

$$m\frac{d\bar{V}}{dt} = \bar{F}; \qquad \frac{d(m\bar{V})}{dt} = \bar{F} \qquad (300)$$

(300) - формула дифференциал кўринишидаги нуқта ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теоремани ифодалайди: Нуқта ҳаракат миқдоридан вақт бўйича олинган ҳосила шу нуқтадаги таъсир этувчи кучга тенг бўлади.



168-расм.

(300)-формулани интеграллаймиз.

$$d(m\bar{V}) = \bar{F}dt,$$

$$\int d(m\bar{V}) = \int \bar{F}dt,$$

$$m\bar{V}\Big|_{V_0}^{V_1} = \bar{S} \quad \text{ёки} \quad m\bar{V}_1 - m\bar{V}_0 = \bar{S} \qquad (301)$$

(301)-формула интеграл куринишидаги нукта харакат микдорининг узгариши хакидаги теоремани ифодалайди: Нукта харакат микдорининг бирор вакт ичидаги узгариши нуктага таъсир этувчи кучнинг шу вакдаги тула импульсига тенг булади. (301) формулани координата укларига проекциялаймиз:

$$mV_{1x} - mV_{0x} = S_x;$$
$$mV_{1y} - mV_{0y} = S_y; \qquad (302)$$
$$mV_{1z} - mV_{0z} = S_z;$$

Демак, нукта харакат микдорининг координата уки буйича чекли вакт ичида узгариши шу вакт ичидаги нуктага таъсир этувчи куч импульсининг мазкур укдаги проекциясига тенг.

91-§. СИСТЕМА ҲАРАКАТ МИҚДОРИНИНГ ЎЗГАРИШИ ҲАҚИДАГИ ТЕОРЕМА

Системадаги ихтиерий ***Mк*** нукта учун дифференциал шаклдаги нуқта ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теоремани ёзамиз.

(300) – формуладан.

$$\frac{d}{dt}(m_k \bar{V}_k) = \bar{F}_k^e + \bar{F}_k^i \qquad (303)$$

Бунда $\bar{F}_k^e$ ва $\bar{F}_k^i$ -Мк нукта қўйилган ташқи ва ички кучлар. (303) – формулани системадаги ҳар бир нуқталар учун ёзиб ҳадма-ҳад қўшамиз; (169-расм).

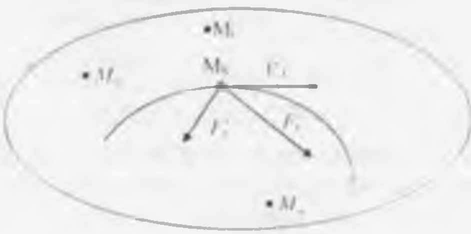
$$\frac{d}{dt}\left(\sum m_k \bar{V}_k\right) = \sum \bar{F}_k^e + \sum \bar{F}_k^i \qquad k = 1, 2, \ldots n \qquad (304)$$

Бунда $\sum m_k \bar{V}_k = \bar{Q}$-системанинг ҳаракат миқдори.

$\sum \bar{F}_k^e = \bar{R}$-ташқи кучлар бош вектори. Ички кучлар хоссасига кура

$\sum \bar{F}_k^i = 0$ - натижада (304) ни қуйидагича ёзиш мумкин

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \bar{R} \qquad (305)$$



169-расм.

(305) ни Декарт координата ўқларига проекциялаб, система ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теоремани скаляр кўринишида ёзамиз:

$$\frac{dQ_x}{dt}=R_x,$$

$$\frac{dQ_y}{dt}=R_y, \qquad (306)$$

$$\frac{dQ_z}{dt}=R_z.$$

Система ҳаракат миқдорининг бирор ўқдаги проекциясидан вақт бўйича олинган ҳосила, системага таъсир этувчи ташқи кучлар бош векторининг шу ўқдаги проекциясига тенг.

Система ҳаракат миқдорининг чекли вақт ичидаги ўзгаришини аниқлаш учун (305) ни dt га кўпайтириб, интеграллаймиз:

$$\frac{d\bar Q}{dt}=\bar R,\ d\bar Q=\bar R\,dt,\ \int_{Q_0}^{Q_1} d\bar Q=\int_0^t \bar R\,dt,\ \bar Q\Big|_{Q_0}^{Q_1}=\bar S,\ \bar Q_1-\bar Q_0=\bar S \qquad (307)$$

Бунда Q_0 - системанинг бошланғич вақтдаги ҳаракат миқдори.

Q_1 -системанинг t_1 вақтдаги ҳаракат миқдори. $\bar S=\int_0^t \bar R\,dt$ - t вақт ичида системага таъсир этувчи кучлар бош векторнинг импульси.

(307) формула интеграл шаклдаги система ҳаракат миқдорини ўзгариши ҳақидаги теоремани ифодалайди: Система ҳаракат миқдорининг бирор вақт ичидаги ўзгариши системага қўйилган барча ташқи кучлар бош векторининг шу вақт ичидаги импульсига тенг. (307) ни координата ўқларига проекциялаймиз.

$$Q_{1x}-Q_{0x}=S_x \qquad Q_{1y}-Q_{0y}=S_y \qquad Q_{1z}-Q_{0z}=S_z \qquad (308)$$

Бунда S_x, S_y, S_z, - S куч импульсини проекциялари. Исбот қилинган теоремадан қуйидаги натижалар келиб чиқади.

1) Агар ташқи кучлар бош вектори $R=0$ га тенг бўлса, системанинг ҳаракат миқдори ўзгармас бўлади.

$$\frac{dQ}{dt}=0,\ dQ=0,\ \int dQ=0 \qquad Q=const$$

2) Агар системага қўйилган ташқи кучлар бош векторининг бирор ўқдаги, масалан Ох ўқдаги проекцияси нолга тенг бўлса, система ҳаракат миқдорининг шу ўқдаги проекцияси ўзгармайди.

$$R_x=0$$

у ҳолда (306)- дан $\qquad Q_x=const$

Бу натижалар система ҳаракат миқдорининг сақланиши ҳақидаги қонунни ифодалайди. Демак, системанинг ҳаракат миқдорини ички кучлар ўзгартирмайди.

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР.

1. Нуқтанинг ҳаракат миқдори нима?
2. Кучнинг элементар импульси нима?
3. Элементар импульс қандай йўналган?
4. Кучнинг тўла импульси қандай топилади?
5. Куч импульсининг координата ўқларидаги проекцияси қандай топилади?
6. Нуқта ҳаракат миқдори тўғрисидаги теорема нимадан иборат?
7. Нуқта ҳаракат миқдорининг сақланиш қонунини айтинг?
8. Системанинг ҳаракат миқдори деб нимага айтилади?
9. Системанинг ҳаракат миқдори тўғрисидаги теорема нимадан иборат?
10. Системанинг ҳаракат миқдори қандай ҳолларда сақланади?

92-§. СИСТЕМА МАССАЛАР МАРКАЗИНИ ҲАРАКАТИ ҲАҚИДАГИ ТЕОРЕМА

Системанинг ҳаракат миқдори қуйидагига тенг.

$$\bar{Q} = M\bar{v}_C \qquad (309)$$

Системанинг ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги формулани ёзамиз.

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \bar{R} \qquad (310)$$

Бу ерда $\bar{R} = \sum \bar{F}_k^e$ - система нуқталарига таъсир этувчи ташқи кучларнинг бош вектори.

(309) ни (310) га қўйиб ҳосил оламиз:

$$M\frac{d\bar{v}_C}{dt} = \bar{R}, \quad \frac{d\bar{v}_C}{dt} = \bar{a}_C, \qquad M\bar{a}_C = \bar{R}; \qquad (311)$$

бу ерда $\bar{a}_C = \frac{d\bar{v}_C}{dt}$ - система массалар марказининг тезланиши

(311)-формула система массалар марказининг ҳаракати ҳақидаги теоремани ифодалайди: система массалар маркази, массаси бутун система массасига тенг бўлган ва система нуқталарига таъсир этувчи барча ташқи кучларнинг бош вектори таъсиридаги моддий нуқта каби ҳаракатланади.

(311) иккала қисмини координата ўқларига проекциялаймиз

$$mW_{cx} = R_x;$$
$$mW_{cy} = R_y; \qquad (312)$$
$$mW_{cz} = R_z;$$

Бунда R_x, R_y, R_z – R бош векторнинг координата ўқларидаги проекциялари.

$$W_{cx} = \frac{d^2 x_c}{dt^2} = \ddot{X}_c; \quad W_{cy} = \frac{d^2 y_c}{dt^2} = \ddot{Y}_c; \quad W_{cz} = \frac{d^2 z_c}{dt^2} = \ddot{Z}_c; \qquad (313)$$

Бунда x_c, y_c, z_c – массалар марказининг координаталари. (313) ни (312) га қўямиз, у ҳолда

$$m\ddot{x}_c = R_x;$$
$$m\ddot{y}_c = R_y; \qquad (314)$$
$$m\ddot{z}_c = R_z;$$

(314)-формула массалар маркази ҳаракатининг дифференциал тенгламаларини ифодалайди. Исбот қилинган теоремадан қуйидаги натижаларни оламиз:

1. Фараз қилайлик, системага таъсир этувчи ташқи кучларнинг бош вектори нолга тенг бўлсин:

$$\vec{R}^e = \sum \vec{F}_k^e = 0$$

У ҳолда $W_c = \frac{dV_c}{dt} = 0$ бўлиб,

$$V_c = const$$

бўлишини кўрамиз. Яъни система нуқталарига таъсир этувчи кучларнинг бош вектори нолга тенг бўлса, системанинг массалар маркази тўғри чизиқли ва текис ўзгарувчан ҳаракат қилади.

Агар массалар маркази бошланғич пайтда тинч ҳолатда бўлса, у ҳолда $v_c = 0$ бўлиб, системанинг массалар маркази кейинчалик ҳам қўзғалмасдан қолади.

$$r_c = const$$

2. Фараз қилайлик, системага таъсир этувчи ташқи кучларнинг бош вектори нолдан фарқли бўлиб, унинг бирор ўқдаги проекцияси нолга тенг бўлсин:

$$R_x^e = X^e = 0$$

У ҳолда (314)-тенгламаларнинг биринчисидан

$$\ddot{x}_c = 0$$
$$\dot{x}_c = const$$

келиб чиқади.

Демак, системага таъсир этувчи ташқи кучларнинг бирор ўқдаги проекцияларининг йиғиндиси нолга тенг бўлса, система массалар маркази тезлигининг шу ўқдаги проекцияси ўзгармас бўлади. Хусусан, агар бошланғич пайтда $\dot{x}_c = v_{cx} = 0$ бўлса, системанинг ҳаракати давомида $v_{cx} = 0$ бўлади, яъни бу ҳолда система массалар марказининг координатаси x_c ўзгармай қолади:

$$x_c = x_{c0} = const.$$

Олинган натижалар система массалар маркази ҳаракатининг сақланиш қонунини ифодалайди. Демак массалар марказини ташқи кучлар ҳаракатга келтиради. Ички кучлар эса ҳаракатга келтира олмайди.

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР

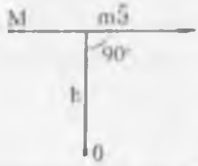
1. Нуқтанинг ҳаракат миқдори нимага тенг бўлади?
2. Системанинг ҳаракат миқдорини таърифланг?
3. Дифференциал шаклдаги система ҳаракат миқдорининг ўзгариши хақидаги теоремани ёзинг?
4. Ташқи кучлар бош вектори нима?
5. Ташқи кучлар бош векторининг проекциясини айтинг?
6. Системанинг массаси нимага тенг бўлади?
7. Системани массалар марказининг координаталари қайси формула билан топилади?
8. Системанинг ҳаракат миқдори унинг массалар марказининг тезлиги оркали қандай ифодаланади?
9. Система массалар марказининг ҳаракати хақидаги теоремани таърифланг?
10. Система массалар маркази ҳаракатининг сақланиш қонунини айтинг?

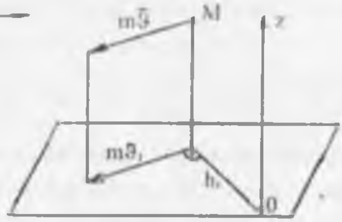
93-§. МАРКАЗГА ВА ЎҚҚА НИСБАТАН НУҚТА ҲАРАКАТ МИҚДОРИНИНГ МОМЕНТИ

Нуқта ҳаракат миқдори вектор катталик бўлгани учун унинг бирор марказга ва ўққа нисбатан моментини аниқлаш мумкин. Кучнинг марказга ва ўққа нисбатан моменти қандай топилса, ҳаракат миқдорини моменти ҳам шундай топилади.

Нуқта ҳаракат миқдорининг О – марказга нисбатан моменти қуйидагига тенг:

$$l_0 = mV h, \; l_0 = m_0(mV) \qquad (315)$$





170-расм. **171-расм.** **172-расм.**

z ўққа нисбатан момент олсак;

$$l_z = m_0(m\overline{V_1}) = h_1 m V_1$$

$$l_z = h_1 m V_1 \qquad (316)$$

Бунда l_z - нуқта ҳаракат миқдорининг z ўққа нисбатан моменти.

Бирор О марказга нисбатан олинган нуқта ҳаракат миқдорининг моменти шу марказга қўйилган вектор бўлади. (172 -расм) дан

$$\frac{h}{r} = \sin\alpha, \quad h = r\sin\alpha;$$

$$l_0 = hmV = r\sin\alpha\, mv,$$

$$l_0 = hmv\sin\alpha \qquad (317)$$

(317) ни ўнг томони вектор кўпайтманинг модули бўлади.

$$\overline{l_0} = [\bar{r} \cdot m\bar{\vartheta}] \qquad (318)$$

(318) - вектор кўпайтма қуйидагича таърифланади: бирор О марказга нисбатан олинган ҳаракат миқдорининг моменти шу марказга қўйилган вектор катталик бўлиб, нуқтанинг радиус - вектори билан шу нуқта ҳаракат миқдорининг вектор кўпайтмасига тенг.

$\overline{l_0}$ - вектори *0* нуқта ва mv вектордан ўтказилган учбурчак текислигига перпендикуляр йўналган бўлади

94-§. МАРКАЗГА ВА ЎҚГА НИСБАТАН СИСТЕМА КИНЕТИК МОМЕНТИ

Системанинг бирор марказга нисбатан кинетик моменти системадаги барча нуқталар ҳаракат миқдорининг шу марказга нисбатан олинган моментларининг геометрик йиғиндисига тенг.

$$\overline{L}_0 = \overline{m}_0(m_1\overline{\vartheta}_1) + \overline{m}_0(m_2\overline{\vartheta}_1) + \ldots + \overline{m}_0(m_n\overline{\vartheta}_n)$$

$$= \overline{m}_0(m_k\overline{\vartheta}_k); \qquad \overline{L}_0 = \sum \overline{m}_0(m_k\overline{\vartheta}_k) \quad k = 1, 2, \ldots n \qquad (319)$$

Бу ерда $\overline{L}_0$ - системанинг 0 марказга нисбатан кинетик моменти.

Системанинг бирор ўққа нисбатан кинетик моменти шу ўққа нисбатан системадаги нуқталар ҳаракат миқдорлар моментларининг йиғиндисига тенг.

$$L_z = m_z(m_1\overline{V}_1) + m_z(m_2\overline{V}_2) + \ldots + m_z(m_n\overline{V}_n);$$

$$L_z = \sum m_z(m_k\overline{V}_k);$$

$$L_y = \sum m_y(m_k\overline{V}_k); \qquad (320)$$

$$L_x = \sum m_x(m_k\overline{V}_k);$$

Бунда L_x, L_y, L_z - системанинг $x, y, z,$ ўқларига нисбатан кинетик моменти.

95-§. ҚЎЗҒАЛМАС ЎҚ АТРОФИДА АЙЛАНУВЧИ ҚАТТИҚ ЖИСМНИНГ КИНЕТИК МОМЕНТИ

Қўзғалмас z ўқи атрофида ω бурчак тезлиги билан айланаётган абсолют қаттиқ жисм берилган. Шу жисмнинг айланиш ўқига нисбатан кинетик моменти ёки ҳаракат миқдорининг бош моментини ҳисоблаш лозим бўлсин. Жисмга система деб қараймиз. Жисмдан ихтиёрий M_k нуқтани оламиз (173-расм). Бу нуқтанинг тезлиги $\upsilon_k = \omega \cdot h_k$ га тенг. Нуқта ҳаракат миқдорининг z ўққа нисбатан моменти:

$$m_z(m_k\overline{V}_k) = h_k \cdot m_k \cdot V_k = \omega \cdot m_k h_k^2$$

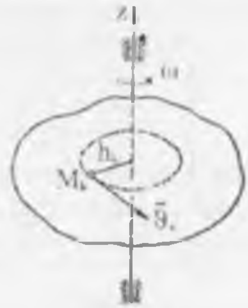
$$L_z = \sum m_z(m_k\overline{V}_k) = \sum \omega m_k h_k^2$$

$$\omega \sum m_k h_k^2 = \omega \cdot I_z.$$

$$L_Z = I_Z \cdot \omega \qquad (321)$$

(321)-формула билан жисмнинг z ўқига нисбатан кинетик моменти топилади.

Бу ерда $I_z = \sum m_k h_k^2$ - жисмнинг z ўққа нисбатан инерция моменти. Демак, қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи жисмнинг кинетик моменти мазкур ўққа нисбатан инерция моменти билан бурчак тезлигининг кўпайтмасига тенг.



173-расм.

96-§. НУҚТА ҲАРАКАТ МИҚДОРИ МОМЕНТИНИНГ ЎЗГАРИШИ ҲАҚИДАГИ ТЕОРЕМА

M нуқта $\bar{F}$ кучи таъсирида қўзғалмас ***Oxyz*** координаталар системасида ҳаракат қилаётган бўлсин (174-расм).

174-расм.

Нуқта ҳаракат миқдорининг *0* нуқтага нисбатан моменти

$\bar{l}_0 = [\bar{r} \cdot m\bar{\upsilon}]$ бўлади. (322)

Теоремадан исбот қилиш учун (322)- нинг иккала томонидан вақт бўйича ҳосила оламиз:

$$\frac{dl_0}{dt} = \left[\frac{d\bar{r}}{dt}\, m\bar{v}\right] + \left[\bar{r}\, \frac{d(m\bar{v})}{dt}\right]$$

$$\frac{d(m\bar{v})}{dt} = \bar{F}, \qquad \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{v}$$

$$\left[\frac{d\bar{r}}{dt}\, m\bar{v}\right] = \left[\bar{v}\, m\bar{v}\right] = 0$$

$\bar{v}$ ва $m\bar{v}$ векторлар бир тўғри чизиқ бўйлаб йўналганлиги учун улар орасидаги бурчак нолга тенг.

(322) ни қуйидагича ёзамиз.

$$\frac{dl_0}{dt} = \left[\bar{r}\ \bar{F}\right] \text{ еки } \frac{dl}{dt} = \bar{m}_0(\bar{F}); \qquad (323)$$

Бунда $\bar{m}_0(\bar{F}) = \left[\bar{r}\ \bar{F}\right]$ - $\bar{F}$ кучни O нуқтага нисбатан моменти.

(323) - формула нуқта ҳаракат миқдори моментининг ўзгариши ҳақидаги теоремани ифодалайди: моддий нуқта ҳаракат миқдорининг бирор қўзғалмас марказга нисбатан моментидан вақт бўйича олинган ҳосила нуқтага таъсир этувчи кучнинг шу марказга нисбатан моментига тенг.

(323) - ни x, y, z ўқларга проекциялаб қуйидагиларни оламиз:

$$\frac{dl_x}{dt} = m_x(\bar{F}); \quad \frac{dl_y}{dt} = m_y(\bar{F}); \quad \frac{dl_z}{dt} = m_z(\bar{F}) \qquad (324)$$

Бунда l_x, l_y, l_z - нуқталар ҳаракат миқдорининг x, y, z ўқларига нисбатан моментлари.

ларига нисбатан моментлари.

(324)-формулалар нуқталар ҳаракат миқдорининг координата ўқларига нисбатан моментлари ўзгариши ҳақидаги теоремани ифодалайди: нуқта ҳаракат миқдорининг бирор қўзғалмас ўққа нисбатан моментидан вақт бўйича олинган ҳосила нуқтага таъсир этувчи кучнинг шу ўққа нисбатан моментига тенг.

(324) - ни қуйидагича ёзиш мумкин.

$$\frac{d}{dt}\left[m_0(m\bar{v})\right] = m_x(\bar{F}) \qquad (325)$$

97-§. СИСТЕМА КИНЕТИК МОМЕНТИНИ ЎЗГАРИШИ ҲАҚИДАГИ ТЕОРЕМА

$M_1, M_2, \ldots, M_n$ нуқталардан тузилган система берилган бўлсин. (173-расм).

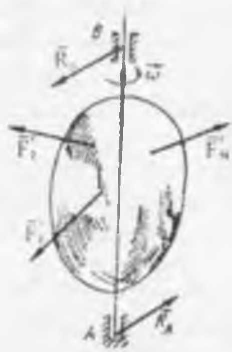
Системадаги ихтиёрий M_k нуқтага нуқта ҳаракат миқдори моментининг ўзгариши ҳақидаги теоремани татбиқ қиламиз.

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР

1. Марказга нисбатан нуқта ҳаракат миқдорининг моменти қандай аниқланади?
2. Ўққа нисбатан нуқта ҳаракат миқдорининг моменти қандай аниқланади?
3. Марказга ва шу марказдан ўтган ўққа нисбатан нуқта ҳаракат миқдорининг моментлари орасида қандай боғланиш мавжуд?
4. Марказга нисбатан системанинг кинетик моменти қандай аниқланади?
5. Ўққа нисбатан системанинг кинетик моменти қандай аниқланади? Улар орасида қандай боғланиш мавжуд?
6. Қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи қаттиқ жисмнинг кинетик моменти қандай аниқланади? Қайси формула билан топилади?
7. Нуқта ҳаракат миқдори моментининг ўзгариши ҳақидаги теоремани таърифланг?
8. Система кинетик моменти ўзгариши ҳақидаги теоремани таърифланг?
9. Системанинг бирор марказга ва ўққа нисбатан олинган кинетик моменти қачон ўзгармайди?

99-§. ҚАТТИҚ ЖИСМНИНГ ҚЎЗҒАЛМАС ЎҚ АТРОФИДАГИ АЙЛАНИШИНИНГ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАСИ

Қаттиқ жисм қўзғалмас z ўқи атрофида $\bar{F}_1^e, \bar{F}_2^e, \dots, \bar{F}_n^e$ ташқи кучлар таъсирида айланаётган бўлсин (176-расм).



176-расм.

Жисм ҳаракатининг дифференциал тенгламасини келтириб чиқариш учун система кинетик моментини ўзгариши ҳақидаги теоремадан фойдаланамиз.

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z^e \qquad (332)$$

$$L_z = J_z \omega \qquad (333)$$

Бунда, M_z-айлантирувчи момент;

(333)- ни (332)- га қўйиб вақт бўйича ҳосила оламиз.

$$J_z \frac{d\omega}{dt} = M_z, \qquad J_z \varepsilon = M_z,$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \qquad (334)$$

бунда, ε - жисмни бурчак тезланиши. Jz – жисмни z ўққа нисбатан инерция моменти

(334)-га қаттиқ жисмнинг қўзғалмас ўқ атрофида айланма ҳаракатининг дифференциал тенгламаси дейилади

(334) - формуладан $\varepsilon = \frac{M_z}{J_z}$

Агар M_z = *const* бўлиб J_z нинг қиймати катта бўлса жисмнинг айланиши кичик бўлади. Агар J_z кичик бўлса, жисмни айланиши тезлашади. Жисмнинг инерция моменти айланма ҳаракат қилувчи жисмнинг инерция ўлчовидир.

(334) - тенгламадан фойдаланиб иккита масала ечиш мумкин

1. Агар айлантирувчи момент M_z берилган бўлса, жисм ҳаракатининг тенгламасини топиш мумкин.

$$\varphi = f(t)$$

2. Агар жисм ҳаракатининг тенгламаси берилган бўлса, жисмнинг айлантирувчи моментини топиш мумкин.

100-§. НУҚТА УЧУН ДАЛАМБЕР ПРИНЦИПИ. НУҚТАНИ ИНЕРЦИЯ КУЧИ

Эркин бўлмаган М нуқтага $\bar{F}$ актив ва $\bar{N}$ реакция кучлари таъсир қилади (175-расм). Нуқта динамикасининг асосий тенгламасини ёзамиз:

$$m\bar{W} = \bar{F} + \bar{N} \qquad (335)$$

(335) ни $\bar{F} + \bar{N} + (-m\bar{W}) = 0$ кўринишида ёзиб,

$$\bar{F}^{ин} = -m\bar{W} \qquad \text{нуқтанинг инерция кучи} \qquad (336)$$

$$\bar{F} + \bar{N} + \bar{F}^{ин} = 0 \qquad (337)$$

тенгламасини оламиз.

Миқдор жиҳатидан нуқтанинг массаси билан унинг тезланишининг кўпайтмасига тенг. Йўналиши тезланиш векторига тескари бўлган кучга инерция кучи дейилади.

(337)-тенглик эркин бўлмаган нуқта учун Даламбер принципини ифодалайди: актив куч ва боғланиш реакция кучи таъсирида ҳаракатланувчи нуқтага ҳар онда инерция кучини қўйсак, бу кучлар ўзаро мувозанатлашади.

Даламбер принципи ёрдамида динамиканинг биринчи масаласини ечиш мумкин.

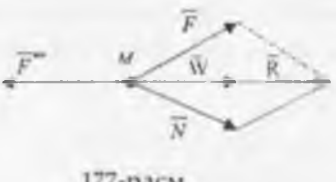
Динамика масалаларини ечишда Даламбер принципидан, асосан номаълум реакция кучларини топишда фойдаланилади.

Агар нуқта эгри чизиқли траектория бўйлаб нотекис ҳаракатда бўлса, инерция кучи $F^{ин}$ траекторияга ўтказилган уринма ва бош нормаллар бўйича йўналаган ташкил этувчиларга ажратилади (178-расм).

$$\overline{F}^{ин} = \overline{F}_\tau^{ин} + \overline{F}_n^{ин} \qquad (338)$$

Бунда, $\overline{F}_\tau^{ин}$ *ва* $\overline{F}_n^{ин}$ ларга мос равишда нуқтани уринма ва нормал инерция кучлари дейилади. Бу кучлар уринма ва нормал тезланишларга тескари йўналади,

$$\overline{F}_\tau^{ин} = -m\overline{W}_\tau$$
$$\overline{F}_n^{ин} = m\overline{W}_n \qquad (339)$$



177-расм.

178-расм.

Уринма ва нормал тезланишлар $W_\tau = \frac{dV}{dt}$, $W_n = \frac{V^2}{\rho}$ формулалардан аниқланишини эътиборга олсак, нуқтанинг уринма ва нормал инерция кучларининг модули учун ушбу муносабатларни оламиз

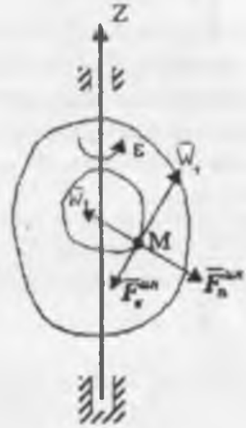
$$F_\tau^{ин} = m\frac{dV}{dt}, \quad F_n^{ин} = \frac{mV^2}{\rho} \qquad (340)$$

Агар нуқта эгри чизиқ буйича текис ҳаракатда булса, $W_\tau = 0$, $F_\tau^{ин} = 0$ ва инерция кучи $F^{ин}$ фақат нормал ташкил этувчидан иборат булади. Нуқта тўғри чизиқ бўйича нотекис ҳаракатланганда $W_n = 0$ ва инерция кучи фақат уринма ташкил этувчидан иборат бўлади. Нуқта тўғри чизиқли текис ҳаракатланганда W=0 булиб, инерция кучи $F^{ин} = 0$ булади. Бу ерда ρ - траекториянинг эгрилик радиуси.

Қузғалмас уқ атрофида айланма ҳаракатдаги қаттиқ жисм нуқтасининг тезланиши уринма ва нормал тезланишлардан иборат булгани учун мазкур нуқтанинг уринма ва нормал инерция кучлари мос равишда уринма ва нормал инерция кучлари дейилади, ҳамда уларнинг қиймати қуйидаги формулалардан аниқланади (179-расм):

$$F_t^{ин} = m\varepsilon h, \quad F_n^{ин} = m\omega^2 h.$$

Бунда h нуқтадан айланиш уқигача булган масофа, ω ва ε жисмнинг бурчак тезлиги ва бурчак тезланишидир.



179-расм.

101-§. МЕХАНИК СИСТЕМА УЧУН ДАЛАМБЕР ПРИНЦИПИ

Системанинг ҳар бир M_k нуқтаси учун *Даламбер* принципини ёзамиз:

$$\overline{F}_k + \overline{N}_k + \overline{F}_k^{ин} = 0, (k = 1,2,...n) \qquad (341)$$

бунда $\overline{F}_k$ — M_k нуқтага таъсир этувчи актив кучларнинг тенг таъсир этувчиси; $\overline{N}_k$ — боғланиш реакция кучларининг тенг таъсир этувчиси; $\overline{\Phi}_k = -m_k\overline{W}_k$ шу нуқтанинг инерция кучи.

(341)-тенгламалар механик система учун Даламбер принципини ифодалайди: актив куч ва боғланиш реакция кучлари таъсиридаги системанинг ҳар бир нуқтасига ҳар онда шу нуқталарнинг инерция кучини қўшсак, бу кучлар системаси шу қўйилган актив ва реакция кучлари билан мувозанат мувозанатланади.

(341) тенгламаларни қўшиб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\Sigma\overline{F}_k + \Sigma\overline{N}_k - \Sigma\overline{F}_k^{ин} = 0 \tag{342}$$

ёки

$$\overline{R}^{I} + \overline{R}^{N} + \overline{R}^{ин} = 0 \tag{343}$$

бунда: $\overline{R}^{I} = \sum\overline{F}_k$ — актив кучларнинг бош вектори; $\overline{R}^{N} = \sum\overline{N}_k$ — реакция кучларининг бош вектори;

$$\overline{R}^{ин} + \Sigma\overline{F}_k^{ин} = 0 \tag{344}$$

система нуқталари инерция кучларининг бош векторидир.

(343)-тенгламадан кўрамизки, боғланишдаги механик системанинг актив кучлар, реакция кучлари ва система нуқталари инерция кучлари бош векторларининг геоматрик йиғиндиси ҳар онда нолга тенг бўлади.

(341)-тенгламаларнинг ҳар бирини M_k нуқтанинг радиус-вектори $\overline{r}_k$ га векторли кўпайтириб қўшсак,

$$\Sigma\overline{r}_k\cdot\overline{F}_k + \Sigma\overline{r}_k\cdot\overline{N}_k + \Sigma\overline{r}_k\cdot\overline{F}_k^{ин} = 0$$

ёки

$$\Sigma\overline{M}_0(\overline{F}_k) + \Sigma\overline{M}_0(\overline{N}_k) + \Sigma\overline{M}_0(\overline{F}_k^{ин}) = 0 \tag{345}$$

$$\overline{M}_0^{I} + \overline{M}_0^{N} + \overline{M}_0^{ин} \tag{346}$$

ҳосил бўлади. Бунда $\overline{M}_0^{I} = \sum\overline{M}_0(\overline{F}_k)$ - актив кучларнинг 0 марказга нисбатан бош моменти; $\overline{M}_0^{N} = \sum\overline{M}_0(\overline{N}_k)$ — реакция кучларининг 0 марказга нисбатан бош моменти;

$$\overline{M}_0^{ин} = \sum\overline{M}_0(\overline{F}_k^{ин}) \tag{347}$$

система нуқталари инерция кучларининг 0 марказга нисбатан бош моментини ифодалайди.

(346)- дан кўрамизки, боғланишдаги механик система учун актив кучлар, реакция кучлари ва система нуқталари инерция кучларининг ихтиёрий қўзғалмас марказга нисбатан бош моментларининг геометрик йиғиндиси ҳар онда нолга тенг бўлади.

(342)- ва (346)- тенгламаларни координата укларига проекциялаб, кучлар системасининг олтита мувозанат тенгламасини оламиз:

$$
\begin{aligned}
&\Sigma x_k + \Sigma N_{kx} + \Sigma F_{kx} = 0\\
&\Sigma y_k + \Sigma N_{ky} + \Sigma F_{ky} = 0\\
&\Sigma z_k + \Sigma N_{kz} + \Sigma F_{kz} = 0\\
&\Sigma M_x(F_k) + \Sigma M_x(N_k) + \Sigma M_x(F_k^{ин}) = 0 \qquad (348)\\
&\Sigma M_y(F_k) + \Sigma M_y(N_k) + \Sigma M_y(F_k^{ин}) = 0\\
&\Sigma M_z(F_k) + \Sigma M_z(N_k) + \Sigma M_z(F_k^{ин}) = 0
\end{aligned}
$$

Агар системанинг хар бир нуктасига куйилган кучларни ички ва ташки кучларга ажратсак, ички кучларнинг бош вектори ва бирор марказга нисбатан бош моменти нолга тенг бўлгани учун (342)- ва (345)- тенгламалар куйидаги кўринишни олади:

$$
\left.
\begin{aligned}
&\Sigma \bar{F}_k^e + \Sigma \bar{F}_k^{ин} = 0\\
&\Sigma \bar{M}_O(\bar{F}_k^e) + \Sigma \bar{M}_O \bar{F}_k^{ин} = 0
\end{aligned}
\right\} \qquad (349)
$$

(344) ва (347) ларга кура (349) ни куйидагича ёзамиз:

$$
\left.
\begin{aligned}
&\Sigma \bar{F}_k^e + \Sigma \bar{R}' = 0\\
&\Sigma \bar{M}_O(\bar{F}_k^e) + \bar{M}_O^{ин} = 0
\end{aligned}
\right| \qquad (350)
$$

(350)- тенгламаларнинг афзаллиги шундан iборатки, бу тенгламаларда ички кучлар катнашмайди, шу сабабли система динамикасининг кушина масалаларини ечишда бу мувозанат шартларидан фойдаланиш кулай бўлади.

102-§. ИНЕРЦИЯ КУЧЛАРИНИНГ БОШ ВЕКТОРИ ВА БОШ МОМЕНТИ

Инерция кучларининг бош вектори ва бош моментини хисоблаш учун система массалар марказининг харакати хакидаги ва кинетик моментининг узгариши хакидаги теоремалардан фойдаланамиз:

$$
\begin{aligned}
&M\bar{a}_c = \Sigma \bar{F}_k^e\\
&\frac{d\bar{L}_O}{dt} = \Sigma \bar{M}_O(\bar{F}_k^e) \qquad (351)
\end{aligned}
$$

Бунда: M — системанинг массаси; $\vec{a}_C$ — массалар марказининг тезланиши; $\vec{L}_O$ — системанинг O марказга нисбатан кинетик моменти.

(351)- тенгламаларни (350)- билан солиштириб:

$$\left.\begin{aligned} \vec{R}^{ин} &= -M\vec{a}_C \\ \vec{M}_O^{ин} &= -\frac{d\vec{L}_O}{dt} \end{aligned}\right\} \qquad (352)$$

муносабатларни оламиз.

Шундан қилиб, ихтиёрий механик система (ёки қаттиқ жисм) инерция кучларининг бош вектори миқдор жиҳатдан система массасининг мазкур система (қаттиқ жисм) массалар марказининг тезланиши кўпайтмасига тенг бўлади ва бу тезланишга тескари йўналади; инерция кучларининг 0 марказга нисбатан бош моменти эса миқдор жиҳатдан шу марказга нисбатан система (қаттиқ жисм) кинетик моментидан вақт бўйича олинган ҳосилага тенг, йўналиши унга тескари бўлади.

Қаттиқ жисм илгариланма, қўзғалмас ўқ атрофида айланма ва текис параллел ҳаракатда бўлганда инерция кучларининг бош вектори ва бош моментини ҳисоблашни кўриб чиқамиз.

1. Илгариланма ҳаракат. Жисм илгариланма ҳаракатда бўлганда массалар маркази атрофида айланмайди $\omega=0$. Шу сабабли $\sum M_C(\vec{F}_k^{ин})=0$ ва (350)- га кўра:

$$\vec{M}_C^{ин} = 0$$

бўлади.

Шундан қилиб, илгариланма ҳаракатдаги қаттиқ жисмнинг инерция кучлари массалар марказига қўйилган ва массалар марказининг тезланишининг қарама-қарши йўналган битта кучга келтиради.

$$\vec{R}^{ин} = -M\vec{a}_C \qquad (353)$$

2. Қўзғалмас ўқ атрофида айланма ҳаракат. Агар жисм қўзғалмас ўқ атрофида айланма ҳаракатда бўлса, у ҳолда инерция кучлари умумий ҳолда бирор ихтиёрий O нуқтага қўйилган $\vec{R}^{ин}$ кучга ва $\vec{M}_O^{ин}$ моментига тенг бўлган битта жуфт кучга келтирилади. Дастлаб жисмнинг айланиш ўқи Oz га нисбатан инерция кучларининг бош моменти $M_z^{ин}$ ни ҳисоблаймиз. Бунинг учун (351) нинг иккинчи тенгламаси Oz ўққа проекциялаймиз.

$$M_z^{ин} = -\frac{dL_z}{dt}$$

Аммо қаралаётган ҳолда $L_z = I_z\omega$ бўлгани учун:

$$M_z^{ин} = -I_z\varepsilon \qquad (354)$$

тенгликни оламиз, бунда I_z — айланиш ўқига нисбатан жисмнинг инерция моменти. (354)-даги манфий ишора инерция кучларининг айланиш ўқига нисбатан бош моменти $M_z^{ин}$ жисмнинг бурчак тезланиши ε га тескари йўналганлигини ифодалайди.

Хусусий ҳолда, агар айланиш ўқи жисмнинг моддий симметрия ўқи билан устма-уст тушса, жисмнинг массалар маркази симметрия ўқида ётади ва қўзғалмас бўлади. Бунда $a_C = 0$ бўлгани учун инерция кучларининг бош вектори $R^{ин} = 0$ бўлади. Бинобарин, бу ҳолда қўзғалмас ўқ атрофида айланаётган қаттиқ жисмнинг инерция кучлари ва моменти (354)-формуладан аниқланадиган битта жуфт кучга келтирилади. Жисм симметрия ўқига эга бўлгани учун бу жуфт куч айланиш ўқига перпендикуляр текисликда ётади.

3. Текис параллел ҳаракат. Фараз қилайлик, жисм симметрия текислигига эга бўлсин ва унга параллел равишда ҳаракатлансин. Бу ҳолда инерция кучлари жисмнинг массалар марказига қўйилган, (353)-формула ёрдамида аниқланадиган $R^{ин}$ кучга ва жисмнинг симметрия текислигида ётувчи битта жуфт кучга келтирилади ҳамда унинг моменти ҳам (354)-формула ёрдамида аниқланади. Бунда I_z га жисмнинг массалар марказидан ҳаракат текислигига перпендикуляр равишда ўтувчи ўққа нисбатан инерция моменти деб қаралади.

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР.

1. Қаттиқ жисмнинг қўзғалмас ўқ атрофидаги дифференциал тенгламасини ёзинг?
2. Айланма ҳаракатдаги жисмнинг инерция моменти нимани ифодалайди?
3. Нуқтанинг инерция кучи нима?
4. Инерция кучи қандай йўналган?
5. Агар нуқта тўғри чизиқли текис ҳаракат қилса, инерция кучига эга бўладими?
6. Уринма инерция кучи нима?
7. Уринма инерция кучи қандай йўналган?
8. Нормал инерция кучи нима? У нимага тенг?
9. Агар нуқта эгри чизиқли ҳаракатда бўлса, нормал инерция кучи ҳосил бўладими?

10. Даламбер принципининг мохияти нимадан иборат ва у қандай таърифланади?

103-§. БОҒЛАНИШЛАР. БОҒЛАНИШЛАРДАГИ МОДДИЙ НУҚТАНИНГ ҲАРАКАТИ

Моддий нуқтанинг ҳаракатига маълум йўналишда чек қўйилган бўлиши мумкин. Нуқта ҳаракатини бирор йўналишда чекловчи сабабга боғланиш дейилади. Боғланиш сирт, текислик, эгри чизиқ ёки тўғри чизиқли бўлиши мумкин. Нуқта бирор сирт бўйлаб ҳаракатлансин, у ҳолда боғланишнинг тенгламаси $f(x, y, z) = 0$ кўринишда бўлади. Агар моддий нуқта бирор фазовий эгри чизиқ бўйлаб ҳаракатланса, бундан эгри чизиқ икки $f_1(x, y, z) = 0$ ва $f_2(x, y, z) = 0$ сиртларнинг кесишиш чизиғи сифатида олиниши мумкин. Бу икки тенглама фазовий эгри чизиқнинг тенгламаси, яъни боғланиш тенгламасини ифодалайди. Боғланишлар фақат тенгламалар билангина эмас, тенгсизликлар билан ҳам берилиши мумкин.

Тенглик ишораси билан берилган боғланишлар бўшатмайдиган боғланишлар дейилади. Тенгсизлик билан ифодаланадиган боғланишлар бўшатадиган боғланишлар дейилади. Боғланишлар тенгламасига фақат нуқта координаталари кирса, бундай боғланишлар голоном (ёки геометрик) боғланишлар дейилади Боғланишлар тенгламасига нуқта координатасини вақт бўйича ҳосилалари ҳам кириб, бу боғланишлар интегралланадиган бўлса, уларга беголономлар ёки кинематик боғланишлар дейилади. Голономли боғланишлар ҳам, беголоном боғланишлар ҳам стационар ва ностационар боғланишларга бўлинади. Вақтга боғлиқ бўлмаган боғланишлар стационар боғланишлар дейилади. Агар боғланишлар вақтга боғлиқ бўлса, у ностационар боғланишлар дейилади Стационар ва ностационар боғланишлар бўшатмайдиган ва бўшатадиган бўлиши мумкин. Боғланишлар тенгламаларини қуйидагича синфлаш мумкин:

1. Стационар бўшатмайдиган голономли боғланишлар.

$$f_j(x, y, z) = 0 \quad 1 \le j \le 3$$

2. Ностационар бўшатмайдиган голоном боғланишлар.

$$f_j(x, y, z, t) = 0 \quad 1 \le j \le 3$$

3. Бўшатадиган стационар, голоном боғланишлар.

$$f_j(x, y, z) \le 0 \quad 1 \le j \le 3$$

4. Бўшатадиган ностационар голоном боғланишлар.

$$f_j(x,y,z,t) \le 0 \quad 1 \le j \le 3$$

5. Беголоном стационар, бушатмайдиган боғланишлар.

$$f_j(x,y,z,\dot x,\dot y,\dot z) = 0 \quad 1 \le j \le 3$$

6. Беголоном ностационар бушатмайдиган боғланишлар.

$$f_j(x,y,z,\dot x,\dot y,\dot z,t) = 0 \quad 1 \le j \le 3$$

7. Беголоном стационар бушатиладиган боғланишлар.

$$f_j(x,y,z,\dot x,\dot y,\dot z) \le 0 \quad 1 \le j \le 3$$

8. Беголоном ностационар бушатиладиган боғланишлар.

$$f_j(x,y,z,\dot x,\dot y,\dot z,t) \le 0 \quad 1 \le j \le 3$$

Боғланишдаги моддий нуқта ҳаракатини ўрганишда унга қуйилган кучлар қаторига боғланиш таъсирини берадиган реакция кучини ҳам қушиш керак. Боғланиш реакция кучи эса номаълум катталиклар қаторига киради.

104-§. АНАЛИТИК МЕХАНИКА. МЕХАНИК СИСТЕМАГА ҚУЙИЛГАН БОҒЛАНИШЛАР

Механик системага қуйилган боғланишлар ҳам голоном ва беголоном стационар ва ностационар бушатадиган ва бушатмайдиган булиши мумкин. Фақат голоном боғланишлар қуйилган система голоном система дейилади ва қуйидаги куринишдаги тенгламалар билан ифодаланади.

$$f_\gamma(t, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots x_n, y_n, z_n) = 0$$
$$(\gamma = 1,2,3,\dots S)$$

S билан голоном сони белгиланган.

Беголоном боғланишлар система нуқталари тезликларининг проекцияларига нисбатан чизиқли ёки чизиқли булмаган тенгламалар билан ифодаланиши мумкин, чизиқли булган ҳолда боғланиш тенгламалари қуйидаги куринишда ёзилади.

$$f_\mu = a_\mu + \sum \left(b_{\mu i} \dot x_i + c_{\mu i} \dot y_i + d_{\mu i} \dot z_i\right)$$
$$(\mu = 1,2,\dots,S_i)$$

Бунда Si билан беголоном боғланишлар сони белгиланган.

Системага қуйилган боғланишларнинг бир қисми голоном, қолган қисми эса беголоном боғланишлар ҳам булиши мумкин. Биз асосан голоном система ҳаракати ёки мувозанатини урганамиз.

Механик система n та нуқтадан ташкил топган булса, унга қуйилган боғланишлар тенгламасининг сони 3n дан ошмаслиги керак.

105-§. СИСТЕМАНИНГ МУМКИН БЎЛГАН КЎЧИШЛАРИ. ИДЕАЛ БОҒЛАНИШЛАР

Системанинг мумкин бўлган кўчишини ўрганишдан аввал нуқтанинг мумкин бўлган кўчишини таърифлаймиз.

Берилган пайтда нуқтанинг унга қўйилган боғланиш чекланишларини қаноатлантирувчи ҳар қандай чексиз кичик кўчишларга мумкин бўлган кўчишлар дейилади. Нуқтанинг мумкин бўлган кўчишини δ_r вектор билан белгилаймиз. δ_r векторнинг координата ўқларидаги проекцияларини δ_x, δ_y, δ_z, билан белгилаймиз; бу катталиклар нуқта координаталарининг вариациялари деб ҳам аталади. У ҳолда мумкин бўлган кўчиш векторини нуқта координаталарининг вариациялари орқали қуйидагича ифодалаш мумкин.

$$\delta r = \delta x i + \delta y j + \delta z k$$

Агар боғланиш $f(x,y,z,t)=0$ тенглама билан ифодаланган бўлса, нуқтанинг координаталар бўйича ҳақиқий кўчишлари ўзаро қуйидаги муносабат билан боғланган бўлади.

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial t}dt = 0$$

Системани ташкил этувчи нуқталар мумкин бўлган кўчишлари системанинг мумкин бўлган кўчишлари дейилади. Система нуқталарининг мумкин бўлган кўчишлари қуйидаги икки шартни қаноатлантириши керак..

1. Система нуқталарининг мумкин бўлган кўчишлари чексиз кичик бўлиши керак. Агар бу кўчишлар чекли бўлса, система бошқа вазиятга ўтиб системанинг мувозанат шарти ўзгаради.

2. Система нуқталарининг мумкин бўлган кўчишида системага қўйилган барча боғланишлар сақланиб қолиши керак. Агар боғланишлар бузилса, системанинг кўриниши ўзгаради.

Стационар голономли боғланишдаги системанинг бир-бирига боғлиқ бўлмаган мумкин бўлган кўчишлари сони шу системанинг эркинлик даражаси дейилади. S та голономли боғланиш таъсиридаги n та нуқтадан ташкил топган системанинг эркинлик даражасини k билан белгиласак,

$k = 3n-S$ деб ёзиш мумкин.

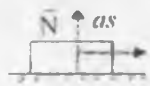
Актив куч қўйилган нуқтанинг бирор δr мумкин бўлган кўчишдаги шу кучнинг элементар ишини қисқача, кучнинг мумкин бўлган иши деб атаймиз ва уни δA билан белгилаймиз. У холда элементар иш таърифига кура

$$\delta A = \overline{F}_i^r \delta r_i$$

формула уринли булади. n та нуқтадан ташкил топган механик системага таъсир этувчи кучлар мумкин бўлган ишларнинг йиғиндиси нолга тенг буладиган богланишлар идеал богланишлар дейилади. Идеал богланишларни куйидагича ифодалаш мумкин.

$$\delta A^r = \sum \overline{F}_i^r \delta r_i = 0$$

$\overline{F}^r$ -системага қуйилган богланиш реакция кучи



180-расм.

$$\delta A^r = N\delta S\cos 90^\circ = 0 \qquad \delta A^r = 0$$

Силлиқ текислик идеал богланишга мисол булади.

106-§. МУМКИН БУЛГАН КУЧИШЛАР ПРИНЦИПИ

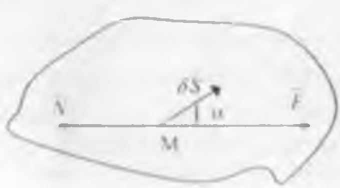
Идеал богланишдаги система узига қуйилган актив ва реакция кучлари таъсирида мувозанатда булсин. $\overline{F}$ кучининг dS силжишидаги бажарган элементар иши қуйидагига тенг.

$$\delta A = F\delta S\cos\alpha$$

N реакция кучининг бажарган элементар иши

$$\delta A^r = N\delta S\cos(180^\circ - \alpha) = -N\delta S\cos\alpha = -F\delta S\cos\alpha$$

Ишларни қушамиз.



181-расм.

$$\delta A + \delta A^r = F\delta S\cos\alpha - F\delta S\cos\alpha = 0$$
$$\delta A + \delta A^r = 0 \qquad (355)$$

(355) ни системадаги ҳар бир нуқта учун ёзиб қўшиб чиқсак, қуйидагича ёзилади.

$$\sum \delta A + \sum \delta A = 0$$

$$\sum \delta A' = 0 \ \text{бўлса} \ \sum \delta A = 0 \ \text{бўлади} \qquad (356)$$

(356) система учун мумкин бўлган кўчиш принципини ифодалайди. Идеал боғланишдаги система мувозанатда бўлса, унинг ҳар қандай мумкин бўлган кўчишда системага қўйилган барча актив кучларнинг бажарган элементар ишларининг йиғиндиси нолга тенг бўлади.

(356) ни қуйидагича ёзиш мумкин.

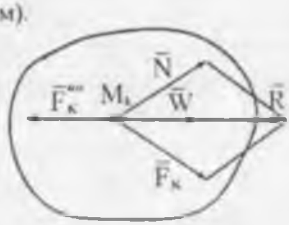
$$\sum (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0 \qquad (357)$$

Бунда *X, Y, Z* системага таъсир этувчи кучларнинг координата ўқларидаги проекцияси, $\delta x, \delta y, \delta z$ – кучлар қўйилган нуқталарнинг силжиши.

107-§. ДИНАМИКАНИНГ УМУМИЙ ТЕНГЛАМАСИ. (ДАЛАМБЕР ЛАГРАНЖ ТЕНГЛАМАСИ)

n та нуқтадан иборат бўлган идеал боғланишдаги система берилган бўлсин. Система билан боғланиш ўртасида ишқаланиш йўқ.

$\bar{F}$ ва $\bar{N}$ системадаги ихтиёрий M нуқтага таъсир қилувчи актив ва реакция кучлари (182-расм).



182-расм.

M нуқтага инерция кучларини қўямиз. Инерция кучи ҳар доим тезланишга қарама-қарши йўналган бўлади. Даламбер принципига асосан актив, реакция ва инерция кучларининг геометрик йиғиндиси нолга тенг бўлади.

$$F_k + N_k + F_k'''' = 0$$

Система нуқталарига мумкин бўлган δS силжиш берамиз. Мумкин бўлган кўчишлар принципига асосан

$$\delta A_k + \delta A_k' + \delta A_k'''' = 0 \qquad (358)$$

$$\sum \delta A_k^{a} + \sum \delta A_k^{R} + \sum \delta A_k^{и} = 0 \qquad (359)$$

Системага қўйилган боғланишлар идеал бўлганлиги учун реакция кучларининг бажарган элементар ишларининг йиғиндиси нолга тенг бўлади. (358) ни системадаги ҳар бир нуқта учун ёзиб қўшиб чиқамиз.

$$\sum \delta A_k^{R} = 0$$

$$\sum \delta A_k^{a} + \sum \delta A_k^{и} = 0 \text{ бўлади } \quad k=1,2,\dots,n \qquad (360)$$

Бу тенгламага динамиканинг умумий тенгламаси ёки Даламбер – Лагранж тенгламаси дейилади: идеал боғланишдаги системанинг ҳар қандай мумкин бўлган кўчишида системага қўйилган барча актив кучларининг ва инерция кучларининг бажарган элементар ишларининг йиғиндиси нолга тенг бўлади.

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР

1. Қандай системага эркин система дейилади?
2. Қандай системага эрксиз система дейилади?
3. Боғланиш нима?
4. [illegible]
5. Қандай боғланишга стационар боғланиш дейилади?
6. Қандай боғланишга стационар бўлмаган боғланиш дейилади?
7. Қандай боғланишга голономли боғланиш дейилади?
8. Қандай боғланишга беголономли боғланиш дейилади?
9. Мумкин бўлган кўчиш принципини таърифланг?
10. Динамиканинг умумий тенгламасининг формуласини ёзинг?

108-§. УМУМЛАШГАН КООРДИНАТАЛАР ВА УМУМЛАШГАН ТЕЗЛИКЛАР

Система n та нуқтадан ташкил топган бўлса, унинг ҳолатини 3n та Декарт координаталари орқали аниқлаш мумкин.

Системага S та голоном боғланишлар қўйилган бўлса 3n координаталардан $k=3n-S$ таси бир-бирига боғлиқ бўлмайди. Декарт координаталардан k тасини бир-бирига боғлиқ қилмай, S тасини эса бир-бирига боғлиқ қилиб танлаш мумкин. Бир бирига боғлиқ бўлмаган k та Декарт координаталари ўрнига бошқа $q_1, q_2, \dots, q_n$ параметрларини ҳам киритиш мумкин. Система ҳолатини бир қийматли аниқлайдиган бир-бирига боғлиқ бўлмаган параметрлар умумлашган координаталар дейилади. Умумлашган координаталар қуйидагича белгиланади:

$$q_1, q_2, \ldots, q_n$$

Умумлашган координаталар бир-бирларига боғлиқ бўлмаганлиган улар турлича ўлчов бирлигида (масалан м, радиан, м ва х.к.) бўлиши мумкин. Умумлашган координаталардан вақт бўйича олинган ҳосилалар умумлашган тезликлар дейилади. Умумлашган тезликларни $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$ билан белгилаймиз.

$$\dot{q}_1 = \frac{dq_1}{dt}, \quad \dot{q}_2 = \frac{dq_2}{dt}, \quad \dot{q}_n = \frac{dq_n}{dt}$$

Умумлашган тезликнинг ўлчов бирлиги умумлашган координата ўлчов бирлигининг вақт бирлигига нисбати билан ифодаланади. Масалан q координата «м» да ўлчанганда $\dot{q} - \frac{м}{c}$ да, q учун радиан олинганда $\dot{q} - \frac{рад}{c} = c^{-1}$ га ўлчанади.

Система ихтиерий нуқтасининг бирор саноқ системасига нисбатан радиус-векторини $\bar{r}i$ координаталарини (x_i, y_i, z_i) десак, ҳар бир q_i умумлашган координатани улар орқали ифодалаш мумкин.

$$\bar{r}i = ri(q_1, q_2, \ldots, q_k, t)$$

$$\bar{x}i = xi(q_1, q_2, \ldots, q_k, t)$$

$$\bar{y}i = yi(q_1, q_2, \ldots, q_k, t)$$

$$\bar{z}i = zi(q_1, q_2, \ldots, q_k, t)$$

Система нуқталарининг мумкин бўлган кўчишларини қуйидагича ифодалай оламиз:

$$\delta \bar{r}i = \frac{\partial \bar{r}i}{\partial g_1}\delta q_1 + \frac{\partial \bar{r}i}{\partial g_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{\partial \bar{r}i}{\partial g_k}\delta q_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \bar{r}i}{\partial gj}\delta qj \qquad (361)$$

(356)-ифодадаги δqj $(j = 1,2,3,\ldots k)$ мумкин бўлган кўчишларнинг умумлашган координаталари орқали ифодаларидан иборат.

109-§. УМУМЛАШГАН КУЧЛАР ВА УЛАРНИ ҲИСОБЛАШ

Эркинлик даражаси k бўлган n та моддий нуқтадан ташкил топган голоном механик системанинг ҳолати $q_1, q_2, \ldots, q_k$ умумлашган координаталар орқали аниқлансин. Система нуқталарига мос равишда таъсир этувчи кучларни $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \ldots, \bar{F}_n$ билан белгилайлик. Система нуқталарининг радиус векторларини $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \ldots, \bar{r}_n$ десак бу кучлар мумкин бўлган ишларининг йиғиндиси қуйидагича аниқланади:

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} F_i \delta r_i$$

$\delta r_i = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j$ шунга кура

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} F_i \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^{k} \left(F_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j$$

Куйидагича белгилаш киритайлик

$Q_j = \sum F_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j}$ у холда:

$$\delta A = \sum Q_j \delta q_j = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \ldots + Q_k \delta q_k ;$$

Qj катталикка qj умумлашган координатага мос келувчи умумлашган куч дейилади.

$$Q_j = \sum \left(F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right)$$

Ихтиерий q_j умумлашган координатага мос келувчи Qj умумлашган кучни хисоблаш учун

$$Q_j = \frac{\delta A_j}{\delta q_j} \; (j = 1, 2 \ldots k)$$

формула хосил килинади.

110-§. ЛАГРАНЖНИНГ ИККИНЧИ ХИЛ ТЕНГЛАМАЛАРИ

Эркинлик даражаси n га тенг голоном идеал боғланишдаги механик система холати $q_1, q_2, \ldots, q_n$ умумлашган координата оркали аниклансин.

Бу тенгламаларни келтириб чикариш учун динамиканинг умумий тенгламасидан фойдаланамиз:

$$\sum \left(F_i - m_i a_i \right) \delta r_i = 0 \qquad (362)$$

еки

$$\sum F_i \delta r_i = \sum m_i a_i \delta r_i$$

(362)-тенгламани умумлашган координаталар оркали ифодалаймиз (362)-формулага мувофик

$$\sum F_i \delta r_i = \sum Q_j \delta q_j$$

Энди (362)-тенгликнинг унг томонини умумлашган координаталар оркали ифодалаймиз:

$$\sum m_i a_i \delta r_i = \sum m_i \frac{dv_i}{dt} \sum \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum \left(\sum m_i \frac{dv_i}{dt} \sum \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j$$

Қавс ичидаги ифодани қуйидагича ёзамиз:

$$\sum m_i \frac{dV_i}{dt}\cdot\frac{\partial r_i}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\sum m_i V_i \frac{\partial r_i}{\partial q_i} - \sum m_i V_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial r_i}{\partial q_i}\right) \qquad (363)$$

Лагранжнинг аниқлиқдан (362), (363) ва система кинетик энергиясининг таърифидан қуйидагилар ҳосил бўлади:

$$\sum m_i \frac{dV_i}{dt}\cdot\frac{\partial r_i}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\sum m_i V_i \frac{\partial \dot r_i}{\partial \dot q_i} - \sum m_i V_i \frac{\partial \dot r_i}{\partial q_i} =$$
$$= \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot q_i}\sum \frac{m_i V_i^2}{2} - \frac{\partial}{\partial q_i}\sum \frac{m_i V_i^2}{2} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \qquad (364)$$

Шундай қилиб (364) муносабат қуйидаги кўринишни олади:

$$\sum m_i a_i \delta r_i = \sum\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i}\right)\delta q_i \qquad (365)$$

(364)- ва (365)- формулалардан фойдаланиб динамиканинг тенгламасини қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$\sum\left(Q_i - \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i}\right)\right)\delta q_i = 0 \qquad (366)$$

(366)-тенглама динамика умумий тенгламасининг умумлашган координаталаридаги ифодасидир. Бу тенгламада:

$$\sum\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i}\right)\delta q_i$$

ҳад система нуқталарининг $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_n$ кўчишидаги барча инерция кучлари ишларининг йиғиндисини ифодалайди.

Голономли боғланишлар қўйилган система учун (366) да барча умумлашган координаталарининг орттирмалари $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_n$ эркин бўлгани учун улар олдидаги ифодаларни айрим-айрим нолга тенглаш мумкин.

Шундай қилиб, қуйидаги n та тенгламалар системасини оламиз:

$$Q_i - \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i}\right) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (367)$$

(367)-тенгламалар Лагранжнинг иккинчи хил тенгламалари ёки механик системанинг умумлашган координаталаридаги ҳаракат дифференциал тенгламалари дейилади. Бу тенгламаларнинг афзаллиги шундан иборатки, бу тенгламалар сони системанинг эркинлик даражасига тенг бўлиб, системани ташкил этувчи нуқталар сонига боғлиқ бўлмайди.

Бу тенгламалар системанинг умумлашган координаталарига нисбатан иккинчи тартибли оддий дифференциал тенгламалардир.

Уларни интеграллаб ва интеграллаш доимийларини ҳаракатнинг бошланғич шартлари асосида аниқлаб, системанинг умумлашган координаталар орқали ифодаланган n та ҳаракат тенгламаларини оламиз:

$$q_i = q_i(t), \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

Лагранжнинг иккинчи хил тенгламалари аналитик механикада муҳим аҳамиятга эга ва кўпчилик техника масалаларини ечишда улардан самарали фойдаланилади. Лекин бу тенгламалар таркибида боғланиш реакция кучларини аниқлаш лозим бўлганда Даламбер принципидан фойдаланиш мумкин.

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР

1. Системанинг эркинлик даражаси деб нимага айтилади?
2. Қандай боғланишга идеал боғланиш дейилади?
3. Системанинг мумкин бўлган кўчиши деб нимага айтилади?
4. Мумкин бўлган кўчиш принципи қандай таърифланади?
5. Динамиканинг умумий тенгламаси қандай ёзилади?
6. Умумлашган координата нима?
7. Умумлашган тезлик нима?
8. Умумлашган куч нима? Унинг ўлчов бирлигини айтинг?
9. Умумлашган куч қандай тартибда ҳисобланади?
10. Агар система потенциал бўлса, у ҳолда умумлашган куч потенциал энергия орқали қандай ифода қилинади?
11. Лагранжнинг иккинчи хил тенгламаларини ёзинг?
12. Лагранжнинг иккинчи хил тенгламаларининг сони нечта бўлади?

ФОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЁТЛАР:

1. П. Шохайдарова, Ш. Шоиметов, Ш. Зоиров «Назарий механика», дарслик Тошкент, 1991 йил.
2. Т. Р. Рашидов, Ш. Шоиметов, К. Б. Муминов. «Назарий механика асослари», дарслик Тошкент, 1990 й.
3. С. К. Азизкориев, Янгуразов Ш. «Назарий механикадан масалалар ечиш» Ўқув қўлланма Тошкент, 1980 й.
4. Д. И. Толибова «Назарий механика (динамика)». Ўқув қўлланма. Тошкент, 1987 й.
5. М. С. Яхёев, К. Б. Муминов. «Назарий механика» Тошкент, «Ўқитувчи», 1990 й.
6. Н. С. Бибутов, М. Муродов. «Амалий механика» Тошкент, «Унимкомцентр», 2002 й.
7. С. М. Тарг. «Краткий курс теоретической механики» Дарслик. Москва, 1986 й.
8. И. В. Мешчерский «Назарий механикадан масалалар тўплами». Ўқув қўлланма. Тошкент, 1989 й.

МУНДАРИЖА

Муродов Мустафо Муродович,
Иноятова Хайринисо Мирхалиловна,
Уснатдинов Кенис Уснатдинович

«НАЗАРИЙ МЕХАНИКА»

Тақризчилар: Тошкент Давлат Техника Университети, «Назарий механика ва машина деталлари», кафедраси мудири, техника фанлари доктори, профессор **Ш. А. Шообидов,**
Бухоро Давлат Университети техника фанлари доктори, профессор **З. Жумаев.**

Масъул муҳаррир: доц. **З. Х. Ғайбуллаев.**
Саҳифаловчи: Б. Ахмедов.

Босишга рухсат этилди 8.10.2004. Бичими 84 x 108 $^1/_{32}$. Нашр табоги 13,0. Босма табоги 12,0. Адади 1000 нусха. Баҳоси келишилган нархда.
«Истиқлол» нашриёти, Тошкент ш. Навоий кўчаси, 30-уй.
Шартнома № Г- 41.
«Ёқуб-Довуд» босмахонасида чоп этилди. Бухоро шаҳар, мустақиллик кўчаси, 27 уй.